

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO

**Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes  
tridimensionais pelo método dos elementos de contorno dual**

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2018



SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO

**Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais pelo método dos elementos de contorno dual**

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

F794c Ferreira Cordeiro, Sérgio Gustavo  
Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais pelo método dos elementos de contorno dual / Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2018.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Método dos Elementos de Contorno dual. 2. Superfícies NURBS. 3. Propagação de fissuras. 4. Fratura e fadiga estrutural. 5. Análises isogeométricas. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: **SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO**

Título da tese: "Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno Dual"

Data da defesa: 05/02/2018

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**  
(Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Rodolfo André Kuche Sanches**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Eder Lima de Albuquerque**  
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa**  
(Universidade Estadual de Campinas/Unicamp)

APROVADO

Prof. Dr. **Dimas Belio Ribeiro**  
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):  
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**



*À minha filha Maria Fernanda Peixoto Cordeiro.*



## AGRADECIMENTOS

Dedico meus sinceros agradecimentos:

A Deus, pela vida e por ter me proporcionado saúde e paz ao longo desses anos, permitindo assim que eu trilhasse meus caminhos e concluísse mais esta etapa.

A toda minha família, em especial aos meus pais, Paulo e Regina (*In memoriam*), e tios/tias, que sempre estiveram ao meu lado. Ao meu irmão Robson, por toda a ajuda e incentivo ao longo desses últimos anos. Agradeço também à minha cunhada e aos meus sobrinhos pelos momentos de descontração.

À minha esposa Beatriz e à minha filha Maria Fernanda, pelos momentos de felicidade compartilhados. Aos meus sogros, pelo constante carinho e suporte ao longo dessa jornada, me ajudando em vários momentos. À senhora Marli Pereira e novamente à minha esposa, por me ajudar a cuidar da minha querida filha, com muito amor e carinho.

Ao professor Edson Leonel, por toda a atenção, paciência, humildade e disponibilidade para me atender em todos os momentos. Acredito que além da orientação, também levarei uma prospera amizade.

Aos professores da pós-graduação do SET, Ana Lucia El Debs, André Beck, Edson Leonel, Júlio López, Humberto Coda, Rodolfo Sanches, Rodrigo Paccola, Sérgio Proença, e aos professores da graduação da UFSCar, por todos os ensinamentos transmitidos, os quais contribuíram muito para a minha formação. Agradeço também a toda equipe da secretaria do SET pelo acolhimento e adicionais ajudas burocráticas.

Aos professores Rodolfo Sanches, Eder Albuquerque, José Luiz Souza e Dimas Ribeiro, pela disponibilidade de participar da comissão examinadora do presente trabalho e pelas importantes sugestões para a melhoria da versão corrigida.

Aos amigos da graduação, Breno, Camila, Daniela, Fidelis, Felipe (Judeu), Gagetí, Gustavo (Jaú), Heloisa, Luiz Otávio, Murilo, Pedro, Renan, Ricardo (Sastre) e todos os outros, e aos amigos da pós-graduação, Ana, Ayrton, Fernando, Geovanne, Giovanni, Gustavo (Barretos), Heider, Henrique, Hugo, Jackson, Jeferson, Júlio, Karen, Karolinne, Lara, Rodolfo, Thais, Tiago e todos os outros, pelos momentos de amizade e descontração.

Ao CNPq, à CAPES e ao COFECUB, pelo suporte financeiro que me possibilitou a dedicação exclusiva aos estudos e à pesquisa.



## RESUMO

CORDEIRO, S. G. F. **Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais pelo método dos elementos de contorno dual.** 2018. 320 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma ferramenta computacional para análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais a partir de modelos geométricos de Desenho Assistido por Computador (CAD, acrônimo do inglês). Modelos de propagação de fissuras associados a leis empíricas de fadiga permitem a determinação da vida útil de peças mecânico-estruturais. Tais análises são de vital importância para garantir a segurança estrutural em diversos projetos de engenharia tais como os de pontes, plataformas off-shore e aeronaves. No entanto, a criação de modelos de análise a partir de modelos geométricos de CAD envolve diversas etapas intermediárias que visam a obtenção de malhas volumétricas adequadas. A grande maioria dos modelos de CAD trabalha com a representação de sólidos a partir de seu contorno utilizando superfícies paramétricas, dentre as quais se destacam as superfícies B-Splines Racionais Não Uniformes (NURBS, acrônimo do inglês). Para gerar malhas volumétricas é necessário que o conjunto de superfícies NURBS que descrevem o objeto seja “estanque”, ou seja, sem lacunas e/ou superposições nas conexões das superfícies, o que não é possível garantir na grande maioria dos modelos constituídos por NURBS. As contribuições propostas no presente trabalho são aplicáveis a modelos baseados no Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual), os quais exigem apenas a discretização das superfícies do problema, ou seja, contorno mais fissuras. No intuito de criar os modelos de análise de maneira eficiente a partir dos modelos geométricos de CAD, desenvolveu-se uma estratégia de colocação que permite discretizar de maneira independente cada uma das superfícies NURBS que compõem os modelos geométricos sólidos. Com a estratégia proposta evitam-se as dificuldades no tratamento das conexões entre as superfícies sendo possível analisar modelos geométricos “não estanques”. A implementação abrange superfícies NURBS, aparadas ou não, de ordens polinomiais quaisquer e elementos de contorno triangulares e quadriláteros de aproximação linear. As equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície são regularizadas e as integrais singulares e hipersingulares são tratadas pelo Método de Guiggiani. Fissuras de borda são inseridas nos modelos de análise a partir de um algoritmo de remalhamento simples baseado em tolerâncias dimensionais. O mesmo algoritmo é utilizado para as análises incrementais de propagação. Três técnicas de extração dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) foram implementadas para os modelos baseados na Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), a saber, as técnicas de correlação, de extrapolação e de ajuste de deslocamentos. A extensão dessa última técnica para problemas tridimensionais é outra contribuição do presente trabalho. Os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann foram utilizados para determinar o FIT equivalente e o caminho de propagação das fissuras. O ângulo de deflexão é determinado por um algoritmo de otimização e o ângulo de torção, definido para o critério de Schöllmann, é imposto no vetor de propagação a partir de uma formulação variacional unidimensional, definida sobre a linha de frente da fissura. Nos modelos de fadiga adota-se a MFEL e a equação de Paris-Erdogan para determinar a vida útil à propagação de defeitos preexistentes. Um procedimento iterativo foi desenvolvido para evitar a interpenetração da matéria após o contato das faces da fissura, permitindo análises de fadiga com carregamentos alternados. Como proposta para a continuidade da pesquisa propõe-se desenvolver formulações isogeométricas de elementos de contorno para analisar problemas de fratura e fadiga diretamente dos modelos geométricos de CAD, sem a necessidade de gerar as malhas de superfície. Um estudo numérico preliminar

envolvendo uma versão isogeométrica do MEC dual baseada em NURBS e a versão convencional utilizando polinômios de Lagrange lineares e quadráticos foi realizado. A partir do estudo foi possível apontar as vantagens e desvantagens de cada formulação e sugerir melhorias para ambas.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno dual, Superfícies NURBS, Propagação de fissuras, Fratura e fadiga estrutural, Análises isogeométricas.

## ABSTRACT

CORDEIRO, S. G. F. **Contributions to fracture and fatigue analysis of tridimensional components by the dual boundary element method**. 2018. 320 p. Thesis (Doctoral degree in Structural Engineering) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2018.

The present work consists in the development of a computational tool for fracture and fatigue analysis of three-dimensional components obtained from geometrical models of Computer-Aided Design (CAD). Crack propagation models associated with empirical fatigue laws allow the determination of residual life for structural-mechanical pieces. These analyses are vital to ensure the structural safety in several engineering projects such as in bridges, offshore platforms and aircraft. However, the creation of the analysis models from geometrical CAD models requires several intermediary steps in order to obtain suitable volumetric meshes of the problems. The majority of CAD models represent solids with parametric surfaces to describe its boundaries, which is known as the Boundary representation (B-representation). The most common parametric surfaces are Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). To generate a volumetric mesh it is required that the set of surfaces that describe the object must be watertight, i.e., without gaps or superposition at the surfaces connections, which is not possible to ensure using NURBS. The contributions proposed at the present thesis are applicable to models based on the Dual Boundary Element Method (DBEM), which require only the discretization of the surfaces of the problems, i.e., boundary and cracks. A special collocation strategy was developed in order to create the analysis models efficiently from the geometrical CAD models. The collocation strategy allows discretizing independently each one of the NURBS surfaces that compose the geometrical solid models. Therefore, the difficulties in the treatment of the surface connections are avoided and it becomes possible to create analysis models from non-watertight geometrical models. The implementation covers trimmed and non-trimmed NURBS surfaces of any polynomial orders and also triangular and quadrilateral boundary elements of linear order. The displacement and traction boundary integral equations are regularized and the strong and hypersingular integrals are treated with the Guiggiani's method. Edge cracks are inserted in the models by a simple remeshing procedure based on dimensional tolerances. The same remeshing approach is adopted for the incremental crack propagation analysis. Three techniques were adopted to extract the Stress Intensity Factors (SIF) in the context of Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM), i.e., the displacement correlation, extrapolation and fitting techniques. The extension of this last technique to three-dimensional problems is another contribution of the present work. Both the general maximum energy release rate and the Schöllmann's criteria were adopted to determine the equivalent SIF and the crack propagation path. The deflection angle is obtained by an optimization algorithm and the torsion angle, defined for the Schöllmann's criterion, is imposed in the propagation vector through a one-dimensional variational formulation defined over the crack front line. The concepts of LEFM are adopted together with the Paris-Erdogan equation in order to determine the fatigue life of pre-existing defects. An iterative procedure was developed to avoid the self-intersection of the crack surfaces allowing fatigue analysis with alternate loadings. Finally, as suggestion for future researches, it was started the study of isogeometric boundary element formulations in order to perform fracture and fatigue analysis directly from CAD geometries, without surface mesh generation. A preliminary numerical study involving an isogeometric version of the DBEM using NURBS and the conventional DBEM using linear and quadratic Lagrange elements was presented. From the study it was possible to point out the advantages and disadvantages of each approach and suggest improvements for both.

Keywords: Dual Boundary Element Method, NURBS Surfaces, Crack Propagation, Structural Fracture and Fatigue, Isogeometric Analysis.

## NOMENCLATURA

ACA	Aproximação Cruzada Adaptativa
AIG	Análises Isogeométricas
CAD	Computer-Aided Design
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
EID/EIF	Equações Integrais de Deslocamentos e de Forças de superfície
EPD/EPT	Estados Planos de Deformação e de Tensão
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
FMM	Fast Multipole Method
GLE	Método de Galerkin Livre de Elementos
GLEE	Método de Galerkin Livre de Elementos Estendido
IGES	Initial Graphics Exchange Specification
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC dual	Método dos Elementos de Contorno Dual
MECE	Método dos Elementos de Contorno Estendidos
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFE	Método dos Elementos Finitos Estendidos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
NURBS	Non Uniform Rational B-Spline
OpenMP	Open Multi-Processing
PFH	Parte Finita de Hadamard
PVC	Problema de Valor de Contorno
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas
TCD/TED/TAD	Técnicas de Correlação, Estrapolação e Ajuste de deslocamentos
USP	Universidade de São Paulo

VPC	Valor Principal de Cauchy
ZPI	Zona de Processos Inelásticos

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>APRESENTAÇÃO DA TESE .....</b>	<b>30</b>
<b>1.2</b>	<b>ESTADO DA ARTE .....</b>	<b>32</b>
1.2.1	A mecânica da fratura teórica e computacional.....	32
1.2.2	A fadiga estrutural .....	38
1.2.3	Extração dos FIT. ....	41
1.2.4	O MEC para a modelagem de fissuras .....	44
1.2.5	Geometria computacional e análises isogeométricas .....	48
<b>1.3</b>	<b>OBJETIVOS, METODOLOGIA E DELIMITAÇÕES .....</b>	<b>53</b>
<b>1.4</b>	<b>JUSTIFICATIVA .....</b>	<b>54</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL .....</b>	<b>57</b>
<b>2.1</b>	<b>EQUAÇÃO GOVERNANTE DA ELASTOESTÁTICA LINEAR.....</b>	<b>58</b>
<b>2.2</b>	<b>SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN.....</b>	<b>59</b>
<b>2.3</b>	<b>EQUAÇÕES INTEGRAIS DOS PROBLEMAS ELÁSTICOS.....</b>	<b>60</b>
<b>2.4</b>	<b>EQUAÇÕES INTEGRAIS ESCRITAS SOBRE O CONTORNO.....</b>	<b>64</b>
<b>2.5</b>	<b>EQUAÇÕES INTEGRAIS DUAIS .....</b>	<b>68</b>
<b>2.6</b>	<b>ELEMENTOS DE LAGRANGE .....</b>	<b>70</b>
2.6.1	Elementos de Lagrange: Aproximação da geometria.....	70
2.6.2	Elementos de Lagrange: Aproximação dos campos mecânicos.....	74
<b>2.7</b>	<b>EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E MONTAGEM DO SISTEMA .....</b>	<b>76</b>
2.7.1	Equações algébricas discretas.....	76
2.7.2	Montagem do sistema de equações .....	77
2.7.3	Avaliação do termo livre $c_i$ .....	80
<b>2.8</b>	<b>GRANDEZAS INTERNAS .....</b>	<b>81</b>
<b>2.9</b>	<b>TÉCNICA DE SUB-REGIÕES .....</b>	<b>82</b>
<b>2.10</b>	<b>TRATAMENTO DA INTERPENETRAÇÃO DAS FACES DA FISSURA.....</b>	<b>84</b>
2.10.1	Definição do problema da interpenetração das faces da fissura.....	84
2.10.2	Equações algébricas em coordenadas locais. ....	86
2.10.3	Imposição iterativa das restrições à interpenetração. ....	88

<b>3</b>	<b>MALHAS INDEPENDENTES PARA AS SUPERFÍCIES NURBS .....</b>	<b>91</b>
<b>3.1</b>	<b>B-SPLINES .....</b>	<b>92</b>
3.1.1	Vetores de <i>Knots</i> .....	92
3.1.2	Funções base de uma B-spline .....	93
3.1.3	Curvas B-spline.....	94
3.1.4	Superfícies B-spline .....	95
<b>3.2</b>	<b>NURBS .....</b>	<b>96</b>
3.2.1	Superfícies NURBS aparadas .....	99
<b>3.3</b>	<b>MODELOS GEOMÉTRICOS 3D E O PROBLEMA DAS INTERSECÇÕES .....</b>	<b>101</b>
<b>3.4</b>	<b>GERADOR DE MALHAS DE SUPERFÍCIES .....</b>	<b>103</b>
3.4.1	Superfícies regulares .....	103
3.4.2	Superfícies aparadas.....	104
3.4.3	Estratégia de colocação e os elementos descontínuos generalizados .....	106
3.4.4	Função distância assinalada do contorno .....	109
3.4.5	Fluxograma do gerador de malhas .....	109
<b>3.5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>110</b>
3.5.1	Estudo de uma geometria com lacunas nas intersecções de superfícies..	111
3.5.2	Análise de um componente proveniente de um arquivo IGES .....	116
3.5.3	Análise de um gancho proveniente de um arquivo IGES .....	120
<b>4</b>	<b>ANÁLISES DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS.....</b>	<b>123</b>
<b>4.1</b>	<b>CAMPOS ASSINTÓTICOS NAS PROXIMIDADES DA FRENTE DE UMA FISSURA... </b>	<b>124</b>
<b>4.2</b>	<b>TÉCNICAS DE EXTRAÇÃO DOS FIT .....</b>	<b>125</b>
4.2.1	Técnica de correlação de deslocamentos. ....	127
4.2.2	Técnica de extrapolação de deslocamentos. ....	128
4.2.3	Técnica de ajuste de deslocamentos.....	129
<b>4.3</b>	<b>CRITÉRIOS DE PROPAGAÇÃO DE SUPERFÍCIES DE FISSURA .....</b>	<b>132</b>
4.3.1	CrITÉrio geral da máxima taxa de liberação de energia.....	132
4.3.2	CrITÉrio de Schllmann .....	135
4.3.3	Determinação do ângulo de propagação $\theta_p$ .....	142
<b>4.4</b>	<b>REMALHAMENTO PARA INSERÇÃO E PROPAGAÇÃO DE FISSURA DE BORDA. </b>	<b>143</b>
4.4.1	Mínima distância entre retas no espaço .....	144
4.4.2	Mínima distância entre ponto e elementos planos no espaço .....	146
4.4.3	Remalhamento local para elementos transpassados.....	149

4.4.4	Remalhamento local para elementos de ponta de fissura.....	150
4.4.5	Propagação da fissura: acrescentando novos elementos.....	151
4.4.6	Descrição do procedimento incremental de evolução da fissura.....	152
<b>4.5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>154</b>
4.5.1	Análise dos FIT em modo I.....	154
4.5.2	Análise dos FIT em modo misto I/II/III.....	158
4.5.3	Propagação em modo misto I/II.....	161
4.5.4	Propagação em modo misto I/II/III.....	166
<b>5</b>	<b>FADIGA BASEADA NA MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR..</b>	<b>171</b>
<b>5.1</b>	<b>DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....</b>	<b>172</b>
5.1.1	Taxas de crescimento da fissura em fadiga.....	173
5.1.2	Envoltórias limites da propagação estável.....	176
5.1.3	Determinação da vida útil à fadiga.....	178
<b>5.2</b>	<b>APLICAÇÕES DE FADIGA.....</b>	<b>183</b>
5.2.1	Fadiga de um <i>Compact Tension Specimen</i> .....	183
5.2.2	Fadiga de uma chapa composta.....	187
5.2.3	Fadiga em modo misto de uma viga sob flexão em três pontos.....	191
5.2.4	Fadiga de uma engrenagem proveniente de um arquivo IGES.....	195
<b>6</b>	<b>FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA DO MEC DUAL.....</b>	<b>203</b>
<b>6.1</b>	<b>FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA BASEADA EM SUPERFÍCIES NURBS.....</b>	<b>203</b>
6.1.1	Aproximações numéricas e definições de elementos.....	204
6.1.2	Estratégias de colocação.....	207
6.1.3	NURBS contínuas.....	208
6.1.4	NURBS descontínuas.....	208
6.1.5	NURBS descontínuas de aresta.....	210
6.1.6	Condições de contorno.....	211
6.1.7	Imposição dos termos livres no sistema de equações.....	212
6.1.8	Definições geométricas.....	214
6.1.9	Integração numérica.....	215
6.1.10	Integrais regulares.....	216
6.1.11	Subtração de singularidade pelo método de Guiggiani.....	216
<b>6.2</b>	<b>ESTUDO NUMÉRICO PRELIMINAR.....</b>	<b>217</b>
6.2.1	Fissura de borda solicitada em modo I.....	217

6.2.2	Fissura circular solicitada em modo misto I/II/III.....	221
6.2.3	Fissura de borda em um componente composto por duas partes.....	228
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>241</b>
<b>7.1</b>	<b>DISCRETIZAÇÕES INDEPENDENTES DAS NURBS .....</b>	<b>242</b>
<b>7.2</b>	<b>DESENVOLVIMENTOS DO MODELO DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS .....</b>	<b>243</b>
<b>7.3</b>	<b>ANÁLISES DE FADIGA A PARTIR DOS MODELOS DE CAD .....</b>	<b>245</b>
<b>7.4</b>	<b>FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA DO MEC DUAL .....</b>	<b>245</b>
<b>8</b>	<b>PROPOSTAS PARA A CONTINUIDADE DA PESQUISA .....</b>	<b>247</b>
<b>8.1</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DE FORMULAÇÕES ISOGOMÉTRICAS DO MEC DUAL. 247</b>	
8.1.1	Considerando superfícies NURBS e T-splines .....	248
8.1.2	Considerando Powell-Sabin B-splines e subdivisão de superfícies.....	248
<b>8.2</b>	<b>APRIMORAMENTOS DA FORMULAÇÃO CONVENCIONAL DO MEC DUAL.....</b>	<b>249</b>
8.2.1	Incorporação do método <i>face offsetting</i> para rastrear a propagação.....	249
8.2.2	Remalhamentos adaptativos para tratar fissuras de borda .....	251
8.2.3	Remalhamentos de borda com elementos de alta ordem .....	252
8.2.4	Incorporação de modelos coesivos de fadiga.....	252
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>255</b>
	<b>ANEXO A: TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR.....</b>	<b>281</b>
	<b>ANEXO B: INTEGRAIS REGULARES.....</b>	<b>287</b>
	<b>ANEXO C: INTEGRAIS SINGULARES E HIPERSINGULARES .....</b>	<b>293</b>
	<b>ANEXO D: EXPANSÕES ENVOLVIDAS NO MÉTODO DE GUIGGIANI.....</b>	<b>305</b>
	<b>ANEXO E: MÉTODO <i>GOLDEN SECTION</i> .....</b>	<b>313</b>
	<b>ANEXO F: DERIVADAS DAS FUNÇÕES BASE NURBS .....</b>	<b>317</b>

# 1 Introdução

---

Problemas mecânicos envolvendo os fenômenos da fadiga e da fratura estão presentes em diversas áreas da engenharia, devendo ser considerados, por exemplo, na análise de durabilidade de componentes mecânicos nas indústrias automobilística, naval e aeronáutica e de elementos estruturais nas indústrias de estruturas civis e militares. Tais problemas são fortemente relacionados ao fenômeno da concentração de tensões em regiões de quinas, entalhes e furos presentes em muitos componentes mecânicos e em ligações de elementos estruturais. Essas regiões são mais suscetíveis a apresentarem defeitos materiais como fissuras devido ao processo de fabricação. A presença de fissuras pode reduzir significativamente a vida de serviço de componentes estruturais submetidos a cargas repetitivas devido à propagação das fissuras em regime de fadiga, a qual pode ocasionar uma falha prematura por fraturamento. Um dos exemplos mais clássicos de falha estrutural devido à propagação de fissuras é o caso dos 2500 navios “Liberty” produzidos na segunda guerra mundial dos quais 145 partiram-se ao meio ainda nas docas e 700 apresentaram danos que impossibilitaram sua utilização.

A falha de componentes mecânicos/estruturais por propagação de fissuras em regime de fadiga pode ser observada em níveis de tensão muito inferiores em relação à resistência do material. O crescimento das fissuras em regime de fadiga ocorre devido ao caráter cíclico de carregamento e descarregamento que os componentes e estruturas estão sujeitos ao longo de sua vida útil. Visto que a presença de defeitos/fissuras em estruturas reais é inevitável (pelo menos em escala microscópica), a então conhecida análise de tolerância ao dano deve ser incorporada durante as fases de projeto e inspeção das peças para que a segurança estrutural seja garantida. Na análise de tolerância ao dano, admite-se a presença das fissuras nos componentes e utilizam-se os conceitos da mecânica da fratura junto com leis empíricas de fadiga para determinar a vida útil do componente à fadiga. A vida útil à fadiga pode ser entendida como o número de ciclos necessários para a fissura evoluir até uma dimensão crítica, a partir da qual a fratura do componente é inevitável.

A mecânica da fratura contempla um conjunto de modelos que permite a representação precisa do comportamento mecânico de corpos deformáveis contendo fissuras, além de fornecer parâmetros que permitem avaliar consistentemente o processo do crescimento das

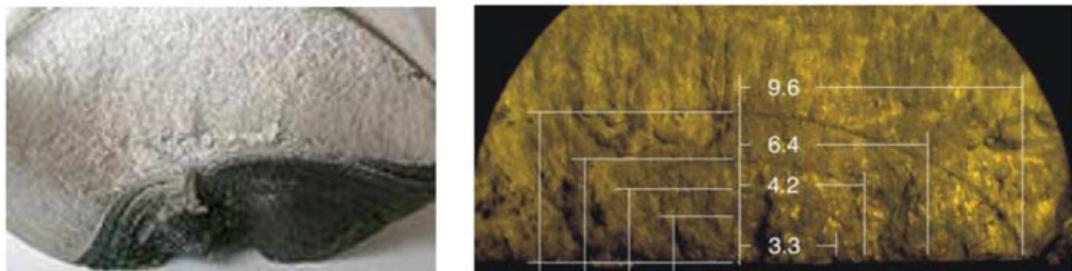
fissuras em função da intensidade do carregamento externo aplicado. Devido ao fenômeno da concentração de tensões, sempre existe uma porção de material degradado em uma região no entorno da ponta das fissuras denominada na literatura de Zona de Processos Inelásticos (ZPI). Nessa região, fenômenos relacionados à microestrutura do material dissipam a energia potencial do sólido. A depender da microestrutura do material e da temperatura a qual o mesmo está submetido, as características e dimensões da ZPI observadas experimentalmente podem ser consideravelmente diferentes. Sendo assim o processo de fraturamento pode ser classificado em três tipos: fratura frágil, fratura quase frágil e fratura dúctil.

Na fratura frágil as dimensões da ZPI são muito pequenas quando comparadas às dimensões da macro fissura e, portanto, a hipótese de que toda a energia de deformação dissipada seja utilizada para a geração de novas superfícies da fissura é plausível. Caso as dimensões da ZPI não sejam desprezíveis, o fraturamento do material pode ocorrer de maneira quase-frágil ou de maneira dúctil. Interiormente à ZPI existe uma região de alta concentração de tensões que leva o material a perder sua forma íntegra. Essa região é denominada zona de processo de fraturamento. Em materiais dúcteis como metais, tal região é pequena em comparação à dimensão total da ZPI e as deformações plásticas são os principais mecanismos de dissipação energética. Sendo assim, o mecanismo não linear de plastificação se manifesta primeiramente em relação à propagação de fissuras sendo o principal responsável pelo colapso do material. Já em materiais quase frágeis, a zona de processos de fraturamento ocupa quase totalmente a ZPI. Isso faz com que esse tipo de material manifeste a propagação de micro fissuras em detrimento a outros mecanismos não lineares de dissipação de energia (KARIHALOO, 1995).

A mecânica da fratura baseada em conceitos da teoria da elasticidade linear, comumente denominada de Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), é aplicável a situações em que a ZPI permaneça com dimensões muito pequenas ao longo do processo de propagação das fissuras. Tais situações ocorrem frequentemente na fratura dos materiais frágeis e também na fadiga de alto ciclo de componentes mecânicos/estruturais. De acordo com as soluções analíticas apresentadas na MFEL, o estado de tensão na ponta de uma fissura é singular e, portanto, não pode ser quantificado, dificultando a aplicação de critérios de falha baseados em tensões. Para contornar essa inconsistência, Irwin (1957) definiu uma nova grandeza denominada Fator de Intensidade de Tensão (FIT) por meio da qual é possível quantificar de maneira finita o estado de tensão singular na ponta de uma fissura. Por meio dos FIT é possível prever se a fissura irá propagar ou não e também prever a direção de propagação.

Durante as últimas décadas muitas pesquisas baseadas em métodos analíticos, numéricos e experimentais foram desenvolvidas objetivando a determinação precisa dos FIT para superfícies de fissuras recorrentes em peças estruturais e para diferentes tipos de carregamentos e condições de contorno (BRIGHENTI e CARPINTERI, 2013). As soluções analíticas apresentadas na mecânica da fratura, assim como as da teoria da elasticidade, são restritas a um pequeno conjunto de problemas, com simplificadas geometrias e condições de contorno. Portanto uma maior generalidade para analisar problemas complexos de propagação de fissuras em sólidos requer a utilização de modelos numéricos, a partir dos quais é possível obter soluções aproximadas para os problemas da mecânica da fratura.

Os temas a serem abordados na presente tese são relevantes para qualquer componente mecânico/estrutural, macroscopicamente homogêneo e isotrópico, sujeito ao fenômeno da fratura frágil ou da fadiga, independentemente do campo de aplicação do mesmo. Deve-se salientar que componentes estruturais metálicos submetidos a carregamentos cíclicos de baixa intensidade são particularmente sensíveis à propagação de superfícies de fissuras sem apresentarem grandes deformações plásticas. Tais fissuras tendem a crescer por fadiga na forma de superfícies tridimensionais complexas até atingirem uma configuração crítica, correspondendo à falha por fraturamento frágil para um dado estado de tensão de serviço. A Figura 1.1 apresenta formas típicas de superfícies de fissuras comumente observadas em componentes estruturais metálicos devido à propagação frágil em regime de fadiga.



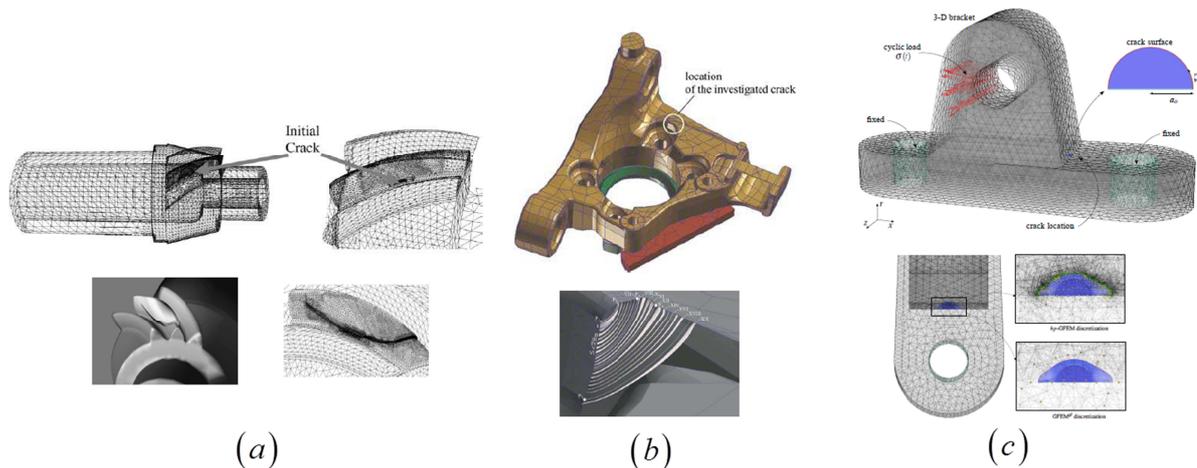
**Figura 1.1** Formas típicas de superfícies de fissuras em componentes estruturais metálicos (BRIGHENTI e CARPINTERI, 2013).

As superfícies de fissuras observadas em problemas tridimensionais de fratura e fadiga geralmente crescem em modo misto de maneira complexa impossibilitando a simplificação bidimensional válida para superfícies planas em que todos os pontos da linha de frente da fissura crescem igualmente. No caso geral de superfícies curvas de fissuras os FIT devem ser calculados para todos os pontos discretos dos modelos numéricos que pertençam à linha de frente da fissura. Tal avaliação deve ser efetuada a cada passo incremental da simulação

numérica do crescimento da fissura e relações padrão de taxa de crescimento em regime de fadiga (determinadas a partir de técnicas experimentais) devem ser aplicadas para prever a evolução da superfície da fissura. As análises de propagação tridimensional das superfícies de fissuras podem ser extremamente custosas em termos de tempo de processamento, principalmente se os FIT forem calculados a partir de técnicas que requeiram custosas etapas de pós-processamento, como é o caso da integral de fechamento virtual de Irwin (1958), da integral J de Rice (1968) e do método da função de corte de Szabo & Babuska (1988). As técnicas de correlação e de extrapolação de deslocamentos são técnicas simples e de fácil implementação, que envolvem apenas a avaliação dos deslocamentos nas faces da fissura. Tais técnicas, no entanto, não são tão precisas e o erro resultante pode ser consideravelmente grande, principalmente se as regiões próximas da linha de frente da fissura forem discretizadas com malhas grosseiras. Visando precisão e baixo custo computacional nas análises de fratura e fadiga, o desenvolvimento de novas técnicas para a avaliação precisa dos FIT que não envolvam exaustivas etapas de pós-processamento torna-se um tema de grande importância.

A abordagem de tolerância ao dano e a estimativa da vida útil à fadiga, incorporadas às fases de projeto e inspeção dos componentes mecânicos/estruturais, resultam uma economia nos custos de manutenção de diversas estruturas e mecanismos. No entanto, a criação dos modelos numéricos para as análises tridimensionais de fadiga dos componentes é uma tarefa difícil e restringe a incorporação da abordagem de tolerância nos projetos de engenharia atuais. Entre os métodos numéricos mais difundidos para as análises de fratura e fadiga destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional, o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos (MEFG ou MEFÉ), os métodos sem malha como o Método de Galerkin Livre de Elementos (GLE) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Modelos numéricos baseados no MEF convencional requerem malhas volumétricas conformes com as superfícies das fissuras e exigem complexas etapas de remalhamento para acompanhar a evolução das fissuras. Por sua vez, os modelos baseados no MEFG permitem que a descrição geométrica das superfícies de fissura, seja ela implícita ou explícita, não necessite ser conforme com a malha volumétrica do problema. Além disso, o método permite a propagação da fissura sem a necessidade do remalhamento da malha volumétrica. No caso dos métodos sem malhas, é apenas necessário um conjunto de pontos internos ao domínio do problema, o que simplifica consideravelmente o acoplamento de algoritmos de rastreamento da superfície da fissura. Por fim, o MEC, mais especificamente a formulação dual do MEC,

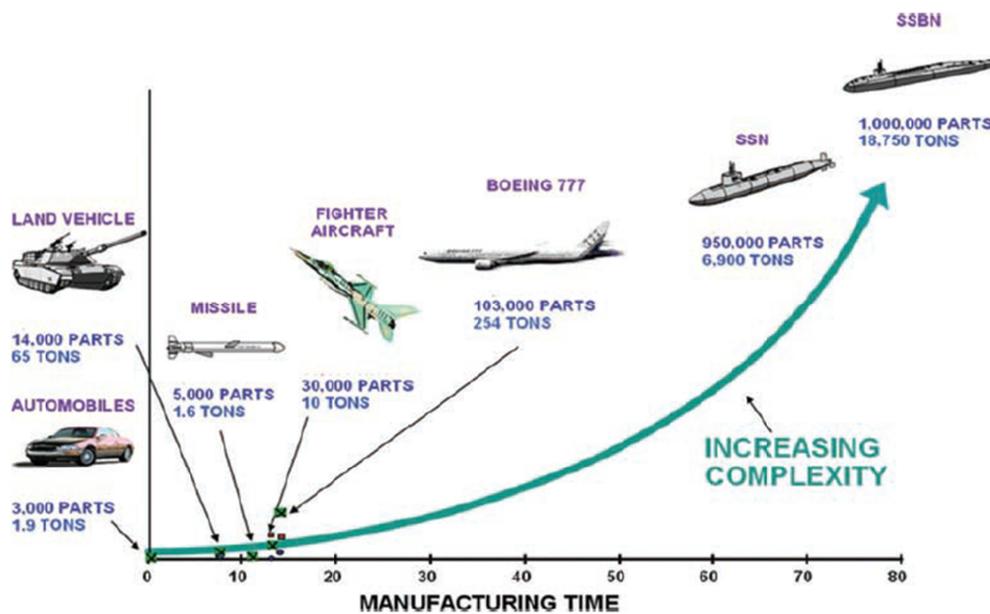
requer a discretização apenas das superfícies do problema, i.e., contorno mais fissuras. Dessa maneira, o remalhamento necessário para inserir e rastrear as superfícies de fissura é consideravelmente mais simples do que os remalhamentos envolvidos no MEF convencional e, no caso de fissuras internas, o remalhamento pode ser completamente evitado. A Figura 1.2 ilustra modelos numéricos de fadiga baseados nos métodos MEF, MEC dual e MEFG.



**Figura 1.2** – Modelos numéricos de fadiga: (a) MEF (URAL *et al.* 2005) (b) MEC-dual (KOLK & KUHN, 2006) e (c) MEFG (PEREIRA, 2010).

Na atualidade, a geometria dos componentes mecânicos é definida por projetistas em programas de Desenho Assistido por Computador (CAD, acrônimo do inglês). Os arquivos dos modelos geométricos de CAD devem ser transformados em representações geométricas adequadas às análises, i.e., geometrias estanques, as quais são utilizadas para gerar as malhas volumétricas, que são necessárias para a criação da maioria dos modelos numéricos de análise. Conforme apontado em Cottrell *et al.* (2009), essa tarefa está longe de ser uma tarefa trivial e, para projetos complexos de engenharia, estima-se que a mesma tome cerca de 80% do processo de análises como um todo (SANDIA NATIONAL LABORATORIES, *apud* COTTRELL *et al.*, 2009). A abordagem de tolerância ao dano, quando utilizada na fase de inspeção dos componentes de um projeto de engenharia, auxilia os engenheiros a prever períodos ótimos de inspeção (BEAUREPAIRE *et al.*, 2012). Já na fase de projeto de um componente, a aplicação prática da tolerância ao dano requer uma grande quantidade de iterações entre os projetistas e os analistas de fadiga. Os projetistas providenciam uma geometria inicial, a qual deve ser iterativamente melhorada por meio de sucessivas análises de tensões e de propagação de fissuras por fadiga, a fim de se obter componentes pouco susceptíveis à fadiga. Isso requer a criação de vários modelos numéricos, nos quais é necessário inserir fissuras e efetuar análises de propagação para estimar o número de ciclos à

fadiga. Caso a vida útil à fadiga para uma dada geometria seja insatisfatória, os projetistas partem para uma nova iteração geométrica e o processo se repete novamente. É notório que esse processo é muito mais ineficiente, devido à grande quantidade de intervenção humana, do que a simples criação de modelos geométricos de CAD, e pode levar até alguns meses para um componente relativamente simples (PENG et al., 2017b). Os projetos de engenharia estão se tornando crescentemente mais complexos, conforme ilustra a Figura 1.3. Um automóvel típico consiste de aproximadamente 3.000 peças, um avião a jato cerca de 30.000 peças, um Boeing 777 cerca de 100.000 peças e um submarino nuclear moderno cerca de 1.000.000 peças (SANDIA NATIONAL LABORATORIES, *apud* COTTRELL et al., 2009). Portanto, a abordagem de tolerância ao dano encontra sérios desafios para que a mesma possa ser incorporada os projetos atuais de engenharia.



**Figura 1.3** – Complexibilidade crescente dos projetos de engenharia (COTTRELL *et al.*, 2009).

Abordagens numéricas convencionais apresentam vários entraves para a criação eficiente dos modelos de análise a partir de modelos geométricos complexos provindos de softwares CAD. A situação se agrava ainda mais no caso de problemas com fissuras. As principais dificuldades na criação dos modelos numéricos de fadiga encontram-se na etapa de transformar o modelo geométrico em um modelo estanque, gerar uma malha adequada (geralmente volumétrica) e muitas vezes conforme com as superfícies iniciais da fissura (a qual é geralmente duas escalas dimensionais menor do que a escala do componente) e na etapa de remalhamento devido à propagação das superfícies de fissura. Considerando ainda o

alto grau de incertezas envolvidas nas análises de fratura e fadiga, o número de iterações projetista-analista para tratar o problema de forma probabilística é mais um sério agravante à aplicação prática da tolerância ao dano.

A grande maioria dos modelos geométricos de CAD trata a representação de sólidos a partir de seu contorno utilizando superfícies paramétricas, o que é denominado na literatura *Boundary-representation*, ou ainda, *B-representation*. Entre as superfícies paramétricas mais utilizadas, i.e., NURBS, T-splines e Subdivisão de superfícies, as NURBS, ou seja, superfícies B-Splines Racionais Não Uniformes, destacam-se como as mais difundidas nos programas de CAD. É interessante, por várias razões, que o conjunto de superfícies NURBS que compõem o modelo geométrico seja “estanque” (*watertight*, em inglês), ou seja, sem lacunas e/ou superposições nas conexões das superfícies, o que não é possível garantir na grande maioria dos modelos constituídos por NURBS (BAZILEVS *et al.* 2010). Diversas são as dificuldades oriundas dos modelos geométricos não “estanques” e vários trabalhos na área da geometria computacional tentam solucionar de alguma forma esse impasse (SEDERBERG *et al.*, 2003). No contexto das análises numéricas, tais modelos dificultam ou muitas vezes impossibilitam a geração de malhas volumétricas ou mesmo malhas fechadas de superfície, dificultando ou impossibilitando, portanto, as análises de fadiga a partir de modelos geométricos não “estanques”.

Na última década têm se tornado cada vez mais comuns abordagens que adotam como funções bases para as aproximações numéricas as mesmas funções utilizadas pelos softwares de CAD para descrever as geometrias, i.e., NURBS, T-splines e Subdivisão de superfícies (SCOTT *et al.*, 2013). Tal abordagem, apresentada por Hughes *et al.* (2005), tem sido referenciada como Análise Isogeométrica (AIG) e tem se mostrado atrativa em diversos tipos de análises. Entre as vantagens das AIG pode-se destacar a possível redução no número de graus de liberdade, devido às melhores capacidades de aproximação das funções base e à representação exata da geometria, e a maior integração entre programas de CAD e modelos de análise devido à possibilidade de se utilizar o mesmo modelo de CAD para as análises numéricas (modelo isogeométrico). Apesar de apresentar inúmeras aplicações em problemas envolvendo elementos de casca, no caso de sólidos tridimensionais a criação do modelo isogeométrico não é tão simples. Isso por que as tecnologias CAD mais bem consolidadas descrevem os sólidos a partir da *B-representation* e, portanto, utilizam funções base bivariadas para descrever as superfícies, ao passo que as tecnologias de análise mais bem consolidadas (MEF) necessitam de funções bases trivariadas para descrever os volumes.

NURBS trivariadas acopladas com técnicas de contorno imerso (SANCHES et al., 2011) apresentam-se como uma alternativa para contornar esse problema. No entanto, demandam acoplar uma malha volumétrica a uma malha de superfície. Além disso, a imposição das condições de contorno não é tão direta quanto no caso de formulações convencionais de elementos finitos.

No caso de análises isogeométricas com elementos de contorno a etapa de geração de malha pode ser completamente eliminada e as análises podem ser efetuadas diretamente dos modelos geométricos providos pelos softwares de CAD (LIAN et al., 2013). Isso porque ambas as tecnologias trabalham com a descrição de sólidos a partir de superfícies paramétricas com funções base bivariadas, o que torna o acoplamento ideal para realizar as análises de maneira direta. Deve-se salientar, no entanto, que o número e a ordem das funções base usadas para a descrição da geometria podem não ser o suficiente para capturar os gradientes dos campos mecânicos. Nesses casos, estratégias de refinamento padrão como a “inserção de *knots*” ou a “elevação das ordens polinomiais” podem ser adotadas sem alterar a geometria do modelo. Além disso, o refinamento das funções base dos campos mecânicos pode ser efetuado de maneira independente sem que seja necessário refinar a descrição geométrica (MARUSSIG et al., 2015).

Para problemas de fratura, a formulação dual do MEC apresenta uma característica única para o desenvolvimento de modelos isogeométricos de fratura e fadiga, que é a necessidade de aproximações com funções base bivariadas apenas sobre as superfícies dos problemas, ou seja, contorno mais fissuras. No entanto, no caso tridimensional, diversos desafios devem ser superados para que seja possível o desenvolvimento de modelos isogeométricos de fratura e fadiga via o MEC dual. Entre essas dificuldades pode-se destacar a maior dificuldade para inserir e propagar em modo misto fissuras de borda, as quais requerem o rastreamento de uma linha de descontinuidade sobre as superfícies NURBS, o tratamento de superfícies NURBS aparadas e métodos eficientes para o cálculo das integrais fortemente singulares e hipersingulares, inerentes ao MEC dual, sob elementos curvos altamente distorcidos (PENG et al., 2017b).

Nas últimas décadas diversas pesquisas relacionadas à mecânica da fratura foram desenvolvidas no SET – Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – Escola de Engenharia de São Carlos da USP – Universidade de São Paulo. Foram propostos modelos numéricos e formulações para a análise de vários problemas de fratura como, por exemplo, a

determinação dos FIT, a propagação frágil de múltiplas fissuras, modelos coesivos para análises de fratura quase frágil em materiais isotropos e anisotropos, modelos dinâmicos de fratura e modelos probabilísticos de fadiga para a avaliação da confiabilidade estrutural. Apesar da diversidade de problemas estudados, a grande maioria dos trabalhos se restringiu a análises bidimensionais, muitas vezes de problemas teóricos de pouca aplicação prática, ignorando as grandes dificuldades numéricas envolvidas na aplicação da tolerância ao dano para componentes tridimensionais de projetos de engenharia. Mesmo no trabalho de Barbirato (1999), o qual abordou o desenvolvimento de modelos tridimensionais de fratura, as análises estudadas se limitaram a problemas com geometria simples (prismas), com superfícies de fissuras planas solicitadas a modo I de fratura. Com esta tese dá-se continuidade à linha de pesquisa de métodos numéricos aplicados a problemas da mecânica da fratura que vem sendo desenvolvida no SET, mais especificamente, problemas relacionados à propagação de fissuras em regime de fadiga em componentes mecânico-estruturais tridimensionais.

Em síntese, o presente trabalho consistiu no desenvolvimento e na programação em linguagem Fortran 90 de uma ferramenta computacional para análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais a partir de modelos geométricos de CAD. O programa computacional desenvolvido é baseado na formulação MEC dual e as equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície, inerentes ao método, foram regularizadas pelo método de Guiggiani. Para integrar o programa desenvolvido com os modelos geométricos de CAD, implementaram-se as equações de mapeamento das superfícies NURBS de ordens polinomiais quaisquer e adotou-se uma entrada de dados em função das superfícies NURBS, e não dos elementos convencionais. Desenvolveu-se uma estratégia de colocação que, acoplada a geradores de malhas bidimensionais, permite discretizar de maneira independente cada uma das superfícies NURBS que compõem os modelos geométricos de CAD, evitando os problemas nas conexões das superfícies e possibilitando a análise de modelos geométricos não “estanques”. A inserção e a propagação de fissuras de bordas foram realizadas a partir de um algoritmo de remalhamento simples, baseado em tolerâncias dimensionais. Três técnicas de extração dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) foram implementadas para os modelos baseados na Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), a saber, as técnicas de correlação e extrapolação de deslocamentos e a recente técnica de ajuste de deslocamentos (GONZALEZ *et al.*, 2015). Os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann foram utilizados para a determinação do FIT equivalente e do caminho de propagação das fissuras. Nos modelos de fadiga adota-se a MFEL e a lei de Paris-Erdogan

para a determinação da vida útil à propagação de defeitos preexistentes. Um procedimento iterativo foi desenvolvido para evitar a interpenetração da matéria após o contato das faces da fissura, permitindo análises de fadiga com carregamentos alternados. Por fim, um estudo comparativo preliminar entre uma versão isogeométrica do MEC dual baseada em NURBS e a versão convencional utilizando polinômios de Lagrange lineares e quadráticos foi realizado. A partir do estudo foi possível apontar as vantagens e desvantagens de cada formulação e sugerir melhorias para ambas.

Como contribuições originais da presente tese, destacam-se a estratégia de colocação desenvolvida para contornar as dificuldades na criação dos modelos de análise e a extensão da técnica de ajuste de deslocamentos de Gonzalez *et al.*, 2015 para problemas tridimensionais. No contexto da formulação MEC dual, a determinação e a imposição dos ângulos de propagação, ângulos de deflexão e de torção (definido no critério de Schöllmann), e o algoritmo de contato entre as superfícies das fissuras também são contribuições importantes do presente trabalho.

## **1.1 Apresentação da tese**

O texto da presente tese foi organizado em 8 capítulos, visando apresentar o conteúdo de maneira construtiva, ou seja, os conceitos são gradativamente apresentados de maneira a construir por partes a ideia principal do trabalho.

Capítulo 1 – Introdução: apresenta-se uma descrição introdutória do tema, a apresentação da tese, uma revisão da bibliografia passando pelo Estado da Arte de algumas importantes áreas de pesquisa exploradas no presente trabalho, os objetivos, a metodologia e as delimitações, e por fim, a justificativa do presente trabalho.

Capítulo 2 – Método dos elementos de contorno dual: apresentam-se conceitos básicos sobre como as equações diferenciais parciais que governam os problemas de elasticidade podem ser transformadas em equações integrais de contorno. A formulação MEC dual é introduzida para a análise de problemas com fissuras por meio da colocação de duas equações integrais linearmente independentes para os pontos simetricamente localizados sobre as faces da fissura. Descreve-se de maneira sucinta como o MEC propõe que as equações integrais contínuas sejam transformadas em um sistema discreto de equações algébricas através dos elementos de Lagrange e da técnica de colocação. A técnica de sub-regiões é introduzida para analisar o comportamento conjunto de componentes mecânicos perfeitamente conectados e o

procedimento iterativo proposto para evitar a interpenetração da matéria após o contato das faces da fissura é apresentado.

Capítulo 3 – Malhas independentes para as superfícies NURBS: apresenta-se nesse capítulo o gerador de malhas de superfície desenvolvido a partir do mapeamento geométrico das NURBS e a estratégia de colocação adotada para contornar os problemas das conexões das superfícies. Com a estratégia é possível discretizar (Com elementos de Lagrange) de maneira independente cada uma das superfícies NURBS, aparadas ou não, e de ordem polinomiais quaisquer, que compõe os modelos geométricos complexos. Apresentam-se exemplos numéricos para validar o gerador e a estratégia desenvolvidos.

Capítulo 4 – Análises de propagação de fissuras: apresenta-se o algoritmo incremental para as análises de propagação de fissuras. As técnicas de extração dos FIT são apresentadas e a partir dos FIT é possível então verificar a estabilidade ao crescimento das fissuras. Os dois critérios de propagação são introduzidos e a determinação do ângulo de deflexão é resolvida como um problema de otimização univariável. O ângulo de torção do critério de Schöllmann é imposto no vetor de propagação a partir de uma formulação variacional, definida sobre a linha de frente da fissura. O algoritmo de remalhamento para tratar fissuras de borda se baseia no cálculo de mínimas distâncias no espaço. Sendo assim, é possível trabalhar com tolerâncias dimensionais, flexibilizando as discretizações em análises com fissuras de borda. Exemplos de propagação de fissuras foram analisados para validar, em conjunto, os algoritmos desenvolvidos.

Capítulo 5 – Fadiga baseada na mecânica da fratura elástica linear: Descrevem-se as hipóteses assumidas nos modelos de fadiga baseados na MFEL. Acopla-se o algoritmo de propagação à equação de Paris-Erdogan para determinar a vida útil à fadiga. Nos problemas tridimensionais, a variação do FIT da equação de Paris pode ser considerada como a variação do FIT equivalente em cada ponto da frente da fissura. Os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann são adotados para descrever as envoltórias limites da propagação estável à fadiga. Para os modelos numéricos, reescreve-se a equação de Paris em sua forma discreta (diferenças finitas) e desenvolve-se um equacionamento alternativo que permite determinar a vida útil à fadiga. *Benchmarks* analíticos e numéricos foram analisados para validar as implementações. Além disso, problemas de fadiga de componentes provenientes de modelos geométricos de CAD também foram analisados.

Capítulo 6 – Formulação isogeométrica do MEC dual: Apresenta-se uma formulação isogeométrica do MEC dual baseada em NURBS regulares. Um estudo comparativo inicial entre a versão convencional com elementos de Lagrange e a versão isogeométrica baseada em NURBS é realizado. A partir do estudo conclui-se que ambas as abordagens apresentam limitações, as quais podem ser o ponto de partida para duas vertentes de pesquisas futuras propostas.

Capítulo 7 – Conclusões: Nesse capítulo, são feitas as considerações finais sobre o desenvolvimento do trabalho. Os resultados obtidos são discutidos e as conclusões extraídas do trabalho são agrupadas em três tópicos: Discretizações independentes das NURBS, desenvolvimentos do modelo de propagação de fissuras e análises de fadiga a partir dos modelos de CAD. As conclusões servem de base para discutir a robustez das contribuições propostas na presente tese e também para sugerir temas específicos que podem ser o foco de estudos futuros.

Capítulo 8 – Proposta para a continuidade da pesquisa: Propõem-se basicamente duas vertentes para a continuidade da pesquisa: Aprimoramentos dos modelos de fadiga baseados na formulação convencional do MEC dual e o desenvolvimento de formulações isogeométricas do MEC dual baseadas em outras tecnologias CAD.

## **1.2 Estado da arte**

### **1.2.1 A mecânica da fratura teórica e computacional**

A mecânica da fratura é uma ciência que estuda a influência de defeitos materiais tais como fissuras na resposta mecânica de sólidos deformáveis. Kirsch (1898) e Inglis (1913) foram os primeiros estudiosos a avaliarem o efeito de furos e fissuras em meios contínuos. Baseado na teoria da elasticidade o primeiro autor determinou uma solução analítica para uma chapa tracionada contendo um furo circular. O mesmo verificou que as tensões em alguns pontos nas bordas do furo apresentavam valores 3 vezes maiores que a tensão remota aplicada. Inglis (1913) estudou o problema de uma chapa infinita tracionada com um furo elíptico em seu centro. Novamente verificou-se o efeito da concentração de tensões, porém ainda mais significativa do que no caso estudado por Kirsch. Percebeu-se que à medida que um dos raios da elipse se aproxima de zero, e a geometria do furo se aproxima da geometria de uma fissura, o estado de tensão a sua frente tende a ser singular. Baseados na técnica de funções de tensão, Westergaard (1939) e posteriormente Muskhelishvili (1953) determinaram

uma solução para os campos de tensões nas proximidades da ponta de uma fissura perfeita em um problema plano. Novamente foi verificada a singularidade dos campos de tensão já apontada anteriormente por Kirsch e Inglis.

A singularidade do estado de tensão na ponta das fissuras acarretou uma inconsistência dos critérios de falha baseados em tensões. A partir de um balanço energético global Griffith (1921) apresentou um critério de falha para prever quando uma fissura irá se propagar em um sólido elástico. Segundo o balanço energético de Griffith a fissura se propaga quando ocorre uma redução (dissipação) na energia potencial de deformação do corpo. O critério pode ser descrito a partir da taxa de liberação da energia potencial elástica  $G$  e prediz que a fissura irá se propagar quando  $G$  atingir um valor crítico  $G_c$ . A energia dissipada é então utilizada para a criação das novas superfícies da fissura que se propaga.

Em 1950 a Mecânica da Fratura foi apresentada como uma disciplina pelo engenheiro George Irwin, que trabalhava no *Naval Research Laboratory* (Sanford, 2003). As primeiras ideias foram desenvolvidas para materiais nos quais a fratura ocorre de maneira frágil, como o vidro e o ferro fundido, para os quais a hipótese de comportamento elástico é plausível. A partir desses estudos foram desenvolvidos alguns dos principais conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Baseado nos conceitos da MFEL, Irwin (1957) propôs que a magnitude da singularidade dos campos de tensões na frente da fissura pode ser contabilizada através de escalares denominados Fatores de Intensidade de Tensão (FIT), ou simplesmente  $K_i$ , com  $i = I, II, III$  correspondendo a cada um dos modos básicos de fratura. Por meio dos FIT é possível formular critérios de propagação mais eficientes do que o balanço energético global de Griffith. De acordo com esses critérios, quando o valor de um FIT equivalente  $K_{eq}$ , calculado como uma combinação de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ , atingir um valor crítico  $K_C$ , que corresponde a uma propriedade material denominada tenacidade à fratura, a fissura irá se propagar de maneira instável no caso da fratura frágil. Os FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  se relacionam diretamente com as taxas de liberação de energia dos modos básicos de fratura,  $G_I$ ,  $G_{II}$  e  $G_{III}$  que compõe  $G$ . Entre os critérios da MFEL baseados nos FIT destacam-se o critério da máxima tensão circunferencial, o critério da máxima taxa de liberação da energia potencial e o critério da mínima densidade de energia de deformação (BROEK, 1986 e MI, 1996). Tais critérios foram inicialmente desenvolvidos levando-se em consideração problemas planos, ou seja, desprezando os efeitos do modo III de fratura. Mais recentemente, Schöllmann *et al.*

(2002), Richard *et al.* (2005) e Chang *et al.* (2006) propuseram critérios de propagação mais consistentes para os problemas tridimensionais nos quais os efeitos do modo III de fratura influenciam tanto a resposta do FIT equivalente  $K_{eq}$  quanto a resposta dos ângulos de propagação. As abordagens baseadas nos FIT são particularmente eficientes, pois envolvem apenas uma análise local dos campos de tensões ou deslocamentos nas proximidades da ponta da fissura para avaliar a propagação por meio do FIT equivalente  $K_{eq}$ .

Soluções analíticas para os FIT podem ser encontradas para problemas planos com geometria e condições de contorno específicas em *handbooks* como Broek (1986), Murakami (1987) e Surendra, Swartz e Ouyang (1995). No entanto, a aplicação das soluções analíticas para os problemas reais de engenharia é bastante limitada. No caso tridimensional a situação se agrava ainda mais visto que soluções analíticas são conhecidas apenas para domínios infinitos. Outras abordagens para a obtenção dos FIT como o método das funções peso (WANG e LAMBERT, 1995), o método das forças de volume (ISIDA, NOGUCHI e YOSHIDA, 1984) e métodos empíricos (NEWMAN e RAJU, 1981; POMMIER, SAKAE e MURAKAMI, 1999) também podem ser encontradas na literatura. No entanto, uma maior generalidade de problemas de fratura requer a utilização de métodos numéricos capazes de simular sólidos elásticos contendo superfícies de fissura e técnicas eficientes para a extração dos FIT a partir da resposta elástica numérica de tensões e deslocamentos nas proximidades da ponta da fissura.

Desde os trabalhos de Griffith (1921) e Irwin (1957) e do seu rápido crescimento nos anos sessenta e setenta, a mecânica da fratura é um dos principais conjuntos de teorias utilizados para prever rupturas em sólidos. Os conceitos da Mecânica da Fratura, originalmente desenvolvidos para materiais elásticos, foram posteriormente expandidos para a análise da fratura em materiais dúcteis (elastoplásticos) e quase frágeis. Nesses materiais a zona de dissipação de energia, ou ZPI, à frente da fissura não é desprezível. Nos materiais dúcteis a dissipação de energia ocorre principalmente devido às deformações plásticas, as quais são verificadas na frente da fissura. O colapso por fraturamento nesse caso começa a ocorrer quando não houver mais regiões de material disponíveis para se deformar plasticamente. Já nos ditos corpos quase frágeis a energia dissipada na ZPI não decorre das deformações plásticas, mas sim devido a outros mecanismos resistentes. Em concretos e rochas, esses mecanismos de dissipação estão relacionados à coalescência de microfissuras, intertravamento de partículas agregadas e fricção das faces da fissura (SURENDRA,

SWARTZ e OUYANG 1995). Já em madeiras e compósitos fibrosos artificiais tais mecanismos estão relacionados principalmente à conexão de fibras cruzantes à fissura (SMITH, LANDIS e GONG, 2003).

Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) propuseram modelos de fratura baseados em fissuras fictícias para representar a ZPI em materiais dúcteis. Nesses modelos a ZPI à frente da fissura é substituída por uma fissura fictícia cujas faces estão sujeitas a tensões coesivas de escoamento, responsáveis pela representação da rigidez residual da região degradada. Posteriormente Hillerborg et al. (1976) apresentou um modelo de fissuras fictícias para representar a ZPI de materiais quase frágeis (Concreto em específico). Os autores propuseram que o amolecimento do material na ZPI fosse representado através de tensões coesivas variáveis em função da abertura da fissura fictícia. Esse modelo de fratura ficou conhecido por modelo coesivo e têm sido utilizado para a análise de fratura em diversos materiais como concretos, rochas, madeiras, blocos de alvenaria e compósitos laminados: (BOSTROM, 1992; BAZANT, et al., 1994; SALEH e ALIABADI, 1995; BARPI e VALENTE, 1998; REINHARDT e XU, 1999; ALIABADI e SALEH, 2002; ELICES et al., 2002; MAI, 2002; MOES e BELYTSCHKO, 2002; LI e CHANDRA, 2003; DE BORST, 2003; CARPINTERI et al., 2003; PLANAS et al., 2003; TVERGAARD, 2003; DONG et al., 2003; YANG e COX, 2005; REYES et al., 2009; FERREIRA, VENTURINI e HILD, 2011; e GÁLVEZ et al., 2013).

Na literatura podem ser encontrados diversos métodos numéricos capazes de lidar com problemas de fratura. A escolha do método numérico mais adequado para simular os problemas de fratura depende da natureza dos mesmos. Problemas relacionados à fragmentação envolvem análises dinâmicas não lineares de propagação de múltiplas fissuras considerando fenômenos como a nucleação, coalescência e bifurcação. Tais análises são mais frequentemente abordadas na literatura utilizando elementos coesivos de interface em conjunto com programas de elementos finitos acoplados a robustos algoritmos de remalhamento com refinamentos locais adaptativos (PARK *et al.* 2012; ALHADEFF *et al.* 2016). Métodos sem malhas, a teoria peridinâmica e modelos de campo de fase aparecem como alternativas mais recentes para abordar esses fenômenos de fratura (RABCZUC *et al.* 2010; HA e BOBARU, 2010; BORDEN *et al.*, 2012). Já no caso de problemas de propagação quase estática de fissuras dominantes em regime de fadiga em componentes mecânico-estruturais com geometrias/topologias complexas o MEC-dual, o MEFM/MEFE e também o GLE tem sido utilizados com sucesso na literatura em diversos trabalhos (KOLK & KUHN, 2006; PEREIRA *et al.* 2010; PATHAK et al. 2014), pois apresentam características

vantajosas para esses tipos de análise. A seguir apresenta-se uma breve revisão sobre as abordagens numéricas para problemas de fratura, com um enfoque especial em problemas com fissuras dominantes.

A abordagem numérica mais simples é através dos métodos de exclusão de elementos finitos (BEISSEL et al., 1998; FAN e FISH, 2007). Nesses modelos as fissuras não são discretizadas explicitamente. Ao invés disso é imposto que as tensões nos elementos são levadas à zero uma vez que um determinado critério de falha é atingido. Deve-se salientar que nesses modelos o problema da fratura encontra-se mal posto e as respostas numéricas podem apresentar severas dependências de malha. Nos métodos de fratura por separação interelementos (ORTIZ et al., 1987; ZHOU e MOLINARI, 2004) o crescimento da fissura é restrito às arestas dos elementos finitos. Dessa maneira os resultados numéricos podem ser muito sensíveis em relação ao tamanho e forma dos elementos adotados. A abordagem de fratura interelementos acoplada a algoritmos adaptativos de remalhamento local também tem sido utilizada em análises de fratura (POTYONDY et al., 1995; SCHOLLMANN et al., 2003; URAL *et al.* 2005). No entanto, para problemas tridimensionais de fratura em modo misto em componentes topologicamente complexos a abordagem via MEF pode se tornar extremamente complexa devido ao remalhamento necessário para rastrear a evolução das superfícies de fissura.

Métodos de enriquecimento por sua vez são baseados no conceito de partição da unidade e na decomposição da solução na forma  $\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}$ .  $\mathbf{u}$  é a solução típica de elementos finitos e  $\tilde{\mathbf{u}}$  é a parte da resposta numérica que acrescenta informações relacionadas ao comportamento das funções de enriquecimento adotadas para a base de polinômios de Lagrange. As funções de enriquecimento podem ter suporte global conforme apresentado em Gifford e Hilton (1978) ou ainda o enriquecimento pode ser em nível local conforme introduzido por Belytschko et al. (1988). O enriquecimento global acarreta uma maior quantidade de graus de liberdade nas análises e também diminui a esparsidade da matriz resultante. Uma vez que as fissuras são um problema local, os métodos de enriquecimento desenvolvidos para análises de fratura utilizam geralmente enriquecimento em nível local como é o caso do Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE) introduzido por Moes *et al.* 1999, o qual é análogo ao Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) aplicado a problemas de fratura. No contexto do MEFG o enriquecimento com funções descontínuas permite que o caminho de propagação da fissura possa ser interno ao elemento finito evitando assim o trabalhoso remalhamento antes necessário nas análises via MEF. A posição

geométrica da fissura e o seu crescimento podem ser descritos de maneira implícita através de métodos como o método *level set* ou de maneira explícita (com discretização) através de métodos como o *face offsetting*. Além disso, o enriquecimento de nós nos elementos de ponta de fissura com funções analíticas da MFEL permite capturar com maior precisão os gradientes dos campos de tensão e deslocamentos nessa região. Devido principalmente às características mencionadas, o MEFG tem sido utilizado em vários trabalhos que tratam de problemas de fratura por fissura dominante (MOES e BELYTSCHKO, 2002; MERGHEIM et al., 2005; BORDAS et al., 2007). Apesar das vantagens citadas, a formulação do MEFE apresenta algumas dificuldades como, por exemplo, a questão dos elementos de mistura e também instabilidades numéricas que podem ocorrer na integração de elementos transpassados pela fissura. Por fim, destaca-se o fato de que o método requer uma malha volumétrica inicial, a qual nem sempre é de fácil obtenção a partir de modelos geométrico de CAD, mesmo para o caso de malhas volumétricas que não necessitem de concordância com a superfície da fissura.

Uma alternativa aos métodos baseados em elementos finitos são os métodos sem malha como o Galerkin Livre de Elementos (GLE) e o Galerkin Livre de Elementos Estendido (GLEE) apresentados por Belytschko e Lu (1995) e Fleming et al. (1997), respectivamente. Devido à ausência de malha a fissura pode se propagar arbitrariamente através da discretização, que nesse caso se limita a um conjunto de pontos no domínio do problema, fazendo com que esses métodos sejam particularmente interessantes para análises de fratura. Outra alternativa aos métodos de elementos finitos são os métodos baseados em elementos de contorno como a formulação baseada em dipolos de tensão apresentada por Rocha 1988, o MEC dual introduzido por Hong & Chen 1988, Portela et al. 1992 e Mi & Aliabadi 1992, e o Método das Descontinuidades de Deslocamento (CROUCH 1976; WEAVER 1977). A principal vantagem dos elementos de contorno para problemas de fratura encontra-se na redução de dimensionalidade da malha que faz com que a discretização seja necessária apenas nos contornos externos e nas faces das fissuras. Sendo assim algoritmos mais eficientes podem ser propostos para a propagação aleatória de fissuras (KOLK & KUHN, 2006). Além disso, modelos de análise podem ser obtidos de forma mais direta a partir de modelos geométricos convencionais de CAD (PENG et al. 2017a). Devido ao uso das chamadas soluções fundamentais, os métodos baseados em elementos de contorno tendem a ser naturalmente mais precisos quando comparados com métodos que exigem discretizações

de domínio para a representação dos elevados gradientes de tensões e deslocamentos observados na frente das fissuras (LIU *et al.* 2011).

### 1.2.2 A fadiga estrutural

A origem da palavra fadiga vem do vocábulo latim *fatigare* que significa cansar. Tal termo é largamente empregado no contexto de engenharia para designar o dano e a ruína de materiais sujeitos a carregamentos cíclicos. A Fadiga é caracterizada pela mudança das propriedades internas dos materiais devido à ocorrência de repetidos ciclos de tensões e deformações. Muitas vezes as mudanças da microestrutura material estão relacionadas com a nucleação e coalescência de micro defeitos culminando em uma microfissura dominante. Devido aos ciclos de carga e descarga, a microfissura tende a se propagar em um regime estável até atingir uma dimensão crítica resultando na ruína estrutural por fratura frágil. Braithwaite (1854) empregou o termo fadiga exclusivamente para denotar a fissuração em metais sob cargas repetidas, no entanto, Poncelet (1839) foi quem introduziu o termo fadiga para designar a fissuração e a ruína em estruturas.

Albert (1838) realizou o primeiro estudo de fadiga em metais conduzindo testes em correntes utilizadas em minas. O interesse no estudo da fadiga cresceu em paralelo ao grande aumento no uso de materiais metálicos, particularmente em ferrovias e estruturas de pontes. Rankine (1843) reconheceu que estruturas que apresentam entalhes e concentradores de tensão são mais sensíveis à ação da fadiga. Nessas estruturas, as falhas por fadiga ocorrem após um número de ciclos de carga menor que em estruturas que não apresentam tais características. O comportamento de materiais sob solicitações cíclicas pode ser caracterizado por curvas do tipo “s-N”, relacionando a tensão máxima atuante (s) ao número de ciclos para ruptura (N) (WÖHLER, 1860). As curvas do tipo “s-N” têm sido utilizadas para estimar a vida útil de estruturas submetidas a carregamentos cíclicos sem a necessidade de simular a propagação de fissuras. Gerber (1874) propôs uma metodologia para o cálculo de vida útil de estruturas submetidas a diferentes níveis de tensões cíclicas. Basquim (1910) propôs leis empíricas para a caracterização de curvas “s-N” de metais. O autor observou em seu trabalho que as curvas “s-N” plotadas em escala log x log resultavam lineares para estados de tensão próximos à resistência do material. Apesar de utilizadas em análises de fadiga, as curvas “s-N” desprezam a influência do caminho de propagação da fissura na vida útil.

A partir de 1920 a linha de pesquisa no campo da fadiga recebeu maior atenção. Palmgren (1924) desenvolveu um trabalho sobre modelos de acumulação de dano para ruína

sob fadiga. McAdam (1926) estudou a fadiga sob corrosão em metais enquanto Langer (1937) analisou a fadiga sob carregamentos variáveis. Neuber (1946) avaliou o efeito de entalhes e concentradores de tensão considerando carregamentos monotônicos e cíclicos.

No contexto da MFEL, Paris, Gomez e Anderson (1961) e Paris e Erdogan (1963) foram os primeiros a sugerir que o incremento no comprimento da fissura por ciclo de carga,  $da/dN$ , poderia ser relacionado à amplitude de variação do fator de intensidade de tensão,  $\Delta K$ . A equação proposta ficou conhecida como “Lei de Paris” e se mostrou adequada para avaliar a propagação de fissuras em regime de fadiga no intervalo de ciclos em que a relação entre  $\Delta K$  e  $da/dN$ , plotada em escala  $\log \times \log$ , é linear. Tal intervalo corresponde à maior parte da vida útil das estruturas submetidas à fadiga e, portanto, a Lei de Paris é adotada em diversos trabalhos que tratam de fadiga (LEONEL, 2009). No entanto, quando a variação  $\Delta K$  dos FIT ao longo dos ciclos de carga e descarga é muito elevada, a relação na escala  $\log \times \log$  entre  $\Delta K$  e  $da/dN$  deixa de ser linear e apresenta um crescimento acentuado. Nessa situação Forman et al. (1967) propuseram um critério de propagação de fissuras que se adequa aos resultados experimentais. Atenção foi dada também ao crescimento sub-crítico das fissuras, ou seja, quando as variações  $\Delta K$  são muito baixas e a Lei de Paris também não é aplicável (ERDOGAN e RATWANI, 1970 e DONAHUE et al., 1972).

Elber (1970) mostrou que as faces da fissura, sob regime de fadiga, podem fechar-se mesmo antes da retirada total do carregamento atuante devido a presença de uma região plástica próxima a ponta da fissura. O fenômeno ficou conhecido por “*crack closure effect*” e implica que a taxa de crescimento das fissuras pode não mais ser determinada pelo valor nominal de  $\Delta K$ , mas sim por meio de um valor efetivo, o qual é avaliado segundo a rugosidade das faces das fissuras presentes no corpo em análise. Um efeito oposto também é observado quando a fissura permanece aberta após a retirada total do carregamento. Nesse caso dá-se o nome de *crack opening effect* e também está relacionado com deformações plásticas próximas à ponta da fissura.

Diversos trabalhos na literatura acoplaram modelos numéricos de propagação de fissuras baseados na MFEL a leis empíricas de fadiga para estimar a vida útil de componentes mecânico-estruturais (MIRANDA et al., 2003; SUKUMAR et al., 2003; URAL et al., 2005; KOLK & KUHN, 2006). A comparação desses estudos com resultados experimentais sugere que, para a fadiga de alto ciclo, essas análises são uma maneira robusta e eficiente para

determinar a vida útil à propagação (SCHOLLMANN et al., 2003; RICHARD et al., 2005; CITARELLA et al., 2014).

Outra maneira para determinar a vida útil à fadiga é através de análises não lineares utilizando modelos de fadiga coesiva (DE ANDRES *et al.*, 1999; NGUYEN *et al.* (2001) URAL *et al.* 2009). Modelos coesivos de fadiga têm sido implementados em códigos de elementos finitos como elementos de interfaces coesivas. Sendo assim é factível a consideração de não-linearidades do material tais como as deformações plásticas, porém são necessários algoritmos robustos de remalhamento para capturar a evolução da fissura. Com esses modelos é possível determinar a vida útil para a nucleação da fissura, sendo essa uma das principais vantagens sobre os modelos baseados na MFEL. No entanto, são necessários custosos algoritmos incrementais-iterativos para resolver o problema não linear ao longo de todo o histórico de carregamento da vida útil à fadiga, limitando análises numéricas de fadiga a problemas com poucos graus de liberdade.

De Andres et al. (1999) desenvolveu um elemento de interface e uma classe de leis coesivas irreversíveis que são capazes de rastrear frentes de fissuras que evoluem por fadiga e calcular as curvas de vida útil à fadiga. Nguyen et al. (2001) propuseram um modelo coesivo de fadiga que considera a histerese devido ao comportamento cíclico de carga e descarga. Roe e Siegmund (2001) apresentaram um modelo coesivo de fadiga o qual foi aplicado para a fadiga na interface de vigas de cantoneira dupla. Maiti e Geubelle (2005) propuseram um modelo coesivo de fratura por fadiga para materiais poliméricos, nos quais as tensões coesivas se desenvolvem como funções das taxas de abertura da fissura e do número de ciclos. Maiti e Geubelle (2006) também estudaram o retardamento da propagação de fissuras devido ao *crack closure effect*. Por fim, Ural et al. (2009) desenvolveu um modelo coesivo de fadiga que segue um lei coesiva linear dependente de uma variável de dano. Acoplada a uma lei de evolução da variável de dano, o modelo é capaz de reproduzir as curvas de vida útil à fadiga e a acumulação do dano.

Com relação à modelagem numérica do problema de fadiga via MEC pode-se destacar o trabalho de Cisilino e Aliabadi (1999) os quais conduziram análises tridimensionais elásticas e elastoplásticas. As integrais de domínio envolvidas na formulação elastoplástica do MEC dual foram procedidas utilizando células de integração. Os autores adotaram a taxa de FIT como fator de controle da propagação de fissuras para o caso elástico e a integral J para o caso elastoplástico. Dell'Erba & Aliabadi (2000) estudaram o problema propagação

tridimensional de fissuras devido à fadiga termo-mecânica utilizando o MEC. Yang et al. (2001) realizou análises de fadiga em estruturas planas compostas por materiais quase-frágeis a partir de um modelo coesivo de fadiga ao passo que Yan (2006) analisou problemas de fadiga em corpos com múltiplas fissuras considerando a MFEL a partir do método da descontinuidade de deslocamentos. Sekine et. al. (2005) utilizou uma formulação baseada no acoplamento MEC-MEF para análise do comportamento a fadiga de painéis de alumínio reforçados com fibras. Problemas térmicos de fadiga são tratados em Khatir e Lefebvre (2004) e fadiga sob corrosão em Jivkov (2004). Leonel *et al.* (2010) acoplou modelos de confiabilidade estrutural à modelos de elementos de contorno para a determinação probabilística da vida útil de componentes submetidos à fadiga em modo misto. Os estudos mais recentes com relação à análise de fadiga via MEC abordam aplicações práticas de fadiga como os apresentados em Citarella *et al.* (2014) e desenvolvimentos teóricos visando integrar as análises de fadiga com os modelos geométricos de CAD (PENG, 2016; PENG *et al.*, 2017a; PENG *et al.*, 2017b).

### 1.2.3 Extração dos FIT.

Diversos métodos podem ser empregados para a extração dos FIT. Os métodos podem ser classificados em três tipos, a saber, métodos analíticos, experimentais e numéricos. A aplicabilidade de cada método está relacionada ao objetivo do analista e também ao grau de complexibilidade do problema analisado.

Os métodos analíticos geralmente utilizam equações da elasticidade linear bidimensional, formuladas a partir de funções de tensões complexas, para determinar expressões analíticas para os FIT (SZABÓ & BABUSKA, 1988; SZABÓ & BABUSKA, 1991). Os métodos analíticos são aplicáveis apenas para um restrito conjunto de problemas de fissuras, com geometria e condições de contorno simples, geralmente envolvendo problemas bidimensionais simples ou problemas tridimensionais de fissuras imersas em meios infinitos. Apesar de restritos, para os casos em que são aplicáveis os métodos analíticos fornecem soluções exatas para os FIT e, portanto, são frequentemente usados para controlar a precisão dos outros métodos. Várias soluções analíticas podem ser encontradas em *handbooks*, tais como Murakami (1987), Tada et al. (2000) e Fett (2008). Maiores detalhes sobre os métodos analíticos podem ser obtidos em Broberg (1999).

Os métodos experimentais são comumente utilizados para problemas práticos nos quais certas características necessárias para a modelagem numérica não são completamente

conhecidas, como, por exemplo, condições de contorno e propriedades materiais. Dentre os métodos experimentais destacam-se: técnicas que empregam extensômetros; a fotoelasticidade; a técnica de correlação de imagens digitais e a termoelasticidade. Maiores informações sobre os métodos experimentais em problemas de fratura podem ser obtidos em Epstein (1993).

Já os métodos numéricos são aplicáveis a problemas com geometria e condições de contorno complexas, os quais são mais próximos dos casos gerais encontrados em situações reais. A grande maioria dos métodos numéricos para a extração dos FIT são métodos de pós-processamento, ou seja, os FIT são calculados a partir dos resultados prévios de tensões e deslocamentos do problema elástico fissurado. Nesse caso, os métodos de extração podem ser aplicados independentemente do método numérico adotado para resolver o problema elástico fissurado. No entanto, a precisão dos FIT vai depender da precisão dos campos de tensões e de deslocamentos obtidos na análise numérica. Métodos numéricos baseados na relação entre as expansões assintóticas analíticas e os resultados numéricos dos campos elásticos da frente das fissuras, como as técnicas de correlação e extrapolação de deslocamentos e de tensões (PARIS & SIH, 1965; CHAN *et al.*, 1970) foram os primeiros a serem utilizados para extrair numericamente os FIT. Devido principalmente à sua simplicidade, esses métodos tem sido utilizados há décadas para extrair os FIT a partir de soluções numéricas obtidas com elementos finitos e elementos de contorno (CHAN *et al.*, 1970; INGRAFFEA & MANU, 1980). No entanto, a falta de precisão dos resultados numéricos de deslocamentos e de tensões pode levar a erros consideráveis nas respostas dos FIT, especialmente quando o método numérico adotado para a análise não é capaz de capturar o comportamento assintótico dos campos elásticos de ponta de fissura. Melhorias na técnica de correlação de deslocamentos foram recentemente propostas em Gupta *et al.* (2017) o que conduziu a resultados precisos mesmo para superfícies de fissuras não planares solicitadas a modo misto de fratura. Benzley (1974) foi um dos primeiros a determinar os FIT utilizando elementos finitos isoparamétricos enriquecidos com funções analíticas da mecânica da fratura no intuito de capturar as singularidades na ponta das fissuras. Desde então, diversos estudos no âmbito do MEEG tem incorporado estratégias de enriquecimento para melhorar a precisão das respostas dos campos elásticos, e consecutivamente dos FIT (MELENK & BABUSKA, 1996; AYHAN & NIED, 2002; AREIAS & BELYTSCHKO, 2005; PEREIRA *et al.* 2009). Henshell e Shaw (1975) apresentaram o uso dos chamados elementos “quarter-point”, os quais são capazes de reproduzir a variação  $\sqrt{r}$  observada nos campos de deslocamento por meio da translação dos

pontos intermediários de elementos quadráticos para a posição localizada a um quarto da dimensão da aresta do elemento. O método da extensão virtual de fissura de HELLEN (1975), baseado na integral de Irwin (1957), foi desenvolvido para determinar os FIT baseado no cálculo da energia de deformação liberada devido a uma extensão virtual da fissura. No entanto, o método exige a construção de uma malha auxiliar para a discretização da fissura virtual. Já o método da extensão virtual modificado (RYBICKI & KANNINEN, 1977), soluciona a necessidade da construção de uma malha auxiliar e é, portanto, um método comumente empregado para a avaliação dos FIT via o MEF e o MEC (KRUEGER, 2004).

Rice (1968) introduziu uma formulação, baseada em um balanço energético na ponta da fissura, capaz de quantificar a taxa de liberação de energia a partir de uma integral, denominada “Integral J”, avaliada ao longo de um caminho fechado arbitrário que englobe a ponta da fissura. A integral J também se estende para a avaliação da fratura elastoplástica em materiais dúcteis (TANAKA, 1983) nos quais os critérios de propagação não são mais formulados em termos dos FIT. A integral J sobre um caminho fechado independente, conforme proposta por Rice (1968), é um dos métodos mais utilizados para a avaliação dos FIT devido principalmente à sua parcial independência em relação à discretização do problema e à sua elevada precisão de resultados (STERN et al., 1976; YAU et al., 1980; BABUSKA e MILLER, 1984; RIGBY e ALIABADI, 1993; WEN, et al., 1995). Para a obtenção dos FIT em problemas em modo misto, técnicas de decomposição da integral J devem ser adotadas (HUBER et al., 1993; RIGBY e ALIABADI, 1998). Outra maneira de se obter FIT em modo misto é via a integral M proposta por Yau et al. (1980) a partir de leis de conservação da elasticidade. Para melhor adequar a integral J aos resultados das análises via elementos finitos alguns trabalhos optaram por utilizar uma integral equivalente de domínio para a obtenção dos FIT (NIKISHKOV e ATLURI, 1987; SHIVAKUMAR e RAJU, 1992).

Existem várias abordagens de pós-processamento, que assim como a Integral J, também são baseadas em conceitos de taxa liberação da energia, como por exemplo, o método da integral de interação (MORAN & SHIH, 1987); o método da integral de contorno (STERN et al., 1976) e o método da função de corte (SZABO & BABUSKA, 1988). Por serem baseados no conceito de energia, esses métodos são precisos e convergem na mesma velocidade da energia de deformação, que é a grandeza com a maior taxa de convergência em análises de elementos finitos (BABUSKA & MILLER, 1984). No entanto, esses métodos são mais complexos e mais custosos em termos de tempo de processamento e perdem a precisão no caso de superfícies de fissuras tridimensionais não planares (GONZALEZ et al., 2013).

Além disso, os mesmos dificultam o tratamento de fissuras de borda devido à necessidade de caminhos ou domínios de integração.

Como alternativa aos métodos numéricos de pós-processamento os chamados métodos diretos são capazes de extrair os FIT diretamente da solução do sistema de equações do problema elástico fissurado, obtido com algum método numérico. Nesse caso, os métodos são formulados no contexto específico do método numérico adotado para resolver o problema elástico. No âmbito do MEF, Xiao & Karimloo (2003) desenvolveram um método direto capaz de extrair os FIT diretamente do sistema de equações do MEF. Já Alatawi & Trevelyan (2015) apresentaram uma abordagem para extrair os FIT diretamente do sistema de equações do MEC (dual). Para tanto, é necessário o enriquecimento da aproximação numérica dos elementos da ponta da fissura com funções analíticas da mecânica da fratura e introduzir no sistema uma equação extra a qual impõe uma restrição cinemática para que não haja descontinuidade de deslocamento na ponta da fissura. No contexto de enriquecimento a partir da partição da unidade, o MEC dual passa a ser denominado Método dos Elementos de Contorno Estendido (MECE) (SIMPSON e TREVELYAN, 2011a; SIMPSON e TREVELYAN, 2011b).

No contexto da formulação MEC dual, Gonzalez et al. (2015) apresentou uma técnica de ajuste de deslocamentos para problemas de fratura bidimensionais que considera ambos os termos de ordens  $O(\sqrt{r})$  e  $O(r)$  da expansão assintótica dos deslocamentos da ponta da fissura. O método permite uma livre escolha para o número e distribuição espacial dos pontos para o cálculo dos deslocamentos que são utilizados para extrair os FIT. Gonzalez *et al.* (2015) utilizaram deslocamentos tanto de pontos internos como de pontos sobre as faces da fissura e concluíram que as melhores respostas são obtidas adotando-se pontos internos, devido à maior precisão do MEC para a avaliação das grandezas internas.

#### **1.2.4 O MEC para a modelagem de fissuras**

A utilização da formulação convencional do MEC baseada na equação integral de deslocamentos (identidade Somigliana) para modelar as superfícies colapsadas de uma fissura resulta na degeneração do sistema de equações lineares uma vez que pontos de colocação coincidentes podem existir nas faces da fissura (CRUSE, 1972). Muitos métodos baseados em equações integrais foram propostos na literatura no intuito de contornar o problema. Um dos primeiros trabalhos que trataram da análise de fissuras via o MEC é ainda da década de

setenta de autoria de Cruse e Vanburen (1971). Os autores analisaram o campo de tensões nas proximidades de fissuras em modelos elásticos tridimensionais. Posteriormente, Cruse (1972) analisou modelos bi e tridimensionais. Nesses trabalhos a geometria da fissura foi aproximada por uma forma elíptica o que levou a erros significativos. A técnica não apresentou um desempenho satisfatório e, portanto, Snyder e Cruse (1975) apresentaram uma nova abordagem utilizando funções de Green obtidas através de um problema fundamental que considera a presença de uma fissura. Embora precisa, sua aplicação é restrita, permitindo o estudo dos FIT, porém não o avanço da fissura. O uso de sub-regiões para a simulação de fissuras aparece no trabalho de Blandford et al. (1981). O caminho das fissuras segue as interfaces entre os corpos e um critério propagação deve ser aplicado. Essa técnica emprega apenas a equação integral de deslocamentos, porém exigem mudanças constantes na malha para a adequação ao caminho de propagação da fissura levando o algoritmo a ter um fraco desempenho computacional. Já o método de descontinuidade de deslocamentos (CROUCH, 1976; CROUCH E STARFIELD, 1983; WEN & FAN, 1994; YAN, 2006) utiliza equações integrais cujas soluções fundamentais são obtidas com a aplicação de descontinuidades de deslocamentos unitárias. Nesses casos, integrais fortemente singulares e hipersingulares aparecem na formulação e devem ser tratadas.

Hong e Chen (1988a, 1988b) introduziram a ideia de utilizar equações integrais duais, ou seja, duas equações integrais linearmente independentes, para solucionar o problema da degeneração do sistema de equações em problemas de fratura. Os autores propuseram que a segunda equação integral fosse obtida a partir da diferenciação da equação integral de deslocamentos. A equação integral de forças de superfície foi então deduzida pela primeira vez para problemas planos diferenciando a equação de deslocamentos e aplicando a lei de Hooke e o equilíbrio de Cauchy. Gray *et al.* (1990) por sua vez deduziu a equação integral de forças de superfície para o caso tridimensional dos problemas elastoestáticos. Assim como no caso do método das descontinuidades de deslocamento, a equação integral de forças de superfícies também apresenta termos hipersingulares que devem ser regularizados. Pela primeira vez um sistema formado por colocação de duas equações integrais independentes foi solucionado em Chen e Hong (1989) no contexto de fluidos de Darcy. Portela *et al.* (1992) foi o primeiro trabalho a utilizar as equações integrais de deslocamentos e de forças de superfícies, deduzidas em Hong e Chen (1988a, 1988b) em análises de propagação de fissuras, apontando diversas vantagens de tal abordagem. Os autores denominaram a

abordagem Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) a qual foi revisada no trabalho de Hong e Chen (1999).

Portela *et al.* (1992) descreveu como o uso da equação integral de forças de superfície impõem certas condições na escolha dos elementos a serem utilizados na discretização da fissura. Essas condições surgem devido ao requerimento de continuidade  $C1$  para os campos mecânicos de deslocamentos e forças, necessário para garantir a existência das integrais hipersingulares no sentido de parte finita de Hadamard. Para resolver o impasse Portela *et al.* (1992) propôs a utilização de elementos descontínuos nos quais os pontos de colocação são definidos no interior dos elementos. Com os pontos de colocação internos a condição de continuidade de Hölder da equação integral de forças de superfícies é atendida visto que as funções de forma são diferencialmente contínuas no interior dos elementos. Vários trabalhos adotaram a utilização de elementos descontínuos com esse propósito podendo ser citados os trabalhos de Mi e Aliabadi (1992), Garcia *et al.* (2004) e Marburg (2008). No entanto, deve-se salientar que a utilização de elementos descontínuos aumenta consideravelmente o número de graus de liberdade na discretização das faces de fissura, principalmente no caso tridimensional. Nos trabalhos de Wilde *et al.* (1996) e Young (1996) foram desenvolvidas técnicas para aumentar o grau de continuidade das aproximações numéricas nas faces da fissura permitindo assim a utilização de elementos contínuos.

O MEC dual é a formulação de elementos de contorno mais utilizada para a análise de propagação aleatória de fissuras. No caso de problemas bidimensionais e fratura, Portela *et al.* (1993), Saleh e Aliabadi (1995), Sollero e Aliabadi (1995) e Aliabadi e Saleh (2002) utilizaram o MEC dual para análises envolvendo a propagação de fissuras em modo misto, a análise de fratura quase-frágil no concreto e a avaliação de FIT em compósitos laminados anisotrópicos. Pineda-León *et al.* (2015) desenvolveram formulações baseadas no MEC dual também para a análise de problemas de fratura elastoplástica, viscoplástica e fratura por fluência.

Mi & Aliabadi (1992) estenderam a formulação MEC dual para tratar problemas tridimensionais de fratura. Desde então diversos trabalhos adotaram o MEC dual em análises tridimensionais: Mi e Aliabadi (1994a, 1994b, 1995) e Mi (1996) desenvolveram algoritmos para efetuar a propagação automática de superfícies de fissuras. Cisilino & Aliabadi (1999) analisaram a propagação de fissuras em regime de fadiga em problemas tridimensionais de fratura elástica e elastoplástica. Kolk & Kuhn (2006) desenvolveram um algoritmo capaz de

simular a propagação de superfícies de fissuras em componentes mecânicos de complexibilidade industrial. Weber et al. (2010) analisou a influência da rugosidade da superfície da fissura no caminho de propagação. Citarella & Buchholz (2008), Citarella & Cricrì (2010), Citarella et al. (2014) e Carlone et al. (2015) compararam resultados de análises de fratura obtidos via MEC dual 3D com resultados experimentais e numéricos. Além da boa concordância entre os resultados, os autores apontam como principal vantagem do método a facilidade para desenvolver a propagação aleatória das superfícies de fissuras sem a necessidade de intervenções manuais. Por fim, Kuranakov et al. (2016) analisaram via MEC dual a propagação tridimensional de fissuras a partir de cavidades em meios elásticos infinitos devido à efeitos de bombeamento de um líquido viscoso.

No tocante dos trabalhos desenvolvidos no SET, Leonel (2006) foi o primeiro a utilizar a formulação MEC dual. O autor abordou problemas de propagação de múltiplas fissuras em meios elásticos lineares planos com ênfase nos fenômenos de coalescência e localização. Em seguida Lovón (2006) utilizou uma formulação h-adaptativa do MEC dual para problemas de fratura elástica linear onde o refinamento adaptativo se adequava às regiões com concentração de tensões. Vicentini (2006) abordou problemas de fratura elástica linear e fratura quase-frágil via MEC dual utilizando o modelo coesivo de fratura. Kzam (2009) desenvolveu as integrais hipersingulares envolvidas no MEC dual via o método da subtração de singularidades (ALIABADI et al., 1985) para tratar problemas planos de fratura com elementos de contorno curvos de alta ordem. Leonel (2009) empregou o MEC dual para a análise da propagação de fissuras em modo misto em problemas de fratura linear, não linear, fadiga e contato entre as faces de fissuras. Por fim, Andrade (2017) estendeu a formulação dual do MEC para meios não homogêneos e aplicou-a na resolução de diversos problemas de fratura, tais como a propagação de múltiplas fissuras em meios frágeis, o fraturamento hidráulico e a fadiga estrutural. Apesar da diversidade de problemas abordados, em nenhum trabalho a formulação MEC dual foi estendida para análises tridimensionais de fratura sendo esse um dos objetivos da presente tese. A principal dificuldade para a implementação da formulação tridimensional do MEC dual é a avaliação das integrais hipersingulares sobre os elementos de superfície. No presente trabalho tais integrais foram tratadas a partir do Método de Guiggiani (GUIGGIANI et al., 1992) o qual tem se mostrado uma maneira geral de tratar integrais hipersingulares em elementos tridimensionais curvos de ordem qualquer (ROCHA, 2015). Este método é embasado na técnica de subtração de singularidade e tem sido

amplamente utilizado em várias formulações do MEC que envolvam a avaliação de integrais hipersingulares.

### **1.2.5 Geometria computacional e análises isogeométricas**

Para que seja possível criar os modelos numéricos de análise é necessário primeiramente que existam modelos geométricos dos problemas, os quais atualmente são criados por projetistas a partir de programas de Desenho Assistido por Computador (CAD). As bases teóricas dos programas de CAD correspondem a uma área do conhecimento denominada geometria computacional. A geometria computacional encontra-se bem consolidada na atualidade (FARIN, 1999; ROGERS, 2001), porém, assim como outras áreas do conhecimento, ainda apresenta diversas questões não resolvidas que são alvos de intensas atividades de pesquisa. Entre as tecnologias de geometria computacional existentes na atualidade, a mais utilizada em projetos de engenharia são as funções B-Spline não uniformes racionalizadas (NURBS), que são o padrão da indústria CAD (FARIN, 1999; ROGERS, 2001). As principais vantagens das NURBS são sua conveniência para a modelagem de superfícies de forma livre, sua capacidade de representar exatamente superfícies quádricas tais como cilindros, esferas e elipsoides, e o fato de existirem muitos algoritmos numéricos eficientes e estáveis para a geração automática de objetos NURBS (COTTRELL et al., 2009). Para viabilizar a modelagem geométrica de sólidos por múltiplas superfícies NURBS, procedimentos de aproximação devem ser efetuados sobre superfícies NURBS regulares. Esses procedimentos são essenciais uma vez que as múltiplas superfícies são construídas de maneira independente, sem que exista uma representação matemática explícita para a interseção das superfícies. Além disso, muitas vezes apenas uma parte de uma dada superfície realmente representa o contorno do objeto que se deseja modelar. Mais precisamente, os procedimentos de aproximação permitem visualizar apenas as regiões do conjunto de superfícies NURBS que realmente fazem parte do contorno do objeto. No entanto, a parametrização e a representação matemática das superfícies não são alteradas pelos procedimentos de aproximação e, portanto o modelo paramétrico não corresponde ao objeto final visualizado (MARUSSIG & HUGHES 2017).

Uma deficiência das NURBS são as lacunas e as superposições observadas nas interseções das superfícies, as quais geralmente não podem ser evitadas para os casos de topologias complexas uma vez que os procedimentos de aproximação, em geral, não são geometricamente exatos. Além disso, apesar da continuidade ser garantida sobre as

superfícies, a mesma tem que ser garantida manualmente nas interseções para o caso de múltiplas superfícies através do adequado posicionamento dos chamados pontos de controle. Modelos geométricos que não apresentam lacunas e superposições são denominados na literatura como modelos “estanques” (“*Watertight*” em inglês). Modelos estanques são desejáveis por diversas razões entre elas a possibilidade de gerar malhas volumétricas de análise sem a necessidade de “reparos” manuais de malha e evitar comportamentos não físicos de superposição de superfícies em animações dinâmicas de CAD ou análises numéricas dinâmicas (SEDERBERG *et al.*, 2003). Recentemente foi proposta uma nova tecnologia de geometria computacional denominada T-splines, a qual foi apresentada como uma generalização das NURBS (SEDERBERG *et al.*, 2003; SEDERBERG *et al.*, 2004). T-splines são capazes de solucionar o problema das lacunas e das superposições através das chamadas juntas-T, as quais correspondem à linhas de pontos de controles parciais (BAZILEVS, 2010). De maneira geral as T-splines são capazes de combinar as múltiplas superfícies NURBS de um modelo geométrico em um único patch “estanque”, ou seja, sem lacunas e superposições de superfícies. Além disso, elas também permitem definir estratégias de refinamento local (SEDERBERG *et al.*, 2004).

Extensões comerciais das T-splines foram introduzidas nos programas Maya e Rhino, dois programas baseados para com NURBS (T-splines, Inc., 2017a; T-splines, Inc., 2017b). Ressalta-se, no entanto que não são todas as geometrias constituídas por múltiplas superfícies NURBS que podem ser transformadas em T-splines. Além disso, as lacunas e superposições das múltiplas superfícies NURBS são muitas vezes pequenas em comparação às dimensões dos problemas.

Outra abordagem de geometria computacional que vale a pena ser citada é a subdivisão de superfícies, a qual utiliza um processo limite para definir superfícies suaves a partir de uma malha de triângulos ou quadriláteros (WARREN & WEIMER, 2002; PETERS & REIF, 2008). As vantagens da subdivisão de superfícies são que não existe restrição para a topologia do grid de controle e, assim como as T-splines, também são capazes de gerar modelos geométricos “estanques”. No entanto, a indústria de CAD não utiliza amplamente a subdivisão de superfícies uma vez que tal tecnologia não é compatível com as NURBS, para as quais bilhões de dólares já foram investidos em sua infraestrutura. Outras tecnologias de geometria computacional também existem e em geral, assim como as NURBS, T-splines e subdivisão de superfícies, também descrevem objetos sólidos a partir de superfícies

paramétricas, o que é conhecido como representação de contorno (*Boundary-representation*, ou simplesmente *B-representation*, em inglês) (COTTRELL *et al.* 2009).

As chamadas Análises IsoGeométricas (AIG) foram introduzidas no contexto das análises numéricas a partir dos trabalhos de Hughes *et al.* (2005), Cottrell *et al.* (2006), Bazilevs *et al.* (2009) e Cottrell *et al.* (2009). A ideia básica das AIG é utilizar as mesmas funções base utilizadas em softwares de CAD (NURBS, T-splines, subdivisão de superfícies, etc.) para aproximar os campos físicos de interesse. Com as AIG foi possível estabelecer uma conexão direta entre as geometrias originadas a partir de programas de CAD e os modelos das análises em elementos finitos e elementos de contorno. Consequentemente, os modelos de elementos finitos e elementos de contorno se tornam geometricamente exatos em relação ao modelo do CAD.

As NURBS (principal tecnologia CAD) possuem propriedades matemáticas muito úteis para as análises numéricas como, por exemplo, a partição da unidade, novas possibilidades de refinamento como o refinamento  $k$ , a positividade ao longo de todo o domínio, a continuidade  $C_{p-1}$  para superfícies descritas por NURBS de ordem  $p$  e a independência linear (COTTRELL *et al.*, 2009). Recentemente, vários trabalhos relacionados às mais diversas áreas envolvendo análises numéricas exploraram vantagens computacionais oriundas dessas propriedades matemáticas das NURBS. As AIG foram incorporadas ao MEF para a análise de fratura frágil e propagação de fissuras nos trabalhos de De Luycher *et al.* (2011) e Ghorashi *et al.* (2012) e para a análise de fratura coesiva em Verhoosel *et al.* (2011). Cottrell *et al.* (2006) e Bazilevs *et al.* (2009) utilizaram modelos isogeométricos baseados em NURBS para análises de vibração e interação fluido-estrutura, respectivamente. Uma abordagem isogeométrica dos modelos de campo de fase para análises dinâmicas de fratura frágil foi desenvolvida no trabalho de Borden *et al.* (2012) ao passo que problemas de elevada distorção de malha observados em análises numéricas de sólidos sob grandes deformações foram tratadas também a partir de uma abordagem isogeométrica em Lipton *et al.* (2010). Trabalhos nas áreas de otimização de forma e eletromagnetismo via abordagens isogeométricas também foram desenvolvidos nos últimos anos (NAGY *et al.*, 2010; BUFFA *et al.*, 2010). A grande maioria dos trabalhos relacionados às análises isogeométricas via elementos finitos estão no âmbito de análises bidimensionais ou ainda problemas de casca, para os quais as aproximações numéricas podem ser construídas a partir de superfícies paramétricas com funções base bivariadas. AIG de problemas que necessitam da

representação volumétrica do problema são ainda limitadas. Isso porque o problema de desenvolver uma representação geométrica tridimensional do sólido (com funções base trivariadas) de modo que a representação da superfície seja preservada é ainda um problema aberto em termos de geometria computacional. Geometria e topologia diferencial e computacional de superfícies encontram forte base teórica hoje em dia, porém o problema tridimensional ainda está mal resolvido (THURSTON, 1982; THURSTON 1997). No presente momento, a melhor alternativa para o tratamento de modelos isogeométricos de sólidos tridimensionais com elementos finitos é por meio de técnicas de contorno imerso como as apresentadas em Sanches et al. (2011). No entanto, sérias dificuldades aparecem nessas formulações para a imposição das condições de contorno.

A ideia de combinar o MEC com as AIG foi sugerida primeiramente por Hughes et al. (2005) uma vez que com o mesmo é possível analisar sólidos tridimensionais (ou bidimensionais) utilizando apenas superfícies (ou curvas) paramétricas com funções de forma bivariadas (ou univariadas). Cervera e Trevelyan (2005a,b) abordaram problemas de otimização de forma utilizando curvas e superfícies NURBS para a descrição geométrica de elementos de contorno ao passo que os campos de deslocamentos e forças foram representados a partir das funções bases polinomiais de Lagrange. Recentemente formulações isogeométricas do método dos elementos de contorno foram desenvolvidas em diversas frentes de pesquisa. Li e Qian (2011) e Simpson et al. (2012) desenvolveram formulações isogeométrica de elementos de contorno baseadas na utilização de funções base NURBS para análises bidimensionais de otimização de forma e de problemas elastoestáticos, respectivamente. Lian et al. (2013) efetuou análises de tensões em componentes mecânicos tridimensionais diretamente da geometria obtida via CAD, ou seja, sem a necessidade de uma etapa de geração de malha. Outros trabalhos envolvendo problemas potenciais, problemas de dispersão acústica e problemas de Helmholtz também foram abordados via formulações isogeométricas de elementos de contorno (GU et al., 2012; SIMPSON et al., 2013; PEAKE et al., 2013 e PEAKE et al. 2015). Formulações baseadas em elementos de contorno isogeométricos também podem ser observadas no trabalho de Wang e Benson (2015), os quais desenvolveram uma formulação isogeométrica não singular utilizando múltiplas superfícies NURBS, e nos trabalhos de Marussig et al. (2015) e Campos (2016), os quais apresentaram formulações isogeométricas rápidas do MEC para a análise dos problemas elástico e potencial.

As T-splines, que são capazes de combinar as múltiplas superfícies NURBS de um modelo geométrico em um único patch “estanque”, também foram adotadas como base para análises isogeométricas em Bazilevs (2010). Scott et al. (2013) desenvolveu uma formulação isogeométrica do MEC utilizando superfícies T-splines para a análise de problemas elastoestáticos tridimensionais com topologia arbitrária contendo arestas curvas, quinas e juntas-T na interseção das superfícies. No trabalho demonstrou-se como topologias extremamente complexas, como o caso de uma hélice tridimensional, podem ser descritas utilizando apenas um único patch “estanque”. Posteriormente, problemas de resistência de ondas foram abordados no trabalho de Ginnis et al. (2014) por meio de elementos de contorno descritos por funções T-splines. Já Kostas et al. (2015) realizaram análises de otimização de forma em cascos de navios via uma formulação isogeométrica do MEC utilizando funções bases T-splines.

Com relação à subdivisão de superfícies, destacam-se os trabalhos de Cirak *et al.* (2000); Cirak & Ortiz (2001) e Cirak *et al.* (2002) que abordam problemas estruturais de casca e mais recentemente os trabalhos de Bandara *et al.* (2016) e Bandara & Cirak (2018) sobre otimização de forma de sólidos a partir de técnicas de contorno imerso e cascas, respectivamente. Com elementos de contorno, destacam-se os trabalhos de Bandara et al. (2015) sobre otimização de forma de problemas eletroestáticos tridimensionais e Liu et al. (2017) sobre análises de iteração acústica-estrutural de cascas com meios infinitos a partir do acoplamento MEF-MEC.

Até o presente momento, extensões isogeométricas da formulação MEC dual foram encontradas em apenas dois trabalhos: Peng et al. (2017a) e Peng et al. (2017b). As formulações desenvolvidas se basearam no uso de funções base NURBS para a representação isogeométrica do contorno e das fissuras. No primeiro trabalho, os autores abordaram problemas de fratura e propagação de fissuras em meios elásticos lineares bidimensionais onde salientaram que a utilização de pontos de colocação internos ao patch que descreve a geometria da fissura é suficiente para garantir a existência das integrais hipersingulares. Isso porque no interior dos patches a continuidade  $C^1$  é garantida com facilidade utilizando funções bases de ordem quadrática ou superior. Já no segundo trabalho, os autores analisaram o desempenho da formulação MEC dual isogeométrica para análises de propagação de fissuras em regime de fadiga em problemas tridimensionais de fissuras circulares e elípticas em meios infinitos. Sendo assim não foi abordado o problema da interseção das fissuras de borda com os contornos externos e da possível complexidade geométrica de componentes

mecânicos, que demandam a análise de modelos compostos por múltiplas superfícies NURBS, a estabilização das funções base das superfícies aparadas e a inserção e atualização da descontinuidade evolutiva na interseção do contorno externo com as fissuras de borda que se propagam.

### 1.3 Objetivos, metodologia e delimitações

O objetivo principal do presente trabalho consiste no desenvolvimento e na implementação de uma ferramenta computacional para análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais a partir de modelos geométricos de CAD. Visando alcançar o objetivo principal, destacam-se alguns objetivos específicos necessários que foram abordados ao longo do desenvolvimento do trabalho:

- 1) Cursar as disciplinas obrigatórias para o curso de doutorado;
- 2) Desenvolver uma revisão bibliográfica sobre temas relacionados: Estado da arte;
- 3) Desenvolver um código computacional para análises elastoestáticas de corpos tridimensionais fissurados utilizando a formulação MEC dual com elementos polinomiais de Lagrange, e tratar as integrais singulares/hipersingulares pelo método de Guiggiani.
- 4) Implementar a técnica de sub-regiões para análises de componentes mecânicos constituídos por múltiplas partes e paralelizar, em interface *Open Multi-Processing* (OpenMP), as sub-rotinas para a construção e a resolução do sistemas de equações do MEC;
- 5) Desenvolver um algoritmo simples para evitar a interpenetração das faces da fissura em problemas de fadiga com carregamentos alternados;
- 6) Estudar de maneira aprofundada os conceitos da geometria computacional, implementar as superfícies NURBS e adaptar a entrada de dados do código computacional;
- 7) Desenvolver a estratégia de colocação e o gerador de malhas para a criação eficiente de modelos de análise a partir dos modelos geométricos de CAD;
- 8) Estudar de maneira aprofundada os modelos de propagação de superfícies de fissura baseados nos conceitos da MFEL, implementar as técnicas de extração dos FIT, os critérios de propagação e o algoritmo incremental de propagação;
- 9) Analisar problemas de propagação de fissuras que tenham soluções de referência para avaliar a consistência das implementações;

- 10) Estudar de maneira aprofundada a fadiga baseada na MFEL, implementar a lei de Paris-Erdogan e analisar problemas de fadiga de alto ciclo de componentes mecânicos provenientes de modelos geométricos de CAD;
- 11) Implementar uma versão isogeométrica do MEC dual, baseada em superfícies NURBS regulares, Comparar por meio de exemplos numéricos as versões convencional e isogeométrica do MEC dual e definir propostas para a continuidade de pesquisa baseada nas limitações observadas no estudo comparativo;
- 12) Extrair conclusões sobre os desenvolvimentos abordados nessa tese a partir de uma análise crítica envolvendo tanto o estado da arte quando os resultados obtidos no presente trabalho;
- 13) Redigir o texto da tese e os artigos com os resultados obtidos ao longo do trabalho.

Todas as implementações foram desenvolvidas em linguagem Fortran 90 e as análises numéricas foram efetuadas tanto em um computador pessoal quanto em um servidor *Workstation* com 12 núcleos de processamento de 2.8GHz e 48GB de memória RAM. As referências da literatura foram consultadas em base de dados como a *Web of Science*, a *Scopus* e a *Science Direct*. Com relação às delimitações do presente trabalho, as análises ficaram no contexto da mecânica da fratura elástica linear para os modelos propagação de fissuras e fadiga de alto ciclo. Em todos os desenvolvimentos, considerou-se a cinemática linear de pequenos deslocamentos e de pequenas deformações e análises elastoestáticas. Não foram abordados problemas de fratura e fadiga elastoplástica e coesiva.

## **1.4 Justificativa**

A análise de fadiga de componentes mecânicos/estruturais fissurados é de crucial importância para as indústrias mecânica, aeronáutica e de estruturas. A avaliação da evolução dos defeitos em detalhes estruturais de pontes e barragens, em componentes mecânicos, em estruturas de aeronaves e em diversos outros projetos da engenharia, visando à determinação da vida útil estrutural e de procedimentos de manutenção e inspeção, são exemplos de aplicações dos problemas de fadiga em estruturas. Nesses problemas, a correta avaliação dos FIT dá suporte para as tomadas de decisão em análise de tolerância ao dano e de avaliação da integridade estrutural. Princípios básicos da mecânica da fratura têm sido utilizados há muitos anos para a avaliação de defeitos mecânicos como fissuras e cavidades de corrosão em componentes mecânicos. A prática da obtenção de FIT por meio de tabelas de livros é ainda

comumente empregada hoje em dia para a avaliação da falha estrutural. No entanto, os dados analíticos de FIT são limitados para casos com geometrias e condições de contorno simples. Portanto, a aplicação das soluções analíticas para problemas reais de engenharia pode muitas vezes comprometer a validade das análises. Em problemas tridimensionais envolvendo superfícies de fissura solicitadas em modo misto a situação se agrava mais ainda visto que soluções analíticas são conhecidas apenas para problemas com domínios infinitos.

Por outro lado, com o avanço da capacidade de memória e processamento dos computadores, a análise de problemas de fratura e fadiga via métodos numéricos tem se mostrado uma alternativa viável e diversos modelos podem ser encontrados na literatura. Entre os métodos numéricos aplicados na mecânica da fratura destacam-se os métodos baseados em elementos finitos e elementos de contorno, métodos sem malha, teoria peridinâmica e modelos de campo de fase. Especificamente em problemas de propagação de fissuras dominantes por fadiga de alto ciclo, o MEFG, com descrição implícita ou explícita da fissura, e o MEC-dual, em sua versão por colocação ou sua versão variacional de Galerkin, apresentam-se como os métodos numéricos mais utilizados. O MEFG é eficiente para esse tipo de análise, pois permite a inserção de superfícies de fissuras em malhas volumétricas não conformes e o MEC-dual, por sua vez, é eficiente, pois só necessita a discretização das superfícies do problema, contorno mais fissura. Apesar de ser um método consagrado na literatura para as análises de fadiga, o MEFG necessita de uma malha volumétrica inicial o que pode dificultar a integração dos modelos de análise com os modelos geométricos de CAD. Sendo assim, opta-se no presente trabalho por adotar o MEC dual na pesquisa, que tem por enfoque central a integração entre os modelos geométricos de CAD e as análises de fadiga.

Com a formulação MEC dual, a geração de malhas apenas sobre a superfície do problema facilita por sobremaneira a criação dos modelos de análise a partir dos modelos de CAD. No entanto, para modelos geométricos baseados em múltiplas superfícies NURBS, a geração de malhas fechadas de superfície é uma tarefa que envolve etapas manuais de intervenção para a criação dos modelos. No presente trabalho estuda-se a possibilidade de tratar de maneira independente a discretização de cada superfície NURBS que compõem os modelos geométricos. Assume a hipótese de que lacunas e sobreposições nas conexões das superfícies podem existir e que o erro numérico associado será pequeno caso as lacunas e sobreposições também sejam. A discretização independente é possibilitada por uma estratégia

de colocação desenvolvida na presente tese e flexibiliza por sobremaneira a criação dos modelos de análise.

## 2 Método dos elementos de contorno dual

---

Nesse capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) para análises elastoestáticas de sólidos tridimensionais contendo superfícies de fissuras. Primeiramente é introduzido o Problema de Valor de Contorno (PVC) da elastoestática e a equação diferencial parcial de Lamê-Navier, a qual governa os problemas da elastoestática linear. Posteriormente apresentam-se alguns conceitos básicos sobre como a equação de Lamê-Navier pode ser transformada em equações integrais de contorno a partir do uso da solução fundamental de Kelvin. A formulação do MEC dual é então introduzida para a análise de superfícies de fissura via a colocação de duas equações integrais linearmente independentes para os pontos simetricamente localizados sobre as faces da fissura, a saber, a equação integral de deslocamentos e a equação integral de forças de superfície.

Descreve-se de maneira sucinta como o MEC propõe que as equações integrais contínuas sejam transformadas em um sistema discreto de equações algébricas através da discretização do contorno em elementos polinomiais de Lagrange e da técnica de colocação. Problemas oriundos dos requerimentos de continuidade dos campos mecânicos sobre as faces da fissura e das descontinuidades dos campos de forças de superfície sobre o contorno são tratados através de elementos descontínuos e descontínuos de aresta. Os métodos e técnicas adotados para proceder as integrais regulares, quase singulares, fortemente singulares e hiper-singulares são apresentados nos Anexos B, C e D, dando um enfoque especial para a dedução dos termos do método de Guiggiani (Guiggiani *et. al.* 1990 e Guiggiani *et. al.* 1992) para o caso da solução fundamental elastoestática de Kelvin.

Determinada uma solução numérica para os campos mecânicos do contorno é possível obter com elevada precisão deslocamentos e tensões em pontos internos do sólido recorrendo-se novamente às equações integrais. A técnica de sub-regiões é introduzida para analisar o comportamento conjunto de componentes mecânicos perfeitamente conectados, considerando ou não a presença de fissuras. Foi proposto no presente trabalho um procedimento iterativo para evitar a interpenetração da matéria após o contato das faces da fissura em problemas de fadiga com carregamentos alternados. O procedimento é baseado no conceito de previsão inicial e correção das regiões complementares de contato e não-contato e a imposição das

restrições de interpenetrabilidade é feita de maneira direta reescrevendo as equações algébricas dos graus de liberdade das faces da fissura em coordenadas locais.

## 2.1 Equação governante da elastoestática linear

Na mecânica dos sólidos, o PVC elastoestático pode ser definido sobre um domínio  $\Omega$  que contém os pontos materiais  $\mathbf{x}$  do sólido. O contorno de  $\Omega$  é denominado  $\Gamma$  e a união de  $\Omega$  com  $\Gamma$  resulta no domínio fechado  $\bar{\Omega}$ . Dado um campo de forças de domínio  $\mathbf{b}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  e as seguintes condições de contorno  $\bar{\mathbf{u}}: \Gamma_u \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\bar{\mathbf{t}}: \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^d$ , o PVC pode ser resumido como encontrar  $\mathbf{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , tal que:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  é o campo de deslocamentos definido sobre o domínio fechado  $\bar{\Omega}$  e  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  é o campo de forças de superfície, definido a partir do equilíbrio de Cauchy sobre o contorno  $\Gamma$ .  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$  é o versor normal a  $\Gamma$  e  $\mathbb{R}^d$  indica a dimensão do espaço real do problema considerado, ou seja,  $\mathbb{R}^2$  para problemas planos e  $\mathbb{R}^3$  para problemas tridimensionais.

A primeira linha em 2.1 representa a equação diferencial de equilíbrio em um ponto material  $\mathbf{x}$ , em que  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  é o operador divergente espacial atuando sobre o tensor de tensões de Cauchy. As porções  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$  do contorno  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ , são porções complementares do contorno onde são prescritas as condições de contorno generalizadas. As duas últimas linhas em 2.1 representam as condições de contorno generalizadas de Dirichlet (sobre o contorno  $\Gamma_u$ ) e de Neumann (sobre o contorno  $\Gamma_t$ ), necessárias para que o PVC da elastoestática seja bem definido.

No contexto da elasticidade linear (Ver anexo A), a definição do pseudo tensor de deformação linear de engenharia como sendo a parte simétrica do gradiente do vetor deslocamentos, Eq. A.1, e a imposição da lei de Hooke para um material isotrópico, Eq. A.7, sobre o tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  permitem reescrever a equação diferencial de equilíbrio do ponto material em termos de deslocamentos.

$$\mu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})] + (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})] + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  é o campo de deslocamentos.

A Equação 2.2 é conhecida como Equação de Lamê-Navier e representa o equilíbrio estático de um ponto material em termos de deslocamentos.  $\lambda = E\nu/(1-2\nu)(1+\nu)$  e  $\mu = E/2(1+\nu)$  são as constantes de Lamê, definidas a partir do módulo de Young  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  do material isótropo considerado. Ao longo desse capítulo será utilizada a notação indicial, a qual é uma forma compacta introduzida por Einstein para representar e manipular sistemas de equações, combinações lineares e somatórios em espaços de duas, três ou mais dimensões. Em notação indicial, a Equação de Lamê-Navier pode ser reescrita como:

$$\mu u_{i,jj}(\mathbf{x}) + \left( \frac{\mu}{1-2\nu} \right) u_{j,ji}(\mathbf{x}) + b_i = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.3)$$

## 2.2 Solução fundamental de Kelvin

No intuito de transformar uma equação diferencial parcial em uma equação integral de contorno é necessário conhecer a solução fundamental para o respectivo operador diferencial. Em termos matemáticos define-se como solução fundamental para um dado operador diferencial parcial linear  $L$ , funções  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  que satisfaçam a seguinte relação:

$$LF(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.4)$$

sendo  $\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  a função delta de Dirac,  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$  um ponto genérico, ou ponto campo, e  $\mathbf{y} = \{y_1 \ y_2 \ y_3\}^T$  o ponto fonte onde está centrada a distribuição delta de Dirac. Para os problemas elastoestáticos a solução fundamental é obtida a partir do operador diferencial linear  $\mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , definido pela equação de Lamê-Navier.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &:= \mu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})] + (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})] = -\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{L}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &:= \mu u_{ki,jj}(\mathbf{x}) + \left( \frac{\mu}{1-2\nu} \right) u_{kj,ji}(\mathbf{x}) = -\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ki} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Note que a Eq. 2.5 é vetorial e não escalar como o caso da Eq. 2.4. Logo, a notação indicial da Eq. 2.5 representa o equilíbrio estático em uma direção  $e_i$  de um ponto material de um domínio infinito, submetido a uma força unitária na direção  $e_k$ , sendo  $\delta_{ki}$  o delta de

Kronecker. A solução da Eq. 2.5 foi desenvolvida por Sir William Thomson (Lord Kelvin) em 1848 e ficou conhecida como solução fundamental de Kelvin. Para o caso de problemas elásticos tridimensionais a solução fundamental de Kelvin para o campo de deslocamentos é dada por:

$$U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i} \right] \quad (2.6)$$

Na Eq. 2.6,  $U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  representa a componente de deslocamento na direção  $e_i$  em um ponto  $\mathbf{x}$  de um meio infinito devido à ação de uma força concentrada unitária atuando no ponto  $\mathbf{y}$  em uma direção  $e_k$ .  $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  é a norma do vetor distância entre os pontos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , e  $r_{,i}$  é a componente  $e_i$  do vetor  $\mathbf{r}$ . Com a solução fundamental de deslocamentos é possível obter as componentes de deformações, tensões e forças de superfície do estado fundamental. As deformações fundamentais  $E_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  podem ser obtidas utilizando novamente a relação cinemática linear entre deslocamentos e deformações e posteriormente, aplicando a lei generalizada de Hooke. Assim, obtêm-se as tensões fundamentais  $P_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

$$E_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{ji}r_{,k}) - \delta_{kj}r_{,i} + 3r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right] \quad (2.7)$$

$$P_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{ji}r_{,k} - \delta_{kj}r_{,i}) + 3r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right] \quad (2.8)$$

Por fim, as forças de superfície fundamentais  $T_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  podem ser obtidas impondo o equilíbrio de Cauchy, Eq. A.3, para as tensões  $P_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  em um plano definido por um versor normal  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\}^T$ .

$$T_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \left[ (1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,k}r_{,i} \right] - (1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\} \quad (2.9)$$

em que  $\partial \mathbf{r} / \partial \boldsymbol{\eta} = r_{,i} \boldsymbol{\eta}_i$ .

### 2.3 Equações integrais dos problemas elásticos

A representação integral de um corpo elástico em equilíbrio pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio de um ponto material  $\mathbf{x}$ .

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + b_i(\mathbf{x}) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

em que  $\sigma_{ij,j}$ ,  $b_i$  e  $\ddot{u}_i$  representam, respectivamente, componentes na direção  $i$  do divergente do tensor de tensões de Cauchy, da força de volume e da aceleração.  $\rho$  é a densidade de massa. Para o caso de um corpo com dimensões finitas pode-se ponderar o erro produzido pela equação de equilíbrio (2.10) em todos os pontos materiais  $\mathbf{x}$  do domínio  $\Omega$  do sólido utilizando como função ponderadora a solução fundamental de deslocamentos. O equilíbrio pode então ser imposto ao corpo finito de forma fraca igualando-se o resíduo ponderado à zero.

$$\int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) + b_i(\mathbf{x}) - \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \quad (2.11)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da Eq. 2.11 chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \eta_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Omega} U_{ki,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo  $\Gamma$  o contorno do domínio  $\Omega$  do sólido. Sabendo-se que  $\sigma_{ij} \eta_j = t_i$  e que  $U_{ki,j} \sigma_{ij} = E_{kij} \sigma_{ij}$ , onde  $E_{kij}$  é a solução fundamental em deformações, reescreve-se a Eq. 2.12 como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Omega} E_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sigma_{ij}(\mathbf{x}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

A Equação 2.13 representa um caso específico do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para o qual os deslocamentos e as deformações do estado virtual são iguais aos deslocamentos e as deformações do problema fundamental. A equação 2.13 é o ponto de partida para a obtenção de representações integrais para o MEC. Nessa pode ser imposto um

modelo constitutivo desejado e proceder com as operações necessárias para a obtenção da respectiva formulação integral. No caso do modelo elástico, Eq. A.5, a expressão 2.13 resulta:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Omega} E_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) C_{ijlm} \varepsilon_{lm}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

em que  $C_{ijlm}$  é o tensor constitutivo elástico. Sabendo-se que  $E_{kij} C_{ijlm} \varepsilon_{lm} = P_{klm} \varepsilon_{lm}$  e que  $P_{klm} \varepsilon_{lm} = P_{klm} u_{l,m} = P_{kij} u_{i,j}$  a Eq. 2.14 torna-se:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Omega} P_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{i,j}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

Aplicando-se a integração por partes na segunda integral da Eq. 2.15 encontra-se:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \eta_j(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} P_{kij,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

Da definição do problema fundamental da elastoestática sabe-se que  $P_{kij,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ki}$ . Considerando as propriedades do delta de Dirac e o equilíbrio de superfície das tensões fundamentais  $P_{kij} \eta_j = T_{ki}$  chega-se à equação integral de deslocamentos para um ponto fonte  $\mathbf{y}$  interno à  $\Omega$ .

$$u_k(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} U_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.17)$$

A Eq. 2.17 é denominada de equação integral de deslocamentos que na ausência de forças de inércia resulta na clássica identidade Somigliana. Por meio da mesma é possível obter os valores de deslocamento em qualquer ponto interno ao domínio  $\Omega$  desde que sejam

conhecidos os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno  $\Gamma$  e os valores das forças internas e acelerações no domínio  $\Omega$ .

Partindo-se da equação integral de deslocamentos é possível obter equações integrais escritas em termos de outras grandezas da mecânica dos sólidos. Considerando a relação cinemática linear  $\varepsilon_{kl} = 1/2(u_{k,l} + u_{l,k})$  é possível escrever uma equação integral escrita em termos de deformações a partir da diferenciação da Eq. 2.17.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{E}}_{kli}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{T}}_{kli}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{E}}_{kli}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{E}}_{kli}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte, apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. A partir de 2.18 a equação integral de tensões de Cauchy pode ser obtida de forma trivial aplicando-se a relação constitutiva elástica A.6.

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} D_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} D_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} D_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que:

$$D_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -P_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \begin{aligned} & (1-2\nu)(\delta_{pq}r_{,i} + \delta_{iq}r_{,p} - \delta_{pi}r_{,q}) \\ & + 3r_{,p}r_{,q}r_{,i} \end{aligned} \right] \quad (2.20)$$

$$S_{ipq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[ (1-2\nu)\delta_{pq}r_{,i} + \nu(\delta_{pi}r_{,q} + \delta_{qi}r_{,p}) - 5r_{,p}r_{,q}r_{,i} \right] \\ & + 3\nu(\eta_p r_{,q}r_{,i} + \eta_q r_{,p}r_{,i}) + \\ & (1-2\nu)(3\eta_i r_{,p}r_{,q} + \eta_q \delta_{pi} + \eta_p \delta_{qi}) - (1-4\nu)\eta_i \delta_{pq} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

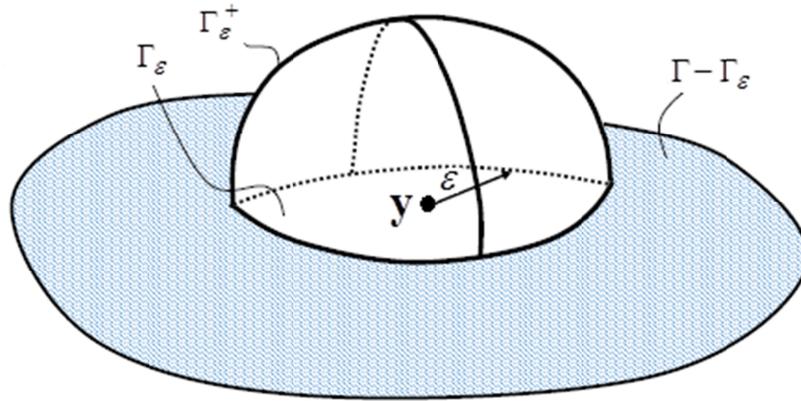
A Eq. 2.19 é a equação integral de tensões por meio da qual é possível obter os valores das tensões em qualquer ponto interno ao domínio  $\Omega$  desde que sejam conhecidos os valores

dos deslocamentos e forças de superfície no contorno  $\Gamma$  e os valores das forças internas e acelerações no domínio  $\Omega$ .

Para introduzir formulações de elementos de contorno é interessante que as equações integrais 2.17 e 2.19 sejam escritas apenas em termos de integrais de contorno no intuito de evitar a necessidade de células de aproximação no domínio. As equações 2.17 e 2.19 são representações integrais do equilíbrio dinâmico dos problemas elásticos obtidas a partir da solução fundamental estática de Kelvin. Tal procedimento faz com que seja necessária a avaliação das integrais de domínio envolvendo as forças inerciais (última integral em 2.17 ou em 2.19) em análises dinâmicas. Outras representações integrais do equilíbrio dinâmico para as quais não há a necessidade de se avaliar a integral dos termos inerciais podem ser obtidas utilizando soluções fundamentais dependentes do tempo tais como as soluções fundamentais de Stokes e de Lamb (CODA 2000). No caso de problemas envolvendo forças de domínio também se faz necessária a avaliação da integral de domínio das forças  $b_i$ . Técnicas como o método da dupla reciprocidade (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1978) ou ainda o método de integração radial (GAO, 2002) podem ser adotados para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Como no presente trabalho não serão abordados problemas dinâmicos e/ou com forças de domínio, as duas últimas integrais de domínio podem ser desconsideradas nas representações integrais 2.17 e 2.19.

## 2.4 Equações integrais escritas sobre o contorno

Conforme visto no tópico anterior, por meio das equações 2.17 e 2.19 é possível obter os deslocamentos e tensões em pontos internos do domínio  $\Omega$ . No entanto é necessário para tanto que os deslocamentos e as forças de superfície sejam previamente determinados ao longo do contorno do problema. Sendo assim, antes de aplicar o MEC para transformar as equações integrais em equações algébricas, se faz necessário escrever as equações integrais para pontos fonte  $\mathbf{y}$  pertencentes ao contorno do problema. Para tanto, se faz necessário um processo limite no qual é acrescentado ao domínio inicial do problema,  $\Omega$ , um domínio semiesférico de raio  $\varepsilon$  e de contorno  $\Gamma_\varepsilon^+$  centrado no ponto fonte  $\mathbf{y}$  pertencente a uma região suave do contorno inicial,  $\Gamma$ , conforme ilustrado na Figura 2.1.



**Figura 2.1** – Ponto fonte  $\mathbf{y}$  no contorno  $\Gamma$  de um sólido envolvido pela semiesfera (Adaptado de Rocha, 2015).

Para o caso da equação integral de deslocamentos, Eq. 2.17, o processo limite é escrito como:

$$u_i(\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.22)$$

em que  $\Gamma_\varepsilon$  é a interseção do contorno  $\Gamma$  com a inclusão esférica. A primeira integral em 2.22 contém uma singularidade fraca de ordem  $O(1/r)$  e pode ser avaliada como uma integral imprópria. Já a segunda integral em 2.22 contém uma singularidade forte de ordem  $O(1/r^2)$  e deve ser regularizada. Seguindo Mi & Aliabadi (1992), tal integral pode ser regularizada somando e subtraindo o primeiro termo da expansão em série de Taylor dos deslocamentos centrada no ponto singular  $\mathbf{y}$ , ou seja, substituindo na segunda integral de 2.22  $u_j(\mathbf{x})$  por  $u_j(\mathbf{x}) - u_j(\mathbf{y}) + u_j(\mathbf{y})$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [u_j(\mathbf{x}) - u_j(\mathbf{y})] d\Gamma + u_j(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.23)$$

Na última integral em 2.23  $u_j(\mathbf{y})$  é constante e pode sair do integrando. A primeira integral do lado direito em 2.23 é imprópria e pode ser avaliada no sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC). No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  o contorno  $\Gamma_\varepsilon^+$  tende a se tornar o próprio ponto  $\mathbf{y}$  e, portanto, a segunda integral à direita em 2.23 se torna nula. A última integral resulta um termo

livre dado por  $\alpha_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y})$ . Sendo assim, a equação integral de deslocamentos pode ser escrita para um ponto fonte  $\mathbf{y}$  pertencente ao contorno como:

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) + \oint_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.24)$$

em que  $\oint$  representa uma integral imprópria avaliada no sentido de VPC e o termo livre é  $c_{ij}(\mathbf{y}) = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(\mathbf{y})$ . No caso do ponto  $\mathbf{y}$  estar situado em uma porção suave do contorno  $\Gamma$ , ou seja, uma porção na qual o versor  $\boldsymbol{\eta}$  é definido, o termo livre resulta  $c_{ij}(\mathbf{y}) = \delta_{ij}$ . Caso contrário o termo livre  $c_{ij}(\mathbf{y})$  pode ser obtido numericamente de maneira indireta através da imposição de movimento de corpo rígido conforme será apresentado mais adiante.

Da mesma forma é possível escrever a equação integral das tensões, Eq. 2.19, para um ponto fonte  $\mathbf{y}$  pertencente ao contorno  $\Gamma$  através do mesmo processo limite.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{x})d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.25)$$

A primeira integral na Eq. 2.25 contém uma singularidade forte de ordem  $O(1/r^2)$  e pode ser regularizada somando e subtraindo o primeiro termo da expansão em série de Taylor das forças de superfície, ou seja, substituindo  $t_k(\mathbf{x})$  por  $t_k(\mathbf{x}) - t_k(\mathbf{y}) + t_k(\mathbf{y})$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon} + \Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{x})d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{x})d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})[t_k(\mathbf{x}) - t_k(\mathbf{y})]d\Gamma + t_k(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\Gamma \end{aligned} \quad (2.26)$$

A primeira integral do lado direito da Eq. 2.26 resulta em uma integral imprópria que pode ser avaliada no sentido de VPC. A segunda integral à direita de 2.26 é nula no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  visto que o contorno  $\Gamma_{\varepsilon}^+$  converge para o ponto  $\mathbf{y}$ . Já a última integral remanescente resulta um termo livre dado por  $\beta_{kij}(\mathbf{y})t_k(\mathbf{y})$ , o qual depende das constantes elásticas e de transformações geométricas em coordenadas locais. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma + \beta_{kij}(\mathbf{y}) t_k(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma + \beta_{kij}(\mathbf{y}) t_k(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Por sua vez, a segunda integral na Eq. 2.25 contém uma hipersingularidade, ordem  $O(1/r^3)$ , que deve ser regularizada. Tal integral pode ser regularizada somando e subtraindo os dois primeiros termos da expansão em série de Taylor dos deslocamentos centrada no ponto singular  $\mathbf{y}$ , ou seja, substituindo na segunda integral da Eq. 2.25 o termo  $u_k(\mathbf{x})$  por  $u_k(\mathbf{x}) - [u_k(\mathbf{y}) + u_{k,m}(\mathbf{y})] + [u_k(\mathbf{y}) + u_{k,m}(\mathbf{y})]$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [u_k(\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y}) - u_{k,m}(\mathbf{y})(x_m - y_m)] d\Gamma + \\
&u_k(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma + u_{k,m}(\mathbf{y}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(x_m - y_m) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Seguindo o apresentado em Guiggiani et al. (1992), a primeira e a terceira integral do lado direito da Eq. 2.28 podem ser representadas juntas resultando:

$$\begin{aligned}
\int_S S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma &= \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma + u_k(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma \right] & \\
= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma + u_k(\mathbf{y}) \frac{b_{kij}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right] &
\end{aligned} \tag{2.29}$$

em que  $\int_S$  representa a Parte Finita de Hadamard (PFH). A segunda integral à direita de 2.28 resulta nula após a avaliação do limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por fim, a última integral em 2.28 resulta, após a avaliação do processo limite, um termo livre de derivadas de deslocamento dado por  $\gamma_{kijm}(\mathbf{y}) u_{k,m}(\mathbf{y})$ , sendo  $\gamma_{kijm}(\mathbf{y})$  uma constante. Juntando os termos livres  $\beta_{kij}(\mathbf{y}) t_k(\mathbf{y})$  e

$\gamma_{kijm}(\mathbf{y})u_{k,m}(\mathbf{y})$ , Cruse (1977) obteve uma tensão equivalente de contorno para um ponto  $\mathbf{y}$  pertencente a um contorno suave.

$$\beta_{kij}(\mathbf{y})t_k(\mathbf{y}) + \gamma_{kijm}(\mathbf{y})u_{k,m}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\mathbf{y}) \quad (2.30)$$

Considerando o processo limite descrito nas equações 2.25 - 2.30 é possível escrever a equação integral das tensões para um ponto fonte  $\mathbf{y}$  pertencente a um contorno suave como:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.31)$$

Impondo o equilíbrio de Cauchy para as tensões  $\sigma_{ij}(\mathbf{y})$  é possível escrever uma equação integral em termos de forças de superfície, Eq. 2.32, a qual é utilizada em conjunto com a equação integral de deslocamentos, Eq. 2.24, para modelar fissuras em meios elásticos via a formulação MEC dual.

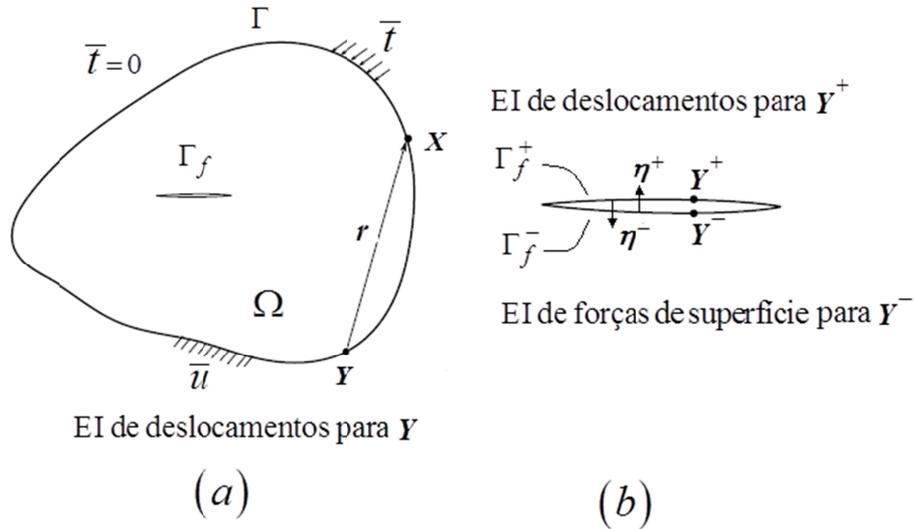
$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{y}) + \eta_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_k(\mathbf{x})d\Gamma = \eta_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_k(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.32)$$

sendo  $\eta_i(\mathbf{y})$  as componentes do versor normal ao contorno no ponto fonte  $\mathbf{y}$ .

## 2.5 Equações integrais duais

Nesse tópico é introduzida a ideia por trás da formulação dual do método dos elementos de contorno. Para tanto, considere um sólido elástico de domínio  $\Omega$  e contorno externo  $\Gamma$ , contendo uma superfície de fissura interna  $\Gamma_f$  e submetido a um dado conjunto de condições de contorno, conforme ilustrado na Figura 2.2(a). A colocação da equação integral de deslocamentos em um ponto  $\mathbf{y}$  do contorno externo resulta três equações independentes relacionando os deslocamentos  $u_1(\mathbf{y})$ ,  $u_2(\mathbf{y})$  e  $u_3(\mathbf{y})$  a todos os outros deslocamentos e forças de superfície do problema discreto. No entanto, se a mesma equação integral for imposta em pontos de colocação  $\mathbf{y}^+$  e  $\mathbf{y}^-$ , simetricamente posicionados sobre as superfícies  $\Gamma_f^+$  e  $\Gamma_f^-$  da fissura, as seis equações algébricas resultantes relacionando os deslocamentos  $u_1(\mathbf{y}^+)$ ,  $u_2(\mathbf{y}^+)$ ,  $u_3(\mathbf{y}^+)$  e  $u_1(\mathbf{y}^-)$ ,  $u_2(\mathbf{y}^-)$ ,  $u_3(\mathbf{y}^-)$  às grandezas do contorno serão linearmente dependentes. Para solucionar essa dificuldade a formulação MEC

dual propõem o uso de duas equações integrais linearmente independentes (equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície) para os pontos de colocação coincidentes sobre as faces opostas de uma fissura conforme ilustrado na Figura 2.2(b).



**Figura 2.2** – Colocação das equações integrais: (a) para o contorno externo (b) para as faces de uma fissura.

Dessa maneira o método permite modelar fissuras de maneira geometricamente exata sem que o sistema de equações algébricas se torne linearmente dependente. Para um ponto de colocação  $\mathbf{y}^+$  pertencente à superfície  $\Gamma_f^+$  de uma fissura, a equação integral de deslocamentos, Eq. 2.24, resulta:

$$c_{ij}(\mathbf{y}^+)u_j(\mathbf{y}^+) + c_{ij}(\mathbf{y}^-)u_j(\mathbf{y}^-) + \oint_{\Gamma+\Gamma_f} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma = \int_{\Gamma+\Gamma_f} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x})t_j(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.33)$$

sendo que o segundo termo livre em 2.33 aparece devido à superfície  $\Gamma_f^-$ , que assim como a superfície  $\Gamma_f^+$ , também contém  $\mathbf{y}^+$ . Da mesma forma, equação integral de forças de superfície, Eq. 2.32, imposta por colocação em um ponto  $\mathbf{y}^-$ , resulta:

$$\frac{1}{2}t_j(\mathbf{y}^-) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{y}^+) + \eta_i(\mathbf{y}^-) \oint_{\Gamma+\Gamma_f} S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})u_k(\mathbf{x})d\Gamma = \eta_i(\mathbf{y}^-) \oint_{\Gamma+\Gamma_f} D_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x})t_k(\mathbf{x})d\Gamma \quad (2.34)$$

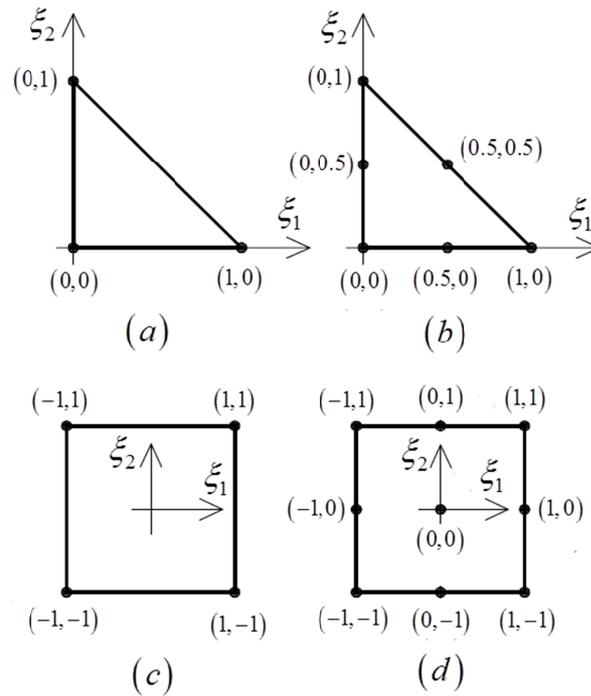
sendo que o termo  $-1/2t_j(\mathbf{y}^+)$  aparece devido à superfície  $\Gamma_f^+$  conter o ponto  $\mathbf{y}^-$  e o sinal negativo é devido à orientação contrária dos versores normais  $\eta_i(\mathbf{y}^+)$  e  $\eta_i(\mathbf{y}^-)$ . Visto que ambas as superfícies  $\Gamma_f^+$  e  $\Gamma_f^-$  são discretizadas é possível impor condições de contorno mistas sobre as faces da fissura, inclusive condições assimétricas, sendo essa uma das vantagens da formulação MEC dual.

## 2.6 Elementos de Lagrange

Seguindo a abordagem convencional, os elementos de contorno dos problemas tridimensionais são elementos de superfície de Lagrange sobre os quais funções de forma polinomiais  $M^i(\xi_1, \xi_2)$ , definidas em um espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$ , aproximam tanto a descrição geométrica quando os campos mecânicos do contorno. Devido às descontinuidades dos campos de forças de superfícies observadas nos PVC e aos requerimentos de continuidade C1 exigidos pela equação integral de forças de superfície, os pontos de colocação nem sempre podem ser posicionados sobre os nós dos elementos. Sendo assim, as funções de forma dos elementos, construídas a partir das posições nodais no espaço paramétrico, são utilizadas apenas para descrever a geometria do problema ao passo que as funções que aproximam dos campos mecânicos,  $N^\alpha(\xi_1, \xi_2)$ , são construídas considerando as posições paramétricas dos pontos de colocação.

### 2.6.1 Elementos de Lagrange: Aproximação da geometria

Os elementos de Lagrange adotados para aproximar a geometria são elementos de superfície, semelhantes aos elementos finitos adotados para descrever a geometria de cascas. As funções interpoladoras adotadas, ou funções de forma, são polinômios de Lagrange completos que satisfazem a partição da unidade. Foram implementados quatro tipos de elementos: triangular linear, triangular quadrático, quadrilateral linear e quadrilateral quadrático. A Figura 2.3 apresenta os elementos adotados no espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  e suas respectivas coordenadas nodais  $\xi^i = \{\xi_1^i, \xi_2^i\}^T$ .



**Figura 2.3** – Elementos isoparamétricos: (a) Triangular linear (b) Triangular quadrático (c) Quadrilateral linear (d) Quadrilateral quadrático.

As funções de forma  $M^i(\xi_1, \xi_2)$  dos elementos isoparamétricos são definidas pelos polinômios de Lagrange apresentados nas equações 2.35a e 2.35b para o caso de elementos triangulares e quadrilaterais, respectivamente.

$$M^i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 \quad (2.35a)$$

$$M^i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 + c_5^i \xi_1^2 + c_6^i \xi_2^2$$

$$M^i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2$$

$$M^i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 + c_5^i \xi_1^2 + c_6^i \xi_2^2 + c_7^i \xi_1 \xi_1 \xi_2 + c_8^i \xi_2 \xi_2 \xi_1 + c_9^i \xi_1 \xi_1 \xi_2 \xi_2 \quad (2.35b)$$

em que as constantes  $c_k^i$  das funções de forma de um dado elemento podem ser obtidas impondo-se a propriedade de Delta de Kronecker:

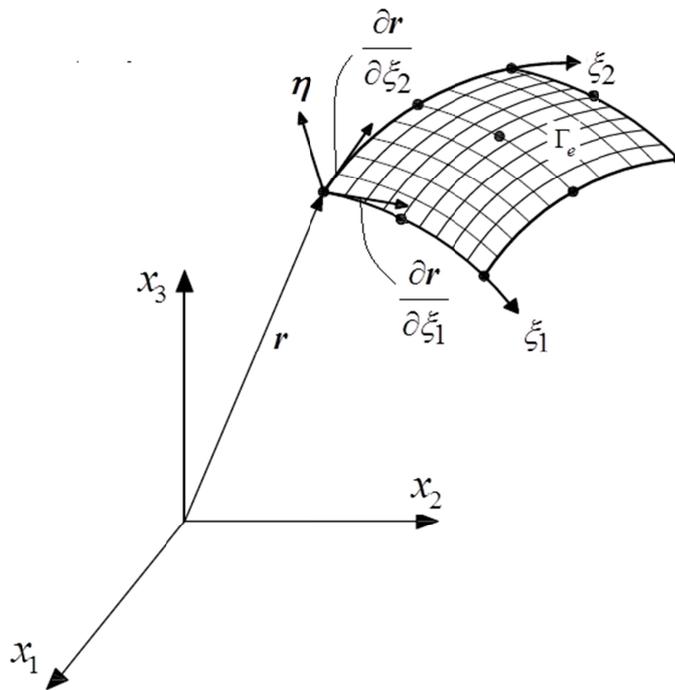
$$c_k^i \Rightarrow M^i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \begin{cases} 1 & \text{para } j=i \\ 0 & \text{para } j \neq i \end{cases} \quad \text{para } i, j = 1 \dots N \text{ nós} \quad (2.36)$$

sendo  $i = 1, \dots, N \text{ nós}$  o nó correspondente da função de forma  $M^i(\xi_1, \xi_2)$  e  $N \text{ nós}$  o número de nós do elemento.

Definindo-se coordenadas nodais  $\mathbf{x}_i = \{x_1^i, x_2^i, x_3^i\}^T$  no espaço físico  $\mathbb{R}^3$  para os elementos é possível aproximar as superfícies do contorno utilizando as funções  $M^i(\xi_1, \xi_2)$ . Sendo assim, as coordenadas em  $\mathbb{R}^3$  de um ponto  $\mathbf{x}$  qualquer sobre a superfície de um elemento podem ser mapeadas a partir de um ponto  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}^T$  do espaço paramétrico.

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = M^i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, N_{\text{nós}} \quad (2.37)$$

O mapeamento dos pontos do espaço paramétrico plano para a superfície curva do elemento no espaço físico permite que as integrais de superfície da formulação do MEC sejam procedidas no espaço paramétrico e transformadas para o espaço físico a partir da relação entre os diferenciais de áreas dos dois espaços. Para definir a relação entre os diferenciais de área considere a representação de um elemento quadrilateral quadrático no espaço físico conforme ilustrado na Figura 2.4.



**Figura 2.4** - Elemento quadrilateral quadrático: Representação no espaço físico.

Qualquer ponto sobre a superfície  $\Gamma_e$  do elemento pode ser definido a partir do vetor distância  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{0} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ . Conforme ilustrado na Figura 2.4, diferenciando o vetor  $\mathbf{r}$  em relação às coordenadas  $\xi_1, \xi_2$  é possível obter vetores tangentes às representações dos eixos paramétricos no espaço físico.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} &= \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right\}^T \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} &= \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right\}^T\end{aligned}\quad (2.38)$$

A relação entre os diferenciais de área  $d\Gamma_e$  no espaço físico e  $d\xi_1 d\xi_2$  no espaço paramétrico pode então ser definida a partir do produto vetorial  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_1 \times \partial \mathbf{r} / \partial \xi_2$ .

$$d\Gamma_e = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| d\xi_1 d\xi_2 = J(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.39)$$

Sendo  $|\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| = J(\boldsymbol{\xi})$  a norma do vetor jacobiano  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  definido como:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \{J_1, J_2, J_3\}^T \quad (2.40)$$

As componentes  $J_i$  do vetor jacobiano são, portanto obtidas como:

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ J_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\ J_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\end{aligned}\quad (2.41)$$

em que as derivadas parciais  $\partial x_i / \partial \xi_j$  são calculadas a partir da Eq. 2.37 derivando as funções de forma  $M^i(\xi_1, \xi_2)$  do elemento. Visto que o vetor jacobiano  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$  é calculado a partir do produto vetorial entre vetores tangentes à superfície, o mesmo é normal à superfície no ponto genérico  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ . Sendo assim, o versor normal à superfície em qualquer ponto do elemento isoparamétrico é obtido simplesmente normalizando  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})$ .

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})|} = \frac{\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})}{J(\boldsymbol{\xi})} \quad (2.42)$$

### 2.6.2 Elementos de Lagrange: Aproximação dos campos mecânicos

Assim como as funções de forma geométricas  $M^i(\xi_1, \xi_2)$ , as funções de aproximação dos campos mecânicos  $N^\alpha(\xi_1, \xi_2)$  também são construídas a partir dos polinômios de Lagrange apresentados nas Eq. 2.35a e 2.35b. No entanto, as constantes  $C_i^\alpha$  são obtidas impondo-se a Eq. 2.36 para as coordenadas paramétricas  $\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha$  dos  $\alpha = 1, \dots, N_{cp}$  pontos de colocação do elemento, os quais podem ou não coincidir com as coordenadas paramétricas dos nós. De maneira geral é comum utilizar os nós dos elementos como pontos de colocação das equações integrais conforme apresentado na Figura 2.5(a). Nesses casos os elementos são denominados elementos contínuos para os quais  $N^{\alpha=i}(\xi_1, \xi_2) = M^i(\xi_1, \xi_2)$ . No entanto, devido à presença de descontinuidades das forças de superfície no contorno, torna-se necessário afastar os pontos de colocação das arestas onde são observadas as descontinuidades. Elementos de contorno que apresentam pontos de colocação afastados das arestas de descontinuidade são denominados na literatura de elementos descontínuos de aresta e são ilustrados na Figura 2.5(b). A partir dos elementos descontínuos de aresta, descontinuidades de forças podem ser impostas nas superfícies do contorno uma vez que as arestas interelementos não apresentaram pontos de colocação comuns. É importante mencionar que a utilização dos elementos descontínuos de aresta garante a representação das descontinuidades de forças de superfície sem interferir na continuidade dos deslocamentos, uma vez que o sistema de equações obtido por colocação das equações integrais resulta totalmente povoado.

A utilização da equação integral de forças de superfície requer que os campos mecânicos apresentem continuidade C1 sobre os pontos de colocação. Visto que a aproximação via polinômios de Lagrange resulta em continuidade C0 interelementos, superfícies da fissura devem ser discretizadas com pontos de colocação internos aos elementos, onde a continuidade C1 das funções de forma é atendida. Elementos de contorno que apresentam todos os pontos de colocação internos são denominados elementos descontínuos, os quais são ilustrados na Figura 2.6.



$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &= N^\alpha(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}^\alpha \\ \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}) &= N^\alpha(\boldsymbol{\xi})\mathbf{t}^\alpha \end{aligned} \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{u}^\alpha$  e  $\mathbf{t}^\alpha$  são os vetores de deslocamento e de forças de superfície nos pontos de colocação  $\mathbf{y}^\alpha$ . Deve-se destacar ainda que para fins de visualização/pós-processamento é interessante obter os valores nodais  $\mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{t}^i$  dos deslocamentos e das forças de superfícies. Tais valores podem ser obtidos simplesmente por extrapolação utilizando as aproximações numéricas:  $\mathbf{u}^i = N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1^i, \boldsymbol{\xi}_2^i)\mathbf{u}^\alpha$  e  $\mathbf{t}^i = N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1^i, \boldsymbol{\xi}_2^i)\mathbf{t}^\alpha$ .

## 2.7 Equações algébricas e montagem do sistema

### 2.7.1 Equações algébricas discretas

As equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície utilizadas na formulação do MEC dual foram apresentadas em sua forma contínua nas expressões 2.24, 2.33 e 2.34 para pontos de colocação no contorno e nas superfícies de fissura. Para resolver numericamente o problema de valor de contorno é necessário transformar as equações integrais contínuas em equações algébricas discretas. Sendo assim, A abordagem numérica prediz que as superfícies  $\Gamma$ ,  $\Gamma_f^+$  e  $\Gamma_f^-$  do contorno externo e das faces da fissura sejam discretizadas em um número finito de elementos de Lagrange. Substituindo as aproximações dos deslocamentos e das forças de superfície, Eq. 2.43, nas equações integrais contínuas é possível reescreve-las na forma de equações algébricas como:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) + \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)) N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) d\xi_1 d\xi_2 u_j^\alpha \\ = \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)) N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) d\xi_1 d\xi_2 t_j^\alpha \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y}^+)u_j(\mathbf{y}^+) + c_{ij}(\mathbf{y}^-)u_j(\mathbf{y}^-) \\ + \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)) N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) d\xi_1 d\xi_2 u_j^\alpha \\ = \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)) N^\alpha(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) d\xi_1 d\xi_2 t_j^\alpha \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}t_j(\mathbf{y}^-) - \frac{1}{2}t_j(\mathbf{y}^+) \\
& + \eta_i(\mathbf{y}^-) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}((\xi_1, \xi_2))) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 u_k^\alpha \\
& = \eta_i(\mathbf{y}^-) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} D_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}((\xi_1, \xi_2))) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 t_k^\alpha
\end{aligned} \tag{2.46}$$

sendo  $NE$  o número de elementos adotados para a discretização das superfícies do problema (contorno e fissuras) e  $\Gamma_e$  a superfície de um elemento  $e$ . Note que as integrais sobre as superfícies  $\Gamma_e$  foram escritas no espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  utilizando a relação entre os diferenciais de área apresentada na Eq. 2.39. Uma vez que os pontos de colocação  $\mathbf{y}^+$  sobre as faces das fissuras serão sempre internos aos elementos, o termo livre  $c_{ij}(\mathbf{y}^+)$  em 2.45 sempre resulta  $c_{ij}(\mathbf{y}^+) = \delta_{ij}/2$ , dada a suavidade geométrica no interior dos elementos. Já no caso do ponto de colocação  $\mathbf{y}$ , pertencente ao contorno externo do problema, o valor do termo livre  $c_{ij}(\mathbf{y})$  dependerá da suavidade geométrica em  $\mathbf{y}$ , ou seja, se o versor normal  $\eta(\mathbf{y})$  é definido (contorno suave) ou não. Caso  $\mathbf{y}$  seja um ponto de contorno para o qual o versor  $\eta(\mathbf{y})$  não é definido, o termo livre resulta diferente de  $\delta_{ij}/2$  e pode ser obtido de maneira indireta conforme apresentado no tópico 2.63.

## 2.7.2 Montagem do sistema de equações

Procedidas as integrais sobre as superfícies  $\Gamma_e$  de todos os  $NE$  elementos, as equações algébricas 2.44, 2.45 e 2.46 podem ser apresentadas em forma matricial como:

$$\mathbf{c}_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{t}_j \tag{2.47}$$

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_{i+} + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_{i-} + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i+j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i+j} \mathbf{t}_j \tag{2.48}$$

$$\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i-j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i-j} \mathbf{t}_j - \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{t}_{i-} + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{t}_{i+} \tag{2.49}$$

Sendo que os índices  $i, j$  não indicam mais as direções cartesianas, mas sim os pontos de colocação.  $i = \mathbf{y}$ ,  $i+ = \mathbf{y}^+$  ou  $i- = \mathbf{y}^-$  é o ponto de colocação fixado sobre o contorno ou sobre uma das faces da fissura para proceder as integrais.  $j = 1 \cdots N$  é o conjunto de todos os pontos de colocação sobre as superfícies do problema.  $\mathbf{u}_j = \{u_1^j, u_2^j, u_3^j\}^T$  e  $\mathbf{t}_j = \{t_1^j, t_2^j, t_3^j\}^T$  são os deslocamentos e forças de superfícies do ponto de colocação  $j$ ,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}_{ij}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i+j}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}_{i+j}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i-j}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}_{i-j}$  são matrizes de influência de dimensões 3x3 definidas por:

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{T}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad \hat{\mathbf{G}}_{ij} = \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{U}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{i+j} = \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{T}_{i+} \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad \hat{\mathbf{G}}_{i+j} = \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{U}_{i+} \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad (2.51)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{i-j} = \eta_{i-} \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{S}_{i-} \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad \hat{\mathbf{G}}_{i-j} = \eta_{i-} \sum_{e \subset j \Gamma_e} \int \mathbf{D}_{i-} \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \quad (2.52)$$

Onde o somatório  $\sum_{e \subset j}$  se estende para todos os elementos  $e$  que contenham o ponto de colocação  $j$ .  $\alpha(j,e)$  é a função incidência que retorna a numeração local do ponto de colocação  $j$  no elemento  $e$ ,  $\mathbf{U}_{i/i+}$ ,  $\mathbf{T}_{i/i+}$ ,  $\mathbf{S}_{i-}$  e  $\mathbf{D}_{i-}$  são os núcleos fundamentais das equações integrais e  $\mathbf{N}^\alpha = \mathbf{I} \mathbf{N}^\alpha$  e  $\eta_{i-}$  são representações matriciais da função interpoladora  $N^\alpha$  e do versor normal  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}^-)$ :

$$\mathbf{U}_{i/i+} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}^{(i/i+)} \quad \mathbf{T}_{i/i+} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}^{(i/i+)} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{D}_{i-} = \begin{bmatrix} D_{111} & D_{112} & D_{113} \\ D_{121} & D_{122} & D_{123} \\ D_{131} & D_{132} & D_{133} \\ D_{211} & D_{212} & D_{213} \\ D_{221} & D_{222} & D_{223} \\ D_{231} & D_{232} & D_{233} \\ D_{311} & D_{312} & D_{313} \\ D_{321} & D_{322} & D_{323} \\ D_{331} & D_{332} & D_{333} \end{bmatrix}^{(i-)} \quad \mathbf{S}_{i-} = \begin{bmatrix} S_{111} & S_{112} & S_{113} \\ S_{121} & S_{122} & S_{123} \\ S_{131} & S_{132} & S_{133} \\ S_{211} & S_{212} & S_{213} \\ S_{221} & S_{222} & S_{223} \\ S_{231} & S_{232} & S_{233} \\ S_{311} & S_{312} & S_{313} \\ S_{321} & S_{322} & S_{323} \\ S_{331} & S_{332} & S_{333} \end{bmatrix}^{(i-)} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{N}^\alpha = \begin{bmatrix} N^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & N^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & N^\alpha \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\eta}_{i-} = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix}^{(i-)} \quad (2.55)$$

Incluindo os termos livres nas Eq. 2.47, 2.48 e 2.49 reescreve-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j &= \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{t}_j \\ \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{i+j} \mathbf{u}_j &= \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{i+j} \mathbf{t}_j \\ \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{i-j} \mathbf{u}_j &= \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{i-j} \mathbf{t}_j \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \hat{\mathbf{H}}_{ij} & \text{se } i \neq j \\ \mathbf{H}_{ij} &= \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{c}_i & \text{se } i = j \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i+j} &= \hat{\mathbf{H}}_{i+j} & \mathbf{G}_{i+j} &= \hat{\mathbf{G}}_{i+j} & \text{se } i+ \neq j \\ \mathbf{H}_{i+j} &= \hat{\mathbf{H}}_{i+j} + \mathbf{I}/2 & \mathbf{G}_{i+j} &= \hat{\mathbf{G}}_{i+j} + \mathbf{I}/2 & \text{se } i+ = j \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i-j} &= \hat{\mathbf{H}}_{i-j} & \mathbf{G}_{i-j} &= \hat{\mathbf{G}}_{i-j} & \text{se } i- \neq j \\ \mathbf{H}_{i-j} &= \hat{\mathbf{H}}_{i-j} + \mathbf{I}/2 & \mathbf{G}_{i-j} &= \hat{\mathbf{G}}_{i-j} - \mathbf{I}/2 & \text{se } i- = j \end{aligned} \quad (2.59)$$

Note que a correspondência entre os termos livres das Eq. 2.48 e 2.49 foram impostas em 2.58 e 2.59. Cada uma das equações matriciais em 2.56 representam três equações

algébrica que podem ser obtidas fixando um ponto de colocação  $i$  do contorno ou um ponto de colocação  $i+$  ou  $i-$  de uma das faces da fissura. Fixando por vez como  $i$  cada um dos  $j=1 \dots N$  pontos de colocação do problema é possível obter um sistema de equações algébricas global de dimensão  $3N \times 3N$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^+ \\ \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^+ \\ \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}^+ \\ \mathbf{t}^- \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (2.60)$$

No qual  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}, \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-\}^T$  e  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}, \mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-\}^T$  são vetores contendo todos os deslocamentos e forças de superfície dos pontos de colocação do problema e as matrizes globais  $\mathbf{H} = \{\mathbf{H}, \mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-\}^T$  e  $\mathbf{G} = \{\mathbf{G}, \mathbf{G}^+, \mathbf{G}^-\}^T$  são construídas a partir das matrizes de influência  $\mathbf{H}_{ij}$ ,  $\mathbf{H}_{i+j}$ ,  $\mathbf{H}_{i-j}$  e  $\mathbf{G}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{i+j}$ ,  $\mathbf{G}_{i-j}$ . As condições de contorno podem então ser impostas sobre o sistema 2.60 rearranjando as colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de maneira a coletar todos os valores incógnitos do contorno e das fissuras em um vetor  $\mathbf{x}$ . Sendo assim, o sistema de equações final pode ser apresentado como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.61)$$

Em que as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são compostas, respectivamente, pelas colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  correspondentes aos valores incógnitos e prescritos no contorno.  $\mathbf{p}$  é o vetor de valores prescritos e o vetor  $\mathbf{f}$  é obtido pré-multiplicando  $\mathbf{p}$  por  $\mathbf{B}$ .

### 2.7.3 Avaliação do termo livre $\mathbf{c}_i$

Conforme indicado anteriormente em 2.57, as sub-matrizes diagonais  $\mathbf{H}_{ii}$  da matriz  $\mathbf{H}$  incluem os termos  $\hat{\mathbf{H}}_{ii}$  e  $\mathbf{c}_i$ . A avaliação dos termos  $\hat{\mathbf{H}}_{ii}$ , assim como a avaliação dos os termos  $\hat{\mathbf{H}}_{i+i+}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i+i-}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i-i-}$  e  $\hat{\mathbf{H}}_{i-i+}$ , envolve o tratamento de integrais singulares e hiper-singulares conforme apresentado no Anexo C. Já o termo  $\mathbf{c}_i$  pode ser obtido de maneira indireta através da imposição de movimento de corpo rígido. Caso todos os pontos do corpo se desloquem em uma das três direções cartesianas sabe-se que o corpo apresentara um movimento de corpo rígido e nesse caso todas as forças de superfície do contorno devem ser nulas. Sendo assim, o sistema final resulta:

$$\mathbf{H}\mathbf{I}_k = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

sendo  $\mathbf{I}_k$  um vetor para o qual todos os nós apresentam um deslocamento unitário na direção cartesiana  $e_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ), e deslocamentos nulos nas outras direções. Como a Eq. 2.62 deve ser satisfeita, sabe-se que:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}_i + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{c}_i = -\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \quad (2.63)$$

Portanto os termos livres  $\mathbf{c}_i$  podem ser obtidos indiretamente a partir da Eq. 2.63.

## 2.8 Grandezas internas

Uma vez determinados os deslocamentos e forças de superfície nos pontos de colocação do contorno é possível obter as componentes de deslocamentos e tensões em um ponto interno  $\mathbf{y}$  a partir das representações integrais 2.17 e 2.19. Considerando a discretização do problema em elementos de contorno é possível reescrever tais equações integrais em formas algébricas.

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{y}) &= \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 t_j^\alpha \\ &\quad - \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 u_j^\alpha \\ \sigma_{ij}(\mathbf{y}) &= \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 t_k^\alpha \\ &\quad - \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) N^\alpha(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 u_k^\alpha \end{aligned} \quad (2.64)$$

Como o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  é interno ao domínio, as integrais sobre os elementos  $\Gamma_e$  não apresentam singularidades e podem ser avaliadas de acordo com as técnicas apresentadas no Anexo B. Procedidas as integrais necessárias é possível reescrever as equações 2.64 em forma matricial.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{G}}_{ij} \mathbf{t}_j - \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_i &= \sum_{j=1}^N \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{ij} \mathbf{t}_j - \sum_{j=1}^N \bar{\bar{\mathbf{H}}}_{ij} \mathbf{u}_j\end{aligned}\quad (2.65)$$

em que  $\mathbf{u}_i = \{u_1(\mathbf{y}), u_2(\mathbf{y}), u_3(\mathbf{y})\}^T$  e  $\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_1(\mathbf{y}), \tau_{12}(\mathbf{y}), \tau_{13}(\mathbf{y}), \sigma_2(\mathbf{y}), \tau_{23}(\mathbf{y}), \sigma_3(\mathbf{y})\}^T$  são o vetor de deslocamentos e a representação vetorial das componentes do tensor de tensões de Cauchy avaliados no ponto de colocação  $i = \mathbf{y}$ .  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{t}_j$  são os vetores já conhecidos de deslocamentos e forças de superfície nos  $j = 1 \dots N$  pontos de colocação sobre as superfícies do problema e  $\bar{\mathbf{H}}_{ij}$ ,  $\bar{\mathbf{G}}_{ij}$  e  $\bar{\bar{\mathbf{H}}}_{ij}$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{ij}$  são matrizes de influência de dimensões  $3 \times 3$  e  $9 \times 3$  definidas como:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}_{ij} &= \sum_{e \supset j} \int_{\Gamma_e} \mathbf{T}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e & \bar{\mathbf{G}}_{ij} &= \sum_{e \supset j} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e \\ \bar{\bar{\mathbf{H}}}_{ij} &= \sum_{e \supset j} \int_{\Gamma_e} \mathbf{S}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e & \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{ij} &= \sum_{e \supset j} \int_{\Gamma_e} \mathbf{D}_i \mathbf{N}^{\alpha(j,e)} d\Gamma_e\end{aligned}\quad (2.66)$$

## 2.9 Técnica de sub-regiões

Caso o problema mecânico considerado envolva o comportamento conjunto de distintos componentes, a técnica de sub-regiões permite avaliar a resposta do problema composto assumindo continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças nas interfaces. Procedendo de maneira semelhante ao apresentado no tópico 2.6.2 é possível escrever sistemas de equações do tipo  $\mathbf{H}^r \mathbf{u}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{t}^r$  para cada uma das  $r = 1 \dots Nr$  sub-regiões que compõem o problema composto, podendo essas conter ou não a presença de fissuras. A partir desses subsistemas é possível montar um sistema global do tipo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}^{Nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{Nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}^{Nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{Nr} \end{bmatrix}\quad (2.67)$$

O sistema global 2.67 pode ser escrito simplesmente como  $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$ . Na análise dos problemas compostos os pontos de colocação podem estar posicionados sobre as superfícies

$\Gamma, \Gamma_f$  do contorno e fissuras e também sobre as superfícies  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$  das interfaces entre os componentes. Denominando  $\mathbf{u}^c, \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$  e  $\mathbf{t}^c, \mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-$  os sub-vetores de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  correspondentes aos pontos de colocação sobre as superfícies  $\Gamma \cup \Gamma_f, \Gamma^+$  e  $\Gamma^-$  é possível reescrever o sistema global do problema como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}^+ & \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}^+ & \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \\ \mathbf{t}^+ \\ \mathbf{t}^- \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Sendo  $\mathbf{H}^c, \mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-$  e  $\mathbf{G}^c, \mathbf{G}^+, \mathbf{G}^-$  sub-matrizes compostas pelas colunas de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  que multiplicam os vetores  $\mathbf{u}^c, \mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$  e  $\mathbf{t}^c, \mathbf{t}^+, \mathbf{t}^-$ . No caso de interfaces perfeitamente conectadas, condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças devem ser impostas sobre as superfícies  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}^- \\ \mathbf{t}^+ + \mathbf{t}^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Impondo as condições 2.69 o sistema 2.68 resulta.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & (\mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \\ \mathbf{t}^+ \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

As condições de contorno do problema podem ser impostas em 2.70 rearranjando colunas dos termos  $\mathbf{H}^c$  e  $\mathbf{G}^c$  de maneira semelhante ao apresentado no tópico 2.6.2.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & (\mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t}^+ \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

sendo  $\mathbf{x}$  o vetor de incógnitas do contorno,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  matrizes compostas pelas colunas de  $\mathbf{H}^c$  e  $\mathbf{G}^c$  correspondentes aos valores incógnitos e prescritos no contorno e  $\mathbf{p}$  é o vetor de valores prescritos no contorno. Reorganizando 2.71 de maneira a deixar todos os valores incógnitos do contorno e das interfaces a esquerda da igualdade é possível apresentar um sistema final resolvível do tipo.

$$\left[ \mathbf{A} \quad (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \quad (\mathbf{G}^- - \mathbf{G}^+) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{t}^+ \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (2.72)$$

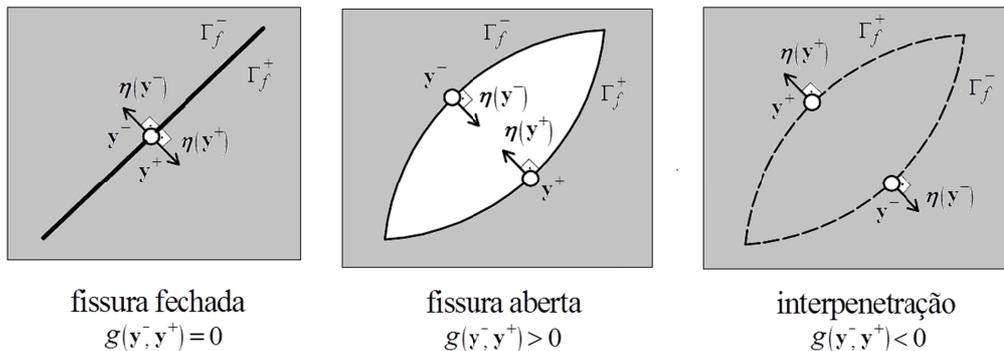
Resolvendo o sistema 2.72 é possível determinar os valores incógnitos de deslocamentos e de forças para todos os pontos do contorno e das interfaces dos componentes.

## 2.10 Tratamento da interpenetração das faces da fissura

A formulação MEC dual tem por base a teoria clássica da elasticidade linear e, portanto, permite o fenômeno espúrio da interpenetração da matéria. Em problemas de fadiga de sólidos fissurados sob carregamentos alternados, tal fenômeno pode acontecer nas superfícies das fissuras. No caso das formulações variacionais, como as do MEF, o problema da interpenetração da matéria é tratado através da minimização do funcional de energia mecânica sob restrições de contato, impostas através das técnicas de multiplicadores de Lagrange ou de penalização. No caso das formulações de elementos de contorno, as restrições de contato podem ser impostas diretamente no sistema de equações algébricas uma vez que as variáveis envolvidas nas restrições são os próprios deslocamentos e as forças de superfície.

### 2.10.1 Definição do problema da interpenetração das faces da fissura.

No contexto da MFEL assume-se a condição de forças nulas para as superfícies das fissuras. Somadas às condições prescritas no contorno externo do sólido, soluções aproximadas para o PVC podem ser obtidas através de métodos numéricos como o MEC dual. No caso geral de fissuras solicitadas em modo misto de fratura, a depender das condições de contorno do problema, o fenômeno da interpenetração das faces de uma fissura pode ser observado conforme ilustra a Figura 2.7.



**Figura 2.7** – Descrição do fenômeno de interpenetração das faces de uma fissura.

Em problemas gerais da mecânica do contato a função  $g(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-)$  apresentada na Fig. 2.7 é denominada função *gap* e é definida como:

$$g(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) = \left[ (\mathbf{y}^+ + \mathbf{u}(\mathbf{y}^+)) - (\mathbf{y}^- + \mathbf{u}(\mathbf{y}^-)) \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}^-) \geq 0 \quad (2.73)$$

O resultado da função *gap* é um valor escalar que corresponde à mínima distância entre as superfícies suscetíveis ao contato e, quando negativo, indica a interpenetração de um sólido sobre o outro. No caso específico dos pontos sobre as faces das fissuras têm-se que  $\mathbf{y}^+ = \mathbf{y}^-$  e, portanto, a função *gap* é a própria abertura normal da fissura, ou seja:

$$g(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) = \left[ \mathbf{u}(\mathbf{y}^+) - \mathbf{u}(\mathbf{y}^-) \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}^-) = \langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle \geq 0 \quad (2.74)$$

em que  $\langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle$  é o salto, ou descontinuidade, da componente de deslocamento normal à superfície da fissura (abertura normal) para os pontos  $\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-$  das faces da fissura. Conforme indica a Eq. 2.74, para que não haja a penetração das faces da fissura é necessário que a condição de não interpenetrabilidade,  $\langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle \geq 0$ , seja satisfeita em todos os pontos das superfícies  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ . Caso a solução do PVC obtida considerando fissuras livres de forças resultar  $\langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle < 0$  em algum ponto, a solução se torna inadmissível.

Considerando os valores admissíveis da condição de interpenetrabilidade, duas distintas situações podem ser identificadas. Quando as aberturas normais apresentam um valor positivo o contato entre as superfícies da fissura não ocorre e, portanto, as forças de superfície são nulas. Por outro lado, quando as aberturas normais são nulas o par de pontos está em contato e forças de interação aparecerão nas superfícies da fissura para evitar a interpenetração. Os valores dessas forças de superfície dependem severamente das características do problema mecânico como um todo e podem ser obtidas a partir de procedimentos iterativos. Nesse caso tem-se um problema de contato, o qual é naturalmente não linear uma vez que não se conhece previamente as regiões das superfícies de fissura que estarão em contato.

As forças de interação devem satisfazer a condição de equilíbrio definida pela terceira lei de Newton, ou seja,  $\mathbf{t}(\mathbf{y}^+) = -\mathbf{t}(\mathbf{y}^-)$ . No presente trabalho é considerada uma importante hipótese simplificadora sobre o modelo de interpenetração: Os efeitos de fricção entre as faces da fissura são desprezados. Apesar de ser uma hipótese forte, a situação mais crítica em problemas de fratura ocorre quando tensões de tração atuam de maneira a abrir as faces das fissuras, sendo os efeitos de fricção pouco relevantes nesses casos. Na ausência de fricção, as forças de interação nas regiões de contato serão sempre normais às superfícies da fissura e podem ser representadas por um escalar  $t_\eta(\mathbf{y}^+)$ .

$$t_\eta(\mathbf{y}^+) = \mathbf{t}(\mathbf{y}^+) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}^+) = \mathbf{t}(\mathbf{y}^-) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}^-) \leq 0 \quad (2.75)$$

A força normal à superfície (pressão)  $t_\eta$  deve ser sempre negativa, indicando compressão, pois caso contrário, existirão forças coesivas de adesão no sentido de fechar as superfícies da fissura. As forças coesivas aparecem nos chamados problemas coesivos. Nos problemas de fratura elástica essas forças são desconsideradas. Levando em consideração os valores observados simultaneamente para as aberturas  $\langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle$  e as forças  $t_\eta(\mathbf{y}^+)$  é possível escrever a condição de complementariedade que caracteriza o problema de contato:

$$\langle u_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle \cdot t_\eta(\mathbf{y}^+) = 0 \quad (2.76)$$

### 2.10.2 Equações algébricas em coordenadas locais.

Antes de introduzir as restrições de contato é interessante escrever em coordenadas locais as colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  que multiplicam os graus de liberdade das faces da fissura. Para cada ponto de colocação  $j^+ = \mathbf{y}^+$  e  $j^- = \mathbf{y}^-$  sobre as faces da fissura é possível definir de maneira única um sistema de coordenadas locais conforme ilustrado na Figura 2.8.

Os versores  $\boldsymbol{\eta}$ ,  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{t}$  que definem as bases ortonormais são obtidos como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= \bar{\boldsymbol{\eta}} / \|\bar{\boldsymbol{\eta}}\| \quad \text{sendo} \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \\ \mathbf{t} &= \bar{\mathbf{t}} / \|\bar{\mathbf{t}}\| \quad \text{sendo} \quad \bar{\mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \\ \mathbf{l} &= \bar{\mathbf{l}} / \|\bar{\mathbf{l}}\| \quad \text{sendo} \quad \bar{\mathbf{l}} = \bar{\boldsymbol{\eta}} \times \bar{\mathbf{t}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

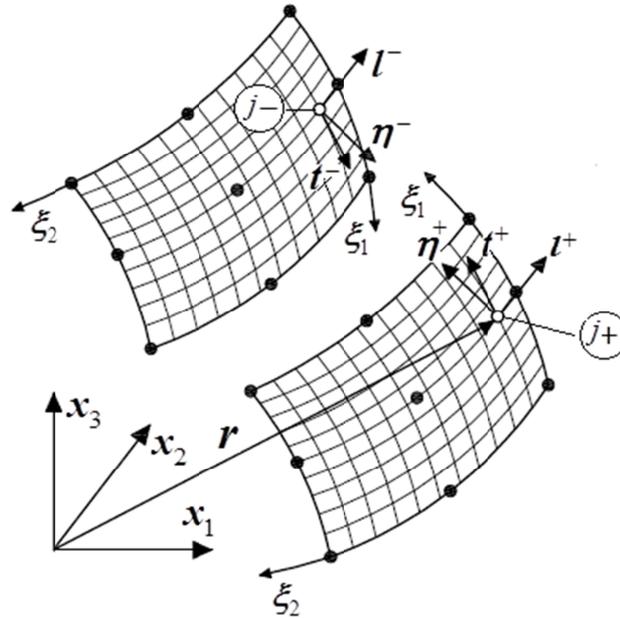


Figura 2.8 – Sistemas de coordenadas locais.

Os vetores de deslocamentos e forças de superfície  $\mathbf{u}_{j+}$ ,  $\mathbf{t}_{j+}$ ,  $\mathbf{u}_{j-}$  e  $\mathbf{t}_{j-}$  escritos no sistema de coordenadas globais podem ser transformados para os sistemas de coordenadas locais, e vice-versa, através de matrizes de rotação  $\mathbf{R}_{j+}$  e  $\mathbf{R}_{j-}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j+}^L &= \mathbf{R}_{j+} \mathbf{u}_{j+} & \mathbf{t}_{j+}^L &= \mathbf{R}_{j+} \mathbf{t}_{j+} \\ \mathbf{u}_{j-}^L &= \mathbf{R}_{j-} \mathbf{u}_{j-} & \mathbf{t}_{j-}^L &= \mathbf{R}_{j-} \mathbf{t}_{j-} \end{aligned} \quad (2.78)$$

em que  $\mathbf{u}_{j+}^L$ ,  $\mathbf{t}_{j+}^L$  e  $\mathbf{u}_{j-}^L$ ,  $\mathbf{t}_{j-}^L$  são os vetores escritos nos respectivos sistemas de coordenadas locais. As matrizes  $\mathbf{R}_{j+}$  e  $\mathbf{R}_{j-}$  são definidas a partir das componentes dos versores ortonormais ilustrados na Fig. 2.8 avaliados sobre os pontos  $j+$  e  $j-$ .

$$\mathbf{R}_{j+} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^{(j+)} \quad \mathbf{R}_{j-} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^{(j-)} \quad (2.79)$$

O sistema global  $\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}$  pode ser reescrito em termos de matrizes de influência  $3 \times 3$   $\mathbf{H}_{ij}$  e  $\mathbf{G}_{ij}$  que multiplicam os vetores  $3 \times 1$   $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{t}_j$  de deslocamentos e forças dos  $j=1 \dots N$  pontos de colocação do problema.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \cdots & \mathbf{H}_{1N} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \cdots & \mathbf{H}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{N1} & \mathbf{H}_{N2} & \cdots & \mathbf{H}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1N} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N1} & \mathbf{G}_{N2} & \cdots & \mathbf{G}_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_N \end{Bmatrix} \quad (2.80)$$

Desmembrando os pontos de colocação em subconjuntos  $j = 1 \cdots Nj$ ,  $j+ = 1 \cdots Nj+$  e  $j- = 1 \cdots Nj-$ , com  $Nj+ = Nj-$ , de acordo com sua localização, reescreve-se 2.80 em forma de somatório como.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Nj} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j+=1}^{Nj+} \mathbf{H}_{ij+} \mathbf{u}_{j+} + \sum_{j-=1}^{Nj-} \mathbf{H}_{ij-} \mathbf{u}_{j-} = \\ \sum_{j=1}^{Nj} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{t}_j + \sum_{j+=1}^{Nj+} \mathbf{G}_{ij+} \mathbf{t}_{j+} + \sum_{j-=1}^{Nj-} \mathbf{G}_{ij-} \mathbf{t}_{j-} \end{aligned} \quad (2.81)$$

A partir da transformação inversa a 2.78, reescrevem-se em coordenadas locais as equações em 2.81 correspondentes aos graus de liberdade sobre as faces da fissura.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Nj} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j+=1}^{Nj+} \mathbf{H}_{ij+} [\mathbf{R}_{j+}]^{-1} \mathbf{u}_{j+}^L + \sum_{j-=1}^{Nj-} \mathbf{H}_{ij-} [\mathbf{R}_{j-}]^{-1} \mathbf{u}_{j-}^L = \\ \sum_{j=1}^{Nj} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{t}_j + \sum_{j+=1}^{Nj+} \mathbf{G}_{ij+} [\mathbf{R}_{j+}]^{-1} \mathbf{t}_{j+}^L + \sum_{j-=1}^{Nj-} \mathbf{G}_{ij-} [\mathbf{R}_{j-}]^{-1} \mathbf{t}_{j-}^L \end{aligned} \quad (2.82)$$

Ou ainda em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}_L^+ & \mathbf{H}_L^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}_L^+ \\ \mathbf{u}_L^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}_L^+ & \mathbf{G}_L^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \\ \mathbf{t}_L^+ \\ \mathbf{t}_L^- \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

em que os vetores  $\mathbf{u}_L^+$ ,  $\mathbf{u}_L^-$  e  $\mathbf{t}_L^+$ ,  $\mathbf{t}_L^-$  contêm todos os deslocamentos e forças de superfície da fissura escritos em coordenadas locais.

### 2.10.3 Imposição iterativa das restrições à interpenetração.

As restrições à interpenetração, definidas no tópico 2.9.1, podem ser impostas nas equações algébricas 2.83 a partir do procedimento iterativo descrito a seguir. O Procedimento se baseia na ideia de previsão e correção das regiões complementares de contato  $\Gamma_f^c$  e não

contato  $\Gamma_f^{nc}$  das superfícies de fissura. Na primeira iteração, ou previsão inicial, é assumido que não existe região de contato:  $\Gamma_f^c \cap \Gamma_f = \emptyset$ . Nessa situação o sistema 2.83 pode ser solucionado impondo-se as condições de contorno do problema e condições de forças nulas sobre as faces da fissura.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_L^+ \\ \mathbf{u}_L^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{H}_L^+ & \mathbf{H}_L^- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G}_L^+ & \mathbf{G}_L^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

Com os deslocamentos  $\mathbf{u}_L^+ = \{\mathbf{u}_\eta^+ \ \mathbf{u}_l^+ \ \mathbf{u}_t^+\}$  e  $\mathbf{u}_L^- = \{\mathbf{u}_\eta^- \ \mathbf{u}_l^- \ \mathbf{u}_t^-\}$  obtidos de 2.84 é possível calcular as aberturas normais:  $\langle u_n(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle = -(u_\eta^+ + u_\eta^-)$ . Caso todos os valores do vetor de aberturas normais,  $\langle \mathbf{u}_\eta(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) \rangle$ , avaliados nos pontos de colocação, sejam positivos considera-se que o problema convergiu sem a ocorrência de interpenetração. Caso alguns componentes do vetor sejam negativos considera-se que os conjuntos de pontos de colocação onde a interpenetração foi observada pertencem agora à região  $\Gamma^c$  de contato e parte-se para uma segunda iteração.

Na segunda iteração o contato deve ser imposto para os nós da região  $\Gamma^c$ . Para tanto, considere novamente o sistema 2.83, reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}_L^{nc} & \mathbf{H}_\eta^{c+} & \mathbf{H}_l^{c+} \\ \mathbf{H}_t^{c+} & \mathbf{H}_\eta^{c-} & \mathbf{H}_l^{c-} & \mathbf{H}_t^{c-} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}_L^{nc} \\ \mathbf{u}_\eta^{c+} \\ \mathbf{u}_l^{c+} \\ \mathbf{u}_t^{c+} \\ \mathbf{u}_\eta^{c-} \\ \mathbf{u}_l^{c-} \\ \mathbf{u}_t^{c-} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}_L^{nc} & \mathbf{G}_\eta^{c+} & \mathbf{G}_l^{c+} \\ \mathbf{G}_t^{c+} & \mathbf{G}_\eta^{c-} & \mathbf{G}_l^{c-} & \mathbf{G}_t^{c-} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^c \\ \mathbf{t}_L^{nc} \\ \mathbf{t}_\eta^{c+} \\ \mathbf{t}_l^{c+} \\ \mathbf{t}_t^{c+} \\ \mathbf{t}_\eta^{c-} \\ \mathbf{t}_l^{c-} \\ \mathbf{t}_t^{c-} \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

Onde os sobrescritos  $c$  e  $nc$  indicam vetores que coletam os graus de liberdade dos pontos sobre as superfícies da fissura  $\Gamma^c$  (em contato) e  $\Gamma^{nc}$  (não em contato). Para a região

$\Gamma^{nc}$  o vetor de deslocamentos é apresentado em forma condensada como  $\mathbf{u}_L^{nc} = \{\mathbf{u}_L^{nc+}, \mathbf{u}_L^{nc-}\}$ . Para a região  $\Gamma^c$  as condições de interpenetrabilidade, equilíbrio das forças normais e ausência de fricção resultam.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\eta^{c+} &= -\mathbf{u}_\eta^{c-} \\ \mathbf{t}_\eta^{c+} &= \mathbf{t}_\eta^{c-} \\ \mathbf{t}_l^{c+} &= \mathbf{t}_l^{c-} = \mathbf{t}_t^{c+} = \mathbf{t}_t^{c-} = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Impondo as condições 2.86 e as condições de contorno em 2.85 é possível obter um sistema resolvível dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{H}_L^{nc} & (\mathbf{H}_\eta^{c+} - \mathbf{H}_\eta^{c-}) \\ \mathbf{H}_l^{c+} & \mathbf{H}_t^{c+} & \mathbf{H}_l^{c-} & \mathbf{H}_t^{c-} \\ -\mathbf{G}_L^{nc} & (-\mathbf{G}_\eta^{c+} - \mathbf{G}_\eta^{c-}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u}_L^{nc} \\ \mathbf{u}_\eta^{c+} \\ \mathbf{u}_l^{c+} \\ \mathbf{u}_t^{c+} \\ \mathbf{u}_l^{c-} \\ \mathbf{u}_t^{c-} \\ \mathbf{t}_L^{nc} \\ \mathbf{t}_\eta^{c+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G}_l^{c+} & \mathbf{G}_t^{c+} \\ \mathbf{G}_l^{c-} & \mathbf{G}_t^{c-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

A partir da resposta do sistema 2.87 é possível avaliar se as regiões de contato e não contato  $\Gamma^c$  e  $\Gamma^{nc}$  previamente assumidas satisfazem às restrições 2.74 e 2.75. Caso algum ponto sobre essas superfícies não satisfaça tais restrições, considera-se que o problema ainda não convergiu e parte-se para uma nova iteração redefinindo as regiões  $\Gamma^c$  e  $\Gamma^{nc}$  e procedendo de maneira semelhante ao apresentado para a segunda iteração.

A convergência do algoritmo iterativo descrito ocorre quando todos os pontos sobre as superfícies  $\Gamma^c$  e  $\Gamma^{nc}$  satisfizerem às condições de contato, ou seja:

$$\begin{aligned} t_\eta^c(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-) &= t_\eta^{c+}(\mathbf{y}^+) = t_\eta^{c-}(\mathbf{y}^-) < 0 \quad \text{em } \Gamma^c \\ \langle u_n(\mathbf{y}^+, \mathbf{y}^-)^{nc} \rangle &= -(u_\eta^{nc+} + u_\eta^{nc-}) > 0 \quad \text{em } \Gamma^{nc} \end{aligned} \quad (2.88)$$

### 3 Malhas independentes para as superfícies NURBS

---

Conforme discutido no capítulo de introdução, a grande maioria das tecnologias CAD se baseia na descrição geométrica de sólidos tridimensionais a partir de superfícies paramétricas. Entre as principais tecnologias, i.e., NURBS, *Subdivision surfaces* e T-Splines, as superfícies NURBS destacam-se como a mais difundida nos softwares de CAD. Para alcançar o objetivo de integrar as análises mecânicas de fratura e fadiga de componentes 3D com os softwares de computação gráfica, desenvolve-se nesse capítulo um gerador de malhas de superfície a partir do mapeamento geométrico de superfícies NURBS.

Os modelos geométricos dos componentes tridimensionais são geralmente constituídos por múltiplas superfícies NURBS, as quais podem ser aparadas ou não. Sendo assim, uma das grandes dificuldades para gerar malhas volumétricas ou de superfícies é o tratamento das conexões das superfícies, uma vez que cada superfície possui uma parametrização independente das demais. O algoritmo proposto no presente trabalho se baseia em conceitos semelhantes aos dos elementos descontínuos e descontínuos de aresta, introduzidos por Mi e Aliabadi (1992) para análises de fissuras. Define-se o conceito de *elementos descontínuos generalizados*, os quais são utilizados para discretizar as extremidades das superfícies, garantindo que todos os pontos de colocação sejam internos às mesmas. Assim, é possível discretizar de maneira independente as superfícies NURBS (aparadas ou não) que descrevem o modelo geométrico, evitando as complexidades no tratamento das interseções. Tal característica permite tratar modelos geométricos 3D “não estanques”, desde que as lacunas e sobreposições nas interseções das superfícies sejam consideravelmente pequenas.

A geração de malhas de superfície é efetuada a partir de uma malha 2D gerada no espaço paramétrico de cada superfície NURBS. Cada nó no espaço físico 3D é obtido a partir do mapeamento de um nó da malha 2D utilizando as funções base e os pontos de controle da respectiva NURBS. As conectividades dos nós da malha da superfície tridimensional são idênticas às da malha paramétrica bidimensional. No caso de superfícies não aparadas, malhas paramétricas 2D estruturadas, uniformes ou localmente refinadas, são facilmente criadas para gerar as malhas tridimensionais após o mapeamento geométrico. Já no caso das superfícies aparadas, as curvas NURBS de aproximação definidas nos espaços paramétricos das superfícies são discretizadas em trechos lineares e geradores de malhas 2D não estruturadas são utilizados de maneira automática pelo programa desenvolvido para mapear o espaço paramétrico

aparado da superfície. Consecutivamente, é possível gerar uma malha da superfície tridimensional aparada após o mapeamento para o espaço físico. Para determinar os nós de extremidade da malha paramétrica 2D, necessários para definir os elementos descontínuos, utilizou-se a função distância assinalada do contorno no espaço paramétrico bidimensional. A possibilidade de discretizar superfícies aparadas de maneira independente permite a imposição de condições de contorno em porções de superfície não regulares, respeitando as discontinuidades das forças de superfície. Além disso, as discretizações independentes das superfícies proporcionam versatilidade para refinamentos necessários em análises de fadiga e fratura com fissuras de borda, uma vez que permite que o refinamento da discretização do contorno interceptado pela fissura não afete a discretização das outras superfícies do problema. Para introduzir o algoritmo desenvolvido, alguns conceitos básicos sobre superfícies e curvas NURBS são apresentados. Definições para a construção das NURBS tais como vetores de *knots*, *patches*, pontos de controle, curvas e superfícies B-splines são brevemente apresentados e maiores detalhes podem ser encontrados em livros de referência como Farin (1999) e Rogers (2001).

### 3.1 B-splines

Curvas e superfícies paramétricas do tipo NURBS são construídas a partir de uma transformação projetiva de funções B-splines. Portanto, uma discussão sobre B-splines é o ponto de partida para entender as entidades NURBS. O espaço paramétrico sobre o qual as funções B-splines são construídas é denominado *patch*. Apesar da semelhança com o espaço paramétrico dos elementos de Lagrange convencionais, o conceito é mais amplo uma vez que as superfícies NURBS são capazes de reproduzir de maneira exata uma maior gama de superfícies como as cônicas e as quádricas, comumente utilizadas em projetos de CAD. Dessa maneira, o contorno fechado de muitos componentes tridimensionais com geometria complexa pode ser descrito utilizando poucas superfícies NURBS.

#### 3.1.1 Vetores de *Knots*

O espaço paramétrico de uma B-spline, ou *patch*, é definido pelos chamados *vetores de knots*. Em uma dimensão, um vetor de *knots* é um conjunto não decrescente de coordenadas do espaço paramétrico, tais como  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , sendo  $\xi_i \in \mathbb{R}$  o *i*-ésimo *knot*,  $i = 1, 2, \dots, n+p+1$  são os índices dos *knots*,  $p$  é a ordem polinomial da B-spline e  $n$  o número de funções bases utilizadas na construção da curva B-spline. Os *knots* particionam o

espaço paramétrico e os intervalos  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  são denominados *knots spans*. Os vetores de *knots* são definidos como uniformes para o caso em que todos os *knots* são igualmente espaçados no espaço paramétrico. Caso contrário os vetores de *knots* são ditos não uniformes. Valores repetidos de *knots*, ou seja,  $\xi_i = \xi_{i+1} = \xi_{i+2} = \dots = \xi_{i+m}$ , podem ocorrer em um vetor de *knots* não uniforme. A multiplicidade dos *knots* tem importantes implicações sobre a continuidade da curva B-spline. B-splines são  $C^\infty$  contínuas internamente aos *knots spans* e  $C^{p-(m+1)}$  contínuas nos *knots*, sendo  $m+1$  a multiplicidade do *knot* e  $p$  a ordem da B-spline.

Um vetor de *knots* é dito aberto caso o primeiro e último valores de *knots* tenham multiplicidade  $m=p$ . Vetores de *knots* abertos são geralmente o padrão em softwares de CAD. Sendo assim, no presente trabalho a construção de superfícies NURBS se limita a utilização de vetores de *knots* abertos. As funções bases que definem a curva B-spline em um vetor de *knots* aberto são, portanto, interpolatórias nas extremidades do espaço paramétrico  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ . No entanto, para *knots* internos ao intervalo  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$ , as funções base não são, em geral, interpolatórias.

### 3.1.2 Funções base de uma B-spline

A partir de um vetor de *knots* é possível definir recursivamente as funções base  $N_{i,p}(\xi)$  de uma B-spline, sendo  $p$  a ordem polinomial. Para iniciar o processo recursivo definem-se funções constantes por partes, ou seja, funções de ordem  $p=0$ .

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

Para ordens superiores as funções base são definidas recursivamente a partir da *formula de Cox-de Boor* (Cox, 1971; de Boor, 1972).

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.2)$$

Para ordens  $p=0$  ou  $p=1$  as funções base definidas por 3.1 e 3.2 resultam iguais aos polinômios de Lagrange. No entanto, para  $p \geq 2$  as funções base se diferem dos polinômios de Lagrange. As funções base das B-splines possuem diversas propriedades matemáticas úteis em termos de análises numéricas. Entre essas propriedades destaca-se a partição da unidade.

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_{n+p+1}] \quad (3.3)$$

Outra importante propriedade das funções base é que elas podem possuir até  $p-1$  derivadas contínuas interelementos (sobre os *knots*), a qual tem implicações diretas na suavidade da descrição geométrica através de superfícies NURBS.

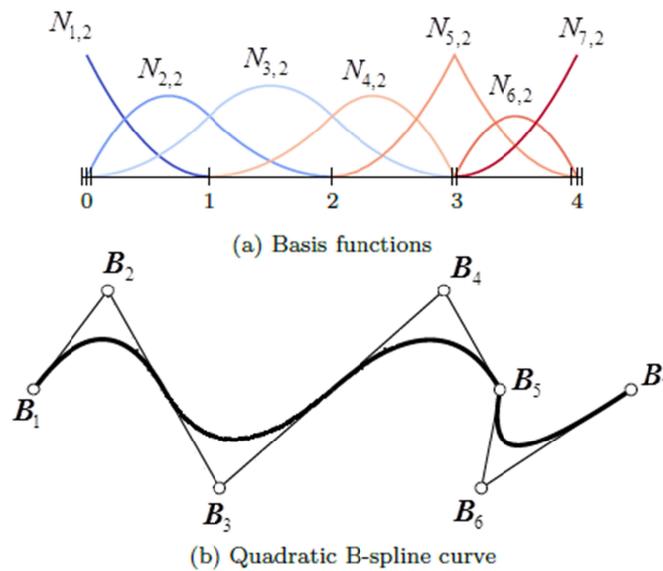
Durante a construção recursiva das funções base, operações do tipo 0/0 podem aparecer frequentemente. Nesses casos, deve-se definir  $0/0 = 0$  e continuar com as operações necessárias para a obtenção das funções base (COTTRELL et al., 2009).

### 3.1.3 Curvas B-spline

Curvas B-spline definidas em um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$  são construídas a partir de uma combinação linear das funções base  $N_{i,p}(\xi)$ . Para o caso de curvas em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{R}^3$ , os coeficientes que multiplicam as funções bases são, respectivamente, vetores de duas e três dimensões que contêm as coordenadas dos chamados *pontos de controle* no espaço euclidiano. Dado um vetor de *knots*  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ , suas respectivas funções base  $N_{i,p}(\xi), i = 1, 2, \dots, n$  e os correspondentes pontos de controle  $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n$ , uma *curva B-spline* polinomial por partes é dada por:

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (3.4)$$

Note que os índices  $i = 1, 2, \dots, n$  dos pontos de controle  $\mathbf{B}_i$  não indicam suas componentes  $d$  no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$ , mas sim a correspondência com as funções escalares  $N_{i,p}(\xi)$ . Os pontos de controle são análogos aos nós dos elementos de Lagrange no sentido de que os mesmos são os coeficientes que multiplicam as funções base no mapeamento geométrico. No entanto, dada a natureza não interpolatória das funções base, os pontos de controle diferem da imagem dos *knots* no espaço físico. A Figura 3.1 apresenta uma curva B-spline quadrática definida em  $\mathbb{R}^2$  construída a partir de um vetor de *knots* aberto. A interpolação linear dos pontos de controle é denominada de *polígono de controle* para o caso de curvas e *rede de controle* para o caso de superfícies. Os polígonos de controle e as redes de controle são respectivamente equivalentes a curvas e superfícies B-spline de ordem  $p = 1$ .



**Figura 3.1** – Curva B-spline quadrática: (a) funções de forma (b) Curva B-spline e polígono de controle (MARUSSIG & HUGHES, 2017).

### 3.1.4 Superfícies B-spline

Dada uma rede de controle  $\mathbf{B}_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , ordens polinomiais  $p$  e  $q$  e vetores de *knots*  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  e  $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  é possível definir uma superfície B-spline  $S(\xi, \eta)$  como:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{ij,pq}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{ij} \quad (3.5)$$

em que  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,q}(\eta)$  são funções base univariadas de ordens  $p$  e  $q$  correspondentes aos vetores de *knots*  $\Xi$  e  $H$ , respectivamente.  $N_{ij,pq}(\xi, \eta)$  são funções base bivariadas da superfície  $S(\xi, \eta)$  definidas como o produto tensorial das funções base univariadas. No caso de superfícies B-spline, o domínio paramétrico, ou *patch*, é definido pelo produto  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ . Note que optou-se por trocar a nomenclatura das coordenadas do espaço paramétrico bivariado para  $(\xi, \eta)$ , ao contrário da nomenclatura  $(\xi_1, \xi_2)$  adotada para os elementos de Lagrange, de modo a evitar confusão com os dois primeiros valores dos vetores de *knots*. Muitas das propriedades das funções base univariadas são transmitidas para

as funções base bivariadas tais como a não negatividade e a partição da unidade, observadas para  $\forall (\xi, \eta) \in [\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) = \left( \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \right) \left( \sum_{j=1}^m M_{j,q}(\eta) \right) = 1 \quad (3.6)$$

O número de derivadas parciais contínuas de  $N_{ij,pq}(\xi, \eta)$  em uma dada direção paramétrica é igual ao número de derivadas contínuas da respectiva função base univariada. Além disso, muitas das propriedades das funções base  $N_{i,p}(\xi)$  e  $N_{ij,pq}(\xi, \eta)$  são também transmitidas para as curvas  $C(\xi)$  e as superfícies  $S(\xi, \eta)$  B-splines conforme discutido em Roges (2001). No contexto do presente trabalho, as propriedades de continuidade, as quais são também transferidas para as superfícies NURBS, são de particular importância para a representatividade geométrica de uma maior gama de componentes mecânicos tridimensionais, para os quais partes do contorno são descritas por superfícies curvas contínuas. Considerando as definições 3.1, 3.2 e 3.5 observa-se que o número de funções bivariadas em um dado *patch*  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$  é igual a  $N = n.m$  e também que o suporte das funções base é sempre menor do que o domínio do *patch*, ou seja, as funções base tem suporte local.

### 3.2 NURBS

Curvas e superfícies B-splines não uniformes, i.e., construídas a partir de vetores de *knots* não uniformes, não são capazes de reproduzir de maneira exata muitas das geometrias usuais de componentes mecânicos. Por outro lado, Curvas e superfícies B-splines não uniformes racionais (NURBS, acrônimo do inglês) são a tecnologia mais difundida em softwares de CAD devido principalmente a sua capacidade de representar exatamente curvas e superfícies cônicas e quádricas, comumente adotadas em projetos de CAD, e ao fato de existirem muitos algoritmos eficientes e estáveis para a geração automática e alterações paramétrica de objetos descritos por NURBS.

De um ponto de vista geométrico, uma curva (ou superfície) NURBS em um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$  é obtida a partir da projeção de uma curva (ou superfície) B-spline em um espaço  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Os pontos de controle  $B_i$  (ou  $B_{ij}$ ) de uma curva (ou superfície) NURBS em  $\mathbb{R}^d$

são obtidos efetuando uma transformação projetiva sobre os pontos de controle  $\mathbf{B}_i^\omega$  (ou  $\mathbf{B}_{ij}^\omega$ ) da curva (ou superfície) B-spline primitiva em  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_i)_k &= (\mathbf{B}_i^\omega)_k / \omega_i \quad \text{para } k = 1, \dots, d \\ \omega_i &= (\mathbf{B}_i^\omega)_{d+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_{ij})_k &= (\mathbf{B}_{ij}^\omega)_k / \omega_{ij} \quad \text{para } k = 1, \dots, d \\ \omega_{ij} &= (\mathbf{B}_{ij}^\omega)_{d+1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que  $(\mathbf{B}_i)_k$  (ou  $(\mathbf{B}_{ij})_k$ ) é a k-ésima componente do vetor  $\mathbf{B}_i$  (ou  $\mathbf{B}_{ij}$ ) e  $\omega_i$  (ou  $\omega_{ij}$ ) é denominado peso, o qual corresponde à componente  $d+1$  do vetor  $\mathbf{B}_i^\omega$  (ou  $\mathbf{B}_{ij}^\omega$ ). Definindo uma função peso escalar  $W(\xi)$  (ou  $W(\xi, \eta)$ ), é possível aplicar a transformação projetiva para todos os pontos da curva B-spline primitiva  $\mathbf{C}^\omega(\xi)$  (ou superfície B-spline primitiva  $\mathbf{S}^\omega(\xi, \eta)$ ) resultando em uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$  (ou superfície NURBS  $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ ).

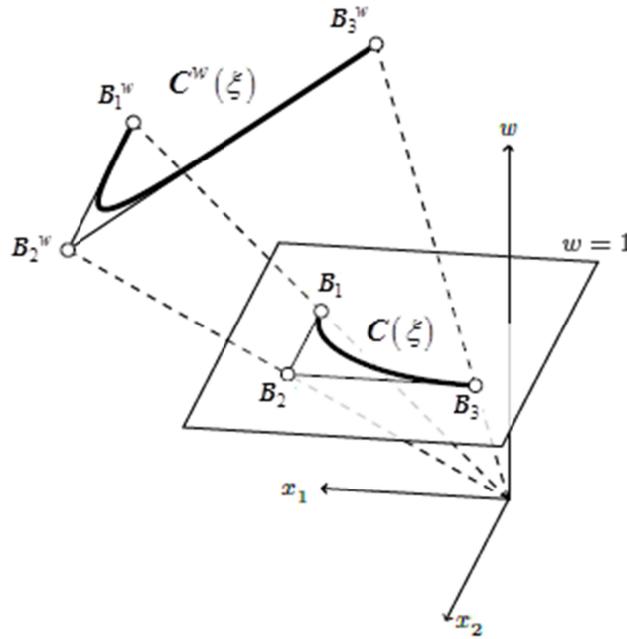
$$(\mathbf{C}(\xi))_k = \frac{(\mathbf{C}^\omega(\xi))_k}{W(\xi)} \quad \text{para } k = 1, \dots, d \quad (3.9)$$

$$(\mathbf{S}(\xi, \eta))_k = \frac{(\mathbf{S}^\omega(\xi, \eta))_k}{W(\xi, \eta)} \quad \text{para } k = 1, \dots, d \quad (3.10)$$

em que  $W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \omega_i$  (ou  $W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij}$ ) é a função peso escalar definida a partir das funções base da B-spline. Note que funções as  $\mathbf{C}^\omega(\xi)$  e  $W(\xi)$  (ou  $\mathbf{S}^\omega(\xi, \eta)$  e  $W(\xi, \eta)$ ) são ambas polinomiais por partes. Sendo assim,  $\mathbf{C}(\xi)$  (ou  $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ ) é uma função racional por partes definida a partir de vetores de *knots* não uniformes, ou seja, é uma função NURBS. A Figura 3.2 ilustra a transformação projetiva de uma curva B-spline quadrática  $\mathbf{C}^\omega(\xi)$  em  $\mathbb{R}^3$  para uma curva NURBS  $\mathbf{C}(\xi)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Na grande maioria dos casos, as entidades NURBS em  $\mathbb{R}^3$  que descrevem o contorno de objetos tridimensionais são construídas com o auxílio de softwares de CAD ou ainda

utilizando modelos padrões no caso de geometrias simples. Nesses casos, torna-se mais interessante entender as NURBS de um ponto de vista algébrico, evitando assim manipular diretamente B-splines em  $\mathbb{R}^4$ . Curvas e Superfícies NURBS podem ser descritas a partir de uma combinação linear de funções base semelhantemente ao apresentado nas Equações 3.4 e 3.5 para o caso das B-splines.



**Figura 3.2** – Transforma projetiva de uma curva B-spline em  $\mathbb{R}^3$  para uma curva NURBS em  $\mathbb{R}^2$  (MARUSSIG & HUGHES, 2017).

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) \mathbf{B}_i \quad (3.11)$$

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{ij} \quad (3.12)$$

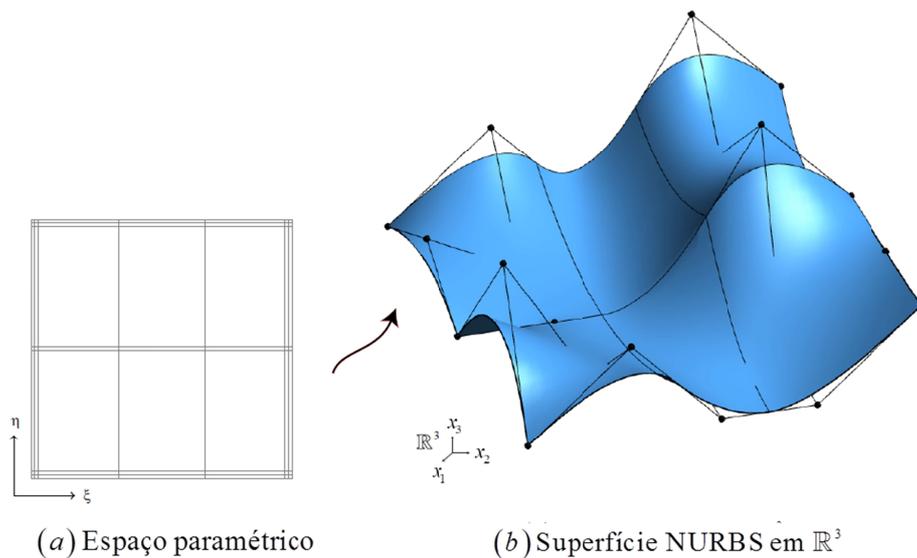
em que  $\mathbf{B}_i$  (ou  $\mathbf{B}_{ij}$ ) é o polígono (ou rede) de controle da NURBS e  $R_i(\xi)$  (ou  $R_{ij}(\xi, \eta)$ ) são funções base das NURBS definidas a partir das funções base das B-splines  $N_{i,p}(\xi)$  (ou  $N_{i,p}(\xi)$  e  $M_{j,p}(\xi)$ ) e dos pesos  $\omega_i$  (ou  $\omega_{ij}$ ).

$$R_i(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \omega_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi) \omega_{\hat{i}}} \quad (3.13)$$

$$R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)\omega_{ij}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)\omega_{\hat{i}\hat{j}}} \quad (3.14)$$

Note que as ordens polinomiais  $p$  e  $q$  foram omitidas em 3.12 e 3.13. Apesar de serem funções racionais, como as ordens  $p$  e  $q$  se repetem tanto no numerador como no denominador, é comum defini-las como ordens das funções base da NURBS. As funções base  $R_i(\xi)$  (ou  $R_{ij}(\xi, \eta)$ ) possuem muitas das propriedades das funções base  $N_{i,p}(\xi)$  (ou  $N_{ij,pq}(\xi, \eta)$ ) como a partição da unidade, o controle da continuidade por multiplicidade de *knots* e o caráter local.

Na Figura 3.3 ilustra-se esquematicamente uma superfície NURBS em  $\mathbb{R}^3$ .



**Figura 3.3** – Superfície NURBS no espaço físico  $\mathbb{R}^3$  (MARUSSIG & HUGHES, 2017).

Note o caráter não interpolatório da NURBS com relação aos pontos de controle  $\mathbf{B}_{ij}$ . Note ainda que nenhuma referência aos pontos de controle  $\mathbf{B}_{ij}^\omega$  em  $\mathbb{R}^4$  da B-spline projetiva foi necessária, sendo as componentes da quarta dimensão consideradas intrinsicamente como pesos  $\omega_{ij}$  das funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ .

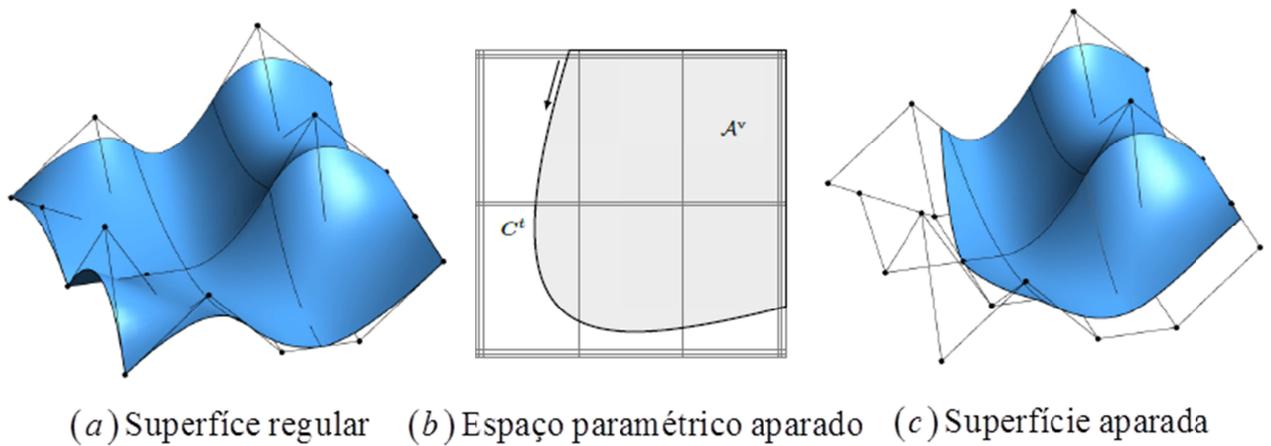
### 3.2.1 Superfícies NURBS aparadas

Para representar limites arbitrários em superfícies geradas por produtos tensoriais (como é o caso das superfícies NURBS), os *patches* podem ser modificados por

procedimentos de aparação. Com o propósito de aparar as superfícies, curvas de aparação  $C^t(u)$  são definidas no espaço paramétrico das superfícies  $S(\xi, \eta)$ . Tais curvas são geralmente NURBS fornecidas nos modelos geométricos de CAD e podem ser apresentadas como:

$$C^t(u) = \begin{bmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n R_i(u) \mathbf{b}_i \quad (3.15)$$

em que  $\mathbf{b}_i \in R^2$  são pontos de controle da curva de aparação definidos no espaço paramétrico da superfície aparada  $S(\xi, \eta)$ . O conjunto de curvas de aparação definidas sobre uma superfície deve formar uma volta fechada. As voltas fechadas podem também incluir as arestas do espaço paramétrico original da superfície. Essas voltas fechadas de curvas dividem o espaço paramétrico aparado em distintas partes onde a direção das curvas determina qual parte é visível. Ou ainda, o procedimento de aparação é usado para definir as áreas visíveis  $A^v$  sobre a superfície. Como resultado, superfícies com topologias não regulares podem ser representadas de uma maneira bem simples. A Figura 3.4 apresenta um exemplo de uma superfície aparada: (a) superfície regular e rede de controle, (b) espaço paramétrico aparado pelas as curvas de aparação  $C^t$  que definem a área visível  $A^v$  e (c) superfície aparada. Note que a descrição matemática da superfície aparada, i.e., o produto tensorial que define a superfície e a rede de controle, é a mesma da superfície regular. As superfícies aparadas estão presentes na grande maioria dos modelos geométricos 3D, pois elas possibilitam uma maneira conveniente de definir superfícies com topologias arbitrárias e proporcionam uma maneira simples de visualização em sistemas gráficos. Por outro lado, elas não apresentam uma solução para problemas como a conexão suave de superfícies adjacentes e muitas vezes lacunas podem ser observadas nas intersecções das superfícies.



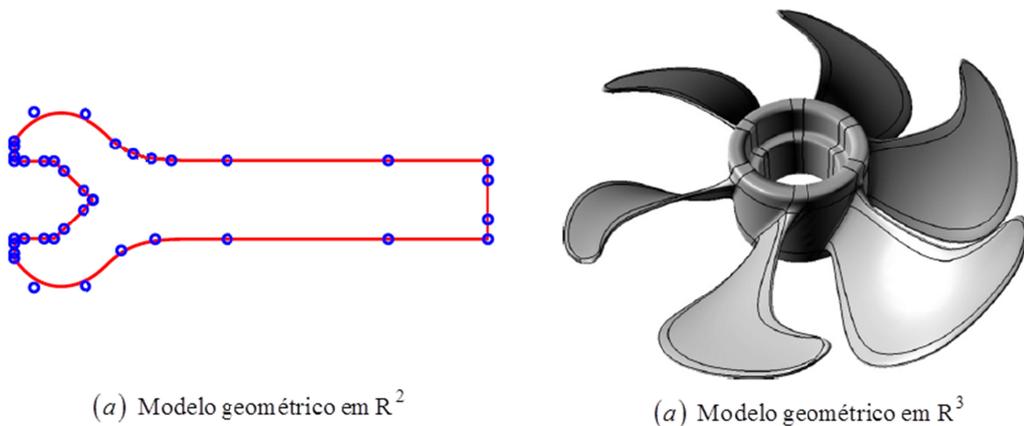
**Figura 3.4** – Superfície aparada: (a) Superfície regular definida pelo produto tensorial das funções base, (b) Espaço paramétrico aparado por um conjunto de curvas  $C^t$ , (c) Superfície aparada conforme programas de CAD (MARUSSIG & HUGHES, 2017).

### 3.3 Modelos geométricos 3D e o problema das intersecções

A grande maioria dos modelos CAD é geometricamente representada apenas por seu contorno  $\Gamma$ . Sendo assim, modelos geométricos são geralmente compostos por um conjunto de várias curvas em  $\mathbb{R}^2$  ou de várias superfícies em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n C_i \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^n S_i \quad (3.16)$$

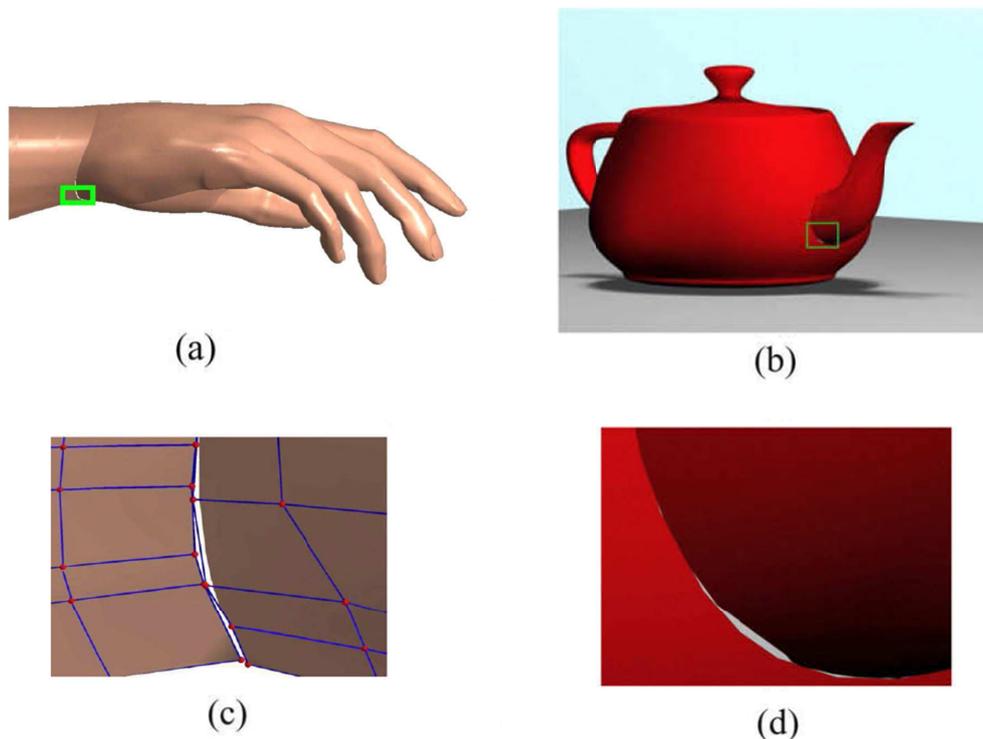
A Figura 3.5 ilustra modelos geométricos compostos por um conjunto de curvas NURBS em  $\mathbb{R}^2$  e por um conjunto de superfícies NURBS em  $\mathbb{R}^3$ .



**Figura 3.5** – Modelos geométricos em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ : (a) composto por 13 curvas NURBS (PENG et al. 2016) (b) Composto por 72 superfícies NURBS (SCOTT et al., 2013).

No caso bidimensional,  $\Gamma$  é uma curva composta por diversas curvas  $C_i$ , as quais podem ser de diferentes ordens polinomiais. Nesse caso, não existem grandes dificuldades para a construção de  $\Gamma$  uma vez que curvas podem ser unidas facilmente sendo ainda possível controlar a continuidade das interseções. No entanto, um problema aparece no caso tridimensional, quando  $\Gamma$  é composto por diversas superfícies. A intersecção ou conexão de duas ou mais superfícies é um problema complexo, especialmente no caso de uma continuidade ser necessária.

De maneira geral, parametrizações não conformes ao longo das extremidades de superfícies são observadas em diversos modelos geométricos 3D resultando em lacunas e sobreposições das superfícies nas proximidades das intersecções (MARUSSIG & HUGHES, 2017). A Figura 3.6 ilustra modelos geométricos 3D construídos com múltiplas superfícies NURBS destacando os problemas nas intersecções das superfícies.



**Figura 3.6** – Modelos geométricos construídos com múltiplas superfícies NURBS: (a) e (b) Ilustração global, (c) e (d) Ilustração local dos problemas de lacunas nas intersecções (BAZILEVS *et al.*, 2010).

Modelos geométricos que não apresentem lacunas ou sobreposições nas intersecções das superfícies são denominados de modelos “estanques” (*Watertight*, Acrônimo do inglês), os quais são de difícil obtenção. Modelos “não estanques” como os apresentados na Figura 3.6 são geralmente indesejáveis, pois dificultam a geração de malhas volumétricas ou mesmo de

superfície. Apesar de serem o padrão em programas de CAD e representarem bilhões de dólares de investimento, as superfícies NURBS, de maneira geral, não permitem a geração de modelos complexos tridimensionais “estanques” (BAZILEVS *et al.*, 2010).

O gerador de malhas de superfície descrito no tópico a seguir permite a criação eficiente de modelos tridimensionais para análises via elementos de contorno a partir de modelos geométricos 3D “não estanques”, constituídos por múltiplas superfícies NURBS.

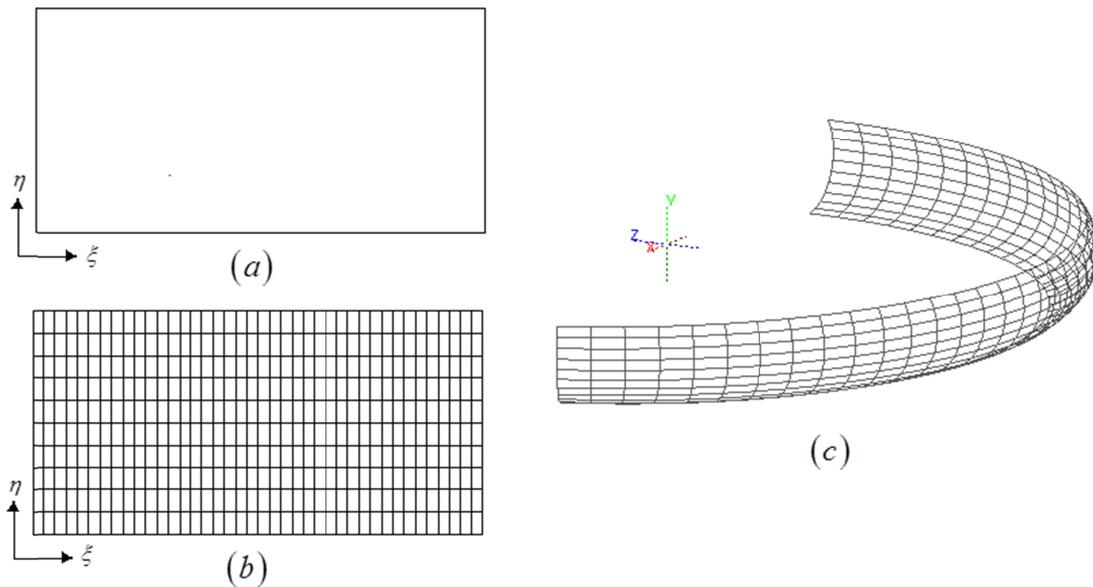
### 3.4 Gerador de malhas de superfícies

O gerador de malhas de superfície desenvolvido no presente trabalho leva em consideração três importantes fatores para facilitar a criação dos modelos numéricos de elementos de contorno a partir dos modelos geométricos: (i) Os modelos geométricos 3D são constituídos por múltiplas superfícies NURBS cujas parametrizações são independentes. Portanto, a discretização de cada uma das superfícies do modelo numérico deve ser independente da discretização das demais para evitar os problemas nas interseções. (ii) Cada superfície possui seus próprios graus de liberdade, i.e., não existem graus de liberdade pertencentes a mais de uma superfície NURBS, e a continuidade dos campos mecânicos é garantida pelo caráter global do sistema de equações algébricas obtido via colocação das equações integrais, i.e., cada grau de liberdade é uma combinação linear de todos os outros graus de liberdade do problema. (iii) Os erros numéricos devido às lacunas e às sobreposições de superfícies são pequenos caso as lacunas e as sobreposições também sejam.

O primeiro passo para criar os modelos numéricos é gerar uma malha 2D, i.e., nós e conectividade de elementos, para cada espaço paramétrico das superfícies que descrevem o modelo geométrico 3D. Note que cada espaço paramétrico pode ser discretizado sem que haja preocupação com as interseções entre as múltiplas superfícies.

#### 3.4.1 Superfícies regulares

Para superfícies regulares, i.e., não aparadas, a criação de uma malha 2D no espaço paramétrico é trivial. No presente trabalho optou-se por discretizar superfícies não aparadas com elementos quadrilaterais gerando malhas regulares uniformes ou localmente refinadas. A Figura 3.7 apresenta o espaço paramétrico, a malha paramétrica 2D e a malha da superfície no espaço físico  $\mathbb{R}^3$  para uma superfície NURBS regular de ordens polinomiais  $p = q = 5$ .



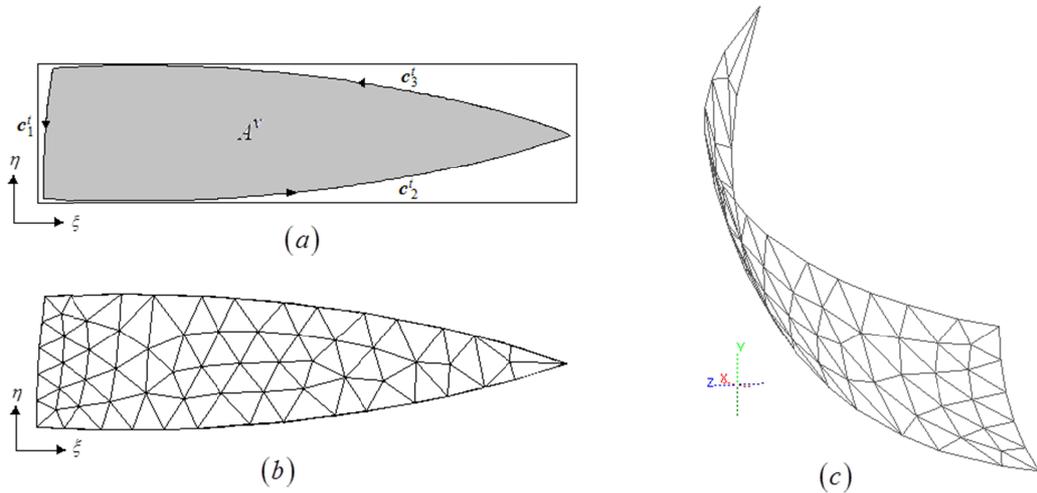
**Figura 3.7** – Superfícies regulares: (a) espaço paramétrico (b) malha paramétrica 2D (c) malha da superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

Note que a conectividade da malha da superfície, Fig. 3.7c, é a mesma da malha paramétrica, Fig. 3.7b. Já as coordenadas dos nós em  $\mathbb{R}^3$  podem ser obtidas a partir das coordenadas paramétrica em  $\mathbb{R}^2$  com o mapeamento descrito pela Eq. 3.12.

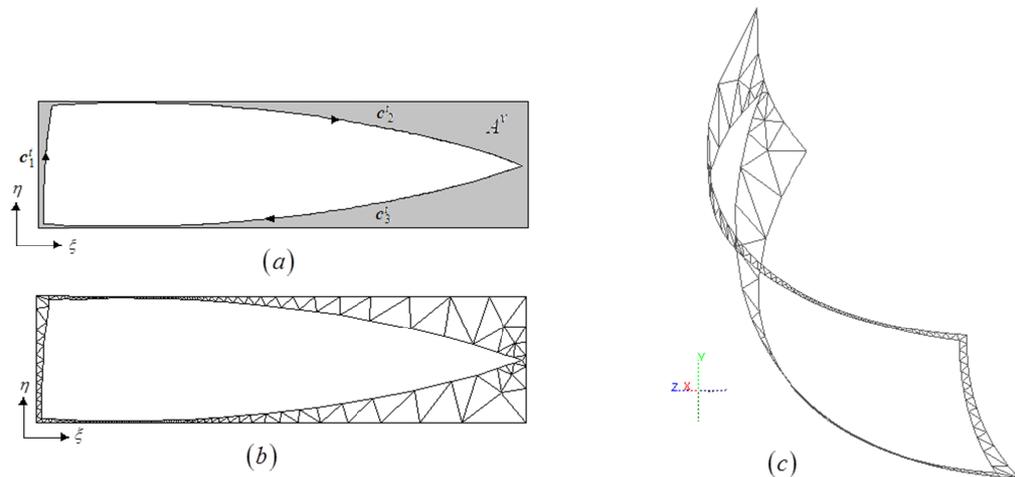
### 3.4.2 Superfícies aparadas

Para a geração das malhas paramétricas em superfícies aparadas é necessário que seja fornecido o número de voltas fechadas de apareação, o número de curvas de apareação para cada volta fechada e a descrição matemática de cada curva de apareação  $C_i^t$ , i.e., vetor de *knot*, ordem polinomial e o polígono de controle. Calcula-se, a partir da Eq. 3.15, uma quantidade predefinida de pontos para cada uma das curvas  $C_i^t$ . Conectando os pontos por trechos retos é possível gerar uma região na qual pode ser definida uma malha paramétrica utilizando algum gerador de malhas bidimensionais. No presente trabalho, adota-se o recurso *SmartSizing* do Software Ansys para gerar as malhas paramétricas 2D. O recurso é chamado de maneira automática pela ferramenta computacional desenvolvida em Fortran utilizando o comando “I = SYSTEM()”, que executa o programa Ansys em modo *Batch*. Dois tipos de superfícies aparadas foram implementadas, i.e., superfícies aparadas internas e externas. No caso das superfícies aparadas internas, a região a ser discretizada é delimitada apenas pelos trechos lineares provindos das curvas de apareação  $C_i^t$ . Já no caso das superfícies aparadas

externas a região a ser discretizada é delimitada pelos trechos lineares das curvas  $C_i^t$  e também pelas quatro retas que delimitam o espaço paramétrico da superfície não aparada. As Figuras 3.8 e 3.9 ilustram o espaço paramétrico aparado, a malha paramétrica 2D e a malha da superfície no espaço físico  $\mathbb{R}^3$  para uma superfície NURBS de ordens polinomiais  $p = q = 5$ , aparada interna e externamente.



**Figura 3.8** – Superfície aparada interna: (a) espaço paramétrico aparado (b) malha paramétrica 2D (c) malha da superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

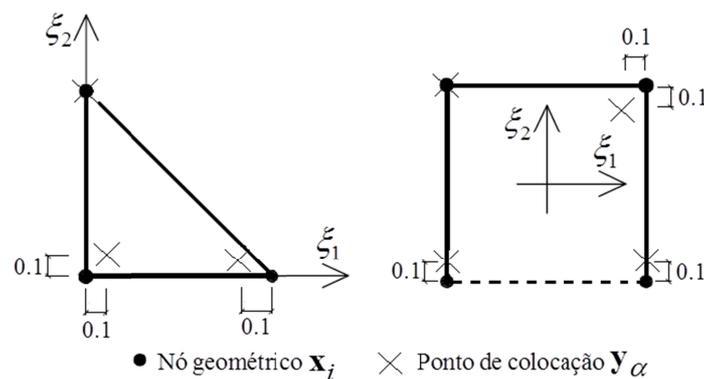


**Figura 3.9** – Superfície aparada externa: (a) espaço paramétrico aparado (b) malha paramétrica 2D (c) malha da superfície em  $\mathbb{R}^3$ .

No caso das superfícies aparadas, tanto elementos triangulares quanto elementos quadrilaterais podem ser utilizados. No entanto, os elementos triangulares se adequam a uma maior gama de geometrias resultando em elementos mais regulares do que os quadrilaterais para um mesmo grau de refinamento.

### 3.4.3 Estratégia de colocação e os elementos descontínuos generalizados

As malhas geradas de acordo com os procedimentos descritos nos tópicos anteriores são utilizadas para aproximar a geometria dos problemas. No entanto, como a malha de cada uma das superfícies dos modelos geométricos é gerada de maneira independente, podem existir nós de distintas superfícies muito próximos uns dos outros, ou ainda nós que ocupem a mesma posição geométrica nas intersecções das superfícies. Nesse caso, o sistema de equações algébricas obtido pela colocação das equações integrais sobre os nós resulta mal condicionado, ou ainda singular. Para que seja possível discretizar de maneira independente as superfícies NURBS dos modelos geométricos 3D sem a preocupação de existirem pontos de colocação coincidentes ou muito próximos, recorre-se a conceitos semelhantes aos dos elementos descontínuos e descontínuos de aresta, introduzidos por Mi e Aliabadi (1992) para tratar problemas de fratura via o MEC dual. No presente trabalho, propõem-se um elemento para o qual a localização dos pontos de colocação sobre o domínio do elemento pode ser arbitrária. Sendo assim é possível que alguns dos pontos de colocação sejam coincidentes com os respectivos nós, outros sejam movidos para as arestas e outros sejam movidos para o interior do elemento, de maneira completamente arbitrária. A esse conceito dá-se o nome de *elementos descontínuos generalizados*. Na Figura 3.10 ilustram-se os elementos descontínuos generalizados triangulares e quadrilaterais de aproximação linear.

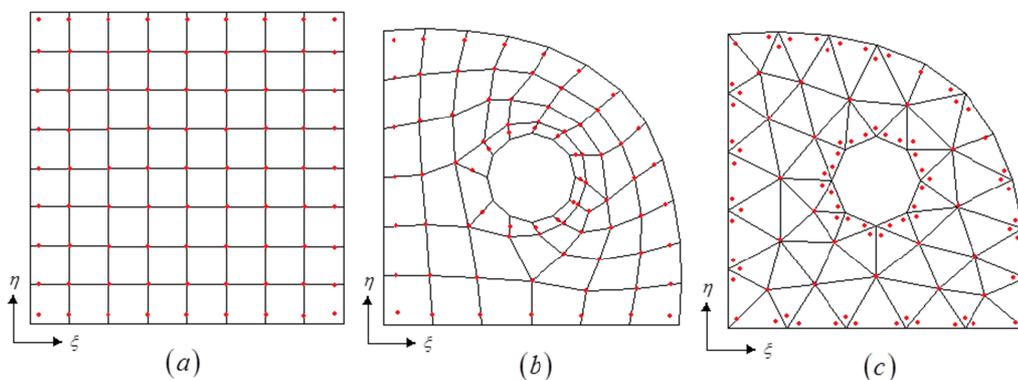


**Figura 3.10** – Elementos descontínuos generalizados.

Para os elementos descontínuos generalizados, as funções de forma que aproximam a geometria,  $M^i(\xi_1, \xi_2)$ , são idênticas às dos elementos convencionais. Já as funções base que aproximam os campos de deslocamentos e forças de superfície,  $N^\alpha(\xi_1, \xi_2)$ , são obtidas numericamente impondo-se a propriedade de delta de Kronecker sobre as coordenadas paramétricas  $(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha)$  dos  $\alpha = 1, \dots, N_{cp}$  pontos de colocação do elemento, os quais podem

ou não coincidir com as coordenadas adimensionais  $(\xi_1^i, \xi_2^i)$  dos  $i=1, \dots, N$  nós do elemento.

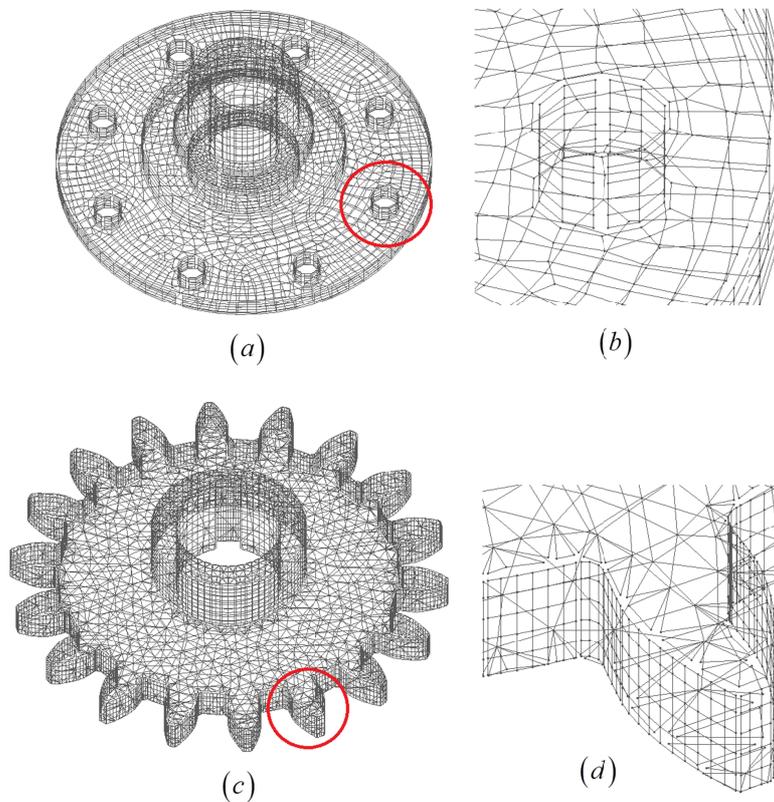
Definida uma malha 2D para o espaço paramétrico de uma superfície, determina-se os nós de extremidade e os elementos que estão conectados a esses nós. Esses elementos serão transformados em elementos descontínuos generalizados de tal forma que seus pontos de colocação se afastem da extremidade da superfície, evitando assim o problema dos pontos de colocação coincidentes. Três distintas situações podem ocorrer para um nó de extremidade: (i) o nó pertence a apenas um elemento, (ii) o nó pertence a dois elementos e (iii) o nó pertence a  $n$  elementos, tal que  $n > 2$ . Na situação (i), o ponto de colocação correspondente ao nó é movido para o interior do elemento. Já no caso da situação (ii), o ponto de colocação correspondente é movido para a aresta entre os dois elementos que dividem o nó. No caso da situação (iii)  $n-1$  novos pontos de colocação devem ser criados. Tanto o ponto de colocação correspondente ao nó de extremidade quanto os  $n-1$  novos pontos de colocação são movidos para o interior dos  $n$  elementos. Note que em malhas onde a situação (iii) aconteça, o número de pontos de colocação será superior ao número de nós, i.e., novos graus de liberdade são criados. Apesar disso, a conectividade dos nós pode ser aproveitada para construir a conectividade dos pontos de colocação, sendo apenas necessário acrescentar na numeração os novos pontos de colocação e alterar, para cada nó de extremidade na situação (iii), a conectividade do ponto de colocação respectivo ao nó para os  $n-1$  elementos. A Figura 3.11 ilustra em vermelho os pontos de colocação dos elementos descontínuos generalizados para a malha paramétrica de superfícies regulares e aparadas discretizadas com elementos triangulares e quadrilaterais.



**Figura 3.11** – Pontos de colocação dos elementos descontínuos generalizados: (a) Malha de uma superfície regular (b) Malha quadrilateral de uma superfície aparada (c) Malha triangular de uma superfície aparada.

Perceba que a situação (iii) acontece com muita frequência quando as malhas paramétricas são compostas por elementos triangulares.

Já a Figura 3.12 apresenta os pontos de colocação dos elementos descontínuos generalizados em  $\mathbb{R}^3$  para modelos geométricos 3D de considerável complexidade, constituídos por múltiplas superfícies NURBS. Como é possível perceber no zoom dos detalhes circulado em vermelho, Figuras 3.12a e 3.12b, elimina-se o problema de pontos de colocação coincidentes ou muito próximos que poderiam mal condicionar o sistema de equações.



**Figura 3.12** – Modelos geométricos 3D: Pontos de colocação dos elementos descontínuos generalizados.

Por fim vale ressaltar que as coordenadas em  $\mathbb{R}^3$  dos pontos de colocação alterados na definição dos elementos descontínuos generalizados não são calculadas a partir do mapeamento da superfície NURBS, Eq. 3.12. Tais coordenadas são obtidas a partir do mapeamento dos elementos descrito no capítulo anterior e da localização dos pontos de colocação no espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  dos elementos, ilustrada na Fig. 3.10.

### 3.4.4 Função distância assinalada do contorno

Para definir quais nós de uma malha paramétrica 2D encontram-se sobre o contorno  $\Gamma$  da área visível,  $A^v$ , do espaço paramétrico de uma superfície NURBS aparada, recorre-se à função distância assinalada  $SD$  definida como:

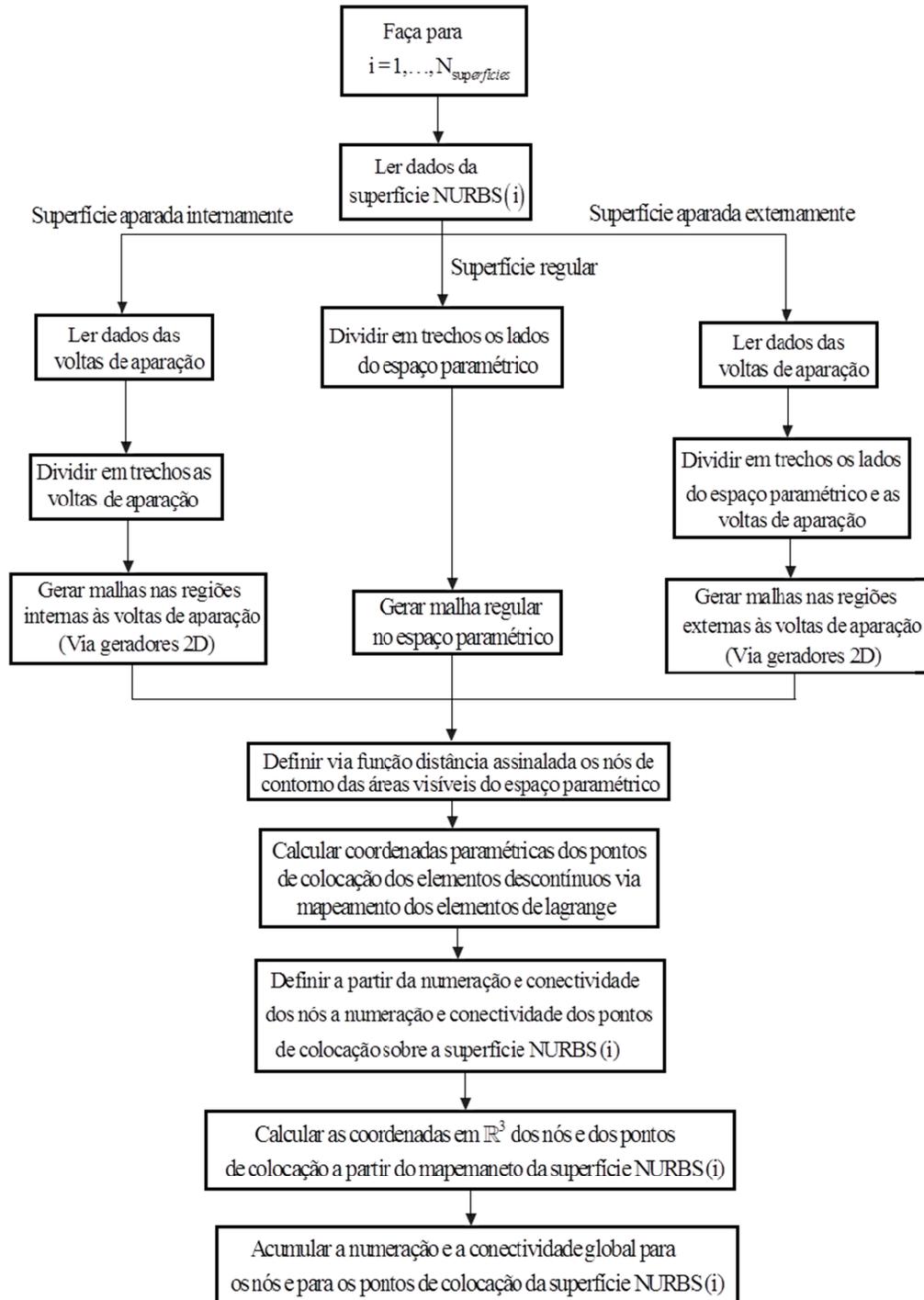
$$SD(\xi, \Gamma) = \begin{cases} \text{distância}(\xi, \Gamma) & \text{se } \xi \in A^v \\ 0 & \text{se } \xi \in \Gamma \\ -\text{distância}(\xi, \Gamma) & \text{se } \xi \notin A^v \end{cases} \quad (3.17)$$

sendo  $\xi = \{\xi, \eta\}^T$  um ponto definido sobre o espaço paramétrico regular  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ . Para um contorno  $\Gamma$  definido por um conjunto de voltas fechadas de curvas NURBS de aproximação  $C^t_i$ , de ordens polinomiais quaisquer, o cálculo da função distância pode se tornar demasiadamente complexo. Para simplificar o cálculo da função distância, procede-se da seguinte maneira: Para cada nó  $\xi_i = \{\xi_i, \eta_i\}^T$  da malha paramétrica calcula-se a distância do mesmo a cada um dos trechos lineares de cada uma das curvas  $C^t_i$ . A função distância pode então ser determinada como sendo o menor valor calculado e o seu sinal é determinado com base no versor normal à  $\Gamma$ , calculado de maneira simplificada com base nos trechos lineares.

Os nós de extremidade são então definidos como aqueles em que  $SD(\xi_i, \Gamma) = 0$ . Recorrendo-se à conectividade dos elementos da malha paramétrica é então possível definir quais elementos devem ser transformados em elementos descontínuos generalizados.

### 3.4.5 Fluxograma do gerador de malhas

No intuito de esclarecer o procedimento numérico proposto para gerar as malhas independentes para as múltiplas superfícies NURBS dos modelos geométricos sólidos, apresenta-se na Figura 3.13 um fluxograma do gerador de malhas. Note que as coordenadas, no espaço físico  $\mathbb{R}^3$ , dos nós e dos pontos de colocação, e suas respectivas conectividades são definidas de maneira independente para cada uma das superfícies NURBS dos modelos geométricos. Além disso, o procedimento preliminar de geração de malhas nos espaços paramétricos das NURBS pode ser ligeiramente diferente a depender da classificação da superfície em regular, aparada internamente ou aparada externamente.



**Figura 3.13** – Fluxograma do gerador de malhas independentes para as múltiplas superfícies NURBS.

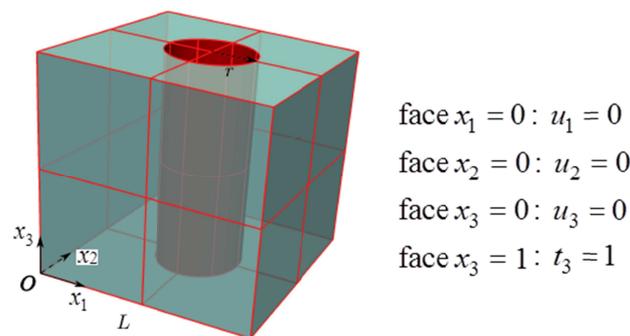
### 3.5 Exemplos numéricos

Três exemplos numéricos foram utilizados para a validação do gerador de malhas de superfícies implementado no programa, sendo possível analisar numericamente problemas mecânicos a partir de modelos geométricos CAD de maneira eficiente. No primeiro exemplo estuda-se a convergência do erro relativo na norma dos deslocamentos sobre o contorno em

um problema para o qual a solução analítica é conhecida. Nesse exemplo comprova-se que mesmo havendo lacunas nas interseções curvas de distintas superfícies NURBS, oriundas das discretizações independentes, a resposta numérica converge à medida que malhas mais refinadas são adotadas. Os dois últimos exemplos envolvem modelos geométricos de peças mecânicas de aplicações industriais, os quais foram obtidos a partir de arquivos IGES disponíveis na biblioteca de modelos CAD de uma comunidade online de projetistas, engenheiros e fabricantes, denominada *GrabCAD*. Detalhes sobre o formato padrão de arquivos IGES e sobre a extração de informações geométricas utilizando a *IGES Toolbox* do MATLAB podem ser encontrados em Gonçalves (2016). Esses dois exemplos demonstram a potencialidade de integração da ferramenta computacional desenvolvida com modelos geométricos de alta complexibilidade.

### 3.5.1 Estudo de uma geometria com lacunas nas interseções de superfícies

O primeiro exemplo trata de um cubo com aresta  $L=1$  (unidades de comprimento) cortado por uma superfície cilíndrica de raio  $r=0,15$  (unidades de comprimento) no seu centro conforme ilustra a Figura 3.14. Os deslocamentos normais às faces  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  e  $x_3=0$  estão restringidos e uma força de superfície uniforme  $t_3=1$  (unidades de tensão) atua sobre a face  $x_3=1$ .



**Figura 3.14** – *Patch test*: Cubo cortado por uma superfície cilíndrica (PENG, 2016).

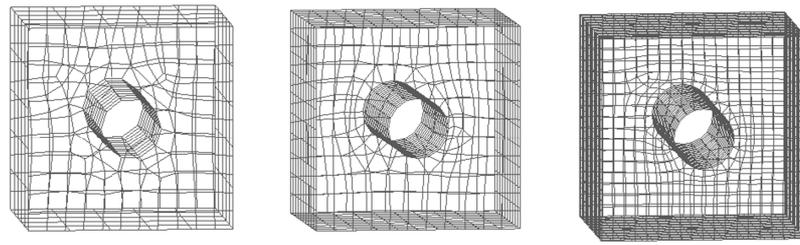
Para essas condições de contorno, a solução analítica para o problema é dada por:

$$\begin{aligned}
 u_1(\mathbf{x}) &= -\frac{\nu x_1}{E} \\
 u_2(\mathbf{x}) &= -\frac{\nu x_2}{E} \\
 u_3(\mathbf{x}) &= \frac{x_3}{E}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

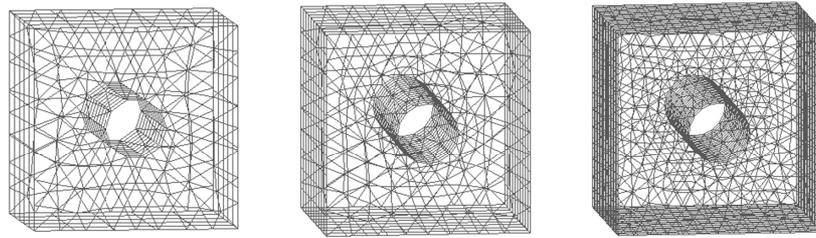
As constantes elásticas adotadas foram  $E = 1000$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0,3$ . Como a solução analítica é conhecida, é possível calcular a o erro relativo na norma L2 dos deslocamentos sobre o contorno do problema como:

$$\|e_u\|_{L2} = \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} (\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}_{exa}) \cdot (\mathbf{u}_{num} - \mathbf{u}_{exa})^T d\Gamma}{\int_{\Gamma} \mathbf{u}_{exa} \cdot \mathbf{u}_{exa}^T d\Gamma}} \quad (3.19)$$

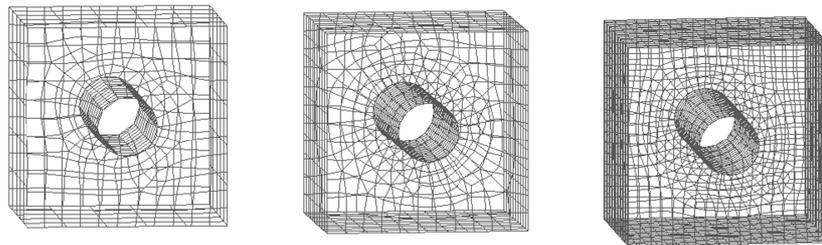
em que  $\Gamma$  é o contorno do problema,  $\mathbf{u}_{num}$  é o vetor de deslocamentos numéricos e  $\mathbf{u}_{exa}$  é o vetor de deslocamentos exato, ou analítico. A partir do erro relativo  $\|e_u\|_{L2}$  é possível estudar a influência das lacunas na intersecção curva da superfície cilíndrica com o cubo, oriundas da discretização independente das superfícies. O problema foi discretizado com elementos quadrilaterais e triangulares de aproximação linear. Quatro análises de convergência foram avaliadas. Nas duas primeiras análises, as discretizações foram adotadas de modo que não fossem geradas lacunas na intersecção da superfície cilíndrica com o cubo. Já nas duas últimas análises as discretizações foram pensadas de modo que houvesse lacunas na intersecção da superfície cilíndrica com o cubo. Nesses dois casos, a convergência foi estudada considerando elementos quadrilaterais e elementos triangulares, totalizando quatro análises de convergência. Três distintas malhas em ordem crescente de refinamento foram adotadas para cada uma das análises de convergência, totalizando doze modelos numéricos. As Figuras 3.15a e 3.15b apresentam, respectivamente, as três malhas de elementos quadrilaterais e as três malhas de elementos triangulares adotadas para a análise de convergência sem lacunas. Já as Figuras 3.16a e 3.16b apresentam, respectivamente, as três malhas de elementos quadrilaterais e as três malhas de elementos triangulares adotadas para a análise de convergência com lacunas. Por fim as Figuras 3.17 e 3.18 apresentam os resultados das análises de convergência do erro  $\|e_u\|_{L2}$  em função do número de pontos de colocação para os casos sem e com lacunas respectivamente.



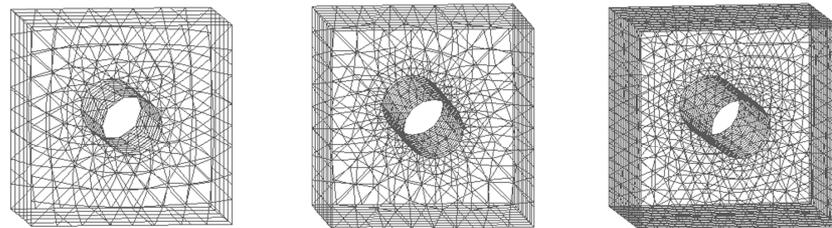
(a) Elementos quadrilaterais



(b) Elementos triangulares

**Figura 3.15** – Malhas adotadas para a análise de convergência: Sem lacunas.

(a) Elementos quadrilaterais



(b) Elementos triangulares

**Figura 3.16** – Malhas adotadas para a análise de convergência: Com lacunas.

Conforme o esperado o erro converge à medida que o número de pontos de colocação, i.e., graus de liberdade, aumenta. Note que as lacunas podem afetar a convergência do problema. Apesar disso, o erro numérico da norma  $\|e_u\|_{L_2}$  pode ser considerado como aceitável para análises de engenharia.

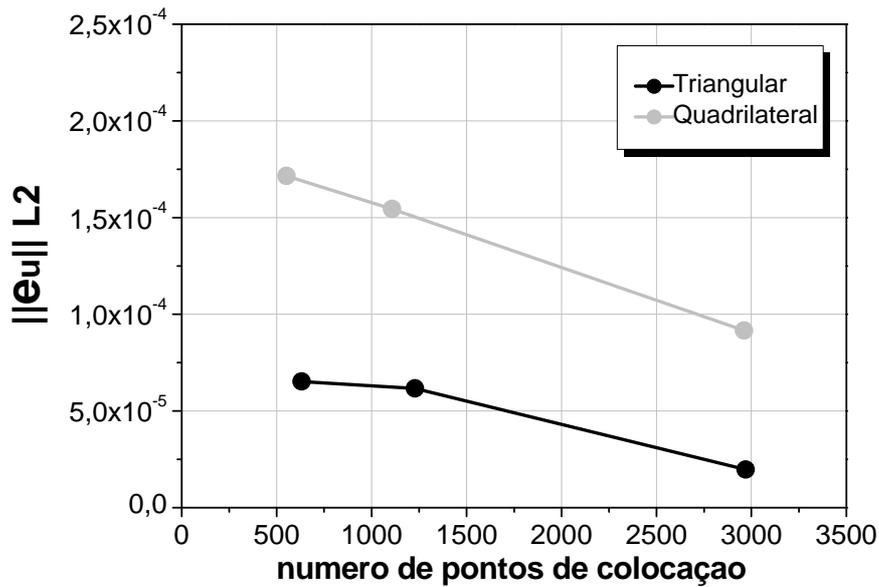


Figura 3.17 – Análises de convergência do erro  $\|e_u\|_{L2}$ : Sem lacunas.

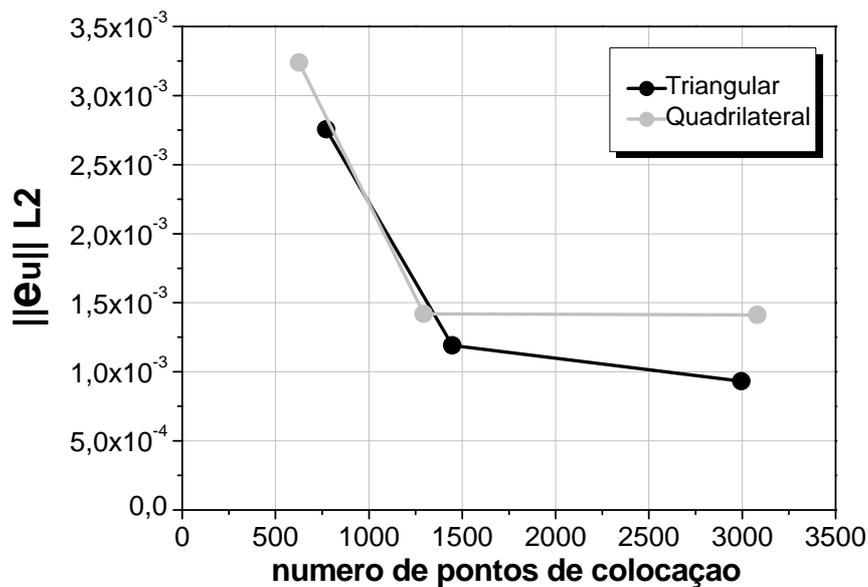
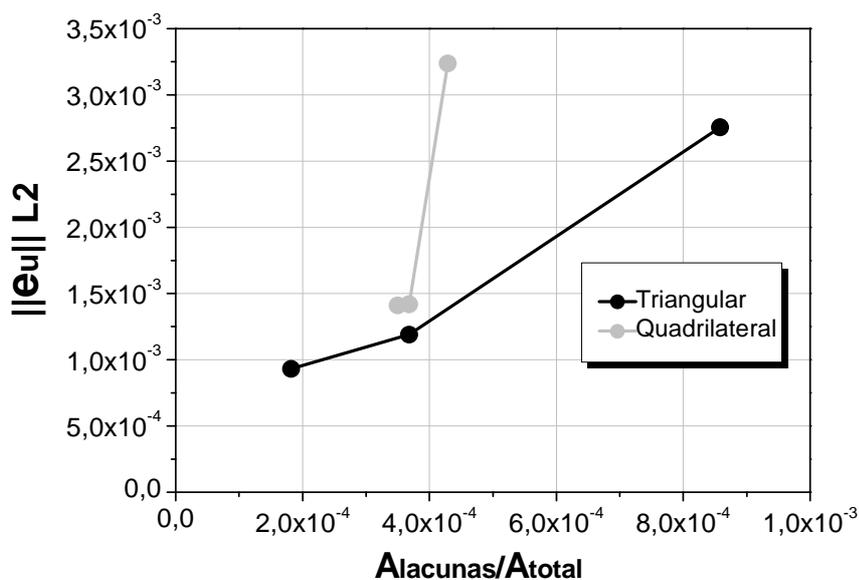


Figura 3.18 – Análises de convergência do erro  $\|e_u\|_{L2}$ : Com lacunas.

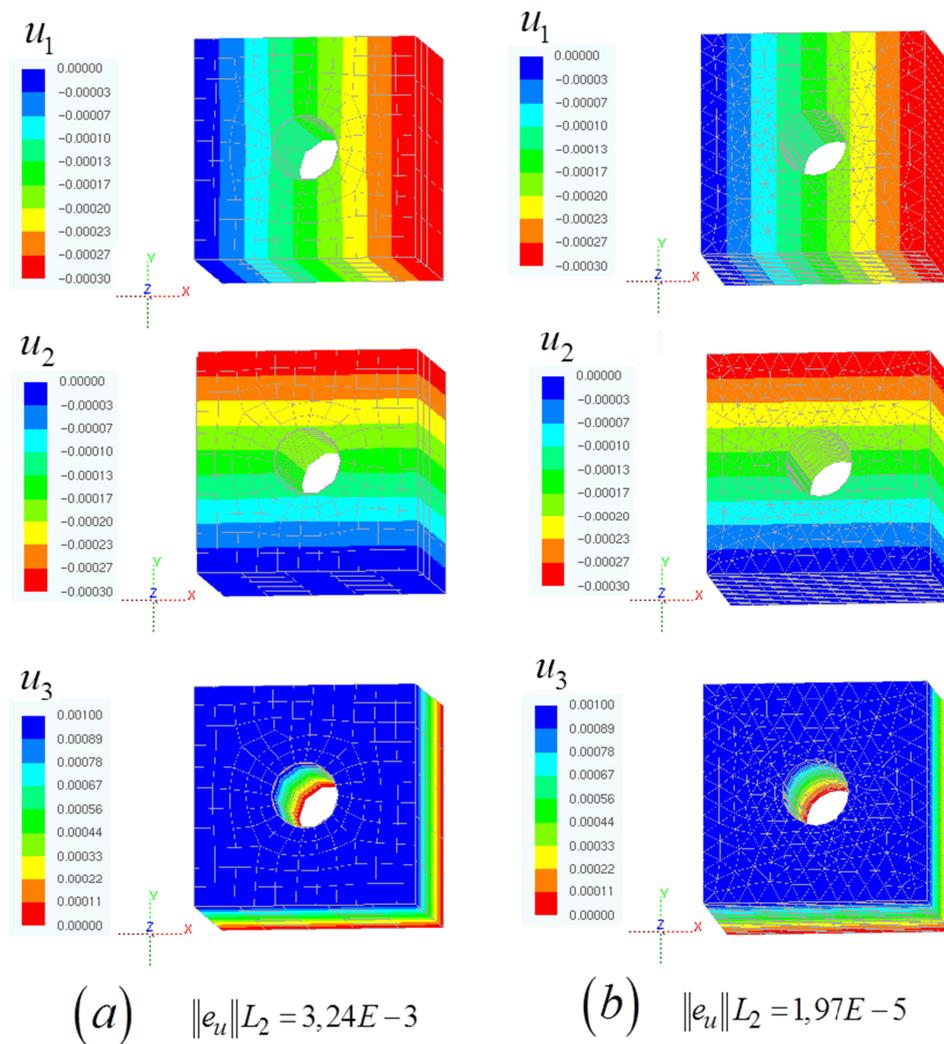
No intuito de quantificar a influência das dimensões das lacunas na resposta do erro relativo na norma L2 dos deslocamentos, apresenta-se na Figura 3.19 um gráfico de  $\|e_u\|_{L2}$  em função da relação  $A_{lacunas}/A_{total}$ , sendo  $A_{lacunas}$  o soma das áreas das lacunas nas interseções do cilindro com o cubo dos modelos numéricos ilustrados na Figura 3.16, e  $A_{total}$  a área total do contorno exato do problema.



**Figura 3.19** – Influência das dimensões das lacunas no erro  $\|e_u\|_{L2}$ .

Note que à medida que a relação  $A_{lacunas}/A_{total}$  diminui, ou seja, à medida que as dimensões das lacunas diminuem em relação às dimensões do problema, o erro  $\|e_u\|_{L2}$  também diminui. Perceba ainda que as dimensões das lacunas podem afetar a convergência numérica do problema, conforme fica evidente para o caso dos elementos quadrilaterais. Nesse caso, a Figura 3.18 apresenta um resultado onde o erro  $\|e_u\|_{L2}$  é praticamente o mesmo para os modelos com 1224 pontos de colocação e com 3080 pontos de colocação. Na Figura 3.19 esse resultado é mais bem compreendido. Perceba que apesar do modelo com 3080 pontos ser bem mais refinado do que o modelo com 1224 pontos, a relação  $A_{lacunas}/A_{total}$  permaneceu praticamente a mesma para esses dois modelos e, portanto, o erro  $\|e_u\|_{L2}$  também permaneceu praticamente o mesmo.

Apesar da convergência do erro  $\|e_u\|_{L2}$  ter sido influenciada pela presença das lacunas, as respostas de deslocamentos do problema permanecem satisfatórias mesmo para o pior caso de convergência. Para ilustrar que os resultados foram satisfatórios mesmo com presença das lacunas, a Figura 3.20 apresenta os resultados dos deslocamentos obtidos para o modelo com o maior erro, i.e.  $\|e_u\|_{L2} = 3,24E-3$ , e para o modelo com o menor erro, i.e.  $\|e_u\|_{L2} = 1,97E-5$ . Note que as respostas de deslocamentos para estes dois casos é muito semelhante.



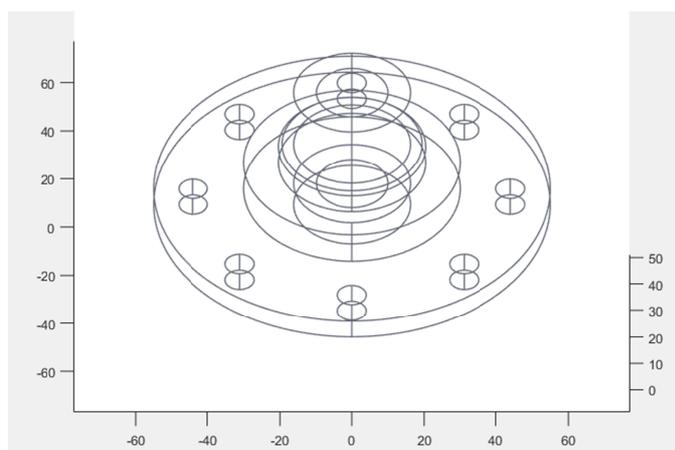
**Figura 3.20** – Resposta linear dos deslocamentos: Malha 3 com lacunas.

Tais resultados permitem concluir que mesmo para o caso dos modelos CAD que apresentam lacunas nas suas intersecções, os mesmos podem ser analisados numericamente a partir das discretizações independentes das superfícies, desde que as lacunas sejam consideravelmente pequenas. Portanto, os dois próximos exemplos abordam componentes mecânicos de complexibilidade industrial cujos modelos geométricos são obtidos a partir de conjuntos de superfícies NURBS aparadas, podendo ou não ser “estanques”.

### 3.5.2 Análise de um componente proveniente de um arquivo IGES

O segundo exemplo corresponde a um componente mecânico de aplicação industrial cuja geometria foi obtida a partir de um arquivo do tipo *Initial Graphics Exchange Specification* (IGES) disponível na biblioteca de modelos CAD da comunidade *GrabCAD*. A

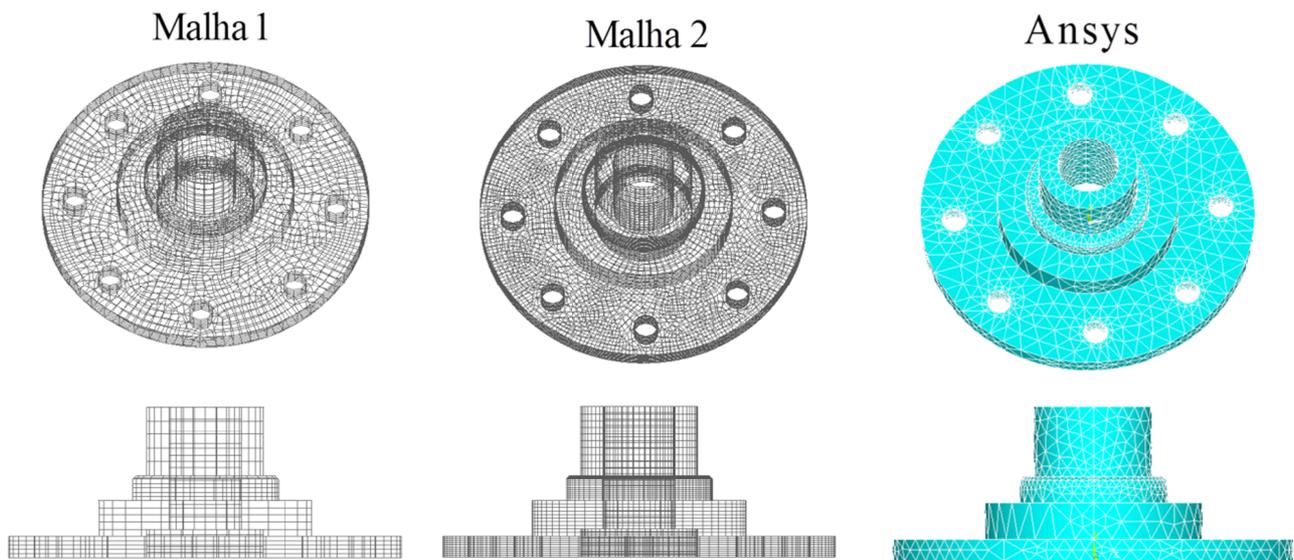
Figura 3.21 apresenta o modelo geométrico do componente desenhado com o auxílio da *IGES Tollbox* do *MATLAB*.



**Figura 3.21** – Modelo geométrico composto por 36 superfícies NURBS.

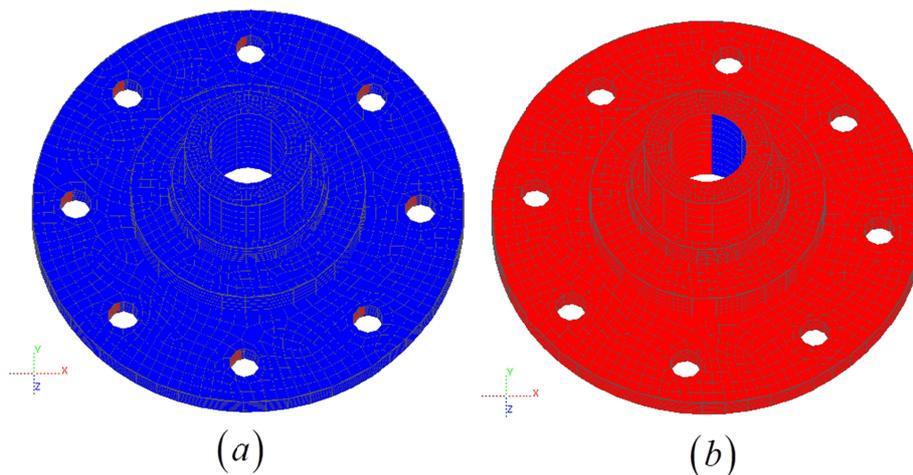
O modelo geométrico é composto por 36 superfícies NURBS das quais 30 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=2$  e 6 são superfícies NURBS aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=1$ . Quatro dessas 6 superfícies são aparadas por duas curvas paramétricas NURBS circulares ( $p=2$ ) e duas delas são aparadas por 10 curvas paramétricas NURBS circulares ( $p=2$ ). Três modelos numéricos foram construídos para a análise estrutural a partir do modelo geométrico. Dois desses modelos foram construídos considerando a discretização independente das 36 superfícies NURBS do modelo geométrico. Nesses casos, o problema elastoestático foi resolvido numericamente a partir do MEC. O último modelo foi construído a partir de uma malha volumétrica para a análise estrutural via elementos finitos com o auxílio do *software Ansys*. Note que por se tratar de um modelo geométrico “estanque”, a malha volumétrica foi construída sem grandes dificuldades. A Figura 3.22 apresenta as duas malhas de superfície, denominadas Malha 1 e Malha 2, e a malha volumétrica, construída a partir dos recursos disponíveis no Ansys.

A Malha 1 é composta por 4586 elementos quadrilaterais de aproximação linear totalizando 5586 pontos de colocação. Já a Malha 2 é composta por 12367 elementos quadrilaterais de aproximação linear totalizando 13874 pontos de colocação. A malha volumétrica do Ansys por sua vez é composta por 15322 elementos tetraédricos de aproximação quadrática, elementos do tipo *Solid186*, totalizando 27526 nós.



**Figura 3.22** – Modelos numéricos para a análise do componente: Malha 1, Malha 2 e Malha do Ansys.

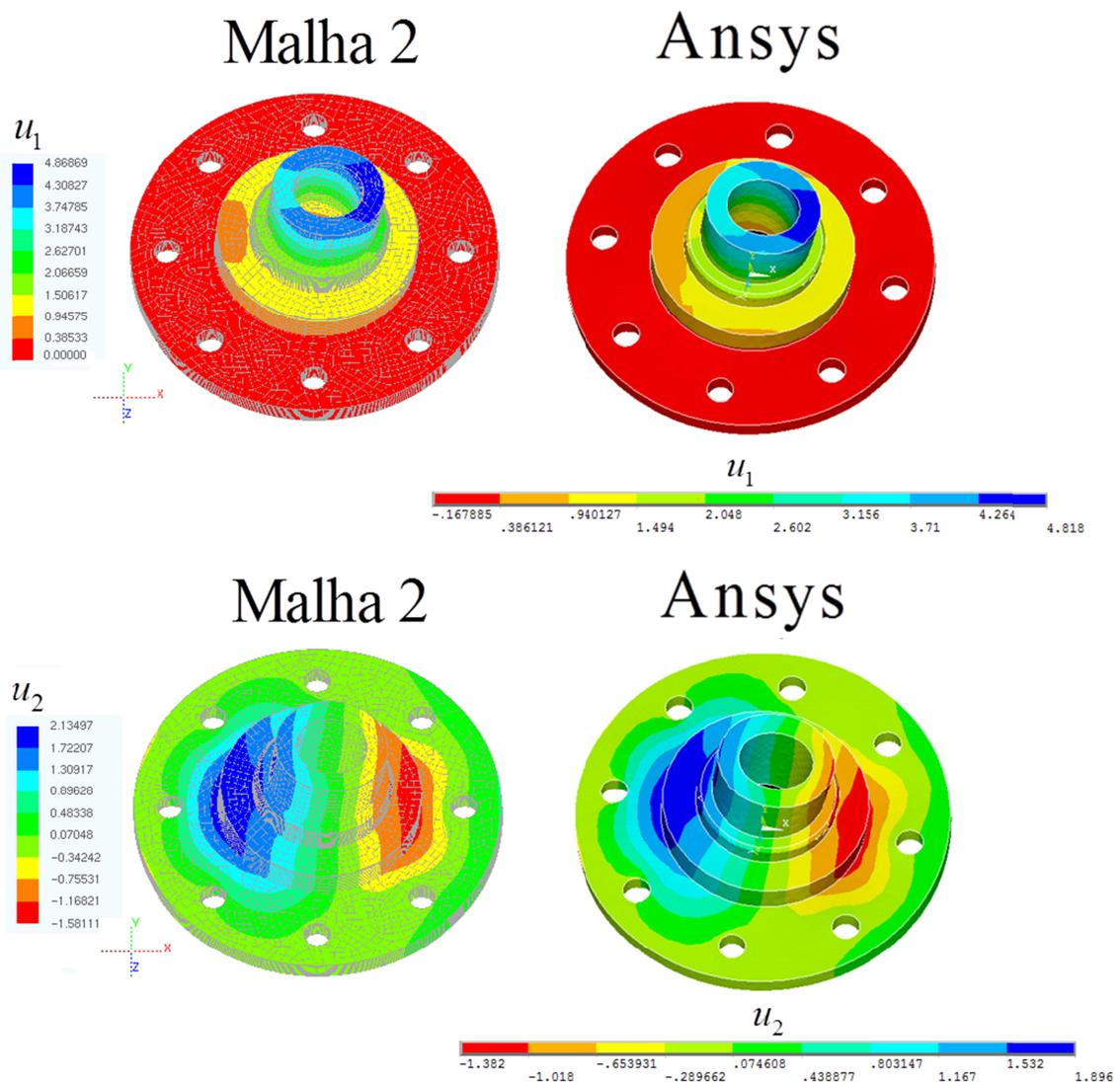
Em todos os modelos estruturais foram assumidas as constantes elásticas  $E = 1000$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0,3$ . Nos modelos, os deslocamentos da metade da esquerda das superfícies internas dos oito furos de parafusos, i.e., pequenos furos de extremidade, foram restringidos para simular a presença de parafusos. Já na metade da direita da superfície interna do furo central foi imposta uma força  $t_1 = 10$  (unidades de tensão). A Figura 3.23 ilustra esquematicamente as condições de contorno do problema.



**Figura 3.23** – Condições de contorno (a) Regiões em vermelho: Deslocamentos nulos (b) Regiões em azul: Força de superfície  $t_1 = t_x = 10$  prescrita.

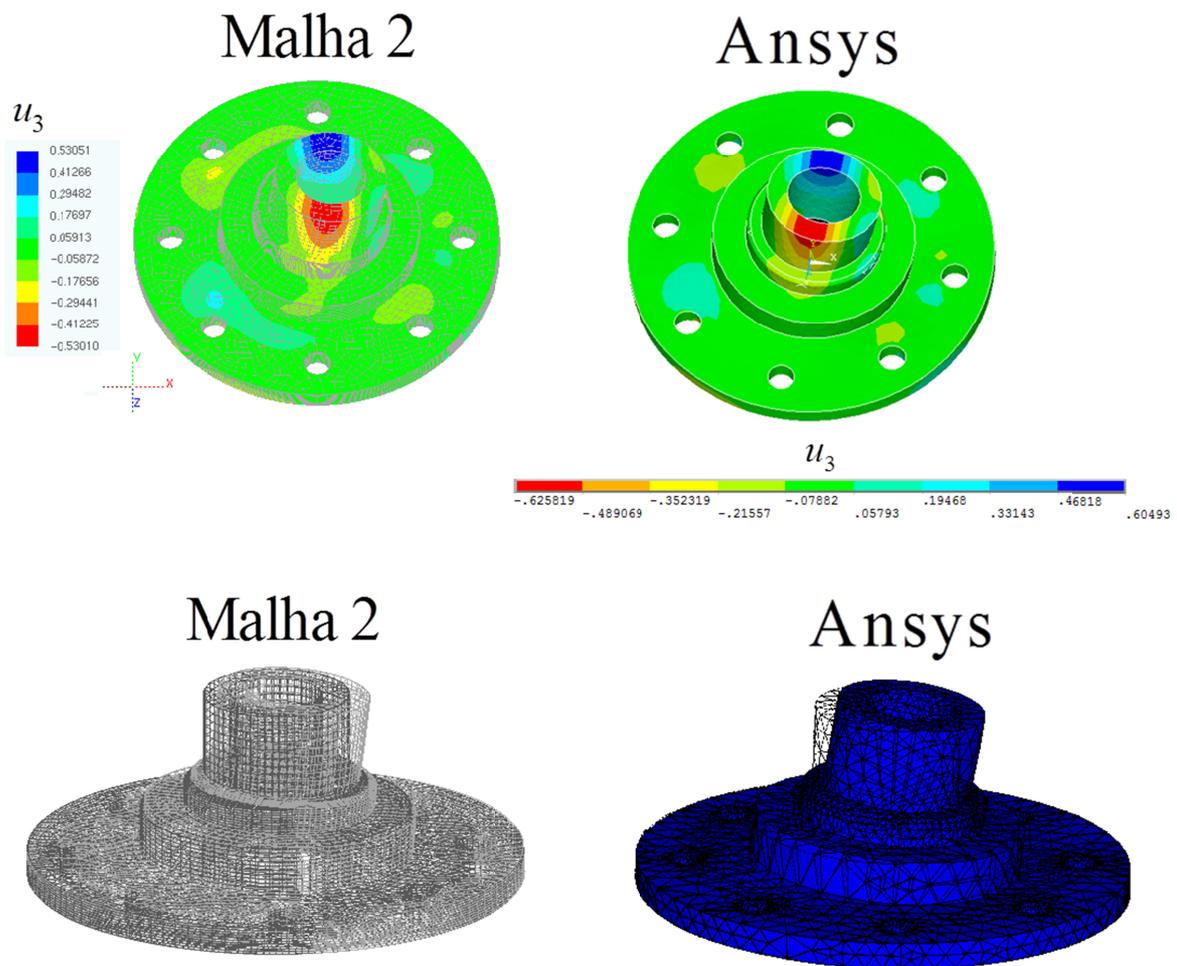
As análises estruturais dos três modelos numéricos resultaram respostas semelhantes para os campos de deslocamento do contorno. Para a Malha 1 os valores mínimos e máximos dos deslocamentos foram:  $u_1^{mín} = 0$   $u_1^{máx} = 4,72828$  ,  $u_2^{mín} = -1,51969$   $u_2^{máx} = 2,05836$  e

$u_3^{min} = -0,48517$   $u_3^{max} = 0,50842$  (unidades de comprimento). Já para a Malha 2 os valores mínimos e máximos foram :  $u_1^{min} = 0$   $u_1^{max} = 4,86869$  ,  $u_2^{min} = -1,58111$   $u_2^{max} = 2,13497$  e  $u_3^{min} = -0,53010$   $u_3^{max} = 0,53051$  (unidades de comprimento). As diferenças percentuais observadas entre os deslocamentos máximos e mínimos dos dois modelos de elementos de contorno foram  $du_1^{max} = 2,88\%$  ,  $du_2^{max} = 3,59\%$  ,  $du_3^{max} = 4,16\%$  e  $du_1^{min} = 0,0\%$  ,  $du_2^{min} = 3,88\%$  ,  $du_3^{max} = 8,48\%$  . Por fim, as Figuras 3.24 e 3.25 apresentam uma comparação qualitativa em escala de cores para os campos de deslocamentos obtidos com o modelo mais refinado de elementos de contorno (Malha 2) e com o modelo de elementos finitos do Ansys.



**Figura 3.24** – Respostas de deslocamentos no contorno: Malha 2 versus Ansys.

A deformada em escala 1:1 para esses dois modelos é também apresentada na Figura 3.25.

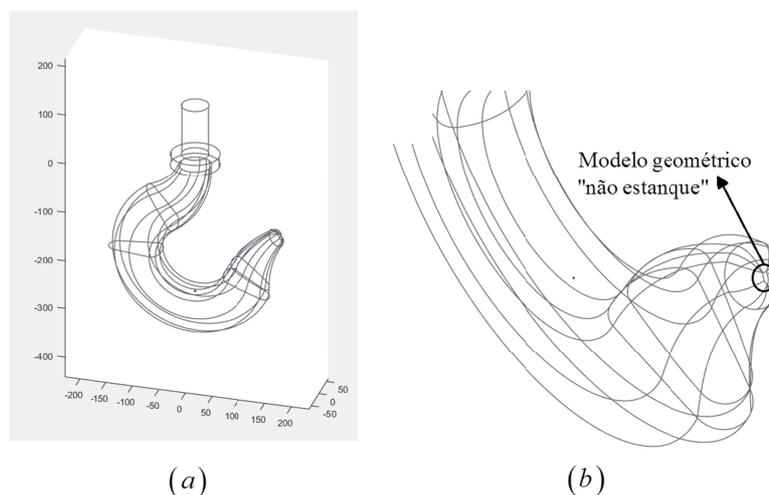


**Figura 3.25** – Respostas de deslocamentos no contorno e deformada da estrutura: Malha 2 versus Ansys.

### 3.5.3 Análise de um gancho proveniente de um arquivo IGES

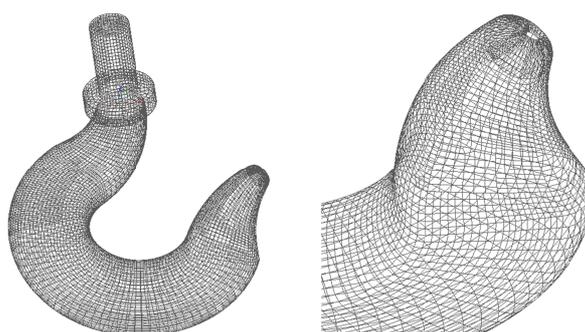
O ultimo exemplo trata-se de um gancho cuja geometria foi novamente obtida a partir de um arquivo IGES disponível na biblioteca de modelos CAD da comunidade *GrabCAD*. O modelo geométrico analisado não é “estanque”. O presente exemplo tem por objetivo avaliar a possibilidade de se analisar geometrias “não-estanches” a partir das discretizações independentes das superfícies NURBS. A Figura 3.26 apresenta o modelo geométrico do gancho destacando a região onde o encontro das superfícies apresenta um “vazamento”, i.e., é “não estanque”. O modelo geométrico do gancho é composto por 69 superfícies NURBS das quais 32 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=5$  e  $q=5$ , 8 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=5$  e  $q=4$ , 4 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=2$ , 20 são superfícies aparadas de ordens polinomiais  $p=5$  e  $q=5$ ,

2 são superfícies aparadas de ordens polinomiais  $p=5$  e  $q=4$  e 3 são superfícies aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=1$ .



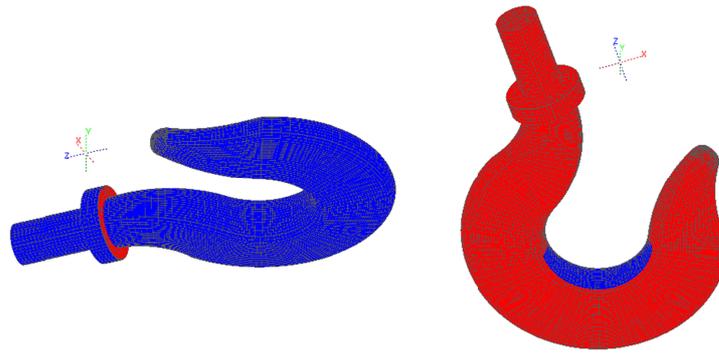
**Figura 3.26** – Modelo geométrico “não estanque” composto por 69 superfícies NURBS.

No total, as 25 superfícies aparadas possuem 93 curvas paramétricas NURBS de aproximação de ordens polinomiais  $p=1$ ,  $p=2$  e  $p=5$ . A Figura 3.27 apresenta a malha adotada para a análise numérica destacando novamente a região “não estanque”. A Malha é composta por 9623 elementos (triangulares e quadrilaterais) de aproximação linear, totalizando 11614 pontos de colocação. As constantes elásticas foram assumidas como  $E=100000$  (unidades de tensão) e  $\nu=0,3$ .



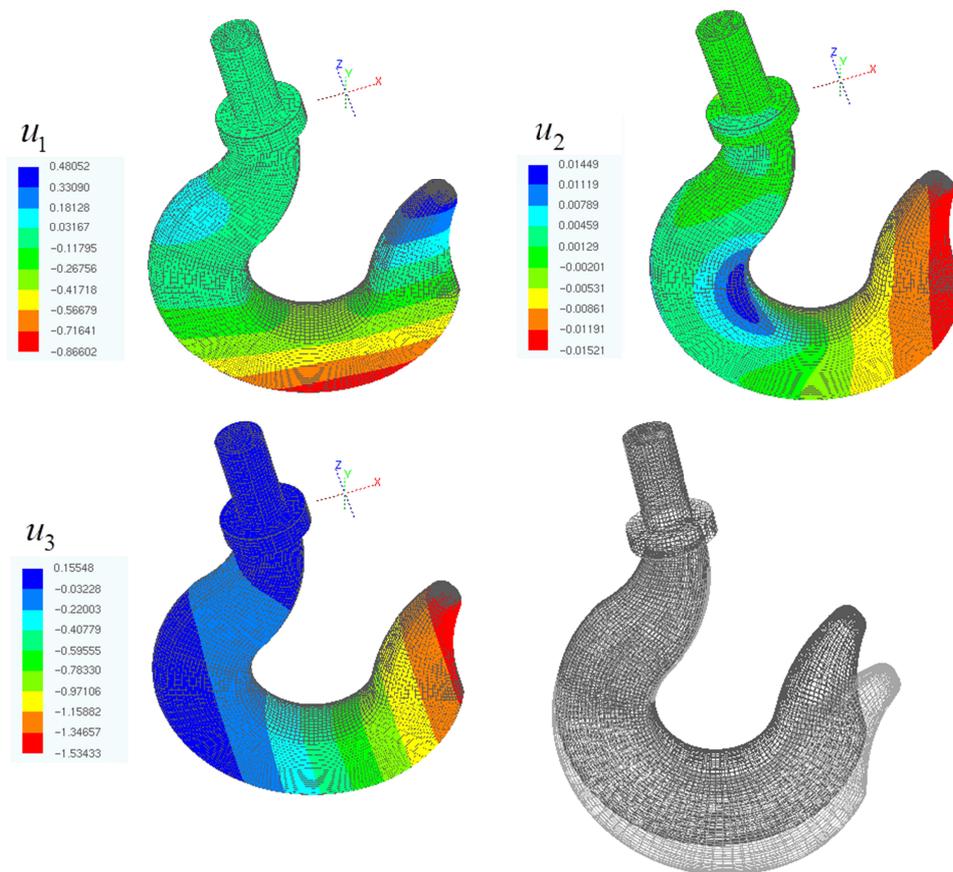
**Figura 3.27** – Modelo geométrico “não estanque” composto por 69 superfícies NURBS.

Os deslocamentos foram restringidos na superfície inferior do apoio cilíndrico próximo a uma extremidade do gancho. Além disso, uma força  $t_3 = -10$  (unidades de tensão) foi imposta em duas superfícies centrais do corpo do gancho visando simular a ancoragem do mesmo com alguma outra peça sólida. A Figura 3.28 ilustra esquematicamente as condições de contorno do problema.



**Figura 3.28** – Condições de contorno (a) Regiões em vermelho: Deslocamentos nulos (b) Regiões em azul: Força de superfície  $t_3 = t_z = -10$  imposta.

Por fim a Figura 3.29 apresenta os campos de deslocamentos e a deformada em escala 1:50 para o modelo estrutural numérico. Apesar de não ser conhecida uma resposta de referência para o exemplo, a consistência da deformada e dos deslocamentos, com relação às condições de contorno imposta, pode ser observada.



**Figura 3.29** – Deslocamentos e malha deformada.

## 4 Análises de propagação de fissuras

---

Neste capítulo apresenta-se o algoritmo incremental para as análises de propagação aleatória das superfícies de fissura. Três técnicas baseadas em deslocamentos foram implementadas para a extração dos FIT. As duas primeiras são as já conhecidas Técnicas de Correlação de Deslocamentos (TCD) e de Extrapolação de Deslocamentos (TED). Já a terceira é a Técnica de Ajuste de Deslocamentos (TAD), recentemente apresentada por Gonzalez et al. (2015) para problemas planos e estendida para problemas tridimensionais no presente trabalho. Determinados os FIT, utilizam-se os mesmos para verificar a estabilidade ao crescimento da fissura. Dois critérios de propagação foram utilizados: O *critério geral da máxima taxa de liberação de energia*  $G(\theta)$  apresentado em Chang et.al. (2006) e o *critério de Schöllmann* ou *critério da máxima tensão principal*  $\sigma_1'(\theta)$  apresentado em Schöllmann et.al. (2002). Tais critérios são mais consistentes do que os clássicos critérios da máxima tensão circunferencial ou da mínima energia de deformação para o caso tridimensional, pois os mesmos consideram a influência de  $K_{III}$  tanto no cálculo de um FIT equivalente,  $K_{eq}$ , quanto no cálculo do ângulo de propagação,  $\theta_p$ . Além disso, no *critério de Schöllmann*, a direção de propagação é definida por dois ângulos de propagação: o ângulo de deflexão  $\theta_p$  e o ângulo de torção  $\psi_p$ . Sendo assim, este critério é capaz de capturar fenômenos experimentais observados em situações de modo misto I/III, tais como a “segmentação da frente da fissura” e a “torção da fissura”, os quais não podem ser reproduzidos com critérios baseados apenas em  $\theta_p$  (PEREIRA, 2010). Ambos os critérios podem ser facilmente particularizados para os modos puros de fratura e também recaem nas mesmas expressões dos modos mistos I/II de fratura dos problemas planos quando  $K_{III} = 0$ .

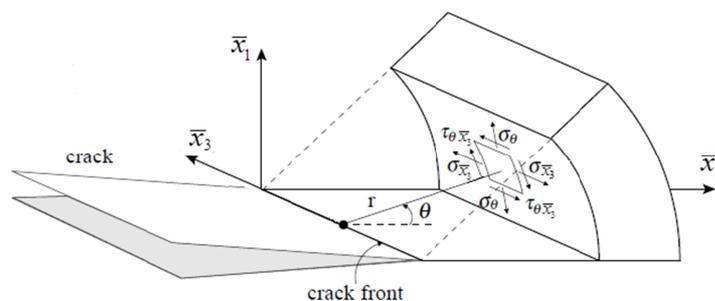
As expressões da taxa de liberação de energia  $G(\theta)$  e da tensão principal  $\sigma_1'(\theta)$  em função da direção angular  $\theta$  dos sistemas de coordenadas cilíndricas locais da frente da fissura não possibilitam uma resposta analítica direta para o ângulo de propagação  $\theta_p$  que maximiza  $G(\theta)$  ou  $\sigma_1'(\theta)$ . Para a determinação do  $\theta_p$  que maximiza  $G(\theta)$  ou  $\sigma_1'(\theta)$ , formula-se um problema de otimização univariável, o qual é resolvido no presente trabalho por meio do método *Golden Section*. Nas análises de fratura frágil o máximo incremento de propagação é definido como um dado de entrada e os incrementos em cada ponto  $\mathbf{x}$  da linha

de frente da fissura são definidos de forma proporcional ao incremento máximo de acordo com a relação  $K_{eq}(\mathbf{x})/K_{eq}^{máx}$ . Para analisar fissuras de borda, recorrentes em muitos problemas de fratura e fadiga, desenvolveu-se um algoritmo de remalhamento local baseado em tolerâncias dimensionais.

Devido à utilização de discretizações independentes das superfícies NURBS (aparadas ou não) para a criação dos modelos de análise a partir de modelos de CAD, as discretizações das fissuras de borda não coincidem com as discretizações dos contornos interceptados pela fissura. Para contornar esse problema o algoritmo desenvolvido se baseia no cálculo da mínima distância entre retas no espaço para determinar se um elemento do contorno é interceptado pela fissura de borda ou não. O algoritmo também se baseia na mínima distância entre ponto e triângulo no espaço para definir a projeção da ponta da fissura de borda sobre o contorno. Os elementos descontínuos generalizados são adotados para o remalhamento devido à versatilidade na definição arbitrária dos pontos de colocação. O algoritmo de remalhamento adotado para a inserção das fissuras de borda é estendido para as análises incrementais de propagação. Três problemas de fratura frágil foram analisados para verificar a eficácia da ferramenta computacional desenvolvida.

#### 4.1 Campos assintóticos nas proximidades da frente de uma fissura

Considerando o caso geral de modo misto I, II e III de fratura, os campos de deslocamentos e de tensões nas proximidades da frente de uma fissura em um material elástico-linear isotrópico e homogêneo, podem ser escritos em um sistema de coordenadas polares  $r, \theta$  com origem em um ponto da linha de frente da fissura (Figura. 4.1), conforme apresentado nas Equações 4.1 e 4.2. (ZEHNDER, 2012)



**Figura 4.1** Sistema de coordenadas polares  $r, \theta$  definido para um ponto da linha de frente da fissura (Schöllmann et al. 2002).

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \begin{aligned} &K_I \left( \left( \frac{5}{2} - 4\nu \right) \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ &+ K_{II} \left( \left( 4\nu - \frac{5}{2} \right) \text{sen} \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right] + O(r) \\
u_\theta &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \begin{aligned} &K_I \left( \left( 4\nu - \frac{7}{2} \right) \text{sen} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ &+ K_{II} \left( \left( 4\nu - \frac{7}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right] + O(r) \\
u_{\bar{x}_3} &= \frac{(1+\nu) K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 4 \text{sen} \frac{\theta}{2} + O(r)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -5 \text{sen} \frac{\theta}{2} + 3 \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \right] + O(1) \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -3 \text{sen} \frac{\theta}{2} - 3 \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \right] + O(1) \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( \text{sen} \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] + O(1) \\
\tau_{r\bar{x}_3} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen} \frac{\theta}{2} + O(1) \\
\tau_{\theta\bar{x}_3} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(1) \\
\sigma_{\bar{x}_3} &= \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \text{sen} \frac{\theta}{2} \right] + O(1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

em que  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são os FIT de cada um dos modos básicos de fratura.

## 4.2 Técnicas de extração dos FIT

As técnicas de extração dos FIT implementadas no presente trabalho são baseadas na solução assintótica dos campos de deslocamentos elásticos próximos à extremidade de uma fissura, Eq. 4.1. Estas soluções são válidas para quaisquer condições de contorno nas superfícies da fissura, desde que as singularidades das tensões na ponta da fissura permaneçam de ordem  $O(r^{-1/2})$ . Em particular, esses métodos permanecem válidos para fissuras pressurizadas, como por exemplo, em problemas de fratura hidráulica, ao passo que métodos baseados em energia, como a Integral M e o método da função de corte, devem incluir termos adicionais devido à pressão nas superfícies de fissura. Outra vantagem dos métodos baseados em deslocamentos é a não necessidade de um caminho ou domínio de

integração, o que permite que os FIT sejam obtidos mesmo para casos onde a fissura já está muito próxima do contorno do problema ou de outras superfícies de fissuras. A principal desvantagem dos métodos baseados em deslocamentos é a precisão. Como os FIT são obtidos diretamente dos deslocamentos numéricos obtidos próximos à frente da fissura, os mesmos estão sujeitos a erros da mesma magnitude dos erros numéricos desses deslocamentos. Por outro lado, os métodos baseados em deslocamentos são muito menos custosos em termos de tempo de processamento em relação aos métodos baseados em energia. Gupta et al. (2017) apresentaram estratégias para melhorar a precisão da TED, obtendo resultados tão precisos quanto os obtidos com métodos superconvergentes como é o caso do método da função de corte. Antes de introduzir os métodos baseados em deslocamentos é interessante reescrever as Eq. 4.1 no sistema de coordenadas cartesianas locais,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , resultando:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_{\bar{x}_1}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_2}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_3}(r, \theta) \end{Bmatrix} &= \frac{(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(k - \cos(\theta)) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(k - \cos(\theta)) \\ 0 \end{Bmatrix} + \\ &\frac{(1+\nu)}{E} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(k - 2 + \cos(\theta)) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(k + 2 + \cos(\theta)) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{(1+\nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{Bmatrix} + O(r) \quad (4.3) \end{aligned}$$

sendo  $k = (3-\nu)/(1+\nu)$  para o Estado Plano de Tensão (EPT) e  $k = 3-4\nu$  para o Estado Plano de Deformação (EPD).

Conforme amplamente discutido em livros da mecânica da fratura, para problemas tridimensionais, adota-se a solução em EPT para regiões próximas aos contornos livres de forças de superfície. Já para os pontos no interior do sólido, adota-se a solução em EPD, pois nesse caso o estado de tensão encontra-se confinado pelo material ao redor do respectivo ponto material. A partir da Eq. 4.3, as técnicas de extração dos FIT são apresentadas a seguir.

#### 4.2.1 Técnica de correlação de deslocamentos.

A Técnica de Correlação de Deslocamentos (TCD) é um dos métodos mais antigos e talvez o método mais simples para a extração dos FIT (Banks-Sills & Sherman, 1986). Tal técnica relaciona diretamente as descontinuidades de deslocamentos em pontos sobre as superfícies da fissura com os FIT. Sendo assim, avaliando as Eq. 4.3 para um par de pontos simetricamente posicionados sobre as superfícies da fissura, i.e,  $\theta = \pm\pi$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}_1}(r, \pi) &= \frac{(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) + O(r) \\ u_{\bar{x}_2}(r, \pi) &= \frac{(1+\nu)}{E} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) + O(r) \\ u_{\bar{x}_3}(r, \pi) &= \frac{(1+\nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 4 + O(r) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}_1}(r, -\pi) &= -\frac{(1+\nu)}{E} K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) + O(r) \\ u_{\bar{x}_2}(r, -\pi) &= -\frac{(1+\nu)}{E} K_{II} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (k+1) + O(r) \\ u_{\bar{x}_3}(r, -\pi) &= -\frac{(1+\nu)}{E} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 4 + O(r) \end{aligned} \quad (4.5)$$

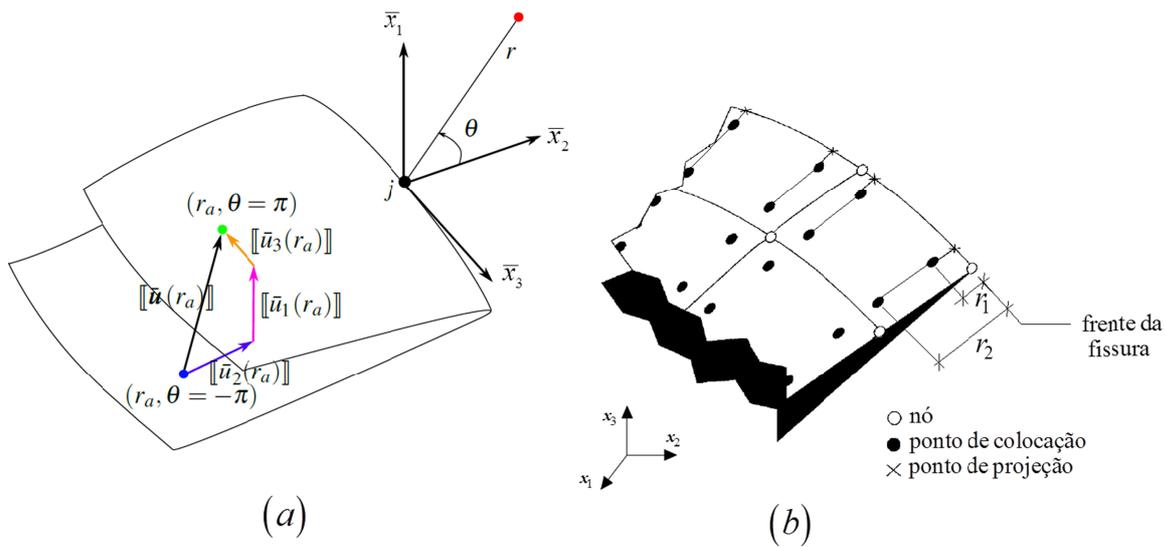
A partir das Eq. 4.4 e Eq. 4.5 é possível definir as descontinuidades dos campos de deslocamento a uma distância  $r$  da frente da fissura como:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_1(r)\| &= u_{\bar{x}_1}(r, \pi) - u_{\bar{x}_1}(r, -\pi) & \|\bar{u}_2(r)\| &= u_{\bar{x}_2}(r, \pi) - u_{\bar{x}_2}(r, -\pi) \\ \|\bar{u}_3(r)\| &= u_{\bar{x}_3}(r, \pi) - u_{\bar{x}_3}(r, -\pi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Uma interpretação geométrica do vetor de descontinuidade deslocamentos  $\|\bar{\mathbf{u}}(r)\|$  é ilustrada na Figura 4.2-a. A partir das Eq. 4.5 e 4.6 é possível obter aproximações  $\tilde{K}_I$ ,  $\tilde{K}_{II}$  e  $\tilde{K}_{III}$  dos FIT a partir das descontinuidades de deslocamentos  $\|\bar{u}_1(r)\|$ ,  $\|\bar{u}_2(r)\|$  e  $\|\bar{u}_3(r)\|$ .

$$\begin{aligned} \tilde{K}_I &= \frac{E \|\bar{u}_1(r)\|}{2(1+\nu)(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} & \tilde{K}_{II} &= \frac{E \|\bar{u}_2(r)\|}{2(1+\nu)(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\ \tilde{K}_{III} &= \frac{E \|\bar{u}_3(r)\|}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note que o erro teórico da Equação 4.7 é da ordem  $O(r)$ . No caso do problema numérico discretizado em elementos descontínuos lineares (Figura 4.2-b), as distâncias dos pontos de colocação à frente da fissura, i.e.,  $r_1$  e  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), podem ser utilizadas para a extração dos FIT uma vez que os valores de deslocamentos nos pontos de colocação são obtidos diretamente da solução do PVC pelo MEC dual (sendo apenas necessário rotacionar os deslocamentos para os sistemas de coordenadas locais  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ).



**Figura 4.2** (a) descontinuidades de deslocamento (b) distâncias  $r_1$  e  $r_2$  do problema numérico.

Em teoria, quanto menor o valor da distância  $r$  menor é o erro na aproximação dos FIT e, portanto, no problema numérico, a adoção da distância  $r_1$  em detrimento à distância  $r_2$  deveria resultar sempre em uma melhor aproximação para os FIT. No entanto, sabe-se que os erros numéricos dos deslocamentos aumentam à medida que a distância  $r$  diminui, visto que as funções interpoladoras não são capazes de reproduzir o comportamento assintótico  $O(r^{1/2})$  dos deslocamentos. Sendo assim, a depender da malha adotada para a discretização da fissura, os melhores resultados podem ser obtidos para  $r_1$  ou para  $r_2$ .

#### 4.2.2 Técnica de extrapolação de deslocamentos.

Conforme mencionado anteriormente, o erro teórico dos FIT obtidos pela técnica de correlação de deslocamentos é de ordem  $O(r)$ . Esse erro pode ser reduzido utilizando a técnica de extrapolação de deslocamentos. Nesse caso as aproximações  $\tilde{K}_I$ ,  $\tilde{K}_{II}$  e  $\tilde{K}_{III}$  são adotadas como sendo linearmente dependentes da distância  $r$  nas proximidades de  $r = 0$ .

$$\begin{aligned}\tilde{K}_I(r) &= K_I + C_I r & \tilde{K}_{II}(r) &= K_{II} + C_{II} r \\ \tilde{K}_{III}(r) &= K_{III} + C_{III} r\end{aligned}\quad (4.8)$$

Calculando  $\tilde{K}_I(r)$ ,  $\tilde{K}_{II}(r)$  e  $\tilde{K}_{III}(r)$  para duas distâncias  $r_1$  e  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) é possível determinar melhores aproximações para os FIT resolvendo o sistema de equações resultantes e determinando  $\tilde{K}_I(r=0) = K_I$ ,  $\tilde{K}_{II}(r=0) = K_{II}$  e  $\tilde{K}_{III}(r=0) = K_{III}$ . Assim:

$$\begin{aligned}K_I &= \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left( \tilde{K}_I(r_1) + \frac{r_1}{r_2} \tilde{K}_I(r_2) \right) & K_{II} &= \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left( \tilde{K}_{II}(r_1) + \frac{r_1}{r_2} \tilde{K}_{II}(r_2) \right) \\ K_{III} &= \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left( \tilde{K}_{III}(r_1) + \frac{r_1}{r_2} \tilde{K}_{III}(r_2) \right)\end{aligned}\quad (4.9)$$

As aproximações 4.9 dos FIT tem um erro teórico da ordem de  $O(r^2)$  ao invés de  $O(r)$  (GUPTA et al., 2017). No entanto, o erro numérico no vetor descontinuidade de deslocamentos  $\|\bar{\mathbf{u}}(r)\|$  ainda depende da discretização e do método numérico adotado para resolver o PVC.

### 4.2.3 Técnica de ajuste de deslocamentos.

A última técnica adotada para a extração dos FIT é a técnica de ajuste de deslocamentos que foi recentemente apresentada por Gonzalez et al. (2015) para problemas planos e estendida para problemas tridimensionais no presente trabalho. Nessa técnica considera-se a influência de mais um termo na expansão assintótica dos deslocamentos, Eq. 4.3, a qual pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} u_{\bar{x}_1}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_2}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_3}(r, \theta) \end{Bmatrix} &= \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} K_I \sqrt{r} \begin{Bmatrix} f_{1I}(\theta) \\ f_{2I}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} K_{II} \sqrt{r} \begin{Bmatrix} f_{1II}(\theta) \\ f_{2II}(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} K_{III} \sqrt{r} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{3III}(\theta) \end{Bmatrix} + r \begin{Bmatrix} g_1(\theta) \\ g_2(\theta) \\ g_3(\theta) \end{Bmatrix} + O(r^{3/2})\end{aligned}\quad (4.10)$$

As funções  $f_{iI}$ ,  $f_{iII}$ ,  $f_{iIII}$  são tratadas analiticamente uma vez que suas expressões são conhecidas. Já as funções  $g_i$  que multiplicam os termos de ordem  $O(r)$  são tratadas, para

um dado ponto fixo  $(r, \theta)$ , como constantes incógnitas  $c_i$ . Dessa maneira, pode-se reescrever a Eq. 4.10 para um ponto interno ao sólido próximo à frente da fissura como:

$$\begin{Bmatrix} u_{\bar{x}_1}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_2}(r, \theta) \\ u_{\bar{x}_3}(r, \theta) \end{Bmatrix} \approx \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \sqrt{r}f_{1I}(\theta) & \sqrt{r}f_{1II}(\theta) & 0 & r & 0 & 0 \\ \sqrt{r}f_{2I}(\theta) & \sqrt{r}f_{2II}(\theta) & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{r}f_{3III}(\theta) & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Na Eq.4.11 a expansão dos deslocamentos foi truncada no termo  $O(r)$ . Fixando uma quantidade finita de pontos  $(r_i, \theta_i)$ ,  $i=1, \dots, N$  no plano  $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ , definido para um ponto na frente da fissura (Ver. Fig 4.1), é possível escrever um sistema de equações semelhante à Eq. 4.11.

$$\begin{Bmatrix} u_{\bar{x}_1}(r_1, \theta_1) \\ u_{\bar{x}_2}(r_1, \theta_1) \\ u_{\bar{x}_3}(r_1, \theta_1) \\ \vdots \\ u_{\bar{x}_1}(r_N, \theta_N) \\ u_{\bar{x}_2}(r_N, \theta_N) \\ u_{\bar{x}_3}(r_N, \theta_N) \end{Bmatrix} \approx \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \sqrt{r_1}f_{1I}(\theta_1) & \sqrt{r_1}f_{1II}(\theta_1) & 0 & r_1 & 0 & 0 \\ \sqrt{r_1}f_{2I}(\theta_1) & \sqrt{r_1}f_{2II}(\theta_1) & 0 & 0 & r_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{r_1}f_{3III}(\theta_1) & 0 & 0 & r_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{r_N}f_{1I}(\theta_N) & \sqrt{r_N}f_{1II}(\theta_N) & 0 & r_N & 0 & 0 \\ \sqrt{r_N}f_{2I}(\theta_N) & \sqrt{r_N}f_{2II}(\theta_N) & 0 & 0 & r_N & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{r_N}f_{3III}(\theta_N) & 0 & 0 & r_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

O qual pode ser apresentado matricialmente como:

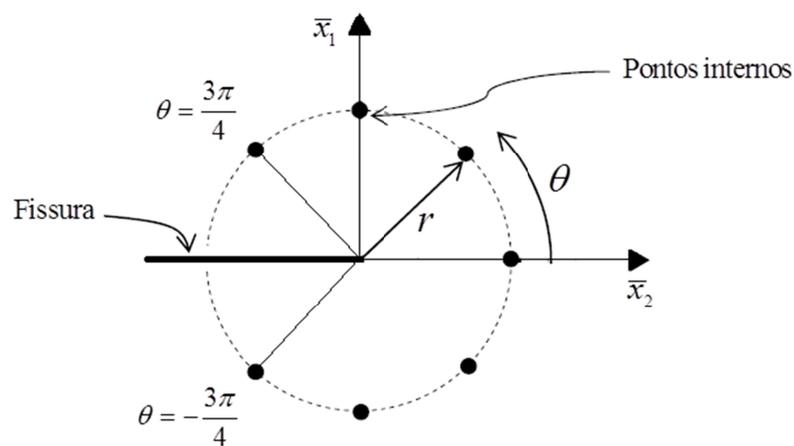
$$\bar{\mathbf{u}}_{(3N \times 1)} \approx \frac{(1+\nu)}{E\sqrt{2\pi}} \mathbf{M}_{(3N \times 6)} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Note que as incógnitas do sistema são os valores  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  da expansão assintótica dos deslocamentos no plano  $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ . Sendo assim,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são os FIT do ponto sobre a frente da fissura, i.e., origem do plano  $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ . Note que, apesar de

retangular, o sistema 4.12 é linear e, portanto, pode ser resolvido a partir da abordagem de matriz pseudoinversa:

$$\begin{cases} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{cases} \approx \frac{E\sqrt{2\pi}}{(1+\nu)} \left[ (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \right] \bar{\mathbf{u}} \quad (4.13)$$

A partir da Eq. 4.13 uma aproximação para  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  pode ser obtida para uma distribuição completamente arbitrária de pontos no plano  $\bar{x}_1 \times \bar{x}_2$ . Os pontos escolhidos para a extração dos FIT podem ser tanto internos ao sólido quanto pertencentes às faces da fissura. Segundo o estudo de Gonzalez et al. (2015), para formulações em elementos de contorno, a utilização das soluções de deslocamentos em pontos internos resulta em melhores resultados para os FIT em comparação à utilização dos deslocamentos nos pontos de colocação sobre as faces da fissura. Isso porque os campos internos obtidos com formulações de elementos de contorno satisfazem as equações governantes da elastoestática e, portanto, são mais precisos do que as aproximações com funções de forma no contorno. Sendo assim, no presente trabalho optou-se por utilizar  $N$  pontos internos, igualmente distribuídos em forma circular a uma distância arbitrária  $r$  em um intervalo  $\theta = [-3\pi/4, 3\pi/4]$  conforme ilustra a Figura 4.3.



**Figura 4.3** Distribuição de pontos internos para a extração dos FIT (GONZALEZ et al., 2015 (Adaptado)).

### 4.3 Critérios de propagação de superfícies de fissuras

Os campos de deslocamentos e tensões nas proximidades das pontas de fissuras geralmente são a base para o estabelecimento de critérios clássicos de fratura. Truncando as expansões assintóticas 4.1 e 4.2 nos termos de ordem  $O(r^{1/2})$  e  $O(r^{-1/2})$ , respectivamente, é possível expressar analiticamente os deslocamentos e as tensões em função dos FIT. Sendo assim, critérios de fratura frágil podem ser formulados apenas em função dos FIT e, portanto, podem ser expressos na seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(K_I, K_{II}, K_{III}) &\leq K_{Ic} \\ \theta_p &= \Theta(K_I, K_{II}, K_{III}) \quad \text{para } f(K_I, K_{II}, K_{III}) = K_{Ic} \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que  $K_{Ic}$  é uma constante material denominada tenacidade que representa a resistência à fratura frágil,  $\theta_p$  é a direção de propagação definida a partir do sistema de coordenadas polares do ponto  $O$  (Ver Fig. 4.1) e  $f, \Theta$  são funções dos FIT a serem determinadas por um critério de propagação. Todos os critérios de propagação frágil sejam os de modos puros I, II e III ou os de modo misto, são apenas casos especiais da Eq. 4.14 para diferentes tipos de solicitações.

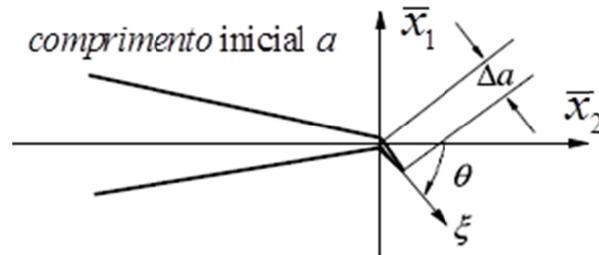
#### 4.3.1 Critério geral da máxima taxa de liberação de energia.

O critério da máxima taxa de liberação de energia define que a propagação da fissura ocorrerá na direção em que a taxa de liberação de energia,  $G$ , for máxima e quando  $G$  atingir um valor crítico (Hussain et al. 1974, Nuismer 1975). Assumindo que a fissura propaga uma unidade de área ao longo de sua extensão, a taxa de liberação de energia pode ser calculada como:

$$G = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2, \quad E' = \begin{cases} E & \text{EPT} \\ E/(1-\nu^2) & \text{EPD} \end{cases} \quad (4.15)$$

sendo EPT e EPD os estados planos de tensão e de deformação, respectivamente. No entanto, a expressão 4.15 não pode ser utilizada de maneira direta uma vez que na prática a direção de propagação nem sempre coincide com a direção da extensão da fissura, i.e.,  $\theta_p$  não é necessariamente zero. No caso geral, a taxa de liberação de energia é definida para uma dada

direção qualquer,  $\theta$ , como a energia liberada quando um ponto da linha de frente da fissura se propaga na direção  $\theta$  um incremento  $\Delta a \rightarrow 0$ , conforme ilustra a Figura 4.4.



**Figura 4.4** Incremento de propagação  $\xi = [0, \Delta a]$  em uma direção  $\theta$  qualquer.

Assim, a taxa de liberação de energia pode ser definida para uma direção qualquer  $\theta$  como:

$$G_{\theta} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \left[ \sigma_{\theta\theta}(a + \xi) \|u_{\theta}\| (a + \Delta a - \xi) + \sigma_{r\theta}(a + \xi) \|u_r\| (a + \Delta a - \xi) + \sigma_{\theta\bar{x}_3}(a + \xi) \|u_{\bar{x}_3}\| (a + \Delta a - \xi) \right] d\xi \quad (4.16)$$

sendo  $\sigma_{ij}(a + \xi)$ , com  $i, j = r, \theta, \bar{x}_3$ , os campos de tensões ao longo do incremento  $\xi = [0, \Delta a]$  antes da propagação incremental e  $\|u_i\|$  as descontinuidades de deslocamentos observadas após a propagação incremental. Note que, conforme discutido em Gdoutos (1990), a obtenção de uma expressão matemática exata para  $G_{\theta}$  é extremamente complexa. Segundo o autor, mesmo que tal expressão fosse obtida, a mesma talvez perdesse o sentido físico no limite  $\Delta a \rightarrow 0$ . Por outro lado, calcular numericamente  $G_{\theta}$  sem uma expressão fechada implica em uma grande quantidade de análises numéricas globais para a obtenção de uma grandeza local e ainda o limite  $\Delta a \rightarrow 0$  será sempre considerado de forma aproximada. Apesar dessas dificuldades, o critério da máxima taxa de liberação de energia possui uma forte base teórica, uma vez que o mesmo é baseado no balanço energético de Griffith. Além disso, o critério é mais adequado para tratar propagações em modo misto I, II e III em comparação aos critérios clássicos como o da máxima tensão circunferencial ou o da mínima densidade da energia de deformação (Baydoun & Fries. 2012).

Chang et.al. (2006) introduziram uma expressão aproximada para  $G(\theta)$  a partir da qual é possível formular analiticamente o critério da máxima taxa de liberação de energia, evitando assim os elevados custos computacionais da avaliação numérica de  $G(\theta)$ .

A expressão aproximada de  $G(\theta)$  é obtida introduzindo FIT efetivos  $K_{Ief}$ ,  $K_{IIef}$  e  $K_{IIIef}$  a partir dos quais é possível reescrever as Eq. 4.2 como:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{Ief}}{\sqrt{2\pi r}}, & K_{Ief} &= \frac{K_I}{4} \left( 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -3\text{sen}\frac{\theta}{2} - 3\text{sen}\frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{K_{IIef}}{\sqrt{2\pi r}}, & K_{IIef} &= \frac{K_I}{4} \left( \text{sen}\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{\theta\bar{x}_3} &= \frac{K_{IIIef}}{\sqrt{2\pi r}}, & K_{IIIef} &= K_{III} \cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (4.17)$$

A Eq. 4.17 implica que as tensões em uma direção  $\theta$  são equivalentes às do estado de tensão da ponta da fissura com FIT equivalentes  $K_{Ief}$ ,  $K_{IIef}$  e  $K_{IIIef}$ . Dessa maneira, a taxa de liberação de energia  $G_\theta$  em uma direção  $\theta$  para um ponto da linha de frente de uma fissura solicitada em modo misto  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  pode ser assumida como aproximadamente igual à taxa de liberação de energia  $G$  de uma fissura que se propaga em sua extensão ( $\theta_p = 0$ ) sob uma solicitação  $K_{Ief}$ ,  $K_{IIef}$  e  $K_{IIIef}$  (CHANG et.al., 2006). A partir desse postulado, uma expressão aproximada para  $G(\theta)$  pode ser facilmente obtida a partir da Eq. 4.15. Assim:

$$\begin{aligned}G(\theta) &\approx \frac{1}{E'} (K_{Ief}^2 + K_{IIef}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{IIIef}^2 \\ &= \frac{1}{E'} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -3\text{sen}\frac{\theta}{2} - 3\text{sen}\frac{3\theta}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{E'} \left[ \frac{K_I}{4} \left( \text{sen}\frac{\theta}{2} + \text{sen}\frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \cos^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (4.18)$$

A Eq. (4.18) pode ser simplificada resultando em:

$$G(\theta) \approx \frac{1}{2\mu} \cos^2\frac{\theta}{2} \left\{ \frac{k+1}{8} \left[ K_I^2 (1 + \cos\theta) - 4K_I K_{II} \text{sen}\theta \right] + K_{III}^2 \right\} \quad (4.19)$$

em que  $k = (3-\nu)/(1+\nu)$  para o EPT, i.e., nas proximidades do contorno livre em problemas tridimensionais, e  $k = 3-4\nu$  para o EPD, i.e., no interior dos sólidos em problemas tridimensionais. A partir da expressão aproximada de  $G(\theta)$  é possível estabelecer analiticamente o critério geral da máxima taxa de liberação de energia como:

$$G(\theta) \leq G_c = \frac{k+1}{8G} K_{Ic}^2$$

$$\left. \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_p} = 0 \quad \left( \left. \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_p} < 0 \right) \quad \text{para } G(\theta) = G_c \quad (4.20)$$

Substituindo a aproximação 4.19 na Eq. 4.20 resulta nas expressões analíticas do critério geral da máxima taxa de liberação de energia:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2\mu} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \left\{ \frac{k+1}{8} \left[ K_I^2 (1 + \cos \theta_p) - 4K_I K_{II} \text{sen} \theta_p \right] + K_{III}^2 \right\} \leq G_c = \frac{k+1}{8G} K_{Ic}^2$$

$$\Theta = \frac{k+1}{8} \left[ \begin{array}{l} K_I^2 \left( \text{sen} \frac{\theta_p}{2} + \text{sen} \frac{3\theta_p}{2} \right) + 4K_I K_{II} \cos \frac{3\theta_p}{2} \\ -K_{II}^2 \left( 3\text{sen} \frac{3\theta_p}{2} - 5\text{sen} \frac{\theta_p}{2} \right) \end{array} \right] + K_{III}^2 \text{sen} \frac{\theta_p}{2} = 0 \quad (4.21)$$

Ou ainda, em termos do FIT equivalente:

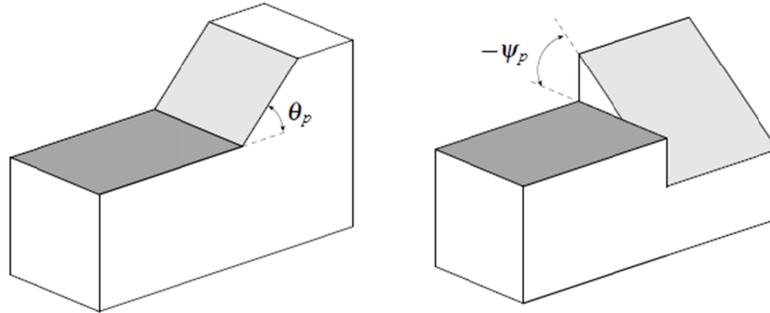
$$f_{m\acute{a}x} = K_{eq} = \sqrt{\frac{4}{k+1} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \left\{ \frac{k+1}{8} \left[ K_I^2 (1 + \cos \theta_p) - 4K_I K_{II} \text{sen} \theta_p \right] + K_{III}^2 \right\}} \leq K_{Ic}$$

$$\Theta = \frac{k+1}{8} \left[ \begin{array}{l} K_I^2 \left( \text{sen} \frac{\theta_p}{2} + \text{sen} \frac{3\theta_p}{2} \right) + 4K_I K_{II} \cos \frac{3\theta_p}{2} \\ -K_{II}^2 \left( 3\text{sen} \frac{3\theta_p}{2} - 5\text{sen} \frac{\theta_p}{2} \right) \end{array} \right] + K_{III}^2 \text{sen} \frac{\theta_p}{2} = 0 \quad (4.22)$$

#### 4.3.2 Critério de Schöllmann

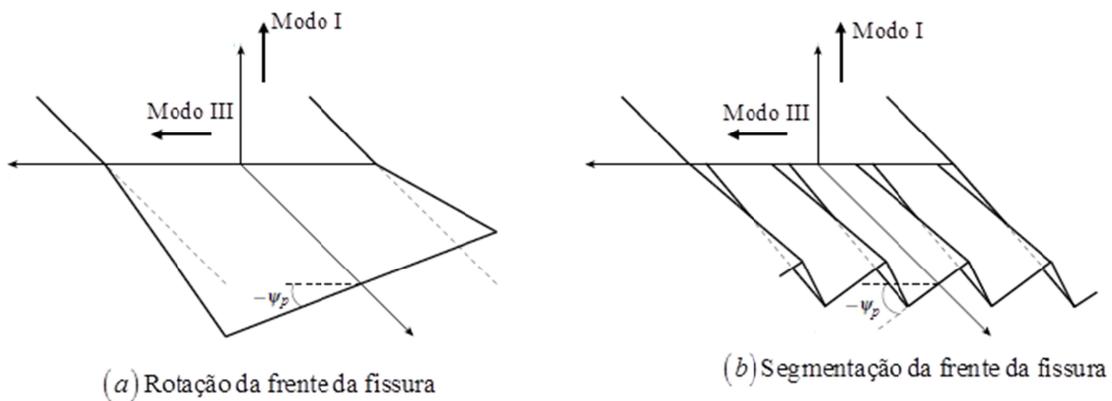
Apesar dos resultados satisfatórios obtidos em Baydoun & Fries (2012) com o critério de Chang et.al. (2006), os efeitos do modo III no crescimento por fadiga em modo misto foram formulados nos trabalhos de Pook (1995), Schöllmann et al. (2002) e Richard et al. (2005). Nesses trabalhos, a orientação do crescimento da fissura é definida por dois ângulos

de propagação:  $\theta_p$  (Ângulo de deflexão) e  $\psi_p$  (ângulo de torção) conforme ilustrado na Figura 4.5.



**Figura 4.5** Ângulos de propagação das fissuras:  $\theta_p$  e  $\psi_p$  para o caso geral de problemas tridimensionais de propagação em modo misto de fissuras (SCHOLLMANN et al.; 2002).

De acordo com um estudo detalhado sobre critérios de propagação tridimensionais apresentado por Richard et al. (2003), critérios de propagação que não incluem o efeito do ângulo  $\psi_p$  não são capazes de descrever fenômenos observados experimentalmente em situações de modos mistos I/III como por exemplo a “rotação da frente da fissura” ou a “segmentação da frente da fissura” ilustrados na Figura 4.6.



**Figura 4.6** Efeitos possíveis no caso de torção da fissura em modo misto I/III (LAZARUS et al.; 2001).

Sendo assim, o critério da máxima taxa de liberação de energia apresentado por Chang et.al. (2006) não é capaz de descrever todas as possíveis situações de propagação de fissuras em modo misto em problemas tridimensionais. O critério de Schöllmann (Schöllmann et. al. 2002) por sua vez considera os efeitos do modo III em ambos os ângulos  $\theta_p$  e  $\psi_p$  e, assim como o critério de Chang et.al. (2006), também recai na expressão dos modos mistos I/II de

fratura plana descrita pelo clássico critério da máxima tensão tangencial, quando  $K_{III} = 0$ . O critério de Richard et al. (2005) pode ser considerado uma aproximação quadrática que simplifica o critério proposto por Schöllmann et al. (2002). Ambos os critérios de Schöllmann et al. (2002) e de Richard et al. (2005) são candidatos adequados para descrever os casos mais gerais de propagação em modo misto em problemas tridimensionais (PEREIRA, 2010). No presente trabalho, o critério de Schöllmann é implementado.

O critério de Schöllmann assume que a fissura crescerá na direção que maximize a tensão principal  $\sigma'_1$ , também denominada de tensão principal especial (RICHARD et al. 2005).  $\sigma'_1$  é uma tensão principal na qual a componente radial do tensor de tensões é negligenciada:

$$\sigma'_1 = \frac{\sigma_\theta + \sigma_{\bar{x}_3}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\theta + \sigma_{\bar{x}_3})^2 + 4(\tau_{\theta\bar{x}_3})^2} \quad (4.23)$$

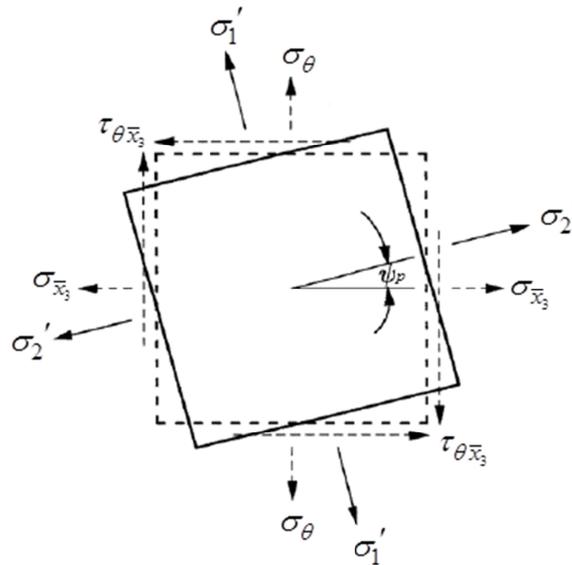
sendo  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{\bar{x}_3}$  e  $\tau_{\theta\bar{x}_3}$  as componentes do tensor de tensões elásticas descritas para o sistema de coordenadas cilíndricas apresentadas nas Eq. 4.2 e ilustradas na Fig. 4.1. O critério de Schöllmann ainda assume que a tensão  $\sigma_{\bar{x}_3}$  não contribui para o ângulo de deflexão  $\theta_p$ . Sendo assim, de acordo com o critério, o ângulo de deflexão  $\theta_p$  é obtido maximizando a Eq. 4.23 para  $\sigma_{\bar{x}_3} = 0$ , ou seja:

$$\left. \frac{\partial \sigma'_1(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_p} = 0 \quad \left( \left. \frac{\partial^2 \sigma'_1(\theta)}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_p} < 0 \right) \quad (4.24)$$

Note que não existe uma solução fechada para o valor de  $\theta_p$ . No entanto, o mesmo pode ser obtido a partir de um algoritmo de otimização que maximize a Eq. 4.23. Substituindo os campos de tensões elásticas, i.e., equações 4.1, em 4.23 e considerando  $\sigma_{\bar{x}_3} = 0$  é possível determinar a expressão analítica da máxima tensão principal,  $\sigma'_{1máx} = \sigma'(\theta_p)$ , e consequentemente, obter uma expressão para um FIT equivalente do critério de Schöllmann (SCHOLLMANN et al., 2002). Assim, as expressões analíticas do critério de Schöllmann resultam:

$$\begin{aligned}
f_{m\acute{a}x} &= \frac{\sigma'_{1m\acute{a}x}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sigma'_1(\theta_p)}{\sqrt{2\pi r}} = K_{eq} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left\{ K_I \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_p) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_p) \right]^2 + 4K_{III}^2} \right\} \leq K_{IC} \\
\Theta &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \left( -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) - K_{II} \left( \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + \frac{9}{2} \cos\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ 2 \left[ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) - K_{II} \left( 3 \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[ K_I \left( -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) - K_{II} \left( \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + \frac{9}{2} \cos\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 32K_{III}^2 \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \right] \cdot \left[ \left[ K_I \left( 3 \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - K_{II} \left( 3 \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{3\theta_p}{2}\right) \right) \right] \right]^2 + 64K_{III}^2 \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left. \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Uma vez determinado o ângulo  $\theta_p$ , o segundo ângulo de propagação  $\psi_p$  é definido como o ângulo da orientação da tensão principal  $\sigma'_2$ , conforme ilustra a Figura 4.7.

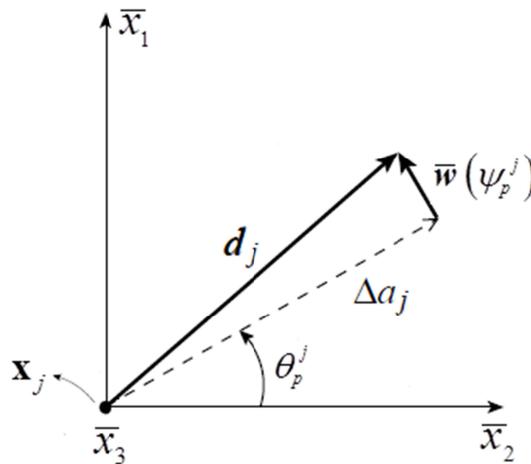


**Figura 4.7** Definição do ângulo de torção  $\psi_p$  em função da orientação das tensões principais (SCHOLLMANN et al.; 2002).

Portanto, o ângulo  $\psi_p$  pode ser obtido a partir de  $\theta_p$  como:

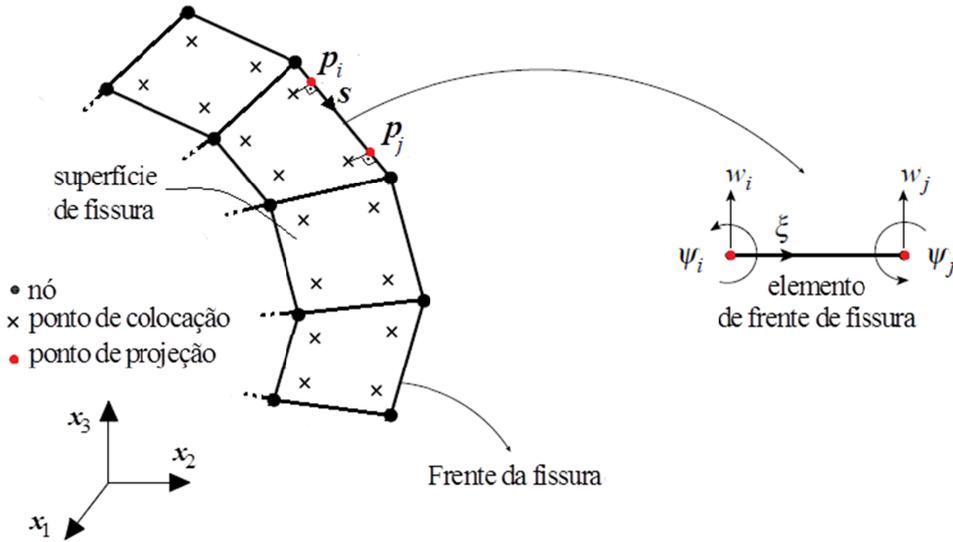
$$\psi_p = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{2\tau_{\theta \bar{x}_3}(\theta_p)}{\sigma_{\theta}(\theta_p) - \sigma_{\bar{x}_3}(\theta_p)} \right] \quad (4.26)$$

Perceba que os ângulos  $\theta_p$  e  $\psi_p$  correspondem, respectivamente, a uma rotação dos eixos locais  $\bar{x}_3$  e  $\bar{x}_2$  ilustrados na Fig. 4.1. Sendo assim, a influência do ângulo  $\theta_p$  sobre o vetor direção de propagação pode ser calculada de maneira direta. Já a influência do ângulo  $\psi_p$  pode ser levada em consideração a partir de um deslocamento  $\bar{w}$ , transversal à fissura, conforme ilustra a Figura 4.8.



**Figura 4.8** Influência dos ângulos  $\theta_p$  e  $\psi_p$  no vetor de propagação  $\mathbf{d}$  (PEREIRA, 2010 adaptado).

Na Fig. 4.8,  $\mathbf{x}_j$  é um ponto sobre a linha de frente da fissura,  $\mathbf{d}_j$  é o vetor de propagação,  $\Delta a_j$  é o incremento de fissura,  $\theta_p^j$  e  $\psi_p^j$  os ângulos de propagação e  $\bar{w}(\psi_p^j)$  é o deslocamento devido ao ângulo  $\psi_p^j$ . Pereira (2010) introduziu um modelo de “torção da fissura” para calcular  $\bar{w}(\psi_p^j)$  a partir de uma formulação variacional de elementos finitos unidimensionais, equivalente à teoria de uma viga sobre uma base elástica. No presente trabalho o modelo é adaptado para o contexto da formulação MEC dual. A Figura 4.9 ilustra a analogia onde cada aresta da linha de frente da fissura passa a ser entendida como um elemento finito 1-D.



**Figura 4.9** Modelo de torção da fissura adaptado para o MEC dual.

No caso específico da formulação MEC dual, os FIT não são calculados para os nós da linha de frente da fissura, mas sim para as projeções dos pontos de colocação sobre a linha de frente da fissura. Sendo assim, para cada par de pontos de colocação define-se um elemento 1-D de frente de fissura com graus de liberdade  $\psi_i$ ,  $\psi_j$ ,  $w_i$  e  $w_j$  que correspondem aos ângulos de torção e aos deslocamentos transversais à frente da fissura, conforme ilustra a Fig. 4.9. Para cada elemento, os ângulos de torção e os respectivos deslocamentos transversais são governados pela solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 w \in s : & \left\{ w/B(w, w) < \infty, \frac{dw}{ds}(s_i) = \psi_i, \quad i = 1, 2 \right\} \\
 \delta w \in s^0 : & \left\{ w/B(\delta w, \delta w) < \infty, \frac{d\delta w}{ds}(s_i) = 0, \quad i = 1, 2 \right\}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

em que  $s$  representa um ponto no espaço físico do elemento de linha de frente que pode ser mapeado por uma coordenada paramétrica  $\xi$ ,  $\delta w$  é um campo de deslocamento virtual e  $s_i$ ,  $i = 1, 2$  são as coordenadas dos dois pontos de colocação adjacentes. O problema pode ser resumido como: Encontre  $w \in s$  tal que:

$$B(w, \delta w) = \int_s (Dw''\delta w'' + k_f w\delta w) ds = 0 \quad \forall \delta w \in s^0 \tag{4.28}$$

A Eq. 4.28 é equivalente a uma formulação variacional de uma viga com rigidez à flexão  $D$  e uma fundação com rigidez  $k_f$ . Tal modelo considera a torção da frente da fissura

como uma função contínua  $C^1$  ao longo de  $s$ . Sendo assim, polinômios de Hermite são candidatos adequados para aproximar os deslocamentos transversais  $w$  oriundos dos ângulos de torção  $\psi_i^e, \psi_j^e$ . Aproximações discretas para  $w$  e  $\delta w$  são dadas por:

$$\begin{aligned} w(\xi) &= \phi \{w_i, \psi_i, w_j, \psi_j\}^T \\ \delta w(\xi) &= \phi \{\delta w_i, \delta \psi_i, \delta w_j, \delta \psi_j\}^T \end{aligned} \quad (4.29)$$

sendo  $\phi = \{1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, L_d \xi(1 - \xi)^2, 3\xi^2 - 2\xi^3, L_d \xi(\xi^2 - \xi)\}$  os polinômios de Hermite,  $L_d$  é o comprimento do elemento 1-D e  $0 \leq \xi \leq 1$  é a coordenada paramétrica do elemento dada por:

$$\xi = \frac{|s - s_i|}{L_d}, \quad ds = L_d d\xi \quad (4.30)$$

A matriz de rigidez do elemento pode então ser calculada como:

$$K_{ij} = \int_0^1 \left[ D \phi_i'' \phi_j'' \left( \frac{1}{L_d^2} \right)^2 + k_f \phi_i \phi_j \right] L_d d\xi \quad (4.31)$$

Visto que os ângulos  $\psi_i, \psi_j$  são conhecidos para cada um dos elementos de frente de fissura, as únicas incógnitas são os deslocamentos transversais  $w_i, w_j$ . Nesse caso, o sistema algébrico de equações se reduz para:

$$Kw = f \quad (4.32)$$

em que  $K$ ,  $f$  e  $w$  são a matriz de rigidez, o vetor de forças e o vetor de deslocamentos da formulação do elemento finito, dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_f 13L_d^4 + D420 & \frac{3}{2}(k_f 3L_d^4 - D280) \\ \frac{3}{2}(k_f 3L_d^4 - D280) & k_f 13L_d^4 + D420 \end{bmatrix} \frac{1}{35L_d^3} \\
\mathbf{f} &= - \begin{Bmatrix} (k_f 11L_d^4 + 1260D)\psi_i - \frac{1}{2}(k_f 13L_d^4 - 2520D)\psi_j \\ \frac{1}{2}(k_f 13L_d^4 - 2520D)\psi_i - (k_f 11L_d^4 + 1260D)\psi_j \end{Bmatrix} \frac{1}{210L_d^2} \\
\mathbf{w} &= \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

O modelo proposto visa transformar os ângulos de torção,  $\psi_i$  e  $\psi_j$ , em deslocamentos transversais,  $w_i$  e  $w_j$ , ao longo da linha de frente da fissura. Esse modelo deve apenas promover uma relação geométrica entre  $\mathbf{w}$  e  $\boldsymbol{\psi}$  e não deve ser afetado pelos valores das constantes  $D$  e  $k_f$ . Adotando  $D = L_d^3$  e  $k_f = 1/L_d$  obtém-se um modelo que resulta deslocamentos transversais  $\mathbf{w}$  da mesma ordem de magnitude dos ângulos de torção  $\boldsymbol{\psi}$  e, portanto, não é influenciado pelas constantes elásticas  $D$  e  $k_f$ .

Por fim, determinados os deslocamentos,  $w_k$ , de todas as  $k = 1, \dots, N_{crack\ tip}$  projeções dos pontos de colocação sobre a frente da fissura, os mesmos devem ser escalonados proporcionalmente aos incrementos de fissura. Assim:

$$\bar{w}_k = \beta \frac{\Delta a_{\min}}{w_{\max}} w_k \tag{4.34}$$

em que  $\Delta a_{\min}$  é o menor valor de incremento dos pontos da linha de frente da fissura e  $w_{\max}$  é o maior valor de deslocamento transversal. Obtidos os deslocamentos  $\bar{\mathbf{w}}$  é possível considerar a influência dos ângulos de torção no vetor de propagação  $\mathbf{d}$  conforme ilustra a Fig. 4.8. A constante  $\beta$  é considerada como um parâmetro de análise do critério de Schöllmann conforme discutido em Pereira (2010).

### 4.3.3 Determinação do ângulo de propagação $\theta_p$

Observando as Equações 4.19 e 4.23 percebe-se que não é simples (se for possível) explicitar uma expressão para o ângulo de propagação  $\theta_p$ . Sendo assim, o mesmo pode ser

determinado a partir da formulação de um problema de otimização. Assim, determina-se o valor  $\theta = \theta_p$  que maximiza a grandeza de interesse, i.e., Eq. 4.19 ou Eq. 4.23.

No presente trabalho opta-se por determinar o ângulo  $\theta_p$  utilizando o Método *Golden Section*, o qual é um método iterativo empregado na busca numérica de máximos e mínimos de funções objetivo univariadas. A ideia por trás deste método é simples e consiste basicamente em determinar o máximo ou mínimo da função objetivo em intervalos (subdomínios compactos) subsequentemente menores. À medida que as iterações evoluem o intervalo de busca atualizado diminui até que o mesmo seja suficientemente pequeno em torno de um ponto de máximo ou de mínimo da função objetivo. O método *Golden Section* é uma técnica muito popular entre os métodos de busca unidirecional e existem várias razões para isso. Dentre elas destacam-se a não exigência de derivadas contínuas da função objetivo no intervalo de busca e o fato da taxa de convergência do método ser conhecida, ao contrário de outros métodos de busca que empregam interpolação polinomial. Além disso, o método é facilmente programável em computador. Uma desvantagem do método é o fato da taxa de convergência não apresentar melhorias para funções objetivo bem condicionadas.

No caso específico da busca pelo ângulo de propagação, a função objetivo pode ser  $f(\theta) = G(\theta)$  (Eq. 4.19) para o caso do critério da máxima taxa de liberação de energia, ou ainda,  $f(\theta) = \sigma_1'(\theta)$  (Eq. 4.23) para o caso do critério de Schöllmann. Em ambos os casos a função  $f(\theta)$  depende unicamente da variável  $\theta$ . A definição do intervalo inicial é de livre escolha e no caso do ângulo de propagação adotou-se um intervalo inicial igual a  $[-\pi, \pi]$ , o qual contém todas as possíveis respostas para  $\theta_p$ . Mais detalhes sobre a busca de máximos e mínimos de funções objetivo univariadas via o Método *Golden Section* são apresentados no Anexo E do presente trabalho.

#### **4.4 Remalhamento para inserção e propagação de fissura de borda**

Assim como as superfícies do contorno, as superfícies das fissuras também são discretizadas de maneira independente das demais a partir do mapeamento geométrico proveniente das NURBS, conforme apresentado no Capítulo 3. Note que, nesse caso, todos os elementos da fissura são descontínuos para garantir a existência das integrais hipersingulares sobre os pontos de colocação. Como as superfícies NURBS que descrevem o contorno do

problema e as que descrevem as fissuras são discretizadas de maneira independente, não há a coincidência na intersecção do contorno com a fissura de borda. Nesse caso, optou-se por desenvolver um remalhamento local para tratar as fissuras de borda a partir de tolerâncias dimensionais. Dessa maneira é possível detectar se um dado elemento do contorno livre é interceptado ou não pela fissura de borda, mesmo que suas arestas não possuam um ponto de coincidência geométrica exata com as arestas dos elementos da fissura.

Nesse tópico destaca-se que as discretizações dos modelos numéricos de fratura foram limitadas à utilização de elementos lineares (triangulares ou quadrilaterais) de modo a simplificar o remalhamento. Uma vez que o remalhamento é baseado em tolerâncias dimensionais, se faz necessário calcular a mínima distância entre as arestas dos elementos de contorno livre e dos elementos de fissura. Além disso, também se faz necessário o cálculo da mínima distância entre um ponto e a superfície dos elementos do contorno livre para determinar a intersecção da ponta da fissura de borda com o contorno livre. Fixando a discretização em elementos lineares, torna-se menos complexo o cálculo das mínimas distâncias e também o remalhamento dos elementos do contorno livre que forem interceptados pela fissura de borda.

O algoritmo que identifica quais elementos do contorno livre deverão ser remalhados é baseado no cálculo da mínima distância entre cada uma das arestas do elemento e as arestas de todos os elementos da fissura. Caso a mínima distância seja menor do que uma tolerância dimensional especificada, diz-se que a aresta foi interceptada. Se duas arestas do elemento de contorno livre forem interceptadas diz-se que o elemento foi totalmente transpassado pela fissura e classifica-o como um “elemento transpassado”. Caso apenas uma aresta do elemento seja interceptada o elemento conterà a ponta da fissura no contorno livre e será classificado como “elemento de ponta de fissura”. Nesse caso, deve-se buscar a projeção da ponta da fissura sobre o contorno livre a partir do algoritmo da mínima distância entre um ponto e um elemento plano. Distintos remalhamentos locais são adotados para os elementos transpassados e para os elementos de ponta de fissura, conforme será discutido mais adiante. A seguir, apresentam-se os algoritmos para a determinação da mínima distância entre retas (arestas) no espaço e da mínima distância entre um ponto e um elemento plano no espaço.

#### 4.4.1 Mínima distância entre retas no espaço

A partir dos dois nós de uma aresta de um elemento plano é possível definir a equação paramétrica do trecho de reta (aresta) no espaço. Denominando  $\mathbf{p}_1^c$  e  $\mathbf{p}_2^c$  os dois pontos nodais que definem uma aresta de um elemento do contorno livre e  $\mathbf{p}_1^f$  e  $\mathbf{p}_2^f$  os dois pontos nodais que definem uma aresta de um elemento da fissura é possível escrever os pontos  $\mathbf{x}^c$  e  $\mathbf{x}^f$  pertencentes aos domínios das arestas de contorno e de fissura, respectivamente, recorrendo às seguintes equações paramétricas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^c(s_c) &= \mathbf{p}_1^c + \mathbf{v}^c s_c, & 0 \leq s_c \leq d_c \\ \mathbf{x}^f(s_f) &= \mathbf{p}_1^f + \mathbf{v}^f s_f, & 0 \leq s_f \leq d_f\end{aligned}\quad (4.35)$$

em que  $s_c$  e  $s_f$  são as coordenadas paramétricas das arestas de contorno e de fissura, respectivamente,  $d_c = \|\mathbf{p}_2^c - \mathbf{p}_1^c\|$  e  $d_f = \|\mathbf{p}_2^f - \mathbf{p}_1^f\|$  são os comprimentos das respectivas arestas e  $\mathbf{v}^c = (\mathbf{p}_2^c - \mathbf{p}_1^c)/d_c$  e  $\mathbf{v}^f = (\mathbf{p}_2^f - \mathbf{p}_1^f)/d_f$  os versores direcionais também das respectivas arestas. A partir da Eq. 4.35, é possível definir a distância euclidiana  $d(s_c, s_f)$  entre pontos  $\mathbf{x}^c(s_c)$  e  $\mathbf{x}^f(s_f)$  em função das coordenadas paramétricas. Por ser uma distância euclidiana, sabe-se que o ponto de mínimo da função  $d(s_c, s_f)$  também é ponto de mínimo da função  $d^2(s_c, s_f)$ .

$$\begin{aligned}d^2(s_c, s_f) &= \left[ \mathbf{p}_1^c(1) + \mathbf{v}^c(1)s_c - \mathbf{p}_1^f(1) - \mathbf{v}^f(1)s_f \right]^2 \\ &\quad + \left[ \mathbf{p}_1^c(2) + \mathbf{v}^c(2)s_c - \mathbf{p}_1^f(2) - \mathbf{v}^f(2)s_f \right]^2 \\ &\quad + \left[ \mathbf{p}_1^c(3) + \mathbf{v}^c(3)s_c - \mathbf{p}_1^f(3) - \mathbf{v}^f(3)s_f \right]^2\end{aligned}\quad (4.36)$$

Novamente por se tratar de uma distância euclidiana sabe-se que o mínimo pode ser obtido analiticamente igualando o gradiente de  $d^2$  à zero:

$$\nabla d^2(s_c, s_f) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial d^2(s_c, s_f)}{\partial s_c} \\ \frac{\partial d^2(s_c, s_f)}{\partial s_f} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}\quad (4.37)$$

Efetuando as derivadas em 4.37 e resolvendo o sistema de equações obtém-se o ponto de mínimo  $(s_c^{\min}, s_f^{\min})$ :

$$\begin{aligned} s_f^{\min} &= \frac{FA - DC}{EA - DB}, \quad 0 \leq s_f^{\min} \leq d_f \\ s_c^{\min} &= \frac{C - Bs_f^{\min}}{A}, \quad 0 \leq s_c^{\min} \leq d_c \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  constantes auxiliares definidas como:

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{v}^c \cdot \mathbf{v}^c & B &= -\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{v}^c & C &= \mathbf{p}_1^f \cdot \mathbf{v}^c - \mathbf{p}_1^c \cdot \mathbf{v}^c \\ D &= \mathbf{v}^c \cdot \mathbf{v}^f & E &= -\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{v}^f & F &= \mathbf{p}_1^f \cdot \mathbf{v}^f - \mathbf{p}_1^c \cdot \mathbf{v}^f \end{aligned} \quad (4.39)$$

Caso os valores  $s_c^{\min}$  e  $s_f^{\min}$  não existam (arestas paralelas) ou ainda não pertençam aos respectivos intervalos  $[0, d_c]$  e  $[0, d_f]$ , entende-se que a aresta  $\mathbf{x}^c(s_c)$  do elemento do contorno livre não é interceptada pela aresta  $\mathbf{x}^f(s_f)$  do elemento de fissura. Caso exista o ponto de mínimo  $(s_c^{\min}, s_f^{\min})$  pertencente aos domínios das arestas dos elementos, calcula-se a mínima distância  $d_{\min} = d(s_c^{\min}, s_f^{\min})$ . Se  $d_{\min}/d_c \leq Dtol$ ,  $Dtol$  sendo uma tolerância dimensional especificada para a análise, entende-se que a aresta  $\mathbf{x}^c(s_c)$  do elemento do contorno livre foi interceptada pela fissura. Nesse caso, armazenam-se as coordenadas do ponto de interceptação do contorno livre,  $\mathbf{x}_{\text{int}}^c = \mathbf{x}^c(s_c^{\min})$ , para o posterior remalhamento do elemento interceptado.

Para cada aresta de cada elemento do contorno do problema efetua-se uma busca por todas as arestas dos elementos de fissura para determinar se a respectiva aresta de contorno é interceptada por alguma aresta de fissura. Após tal avaliação é possível classificar todos os elementos do contorno do problema como: “elemento inalterado”, “elemento transpassado” ou “elemento de ponta de fissura”. Para os elementos de ponta de fissura, o algoritmo de mínima distância entre ponto e elemento plano, descrito a seguir, deve ser efetuado para a determinação das projeções da ponta da fissura no contorno livre.

#### 4.4.2 Mínima distância entre ponto e elementos planos no espaço

A mínima distância entre um ponto e um elemento plano no espaço pode ser determinada analiticamente para elementos triangulares. Para elementos quadrilaterais, a

busca pela mínima distância deve ser avaliada nos dois triângulos que subdividem o elemento quadrilateral em duas partes. A partir dos três nós de uma porção triangular de um elemento quadrilateral plano do contorno livre é possível definir a equação paramétrica do triângulo no espaço. Denominando  $\mathbf{p}_1^C$ ,  $\mathbf{p}_2^C$  e  $\mathbf{p}_3^C$  os três pontos do triângulo é possível escrever os pontos  $\mathbf{x}^C$  pertencentes ao domínio do triângulo a partir da equação paramétrica do plano:

$$\mathbf{x}^C(s_c, t_c) = \mathbf{p}_1^C + \mathbf{v}_1^C s_c + \mathbf{v}_2^C t_c, \quad 0 \leq s_c \leq 1, \quad 0 \leq t_c \leq 1 \quad \text{e} \quad s_c + t_c \leq 1 \quad (4.40)$$

em que  $s_c$  e  $t_c$  são as coordenadas paramétricas do plano do triângulo e  $\mathbf{v}_1^C = (\mathbf{p}_2^C - \mathbf{p}_1^C)$  e  $\mathbf{v}_2^C = (\mathbf{p}_3^C - \mathbf{p}_1^C)$  são vetores direcionais. Com a Eq. 4.40 é possível definir a distância euclidiana  $d(s_c, t_c)$  entre um ponto qualquer  $\mathbf{x}^C(s_c, t_c)$  pertencente à porção triangular do elemento do contorno livre e um nó de extremidade da fissura  $\mathbf{x}^{ex}$ . Por ser uma distância euclidiana, sabe-se que o ponto de mínimo da função  $d(s_c, t_c)$  também é ponto de mínimo da função  $d^2(s_c, t_c)$ , a qual pode ser expressa como:

$$d^2(s_c, t_c) = A s_c^2 + 2B s_c t_c + C t_c^2 + 2D s_c + 2E t_c + F \quad (4.41)$$

sendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  outras constantes auxiliares definidas como:

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{v}_1^C \cdot \mathbf{v}_1^C & B &= \mathbf{v}_1^C \cdot \mathbf{v}_2^C & C &= \mathbf{v}_2^C \cdot \mathbf{v}_2^C & D &= \mathbf{v}_1^C \cdot (\mathbf{p}_1^C - \mathbf{x}^{ex}) \\ E &= \mathbf{v}_2^C \cdot (\mathbf{p}_1^C - \mathbf{x}^{ex}) & F &= (\mathbf{p}_1^C - \mathbf{x}^{ex}) \cdot (\mathbf{p}_1^C - \mathbf{x}^{ex}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Novamente o mínimo da função  $d^2$  é avaliado igualando o seu gradiente a zero:

$$\nabla d^2(s_c, t_c) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial d^2(s_c, t_c)}{\partial s_c} \\ \frac{\partial d^2(s_c, t_c)}{\partial t_c} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

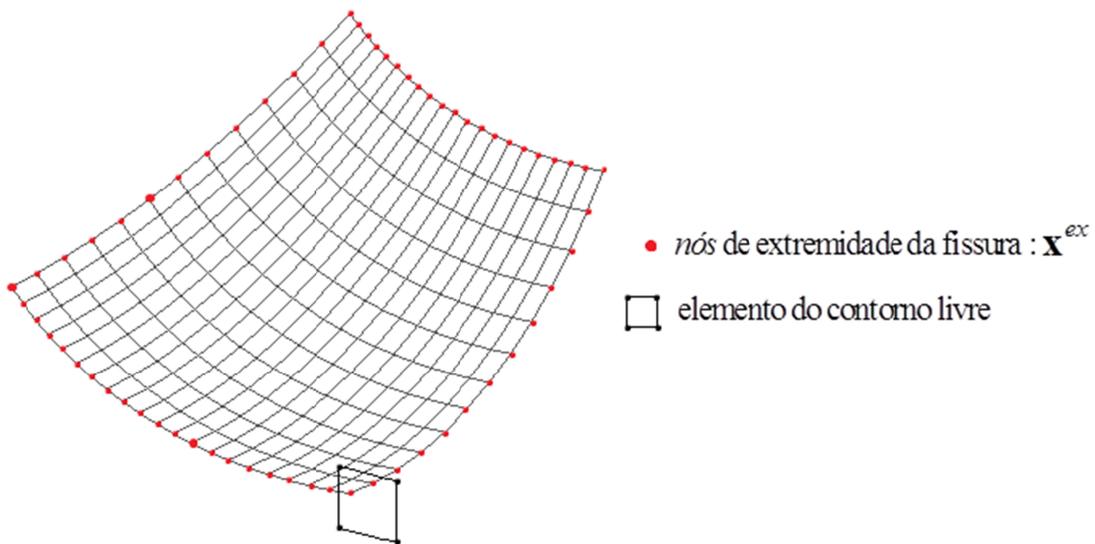
Calculando as derivadas em 4.43 e resolvendo o sistema de equações obtém-se o ponto de mínimo  $(s_c^{\min}, t_c^{\min})$ :

$$\begin{aligned}
 s_c^{\min} &= \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad 0 \leq s_c^{\min} \leq 1 \\
 t_c^{\min} &= \frac{BD - AE}{AC - B^2}, \quad 0 \leq t_c^{\min} \leq 1
 \end{aligned}
 \tag{4.44}$$

tal que  $s_c^{\min} + t_c^{\min} \leq 1$ .

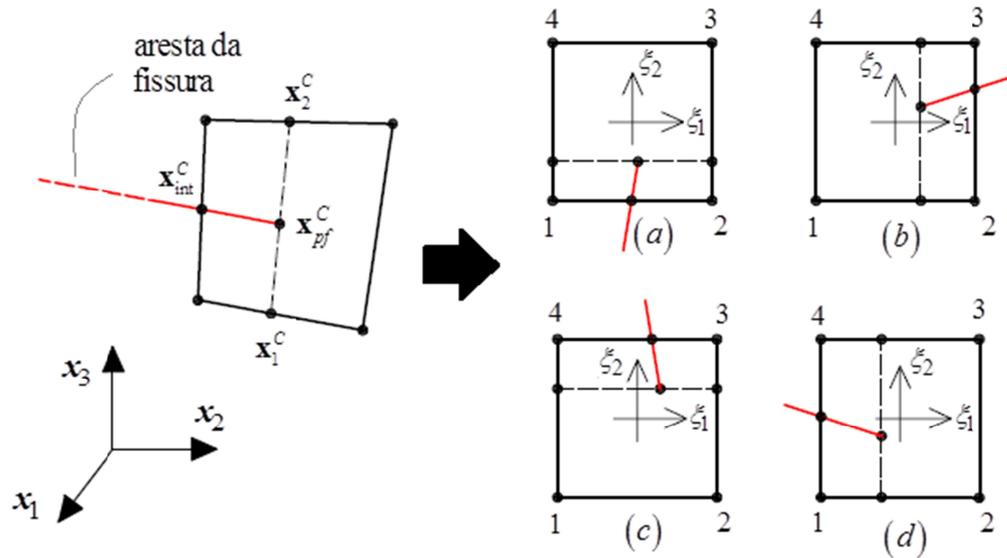
Caso o ponto de mínimo  $(s_c^{\min}, t_c^{\min})$  não pertença ao domínio do triângulo, i.e.,  $\forall (s_c, t_c) \mid 0 \leq s_c \leq 1, 0 \leq t_c \leq 1 \text{ e } s_c + t_c \leq 1$ , entende-se o ponto  $\mathbf{x}^{ex}$  não se projeta sobre a porção triangular do elemento em análise. Caso o ponto  $(s_c^{\min}, t_c^{\min})$  pertença ao domínio triangular, entende-se que a projeção do ponto  $\mathbf{x}^{ex}$  no elemento do contorno livre em análise é igual a  $\mathbf{x}^C(s_c^{\min}, t_c^{\min})$  e calcula-se a distância mínima  $d_{\min} = d(s_c^{\min}, t_c^{\min})$ .

Para cada elemento do contorno livre classificado como de ponta de fissura efetua-se uma busca sobre todos os nós de extremidade,  $\mathbf{x}^{ex}$ , da discretização da fissura calculando a distância mínima  $d_{\min}$  entre os pontos  $\mathbf{x}^{ex}$  e o respectivo elemento (Ver Figura 4.10). Para o  $\mathbf{x}^{ex}$  que resultar no menor valor de  $d_{\min}$  considera-se que a projeção da ponta de fissura sobre o elemento do contorno livre é  $\mathbf{x}_{pf}^C = \mathbf{x}^C(s_c^{\min}, t_c^{\min})$ , e armazenam-se suas coordenadas para o posterior remalhamento de ponta de fissura.



**Figura 4.10** Nós de extremidade da fissura,  $\mathbf{x}^{ex}$ , e elemento do contorno livre de ponta de fissura.

Além do ponto  $\mathbf{x}_{pf}^C$  também é necessário armazenar mais dois pontos para serem utilizados no remalhamento de ponta de fissura conforme ilustra a Figura 4.11.

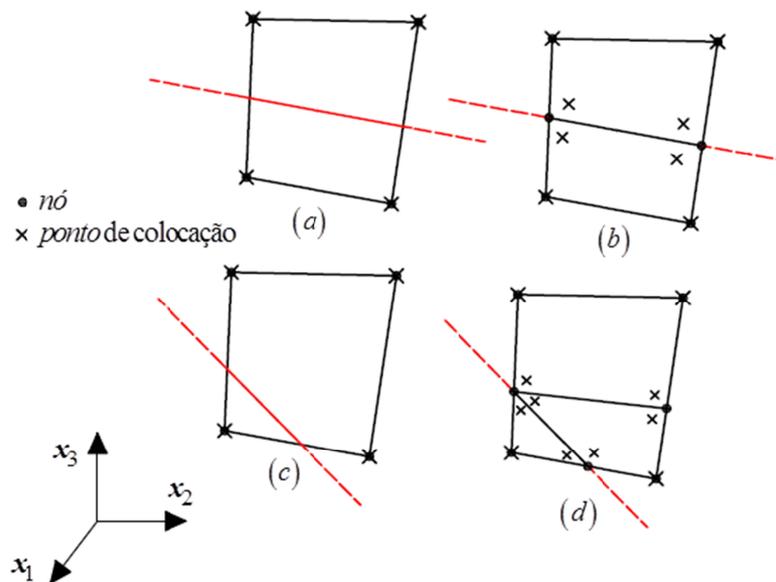


**Figura 4.11** Ponto de projeção da ponta de fissura sobre o elemento do contorno livre:  $\mathbf{x}_{pf}^C$ , ponto de interseção da aresta:  $\mathbf{x}_{int}^C$  e pontos adicionais para o remalhamento:  $\mathbf{x}_1^C$  e  $\mathbf{x}_2^C$ .

Note que as coordenadas físicas dos pontos adicionais podem ser obtidas recorrendo-se ao mapeamento do espaço paramétrico  $(\xi_1, \xi_2)$  para o espaço físico  $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$  do elemento quadrilateral de ponta de fissura utilizando suas funções de forma. Conforme ilustra a Fig. 4.11, os pontos  $\mathbf{x}_1^C$  e  $\mathbf{x}_2^C$  podem ser calculados como  $\mathbf{x}_1^C = \mathbf{x}(-1, \xi_2^{pj})$  e  $\mathbf{x}_2^C = \mathbf{x}(1, \xi_2^{pj})$  (Fig.4.11a e Fig. 4.11c) ou ainda  $\mathbf{x}_1^C = \mathbf{x}(\xi_1^{pj}, -1)$  e  $\mathbf{x}_2^C = \mathbf{x}(\xi_1^{pj}, 1)$  (Fig.4.11b e Fig. 4.11d) a depender da aresta que foi interceptada pela fissura. As coordenadas paramétricas  $(\xi_1^{pj}, \xi_2^{pj})$  do ponto de projeção  $\mathbf{x}_{pf}^C$  podem ser obtidas a partir das coordenadas paramétricas  $(s_c^{\min}, t_c^{\min})$ . Caso o ponto de projeção  $\mathbf{x}_{pf}^C$  pertença ao sub-triângulo definido por pontos  $\mathbf{p}_1^C$ ,  $\mathbf{p}_2^C$  e  $\mathbf{p}_3^C$  correspondentes aos nós 1, 2 e 4 do elemento tem-se  $\xi_1^{pj} = 2s_c^{\min} - 1$  e  $\xi_2^{pj} = 2t_c^{\min} - 1$ . Por outro lado, caso o ponto de projeção  $\mathbf{x}_{pf}^C$  pertença ao sub-triângulo definido por pontos  $\mathbf{p}_3^C$ ,  $\mathbf{p}_2^C$  e  $\mathbf{p}_4^C$  correspondentes aos nós 3, 2 e 4 do elemento tem-se  $\xi_1^{pj} = 1 - 2t_c^{\min}$  e  $\xi_2^{pj} = 1 - 2s_c^{\min}$ .

#### 4.4.3 Remalhamento local para elementos transpassados

Quando duas arestas de um elemento do contorno livre são interceptadas pela fissura, o elemento é classificado como transpassado. Nesse caso, dois diferentes tipos de remalhamentos locais podem ser adotados a depender das arestas que foram interceptadas, i.e., divisão do elemento em dois quadriláteros ou divisão do elemento em dois quadriláteros mais um triângulo. A Figura 4.12 apresenta o remalhamento dos elementos transpassados ilustrando tanto os nós quanto os pontos de colocação antes e depois do remalhamento local.

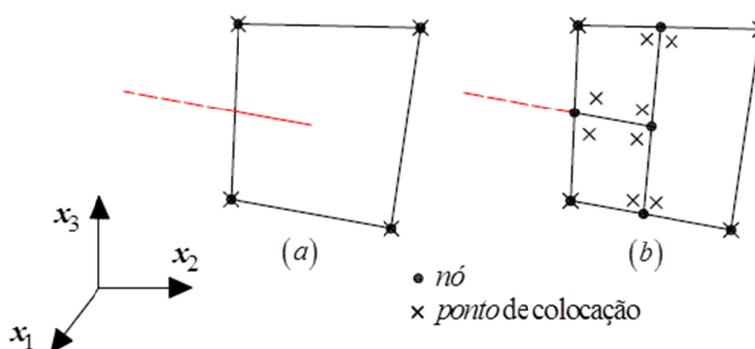


**Figura 4.12** Remalhamento dos elementos transpassados: (a), (c) antes e (b), (d) após o remalhamento.

Note que os pontos de colocação já existentes não são alterados pelo remalhamento. Isso simplifica consideravelmente a atualização do sistema de equações algébricas do MEC dual após o remalhamento. Nesse caso, para as linhas do sistema correspondentes os graus de liberdade, i.e., pontos de colocação, já existentes, é apenas necessário subtrair a contribuição dos “elementos transpassados” e dos “elementos de ponta de fissura” e adicionar a contribuição dos novos elementos oriundos do remalhamento. Já no caso dos novos pontos de colocação, adicionam-se novas linhas ao sistema de equações do MEC dual efetuando as integrais de contorno ao longo de todos os elementos do problema (incluindo os novos elementos), com exceção dos elementos transpassados e dos elementos de ponta de fissura.

#### 4.4.4 Remalhamento local para elementos de ponta de fissura

O remalhamento local para elementos de ponta de fissura deve ser imposto quando apenas uma aresta de um elemento do contorno livre é interceptada pela fissura. Nesse caso, conhecendo o ponto de interceptação  $\mathbf{x}_{int}^C$ , ponto de projeção da ponta da fissura  $\mathbf{x}_{pf}^C$  e os pontos auxiliares  $\mathbf{x}_1^C$  e  $\mathbf{x}_2^C$  é possível efetuar o remalhamento do elemento de ponta de fissura conforme ilustrado na Figura. 4.13.



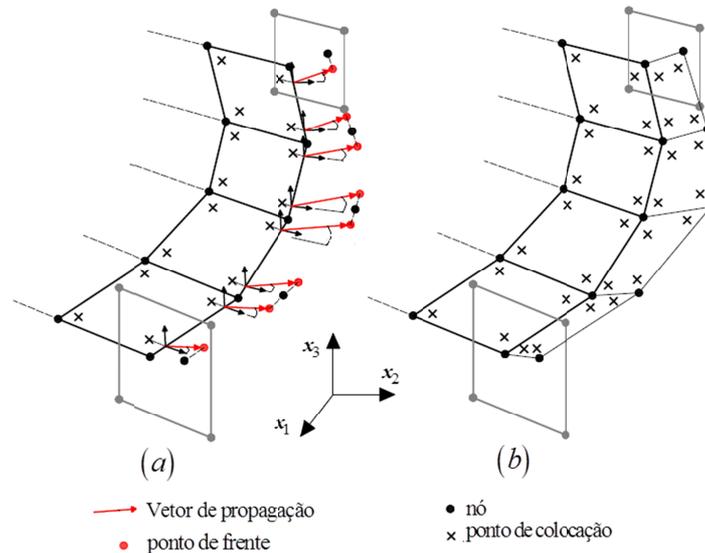
**Figura 4.13** Remalhamento dos elementos de ponta de fissura: (a), antes e (b) após o remalhamento.

Note que novamente os pontos de colocação já existentes não são alterados pelo remalhamento. Sendo assim, para as linhas do sistema correspondentes aos pontos de colocação já existentes é necessário apenas subtrair a contribuição dos “elementos transpassados” e dos “elementos de ponta de fissura” e adicionar a contribuição dos novos elementos oriundos do remalhamento. Para os novos pontos de colocação, adicionam-se novas linhas ao sistema de equações do MEC dual semelhantemente ao discutido no item 4.23.

#### 4.4.5 Propagação da fissura: acrescentando novos elementos

Para propagar a superfície de fissura é necessário conhecer o vetor de propagação  $\mathbf{d}_j$  dos pontos sobre a linha de frente da fissura, o qual é calculado conforme ilustrado na Fig. 4.8. Determinados os vetores de propagação, somam-se os mesmos às respectivas coordenadas das projeções dos pontos de colocação de extremidade (obtidas a partir do mapeamento do espaço paramétrico  $\xi_1, \xi_2$  para o espaço físico) para determinar os novos pontos de frente da fissura, ilustrados na Fig. 4.14a em vermelho. A partir dos novos pontos de frente de fissura, determinam-se as coordenadas dos nós dos novos elementos da fissura. Os nós intermediários são obtidos a partir da média de dois pontos de frente de fissura

subsequentes. Já os nós de extremidade são obtidos a partir da projeção dos novos pontos de frente de fissura sobre os elementos de contorno livre (Fig. 4.14a).



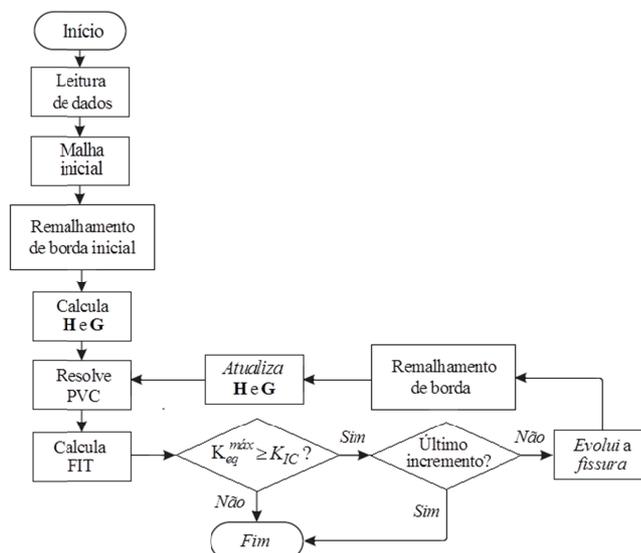
**Figura 4.14** Propagação da frente da fissura: (a) velocidades de propagação e novos nós (b) novos elementos de frente de fissura novos pontos de colocação.

Definidos todos os nós da nova frente da fissura, define-se a conectividade dos novos elementos. A partir dessa etapa é possível obter os novos pontos de colocação da fissura recorrendo-se ao mapeamento do espaço paramétrico  $\xi_1, \xi_2$  dos novos elementos para o espaço físico (Fig. 4.14b).

#### 4.4.6 Descrição do procedimento incremental de evolução da fissura

Os remalhamentos locais descritos até o momento podem ser adotados para efetuar a evolução da superfície de fissura a partir de um procedimento incremental. Após um remalhamento de fissura de borda inicial para adequar a malha não conforme (obtida a partir das discretizações independentes das superfícies NURBS) com o problema fissurado, parte-se para o procedimento incremental. Após a resolução do PVC pelo MEC dual e da obtenção dos parâmetros de fratura, compara-se os valores de  $K_{eq}^{máx}$  ao de  $K_{IC}$ . Caso  $K_{eq}^{máx} < K_{IC}$  não ocorre propagação da fissura e a análise se encerra. Caso  $K_{eq}^{máx} \geq K_{IC}$  o incremento de fissura é adicionado conforme descrito no tópico 4.4.5. Após a evolução da fissura, efetua-se o remalhamento de borda novamente e atualizam-se as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ . O PVC é novamente solucionado pelo MEC dual e obtêm-se os parâmetros de fratura atuais, agora para a fissura evoluída. O procedimento incremental prossegue até que o número de incrementos de propagação seja igual ao número de incrementos prescrito para a análise ou até que se em

alguma etapa incremental  $K_{eq}^{máx} < K_{IC}$ . O procedimento incremental de evolução das fissuras é ilustrado a seguir no fluxograma da Figura 4.15, sendo o número de incrementos imposto para as fissuras um dado de entrada das análises.



**Figura 4.15** Fluxograma do procedimento iterativo de evolução das fissuras.

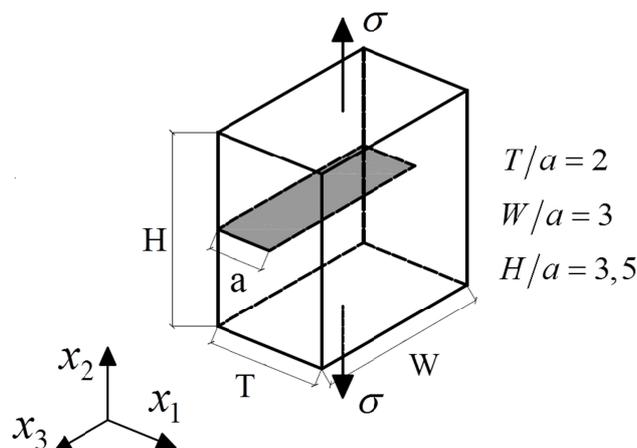
Note que o remalhamento de borda após a propagação da fissura é ligeiramente diferente do remalhamento de borda inicial. No remalhamento de borda inicial, todos os elementos são, a princípio, do tipo “não transpassados” e podem ser classificados como “transpassados” ou “de ponta de fissura” a depender da interceptação pela fissura de borda. Já no caso do remalhamento de borda após a propagação, os elementos podem ser dos três tipos: “não transpassados”, “transpassados” e “de ponta de fissura” e suas classificações podem ser alteradas após a propagação. No presente trabalho, adota-se que os “transpassados” permanecerão inalterados após a propagação. Já no caso dos elementos “não transpassados”, novamente os mesmos podem ser classificados como “transpassados” ou “de ponta de fissura” após a avaliação das novas arestas interceptadas depois da propagação. Por fim, os elementos classificados à priori como “de ponta de fissura” podem ser reclassificados novamente como “de ponta de fissura” ou ainda como “transpassados”. Caso os elementos sejam reclassificados como “transpassados”, os dois remalhamentos apresentados na Fig. 4.12 podem ser efetuados a depender das arestas interceptadas. Caso eles sejam reclassificados novamente como de ponta de fissura, optou-se por manter o remalhamento apresentado na Fig. 4.13 e apenas atualizar as coordenadas dos pontos  $\mathbf{x}_{pf}^C$ ,  $\mathbf{x}_1^C$  e  $\mathbf{x}_2^C$ .

## 4.5 Exemplos numéricos

Quatro problemas numéricos foram estudados para avaliar as técnicas de extração dos FIT, os critérios de propagação e o algoritmo de remalhamento implementados. O primeiro problema apresenta uma fissura solicitada em modo I para o qual uma solução analítica de  $K_I$  é conhecida. O segundo exemplo é um problema em modo misto I/II/III para o qual se conhece soluções numéricas de referência para  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . A partir desses dois primeiros exemplos foi possível comparar as três técnicas de extração dos FIT e definir uma estratégia para as análises de propagação. Nos exemplos 3 e 4, que correspondem respectivamente a problemas de propagação de fissuras em modo misto I/II e I/II/III, foi possível comparar as respostas obtidas pelos dois critérios de propagação, i.e., o critério da máxima taxa de liberação de energia e o critério de Schöllmann. Ressalta-se que não houve preocupação com discretizações coincidentes dos elementos das fissuras de borda com os elementos do contorno interceptado uma vez que o algoritmo de remalhamento foi utilizado. Tal característica simplificou consideravelmente a criação de modelos numéricos de componentes mecânicos/estruturais fissurados.

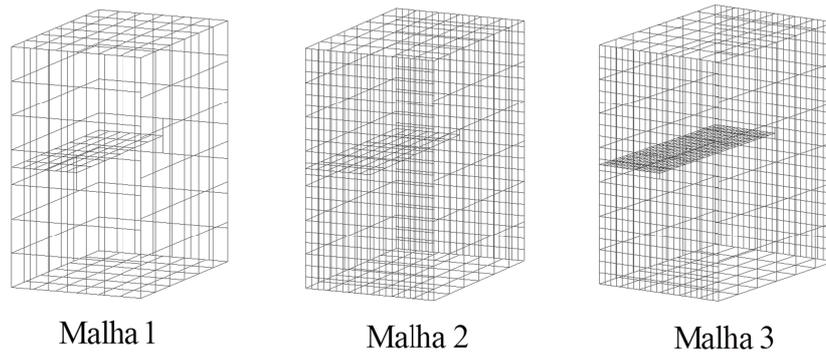
### 4.5.1 Análise dos FIT em modo I.

O primeiro exemplo trata o problema de um prisma tracionado com uma fissura de borda conforme ilustra a Figura 4.16. A força de superfície de tração,  $\sigma$ , foi adotada como unitária. As dimensões do problema são caracterizadas pelo comprimento inicial da fissura de  $a = 2,5$  (unidades de comprimento) e pelas relações ilustradas na Figura 4.16. As constantes elásticas adotadas foram  $E = 1000$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0,3$ .



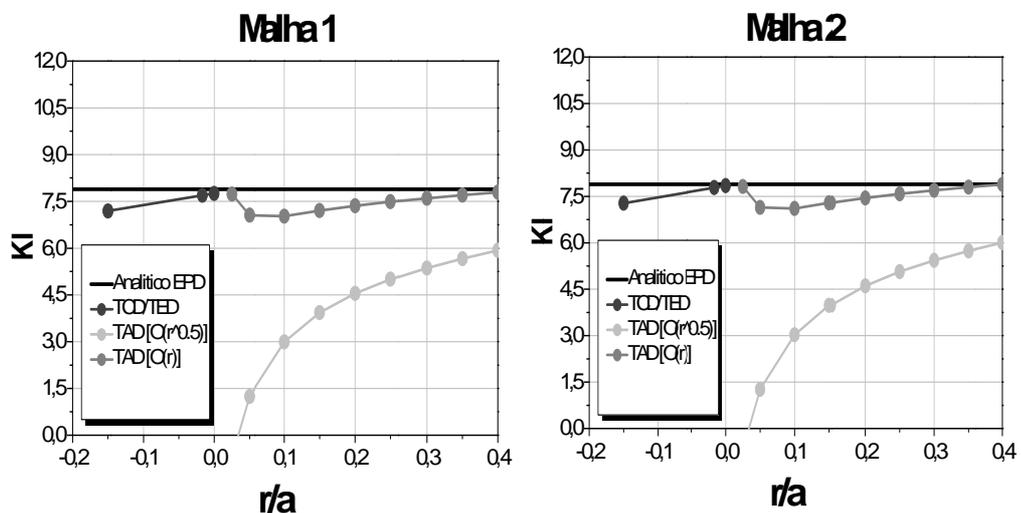
**Figura 4.16** Prisma tracionado com fissura de borda.

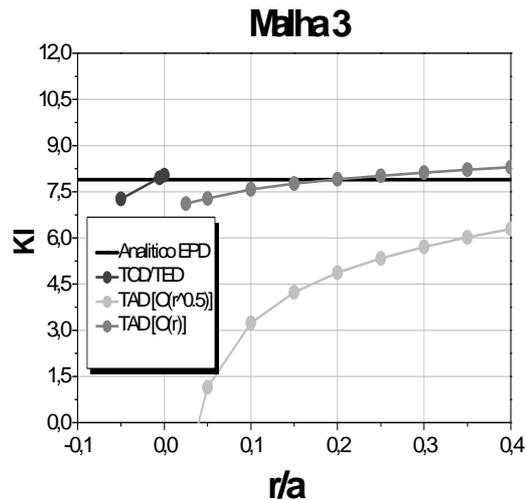
O problema foi discretizado com três diferentes malhas. Em ordem crescente de refinamento, as malhas: Malha 1, Malha 2 e Malha 3, resultam 344, 1142, 1718 elementos quadrilaterais de aproximação linear, totalizando 695, 1591 e 3895 pontos de colocação, respectivamente. As malhas foram geradas a partir de 8 superfícies NURBS planas que caracterizam o problema. A Figura 4.17 apresenta as malhas adotadas.



**Figura 4.17** Discretizações do problema: Malha1, Malha2 e Malha3.

Como a solicitação é em modo I de fratura, somente a resposta do FIT  $K_I$  foi estudada. Nesse caso, a resposta analítica de  $K_I$ , considerando um Estado Plano de Deformação (EPD), é conhecida (MURAKAMI, 1987). No intuito de comparar a precisão das técnicas de extração dos FIT, os resultados numéricos de  $K_I$  no centro da frente da fissura, obtidos com as Técnicas de Correlação e de Extrapolação de Deslocamento (TCD/TED) e com a Técnica de Ajuste de Deslocamentos (TAD), são apresentados na Figura 4.18 junto com a solução analítica em EPD. Os resultados são apresentados em função da distância de extração adimensional,  $r/a$ , sendo  $a$  o comprimento da fissura.





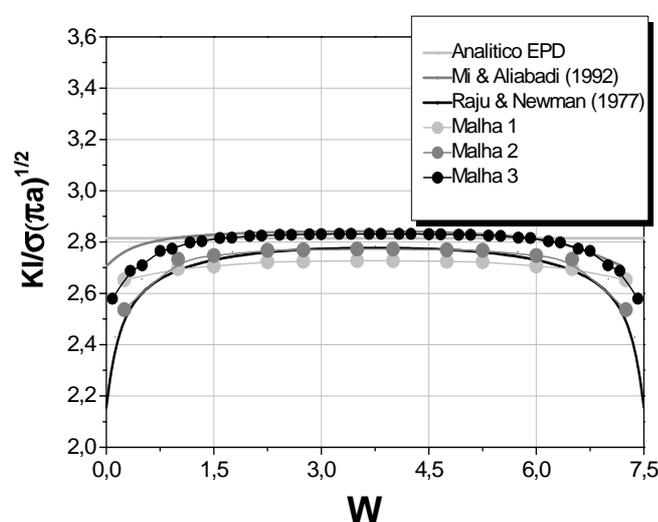
**Figura 4.18** Fator de Intensidade de Tensão  $K_I$ : Comparativo das técnicas de extração.

No caso das técnicas TCD/TED o valor de  $K_I$  pode ser obtido para três distintos valores de  $r$ :  $r = r_2$ ,  $r = r_1$  (TCD) e  $r = 0$  (TED) conforme ilustra a Fig. 4.2b. Note que nesse caso os pontos de extração dos deslocamentos estão sobre as superfícies da fissura e, portanto, os raios  $r_1$  e  $r_2$  foram ilustrados como negativos na Fig. 4.18. Já no caso da TAD adotou-se uma coroa de 7 pontos internos (Ver Fig. 4.3) com raios  $r$  variando de  $0,025a$  a  $0,4a$ .

Dois variantes da técnica TAD foram estudadas: A primeira, denominada TAD  $[O(\sqrt{r})]$ , considera que a expansão dos campos de deslocamentos da frente da fissura é truncada nos termos de ordem  $O(\sqrt{r})$ , reduzindo assim as dimensões da matriz  $\mathbf{M}$  da Eq. 4.12 para  $3N \times 3$ . A segunda, denominada TAD  $[O(r)]$ , considera que a expansão dos campos de deslocamentos da frente da fissura é truncada nos termos de ordem  $O(r)$ , conforme o apresentado no tópico 4.2.3. A partir dos resultados numéricos percebe-se que a consideração dos termos de ordem  $O(r)$  na expansão dos deslocamentos melhora significativamente a resposta dos FIT calculados pela TAD. No entanto, a inclusão de termos de ordens superiores a  $O(r)$  resultou uma matriz  $\mathbf{M}$  que não possui pseudoinversa, impossibilitando a obtenção dos FIT.

Note que tanto as técnicas TCD/TED quanto a técnica TAD são capazes de extrair os FIT, porém são sensíveis em relação às distâncias de extração  $r$ . Mesmo no caso da TED, para a qual  $r$  é sempre igual à zero, os valores dos FIT dependeram das distâncias  $r_1$  e  $r_2$  usadas na extrapolação, que por sua vez dependem da malha adotada.

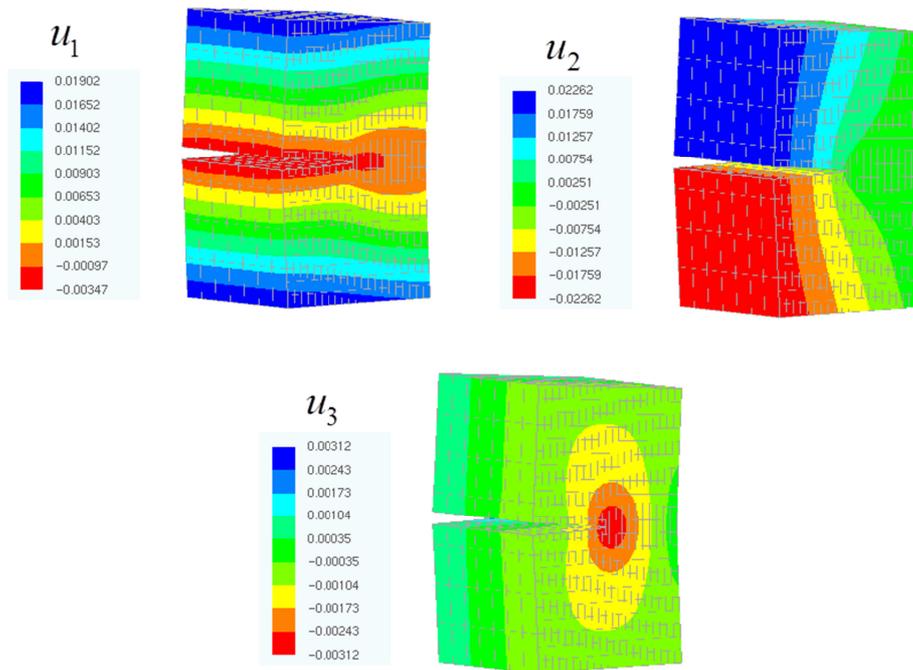
Os resultados numéricos de  $K_I$ , obtidos com a Técnica de Extrapolação de Deslocamentos (TED), são apresentadas na Figura 4.19 em função da espessura do prisma. As respostas numéricas de  $K_I$  foram comparadas com respostas de referência conhecidas da literatura: Resposta analítica em EPD de Murakami et. al. (1987), resposta numérica de Raju e Newman (1977) utilizando elementos finitos e resposta numérica de Mi e Aliabadi (1992) utilizando elementos de contorno. A Figura 4.19 apresenta o comparativo das respostas normalizadas,  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ , demonstrando a convergência do FIT à medida que a discretização é refinada.



**Figura 4.19** Fator de Intensidade de Tensão normalizado:  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ .

Note que utilizando apenas elementos lineares foi possível obter uma boa convergência para  $K_I$ . Isso se deve ao fato do problema, em especial a linha de frente da fissura, poder ser descrita de maneira exata em termos geométricos com elementos lineares. Pode ser observado que no interior do prisma os valores de  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$  concordam com a solução analítica do EPD. Quando os pontos de avaliação se aproximam das laterais livres o valor de  $K_I$  é reduzido devido à singularidade de ponta de fissura ser mais fraca que  $O(r^{1/2})$  nas proximidades do contorno livre.

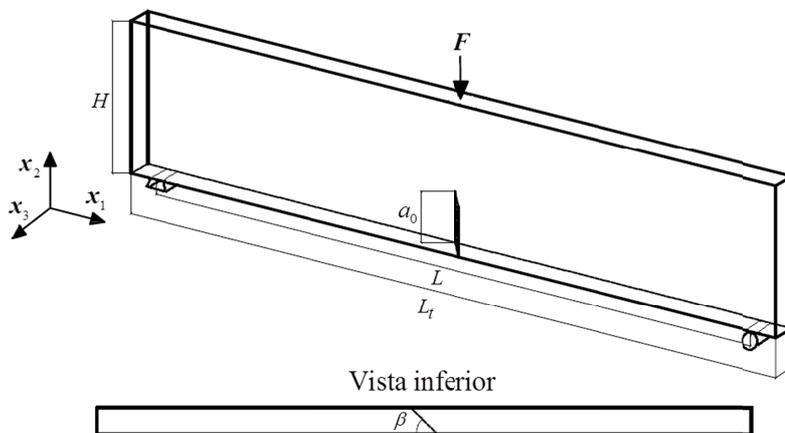
Por fim, a Figura 4.20 apresenta os campos de deslocamentos sobre o contorno e a deformada do problema em escala 1:10 para o modelo mais refinado. A descontinuidade introduzida pela fissura pode ser observada tanto na deformada do problema como para o campo de deslocamento  $u_2$ .



**Figura 4.20** Deslocamentos sobre o contorno e deformada do problema em escala 1:10.

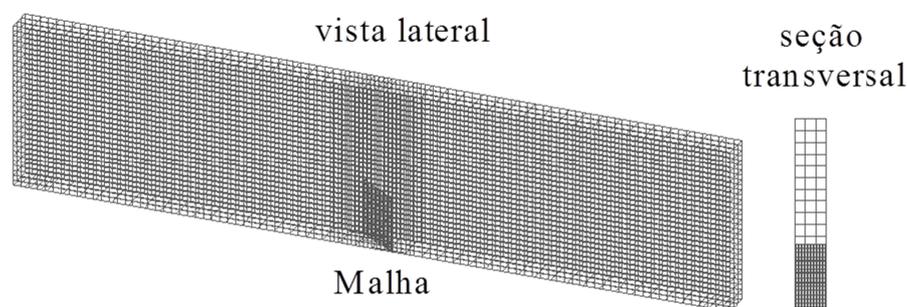
#### 4.5.2 Análise dos FIT em modo misto I/II/III.

No segundo exemplo é analisado o problema de uma viga com entalhe central, submetida à flexão em três pontos. A Figura 4.21 ilustra a geometria do problema e também as condições de contorno. As dimensões da viga são  $L_t = 260\text{mm}$ ,  $L = 240\text{mm}$ ,  $H = 60\text{mm}$  e  $t = 10\text{mm}$ . A dimensão inicial do entalhe é  $a_0 = 20\text{mm}$  e o mesmo encontra-se inclinado de um ângulo  $\beta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga, ocasionando a sollicitação em modo misto.



**Figura 4.21** Viga sob flexão em três pontos com entalhe central inclinado.

O modelo é submetido à flexão em três pontos com um carregamento central de  $F = 2kN$ . O mesmo problema foi analisado experimentalmente e numericamente por Citarella & Buchholz (2008). As constantes elásticas do problema foram adotadas como  $E = 70,656kN/mm^2$  e  $\nu = 0,34$ , que correspondem às constantes adotadas no trabalho de referência. O modelo numérico do problema é criado a partir de 8 superfícies NURBS, as quais foram discretizadas com elementos quadrilaterais, resultando uma malha de 7453 elementos de aproximação linear e 10012 pontos de colocação. A malha adotada no problema é ilustrada na Figura 4.22. Note que a discretização das superfícies da fissura foi bastante refinada de modo a obter respostas consistentes para os FIT.

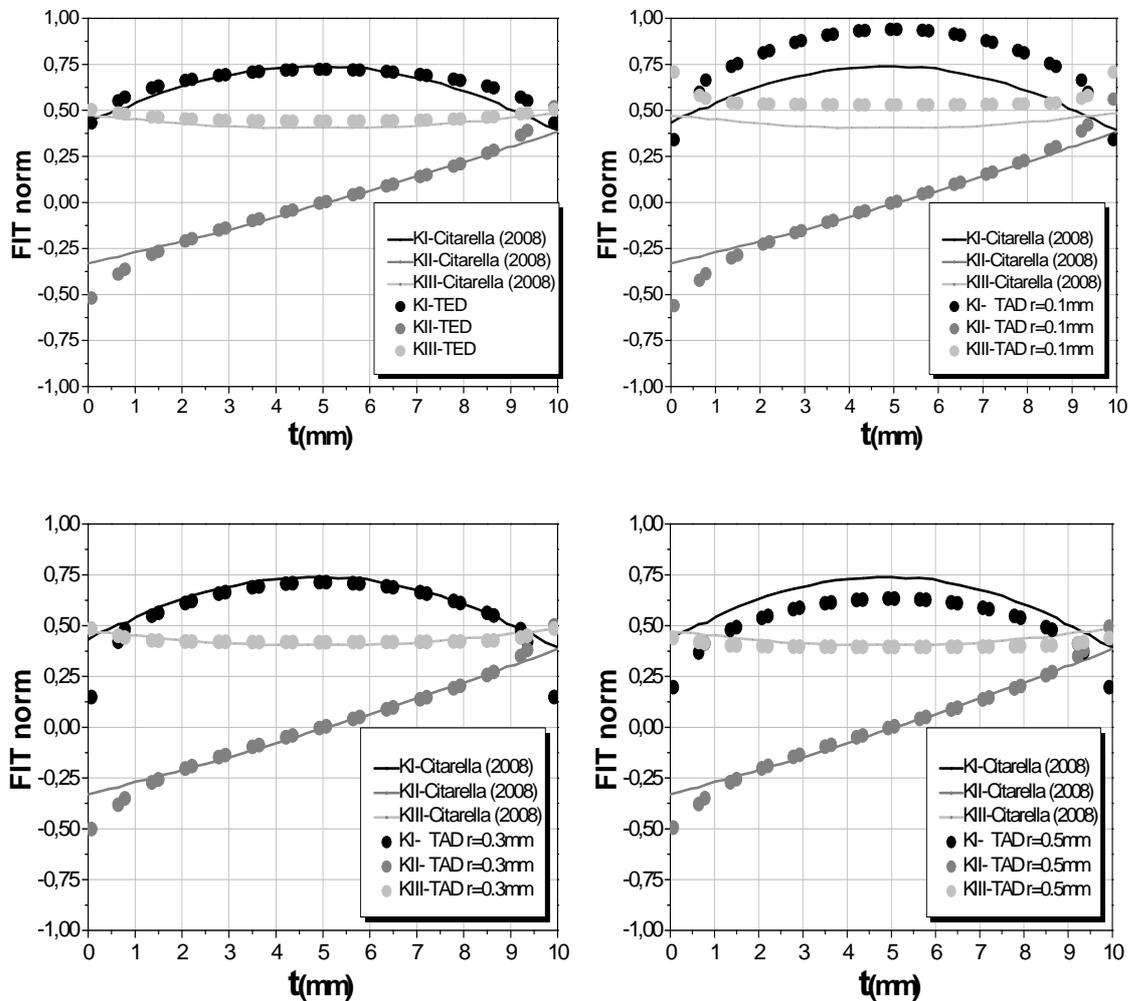


**Figura 4.22** Discretizações do problema: Vistas lateral e transversal da malha adotada.

Nesse exemplo foi possível estudar as respostas para os três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ , uma vez que a sollicitação de fratura é em modo misto. A resposta de referência desse exemplo foi obtida por Citarella & Buchholz (2008) utilizando o software comercial de elementos de contorno BEASY, o qual é baseado na formulação dual do MEC e adota a integral J e técnicas de decomposição de modos para a extração dos FIT. Os resultados também estão de acordo com os obtidos com o software comercial IDEAS, o qual é baseado em elementos finitos e adotada o método da integral de fechamento modificado para a extração dos FIT (CITARELLA & BUCHHOLZ, 2008). No intuito de comparar a precisão das técnicas de extração dos FIT, adotou-se a TED e a TAD para extrair os FIT do modelo numérico do presente trabalho. No caso da TAD, adotou-se a variante  $[O(r)]$ , uma vez que a mesma aparenta resultar valores mais consistentes para os FIT. Novamente adotou-se uma coroa de 7 pontos internos para a extração dos FIT com a TAD. Os raios  $r$  da coroa de pontos foram variados de  $0,1mm$  a  $0,5mm$  para avaliar a dependência da solução numérica dos FIT.

Os resultados numéricos dos FIT normalizados, ou seja,  $K_i^{norm} = K_i 2H^2 t / [3L \sqrt{\pi a_0}]$ , obtidos ao longo da espessura do problema com ambas as técnicas TED e TAD são

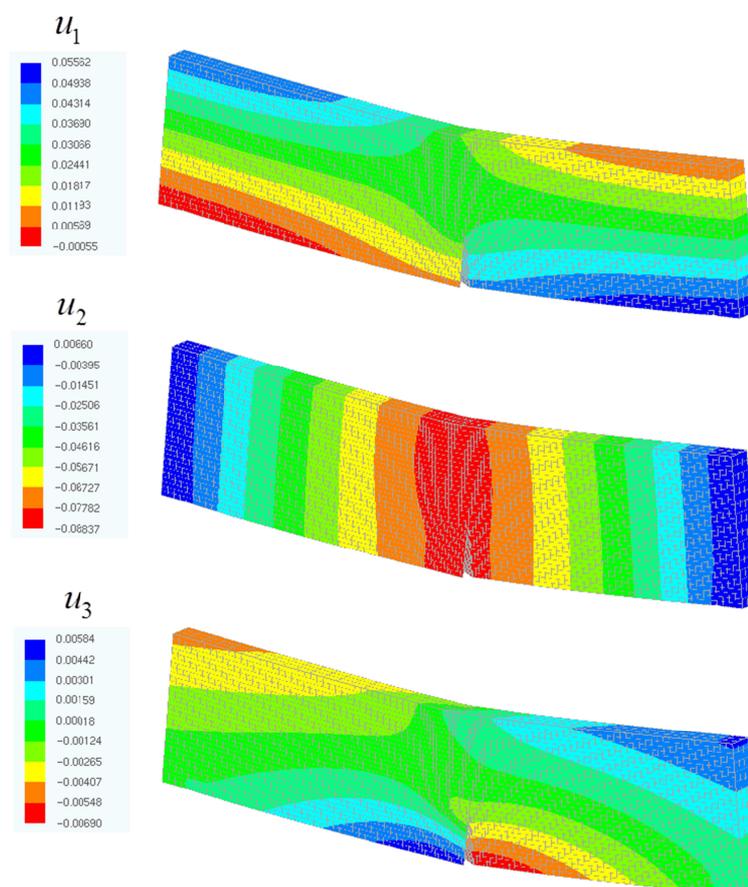
apresentados na Figura 4.23 junto com a solução numérica de referência. O primeiro gráfico apresenta as respostas de FIT obtidas com a TED e os demais apresentam as respostas de FIT obtidos com a TAD para diferentes raios de extração.



**Figura 4.23** Deslocamentos sobre o contorno e deformada do problema em escala 1:100.

Note que as respostas dos FIT obtidas com a TED foram próximas da resposta de referência. A TAD também é capaz de resultar respostas satisfatórias para os FIT. No entanto, foi verificado no exemplo que os resultados de FIT obtidos com a TAD apresentaram, assim como no exemplo anterior, uma dependência com relação à distância  $r$  dos pontos internos da coroa de extração. Para problemas de propagação de fissuras, nos quais não se conhece uma solução de referência dos FIT, não é possível garantir que uma distância de extração fixa para a análise é capaz de reproduzir respostas satisfatórias de FIT para todos os passos incrementais de propagação. Além disso, algum critério deve ser estabelecido para que o raio de extração adotado para a coroa não resulte em pontos externos ao domínio do problema nas regiões próximas da intersecção da fissura com o contorno externo. Por fim, a Figura 4.24

apresenta a resposta dos campos deslocamentos sobre o contorno e a deformada do problema em escala 1:100. Novamente a descontinuidade dos deslocamentos é evidente, principalmente para os campos  $u_1$  e  $u_3$ .



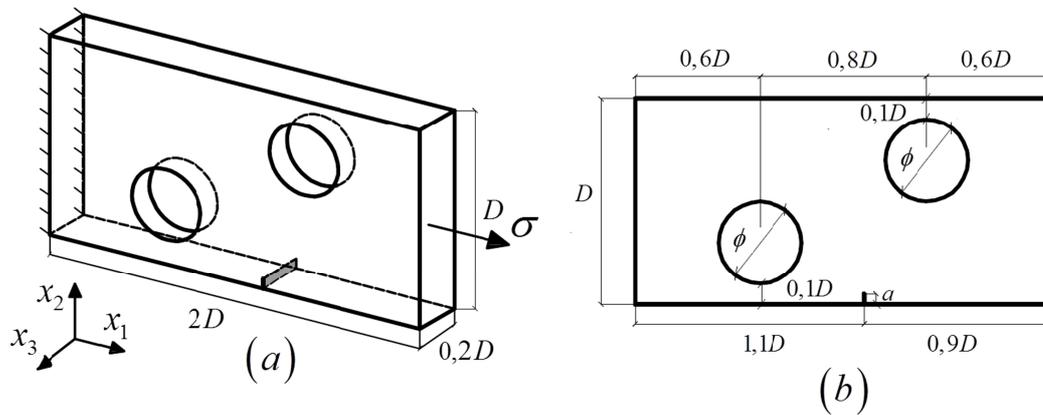
**Figura 4.24** Deslocamentos sobre o contorno e deformada do problema em escala 1:100.

Nesses dois primeiros exemplos os modelos numéricos adotados são estanques, uma vez que não possuem interseções curvas de superfícies. Nos exemplos a seguir são analisados problemas de propagação em modo mistos I,II e I,II,III para os quais respostas de referência são conhecidas da literatura. Devido às limitações da TAD previamente mencionadas, optou-se pela TED ou ainda pela TCD para a extração dos FIT nos problemas de propagação, cujo enfoque foi avaliar a influência dos critérios de propagação nas respostas dos problemas. Desenvolvimentos e implementações computacionais necessárias para tornar a TAD mais robusta para a extração dos FIT podem ser alvo de pesquisas futuras.

### 4.5.3 Propagação em modo misto I/II.

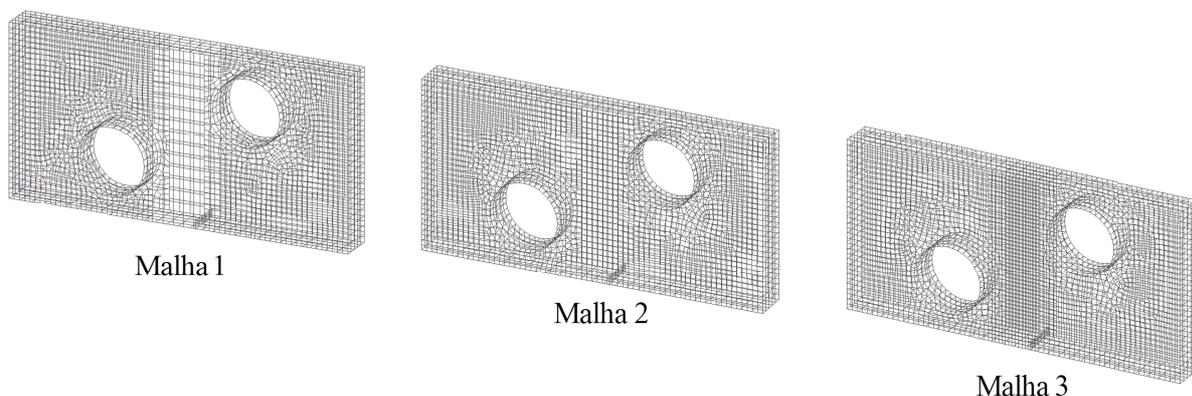
O terceiro exemplo trata de uma chapa tracionada com dois furos e um entalhe solicitado a modo misto I/II de fratura. O problema é ilustrado na Figura 4.25, a qual

apresenta as condições de contorno em função da tensão de tração  $\sigma$  e as dimensões do problema em função da dimensão  $D$ , sendo o comprimento inicial da fissura  $a = 0,05D$  e o diâmetro dos furos igual a  $\phi = 0,4D$ .



**Figura 4.25** Chapa tracionada com furos: (a) vista paramétrica (b) dimensões do problema plano.

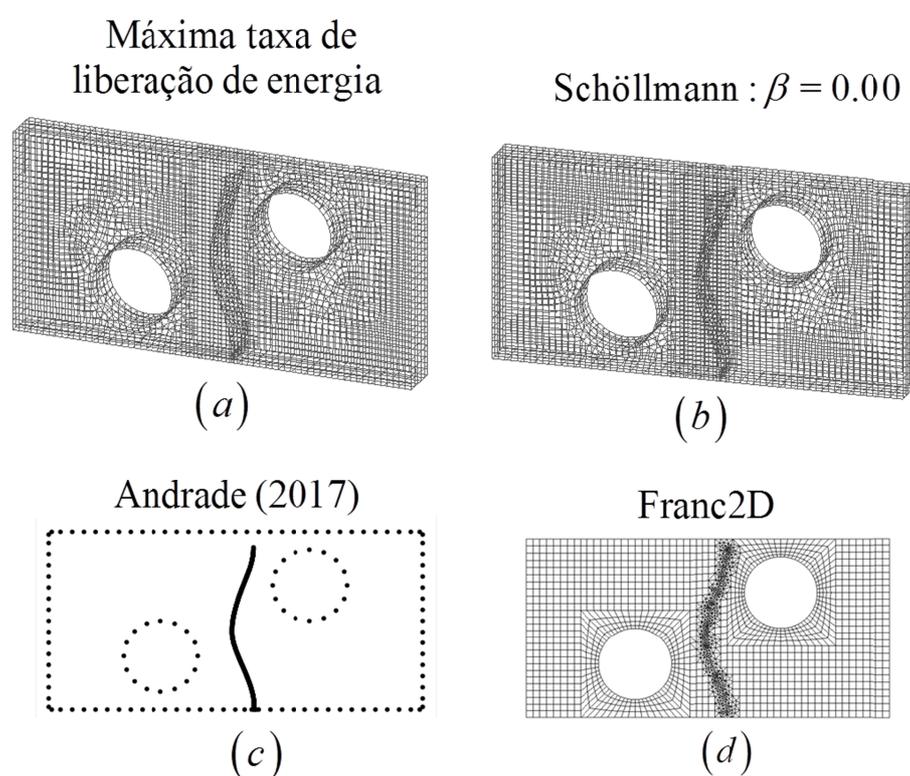
Adotam-se para as variáveis do problema os seguintes valores:  $D = 1$  (unidades de comprimento),  $\sigma = 10$  (unidades de tensão) e as constantes elásticas  $E = 1000$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0,25$ . Tal problema foi estudado como plano de tensão (EPT) no trabalho de Andrade (2017) a partir de uma formulação 2D do MEC dual e também foi analisado em elementos finitos a partir do *software* Franc2D. No presente trabalho o problema é abordado de forma tridimensional apenas para a validação da ferramenta computacional desenvolvida. A geometria do problema tridimensional é descrita por 12 superfícies NURBS: Seis para descrever a chapa prismática, sendo duas delas aparadas devido à presença dos furos, quatro para descrever as superfícies dos furos e duas para as superfícies do entalhe inicial. Três diferentes discretizações foram adotadas para o problema as quais são ilustradas na Figura 4.26.



**Figura 4.26** Discretizações adotadas para o problema: (a) Malha 1, (b) Malha 2, (c) Malha 3.

As malhas 1, 2 e 3 apresentadas na Fig. 4.26 são compostas, respectivamente, por 4211, 4719 e 5471 elementos quadrilaterais de aproximação linear e resultam em 4942, 5536 e 6334 pontos de colocação, respectivamente. As malhas são gradativamente mais refinadas localmente nas proximidades do caminho de propagação visando melhorar as respostas da análise.

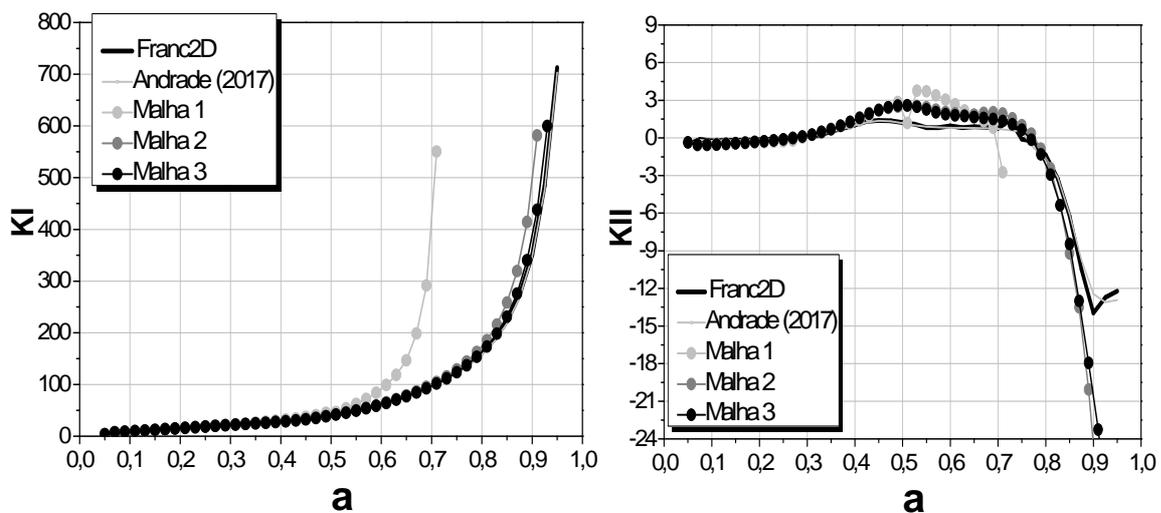
As análises de fratura foram realizadas considerando 50 passos de propagação com um incremento máximo de propagação igual a  $\Delta a^{máx} = 0,02D$ . Os FIT foram extraídos a partir da TED e ambos os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann foram adotados. Como o modo III é irrelevante para esse problema adota-se  $\beta = 0,00$  para o parâmetro que escalona os deslocamentos transversais à frente da fissura, oriundos do ângulo de torção  $\psi_p$  do critério de Schöllmann. A Figura 4.27 apresenta um comparativo entre os caminhos de propagação obtidos para a malha 3 considerando os dois critérios de propagação e também o caminho de propagação para as análises planas via MEC dual e Franc2D (Andrade, 2017).



**Figura 4.27** Caminhos de propagação: (a) Critério da máxima taxa de liberação de energia (b) Critério de Schöllmann (c) MEC dual 2D (ANDRADE, 2017) (d) Franc2D (ANDRADE, 2017).

Note a semelhança entre os caminhos de propagação obtidos para as quatro análises. Tal resultado reforça o fato de que tanto o critério da máxima taxa de liberação de energia quanto o critério de Schöllmann são capazes de reproduzir os critérios de modo misto planos (I/II) nos casos em que  $K_{III}$  é muito próximo de zero. Além disso, note que apesar do remalhamento de borda da análise tridimensional ser consideravelmente mais simples do que o remalhamento da análise plana via elementos finitos, as respostas dos caminhos de propagação foram semelhantes. Isso se deve ao fato de que na formulação MEC dual 3D os parâmetros de fratura são calculados a partir dos deslocamentos dos elementos das superfícies das fissuras. Dessa maneira, elementos consideravelmente distorcidos que surgem devido ao remalhamento de borda simplificado não alteram significativamente a resposta de propagação.

Os históricos dos FIT  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do comprimento da fissura,  $a$ , obtidos para as três malhas com o critério da máxima taxa de liberação são comparados com os históricos obtidos nas análises planas de Andrade (2017) nos gráficos ilustrados na Figura 4.28.

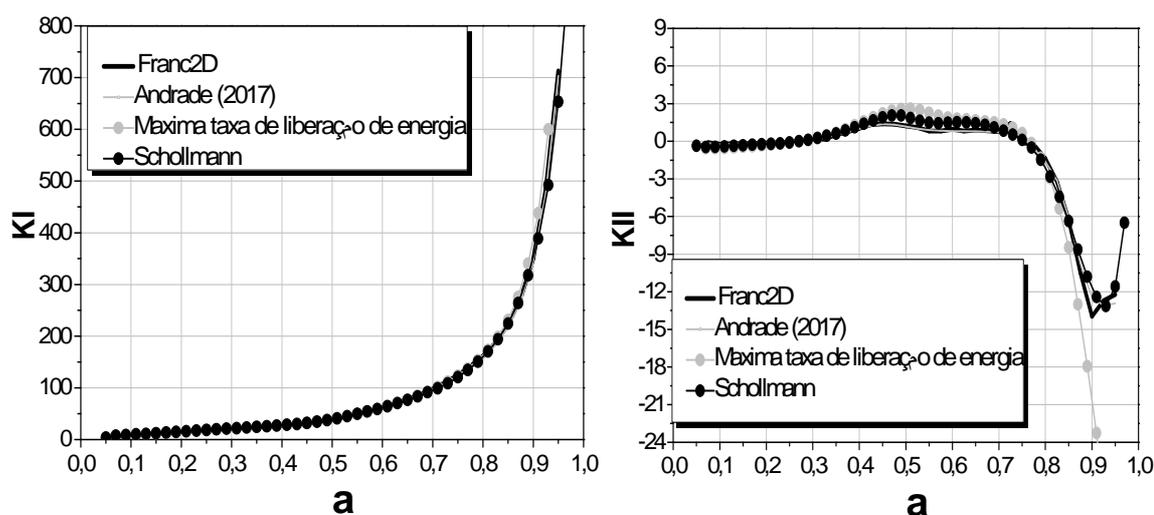


**Figura 4.28** Histórico dos FIT  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do comprimento da fissura,  $a$ , para o critério da máxima taxa de liberação de energia.

Conforme é possível observar, as respostas numéricas de  $K_I$  e  $K_{II}$  das análises 3D convergem para as soluções de referência. Note que para a Malha 1, as respostas semelhantes no início da análise se tornam bem discrepantes à medida que a fissura propaga. Sendo assim, fica evidente a necessidade de um refinamento local nos contornos livres próximos à região de propagação das fissuras de borda. Já a Figura 4.29 ilustra os históricos dos FIT  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do comprimento da fissura,  $a$ , obtidos com a malha 3 para os dois critérios de propagação e também os históricos das análises planas. Note que para  $K_I$  todos os modelos

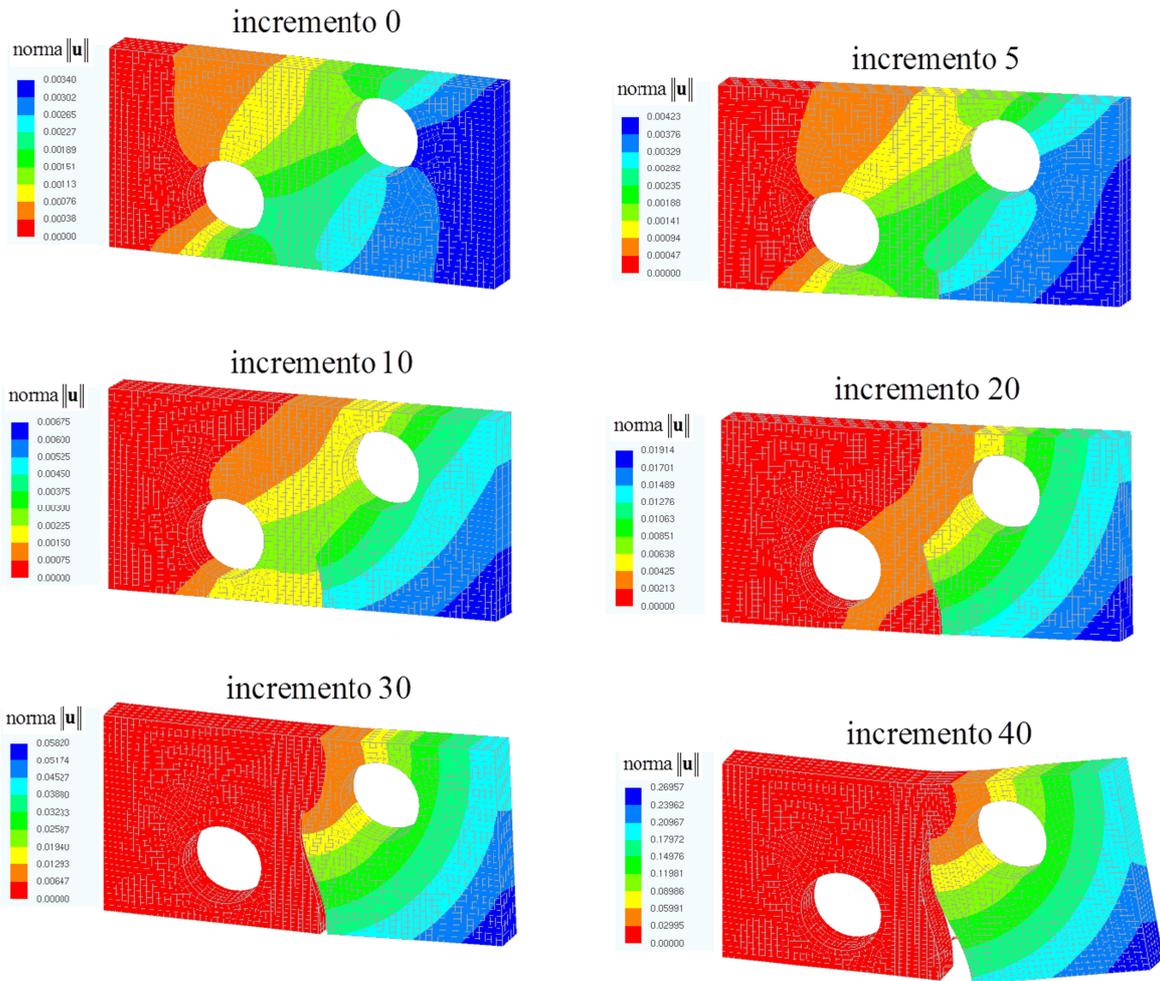
apresentaram resultados semelhantes. Já no caso de  $K_{II}$  ambos os critérios tridimensionais produziram resultados semelhantes aos das análises bidimensionais até próximo ao final da propagação. A partir de  $a = 0,85$  (unidades de comprimento) o critério da máxima taxa de liberação de energia diferiu dos resultados das demais análises.

As pequenas discrepâncias observadas entre os modelos podem ser justificadas principalmente por dois fatores: (i) Os FIT das análises 3D são obtidos com a Técnica de Extrapolação de Deslocamentos (TED) visando reduzir o tempo de processamento. Já nos problemas planos os FIT são calculados a partir da integral-J, a qual é uma técnica reconhecidamente mais precisa do que a correlação de deslocamentos; (ii) Os pontos de avaliação dos FIT nas análises 3D foram adotados como sendo pontos no interior da espessura da chapa, que nesse caso não é mais tratada como um problema plano de tensão. Sendo assim, é de se esperar que as respostas não sejam exatamente iguais às das análises planas. Apesar dessas discrepâncias, os resultados apresentados na Fig. 4.29 são satisfatórios.



**Figura 4.29** Histórico dos FIT  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do comprimento da fissura  $a$ .

Por fim a Figura 4.30 apresenta a norma do vetor deslocamento,  $\|\mathbf{u}\|$ , para alguns passos intermediários de propagação da fissura para a malha 3. Note que à medida que a fissura se desenvolve a descontinuidade do campo de deslocamento fica mais evidente e, ao final da análise, a porção material à esquerda da fissura não apresenta mais deslocamentos expressivo.

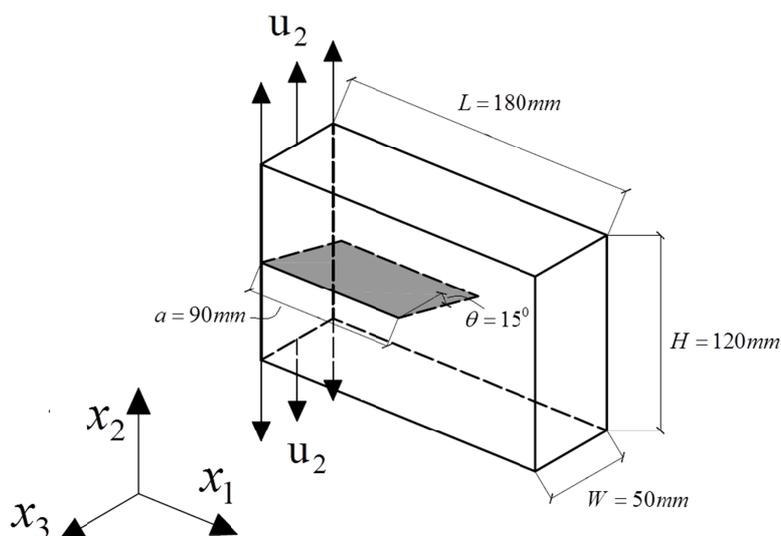


**Figura 4.30** Norma do vetor de deslocamento para alguns passos intermediários da propagação.

Perceba que nesse exemplo o modelo numérico tridimensional de elementos de contorno não é “estanque”. Isso ocorre devido às discretizações não conformes nas regiões dos furos e devido à propagação em modo misto da fissura.

#### 4.5.4 Propagação em modo misto I/II/III.

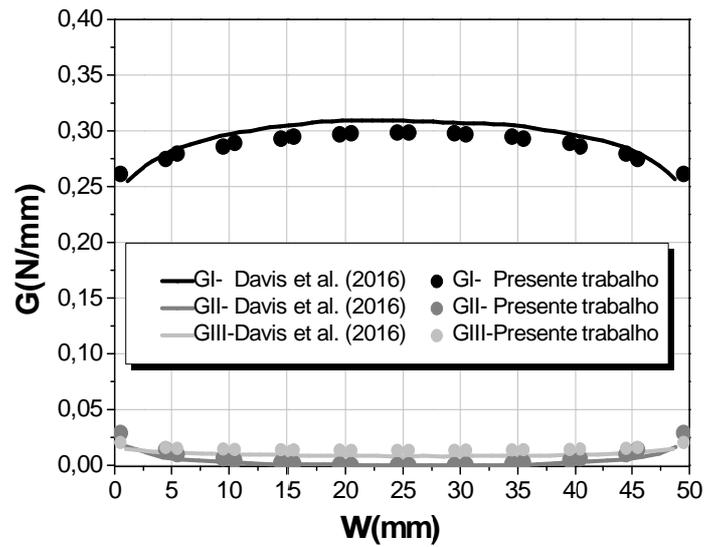
O último exemplo é dedicado à análise de propagação em modo misto I/II/III. A Figura 4.31 ilustra a geometria do problema e as condições de contorno. O problema foi recentemente analisado em elementos finitos a partir de uma formulação variacional de propagação proposta por Davis et. al. (2016) na qual os incrementos de fissura não são prescritos, mas sim aproximados por funções base cujos respectivos coeficientes são determinados recorrendo-se ao diferencial da taxa de liberação de energia. As constantes elásticas do problema são definidas como  $E = 700MPa$  e  $\nu = 0,1$ . A fissura inicial foi disposta rotacionada em  $15^\circ$  com relação ao eixo conforme ilustra a Fig. 4.31.



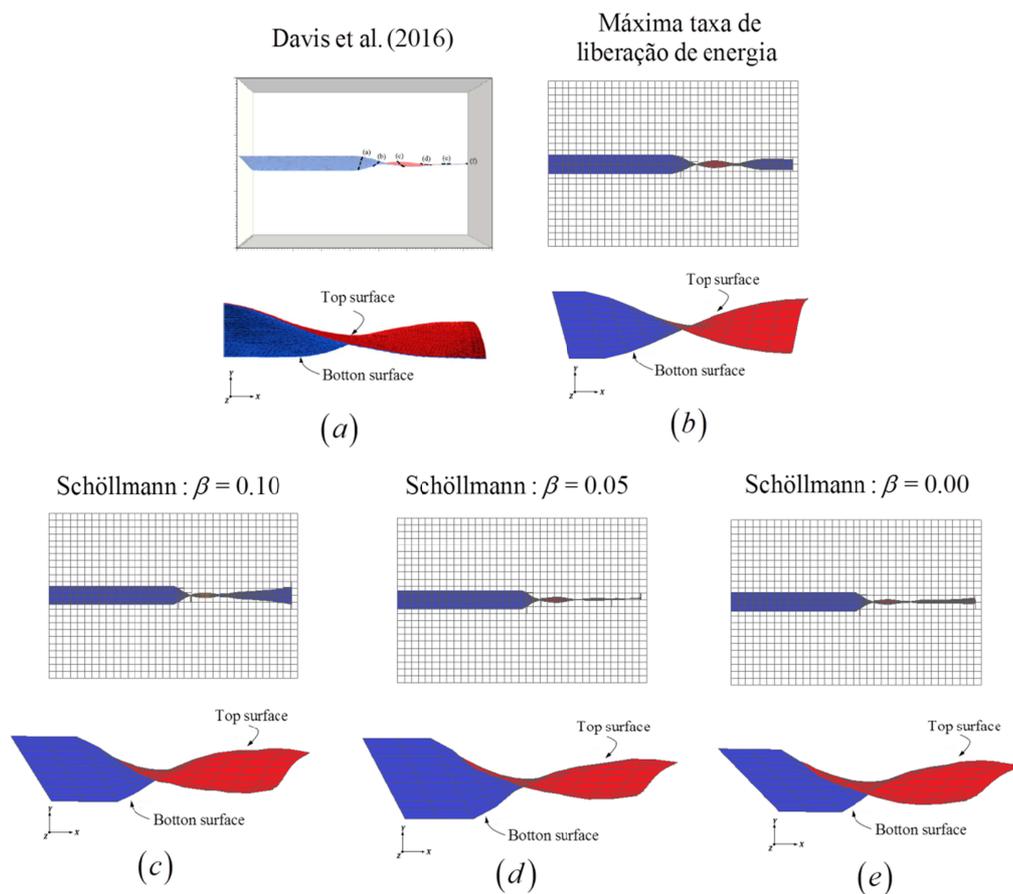
**Figura 4.31** Problema da fissura inclinada em  $15^{\circ}$ .

O deslocamento total imposto foi  $u_2 = 1,9\text{mm}$ . O modelo numérico inicial adotado no presente trabalho é composto por 3264 elementos quadrilaterais de aproximação linear, totalizando 4699 pontos de colocação. As respostas das taxas de liberação de energia  $G_I$ ,  $G_{II}$  e  $G_{III}$  ao longo espessura do problema, obtidas a partir dos FIT extraídos via TED, são comparadas com as do trabalho de Davis et al. (2016) para a configuração inicial antes da propagação conforme ilustra a Figura 4.32. Note que o modo I é o modo predominante. Mesmo assim, há uma influência consistente do modo III ao longo da linha de frente da fissura bem como uma contribuição do modo II nas proximidades das superfícies de contorno livre.

Observando análises de propagação similares existentes na literatura, como o problema da fissura inclinada sob flexão em três pontos (GRAVOUIL et. al.2002; LAZARUS et. al. 2008), espera-se que a fissura cresça de maneira torcida em relação ao seu eixo e gire de volta para uma configuração plana no plano  $x_1 - x_3$ . No presente trabalho, a propagação é simulada impondo-se 25 incrementos de fissura para os quais se adota  $\Delta a^{\text{máx}} = 3,6\text{mm}$ . Nas análises de propagação, a TED foi fixada para a extração dos FIT e os dois critérios de propagação, i.e., critério da máxima taxa de liberação de energia e critério de Schöllmann, foram adotados. A Figura 4.33 apresenta a superfície da fissura obtida por Davis et al. (2016) e as obtidas no presente trabalho considerando o critério da máxima taxa de liberação de energia e o critério de Schöllmann para três diferentes valores para o parâmetro  $\beta$ , i.e.,  $\beta = 0,10$ ,  $\beta = 0,05$  e  $\beta = 0,00$ .



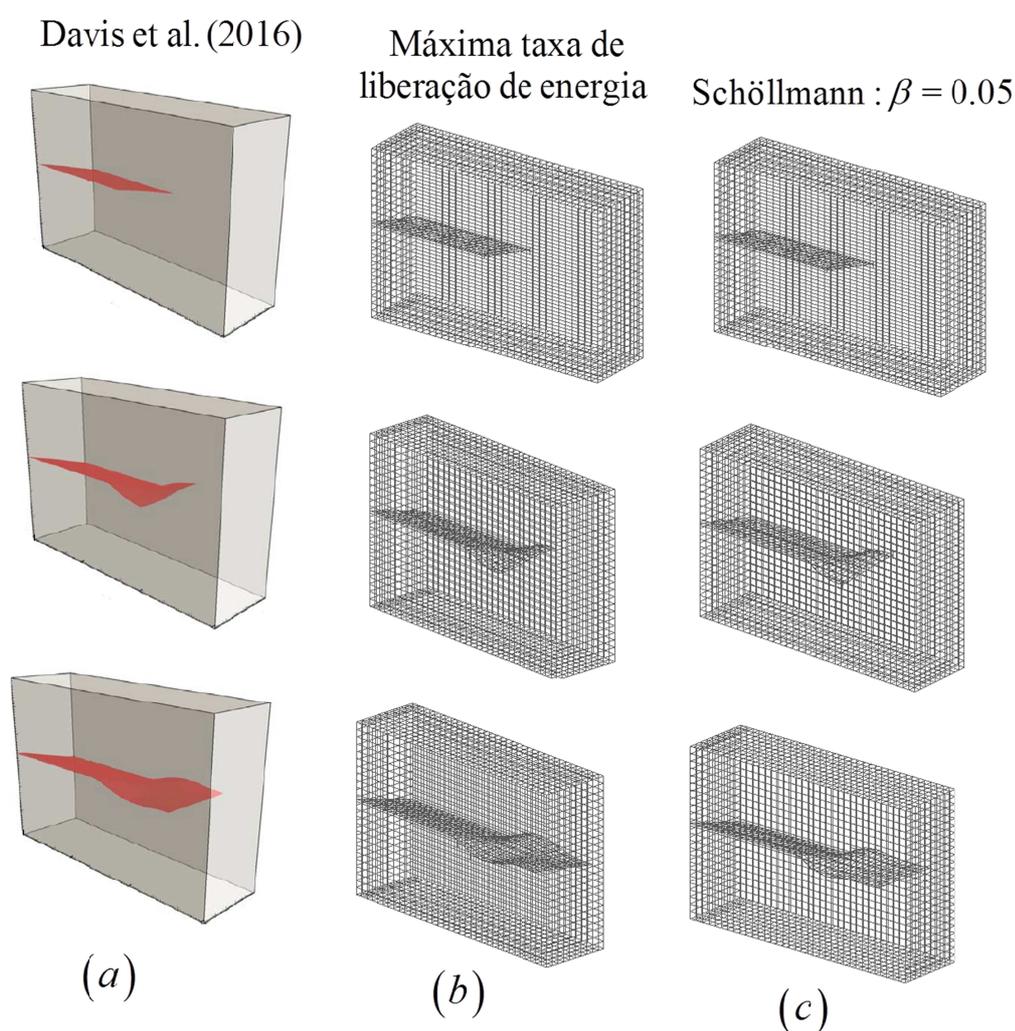
**Figura 4.32** Resultados de taxas de liberação de energia:  $G_I$ ,  $G_{II}$  e  $G_{III}$  -



**Figura 4.33** Propagação em modo misto I/II/III: (a) Davis et. al. (2016); (b) Critério da máxima taxa de liberação de energia (c), (d) (e) Critério de Schöllmann para  $\beta = 0,10$ ,  $\beta = 0,05$  e  $\beta = 0,00$  .

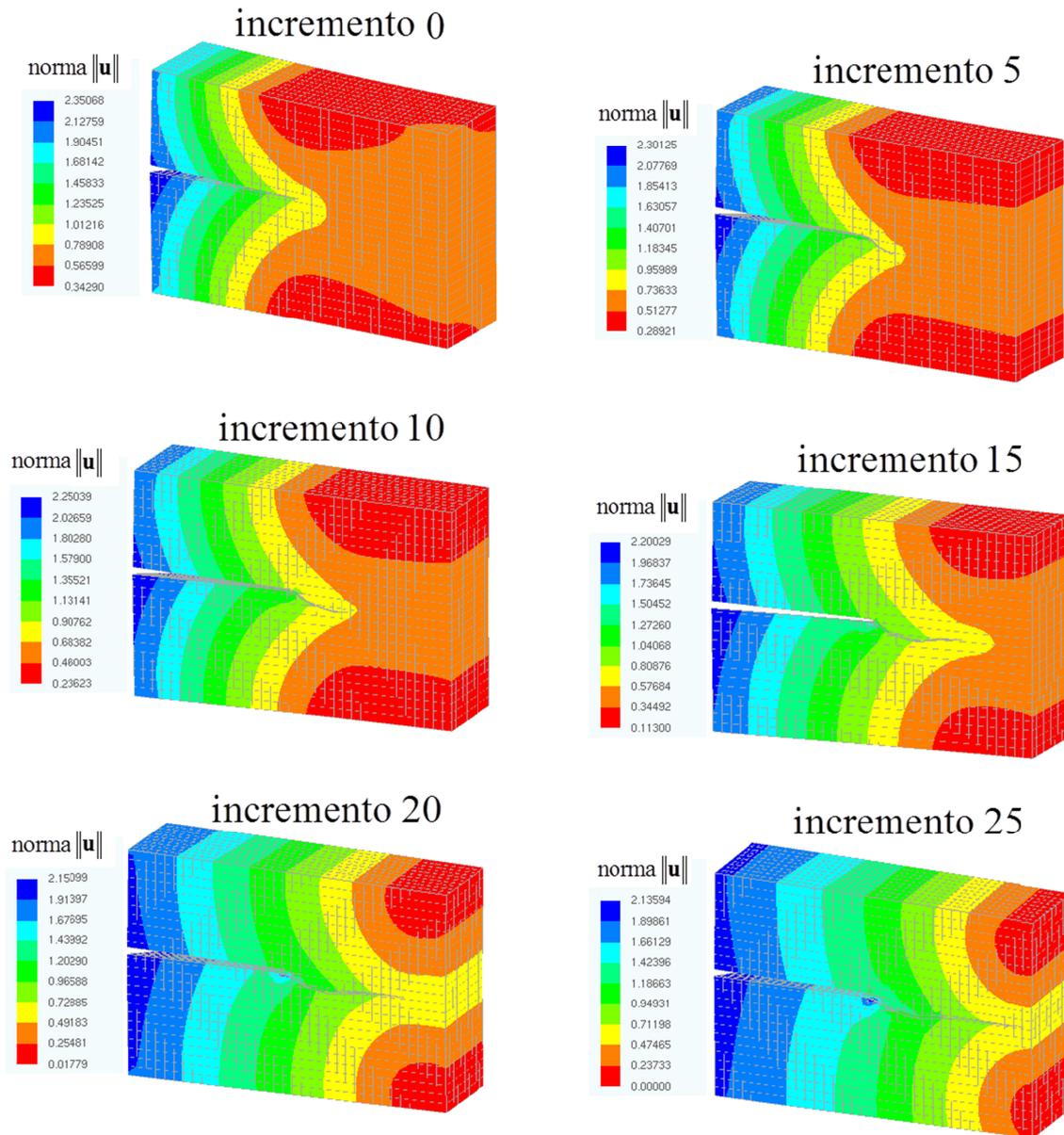
Note que com o critério da máxima taxa de liberação de energia a fissura não gira de volta para o plano  $x_1 - x_3$ , i.e., não chega a retornar para uma propagação em modo I puro. Já

para o critério de Schöllmann as respostas foram mais condizentes com relação à solução esperada a depender do parâmetro  $\beta$  adotado, sendo que o melhor resultado foi obtido para  $\beta = 0,05$ . A Figura 4.34 apresenta a evolução da superfície de fissura para os modelos de Davis et. al; 2016, do critério da máxima taxa de liberação de energia e do critério de Schöllmann com  $\beta = 0,05$ . Por fim a Figura 4.35 apresenta a norma do vetor deslocamento,  $\|\mathbf{u}\|$ , para alguns passos intermediários de propagação da fissura. Note os deslocamentos são consistentes e que a descontinuidade é observada. Note ainda que a descontinuidade do campo de deslocamento evolui à medida que a fissura propaga.



**Figura 4.34** Evolução da superfície de fissura: (a) Davis et. al. (2016); (b) Critério da máxima taxa de liberação de energia; (c) Critério de Schöllmann para  $\beta = 0,05$ .

Nesse último exemplo, apesar do modelo numérico inicial ser “estanque”, à medida que a fissura se propaga em modo misto, lacunas surgem nas interseções curvas das superfícies da fissura com as do contorno do problema, tornando o modelo não “estanque”.



**Figura 4.35** Norma do vetor deslocamento para alguns passos intermediários da propagação.

Com esse exemplo considera-se validado o algoritmo incremental de propagação de fissuras em modo misto bem como os dois critérios de propagação. A partir do capítulo seguinte inicia-se o estudo dos problemas de fadiga tendo por base a ferramenta computacional desenvolvida.

## 5 Fadiga baseada na mecânica da fratura elástica linear

---

A propagação de fissuras em regime de fadiga é um problema de natureza aleatória e de grande importância na engenharia. A grande maioria das equações que descreve a propagação de fissuras em regime de fadiga é baseada na observação do fenômeno físico e em extensivos ensaios dos materiais. Essas equações são de vital importância para projetos de engenharia de estruturas nos quais a determinação da vida útil à fadiga é necessária. Alguns exemplos dessas estruturas incluem pontes, motores, navios, plataformas marítimas, aviões e foguetes.

No domínio da fadiga, o termo vida útil é empregado para referenciar o número de ciclos de carregamento/descarregamento que uma estrutura pode ser submetida antes da ocorrência de sua falha. A vida útil de uma estrutura pode ser dividida de acordo com a evolução do processo de degradação mecânica que a mesma está sujeita. Em uma primeira fase, micro descontinuidades internas, inerentes à estrutura dos materiais, podem crescer e nuclear uma fissura de maiores dimensões. Após a fase da nucleação, a macro fissura propaga até a ocorrência da falha do componente estrutural ou ainda da estrutura como um todo. Enquanto a fase de nucleação, em materiais dúcteis, é governada pelo escorregamento das bandas de cristais da microestrutura do material, e conseqüentemente pelas tensões de cisalhamento nessas interfaces, na fase de propagação as tensões normais apresentam maior importância, uma vez que são estas que fazem com que as faces da fissura abram. A fase de propagação termina quando a fissura atinge uma dimensão grande o bastante, denominada dimensão crítica, onde o processo de fadiga dá lugar à propagação instável da fissura e conseqüentemente à fratura material.

A fadiga dos materiais normalmente é dividida em duas classes: Fadiga de baixo ciclo e fadiga de alto ciclo. Na primeira classe enquadram-se os problemas onde estão presentes elevados níveis de tensão, frequentemente maiores que o limite elástico do material, e pequena vida útil estrutural, em geral menos que 1000 ciclos de carregamento/descarregamento. Embora tenha aplicação na indústria de conformação de metais, a fadiga de baixo ciclo é pouco utilizada em projetos de engenharia pelo fato da mesma assumir que a estrutura estará submetida a um estado de tensão muito próximo ao seu colapso.

Por outro lado, a fadiga de alto ciclo envolve carregamentos que induzem tensões no material que estão consideravelmente abaixo de seu limite elástico. Conseqüentemente, a

estrutura apresenta uma vida útil longa podendo ser até muito superior à vida de um ser humano. Na fadiga de alto ciclo, o processo de degradação mecânica devido aos carregamentos cíclicos pode ser mensurado por meio da variação da amplitude das tensões aplicadas. Devido ao baixo nível de tensão atuante nessa classe de fadiga, conclui-se que a zona inelástica existente na frente da fissura será pequena. Nesse contexto, os conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), apresentados no capítulo anterior, podem ser aplicados. Assim, a amplitude de variação das tensões pode ser considerada em termos da amplitude de variação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT). A fadiga de alto ciclo apresenta muitas aplicações no campo da engenharia de estruturas.

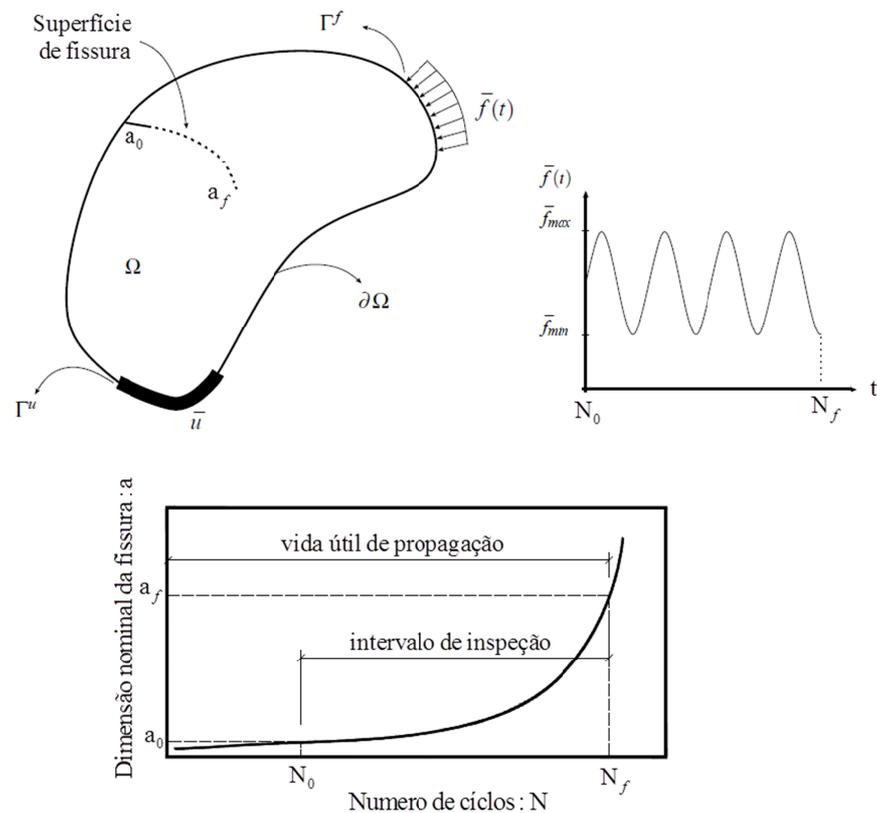
O foco do presente capítulo é a simulação da propagação de fissuras em sólidos tridimensionais no regime de fadiga de alto-ciclo. Sob uma ótica macroscópica, a fadiga de alto ciclo pode ser caracterizada como um fenômeno estático, no qual a propagação da fissura pode ser caracterizada pela MFEL (SANFORD, 2003). A formulação MEC dual, na qual apenas as superfícies da fissura e do contorno externo do sólido devem ser discretizadas, é adequada para as análises de propagação de fissuras no contexto da MFEL conforme discutido nos Capítulos 2 e 4. Acoplada ao gerador de malhas desenvolvido no Capítulo 3, tal formulação proporciona um contexto adequado para a criação eficiente de modelos de fadiga a partir de modelos geométricos complexos provindos de softwares de CAD. Tais características serão exploradas no decorrer desse capítulo para ilustrar a potencialidade da ferramenta computacional desenvolvida em aplicações de fadiga de alto ciclo.

## **5.1 Descrição do problema**

O problema da fadiga de alto ciclo pode ser representado por um sólido tridimensional elástico contendo uma superfície de fissura que, após repetitivos carregamentos cíclicos, aumenta suas dimensões estavelmente sem que necessariamente ocorra a ruptura do corpo. A Figura 5.1 ilustra esquematicamente o problema em questão.

Note que a hipótese da superfície de fissura aumentar de dimensões em regime elástico é claramente uma simplificação, a qual é aceitável no caso da fadiga de alto ciclo. De maneira geral, a fadiga é um processo de deterioração material que é difícil de ser precisamente quantificado ou modelado. É um fenômeno aleatório e praticamente todas as teorias existentes para seu tratamento são baseadas quase que inteiramente em observações do fenômeno físico ao invés de descritas em termos de leis da física e formulações matemáticas.

Dependendo do tipo de carregamento, do comportamento do material e das influências do ambiente, existem várias classes de comportamento à fadiga (SCHIJVE, 2001). No presente trabalho, o foco se concentra na fadiga isotérmica de alto ciclo devida a carregamentos mecânicos em sólidos homogêneos e isotrópicos. Nessas situações, os conceitos clássicos da MFEL podem ser aplicados em conjunto com leis empíricas de fadiga para determinar a vida útil de maneira eficiente. Outras simplificações dos problemas são carregamentos cíclicos com amplitude constante e a propagação da fissura é considerada em regime quase estático. Apesar da amplitude constante, admite-se a possibilidade de carregamentos alternados, i.e.,  $f_{máx} > 0$  e  $f_{mín} < 0$ , situação na qual o algoritmo de contato entre as faces da fissura apresentado no Capítulo 2 é utilizado.



**Figura 5.1** Descrição do problema da fadiga de alto ciclo e definição da vida útil de propagação.

### 5.1.1 Taxas de crescimento da fissura em fadiga

Um conceito importante para as análises de fadiga é o da taxa de crescimento das fissuras. Para o caso unidirecional, i.e., fissura plana se propagando em modo I, a taxa de crescimento da fissura por fadiga indica o quanto a fissura cresce por ciclo de

carregamento/descarregamento, sendo definida como a inclinação da curva que relaciona o comprimento da fissura ao número de ciclos. A taxa discreta de crescimento dos pontos de frente da fissura é caracterizada pela razão  $\Delta a/\Delta N$  sendo  $\Delta a$  o incremento observado em uma fissura de comprimento inicial  $a_0$  devido à ação de um número de ciclos de carregamento/descarregamento  $\Delta N$ . Quando essa taxa é avaliada no limite em que as variações tendem a zero, a taxa discreta passa a ser diferencial, ou seja, a razão torna-se  $da/dN$ .

Ao se aplicar um carregamento cíclico de amplitude constante, é usual definir a variação das tensões  $\Delta\sigma$  e a razão das tensões  $R$  como:

$$\Delta\sigma = \sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n} \quad (5.1)$$

$$R = \frac{\sigma_{m\acute{i}n}}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (5.2)$$

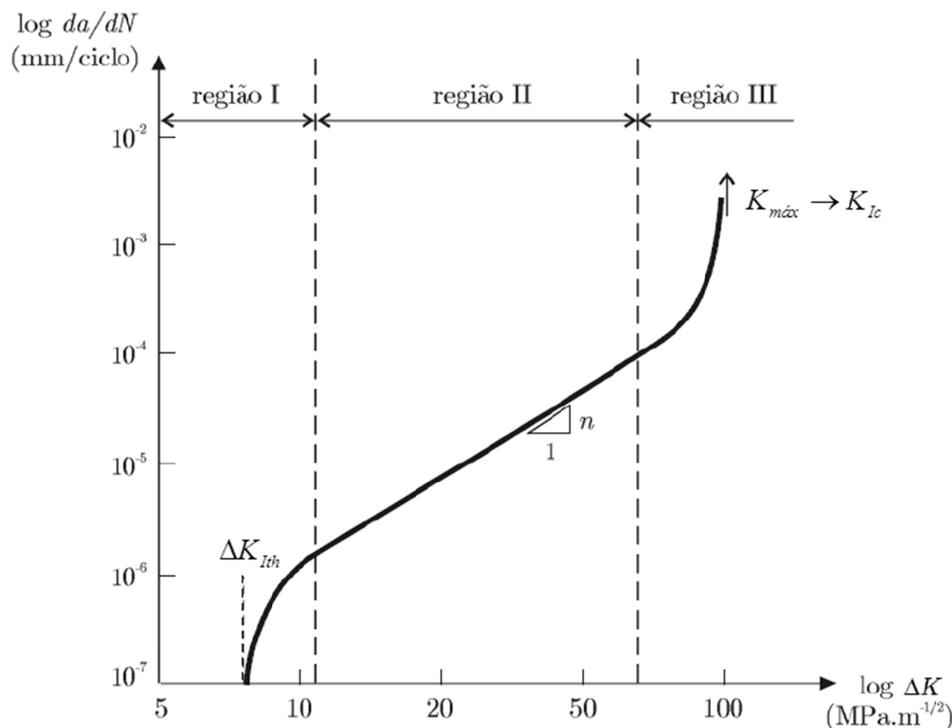
sendo  $\sigma_{m\acute{i}n}$  e  $\sigma_{m\acute{a}x}$ , respectivamente, a mínima e a máxima tensão atuante no sólido durante um ciclo de carregamento. Nos problemas de fadiga onde os conceitos da MFEL se aplicam, a variação das tensões na extremidade da fissura é mensurada por meio da variação dos FIT  $\Delta K$ :

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n} \quad (5.3)$$

em que  $K_{m\acute{a}x}$  e  $K_{m\acute{i}n}$  são, respectivamente, o máximo e o mínimo valor do FIT equivalente durante um ciclo de carregamento. Como a tensão e o FIT possuem relação linear, tem-se que:

$$R = \frac{\sigma_{m\acute{i}n}}{\sigma_{m\acute{a}x}} = \frac{K_{m\acute{i}n}}{K_{m\acute{a}x}} \quad (5.4)$$

Nos problemas de propagação de fissuras em regime de fadiga, a taxa de crescimento das fissuras  $da/dN$  é controlada pela variação do FIT  $\Delta K$ . Portanto, a propagação da fissura por fadiga pode ser caracterizada por meio de uma curva, em geral de forma sigmoideal quando desenhada em escala logarítmica, que relaciona  $da/dN$  a  $\Delta K$ . Essa curva é apresentada na Figura 5.2 e pode ser dividida em três regiões distintas de acordo com o fenômeno observado: iniciação (região I), propagação estável (região II) e propagação instável (região III) da fissura.



**Figura 5.2** Curva de fadiga: Taxa de crescimento  $da/dN$  versus variação dos FIT  $\Delta K$ .

Para níveis baixos de amplitude de variação dos FIT, região I, a macro fissura, geralmente de pequeno comprimento, propaga devido ao crescimento e à acomodação de microfissuras à sua frente. Nessa parte da vida útil estrutural a degradação mecânica é governada pelo escorregamento dos cristais que formam a estrutura interna do material. Devido ao rápido crescimento das fissuras nesta região, sua contribuição para a vida útil à fadiga é normalmente desprezada. Nesta região pode-se definir como sendo o limiar de propagação um valor específico de variação dos FIT denominado  $\Delta K_{Iti}$ . Esse valor pode ser interpretado como sendo o valor de  $\Delta K$  abaixo do qual não ocorre propagação da fissura ou a taxa de crescimento é tão pequena que possa ser desprezada. Normalmente, seu valor é definido como a variação  $\Delta K$  que provoca uma taxa de crescimento da fissura menor ou igual a  $10^{-10}$  m/ciclo.

Na região II, crescimento estável, a curva sigmoideal é praticamente linear e a fissura propaga de maneira estável. Nesta parte da vida útil estrutural, as tensões normais atuantes no material apresentam maior importância, já que serão estas tensões que farão com que as faces da fissura se abram. Em geral, a maior parte do número de ciclos de carga que define a vida útil total da estrutura está associada a essa região da curva, i.e., é nessa região que a estrutura

passa a maior parte de sua vida útil. Portanto, é na região II que está baseada a grande maioria dos modelos de análises e previsão da vida útil estrutural.

Já na região III, crescimento instável, as taxas de propagação são extremamente elevadas e  $K_{máx}$  tende a um valor próximo a  $K_{Ic}$ , i.e., tenacidade à fratura. Portanto,  $K_{máx}$  tende ao valor do FIT a partir do qual o fenômeno da propagação estável por fadiga dá lugar à propagação instável da fissura, ou seja, à fratura frágil. Em muitas situações, considera-se que quando a estrutura alcança a região III o problema deixa de ser de fadiga e passa a ser de fratura, ou seja, o número de ciclos na região III antes da falha estrutural é desprezível perto da vida útil à fadiga.

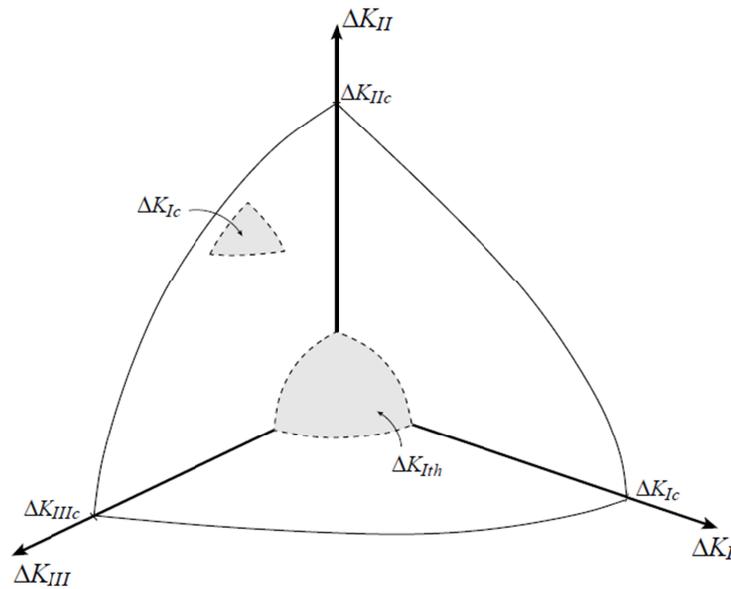
Deve-se ainda mencionar que a atuação de sobrecargas inesperadas retarda o crescimento de fissuras em fadiga. Tal fato ocorre, pois a sobrecarga inesperada gera estados de tensão na frente da fissura diferentes daqueles provocados pelo carregamento cíclico. Assim, os cristais da microestrutura do material na zona de processos se organizam de maneira diferente à tendência proporcionada dos carregamentos cíclicos. Portanto, para que a fissura volte a crescer por fadiga, o carregamento cíclico deve reorganizar os cristais do material de forma que as micro descontinuidades cresçam novamente ao longo dos planos de fraqueza.

### 5.1.2 Envoltórias limites da propagação estável

No caso geral, fissuras submetidas a carregamentos em modo misto também propagam estavelmente em regime de fadiga até que o FIT equivalente máximo atinja a tenacidade à fratura (Schollmann et al., 2003; Richard et al, 2005). Em problemas tridimensionais, o FIT equivalente  $K_{eq}$  deve considerar os três modos de fratura. Nesse caso, é possível definir envoltórias que caracterizem os limites inferior e superior do crescimento estável das fissuras, conforme ilustra a Figura 5.3. O crescimento estável de superfícies de fissuras solicitadas em modo misto ocorre sob a seguinte condição:

$$\Delta K_{Ith} < \Delta K_{eq} < \Delta K_{Ic} \quad (5.5)$$

em que  $\Delta K_{Ith}$  é o limite inferior e  $\Delta K_{Ic} = (1 - R) K_{Ic}$  é o limite superior para o crescimento estável da fissura, sendo a tenacidade à fratura  $K_{Ic}$ .  $\Delta K_{eq} = K_{eq}^{máx} - K_{eq}^{\min}$  é a variação do FIT equivalente para um ciclo de carregamento.



**Figura 5.3** Envoltórias limites da propagação estável: Pontos entre as superfícies  $\Delta K_{IIIh}$  e  $\Delta K_{Ic}$  resultam a propagação estável da fissura (Schollmann et al., 2003; Richard et al, 2005).

Conforme discutido no Capítulo 4, a definição do FIT equivalente,  $K_{eq}$ , depende do critério de propagação adotado. Conseqüentemente as envoltórias de propagação estável também dependem do critério adotado. Para o critério da máxima taxa de liberação de energia a expressão da variação do FIT equivalente é dada por:

$$\Delta K_{eq} = \sqrt{\frac{4}{k+1} \cos^2 \theta \left\{ \frac{k+1}{8} \left[ \Delta K_I^2 (1 + \cos \theta) - 4 \Delta K_I \Delta K_{II} \sin \theta \right] + \Delta K_{III}^2 \right\}} \leq \Delta K_{Ic} \quad (5.6)$$

Já para o critério de Schollmann a expressão da variação do FIT equivalente é dada por:

$$\Delta K_{eq} = \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\theta_p}{2} \right) \left\{ \Delta K_I \cos^2 \left( \frac{\theta_p}{2} \right) - \frac{3}{2} \Delta K_{II} \sin(\theta_p) \right. \\ \left. + \sqrt{\left[ \Delta K_I \cos^2 \left( \frac{\theta_p}{2} \right) - \frac{3}{2} \Delta K_{II} \sin(\theta_p) \right]^2 + 4 \Delta K_{III}^2} \right\} \leq \Delta K_{Ic} \quad (5.7)$$

Note que as expressões 5.6 e 5.7 são equivalentes às expressões 4.22 e 4.25 do Capítulo 4 trocando  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  e  $K_{eq}$  por  $\Delta K_I$ ,  $\Delta K_{II}$  e  $\Delta K_{III}$  e  $\Delta K_{eq}$ . As envoltórias limites de propagação são necessárias para prever o avanço da frente da fissura e a determinação da vida útil à fadiga em simulações de propagação em modo misto.

### 5.1.3 Determinação da vida útil à fadiga.

A taxa de crescimento  $da/dN$  para um ponto  $\mathbf{x}$  sobre a linha de frente da fissura é uma função complexa de várias variáveis. Experimentos laboratoriais em modo I de fratura e observações de estruturas sob carregamentos de serviço tem demonstrado que a taxa de crescimento é função do comprimento da fissura  $a$ , da variação do estado de tensão  $\Delta\sigma$ , de parâmetros materiais  $C, m$  e de parâmetros que contabilizam os efeitos térmicos  $T$  e ambientais  $\beta$  (Sobczyk & Spencer, 1992). Portanto, a taxa de crescimento da fissura pode ser caracterizada por uma equação não linear da seguinte forma.

$$\frac{da}{dN} = f(a, \Delta\sigma, C, m, T, \beta) \quad (5.8)$$

Existem várias equações empíricas para determinar a taxa de crescimento de fissuras em regime de fadiga para as quais todos os efeitos mencionados anteriormente podem ser contabilizados. Muitas delas descrevem os efeitos de  $a$  e  $\Delta\sigma$  em termos da variação do FIT equivalente  $\Delta K_{eq}$ . No presente trabalho, adota-se a equação de Paris-Erdogan (Paris & Erdogan, 1963) para a determinação das taxas de crescimento da fissura.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^m \quad (5.9)$$

em que  $C$  e  $m$  são considerados como constantes materiais e  $\Delta K_{eq}$  é o FIT equivalente. A Equação 5.9 pode ser aplicada de maneira eficiente para a determinação da vida útil em problemas de fadiga mecânica isotérmica cujas taxas de crescimento enquadrem-se na região II da curva da Fig. 5.2. A equação empírica 5.9 pode ser utilizada para determinar a vida útil à propagação, i.e., número de ciclos necessários para fazer a fissura crescer da configuração inicial até a configuração final, uma vez que a região II compreende, em muitos casos, à maior parcela da vida útil das estruturas. Integrando a Eq. 5.9 é possível determinar o número de ciclos necessários para fazer a fissura crescer de um comprimento inicial  $a_0$  até o comprimento final  $a_f$ :

$$\int_{N_0}^{N_f} dN = N_f - N_0 = N_{prop} = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{C(\Delta K_{eq}(a))^m} \quad (5.10)$$

em que  $N_{prop}$  é o número de ciclos ou vida útil da propagação da fissura. O número de ciclos total que caracteriza a vida útil à fadiga,  $N_{Total}$ , é dado pela soma do número de ciclos estimados para a nucleação da fissura,  $N_{nucl}$ , com o número de ciclos da propagação,  $N_{prop}$ .

Assim:

$$N_{Total} = N_{nucl} + N_{prop} \quad (5.11)$$

Para determinar o número de ciclos da propagação,  $N_{prop}$ , é necessário conhecer a relação entre o FIT equivalente  $\Delta K_{eq}$  e o comprimento característico da fissura  $a$  para o problema em questão. Note que a obtenção dessa relação não é uma tarefa simples para a grande maioria dos problemas, especialmente no caso tridimensional. Nos casos em que expressões para  $\Delta K_{eq}(a)$  são conhecidas, é possível calcular analiticamente o número de ciclos da propagação por meio da integração da expressão 5.10. No entanto, apenas problemas extremamente simples, geralmente relacionados à propagação em modo I de fissuras planas, permitem a obtenção de uma expressão analítica para  $\Delta K_{eq}(a)$ . No caso geral de propagação em modo misto em problemas tridimensionais, a melhor alternativa é recorrer aos métodos numéricos, como o MEC dual ou o MEFÉ.

Para os problemas tridimensionais, a equação de Paris-Erdogan pode ser reescrita como (Richard et al., 2005):

$$\frac{da}{dN}(\mathbf{x}) = C (\Delta K_{eq}(\mathbf{x}))^m \quad (5.12)$$

em que  $\frac{da}{dN}(\mathbf{x})$  e  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x})$  são a taxa de crescimento e o FIT equivalente calculados para um ponto  $\mathbf{x}$  sobre a linha de frente da fissura. Vale ressaltar que a equação de Paris-Erdogan é baseada em observações experimentais em modo I. No entanto, pode-se estender a análises para problemas em modo misto de propagação, uma vez que a ordem de grandeza dos FIT  $\Delta K_{II}$  e  $\Delta K_{III}$  é geralmente bem menor que a do  $\Delta K_I$ . Tal fato justifica o uso corrente de modelos empíricos em modo I para análises de propagação de fissuras em modo misto.

No intuito de determinar numericamente a relação entre  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)$  e o comprimento característico  $a(\mathbf{x}_j)$  para cada um dos pontos discretos  $\mathbf{x}_j$  sobre a linha de frente da fissura

dos problemas tridimensionais numéricos, recorre-se às análises incrementais de propagação de fissuras discutidas no Capítulo 4.

Nesse caso, para cada passo incremental de propagação da superfície da fissura, calcula-se o número de ciclos necessário para a fissura evoluir da configuração atual  $i$  para a configuração  $i+1$  após o passo incremental, ie,  $\Delta N^{(i+1)}$ . Acumulando os valores  $\Delta N^{(i+1)}$ , calculados a cada passo incremental de propagação, obtêm-se o número de ciclos da propagação da fissura,  $N_{prop}$ .

$$N_{prop} = N_{prop} + \Delta N^{(i+1)} \quad (5.13)$$

A análise encerra quando, em algum passo incremental, o máximo valor de  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)$  dos pontos discretos  $\mathbf{x}_j$  sobre a frente da fissura atingir a envoltória limite superior da propagação estável, i.e.,  $\Delta K_{lc}$ . No presente trabalho, assume-se a hipótese de que se para algum ponto  $\mathbf{x}_j$  sobre a frente da fissura o valor de  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)$  superar o limite inferior de propagação estável, i.e.,  $\Delta K_{th}$ , toda a frente da fissura é estendida com incrementos  $\Delta a(\mathbf{x}_j)$ . Caso contrário, considera-se que não ocorre a propagação da fissura.

A resposta incremental numérica para  $N_{prop}$ , teoricamente, converge à medida que o número de passo incrementais impostos para a propagação aumenta. No entanto, para incrementos muito pequenos em relação às dimensões do modelo, erros numéricos nas respostas de  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)$  podem afetar a convergência.

Para os modelos numéricos incrementais, é interessante reescrever a equação de Paris-Erdogan na sua forma discreta:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a(\mathbf{x})}{C(\Delta K_{eq}(\mathbf{x}))^m} \quad (5.14)$$

Para o ponto  $\mathbf{x}_j$  que resultar no maior valor de  $\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)$ , assume-se que o mesmo propaga um incremento igual ao máximo incremento prescrito para a análise, i.e.,  $\Delta a_{máx}$ . Os incrementos dos demais pontos podem ser obtidos recorrendo-se à equação 5.14, resultando em:

$$\Delta a(\mathbf{x}_j) = \Delta N^{(i+1)} C(\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j))^m = \frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C(\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x})^m} C(\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j))^m \quad (5.15)$$

$$\Delta a(\mathbf{x}_j) = \Delta a_{m\acute{a}x} \left( \frac{\Delta K_{eq}(\mathbf{x}_j)}{\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x}} \right)^m$$

Note que na definição 5.15 adotou-se:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C(\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x})^m} \quad (5.16)$$

Apesar de ser uma aproximação plausível para  $\Delta N^{(i+1)}$ , no presente trabalho opta-se por determinar os valores de  $\Delta N^{(i+1)}$  a partir de um procedimento apresentado por Andrade (2017), o qual resulta na convergência da vida útil à propagação,  $\Delta N_{prop}$ , com um menor número de incrementos de propagação em relação à 5.16.

De acordo com o procedimento, a equação discreta 5.16 é reescrita como:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C(\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x})^m} \quad (5.17)$$

Sendo  $\Delta a_{m\acute{a}x} = \Delta a(\mathbf{x}_j) = a^{(i+1)}(\mathbf{x}_j) - a^{(i)}(\mathbf{x}_j)$ , com  $i$  representando o número do incremento de propagação da fissura, e  $\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x}$  é um valor intermediário de variação do FIT equivalente em  $\mathbf{x}_j$ , situado entre as configurações  $a^{(i)}(\mathbf{x}_j)$  e  $a^{(i+1)}(\mathbf{x}_j)$ . O valor de  $\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x}$  é escolhido de modo a fornecer o valor procurado para  $\Delta N^{(i+1)}$ . Igualando a Eq. 5.17 à forma diferencial da equação de Paris (Eq. 5.12), obtém-se:

$$\frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C(\overline{\Delta K}_{eq}^{m\acute{a}x})^m} = \int_{a^{(i)}(\mathbf{x}_j)}^{a^{(i+1)}(\mathbf{x}_j)} \frac{da}{C\{\Delta K_{eq}[a(\mathbf{x}_j)]\}^m} \quad (5.18)$$

Note que o valor de  $\Delta K_{eq}[a(\mathbf{x}_j)]$  é considerado como uma função contínua entre  $a^{(i)}(\mathbf{x}_j)$  e  $a^{(i+1)}(\mathbf{x}_j)$ . Assumindo que o incremento  $\Delta a_{m\acute{a}x} = \Delta a(\mathbf{x}_j)$  seja suficientemente pequeno,  $\Delta K_{eq}[a(\mathbf{x}_j)]$  pode ser expresso como uma função linear de  $a(\mathbf{x}_j)$ .

$$\Delta K_{eq} \left[ a(\mathbf{x}_j) \right] = \beta a + \gamma \quad (5.19)$$

sendo  $\beta$  e  $\gamma$  constantes dadas por:

$$\beta = \frac{\Delta K_{eq}^{(i+1)}(\mathbf{x}_j) - \Delta K_{eq}^{(i)}(\mathbf{x}_j)}{\Delta a(\mathbf{x}_j)} \quad \gamma = \Delta K_{eq}^{(i)}(\mathbf{x}_j) - \beta a^{(i)}(\mathbf{x}_j) \quad (5.20)$$

em que  $\Delta K_{eq}^{(i)}(\mathbf{x}_j)$  e  $\Delta K_{eq}^{(i+1)}(\mathbf{x}_j)$  são os valores de variação do FIT equivalente em  $\mathbf{x}_j$  para os comprimentos  $a^{(i)}(\mathbf{x}_j)$  e  $a^{(i+1)}(\mathbf{x}_j)$ . Com base na Eq. 5.19 a Eq. 5.18 pode ser reescrita como:

$$\frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C \left( \overline{\Delta K_{eq}^{m\acute{a}x}} \right)^m} = \int_{a^{(i)}}^{a^{(i+1)}} (\beta a + \gamma) da \quad (5.21)$$

Integrando o segundo membro de 5.21 obtém-se:

$$\frac{\Delta a_{m\acute{a}x}}{C \left( \overline{\Delta K_{eq}^{m\acute{a}x}} \right)^m} = \left[ \frac{(\beta a + \gamma)^{1-m}}{(1-m)\beta} \right]_{a^{(i)}}^{a^{(i+1)}} \quad (5.22)$$

Impondo-se os limites de integração e substituindo as expressões de  $\beta$  e  $\gamma$  chega-se a uma expressão para  $\overline{\Delta K_{eq}^{m\acute{a}x}}$ :

$$\overline{\Delta K_{eq}^{m\acute{a}x}} = \frac{(1-m) \left( \Delta K_{eq}^{(i+1)} - \Delta K_{eq}^{(i)} \right)}{\left[ \left( \Delta K_{eq}^{(i+1)} \right)^{1-m} - \left( \Delta K_{eq}^{(i)} \right)^{1-m} \right]} \quad (5.23)$$

Finalmente, substituindo 5.23 na Eq. 5.17 chega-se a nova expressão para determinar  $\Delta N^{(i+1)}$ .

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a_{m\acute{a}x} \left[ \left( \Delta K_{eq}^{(i+1)} \right)^{1-m} - \left( \Delta K_{eq}^{(i)} \right)^{1-m} \right]}{C (1-m) \left( \Delta K_{eq}^{(i+1)} - \Delta K_{eq}^{(i)} \right)} \quad (5.24)$$

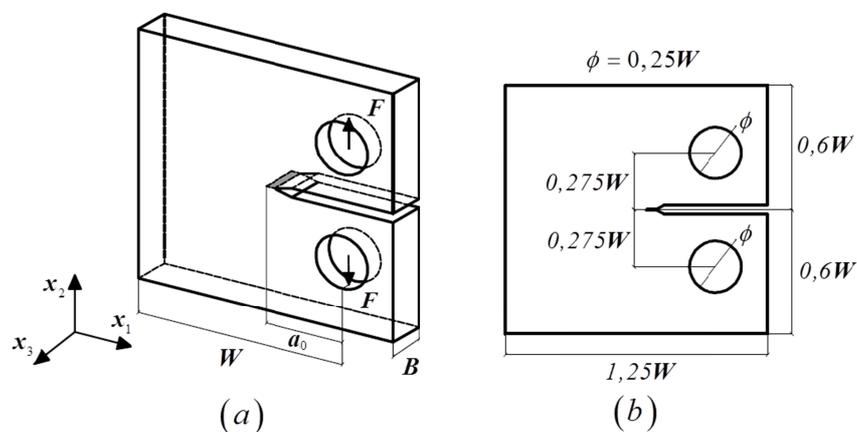
Portanto, os incrementos no número de ciclos são calculados a partir da Eq. 5.24 ao invés de utilizar diretamente a Eq. 5.16.

## 5.2 Aplicações de fadiga

Nesse tópico são apresentados quatro exemplos de Fadiga. O primeiro exemplo é o “Compact Tension Specimen” para o qual uma solução analítica para os FIT é conhecida. Nesse exemplo, foi possível avaliar a coerência do acoplamento do algoritmo de interpenetração das faces da fissura com o algoritmo de propagação. O segundo exemplo trata de um problema de propagação em modo misto I/II por fadiga em uma chapa não homogênea. Para esse exemplo, respostas numéricas de referência são conhecidas. Além disso, utiliza-se esse exemplo para testar o modelo de propagação de fissura em conjunto com a técnica de sub-regiões. O Terceiro exemplo é um problema de propagação em modo misto I/II/III para o qual soluções numéricas de referência também são conhecidas. O último exemplo trata da análise da vida útil de uma engrenagem, cuja geometria é proveniente de um arquivo IGES da comunidade *GrabCAD*, sujeita à propagação por fadiga de um defeito inicial.

### 5.2.1 Fadiga de um *Compact Tension Specimen*.

O primeiro exemplo de fadiga estudado trata do ensaio *Compact Tension Specimen*, descrito no código normativo ASTM 2000, e amplamente utilizado para a validação de análises numéricas de fratura e fadiga em metais. A Figura 5.4 apresenta as dimensões adotadas para o exemplo, as quais se encontram de acordo com as especificações da ASTM 2000. As constantes elásticas foram adotadas como  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0,33$ . Já as constantes da equação de Paris foram adotadas como:  $C = 10^{-12} (\text{N/mm}^2)^{-3} \text{ mm}^{-0,05} / \text{ciclo}$  e  $m = 3$ , as quais correspondem a uma liga de alumínio comumente utilizada em motores automotivos.



**Figura 5.4** *Compact Tension Specimen*: Dimensões de acordo com a ASTM 2000.

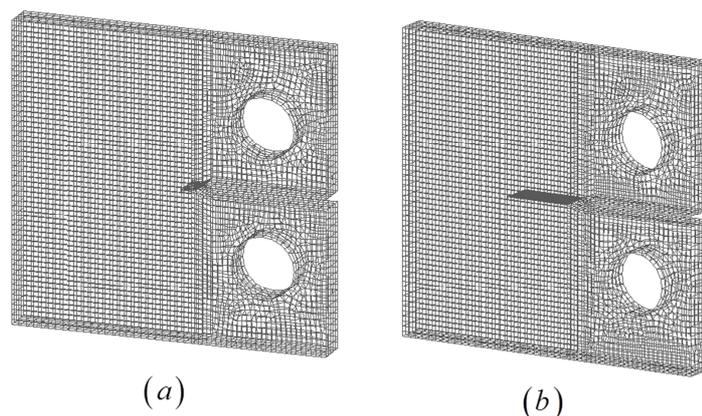
Conforme ilustrado, o problema se caracteriza a partir das dimensões  $W$ ,  $a_0$  e  $B$ , as quais foram adotadas como 70 mm, 23 mm e 6 mm, respectivamente. As forças concentradas foram impostas como forças de superfície no interior dos furos gerando forças resultantes verticais  $F$ . Em um primeiro momento, o carregamento cíclico é caracterizado pelos valores mínimo,  $F_{\min} = 0$ , e máximo,  $F_{\max} = 3730N$ , das forças verticais. De acordo com a ASTM 2000 e *Handbooks* como de Murakami (1987), uma solução analítica para a variação  $\Delta K_I$  do FIT pode ser expressa por:

$$\Delta K_I = \frac{\Delta F}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{w}\right) \left(0,866 + 4,64\left(\frac{a}{w}\right) - 13,32\left(\frac{a}{w}\right)^2 + 14,72\left(\frac{a}{w}\right)^3 - 5,6\left(\frac{a}{w}\right)^4\right)}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{3/2}} \quad (5.25)$$

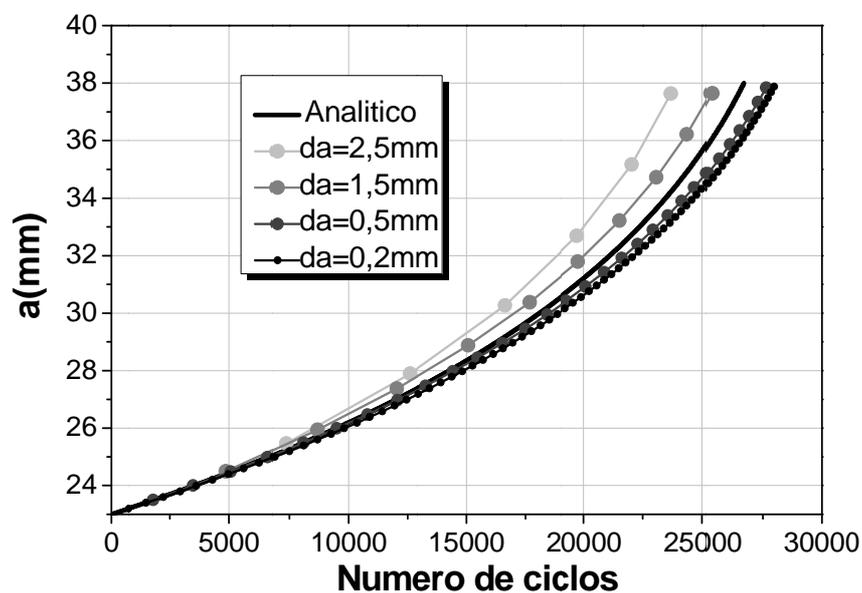
A expressão 5.25 é uma solução para o problema plano, e permanece aceitável para espessuras no intervalo  $W/20 \leq B \leq W/4$ . Com a expressão 5.25 para o cálculo de  $\Delta K_I$  é possível obter uma resposta analítica para a curva número de ciclos versus comprimento da fissura,  $a$ , a qual será utilizada como resposta de referência para as análises numéricas de fadiga.

O problema foi analisado numericamente com uma malha inicial de 6693 elementos de contorno quadrilaterais de aproximação linear, resultando em 8056 pontos de colocação, e que corresponde a um comprimento de fissura inicial  $a_0 = 23mm$  (Figura 5.5a). Note que como não houve a preocupação em se discretizar de maneira conforme as intersecções das superfícies nas arestas dos furos circulares, o modelo numérico não é “estanque”. Nesse exemplo, a propagação por fadiga ocorre em modo I. Quatro diferentes incrementos (máximos) de fissura foram prescritos para as análises da propagação:  $da = 2,5mm$ ,  $da = 1,5mm$ ,  $da = 0,5mm$  e  $da = 0,2mm$ . As análises de propagação foram avaliadas até um comprimento de fissura final  $a_f = 38mm$ . A Figura 5.5b apresenta a malha do problema após o incremento de número 75 da análise com  $da = 0,2mm$ . Na configuração final, o modelo resultou em 8207 elementos quadrilaterais de aproximação linear, totalizando 14112 pontos de colocação.



**Figura 5.5** Modelos numéricos: (a) malha inicial (b) malha final.

Os FIT numéricos foram extraídos a partir da técnica de correlação de deslocamentos, utilizando o segundo ponto de colocação do elemento da frente de fissura. As curvas numéricas de número de ciclos versus comprimento da fissura,  $a$ , obtidas a partir das análises com diferentes incrementos de fissura,  $da$ , foram comparadas com a curva analítica na Figura 5.6 de modo a evidenciar a convergência da vida útil do corpo de prova.

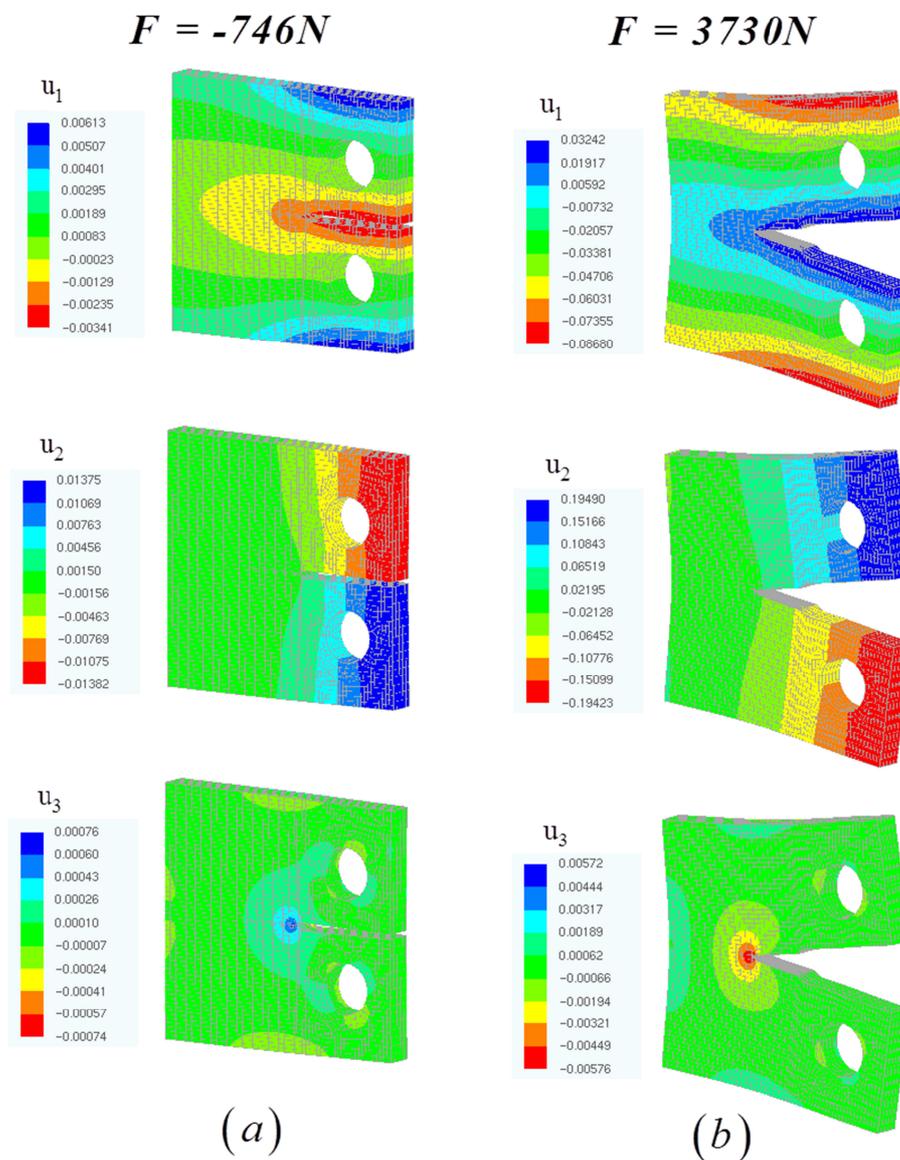


**Figura 5.6** Número de ciclos versus comprimento de fissura: Convergência numérica.

Note que, conforme o esperado, as respostas numéricas convergem à medida que os valores de incremento  $da$  diminuem. As discrepâncias entre o resultado numérico convergido e a resposta analítica da vida útil podem estar associadas a pequenos erros nos valores

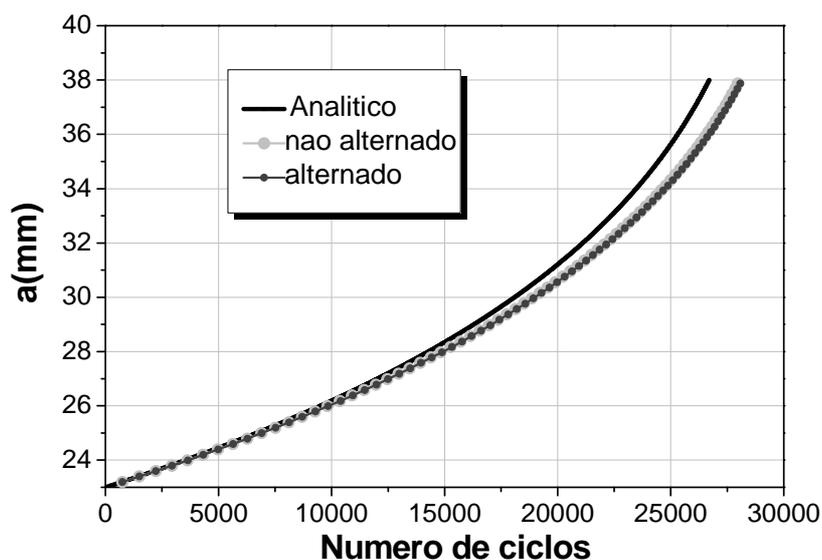
numéricos dos FIT, os quais foram elevados a um expoente  $m-1=2$  da equação de Paris e acumulados a cada iteração para o cálculo do número de ciclos.

O problema de fadiga também foi analisado para uma condição de carregamento alternada, na qual os valores mínimo e máximo das forças verticais foram adotados como  $F_{\min} = -746N$  e  $F_{\max} = 3730N$ . Nesse caso, o algoritmo de contato entre as faces da fissura é testado para evitar a interpenetração quando  $F = -746N$ . Apenas a análise com  $da = 0,2mm$  foi estudada, uma vez que a mesma já aparenta estar muito próxima da convergência numérica. A Figura 5.7 apresenta os deslocamentos e a deformada em escala 50 vezes ampliada do modelo final com  $a_f = 38mm$  para  $F = -746N$  e  $F = 3730N$ .



**Figura 5.7** Deslocamentos e deformada em escala 50 vezes ampliada: (a)  $F=-746N$  (b)  $F=3730N$ .

Note que, por se tratar de um problema solicitado em modo I puro, o modelo com carregamento alternado ( $F_{\min} = -746N$  e  $F_{\max} = 3730N$ ) deve resultar praticamente os mesmos valores de FIT equivalente  $K_{eq}$  do modelo com carregamento mínimo nulo ( $F_{\min} = 0$  e  $F_{\max} = 3730N$ ). Sendo assim, é possível avaliar a consistência do modelo de contato comparando a curva de vida útil da análise com carregamento mínimo nulo com a curva de vida útil da análise com carregamento alternado. A Figura 5.8 apresenta esse comparativo para o incremento prescrito  $da = 0,2mm$  e também a curva de vida útil analítica.



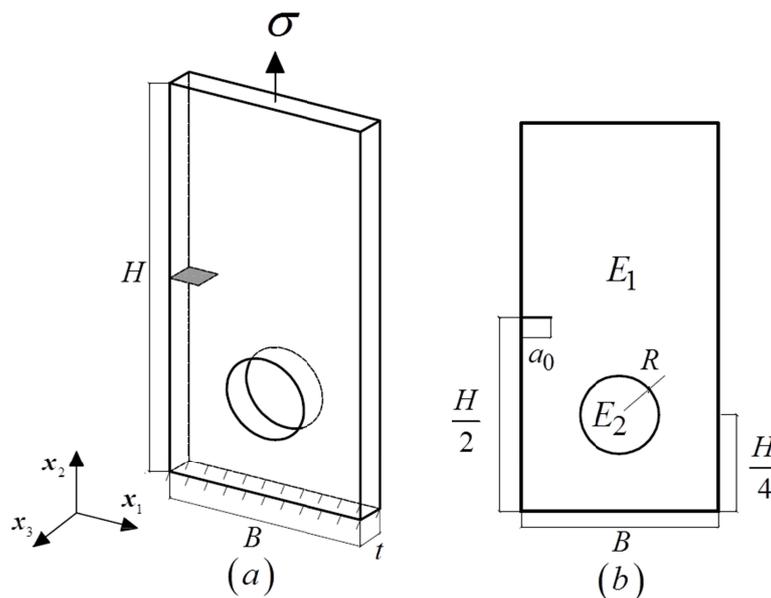
**Figura 5.8** Vida útil à propagação: Carregamentos não alternado e alternado.

A partir desse resultado, conclui-se que o algoritmo de propagação de fissuras com a consideração do contato entre as faces da fissura foi implementado coerentemente. Em casos que envolvam propagação de fissuras em modo misto e carregamentos alternados, é de se esperar uma discrepância entre a solução com carregamentos alternados e a solução com carregamento mínimo nulo. Isso porque os valores dos FIT equivalentes poderão ser diferentes a depender do deslizamento das faces da fissura na situação de contato. Nesse caso, o algoritmo proposto no presente trabalho pode ser utilizado para solucionar o problema numericamente.

## 5.2.2 Fadiga de uma chapa composta

O segundo exemplo de fadiga estuda a influência na vida útil devido à presença de distintos materiais em componentes compostos. O exemplo trata de uma chapa tracionada de dimensões  $H = 200mm$ ,  $B = 100mm$  e  $t = 20mm$ , constituída por um material 1 e contendo

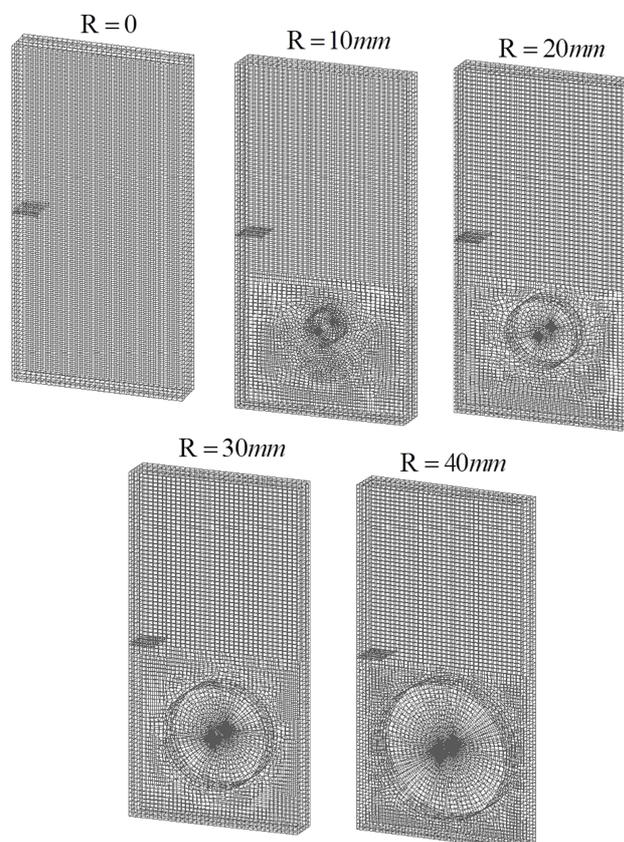
uma fissura de borda de dimensão inicial  $a_0 = 15\text{mm}$ . Estuda-se no problema a influência de uma inclusão circular de raio  $R$  constituída por um material 2. Uma tensão cíclica de  $\sigma_{m\acute{a}x} = 50\text{N/mm}^2$  e  $\sigma_{m\acute{i}n} = 0$  é aplicada na borda superior da chapa enquanto a borda inferior é mantida fixa. A Figura 5.9 apresenta o problema e ilustra as condições de contorno. Primeiramente a chapa foi analisada sem a inclusão, ou seja, como homogênea ( $R = 0$ ). Posteriormente foram assumidos quatro valores para o raio da inclusão:  $R = 10\text{mm}$ ,  $R = 20\text{mm}$ ,  $R = 30\text{mm}$  e  $R = 40\text{mm}$ .



**Figura 5.9** Chapa composta com fissura de borda.

As constantes elásticas dos dois materiais são  $E_1 = 74000\text{N/mm}^2$ ,  $\nu_1 = 0,3$  e  $E_2 = 20000\text{N/mm}^2$ ,  $\nu_2 = 0,3$ . A tenacidade à fratura e os parâmetros da equação de Paris são  $K_{Ic} = 1887,36\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$ ,  $C = 2,087136 \cdot 10^{-13} (\text{N/mm}^2)^{-3,32} \text{mm}^{-0,05}/\text{ciclo}$  e  $m = 3,32$ . As análises de fadiga foram efetuadas considerando incrementos de  $\Delta a_{m\acute{a}x} = 0,5\text{mm}$  a  $\Delta a_{m\acute{a}x} = 1,25\text{mm}$ , a depender do modelo, e prosseguiram até a falha estrutural, i.e,  $K_{eq} > K_{Ic}$ . Os FIT foram calculados a partir da TCD. Como se trata de um problema de propagação em modo misto I/II, apenas o critério da máxima taxa de liberação de energia foi adotado. A Figura 5.10 apresenta as malhas adotadas para os cinco modelos, as quais resultaram, para a configuração inicial da fissura, em 7169, 9129, 8275, 8905, 9953 elementos quadrilaterais de aproximação linear que correspondem, respectivamente, a 8224, 10450, 9606, 10332, 11524 pontos de colocação.

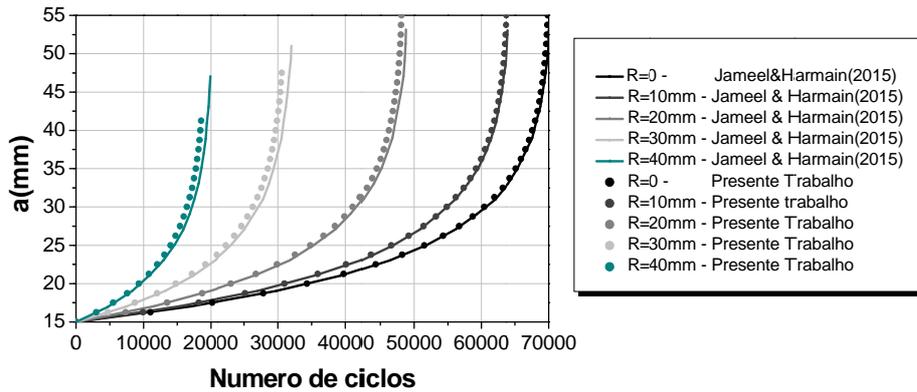
Note que nesse exemplo o MEC dual é utilizado em conjunto com a técnica de sub-regiões para modelar o problema em questão. A técnica de sub-regiões também pode ser utilizada para simular condições de contorno complexas que podem ocorrer nos problemas de fadiga dos componentes em projetos industriais.



**Figura 5.10** Malhas adotadas para os cinco modelos.

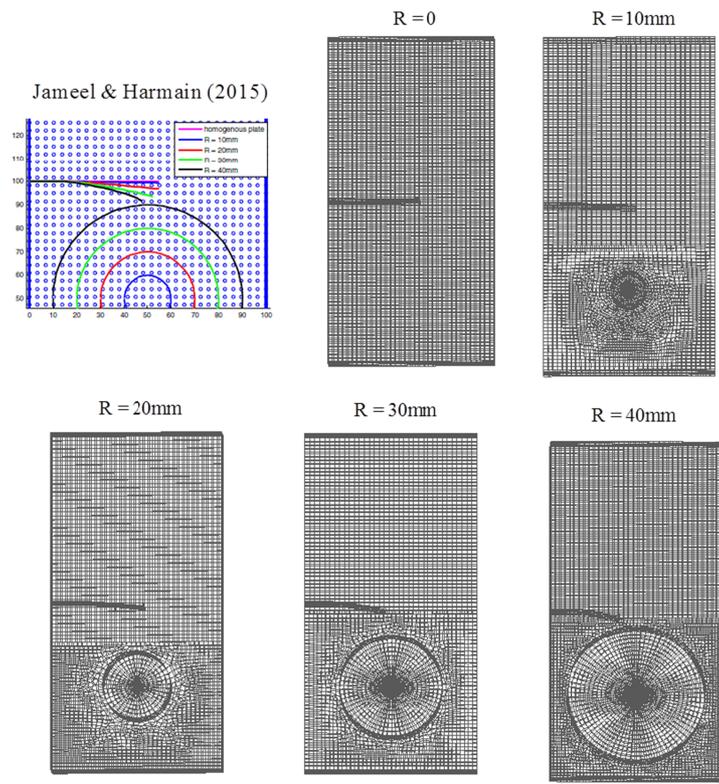
O mesmo problema foi analisado no trabalho de Jameel & Harmain (2015) como um Estado Plano de Tensão, utilizando o Método de Galerkin Livre de Elementos. A figura 5.11 apresenta as curvas de vida útil à fadiga obtidas no presente trabalho para os diferentes valores de  $R$  e as compara com as respostas de Jameel & Harmain (2015).

A partir dos resultados é possível observar a boa concordância entre as repostas obtidas. Além disso, observa-se que a presença da inclusão reduz a vida útil da chapa. Para o caso da chapa homogênea,  $R=0$ , a vida útil foi de aproximadamente 70.000 ciclos. Já no caso mais crítico,  $R=40\text{mm}$ , a vida útil foi de aproximadamente 20.000 ciclos, o que representa uma redução de 71%.



**Figura 5.11** Comparação das curvas de vida útil.

A Figura 5.12 apresenta os caminhos de propagação obtidos por Jameel & Harmain (2015) e os obtidos no presente trabalho. Os modelos numéricos desse exemplo também não são estanques devido às discretizações não conformes nas interfaces materiais e aas interfaces contorno-fissura após a propagação se tornar curva.



**Figura 5.12** Comparação dos caminhos de propagação.

Por fim a Figura 5.13 apresenta a norma do vetor deslocamento em escala de cores para os cinco modelos ao final da análise de propagação.

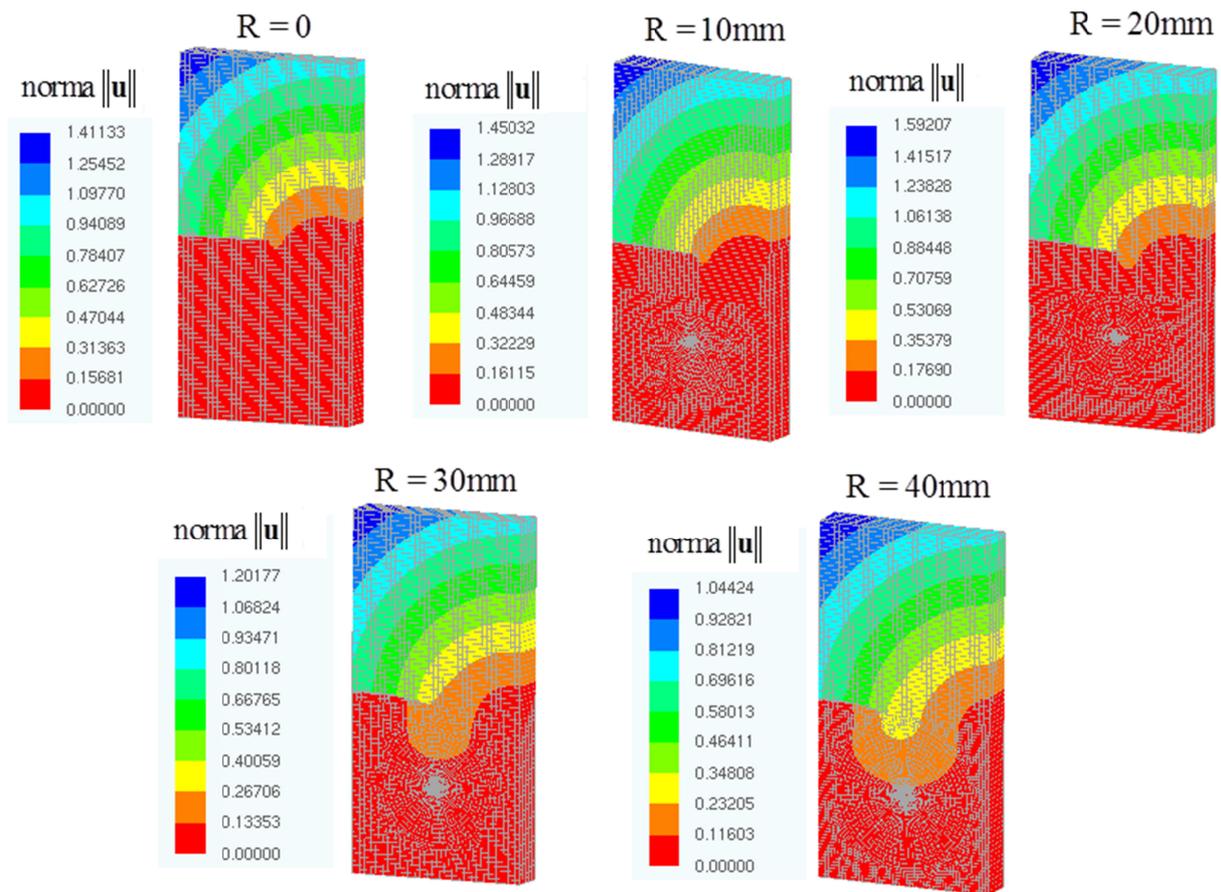


Figura 5.13 Resposta da Norma do vetor deslocamentos.

### 5.2.3 Fadiga em modo misto de uma viga sob flexão em três pontos

No terceiro exemplo, é analisada a propagação em modo misto por fadiga de uma viga com entalhe central submetida à flexão em três pontos. A Figura 5.14 ilustra a geometria do problema e também as condições de contorno.

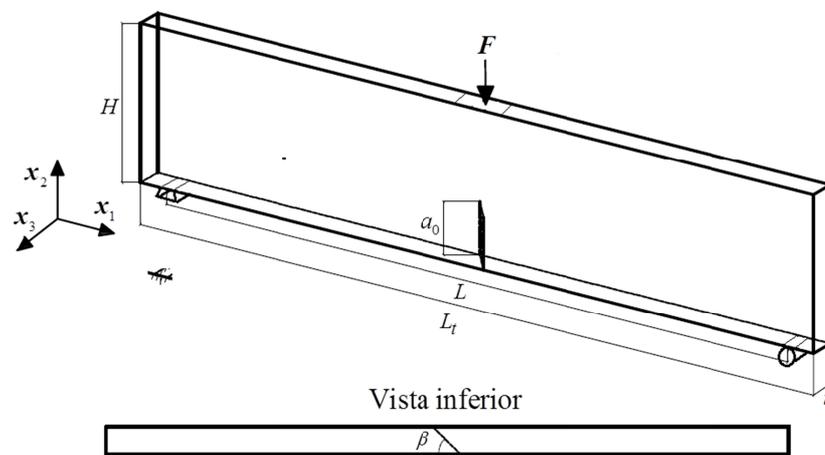
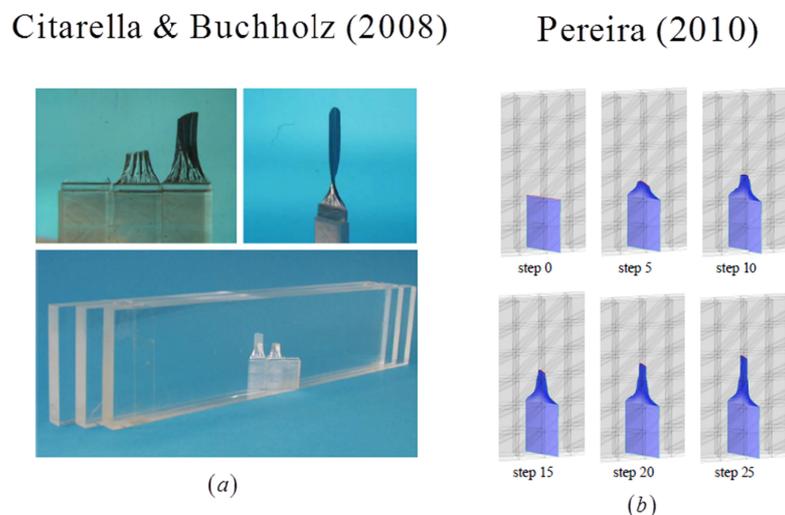


Figura 5.14 Viga sob flexão em três pontos.

As dimensões da viga são  $L_t = 260\text{mm}$ ,  $L = 240\text{mm}$ ,  $H = 60\text{mm}$  e  $t = 10\text{mm}$ . A dimensão inicial do entalhe é  $a_0 = 20\text{mm}$  e o mesmo encontra-se inclinado de um ângulo  $\beta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga. Note que geometricamente o problema é igual ao problema 4.5.2 do capítulo anterior. No entanto, o foco da análise agora é a propagação por fadiga. Para tanto, a mesma malha do exemplo do Capítulo 4 é considerada para o modelo inicial, o qual é submetido à flexão em três pontos com um carregamento cíclico definido por  $F_{\max} = 100\text{N/mm}^2$  e  $F_{\min} = 0$ . As constantes elásticas do problema foram adotadas como  $E = 2,1 \cdot 10^5\text{N/mm}^2$  e  $\nu = 0,3$ . Os parâmetros da equação de Paris adotados para as análises foram  $C = 1,546 \cdot 10^{-12} \left(\text{N/mm}^2\right)^{-2,1} \text{mm}^{-0,05}/\text{ciclo}$  e  $m = 2,1$ . A propagação da fissura foi analisada com 15 passos incrementais, para os quais se adotou  $\Delta a_{\max} = 1,42\text{mm}$ . Os FIT foram calculados a partir da TED. Ambos os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schollmann foram adotados para descrever a propagação. O mesmo ensaio foi analisado experimentalmente por Citarella & Buchholz (2008) e numericamente por Pereira (2010) através de uma versão de enriquecimento global-local do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Embora os dois autores tenham adotado materiais diferentes, a geometria e as condições de contorno foram as mesmas (com exceção da intensidade da força  $F$ ). Portanto, a evolução da fissura em modo misto observada experimentalmente foi semelhante às evoluções obtidas numericamente em Pereira (2010) e no presente trabalho. A Figura 5.15 apresenta as evoluções obtidas nos trabalhos de referência e a Figura 5.16 apresenta as evoluções obtidas no presente trabalho.

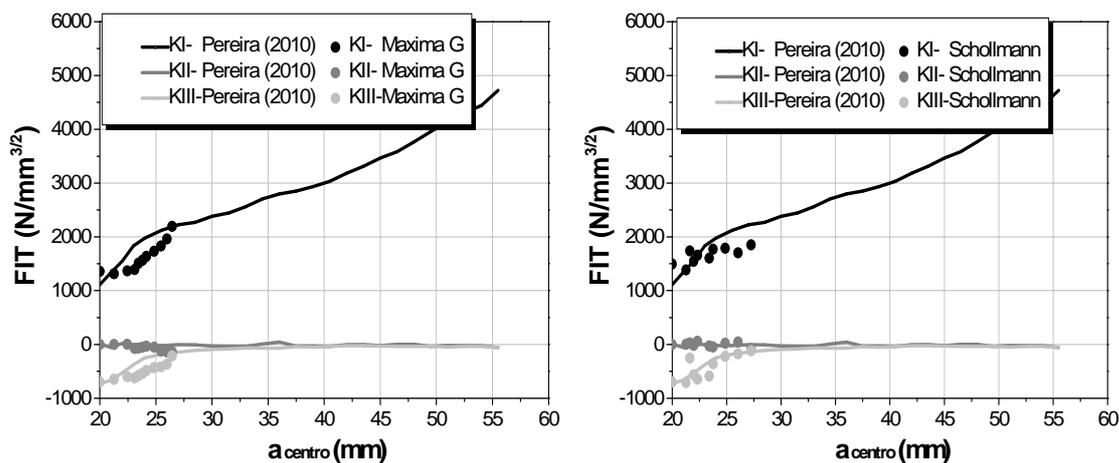


**Figura 5.15** Evolução da superfície da fissura: (a) Citarella & Buchholz (2008) (b) Pereira (2010).



Note a semelhança dos resultados de propagação obtidos com os resultados de referência. Conforme é possível observar, a inclinação da fissura em relação ao eixo produz um comportamento em modo misto I/II/III. Nesse caso a fissura tende a rotacionar em torno de seu próprio eixo até se tornar perpendicular ao eixo longitudinal da viga, crescendo em modo I puro a partir desse momento. Note que os resultados de propagação foram um pouco diferentes a depender do critério de propagação adotado. Por fim, deve-se ressaltar que não foi possível prosseguir a análise além do 15º passo incremental devido às limitações do algoritmo de evolução da frente da fissura. As dificuldades verificadas estão relacionadas com a propagação de frentes de fissura com elevada curvatura, como a observada nesse exemplo, para as quais o número de elementos que descrevem a frente da fissura pode variar ao longo da análise.

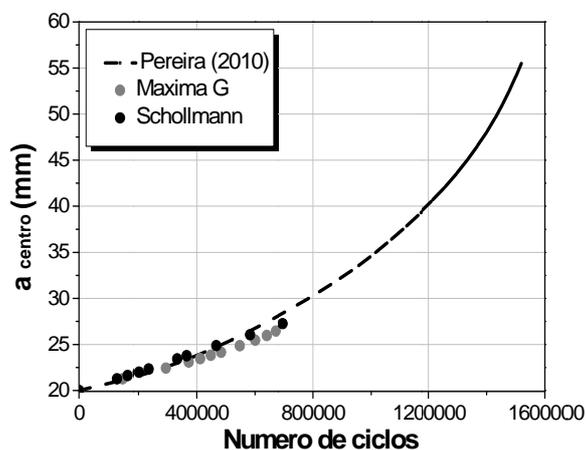
Nas análises de fadiga, optou-se por adotar o mesmo material utilizado no trabalho de Pereira (2010), pois o autor apresenta com maiores detalhes os resultados da propagação em comparação ao trabalho experimental de Citarella & Buchholz (2008). A Figura 5.18 apresenta as respostas dos FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  ao longo da análise de propagação para o ponto de colocação central da linha de frente da fissura. Conforme pode ser observado, os resultados obtidos no presente trabalho, com ambos os critérios de propagação, estão condizentes com a resposta de referência de Pereira (2010).



**Figura 5.18** Respostas dos FIT versus comprimento característico  $a$  do centro da frente da fissura.

As oscilações nas respostas dos FIT podem estar relacionadas com a falta de precisão da TED e também com erros locais do modelo, provenientes do remalhamento de borda de uma propagação com curvatura acentuada com elementos planos. Por fim a Figura 5.19

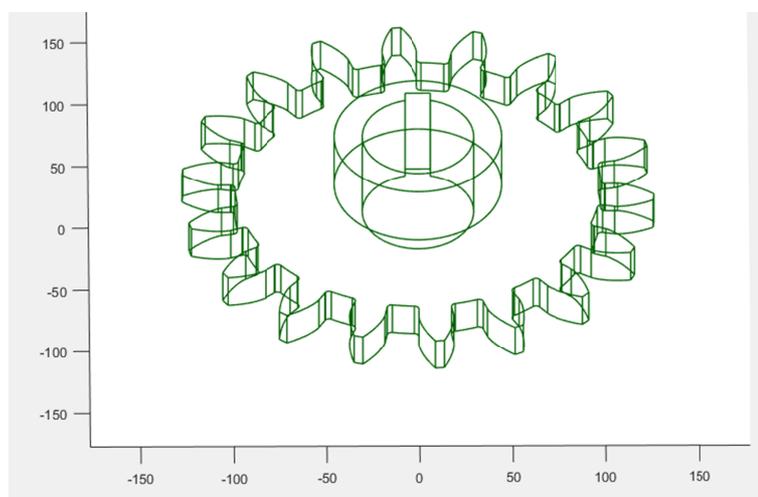
apresenta os diagramas de vida útil obtidos com ambos os critérios de propagação e o diagrama de vida útil construído a partir da resposta dos FIT apresentada por Pereira (2010). Note que apesar das oscilações nas respostas dos FIT, a vida útil à fadiga foi estimada com precisão até aproximadamente 700.000 ciclos.



**Figura 5.19** Vida útil à fadiga obtida com os dois critérios de propagação.

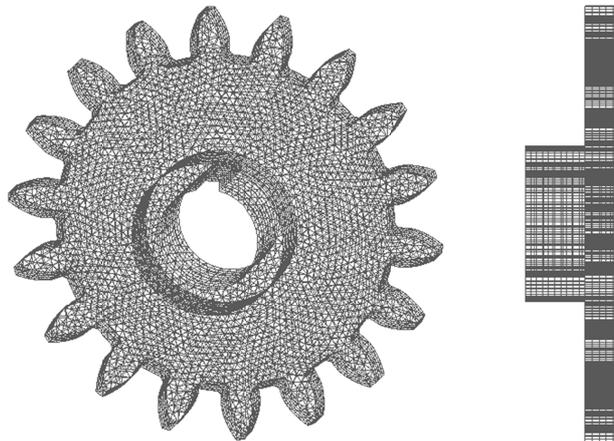
#### 5.2.4 Fadiga em uma engrenagem proveniente de um arquivo IGES

Nesse último exemplo apresenta-se a análise da vida útil à fadiga de uma engrenagem considerando a presença de um pequeno defeito em um dos seus dentes. O modelo geométrico da engrenagem foi obtido a partir de um arquivo IGES disponível na biblioteca de modelos CAD da comunidade *GrabCAD*. A Figura 5.20 apresenta o modelo geométrico original, sem a presença do defeito, desenhado com o auxílio da *IGES Tollbox* do *MATLAB*.



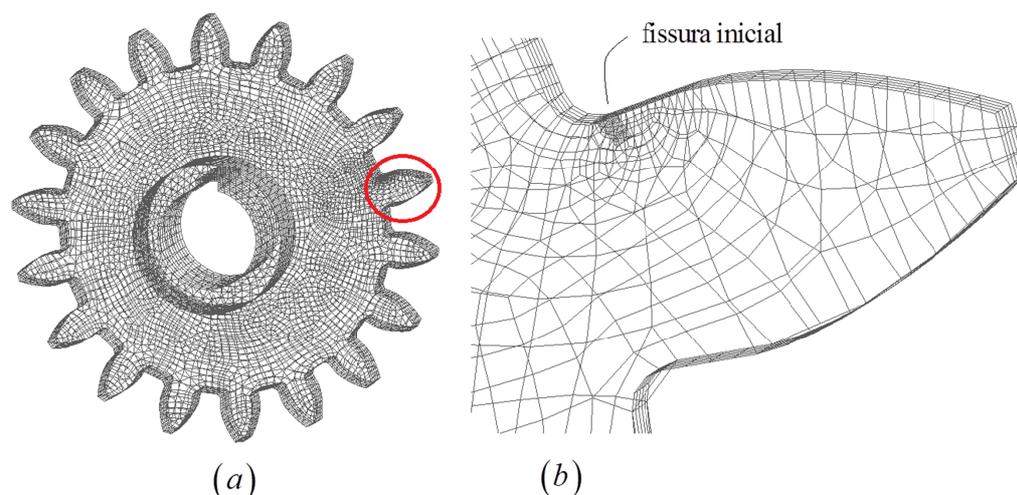
**Figura 5.20** – Modelo geométrico composto por 173 superfícies NURBS.

O modelo geométrico original é composto por 173 superfícies NURBS das quais 95 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=2$ , 36 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=3$  e  $q=1$ , 39 são superfícies não aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=1$  e 3 são superfícies aparadas de ordens polinomiais  $p=1$  e  $q=1$ . Uma dessas 3 superfícies é aparada por 168 curvas paramétricas NURBS, outra é aparada por 164 curvas paramétricas NURBS e a última é aparada por 8 curvas paramétricas NURBS. No modelo existem curvas de aproximação lineares e quadráticas ( $p=1$  e  $p=2$ ). A Figura 5.21 apresenta um modelo cuja malha foi construída a partir da discretização independente das 173 superfícies NURBS que descrevem o modelo geométrico, sem considerar a princípio a presença do defeito.



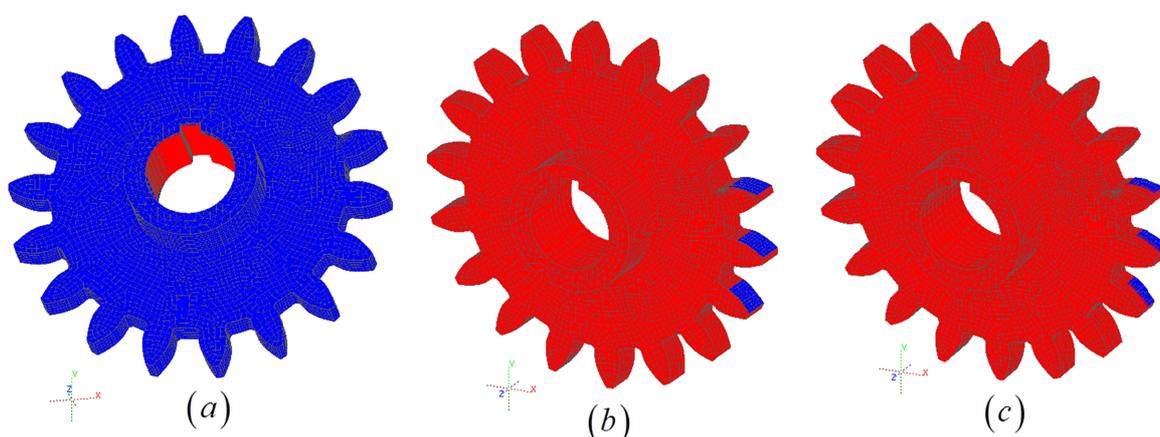
**Figura 5.21** – Modelo numérico sem o defeito inicial.

A malha do modelo sem fissura, ilustrada na Fig. 5.21, é composta por 13306 elementos triangulares de aproximação linear, totalizando 13227 pontos de colocação. Para a inserção do defeito, criou-se um novo modelo no qual duas novas superfícies, que definem uma fissura plana, foram inseridas em um dos dentes da engrenagem. A fissura considerada é perpendicular à superfície do contorno interceptado, transpassa toda a espessura do dente da engrenagem e tem um comprimento inicial  $a_0 = 2,07mm$ . Note que comparada com as dimensões da engrenagem, que possui um raio maior (considerando os dentes) de  $R = 254mm$ , um raio menor (sem considerar os dentes) de  $r = 197mm$  e uma espessura  $e = 20mm$ , a dimensão da fissura inserida é pequena. A Figura. 5.22 apresenta o novo modelo de análise da engrenagem destacando a região do defeito inicial, onde se adotou um maior nível de refinamento.



**Figura 5.22** Modelo numérico com o defeito inicial: (a) Modelo global (b) Detalhe local da fissura.

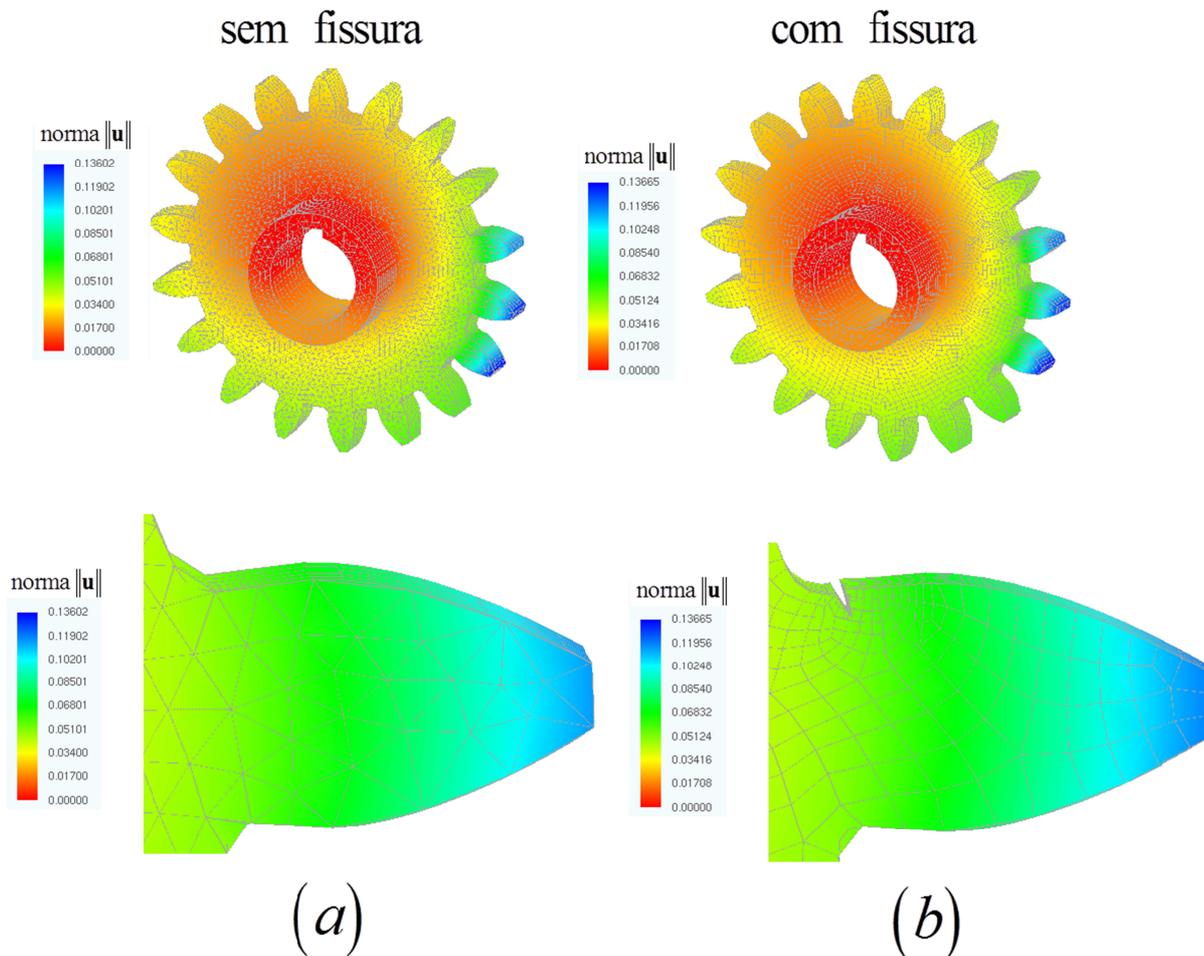
A malha do modelo com a fissura, ilustrada na Fig. 5.22, é composta por 11236 elementos quadrilaterais de aproximação linear, totalizando 14117 pontos de colocação. Note que apesar do modelo geométrico ser “estanque”, após a discretização independente das superfícies do problema, os modelos numéricos se tornam não “estanques”. Nos modelos numéricos, os deslocamentos da metade superior do furo do eixo central, ou seja, da metade que contém o entalhe retangular, foram restringidos conforme ilustra a Figura 5.23a.



**Figura 5.23** Condições de contorno: (a) Deslocamentos nulos (b)  $t_2 = t_y = -10 \text{ kN/mm}^2$  (engrenagens alinhadas) (c)  $t_2 = t_y = -20 \text{ kN/mm}^2$  (engrenagens desalinhadas).

Dois distintas situações de forças prescritas foram impostas para simular a fadiga devido ao contato dos dentes da engrenagem com os dentes de outra possível engrenagem. A primeira situação é o caso de engrenagens alinhadas, na qual foi imposta uma força máxima

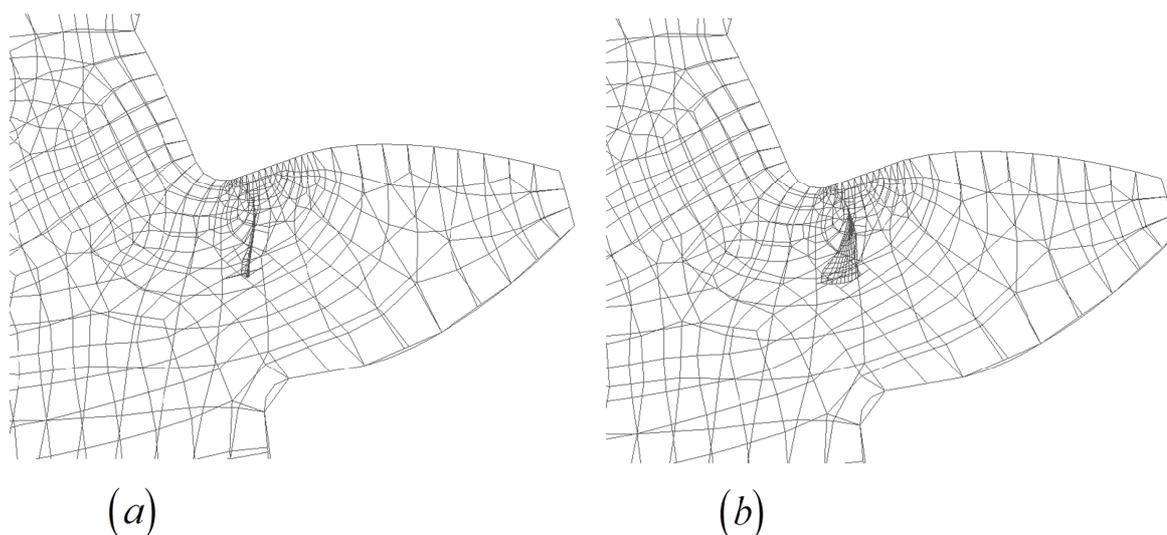
$t_2 = -10 \text{ kN/mm}^2$  nas superfícies de três dentes, ao longo de toda a espessura  $e$  (Figura 5.23b) e uma força mínima  $t_2 = 0$ . Na segunda situação, considera-se que as engrenagens estão desalinhadas e, portanto, a força máxima, agora de  $t_2 = -20 \text{ kN/mm}^2$ , foi imposta nas superfícies dos três dentes somente até a metade da espessura  $e$  (Figura 5.23c). Novamente a força mínima do carregamento cíclico foi  $t_2 = 0$ . As constantes elásticas adotadas para as análises estruturais foram  $E = 7.10^4 \text{ kN/mm}^2$  e  $\nu = 0,3$ . Primeiramente, efetuou-se uma análise estrutural sem propagação para os modelos sem e com a fissura, considerando a solitação máxima para o caso das engrenagens alinhadas. As análises estruturais de ambos os modelos resultaram respostas semelhantes para os campos de deslocamentos. A Figura 5.24a apresenta a resposta global da norma do vetor deslocamentos e um detalhe da região do dente crítico, com os deslocamentos 100 vezes ampliados, para o modelo sem a fissura. Já a Figura 5.24b apresenta esses mesmos para o caso do modelo contendo a fissura.



**Figura 5.24** – Resposta global da norma do vetor deslocamentos e detalhe do dente crítico. (a) modelo sem fissura (b) modelo com fissura.

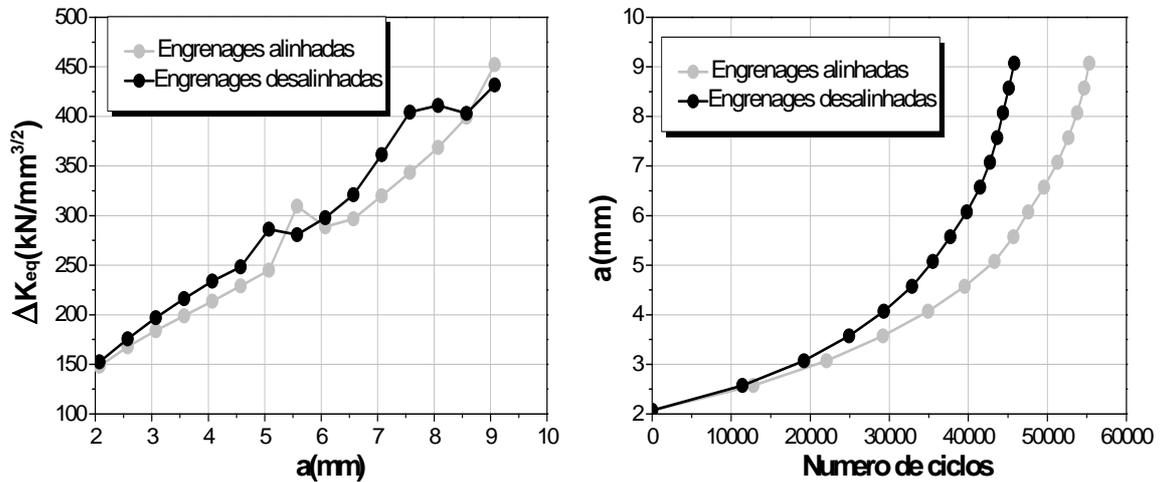
Note que as respostas globais de deslocamentos são muito próximas para os modelos sem e com a fissura, uma vez que as dimensões da fissura são pequenas comparadas com as dimensões da engrenagem. Além disso, para ser possível observar a presença da fissura, foi necessária uma vista de um detalhe do dente crítico, com os deslocamentos 100 vezes ampliados. Sendo assim é evidente a dificuldade de se detectar pequenos defeitos em peças estruturais, justificando as pesquisas na área de detecção de defeitos em estruturas.

Para as análises de fadiga, adotou-se uma tenacidade à fratura  $K_{Ic} = 425 \text{ kN}/\text{mm}^{3/2}$  e um limite inferior da propagação estável por fadiga  $\Delta K_{Ith} = 25 \text{ kN}/\text{mm}^{3/2}$ . Os parâmetros da equação de Paris adotados para as análises foram  $C = 1.10^{-11} (\text{kN}/\text{mm}^2)^{-3} \text{ mm}^{-0,05}/\text{ciclo}$  e  $m = 3$ . Em ambos os casos de solicitação (engrenagens alinhadas e desalinhadas) a propagação da fissura foi analisada em 14 passos incrementais para os quais se adotou um máximo incremento de  $\Delta a_{m\acute{a}x} = 0,5 \text{ mm}$ . Os FIT foram calculados a partir da TED. Adotou-se o critério da máxima taxa de liberação de energia para descrever a propagação. A Figura 5.25 apresenta os caminhos de propagação obtidos para os casos de engrenagens alinhadas e de engrenagens desalinhadas. Para ambos os casos, o último passo de propagação resultou em uma variação do FIT equivalente,  $\Delta K_{eq}$ , superior à tenacidade à fratura do material, evidenciando a falha estrutural.



**Figura 5.25** Caminho de propagação: (a) engrenagens alinhadas (b) engrenagens desalinhadas.

Na Figura 5.26 (à esquerda) são apresentados os históricos de  $\Delta K_{eq}$  versus o máximo comprimento da fissura,  $a$ , medido no plano do corpo da engrenagem. Já à direita da Figura 5.26 são apresentados os resultados de vida útil à propagação.

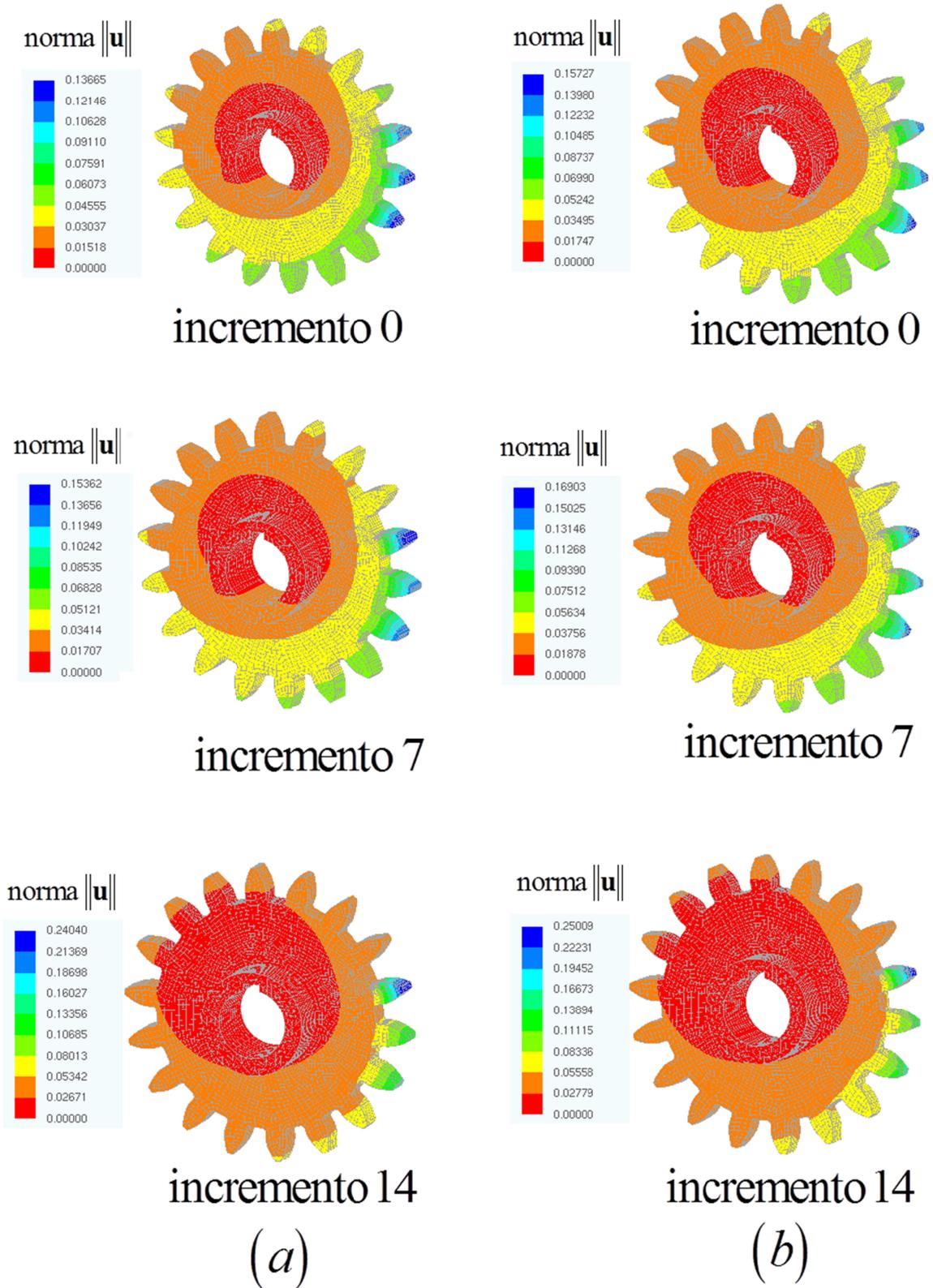


**Figura 5.26** Variação do FIT  $\Delta K_{eq}$  versus comprimento característico  $a$  e vida útil à propagação.

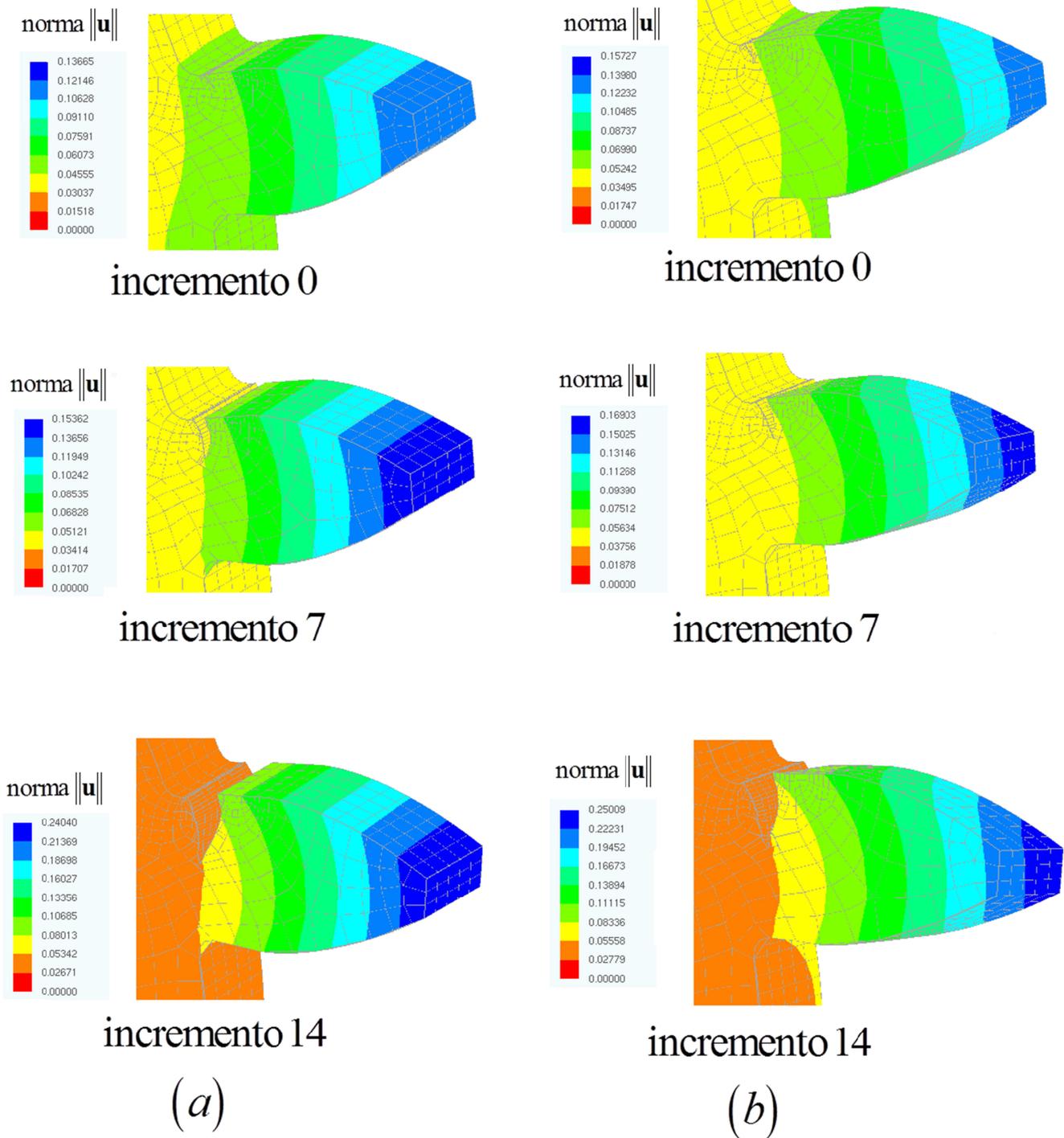
Note que para o caso das engrenagens desalinhadas a vida útil de 45816 ciclos foi aproximadamente 17,2% menor do que a vida útil para o caso das engrenagens alinhadas, que foi de 55316 ciclos. Note ainda que para o caso das engrenagens desalinhadas a fissura se propagou em modo misto I/II/III, inviabilizando a análise plana do problema.

Já Figura 5.27 apresenta em escala de cores a norma do vetor deslocamento do modelo global para várias etapas incrementais de propagação. Na Figura 5.27a apresentam-se esses resultados para o caso das engrenagens alinhadas e na Figura 5.27b apresentam-se esses resultados para o caso das engrenagens desalinhadas. Note que, em ambos os casos, ao final da análise os deslocamentos mais significativos da estrutura são os do dente que contém o defeito, indicando a possível falha estrutural.

Por fim a Figura 5.28 apresenta a norma do vetor deslocamento na região do detalhe local do dente que contém o defeito, para várias etapas incrementais de propagação. Na Figura 5.28a esses resultados são apresentados para o caso das engrenagens alinhadas e na Figura 5.28b esses resultados são apresentados para o caso das engrenagens desalinhadas. Nessa figura, a deformada da estrutura encontra-se em escala 1:50, para a qual fica evidente a falha devido à propagação da fissura.



**Figura 5.27** Norma do vetor deslocamento – global (a) engrenagens alinhadas (b) engrenagens desalinhadas.



**Figura 5.28** Norma do vetor deslocamento – local (a) engrenagens alinhadas (b) engrenagens desalinhadas.

## 6 Formulação isogeométrica do MEC dual

---

Neste capítulo, apresenta-se uma versão isogeométrica do MEC dual baseada em superfícies NURBS regulares. A formulação isogeométrica foi programada para fins de investigações iniciais. As definições de elementos contínuos, descontínuos e descontínuos de aresta introduzidas por Mi e Aliabadi (1992) na abordagem convencional do MEC dual são estendidas para a abordagem isogeométrica. No entanto, tais definições são consideradas no nível das superfícies NURBS e não dos elementos, ou seja, definem-se os conceitos de NURBS contínuas, descontínuas e descontínuas de aresta. Devido ao maior controle de continuidade sobre as funções base das NURBS, é possível garantir a continuidade  $C^1$  em qualquer ponto no interior de uma superfície NURBS. Sendo assim, muitas vezes as superfícies das fissuras podem ser discretizadas por apenas duas superfícies NURBS descontínuas, o que reduz consideravelmente o número de pontos de colocação sobre as superfícies das fissuras em comparação à abordagem convencional com elementos descontínuos. Um estudo numérico preliminar é realizado para comparar a versão convencional com a versão isogeométrica baseada em NURBS. A partir do estudo conclui-se que ambas as abordagens apresentam limitações, as quais podem ser o ponto de partida para novas propostas.

### 6.1 Formulação isogeométrica baseada em superfícies NURBS

A principal diferença entre as análises numéricas convencionais e as análises isogeométricas é em relação às funções base que são utilizadas na descrição geométrica e na aproximação dos campos mecânicos. Nas abordagens convencionais com elementos isoparamétricos, as funções polinomiais de Lagrange (ou de Hermite) são utilizadas como base para a aproximação numérica tanto da geometria quanto dos campos físicos. Na abordagem isogeométrica, as mesmas funções base utilizadas para a descrição da geometria em programas de CAD (funções base de NURBS, T-splines e Subdivisão de superfícies) também são utilizadas para aproximar os campos mecânicos. Assim torna-se possível a existência de um único modelo que representa tanto a geometria quanto o modelo numérico de análise. No contexto específico da formulação MEC dual, as funções base das superfícies NURBS podem ser utilizadas para aproximar os campos mecânicos de deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno e sobre as fissuras, devido à maior continuidade das funções base.

### 6.1.1 Aproximações numéricas e definições de elementos

Assume-se que o espaço de solução dos campos de deslocamentos e de forças de superfície, sobre o domínio paramétrico de uma dada superfície NURBS, consista em todas as possíveis combinações lineares de suas funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ . Definindo vetores  $\hat{\mathbf{u}}_{ij}$  e  $\hat{\mathbf{t}}_{ij}$  em  $\mathbb{R}^3$  como coeficientes das combinações lineares, sendo  $ij$  a numeração dos pontos  $\mathbf{B}_{ij}$  da rede de controle da NURBS, é possível introduzir a aproximação para os campos de deslocamentos e de forças de superfície como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \hat{\mathbf{u}}_{ij} \\ \mathbf{t}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}(\xi, \eta) \hat{\mathbf{t}}_{ij} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Note que os coeficientes  $\hat{\mathbf{u}}_{ij}$  e  $\hat{\mathbf{t}}_{ij}$  não possuem significado físico devido ao caráter não interpolatório das funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ . Além disso, devido ao caráter local das funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ , é interessante definir como elementos os intervalos entre knots sucessivos, ou *knots spans*. Dessa maneira, evita-se avaliar integrações numéricas de funções base que são nulas sobre os elementos. No caso de superfícies NURBS, o domínio dos elementos é definido pelo produto  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ . Visto que vetores de *knots* não uniformes assumem a possibilidade de valores repetidos de knots, é possível que existam elementos triviais com áreas nulas, os quais são simplesmente desconsiderados nas análises. O número de funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$  não nulas sobre o domínio de um elemento não trivial (área positiva) é sempre igual a  $nl = (p+1)(q+1)$ , o qual é sempre menor que o número total de funções base.

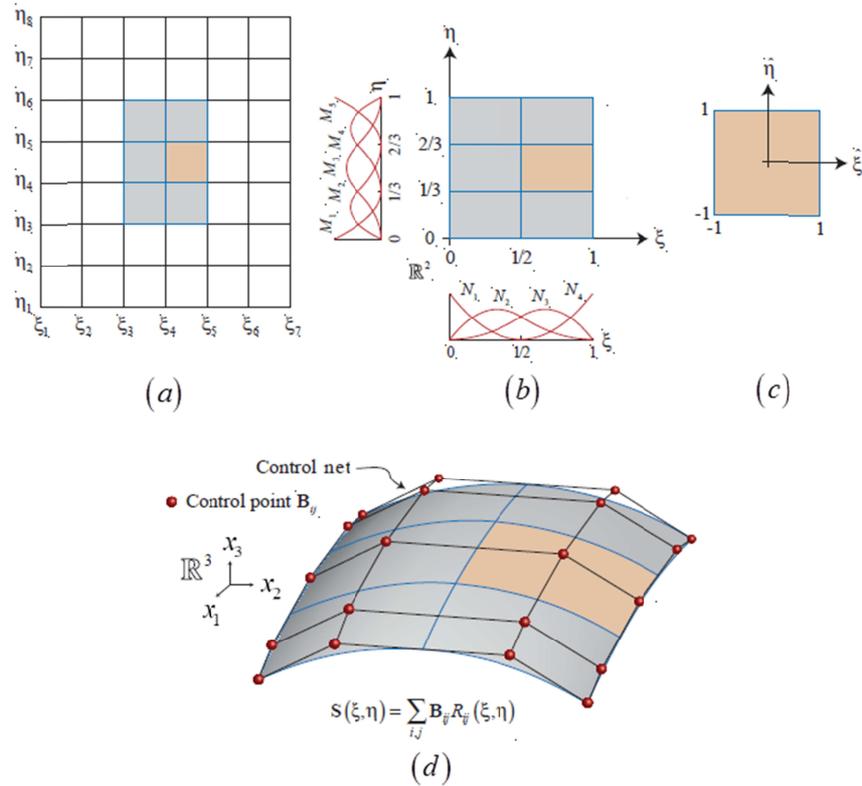
Devido à possibilidade do suporte das funções base pertencer a mais de um elemento, é interessante definir uma relação de incidência entre a numeração global das funções base da superfície NURBS e a numeração local sobre os elementos. Uma função  $R_{ij}(\xi, \eta)$  possui uma numeração global  $B$ , definida pelas chamadas *coordenadas NURBS*  $i, j$ . Sobre o domínio de um elemento  $e$ , a função  $R_{ij}(\xi, \eta)$ , ou pelo menos parte dela, pode ter uma numeração local  $b$ . As relações entre as coordenadas NURBS, as numerações globais e as numerações locais

sobre os elementos de uma dada NURBS podem ser caracterizadas por vetores  $INC(\ )$  e  $IEN(\ )$ .

$$i = INC(B,1) \quad \text{e} \quad j = INC(B,2) \quad (6.2)$$

$$B = IEN(b,e) \quad (6.3)$$

Dados os vetores de knots abertos,  $\Xi$  e  $H$ , e as ordens polinomiais,  $p$  e  $q$ , que definem a NURBS, os vetores  $INC(\ )$  e  $IEN(\ )$  podem ser construídos conforme apresentado em Cottrell et al. (2009) – Anexo A. Uma maneira interessante para visualizar os elementos de uma superfícies NURBS é representar os vetores de knots no espaço dos índices. A diferença entre o espaço dos índices e o espaço paramétrico está no fato de que no espaço dos índices, todos os knots são igualmente espaçados independentemente dos seus valores paramétricos. Para ilustrar a diferença entre o espaço dos índices e o espaço paramétrico considere, o seguinte patch formado pelos vetores de knots abertos  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7\} = \{0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1\}$  e  $H = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8\} = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$ , para os quais as ordens polinomiais das funções base são  $p = 2$  e  $q = 2$ . As representações do espaço dos índices e do espaço paramétrico são apresentadas nas Figuras 6.1 (a) e (b), respectivamente. Os elementos não triviais são apresentados em cores, ao passo que os elementos triviais, observados apenas na Fig. 6.1(a), são apresentados em branco. Deve-se ainda atentar-se para o fato de que o suporte das funções base pode pertencer a mais de um elemento. No caso de funções base bivariadas de ordens  $p$  e  $q$ , o suporte de uma dada função  $R_{ij}(\xi, \eta)$  é igual a  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ , o qual pode pertencer a mais de um elemento. Para efetuar as integrais sobre os elementos via quadratura de Gauss, é necessário que o domínio de integração seja descrito no intervalo  $[-1,1] \times [-1,1]$ . Uma vez que os domínios  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$  dos elementos não são iguais ao domínio Gaussiano, é necessária a definição dos elementos também no espaço Gaussiano  $[-1,1] \times [-1,1]$ . Na Figura 6.1(c), o elemento  $[\xi_4, \xi_5] \times [\eta_4, \eta_5]$  é representado no espaço Gaussiano definido pelas coordenadas  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ . Já na Figura 6.1(d), ilustra-se esquematicamente a superfície NURBS em  $\mathbb{R}^3$  do exemplo, destacando-se o elemento  $[\xi_4, \xi_5] \times [\eta_4, \eta_5]$ .



**Figura 6.1** – Descrição de elementos: (a) espaço dos índices, (b) espaço paramétrico, (c) espaço Gaussiano, (d) espaço físico em  $\mathbb{R}^3$  (COTTRELL *et al.*, 2009).

Note o caráter não interpolatório da NURBS com relação aos pontos de controle  $B_{ij}$ . Tal fato interfere na definição dos pontos de colocação conforme será apresentado mais adiante. O mapeamento do espaço Gaussiano para o espaço paramétrico pode ser definido para um elemento  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$  como:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_i + (\hat{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \\ \eta &= \eta_j + (\hat{\eta} + 1) \frac{(\eta_{j+1} - \eta_j)}{2}\end{aligned}\tag{6.4}$$

Considerando o mapeamento descrito na Eq. 6.4, é possível calcular as funções  $R_{ij}(\xi, \eta)$  para um ponto de integração  $\hat{\xi}, \hat{\eta} \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  em um dado elemento não trivial  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ . Visto que apenas algumas das funções  $R_{ij}(\xi, \eta)$  são não nulas no ponto de integração e também visando aproveitar a estrutura do código isoparamétrico desenvolvido, é interessante descrever a aproximação dos campos mecânicos localmente sobre os domínios de integração  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  dos elementos.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) &= \sum_{b=1}^{nl} R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \hat{\mathbf{u}}_b \Leftrightarrow u_i^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{b=1}^{nl} R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \hat{u}_i^b \\
\mathbf{t}^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) &= \sum_{b=1}^{nl} R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \hat{\mathbf{t}}_b \Leftrightarrow t_i^e(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{b=1}^{nl} R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \hat{t}_i^b
\end{aligned} \tag{6.5}$$

em que  $e$  é um elemento  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$  sobre o qual a aproximação é descrita,  $b = 1, \dots, nl$ , com  $nl = (p+1)(q+1)$ , é a numeração local das funções base e os vetores  $\hat{\mathbf{u}}_b$  e  $\hat{\mathbf{t}}_b$  são os coeficientes dos campos de deslocamentos e forças de superfície. A correspondência entre a numeração local  $b$  e as coordenadas *NURBS*  $i, j$  pode ser obtida recorrendo-se aos vetores  $INC(\ )$  e  $IEN(\ )$ . As expressões 6.5 são análogas às expressões 2.41 da abordagem convencional. Dessa maneira, boa parte do código computacional previamente implementado pode ser aproveitada, sendo necessário alterar apenas as sub-rotinas de entrada de dados e de avaliação das funções base, previamente denominadas funções de forma (aproximação da geométrica) ou funções interpoladoras (aproximação dos campos mecânicos).

### 6.1.2 Estratégias de colocação

Uma das principais diferenças entre a abordagem convencional do MEC e a abordagem isogeométrica é a definição dos pontos de colocação. Isso porque os pontos de controle, análogos aos nós da abordagem convencional, não necessariamente estão sobre as superfícies do contorno do problema. Uma maneira versátil de resolver esse impasse é impor os pontos de colocação sobre as abscissas de Greville, que corresponde às coordenadas médias dos *knots* no espaço paramétrico das *NURBS* (GREVILLE, 1964). Essa estratégia foi adotada com sucesso em trabalhos anteriores (LIAN et al., 2011; SIMPSON et al., 2013; MARUSSIG et al. 2015 e PENG et al. 2016) e também no presente trabalho. No entanto, devido às descontinuidades dos campos de forças de superfície e também aos requerimentos de continuidade dos campos mecânicos sobre os pontos de colocação das faces das fissuras, nem sempre é possível impor a colocação nas arestas do espaço paramétrico das *NURBS*.

Semelhantemente ao proposto por Mi e Aliabadi (1992), para o caso de elementos isoparamétricos, propõem-se as definições de *NURBS contínuas*, *NURBS descontínuas* e *NURBS descontínuas de aresta*. A única diferença entre essas classes é o posicionamento dos pontos de colocação.

### 6.1.3 NURBS contínuas

Para o caso de uma superfície NURBS que representa uma porção do contorno onde não são observadas descontinuidades dos campos de forças e não existe nenhuma restrição quanto ao posicionamento dos pontos de colocação, adota-se o conceito de NURBS contínuas. Nesses casos, as coordenadas dos pontos de colocação  $\mathbf{Y}_{ij} = \{\xi_i^0 \eta_j^0\}^T$  no espaço paramétrico  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$  são definidas sobre as abscissas de Greville:

$$\begin{aligned} \xi_i^0 &= \frac{\xi_{i+1} + \xi_{i+2} + \dots + \xi_{i+p}}{p} & i = 1, 2, \dots, n \\ \eta_j^0 &= \frac{\eta_{j+1} + \eta_{j+2} + \dots + \eta_{j+q}}{q} & j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (6.6)$$

Perceba que o número de pontos de colocação definidos na Eq. 6.6,  $N = n.m$ , é igual ao número total de funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ . Tal correspondência é imprescindível para que o número de equações algébricas geradas por colocação das equações integrais seja igual ao número de incógnitas dos problemas. Sendo assim, a mesma correspondência deve ser verificada para o caso das NURBS descontínuas e descontínuas de aresta.

### 6.1.4 NURBS descontínuas

As abscissas de Greville definidas a partir da Eq. 6.6 resultam alguns pontos de colocação sobre as arestas dos espaços paramétricos. As funções base são descontínuas ( $C^{-1}$ ) nos limites dos espaços paramétricos (definidos por vetores de *knots* abertos) independentemente das ordens  $p$  e  $q$  adotadas. Para garantir a existência das integrais hipersingulares da formulação do MEC dual, é necessário que as funções base possuam continuidade  $C^1$  nos pontos de colocação e, portanto, os mesmos não podem estar localizados nos limites do espaço paramétrico. Para contornar esse problema, define-se o conceito de *NURBS descontínuas*, as quais são adotadas para a aproximação dos campos mecânicos sobre as superfícies das fissuras. No caso das NURBS descontínuas, as funções base são calculadas de maneira padrão a partir dos vetores de *knots* originais  $\Xi, H$ . Já os pontos de colocação são posicionados sobre as abscissas de Greville de um espaço paramétrico (patch) definido por vetores de *knots* auxiliares  $\Xi^*, H^*$ , calculados a partir de  $\Xi$  e  $H$  de tal forma que  $\Xi^* \times H^* \supset \Xi \times H$ . As componentes dos vetores de *knots* auxiliares podem ser obtidas como:

$$\xi_i^* = \begin{cases} \xi_i + 0.1\alpha_1 & \text{caso } 1 \leq i \leq p+1 \\ \xi_i & \text{caso } p+2 \leq i \leq n \\ \xi_i - 0.1\alpha_2 & \text{caso } n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases} \quad (6.7)$$

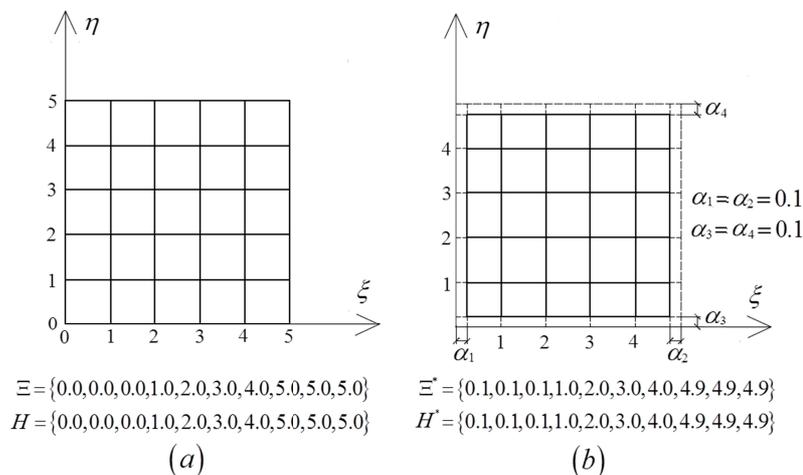
$$\eta_j^* = \begin{cases} \eta_j + 0.1\alpha_3 & \text{caso } 1 \leq j \leq q+1 \\ \eta_j & \text{caso } q+2 \leq j \leq m \\ \eta_j - 0.1\alpha_4 & \text{caso } m+1 \leq j \leq m+q+1 \end{cases}$$

em que  $\alpha_1, \alpha_3$  e  $\alpha_2, \alpha_4$  são os *knots spans* iniciais e finais, respectivamente.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.1(\xi_{p+2} - \xi_1) & \alpha_2 &= 0.1(\xi_{n+p+1} - \xi_n) \\ \alpha_3 &= 0.1(\eta_{q+2} - \eta_1) & \alpha_4 &= 0.1(\eta_{m+q+1} - \eta_m) \end{aligned} \quad (6.8)$$

A Figura 6.2 ilustra o patch original definido pelos vetores de knots  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$ ,  $H = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$  e o patch auxiliar de uma NURBS descontínua de ordens polinomiais  $p = 2$  e  $q = 2$ .

Todos os pontos de colocação definidos sobre as abscissas de Greville do patch auxiliar são, portanto, internos ao patch original, onde a continuidade das funções base pode ser controlada a partir das ordens  $p, q$  e da multiplicidade dos *knots*. Adotando ordens  $p \geq 2$  e  $q \geq 2$ , é possível garantir a continuidade  $C^1$  das funções base em todos os pontos de colocação das superfícies NURBS descontínuas. Sendo assim, muitas vezes apenas duas NURBS descontínuas são o suficiente para descrever as superfícies das fissuras.

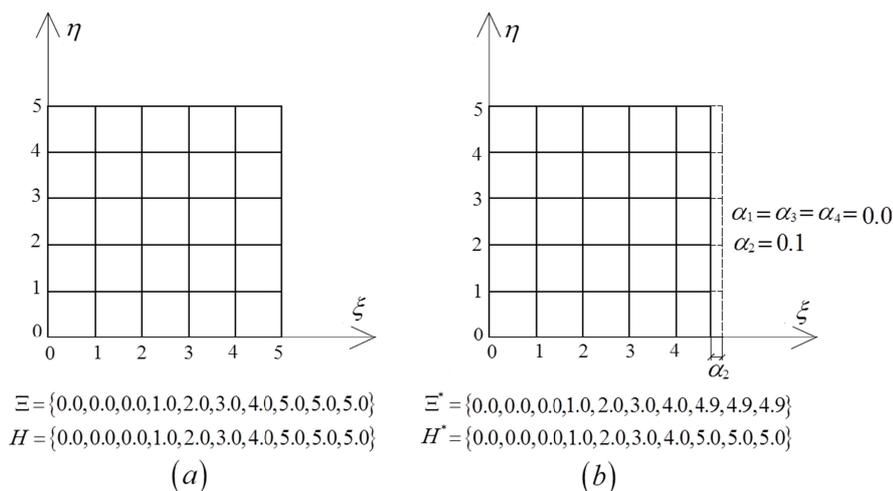


**Figura 6.2** – NURBS descontínua (a) Patch original para a construção das funções base (b) Patch auxiliar para a definição dos pontos de colocação.

No caso isogeométrico, uma única superfície NURBS é capaz de descrever satisfatoriamente uma grande porção do contorno. Sendo assim, muitas vezes é possível utilizar uma única superfície NURBS para a descrição da porção  $S_u$  do contorno, onde os deslocamentos são prescritos, ou ainda a porção  $S_t \forall t \neq 0$ , onde forças não nulas são prescritas. Adotando as mesmas como NURBS descontínuas, é possível representar as discontinuidades dos campos de forças de superfície de forma satisfatória.

### 6.1.5 NURBS descontínuas de aresta

NURBS descontínuas de arestas são utilizadas em porções do contorno sujeitas a discontinuidades. Assim, esse tipo de NURBS é utilizada onde discontinuidades de geometria e/ou de condições de contorno são observadas. Além disso, o encontro do contorno externo com fissuras de borda também requer a aplicação desse tipo de NURBS. Assim como no caso dos NURBS descontínuas, as funções base são calculadas a partir dos vetores de knots originais  $\Xi$ ,  $H$  e os pontos de colocação são posicionados sobre as abscissas de Greville dos vetores de *knots* auxiliares  $\Xi^*$ ,  $H^*$ . No entanto, na definição das componentes dos vetores de *knots* auxiliares, os coeficientes  $\alpha_i$  são não nulos apenas para as arestas que representarem as regiões de discontinuidade. Na Figura 6.3 o patch  $\{0,0,0,1,2,3,4,5,5,5\} \times \{0,0,0,1,2,3,4,5,5,5\}$ , com ordens  $p=2$  e  $q=2$ , do tópico 6.1.4 é agora considerado como descontínuo de aresta.



**Figura 6.3** – NURBS descontínua de aresta (a) Patch original para a construção das funções base (b) Patch auxiliar para a definição dos pontos de colocação.

Note que no exemplo da Fig. 6.3 a aresta de discontinuidade é a  $\xi=5$  e, portanto, definem-se  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$  como nulos e  $\alpha_2 = 0,1$  é obtido a partir de 6.8.

### 6.1.6 Condições de contorno

Devido ao caráter não interpolatório das funções base  $R_{ij}(\xi, \eta)$ , as aproximações dos campos mecânicos descritas nas Equações 6.1 ou 6.5 não satisfazem a propriedade delta de Kronecker. Dessa maneira os valores  $\hat{u}_{ij}$  e  $\hat{t}_{ij}$  (ou ainda  $\hat{u}_b$  e  $\hat{t}_b$ ) não possuem significado físico de deslocamentos e de forças de superfície, sendo apenas coeficientes que, multiplicados pelas funções base, resultam nos referidos campos mecânicos.

Duas são as principais implicações da falta da propriedade delta de Kronecker das aproximações. A primeira delas diz respeito à imposição das condições de contorno. Os valores que os coeficientes  $\hat{u}_{ij}$  e  $\hat{t}_{ij}$  devem assumir para a reprodução das condições de contorno desejadas não são conhecidos pelo analista de maneira direta. A imposição das condições de contorno pode ser efetuada em forma forte recorrendo-se às funções base das NURBS para construir uma matriz que relaciona os valores de  $\mathbf{u}(\xi_i^0, \eta_j^0)$  e  $\mathbf{t}(\xi_i^0, \eta_j^0)$  nos pontos de colocação com os coeficientes  $\hat{u}_{ij}$  e  $\hat{t}_{ij}$ . Tal abordagem resulta em bons resultados para condições de contorno simples, porém pode não ser adequada para condições de contorno complexas para as quais é necessário um ajuste por mínimos quadrados ou ainda a imposição das condições de contorno em forma fraca (COTTRELL et al., 2009). Para fins de uma investigação inicial, adota-se a abordagem em forma forte e ressalta-se o fato de que condições de contorno mais complexas também podem ser impostas recorrendo-se à técnica de sub-regiões. Nesse caso, o sólido em análise pode ser conectado a outros sólidos quase rígidos, sendo que as forças de superfície surgem do contato entre os sólidos.

Os valores dos coeficientes  $u_{ij}$  e  $t_{ij}$ , necessários para a imposição das condições de contorno no sistema de equações, podem então ser obtidos a partir dos valores  $\mathbf{u}(\xi_i^0, \eta_j^0)$  e  $\mathbf{t}(\xi_i^0, \eta_j^0)$ , recorrendo às funções base da superfície NURBS onde as condições de contorno serão impostas, resultando:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{11} \\ \mathbf{u}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}(\xi_1^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{12}(\xi_1^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{1n}(\xi_1^0, \eta_n^0) \\ \mathbf{R}_{21}(\xi_2^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{22}(\xi_2^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{2n}(\xi_2^0, \eta_n^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1}(\xi_n^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{n2}(\xi_n^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{nn}(\xi_n^0, \eta_n^0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\xi_1^0, \eta_1^0) \\ \mathbf{u}(\xi_1^0, \eta_2^0) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\xi_n^0, \eta_n^0) \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{t}_{11} \\ \mathbf{t}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}(\xi_1^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{12}(\xi_1^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{1n}(\xi_1^0, \eta_n^0) \\ \mathbf{R}_{21}(\xi_2^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{22}(\xi_2^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{2n}(\xi_2^0, \eta_n^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1}(\xi_n^0, \eta_1^0) & \mathbf{R}_{n2}(\xi_n^0, \eta_2^0) & \cdots & \mathbf{R}_{nn}(\xi_n^0, \eta_n^0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}(\xi_1^0, \eta_1^0) \\ \mathbf{t}(\xi_1^0, \eta_2^0) \\ \vdots \\ \mathbf{t}(\xi_n^0, \eta_n^0) \end{Bmatrix}$$

em que  $n$  e  $m$  correspondem ao número de funções univariadas nas direções  $\xi$  e  $\eta$  do espaço paramétrico e  $\mathbf{R}_{ij}(\xi, \eta)$  são representações matriciais das funções  $R_{ij}(\xi, \eta)$ .

$$\mathbf{R}_{ij}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} R_{ij}(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & R_{ij}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & R_{ij}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

### 6.1.7 Imposição dos termos livres no sistema de equações

A segunda implicação da falta da propriedade delta de Kronecker nas aproximações diz respeito à imposição dos termos livres das integrais singulares no sistema de equações. Retomando as equações integrais discretas 2.42, 2.43 e 2.44, características da formulação MEC dual, e considerando agora as aproximações 6.5, obtém-se:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{y}) & \left[ \sum_{B=1}^{n,m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{u}}_j^B \right]^{\mathbf{y}} + \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{\mathbf{u}}_j^b \\ & = \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{\mathbf{t}}_j^b \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ \sum_{B=1}^{n,m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{u}}_j^B \right]^{\mathbf{y}^+} + \frac{\delta_{ij}}{2} \left[ \sum_{B=1}^{n,m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{u}}_j^B \right]^{\mathbf{y}^-} \\ & + \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} T_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{\mathbf{u}}_j^b \\ & = \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} U_{ij}(\mathbf{y}^+, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{\mathbf{t}}_j^\alpha \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ \sum_{B=1}^{n.m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{t}}_j^B \right]^{\mathbf{y}^-} - \frac{1}{2} \left[ \sum_{B=1}^{n.m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{t}}_j^B \right]^{\mathbf{y}^+} \\
& + \eta_i(\mathbf{y}^-) \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} S_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{u}_k^b \\
& = \eta_i(\mathbf{y}^-) \sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} D_{kij}(\mathbf{y}^-, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \hat{t}_k^b
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Note que, no caso isogeométrico, os deslocamentos  $u_j(\mathbf{y})$  ou  $u_j(\mathbf{y}^+)$  e as forças de superfície  $t_j(\mathbf{y}^-)$  que multiplicam os termos livres devem ser avaliados considerando as aproximações  $\left[ \sum_{B=1}^{n.m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{u}}_j^B \right]^{\mathbf{y} \text{ ou } \mathbf{y}^+}$  e  $\left[ \sum_{B=1}^{n.m} R_B(\xi^0, \eta^0) \hat{\mathbf{t}}_j^B \right]^{\mathbf{y}^-}$  sobre a superfície NURBS que contém os pontos  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}^+$  ou  $\mathbf{y}^-$ , sendo  $B=1, \dots, n.m$  a numeração global das funções  $R_{ij}(\xi, \eta)$ . Procedendo as integrais, reescrevem-se as equações 6.11, 6.12 e 6.13 em forma matricial como:

$$\mathbf{c}^{(i)} \mathbf{R}_B^{(i)} \hat{\mathbf{u}}_B + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i,j} \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{i,j} \hat{\mathbf{t}}_j \tag{6.14}$$

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{R}_{B(i+)} \hat{\mathbf{u}}_B + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{R}_{B(i-)} \hat{\mathbf{u}}_B + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i+,j} \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i+,j} \hat{\mathbf{t}}_j \tag{6.15}$$

$$\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i-,j} \hat{\mathbf{u}}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i-,j} \hat{\mathbf{t}}_j - \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{R}_{B(i-)} \hat{\mathbf{t}}_B + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{R}_{B(i+)} \hat{\mathbf{t}}_B \tag{6.16}$$

sendo

$$\mathbf{R}_{B(i)} = \left[ \begin{array}{cccccccccc} R_1 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & \cdots & R_{nm} & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 & R_2 & 0 & \cdots & 0 & R_{nm} & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & R_2 & \cdots & 0 & 0 & R_{nm} \end{array} \right]_{\xi^0, \eta^0} \tag{6.17}$$

Os vetores  $\hat{\mathbf{u}}_B$  e  $\hat{\mathbf{t}}_B$  são, portanto, de dimensões  $3mn \times 1$  e correspondem aos coeficientes dos campos de deslocamentos e de forças de superfície da aproximação sobre a NURBS. Considerando a correspondência entre a numeração  $B=1, \dots, n.m$  dos pontos de colocação da superfície NURBS singular e a numeração  $j=1, \dots, N$  de todos os pontos de

colocação das múltiplas superfícies NURBS que descrevem o problema, é possível acrescentar as contribuições dos termos  $\mathbf{c}^{(i)}\mathbf{R}_{B(i)}$ ,  $\frac{\mathbf{I}}{2}\mathbf{R}_{B(i+)}$  e  $\frac{\mathbf{I}}{2}\mathbf{R}_{B(i-)}$  nas matrizes globais  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  do sistema de equações final do MEC dual.

No caso do termo livre desconhecido,  $\mathbf{c}^{(i)}$ , a determinação do mesmo de forma implícita por meio da imposição do movimento de corpo rígido (Ver tópico 2.63) ainda permanece válida. Isso porque as funções  $R_B(\xi, \eta)$  correspondem a uma base que satisfaz à partição da unidade e, portanto, o somatório de qualquer linha de matrizes de influência  $\mathbf{H}_{ij}$  resulta:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{c}^{(i)} \sum_{B=1}^{nm} R_B = 0 \\ \mathbf{c}^{(i)} \sum_{B=1}^{nm} R_B &= -\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \\ \mathbf{c}^{(i)} &= -\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij}\end{aligned}\tag{6.18}$$

### 6.1.8 Definições geométricas

Assim como os campos de deslocamento e de forças de superfícies definidos na Eq. 6.5, o vetor distancia  $\mathbf{r}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ , que define os pontos sobre a superfície  $S_e$  de um elemento  $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$ , pode ser calculado para um ponto de integração  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  como:

$$\mathbf{r}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \sum_{b=1}^{nl} R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \mathbf{B}_b\tag{6.19}$$

em que  $R_b(\hat{\xi}, \hat{\eta})$  são as funções base não nulas sobre o elemento,  $\mathbf{B}_b$  são pontos de controle e  $b = 1, \dots, nl$  é a numeração local no elemento definida a partir das coordenadas NURB  $ij$  e dos vetores  $INC(\ )$  e  $IEN(\ )$ . A partir do vetor distância a relação entre os diferenciais de área  $dS_e$ , no espaço físico, e  $d\hat{\xi}d\hat{\eta}$ , no espaço de integração  $[-1,1] \times [-1,1]$ , pode ser definida a partir do vetor jacobiano  $\mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \partial \mathbf{r} / \partial \hat{\xi} \times \partial \mathbf{r} / \partial \hat{\eta}$ .

$$dS_e = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\xi}} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\eta}} \right| d\hat{\xi} d\hat{\eta} = \left| \mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right| d\hat{\xi} d\hat{\eta} = J(\hat{\xi}, \hat{\eta}) d\hat{\xi} d\hat{\eta} \quad (6.20)$$

sendo  $\left| \mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right| = J(\hat{\xi}, \hat{\eta})$  a norma do vetor jacobiano. As componentes  $J_i$  do vetor jacobiano são então definidas como:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial x_3}{\partial \hat{\eta}} - \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\eta}} \frac{\partial x_3}{\partial \hat{\xi}} \\ J_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial x_1}{\partial \hat{\eta}} - \frac{\partial x_3}{\partial \hat{\eta}} \frac{\partial x_1}{\partial \hat{\xi}} \\ J_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\eta}} - \frac{\partial x_1}{\partial \hat{\eta}} \frac{\partial x_2}{\partial \hat{\xi}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Note que as derivadas parciais são em relação às coordenadas  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  do espaço de integração e podem ser obtidas a partir da regra da cadeia como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{\xi}} &= \frac{\partial x_k}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{\xi}} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} \left( \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \right) \\ \frac{\partial x_k}{\partial \hat{\eta}} &= \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{\eta}} = \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \left( \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

em que as derivadas  $\partial \xi / \partial \hat{\xi}$  e  $\partial \eta / \partial \hat{\eta}$  são calculadas a partir da Eq. 6.4 e as derivadas  $\partial x_k / \partial \xi$  e  $\partial x_k / \partial \eta$  são calculadas a partir do mapeamento da Eq. 6.9 efetuando as respectivas derivas parciais das funções base  $R_b(\xi, \eta)$  conforme apresentado no Anexo F.

Por fim, o versor normal à superfície NURBS na imagem do ponto de integração  $\hat{\xi}, \hat{\eta}$  do elemento  $S_e$  é obtido simplesmente normalizando o vetor jacobiano.

$$\boldsymbol{\eta}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \frac{\mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta})}{\left| \mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \right|} = \frac{\mathbf{J}(\hat{\xi}, \hat{\eta})}{J(\hat{\xi}, \hat{\eta})} \quad (6.23)$$

### 6.1.9 Integração numérica

Substituindo as aproximações descritas nas Eq. 6.5 e Eq. 6.19 nas equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície e efetuando as integrais necessárias obtém-se o sistema de equações do MEC dual conforme apresentado no Capítulo 2. No caso

isogeométrico, todas as integrais são definidas sobre o espaço de integração  $[-1,1] \times [-1,1]$  dos elementos não triviais das superfícies NURBS que constituem o problema. Nesse caso, todas as integrais regulares ou regularizadas pelo processo de subtração de singularidade são tratadas numericamente via quadratura de Gauss auto adaptativa. Já as integrais singulares e hipersingulares são tratadas semianaliticamente por meio do método de Guiggiani, de maneira análoga ao apresentado para o caso isoparamétrico nos Anexos C e D.

### 6.1.10 Integrais regulares

As integrais dos núcleos  $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) = U_{ij}R_b, T_{ij}R_b, D_{kij}R_b$  ou  $S_{kij}R_b$  sobre os elementos  $S_e$  que não contém o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  podem ser efetuadas via quadratura de Gauss, resultando.

$$\int_{S_e} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\hat{\xi}, \hat{\eta})) = \sum_{i=1}^{Ng} \sum_{j=1}^{Ng} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\hat{\xi}^i, \hat{\eta}^j)) J(\hat{\xi}^i, \hat{\eta}^j) \omega_i \omega_j \quad (6.24)$$

em que  $Ng$  é o número de pontos de Gauss determinado auto adaptativamente analogamente ao descrito no tópico B4 do anexo B para o caso isoparamétrico,  $\hat{\xi}^i, \hat{\eta}^j$  são as coordenadas homogêneas dos pontos de Gauss e  $\omega_i, \omega_j$  são os pesos da quadratura numérica.

### 6.1.11 Subtração de singularidade pelo Método de Guiggiani

As integrais singulares e hipersingulares sobre os elementos  $S_e$  que contém o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  são tratadas semianaliticamente por meio do método de Guiggiani de maneira análoga ao apresentado nos anexos C e D. No caso isogeométrico, deve-se substituir as funções base  $N_\alpha(\xi_1, \xi_2)$  e suas derivadas  $\partial N_\alpha(\xi_1, \xi_2)/\partial \xi_1$  e  $\partial N_\alpha(\xi_1, \xi_2)/\partial \xi_2$  pelas funções base das NURBS  $R_b(\xi, \eta)$  e suas derivadas  $\partial R_b(\xi, \eta)/\partial \xi$  e  $\partial R_b(\xi, \eta)/\partial \eta$ . Além disso, o mapeamento dos pontos sobre o elemento, antes descrito conforme a Eq. 2.35, agora é descrito conforme a Eq. 6.19.

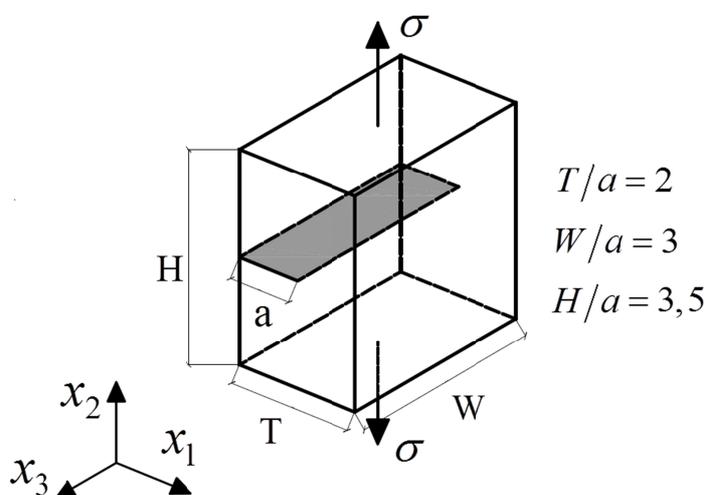
## 6.2 Estudo numérico preliminar

Nesse tópico, apresenta-se um estudo numérico preliminar envolvendo as formulações convencional com elementos de Lagrange lineares e quadráticos e isogeométrica com superfícies NURBS de ordens polinomiais quaisquer. Além de validar a implementação

isogeométrica, o estudo serviu de base para discutir novas possibilidades de pesquisa baseadas nas deficiências de ambas as abordagens. Três exemplos numéricos foram analisados e os resultados são apresentados e discutidos a seguir. Em todos os exemplos, optou-se por garantir a estanqueidade dos modelos numéricos, no intuito de evitar que os erros devido às lacunas e às superposições interferissem na comparação entre as respostas obtidas com os modelos convencionais e isogeométricos.

### 6.2.1 Fissura de borda solicitada em modo I

O primeiro exemplo é o de um prisma com uma fissura de borda conforme ilustra a Figura 6.4. A força de superfície foi adotada como unitária, i.e.,  $\sigma = 1$  (unidades de tensão). As dimensões do problema são caracterizadas pelo comprimento da fissura de  $a = 2,5$  (unidades de comprimento) e pelas relações dimensionais apresentadas na Figura 6.4. As constantes elásticas adotadas foram  $E = 1000$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0,3$ . A resposta analítica, assumindo um caso de EPD, é comparada com os resultados fornecidos pelos modelos numéricos no centro da linha de frente da fissura.

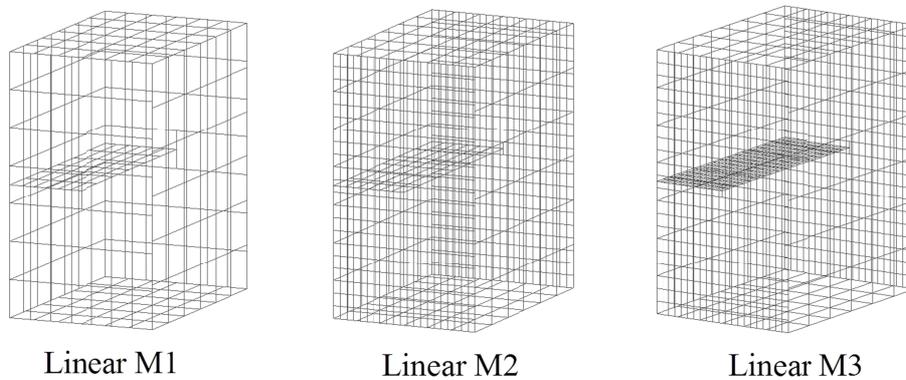


**Figura 6.4** Prisma com fissura de borda.

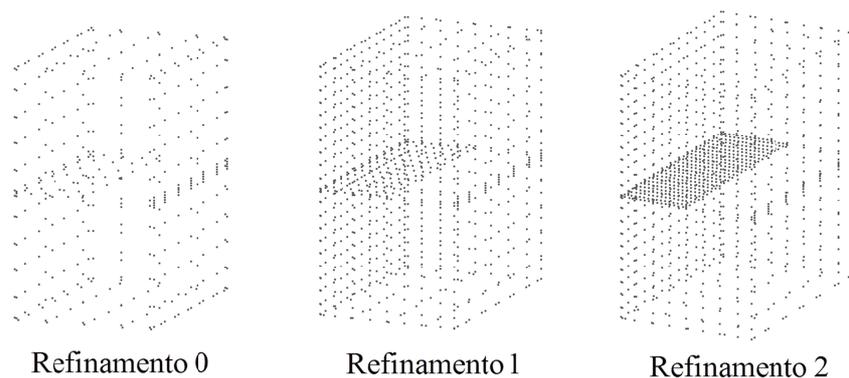
Para a abordagem convencional o problema foi discretizado em três distintas malhas de elementos de contorno quadrilaterais de aproximação linear. Em ordem crescente de refinamento, as malhas Linear M1, Linear M2 e Linear M3 resultam 695, 1591 e 3895 pontos de colocação, respectivamente. A Figura 6.5 apresenta as malhas dos modelos.

Na abordagem isogeométrica o problema foi discretizado em 13 superfícies NURBS não aparadas bi quadráticas, ou seja,  $p = q = 2$ . Novamente três modelos foram criados e

foram denominados Refinamento 0, Refinamento 1 e Refinamento 2, resultando 449, 1091 e 1707 pontos de colocação. A Figura 6.6 apresenta os modelos isogeométricos destacando os pontos de colocação.

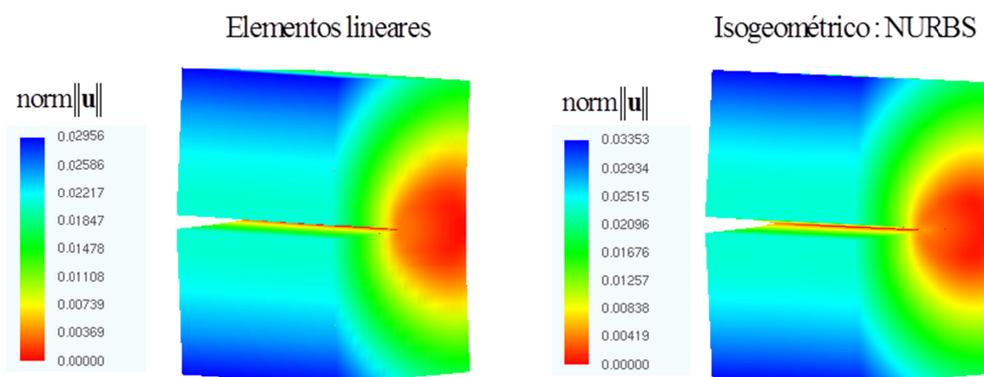


**Figura 6.5** Malhas adotadas para os modelos convencionais.



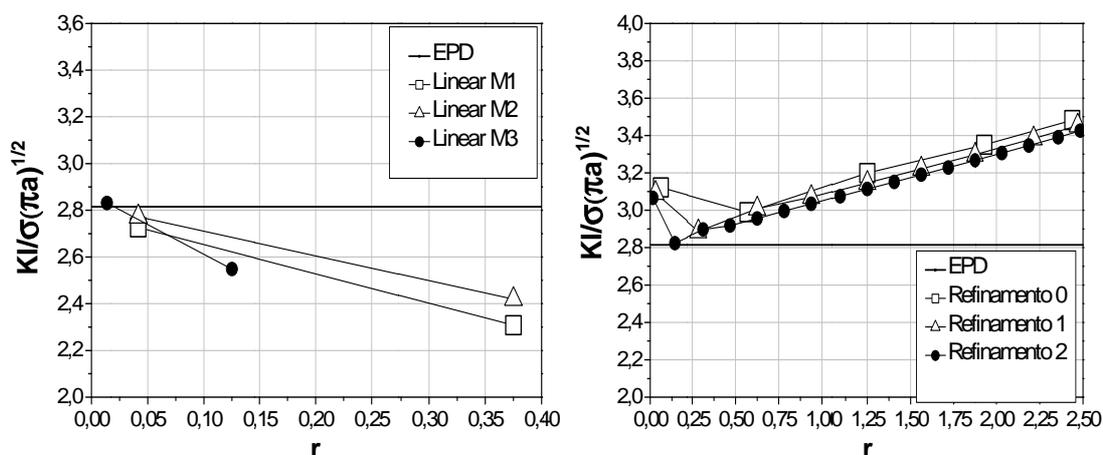
**Figura 6.6** Refinamentos adotados para os modelos isogeométricos.

A Figura 6.7 apresenta a resposta da norma do vetor deslocamentos, com a deformada em escala 1:10, para o modelo convencional Linear M2 e para o modelo isogeométrico Refinamento 1. Note a semelhança entre os campos obtidos com ambas as abordagens. Como o problema é em modo I, somente a resposta normalizada  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$  foi estudada.



**Figura 6.7** Deslocamentos e deformada 1:10 para os modelos Linear M2 e Refinamento 1.

Os valores numéricos de  $K_I$  foram calculados a partir da Técnica de Correlação de Deslocamentos (TCD). Primeiramente foi estudado o comportamento do valor numérico de  $K_I$  em função da distância de extração  $r$ . A Figura 6.8 apresenta o comportamento de  $K_I$  em função de  $r$  para os três modelos convencionais e para os três modelos isogeométricos.



**Figura 6.8** Resultados de  $K_I$  versus  $r$ .

Nos modelos convencionais, as melhores respostas de FIT são obtidas para os pontos de colocação mais próximos da frente da fissura, ou seja, para menores valores de  $r$ . Já nos modelos isogeométricos as melhores respostas de FIT são obtidas para o segundo ponto de colocação mais próximo da linha de frente da fissura. Resultado semelhante é reportado para elementos convencionais quadráticos (Cisilino & Aliabadi, 1999).

Fixando os referidos pontos de colocação para a extração dos FIT, a Figura 6.9 apresenta as respostas normalizadas  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$  ao longo espessura  $x_3$  do sólido para os modelos numéricos junto com a resposta de referência em EPD. Já a Tabela 6.1 apresenta um

comparativo do erro médio nas respostas numéricas de  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$  para o ponto central da frente da fissura,  $x_3 = 3,75$ , em relação à solução analítica em EPD.

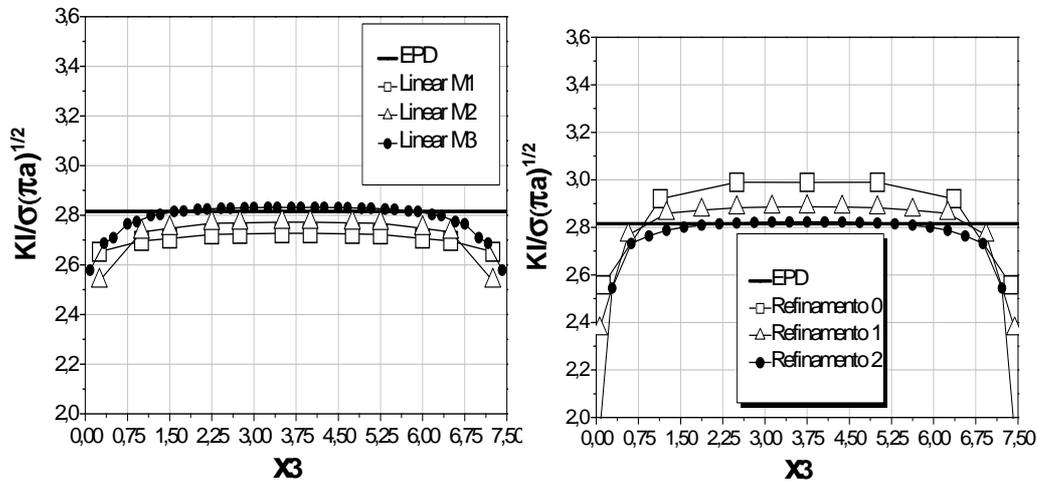


Figura 6.9 Resultados de  $K_I$  versus  $x_3$ .

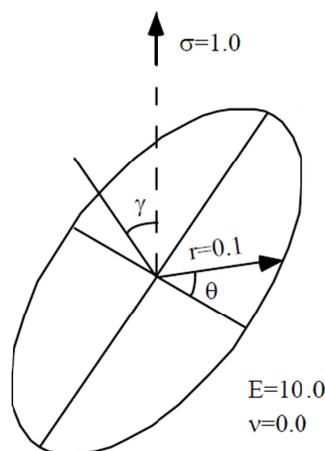
Tabela 6.1 – Erros médios das respostas de  $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$  para os modelos convencionais e isogeométricos.

Modelos convencionais	Erro médio	Modelos isogeométricos	Erro médio
Linear M1	3,14%	Refinamento 0	6,19%
Linear M2	1,53%	Refinamento 1	2,54%
Linear M3	0,58%	Refinamento 2	0,29%

Ambas as formulações do MEC dual resultaram respostas de FIT que parecem estar convergindo, na região central da frente da fissura, para a solução analítica em EPD, à medida que se refinam os modelos numéricos. Para os modelos mais refinados, ou seja, Linear M3 e Refinamento 2, os erros nos FIT são pequenos o suficiente para garantir respostas precisas em análises de propagação. Note, no entanto, que o modelo isogeométrico Refinamento 2 possui 1707 pontos de colocação, que corresponde a menos da metade dos 3895 pontos de colocação do modelo Linear M3, o qual utiliza elementos descontínuos para discretizar as superfícies da fissura.

### 6.2.2 Fissura circular solicitada em modo misto I/II/III

O segundo problema analisado refere-se a uma fissura circular de raio  $r$  em um meio infinito, submetida a uma tensão remota  $\sigma$ , conforme ilustra a Figura 6.10.



**Figura 6.10** Fissura circular em meio infinito.

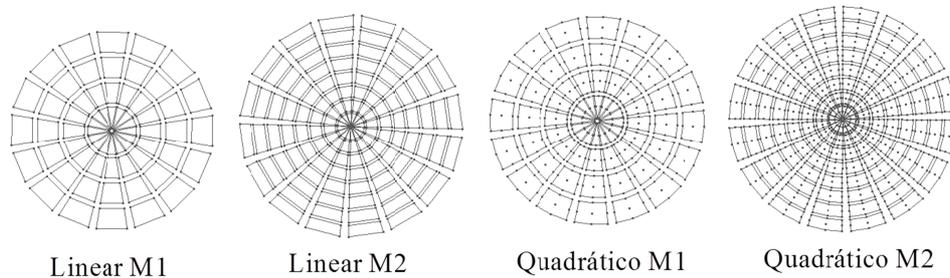
A solução analítica para os FIT desse problema é dada em Murakami (1987) como sendo:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma \sin^2(\gamma) \sqrt{\pi r} (2/\pi) \\
 K_{II} &= \sigma \sin(\gamma) \cos(\gamma) \sin(\theta) \sqrt{\pi r} (2/\pi) 2/(2-\nu) \\
 K_{III} &= \sigma \sin(\gamma) \cos(\gamma) \cos(\theta) \sqrt{\pi r} (2/\pi) 2/(2-\nu)(1-\nu)
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

em que  $\gamma$  é o ângulo entre a direção da tensão  $\sigma$  e a direção perpendicular ao plano da fissura. Dois casos:  $\gamma = 90^\circ$ , solitação em modo I de fratura, e  $\gamma = 45^\circ$ , solitação em modo misto de fratura, foram estudados. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados para o problema foram  $E = 10$  (unidades de tensão) e  $\nu = 0$ , e uma tensão remota unitária,  $\sigma = 1$  (unidades de tensão) foi aplicada. Para tratar o problema numericamente via o MEC dual, inseriu-se a fissura circular de raio  $r = 0,1$  (unidades de comprimento) no centro de um bloco de dimensões  $10 \times 5 \times 5$  (unidades de comprimento) no intuito de simular o meio infinito.

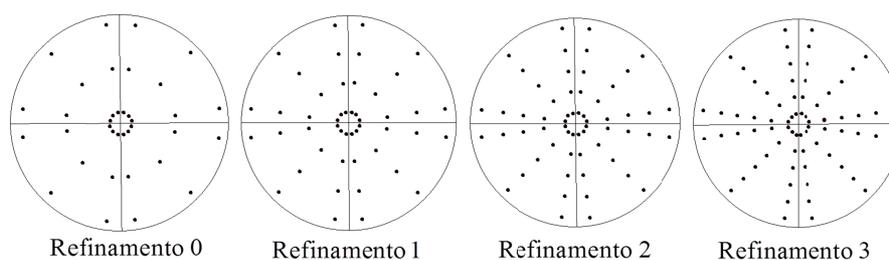
Para as análises com a abordagem convencional, o contorno do bloco foi discretizado com 320 elementos triangulares de aproximação linear, resultando em 450 pontos de colocação. Quatro diferentes malhas foram adotadas para discretizar a fissura, sendo as mesmas denominadas Linear M1, Linear M2, Quadrática M1 e Quadrática M2, as quais resultaram respectivamente em 480, 992, 1056 e 2208 pontos de colocação. A denominação

Linear ou Quadrática diz respeito à ordem de aproximação dos elementos adotados. A Figura 6.11 ilustra os elementos descontínuos das quatro malhas para a aproximação dos deslocamentos e das forças de superfície sobre a fissura.



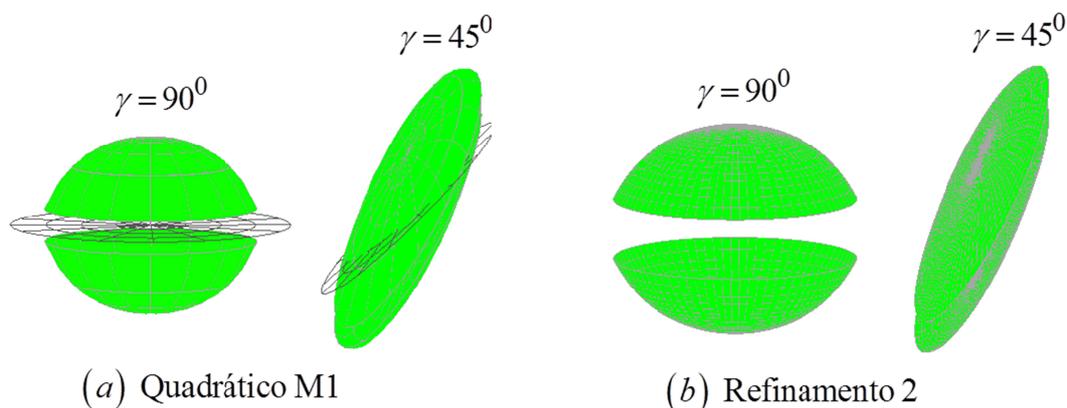
**Figura 6.11** Malhas adotadas para os modelos convencionais.

Nas análises isogeométricas, o bloco é definido por seis NURBS bi quadráticas. Considerando como descontínuas as duas NURBS onde atuam as tensões não nulas, o modelo resulta em 192 pontos de colocação sobre as superfícies do bloco. A princípio, cada face da fissura foi definida com quatro NURBS bi quadráticas, uma para cada quadrante da circunferência, evitando assim problemas de assimetria dos pontos de colocação. No mapeamento do espaço paramétrico para o espaço físico, a direção  $\xi$  representa a direção angular da circunferência, ao passo que a direção paramétrica  $\eta$  representa a direção radial. Uma vez que a ordem  $p = 2$  é suficiente para descrever de maneira exata a geometria circular da linha de frente e que o comportamento assintótico dos deslocamentos ocorre na direção radial da fissura, o refinamento foi realizado elevando-se a ordem polinomial  $q$  da direção paramétrica  $\eta$ . Quatro diferentes refinamentos foram adotados para as oito superfícies NURBS da fissura: Refinamento 0 ( $p = 2, q = 2$ ), Refinamento 1 ( $p = 2, q = 3$ ), Refinamento 2 ( $p = 2, q = 4$ ) e Refinamento 3 ( $p = 2, q = 5$ ). Considerando como descontínuas as oitos NURBS da fissura, os refinamentos 0, 1, 2 e 3 resultam, respectivamente, 72, 96, 120 e 144 pontos de colocação. A Figura 6.12 apresenta os pontos de colocação sobre as faces da fissura para os quatro refinamentos descritos.



**Figura 6.12** Refinamentos adotados para os modelos isogeométricos.

A convergência do problema foi estudada em termos dos resultados dos FIT, os quais foram obtidos por meio da TCD. Primeiramente foi estudada a solicitação em modo I,  $\gamma = 90^\circ$ . Nesse caso, avaliou-se a precisão da resposta de  $K_I$  em função da distância de extração  $r$ . Posteriormente, foi estudada a solicitação em modo misto,  $\gamma = 45^\circ$ , onde foi possível comparar as respostas dos três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . A Figura 6.13 apresenta a deformada da fissura em escala 1:100 para os modelos Quadrático M1 e Refinamento 2 considerando ambos os casos  $\gamma = 90^\circ$  e  $\gamma = 45^\circ$ .



**Figura 6.13** Deformada em escala 1:100 para os modelos Quadrático M1 e Refinamento 2.

**Modo I ( $\gamma = 90^\circ$ ).** O caso de solicitação em modo I,  $\gamma = 90^\circ$ , foi primeiramente estudado para analisar a influência da distância  $r$  na extração dos FIT via a TCD. O gráfico à esquerda da Figura 6.14 apresenta os resultados de  $K_I$  versus  $r$  para os modelos convencionais. A partir dessa figura é possível perceber que, no caso de elementos de aproximação linear, os melhores resultados de  $K_I$  são obtidos para os pontos de colocação mais próximos da frente da fissura. Já no caso de elementos quadráticos, os melhores resultados de  $K_I$  são obtidos para os segundos pontos de colocação mais próximos de  $r = 0$ , semelhantemente ao observado para os modelos isogeométricos do exemplo anterior com funções base NURBS bi quadráticas. Já o gráfico à direita da Figura 6.14 apresenta os resultados de  $K_I$  versus  $r$  para os modelos isogeométricos. A partir dos resultados é possível perceber que, à medida que se melhora o refinamento do problema, a distância ótima parece estar convergindo para um valor aproximadamente igual à  $r \approx 0,0225$  (unidades de comprimento), que corresponde no espaço paramétrico à  $\eta = 0,775$ .

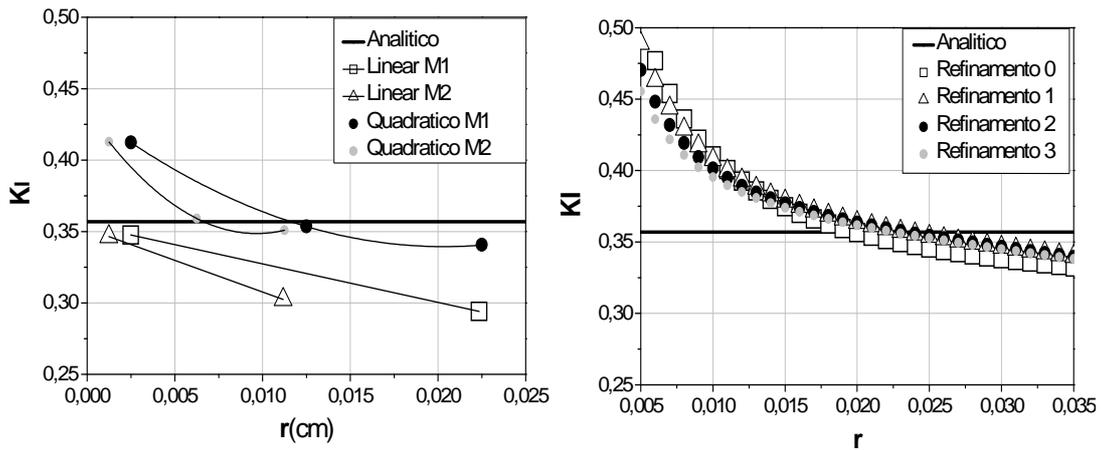


Figura 6.14 Resultados de  $K_I$  versus  $r$ .

Fixando as distâncias  $r$  definidas a partir da Fig. 6.14 apresentam-se no gráfico da Figura 6.15 os resultados de  $K_I$  versus  $\theta$  para o caso  $\gamma = 90^\circ$ , sendo  $\theta$  o ângulo ilustrado na Fig.6.10.

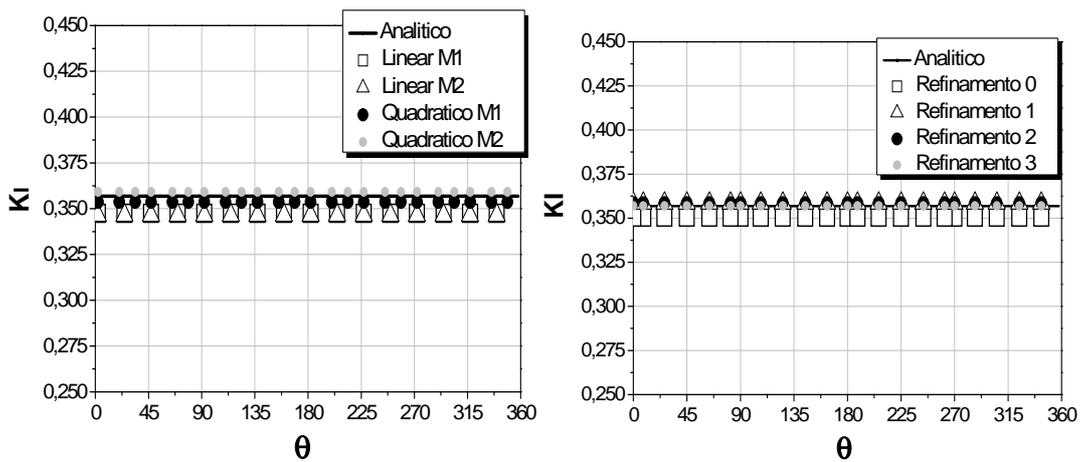
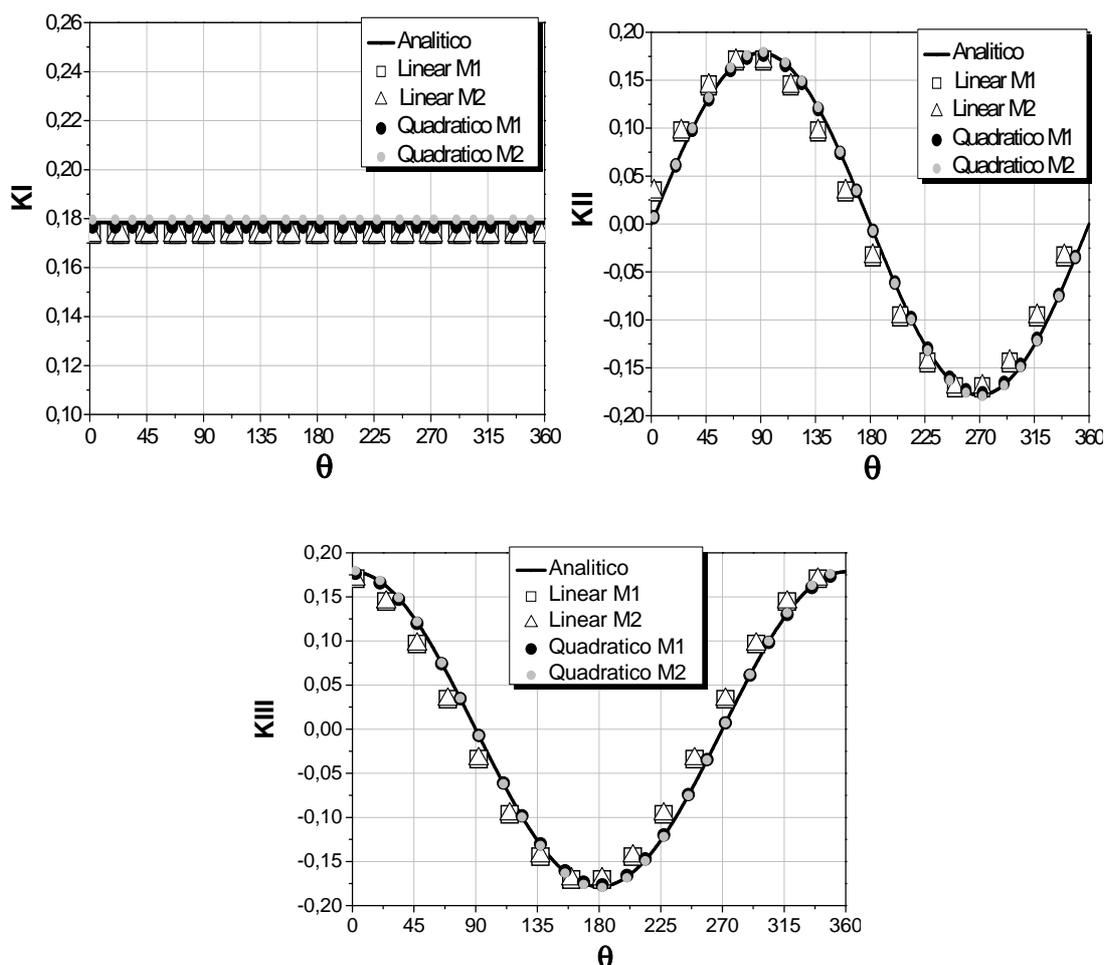


Figura 6.15 Resultados de  $K_I$  versus  $\theta$ .

**Modo misto ( $\gamma = 45^\circ$ ).** Fixando as distâncias de extração ótimas definidas nas análises em modo I, foi possível avaliar os valores dos FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  para o caso de solicitação em modo misto,  $\gamma = 45^\circ$ . Os resultados dos três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são apresentados em função de  $\theta$  nos gráficos da Figura 6.16 para os modelos convencionais.



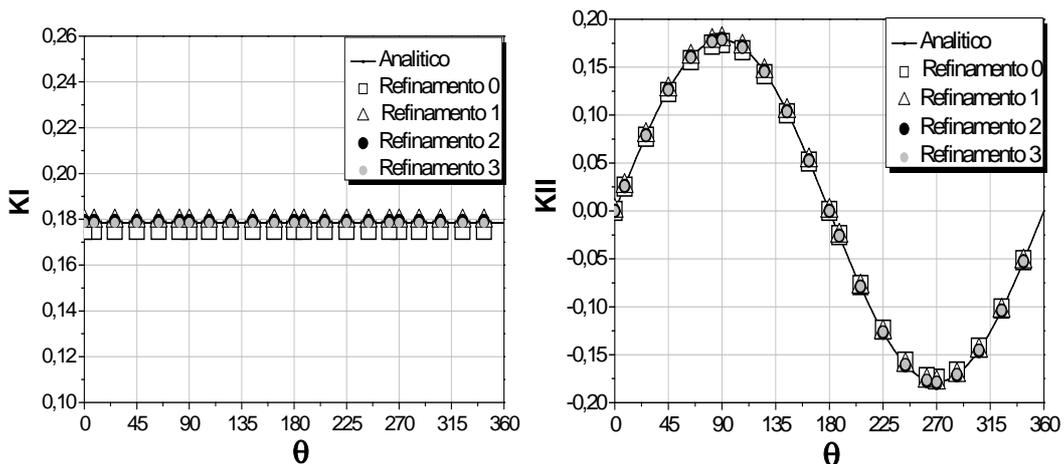
**Figura 6.16** Resultados de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  versus  $\theta$ : Modelos convencionais.

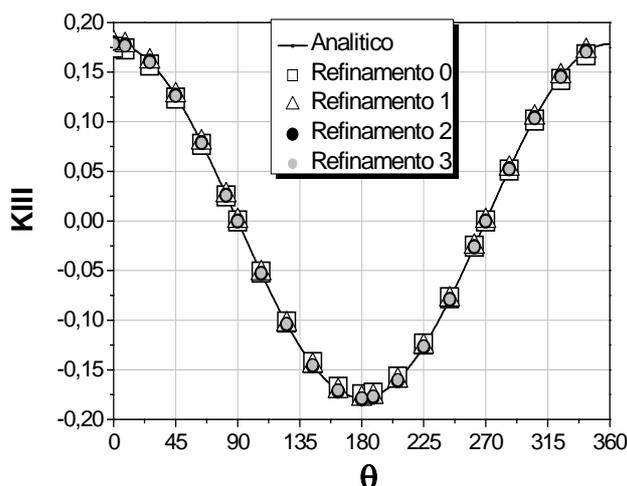
A Tabela 6.2 apresenta os erros médios das respostas numéricas dos três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  para os modelos convencionais. Conforme o esperado os melhores resultados são observados para os elementos de contorno de aproximação quadrática, uma vez que estes elementos proporcionam uma melhor aproximação para a geometria circular da fissura. Foi observada uma grande discrepância de precisão nas respostas de  $K_{II}$  e  $K_{III}$  ao elevar a ordem dos elementos de linear para quadrática. Verificou-se ainda que a falta de precisão dos elementos lineares na avaliação dos FIT  $K_{II}$  e  $K_{III}$  não decorre propriamente da resposta de deslocamentos do MEC dual, mas sim da definição dos sistemas de coordenadas locais sobre os pontos da linha de frente da fissura. Grandes discrepâncias são observadas ao tentar definir sistemas de coordenadas locais baseados nas arestas retas dos elementos lineares que aproximam a linha de frente circular da fissura. Os erros na definição dos sistemas de coordenadas locais são então propagados na rotação dos deslocamentos e conseqüentemente no cálculo dos FIT.

**Tabela 6.2** – Erro médio nas respostas de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  para os modelos convencionais.

Modelos convencionais	Erro médio KI	Erro médio KII	Erro médio KIII
Linear M1	2,87%	15,87%	15,87%
Linear M2	2,50%	15,61%	15,61%
Quadrático M1	0,90%	0,90%	0,90%
Quadrático M2	0,67%	0,64%	0,64%

Já no caso dos modelos isogeométricos os resultados dos três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  são apresentados em função de  $\theta$  nos gráficos da Figura 6.17 e os erros médios são apresentados na Tabela 6.3. Note que a representação geometricamente exata dos sistemas de coordenadas locais sobre a linha de frente da fissura faz com que os erros médios dos três FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  sejam aproximadamente iguais. Além disso, os erros médios e máximos dos FIT apresentados na Tabela 6.3 são consideravelmente inferiores aos apresentados na Tabela 6.2 para os modelos isoparamétricos.





**Figura 6.17** Resultados de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  versus  $\theta$ : Modelos isogeométricos.

**Tabela 6.3** – Erro médio nas respostas de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  para os modelos isogeométricos.

Modelos isogeométricos	Erro médio KI	Erro médio KII	Erro médio KIII
Refinamento 0	1,78%	1,78%	1,78%
Refinamento 1	0,52%	0,52%	0,52%
Refinamento 3	0,44%	0,44%	0,44%
Refinamento 4	0,04%	0,04%	0,04%

Por fim a Tabela 6.4 apresenta uma comparação entre os erros médios dos FIT das análises convencionais e isogeométricas levando em consideração o número de pontos de colocação dos modelos. A partir da Tabela 6.4 é possível perceber que os modelos isogeométricos apresentam bons resultados com um número consideravelmente menor de pontos de colocação. Note que, mesmo no caso isogeométrico mais refinado, o número de pontos de colocação foi menos de um terço do número de pontos de colocação da malha mais simples adotada para o caso isoparamétrico. Essa redução no número de pontos de colocação se deve à possibilidade de aumentar o número de funções base sobre as faces da fissura sem

que ocorra o aumento excessivo de pontos de colocação, como ocorre nas análises convencionais com a utilização de elementos descontínuos.

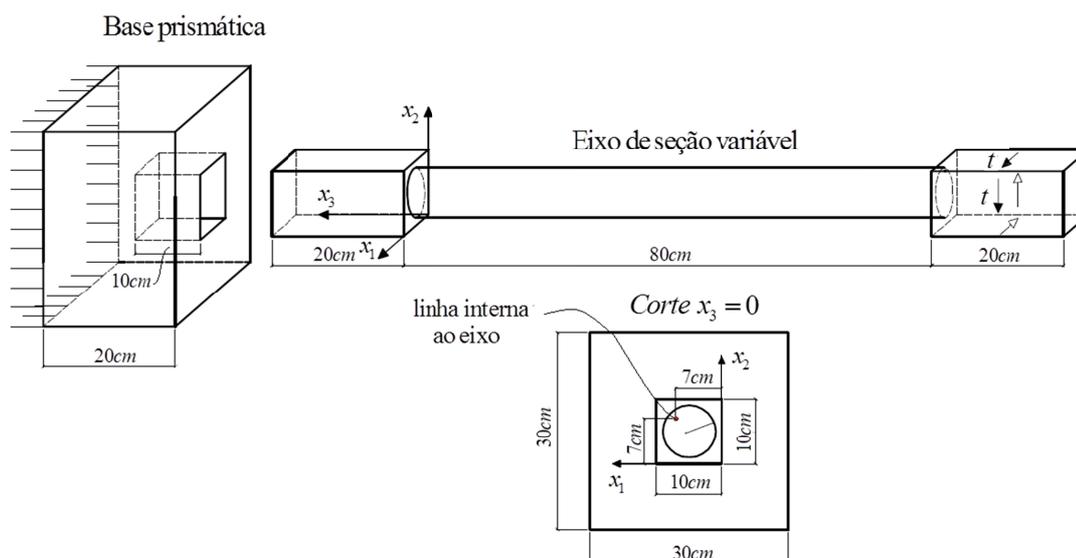
**Tabela 6.4** – Comparativo das análises convencionais e isogeométricas.

Modelos convencionais		Modelos isométrico	
Pontos de colocação	Erro médio	Pontos de colocação	Erro médio
480	15,865613%	72	1,782026%
992	15,606160%	96	0,518365%
1056	0,899446%	120	0,443236%
2208	0,636429%	144	0,038124%

### 6.2.3 Fissura de borda em um componente composto por duas partes

O último exemplo trata do comportamento mecânico conjunto de dois componentes elásticos lineares perfeitamente conectados por uma interface do tipo macho-e-fêmea pela técnica de sub-regiões. Na Figura 6.18, apresenta-se a geometria dos componentes, o mecanismo de encaixe e as condições de contorno do problema.

O primeiro componente é um eixo de seção transversal variável submetido a esforços de torção devido à atuação de forças cisalhantes  $t = 1\text{kN}/\text{cm}^2$  nas superfícies da porção prismática do eixo em uma de suas extremidades. Na Figura 6.18 também é ilustrada a posição de uma linha interna ao eixo para a posterior avaliação de deslocamentos e tensões. O módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson adotados para o eixo foram  $E = 21000\text{kN}/\text{cm}^2$  e  $\nu = 0,3$ , os quais são constantes elásticas condizentes as de um aço comum.



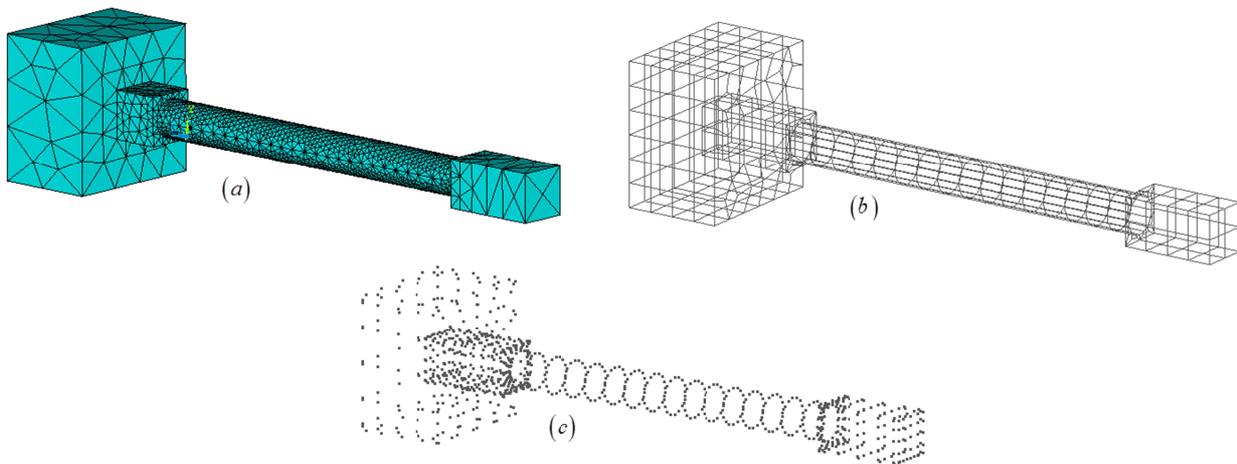
**Figura 6.18** - Componente mecânico composto por duas partes.

Em sua outra extremidade, o eixo encontra-se engastado em uma base prismática constituída de outro material elástico cujas constantes  $E = 3000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 0,2$  são condizentes com as constantes de um concreto convencional. Por fim, restringiram-se os deslocamentos da face oposta da base prismática conforme ilustrado na Fig. 6.18. O problema é analisado primeiramente sem a presença de fissuras, visando uma comparação de resultados com uma análise em elementos finitos via Ansys.

A malha de elementos finitos do problema não fissurado é ilustrada na Figura 6.19a e é constituída por 19472 elementos do tipo "SOLID186" e 90 elementos do tipo "SURF154" posicionados sobre as superfícies onde são impostas as tensões cisalhantes. A discretização em elementos finitos resultou um modelo com 29669 nós. Para a formulação convencional do MEC, o problema foi discretizado com elementos quadrilaterais de aproximação quadrática para melhor representar as superfícies curvas do trecho de seção circular do eixo. A Figura 6.19b ilustra a malha de elementos de contorno quadrilaterais. Adotam-se elementos descontínuos de aresta nas regiões com descontinuidades de forças de superfície ao final do encaixe macho-e-fêmea, nas faces onde atuam as forças cisalhantes impostas e na interface entre a seção circular e a seção prismática do eixo, onde posteriormente será inserida a fissura de borda. A malha é composta por 572 elementos de aproximação quadrática, totalizando 2862 pontos de colocação.

Na abordagem isogeométrica o problema foi modelado considerando 28 superfícies NURBS não aparadas de ordens polinomiais  $p = 2$  e  $q = 2$ . Das 28 NURBS, 17 descrevem

as superfícies do eixo de seção variável e as 11 restantes descrevem as superfícies da base prismática. A NURBS que representam a superfície cilíndrica do eixo e as NURBS que descrevem as faces de mudança de sua seção transversal foram adotadas como descontínuas de aresta. Dessa maneira é possível inserir uma fissura de borda no modelo isogeométrico conforme será discutido mais adiante. Todas as demais superfícies foram adotadas como descontínuas de maneira a respeitar as discontinuidades de forças de superfície do problema. O modelo isogeométrico sem fissuras resulta 1112 pontos de colocação, conforme ilustrado na Figura 6.19c.



**Figura 6.19** - Discretizações adotadas: (a) Modelo de elementos finitos (b) Modelo de elementos de contorno convencionais (c) Pontos de colocação do modelo isogeométrico.

Para validar os modelos sem fissura, avaliam-se as respostas de deslocamentos e tensões em pontos posicionados ao longo da linha interna ao eixo mecânico, ilustrada na Fig. 6.18. Os deslocamentos são apresentados na Figura 6.20 e as seis componentes independentes de tensão são apresentadas na Figura 6.21. Os resultados são apresentados ao longo do comprimento  $L = 120\text{cm}$  do eixo.

A concordância entre as respostas numéricas evidencia a correta implementação da técnica de sub-regiões para a abordagem isogeométrica do MEC. Ressalta-se que, para a formulação isogeométrica, onde a imposição das condições de contorno não é tão direta como na abordagem convencional, a técnica de sub-regiões pode ser uma alternativa para modelos com complexas condições de contorno.

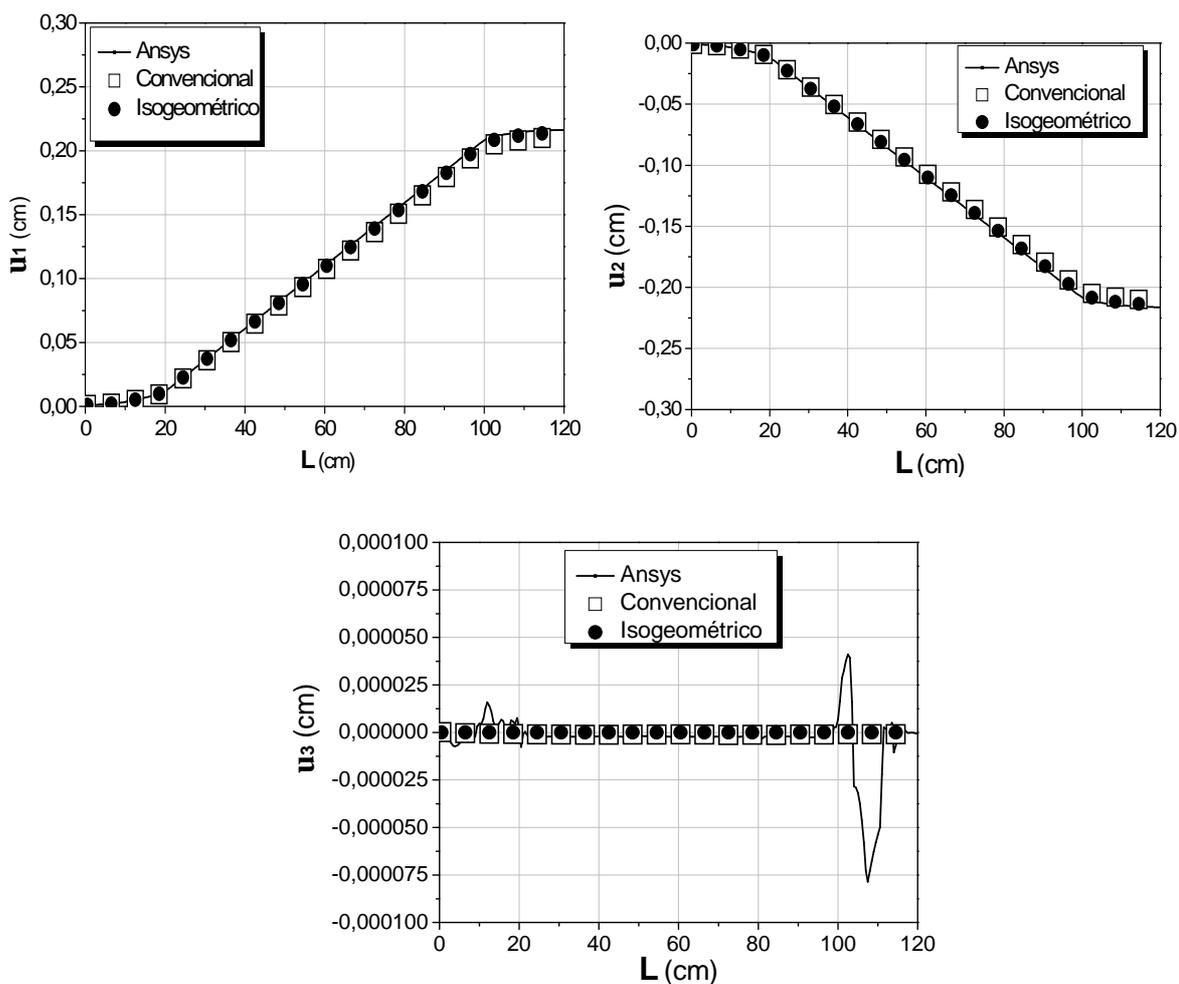


Figura 6.20 – Deslocamentos  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  ao longo da linha interna do eixo.

Por fim destaca-se a melhor precisão das tensões obtidas por ambas as formulações do MEC em relação às respostas de elementos finitos. Para o modelo isogeométrico, as respostas foram ainda mais precisas do que as do modelo convencional. Os resultados numéricos das componentes de tensão  $\sigma_3$  e  $\tau_{12}$  (teoricamente nulas, dada a simetria do problema) foram da ordem de  $10^{-14} \text{ kN/cm}^2$  com a abordagem isogeométrica e da ordem de  $10^{-5} \text{ kN/cm}^2$  com abordagem convencional.

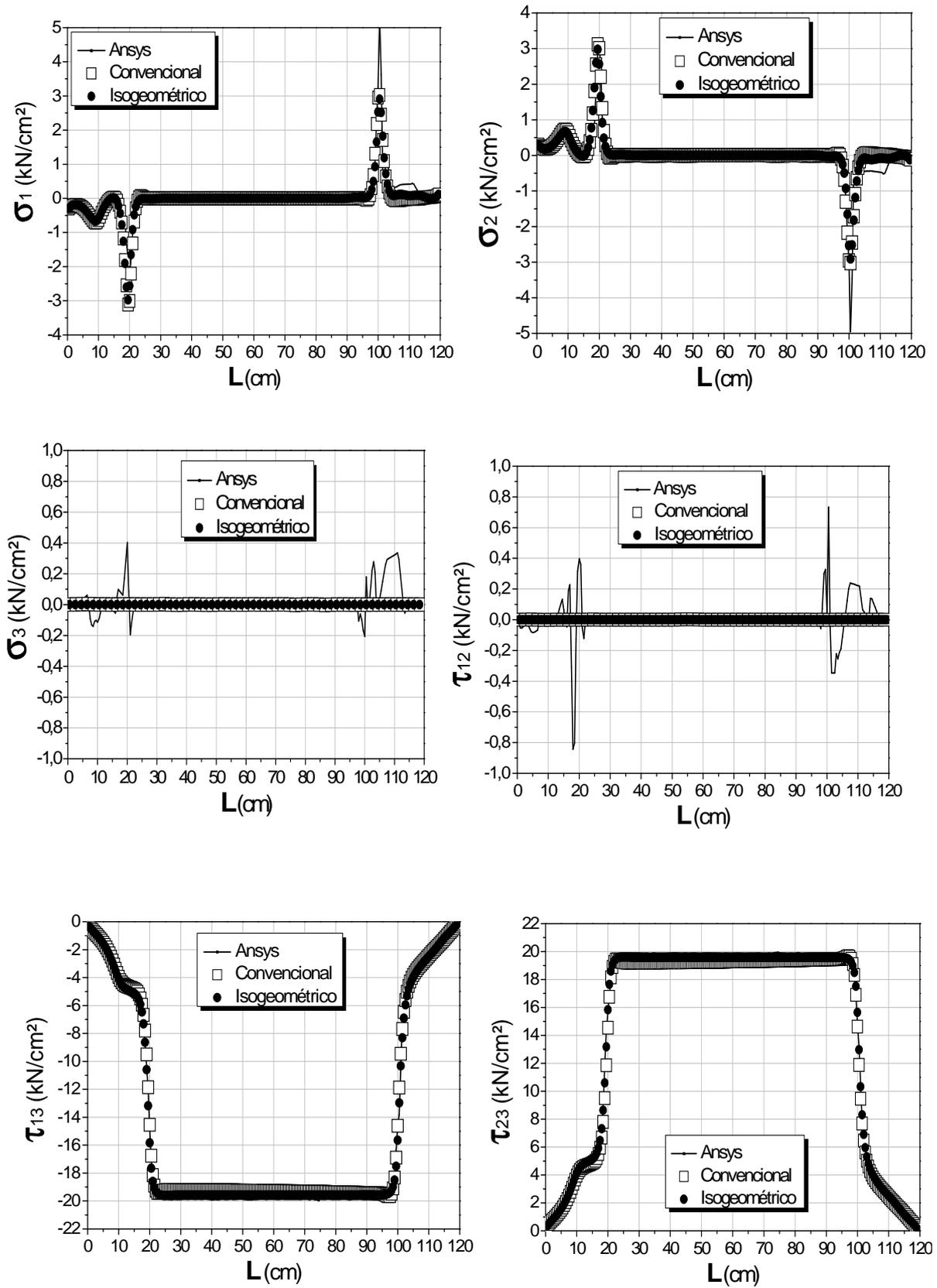


Figura 6.21 – Tensões  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$  e  $\tau_{23}$  ao longo da linha interna do eixo.

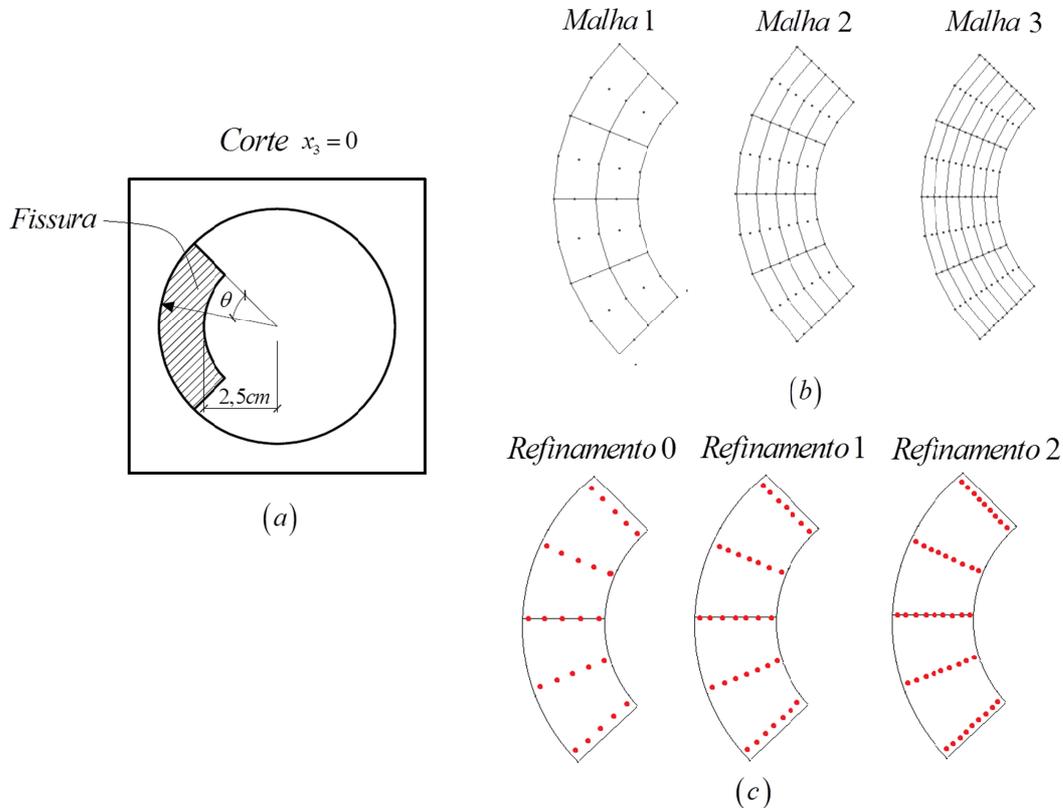
Analisando as tensões no eixo foi possível observar que a seção transversal de transição entre o trecho prismático e o trecho cilíndrico apresenta elevados gradientes de tensões e, portanto, é uma seção crítica da estrutura. Sabe-se ainda que, em problemas de eixos sob torção, as maiores tensões ocorrem no contorno do problema. Portanto, é interessante avaliar o comportamento do mesmo considerando a presença de uma fissura de borda na seção de transição. Aproveitam-se os modelos convencional e isogeométrico previamente estudados para inserir uma fissura de borda na seção  $x_3 = 0$  conforme ilustrado na Figura 6.22a.

Mantendo a malha do contorno fixa, a convergência do modelo convencional foi avaliada refinando-se a malha das superfícies da fissura e avaliando a resposta dos FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  ao longo da linha de frente da fissura em função do ângulo  $\theta$  ilustrado na Figura 6.22a. Adotam-se três diferentes malhas, conforme ilustra a Figura 6.22b. Em todas as malhas foram adotados elementos quadriláteros de aproximação quadrática. As malhas 1, 2 e 3 são compostas respectivamente por 8, 16 e 24 elementos por face da fissura totalizando 144, 288 e 432 pontos de colocação na discretização da fissura.

A convergência do modelo isogeométrico foi estudada também mantendo fixos os refinamentos das superfícies NURBS do contorno. Adotou-se uma superfície NURBS para cada face da fissura e as análises foram efetuadas refinando-as gradativamente e avaliando a resposta dos FIT  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  ao longo da linha de frente da fissura. Optou-se por refinar as NURBS da fissura por elevação da ordem polinomial da direção radial. Os refinamentos foram denominados Refinamento 0 ( $p = 2, q = 4$ ), Refinamento 1 ( $p = 2, q = 6$ ) e Refinamento 2 ( $p = 2, q = 8$ ) e resultaram, respectivamente, 50, 70 e 90 pontos de colocação sobre as faces da fissura. Os pontos de colocação sobre as faces da fissura são ilustrados na Figura 6.22c. Note que, ao contrário das análises convencionais onde fissuras de borda podem ser inseridas em quaisquer regiões do contorno a partir de algoritmos de remalhamentos locais, a inserção de fissuras de borda em modelos isogeométricos é ainda um problema a ser resolvido. No presente exemplo a fissura foi propositalmente inserida em uma região para a qual não houve a necessidade de reparametrizar o modelo.

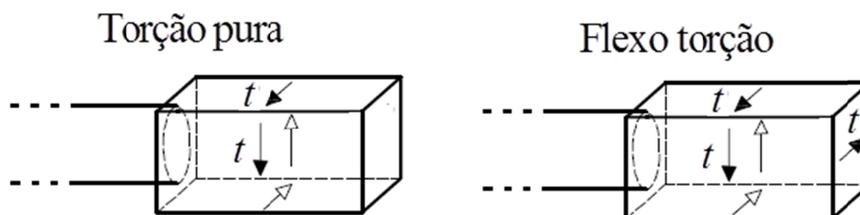
Os FIT foram extraídos a partir da TCD, adotando-se as distâncias de extração utilizadas no exemplo anterior, ou seja, o segundo ponto de colocação mais próximo da frente da fissura para o modelo convencional e  $\eta = 0,775$  para o modelo isogeométrico, sendo  $\eta$  a

coordenada paramétrica que mapeia a direção radial e  $\eta = 1$  a frente da fissura no espaço paramétrico.



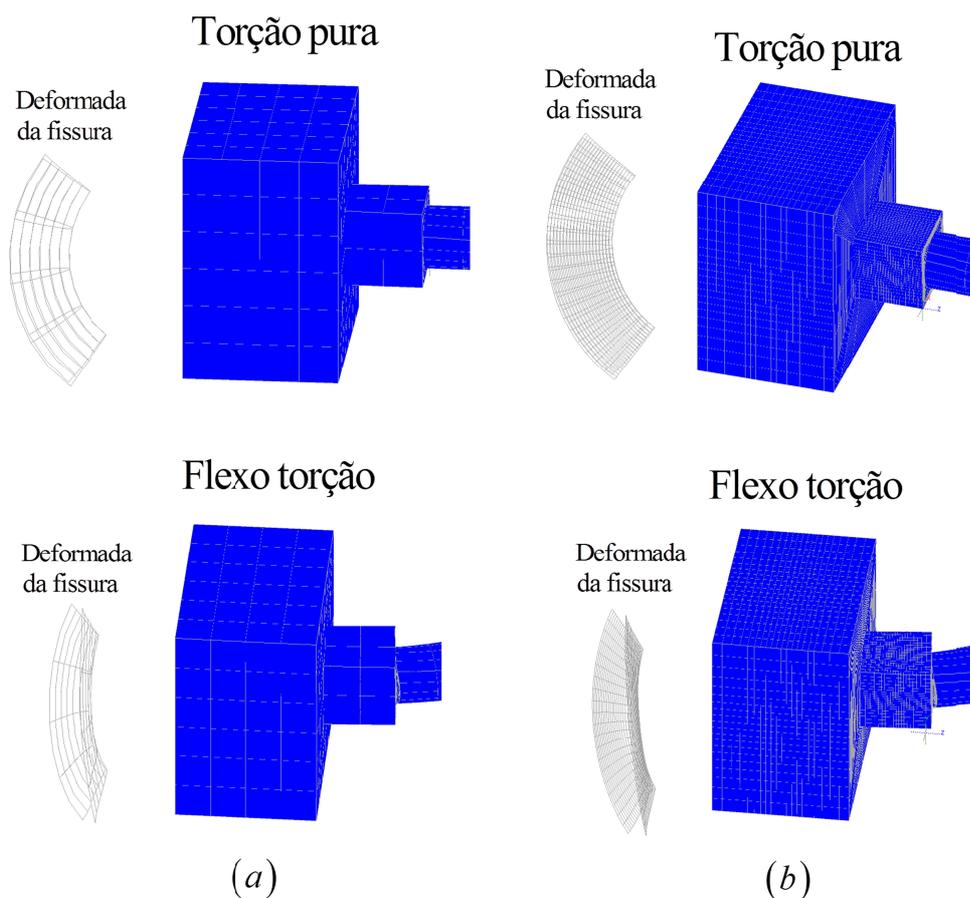
**Figura 6.22** – (a) Localização da fissura de borda, (b) Modelos convencionais (c) Modelos isogeométricos.

Na análise do modelo fissurado, duas distintas solicitações foram impostas no eixo mecânico: Torção pura e flexo-torção conforme ilustrado na Figura 6.23.



**Figura 6.23** - Solicitações: Torção pura e Flexo torção.

Em ambos os casos, as tensões cisalhantes foram  $t = 1 \text{ kN/cm}^2$ . A Figura 6.24a apresenta a deformada com os deslocamentos ampliados na região próxima à fissura de borda e também a deformada das faces da fissura para as distintas solicitações obtidas com o modelo convencional mais refinado. Já na Figura 6.24b os mesmos resultados são apresentados para o modelo isogeométrico mais refinado.



**Figura 6.24** – Deformadas locais: (a) Modelo convencional (b) Modelo isogeométrico.

No caso da torção pura, verificou-se que a assimetria do modelo induzida pela presença da fissura fez com que o eixo apresentasse um empenamento, o qual ocasionou a interpenetração das faces da fissura. Para evitar tal situação, o algoritmo para o tratamento da interpenetração descrito no tópico 2.9 foi adotado. Em todas as análises o algoritmo convergiu com apenas 4 iterações. Já no caso da flexo torção não foi detectada a interpenetração da matéria em nenhuma região das superfícies de fissura. Sendo assim o problema foi solucionado com apenas uma iteração. As Figuras 6.25a e 6.26a apresentam em escala de cores as discontinuidades de deslocamento  $\|\bar{u}_1\|$ ,  $\|\bar{u}_2\|$  e  $\|\bar{u}_3\|$  sobre as faces da fissura para os casos de torção pura e flexo torção, respectivamente, do modelo convencional mais refinado. Já as Figuras 6.25b e 6.26b apresentam os mesmos resultados para o modelo isogeométrico mais refinado.

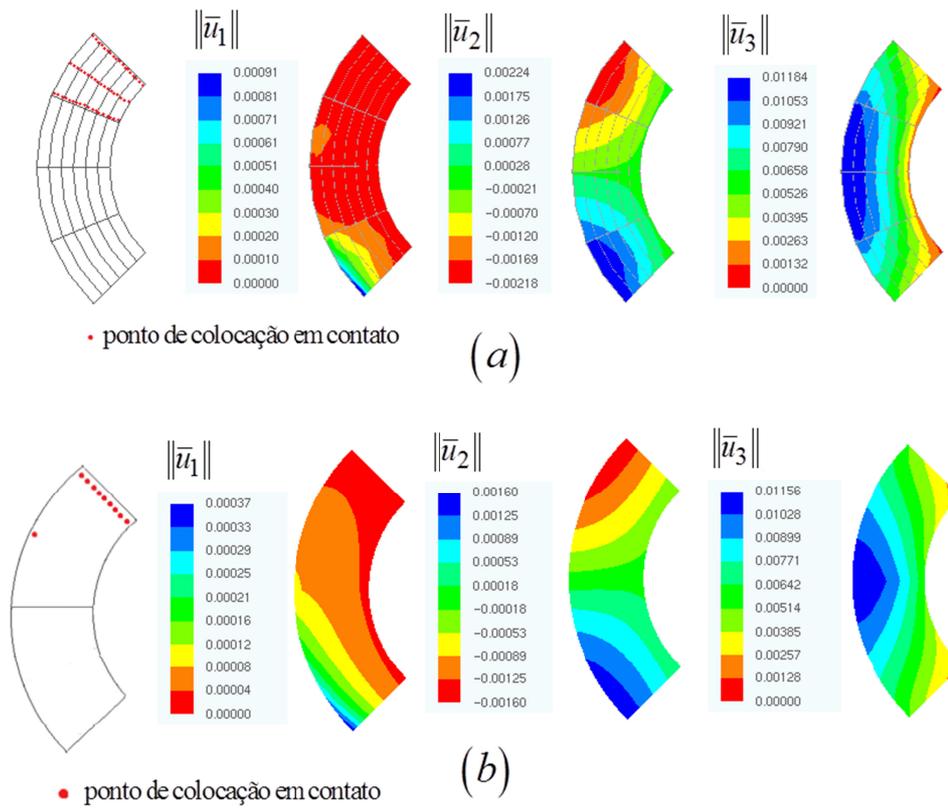


Figura 6.25 - Descontinuidades de deslocamento nas faces da fissura: Torção pura.

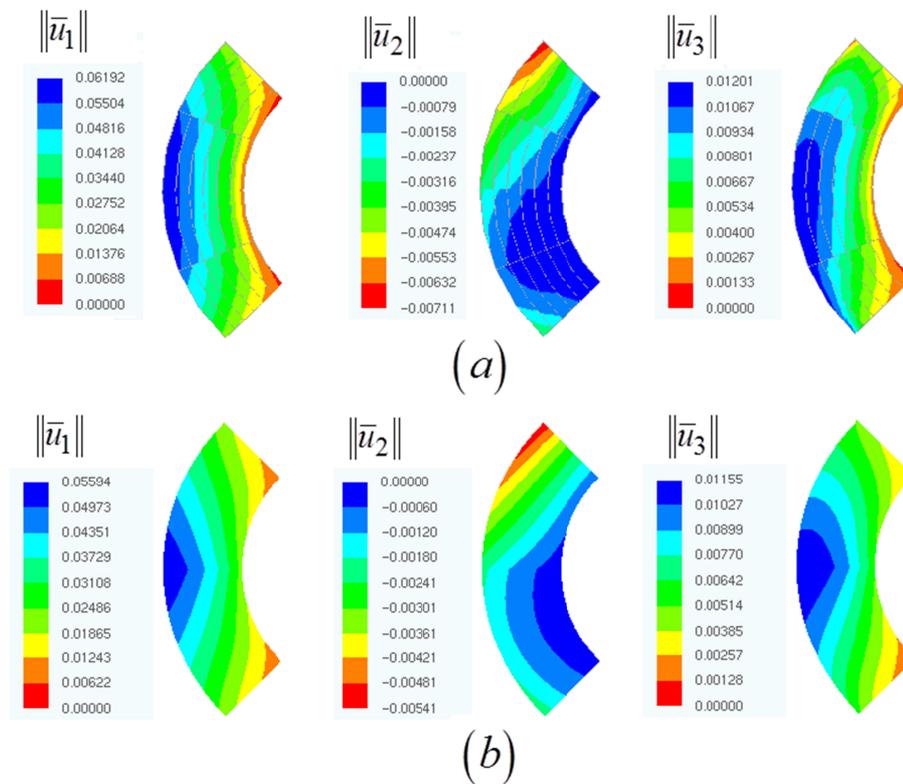


Figura 6.26 - Descontinuidades de deslocamento nas faces da fissura: Flexo torção.

Na Figura 6.25 são apresentados também os pontos de colocação que se encontram na situação de contato após a convergência do algoritmo de tratamento da interpenetração. Note a semelhança entre os resultados obtidos com ambos os modelos convencional e isogeométrico. Note, no entanto, que no caso isogeométrico a condição de contato foi identificada em menos pontos de colocação do que no caso isoparamétrico. Tal problema pode estar relacionado ao menor número de pontos de colocação sobre as faces da fissura no modelo isogeométrico. Ressalta-se que, devido à falta da propriedade delta de Kronecker das funções base das NURBS, o algoritmo de tratamento da interpenetração das faces da fissura pode não resultar respostas satisfatórias para modelos isogeométricos de uma maneira geral. Isso se deve a razões semelhantes às discutidas na imposição de condições de contorno em forma forte. Por fim, as respostas dos FIT são apresentadas na Figura 6.27 para o caso da torção pura e na Figura 6.28 para o caso da flexo-torção.

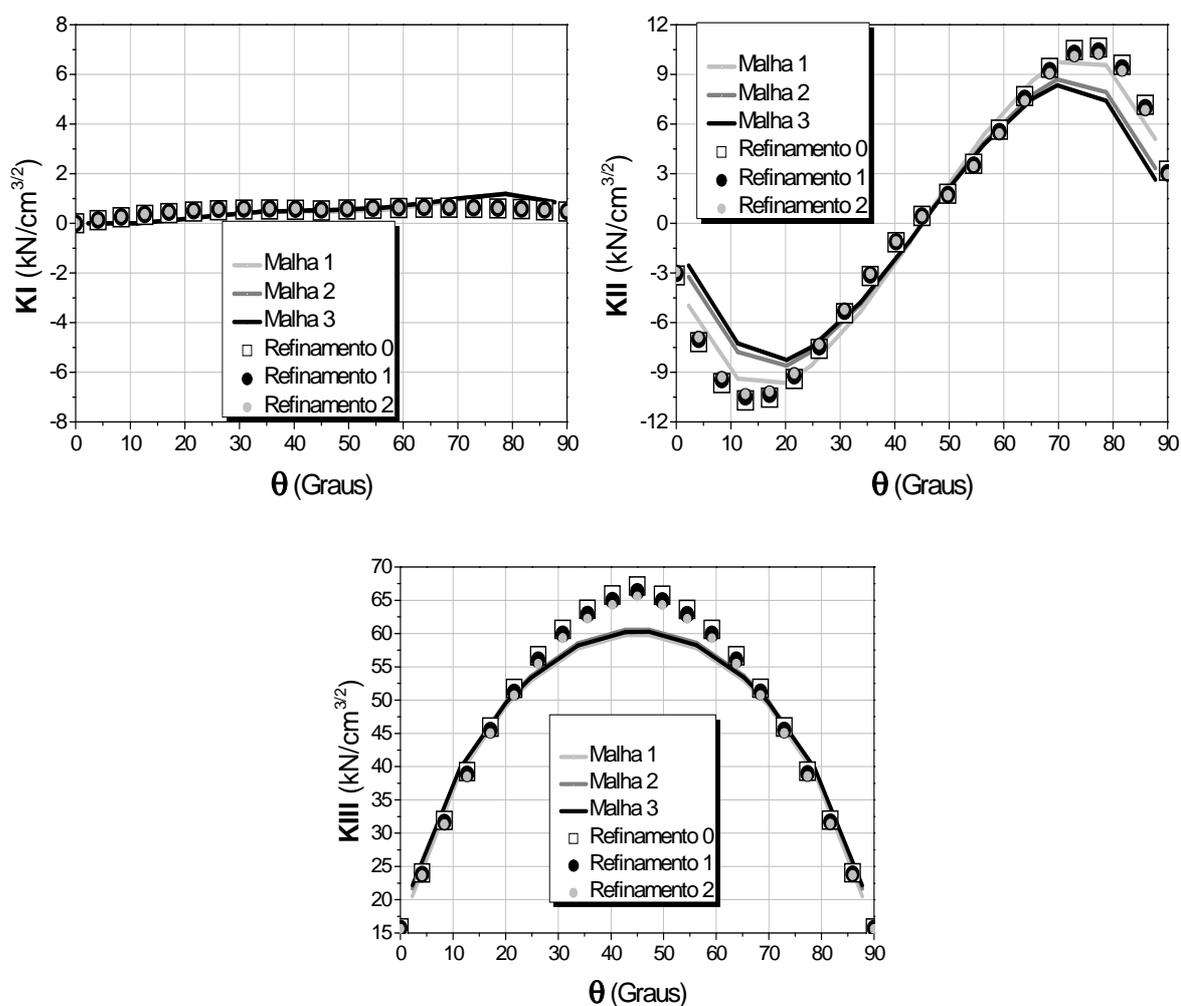


Figura 6.27  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  versus  $\theta$  para o caso de torção pura.

Note que apesar das pequenas discrepâncias de resultados dos FIT a tendência global foi capturada, indicando que as formulações convencional e isogeométrica foram implementadas coerentemente. Tais discrepâncias podem ser atribuídas aos refinamentos dos contornos externos nas proximidades do encontro com a fissura, os quais podem não ter sido suficientes para a convergência das respostas. Além disso, faz-se necessário aprofundar o estudo em relação a metodologias mais precisas para a obtenção dos FIT, porém eficientes em termos de custo computacional de modo a viabilizar as análises de fadiga. No caso da torção pura, todos os valores de  $K_I$  foram positivos, indicando que as restrições à interpenetração foram impostas de maneira coerente. Como no caso isogeométrico o número de pontos de colocação sobre a fissura é reduzido em relação ao caso isoparamétrico, discrepâncias nas regiões em contato observadas na Figura 6.25 resultam nas pequenas discrepâncias da resposta de  $K_I$ .

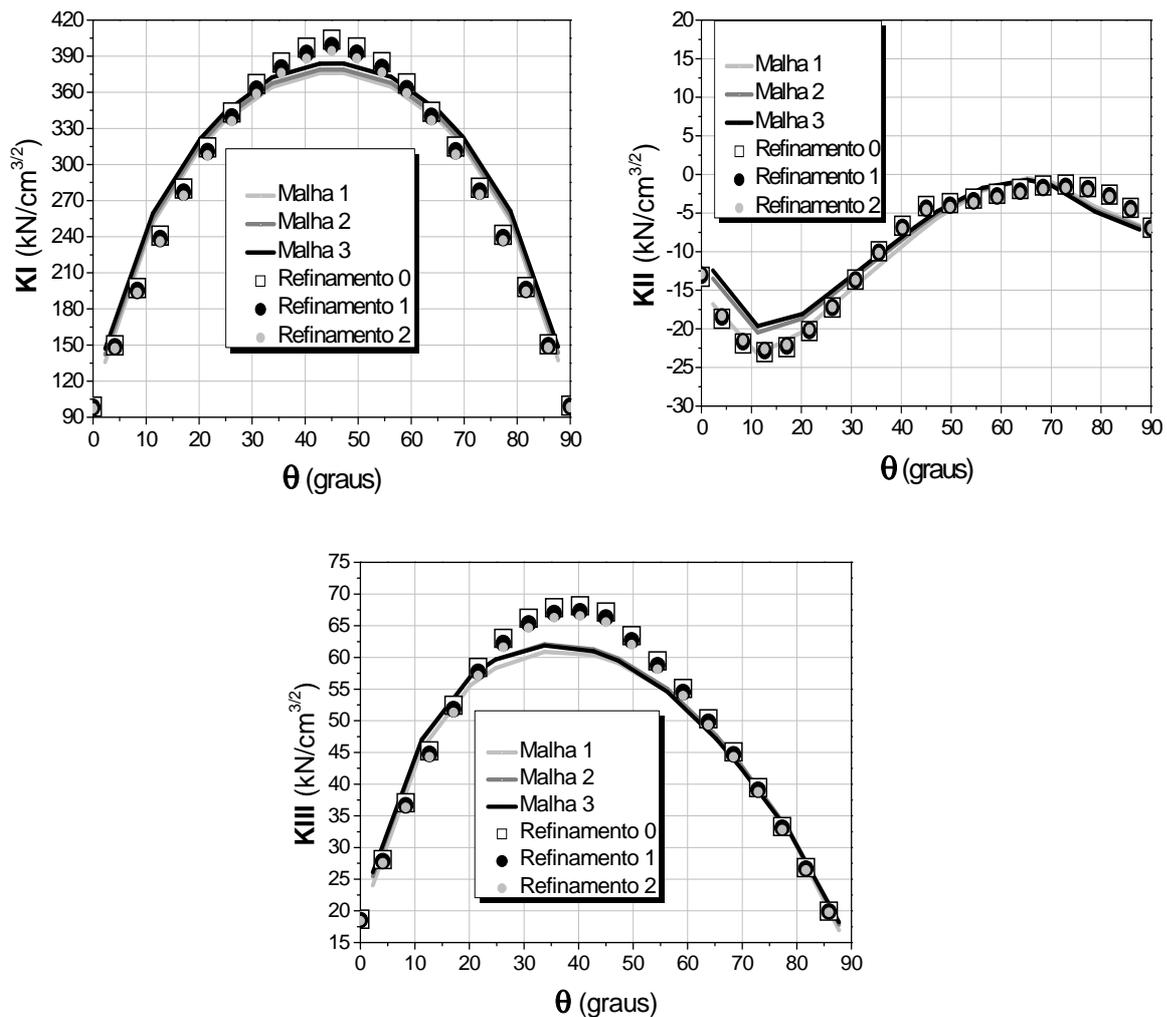
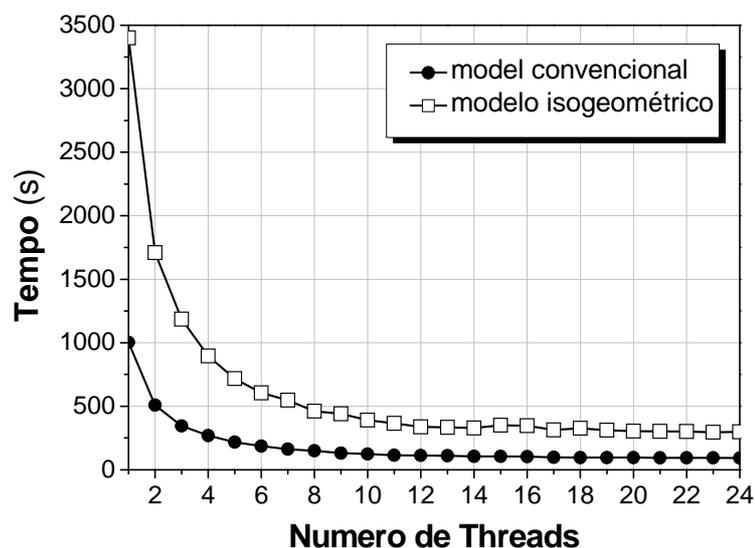


Figura 6.28  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  versus  $\theta$  para o caso de flexão torção.

Aproveita-se esse último exemplo para comparar o custo computacional da análise convencional e da análise isogeométrica com o MEC dual. Somando os pontos de colocação dos contornos, das interfaces e os da Malha 3 da fissura o modelo convencional resulta 3294 pontos de colocação que equivalem a 19764 graus de liberdade (seis por ponto de colocação). Já o modelo isogeométrico resulta 1202 pontos de colocação para o Refinamento 2 da fissura totalizando 7212 graus de liberdade.

Analisou-se o problema em um computador com 12 núcleos de processamento de 2.8GHz com memória física (RAM) instalada de 48GB. O efeito da paralelização da sub-rotina de construção das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  em memória compartilhada via interface OpenMP foi então testado aumentando-se gradativamente o número de processos, ou *threads*, de 1 até 24 e monitorando o tempo de processamento do exemplo. Para a resolução do sistema de equações, considerou-se a sub-rotina intrínseca DGESV da biblioteca MKL – *Math Kernel Library*. A DGESV foi desenvolvida considerando programação paralela com memória compartilhada e, portanto, utiliza todos os processadores do computador para a solução do sistema de equações. A Figura 6.29 apresenta a redução do tempo de processamento do exemplo obtida com o gradual aumento do número de *threads* e considerando também ambas as sub-rotinas de resolução do sistema de equações.



**Figura 6.29** Evolução do tempo de processamento versus o número de threads.

Conforme o esperado, o tempo de processamento decai drasticamente à medida que o número de threads aumenta. No entanto, o decaimento é muito mais acentuado no início e

praticamente se estabiliza para um número de threads maior ou igual a 12, visto que o computador utilizado apresenta 12 processadores. Nesse exemplo o sistema de equações foi solucionado apenas uma vez (caso da flexo torção) e, portanto, tal ganho é muito mais expressivo nas análises incrementais iterativas de propagação de fissuras como é o caso da fadiga com carregamento alternado.

Perceba que, apesar do modelo isogeométrico resultar apenas 36,5% do número de pontos de colocação do modelo convencional, o que representa uma considerável redução em termos de requerimentos de memória para armazenar as matrizes  $\mathbf{HeG}$ , o custo computacional da análise isogeométrica foi mais de três vezes maior do que o custo das análises convencionais. Duas são as principais razões para tal constatação. As funções base NURBS são calculadas recursivamente e, portanto, resultam em um maior custo computacional. Além disso, visto que o modelo isogeométrico apresenta um menor número de pontos de colocação, é comum aparecer elementos distorcidos, para os quais as integrações numéricas descritas nos Anexos B e C se tornam menos eficientes, necessitando de mais pontos de integração para convergir. A partir da extração de Bézier, é possível transformar as integrações numéricas sobre as superfícies NURBS em integrações numéricas sobre elementos de Bézier (BORDEN et al., 2011). Nesses casos, as funções base não são mais calculadas de forma recursiva e o custo computacional das análises isogeométricas pode ser reduzido consideravelmente. Além disso, Peng et al. (2017) propôs uma adaptação, para elementos isogeométricos sobre superfícies NURBS, do mapeamento proposto em Rong et al. (2014) para elementos de Lagrange triangulares, o qual permite realizar com precisão e eficiência as integrais hipersingulares sobre elementos severamente distorcidos, sem ter problemas com a quase singularidade que surge na direção  $\theta$  em coordenadas polares.

## 7 Conclusões

---

A presente tese foi motivada pela dificuldade de aplicar de forma eficiente a filosofia de tolerância ao dano nos projetos de engenharia da atualidade. É sabido da literatura que as análises de vida útil à fadiga permitem prever períodos ótimos de inspeção e possibilitam reduzir consideravelmente os custos de manutenção. Além disso, a incorporação da tolerância ao dano na fase de concepção de componentes estruturais e mecânicos resulta estruturas e mecanismos menos susceptíveis à fadiga. No entanto, a incorporação da filosofia de tolerância ao dano nas análises numéricas envolvidas nos projetos atuais de engenharia exige uma maior integração entre os modelos geométricos de CAD e os modelos numéricos de fadiga. Na atualidade, os projetos geométricos são concebidos em programas de CAD de maneira muito mais rápida do que os modelos numéricos de fadiga são criados, devido às trabalhosas etapas de geração de malhas, inserção de fissuras, definição de parâmetros físicos e imposição das condições de contorno. Além disso, a definição de geometrias pouco susceptíveis à fadiga requer iterações entre projetistas de CAD e analistas de fadiga, dificultando mais ainda o processo.

O presente trabalho teve como objetivo principal e principal contribuição o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, baseada no Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual), para análises de fratura e fadiga a partir de modelos geométricos de CAD. Modelos geométricos compostos por superfícies NURBS são os mais utilizados em projetos de engenharia para a modelagem de sólidos e, portanto, foram abordados na presente tese. No intuito de criar os modelos de análise de maneira eficiente a partir dos modelos geométricos de CAD, desenvolveu-se uma estratégia de colocação que permite discretizar de maneira independente cada uma das superfícies NURBS que compõem os modelos geométricos atuais. Com a estratégia proposta, a criação dos modelos de análise é flexibilizada, uma vez que evitam-se as dificuldades no tratamento das conexões entre as superfícies, sendo também possível analisar modelos geométricos “não estanques”. Outras contribuições desenvolvidas no presente trabalho estão relacionadas às análises de propagação de fissuras baseadas na MFEL. Estende-se para o caso tridimensional uma técnica recentemente proposta por Gonzalez *et al.*, (2015) para a extração dos FIT em problema bidimensionais. No entanto, optou-se pelas técnicas de correlação e extrapolação de deslocamentos para as análises de propagação devido a sua simplicidade de implementação e baixo custo computacional. Dois critérios de propagação desenvolvidos para problemas

tridimensionais foram incorporados no contexto da formulação MEC dual. Ambos os critérios são mais consistentes para análises tridimensionais, uma vez que consideram a influência do modo III de fratura tanto no cálculo do FIT equivalente quanto no cálculo dos ângulos de propagação. Os modelos numéricos de propagação de fissuras, criados de maneira eficiente a partir dos modelos geométricos de CAD, são então utilizados em análises de vida útil à fadiga. Por fim, uma formulação isogeométrica do MEC dual baseada em NURBS é apresentada. Um estudo numérico foi desenvolvido no intuito de comparar a formulação isogeométrica com a formulação convencional e discutir futuras possibilidades de pesquisa. A seguir apresentam-se algumas conclusões sobre as principais contribuições da presente tese.

## **7.1 Discretizações independentes das NURBS**

A grande maioria dos modelos geométricos de sólidos tridimensionais da atualidade é constituída por múltiplas superfícies NURBS, sendo que a parametrização de cada superfície é independente das demais. Por sua vez, modelos baseados na formulação MEC dual exigem a discretização apenas das superfícies do problema, ou seja, contorno mais fissuras, simplificando consideravelmente a criação dos modelos de análise de fratura. Uma maneira de tornar mais eficiente o processo de criação é permitir que as discretizações de cada superfície NURBS possa ser independente das discretizações das demais superfícies, sendo essa a ideia por trás da estratégia de colocação desenvolvida. Três são as principais hipóteses adotadas no desenvolvimento da estratégia que garantiram o bom funcionamento da técnica: (i) Cada superfície possui seus próprios graus de liberdade, i.e., não existem graus de liberdade pertencentes a mais de uma superfície NURBS, e a continuidade dos deslocamentos do sólido é garantida pelo caráter global do sistema de equações algébricas obtido via colocação das equações integrais. (ii) Os erros numéricos devidos às lacunas e às superposições de superfícies são pequenos caso as lacunas e as sobreposições também sejam (iii) Devem ser evitados pontos de colocação nas extremidades das superfícies NURBS para evitar pontos de colocação muito próximos, ou ainda sobre a mesma posição geométrica, o que faz com que o sistema de equações algébricas se torne singular. A função distância assinalada definida no espaço paramétrico de cada superfície NURBS se mostrou uma maneira eficiente de identificar os nós e os elementos de extremidade das superfícies aparadas.

No primeiro exemplo do Capítulo 3, comprova-se que os erros numéricos devido às lacunas nas interseções das superfícies do modelo discreto, ocasionadas pela discretização independente das NURBS, são pequenos caso as lacunas também o sejam. A partir dessa

constatação, estende-se a estratégia de discretizações independentes para modelos geométricos complexos provindos de uma biblioteca online gratuita de modelos CAD. O último exemplo do capítulo 3 apresenta resultados de uma análise estrutural elástica a partir de um modelo cuja representação de contorno por múltiplas NURBS não é “estanque”. Portanto, modelos geometricamente “não estanques” podem ser analisados desde que as lacunas e superposições nas conexões das superfícies NURBS sejam pequenas.

Para problemas de fratura com fissuras de borda, constata-se que a discretização independente da superfície da fissura e a da superfície interceptada faz com que a interseção discreta fissura-contorno não seja explicitamente conhecida. Nesse caso, a inserção e a propagação de fissuras de borda devem ser tratadas a partir de algoritmos de remalhamento baseados em tolerâncias dimensionais, conforme apresentado no Capítulo 4.

## 7.2 Desenvolvimentos do modelo de propagação de fissuras

Devido a questões de facilidade de implementação e baixo custo computacional as técnicas de correlação e extrapolação de deslocamentos foram adotadas para as análises de propagação de fissuras e de fadiga. No entanto, sabe-se que tais técnicas possuem limitações com relação à precisão das respostas dos FIT. Uma recente técnica desenvolvida por Gonzalez *et al.*, (2015) para a extração dos FIT em problemas bidimensionais apresentou resultados tão precisos quanto os obtidos por métodos baseados em energia como a integral J. No entanto, a técnica, denominada técnica de ajuste de deslocamentos, resulta um custo computacional reduzido em relação à integral J. Na presente tese a técnica foi estendida para problemas tridimensionais conforme descrito no tópico 4.2.3 do Capítulo 4. Dois exemplos foram utilizados para estudar a técnica e os resultados obtidos foram comparados com respostas de referência analítica e numérica e também com as respostas obtidas pelas técnicas de correlação e extrapolação de deslocamentos. Para uma distribuição circular de pontos internos a uma distância  $r$  da frente da fissura, percebe-se que as respostas da técnica se tornam menos dependentes de  $r$  quando se consideram ambos os termos  $O(r^{1/2})$  e  $O(r)$  da expansão assintótica dos deslocamentos. A consideração dos termos da expansão de ordens superiores a  $O(r)$  resulta no mau condicionamento do sistema retangular de equações da técnica, impossibilitando a determinação da matriz pseudoinversa. Conclui-se que a técnica proposta é ainda dependente da distância de extração  $r$  e, portanto a técnica da extrapolação de deslocamentos foi utilizada nas análises de propagação.

Em problemas com fissuras de borda, a discretização não conforme da superfície da fissura com a superfície do contorno interceptado faz com que a curva discreta de intersecção não seja explícita. Nesse caso, os algoritmos de remalhamento devem ser baseados no cálculo de distâncias mínimas e em tolerâncias dimensionais conforme descrito no tópico 4.4 do capítulo 4. O algoritmo de remalhamento apresentado é extremamente simples e, portanto, possui algumas limitações para análises de propagação de fissuras de borda. No entanto, a ideia de remalhamento baseado em tolerâncias dimensionais pode ser incorporada em algoritmos de remalhamento local adaptativos, o que pode melhorar consideravelmente a robustez dos modelos de análise de propagação. Apesar de simples, o algoritmo de remalhamento local implementado possibilitou tanto a inserção quanto as análises incrementais de propagação das fissuras de borda nos exemplos estudados.

Os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann foram utilizados para determinar o FIT equivalente e o caminho de propagação das fissuras. Com os mesmos, é possível levar em consideração a influência do modo III de fratura nas análises de propagação em modo misto. Para ambos os critérios, o ângulo de deflexão é determinado originalmente com base no método *Golden Section*, o qual é um método de otimização aplicável a funções univariáveis, como é o caso da taxa de liberação de energia e da tensão principal de Schöllmann em função do ângulo de deflexão. O método *Golden Section* se mostrou eficiente para a determinação do ângulo de deflexão, uma vez que o mesmo não depende da existência das derivadas das funções objetivo, as quais nem sempre são de fácil obtenção. Além disso, o método convergiu sempre para os mínimos globais dentro do intervalo de busca, não apresentando problemas com os mínimos locais.

O ângulo de torção, definido para o critério de Schöllmann, é imposto no vetor de propagação a partir de deslocamentos transversais à fissura, obtidos com uma formulação variacional unidimensional, definida sobre a linha de frente da fissura. A formulação variacional, originalmente desenvolvida em Pereira (2010) para o MEFM, foi adaptada para o contexto da formulação MEC dual. A formulação variacional se assemelha à de uma viga sob base elástica, porém as constantes elásticas hipotéticas são adotadas em função do comprimento do elemento de frente da fissura, de modo a evitar que as respostas de deslocamentos transversais à fissura dependam das constantes elásticas. Com o MEC dual, os FIT não são calculados sobre as posições nodais da frente da fissura, mas sim sobre a projeção dos pontos de colocação dos elementos descontínuos sobre a frente da fissura. Sendo assim, os graus de liberdade de deslocamentos transversais de cada elemento de frente da fissura são

independentes dos demais e podem ser obtidos a partir da matriz de rigidez local do mesmo. Por fim destaca-se que em situações de modo misto I/II/III, a consideração do ângulo de torção do critério de Schöllmann pode resultar respostas mais condizentes de propagação. No entanto, o parâmetro  $\beta$  que escala os deslocamentos transversais pode influenciar as respostas de propagação conforme apresentado no exemplo 4.5.4.

### **7.3 As análises de fadiga a partir dos modelos de CAD**

Nos modelos de fadiga acopla-se o algoritmo de propagação à equação de Paris-Erdogan para determinar a vida útil à fadiga de alto ciclo de componentes contendo defeitos preexistentes. Nos problemas tridimensionais, a variação do FIT da equação de Paris-Erdogan pode ser considerada como a variação do FIT equivalente em cada ponto da frente da fissura. Os critérios da máxima taxa de liberação de energia e de Schöllmann são adotados para descrever as envoltórias limites da propagação estável. No problema numérico, reescreve-se a equação de Paris-Erdogan em sua forma discreta (diferenças finitas) e desenvolve-se um equacionamento alternativo que permite determinar a vida útil à fadiga de maneira mais eficiente. O procedimento iterativo desenvolvido no tópico 2.9 para evitar a interpenetração das faces da fissura foi adotado para análises de fadiga com carregamentos alternados. O algoritmo apresentou resultados satisfatórios, conforme pode ser observado no exemplo 5.1. O último exemplo numérico do capítulo 5 apresenta uma análise de fadiga de uma engrenagem mecânica cujo modelo geométrico foi obtido a partir de um arquivo IGES provindo de uma biblioteca online gratuita de modelos CAD. A possibilidade de discretizar as superfícies NURBS do problema de maneira independente e o algoritmo de remalhamento local baseado em tolerâncias dimensionais para a inserção e propagação das fissuras de borda, flexibilizaram a criação dos modelos de análises de propagação de fissuras por fadiga.

### **7.4 Formulação isogeométrica do MEC dual**

A formulação isogeométrica do MEC dual, apresentada no Capítulo 6, é uma extensão da formulação convencional, substituindo os elementos convencionais de Lagrange por elementos “isogeométricos”, definidos sobre o espaço paramétrico das superfícies NURBS. O estudo da formulação isogeométrica do MEC dual apresentado nessa tese foi apenas uma investigação inicial, não sendo possível apontar contribuições. Discussões sobre os resultados obtidos e propostas para futuras pesquisas sobre formulações isogeométricas de elementos de contorno para problemas de fratura são apresentadas no Capítulo 8.



## 8 Propostas para a continuidade da pesquisa

---

Neste capítulo, propõem-se basicamente duas vertentes para a continuidade da pesquisa: Aprimoramentos para a formulação convencional do MEC dual e o desenvolvimento de novas formulações isogeométricas do MEC dual. A importância da primeira vertente já foi bem destacada ao longo do texto da tese. Já a segunda vertente é importante, pois tem o potencial para integrar de maneira completa os modelos geométricos de CAD com os modelos numéricos de fadiga, o que resultaria ferramentas computacionais mais eficientes para os projetistas definirem geometrias pouco susceptíveis à fadiga. Ambas as abordagens, convencional e isogeométrica, desenvolvidas no presente trabalho apresentam limitações, as quais podem ser o ponto de partida para as duas vertentes propostas. Apresentam-se algumas sugestões para melhorias da formulação convencional do MEC dual, visando torná-la mais robusta para análises de fadiga tridimensionais. Discutem-se também as possibilidades e dificuldades para o desenvolvimento de formulações isogeométricas do MEC dual baseadas em NURBS e T-splines, que possuem estrutura quadrilateral, e Powell-Sabin Splines e Subdivisão de superfícies, que possuem estrutura triangular.

### 8.1 Desenvolvimento de formulações isogeométricas do MEC dual

Apesar do potencial das formulações isogeométricas do MEC dual para integrar os modelos de CAD com os modelos de análises de fadiga, desafios ainda devem ser superados para que o objetivo seja alcançado. Os principais desafios são: O tratamento da estabilidade das funções base de superfícies NURBS aparadas (Ver Marussig & Hugues, 2017), a inserção e o rastreamento da propagação de fissuras de borda sem a reparametrização do modelo (Ver Peng 2016), o refinamento local nas regiões do contorno interceptado pela fissura de borda, próximas à ponta da fissura e a redução dos custos computacionais. Reduções no custo computacional das análises isogeométricas de elementos de contorno podem ser obtidas com os chamados métodos rápidos de elementos de contorno. Formulações isogeométricas de elementos de contorno para problemas elásticos e de potencial foram aceleradas a partir do método ACA nos trabalhos de Marussig et al. (2015) e Campos et al. (2017), respectivamente. O método ACA também foi adotado para acelerar a formulação convencional do MEC dual em problemas tridimensionais de fissuras no trabalho de Aliabadi & Benedetti (2008). Portanto o ACA aparenta ser um método viável para ser adotado em formulações isogeométricas rápidas do MEC dual.

Apenas dois recentes estudos abordando formulações isogeométrica do MEC dual foram encontrados na literatura: Peng et al. (2017a) e Peng et al. (2017b). No primeiro trabalho, o objetivo de integrar as análises da MFEL com os modelos geométricos de CAD foi alcançado para problemas bidimensionais, nos quais os modelos isogeométricos são constituídos por curvas NURBS. No segundo trabalho aborda-se a formulação isogeométrica tridimensional do MEC dual baseada em superfícies NURBS, porém não são apresentadas propostas para resolver o problema da propagação de fissuras de borda, essenciais para as análises de fadiga. O maior problema no tratamento das fissuras de borda é o rastreamento de uma linha de descontinuidade evolutiva que representa a intersecção do contorno com a fissura de borda. Além do problema da descontinuidade, é necessário adotar refinamentos locais nas regiões onde o contorno é interceptado pela fissura. Formulações isogeométricas do MEC dual baseadas em outras tecnologias CAD como as T-splines, as Powell-Sabin B-splines e a subdivisão de superfícies ainda não foram apresentadas na literatura.

### **8.1.1 Considerando superfícies NURBS e T-Splines**

As superfícies NURBS são, na atualidade, a tecnologia CAD mais utilizada em projetos geométricos de engenharia. Por esse motivo, as superfícies NURBS foram escolhidas no presente trabalho como base para o estudo numérico inicial sobre formulações isogeométricas do MEC dual. Outra tecnologia que pode ser utilizada para o desenvolvimento de formulações isogeométricas do MEC dual são as T-splines, as quais podem ser consideradas uma generalização das NURBS (SEDERBERG 2003). As principais vantagens das T-splines sobre as NURBS são as facilidades para refinamentos locais, que podem ser importantes em problemas de propagação de fissuras de bordas, e a possibilidade de criar modelos isogeométricos “estanques”.

### **8.1.2 Considerando Powell-Sabin B- Splines e Subdivisão de superfícies**

As análises de fissuras de borda com o MEC dual requerem que a discretização do contorno, seja ela convencional ou isogeométrica, seja conforme com o caminho da intersecção da fissura de borda com o contorno, o qual não é conhecido a priori. Sendo assim, as NURBS e as T-splines podem não ser a melhor escolha para o desenvolvimento de formulações isogeométricas de fratura discreta. Isso porque tanto as NURBS quanto as T-splines possuem estrutura quadrilateral, o que dificulta a flexibilidade para o remalhamento necessário para rastrear a propagação de fissuras (MAY, 2016). Tecnologias CAD que sejam baseadas em triangularizações, como as Powell-Sabin B-splines (POWELL & SABIN, 1977) e

a subdivisão de superfícies (CATMULL & CLARK, 1978) são mais apropriadas para o desenvolvimento da formulação isogeométrica do MEC dual, pois flexibilizam o remalhamento local necessário nas análises de propagação de fissuras de borda. Exemplos recentes de formulações de fratura com o MEF utilizando Powell-Sabin B-plines são apresentadas em (MAY, 2016). No entanto, os autores comentam que só existem algoritmos para geração de Powell-Sabin B-splines bivariadas e, portanto as análises se restringem a problemas bidimensionais. No contexto do MEC dual as funções base de Powell-Sabin B-splines bivariadas podem ser utilizadas para análises tridimensionais de fratura. Por sua vez, formulações de elementos de contorno e de acoplamento MEC-MEF baseadas em subdivisão de superfícies foram apresentadas recentemente nos trabalhos de Bandara et al. (2015) e Liu et al. (2017) onde foram abordados problemas de otimização eletroestática e de acoplamento acústico estrutural. Problemas de fratura ainda não foram abordados com a subdivisão de superfícies.

## **8.2 Aprimoramentos da formulação convencional do MEC dual**

Nesse tópico, apresentam-se algumas possibilidades para a continuidade da pesquisa no intuito de aprimorar a formulação convencional do MEC dual para as análises de fadiga e fratura. Apesar de limitar a integração entre programas de CAD e análises de fadiga, as etapas de geração de malhas de superfície, necessárias para a formulação convencional, são consideravelmente mais simples e viáveis do que a geração de malhas volumétricas, tornando a lacuna entre análises e projeto menor. Além disso, a estratégia de colocação desenvolvida na presente tese flexibiliza ainda mais a criação dos modelos de análise uma vez que permite que cada superfície NURBS que compõe os modelos CAD seja discretizada de maneira independente. Quatro propostas são apresentadas para a melhoria da formulação convencional: Incorporação do Método *Face Offsetting* para rastrear evolução da fissura, remalhamentos adaptativos para superfícies interceptadas por fissuras de borda, remalhamentos de borda com elementos curvos de alta ordem e a implementação de um modelo coesivo de fadiga.

### **8.2.1 Incorporação do Método *Face Offsetting* para rastrear a propagação**

Nos problemas tridimensionais de propagação por fadiga, as superfícies de fissura podem evoluir para formas complexas e, no contexto numérico, as discretizações devem acompanhar tal evolução garantindo a forma regular dos elementos e o maior grau de refinamento na frente da fissura. Portanto, o acoplamento de métodos de rastreamentos

robustos para as superfícies evolutivas, como é o caso do método *face offsetting*, com a formulação convencional do MEC dual é uma proposta interessante para a continuidade da pesquisa.

O método *face offsetting*, introduzido por Jiao (2007), é uma técnica numérica utilizada para rastrear explicitamente a evolução de superfícies discretas definidas por triangularizações. É um método alternativo ao método *Level Set*, no qual as superfícies são rastreadas de maneira implícita. As vantagens do *face offsetting* em relação ao *Level Set* são a possibilidade de capturar mudanças bruscas de direção e o fato do mesmo poder ser generalizado para superfícies classificadas como *non-manifold*, ou seja, superfícies que quando discretizadas em triângulos podem apresentar uma aresta que pode pertencer a mais de dois triângulos (como é o caso das superfícies de fissuras ramificadas). De acordo com o método, uma triangularização inicial de uma superfície pode evoluir propagando as faces de extremidade e reconstruindo os vértices da interface que se move a partir de uma análise de autovalor em cada vértice, permitindo movimentos normais e tangenciais simultaneamente. O método também redistribui os vértices da superfície de maneira a manter ou melhorar a qualidade da discretização inicial após a evolução e também checa a auto interseção da superfície. Pereira (2010) estendeu a formulação do *face offsetting* para rastrear a evolução da frente de fissura em simulações de propagação de fissura no contexto do MEEG. O autor utilizou os conceitos do *face offsetting* para delimitar o avanço da fissura e evitar a auto interseção da fissura devido à mudança de orientação (ver Fig. 8.1). O autor também propôs um algoritmo para atualizar e otimizar a discretização da frente da fissura evoluída (ver Fig. 8.2).

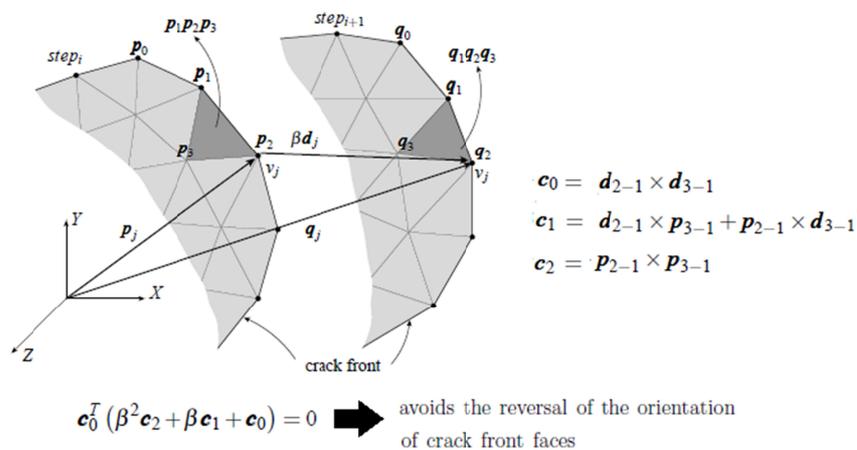
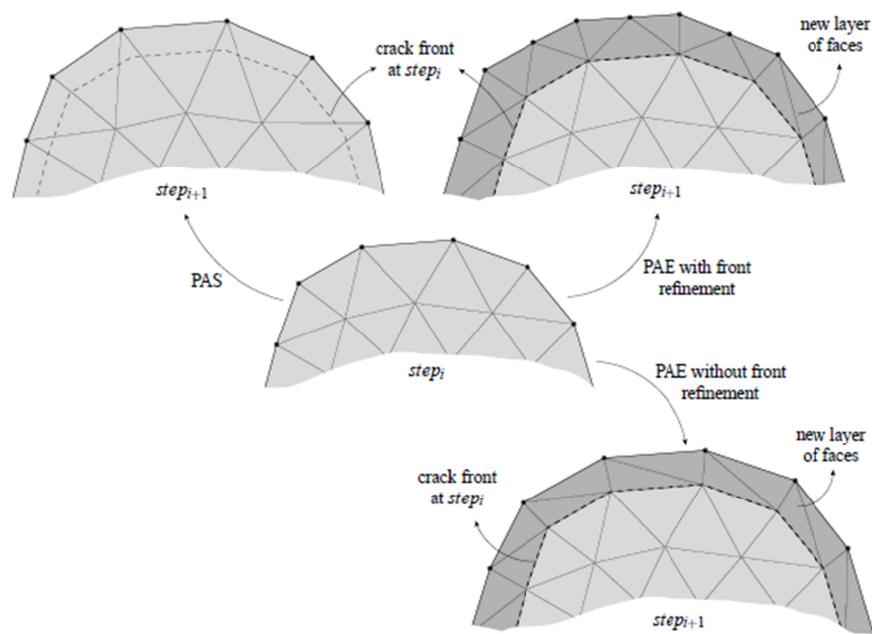


Figura 8.1 algoritmo para evitar a inversão da frente da fissura (PEREIRA, 2010).

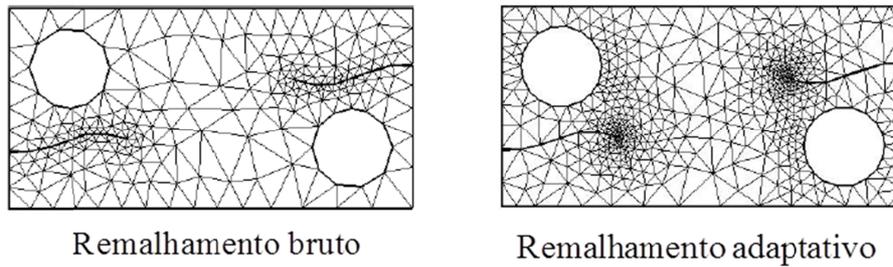
Tais algoritmos podem ser facilmente aplicáveis no contexto da formulação MEC dual e contribuiriam para uma maior robustez do método. Note que, no caso do MEC dual, os vetores de propagação são definidos para a projeção dos pontos de colocação sobre a frente da fissura (Ver Fig. 4.13). Sendo assim é necessário extrapolar o vetor  $\mathbf{d}_j$  para os vértices da frente da fissura antes de efetuar a evolução da fissura de acordo com os conceitos do *face offsetting*.



**Figura 8.2** Atualização da frente da fissura e otimização da malha de frente da fissura (PEREIRA, 2010).

### 8.2.2 Remalhamentos adaptativos para tratar fissuras de borda

Algoritmos de remalhamento local adaptativos, como o ilustrado à direita da Fig. 8.3 para uma análise de propagação de fissuras em um problema bidimensional via MEF, podem ser utilizados para remalhar o contorno interceptado em análises de propagação de fissuras de borda com a formulação tridimensional do MEC dual. Note que as técnicas bidimensionais podem ser utilizadas para remalhar o espaço paramétrico da superfície NURBS interceptada pela fissura, desde que seja conhecida a curva de interceptação no espaço paramétrico. Perceba ainda que o contexto das discretizações independentes colabora para a estratégia de remalhamento adaptativo, uma vez que a malha da superfície interceptada pela fissura pode ser atualizada sem que seja necessário alterar a malha das outras superfícies NURBS do problema.



**Figura 8.3** Atualização da frente da fissura e otimização da malha de frente da fissura (KHOEI, et al.,2008).

Deve-se salientar, no entanto, que a obtenção de uma curva paramétrica de interceptação exata não é uma tarefa simples. Isso por que, ao longo de uma análise numérica de propagação, só é conhecida, no espaço físico  $\mathbb{R}^3$ , os trechos retos da curva de interceptação discreta. Utilizando o algoritmo de inversão de pontos (PIEGL & TILLER, 1995) é possível obter a curva paramétrica de interceptação discreta, a qual pode ser o ponto de partida para o desenvolvimento do remalhamento adaptativo da superfície interceptada pela fissura de borda.

### 8.2.3 Remalhamentos de borda com elementos de alta ordem

O remalhamento de borda bruto implementado no presente trabalho (semelhante ao da Figura 8.3 à esquerda) possibilita apenas análises com elementos planos. No entanto, sabe-se que tais elementos resultam uma baixa taxa de convergência para a análise de problemas geometrias curvas e, portanto, a utilização de elementos de alta ordem pode trazer benefícios para as análises. Devido à discretização independente das superfícies NURBS, a intersecção do contorno com as fissuras de borda não é necessariamente definida no modelo discreto e, portanto, o algoritmo teve que ser escrito em termos de tolerâncias dimensionais. Para tanto, se utilizou o conceito de mínima distância euclidiana entre retas no espaço e entre ponto e triângulo no espaço. No caso de elementos de alta ordem, devem ser avaliadas as mínimas distâncias entre curvas e entre ponto e superfícies polinomiais no espaço, as quais não possuem soluções analíticas. Nesse caso, devem ser utilizados algoritmos de otimização, como o Golden Section, por exemplo, para determinar as distâncias mínimas e possibilitar o desenvolvimento do remalhamento de borda com elementos curvos de alta ordem.

### 8.2.4 Incorporação de modelos coesivos de fadiga

O último aprimoramento proposto diz respeito à incorporação de um modelo coesivo de fadiga no contexto da formulação MEC dual para a determinação do número de ciclos

necessários para nuclear uma fissura. Dessa maneira, é possível determinar a vida útil total à fadiga, ou seja, número de ciclos para nuclear e para propagar a fissura. O modelo coesivo de fadiga em modo I com duas variáveis de dano proposto no trabalho de Park et al. (2011) pode ser estendido para problemas de fadiga em modo misto e incorporado na formulação MEC dual. No modelo original em modo I, uma variável de dano é associada às tensões coesivas normais e a outra é associada à abertura normal da fissura e leis de evolução são propostas para tais variáveis. O modelo é capaz de representar o caráter irreversível do processo de danificação devido ao carregamento cíclico, os fenômenos *crack closure effect* e *crack opening effect* e seus parâmetros são facilmente correlacionados com os parâmetros da Equação de Paris-Erdogan. No caso de fadiga em modo misto, mais variáveis de dano devem ser acrescentadas à formulação sendo essa a última sugestão para a continuidade da pesquisa.



## Referências bibliográficas<sup>1</sup>

---

ALATAWI, I.A.; TREVELYAN, J. A direct evaluation of stress intensity factors using the Extended Dual Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.52, p. 56-63, 2015.

ALBERT, W.A.J. Uber treibseile am Harz. **Archive fur Mineralogie, Geognose, Bergbau und Huttenkunde**, v.10, p. 215-234, 1838.

ALHADEFF, A.; LEON, S.E.; CELES, W.; PAULINO, G.H. Massively parallel adaptive mesh refinement and coarsening for dynamic fracture simulations. **Engineering with Computers**, v.32, p. 533-552, 2016.

ALIABADI, M.H.; HALL, W.S.; PHEMISTER, T.G. Taylor Expansions for Singular Kernels in the Boundary Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.21, p. 2221-2236, 1985.

ALIABADI, M.H.; SALEH, A.L. Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 267-280, 2002.

ANDRADE, H. C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não homogêneas via Método dos Elementos de**. 2017. 243p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

AREIAS, P.M.A.; BELYTCHKO, T. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.63, p. 760-788, 2005.

ASTM. **Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates**, p. 647-699, 2000.

---

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

AYHAN, A.O.; NIED, H.F. Stress intensity factors for three-dimensional surface cracks using enriched finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.54, p. 899-921, 2002.

BABUSKA, I.; MILLER, A. The post-processing approach in the finite element method. Part2: The calculation of stress intensity factors. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.20, p. 1111-1129, 1984.

BANDARA, K.; CIRAK, F.; OF, G.; STEINBACH, O.; ZAPLETAL, J. Boundary element based multiresolution shape optimisation in electrostatics. **Journal of Computational Physics**, v.297, p. 584-598, 2015.

BANDARA, K.; CIRAK, F. Isogeometric shape optimisation of shell structures using multiresolution subdivision surfaces. **Computer-Aided Design**, v.95, p. 62-71, 2018.

BANDARA, K.; RUBERG, T.; CIRAK, F. Shape optimisation with multiresolution subdivision surfaces and immersed finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.300, p. 510-539, 2016.

BANKS-SILLS, L.; SHERMAN, D. Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements. **International Journal of Fracture**, v.32, p. 127-140, 1986.

BARBIRATO, J.C.C. **Método dos elementos de contorno com reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento**. 1999. 270p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BARENBLATT, G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **In: Advances in Applied Mechanics**, v.7, p. 55-129, 1962.

BARPI, F.; VALENTE, S. Size-effects induced bifurcation phenomena during multiple cohesive crack propagation. **International Journal of Solids and Structures**, v.35, p. 1851-1861, 1998.

BASQUIM, O.H. The exponential law of endurance tests. **In: Proceedings of the American Society for Testing and Materials**, v.10, p. 625-630, 1910.

BAYDOUN, M.; FRIES, T. P. Crack propagation criteria in three dimensions using the XFEM and an explicit-implicit crack description. **International Journal of Fracture**, v.178, p. 51-70, 2012.

BAZANT, Z.P.; OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R. Fracture size effect: review of evidence for concrete structures. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v.120, p. 2377-2398, 1994.

BAZILEVS, Y.; CALO, V.M.; COTTRELL, J.A.; EVANS, J.A.; HUGHES, T.J.R.; LIPTON, S.; SCOTT, M.A.; SEDERBERG, T.W. Isogeometric analysis using T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.199, p. 229-263, 2010.

BAZILEVS, Y.; GOHEAN, J.R.; HUGHES, T.J.R.; MOSER, R.D.; ZHANG, Y. Patient-specific isogeometric fluid-structure interaction analysis of thoracic aortic blood flow due to implantation of the Jarvik 2000 left ventricular assist device. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.198, p. 3534-3550, 2009.

BEAUREPAIRE, P.; VALDEBENITO, M.A.; SCHUELLER, G.I.; JESEN, H.A. Reliability-based optimization of maintenance scheduling of mechanical components under fatigue. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.221-222, p. 24-40, 2012.

BEISSEL, S.R.; JOHNSON, G.R.; POPELAR, C.H. An element-failure algorithm for dynamic crack propagation in general directions. **Engineering Fracture Mechanics**, v.61, p. 407-425, 1998.

BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMAN, B.E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.70, p. 59-89, 1988.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y.Y. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. **International Journal of Solids and Structures**, v.32, p. 2547-2570, 1995.

BENZLEY, S.E. Representation of singularities with isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.8, p. 537-545, 1974.

BEYER, W.H.; **CRC Standard Mathematical Tables**, Boca Raton: CRC press, 1987.

BLANDFORD, G.E.; INGRAFFEA, A.R.; LIGGET, J.A. Two-dimensional Stress Intensity Factor computations using the Boundary Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, p. 387-404, 1981.

BORDAS, S.; NGUYEN, V.P.; DUNANT, C.; NGUYEN-DANG, H.; GUIDOUM, A. An extended finite element library. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.71, p. 703-732, 2007.

BORDEN, M.J.; SCOTT, M.A.; EVANS, J.A.; HUGHES, T.J.R. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.87, p. 15-47, 2011.

BORDEN, M.J.; SCOTT, M.A.; VERHOOSSEL, C.V.; LANDIS, C.M.; HUGHES, T.J.R. A Phase-field description of dynamic brittle fracture. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.217, p. 77-95, 2012.

BOSTROM, L. **Method for determination of the softening behavior of wood and the applicability of a nonlinear fracture mechanics**. 1992. 148p. Ph.D. Thesis – Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, 1992.

BRAITHWAITE, F. On the fatigue and consequent fracture of metals. **In: Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v.13, p. 463-475, 1854.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An introductory Course**, Southampton: McGraw Hill, 1989.

BRIGHENTI, R.; CARPINTERI, A. Surface cracks in fatigued structural components: a review. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials**, v.36, p. 1209-1222, 2013.

BROBERG, K.B. **Cracks and Fracture**, Cambridge: Academic Press, 1999.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1986.

BUFFA, A.; SANGALLI, G.; VÁZQUEZ, R. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.199, p. 1143-1152, 2010.

CAMPOS, L.S. **Método dos elementos de contorno isogeométricos acelerado pela aproximação cruzada adaptativa**. 2016. 125p. Tese (Doutorado em Ciências Mecânicas) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

CAMPOS, L.S.; ALBUQUERQUE, E.L.; WROBEL, L.C. An ACA accelerated isogeometric boundary element analysis of potential problems with non-uniform boundary conditions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.80, p. 108-115, 2017.

CATMULL, E.; CLARK, J. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. **Computer-Aided Design**, v.10, p. 350-355, 1978.

CARLONE, P.; CITARELLA, R.; MARCELLO, L.; GAETANO, S.P. A FEM-DBEM investigation of the influence of process parameters on crack growth in aluminium friction stir welded butt joints. **International Journal of Material Forming**, v.8, p. 591-599, 2015.

CARPINTERI, A.; CORNETTI, P.; BARPI, F.; VALENTE, S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1809-1839, 2003.

CERVERA, E.; TREVELYAN, J. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS: Part I: 2D algorithms. **Computers and Structures**, v.83, p. 1902-1916, 2005.

CERVERA, E.; TREVELYAN, J. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS: Part II: 3D algorithms. **Computers and Structures**, v.83, p. 1917-1929, 2005.

CHAN, S.K.; TUBA, I.S.; WILSON, W.K. On the finite element method in linear fracture mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v.2, p. 1-17, 1970.

CHANG, J.; XU, J.Q.; MUTOH, Y. A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v.73, p. 1246-1263, 2006.

CHEN, J.T.; HONG, H.K. Singularity in Darcy flow around a cutoff wall. **Advances in Boundary Element: Field Fluid Flow Solutions**, v.2, p. 15-27, 1989.

CHEN, J.T.; HONG, H.K. Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. **Applied Mechanics Reviews**, v.52, p. 17-33, 1999.

CIRAK, F.; ORTIZ, M. Fully C1-conforming subdivision elements for finite deformation thin shell analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.51, p. 813-833, 2001.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; SCHRODER, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin shell analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.47, p. 2039-2072, 2000.

CIRAK, F.; SCOTT, M.J.; ANTONSSON, E.K.; ORTIZ, M.; SCHRODER, P. Integrated modelling, finite-element analysis and engineering design for thin-shell structures using subdivision. **Computer-Aided Design**, v.34, p. 137-148, 2002.

CISILINO, A.P.; ALIABADI, M.H. Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems. **Engineering Fracture Mechanics**, v.63, p. 713-733, 1999.

CITARELLA, R.; BUCHHOLZ, F-G. Comparison of crack growth simulation by DBEM and FEM for SEN-specimens undergoing torsion or bending loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v.75, p. 489-509, 2008.

CITARELLA, R.; CRICRÌ, G. Comparison of DBEM and FEM crack path predictions in a notched shaft under torsion. **Engineering Fracture Mechanics**, v.77, p. 1730-1749, 2010.

CITARELLA, R.; LEPORE, M.; SHLYANNIKOV, V.; YARULLIN, R. Fatigue surface crack growth in cylindrical specimen under combined loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v.131, p. 439-453, 2014.

CODA, H.B. **Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno**. 2000. 381p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

COTTRELL, J.A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T.J.R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.195, p. 5257-5296, 2006.

COTTRELL, A.J.; HUGHES, T.J.R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**, Chichester: John Wiley & Sons, 2009.

COX, M.G. **The numerical evaluation of B-splines**, National Physics Laboratory DNAC 4, 1971. Technical Report.

CROUCH, S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.10, p. 301-342, 1976.

CROUCH, S.L.; STARFIELD, A.M. **Boundary element method in solid mechanics**. Hemel Hempstead: George Allen and Unwin ed., 1983.

CRUSE, T.A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method. **In: The surface crack: Physical Problems and computational solutions**, New York: Swedlon, J.L ed., 1972.

CRUSE, T.A. **Mathematical formulation of the boundary integral equation methods in solid mechanics**, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. Report No AFOSR-TR-77-1002.

CRUSE, T.A.; VANBUREN, W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Mechanical Sciences**, v.7, p. 1-15, 1971.

DAVIS, B.R.; WAWRZYNEK, P.A.; CARTER, B.J.; INGRAFFEA, A.R. 3D simulation of arbitrary crack growth using an energy-based formulation – Part II: Non-planar growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v.154, p. 111-127, 2016.

DE ANDRES, A.; PEREZ, J.L.; ORTIZ, M. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids and Structures**, v.36, p. 2231-2258, 1999.

DE BOOR, C. On calculation with B-splines. **Journal of Approximation Theory**, v.6, p. 50-62, 1972.

DE BORST, R. Numerical aspects of cohesive-zone models. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1743-1757, 2003.

DE LUYCHER, E.; BENSON, D.J.; BELYTSCHKO, T.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.C. X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.87, p. 541-565, 2011.

DE SOUZA, V.J.B. **Algoritmos de integração eficientes para o método dos elementos de contorno tridimensional**. 2001. 162p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

DELL'ERBA, D.N; ALIABADI, M.H. The dual boundary element method applied to 3D cracks in thermoelasticity. **WIT transactions on Modelling and Simulation**, v.25, p. 1-10, 1999.

DONAHUE, R.J; CLARK, H.M.; ATANMO, P.; KUMBLE, R.; McEVILY, A.J. Crack opening displacement and the rate of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.8, p. 209-219, 1972.

DONG, C.Y.; LO, S.H.; CHEUNG, Y.K. Interaction between cracks and rigid-line inclusions by an integral equation approach. **Computational Mechanics**, v.31, p. 238-252, 2003.

DUGDALE, D.S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.8, p. 100-104, 1960.

ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. **Engineering Fracture Mechanics**, v.2, p. 37-44, 1970.

ELICES, M.; GUINEA, G.V.; GÓMEZ, J.; PLANAS, J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 137-163, 2002.

EPSTEIN, J.S. **Experimental Techniques in Fracture**, New Jersey: John Wiley, 1993.

ERDOGAN, F.; RATWANI, M. Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferencial crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.6, p. 379-392, 1970.

FAN, R.; FISH, J. The RS-method for material failure simulations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.73, p. 1607-1623, 2007.

FARIN, G.E. **NURBS Curves and Surfaces: From Projective Geometry to Practical Use**, Natick: A.K. Peters, Ltd., 1999.

FERREIRA, M.D.C.; VENTURINI, W.S.; HILD, F. On the analysis of notched concrete beams: From measurement with digital image correlation to identification with boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.78, p. 71-84, 2010.

FETT, T. **Stress intensity factors – T-stresses – Weight Functions**, Karlsruhe: Universitat Karlsruhe, 2008.

FLEMING, M.; CHU, Y.A.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.40, p. 1483-1504, 1997.

FORMAN, R.G.; KEARNEY, V.E.; ENGLE, R.M. Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures. **Journal of Basic Engineering**, v.89, p. 459-464, 1967.

GÁLVEZ, J.C.; PLANAS, J.; SANCHO, J.M.; REYES, E.; CENDÓN, D.A.; CASATI, M.J. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v.109, p. 369-386, 2013.

GARCIA, F.; SÁEZ, A.; DOMINGUEZ, J. Traction boundary elements for cracks in anisotropic solids. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.28, p. 667-676, 2004.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretizations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 26, p. 905-916, 2002.

GDOUTOS, E.E. **Fracture mechanics criteria and application**, London: Kluwer Academic Publisher, 1990.

GERBER, H. Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-konstruktionem. **Zeitschrift des Bayerischen Architekten und Ingenieur-Vereins**, v.6, p. 101-110, 1874.

GHORASHI, S.; VALIZADEH, N.; MOHAMMADI, S. Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.89, p. 1069-1101, 2012.

GIFFORD, L.N.; HILTON, P.D. Stress intensity factors by enriched finite elements (for axisymmetric and planar structures of arbitrary geometry and loading). **Engineering Fracture Mechanics**, v.10, p. 485-496, 1978.

GINNIS, A.I.; KOSTAS, K.V.; POLITIS, C.G.; KAKLIS, P.D.; BELIBASSAKIS, K.A.; GEROSTATHIS, Th.P.; SCOTT, M.A.; HUGUES, T.J.R. Isogeometric boundary-element analysis for the wave-resistance problem using T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, V. 279, p. 425-439, 2014.

GRAVOUIL, A.; MOES, N.; BELYTSCHKO, T. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.53, p. 2569-2586, 2002.

GRAY, L.; MARTHA, L.F.; INGRAFFEA, A.R. Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.29, p. 1135-1158, 1990.

GREVILLE, T. Numerical procedures for interpolation by spline functions. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Serie B, Numerical Analys**, v.1, p. 53-68, 1964.

GRIFFITH, A.A. The phenomenon of Rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Serie A**, v.221, p. 163-197, 1921.

GONÇALVES, J.E.S. **Leitura e interpretação de arquivos IGES para uso em programas de elementos de contorno**. 2016. 85p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

GONZALEZ, M.; TEIXEIRA, P.; WROBEL, L.C.; MARTINEZ, M. A New Displacement-based Approach to Calculate Stress Intensity Factors with the Boundary Element Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v.12, p. 1677-1697, 2015.

GONZALEZ-ALBUIXECH, V.F; GINER, E; TARANCON, J.E; FUENMAYOR, F.J; GRAVOUIL, A. Domain integral formulation for 3-d curved and non-planar cracks with the

extended finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.264, p. 129-144, 2013.

GUIGGIANI, M.; GIGANTE, A. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. **Journal of Applied Mechanics**, v.57, p. 906-915, 1990.

GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RUDOLPHI, T.J.; RIZZO, F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. **Journal of Applied Mechanics**, v.59, p. 604-614, 1992.

GUPTA, P.; DUARTE, C.A.; DHANKHAR, A. Accuracy and Robustness of Stress Intensity Factor Extraction Methods for the Generalized/eXtended Finite Element Method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.179, p. 120-153, 2017.

HA, Y.D.; BOBARU, F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. **International Journal of Fracture**, v.162, p. 229-244, 2010.

HELLEN, T.K. On the method of virtual crack extensions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.9, p. 187-207, 1975.

HENSHELL, R.D.; SHAW, K.G. Crack tip finite elements are unnecessary. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.9, p. 495-507, 1975.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v.6, p. 773-782, 1976.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v.114, p. 1028-1044, 1988a.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Generality and special cases of dual integral equations of elasticity. **Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers**, v.9, p. 1-9, 1988b.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Review of Dual Boundary Element Method With Emphasis on Hypersingular Integrals and Divergent Series. **Applied Mechanical Reviews**, v.52, p. 17-33, 1999.

HUBER, O.; NICKED, J.; KUHN, G. On the decomposition of the J-integral for 3D crack problems. **International Journal of Fracture**, v.64, p. 339-348, 1993.

HUGHES, T.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.194, p. 4135-4195, 2005.

HUSSAIN, A.M.; PU, S.L.; UNDERWOOD, J. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. **Fracture analysis, ASTM STP 560**, Philadelphia: Paris PC, Irwin G.R. editors, p. 2-28, 1974.

INGLIS, C.E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **In Transaction of the Royal Institution of Naval Architects. Series A**, v.221, p. 163-198, 1913.

INGRAFFEA, A.R; MANU, C. Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.15, p. 1427-1445, 1980.

IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **In Journal of Applied Mechanics**, v.24, p. 361-364, 1957.

IRWIN, G.R. Fracture I. **Handbuch der Physik**, v.6, p. 558-590, 1958.

ISIDA, M.; NOGUCHI, H.; YOSHIDA, T. Tension and bending of finite thickness plates with semi-elliptical surface crack. **International Journal of Fracture**, v.26, p. 157-188, 1984.

JAMEEL, A.; HARMAN, G.A. Fatigue crack growth in presence of material discontinuities by EFGM. **International Journal of Fatigue**, v.81, p. 105-116, 2015.

JIAO, X. Face offsetting: A unified framework for explicit moving interfaces. **Journal of Computational Physics**, v.220, p. 612-625, 2007.

GU, J.; ZHANG, J.; LI, G. Isogeometric analysis in BIE for 3-D potential problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.36, p. 858-865, 2012.

JIVKOV, A.P. Fatigue corrosion crack extension across the interface of an elastic bi-material. **Engineering Fracture Mechanics**, v.71, p. 1119-1133, 2004.

KARIHALOO, B.L. **Fracture Mechanics and Structural Concrete**, New York: Longman Publishing Group, 1995.

KHATIR, Z.; LEFEBVRE, S. Boundary element analysis of thermal fatigue effects on high power IGBT modules. **Microelectronics Reliability**, v.44, p. 929-938, 2004.

KHOEI, A.R.; AZADI, H; MOSLEMI, H. Modelling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique. **Engineering Fracture Mechanics**, v.75, p. 2921-2945, 2008.

KIRCH, G. Verein Deutscher Ingenieure, 1898.

KOLK, K.; KUHN, G. The advanced simulation of fatigue crack growth in complex 3D structures. **Archive of Applied Mechanics**, v.76, p. 699-709, 2006.

KOSTAS, K.V.; GINNIS, A.I.; POLITIS, C.G.; KAKLIS, P.D. Ship-hull shape optimization with a T-spline based BEM isogeometric solver. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.284, p. 611-622, 2015.

KRUEGER, R. Virtual crack closure technique: history, approach, and applications. **Applied Mechanics Reviews**, v.57, p. 109-143, 2004.

KURANAKOV, D.S.; ESIPOV, D.V.; LAPIN, V.N.; CHERNY, S.G. Modification of the boundary element method for computation of three-dimensional fields of strain-stress state of cavities with cracks. **Engineering Fracture Mechanics**, v.153, p. 302-318, 2016.

KZAM, A.K.L. **Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. 200p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LAZARUS, V; BUCHHOLZ, F-G; FULLAND, M; WIEBESIEK J. Comparasion of predictions by mode II or mode III criteria on crack front twiting in three or four point bending experiments. **International Journal of Fracture**, v.153, p. 141-151, 2008.

LAZARUS, V.; LEBLOND, J.B.; MOUCHRIF, S.E. Crack front rotation and segmentation in mixed mode I+III or I+II+III. Part I: Calculation of stress intensity factors. **Journal of the Mechanics of Physics of Solids**, v.49, p. 1399-1420, 2001.

LEONEL, E.D. **Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados**. 2006. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LEONEL, E.D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. 421p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E.D.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W.S.; BRESSOLETTE, P. Coupled reliability and boundary element model for probabilistic fatigue life assessment in mixed mode crack propagation. **International Journal of Fatigue**, v.32, p. 1823-1834, 2010.

LI, H.; CHANDRA, N. Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile material using cohesive zone models. **International Journal of Plasticity**, v.19, p. 849-882, 2003.

LI, K.; QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. **Computer-Aided Design**, v.43, p. 1427-1437, 2011.

LIAN, H.; SIMPSON, R.N.; BORDAS, S.P.A. Stress analysis without meshing: isogeometric boundary-element method. **Engineering and Computational Mechanics**, v.166, p. 88-99, 2013.

LIPTON, S.; EVANS, J.A.; BAZILEVS, Y.; ELGUEDJ, T.; HUGHES, T.J.R. Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.199, p. 357-373, 2010.

LIU, Z.; MUSABBIR, M.; CIRAK, F.; SIMPSON, R.N. Isogeometric FEM-BEM coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.00, p. 1-26, 2017.

LIU, Y.J.; MUKHERJEE, S.; NISHIMURA, N.; SCHANZ, M.; YE, W.; SUTRADHAR, A.; PAN, E.; DUMONT, N.A.; FRANGI, A.; SAEZ, A. Recent Advances and Emerging

Applications of the Boundary Element Method. **Applied Mechanics Reviews**, v.64, p. 031001, 2011.

LOVÓN, O.B.R. **Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura**. 2006. 134p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MAI, Y-W. Cohesive zone and crack-resistance (R)-curve of cementitious materials and their fibre-reinforced composites. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 219-234, 2002.

MAITI, S.; GEUBELLE, P.H. A cohesive model for fatigue failure of polymers. **Engineering Fracture Mechanics**, v.72, p. 691-708, 2005.

MAITI, S.; GEUBELLE, P.H. Cohesive modelling of fatigue crack retardation in polymers: Crack closure effect. **Engineering Fracture Mechanics**, v.73, p. 22-41, 2006.

MARBURG, S. Discretization requirements: how many elements per wavelength are necessary? **In: Computational acoustics of noise propagation in fluids-finite and boundary element methods**, London: Springer, 2008.

MARUSSIG, B., HUGHES, T.J.R. **A Review of Trimming in Isogeometric Analysis: Challenges, Data Exchange and Simulation Aspects**. 2017. 73p. ICES REPORT 17-03 – The Institute of Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin, 2017.

MARUSSIG, B.; ZECHNER, J.; BEER, G.; FRIES, T.P. Fast isogeometric boundary element method based on independent field approximation. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v.284, p. 458-488, 2015.

MAY, S.; DE BORST, R.; VIGNOLLET, J. Powell-Sabin B-splines for smeared and discrete approaches to fracture in quasi-brittle materials. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v.307, p. 193-214, 2016.

McADAM, D.J. Stress-strain relationship and the corrosion fatigue of metals. **In: Corrosion Fatigue, Special Technical Publication**, v.26, p. 224-254, Philadelphia: American Society for Testing and Materials, 1926.

MELENK, J.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.139, p. 289-314, 1996.

MERGHEIM, J.; KUHL, E.; STEINMANN, P. A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.63, p. 276-289, 2005.

MI, Y. Three-dimensional analysis of crack growth. **In: Topics in Engineering**, V. 28, Computational Mechanics Publications, 1996.

MI, Y.; ALIABADI, M. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.10, p. 161-171, 1992.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. **International Journal of Fracture**, v.67, p. 67-71, 1994a.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM. **Computers & Structures**, v.52, p. 871-878, 1994b.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.11, p. 167-177, 1995.

MI, Y. Three-dimensional analysis of crack growth. **Topics in Engineering v.28**, Southampton: WIT Pres./Computational Mechanics, 1996.

MIRANDA, A.C.O.; MEGGIOLARO, M.A; CASTRO, J.T.P; MARTHA, L.F; BITTENCOURT, T.N. Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1259-1279, 2003.

MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.46, p. 133-150, 1999.

MOES, N.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 813-834, 2002.

MORAN, B.; SHIH, C. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. **Engineering Fracture Mechanics**, v.27, p. 615-642, 1987.

MURAKAMI, Y. **Stress Intensity Factors Handbook**, Pergamon Press., 1987.

MUSKHELISHVILI, N.I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**, Groningen: Noordhoff, 1953.

NAGY, A.P.; ABDALLA, M.M.; GURDAL, Z. On the variational formulation of stress constraints in isogeometric design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.199, p. 2687-2696, 2010.

NEUBER, H. **Theory of Notch Stresses: Principle for Exact Stress Calculations**, Ann Arbor: Edwards, 1946.

NEWMAN, J.C.Jr.; RAJU, I. S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. **Engineering Fracture Mechanics**, v.15, p. 185-192, 1981.

NGUYEN, O.; REPETTO, E.A.; ORTIZ, M.; RADOVITZKY, R.A. A cohesive model of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, v.110, p. 351-369, 2001.

NIKISHKOV, G.P.; ATLURI, S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack by the equivalent domain integral method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p. 1801-1821, 1987.

NUISMER, R.J.; An energy release rate criterion for mixed mode fracture. **International Journal of Fracture**, v.11, p. 245-250, 1975.

ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. Finite element method for localized failure analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.61, p. 189-214, 1987.

PALMGREN, A. Die Lebensdauer von Kugellagern. **Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure**, v.68, p. 339-341, 1924.

PARIS, P.C.; GOMEZ, M.P.; ANDERSON, W.P. A rational analytic theory of fatigue. **The Trend in Engineering**, v.13, p. 9-14, 1961.

PARIS, P.C.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Basic Engineering**, v.85, p. 528-534, 1963.

PARIS, P.C.; SIH, G.C. Stress analysis of cracks. **In: ASTM(American Society for Testing and Materials). Fracture Toughness Testing and its Applications**. ASTM STP 381, p. 30-83, 1965.

PARK, K.; PAULINO, G.H.; CELES, W.; ESPINHA, R. Adaptive mesh refinement and coarsening for cohesive zone modelling of dynamic fracture. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.92, p. 1-35, 2012.

PARK, K.; PAULINO, G.H.; DODDS Jr., R. H. On fatigue crack growth using cohesive zone model. **In: 11th US National Congress on Computational Mechanics**. Minneapolis, USA. 2011.

PATHAK, H.; SINGH, A.; SINGH, I.V. Fatigue crack growth simulations of homogeneous and bi-material interfacial cracks using element free Galerkin method. **Applied Mathematical Modelling**, v.38, p. 3093-3123, 2014.

PETERS, J; REIF, U. **Subdivision Surfaces**, Berlin: Springer-Verlag, 2008.

PENG, X. **Isogeometric boundary element methods for linear elastic fracture mechanics**. 2016. 191p. Tese (Doctor of Philosophy) – Advanced Materials and Computational Mechanics Group, Cardiff School of Engineering, Cardiff university, Cardiff, 2016.

PENG, X.; E. ATROSHCHENKO; KERFRIDEN, P.; BORDAS, S.P.A. Linear elastic fracture simulation directly from CAD: 2D NURBS-based implementation and role of tip enrichment. **International Journal of Fracture**, v.204, p. 55-78, 2017a.

PENG, X.; E. ATROSHCHENKO; KULASEGARAM, S.; BORDAS, S.P.A. Isogeometric boundary element methods for three dimensional static fracture and fatigue crack growth. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v.316, p. 151-185, 2017b.

PEREIRA, J.P.A. **Generalized finite element methods for three-dimensional crack growth simulations**. 2010. 236p. Tese (Doctor of Philosophy in Civil Engineering) – Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2010.

PEREIRA, J.P.; DUARTE, C.A.; JIAO, X.; GUOY, D. Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems. **Computational Mechanics**, v.44, p. 73-92, 2009.

PEREIRA, J.P.; DUARTE, C.A.; JIAO, X. Three-dimensional crack growth with hp-generalized finite element and face offsetting methods. **Computational Mechanics**, v.46, p. 431-453, 2010.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**, Berlin: Springer, 1995.

PINEDA-LEÓN, E.; RODRIGUEZ-CASTELLANOS, A.; BASALDÚA-SÁNCHEZ, J.E.; FLORES-MÉNDEZ, E.; ALIABADI, M.H. Plastic, viscoplastic and creep fracture problems with the boundary element method. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.38, p. 40-50, 2015.

PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G.V.; GÓMEZ, F.J.; CENDÓN, D.A.; ARBILLA, I. Generalizations and specializations of cohesive crack models. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1759-1776, 2003.

POMMIER, S.; SAKAE, C.; MURAKAMI, Y. An empirical stress intensity factor set of equations for a semi-elliptical crack in a semi-infinite body subjected to a polynomial stress distribution. **International Journal of Fatigue**, v.21, p. 243-251, 1999.

PONCELET, J.V. **Introduction à la Mécanique, Industrielle, Physique ou Expérimentale**, p. 317-318, Paris: Imprimerie de Gauthier-Villars, 1839.

POOK, L.P. On fatigue crack paths. **International Journal of Fatigue**, v.17, p. 5-13, 1995.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, p. 1269-1287, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. Dual Boundary element incremental analysis of crack propagation. **Computer & Structures**, v.46, p. 237-247, 1993.

POTYONDY, D.O.; WAWRZYNEK, P.A.; INGRAFFEA, A.R. An algorithm to generate quadrilateral or triangular element surface meshes in arbitrary domains with applications to

crack-propagation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p. 2677-2701, 1995.

POWELL, M.J.D; SABIN, M.A. Piecewise quadratic approximations on triangles. **ACM Transactions on Mathematical Softwares**, v.3, p. 316-325, 1997.

RABCZUC, T.; BORDAS, S.; ZI, G. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. **Computers and Structures**, v.88, p. 1392-1411, 2010.

RAJU, I.S.; NEWMAN Jr, J.C.. Three-dimensional finite-element analysis of finite-thickness fracture specimens. **NASA TN D-8414**, 1977.

RANKINE, W.J.M. On the causes of unexpected breakage of the journals of railway axles and the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. **In: Proceeding of the Institute of Civil Engineers**, v.2, p. 105-108, 1843.

REINHARDT, H.W.; XU, S. Crack extension resistance based on the cohesive force in concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v.64, p. 563-587, 1999.

REYES, E.; GÁLVEZ, J.C.; CASATI, M.J.; CENDÓN, D.A.; SANCHO, J.M.; PLANAS, J. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of brickwork masonry fracture. **Engineering Fracture Mechanics**, v.76, p. 1930-1944, 2009.

RYBICKI, E.F; KANNINEN, M.F; A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. **Engineering Fracture Mechanics**, v.9, p. 931-938, 1977.

RICE, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.35, p. 379-386, 1968.

RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; BUCHHOLZ, F.G.; SCHOLLMANN, M. 3D Fracture Criteria for Structures with Cracks. **Steel Research**, v.74, p. 491-497, 2003.

RICHARD, H.A.; FULLAND, M.; SANDER, M. Theoretical crack path prediction. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.28, p. 3-12, 2005.

RIGBY, R.H.; ALIABADI, M.H. Mixed mode J-integral method for analysis of 3D fracture problems using BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.11, p. 239-256, 1993.

RIGBY, R.H.; ALIABADI, M.H. Decomposition of the mixed-mode J-integral - revisited. **International Journal of Solids and Structures**, v.35, p. 2073-2099, 1998.

ROCHA, F.S. **Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno**. 1988. 234p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

ROCHA, F.C. **Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais e continuidade geométrica G1: tratamento de singularidade e análise de convergência**. 2015. 322p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

ROE, K.L; SIEGMUND, T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 209-232, 2001.

ROGERS, D.F. **An introduction to NURBS with Historical Perspective**, San Diego: Academic Press, 2001.

RONG, J; WEN, L; XIAO, J. Efficiency improvement of the polar coordinate transformation for evaluation BEM singular integrals on curved elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.38, p. 83-93, 2014.

SALEH, A.L.; ALIABADI, M.H. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.51, p. 533-545, 1995.

SANCHES, R.A.K.; BORNEMANN, P.B.; CIRAK, F. Immersed b-splines (i-splines) finite element method for geometrically complex domains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.200, p. 1432-1445, 2011.

SANFORD, R.J. **Principles of fracture mechanics**, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials**, Boston: Kulver Academic, 2001.

SZABÓ, B; BABUSKA, I. Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and re-entrant corners. **In: Fracture mechanics: nineteenth symposium, ASTM STP 969**, p. 101-204, American Society for Testing and Materials, 1988.

SZABÓ, B.; BABUSKA, I. **Finite Element Analysis**, New York: John Wiley and Sons, 1991.

SCHOLLMANN, M.; FULLAND, M.; RICHARD, H.A. Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 249-268, 2003.

SCHOLLMANN, M.; RICHARD, H.A.; KULLMER, G.; FULLAND, M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. **International Journal of Fracture**, v.117, p. 129-141, 2002.

SCOTT, M.A.; SIMPSON, R.N.; EVANS, J.A.; LIPTON, S.; BORDAS, S.P.A.; HUGUES, T.J.R.; SEDERBERG, T.W. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.254, p. 197-221, 2013.

SEDERBERG, T.W.; ZHENG, J.; BAKENOV, A.; NASRI, A. T-splines and T-NURCCs. **ACM Transaction on Graphics**, v.22, p. 477-484, 2003.

SEDERBERG, T.W.; CARDON, D.L.; FINNIGAN, G.T; NORTH, N.S; ZHENG, J. LYCHE, T. T-spline simplification and local refinement. **ACM Transaction on Graphics**, v.23, p. 276-283, 2004.

SEKINE, H.; YAN, B.; YASUHO, T. Numerical simulation study of fatigue crack growth behavior of cracked aluminium panels repaired with a FRP composite patch using combined BEM/FEM. **Engineering Fracture Mechanics**, v.72, p. 2549-2563, 2005.

SHIVAKUMAR, K.N.; RAJU, I.S. An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems. **Engineering Fracture Mechanics**, v.42, p. 935-959, 1992.

SIMPSON, R.; BORDAS, S.; TREVELYAN, J.; RABCZUK, T. A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.209-212, p. 87-100, 2012.

SIMPSON, R.; TREVELYAN, J. A partition of unity enriched dual boundary element method for accurate computations in fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.200, p. 1-10, 2011a.

SIMPSON, R.; TREVELYAN, J. Evaluation of J1 and J2 integrals for curved cracks using an enriched boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.78, p. 623-637, 2011b.

SIMPSON, R.N.; SCOTT, M.A.; TAUS, M.; THOMAS, D.C.; LIAN, H. Acoustic isogeometric boundary element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.269, p. 265-290, 2013.

SMITH, I.; LANDIS, E.; GONG, M. **Fracture and Fatigue in Wood**, Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

SNYDER, M.D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**, v.11, p. 315-328, 1975.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H. Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method. **Composite Structures**, v.31, p. 229-233, 1995.

SUKUMAR, N.; CHOPP, D.I.; MORAN, B. Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 29-48, 2003.

STERN, M.; BECKER, F.B.; DUNHAM, R.S. A contour integral computation of mixed-mode stress-intensity factors. **International Journal of Fracture**, v.12, p. 359-368, 1976.

SURENDRA, P.S.; SWARTZ, S.E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other quasi-brittle materials**, New York: John Wiley & Sons, 1995.

SZABO, B.A.; BABUSKA, I. Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners. **In: Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium, ASTM STP 969**, T.A. Cruse, eds, p. 101-124, 1988.

TADA, H.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. **The stress analysis of cracks handbook**, New York: ASME Press, 2000.

TANAKA, K. The cyclic J-integral as a criterion for fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, v.22, p. 91-104, 1983.

THURSTON, W.P. Three-dimensional manifolds kleinian groups and hyperbolic geometry. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v.6, p. 357-381, 1982.

THURSTON, W.P. **Three-Dimensional Geometry and Topology**, Princeton: Princeton University Press, 1997.

T-splines, Inc. (2017a). <http://www.tsplines.com/maya-tutorials.html>

T-splines, Inc. (2017b). <http://www.tsplines.com/products/tsplines-for-rhino.html>

TVERGAARD, V. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1859-1868, 2003.

URAL, A.; HEBER, G.; WAWRZYNEK, P; INGRAFFEA, A; LEWICKI, D; NETO, J. Three-dimensional, parallel, finite element simulation of fatigue crack growth in a spiral bevel pinion gear. **Engineering Fracture Mechanics**, v.72, p. 1148-1170, 2005.

URAL, A.; KRISHNAN, V.R.; PAPOULIA, K.D. A cohesive zone model for fatigue crack growth allowing for crack retardation. **International Journal of Solids and Structures**, v.46, p. 2453-2462, 2009.

VERHOOSSEL, C.V.; SCOTT, M.A.; DE BORST, R.; HUGHES, T.J.R. An isogeometric approach to cohesive zone modelling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.87, p. 336-360, 2011.

VICENTINI, D.F. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de fratura**. 2006. 131p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

WANG, Y.J.; BENSON, D.J. Multi-patch nonsingular isogeometric boundary element analysis in 3D. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.293, p. 71-91, 2015.

- WANG, X.; LAMBERT, S. B. Local weight functions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v.23, p. 199-208, 1995.
- WARREN, J.; WEIMER, H. **Subdivision Methods for Geometric Design**, Burlington: Morgan Kaufmann Publisher, 2002.
- WEAVER, J.; Three-dimensional crack analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v.13, p. 321-330, 1977.
- WEBER, W.; WILLNER, K.; KUHN, G. Numerical analysis of the influence of crack surface roughness on the crack path. **Engineering Fracture Mechanics**, v.77, p. 1708-1720, 2010.
- WEN, P.H.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. A contour integral for the evaluation of stress intensity factors. **Applied mathematical modelling**, v.19, p. 450-455, 1995.
- WEN, P.; FAN, T. The discontinuity displacement method applied to three-dimensional coplanar crack problem for any boundary value condition. **Engineering Fracture Mechanics**, v.48, p. 691-702, 1994.
- WESTERGAARD, H.M. Bearing pressures and cracks. **In Journal of Applied Mechanics**, v.6, p. A49-A53, 1939.
- WILDE, A.J.; ALIABADI, M.H.; POWER, H. Application of a C0 continuous element to the development of hypersingular integrals. **Communications in Boundary Elements**, v.7, p. 109-114, 1996.
- WILLIAMS, M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. **Journal of Applied Mechanics**, v.24, p. 109-111, 1957.
- WOHLER, A. Versuche uber die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen, **Zeitschrift fur Bauwesen**, v.4, p. 160-201, 1860.
- YAN, X. Multiple crack fatigue growth modelling by displacement discontinuity method with crack-tip elements. **Applied Mathematical Modelling**, v.30, p. 489-508, 2006.
- YANG, Q.D.; COX, B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. **International Journal of Fracture**, v.133, p. 107-137, 2005.

YANG, B.; MALL, S.; RAVI-CHANDAR, K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, v.38, p. 3927-3944, 2001.

YAU, J.F.; WANG, S.S.; CORTEN, H.T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. **Journal of Applied Mechanics**, v.47, p. 333-341, 1980.

YOUNG, A. A single-domain boundary element method for 3-D elastostatics crack analysis using continuous elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.39, p. 1265-1294, 1996.

XIAO, H.T.; YUE, Z.Q. A three-dimensional displacement discontinuity method for crack problems in layered rocks. **International Journal of Rock Mechanics e Mining Sciences**, v.48, p. 412-420, 2011.

XIAO, Q.Z.; KARIHALLO, B.L. Direct determination of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.26, p. 719-729, 2003.

ZEHNDER, A.T. **Fracture Mechanics**, New York: Springer, 2012.

ZHOU, F.; MOLINARI, J.F. Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependence. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.59, p. 1-24, 2004.

## Anexo A: Teoria da elasticidade linear

---

Entre as teorias empregadas em análises de mecânica dos sólidos pode-se destacar a teoria da elasticidade linear, a qual é adequada para descrever o comportamento estrutural de sólidos em regime de pequenos deslocamentos e de pequenas deformações. Apesar de muitas vezes ser necessário o conhecimento do comportamento dos materiais além da fase elástica, a teoria da elasticidade fornece fortes subsídios para o desenvolvimento de teorias mais abrangentes que tratam o processo de mudança de rigidez do material. Além disso, a teoria da elasticidade, seja a teoria linear clássica ou a teoria hiperelástica de Green, é a base para formulações numéricas de elasticidade baseadas no MEF e no MEC.

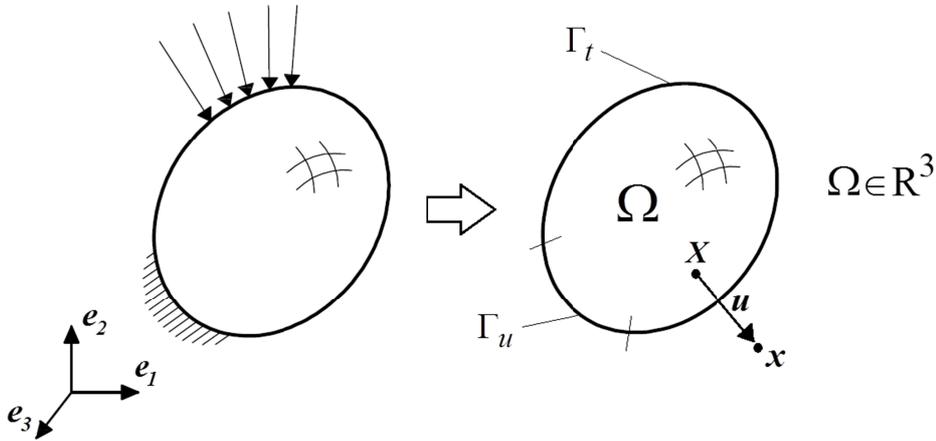
Neste anexo apresentam-se os conceitos básicos para a definição dos Problemas de Valor de Contorno (PVC) da teoria da elasticidade linear clássica, tais como a cinemática linear válida para pequenos deslocamentos e pequenas deformações, o conceito de tensão de Cauchy, as equações de equilíbrio dos pontos materiais e a relação constitutiva obtida a partir da lei generalizada de Hooke para materiais isotrópicos.

### A.1 Cinemática linear

Cinemática é o estudo da mudança de forma dos sólidos sem necessariamente se preocupar com os fatores externos que causaram tal mudança. Para introduzir os conceitos da cinemática linear considere um sólido qualquer idealizado como um meio contínuo definido em um domínio  $\Omega$  fechado por um contorno  $\Gamma$ . Cada um dos pontos do sólido definidos em um espaço Euclidiano pode ser entendido como um ponto material. O estudo do comportamento mecânico de sólidos é baseado nas respostas de vetor de deslocamentos, de tensores de deformações e de tensores de tensões em cada um de seus pontos materiais, devido à ação de forças externas. Fixando no espaço uma base ortonormal de versores unitários  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  é possível descrever geometricamente o sólido no espaço Euclidiano conforme ilustra a Figura A.1.

Cada ponto material pode ser representado por um vetor posição  $\mathbf{X}$  pertencente ao domínio  $\Omega$  do sólido, resultando na seguinte descrição Lagrangeana:  $\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$  ou ainda  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}^T$ . Durante o processo de mudança de forma, os pontos do sólido podem se mover de suas posições iniciais  $\mathbf{X}$  para ocupar uma nova posição, ou posição atual,

$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  na configuração deformada para um dado instante de tempo  $t$  pertencente a um intervalo temporal  $I = \{t \in R / 0 \leq t \leq T\}$ .



**Figura A.1** – Sólido descrito no espaço Euclidiano tridimensional.

A posição atual também pode ser descrita no mesmo espaço Euclidiano como:  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  ou ainda  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$ . A diferença entre as posições iniciais e atuais dos pontos materiais definem um campo vetorial  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$  que descreve, para um instante  $t$ , os deslocamentos sofridos pelos pontos materiais  $\mathbf{X}$  durante a mudança de forma.

A descrição Lagrangeana do vetor  $\mathbf{u}$  pode ser apresentada para um dado ponto material como:  $\mathbf{u} = (x_1 - X_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - X_2)\mathbf{e}_2 + (x_3 - X_3)\mathbf{e}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ . O campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  engloba movimentos de corpo rígido, compostos por translações e rotações do corpo como um todo, e também possíveis mudanças de forma do sólido referidas como deformações. A definição de uma medida de deformação válida para todos os pontos materiais do domínio do sólido é fundamental para o estudo da mudança de forma.

Uma importante hipótese para a definição da grandeza tensorial que representa a medida de deformação dos pontos materiais está relacionada com a magnitude do campo de deslocamentos observada durante o processo de mudança de forma. No caso de pequenos deslocamentos,  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \ll \mathbf{X}$ , uma relação linear pode ser aferida entre o vetor de deslocamentos e a medida de deformação. Nessas circunstâncias, define-se como medida de

deformação Lagrangeana o pseudo tensor de deformações linear  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , o qual pode ser apresentado como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$
(A.1)

Em que o operador  $\nabla^s$  representa a parte simétrica do gradiente aplicada sobre o vetor de deslocamentos. Vale apenas enfatizar que o tensor de deformações linear definido em A.1 não atende requisitos de invariância. Esse fenômeno, também conhecido por falta de objetividade, implica que a medida de deformação pode depender do referencial adotado. No entanto, para o caso de problemas de mudança de forma sobre a hipótese de deslocamentos infinitesimais, o tensor de deformações linear  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é uma medida de deformação objetiva, e, portanto, adequada para as análises.

## A.2 Tensões e equilíbrio

Valores não nulos das componentes dos tensores de deformação evidenciam que os pontos materiais do sólido apresentam movimento relativo uns aos outros, o que acarreta no aparecimento de forças internas. Em problemas mecânicos o aparecimento de forças internas está relacionado com a ação de forças externas aplicadas sobre o sólido. Parte dessas forças atua diretamente no domínio  $\Omega$  do sólido e são representadas pelo campo vetorial  $\mathbf{b}$  de forças de domínio, tais como as forças gravitacionais e eletromagnéticas. Outra parte das forças externas é aplicada em regiões específicas do contorno  $\Gamma$  do sólido conforme ilustrado na Figura A.1.

A distribuição das forças internas pode ser representada definindo-se um tensor de tensões. Para o caso da elasticidade linear, na qual a configuração inicial e a configuração atual do sólido se confundem, é interessante adotar como medida de tensão o tensor de tensões de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , o qual é definido sobre áreas infinitesimais na configuração atual. Cada ponto material do sólido pode ser entendido como um elemento cúbico de dimensões infinitesimais com faces paralelas aos planos formados pelos versores  $\mathbf{e}_i$  da base ortonormal. As nove componentes  $\sigma_{ij}$  do tensor de tensões de Cauchy atuam sobre as faces dos pontos materiais caracterizando estados de tensão pontuais conforme ilustra a Figura A.2.

Na ausência de torques pontuais no domínio do sólido, o equilíbrio de momentos no ponto material resulta  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Ou seja, o tensor de tensões de Cauchy é simétrico. Dessa maneira é possível caracterizar o estado de tensão em um ponto material conhecendo apenas seis das nove componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

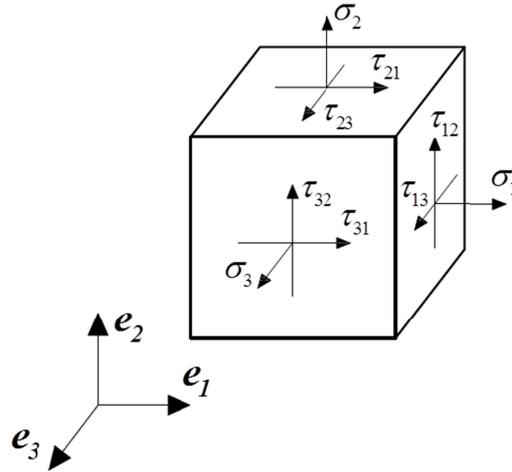


Figura A.2 – Estado de tensão em um ponto material do sólido.

Para que um sólido de dimensões finitas esteja em equilíbrio é necessário que o balanço de momentum linear (terceira lei de Newton) seja atendido em todos os pontos materiais do mesmo a qualquer instante de tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega \\ \sigma_{ij,j} + b_i &= \rho \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Em que  $\rho$  é a densidade de massa no ponto material,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de domínio e  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor de acelerações do ponto material. O produto interno (contração simples) do operador gradiente  $\nabla$  sobre o tensor de tensões resulta no vetor divergente que somado às forças de domínio representa o vetor de forças resultante no ponto material. Para que o equilíbrio seja satisfeito é necessário ainda que as forças internas se igualem às forças externas nas superfícies do contorno. Em outras palavras, é necessário que o tensor de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , projetado na direção normal à superfície  $\Gamma$  nos pontos adjacentes ao contorno, seja igual ao vetor de forças de superfície  $\mathbf{t}$  atuantes nesses pontos.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{t} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Gamma \\ \sigma_{ij} \eta_j &= t_i \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A equação A.4 é também conhecida como equilíbrio de superfície de Cauchy na qual  $\boldsymbol{\eta}$  é o versor normal à superfície  $\Gamma$  no ponto  $\mathbf{X} \in \Gamma$ . Para que o PVC seja bem definido é necessário conhecer as forças de domínio  $\mathbf{b}$  atuantes e também as condições de contorno impostas sobre as superfícies do sólido. A depender das condições impostas sobre o contorno  $\Gamma$ , o mesmo pode ser subdividido em duas partes distintas e complementares denominadas  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_t$ , tal que  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ . A parte  $\Gamma_u$  está associada com as chamadas condições de contorno de Dirichlet, na qual deslocamentos prescritos  $\bar{\mathbf{u}}$  são impostos. Já a parte  $\Gamma_t$  está associada com as chamadas condições de contorno de Neumann, na qual forças de superfície  $\bar{\mathbf{t}}$  são prescritas. As condições de contorno clássicas dos PVC podem ser resumidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{para todo } \mathbf{x} \in \Gamma_u \text{ e } t \in \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{para todo } \mathbf{x} \in \Gamma_t \text{ e } t \in \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

### A.3 Relações constitutivas

Relações constitutivas relacionam de alguma maneira medidas de tensão às medidas de deformação. De maneira geral, as relações constitutivas podem ser expressas em formas integrais (hiperelasticidade), diretas (elasticidade clássica) ou ainda diferenciais (formulações implícitas). No caso da elasticidade clássica em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, todas as medidas de deformação e de tensão se confundem e a relação constitutiva pode ser expressa diretamente através da lei de Hooke generalizada. A lei de Hooke generalizada prediz que as componentes do tensor de deformações são combinações lineares das componentes do tensor de tensões e vice e versa. Essas relações podem ser expressas por tensores de quarta ordem operando sobre os tensores de tensão ou de deformação.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} \\ \varepsilon_{ij} &= C_{ijkl} \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sendo os tensores de quarta ordem  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  denominados, respectivamente, tensor de flexibilidade e tensor de rigidez, ou ainda, tensor de compliância e tensor de constantes elásticas. Para o caso geral de materiais anisótropos os tensores constitutivos contêm 81

termos, os quais são função apenas da direção dos versores da base ortonormal de referência. Devido à simetria dos tensores de tensão e de deformação o número de termos independentes dos tensores constitutivos diminui para 36. Considerando ainda a simetria dos próprios tensores constitutivos, demonstrada através de princípios energéticos, esse número diminui para 21 termos independentes. Esse é o número máximo de constantes independentes necessários para descrever o comportamento elástico linear de qualquer material anisotrópico. No caso específico de materiais isotrópicos, os tensores constitutivos podem ser descritos por apenas duas constantes independentes, a saber, o módulo de Young, ou módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , e o coeficiente de Poisson  $\nu$ . A lei de Hooke generalizada pode ser escrita para materiais isotrópicos de forma concisa em notação dyadica ou em notação indicial, conforme apresenta a Eq. A.7.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}\end{aligned}\tag{A.7}$$

sendo  $\mu = E/2(1+\nu)$  a constante de Lamé comumente denominada de módulo de elasticidade transversal e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker. De forma inversa reescreve-se a Lei de Hooke para materiais isotrópicos como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}\end{aligned}\tag{A.8}$$

em que  $\lambda = \nu E / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$  é a outra constante de Lamé.

## Anexo B: Integrais regulares

---

Para a construção das matrizes de influência que compõem o sistema de equações algébricas do MEC dual se faz necessário avaliar as integrais das equações 2.42, 2.43 e 2.44 sobre as superfícies  $\Gamma_e$  dos  $e = 1 \cdots NE$  elementos que discretizam o contorno. Caso o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  não pertença à superfície  $\Gamma_e$  do elemento as integrais serão regulares, ou ainda não singulares, e poderão ser tratadas numericamente através de quadraturas de integração conforme apresentado a seguir. Visto que os núcleos integrais das equações 2.42-2.44 não são funções polinomiais, as respostas numéricas não serão exatas e poderão apresentar erros. De maneira geral quanto mais pontos de integração forem adotados, menor será o erro e maior será o custo computacional. No caso de o ponto de colocação estar distante da superfície de integração  $\Gamma_e$ , os núcleos integrais apresentaram comportamento suave e poderão ser integrados com poucos pontos de integração. A medida que a superfície  $\Gamma_e$  do elemento a ser integrado se aproxima do ponto de colocação a natureza singular do mesmo faz com que o comportamento não seja suave, mesmo para o caso das integrais regulares. Sendo assim, o número de pontos de integração requeridos para obter um erro numérico aceitável pode aumentar consideravelmente. Nos tópicos B.1, B.2 e B.3 apresentam-se as técnicas baseadas em quadraturas numéricas adotadas no presente trabalho para proceder as integrais regulares sobre elementos isoparamétricos quadrilaterais e triangulares. No caso isogeométrico, onde as superfícies são descritas por patches, as integrais são procedidas de maneira semelhante ao apresentado para o caso dos elementos isoparamétricos quadrilaterais. Por fim, no tópico B.4 é apresentada uma estratégia auto adaptativa para definir automaticamente o número de pontos de integração necessários para proceder as integrais sobre os contornos  $\Gamma_e$  considerando erros numéricos aceitáveis.

### B.1 Integração sobre elementos quadrilaterais

No caso do elemento a ser integrado ser um elemento isoparamétrico quadrilateral, como aqueles apresentados nas Figuras 2.3(c) e 2.3(d), as integrais sobre a superfície  $\Gamma_e$  podem ser escritas no espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  como:

$$\int_{S_e} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) dS_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{B.1})$$

em que as componentes dos núcleos integrais  $\mathbf{K}$  podem ser iguais a  $U_{ij}N^\alpha$  e  $T_{ij}N^\alpha$  ou  $D_{kij}N^\alpha$  e  $S_{kij}N^\alpha$  a depender da equação integral considerada. Como os intervalos de integração dos elementos quadrilaterais são de  $[-1, 1]$  é possível integrar B.1 aplicando diretamente a quadratura de Gauss Legendre:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^{Ng} \sum_{j=1}^{Ng} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1^i, \xi_2^j)) J(\xi_1^i, \xi_2^j) w_i w_j \quad (\text{B.2})$$

em que  $Ng$  é o número de pontos de Gauss nas direções  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,  $w_1, w_2$  são os pesos da quadratura e  $\xi_1^i, \xi_2^j$  são as coordenadas homogêneas dos pontos de Gauss no espaço paramétrico. O procedimento de integração numérica em elementos quadrilaterais via quadratura de Gauss permite calcular as integrais não singulares mesmo no caso do ponto de colocação  $\mathbf{y}$  estar relativamente próximo da superfície  $\Gamma_e$  do elemento. Nesses casos o erro numérico da integração pode ser controlado aumentando-se o número de pontos de Gauss.

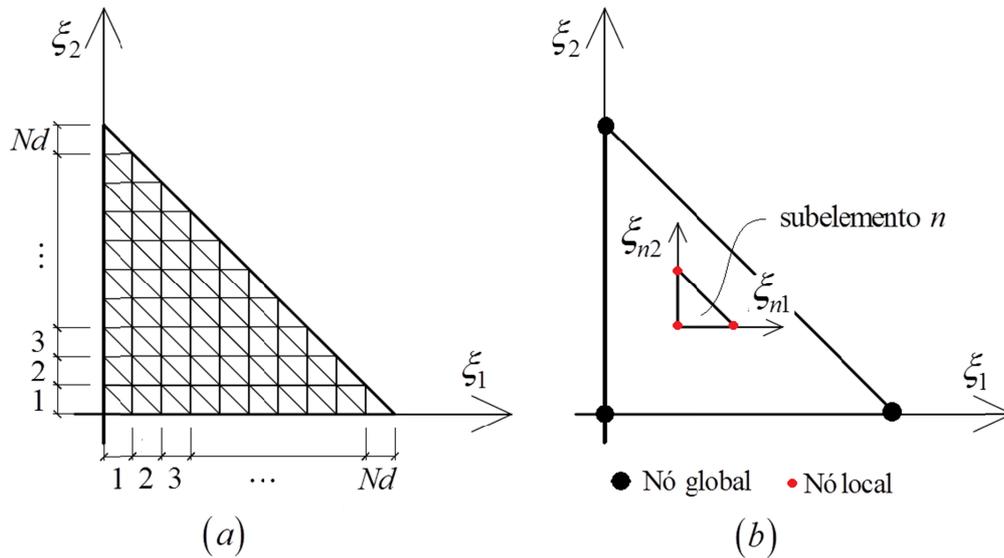
## B.2 Integração sobre elementos triangulares

Quando o ponto de colocação se encontra consideravelmente distante da superfície  $\Gamma_e$ , e o integrando apresenta comportamento suave, a integração sobre elementos triangulares via quadratura de Hammer apresenta-se como uma alternativa eficiente. Nesse caso, as integrais sobre a superfície  $\Gamma_e$  podem ser escritas no espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) d\Gamma_e &= \int_0^{1-\xi_2} \int_0^{1-\xi_2} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \sum_{i=1}^{Nh} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1^i, \xi_2^i)) J(\xi_1^i, \xi_2^i) w_i \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

em que  $Nh$  é o número de pontos de Hammer,  $w_i$  são os pesos da quadratura e  $\xi_1^i, \xi_2^i$  são as coordenadas homogêneas dos pontos de Hammer no espaço paramétrico. No entanto, o máximo número de pontos de Hammer permitido pela quadratura é  $Nh = 13$ . Sendo assim, a medida que a superfície  $\Gamma_e$  do elemento a ser integrado se aproxima de  $\mathbf{y}$ , o integrando começa a apresentar gradientes que fazem com que sejam necessários mais do que 13 pontos para proceder a integração numérica de maneira precisa. Nesse caso deve-se acoplar a quadratura de Hammer à técnica de subelementação de maneira a permitir um maior número

de pontos de integração. A técnica da subelementação propõem que o elemento a ser integrado seja dividido em  $N_s = Nd^2$  subelementos triangulares, sendo  $Nd$  o número de divisões sobre os eixos paramétricos, conforme ilustrado na Figura B.1a.



**Figura B.1** – Técnica da subelementação.

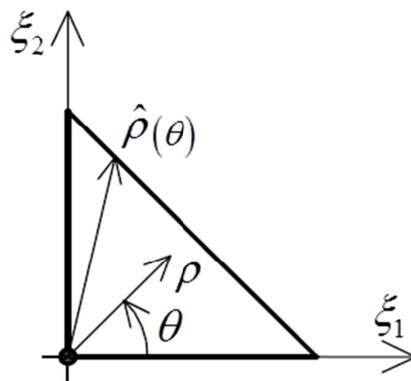
em que as coordenadas globais  $\xi_1, \xi_2$  dos pontos sobre o subelemento podem ser obtidas em função das coordenadas locais  $\xi_{n1}, \xi_{n2}$  do subelemento  $n$  utilizando funções de forma locais  $M_n^\alpha(\xi_{n1}, \xi_{n2})$  definidas sobre os nós locais do subelemento (Figura B.1b). Dessa maneira, a integral sobre o elemento triangular é calculada como a soma das integrais sobre os subelementos, resultado em:

$$\int_0^{1-\xi_2} \int_0^{\xi_1} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{n=1}^{N_s} \left[ \sum_{i=1}^{N_h} \mathbf{K}(\xi_1(\xi_{n1}^i), \xi_2(\xi_{n2}^i)) J(\xi_1(\xi_{n1}^i), \xi_2(\xi_{n2}^i)) w_i \right] \quad (\text{B.4})$$

A integração sobre elementos triangulares via quadratura de Hammer com subelementação permite avaliar as integrais sobre superfícies  $\Gamma_e$  consideravelmente próximas ao ponto  $\mathbf{y}$ . No entanto, a medida que o elemento se aproxima do ponto de colocação e o integrando começa a apresentar elevados gradientes, a técnica torna-se pouco eficiente dado o elevado número de subdivisões necessárias para garantir a boa precisão da integral.

### B.3 Integração sobre elementos triangulares em coordenadas polares

Como alternativa à técnica de subelementação apresenta-se nesse tópico a integração em coordenadas polares via quadratura de Gauss, a qual se mostrou mais eficiente para o caso de integrandos com elevados gradientes. No caso dos elementos triangulares, os limites de integração no espaço paramétrico não são mais  $[-1, 1]$  e, portanto, não é possível aplicar a quadratura de Gauss diretamente. Para proceder as integrais em elementos triangulares via quadratura de Gauss é interessante primeiramente considerar a mudança de coordenadas do espaço paramétrico conforme ilustrado na Figura B.2. Todos os pontos do espaço paramétrico do elemento triangular podem ser descritos em coordenadas polares  $\rho, \theta$ . As coordenadas paramétricas cartesianas  $\xi_1, \xi_2$  se relacionam com as coordenadas polares como:  $\xi_1 = \rho \cos(\theta)$ ,  $\xi_2 = \rho \text{sen}(\theta)$ . Sendo assim, a relação entre os diferenciais de áreas é dada por:  $d\xi_1 d\xi_2 = \rho d\rho d\theta$ , sendo  $\rho$  o jacobiano escalar da transformação.



**Figura B.2** – Espaço paramétrico dos elementos triangulares em coordenadas polares  $\rho, \theta$ .

Definidas as relações entre os diferenciais de área do espaço físico para o espaço paramétrico cartesiano e do mesmo para o espaço paramétrico em coordenadas polares, é possível escrever a integral sobre a superfície  $\Gamma_e$  do elemento como:

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) d\Gamma_e = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\rho, \theta)) J(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (\text{B.5})$$

em que  $\hat{\rho}(\theta)$  corresponde ao máximo valor de  $\rho$  para um dado  $\theta$  fixo. Para proceder a integral B.5 por quadratura de Gauss considere ainda que coordenadas polares podem ser escritas em termos de variáveis auxiliares  $\xi_1^*, \xi_2^*$  como:  $\rho = \xi_1^* \hat{\rho}(\theta)/2 + \hat{\rho}(\theta)/2$  e

$\theta = \xi_2^* \pi/2 + \pi/2$ . Variando  $\xi_1^*, \xi_2^*$  no intervalo  $[-1, 1]$  observa-se que  $\rho$  e  $\theta$  variam nos intervalos  $[0, \hat{\rho}(\theta)/2]$  e  $[0, \pi/2]$ , os quais são os limites de integração em B.5. Além disso, os diferenciais das novas variáveis se relacionam aos diferenciais de  $\rho$  e  $\theta$  como:  $d\rho d\theta = \hat{\rho}(\theta(\xi_2^*)) \pi d\xi_1^* d\xi_2^* / 4$ . Considerando as variáveis auxiliares é possível então proceder a integral sobre o elemento triangular via quadratura de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)) d\Gamma_e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1^*, \xi_2^*)) J(\xi_1^*, \xi_2^*) \rho(\xi_1^*) \frac{\hat{\rho}(\theta) \pi}{4} d\xi_1^* d\xi_2^* \\ &= \sum_{i=1}^{Ng} \sum_{j=1}^{Ng} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j})) J(\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j}) \rho(\xi_1^{*i}) \frac{\hat{\rho}(\xi_2^{*j}) \pi}{4} w_i w_j \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Note que para cada ponto de Gauss  $\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j}$  é necessário calcular os termos  $\mathbf{K}(\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j})$ ,  $J(\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j})$ . Ao invés de reescrever analiticamente tais expressões em função de  $\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j}$  é muito mais simples avalia-las numericamente de maneira indireta. Para cada ponto  $\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j}$  calcula-se as respectivas coordenadas polares  $\rho^i, \theta^j$  e com as mesmas obtêm-se as coordenadas paramétricas cartesianas  $\xi_1(\rho^i, \theta^j) = \xi_1^{ij}$  e  $\xi_2(\rho^i, \theta^j) = \xi_2^{ij}$ . Com as coordenadas  $\xi_1^{ij}, \xi_2^{ij}$  calcula-se então os termos  $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi_1^{ij}, \xi_2^{ij})) J(\xi_1^{ij}, \xi_2^{ij})$  no ponto de integração  $\xi_1^{*i}, \xi_2^{*j}$ .

#### B.4 Estratégia auto adaptativa

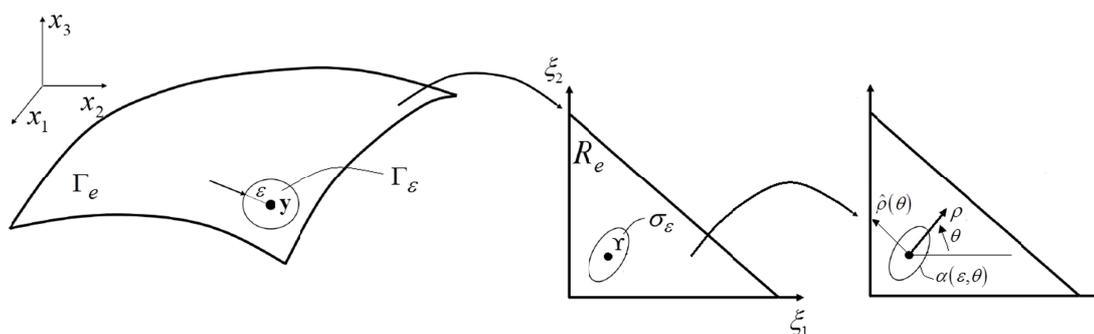
De maneira geral, quanto mais próximo do ponto de colocação estiver a superfície  $\Gamma_e$  mais pontos de integração serão necessários para garantir a precisão das integrações numéricas sobre os elementos. Baseado na distância  $d$  entre o nó mais próximo do elemento a ser integrado e o ponto de colocação, de Souza (2001) propôs um critério auto adaptativo para determinar o número de divisões,  $Nd$ , necessárias para proceder com precisão a integração por subelementação em elementos triangulares. Denominando  $\bar{L}$  como a média das três distâncias entre os vértices dos elementos triangulares o critério é apresentado como:

$$Nd = \text{int} \left( \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \right); \quad \alpha = \frac{d}{\bar{L}} \quad (\text{B.7})$$

No presente trabalho adotou-se o mesmo critério para proceder as integrais dos núcleos  $U_{ij}N^\alpha$ ,  $T_{ij}N^\alpha$  e  $D_{kij}N^\alpha$  sobre os elementos triangulares. Devido a ordem  $O(1/r^3)$  do núcleo  $S_{kij}N^\alpha$ , adotou-se nesse caso  $Nd = 2\text{int}(\sqrt{10/\alpha})$ . Limitou-se o procedimento auto adaptativo em  $Nd \leq 8$  dada a baixa eficiência da integração por subelementação. Quando o critério resultar em um número de subdivisões maiores que o limite, optou-se por proceder as integrais sobre os elementos triangulares em coordenadas polares via quadratura de Gauss. No entanto, aproveita-se o critério auto adaptativo e definiu-se o número de pontos de Gauss como sendo o mesmo número de subdivisões,  $Ng = Nd$ . O mesmo critério pode ser utilizado para definir o número de pontos de Gauss nas integrais sobre os elementos quadrilaterais, porém nesse caso  $\bar{L}$  é a média entre os quatro vértices do elemento.

## Anexo C: Integrais singulares e hipersingulares

Caso o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  pertença à superfície  $\Gamma_e$  do elemento a ser integrado, a integral resultante será irregular e poderá apresentar diferentes tipos de singularidade a depender do núcleo integral considerado,  $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  ou  $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . A singularidade  $O(1/r)$  do termo  $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  escrito em coordenadas cartesianas é eliminada quando a integral é reescrita em coordenadas polares devido ao jacobiano da transformação,  $\rho$ . Por esse motivo, integrais sobre superfícies tridimensionais com singularidade  $O(1/r)$  são denominadas integrais quase singulares. Já os núcleos singulares  $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  e  $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  apresentam singularidades de ordens  $O(1/r^2)$  e  $O(1/r^3)$ , denominadas comumente na literatura singularidades fortes e hipersingularidades. Nesses casos a transformação da integral em coordenadas polares não é capaz de cancelar toda a singularidade sendo então necessário incorporar técnicas de regularização. Uma maneira geral para o tratamento das diversas integrais singulares e hipersingulares que podem aparecer nas formulações de elementos de contorno foi proposta por Guiggiani *et al.* (1990) e Guiggiani *et al.* (1992), e é denominada de método de Guiggiani. Esse método se baseia na técnica de subtração de singularidade (Aliabadi *et al.* 1985) na qual as partes singulares são extraídas do integrando através de expansões em série e tratadas analiticamente. As partes restantes são regulares e, portanto, podem ser tratadas com regras de quadraturas convencionais. No presente trabalho as integrais envolvendo os termos  $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  e  $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  foram tratadas através do método de Guiggiani dada a sua generalidade na avaliação de integrais singulares. Para introduzir os procedimentos de avaliação das integrais singulares considere o elemento ilustrado na Figura C.1 contendo o ponto fonte  $\mathbf{y}$ .



**Figura C.1** - Mapeamento do elemento singular para o espaço paramétrico (Adaptado de Rocha, 2015).

Na Figura o ponto fonte  $\mathbf{y}$  encontra-se sobre a superfície do elemento  $\Gamma_e$ , portanto, em um contorno suave. Sendo assim, a interseção entre a superfície  $\Gamma_e$  do elemento singular e o domínio adicional semiesférico introduzido no processo limite descrito no tópico 2.4 (ver Figura 2.1) resulta, no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , na região circular  $\Gamma_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$  ilustrada. No espaço paramétrico  $\xi_1 \times \xi_2$  o ponto singular  $\mathbf{y}$  e a região  $\Gamma_\varepsilon$  são representados pelo o ponto  $\mathbf{Y} = \{\xi_1^0 \ \xi_2^0\}^T$  e pela região  $\sigma_\varepsilon$  que após o mapeamento não é mais necessariamente circular. Os procedimentos a seguir descritos são baseados na transformação em coordenadas polares ilustra a direita da Figura C.1 e são válidos tanto para elementos triangulares e quadrilaterais quanto para elementos definidos por knots spans em análises isogeométricas. O contorno da região  $\sigma_\varepsilon$  é representado em coordenadas polares por  $\alpha(\rho, \theta)$  e  $\hat{\rho}(\theta)$  é o limite superior de  $\rho$  para um dado  $\theta$ .

### C.1 Integração do núcleo quase-singular $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

Devido à singularidade presente no núcleo  $U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , a integração do elemento que contém o ponto singular  $\mathbf{y}$  deve ser procedida ao longo do contorno  $\Gamma_e - \Gamma_\varepsilon$  no limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\int_{\Gamma_e} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(\Gamma_e - \Gamma_\varepsilon)} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma \right\} \quad (\text{C.1})$$

Após a discretização da equação integral, o campo  $t_j$  é representado por meio das funções base como  $t_j(\boldsymbol{\xi}) = N^\alpha(\boldsymbol{\xi}) t_j^\alpha$ . Portanto, em termos computacionais a avaliação de C.1 integrada ao longo do elemento isoparamétrico resulta.

$$\mathbf{I}_U = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) N^\alpha(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\xi \right\} \quad (\text{C.2})$$

em que o diferencial de área pode ser escrito no espaço paramétrico, ou seja,  $dS = J(\boldsymbol{\xi})d\xi = J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1d\xi_2$ . A relação entre as coordenadas  $\xi_1, \xi_2$  e as coordenadas polares  $\rho, \theta$  centradas no ponto de colocação  $\Upsilon = \{\xi_1^0 \ \xi_2^0\}^T$  pode ser definida como:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1^0 + \rho \cos(\theta) \\ \xi_2 &= \xi_2^0 + \rho \text{sen}(\theta)\end{aligned}\tag{C.3}$$

Reescrevendo a integral  $\mathbf{I}_U$  em coordenadas polares chega-se a:

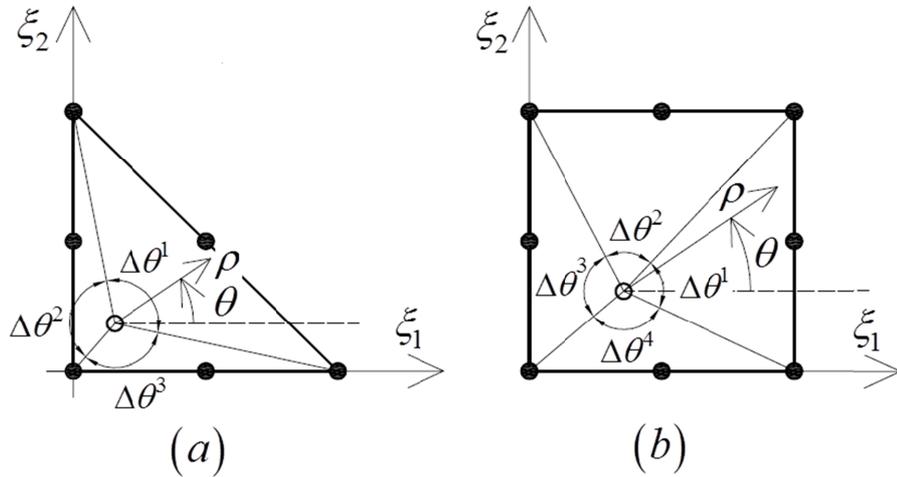
$$\mathbf{I}_U = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{U}(\rho, \theta) d\rho d\theta \right\}\tag{C.4}$$

sendo  $d\xi_1d\xi_2 = \rho d\rho d\theta$  e  $\mathbf{U}(\rho, \theta) = U_{ij} N^\alpha J \rho$ .

A singularidade  $O(1/\rho)$  oriunda do termo  $U_{ij}(\rho, \theta)$  é cancelada com o jacobiano  $\rho$  da transformação para as coordenadas polares. Dessa maneira, o núcleo  $\mathbf{U}(\rho, \theta)$  é de ordem  $O(1)$  em relação à variável  $\rho$  e, portanto, não apresenta mais singularidade. Efetuando o limite C.4, chega-se a uma integral regular que pode ser tratada numericamente com o uso de quadraturas.

$$\mathbf{I}_U = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{U}(\rho, \theta) d\rho d\theta \right\} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{U}(\rho, \theta) d\rho d\theta = \sum_{n=1}^{3 \text{ ou } 4} \int_{\theta_i^n}^{\theta_f^n} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{U}(\rho, \theta) d\rho d\theta\tag{C.5}$$

sendo a função  $\rho = \alpha(\varepsilon, \theta)$  nula no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . No presente trabalho procedesse a integração numérica em  $\rho, \theta$  utilizando a quadratura de Gauss em coordenadas polares descrita no Tópico B.3 do Anexo B, porém considerando o intervalo  $\theta = [0, 2\pi]$ . No intuito de melhorar a precisão da integral, divide-se o intervalo  $\theta = [0, 2\pi]$  em trechos  $\Delta\theta^n = [\theta_i^n, \theta_f^n]$  definidos pela divisão dos elementos em triângulos conforme ilustrado na Figura C.2.



**Figura C.2** - Intervalos de integração em  $\theta$  : (a) elementos triangulares (b) elementos quadrilaterais.

O procedimento permanece válido mesmo quando o ponto de colocação  $\mathbf{y}$  encontra-se sobre uma aresta do elemento sendo apenas necessário alterar o intervalo de integração em  $\theta$ .

**C.2 Método de Guiggiani: integração dos núcleos  $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  e  $D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$**

Visto que ambos os núcleos  $T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  e  $D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  apresentam uma singularidade da ordem  $O(1/r^2)$ , o mesmo método de regularização pode ser adotado. No caso, optou-se pelo Método de Guiggiani (Guiggiani *et. al.* 1990). Antes de introduzir a abordagem, apresentam-se primeiramente os limites que definem as integrais a serem calculadas sobre um elemento.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) N^\alpha(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \\ \eta_i(\mathbf{y}) \int_{\Gamma_e} D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta_i(\mathbf{y}) \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) N^\alpha(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Em termos numéricos as integrais C.6 se resumem a:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) N^\alpha(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \\ \mathbf{I}_D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta_i(\mathbf{y}) \cdot \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) N^\alpha(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \tag{C.7}$$

Reescrevendo as integrais  $\mathbf{I}_T$  e  $\mathbf{I}_D$  em coordenadas polares resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{T}(\rho, \theta) d\rho d\theta \right\} \\ \mathbf{I}_D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{D}(\rho, \theta) d\rho d\theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Em que  $\mathbf{T}(\rho, \theta) = T_{ij} N^\alpha J \rho$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta) = D_{kij} N^\alpha J \rho$ . Mesmo após a transformação de coordenadas, ambos os núcleos  $\mathbf{T}(\rho, \theta)$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta)$  apresentam singularidades de ordem  $O(1/\rho)$  e, portanto, o método de Guiggiani se faz necessário. O método é baseado na expansão dos núcleos  $\mathbf{T}(\rho, \theta)$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta)$  em série de Laurent por meio da qual é possível isolar o comportamento singular assintótico desses núcleos em relação à  $\rho$ .

$$\mathbf{T}(\rho, \theta) = \frac{\mathbf{T}_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1) \quad \text{e} \quad \mathbf{D}(\rho, \theta) = \frac{\mathbf{D}_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1) \quad (\text{C.9})$$

O comportamento assintótico de  $\mathbf{T}(\rho, \theta)$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta)$  quando  $\rho$  vai para zero pode ser representando considerando apenas o primeiro termo das expansões C.8 uma vez que, no limite  $\rho \rightarrow 0$ , os termos  $O(1)$  tendem a ser desprezíveis em comparação ao primeiro. Expressões analíticas para os termos  $\mathbf{T}_{-1}(\theta)$  e  $\mathbf{D}_{-1}(\theta)$  são desenvolvidas no Anexo D para seguindo os procedimentos apresentados em Guiggiani *et. al.* 1990. Devido à similaridade do comportamento assintótico do primeiro termo das expansões C.9 com o comportamento dos núcleos  $\mathbf{T}(\rho, \theta)$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta)$ , a técnica de subtração de singularidade pode ser aplicada para regularizar as integrais resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{T}(\rho, \theta) - \frac{\mathbf{T}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{\mathbf{T}_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \right\} \\ \mathbf{I}_D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{D}(\rho, \theta) - \frac{\mathbf{D}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{\mathbf{D}_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

As primeiras integrais  $d\rho d\theta$  dentro dos colchetes em cada uma das equações acima são agora regulares independentemente da avaliação limite. Já nas segundas integrais entre colchetes ainda existe a singularidade  $O(1/\rho)$  no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . No entanto, devido ao fato de

$T_{-1}(\theta)$  e  $D_{-1}(\theta)$  serem funções apenas de  $\theta$ , a integral singular em  $\rho$  pode ser avaliada analiticamente antes de efetuar o limite, resultando em:

$$\begin{aligned}
I_T &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ T(\rho, \theta) - \frac{T_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} T_{-1}(\theta) \left[ \ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\alpha(\varepsilon, \theta)| \right] d\theta \right\} \\
I_D &= \eta(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ D(\rho, \theta) - \frac{D_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} D_{-1}(\theta) \left[ \ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\alpha(\varepsilon, \theta)| \right] d\theta \right\}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Nas expressões C.11 o limite foi avaliado apenas para as integrais já regularizadas. Nos outros casos é necessário avaliar o comportamento assintótico de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$  em relação à  $\varepsilon$  a partir de uma expansão em série de Taylor em torno do ponto singular.

$$\alpha(\varepsilon, \theta) = \varepsilon\beta(\theta) + \varepsilon^2\gamma(\theta) + O(\varepsilon^3) \tag{C.12}$$

Assim como os termos  $T_{-1}(\theta)$  e  $D_{-1}(\theta)$ , as expressões analíticas para os termos  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$  também são apresentadas no Anexo D. Considerando o primeiro termo da expansão C.12 nos limites da equação C.11, os mesmos podem ser reescritos como:

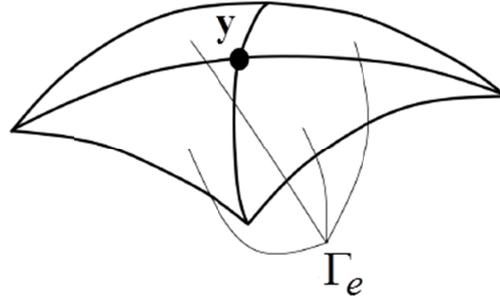
$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} T_{-1}(\theta) \left[ \ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\varepsilon\beta(\theta)| \right] d\theta \right\} = \\
&\int_0^{2\pi} T_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln |\varepsilon| \int_0^{2\pi} T_{-1}(\theta) d\theta \right\} \\
&= \int_0^{2\pi} T_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta \\
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} D_{-1}(\theta) \left[ \ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\varepsilon\beta(\theta)| \right] d\theta \right\} = \\
&\eta(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} D_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \ln |\varepsilon| \eta(\mathbf{y}) \int_0^{2\pi} D_{-1}(\theta) d\theta \right\} \\
&= \eta(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} D_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Na dedução de C.12, os limites finais se tornam nulos pois,  $\int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{-1}(\theta) d\theta = 0$  e  $\int_0^{2\pi} \mathbf{D}_{-1}(\theta) d\theta = 0$ , uma vez que  $\mathbf{T}_{-1}(\theta) = \mathbf{T}_{-1}(\theta + 2\pi)$  e  $\mathbf{D}_{-1}(\theta) = \mathbf{D}_{-1}(\theta + 2\pi)$  conforme pode ser observado nas expressões de  $\mathbf{T}_{-1}(\theta)$  e  $\mathbf{D}_{-1}(\theta)$  apresentadas no anexo D. As integrais simples em  $d\theta$  são agora regulares pois toda a singularidade em  $\rho \rightarrow 0$  foi tratada analiticamente em C.13. Portanto, as integrais  $\mathbf{I}_T$  e  $\mathbf{I}_D$ , antes singulares, resultam uma soma de integrais regulares, expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_T &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{T}(\rho, \theta) - \frac{\mathbf{T}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \mathbf{T}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta \\ \mathbf{I}_D &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{D}(\rho, \theta) - \frac{\mathbf{D}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \mathbf{D}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Todas as integrais envolvidas na avaliação de C.14 são regulares e podem ser calculadas numericamente através da quadratura de Gauss em coordenadas polares. No intuito de melhorar a eficiência da quadratura numérica, as integrações em  $\theta$  de 0 a  $2\pi$  são procedidas considerando novamente a divisão dos elementos em porções triangulares conforme ilustra a Figura C.2.

Deve-se destacar que a dedução C.13 é válida apenas para pontos fonte sobre contorno suaves, uma vez que a expansão em série de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$ , Eq. C.12, foi deduzida sob essa condição. Para o caso da integral  $\mathbf{I}_D$ , essa hipótese será sempre válida uma vez que a equação integral de forças de superfície é imposta por colocação sempre em pontos fonte  $\mathbf{y}$  internos aos elementos de Lagrange ou internos aos patches das Superfícies NURBS no caso isogeométrico. Por outro lado, a equação integral de deslocamentos pode ser imposta sobre pontos interelementos (Figura C.3) quando aplicada para uma porção do contorno externo que não apresente descontinuidades de forças de superfície.



**Figura C.3** – Ponto fonte sobre um nó geométrico interelementos.

Caso o ponto  $\mathbf{y}$  interelementos ainda pertença a um contorno suave, a expansão de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$  permanece válida e  $\mathbf{I}_T$  pode ser calculado de acordo com C.14. Caso contrário o valor  $\mathbf{I}_T$  calculado via C.14 é corrigido indiretamente impondo-se o termo livre obtido via movimento de corpo rígido, Eq. 2.61.

### C.3 Método de Guiggiani: integração do núcleo hipersingular $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

No caso das integrais envolvendo o núcleo  $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  é observada uma hipersingularidade,  $O(1/r^3)$ . Visando proceder a integração via técnica de subtração de singularidade, Guiggiani *et. al.* (1992) propôs a extensão das ideias apresentadas em Guiggiani *et. al.* (1990). O método se mostrou uma maneira geral para o tratamento de integrais hipersingulares e desde então tem sido amplamente utilizado no contexto do MEC. O tratamento da integral hipersingular sobre o contorno  $\Gamma_e$  que contém a singularidade envolve a avaliação da integral no sentido de Parte Finita de Hadamard.

$$\eta_i(\mathbf{y}) \oint_{\Gamma_e} S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta_i(\mathbf{y}) \left[ \int_{(\Gamma_e - \Gamma_\varepsilon)} S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma + u_k(\mathbf{y}) \frac{b_{kij}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right] \right\} \quad (\text{C.15})$$

No contexto numérico, a avaliação de C.15 se resume a uma integral no espaço paramétrico. Portanto, em termos computacionais interessa o resultado:

$$\mathbf{I}_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \eta_i(\mathbf{y}) \left[ \int_{(R_e - \sigma_\varepsilon)} S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\xi)) N^\alpha(\xi) J(\xi) d\xi + N^\alpha(\mathbf{Y}) \frac{b_{kij}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right] \right\} \quad (\text{C.16})$$

A expressão C.16 pode ser reescrita em coordenadas polares e, portanto, tem-se:

$$\mathbf{I}_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \mathbf{S}(\rho, \theta) d\rho d\theta + \mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \frac{\mathbf{b}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right] \right\} \quad (\text{C.17})$$

Em que  $\mathbf{S}(\rho, \theta) = S_{kij} N^\alpha J \rho$  apresenta uma hipersingularidade  $O(1/\rho^2)$ . Portanto, Guiggiani *et. al.* (1992) propõem que a expansão em série de Laurent do núcleo  $\mathbf{S}(\rho, \theta)$  deve ser do tipo:

$$\mathbf{S}(\rho, \theta) = \frac{\mathbf{S}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\mathbf{S}_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1) \quad (\text{C.18})$$

Dessa maneira o comportamento assintótico de  $\mathbf{S}(\rho, \theta)$  quando  $\rho$  vai para zero pode ser representado considerando os dois primeiros termos da expansão C.18. As expressões explícitas dos termos  $\mathbf{S}_{-2}(\theta)$  e  $\mathbf{S}_{-1}(\theta)$  foram deduzidas no Anexo D para o núcleo hipersingular elastoestático  $S_{kij}$  seguindo os procedimentos propostos por Guiggiani *et. al.* 1992. Visto que na expansão C.18 o comportamento assintótico de  $\mathbf{S}(\rho, \theta)$  é isolado na variável em  $\rho$ , a técnica de subtração de singularidade pode ser aplicada resultando em:

$$\mathbf{I}_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \begin{aligned} & \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{S}(\rho, \theta) - \left( \frac{\mathbf{S}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\mathbf{S}_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta \\ & + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{\mathbf{S}_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \\ & + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \left[ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{\mathbf{S}_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + \mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \frac{\mathbf{b}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right] \end{aligned} \right\} = \mathbf{I}_{S_0} + \mathbf{I}_{S_1} + \mathbf{I}_{S_2} \quad (\text{C.19})$$

Cada um dos termos  $\mathbf{I}_{S_0}$ ,  $\mathbf{I}_{S_1}$  e  $\mathbf{I}_{S_2}$  em C.19 é agora analisado separadamente. A integral  $\mathbf{I}_{S_0}$  é agora regular, visto que a subtração da hipersingularidade é garantida pelo comportamento assintótico da expansão C.18. Portanto a avaliação do limite é direta resultando em:

$$\mathbf{I}_{S_0} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{S}(\rho, \theta) - \left( \frac{\mathbf{S}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\mathbf{S}_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta \quad (\text{C.20})$$

Já no caso das integrais  $I_{\underline{S}_1}$  e  $I_{\underline{S}_2}$ , a avaliação do limite deve ser analisada mais cautelosamente. No caso de  $I_{\underline{S}_1}$  tem-se:

$$\begin{aligned}
I_{\underline{S}_1} &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{S_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) [\ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\alpha(\varepsilon, \theta)|] d\theta \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) \ln |\hat{\rho}(\theta)| d\theta - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) \ln |\varepsilon \beta(\theta)| d\theta \quad (\text{C.21}) \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln |\varepsilon| \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) d\theta \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta
\end{aligned}$$

Na dedução da Equação C.21, apenas o termo  $\varepsilon \beta(\theta)$  da expansão de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$ , apresentada na Equação C.12, é necessário para evitar que o limite divirja. Além disso, o limite final se torna nulo pois,  $\int_0^{2\pi} S_{-1}(\theta) d\theta = 0$ , dado que  $S_{-1}(\theta) = S_{-1}(\theta + 2\pi)$  conforme pode ser observado na expressão de  $S_{-1}(\theta)$  apresentada no anexo D. Portanto,  $I_{\underline{S}_1}$  pode ser calculada como uma integral regular unidimensional em  $\theta$ . Já no caso da integral  $I_{\underline{S}_2}$ , a avaliação do limite resulta:

$$\begin{aligned}
I_{\underline{S}_2} &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\varepsilon, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{S_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + N(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \frac{\mathbf{b}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right\} \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} S_{-2}(\theta) \left[ -\frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} + \frac{1}{\alpha(\varepsilon, \theta)} \right] d\theta + N(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \frac{\mathbf{b}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right\} \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{S_{-2}(\theta)}{\varepsilon \beta(\theta)} \left[ 1 - \varepsilon \frac{\gamma(\theta)}{\beta(\theta)} \right] d\theta + N(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \frac{\mathbf{b}(\mathbf{y})}{\varepsilon} \right\} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{S_{-2}(\theta)}{\hat{\rho}(\theta)} d\theta \quad (\text{C.22}) \\
&= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{S_{-2}(\theta)}{\beta(\theta)} d\theta + N(\boldsymbol{\gamma}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{y}) \right\} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} S_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] d\theta \\
&= -\boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} S_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] d\theta
\end{aligned}$$

Portanto  $I_{\mathcal{S}_2}$  também pode ser calculada como uma integral unidimensional regular em  $\theta$ . Devido à ordem mais elevada de singularidade, foi necessário considerar ambos os termos  $\varepsilon\beta(\theta)$  e  $\varepsilon^2\gamma(\theta)$  da expansão de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$  para o valor do limite não divergir. Na dedução da Eq. C.22, o termo divergente  $N(\mathbf{Y}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{y})/\varepsilon = N^\alpha(\mathbf{Y})b_{kij}(\mathbf{y})/\varepsilon$  oriundo da integração do contorno adicional  $\Gamma_{\varepsilon^+}$  (Ver Figura 2.1 no Capítulo 2) se cancela com o termo  $S_{-2}(\theta)/\varepsilon\beta(\theta)$  oriundo da integração no contorno não singular  $(\Gamma_\varepsilon - \Gamma_{\varepsilon^+})$ . Isso se deve ao fato do núcleo da integral ter sido obtido a partir da solução fundamental do problema conforme apontado por Guiggiani *et. al.* (1992).

A formula final para a integração do elemento de contorno que contém a hipersingularidade se resume a uma soma de uma integral dupla em  $\rho$  e  $\theta$  mais uma integral simples em  $\theta$ , ambas agora regulares:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_s = & \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \mathbf{S}(\rho, \theta) - \left( \frac{S_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{S_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \\
 & \boldsymbol{\eta}(\mathbf{y}) \cdot \int_0^{2\pi} \left[ S_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - S_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] \right] d\theta
 \end{aligned} \tag{C.23}$$



## Anexo D: Expansões envolvidas no Método de Guiggiani

### D.1 Expansões em série das variáveis

Antes de desenvolver os termos  $T_{\cdot i}(\theta)$ ,  $D_{\cdot i}(\theta)$ ,  $S_{\cdot 2}(\theta)$ ,  $S_{\cdot 1}(\theta)$  é necessário primeiramente obter expansões em série de Taylor em torno do ponto fonte  $\mathbf{Y} = \{\xi_1^0, \xi_2^0\}^T$  para as variáveis envolvidas nesses núcleos. No caso, é de interesse as expansões de  $x_i - y_i$ ,  $r^n$  e  $r_{\cdot i}$  no espaço parametrizado  $\rho, \theta$ . Para tanto, a partir da descrição geométrica das coordenadas  $x_i$  apresentadas no tópico 2.51 é possível apresentar a expansão de  $x_i - y_i$  como:

$$\begin{aligned}
 x_i - y_i = & \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} (\xi_1 - \xi_1^0) + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} (\xi_2 - \xi_2^0) \right] + \\
 & \left[ \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \frac{(\xi_1 - \xi_1^0)^2}{2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} (\xi_1 - \xi_1^0)(\xi_2 - \xi_2^0) + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \frac{(\xi_2 - \xi_2^0)^2}{2} \right] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

As derivadas  $\partial x_i / \partial \xi_j$  e  $\partial^2 x_i / \partial \xi_j \partial \xi_k$  podem ser calculadas a partir da Eq. 2.35. Em coordenadas polares, a expansão D.1 resulta.

$$x_i - y_i = \rho A_i(\theta) + \rho^2 B_i(\theta) + O(\rho^3) \tag{D.2}$$

Sendo

$$\begin{aligned}
 A_i(\theta) &= \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \cos(\theta) + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \sin(\theta) \right] \\
 B_i(\theta) &= \left[ \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \frac{\cos^2(\theta)}{2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\mathbf{Y}} \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

Com a expansão de  $x_i - y_i$  é possível obter então a expansão de  $r^n = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n = \sqrt{(x_i - y_i)^2}^n$ .

$$r^n = \rho^n A^n + n\rho^{n+1} \frac{A_k B_k}{A^{2-n}} + O(\rho^{n+2}) \quad (\text{D.4})$$

Sendo  $A = \|A_i\|$ ,  $A_k B_k$  o produto interno entre os vetores definidos em D.3 e  $n$  a potência a qual a distância  $r$  é elevada. Fazendo-se  $n = 1$  e considerando D.2 é possível obter a expansão para a derivada  $r_{,i}$ .

$$r_{,i} = \frac{x_i - y_i}{r} = \frac{A_i}{A} + \rho \left( \frac{B_i}{A} - A_i \frac{A_k B_k}{A^3} \right) + O(\rho^2) \quad (\text{D.5})$$

Além das expansões para  $r^n$  e  $r_{,i}$ , também se faz necessário as expansões das funções interpoladoras  $N^\alpha$ , das componentes  $J_k = \eta_k \|J\| = \eta_k J$  do vetor Jacobiano  $J$  e das componentes  $\eta_k$  do versor normal  $\boldsymbol{\eta}$ , uma vez que tais grandezas também compõem os núcleos das integrais a serem avaliadas. No caso, as expansões em série de Taylor resultam:

$$\begin{aligned} N^\alpha &= N_0^\alpha + \rho N_1^\alpha(\theta) + O(\rho^2) \\ J_k &= J_{k0} + \rho J_{k1}(\theta) + O(\rho^2) \\ \eta_k &= \frac{J_{k0}}{J} + \rho \frac{J_{k1}}{J}(\theta) + O(\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Sendo  $N_0^\alpha = N^\alpha(\boldsymbol{Y})$ ,  $J_{k0} = J_k(\boldsymbol{Y})$  constantes e  $N_1^\alpha(\theta)$ ,  $J_{k1}(\theta)$  funções de  $\theta$  expressas por:

$$\begin{aligned} N_1^\alpha &= \left. \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi_1} \right|_{\xi=r} \cos(\theta) + \left. \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi_2} \right|_{\xi=r} \sin(\theta) \\ J_{k1} &= \left. \frac{\partial J_k}{\partial \xi_1} \right|_{\xi=r} \cos(\theta) + \left. \frac{\partial J_k}{\partial \xi_2} \right|_{\xi=r} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

As derivadas  $\partial N^\alpha / \partial \xi_i$  podem ser obtidas diretamente derivando-se as funções interpoladoras. Já as derivadas  $\partial J_k / \partial \xi_i$  são obtidas derivando-se pela regra da cadeia as expressões 2.39. De posse das expansões D.4, D.5 e D.6 é possível determinar os termos  $U(\rho, \theta)$ ,  $T_{-1}(\theta)$ ,  $D_{-1}(\theta)$ ,  $S_{-1}(\theta)$ ,  $S_{-2}(\theta)$  envolvidos nas expansões dos núcleos fundamentais. Vale destacar que para a subtração de singularidade das integrais com singularidades de ordem  $O(1/r)$  e  $O(1/r^2)$  é necessário apenas o primeiro termo das

expansões supracitadas. Já no caso de hipersingularidades,  $O(1/r^3)$ , é necessário a consideração dos dois primeiros termos das expansões para proceder a regularização do núcleo singular (Guiggiani, 1992).

## D.2 Determinação das expressões $T_{.j}(\theta)$ , $D_{.j}(\theta)$

Para determinar os termos  $T_{.j}(\theta)$  e  $D_{.j}(\theta)$  das Equações 2.76 é necessário considerar apenas o primeiro termo das expansões de  $r^n$ ,  $r_i$ ,  $N^\alpha$  e  $\eta_k$ . Sendo assim, fazendo  $n = -2$  na expressão D.5 chega-se a:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho^2 A^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (\text{D.8})$$

Visto que o termo  $1/r^2$  aparece em ambas as soluções fundamentais  $T_{ij}$  e  $D_{kij}$  (Ver Equações 2.2 2.3), é possível reescrever as mesmas considerando D.5, D.6 e D.8.

$$T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -C2 \left[ \frac{1}{\rho^2 A^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_k}{A} \frac{J_{k0}}{J} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \right] \\ -(1-2\nu) \left( \frac{J_{j0}}{J} \frac{A_i}{A} - \frac{J_{i0}}{J} \frac{A_j}{A} \right) + O(\rho) \end{array} \right\} \quad (\text{D.9})$$

$$D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = C2 \left[ \frac{1}{\rho^2 A^2} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu) \left( \delta_{ik} \frac{A_j}{A} + \delta_{jk} \frac{A_i}{A} - \delta_{ij} \frac{A_k}{A} \right) \\ + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \frac{A_k}{A} + O(\rho) \end{array} \right\}$$

em que  $C2 = 1/8\pi(1-2\nu)$ . Com as soluções fundamentais D.9 agora é possível reescrever  $\mathbf{T}(\rho, \theta) = T_{ij} N^\alpha J \rho$  e  $\mathbf{D}(\rho, \theta) = D_{kij} N^\alpha J \rho$  como:

$$\mathbf{T}(\rho, \theta) = -C2 \left[ \frac{1}{\rho A^2} + O(1) \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_k}{A} \frac{J_{k0}}{J} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \right] \\ -(1-2\nu) \left( \frac{J_{j0}}{J} \frac{A_i}{A} - \frac{J_{i0}}{J} \frac{A_j}{A} \right) + O(\rho) \end{array} \right\} \left[ N_0^\alpha J_{k0} + O(\rho) \right] \quad (\text{D.10})$$

$$\mathbf{D}(\rho, \theta) = C2 \left[ \frac{1}{\rho A^2} + O(1) \right] \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu) \left( \delta_{ik} \frac{A_j}{A} + \delta_{jk} \frac{A_i}{A} - \delta_{ij} \frac{A_k}{A} \right) \\ + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \frac{A_k}{A} + O(\rho) \end{array} \right\} \left[ N_0^\alpha J_{k0} + O(\rho) \right]$$

em que em D.10 foram utilizadas as expansões D.6. Ao compararmos as expressões D.10 com as expansões 2.76 é possível obter as expressões para os termos  $T_{-1}(\theta)$  e  $D_{-1}(\theta)$ :

$$T_{-1}(\theta) = -C2 \left[ \frac{1}{A^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_k}{A} \frac{J_{k0}}{J} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \right] \\ -(1-2\nu) \left( \frac{J_{j0}}{J} \frac{A_i}{A} - \frac{J_{i0}}{J} \frac{A_j}{A} \right) \end{array} \right\} N_0^\alpha J_{k0} \quad (D.11)$$

$$D_{-1}(\theta) = C2 \left[ \frac{1}{A^2} \right] \left\{ (1-2\nu) \left( \delta_{ik} \frac{A_j}{A} + \delta_{jk} \frac{A_i}{A} - \delta_{ij} \frac{A_k}{A} \right) + 3 \frac{A_i}{A} \frac{A_j}{A} \frac{A_k}{A} \right\} N_0^\alpha J_{k0}$$

### D.3 Determinação das expressões $S_{-2}(\theta)$ , $S_{-1}(\theta)$

No caso dos termos  $S_{-2}(\theta)$  e  $S_{-1}(\theta)$  presente na expansão Eq. 2.85 é necessário considerar apenas o primeiro termo das expansões de  $r^n$ ,  $r_i$ ,  $N^\alpha$  e  $\eta_k$ . Sendo assim, fazendo  $n = -2$  na expressão D.5 chega-se a

$$S_{kij} N^\alpha J \rho = S(\rho, \theta) = \frac{S_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{S_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1) \quad (D.12)$$

A partir da expressão do núcleo  $S_{kij}$  apresentada na Eq. 2.19 e visto que  $\partial r / \partial \eta = r_i \eta_i$  e  $\eta_i J = J_i$ , chega-se à:

$$S_{kij} J \rho = C_3 \frac{1}{r^3} \rho \{ E(\rho, \theta) + F(\rho, \theta) + G(\rho, \theta) \} \quad (D.13)$$

em que  $C_3 = \mu / 4\pi(1-\nu)$  e

$$E(\rho, \theta) = 3r_i J_i \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right]$$

$$F(\rho, \theta) = 3\nu (J_i r_{,j} r_{,k} + J_j r_{,i} r_{,k}) \quad (D.14)$$

$$G(\rho, \theta) = (1-2\nu) (3J_k r_{,i} r_{,j} + J_j \delta_{ik} + J_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) J_k \delta_{ij}$$

Considerando  $n = 3$  na Equação D.4 é possível reescrever  $\frac{1}{r^3} \rho$  como:

$$\frac{1}{r^3} \rho = \left[ \frac{1}{\rho^3 A^3} - \frac{3A_k B_k}{\rho^2 A^5} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \rho \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{1}{r^3} \rho = \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1)$$

em que  $F_{-2}(\theta) = 1/A^3$  e  $F_{-1}(\theta) = -3A_k B_k / A^5$ . Por sua vez, considerando as expansões  $r_i$  e  $J_i$  apresentadas nas Equações D.5 e D.6 é possível reescrever os tensores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \theta) &= \rho \mathbf{E}_1(\theta) + O(\rho^2) \\ \mathbf{F}(\rho, \theta) &= \mathbf{F}_0(\theta) + \rho \mathbf{F}_1(\theta) + O(\rho^2) \\ \mathbf{G}(\rho, \theta) &= \mathbf{G}_0(\theta) + \rho \mathbf{G}_1(\theta) + O(\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

em que  $\mathbf{E}_1(\theta)$ ,  $\mathbf{F}_0(\theta)$ ,  $\mathbf{F}_1(\theta)$ ,  $\mathbf{G}_0(\theta)$  e  $\mathbf{G}_1(\theta)$  resultam:

$$\mathbf{E}_1(\theta) = 3(B_l J_{l0} + A_l J_{l1}) \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} \frac{A_k}{A^2} + \nu \delta_{ik} \frac{A_j}{A^2} + \nu \delta_{jk} \frac{A_i}{A^2} - 5 \frac{A_i A_j A_k}{A^4} \right] \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0(\theta) &= 3\nu \left( \frac{J_{i0} A_j A_k}{A^2} + \frac{J_{j0} A_i A_k}{A^2} \right) \\ \mathbf{F}_1(\theta) &= 3\nu \left\{ \begin{aligned} &J_{i0} \left[ \frac{A_k}{A} \left( \frac{B_j}{A} - A_j \frac{A_l B_l}{A^3} \right) + \frac{A_j}{A} \left( \frac{B_k}{A} - A_k \frac{A_l B_l}{A^3} \right) \right] + J_{i1} \frac{A_j A_k}{A^2} \\ &+ J_{j0} \left[ \frac{A_k}{A} \left( \frac{B_i}{A} - A_i \frac{A_l B_l}{A^3} \right) + \frac{A_i}{A} \left( \frac{B_k}{A} - A_k \frac{A_l B_l}{A^3} \right) \right] + J_{j1} \frac{A_i A_k}{A^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0(\theta) &= (1-2\nu) \left[ J_{j0} \delta_{ik} + J_{i0} \delta_{jk} + 3J_{k0} \frac{A_i A_j}{A^2} \right] - (1-4\nu) J_{k0} \delta_{ij} \\ \mathbf{G}_1(\theta) &= (1-2\nu) \left\{ \begin{aligned} &3J_{k0} \left[ \frac{A_j}{A} \left( \frac{B_i}{A} - A_i \frac{A_l B_l}{A^3} \right) + \frac{A_i}{A} \left( \frac{B_j}{A} - A_j \frac{A_l B_l}{A^3} \right) \right] \\ &+ 3J_{k1} \frac{A_i A_j}{A^2} + J_{i1} \delta_{jk} + J_{j1} \delta_{ik} \end{aligned} \right\} - (1-4\nu) J_{k1} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Portanto, o termo  $S_{kij} J \rho$  resulta:

$$\begin{aligned}
S_{kij}J\rho &= C_3 \left( \frac{F_{-2}}{\rho^2} + \frac{F_{-1}}{\rho} + O(1) \right) \left[ (F_0 + G_0) + (E_1 + F_1 + G_1)\rho + O(\rho^2) \right] \\
&= C_3 \left( \frac{F_{-2}}{\rho^2} + \frac{F_{-1}}{\rho} + O(1) \right) \left[ H_0 + H_1\rho + O(\rho^2) \right] \\
&= C_3 \left[ \frac{F_{-2}H_0}{\rho^2} + \frac{(F_{-2}H_1 + F_{-1}H_0)}{\rho} + O(1) \right]
\end{aligned} \tag{D.20}$$

sendo que  $H_0(\theta) = F_0(\theta) + G_0(\theta)$  e  $H_1(\theta) = E_1(\theta) + F_1(\theta) + G_1(\theta)$ . Considerando ainda a expansão das funções de interpolação  $N = N_0 + \rho N_1 + O(\rho^2)$ , Equação D.6, chega-se finalmente aos termos  $S_{-2}(\theta)$  e  $S_{-1}(\theta)$ .

$$\begin{aligned}
S_{kij}N^\alpha J\rho &= S(\rho, \theta) = \frac{S_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{S_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1) \\
&= C_3 \left[ \frac{F_{-2}H_0}{\rho^2} + \frac{(F_{-2}H_1 + F_{-1}H_0)}{\rho} + O(1) \right] \otimes (N_0 + \rho N_1 + O(\rho^2)) \\
&= C_3 \left\{ \frac{F_{-2}H_0 \otimes N_0}{\rho^2} + \frac{[(F_{-2}H_1 + F_{-1}H_0) \otimes N_0 + F_{-2}H_0 \otimes N_1]}{\rho} + O(1) \right\}
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
S_{-2}(\theta) &= C_3 F_{-2}(\theta) H_0(\theta) \otimes N_0 \\
S_{-1}(\theta) &= C_3 \left[ (F_{-2}(\theta) H_1(\theta) + F_{-1}(\theta) H_0(\theta)) \otimes N_0 + F_{-2}(\theta) H_0(\theta) \otimes N_1(\theta) \right]
\end{aligned} \tag{D.22}$$

#### D.4 Determinação das expressões $\beta(\theta)$ , $\gamma(\theta)$

Os termos  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$ , presentes na expansão em série de Taylor de  $\alpha(\varepsilon, \theta)$ , Equação C.12, devem ser obtidos considerando o formato circular do contorno  $\Gamma_\varepsilon$  retirado do contorno  $\Gamma_\varepsilon$  do elemento no processo limite para a avaliação da integral singular (Ver Figura 2.1). A região  $\Gamma_\varepsilon$  pode então ser definida por:

$$\Gamma_\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon \} \tag{D.23}$$

sendo  $\varepsilon$  o raio da região  $S_\varepsilon$ , ou seja,  $\varepsilon = r$ . Considerando ainda a expansão D.4 para  $r^n$ , tem-se que:

$$\varepsilon = r = \rho A + \rho^2 \frac{A_k B_k}{A} + O(\rho^3) \quad (\text{D.24})$$

Aplicando a reversão da série acima (Beyer, 1987, p. 297) é possível obter a expansão em potência  $\varepsilon$  da equação  $\alpha(\varepsilon, \theta)$ , a qual descreve o contorno de  $\sigma_\varepsilon$  (imagem de  $\Gamma_\varepsilon$  conforme ilustrado na Figura 2.9).

$$\rho = \alpha(\varepsilon, \theta) = \frac{\varepsilon}{A} - \varepsilon^2 \frac{A_k B_k}{A^4} + O(\varepsilon^3) \quad (\text{D.25})$$

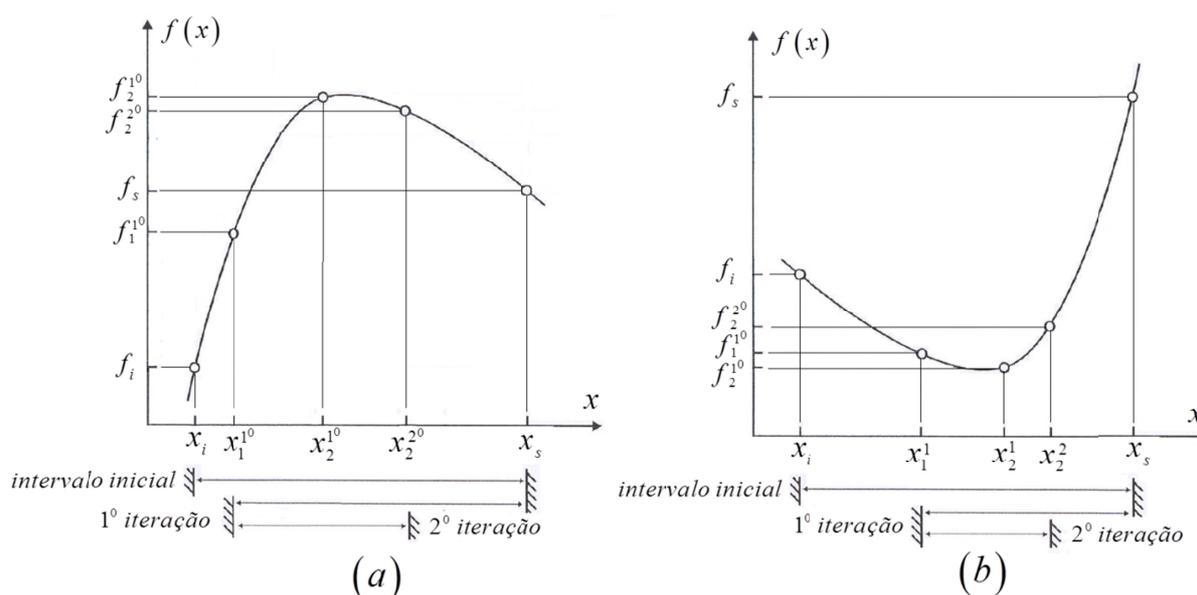
Comparando a expressão acima com a Equação 2.79 percebe-se que:

$$\beta(\theta) = \frac{1}{A(\theta)} \text{ e } \gamma(\theta) = -\frac{A_k B_k}{A^4} \quad (\text{D.26})$$



## Anexo E: Método *Golden Section*

O Método *Golden Section* é um método iterativo empregado na busca numérica de máximos e mínimos de funções objetivo univariadas. A ideia por trás deste método é simples e consiste basicamente em determinar o máximo ou mínimo de uma função objetivo univariada,  $f(x)$ , em intervalos (subdomínios compactos  $[x_i, x_s]$ ) subsequentemente menores. À medida que as iterações evoluem o intervalo de busca atualizado diminui até que o mesmo seja suficientemente pequeno em torno de um ponto de máximo ou de mínimo da função objetivo. A Figura E.1 ilustra o procedimento iterativo do Método *Golden Section*.



**Figura E.1** – Método iterativo *Golden Section*: (a) busca de máximo (b) busca de mínimo.

A definição do intervalo inicial  $[x_i, x_s]$  é de livre escolha. Note, no entanto, que o ponto de máximo ou de mínimo determinado pelo método sempre será o máximo ou o mínimo local contido no intervalo inicial. Conhecidos os limites inferior  $x_i$  e superior  $x_s$  do intervalo inicial determinam-se os valores da função objetivo nos limites do intervalo inicial, i.e.,  $f_i = f(x_i)$  e  $f_s = f(x_s)$ . O método propõe que sejam selecionados dois pontos intermediários  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $x_1 < x_2$  e avalia-se a função objetivo nesses dois pontos resultando em  $f_1 = f(x_1)$  e  $f_2 = f(x_2)$ . Em seguida, impõe-se que  $x_1$  ou  $x_2$  será um dos limites do novo intervalo da próxima iteração. Caso  $f_1 < f_2$  tem-se que  $x_1$  formará o novo limite inferior e o intervalo da iteração seguinte será  $[x_1, x_s]$ . Caso contrário, i.e.,  $f_1 > f_2$ ,

impõe-se que  $x_2$  será o limite superior e assim o novo intervalo será  $[x_i, x_2]$ . O procedimento iterativo prossegue até a iteração em que o respectivo intervalo seja suficientemente pequeno e, nesse caso, conduzirá a um intervalo que contenha o ponto de máximo da função objetivo. Pontos de mínimo podem ser obtidos invertendo-se as relações entre  $f_1$  e  $f_2$  na definição do intervalo da iteração subsequente, i.e.,  $[x_1, x_s]$  caso  $f_1 > f_2$  e  $[x_i, x_2]$  caso  $f_1 < f_2$ .

O método *Golden Section* propõe critérios para a obtenção de  $x_1$  e  $x_2$  de tal forma que o procedimento iterativo conduza à redução do intervalo de busca. Considerando uma taxa constante de redução do intervalo de busca a cada iteração. Para tanto, independentemente do fato de  $x_1$  ser o limite inferior do novo intervalo ou  $x_2$  o limite superior, esses valores são tomados simétricos em relação ao centro do intervalo:

$$x_1 - x_i = x_s - x_2 \quad (\text{E.1})$$

Além disso, os valores  $x_1$  e  $x_2$  são tomados de tal forma que obedecem a seguinte razão:

$$\frac{x_1 - x_i}{x_s - x_i} = \frac{x_2 - x_1}{x_s - x_1} \quad (\text{E.2})$$

Dessa forma, se  $x_1$  tornar-se o novo limite inferior  $x_i$ , então  $x_2$  se o tornará o novo  $x_1$  (e vice-versa) de tal maneira que a razão  $x_2 - x_1 / x_s - x_i$  seja sempre a mesma. Visando descobrir tal razão, pode-se impor, por exemplo,  $x_i = -\pi$  e  $x_s = \pi$  (Limites utilizados na determinação do ângulo de propagação  $\theta_p$ ) e então a relação entre os valores  $x_1$  e  $x_2$  pode ser obtida a partir da Eq. E.1 como:

$$x_1 = -x_2 \quad (\text{E.3})$$

Substituindo a Eq. E.3 na Eq. E.2 resulta:

$$x_1^2 - 4\pi x_1 - \pi^2 = 0 \quad (\text{E.4})$$

Resolvendo a Eq. E.4 são obtidas duas raízes reais:

$$x_1 = \frac{4\pi \pm 2\sqrt{5}\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 4,236068\pi \text{ e } x_1 = -0,236068\pi \quad (\text{E.5})$$

A primeira raiz pode ser ignorada uma vez que essa está fora do intervalo de busca  $[-\pi, \pi]$ . Portanto, considerando ainda a Eq. E.3 obtêm-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= -0,236068\pi \\x_2 &= 0,236068\pi\end{aligned}\tag{E.6}$$

Tomando-se a razão entre  $x_2 - x_i$  e  $x_1 - x_i$  para os valores obtidos chega-se a:

$$\frac{x_2 - x_i}{x_1 - x_i} = 1,61803\dots\tag{E.7}$$

A constante irracional obtida na Eq. E.7 é conhecida como razão áurea, ou número áureo, ou ainda do inglês, *Golden Section*. A razão áurea é observada muitas vezes na natureza como uma razão geométrica entre dimensões de objetos não produzidos pelo ser humano como, por exemplo, dimensões de algumas espécies de animais e vegetais. O nome do método *Golden Section* se deve ao fato de que independentemente do intervalo de busca inicial adotado,  $[x_i, x_f]$ , desde que as relações E.1 e E.2 sejam obedecidas, a razão E.7 sempre retorna o número áureo.

Definindo a Eq. E.2, i.e., razão de redução do intervalo de busca, como uma constante  $\tau$  obtêm-se:

$$\frac{x_1 - x_i}{x_s - x_i} = \tau = 0,381966\dots\tag{E.8}$$

A partir da constante  $\tau$  e dos limites inferior e superior,  $x_i$  e  $x_s$ , é possível calcular os valores de  $x_1$  e  $x_2$  a cada iteração como:

$$\begin{aligned}x_1 &= (1 - \tau)x_i + \tau x_s \\x_2 &= \tau x_i + (1 - \tau)x_s\end{aligned}\tag{E.9}$$

O processo iterativo se inicia considerando os limites inferior e superior iniciais,  $x_i^0$  e  $x_s^0$ , e prossegue até o intervalo de busca ser suficientemente pequeno de acordo com o critério de parada, i.e.,  $x_s - x_i \leq Tol$ , sendo *Tol* uma tolerância especificada. Ao final do processo, o intervalo de busca da última iteração, o qual pode ser tão pequeno quanto se queira, contém o ponto de máximo (ou de mínimo).



## Anexo F: Derivadas das funções base NURBS

---

Para a implementação da formulação MEC dual é necessário avaliar as derivadas parciais das funções base que descrevem a geometria de modo a obter o versor  $\boldsymbol{\eta}$  normal ao contorno presente nas soluções fundamentais. Além disso, também é necessário avaliar as derivadas parciais das funções base que interpolam os campos mecânicos para proceder a subtração de singularidade via o Método de Guiggiani. A seguir apresentam-se as derivadas ordinárias e parciais das funções base das NURBS univariadas e bivariadas, respectivamente, explicitando as expressões necessárias à implementação do MEC dual isogeométrico.

### F.1 Derivadas ordinárias das funções base univariadas de um B-Spline

Antes de apresentar as derivadas parciais das funções base bivariadas de uma NURBS primeiramente é importante apresentar as derivadas ordinárias das funções base univariadas das B-Splines. A primeira derivada de uma função base univariada de ordem  $p$  pode ser obtida de forma recursiva a partir de funções base de ordem inferior.

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (\text{F.1})$$

Generalizando F.1 para derivadas de ordem superior obtém-se:

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (\text{F.2})$$

Trabalhando com as expressões F.1 e F.2 é possível obter as derivadas de ordem superior a partir de funções base de ordem  $p - k$ .

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} N_{i+j,p-k}(\xi) \quad (\text{F.3})$$

sendo os coeficientes  $\gamma_{k,j}$  definidos recursivamente como.

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,0} &= 1 \\
\gamma_{k,0} &= \frac{\gamma_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\
\gamma_{k,j} &= \frac{\gamma_{k-1,j} - \gamma_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1 \\
\gamma_{k,k} &= \frac{-\gamma_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Conforme apresentado no t3pico C.3 do anexo C, para proceder a subtra33o de singularidade das integrais envolvendo o n3cleo hipersingular  $S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  3 necess3rio avaliar as derivadas parciais de segunda ordem das fun33es base bivariadas. Consecutivamente torna-se necess3rio avaliar a segunda derivada das fun33es base univariadas, a qual resulta, a partir de F.3 e F.4, em:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d^2\xi} N_{i,p}(\xi) &= \frac{p!}{(p-2)!} \left[ \frac{N_{i,p-2}(\xi)}{(\xi_{i+p} - \xi_i)(\xi_{i+p-1} - \xi_i)} - \right. \\
&\frac{N_{i+1,p-2}(\xi)}{(\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1})(\xi_{i+p} - \xi_{i+1})} - \frac{N_{i+1,p-2}(\xi)}{(\xi_{i+p} - \xi_i)(\xi_{i+p} - \xi_{i+1})} + \\
&\left. \frac{N_{i+2,p-2}(\xi)}{(\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1})(\xi_{i+p+1} - \xi_{i+2})} \right]
\end{aligned} \tag{F.5}$$

## F.2 Derivadas parciais das fun33es base bivariadas de uma NURBS

As derivadas parciais de primeira e segunda ordem das fun33es base bivariadas das NURBS podem ser obtidas em fun33o das derivadas parciais F.1 e F.5 das fun33es base univariadas das B-splines. Considerando a defini33o das fun33es base  $R_{ij}(\xi, \eta)$  conforme apresentada na Eq. 3.14 do cap3tulo 3, 3 poss3vel efetuar as derivadas parciais de primeira ordem resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{F_{\xi}(\xi, \eta)}{\left[ \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right]^2} \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{F_{\eta}(\xi, \eta)}{\left[ \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right]^2}$$

em que:

$$F_{\xi}(\xi, \eta) = \left[ \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) - \right. \\ \left. N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \frac{d}{d\xi} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) \right] \quad (\text{F.7})$$

$$F_{\eta}(\xi, \eta) = \left[ N_{i,p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) - \right. \\ \left. N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) \right]$$

Por sua vez, as derivadas parciais de segunda ordem podem ser calculadas a partir de F.6 e resultam:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} R_{ij}(\xi, \eta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\xi}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) - \right. \\ \left. 2F_{\xi}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \frac{d}{d\xi} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) \right] / \left[ \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right]^3 \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} R_{ij}(\xi, \eta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} F_{\eta}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) - \right. \\ \left. 2F_{\eta}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right) \right] / \left[ \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{ij}} \right]^3 \quad (\text{F.8})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} R_{ij}(\xi, \eta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} F_{\xi}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) - \right. \\ \left. 2F_{\xi}(\xi, \eta) \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) \right] \left/ \left[ \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right]^3 \right.$$

em que:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F_{\xi}(\xi, \eta) = \frac{d^2}{d\xi^2} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) - \\ N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \frac{d^2}{d\xi^2} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) \quad \text{(F.9)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} F_{\eta}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) \frac{d^2}{d\eta^2} M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) - \\ N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d^2}{d\eta^2} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} F_{\xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} [N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)] \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) + \\ \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) - \\ N_{i,p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \frac{d}{d\xi} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) - \\ N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{ij} \left( \sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \frac{d}{d\xi} N_{\hat{i},p}(\xi) \frac{d}{d\eta} M_{\hat{j},q}(\eta) \omega_{\hat{i}\hat{j}} \right) \quad \text{(F.10)}$$

Note que todas as derivadas parciais foram escritas em termos das derivadas ordinárias das funções univariadas, apresentadas nas Equações F.1 e F.5.