

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ENDI SAMBA LUAMBA

ANÁLISE DA INTERAÇÃO CASCA PLANA - ESTACA - SOLO
VIA ACOPLAMENTO MEC/MEF TRIDIMENSIONAL
E SUAS APLICAÇÕES

São Carlos
2018

ENDI SAMBA LUAMBA

**ANÁLISE DA INTERAÇÃO CASCA PLANA - ESTACA - SOLO
VIA ACOPLAMENTO MEC/MEF TRIDIMENSIONAL
E SUAS APLICAÇÕES**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. João Batista de Paiva

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL, DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Luamba, Endi Samba

L926a Análise da interação casca plana - estaca - solo via acoplamento MEC/MEF tridimensional e suas aplicações / Endi Samba Luamba; orientador João Batista de Paiva. São Carlos, 2018.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Interação solo-estrutura. 2. Elementos de contorno. 3. Elementos finitos. 4. Acoplamento MEC/MEF. 5. Estaca. 6. Radier estaqueado. 7. Código computacional. 8. Fortran. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ENDI SAMBA LUAMBA**.

Título da dissertação: "Análise da interação casca plana-estaca-solo via acoplamento MEC/MEF tridimensional e suas aplicações".

Data da defesa: 26/03/2018.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **João Batista de Paiva**
(Orientador)

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Leandro Palermo Junior**

Aprovado

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Dimas Bettioli Ribeiro**

Aprovado

(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

À minha família

AGRADECIMENTOS

A Deus por sempre trilhar o nosso caminho.

Aos meus pais pelo apoio incondicional em todos os meus projetos.

Ao professor João Batista de Paiva pela disponibilidade e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos professores Edson Denner Leonel e Rodrigo Ribeiro Paccola pela participação na banca do exame de qualificação.

Aos professores Dimas Betioli Ribeiro e Leandro Palermo Junior pela participação na banca da defesa da dissertação.

Ao professor orientador da graduação Antonio Wanderley Terni e aos professores da pós-graduação pelo entusiasmo transmissível pela área de Estruturas.

Aos colegas e às colegas de coração alegre pelas conversas variadas.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, pela infraestrutura disponibilizada, e funcionários sempre prestativos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de mestrado concedida.

*“Celui qui demeure sous l’abri du Très-Haut
Repose à l’ombre du Tout Puissant.”*

(Ps. 91:1)

RESUMO

LUAMBA, E.S. **Análise da Interação Casca plana - Estaca - Solo via acoplamento MEC/MEF tridimensional e suas aplicações.** 2018. 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Analisa-se problemas de interação solo-estrutura através de uma formulação tridimensional obtida da combinação entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Os elementos estruturais que interagem com o solo são modelados pelo Método dos Elementos Finitos. E o solo, considerado como um meio semi-infinito, homogêneo, elástico linear e isotrópico, é modelado pelo Método dos Elementos de Contorno, empregando a solução fundamental de Mindlin. A solução fundamental de Mindlin é particularmente adequada para o tipo de problemas em análise, ou seja, problemas envolvendo sólidos tridimensionais semi-infinitos, já que é necessário discretizar apenas a superfície carregada do solo e/ou a linha de carga, e não todo o sólido tridimensional. A discretização da estaca em vários elementos finitos de viga tridimensional, permitindo a consideração de estacas de qualquer tamanho e submetidas a qualquer tipo de carregamento é uma das principais contribuições do trabalho. Outra contribuição diz respeito à consideração da ação horizontal no sistema placa-estaca-solo, diretamente aplicada na placa, e não redistribuída no topo das estacas. Por isso, os elementos estruturais laminares (radiers, sapatas e blocos de fundação) são modelados por elementos finitos de casca plana, possibilitando a consideração dos efeitos de flexão e de membrana. Essa abordagem permite a análise tanto de um grupo de estacas com bloco de capeamento rígido quanto de um radier estaqueado de qualquer rigidez. O acoplamento entre o MEC e o MEF é feito através de uma formulação mista em que a matriz dos coeficientes de influência do solo obtida pelo MEC é adicionada à matriz de rigidez dos elementos estruturais obtida pelo MEF, resultando em uma matriz de rigidez equivalente. Exemplos numéricos de interação estaca-solo, placa-solo e casca plana-estaca-solo são resolvidos para verificar, validar e demonstrar a eficiência das formulações desenvolvidas e implementadas.

Palavras-chave: Interação solo-estrutura. Elementos de Contorno. Elementos Finitos. Acoplamento MEC/MEF. Estaca. Radier estaqueado. Código computacional. Fortran.

ABSTRACT

LUAMBA, E.S. **Analysis of Flat shell - Pile - Soil Interaction via a tridimensional BEM/FEM coupling and its applications**. 2018. 153 p. Dissertation (M.Sc. in Structural Engineering) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2018.

Soil-structure interaction problems are analyzed by a tridimensional formulation obtained combining the Boundary Element Method (BEM) and the Finite Element Method (FEM). Structural elements that interact with the soil are modeled by the Finite Element Method. And the soil, considered as a semi-infinite, homogeneous, linear elastic and isotropic medium, is modeled by the Boundary Element Method, using Mindlin's fundamental solution. Mindlin's fundamental solution is particularly suitable for the type of problems under analysis, viz. problems involving semi-infinite three-dimensional solids, since it is necessary to discretize only the loaded surface of the soil and/or the line-load, and not all the three-dimensional solid. The discretization of the pile in several three-dimensional beam finite elements, allowing the consideration of piles of any size and subjected to any type of loading, is one of the main contributions of this work. Another contribution is about the consideration of the horizontal load in the plate-pile-soil system, directly applied to the plate, and not redistributed on the top of the piles. Therefore, the laminar structural elements (rafts, footings, and foundation blocks) are modeled by flat shell finite elements, making possible the consideration of the effects of flexion and membrane. This approach allows the analysis of both a capped pile group and a piled raft of any stiffness. The coupling between the BEM and the FEM is performed through a mixed formulation in which the matrix of the soil's influence coefficients obtained by the BEM is added to the stiffness matrix of the structural elements obtained by the FEM, resulting in an equivalent stiffness matrix. Numerical examples of pile-soil, plate-soil and flat shell-pile-soil interaction are solved to verify, validate and demonstrate the efficiency of the developed and implemented formulations.

Keywords: Soil-structure interaction. Boundary elements. Finite elements. BEM/FEM coupling. Pile. Piled raft. Computational code. Fortran.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ruptura das fundações em Niigata, Japão	28
Figura 1.2 – Danos em edifício de alvenaria estrutural em Northridge CA, USA	28
Figura 2.1 – Documentos publicados por ano	40
Figura 2.2 – Documentos publicados por área de conhecimento	41
Figura 3.1 – Deslocamento de um ponto da posição A para a posição A'	45
Figura 3.2 – Deformações de um elemento retangular	45
Figura 3.3 – Deformação geométrica bidimensional	46
Figura 3.4 – (a) Corpo em equilíbrio, (b) Corte genérico com infinitésimo de área	48
Figura 3.5 – Componentes de tensão	49
Figura 4.1 – (a) Malha pelo MEF; (b) Malha pelo MEC	53
Figura 4.2 – Região infinita Ω^* contendo um corpo de domínio Ω	55
Figura 4.3 – Função delta de Dirac	57
Figura 4.4 – Função ressalto	57
Figura 4.5 – Função delta de Dirac aplicada em domínios	58
Figura 4.6 – Problema fundamental de Mindlin	60
Figura 5.1 – Modelagem da estaca: a) Cargas aplicadas no topo da estaca; b) Parâmetros nodais	64
Figura 5.2 – Elemento finito de viga tridimensional decomposto em: a) elemento finito de viga 2D; b) elemento finito de viga 2D; c) elemento finito de barra	66
Figura 5.3 – Forças nodais e correspondentes deslocamentos nodais	73
Figura 5.4 – Elemento finito de casca plana decomposto em: a) elemento finito de placa DKT; b) elemento finito de chapa CST	77
Figura 5.5 – Elemento finito de chapa CST	79
Figura 5.6 – Coordenadas triangulares ou homogêneas	80
Figura 6.1 – Resistência lateral e resistência de ponta de uma estaca	85
Figura 6.2 – Tensões de interface atuando na estaca e no solo	87
Figura 6.3 – Estacas imersas num meio contínuo semi-infinito	88
Figura 6.4 – Transformação da carga de superfície em cargas nodais	91
Figura 7.1 – Exemplo de malha: (a) da superfície do solo; (b) da placa	93
Figura 7.2 – Célula de contorno ijk com aproximação linear das forças de superfície	93

Figura 9.23 – Sapata longa apoiada sobre 4 estacas	130
Figura 9.24 – Malha empregada para a placa e a superfície do solo	131
Figura 9.25 – Comparação dos deslocamentos ao longo do eixo AB da sapata longa	131
Figura 9.26 – Grupo de 6 estacas sob um bloco de capeamento rígido	132
Figura 9.27 – Malha empregada para a capa rígida e a superfície do solo	133
Figura 9.28 – Radier estaqueado submetido a carregamento uniformemente distribuído	135
Figura 9.29 – Modelo 3D do radier estaqueado	135
Figura 9.30 – Deslocamento lateral ao longo do eixo s	137
Figura 9.31 – Comparação dos deslocamentos laterais das estacas flexível e rígida	137
Figura A.1 – Ponto P localizado no domínio do solo	145
Figura A.2 – Forças de superfície na célula	145
Figura A.3 – Sistema de coordenadas local e global	146
Figura B.1 – Nós da placa	150
Figura B.2 – Elementos da placa	150
Figura B.3 – Nós e Elementos das estacas	151
Figura A1 – Variação linear do deslocamento transversal e da força de superfície no domínio do elemento finito DKT	152

LISTA DE TABELAS

Tabela 9.1 – Deslocamentos e rotações nos nós da estaca	109
Tabela 9.2 – Comparação dos resultados obtidos na análise da estaca do cais	111
Tabela 9.3 – Comparação dos resultados obtidos na análise do grupo de 4 estacas	113
Tabela 9.4 – Comparação dos resultados obtidos na análise do grupo de 9 estacas	115
Tabela 9.5 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$]	117
Tabela 9.6 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$]	118
Tabela 9.7 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$]	119
Tabela 9.8 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$]	120
Tabela 9.9 – Deslocamento vertical no centro (B) e no ponto (A) da Placa [$w \cdot 10^9$ m] ...	122
Tabela 9.10 – Deslocamento vertical no centro (B) e no ponto (A) da Placa [$w \cdot 10^8$ m] .	123
Tabela 9.11 – Deslocamento vertical no centro da Placa [$w \cdot 10^9$ m]	123
Tabela 9.12 – Dados para análise da interação placa-1estaca-solo	124
Tabela 9.13 – Deslocamento vertical no topo da estaca [cm]	125
Tabela 9.14 – Dados para análise da interação placa-4estacas-solo	128
Tabela 9.15 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$]	129
Tabela 9.16 – Dados para análise da interação sapata-4estacas-solo	130
Tabela 9.17 – Deslocamento lateral no topo das estacas [pol]	133
Tabela 9.18 – Dados para análise da interação radier estaqueado-solo	136
Tabela 9.19 – Deslocamento lateral no topo das estacas [$m \cdot 10^{-2}$]	136
Tabela 9.20 – Deslocamento lateral no topo das estacas [$m \cdot 10^{-2}$]	136

LISTA DE SIGLAS

CST	Constant Strain Triangle
DKT	Discrete Kirchhoff Theory
ECT	Elemento de Contorno Triangular
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	27
1.2	OBJETIVOS	29
1.3	METODOLOGIA	30
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	31
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
3	PROBLEMA ELASTOESTÁTICO	42
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	42
3.2	NOTAÇÃO INDICIAL	42
3.3	EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE	44
	3.3.1 Deslocamento de um ponto material	44
	3.3.2 Estado tridimensional de deformação	45
	3.3.3 Estado tridimensional de tensão	48
	3.3.4 Relação tensão-deformação	51
3.4	RECAPITULAÇÃO DAS EQUAÇÕES	52
4	METÓDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	53
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	53
4.2	FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	54
	4.2.1 Teorema de reciprocidade de Betti	54
	4.2.2 Equação integral de contorno	56
	4.2.2.1 Delta de Dirac	56
	4.2.2.2 Identidade Somigliana	58
4.3	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN	60
5	METÓDO DOS ELEMENTOS FINITOS	63
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	63
5.2	MODELAGEM DA ESTACA	64
	5.2.1 Elemento finito de viga tridimensional	64
	5.2.2 Determinação da matriz de rigidez	65

5.3	MODELAGEM DA CASCA PLANA	77
	5.3.1 Elemento finito de casca plana	77
	5.3.2 Determinação da matriz de rigidez	78
	5.3.2.1 Elemento finito de chapa CST	79
	5.3.2.2 Elemento finito de placa DKT	82
6	ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO	85
6.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	85
6.2	HIPÓTESES ADOTADAS	86
6.3	FORMULAÇÕES	87
6.4	ACOPLAMENTO MEC/MEF	90
7	ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-SOLO	93
7.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	93
7.2	FORMULAÇÕES	93
7.3	ACOPLAMENTO MEC/MEF	98
8	ANÁLISE DA INTERAÇÃO CASCA PLANA-ESTACA-SOLO	101
8.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	101
8.2	FORMULAÇÕES	101
8.3	EXEMPLO ILUSTRATIVO	104
8.4	ACOPLAMENTO MEC/MEF	105
9	EXEMPLOS NUMÉRICOS	107
9.1	INTERAÇÃO ESTACA-SOLO	107
	9.1.1 Estacas isoladas	107
	9.1.2 Grupo de estacas	112
9.2	INTERAÇÃO PLACA-SOLO	116
	9.2.1 Carregamento aplicado no solo	116
	9.2.2 Placa apoiada no solo	120
9.3	INTERAÇÃO CASCA PLANA-ESTACA-SOLO	124
	9.3.1 Carregamento vertical	124
	9.3.2 Carregamento horizontal	132

10	CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
10.1	CONCLUSÕES	138
10.2	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	140
	REFERÊNCIAS	141
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA $[G_{ES}]$	145
	APÊNDICE B – EXEMPLO DE MALHA	150
	ANEXO A – VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES DO ELEMENTO FINITO DE PLACA DKT	152

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A interação solo-estrutura é um campo de atuação interdisciplinar, situado na interseção da mecânica dos solos e das estruturas, da dinâmica dos solos e das estruturas, da engenharia sísmica, da geofísica e geomecânica, da ciência dos materiais, de métodos computacionais e numéricos, e de diversas outras disciplinas técnicas. Esse tema interdisciplinar tem suas origens no final do século 19 e evoluiu rapidamente na segunda metade do século 20 principalmente devido às necessidades de usinas nucleares, de indústrias de petróleo, de melhoria na área de segurança sísmica, e também graças aos avanços nos computadores de alto desempenho e ao surgimento de ferramentas de simulação numérica tais como o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno (KAUSEL, 2009).

Em uma tentativa de definição, a interação solo-estrutura pode ser entendida como um processo em que a resposta do solo influencia o movimento da estrutura e o movimento da estrutura influencia a resposta do solo, ou seja, os deslocamentos do solo e da estrutura não podem ser analisados de forma independente. Esse tema foi e continua sendo objeto de vários estudos devido à sua importância no estudo do comportamento global da estrutura. Em engenharia civil (MENDES, 2015), a consideração do maciço do solo na elaboração de um projeto estrutural de um edifício em concreto armado é algo relevante, uma vez que toda a estrutura se apoia sobre ele. E como toda fundação sofre deslocamentos verticais (recalques), horizontais e rotacionais, faz-se necessário determinar esses deslocamentos que dependem do solo e da estrutura, ou seja, da interação solo-estrutura. A análise da interação solo-estrutura deve, portanto, ser levada em consideração porque quando os deslocamentos na estrutura superam certos limites podem aparecer patologias que vão desde o surgimento de esforços não previstos até o colapso da estrutura. Na Figura 1.1, mostram-se a ruptura das fundações e o surgimento de deformações permanentes, em decorrência de terremotos. E observam-se, na Figura 1.2, danos estruturais que geralmente ocorrem em infraestruturas e canalizações projetadas sem levar em consideração os efeitos de interação solo-estrutura.



Figura 1.1 – Ruptura das fundações em Niigata, Japão, 1964.

Fonte: The National Academies Press.



Figura 1.2 – Danos em edifício de alvenaria estrutural em Northridge CA, USA, 1994.

Fonte: The National Academies Press.

Em engenharia de estruturas, muitos problemas podem ser analisados através da combinação entre o MEC e o MEF. A combinação dos dois métodos permite aproveitar as vantagens de cada um, e recorre-se aos métodos numéricos porque são poucos os problemas que podem ser resolvidos analiticamente. A solução analítica de um problema se torna inviável devido à complexidade da geometria e/ou das condições de contorno. A Interação Solo-Estrutura (ISE) é um dos problemas cuja análise pelo acoplamento MEC/MEF se mostra adequada.

1 Introdução

Atualmente, os projetistas conseguem analisar fácil e rapidamente problemas complexos graças aos avanços no desenvolvimento de computadores, em que se observou o aumento da capacidade de armazenamento e da rapidez de processamento. É nesse contexto que se insere a presente pesquisa, tendo como propósito analisar diversos problemas de interação solo-estrutura, e propor novas formulações não contempladas em trabalhos anteriores a fim de melhorar os resultados e possibilitar a resolução de novos problemas. Para isso, é desenvolvido um código computacional em que se implementaram formulações tridimensionais do MEF e do MEC para a análise da interação estaca-solo, placa-solo e casca plana-estaca-solo.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é a análise mecânica da interação solo-estrutura por meio de desenvolvimento e implementação computacional de formulações matemáticas baseadas no método dos elementos finitos e no método dos elementos de contorno. Este trabalho responde a uma das principais sugestões deixadas em trabalhos anteriores e pertencentes à mesma linha de pesquisa, sobre o desenvolvimento de uma formulação que permite a consideração de vários elementos finitos para estaca. Assim, torna-se possível a consideração de estacas de qualquer tamanho e submetidas a qualquer tipo de carregamento. Este trabalho também se propôs a desenvolver uma formulação para a consideração da ação horizontal aplicada diretamente no sistema placa-estaca-solo, possibilitando a análise de estruturas sujeitas a ações horizontais consideráveis tais como edifícios muito altos, pontes, estruturas offshore, estruturas de porto e cais.

Para cumprir o objetivo principal, o trabalho foi decomposto em objetivos específicos, a saber:

1. Revisão bibliográfica de assuntos relacionados ao tema interação solo-estrutura;
2. Desenvolvimento do código computacional para a análise da interação entre o solo e a estaca ou grupo de estacas;
3. Desenvolvimento do código computacional para a análise da resposta mecânica do solo devido a um carregamento aplicado na superfície, e para a análise da interação entre o solo e a placa;

4. Desenvolvimento do código computacional para a análise da interação do sistema casca plana-estaca-solo;
5. Verificação e validação dos códigos computacionais desenvolvidos comparando os resultados obtidos com os disponíveis na literatura.

1.3 METODOLOGIA

Para cumprir os objetivos deste trabalho e responder às sugestões deixadas em trabalhos anteriores desenvolvidos nesta linha de pesquisa, desenvolve-se primeiramente uma formulação para análise da interação estaca-solo, em que a estaca pode ser longa ou curta, e submetida no seu topo a carregamentos horizontal, vertical e a momentos fletores. A estaca é modelada por vários elementos finitos de viga tridimensional e as forças de interação na interface estaca-solo têm uma distribuição linear em cada elemento finito da estaca. O solo é modelado pelo método dos elementos de contorno, e é assumido como um meio semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico linear. Empregam-se as soluções fundamentais de Mindlin em deslocamentos para a obtenção dos coeficientes de influência do solo calculados nos nós da estaca, modelada como uma linha de carga. A solução fundamental de Mindlin é particularmente indicada para o tipo de problemas analisados neste trabalho, uma vez que elimina a necessidade de se discretizar a superfície livre do solo, reduzindo assim o número de incógnitas do problema, e conseqüentemente as dimensões das matrizes envolvidas.

Em seguida, analisa-se a interação entre a placa e o solo. A placa é modelada pelo MEF e discretizada por elementos finitos de placa DKT e é submetida a carregamento vertical. O solo continua sendo modelado pelo MEC com o emprego da solução fundamental de Mindlin, agora escrita na superfície do solo. Nesta etapa, apenas a superfície do solo em contato com a placa precisa ser discretizada em células (ECT). As células da superfície do solo devem coincidir com os elementos finitos da placa, e admite-se variação linear das tensões de contato em cada célula. No acoplamento entre o MEC e o MEF, na região de contato, as forças de superfície do solo são transformadas em cargas nodais reativas na placa.

Por fim, analisa-se a interação casca plana-estaca-solo, em que a placa agora pode também receber carregamento horizontal. Para considerar o efeito de membrana, empregou-se o elemento finito de chapa CST. Nesta etapa, vale observar que cada nó dos elementos

1 Introdução

estruturais, que interagem com o solo, apresenta 5 parâmetros nodais (3 deslocamentos e 2 rotações), facilitando a ligação entre a estaca e a casca plana nos nós em comum. Aumenta-se também a matriz dos coeficientes de influência do solo, considerando as influências na superfície do solo e nas estacas devido aos pontos fonte colocados tanto na superfície do solo quanto nas estacas. Em cada uma das etapas de análise, o sistema final de equações governantes do problema é obtido através de uma formulação mista em que a matriz dos coeficientes de influência proveniente do MEC é acrescentada à matriz de rigidez proveniente do MEF, resultando em uma matriz de rigidez equivalente do problema em análise. E a resolução desse sistema permite a obtenção de deslocamentos e rotações nos nós dos elementos finitos da estaca e nos nós pertencentes à região de contato entre a casca plana e o solo.

Os códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho são todos escritos com a linguagem de programação Fortran®, utilizando o compilador Intel® Visual Fortran em ambiente Windows® de 64 bits. Os resultados obtidos são impressos em arquivos de saída e comparados com os resultados encontrados no livro de POULOS & DAVIS (1980), em artigos e trabalhos especializados.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A dissertação se desenvolve conforme a seguinte estrutura do texto:

Capítulo 1: Introdução – fazem-se algumas considerações iniciais sobre o tema interação solo-estrutura, apresentam-se os objetivos do trabalho e a metodologia empregada.

Capítulo 2: Revisão Bibliográfica – apresenta-se brevemente a literatura especializada sobre o tema através dos trabalhos pioneiros e das pesquisas recentes.

Capítulo 3: Problema Elastoestático – descreve-se o equacionamento do problema elastoestático, e discutem-se limitações de se obter soluções analíticas para problemas complexos, logo a importância de recorrer aos métodos numéricos.

Capítulo 4: Método dos Elementos de Contorno – mostram-se as vantagens do método, formula-se a equação integral de contorno e apresenta-se, no final do capítulo, a solução fundamental de Mindlin utilizada neste trabalho.

Capítulo 5: Método dos Elementos Finitos – descrevem-se de maneira concisa os elementos finitos de viga tridimensional e de casca plana.

Capítulos 6, 7 e 8: Nesses capítulos, são apresentados detalhes de implementação numérica para a Análise da Interação Estaca-Solo, Placa-Solo e Casca plana-Estaca-Solo.

Capítulo 9: Exemplos Numéricos – vários exemplos numéricos são resolvidos, demonstrando a eficiência das formulações desenvolvidas e implementadas.

Capítulo 10: Considerações finais – fazem-se as devidas conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tema da presente pesquisa envolve basicamente três grandes áreas de conhecimento a saber: a Interação Solo-Estrutura (ISE) [Soil-Structure Interaction (SSI)], o Método dos Elementos Finitos (MEF) [Finite Element Method (FEM)] e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) [Boundary Element Method (BEM)]. Portanto, faz-se necessária uma rápida revisão bibliográfica, apresentando os trabalhos pioneiros e as pesquisas recentes nessas áreas, a fim de melhor posicionar o objeto da pesquisa.

O conceito de interação solo-estrutura se refere a fenômenos estáticos e dinâmicos em que se têm um solo que acomoda uma superestrutura mais rígida. Contudo, a disciplina envolve inúmeros aspectos e muitas vezes sutilmente relacionados entre eles, logo, a tarefa de elaborar uma única definição, definitiva e em poucas palavras se torna inviável, dependendo assim da visão de cada pesquisador sobre o problema em análise. (KAUSEL, 2009). Alguns dos problemas pertencentes à teoria da Interação Solo-Estrutura são: a resposta mecânica do solo devido a ações dinâmicas ou estáticas externas atuando perto ou sobre a superfície; a resposta mecânica do solo devido a vibrações telúricas oriundas de terremotos ou outras ações, como a passagem de trens de grandes velocidades; a resposta de estruturas rígidas devido a ações de ondas terrestres se deslocando embaixo; a resposta de sapatas, estacas ou píncos incorporados em solo devido a carregamentos estáticos, harmônicos ou transientes aplicados diretamente nos elementos de fundação; a deformação adicional do solo na vizinhança de uma estrutura já existente devido à inércia da própria estrutura. Todos esses problemas são de natureza complexa, longe de serem resolvidos analiticamente, logo se recorre normalmente aos métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas, cujo acurácia depende do modelo matemático empregado para representar o problema físico real.

Uma solução fundamental é uma expressão analítica que permite determinar a resposta em qualquer ponto do sólido provocada por uma fonte estática ou dinâmica localizada em um ponto arbitrário. THOMSON (1848), melhor conhecido como Lord Kelvin, foi o primeiro cientista a obter uma solução fundamental para problemas de cargas sobre ou no interior de um corpo elástico infinito ou semi-infinito. A solução fundamental de Kelvin consiste em expressões para determinar deslocamentos provocados por forças concentradas e estáticas atuando em algum ponto arbitrário de um sólido infinito e elástico. Quase um século depois,

MINDLIN (1936), propôs uma nova solução fundamental. A solução fundamental de Mindlin permite a determinação do campo de deslocamentos devido a pontos de cargas estáticas, verticais e horizontais localizados a uma profundidade arbitrária embaixo de um meio semi-infinito e elástico. A obtenção das soluções fundamentais e das teorias atrás dessas soluções, por matemáticos e engenheiros cientistas, no século 19 e início do século 20, tornaram possível não apenas o posterior desenvolvimento da teoria da ISE como também a fundamentação do MEC. No livro de referência de POULOS & DAVIS (1980), várias soluções fundamentais referentes a problemas estáticos são apresentadas, e soluções para problemas dinâmicos incluindo soluções de Chao, de Lamb e de Stokes encontram-se em KAUSSEL (2006).

Um dos estudos pioneiros de interação estaca-solo é de POULOS & DAVIS (1968), em que é estudada a interação de uma estaca cilíndrica incompressível e isolada, submetida a uma carga axial, e imerso em um meio semi-infinito, isotrópico e homogêneo. Nesse estudo, é utilizado o método dos elementos de contorno para simular o comportamento mecânico do solo; o MEC é acoplado ao MDF que considera a contribuição da estaca. POULOS (1971), apresenta uma formulação similar para uma estaca submetida à carga horizontal e ao momento fletor. E em seguida, faz a análise para um grupo de estacas. Na formulação para a análise de estacas submetidas a cargas horizontais e verticais, a estaca é dividida em um número de segmentos de mesmo comprimento com um ponto nodal localizado no centro de cada segmento. As forças de superfície de interação entre a estaca e o solo são tomadas constantes ao longo de cada segmento. Com o uso do MDF, obtém-se um sistema de equações comportando os deslocamentos e as forças de superfície na estaca. Contudo, usando apenas o MDF, essa formulação não fornece bons resultados. Portanto, utilizam-se também as equações de equilíbrio das forças horizontais e dos momentos. Ao realizar o acoplamento desse sistema de equações com o obtido das equações integrais do solo escritas para cada nó da estaca, obtém-se um sistema final de equações cujas incógnitas nodais são as forças de superfície na interface estaca-solo. O sistema de equações proveniente do MDF é adaptado para cada tipo de problema, no que diz respeito à condição de restrição no topo da estaca. Assim, para uma estaca com topo livre, obtém-se um sistema de equações e no caso de uma estaca com topo fixo, outro sistema de equações é obtido. É preciso salientar que essas formulações não permitem o acoplamento direto com uma placa de fundação, como no caso de um radier estaqueado ou de um grupo de estacas com bloco de capeamento rígido, uma vez que os deslocamentos e as rotações no topo da estaca não são as incógnitas do sistema de

2 Revisão Bibliográfica

equações obtido. Apesar dessas limitações, essa formulação foi posteriormente utilizada para análise inversa de estacas isoladas, por HONJO et al. (1993), e também para análise de um grupo de estacas submetido a carregamento cíclico, por AL-DOURI & POULOS (1994).

Uma formulação tridimensional do método dos elementos de contorno para análise numérica elástica linear da interação estaca-solo foi proposta por PARREIRA & VARATOJO (1993), em que estacas rígidas ou flexíveis são submetidas a carregamentos lateral e/ou vertical. A abordagem clássica de sub-regiões de elementos de contorno é aplicada na análise de estacas flexíveis, e uma formulação de sub-região rígida para a análise do comportamento de estacas rígidas foi proposta. As soluções fundamentais de Kelvin e de Mindlin implementadas, foram usadas conjuntamente em diferentes sub-regiões. Foram empregados elementos triangulares e quadriláteros com aproximações lineares, parabólicas e subparamétricas para interpolar os deslocamentos e as forças de superfície no contorno. E usou-se um elemento de contorno infinito para modelar superfícies no infinito sem ação de forças de superfície. Outros estudos como de BANERJEE & DAVIS (1978), POULOS (1994), MENDONÇA E PAIVA (2000), MATOS FILHOS, MENDONÇA & PAIVA (2005), CHOW (2007) realizam a análise da interação estaca-solo em que a estaca é modelada pelo MEF ou pelo MDF.

No que diz respeito à interação placa-estaca-solo, segundo PAIVA (1993), os primeiros trabalhos são de BUTTERFIELD & BANERJEE (1971) e DAVIS & POULOS (1972), em que a placa é considerada rígida nas formulações desenvolvidas. BROWN & WEISNER (1975) realizaram a análise de uma longa sapata flexível apoiada sobre estacas cuja formulação é baseada na teoria das vigas, e a reação do solo é tomada constante em cada subárea da sapata. Outros trabalhos vieram depois como o de FATEMI-ARDAKAMI (1987) que usa o MEC para análise da interação placa-estaca-solo. Na formulação desenvolvida, é realizado primeiramente o estudo da interação entre um grupo de estacas e o solo a fim de determinar as rigidezes das estacas. Em seguida as estacas são modeladas como vínculos elásticos concentrados. Ressalta-se que nessa formulação, não é levada em conta a contribuição da tensão de contato entre a placa e o solo, logo, o problema de interação placa-estaca-solo não é bem resolvido. Outro estudo em que o MEC é utilizado para modelar o conjunto placa-estaca-solo é de PAIVA (1993). Na formulação desenvolvida, diferentemente do estudo de FATEMI-ARDAKAMI (1987), todas as interações são consideradas simultaneamente. As estacas são consideradas rígidas e modeladas por um único elemento

com quatro nós; a placa pode ser rígida ou flexível; as reações do solo são consideradas com variação linear no domínio dos elementos de contorno; e considera-se uma tensão equivalente no topo de cada estaca, fazendo com que o sistema final seja obtido em função dos nós da discretização da superfície do solo. Em ZHANG (1999), apresenta-se um método de análise para um bloco de capeamento suportado por um grupo de estacas inseridas em um solo estratificado. O bloco de capeamento não está em contato com a superfície do solo, e pode estar submetido a carregamentos horizontal e vertical. O bloco de capeamento é modelado como uma placa fina, as estacas como vigas elásticas e o solo é tratado como camadas horizontais com diferentes materiais. O MEF é utilizado para analisar o bloco de capeamento e as estacas, enquanto a teoria das camadas finitas é utilizada para analisar o solo estratificado.

O tema interação solo-estrutura continua sendo objeto de várias pesquisas recentes. AI et al. (2013) apresentam uma teoria para análise estática de estacas lateralmente carregadas e incorporadas em solos transversalmente isotrópicos com múltiplas camadas. O modelo de interação estaca-solo é analisado pelo MEC. É utilizado o MDF para a modelagem da estaca como uma viga de Euler-Bernoulli. E a camada de solo é representada por uma solução analítica desacoplada de elemento-camada, através de uma função-núcleo, função que apresenta alta precisão e eficiência. Vários exemplos numéricos apresentados no trabalho revelam que o comportamento da estaca é basicamente influenciado pela isotropia transversal e caráter estratificado do solo e, pelo comprimento e propriedades físicas da estaca. Um ano depois, AI & FENG (2014), estendem a formulação para a consideração de grupos de estacas lateralmente carregadas e engastadas no topo por um bloco de capeamento. Outra pesquisa recente é de ELGAMAL et al. (2013), que realizam uma análise linear e não-linear de grandes grupos de estacas lateralmente carregadas. A análise foi realizada com a ferramenta OpenSees que é uma plataforma computacional *Open Source* desenvolvida para a simulação de sistemas estruturais e geotécnicos submetidos a cargas sísmicas. Na análise realizada, observou-se que: a resistência ao cisalhamento é completamente mobilizada na vizinhança mais próxima do grupo de estacas no caso não-linear; a eficiência de deslocamento ($u_{1\text{estaca}}/u_{\text{grupo}}$) no caso de solo não-linear é inferior à do caso linear para um espaçamento reduzido entre as estacas; as estacas de frente e de trás apresentam uma distribuição de tensões similar tanto no caso linear quanto no caso não-linear.

2 Revisão Bibliográfica

No Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), da Universidade de São Paulo (USP), foram desenvolvidos vários trabalhos envolvendo o tema interação solo-estrutura, com o objetivo de aprimorar o conhecimento e comprovar as teorias e métodos existentes. A seguir apresentam-se sucintamente alguns desses trabalhos.

MENDONÇA (1997) apresenta uma formulação híbrida do MEC/MEF para a análise da interação placa-estaca-solo. Nesta formulação, utiliza-se o MEF para a modelagem da placa, por meio de elementos DKT e HSM (*Hybrid Stress Model*), o solo é modelado pelo MEC como um meio elástico semi-infinito e a estaca é representada por um elemento com três pontos nodais ao longo do seu fuste. Aproxima-se a tensão de cisalhamento ao longo desse fuste por um polinômio do segundo grau, supõe-se constante a tensão normal à seção da extremidade inferior da estaca e define-se um ponto nodal no centro dessa seção. Divide-se a interface placa-solo por elementos de contorno triangulares de modo a coincidir com a malha dos elementos finitos da placa, e admite-se uma variação linear da tensão de contato no domínio de cada elemento. Para obter o sistema final de equações governantes do problema, eliminam-se as tensões de contato nos dois sistemas de equações provenientes do MEC e do MEF. A formulação desenvolvida também possibilita a análise de blocos de estaca com ou sem contato entre o bloco e o solo, e apenas o carregamento vertical é previsto. Observou-se que no caso de interação placa-estaca-solo com estacas flexíveis, a flexibilidade axial das estacas tem maior influência nos pontos pertencentes na região próxima ao nó onde se encontra locada a estaca.

MATOS FILHO (1999) apresenta diversas formulações numéricas para a análise da interação estaca-solo com ou sem blocos de capeamento rígido, com a estaca submetida a cargas horizontal e vertical. As estacas são modeladas pelo MEF ou MDF, e o solo é representado pelo MEC como um meio contínuo, elástico-linear, semi-infinito, isótropo e homogêneo. Para as estacas, utilizou-se um elemento finito, com 4 pontos nodais e 14 parâmetros nodais sendo 3 de deslocamentos lineares em cada ponto nodal e 2 de rotações no topo da estaca. Os deslocamentos axiais foram representados por uma função polinomial cúbica e os deslocamentos transversais por uma função polinomial de quarto grau. As forças da interface foram representadas por funções polinomiais cúbicas, as forças de superfície cisalhantes ocorrendo ao longo do fuste da estaca, representadas por uma função polinomial quadrática e, a tensão normal à seção da extremidade inferior da estaca é suposta constante.

A combinação desses métodos de análise leva a um sistema de equações lineares representando o problema de interação estaca-solo. A resolução desse sistema fornece os deslocamentos e as rotações nos nós do elemento e as tensões de contato estaca-solo. Observou-se que tanto os deslocamentos verticais quanto os deslocamentos horizontais nas estacas são diretamente influenciados pelo comprimento, pela rigidez do sistema e pelo espaçamento entre as estacas. E caso haja blocos de capeamento rígido, ou seja, quando os deslocamentos do topo dos elementos são idênticos, as estacas mais afastadas do centro geométrico do sistema são as que absorvem mais carga e as mais próximas absorvem menos. E à medida que aumentam os espaçamentos, as distribuições de carga vão se tornando mais uniformes. Outra observação diz respeito às características do solo. Para solos moles, uma rápida redução de deslocamentos laterais ocorre na parte superficial da estaca e essas reduções são pequenas ou quase inexistentes para comprimentos mais profundos. E para solos mais rígidos, as reduções de deslocamentos são mais moderadas na parte superficial da estaca e praticamente não há variação de deslocamentos em maiores profundidades.

FERRO (1999) apresenta uma combinação do MEC com o MEF para a análise da interação entre estacas e solo. O solo considerado como meio contínuo tridimensional infinito e homogêneo é modelado pelo MEC, e as estacas consideradas como elementos reticulares são analisadas pelo MEF. A solução fundamental adotada para a análise da interação solo-estrutura é a de Mindlin. A combinação das equações das estacas analisadas pelo MEF com as equações obtidas pelo MEC resulta em um sistema único de equações cuja resolução fornece coeficientes que representam a rigidez do conjunto solo-fundação. E o mesmo procedimento permite analisar a superestrutura ao se considerar o comportamento global do conjunto solo-fundação-superestrutura. Foi desenvolvida uma extensão a essa formulação a fim de considerar a resistência de ponta através da inclusão de um nó interno adicional ao elemento de extremidade da estaca. E foi proposto um modelo para análise da plastificação do solo nos pontos de interface com as estacas; o mesmo modelo foi utilizado em simulações para análise do comportamento não-linear do solo, comprovando a viabilidade da formulação proposta.

2 Revisão Bibliográfica

ALMEIDA (2003) realiza a análise da interação solo-estrutura, em que o maciço é modelado através do método dos elementos de contorno em abordagem tridimensional a fim de simular o maciço com características mecânicas não homogêneas, e também de se considerar uma camada de apoio indeslocável a distâncias prescritas e condição de aderência perfeita. Utiliza-se também o MEC para a modelagem da subestrutura; a infraestrutura e a superestrutura são modeladas pelo MEF com uso de elementos estruturais reticulares e laminares. O trabalho demonstra a obrigatoriedade de se otimizar a formulação por meio de duas grandes ferramentas numéricas: o uso do paralelismo na montagem das matrizes densas do MEC e o emprego de um adequado método de resolução de sistemas esparsos gerados no acoplamento MEC/MEF.

RIBEIRO (2005) introduz mais recursos na ferramenta numérica desenvolvida no trabalho de ALMEIDA (2003). O solo e os elementos de fundação são modelados pelo MEC tridimensional, com aplicação da solução de Kelvin. A superestrutura, composta por elementos planos e reticulares com seis graus de liberdade, é modelada pelo MEF. Na formulação proposta, tornou-se possível analisar problemas em que o solo é composto por camadas de diferentes características físicas, apoiadas em uma superfície de deslocamento nulo e enrijecidas por elemento de fundação. Foi introduzido na ferramenta computacional recursos para simular um número qualquer de blocos, modelados pelo MEC tridimensional e apoiados sobre o solo. RIBEIRO (2009) desenvolve um código computacional para a análise estática e tridimensional de problemas de interação solo-estrutura. O código desenvolvido permite a consideração de várias camadas de solo com características físicas diferentes; e sobre o solo, que pode conter estacas, podem ser apoiados diversos tipos de estruturas tais como placas e até um edifício. Na formulação desenvolvida, todos os materiais são homogêneos, isotrópicos, elásticos e lineares. O MEC, com o emprego das soluções fundamentais de Kelvin, é utilizado para a modelagem do solo tridimensional. Além disso, empregou-se também uma técnica alternativa na consideração do maciço não-homogêneo, técnica baseada no relacionamento das soluções fundamentais de deslocamento dos diferentes domínios analisados, como um único sólido sem a necessidade de equações de equilíbrio e compatibilidade. No trabalho, foi utilizada uma malha de elementos de contorno infinitos (ECI) nas bordas da malha de elementos de contorno com o objetivo de modelar o comportamento das variáveis de campo em longas distâncias.

A seguir apresenta-se o panorama atual das publicações contemplando o tema Interação Solo-Estrutura. A Figura 2.1 mostra as publicações presentes na base de dados SCOPUS. A busca se baseou no seguinte algoritmo: TITLE-ABS-KEY (soil PRE/1 structure PRE/1 interaction). Ou seja, foram procurados artigos contendo a expressão “Soil Structure Interaction” nos títulos, nos resumos ou nas palavras-chave. No máximo uma palavra pode preceder os termos “structure” e “interaction”. Foram encontrados 18354 documentos publicados de 1961 até 2017. Pode-se observar um crescimento desde a primeira publicação em 1961. O pico no número de publicações se observou em 2011 com um total de 1374 documentos publicados. E em 2017, foram ao todo 828 documentos publicados. Ou seja, o tema interação solo-estrutura continua de grande interesse e ainda de atualidade, com muitos pesquisadores tratando os diversos aspectos relativos a esse tema, agregando assim novos conhecimentos. Na Figura 2.2, pode-se observar as áreas de conhecimento das publicações sobre o tema. As cinco primeiras são: Engenharia (64,1%), Ciências da Terra e do Planeta (45,9%), Ciências Agrícolas e Biológicas (11,8%), Ciências Ambientais (10,9%) e Ciências da Computação (7,9%). É importante frisar que um documento publicado pode contemplar mais de uma área de conhecimento ao mesmo tempo, e que existem outras bases de dados além do SCOPUS escolhida pelo autor.

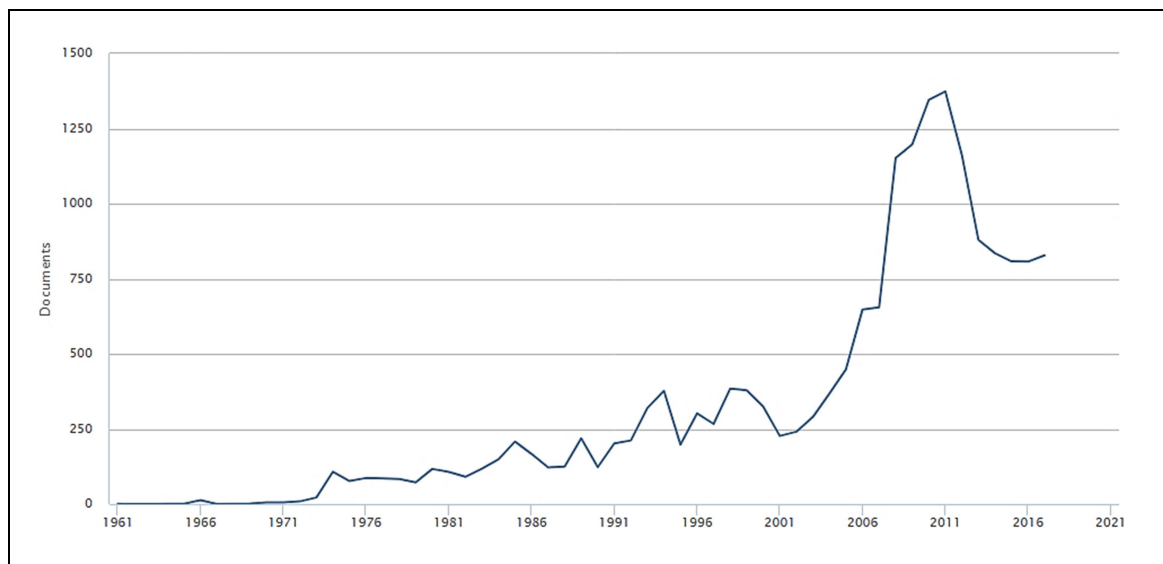


Figura 2.1 – Documentos publicados por ano.

Fonte: SCOPUS.

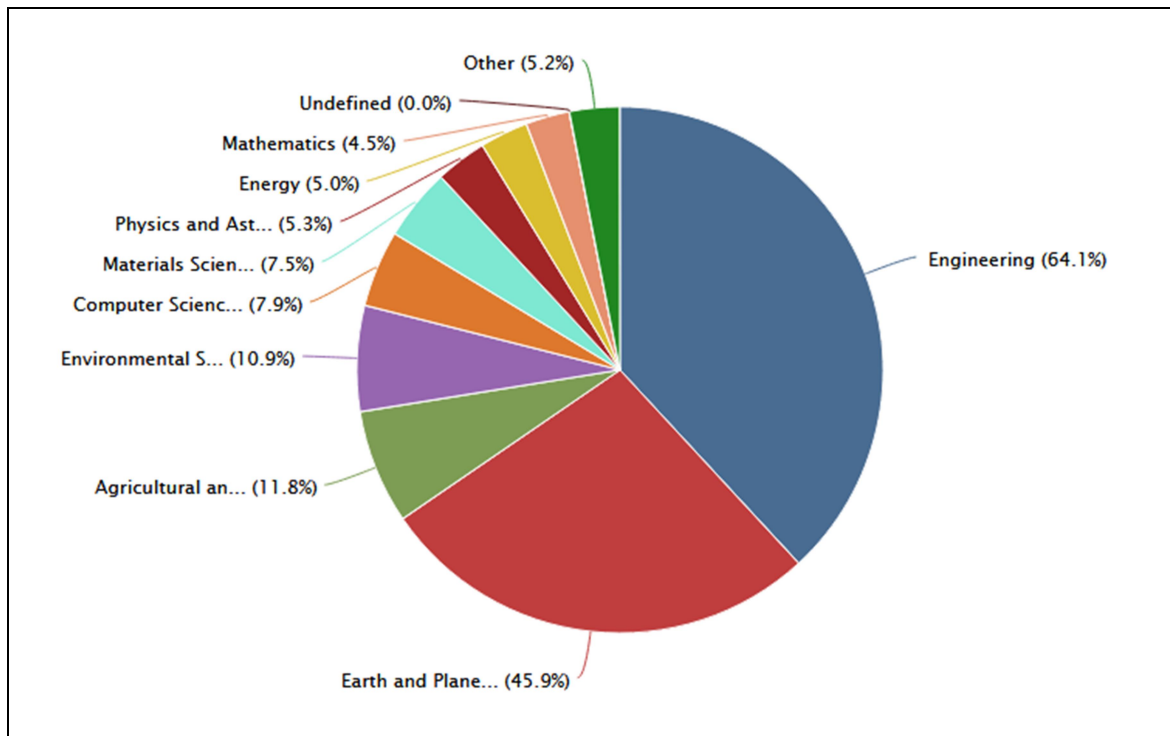


Figura 2.2 – Documentos publicados por área de conhecimento.

Fonte: SCOPUS.

3 PROBLEMA ELASTOESTÁTICO

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, apresentam-se formulações da teoria da elasticidade, com o intuito de fornecer os subsídios necessários utilizados nos métodos numéricos para a resolução de problemas muito mais complexos. O próximo item trata da notação indicial utilizada ao longo do trabalho. Em seguida conceitos como deslocamento, deformação e tensão são introduzidos. E por fim, equações governantes do problema elastoestático são apresentadas. Considera-se o material sendo elástico linear, homogêneo e isotrópico. As deformações são pequenas de modo que é assumida uma relação linear entre os deslocamentos e as deformações. E não há, por exemplo, alterações topológicas durante a deformação. Os conceitos apresentados aqui podem ser generalizados para contemplar problemas não-homogêneos, anisotrópicos, não-lineares e dinâmicos.

3.2 NOTAÇÃO INDICIAL

Trata-se de uma notação simplificada em que expressões longas são representadas por um símbolo com índices. Geralmente, os índices (1,2,3) são utilizados para representar as direções (x, y, z) .

3 Problema Elastoestático

Exemplos:

Notação por extenso	Notação indicial
(1) a_1, a_2, a_3	$a_i, i = 1,3$ Podem-se agrupar os termos em um vetor: $a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
(2) $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$	$a_{ij}, i, j = 1,3$ Podem-se agrupar os termos em uma matriz: $a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
(3) $a_{11} + a_{22} + a_{33}$	$a_{ii}, i = 1,3$ Índices repetidos indicam soma.
(4) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$	$a_i a_i, i = 1,3$

(5) Distância r entre dois pontos x e x' :

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$\text{Onde: } r_i = x_i - x_i'$$

(6) Derivada de r :

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i} = \frac{r_i}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i'} = -r_{,i} = \frac{-r_i}{r}$$

(7) Delta de Kroenecker δ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplos de uso:

$$u_i \delta_{ij} = u_j$$

$$u_i w_j \delta_{il} = u_l w_j$$

(8) O sistema de equações $Ax = y$ sendo a matriz A de ordem $N \times N$ pode ser expressa como:

$$a_{ij} x_j = y_i \quad i, j = 1, N$$

(9) Se a matriz A não for simétrica :

$$a_{ij} \neq a_{ji}$$

(10) Teorema da divergência ou Teorema de Gauss: relaciona uma integral de volume a uma integral de superfície, ou seja:

$$\int_V f_{i,i} dV = \int_S f_i n_i dS \quad (3.1)$$

Onde:

$$f_{i,i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

n_i : componentes do vetor normal unitário apontando para fora da superfície S .

3.3 EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTICIDADE

3.3.1 Deslocamento de um ponto material

A deformação ou mudança de configuração de um corpo elástico pode ser descrita através dos deslocamentos das partículas ou pontos materiais do corpo. E segundo a hipótese de continuidade, existe um campo de deslocamento $\{d\}$ em todos os pontos pertencentes ao corpo. $\{d\}$ sendo um vetor, pode ser expresso por:

$$\{d\} = \{u, v, w\} \quad (3.2)$$

3 Problema Elastoestático

Os três componentes de $\{d\}$ são funções de (x, y, z) .

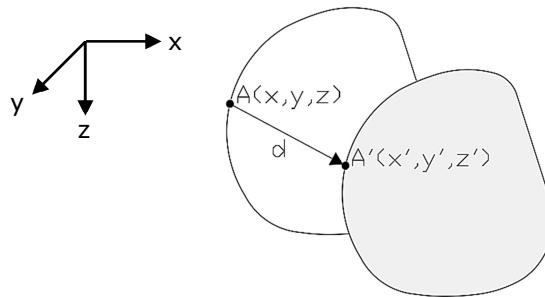


Figura 3.1 – Deslocamento de um ponto da posição A para a posição A'.

3.3.2 Estado tridimensional de deformação

Consideram-se os modos de deformação de um elemento retangular, mostrados na figura abaixo.

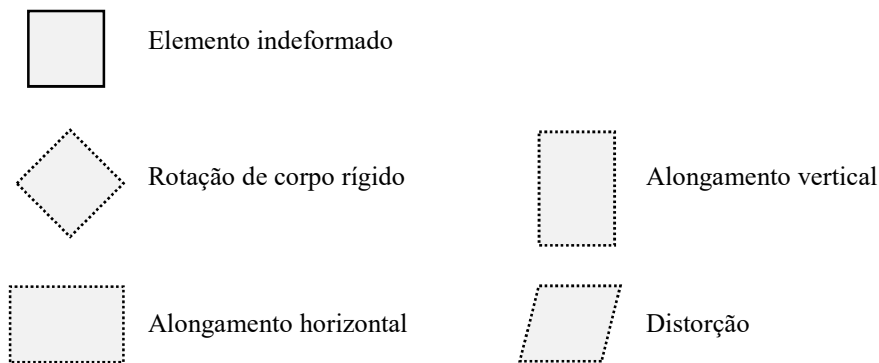


Figura 3.2 – Deformações de um elemento retangular.

O movimento do corpo rígido não altera o campo de deformações, nem o campo de tensões. Logo, o estudo do estado de deformação é baseado nas deformações de alongamento e de distorção do corpo elástico.

Seja a deformação bidimensional de um elemento retangular infinitesimal com dimensões iniciais dx e dy , conforme a Figura 3.3.

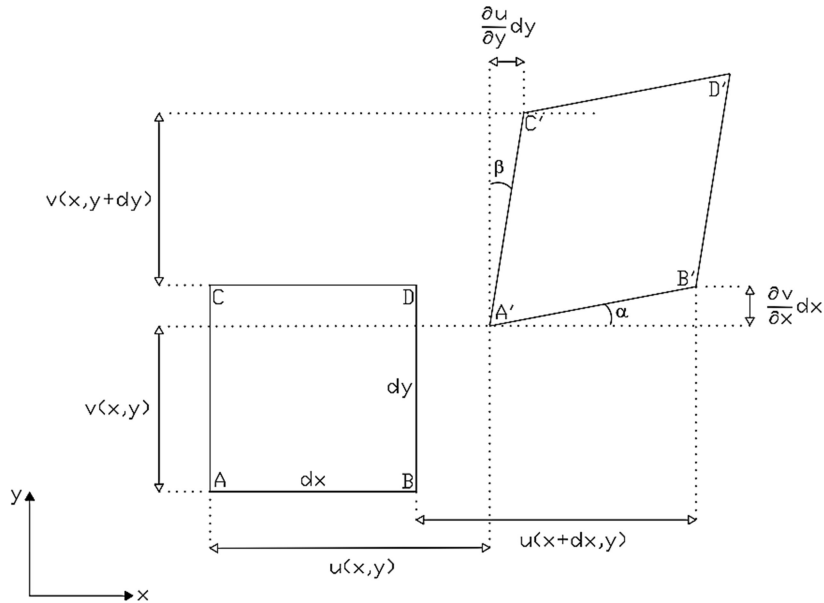


Figura 3.3 – Deformação geométrica bidimensional.

Conforme a Figura 3.3, pode-se definir a componente normal de deformação ε_x :

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (3.3)$$

Onde:

$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2} \quad (3.4)$$

$$A'B' = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \quad (3.5)$$

Para pequenas deformações, desprezam-se os termos de maior ordem:

$$A'B' \approx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \quad (3.6)$$

E sabendo que $AB = dx$, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.7)$$

3 Problema Elastoestático

De modo análogo:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.8)$$

Ainda pela Figura 3.3, tem-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - C' \hat{A}' B' \quad (3.9)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad (3.10)$$

Para pequenas deformações, $\alpha \approx \tan \alpha$ e $\beta \approx \tan \beta$, assim:

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \quad (3.11)$$

Desprezando os termos de maior ordem nos gradientes de deslocamento, tem-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.12)$$

Estendendo as formulações acima para o caso geral tridimensional, têm-se as seguintes relações deformações-deslocamentos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

As componentes de deformação podem ser representadas em um tensor de deformação ε_{ij} dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Onde se tem, por exemplo:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (3.16)$$

O tensor de deformação é simétrico, ou seja:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \quad (3.17)$$

Em notação indicial, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.18)$$

3.3.3 Estado tridimensional de tensão

O conceito de equilíbrio de forças exige que, em um corpo deformável, a distribuição de forças em cada ponto esteja em equilíbrio. Assim no caso estático, a soma das forças em um elemento infinitesimal deve ser igual a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seja um corpo elástico sujeito a cargas externas arbitrárias, conforme a figura abaixo, e o corte realizado no mesmo corpo, a fim de investigar a distribuição interna de forças.

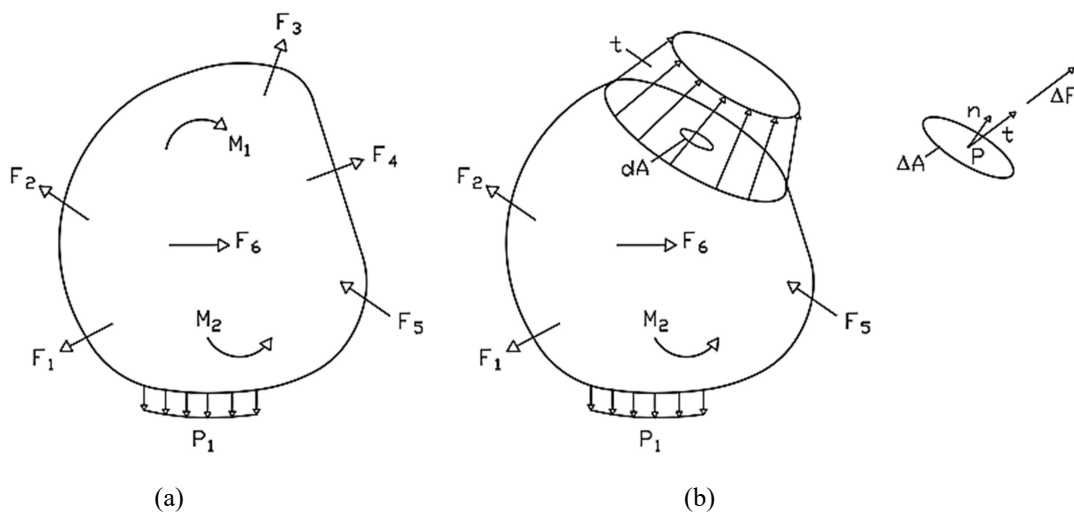


Figura 3.4 – (a) Corpo em equilíbrio, (b) Corte genérico com infinitésimo de área.

3 Problema Elastoestático

Na Figura 3.4 (b), considera-se uma pequena área ΔA , um vetor normal unitário n e uma força de superfície atuando em ΔA definida por ΔF . A força interna média por unidade de área em ΔA é:

$$t_{\text{média}} = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (3.20)$$

Admitindo que a área decresça indefinidamente, sempre contendo o ponto P , no limite, define-se a tensão ou vetor tensão t no ponto P como:

$$t = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (3.21)$$

A tensão assim definida não é normal nem tangencial à superfície de corte. É conveniente definir o estado tensional num ponto através dos vetores tensão que atuam nas facetas paralelas aos planos coordenados, ou seja, com normais nas direções x , y e z , conforme ilustrado na figura abaixo. Utilizam-se os símbolos σ e τ para representar respectivamente componentes normais e tangenciais, e dois índices, correspondendo o primeiro à direção normal à faceta em que atua o vetor tensão, e o segundo à direção da componente. Tendo dois índices iguais, é usual escrever apenas um, como ocorre com as componentes normais.

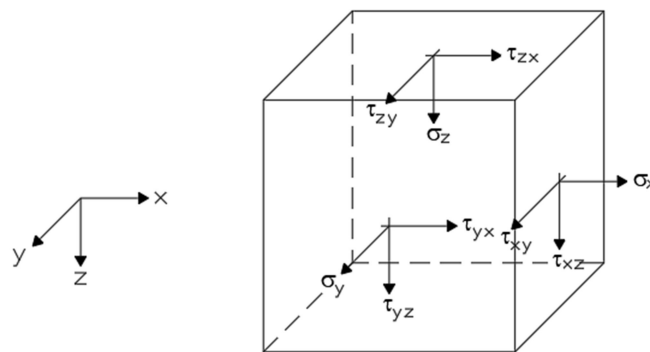


Figura 3.5 – Componentes de tensão.

O tensor de tensão é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

O tensor de tensão é simétrico, ou seja:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (3.23)$$

Aplicando (3.19) em um ponto no interior do corpo, obtêm-se três equações de equilíbrio envolvendo componentes de tensões normais e tangenciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.25)$$

Onde:

b_i : força de volume na direção i .

Aplicando (3.19), agora em um ponto na superfície do corpo, as três equações de equilíbrio são expressas por:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= P_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= P_y \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z &= P_z \end{aligned} \quad (3.26)$$

Em notação indicial:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (3.27)$$

Onde:

P_i : força de superfície na direção i .

3.3.4 Relação tensão-deformação

Seja um material homogêneo, elástico linear e isotrópico. Para um elemento submetido a um carregamento geral, pela Lei de Hooke, as deformações são expressas por:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] & \varepsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] & \varepsilon_{23} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23} \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] & \varepsilon_{31} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{31}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Onde:

E : módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

ν : coeficiente de Poisson.

E a Lei de Hooke em termos de tensões é dada por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{11} & \sigma_{12} &= 2 G \varepsilon_{12} \\
 \sigma_{22} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{22} & \sigma_{23} &= 2 G \varepsilon_{23} \\
 \sigma_{33} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{33} & \sigma_{13} &= 2 G \varepsilon_{13}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Onde:

$$\lambda = \frac{2 \mu \nu}{(1 - 2 \nu)} \quad : \text{constante de Lamé.}$$

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad : \text{deformação volumétrica.}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad : \text{módulo de elasticidade transversal.}$$

Em notação indicial, a relação tensão-deformação (ou equações constitutivas da elasticidade) é expressa por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \tag{3.30}$$

3.4 RECAPITULAÇÃO DAS EQUAÇÕES

No total, foram apresentadas 15 equações para a resolução de um problema elastoestático, a saber:

(a) 3 equações de equilíbrio:

- no interior do corpo:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

- na superfície do corpo:

$$\sigma_{ij}n_j = P_i$$

(b) 6 equações da relação deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

(c) 6 equações da relação tensão-deformação:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij}$$

Assim, podem ser determinadas as 15 incógnitas do problema para cada ponto do corpo:

(a) 3 deslocamentos:

$$\{u\} = (u_x \quad u_y \quad u_z)$$

(b) 6 componentes de tensão:

$$\{\sigma\} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx})$$

(c) 6 componentes de deformação

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx})$$

Na prática, são poucos os problemas que podem ser resolvidos analiticamente. A maioria dos problemas reais de engenharia são muito complexos para serem resolvidos por métodos analíticos, geralmente aplicáveis a problemas cujas hipóteses simplificativas requeridas os desviam muito do fenômeno físico real, e a problemas com geometrias simples e condições de contorno (vinculações, cargas aplicadas, etc.) também simples. Contudo, uma das importantes aplicações das soluções analíticas é validar casos limites de modelos numéricos e auxiliar no desenvolvimento de métodos numéricos mais robustos. A resolução de problemas de valor de contorno muito complexos é, portanto, feita via métodos numéricos tais como o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Problemas de engenharia são muitas vezes representadas matematicamente em termos de equações diferenciais. Contudo, em muitos casos, também é possível, uma formulação do problema em termos de equações integrais. E o MEC é um método numérico muito utilizado para a resolução de equações integrais. Comparado com outros métodos numéricos, o MEC apresenta as seguintes vantagens:

- a) a discretização é feita apenas no contorno do problema em estudo, conforme mostrada na Figura 4.1(b), facilitando a modelagem do problema, e resultando em sistemas de equações menores, em comparação com o MEF;
- b) os domínios infinitos e semi-infinitos são tratados de modo exato, com as condições de contorno automaticamente satisfeitas;
- c) as incógnitas nos pontos do domínio são calculadas na etapa do pós-processamento, simplificando procedimentos de otimização;
- d) os resultados no caso de concentrações de tensões devido a fissuras ou forças concentradas são muito mais precisos.

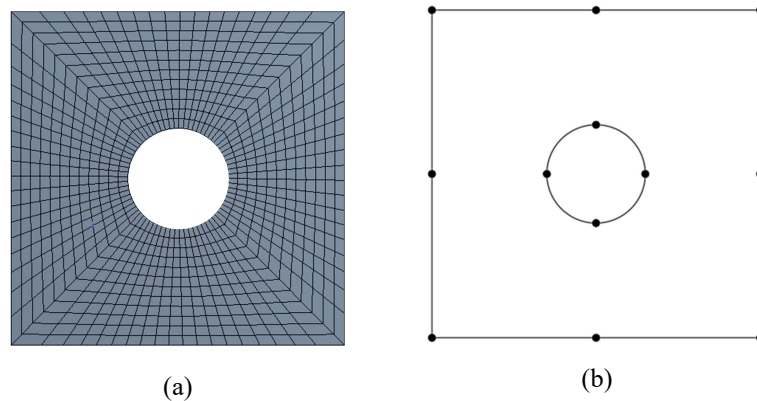


Figura 4.1 – (a) Malha pelo MEF; (b) Malha pelo MEC.

Neste capítulo são apresentadas a formulação da equação integral de contorno e a solução fundamental de Mindlin empregada na modelagem do solo. Detalhes de implementação numérica do MEC são tratados a partir do capítulo 6, já considerando problemas de interação solo-estrutura analisados neste trabalho.

4.2 FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Existem duas formulações principais para o estabelecimento de uma equação integral de contorno: a formulação direta e a formulação indireta. Na formulação direta, a equação integral é formulada em termos das grandezas incógnitas no contorno (potenciais ou deslocamentos) e suas derivadas (fluxos ou forças de superfície). Para a formulação de uma equação integral direta, recorre-se ao método dos resíduos ponderados ou ao teorema de reciprocidade de Betti. Na formulação indireta, a equação integral é formulada considerando a superposição de efeitos de fluxos fictícios ou forças de superfície fictícias, diferentemente da formulação direta em que as grandezas consideradas já são as incógnitas do problema. O método de Trefftz é utilizado na formulação indireta.

Neste trabalho, é utilizada a formulação direta através do teorema de reciprocidade de Betti para a formulação da equação integral de contorno, conforme ALIABADI (2002). O teorema de reciprocidade é um método muito eficiente particularmente no caso de problemas elastoestáticos.

4.2.1 Teorema de reciprocidade de Betti

Sejam dois estados de equilíbrio (u_i, P_i, b_i) e (u_i^*, P_i^*, b_i^*) onde :

u_i e u_i^* : deslocamentos

P_i e P_i^* : forças de superfície

b_i e b_i^* : forças de volume

Pode-se escrever a partir de (3.25), a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

Onde:

Ω : domínio do problema cujo contorno é Γ , conforme mostrado na Figura 4.2.

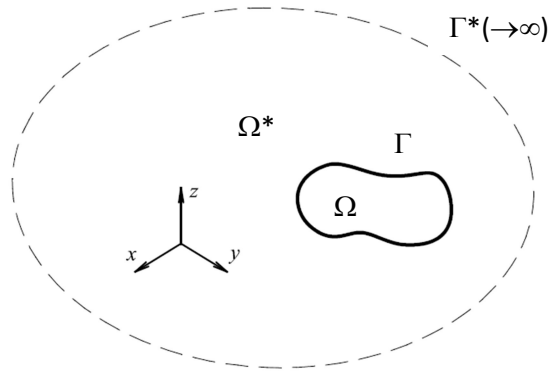


Figura 4.2 – Região infinita Ω^* contendo um corpo de domínio Ω .

Todas as grandezas u , P e b são funções de (x, y, z) , em um corpo tridimensional, ou seja:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ P &= P(x, y, z) \\ b &= b(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

A parcela $\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega$ da Eq. (4.1) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (4.3)$$

Da relação deformação-deslocamento (3.18), tem-se:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) = \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad (4.4)$$

Do teorema da divergência expressa em (3.1), tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma \quad (4.5)$$

Com $P_i = \sigma_{ij} n_j$, a Eq. (4.3) fica:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (4.6)$$

(4.6) em (4.1) resulta:

$$\int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (4.7)$$

Da relação tensão-deformação (3.30), a parcela $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega$ de (4.7) pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega \quad (4.8)$$

Sabe-se que:

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{mm}^* \text{ e } \delta_{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk} \quad (4.9)$$

Assim a Eq. (4.8) fica:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm}^* + 2 G \varepsilon_{ij}^*) \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (4.10)$$

Logo, de (4.7) e (4.10), obtém-se a relação:

$$\int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (4.11)$$

A relação (4.11) é o Teorema de reciprocidade (do trabalho) de Betti.

4.2.2 Equação integral de contorno

4.2.2.1 Delta de Dirac

Uma solução fundamental, em elastoestática, é a solução da equação diferencial governante de um problema elastoestático, devido a uma força concentrada. A representação matemática da força concentrada é feita com a função delta de Dirac: $\Delta(x, x_0)$.

Propriedades:

(1) a função delta de Dirac é nula em todos os pontos x , salvo em $x = x_0$.

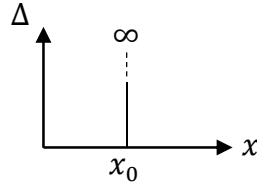


Figura 4.3 – Função delta de Dirac.

$$\Delta(x, x_0) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$(2) \int_{x_A}^{x_B} \Delta(x, x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (4.13)$$

com: $-\infty \leq x_A, x_B \leq \infty$ e $x_A < x_0 < x_B$

(3) a função ressalto é definida como:

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ 1 & \text{se } x > x_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

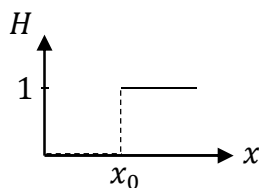


Figura 4.4 – Função ressalto.

$H(x, x_0)$ apresenta descontinuidade em $x = x_0$.

A função delta de Dirac pode ser expressa pela função ressalto como:

$$\Delta(x - x_0) = \frac{dH(x - x_0)}{dx} \quad (4.15)$$

Ou ainda:

$$H(x - x_0) = \int_{x_A}^{x_B} \Delta(x - x_0) dx \quad (4.16)$$

Assim:

$$\int_{x_A}^{x_B} \Delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x_0 < x_A \\ 1 & \text{se } x_A < x_0 < x_B \\ 0 & \text{se } x_B < x_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

(4) na representação espacial, conforme mostrada na Figura 4.5, tem-se:

$$\int_{\Omega_1} \Delta d\Omega_1 = 1 \quad \int_{\Omega_2} \Delta d\Omega_2 = 0 \quad \int_{\Omega_3} \Delta d\Omega_3 = 0 \quad \int_{\Omega_\alpha} \Delta d\Omega_\alpha = 1 \quad (4.18)$$

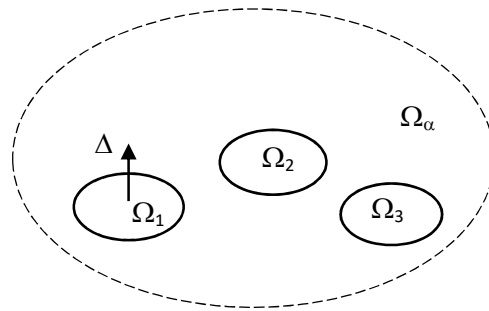


Figura 4.5 – Função delta de Dirac aplicada em domínios.

4.2.2.2 Identidade Somigliana

Do Teorema de reciprocidade de Betti, pode ser obtida a equação integral de contorno para problemas elastoestáticos. Ao fazer a equivalência entre uma força de volume b_i^* e uma carga concentrada em um meio infinito representada pela função delta de Dirac $\Delta(x - x_0)$, tem-se:

$$b_i^* = \Delta(x - x_0) \quad (4.19)$$

Segundo a propriedade (4.13), a parcela $\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega$ de (4.11) pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(x - x_0) u_i d\Omega = u_i(x_0) \quad (4.20)$$

Assim, os campos de deslocamento e de força de superfície resultantes do problema fundamental com carga concentrada, podem ser expressos como:

$$\begin{aligned} u_i^* &= u^*(s, f) \\ P_i^* &= P^*(s, f) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Logo a relação (4.11) pode ser reescrita como:

$$C(s)u(s) + \int_{\Gamma} P^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(s, f)b(f)d\Omega \quad (4.22)$$

Onde:

s : ponto fonte (*source point*), ou seja, é o ponto de aplicação de $\Delta(s, f)$.

f : ponto campo (*field point*), ou seja, é o ponto onde se quer medir a influência de $\Delta(s, f)$.

$C(s)$: termo livre.

$u^*(s, f)$: solução fundamental dos deslocamentos.

$P^*(s, f)$: solução fundamental das forças de superfície.

A relação (4.22) é denominada Identidade Somigliana para deslocamentos, e relaciona o valor de deslocamentos em um ponto interno f aos valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Se o domínio Ω contém o ponto de aplicação de $\Delta(s, f)$, $C(s)$ equivale a “1” ou à matriz identidade, e $C(s)$ é nulo caso o ponto de aplicação de $\Delta(s, f)$ não estiver contido no domínio Ω . As considerações no caso em que os pontos fonte se encontram no contorno, assim como detalhes de implementação numérica do MEC são tratados a partir do capítulo 6.

4.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

No problema fundamental de Mindlin, o domínio Ω^* é tido como um sólido semi-infinito, homogêneo e elástico. Admitem-se forças de superfície nulas no plano $x_3 = 0$ representado pelo contorno $\bar{\Gamma}$. A força unitária pode ser aplicada em qualquer ponto do domínio Ω^* , inclusive no contorno $\bar{\Gamma}$, conforme a figura abaixo.

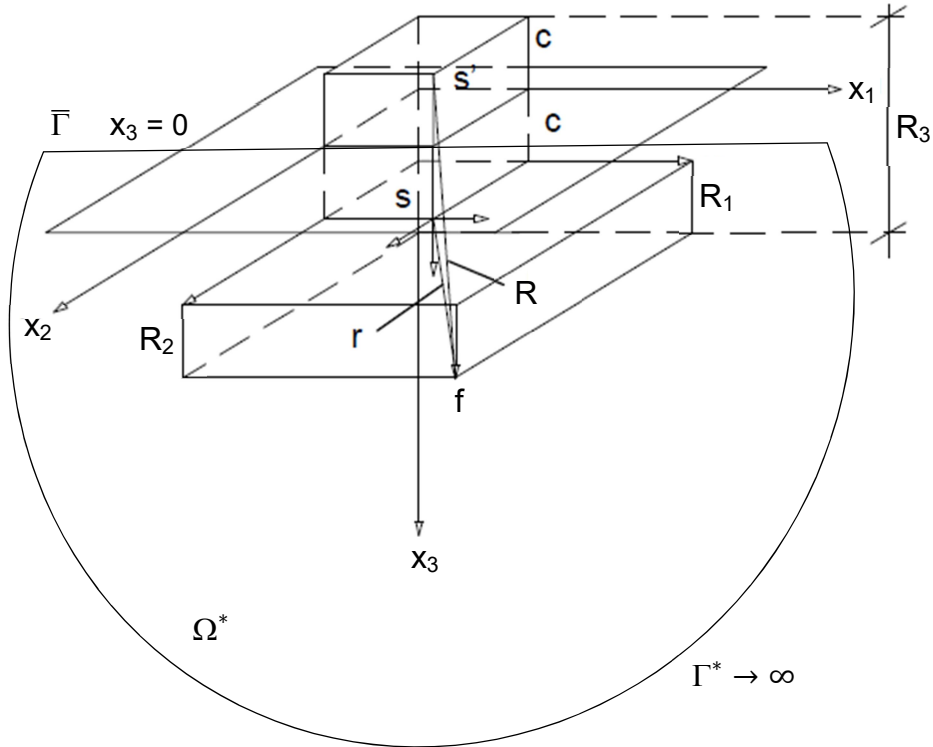


Figura 4.6 – Problema fundamental de Mindlin.

A solução fundamental de Mindlin para deslocamentos pode ser expressa pelo tensor u^* :

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

As expressões dos componentes do tensor são:

$$u_{11}^* = K \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (4.24)$$

4 Método dos Elementos de Contorno

$$u_{12}^* = Kr_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\} \quad (4.25)$$

$$u_{13}^* = Kr_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (4.26)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (4.27)$$

$$u_{22}^* = K \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \quad (4.29)$$

$$u_{31}^* = Kr_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (4.30)$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \quad (4.31)$$

$$u_{33}^* = K \left\{ \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{3-4\nu}{r} + \frac{6czR_3^2}{R^5} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} \right\} \quad (4.32)$$

Onde:

$$r = (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

$$R = (R_i R_i)^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

$$r_i = x_i(f) - x_i(s) \quad (4.35)$$

$$R_i = x_i(f) - x_i(s') \quad (4.36)$$

$$c = x_3(s) > 0 \quad (4.37)$$

$$z = x_3(f) > 0 \quad (4.38)$$

$$K = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \quad (4.39)$$

E : módulo de elasticidade do meio contínuo.

A solução fundamental de Mindlin é particularmente adequada para o tipo de problemas analisados neste trabalho, ou seja, problemas envolvendo domínio infinito ou semi-infinito, uma vez que elimina a necessidade de se discretizar a superfície livre do solo, reduzindo assim o número de incógnitas do problema, e conseqüentemente as dimensões das matrizes envolvidas. Para a implementação numérica, uma vez discretizado o solo, a equação integral de contorno pode ser expressa em forma matricial como:

$$[H]\{u\} = [G]\{P\} \quad (4.40)$$

Onde:

$[H]$ e $[G]$: matrizes dos coeficientes de influência calculados fazendo o produto entre as funções de forma, o jacobiano, o peso e a solução fundamental P^* no caso de $[H]$ e u^* no caso de $[G]$.

$\{u\}$: vetor dos deslocamentos prescritos no contorno.

$\{P\}$: vetor das forças de superfícies prescritas no contorno.

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O MEF é um dos mais utilizados métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia. Uma área de aplicação muito importante do MEF é a análise linear de estruturas. É a área em que se iniciou o desenvolvimento do MEF e se estabeleceu os primeiros procedimentos práticos. Como a maioria dos problemas são muito complexos para serem resolvidos analiticamente, devido à geometria e/ou às condições de contorno, a ideia básica do MEF é dividir o modelo do problema em elementos de pequeno tamanho e de geometria simples, conectados por nós. Assim, as equações de equilíbrio podem ser escritas para cada elemento, e resolvidas simultaneamente, obtendo desse modo a solução aproximada do problema. E quanto melhor for definido o modelo matemático, mais precisa se torna a solução do problema.

Neste trabalho, o MEF é utilizado para a modelagem das estacas e da casca plana (radier, sapata, bloco de fundação), sendo a estaca modelada por elemento finito de viga tridimensional, e a casca plana por uma superposição do elemento finito de chapa CST e do elemento finito de placa DKT. Logo, nos itens a seguir, apresentam-se, de modo conciso, os procedimentos para a obtenção das matrizes de rigidezes dos elementos finitos citados.

5.2 MODELAGEM DA ESTACA

5.2.1 Elemento finito de viga tridimensional

A estaca é modelada pelo MEF, e pode ser discretizada por vários elementos finitos de viga tridimensional com nós nas extremidades, e em cada nó há 5 parâmetros nodais, conforme a figura abaixo.

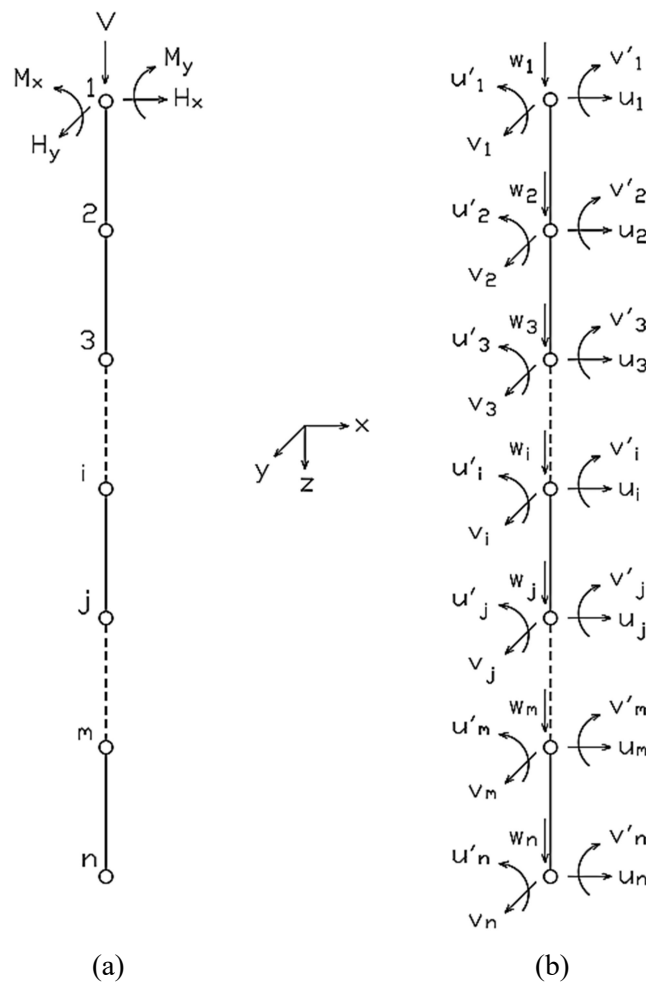


Figura 5.1 – Modelagem da estaca: a) Cargas aplicadas no topo da estaca; b) Parâmetros nodais.

A estaca pode estar submetida no seu topo por forças horizontais H_x e H_y , por força vertical V , e por momentos fletores M_x e M_y . Tem-se um total de 10 parâmetros nodais por elemento finito, sendo deslocamentos horizontais u e v , deslocamento vertical w , e giros u' e v' em torno de y e x respectivamente.

Vetorialmente os deslocamentos nodais em um elemento finito da estaca podem ser representados por:

$$\{u\}^e = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_i' \ v_i' \ u_j \ v_j \ w_j \ u_j' \ v_j'\} \quad (5.1)$$

Onde:

$\{u\}^e$: vetor dos deslocamentos nodais para o elemento finito e delimitado pelos nós i e j .

5.2.2 Determinação da matriz de rigidez

A determinação da matriz de rigidez de um elemento finito pode ser realizada via duas abordagens: o método direto e o método da energia. Segundo o método da energia, é possível associar uma quantidade escalar denominada energia potencial total Π a um sistema conservativo composto por um sólido deformável e forças aplicadas. A energia potencial total é dada por:

$$\Pi = U + \Omega \quad (5.2)$$

Onde:

U : energia potencial elástica ou de deformação.

Ω : energia potencial externa ou das forças aplicadas.

Para a estaca de comprimento L , e modelada conforme a Figura 5.1, tem-se:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v(z)}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & -H_x \bar{u} - M_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \int_0^L Q_x(z) u(z) dz - H_y \bar{v} - M_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \int_0^L Q_y(z) v(z) dz - V \bar{w} \\ & + \int_0^L Q_z(z) w(z) dz \end{aligned} \quad (5.4)$$

Onde:

E : módulo de elasticidade longitudinal da estaca.

I : momento de inércia da estaca, $I = I_x = I_y$.

A : área da seção transversal da estaca.

Q_x, Q_y, Q_z : tensões de interface ao longo da estaca.

u_x, u_y, u_z : deslocamentos no nó do topo da estaca.

Ao minimizar a energia potencial total Π dada em (5.2), para obter a situação de equilíbrio, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$[K]\{u\} = \{F\} + [T]\{Q\} \quad (5.5)$$

Onde:

$[K]$: matriz de rigidez da estaca.

$\{u\}$: vetor dos deslocamentos nodais da estaca

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_1' \ v_1' \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_2' \ v_2' \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n \ u_n' \ v_n'\}$$

$\{F\}$: vetor global das forças externas aplicadas no topo da estaca

$$\{F\} = \{H_x \ H_y \ V \ M_x \ M_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$[T]$: matriz de transformação: transforma as tensões na interface estaca-solo em forças nodais equivalentes.

$\{Q\}$: vetor das tensões de interface estaca-solo.

Para a determinação da matriz de rigidez $[K]^e$ de um único elemento finito de viga tridimensional, o mesmo pode ser considerado como a superposição de 3 elementos finitos, conforme a figura abaixo.

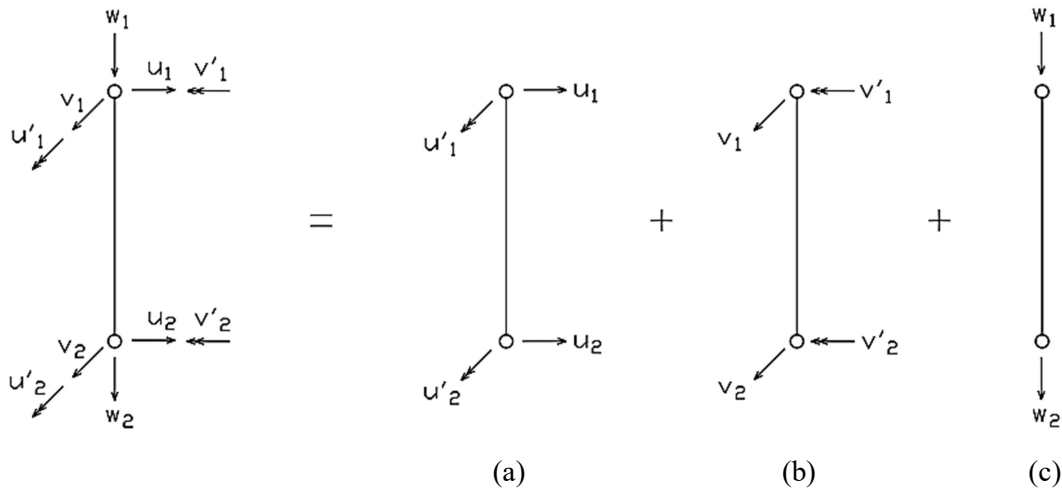


Figura 5.2 – Elemento finito de viga tridimensional decomposto em:

a) elemento finito de viga 2D; b) elemento finito de viga 2D; c) elemento finito de barra.

Ou seja,

- (a) elemento finito de viga sujeita à flexão no plano xz ;
- (b) elemento finito de viga sujeita à flexão no plano yz ;
- (a) elemento finito de barra sujeita ao esforço normal na direção z .

Assim a matriz de rigidez do elemento finito de viga tridimensional pode ser obtida como:

$$[K]^e = [K]_{(a)}^e + [K]_{(b)}^e + [K]_{(c)}^e \quad (5.6)$$

A matriz de rigidez de qualquer elemento finito pode ser obtida seguindo um método de cinco etapas. Para ilustrar esse método, conforme ALVES FILHO (2013), determina-se a matriz de rigidez $K_{(a)}^e$ do elemento finito de viga, de comprimento L .

Etapa 1: Formulação da função de deslocamentos para o elemento finito, ou seja, escolha-se a função de interpolação adequada para o elemento.

Adota-se a seguinte função interpoladora para os deslocamentos:

$$u(z) = C_1 + C_2z + C_3z^2 + C_4z^3 \quad (5.7)$$

(5.7) pode ser reescrita de forma matricial como:

$$u(z) = (1 \quad z \quad z^2 \quad z^3) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Ou ainda de forma compacta como:

$$u(z) = [H(z)] \cdot \{C\} \quad (5.9)$$

Onde:

$[H(z)]$: matriz contendo as variáveis.

$\{C\}$: matriz contendo os coeficientes desconhecidos.

Fazendo a primeira derivada de $u(z)$ para expressar a inclinação da viga ponto a ponto, tem-se:

$$u'(z) = C_2 + 2 \cdot C_3 z + 3C_4 z^2 \quad (5.10)$$

Podem-se representar as equações dos deslocamentos e das inclinações em todos os pontos do elemento finito por $\delta(z)$ como:

$$\{\delta(z)\} = \begin{pmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Etapa 2: Cálculo dos coeficientes desconhecidos da função de interpolação, relacionando os deslocamentos dentro do elemento finito com os deslocamentos nodais.

Como condições de contorno, tem-se:

No nó 1, ou seja, em $z = 0$, $u(0) = u_1$ e $u'(0) = u_1'$

No nó 2, ou seja, em $z = L$, $u(L) = u_2$ e $u'(L) = u_2'$

Substituindo em (5.7) e (5.10), e reagrupando as expressões obtidas em forma matricial chega-se a:

$$\{\delta\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1' \\ u_2 \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Na forma compacta, tem-se:

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{C\} \quad (5.13)$$

Ou ainda:

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.14)$$

Onde:

$[A]$: matriz contendo somente termos conhecidos que definem a geometria do elemento.

$\{C\}$: vetor dos coeficientes desconhecidos.

$\{\delta\}$: vetor dos deslocamentos nodais conhecidos.

5 Método dos Elementos Finitos

Invertendo a matriz $[A]$ tem-se:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Substituindo (5.14) em (5.9), tem-se:

$$u(z) = [H(z)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.16)$$

Seja:

$$[N(z)] = [H(z)] \cdot [A]^{-1} \quad (5.17)$$

Assim, (5.16), torna-se:

$$u(z) = [N(z)] \cdot \{\delta\} \quad (5.18)$$

Onde:

$[N(z)]$: função de forma do elemento finito, ou seja, é matriz que permite passar dos deslocamentos nodais para os deslocamentos dentro do elemento.

$[N(z)]$ é dada por:

$$[N(z)] = (1 \quad z \quad z^2 \quad z^3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

A função de forma é um conceito presente na formulação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. É uma função que estabelece o comportamento do elemento, ou seja, dados os deslocamentos nodais, a função de forma permite calcular os deslocamentos dentro do elemento.

Etapa 3: Cálculo das deformações internas a partir dos deslocamentos nodais.

O exemplo desenvolvido se tratando de um elemento de viga, da teoria de vigas, as deformações por flexão estão associadas à curvatura apresentada pela viga ao longo do seu comprimento. A curvatura está relacionada com a segunda derivada dos deslocamentos. Têm-se, portanto, as seguintes relações:

$$\text{Curvatura} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2u}{dz^2} = u''(z) \quad (5.20)$$

$$\varepsilon = \frac{x}{\rho} = \frac{M}{EI} \cdot x = x \cdot u''(z) \quad (5.21)$$

Onde:

ρ : raio de curvatura

ε : deformação

Derivando (5.10), tem-se:

$$u''(z) = 2C_3 + 6C_4z \quad (5.22)$$

Em forma matricial, tem-se:

$$u''(z) = (0 \ 0 \ 2 \ 6z) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Sendo:

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.24)$$

Tem-se:

$$u''(z) = (0 \ 0 \ 2 \ 6z) \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\} \quad (5.25)$$

Seja:

$$[B(z)] = (0 \ 0 \ 2 \ 6z) \cdot [A]^{-1} \quad (5.26)$$

$u''(z)$ pode ser escrita como:

$$u''(z) = [B(z)] \cdot \{\delta\} \quad (5.27)$$

Onde:

$[B(z)]$: matriz deslocamento-deformação, ou seja, é matriz que permite passar dos deslocamentos nodais para as deformações dentro do elemento.

A matriz deslocamento-deformação é um conceito presente na formulação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito. Assim como a função de forma, a matriz deslocamento-deformação estabelece também o comportamento do elemento. Ela representa um dado comportamento físico do elemento, ou seja, o modelo matemático para o cálculo das deformações no domínio do elemento.

Etapa 4: Cálculo das forças internas no elemento e , conseqüentemente, cálculo das tensões a partir dos deslocamentos nodais.

O momento fletor M interno à viga, em qualquer ponto do elemento de viga, pode ser expresso, partindo de (5.20) por:

$$M(z) = EI \cdot u''(z) \quad (5.28)$$

Sendo:

$$u''(z) = [B(z)] \cdot \{\delta\} \quad (5.29)$$

Tem-se:

$$M(z) = EI \cdot [B(z)] \cdot \{\delta\} \quad (5.30)$$

Com:

$$[S(z)] = EI \cdot [B(z)] \quad (5.31)$$

Tem-se:

$$M(z) = [S(z)] \cdot \{\delta\} \quad (5.32)$$

Com a Eq. (5.32), podem-se calcular as forças internas dentro do elemento a partir dos deslocamentos nodais. E as tensões ao longo de uma seção transversal, localizada em uma posição z , podem ser calculadas a partir da expressão:

$$\sigma = \frac{M(z)}{I} \cdot x \quad (5.33)$$

A Eq. (5.33) é uma formulação obtida pela teoria de vigas.

Etapa 5: Determinação da matriz de rigidez do elemento, relacionando as forças nodais com os deslocamentos nodais do elemento finito.

As etapas 1 a 4 permitem determinar os deslocamentos, as deformações e as tensões dentro do elemento finito. Contudo, é necessário conhecer primeiro os deslocamentos nodais, uma vez que as interpolações nessas etapas foram feitas com bases nisso. É a partir da matriz de rigidez da estrutura e do carregamento atuante que se determinam os deslocamentos nodais. A matriz de rigidez da estrutura sendo montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos componentes, deve-se conhecer as matrizes de cada elemento para assim poder calcular as grandezas nas etapas 1 a 4.

Para atingir esse objetivo, é utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para estabelecer a condição de equivalência entre as forças internas atuantes no elemento e as forças nodais estaticamente equivalentes. Seja a condição de equilíbrio do elemento, conforme mostrada na Figura 5.3. Ao impor qualquer deslocamento virtual ao elemento, o trabalho externo total realizado pelas forças nodais deve ser igual ao trabalho interno total realizado pelas forças internas. E todas as forças, interna e externa, são constantes. Tem-se a relação:

$$t_{externo} = t_{interno} \quad (5.34)$$

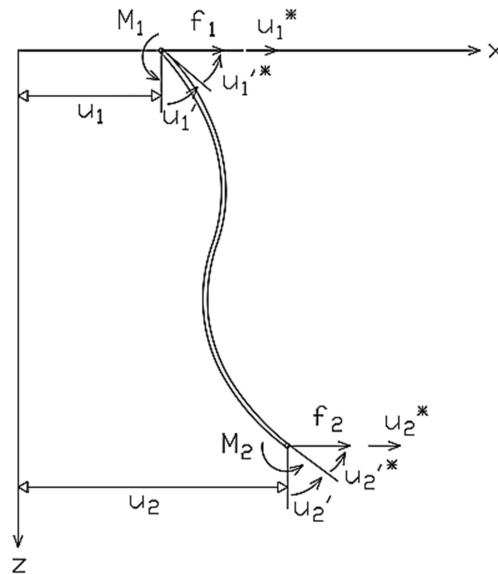


Figura 5.3 – Forças nodais e correspondentes deslocamentos nodais.

O trabalho virtual externo é dado por:

$$t_{externo} = f_1 \cdot u_1^* + M_1 \cdot u_1'^* + f_2 \cdot u_2^* + M_2 \cdot u_2'^* \quad (5.35)$$

Na forma matricial, tem-se:

$$t_{externo} = (u_1^* \quad u_1'^* \quad u_2^* \quad u_2'^*) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Ou ainda:

$$t_{externo} = \{\delta^*\}^T \cdot \{f\} \quad (5.37)$$

Onde:

$\{\delta^*\}^T$: vetor transposto dos deslocamentos virtuais.

$\{f\}$: vetor das forças nodais atuantes no elemento.

O trabalho virtual interno, por sua vez, é dado por:

$$dt_{interno} = M \cdot d\theta \quad (5.38)$$

Onde:

$dt_{interno}$: trabalho interno devido à ação do momento fletor M , num trecho da viga de comprimento dx .

$d\theta$: ângulo que caracteriza a curvatura ao longo da viga.

O trabalho interno total ao longo de todo o elemento é:

$$t_{interno} = \int_0^L M \cdot d\theta \quad (5.39)$$

Da teoria de vigas, sabe-se que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} \quad (5.40)$$

Ou ainda:

$$d\theta = \frac{dz}{\rho} = dz \cdot u''(z) \quad (5.41)$$

Assim:

$$t_{interno} = \int_0^L M \cdot d\theta = \int_0^L [u''(z)]^T \cdot M(z) \cdot dz \quad (5.42)$$

A curvatura virtual está associada aos deslocamentos nodais virtuais por meio da matriz deslocamento-deformação, conforme (5.29), ou seja:

$$\{u''(z)\}^T = ([B] \cdot \{\delta^*\})^T = \{\delta^*\}^T \cdot [B]^T \quad (5.43)$$

Sendo:

$$M(z) = EI \cdot u''(z) \quad (5.44)$$

Tem-se:

$$t_{interno} = \int_0^L \{\delta^*\}^T \cdot [B]^T \cdot EI \cdot u''(z) \cdot dz \quad (5.45)$$

E como:

$$u''(z) = [B] \cdot \{\delta\} \quad (5.46)$$

Tem-se:

$$t_{interno} = \int_0^L \{\delta^*\}^T \cdot [B]^T \cdot EI \cdot [B] \cdot \{\delta\} \cdot dz \quad (5.47)$$

Aplicando a condição de equivalência (5.34), com valor unitário escolhido para os deslocamentos virtuais impostos, tem-se finalmente:

$$\{f\} = \left(\int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] \cdot dz \right) \cdot \{\delta\} \quad (5.48)$$

Com:

$$[K]^e = \int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] \cdot dz \quad (5.49)$$

Onde:

$[K]^e$: matriz de rigidez do elemento finito.

Para o presente caso, integrando a Eq. (5.49), obtém-se a matriz de rigidez do elemento finito de viga, dada por:

$$[K]_{(a)}^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Aplicando o mesmo método para todos os elementos finitos da Figura 5.2, respeitando-se as especificidades de cada elemento, e fazendo o espalhamento das matrizes de rigidez obtidas em uma única matriz, conforme a ordem dos parâmetros nodais dada em (5.1), chega-se à matriz de rigidez, simétrica, do elemento finito de viga tridimensional, dada por:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

5.3 MODELAGEM DA CASCA PLANA

5.3.1 Elemento finito de casca plana

Por casca plana, neste trabalho, entende-se os elementos estruturais de radier, sapata ou bloco de fundação, sujeitos a efeitos de flexão e de membrana. Assim, a modelagem desses elementos é feita pelo MEF através de elementos finitos de casca plana. O elemento finito de casca plana adotado é o resultado da superposição do elemento finito de placa DKT e do elemento finito de chapa CST, conforme a figura abaixo.

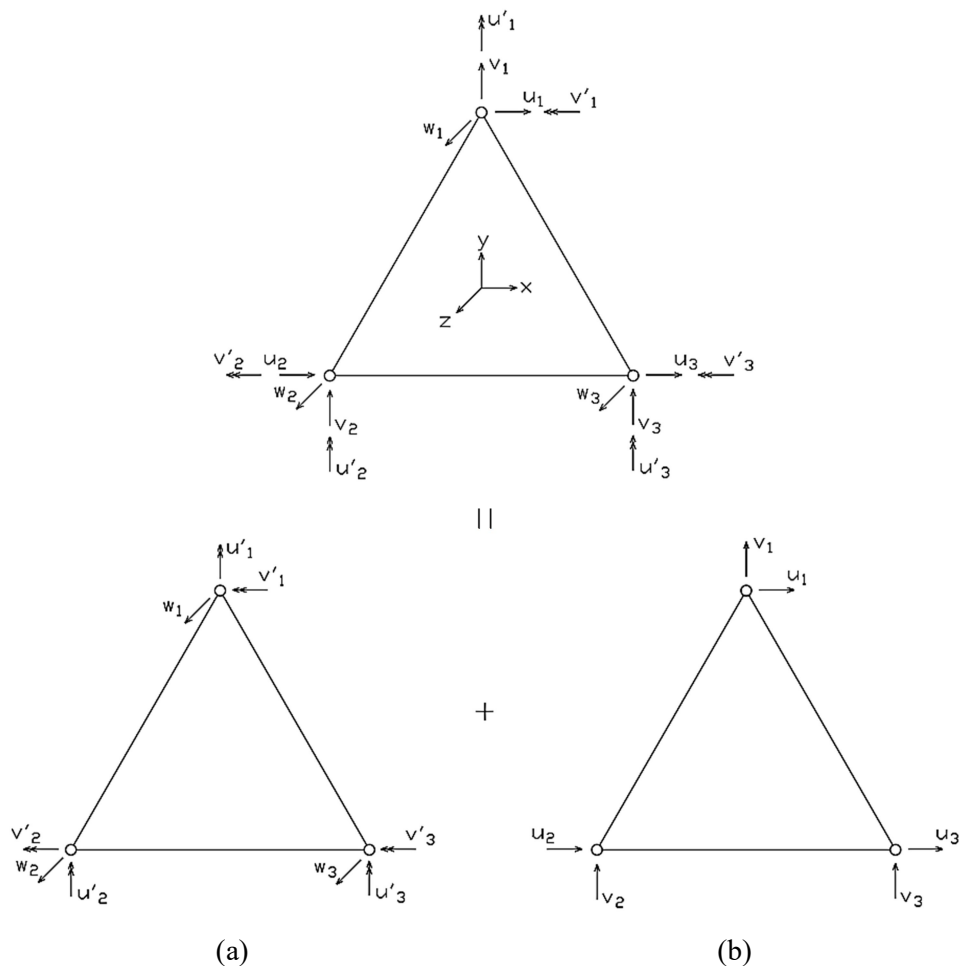


Figura 5.4 – Elemento finito de casca plana decomposto em:
a) elemento finito de placa DKT; b) elemento finito de chapa CST.

Têm-se 5 parâmetros nodais por nó, totalizando 15 parâmetros nodais para o elemento finito de casca plana. Ou seja:

$$\{u\}^e = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_1' \ v_1' \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_2' \ v_2' \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ u_3' \ v_3'\} \quad (5.52)$$

Onde:

$\{u\}^e$: vetor de deslocamentos nodais do elemento finito de casca plana com 3 nós.

São adotadas as seguintes hipóteses para o elemento finito de casca plana:

- a casca é plana e tem espessura constante;
- a casca é composta por material homogêneo, isotrópico e elástico linear;
- as deflexões são pequenas quando comparadas com a espessura da casca;
- as retas normais à superfície média da casca indeformada mantêm-se retas e normais à superfície média após a deformação. Ou seja, a casca não sofre deformação por cisalhamento.

5.3.2 Determinação da matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento finito de casca plana é dada por:

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{DKT}]^e & 0 \\ 0 & [K_{CST}]^e \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Onde:

$[K_{DKT}]^e$: matriz de rigidez do elemento finito de placa DKT.

$[K_{CST}]^e$: matriz de rigidez do elemento finito de chapa CST.

Como pode ser observado em (5.53), num elemento finito de casca plana, os elementos finitos de placa e de chapa encontram-se desacoplados, ou seja, os efeitos de flexão e de membrana ocorrem independentemente um do outro. Observa-se também que cada nó do elemento finito de viga tridimensional e do elemento finito de casca plana apresenta 5 parâmetros nodais, o que facilita a conexão desses dois elementos finitos.

5.3.2.1 Elemento finito de chapa CST

O elemento finito de chapa CST assume uma distribuição linear de deslocamentos dentro do elemento. Conforme mostrado na Figura 5.5, ele possui deslocamentos u e v no plano xy , totalizando seis parâmetros nodais. A interpolação dos deslocamentos é feita através das seguintes funções aproximadoras:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (5.54)$$

$$v(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y$$

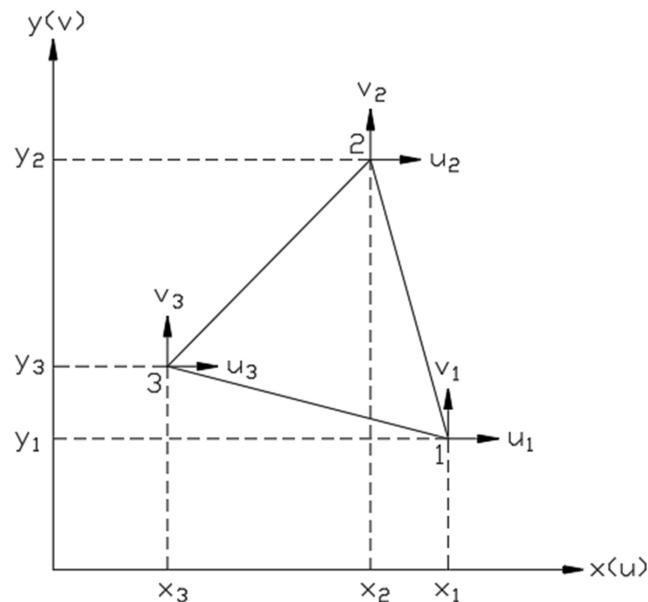


Figura 5.5 – Elemento finito de chapa CST.

A formulação de um elemento triangular, conforme ASSAN (2003), é geralmente feita com base em coordenadas triangulares ou homogêneas, e não cartesianas, com objetivo de simplificar as deduções. O elemento finito triangular é numerado seguindo o sentido de x para y , e seus lados tem o número do nó oposto. As coordenadas, no novo sistema, são relacionadas aos lados do elemento triangular e variam de 0 a 1. A origem passa a ser o vértice 3 do triângulo, no qual estão atreladas a coordenada ξ_1 definida como a distância relativa entre os nós 3 e 1, e a coordenada ξ_2 , sendo a distância relativa entre os nós 3 e 2, conforme mostrado na Figura 5.6.

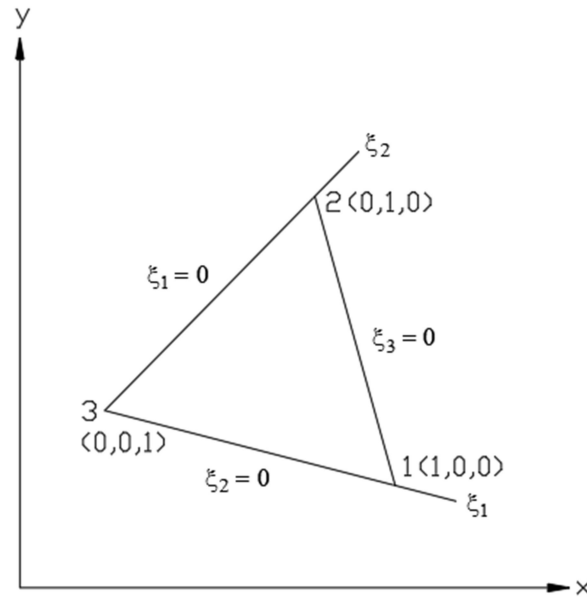


Figura 5.6 – Coordenadas triangulares ou homogêneas.

A Eq. (5.54) agora pode ser reescrita com base em coordenadas homogêneas e parâmetros nodais como:

$$\begin{aligned} u &= \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 \\ v &= \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 \end{aligned} \quad (5.55)$$

A matriz de rigidez do elemento finito de chapa CST, analogamente à Eq. (5.49), é dada por:

$$[K_{CST}]^e = \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA \quad (5.56)$$

Onde:

$[B]$: matriz deslocamento-deformação.

$[D]$: matriz com os parâmetros elásticos que caracterizam o material.

A : área do elemento finito.

A matriz $[D]$ é determinada através da relação constitutiva:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Ou seja,

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Onde:

E e ν : respectivamente, módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson do material da chapa.

Para determinar a matriz $[B]$, reescreve-se primeiro a Eq. (5.55) em forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

E sabe-se, conforme a Eq. (3.13), que:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Substituindo (5.59) em (5.60), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = [B] \cdot \{d\} \quad (5.61)$$

Onde:

$\{d\}$: vetor dos deslocamentos nodais do elemento finito.

Logo,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Com as matrizes $[D]$ e $[B]$ determinadas, e substituindo-as na Eq. (5.56), determina-se a matriz de rigidez $[K_{CST}]^e$ do elemento finito de chapa CST.

5.3.2.2 Elemento finito de placa DKT

O deslocamento transversal w , na direção z normal ao plano xy , de uma placa fina com espessura constante t , e cujo plano médio coincide com o plano xy , é determinado pela seguinte equação de equilíbrio:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y) \quad (5.63)$$

Onde:

D : rigidez à flexão da placa.

$p(x, y)$: carga lateral normalmente aplicada à placa.

A rigidez à flexão da placa é dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5.64)$$

Onde:

E e ν : respectivamente, módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson do material da placa.

No estudo de placas finas, o efeito do esforço cortante é desprezado na presença da parcela devida à flexão. Baseada na hipótese de Kirchhoff para placas finas – pontos da placa originalmente normais à superfície média indeformada, permanecem normais à superfície média deformada – o elemento finito de placa DKT tem-se mostrado muito eficiente na análise numérica de placas finas. Conforme mostrado na Figura 5.4(a), o elemento finito de placa DKT possui por nó, três parâmetros u' , v' e w , respectivamente, giros em torno de x e y , e deslocamento vertical na direção z , totalizando nove parâmetros nodais por elemento.

A matriz de rigidez do elemento finito de placa DKT, semelhantemente à Eq. (5.56), é dada por:

$$[K_{DKT}]^e = \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA \quad (5.65)$$

Onde:

$[B]$: matriz deslocamento-deformação.

$[D]$: matriz com os parâmetros elásticos que caracterizam o material.

A : área do elemento finito.

A matriz $[D]$ é dada por:

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

A matriz de interpolação deslocamento-deformação $[B]$ é dada por:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} + y_{12} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} \\ -x_{31} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} - x_{12} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} \\ -x_{31} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} - x_{12} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} + y_{31} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} + y_{12} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Onde:

$$\left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} P_6(1-2\xi) + \eta(P_5 - P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) + \eta(q_4 - q_6) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_4 + P_5) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \end{pmatrix} \quad \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$\left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} -P_5(1-2\eta) + \xi(P_5 - P_6) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{pmatrix} \quad \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} -t_5(1-2\eta) + \xi(t_5 - t_6) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{pmatrix}$$

Os coeficientes P_k , q_k , r_k e t_k dependem da geometria do elemento, e são calculados como:

$$P_k = -\frac{6x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad q_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad r_k = \frac{3y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \quad t_k = -\frac{6y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (5.69)$$

Onde:

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (5.70)$$

Com $k = 4, 5, 6$ para $ij = 23, 31, 12$ respectivamente, conforme a numeração dos nós mostrada na Figura 5.6.

Uma vez calculadas as matrizes $[D]$ e $[B]$, e substituindo-as na Eq. (5.65), determina-se a matriz de rigidez $[K_{DKT}]^e$ do elemento finito de placa DKT.

6 ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO

6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Estacas são elementos estruturais longos e esbeltos que transmitem cargas da superestrutura para profundidades maiores dentro do solo subjacente; e segundo a NBR 6122/2010, a ponta ou a base da estaca deve estar assente em profundidade superior ao dobro de sua menor dimensão em planta, e no mínimo 3,0 m. Estacas são geralmente usadas quando as condições do solo não são adequadas para o uso de fundações diretas ou rasas, ou seja, quando os solos superficiais não apresentam capacidade de suporte para elevadas cargas, ou estão sujeitos a processos erosivos, ou ainda quando existir a possibilidade de realização de escavação futura nas proximidades da obra. Uma estaca resiste a cargas aplicadas no seu topo e, portanto, transmite a carga proveniente da superestrutura ao terreno, através da sua base (resistência de ponta), da sua superfície lateral (resistência de fuste ou resistência lateral ou resistência de atrito), ou ainda pela combinação das duas, conforme a figura abaixo.

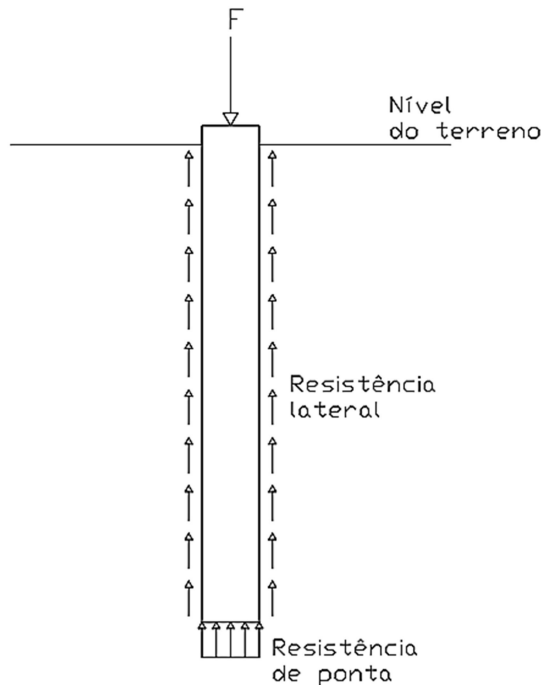


Figura 6.1 – Resistência lateral e resistência de ponta de uma estaca.

São vários os fatores que influenciam o comportamento real do conjunto estaca-solo, alguns deles são devido ao método de execução e materiais constituintes das estacas, e resultam em critérios mencionados a seguir, para a classificação das estacas:

- efeito produzido no solo: estacas com grande deslocamento, com pequeno deslocamento e sem deslocamento;
- processo de execução: estacas moldadas in loco e estacas pré-moldadas;
- forma de funcionamento: estacas de ponta, estacas de atrito ou flutuante e estacas mistas;
- forma de carregamento: estacas de compressão, estacas de tração e estacas de flexão.

Outros fatores como as propriedades físicas do solo, o espaçamento entre as estacas, a geometria do sistema, também são determinantes para a análise da interação estaca-solo.

6.2 HIPÓTESES ADOTADAS

Para a análise numérica do problema de interação estaca-solo, são adotadas as seguintes hipóteses básicas:

- o espaçamento entre estacas é tomado como a distância de eixo a eixo;
- o solo e a estaca são admitidos em regime elástico-linear;
- consideram-se as estacas totalmente imersas em um meio semi-infinito, elástico, linear, homogêneo e isótropo;
- o solo e as estacas estão livres de tensões iniciais decorrentes da instalação das mesmas;
- a superfície das estacas é admitida rugosa, de forma que inibe o deslizamento na região de contato estaca-solo;
- as forças volumétricas são desprezadas;
- existe compatibilidade de deslocamentos entre o solo e a estaca.

6.3 FORMULAÇÕES

Foi obtida no capítulo 4, a Eq. (4.22) da Identidade Somigliana para deslocamentos:

$$C(s)u(s) + \int_{\Gamma} P^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(s, f)b(f)d\Omega \quad (6.1)$$

A estaca sendo imersa em um meio contínuo semi-infinito, está submetida a tensões de interface Q .

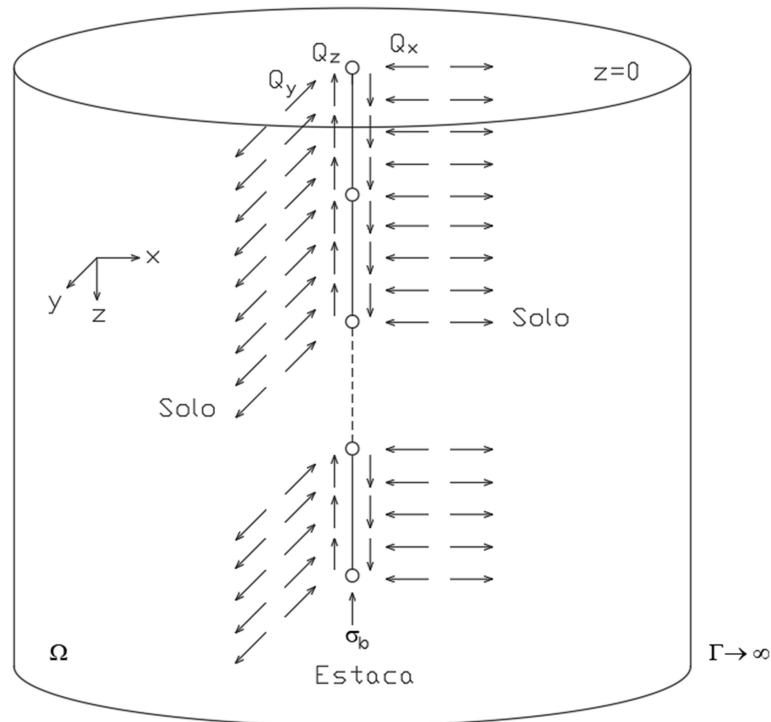


Figura 6.2 – Tensões de interface atuando na estaca e no solo.

A Eq. (6.1), considerando a tensão σ_b uniformemente distribuída na base da estaca, e as tensões de interface Q , torna-se:

$$C(s)u(s) + \int_{\Gamma} P^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(s, f)b(f)d\Omega + \int_{\Gamma_q} u^*(s, f)Q(f)d\Gamma_q + \int_{\Gamma_b} u^*(s, f)\sigma_b(f)d\Gamma_b \quad (6.2)$$

Com o emprego da solução fundamental de Mindlin, e as forças volumétricas sendo desprezadas conforme as hipóteses, a Eq. (6.2) se resume a:

$$C(s)u(s) = \int_{\Gamma_q} u^*(s, f)Q(f)d\Gamma_q + \int_{\Gamma_b} u^*(s, f)\sigma_b(f)d\Gamma_b \quad (6.3)$$

A solução fundamental de Mindlin é utilizada em (6.3), assim os pontos fontes estão aplicadas no domínio do problema que no caso equivale ao contorno Γ_q . Assim $C(s)$ equivale à matriz Identidade. Tem-se:

$$C(s) = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Por outro lado, no meio contínuo semi-infinito, podem ser consideradas várias estacas representadas por linhas de carga, conforme a figura abaixo.

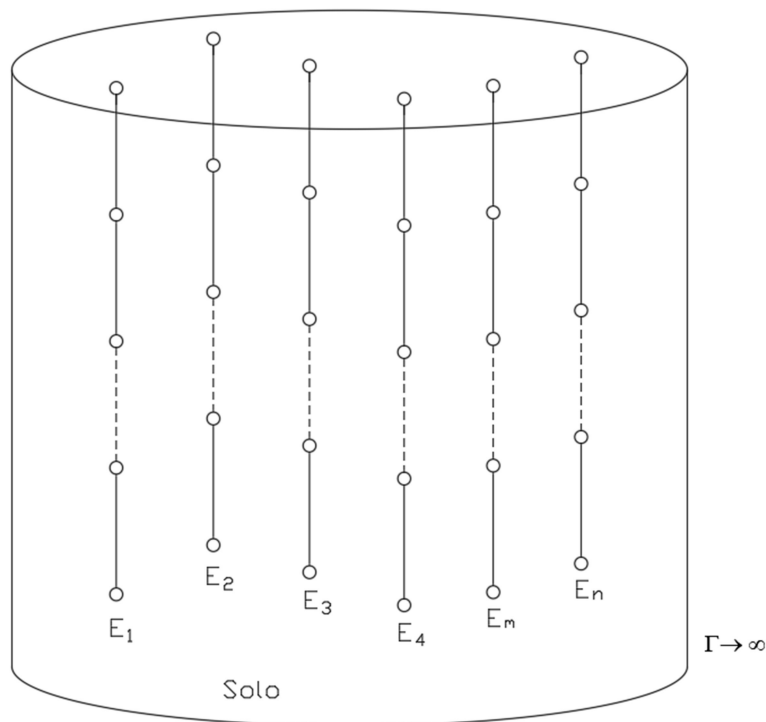


Figura 6.3 – Estacas imersas num meio contínuo semi-infinito.

Assim, a Eq. (6.3) pode ser escrita como:

$$u(s) = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_q} u^*(s, f)Q(f)d\Gamma_q + \int_{\Gamma_b} u^*(s, f)\sigma_b(f)d\Gamma_b \quad (6.5)$$

Onde:

N_e : número de estacas ou linhas de cargas inseridas no meio contínuo semi-infinito.

Para fins de implementação numérica, a Eq. (6.5) escrita em forma matricial é:

$$\{u\} = [G]\{Q\} \quad (6.6)$$

Onde:

$\{u\}$: vetor dos deslocamentos dos pontos fontes colocados nas linhas de carga.

$\{Q\}$: vetor das tensões de interface estaca-solo.

$[G]$: matriz dos coeficientes de influência do solo.

Com a Eq. (6.6), o objetivo é a determinação da matriz $[G]$. Uma vez determinada, os deslocamentos dos nós da estaca são calculados depois de realizar o acoplamento MEC/MEF, conforme descrito no próximo item. Para o cálculo dos coeficientes de $[G]$, as integrais em (6.5) são calculadas utilizando a quadratura de Gauss-Legendre.

As linhas de carga são discretizadas por elementos de contorno isoparamétricos, ou seja, a geometria e as grandezas de interesse são aproximadas ao longo dos elementos pela mesma função de forma. A discretização é feita com elementos lineares. As funções de forma são obtidas pelos polinômios de Lagrange através da expressão:

$$\Phi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (6.7)$$

Onde:

Φ_i : polinômio de Lagrange de grau $n - 1$ associado ao nó i .

ξ : coordenada adimensional para um ponto de integração qualquer dentro do elemento.

ξ_i : coordenada adimensional no nó i .

ξ_j : coordenada adimensional no nó j .

Assim para elementos de contorno com aproximação linear, tem-se:

$$\Phi_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad \Phi_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (6.8)$$

As coordenadas x_k de um ponto no interior do elemento podem ser obtidas a partir da interpolação das coordenadas nodais x_k^i pela expressão:

$$x_k(\xi) = \Phi_i(\xi)x_k^i \quad (6.9)$$

E o Jacobiano, considerando um sistema cartesiano (x_1, x_2) , é calculado pela expressão:

$$J = \sqrt{(\Phi_{i,\xi}(\xi)x_1^i)^2 + (\Phi_{i,\xi}(\xi)x_2^i)^2} \quad (6.10)$$

O sistema sendo composto por N_e linhas de cargas com um total de n pontos fontes, a matriz $[G]$ terá a ordem $5n \times 5n$, uma vez que cada nó da estaca apresenta cinco parâmetros nodais.

6.4 ACOPLAMENTO MEC/MEF

O acoplamento MEC/MEF é realizado combinando os sistemas de equações provenientes do MEC e do MEF. Os subscritos “s” e “e” nas expressões abaixo designam respectivamente o solo e a estaca.

O sistema de equações do MEC para as linhas de carga (6.6) pode ser escrito como:

$$\{Q_s\} = [G]^{-1}\{u_s\} \quad (6.11)$$

No capítulo 5, foi deduzido o sistema de equações (5.5) do MEF para a estaca, dado por:

$$[K_e]\{u_e\} = \{F_e\} + [T_e]\{Q_e\} \quad (6.12)$$

Onde:

$[T_e]$: matriz de transformação das tensões de interface atuantes na estaca em cargas nodais equivalentes.

Ou seja, antes de realizar o acoplamento MEC/MEF, no sistema de equações da estaca, o procedimento pelo MEF exige que todo o carregamento aplicado no elemento finito seja transformado em cargas nodais, conforme mostrado na Figura 6.4.

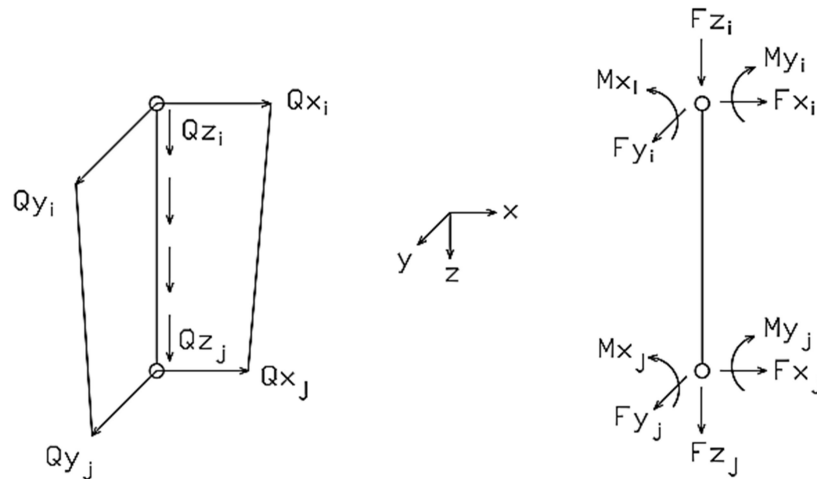


Figura 6.4 – Transformação da carga de superfície em cargas nodais.

Assim, para um único elemento finito da estaca, o vetor de cargas nodais é dado por:

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \end{pmatrix} = [T_e]^e \cdot \begin{pmatrix} Q_{xi} \\ Q_{yi} \\ Q_{zi} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{xj} \\ Q_{yj} \\ Q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Considerando as condições de equilíbrio que devem ser satisfeitas ao longo da interface entre a estaca e o solo, tem-se:

$$\{Q_s\} + \{Q_e\} = 0 \quad (6.14)$$

Com (6.14), pode-se combinar os sistemas de equações (6.11) e (6.12) obtendo:

$$[K_e]\{u_e\} = \{F_e\} - [M]\{u_s\} \quad (6.15)$$

Onde:

$$[M] = [T_e][G]^{-1} \quad (6.16)$$

$$[T_e]^e = \begin{bmatrix} \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

A condição de compatibilidade de deslocamentos fornece:

$$\{u_s\} = \{u_e\} = \{\bar{u}\} \quad (6.18)$$

Substituindo (6.18) em (6.15), tem-se:

$$[[K_e] + [M]]\{\bar{u}\} = \{F_e\} \quad (6.19)$$

Logo, chega-se a formulação mista representando o acoplamento MEC/MEF:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{F_e\} \quad (6.20)$$

Onde:

$[\bar{K}]$: matriz de rigidez equivalente do sistema estaca-solo.

$\{\bar{u}\}$: vetor dos deslocamentos nodais da estaca.

$\{F_e\}$: vetor das cargas externas aplicadas no topo da estaca.

7 ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-SOLO

7.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Antes de analisar a interação entre a placa e o solo, avalia-se primeiro a resposta mecânica do solo devido ao carregamento vertical aplicado diretamente na superfície do solo. Com esse procedimento, determina-se a matriz dos coeficientes de influência do solo $[G]$ empregada no acoplamento MEC/MEF. E uma vez o acoplamento realizado, torna-se possível a análise da interação entre o solo e diversas estruturas de fundação como um radier, uma sapata ou um bloco de fundação.

7.2 FORMULAÇÕES

Para a análise da interação entre a placa e o solo, as malhas da placa e da superfície do solo devem coincidir, ou seja, deve haver um perfeito alinhamento entre os elementos finitos de placa DKT e os elementos de contorno triangulares (ou células) ECT, conforme a figura abaixo.

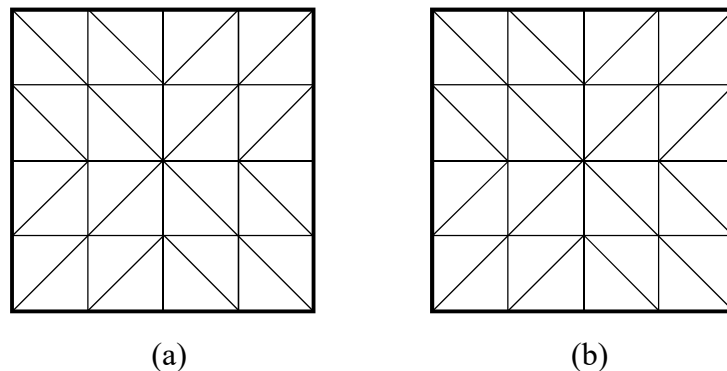


Figura 7.1 – Exemplo de malha: (a) da superfície do solo; (b) da placa.

Uma célula da superfície do solo apresenta, portanto, três nós nas extremidades. E em cada célula, as forças de superfície são aproximadas linearmente, conforme a figura abaixo.

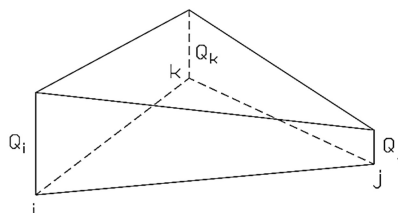


Figura 7.2 – Célula de contorno ijk com aproximação linear das forças de superfície.

O campo das forças de superfície é dado por:

$$Q = [\Phi_n]\{Q_n\} \quad (7.1)$$

Onde:

$[\Phi_n]$: matriz das funções de forma.

$\{Q_n\}$: vetor das forças de superfície.

Assim, para cada célula, tem-se:

$$Q = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

As funções de forma Φ_n escritas em relação a um sistema de coordenadas (x, y) são expressas como:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{D_t} [(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)] \\ \Phi_2 &= \frac{1}{D_t} [(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3y_1 - x_1y_3)] \\ \Phi_3 &= \frac{1}{D_t} [(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Onde:

(x_i, y_i) : coordenadas do nó i da célula, com $i = 1, 3$

$$D_t = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (7.4)$$

Por simplificação, as funções de forma Φ_n podem ser escritas como:

$$\Phi_i = A_i x + B_i y + C_i \quad (7.5)$$

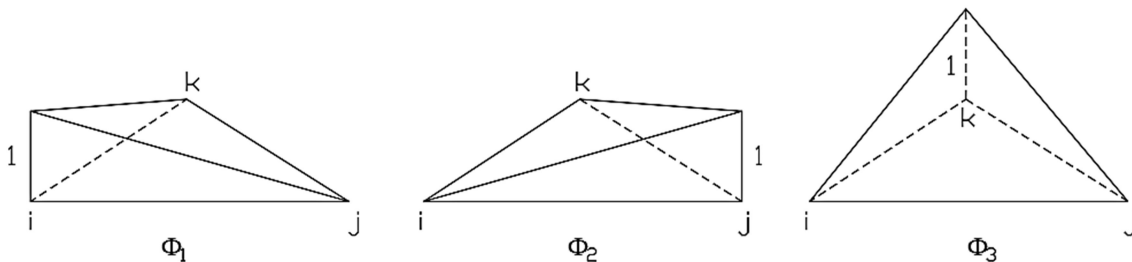


Figura 7.3 – Funções de forma numa célula.

Observa-se que em (7.5) as funções de forma equivalem à equação de um plano.

7 Análise da Interação Placa-Solo

O carregamento sendo aplicado na superfície do solo, conforme a figura abaixo, os pontos fontes estão colocados nos nós das células, e os pontos de integração estão espalhados dentro dos lados das células.

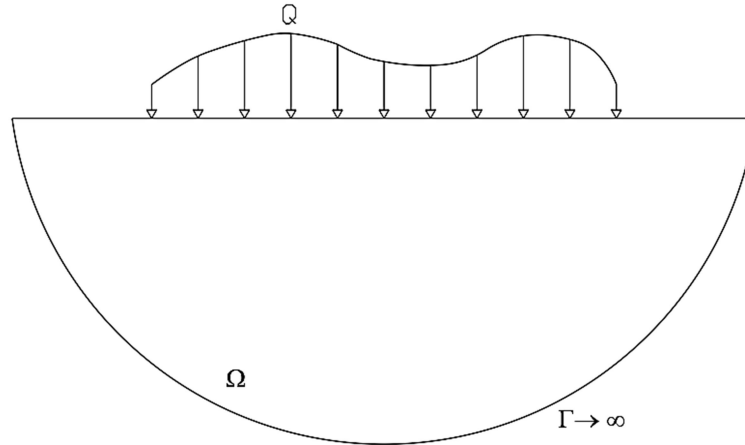


Figura 7.4 – Carregamento geral aplicado na superfície do solo.

Com o carregamento sendo aplicado verticalmente na superfície do solo, os deslocamentos dos pontos fontes são dados por:

$$u(s) = \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_q} u^*(s, f) Q(f) d\Omega_q \quad (7.6)$$

Onde:

N_e : número de células.

Ω_q : domínio da célula.

Q : força de superfície aplicada na superfície do solo.

A solução fundamental de interesse em (7.6), é à referente aos deslocamentos verticais, conforme a Eq. (4.32), ou seja:

$$u_{33}^* = K \left\{ \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{3 - 4\nu}{r} + \frac{6czR_3^2}{R^5} + \frac{8(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)}{R} + \frac{(3 - 4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} \right\} \quad (7.7)$$

Como os pontos fontes e os pontos de integração encontram-se na superfície do solo, a solução fundamental de Boussineq é obtida a partir da solução fundamental de Mindlin, substituindo em (7.7): $x_3(s) = 0$ e $x_3(f) = 0$.

Tem-se:

$$u_{33}^* = \frac{1-\nu}{2\pi G} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (7.8)$$

Onde:

G : módulo de elasticidade transversal do solo.

$r = (r_i r_j)^{\frac{1}{2}}$: distância entre ponto fonte s e ponto de integração f .

As integrais em (7.6) sobre o domínio das células podem ser transformadas em integrais sobre o contorno das mesmas. Assim, a integral em (7.6) para uma célula, é dada por:

$$h = \int_{\Omega_q} u_{33}^*(s, f) (A_i x + B_i y + D_i) d\Omega_q \quad (7.9)$$

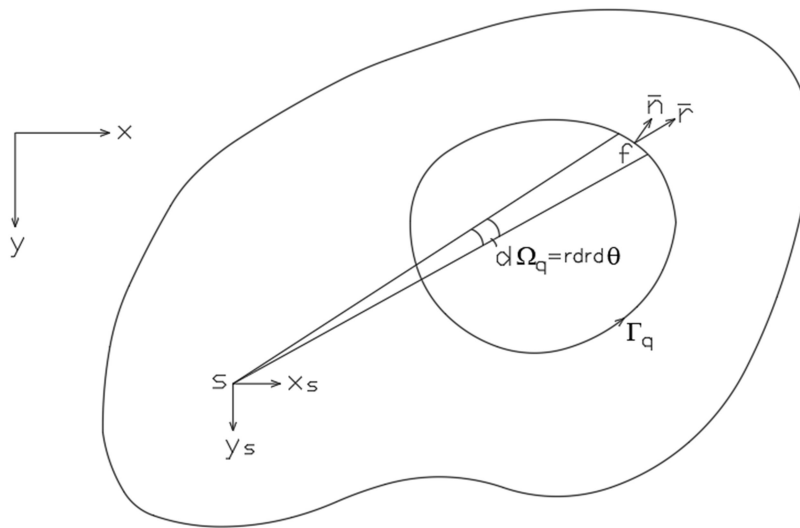


Figura 7.5 – Sistemas de coordenadas local e global.

Com:

$$d\Omega_q = r dr d\theta \quad (7.10)$$

$$d\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} d\Gamma_c \quad (7.11)$$

7 Análise da Interação Placa-Solo

Onde:

\bar{n} : versor da normal de um lado da célula.

\bar{r} : versor do raio vetor r .

R : distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

Γ_c : contorno da célula.

Substituindo (7.8) e (7.10) em (7.9), e fazendo:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \\ y &= R \sin \theta \end{aligned} \quad (7.12)$$

a integral (7.9) pode ser escrita como:

$$h = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \int_{\theta} \int_0^R \left(\frac{1}{r}\right) (A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta + D_i) r dr d\theta \quad (7.13)$$

Calculando (7.13) e inserindo (7.11), obtém-se:

$$h = \frac{1 - \nu}{4\pi G} \int_{\Gamma_c} (A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta + 2D_i) \cdot \bar{n} \cdot \bar{r} \cdot d\Gamma_c \quad (7.14)$$

Onde:

$D_i = A_i x_s + B_i y_s + C_i$: função de forma calculada no ponto fonte de coordenadas (x_s, y_s) .

Pode-se observar que a integral em (7.14) não apresenta singularidade.

A Eq. (7.6) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\{u\} = [G]\{Q\} \quad (7.15)$$

A determinação numérica da matriz $[G]$, é feita calculando seus coeficientes pela integral (7.14). O vetor das forças de superfície $\{Q\}$ é um dado do problema. Logo, com $[G]$ determinada, pode-se obter o vetor dos deslocamentos $\{u\}$ dos pontos fontes ou pontos de colocação na área carregada da superfície do solo, e também realizar o acoplamento MEC/MEF, conforme descrito no item a seguir, para a análise da interação entre a placa e o solo.

7.3 ACOPLAMENTO MEC/MEF

De modo semelhante ao item 6.4, o acoplamento MEC/MEF é realizado combinando os sistemas de equações provenientes do MEC e do MEF. Os subscritos “s” e “p” nas expressões abaixo designam respectivamente o solo e a placa.

Na região de contato entre a placa e o solo há forças de interação Q devido à carga F_p recebida pela placa e transmitida ao solo, conforme a figura abaixo.

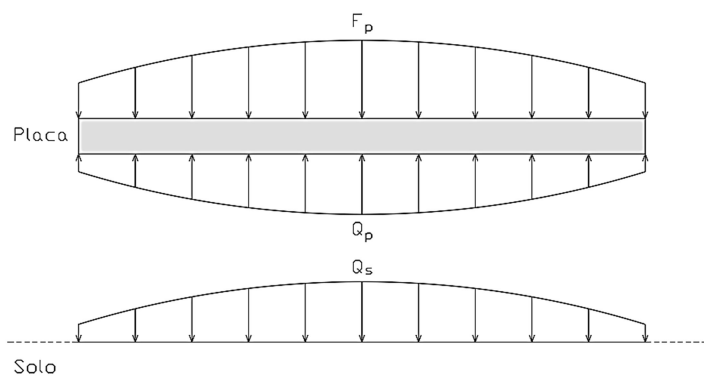


Figura 7.6 – Forças de interação na região de contato placa-solo.

A força de interação na placa Q_p é tratada como carregamento transversal externo, e para o solo, essa mesma força de interação Q_s é tratada como força de superfície.

Tem-se:

$$Q = Q_p = Q_s \quad (7.16)$$

O sistema de equações (7.15) do MEC para a força de superfície atuante no solo pode ser escrito como:

$$\{Q_s\} = [G]^{-1}\{u_s\} \quad (7.17)$$

Para a placa submetida ao carregamento, conforme mostrado na Figura 7.6, o sistema de equações do MEF é dado por:

$$[K_p]\{u_p\} = \{F_p\} + [T_p]\{Q_p\} \quad (7.18)$$

Onde:

$[T_p]$: matriz de transformação do carregamento transversal externo Q_p em cargas nodais na placa.

Pelo mesmo motivo mencionado no item 6.4, todo o carregamento aplicado na placa deve ser transformado em cargas nodais, conforme a figura abaixo, antes de realizar o acoplamento MEC/MEF.

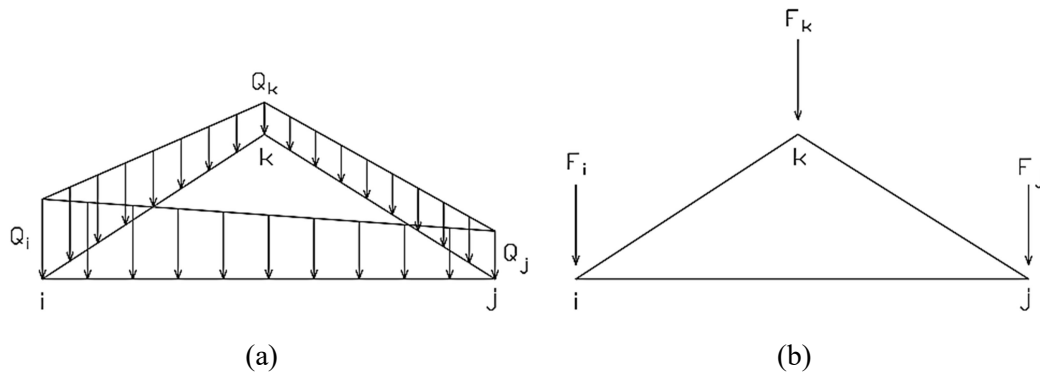


Figura 7.7 – Transformação da carga de superfície_(a) em cargas nodais_(b) no elemento DKT.

Para um único elemento finito, o vetor de cargas nodais é dado por:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = [T_p] \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Onde:

$$[T_p] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

A : área do elemento finito DKT.

Considerando as condições de equilíbrio que devem ser satisfeitas na região de contato entre a placa e o solo, tem-se:

$$\{Q_s\} + \{Q_p\} = 0 \quad (7.21)$$

Com (7.21), pode-se combinar os sistemas de equações (7.17) e (7.18) obtendo:

$$[K_p]\{u_p\} = \{F_p\} - [M]\{u_s\} \quad (7.22)$$

Onde:

$$[M] = [T_p][G]^{-1} \quad (7.23)$$

A condição de compatibilidade fornece:

$$\{u_s\} = \{u_p\} = \{\bar{u}\} \quad (7.24)$$

Substituindo (7.24) em (7.22), tem-se:

$$[[K_p] + [M]]\{\bar{u}\} = \{F_p\} \quad (7.25)$$

Logo, chega-se a formulação mista representando o acoplamento MEC/MEF:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{F_p\} \quad (7.26)$$

Onde:

$[\bar{K}]$: matriz de rigidez equivalente do sistema placa-solo.

$\{\bar{u}\}$: vetor dos deslocamentos nodais da região de contato placa-solo.

$\{F_p\}$: vetor das cargas externas aplicadas na placa.

8 ANÁLISE DA INTERAÇÃO CASCA PLANA-ESTACA-SOLO

8.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Na análise da interação entre a placa e o solo, dependendo da carga atuante na placa, sempre há possibilidade de assumir um fator de segurança adequado para evitar a ruptura por capacidade de suporte. Em contrapartida, podem ocorrer recalques excessivos (por causa do tipo de solo) comprometendo o uso da placa. Como solução ao problema, pode se recorrer à inclusão das estacas no sistema placa-solo para reduzir os deslocamentos. Na presente análise, as cargas atuantes podem ser verticais (cargas oriundas da superestrutura, por exemplo) e laterais (forças de vento, de impacto). Assim, o sistema analisado é composto por casca plana, estacas e solo. Ou seja, são admitidos os efeitos de flexão e de membrana na placa (radier, sapata, bloco de fundação). As formulações, em geral, são semelhantes às apresentadas nos capítulos anteriores, com detalhes adicionais, apresentados a seguir, para atender às exigências da interação casca plana-estaca-solo.

8.2 FORMULAÇÕES

O objetivo antes de realizar o acoplamento MEC/MEF é a determinação da matriz $[G]$ dos coeficientes de influência do solo. O solo modelado pelo MEC, na presente análise, se refere à superfície do solo e às linhas de carga inseridas no solo. Para facilitar a determinação de $[G]$, a mesma pode ser expressa como:

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & [G_{SE}] \\ [G_{ES}] & [G_{EE}] \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Onde:

$[G_{SS}]$: matriz $[G]$ com os pontos fontes e os pontos de integração colocados na superfície do solo.

$[G_{SE}]$: matriz $[G]$ com os pontos fontes na superfície do solo e os pontos de integração nas linhas de carga abaixo da superfície do solo.

$[G_{ES}]$: matriz $[G]$ com os pontos fontes nas linhas de carga abaixo da superfície do solo e os pontos de integração na superfície do solo.

$[G_{EE}]$: matriz $[G]$ com os pontos fontes e os pontos de integração nas linhas de carga abaixo da superfície do solo.

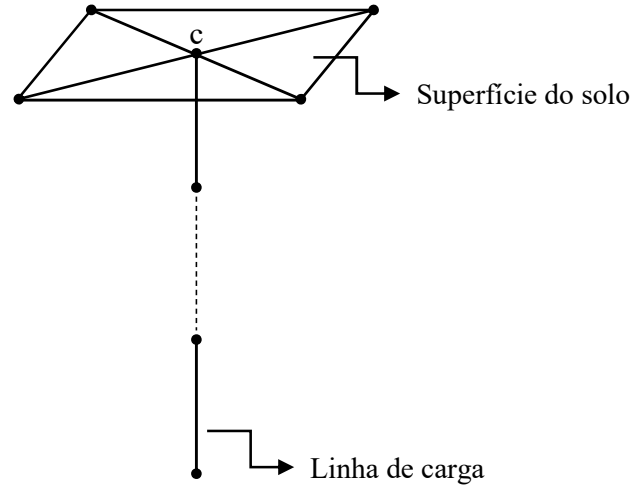


Figura 8.1 – Modelagem do solo pelo MEC.

Conforme mostrado na figura acima, o nó do topo da estaca sempre deve coincidir com um dos nós das células da superfície do solo.

As matrizes $[G_{SS}]$ e $[G_{SE}]$ são determinadas pelas formulações descritas no item 7.2, e a matriz $[G_{EE}]$ pelas formulações do item 6.3. Na determinação de $[G_{SS}]$ e $[G_{ES}]$, os coeficientes de influência são nulos no nó c , interseção da linha de carga e da superfície do solo, conforme mostrado na Figura 8.1. De fato, nesse nó c comum entre a casca plana e a estaca, a reação do solo é nula uma vez que não há solo em contato com a casca plana. Nessa região há apenas a tensão normal σ_N transmitida pela placa à estaca, conforme ilustrada na Figura 8.2.

Para a determinação da matriz $[G_{ES}]$, segue-se o mesmo procedimento descrito no item 7.2, onde a Eq. (7.13) para o presente caso é expressa como:

$$h = \alpha \int_{\Gamma_c} \left\{ \frac{(A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta)}{R} \left[F_1(R) + \frac{\beta}{\alpha} x_3^2(s) F_2(R) \right] + D_i \left[F_3(R) + \frac{\beta}{\alpha} x_3^2(s) F_4(R) \right] \right\} \cdot \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} \cdot d\Gamma_c \quad (8.2)$$

8 Análise da Interação Casca plana-Estaca-Solo

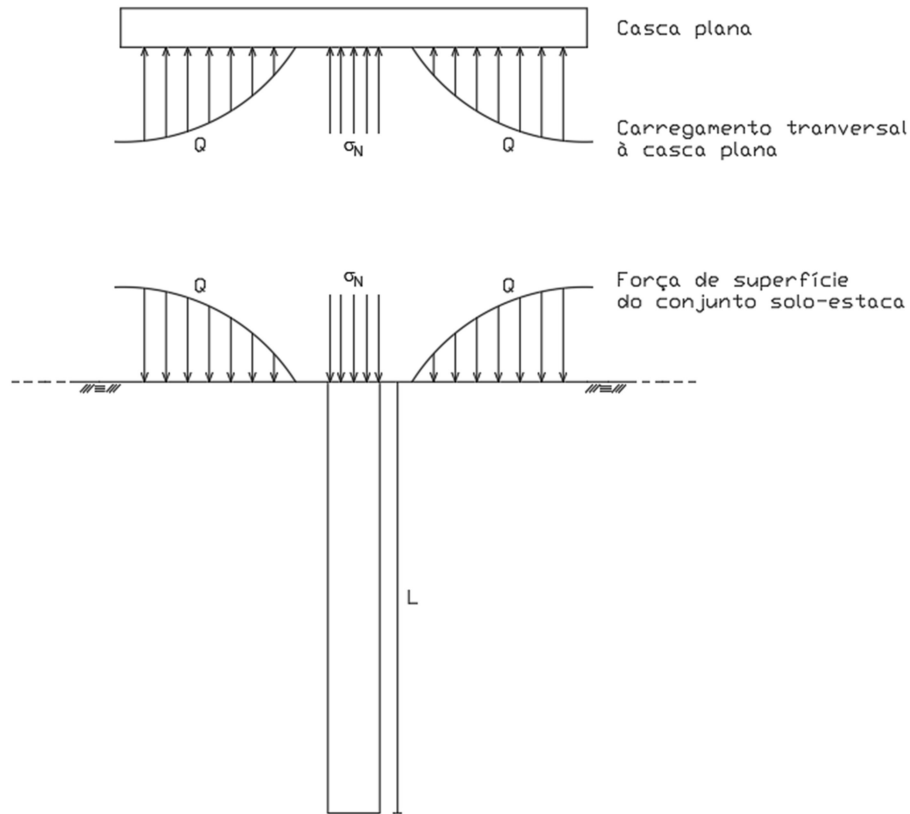


Figura 8.2 – Tensões efetivas na interface casca plana - solo.

Onde:

$$R_1 = \sqrt{R^2 + x_3^2(s)} \quad (8.3)$$

$$F_0(R) = \ln\left(\frac{R + R_1}{x_3(s)}\right) \quad (8.4)$$

$$F_1(R) = \frac{1}{2}[RR_1 - x_3^2(s)F_0(R)] \quad (8.5)$$

$$F_2(R) = -\frac{R}{R_1} + F_0(R) \quad (8.6)$$

$$F_3(R) = R_1 - x_3(s) \quad (8.7)$$

$$F_4(R) = -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{x_3(s)} \quad (8.8)$$

$$\alpha = \frac{2(1 - \nu)}{4\pi G} \quad (8.9)$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi G} \quad (8.10)$$

O processo para a obtenção da equação integral (8.2) encontra-se descrito no Apêndice A.

8.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO

Seja a superfície do solo submetida a forças de superfície Q_s , e discretizada com 4 elementos de contorno triangulares, a linha de carga com 2 elementos de contorno lineares. Pretende-se obter a matriz dos coeficientes de influência do solo $[G]$.

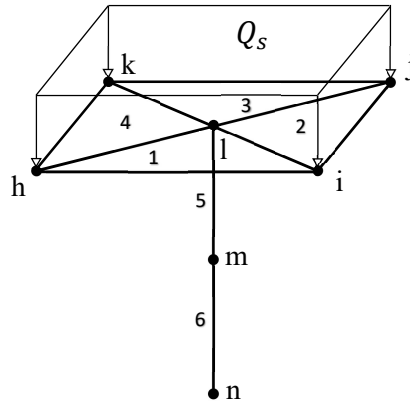


Figura 8.3 – Nós e elementos do exemplo ilustrativo.

Considerando somente, para efeitos de ilustração, o componente de deslocamento vertical, as matrizes que compõem a matriz final $[G]$ são dadas conforme a seguir:

$$[G_{SS}] = \begin{bmatrix} a_{hh}^{1+4} & a_{hi}^{1+2} & a_{hj}^{2+3} & a_{hk}^{3+4} & 0 \\ a_{ih}^{1+4} & a_{ii}^{1+2} & a_{ij}^{2+3} & a_{ik}^{3+4} & 0 \\ a_{jh}^{1+4} & a_{ji}^{1+2} & a_{jj}^{2+3} & a_{jk}^{3+4} & 0 \\ a_{kh}^{1+4} & a_{ki}^{1+2} & a_{kj}^{2+3} & a_{kk}^{3+4} & 0 \\ a_{lh}^{1+4} & a_{li}^{1+2} & a_{lj}^{2+3} & a_{lk}^{3+4} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$[G_{SE}] = \begin{bmatrix} b_{hl}^5 & b_{hm}^{5+6} & b_{hn}^6 \\ b_{il}^5 & b_{im}^{5+6} & b_{in}^6 \\ b_{jl}^5 & b_{jm}^{5+6} & b_{jn}^6 \\ b_{kl}^5 & b_{km}^{5+6} & b_{kn}^6 \\ b_{ll}^5 & b_{lm}^{5+6} & b_{ln}^6 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

$$[G_{ES}] = \begin{bmatrix} c_{mh}^{1+4} & c_{mi}^{1+2} & c_{mj}^{2+3} & c_{mk}^{3+4} & 0 \\ c_{nh}^{1+4} & c_{ni}^{1+2} & c_{nj}^{2+3} & c_{nk}^{3+4} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

8 Análise da Interação Casca plana-Estaca-Solo

$$[G_{EE}] = \begin{bmatrix} d_{ml}^5 & d_{mm}^{5+6} & d_{mn}^6 \\ d_{nl}^5 & d_{nm}^{5+6} & d_{nn}^6 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Onde:

x_{ij}^{k+l} : soma dos coeficientes de influência no nó j comum aos elementos k e l , com o ponto fonte no nó i .

Fazendo a superposição das matrizes acima, obtém-se finalmente:

$$[G] = \begin{bmatrix} a_{hh}^{1+4} & a_{hi}^{1+2} & a_{hj}^{2+3} & a_{hk}^{3+4} & b_{hl}^5 & b_{hm}^{5+6} & b_{hn}^6 \\ a_{ih}^{1+4} & a_{ii}^{1+2} & a_{ij}^{2+3} & a_{ik}^{3+4} & b_{il}^5 & b_{im}^{5+6} & b_{in}^6 \\ a_{jh}^{1+4} & a_{ji}^{1+2} & a_{jj}^{2+3} & a_{jk}^{3+4} & b_{jl}^5 & b_{jm}^{5+6} & b_{jn}^6 \\ a_{kh}^{1+4} & a_{ki}^{1+2} & a_{kj}^{2+3} & a_{kk}^{3+4} & b_{kl}^5 & b_{km}^{5+6} & b_{kn}^6 \\ a_{lh}^{1+4} & a_{li}^{1+2} & a_{lj}^{2+3} & a_{lk}^{3+4} & b_{ll}^5 & b_{lm}^{5+6} & b_{ln}^6 \\ c_{mh}^{1+4} & c_{mi}^{1+2} & c_{mj}^{2+3} & c_{mk}^{3+4} & d_{ml}^5 & d_{mm}^{5+6} & d_{mn}^6 \\ c_{nh}^{1+4} & c_{ni}^{1+2} & c_{nj}^{2+3} & c_{nk}^{3+4} & d_{nl}^5 & d_{nm}^{5+6} & d_{nn}^6 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

8.4 ACOPLAMENTO MEC/MEF

Nesta altura, todas as matrizes necessárias para o acoplamento MEC/MEF do sistema casca-plana-estaca-solo já se encontram determinadas, nos itens 6.4, 7.3 e 8.2, o que auxilia na descrição abaixo do acoplamento. Os subscritos “ c ”, “ e ”, “ p ” e “ ce ” nas expressões abaixo designam respectivamente a casca plana, a estaca, a placa e o conjunto casca plana-estaca.

A matriz de rigidez do conjunto casca plana-estaca é dada por:

$$[K_{ce}] = \begin{bmatrix} [K_c] & 0 \\ 0 & [K_e] \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Onde:

$[K_e]$: matriz de rigidez da(s) estaca(s).

$[K_c]$: matriz de rigidez da casca plana, composta pelas matrizes de rigidez da placa DKT e da chapa CST, e dada por:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} [K_{DKT}] & 0 \\ 0 & [K_{CST}] \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

Do mesmo modo, a matriz de transformação do conjunto casca plana-estaca é dada por:

$$[T_{ce}] = \begin{bmatrix} [T_c] & 0 \\ 0 & [T_e] \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

Onde:

$[T_c] = [T_p]$, ou seja, o carregamento transversal aplicado na casca plana é transformado em cargas nodais, conforme feito no item 7.3.

A matriz $[M]$ é calculada como:

$$[M] = [T_{ce}][G]^{-1} \quad (8.19)$$

Onde:

$[G]$: matriz dos coeficientes de influência determinada no item 8.2.

Levando em consideração as condições de equilíbrio e de compatibilidade, pode-se escrever:

$$[[K_{ce}] + [M]]\{\bar{u}\} = \{F_c\} \quad (8.20)$$

Logo, chega-se a formulação do acoplamento MEC/MEF:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{F_c\} \quad (8.21)$$

Onde:

$[\bar{K}]$: matriz de rigidez equivalente do sistema casca plana-estaca-solo.

$\{\bar{u}\}$: vetor dos deslocamentos nodais da região de contato placa-solo e da(s) estaca(s).

$\{F_c\}$: vetor das cargas externas aplicadas na casca plana.

9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

9.1 INTERAÇÃO ESTACA-SOLO

A seguir apresentam-se exemplos em que estacas estão submetidas a forças horizontais, verticais e a momentos fletores nos seus topos. Os resultados de interesse são os deslocamentos e rotações nos nós das estacas, ao longo da profundidade do solo. Todas as estacas deste capítulo são discretizadas com 20 elementos finitos de viga tridimensional.

9.1.1 Estacas isoladas

Exemplo 1

Existem várias aplicações em que se têm estacas submetidas a forças laterais e a momentos fletores, como em:

- estruturas offshore sujeitas à ação de vento e de ondas;
- estruturas de contenção estaqueadas;
- fundações de torres de transmissão onde grandes forças de vento podem atuar;
- estruturas de porto e cais onde forças horizontais são provocadas pelo impacto de navios durante a atracação e a ação de ondas;
- estruturas construídas em áreas de terremoto onde algumas normas de construção recomendam que as estacas possam suportar uma carga lateral de 10% da carga axial aplicada.

Seja o caso teórico de uma estaca circular flexível de comprimento $L_p = 25$ e diâmetro $D_p = 1$, inserida em um meio homogêneo, elástico e linear. É aplicada uma carga lateral unitária no topo da estaca, no nível do terreno. O fator de flexibilidade da estaca é $K_R = 10^{-5}$.

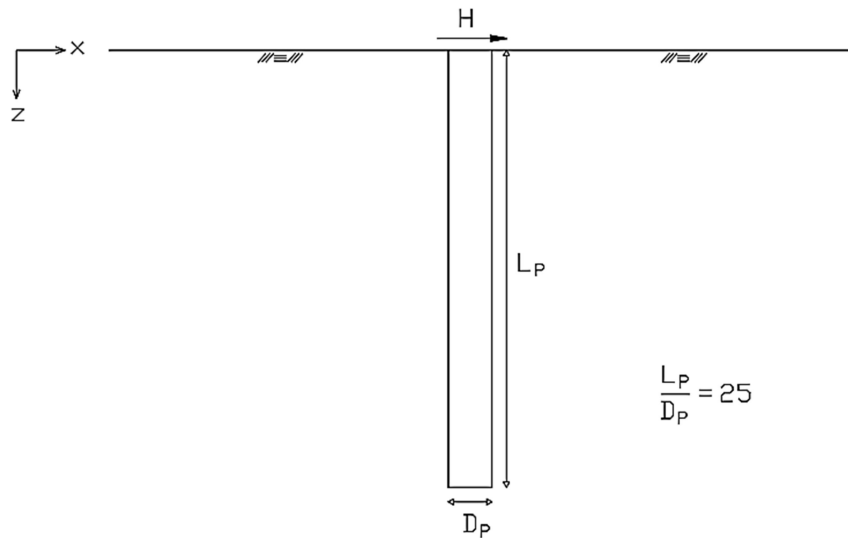


Figura 9.1 – Estaca inserida num meio homogêneo e submetida à carga horizontal H .

Sendo:

$$K_R = \frac{E_p I_p}{E_S L_p^4}$$

Onde:

E_p : módulo de elasticidade longitudinal da estaca.

E_S : módulo de deformabilidade do solo.

I_p : momento de inércia da estaca.

L_p : comprimento da estaca.

Neste exemplo $E_S = 1$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$.

E_p é calculado pela expressão acima de K_R e vale: $E_p = 79,6$.

Pretende-se analisar a interação estaca-solo com as formulações desenvolvidas neste trabalho.

Resultados

Na Tabela 9.1 e na Figura 9.2, apresentam-se os deslocamentos e rotações nos nós da estaca em relação à profundidade da mesma dentro do solo.

Nó	Cota	Deslocamento U_x	Rotação θ_y
1	0	0.53971	-0.25968
2	1,25	0.26224	-0.16829
3	2,5	0.11338	-0.76113E-01
4	3,75	0.54713E-01	-0.24820E-01
5	5	0.37339E-01	-0.66514E-02
6	6,25	0.32432E-01	-0.24400E-02
7	7,5	0.29663E-01	-0.22155E-02
8	8,75	0.26779E-01	-0.23606E-02
9	10	0.23894E-01	-0.22103E-02
10	11,25	0.21326E-01	-0.18854E-02
11	12,5	0.19183E-01	-0.15510E-02
12	13,75	0.17423E-01	-0.12758E-02
13	15	0.15966E-01	-0.10656E-02
14	16,25	0.14738E-01	-0.90574E-03
15	17,5	0.13687E-01	-0.78107E-03
16	18,75	0.12775E-01	-0.68080E-03
17	20	0.11978E-01	-0.59807E-03
18	21,25	0.11275E-01	-0.52885E-03
19	22,5	0.10650E-01	-0.47244E-03
20	23,75	0.10087E-01	-0.43222E-03
21	25	0.95568E-02	-0.42102E-03

Tabela 9.1 – Deslocamentos e rotações nos nós da estaca.

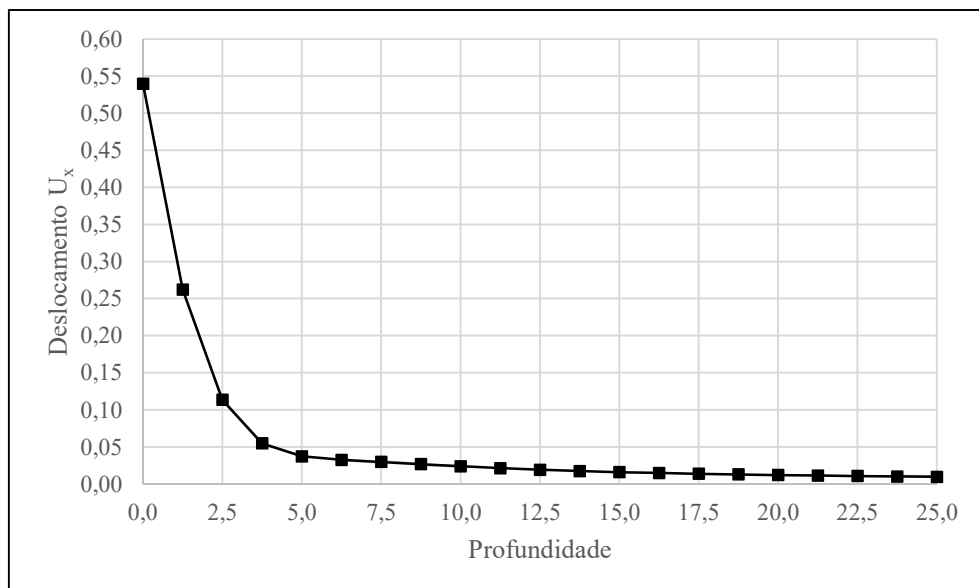


Figura 9.2 – Deslocamento lateral da estaca com a profundidade.

Dos resultados obtidos, observa-se que para uma estaca flexível, a flexão é predominante principalmente na parte superior da estaca. A partir da metade da estaca até a base, a flexão é muito pequena, com os deslocamentos muito pequenos e quase constantes.

Na Figura 9.3, são apresentados os resultados obtidos por PARREIRA (1993) pelo MEC, para a mesma estaca do presente exemplo. Segundo esse autor, elementos subparamétricos são mais adequados para modelar deslocamentos e forças de interação de estacas flexíveis, com uma redução significativa de incógnitas envolvidas. Dividindo a estaca em 20 elementos subparamétricos, obteve para o nó do topo da estaca, um deslocamento U_x praticamente igual ($U_x = 0,54$) ao obtido pela formulação MEC/MEF apresentada neste trabalho.

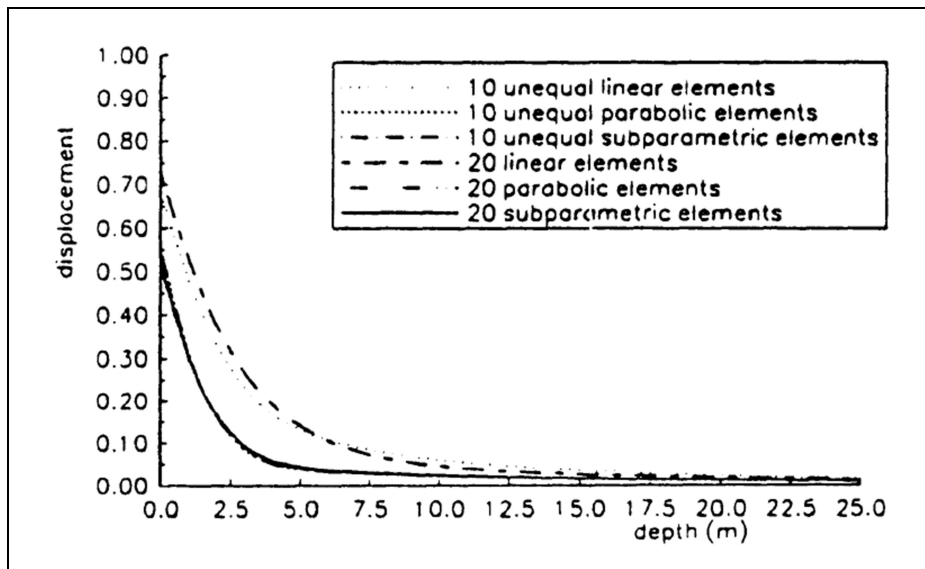


Figura 9.3 – Deslocamento lateral da estaca com a profundidade.

Fonte: PARREIRA (1993).

Exemplo 2

A estaca de concreto de um cais, conforme a figura abaixo, está submetida à carga lateral, axial e a momento fletor. Dividindo a estaca em 20 elementos finitos, considerando os dados na figura, e um módulo de elasticidade $E_p = 21 \text{ GPa}$, determinou-se o deslocamento lateral, o recalque e o giro no topo da estaca.

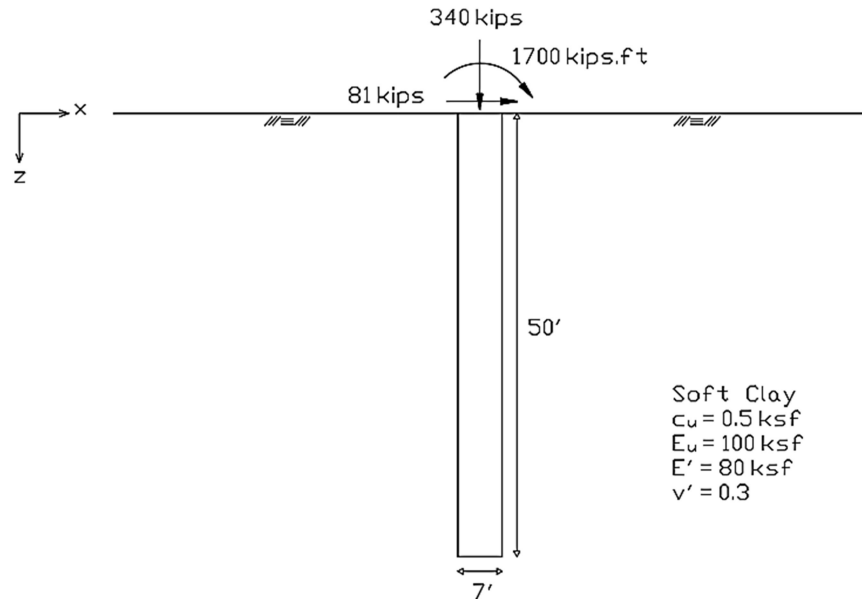


Figura 9.4 – Estaca sob ação simultânea da carga lateral, axial e momento fletor.

Resultados

Os resultados obtidos pela formulação MEC/MEF são comparados com os obtidos por POULOS (1980) pela teoria da elasticidade, na tabela abaixo. Pode-se observar boa adequação entre os resultados, em que as pequenas diferenças advêm dos métodos utilizados e do módulo de elasticidade do concreto adotado, não informado no exemplo da literatura. Adotou-se um módulo de deformação secante da classe de resistência C20, de acordo com a NBR 6118:2014 item 8.2.8.

	Este trabalho	Poulos (1980)
Estaca		
Deslocamento U_x (mm)	24,15	25,40
Recalque U_z (mm)	31,18	30,48
Rotação θ_y (°)	0,16	0,20

Tabela 9.2 – Comparação dos resultados obtidos na análise da estaca do cais.

9.1.2 Grupo de estacas

Exemplo 3

Consideram-se os dados do Exemplo 1, neste exemplo é analisada a influência do espaçamento s entre duas estacas, conforme indicado na figura abaixo.

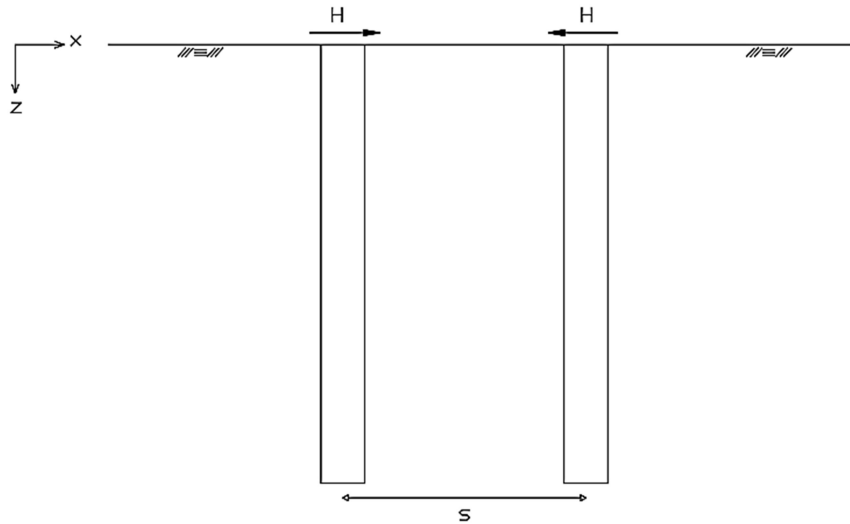


Figura 9.5 – Duas estacas separadas por uma distância s .

Na Figura 9.6, observa-se que quanto menor é o espaçamento entre duas estacas, mais rígido se torna o sistema estaca-solo, ou seja, menor é o deslocamento lateral U_x das estacas. Por outro lado, os efeitos de interação diminuem assim que o espaçamento entre as estacas aumenta, recaindo no caso de estacas isoladas.

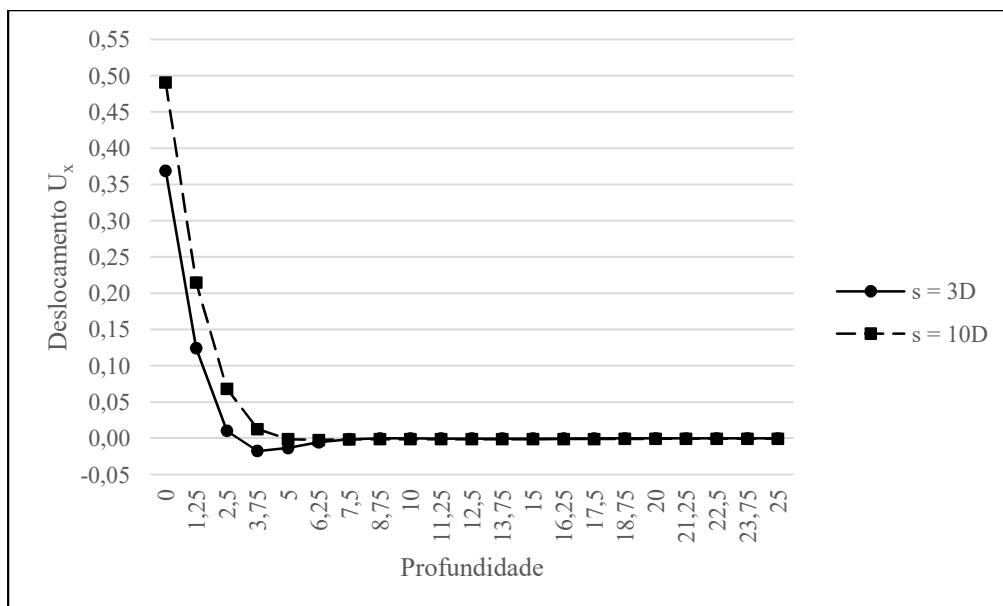


Figura 9.6 – Deslocamento lateral da estaca para $s = 3D$ e $s = 10D$.

Exemplo 4

Considera-se a seguir um grupo de 4 estacas, conforme a figura abaixo, igualmente separadas e submetidas cada a cargas horizontais H nas duas direções de forma que o carregamento global no grupo seja simétrico a fim de se obter deslocamentos iguais em módulo.

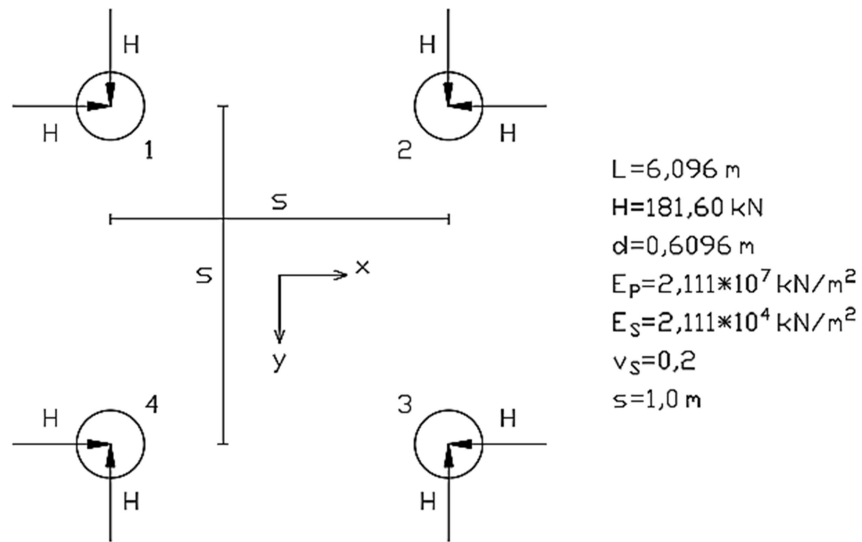


Figura 9.7 – Grupo de 4 estacas submetido a carregamento horizontal simétrico.

Resultados

Os deslocamentos e rotações no topo para cada estaca do grupo encontram-se na tabela abaixo. Cada estaca, como nos exemplos anteriores, é dividida em 20 elementos finitos.

	Este trabalho	Matos Filho (1999)
Estacas 1, 2, 3 e 4		
Deslocamento U_x (mm)	2,4304	2,5611
Rotação θ_y (rad)	$0,1523 \cdot 10^{-2}$	$0,1610 \cdot 10^{-2}$
Deslocamento U_y (mm)	2,4304	2,5611
Rotação θ_x (rad)	$0,1523 \cdot 10^{-2}$	$0,1610 \cdot 10^{-2}$

Tabela 9.3 – Comparação dos resultados obtidos na análise do grupo de 4 estacas.

Os resultados da Tabela 9.3 são dados em módulo. O sinal dos deslocamentos em cada direção corresponde ao sinal da carga aplicada na referente direção. Por exemplo, os deslocamentos da Estaca 1 são todos positivos e da Estaca 3, negativos. Além disso, U_x e θ_y , assim como U_y e θ_x , têm sinais contrários.

Como se pode constatar, os deslocamentos e rotações no topo das estacas são iguais em módulos, e os resultados obtidos pela formulação proposta neste trabalho estão de acordo com os obtidos pela formulação apresentada por MATOS FILHO (1999). Nessa última formulação, as estacas são discretizadas por apenas um único elemento finito com 4 nós, e os deslocamentos transversais ao longo da estaca são representados por uma função polinomial do 4º grau; essa formulação apresenta resultados aceitáveis desde que a estaca submetida à carga lateral seja curta.

Exemplo 5

Um grupo de 9 estacas igualmente separadas estão submetidas cada, a uma carga horizontal $H = 20 \text{ kN}$ numa única direção, conforme mostrado na figura abaixo. O grupo de estacas é dividido em 4 subgrupos para poder se analisar os efeitos em cada subgrupo.

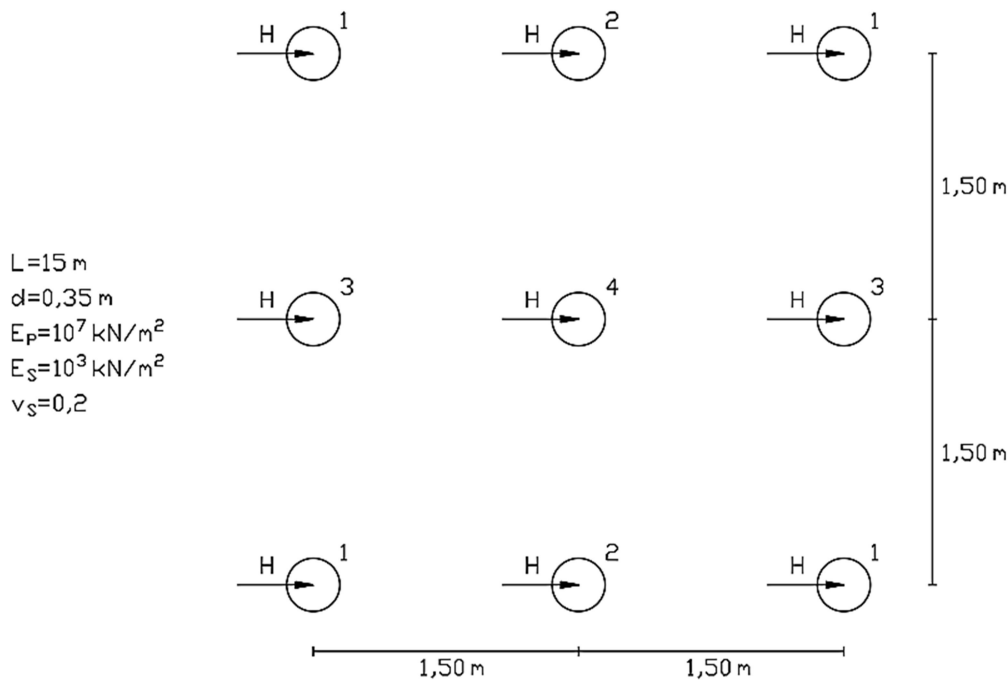


Figura 9.8 – Grupo de 9 estacas cada submetida à carga horizontal numa única direção.

Resultados

	Este trabalho	Matos Filho (1999)	Ribeiro (2009)
Grupo 1			
Deslocamento U_x (mm)	36,156	32,946	33,278
Grupo 2			
Deslocamento U_x (mm)	39,094	35,284	35,622
Grupo 3			
Deslocamento U_x (mm)	39,474	35,842	36,162
Grupo 4			
Deslocamento U_x (mm)	42,987	38,632	38,907

Tabela 9.4 – Comparação dos resultados obtidos na análise do grupo de 9 estacas.

Observando os deslocamentos ocorrendo no topo das estacas em cada subgrupo, pode-se afirmar que os menores deslocamentos ocorrem nas estacas localizadas longe do centro geométrico (Grupo 1) e os maiores, nas estacas próximas do centro geométrico (Grupo 4). Aqui como a estaca é relativamente longa e o carregamento sendo puramente lateral em uma única direção, as diferenças entre as formulações já se tornam notáveis. Nas formulações em MATOS FILHO (1999) e RIBEIRO (2009), a estaca é modelada com um único elemento finito de quatro nós. Já a formulação deste trabalho permite simular melhor a flexibilidade da estaca, modelada com vinte elementos finitos de viga tridimensional.

9.2 INTERAÇÃO PLACA-SOLO

9.2.1 Carregamento aplicado no solo

Exemplo 6

Sobre a superfície de um meio semi-infinito homogêneo é aplicado um carregamento quadrado de $Q = 100 \text{ kN/m}^2$ e com 2 m de aresta, conforme a figura abaixo. O módulo de elasticidade do material é $E_s = 10000 \text{ kN/m}^2$ e o coeficiente de Poisson é zero. O ponto A está no centro do quadrado e o ponto B coincide com um dos vértices.

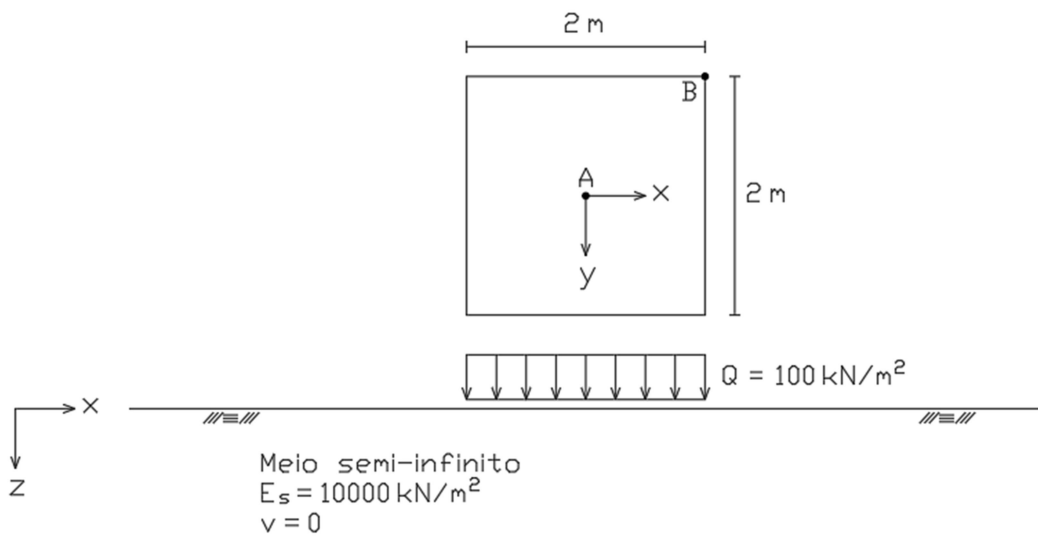


Figura 9.9 – Meio semi-infinito com carregamento aplicado.

A área carregada do solo é modelada com uma malha de 4 ECTs e 5 nós, conforme a figura abaixo.

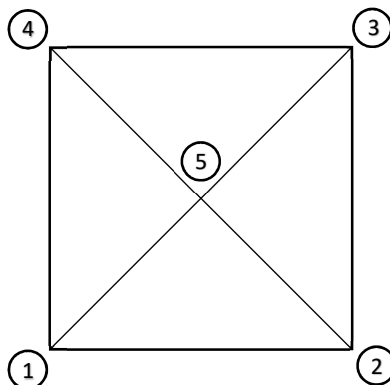


Figura 9.10 – Malha com 4 ECTs e 5 nós.

Resultados

O sistema obtido pelo código computacional desenvolvido é:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = K \begin{bmatrix} 2,49290 & 0,93432 & 0,62426 & 0,93432 & 2,06519 \\ 0,93432 & 2,49290 & 0,93432 & 0,62426 & 2,06519 \\ 0,62426 & 0,93432 & 2,49290 & 0,93432 & 2,06519 \\ 0,93432 & 0,62426 & 0,93432 & 2,49290 & 2,06519 \\ 1,76275 & 1,76275 & 1,76275 & 1,76275 & 7,05099 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Onde:

$$K = \frac{1 - \nu}{4 \pi G} = \frac{1}{4 \pi 5000} = \frac{10^{-4}}{2\pi} = 1,59155 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{kN}$$

Pela matriz $[G]$, pode-se observar nitidamente em cada linha, a influência produzida em cada célula devido à ação dos pontos fontes colocados nos nós. Nota-se, por exemplo, que o maior coeficiente de influência em cada linha aparece no nó correspondente ao ponto fonte. E com o ponto fonte no nó 5, e este sendo equidistante aos nós 1, 2, 3 e 4, os coeficientes de influência nesses nós apresentam também o mesmo valor.

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 7,0510 \times 100 \times K = 1,1222 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$u_5 = 14,1020 \times 100 \times K = 2,2444 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Como previsto, o maior deslocamento ocorre no centro da área carregada.

		Ponto A	Erro (%)	Ponto B	Erro (%)
Solução exata		2,2444	–	1,1222	–
Moser et al. (2004)		2,2520	0,7	1,1298	0,4
Ribeiro (2009)	Sem ECIs (73 nós)	2,1410	4,6	1,0371	7,6
	Com ECIs (73 nós)	2,2114	1,5	1,1159	0,6
Este trabalho	ECTs (5 nós)	2,2444	0,0	1,1222	0,0

Tabela 9.5 – Deslocamento vertical $[\text{m} \cdot 10^{-2}]$.

Os resultados comprovam a eficiência da solução fundamental de Mindlin em relação às outras abordagens para os problemas envolvendo um meio contínuo semi-infinito.

Exemplo 7

O exemplo anterior é resolvido empregando-se desta vez uma malha com 16 ECTs.

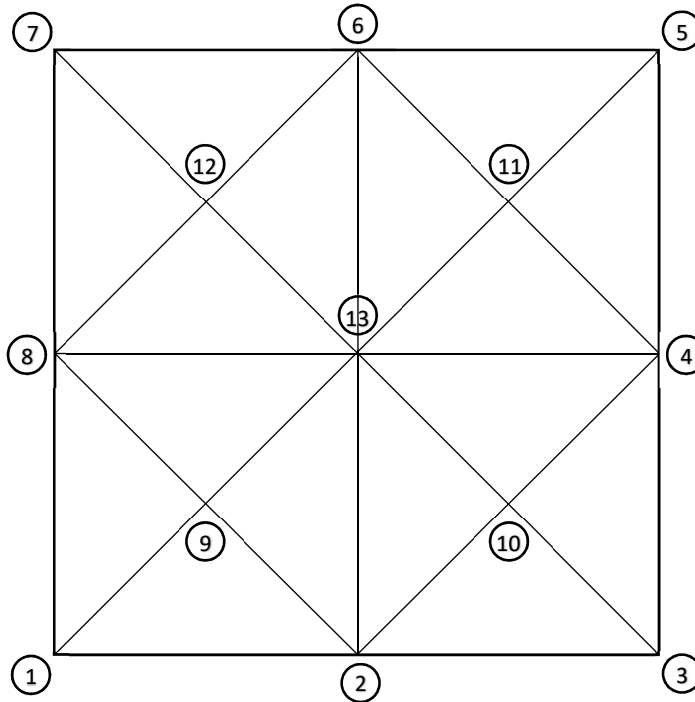


Figura 9.11 – Malha com 16 ECTs e 13 nós.

Resultados

Nó	Deslocamento
1 ≡ 3 ≡ 5 ≡ 7	1,1222
2 ≡ 4 ≡ 6 ≡ 8	1,5317
9 ≡ 10 ≡ 11 ≡ 12	2,0137
13	2,2444

Tabela 9.6 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$].

Observa-se que quanto menor é a distância do nó ao centro de gravidade, maior é o deslocamento nesse nó; o maior deslocamento ocorrendo, portanto, no centro da área carregada. Pode-se notar também que os resultados nos nós do centro e dos cantos não se alteraram com uma malha mais refinada, ou seja, a solução é estável. Uma malha mais refinada permitiu apenas obter resultados em novos nós.

Exemplo 8

Resolve-se o Exemplo 6, desta vez com um carregamento linearmente distribuído, conforme a figura abaixo, para mostrar a abrangência dos carregamentos verticais que podem ser aplicados na superfície do solo.

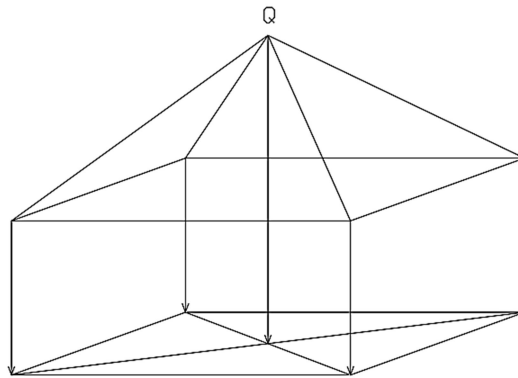


Figura 9.12 – Área com carregamento linearmente distribuído.

O vetor das forças de superfície é dado por:

$$Q = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Resultados

Nó	Deslocamento (Exemplo 6)	Deslocamento (Exemplo 8)
1 ≡ 2 ≡ 3 ≡ 4	1,1222	1,4509
5	2,2444	3,3666

Tabela 9.7 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$].

Observa-se evidentemente que os deslocamentos do presente exemplo são maiores que os do Exemplo 6, uma vez que foi acrescentado um terço do carregamento. De fato, o volume da pirâmide equivale ao terço do volume do paralelepípedo logo abaixo na Figura 9.12. O deslocamento apresentou um acréscimo de 29,29% nos vértices e de 50% no centro da área carregada.

9.2.2 Placa apoiada no solo

Exemplo 9

Ainda tomando como base o Exemplo 6, a carga agora está aplicada na placa, e esta é apoiada no solo, conforme a figura abaixo. Pretende-se a analisar a influência da interação placa-solo nos deslocamentos na região de contato.

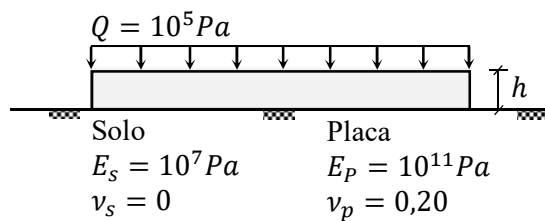


Figura 9.13 – Placa apoiada no solo e submetida a carregamento uniforme.

Emprega-se a malha, mostrada na figura abaixo, tanto para a superfície do solo quanto para a base da placa.

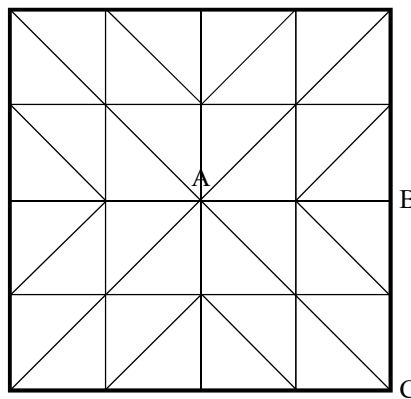


Figura 9.14 – Malha empregada na discretização do solo e da placa.

Resultados

Nó	Deslocamento		
	Carga-Solo $h = 0,00 m$	Placa-Solo	
		$h = 0,10 m$	$h = 0,20 m$
A	2,2444	1,6132	1,5573
B	1,5317	1,5635	1,5506
C	1,1222	1,4994	1,5417

Tabela 9.8 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$].

9 Exemplos Numéricos

Como se pode observar, a placa apoiada no solo tende a reduzir o maior deslocamento e a uniformizar a distribuição os deslocamentos na região de contato. O deslocamento no centro apresentou uma redução de 28,1% para $h = 0,10\text{ m}$, e 30,6% para $h = 0,20\text{ m}$.

Exemplo 10

Seja o problema conforme definido na figura abaixo. Trata-se de uma placa apoiada no solo e submetida:

- (a) à força concentrada $P = 1\text{ N}$ no centro da placa
- (b) a um carregamento uniformemente distribuído $g = 1\text{ Pa}$ em toda a área da placa

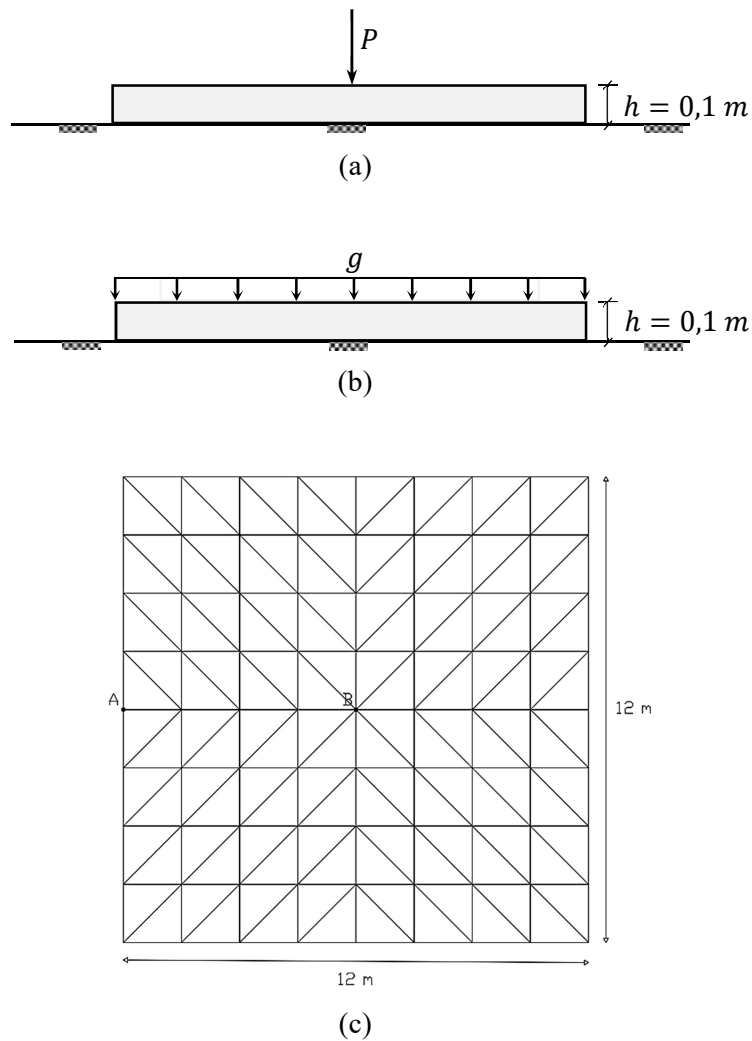


Figura 9.15 – Placa apoiada no solo: (a) força concentrada aplicada no centro; (b) carregamento uniformemente distribuído; (c) malha da placa e do solo.

Para o solo, adotou-se um módulo de elasticidade $E_s = 2,6 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$.

Para a placa, o módulo é escolhido em função de um coeficiente α dado por:

$$\alpha = 180\pi \left(\frac{E_s}{E_p} \right) \left(\frac{a}{t} \right)^3$$

Onde:

$$a = \frac{L}{6} \quad L : \text{lado da placa.}$$

Resultados

a) Placa flexível

Dados: $\text{Log}[\alpha] = 1,8561 \rightarrow E_p = 1,638 \cdot 10^{13} \text{ N/m}^2$

$$P = 1 \text{ N}$$

$$\nu_s = 0,5$$

$$\nu_p = 0,15$$

Ponto	Paiva (1993)	Messafer (1989)	Este trabalho
	MEC/MEC	MEC/MEF	MEC/MEF
A	0,1690	0,2000	0,1693
B	0,5720	0,5720	0,5722

Tabela 9.9 – Deslocamento vertical no centro (B) e no ponto (A) da Placa [$w \cdot 10^9 \text{ m}$].

Os deslocamentos são praticamente iguais. Exceto para os deslocamentos deste trabalho obtidos pelo código computacional desenvolvido, o restante é obtido de um gráfico encontrado em PAIVA (1993). O único deslocamento que fugiu do padrão foi o obtido por MESSAFER (1989) no ponto A da placa, provavelmente devido ao emprego de uma malha com 100 elementos finitos quadrangulares do tipo ACM (Adini, Clough & Melosh). No presente trabalho e em PAIVA (1993), emprega-se uma malha com 128 elementos de contorno triangulares. A solução fundamental de Mindlin é utilizada nas três formulações.

b) Placa de rigidez intermediária

Dados: $\text{Log}[\alpha] = 1,08 \rightarrow E_p = 9,783 \cdot 10^{13} \text{ N/m}^2$

$$g = 1 \text{ Pa}$$

$$\nu_s = 0,3$$

$$\nu_p = 0,3$$

Ponto	Paiva (1993)	Messafer (1989)	Almeida (2003b)	Ribeiro (2009)	Este trabalho
	MEC/MEC	MEC/MEF	MEC/MEF	MEC-ECI/MEF	MEC/MEF
A	2,88	3,00	3,54	3,41	3,50
B	3,26	3,63	3,79	3,76	3,90

Tabela 9.10 – Deslocamento vertical no centro (B) e no ponto (A) da Placa [$w \cdot 10^8$ m].

Com a carga uniformemente distribuída observa-se uma boa concordância nos resultados empregando a formulação MEC/MEF. Em ALMEIDA (2003b) e RIBEIRO (2009), é utilizada a solução fundamental de Kelvin. O último autor também faz uso de elementos de contorno infinito (ECI) para aprimorar a modelagem do solo.

c) Placa rígida

Dados: $\text{Log}[\alpha] = 0 \rightarrow E_p = 1,176 \cdot 10^{15} \text{ N/m}^2$

$$P = 1 \text{ N}$$

$$\nu_s = 0,5$$

$$\nu_p = 0,15$$

Paiva (1993)	Mendonça (1997)	Almeida (2003b)	Este trabalho
MEC/MEC	MEC/MEF	MEC/MEF	MEC/MEF
0,2160	0,2124	0,2599	0,2145

Tabela 9.11 – Deslocamento vertical no centro da Placa [$w \cdot 10^9$ m].

As formulações em PAIVA (1993) e em ALMEIDA (2003b) são comentadas acima. O resultado em MENDONÇA (1997) apresenta uma boa concordância com o deste trabalho para o elemento DKT.

9.3 INTERAÇÃO CASCA PLANA-ESTACA-SOLO

9.3.1 Carregamento vertical

Exemplo 11

Faz-se a análise da interação de uma placa com uma estaca inserida em meio homogêneo, conforme a figura abaixo.

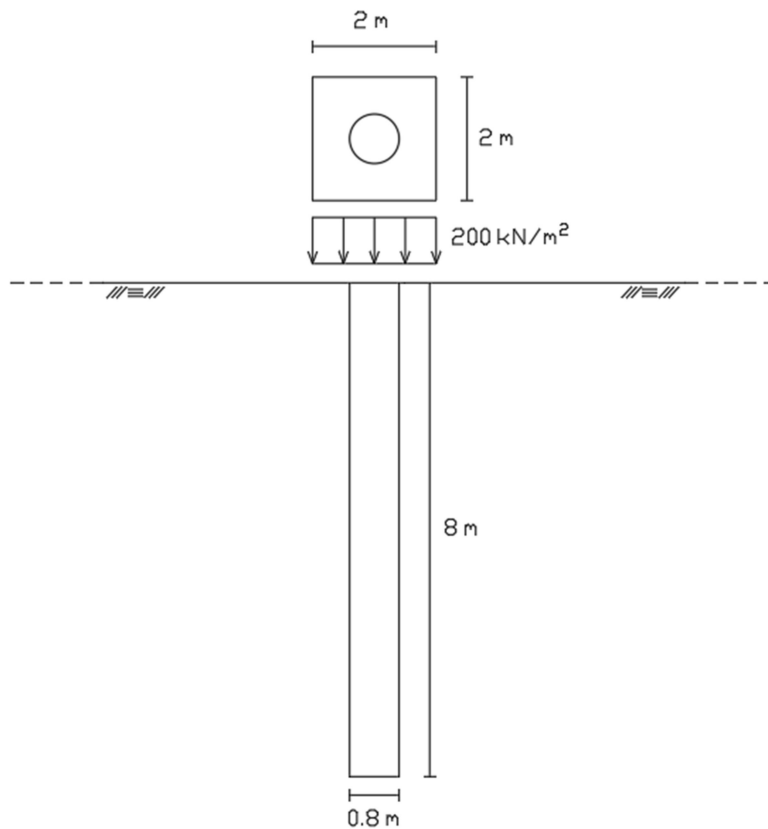


Figura 9.16 – Placa com 1 estaca imersa no solo.

Dados:

		Solo	Estaca	Placa
Módulo de elasticidade [kN/m^2]	Análise 1	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^9$
	Análise 2	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Coeficiente de Poisson		0,5	0,2	0,2
Dimensões [m]		Semi-infinito	$D = 0,8$ $L = 8$	$A = 2 \times 2$ $h = 0,5$

Tabela 9.12 – Dados para análise da interação placa-1 estaca-solo.

9 Exemplos Numéricos

Numa primeira análise, um carregamento vertical e uniformemente distribuído $Q = 200 \text{ kN/m}^2$ é aplicado sobre toda a área da placa. A placa como a estaca possuem as mesmas propriedades físicas, e ambas são admitidas rígidas em relação ao solo, logo se adotou: $E_p = E_e = 10^6 E_s$. Em seguida, considera-se a carga Q e a carga concentrada resultante no topo da estaca $P = 800 \text{ kN}$, e a placa e a estaca são consideradas flexíveis com: $E_p = E_e = 10^2 E_s$.

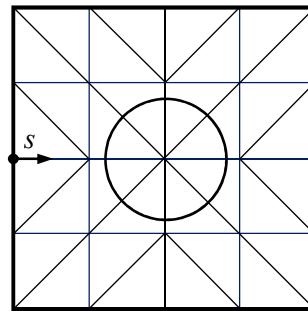


Figura 9.17 – Malha empregada para a placa e a superfície do solo.

Resultados

Análise 1: Placa e Estaca rígidas

Paiva e Trondi (1999)	Ribeiro (2009)	Este trabalho
MEC/MEC	MEC-ECI/MEF	MEC/MEF
4,13	4,17	4,20

Tabela 9.13 – Deslocamento vertical no topo da estaca [cm].

Análise 2: Placa e Estaca flexíveis

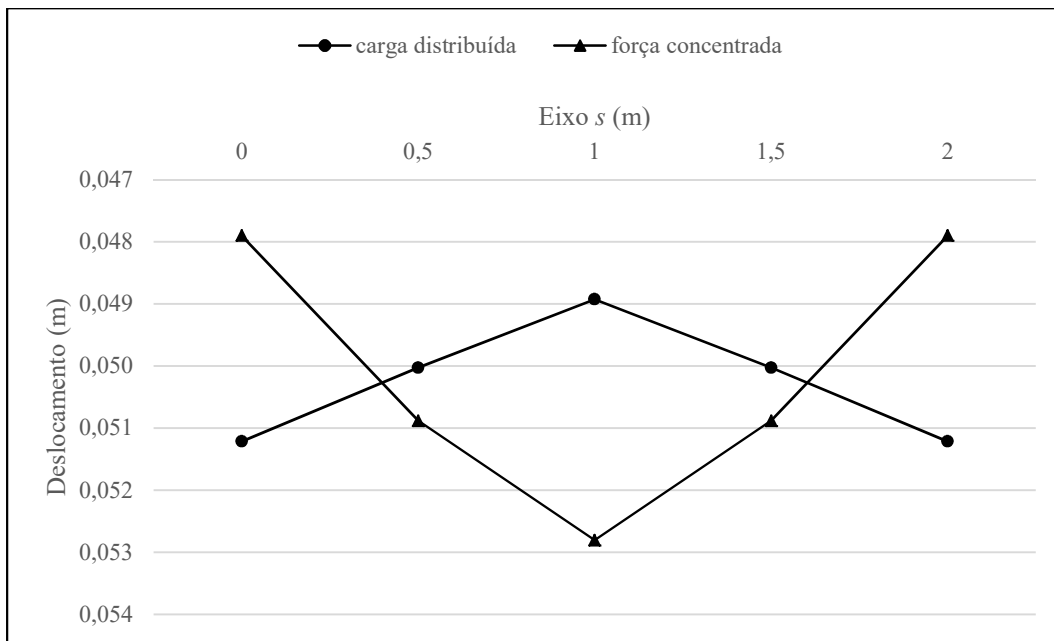


Figura 9.18 – Deslocamento vertical ao longo do eixo s.

Análise 3: Deslocamentos da estaca flexível e rígida

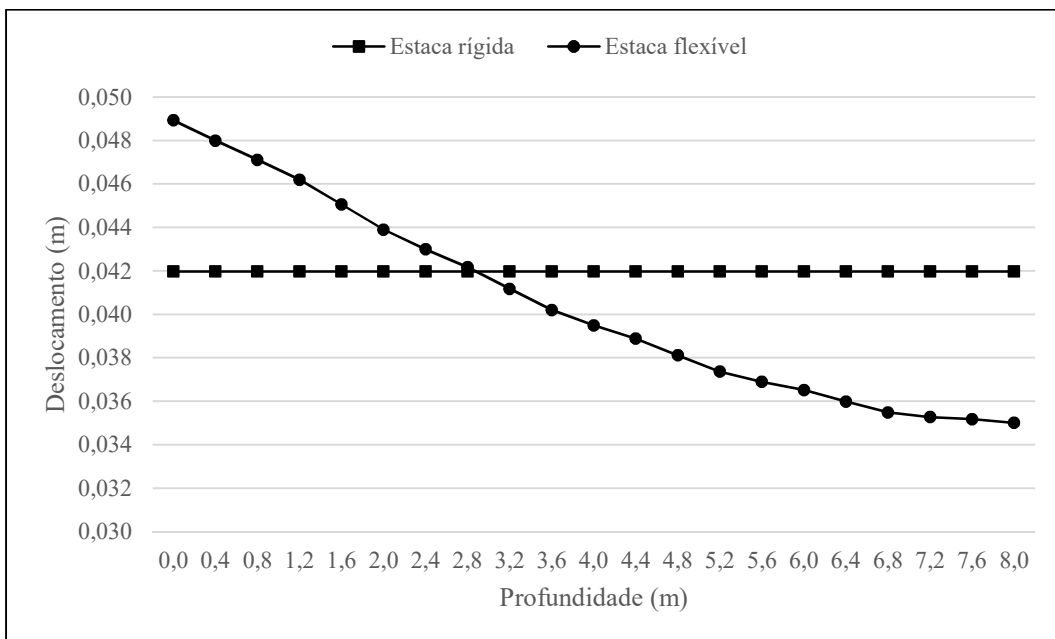


Figura 9.19 – Deslocamento vertical da estaca com a profundidade.

9 Exemplos Numéricos

Na Análise 1, os deslocamentos são praticamente constantes em toda a placa devido à grande rigidez da mesma em relação ao solo. Os resultados das três formulações estão de acordo. Vale notar a eficiência da solução fundamental de Mindlin e do acoplamento MEC/MEF, uma vez que em RIBEIRO (2009), faz-se uso, além da malha da Figura 9.17, de elementos de contorno infinito para conseguir a convergência do resultado.

Na Análise 2, para o caso de placa e estaca flexíveis, os resultados apresentam uma boa concordância com os encontrados em RIBEIRO (2009). Conforme a Figura 9.18, com a carga distribuída aplicada na placa, a placa flexiona apresentando convexidade. Já quando se aplica uma força concentrada no topo da estaca, ou seja, no centro da placa, a flexão da placa ocorre com concavidade. Ou seja, dependendo do tipo de carregamento, a placa apresenta dois modos de flexão.

Na Análise 3, quando a estaca é rígida, o deslocamento da mesma com a profundidade ocorre de modo uniforme como um corpo rígido. Já quando a estaca é flexível, o maior deslocamento ocorre no topo da estaca e se reduz gradativamente com a profundidade.

Exemplo 12

Propõe-se comparar a interação placa-solo e placa-estaca-solo quando forças concentradas são aplicadas no topo das estacas.

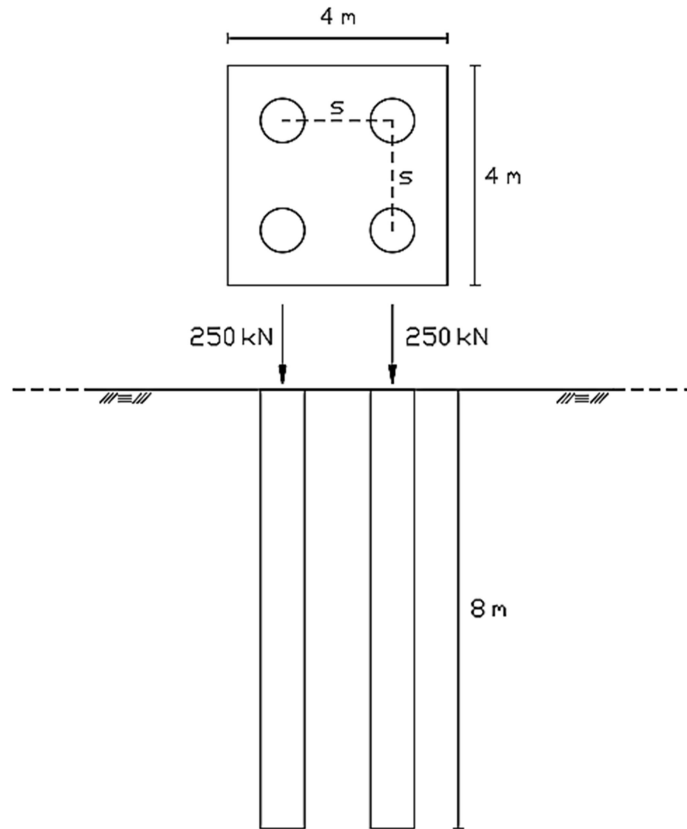


Figura 9.20 – Placa com 4 estacas imersas no solo.

Dados:

	Solo	Estaca	Placa
Módulo de elasticidade [kN/m^2]	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Coefficiente de Poisson	0,5	0,2	0,2
Dimensões [m]	Semi-infinito	$D = 0,8$ $L = 8$ $s = 2$	$A = 4 \times 4$ $h = 0,5$

s : espaçamento entre estacas.

Tabela 9.14 – Dados para análise da interação placa-4estacas-solo.

É aplicada uma força concentrada $P = 250 \text{ kN}$ no topo de cada estaca, simulando o problema de cargas de pilares aplicadas num radier estaqueado.

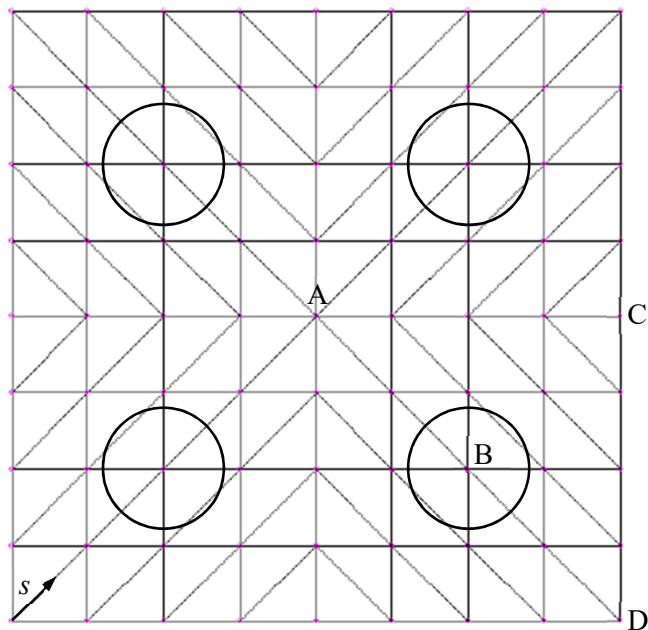


Figura 9.21 – Malha empregada para a placa e a superfície do solo.

Resultados

	Placa-Solo	Placa-Estaca-Solo
A	6,292	3,887
B	5,862	3,681
C	5,172	3,351
D	4,008	2,787

Tabela 9.15 – Deslocamento vertical [$m \cdot 10^{-2}$].

Na Figura 9.22, mostram-se os deslocamentos na direção do eixo s mostrada na Figura 9.21.

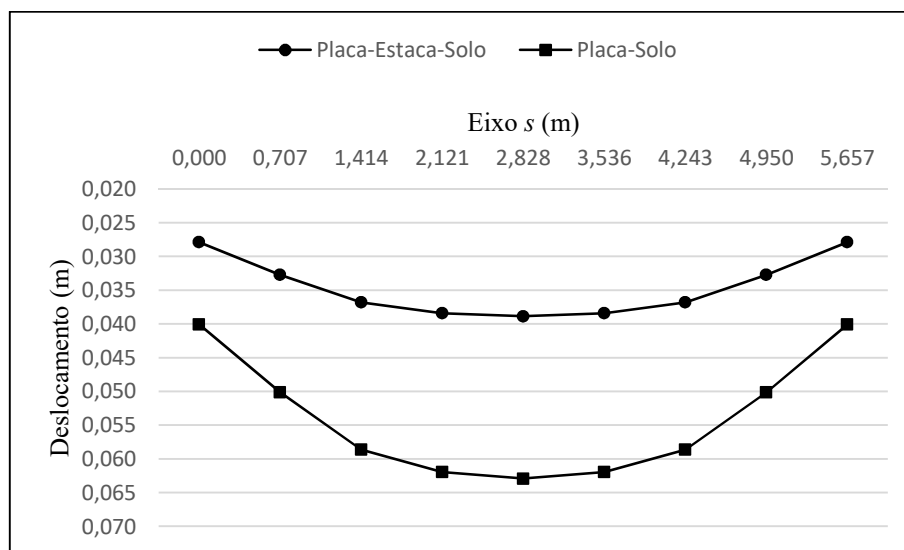


Figura 9.22 – Comparação dos deslocamentos entre os sistemas Placa-Solo e Placa-Estaca-Solo.

Dos resultados, pode-se notar a redução dos deslocamentos ao estaquear a placa. Há em geral, uma redução de mais de 30% dos deslocamentos no sistema placa-estaca-solo em relação ao sistema placa-solo, sendo 38,2 % no centro da placa e 37,2 % nos pontos de aplicação da força concentrada. E nos dois sistemas, quanto mais perto for o nó do centro geométrico, maior é o deslocamento nesse nó.

Exemplo 13

A seguir, analisa-se a interação entre o solo e uma sapata longa apoiada sobre 4 estacas, e submetida a um carregamento uniformemente distribuído, conforme a figura abaixo. A sapata e as estacas são admitidas flexíveis.

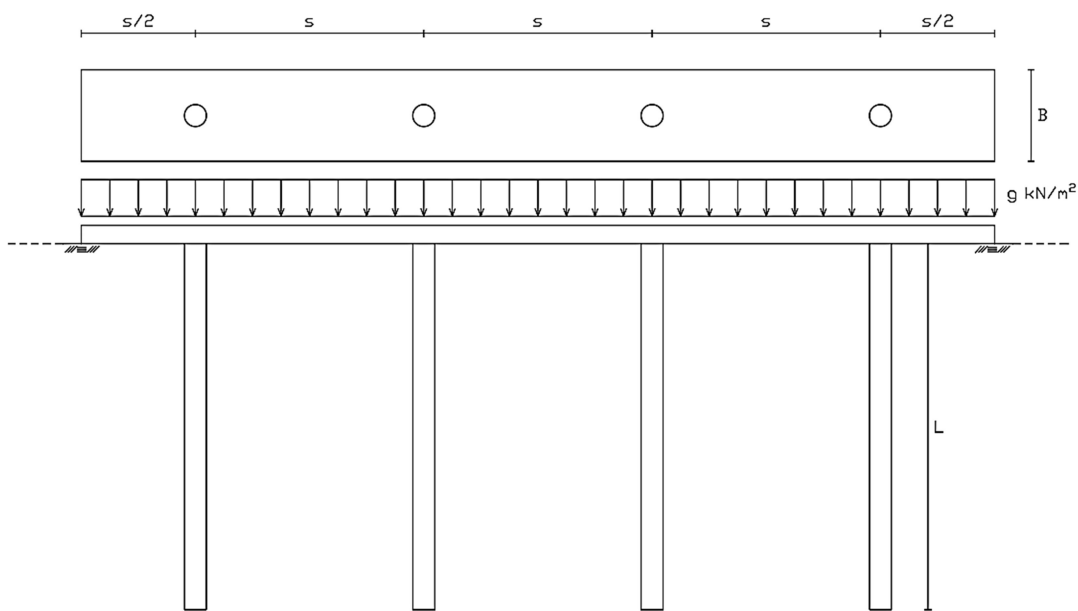


Figura 9.23 – Sapata longa apoiada sobre 4 estacas.

Dados:

	Solo	Estaca	Sapata
Módulo de elasticidade [N/m^2]	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}$
Coefficiente de Poisson	0,5	0,2	0,2
Dimensões [m]	Semi-infinito	$D = 0,5$ $L = 25$ $s = 6,25$	$L = 25$ $B = 2,5$ $h = 0,079$

Tabela 9.16 – Dados para análise da interação sapata-4estacas-solo.

9 Exemplos Numéricos

A malha da sapata e da superfície do solo é composta por 51 nós e 64 elementos, conforme a figura abaixo.

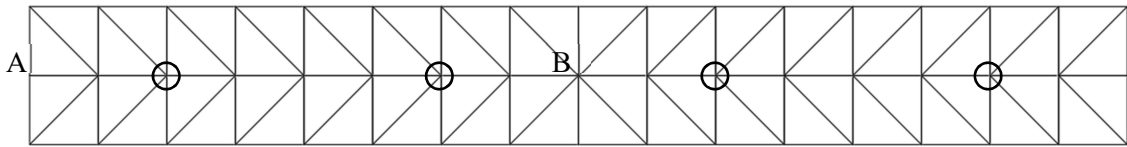


Figura 9.24 – Malha empregada para a placa e a superfície do solo.

Resultados

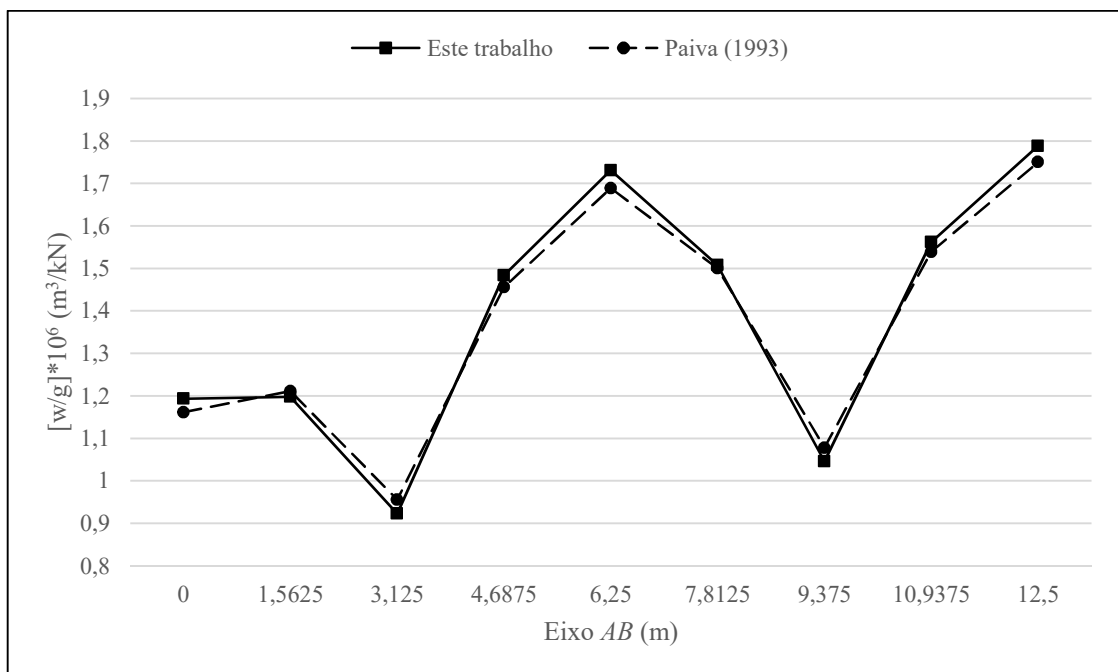


Figura 9.25 – Comparação dos deslocamentos ao longo do eixo *AB* da sapata longa.

Os resultados das duas formulações apresentam uma boa concordância. Pode-se observar que as estacas mais afastadas do centro geométrico apresentam o menor deslocamento.

9.3.2 Carregamento horizontal

Exemplo 14

Pretende-se calcular o deslocamento lateral de um grupo de 6 estacas sob um bloco de capeamento rígido, devido a um carregamento H_G , conforme a figura abaixo.

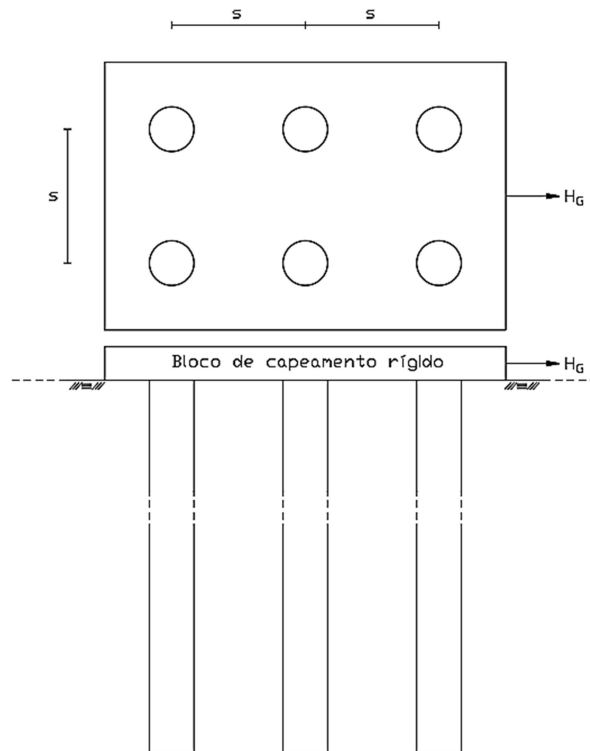


Figura 9.26 – Grupo de 6 estacas sob um bloco de capeamento rígido.

Dados:

Estaca:

- Comprimento: $L = 25$ pés
- Diâmetro: $D = 1$ pé
- Espaçamento: $s = 3$ pés

Solo:

- Módulo de elasticidade: $E_s = 500$ lb/pol²

Coefficiente de flexibilidade: $K_R = 10^{-3}$

Carga aplicada: $H_G = 100$ kips

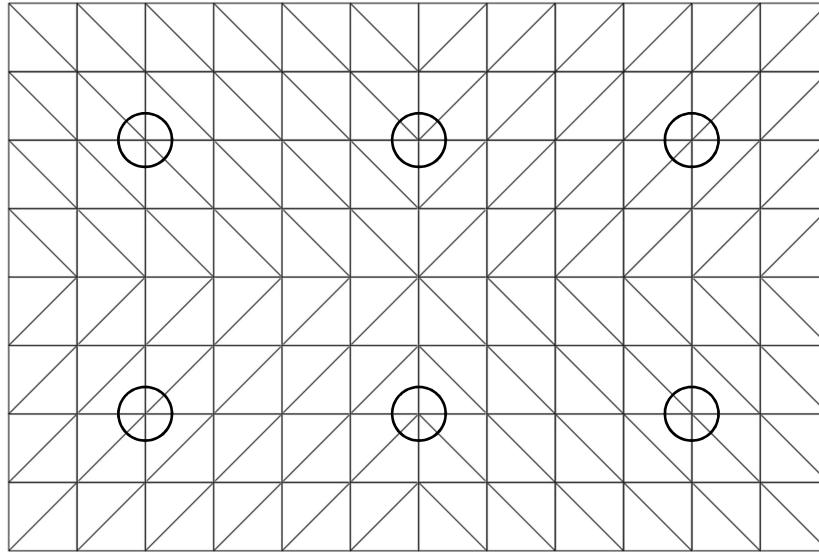


Figura 9.27 – Malha empregada para a capa rígida e a superfície do solo.

Resultados

	Deslocamento
Poulos (1980)	1,53
Matos Filho (1999)	1,20
Este trabalho	1,47

Tabela 9.17 – Deslocamento lateral no topo das estacas [pol].

Tratando-se de estacas sob um bloco de capeamento rígido, os deslocamentos no topo dessas estacas são iguais. Os resultados obtidos pelas diferentes formulações apresentam uma boa concordância. As diferenças se devem aos métodos utilizados.

Em POULOS (1980), faz-se uma análise simplificada de grupos de estacas. De fato, é feito inicialmente um estudo paramétrico da interação entre duas estacas e o solo, e a partir dos resultados obtidos, o método é aplicado ao estudo de grupos de estacas, considerando a superposição elástica da influência de todos os elementos do grupo tomado dois a dois. Embora esta superposição só seja válida quando todas as estacas estão distribuídas ao longo de uma circunferência, este método tem sido utilizado para calcular a distribuição de carga em grupos de estacas em que isto não ocorre (PAIVA, 1993), como é o caso do presente exemplo. Além disso, nesse método, nem se consideram as dimensões da casca plana, e sim, apenas o espaçamento entre as estacas.

Em MATOS FILHO (1999), é utilizado o acoplamento MEC/MEF em que a estaca é modelada por apenas um único elemento finito com quatro nós. Nessa formulação, prescreve-se primeiro um deslocamento unitário no topo de cada estaca, com rotação restringida. Por um processo algébrico, calculam-se os esforços horizontais para que ocorra esse deslocamento unitário. Esses esforços são utilizados como coeficientes para calcular, por um processo de equilíbrio, os esforços atuantes em cada estaca devido ao carregamento aplicado no bloco de capeamento rígido. Aplicando os esforços atuantes em cada estaca, obtêm-se finalmente os deslocamentos no topo das estacas. Assim como no método de POULOS (1980), nesse método, leva-se apenas em consideração o espaçamento entre as estacas.

No presente trabalho, o bloco de capeamento rígido é modelado como uma casca plana de rigidez muito alta. Não se aplicou nenhuma restrição no topo das estacas. A ligação entre as estacas e a casca plana acontece exclusivamente na matriz de rigidez em que são somados os coeficientes de rigidez desses elementos estruturais nos nós em comum, sendo assim um modelo matemático mais realístico. Consideram-se deveras as dimensões da casca plana cuja malha pode receber maior refinamento.

Exemplo 15

Um radier estaqueado com 9 estacas é submetido a uma carga lateral uniformemente distribuída Q , conforme a figura abaixo. Analisam-se os deslocamentos laterais no topo das estacas considerando os casos do radier estaqueado ser flexível ou rígido.

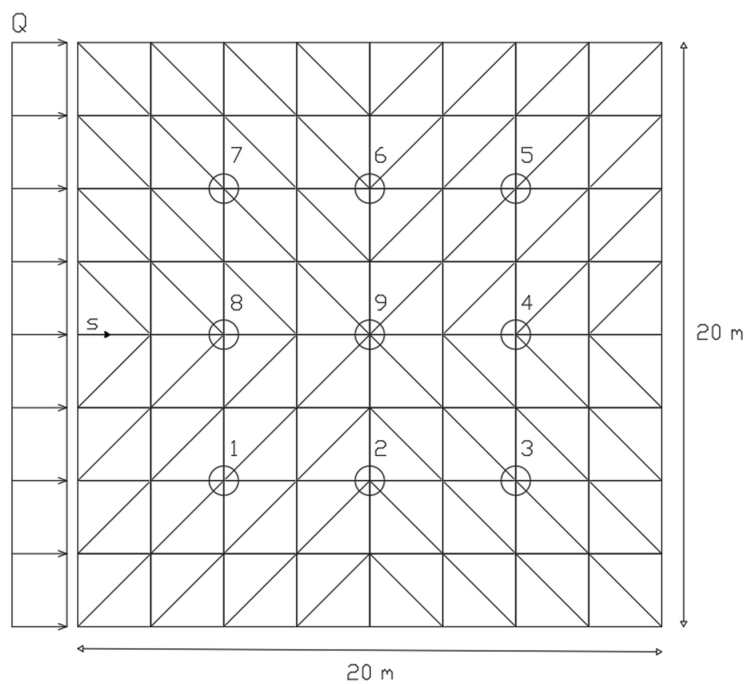


Figura 9.28 – Radier estaqueado submetido a carregamento uniformemente distribuído.

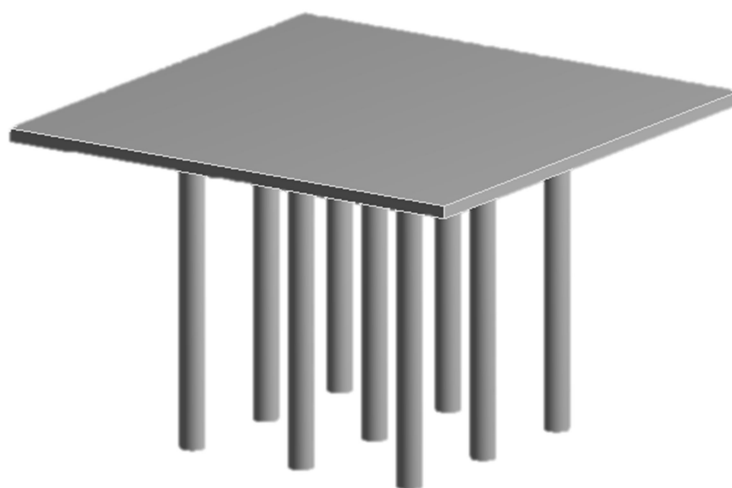


Figura 9.29 – Modelo 3D do radier estaqueado.

Dados:

		Solo	Estaca	Placa
Módulo de elasticidade [kN/m^2]	Análise 1	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^9$
	Análise 2	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
Coeficiente de Poisson		0,5	0,2	0,2
Dimensões [m]		Semi-infinito	$D = 1,0$ $L = 12,5$	$A = 20 \times 20$

Tabela 9.18 – Dados para análise da interação radier estaqueado-solo.

A carga lateral aplicada é $Q = 100 \text{ kN}/m^2$, e a espessura da placa é $h = 0,50 \text{ m}$.

Resultados

Análise 1: Radier estaqueado rígido

	Deslocamento
Todas as estacas	2,823

Tabela 9.19 – Deslocamento lateral no topo das estacas [$m \cdot 10^{-2}$].

Com o radier estaqueado rígido em relação ao solo, os deslocamentos no topo das estacas são iguais, sendo um caso parecido ao do exemplo anterior.

Análise 2: Radier estaqueado flexível

	Deslocamento
Estaca 1	5,571
Estaca 2	5,368
Estaca 3	5,255
Estaca 4	5,215
Estaca 5	5,255
Estaca 6	5,368
Estaca 7	5,571
Estaca 8	5,529
Estaca 9	5,322

Tabela 9.20 – Deslocamento lateral no topo das estacas [$m \cdot 10^{-2}$].

9 Exemplos Numéricos

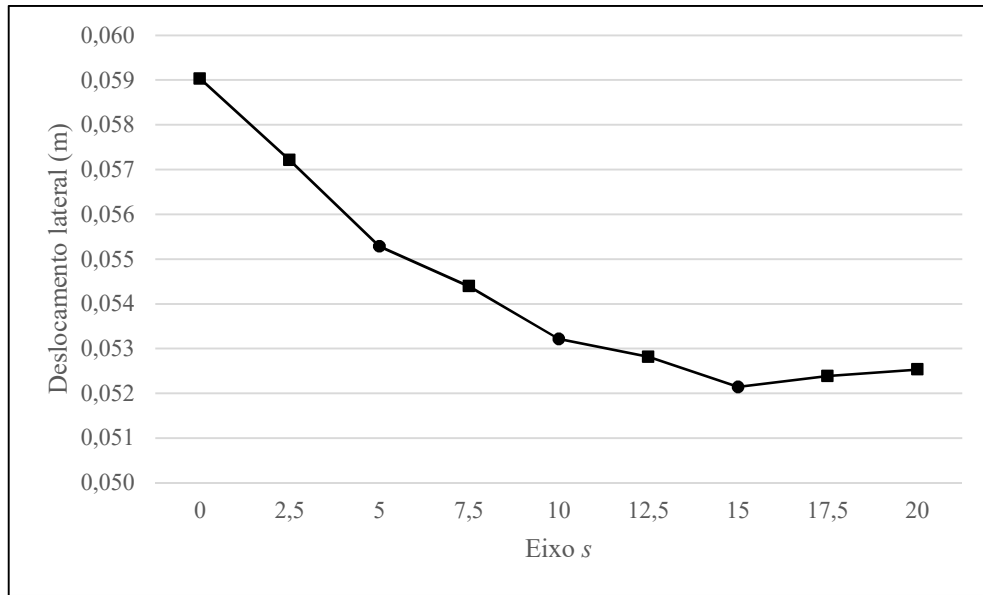


Figura 9.30 – Deslocamento lateral ao longo do eixo s.

Caso o radier estaqueado for flexível, os deslocamentos no topo das estacas apresentam diferenças que podem ser consideráveis ou pequenas, em função do coeficiente de flexibilidade. Com a carga Q aplicada à esquerda da casca plana, as estacas mais à esquerda (estacas 1, 7 e 8) recebem o maior carregamento, logo apresentam os maiores deslocamentos. Pode-se notar também a simetria nos resultados em que ocorrem deslocamentos iguais para as estacas 1 e 7, 2 e 6, 3 e 5. Os deslocamentos do sistema flexível são quase o dobro do sistema rígido.

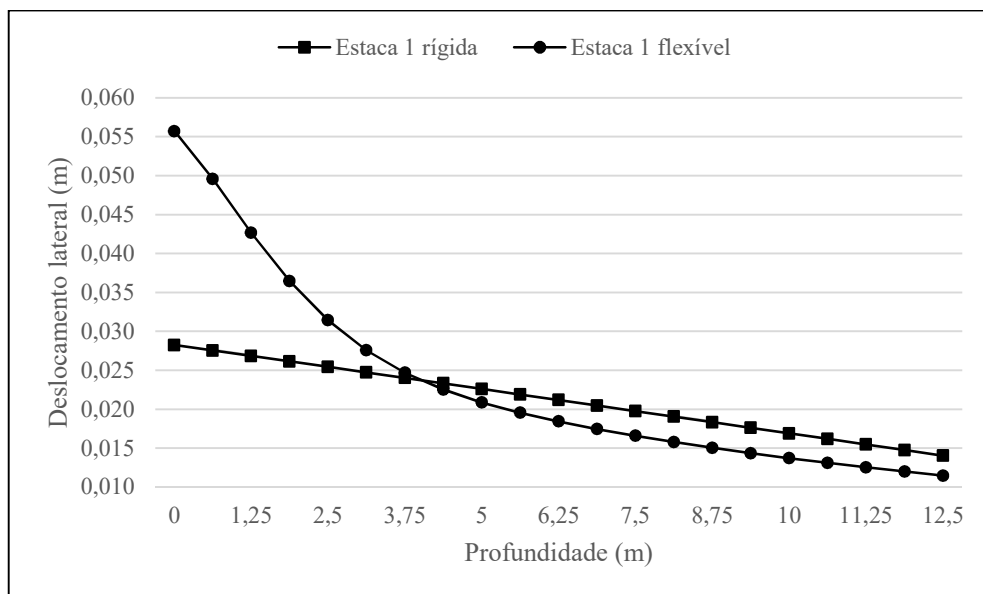


Figura 9.31 – Comparação dos deslocamentos laterais das estacas flexível e rígida.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

10.1 CONCLUSÕES

A interação solo-estrutura é uma área de grande interesse que vem recebendo anualmente vários trabalhos em que são estudados os diversos aspectos relacionados ao tema. Neste trabalho, realiza-se, portanto, a análise da interação entre a placa (radier, sapata, bloco de fundação), a estaca e o solo. O solo é modelado pelo MEC utilizando a solução fundamental de Mindlin, solução particularmente adequada para uma análise consistente de problemas envolvendo meios infinitos ou semi-infinitos. De fato, com essa solução, basta modelar as áreas carregadas, que no presente estudo, são a superfície do solo modelada com elementos de contorno triangulares ou células, e as estacas modeladas com linhas de carga. Com o MEF, a estaca é modelada com vários elementos finitos de viga tridimensional, e a placa é modelada com elementos finitos de casca plana, possibilitando a consideração dos efeitos de flexão e de membrana. Foi possível demonstrar pelos exemplos numéricos, a eficiência da metodologia adotada. Com o emprego da solução fundamental de Mindlin e do acoplamento MEC/MEF, mostrou-se, por exemplo, a rápida convergência da solução numérica com malhas relativamente simples.

A maior contribuição do trabalho, nessa nova abordagem, é o desenvolvimento de códigos computacionais em que a estaca é modelada com vários elementos finitos de viga tridimensional. De fato, em trabalhos anteriores dessa linha de pesquisa, a estaca era modelada como um único elemento finito com quatro nós; aplicando uma carga lateral no topo da estaca, a análise fornecia resultados satisfatórios somente para estacas curtas. Com a presente abordagem, a estaca poder ser de qualquer tamanho e a sua flexibilidade é simulada de modo muito adequada. A consideração de cargas horizontais aplicadas no sistema placa-estaca-solo é outra contribuição relevante do presente trabalho. De fato, em trabalhos encontrados na literatura, a consideração da carga horizontal é geralmente feita para a análise de um grupo de estacas sob um bloco de capeamento rígido, e recorre-se, conforme discutido nos exemplos, a uma análise simplificada do problema em que a carga, ao invés de ser aplicada diretamente na placa, é redistribuída no topo das estacas, como em POULOS (1980) e em AI e FENG (2014). E nessas análises, na modelagem do problema, considera-se apenas o espaçamento das estacas, sem levar em conta as dimensões da placa. Já no presente

10 Considerações Finais

trabalho, o bloco de capeamento rígido é modelado como uma casca plana de rigidez muito alta. Não se recorreu à simplificação do problema no que diz respeito à restrição nos nós do topo das estacas. A conexão entre a casca plana e as estacas, como realizada naturalmente entre os elementos estruturais analisados via método dos elementos finitos, acontece na matriz de rigidez do conjunto casca plana e estaca, em que são somados os coeficientes de rigidez nos nós em comum. Tal abordagem possibilita além da análise de grupos de estacas, a análise também de radiers estaqueados de qualquer rigidez. E a carga horizontal ou vertical, podendo ser concentrada ou distribuída, encontra-se efetivamente aplicada na placa.

Os exemplos numéricos deste trabalho foram elaborados de modo a possibilitar o entendimento sistemático do fenômeno de interação solo-estrutura. Em primeiro lugar, são simulados problemas de interação entre a estaca ou grupo de estacas com o solo. A estaca pode ser de qualquer tamanho e receber no seu topo cargas verticais, laterais e momentos fletores. Nessas análises, observou-se a concordância dos resultados com os encontrados na literatura, com a vantagem da modelagem do problema ser relativamente simples em decorrência da solução fundamental de Mindlin utilizada. De fato, basta entrar com as coordenadas do topo da estaca, e a malha da mesma é gerada internamente no código computacional desenvolvido. Já no trabalho de RIBEIRO (2009), tal flexibilidade na modelagem não é observada. Em seguida, estudou-se a interação entre a placa e o solo. Analisou-se também a resposta mecânica do solo devido à carga vertical aplicada diretamente na superfície. E por fim, realizou-se a análise da interação entre a placa, a estaca e o solo, em que o carregamento na placa pode ser vertical (carga proveniente dos pilares, por exemplo) e lateral (forças de vento, de impacto, ondas de choque).

Como pode ser constatado, o desenvolvimento do código computacional se deu em três etapas, as duas primeiras sendo primordiais para verificar e validar os resultados obtidos antes de prosseguir para o problema mais geral da interação casca plana-estaca-solo, uma vez que nessa última etapa o código computacional tornou-se relativamente complexo, mas sob controle, uma vez que as novas implementações podiam ser facilmente discriminadas das anteriores, facilitando assim uma execução segura do código inteiro. Os resultados foram na maioria comparados com os de outros autores e apresentaram boa concordância. Novos resultados também foram disponibilizados. A verificação e a validação dos resultados obtidos demonstram a aplicabilidade da formulação proposta à análise de problemas práticos de engenharia de estruturas.

10.2 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para a continuidade do presente trabalho, os seguintes aspectos podem ser abordados:

- Divisão do solo em camadas;
- Consideração de estacas cruzando os contatos entre camadas;
- Consideração do escorregamento da estaca em relação ao solo;
- Consideração de não linearidade física no solo;
- Inclusão de modelos de confiabilidade estrutural;
- Extensão da formulação para cálculo de deslocamentos ao cálculo de tensões.

REFERÊNCIAS

- AI, Z.Y.; FENG, D.L.; CHENG, Y.C. BEM analysis of laterally loaded piles in multi-layered transversely isotropic soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 1095-1106, 2013.
- AI, Z.Y.; FENG, D.L. BEM analysis of laterally loaded piles in multi-layered transversely isotropic soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 44, p. 143-151, 2014.
- AL-DOURI, R.H.; POULOS, H.G. Cyclic behaviour of pile groups in calcareous sediments. **Soils and Foundations**, 1994, vol. 34, n. 2, p. 49-59.
- ALIABADI, M.H. **The Boundary Element Method: applications in solids and structures**. v.2, New York: Wiley, 2002.
- ALMEIDA, V.S. **Análise da interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. 2003. 192p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- ASSAN, A.E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2a ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118:2014**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6122:2010**: Projeto e execução de fundações. Rio de Janeiro: ABNT, 2010.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. 6a ed. São Paulo: Érica, 2013.
- BANERJEE, P.K.; DAVIS, T.G. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. **Géotechnique**, v. 28, n. 3, p. 309-326, 1978.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. A study of a three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1771-1812, 1980.
- BEER, G.; SMITH I.; DUENSER, C. **The Boundary Element Method with Programming: for engineers and scientists**. Germany: SpringerWienNewYork, 2008.
- BHOTHIKHUN, P.; DECHAUMPHAI, P. Adaptive DKT Finite Element for Plate Bending Analysis of Built-up Structures. **International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering**, v. 14, n. 01, 2014.
- BROWN, P.T.; WEISNER, T.J. The behaviour of uniformly loaded piled strip footings. **Soils and Foundations**. vol. 15, n. 4, 1975.

BUTTERFIELD, R.; BANERJEE, P.K. The problem of pile group – pile cap interaction. **Géotechnique**, v. 21, n. 2, 1971.

CHAKRAVORTY, A.K.; GHOSH, A. Finite difference solution for circular plates on elastic foundations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, 1975.

CHEUNG, Y.K.; NAG, D.K. Plates and beams on elastic foundations-linear and non-linear behavior. **Géotechnique**, vol. 18, 1968.

CHOW, H. S.W. **Analysis of piled-raft foundations with piles of different length and diameters**. Thesis (Doctor of Philosophy), The University of Sydney, School of Civil Engineering, 358 p., 2007.

DAVIS, E.H.; POULOS, H.G. The analysis of pile-raft systems. **Australian Geomechanics Journal**. vol. G2, n. 1, 1972, pp. 21-27.

ELGAMAL, A.; LU, J.; WANG, N. **3D Finite element analysis of laterally loaded pile groups using OPENSEESPL**. PEER Transportation Systems Research Program. University of California San Diego, 2013.

FATEMI-ARDAKANI B. **A contribution to the analysis of pile-supported raft foundations**. Southampton. Thesis (Doctorate). University of Southampton, 1989.

FERRO, N.C.P. **Uma combinação MEC/MEF para análise da interação solo-estrutura**. 1999. 193p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

HELWANY, S. **Applied soil mechanics: with ABAQUS applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

HEMSLEY, J.A. **Elastic solutions for large matrix problems in foundation interaction analysis**. In: Proc. Inst. Civ. Engrs., 1990 a, b.

HONJO, Y.; LIMANHADI, B.; WENTSUNG, L. Prediction of single pile settlement based on inverse analysis. **Soils and Foundations**, v. 33, n. 2 p. 126-144, 1993.

JALILI, M.M.; GOLMAEI, S.H.; MORADI, R. Using finite element method for pile-soil interface (through PLAXIS and ANSYS). **Journal of Civil Engineering and Construction Technology**. v. 3(10), p. 256-272, November 2012.

KAUSEL, E. **Fundamental Solutions in Elastodynamics: a Compendium**. Cambridge University Press, UK, 2006.

KAUSSEL, E. Early history of soil-structure interaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 30, p. 822-832, 2009.

LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. A BEM/FEM formulation for the analysis of piles submitted to horizontal loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 81, p. 12-20, 2017.

Referências

MALISKA, C.R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2a ed. Rio de Janeiro: LTC Editora. 2004

MATOS FILHO, R.F. **Análise da interação estaca-solo via uma combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno**. 1999. 116p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

MATOS FILHO, R.F.; MENDONÇA, A.V.; PAIVA, J.B.; Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, p. 195-203, 2005.

MENDES, R.S. Interação solo-estrutura e sua influência na análise estrutural de edifícios em concreto armado. **Revista Especialize On-line IPOG**. Edição nº10 Vol. 01/2015, Dez. 2015.

MENDONÇA, A.V. **Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. 1997. 151p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

MENDONÇA, A.V.; PAIVA, J.B. A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, p.237-247, 2000.

MESSAFER, T.; COATES L.E. An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis. **Advances in Boundary Methods**, p.211-221, Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston, 1989.

MINDLIN, R.D. **Force at a point in the interior of a semi-infinite solid**. *Physics*, 7 (May), 195–202, 1936.

MOSER, W.; DUENSER, C.; BEER, G. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61(3), p. 317-328, 2004.

NAKAGUMA, R.K. **Three-dimensional elastostatics using the boundary element method**. Southampton. Thesis (Doctorate). University of Southampton, 1979.

NEHRP Consultants Joint Venture. **Soil Structure Interaction for Building Structures**. NIST GCR 12-917-21, September 2012.

PAIVA, J.B. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura**. São Carlos. Tese (Livre docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.

PAIVA, J. B.; TRONDI, R. R. Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups. **Advances in Engineering Software**, v. 30(9-11), p. 715-724, 1999.

PAIVA, J.B. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

PARREIRA, P.; VARATOJO, P. 3D boundary element discretizations for linear elastic analysis of flexible and rigid piles. **Transactions on Modelling and Simulation**, v.3, WIT Press, 1993.

POULOS, H.G. An approximate numerical analysis of pile raft interaction. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, vol.18, 73-92, 1994.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. The settlement behavior of single axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, 1968, v. 18, p. 351-371.

POULOS, H.G. Behavior of laterally loaded piles I-Single piles. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, ASCE, 1971, v. 97, s. SM5, p. 771-731.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. **Pile foundation analysis and design**. New York: John Wiley & Sons, 1980.

RASHED, Y.F. Tutorial 1: an introduction to boundary elements. **Boundary Element Communications**, v. 12(1), p. 49-54, 2001.

RIBEIRO, D.B. **Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF**. 2005. 121p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

RIBEIRO, D.B. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. 2009. 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

SADD, M.H. **Elasticity: theory, applications and numerics**. 2nd ed. Elsevier: Academic Press, 2009.

SCOPUS: banco de dados de resumos e citações de artigos científicos. Disponível em: <<https://www.scopus.com/>>. Acesso em: 10 jan. 2018.

THE NATIONAL ACADEMIES PRESS. **Issues in Earthquake Engineering Research**. Disponível em: <<https://www.nap.edu/read/10799/chapter/4>>. Acesso em 03 mai. 2017.

THOMSON, W (Lord Kelvin). On the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge-Dublin Mathematical Journal** 3, 87-89. Cambridge: At the University Press, 1882.

ZHANG, H.H.; SMALL, J.C. Analysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical loads. **Computers and Geotechnics**, v. 26, p. 1-21, 2000.

APÊNDICE A – EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA [G_{ES}]

Para os pontos fontes localizados no domínio do solo, os deslocamentos na superfície do solo são dados por:

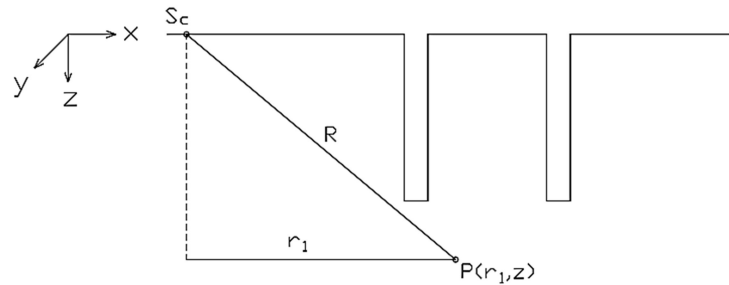


Figura A.1 – Ponto P localizado no domínio do solo.

$$w = \int_{\Omega_c} Q_c K(P, S_c) d\Omega_c \quad (\text{A.1})$$

As forças de superfície são aproximadas linearmente conforme a figura abaixo.

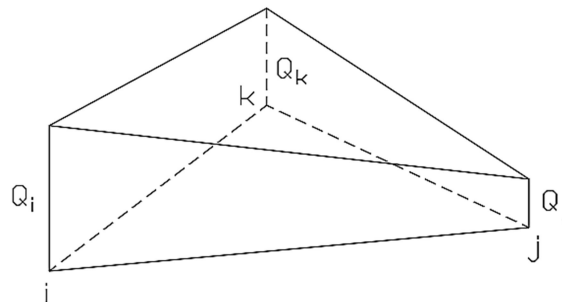


Figura A.2 – Forças de superfície na célula.

Pode-se escrever então Q_c como:

$$Q_c = \Phi_i Q_i + \Phi_j Q_j + \Phi_k Q_k \quad (\text{A.2})$$

Assim, tem-se:

$$w = \int_{\Omega_c} [\Phi_i Q_i + \Phi_j Q_j + \Phi_k Q_k] K(P, S_c) d\Omega_c \quad (\text{A.3})$$

Ou ainda:

$$w = \sum_{cell=}^{N_{cell}} \left[Q_i \int_{\Omega_c} \Phi_i K(P, S_c) d\Omega_c + Q_j \int_{\Omega_c} \Phi_j K(P, S_c) d\Omega_c + Q_k \int_{\Omega_c} \Phi_k K(P, S_c) d\Omega_c \right] \quad (A.4)$$

Seja a integral:

$$h = \int_{\Omega_c} \Phi K(P, S_c) d\Omega_c \quad (A.5)$$

Com Φ definida como:

$$\Phi = A_i x + B_i y + C_i \quad (A.6)$$

Definem-se os sistemas de coordenadas local e global conforme a figura abaixo.

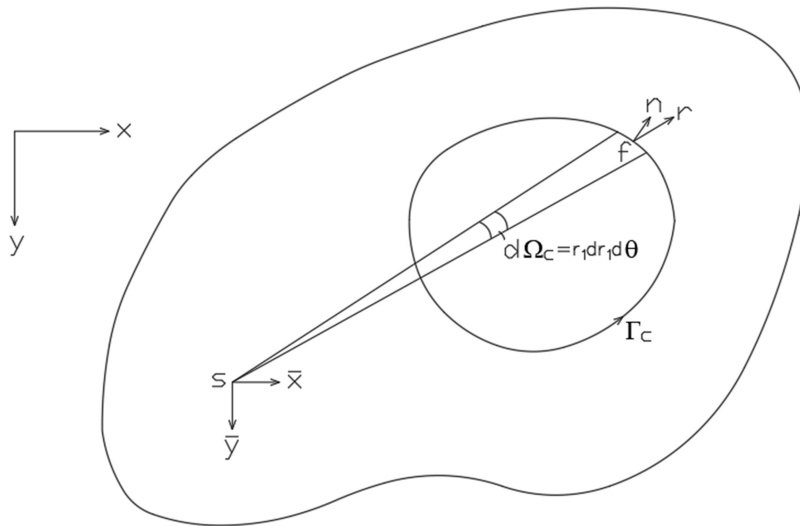


Figura A.3 – Sistemas de coordenadas local e global.

A função de forma Φ no sistema local é:

$$\Phi = A_i \bar{x} + B_i \bar{y} + D_i \quad (A.7)$$

Apêndice A - Equação Integral de Contorno para $[G_{ES}]$

Onde:

$$D_i = A_i x_s + B_i y_s + C_i \quad (\text{A.8})$$

Por outro lado:

$$K(P, S_c) = \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right] \quad (\text{A.9})$$

Onde:

$$R = \sqrt{z^2 + r_1^2} \quad (\text{A.10})$$

Tem-se:

$$K(P, S_c) = \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{2(1-\nu)}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} + \frac{z^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} \right] \quad (\text{A.11})$$

Podem-se definir duas constantes α e β como:

$$\alpha = \frac{2(1-\nu)}{4\pi G} \quad \beta = \frac{1}{4\pi G} \quad (\text{A.12})$$

A Eq. (A.11) pode ser reescrita como:

$$K(P, S_c) = \frac{\alpha}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} + \frac{\beta z^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} \quad (\text{A.13})$$

E a Eq. (A.5) se torna:

$$h = \int_{\Omega} [A_i \bar{x} + B_i \bar{y} + D_i] \left[\frac{\alpha}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} + \frac{\beta z^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} \right] d\Omega_c \quad (\text{A.14})$$

Onde:

$$d\Omega_c = r_1 dr_1 d\theta$$

$$\bar{x} = r_1 \cos\theta$$

$$\bar{y} = r_1 \sin\theta$$

(A.15)

Assim:

$$h = \int_r \int_\theta [A_i r_1 \cos\theta + B_i r_1 \sin\theta + D_i] \left[\frac{\alpha}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} + \frac{\beta}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} \right] r_1 dr_1 d\theta \quad (\text{A.16})$$

Ou ainda:

$$h = \int_\theta \left\{ \int_r \left\{ A_i \cos\theta \left[\frac{\alpha r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta z^2 r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + B_i \sin\theta \left[\frac{\alpha r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\beta z^2 r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + D_i \left[\frac{\alpha r_1}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} + \frac{\beta z^2 r_1}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} \right] \right\} dr_1 \right\} d\theta \quad (\text{A.17})$$

Fazendo a integração em relação à r_1 , tem-se:

$$h = \int_\theta \{ A_i \cos\theta [\alpha F_1(R) + \beta z^2 F_2(R)] + B_i \sin\theta [\alpha F_1(R) + \beta z^2 F_2(R)] \\ + D_i [\alpha F_3(R) + \beta z^2 F_4(R)] \} d\theta \quad (\text{A.18})$$

Integrando os coeficientes $F_1(R)$, $F_2(R)$, $F_3(R)$ e $F_4(R)$, obtém-se:

$$F_1(R) = \int_0^R \frac{r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} dr_1 = \frac{1}{2} \left[R R_1 - z^2 \ln \left(\frac{R + R_1}{z} \right) \right] \quad (\text{A.19})$$

$$F_2(R) = \int_0^R \frac{r_1^2}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} dr_1 = -\frac{R}{R_1} + \ln \left(\frac{R + R_1}{z} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$F_3(R) = \int_0^R \frac{r_1}{(z^2 + r_1^2)^{1/2}} dr_1 = R_1 - z \quad (\text{A.21})$$

$$F_4(R) = \int_0^R \frac{r_1}{(z^2 + r_1^2)^{3/2}} dr_1 = -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{z} \quad (\text{A.22})$$

Apêndice A - Equação Integral de Contorno para $[G_{ES}]$

Onde:

$$R_1 = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (\text{A.23})$$

Na Eq. (A.18), substitui-se $d\theta$ por:

$$d\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} \cdot d\Gamma_c \quad (\text{A.24})$$

Tem-Se:

$$h = \int_{\Gamma_c} \{A_i \cos\theta [\alpha F_1(R) + \beta z^2 F_2(R)] + B_i \sin\theta [\alpha F_1(R) + \beta z^2 F_2(R)] + D_i [\alpha F_3(R) + \beta z^2 F_4(R)]\} \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} \cdot d\Gamma_c \quad (\text{A.25})$$

Reorganizando os termos, obtém-se finalmente:

$$h = \alpha \int_{\Gamma_c} \left\{ \frac{(A_i R \cos\theta + B_i R \sin\theta)}{R} \left[F_1(R) + \frac{\beta}{\alpha} z^2 F_2(R) \right] + D_i \left[F_3(R) + \frac{\beta}{\alpha} z^2 F_4(R) \right] \right\} \cdot \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} \cdot d\Gamma_c \quad (\text{A.26})$$

APÊNDICE B – EXEMPLO DE MALHA

PLACA

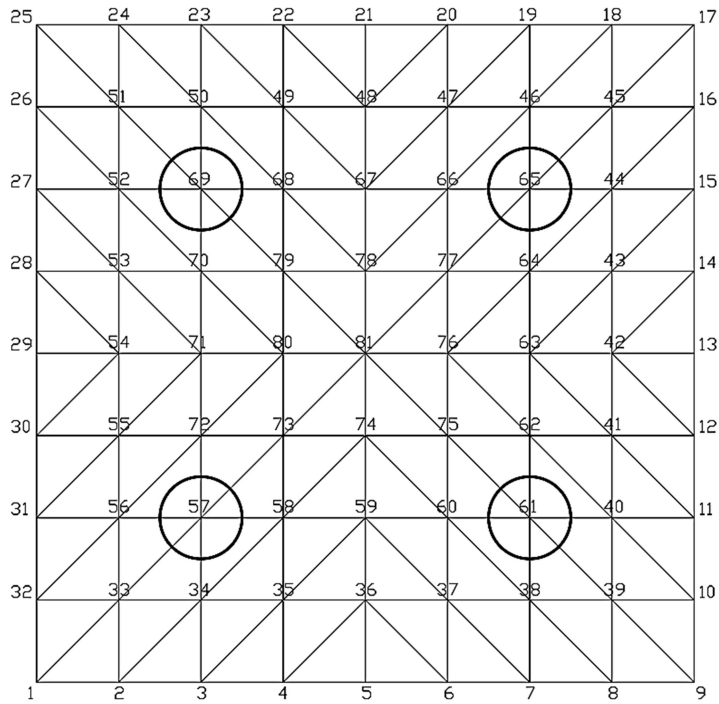


Figura B.1 – Nós da placa.

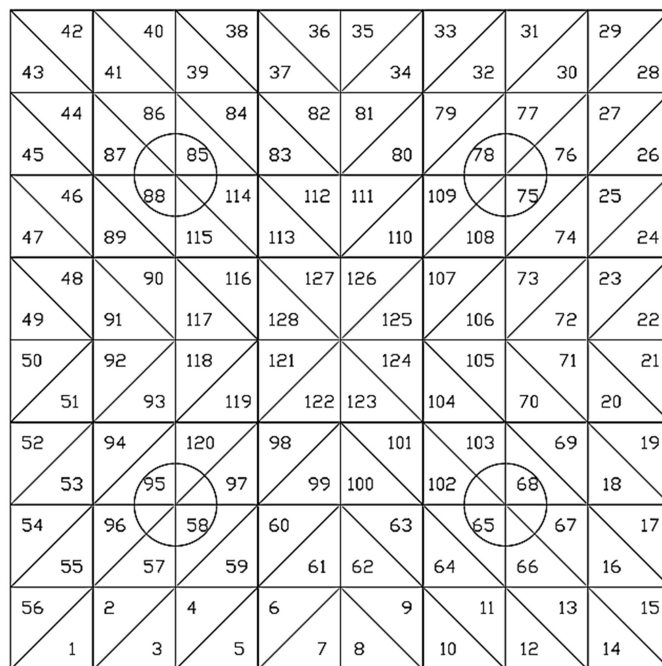


Figura B.2 – Elementos da placa.

ESTACAS

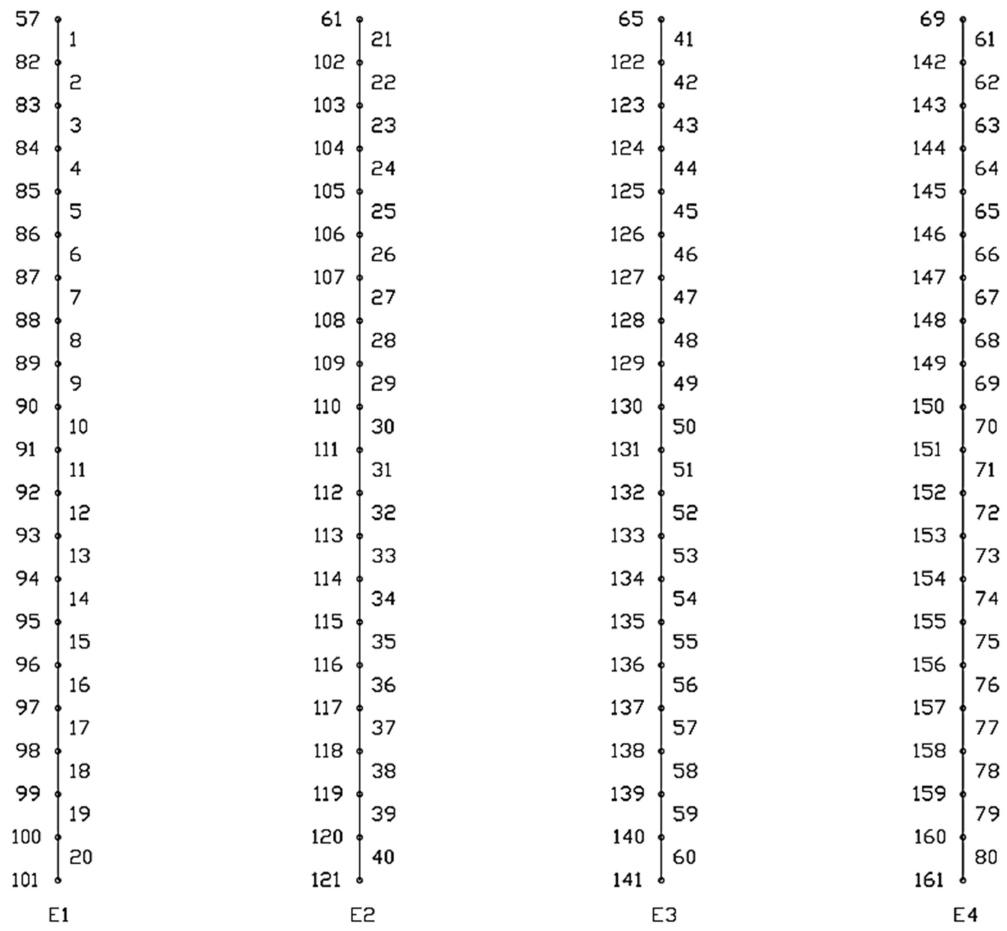


Figura B.3 – Nós e Elementos das estacas.

ANEXO A – VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES DO ELEMENTO FINITO DE PLACA DKT

O trabalho das cargas nodais externas, para um único elemento finito, pode ser expresso em coordenadas adimensionais como:

$$\Omega_e = \int_A Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA \quad (1)$$

Onde:

$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: funções interpoladoras do deslocamento.

$Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$: funções interpoladoras do carregamento externo distribuído.

A : área do elemento.

Para efeito de cálculo do vetor de cargas nodais equivalentes, a função interpoladora dos deslocamentos, assim como das forças de superfície, no domínio do elemento, é admitida variando linearmente no domínio, conforme mostrada na figura abaixo, e pode ser expressa por:

$$w = w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3 \quad (2)$$

Analogamente, as forças de superfície podem ser expressas por:

$$Q = Q_i \xi_1 + Q_j \xi_2 + Q_k \xi_3 \quad (3)$$

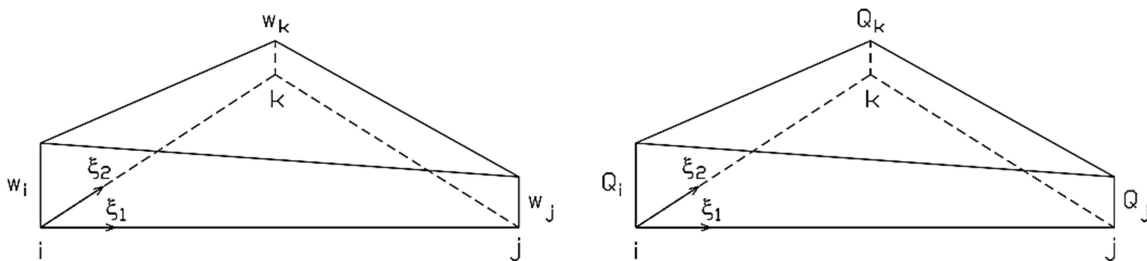


Figura A1 – Variação linear do deslocamento transversal e da força de superfície no domínio do elemento finito DKT.

Substituindo (2) e (3) em (1), obtém-se:

$$\Omega_e = \int_A (Q_i \xi_1 + Q_j \xi_2 + Q_k \xi_3)(w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3) dA \quad (4)$$

Ao minimizar-se a energia potencial devida às cargas externas, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_i} \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_j} \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_k} \end{pmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} dA \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad (5)$$

A integral do tipo $\int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA$ pode ser calculada como:

$$\int_A \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \xi_3^{\eta_3} dA = 2A \frac{\eta_1! \eta_2! \eta_3!}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2)!} \quad (6)$$

Assim, o vetor de cargas nodais pode ser dado por:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = [T_p] \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad (7)$$

Tem-se, por exemplo, para o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz $[T_p]$:

$$\int_A \xi_1^2 dA = 2A \frac{2!}{(2+2)!} = \frac{A}{6} \quad (8)$$

Calculando de modo análogo o restante dos elementos de $[T_p]$, chega-se a:

$$[T_p] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (9)$$