

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

CAROLINA QUINTERO RAMÍREZ

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE
MÚSCULOS ESQUELÉTICOS VIA MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

São Carlos

2018

CAROLINA QUINTERO RAMÍREZ

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE
MÚSCULOS ESQUELÉTICOS VIA MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**

VERSÃO CORRIGIDA

(Versão original disponível na Escola de Engenharia de São Carlos)

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Quintero-Ramírez, Carolina
Q173a Análise não linear geométrica de músculos
esqueléticos via método dos elementos finitos
posicional / Carolina Quintero-Ramírez ; orientador
Rodrigo Ribeiro Paccola, - São Carlos, 2018.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas - Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Método dos Elementos Finitos Posicional. 2.
Biomecânica. 3. Músculo esquelético. 4. Hipereelástico.
I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CAROLINA QUINTERO RAMIREZ**.

Título da tese: "Análise não-linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional".

Data da defesa: 04/10/2018

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Leandro Vanalli**
(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

*Este trabalho é dedicado
à minha mãe Manuela,
à minha irmã Susa
e ao meu amor Jesús.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e pela oportunidade dada.

À minha família pelo suporte, confiança e amor incondicional.

Ao amor da minha vida, Jesús, quem com sua paciência e carinho me acompanho neste caminho.

Aos meus amigos da Sala, do SET, da USP: Arthur, Pablito, Matheus, Tulio, Geovanne, Nanda; que seria das nossas vidas sem esses cafezinhos com boas conversas.

Os agradecimentos principais são direcionados ao professor Rodrigo R. Paccola pela orientação, guia, conhecimento, dedicação, paciência, amizade e experiências ministradas durante o desenvolvimento da pesquisa.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas, em especial ao professor Humberto B. Coda pelas sugestões e contribuições em diversas etapas do trabalho.

Aos funcionários: Masaki e Dorival Neto e ao pessoal da secretaria: Rosi, Dani, Silvia, Clayton pela atenção, amabilidade e suporte prestado.

Agradecimentos especiais são direcionados ao Departamento de Engenharia de Estruturas - SET da Escola de Engenharia de São Carlos, pela oportunidade para fazer o doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e da agência de fomento CNPq.

*“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,
mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser,
mas Graças a Deus, não sou o que era antes.”*
Marthin Luther King

RESUMO

RAMIREZ, C.Q. **ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE MÚSCULOS ESQUELÉTICOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**. 2018. 248p. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Departamento de Estruturas. São Carlos, 2018

A simulação computacional em biomecânica permite analisar o comportamento dos movimentos do corpo humano, diminuindo, e inclusive evitando ensaios experimentais invasivos. A locomoção humana resulta das forças desenvolvidas pelos músculos esqueléticos. Os mecanismos que produzem essas forças ainda são um tema de investigação aberto. O pouco entendimento desse fenômeno tem levado a subestimar propriedades importantes nos modelos mecânicos, as quais são essenciais para a simulação do comportamento do músculo. O objetivo desta tese foi desenvolver um código computacional que permita obter de maneira precisa e exata, a representação numérica do comportamento mecânico dos músculos esqueléticos. O código visa compilar diversas pesquisas numéricas de tal forma que a simulação possa considerar os fenômenos essenciais no comportamento mecânico do músculo e posteriormente avaliar sua influência na geração de força muscular. A formulação utilizada é baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), que é escrito em função das posições nodais. Os músculos esqueléticos foram discretizados por elementos planos e sólidos e uma análise não linear geométrica foi realizada. O programa considera fibras longas colocadas dentro de um domínio contínuo (passivo) sem adicionar graus de liberdade ao sistema). Um modelo transversalmente isotrópico, hiperelástico quase incompressível foi utilizado para simular o tecido muscular. A energia livre de Helmholtz foi usada para modelar o comportamento muscular ativo e passivo do músculo. Os resultados da pesquisa mostram que o código computacional é adequado para representar um modelo hiperelástico quase incompressível no modelo transversalmente isotrópico. Permitindo considerar o músculo esquelético em duas partes distintas: intramuscular (matriz) e extracelular (fibras) utilizando a energia livre de Helmholtz e com ativação uniaxial, tanto em modelos estáticos como dinâmicos não lineares. Os resultados numéricos demonstraram que o algoritmo implementado é adequado para realizar análises não lineares geométricas de músculos esqueléticos via MEF. A condição de incompressibilidade foi comprovada nos problemas com materiais hiperelásticos. Também, foi demonstrada a necessidade de realizar uma análise de convergência para as fibras. Finalmente, foi notada a complexidade na construção e na análise estrutural dos músculos esqueléticos, sendo necessário continuar desenvolvendo estratégias numéricas para maior aprofundamento.

Palavras-chaves: Biomecânica. músculo esquelético. Método dos Elementos Finitos Posicional. Hiperelástico

ABSTRACT

RAMIREZ, C.Q. **Geometrical nonlinear analysis of skeletal muscles via positional finite element method**. 2018. 248p. Doctoral (Ph.D.) Tese - University of São Paulo. School of Engineering of São Carlos. Department of Structural Engineering. São Carlos, 2018

Computational Modeling in Biomechanics allows analyzing of human body's movements, decreasing and some cases avoiding invasive experimental tests. The human locomotion is the result of forces developed by skeletal muscles. The mechanisms that produce this force are still an open research topic. The little knowledge of this phenomenon has led to underestimating important properties in mechanical models. The goal of this thesis was developed a computer code to obtain, in a precise and exact manner, the numerical representation of the mechanical behavior of skeletal muscles. The code aims to compile several numerical research, such that the simulation can consider the essential phenomena in mechanical behavior and then evaluate their influence in the muscle strength development. The used formulation is based on the Finite Element Method (FEM), which is written as a function of nodal positions. The skeletal muscles were discretized by plane and solid elements, and a geometrically nonlinear analysis was performed. The program considers long fibers placed inside a continuum domain (passive) without adding degrees of freedom to the system). A transversely isotropic model almost incompressible hyperelastic model was used to simulate the muscle tissue. The Helmholtz free energy was used to model the active and passive muscle behavior of muscle. The findings from the research indicate that the computer code is adequate to represent a transversely isotropic model almost incompressible hyperelastic model. The code allows skeletal muscle to be considered in two parts: intramuscular (matrix) and extracellular (fibers) using the Helmholtz free energy and with uniaxial activation, in nonlinear statical and dynamical models. The results support the model implemented for nonlinear geometrical analyzes of skeletal muscle using FEM. The almost incompressibility condition was tested in problems with hyperelastic materials. Also, numerical simulations confirm that a convergence analyzes for fibers is always required. Finally, it was noted the complexity in the construction and the structural analyzes of skeletal muscles, being necessary to continue developing numerical strategies for further deepening.

Key-words: Biomechanics. Musculoskeletal. Positional Finite Element Method. Hyperelastic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Músculos Esqueléticos	32
Figura 2 – Modelos de Elementos Finitos do Sistema músculo esquelético do ombro. (WEBB; BLEMKER; DELP, 2014)	35
Figura 3 – Malha composta de apenas elementos hexaédricos. Uma de cada cinco cordas longitudinais de elementos são excitáveis. Fonte (WHEATLEY, 2018)	35
Figura 4 – Micrografia eletrônica de uma fibra muscular. Fonte (RAWN, 1989)	36
Figura 5 – Organização estrutural do músculo esquelético	37
Figura 6 – Composição do músculo	38
Figura 7 – Representação esquemática de uma unidade motora e seus componentes, Adaptado de Komi, Wiley e Sons (2008)	39
Figura 8 – Músculos esqueléticos e alinhamento de fibras, modificada de Betts et al. (2018)	40
Figura 9 – Imagens movimento do tornozelo e a variação da seção transversal dos músculos da perna	42
Figura 10 – Imagens do músculo tibial anterior	43
Figura 11 – Imagens do músculo TA (cadáver humano). ¹	44
Figura 12 – Imagens do músculo tibial anterior	45
Figura 13 – Carga passiva e ativa do músculo TA humano (RAITERI; CRESSWELL; LICHTWARK, 2018)	45
Figura 14 – Trajetória das fibras do músculo TA (HEEMSKERK et al., 2009)	47
Figura 15 – Modelo de Hill. (HOFFMAN et al., 2012)	48
Figura 16 – Diagramas do Modelo de Huxley	49
Figura 17 – Propriedades Mecânicas	50
Figura 18 – Funções definidas por Johansson, Meier e Blickhan (2000)	52
Figura 19 – Relação força-deslocamento do tendão. Propriedades força-comprimento das fibras normalizadas (CHI et al., 2010)	54
Figura 20 – Músculo ativo. Relação Tensão-alongamento de Rahemi, Nigam e Wakeling (2014)	55
Figura 21 – Modelos bidimensionais simplificados	60
Figura 22 – Modelos bidimensionais	61
Figura 23 – Modelo plano do músculo Tibial Anterior (TA) do rato	61
Figura 24 – Modelos 3D de Rodriguez Lemos (2004)	62
Figura 25 – Modelos tridimensionais	63

Figura 26 – Aponeuroses do músculo TA: anterior (superior), distal (média) e posterior (inferior) (JODA, 2016)	64
Figura 27 – Distribuição das deformações volumétricas do músculo TA de Jensen et al. (2016)	64
Figura 28 – Volume relativo (Jacobiano) na simulação do comportamento passivo do músculo TA de Jensen et al. (2016)	65
Figura 29 – Modelo plano de um músculo esquelético de Baiocco, Coda e Paccola (2013a)	66
Figura 30 – Modelo plano de um músculo esquelético de Friedel (2016)	67
Figura 31 – Mapeamento	73
Figura 32 – Elemento de treliça plana (Fibra) nas configurações inicial e final.	80
Figura 33 – Arranjo de fibras: F_1 , F_2 , F_3 e F_4	85
Figura 34 – Figuras gerada pelo algoritmo - Wolfram Mathematica®	87
Figura 35 – Newton Raphson	94
Figura 36 – Viga Engastada	95
Figura 37 – Parâmetro de carregamento ($\frac{PL^2}{EI}$) vs Deflexão adimensional (w/L)	96
Figura 38 – Esquema da chapa tracionada	97
Figura 39 – Malhas de 4 ,8 e 200 elementos	97
Figura 40 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{11}	98
Figura 41 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{12}	98
Figura 42 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{11} modelos do Ansys®	100
Figura 43 – Chapa reforçada com fibras	101
Figura 44 – De esquerda á direita os modelos: M_1 , M_2 e M_3	102
Figura 45 – Matriz reforçada com 10 Fibras	103
Figura 46 – Chapa submetida a cisalhamento simples	104
Figura 47 – Malhas usadas no problema	105
Figura 48 – Deslocamento X (Presente trabalho)	106
Figura 49 – Deslocamento Y (Presente trabalho)	106
Figura 50 – Deslocamento X (Ansys® (ANSYS..., 2017))	107
Figura 51 – Localização do ponto A , para a análise de convergência Fonte: Elaborado pelo autor.	107
Figura 52 – Análise de Convergência - Deslocamento X	108
Figura 53 – Análise de Convergência - Deslocamento X (Ansys®)	109
Figura 54 – Condições de contorno e Malha da Chapa ($130x13x2\ mm$)	110
Figura 55 – Deslocamentos na direção X	110
Figura 56 – Resultados da simulação no programa: Tensão de Cauchy $Cauchy_{11}$	111
Figura 57 – Comparação entre a Simulação numérica, solução analítica da tração uniaxial com elemento finito de chapa e os resultados experimentais de Yeoh (1990)	112

Figura 58 – Condições de Contorno no Ansys® (ANSYS..., 2017)	113
Figura 59 – Tensão, σ_e vs Alongamento, λ	113
Figura 60 – Prisma sob tração uniaxial	114
Figura 61 – Malha de 1/8 do Prisma	115
Figura 62 – Força versus deslocamento longitudinal do ponto A para o Prisma . . .	116
Figura 63 – Tensão, σ_e versus λ do ponto A para o Prisma	117
Figura 64 – Posições inicial e final do prisma: Deslocamentos longitudinais	118
Figura 65 – Termo $\sigma_e/(\lambda^2 - \lambda^{-1})$ versus $(I_1 - 3)$	119
Figura 66 – Cubo reforçado com fibras	120
Figura 67 – Discretização das fibras	121
Figura 68 – De esquerda á direita: Deslocamento em X das Fibras, deslocamento em X e deformação de Green da matriz (E_{11})	122
Figura 69 – Modelo M_4 : $Desl_X - Fibras$, $Desl_X - Matriz$, E_{11}	123
Figura 70 – Geometria do músculo esquelético 2D	124
Figura 71 – Malha das fibras: $2F$, $4F$, $8F$, $16F$, $32F$, $64F$	125
Figura 72 – Mudanças de comprimento e largura do músculo	126
Figura 73 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha ALGOB	127
Figura 74 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha DNHQC	128
Figura 75 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha IMJPK	129
Figura 76 – Músculo temporal	130
Figura 77 – Tensão vs Alongamento □ Solução Numérica. – · – Solução Analítica	131
Figura 78 – Localização do músculo TA ²	133
Figura 79 – Condições de contorno reais do músculo TA	133
Figura 80 – Estrutura 'real' do Músculo TA e modelo 3D no progrma 3-Matic® (3-MATIC..., 2015), respectivamente	134
Figura 81 – Dimensões aproximadas do músculo em mm , visualização no 3 – <i>Matic</i> ®	134
Figura 82 – Geometria simplificada do Músculo TA (sem o tendão). Dimensões aproximadas em mm , visualização no 3 – <i>Matic</i> ®	135
Figura 83 – Seção transversal do músculo TA	135
Figura 84 – Fluxograma para a geração da malha da matriz	137
Figura 85 – Parâmetros para definir a malha do músculo TA no Ansys®	138
Figura 86 – Qualidade dos elementos, Ansys® (ANSYS..., 2017)	138
Figura 87 – Malha definitiva do músculo TA com 16848 elementos e 86239 nós . . .	139
Figura 88 – Fibras inseridas no músculo TA	140
Figura 89 – Malha definitiva das fibras musculares	140
Figura 90 – Condições de contorno do músculo TA, elementos restritos nas direções X , Y e Z	141
Figura 91 – Músculo TA - modelo 1, condição de quase incompressibilidade na matriz	142

Figura 92 – Modelo 1, deslocamentos (mm)	143
Figura 93 – Modelo 1, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #10	144
Figura 94 – Modelo 1, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #10	145
Figura 95 – Modelo 1, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #10	146
Figura 96 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	147
Figura 97 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{23} e S_{33} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	148
Figura 98 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	149
Figura 99 – Modelo 1, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	150
Figura 100 – Modelo 1, Tensões de Cauchy: C_{23} e C_{33} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	151
Figura 101 – Modelo 1, tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #10	152
Figura 102 – Modelo 1, deslocamentos finais das Fibras (mm)	153
Figura 103 – Modelo 1, tensões finais das Fibras (<i>MPa</i>)	154
Figura 104 – Músculo TA - modelo 2, valores do jacobiano na matriz para o passo de carregamento #100	155
Figura 105 – Modelo 2, deslocamentos da matriz (mm) para o passo de carregamento #100	155
Figura 106 – Modelo 2, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #100	156
Figura 107 – Modelo 2, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #100	157
Figura 108 – Modelo 2, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #100	158
Figura 109 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	159
Figura 110 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{23} e S_{33} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	160
Figura 111 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	161
Figura 112 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	162

Figura 113–Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{23} e C_{33} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	163
Figura 114–Modelo 2, tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #100	164
Figura 115–Modelo 2, deslocamentos finais das Fibras (mm) para o passo de carregamento #100	165
Figura 116–Modelo 2, tensões finais das Fibras (MPa) para o passo de carregamento #100	166
Figura 117–Músculo TA - modelo 2, valores do Jacobiano na matriz para o passo de carregamento #17	166
Figura 118–Modelo 2, deslocamentos (mm) para o passo de carregamento #17 . . .	167
Figura 119–Modelo 2, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #17	168
Figura 120–Modelo 2, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #17	169
Figura 121–Modelo 2, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #17	170
Figura 122–Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	171
Figura 123–Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{33} e S_{23} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	172
Figura 124–Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	173
Figura 125–Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	174
Figura 126–Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{33} e C_{23} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	175
Figura 127–Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} <i>MPa</i> para o passo de carregamento #17	176
Figura 128–Modelo 2, deslocamentos das Fibras (mm), passo de carregamento #17	177
Figura 129–Modelo 2, tensões das Fibras (MPa), passo de carregamento #17 . . .	177
Figura 130–Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{11} , S_{22} e S_{33} , seção transversal P_{i_1}	179
Figura 131–Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{12} e S_{13} , seção transversal P_{i_1}	180
Figura 132–Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{23} , seções transversais: P_{i_1} , P_{i_2} , P_{i_3} e P_{i_6}	180
Figura 133–Modelo 1, deformações de Green E_{11} , E_{22} e E_{33} , seção transversal P_{i_1}	181
Figura 134–Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff E_{12} , E_{13} e E_{23} , seção transversal P_{i_1}	182
Figura 135–Identificação dos elementos de barra nas fibras	183
Figura 136–Estrutura geral	201

Figura 137–Estrutura geral do Programa desenvolvido organizado por módulos . . .	203
Figura 138–Estrutura Principal do código	204
Figura 139–Formato do arquivo de entrada, Matriz	205
Figura 140–Formato do arquivo de entrada, Fibras	206
Figura 141–Fluxograma de estratégias de modelagem	207
Figura 142–Erro apresentado na malha	208
Figura 143–Ferramentas do 3-matic® Research disponíveis na versão 10.0.0.212 . . .	209
Figura 144–Vistas da geometria do músculo TA importado	210
Figura 145–Lista de superfícies	211
Figura 146–Suavização das superfícies, parte crítica: no final do tendão	212
Figura 147–Propriedades do músculo TA	214
Figura 148–Lista das medidas de forma	215
Figura 149–Medida de forma: Altura/Base (A). Malha com boa qualidade	216
Figura 150–Medida de forma: Angle Ratio (N)	216
Figura 151–Medida de forma: Angle Ratio (N). Identificação do triângulo com baixa qualidade	217
Figura 152–Medida de forma: Angle Ratio (N). Elementos excluídos	217
Figura 153–Medida de forma: Angle Ratio (N). Criação do triângulo	218
Figura 154–Medida de forma: Angle Ratio (N). Elementos corrigidos	218
Figura 155–Medida de forma: Angle Ratio (N). Malha com boa qualidade.	219
Figura 156–Medida de forma: Smallest angle (A). Identificação dos elementos. . . .	219
Figura 157–Medida de forma: Smallest angle (A). Exemplo de elementos com baixa qualidade	220
Figura 158–Medida de forma: Smallest angle (A). Malha com boa qualidade	220
Figura 159–Medida de forma: Skewness (N). Identificação dos elementos.	221
Figura 160–Medida de forma: Skewness (N). Malha com boa qualidade.	221
Figura 161–Lista das medidas de inspeção	222
Figura 162–Medida de inspeção: Bad Edge (N)	222
Figura 163–Medida de inspeção: Surface smoothness (N)	222
Figura 164–Medida de inspeção: Non-manifold edge (N)	223
Figura 165–Medida de inspeção: Peak (N)	223
Figura 166–Medida de inspeção: Shaft (N)	223
Figura 167–Lista das medidas de crescimento	224
Figura 168–Malha superficial	225
Figura 169–Procedimento Geração de Fibras, aponeurose de referencia	228
Figura 170–Elemento Tetraedro	235
Figura 171–Carregamento distribuído Fonte: Elaborado pelo autor	241
Figura 172–Elemento triangular de 10 nós com os pontos de integração (Hammer)	244

Figura 173–Plano $\tau_s(\xi_1, \xi_2)$	244
Figura 174–Elemento Tetraédrico de 20 nós e 31 pontos de integração (Gauss)	247

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Área Fisiológica da Seção transversal (PCSA) do Músculo Tibial Anterior (TA)	46
Tabela 2 – Propriedades PA e FL do Músculo TA	46
Tabela 3 – Principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos	57
Tabela 4 – Erro relativo no cálculo das Tensões de Piola-Kirchhoff. M_1 e M_2	99
Tabela 5 – Tensão de Piola-Kirchhoff S_{11} : Resultados das metodologias M_1 e M_2 Malha # 3 e do código e do Ansys®	99
Tabela 6 – Resultados para o nó da extremidade da Chapa	108
Tabela 7 – Fibras Área	124
Tabela 8 – Propriedades arquitetônicas do músculo TA	136
Tabela 9 – Contrações e deformações em algumas fibras do Modelo 1	184
Tabela 10 – Contrações e deformações em algumas fibras do Modelo 2	184
Tabela 11 – Identificação do número de triângulos com baixa qualidade	224

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Revisão bibliográfica	31
1.2	Sistema Músculo - Esquelético	36
1.2.1	Propriedades arquitetônicas	39
1.2.2	Modelos Mecânicos clássicos de músculos esqueléticos	48
1.2.3	Relações constitutivas na modelagem de Músculos	56
1.2.4	O músculo como um material compósito: Matriz-fibras	58
1.2.5	Limitações na modelagem	59
1.3	Método dos Elementos Finitos na Biomecânica	59
1.4	Objetivos	68
1.5	Justificativas	68
1.6	Metodologia	69
2	FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	71
2.1	Formulação do MEF para elementos Sólidos 2D e 3D	72
2.1.1	Função mudança de configuração	72
2.1.2	Energia específica de deformação	75
2.1.3	Princípio da Mínima Energia Potencial Total	76
2.1.4	Equilíbrio	77
2.2	Reforço numa posição qualquer do domínio	80
2.2.1	Energia específica de deformação em uma barra de treliça	80
2.2.2	Inserção das fibras na Matriz	83
2.2.3	Ativação interna das fibras	88
2.3	Formulação Materiais Hiperelásticos	90
2.4	Solução: Método de Newton Raphson	93
3	EXEMPLOS NUMÉRICOS E APLICAÇÕES	95
3.1	Validação do código computacional 2D	95
3.1.1	Exemplo 1: Viga engastada com grandes deslocamentos e rotações	95
3.1.2	Exemplo 2: Chapa tracionada	97
3.1.3	Exemplo 3: Chapa com fibras	101
3.1.4	Exemplo 4: Chapa sob cisalhamento simples	104
3.1.5	Exemplo 5: Chapa sob Tração Uniaxial	110
3.2	Validação do código computacional 3D	114

3.2.1	Exemplo 1: Prisma sob tração uniaxial	114
3.2.2	Exemplo 2: Cubo com fibras	120
3.3	Aplicações Biomecânicas com elementos bidimensionais	124
3.3.1	Exemplo 1: Influencia da distribuição das fibras no comportamento mecânico dos músculos esqueléticos	124
3.3.2	Exemplo 2: Músculo Temporal	130
3.4	Aplicação Biomecânica com elementos Tridimensionais: Músculo Tibial Anterior (TA)	132
4	CONCLUSÕES	187
Conclusões		187
REFERÊNCIAS		191
APÊNDICE A – PROGRAMAS DESENVOLVIDOS E ESTRATEGIA DE MODELAGEM		201
A.1	Programas desenvolvidos	202
A.2	Estrategia de modelagem	207
APÊNDICE B – TUTORIAL: MATERIALISE 3-MATIC® RESEARCH 10.0.0.212		209
B.1	Procedimento Geral	209
B.2	Exemplo: Geometria de um músculo tibial anterior TA	210
B.2.1	Importar um arquivo de extensão OBJ	210
B.2.2	Suavizar, reconstruir superfícies e malha base	211
B.2.3	Refazer a malha	213
B.2.3.1	Qualidade de malha superficial: triângulos	215
B.2.3.2	Qualidade de malha de volume: tetraedros	224
APÊNDICE C – GERAÇÃO DE FIBRAS 3D: MÚSCULO TIBIAL ANTERIOR		227
ANEXOS		229
ANEXO A – ELEMENTOS DE ÁLGEBRA TENSORIAL		231
ANEXO B – DERIVADAS ASSOCIADAS AO MODELO HIPERELASTICO		233
B.1	Jacobiano	233
B.2	Cauchy	233

B.3	Invariantes	234
	ANEXO C – CÁLCULOS RELACIONADOS AOS ELEMENTOS: CHAPA-TRIANGULAR E SÓLIDO-TETRAEDRO . .	235
C.1	Funções de forma	235
C.2	Vetores de cargas nodais equivalentes	240
C.3	Pós-processamento: Cálculo de deformações e tensões	243
C.3.1	Extrapolação e suavização: matriz de transformação.	243
C.3.1.1	Suavização local	243
C.3.1.2	Suavização global	247
C.3.2	Cálculo direto nos nós do elemento	247

1 INTRODUÇÃO

A biomecânica é o estudo do movimento dos seres vivos utilizando a ciência da mecânica (HATZE, 1974). Esta fornece ferramentas matemáticas e conceituais indispensáveis para a compreensão dos movimentos dos seres vivos (KNUDSON, 2003). Um dos objetivos da Biomecânica é contribuir na melhora das condições físicas e de saúde do ser humano. Segundo Knudson (2003) as aplicações da biomecânica para o movimento humano podem ser divididas em duas áreas: a primeira, *melhoria do desempenho* e a segunda, *prevenção e reabilitação de lesões*. Assim, simular corretamente o comportamento do sistema músculo esquelético tem um impacto direto na sociedade, por exemplo, auxilia na identificação das causas das lesões, permite a criação ou melhoramento de dispositivos cada vez mais eficientes para: recuperação motora, alívio de dores musculares ou tratamento de lesões; melhora o desempenho dos esportistas e por consequência, gera maior qualidade de vida aos pacientes.

Os músculos são responsáveis pelos movimentos no corpo humano. Os músculos estriados esqueléticos constituem a maior parte da musculatura do corpo dos vertebrados e apresentam contração voluntária. Atualmente, este tópico é de alto interesse nas pesquisas acadêmicas, o qual se vê refletido no alto número de publicações na área nos últimos anos. Em virtude da necessidade de conhecer o comportamento biomecânico, a utilização de ferramentas de análise estrutural é essencial. Além disso, considerando que os processos cirúrgicos são muito invasivos e em alguns casos pouco conclusivos, as simulações numéricas surgem como uma alternativa viável e promissora. Consequentemente, diferentes modelos têm buscado reproduzir, o mais fielmente possível, o desempenho e comportamento muscular. Os ensaios experimentais têm contribuído no conhecimento das propriedades dos músculos, inclusive na calibração dos modelos numéricos. Os trabalhos que utilizam modelos numéricos têm analisado diferentes tópicos, entre os principais encontram-se: a formulação bidimensional ou tridimensional, a procedência da geometria (Idealizadas, IRM, Ultra som), o tipo de músculo a se considerar (humano, animal), os modelos constitutivos utilizados (hiperelásticos e viscoelásticos); e inclusive, a consideração do músculo como um material composto por fibras.

As pesquisas desenvolvidas até agora com relação as ações musculares têm abordado, por exemplo: as contrações concêntrica, excêntrica e isométrica; discutindo os fatores que influenciam no desenvolvimento de força pelo músculo e o vínculo com as seguintes propriedades ou relações: força - velocidade, força - comprimento e força - ativação.

Nos modelos de músculos esqueléticos as fibras estão ligadas á matriz extracelular, segundo Yucesoy et al. (2002) nos músculos esqueléticos essa consideração foi incorporada

nos modelos recentemente. Assim, no intuito de proporcionar comportamento mais real no modelo numérico é necessário se introduzir na simulação numérica o efeito das fibras. A maioria dos modelos que contemplam as fibras numa matriz, consideram que estas estão associadas diretamente com a malha do músculo, ou seja, que é necessária a coincidência exata dos nós das fibras com os nós da matriz. Vanalli (2004), Vanalli, Paccola e Coda (2008) apresentaram uma estratégia simples para inserir fibras em um elemento de chapa, e Baiocco, Coda e Paccola (2013a) usaram-a para modelar os músculos esqueléticos associados com ossos. A abordagem utilizada pelos autores permite introduzir fibras musculares ativas no interior de um tecido sem aumentar o número de graus de liberdade do contínuo (matriz do músculo). Portanto, essa metodologia proporciona um modelo mais realista, se comparada com outras formas de consideração das fibras nos modelos numéricos, como por exemplo, o uso de um modelo homogeneizado. Contudo, um modelo de um músculo tratado de forma tridimensional, quase isocórico e com fibras imersas desacopladas não foi encontrado na literatura. O desenvolvimento e a implementação computacional de um modelo que contemple suas características, com o intuito de colaborar com os desenvolvimentos da biomecânica, é o principal objetivo desse trabalho.

1.1 Revisão bibliográfica

Esta seção apresenta alguns objetivos abordados na análise estrutural pelo Método dos Elementos Finitos - MEF e outros modelos, uma breve revisão das cargas biomecânicas, faz-se uma revisão sobre o sistema músculo - esquelético, reúne algumas limitações encontradas nos modelos com relação ao comportamento do músculo e finalmente exhibe as contribuições do MEF posicional na Biomecânica.

Introdução

Análise estrutural: Método dos Elementos Finitos

A análise estrutural tem como objetivo determinar deslocamentos, deformações e tensões ao longo da estrutura. Para realizar a análise estrutural é preciso conhecer: a geometria de todos os componentes da estrutura, as propriedades dos materiais e as solicitações impostas (forças, deslocamentos).

Com relação à modelagem do sistema músculo esquelético, encontram-se estudos numéricos tridimensionais cujos objetivos são: incorporar deformações iniciais do tecido (GRASA et al., 2011), verificar o efeito da rigidez do tendão sobre a força gerada no tendão de Aquiles (YAMAMURA et al., 2014), modelagem considerando uma abordagem nos domínios com ligação elástica (TANG; ZHANG; TSUI, 2009), considerar a fadiga muscular na modelagem (TANG et al., 2007), analisar a tensão no tecido do tendão humano a partir da correlação de imagens digitais (LUYCKX et al., 2014), revelar as causas de deformações não uniformes no bíceps braquial (BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005), caracterizar a influência das propriedades geométricas e materiais na ruptura do tendão de aquiles (SHIM et al., 2014), entre outros. Destaca-se também o desenvolvimento de um modelo de músculo esquelético visco-hiperelástico realizado por Lu et al. (2010), no qual a relação constitutiva baseia-se na definição de uma função de energia livre de Helmholtz; a qual pode ser decomposta em partes volumétrica e isocórica e dissociada em partes hiperelástica e viscosa.

No caso da geometria de músculos esqueléticos, estas são obtidas a partir de: Imagens de Ressonância Magnética (IRM) (GRASA et al., 2011; YAMAMURA et al., 2014; BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005), cadáveres, idealizadas e através de ultra som; sendo que as geometrias construídas a partir das IRM proporcionam uma aproximação mais fiel e as idealizadas fornecem bons resultados.

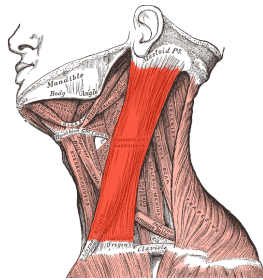
As geometrias encontradas na bibliografia estão associadas aos seguintes músculos ou tendões:

1. Músculo eternocleidomastoideo (GRAS et al., 2012), ver Figura 1a.
2. Gastrocnêmio medial humano (HOFFMAN et al., 2012; ZÖLLNER et al., 2015), ver

Figura 1b.

3. Bíceps branquial (BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005), ver Figura 1c.
4. Gastrocnemius-Sapo (TANG et al., 2007; TANG; ZHANG; TSUI, 2009) ver Figura 1d.
5. Tibial anterior: de um rato (CALVO et al., 2009; OOMENS et al., 2003) ver Figura 1d e coelhos (SHARIFIMAJD; LHAND, 2013; JENKYN et al., 2002; LU et al., 2010).
6. Tríceps humano (YAMAMURA et al., 2014).
7. Branquial (GENNISSON et al., 2010)
8. Tendão de aquiles (LUYCKX et al., 2014; SHIM et al., 2014; YAMAMURA et al., 2014; CIARLETTA; PAOLO; SILVESTRO, 2008).

(a) M. Esternocleidomastoideo



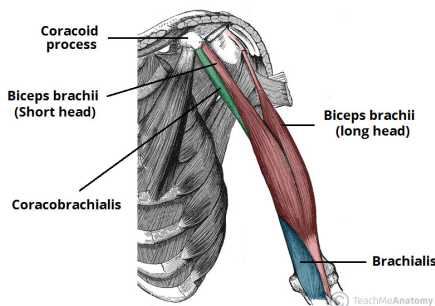
Fonte: Wikimedia... (2007)

(b) M. Gastrocnemius Humano



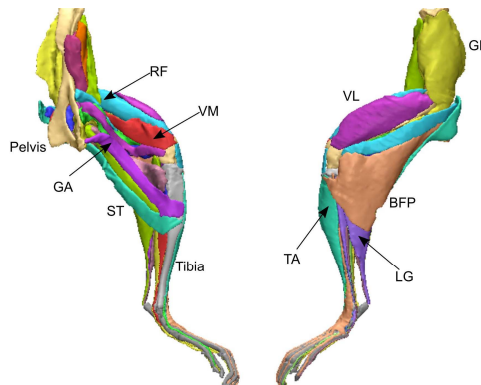
Fonte: Kenhub (2018)

(c) M. Biceps humano



Fonte: TeachMeAnatomy (2017)

(d) Membro posterior do rato



Fonte: Charles et al. (2016)

Figura 1 – Músculos Esqueléticos

As propriedades dos materiais que têm sido usados são: materiais transversalmente isotrópicos (TERAN et al., 2003; LU et al., 2010; GRASA et al., 2011; YAMAMURA et al., 2014; Van Loocke; LYONS; SIMMS, 2008; CHI et al., 2010; SHIM et al., 2014), onde Teran et al. (2003), Grasa et al. (2011), Chi et al. (2010) consideraram o material hiperelástico e Shim et al. (2014), Teran et al. (2003) adicionalmente consideraram a condição de incompressibilidade (ou quase-incompressibilidade). Materiais hiperelásticos cujos modelos constitutivos foram: Modelo de Ogden's (GRAS et al., 2012; CALVO et

al., 2009), Modelo Zahalak (ZHANG; GAO, 2012), Modelo de Mooney-Rivlin (ZHANG; GAO, 2012; TERAN et al., 2003; YAMAMURA et al., 2014). Modelo de Hill (ativação do músculo) (YAMAMURA et al., 2014; TANG et al., 2007; TANG; ZHANG; TSUI, 2009; HOFFMAN et al., 2012; LU et al., 2010) e o Modelo de Huxley (OOMENS et al., 2003). Grasa et al. (2011), Lu et al. (2010) desenvolveram um modelo com uma relação constitutiva baseada na definição de uma função de energia livre de Helmholtz para materiais visco-hiperelásticos.

Análise estrutural: Ensaios experimentais, MEF e outros métodos

Sobre os estudos experimentais, entre os objetivos buscados estão: caracterizar o comportamento elástico passivo do músculo e tendão em ratos (CALVO et al., 2009) e avaliar o uso das imagens digitais em combinação com modelagem pelo Método dos Elementos Finitos para determinar as propriedades dos materiais do tecido mole humano. Moerman et al. (2009) desenvolveram um modelo de músculo esquelético visco-hiperelástico com uma relação constitutiva baseada na definição de uma função de energia livre de Helmholtz. (GRASA et al., 2011, p. 779) (ANNAIDH et al., 2012). Calvo et al. (2009) formularam um modelo para o material e seus parâmetros ajustaram-se aos dados experimentais utilizando o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt; este trabalho fornece um modelo de material para um comportamento elástico passivo de ambos os tecidos de músculos e tendões. Consideraram-se as propriedades mecânicas do músculo e tendão obtidas a partir de ensaios de tração uniaxial e os dados experimentais foram utilizados para ajustar um modelo constitutivo hiperelástico não-linear para cada tecido.

Moerman et al. (2009) usaram a correlação digital de imagem (Siglas em inglês: DIC) e utilizaram o MEF como uma forma de determinar as propriedades mecânicas do tecido mole humano in vivo. Experimentos foram realizados em um simulador de tecidos moles de gel de silicone. Os parâmetros do material foram determinados minimizando o erro entre os ensaios experimentais e o modelo numérico, para isto utilizaram uma configuração da DIC para fazer a gravação. O material foi modelado como hiperelástico Neo-hookean.

Lu et al. (2010) desenvolveram um modelo de músculo esquelético visco hiperelástico, o qual envolve 14 parâmetros do material e seu desempenho foi avaliado com os estudos experimentais do músculo tibial anterior de um coelho. Os resultados mostram que este modelo é capaz de descrever o comportamento visco hiperelástico de ambos os tecidos musculares esqueléticos passivos e ativos sob altas taxas de deformação (10 / s e 25 / s)” (LU et al., 2010).

Sharafi e Blemker (2011) desenvolveram um modelo matemático e numérico de fibras; esses modelos suportam a hipótese de que a transmissão da força lateral das fibras de terminação através do cisalhamento do endomísio é um modo efetivo de transmissão de força.

Grasa et al. (2011) desenvolveram um modelo numérico 3D ativo-passivo de um músculo esquelético incorporando cepas de tecido iniciais, realizando a validação com resultados experimentais sobre o músculo tibial anterior de um rato. A relação constitutiva foi determinada por meio de uma função de energia livre convexa de deformação (SEF-síglas em inglês), onde as contribuições de resposta ativa e passiva foram obtidas a partir de dados experimentais de montagem do músculo tibial anterior de ratos (TA). A resposta passiva e ativa foi modelada no âmbito da mecânica do contínuo por uma formulação de material transversalmente isotrópico quase incompressível. IRM foram obtidas para reconstruir a geometria externa do TA. Os resultados numéricos mostram excelente concordância com os resultados experimentais, quando se comparam as curvas de reação da força-extensão, tanto em testes passivos quanto ativos. O modelo constitutivo proposto para o músculo foi implementado em uma sub-rotina do pacote de software comercial de elementos finitos ABAQUS®.

Bol, Weikert e Weichert (2011) desenvolveram e implementaram um modelo músculo esquelético eletromecânico para o bíceps. Para esse fim foi acoplado um modelo com uma lei constitutiva hiperelástica com características transversais isotrópicas. Em contraste com a forma tradicional de modelagem muscular ativo-passivo, este modelo está baseado em uma decomposição não aditiva dos componentes ativos e passivos. O desempenho do modelo proposto é demonstrado pela utilização de problemas 3D de valor limite que incluem análise eletromecânica em tiras de tecido. Além disso, simulações do músculo bíceps braquial consideraram geometrias musculares realistas.

Yamamura et al. (2014) desenvolveram o software V-Biomech para simular o comportamento de tecidos passivos e a ativação muscular; utiliza Elementos finitos tridimensionais (elementos hexaédricos de 8 nós) e materiais hiperelásticos quase incompressíveis; os autores consideram que o tecido mole tem comportamento anisotrópico devido à distribuição das fibras e não linearidade. Caso de estudo: simulação do músculo humano tríceps durante a contração isométrica ¹.

Webb, Blemker e Delp (2014) desenvolveram modelos tridimensionais de elementos finitos para os músculos do ombro com a finalidade de examinar a função muscular, ver Figura 2a. Ressalta-se a metodologia para definir as trajetórias das fibras dentro de cada músculo, ver Figura 2b; onde as malhas das fibras precisam ter correspondência com a malha muscular (matriz). Com relação ao arranjo das fibras, os modelos 3D descritos são representações realistas (WEBB; BLEMKER; DELP, 2014), o que permitiu a obtenção dos ângulos de rotação das fibras de cada músculo quando o braço é levantado (ação muscular).

Wheatley (2018) apresentam um modelo numérico para o músculo Tibial Anterior, considerando 80% do músculo como um líquido incapaz de gerar força contrátil (passivo)

¹ Isométrica ou sem movimento, também chamada de contração estática ou de sustentação.

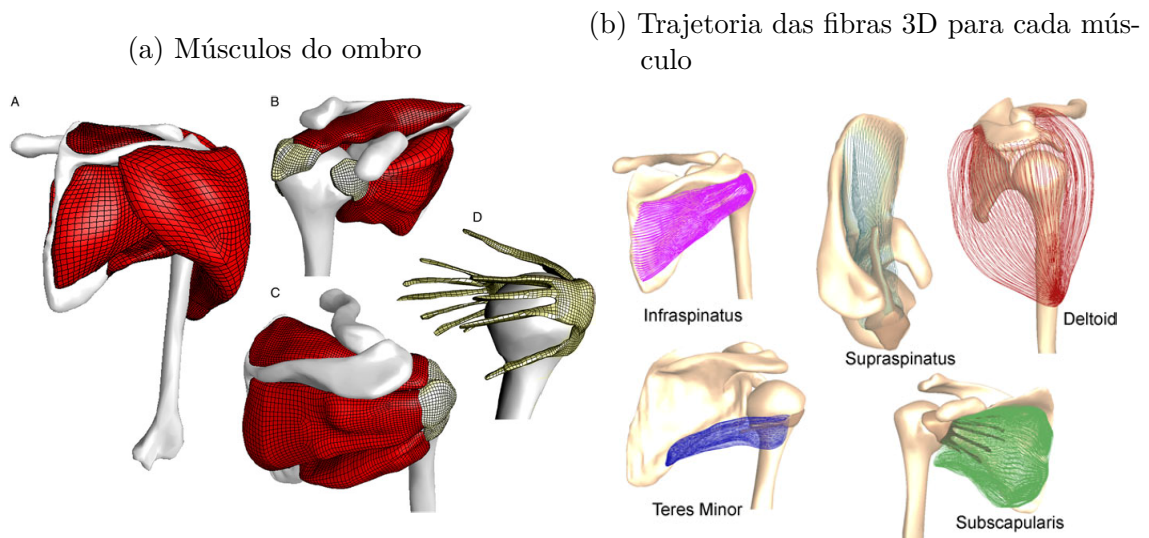


Figura 2 – Modelos de Elementos Finitos do Sistema músculo esquelético do ombro. (WEBB; BLEMKER; DELP, 2014)

e 20% restante responsáveis por gerar força (sem ser materiais contráteis), ver Figura 3. A finalidade deste estudo foi prever a pressão intramuscular em condições passivas. Mesmo sendo um estudo com fluídos, ressalta-se a importância do modelamento do músculo como um material composto, ou seja a separação dos elementos passivos e excitáveis e a necessidade da geração de modelos numéricos para analisar a ativação muscular, os efeitos de fraqueza ou doença muscular.

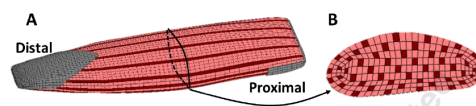


Figura 3 – Malha composta de apenas elementos hexaédricos. Uma de cada cinco cordas longitudinais de elementos são excitáveis. Fonte (WHEATLEY, 2018)

Análise estrutural: Carregamento biomecânico

Com relação aos estudos das cargas biomecânicas, muitos modelos têm sido desenvolvidos para solucionar problemas de fraturas. Tang, Zhang e Tsui (2009) usaram, no modelamento do músculo gastrocnemius de uma rã, uma função de ativação em uma análise quase estática e dinâmica. Wagner et al. (2010), apresentam e avaliam uma metodologia para a construção de um modelo de um fêmur. Eles aplicam as condições de contorno e um carregamento fisiologicamente realista em um modelo de elementos finitos, durante várias atividades físicas, como por exemplo, o carregamento fisiológico durante a caminhada. Essa abordagem permite uma determinação mais precisa das cargas fisiológicas experimentadas pelos implantes ortopédicos que podem ser de grande valor para designers e cirurgiões ortopédicos (WAGNER et al., 2010).

1.2 Sistema Músculo - Esquelético

Os músculos esqueléticos ou estriados são os tecidos responsáveis pelos movimentos voluntários, este é inervado pelo sistema nervoso central; e como este se encontra em parte sob controle consciente, possui movimento voluntário. Estes são formados por fibras musculares cilíndricas finas, se inserem sobre os ossos e sobre as cartilagens e contribuem com a pele e o esqueleto para formar o envoltório exterior do corpo. O músculo esquelético assegura a dinâmica e a estática do corpo humano e mantém unidas as partes ósseas; o que determina a posição e postura do esqueleto. As células deste músculo são bastante grandes e alongadas, com um diâmetro de 10 a 100 *micrômetros* e até 30 *cm* de comprimento e multinucleadas. Possuem filamentos de actina e de miosina, e sua organização permite que se observem estriações transversais (ao microscópio de luz), como resultado conferiu-se o nome estriado ao tecido, ver Figura 4. (MONTANARI, 2013)

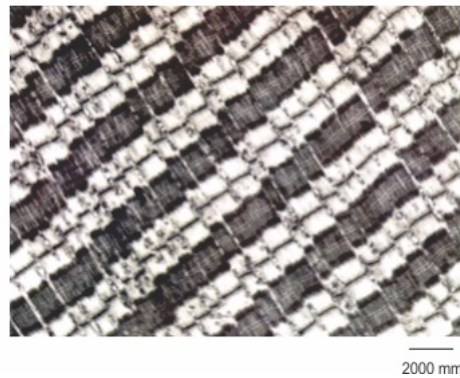


Figura 4 – Micrografia eletrônica de uma fibra muscular. Fonte (RAWN, 1989)

No músculo, as células (fibras) agrupam-se em feixes envolvidos pelo epimísio, tecido conjuntivo denso. O feixe é dividido em fascículos pelo perimísio, as quais estão compostas por muitas miofibrilas que são filamentos de actina e miosina dispostas de forma paralela e simétrica. Na Figura 5a, pode-se observar como estão organizadas as camadas de tecido conjuntivo que envolvem o tecido muscular: o epimísio envolve intimamente o músculo, o perimísio envolve os feixes das fibras musculares e o endomísio circunda cada fibra muscular.

As miofibrilas estão dispostas longitudinalmente nas células e seu diâmetro varia de 1 a 2 *micrômetros* (MONTANARI, 2013). A unidade funcional contrátil das miofibrilas chama-se sarcômero, o qual está composto por proteínas específicas que se agrupam e formam os filamentos proteicos: actina (filamento fino) e miosina (filamento espesso), distribuídos de forma simétrica, ver 5b. Durante a contração muscular, os filamentos finos se deslizam e as linhas Z se movimentam em direção ao centro da banda A e a banda I se tornam portanto mais estreitas.

Classificação dos músculos esqueléticos: Existe uma ampla classificação deste tipo

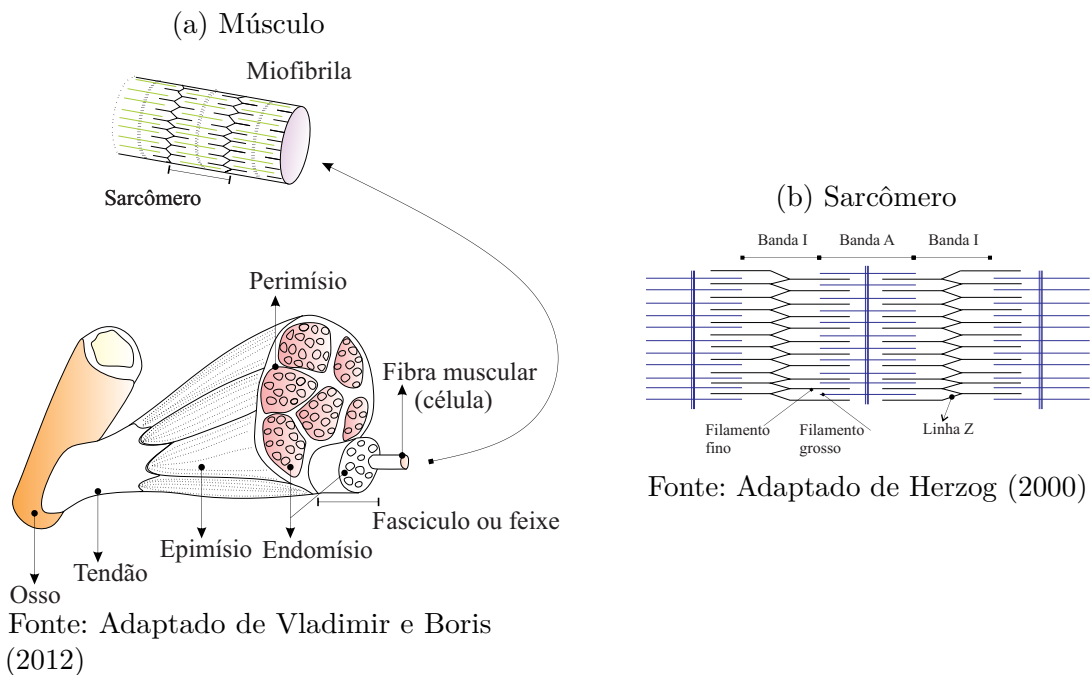


Figura 5 – Organização estrutural do músculo esquelético

de músculos. Um aspecto muito importante para a pesquisa é a classificação com relação as propriedades contráteis. Têm-se músculos com fibras tipo I e/ou tipo II. As primeiras são fibras vermelhas, lentas (contração) e mais resistentes a fadiga; as segundas são fibras brancas, rápidas (contração), porém mais fatigáveis. Um músculo pode conter uma em maior proporção que outra, dependendo se este foi treinado para resistência ou velocidade.

Tecido conjuntivo: o tecido conjuntivo mantém as fibras musculares unidas, assim a força de contração gerada por cada fibra atua sobre o músculo inteiro. Segundo Gartner (2012) as funções básicas do tecido incluem: fornecer suporte estrutural, servir de meio para trocas, ajudar na defesa e na proteção do corpo e funcionar como local para armazenamento de gordura. Além disso, por intermédio dele a força de contração se transmite aos tendões e ossos. O tecido conjuntivo, segundo Montanari (2013) preenche os espaços entre feixes e fibras musculares, armazena água e eletrólitos. Este tecido está composto por fibras colágenas.

Em tendões e ligamentos, as fibras colágenas estão paralelas, organizadas assim pelos fibroblastos quando estiver sob tração; por suas características é conhecido como tecido conjuntivo denso modelado. Em aponeuroses, aqueles que conectam os músculos entre si ou com os ossos, as fibras colágenas estão dispostas em diferentes direções, por conseguinte o tecido é resistente às trações exercidas em qualquer direção, conhecido como tecido denso não modelado. A função do tecido conjuntivo denso é dar resistência ao músculo quando as forças de tração atuam sobre o tecido. Envolvem outros tecidos formando envoltórios, penetram em seu interior dando sustentação.

Purslow (2010) faz uma revisão das principais estruturas intramusculares da matriz extracelular (endomísio, perimísio e epimísio), ver Figura 6, e suas possíveis contribuições mecânicas para funções musculares; por exemplo que: “O endomísio parece fornecer um mecanismo eficiente para a transmissão de forças contráteis das fibras musculares adjacentes dentro de fascículos. Isto coordena as forças e deformações dentro do fascículo, protege as áreas danificadas de fibras contra o excesso de extensão, e fornece um mecanismo, pelo qual a miofibrila pode ser interrompida para adicionar novos sarcômeros durante o crescimento muscular, sem perda de funcionalidade contrátil de toda a coluna.”

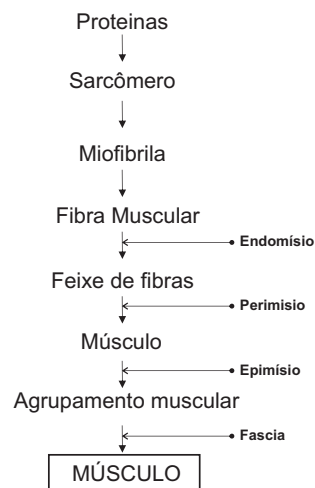


Figura 6 – Composição do músculo

Em síntese, identificam-se estes componentes anatômicos: Ventre muscular, a parte contrátil do músculo constituída por fibras; o tendão, o elemento de tecido conjuntivo que serve para fixar o ventre nos ossos e possuem aspecto morfológico de fitas ou de cilindros; e a Aponeuroses, que é uma estrutura formada por tecido conjuntivo que envolve os grupos musculares e geralmente apresenta forma de lâminas.

Outro aspecto importante é a Unidade Motora - UM associada ao controle da atividade muscular. A quantidade de vezes por unidade de tempo que um motoneurônio dispara um impulso nervoso nas placas motoras das células inervadas por ele recebe o nome de frequência de estimulação (RIBEIRO, 2005). Uma unidade motora consiste de um motoneurônio alfa e das fibras musculares por ele inervadas. A membrana deste motoneurônio determina o padrão de descarga (frequência de disparo do motoneurônio) da UM e, então, da atividade muscular (KOMI, 2008), ver Figura 7.

O controle motor está associado ao tipo de resposta. Apresentam-se uma resposta de contração simples, isto é: ante um estímulo simples do motor resultando em uma resposta brusca da fibra; e uma Resposta tetânica ², ou seja: ante séries repetidas de estímulos do motor resultando em séries repetidas de respostas bruscas da fibra muscular, se o tempo

² TÉTANO: resulta de uma frequência rápida, existindo ainda tensão na fibra quando ocorrer o próximo estímulo

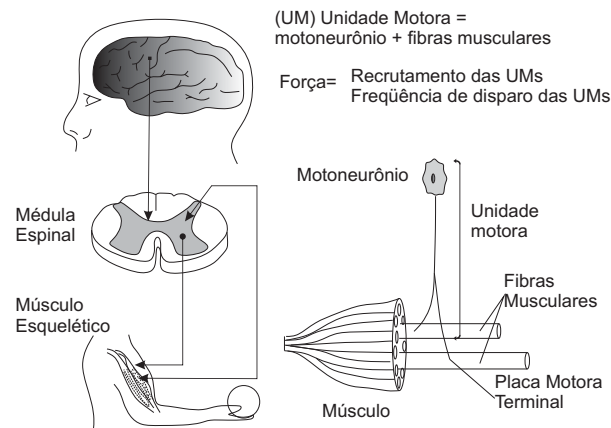


Figura 7 – Representação esquemática de uma unidade motora e seus componentes, Adaptado de Komi, Wiley e Sons (2008)

entre cada estímulo sucessivo é longo o suficiente. Com relação à heterogeneidade das fibras musculares, têm-se que as fibras vermelhas Tipo 1, de contração lenta com elevada resistência à fadiga tem uma frequência de estimulação de 10 Hz e as fibras brancas Tipo 2, de contração rápida, têm tempos de contração mais reduzidos fadigando-se mais rapidamente, frequência de estimulação de 50 Hz .

1.2.1 Propriedades arquitetônicas

O comportamento muscular é influenciado pelas propriedades arquitetônicas, parâmetros tais como: o comprimento do músculo e das fibras, o ângulo de penação e a distribuição das fibras no músculo são significativos na hora de caracterizar o músculo. A orientação ou o alinhamento das fibras musculares permitem classificar os músculos como *fusiformes* ou *peniformes*³, ver Figura 8. No músculo fusiforme as fibras têm o comprimento igual ao do músculo, esta organização facilita o encurtamento rápido. No caso do músculo peniforme, as fibras não percorrem todo o comprimento do músculo e estão dispostas diagonalmente em relação a um tendão e geralmente permite uma maior produção de tensão muscular do que os Músculos fusiformes, porém os movimentos são mais lentos.

A função musculoesquelética depende fortemente da arquitetura muscular. Entre os parâmetros arquitetônicos, segundo Oudeman et al. (2016) os mais importantes são: o comprimento ideal da fibra (ou fascículo), a área fisiológica da seção transversal e o ângulo de penação. Muitas das propriedades encontradas na literatura foram medidas em cadáveres, técnicas como a sonografia e a ressonância magnética facilitam as medições (LIEBER, 1992). Cada parâmetro é definido nos seguintes parágrafos:

Área anatômica da seção transversal (ACSA: Anatomical Cross-Sectional Area): Para um músculo individual, é definida como a área transversal ao longo do comprimento e

³ Peniformes ou em formato de leque, podem ser unipenado, penado ou bipenado e multipenado

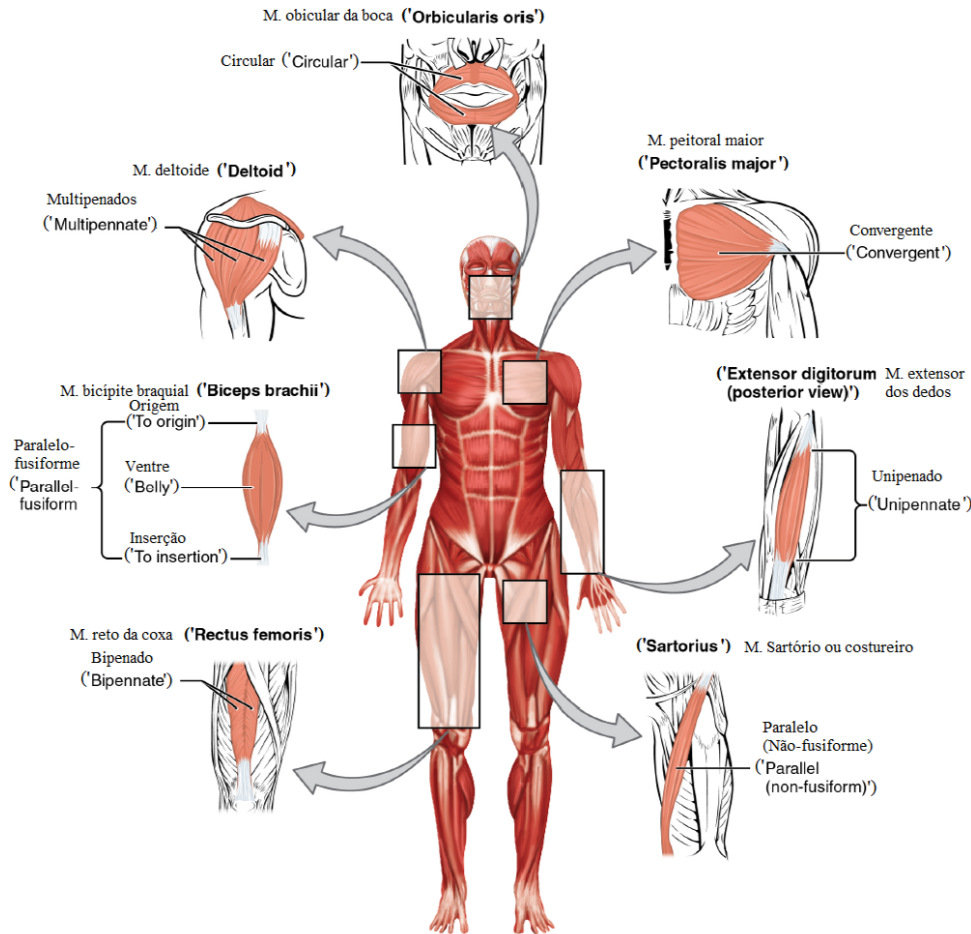


Figura 8 – Músculos esqueléticos e alinhamento de fibras, modificada de Betts et al. (2018)

pode ser medida de forma não invasiva por técnicas de ressonância magnética nuclear (KENT, 1994).

Ângulo de Penação - (PA: Pennation Angle): é o ângulo formado entre as fibras musculares e a aponeurose principal do músculo.

Comprimento do Fascículo - (FL: Fascicle Length): em geral, é o comprimento da fibra muscular.

Área Fisiológica da Seção transversal (PSCA: Physiological Cross-Sectional Area): é a Área Fisiológica da Seção transversal perpendicular às suas fibras. Calcular a 'PSCA' não é uma tarefa simples (VLADIMIR; BORIS, 2012); as técnicas atuais permitem calcular o volume muscular e o comprimento da fibra e a partir da expressão da Equação 1.1 a 'PSCA' pode ser calculada (LIEBER, 1992).

$$PSCA = \frac{VL}{FL}, \quad (1.1)$$

onde VL é o volume do músculo e FL é o comprimento da fibra.

Área da fibra - A_f : é a área da seção transversal da fibra, esta é usualmente calculada

com a seguinte expressão (MASSEY, 2017):

$$A_f = \frac{PCSA}{NT_{Fibras}}, \quad (1.2)$$

onde NT_{Fibras} é o número total de fibras.

Orientações dos feixes das fibras: Define para modelos 3D a organização, orientações e densidade das fibras num músculo esquelético.

A obtenção das propriedades arquitetônicas de forma confiável é importante para entender a função do músculo esquelético e suas alterações devido a condições fisiológicas (OUDEMAN et al., 2016); e portanto para a construção de modelos numéricos.

Caso de Estudo: Músculo Tibial Anterior (TA)

Nesta seção são apresentados os dados dos parâmetros arquitetônicos do músculo TA Humano, associados a ações e ou funções musculares, encontrados na bibliografia, os quais servem como referência para o modelamento feito no exemplo 3.4.

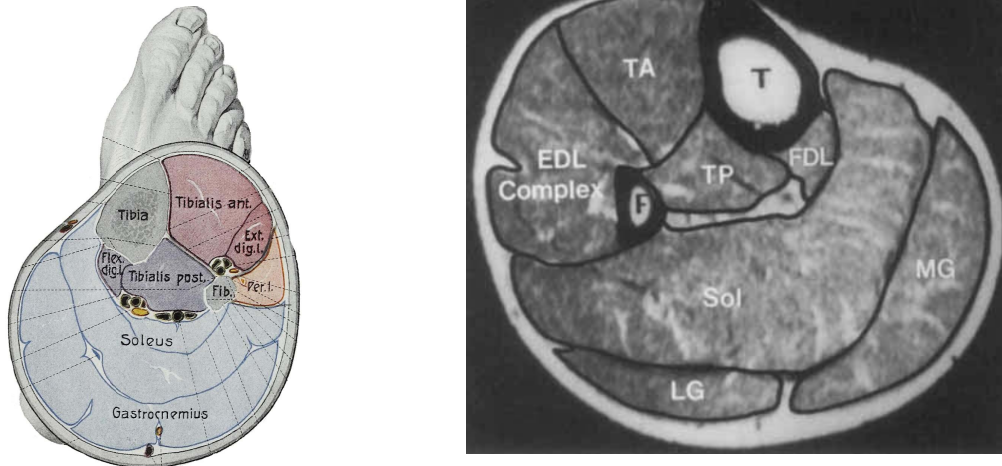
Estabelecer os parâmetros da arquitetura muscular através de ensaios experimentais não é uma tarefa simples, diversos autores ((BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005),(WAGNER et al., 2010),(YAMAMURA et al., 2014), (OUDEMAN et al., 2016)) têm estudado os músculos da perna humana, ver Figura 9a, fornecendo dados importantes como se mostra a seguir sobre o músculo TA.

Fukunaga et al. (1992) determinam a área fisiológica transversal, entre outras propriedades, dos músculos da perna humana utilizando imagens de ressonância magnética, ver Figura 9b).

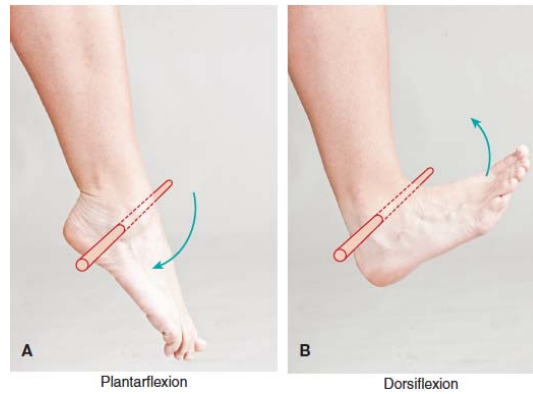
Oudemans et al. (2016) fazem a proposta de um método para medir *in vivo* as alterações do ângulo de penação e do comprimento do fascículo dos músculos da perna com diferentes posições do pé; os autores determinam as propriedades arquitetônicas em vários músculos da perna direita humana, e as mudanças do comprimento do fascículo (FL) devido a movimento passivo do tornozelo. A Figura 9c mostra o movimento do tornozelo, especificamente a flexão plantar (A) e a dorsiflexão (B) e a Figura 9d mostra as imagens transversais dos músculos quando o pé está com 15 graus de dorsiflexão (F), posição neutral zero graus (G) e 30 graus de flexão plantar (H); onde pode ser observado o músculo TA.

Ito et al. (1998) fazem as medições '*in vivo*' por ultrassonografia, onde os indivíduos estudados desenvolveram o torque simétrico da dorsiflexão gradualmente até o máximo ângulo da articulação do tornozelo 20° de flexão plantar. Os autores fizeram imagens ultra-sônicas longitudinais de TA, ver Figura 10a, (direita, proximal) a 20° flexão plantar em condições relaxadas (imagem superior) e moderadamente tensas (imagen inferior). O tecido adiposo subcutâneo, músculo e aponeurose central são mostrados na mesma figura.

- (a) Seção transversal da perna, (b) Seção transversal da perna (FUKUNAGA et al., 1992) adaptada de Hermann (1954)



- (c) Movimento passivo do tornozelo (HOUGLIM; BERTOTI; BRUNNSTROM, 2012)



- (d) Segmentação muscular obtida por Oudeman et al. (2016)

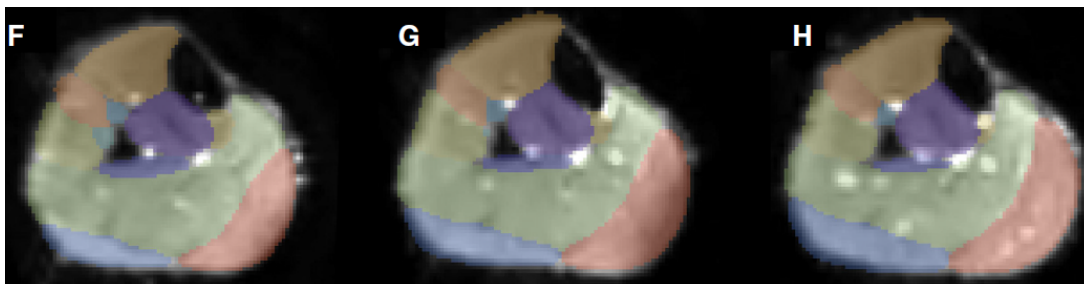


Figura 9 – Imagens movimento do tornozelo e a variação da seção transversal dos músculos da perna

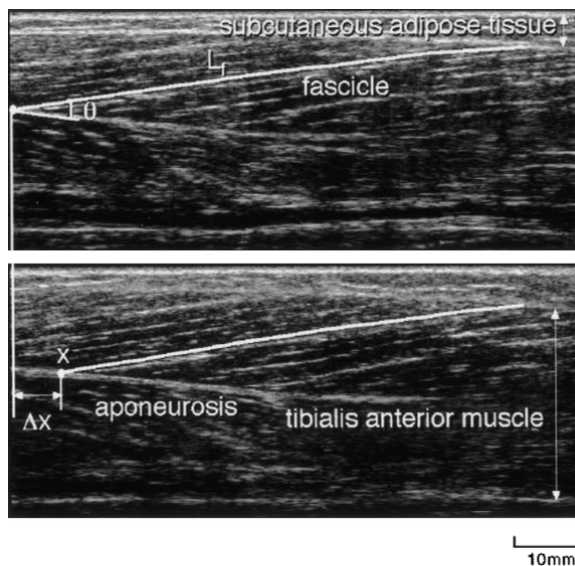
O comprimento do fascículo (L_f) foi medido como o comprimento do eco da aponeurose central à aponeurose proximal. O ângulo de penação, θ , foi definido como o ângulo entre as linhas dos fascículos e a aponeurose. Os autores notaram que o L_f diminuiu e o θ aumentou com a aplicação de força.

Maganaris e Baltzopoulos (1999) analisaram as mudanças in vivo no ângulo de penação do músculo TA desde o repouso até a dorsiflexão isométrica máxima, utilizando a sonografia típica no músculo TA sagital em repouso ('rest') e durante uma dorsiflexão

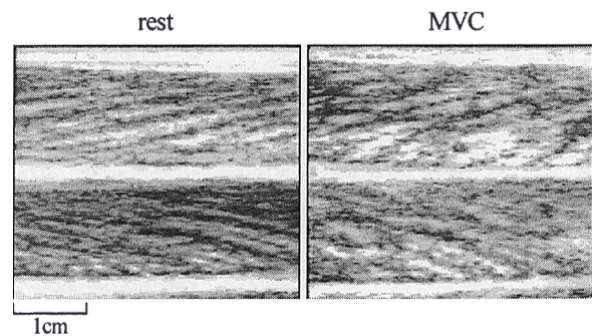
(MVC: 'Maximum Isometric dorsiflexion'). As varreduras apresentadas, ver Figura 10b, foram retiradas da região central do músculo na posição neutra do tornozelo 0° . As faixas horizontais são ecos refletidos das aponeuroses superficial, central e profunda do músculo e as listras oblíquas são ondas refletidas da fásia septosa entre os fascículos.

Bland et al. (2011) obtiveram imagens tomográficas de indivíduos com paralisia cerebral, ver Figura 10c, com vistas longitudinais (imagens na parte superior) e transversais (as imagens inferiores) do músculo tibial anterior no lado mais afetado (à esquerda) e menos (à direita) para 1 participante. A espessura e ângulo de penação foram medidos nas vistas longitudinais. A área da seção transversal foi medida nas vistas transversais.

(a) De Ito et al. (1998)



(b) De Maganaris e Baltzopoulos (1999)



(c) De Bland et al. (2011)

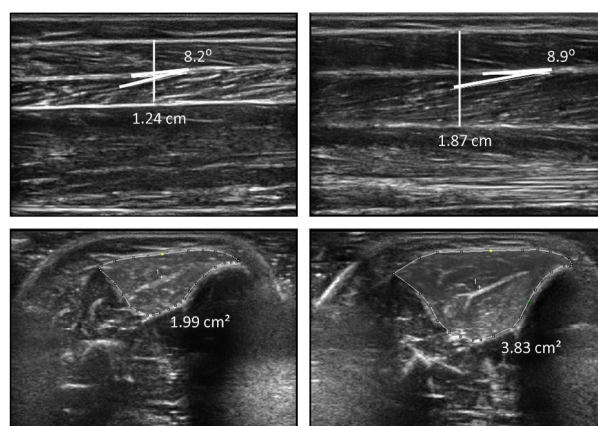


Figura 10 – Imagens do músculo tibial anterior

Joda (2016) mostra as vistas do músculo TA de estudos em cadáveres humanos. Na Figura 11 podem ser observados as componentes superficial e profundo do músculo, com as fibras posteriores estendidas (parte superior da imagem) e o tendão central (parte inferior da imagem).

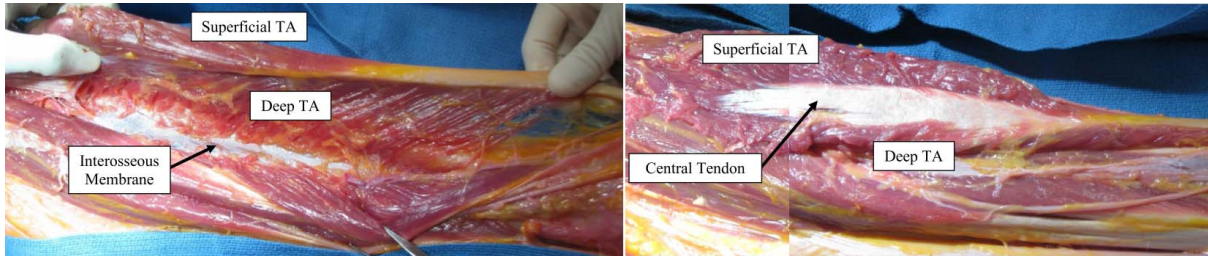


Figura 11 – Imagens do músculo TA (cadáver humano).⁴

Thom et al. (2017) fizeram imagens de ultrassonografia dos músculos gastrocnêmio medial, tibial anterior e braquial; na Figura 12a á esquerda, a seção longitudinal do TA e à direita, o diagrama esquemático mostrando como o comprimento do tendão (Lt), os comprimentos de fascículo (Lf) e o ângulo de penação (θ) também foram medidos.

Sopher et al. (2017) apresentam fotografias de músculos exemplares, como o TA, ver Figura 12b; o ângulo de penação de fibra (PA) foi medido na superfície muscular antes de dissecar o músculo para permitir uma visualização clara das fibras profundas dentro do músculo. As imagens são usadas para estimar o ângulo PA (arco preto) entre a fibra muscular (linha azul) e tendão/aponeurose (linha vermelha escura). O tibialis anterior é um exemplo de um músculo com fibras longas e PA pequeno.

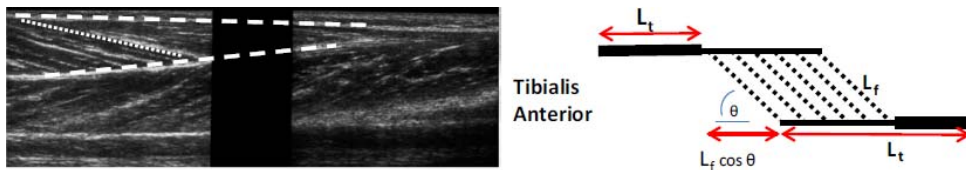
Day et al. (2017) apresentam uma imagem de ultrassonografia bidimensional do músculo tibial anterior, ver Figura 12c, onde a aponeurose superficial, profunda e central são mostradas (linhas pontilhadas). O tecido conjuntivo e colágeno é visto como branco na imagem e os fascículos profundo e superficial foram marcados na imagem com uma linha branca contínua.

Raiteri, Cresswell e Lichtwark (2018) usaram técnicas de ultrassonografia e elastografia para analisar o comportamento *'in vivo'* do fascículo muscular e as deformações da aponeurose central do músculo TA humano durante a dorsiflexão (contrações isométricas voluntárias de força) combinada com três comprimentos da unidade de músculo-tendão. Na Figura 13 se mostram as alterações do músculo, do fascículo e da aponeurose central; na parte **A** o corte transversão esquemático com a largura da aponeurose central, na parte **B** o corte longitudinal simplificado do músculo com o arranjo das fibras e a posição da aponeurose central e na parte **C** as imagens de ultra-som em repouso.

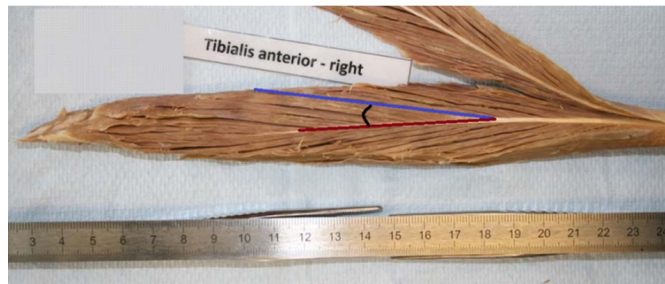
Alguns dados referentes à Área Fisiológica da Seção Transversal perpendicular às fibras, $PCSA$, são apresentados na Tabela 1.

⁴ Referência No. [6] de Joda (2016) 'S. Go and E. Jensen, Human tibialis anterior cadaveric study, unpublished.'

(a) De Thom et al. (2017)



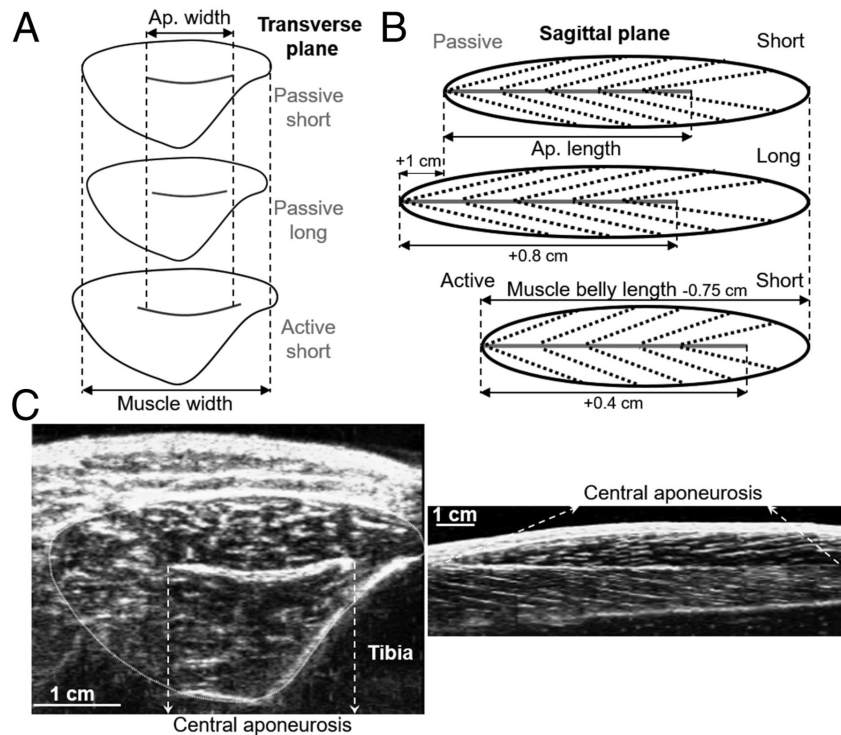
(b) De Sopher et al. (2017)



(c) De Day et al. (2017)



Figura 12 – Imagens do músculo tibial anterior



Alterações das cepas do músculo, do fascículo e da aponeurose central do músculo para uma determinada força muscular.

Figura 13 – Carga passiva e ativa do músculo TA humano (RAITERI; CRESSWELL; LICHTWARK, 2018)

Tabela 1 – Área Fisiológica da Seção transversal (PCSA) do Músculo Tibial Anterior (TA)

Referência	PSCA (cm ²)
Fukunaga et al. (1992) Ref 34*	9.87
Fukunaga et al. (1992) Ref 11*	12.7
Fukunaga et al. (1992) Ref 26*	39.5
Fukunaga et al. (1992)	18.52
Sopher et al. (2017)	10 (+/-)1

Outros dados encontrados do músculo TA são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades PA e FL do Músculo TA

Referência	PA (graus)	FL (mm)
34*	5 (+/-) 0	77 (+/-) 14
11*	12	73 (+/-) 6
26*	10	82
7*	7	
2*	8	
Fukunaga et al. (1992)		77
Ito et al. (1998)	10 (+/-) 1 a 12 (+/-) 1	87 (+/-) 7 a 76 (+/-) 7
Maganaris e Baltzopoulos (1999)	<i>Superficial</i> **	13.2 (+/-) 1.8 a 9.5 (+/-) 1.7
	<i>Profundo</i> ***	66 (+/-) 4 a 89 (+/-) 4
Oudemans et al. (2016)	<i>Ref</i> ****	13.0 (+/-) 2.7 a 9.2 (+/-) 1.6
	<i>Dorsiflexão</i>	68 (+/-) 7 a 89 (+/-) 5
	<i>Neutra</i>	68 (+/-) 8 57(+/-)7
	<i>Plantar flexão</i>	66(+/-) 7 68(+/-) 6
Sopher et al. (2017)	13 (+/-) 1	66 (+/-) 2

* Características anatômicas do TA em cadáveres, referências no artigo do Fukunaga et al. (1992),
 ** Parte superficial do músculo TA, *** Parte profunda do músculo TA
 **** Em espécimens de cadáveres, em posição neutra; referências no artigo do Oudemans et al. (2016)

Orientações dos feixes das fibras: com relação ao arranjo das fibras musculares, Choi, Chincisan e Magnenat-Thalmann (2015) utilizaram uma abordagem baseada no Laplaciano como base para gerar as orientações dos feixes de fibras para músculos esqueléticos 3D.

Lansdown et al. (2007) "Os objetivos deste estudo foram demonstrar a viabilidade do uso in vivo de dados de rastreamento de fibra óptica DT-MRI para fazer medidas de ângulo de penação e testar a hipótese de que a heterogeneidade na orientação da aponeurose do músculo tibial anterior (TA) levaria à heterogeneidade na ângulo de penação."

Heemskerk et al. (2009) "Este trabalho descreve um método para determinar a precisão de cada trato de fibras musculares com base no local em que as fibras terminam, o caminho da fibra e a similaridade com as fibras vizinhas. Além disso, o efeito de

diferentes configurações de critérios de parada nesta avaliação quantitativa foi investigado. O rastreamento de fibras foi realizado no músculo tibial anterior de nove indivíduos saudáveis". O procedimento de rastreamento de fibras musculares com base em Diffusion tensor imaging (DTI) usado pelo (HEEMSKERK et al., 2009) foi descrito por Lansdown et al. (2007) para o músculo TA. "Este trabalho descreve um método para determinar a precisão de cada trato de fibras musculares com base no local em que as fibras terminam, o caminho da fibra e a similaridade com as fibras vizinhas. Além disso, o efeito de diferentes configurações de critérios de parada nesta avaliação quantitativa foi investigado."

A informação encontrada na literatura permitiu identificar dois grandes grupos de fibras; na Figura 14 se podem observar as fibras *profundas* (em amarelo as oriundas da aponeurose) e as *superficiais* (em verde oriundas da parte superficial da aponeurose) e a aponeurose (em azul). Em geral as fibras do músculo TA correm da tíbia ou da fáscia superficial para a aponeurose central.

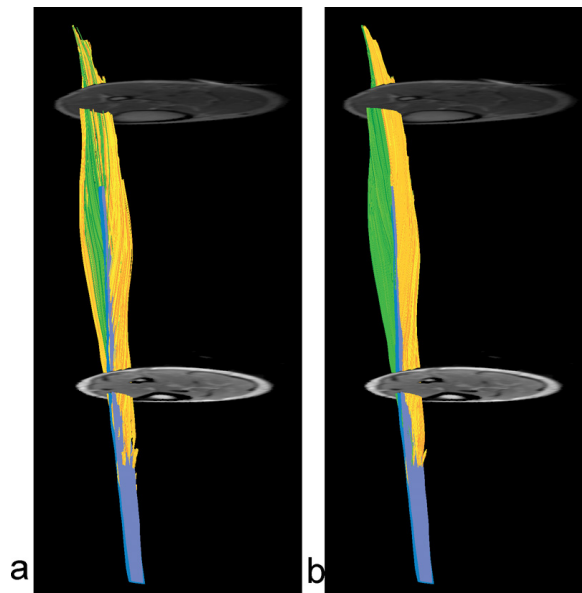


Figura 14 – Trajetória das fibras do músculo TA (HEEMSKERK et al., 2009)

1.2.2 Modelos Mecânicos clássicos de músculos esqueléticos

Modelo de Hill

O modelo de Hill (HILL, 1938) é experimental e considera tanto os componentes ativos como os passivos do músculo. Este modelo tem sido implementado em diferentes trabalhos de pesquisa devido à simplicidade para a representação mecânica global em uma dimensão (HOFFMAN et al., 2012). Na Figura 15, o modelo de Hill está representado por três elementos estruturais: uma componente elástica em paralelo (*CEP*), que representa a estrutura da matriz ou parte passiva do músculo (tecido conjuntivo); uma componente elástica em série (*CES*) e um elemento contrátil (*EC*), que representam a contribuição das fibras. Onde o elemento contrátil representa a ação de contração das fibras do músculo.

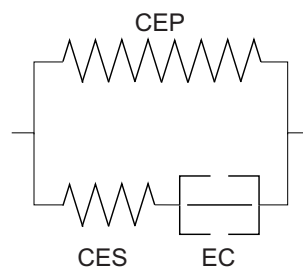


Figura 15 – Modelo de Hill. (HOFFMAN et al., 2012)

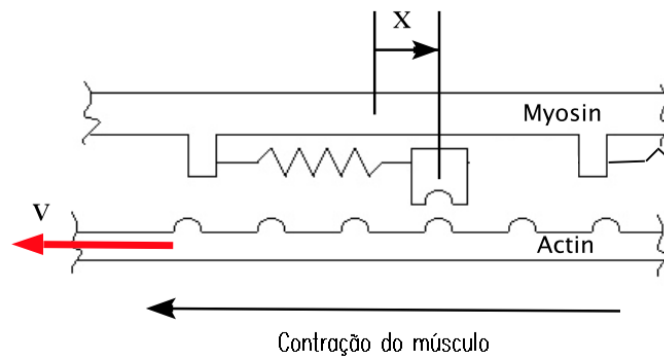
Modelo de Huxley

O modelo dinâmico da ponte cruzada de Huxley (1954) de contração muscular, formulado há mais de cinquenta anos, ainda é o modelo mais utilizado pelos pesquisadores. “Este fato reflete tanto a simplicidade do modelo como a incapacidade dos modelos mais elaborados em replicar sua precisão nos testes experimentais básicos” (WILLIAMS, 2011).

Williams (2011) apresenta o método de forma detalhada e precisa com um elemento em série compatível com o músculo. Em resumo, as cabeças de *miosina* se fixam ao filamento de *actina* e puxam-o em direção à linha-M no centro do sarcômero; desta forma o sarcômero encurta e produz força ativa, ver Figura 16a. Schappacher-Tilp et al. (2015) propuseram um modelo novo baseado no modelo clássico, denominado modelo de três filamentos de geração de força em contração excêntrica, ver Figura 16b. Para contrações isométricas e concêntricas a diferença, entre as previsões de força com o modelo clássico de ponte cruzada e o de três filamentos, é mínima e capturam o comportamento observado experimentalmente. Para as contrações excêntricas, em contraste com os modelos de ponte cruzada, o modelo de três filamentos prevê com precisão a força (SCHAPPACHER-TILP et al., 2015).

Baseados nos modelos mecânicos clássicos dos músculos esqueléticos, é possível descrever o comportamento mecânico a partir das seguintes propriedades:

(a) Adaptado de Williams (2011)



(b) Um novo modelo de três filamentos de geração de força em contração excêntrica, modificado de Schappacher-Tilp et al. (2015)

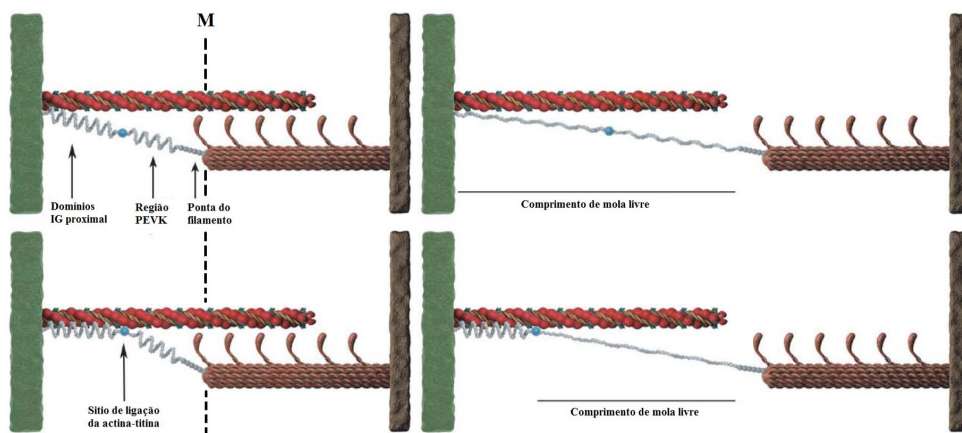


Figura 16 – Diagramas do Modelo de Huxley

Propriedades Mecânicas

As propriedades mecânicas permitem definir as condições de carregamento e resposta da estrutura muscular. A magnitude da força gerada por um músculo está diretamente relacionada com sua velocidade de encurtamento, com seu comprimento e com seu ângulo de inserção. Existem relações que permitem analisar como a força é gerada no músculo esquelético, por exemplo: Relação força-velocidade, força-comprimento e força-ativação, ver Figura 17.

Propriedades de contração: A contração muscular é estimulada por fibras nervosas motoras que entram no perimísio ⁵.

Propriedades de força-comprimento: A relação força-comprimento é definida como a relação que existe entre a máxima força de um músculo ou fibra ou sarcômero e seu comprimento. A relação é obtida sob condições isométricas e para a máxima ativação do músculo (SPYROU, 2009).

⁵ Ver Figura 5 na Seção 1.2

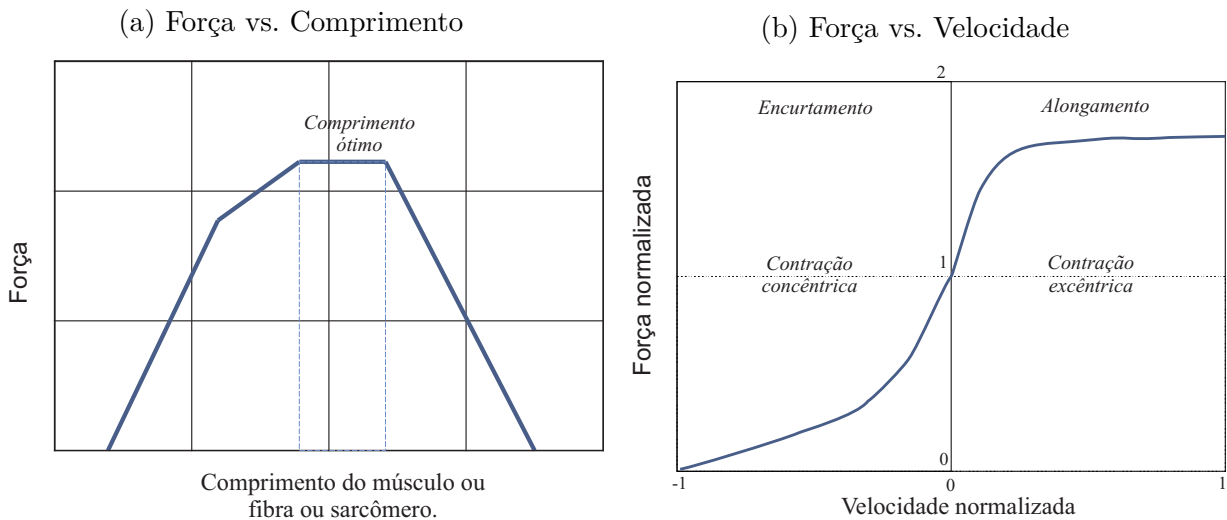


Figura 17 – Propriedades Mecânicas

Propriedades de força-velocidade: A força-velocidade é definida como a relação entre a tensão ou força nas fibras do músculo e a velocidade de contração, a qual também pode ser usada para descrever a produção de energia mecânica que proporciona o músculo ativo (Rodríguez Lemos, 2004). A curva é construída com a superposição de gráficos similares, a qual ilustra a relação entre a máxima força e a taxa instantânea de mudança no comprimento (SPYROU, 2009). Portanto, a relação indica que para uma determinada força muscular (ou carga) desejada existe uma velocidade máxima de encurtamento possível. A relação força-velocidade é inversa, se é considerada a força concêntrica, onde o músculo se encurta. O comportamento é diferente se é considerada a força excêntrica com a qual ele se alonga; basicamente em cargas menores que a isométrica a velocidade é controlada voluntariamente e em cargas maiores o músculo é forçado a se esticar com velocidade proporcional à carga, ver Figura 17b.

Propriedades força-ativação: histórico: A força-ativação é a relação entre a força e o tempo necessário para obter o 100% da força. Segundo o Spyrou (2009) não é só para ajustar a magnitude da força, isso deve ser sempre mantido em mente. No entanto, de acordo com Rodríguez Lemos (2004) apesar dos experimentos, a história-dependência é raramente considerada nos modelos; dado que estas características não se encontram presentes nos modelos tradicionais do músculo (Hill e Huxley, item 1.2.2)

Potência Muscular: A potência muscular é definida como o produto da força pela velocidade de encurtamento do músculo. O máximo valor ocorre aproximadamente a um terço da velocidade máxima de encurtamento. Se a temperatura corporal é considerada, a atividade dos músculos aumenta, o que provoca um desvio na curva força-velocidade. Um dos benefícios do aumento da temperatura muscular é o aumento na elasticidade do tecido muscular. A temperatura entre 38,8 e 41,6 graus é considerada apropriada para atingir a plasticidade das fibras (AYALA; FERREIRA, 2010).

Ativação das Fibras na modelagem de Músculos

Na modelagem de músculos esqueléticos o controle da atividade muscular para obter resposta de contração simples ⁶ ou tetânica ⁷, como explicado no começo da seção 1.2, é feito através de funções de ativação.

Para a modelagem da tensão ativa, os modelos do tipo Hill são usados com frequência; responsáveis pelas relações Força-comprimento e velocidade-força do músculo (OOMENS et al., 2003). Johansson, Meier e Blickhan (2000) e Yamamura et al. (2014) definem o tensor de Cauchy na direção da fibra como a soma da parte ativa e da parte passiva. A parte ativa é controlada pelas funções que definem o nível de ativação, o comprimento da fibra e a velocidade de encurtamento como sendo:

$$\sigma_l = \sigma_{\text{iso}} f_t f_v f_l + \sigma_{\text{pas}}, \quad (1.3)$$

onde σ_{iso} é a tensão máxima isométrica, f_t é a função de ativação, f_v é a função dependente da velocidade e f_l a função dependente do comprimento.

O tensor de Piola-Kirchhoff, de forma similar, tem uma parcela de ativação definida por:

$$S_{ij}^{\text{Act}} = S_{ij}^{\text{Iso}} f_t f_v f_l, \quad (1.4)$$

onde f_l , f_t e f_v estão definidas por:

$$f_l = c_i + d_i \left(\frac{t_l}{l_0} - \frac{l_i}{l_0} \right), \quad (1.5)$$

onde, c_i , d_i e l_i caracterizam as diferentes regiões por partes da Figura 18a . As constantes podem ser derivadas de um modelo de sarcômero e relações de geometria (Van Leeuwen, 1991).

A curva de força de comprimento pode ser descrita por uma relação linear por partes, derivada por Leeuwen (1992), ver Figura 18a.

$$f_t = \begin{cases} f_t^0 = n_1, & \text{se } t \leq t_0, \\ f_t^1 = n_1 + (n_2 - n_1) (1 - \exp(-\mathbf{S}(t - t_0))), & \text{se } t_0 < t \leq t_1, \\ f_t^2 = f_t^1(t_1) + (f_t^1(t_1) - n_1) (1 - \exp(-\mathbf{S}(t - t_1))), & \text{se } t > t_1, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde n_1 é o valor no início e no final da ativação; n_2 é o valor durante a ativação; t_0 é o momento em que a ativação é iniciada e t_1 é o momento em que a desativação

⁶ Com resposta brusca' da fibra

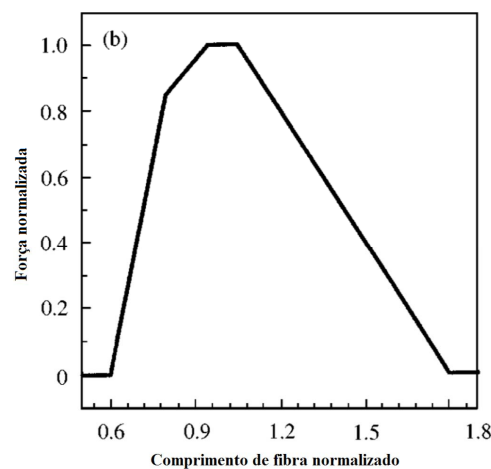
⁷ Com séries repetidas de respostas 'bruscas' da fibra

é iniciada. O parâmetro S representa a taxa de tempo de ativação. Um exemplo dessa função é mostrado na Figura 18b.

$$f_v = \begin{cases} \frac{1-(v/v_{\min})}{1+k_{cc}(v/v_{\min})}, & \text{se } v_{\min} < v < 0, \\ d - (d-1)\frac{1-(v/v_{\min})}{1+k_{cc}k_{ec}(v/v_{\min})}, & \text{se } v > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde k_{cc} e k_{ec} são umas constantes musculares e d é um parâmetro que 'quantifica o deslocamento de força em relação ao caso isométrico devido ao movimento excêntrico' (JOHANSSON; MEIER; BLICKHAN, 2000).

(a) Função dependente do comprimento



(b) Função dependente da velocidade e de ativação

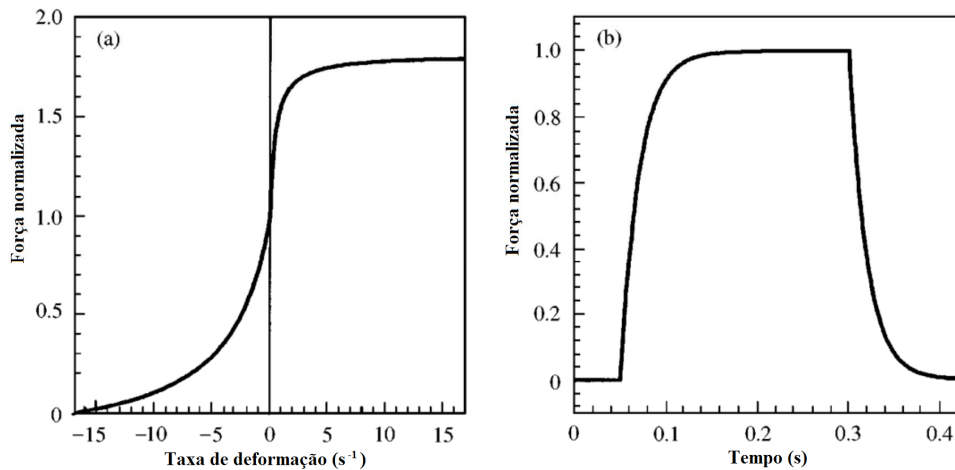


Figura 18 – Funções definidas por Johansson, Meier e Blickhan (2000)

Yucesoy et al. (2002) usa ligações elásticas ajustáveis em rigidez para permitir a manipulação da iteração, representadas por elementos *COMBIN39*⁸ no Ansys®.

Para a tensão ativa do músculo Oomens et al. (2003) usaram um modelo baseado na teoria de Huxley (1954) adaptado por Zahalak (1981). Este modelo considera dois estados: as pontes cruzadas conectadas ou desconectadas. Este modelo tem algumas

⁸ Elemento unidirecional com capacidade generalizada não-linear de força-deflexão

desvantagens para eventos rápidos, no entanto para fenômenos lentos apresenta bons resultados (OOMENS et al., 2003). Cada ponte cruzada tem seu próprio comprimento adimensional, sua distribuição é dada pela função $n(\xi, t)$ e sua taxa de mudança, ver Equação 1.8, que pode ser expressa pela equação de Huxley de dois estados modificada.

$$\frac{\partial n(\xi, t)}{\partial t} - u(t) \frac{\partial n(\xi, t)}{\partial \xi} = r(t) f(\xi) [\alpha - n(\xi, t)] - g(\xi) n(\xi, t), \quad (1.8)$$

onde $u(t)$, é a velocidade de encurtamento (em escala) da metade de um sarcômero, α é um fator de sobreposição ('overlap factor'), $f(\xi)$ e $g(\xi)$ são a taxa de fixação e desprendimento das pontes cruzadas, respectivamente. Estas funções são determinadas experimentalmente e dependem do tipo de músculo (de contração rápida ou lenta).

Para definir o fator de ativação ('activation factor'), usa-se a expressão $r(t) = \frac{c^2}{c^2 + \mu c + \mu^2}$, onde c é a razão da concentração livre de cálcio no espaço miofibrilar em relação à concentração máxima do mesmo. Oomens et al. (2003) apresenta o método DM "Distributed moment", que define a Equação 1.8 para o músculo tibial anterior de um rato; assim como os dados para definir a concentração de cálcio regulada pela estimulação elétrica.

Assim a tensão ativa do músculo é definida por:

$$\sigma_a(t) = c_a \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \xi n(\xi, t) d\xi, \quad (1.9)$$

onde c_a , é a tensão isométrica máxima (com o número máximo de pontes cruzadas conectadas), λ é a relação de estiramento (alongamento) da fibra.

Oomens et al. (2003) descrevem detalhadamente toda a formulação da ativação, Equação 1.9, embora este tipo de ativação não seja considerada na tese constitui um exemplo de ativação utilizando o modelo de Huxley das pontes cruzadas. Inclusive porque consideraram um modelo tridimensional do músculo Tibial Anterior de um rato.

Chi et al. (2010) utilizam uma função de ativação muscular na definição da força de fibra normalizada como sendo:

$$f_{fibra}^{total} = a f_{fibra}^{ativa} + f_{fibra}^{passiva}, \quad (1.10)$$

onde a é a função de ativação.

Chi et al. (2010) definiram o nível de ativação $a = 1$, f_{fibra}^{ativa} e $f_{fibra}^{passiva}$ são as forças ativas e passivas das fibras normalizadas. Estas forças estão de forma explícita na Figura 19⁹, baseada nos parâmetros: $\gamma_1 = 0.05$, $\gamma_2 = 6.6$, $\lambda_0 = 1.4$ e $\sigma_{max} = 30 \text{ N/cm}^2$ do Blemker, Pinsky e Delp (2005).

⁹ A faixa sombreada indica o intervalo onde o modelo Chi et al. (2010) opera.

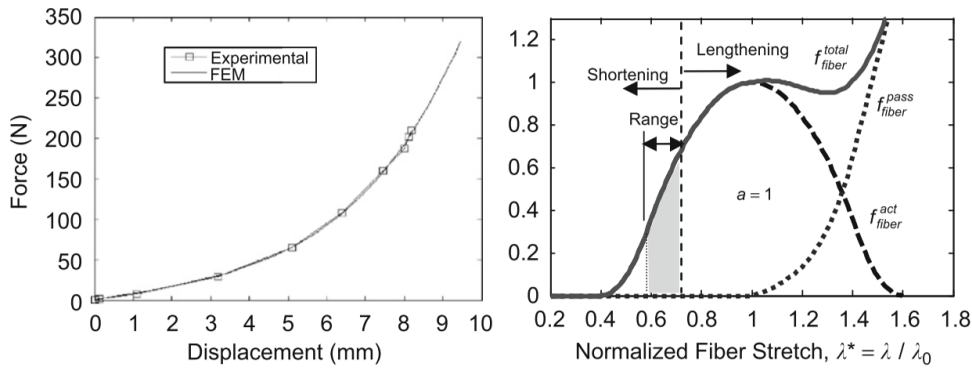


Figura 19 – Relação força-deslocamento do tendão. Propriedades força-comprimento das fibras normalizadas (CHI et al., 2010)

A força total contribui para o cálculo da tensão de Cauchy (BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005), ao longo da fibra como:

$$\sigma_{fibra} = \sigma_{\max} f_{fibra}^{total} \lambda / \lambda_0. \quad (1.11)$$

O comportamento ativo descrito por Grasa et al. (2011) foi baseado na função energia de deformação de Ramírez et al. (2010), ver Equação 1.12.

$$\Psi_a = \sigma_0 \eta(\bar{\lambda}) \gamma(f_r, t), \quad (1.12)$$

onde, σ_0 é a tensão máxima gerada pelo músculo, $\eta(\bar{\lambda})$ assume valores entre 0 e 1 representando a sobreposição efetiva entre os filamentos, proposta por Grasa et al. (2011) e é descrito pela expressão:

$$\eta(\bar{\lambda}) = e^{\frac{-(\bar{\lambda} - \lambda_{opt})^2}{2(1-\beta)^2}}, \quad (1.13)$$

onde, λ_{opt} , é o estiramento ótimo do músculo, $\bar{\lambda}$ é o estiramento atual, β corresponde à curvatura da função. $\gamma(f_r, t)$ é a função de ativação e está definida por:

$$\gamma(f_r, t) = \sum_{i=1}^n \left[\left(1 - \text{re}^{(f_r T')/c} \right) \left(P' \frac{t - t_i}{T'} e^{1 - (\frac{t-t_i}{T'})} \right) \right]. \quad (1.14)$$

A Equação 1.14 é uma função dependente do tempo, onde T' é o tempo de contração aparente para todo o músculo gerado por um pulso de excitação, P' é a amplitude aparente da força gerada, t_i é o intervalo de tempo entre os estímulos ($1/f_r$), r determina a taxa de contração e tensão tetânica ¹⁰, c é a taxa de aumento da força com o aumento da frequência e finalmente n é o número de pulsos de estimulação.

¹⁰ Contração que acontece quando a unidade motora é estimulada por impulsos com frequências altas, é a contração máxima possível

Nesta formulação os parâmetros do modelo para o comportamento ativo muscular: $\sigma_0, \lambda_{opt}, \beta, T'(s), P'(N), t_i(S), r$ e c foram determinados experimentalmente por Ramírez et al. (2010).

Rahemi, Nigam e Wakeling (2014) usaram o modelo de Hill (1938) para a contração da fibra muscular, particularmente para obter a relação tensão-estiramento $\hat{\sigma}_{Activ}$ (tensão-alongamento), ver Equação 1.15. O nível de ativação é normalizado pela função $\alpha(t)$ (que varia de 0 a 1) e a relação tensão-estiramento normalizada, $\hat{\sigma}_\lambda$.

$$\hat{\sigma}_{Activ}(\lambda) = \alpha(t)\hat{\sigma}_\lambda\hat{\sigma}_\lambda. \quad (1.15)$$

Para definir diferentes níveis de ativação em várias regiões do músculo, os autores modificaram a Equação 1.15, tornando-a explícita com relação à dependência da localização, X , assim:

$$\hat{\sigma}_{Activ}(X, \lambda) = \alpha(X, t)\hat{\sigma}_\lambda\hat{\sigma}_\lambda. \quad (1.16)$$

Nesse estudo foi permitido que a função $\alpha(X, t)$ variasse linearmente de 0 até α_{max} com um intervalo de 0.2 durante 0.4 s de simulação. Para descrever a função $\hat{\sigma}_\lambda$, os autores construíram um polinômio trigonométrico, ver Equação 1.18, a partir dos dados experimentais de Gordon, Huxley e Jitliant (1966), ver Figura 20.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_\lambda = & 0.534 + 0.229 \cos(\omega\lambda) - 0.095 \cos(2\omega\lambda) + 0.024 \cos(3\omega\lambda) \\ & - 0.021 \cos(4\omega\lambda) + 0.013 \cos(5\omega\lambda) - 0.421 \sin(\omega\lambda) \\ & + 0.079 \sin(2\omega\lambda) - 0.029 \sin(3\omega\lambda) + 0.013 \sin(4\omega\lambda) \\ & + 0.002 \sin(5\omega\lambda), \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $\omega = 4.957$.

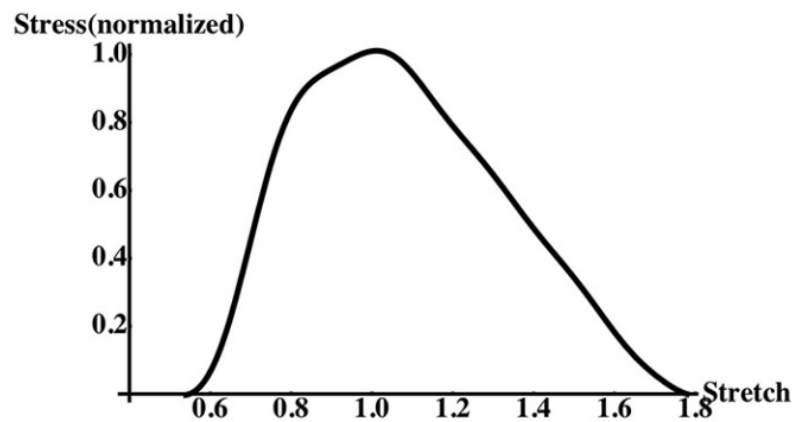


Figura 20 – Músculo ativo. Relação Tensão-alongamento de Rahemi, Nigam e Wakeling (2014)

1.2.3 Relações constitutivas na modelagem de Músculos

Segundo Chagnon, Rebouah e Favier (2015) o comportamento dos tecidos pode ser considerado isotrópico dependendo da quantidade e orientação das fibras; inclusive dependendo da aplicação, logo o comportamento anisotrópico pode ser negligenciado. Assim, os tecidos biológicos tem sido usualmente modelados como um material transversalmente isotrópico, considerando leis hiperelásticas.

Os Materiais hiperelásticos, também chamados de super-elásticos, perfeitamente elásticos ou Green-elásticos, são utilizados para modelar materiais que respondem elasticamente, quando submetidos a grandes tensões. Estes materiais elásticos têm uma relação de tensão - deformação reversível, seja linear ou não. Assim um material hiperelástico, define-se como sendo um material para o qual existe uma função de energia livre de Helmholtz (ou energia armazenada), Ψ , definida por unidade de volume inicial. Para materiais homogêneos e isotrópicos a energia específica de deformação pode ser expressa em termos dos invariantes de deformação ou alongamentos principais.

Os principais modelos hiperelásticos usados para modelar tecidos biológicos são: o modelo Neo-Hookean (GRASA et al., 2011; OOMENS et al., 2003; ZÖLLNER et al., 2015; SHIM et al., 2014; FREUTEL et al., 2014; KAO et al., 2010), Mooney Rivlin ((ZHANG; GAO, 2012; TERAN et al., 2003; YAMAMURA et al., 2014; HEIDLAF; RÖHRLE, 2014; FREUTEL et al., 2014; LIMBERT et al., 2003), Ogden (GRAS et al., 2012; CALVO et al., 2009; FREUTEL et al., 2014; CALVO et al., 2009; ANNAIDH et al., 2012) e o modelo polinomial (CHI et al., 2010) também usado para a modelagem da matriz do músculo esquelético. As expressões dos principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos, homogêneos e quase incompressíveis são descritas por Pascon (2008).

Por exemplo, o Modelo Neo-Hookean tem sido usado para modelar tecido muscular passivo (ZÖLLNER et al., 2015; GRASA et al., 2011; CHI et al., 2010), para a matriz do tendão (SHIM et al., 2014) e materiais macios reforçados por fibras (KAO et al., 2010).

Na Tabela 3 são apresentadas as formulações dos principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos.

Tabela 3 – Principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos

#	Modelo hiperelástico	Fórmulas
1	Mooney (1940) ¹	$\psi = \frac{G}{4} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{H}{4} \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right)$
2	Rivlin (1956) ²	$\psi(I_1, I_2, I_3) = C_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k$ $\psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$
3	Mooney-Rivlin (1940)	$\psi(I_1, I_2) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3)$
4	Vanalis-Landel ³	$\psi = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3)$
5	Ogden (1972)	$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p})$
6	Neo-Hookeano (1943)	$\psi(I_1, I_2) = C_1 (I_1 - 3)$
7	Yeoh (1990) ⁴	$\psi = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$
8	Arruda-boyce ⁵	$\psi(I_1) = \mu \sum_{p=1}^N \frac{C_p}{\lambda_L^{2p-2}} (I_1^p + 3^p)$ $\psi = \mu \left[\frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20n} (I_1^2 - 9) + \dots \right.$ $\left. \dots + \frac{1}{1050n} (I_1^3 - 27) + \dots \right]$
9	Yeoh-Fleming (1997) ⁶	$\psi = \frac{A}{B} \left[1 - e^{-B(I_1-3)} \right] - C_{10} (I_m - 3) \ln \left[1 - \frac{I_1-3}{I_m-3} \right]$
10	Bechir-Boufala-Chevalier	$\psi = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + \dots$ $\dots + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{02} (I_2 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$
11	Hartmann-Neff (2003)	$\psi = \alpha (I_1^3 - 27) + C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2^{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{3})$
12	Yeoh Modificado	$\psi = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + \dots$ $\dots + C_{30} (I_1 - 3)^3 + \frac{\alpha}{\beta} \left[1 - e^{-B(I_1-3)} \right]$
13	Saint Venant-Kirchhoff	$\psi(E) = \frac{\lambda}{2} [tr(E)]^2 + \mu [tr(E^2)]$
14	Rivlin - Saunders ⁷	$\psi_{RS}(J, i_1^{iso}, i_2^{iso}) = U_{vol}(J) + \psi_{RS}^{iso}(i_1^{iso}, i_2^{iso})$ $\psi_{RS}^{iso}(i_1^{iso}, i_2^{iso}) = \sum_{i,j} [c_{ij} (i_1^{iso} - 3)^i (i_2^{iso} - 3)^j]$
15	Modelo Polinomial	$\psi(I_1, I_2) = \sum_{p+q=1}^N C_{pq} (I_1 - 3)^p (I_2 - 3)^q$

Para a implementação numérica com formulação não linear os seguintes modelos são utilizados: O modelo linear de Saint Venant-Kirchhoff - *SVK*, o modelo não linear desacoplado de Rivlin-Saunders - *RS*, o modelo não linear desacoplado de Hartmann-Neff - *HN* e o modelo não linear acoplado Neo-Hookeano - *nH*

¹ Onde, G , é módulo de rigidez ao cisalhamento e λ_i ; é o alongamento principal na direção i

² Onde, I_i , são os Invariantes do tensor de deformação de Green

³ Onde, $w(\lambda_i)$ é a função do alongamento principal na direção i

⁴ Onde, C_{ij} , são os coeficientes do material

⁵ Onde, μ é o módulo de rigidez ao cisalhamento e n é o número de segmentos encadeados (Ligações químicas)

⁶ Onde, A e B são as constantes do material e I_m é o máximo valor teórico de I_1

⁷ Onde, i_1^{iso} e i_2^{iso} , são os dos primeiros invariantes de C_{iso}

1.2.4 O músculo como um material compósito: Matriz-fibras

O músculo é um material compósito, desde o ponto de vista da mecânica, constituído por fibras, tecidos conectivos e bio fluídos ao redor das fibras (SPYROU, 2009). Esta consideração, na qual as miofibrilas ¹¹ estão ligadas à matriz extracelular, é feita nas modelagens recentes (YUCESoy et al., 2002).

Yucesoy et al. (2002) consideram dois domínios e fazem a ligação de forma elástica, permitindo a avaliação da transmissão de força entre eles; os autores consideram condições de ligação alteradas para representar patologias, tais como distrofias musculares. Basicamente, um desses elementos representa a matriz extracelular (lamina basal e os componentes do tecido conjuntivo: endomísio e perimísio) e o segundo representa as fibras musculares. Nesse trabalho se considerou um elemento de oito nós, funções de interpolação linear e uma formulação para grandes deformações. A ativação do músculo é estudada, e são assumidas as propriedades dos materiais idênticas para as fibras. Os autores não consideram a relação força-velocidade devido à natureza isométrica do modelo. No modelo, as malhas da matriz e das fibras estão no mesmo espaço.

Segundo Tang, Zhang e Tsui (2009) o músculo esquelético também pode ser modelado como um composto reforçado com fibra em um nível ponto material ao invés do nível elemento. A orientação da fibra em cada um dos elementos foi determinada por uma linha que une dois pontos centrais em duas superfícies do elemento em que houve uma orientação mínima. A maioria dos modelos que levam em consideração as fibras consideram que estas estão associadas diretamente com a malha do músculo, ou seja, é necessária a coincidência dos nós.

Yamamura et al. (2014) também consideram o músculo com fibras, onde as orientações das fibras foram definidas em cada ponto de material dos elementos finitos (pontos de Gauss).

Webb, Blemker e Delp (2014) mostram a importância de definir uma distribuição de fibras mais realista, comparando com a informação obtida por imagens tomográficas, porém consideram a malha das fibras correspondente ou ligada a malha da parte passiva (matriz).

Baiocco, Coda e Paccola (2013a) apresentam uma estratégia simples para modelar os músculos esqueléticos associados com ossos. A abordagem permite introduzir fibras musculares ativas no interior de um tecido sem aumentar o número de graus de liberdade do contínuo (músculo). O modelo desenvolvido foi implementado em duas dimensões e a abordagem foi não-linear geométrica. A pesquisa concluiu que a metodologia proporciona bons resultados e eventualmente pode permitir a implementação de um modelo mais realista. Pereira (2015) estenderam a metodologia, de introduzir as fibras, para três

¹¹ Cada uma dessas fibras musculares esqueléticas é formada por fibras menores chamadas miofibrilas

dimensões em outras aplicações.

Chagnon, Rebouah e Favier (2015) fazem uma revisão das funções de energia de deformação para tecidos biológicos moles, onde abordam a influência de acoplamento das fibras em modelos anisotrópicos. Neste trabalho, acoplamentos como o cisalhamento entre as fibras e a matriz e a interação entre as fibras, são considerados na equação constitutiva; No caso do cisalhamento, o tecido é considerado como um material composto e a energia de deformação é decomposta em três partes: a parcela da matriz, das fibras e da interação fibra-matriz (CHAGNON; REBOUAH; FAVIER, 2015).

Contudo, um modelo tridimensional, isocórico e com fibras desacopladas não tem sido utilizado para modelar músculos esqueléticos, sendo um dos objetivos deste trabalho.

1.2.5 Limitações na modelagem

As limitações encontradas nos modelos pesquisados são:

1. A interação mecânica entre fibras e matriz tem sido agrupada em um elemento finito homogenizado, este fato não suporta uma avaliação da interação entre as estruturas intracelulares e da matriz; e portanto não permite determinar a transmissão de força lateral ¹².
2. A maioria dos modelos desenvolvidos, que consideram o músculo como um material composto com fibras, têm a malha da fibra vinculada à malha da matriz, o que pode ocasionar custo computacional muito elevado para as análises.
3. Dado que a quantidade de fibras depende da discretização da malha da matriz e não das propriedades arquitetônicas do músculo, a densidade das fibras é ignorada, assim como sua distribuição na matriz.
4. As propriedades dos materiais são consideradas como idênticas para todas as fibras.
5. A maioria dos modelos consideram modelos geométricos simplificados e no plano; a obtenção de geometrias reais através de imagens tomográficas é mais realista.

1.3 Método dos Elementos Finitos na Biomecânica

Nesta seção são apresentadas as modelagens bidimensionais e tridimensionais de músculos esqueléticos pelo Método dos Elementos Finitos - MEF, encontradas na literatura. Destaca-se o tipo de músculo modelado e o tipo de elemento finito utilizado para representar as estruturas do músculo (matriz, aponeurose, tendão, fibras).

Modelos bidimensionais

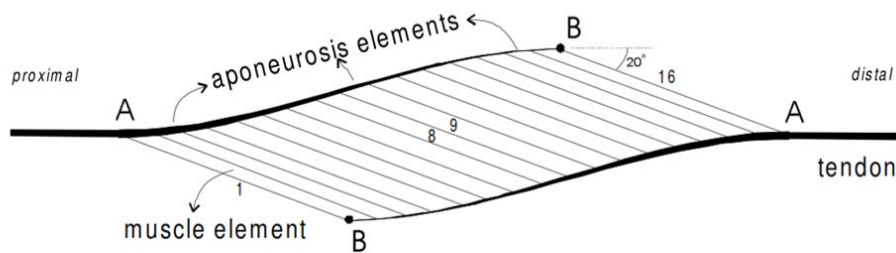
Van der Linden (1998) fez a modelagem do músculo gastrocnêmio medial unipenado de um rato, utilizando uma representação bidimensional da área longitudinal média. O

¹² Força lateral ou de aderência entre as fibras e a matriz

autor utilizou 16 elementos musculares em paralelo e 40 elementos para o tendão e aponeuroses, ver Figura 21a; este modelo foi baseado na suposição de tensão constante nas fibras ao longo do seu comprimento, portanto apenas um elemento foi usado para cada fibra. Este modelo previu a característica de comprimento-força e os resultados foram compatíveis com os resultados experimentais.

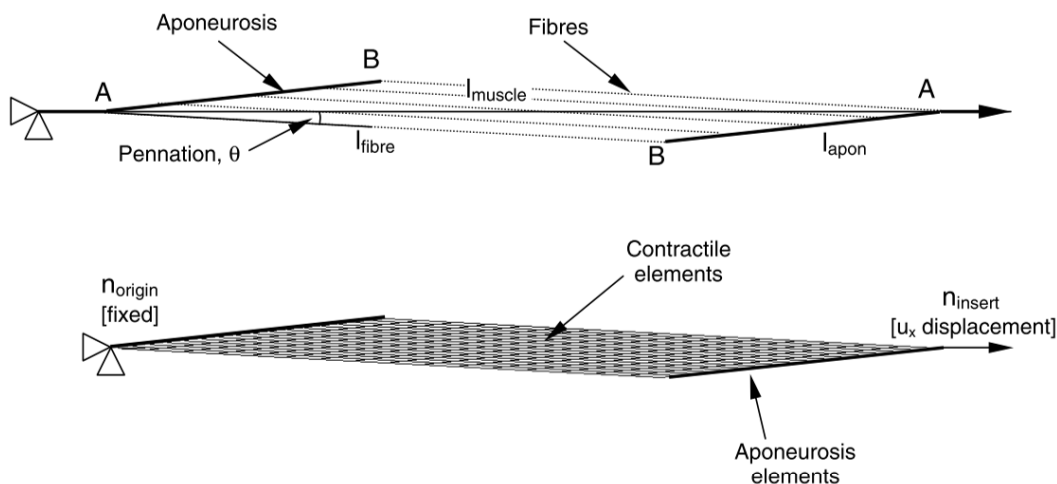
Jenkyn et al. (2002) fizeram a modelagem do músculo tibial anterior do coelho, ver Figura 21b, usando o software comercial Ansys® 5.7; utilizando dois tipos de elementos para a aponeurose (elementos de mola lineares: COMBIN39) e para os elementos contráteis (Elemento criado no código fonte Fortran e compilado no Ansys®). Nesse trabalho, para considerar a quase incompressibilidade numericamente, usou-se uma função penalidade que minimiza a mudança na área do elemento. Para formar cada fibra muscular foram conectados dezesseis elementos contráteis em serie.

(a) Músculo gastrocnêmio medial unipenado (GM) do rato



Modelo de Van der Linden (1998)

(b) Aproximação bidimensional do músculo TA do coelho



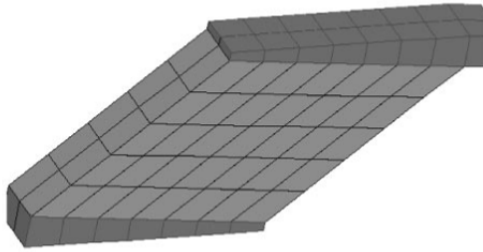
Modelo de Jenkyn et al. (2002)

Figura 21 – Modelos bidimensionais simplificados

Johansson, Meier e Blickhan (2000) utilizam o programa comercial Ansys® para modelar um músculo unipenado composto por dois tendões, ver Figura 22a; utilizaram elementos de oito nós que contém fibras paralelas geradoras de força. Outro modelo similar foi feito por Yucesoy et al. (2002), onde é utilizado um elemento para a matriz (elemento de

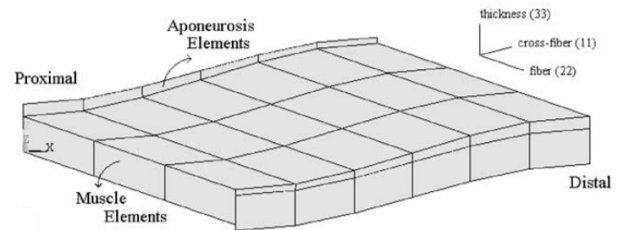
oito nós) e outro responsável pelas fibras musculares, ver Figura 22b; para a aponeuroses foi utilizado o elemento padrão com formulação hiperelástica (HYPER58 no *Ansys® 5.5.1*).

(a) Músculo unipenado



Modelo de Johansson, Meier e Blickhan (2000)

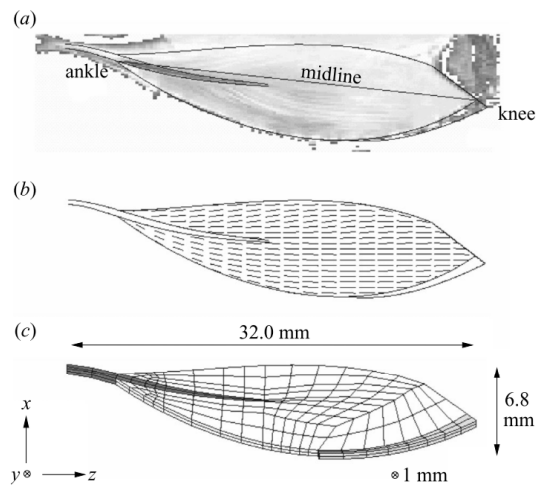
(b) Modelo geométrico



Modelo de Yucesoy et al. (2002)

Figura 22 – Modelos bidimensionais

No modelo desenvolvido por Oomens et al. (2003), a geometria do músculo tibial anterior foi construída de forma aproximada e dividida em elementos iso-paramétricos quadráticos, ver Figura 23

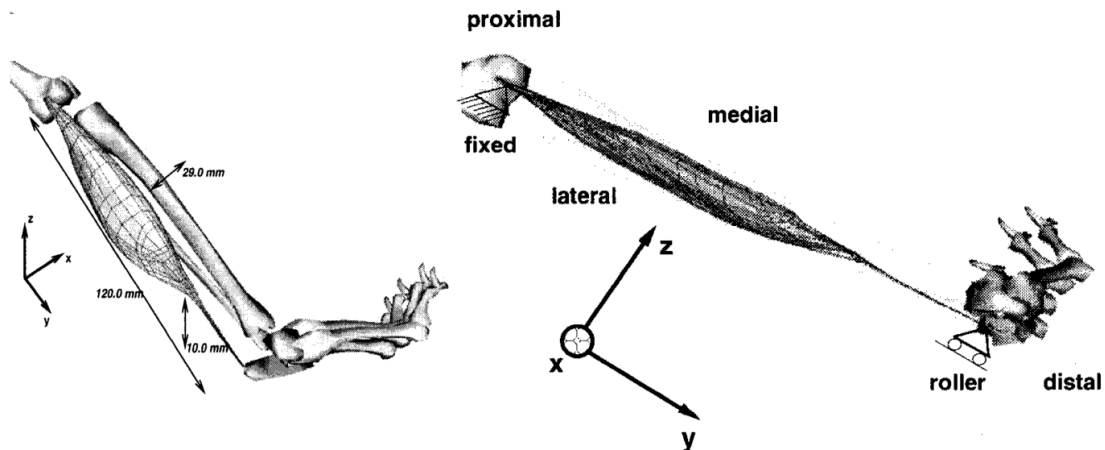


Modelo de Oomens et al. (2003)

Figura 23 – Modelo plano do músculo Tibial Anterior (TA) do rato

Modelos tridimensionais Rodriguez Lemos (2004) usou elementos hexaédricos de oito nós para a simulação dos músculos gastrocnêmio (GM) do gato e Tibial anterior (TA) humano, ver Figuras 24a e 24b, respectivamente. A malha do músculo GM com 370 elementos e do TA com 390, incluindo o tecido muscular, a aponeurose e o tendão. A orientação dos feixes das fibras foi usada para especificar a orientação dos elementos hexaédricos.

(a) Músculo gastrocnêmio do gato



(b) Músculo Tibial Anterior (TA) humano

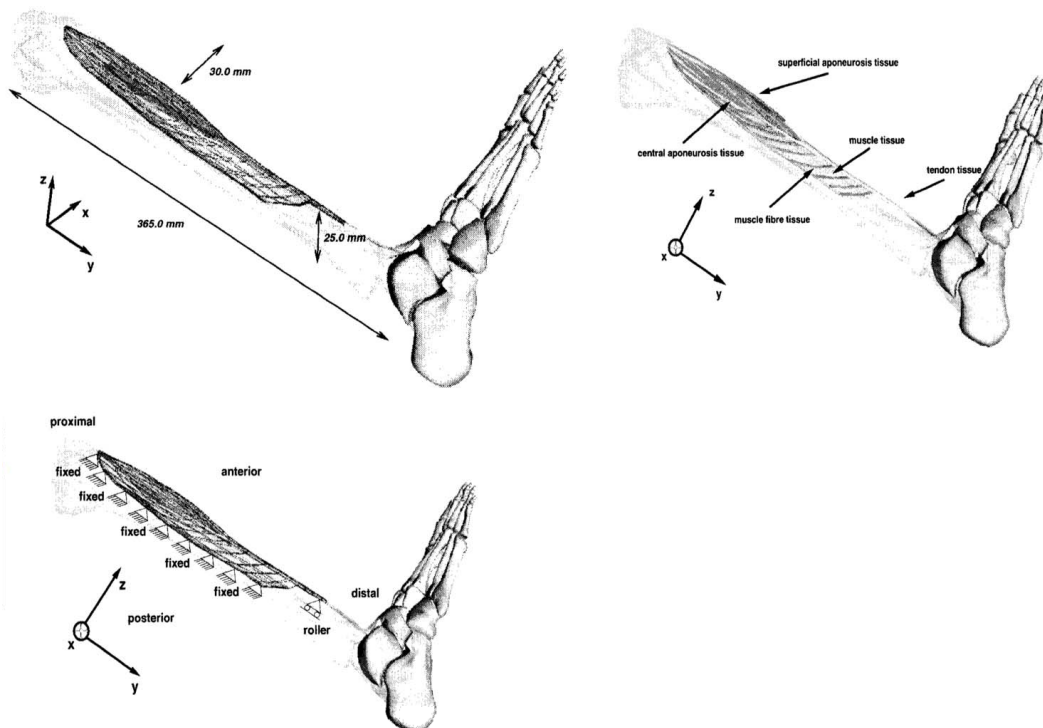


Figura 24 – Modelos 3D de Rodriguez Lemos (2004)

No modelo tridimensional desenvolvido por Oomens et al. (2003) foram usados três elementos isoparamétricos quadráticos na direção transversal; as direções das fibras foram escolhidas paralelas à curvatura, ver Figura 25a. Os modelos desenvolvidos por Spyrou

(2009) foram modelados no software comercial Abaqus, ver Figuras 25b e 25c.

Tang, Zhang e Tsui (2009) fizeram o modelo do músculo fusiforme de rã no programa de elementos finitos, software comercial, Abaqus; considerando a distribuição das fibras mostrada nas Figuras 25d e 25e e a contração isotônica.

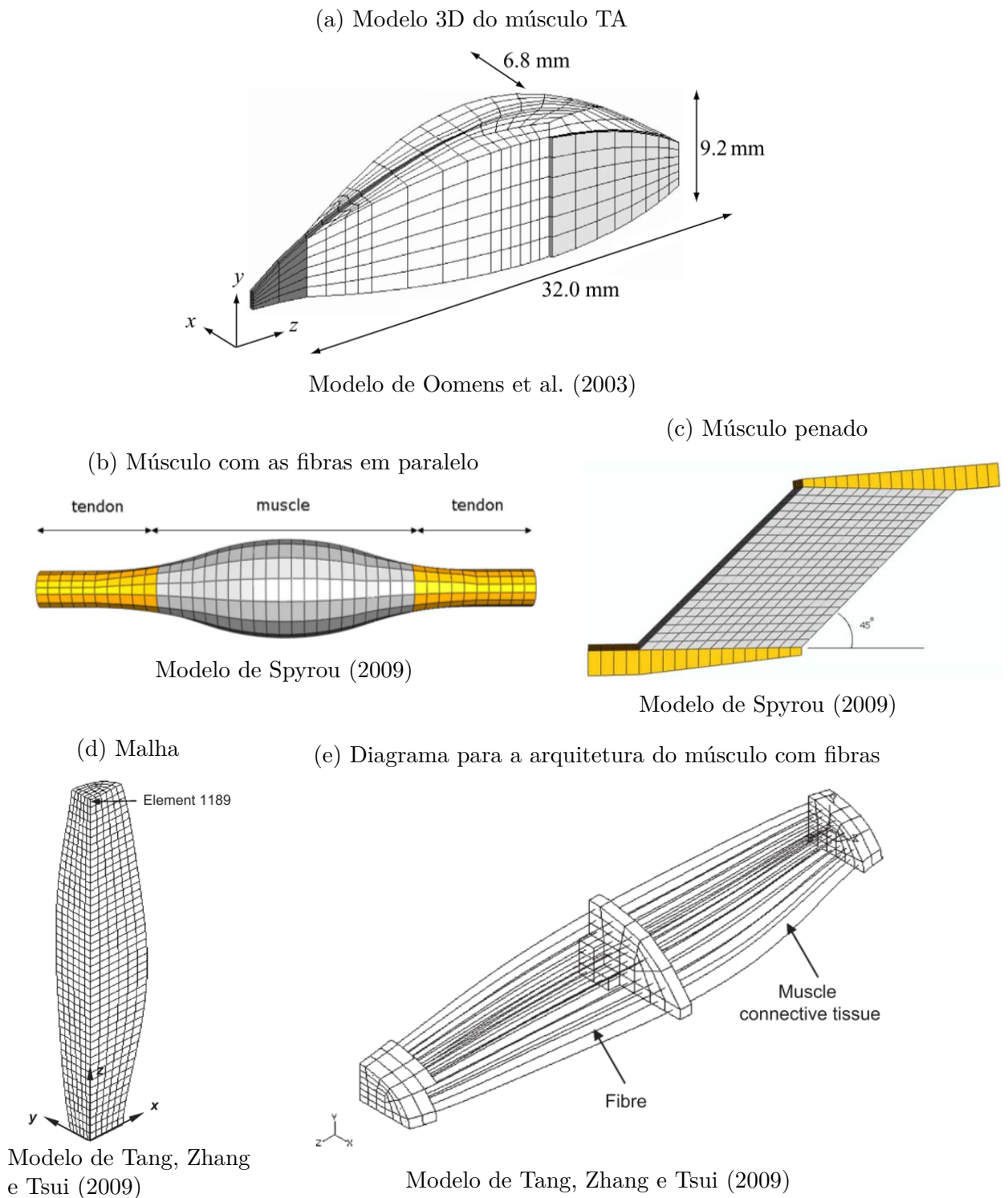


Figura 25 – Modelos tridimensionais

Joda (2016) no seu projeto de pesquisa fez simulações de elementos finitos ¹³ para modelar o músculo TA humano em alongamento passivo e contração ativa, tendo como resultados deslocamentos e pressões de fluido; destaca-se de este modelo a presença das aponeuroses, ver Figura 26. O autor utilizou a geometria e partiu da malha gerada, com o Software Mimics, por Jensen et al. (2016) resultando em 11808 elementos hexaédricos; e os resultados do mesmo autor em quanto as deformações volumétricas mostrados na Figura 27, onde são observadas nas regiões distal e anterior altas deformações e na região posterior deformações de compressão.

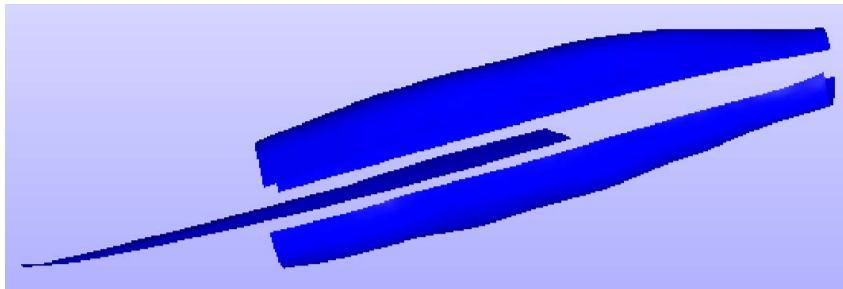


Figura 26 – Aponeuroses do músculo TA: anterior (superior), distal (média) e posterior (inferior) (JODA, 2016)

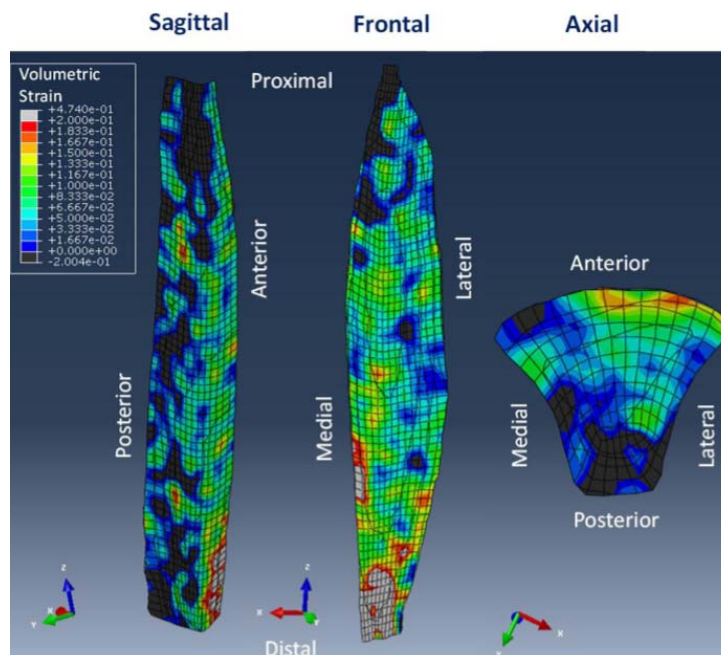


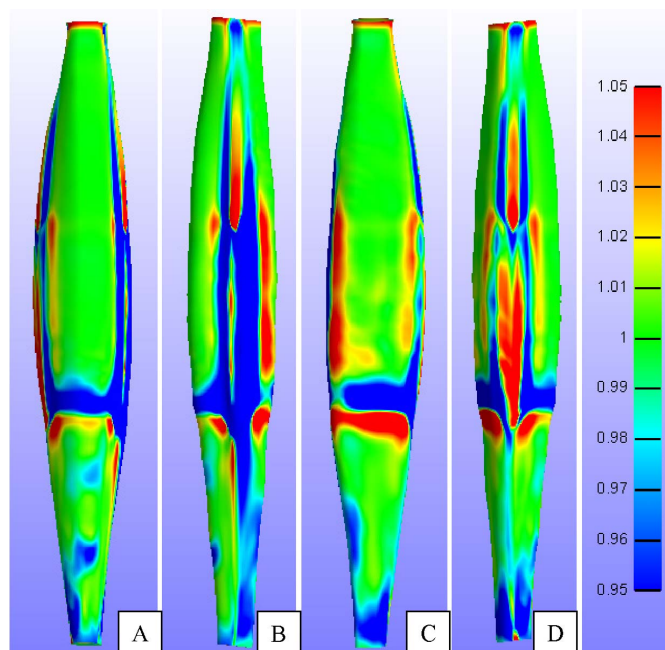
Figura 27 – Distribuição das deformações volumétricas do músculo TA de Jensen et al. (2016)

Joda (2016) fez um estudo de convergência da malha para a pressão hidrostática média do material muscular, produzida pelo alongamento passivo; para isso considerou 5 malhas de 12734, 23460, 37518, 55778 e 95114 elementos; sendo que para as simulações finais o autor adotou a quinta malha de 95114 elementos.

¹³ No programa FEBio: 'The FEBio software suite is a set of software tools for nonlinear finite element analysis in biomechanics and biophysic', <<https://febio.org/>>.

Nas simulações do comportamento passivo, Joda (2016) utilizou um deslocamento prescrito ao longo do eixo Z ou longitudinal, aplicado gradativamente até que o modelo do músculo chegara a uma deformação volumétrica de aproximadamente 22%; este valor foi baseado nos resultados de Jensen et al. (2016) para uma plantarflexão ¹⁴ de 26° (transformando a medida angular em uma deformação linear). Além das condições de carregamento, a simulação considera que nenhum fluido entra o sai do modelo durante a simulação, como seria a função do epimísio em torno das fibras musculares (JODA, 2016). Para o comportamento ativo, Joda (2016) modelou uma contração isométrica aplicando uma taxa de 5% de contração voluntária máxima (CVM), onde as extremidades (distal e proximal) da malha foram fixadas para permanecerem estacionárias; mantendo o comprimento do músculo constante.

Os resultados obtidos para o volume relativo (Jacobiano) na simulação do comportamento passivo, são mostrados na Figura 28; os outros resultados podem ser consultados na dissertação de Jensen et al. (2016).



Vista anterior (A), medial (B), posterior (C) e lateral (D)

Figura 28 – Volume relativo (Jacobiano) na simulação do comportamento passivo do músculo TA de Jensen et al. (2016)

Devido à disparidade nas leituras de deformação volumétrica entre as simulações e os dados de (JENSEN et al., 2016), Joda (2016) recomenda adicionar ao modelo tecidos circundantes como a fáscia e a tíbia, pois talvez o músculo esteja mais restrito em seu exterior para permitir alongamento longitudinal sem estreitamento significativo da seção transversal.

¹⁴ Ver movimento de plantarflexão na Figura 9c

MEF Posicional na Biomecânica

O MEF posicional tem sido empregado para diversas aplicações e desenvolvimentos na resolução de problemas não-lineares. Algumas dessas aplicações que servem como base para este projeto são: análises não lineares de pórticos, placas, chapas e cascas (CODA; PACCOLA, 2007), (CODA, 2009) e (SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2013), análises não lineares geométrico de chapas e sólidos considerando materiais hiperelásticos (PASCON, 2008; PASCON, 2012), análises de materiais compósitos reforçados com fibras em chapas e placas (VANALLI, 2004; VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008; VANALLI et al., 2010; SAMPAIO, 2014; SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2015; FRIEDEL, 2016) e em elementos sólidos (PEREIRA, 2015). Estes trabalhos foram desenvolvidos pelos membros do Grupo de Mecânica Computacional - GMEC, no qual se insere esta tese.

Exemplo bidimensional

Destacam-se as seguintes aplicações na área da biomecânica. Baiocco, Coda e Paccola (2013a) apresentaram o potencial do programa bidimensional com elementos de chapa reforçados com fibras através de um modelo de um braço sob forças externas, ver Figura 29.

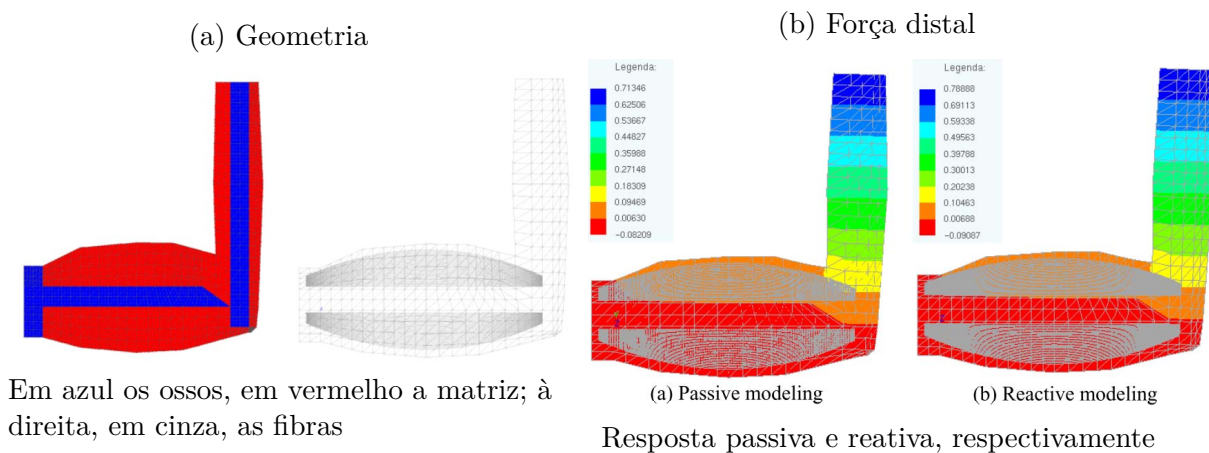
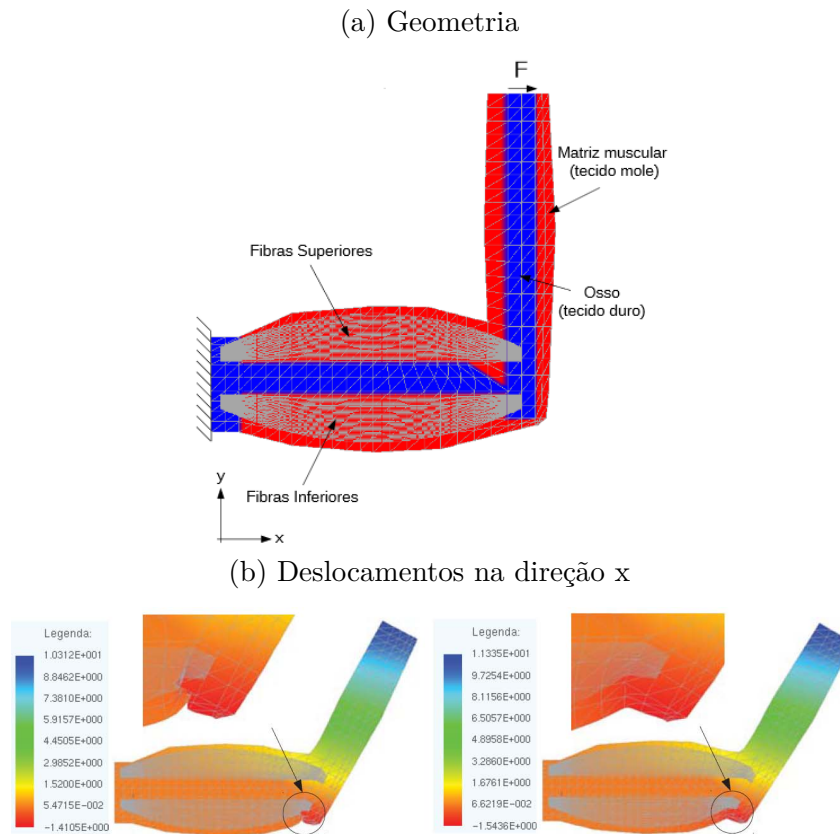


Figura 29 – Modelo plano de um músculo esquelético de Baiocco, Coda e Paccola (2013a)

Nesse trabalho, o tecido e os ossos foram discretizados por 640 elementos triangulares e foram consideradas 70 fibras em total para o músculo bíceps e tríceps. Foi aplicada uma força horizontal de 320 na extremidade do osso (onde ocorre a ligação com a mão). A força é aplicada de duas formas: da esquerda para a direita, afastando-se do braço, ('força distal'), onde basicamente ocorre a extensão do antebraço e da direita para a esquerda, aproximando o braço ('força proximal'), ou seja a flexão do antebraço. Os autores apresentaram dois modelos: o primeiro foi uma "modelagem passiva", o qual considerava todas as fibras passivas tensionadas com um módulo de elasticidade muito alto (300000), enquanto as fibras comprimidas tinham um módulo baixo; o segundo, foi uma "modelagem reativa", este considerava todas as fibras com um módulo de elasticidade baixo (300), mas aquelas

que estavam sujeitas a alongamento eram consideradas 'reativas'. Baiocco, Coda e Paccola (2013a) definiram as fibras reativas como um agente que era capaz de cancelar a tensão detectada (atuador). A contração foi aplicada no final de cada etapa. Foram utilizados 1000 passos de carregamento e o módulo de elasticidade para o osso foi de 15×10^7 .

Friedel (2016) considerou a mesma geometria do modelo de Baiocco, Coda e Paccola (2013a), ver Figura 30a, mas utilizando materiais hiperelásticos (como Saint Venant-Kirchhoff e Neo-hookeano) e elementos de barra com deformação não-linear de engenharia e com o 1º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Na Figura 30b se mostram os resultados do autor para o deslocamento na direção X , evidenciando que com a lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff ocorre auto-intersecção de material, enquanto o modelo Neo-hookeano foi fisicamente mais consistente (FRIEDEL, 2016).



Modelo Hiperelástico de Saint Venant-Kirchhoff e Neo-hookeano respectivamente

Figura 30 – Modelo plano de um músculo esquelético de Friedel (2016)

1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um programa computacional específico, para a modelagem e análise não linear geométrica de um músculo esquelético, considerando fibras desacopladas e o comportamento quase isocórico, via método dos elementos finitos escrito em função das posições. Além disso, implementar modelos constitutivos hiperelásticos desacoplados de Rivlin- Saunders e Hartmann-Neff, os quais permitem incluir a condição de quase-incompressibilidade da estrutura do músculo (ventre).

Para atingir o propósito principal da tese, tem-se os seguintes objetivos: revisar elementos da álgebra tensorial, cinemática, medidas de deformação e tensão e leis constitutivas hiperelásticas; fazer o levantamento bibliográfico sobre temas próprios da biomecânica, especificamente do sistema músculo esquelético; gerar a geometria tridimensional a partir da renderização de imagens tomográficas ou disponíveis na bibliografia usando o Mimics 3-Matic®; e finalmente, determinar a influência da densidade das fibras do músculo na geração de força durante a contração.

1.5 Justificativas

A adequada implementação numérica de modelos mecânicos tridimensionais de músculos, com resultados suficientemente precisos, continua sendo um problema de pesquisa aberto. Entre as principais dificuldades encontradas nesses estudos, estão:

- o comportamento dos materiais constituintes é capturado, geralmente, por modelos constitutivos complexos;
- os modelos atuais não conseguem capturar a interação entre as estruturas internas do músculo (fibras - matriz);
- há uma grande quantidade de variáveis envolvidas, sendo que nem todas têm sua importância bem ponderada;
- o envolvimento de diversas áreas da ciência dificulta o entendimento global dos problemas mecânicos em músculos esqueléticos;
- existem poucos trabalhos que considerem geometrias reais, pela dificuldade na sua obtenção.

Isto se deve à complexidade dos modelos constitutivos que conseguem capturar o comportamento mecânico dos materiais constituintes dos músculos e à grande quantidade de variáveis envolvidas no modelo numérico que estão mal caracterizadas; por exemplo, até agora não é possível determinar com exatidão, quais são os fatores que geram a força no músculo, as propriedades mecânicas dos músculos ou qual é o aporte de força que cada um dos músculos faz durante o movimento. Com isso, a simulação numérica é diretamente

afetada e não consegue proporcionar modelos confiáveis, de tal maneira que na atualidade, o modelo numérico é tomado apenas como um auxiliar no entendimento do comportamento do músculo durante o movimento.

Como mostrado na seção 1.3, os modelos numéricos de músculos esqueléticos têm evoluído rapidamente nos últimos anos, porém não existem ainda trabalhos científicos que considerem um modelo com fibras desacopladas para obter distribuições mais reais. Na literatura e particularmente no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP têm sido desenvolvidas pesquisas em diversos tópicos envolvidos neste trabalho, porém de forma separada. Por exemplo: Bonet et al. (2000), Coda e Greco (2004) propuseram a metodologia de elementos finitos baseado em posições, Pascon (2012) implementou modelos hiperelásticos que incluem a condição de conservação do volume em sólidos. Radtke, Simone e Sluys (2010), Vanalli, Paccola e Coda (2008), Sampaio, Paccola e Coda (2013), Sampaio (2014), Pereira (2015) implementaram fibras desacopladas em elementos bidimensionais e tridimensionais. Baiocco, Coda e Paccola (2013a) propuseram aplicar as fibras desacopladas em músculos bidimensionais. Friedel (2016) fez uma análise de estruturas planas com fibras ativas viscoelásticas com uma matriz com modelo constitutivo hiperelástico.

Assim, dada a necessidade de aperfeiçoar os modelos numéricos que simulem o comportamento mecânico de músculos esqueléticos, comparado com os modelos existentes na literatura, ver seção 1.3, o modelo proposto é um dos mais completos com relação ao número de fenômenos mecânicos considerados e pela representação geometria real (tanto da estrutura passiva como das fibras). Contudo, dadas as complexidades envolvidas no estudo, não se ambiciona ainda que o modelo consiga reproduzir o comportamento experimental de um músculo e sim mostrar a necessidade e o potencial de um modelo mais apurado. O trabalho definiu também as diretrizes para pesquisas futuras que complementam o modelo atual, para reproduzir o comportamento mecânico de músculos esqueléticos através de simulações numéricas.

1.6 Metodologia

A tese foi desenvolvida considerando estes quatro tópicos básicos:

- I. Revisão bibliográfica sobre as simulações e modelos constitutivos usualmente empregados em sistemas músculo esqueléticos.
 - i. Identificação dos diferentes tipos de músculos simulados até o momento para assim escolher o músculo que será modelado e renderizado no Mimics®. Para a inserção de fibras foi considerada a estratégia simples do Vanalli, Paccola e Coda (2008), Baiocco, Coda e Paccola (2013a), Pereira (2015).

2 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

O Método dos Elementos Finitos - MEF divide o domínio de integração, ou o contínuo, em um número finito de regiões chamados de *Elementos Finitos*, em outras palavras o meio contínuo passa a ser discreto (ASSAN, 2013). Adota-se para este trabalho a metodologia de elementos finitos baseada no teorema de mínima energia potencial e escrito em função das posições nodais e não dos deslocamentos (BONET et al., 2000; CODA; GRECO, 2004; CODA, 2009). A formulação posicional tem como diferencial o uso de posições nodais e não dos deslocamentos como incógnitas para solucionar, por exemplo, problemas que apresentem grandes deslocamentos e é conhecido como: Método dos Elementos Finitos Posicional. O método trabalha a partir de uma função de mudança de configuração para realizar o mapeamento posicional e, neste caso, utiliza a medida de deformação de Green para introduzir naturalmente a não linearidade geométrica.

No caso de elementos sólidos, segundo Maciel (2008), existem muitos trabalhos que desenvolvem formulações utilizando uma aproximação linear, os quais empregam estratégias melhorando o campo de tensões e deformações para contornar o problema de travamento devido ao polinômio de baixo grau adotado para aproximação das posições nodais. No caso de deformações, estratégias como “enhanced strains” ou campo de deformações otimizado (“assumed natural strains”), ocorrem quando se adiciona no termo da energia potencial total a parcela de energia ocasionada por essas deformações. No entanto, Düster, Hartmann e Rank (2003) afirmam que os problemas de travamento são eliminados ao usar elementos de alta ordem; por conseguinte Maciel (2008) adotou um elemento sólido tetraédrico de 20 nós (aproximação cúbica) assim demonstrou que efetivamente o travamento não aparece. O trabalho de Maciel (2008) constitui o primeiro trabalho desenvolvido no âmbito do grupo de pesquisa onde se insere o presente trabalho, sobre formulações de sólidos com grandes deslocamentos. Em seguida, inserido no mesmo grupo de pesquisa de Maciel (2008), Pascon (2012) fez a implementação computacional com sólidos tetraédrico e hexaédrico com grau de aproximação polinomial qualquer e modelos hiperelásticos com grandes deformações.

Neste capítulo apresenta-se a formulação de elementos finitos sólidos 2D e 3D com consideração de comportamento não linear geométrico. Para descrever o movimento das partículas emprega-se a descrição Lagrangiana total (HOLZAPFEL, 2000). Segundo Coimbra (1978), a descrição Lagrangiana é a mais adequada para descrever as deformações que ocorrem nos sólidos deformáveis. Aborda-se também a formulação para incluir reforço (fibras) numa posição qualquer do domínio (Tecido mole ou matriz), incluindo a ativação das mesmas em análises quasi-estáticas; além disso é apresentada a formulação para

Materiais hiperelásticos e finalmente, a técnica de solução de Newton Raphson para o sistema de equações não lineares de equilíbrio gerado pela formulação.

2.1 Formulação do MEF para elementos Sólidos 2D e 3D

A cinemática descreve o movimento de um corpo ou de uma estrutura, sem considerar as causas desta mudança. Para a cinemática a hipótese mais importante é admitir que o corpo é um meio contínuo (HOLZAPFEL, 2000), onde as grandezas de posição, velocidade, aceleração são representadas por meio de funções contínuas. Nesta pesquisa são utilizados elementos com base triangular: elementos triangulares de chapa (Sólido Plano, 2D) e elementos tetraédricos (Sólido, 3D).

Os elementos tetraédricos tem duas vantagens: os polinômios aproximadores são completos e se ajustam melhor a diferentes tipos de geometrias (CODA, 2017). Adicionalmente na área da Biomecânica, programas como o 3-Matic (3-MATIC. . . , 2015) geram malhas baseadas só em elementos tetraédricos.

Apresenta-se o desenvolvimento da formulação mostrando as pequenas variações para as chapas bidimensionais e para os sólidos; o detalhamento do cálculo de algumas das grandezas envolvidas nesta seção pode ser consultado em Coda (2017) . As chapas são de aproximação cúbica (10 nós) e os sólidos tetraédricos de aproximação qualquer (nos exemplos são utilizados elementos de aproximação cúbica). Para a integração numérica, para elementos finitos tetraédricos, utiliza-se a quadratura Gaussiana por ser a técnica mais eficiente (PASCON, 2012).

2.1.1 Função mudança de configuração

Com a função mudança de configuração é possível descrever o movimento do sólido. A configuração de referencia é conhecida para um instante t_0 , onde os pontos materiais do sólido ocupam uma região cujas posições são definidas pelo vetor \vec{x} ; representando a configuração indeformada do sólido. Depois de um instante t , o sólido passa a uma região chamada de configuração atual (ou deformada) cujas posições são definidas pelo vetor \vec{y} ; ver Figuras 31a e 31b.

Onde as funções f_0 e f_1 mapeiam do espaço adimensional até a configuração inicial e deformada, respectivamente; logo a transformação ou função mudança de configuração f , pode ser definido como:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (2.1)$$

Com essas definições se quantifica o movimento do sólido usando a função mudança de configuração. Através da avaliação da mudança de forma ponto a ponto, no contínuo, é calculada a energia de deformação. Esta função de mudança de configuração, é uma

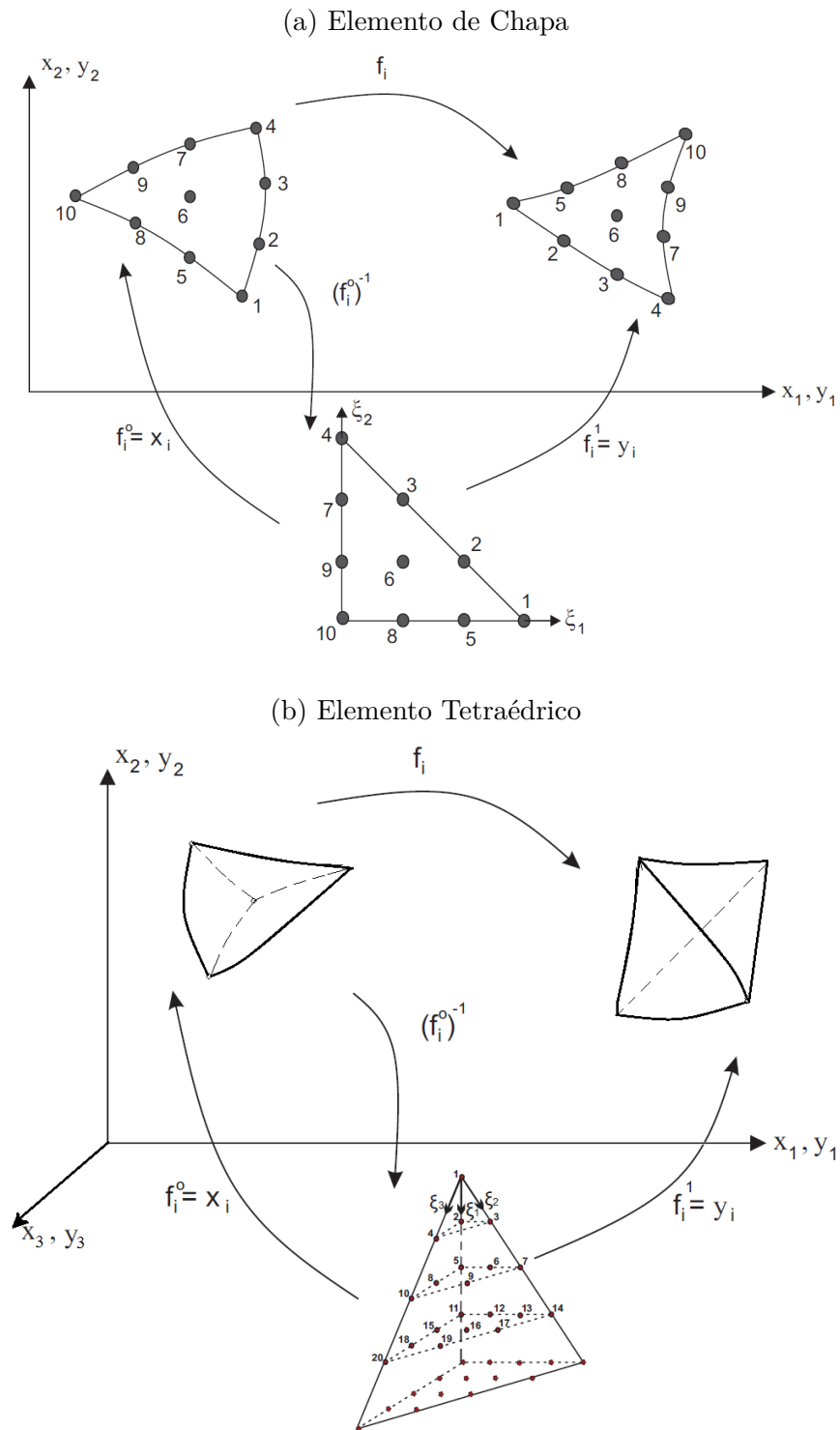


Figura 31 – Mapeamento

função matemática cujo gradiente indica a mudança de direção e comprimento de vetor infinitesimal dx no ponto X para dy em uma nova posição, ver Equação 2.2.

$$dy = Adx \tag{2.2}$$

Onde A , é um tensor que representa o gradiente da função mudança de configuração,

$Grad(f)$, ou seja fornece a variação de posição; determinado a partir dos valores das derivadas das funções de forma nodais.

A Figura 31a mostra um elemento de chapa triangular e a Figura 31b um elemento sólido tetraédrico, antes e depois de uma mudança de posição imposta por aplicação de carga externa ou deslocamento (recalque). X_α^β , define a posição inicial do elemento pelas posições iniciais dos nós, onde β é o nó e α representa a direção e Y_α^β representa as posições atuais (incógnitas) dos nós. Para descrever o elemento, utiliza-se o espaço adimensional auxiliar definido por ξ .

Definem-se as funções de mapeamento para o elemento de chapa, como sendo:

$$f_i^0 = X_i = \phi_l(\xi_1, \xi_2) X_i^l \quad (2.3)$$

$$f_i^1 = Y_i = \phi_l(\xi_1, \xi_2) Y_i^l \quad (2.4)$$

e para o elemento tetraédrico, como:

$$f_i^0 = X_i = \phi_l(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_i^l \quad (2.5)$$

$$f_i^1 = Y_i = \phi_l(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y_i^l, \quad (2.6)$$

onde, l é o número de nós e ϕ_l são as funções de forma.

Não é necessário calcular $(\vec{f}_0)^{-1}$, já que a função mudança de configuração pode ser escrita como:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.7)$$

onde a matriz A^1 relaciona-se à posição tentativa e A^0 à posição inicial. Uma vez definido o gradiente da função mudança de configuração, define-se a medida de deformação.

Outra medida bastante útil é o alongamento à direita de Cauchy-Green (tensor de segunda ordem definido positivo) $C = A^T A$ ou $C_{ij} = A_{ik}^T A_{kj}$. Para operações bidimensionais, as matrizes A^1 e A^0 são de dimensão 2×2 e para as tridimensionais são de dimensão 3×3 .

A medida de deformação de *Green* é adotada neste trabalho e pode ser calculada em função das posições, como sendo:

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}((A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I) \quad (2.8)$$

onde I é o tensor identidade de segunda ordem e para A^0 e A^1 :

$$A^0 = f_{i,j}^0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}; A^1 = f_{i,j}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Ou em geral, para o caso 2D e 3D, de forma indicial como:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (2.10)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} Y_i^l \quad (2.11)$$

Para o sólido 2D de aproximação cúbica e para o sólido 3D, as funções de forma e suas derivadas são apresentadas no Anexo C.

2.1.2 Energia específica de deformação

Apresenta-se inicialmente a energia específica de deformação para o modelo constitutivo mais simples (modelo de Saint-Venant-Kirchhoff - SVK), sendo que para os materiais hiperelásticos, apresenta-se toda a formulação na seção 2.3.

A energia específica de deformação para o modelo SVK de forma generalizada é dada por:

$$u_e^{svk}(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathfrak{C}_{kl ij} E_{ij} \quad (2.12)$$

Onde \mathfrak{C} é o tensor constitutivo elástico constante de quarta ordem, de forma geral como:

$$\mathfrak{C}_{kl ij} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} \quad (2.13)$$

O tensor \mathfrak{C} é simétrico (nos conjuntos de índices kl e ij) e pela simetria da deformação de Green, possui 21 termos independentes para materiais anisotrópicos gerais. Para materiais isotrópicos a energia de deformação 3D, Equação 2.12, pode ser escrita como:

$$u_e^{svk} = \frac{G}{1-2\nu} ((1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2 + E_{13}^2 + E_{31}^2 + E_{23}^2 + E_{32}^2)) \quad (2.14)$$

Para o Estado Plano de Deformação (EPD), pode-se escrever como:

$$u_{eEPD}^{svk} = \frac{1}{2} ((1-\nu)k(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2k\nu(E_{11}E_{22}) + 2G(E_{12}^2 + E_{21}^2)) \quad (2.15)$$

E para o Estado Plano de Tensão (*EPT*) como sendo:

$$u_{eEPT}^{svk} = \frac{G}{1-\nu} ((E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2))) \quad (2.16)$$

onde, $k = \frac{\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}$ e \mathbb{E} é o módulo de Young.

Integrando-se a energia específica de deformação, u_e^{svk} da Equação 2.12 sobre o volume inicial do elemento, encontra-se a energia de deformação acumulada no elemento devida à mudança de posição como sendo:

$$U_e = \int_{V_o} u_e dV_o \quad (2.17)$$

A energia de deformação total no elemento de chapa pode ser escrita como na Equação 2.18 e calculada numericamente em domínios triangulares usando o procedimento descrito por Assan (2013), ver Equação 2.19.

$$U_e = e \int_{S_o} u_e dS_o \quad (2.18)$$

$$= e \sum_{ih=1}^{nh} (u_e)_{ih} \det(A^o)_{ih} w_{ih} \quad (2.19)$$

onde w_{ih} é o peso para cada ponto de integração de Hammer e $J = \det(A^o)$ é chamado de Jacobiano da transformação, uma vez que a integração numérica utiliza domínio diferente de integração.

2.1.3 Princípio da Mínima Energia Potencial Total

A energia potencial total de um sistema mecânico é igual a soma da energia de deformação armazenada na estrutura e do potencial das forças externas. As forças externas são consideradas como conservativas, pois não dependem da posição assumida após a mudança de configuração. A expressão do funcional de energia potencial total, Π , é definida como sendo:

$$\Pi = U_e + P + K \quad (2.20)$$

onde, P , é a energia potencial das forças externas, ver Equação 2.21, U_e , é a energia de deformação da estrutura toda, a qual é constituída pela soma das energias de deformação de cada elemento e K , é a energia cinética.

Para problemas estáticos, a energia cinética $K = 0$. As forças externas podem ser de volume, de superfície ou apenas forças concentradas, logo P é calculado como:

$$P = - \int_V \vec{b} \cdot \vec{y} dV - \int_A \vec{t} \cdot \vec{y} dA - \vec{F} \cdot \vec{y} \quad (2.21)$$

2.1.4 Equilíbrio

A estrutura encontra-se em equilíbrio quando a primeira derivada do funcional é igual a zero. O equilíbrio se estabelece com relação às posições nodais, assim:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_\alpha^\beta} = 0 \quad (2.22)$$

O equilíbrio ocorre, segundo o princípio da energia potencial estacionária, quando sua variação é nula e é estável quando a posição de equilíbrio é um mínimo 'local' ou 'global'.

Para problemas estáticos, aplicando a Equação 2.22 sobre a Equação 2.20 e considerando as Equações 2.21 e 2.17, o equilíbrio fica:

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha^\beta} \left(\int_{V_o} u_e dV_o \right) - F_\alpha^\beta = (F_\alpha^\beta)^{int} - F_\alpha^\beta = 0 \quad (2.23)$$

A primeira parcela é a chamada força interna, para calcular este valor usa-se o conceito de conjugado energético, isto é, a derivada da energia de deformação em relação a posição é tensão que quando integrada resulta força, ver Equação 2.24.

$$F_\alpha^\beta = \frac{\partial U_e}{\partial y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha^\beta} \left(\int_{V_o} u_e dV_o \right) = \int_{V_o} f_\alpha^\beta dV_o \quad (2.24)$$

O elemento de chapa adotado é de aproximação cúbica, com 10 nós e 20 graus de liberdade; então o vetor de forças internas terá 20 componentes resolvendo a integral numericamente da seguinte forma:

$$F_\alpha^\beta = \sum_{ih=1}^{nh} (f_\alpha^\beta)_{ih} J_{ih} w_{ih} e, \quad (2.25)$$

onde $J_{ih} = \det(A_0^{ih})$ é o Jacobiano e o f_α^β , é a contribuição da força interna de cada ponto $\vec{\xi}$, definida como sendo:

$$f_\alpha^\beta = \frac{\partial u_e}{E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{y_\alpha^\beta} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{y_\alpha^\beta} \quad (2.26)$$

A equação de equilíbrio, Equação 2.23 tem uma característica não linear e dado que para calcular a força interna é usado um vetor posição arbitrária y^{tent} , a Equação 2.23 já não é mais igual a zero, portanto:

$$(F_\alpha^\beta)^{int} - F_\alpha^\beta = g_\alpha^{\beta(tent)} \neq 0, \quad (2.27)$$

onde, $g_\alpha^{\beta(tent)}$ é chamado de vetor de desbalanceamento mecânico. Esse vetor é uma "medida" da qualidade da posição tentativa adotada inicialmente. Aplicando a expansão em serie de Taylor na Equação 2.27, fica:

$$\begin{aligned} g_\alpha^\beta &= g_\alpha^{\beta(tent)} + \frac{\partial g_\alpha^\beta}{\partial y_\alpha^\zeta} \Delta y_\gamma^\zeta + (O_\alpha^\beta)^2, \\ \vec{g} &= \vec{g}^{(tent)} + \frac{\partial \vec{g}^{(tent)}}{\partial \vec{y}} \Delta \vec{y} + (O)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Resolvendo-se a Equação 2.28, encontra-se a correção Δy , para $y^{(tent)}$, como:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{Est} &= \vec{g}^{(tent)} + \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{y} \partial \vec{y}} \Delta \vec{y} + (O)^2 = 0, \\ \vec{g}_{Est}^{(tent)} + H \Delta \vec{y} + (O)^2 &= 0, \\ H \Delta \vec{y} &= -\vec{g}_{Est}^{(tent)} + (O)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

A correção fica como:

$$\Delta \vec{y}_{corr} = -H \vec{g}_{Est}^{(tent)}, \quad (2.30)$$

onde H é a matriz Hessiana calculada como:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma\zeta} &= \frac{\partial g_\alpha^\beta}{\partial y_\gamma^\zeta} = \frac{\partial}{\partial y_\gamma^\zeta} ((F_\alpha^\beta)^{int} - F_\alpha^\beta), \\ H_{\alpha\beta\gamma\zeta} &= \frac{\partial (F_\alpha^\beta)^{(int)}}{\partial y_\gamma^\zeta} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Considerando a expressão para o $(F_\alpha^\beta)^{(int)}$ da Equação 2.24, então a matriz Hessiana pode ser escrita como sendo:

$$(H_{\alpha\beta\gamma\zeta})_{Est} = \frac{\partial}{\partial y_\gamma^\zeta} \left(\int_{V_o} f_\alpha^\beta dV_o \right) \quad (2.32)$$

$$= \int_{V_o} h_{\alpha\beta\gamma\zeta} dV_o \quad (2.33)$$

$$(H_{\alpha\beta\gamma\zeta})_{Est} = \sum_{ih=1}^{nh} h_{\alpha\beta\gamma\zeta}(\xi)_{ih} J_{ih} w_{ih}, \quad (2.34)$$

onde $h_{\alpha\beta\gamma\zeta}$ é a contribuição da hessiana calculada em cada ponto de integração, dada por:

$$h_{\alpha\beta\gamma\zeta} = \frac{\partial}{\partial y_\gamma^\zeta} \left(\frac{\partial u_e}{E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial y_\gamma^\zeta} \left(S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{y_\alpha^\beta} \right) \quad (2.35)$$

Para problemas dinâmicos¹ de forma geral, o equilíbrio fica definido como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_\alpha^\beta} \left(\int_{V_o} u_e dV_o \right) - F_\alpha^\beta + \frac{\partial K}{\partial y_\alpha^\beta} + \frac{\partial Q}{\partial y_\alpha^\beta} &= 0, \\ (F_\alpha^\beta)^{int} - F_\alpha^\beta + (F_\alpha^\beta)^{inercial} + (F_\alpha^\beta)^{amort} &= 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $(F_\alpha^\beta)^{inercial} = M_\alpha^\beta \ddot{y}_\alpha^\beta$ é a força inercial e $(F_\alpha^\beta)^{amort} = \mathbf{C} \dot{y}$ e a força de amortecimento.

Partindo do vetor de desbalanceamento dinâmico em um tempo $(s + 1)$:

$$\vec{g}(y_{s+1}^{tent}) = (F_{s+1})^{int} - (F_{s+1})^{ext} + M \vec{\ddot{y}}_{s+1} + \mathbf{C} \vec{\dot{y}}_{s+1} = 0 \quad (2.37)$$

Para resolver a Equação 2.36 substituindo \vec{y} pela seguinte aproximação: $\dot{y}_{s+1} = \frac{y_{s+1} - y_s}{\Delta t}$, assim $y_{s+1} = \dot{y}_{s+1} \Delta t + y_s$ e finalmente, se utiliza a aproximação de Newmark, assim temos:

$$\begin{aligned} y_{s+1} &= y_s + \Delta t \dot{y}_s + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{y}_s + \beta \ddot{y}_{s+1} \right] \\ \dot{y}_{s+1} &= \dot{y}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{y}_s + \gamma \Delta t \ddot{y}_{s+1}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/2$ são os parâmetros de Newmark.

Substituindo as expressões da Equação 2.38 na Equação 2.37 temos:

$$\vec{g}(y_{s+1}^{tent}) = (F_{s+1})^{int} - (F_{s+1})^{ext} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} \vec{y}_{s+1} - M \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \vec{y}_{s+1} + \mathbf{C} \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \vec{Q}_s = 0, \quad (2.39)$$

onde $Q_s = \frac{y_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{y}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{y}_s$ e $R_s = \dot{y}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{y}_s$ e definindo $\vec{P}_s = -(M + \gamma \mathbf{C} \Delta t) \vec{Q}_s + \mathbf{C} \vec{R}_s$, o vetor de desbalanceamento dinâmico pode ser escrito como:

$$\vec{g}(y_{s+1}^{tent}) = (F_{s+1})^{int} - (F_{s+1})^{ext} + \left(\frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \right) \vec{y}_{s+1} + \vec{P}_s = 0, \quad (2.40)$$

Finalmente a matriz Hessiana dinâmica fica definida como sendo:

$$(H_{\alpha\beta\gamma\zeta})_{Din} = (H_{\alpha\beta\gamma\zeta})_{Est} + \left(\frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \right) \quad (2.41)$$

A medida de tensão utilizada é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, obtida a partir da energia específica de deformação, que é conjugada da deformação de Green-Lagrange, ou seja:

$$S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \quad (2.42)$$

¹ Implementado, mas não simulado

2.2 Reforço numa posição qualquer do domínio

Vanalli (2004), Vanalli, Paccola e Coda (2008), Radtke, Simone e Sluys (2010) apresentaram a formulação do MEF para a consideração do reforço numa posição qualquer no domínio. A partir da energia total, pode-se obter a matriz de rigidez do "domínio reforçado". Nesta formulação, as fibras estarão contribuindo na rigidez do elemento finito (ou dos elementos finitos) no qual ela está inserida (VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008); ou seja é considerado um acoplamento rígido ou aderência perfeita entre as fases.

A formulação de Vanalli, Paccola e Coda (2008), Radtke, Simone e Sluys (2010), Pereira (2015) é utilizada nesta tese como base para a implementação do reforço por fibras, inclusive para simular as fibras de um músculo esquelético. Nesta seção será explicada a metodologia para ser implementada, considerando elementos finitos de barra simples como fibras. Inicialmente é apresentada de forma resumida a formulação para análise não linear geométrica de treliça plana no caso estático, para introduzir posteriormente o caso dinâmico utilizado inicialmente em Sanchez e Coda (2016).

2.2.1 Energia específica de deformação em uma barra de treliça

Para expressar a energia de deformação em função das posições, é necessário definir a medida de deformação. A Figura 32 mostra o elemento de treliça, ou fibra, na configuração inicial B_0 e depois da mudança de posição imposta por aplicação de carga externa ou deslocamento, B .

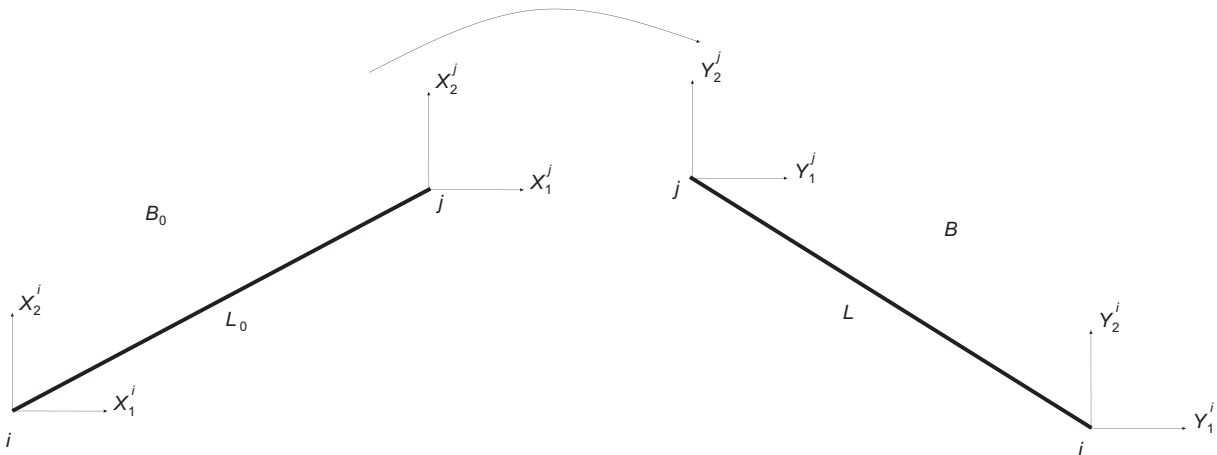


Figura 32 – Elemento de treliça plana (Fibra) nas configurações inicial e final.

Os quadrados dos comprimentos inicial e final (ou atual) são calculados para o caso 2D pelas expressões: $L_0^2 = (X_1^j - X_1^i)^2 + (X_2^j - X_2^i)^2$ e $L^2 = (Y_1^j - Y_1^i)^2 + (Y_2^j - Y_2^i)^2$, respetivamente. Para o caso 3D: $L_0^2 = (X_1^j - X_1^i)^2 + (X_2^j - X_2^i)^2 + (X_3^j - X_3^i)^2$ e $L^2 = (Y_1^j - Y_1^i)^2 + (Y_2^j - Y_2^i)^2 + (Y_3^j - Y_3^i)^2$.

Define-se a deformação de Green uniaxial como sendo:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right). \quad (2.43)$$

A partir da expressão da deformação, Equação 2.43, escolhe-se a relação constitutiva uniaxial de Saint-Venant Kirchoff para representar o material, sendo a energia de deformação da fibra dada por:

$$\bar{u}^{Fibra} = \frac{1}{2} \mathbb{E} \bar{E}^2, \quad (2.44)$$

onde, \mathbb{E} é o módulo elasticidade longitudinal (Módulo de Young).

A energia de deformação acumulada no elemento de treliça, ou barra, devida à mudança de configuração, é obtida fazendo a integral da energia específica e dado que o volume inicial $V_0 = A_0 L_0$, a Equação 2.44 fica como:

$$\bar{U}_e^{Fibra} = \int_{V_0} \bar{u}^{Fibra} dV_0 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \bar{E}^2 V_0 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \bar{E}^2 A_0 L_0, \quad (2.45)$$

onde A_0 é a área inicial da seção transversal.

A Energia Potencial Total de um sistema mecânico estático é dada por $\Pi_{Est} = \bar{U}_e + P$; onde, \bar{U}_e é a energia de deformação armazenada no corpo e $P = -\bar{F}_\alpha^\beta Y_\alpha^\beta$ é o potencial de realizar trabalho das forças externas. Procede-se então com a análise de equilíbrio. Diferencia-se o potencial com relação às posições nodais igualando-se o resultado à zero, assim:

$$\frac{\partial \Pi_{Est}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial \bar{U}_e^{Fibra}}{\partial Y_\alpha^\beta} - \bar{F}_\alpha^\beta = 0. \quad (2.46)$$

Utilizando o conceito de conjugado energético: "a força é a derivada da energia de deformação em relação a posição" com isso, pode-se escrever a força interna, $(\bar{F}_\alpha^\beta)^{Fibra}$, como:

$$(\bar{F}_\alpha^\beta)^{Fibra} = \frac{\partial \bar{U}_e^{Fibra}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E} \bar{E}^2 A L_0 \right) = \mathbb{E} \bar{E} A L_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta}, \quad (2.47)$$

onde, $\frac{\partial \bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta}$ é calculado a partir da Equação 2.43, para o caso de aproximação linear, como: $\frac{\partial \bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{L_0^2} (Y_\alpha^2 - Y_\alpha^1)$.

A equação de equilíbrio dada pela expressão da Equação 2.46, pode ser reescrita, assim:

$$\frac{\partial \Pi_{Est}}{\partial Y_\alpha^\beta} = (\bar{F}_\alpha^\beta)^{Fibra} - \bar{F}_\alpha^\beta = (\bar{g}_\alpha^\beta)^{Est}. \quad (2.48)$$

A Equação 2.48 é satisfeita na condição de equilíbrio. Dado que a força interna é calculada com uma posição tentativa, o qual constitui o ponto de partida na busca da solução do problema, a Equação 2.48 será diferente de zero. Logo o $(\bar{g}_\alpha^\beta)_{Fibra}^{Est}$ é chamado de vetor de desbalanceamento estático, a busca de que este seja igual a zero implica a procura da posição de equilíbrio.

Outro valor necessário no processo de busca da solução do sistema não linear é a chamada Hessiana $\bar{H}_{\alpha\beta\gamma\zeta}^{Fibra}$, que no caso estático é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{H}_{\alpha\beta\gamma\zeta}^{Fibra} &= \frac{\partial(\bar{F}_\alpha^\beta)_{Fibra}}{\partial Y_\gamma^\zeta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta}(\mathbb{E}\bar{E}AL_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta}) \\ &= \mathbb{E}AL_0\left(\frac{\partial\bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta}\frac{\partial\bar{E}}{\partial Y_\gamma^\zeta} + \bar{E}\frac{\partial\bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta\partial Y_\gamma^\zeta}\right),\end{aligned}\quad (2.49)$$

onde $\frac{\partial\bar{E}}{\partial Y_\alpha^\beta\partial Y_\gamma^\zeta} = \frac{(-1)^\beta(-1)^\zeta}{L_0^2}\delta_{\alpha\gamma}$ e $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ assumem valores de 1 ou 2 (no caso plano)

Equilíbrio Dinâmico

A Energia Potencial Total de um sistema mecânico dinâmico é dada por:

$$\Pi_{Estac} = \bar{U}_e^{Fibra} + P + K, \quad (2.50)$$

onde, \bar{U}_e é a energia de deformação armazenada no corpo, $P = -\bar{F}_\alpha^\beta Y_\alpha^\beta$ é o potencial de realizar trabalho das forças externas e K é a energia cinética.

Substituindo os dois índices, nó e direção, pelo índice de grau de liberdade global, a energia cinética é definida por: $K = \frac{1}{2}m_i(\dot{Y}_i)^2$, cuja derivada com relação às posições é $\frac{\partial K}{\partial Y_j} = m_j\ddot{Y}_j$. Logo a derivada da energia potencial total fica como:

$$\frac{\partial\Pi_{Estac}}{\partial Y_j} = \bar{F}_j^{Int} + M_{ij}\ddot{Y}_j + C_{ij}\dot{Y}_j - \bar{F}_j^{Ext} = (\bar{g}_j)_{Fibra}^{Din} = 0, \quad (2.51)$$

onde, M_{ij} é uma matriz diagonal que contém a massa dos nós, C_{ij} é matriz de amortecimento, considerada como proporcional à matriz de massa assim: $C_{ij} = c * M_{ij}$ e c é o amortecimento.

Algoritmo de Newton-Raphson, aproximação de Newmark

A Equação 2.51 representa a equação de equilíbrio dinâmico para qualquer tempo. O método de Newton Raphson consiste basicamente em expressar as posições e as velocidades segundo aproximações por diferenças finitas no domínio do tempo, chamadas de aproximações de integração temporal de Newmark:

$$Y_{t+1} = Y_t + \Delta t \dot{Y}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{Y}_t + \beta \ddot{Y}_{t+1} \right], \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{t+1} &= \dot{Y}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{Y}_t + \gamma \Delta t \ddot{Y}_{t+1}, \\ \ddot{Y}_{t+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} Y_{t+1} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} Y_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{Y}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{Y}_t, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ são parâmetros relacionados a precisão e estabilidade da integração temporal.

Então é possível expressar a Equação 2.51 para um instante $t + 1$ como sendo:

$$(g_{t+1})_{Fibra}^{Din} = F_{int} |_{t+1} + \frac{1}{\beta \Delta t} M Y_{t+1} - Q_t + C R_t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C Y_{t+1} - \gamma \Delta t C Q_t = 0 \quad (2.54)$$

onde, Q_t e R_t são os vetores que representam a contribuição dinâmica do tempo anterior t , definidos por: $Q_t = \frac{Y_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{Y}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{Y}_t$ e $R_t = \dot{Y}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{Y}_t$.

Derivando-se novamente o funcional obtém-se a matriz Hessiana dinâmica, como sendo:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} |_{t+1} = \frac{\partial^2 \bar{U}_e^{Fibra}}{\partial Y^2} |_{t+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (2.55)$$

Escolhendo Y^o como a previsão ou tentativa e fazendo $\bar{g}_{Fibra}(Y_{t+1}^o + \Delta Y_{t+1}) \rightarrow 0$, então:

$$\bar{g}(Y_{t+1}) = \bar{g}(Y_{t+1}^o) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial Y} |_{Y_{t+1}^o} \Delta Y_{t+1} = 0 \quad (2.56)$$

Logo, $\Delta Y_{t+1} \cong -\bar{H}_{Fibra}^{-1}(Y_{t+1}^o) \bar{g}_{Fibra}(Y_{t+1}^o)$ No decorrer do processo iterativo as posições nodais são corrigidas por: $Y_{t+1}^o = Y_{t+1}^o + \Delta Y_{t+1}$, até satisfazer a tolerância estabelecida. Atendendo o critério as variáveis são atualizadas fazendo-se:

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= Y_{t+1}^o + \Delta Y_{t+1} \\ \dot{Y}_{t+1} &= R_t + \gamma \Delta t \ddot{Y}_{t+1} \\ \ddot{Y}_{t+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} Y_{t+1} - Q_t \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.2.2 Inserção das fibras na Matriz

Apresenta-se o procedimento para acoplar as fibras à matriz considerando os aportes das forças internas e hessianas dos elementos do domínio (chapa ou sólido) e o reforço (treliça).

Acoplamento Fibras (Reforço) - Matriz (domínio)

O procedimento para o acoplamento foi formulado inicialmente por Vanalli, Paccola e Coda (2008) e usado posteriormente por Sampaio, Paccola e Coda (2013) para fibras curtas ou longas. Explica-se inicialmente as considerações com relação às fibras e posteriormente, o procedimento matricial para realizar o acoplamento. As fibras podem ser geradas sem a necessidade de que o seus nós coincidam com os nós da matriz, isto é, as fibras podem estar em qualquer posição.

Para estabelecer as coordenadas das fibras, \bar{x}_i^{Fib} e \bar{y}_i^{Fib} , estas são calculadas a partir das funções de forma do elemento finito do domínio (Chapa ou sólido) garantindo a perfeita aderência dos nós das fibras à matriz, ver expressões na Equação 2.58.

$$\begin{aligned}\bar{x}_i^{Fib} &= \phi_l^{Matriz}(\xi_i^p) \cdot x_i^{Matriz} \\ \bar{y}_i^{Fib} &= \phi_l^{Matriz}(\xi_i^p) \cdot y_i^{Matriz},\end{aligned}\tag{2.58}$$

onde, ϕ_l^{Matriz} são as funções de forma do elemento finito da matriz (de chapa ou do tetraedro) e ξ_1^p, ξ_2^p , são as coordenadas adimensionais do nó p da fibra no domínio da chapa ou do tetraedro, onde este se insere ou encontra-se conectado. Esta formulação tem um aporte muito importante desde o ponto de vista numérico, pois permite que as fibras sejam colocadas em qualquer posição do domínio do problema sem aumento dos graus de liberdade e coincidência de malhas.

Energia armazenada no corpo reforçado: matriz mais fibras

A Energia de deformação do corpo reforçado, \hat{U}_e^{Ref} , é dividida em duas parcelas: U_e^{Matriz} , é a energia de deformação armazenada nos elementos finitos da matriz (Chapa ou sólido) e \bar{U}_e^{Fibras} , é a energia de deformação armazenada nas fibras. Por conseguinte, os vetores de força e matriz hessiana tanto da matriz como das fibras são calculados independentemente e são feitas as contribuições dos dois meios simultaneamente.

$$\hat{U}_e^{Ref} = U_e^{Matriz} + \bar{U}_e^{Fibras}\tag{2.59}$$

Força Interna

$$(\hat{F}_\alpha^\beta)^{Ref} = \frac{\partial \hat{U}_e^{Ref}}{\partial y_\alpha^\beta(Matriz)}\tag{2.60}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_\alpha^\beta(Matriz)} \left(\int_{V_o} u_e^{Matriz} dV_o + \int_{\bar{V}_o} \bar{u}_e^{Fibras} (y_j^{Fibras}) d\bar{V}_o \right)$$

$$(\hat{F}_\alpha^\beta)^{Ref} = \int_{V_o} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_e^{Matriz}}{\partial E^{Matriz}} : \frac{\partial C^{Ref}}{\partial y_\alpha^\beta(Matriz)} \right) dV_o + \int_{\bar{V}_o} \frac{\partial \bar{u}_e^{Fibras}}{\partial y_i^p} \frac{\partial y_i^p}{\partial y_\alpha^\beta(Matriz)} d\bar{V}_o\tag{2.61}$$

onde, $\frac{\partial y_i^p}{\partial y_\alpha^\beta(\text{Matriz})} = \frac{\partial y_i^l}{\partial y_\alpha^\beta(\text{Matriz})} \phi_i^{\text{Matriz}}(\vec{\xi}^p) = \delta_{\alpha i} \phi^\beta(\vec{\xi}^p)$; se o nó da fibra pertence ao elemento da matriz $\delta_{\alpha i} = 1$.

Matriz Hessiana

$$\hat{H}_{\alpha\beta\gamma\zeta}^{\text{Ref}} = \int_{V_o} \frac{\partial^2 u_e^{\text{Matriz}}}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta} dV_o + \int_{\bar{V}_o} \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta} (\bar{y}_j(y_i^l)) d\bar{V}_o \quad (2.62)$$

A segunda derivada da energia de deformação da fibra reta em relação aos parâmetros nodais da matriz é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta} &= \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial \bar{y}_\omega^p \partial \bar{y}_\omega^p} \frac{\partial \bar{y}_\omega^p}{\partial y_\alpha^\beta} \frac{\partial \bar{y}_\omega^p}{\partial y_\gamma^\zeta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial \bar{y}_\omega^p \partial \bar{y}_\pi^n} \frac{\partial \bar{y}_\omega^p}{\partial y_\alpha^\beta} \frac{\partial \bar{y}_\pi^n}{\partial y_\gamma^\zeta} \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial \bar{y}_\pi^n \partial \bar{y}_\omega^p} \frac{\partial \bar{y}_\pi^n}{\partial y_\alpha^\beta} \frac{\partial \bar{y}_\omega^p}{\partial y_\gamma^\zeta} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial \bar{y}_\pi^n \partial \bar{y}_\pi^n} \frac{\partial \bar{y}_\pi^n}{\partial y_\alpha^\beta} \frac{\partial \bar{y}_\pi^n}{\partial y_\gamma^\zeta} \end{aligned} \quad (2.63)$$

sendo $\frac{\partial^2 \bar{u}_e^{\text{Fibras}}}{\partial \bar{y}_\omega^p \partial \bar{y}_\omega^p}$ a matriz Hessiana local da fibra.

A Equação 2.64 resulta em uma matriz quadrada e para acoplar esta parcela, adota-se uma estratégia de expansão explicada no seguinte item de acoplamento para os casos bi e tridimensional.

Acoplamento Fibra reta - Matriz (domínio bidimensional)

Com relação ao arranjo fibra-matriz, no caso bidimensional, as fibras podem apresentar uma das configurações apresentadas na Figura 33 (SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2013).

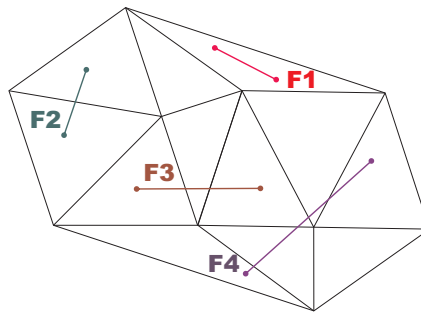


Figura 33 – Arranjo de fibras: F_1 , F_2 , F_3 e F_4 .

As fibras podem apresentar uma das seguintes configurações: Fibra tipo 1 (F_1): os seus dois nós estão inseridos no mesmo elemento finito de chapa; Fibra tipo 2 (F_2): os seus nós podem estar em elementos finitos adjacentes com 4 nós em comum ($GP = 3$); Fibra tipo 3 (F_3): os seus nós podem estar em elementos finitos adjacentes com um nó em comum e Fibra tipo 4 (F_4): cada um dos nós pode estar em elementos finitos não adjacentes, sem nós em comum.

Para simplificar a montagem da matriz Hessiana da fibra reta $[\bar{H}^{(Fibras)}]_{4x4}$, expande-se a uma matriz de ordem $(4N \times 4N)$, onde N é o número de nós dos elementos de chapa. Dado que o elemento de chapa é de aproximação cúbica, com 10 nós, apresenta-se a matriz Hessiana de ordem (40×40) , como sendo:

$$[\bar{H}^{Fibras}]_{40 \times 40} = [\phi^\beta]_{40 \times 4}^T \cdot [\bar{H}^{Fibras}]_{4 \times 4} \cdot [\phi^\beta]_{4 \times 40} \quad (2.64)$$

Logo, a contribuição da fibra no domínio respeita a incidência dos elementos de chapa.

$$[\phi^\beta]_{4 \times 40} = \begin{pmatrix} \phi_1^i & 0 & \phi_2^i & 0 & \phi_3^i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_1^i & 0 & \phi_2^i & 0 & \phi_3^i & \dots & \phi_{10}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_1^j & 0 & \phi_2^j & 0 & \phi_3^j & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_1^j & 0 & \phi_2^j & 0 & \dots & \phi_{10}^j \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$[\phi^\beta]_{4 \times 40} = \begin{pmatrix} [\phi_l^i] & [0] \\ [0] & [\phi_l^j] \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Para a contribuição da massa das fibras na matriz é utilizada uma expressão semelhante à Equação 2.64.

Acoplamento Fibra reta - Matriz (domínio tridimensional)

Da expressão da Equação 2.64, no caso 3D, resulta uma matriz quadrada de ordem $3(GPA + 1)$ (PEREIRA, 2015), onde $GPA = 1$ que é o grau de aproximação adotado para os polinômios das fibras; resultando na seguinte expansão:

$$[\bar{H}^{Fibras}]_{6NT \times 6NT} = [\phi^\beta]_{6NT \times 6}^T \cdot [\bar{H}^{Fibras}]_{6 \times 6} \cdot [\phi^\beta]_{6 \times 6NT} \quad (2.67)$$

onde NT é o número de nós do tetraedro. A matriz das funções de forma expandida, fica como sendo:

$$[\phi^\beta]_{6 \times 6NT} = \begin{pmatrix} \phi_1^1 & 0 & 0 & & \phi_{NT}^1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^2 & 0 & \dots & 0 & \phi_{NT}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1^3 & & 0 & 0 & \phi_{NT}^3 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & \phi_1^1 & 0 & 0 & & \phi_{NT}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_1^2 & 0 & \dots & 0 & \phi_{NT}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \phi_1^3 & & 0 & 0 & \phi_{NT}^3 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Para o elemento tetraédrico de aproximação cúbica, a matriz das funções de forma expandida fica como $[\phi^\beta]_{6 \times 120}$, logo a matriz $[\bar{H}^{Fibras}]_{6NT \times 6NT}$ expandida é de ordem 120×120 .

Implementação: Conectividade do nó da fibra ao elemento da matriz:

Para a implementação das fibras nos Programas de Chapa e Sólido foram considerados os seguintes itens:

1. A malha das fibras é gerada independentemente da malha da matriz.
2. É necessário conhecer a que elemento de chapa ou sólido pertence cada nó da fibra considerada para fazer a contribuição. Ou seja, obter as coordenadas adimensionais de um ponto contido em um elemento finito triangular ou tetraédrico.
3. Integração numérica pela quadratura de Hammer (Para elementos triangulares, caso bidimensional) ou pela quadratura de Gauss (Para elementos tetraédricos, caso tridimensional).

Para o primeiro item, no caso bidimensional, foi desenvolvido um programa no software Mathematica® para geração de fibras em um domínio retangular, ver Figura 34. Basicamente o programa usa como dados de entrada as coordenadas dos pontos extremos do músculo, o número de fibras e o número de divisões de cada fibra; por exemplo, na Figura 34a, se mostra o músculo (em azul) e 10 fibras, cada uma dividida em 4. As Figuras 34b e 34c mostram duas distribuições mais densas para o mesmo músculo. O programa gera três arquivos de saída em formato texto (*.txt) com: as coordenadas das fibras, incidência e atribuição de propriedade; os quais são usados no arquivo de entrada do programa desenvolvido. Já no caso tridimensional, a geração das fibras é feita para um caso específico de estudo, ver Exemplo na seção 3.4.

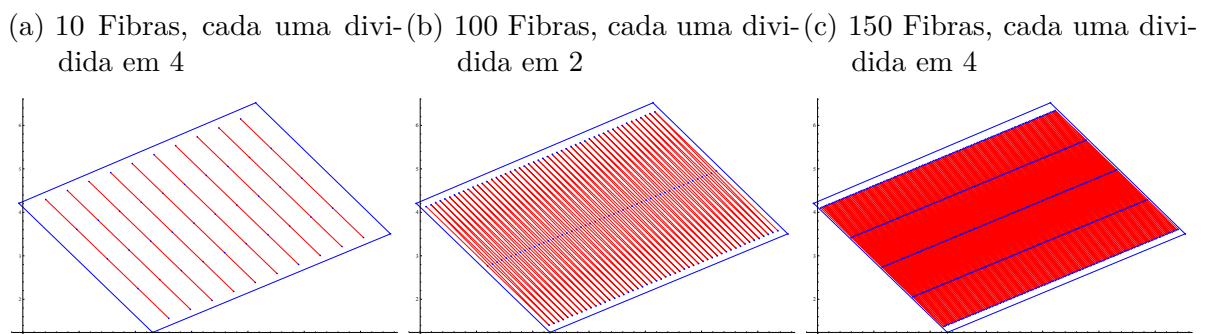


Figura 34 – Figuras gerada pelo algoritmo - Wolfram Mathematica®

Para desenvolver o item #2, ou seja calculas as coordenadas das fibras em termos dos nós do elemento da matriz (triangular ou tetraédro) é necessário fazer um processo iterativo ou de varredura (VANALLI, 2004) (VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008), descrito como segue:

- a) Calcula-se para cada elemento da matriz (triângulo ou tetraedro) o seu circuncentro e o raio (da circunferência ou esfera) Rc .
- b) Para verificar a que elemento pertence cada nó de cada uma das fibras, verifica-se que esteja na vizinhança de um dos elementos. Determina-se então a distância, Rf , entre o nó da fibra e o circuncentro de cada elemento; verificando que $Rf \leq 2 * Rc$.
- c) Uma vez determinado o elemento ao qual pertence o nó da fibra, determinam-se as coordenadas adimensionais tentativas do nó da fibra, ξ^{tent} ; para o caso bidimensional: a partir do cálculo das áreas parciais do elemento triangular e para o caso tridimensional: a partir do cálculo dos volumes parciais do elemento tetraédrico.
- e) A partir de ξ^{tent} , e considerando que as coordenadas das fibras são calculadas em função das funções de forma do elemento da matriz, é aplicada a técnica de solução de Newton Raphson, até que $Norma \leq 1.0 * 10^{-10}$

2.2.3 Ativação interna das fibras

A dinâmica do tecido muscular pode ser dividida em: dinâmica de ativação, que corresponde a transformação da excitação neuronal para a ativação do aparelho contrátil; e a dinâmica de contração muscular, ou seja o processo de geração de força muscular (ZAJAC, 1989). Zajac (1989) determinou as características de força-alongamento das fibras musculares, as quais são relacionadas com a função de energia de deformação (CHI et al., 2010). Como visto na subseção 1.2.2 a tensão na fibra é proporcional à tensão isométrica máxima, à força total normalizada na fibra e ao alongamento da fibra; onde a força normalizada total está constituída por uma parcela da força passiva e ativa, esta última afetada por uma função de ativação do músculo. A ativação das fibras de um músculo esquelético com tendência a se encurtar é o que define a contração.

Baiocco, Coda e Paccola (2013b) fizeram uma contribuição com relação às fibras ativas, ou seja com relação ao seu 'encurtamento', introduzindo uma deformação constante e igual em cada uma das fibras. Posteriormente, Friedel (2016) fez uma análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico; a inclusão do comportamento viscoelástico e ativação dos elementos de fibra foi realizada utilizando a medida de deformação não linear de engenharia e a ativação muscular foi feita diretamente através de contrações impostas nas fibras através de uma função de ativação. Da mesma forma, Sanchez e Coda (2016) apresentaram a formulação estática e dinâmica das fibras em um músculo esquelético bidimensional cujo objetivo foi esclarecer o comportamento dinâmico comparando com o modelo estático. Nesse trabalho foi proposta a ativação interna simples das fibras adicionando uma taxa ou função de ativação diretamente nas fibras, assim:

Seja, \bar{E}_0 a função de ativação das fibras.

Sanchez e Coda (2016) adicionaram a parcela de deformação diretamente no tensor

de Piola Kirchhoff uniaxial de segunda espécie, como sendo:

$$S = \mathbb{E}(\bar{E}_{t+\Delta t} - \bar{E}_{t+\Delta t}^0) + \frac{\gamma_v \mathbb{E}}{\Delta t}(\bar{E}_{t+\Delta t} - \bar{E}_t + \bar{E}_t^0 - \bar{E}_{t+\Delta t}^0), \quad (2.69)$$

onde, o valor da função \bar{E}_0 é definido por incrementos assim: $\bar{E}_{t+\Delta t}$ é a deformação atual, \bar{E}_t é a deformação do passo anterior e \mathbb{E} é o módulo de Young.

O vetor de forças internas considerando a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie da Equação 2.69, é dado por:

$$(\bar{F}_i^\alpha)_{int} = (\bar{F}_i^\alpha)_{int} + (\bar{F}_i^\alpha)_{visc} + (\bar{F}_i^\alpha)_{ativ} \quad (2.70)$$

onde, $(\bar{F}_i^\alpha)_{visc}$ é a parcela que representa a força viscosa e $(\bar{F}_i^\alpha)_{ativ}$ é a parcela da força de ativação, a qual é definida pela seguinte expressão:

$$(\bar{F}_i^\alpha)_{ativ}^{Fibra} = \mathbb{E}(A_0 L_0)(-\bar{E}_{t+\Delta t}^0 - \frac{\gamma_v}{\Delta t}(\bar{E}_t^0 - \bar{E}_{t+\Delta t}^0)) \frac{(-1)^\alpha (Y_i^2 - Y_i^1)}{L_0^2} \quad (2.71)$$

De forma análoga se apresenta a Hessiana, como sendo:

$$\bar{H}_{ativ}^{Fibra} = \mathbb{E}(A_0 L_0)(-\bar{E}_{t+\Delta t}^0 - \frac{\gamma_v}{\Delta t}(\bar{E}_{t+\Delta t}^0 - \bar{E}_t^0)) \frac{(-1)^\alpha (-1)^\beta}{L_0^2} \quad (2.72)$$

2.3 Formulação Materiais Hiperelásticos

Para materiais homogêneos e isotrópicos a energia específica de deformação pode ser expressa em termos dos invariantes de deformação ou alongamentos principais. Quando um corpo se deforma e seu comportamento é igual em todas as direções, o material dele é chamado de isotrópico. Assim é possível restringir a função energia de deformação do material para obedecer essa propriedade.

Se $\Psi(C) = \Psi(QCQ^T)$ para todo tensor simétrico C e tensores ortogonais Q , dizemos que a função da energia de deformação é função do tensor isotrópico de valor escalar de uma variável C . Se a função da energia de deformação é invariante sob uma rotação, esta pode ser expressa em termos dos invariantes principais; assim a energia específica de deformação pode ser expressa como:

$$\Psi = \Psi(I_1(C), I_2(C), I_3(C)) \quad (2.73)$$

Definem-se os invariantes de C , como:

$$I_1 = I_1(C) = C_{ii} \quad (2.74)$$

$$I_2 = I_2(C) = \frac{1}{2} \left((tr(C))^2 + tr(C^2) \right) = tr(C^{-1}) \det(C) \quad (2.75)$$

$$I_3 = I_3(C) = \det(C) \quad (2.76)$$

Materiais incompressíveis

Para considerar a quase incompressibilidade se tem uma restrição cinemática ao considerar o terceiro invariante, $I_3(C) = 1$, como sendo:

$$I_3(C) = \det(C) = J^2 = 1 \quad (2.77)$$

onde o Jacobiano, J , é expresso em função do volume inicial (V_o) e do volume final (V_f). Isto é, a variação volumétrica é desprezível.

$$J = \frac{V_f}{V_o} = 1 \Rightarrow V_f = V_o \quad (2.78)$$

Materiais compressíveis

Estes materiais consideram alteração volumétrica significativa, ou seja

$$J \neq 1 \Rightarrow V_f \neq V_o \quad (2.79)$$

Para tratar a parcela da variação do volume de forma separada, é usual realizar a decomposição multiplicativa do o gradiente da mudança de configuração, ver Equação 2.80.

Assim é possível expressar a energia de deformação em duas parcelas, uma com alteração de volume e outra com preservação de volume.

$$A = \bar{A} \cdot \hat{A} \quad (2.80)$$

onde $\hat{A} = \det(\hat{A}) = (J^{\frac{1}{3}}) I$ é a parcela volumétrica, $\bar{A} = \det(\bar{A}) = (J^{\frac{1}{3}}) A$ é a parcela isocórica e I é a identidade.

Sabendo que o Tensor de Cauchy está definido por $C = A^T \cdot A$ e considerando a decomposição de A , Equação 2.80, o tensor pode ser escrito como: $C = \bar{A}^T \cdot \hat{A}^T \cdot \hat{A} \cdot \bar{A}$. Ou seja, $C = J^{1/3} J^{1/3} \bar{A}^T \bar{A} = J^{2/3} \bar{C}$.

Para a parcela isocórica ² o alongamento à direita de Cauchy-Green Modificado, \bar{C} , fica definido como:

$$\bar{C} = (\bar{A}^T) \bar{A} = (J^{-\frac{2}{3}}) A^T A = (J^{-\frac{2}{3}}) C \quad (2.81)$$

e seus invariantes como sendo: $\bar{I}_1 = tr(\bar{C}) = C_{ii}$, $\bar{I}_2 = tr(\bar{C}^{-1})$ e $\bar{I}_3 = \det(\bar{C}) = 1$

Para finalmente expressar a Energia específica de deformação da seguinte maneira:

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{C}) \quad (2.82)$$

Pascon (2008) mostra três expressões para a parte volumétrica:

$$\Psi_{vol}(J) = k (J^{2n} + J^{-2n} - 2), \quad (2.83)$$

$$\Psi_{vol}(J) = (J - 1)^k, \quad (2.84)$$

$$\Psi_{vol}(J) = k\beta^{-2} (\beta \ln J + J^{-\beta} - 1), \quad (2.85)$$

onde k é o módulo de compressão volumétrica e n um coeficiente empírico.

As equações 2.83, 2.84 e 2.85 correspondem respectivamente a Duster (2003), Hartmann (2003) e Ogden (1972). Desta forma o material pode ser considerado quase incompressível ou pouco compressível quando a deformação volumétrica requer um trabalho muito maior do que a parcela isocórica (PASCON, 2008).

² Parcela da energia que não sofre alterações pela mudança de volume.

Tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie

Conforme foi explicado, a tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie é definida a partir da Equação 2.42; considerando a Energia específica de Helmholtz é expressa, como sendo:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi(E_{ij})}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(E_{ij})}{\partial E_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{iso}(E_{ij})}{\partial E_{ij}} \quad (2.86)$$

onde, S_{vol} corresponde a parcela volumétrica, dada por:

$$(S_{vol})_{ij} = \frac{\partial \Psi_{vol}(E)}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial \Psi_{vol}(C)}{\partial C_{ij}} \quad (2.87)$$

E, S_{iso} , a parcela isocórica, expressa por:

$$(S_{iso})_{ij} = \frac{\partial \Psi_{iso}(E)}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial \Psi_{iso}(C)}{\partial C_{ij}} \quad (2.88)$$

Hessiana para materiais hiperelásticos

Da Equação 2.35, considerando a energia de deformação da Equação 2.73, em geral a matriz hessiana para materiais hiperelásticos pode ser expressa como:

$$H_{ij}^{Matriz} = \int_{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} (S_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_j}) \right) J_o d\zeta \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\zeta} \left(\frac{\partial S_{kl}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_j} + S_{kl} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} \right) J_o d\zeta \\ &= \int_{\zeta} \left(T_{klmn} \cdot \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial E_{mn}}{\partial y_j} + S_{kl} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} \right) J_o d\zeta \end{aligned} \quad (2.90)$$

Onde T_{ijkl} é o Tensor elástico.

Tensor elástico

O Tensor elástico, também chamado de operador tangente consistente (DüSTER; HARTMANN; RANK, 2003), é essencial para o cálculo da Hessiana para resolver o problema com o uso do processo iterativo de Newton Raphson. Definido explicitamente pela expressão:

$$T_{ijkl} = 4 \left(\frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial C_i \partial C_{kl}} \right) \quad (2.91)$$

onde, $(T_{ijkl})_{iso}$ corresponde a parcela isocórica e $(T_{ijkl})_{vol}$ é a parcela volumétrica, dadas por:

$$\begin{aligned}
(T_{ijkl})_{iso} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial C_{kl}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(\frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{kl}} \right)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
(T_{ijkl})_{iso} &= \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1 \partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2 \partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{kl}} \\
&+ \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
(T_{ijkl})_{vol} &= \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(\frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} \right) \\
&= \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J \partial J}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

O cálculo das derivadas de J , C , I , \bar{I} e são apresentadas no Anexo B.

2.4 Solução: Método de Newton Raphson

A metodologia consiste em buscar um conjunto de posições para cada nó da estrutura (raízes de equações) tal que o equilíbrio seja satisfeito. Esta busca é feita através de um processo iterativo, nesta tese adota-se o Método de Newton Raphson. O critério de parada, utilizado na análise de problemas estruturais com não linearidade geométrica, é estabelecido para quando o sólido atinge a configuração de equilíbrio. Como as incógnitas são as posições nodais, adota-se uma posição tentativa para o equilíbrio, Y_0^{tent} e portanto o vetor de desbalanceamento mecânico, $g(Y_0)$, retorna um vetor não nulo. Solucionando o sistema de equações, tem-se o ΔY como a correção da posição e portanto a solução tentativa é melhorada fazendo: $Y = Y_0 + \Delta Y$. O anterior é repetido até que o ΔY ou o g sejam o suficientemente pequenos. O Algoritmo se mostra na Figura 35.

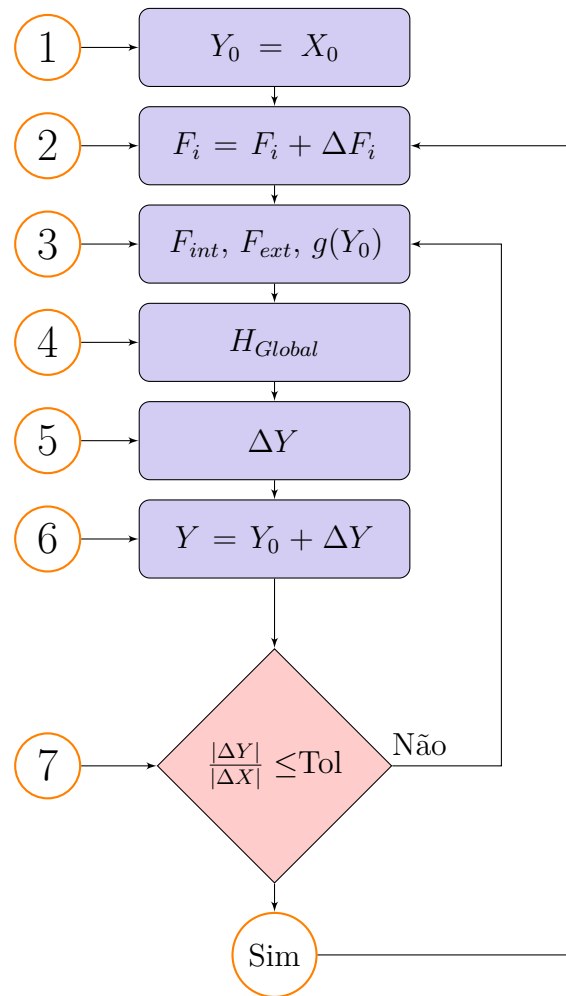


Figura 35 – Newton Raphson

Passos do algoritmo:

1. Adota-se a posição tentativa $Y_0 = X_0$, ou seja a configuração indeformada.
2. Incrementa-se o nível de carga, $F_i = F_i + \Delta F_i$
3. Determinam-se os vetores de Forças internas (2.61) e externas, para calcular o vetor de desbalanceamento $g(Y_0)$, expressão 2.27. mas considerando a energia armazenada no corpo reforçado, \hat{U}_e^{Ref} .
4. Calcula-se a matriz Hessiana H_{Global} , expressão 2.62 usando a energia do corpo reforçado \hat{U}_e^{Ref} .
5. Considerando o vetor $g(Y_0)$ e a matriz H_{Global} , calcula-se a variação do vetor posição ΔY , expressão 2.30
6. Realiza-se a correção da posição, $Y = Y_0 + \Delta Y$
7. Verifica-se que $\frac{|\Delta Y|}{|\Delta X|} \leq$ tolerância

Caso $\frac{|\Delta Y|}{|\Delta X|} \leq$ tolerância então encontrou-se a posição de equilíbrio para o nível de carga, e o algoritmo volta para o item #2 para incrementar a carga; caso contrario, volta para o item #3 onde faz uma nova iteração para melhorar a precisão da solução.

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS E APLICAÇÕES

3.1 Validação do código computacional 2D

Os seguintes exemplos servem para validar o programa não linear geométrico estático e dinâmico 2D para materiais elásticos e hiperelásticos, reforçados com fibras; usando aplicações gerais em engenharia. Para visualizar os resultados de: deslocamento, tensões e deformações, utiliza-se o pós-processador: Acadview do GMEC-SET-ESSC/USP ¹

3.1.1 Exemplo 1: Viga engastada com grandes deslocamentos e rotações

Neste exemplo foi estudada uma viga engastada com uma carga na sua extremidade livre, ver Figura 36. Este exemplo é comumente utilizado como *benchmark* por possuir solução analítica conhecida, apresentada por Mattiasson (1981). O objetivo é testar a formulação estática com análise não linear em grandes deslocamentos, onde é investigado o deslocamento vertical do nó em que a carga é aplicada.

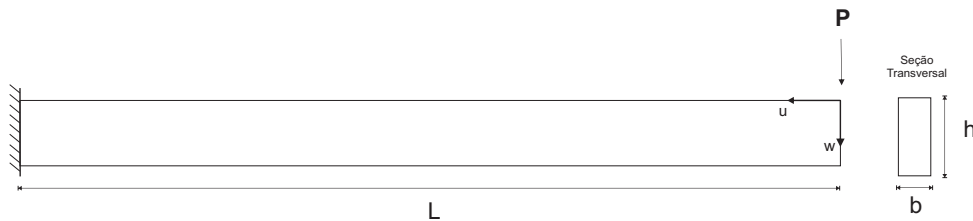
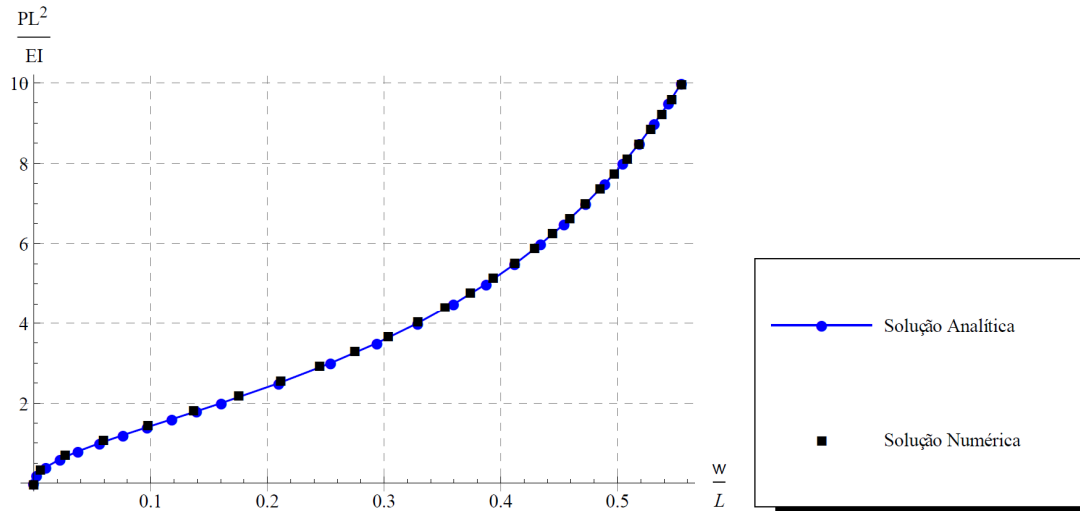


Figura 36 – Viga Engastada

A estrutura foi discretizada com 120 elementos finitos de chapa de aproximação cúbica e o carregamento foi aplicado em 100 passos de carga. Dados de entrada: Comprimento, $L = 10\text{ m}$, seção transversal $b = 0.01\text{ m}$, $h = 0.4\text{ m}$, Módulo de Young $E = 210 * 10^6\text{ Pa}$, Poisson $\nu = 0.0$ e carregamento $P = 1120\text{ N}$ aplicado diretamente no nó superior.

¹ Grupo de Mecânica Computacional - GMEC do Departamento de Estruturas da ESSC-USP.

Na Figura 37, apresenta-se a solução analítica e numérica com a relação $\frac{PL^2}{EI}$ vs w/L , onde w é o deslocamento vertical do ponto extremo da viga (ponto de aplicação do carregamento). Os resultados mostram coincidência da resposta numérica com a analítica do exemplo, corroborando assim as implementações realizadas da formulação estática com análise não linear em grandes deslocamentos.



Solução analítica de Mattiasson (1981)

Figura 37 – Parâmetro de carregamento ($\frac{PL^2}{EI}$) vs Deflexão adimensional (w/L)

3.1.2 Exemplo 2: Chapa tracionada

Neste exemplo, estuda-se uma chapa tracionada submetida a um deslocamento prescrito de $4,412 \cdot 10^{-3}$ na extremidade livre, ver Figura 38. Utiliza-se um material elástico com as seguintes propriedades: Módulo de Young, $E = 2.0 \cdot 10^{11} Pa$ e Poisson de $\nu = 0,3$.

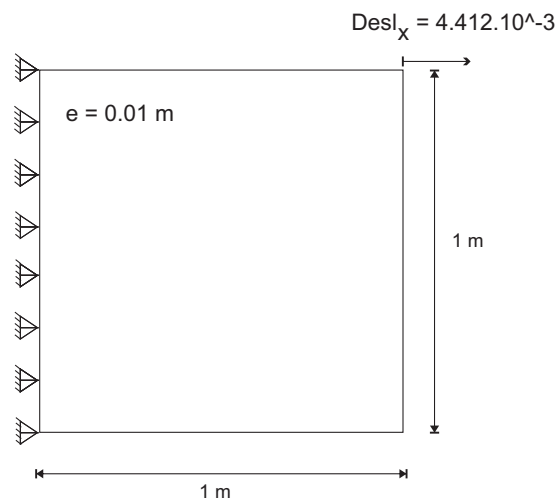


Figura 38 – Esquema da chapa tracionada

Dada a necessidade de visualizar as deformações e tensões, foram implementadas duas subrotinas no código computacional associadas a seguintes metodologias: *Cálculo direto das deformações e tensões nas coordenadas adimensionais do elemento* (M_1) e *Extrapolação e suavização usando uma matriz de transformação* (M_2). Ver os passos necessários para implementar cada metodologia no Anexo C.3.

O objetivo deste exemplo é validar as subrotinas implementadas no código para o cálculo das tensões usando as duas metodologias: M_1 e M_2 e verificar os resultados com a modelagem no software Ansys® (ANSYS..., 2017).

A chapa foi discretizada com 4, 8 e 200 elementos finitos de aproximação cubica, ver Figura 39 e para cada uma foi aplicado o mesmo deslocamento.

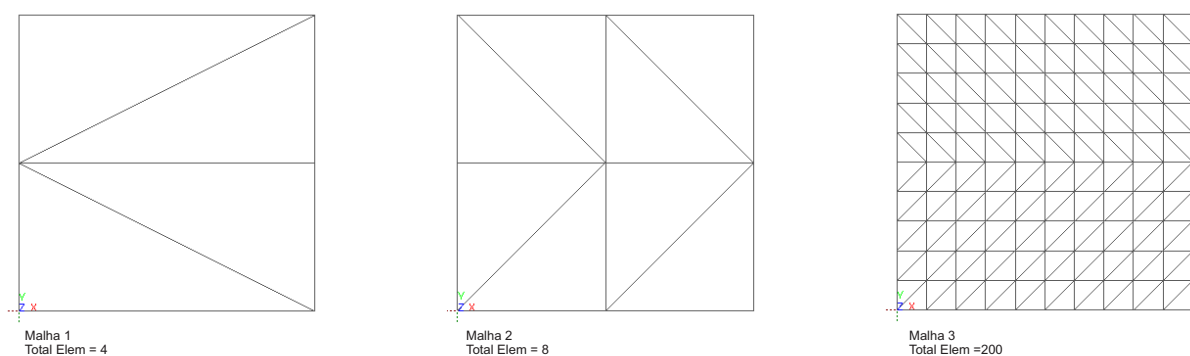
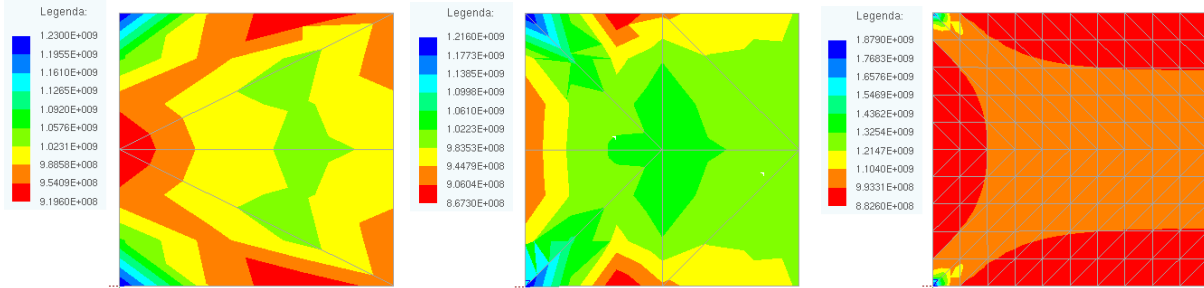


Figura 39 – Malhas de 4 ,8 e 200 elementos

Nas Figuras 40a e 40b são apresentados os valores de Tensão de Piola-Kirchhoff, S_{11} , calculadas com as metodologias M_1 e M_2 , respectivamente.

(a) Cálculos com a metodologia M_1



(b) Cálculos com a metodologia M_2

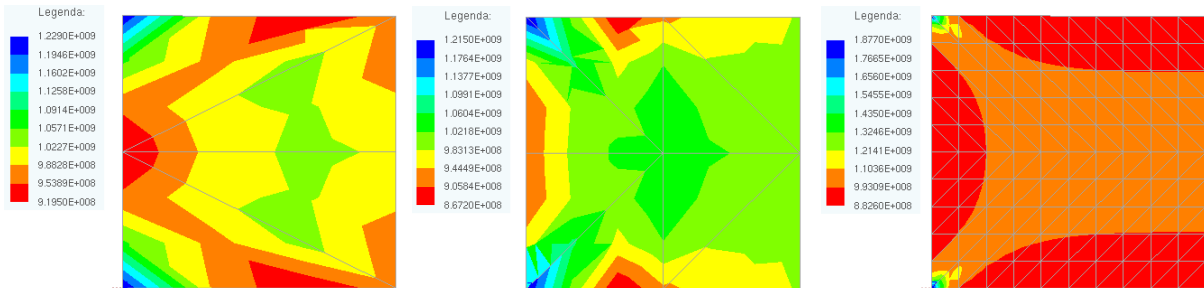
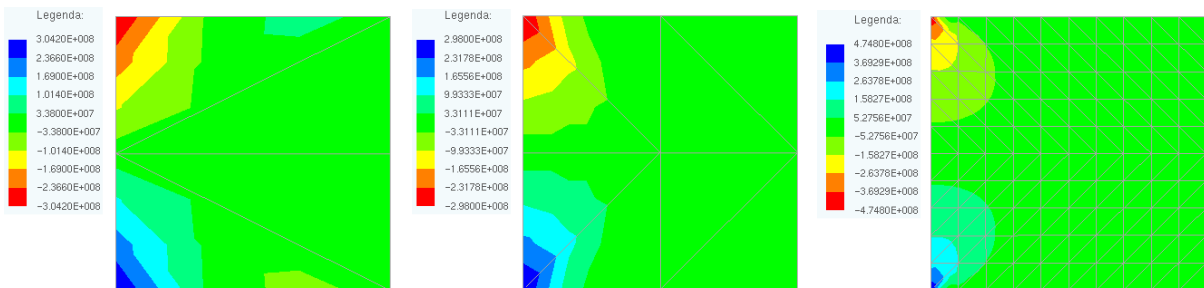


Figura 40 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{11}

(a) Cálculos com a metodologia M_1



(b) Cálculos com a metodologia M_2

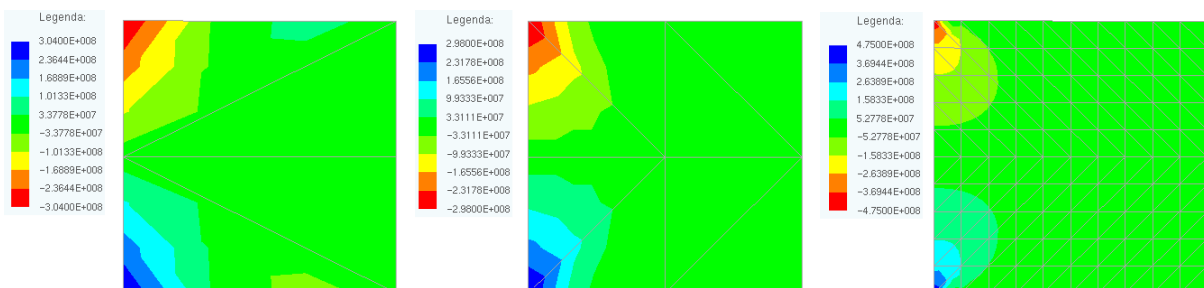


Figura 41 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{12}

Com os dados obtidos foi construída a Tabela 4, a qual apresenta as diferenças

relativas entre os valores de tensões (S_{11}, S_{12}, S_{22}) calculadas com as duas metodologias, para cada malha. Os resultados mostram uma diferença relativa máxima de 0,12%, portanto as metodologias podem ser consideradas como equivalentes.

Tabela 4 – Erro relativo no cálculo das Tensões de Piola-Kirchhoff. M_1 e M_2

<i>Malha:</i>		#1		#2		#3	
<i>Valores:</i>		Min	Max	Min	Max.	Min	Max.
S_{11}	M_1	9,1960E08	1,2300E09	8,6730E08	1,2160E09	8,8260E08	1,8790E09
	M_2	9,1950E08	1,2290E09	8,6720E08	1,2150E09	8,8260E08	1,8770E09
	Dif %	0,01%	0,08%	0,01%	0,08%	0,00%	0,11%
S_{12}	M_1	-3,0420E08	3,0420E08	-2,9800E08	2,9800E08	-4,7480E08	4,7480E08
	M_2	-3,0400E08	3,0400E08	-2,9800E08	2,9800E08	-4,7500E08	4,7500E08
	Dif %	0,07%	0,07%	0,00%	0,00%	0,04%	0,04%
S_{22}	M_1	-9,8260E07	5,2700E08	-3,2410E07	4,1280E08	-4,9490E07	5,3710E08
	M_2	-9,8340E07	5,2660E08	-3,2450E07	4,1270E08	-4,9650E07	5,3700E08
	Dif %	0,08%	0,08%	0,12%	0,02%	0,32%	0,02%

O problema também foi modelado no Software Ansys® (ANSYS..., 2017) usando elementos *SHEL281* de aproximação quadrática. Dado que o software permite somente o uso de elementos lineares e quadráticos, foram consideradas as seguintes malhas com tamanho da face (Tf): $Tf_1 = 0.10 m$ com 200 elementos, $Tf_2 = 0.05 m$ com 800 elementos, $Tf_3 = 0.025 m$ com 3200 elementos e $Tf_4 = 0.0125 m$ com 12800 elementos. Os resultados das tensões S_{11} se mostram na Figura 42.

Na Tabela 5 são apresentados os resultados de Tensão de Piola-Kirchhoff S_{11} das modelagens no Ansys® (ANSYS..., 2017), junto com os resultados da Malha # 3 das metodologias M_1 e M_2 . Para o valor máximo da tensão S_{11} foram obtidos os seguintes erros relativos das malhas Tf_1, Tf_2, Tf_3 e Tf_4 com relação aos resultados da metodologia M_2 : 33,69%, 22,38%, 8,52% e 7,99%, respectivamente

Tabela 5 – Tensão de Piola-Kirchhoff S_{11} : Resultados das metodologias M_1 e M_2 Malha # 3 e do código e do Ansys®

S_{11}		Min	Max
<i>Malha # 3 (Código)</i>	M_1	8,8260E08	1,8790E09
	M_2	8,8260E08	1,8770E09
<i>Ansys®</i>	Tf_1	8,2668E08	1,2447E09
	Tf_2	8,2470E08	1,4569E09
	Tf_3	8,2367E08	1,7171E09
	Tf_4	8,2330E08	2,0270E09

As diferenças observadas entre os resultados do presente trabalho e o software Ansys® (ANSYS..., 2017) são justificadas pelas particularidades de cada código com relação ao tipo de elemento utilizado nas modelagens.

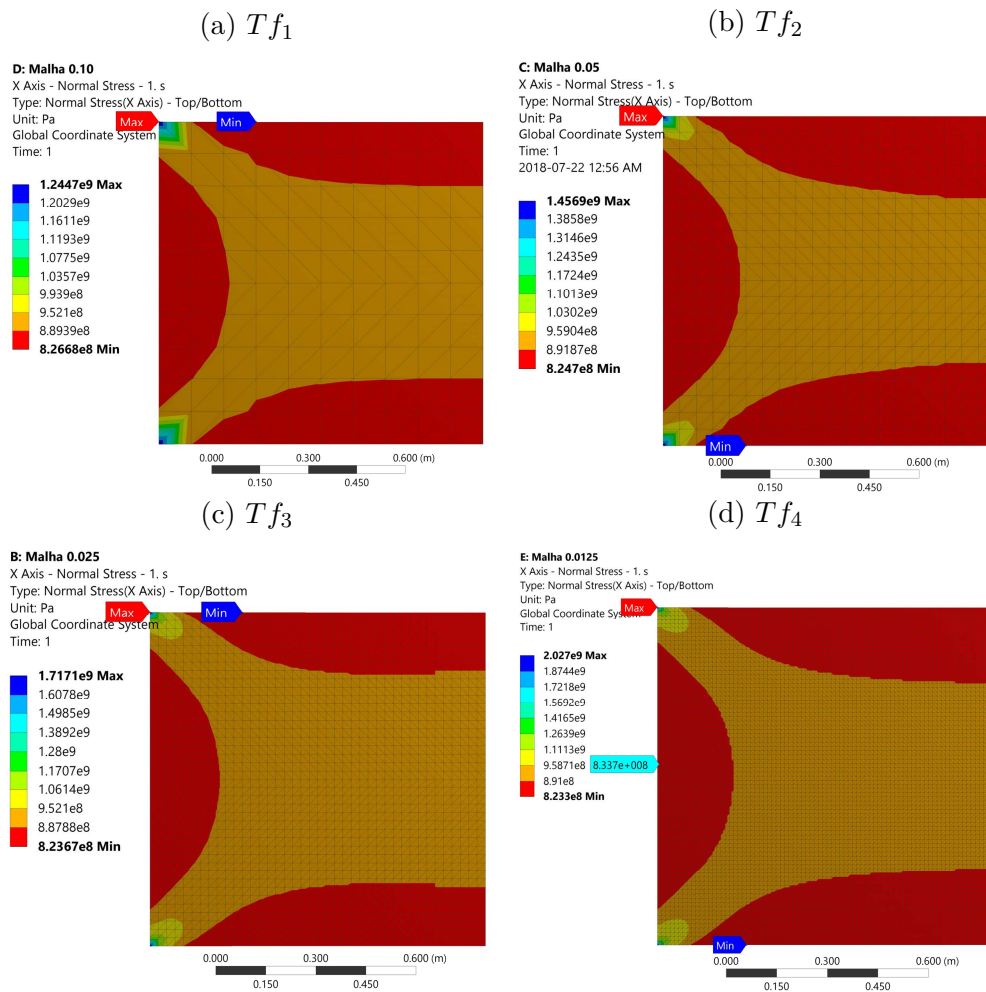


Figura 42 – Tensão de Piola Kirchhoff, S_{11} modelos do Ansys®

Conclui-se que ambas metodologias M_1 e M_2 , são adequadas para o cálculo das tensões e deformações, mas considerando o custo computacional a metodologia M_2 apresenta menor gasto; dado que usa uma matriz pronta que é utilizada na etapa de pós-processamento; enquanto a M_1 precisa de cálculos adicionais durante o processamento, como mostrado no Anexo C.3.

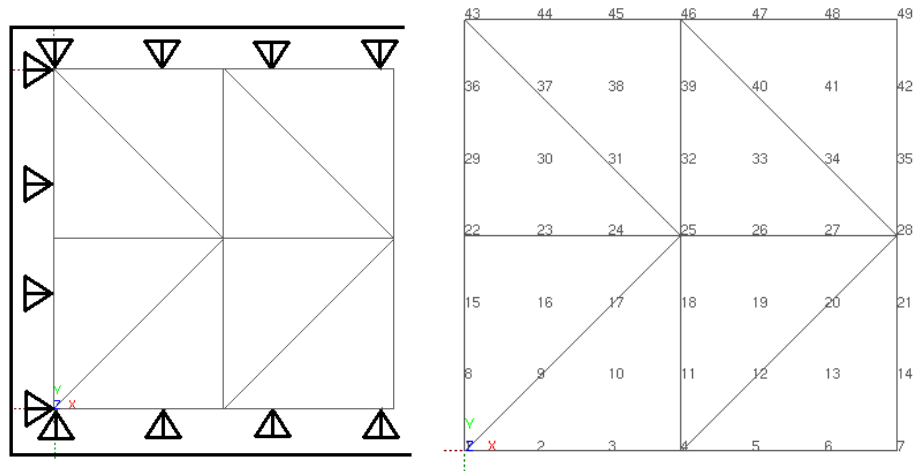
Para os próximos exemplos será adotada a Metodologia M_2 para o cálculo das deformações e tensões, pois acarreta menor custo computacional.

3.1.3 Exemplo 3: Chapa com fibras

Para ilustrar o funcionamento do modelo de contração usado nas fibras Friedel (2016), utilizando outra medida de deformação, modelou uma matriz quadrada unitária reforçada com três fibras. Neste exemplo a matriz foi discretizada com oito elementos de chapa e considerando o modelo de Saint-Venant com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 2, 1.10^6 \text{ MPa}$ e Poisson $\nu = 0, 0$ (FRIEDEL, 2016). As condições de contorno podem ser observadas na Figura 43a.

O objetivo do exemplo é demonstrar o funcionamento de um modelo de contração das fibras, aplicando deformações no programa 2D. Foram realizadas três análises: o modelo 1 (M_1) considera um elemento de barra por fibra, com três fibras em total; o modelo 2 (M_2): três elementos de barra, com nove fibras em total e o modelo 3 (M_3): cinco elementos de barra, com 15 fibras em total, ver Figura 43b. O modelo constitutivo para as fibras foi o Saint-Venant-Kirchhoff, com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 2, 1.10^6 \text{ MPa}$ e área transversal $A_0 = 1 \text{ mm}^2$.

(a) Condições de contorno e numeração dos nós da Matriz (1x1x1 mm)



(b) Discretização das Fibras. De esquerda á direita os modelos: M_1 , M_2 e M_3

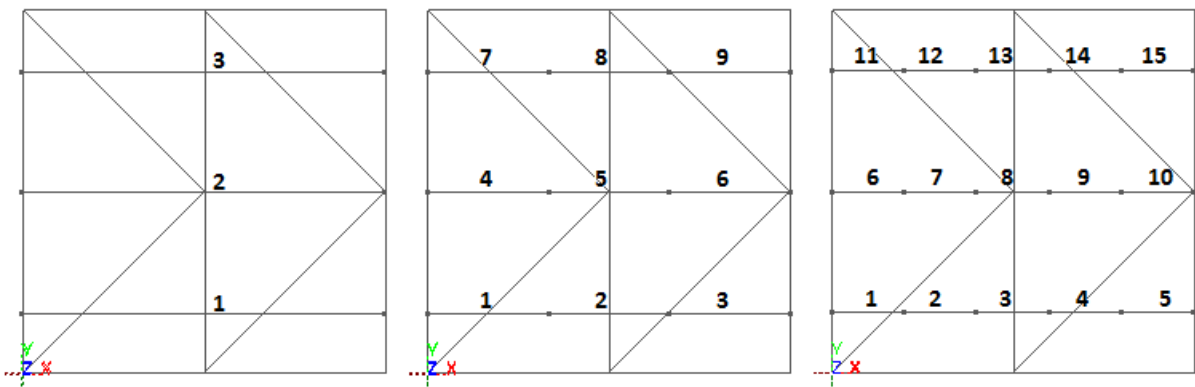


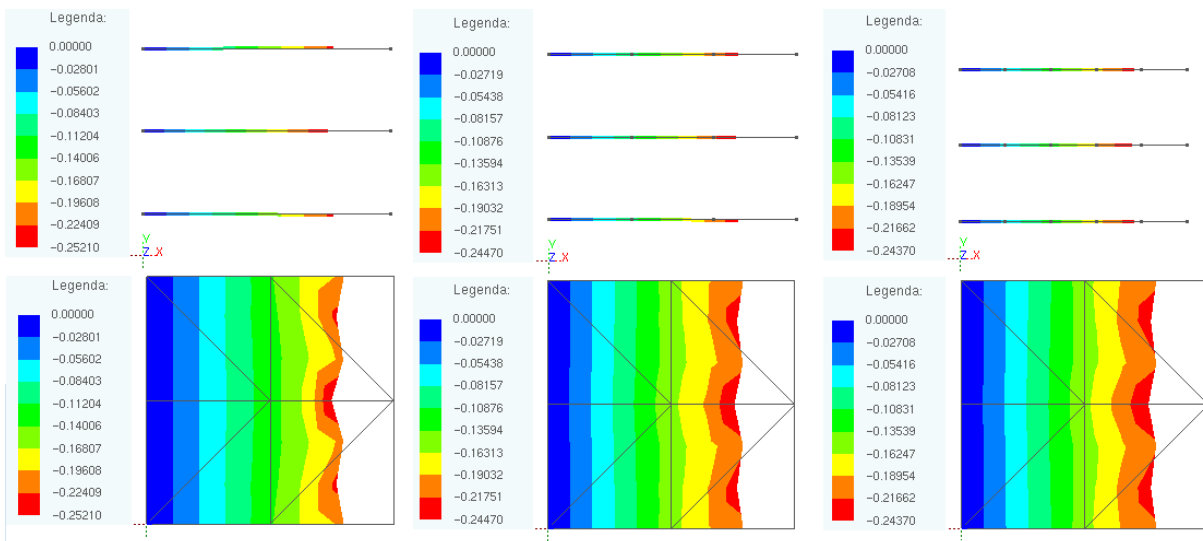
Figura 43 – Chapa reforçada com fibras

O modelo de contração usado nas fibras foi o seguinte: $E_{Green} = E_0(c2 * t * \Delta t)$, onde $E_0 = -0,001$, $c2 = 250$, $\Delta t = 0.1$ e t varia entre $(1 - 12)$; a variação temporal linear de contração aplica gradualmente uma deformação em cada uma das fibras até chegar valor de -0.30 quando $t = 12$.

Na Figura 44a se mostram os resultados de deslocamento na direção X para os três modelos propostos. No modelo M_1 , por exemplo, a fibra número 1 teve um deslocamento máximo de -0.2521 mm igual ao deslocamento máximo do nó 28 da matriz. Essa equivalência é observada nos outros modelos, comprovando o acoplamento ou aderência perfeita Fibra-Matriz.

Na Figura 44b se mostram as Deformações E_{11} da matriz para os modelos M_1 , M_2 e M_3 . Observa-se que a deformação máxima da matriz não é igual á deformação de -0.30 imposta em cada elemento de barra das fibras, isto se deve a que o cálculo das deformações é feito ao nível do elemento e depois distribuídas nos seus nós, portanto depende da discretização da malha da matriz. Além disso, a deformação máxima da matriz é diferente para cada modelo, portanto o número de elementos por fibra também influencia nas deformações finais.

(a) Deslocamentos na direção X das fibras e da Matriz



(b) Deformações de Green, E_{11} da Matriz

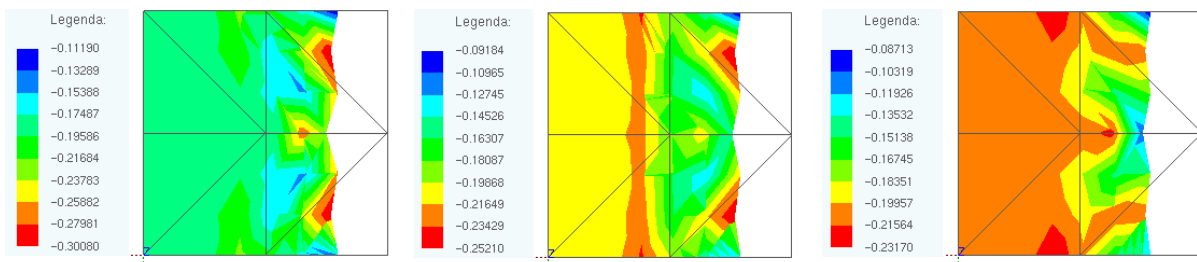


Figura 44 – De esquerda á direita os modelos: M_1 , M_2 e M_3

Para o mesmo exemplo, incrementou-se o número de fibras distribuídas ao longo do eixo Y de 3 para 10, ver Figura 45a, e para cada uma delas foi aplicada a mesma deformação de -0.30 usando o mesmo modelo de contração $E_{Green} = E_0(c2 * t * \Delta t)$. A distribuição das fibras e os deslocamentos resultantes se mostram nas Figuras 45a e 45b.

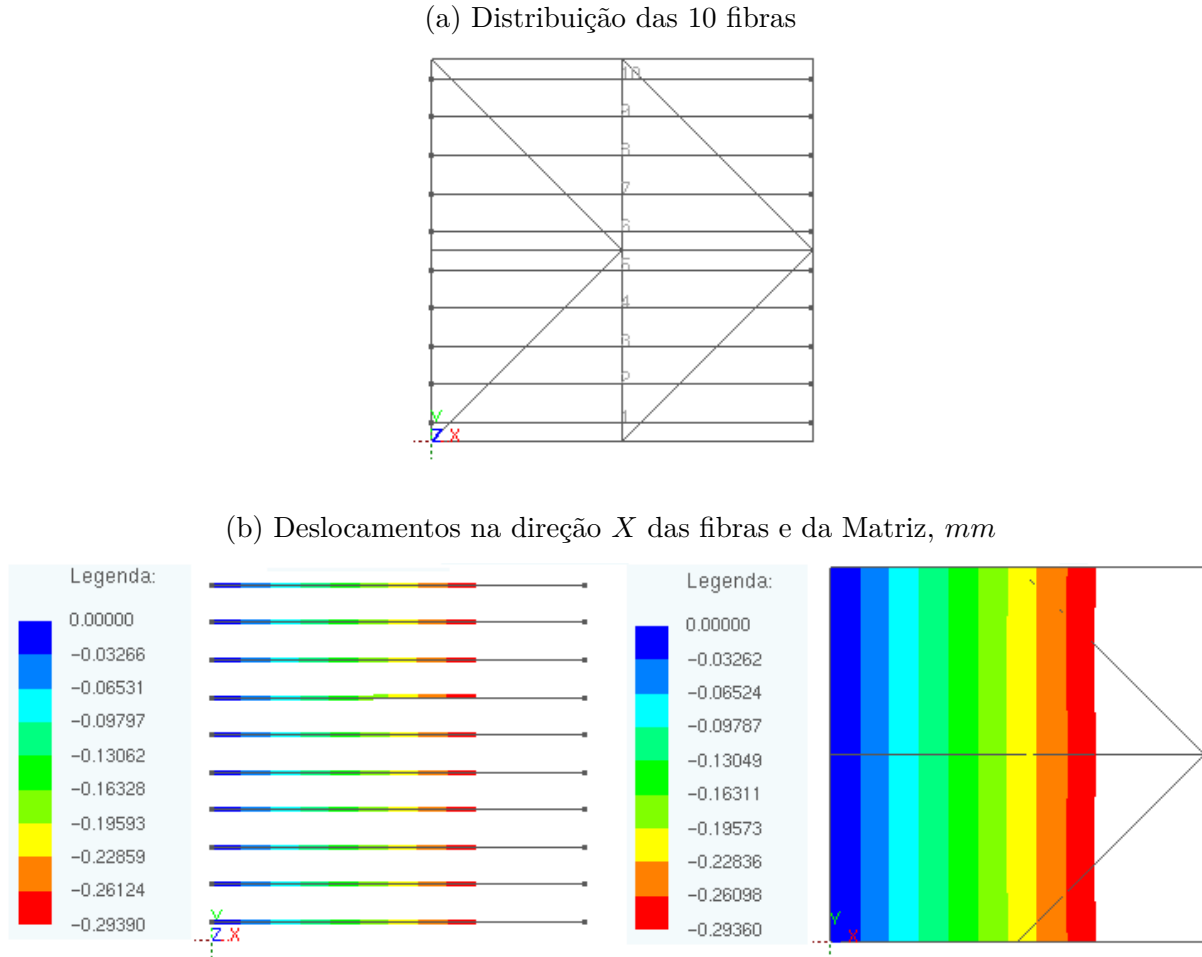


Figura 45 – Matriz reforçada com 10 Fibras

Observa-se que o deslocamento da fibra obtido foi de -0.2939 mm e na matriz de -0.2936 mm e lembrando que o valor de deformação imposto foi de -0.30 , o comprimento final do elemento de fibra ² unitário obtido não foi igual a $L_f = ((2\bar{E} - 1)L_0^2)^{(1/2)} = ((2-0.30 - 1)1^2)^{(1/2)} = 0.63245 \text{ mm}$, ou seja o deslocamento final não foi de 0.3675 mm . Isto é porque a contração imposta nas fibras também contrai a matriz, logo a rigidez da matriz gera uma força oposta nos elementos de barra; concluindo que os deslocamentos finais da estrutura não dependem apenas das deformações impostas nas fibras (para gerar contração). Este fato também foi demonstrado por Friedel (2016) na sua dissertação e se deve ao equilíbrio em forças que existe entre a matriz e as fibras.

² usando a expressão da deformação de Green, ver Equação 2.43

3.1.4 Exemplo 4: Chapa sob cisalhamento simples

O exemplo aqui proposto consiste em uma chapa de $25 \times 25 \times 6$ mm, submetida a cisalhamento simples, as condições de contorno são apresentadas na Figura 46. A simulação foi realizada considerando o modelo hiperelástico de Yeoh, $\psi_{Yeoh} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$ para a parcela isocórica.

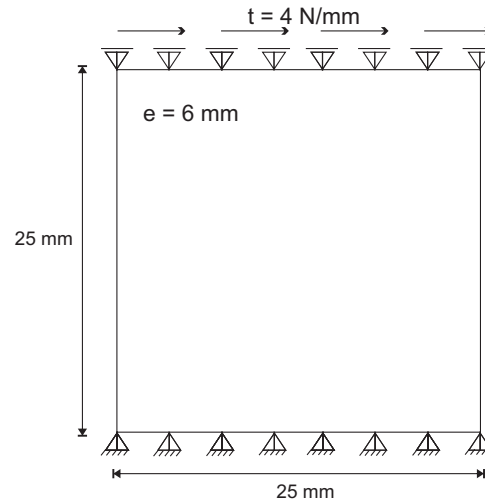


Figura 46 – Chapa submetida a cisalhamento simples

Na seção 2.3 foram apresentadas três expressões para a energia volumétrica, equações: 2.83, 2.84 e 2.85; as quais correspondem respectivamente a Düster (2003), Hartmann (2003) e Ogden (1972). Dado que os resultados do problema são confrontados com os resultados do Software Ansys® (ANSYS..., 2017), foi implementada no programa adicionalmente a equação da energia volumétrica usada pelo programa *Ansysó* (ANSYS..., 2017) no modelo hiperelástico de *Yeoh*, ver Equação 3.1.

$$W_{Ansys}^{vol} = \frac{1}{d_1}(J - 1)^2 + \frac{1}{d_2}(J - 1)^4 + \frac{1}{d_3}(J - 1)^6 \quad (3.1)$$

onde, d_1 , d_2 e d_3 são constantes incompressíveis e o módulo de bulk inicial é $k = \frac{2}{d_1}$. Neste problema, assume-se que $k = 100 \text{ MPa}$ e que $d_1 = d_2 = d_3 = 0.02 \text{ MPa}^{-1}$. As constantes Hiperelásticas do modelo são: $C_{10} = 41,491334 \text{ MPa}$, $C_{20} = -4,627321 \text{ MPa}$ e $C_{30} = 0,6456065 \text{ MPa}$; tomadas de Pascon (2008), mas com outra escala.

O objetivo do exemplo é principalmente verificar o desempenho do programa desenvolvido para elementos de Chapa considerando uma lei constitutiva hiperelástica. Além disso, verificar a convergência do problema comparando com os resultados do Programa Ansys® (ANSYS..., 2017). A chapa foi discretizada considerando 2, 6, 10 e 20 elementos nos eixos x e y dando origem a: 8, 72, 200 e 800 elementos, denominados pelas malhas: M1, M2, M3 e M4, respectivamente; ver Figura 47. No Ansys® (ANSYS..., 2017) a discretização foi realizada automaticamente, definindo o tamanho do elemento e respeitando o número de elementos por eixos como no programa desenvolvido.

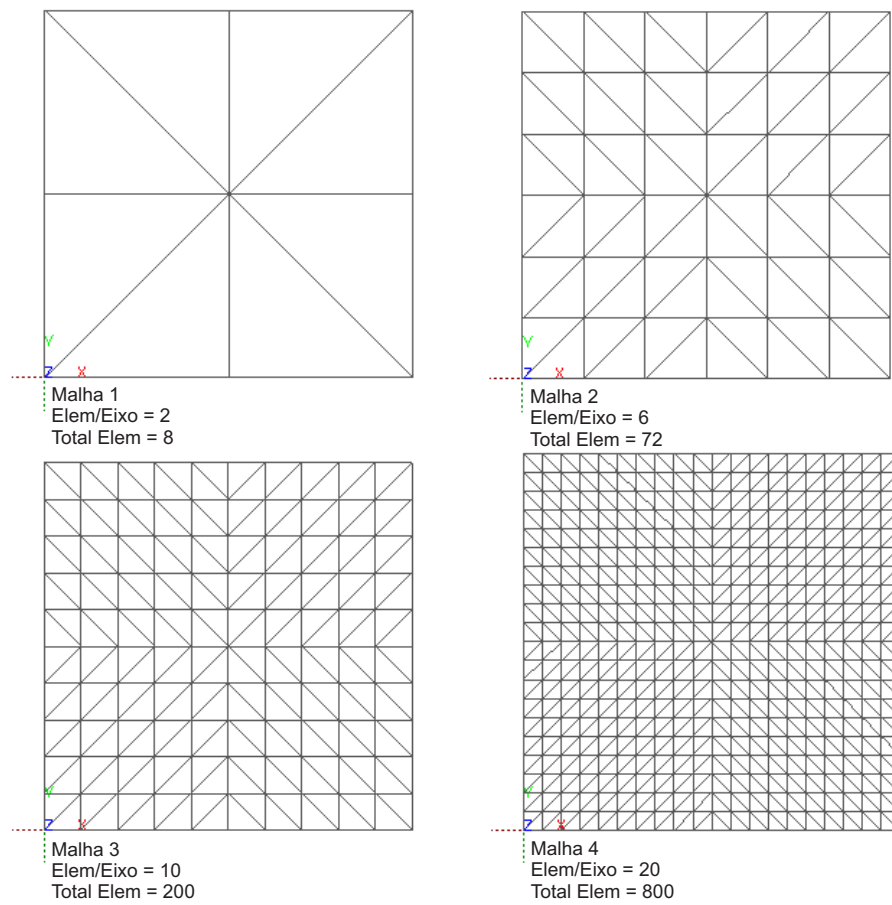


Figura 47 – Malhas usadas no problema

Resultados da simulação no Programa desenvolvido e no Ansys® (ANSYS..., 2017)

Os resultados para o deslocamento em X e Y foram visualizados no Acadview, ver Figuras 48 e 49.

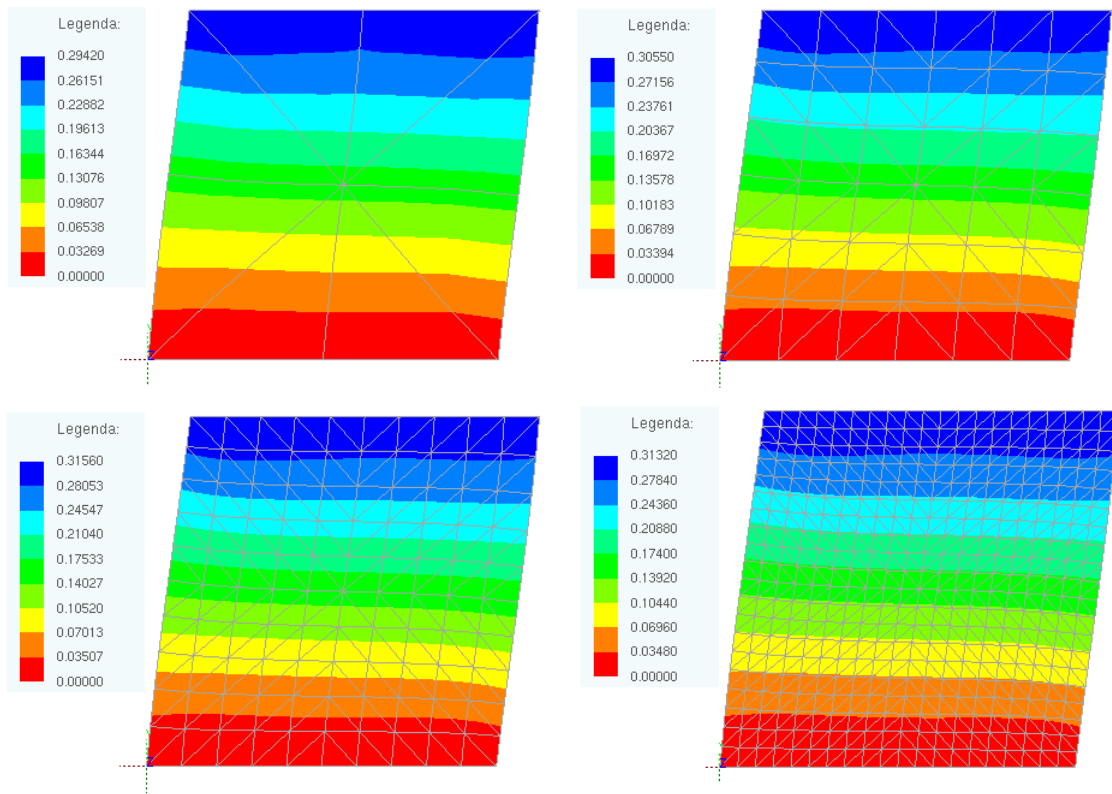


Figura 48 – Deslocamento X (Presente trabalho)

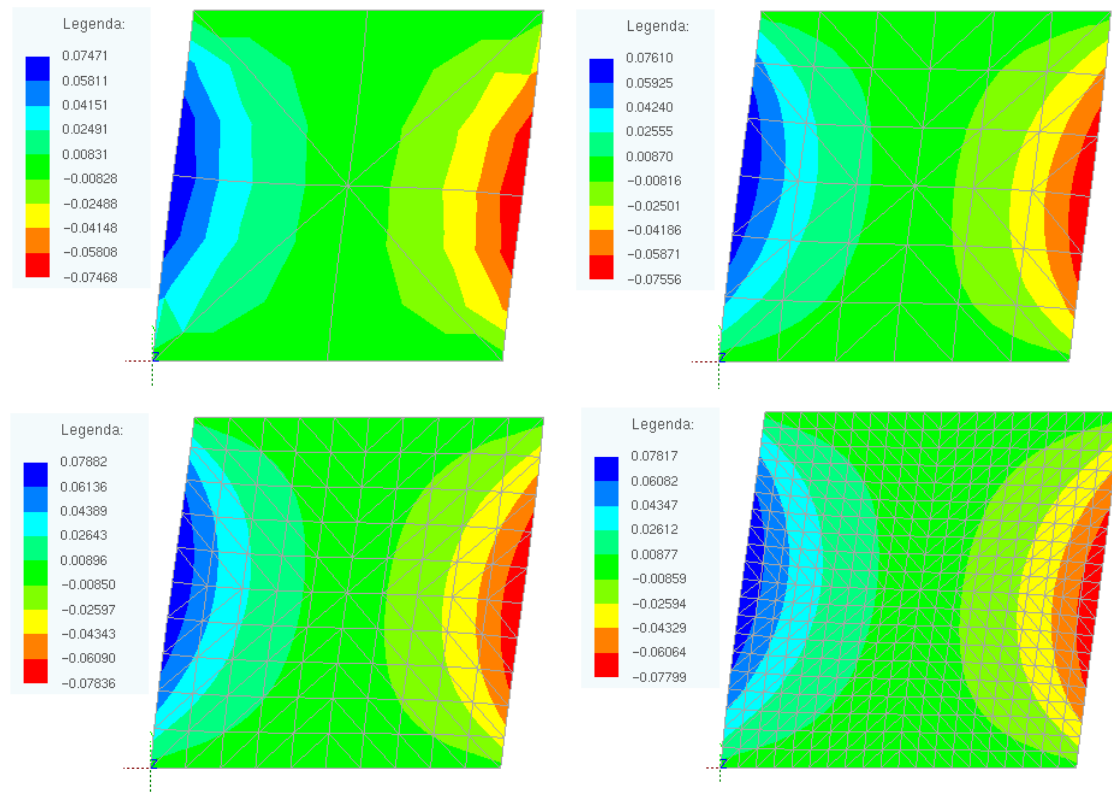


Figura 49 – Deslocamento Y (Presente trabalho)

Os resultados do Ansys® (ANSYS..., 2017) para o deslocamento em X são apresentados na Figura 50. Onde está indicado também o valor do deslocamento para o Ponto **A** de coordenadas $x = 25$ e $y = 25$.

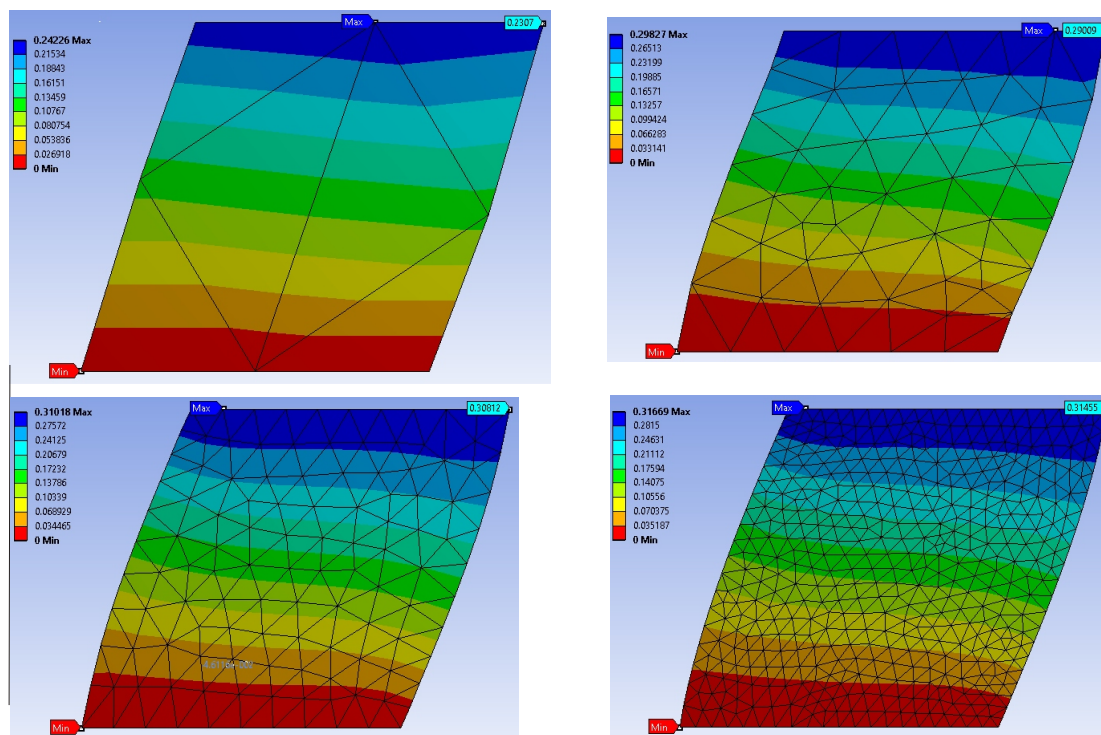


Figura 50 – Deslocamento X (Ansys® (ANSYS..., 2017))

Análise de convergência

Para o exemplo foi realizada uma análise de convergência do deslocamento, tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, deformações de Green e tensões de Cauchy do ponto **A**, ver Figura 51. Os resultados são apresentados na Tabela 6.

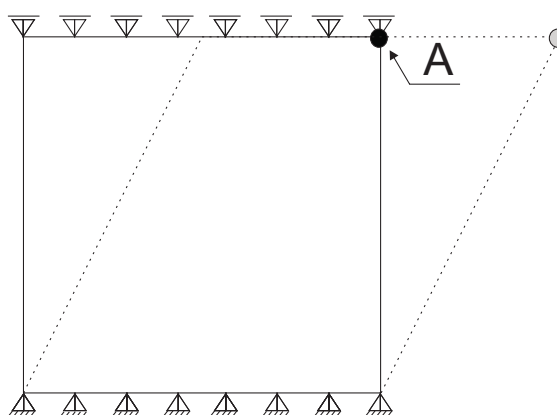


Figura 51 – Localização do ponto **A**, para a análise de convergência
Fonte: Elaborado pelo autor.

Percebe-se na Tabela 6, que a diferença relativa entre a malha 3 ($M3$) e a malha 4 ($M4$), para o deslocamento em x , para as tensões de Piola S_{11} e S_{12} , para a deformação

de Green E_{12} e para as tensões de Cauchy $Cauchy_{11}$ e $Cauchy_{12}$, foi menor do que 0.8%. Para os outros valores se apresentou uma diferença de até 16.671%

Tabela 6 – Resultados para o nó da extremidade da Chapa

Malha #:	M1	M2	M3	M4	%Diferença (M3 e M4)
Nó	49	361	961	3721	
Desl X	0,2933	0,2976	0,3074	0,3072	0,065%
S11	0,1967	0,1696	0,1682	0,1675	0,418%
S12	0,5293	0,5667	0,5652	0,5617	0,623%
S22	2,268	3,084	3,522	4,033	12,670%
E11	-0,00147	-0,002546	-0,003069	-0,003683	16,671%
E12	0,003285	0,003547	0,003559	0,003561	0,056%
E22	0,01132	0,0157	0,01806	0,0285	13,381%
Cauchy11	0,1925	0,164	0,1623	0,1611	0,745%
Cauchy12	0,5226	0,559	0,5568	0,5524	0,797%
Cauchy22	2,300	3,145	3,602	4,137	12,932%

O gráfico de convergência do Deslocamento em x do ponto **A** é apresentado na Figuras 52. Na Figura 53, indica-se também a convergência do programa Ansys® (ANSYS. . . , 2017) para o problema. O deslocamento do ponto **A** para a Malha 4 (800 Elementos) do programa desenvolvido convergiu para $0.3072mm$ e no Ansys® (ANSYS. . . , 2017), para a malha de 838 elementos foi para $0.3145mm$; o que evidencia uma diferença de 2.321%

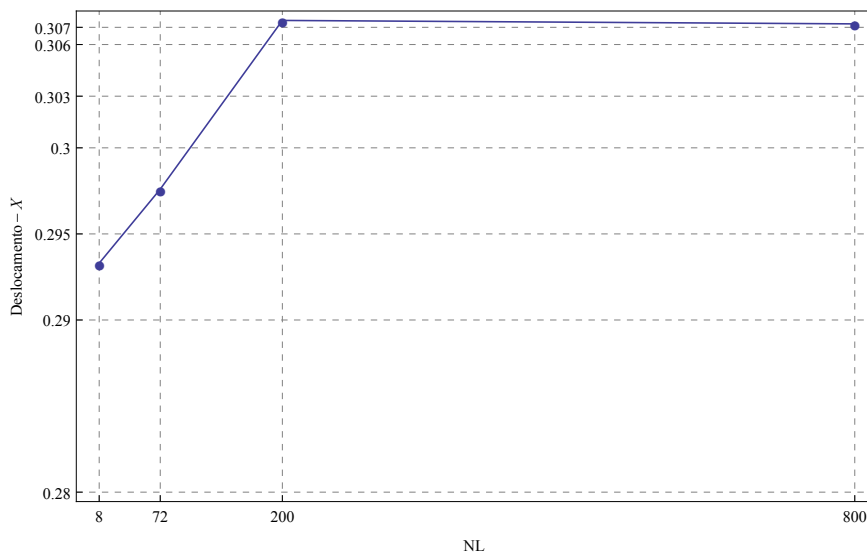


Figura 52 – Análise de Convergência - Deslocamento X

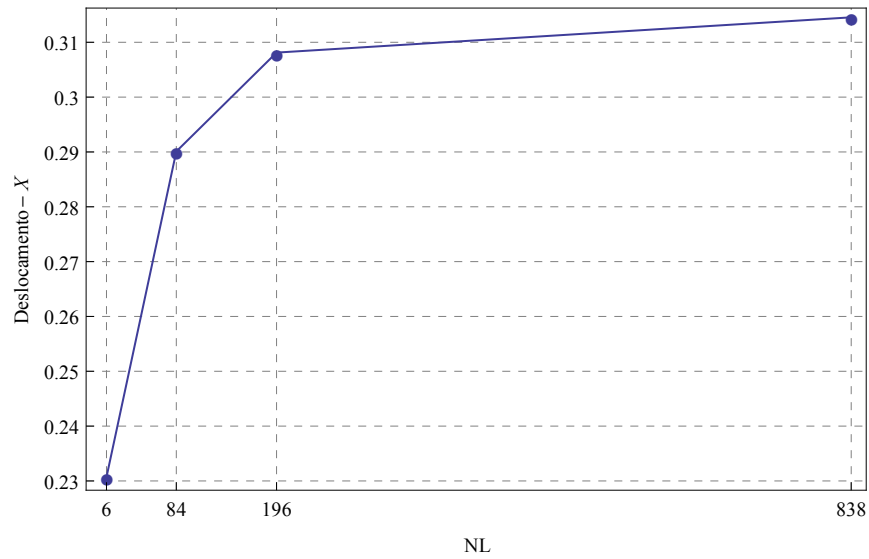


Figura 53 – Análise de Convergência - Deslocamento X (Ansys®)

As pequenas diferenças encontradas entre os resultados do presente trabalho e o Software Ansys® são justificadas pelas particularidades de cada código, mesmo utilizando-se lei constitutiva hiperelástica igual para ambos.

3.1.5 Exemplo 5: Chapa sob Tração Uniaxial

Este exemplo estuda o comportamento de uma chapa sob tração uniaxial de um polímero natural vulcanizado preenchido com carbono-preto na proporção em massa de 70 partes por centena de elastômero. O ensaio experimental foi realizado por Yeoh (1990) considerando as seguintes dimensões $130 \times 13 \times 2 \text{ mm}$. O exemplo aqui proposto busca reproduzir o comportamento encontrado no ensaio experimental realizado pelo referido autor. As condições de contorno e a discretização de malha são apresentadas na Figura 54, no extremo **B** nos nós: 4, 8, 12 e 16, foi imposto um deslocamento de 121 mm .

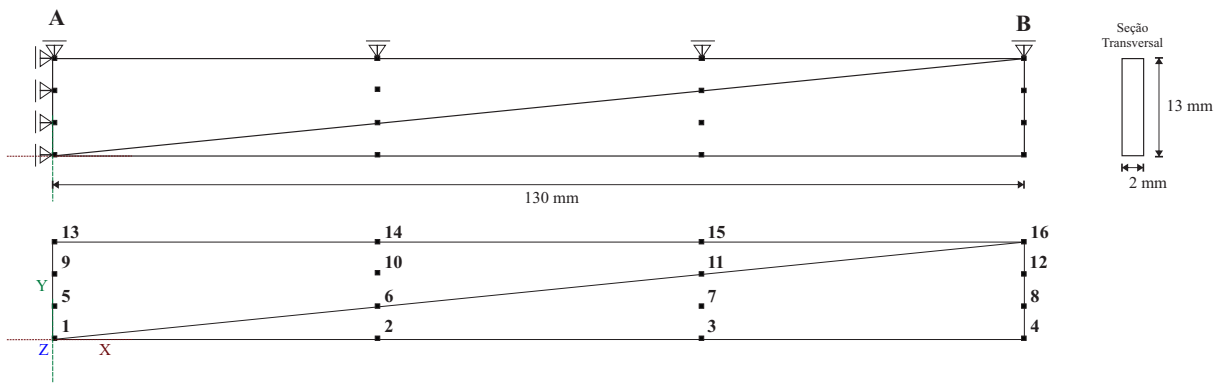


Figura 54 – Condições de contorno e Malha da Chapa ($130 \times 13 \times 2 \text{ mm}$)

O objetivo do exemplo é principalmente verificar a condição de quase incompressibilidade. A simulação foi realizada considerando o modelo hiperelástico de Yeoh, com módulo de compressão volumétrica $k = 10000 \text{ MPa}$ e as constantes Hiperelásticas do modelo $C_{10} = 0,98217570 \text{ MPa}$, $C_{20} = -0,37037343 \text{ MPa}$ e $C_{30} = 0,19718061 \text{ MPa}$; tomadas de Pascon (2008). Na Figura 55, apresenta-se o estado de deslocamentos.

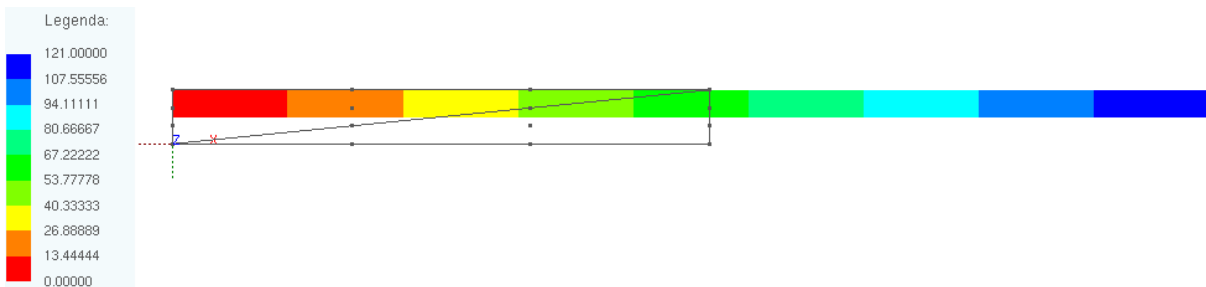


Figura 55 – Deslocamentos na direção X

O gradiente fornecido pelo código computacional no último passo de carga foi:

$$A = \begin{pmatrix} 1.93076920426953 & 1.775303627882040 * 10^{-6} & 0.0000000000 \\ -4.725292844509621 * 10^{-9} & 0.517961945528071 & 0.0000000000 \\ 0.0000000000 & 0.0000000000 & 1.0000000000 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante do gradiente, ou seja $J = \det(A) = 1.00006$ o que está de acordo com a hipótese de quase incompressibilidade, na qual $J = 1$.

Para o último passo de carga a deformação de Green $E_{11} = 1.364$, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $S_{11} = 3.453 \text{ MPa}$ e tensão de Cauchy $Cauchy_{11} = 12.87 \text{ MPa}$; na Figura 56 se mostra o estado de tensões de Cauchy $Cauchy_{11}$.

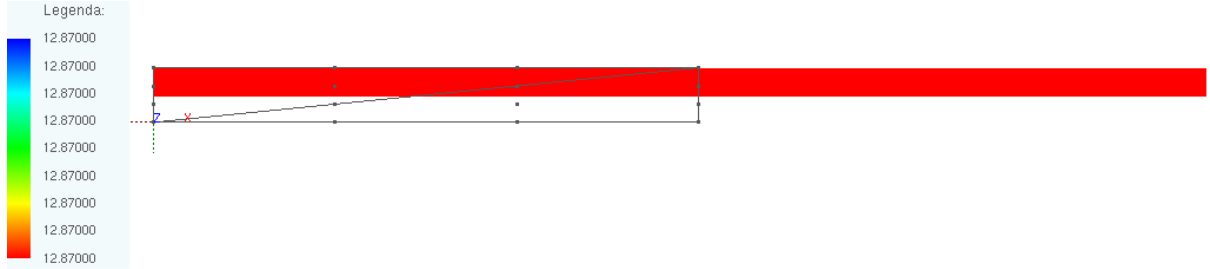


Figura 56 – Resultados da simulação no programa: Tensão de Cauchy $Cauchy_{11}$

Da hipótese de quase incompressibilidade ($J = 1$), tem-se $J = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ e da cinemática do elemento de Chapa $\lambda_3 = 1$, logo $\lambda_2 = 1/\lambda_1$. Se chamamos $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1/\lambda$, o gradiente, o alongamento à direita de Cauchy-Green e o invariante I_1 podem ser calculados como sendo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies C = A^T A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_1(C) = \text{tr}(C) = 1 + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2$$

$$I_1(C) = \text{tr}(C) = 1 + \frac{1}{\lambda^4} + \lambda^4$$

$$I_3(C) = 1$$

Rivlin (1956) obteve a relação entre os alongamentos principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), as tensões principais (t_1, t_2, t_3) e as derivadas parciais da energia (Ψ) com relação aos invariantes (I_1, I_2), como sendo:

$$\frac{t_1 - t_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \lambda_3^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \quad (3.2)$$

onde, $\sigma_e = t_1 - t_2$ é a tensão de engenharia e as derivadas da energia com relação aos invariantes para o modelo de Yeoh são: $\partial \Psi / \partial I_1 = C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2$ e $\partial \Psi / \partial I_2 = 0$. Considerando a hipótese de quase incompressibilidade e a restrição ($\lambda_3 = 1$), a Equação 3.2 fica:

$$\frac{\sigma_e}{\lambda^2 - 1/\lambda^2} = 2(C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \quad (3.3)$$

Na Figura 57 se mostra a solução analítica do problema dada pela Equação 3.3, solução numérica obtida com os dados de tensão-deformação do programa desenvolvido e os dados experimentais de Yeoh (1990). O gráfico do termo $\sigma_e/(\lambda^2 - \lambda^{-2})$, chamado de tensão 'reduzida', versus $(I_1 - 3)$ é uma forma conveniente de validar a função energia-deformação (YEOH, 1990). A coincidência entre as soluções demonstra que o programa funciona corretamente.

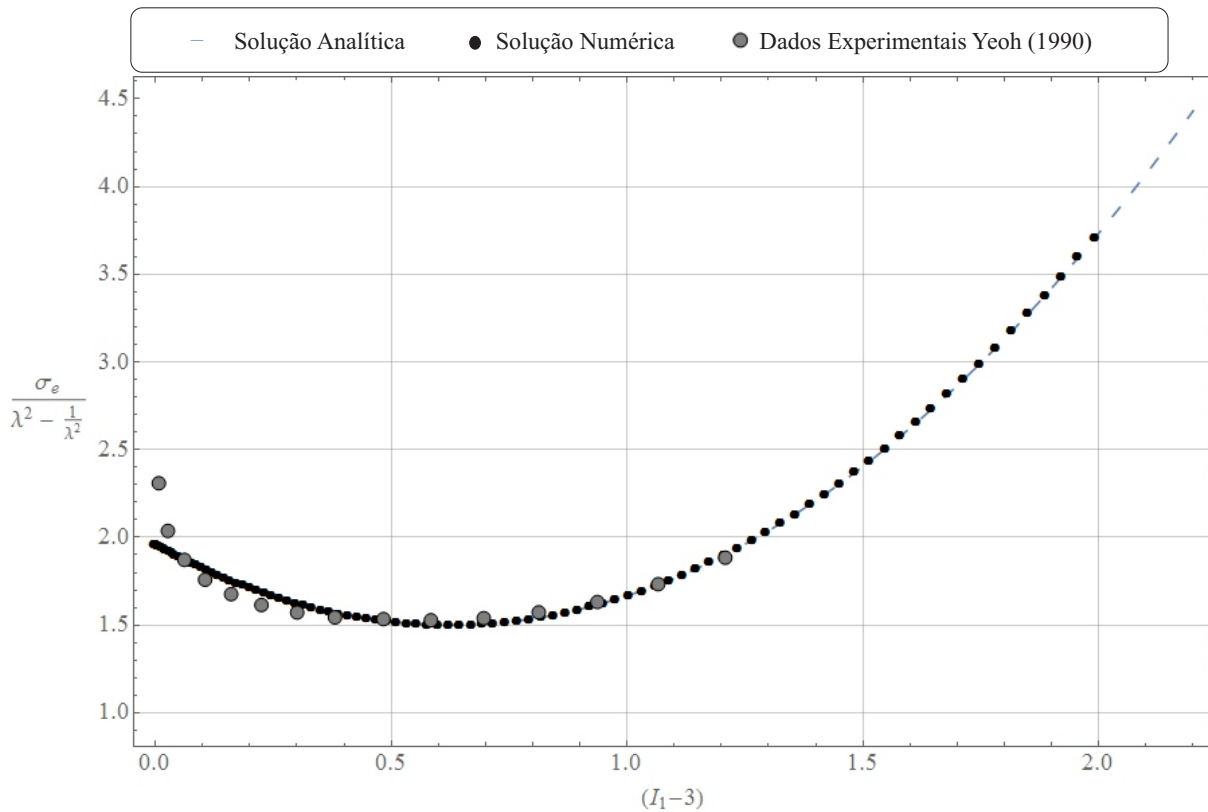


Figura 57 – Comparação entre a Simulação numérica, solução analítica da tração uniaxial com elemento finito de chapa e os resultados experimentais de Yeoh (1990)

A Equação 3.3 da solução analítica do problema foi obtida com uma 'restrição', $\lambda_3 = 1$, própria do elemento de chapa, no qual a espessura é considerada constante. Quando não existe dita restrição na direção 'z' ou ' e_3 ', $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda^{-1/2}$ e $I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$, a solução analítica do problema ficaria como:

$$\frac{\sigma_e}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} = 2(C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \quad (3.4)$$

Com a finalidade de mostrar a diferencia nos resultados das tensões, o exemplo foi modelado no Ansys® (ANSYS..., 2017) com elementos sólidos, sem e com 'restrição' no eixo e_3 ou 'z'; na Figura 58a são apresentadas as condições de contorno utilizadas nas simulações.

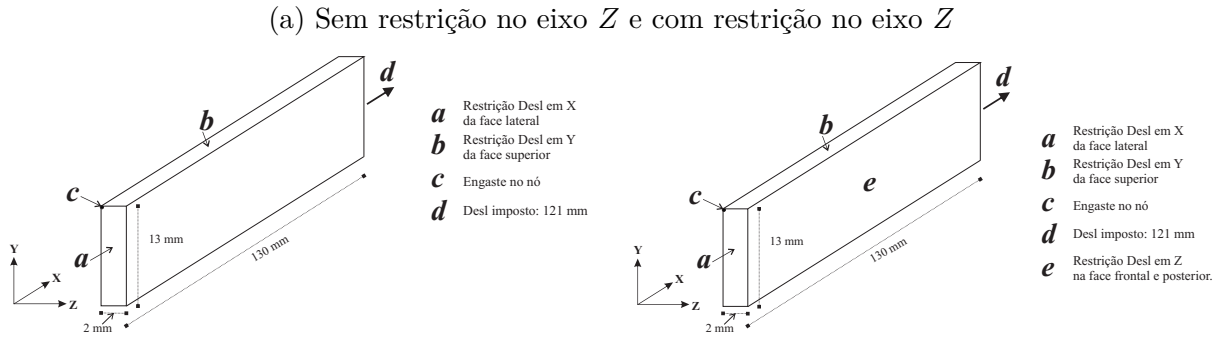
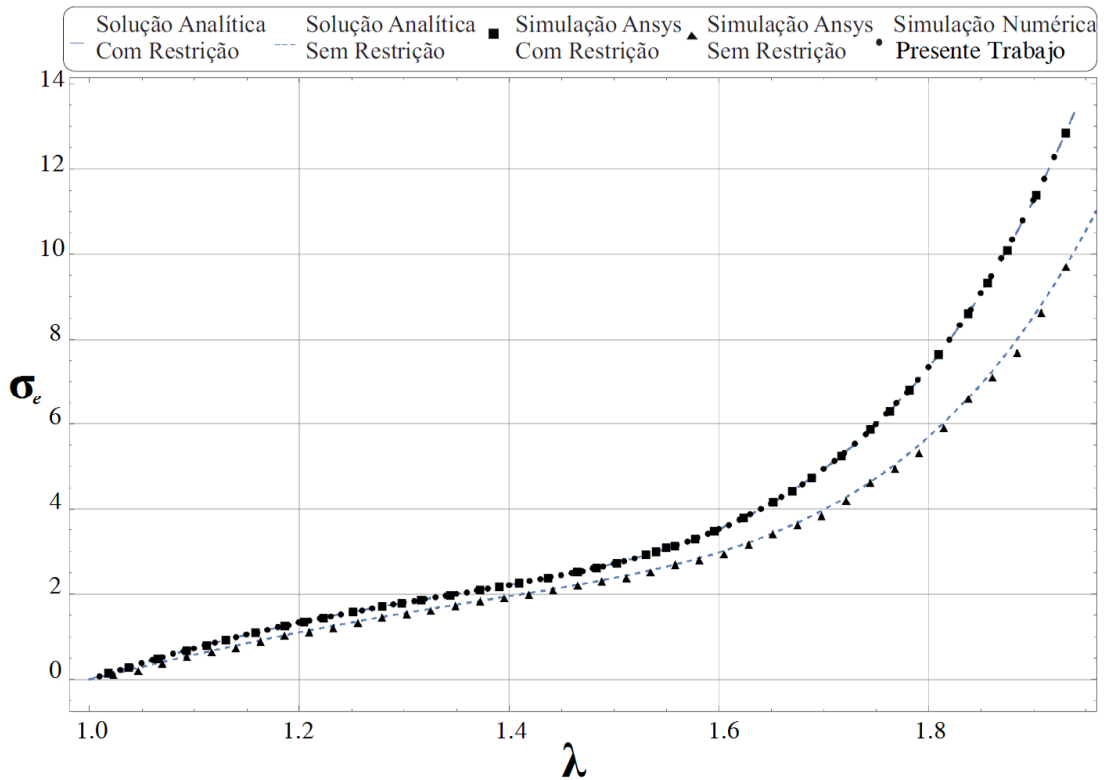


Figura 58 – Condições de Contorno no Ansys® (ANSYS..., 2017)

Na Figura 59 se mostram as curvas de tensão (σ_e) vs alongamento (λ) para as soluções analíticas com 'restrição' e sem 'restrição', as simulações no Ansys® (ANSYS..., 2017) com e sem 'restrição' e a simulação numérica no programa desenvolvido.

Figura 59 – Tensão, σ_e vs Alongamento, λ

De acordo com os resultados, pode-se observar a coincidência na resposta entre a solução analítica com 'restrição', a simulação no Ansys® (ANSYS..., 2017) com 'restrição' e a simulação numérica com elementos de Chapa; da mesma forma a simulação sem 'restrição' no Ansys® (ANSYS..., 2017) coincide com a solução analítica sem 'restrição'. O fato de ter a restrição no eixo Z gera maiores tensões. Para o ultimo passo de carga (deslocamento) se obteve um alongamento de $\lambda = 1.930769$, calculando as tensões principais usando as soluções analíticas sem e com restrição, tem-se $\sigma_e^{(sr)} = 9.7314 \text{ MPa}$ e $\sigma_e^{(cr)} = 12.8735 \text{ MPa}$, respectivamente; isso representa uma diferença relativa de 24.40%.

3.2 Validação do código computacional 3D

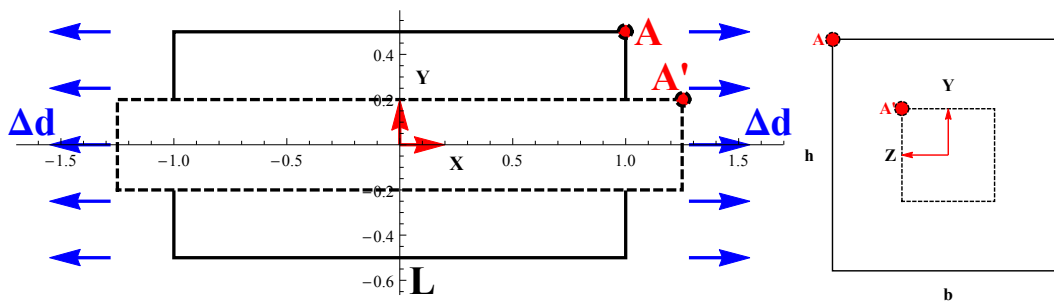
Os seguintes exemplos servem para validar o programa não linear geométrico estático 3D para materiais elásticos e hiperelásticos, reforçados ou não com fibras.

A geometria e malha das estruturas simuladas nos exemplos são geradas no *Ansys*[®] (ANSYS. . . , 2017). Como a versão disponível só gera elementos de aproximação quadrática ou linear, foi desenvolvido um programa adicional em linguagem Fortran (*Prog Ansys_Fort*) para remapear os elementos com um grau de aproximação cúbica. O *Prog Ansys_Fort* remapeia todos os elementos da estrutura e gera o arquivo de entrada no formato desejado para o programa principal. Para visualizar os resultados utiliza-se o pós-processador: *Acadview*.

3.2.1 Exemplo 1: Prisma sob tração uniaxial

Trata-se de um prisma homogêneo sob tração uniaxial (nos planos: $x = -1$ e $x = 1$) de um polímero natural (YEOH, 1990), ver Seção: 3.1.5. O Prisma tem comprimento $L = 2.0$, seção transversal $b = 1.0$, $h = 1.0$, ver Figura 60a. Dada a simetria do problema em relação aos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, é simulado apenas 1/8 do prisma, ver Figura 60b.

(a) Geometria: as linhas tracejadas representam a posição final. Seção Transversal



(b) Pela Simetria: 1/8 da estrutura é simulada. Estrutura a discretizar

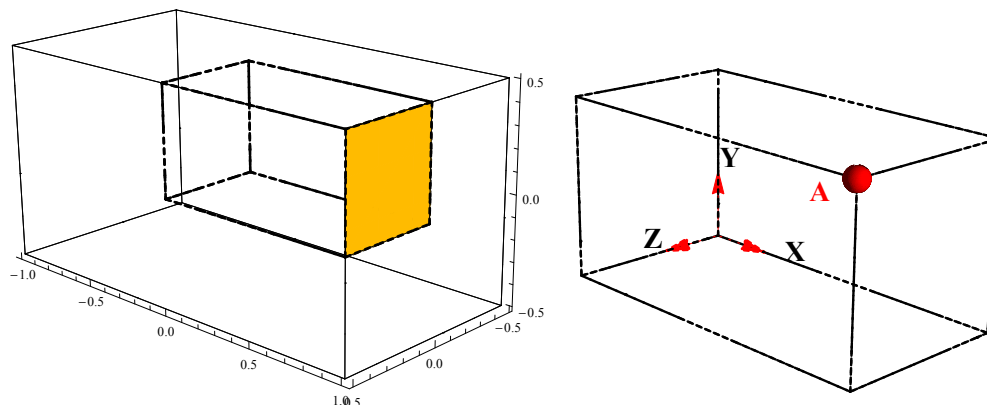


Figura 60 – Prisma sob tração uniaxial

O objetivo é verificar a implementação das leis hiperelásticas para materiais isotrópicos e incompressíveis e validar a metodologia para o cálculo das tensões usando a matriz de transformação em elementos sólidos tetraédricos.

A simulação foi realizada considerando vários modelos hiperelásticos: Modelo de Saint Venant-Kirchhoff, com módulo de elasticidade $E = 0.10701025$ e Poisson $\nu = 0.001$; modelo de Yeoh, com módulo de compressão volumétrica $k = 1000 \text{ MPa}$ e as constantes Hiperelásticas do modelo $C_{10} = 0,98217570 \text{ MPa}$, $C_{20} = -0,37037343 \text{ MPa}$ e $C_{30} = 0,19718061 \text{ MPa}$; e finalmente, o modelo de Rivlin Saunders (Yeoh), com $k = 10000 \text{ MPa}$, $C_{10} = 0,31237237 \text{ MPa}$, $C_{20} = 0,00054257 \text{ MPa}$ e $C_{30} = 0,00006962 \text{ MPa}$. Os coeficientes hiperelásticos dos materiais utilizados foram interpolados via método dos mínimos quadrado por Pascon (2008), o elevado módulo de compressão volumétrica é para reproduzir as pequenas variações volumétricas do polímero.

A estrutura foi discretizada por 12 elementos finitos tetraédricos de aproximação cúbica (20 nós), ver Figura 61. No plano $x = 1$ foi aplicado um deslocamento de $\Delta d = 1$.

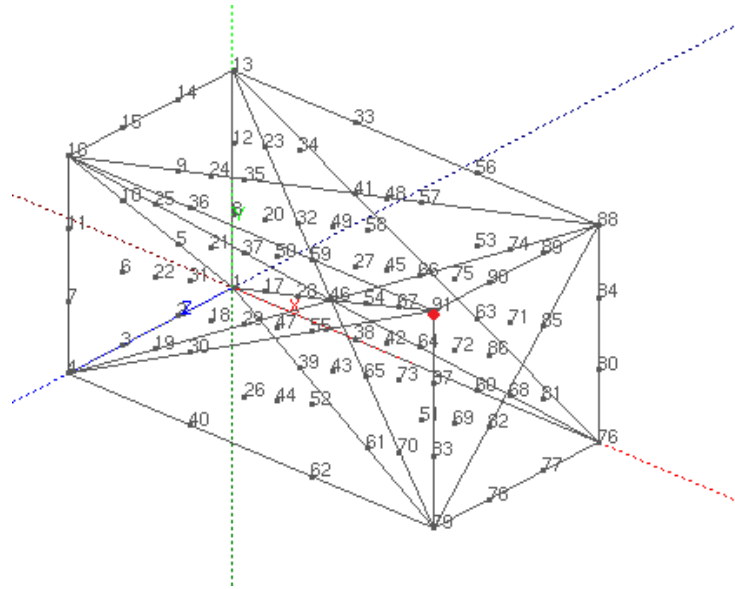


Figura 61 – Malha de 1/8 do Prisma

A solução analítica do problema para materiais hiperelásticos isotrópicos foi apresentada na Equação 3.2, particularmente para as modelos de Yeoh e Rivlin-Saunders na Equação 3.4. Para os modelos adotados, tem-se as respectivas soluções analíticas para barras sob tração uniaxial em termos de força versus deslocamento (PASCON, 2008):

$$F_1^{(Svk)} = \frac{E \cdot S_0}{2} \left(\left(\frac{u_1}{L_i} \right)^3 + 3 \left(\frac{u_1}{L_i} \right)^2 + 2 \left(\frac{u_1}{L_i} \right) \right), \quad (3.5)$$

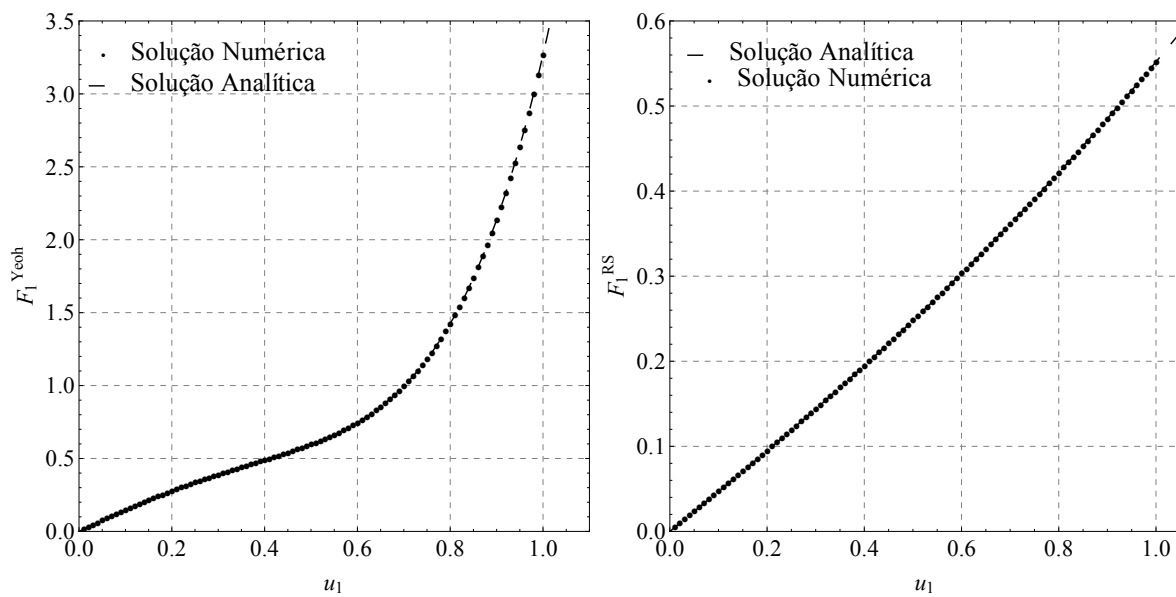
$$F_1^{(RS/Yeoh)} = 2 \cdot S_0 (\lambda^2 - \lambda^{-1}) (C_{10} + 2C_{20} (I_1 - 3) + 3C_{30} (I_1 - 3)^2), \quad (3.6)$$

onde, E é o módulo de elasticidade, S_0 é a área transversal do prisma (Ver área

amarela na Figura 60b), $L_i = \frac{1}{2}L = 1$ é o comprimento, u_1 é o deslocamento longitudinal na direção X , $\lambda = \frac{L_i+u_1}{L_i}$ é o alongamento longitudinal na direção X , $I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$ é o invariante e C_{10} , C_{20} e C_{30} são as constantes do material para os modelos de Rivlin-Saunders ou Yeoh.

Os resultados das simulações para os diferentes modelos estão de acordo com as soluções analíticas do problema. Nas Figuras 62a e 62b se corroboram os resultados numéricos referentes ao gráfico de deslocamento \mathbf{u}_1 versus força na direção x , \mathbf{F}_1 calculados para o ponto **A**. Os resultados também mostram que as tensões calculadas correspondem com as soluções analíticas, ver as Figuras 63a, 63b e 63c.

(a) Lei Constitutiva de Yeoh e Rivlin-Saunders



(b) Lei Constitutiva de Saint-Venant Kirchoff

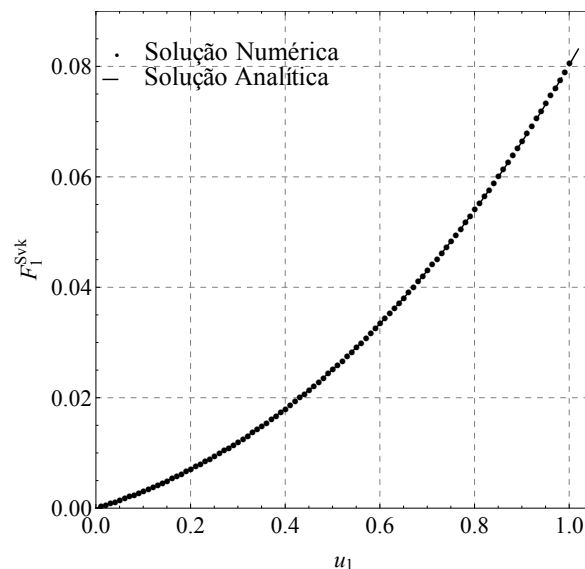


Figura 62 – Força versus deslocamento longitudinal do ponto **A** para o Prisma

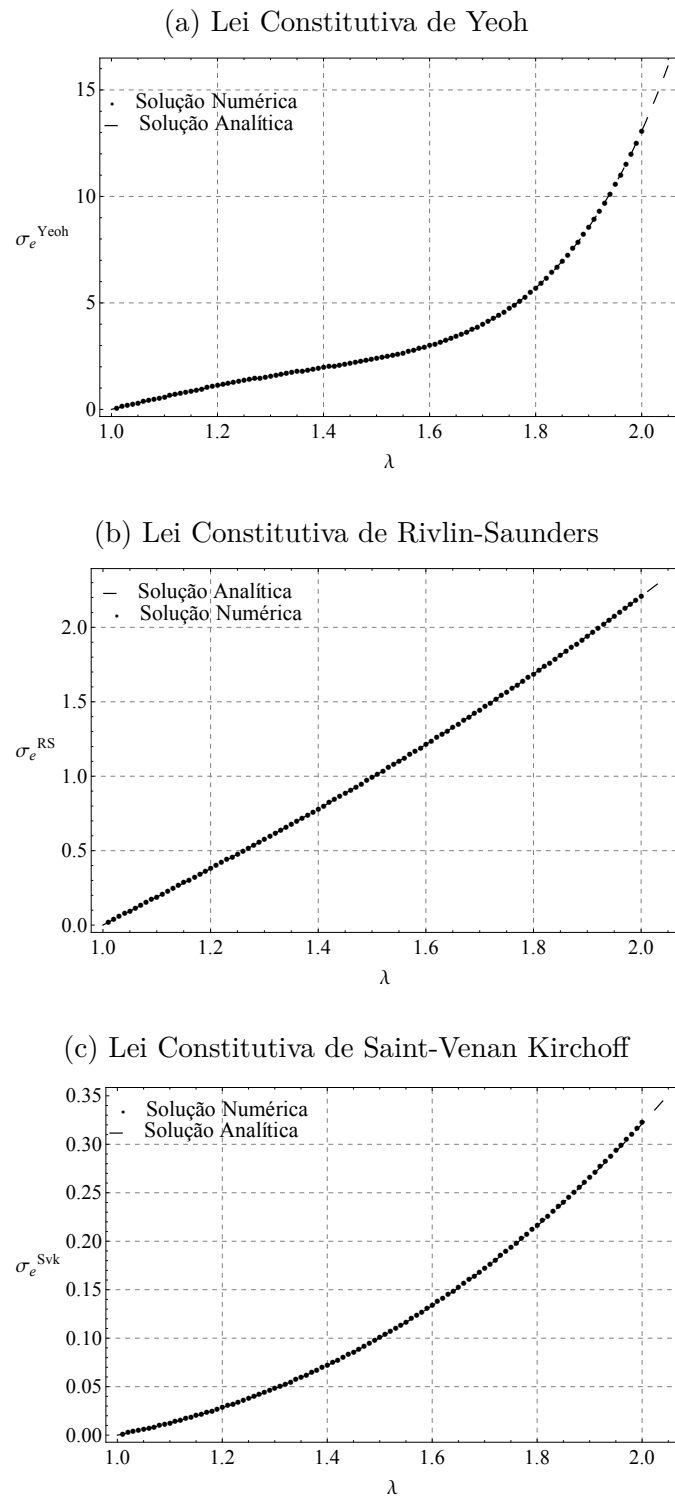


Figura 63 – Tensão, σ_e versus λ do ponto **A** para o Prisma

As posições inicial e final do prisma para o modelos de Yeoh e Rivlin-Saunders são ilustradas nas Figuras 64a e 64b.

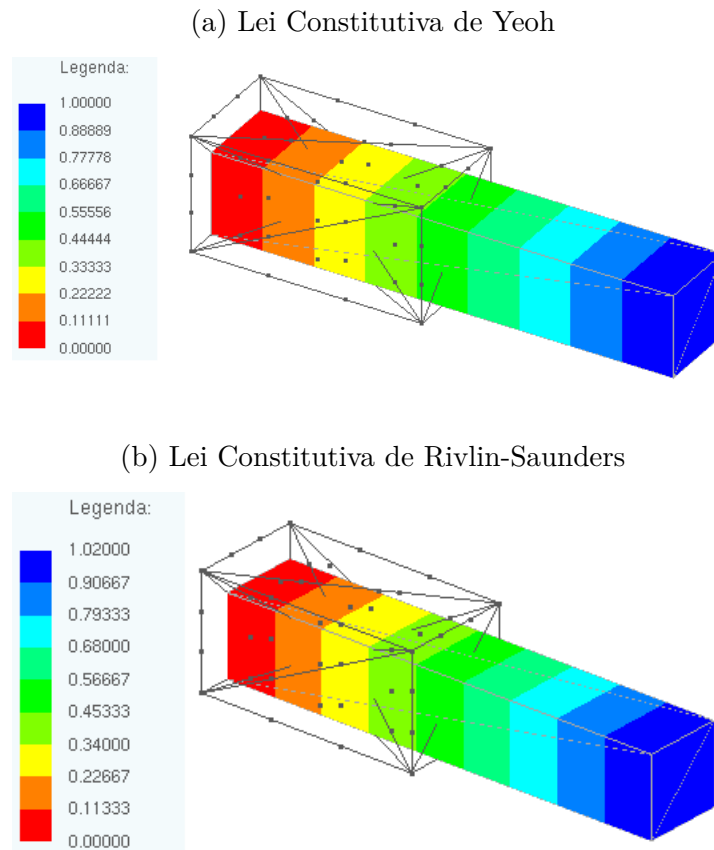
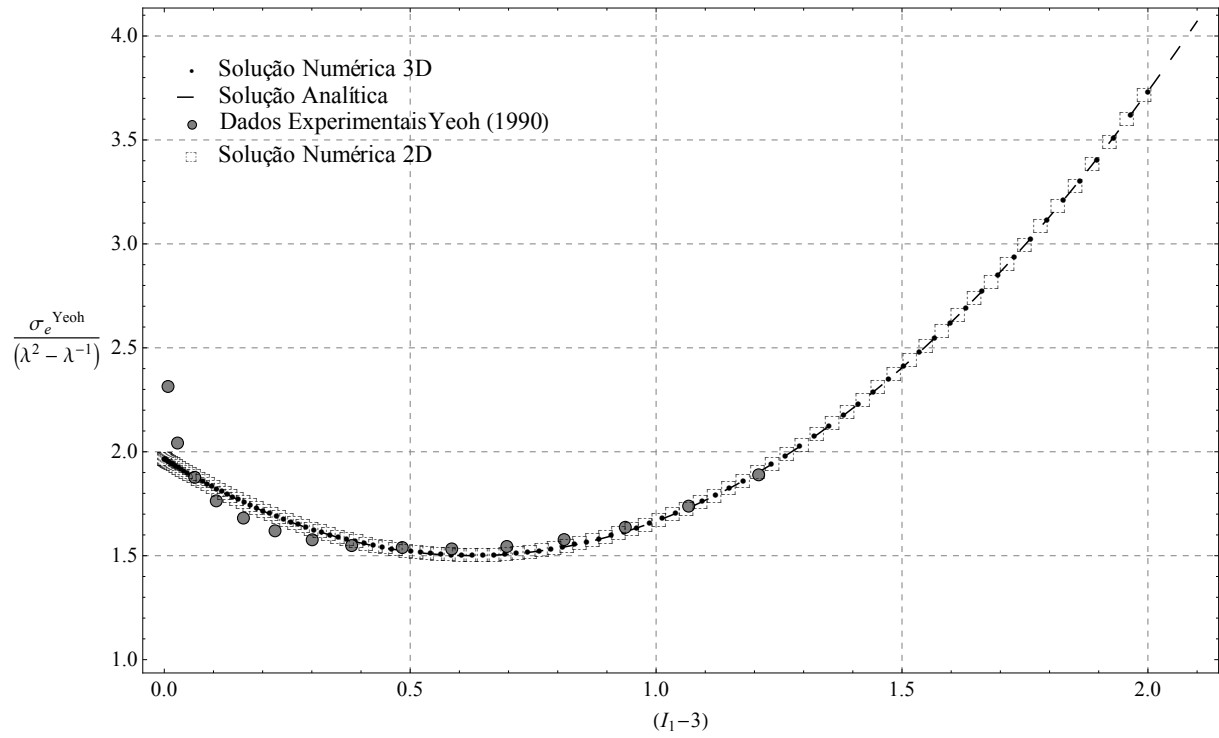


Figura 64 – Posições inicial e final do prisma: Deslocamentos longitudinais

O gráfico do termo $\sigma_e/(\lambda^2 - \lambda^{-1})$, chamado de tensão 'reduzida', versus $(I_1 - 3)$ é uma forma conveniente de validar a função energia-deformação (YEOH, 1990) para cada lei hiperelástica utilizada. Na Figura 65 são apresentados os resultados numéricos da simulação com elementos de chapa (2D) e com elementos de solido (3D), a solução analítica e os dados experimentais de Yeoh (1990) para o polímero.

Conclui-se que a formulação para materiais hiperelásticos, isotrópicos e quase incompressíveis foi implementada corretamente, além disso a metodologia para o cálculo das tensões usando a matriz de transformação para elementos tetraédricos foi validada.

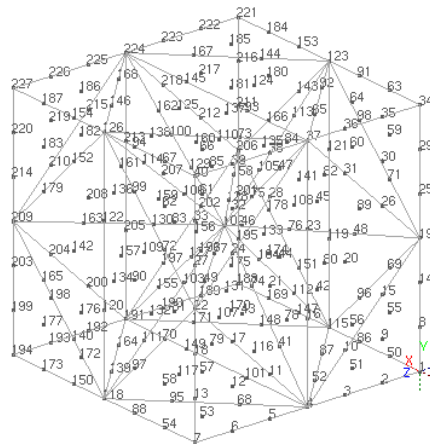
Figura 65 – Termo $\sigma_e/(\lambda^2 - \lambda^{-1})$ versus $(I_1 - 3)$

3.2.2 Exemplo 2: Cubo com fibras

Este exemplo considera um cubo unitário (1 m) reforçado, a matriz foi discretizada com 28 elementos tetraédricos³, ver Figura 66a e foi considerado o modelo de Saint-Venant com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ e Poisson $\nu = 0,0$. O modelo constitutivo para as fibras foi o de Saint-Venant-Kirchhoff, com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ e área transversal $A_f = 0,01 \text{ m}^2$.

Condições de contorno: os nós das linhas vermelhas estão restritos na direção X , os nós da linha roxa estão restritos na direção Y e os nós dos pontos azuis restritos nas três direções, X, Y e Z , ver Figura 66b.

(a) Malha do cubo



(b) Condições de contorno e discretização de cada Fibra

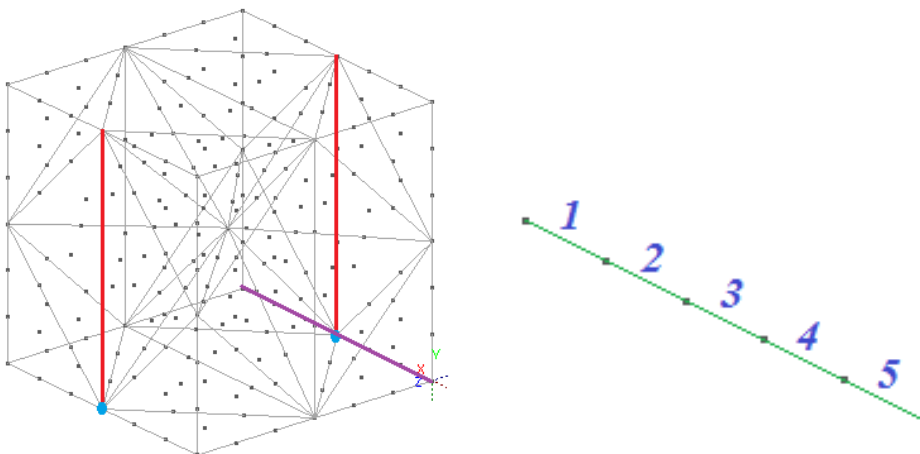


Figura 66 – Cubo reforçado com fibras

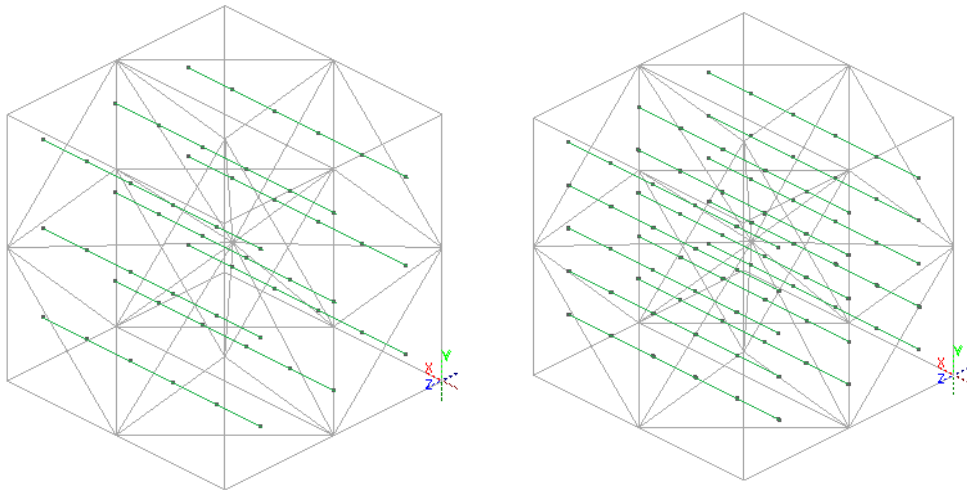
O objetivo do exemplo é demonstrar o funcionamento de um modelo de contração das

³ Neste exemplo não foi considerada a análise de convergência da malha da matriz, apenas foi estudado o efeito do aumento do número de fibras.

fibras aplicando deformações num modelo tridimensional e visualizar o efeito do aumento do número de fibras na distribuição do deslocamento na direção X e a Deformação de Green E_{11} .

Foram realizadas quatro análises: o modelo M_1 considera 9 fibras na matriz, o modelo M_2 com 15 fibras, o modelo M_3 com 25 fibras e finalmente o modelo M_4 com 49 fibras; ver Figuras 67a e 67b. Cada fibra é dividida em 5, ver Figura 66b.

(a) Modelo M_1 com 9 fibras e modelo M_2 com 15 fibras



(b) Modelo M_3 com 25 fibras e modelo M_4 com 49 fibras

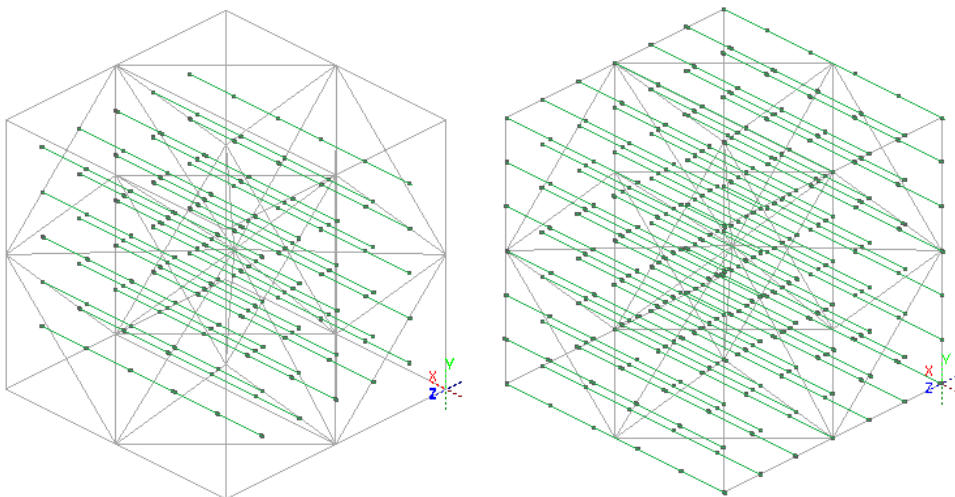


Figura 67 – Discretização das fibras

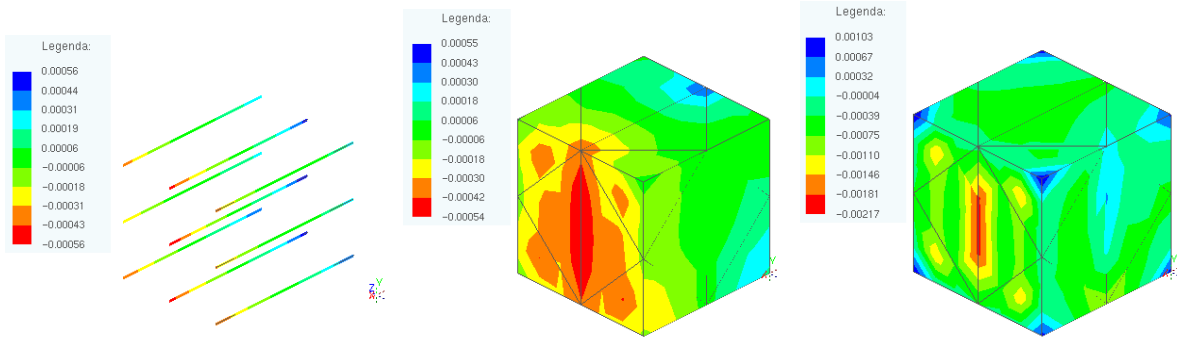
O modelo de contração usado nas fibras é estático, com um valor de: $E_{Green} = E_0$, onde $E_0 = -0,01$ aplicado em 100 passos.

Nas Figuras 68a, 68b, 68c e 69, se mostram os resultados de deslocamento na direção X para as fibras ($Desl_X - Fibras$) e a matriz ($Desl_X - Matriz$) e a deformação de Green para a matriz, E_{11} dos modelos: M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , respectivamente.

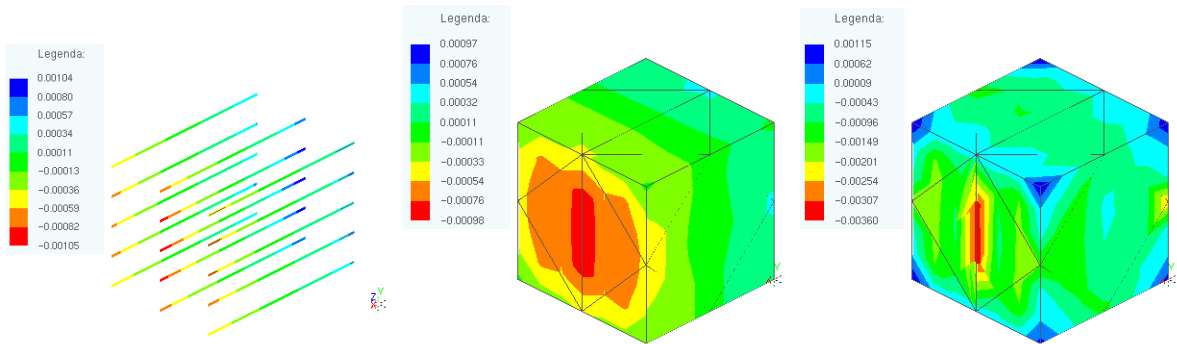
Observa-se a simetria nas extremidades das fibras com relação ao deslocamento mínimo e máximo em todos os modelos

que com o aumento do número de fibra

(a) Modelo M_1 : $Desl_X - Fibras$, $Desl_X - Matriz$, E_{11}



(b) Modelo M_2 : $Desl_X - Fibras$, $Desl_X - Matriz$, E_{11}



(c) Modelo M_3 : $Desl_X - Fibras$, $Desl_X - Matriz$, E_{11}

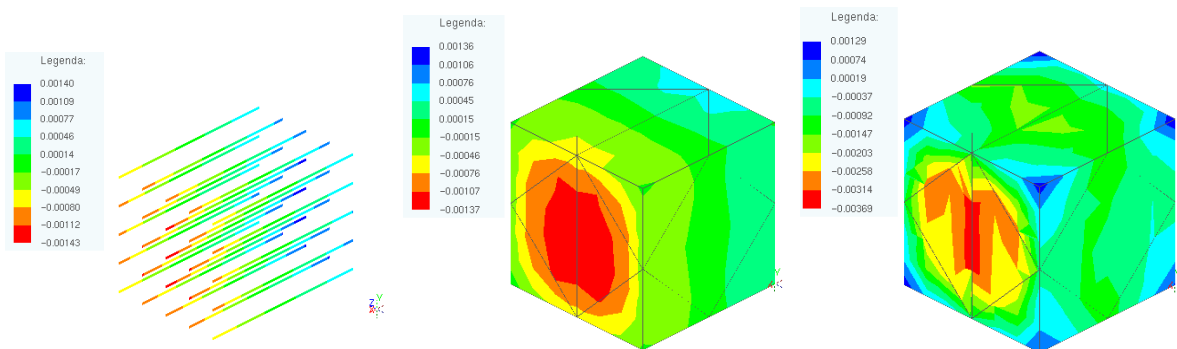


Figura 68 – De esquerda á direita: Deslocamento em X das Fibras, deslocamento em X e deformação de Green da matriz (E_{11})

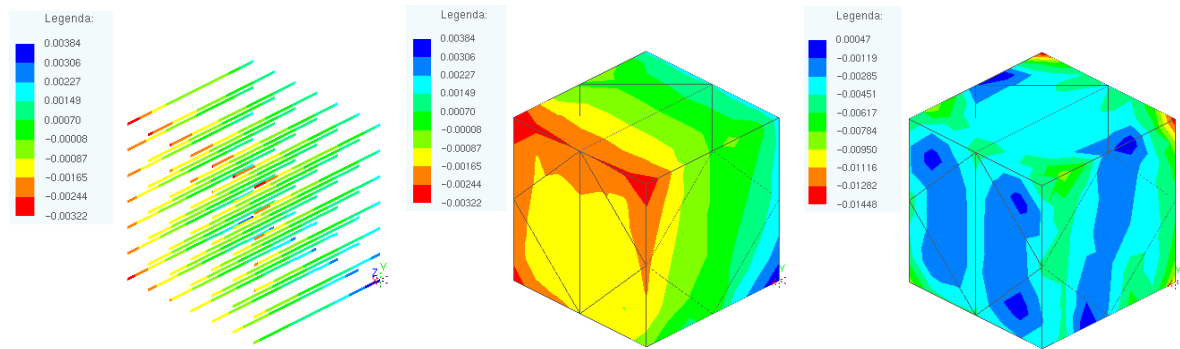


Figura 69 – Modelo M_4 : $Desl_X - Fibras$, $Desl_X - Matriz$, E_{11}

No modelo M_4 , por exemplo, o nó da fibra com coordenadas $(1.0, 1.0, 1.0)$ no contorno tem um deslocamento mínimo de -0.00322 m igual ao deslocamento mínimo da matriz no mesmo ponto (Nó: 227). Essa equivalência comprova o acoplamento Fibra-Matriz, visto também no caso bidimensional no exemplo da seção 3.1.3.

Conclui-se também que o aumento do número de fibras proporciona uma distribuição mais uniforme dos deslocamentos e portanto das deformações; confirmando novamente a importância da localização das fibras e sua distribuição dentro da matriz a ser estudada.

3.3 Aplicações Biomecânicas com elementos bidimensionais

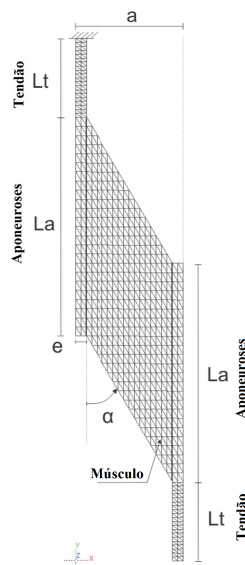
3.3.1 Exemplo 1: Influência da distribuição das fibras no comportamento mecânico dos músculos esqueléticos

Os resultados deste exemplo foram apresentados no Congresso Civil-Comp Press, 2015. Título do artigo: The influence of the Distribution of Fibers in the Mechanical Behavior of Muscles. Autores: C.Q. Ramírez, R.R. Paccola e H.B. Coda. (RAMÍREZ; PACCOLA; CODA, 2015). O exemplo aqui proposto teve como objetivo: descrever a influência da quantidade (densidade) de fibras no músculo esquelético durante alongamento de uma de suas extremidades. Foi considerada a lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff e o músculo esquelético modelado foi do tipo unipenado ⁴, mostrado na Figura ??.

(a) Músculo flexor longo do polegar



(b) Malha de EF



(c) Nomenclatura

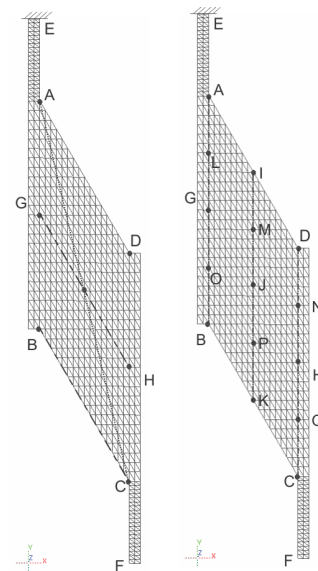


Figura 70 – Geometria do músculo esquelético 2D

Tabela 7 – Fibras Área

n_Fibras	2	4	8	16	32	64
A_Fibras (mm^2)	21,69	10,85	5,42	2,71	1,36	0,68

Na Figura 70b são apresentadas as dimensões do músculo e as condições de contorno, onde o final de um dos tendões foi fixado. O ângulo $\alpha = 25$ graus e o comprimento das fibras é de: 74,791 mm. A área fisiológica da seção transversal (em inglês: The Physiological Cross Sectional Area, *PCSA*) é de 3244,80 mm^2 . As propriedades do material foram consideradas homogêneas no músculo. Todos os modelos foram carregados com um deslocamento de 10 mm no ponto final do tendão, F. Foram avaliados os seguintes modelos: Músculo sem

⁴ Músculo preso à uma borda do tendão, como o músculo da Figura 70a

fibras ($0F$), com duas ($2F$), quatro ($4F$), oito ($8F$), dezesseis ($16F$), trinta e duas ($32F$) e sessenta e quatro ($64F$) fibras. A área para cada um dos modelos foi calculada com $A_f = PCSA/n_{Fibras}$, onde n_{Fibras} é o número de fibras. As áreas são apresentadas na Tabela 7 e a distribuição das fibras é mostrada na Figura 71.

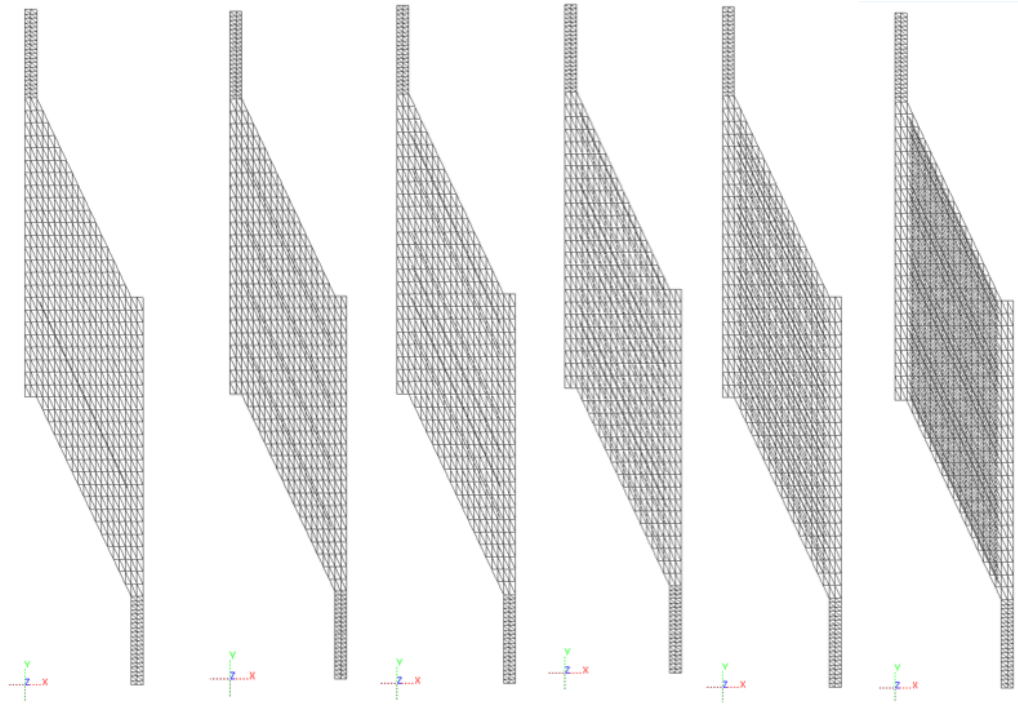


Figura 71 – Malha das fibras: $2F$, $4F$, $8F$, $16F$, $32F$, $64F$

Resultados

Resposta do músculo à alteração do comprimento muscular: A alteração do comprimento muscular é definida como a distância entre os pontos A e C , veja a Figura 70c; e a alteração da largura muscular entre os pontos B e C na parte inferior do músculo e no meio pelos pontos G e H . Ver Figuras 72a, 72b e 72c.

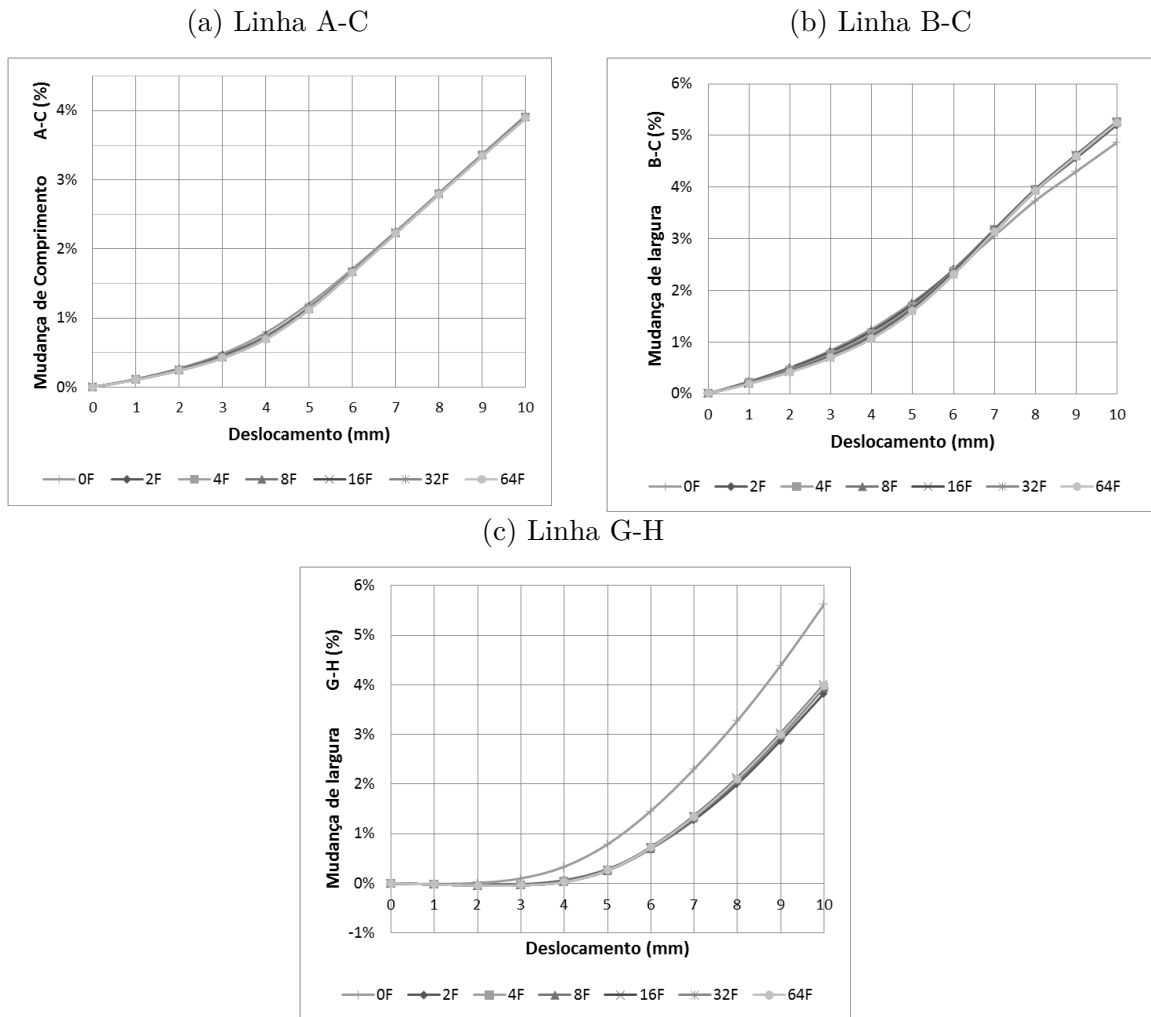


Figura 72 – Mudanças de comprimento e largura do músculo

Tensão devido ao alongamento do tendão no ponto F .

Usando os pontos mostrados na Figura 70c, foram definidas três linhas ao longo do músculo como: $ALGOB$, $IMJPK$ e $DNHQC$, para avaliar a tensão de segunda ordem de Piola (S_{11} , S_{22} e S_{12}) pra cada um dos modelos. Os resultados são mostrados nas Figuras 73, 74 e 75. Em geral, o comportamento da tensão apresenta uma tendência para todos os modelos, mas quando é avaliada a tensão em cada ponto da linha para cada modelo, ver Figuras 73b, 73c, 74b, é observada uma convergência do valor quando é aumentado o número de fibras.

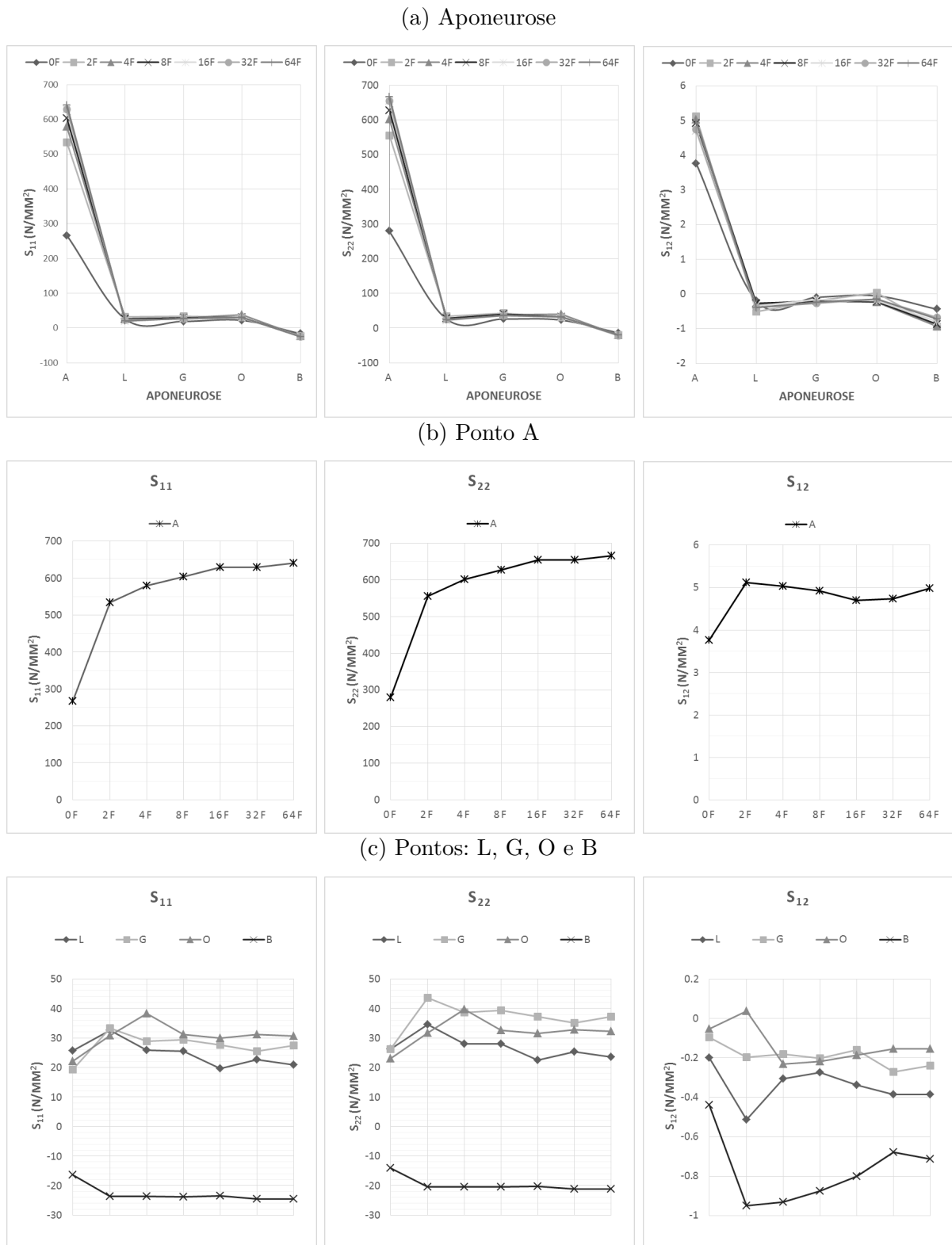


Figura 73 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha ALGOB

Para todos os modelos, os resultados mostram que o músculo dilatou-se, máximo 4% no seu comprimento e 5,5% na sua largura. Uma observação mais notável, na mudança de largura entre *G* e *H* o máximo foi obtido para o modelos sem fibras, para os outros o máximo foi de 4%. Segundo a Figura 75 a tensão máxima ao longo do músculo (linha

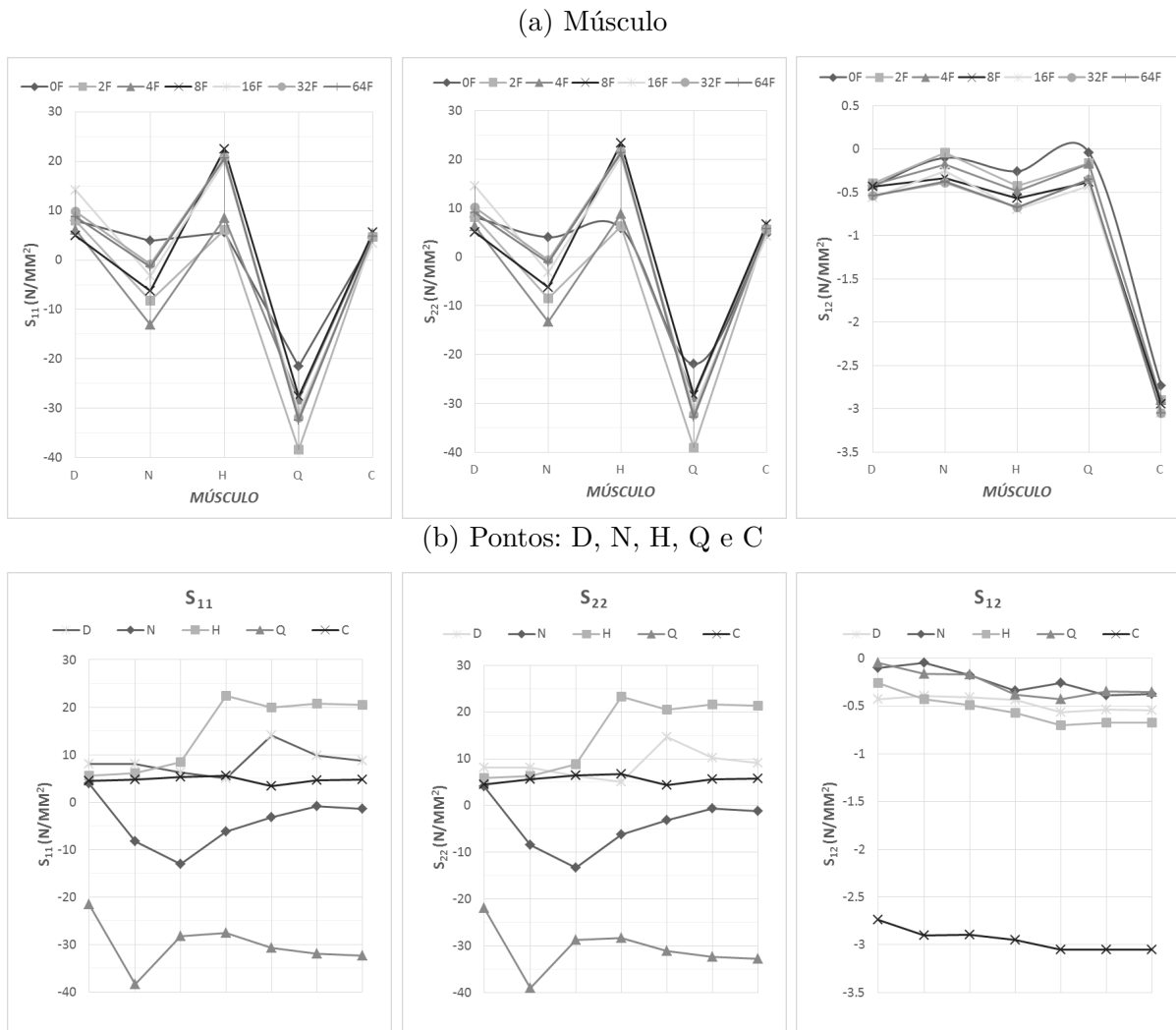
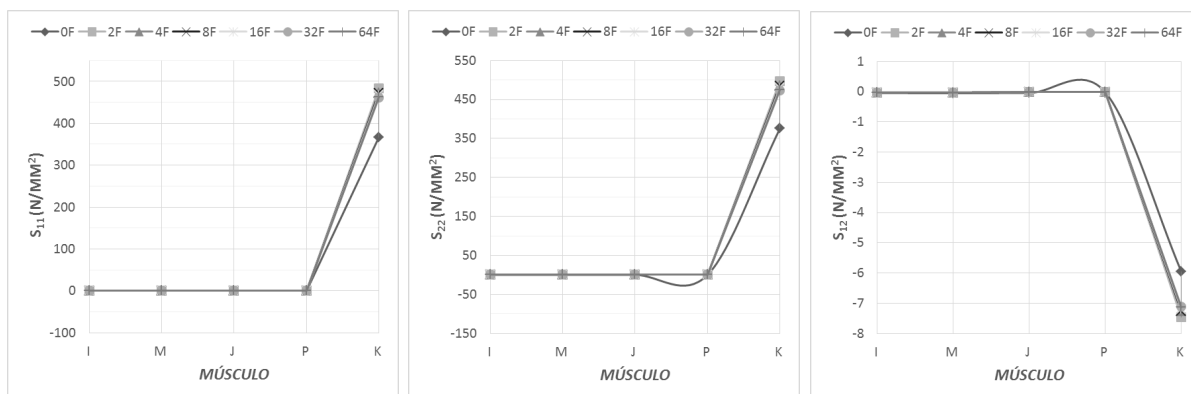


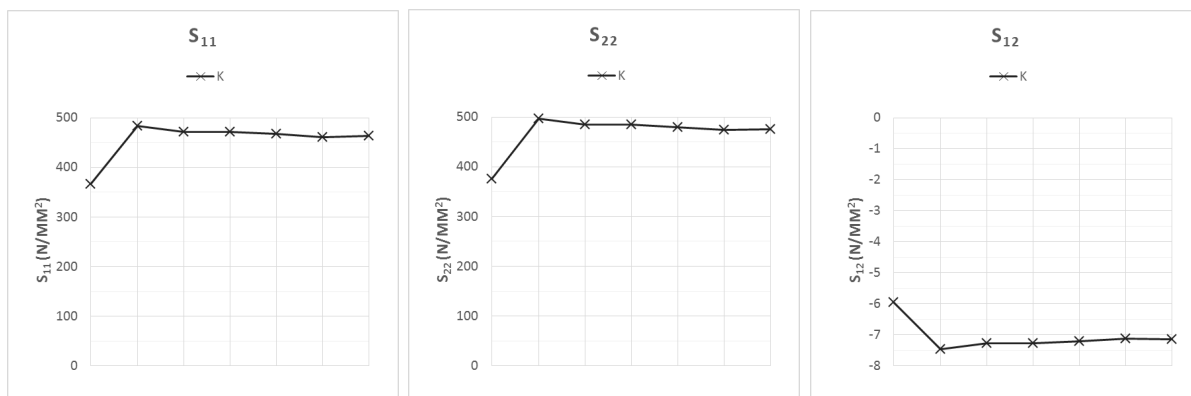
Figura 74 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha DNHQC

JFK) estava no ponto *K*. Na aponeurose, definida pelo comprimento *La* na Figura 70b, a tensão máxima ao longo do seu comprimento foi no ponto *A* perto da condição de contorno (ponto *E*). Os resultados indicaram que o número de fibras não influenciou na distribuição de deslocamento ao longo do músculo. No entanto, a distribuição de tensões é altamente afetada quando a densidade das fibras varia. É possível apreciar isso quando o valor de tensão é analisada em diferentes pontos ao longo de aponeurose e do músculo. No entanto, existe uma convergência de tensão quando o número de fibras no músculo é aumentada.

(a) Músculo



(b) Ponto K



(c) Pontos: I, M, J e P

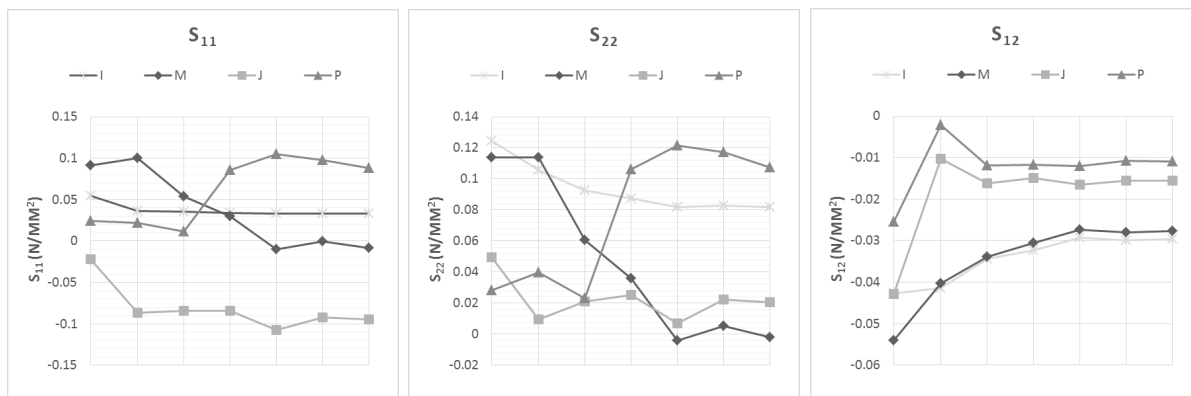


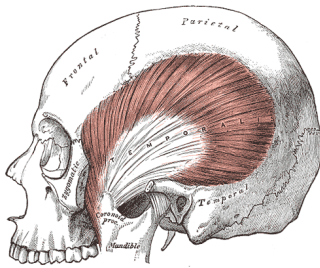
Figura 75 – Tensões de Piola Kirchhoff no tecido mole, linha IMJPK

3.3.2 Exemplo 2: Músculo Temporal

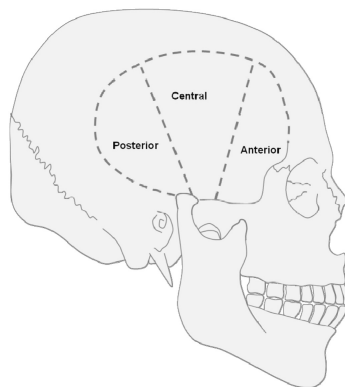
Segundo o Dr. Carlo Marchenisi, da Sociedade Brasileira de Bio Cibernética Bucal, "a boca é o pilar de sustentação da postura humana"⁵, portanto é importante estudar as patologias do aparelho bucal. Existem vários sintomas associados a este músculo como o maxilar doloroso causado por bruxismo⁶. Em virtude do anterior, considera-se importante o estudo das propriedades do músculo temporal, para assim simular de forma bem aproximada e com isso conhecer melhor o seu comportamento.

Trinidade (2010) calculou experimentalmente as propriedades mecânicas do músculo temporal humano, onde foram selecionadas três regiões: posterior, central e anterior, ver a Figura 76b. O autor retirou tiras longitudinais do músculo de $10 \pm 2 \text{ mm}$ de comprimento e $4 \pm 2 \text{ mm}$ de largura e ensaiadas a tração com as fibras orientadas longitudinalmente (TRINIDADE et al., 2013). O exemplo aqui proposto consiste em uma chapa de $10 \times 4 \text{ mm}$ sem fibras, cujas condições de contorno e discretização de malha são apresentadas na Figura 76c. No extremo **A** foi imposto um deslocamento de 0.3 mm .

(a) Fonte: Gray (1918)



(b) Regiões do músculo temporal. Fonte: Trinidade et al. (2013)



(c) Condições de contorno e discretização da malha

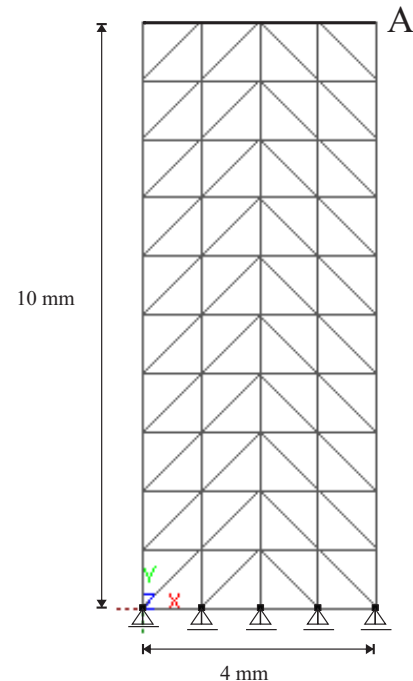


Figura 76 – Músculo temporal

O objetivo da simulação é conhecer o estado de deformação e tensão do músculo temporal com as constantes encontradas na literatura, comparando os resultados com a solução analítica.

⁵ Disponível em: <http://www.biocibernetcabucal.com.br/conteudo.swf>

⁶ Ativação involuntária dos músculos principalmente durante o sono, causando desgaste nos dentes.

O exemplo foi modelado com 80 elementos de chapa de aproximação cúbica. A simulação foi realizada considerando o modelo hiperelástico de Yeoh, com módulo de compressão volumétrica $k = 100 \text{ MPa}$ e as constantes do modelo: $C_{10} = 0.0678 \text{ MPa}$, $C_{20} = -0.0485 \text{ MPa}$, $C_{30} = 0.0466 \text{ MPa}$, tomadas de Trinidad (2010), do grupo masculino com idade entre os 20 - 50 anos.

Para o último passo de carga a deformação de Green $E_{22} = 0.03045$, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie $S_{22} = 0.01504 \text{ MPa}$ e tensão de Cauchy $Cauchy_{22} = 0.01596 \text{ MPa}$

Considerando a solução analítica, Equação 3.3, calcula-se o valor da tensão considerando o alongamento $\lambda_2 = (2E_{22} + 1)^{1/2} = 1.03$, obtendo como resultado $\sigma_e = 0.0159622$. A diferença relativa entre a solução analítica e a simulação numérica é de 0.0138%. O gráfico de tensão versus alongamento é mostrado na Figura 77.

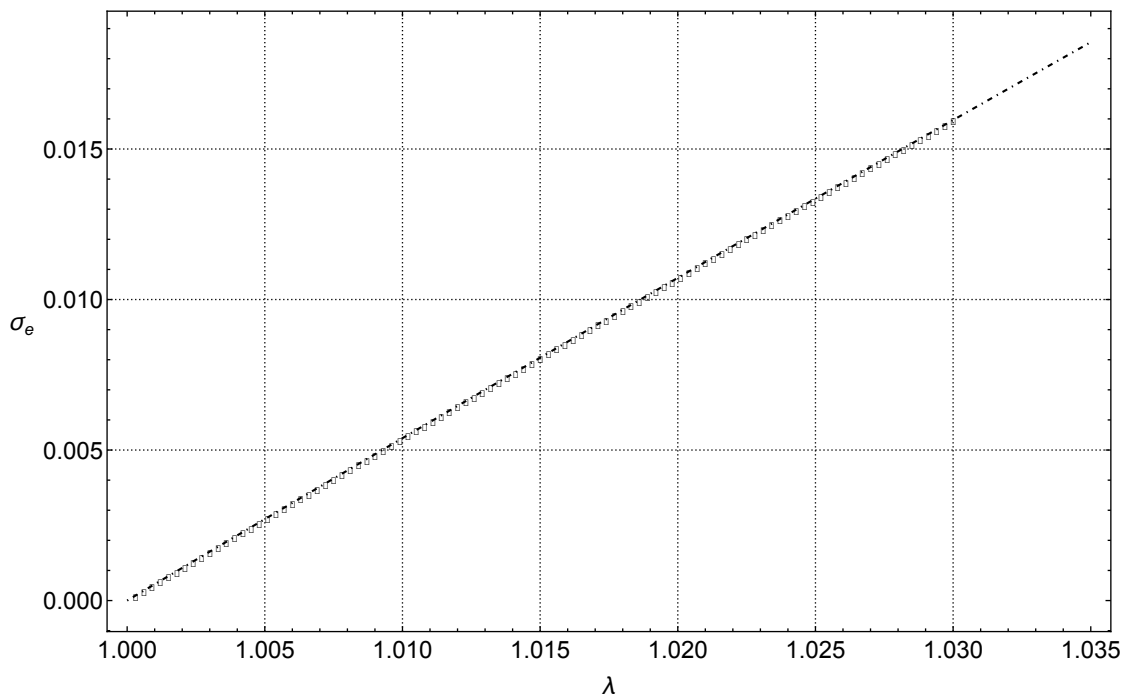


Figura 77 – Tensão vs Alongamento
 □ Solução Numérica. - · - Solução Analítica

3.4 Aplicação Biomecânica com elementos Tridimensionais: Músculo Tibial Anterior (TA)

Estudos recentes mostram as razões que justificam a seleção do músculo TA no campo da biomecânica computacional (JODA, 2016; JENSEN et al., 2016) ou particularmente para simulações numéricas. Primeiro, sua localização é favorável, porque o músculo TA está em um membro do corpo, ou seja está longe de órgãos internos e vitais. Em segundo lugar, o músculo TA está posicionado superficialmente com isso pode ser acessado para medições através da pele e fásia⁷ externa, se necessário. E finalmente, este tecido pode ser 'virtualmente' isolado na ação de dorsiflexão do pé, deste modo a força pode ser medida em experimentos sem interferência de outros tecidos (JODA, 2016); além disso, é o único músculo que adicionalmente gera inversão do pé (JENSEN et al., 2016).

Exemplos numéricos com geometrias reais são escassos na literatura dada as dificuldades éticas e operacionais presentes para sua construção, assim como pela multi disciplinaridade da área a qual requer pessoal especializado em campos de engenharia e biológicos ao mesmo tempo. Este exemplo representa uma aplicação biomecânica 3D, utilizando uma geometria construída a partir de imagens tomográficas reais de um ser humano, considerando dois modelos constitutivos. Os objetivos principais deste exemplo são:

- avaliar a capacidade do programa para simular tecidos musculares abordando as suas principais características mecânicas: a não linearidade geométrica, a anisotropia (matriz-fibras), quase incompressibilidade, a organização e orientação das fibras musculares e a ativação muscular;
- analisar a influência dos parâmetros arquitetônicos e dos fenômenos mecânicos considerados nas simulações.

Com isso, serão apresentados os estados de tensão e deformação da matriz e das fibras do músculo TA. O exemplo está estruturado da seguinte forma: apresenta-se a descrição do músculo TA, a geometria utilizada, os parâmetros arquitetônicos, a distribuição das fibras musculares e o procedimento de geração, as propriedades dos materiais (matriz e fibras), as condições de contorno e carregamento, resultados, análise dos resultados e finalmente, as conclusões do exemplo.

⁷ Fásia: tecido conjuntivo

Descrição do Músculo TA

O músculo TA está localizado na parte inferior da perna, na parte da frente da tíbia e se insere no tarso⁸ e na base do dedo hálux⁹ através do seu tendão, ver Figuras 78a, 78b e 78c. Este músculo é o principal responsável pelo movimento de dorsiflexão (subir a ponta do pé) e inversão (girar o pé para dentro) e ajuda na absorção de impacto durante as corridas. O músculo TA está localizado na frente do osso da Tíbia, as condições de contorno são apresentadas nas Figuras 79a e 79b.

O sistema do músculo TA humano inclui aponeuroses que envolvem o exterior do músculo e uma que se estende para cima a partir da região distal do músculo, dividindo o ventre muscular formando as seções anterior e posterior (JODA, 2016); estas estruturas não são consideradas no modelo numérico aqui analisado.

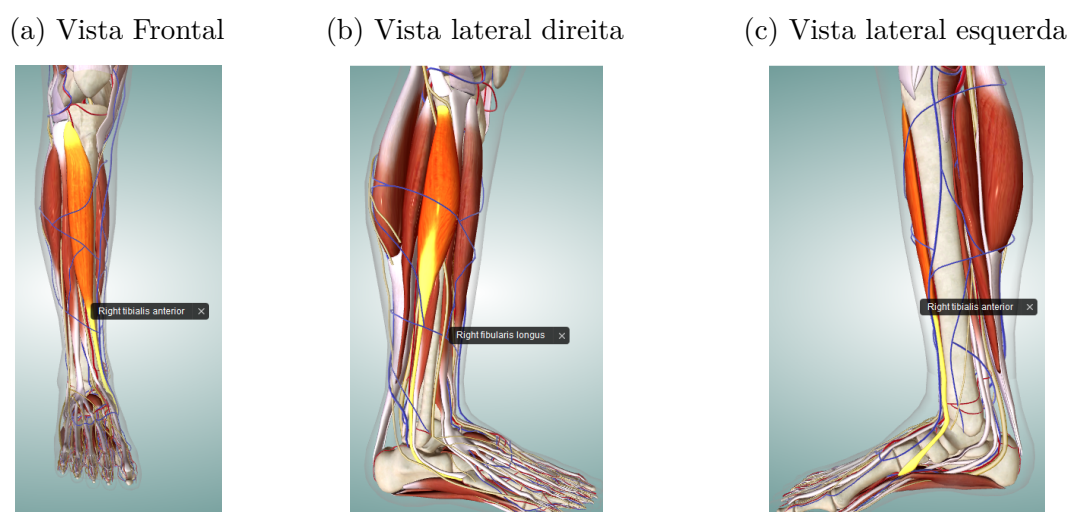


Figura 78 – Localização do músculo TA¹⁰

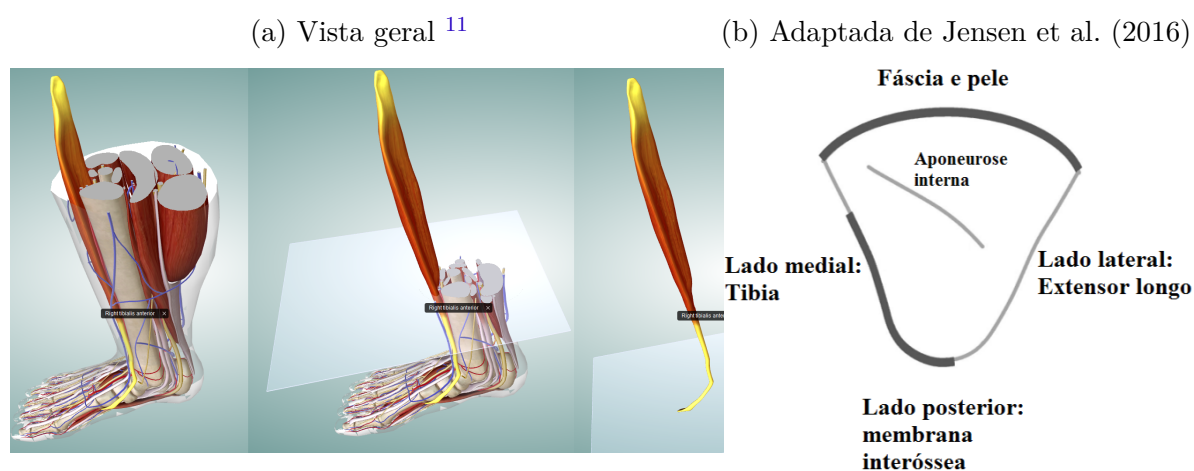


Figura 79 – Condições de contorno reais do músculo TA

⁸ Chama-se tarso à parte superior do pé dos mamíferos

⁹ Hálux, nome dado ao dedo grande do pé, também chamado de primeiro pododáctilo

¹⁰ Imagens do site: <<http://teachmeanatomy.info/3d-model/area/lower-limb/>>

¹¹ Imagens do site: <<http://teachmeanatomy.info/3d-model/area/lower-limb/>>

Geometria do Músculo TA

A geometria do músculo foi descarregada do site *BodyParts3D* e tratada ¹² com o programa 3 – *Matic*® (3-MATIC..., 2015), ver Figura 80. As dimensões aproximadas do músculo são apresentadas na Figura 81.

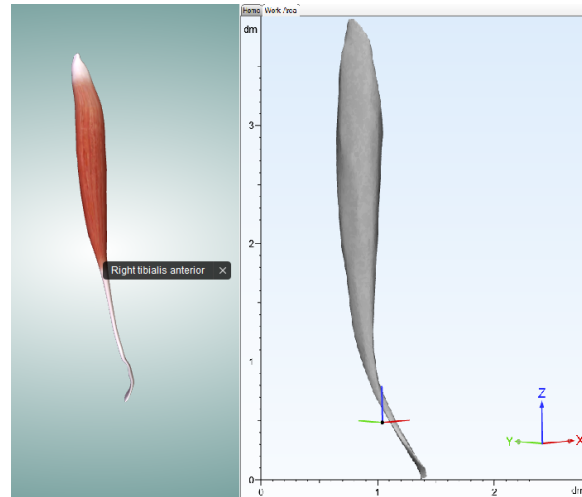


Figura 80 – Estrutura 'real' do Músculo TA e modelo 3D no programa 3-Matic® (3-MATIC..., 2015), respectivamente

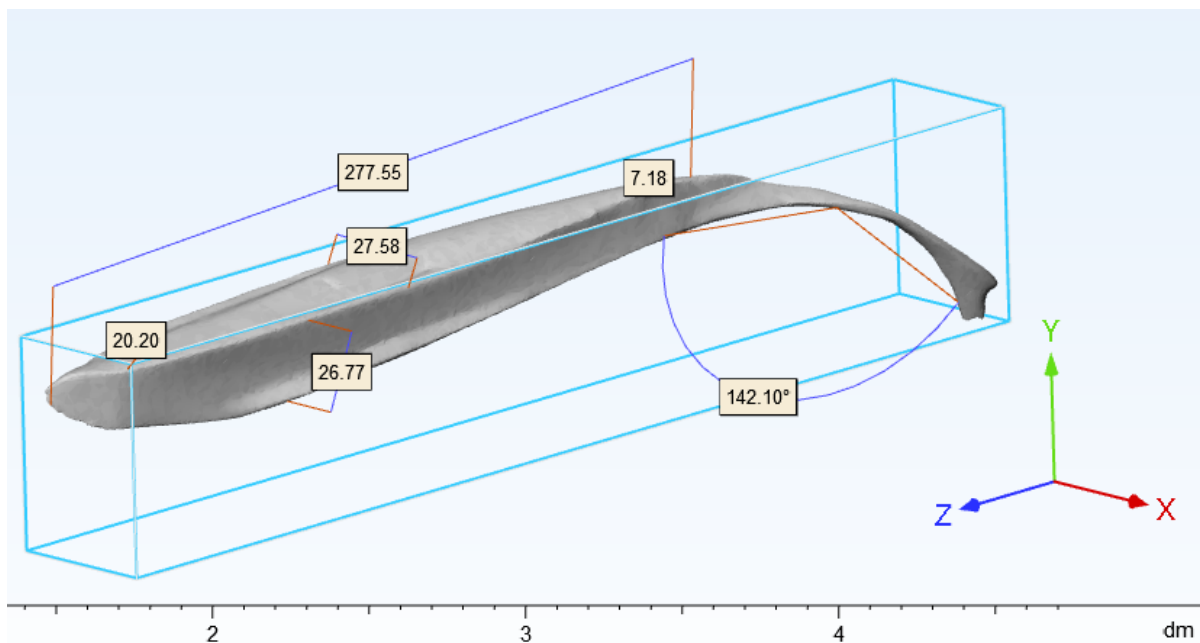


Figura 81 – Dimensões aproximadas do músculo em *mm*, visualização no 3 – *Matic*®

¹² Consultar o Tutorial no Apêndice B

Para simplificar o modelo, o tendão foi retirado, ver Figura 82, já que tem uma seção transversal consideravelmente menor se comparada à seção do músculo; considerar o tendão influencia no tamanho dos elementos tetraédricos durante a geração da malha e portanto aumenta consideravelmente o número de elementos do modelo¹³. Além disso, a aponeurose interna (ou tendão) não foi considerado pelos mesmos motivos já mencionados e pela falta de informações geométricas.

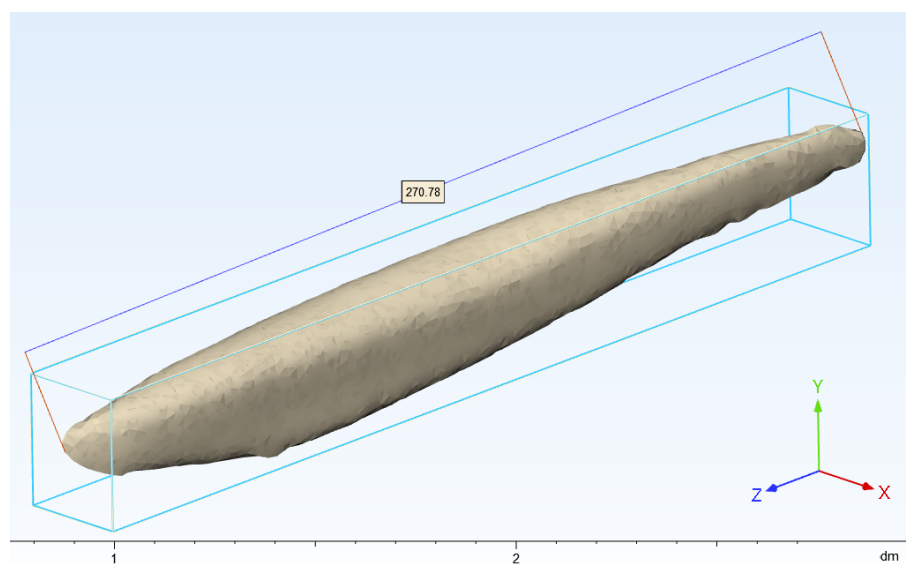


Figura 82 – Geometria simplificada do Músculo TA (sem o tendão). Dimensões aproximadas em *mm*, visualização no 3 – *Matic*®

Parâmetros arquitetônicos do Músculo TA

Para determinar ou calcular os parâmetros arquitetônicos do Músculo TA definidos na seção 1.2.1, são usados alguns dados da literatura e as dimensões do músculo já apresentadas na Figura 82; para o cálculo da ACSA foi medida a área transversal do músculo, ver Figura 83, os outros parâmetros são apresentados na Tabela 8.

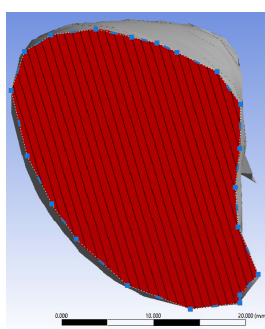


Figura 83 – Seção transversal do músculo TA

¹³ Dadas as limitações computacionais encontradas durante o processamento deste exemplo foi necessário retirar o tendão deste modelo, porém em pesquisas futuras, espera-se rodar a estrutura completa já que é mais representativa

Tabela 8 – Propriedades arquitetônicas do músculo TA

Parâmetro arquitetônico	Valor	Unid	
ACSA	616,684	mm^2	Área da Figura 83
VL	97438,6	mm^3	Do 3-Matic
FL	87	mm	Da seção 1.2.1
PSCA	1119,984	mm^2	Da Equação 1.1
PCSA/ACSA	1,82		
PA	10	$^\circ$	Da seção 1.2.1
	0,174533	rad	
Cos(PA)	0,9848		
PCSA efetivo	1102,969	mm^2	$PCSA_{efetivo} = \frac{PCSA}{Cos(PA)}$
Total de Fibras	22		
A0	50.91	mm^2	A_0 , da Equação 1.2

Geração da malha da Estrutura passiva e das fibras

Malha da estrutura passiva: Na Figura 84 se mostra o fluxograma que determina, de forma geral, os passos para a construção da malha da estrutura passiva do músculo TA.

Em resumo, faz-se o 'download' do arquivo de extensão *.OBJ* (passo 1), este é carregado no Software 3-Matic® da 'Materialise' (3-MATIC..., 2015) para simplificar e suavizar as superfícies da geometria (passo 2)¹⁴, a nova geometria é carregada no Solidworks® (SOLIDWORKS...,) (passo 3) e levada para o Ansys® (ANSYS..., 2017) para a geração da malha (passo 4). Quando a malha não apresenta boa qualidade, a geometria pode ser melhorada voltando ao passo 2 (opção 1, na Figura 84) ou os parâmetros para construir a malha podem ser mudados voltando ao passo 4 (opção 2, na Figura 84). Os parâmetros usados para definir a malha do músculo são apresentados na Figura 85; destes, destacam-se o grau de aproximação do elemento ¹⁵, o tamanho máximo do elemento 4 mm e finalmente as estatísticas: 16848 elementos tetraédricos (27164 nós).

¹⁴ detalhes desta fase são mostrados no Apêndice B.

¹⁵ No Ansys® o grau de aproximação é quadrática, sendo que depois é feito um remapeamento para elementos de aproximação cúbica.

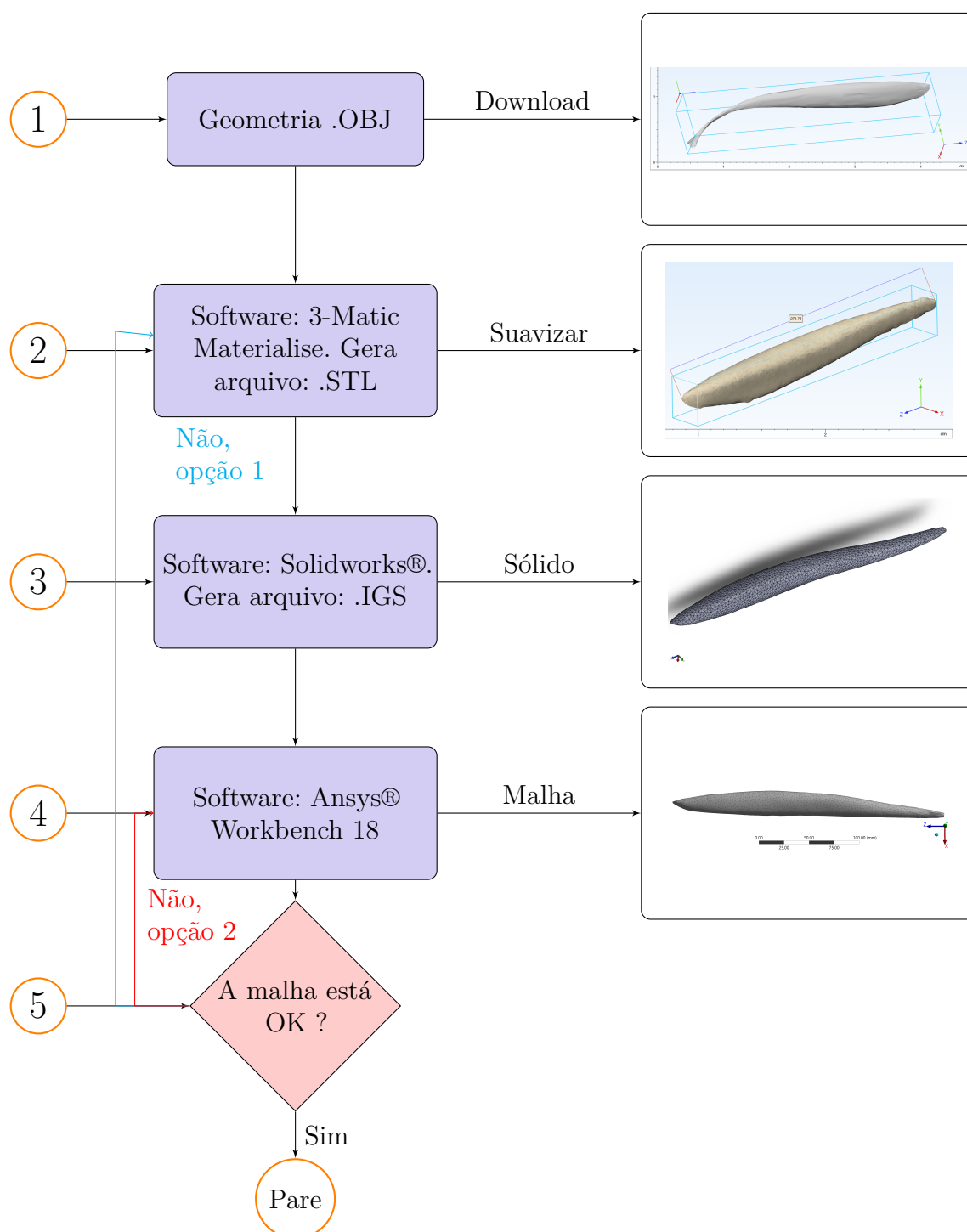


Figura 84 – Fluxograma para a geração da malha da matriz

Qualidade da malha gerada

Toda malha de elementos finitos deve cumprir alguns critérios relacionados com a regularidade dos elementos e a uniformidade local (com relação à geometria); elementos mal formados¹⁶ originam problemas numéricos. Para construir a malha no Ansys® (ANSYS... ,

¹⁶ Em inglês "poorly-shaped tetrahedrom", ou seja com forma de agulha ("needles"), cunhas ("wedges"), 'boné' ("caps") ou quase achatadas ("silvers").

(a) Vista Frontal		(b) Vista lateral direita	
Display		Inflation	
Display Style	Body Color	Use Automatic Inflation	Program Controlled
Defaults		Inflation Option	Smooth Transition
Physics Preference	Nonlinear Mechanical	<input type="checkbox"/> Transition Ratio	0.272
Element Order	Quadratic	<input type="checkbox"/> Maximum Layers	5
Sizing		<input type="checkbox"/> Growth Rate	1.2
Size Function	Uniform	Inflation Algorithm	Pre
<input type="checkbox"/> Max Face Size	4.0 mm	View Advanced Options	Yes
Mesh Defeatureing	Yes	Collision Avoidance	None
<input type="checkbox"/> Defeature Size	Default (0.136570 mm)	<input type="checkbox"/> Maximum Height over Base	1
<input type="checkbox"/> Growth Rate	1.20	Growth Rate Type	Geometric
Bounding Box Diagonal	273.990 mm	<input type="checkbox"/> Maximum Angle	90.0 °
Minimum Edge Length	1.45440 mm	<input type="checkbox"/> Fillet Ratio	1
Quality		Use Post Smoothing	Yes
Check Mesh Quality	Yes, Errors	<input type="checkbox"/> Smoothing Iterations	5
<input type="checkbox"/> Target Skewness	1.	Advanced	
<input type="checkbox"/> Target Jacobian Ratio (Corn...	1.	Number of CPUs for Parallel Pa...	Program Controlled
Mesh Metric	Element Quality	Straight Sided Elements	Yes
<input type="checkbox"/> Min	0.35551	Number of Retries	0
<input type="checkbox"/> Max	0.99603	Rigid Body Behavior	Dimensionally Reduced
<input type="checkbox"/> Average	0.81067	Mesh Morphing	Disabled
<input type="checkbox"/> Standard Deviation	9.5724e-002	Triangle Surface Mesher	Program Controlled
		Topology Checking	No
		Pinch Tolerance	Default (0.245820 mm)
		Generate Pinch on Refresh	No
		Statistics	
		<input type="checkbox"/> Nodes	27164
		<input type="checkbox"/> Elements	16848

Figura 85 – Parâmetros para definir a malha do músculo TA no Ansys®

2017) foi definida a preferência física, ver Figura 85: análise não linear ('Physics Preference: Nonlinear Mechanical') o que permitiu ter parâmetros mais rigorosos no Ansys® para construir os elementos tetraédricos. Para analisar a qualidade da malha foram visualizadas as métricas de qualidade disponíveis no Software. Na Figura 86 se mostra o resultado para a métrica: qualidade do elemento ('Element Quality' ¹⁷) a qual apresenta uma boa distribuição da qualidade dos elementos finitos que conformam a malha do músculo. A malha final se mostra na Figura 87.

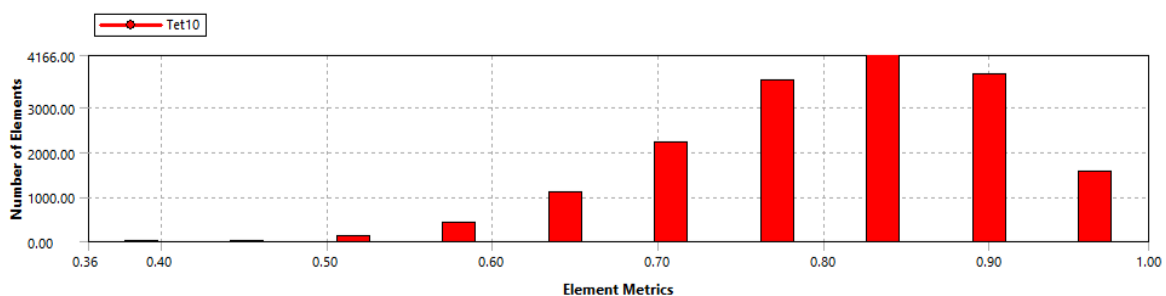


Figura 86 – Qualidade dos elementos, Ansys® (ANSYS..., 2017)

A análise não linear de estruturas através do MEF requer que a malha possua uma qualidade boa (nas métricas mostradas no Ansys®) para evitar travamento no programa, interseção dos elementos finitos e, em consequência, resultados errados.

¹⁷ 'A opção de qualidade do elemento fornece uma métrica de qualidade composta que varia entre 0 e 1', sendo 1 o valor para definir o elemento de melhor qualidade

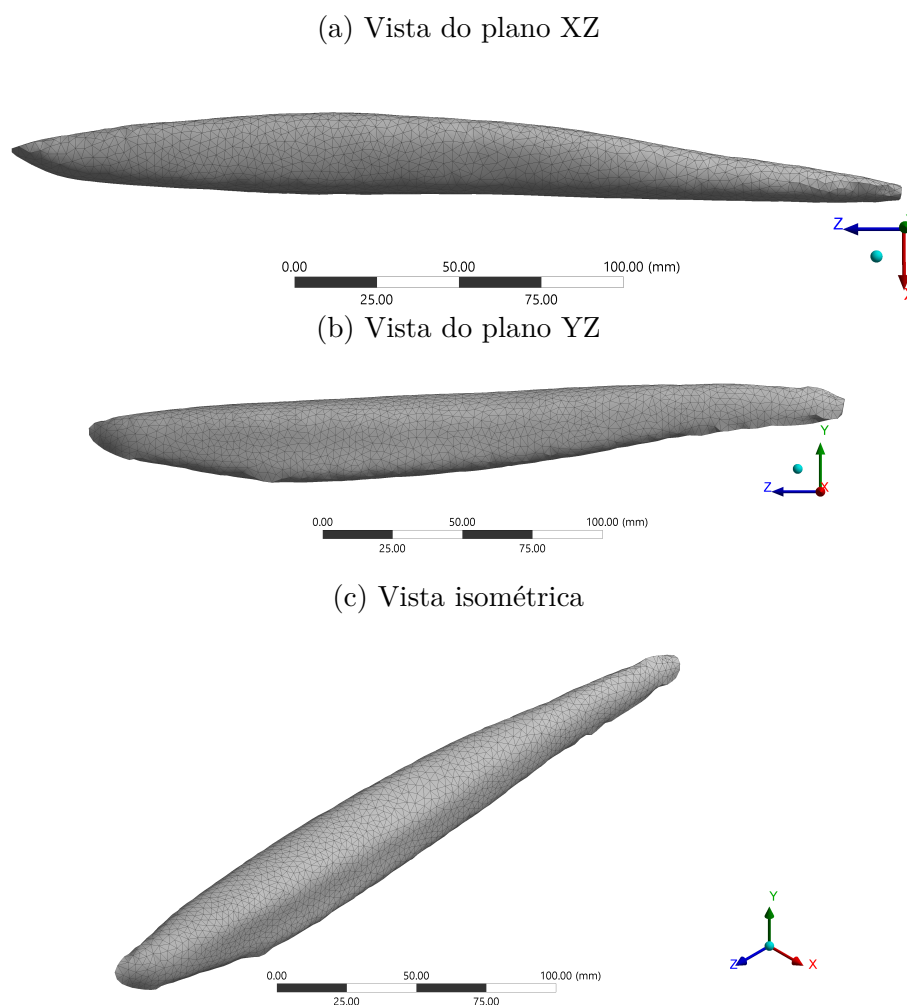


Figura 87 – Malha definitiva do músculo TA com 16848 elementos e 86239 nós

Malha das Fibras

Com relação à distribuição das fibras, Heemskerk et al. (2009) fizeram o rastreamento de fibras para a reconstrução da arquitetura do músculo TA, considerando a geometria da fibra muscular. Utilizando a distribuição de Heemskerk et al. (2009) e o procedimento descrito no Apêndice C foram geradas 22 fibras musculares discretizadas com elementos de barra de 10 *mm* de comprimento, para um total de 488 elementos de barra - 998 nós.

O arranjo das fibras dentro do músculo é mostrado na Figura 88; além disso se mostra a distância entre a extremidade do músculo até os pontos chamados de i_1 , i_2 , i_3 , i_4 , i_5 e i_6 que são os pontos iniciais das fibras¹⁸ e os pontos f_1 , f_2 , f_3 , f_4 que mostram as extremidades das fibras. Na Figura 89 se mostram três vistas do arranjo das fibras.

¹⁸ ou de inserção na aponeurose interna do músculo TA.

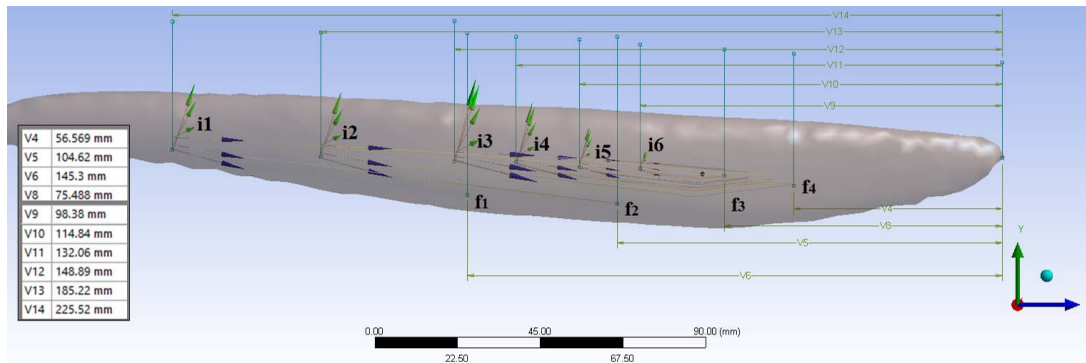
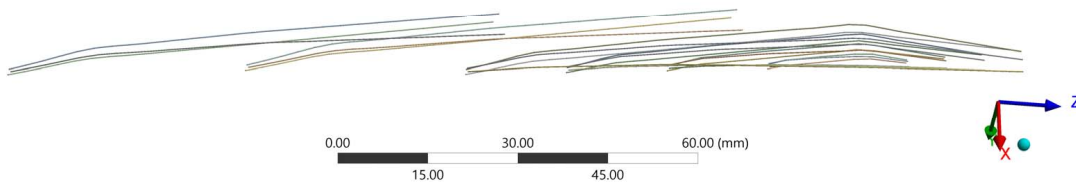
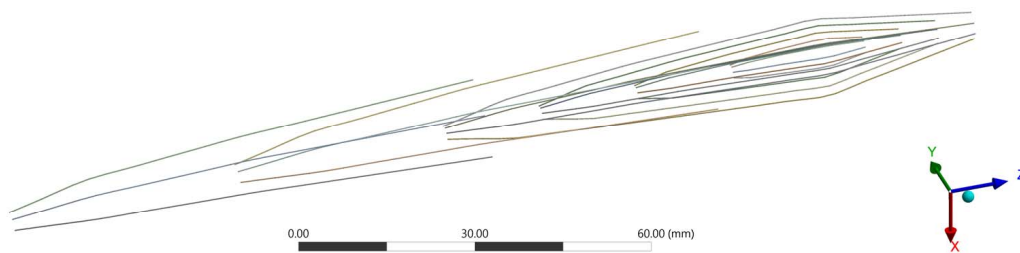


Figura 88 – Fibras inseridas no músculo TA

(a) Vista 1



(b) Vista 2



(c) Vista 3

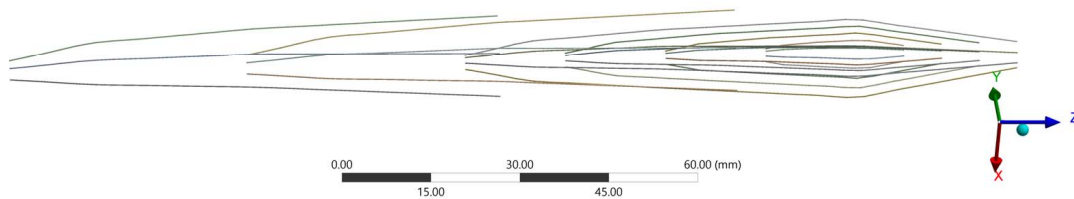


Figura 89 – Malha definitiva das fibras musculares

Propriedades dos materiais da Estrutura passiva e das fibras

O músculo TA foi simulado considerando dois modelos constitutivos para a matriz: a Lei hiperelástica de Yeoh (**Modelo 1**) e a lei constitutiva de Saint-Venant Kirchoff - SVK (**Modelo 2**).

Modelo 1 O modelo hiperelástico de Yeoh, utilizado na matriz, possuía as seguintes propriedades: módulo de compressão volumétrica $k = 10000 \text{ MPa}$ e as constantes do modelo $C_{10} = 0,9821757 \text{ MPa}$, $C_{20} = -0,37037343 \text{ MPa}$, $C_{30} = 0,19718061 \text{ MPa}$ (PASCON, 2008). Para as fibras foi usado o modelo constitutivo de SVK com módulo de

elasticidade $\bar{E} = 0.04485 \text{ MPa}$ (Rodríguez Lemos, 2004) ¹⁹.

Modelo 2 O modelo de SVK utilizado na matriz tinha as seguintes propriedades: Módulo de Young $E = 1200 \text{ MPa}$, Poisson $\nu = 0,0$ e para as fibras foi usado o modelo constitutivo de SVK com Módulo de Young $\bar{E} = 2 \text{ MPa}$ (Van der Linden, 1998).

Condições de contorno e carregamento

Para simular a contração isométrica as extremidades do músculo foram restritas na direção X , Y e Z . A seleção dos nós para aplicar as condições de contorno foi feita de forma aproximada no Ansys® (ANSYS. . . , 2017), ver Figura 90.

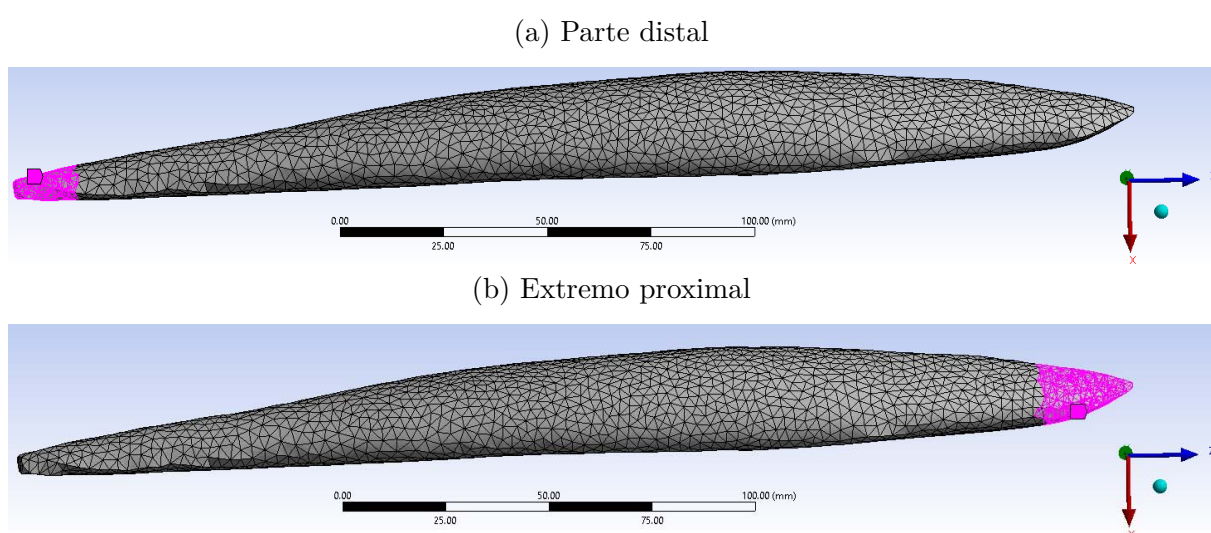


Figura 90 – Condições de contorno do músculo TA, elementos restritos nas direções X , Y e Z

Para os dois modelos se usaram as mesmas condições de contorno e foi aplicada uma deformação²⁰ \bar{E}_0 para contrair as fibras, como explicado a seguir:

Modelo 1: Foi aplicada uma deformação $\bar{E}_0 = -0,0005$ para cada um dos elementos de barra em 10 passos de carregamento.

Modelo 2: Foi aplicada uma deformação $\bar{E}_0 = -0,003$ para cada um dos elementos de barra (fibras) em 100 passos de carregamento.

Pretende-se com os dois modelos mostrar o estado de tensões e deformações e comparar os resultados quando aplicada uma deformação de $\bar{E}_0 = -0,0005$.

¹⁹ Os autores apresentam o módulo de cortante ('Shear modulus - $\mu = 0,015'$) para o tecido muscular, com o poisson $\nu = 0,495$, calcula-se o módulo de Young através da seguinte expressão: $E = 2\mu(1 + \nu) = 0,04485 \text{ MPa}$ e este é adotado para as fibras

²⁰ Os valores aplicados foram diferentes pelo tempo disponível para o processamento.

Resultados

A partir das informações fornecidas para o desenvolvimento do modelo, compilam-se as hipóteses importantes que foram feitas para a realização da simulação do músculo TA humano no código computacional desenvolvido, antes de começar com a apresentação e análise dos resultados.

- O posicionamento e arranjo das fibras foram estimados com base em informações da literatura de forma aproximada;
- as estruturas da aponeuroses do músculo, ver Figura 26, não foram consideradas no modelo;
- dificuldade de obter valores para as propriedades reais do músculo na literatura;
- as áreas onde foram aplicadas as condições de contorno, para simular a contração isométrica, foram selecionadas de forma aproximada.

Para cada modelo se apresentam: a comprovação da hipótese de quase incompressibilidade, os deslocamentos nas direções X , Y e Z , as deformações de Green E_{11} , E_{22} , E_{33} , E_{12} , E_{13} e E_{23} , as tensões de Piola-Kirchhoff S_{11} , S_{22} , S_{33} , S_{12} , S_{13} e S_{23} e as tensões de Cauchy C_{11} , C_{22} , C_{33} , C_{12} , C_{13} e C_{23} para a matriz; e para as fibras: os deslocamentos nas direções X , Y e Z e as tensões de Cauchy normal e de aderência.

Modelo 1

Hipótese de quase incompressibilidade, $J \approx 1$: Na Figura 91 se mostram os valores do jacobiano $J \approx 1$ na matriz, demonstrando a hipótese adotada.

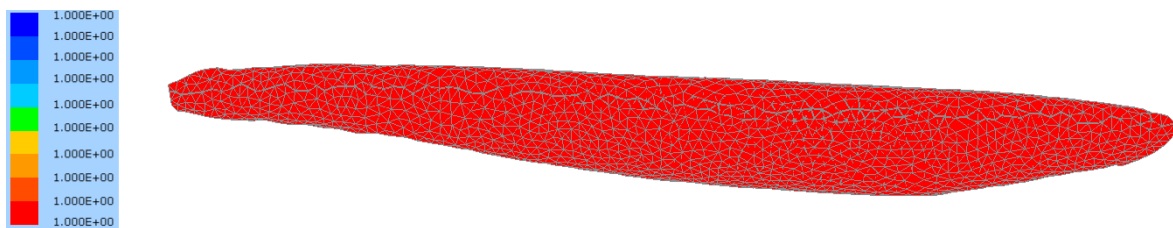
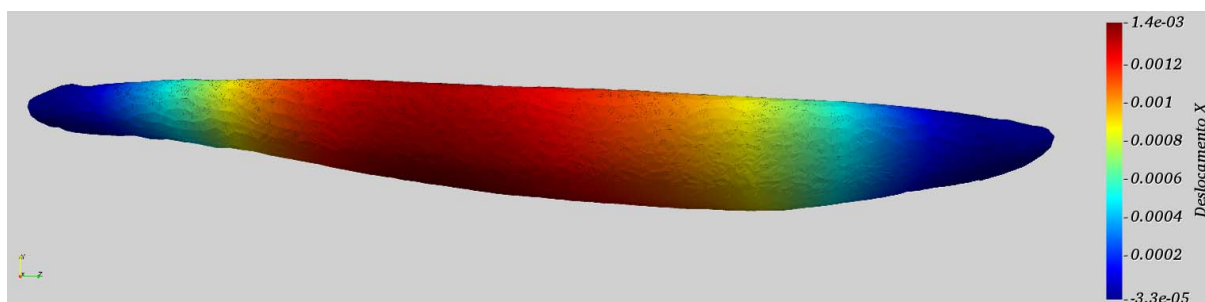


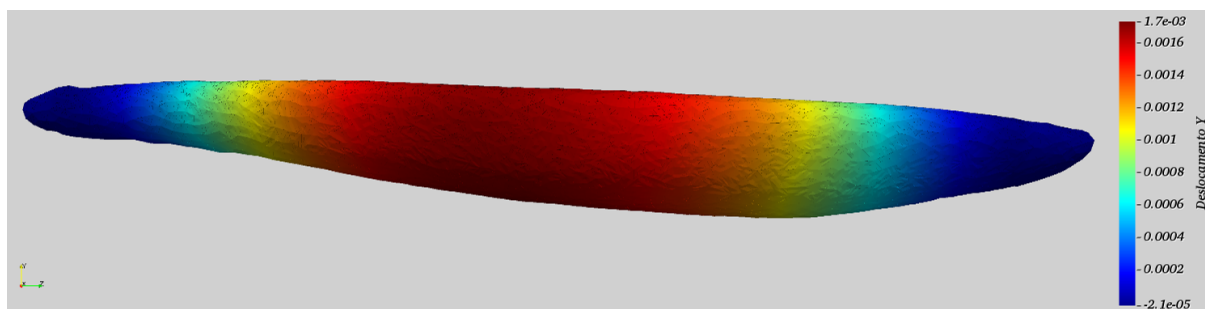
Figura 91 – Músculo TA - modelo 1, condição de quase incompressibilidade na matriz

Deslocamentos na matriz: Na Figura 92 se mostram os deslocamentos da matriz na direção X, Y e Z. Na direção X e Y se observam deslocamentos máximos de $1,4e-03 \text{ mm}$ e $1,7e-03 \text{ mm}$, na parte central do músculo, respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de $5,0e-04 \text{ mm}$ e mínimo de $-3,9e-04 \text{ mm}$, onde começam e terminam as fibras, respectivamente.

(a) Na direção X



(b) Na direção Y



(c) Na direção Z

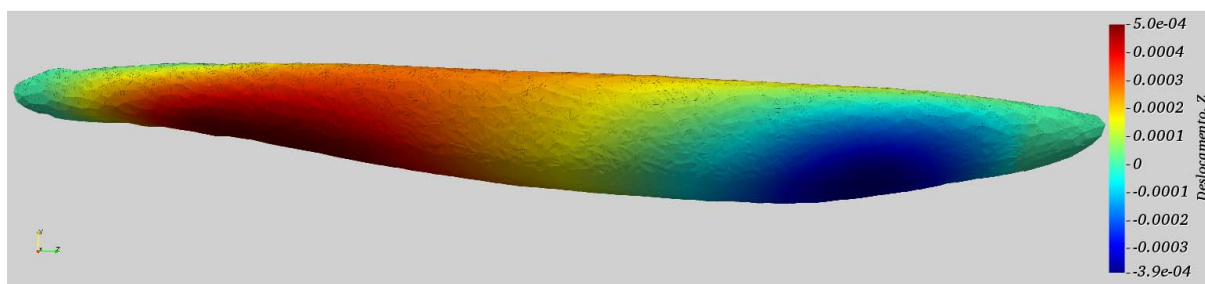


Figura 92 – Modelo 1, deslocamentos (mm)

Deformações de Green: Nas Figuras 93a, 93c e 94a se mostram as deformações de Green E_{11} , E_{22} e E_{33} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-1,468e-05/1,529e-05)$, $(-1,158e-05/1,355e-05)$ e $(-1,832e-05/1,355e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada ²¹, ver Figuras 93b, 93d e 94b.

²¹ Opção do Paraview (PARAVIEW..., 2005): "Rescale to visible range", para redimensionar o intervalo dos valores de resposta, permitindo visualizar as áreas de concentração.

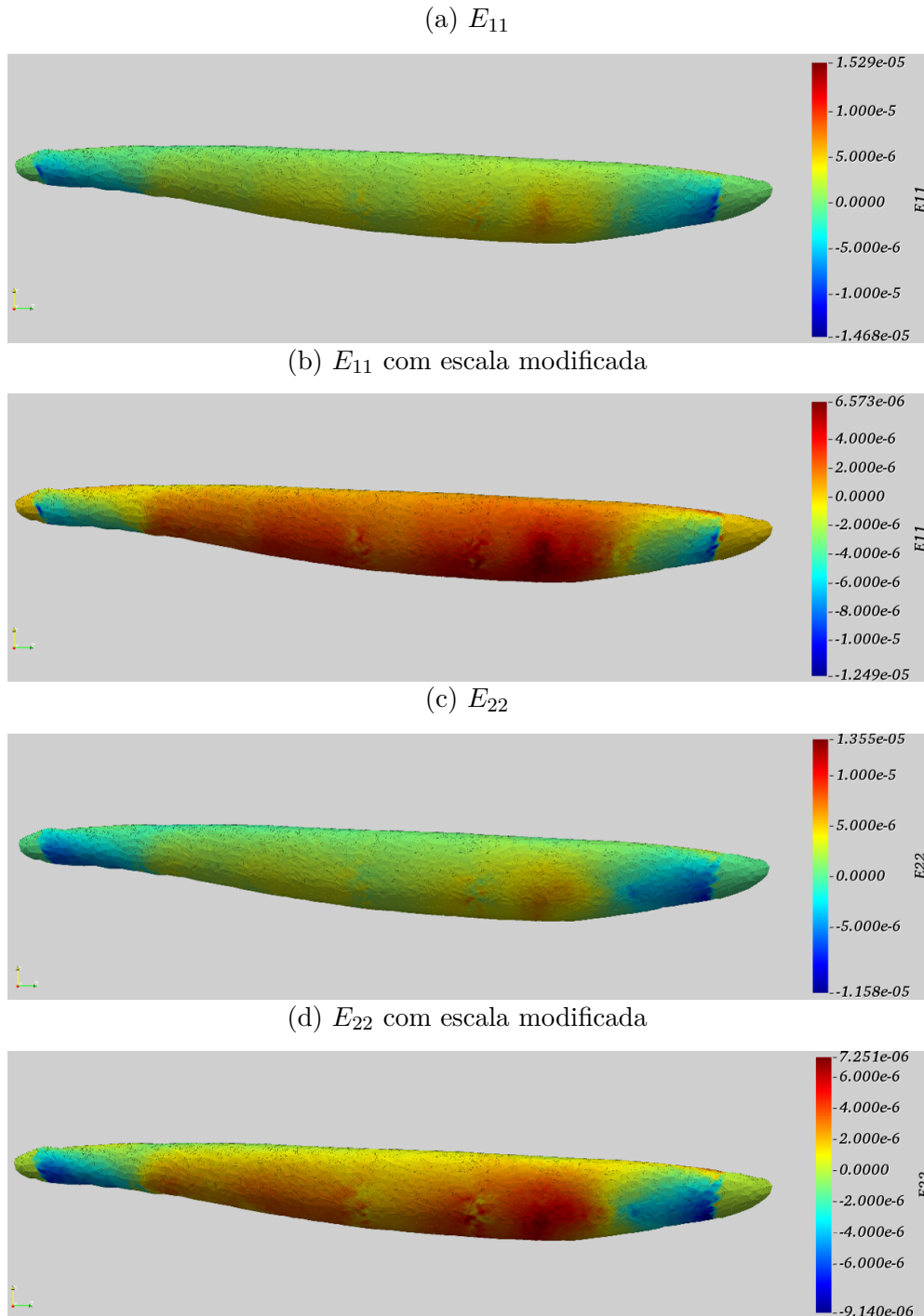


Figura 93 – Modelo 1, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #10

Nas Figuras 94c, 95a e 95c se mostram as deformações de Green E_{23} , E_{12} e E_{13} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-1, 158e-05/1, 355e-05)$, $(-7, 998e-06/5, 984e-06)$ e $(-1, 478e-05/1, 624e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 94d, 95b e 95d, respectivamente.

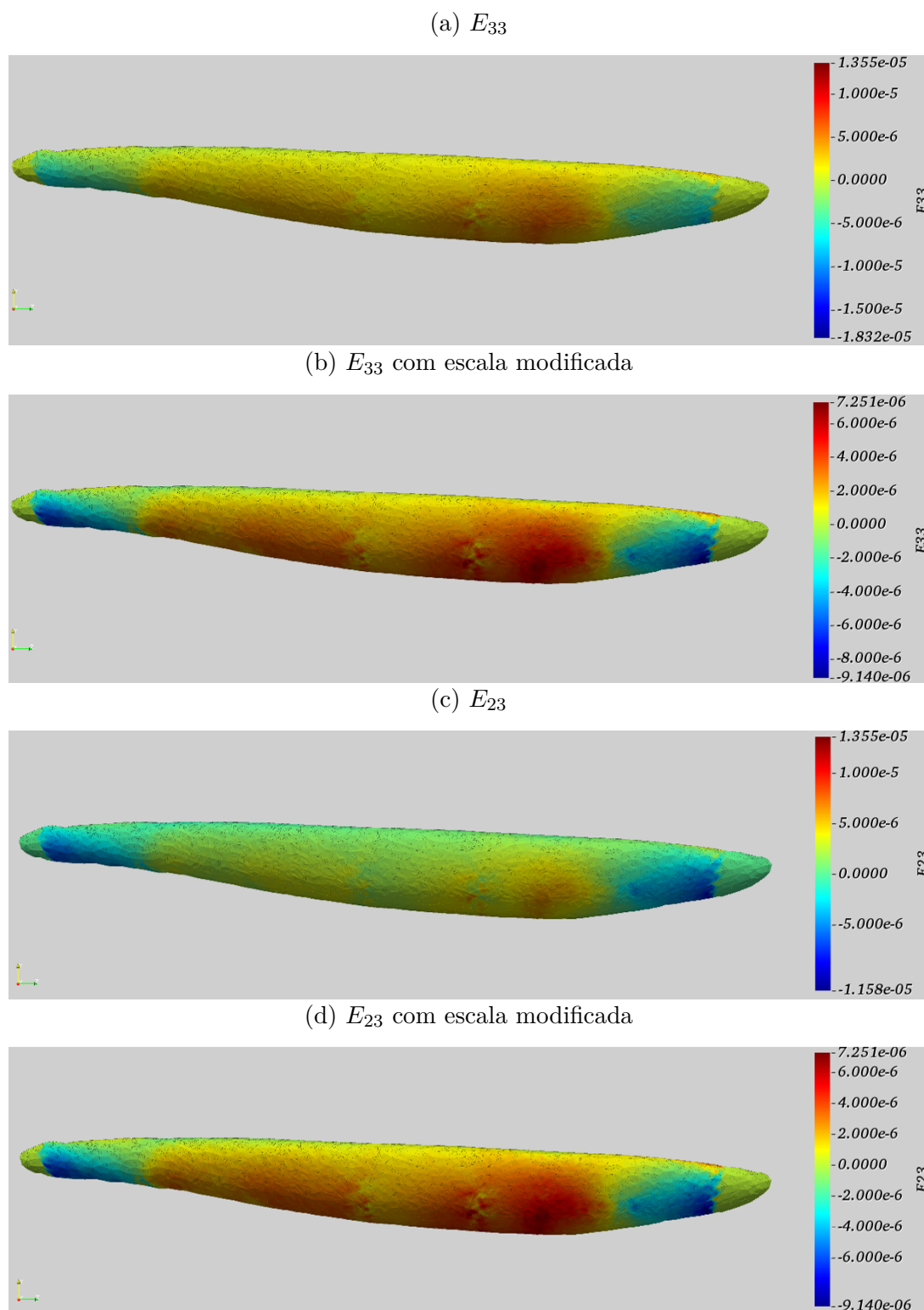


Figura 94 – Modelo 1, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #10

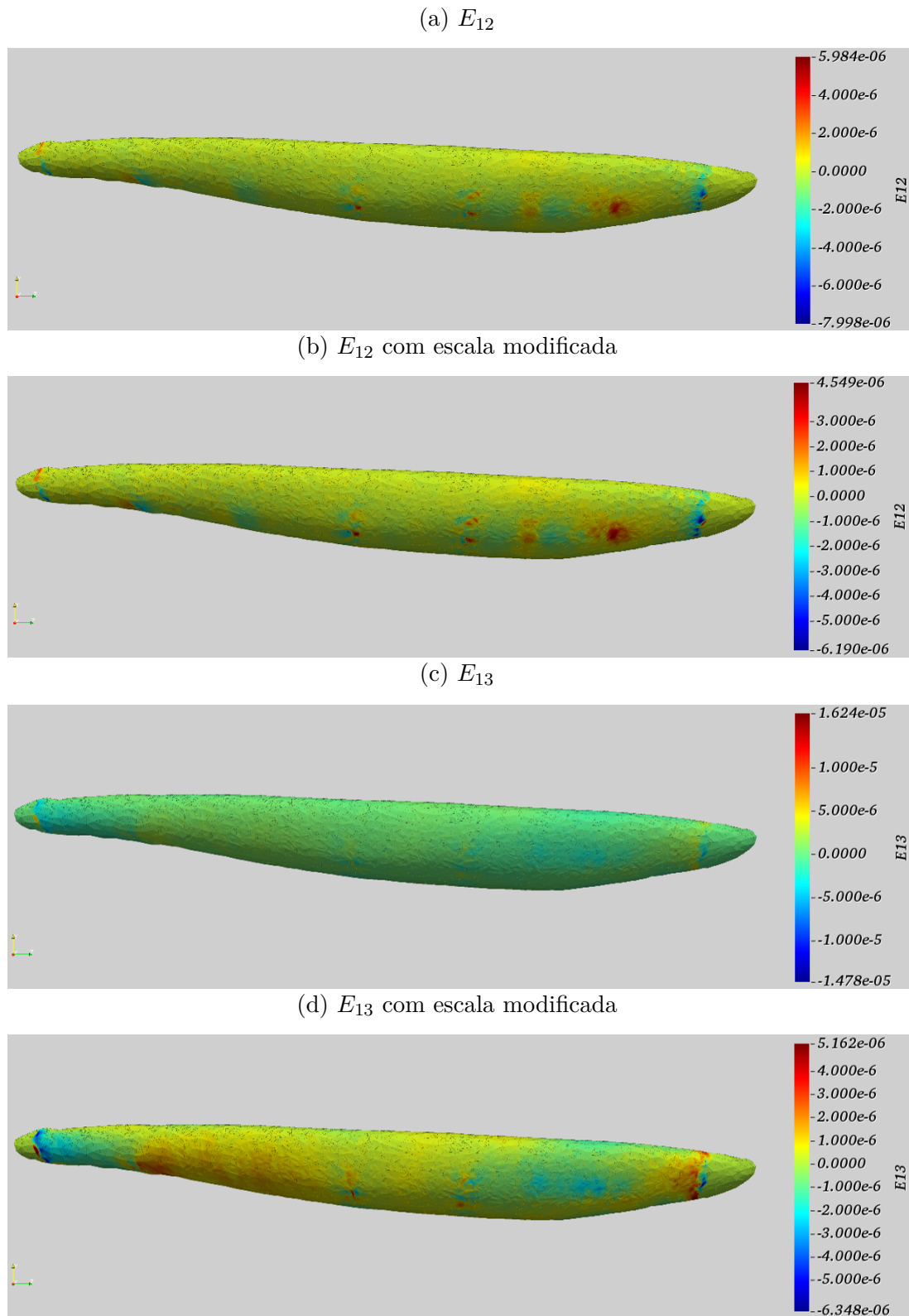


Figura 95 – Modelo 1, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #10

Tensões de Piola Kirchhoff: Nas Figuras 96a, 96c e 97a se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{11} , S_{22} e S_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,007146/0,008154)$, $(-0,007166/0,008167)$ e $(-0,007154/0,008060)$ MPa , respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 96b, 96d e 97b.

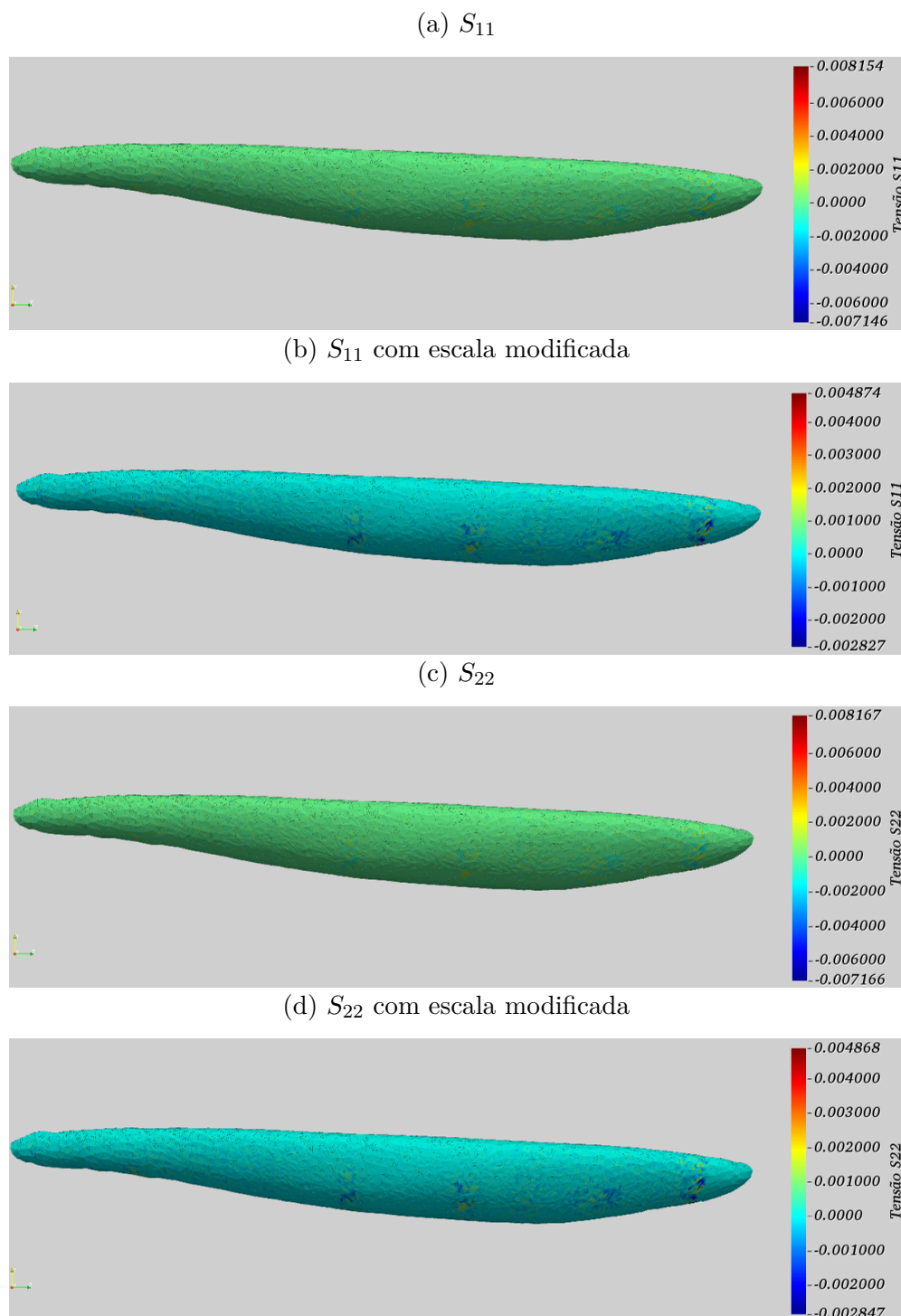


Figura 96 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} MPa para o passo de carregamento #10

Nas Figuras 97c, 98a e 98c se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{23} , S_{12} e S_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-5,615e-05/5,586e-05)$, $(-3,145e-05/2,350e-05)$ e $(-5,803e-05/6,386e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 97d, 98b e 98d, respectivamente.

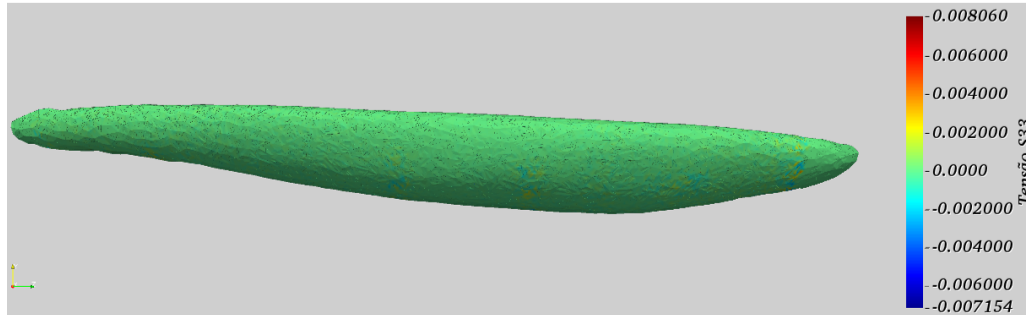
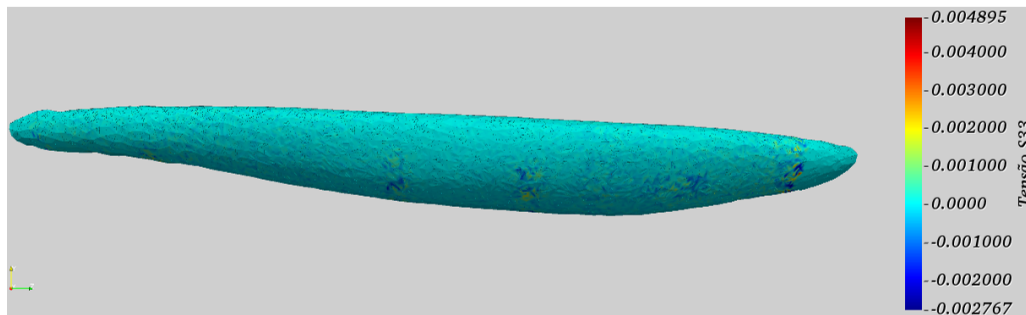
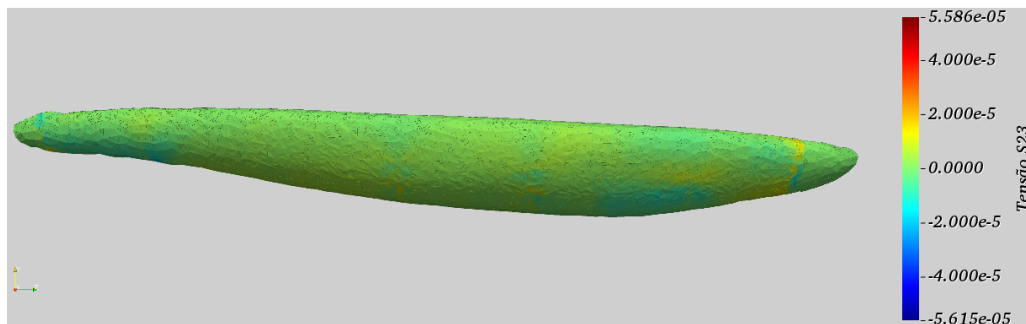
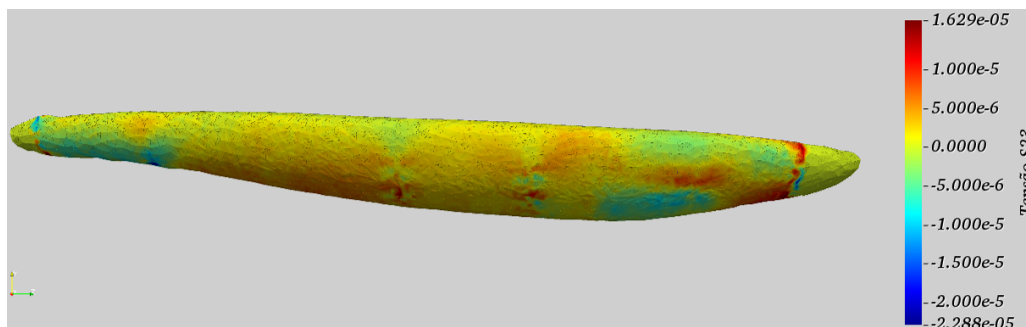
(a) S_{33} (b) S_{33} com escala modificada(c) S_{23} (d) S_{23} com escala modificada

Figura 97 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{23} e S_{33} MPa para o passo de carregamento #10

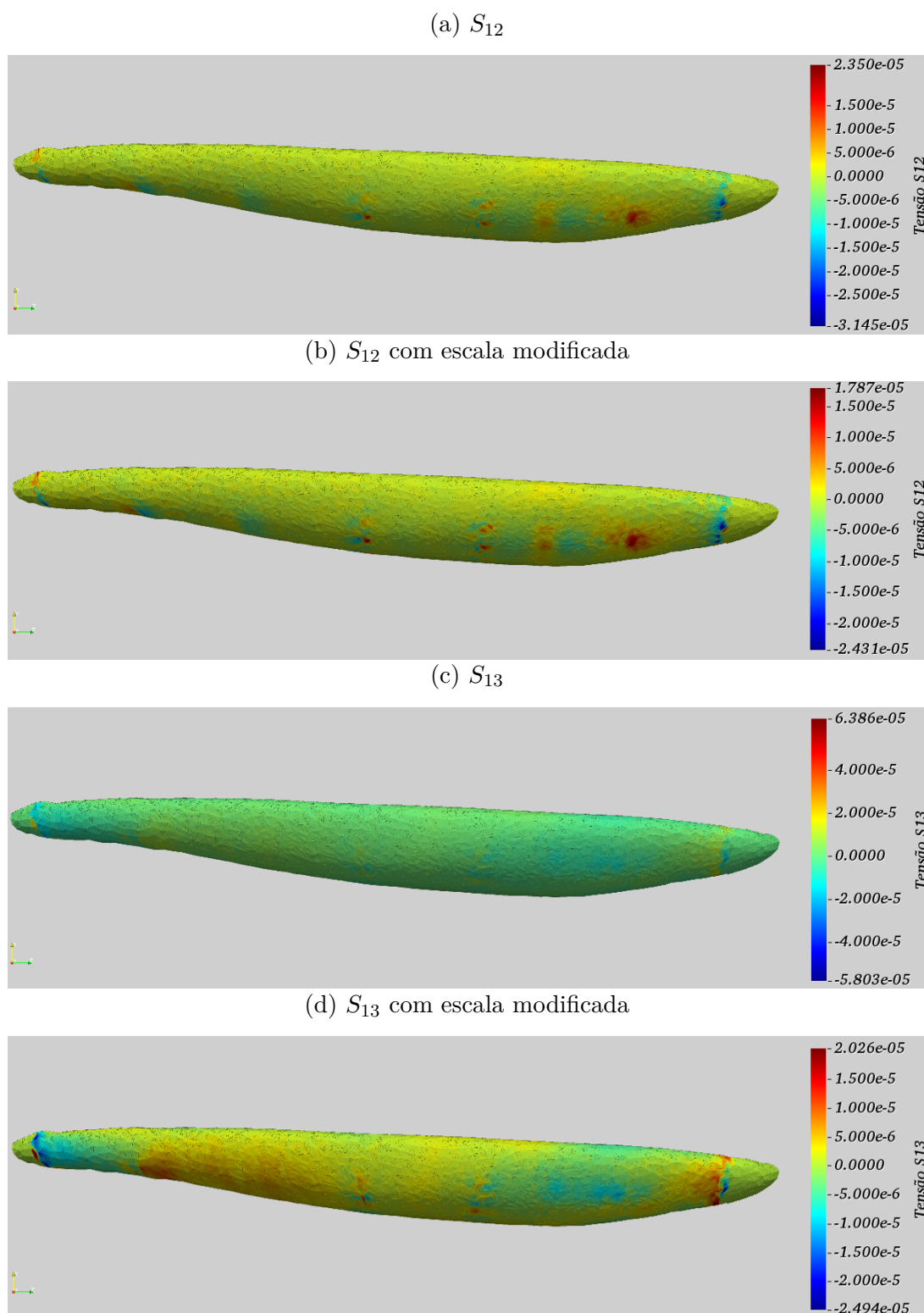


Figura 98 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} MPa para o passo de carregamento #10

Tensões de Cauchy: Nas Figuras 99a, 99c e 100a se mostram as tensões de Cauchy C_{11} , C_{22} e C_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,007146/0,008154)$, $(-0,007166/0,008167)$ e $(-0,007154/0,008060)$ MPa , respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 99b, 99d e 100b.

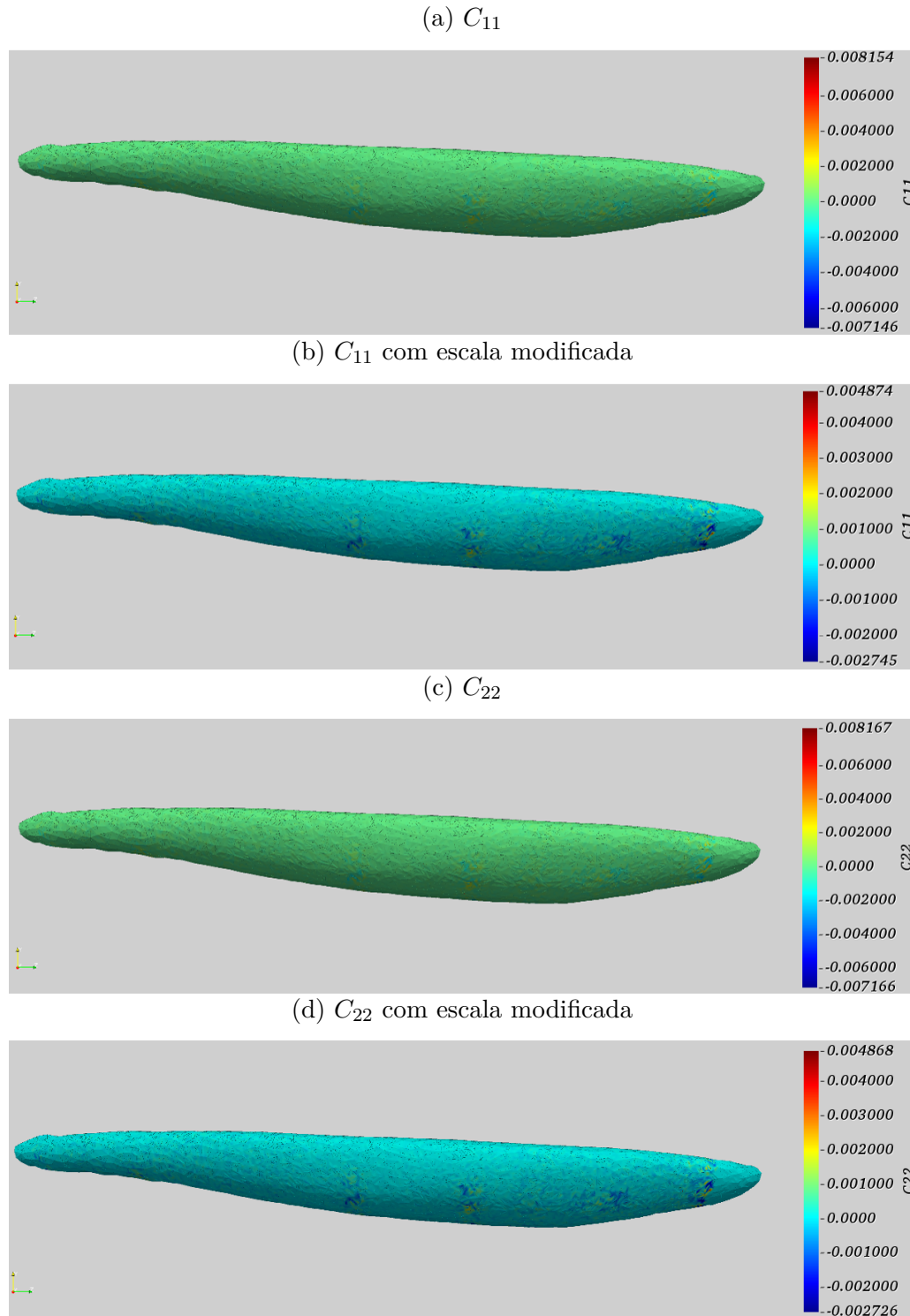


Figura 99 – Modelo 1, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} MPa para o passo de carregamento #10

Nas Figuras 100a, 101a e 101c se mostram as tensões de Cauchy C_{23} , C_{12} e C_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-5,613e-05/5,585e-05)$, $(-3,142e-05/2,351e-05)$ e $(-5,805e-05/6,380e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 100b, 101b e 101d, respectivamente.

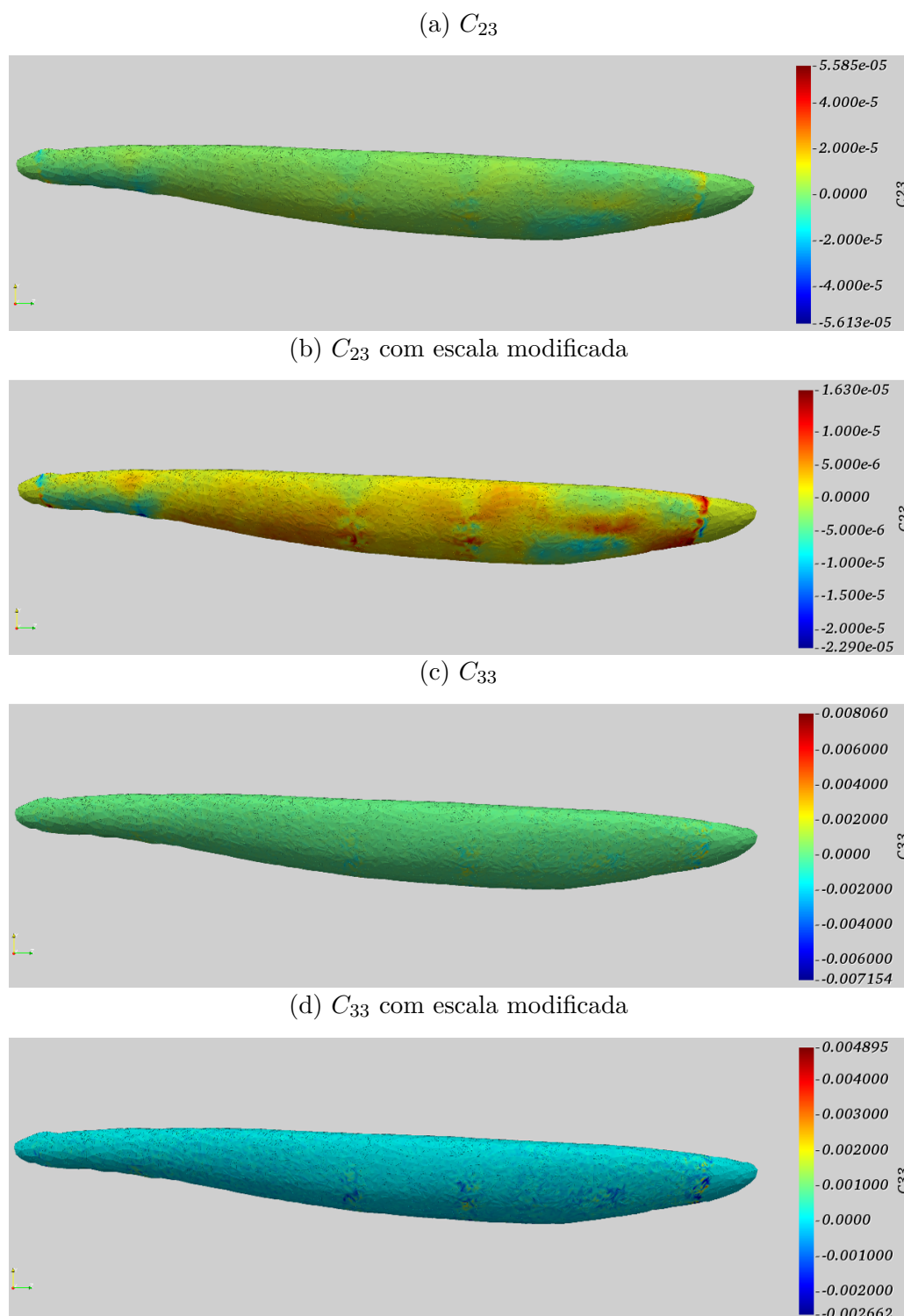


Figura 100 – Modelo 1, Tensões de Cauchy: C_{23} e C_{33} MPa para o passo de carregamento #10

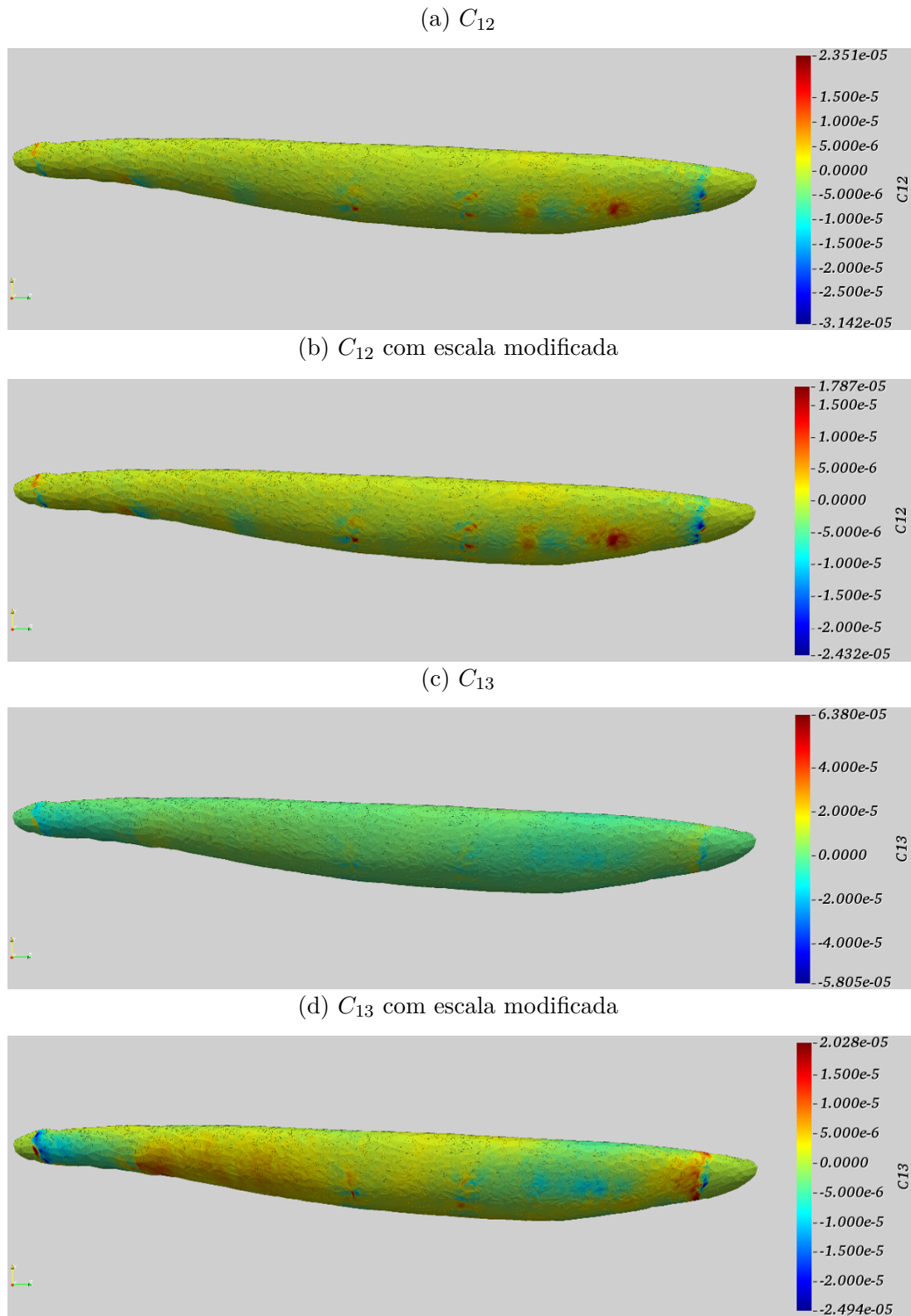
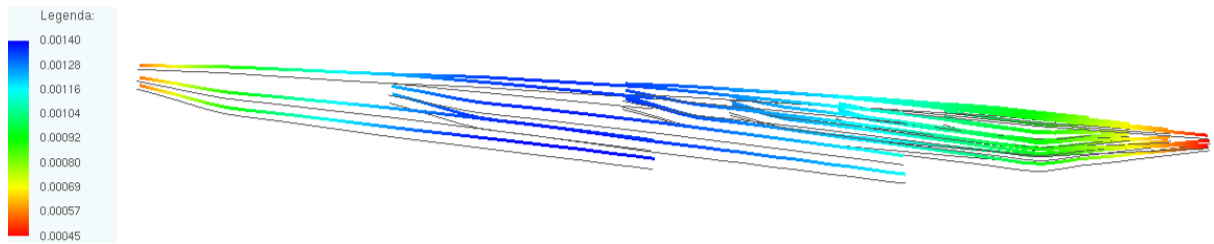


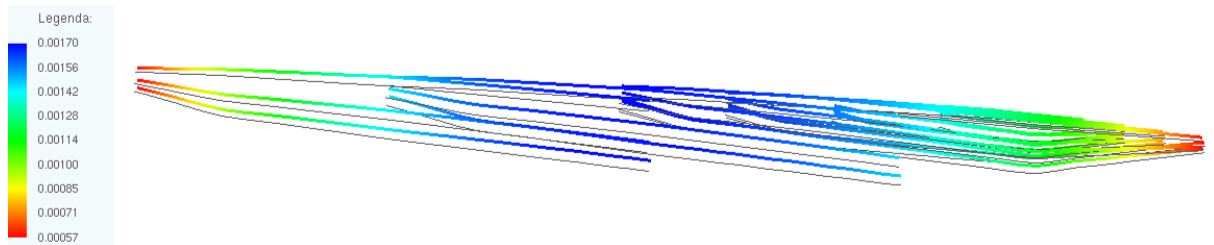
Figura 101 – Modelo 1, tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} MPa para o passo de carregamento #10

Deslocamentos nas fibras: Na Figura 102 se mostram os deslocamentos na direção X, Y e Z, se observam deslocamentos máximos de 0,00140 mm e 0,00170 mm, na parte central do arranjo, e deslocamentos mínimos de 0,00045 mm e 0,00057 mm, respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de 0,00046 mm, perto da extremidade proximal, e mínimo de -0,00031 mm perto da extremidade distal do músculo TA.

(a) Direção X



(b) Direção Y



(c) Direção Z

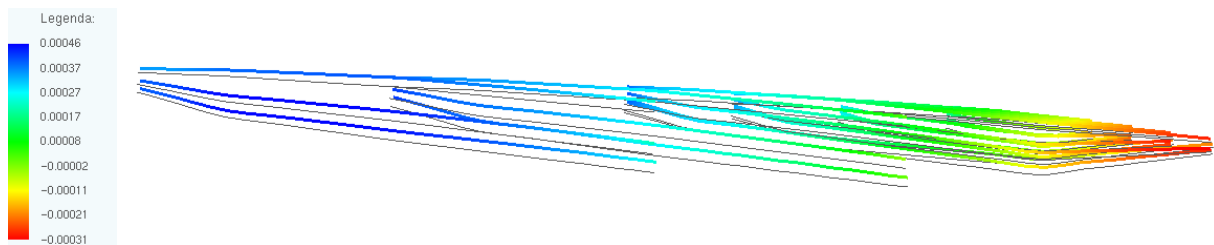
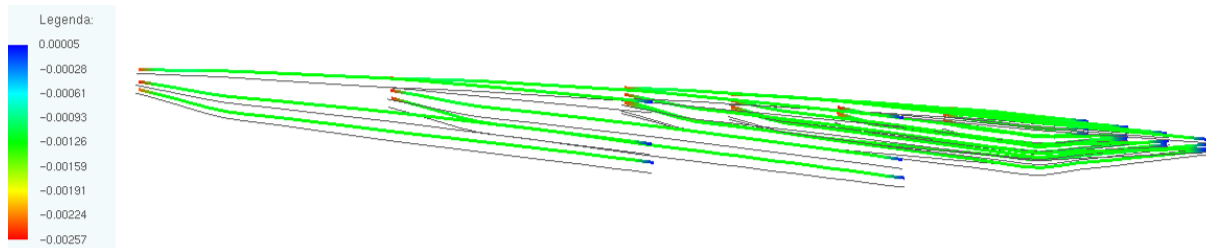


Figura 102 – Modelo 1, deslocamentos finais das Fibras (mm)

Tensões nas fibras: Na Figura 103 se mostram as tensões normais e de aderência nas fibras com valores máximos de $0,00005 \text{ MPa}$ e $0,00066 \text{ MPa}$ e mínimos de $-0,00257 \text{ MPa}$ e $0,00250 \text{ MPa}$, respectivamente.

(a) Tensão Normal



(b) Tensão de Aderência

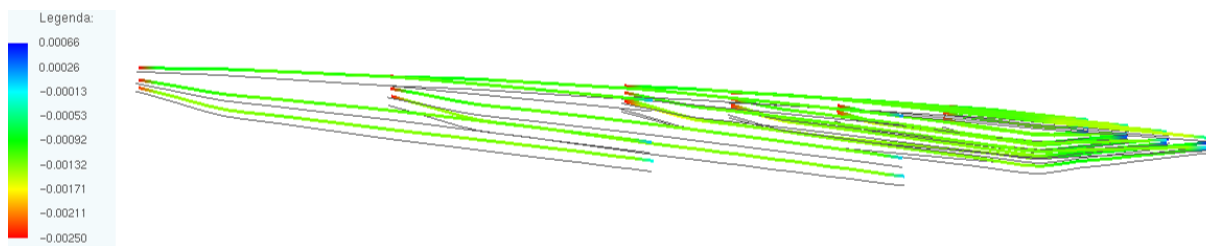


Figura 103 – Modelo 1, tensões finais das Fibras (MPa)

Modelo 2

Os seguintes resultados correspondem ao último passo de carregamento (#100):

Na Figura 104 se mostram os valores do jacobiano na matriz, com $J \approx 1$ devido à pouca deformação do modelo.

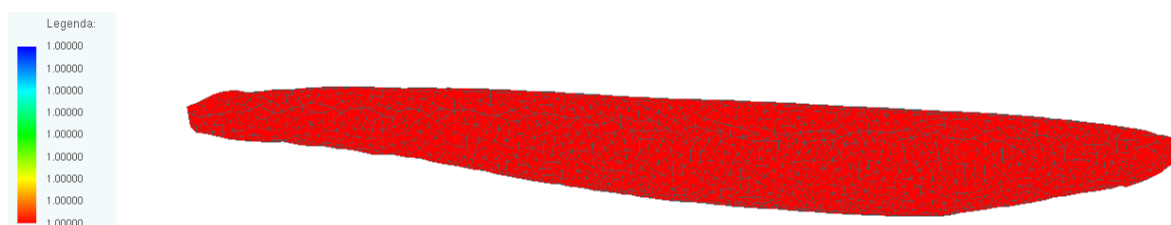


Figura 104 – Músculo TA - modelo 2, valores do jacobiano na matriz para o passo de carregamento #100

Deslocamentos na matriz: Na Figura 105 se mostram os deslocamentos da matriz na direção X, Y e Z. Na direção X e Y se observam deslocamentos máximos de $0,00195 \text{ mm}$ e $0,00244 \text{ mm}$, na parte central do músculo, respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de $0,00069 \text{ mm}$ e mínimo de $-0,00054 \text{ mm}$.

(a) Na direção X



(b) Na direção Y



(c) Na direção Z

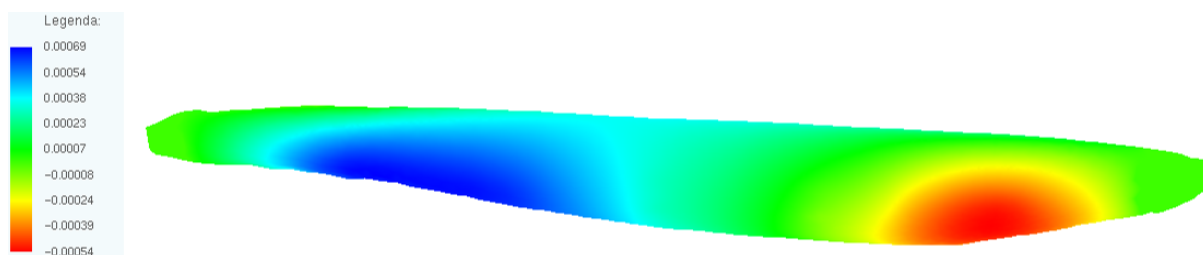


Figura 105 – Modelo 2, deslocamentos da matriz (mm) para o passo de carregamento #100

Deformações de Green: Nas Figuras 106a, 106c e 107a se mostram as deformações de Green E_{11} , E_{22} e E_{33} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-1,482e-05/1,426e-05)$, $(-1,832e-05/1,305e-05)$ e $(-1,832e-05/1,305e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 106b, 106d e 107b.

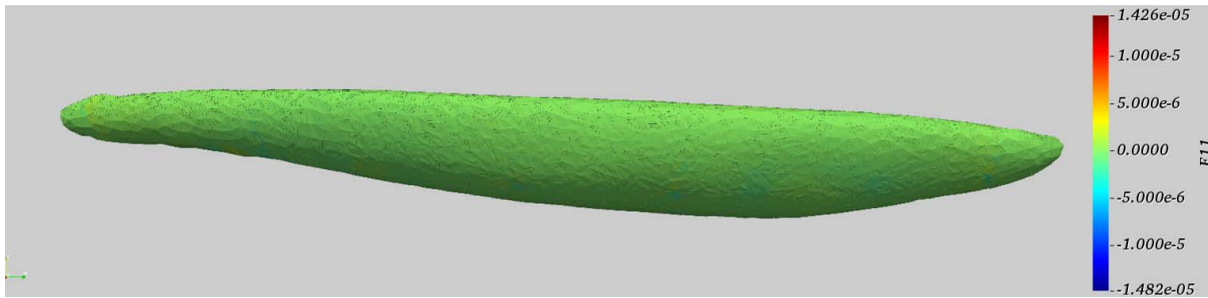
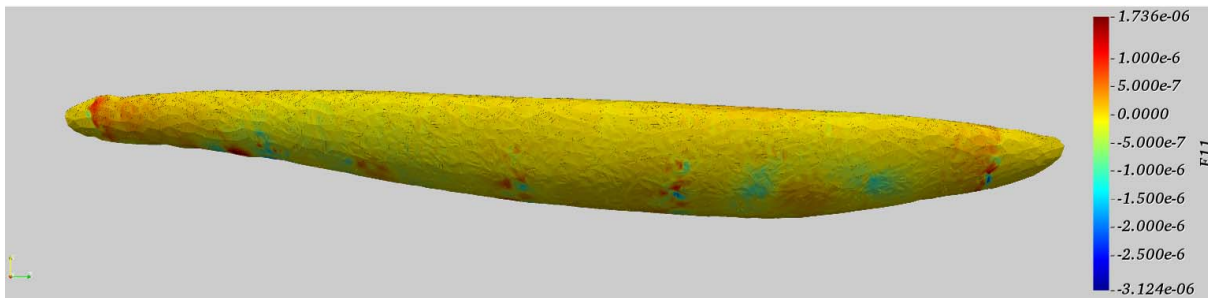
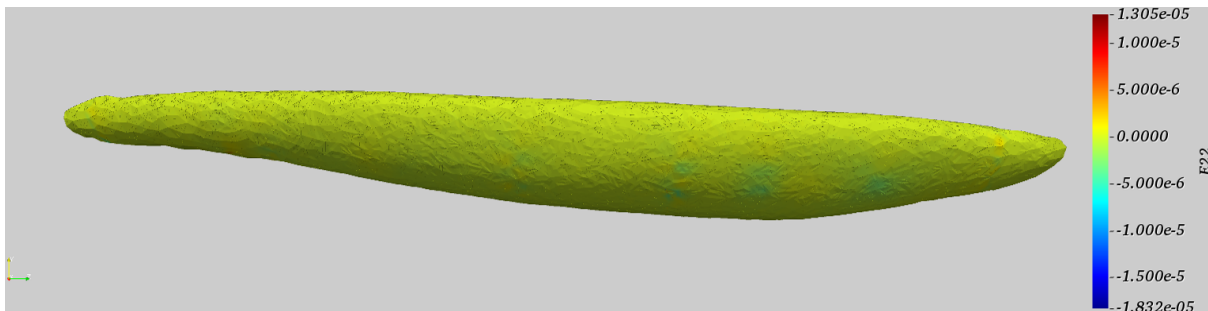
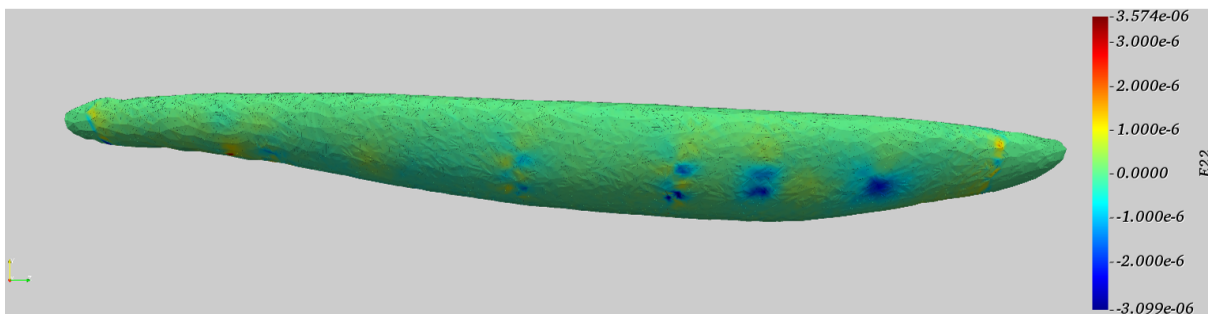
(a) E_{11} (b) E_{11} com escala modificada(c) E_{22} (d) E_{22} com escala modificada

Figura 106 – Modelo 2, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #100

Nas Figuras 107c, 108a e 108c se mostram as deformações de Green E_{23} , E_{12} e E_{13} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-1,832e-05/1,305e-05)$, $(-1,190e-05/1,018e-05)$ e $(-3,629e-05/3,329e-05)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 107d, 108b e 108d, respectivamente.

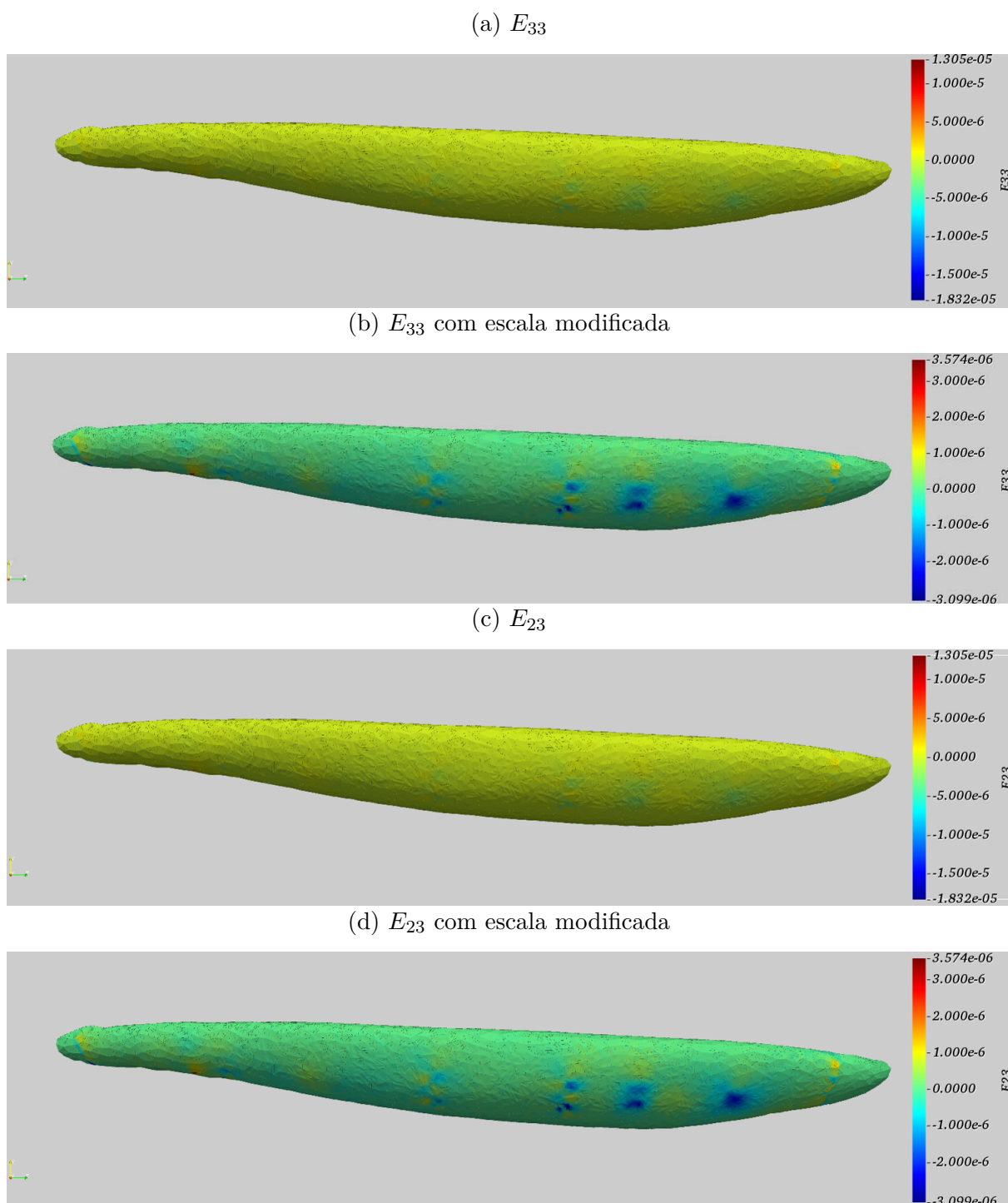
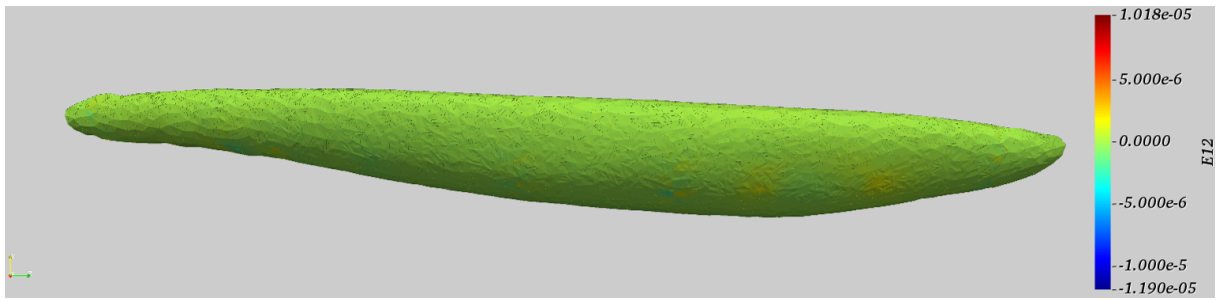
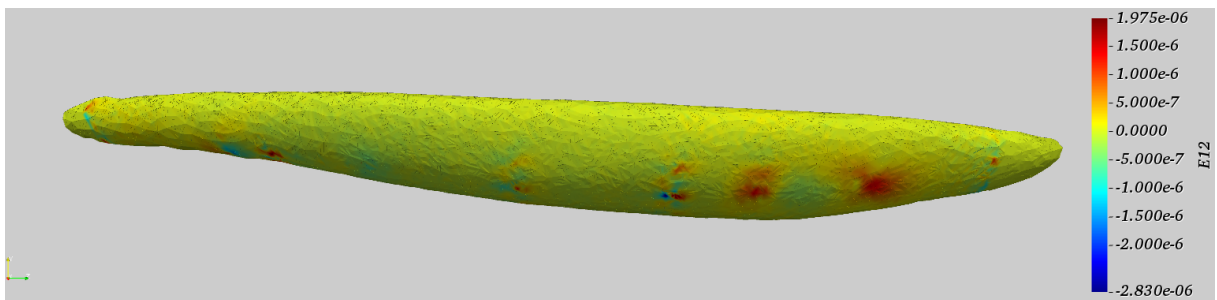
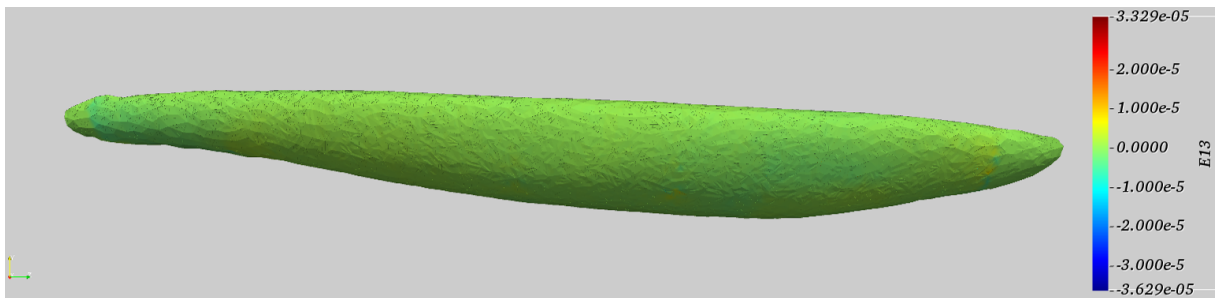
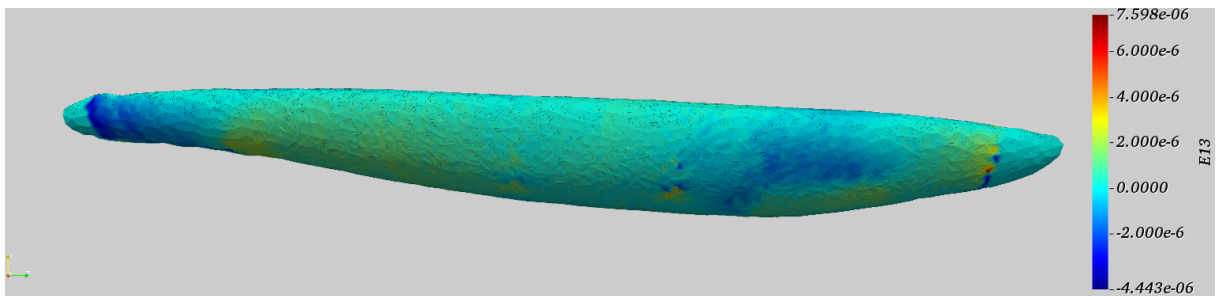


Figura 107 – Modelo 2, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #100

(a) E_{12} (b) E_{12} com escala modificada(c) E_{13} (d) E_{13} com escala modificadaFigura 108 – Modelo 2, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #100

Tensões de Piola Kirchhoff: Nas Figuras 109a, 109c e 110a se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{11} , S_{22} e S_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,01779/0,01711)$, $(-0,02198/0,01566)$ e $(-0,02952/0,03348)$ MPa , respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 109b, 109d e 110b.

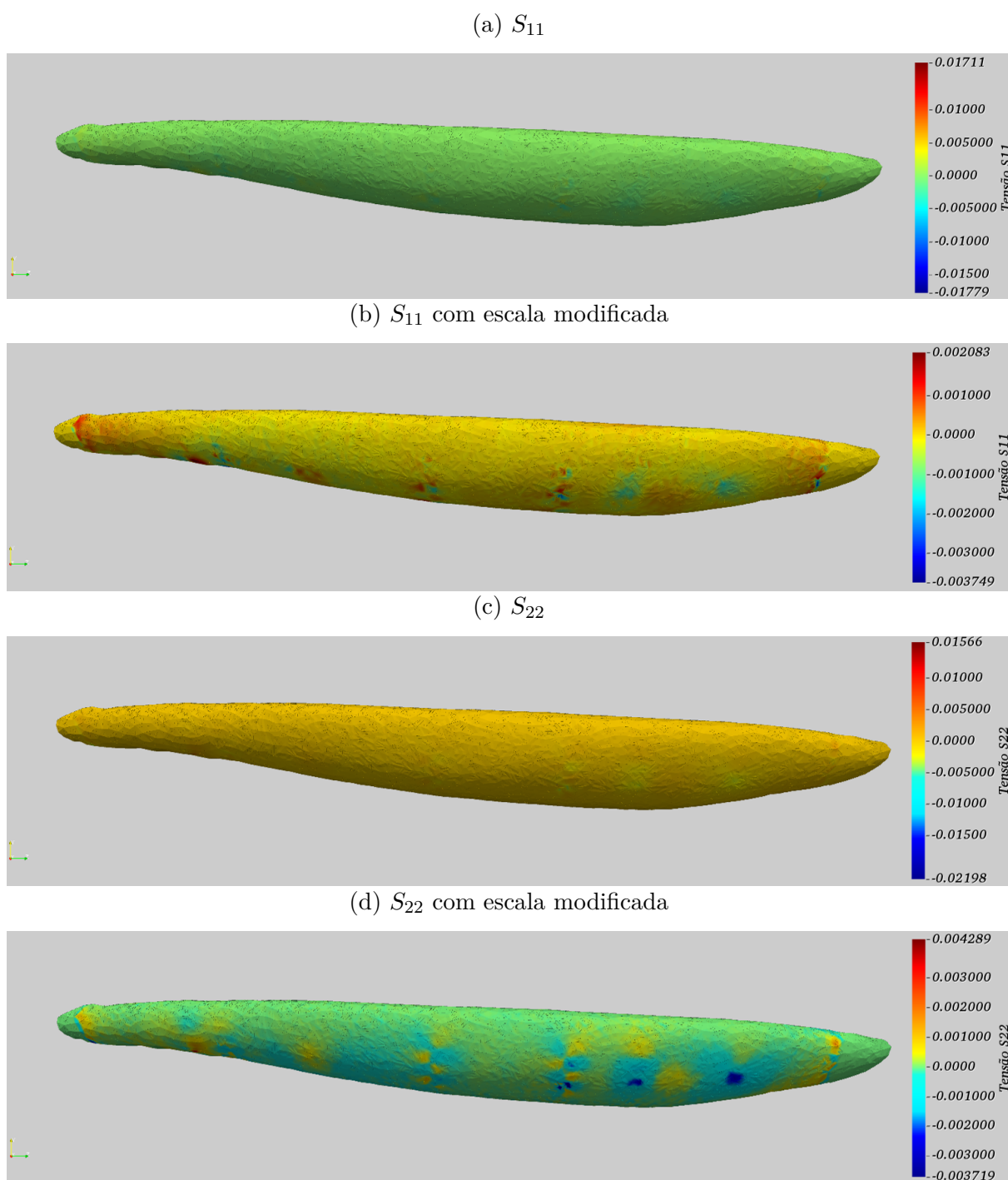


Figura 109 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} MPa para o passo de carregamento #100

Nas Figuras 110a, 111a e 111c se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{23} , S_{12} e S_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,02952/0,03348)$, $(-0,01428/0,01222)$ e $(-0,04354/0,03995)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 110b, 111b e 111d, respectivamente.

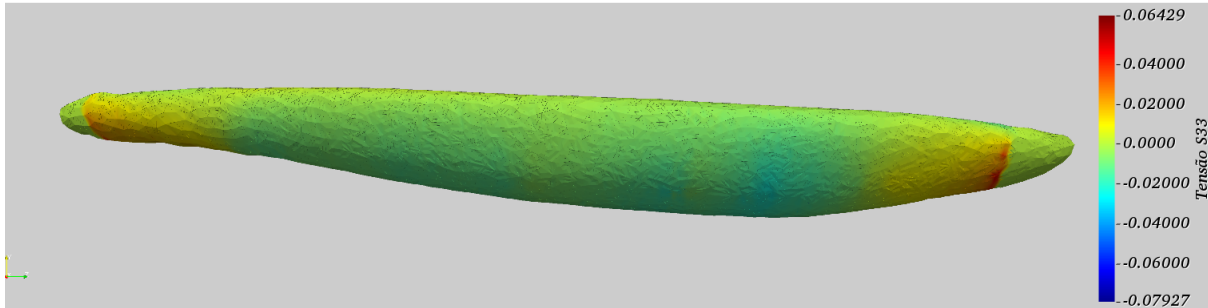
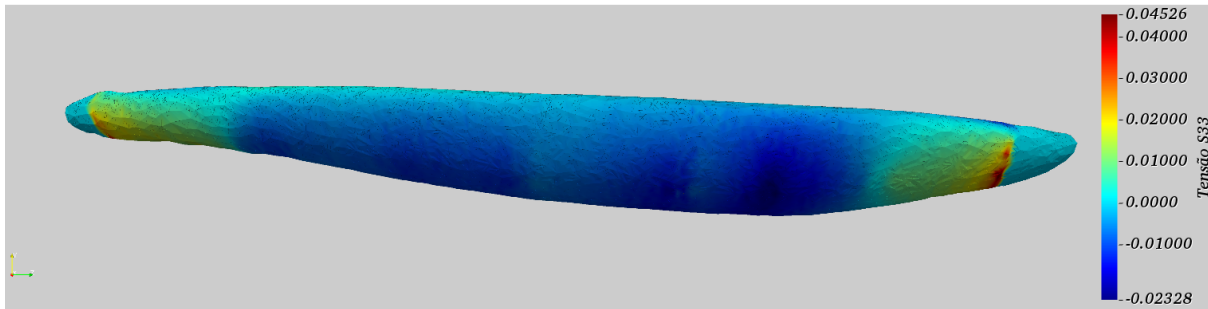
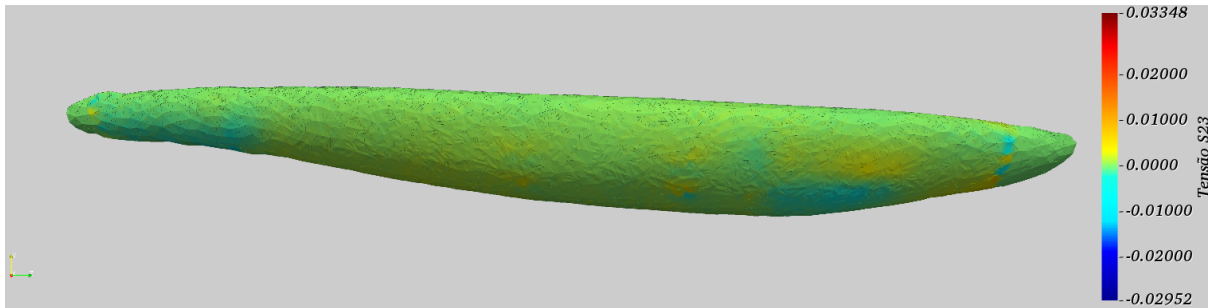
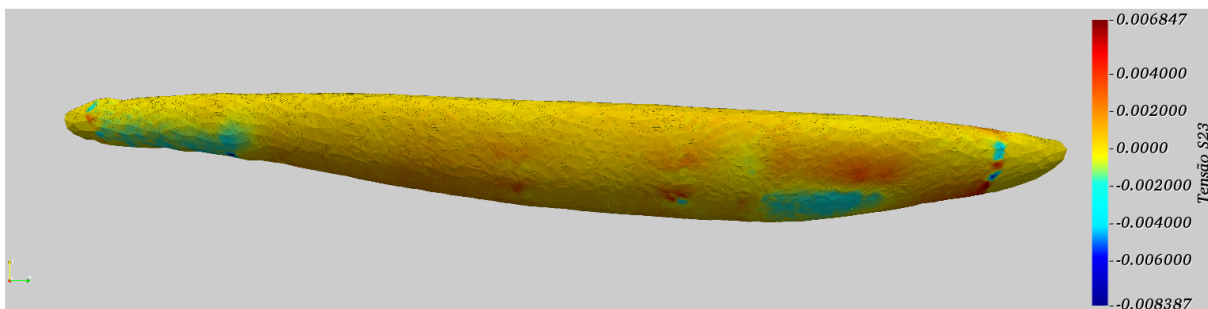
(a) S_{33} (b) S_{33} com escala modificada(c) S_{23} (d) S_{23} com escala modificada

Figura 110 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{23} e S_{33} MPa para o passo de carregamento #100

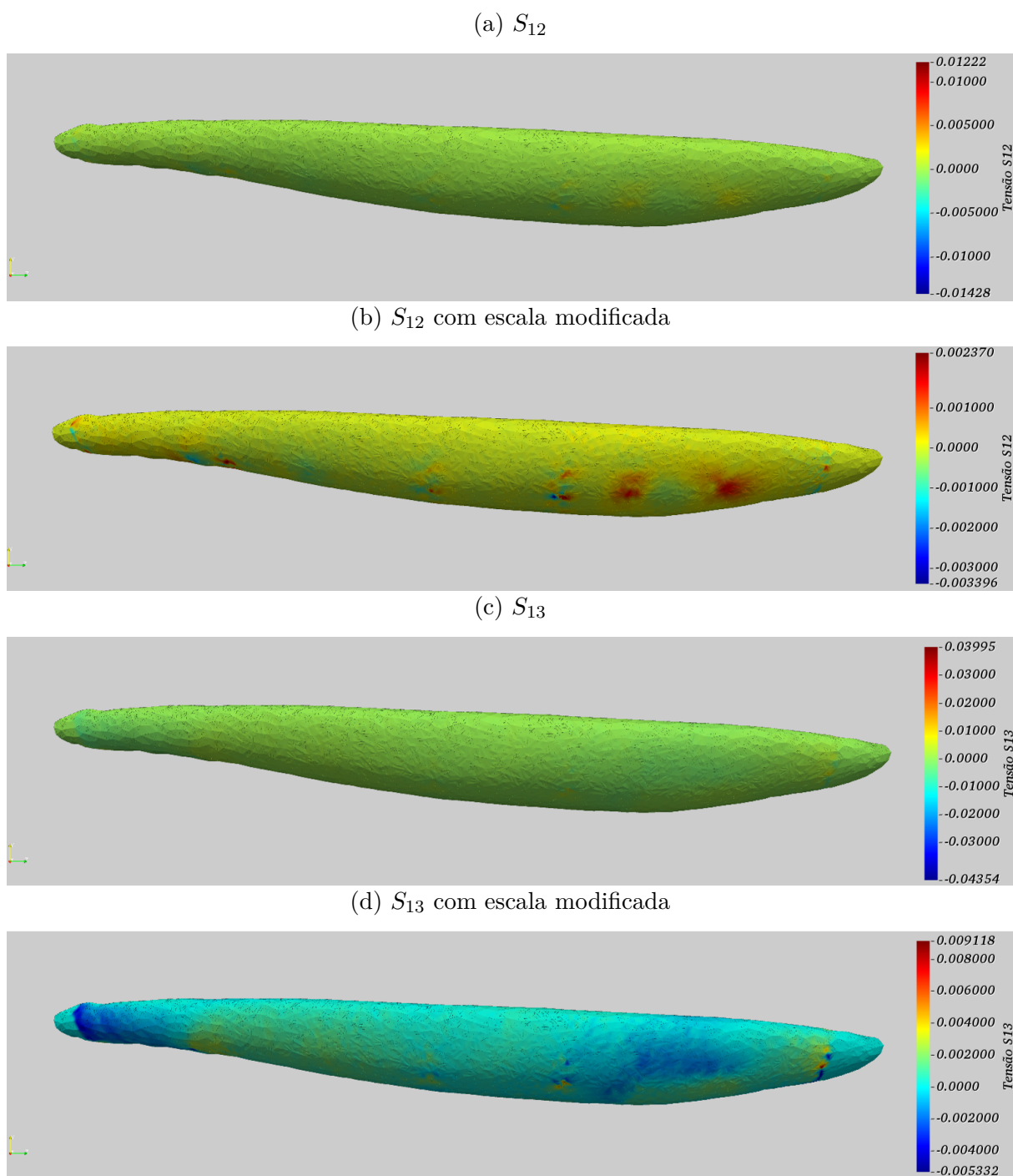


Figura 111 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} MPa para o passo de carregamento #100

Tensões de Cauchy: Nas Figuras 112a, 112c e 113a se mostram as tensões de Cauchy C_{11} , C_{22} e C_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,01778/0,01712)$, $(-0,02197/0,01567)$ e $(-0,02952/0,03348)$ MPa , respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 109b, 109d e 110b.

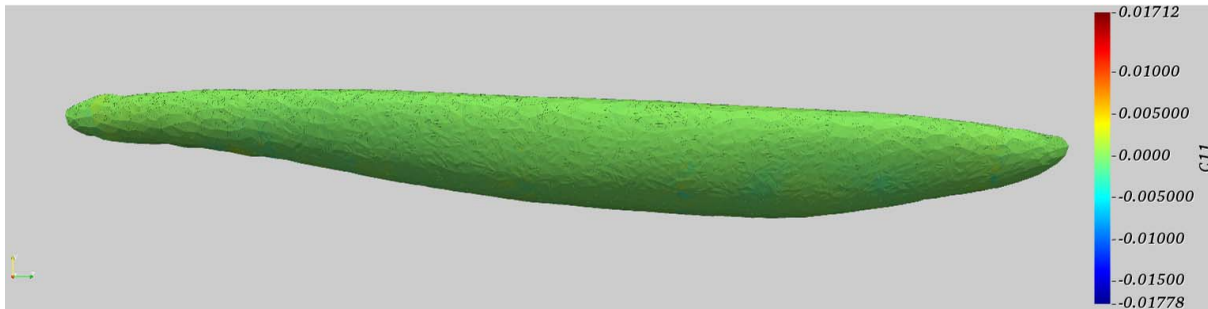
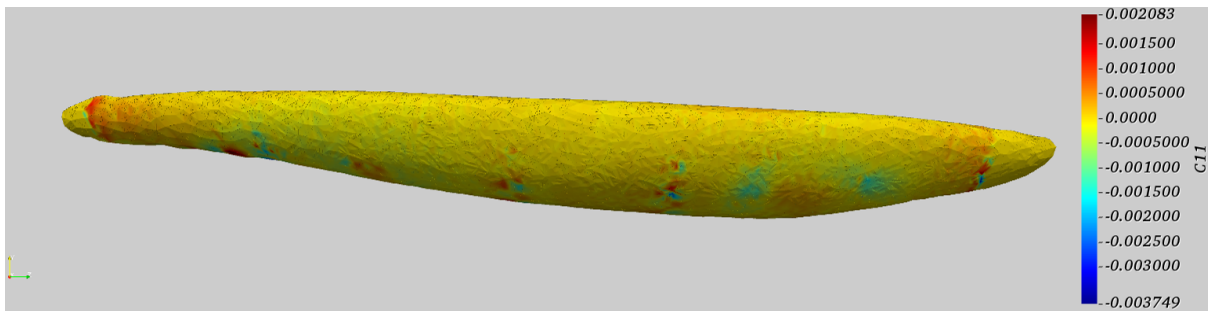
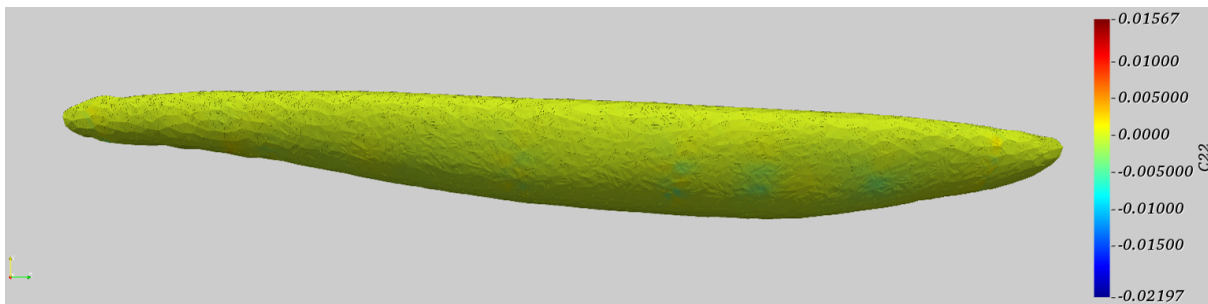
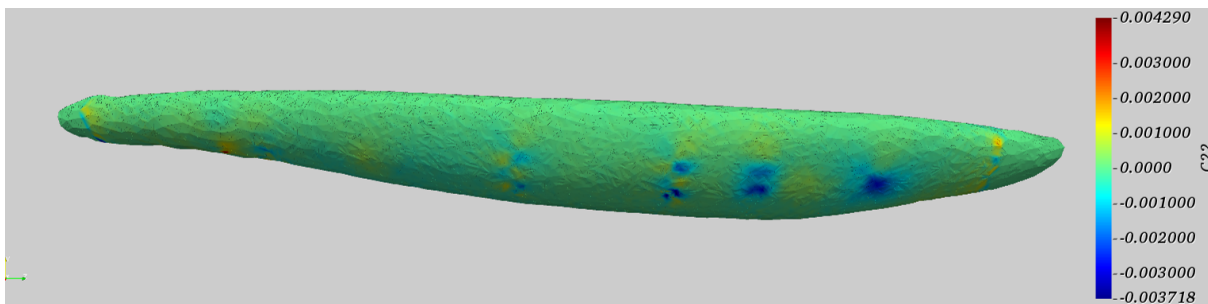
(a) C_{11} (b) C_{11} com escala modificada(c) C_{22} (d) C_{22} com escala modificada

Figura 112 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} MPa para o passo de carregamento #100

Nas Figuras 113a, 114a e 114c se mostram as tensões de Cauchy C_{23} , C_{12} e C_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,02952/0,03348)$, $(-0,01428/0,01222)$ e $(-0,04354/0,03995)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 113b, 114b e 114d, respectivamente.

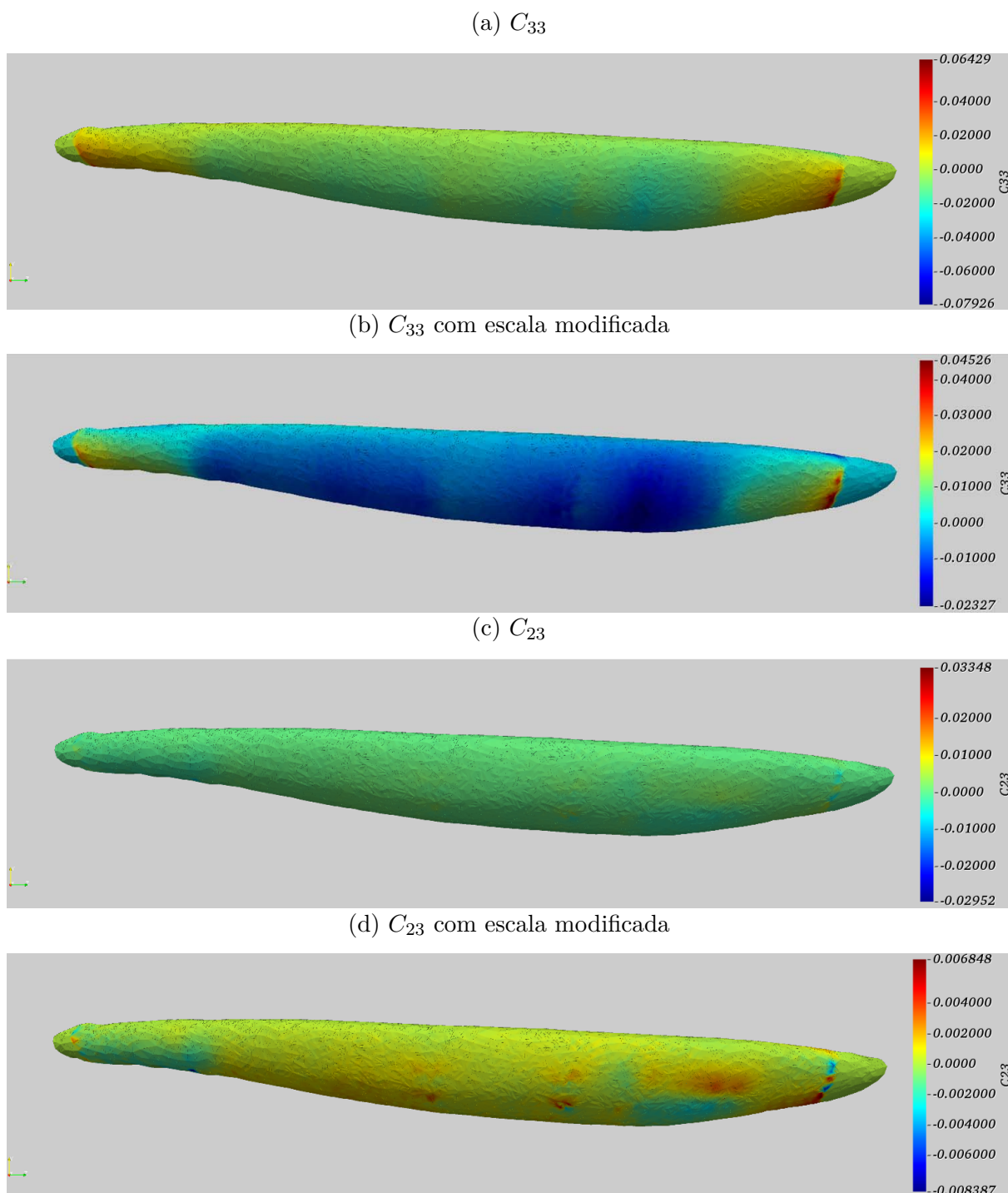
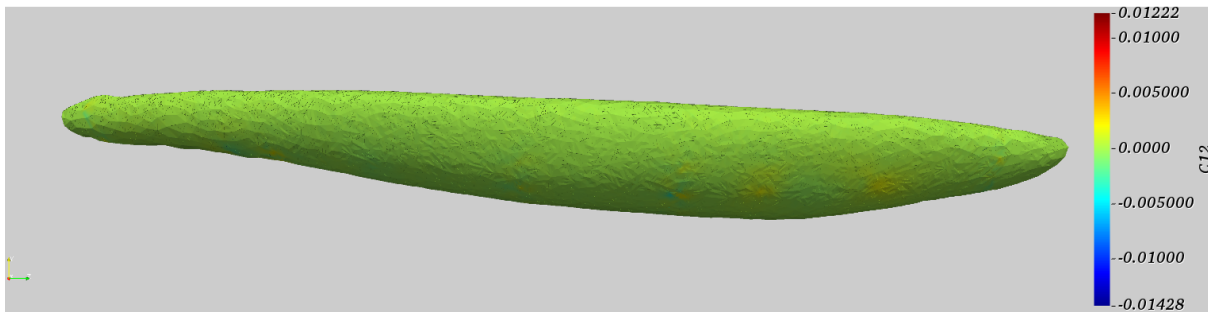
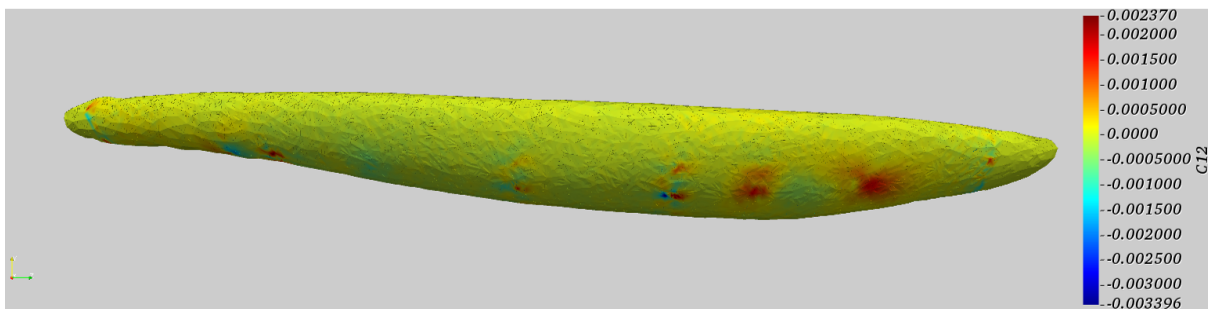
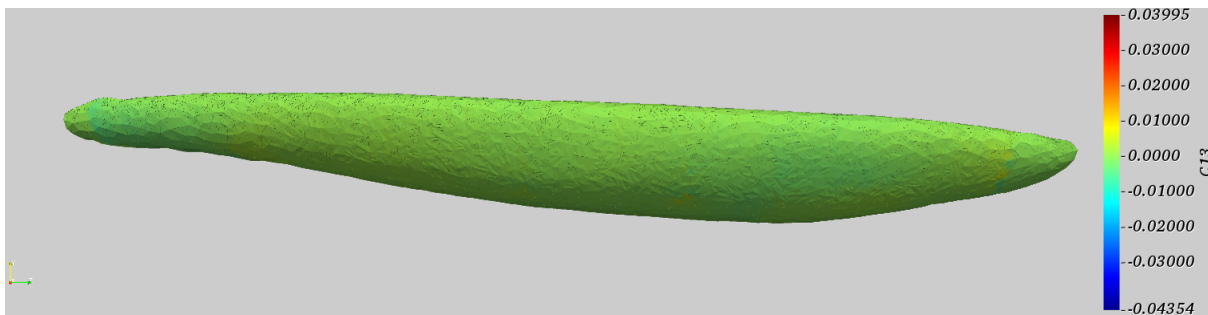
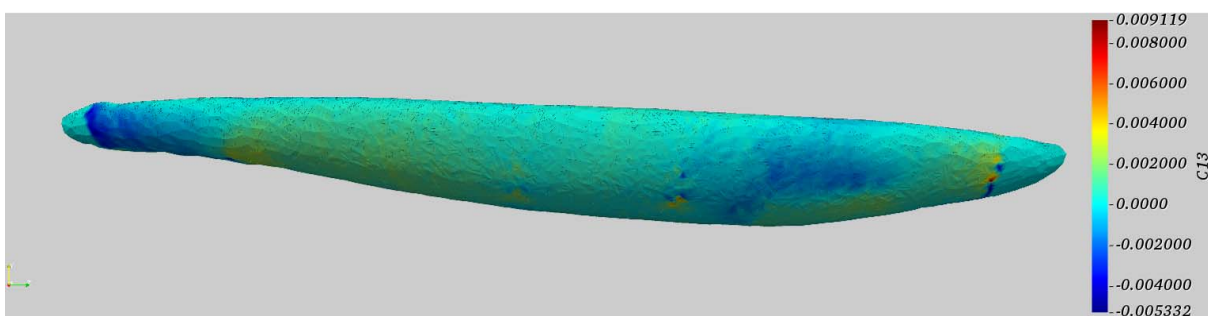


Figura 113 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{23} e C_{33} MPa para o passo de carregamento #100

(a) C_{12} (b) C_{12} com escala modificada(c) C_{13} (d) C_{13} com escala modificadaFigura 114 – Modelo 2, tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} MPa para o passo de carregamento #100

Deslocamentos nas fibras: Na Figura 115 se mostram os deslocamentos na direção X, Y e Z. Na direção X e Y se observam deslocamentos máximos de $0,00194 \text{ mm}$ e $0,00242 \text{ mm}$, na parte central do arranjo, e deslocamentos mínimos de $0,00067 \text{ mm}$ e $0,00085 \text{ mm}$ respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de $0,00063 \text{ mm}$, perto da extremidade proximal, e mínimo de $-0,00043 \text{ mm}$ perto da extremidade distal do músculo TA.

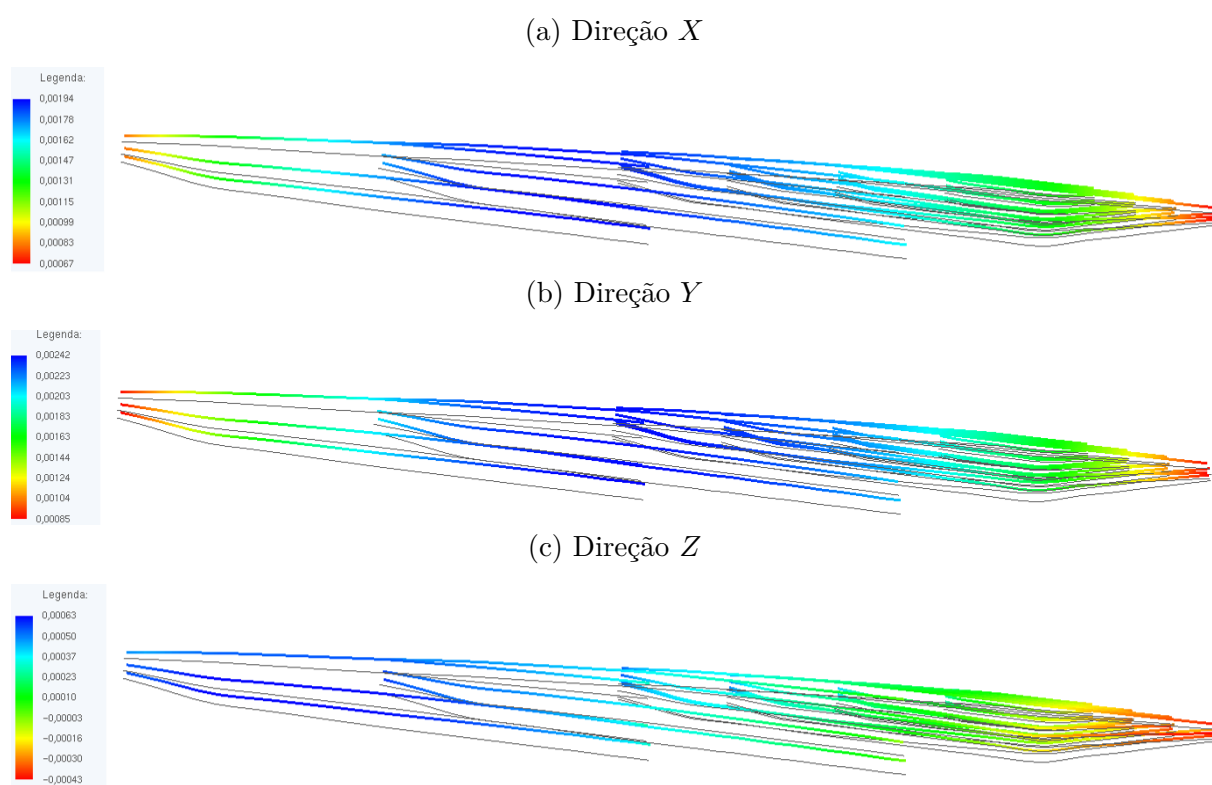
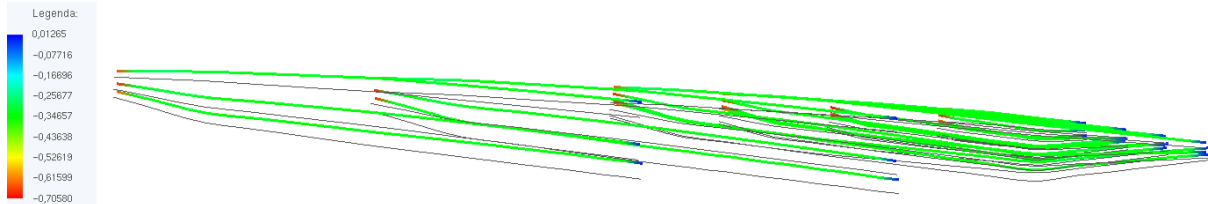


Figura 115 – Modelo 2, deslocamentos finais das Fibras (mm) para o passo de carregamento #100

Tensões nas fibras: Na Figura 116 se mostram as tensões normais e de aderência nas fibras com valores máximos de $0,01265 \text{ MPa}$ e $0,16110 \text{ MPa}$ e mínimos de $-0,70580 \text{ MPa}$ e $0,70090 \text{ MPa}$, respectivamente.

(a) Tensão Normal



(b) Tensão de Aderência

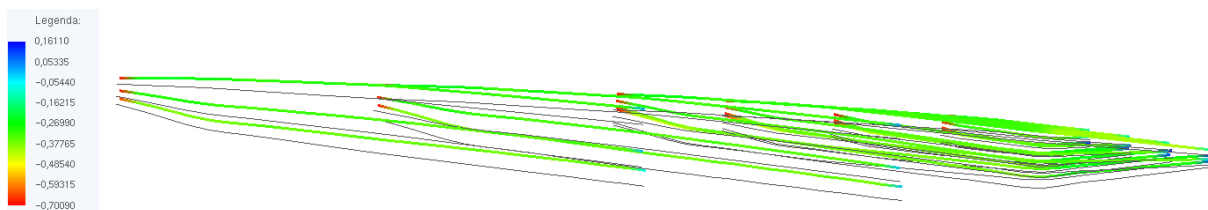


Figura 116 – Modelo 2, tensões finais das Fibras (MPa) para o passo de carregamento #100

Resultados numéricos para a deformação imposta de $\bar{E}_0 = -0,00051$: Para comparar os resultados de deslocamento e tensão no músculo dos dois modelos constitutivos, apresentam-se os resultados para o passo de carregamento #17 onde a deformação imposta é de $\bar{E}_0 = -0,00051$, igual á imposta no modelo 2.

Na Figura 117 se mostram os valores do jacobiano $J \approx 1$ na matriz para o passo de carregamento #17.



Figura 117 – Músculo TA - modelo 2, valores do Jacobiano na matriz para o passo de carregamento #17

Deslocamentos da matriz: Na Figura 118 se mostram os deslocamentos da matriz na direção X, Y e Z. Na direção X e Y se observam deslocamentos máximos de $0,00033\text{ mm}$ e $0,00041\text{ mm}$, na parte central do músculo, respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de $0,00009\text{ mm}$ e mínimo de $-0,00012\text{ mm}$.

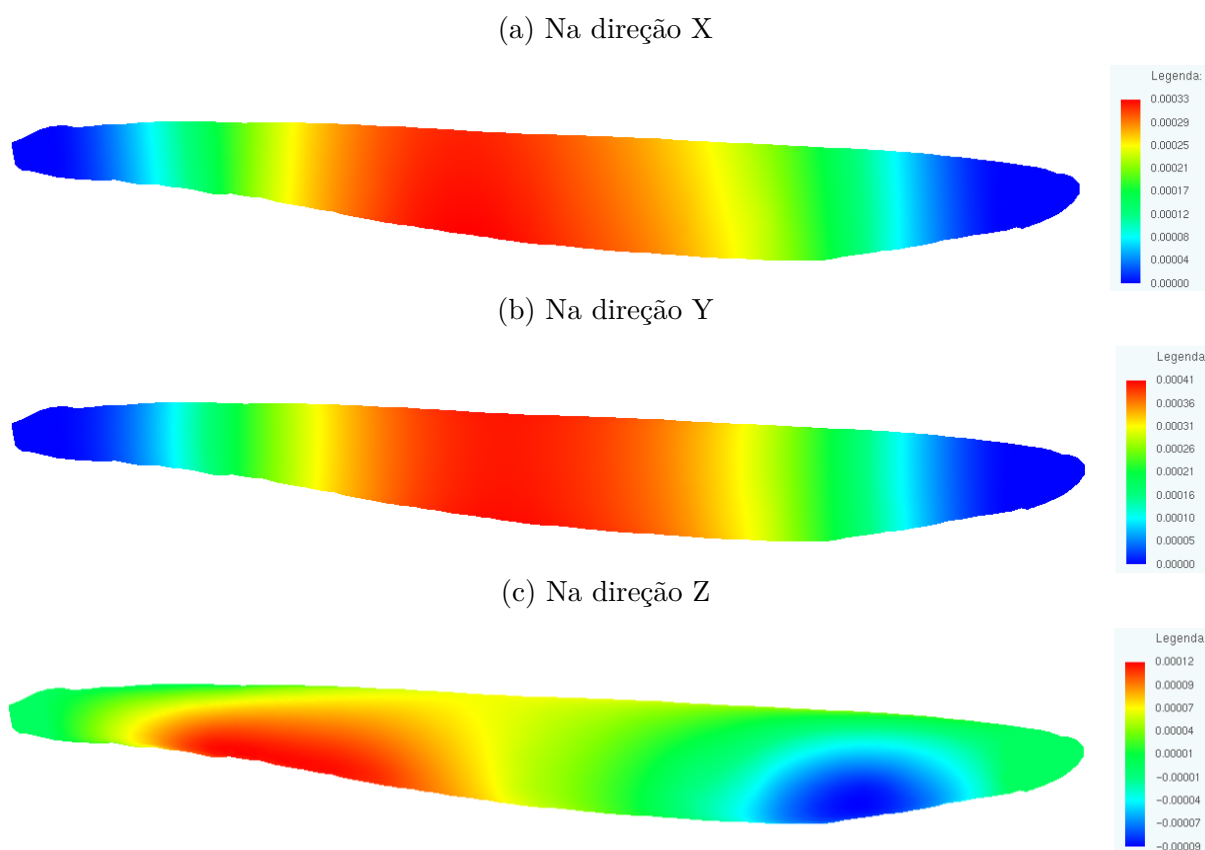


Figura 118 – Modelo 2, deslocamentos (mm) para o passo de carregamento #17

Deformações de Green: Nas Figuras 119a, 119c e 120a se mostram as deformações de Green E_{11} , E_{22} e E_{33} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-2,521e-06/2,424e-06)$, $(-3,1140e-06/2,2190e-06)$ e $(-3,1140e-06/2,2190e-06)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada ²², ver Figuras 119b, 119d e 120b.

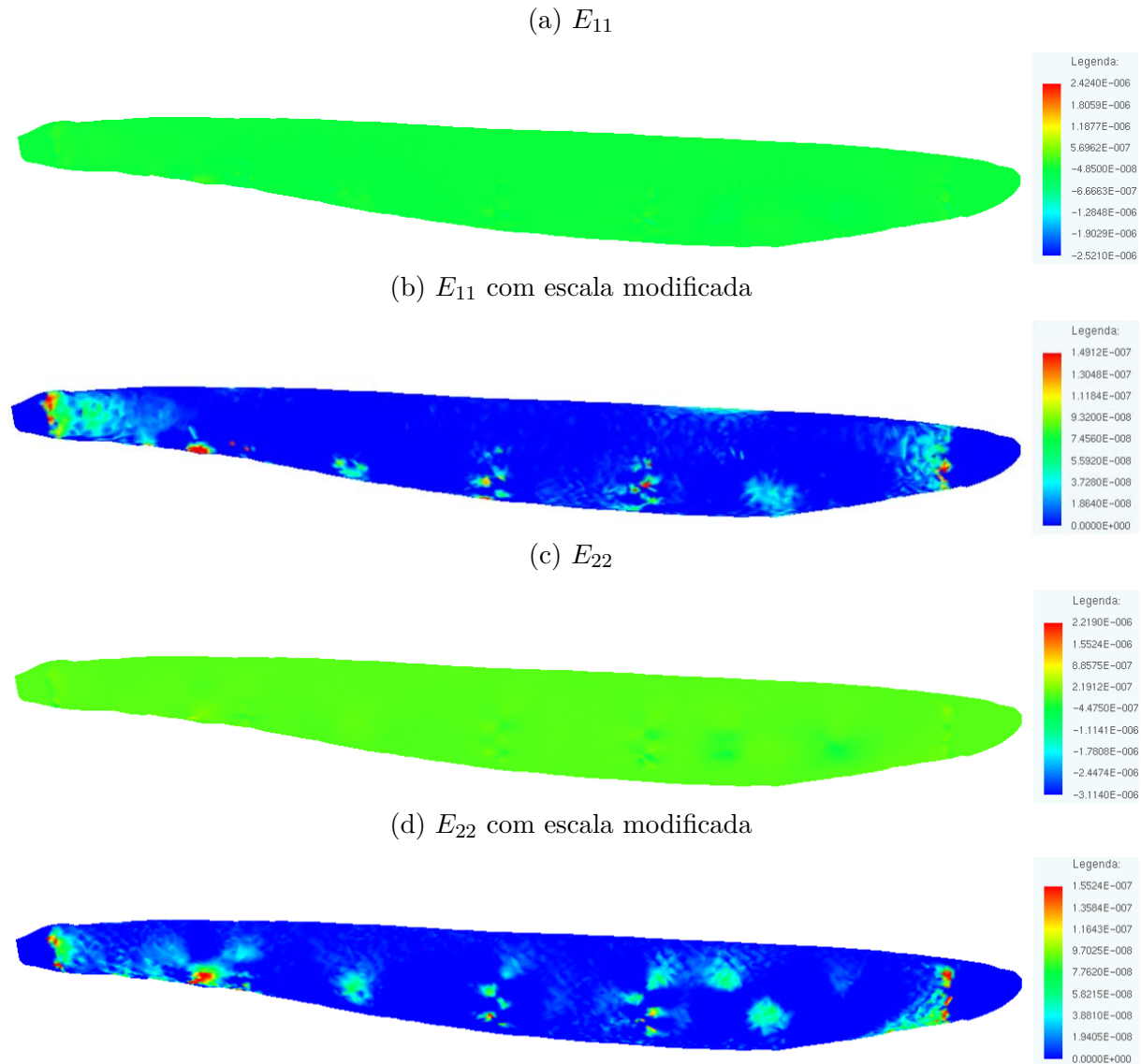


Figura 119 – Modelo 2, deformações de Green: E_{11} e E_{22} para o passo de carregamento #17

²² Opção do Paraview (PARAVIEW..., 2005): "Rescale to visible range", para redimensionar o intervalo.

Nas Figuras 120c, 121a e 121c se mostram as deformações de Green E_{23} , E_{12} e E_{13} , os resultados mostram intervalos de deformação de $(-3, 1140e-06/2, 2190e-06)$, $(-2, 0230e-06/1, 7310e-06)$ e $(-6, 1690e-06/5, 6590e-06)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 120d, 121b e 121d, respectivamente.

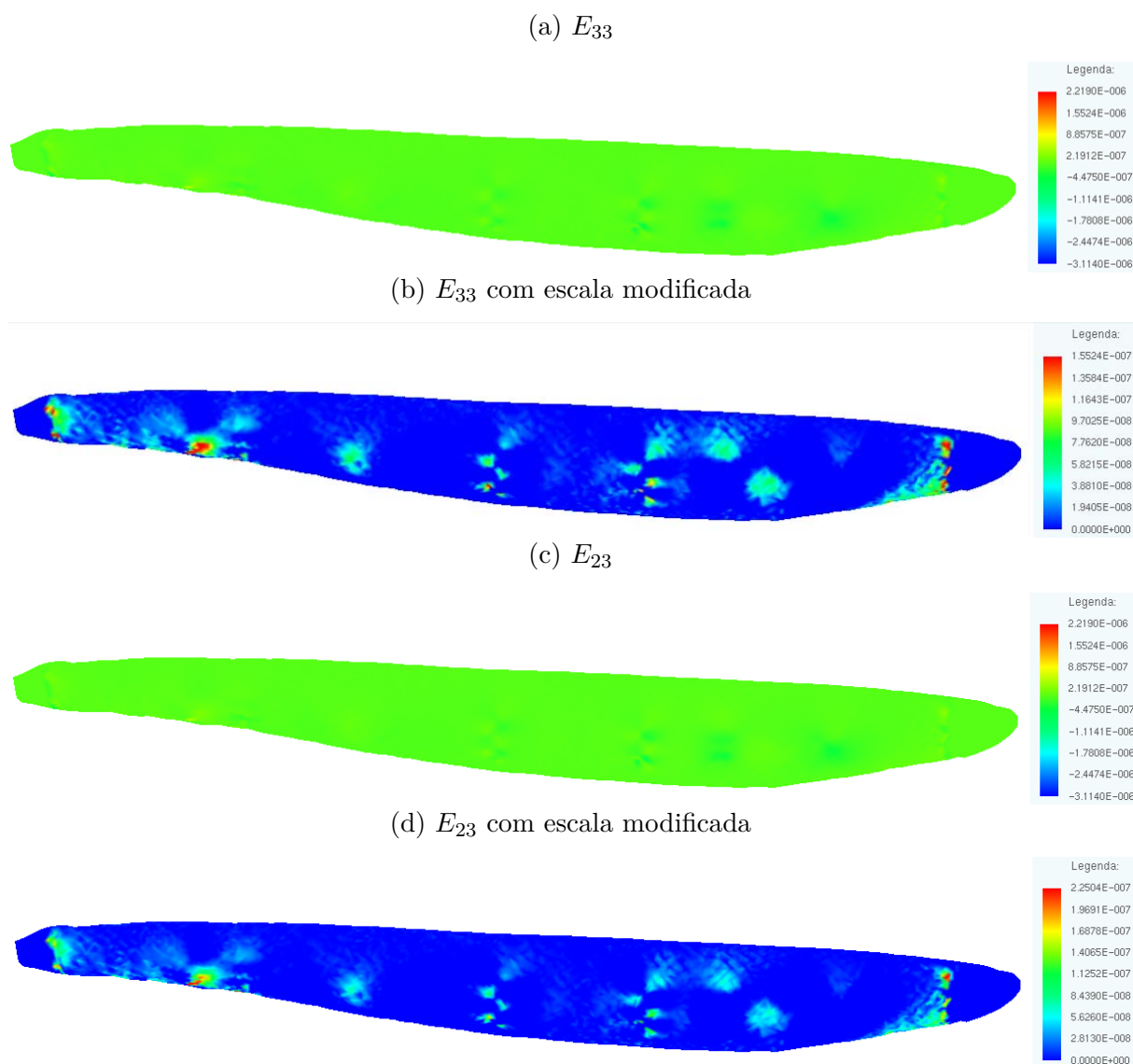


Figura 120 – Modelo 2, deformações de Green: E_{33} e E_{23} para o passo de carregamento #17

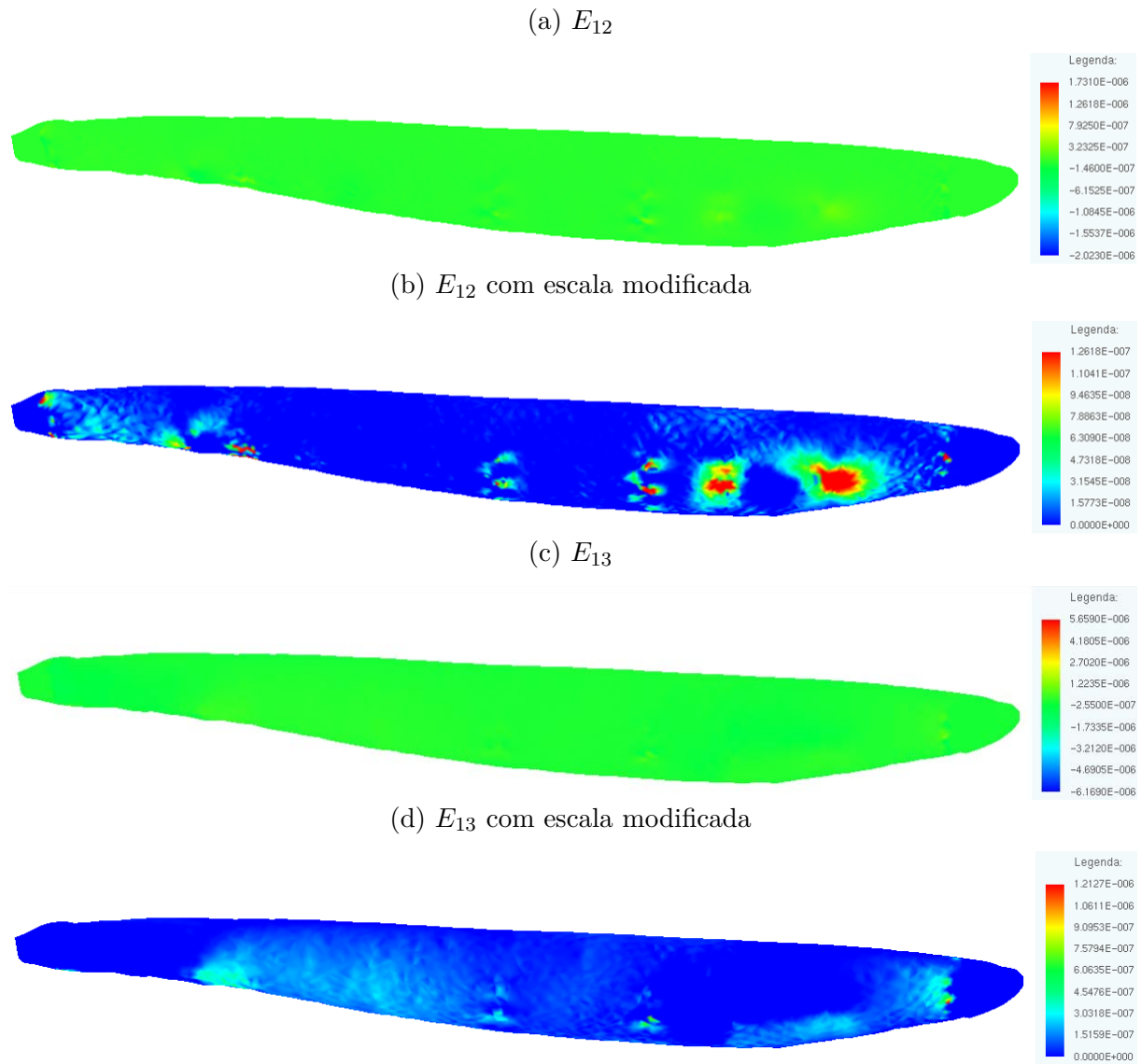


Figura 121 – Modelo 2, deformações de Green: E_{12} e E_{13} para o passo de carregamento #17

Tensões de Piola Kirchhoff: Nas Figuras 122a, 122c e 123a se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{11} , S_{22} e S_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,00302/0,00291)$, $(-0,00374/0,00266)$ e $(-0,01348/0,01093)$ *MPa*, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 122b, 122d e 123b.

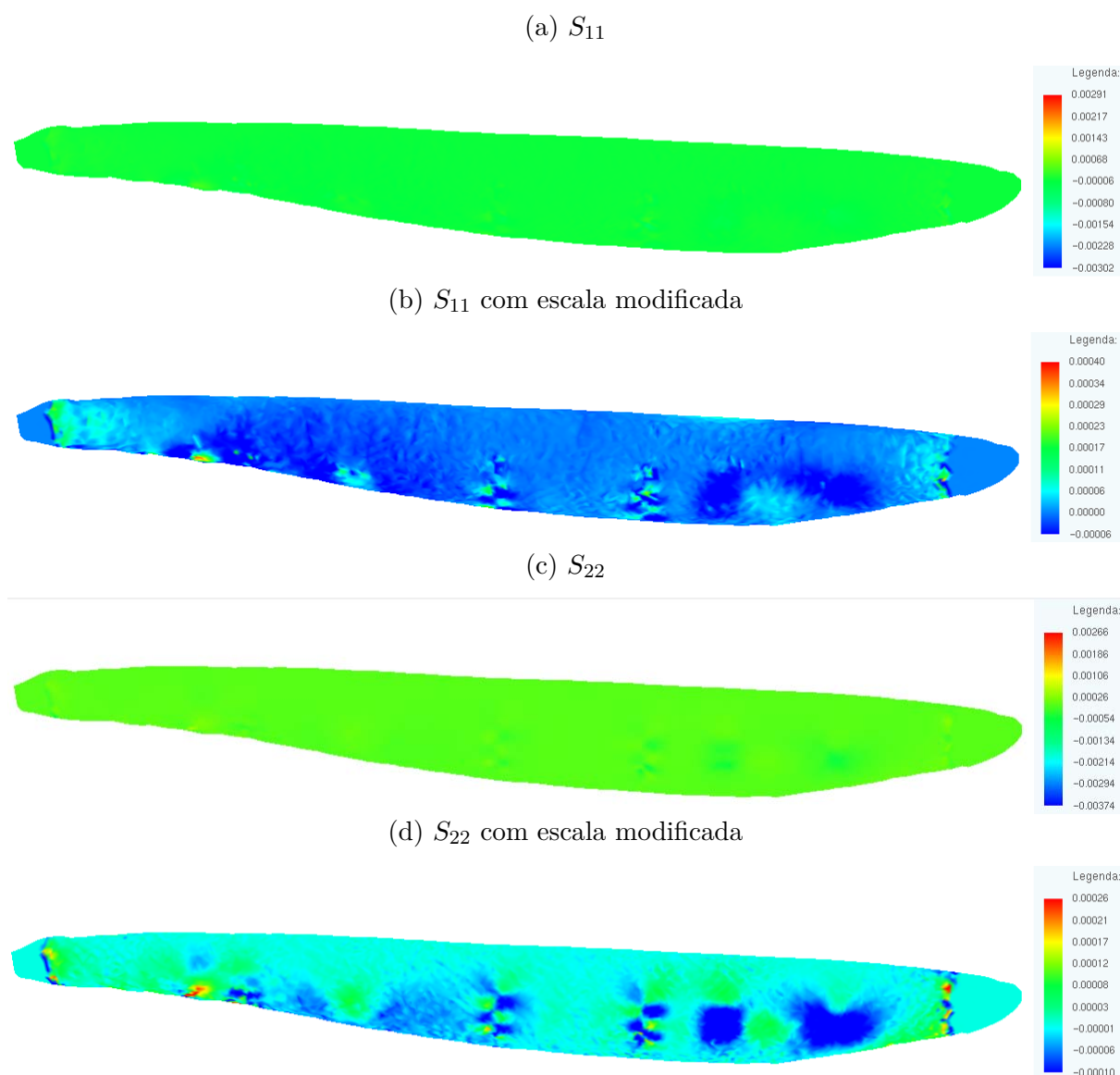


Figura 122 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{11} e S_{22} *MPa* para o passo de carregamento #17

Nas Figuras 123c, 124a e 124c se mostram as tensões de Piola Kirchhoff S_{23} , S_{12} e S_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,00502/0,00569)$, $(-0,00243/0,00208)$ e $(-0,00740/0,00679)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 123d, 124b e 124d, respectivamente.

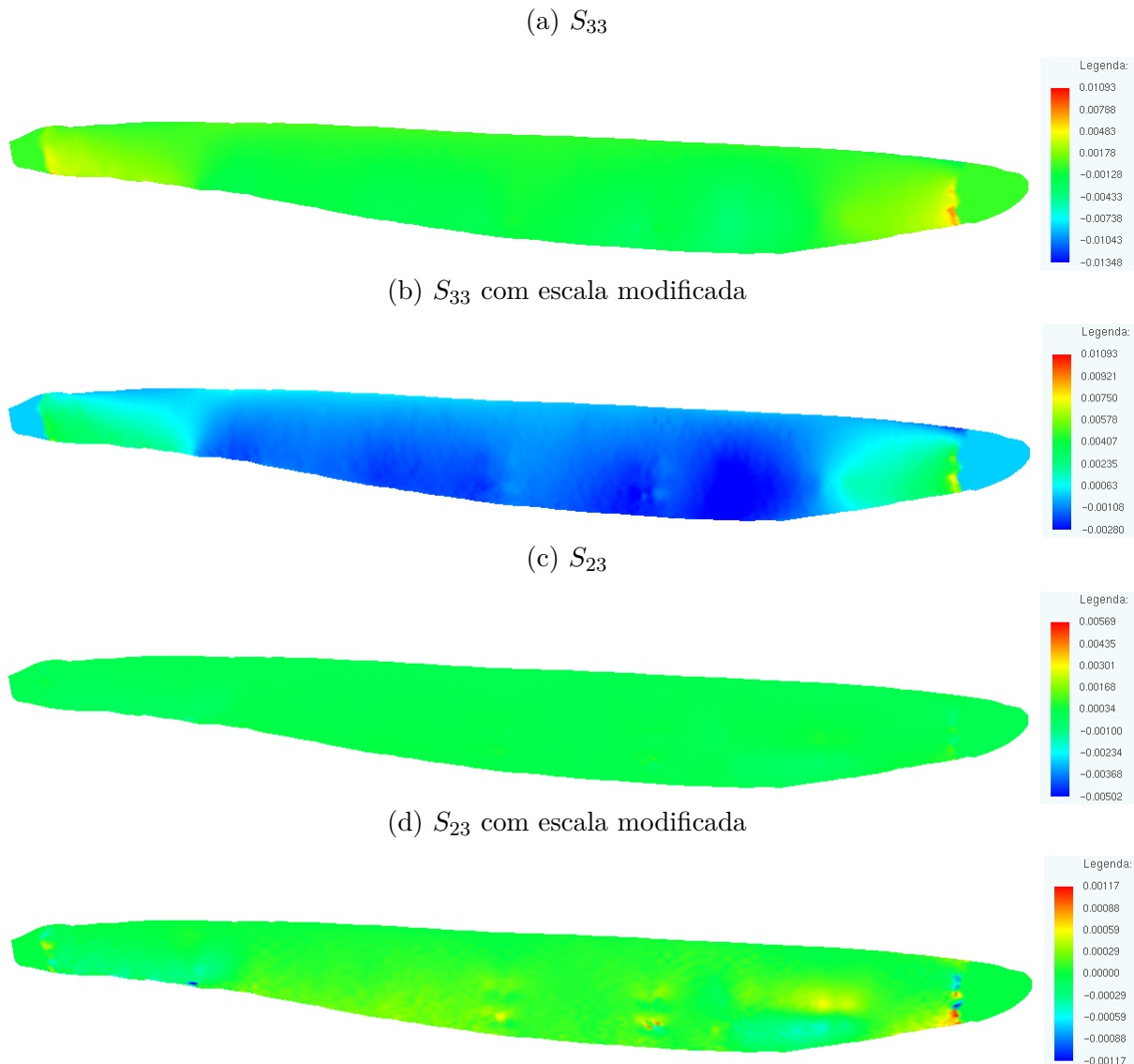


Figura 123 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{33} e S_{23} MPa para o passo de carregamento #17

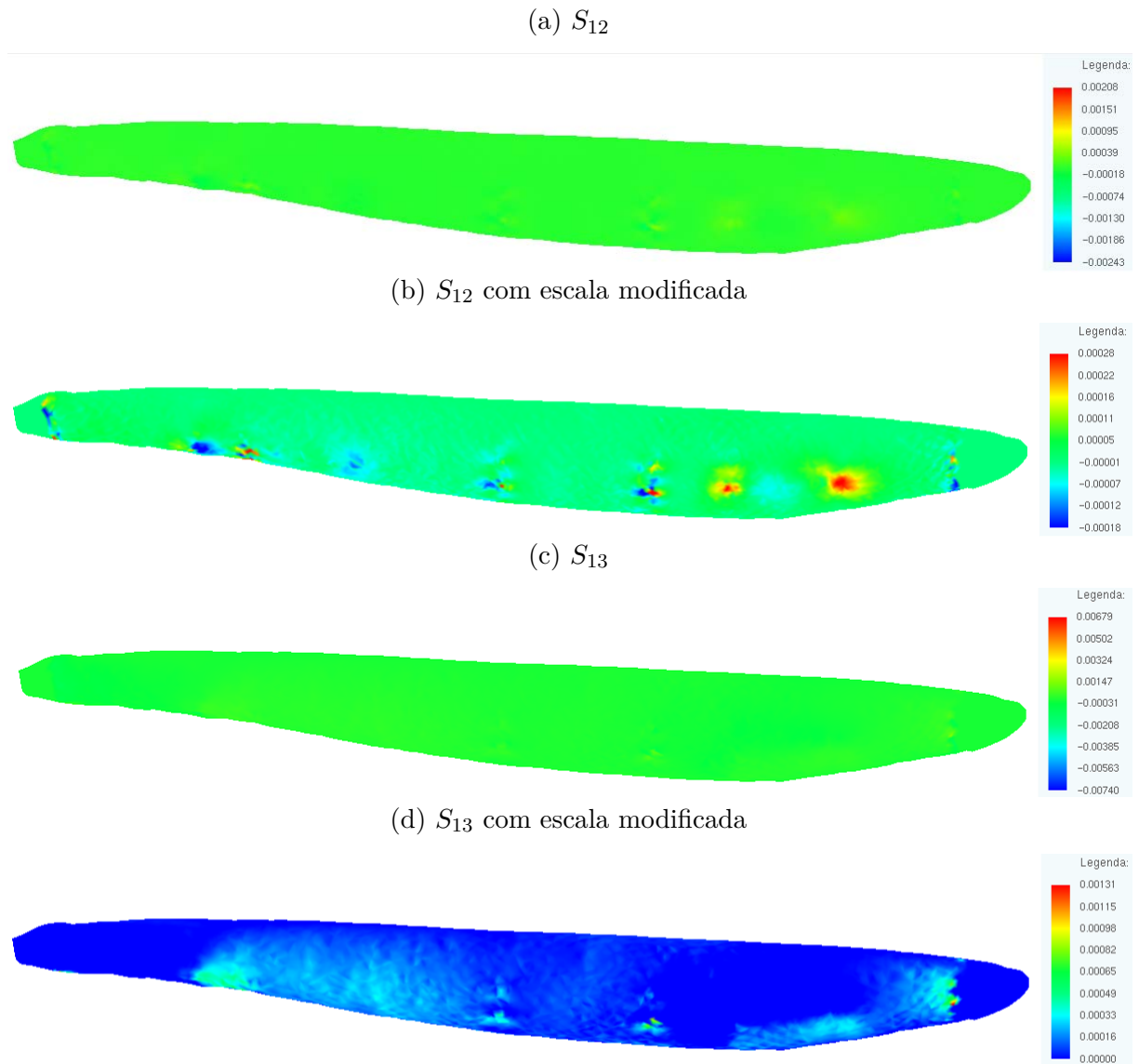


Figura 124 – Modelo 2, Tensões de Piola Kirchhoff: S_{12} e S_{13} MPa para o passo de carregamento #17

Tensões de Cauchy: Nas Figuras 125a, 125c e 126a se mostram as tensões de Cauchy C_{11} , C_{22} e C_{33} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,00302/0,00291)$, $(-0,00374/0,00266)$ e $(-0,01348/0,01093)$ *MPa*, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 125b, 125d e 126b.

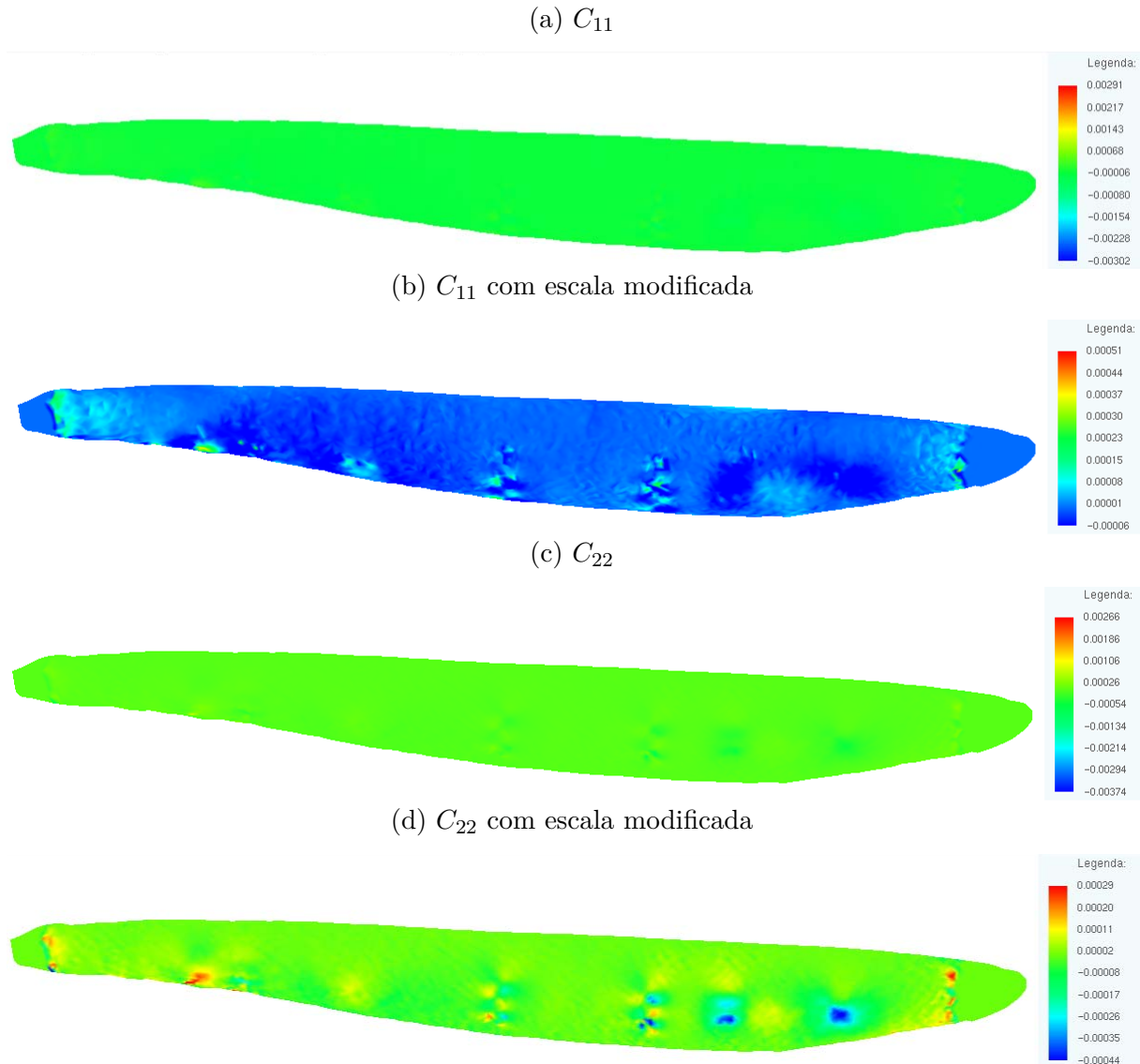


Figura 125 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{11} e C_{22} *MPa* para o passo de carregamento #17

Nas Figuras 126c, 127a e 127c se mostram as tensões de Cauchy C_{23} , C_{12} e C_{13} , os resultados mostram intervalos de tensão de $(-0,00502/0,00569)$, $(-0,00243/0,00208)$ e $(-0,00740/0,00679)$, respectivamente. Estes resultados são apresentados também com escala modificada, ver Figuras 126d, 127b e 127d, respectivamente.

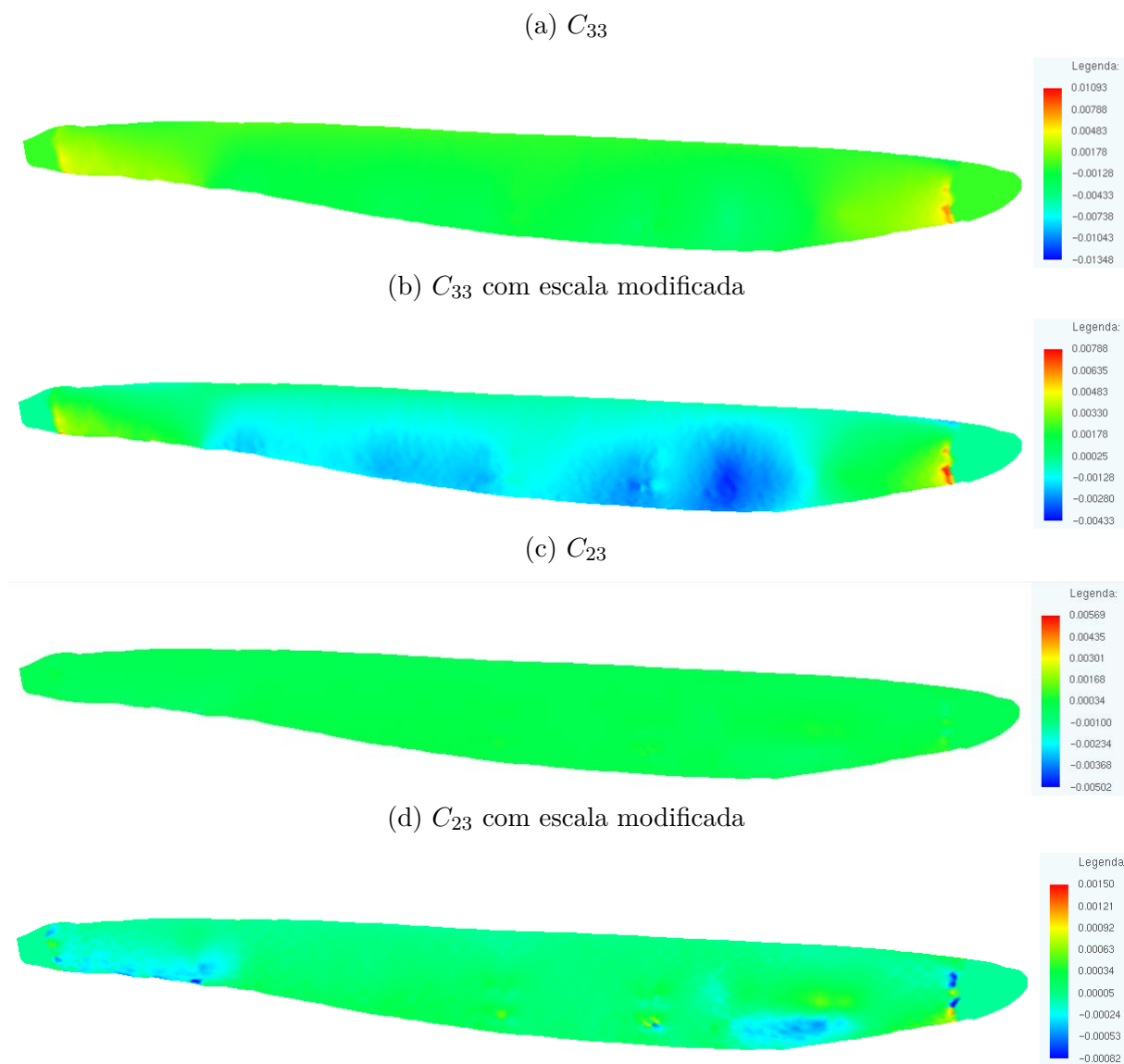


Figura 126 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{33} e C_{23} *MPa* para o passo de carregamento #17

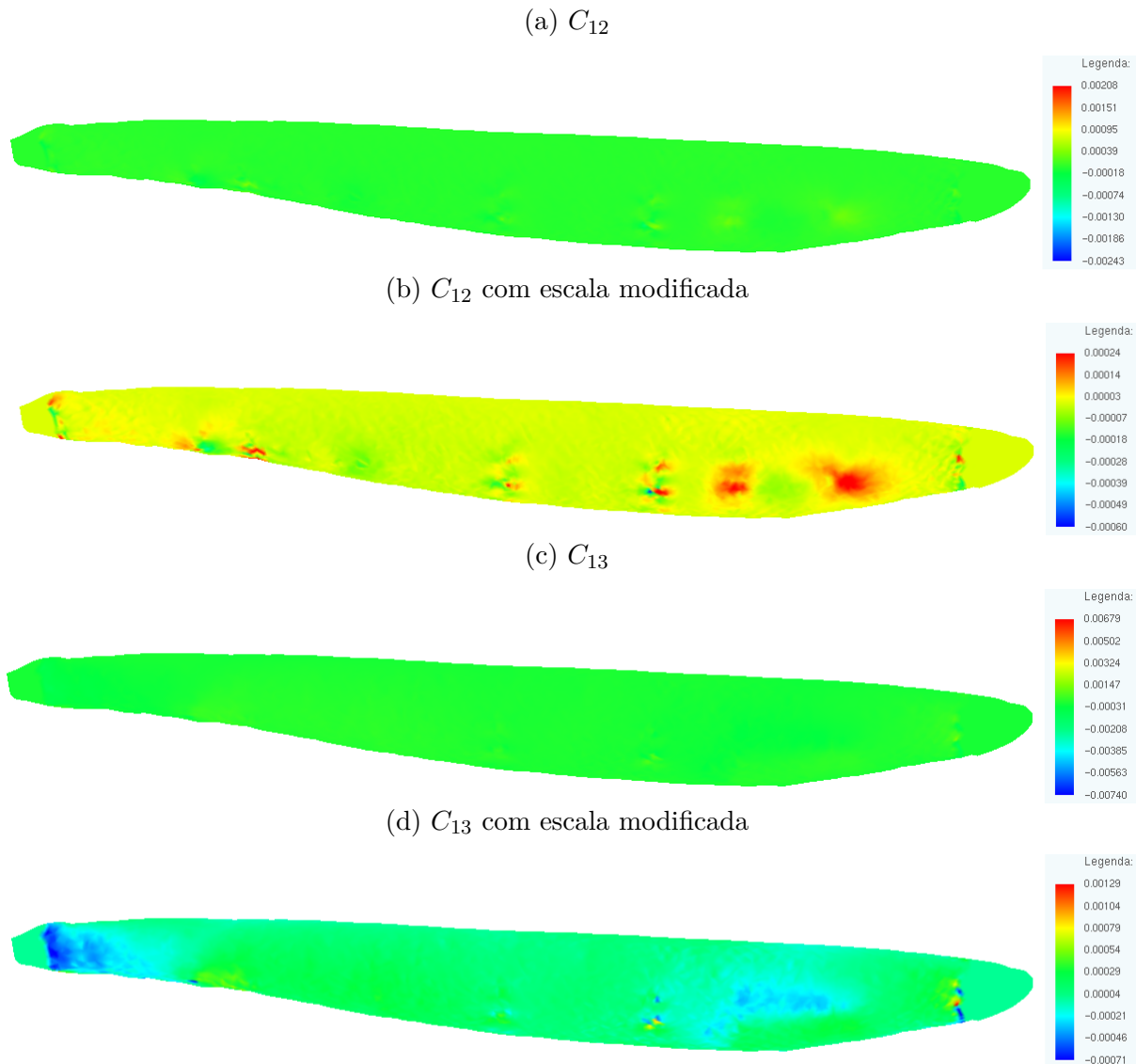


Figura 127 – Modelo 2, Tensões de Cauchy: C_{12} e C_{13} MPa para o passo de carregamento #17

Nas Figuras 128 e 129 se mostram os resultados dos deslocamentos e tensões para as fibras para uma deformação imposta de $E_0^{17} = -0.00051$ (Passo de carregamento # 17).

Deslocamentos nas fibras: Na Figura 128 se mostram os deslocamentos na direção X, Y e Z. Na direção X e Y se observam deslocamentos máximos de 0,00033 mm e 0,00041 mm, na parte central do arranjo, e deslocamentos mínimos de 0,00011 mm e 0,00014 mm respectivamente. Na direção Z, apresenta-se um deslocamento máximo de 0,00011 mm e mínimo de $-0,00007$ mm.

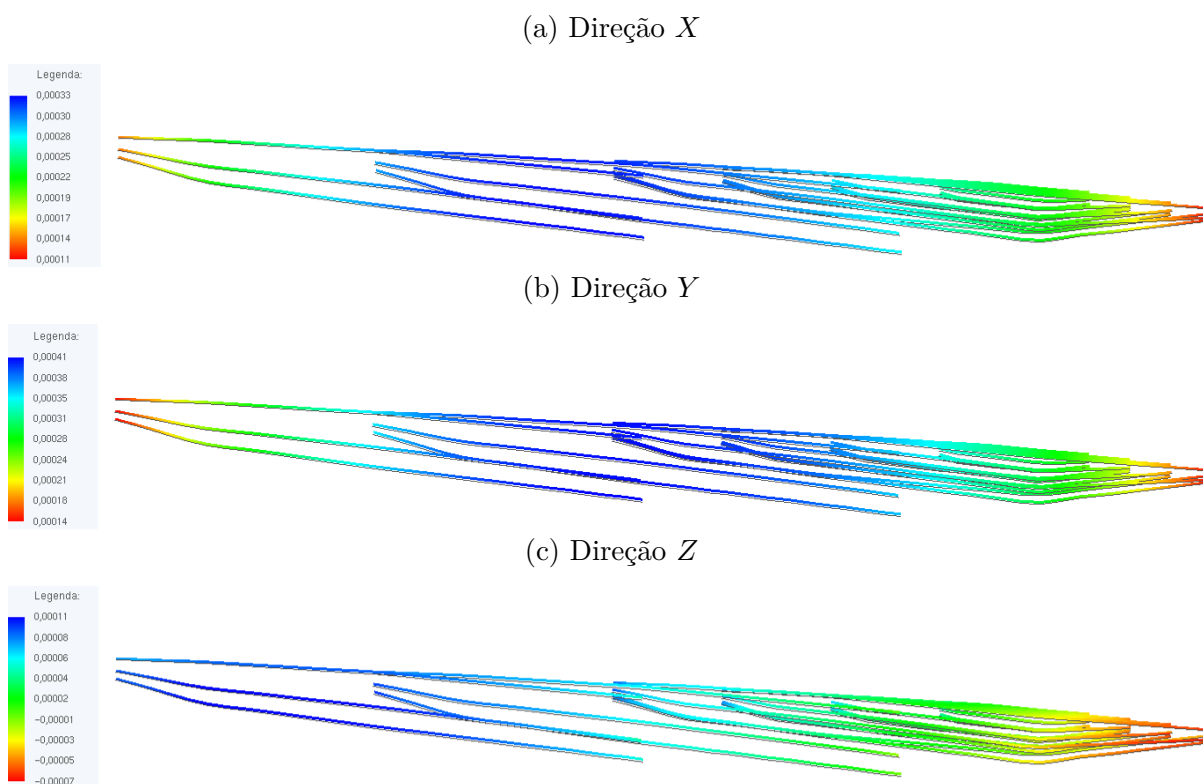


Figura 128 – Modelo 2, deslocamentos das Fibras (mm), passo de carregamento #17

Tensões nas fibras: Na Figura 129 se mostram as tensões normais e de aderência nas fibras com valores máximos de $0,00215 \text{ MPa}$ e $0,02739 \text{ MPa}$ e mínimos de $-0,12000 \text{ MPa}$ e $0,11920 \text{ MPa}$, respectivamente.

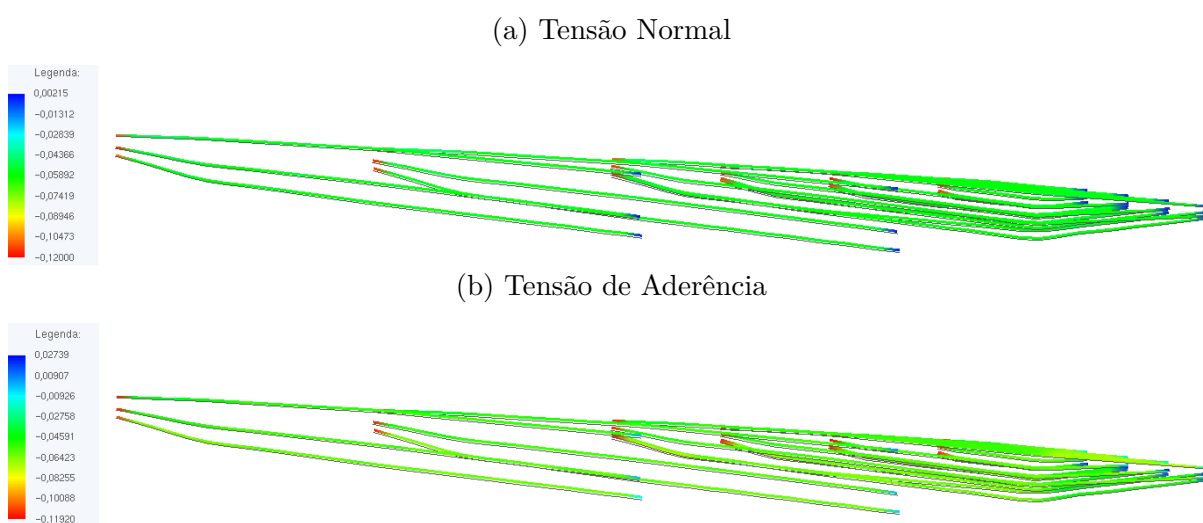


Figura 129 – Modelo 2, tensões das Fibras (MPa), passo de carregamento #17

Análise dos resultados

Incompressibilidade: A hipótese de material quase incompressível para os músculos ²³, assumida por outros autores em modelos numéricos (JOHANSSON; MEIER; BLICKHAN, 2000; OOMENS et al., 2003; BLEMKER; PINSKY; DELP, 2005), foi corretamente modelada pelo modelo implementado, como mostrado nas Figuras 91 e 104. Este resultado é consistente com modelos recentes, ver Figura 28 onde foram consideradas outras leis constitutivas.

Deformações e tensões: Os resultados obtidos mostram que as respostas dos dois modelos ficaram no intervalo linear, pois a diferença entre as tensões de Piola Kirchhoff e de Cauchy dentro de cada modelo foram no máximo de 0.10% no modelo 1 e de 0.06% no modelo 2.

Comparação dos modelos para a mesma deformação imposta: No modelo 1 para o passo de carregamento #10 e para o modelo 2 no passo #17 :

- Os deslocamentos máximos obtidos nas direções X , Y e Z no modelo 2 (ver Figura 118) corresponde ao 23,5% do deslocamento máximo obtido no modelo 1 (ver Figura 92);
- as deformações E_{11} , E_{22} e E_{33} , no modelo 2 (ver Figuras 119 e 120a) correspondem ao 16% das deformações obtidas no modelo 1 (ver Figuras 93 e 94a);
- ao nível de tensões de Piola-Kirchhoff, no modelo 2 (ver Figuras 122 e 123a) as componentes S_{11} , S_{22} e S_{33} correspondem ao 36%, 33% e 136% das tensões obtidas no modelo 1 (ver Figuras 96 e 97a), respectivamente;

Concentração de deformações e tensões: No modelo 1, com lei constitutiva hiperelástica, observam-se na superfície do músculo concentrações de deformações (E_{ij} , ver Figuras 93, 94 e 95) e tensões (S_{ij} , ver Figuras 96, 97 e 98) nas regiões onde foram aplicadas as condições de contorno e também perto das áreas onde começam e terminam as fibras musculares. Estas concentrações se devem a que o modelo geométrico utilizado não inclui as estruturas das aponeuroses, tecido de transição com propriedades mais rígidas. Como as fibras musculares do ventre são contraídas com a aplicação da mesma deformação e o músculo está restrito nas suas extremidades, o ventre de músculo se deforma levemente mantendo a restrição de quase incompressibilidade. Uma vez que as fibras transmitem a força ao longo do seu comprimento, a força é absorvida totalmente pela matriz (ventre do músculo), pois não foram modeladas as estruturas das aponeuroses, aparecendo assim altas concentrações de deformações e tensões nas extremidades das fibras. Espera-se que estas concentrações diminuam quando, em trabalhos futuros, sejam implementadas as aponeuroses.

²³ Os músculos esqueléticos são considerados incompressíveis porque estão contidos pelo epimísio.

Estas concentrações foram visualizadas em ambos modelos, nesta seção são detalhadas apenas para o modelo 1. Para visualizar as concentrações de deformações e tensões dentro do músculo, utiliza-se novamente uma escala modificada e se mostram seções transversais (ST)²⁴ do músculo em posições estratégicas relacionada aos pontos onde iniciam as fibras, segundo a notação mostrada na Figura 88. Nas Figuras 130, 131 e 132 se mostram as seções transversais para as tensões de Piola Kirchhoff do modelo 1.

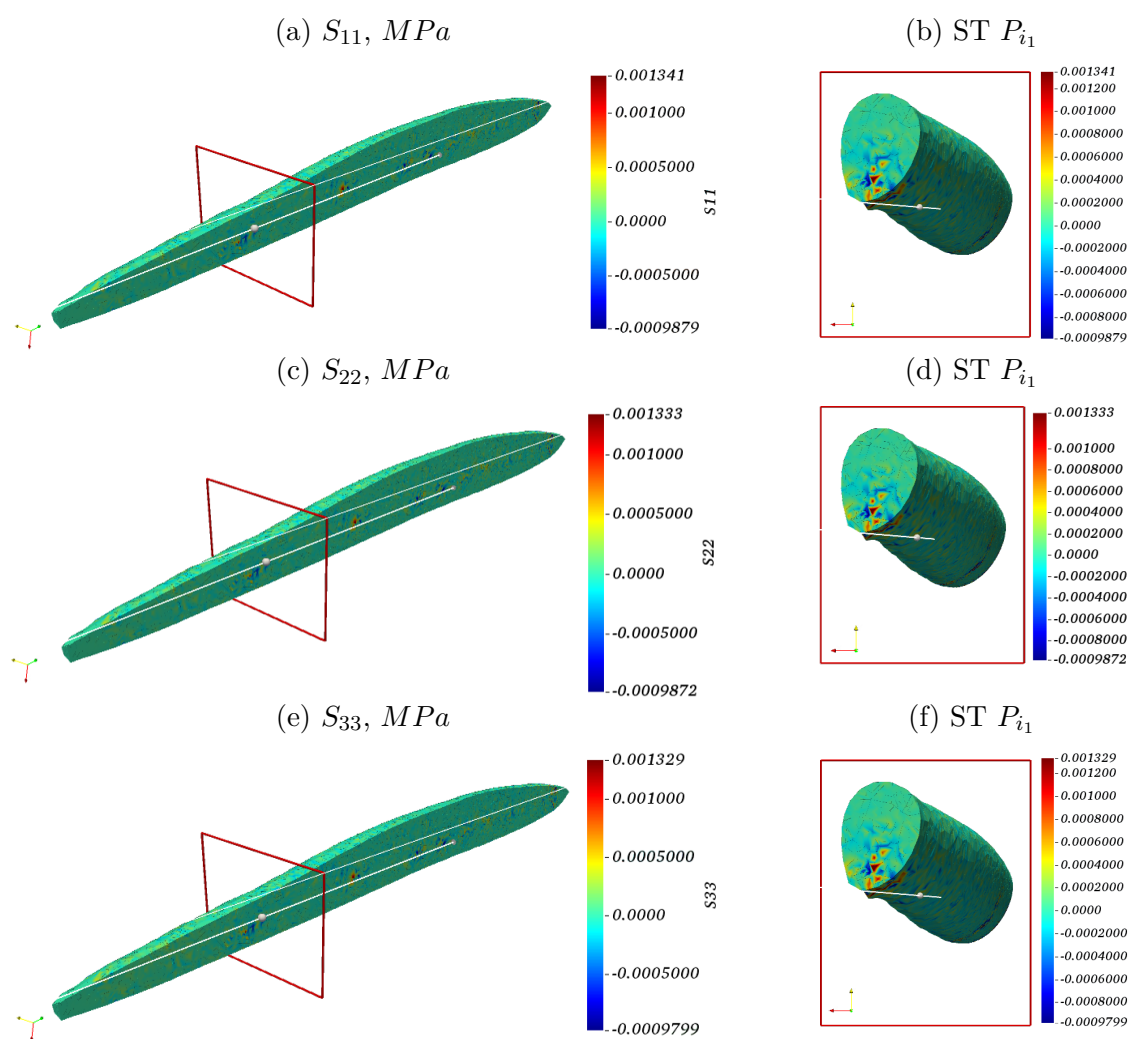


Figura 130 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{11} , S_{22} e S_{33} , seção transversal P_{i_1}

²⁴ Por exemplo: ST P_{i_1} , refere-se à seção transversal perpendicular ao eixo Z que passa pelo ponto i_1 definido na Figura 88

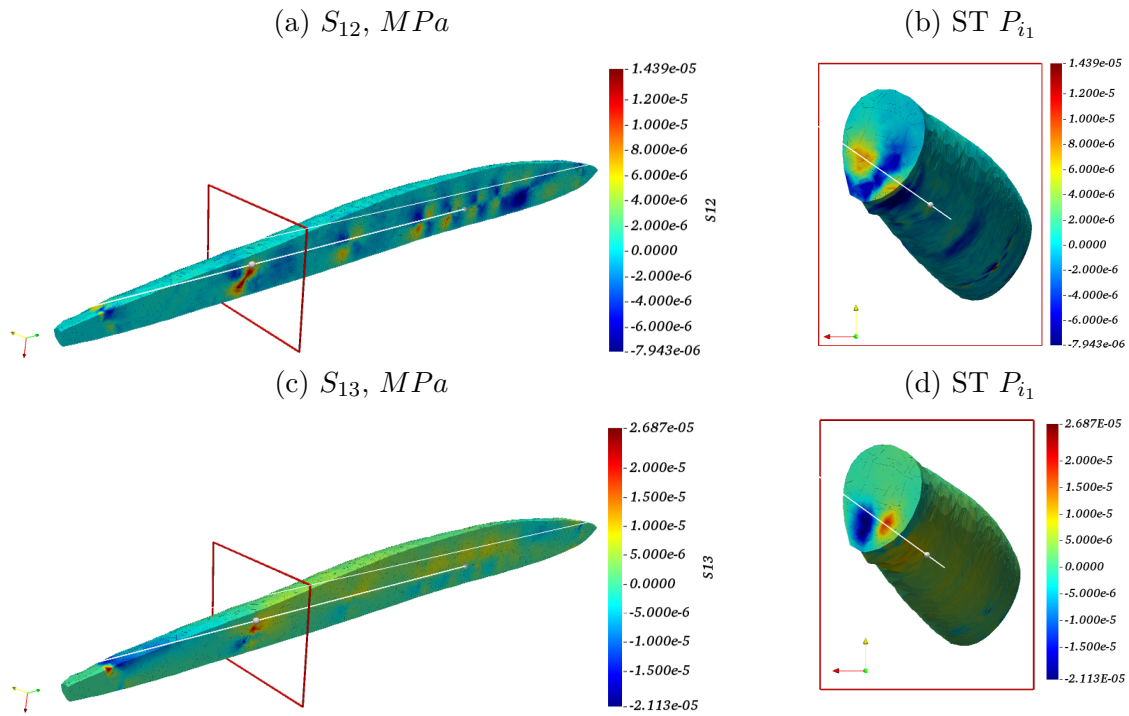


Figura 131 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{12} e S_{13} , seção transversal P_{i1}

Destacam-se na Figura 132, onde se mostram a componente S_{23} das tesões de Piola Kirchhoff, a concentração de tensões na região onde deveria estar a aponeurose central e no plano da ST P_{i6} as regiões onde terminam as fibras (áreas em verde).

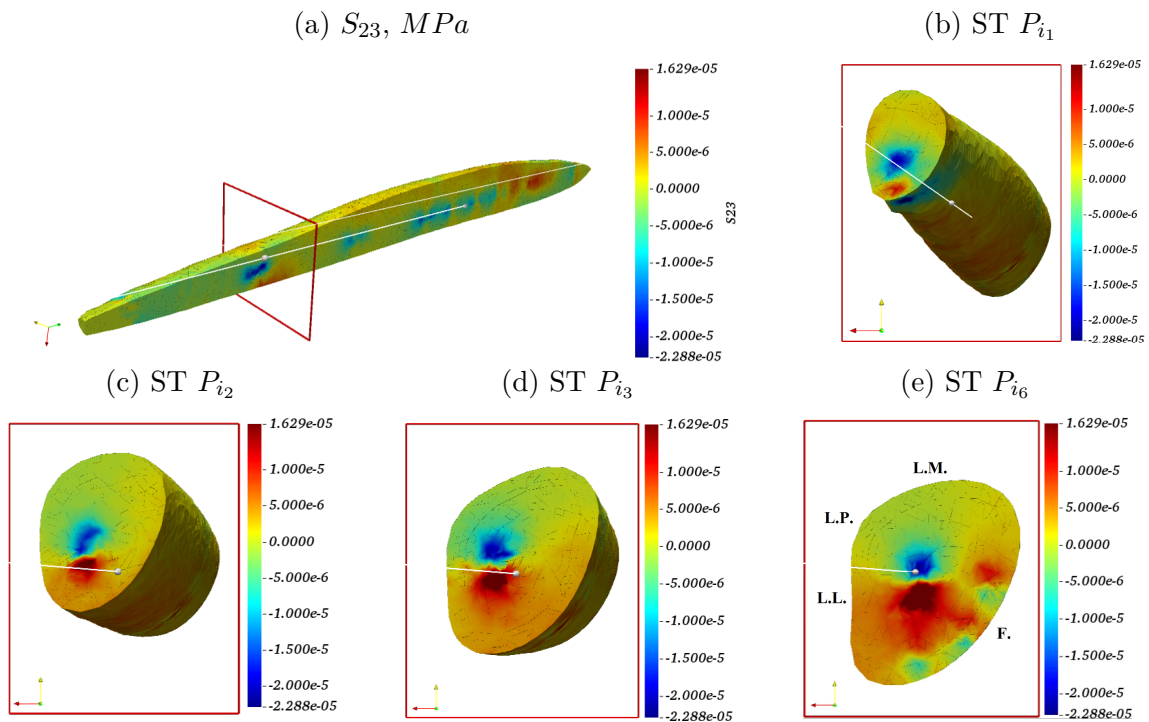


Figura 132 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff S_{23} , seções transversais: P_{i1} , P_{i2} , P_{i3} e P_{i6}

Com relação às deformações de Green, nas Figuras 133 e 134 se observam as áreas de deformação negativa perto das condições de contorno e onde começam as fibras musculares (ver seções transversais definidas pelo plano P_{i_1})

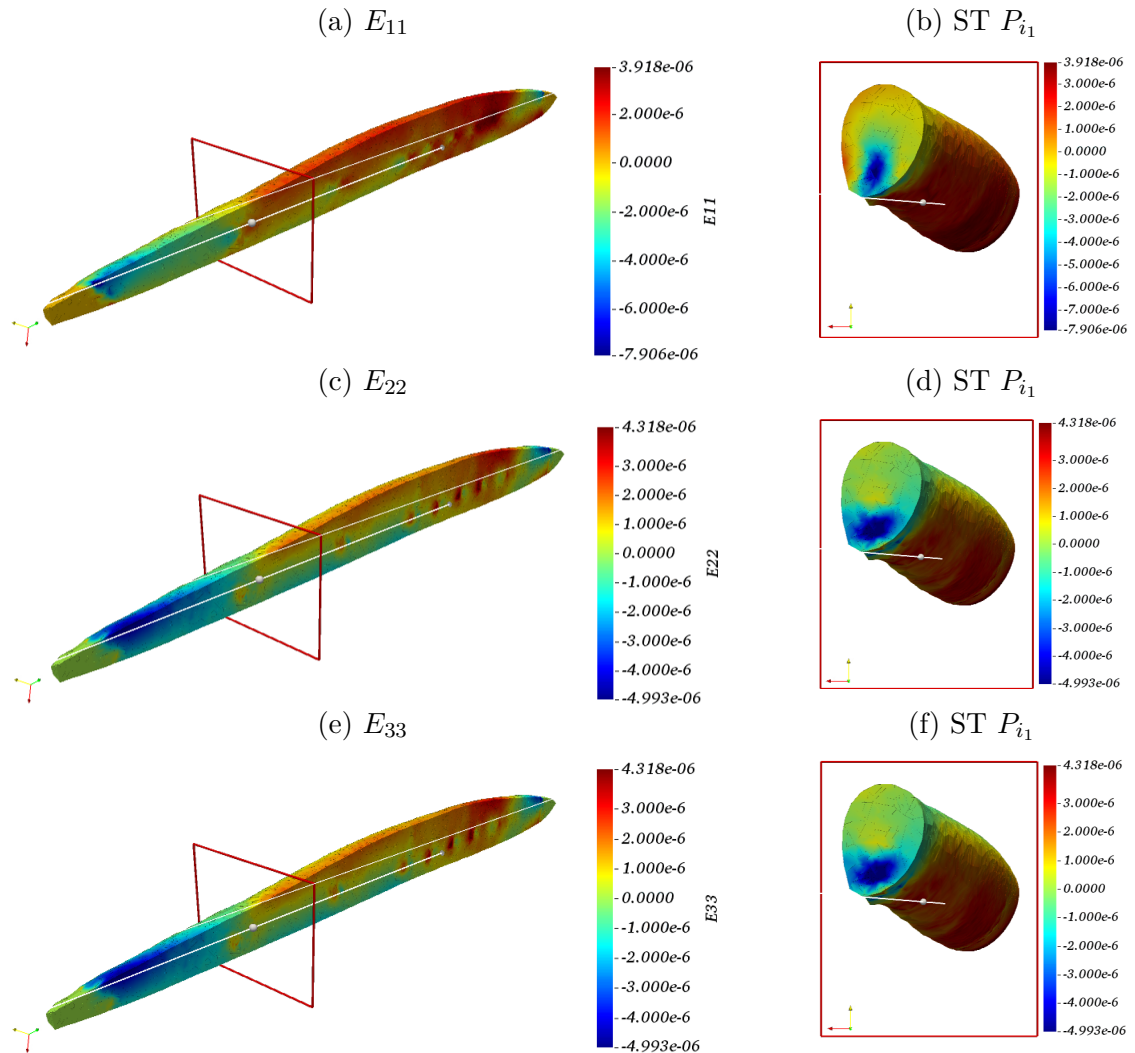


Figura 133 – Modelo 1, deformações de Green E_{11} , E_{22} e E_{33} , seção transversal P_{i_1}

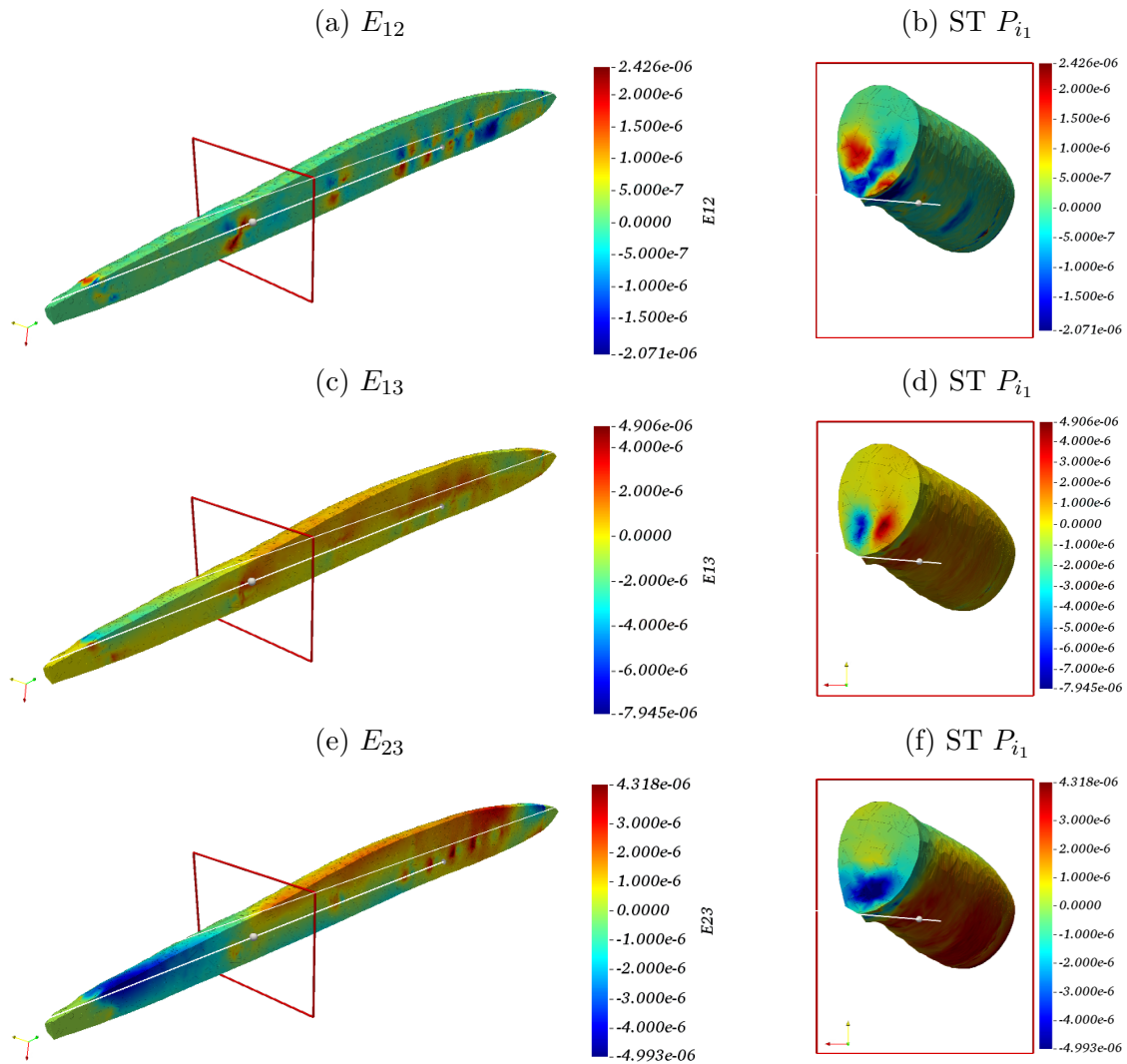


Figura 134 – Modelo 1, Tensões de Piola Kirchhoff E_{12} , E_{13} e E_{23} , seção transversal P_{i1}

Contrações e deformações nas Fibras

Para analisar as deformações e contrações resultantes foram selecionados alguns elementos das fibras, considerando as seções transversais (ST) apresentadas na Figura 135a e um elemento no interior das mesmas como se mostra na Figura 135b. Os elementos que foram selecionados correspondem ao início e fim do arranjo das fibras (P_{i1} e P_{f4}), a algumas extremidades das fibras (P_{f1} e P_{f2}), a um ponto intermédio onde ocorre mudança de curvatura (P_{int}), ver Figura 135a, e ao elemento No 473 no interior do arranjo todo, ver Figura 135b

As contrações e deformações dos elementos selecionados para cada ST são mostradas nas Tabelas 9 e 10 para os modelos 1 e 2, respectivamente.

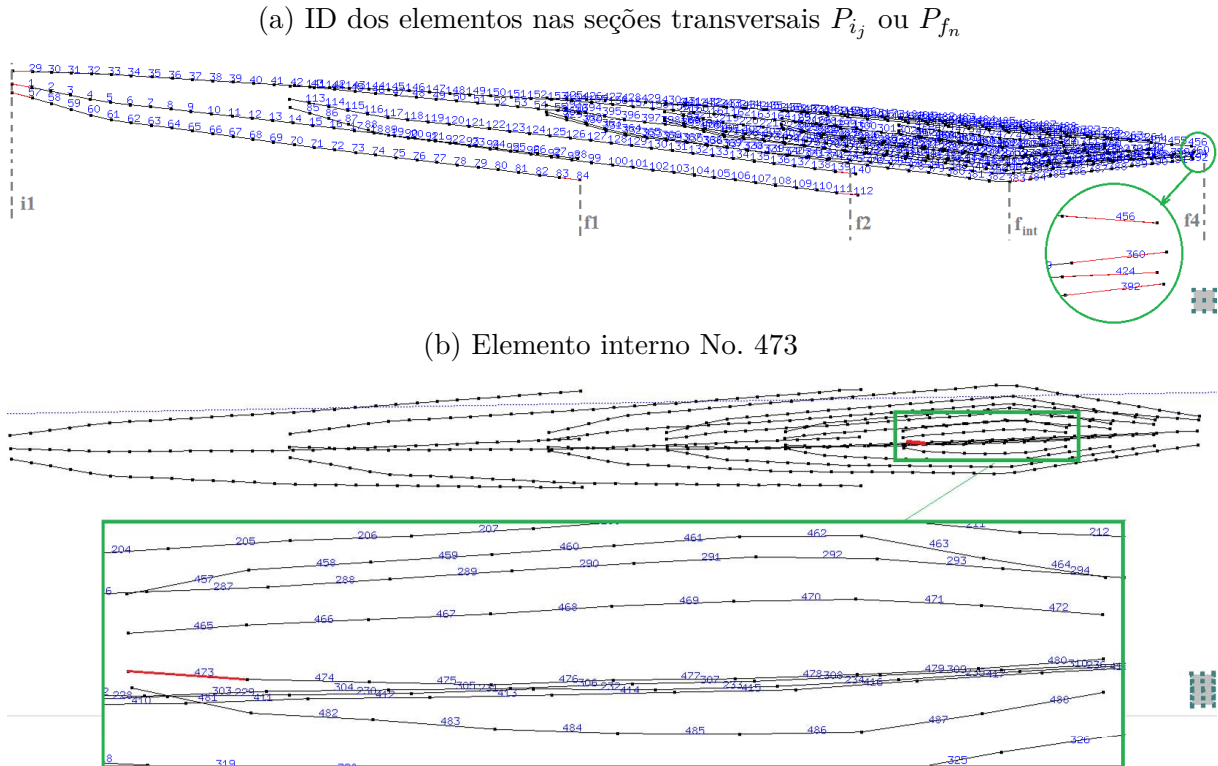


Figura 135 – Identificação dos elementos de barra nas fibras

Nas Tabelas 9 e 10, mostram-se a identificação (Id_{Elem}), o comprimento inicial (L_0) e final (L_f), a porcentagem de contração ($\%Cont = 100(L_f - L_0)/L_0$), a deformação de Green final (\bar{E}_f , Equação 2.43) e a relação \bar{E}_0/\bar{E}_{imp} para os elementos de fibra selecionados.

Lembrando que para comparar os resultados foi imposta uma deformação de Green $\bar{E}_{imp} = -0,0005$ em todos os elementos das fibras, os resultados apresentados nas Tabelas 9 e 10 mostram que em nenhum dos modelos os elementos das fibras chegaram à deformação imposta. A partir dos elementos analisados, nota-se que a deformação obtida não foi uniforme, pois esta depende das propriedades da matriz, da distribuição das fibras e das condições de contorno. Quanto mais denso o arranjo das fibras numa região da matriz, mais se deformam os elementos de barra, como no caso do elemento número 473; embora somente se deformara máximo 4.08% e 1.44% (com relação ao valor imposto), nos modelos 1 e 2 respectivamente.

Conhece-se, da formulação, o equilíbrio em forças entre a matriz e as fibras (elementos de barra), neste exemplo a relação entre as rigidezes das duas estruturas nos dois modelos faz com que a deformação resultante nas fibras fique longe da deformação imposta; fato corroborado por Friedel (2016), mas com outra medida de deformação.

Friedel (2016) propôs um procedimento iterativo a fim de garantir uma contração final desejada, mas este não foi implementado pois, como visto na Seção 1.2 no tópico: unidade motora, a resposta muscular depende da intensidade do estímulo ²⁵; o que faz

²⁵ Para trabalhos futuros, o estudo dos tipos de contrações nos músculos esqueléticos ao receber os

que certa proporção de fibras nervosas sejam excitadas (HOEHN, 2009) o que requer aprofundamento para sua correta implementação numérica.

Tabela 9 – Contrações e deformações em algumas fibras do Modelo 1

ST	Id_{Elem}	L_0 (mm)	L_f (mm)	% Cont	\bar{E}_0	\bar{E}_0/\bar{E}_{imp}
Pi1	29	2.925748	2.925720	-0.00095%	-0.0000095	1.90%
	1	2.938656	2.938628	-0.00096%	-0.0000096	1.93%
	57	3.023392	3.023363	-0.00095%	-0.0000095	1.90%
Pf1	84	2.929915	2.929885	-0.00102%	-0.0000102	2.04%
Pf2	140	3.041381	3.041339	-0.00138%	-0.0000138	2.76%
	112	3.021589	3.021556	-0.00109%	-0.0000109	2.18%
Pfint	383	2.903446	2.903420	-0.00091%	-0.0000091	1.82%
Pf4	456	2.923029	2.923021	-0.00027%	-0.0000027	0.55%
	360	2.944894	2.944884	-0.00032%	-0.0000032	0.65%
	424	2.909794	2.909782	-0.00041%	-0.0000041	0.82%
	392	3.022003	3.021995	-0.00025%	-0.0000025	0.50%
	473	2.936256	2.936196	-0.00204%	-0.0000204	4.08%

Tabela 10 – Contrações e deformações em algumas fibras do Modelo 2

ST	Id_{Elem}	L_0 (mm)	L_f (mm)	% Cont	\bar{E}_0	\bar{E}_0/\bar{E}_{imp}
P_{i1}	29	2.925748	2.925738	-0.00032%	-0.0000032	0.64%
	1	2.938656	2.938647	-0.00032%	-0.0000032	0.64%
	57	3.023392	3.023383	-0.00031%	-0.0000031	0.62%
P_{f1}	84	2.929915	2.929904	-0.00037%	-0.0000037	0.74%
P_{f2}	140	3.041381	3.041367	-0.00045%	-0.0000045	0.91%
	112	3.021589	3.021578	-0.00038%	-0.0000038	0.76%
P_{fint}	383	2.903446	2.903440	-0.00021%	-0.0000021	0.43%
P_{f4}	456	2.923029	2.923021	-0.00030%	-0.0000030	0.59%
	360	2.944894	2.944888	-0.00022%	-0.0000022	0.43%
	424	2.909794	2.909785	-0.00031%	-0.0000031	0.61%
	392	3.022003	3.021996	-0.00023%	-0.0000023	0.46%
	473	2.936256	2.936235	-0.00072%	-0.0000072	1.44%

Conclusões do exemplo 3D

Como colocado na Seção 1.4, o objetivo principal desta tese foi desenvolver um programa computacional que considerara fenômenos mecânicos indispensáveis para a simulação de estruturas musculares. Com isso, este exemplo mostrou a capacidade do programa de simular uma geometria, vinda de um músculo humano real, considerando duas leis constitutivas hiperelásticas e com a inserção de fibras musculares ativas e passivas.

Uma vez que foi escolhido o músculo TA humano, os dados das propriedades arquitetônicas e das leis constitutivas utilizadas foram consultadas de forma exaustiva na informação disponível na literatura com o intuito de ter um modelo mais realista, apesar de que algumas delas não correspondam a este músculo.

Para as duas leis constitutivas (modelo 1 e 2), foi mostrado que a quase incompressibilidade na formulação tridimensional foi bem implementada. Os resultados de deslocamento na matriz e nas fibras mostram adequadamente o efeito de contração uniforme obtido pela deformação imposta em todas as fibras. Os valores resultantes também mostram concentrações de deformações e tensões na matriz nas áreas limite das condições de contorno e nas regiões dos pontos iniciais ou finais das fibras, como esperado; este resultado reforça a ideia da necessidade de ter uma distribuição de fibras mais realista e a consideração das estruturas das aponeuroses, para obter resultados mais precisos em quanto a distribuição de deformações e tensões na estrutura toda.

Para a obtenção da malha volumétrica do músculo TA humano foi feito inicialmente um treinamento do uso do Software 3-Matic® da Materialise, como parte das estratégias de modelagem deste tipo de estruturas (Ver Apêndice A.2), tendo como resultado um tutorial (ver Apêndice B). O software 3-Matic® permitiu a suavização da geometria descarregada e a geração da malha superficial com boa qualidade²⁶, mas o software Ansys® se mostrou mais eficiente, pela quantidade de ferramentas disponíveis, na geração da malha volumétrica.

A informação encontrada na literatura permitiu gerar a malha das fibras de forma aproximada dentro dos parâmetros arquitetônicos reais do músculo TA humano, contudo se torna indispensável ter uma distribuição mais realista e a realização da análise de convergência da malha para melhorar os resultados obtidos.

Com relação às propriedades dos materiais, considerando que a formulação usada trata a estrutura do músculo como um material composto, trabalhos experimentais são necessários para avaliar as propriedades mecânicas da estrutura passiva e das fibras e caracterizar o comportamento mecânico do músculo como um todo.

A estratégia de impor deformação nas fibras permitiu, de forma simples, gerar a

²⁶ Qualidade boa: quando cumpre critérios relacionados com a regularidade dos elementos e a uniformidade local

contração nas fibras, entretanto como não existe uma relação direta entre a deformação imposta e a contração resultante, faz-se necessário melhorar as funções de ativação inclusive para simular vários tipos de contração muscular.

Com relação ao exemplo numérico desenvolvido, recomenda-se:

- considerar outras malhas para as fibras, para analisar a influencia da sua densidade nos resultados numéricos, como visto no exemplo de aplicação 2D;
- procurar de forma mais exaustiva, inclusive através de parcerias, as propriedades das fases musculares próprias do músculo TA humano para comparar os resultados com as informações experimentais disponíveis associadas a suas funções musculares;
- avaliar a contração passiva do músculo.

4 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

Neste capítulo, apresenta-se a síntese da tese, as conclusões, os resultados da pesquisa e finalmente, são abordadas algumas sugestões para pesquisas futuras.

Síntese

Nesta tese se desenvolveram dois programas (um 2D e outro 3D), na linguagem Fortran, de análise não linear geométrica para abordar a simulação de estruturas em geral, buscando aplicações biomecânicas com modelos hiperelásticos dedicados, para este caso, a músculos esqueléticos. Estes programas abrangem as principais características mecânicas que apresentam estes tecidos: a não linearidade geométrica, a anisotropia (matriz-fibras), quase incompressibilidade, a organização e orientação das fibras musculares e a ativação muscular para a geração de força. Os códigos implementados utilizam o Método dos Elementos Finitos- MEF e partem da formulação para materiais hiperelásticos para simular o tecido muscular (matriz), empregando a energia livre de Helmholtz, a qual está composta por três parcelas: volumétrica, isocórica e o aporte energético das fibras. A estrutura usada para desenvolver os programas permite a implementação de qualquer lei hiperelástica de forma simples e direta. A grande dificuldade se relaciona à obtenção dos parâmetros de determinadas leis constitutivas para aplicações relacionadas aos modelos de músculos esqueléticos.

Conclusões

As formulações para materiais hiperelásticos e de fibras ativas (reforço) foram incorporadas no código computacional bi e tridimensional, para simular diferentes tipos de estruturas compostas hiperelásticas. Estas implementações foram essenciais para capturar o comportamento mecânico dos músculos esqueléticos.

Através dos exemplos de validação se cumpriram os seguintes objetivos: testar a formulação estática com análise não linear, validar as duas metodologias para o cálculo de tensões (as quais podem ser estendidas ao cálculo das deformações e jacobiano na formulação bi e tridimensional), demonstrar o correto funcionamento do modelo de contração das fibras aplicando deformações e verificar o desempenho do programa considerando modelos constitutivos hiperelásticos não lineares.

No exemplo número 5 da validação com tração uniaxial, o modelo de Yeoh mostrou boa conformidade entre os resultados da solução analítica, a simulação com elementos

de Chapa e os dados experimentais da literatura. As simulações no Ansys®, sem e com restrição no eixo 'z' ou 3, permitiram verificar o fato que ao utilizar os modelos hiperelásticos não lineares quase incompressíveis com elementos de chapa, apresenta-se aumento nas tensões, quando comparado com as simulações com elementos sólidos. Os resultados numéricos bidimensionais demonstram que a implementação do algoritmo tridimensional era necessária, como visto na literatura, para realizar análises não lineares geométricas de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos Posicional.

A condição de quase incompressibilidade foi validada e comprovada nos problemas com materiais hiperelásticos e nas aplicações. Além disso, no exemplo de aplicação 2D, demonstrou-se a necessidade de realizar uma análise de convergência para as fibras; contudo no exemplo de aplicação 3D (músculo TA) não foi feita dita análise de convergência pelas limitações em tempo de processamento e disponibilidade de 'clusters'.

O software Ansys® facilitou a geração da malha tridimensional das fibras, contudo esta pode ser melhorada através de algoritmos numéricos e com imagens tomográficas, inclusive para considerar futuramente vários tipos de fibras e em grupos definidos.

Confirma-se também o potencial do algoritmo para a análise do comportamento mecânico de músculos esqueléticos como um material compósito: matriz/fibra. Finalmente, no decorrer desta pesquisa, foi possível notar a complexidade na construção e análise estrutural de músculos esqueléticos, portanto, faz-se necessário continuar desenvolvendo estratégias numéricas para um maior aprofundamento no estudo.

Resultados da pesquisa

Durante o desenvolvimento do assunto de pesquisa foram publicados e divulgados dois trabalhos em congressos internacionais:

- Congresso: Civil-Comp Press, 2015. Título do artigo: *The influence of the Distribution of Fibers in the Mechanical Behavior of Muscles*. Autores: C.Q. Ramírez, R.R. Paccola e H.B. Coda. (RAMÍREZ; PACCOLA; CODA, 2015).
- Congresso: 'Congreso Colombiano de Métodos Numéricos- CCMN, 2017'. Título do artigo: . Autores: C.Q. Ramírez, R.R. Paccola e H.B. Coda. (RAMIREZ; PACCOLA; CODA, 2017)

Como resultado direto da pesquisa, tem-se os seguintes programas desenvolvidos:

- Programa 2D para a modelagem e análise não linear geométrica incluindo fibras e o comportamento isocórico, via o Método dos elementos finitos escrito em função das posições para materiais hiperelásticos.

- Programa 3D para a modelagem e análise não linear geométrica incluindo fibras e o comportamento isocórico, via o Método dos elementos finitos escrito em função das posições para materiais hiperelásticos.
- Programa para remapeamento da malha do Ansys®.
- Programa para remapeamento da malha do Gmsh.

Sugestões para Pesquisas Futuras

A tese desenvolvida abrange o primeiro trabalho do grupo de pesquisa *Grupo de Mecânica Computacional - GMEC* com relação ao modelamento de músculos esqueléticos considerando uma geometria real, reunindo as formulações necessárias para fazer uma simulação mais realista com geometrias tridimensionais e com a estrutura intramuscular similar á observada no músculo TA (caso de estudo). Com o intuito de continuar a pesquisa nas áreas de métodos numéricos e biomecânica, sugere-se:

- Desenvolver *estratégias numéricas* para representar a distribuição real das fibras musculares (lentas e rápidas), para prever, de forma mais precisa, a força desenvolvida pelo músculo.
- Generalizar a função de ativação muscular com modelos dinâmicos para abordar as contrações excêntricas e concêntricas.
- Desenvolver estratégias numéricas para ativar grupos de fibras musculares.
- Incluir fadiga na simulação de músculos esqueléticos.
- Aprimorar as técnicas de paralelização do código para ganho de desempenho na simulação de exemplos com custo computacional elevado. Algumas subrotinas foram paralelizadas utilizando o OpenMP, mas se considera indispensável aprofundar em paralelização MPI.
- Incluir no modelo geométrico as estruturas de aponeuroses (Caso de estudo: músculo TA).

REFERÊNCIAS

- 3-MATIC Research, Base (version 10.0.0.212). 2015. Disponível em: <www.materialise.com>. Citado 7 vezes nas páginas 17, 72, 134, 136, 208, 209 e 227.
- ANNAIDH, A. N. et al. Deficiencies in numerical models of anisotropic nonlinearly elastic materials. *Biomech model mechanobiol*, v. 12, p. 781–791, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 56.
- ANSYS (version 18.0). 2017. Disponível em: <www.ansys.com>. Citado 19 vezes nas páginas 16, 17, 97, 99, 104, 105, 107, 108, 112, 113, 114, 136, 138, 141, 202, 207, 208, 209 e 227.
- ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos*. [S.l.]: Unicamp, 2013. ISBN 978-85-268-0889-8. Citado 4 vezes nas páginas 71, 76, 235 e 240.
- AYALA, T.; FERREIRA, K. Princípios Fisiológicos do Aquecimento e alongamento muscular na atividade esportiva. *Revista Brasileira de Medicina e esporte*, v. 16, n. 3, 2010. Citado na página 50.
- BAIOCCO, M.; CODA, H.; PACCOLA, R. A simple way to model skeletal muscles by FEM. In: *22nd International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado 6 vezes nas páginas 16, 30, 58, 66, 67 e 69.
- BAIOCCO, M. H.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. A Simple Way to Model Skeletal Muscle by FEM. In: *22nd International Congress of Mechanical Engineerin (COBEM 2013)*. [S.l.: s.n.], 2013. Citado na página 88.
- BETTS, G. J. et al. *Anatomy and Physiology*. 2018. Disponível em: <<https://opentextbc.ca/anatomyandphysiology/chapter/11-1-interactions-of-skeletal-muscles-their-fascicle-arrangement-and-their-lever-systems/>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 40.
- BLAND, D. C. et al. Tibialis anterior architecture, strength, and gait in individuals with cerebral palsy. *Muscle and Nerve*, v. 44, n. 4, p. 509–517, 2011. ISSN 0148639X. Citado na página 43.
- BLEMKER, S. S.; PINSKY, P. M.; DELP, S. L. A 3D model of muscle reveals the causes of nonuniform strains in the biceps brachii. *Journal of biomechanics*, v. 38, n. 4, p. 657–65, abr. 2005. ISSN 0021-9290. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/15713285>>. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 41, 53, 54 e 178.
- BOL, M.; WEIKERT, R.; WEICHERT, C. A coupled electromechanical model for the excitation.pdf. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, v. 4, p. 1299–1310, 2011. Citado na página 34.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 190, p. 579–595, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 71.

- CALVO, B. et al. Passive nonlinear elastic behaviour of skeletal muscle. *Journal of biomechanics*, Spain, v. 43, p. 318–325, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 56.
- CHAGNON, G.; REBOUAH, M.; FAVIER, D. Hyperelastic Energy Densities for Soft Biological Tissues: A Review. *Journal of Elasticity*, Springer Science+Business Media Dordrecht, v. 120, n. 2, p. 129–160, 2015. ISSN 15732681. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10659-014-9508-z>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 59.
- CHARLES, J. P. et al. Musculoskeletal geometry, muscle architecture and functional specialisations of the mouse hindlimb. *PLoS ONE*, v. 11, n. 4, p. 1–21, 2016. ISSN 19326203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0147669>>. Citado na página 32.
- CHI, S.-W. et al. Finite element modeling reveals complex strain mechanics in the aponeuroses of contracting skeletal muscle. *Journal of Biomechanics*, Elsevier, v. 43, n. 7, p. 1243–1250, maio 2010. ISSN 00219290. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021929010000369>>. Citado 6 vezes nas páginas 15, 32, 53, 54, 56 e 88.
- CHOI, H. F.; CHINCISAN, A.; MAGNENAT-THALMANN, N. A collective approach for reconstructing 3D fiber arrangements in virtual musculoskeletal soft tissue models. *Computational Biomechanics for Medicine: New Approaches and New Applications*, p. 117–128, 2015. Citado na página 46.
- CIARLETTA, P.; PAOLO, D.; SILVESTRO, M. Pseudo-hyperelastic model of tendon hysteresis from adaptive recruitment of collagen type I fibrils.pdf. *Biomaterials*, p. 764–770, 2008. Citado na página 32.
- CODA, H. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 6, p. 187–212, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 71.
- CODA, H.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Comput Methods Appl Mech Eng*, v. 193, p. 3541–3557, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 71.
- CODA, H.; PACCOLA, R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of Shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, p. 185–200, 2007. Citado na página 66.
- CODA, H. B. Apostila, *O Método dos Elementos Finitos baseado em posições para a análise não linear geométrica de estruturas e sólidos*. 2017. Citado na página 72.
- DÜSTER, A.; HARTMANN, S.; RANK, E. p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, v. 192, p. 5147–5166, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 92.
- DAY, J. et al. Muscle spindles in human tibialis anterior encode muscle fascicle length changes. *Journal of Neurophysiology*, v. 117, n. 4, p. 1489–1498, 2017. ISSN 0022-3077. Disponível em: <<http://jn.physiology.org/lookup/doi/10.1152/jn.00374.2016>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

- FREUTEL, M. et al. Finite element modeling of soft tissues: Material models, tissue interaction and challenges. *Clinical Biomechanics*, v. 29, p. 363–372, 2014. Citado na página 56.
- FRIEDEL, L. d. O. *Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica*. Mestrado, 2016. Citado 8 vezes nas páginas 16, 66, 67, 69, 88, 101, 103 e 183.
- FUKUNAGA, T. et al. Physiological cross-sectional area of human leg muscles based on magnetic resonance imaging. *Journal of orthopaedic research : official publication of the Orthopaedic Research Society*, v. 10, n. 6, p. 928–934, 1992. ISSN 0736-0266. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 46.
- GARTNER, H. Histologia essencial. In: *Histologia Essencial*. Elsevier Editora Ltda., 2012. p. 62–73. ISBN 978-85-352-4464-9. Disponível em: <<http://blogelseviersaude.elsevier.com.br/wp-content/uploads/2012/09/Gartner-e-sample.pdf>>. Citado na página 37.
- GENNISSON, J.-L. et al. Viscoelastic and anisotropic mechanical properties of in vivo muscle tissue assessed by supersonic shear imaging. *Ultrasound in Medicine and Biology*, v. 36, n. 5, p. 789–801, 2010. Citado na página 32.
- GORDON, A. M.; HUXTEY, A. F.; JITLIANT, F. J. the Variation in Isometric Tension With Sarcomere Length in Vertebrate Muscle Fibres. v. 184, p. 170–192, 1966. Citado na página 55.
- GRAS, L.-L. et al. Hyper-elastic properties of the human sternocleidomastoideus muscle in tension. *Journal of Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, v. 15, p. 131–140, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 56.
- GRASA, J. et al. A 3D active-passive numerical skeletal muscle model incorporating initial tissue strains. Validation with experimental results on rat tibialis anterior muscle. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, v. 10, n. 5, p. 779–787, oct 2011. ISSN 1617-7940. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21127938>>. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 54 e 56.
- GRAY, F. H. *Anatomy of the human body*. [S.l.: s.n.], 1918. 1825-1861 p. Citado na página 130.
- HATZE, H. The meaning of the term ‘biomechanics’. *Journal of Biomechanics*, v. 7, n. 2, p. 189–190, mar. 1974. ISSN 00219290. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021929074900608>>. Citado na página 29.
- HEEMSKERK, A. M. et al. Quantitative assessment of DTI-based muscle fiber tracking and optimal tracking parameters. *Magnetic Resonance in Medicine*, v. 61, n. 2, p. 467–472, 2009. ISSN 07403194. Citado 5 vezes nas páginas 15, 46, 47, 139 e 227.
- HEIDL AUF, T.; RÖHRLE, O. A multiscale chemo-electro-mechanical skeletal muscle model to analyze muscle contraction and force generation for different muscle fiber arrangements. *Frontiers in Physiology*, v. 5, p. 1–15, 2014. Citado na página 56.
- HERMANN, B. *Anatomie des Menschen. Ein Lehrbuch für Studierende und Ärzte*. Springer; 3. edition. Elze, Curt, 1954. ISBN "978-3540017837". Disponível em: <">. Citado na página 42.

- HERZOG, W. *Skeletal Muscle Mechanics: From Mechanisms to Function*. Wiley, 2000. ISBN 9780471492382. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dnp3EVMDATYC>>. Citado na página 37.
- HILL, A. *The heat of shortening and dynamic constants of muscle*. [S.l.: s.n.], 1938. 612-745 p. Citado na página 48.
- HOEHN, E. *Anatomia e Fisiologia*. Artmed Editora, 2009. ISBN 9788536318097. Disponível em: <<https://books.google.com.co/books?id=OTVuzNwZ1IAC>>. Citado na página 184.
- HOFFMAN, B. W. et al. A comparison of two Hill-type skeletal muscle models on the construction of medial gastrocnemius length-tension curves in humans in vivo. *Journal of applied physiology (Bethesda, Md. : 1985)*, v. 113, n. 1, p. 90–6, jul. 2012. ISSN 1522-1601. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/22582218>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 31, 33 e 48.
- HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics. A continuum Approach for Engineering*. Wiley, 2000. ISBN 047182304 X. Disponível em: <<https://www.wiley.com>>. Citado 4 vezes nas páginas 70, 71, 72 e 236.
- HOUGLIM, P.; BERTOTI, D.; BRUNNSTROM, S. *Brunnstrom's clinical kinesiology*. Philadelphia: F.A. Davis, 2012. ISBN . Disponível em: <">. Citado na página 42.
- HUXLEY, A. Estructural changes in muscle during contraction. *Nature Publishing Group*, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 52.
- ITO, M. et al. Nonisometric behavior of fascicles during isometric contractions of a human muscle. *Journal of Applied Physiology*, v. 85, n. 4, p. 1230–1235, 1998. ISSN 8750-7587. Disponível em: <<http://www.physiology.org/doi/10.1152/jappl.1998.85.4.1230>>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 43 e 46.
- JENKYN, T. R. et al. Finite element model of intramuscular pressure during isometric contraction of skeletal muscle. *Physics in Medicine and Biology*, v. 47, n. 22, p. 4043–4061, nov. 2002. ISSN 0031-9155. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0031-9155/47/i=22/a=309?key=crossref.a503743c31096e627a9da835e72fb823>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 60.
- JENSEN, E. R. et al. Characterization of three dimensional volumetric strain distribution during passive tension of the human tibialis anterior using Cine Phase Contrast MRI. *Journal of Biomechanics*, v. 49, n. 14, p. 3430–3436, 2016. ISSN 18732380. Citado 5 vezes nas páginas 16, 64, 65, 132 e 133.
- JODA, D. *Finite Element Modeling of Active and Passive Behavior of the Human Tibialis Anterior: A Preliminary Approach*. 91 p. Tese (Dissertations, Master's Reports) — Michigan Technological University, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 16, 43, 44, 64, 65, 132 e 133.
- JOHANSSON, T.; MEIER, P.; BLICKHAN, R. A Finite-Element Model for the Mechanical Analysis of Skeletal Muscles. *Journal of Theoretical Biology*, v. 206, n. 1, p. 131–149, set. 2000. ISSN 00225193. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002251930092109X>>. Citado 6 vezes nas páginas 15, 51, 52, 60, 61 e 178.

KAO, P. H. et al. Constitutive Modeling of Anisotropic Finite-Deformation Hyperelastic Behaviors of Soft Materials Reinforced by Tortuous Fibers. *The international journal of structural changes in solids : mechanics and applications*, v. 2, n. 1, p. 19–29, 2010. Disponível em: <<http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=3150848&tool=pmcentrez&rendertype=abstract>>. Citado na página 56.

KENHUB. 2018. Disponível em: <<https://www.kenhub.com/en/library/anatomy/gastrocnemius-muscle>>. Citado na página 32.

KENT, M. *The Oxford Dictionary of Sports Science Medicine*. [s.n.], 1994. ISBN 9780198568506. Disponível em: <<http://www.oxfordreference.com/view/10.1093/acref/9780198568506.001.0001/acref-9780198568506>>. Citado na página 40.

KNUDSON, D. Fundamentals of biomechanics and qualitative analysis. In: *Fundamentals of Biomechanics*. Springer US, 2003. p. 23–37. ISBN 978-1-4757-5300-4. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-5298-42>>. Citado na página 29.

KOMI, P. *Força e potência no esporte*. Artmed Editora, 2008. ISBN 9788536314952. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=7F-tIWpSxUcC>>. Citado na página 38.

KOMI, P.; WILEY, J.; SONS. in: *"The Encyclopaedia of Sports Medicine: An IOC Medical Commission Publication"*. [S.l.]: Blackwell Science Ltd., 2008. 544 p. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 39.

LANSDOWN, D. A. et al. Quantitative diffusion tensor MRI-based fiber tracking of human skeletal muscle. *Journal of Applied Physiology*, v. 2675, p. 673–681, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

LEEUEWEN, J. V. Muscle function in locomotion. *Advances in Comparative and Environmental Physiology*, v. 11, p. 191–250, 1992. Citado na página 51.

LIEBER, R. L. *Skeletal Muscle Structure, Function and Plasticity. The Physiological Basis of Rehabilitation*. Lippincott Williams & Wilkins, 1992. ISBN "13: 978-0-7817-3061-7". Disponível em: <">. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

LIMBERT, G. et al. A transversely isotropic hyperelastic constitutive model of the PDL. Analytical and computational aspects. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, v. 6, n. 5-6, p. 337–345, 2003. ISSN 1025-5842. Citado na página 56.

LU, Y. T. et al. A visco-hyperelastic model for skeletal muscle tissue under high strain rates. *Journal of biomechanics*, v. 43, n. 13, p. 2629–32, set. 2010. ISSN 1873-2380. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20566197>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.

LUYCKX, T. et al. Digital image correlation as a tool for three-dimensional strain analysis in human tendon tissue. *Journal of Experimental Orthopaedics*, v. 1, n. 1, p. 7, 2014. ISSN 2197-1153. Disponível em: <<http://www.jeo-esska.com/content/1/1/7>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, 2008. Citado na página 71.

- MAGANARIS, C. N.; BALZOPoulos, V. Predictability of in vivo changes in pennation angle of human tibialis anterior muscle from rest to maximum isometric dorsiflexion. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*, v. 79, n. 3, p. 294–297, 1999. ISSN 03015548. Citado 3 vezes nas páginas 42, 43 e 46.
- MARTHA, L. F. Notas de Aula. *Método dos Elementos Finitos: Integrao numica reduzida adequada*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 243.
- MASSEY, G. J. *Muscle-Tendon Unit Morphology , Architecture and Stiffness in Relation to Strength and Responses to Strength Training*. Tese (Doutorado) — Loughborough University Institutional Repository, 2017. Citado na página 41.
- MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *Short Communications*, p. 1592–1595, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 96.
- MOERMAN, K. M. et al. Digital image correlation and finite element modelling.pdf. *Journal of Biomechanics*, Dublin - Ireland, v. 42, p. 1150–1153, 2009. Citado na página 33.
- MONTANARI, T. Histologia: texto, atlas e roteiro de aulas pricas. In: *Histologia*. [s.n.], 2013. p. 37–87. ISBN 978-85-915646-0-6. Disponível em: <<http://>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- OOMENS, C. W. J. et al. Finite element modelling of contracting skeletal muscle. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences*, v. 358, n. 1437, p. 1453–60, set. 2003. ISSN 0962-8436. Disponível em: <<http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=1693246&tool=pmcentrez&rendertype=abstract>>. Citado 10 vezes nas páginas 32, 33, 51, 52, 53, 56, 61, 62, 63 e 178.
- OUDEMAN, J. et al. A novel diffusion-tensor MRI approach for skeletal muscle fascicle length measurements. *Physiological Reports*, v. 4, n. 24, p. 1–12, 2016. ISSN 2051817X. Citado 4 vezes nas páginas 39, 41, 42 e 46.
- PARAVIEW: An End-User Tool for Large Data Visualization. 2005. Disponível em: <www.paraview.org>. Citado 3 vezes nas páginas 143, 168 e 206.
- PASCON, J. a. P. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Tese (Mestre) — Universidade de São Paulo, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 56, 66, 91, 104, 110, 115 e 140.
- PASCON, J. a. P. *Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações : implementação numérica em formulação não linear geométrica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 66, 69, 71, 72 e 235.
- PEREIRA, D. P. *Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elemetos finitos*. Mestrado, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 58, 66, 69, 80 e 86.
- PIMENTA, P. d. M. *Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas*. [S.l.: s.n.], 2006. 52-187 p. Citado na página 232.

- PURSLOW, P. P. Muscle fascia and force transmission. *Journal of bodywork and movement therapies*, Elsevier Ltd, v. 14, n. 4, p. 411–7, out. 2010. ISSN 1532-9283. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20850050>>. Citado na página 38.
- RADTKE, F.; SIMONE, A.; SLUYS, L. A computational model for failure analysis of fibre reinforced concrete with discrete treatment of fibres. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 77, p. 597–620, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 80.
- RAHEMI, H.; NIGAM, N.; WAKELING, J. M. Regionalizing muscle activity causes changes to the magnitude and direction of the force from whole muscles—a modeling study. *Frontiers in Physiology*, v. 5 AUG, n. August, p. 1–10, 2014. ISSN 1664042X. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 55.
- RAITERI, B. J.; CRESSWELL, A. G.; LICHTWARK, G. A. Muscle-tendon length and force affect human tibialis anterior central aponeurosis stiffness in vivo. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, n. 28, p. 201712697, 2018. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<http://www.pnas.org/lookup/doi/10.1073/pnas.1712697115>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 44 e 45.
- RAMÍREZ, C.; PACCOLA, R.; CODA, H. The Influence of the Distribution of Fibers in the Mechanical Behavior of Muscle. In: KRUIS, J.; TSOMPANAKIS, Y.; TOPPING, B. (Ed.). *Proceedings of the Fifteenth Internacional Conference on Civil, Structural and Enviromental Engineering Computing*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 124 e 188.
- RAMÍREZ, A. et al. Active response of skeletal muscle: In vivo experimental results and model formulation. *Journal of Theoretical Biology*, v. 267, n. 4, p. 546–553, 2010. ISSN 00225193. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- RAMIREZ, C. Q.; PACCOLA, R.; CODA, H. Three-dimensional model of contracting skeletal muscle: passive tissue and fibers. In: . [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–7. Citado na página 188.
- RAWN, J. Biochemistry. In: *Biochemistry*. Neil Patterson, 1989. p. 1105. ISBN 1. Disponível em: <<http://>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.
- RIBEIRO, J. R. *Musculação: Modelo didático para prescrição e controle das atividades*. [S.l.]: Casa de Educação Física, 2005. 226 p. Citado na página 38.
- RIVLIN, R. S. *Rheology*. [S.l.: s.n.], 1956. Citado na página 111.
- Rodriguez Lemos, R. *Modeling the deformation of Skeletal Muscle Contraction*. Tese (Doctoral Thesis) — The University of Calgry, Calgary, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 15, 50, 62 e 141.
- SAMPAIO, M.; PACCOLA, R.; CODA, H. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, Elsevier Ltd, v. 119, p. 799–814, jan. 2015. ISSN 02638223. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822314004425>>. Citado na página 66.

SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 66, p. 12–25, abr. 2013. ISSN 0168874X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168874X12001850>>. Citado 4 vezes nas páginas 66, 69, 84 e 85.

SAMPAIO, S. M. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 69.

SANCHEZ, J.; CODA, H. Relatório Científico - Pós-doutorado, *Mecânica dos Sólidos não linear com aplicações à biomecânica via método dos elementos finitos*. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 88.

SCHAPPACHER-TILP, G. et al. A novel three-filament model of force generation in eccentric contraction of skeletal muscles. *PLoS ONE*, v. 10, n. 3, p. 1–16, 2015. ISSN 19326203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0117634>>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

SHARAFI, B.; BLEMKER, S. S. A mathematical model of force transmission from intrafascicularly terminating muscle fibers. *Journal of biomechanics* *Journal of biomechanics*, v. 44, p. 2031–2039, 2011. Citado na página 33.

SHARIFIMAJD, B.; LHAND, J. S. A continuum model for skeletal muscle contraction at hom Finite deformations. *Biomech model mechanobiol*, v. 12, p. 965–973, 2013. Citado na página 32.

SHIM, V. B. et al. Subject-specific finite element analysis to characterize the influence of geometry and material properties in Achilles tendon rupture. *Journal of biomechanics*, v. 47, p. 3598–3604, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 56.

SOLIDWORKS Educational. Disponível em: <<https://www.solidworks.com>>. Citado na página 136.

SOPHER, R. S. et al. The influence of muscle pennation angle and cross-sectional area on contact forces in the ankle joint. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, v. 52, n. 1, p. 12–23, 2017. ISSN 20413130. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 46.

SPYROU, L. A. *Muscle and tendon tissues: constitutive modeling , numerical implementation and applications*. Tese (Doctor of Philosophy) — University of Thessaly, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 49, 50, 58 e 63.

TANG, C. et al. Finite Element modelling of skeletal muscles coupled with fatigue. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 49, p. 1179–1191, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 33.

TANG, C. Y.; ZHANG, G.; TSUI, C. P. A 3D skeletal muscle model coupled with active contraction of muscle fibres and hyperelastic behaviour. *Journal of biomechanics*, v. 42, n. 7, p. 865–72, maio 2009. ISSN 1873-2380. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19264310>>. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 33, 35, 58 e 63.

TEACHMEANATOMY. 2017. Disponível em: <<http://teachmeanatomy.info/lower-limb/muscles/leg/anterior-compartment/>>. Citado na página 32.

TERAN, J. et al. Finite Volume Methods for the Simulation of Skeletal Muscle. *SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 56.

THOM, J. M. et al. Passive elongation of muscle fascicles in human muscles with short and long tendons. *Physiological Reports*, v. 5, n. 23, p. 1–8, 2017. ISSN 2051817X. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

TRINIDADE, V. *Mechanical Properties of the Temporal Muscle*. Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 130 e 131.

TRINIDADE, V. et al. The influence of regional profiles and senescence on the biomechanical properties of the temporalis muscle. *Journal of Biomechanics*, v. 46, p. 1592–1595, 2013. Citado na página 130.

Van der Linden, B. *Mechanical Modeling of Skeletal Muscle Functioning*. ? p. Tese (Doutorado) — Universiteit Twente, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 59, 60 e 141.

Van Looke, M.; LYONS, C. G.; SIMMS, C. K. Viscoelastic properties of passive skeletal muscle in compression: stress-relaxation behaviour and constitutive modelling. *Journal of biomechanics*, v. 41, n. 7, p. 1555–66, jan. 2008. ISSN 0021-9290. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18396290>>. Citado na página 32.

VANALLI, L. *O MEC e o MEF aplicados à análise de e problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos*. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) — Universidade de São Paulo, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 30, 66, 80 e 87.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. *Communications in numerical methods in engineering*, v. 24, n. January 2007, p. 585–603, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 30, 66, 69, 80, 84 e 87.

VANALLI, L. et al. A simple method for non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete. *Acta Scientiarum. Technology*, v. 32, n. 4, p. 367–374, dez. 2010. ISSN 1807-8664. Disponível em: <<http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ActaSciTechnol/article/view/7249>>. Citado na página 66.

VLADIMIR, Z.; BORIS, P. *Biomechanics of Skeletal Muscles*. [S.l.]: Thomson-Shore, Inc., 2012. ISBN 13-978-0-7360-8020-0. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.

WAGNER, D. W. et al. Combined musculoskeletal dynamics/structural finite element analysis of femur physiological loads during walking. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, v. 6, n. 4, p. 417–437, 2010. ISSN 1573-6105. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/15736101011095118>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.

WEBB, J. D.; BLEMKER, S. S.; DELP, S. L. *3D finite element models of shoulder muscles for computing lines of actions and moment arms*. Taylor & Francis, 2014. 829–837 p. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/10255842.2012.719605>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 34, 35 e 58.

- WHEATLEY, B. B. Modeling Skeletal Muscle Stress and Intramuscular Pressure: A Whole Muscle Active–Passive Approach. *Journal of Biomechanical Engineering*, v. 140, n. 8, p. 081006, 2018. ISSN 0148-0731. Disponível em: <<http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=2682436>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 34 e 35.
- WIKIMEDIA.ORG. 2007. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2492590>>. Citado na página 32.
- WILLIAMS, W. O. Huxley's Model of Muscle Contraction with Compliance. *Journal of Elasticity*, v. 105, n. 1-2, p. 365–380, jan. 2011. ISSN 0374-3535. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10659-011-9304-y>>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.
- YAMAMURA, N. et al. Effect of tendon stiffness on the generated force at the achilles tendon - 3D finite element simulation of a human triceps surae muscle during isometric contraction. *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, 2014. ISSN 1880-9863. Disponível em: <<http://jlc.jst.go.jp/DN/JST.JSTAGE/jbse/13-00294?lang=en&from=CrossRef&type=abstract>>. Citado 8 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 41, 51, 56 e 58.
- YEOH, O. Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. *American Chemical Society*, p. 792–805, 1990. Citado 5 vezes nas páginas 16, 110, 112, 114 e 118.
- YUCESOY, C. a. et al. Three-dimensional finite element modeling of skeletal muscle using a two-domain approach: linked fiber-matrix mesh model. *Journal of Biomechanics*, v. 35, n. 9, p. 1253–1262, set. 2002. ISSN 00219290. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021929002000696>>. Citado 5 vezes nas páginas 29, 52, 58, 60 e 61.
- ZAHALAK, G. I. A distributed moment approximation for kinetic theories of muscular contraction. *Math. Biosci*, v. 55, p. 84–114, 1981. Citado na página 52.
- ZAJAC, F. E. Muscle and tendon: properties, models scaling, and application to biomechanics and motor control. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, v. 17, p. 359–411, 1989. Citado na página 88.
- ZHANG, C.; GAO, Y. Finite element analysis of mechanics of lateral transmission of force in single muscle fiber. *Journal of biomechanics*, v. 45, p. 2001–2006, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 56.
- ZÖLLNER, A. M. et al. On high heels and short muscles: a multiscale model for sarcomere loss in the gastrocnemius muscle. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 365, p. 301–10, jan. 2015. ISSN 1095-8541. Disponível em: <<http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=4262722&tool=pmcentrez&rendertype=abstract>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 56.

APÊNDICE A – PROGRAMAS DESENVOLVIDOS E ESTRATEGIA DE MODELAGEM

Neste Apêndice é apresentada a estrutura dos programas desenvolvidos na linguagem Fortran, considerando as seguintes etapas: pré-processamento, processamento e pós-processamento, ver Figura 136. E finalmente, é apresentada a estratégia de modelagem para estruturas construídas a partir de imagens tomográficas.

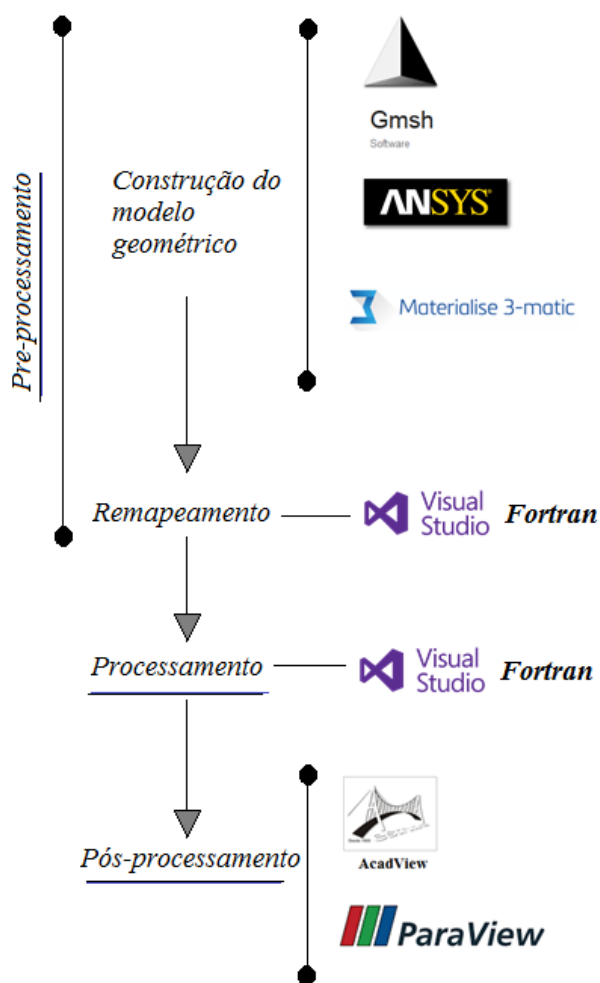


Figura 136 – Estrutura geral

A.1 Programas desenvolvidos

Neste trabalho foram desenvolvidos dois programas para análise não linear geométrica para sólidos 2D e 3D. Os programas estão focados para modelagem de músculos esqueléticos considerando as principais características mecânicas como sendo: a não linearidade, a quase incompressibilidade, a anisotropia, modelo constitutivo (hiperelástico), a orientação e ativação das fibras (mecanismo para a geração de força muscular).

Os programas foram escritos em linguagem Fortran com a formulação dos modelos constitutivos hiperelásticos, onde as constantes desses modelos são tomadas da bibliografia. As geometrias 2D foram modelos simplificados dos músculos, mas representativos; no caso 3D na procura de um modelo mais realista a geometria usada (arquivo .obj ¹) tratada no programa 3-Matic® da Materialise.

Pré-processamento: Para a construção dos modelos geométricos foram utilizados os seguintes programas: Gmsh ², Ansys-workbench® (ANSYS. . . , 2017), Materialise 3-matic® ³. Para criar o arquivo de entrada para fazer o processamento, foram desenvolvidos dois programas na linguagem fortran considerando o remapeamento dos elementos:

- "Prog_Gmsh_Entr": Programa para problemas 2D. Arquivo de entrada: Saída do Gmsh.
- "Prog_Ansys_Entr": Programa para problemas 3D. Arquivo de entrada: Saída do Ansys-workbench® (ANSYS. . . , 2017).

Implementação: Código computacional : O programa para análise não linear geométrico, estático e dinâmico de chapas reforçadas com fibras foi desenvolvido em linguagem Fortran usando o compilador Visual Paralell Studio. A organização do programa foi feita através de módulos, ver Figura 137.

¹ Geometria descarregada como um volume, construída a partir de imagens tomográficas de ressonância magnética

² A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities <<http://gmsh.info/>>

³ Ver tutorial no apêndice B.

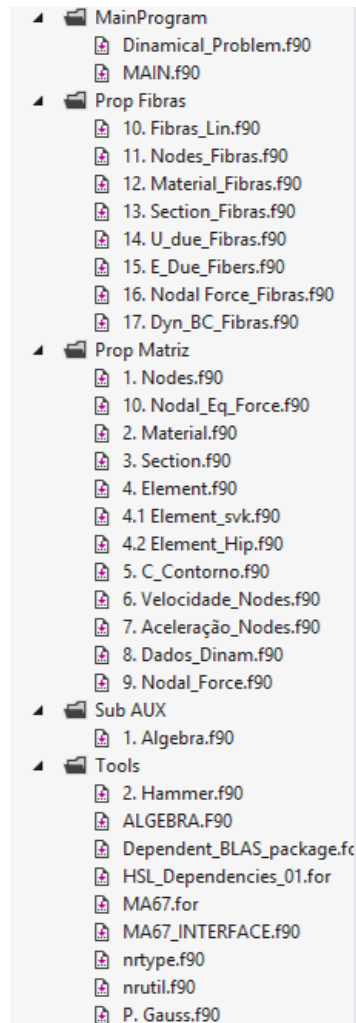


Figura 137 – Estrutura geral do Programa desenvolvido organizado por módulos

A estrutura principal é apresentada na Figura 138, onde é definido: se o problema têm fibras, os nomes dos arquivos de entrada para a Matriz e as Fibras e finalmente o tipo de análise: Estática ou Dinâmica.

(a) 'Main' para Análise bidimensional

```

27 PROGRAM MAIN
28 ...
29 USE Dinamical_Problem
30 ...
31 IMPLICIT NONE
32 CHARACTER*50 :: File_name01
33 CHARACTER*50 :: File_name02
34 ! Matriz com Fibras: Sim (1) ou Não (0) ?
35 INTEGER*4, PARAMETER :: Fiber = 1
36 !
37 TYPE(Type_Problem) :: CHAPA
38 ! ===== Parâmetros do tipo de modelagem ===== !
39 ...
40 ! Análise: Estática ou Dinâmica ?
41 CHARACTER*8 :: Temporal_Problem = TRIM('Static')
42 ! CHARACTER*8 :: Temporal_Problem = TRIM('Dynamic')
43 !
44 ! O modelo da lei constitutiva da chapa é definido dentro do arquivo de entrada
45 File_name01 = 'Exemplo_000Svk.txt' ! Nome do arquivo da Matriz
46 File_name02 = 'Exemplo_000Fib.txt' ! Nome do arquivo das Fibras
47 CALL Read_File_01(CHAPA, File_name01)
48 IF (Fiber == 1) CALL Read_Fibers(CHAPA, File_name02)
49 ! Newton Raphson
50 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 0)) CALL Newton_Raphson_Est(CHAPA)
51 ! IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Dynamic').AND.(Fiber == 0)) CALL Newton_Raphson_Din(CHAPA)
52 ...
53 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 1)) CALL Newton_Raphson_Fibras_Est(CHAPA)
54 ! IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Dynamic').AND.(Fiber == 1)) CALL Newton_Raphson_Din_Fib(CHAPA)
55 !
56 ...
57 !
58 PAUSE
59 END PROGRAM MAIN

```

(b) 'Main' para Análise tridimensional

```

7 ! ===== !
8 PROGRAM MAIN
9 USE Dinamical_Problem
10 IMPLICIT NONE
11 CHARACTER*50 :: File_name01
12 CHARACTER*50 :: File_name02
13 INTEGER*4 :: Fiber = 1 ! Matriz com Fibras: Sim (1) ou Não (0) ?
14 INTEGER*4 :: Sparse = 1 ! Matriz Sparse: Sim (1) ou Não (0) ?
15 TYPE(Type_Problem) :: SOLIDO
16 CHARACTER*8 :: Temporal_Problem = TRIM('Static') ! Análise: Estática (Static) ou Dinâmica (Dynamic) ?
17 REAL*8 :: ti, tf
18 !
19 ! O modelo da lei constitutiva do sólido é definido dentro do arquivo de entrada
20 File_name01 = 'MuscleTA10448.txt' ! Nome do arquivo da Matriz Muscle_TAI
21 File_name02 = 'FibrasTA_ca.txt' ! Nome do arquivo das Fibras
22 ! Time
23 CALL CPU_TIME(ti)
24 CALL Read_File_01(SOLIDO, File_name01, Sparse)
25 IF (Fiber == 1) CALL Read_Fibers(SOLIDO, File_name02, Sparse)
26 ! Newton Raphson
27 ! WARNING: Definir o tipo de saída: Paraview ou Acadview no Newton_Raphson
28 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 0).AND.(Sparse == 1)) THEN
29 WRITE(*,*) 'Análise Estática (Sparse)'
30 CALL Initial_Vectors_Sparse(SOLIDO)
31 CALL Newton_Raphson_Est_Sparse(SOLIDO)
32 END IF
33 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 1).AND.(Sparse == 1)) THEN
34 CALL Initial_Vectors_Sparse_Fibras(SOLIDO)
35 CALL Newton_Raphson_Fibras_Est_Sparse(SOLIDO)
36 END IF
37 !
38 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 0).AND.(Sparse == 0)) CALL Newton_Raphson_Est(SOLIDO)
39 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Dynamic').AND.(Fiber == 0).AND.(Sparse == 0)) CALL Newton_Raphson_Din(SOLIDO)
40 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Static').AND.(Fiber == 1).AND.(Sparse == 0)) CALL Newton_Raphson_Fibras_Est(SOLIDO)
41 IF ((TRIM(Temporal_Problem) == 'Dynamic').AND.(Fiber == 1).AND.(Sparse == 0)) CALL Newton_Raphson_Fibras_Din(SOLIDO)
42 !
43 CALL CPU_TIME(tf)
44 WRITE(125,*) '====='
45 WRITE(125,'(a,f10.2,a)') 'Total_time:', tf-ti, 'seconds'
46 PAUSE
47 END PROGRAM MAIN

```

Figura 138 – Estrutura Principal do código

Processamento: Os programas desenvolvidos: "Chapa_Prog" e "Solid_Prog", para análise (Estática / Dinâmica) não linear geométrica, utilizando o Método dos Elementos Finitos posicional com elementos 2D (chapa de aproximação cúbica) e 3D (tetraédricos de grau qualquer) com e sem fibras, respectivamente. Os arquivos de entrada para a matriz e as fibras são mostrados nas Figuras 139 e 140, respectivamente.

(a)

```

ARCHIVO DE ENTRADA DE DADOS
Tipo_Estrutura
CHAPA, PORTICO, TRUSS OU SOLIDO
SOLIDO

GPA
gpa dos Elementos
3

Coordenadas
ID NÓ      X1      X2      X3
1 -0.1164E+03 -0.8562E+02 0.2527E+03
2 -0.1164E+03 -0.8638E+02 0.2512E+03
3 -0.1164E+03 -0.8619E+02 0.2545E+03
4 -0.1164E+03 -0.8713E+02 0.2497E+03

Materiais_Hip
ID Num_Const Nome
1 3 SV-Kirchhoff (Svk)
2 3 Mooney-Rivlin (MoonRiv)
3 1 Neo-Hookeano (NeoHook)
4 3 Yeoh
5 5 Polinomial (Poli)
6 1 Arruda-Boyce
7 3 Yeoh-Fleming
8 5 Bechir-Boufala-Chevalier
9 3 Hartmann-Neff
10 3 Rivlin-Saunders (RS)
11 3 Hartmann-Neff (HN)

Tipo_Materiais
ID Tipo_Mat Lei_Const Num_Const
1 1 Svk 3

Materiais
ID Tipo_Mat Densidade(Massa) Bulk_Mod E_Young/C1 Poisson/C2 C3 C4 C5
1 1 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

Propriedades_section
ID Espessura
1 1.000

Atribuir_Propriedades
ID ELEM Material Seção Grau_Aprox_Sold Pontos_Integ(1,4,5,10,11,14,15,24,31,45)
1 1 1 3 31
2 1 1 3 31
3 1 1 3 31...

Element_incidence
ID ELEM node_1, node_2, ...node_(n_nodes-1), node_(n_nodes)
1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 2 ...

C_contorno
ID_NÓ e_x1 v_x1 e_x2 v_x2 e_x3 v_x3 Temp_var_U_Type_X Temp_var_U_Type_Y Temp_var_U_Type_Z
1 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 1 1
2 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 1 1
3 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 0.00E+00 1 1 1 ...
    
```

(b)

```

F_Nodais
ID_NÓ NX1 NX2 NX3 Temp_var_F_type_X Temp_var_F_type_Y Temp_var_F_type_Z
.....

Físt_Eq_Nodais
ID_ElemCarr Id_Face qx qy qz
.....

Dados_Estaticos
No_Passos_Força No_Passos_Desloc N_Pass_carg_IMP
1 1 1 .....

Nos_IMP
ID_Nos_IMP
1

Temporal_Variation_F
ID Grau_Lib c1 c2*t c3*t^2 c4*sin(c5*t) c6*cos(c7*t) c8*exp(c9*t)
1 1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0

Temporal_Variation_v
ID Grau_Lib c1 c2*t c3*t^2 c4*sin(c5*t) c6*cos(c7*t) c8*exp(c9*t)
1 1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0

Velocidade_Inicial
ID_NÓ Vx1 Vx2 Vx3
1 0.0E+00 0.0E+00 0.0E+00

Acel_Inicial
ID_NÓ ax1 ax2 ax3
1 0.0E+00 0.0E+00 0.0E+00

Dados_Dinâmicos
No_Passos_Tempo Passo_Tempo N_Pass_tempo_IMP
2 0.00E+00 2

Amortecimento
%
0.0000E+0
    
```

Figura 139 – Formato do arquivo de entrada, Matriz

(a)

```

ARCHIVO DE ENTRADA DE DADOS DAS FIBRAS
Dados_das_Fibras
-----
ID_Fibra, N_NÓS NP_GAUSS
-----
1 2 2
2 2 2
3 2 2...
=====

Coordenadas
-----
ID_Nó_Fibra X1 X2 X3
-----
1 -0.1008E+03 -0.9510E+02 0.2511E+03
2 -0.1019E+03 -0.9646E+02 0.2744E+03
3 -0.1008E+03 -0.9643E+02 0.2588E+03...
=====

Materiais_Hip
-----
ID Num_Const Nome
-----
1 3 SV-Kirchhoff (Svk)
=====

Tipo_Materiais
-----
ID Tipo_Mat Lei_Const Num_Const
-----
1 1 Svk 3
=====

Materiais
-----
ID Tipo_Mat Densidade Bulk_Mod E_Young/C1 Poisson/C2 C3 C4 C5
-----
1 1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0
=====

Propriedades_section
-----
ID Area t
-----
1 8.0d0 1.0d0
=====

Atribuir_Propriedades
-----
ID_Fib Material Prop_Sect Tipo_Modelo
-----
1 1 1 1
2 1 1 1
3 1 1 1
4 1 1 1 ....
=====

Fiber_incidence
-----
ID ELEM node_1, node_2, ..., node_(n_nodos-1), node_(n_nodos)
-----
1 1 1
2 2 3
3 3 4 .....
=====

```

(b)

```

E_Due_Fiber
-----
ID_Fiber E0 Temporal_Variation
-----
1 -0.1000E-01 1
2 -0.1000E-01 1
3 -0.1000E-01 1
4 -0.1000E-01 1 ....
=====

Temporal_Variation_E_D_Fiber
-----
ID c1 c2*t c3*t^2 c4*sin(c5*t) c6*cos(c7*t) c8*exp(c9*t)
-----
1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0
=====

F_Nodais
-----
ID_NÓ NX1 NX2 NX3 Temp_var_F_type_X Temp_var_F_type_Y Temp_var_F_type_Z
-----
1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 1 1 1
=====

Temporal_Variation_F_Nodais
-----
ID Grau_Lib c1 c2*t c3*t^2 c4*sin(c5*t) c6*cos(c7*t) c8*exp(c9*t)
-----
1 1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0
=====

U_Due_Fiber
-----
ID_NÓ r_x1 ur_x1 r_x2 ur_x2 r_x3 ur_x3
-----
1 0 0.00E+00 0 0.00E+00 0 0.00E+00
=====

Temporal_Variation_UD_Fiber
-----
ID Grau_Lib c1 c2*t c3*t^2 c4*sin(c5*t) c6*cos(c7*t) c8*exp(c9*t)
-----
1 1 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0 0.0E+0
=====

Initial_velocity
-----
ID_NÓ r_v1 vr_x1 r_v2 vr_x2 r_v3 vr_x3
-----
1 0 0.00E+00 0 0.00E+00 0 0.00E+00
=====

Initial_Acceleration
-----
ID_NÓ r_a1 ar_x1 r_a2 ar_x2 r_a3 ar_x3
-----
1 0 0.00E+00 0 0.00E+00 0 0.00E+00
=====

```

Figura 140 – Formato do arquivo de entrada, Fibras

Pós-processamento: Para a visualização dos resultados foram utilizados dois programas: o Acadview e o Paraview (PARAVIEW..., 2005)⁴.

⁴ Arquivos de saída com extensão .txt para o Acadview e .vtu para o Paraview (PARAVIEW..., 2005).

A.2 Estrategia de modelagem

Para analisar estruturas construídas a partir de imagens tomográficas, tem-se o processo geral descrito na Figura 141 pela opção 1; a geometria é criada usando imagens (Software: Mimics), posteriormente se faz a malha superficial e de volume (Software: 3-Matic®), cria-se o modelo com suas condições de contorno e finalmente se faz a análise desejada (Software: Ansys® (ANSYS... , 2017)).

A estratégia de modelagem usada neste trabalho se mostra na opção 2 da mesma figura. Neste caso partimos do volume do músculo (arquivo .OBJ) e a simplificação da geometria é feita com o Software 3-Matic® (ver Tutorial no Apêndice B). A partir deste passo, tem-se a construção da malha de elementos finitos onde aparecem duas opções. Na opção 2.1 a malha é construída no 3-Matic® e as condições de contorno e carregamento são definidas no Ansys® Workbench. Na opção 2.2 a malha e as condições de contorno e carregamento são definidas no Ansys® Workbench.

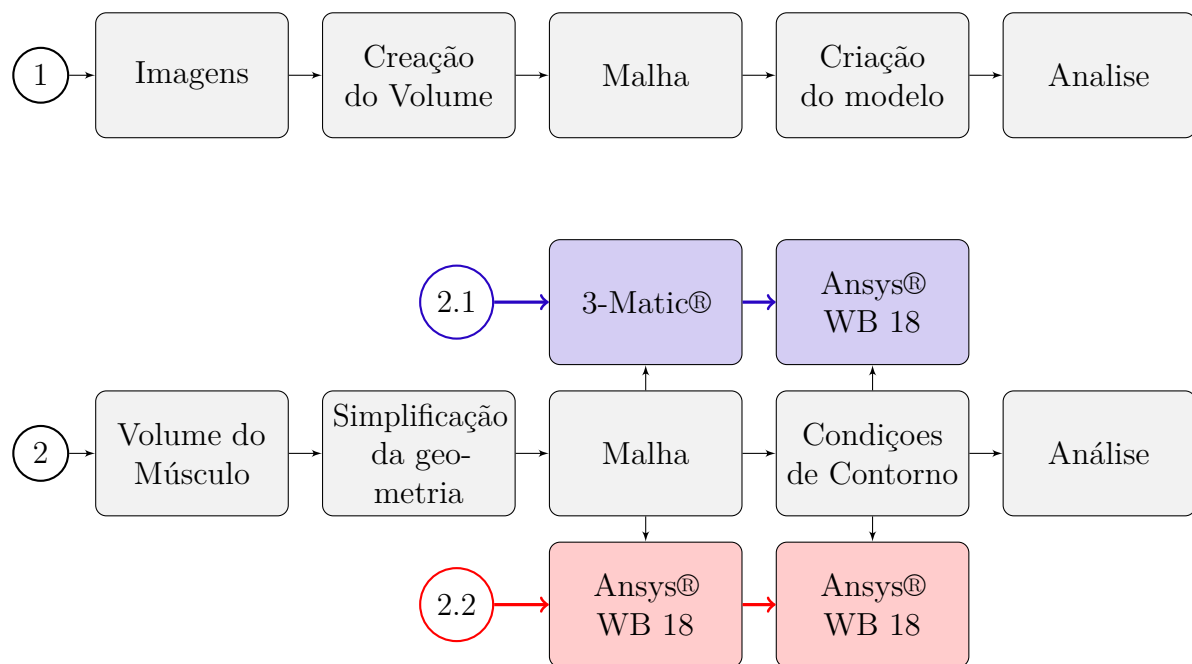


Figura 141 – Fluxograma de estratégias de modelagem

Neste trabalho, foi utilizada inicialmente a opção 2.1, mas as malhas construídas diretamente no 3-Matic® não foram rodadas pelo programa desenvolvido, ver Figura 142a, pois apresentavam elementos de qualidade ruim ou 'mal' formados⁵. Inclusive várias das malhas que apresentaram este tipo de elementos não conseguiam passar pela fase de pre-processamento onde são determinados os elementos aos quais pertencem as fibra, ver Figura 142b onde se mostram elementos tetraédricos com qualidade ruim.

⁵ Em inglês "poorly-shaped tetrahedrom", ou seja com forma de agulha ("needles"), cunhas ("wedges"), 'boné' ("caps") ou quase achatadas ("silvers").

(a) Erro no código

```

C:\Users\carolinaq\Desktop\MuscleMTA10488\MTA15pgAct\Solid_Prog2.exe
Calc_nondim_Coord_Fibers => OK
SET_Phi_Dphi_D2phi_Fibers => OK
Init_Finc_Pext_U_E_Due_Hess_Fibers => OK
Init_Fibers OK
Init_Stress_Strain OK
- Carr 1
----- Carr 1 iter 1
Deformação de Green => OK
Clear data Sparse => OK
Forças Internas => OK
Hessiana => OK
Fibers e couple fb sparse => OK
Global Hessiana => OK
Uetor g => OK
**** Error return from M4G7AD **** INFO(1) = -6
Too many compresses of the reals.
CALC_Delta_g_SOLVER_Spars => OK
2.36388415659935E-015
----- Carr 2
Deformação de Green => OK
Clear data Sparse => OK
Forças Internas => OK
Hessiana => OK
Fibers e couple fb sparse => OK
Global Hessiana => OK
Uetor g => OK

```

(b) Tetraedros que pertencem aos nós 1 e 2 duma fibra

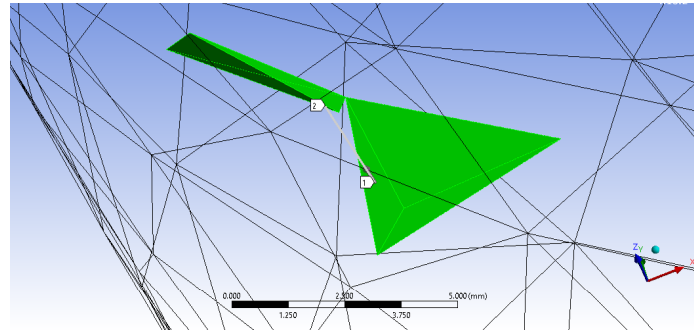


Figura 142 – Erro apresentado na malha

Finalmente, se optou pela opção 2.2 para construir a malha definitiva, porque o Ansys® (ANSYS..., 2017)⁶ permitiu obter melhores resultados com relação á qualidade da malha.

⁶ O Ansys® tem mais ferramentas para o controle e definição da malha do que o 3-Matic® (3-MATIC..., 2015)

APÊNDICE B – TUTORIAL: MATERIALISE 3-MATIC® RESEARCH 10.0.0.212

"O 3-Matic® destina-se a ser utilizado como um software para design e engenharia assistidos por computador no campo da pesquisa biomédica"(3-MATIC..., 2015). Esta versão tem as seguintes ferramentas: **Align**, **Mark**, **Fix**, **Surface**, **Measure**, **Analyze** e **Remesh**, ver Figura 143.

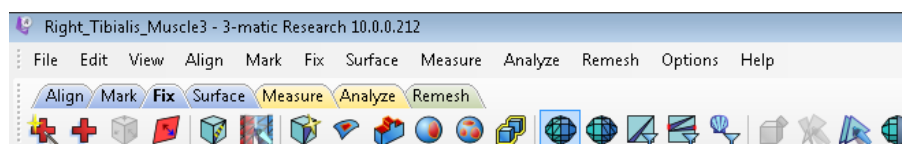


Figura 143 – Ferramentas do 3-matic® Research disponíveis na versão 10.0.0.212

B.1 Procedimento Geral

Limpeza e saída otimizada da topologia.

1. Importar Topologia.
2. Suavizar, reconstruir: Redesenhar superfícies rugosas e ásperas, projetar espaço para a nova topologia limpa. A topologia otimizada é tipicamente orgânica procurando arquivos de extensão .STL que precisam de certa limpeza.
3. Algoritmos de reconstrução de superfície que melhoram a qualidade da malha.
4. Suavizado inteligente.
5. Reconhecimento de funções e projeção da malha baseada em planos, cilindros, esferas, etc ...
6. Comparação de peças:
7. Pré processo para o Análise de Elementos Finitos: Refaça a malha de superfície e de volume (Tet4- de 4 nós, Tet10- de 10 nós). Depois de limpar os dados otimizados de Topologia, os dados podem ser retomados. É necessária uma malha de alta qualidade para uma análise MEF; então se faz necessário: Inspeccionar a qualidade da malha, re fazer a malha até alcançar uma melhor qualidade e criar elementos de volume tetraédrico.
8. Exportar (Ansys-Workbench® (ANSYS..., 2017))

B.2 Exemplo: Geometria de um músculo tibial anterior TA

Antes de fazer uma análise pelo MEF, é necessário fazer uma malha de alta qualidade. A geometria do músculo foi descarregada do site BodyParts3D ¹. BodyParts3D é uma base de dados onde são especificados segmentos ou partes de um modelo tridimensional do corpo humano (homem adulto). A informação geral do site pode ser consultada no site <<http://lifesciencedb.jp/bp3d/?lng=en>>, a lista de partes do corpo disponíveis em <ftp://ftp.biosciencedbc.jp/archive/bodyparts3d/LATEST/isa_parts_list_e.txt> e a licença no <<http://dbarchive.biosciencedbc.jp/en/bodyparts3d/lic.html>>. Para descarregar um arquivo: Selecione Segment/Muscle, depois determine o rango ou segmento e finalmente procure o botão Download *obj* files.

B.2.1 Importar um arquivo de extensão OBJ

Abra um projeto novo, File/Import Part ou **Ctrl+L**. Ver Figura 144.

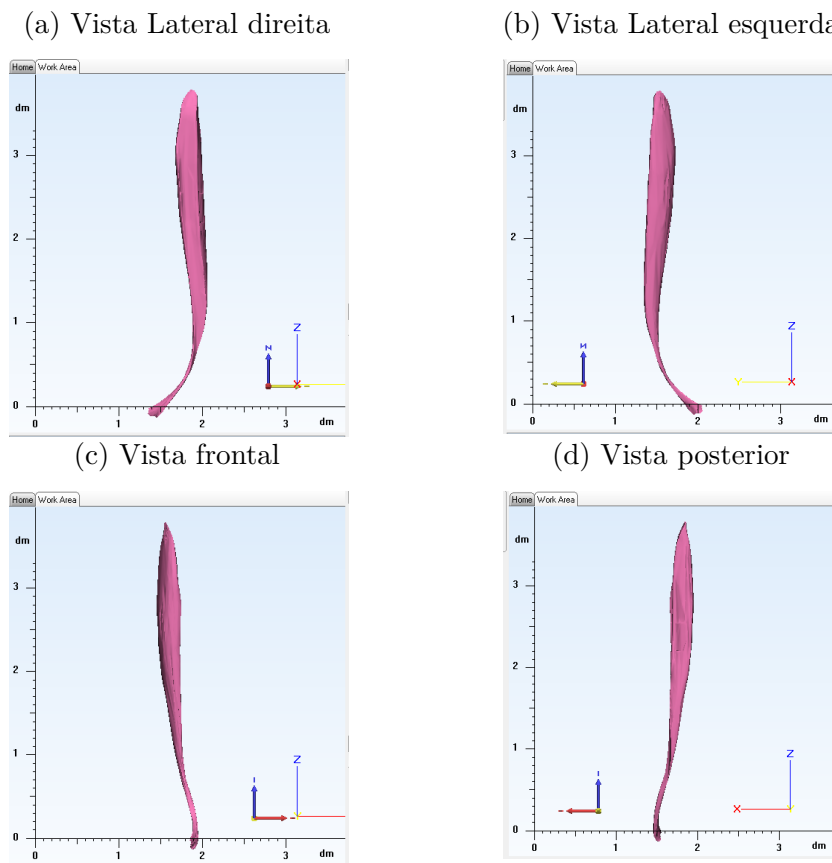


Figura 144 – Vistas da geometria do músculo TA importado

¹ BodyParts3D, 3D structure database for anatomical concepts, © The Database Center for Life Science licensed under CC Attribution-Share Alike 2.1 Japan

B.2.2 Suavizar, reconstruir superfícies e malha base

Ou especificamente em inglês "Clean ups topology optimized data with smoothing". A construção da geometria com o mimics deixam resíduos, por isso é importante fazer a limpeza, suavizar e reconstruir o domínio.

1) Select part Surface/ Split Surface

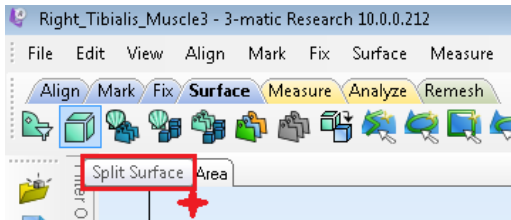
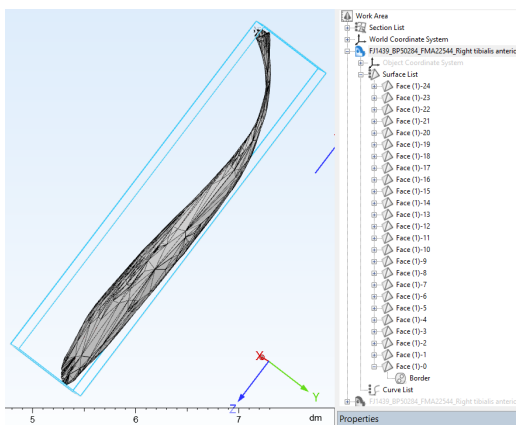
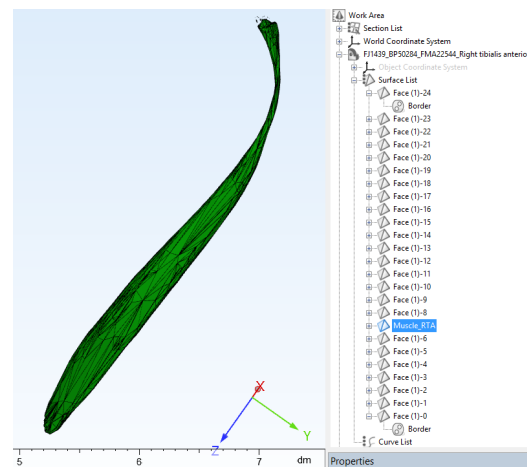


Figura 145a, observa-se a lista completa das superfícies existentes; entre elas foi identificada a superfície que corresponde ao músculo TA, ver Figura 145b. As outras superfícies, ver Figura 145c, correspondem a resíduos produto da construção da geometria usando imagens tomográficas e são apagadas, ver Figura 145d.

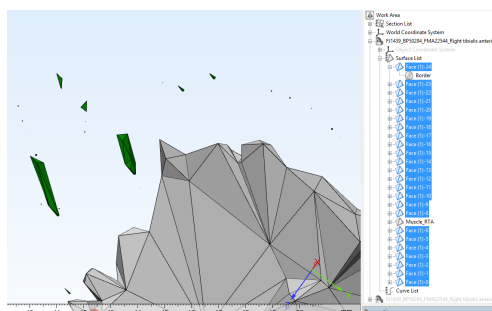
(a) Lista total



(b) Identificação do músculo



(c) Identificação das outras partes



(d) Apagar as outras superfícies

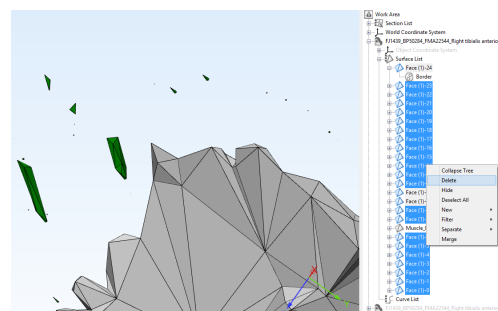
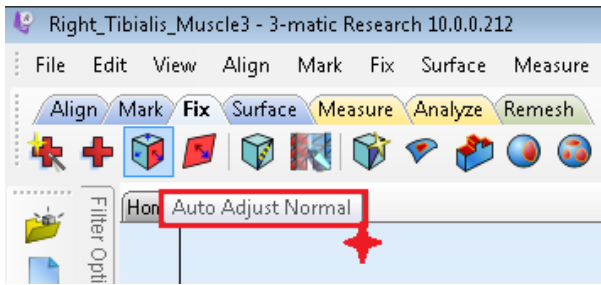
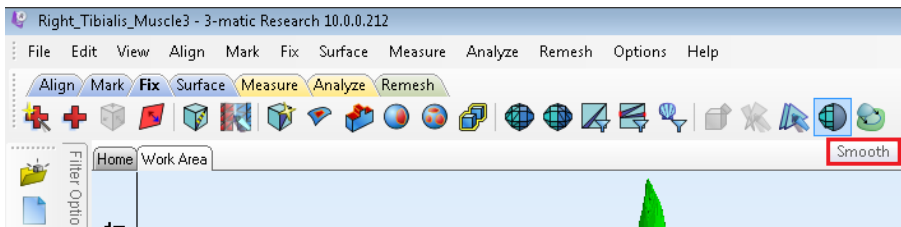


Figura 145 – Lista de superfícies

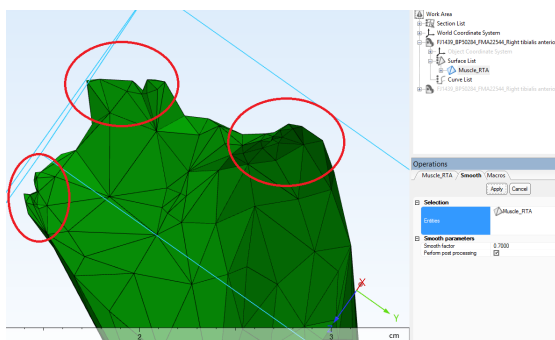
2) Select part/ Fix/ Auto Adjust Normal



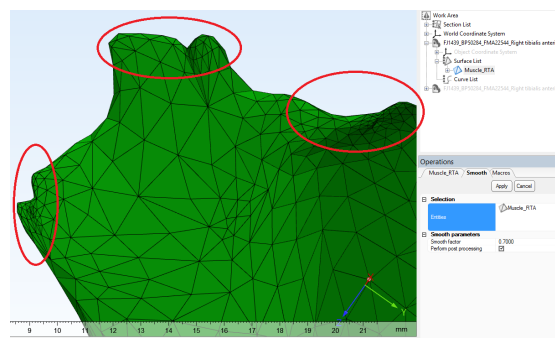
3) Select Surface/ Fix/ Smooth (the triangles)/ Apply (In Smooth parameters/ unselect "Use compensation")



(a) Primeira suavização



(b) Segunda suavização



(c) Terceira suavização

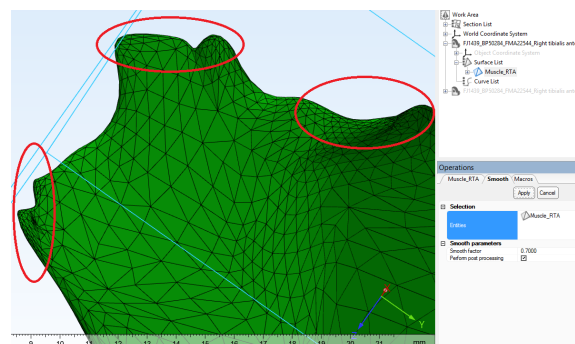
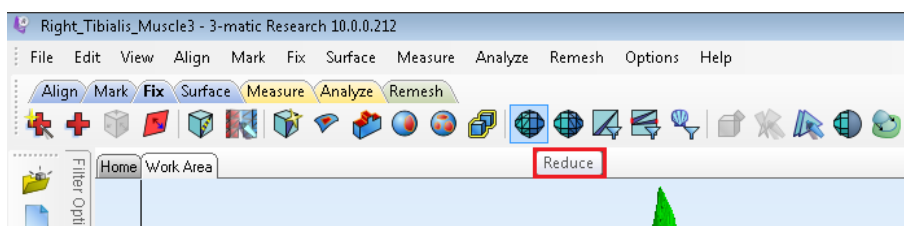
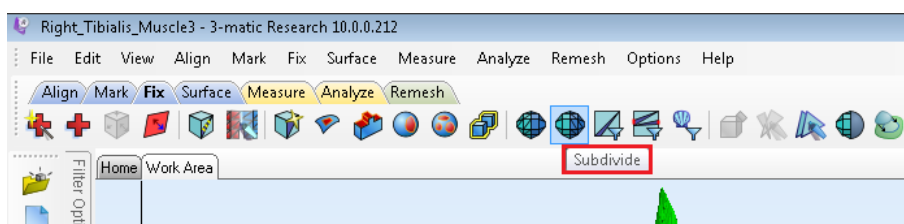


Figura 146 – Suavização das superfícies, parte crítica: no final do tendão

- 4) Select Surface/ Fix/ Reduce (number of triangles)/ Apply



- 5) Select Surface/ Fix/ Subdivide (number of triangles)/ Apply

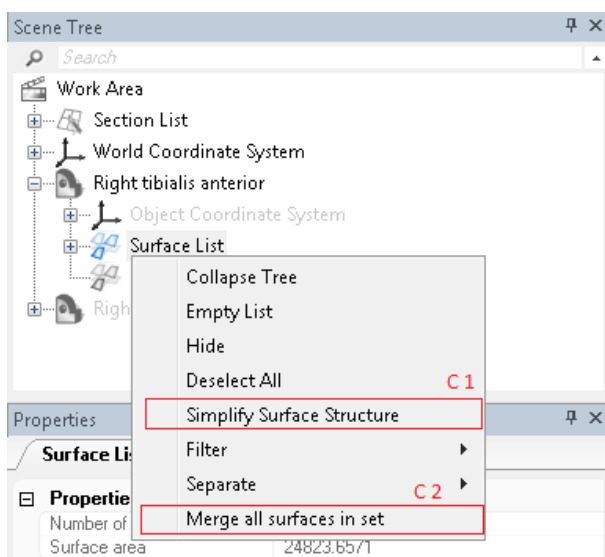


- 6) Select Surface/ Fix/ Smooth (the triangles)/ Apply (AGAIN) (In Smooth parameters/ unselect "Use compensation")

B.2.3 Refazer a malha

Refazer a malha permite otimizar o modelo geométrico para ser analisado pelo MEF. As ferramentas disponíveis permitem transformar triângulos "mal formados" em triângulos equiláteros de forma manual ². Para preparar a superfície siga os seguintes passos:

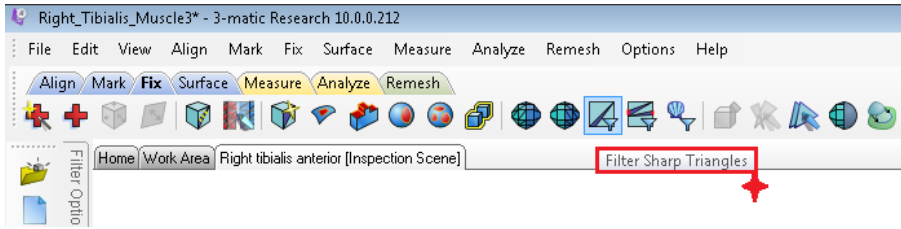
- 1) Surface List/ (right click) Simplify Surface Structure
- 2) Surface List/ Merged all surfaces in set (Mesclar toda a superfície no conjunto)



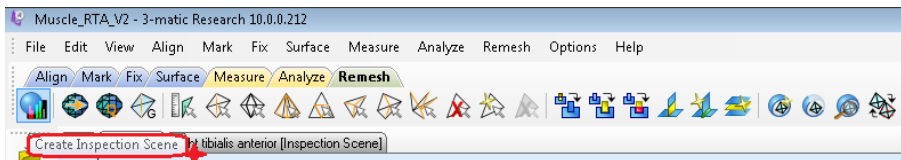
² Para mais informações consulte o capítulo 17 do manual do usuário - F1

3) Select Part → Fix/ Operations / Reduce/ Apply

4) Select Part → Fix/ Operations / Filter Sharp Triangles/ Apply



5) Remesh/ (icone 1) Create Inspection Scene Right → Inspection Page/ Visualization/ Color low quality triangles.



A cena de inspeção permite controlar todas as operações para remalhar, a inspeção dos parâmetros e visualização da qualidade da malha.

6) Remesh/ (icone 2) Right → Operations/ Auto remesh parameters:

O 'auto remesh' permite melhorar a malha de forma geral, esta ferramenta facilita o trabalho manual a seguir.

As propriedades do músculo, com o tratamento feito até agora, são mostradas na Figura 147, esta informação será comparada com o resultado final.






Properties			
Operations Right tibialis anterior			
Properties			
# Triangles	2510		
# Triangles marked	0		
# Invisible triangles	0		
# Points	1301		
# Surfaces	1		
# Bad contours	0		
# Bad edges	0		
Dimensions			
Minimum dimensions	-116.7790	-149.6000	-38.8064
Maximum dimensions	-66.9670	-72.8246	355.2690
Dimension delta	49.8120	76.7754	394.0754
Volume	112299.6951		
Surface area	24827.6357		
Colors			
Front face			
Back face			
Triangle edges			
Wireframe			
Bad contours			

Figura 147 – Propriedades do músculo TA

B.2.3.1 Qualidade de malha superficial: triângulos

A qualidade da malha pode ser verificada de diversas formas, depende do tipo de medida que se escolha. A qualidade global da malha é visualizada na cena de inspeção a través do histograma e também pode ser visualizada colorindo os triângulos de má qualidade.

A correção da malha de forma manual é feita para cada um dos parâmetros existentes: medidas de forma, inspeção e crescimento ³.

Medidas de forma: são baseadas nas propriedades geométricas que descrevem um triângulo: base, comprimento, altura, círculo inscrito, etc. Uma malha é considerada 'perfeita' se todos os seus triângulos são equiláteros.

Na Figura 148, pode-se visualizar a lista de medidas de forma: R-in/R-out (N), Height/Base (A), Skewness (N), Smallest angle (N), Largest angle (N), Smallest angle (A), Angle ratio (N), Edge ratio (N), Equi-angle skewness (N), Stretch (N). Cada parâmetro tem definidos os intervalos para identificar os triângulos de má qualidade, como será mostrado no final da análise.

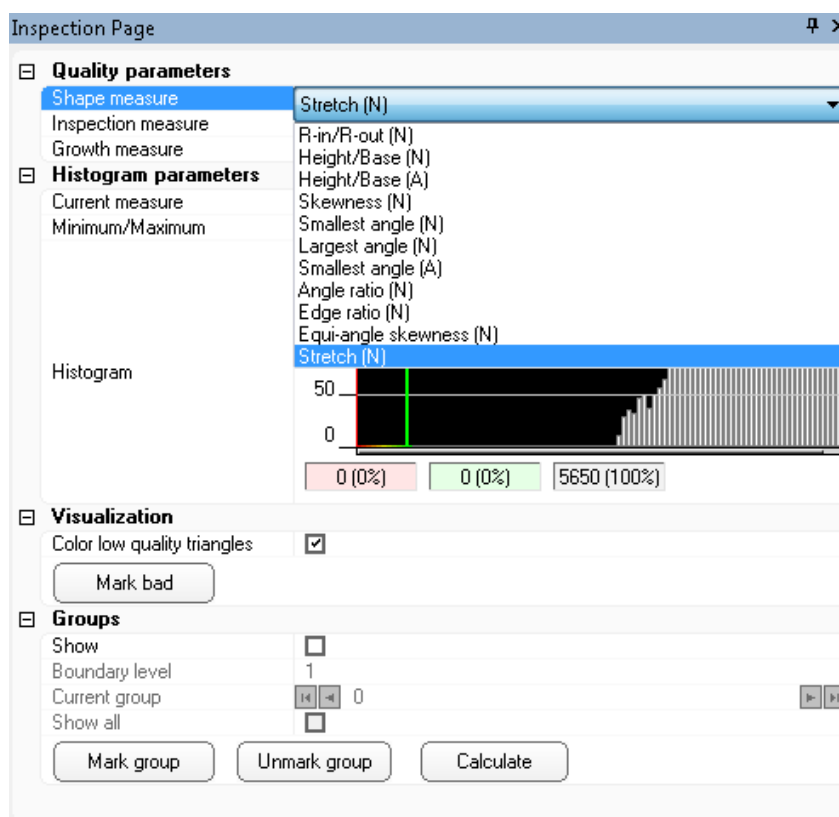


Figura 148 – Lista das medidas de forma

³ Shape, inspection and growth measures.

Height/Base (A): Este parâmetro é a relação entre a altura do triângulo e o comprimento de sua base. Na Figura 149, pode-se constatar que a malha está com boa qualidade com relação a este parâmetro.

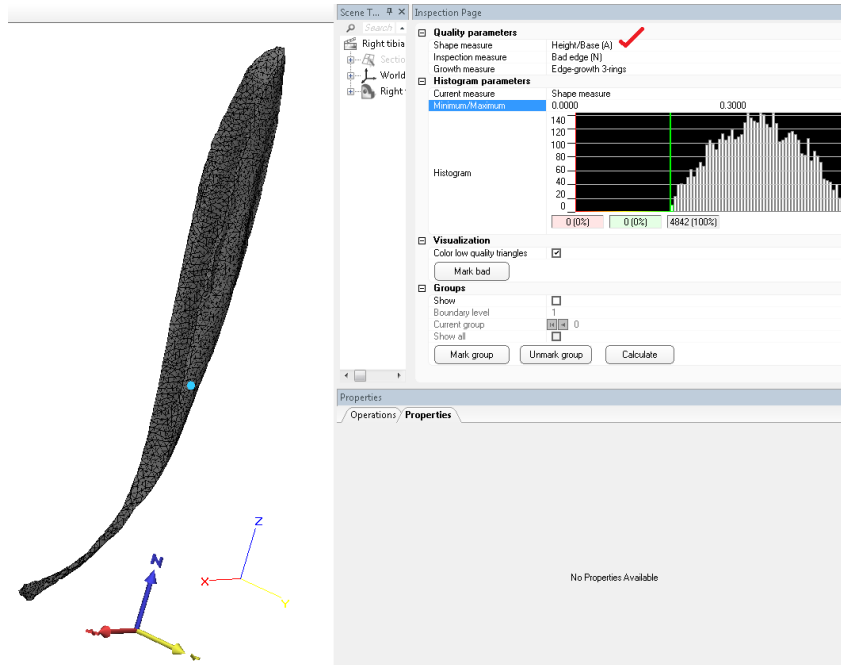


Figura 149 – Medida de forma: Altura/Base (A). Malha com boa qualidade

Angle Ratio (N): definido como a relação entre o menor e o maior ângulo. Na Figura 150, pode-se constatar que tem 85 elementos de má qualidade.

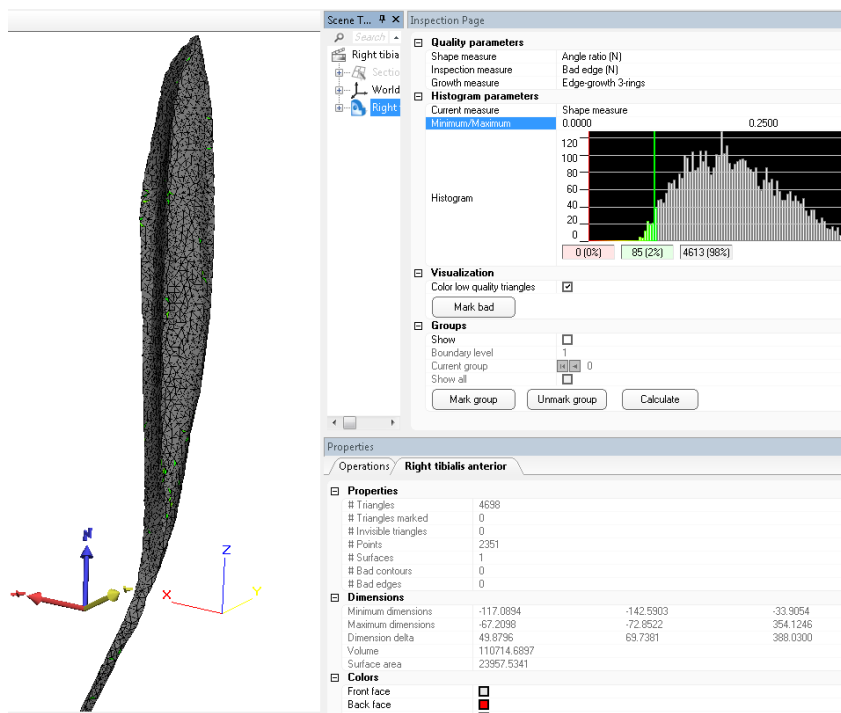


Figura 150 – Medida de forma: Angle Ratio (N)

Para corrigir a forma do triângulo, você pode identificar o elemento colorido de verde (Ver Figura 151), excluir alguns (Ver Figura 152) e refazer de novo (Ver Figura 153). Se o elemento construído apresenta boa qualidade com relação ao parâmetro em questão, este ficará colorido de cinza, ver Figura 154.

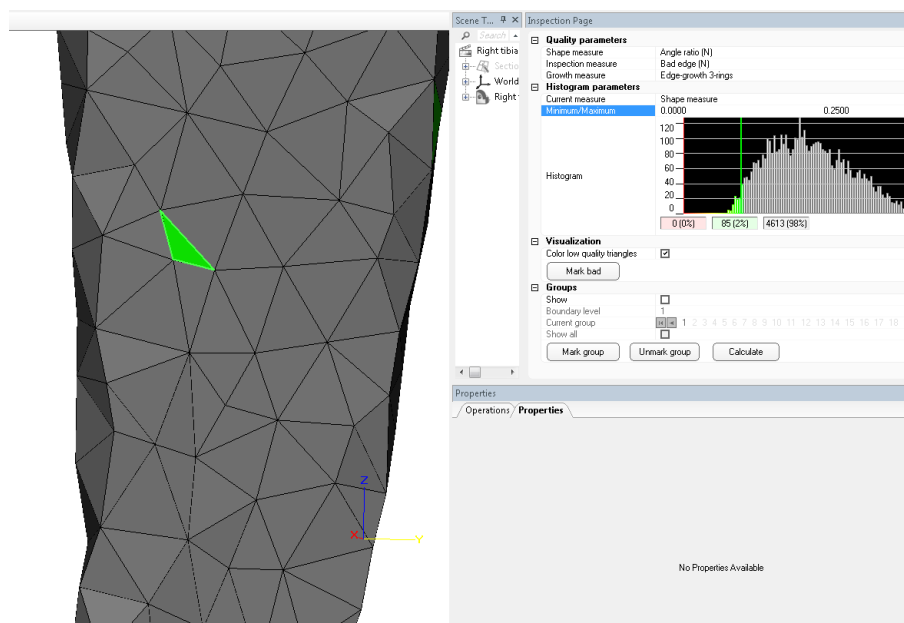


Figura 151 – Medida de forma: Angle Ratio (N). Identificação do triângulo com baixa qualidade

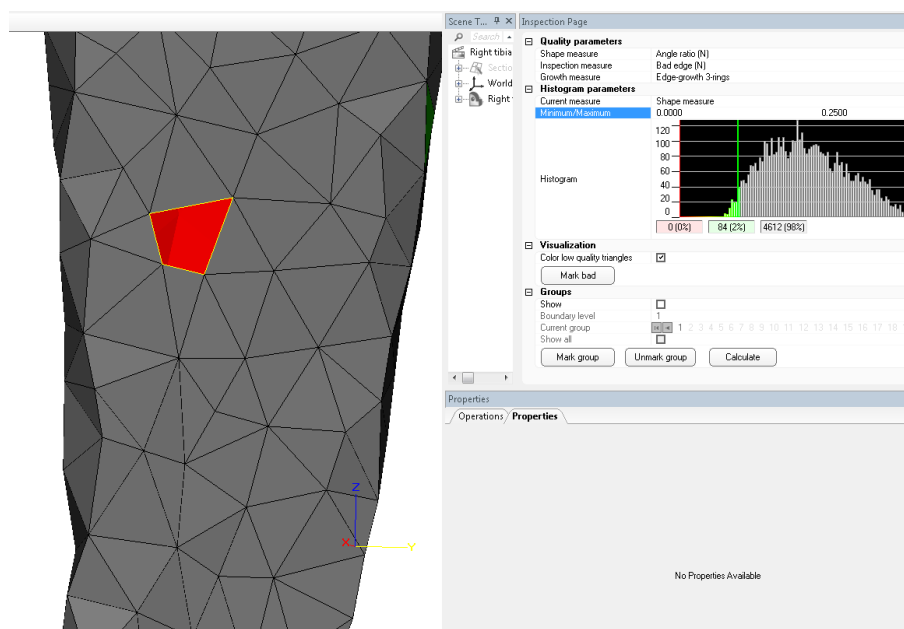


Figura 152 – Medida de forma: Angle Ratio (N). Elementos excluídos

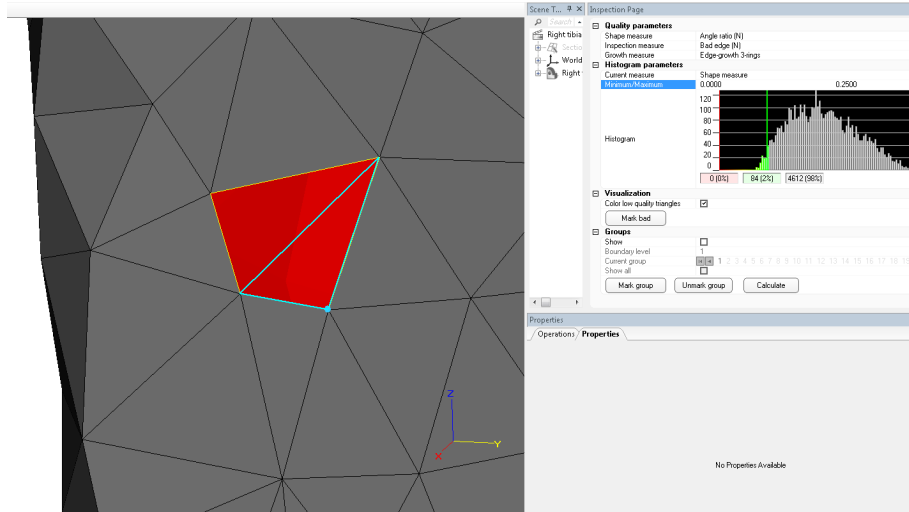


Figura 153 – Medida de forma: Angle Ratio (N). Criação do triângulo

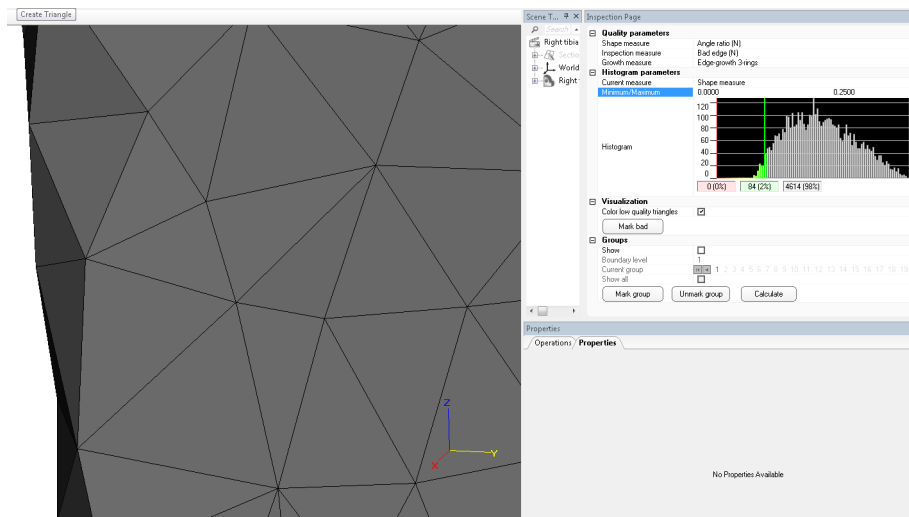


Figura 154 – Medida de forma: Angle Ratio (N). Elementos corrigidos

Também podem ser utilizadas outras ferramentas para corrigir a forma dos elementos: dividir o triângulo, adicionar um ponto no triângulo ou em um dos seus lados, etc. A Figura 155 mostra o histograma e o músculo quando são corrigidos todos os elementos, ou seja quando a malha está com boa qualidade.

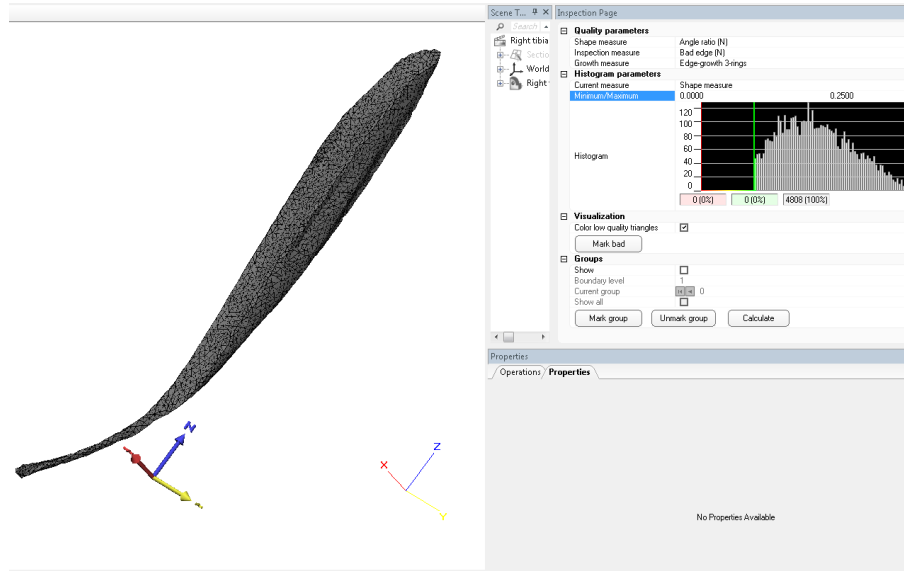


Figura 155 – Medida de forma: Angle Ratio (N). Malha com boa qualidade.

Smallest angle (A):

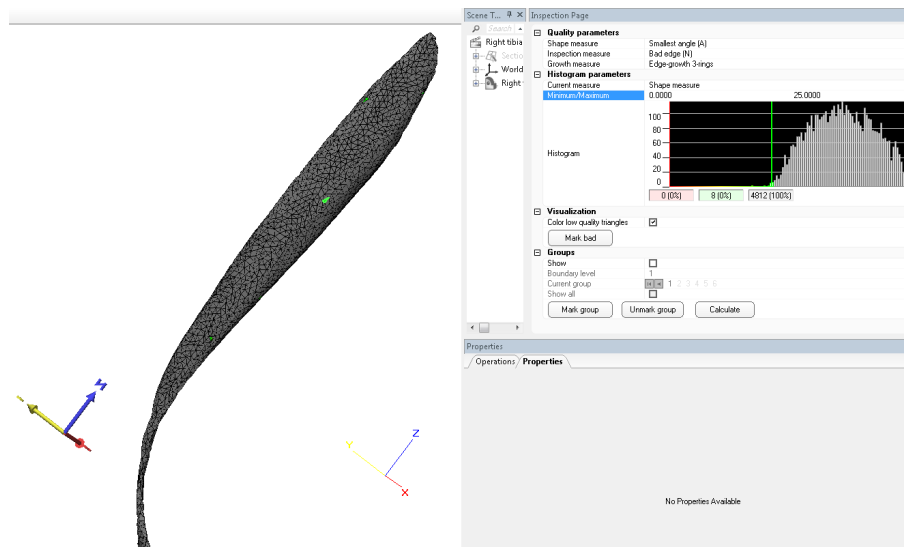


Figura 156 – Medida de forma: Smallest angle (A). Identificação dos elementos.

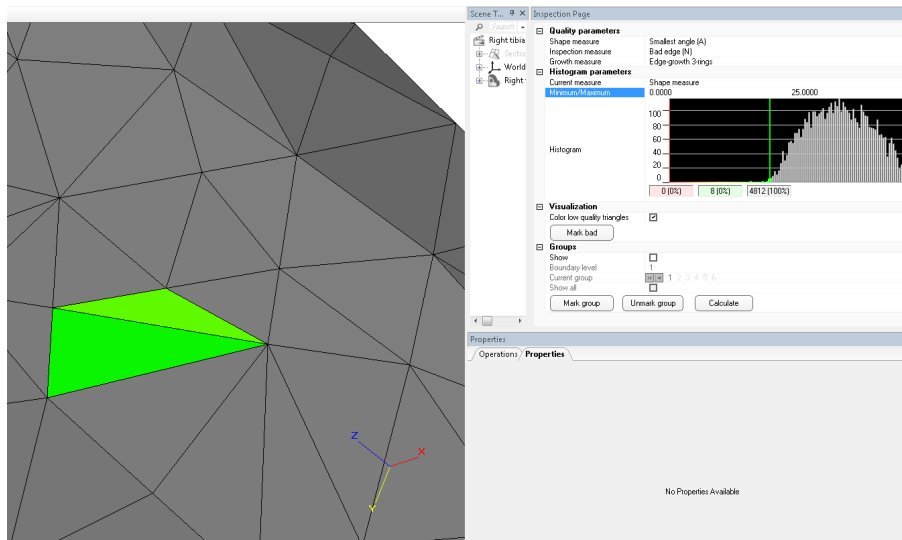


Figura 157 – Medida de forma: Smallest angle (A). Exemplo de elementos com baixa qualidade

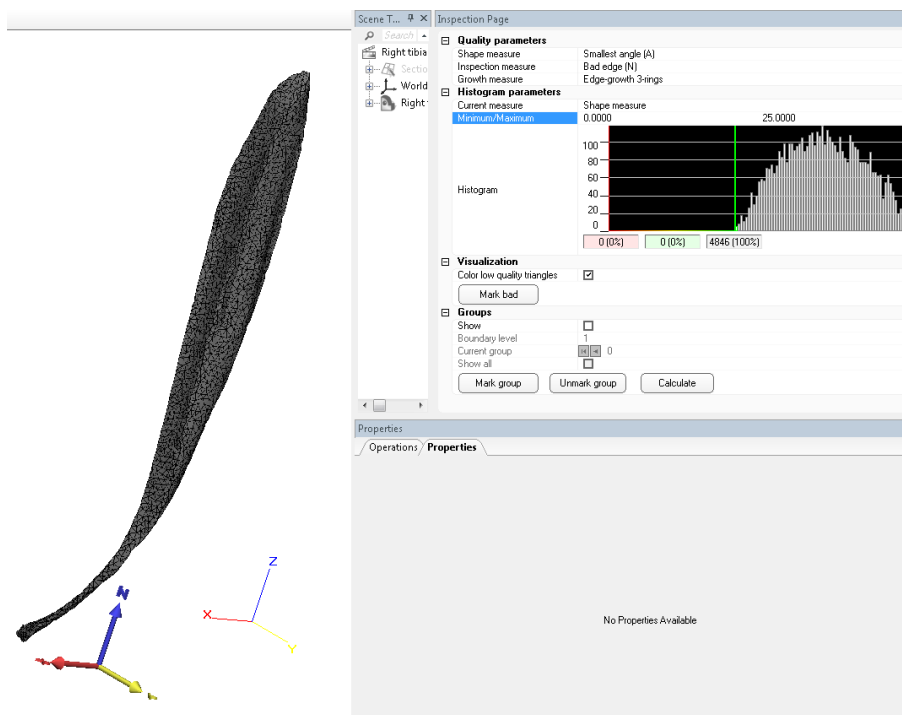


Figura 158 – Medida de forma: Smallest angle (A). Malha com boa qualidade

Skewness (N):

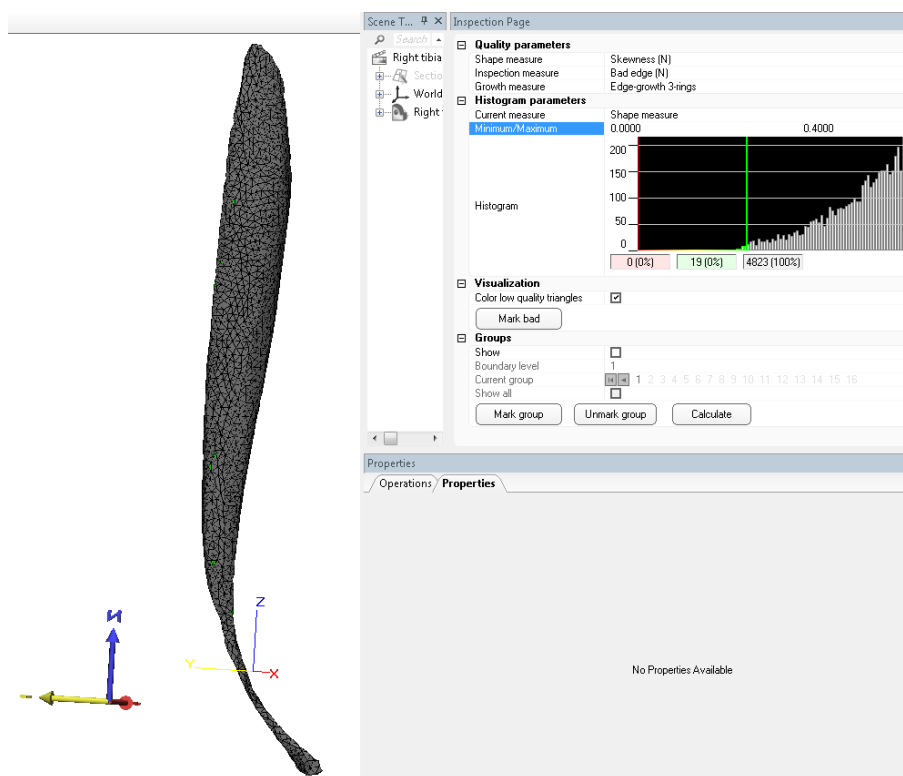


Figura 159 – Medida de forma: Skewness (N). Identificação dos elementos.

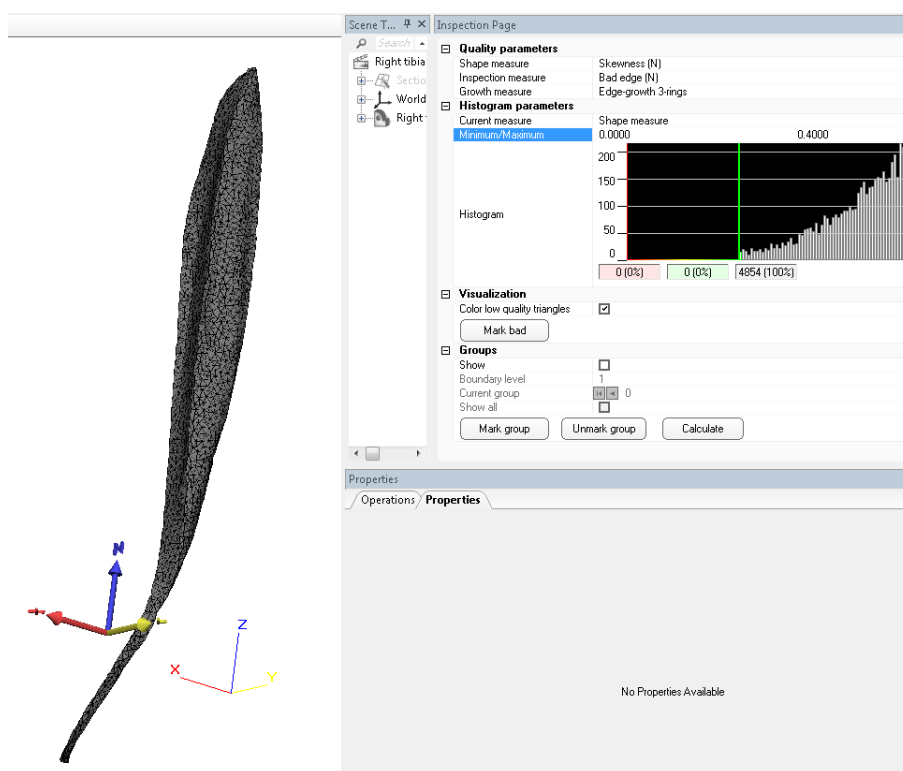


Figura 160 – Medida de forma: Skewness (N). Malha com boa qualidade.

Medidas de inspeção

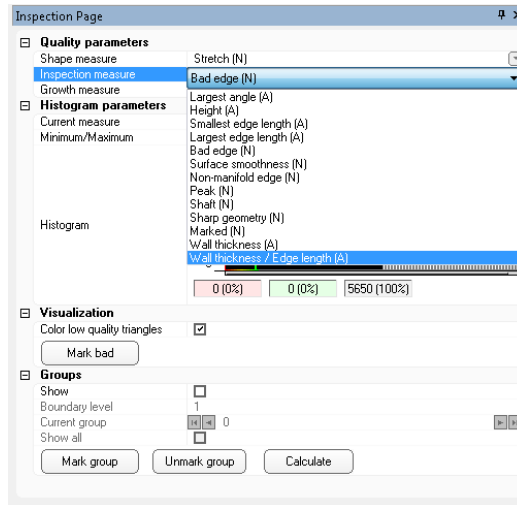


Figura 161 – Lista das medidas de inspeção

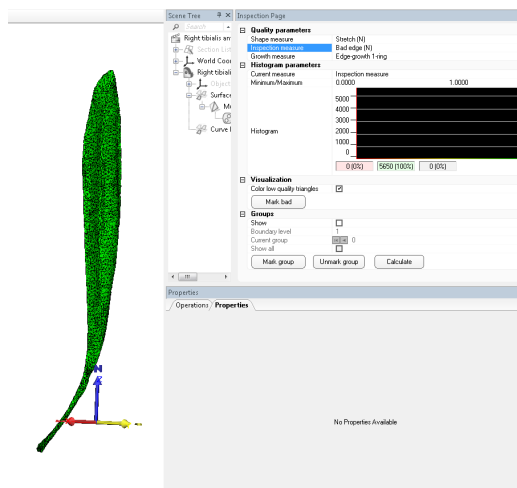


Figura 162 – Medida de inspeção: Bad Edge (N)

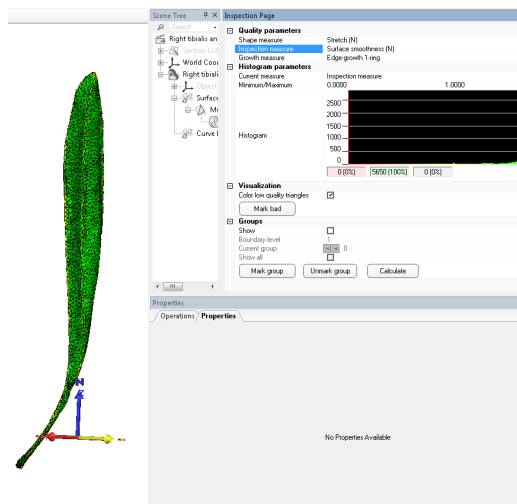


Figura 163 – Medida de inspeção: Surface smoothness (N)

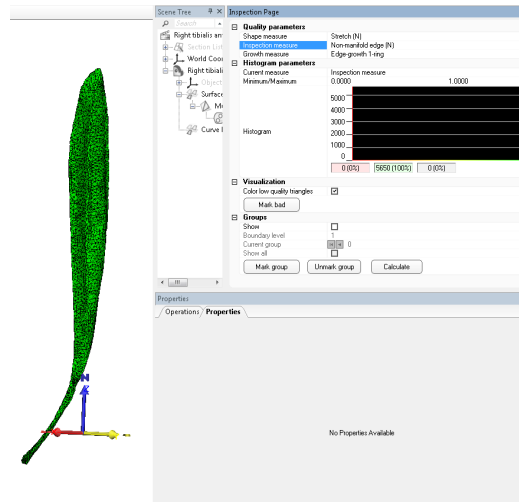


Figura 164 – Medida de inspeção: Non-manifold edge (N)

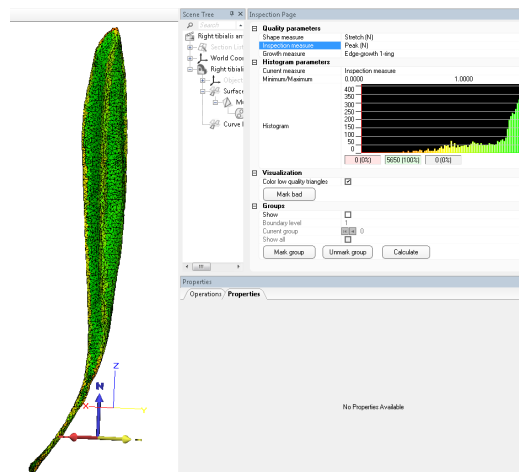


Figura 165 – Medida de inspeção: Peak (N)

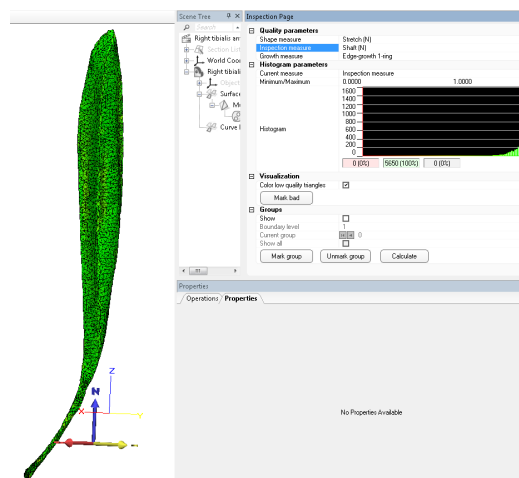


Figura 166 – Medida de inspeção: Shaft (N)

Medidas de crescimento

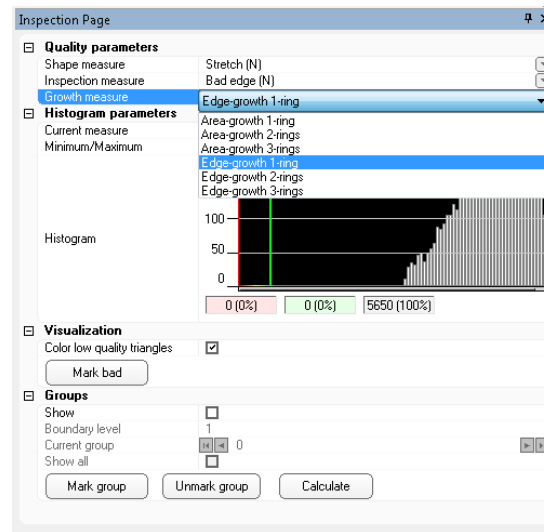


Figura 167 – Lista das medidas de crescimento

A Tabela 11 mostra

Tabela 11 – Identificação do número de triângulos com baixa qualidade

Parâmetros Medidas de forma	Intervalo	Número de elementos identificados na análise:						
		#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7
$R\text{-in}/R\text{-out} (N)$	(0,0.55)	41	45	50	51	44	<u>0</u>	<u>0</u>
$Height/Base (A)$	(0,0.30)	0	0	0	0	2	0	<u>0</u>
$Skewness (N)$	(0,0.40)	0	0	0	0	4	0	<u>0</u>
$Smallest\ angle (N)$	(0,0.45)	38	<u>0</u>	7	<u>0</u>	0	13	<u>0</u>
$Largest\ angle (N)$	(0,0.55)	19	19	<u>0</u>	22	24	0	<u>0</u>
$Smallest\ angle (A)$	(0,25)	0	0	0	0	0	4	<u>0</u>
$Angle\ ratio (N)$	(0,0.25)	0	0	0	0	0	7	<u>0</u>
$Edge\ ratio (N)$	(0,0.50)	173	146	16	10	0	17	<u>0</u>
$Equi\text{-angle}\ skewness (N)$	(0,0.50)	245	228	122	117	<u>0</u>	0	<u>0</u>
$Stretch (N)$	(0,0.10)	0	0	0	0	0	0	<u>0</u>

Comparar Malha inicial/ Malha final

B.2.3.2 Qualidade de malha de volume: tetraedros

Gerar a malha volumétrica a partir da malha da superfície, quando esta já está otimizada, é considerada uma tarefa simples. Assim de uma malha de superfície triangular é gerada uma malha tetraédrica usando o 3-Matic® com elementos de aproximação linear (tet_4) ou quadrática (tet_{10}). A versão disponível mostra as seguintes opções, para gerar a malha volumétrica: Tipo de elemento (tet_4 ou tet_{10}), comprimento da borda, a possibilidade de definir um refinamento e finalmente a métrica de malha para avaliar.

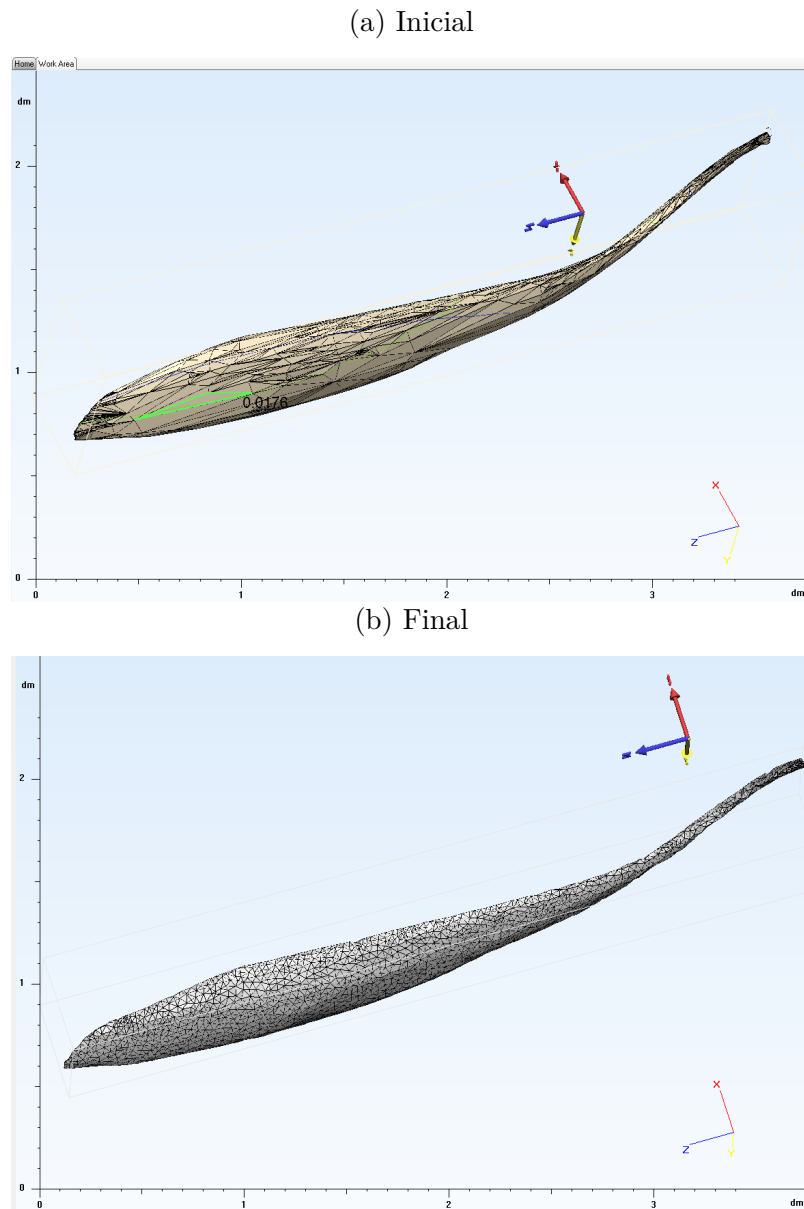


Figura 168 – Malha superficial

Uma vez gerada a malha é possível avaliar a qualidade, neste passo o programa gera um histograma (numérico) que permite avaliar quantos elementos da malha estão em certo intervalo da métrica escolhida. O software permite fazer esta avaliação definindo inicialmente para que programa ela vai ser exportada. Assim definindo o parâmetro 'solver' = Ansys®, a validação da malha é feita considerando critérios como: qualidade do elemento do Ansys ("Ansys element quality (N)"), ângulo máximo e mínimo na face ("Maximum face angle"(A), "Minimum face angle"(A)).

APÊNDICE C – GERAÇÃO DE FIBRAS 3D: MÚSCULO TIBIAL ANTERIOR

A medição ou construção das trajetórias das fibras de músculos esqueléticos tem sido um assunto de pesquisa importante, pois permitem conhecer os parâmetros arquitetônicos necessários para construir os modelos tridimensionais e fazer as simulações biomecânicas.

A geração da malha das fibras foi específica para a geometria descarregada do músculo TA e baseada nas informações da Seção 1.2.1; trata-se de uma malha simples que não considera trajetórias reais como as apresentadas para o caso de estudo na mesma seção, mas é o suficiente com relação aos objetivos do exemplo abordado (Seção 3.4).

Procedimento efetuado

1. A geometria do músculo foi exportada do 3-Matic® (3-MATIC..., 2015) para o Ansys® (ANSYS..., 2017) como um arquivo *.IGES* (Considerando só a superfície ou contorno); o que permite definir e limitar o volume onde serão inseridas as fibras.
2. No Ansys® é construída a aponeuroses com uma geometria simplificada, ver Figura 169 (como um parâmetro de referência só) cujas dimensões foram aproximadas a escala considerando os resultados de Heemskerk et al. (2009).
3. No módulo '*Geometry*' se faz a leitura de aproximadamente 10 coordenadas ao longo do comprimento do músculo, definindo assim as primeiras fibras base para a construção das outras.
4. A partir das coordenadas das fibras já definidas, estabelece-se o número de fibras ao longo da aponeuroses (No caso foram definidas 6 fibras) e através do comando '*Pattern*' foi possível multiplicar o número de fibras.
5. Os 6 arquivos são carregados no módulo '*Geometry*' do Ansys® definindo as fibras num plano, a partir delas são geradas, de forma radial, as outras curvas. Neste módulo é definida também a seção transversal das fibras (circular).
6. No módulo '*Mechanical*' é associada a seção transversal a cada um dos elementos, entendidos pelo Ansys® como elementos de viga. Posteriormente é definida a malha (definindo o comprimento do elemento).

7. Uma vez definida a malha é possível exportar as informações num arquivo *.TXT* com as coordenadas dos nós e a incidência; informação suficiente para definir o arquivo de entrada para a o programa principal.

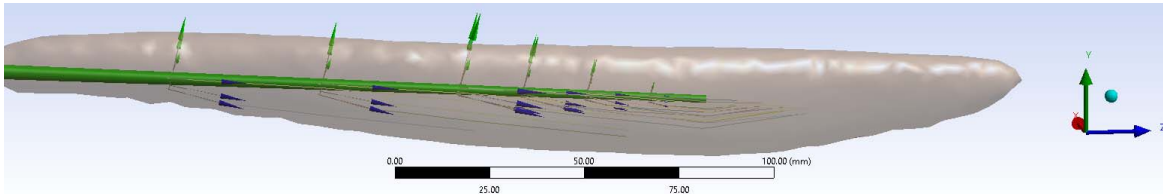


Figura 169 – Procedimento Geração de Fibras, aponeurose de referencia

As propriedades do material das fibras, as condições de contorno e carregamento são inseridas no arquivo de entrada diretamente.

Anexos

ANEXO A – ELEMENTOS DE ÁLGEBRA TENSORIAL

O produto escalar entre tensores de segunda ordem é definido por:

$$A : B = \text{tr}(A^T B) \quad (\text{A.1})$$

Propriedades:

$$A : B = B : A \quad (\text{A.2})$$

$$(A + B) : C = A : C + B : C \quad (\text{A.3})$$

$$A : (B + C) = A : B + A : C \quad (\text{A.4})$$

$$\text{tr}(A) = I : A \quad (\text{A.5})$$

$$A : B = A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.6})$$

Derivadas de funções escalares e tensoriais

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial A} = \det(A) A^T \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A)}{\partial A} = I \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial A_{ii}}{\partial A_{ij}} = I_{ij} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \text{tr}(A^2)}{\partial A} = 2A^T \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial (A : B)}{\partial C} = A : \frac{\partial B}{\partial C} + \frac{\partial A}{\partial C} \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial (A_{kl} : B_{kl})}{\partial C_{ij}} = A_{kl} : \frac{\partial B_{kl}}{\partial C_{ij}} + B_{kl} : \frac{\partial A_{kl}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial (A : B)}{\partial C} = A : \frac{\partial B}{\partial C} + B : \frac{\partial A}{\partial C} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial (A_{kl} : B_{kl})}{\partial C_{ij}} = A_{kl} : \frac{\partial B_{kl}}{\partial C_{ij}} + B_{kl} : \frac{\partial A_{kl}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \phi A}{\partial C} = A \otimes \frac{\partial \phi}{\partial C} + \phi \frac{\partial A}{\partial C} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial (\phi A_{kl})}{\partial C_{ij}} = A_{kl} \otimes \frac{\partial \phi}{\partial C_{ij}} + (\phi) \frac{\partial A_{kl}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{A.16})$$

Tensores simétricos: estes tensores ocupam uma posição importante na Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Apresentam-se as propriedades e algumas definições usadas no desenvolvimento da tese (PIMENTA, 2006). Propriedade: Todo tensor simétrico de segunda ordem pode ser decomposto na soma de dois tensores, como sendo:

$$T = Sph(T) + Dev(T) \quad (A.17)$$

Sph , é a chamada parcela esférica definida por:

$$Sph(T) = \frac{1}{3}(I : T)I \quad (A.18)$$

Dev , é a chamada parcela antiesférica dada por:

$$Dev(T) = T - Sph(T) = T - \frac{1}{3}(I : T)I \quad (A.19)$$

Autovalores e autovetores, Para um tensor de segunda ordem simétrico, T , é válida a seguinte relação:

$$T\nu = \lambda\nu, \quad (A.20)$$

onde os escalares λ , são chamados de autovalores de T ; também chamados de valores próprios ou principais. Onde os vetores ν , são chamados de autovetores de T ; também chamados de vetores próprios ou principais. A partir da equação acima, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$(T - \lambda I)\nu = o \quad (A.21)$$

Cuja solução diferente da trivial existirá somente quando:

$$\det(T - \lambda I) = 0 \quad (A.22)$$

Em outras palavras quando a matriz do sistema for singular (Uma matriz é singular se e somente se seu determinante é nulo). A solução fornece a seguinte equação característica:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (A.23)$$

onde I_i , com $i = 1, 2, 3$, são os invariantes do tensor T , pois independem da base onde o tensor T é representado. Expressões para os invariantes:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (A.24)$$

$$I_2 = T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2 \quad (A.25)$$

$$I_3 = T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{31} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{31}^2 - T_{33}T_{12}^2 \quad (A.26)$$

Ou,

$$I_1 = tr(T) = I : T \quad (A.27)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(tr(T))^2 - tr(T^2) \right] = \frac{1}{2} \left[(I : T)^2 - (I : T^2) \right] \quad (A.28)$$

$$I_3 = \det(T) \quad (A.29)$$

ANEXO B – DERIVADAS ASSOCIADAS AO MODELO HIPERELASTICO

Apresenta-se neste Anexo a recopilação das operações detalhadas para as grandezas: Jacobiano, Cauchy e Invariantes.

B.1 Jacobiano

$$J^2 = \det(C) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial J}{\partial J^2} = \frac{1}{2} J^{-1} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial J^2 \partial J^2} = -\frac{1}{4} J^{-3} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial J^2}{\partial C_{ij}} = J^2 C_{ij}^{-1} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(\frac{\partial J}{\partial J^2} \cdot \frac{\partial J^2}{\partial C_{kl}} \right) = \frac{\partial J}{\partial J^2} \frac{\partial^2 J^2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial J^2}{\partial C_{ij}} \frac{\partial^2 J}{\partial J^2 \partial J^2} \frac{\partial J^2}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial^2 J^2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^2 C_{kl}^{-1} \right) = J^2 \frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} + C_{kl}^{-1} \frac{\partial J^2}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial J^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}} = -\frac{1}{3} \left(J^2 \right)^{-\frac{1}{3}} C_{ij}^{-1} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij}} = -\frac{2}{3} J^{-\frac{4}{3}} C_{ij}^{-1} \quad (\text{B.8})$$

B.2 Cauchy

$$\bar{C}_{ij} = \left(J^2 \right)^{-\frac{1}{3}} C_{ij} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial C_{kl}}{\partial C_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} = -\frac{1}{2} \left(C_{ki}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{kj}^{-1} C_{il}^{-1} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial C_{kl}^2}{\partial C_{ij}} = \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} + \delta_{km}\delta_{il}\delta_{jn} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{kl}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^{-\frac{2}{3}} C_{kl} \right) = J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial C_{kl}}{\partial C_{ij}} + C_{kl} \cdot \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.13})$$

B.3 Invariantes

$$\frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^{-\frac{2}{3}} I_1 \right) = J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} + I_1 \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial I_1}{\partial C_{kl}} + I_1 \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{kl}} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$= \frac{\partial J^{-\frac{2}{3}}}{\partial C_{ij}} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \left(I_1 J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} + C_{kl}^{-1} \frac{\partial (I_1 J^{-\frac{2}{3}})}{\partial C_{ij}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{1}{3} \left(I_1 J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} + C_{kl}^{-1} \left((I_1) \frac{\partial (J^{-\frac{2}{3}})}{\partial C_{ij}} + J^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial I_1}{\partial C_{ij}} \right) \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} = C_{ii}\delta_{ij} - C_{ij} = I_1\delta_{ij} - C_{ij} \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} (I_1\delta_{ij} - C_{ij}) = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^{-\frac{4}{3}} I_2 \right) = J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}} + I_2 \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial}{\partial C_{ij}} \left(J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial I_2}{\partial C_{kl}} + I_2 \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{kl}} \right) \quad (\text{B.22})$$

$$= J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 I_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial I_2}{\partial C_{kl}} \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij}} + I_2 \frac{\partial^2 J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{kl}} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial^2 I_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial I_2}{\partial C_{kl}} \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij}} \quad (\text{B.23})$$

$$+ I_2 \left(-\frac{2}{3} \left(J^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial C_{kl}^{-1}}{\partial C_{ij}} + C_{kl}^{-1} \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{ij}} \right) \right) + \frac{\partial J^{-\frac{4}{3}}}{\partial C_{kl}} \frac{\partial I_2}{\partial C_{ij}}$$

ANEXO C – CÁLCULOS RELACIONADOS AOS ELEMENTOS: CHAPA-TRIANGULAR E SÓLIDO-TETRAEDRO

C.1 Funções de forma

Elemento triangular cúbico: Chapa: para o elemento triangular cúbico foram usadas as funções de forma determinadas pelo Assan (2013).

Elemento tetraédrico de grau qualquer, geração automática: a continuação, apresenta-se a metodologia usada para gerar automaticamente os coeficientes das funções de forma e das suas derivadas, no espaço adimensional, para qualquer ordem de aproximação baseada na descrição do Pascon (2012).

Elemento finito sólido tetraédrico: O tetraédro é um poliedro composto por 4 vértices, 6 arestas e 4 faces, ver Fig. 170.

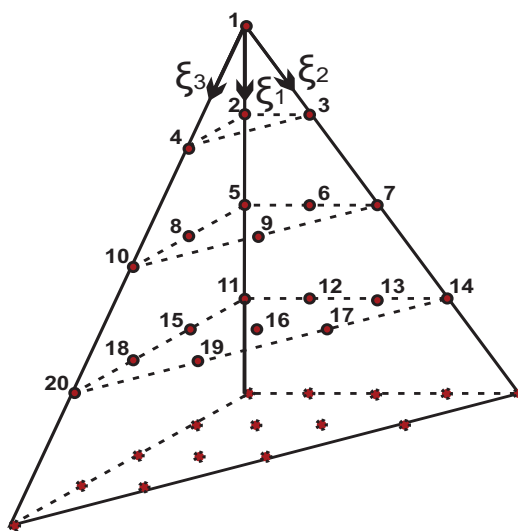


Figura 170 – Elemento Tetraedro

As coordenadas adimensionais são determinadas pelo seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned}
 \text{For}[i = 0, i \leq (gpa), & \tag{C.1} \\
 \text{For}[k = 0, k \leq i, & \\
 \text{For}[j = 0, j \leq (i - k), & \\
 ll = \left(1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left(\frac{(m+1) * (m+2)}{2}\right)\right) + j + (i+1) * k - \frac{(k-1) * k}{2}, & \\
 \xi_1(ll) = \frac{(i - j - k)}{gpa}, & \\
 \xi_2(ll) = \frac{j}{gpa}, & \\
 \xi_3(ll) = \frac{k}{gpa}, & \\
 j + +]k + +]i + +] &
 \end{aligned}$$

De forma geral o número de nós de cada elemento é $nn = (gpa + 1)(gpa + 2)(gpa + 3)/6$ onde gpa é o grau de aproximação do polinômio.

As funções de forma relativas ao elemento tetraédrico, podem ser escritas de maneira generalizada para qualquer grau de aproximação como:

$$\phi_k(\xi) = c_0^k + c_1^k \xi_1 + c_2^k \xi_2 + c_3^k \xi_3 + c_4^k \xi_1^2 + c_5^k \xi_1 \xi_2 + \dots + c_{(nn-1)}^k \xi_3^{gpa}, \tag{C.2}$$

onde c_n^k é o n-ésimo coeficiente da função de forma k .

Para as funções de forma foram adotados os polinômios de Lagrange, assim é possível escrever que $\phi_k = \delta_{ki}$, onde δ_{ki} é o delta de Kronecker (HOLZAPFEL, 2000) e dito sistema de equações, para qualquer ordem de aproximação na forma matricial, ficaria dado por: $M_{Coef} M_\xi = I$.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \phi_1[\xi(1)] & \phi_1[\xi(2)] & \dots & \phi_1[\xi(nn)] \\ \phi_2[\xi(1)] & \phi_2[\xi(2)] & \dots & \phi_2[\xi(nn)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{nn}[\xi(1)] & \phi_{nn}[\xi(2)] & \dots & \phi_{nn}[\xi(nn)] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{gpa}^1 \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_{gpa}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^{nn} & c_1^{nn} & \dots & c_{gpa}^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{gpa} & \xi_2^{gpa} & \dots & \xi_{nn}^{gpa} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Assim a matriz dos coeficientes das funções de forma pode ser calculada como: $M_{Coef} = M_\xi^{-1}$. Onde M_ξ é a matriz das potências adimensionais, a qual contém a base polinomial

avaliada em cada coordenada adimensional do elemento, calculada na Eq. C.4.

$$\begin{aligned}
& For[i = 0, i \leq gpa, \\
& For[k = 0, k \leq i, \\
& For[j = 0, j \leq (i - k), \\
& For[m = 1, m \leq nn, \\
& llP = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left(\frac{(m+1) * (m+2)}{2} \right) + j + (i+1) * k - \frac{(k-1) * k}{2}, \\
& Pot_{l1P}(llP) = i - j - k, Pot_{l2P}(llP) = j, Pot_{l3P}(llP) = k, \\
& If[\xi_1(m)] == 0, If[Pot_{l1P}(llP) == 0, Ksi11P = 1, Ksi11P = 0], \\
& Ksi11P = \xi_1(m)^{(i-j-k)}, \\
& If[\xi_2(m)] == 0, If[Pot_{l2P}(llP) == 0, Ksi22P = 1, Ksi22P = 0], \\
& Ksi22P = \xi_2(m)^j, \\
& If[\xi_3(m)] == 0, If[Pot_{l3P}(llP) == 0, Ksi33P = 1, Ksi33P = 0], \\
& Ksi33P = \xi_3(m)^k, \\
& \mathbf{M}_\xi(\mathbf{llP}, \mathbf{m}) = (Ksi11P)(Ksi22P)(Ksi33P) \\
& m++]j++]k++]i++],
\end{aligned} \tag{C.4}$$

onde os vetores Pot_{l1P} , Pot_{l2P} e Pot_{l3P} contem os expoentes de ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , usados para determinar o vetor v_ξ que contém as potências das coordenadas adimensionais, assim:

$$\begin{aligned}
& For[i = 1, i \leq nn, \\
& \mathbf{V}_\xi(\mathbf{i}) = (\xi_1(i)^{Pot_{l1P}(i)}) (\xi_2(i)^{Pot_{l2P}(i)}) (\xi_3(i)^{Pot_{l3P}(i)}) ++i],
\end{aligned} \tag{C.5}$$

onde ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas adimensionais do nó i do elemento.

Por fim, para o cálculo das derivadas das funções de forma, deriva-se a equação C.1 em relação às coordenadas adimensionais (ξ_1, ξ_2, ξ_3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1}(\xi_p) &= \sum_{n=0}^{gpa-1} [d1_n^k(\xi)^n] \\
\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2}(\xi_p) &= \sum_{n=0}^{gpa-1} [d2_n^k(\xi)^n] \\
\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_3}(\xi_p) &= \sum_{n=0}^{gpa-1} [d3_n^k(\xi)^n]
\end{aligned} \tag{C.6}$$

onde $d1_n^k$, $d2_n^k$ e $d3_n^k$ são os n -ésimos coeficientes das derivadas das funções de forma k em relação às coordenadas adimensionais. Para calcular as matrizes dos coeficientes das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas adimensionais (ξ_1, ξ_2, ξ_3),

tem-se o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned}
 & \text{For}[i = 0, i \leq (gpa - 1), & (C.7) \\
 & \quad \text{For}[k = 0, k \leq i, \\
 & \quad \quad \text{For}[j = 0, j \leq (i - k), \\
 & \quad \quad \quad \text{For}[m = 1, m \leq nn, \\
 & \quad \quad \quad \quad llP = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2} \right) + j + (i+1)k - \frac{(k-1)k}{2}, \\
 & \quad \quad \quad \quad ssP = 1 + \sum_{n=0}^i \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) + j + (i+2)k - \frac{(k-1)k}{2}, \\
 & \quad \quad \quad \quad ttP = 1 + \sum_{n=0}^i \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right) + j + (i+2)(k+1) - \frac{(k+1)k}{2}, \\
 & \quad \quad \quad \quad M_{CoeF}^{d1}(m, ssP) = M_{CoeF}(m, ssP)(1 + i - j - k), \\
 & \quad \quad \quad \quad M_{CoeF}^{d2}(m, ssP + 1) = M_{CoeF}(m, ssP + 1)(1 + j), \\
 & \quad \quad \quad \quad M_{CoeF}^{d3}(m, ttP) = M_{CoeF}(m, ttP)(1 + k), \\
 & ; m++; j++; k++; i++]
 \end{aligned}$$

Y finalmente os vetores que contêm as potências para o calculo das derivadas são calculadas como sendo:

$$\begin{aligned}
& \text{For}[j = 1, j \leq npg, \tag{C.8} \\
& \quad \text{Coor}_{X1} = C_{PGauss}(j, 1), \text{Coor}_{X2} = C_{PGauss}(j, 2), \text{Coor}_{X3} = C_{PGauss}(j, 3), \\
& \text{For}[i = 1, i \leq nn, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X1} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l1P}(i) - 1) == 0, \text{Coor}_{X11} = 1, \text{Coor}_{X11} = 0], \text{Coor}_{X11} = \text{Coor}_{X1}^{(\text{Pot}_{l1P}(i)-1)}, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l1P}(i) - 1) < 0, \text{Coor}_{X11} = 0], \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X2} == 0, \\
& \quad \text{If}[\text{Pot}_{l2P}(i) == 0, \text{Coor}_{X21} = 1, \text{Coor}_{X21} = 0], \text{Coor}_{X21} = \text{Coor}_{X2}^{\text{Pot}_{l2P}(i)}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X3} == 0, \\
& \quad \text{If}[\text{Pot}_{l3P}(i) == 0, \text{Coor}_{X31} = 1, \text{Coor}_{X31} = 0], \text{Coor}_{X31} = \text{Coor}_{X3}^{\text{Pot}_{l3P}(i)}, \\
& \quad \mathbf{v}_{\xi}^{d1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{Coor}_{X11} \text{Coor}_{X21} \text{Coor}_{X31}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X1} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l1P}(i)) == 0, \text{Coor}_{X21} = 1, \text{Coor}_{X21} = 0], \text{Coor}_{X21} = \text{Coor}_{X1}^{(\text{Pot}_{l1P}(i))}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X2} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l2P}(i) - 1) == 0, \text{Coor}_{X22} = 1, \text{Coor}_{X22} = 0], \text{Coor}_{X22} = \text{Coor}_{X2}^{(\text{Pot}_{l2P}(i)-1)}, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l2P}(i) - 1) < 0, \text{Coor}_{X22} = 0], \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X3} == 0, \\
& \quad \text{If}[\text{Pot}_{l3P}(i) == 0, \text{Coor}_{X32} = 1, \text{Coor}_{X32} = 0], \text{Coor}_{X32} = \text{Coor}_{X3}^{\text{Pot}_{l3P}(i)}, \\
& \quad \mathbf{v}_{\xi}^{d2}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{Coor}_{X12} \text{Coor}_{X22} \text{Coor}_{X32}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X1} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{llP}[[i]]) == 0, \text{Coor}_{X13} = 1, \text{Coor}_{X13} = 0], \text{Coor}_{X13} = \text{Coor}_{X1}^{(\text{Pot}_{llP}[[i]])}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X2} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l2P}(i)) == 0, \text{Coor}_{X23} = 1, \text{Coor}_{X23} = 0], \text{Coor}_{X23} = \text{Coor}_{X2}^{(\text{Pot}_{l2P}(i))}, \\
& \quad \text{If}[\text{Coor}_{X3} == 0, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l3P}(i) - 1) == 0, \text{Coor}_{X33} = 1, \text{Coor}_{X33} = 0], \text{Coor}_{X33} = \text{Coor}_{X3}^{(\text{Pot}_{l3P}(i)-1)}, \\
& \quad \text{If}[(\text{Pot}_{l3P}(i) - 1) < 0, \text{Coor}_{X33} = 0], \\
& \quad \mathbf{v}_{\xi}^{d3}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \text{Coor}_{X13} \text{Coor}_{X23} \text{Coor}_{X33}, \\
& \quad \text{If}[\text{row1} == 0, v_{\xi}^{d1}(\text{row1}, j) = 0], \\
& \quad \text{If}[\text{row2} == 0, v_{\xi}^{d2}(\text{row2}, j) = 0], \\
& \quad \text{If}[\text{row3} == 0, v_{\xi}^{d3}(\text{row3}, j) = 0] \\
& \quad ++i]++j]
\end{aligned}$$

Assim, as funções de forma e suas derivadas podem ser determinadas como sendo:

$$\begin{aligned}\phi_k(\xi(i)) &= M_{Coeef} \cdot v_\xi(i) \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1}(\xi_p) &= M_{Coeef}^{d1} \cdot v_\xi^{d1}(i) \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2}(\xi_p) &= M_{Coeef}^{d2} \cdot v_\xi^{d2}(i) \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_3}(\xi_p) &= M_{Coeef}^{d3} \cdot v_\xi^{d3}(i)\end{aligned}\tag{C.9}$$

C.2 Vetores de cargas nodais equivalentes

Elemento bidimensional: Chapa

Forças externas distribuídas: as cargas distribuídas podem ser representadas através de um vetor de cargas nodais e equivalente. Elas estão contidas no plano do elemento, atuando ao longo de um de seus lados (ASSAN, 2013). A função que descreve a variação das cargas é igual à função que define os deslocamentos, para o elemento triangular de dez nós a aproximação é cubica.

O vetor de cargas nodais equivalente pode ser calculado considerando a seguinte integral:

$$r = \int_s \phi^T Q ds,\tag{C.10}$$

onde, $Q = \phi q$, também escrito da seguinte maneira:

$$Q = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_{10} & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_{10} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} qX_1 \\ qy_1 \\ qX_2 \\ qy_2 \\ \vdots \\ qX_{10} \\ qy_{10} \end{array} \right\}\tag{C.11}$$

onde q é o vetor de cargas nodais equivalentes. Na Figura 171 é possível visualizar as cargas nodais atuando na direção x e y , ver Eq. C.12 e C.13

$$q_x^{Elem} = \{qx_1, qx_2, qX_3, \dots, qx_{10}\},\tag{C.12}$$

$$q_y^{Elem} = \{qy_1, qy_2, qy_3, \dots, qy_{10}\}\tag{C.13}$$

Logo a Eq. C.10 pode ser escrita como:

$$r = \int_s \phi^T \phi q ds,\tag{C.14}$$

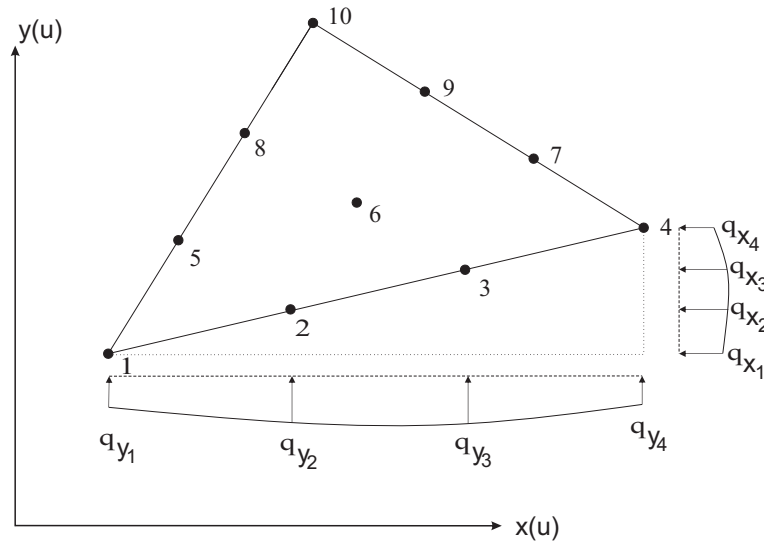


Figura 171 – Carregamento distribuído
Fonte: Elaborado pelo autor

onde S é a região onde as cargas estão atuando.

A Eq. C.14 pode ser escrita como uma integral de linha, pois as cargas atuam nos lados do elemento, sendo escrita como:

$$r = \oint \phi^T \phi q l_n d\xi_n \quad (\text{C.15})$$

onde, o ds fica definido para cada um dos lados como sendo:

$$ds = l_n d\xi_n \quad (\text{C.16})$$

Vetores de cargas nodais equivalentes

Finalmente resolvendo as integrais de linha para cada um dos lados, têm-se os vetores de cargas nodais equivalentes para o elemento triangular de dez nós.

C.3 Pós-processamento: Cálculo de deformações e tensões

Com o propósito de obter os valores das deformações e tensões nos nós, foram desenvolvidas rotinas de pós-processamento. Apresentam-se duas metodologias: Extrapolação e suavização: matriz de transformação e Cálculo direto nas coordenadas adimensionais do elemento.

C.3.1 Extrapolação e suavização: matriz de transformação.

A obtenção de uma matriz de transformação que relaciona as deformações e tensões nos pontos de hammer (gauss) ótimos com as deformações e tensões nodais pode ser feita de duas formas:

- Os valores são interpolados.
- Faz-se um ajuste no sentido dos erros mínimos quadráticos

Segundo Martha (2009), não existe evidência numérica que determine qual delas pode ser melhor. Neste caso, determina-se a matriz de transformação para fazer uma suavização local e posteriormente uma suavização global.

C.3.1.1 Suavização local

A suavização local se refere ao cálculo das deformações e tensões em cada um dos elementos por separado.

Metodologia:

1. Definir a equação do plano $\tau_s(\xi_1, \xi_2)$, que em geral, não pode conter ou coincidir com todos os valores de tensão nos pontos de integração.
2. Define-se o erro mínimo quadrático como sendo: $e(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = \sum [\tau_s(\xi_1, \xi_2) - \tau_i]^2$
Onde, n é o número de constantes.
3. Minimizar o erro, $\frac{\partial e}{\partial c_i} = 0$ Onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$
4. Sistema de equações

Elemento de Chapa

Para o elemento triangular de 10 nós, com 7 pontos (hammer) de integração, é usado um polinômio completo de segundo grau para definir a equação do plano τ_s , ver Eq.C.17. Para que o sistema fique bem definido o número de constantes do polinômio deve ser no máximo igual ao número de informações disponíveis. Isto é,

$$\tau_s(\xi_1, \xi_2) = c_1 + c_2\xi_1^2 + c_3\xi_1\xi_2 + c_4\xi_1 + c_5\xi_2^2 + c_6\xi_2 \quad (\text{C.17})$$

Minimizando o erro, $\frac{\partial e}{\partial c_i} = 0$, tem-se o seguinte sistema de equações:

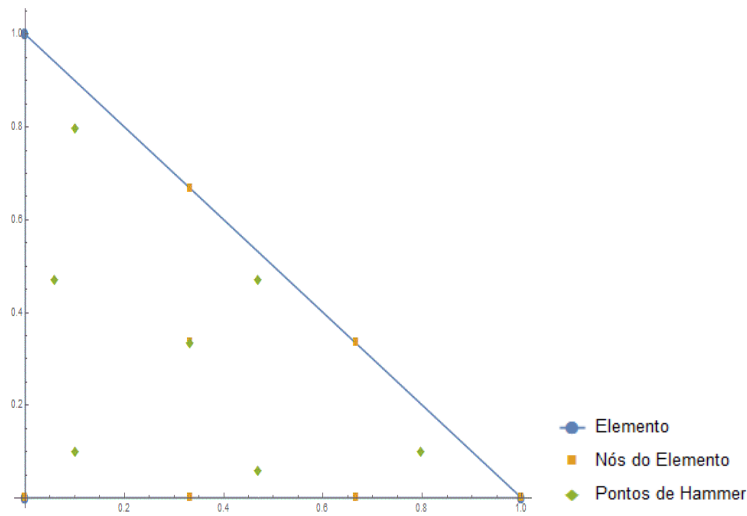


Figura 172 – Elemento triangular de 10 nós com os pontos de integração (Hammer)

Os termos de tensão para cada um dos nós estão ilustrados na figura abaixo:

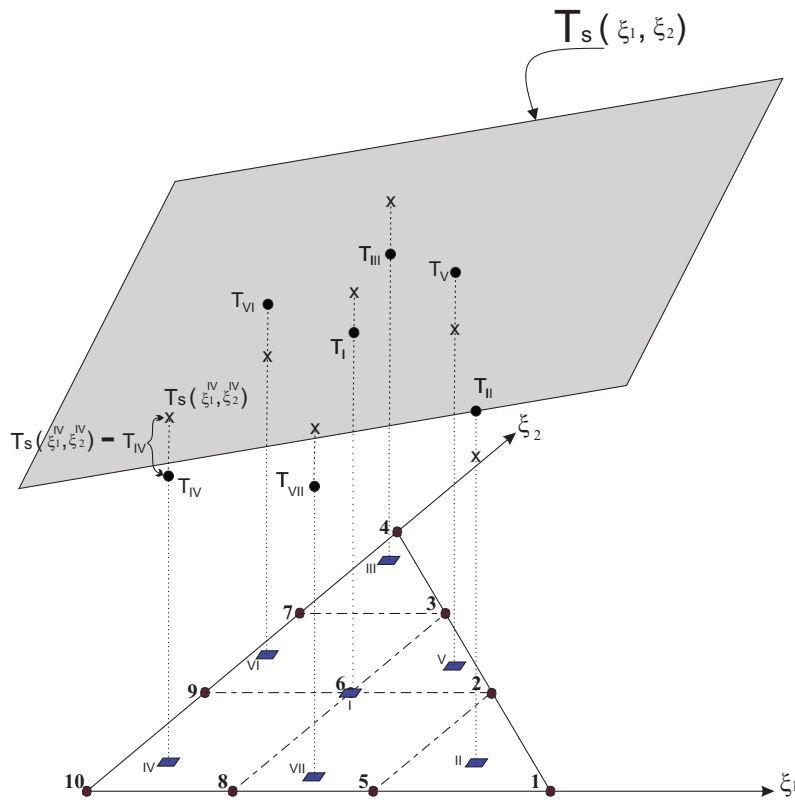


Figura 173 – Plano $\tau_s(\xi_1, \xi_2)$

O erro é minimizado $\frac{\partial e}{\partial c_i} = 0$ e as relações em forma matricial ficam:

$$[P]\{c\} = [Q]\{\tau\}_{opt} \tag{C.18}$$

Então, da Eq. C.18:

$$\{c\} = [P]^{-1}[Q]\{\tau\}_{opt}, \quad (C.19)$$

onde podemos definir $[S]$, como: $[S] = [P]^{-1}[Q]$.

Logo,

$$\{c\} = [S]\{\tau\}_{opt} \quad (C.20)$$

A matriz $[S]$ define os coeficientes da superfície de suavização.

Para avaliar os valores de tensão nos nós é necessário construir a matriz de avaliação $[E]$ que relaciona os valores nodais de tensão com os coeficientes de τ_s , assim:

$$\{\tau\}_{nos} = [E]\{c\} \quad (C.21)$$

Finalmente, considerando a Eq. C.20 e C.21, tem-se:

$$\{\tau\}_{nos} = [E][S]\{\tau\}_{opt} \quad (C.22)$$

Onde $[E][S] = [TR]$, é a matriz de transformação ou extrapolação que permite calcular os valores nodais em função dos valores nos pontos de Hammer.

Desenvolvendo a metodologia anterior, tem-se:

$$[TR] = \begin{pmatrix}
 -0.6923076923077005 & 1.9743924601203795 & -0.10953554871026233 & 0.14344495818926006 & 0.1434449581892654 & 0.2563767706488713 & -0.41267572742003455 \\
 0.08086785009861686 & 0.5100384929486447 & -0.10027734102839692 & 0.1548414536228746 & 0.8737581518998094 & -0.1481055540926164 & -0.3711230534489128 \\
 0.08086785009861774 & -0.10027734102839862 & 0.510038492948641 & 0.15484145362287283 & 0.8737581518998119 & -0.37112305344891894 & -0.14810555409260692 \\
 -0.692307692307697 & 0.14344495818924985 & 1.9743924601203737 & 0.14344495818926006 & -0.41267572742001324 & -0.4126757274200381 & 0.25637677064888265 \\
 0.08086785009861908 & 0.5100384929486397 & 0.15484145362287866 & -0.10027734102839947 & -0.37112305344891394 & -0.14810555409262402 & 0.8737581518998172 \\
 0.46745562130177665 & -0.09457909331158829 & -0.09457909331159087 & -0.09457909331159309 & 0.2720938862110025 & 0.2720938862110036 & 0.272093886211006 \\
 0.08086785009861863 & 0.15484145362287532 & 0.5100384929486346 & -0.10027734102839725 & -0.3711230534489084 & 0.8737581518998163 & -0.14810555409262158 \\
 0.0808678500986224 & -0.10027734102840058 & 0.15484145362287866 & 0.5100384929486299 & -0.1481055540926185 & -0.3711230534489212 & 0.8737581518998259 \\
 0.08086785009862085 & 0.1548414536228783 & -0.10027734102840336 & 0.5100384929486341 & -0.14810555409261528 & 0.8737581518998221 & -0.37112305344891877 \\
 -0.6923076923076898 & 0.14344495818925873 & 0.14344495818926006 & 1.974392460120354 & 0.256376770648866 & -0.41267572742002034 & -0.412675727420009
 \end{pmatrix} \quad (C.23)$$

Elemento de Sólido: Tetraedro O procedimento desenvolvido para o elemento de Chapa pode ser estendido para o elemento 3D - tetraédrico usando as funções de forma determinadas automaticamente dependendo do grau de aproximação predefinido e da quantidade de pontos de Gauss, ver Seção C.1. Na Figura 174 se mostra por exemplo o Elemento Tetraédrico de 20 nós e 31 pontos de Gauss.

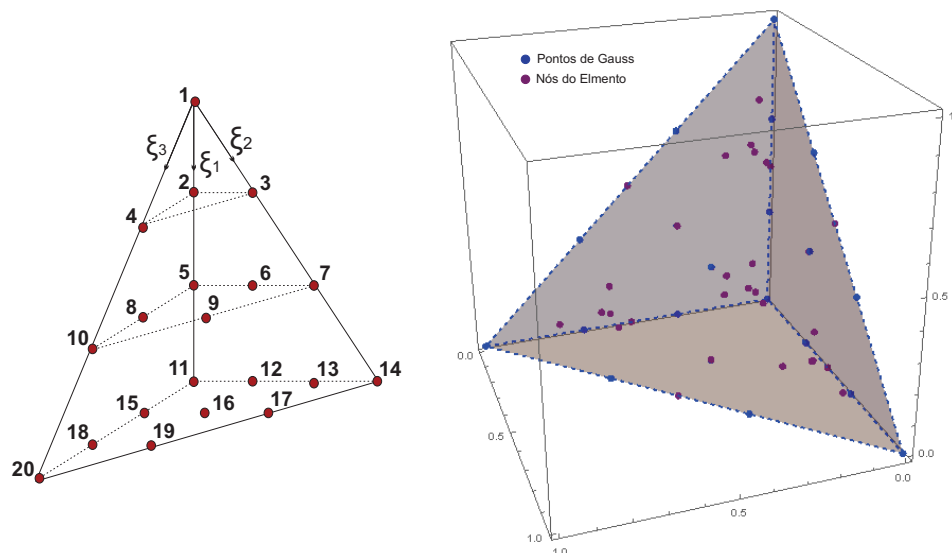


Figura 174 – Elemento Tetraédrico de 20 nós e 31 pontos de integração (Gauss)

C.3.1.2 Suavização global

Depois de obter os valores nodais para cada um dos elementos ¹, determinam-se os valores globais através de uma média dos valores vindos de cada elemento adjacente ao nó.

Neste trabalho, a matriz de transformação para calcular deformações e tensões nos nós do elemento também é usada para visualizar o Jacobiano ².

C.3.2 Cálculo direto nos nós do elemento

As deformações e tensões também podem ser calculados diretamente nos nós do elemento. Para avaliar os resultados desta forma foram implementadas rotinas de pós-processamento que seguem a seguinte sequência:

Para determinar as deformações de Green, E :

- a. Cálculo de A_0 e A_f e do gradiente da função mudança de configuração, A
- b. Cálculo do tensor de alongamento á direita de Cauchy-Green, C
- b. Cálculo das deformações de Green, expressão

¹ Seja no caso 2D ou 3D

² Parâmetro importante para comprovar a hipótese de quase incompressibilidade

E para o cálculo das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, S e as tensões de Cauchy, T_{Cauchy} :

- a. A partir das deformações calculadas, calcula-se as tensões de Piola. Expressões: [2.42](#) e [2.86](#)
- b. Conhecidos A e S , as tensões de Cauchy são determinadas por $T_{Cauchy} = \frac{A^t \cdot S \cdot A}{J}$