

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

LUIZ RAFAEL DOS SANTOS LEITE

**Análise numérica de vigas de rolamento de aço sem  
contenção lateral entre apoios**

SÃO CARLOS  
2016



LUIZ RAFAEL DOS SANTOS LEITE

**Análise numérica de vigas de rolamento de aço sem  
contenção lateral entre apoios**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Maximiliano Malite

SÃO CARLOS

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

L533a Leite, Luiz Rafael dos Santos  
Análise numérica de vigas de rolamento de aço sem  
contenção lateral entre apoios / Luiz Rafael dos Santos  
Leite; orientador Maximiliano Malite. São Carlos, 2017.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de  
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Estruturas de aço. 2. Viga de rolamento. 3.  
Pontes rolantes. 4. Estabilidade lateral de viga. 5.  
Dimensionamento de viga. 6. Flexo-torção. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: **LUIZ RAFAEL DOS SANTOS LEITE**

Título da dissertação: "Análise numérica de vigas de rolamento de aço sem contenção lateral entre apoios"

Data da defesa: 01.02.2017

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Titular **Maximiliano Malite (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **José Jairo Sáles**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Wanderson Fernando Maia**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar – São Carlos)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):  
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**



## **AGRADECIMENTOS**

A Deus e a minha família, sem os quais não teria chego aqui, e porque continuarão comigo.

Ao professor Maximiliano Malite por ter me acompanhado nesta jornada, pela orientação, compreensão e ensinamentos, os quais tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos amigos que me ajudaram a levantar sempre que caí, pelo companheirismo, por terem me recebido sempre de braços abertos e com um lugar no sofá para descansar e recobrar o ânimo.

Aos amigos Enio e Saulo, que me deram suporte com o ANSYS sempre esclarecendo minhas dúvidas.

A Marri, minha amiga, companheira, cúmplice e namorada por ter estado ao meu lado desde o começo desse trabalho, sempre disposta a me ajudar.

A todos que me incentivaram, por terem acreditado em mim.





## RESUMO

LEITE, L. R. S. **Análise numérica de vigas de rolamento de aço sem contenção lateral entre apoios**. 2016. 140p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

As vigas de rolamento são estruturas destinadas ao suporte de pontes rolantes, estas amplamente utilizadas para movimentação de cargas em galpões industriais. O presente trabalho apresenta um estudo sobre as vigas de rolamento de aço sem contenção lateral entre apoios, em geral projetadas com vão inferior a 7 metros, portanto destinadas ao suporte de pontes rolantes leves (capacidade nominal até 250 kN). A ausência de contenções laterais intermediárias aliada ao desalinhamento e à imprecisão na locação dos trilhos, bem como à presença de forças horizontais transversais ao eixo da viga (aceleração/frenagem do trole), impõem flexão lateral e torção, esforços que são equilibrados apenas pelas contenções nos apoios. A análise foi realizada utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando a análise não linear física e geométrica do problema, ou seja, um modelo mais próximo da viga real. Os resultados numéricos, quando comparados aos obtidos por meio da teoria de flexo-torção, mostraram uma inversão na distribuição esperada de tensões na mesa superior do perfil, ou seja, nos pontos onde deveria ocorrer aumento da tensão longitudinal de compressão, ocorreu redução. Esta inversão pode ou não ocorrer, dependendo da espessura da mesa superior, intensidade e posição da força vertical da roda da ponte. Além disso, os resultados determinados via MEF foram comparados com os obtidos via modelo tradicional de barra (momento de torção substituído por um binário de forças horizontais nas mesas). A comparação indicou divergência entre os resultados, podendo o dimensionamento pelo modelo de barra levar tanto a situações a favor da segurança como contra a segurança.

Palavras-chaves: Estruturas de aço. Viga de rolamento. Pontes rolantes. Estabilidade lateral de viga. Dimensionamento de viga. Flexo-torção.



## ABSTRACT

LEITE, L. R. S. **Numerical analysis of crane runway girders of steel without lateral bracing between supports**. 2016. 140p. Dissertation (M. Sc. In Civil Engineering (Structures)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2017.

The runway girders are structures intended for support cranes, these broadly used to movement of loads in industrial buildings. This research presents a study about the runway girders without lateral bracing between support points, generally designed with span lower than 7 meters, therefore intended for support of light cranes (rated capacity until 250 kN). The absence of intermediate lateral bracing allied to misalignment and imprecision location of the rail, also the presence of the side thrust on the girder (acceleration/ braking of the trolley), causes lateral flexural and torsion, which are balanced only by the lateral containment on support points. The analysis was made using the Finite Element Method (FEM), which includes a nonlinear physical and geometric analysis of the structural problem, in other words, a model closest to the real girder. The numerical results, when compared to the results of the flexural-torsional theory, showed an inversion in the expected distribution of stress on the top flange of the shape, in other words, at the points where must occur increase of the longitudinal stress, reduction occurred. This inversion may or may not occur, depending on the thickness of the top flange, modulus and position of the load of the crane wheel. Besides, the numerical results were compared with the results of classical bar model for beams (torque is replaced by a couple of horizontal forces applied on the flanges). The comparison showed a divergence between the results, where the design by bar classical model can lead to situations of high safety or against safety.

Keywords: Steel structure. Runway girder. Crane. Lateral stability. Beam design. Flexural-torsional



Letras Romanas Maiúsculas:

$A_{fs}$ ,  $A_{fi}$ ,  $A_w$ : área da mesa superior, área da mesa inferior e área da alma.

A: parâmetro para determinação do  $C_b$  com influência da posição da força vertical na seção transversal.

B: parâmetro para determinação do  $C_b$  com influência da posição da força vertical na seção transversal.

$B_i$ : bimomento.

C: altura do trilho ou dispositivo sobre o qual corre a roda da ponte rolante.

$C_1$ ,  $C_b$ : Fator de modificação para diagrama de momento fletor não uniforme.

$C_2$ : coeficiente associado ao ponto de aplicação das forças verticais.

$C_3$ : coeficiente associado à monossimetria da seção.

$C_w$ : constante de empenamento (Integral de empenamento ou Momento de inércia setorial).

$CM_p$ : centro de Massa da ponte rolante.

CG: centro geométrico da seção.

CS: centro de Cisalhamento da seção.

D: distância entre o centro de cisalhamento da seção e o topo da mesa superior.

$E^*$ : Módulo de Elasticidade longitudinal Reduzido.

E: Módulo de Elasticidade longitudinal (Módulo de Young), sendo seu valor de 200.000 MPa para o aço.

ELU: Estado Limite Último.

ELS: Estado Limite de Serviço.

$F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_r$ : forças do trem tipo da ponte rolante sobre a viga de rolamento.

G: Módulo de elasticidade transversal do aço, sendo seu valor de 77.000 MPa para o aço.

HL: força horizontal longitudinal à viga de rolamento.

HT: força horizontal transversal à viga de rolamento (impacto lateral).

$I_y$ : momento de inércia da seção em torno do eixo y.

$I_{yc}$ : momento de inércia da mesa comprida em torno do eixo y.

$I_{yt}$ : momento de inércia da mesa tracionada em torno do eixo y.

$I_z$ : momento de inércia da seção em torno do eixo z.

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$I_w$ : momento de Inércia Setorial (Integral de empenamento ou coeficiente de empenamento).

$J$ : momento de inércia à torção da seção.

$K$ : força de tração da ponte rolante.

$L$ : vão livre da viga de rolamento.

$L_{TR}$ : largura da base do trilho ou caminho de rolamento.

$L_w$ : comprimento de espraiamento da força vertical ao longo da base do caminho de rolamento.

$L_p$ : distância entre um par de vigas de rolamento.

$L_{t,min}$ : distância limite para aproximação entre o trole e a viga de rolamento.

$L_\xi$ : distância entre a linha de ação da força de tração e o centro de massa da ponte rolante.

$\bar{M}_z$ : máximo momento fletor em torno do eixo  $z$ .

$M_c$ : momento fletor devido ao carregamento distribuído sobre a viga de rolamento.

$M_{cr}$ : momento fletor crítico em regime elástico.

$M_{max}$ : máximo momento fletor na viga de rolamento devido ao trem tipo da ponte rolante.

$M_t$ : momento torçor total.

$M_k$ : momento na ponte rolante devido a força de tração.

$M_l$ : momento torçor livre.

$M_{ft}$ : momento torçor devido a flexo-torção.

$M_{pl}$ : momento fletor de plastificação da seção transversal;

$M_r$ : momento fletor que corresponde ao início do escoamento na seção;

$M_{Rd}$ : momento fletor resistente de cálculo.

$M_{Sd}$ : momento fletor solicitante de cálculo.

$M_y$ : momento fletor em torno do eixo  $y$ .

$M_z$ : momento fletor em torno do eixo  $z$ .

$M_1, M_2, M_A, M_B, M_C$ : momentos em pontos determinados da viga para cálculo do  $C_b$ .

$P$ : forças verticais concentradas já majoradas por um coeficiente de impacto.

$P_{TR}$ : peso linear do trilho ou caminho de rolamento.

$Q_{max}$ : capacidade nominal da ponte rolante (máxima carga içada pela ponte).

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$R_m$ : parâmetro de monossimetria da seção transversal.

$R_p$ : resultante do par de forças verticais do trem tipo da ponte rolante.

$R_v$ : reação vertical no apoio da viga de rolamento.

$T$ : momento torçor concentrado aplicado sobre a viga de rolamento.

$U$ : Funcional de energia total.

$V_{max}$ : máxima força cortante na viga devido ao trem tipo da ponte rolante.

$V_{pl}$ : força cortante de plastificação da alma.

$\bar{X}(x)$  : função de normalização do vão da viga.

$X_1$ : posição ao longo do eixo longitudinal da viga de rolamento, a partir do apoio à esquerda, no qual o trem tipo causa o máximo momento fletor.

$X_2$ : posição conjugada a  $X_1$ , para máximo momento fletor na viga de rolamento.

$W$ : parâmetro para cálculo de A e B.

$W_{zs}$ : módulo de resistência elástico da mesa superior em relação ao eixo z.

$W_{zi}$ : módulo de resistência elástico da mesa inferior em relação ao eixo z.

$W_{ys}$ : módulo de resistência elástico da mesa superior em relação ao eixo y.

$W_{yi}$ : módulo de resistência elástico da mesa inferior em relação ao eixo y.

$Z$ : módulo de resistência plástica.

Letras Romanas Minúsculas:

a: distância entre eixos do par de forças da roda das ponte rolante.

$a_{st}$ : distância entre enrijecedores transversais.

b: distância entre a linha de ação da resultante do par de forças da ponte rolante e a linha de ação da força da roda da ponte com maior intensidade.

$b_{fi}$ : largura da mesa inferior do perfil.

$b_{fs}$ : largura da mesa superior do perfil.

$b_r$ : largura do boleto do trilho.

$b_{st}$ : largura dos enrijecedores transversais.

d: altura total do perfil.

e,  $e_{max}$ : excentricidades da força vertical em relação ao eixo vertical da viga.

$f_y$ : resistência ao escoamento do aço.

$f_u$ : resistência à ruptura do aço (para tração).

$h_c$ : duas vezes a distância entre a linha neutra elástica e a parte inferior da mesa superior.

$h_m$ : distância entre os centros da mesa do perfil I.

$h_p$ : duas vezes a distância entre a linha neutra plástica e a parte inferior da mesa superior.

i, j, k, l: índices para contagem.

$\bar{k}$ : coeficiente associado às condições de apoio do elemento estrutural.

$k_v$ : coeficiente de flambagem local por cisalhamento (ABNT NBR 8000:2008).

m: momento de torção distribuído.

r: comprimento de comparação.

$r_{yc}$ : raio de giração da seção T formada pela mesa superior e a parte comprimida da alma em regime elástico.

$t_{fi}$ : espessura da mesa inferior do perfil.

$t_{fs}$ : espessura da mesa superior do perfil.

$t_w$ : espessura da alma do perfil.

$t_{st}$ : espessura dos enrijecedores transversais.

u: empenamento da seção transversal, deslocamentos na direção do eixo x.

$u_x, u_y, u_z$ : deslocamentos nas direções x, y e z do nó do elemento finito.

v: deslocamento na direção do eixo y.



## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$v_{fs}$ : deslocamento vertical da borda da mesa superior da viga.

$v_w$ : deslocamento vertical da alma da viga.

$v_h$ : velocidade de içamento da carga.

$x$ : eixo longitudinal a viga.

$y$ : eixo vertical passando pelo baricentro da seção da viga, com sentido positivo coincidente com o sentido das forças gravitacionais.

$y_o$ : distância entre o centro de cisalhamento e o centro geométrico da seção.

$y_{pcg}$ : distância entre o ponto de aplicação da força vertical e o centro geométrico da seção.

$y_{pcs}$ : distância entre o ponto de aplicação da força vertical e o centro de cisalhamento da seção.

$w$ : deslocamentos na direção do eixo  $z$ .

$w_{fi}$ : deslocamento da mesa inferior da viga na direção do eixo  $z$ .

$w_w$ : deslocamento da alma da viga na direção do eixo  $z$ .

Letras gregas minúsculas

$\alpha_i$ : constantes de integração.

$\alpha_y$ : parâmetro de relação entre momentos de inércia da mesa comprimida e tracionada na direção y (ANBT NBR 8800:2008)

$\beta_x$ : coeficiente de monossimetria da seção.

$\beta_x^{\text{aprox}}$ : valor aproximado do coeficiente de monossimetria da seção.

$\beta_1$ : parâmetro da norma brasileira (ANBT NBR 8800:2008)

$\beta_2$ : parâmetro para determinação do coeficiente de impacto vertical,  $\phi_2$ , da norma europeia (EN 1991-3:2006).

$\beta_3$ : parâmetro para determinação do coeficiente de impacto vertical,  $\phi_3$ , da norma europeia (EN 1991-3:2006); parâmetro da norma brasileira (ANBT NBR 8800:2008)

$\mu(x)$ : função de forma do momento fletor.

$\gamma$ : ângulo de espraiamento da força vertical da roda da ponte.

$\gamma_{ai}$ : coeficiente de ponderação de resistência (ABNT NBR 8800:2008).

$\sigma_x$ : tensão na direção x do elemento estrutural (longitudinal).

$\nu$ : Coeficiente de Poisson (admitido como 0,3 para o aço).

$\omega$ : área setorial principal da seção.

$\phi$ : função que descreve o giro da seção ao longo do comprimento da viga.

$\phi'$ : derivada primeira da função giro e representa o giro relativo entre duas seções da viga.

$\phi''$ : derivada segunda da função giro ao longo do comprimento da viga.

$\varphi_i$ : coeficientes de majoração de força dinâmicas (EN 1991-3:2006).

$\xi_1, \xi_2$ : parâmetros para a distribuição proporcional da intensidade do impacto lateral de acordo com a posição do trole (EN 1991-3:2006).

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ : giros em torno dos eixos x, y e z do nó do elemento finito.

$\rho$ : índice de monossimetria da seção.

$\delta$ : deslocamento limite para ELS.

$\lambda$ : índice de esbeltez.

$\lambda_p$ : parâmetro de esbeltez limite para seções compactas.

$\lambda_r$ : parâmetro de esbeltez limite para seções semicompactas.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1	OBJETIVO .....	20
1.2	METODOLOGIA ADOTADA .....	20
1.3	JUSTIFICATIVA.....	21
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>22</b>
2.1	CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS PONTES ROLANTES E VIGAS DE ROLAMENTO .....	22
2.1.1	Tipologia das vigas de rolamento .....	23
2.1.2	Seção utilizada em vigas de rolamento sem contenção lateral.....	25
2.1.3	Vinculações e condições de contorno da viga de rolamento .....	26
2.1.4	Solicitações impostas à viga de rolamento pela operação da ponte....	27
2.1.4.1	<i>Forças verticais .....</i>	<i>27</i>
2.1.4.1.1	<i>Forças verticais - ASCE/SEI 7-10 (2010).....</i>	<i>29</i>
2.1.4.1.2	<i>Forças verticais - ABNT NBR 8800:2008 (2008) .....</i>	<i>30</i>
2.1.4.1.3	<i>Forças verticais - AISE n13 (2003).....</i>	<i>30</i>
2.1.4.1.4	<i>Forças verticais - EN 1991-3:2006 .....</i>	<i>31</i>
2.1.4.2	<i>Forças horizontais .....</i>	<i>33</i>
2.1.4.3	<i>Forças horizontais longitudinais à viga de rolamento.....</i>	<i>33</i>
2.1.4.4	<i>Forças horizontais transversais à viga de rolamento .....</i>	<i>34</i>
2.1.4.4.1	<i>Forças transversais - ASCE/SEI 7-10 (2010) .....</i>	<i>34</i>
2.1.4.4.2	<i>Forças transversais - ABNT NBR 8800:2008 (2008).....</i>	<i>34</i>
2.1.4.4.3	<i>Forças transversais - AISE n13 (2003).....</i>	<i>35</i>
2.1.4.4.4	<i>Forças transversais - EN 1991-3:2006 (2006).....</i>	<i>37</i>
2.1.4.5	<i>Considerações gerais sobre as forças atuantes na viga .....</i>	<i>40</i>
2.1.5	Solicitações na seção transversal da ponte .....	41
2.1.5.1	<i>Excentricidade do trilho e força vertical.....</i>	<i>42</i>
2.1.5.2	<i>Centro de cisalhamento da seção da viga de rolamento.....</i>	<i>44</i>
2.2	CONCEITOS BÁSICOS DA FLEXO-TORÇÃO .....	45
2.2.1	Tensões devido à flexo-torção .....	46
2.2.2	Equação do bimomento e giro da seção.....	48
2.2.3	Equacionamento do problema da viga de rolamento pela teoria da flexo-torção.....	51

2.3	MOMENTO CRÍTICO DE FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO (FLT)..	55
2.3.1	Breve histórico da análise da estabilidade lateral.....	55
2.3.2	Equação geral do momento fletor crítico elástico.....	58
2.3.3	Fator de modificação para diagrama de momento fletor ( $C_b$ ).....	62
2.4	IMPACTO LATERAL E FLEXÃO EM TORNO DA MENOR INÉRCIA .....	65
<b>3</b>	<b>MODELO NUMÉRICO EM ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>67</b>
3.1	CARACTERÍSTICAS DO MODELO ESTRUTURAL.....	67
3.2	ELEMENTOS FINITOS DO MODELO E ANÁLISE NÃO LINEAR.....	69
3.3	CONSTRUÇÃO DO MODELO NUMÉRICO .....	71
3.4	AFERIÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....	74
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DA VIGA DE ROLAMENTO E RESULTADOS .....</b>	<b>80</b>
4.1	INFLUÊNCIA DA EXCENTRICIDADE VERTICAL DO TRILHO.....	81
4.1.1	Tensões longitudinais na presença de excentricidade do trilho .....	82
4.1.2	Deslocamentos na presença de excentricidade do trilho .....	89
4.2	INFLUÊNCIA DA ADIÇÃO DO IMPACTO LATERAL AO MOMENTO TORÇOR.....	96
4.2.1	Tensões longitudinais com impacto lateral.....	96
4.2.2	Deslocamentos com impacto lateral.....	102
4.3	COMPARAÇÃO DAS TENSÕES DO MODELO NUMÉRICO COM A TEORIA DA FLEXO-TORÇÃO .....	108
4.4	FORÇA MÁXIMA DA PONTE SOBRE A VIGA .....	117
<b>5</b>	<b>EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO E COMPARAÇÕES.....</b>	<b>118</b>
5.1	CONSIDERAÇÃO DA TORÇÃO POR MEIO DA ANALOGIA DE FLEXÃO	124
5.2	CONSIDERAÇÃO DA TORÇÃO POR MEIO DA FLEXO-TORÇÃO .....	126
5.3	COMPARAÇÃO COM MODELO NUMÉRICO.....	127
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>128</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>130</b>
	<b>APÊNDICE A – EQUAÇÃO DO BIMOMENTO PARA VIGA DE ROLAMENTO ...</b>	<b>135</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em vista da larga aplicação das pontes rolantes no mercado industrial, mesmo nas pequenas empresas, faz-se importante aprofundar o conhecimento sobre as estruturas de suporte destes equipamentos, isto é, as vigas de rolamento. O estudo destes elementos estruturais pode levar a melhorias em segurança na operação da ponte e na relação custo-implantação-operação.

Nem sempre as forças atuantes sobre a viga de rolamento são conhecidas com precisão, pois são dinâmicas e variáveis. Por exemplo, as forças horizontais transversais e longitudinais à seção da viga de rolamento têm valores estimados como uma parcela das forças verticais. Tal qual a variação das forças, existem também imprecisões nas variáveis geométricas que determinam os pontos de aplicação das forças, ou seja, as excentricidades em relação ao centro de cisalhamento da seção não são bem determinadas. Embora o centro de cisalhamento e o centro geométrico da seção sejam determinados de maneira precisa, o mesmo não pode ser afirmado sobre o ponto de aplicação das forças. Essa incerteza provém das imperfeições geométricas durante a montagem da viga e operação da ponte rolante. Diante do exposto, uma análise mais criteriosa destes elementos e suas variações permitirá prever com maior precisão e segurança o comportamento estrutural da viga, que por sua vez, fornece um melhor conhecimento sobre as condições de operação da ponte.

Vale lembrar ainda, em se tratando de vigas de rolamento sem contenção lateral entre apoios, a sua aplicação dentro das pequenas empresas é mais corriqueira, pois para este elemento estrutural as cargas são relativamente menores, bem como os seus vãos livres.

Entretanto, se as solicitações permitem abdicar do sistema de travamento lateral intermediário, a ausência desta contenção pode levar a solicitações não previstas na maioria dos critérios de dimensionamento e verificação. Tais situações são decorrentes das solicitações adicionais dos momentos torçores que surgem devido à atuação das forças horizontais transversais e das excentricidades das forças verticais. As excentricidades que podem ocorrer no plano vertical da ponte são mais críticas, uma vez que a força vertical aplicada é maior que o impacto lateral

esperado durante a operação. A combinação destes dois momentos torçores é comumente reduzida a um binário de forças horizontais que, aplicados nas mesas da seção, geram flexão lateral, a qual é verificada em projeto. Esta simplificação pode levar a resultados mais conservadores ou subdimensionados, em função dos valores envolvidos no problema da torção. Com base no exposto anteriormente é possível definir o objetivo do trabalho aqui apresentado.

## 1.1 OBJETIVO

O objetivo deste estudo é analisar o comportamento da viga de rolamento de pontes rolantes leves na ausência de um sistema de contenção lateral entre apoios, relacionando as forças atuantes, excentricidades, dimensões da seção utilizada e vão da viga com as tensões e deslocamentos na estrutura, determinando como as variáveis do problema estrutural afetam a segurança e o bom funcionamento durante a operação da ponte rolante.

A análise dos resultados foi feita por meio da comparação do dimensionamento utilizando o modelo de viga das normas vigentes, pois estas são as ferramentas que os projetistas dispõem para garantir a segurança e a economia da estrutura, com os resultados obtidos via modelagem numérica, uma vez que a utilização das ferramentas computacionais proporcionam um ganho de agilidade no processo e permite o estudo de uma gama maior de casos.

Visa-se, portanto, com este estudo, proporcionar uma base teórica para futuras melhorias dos critérios de dimensionamento e verificação de vigas de rolamento, bem como das técnicas de manutenção preventiva e corretiva.

## 1.2 METODOLOGIA ADOTADA

Foi utilizado um modelo numérico tridimensional simulado através do pacote ANSYS® para atingir os objetivos deste trabalho. A simulação foi realizada via Método dos Elementos Finitos (MEF) com elementos que permitiram uma análise

considerando a não linearidade física do material e geométrica do problema. Este trabalho foi dividido em três etapas, sendo elas:

- (1) Revisão bibliográfica sobre: vigas de rolamento e pontes rolantes; critérios de dimensionamento dos elementos; solicitações críticas; estudo e comentários sobre casos descritos ao longo da literatura; estudo da flexo-torção, instabilidade lateral e vigas de seção com parede delgada; utilização do MEF e modelagem numérica;
- (2) Desenvolvimento do modelo numérico e aferição do mesmo;
- (3) Estudo numérico de casos e análise dos resultados; considerações sobre o atual critério de projeto; conclusões.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Conhecer melhor os limites das simplificações de projeto pode significar a diferença entre o correto funcionamento da ponte, intervenção na operação para pequenos reparos ou até mesmo a ruína da estrutura e troca das vigas de rolamento. Os dados deste estudo poderão ser utilizados para um aprofundamento do conhecimento sobre as vigas de rolamento, aumentando a segurança para a equipe responsável pela operação e prolongando a vida útil do sistema ponte rolante e suas vigas. O aumento da vida útil pode ser visto como economia de material e melhor aproveitamento das características mecânicas do aço.

É importante comentar ainda que a realização de ensaios em laboratório demanda um tempo muito maior para a montagem da estrutura analisada, custo de material, mão de obra para operação e equipamentos que nem sempre são acessíveis. Além disso, nem toda coleta de dados pode ser monitorada, como por exemplo, o deslocamento lateral do perfil durante a flexo-torção, a qual este será submetido. Com estas considerações, fica explicada a razão pela qual a modelagem numérica é mais vantajosa para a realização deste estudo, sendo que a adoção do MEF é justificada por ser uma ferramenta de grande aplicação no meio acadêmico e permite uma análise muito próxima das condições reais do problema.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS PONTES ROLANTES E VIGAS DE ROLAMENTO

As pontes rolantes são estruturas que se deslocam em um plano horizontal e são amplamente utilizadas na indústria para a movimentação de materiais. A suspensão da carga é feita pelo trole, o qual se desloca sobre a viga principal da ponte que pode ser simples (figura 2.1) ou dupla. O movimento do trole é limitado pelas vigas de cabeceira da ponte (figura 2.2).

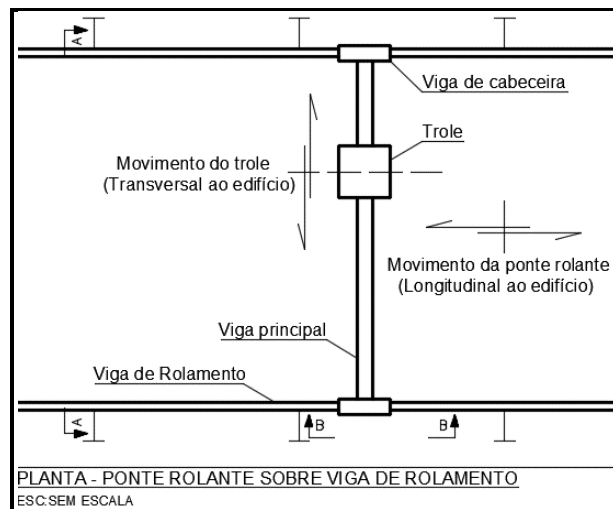


Figura 2.1: Vista em planta de ponte rolante com indicação de seus elementos.

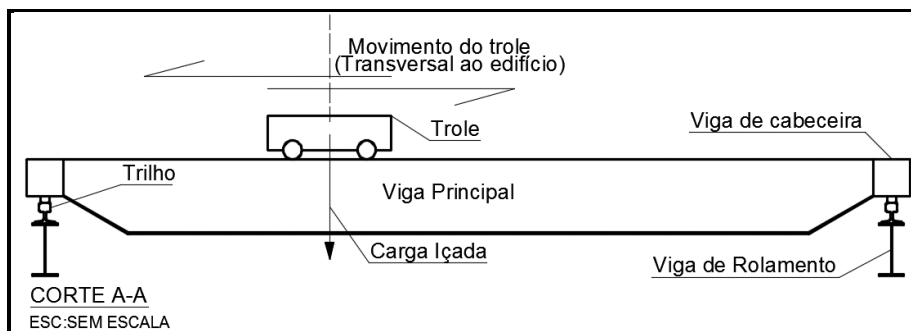
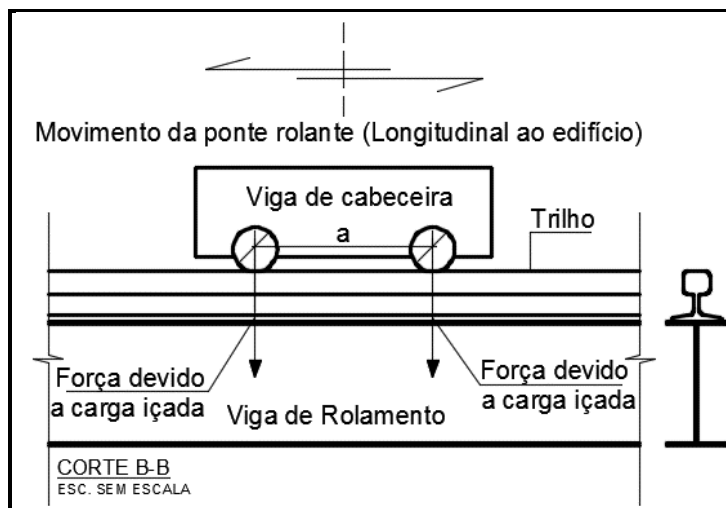


Figura 2.2: Corte transversal ao galpão - deslocamento do trole sobre viga principal da ponte rolante.



O movimento longitudinal em relação ao edifício é realizado por toda a ponte e ocorre sobre as vigas de rolamento. Sobre estas atua um par de forças distantes entre si uma distância “a” (figura 2.3). A intensidade destas forças e a distância “a” são características de cada ponte rolante e formam o trem-tipo.



**Figura 2.3:** Vista longitudinal da viga de rolamento – viga de cabeceira da ponte sobre a viga de rolamento.

Os dois movimentos afetam a viga de rolamento de maneiras distintas. O movimento do trole interfere na intensidade da força que é aplicada sobre a viga de rolamento. Enquanto o trole se aproxima ou se afasta de uma das laterais do galpão, a solicitação sobre a viga nesta lateral aumenta ou diminui, respectivamente. Embora a intensidade da força sofra uma variação gradativa, seu ponto de aplicação sobre a viga de rolamento praticamente não se altera. O movimento longitudinal, por sua vez, não altera a intensidade das forças, apenas a sua posição sobre a viga de rolamento. Os dois movimentos podem ocorrer simultaneamente.

Existe uma grande variedade de pontes rolantes e a principal forma de classificá-las é quanto a sua capacidade nominal, isto é, em relação à carga máxima que ela é capaz de içar durante a operação.

### 2.1.1 Tipologia das vigas de rolamento

A tipologia da viga de rolamento varia em função do carregamento da ponte e do vão livre da própria viga. Em função da carga suportada, é possível determinar a ordem de grandeza do vão esperado para a viga e, por sua vez em função do vão, é possível escolher as características do perfil da viga, tais como altura, largura das mesas, espessuras e a necessidade ou não do travamento lateral.

As vigas de rolamento são, em geral, formadas por perfil I, sendo que estes podem ser laminados ou soldados. O sistema de apoio das vigas pode ser projetado para que elas se comportem como elementos biapoiados ou contínuos, ficando a critério do projetista, conhecendo as vantagens de cada caso, escolher o mais adequado.

A tabela 2.1 resume as relações entre capacidade nominal da ponte, ordem de grandeza do vão livre da viga de rolamento, a necessidade ou não do travamento lateral e, havendo travamento, se é realizado apenas na mesa superior ou em ambas as mesas do perfil. É importante ressaltar que os vãos da tabela 2.1 fazem referência a vigas biapoiadas e não necessariamente os valores podem ser replicados para sistemas de vigas contínuas, pois a continuidade da viga modifica a distribuição dos momentos fletores ao longo do vão.

**Tabela 2.1** - Relação entre a capacidade nominal da ponte rolante e características da viga de rolamento.

Capacidade nominal da ponte rolante	Vão usual da viga de rolamento	Tipo de seção utilizada
Até 50 kN	Até 6 metros	Perfil I com dupla simetria sem travamento lateral
De 50 kN até 250 kN	Até 7 metros	Perfil I monossimétrico sem travamento lateral
De 50 kN até 250 kN	Vãos até 13 metros	Perfil I com contenção na mesa superior
Acima de 250 kN	----	Perfil I ou caixão com contenção na mesa superior e inferior

A tabela 2.1 foi elaborada com base nos conhecimentos empíricos de diversos profissionais e estas informações podem ser encontradas na forma de texto em Bellei (2000). Uma vez que o objetivo deste trabalho é analisar o comportamento das vigas sem contenção lateral entre apoios, pode-se concluir que o limite superior de capacidade da ponte é da ordem de 250 kN e o vão livre de 7,0 metros.

### 2.1.2 Seção utilizada em vigas de rolamento sem contenção lateral

Se as solicitações sobre a viga de rolamento são baixas, as seções utilizadas são perfis I duplamente simétricos e sem a necessidade de nenhum tipo de contenção lateral (primeira linha da tabela 2.1). Com a maior capacidade da ponte ou maiores vãos da viga, surge a necessidade de que a seção transversal seja capaz de suportar o incremento das solicitações. Uma das maneiras de se obter este ganho de resistência é a utilização da seção I monossimétrica (segunda linha da tabela 2.1).

Segundo Procter<sup>1</sup> (1932 apud SOUZA, 1999, p. 7), os primeiros estudos sobre a influência da monossimetria da seção na estabilidade lateral dos perfis com seção I datam de 1854, quando Fairbairn<sup>2</sup>, através de estudos empíricos, concluiu que ocorre uma melhora na estabilidade lateral se a mesa comprimida é mais larga e mais espessa que a mesa tracionada. Posteriormente, estudos de diversos autores reafirmaram a conclusão de Fairbairn.

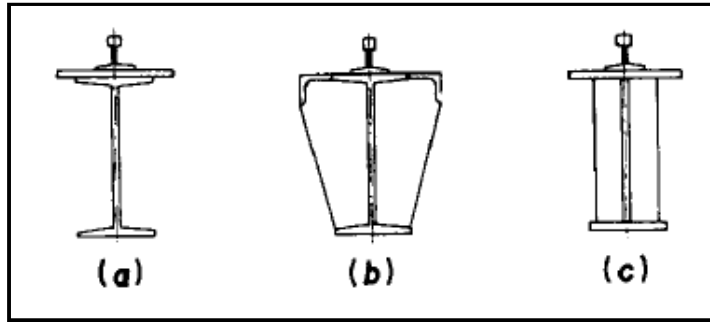
Existem basicamente dois meios de aumentar a rigidez da mesa comprimida. O primeiro deles é utilizar peças enrijecedoras soldadas à mesa, tais como chapas e cantoneiras. A figura 2.4(a) mostra um perfil I duplamente simétrico com a mesa superior enrijecida através da união com uma chapa soldada e a figura 2.4(b) o mesmo perfil com cantoneiras soldadas à mesa superior.

A segunda maneira de aumentar as dimensões da mesa superior é utilizar um perfil já fabricado com essas características, seja soldado ou laminado. Com a evolução das técnicas de fabricação, esta opção se tornou mais viável em relação à utilização de peças enrijecedoras soldadas à mesa. A figura 2.4(c) mostra um perfil I soldado, no qual a chapa que forma a mesa superior é mais larga. Para este trabalho não são descritas ou ilustradas as seções de viga e sistemas de contenção utilizados para os demais casos descritos na tabela 2.1 (linhas 3 e 4), pois não compõem o objeto do presente estudo.

---

<sup>1</sup> PROCTER, A.N. (1932). Laterally Unsupported Beams, *Journal of Structural Engineering*, v.10, n.7, p.274.

<sup>2</sup> Sir William Fairbairn (1789-1874): Engenheiro civil, Engenheiro estrutural e construtor de navios. Pioneiro na construção de navios de ferro no Reino Unido e, juntamente a Robert Stephenson, construiu a Ponte Britannia (140 m) e a ponte de Conway (122 m) as quais se tornaram precursoras das pontes de seção celular.



**Figura 2.4:** Seções utilizadas para viga de rolamento sem contenção lateral entre apoios.  
Fonte: Bellei (2000).

### 2.1.3 Vinculações e condições de contorno da viga de rolamento

As vigas de rolamento podem ser elementos biapoiados ou contínuos e, para o presente trabalho, a utilização de elementos simplesmente apoiados é mais interessante, pois considerando as mesmas solicitações quanto à intensidade das forças e suas linhas de ação, pontos de aplicação e as características da viga de rolamento, os momentos fletores nos vãos das vigas biapoiadas possuem maior valor que no caso dos elementos contínuos. Logo, a análise de vigas biapoiadas torna-se mais importante e interessante.

Para o sistema de contenção lateral da viga de rolamento é considerada apenas a vinculação na região do apoio. Esta ligação é feita, na maioria dos casos, com uma chapa ligando a mesa superior da viga ao pilar do galpão. Duas situações básicas devem ser atendidas por estas chapas de ligação. A primeira é possuir rigidez suficiente para absorver e transmitir as forças horizontais transversais da viga aos pilares e, a segunda, é possuir flexibilidade para permitir a rotação da viga. Vale lembrar que estes dois fenômenos acontecem simultaneamente durante a operação da ponte. A vinculação no apoio com as características descritas é chamada de “vínculo de garfo”.

As características do vínculo de garfo permitem concluir que apesar da rotação em torno do eixo longitudinal da viga ser impedida na região do apoio, os deslocamentos longitudinais são livres. Estes deslocamentos da seção oriundos da torção são denominados de empenamento. Como consequência, se a seção for livre para empenar, na extremidade da viga as tensões normais são nulas.

## 2.1.4 Solicitações impostas à viga de rolamento pela operação da ponte

### 2.1.4.1 Forças verticais

As vigas de rolamento, durante a operação da ponte, estão sujeitas a forças verticais e horizontais. A força vertical máxima decorre do peso próprio da ponte, incluindo todos os acessórios para seu funcionamento e a máxima carga içada (capacidade nominal da ponte). Em projeto esta solicitação deve ser posicionada de modo a levar ao carregamento crítico e majorada pelo coeficiente de impacto, pois as forças verticais são dinâmicas e não estáticas.

Para determinar a posição de aplicação do trem-tipo que leva ao máximo momento fletor na viga de rolamento biapoiada, pode-se recorrer ao “Teorema de Winkler: com o deslocamento da ponte rolante ocorrerá o máximo momento fletor sob uma das rodas da ponte.” (BONFÁ, 1980, p.15). A figura 2.5 mostra um trem-tipo de ponte rolante composto pelas forças  $F_1$  e  $F_2$  que está aplicado sobre a viga numa posição tal que  $X_1$  é a distância entre  $F_1$  e o apoio à esquerda. Neste apoio está representada a reação vertical  $Rv_1$  devido à solicitação da ponte e carregamento distribuído  $p$ . O carregamento distribuído ocorre devido ao peso próprio da viga e outros acessórios apoiados sobre ela.

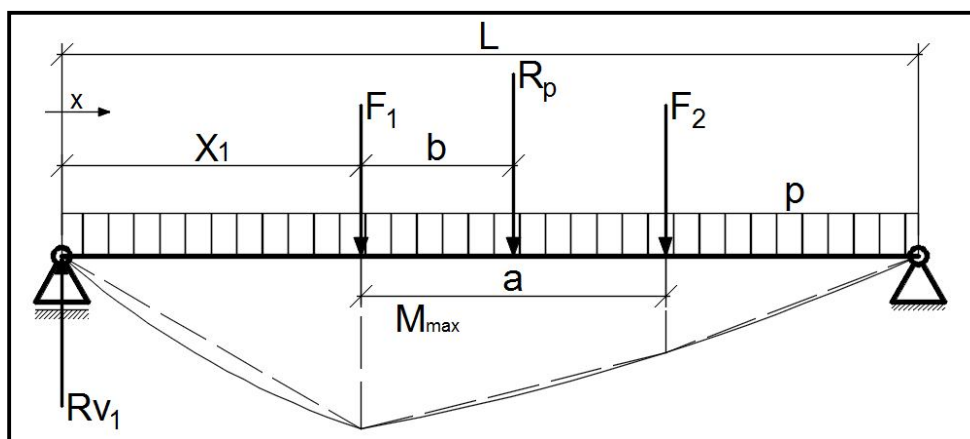


Figura 2.5: Trem-tipo de ponte rolante posicionado sobre viga de rolamento para ocorrência do momento fletor máximo.

Na mesma figura é mostrada a resultante  $R_p$ , soma das forças  $F_1$  e  $F_2$ . Na maioria dos casos, a intensidade destas forças é igual, contudo, pode ocorrer de uma delas ter maior módulo. A distância entre a resultante e a força de maior módulo, se houver, é mostrada na figura como “b”. O momento calculado à esquerda do ponto de atuação força  $F_1$  pode ser expresso pela equação (2.1).

$$M(X_1) = M_{\max} = R_{V1}X_1 - M_C = (F_1 + F_2) \frac{(L - X_1 - b)X_1}{L} + \frac{pL}{2} X_1 - M_C \quad (2.1)$$

Sendo:

$M_c$  o momento devido a  $p$ , dado por:  $M_c = \frac{p(X_1)^2}{2}$ ;

$M_{\max}$  o momento fletor máximo devido ao carregamento aplicado;

A carga distribuída é composta basicamente pelo peso próprio da viga de rolamento e, pela sua ordem de grandeza em relação à carga içada, é possível desprezar sua contribuição para o momento fletor total. Com essa hipótese, derivando a expressão (2.1) em relação a  $x$  e anulando a equação resultante, encontra-se a posição onde ocorre o máximo momento fletor, resultando em (2.2).

$$\frac{dM(x)}{dx} = (F_1 + F_2) \frac{(L - 2X_1 - b)}{L} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{L - b}{2} \quad (2.2)$$

Conhecendo a posição crítica do trem-tipo sobre a viga, é necessário a seguir determinar os valores das forças aplicadas pela ponte rolante. Neste momento, deve-se recorrer ao catálogo do fabricante, no qual são informados os valores característicos destas forças, e aos códigos e normas técnicas, nos quais são fornecidos os coeficientes de impacto para “transformar” as forças dinâmicas em forças estáticas equivalentes.

Os códigos e normas podem, eventualmente, adotar valores e critérios diferentes para os coeficientes de impacto e, neste caso, cabe ao projetista ou engenheiro determinar qual valor adotar e a sua justificativa em cada caso. No presente estudo é feita uma breve comparação entre os seguintes códigos:

- (1) American Society of Civil Engineers: Minimum Design Loads for Building and Other Structures - ASCE/SEI 7-10 (2010);
- (2) Norma Brasileira ABNT NBR 8800:2008 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios - ABNT NBR 8800:2008 (2008);
- (3) Association of Iron and Steel Engineers: Technical Report no. 13 – Guide for Design and Construction of Mill Buildings - AISE n13 (2003);
- (4) Eurocode 1: Actions on structures - Part 3: Actions induced by cranes and machinery - EN 1991-3:2006;

#### 2.1.4.1.1 Forças verticais - ASCE/SEI 7-10 (2010)

A ASCE/SEI 7-10 (2010) em seu item “4.9.3 Impacto da força vertical” (tradução nossa) estabelece que a força vertical máxima seja majorada em 25% para pontes rolantes comandadas por cabine e em 10% se forem operadas por controle pendente. Esta diferença se deve ao fato de que no primeiro caso as forças inerciais são maiores, decorrente da disposição do conjunto cabine e ponte rolante. A figura 2.6 mostra uma ponte rolante operada por cabine.



**Figura 2.6:** Ponte rolante operada por cabine.

Fonte: <http://www.altaindustrial.com.br/Portugues/conteudo/144/0/pontes-rolantes.html> (acessado em 19/07/2015 às 17h38min).

#### 2.1.4.1.2 Forças verticais - ABNT NBR 8800:2008 (2008)

A norma brasileira ABNT NBR 8800:2008, em seu item B.4.4 Pontes rolantes, segue a mesma recomendação do ASCE/SEI 7-10. A diferença é que inclui as pontes rolantes operadas por controle remoto na mesma categoria que as operadas por controle pendente, isto é, utiliza-se a majoração de 10%.

#### 2.1.4.1.3 Forças verticais - AISE n13 (2003)

Outros documentos que auxiliam o projetista a elaborar um projeto consistente, tanto no aspecto econômico quanto de segurança, são os Technical Reports elaborados pela Association of Iron and Steel Engineers<sup>3</sup> (AISE). A AISE n13 fornece recomendações para o projeto de edifícios industriais, incluindo detalhes para execução das estruturas de suporte para pontes rolantes. A tabela 2.2 reproduz os valores de majoração segundo as recomendações da AISE n13.

**Tabela 2.2** – Valores de majoração: Força vertical dinâmica AISE n13:2003.

Ponte Rolante (Utilização)	Majoração
Edifício industrial (em geral)	25%
Edifício de fundição	25%
lçamento por meio de caçambas	25%
lçamento por dispositivos magnéticos	25%
lçamento de lingotes para reaquecimento antes da laminação	25%
Remoção dos lingotes dos moldes (conhecida como estripador)	25%
Utilizada em sistemas de armazenagem tipo “rack” (prateleiras)	25%
Utilizada em manutenção de casa de máquinas	20%

Fonte: AISE n13(2003). Adapta de “Tabela 3.2 Impacto Vertical, Impacto Lateral e Tração” (tradução nossa).

<sup>3</sup> Em 2004 a Association of Iron and Steel Engineers (AISE) e The Iron and Steel Society (ISS) uniram-se dando origem a Association for Iron & Steel Technology (AIST).



De maneira geral, a recomendação é de majoração de 25% para as pontes rolantes. A exceção é a ponte para manutenção de casas de máquina, cuja majoração é de 20%. Se a ponte for operada por controle pendente, a majoração é feita com o acréscimo de 10% da força vertical dinâmica. Esta recomendação aparece em nota subsequente à tabela 3.2 da AISE n13.

#### 2.1.4.1.4 Forças verticais - EN 1991-3:2006

A norma europeia, de maneira similar à AISE n13, é mais abrangente quanto à classificação das pontes rolantes. O EN 1991-3:2006 apresenta quatro diferentes coeficientes de majoração para as forças verticais, sendo que cada um é aplicado a um dos elementos do problema estrutural e sua determinação depende das características operacionais da ponte, tais como a capacidade nominal, velocidade de içamento da carga e alinhamento dos caminhos de rolamento da ponte.

A tabela 2.3 contém a denominação dos coeficientes de impacto e suas respectivas aplicações, enquanto a tabela 2.4 contém as especificações para determinação de seus valores e, finalmente, a tabela 2.5 fornece parâmetros auxiliares e seus valores a serem utilizados em conjunto com a tabela 2.4.

**Tabela 2.3 – Coeficientes de impacto - força vertical dinâmica (EN 1991-3:2006).**

Coeficiente e efeito dinâmico ao qual está relacionado	Aplicação em
$\varphi_1$ - Excitação da estrutura da ponte devido ao içamento da carga do solo	Peso próprio da ponte
$\varphi_2$ - Içamento da carga do solo	Carga içada
$\varphi_3$ - Liberação repentina da carga içada (aplicável a pontes com garras ou dispositivos magnéticos)	Carga içada
$\varphi_4$ - Deslocamento da ponte rolante sobre o trilho ou viga de rolamento	Peso próprio da ponte e carga içada

Fonte: EN 1991-3:2006. Adaptado de "Tabela 2.1 – Fatores dinâmicos  $\varphi_i$ " (tradução nossa).

**Tabela 2.4** – Valores dos coeficientes de impactos (EN 1991-3:2006)

Coeficiente	Valores e especificações
$\varphi_1$	$0,9 \leq \varphi_1 \leq 1,1$ sendo 0,9 e 1,1 , respectivamente, os valores limites inferior e superior para o pulso vibracional.
$\varphi_2$	$\varphi_2 = \varphi_{2,\min} + \beta_2 v_h$ $v_h$ é a velocidade constante de içamento da carga (m/s); $\varphi_{2,\min}$ e $\beta_2$ são tabelados e dados na tabela 2.5;
$\varphi_3$	$\varphi_3 = 1 - \frac{\Delta m}{m} (1 + \beta_3)$ $\Delta m$ é parcela da massa içada que é liberada de maneira repentina; $m$ é massa total içada; $\beta_3 = 0,5$ para pontes com garra ou mecanismo similar de liberação lenta; $\beta_3 = 1,0$ para pontes com dispositivo magnético ou mecanismo similar de liberação rápida;
$\varphi_4$	$\varphi_4 = 1,0$ desde que as tolerâncias para o alinhamento do caminho de rolamento sejam respeitadas como especificado em EN 1993-6. Caso contrário, o valor de deverá ser determinado com base em EN 13001-2.

Fonte: EN 1991-3:2006. Adaptado de “Tabela 2.4 – Fatores dinâmicos  $\varphi_i$  para forças verticais” (tradução nossa).

**Tabela 2.5** – Valores dos coeficientes  $\beta_2$  e  $\varphi_{2,\min}$ .

Classe da ponte Rolante	$\beta_2$	$\varphi_{2,\min}$
HC1	0,17	1,05
HC2	0,34	1,10
HC3	0,51	1,15
HC4	0,68	1,20

Fonte: EN 1991-3:2006. Adaptado de “Tabela 2.5 – Valores de  $\beta_2$  e  $\varphi_{2,\min}$ ” (tradução nossa).

Na tabela 2.5 a sigla HC vem do inglês “Hoisting class” que pode ser traduzida como “Classe de Elevação”. São quatro classes e a segregação considera

o mecanismo de elevação da talha e a utilização da ponte. A tabela completa para a classificação das pontes consta no Anexo B do EN 1991-3:2006.

A tabela 2.6 mostra a comparação entre os valores de majoração, de forma resumida, para a força vertical da roda da ponte. Na tabela não aparece a norma europeia, pois seria necessário especificar a ponte rolante em maiores detalhes. Analisando a tabela 2.6 é possível notar a convergência nos valores estimados para majoração das forças verticais.

**Tabela 2.6** - Valores de majoração para força vertical dinâmica - comparação.

Documento de referência	Ponte Rolante		
	Cabine	Controle pendente	Controle remoto
ASCE/SEI 7-10	25%	10%	---
ABNT NBR 8800:2008	25%	10%	10%
AISE n13	25%	10%	10%

O peso próprio da viga de rolamento, caminho de rolamento se houver e qualquer outro elemento que esteja apoiado sobre a viga são solicitações de natureza estática e não são majorados com os coeficientes de impacto.

#### 2.1.4.2 Forças horizontais

As forças horizontais durante a operação da ponte rolante podem atuar em duas direções: longitudinalmente e transversalmente à viga. Em ambos os casos, elas são aplicadas diretamente no ponto de contato da roda da ponte com a superfície sobre qual ela corre, podendo ser sobre trilho, barra chata ou ainda a própria viga.

#### 2.1.4.3 Forças horizontais longitudinais à viga de rolamento

As forças longitudinais são originadas da aceleração e frenagem da ponte. Sua intensidade não é alta e é estimada como uma parcela das forças verticais. Esta força tem pouca interferência no dimensionamento da viga e sua importância é maior no dimensionamento do sistema de para-choque da ponte e no contraventamento vertical do edifício, os quais não são escopo deste estudo e, por isso, a força longitudinal não será abordada em detalhe.

#### *2.1.4.4 Forças horizontais transversais à viga de rolamento*

As forças transversais, também denominadas de impacto lateral, têm diversas causas durante a operação da ponte. Entre elas, o içamento da carga, que não ocorre sempre em linha vertical, o impacto da roda da ponte sobre o trilho devido a aceleração e frenagem do trole, desalinhamento do caminho de rolamento e até mesmo desalinhamento da própria ponte. A intensidade do impacto lateral, como a força horizontal longitudinal, é expressa como parcela da força vertical aplicada pela roda da ponte rolante.

##### *2.1.4.4.1 Forças transversais - ASCE/SEI 7-10 (2010)*

O ASCE/SEI 7-10 recomenda no item “4.9.4 Força lateral” (tradução nossa) que o valor do impacto lateral seja tomado como 20% da soma da capacidade nominal da ponte, peso da talha e do trole se a fonte de energia do trole for elétrica.

##### *2.1.4.4.2 Forças transversais - ABNT NBR 8800:2008 (2008)*

A ABNT NBR 8800:2008 em seu item B.7.2 Forças horizontais, subitem a, divide o impacto lateral estimado de acordo com características da ponte e da edificação na qual ela está inserida. A primeira segregação é a consideração da

presença de cabine ou não. Se a ponte for operada por cabine, o valor estimado do impacto lateral será o maior dos seguintes valores:

- (1) 10% da soma da carga içada, peso do trole e demais dispositivos para içamento;
- (2) 5% da soma da carga içada, peso total da ponte, incluindo trole e dispositivos para içamento;
- (3) Uma porcentagem da carga içada, variável com as características da edificação ou finalidade da ponte, sendo:
  - (3) a. 15% da carga içada para edifícios em geral;
  - (3) b. Edifícios destinados à siderurgia ou nos quais condições específicas de operação exijam:
    - (3) b. i. 20% da carga içada para pontes em geral;
    - (3) b. ii. 50% da carga içada para pontes com caçamba ou dispositivos magnéticos para içamento e pontes de pátio de placas e tarugos;
    - (3) b. iii. 100% da carga içada para pontes de forno-poço;
    - (3) b. iv. 100% da soma do peso do lingote e da lingoteira para ponte estripadora;

Se o mecanismo de operação da ponte for controle pendente ou remoto, o impacto lateral deve ser tomado como 10% da soma da carga içada, peso do trole e dispositivos necessários para içamento. A carga içada deve ser considerada como a capacidade nominal da ponte rolante em todos os casos.

A especificação mais abrangente da estimativa do valor do impacto lateral vai de encontro com o melhor dimensionamento da estrutura, buscando a maximização da compatibilidade entre segurança e economia.

#### 2.1.4.4.3 Forças transversais - AISE n13 (2003)

O valor do impacto lateral deve ser escolhido como o máximo entre as seguintes hipóteses:

- (1) Porcentagem da carga içada pela ponte conforme tabela 2.7.

**Tabela 2.7 – Impacto lateral em função da utilização da ponte rolante (AISE n13).**

Ponte Rolante (utilização)	Impacto lateral
Edifício industrial (em geral)	40%
Edifício de fundição	40%
Içamento por meio de caçambas	100%
Içamento por dispositivos magnéticos	100%
Içamento de lingotes para reaquecimento antes da laminação	100%
Remoção dos lingotes dos moldes (conhecida como estripador)	100%
Utilizada em sistemas de armazenagem tipo “rack” (prateleiras)	200%
Utilizada em manutenção de casa de máquinas	30%

Fonte: AISE n13 (2003). Adaptado de “Tabela 3.2 Impacto da ponte, impacto lateral e forças de tração” (tradução nossa).

- (2) 20% da soma do peso da carga içada e trole. Para pontes utilizadas em sistemas de armazenagem tipo “rack” (prateleiras) deve ser considerado 40% da soma do peso da carga içada, trole e do braço rígido.
- (3) 10% da soma do peso da carga içada e da ponte. Para pontes utilizadas em sistemas de armazenagem tipo “rack” (prateleiras) deve ser considerado 15% da soma do peso da carga içada, trole e do braço rígido.

A AISE n13 recomenda valores elevados para o impacto lateral, sendo que em alguns casos ele vale o dobro da carga içada. Como documento normativo, a ASCE/SEI 7-10 é imposição legal referenciada pelo International Building Code (ICC) e prevalece sobre a AISE n13 (FISHER, 2004). Porém, as diretrizes da AISE n13 podem ser adotadas se houver recomendação justificada. Fisher (2004) fez uma comparação sucinta entre a diferença do valor estimado para o impacto lateral

utilizando o ASCE/SEI 7<sup>4</sup> e o AISE n13. A tabela 2.8 mostra uma adaptação desta comparação, na qual foi incluído o critério da ABNT NBR 8800:2008.

**Tabela 2.8:** Valor do impacto lateral – comparação

Características da ponte rolante		
Ponte de edifício industrial com capacidade nominal de 100 toneladas (A)		
Massa do trole, incluindo talha e demais dispositivos de içamento, 30 toneladas (B)		
Massa da composição ponte, trole e demais dispositivos de içamento de 78,5 toneladas (C)		
Documento de referência	Maior valor entre	Impacto lateral (kN)
ASCE/SEI 7-10	0,20 (A+B)	255,06
	(1) 0,40 (A)	392,40 (Valor adotado)
AISE n13	(2) 0,20 (A+B)	255,06
	(3) 0,10 (A+C)	175,11
	(1) 0,10 (A+B)	127,53
ABNT NBR 8800:2008	(2) 0,05 (A+C)	87,55
	(3) 0,15 (A)	147,15 (Valor adotado)

Fonte: Adaptado de Fisher (2004).

Percebe-se que, para a mesma ponte rolante, o valor do impacto lateral poderia ser adotado como 255 kN ou 392 kN ou 147 kN em função do código vigente e cada um destes valores levaria a uma solução estrutural com custo e benefícios diferentes, ficando evidente que a determinação do impacto lateral não é bem definida do ponto de vista normativo.

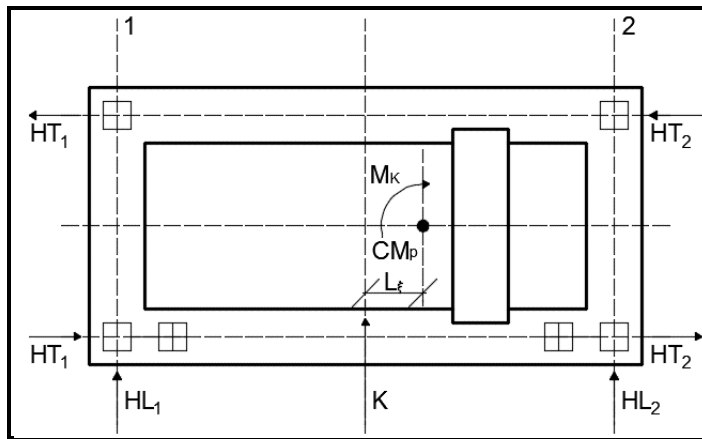
#### 2.1.4.4.4 Forças transversais - EN 1991-3:2006 (2006)

Segundo a norma europeia, o impacto lateral atua sobre a viga de rolamento equilibrando o momento originado pelas forças horizontais longitudinais de tração

<sup>4</sup> FISHER utilizou a ASCE 7 de 2002. A revisão ASCE/SEI 7-10 de 2010 apresenta os mesmos critérios para determinação do impacto lateral, portanto, a comparação ainda é válida.

( $M_K$ ). Admitindo-se a hipótese de que as forças longitudinais  $HL_1$  e  $HL_2$  são distribuídas igualmente em cada viga de rolamento, a linha de ação da força de tração total ( $K$ ) atua fora do centro de massa da ponte ( $CM_P$ ) quando o trole está desalinhado com o eixo longitudinal da ponte (figura 2.7). Denominando como  $L_\xi$  a distância entre a linha de ação da força de tração e o centro de massa da ponte, tem-se a equação (2.3):

$$M_K = KL_\xi \quad (2.3)$$



**Figura 2.7:** Momento devido à força de tração e impacto lateral sobre a viga de rolamento para equilíbrio da estrutura. Fonte: Adaptado de EN 1991-3:2006.

O impacto lateral (HT) deve ser distribuído em cada uma das vigas de acordo com as equações (2.4) e (2.5) para que ocorra o equilíbrio do sistema.

$$HT_1 = \varphi_5 \xi_2 \frac{M_K}{a} \quad (2.4)$$

$$HT_2 = \varphi_5 \xi_1 \frac{M_K}{a} \quad (2.5)$$

Sendo:

$\varphi_5$  o coeficiente dinâmico dado de acordo com a tabela 2.9;

$\xi_1$  e  $\xi_2$  parâmetros para distribuição do impacto lateral dados por (2.6) e (2.7):

$$\xi_1 = \frac{\sum F_{r,\max}}{\sum F_r} \quad (2.6)$$

$$\xi_2 = 1 - \xi_1 \quad (2.7)$$



**Tabela 2.9** – Coeficiente  $\varphi_5$  - EN 1991-3:2006.

Valor do Coeficiente $\varphi_5$	A ser usado em
$\varphi_5 = 1,0$	Sistemas onde ocorram forças centrífugas
$1,0 \leq \varphi_5 \leq 1,5$	Sistemas onde as forças mudem suavemente
$1,5 \leq \varphi_5 \leq 2,0$	Sistemas onde mudanças súbitas podem ocorrer
$\varphi_5 = 3,0$	Sistemas com considerável coice ao iniciar a operação

Fonte: EN 1991-3:2006. Adaptado de "Tabela 2.6 – Fator dinâmico  $\varphi_5$ " (tradução nossa).

$$\sum F_r = \sum F_{r,\max} + \sum F_{(r,\max)} \quad (2.8)$$

Sendo:

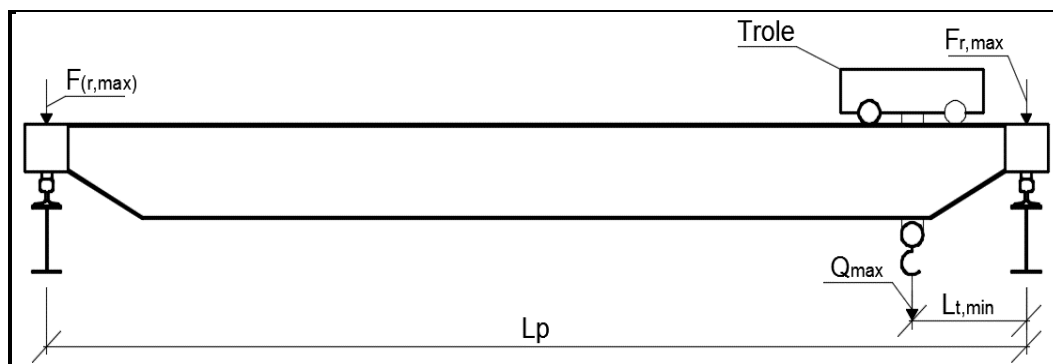
$F_{r,\max}$  a força vertical máxima, por roda da ponte, atuando sobre a viga à direita;

$F_{(r,\max)}$  a força vertical complementar, por roda da ponte, atuando sobre a viga à esquerda;

$\sum F_{r,\max}$  a soma das forças verticais máximas;

$\sum F_{(r,\max)}$  a soma das forças verticais complementares;

O somatório de forças indicado na equação (2.8) é obtido com o trole na posição da figura 2.8.



**Figura 2.8:** Trole com carga máxima içada e o mais próximo possível de uma das vigas de rolamento ( $L_{t,\min}$ ). Fonte: Adaptado de EN 1991-3:2006.

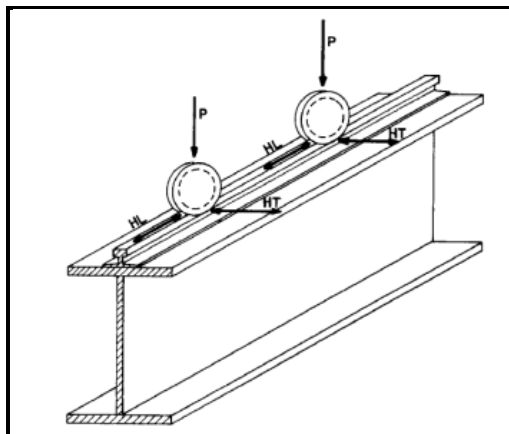
A distância entre a linha de ação da força de tração e o centro de massa da ponte é dada conforme a equação (2.9):

$$L_\xi = (\xi_1 - 0,5)L_p \quad (2.9)$$

De acordo com o equacionamento do impacto lateral fornecido pelo EN 1991-3:2006 e pela posição do trole na figura 2.8, o maior impacto lateral é esperado na viga de rolamento à direita. Se a posição do trole fosse mais próxima da outra viga, então o maior impacto lateral ocorreria sobre ela. Em outras palavras, a norma europeia faz a distribuição do impacto lateral de acordo com a posição do trole. Os demais códigos analisados recomendam que se a rigidez transversal horizontal do edifício for diferente em cada lado da ponte rolante, deve ser feita a distribuição proporcional do impacto lateral sobre as vigas de rolamento sem, contudo, entrar em maiores detalhes.

#### 2.1.4.5 Considerações gerais sobre as forças atuantes na viga

Mesmo que os códigos apresentados concordem sobre quais as forças atuam sobre a viga de rolamento, percebe-se que não necessariamente eles acordam sobre a intensidade de cada uma das solicitações, sendo que um mesmo código pode apresentar um desenvolvimento mais elaborado para uma determinada força e uma abordagem mais sucinta para outra. A figura 2.9 mostra, de maneira esquemática, as forças verticais e horizontais atuando sobre a viga de rolamento. As forças verticais, já majoradas pelos coeficientes de impacto, são designadas pela letra P.



**Figura 2.9:** Forças atuantes sobre a viga de rolamento. Fonte: Bellei (2000).

### 2.1.5 Solicitações na seção transversal da ponte

Definidas as forças que atuam na viga de rolamento é importante entender também a posição de cada uma delas em relação à seção da viga. A figura 2.10 mostra o caso geral das forças descritas atuando sobre a viga. As variáveis geométricas do perfil são as que seguem:

$b_{fi}$  a largura da mesa inferior;

$b_{fs}$  a largura da mesa superior;

$t_w$  a espessura da alma;

$t_{fi}$  a espessura da mesa inferior;

$t_{fs}$  a espessura da mesa superior;

$d$  a altura total do perfil;

CG o centro geométrico da seção;

CS o centro de cisalhamento da seção;

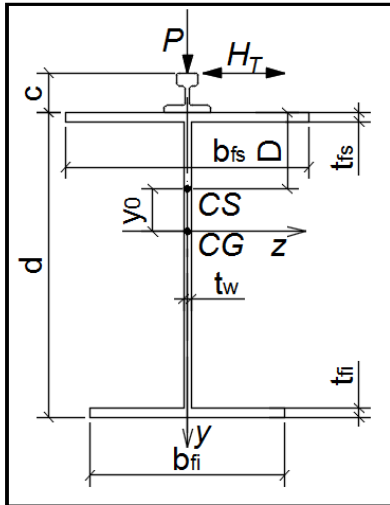
$y_0$  a distância entre o centro de cisalhamento e o centro geométrico da seção;

$C$  a altura do trilho ou outro dispositivo sobre o qual corre a roda da ponte rolante, se houver;

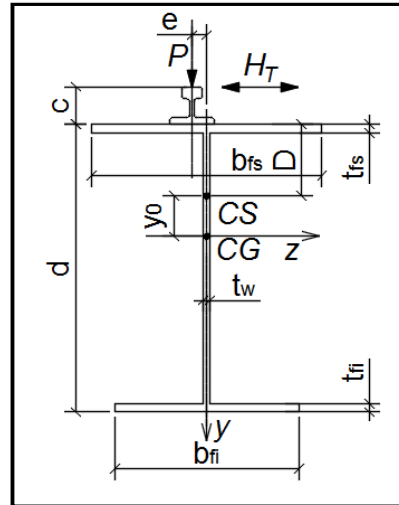
$D$  a distância do Centro de Cisalhamento da seção abaixo do topo da mesa superior;

A situação representada na figura 2.10 é a ideal de projeto e, na prática, ela raramente ocorre. Devido às imperfeições na fabricação dos elementos e na montagem da estrutura é esperado que ocorra um desalinhamento da força vertical com o eixo vertical da viga. O próprio deslocamento da ponte pode causar desalinhamentos que atrapalhem a operação e estas condições são verificadas em manutenções periódicas, preditivas e preventivas, garantindo a segurança dos usuários e estrutura. A figura 2.11 representa a condição de operação da ponte supondo que exista uma excentricidade do trilho.

A força vertical, já majorada pelo coeficiente de impacto, atua fora do eixo vertical da viga, pois existe um desalinhamento do trilho em relação ao perfil. Esta excentricidade pode ser ainda maior, caso exista também um desalinhamento entre a roda da ponte e o trilho.



**Figura 2.10:** Forças atuando na seção transversal da viga de rolamento sem excentricidade da força vertical.



**Figura 2.11:** Forças atuando na seção transversal da viga de rolamento com excentricidade da força vertical.

A excentricidade influencia a intensidade do impacto lateral de maneira que o “desalinhamento do trilho é [...] o aspecto mais crítico no desenvolvimento do alto impacto lateral e das tensões transversais nas vigas de rolamento” (FISHER, 2004, p. 67. Tradução nossa). Para reduzir as excentricidades são impostos limites construtivos à viga de rolamento e seus dispositivos auxiliares.

#### 2.1.5.1 Excentricidade do trilho e força vertical

A AISE n13 fornece dois limitantes para a excentricidade do trilho, sendo um o desalinhamento deste com a alma do perfil e o outro a distância entre centros do par de trilhos. É imposto que os “trilhos de pontes rolantes sejam centrados sobre a alma das vigas de rolamentos sempre que possível. Em nenhum caso a excentricidade do trilho deve ser maior do que  $3/4$  da espessura da alma da viga” (AISE n13, 2003, p. 29, tradução nossa). É dito ainda que a distância entre os centros dos trilhos “não exceda  $\pm 1/4$  de polegada [6.35 mm] com base nas dimensões mostradas nos desenhos ajustados a 64°F [17,78°C]” (AISE n13, 2003, p. 29, tradução nossa). A figura 2.12 mostra dois trilhos com as tolerâncias executivas impostas pela AISE n13.

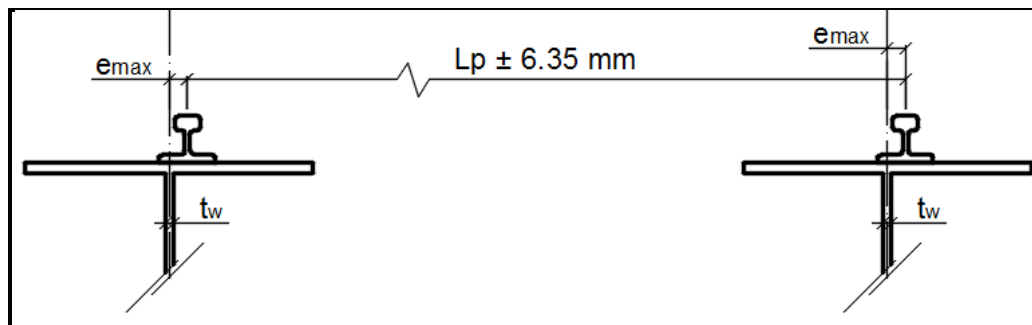


Figura 2.12: Tolerâncias construtivas entre caminhos de rolamento segundo AISE n13.

Considerando a sobreposição das condições limitantes das excentricidades e supondo que os trilhos da ponte estejam posicionados paralelamente, a excentricidade máxima ( $e_{max}$ ) do ponto de vista construtivo é o maior valor entre:

$$e_{max} = \begin{cases} \frac{3}{4}t_w \\ 6.35\text{mm} \end{cases} \quad (2.10)$$

A norma americana que estipula as limitações construtivas para os edifícios industriais é Standard Mill Practice. Ela não apresenta uma recomendação para a limitação das excentricidades entre o trilho e a viga ou forças aplicadas sobre o trilho. Deixa a instrução de que sejam seguidas as imposições da AISE n13.

A EN 1991-3:2006 indica a tolerância da excentricidade da força da roda sobre o boleto do trilho (figura 2.13). Essa excentricidade é tomada com o valor máximo de 25% da largura do boleto ( $b_r$ ).

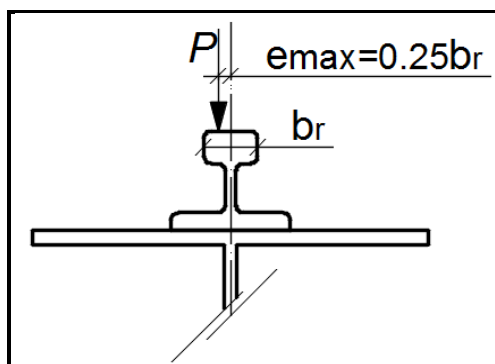


Figura 2.13: Força sobre o trilho. Fonte: Adaptado de EN 1991-3:2006.

Já em outra das normas europeias, o Eurocode 3: Design of steel structures - Part 6: Crane supporting structures (EN 1993-6:2007), a imposição é que a excentricidade da força vertical seja menor ou igual a metade da espessura da alma do perfil utilizado para viga de rolamento.

Sobrepondo as duas condições, a máxima excentricidade aceita pela norma europeia é o maior valor entre:

$$e_{\max} = \begin{cases} 0.25b_r \\ \frac{1}{2}t_w \end{cases} \quad (2.11)$$

São dois tipos de excentricidade vertical que podem ocorrer, porém a norma europeia não faz consideração sobre o deslocamento do trilho em relação à viga, enquanto a AISE n13 não faz consideração sobre a excentricidade da roda da ponte em relação a boleto do trilho. A norma brasileira não apresenta um critério limite para desalinhamento em nenhum dos dois casos.

Em qualquer caso é fácil perceber que a excentricidade vertical é variável ao longo da viga e que a “fixação dos trilhos deve ser completamente ajustável e ainda manter o trilho alinhado. Uma vez que o trilho pode ficar desalinhado, manutenções regulares são fundamentais para corrigir o problema” (FISHER, 2004, p 67, tradução nossa).

#### 2.1.5.2 Centro de cisalhamento da seção da viga de rolamento

Sabe-se que o centro de cisalhamento de seções com dois eixos de simetria coincide com o local do centro geométrico e que, para as seções monossimétricas, encontra-se contido no eixo de simetria. Conclui-se que a força vertical atua, na maioria dos casos, fora do centro de cisalhamento devido à excentricidade apresentada no item 2.1.5.1.

Por sua vez, o impacto lateral atua perpendicularmente ao eixo vertical da seção no ponto de contato da roda com o trilho e não havendo trilho, a atuação da força ocorrerá no topo da mesa superior do perfil. Para o perfil I, o centro de cisalhamento está contido no plano da alma e entre as mesas, tenha a seção dupla ou monossimetria. Então, o impacto lateral atua também fora do centro de cisalhamento da seção.

As forças produzem torção em torno do eixo longitudinal da viga e as duas parcelas do momento torçor podem atuar no mesmo sentido, maximizando a sollicitação, ou em sentidos contrários, reduzindo a sollicitação. A sobreposição do momento fletor e torçor, aliadas as restrições de giros nos apoios, leva a viga de rolamento a ser sollicitada pelo fenômeno da flexo-torção. O estudo da flexo-torção é elaborado com base na *Teoria de Vlasov* para barras de seção aberta e paredes delgadas.

## 2.2 CONCEITOS BÁSICOS DA FLEXO-TORÇÃO

Existem três condições para que a torção atuante sobre um elemento estrutural seja considerada como torção livre, também denominada de Torção de Saint-Venant. As três condições são:

- (1) A seção transversal da barra ao longo de seu comprimento é constante (barra prismática);
- (2) Não ocorre variação do momento torçor ( $M_t$ ) sollicitante ao longo do comprimento da barra;
- (3) Ausência de vínculos que possam impedir, completa ou parcialmente, os deslocamentos longitudinais da barra;

Quando uma ou mais destas hipóteses não é respeitada ocorre o fenômeno da flexo-torção, também conhecida como torção não uniforme. Os perfis I monossimétricos estudados neste trabalho são barras prismáticas, logo estão de acordo com a condição (1). O momento torçor sollicitante varia ao longo do comprimento da viga, portanto, a condição (2) não é respeitada.

A rotação da seção transversal em torno do seu centro de cisalhamento causa deslocamentos longitudinais, aqui representados pela letra  $u$ , denominados de empenamento. Estes deslocamentos foram observados primeiramente por Bach<sup>5</sup> (1910 apud SEELY; PUTNAM; SCHWALBE, 1930, p. 8) que ao realizar ensaios em

---

<sup>5</sup> BACH, C. Von . Versuche iiber die tatsachliche Widerstandsfahigkeit von Balken mit, *formigem* Querschnitt. Z. VDI. 1910.

vigas sujeitas a duas forças transversais posicionadas nos terços do vão, observou alongamentos diferenciais nas extremidades das mesas, tanto superior quanto inferior. Bach não foi capaz de explicar a razão deste fenômeno que não correspondia a teoria clássica de torção. É possível demonstrar que a relação entre o giro da seção por unidade de comprimento (equação (2.12)) e o empenamento é como representado pela equação (2.13).

$$\phi' = \frac{d\phi}{dx} \quad (2.12)$$

$$u = \omega\phi' \quad (2.13)$$

Sendo:

$\phi$  a função que descreve o giro da seção ao longo do comprimento da viga;

$\phi'$  a derivada primeira da função giro e representa o giro relativo entre duas seções da viga;

$u$  o empenamento da seção;

$\omega$  a área setorial da seção;

Dado que na flexo-torção a derivada do giro não é constante ao longo do eixo longitudinal da barra, os empenamentos também variam de seção para seção.

### 2.2.1 Tensões devido à flexo-torção

A compatibilização dos deslocamentos longitudinais é realizada através de tensões normais a seção transversal, isto é, tensões longitudinais (equação (2.14)). Estas tensões não apresentam força resultante e compõem uma sollicitação autoequilibrada denominada em Vlasov (1961) como bimomento.

$$\sigma_x = E^* \omega\phi'' \quad (2.14)$$

Sendo:

$\sigma_x$  a tensão longitudinal, aqui convencionada como eixo  $x$ ;



$\phi''$  a derivada segunda da função que descreve o giro da viga;

$E^*$  o módulo de elasticidade longitudinal reduzido, calculado conforme a expressão (2.15);

$$E^* = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (2.15)$$

Sendo:

$E$  o módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young);

$\nu$  o coeficiente de Poisson;

Na prática é permitido desprezar o valor  $\nu^2$  por ser muito pequeno em relação à unidade (para o aço  $\nu^2 = 0,3^2 = 0,09$ ). Além disso, desprezar  $\nu^2$  equivale à hipótese de que as tensões normais à linha de esqueleto da seção são nulas, atuando apenas tensões longitudinais na barra, o que é uma hipótese razoável para a maioria dos casos. Então, utiliza-se o módulo de elasticidade longitudinal na equação (2.15).

A equação da tensão longitudinal na flexo-torção é obtida por analogia com a tensão da flexão utilizando a correspondência entre  $y$  (ou  $z$ ) e  $\omega$  e, pela correspondência com o momento fletor, o bimomento ( $B_i$ ) é dado como a integral do produto das tensões longitudinais pela área setorial em toda a seção da viga (equação (2.16)).

$$B_i = \int_A \sigma_x \omega dA \quad (2.16)$$

Substituindo a equação da tensão longitudinal, (2.14), na equação (2.16) e lembrando que o produto ( $E \phi''$ ) é constante na seção, tem-se a expressão (2.17).

$$B_i = E \phi'' \int_A \omega^2 dA \quad (2.17)$$

A integral na expressão (2.17) é denominada Momento de Inércia Setorial. É indicada por  $I_w$  na literatura alemã e conhecida como Integral de empenamento. Para

a literatura brasileira, o que inclui as normas técnicas da ABNT, utiliza-se a denominação de constante de empenamento ( $C_w$ ). Reescrevendo a equação (2.17) com estas considerações ela assume a forma de (2.18).

$$B_i = E \phi'' C_w \quad (2.18)$$

Finalmente, pode-se expressar a tensão longitudinal devido ao bimomento segundo a equação (2.19).

$$\sigma_x = \frac{B_i}{C_w} \omega \quad (2.19)$$

A tensão devido ao bimomento deve ser somada as demais tensões atuantes no elemento estrutural. Lembrando que a força longitudinal não está sendo considerada, a tensão longitudinal total é dada pela equação (2.20).

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z}{I_z} y \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{B_i}{C_w} \omega \quad (2.20)$$

Sendo:

$M_z$  o momento fletor em torno do eixo z;

$M_y$  o momento fletor em torno do eixo y;

$I_z$  o momento de inércia da seção em torno do eixo z;

$I_y$  o momento de inércia da seção em torno do eixo y;

Para determinar a parcela da tensão da flexo-torção no problema da viga de rolamento é necessário determinar o bimomento atuante. Por se tratar de uma solitação autoequilibrada, o diagrama do bimomento não pode ser construído através das maneiras aplicadas aos momentos fletores, esforços cortantes e normais.

### 2.2.2 Equação do bimomento e giro da seção

O momento torçor total atuante no elemento estrutural é composto pela soma das parcelas do momento torçor livre ( $M_l$ ) e da flexo-torção ( $M_{ft}$ ). A torção livre é expressa em função do giro relativo entre seções, como mostra a equação (2.21), enquanto a parcela da flexo-torção é função da derivada primeira do bimomento, mostrado na equação (2.22).

$$M_l = GJ\phi' \quad (2.21)$$

$$M_{ft} = -B'_i = -EC_w\phi'' \quad (2.22)$$

Sendo:

G o módulo de elasticidade transversal do aço;

J o momento de inércia à torção da seção;

Somando a equação (2.21) e (2.22) determina-se o momento torçor total (equação (2.23)) em função das constantes geométricas da seção ( $C_w$  e J) e das propriedades físicas do material (E e G), tendo como variável apenas as derivadas da função giro ( $\phi$ ).

$$M_t = GJ\phi' - B'_i = GJ\phi' - EC_w\phi'' \quad (2.23)$$

Derivando a equação (2.23) em relação a x e substituindo nesta nova equação a expressão (2.18) reorganizada para isolar  $\phi''$ , obtém-se a expressão (2.24).

$$\frac{dM_t}{dx} = m = GJ \frac{B_i}{EC_w} - B'_i \quad (2.24)$$

Sendo:

m o momento de torção distribuído;

O parâmetro m permite considerar casos práticos em que a carga distribuída atua fora do centro de cisalhamento da seção. Neste estudo serve para representar o peso próprio do trilho desalinhado com a alma do perfil da viga. Além do momento de torção distribuído, utiliza-se o parâmetro composto pelas variáveis geométricas e

físicas do problema, denominado de comprimento de comparação. Ele é representado pela letra  $r$  e definido como mostra a expressão (2.25).

$$r = \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}} = \sqrt{2(1+\nu) \frac{C_w}{J}} \quad (2.25)$$

Com os parâmetros  $m$  e  $r$  é possível reorganizar a equação (2.24) para representar um problema de equação diferencial com coeficientes constantes (equação (2.26)).

$$r^2 B_i'' - B_i = -r^2 m \quad (2.26)$$

Utilizando recursos matemáticos para encontrar a solução da equação diferencial (2.26), determina-se o bimomento em função dos parâmetros  $m$  e  $r$  (equação (2.27)).

$$B_i = \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 m \quad (2.27)$$

Sendo:

$\alpha_1, \alpha_2$  constantes de integração que dependem das condições de contorno de cada problema;

Outra abordagem do problema permite determinar as tensões oriundas da flexo-torção utilizando a equação do giro do elemento. Derivando a equação (2.18) duas vezes, rearranjando-a e substituindo em (2.24), tem-se a expressão (2.28).

$$m = GJ\phi'' - EC_w\phi^{iv} \quad (2.28)$$

Dividindo os dois lados da igualdade (2.28) pelo produto  $(GJ)$ , introduzindo o comprimento de comparação e reorganizando os membros, resulta:

$$-\frac{m}{GJ} = r^2\phi^{iv} - \phi'' \quad (2.29)$$

A expressão (2.29) é outra equação diferencial linear com coeficientes constantes e sua solução é tal que:

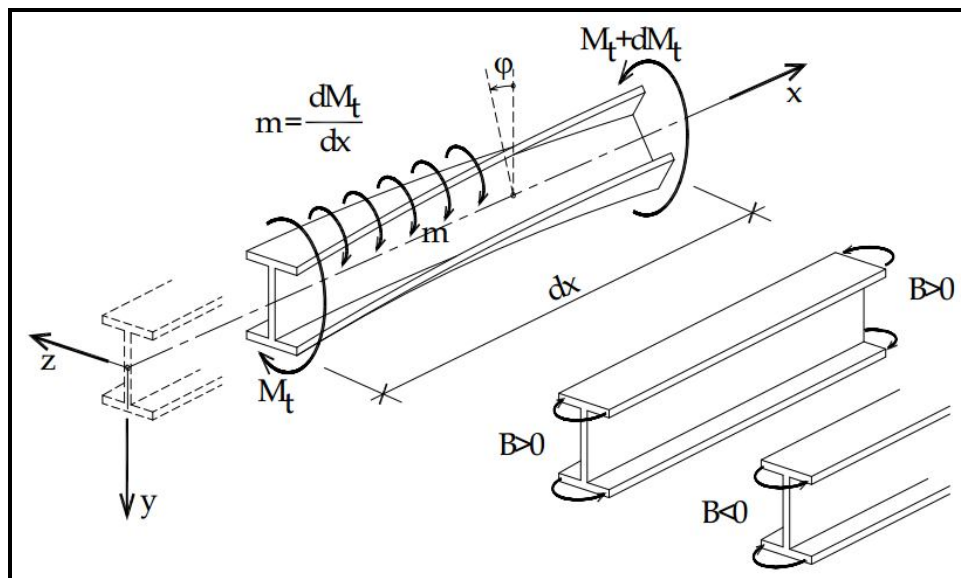
$$\phi = \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + \alpha_3 x + \alpha_4 + \frac{mx^2}{2GJ} \quad (2.30)$$

Sendo:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  constantes de integração que dependem das condições de contorno de cada problema;

Para cada problema analisado, conhecendo as condições de contorno, é possível encontrar o valor do bimomento atuando ao longo do comprimento da viga, seja de maneira direta com a equação (2.27), seja de maneira indireta através do giro da viga com a equação (2.30). O cálculo das tensões devido ao bimomento é um tanto quanto trabalhoso, não sendo usual a sua utilização durante o projeto.

É necessário definir os sentidos considerados positivos e negativos das solicitações do problema da flexo-torção. A figura 2.14 mostra que, olhando no sentido positivo do eixo x, o momento de torção distribuído tende a fazer a seção girar no sentido horário e os giros positivos são dados no sentido anti-horário. Na mesma figura são dados os sentidos positivos para o bimomento e momento torçor.

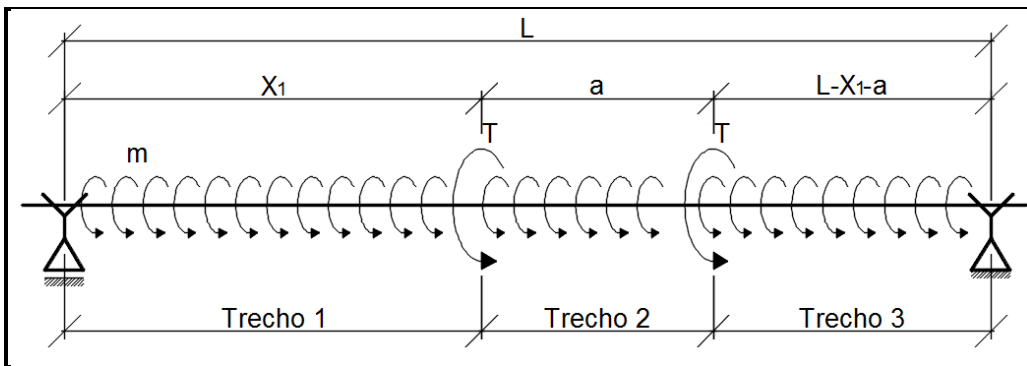


**Figura 2.14:** Sentido positivo para  $M_t$ ,  $B$ ,  $m$  e  $\phi$ . Fonte: Mori; Neto (2009).

### 2.2.3 Equacionamento do problema da viga de rolamento pela teoria da flexo-torção

A figura 2.15 mostra o esquema estático das ações solicitantes sobre uma viga de rolamento biapoiada e com vínculos de garfos em ambas as extremidades. Neste esquema estático foram omitidos os momentos fletores, pois não são de interesse para cálculo do bimomento. Atuando sobre a viga, tem-se:

- (1) Momento de torção distribuído ( $m$ );
- (2) Dois momentos torçores concentrado ( $T$ ), sendo o primeiro aplicado a uma distância  $X_1$  do apoio à esquerda e segundo a uma distância  $X_2$  do mesmo apoio, tal que  $X_2 = X_1 + a$ .



**Figura 2.15:** Esquema estático de viga para cálculo do bimomento.

A posição de aplicação dos momentos torçores coincide com a posição do trem-tipo da ponte rolante para o máximo momento fletor, conforme determinado no item 2.1.4.1. As solicitações são determinadas em função das equações (2.31) e (2.32).

$$m = e(P_{TR}) \quad (2.31)$$

$$T = HT(C + D) + Pe \quad (2.32)$$

Sendo:

$P_{TR}$  o peso linear do trilho ou caminho de rolamento;

É necessário dividir o problema em três trechos e compatibilizar os deslocamentos, giros, bimomentos e as discontinuidades do momento torçor para resolver o problema estrutural. Denominando como  $B_{i1}$ ,  $B_{i2}$  e  $B_{i3}$  os bimomentos nos trechos 1, 2 e 3, respectivamente, sabe-se que:

- (1)  $B_{i1}(0) = 0$ , extremidade livre sem aplicação de forças;
- (2)  $B_{i3}(L) = 0$ , extremidade livre sem aplicação de forças;
- (3)  $B_{i1}(X_1) = B_{i2}(X_1)$ , continuidade do Bimomento;
- (4)  $B_{i2}(X_2) = B_{i3}(X_2)$ , continuidade do Bimomento;

Em relação aos deslocamentos e giros da seção, lembrando que a seção é formada por barra prismática, tem-se:

- (5)  $\phi_1(0) = 0$ , vínculo de garfo;
- (6)  $\phi_3(L) = 0$ , vínculo de garfo;
- (7)  $\phi_1(X_1) = \phi_2(X_1)$ , continuidade do giro da seção;
- (8)  $\phi_2(X_2) = \phi_3(X_2)$ , continuidade do giro da seção;
- (9)  $\phi'_1(X_1) = \phi'_2(X_1)$ , continuidade do empenamento da seção;
- (10)  $\phi'_2(X_2) = \phi'_3(X_2)$ , continuidade do empenamento da seção;

Comparando os momentos torçores nos pontos de salto, tem-se:

$$M_{t2} - M_{t1} = T = (-B'_{i2} + GJ\phi'_2) - (-B'_{i1} + GJ\phi'_1) \quad (2.33)$$

Integrando a equação (2.18), reorganizando-a e substituindo na equação (2.33), encontra-se a equação (2.34):

$$M_{t2} - M_{t1} = T = (-B'_{i2} + \frac{\int B_{i2} dx}{r^2}) - (-B'_{i1} + \frac{\int B_{i1} dx}{r^2}) \quad (2.34)$$

De maneira análoga, em  $(X_2)$ :

$$M_{t3} - M_{t2} = T = (-B'_{i3} + \frac{\int B_{i3} dx}{r^2}) - (-B'_{i2} + \frac{\int B_{i2} dx}{r^2}) \quad (2.35)$$

Com as 10 condições listadas e as equações (2.34) e (2.35) é possível determinar as equações de giros nos três trechos e, conseqüentemente, determinar as três equações do bimomento. A resolução do problema estrutural fornece as constantes de integração:

$$\alpha_1 = (Tr) \left[ \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) \right] + \alpha_9 \quad (2.36)$$

$$\alpha_2 = -r^2m \quad (2.37)$$

$$\alpha_3 = \text{Tr}^2\left(\frac{X_1 + X_2}{L} - 2\right) - \frac{r^2mL}{2} \quad (2.38)$$

$$\alpha_4 = r^4m \quad (2.39)$$

$$\alpha_5 = (\text{Tr})\cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \alpha_9 \quad (2.40)$$

$$\alpha_6 = (\text{Tr})\sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) - r^2m \quad (2.41)$$

$$\alpha_7 = \text{Tr}^2\left(\frac{X_1 + X_2}{L} - 1\right) - \frac{r^2mL}{2} \quad (2.42)$$

$$\alpha_8 = -(\text{Tr}^2)X_1 + r^4m \quad (2.43)$$

$$(2.44)$$

$$\alpha_9 = \frac{r^2m\left(\cosh\left(\frac{L}{r}\right) - 1\right) - \text{Tr}\left(\sinh\left(\frac{X_1}{L}\right) + \sinh\left(\frac{X_2}{L}\right)\right)\cosh\left(\frac{L}{r}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{r}\right)}$$

$$\alpha_{10} = (\text{Tr})\left(\sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) + \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right)\right) - r^2m \quad (2.45)$$

$$\alpha_{11} = \frac{\text{Tr}^2(X_1 + X_2)}{L} - \frac{r^2mL}{2} \quad (2.46)$$

$$\alpha_{12} = r^4m - \text{Tr}^2(X_1 + X_2) \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{\text{EC}_w} \left[ \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \frac{r^2mx^2}{2} \right]$$

$$(2.49)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\text{EC}_w} \left[ \alpha_5 \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_6 \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_7 x + \alpha_8 + \frac{r^2mx^2}{2} \right]$$



$$\phi_3 = \frac{1}{EC_w} \left[ \alpha_9 \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_{10} \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_{11}x + \alpha_{12} + \frac{r^2 mx^2}{2} \right] \quad (2.50)$$

Para determinar a tensão devido ao bimomento falta ainda a área setorial principal, a qual aparece na figura 2.16.

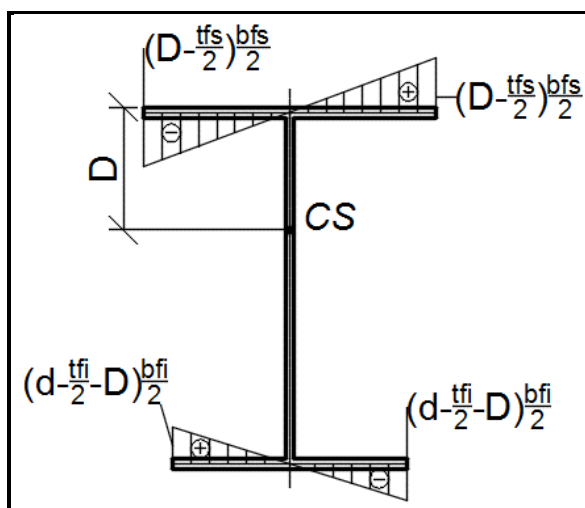


Figura 2.16: Área setorial de uma seção monossimétrica genérica.

Com todas as informações é possível determinar a tensão longitudinal devido ao bimomento atuante na viga de rolamento e avaliar a representatividade desta parcela na tensão longitudinal total. O memorial de cálculo para determinação das constantes de integração consta em maiores detalhes no apêndice A.

## 2.3 MOMENTO CRÍTICO DE FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO (FLT)

### 2.3.1 Breve histórico da análise da estabilidade lateral

Os códigos e normas que regem o dimensionamento de elementos estruturais são, em sua maioria, simplificações de equações mais complexas dos fenômenos reais em estruturas, pois cada problema é um caso particular da geometria da seção, intensidade, posição e natureza das ações e das restrições de deslocamento

nos apoios do elemento. Até certo ponto, é possível determinar com precisão algumas destas variáveis, enquanto outras são aproximadas por equações e tabelas que tentam, da melhor maneira, cobrir o maior número de casos possíveis e maximizar a relação segurança e economia da estrutura.

As primeiras propostas de estudo para perfis monossimétricos foram levantadas por Fairbairn, como dito anteriormente. Os experimentos eram empíricos e careciam de equacionamento matemático, sendo que este surgiu em 1899 quando, em estudos independentes, Prandtl e Michel deduziram as equações diferenciais que governam o fenômeno da flexão de vigas com seção delgada (SILVA, 1992). Nos anos que se seguiram, “a teoria geral para análise de elementos estruturais de seção aberta e paredes delgadas foi consolidada por Goodier [...], Timoshenko [...] e Vlasov.” (ANDERSON; TRAHAIR, 1972, p. 269, tradução nossa). Relacionado a estes estudos, as seções I bissimétricas simplesmente apoiadas foram amplamente avaliadas para vários carregamentos com diferentes geometrias.

Além do estudo da flexão, estudos envolvendo a compressão e torção dos elementos sofreram grande avanço nesse período. Para o caso da seção I duplamente simétrica, Timoshenko deduziu a equação diferencial geral da torção, sendo que o caso mais genérico já havia sido estudado por Wagner (1936) (SILVA, 1992).

“Em particular, a estabilidade lateral de pilares com seção bissimétrica foram explicadas pelo Efeito Wagner [...], no qual a torção do elemento causa tensões longitudinais [...] que adicionam um binário a seção.” (ANDERSON; TRAHAIR, 1972, p. 269, tradução nossa). Os estudos de Wagner (1936) avaliando a compressão excêntrica em cantoneiras, com abas iguais ou não e com abas enrijecidas ou não, o levaram a concluir que tensões longitudinais adicionais surgiam e, para equilíbrio do sistema, tensões cisalhantes, quando a seção iniciava a perda de estabilidade. As tensões normais à seção não apresentavam resultante e exerciam um torque adicional, reduzindo a compressão limite prevista pelo modelo de Euler. Além disso, as tensões cisalhantes contribuía para equilíbrio do momento torçor externo.

O torque apresentado por Wagner (1936) corresponde ao bimomento, termo criado posteriormente por Vlasov (1961), quando este generalizou e solidificou a teoria da torção em seções delgadas.

O efeito Wagner aplicado às vigas bissimétricas não produz alteração na rigidez a torção, pois atuam na seção tensões de tração e compressão, cujos braços

de ação em relação ao centro de cisalhamento são iguais, balanceando o fenômeno. Porém, para as seções monossimétricas este fenômeno não é balanceado (ANDERSON; TRAHAIR, 1972). O braço da menor mesa é maior e, por isso, quando atuam tensões de tração nesta mesa ocorre um incremento da rigidez à torção do elemento e, caso a menor mesa esteja sujeita a tensões de compressão, ocorre um decréscimo da rigidez à torção.

O primeiro equacionamento do momento crítico para uma viga biapoiada com seção monossimétrica e sujeita a momento constante tracionando a mesa inferior foi realizado Goodier<sup>6</sup> (1942 apud SILVA, 1992, p. 5), baseando-se nas equações propostas por Wagner. A equação (2.51) mostra a solução encontrada por Goodier e reorganizada por Galambos (2008).

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y \beta_x}{2L^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_x^2} \left( \frac{GJL^2}{\pi^2 E I_y} + \frac{C_w}{I_y} \right)} \right] \quad (2.51)$$

Sendo:

$M_{cr}$  o Momento fletor crítico em regime elástico;

$\beta_x$  o parâmetro de monossimetria da seção, dado pela equação (2.52);

$$\beta_x = \frac{1}{I_z} \left( \int_A y(x^2 + y^2) dA \right) - 2y_0 \quad (2.52)$$

O parâmetro de monossimetria resulta do centro de cisalhamento não coincidir com o centro geométrico, ou seja, representa a atuação do efeito Wagner na seção. O sinal positivo ou negativo na equação (2.52) depende da tensão atuante na maior mesa, sendo positivo se a maior mesa estiver comprimida e negativo se ela estiver tracionada.

Resolvendo a equação (2.52) para a seção I resulta em  $\beta_x$  dado pela expressão (2.53), na qual  $h_m$  é a distância entre os centros das mesas do perfil.

<sup>6</sup> GOODIER, J. N.(1942). Torsional and Flexural Buckling of Beams of Thin Walled Open Section, Under Compressive and Bending Loads, *Journal of Applied Mechanics, Transactions*, p.A-103.

$$\beta_x = \frac{1}{I_z} \left[ \frac{(h_m - D) \left( \frac{b_{fi}^3 t_{fi}}{12} + b_{fi} t_{fi} (h_m - D)^2 + (h_m - D)^3 \frac{t_w}{4} \right) - D \left( \frac{b_{fs}^3 t_{fs}}{12} + b_{fs} t_{fs} D^2 + D^3 \frac{t_w}{4} \right)}{D} \right] - 2y_0 \quad (2.53)$$

O cálculo do parâmetro de monossimetria é um dos agravantes para o problema da estabilidade lateral das seções monossimétricas e, para reduzir esta dificuldade, Kitipornchai e Trahair (1979) propuseram uma equação aproximada para  $\beta_x$ . A equação aproximada foi resultado da análise de mais de 3000 perfis, cuja relação largura e espessura das mesas variou entre 4 e 64, e a relação altura e espessura da alma entre 10 e 290. Esta intensiva análise paramétrica resultou na expressão (2.54) que é uma boa aproximação desde que  $(I_y/I_z) < 0,5$ .

$$\beta_x^{\text{aprox}} = h_m 0,9(2\rho - 1) \left( 1 - \left( \frac{I_y}{I_z} \right)^2 \right) \quad (2.54)$$

O parâmetro  $\rho$  é o índice de monossimetria da seção. É a relação entre os menores momentos de inércia da mesa comprida e total da seção (equação 2.55). Para os perfis I com dupla simetria vale 0,5 e cresce nos casos em que a maior mesa é comprida.

$$\rho = \frac{I_{yc}}{I_y} \quad (2.55)$$

### 2.3.2 Equação geral do momento fletor crítico elástico

Uma das formulações mais completas para determinar o momento crítico que leva a instabilidade lateral de uma viga sujeita a flexão é baseada no funcional apresentado na equação (2.56).

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI_y w''^2 + EC_W \phi''^2 + GJ \phi'^2 + 2M_z \phi w'' - 2\beta_x M_z \phi'^2 - p y_{pc} \phi^2) dx \quad (2.56)$$

Sendo:

$y_{pcs}$  a distância entre o ponto de aplicação da força vertical distribuída ( $p$ ) e o centro de cisalhamento da seção, na direção do eixo  $y$ ;

$w$  os deslocamentos na direção do eixo  $z$ ;

A expressão (2.56) contempla a energia devido às deformações do alongamento da viga, à distorção causada pela torção e das forças externas para os deslocamentos pós-crítico e foi proposta por Masur e Milbradt<sup>7</sup> (1957 apud SILVA, 1992, p. 5). “CLARK; HILL (1962) determinaram, baseando-se no método de Rayleigh, uma equação geral, inédita, para o cálculo do momento crítico, que, apesar de também apresentar difícil solução, tem um importante interesse didático.” (SILVA, 1992, p. 57). Para encontrar a equação do momento é melhor utilizar duas funções auxiliares para mudança de variáveis:

$$M_z = \mu(x)\bar{M}_z \quad (2.57)$$

Sendo:

$\mu(x)$  uma função escolhida de maneira conveniente que dá forma ao diagrama do momento fletor da viga;

$\bar{M}_z$  o valor máximo do momento fletor na viga no vão analisado;

$$\bar{X}(x) = \frac{x}{L} \quad (2.58)$$

A equação (2.58) é utilizada para normatização do vão da viga, fazendo seu comprimento variar de zero até a unidade. Utilizando as funções auxiliares e desenvolvendo<sup>8</sup> o funcional, tem-se a expressão do momento fletor crítico elástico (equação (2.59)), válida para qualquer condição de carregamento e seção.

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_y}{(\bar{k}L)^2} \left[ \frac{(C_2 y_{pcs} + C_3 \beta_x) + \sqrt{(C_2 y_{pcs} + C_3 \beta_x)^2 + \frac{C_w}{I_y} \left[ 1 + \frac{GJ}{EC_w} \left( \frac{\bar{k}L}{\pi} \right)^2 \right]}}{\bar{k}L} \right] \quad (2.59)$$

<sup>7</sup> MASUR, E.F.; MILBRADT, K.P. (1957). Collapse Strength of Redundant Beams after Lateral Buckling, *Journal of Applied Mechanics*, v.24, p.283-288.

<sup>8</sup> Para maiores esclarecimentos pode ser consultado SILVA (1992).

Nota-se que é uma equação complexa e com vários parâmetros, contudo, sua maior importância é justamente essa característica: a possibilidade de visualizar a influência da monossimetria da seção, das condições da vinculação do elemento ou ainda das características do carregamento. Os coeficientes de interesse são:

- (1)  $C_1$ : conhecido como fator de momento equivalente e está associado ao diagrama de momento fletor. A sua determinação é feita conforme a expressão (2.60). O coeficiente  $C_1$  aparece multiplicando toda a expressão do momento e foi incorporado a diferentes códigos normativos segundo a denominação de Fator de modificação para diagrama de momento fletor não uniforme ( $C_b$  na ABNT NBR 8800:2008).

$$C_1 = \frac{\int_0^1 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx}{\sqrt{\left[ \int_0^1 (\mu(x))^2 \phi^2 dx \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right)^2 dx \right]}} \quad (2.60)$$

- (2)  $C_2$ : este coeficiente é associado ao ponto de aplicação do carregamento. Na equação (2.59) ele multiplica  $y_{pcs}$  e é calculado conforme a equação (2.61).

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{\int_0^1 \frac{d^2\mu(x)}{dx^2} \phi^2 dx}{\sqrt{\left[ \int_0^1 (\mu(x))^2 \phi^2 dx \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right)^2 dx \right]}} \quad (2.61)$$

- (3)  $C_3$ : este coeficiente está associado à monossimetria da seção. Na equação (2.59) ele multiplica  $\beta_x$  e é calculado pela equação (2.62).

$$C_3 = \frac{\int_0^1 \mu(x) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx}{\sqrt{\left[ \int_0^1 (\mu(x))^2 \phi^2 dx \right] \left[ \int_0^1 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right)^2 dx \right]}} \quad (2.62)$$

- (4)  $\bar{k}$ : este coeficiente está associado às condições de apoio do elemento estrutural. Na equação (2.59) ele multiplica o valor do vão e é determinado conforme a equação (2.63).

$$\bar{k}^2 = \pi^2 \frac{\int_0^1 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^1 \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right)^2 dx} \quad (2.63)$$

Não é simples calcular, caso a caso, o momento fletor crítico utilizando a equação (2.59). Por isso, diversos trabalhos buscaram particularizar e simplificar soluções mais usuais, tais como momento constante, carregamento distribuído, variável linearmente, forças concentradas, vinculações apoiadas e engastadas. Entre eles, Anderson e Trahair (1972), Kitipornchai e Trahair (1972,1979), Roberts e Burt (1985), Roberts e Azizian (1984), Kitipornchai, Trahair e Wang (1986), Kitipornchai e Wang (1986).

Alguns resultados dos trabalhos realizados através da aproximação dos deslocamentos por séries e aplicados dentro do funcional energia (2.56), merecem ser comentados, mesmo que brevemente: as aproximações por séries são excelentes para casos de momentos constantes e carregamentos distribuídos, porém divergem ou necessitam de grande número de iterações para forças concentradas e momentos com variação ao longo do vão. (ROBERTS; BURT 1985).

Para o momento fletor com variação linear e curvatura reversa do diagrama, Kitipornchai, Trahair e Wang (1986) concluíram que a utilização do fator de modificação para diagrama de momento fletor ( $C_b$ ) como recomendado por Salvadori (1955) levava a momentos críticos com valores elevados, resultando num elemento estrutural mais robusto que o necessário, se  $\rho$  fosse superior a 0,7. Se  $\rho$  fosse menor que 0,3, ocorria o efeito inverso, isto é, o momento crítico teórico determinado era superior ao real, podendo levar o elemento a ruína. Se as verificações de seções monossimétricas em regime elástico se apresentam questionáveis quando tratadas como extrapolações dos casos duplamente simétricos, não há justificativa para esta extrapolação em regime inelástico (TRAHAIR, 2011).

### 2.3.3 Fator de modificação para diagrama de momento fletor ( $C_b$ )

O fator de modificação de momento fletor é o parâmetro mais importante da equação (2.59) incorporado aos códigos normativos. Ele foi incluído nas normas americana e brasileira na forma da equação (2.64), baseado em estudos de Salvadori (1955).

$$C_b = 1,75 + 1,05 \left( \frac{M_1}{M_2} \right) + 0,3 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,30 \quad (2.64)$$

Sendo:

$M_1$  o menor momento atuando no extremo da viga;

$M_2$  o maior momento atuando no extremo da viga;

Os trabalhos de Kitipornchai, Trahair e Wang (1986), que trouxeram conhecimento sobre a influência de  $\rho$ , foram realizados considerando a formulação apresentada em (2.64). Atualmente, o valor de  $C_b$  é equacionado baseado nos trabalhos de Kirby and Nethercort (1979) conforme (2.65).

$$C_b = \frac{12,5M_{\max}}{2,5M_{\max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} R_m \leq 3,0 \quad (2.65)$$

Sendo:

$M_A$  o valor absoluto do momento atuando a um quarto do vão, partindo do apoio à esquerda da viga;

$M_B$  o valor absoluto do momento atuando no centro da viga;

$M_C$  o valor absoluto do momento atuando a três quartos do vão, partindo do apoio à esquerda da viga;

$R_m$  o parâmetro de monossimetria da seção.

O valor de  $R_m$  é 1,0 para as seções bissimétricas ou para seções monossimétricas fletidas em relação ao eixo de simetria e com diagrama de

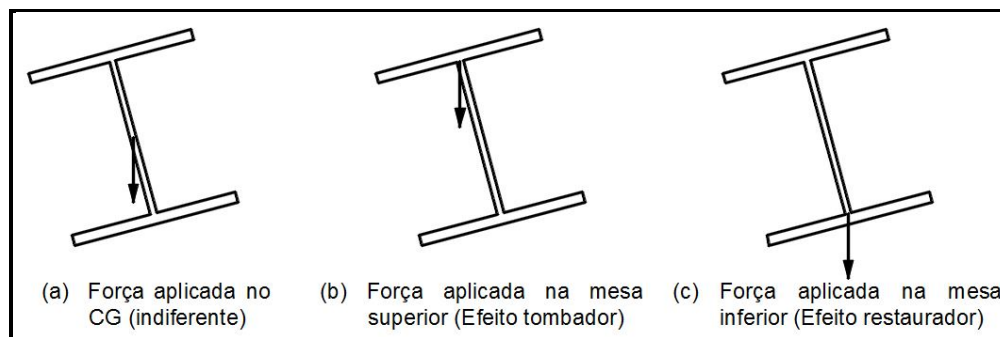


momento fletor sem curvatura reversa. Para os outros casos é dado pela expressão (2.66).

$$R_m = 0,5 + 2\rho^2 = 0,5 + 2\left(\frac{I_{yc}}{I_y}\right)^2 \quad (2.66)$$

Lim et al (2003) investigou os momentos não uniformes e que apresentavam curvatura reversa considerando a nova formulação para  $C_b$ . Apesar da nova formulação, para o índice de monossimetria superior a 0,7 os resultados foram conservadores novamente, enquanto para índices de monossimetria inferiores a 0,3 foram contra a segurança.

Há ainda que se considerar o ponto de aplicação das forças verticais em relação ao centro geométrico da seção, pois altera a configuração final da estabilidade da viga (GALAMBOS, 2008). Supondo a força concentrada alinhada com o eixo vertical do perfil, a posição de aplicação da força pode ser indiferente (figura 2.17(a)) ou diminuir (figura 2.17(b)) ou ainda aumentar a estabilidade lateral da viga (figura 2.17(c)).



**Figura 2.17:** Efeito da posição da força na seção transversal.

A figura 2.18 contém casos já estudados que incluem o efeito da posição da força vertical. Na figura aparecem os parâmetros  $A$  e  $B$  em função de  $W$  (equação (2.67)) para alguns tipos de carregamentos. A situação imposta pela ponte rolante poderia ser aproximada pela terceira linha da figura 2.18, contudo, a posição das forças mostradas não corresponde àquela determinada para o máximo momento fletor.  $C_b$  é dado pela expressão (2.68).

$$W = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}} = \frac{\pi}{L} r \quad (2.67)$$

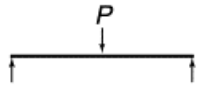


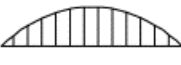
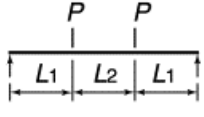
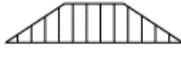
Loading	Moment Diagram	$M$	A	B
		$\frac{PL}{4}$	1.35	$1 - 0.180W^2 + 0.649W$
		$\frac{wL^2}{8}$	1.12	$1 - 0.154W^2 + 0.535W$
		$PL_1$	$1 + \left(\frac{L_1}{2L_1 + L_2}\right)^2$	$\frac{(1 - 0.465W^2 + 1.636W)L_1}{2L_1 + L_2}$

Figura 2.18: Parâmetros A e B para cálculo do  $C_b$  considerando a posição da força vertical.  
Fonte: Galambos (1998).

$$C_b = A \left( B^{2y_{pcg}/d} \right) \quad (2.68)$$

Sendo:

$y_{pcg}$  a distância, no eixo vertical, entre o ponto de aplicação da força e o centro geométrico da seção, sendo positivo se a carga está posicionada de maneira a aumentar a estabilidade e negativo no caso contrário (figura 2.19);

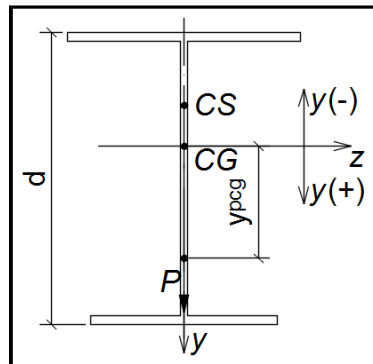


Figura 2.19: Ordenada de posição da força vertical para cálculo do  $C_b$ .

É grande a base de pesquisa sobre vigas submetidas a forças e momentos, principalmente para as seções de dupla simetria, com alguns dos autores propondo pequenas modificações nas equações presentes nas normas, contudo, em relação às seções monossimétricas, esta base de dados é mais modesta. Pesa contra, ainda, o fato de que os casos estudados para seções monossimétricas, tais como Mueller (1965), Ma e Hughes (1996), Ellifritt e Lue (1998), Lim et al (2003), Laman e Johnson (2010), Trahair (2011) e Kuhlmann e Euler (2011) consideram as forças

verticais alinhadas com o plano vertical da seção, ou seja, em todos os casos as excentricidades descritas neste trabalho são supostas como nulas.

## 2.4 IMPACTO LATERAL E FLEXÃO EM TORNO DA MENOR INÉRCIA

As solicitações do momento torçor devem ser somadas ao problema da flexão da viga de rolamento. A norma americana Specification for Structural Steel Buildings de 2010 (ANSI/AISC 360-10) prevê a torção atuando sobre o elemento estrutural, contudo, em maiores detalhes trata apenas das seções fechadas. Para as seções abertas determina que seja tomado o menor valor entre os estados limites de escoamento da seção por tensão longitudinal, escoamento da alma por cisalhamento e estabilidade geral da seção considerando a influência da torção. A norma brasileira ANBT NBR 8800:2008 segue a mesma recomendação. A norma europeia Eurocode 3: Design of steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings de 2005 (EN 1993-1-1:2005) recomenda que a tensão longitudinal devido ao bimomento seja considerada na verificação da flexão com torção.

A maneira mais usual de considerar a influência adicional do momento torçor sobre a viga é reduzir seu efeito para o caso da flexão em torno do eixo de menor inércia, ou seja, flexão lateral. Este procedimento é realizado transportando o impacto lateral para as mesas do perfil I por meio de um par de forças horizontais utilizando o equilíbrio estático da seção. Esta recomendação pode incluir o efeito da excentricidade vertical e tal procedimento é mostrado na AISE n13 (2003), Bellei (2000) e MacCrimmon (2009). A figura 2.20(a) mostra a seção da viga de rolamento com excentricidade da força vertical e impacto lateral de maneira a maximizar o momento torçor ao longo da viga, enquanto a figura 2.20(b) mostra o caso equivalente, aplicando uma força  $H_s$  na mesa superior e outra força  $H_i$  na mesa inferior. Para que ocorra a equivalência estática entre cada caso, as forças aplicadas sobre as mesas devem respeitar as equações (2.69) e (2.70).

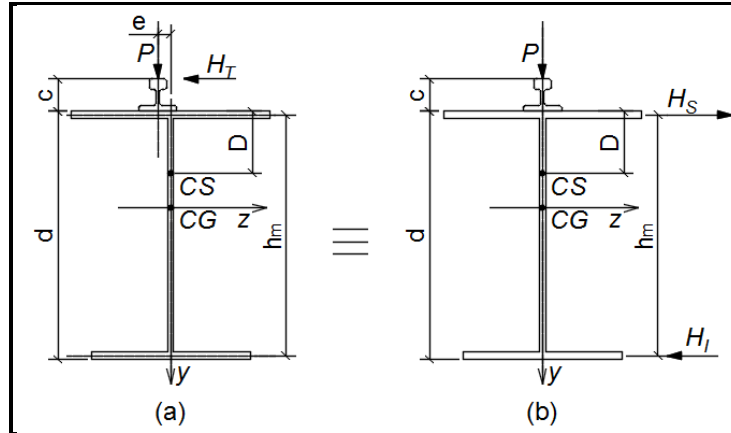


Figura 2.20: Transposição do Impacto lateral através de par de forças atuando nas mesas do perfil I.

$$H_s = \frac{Pe + H_T(d + C)}{d} = H_T + \frac{Pe + H_T C}{d} \quad (2.69)$$

$$H_i = \frac{Pe + H_T C}{d} \quad (2.70)$$

Resultados satisfatórios são encontrados aplicando apenas a força transportada sobre a mesa superior na ausência da excentricidade da força vertical, devido à ordem de grandeza das variáveis geométricas (MacCRIMMON, 2009).

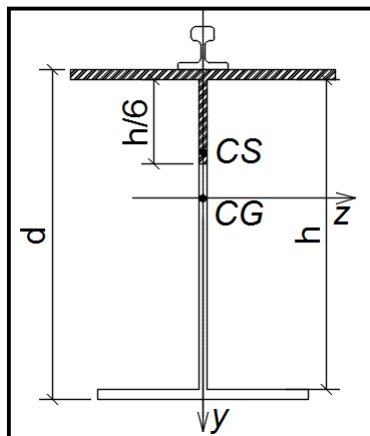


Figura 2.21: Seção T reduzida para verificação da flexão lateral.

A AISE n13 propõe que a verificação da flexão em torno do eixo de menor inércia seja feita utilizando as características da seção T reduzida, mostrada na figura 2.21, na qual h é a altura interna da seção. Bellei (2000) recomenda que se considere apenas a mesa superior e a mesa inferior como seção resistente, cada qual com sua respectiva força atuante.

### 3 MODELO NUMÉRICO EM ELEMENTOS FINITOS

O problema de estabilidade lateral de vigas de rolamento sem contenção lateral entre apoios é complexo e envolve critérios de verificação que estão limitados por uma série de simplificações. Embora tenham como propósito auxiliar o processo de projetar a viga, podem comprometer a segurança e funcionamento do sistema viga-ponte rolante. Por outro lado, o cálculo manual considerando um modelo mais eficiente e detalhado se torna impraticável para cada caso. Por estas razões, optou-se pela utilização de um modelo numérico tridimensional construído via método dos elementos finitos (MEF) utilizando o pacote ANSYS.

Para replicar um problema estrutural por meio de modelagem computacional é preciso conhecer a geometria da estrutura, o que inclui os parâmetros de vinculação externa, material constituinte e ações aplicadas. Considerar também quais são as simplificações feitas sobre as informações de entrada é importante para o bom funcionamento e precisão do modelo.

#### 3.1 CARACTERÍSTICAS DO MODELO ESTRUTURAL

O modelo estrutural possuiu as seguintes características:

- (1) Viga biapoiada com vão livre variando de 6 a 7 metros;
- (2) Ligação da mesa superior ao pilar com chapa (a consideração de impor a restrição de deslocamento diretamente à mesa resulta em rigidez excessiva nesta região, afastando-se do problema real);
- (3) Enrijecedores na região dos apoios:

O trilho não foi modelado e a contribuição do seu peso próprio foi introduzida no modelo por pressão de contato no topo da mesa superior da viga. A introdução da força aplicada pela roda também foi feita por pressão distribuída de acordo com o espraiamento da força vertical, como mostra a figura 3.1.

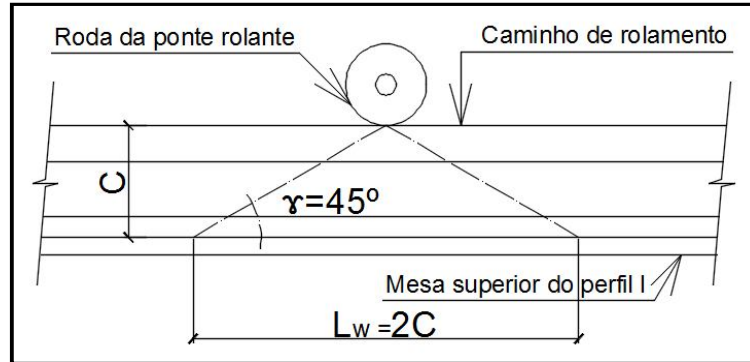


Figura 3.1: Espreadimento da força da roda da ponte na base do caminho de rolamento.

O transporte do impacto lateral para o plano da mesa poderia ser feito conforme explicado no item 2.4, porém no modelo numérico o transporte foi realizado de maneira diferente. O Impacto lateral foi aplicado utilizando um binário de forças na mesa superior representando o sistema de fixação do trilho ao perfil. As figuras 3.2(a) e 3.2(b) mostram alguns exemplos de fixações utilizadas.

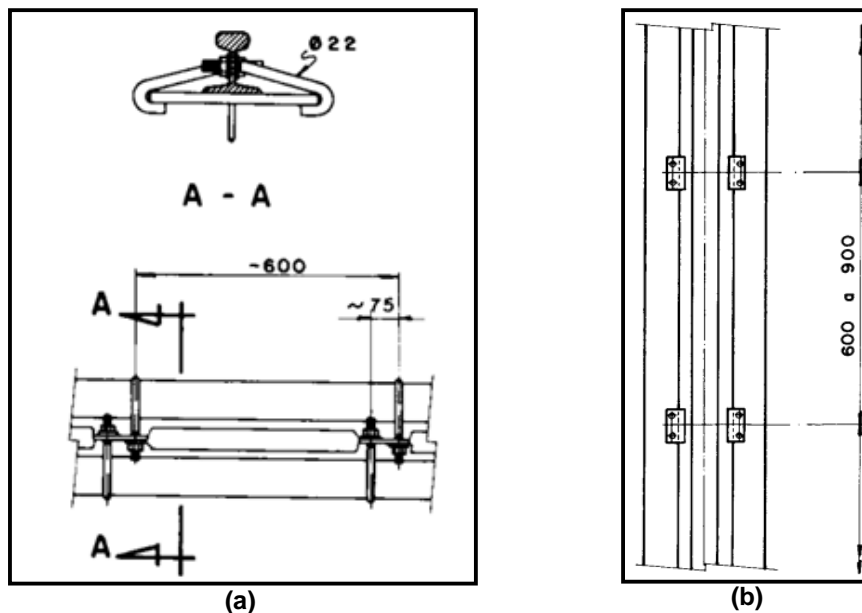


Figura 3.2: Exemplos de fixação do trilho à viga. Fonte: Bellei (2000).

Esta consideração sobre o impacto lateral é mais próxima da realidade, uma vez que é função da fixação transmitir as forças laterais para a viga. Considerando que os trilhos mais utilizados para as pontes leves são o TR25, TR32 e TR37 e que em todos eles a largura da base é igual à altura, resulta na situação representada pela figura 3.3.

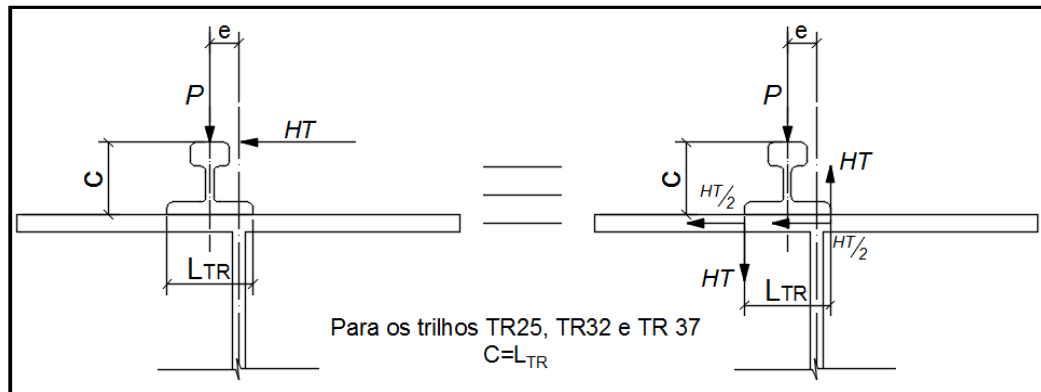


Figura 3.3: Transporte do impacto lateral para a fixação do trilho no modelo numérico.

A excentricidade da força vertical em relação boleto do trilho não altera significativamente a distribuição de pressão na base do trilho, pois este serve como elemento de transição para melhorar a distribuição da força da roda. Por esta razão, esta segunda excentricidade não foi levada em consideração na análise.

### 3.2 ELEMENTOS FINITOS DO MODELO E ANÁLISE NÃO LINEAR

Dois tipos de elementos finitos são utilizados para a construção do modelo: o elemento de casca e o elemento de barra. Estes elementos foram escolhidos procurando maximizar a relação entre os resultados esperados e economia computacional.

O elemento finito de casca, conhecido como SHELL, é de uso adequado em seções delgadas e foi escolhido para a construção da viga. Dentre as várias possibilidades de elementos de casca, escolheu-se o SHELL 181. Ele é um elemento com quatro nós (i, j, k e l) e cada um destes possui seis graus de liberdade, sendo três translações ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ) e três rotações ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_z$ ). O mais importante para a escolha deste elemento foi sua capacidade de trabalhar a não linearidade geométrica e a plastificação da seção, dois parâmetros importantes para este estudo. A figura 3.4 mostra esquematicamente o elemento Shell 181.

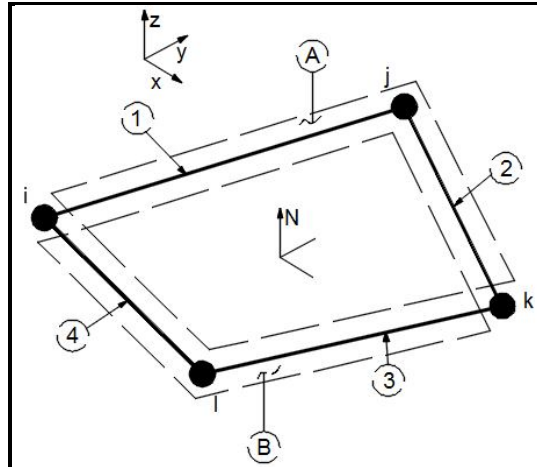


Figura 3.4: Elemento finito de casca – SHELL 181.

A ligação da mesa superior ao pilar é feita por meio de chapa, sendo a união da chapa com a mesa da viga soldada, enquanto a ligação da chapa ao pilar é parafusada (figura 3.5). A rigidez da chapa é bem reduzida e, na prática, admite-se que ela pode se opor apenas às solicitações de tração e compressão, transmitindo a força do impacto lateral ao pilar, além de restringir o giro da viga em torno do eixo longitudinal no apoio. Por suas características, para representar a chapa no modelo numérico foi utilizado o elemento de barra.

O elemento de barra escolhido foi o LINK 8, o qual é composto por dois nós (i e j) com três graus de liberdade em cada nó, referentes às translações segundo os três eixos ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ). Este elemento é capaz de deformar plasticamente e está esquematicamente representado na figura 3.6.

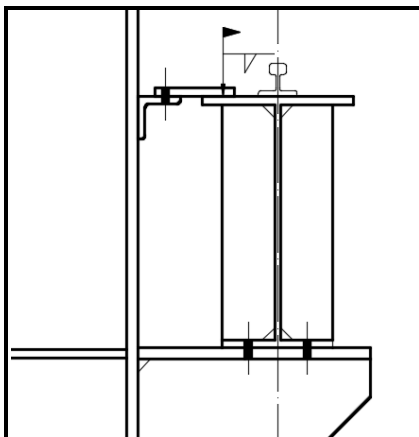


Figura 3.5: Ligação da viga de rolamento ao pilar.

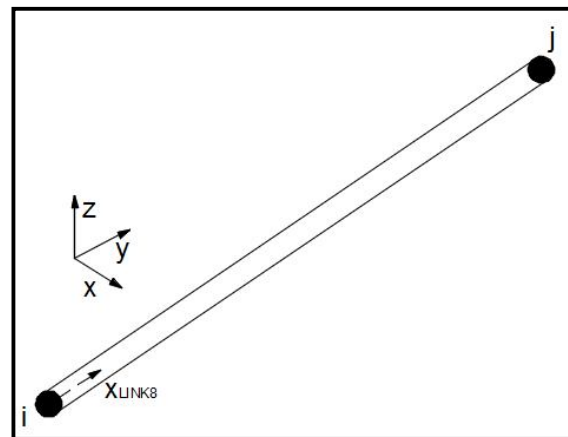


Figura 3.6: Elemento finito de barra – LINK 8.



A reprodução da não linearidade do aço foi introduzida pelo diagrama tensão x deformação escolhido. Adotou-se o digrama trilinear que considera o critério de plastificação de Von Mises, possibilitando simular o comportamento elasto-plástico isótropo do material. O limite da proporcionalidade do escoamento escolhido foi a tensão correspondente a deformação específica de 0,5%, valor geralmente proposto (figura 3.7(a)). A figura 3.7(b) mostra o diagrama trilinear utilizado no modelo.

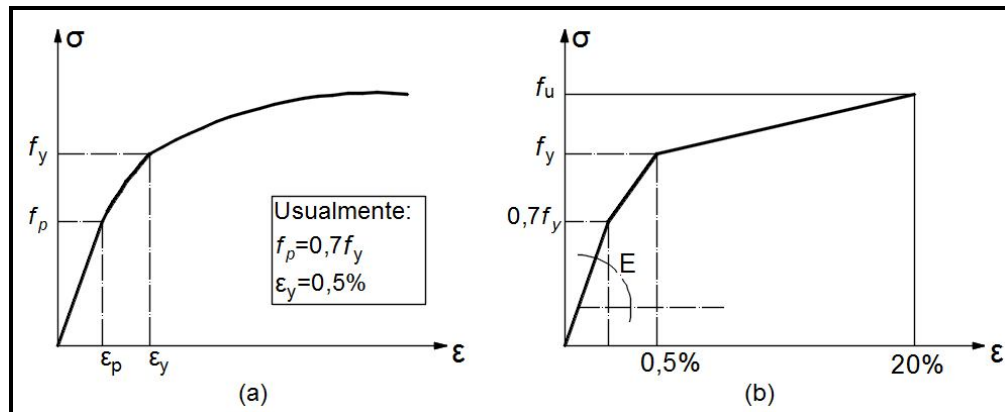


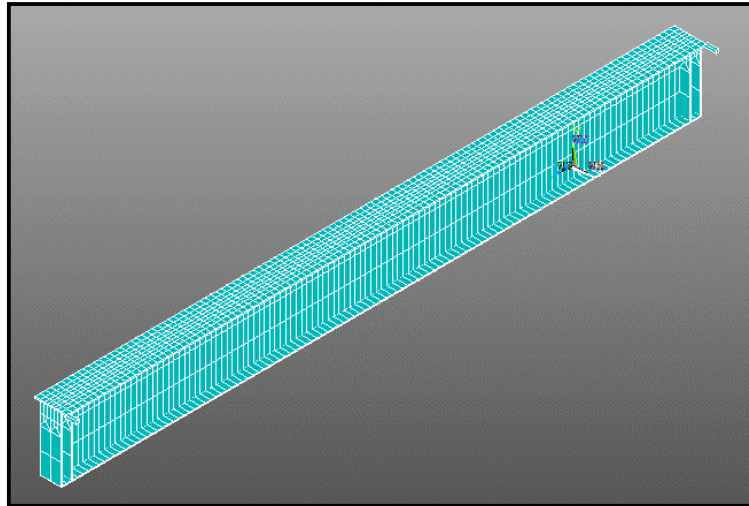
Figura 3.7: Diagrama tensão x deformação com comportamento elasto-plástico do aço (a) e diagrama utilizado no modelo numérico (b).

A não linearidade geométrica do problema foi considerada pela formulação Lagrangeana, ou seja, a configuração de referência entre os incrementos de carga é a configuração de equilíbrio determinada na etapa anterior do processo. Para realizar as iterações optou-se pelo método completo Newton-Raphson (Full N-R), que inclui a atualização da matriz de rigidez em todas as iterações nas quais houve incremento de carga.

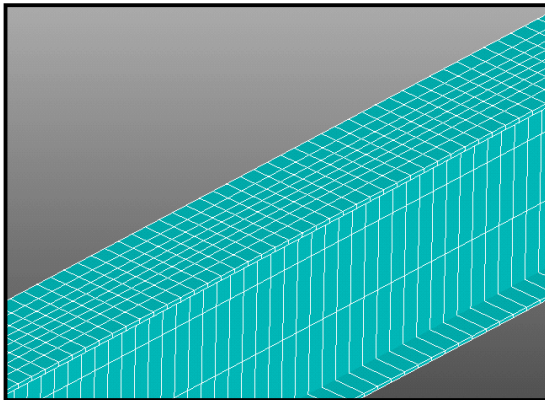
### 3.3 CONSTRUÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

A viga construída com os elementos finitos dentro do ANSYS aparece na figura 3.8 em perspectiva geral. Em detalhe, na figura 3.9, aparece o maior refinamento da mesa superior, região mais importante para a análise. A mesa superior possui, longitudinalmente, o mínimo de oito divisões e o máximo de nove para acomodar os valores da excentricidade do trilho, enquanto a mesa inferior é dividida em apenas duas faixas. Essa diferença nas malhas das mesas causa um

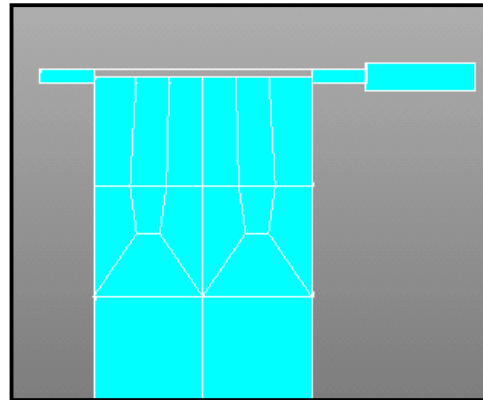
refinamento de transição nos enrijecedores (figura 3.10). A região de transição, embora não seja tão regular quanto o resto da malha do modelo, não causa problemas na análise.



**Figura 3.8:** Vista geral do modelo numérico da viga de rolamento.



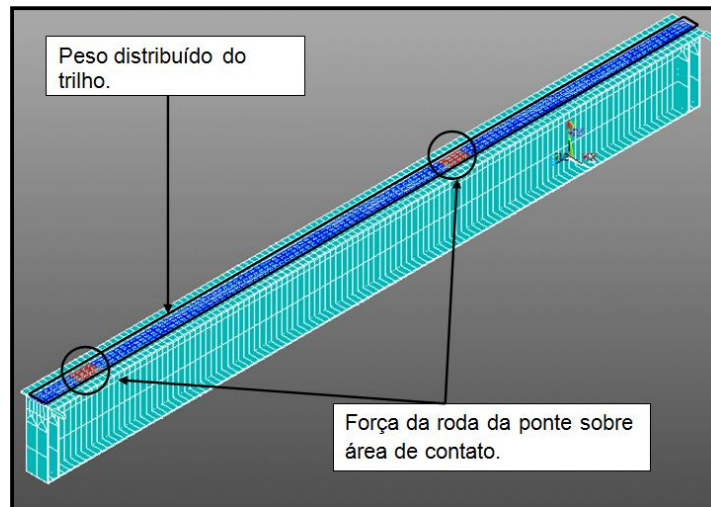
**Figura 3.9:** Refinamento maior na malha da mesa superior.



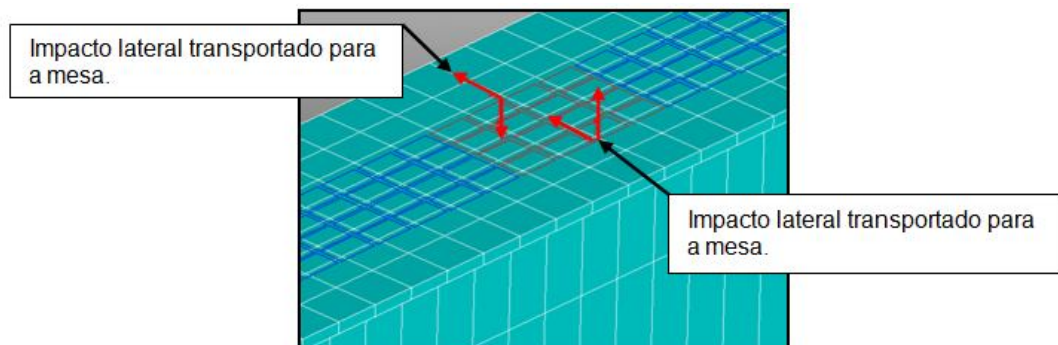
**Figura 3.10:** Transição de malha no enrijecedor.

Outra propriedade da mesa superior no modelo é permitir que o peso próprio do trilho e a pressão distribuída da força da roda sejam movimentados dentro da malha, possibilitando a escolha de qualquer excentricidade do trilho. A figura 3.11 mostra, na cor azul e dentro do retângulo marcado sobre a mesa superior, a pressão de contato devido ao peso do trilho distribuída ao longo de todo o comprimento da viga por uma faixa de largura  $L_{TR}$ . Na mesma figura, na cor vermelha e dentro de círculos, aparece a pressão de contato das rodas da ponte distribuídas sobre a área de largura  $L_{TR}$  e comprimento  $L_w$ . As projeções dos centros das áreas de contato da roda sobre o eixo longitudinal da viga correspondem à posição  $X_1$  e  $X_2$  do trem-tipo

para o máximo momento fletor na viga. Finalmente, na figura 3.12, aparece o binário na mesa superior para representar o impacto lateral.



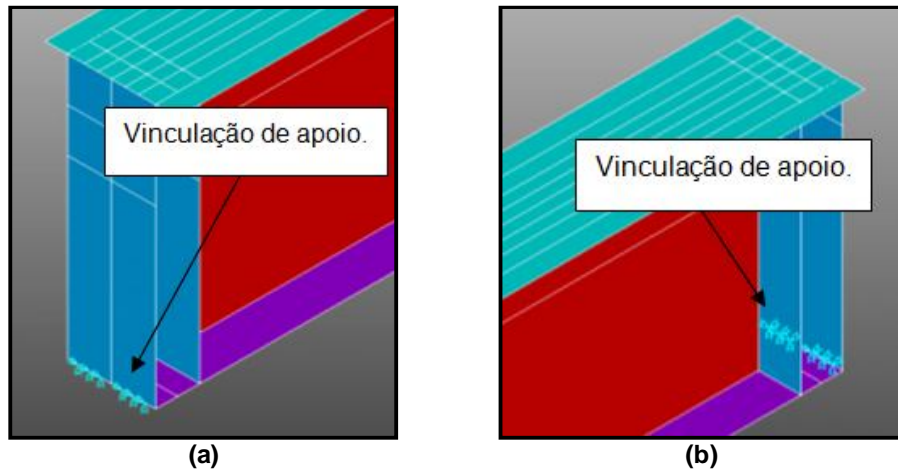
**Figura 3.11:** Peso distribuído do trilho (azul) e da força vertical da ponte rolante (vermelho).



**Figura 3.12:** Binário atuando na mesa superior para representação do impacto lateral.

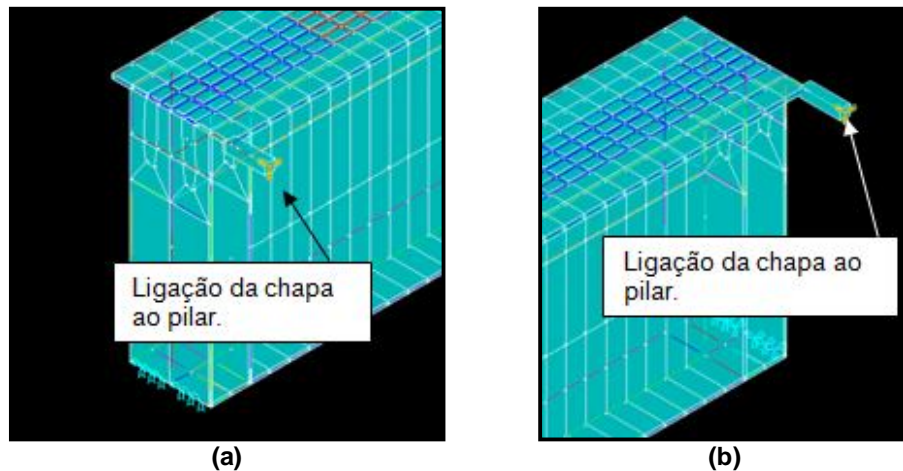
A introdução da vinculação externa no modelo considerou a viga biapoiada restringindo a translação nas três direções num dos apoios (figura 3.13(a)) e em duas direções no outro (figura 3.13(b)). A restrição dos deslocamentos foi imposta à linha de borda da viga e, embora o deslocamento longitudinal seja livre, não foram impostas ao modelo as forças longitudinais por não serem de interesse para análise.

A contenção lateral no apoio tem um dos seus nós ligado a extremidade da mesa superior, compatibilizando todos os deslocamentos, enquanto ao outro nó são impostas duas restrições de translação, permitindo o deslocamento na direção longitudinal da viga (figura 3.14(a) e 3.14(b)). Essa condição de vinculação representa o furo alongado da chapa executado para acomodar os deslocamentos longitudinais, ainda que eles não importem para esta análise.



**Figura 3.13:** Vínculo na base da viga – restrição da translação.

Nas figuras 3.14(a) e 3.14(b) o elemento de barra tem seção quadrada, pois esta é a representação do LINK 8, contudo, ele na realidade tem forma de chapa.



**Figura 3.14:** Vínculo de garfo (chapa de ligação da mesa superior ao pilar).

### 3.4 AFERIÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Foi necessário avaliar a resposta do modelo de elementos finitos em regime elástico para validar a sua precisão. Foram testadas três condições de carregamento, cada uma para três vãos diferentes e todas para o mesmo perfil monossimétrico. O perfil escolhido para a comparação é, segundo nomenclatura

antiga<sup>9</sup>, o VSA600x81. O perfil foi escolhido por ser utilizado num exemplo de cálculo de viga de rolamento em Bellei (2000). As propriedades geométricas do perfil constam na tabela 3.1.

**Tabela 3.1:** Propriedades geométricas do perfil VSA600x81.

	A (cm <sup>2</sup> )	102,7
	D (cm)	11,45
	y <sub>0</sub> (cm)	13,35
	ρ (adimensional)	0,816
	Posição do CG abaixo do topo da mesa superior (D+y <sub>0</sub> ) (cm)	24,80
	I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	59030,0
	Módulo de resistência elástico da mesa superior em relação ao eixo z (W <sub>zs</sub> ) (cm <sup>3</sup> )	2379,0
	Módulo de resistência elástico da mesa inferior em relação ao eixo z (W <sub>zi</sub> ) (cm <sup>3</sup> )	1677,0

No exemplo, a força vertical por roda da ponte rolante ( $F_1$ ) é de 90 kN e majorada em 10% assume seu valor com impacto ( $P$ ) de 99 kN. Os vãos de viga utilizados foram de 6,0, 8,0 e 10,0 metros, cada um combinado com os carregamentos que seguem:

- (1) Carregamento distribuído do peso próprio da viga mais trilho TR 37:  $p=1,15$  kN/m (figura 3.15(a));
- (2) Carregamento distribuído e força concentrada ( $P=99$  kN) aplicada no centro do vão da viga e alinhada com o plano de simetria da seção (figura 3.15(b));
- (3) Carregamento distribuído mais duas forças concentradas ( $P=99$  kN) aplicadas nos terços do vão da viga e alinhadas com o plano de simetria da seção (figura 3.15(c));

<sup>9</sup> A Norma brasileira ABNT NBR 5884:2013 - Perfil I estrutural de aço soldado por arco elétrico — Requisitos gerais passou a adotar a nomenclatura Perfil Soldado Monossimétrico (PSM) para os perfis com largura da mesa superior e inferior diferentes entre si.

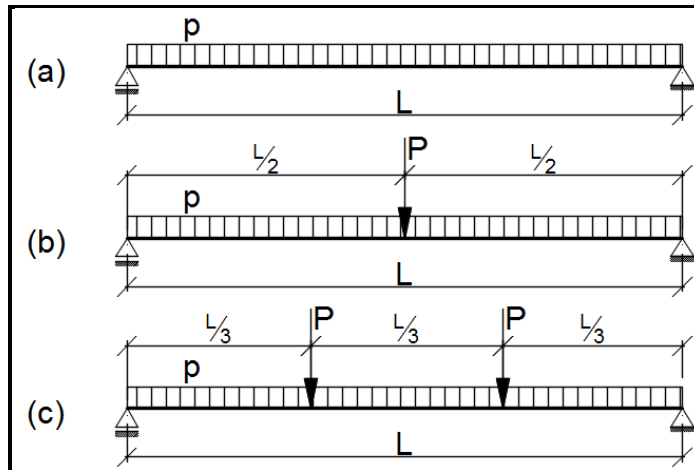


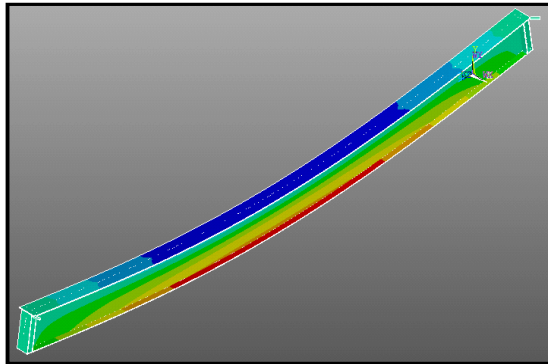
Figura 3.15: Carregamentos testes para aferição do modelo numérico.

Foram determinados, pelo modelo clássico de barra, os deslocamentos verticais ( $v$ ), as tensões longitudinais de compressão e tração no centro do vão da viga. A tabela 3.2 mostra os valores calculados.

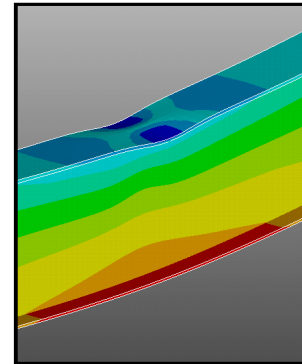
**Tabela 3.2:** Deslocamentos e tensões determinados por modelo de barra.

		$p$	$p+P$	$p+2P$
	$v$ (mm)	0,1644	3,938	6,593
$L = 6$	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	2,173	64,6	85,4
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	3,083	91,6	121,2
	$v$ (mm)	0,5195	9,464	15,51
$L = 8$	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	3,867	87,1	112,1
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	5,486	123,6	159,0
	$v$ (mm)	1,268	18,74	30,84
$L = 10$	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	6,040	110,1	143,4
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	8,569	156,2	203,4

Simulando no modelo numérico a primeira solicitação a resposta é direta, pois a distribuição de tensões não apresenta efeito localizado devido às forças concentradas (figura 3.16). Para as combinações que envolvem forças concentradas é preciso desconsiderar o efeito localizado causado por elas (figura 3.17).

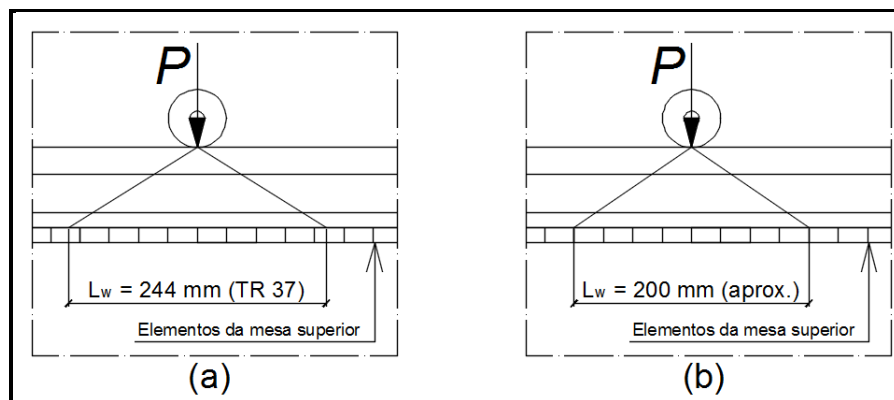


**Figura 3.16:** Testes para aferição do modelo numérico – carregamento distribuído.



**Figura 3.17:** Efeito localizado da roda da ponte sobre a mesa superior.

A tensão de compressão nos elementos influenciados pela força concentrada é mais elevada, em módulo, que a tensão esperada pela teoria do elemento de barra e, tal resultado, é causado pelas propriedades do elemento de casca. Contudo, neste momento é de interesse comparar a tensão determinada pelo elemento de casca com a do modelo clássico de barra e, para tal, foi feita a análise da tensão longitudinal longe dos efeitos localizados da roda. A escolha da seção de análise levou em consideração o local na mesa superior em que as tensões de compressão se tornam constantes, sendo esta posição variável em função da área de espraçamento da força vertical. No caso do TR 37, cuja altura é de 122 mm, o comprimento de espraçamento é de 244 mm (figura 3.18(a)). Entretanto, a mesa superior foi dividida ao longo do seu comprimento com elementos de 50 mm e, neste caso, foi utilizado o valor de 200 mm para  $L_w$  (figura 3.18(b)).

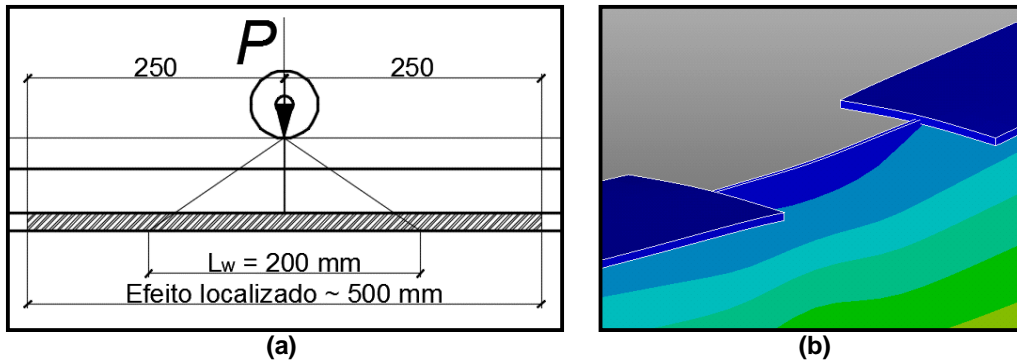


**Figura 3.18:** Espraçamento aplicado sobre a malha de elementos finitos.

Determinou-se, pela análise de resultados, que a uma distância aproximada de 250 mm para cada lado do centro da área de pressão, a distribuição de tensão na



mesa superior se torna homogênea, ou seja, já não sofre influência dos efeitos localizados (figura 3.19(a)). A figura 3.19(b) mostra a seção no modelo numérico, na qual parte dos elementos da mesa superior foram removidos para ilustrar melhor a distribuição homogênea das tensões longitudinais.



**Figura 3.19:** Seção de análise longe do efeito localizado da roda da ponte.

Com base nessa constatação e lembrando que não é usual a utilização de trilhos maiores que o TR 37 para pontes leves, conclui-se que a seção descrita é adequada para a comparação das tensões do modelo numérico com as do elemento de barra. No caso da solicitação 3 (figura 3.15(c)) o centro do vão da viga está distante o suficiente dos efeitos localizados.

Para comparação dos deslocamentos verticais utilizou-se como referência o nó inferior da alma da viga do modelo. Após a análise das três solicitações e para todos os vãos, via modelo de elementos finitos, a tabela 3.3 foi elaborada e na tabela 3.4 consta a diferença percentual entre os valores encontrados para análise por MEF e elemento clássico de barra.

Os valores são satisfatórios, não produzindo diferenças maiores que 4,10%. Salientando-se, ainda, que as pequenas divergências são consequências das propriedades dos elementos finitos de casca, os quais representam melhor as seções delgadas. Destaca-se, também, que o refinamento da mesa superior foi determinado com base na aferição do modelo. A divisão longitudinal da mesa em mais de nove elementos não forneceu ganho significativo na comparação dos resultados do modelo numérico, trabalhando no regime linear elástico, com os valores determinados via modelo clássico de barra.



**Tabela 3.3:** Deslocamentos e tensões determinados via MEF.

		p	p+P	p+2P
	v (mm)	0,171	4,095	6,854
L = 6	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	2,21	65,01	85,50
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	3,05	90,79	120,95
	v (mm)	0,536	9,69	15,73
L = 8	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	3,89	87,53	112,36
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	5,44	122,85	158,26
	v (mm)	1,286	18,8	30,73
L = 10	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	6,03	110,37	143,65
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	8,52	156,86	203,66

**Tabela 3.4:** Diferença percentual entre resultados MEF e modelo clássico de barra.

		p	p+P	p+2P
	v (mm)	4,08%	3,83%	3,81%
L = 6	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	1,25%	0,64%	0,12%
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	-1,21%	-0,93%	-0,17%
	v (mm)	3,13%	2,33%	1,40%
L = 8	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	0,66%	0,50%	0,26%
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	-0,79%	-0,58%	-0,45%
	v (mm)	1,42%	0,32%	-0,36%
L = 10	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)	-0,19%	0,26%	0,20%
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)	-0,60%	0,47%	0,14%

#### 4 ANÁLISE DA VIGA DE ROLAMENTO E RESULTADOS

Com o modelo numérico de elementos finitos descrito neste trabalho, o comportamento da viga de rolamento com vínculo de garfo na região dos apoios, sujeita a força vertical excêntrica em relação ao plano da alma e impacto lateral foi investigado. Devido à vasta combinação de possibilidades para análise, alguns parâmetros foram fixados para todos os casos, além da adoção de algumas hipóteses para a operação da ponte rolante.

Primeiramente, nenhuma verificação de resistência à fadiga foi realizada, pois como hipótese deste trabalho, o número de ciclo de aplicação das ações variáveis é inferior a 20.000 (item k.2.6 da ABNT NBR 8800:2008). Sobre as tensões longitudinais, as recomendações da norma brasileira valem para combinações frequentes que levem a tensões inferiores a 66% da resistência ao escoamento do metal base ( $0,66 f_y$ ), garantindo que a estrutura trabalhe em regime elástico. Por se tratar de um valor de referência importante, esta tensão limite foi utilizada para comparar o aumento das tensões longitudinais devido ao momento torçor. Cabe lembrar que o limite de  $0,66 f_y$  está contido no primeiro trecho do diagrama trilinear de tensão x deformação.

O trem-tipo da ponte rolante utilizado foi baseado no exemplo de Bellei (2000), cuja distância entre rodas é de 3,40 metros e a força vertical, por roda da ponte, é de 90 kN. Este valor de força foi escolhido como inicial e elevado progressivamente para avaliar o comportamento da viga. A majoração é de 10%, considerando que a operação da ponte é feita por controle pendente. Três valores de vão da viga foram utilizados e, para cada um, determinou-se a posição de máximo momento fletor, os quais são ilustrados na figura 4.1.

O material usado para todas as análises foi o aço ASTM A36, cujos valores nominais para resistência ao escoamento ( $f_y$ ) e à ruptura ( $f_u$ ) são de 250 MPa e 400 MPa, respectivamente. Logo, a tensão longitudinal limite para combinação frequente vale 165 MPa ( $0,66 f_y$ ).

O máximo incremento da força vertical foi determinado relacionando a tensão limite de proporcionalidade, o perfil VSA600x81 e o vão de 6 metros. Pela combinação destes três elementos, o máximo momento fletor permitido atuante na viga é de 276 kN.m, sendo a força vertical da roda da ponte que leva a esse

momento de 176 kN, já majorada. Esta força foi utilizada como limite, porém ela está abaixo do valor máximo que a prática emprega (250 kN).

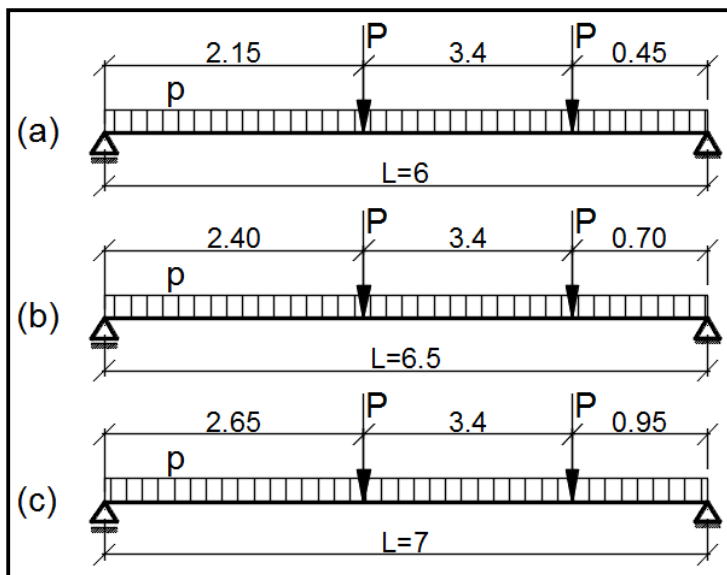


Figura 4.1: Posições críticas do trem-tipo da ponte rolante para cada vão analisado.

No intuito de melhor avaliar a contribuição das parcelas do momento torçor, optou-se por realizar a análise em duas etapas: primeiramente, tratando exclusivamente da excentricidade do trilho em relação ao eixo de simetria da seção e, em seguida, adicionando o efeito do impacto lateral utilizando o binário que atua nos pontos de fixação do trilho.

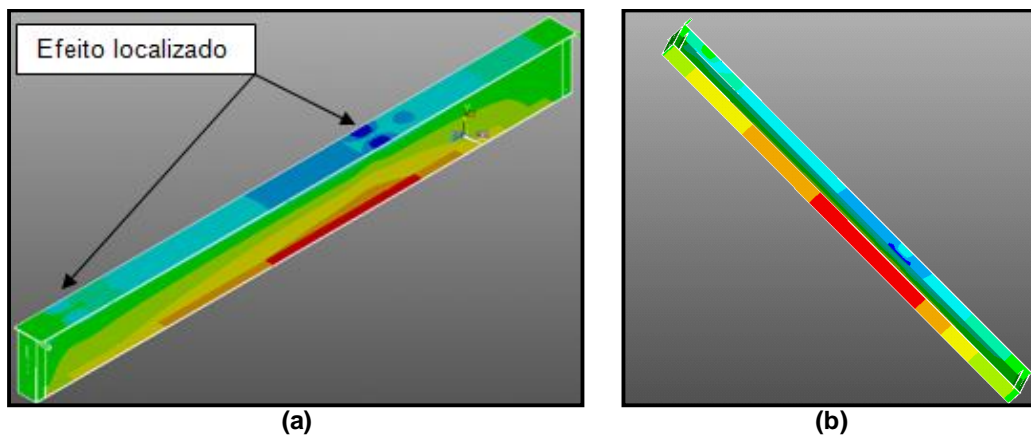
#### 4.1 INFLUÊNCIA DA EXCENTRICIDADE VERTICAL DO TRILHO

A excentricidade do trilho em relação à alma do perfil foi levada acima do limite executivo recomendado pelo critério da AISE n13. Para o perfil escolhido, com alma de 8 mm, o valor máximo aceitável seria de 6,35 mm (equação 2.10), porém, foram impostas excentricidades até 10 mm. Este valor foi suficiente para as conclusões deste trabalho, além deste limite ser recomendado em Bellei (2000).

#### 4.1.1 Tensões longitudinais na presença de excentricidade do trilho

A análise das tensões longitudinais foi realizada sob a condição do momento torçor provocando tensões de tração nas chapas que formam os vínculos de garfo. A compressão no vínculo de garfos produziu os mesmos resultados em módulo, por isso são omitidos neste trabalho. As figuras 4.2(a) e 4.2(b) apresentam a distribuição de tensões na viga para a condição ideal de projeto, ou seja, excentricidade da força vertical nula.

Em especial, na figura 4.2(a), nota-se o efeito localizado da roda na mesa superior, região na qual as tensões de compressão atingem valor máximo, sendo tal efeito menos perceptível próximo ao apoio. Na figura 4.2(b) é possível ver que as tensões de tração são constantes em cada seção transversal da mesa inferior.



**Figura 4.2:** Distribuição de tensões longitudinais - excentricidade da força vertical nula.

Fixado o módulo da força vertical, o aumento da excentricidade do trilho altera a distribuição das tensões nas mesas. Enquanto a compressão no topo da mesa superior aumenta do lado em que a maior parcela da pressão da roda atua, no lado oposto ocorre redução (figura 4.3(a)). Em contra partida, a tensão de tração na mesa inferior cresce no lado oposto ao da excentricidade (figura 4.3(b)). A distribuição de tensões longitudinais continua a se propagar segundo este padrão com o aumento da excentricidade e isso pode ser observado nas figuras 4.4(a) e 4.4(b), as quais mostram a distribuição de tensões para a excentricidade do trilho de 10 mm.

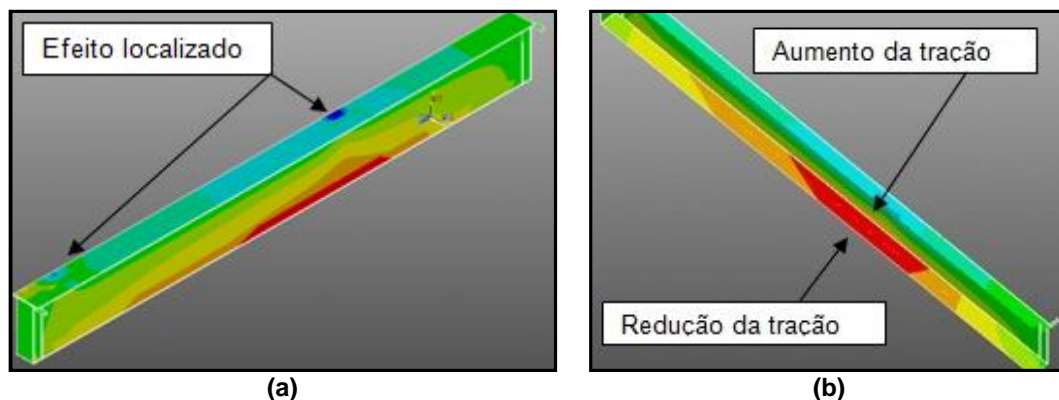


Figura 4.3: Distribuição de tensões - excentricidade vertical do trilho de 5 mm.

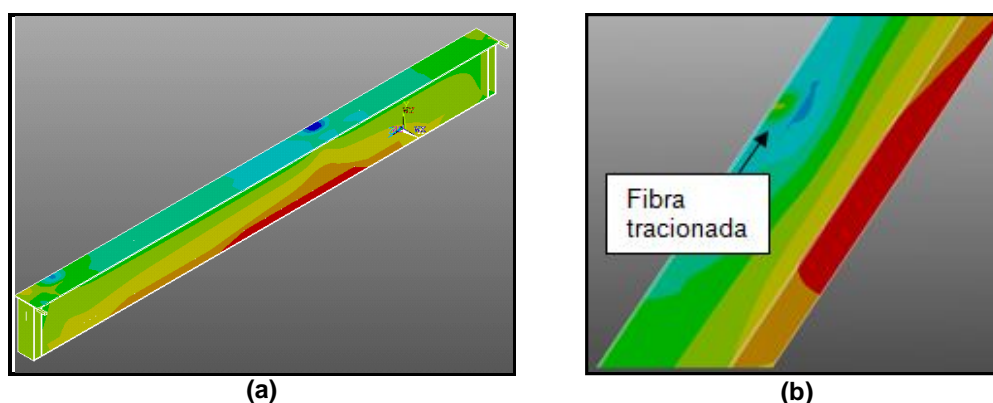


Figura 4.4: Distribuição de tensões - excentricidade vertical do trilho de 10 mm.

Na figura 4.4(b) é importante notar na região inferior da mesa superior, abaixo de onde atua a pressão da roda, que as tensões de compressão têm menor intensidade podendo ocorrer, em função da intensidade e excentricidade da força vertical, inversão de tensão nesta região, isto é, tensões de tração nas fibras inferiores.

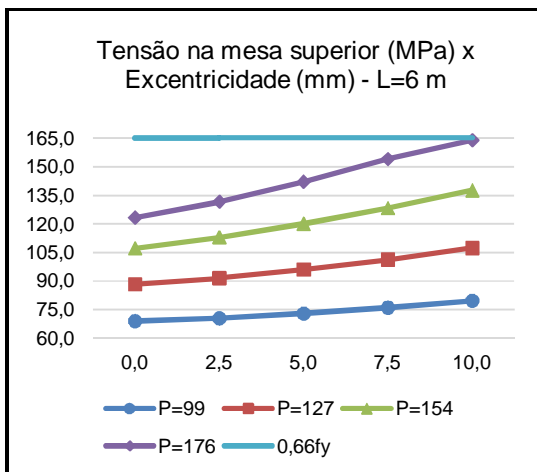
A tabela 4.1 apresenta o módulo das tensões de compressão na mesa superior. A seção de análise é distante 250 mm do centro de pressão da roda da ponte em  $X_1$ , como descrita no item 3.4, e tomada entre as rodas da ponte, pois nesta posição o momento fletor é maior, assim como o bimomento. As tensões de tração, na mesma tabela, são as máximas na mesa inferior da viga. Tensões de compressão e tração são analisadas na linha média da seção (linha de esqueleto).

Fixado o vão em 6,0 metros e variando a força vertical em incrementos de 25 kN, 10% da capacidade máxima de uma ponte leve, até a força adotada como limite, observou-se que as máximas tensões não superaram o limite de proporcionalidade do primeiro trecho do diagrama tensão x deformação ( $0,7f_y=175$  MPa). O limite de

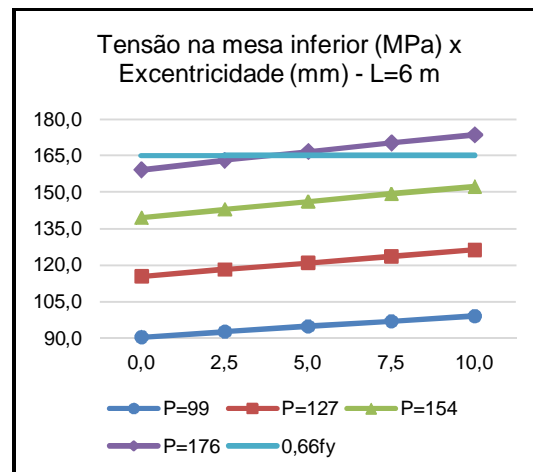
165 MPa, por sua vez, é superado pelas tensões de tração no caso da força de 176 kN e excentricidade do trilho não nulas, o que era um resultado esperado. Os gráficos 4.1 e 4.2, referentes às tensões de compressão e tração respectivamente, ilustram os dados da tabela 4.1 e em ambos a tensão de 165 MPa aparece como reta horizontal.

**Tabela 4.1:** Tensões nas mesas da viga (VSA600x81 e L=6,0 metros).

Força Vertical	P=99 (kN)	P=127 (kN)	P=154 (kN)	P=176 (kN)
$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)				
Excentricidade (mm)				
0,0	69,1	88,3	107,2	123,4
2,5	70,5	91,5	112,9	131,7
5,0	73,0	96,1	120,1	142,1
7,5	76,2	101,3	128,3	154,0
10,0	79,8	107,3	137,6	163,9
$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)				
0,0	90,6	115,4	139,5	159,2
2,5	92,8	118,3	142,9	163,1
5,0	94,9	121,0	146,2	166,7
7,5	97,1	123,7	149,3	170,2
10,0	99,2	126,3	152,3	173,5

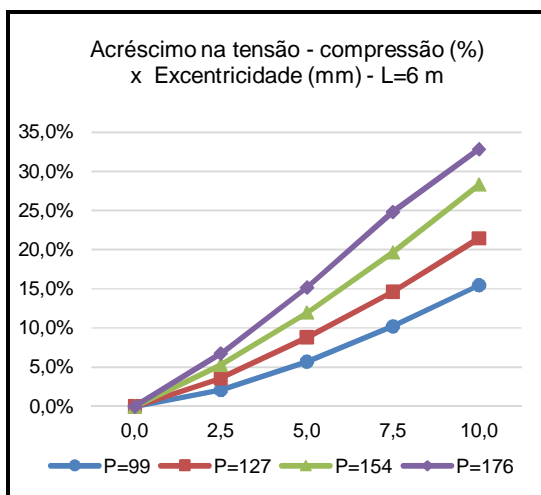


**Gráfico 4.1:** Tensão na mesa superior – Vão de 6 metros.

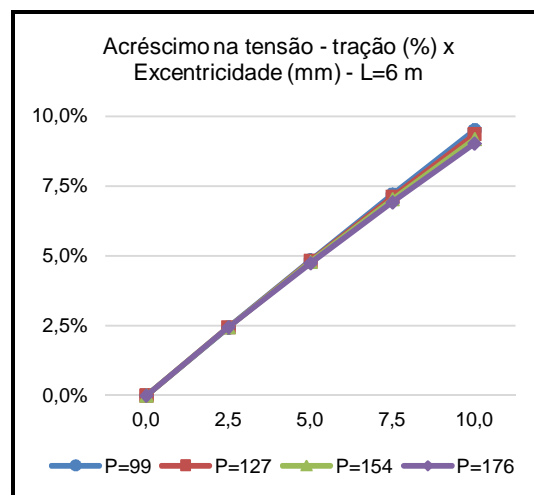


**Gráfico 4.2:** Tensão na mesa inferior – Vão de 6 metros.

Analisando o acréscimo percentual nas tensões de compressão (gráfico 4.3) e tração (gráfico 4.4) percebe-se que, para as tensões de tração, o aumento percentual é praticamente igual, permitindo a sobreposição das curvas. Além disso, o aumento de tensões é bem mais significativo na mesa superior, atingindo valores de até 32,84%, enquanto na mesa inferior este aumento é no máximo de 9,51%. Por último, na mesa superior, os maiores acréscimos de tensão são causados pelas forças verticais mais intensas e, na mesa inferior, pelas forças de menor intensidade.



**Gráfico 4.3:** Acréscimo na tensão de compressão – Vão de 6 metros.



**Gráfico 4.4:** Acréscimo na tensão de tração – Vão de 6 metros.

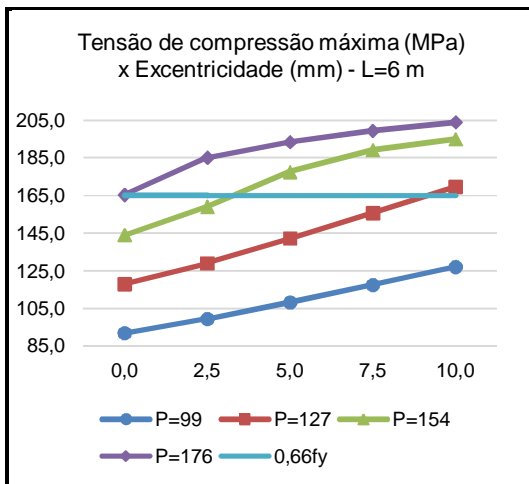
As tensões de compressão máximas na mesa superior, considerando o efeito localizado da força da roda, resultam em valores elevados e superam as tensões esperadas pelo cálculo com modelo de barra mesmo quando não existe excentricidade da força vertical. Os valores podem ultrapassar o limite de  $0,66 f_y$ , mesmo para pequenas excentricidades e com o aumento da excentricidade do trilho apenas para força de menor intensidade este limite é respeitado. A tabela 4.2 mostra os valores das tensões de compressão máximas para as forças aplicadas sobre a viga com vão de 6 metros. A evolução das tensões é ilustrada no gráfico 4.5 e o gráfico 4.6 mostra o acréscimo percentual da mesma tensão.

O acréscimo percentual na tensão de compressão máxima apresenta picos de até 43,80% e tem comportamento similar ao acréscimo de tensão de tração, permitindo uma razoável sobreposição das curvas. A inclinação das curvas de acréscimos e a sua sobreposição estão relacionadas ao diagrama tensão x

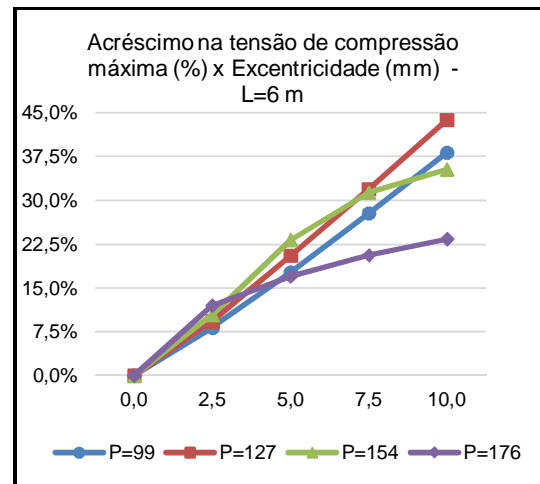
deformação, como pode ser visto no gráfico 4.6. Para os maiores valores de tensão, após início de plastificação da seção, o aumento percentual das tensões é menor.

**Tabela 4.2:** Tensão de compressão máxima (MPa) (VSA600x81; L=6,0 metros).

Excentricidade (mm)	P=99 kN	P=127 kN	P=154 kN	P=176 kN
0,0	92,0	118,0	144,1	165,3
2,5	99,5	129,0	159,1	185,2
5,0	108,2	142,2	177,5	193,4
7,5	117,5	155,7	189,2	199,4
10,0	127,1	169,7	195,0	204,0



**Gráfico 4.5:** Tensão de compressão máxima na mesa superior – Vão de 6 metros.



**Gráfico 4.6:** Acréscimo de tensão de compressão máxima – Vão de 6 metros.

As análises para vãos de 6,5 e 7,0 metros produziram resultados semelhantes que também superaram, em algum momento, a tensão de 165 MPa, pois o aumento do vão basicamente elevou os momentos e, conseqüentemente, as tensões finais. Para estabelecer um paralelo com a força vertical de 176 kN, a qual para o vão de 6,0 metros provoca tensões de 165 MPa, a força de 154 kN para o vão de 6,5 metros leva à valores de tensão na mesa inferior próximas ao limite (161,3 kN). De maneira análoga, para o vão de 7,0 metros, a força limite vertical seria de aproximadamente 135 kN. Em quaisquer casos, com o aumento da excentricidade do trilho, as forças verticais causariam tensões elevadas, invalidando a hipótese de que as tensões longitudinais são inferiores ao limite da norma. O gráfico 4.7 ilustra a evolução das tensões de compressão na seção de análise e o gráfico 4.8 as de



tração máxima na mesa inferior para o vão de 6,5 metros. Para melhor comparação foram mantidos os quatro valores de força vertical utilizados para o vão de 6 metros.

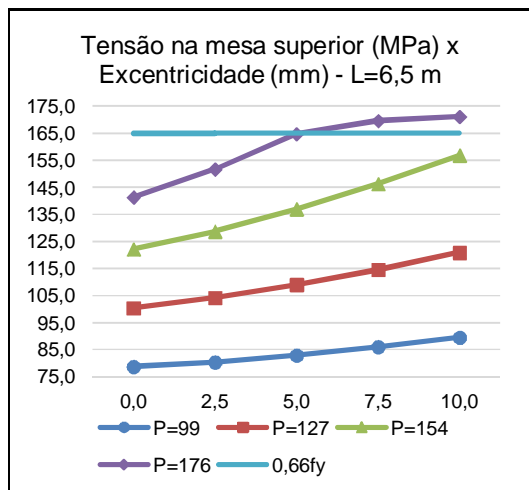


Gráfico 4.7: Tensão na mesa superior – Vão de 6,5 metros.

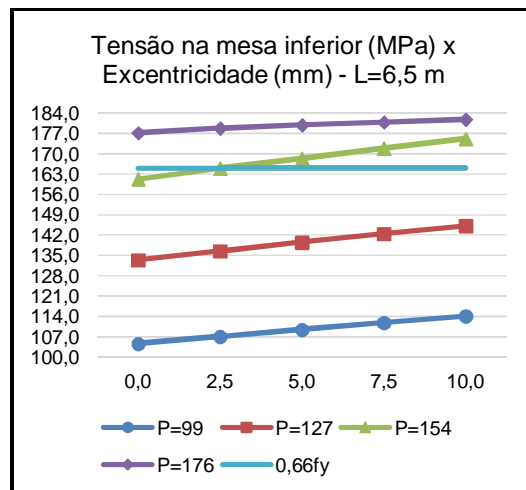


Gráfico 4.8: Tensão na mesa inferior – Vão de 6,5 metros.

Os acréscimos percentuais são mostrados nos gráficos 4.9 e 4.10 e, como aconteceu para o vão de 6 metros, na mesa inferior é possível sobrepor o acréscimo de tensões de acordo com os trechos do diagrama tensão x deformação. Destaque para as tensões relativas à força vertical de 176 kN que se encontram todas acima do limite de proporcionalidade adotado no primeiro trecho do diagrama e, por esta razão, aparecem numa curva isolada no gráfico 4.10.

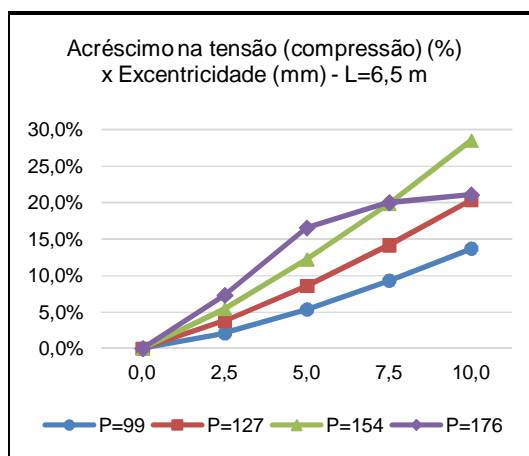


Gráfico 4.9: Acréscimo na tensão de compressão – Vão de 6,5 metros.

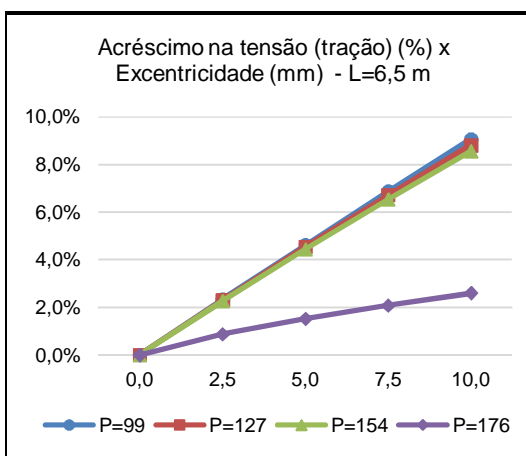
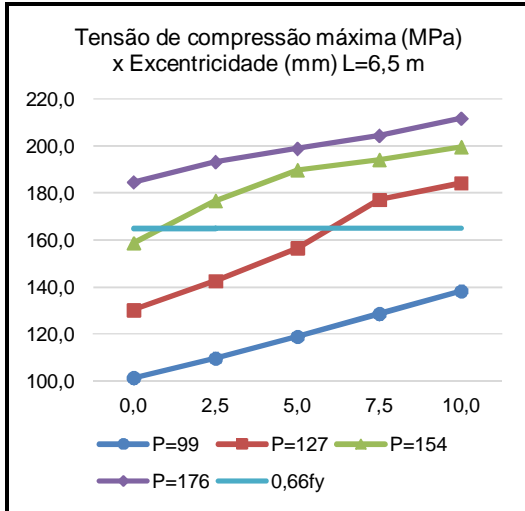
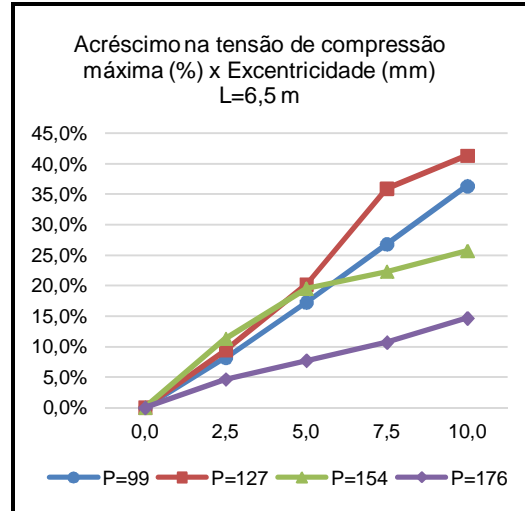


Gráfico 4.10: Acréscimo na tensão de tração – Vão de 6,5 metros.

Por último, para o vão de 6,5 metros, considerou-se a tensão de compressão na mesa superior com a influência da roda (gráfico 4.11 e gráfico 4.12).

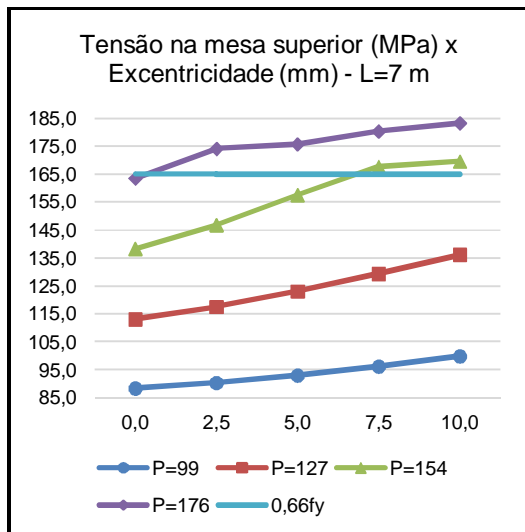


**Gráfico 4.11:** Tensão de compressão máxima na mesa superior – Vão de 6,5 metros.

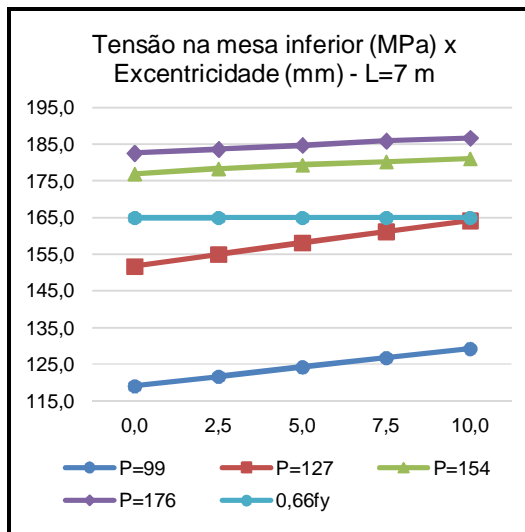


**Gráfico 4.12:** Acréscimo na tensão de compressão máxima – Vão de 6,5 metros.

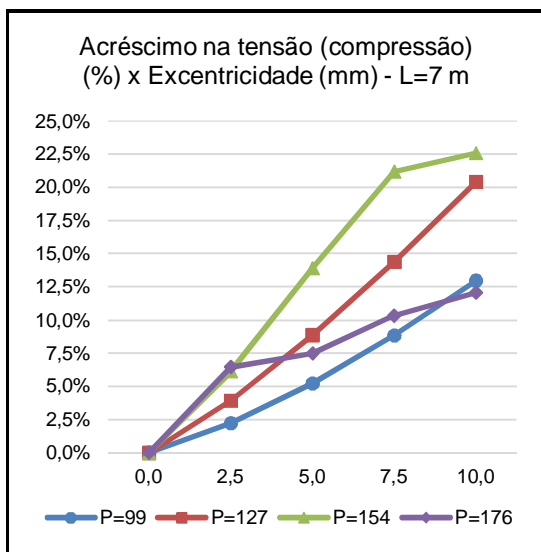
Os resultados da análise para o vão de 7 metros aparecem nos gráficos 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18. O gráfico 4.16, referente ao acréscimo percentual na tensão de tração, reafirmou que o aumento relativo pode ser sobreposto de acordo com o diagrama tensão x deformação do material. Para a tensão de compressão máxima, a sobreposição do acréscimo percentual fica mais clara para os maiores vãos quando comparada aos menores vãos (gráfico 4.18).



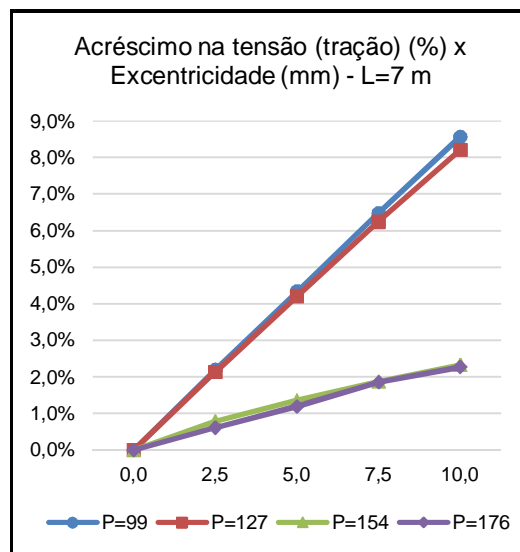
**Gráfico 4.13:** Tensão na mesa superior – Vão de 7 metros.



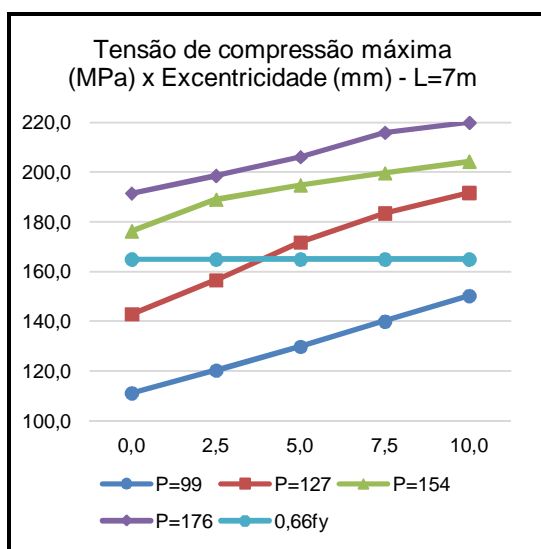
**Gráfico 4.14:** Tensão na mesa inferior – Vão de 7 metros.



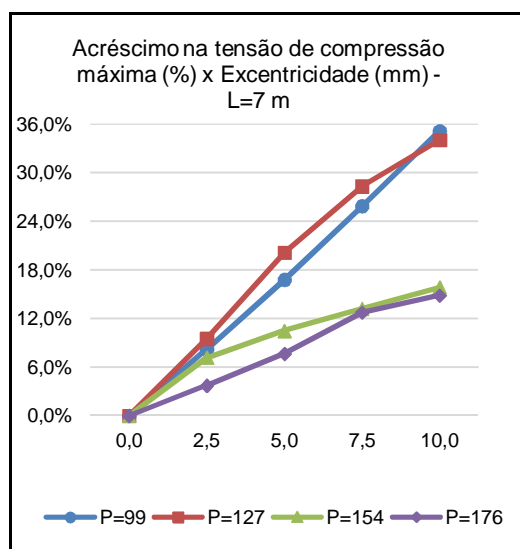
**Gráfico 4.15:** Acréscimo na tensão de compressão – Vão de 7 metros.



**Gráfico 4.16:** Acréscimo na tensão de tração – Vão de 7 metros.



**Gráfico 4.17:** Tensão de compressão máxima – Vão de 7 metros.

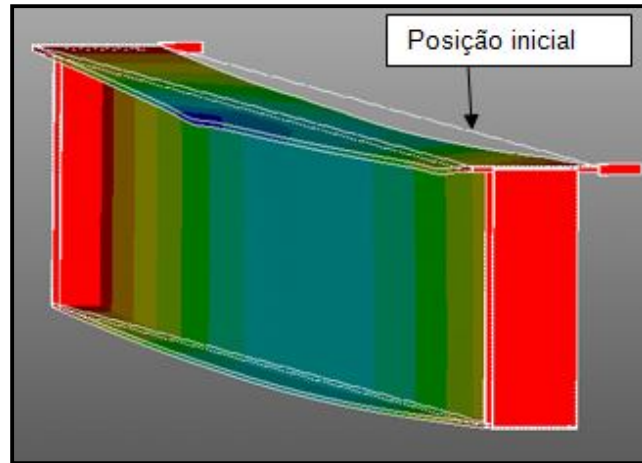


**Gráfico 4.18:** Acréscimo na tensão de compressão máxima – Vão de 7 metros.

#### 4.1.2 Deslocamentos na presença de excentricidade do trilho

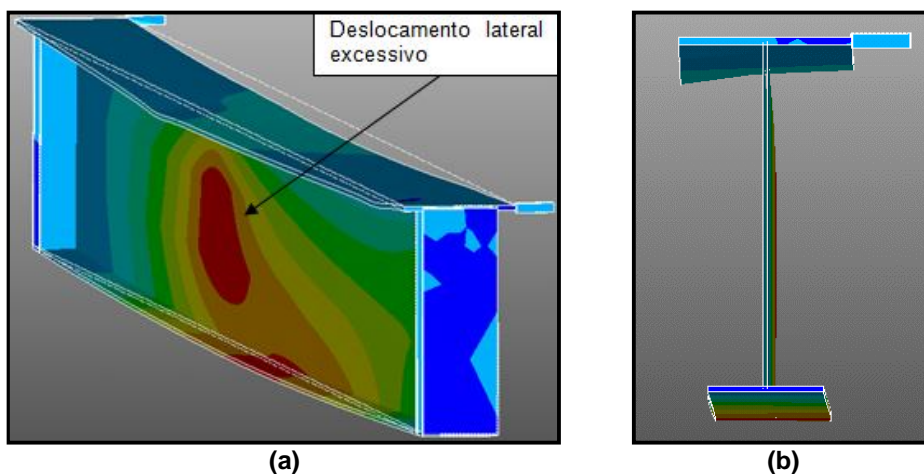
Além da análise em tensões é importante verificar os deslocamentos em seções de interesse. A figura 4.5 mostra a configuração final deslocada da viga, ampliada em 15 vezes para melhor visualização, e em linhas tracejadas a sua posição inicial. Em código de cores aparece a distribuição do deslocamento vertical

indicando que os maiores deslocamentos verticais ocorrem na mesa superior próximo à posição  $X_1$  do trem-tipo da ponte rolante.



**Figura 4.5:** Deslocamentos verticais da viga sujeita a força vertical fora do plano da alma - posição final e inicial.

O deslocamento lateral da viga, por sua vez, é mostrado na figura 4.6(a) em perspectiva e na figura 4.6(b) em corte. É possível perceber que os maiores deslocamentos laterais ocorrem no plano da alma e na mesa inferior próximos à região de máximo momento fletor.



**Figura 4.6:** Deslocamentos laterais da viga sujeita a força vertical fora do plano da alma - posição final e inicial.

A análise dos deslocamentos verticais, dentro do modelo de elementos finitos, levou em consideração a malha da alma, a qual foi dividida em três partes iguais ao longo da altura, com uma divisão adicional no elemento mais próximo da mesa superior para acomodar a transição da malha nos enrijecedores (figura 4.7(a)).

Utilizou-se a média dos dois nós posicionados nos terços da altura (figura 4.7(b)) para controle dos deslocamentos verticais no plano da alma. Ainda sobre os deslocamentos verticais, verificaram-se também os valores máximos na borda da mesa superior.

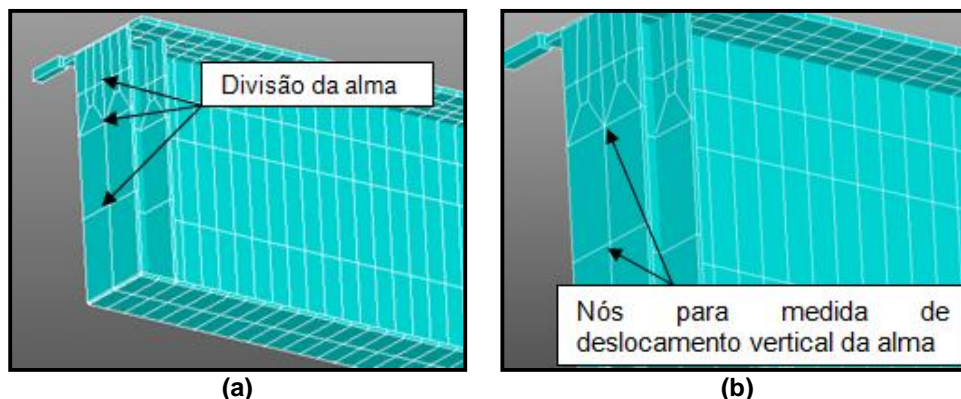


Figura 4.7: Divisão da alma da viga em elementos finitos.

Já em relação aos deslocamentos laterais, em se tratando da alma, o deslocamento mostrado neste trabalho foi dado também pela média dos dois nós posicionados nos terços da altura e, para a mesa inferior, o controle dos deslocamentos foi realizado em relação ao nó de união da alma com a mesa. A tabela 4.3 contém os valores dos deslocamentos verticais da alma ( $v_w$ ), verticais da borda da mesa superior ( $v_{fs}$ ), laterais da alma ( $w_w$ ) e laterais da mesa inferior ( $w_{fi}$ ) para a viga de rolamento com 6,0 metros de vão, forças verticais e excentricidades variáveis.

Tabela 4.3: Deslocamentos (mm) (VSA600x81; L=6 metros) (continua)

	$V_w$	$V_{fs}$	$W_w$	$W_{fi}$
Excentricidade (mm)	F = 99 (kN)			
0,0	4,386	4,797	0,004	0,000
2,5	4,386	5,547	0,667	0,504
5,0	4,385	6,301	1,329	1,008
7,5	4,384	7,061	1,991	1,512
10,0	4,382	7,823	2,653	2,016

(conclusão Tabela 4.3)

	$V_w$	$V_{fs}$	$W_w$	$W_{fi}$
Excentricidade (mm)	F = 127 (kN)			
0,0	6,030	6,442	0,006	0,000
2,5	6,030	7,229	0,958	0,625
5,0	6,028	8,021	1,910	1,251
7,5	6,026	8,817	2,842	1,874
10,0	6,022	9,617	3,783	2,498
	F = 154 (kN)			
0,0	6,741	7,399	0,009	0,000
2,5	6,741	8,542	1,294	0,727
5,0	6,741	9,709	2,561	1,458
7,5	6,740	10,876	3,830	2,186
10,0	6,741	12,058	5,095	2,913
	F = 176 (kN)			
0,0	7,685	8,470	0,012	0,000
2,5	7,687	9,781	1,602	0,799
5,0	7,689	11,108	3,190	1,598
7,5	7,694	12,472	4,781	2,393
10,0	7,704	13,880	6,398	3,184

O deslocamento vertical da alma praticamente não sofreu alteração com o aumento da excentricidade das forças verticais com intensidade de até 154 kN, isto é, metade do valor prático limite para as pontes leves. As pequenas variações encontradas nos deslocamentos para forças de 99 kN e 127 kN são negativas, resultando em deslocamentos verticais menores para excentricidades maiores. Isso ocorre devido ao giro e a curvatura final da alma que, sob o efeito de compressão excêntrica, assume a configuração mostrada nas figuras 4.8(a) e 4.8(b). Nota-se que os pontos analisados na alma tendem a se aproximar, reduzindo o deslocamento vertical final. Este deslocamento contrário as forças gravitacionais é mais acentuado nos pontos inferiores da alma. Para as forças verticais de maior intensidade, os deslocamentos verticais tem um leve aumento para as maiores excentricidades.

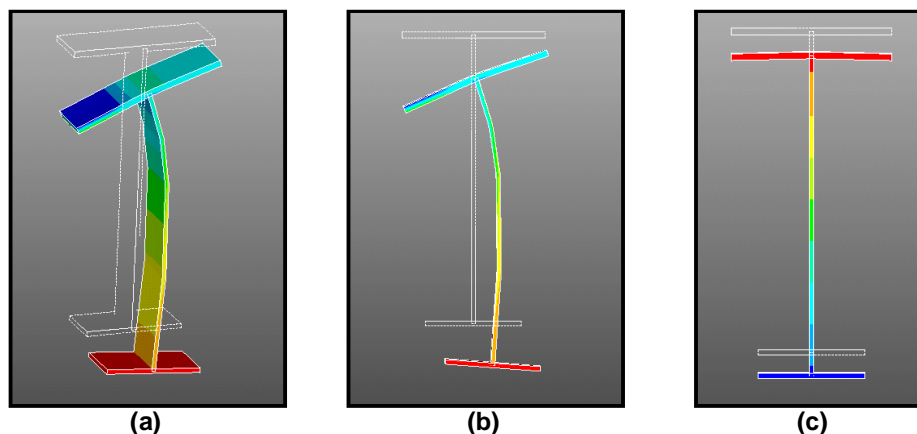


Figura 4.8: Deslocamento na seção de máximo momento fletor ( $X_1$ ).

Os demais deslocamentos analisados apresentam evolução praticamente linear com o aumento da força vertical e excentricidade. Os gráficos 4.19, 4.20 e 4.21 ilustram o deslocamento vertical da borda da mesa superior, transversal da alma e transversal da mesa inferior, respectivamente. No caso da mesa superior, uma vez que ela pode ser associada a um balanço sujeito a carregamento distribuído, o aumento percentual do deslocamento é proporcional à força, como mostra o gráfico 4.22. O acréscimo no deslocamento vertical da borda mesa superior é significativo, atingido valores de até 63,88%. Percebe-se também que o aumento do deslocamento lateral é maior para a alma do que para a mesa inferior.

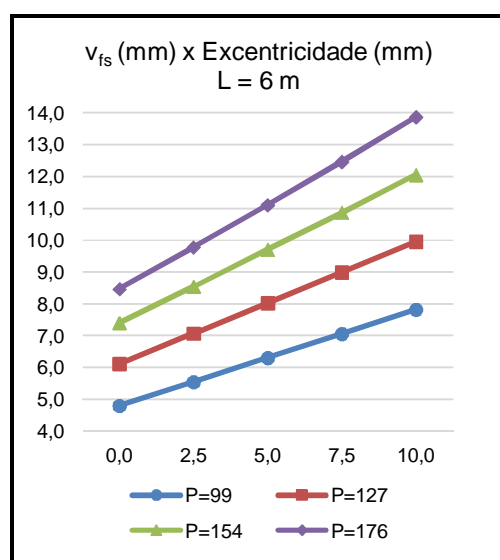


Gráfico 4.19: Deslocamento vertical da borda da mesa superior – Vão de 6 metros.

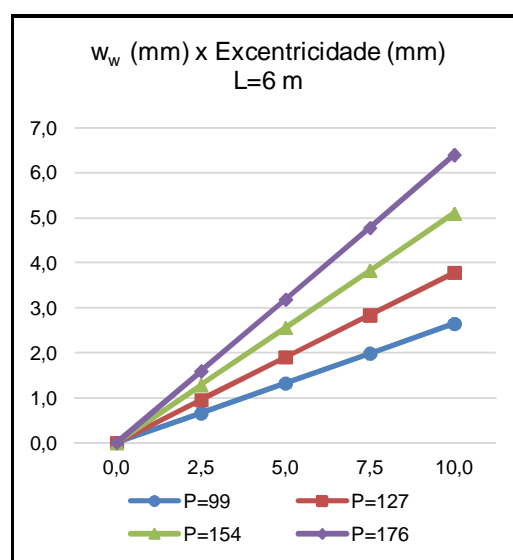
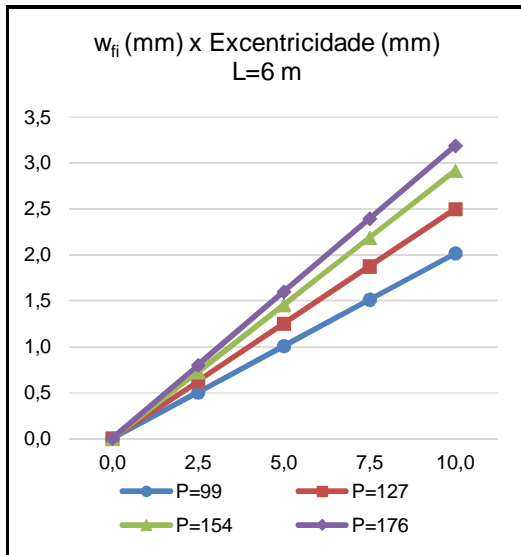
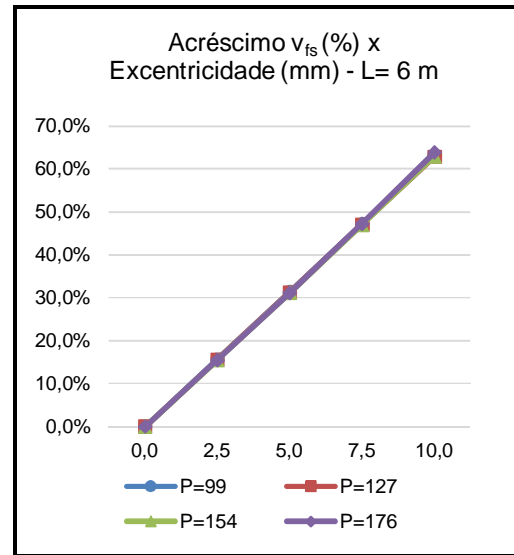


Gráfico 4.20: Deslocamento lateral da alma – Vão de 6 metros.



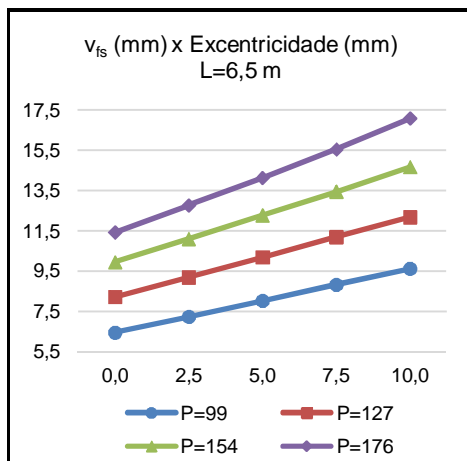
**Gráfico 4.21:** Deslocamento lateral da mesa inferior – Vão de 6 metros.



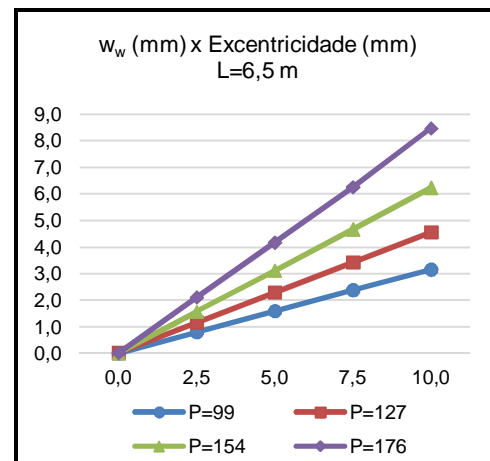
**Gráfico 4.22:** Acréscimo percentual em  $v_{sf}$  – Vão de 6 metros.

Os deslocamentos transversais são elevados e, geralmente, não previstos na fase de projeto, sendo exceção apenas o deslocamento lateral da alma que é considerado em Estado Limite de Serviço (ELS). Contudo, este deslocamento é determinado apenas em função do impacto lateral, sem a consideração dos momentos torçores atuando sobre a viga. A presença da torção aumenta os deslocamentos, o que pode ser prejudicial para a operação da ponte rolante.

A pequena variação no sentido de reduzir os deslocamentos verticais para forças verticais de menor intensidade combinadas com as maiores excentricidades do trilho se repetiram para os vãos de 6,5 metros (gráficos 4.23, 4.24, 4.25 e 4.26) e 7,0 metros (gráficos 4.27, 4.28, 4.29 e 4.30).



**Gráfico 4.23:** Deslocamento vertical da borda da mesa superior – Vão de 6,5 metros.



**Gráfico 4.24:** Deslocamento lateral da alma – Vão de 6,5 metros.



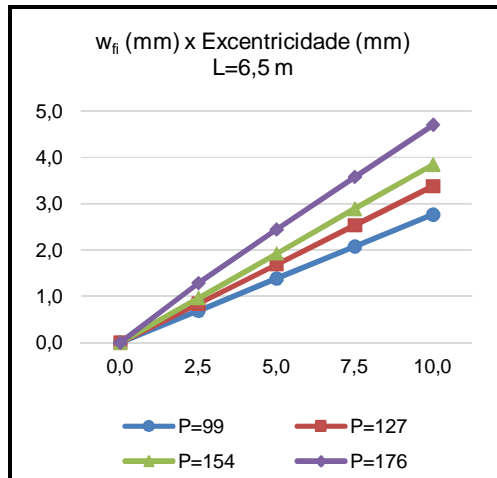


Gráfico 4.25: Deslocamento lateral da mesa inferior – Vão de 6,5 metros.

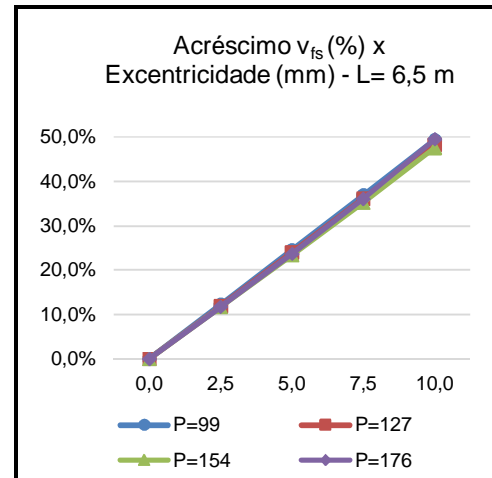


Gráfico 4.26: Acréscimo em  $v_{sf}$  – Vão de 6,5 metros.

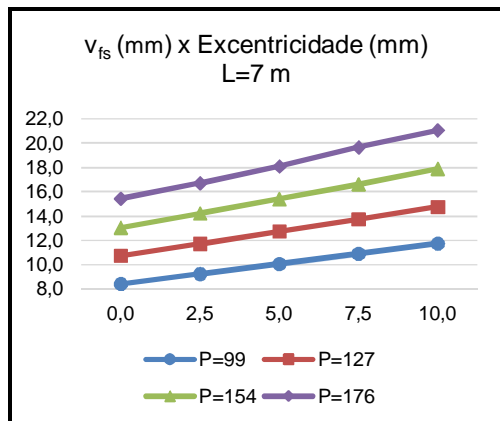


Gráfico 4.27: Deslocamento vertical da borda da mesa superior – Vão de 7 metros

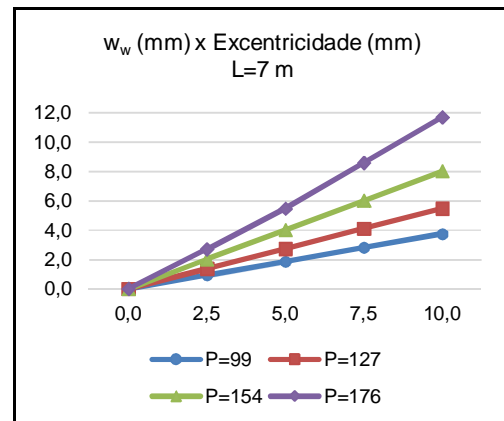


Gráfico 4.28: Deslocamento lateral da alma – Vão de 7 metros

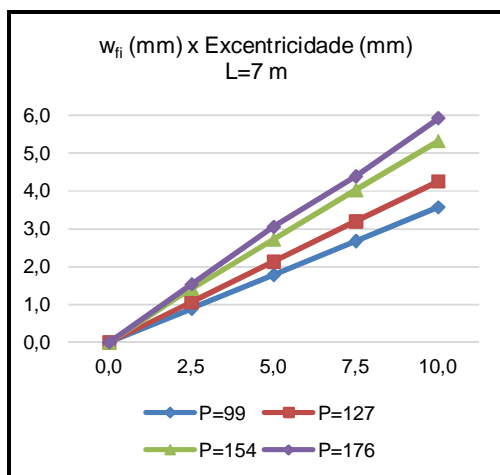


Gráfico 4.29: Deslocamento lateral da mesa inferior – Vão de 7 metros

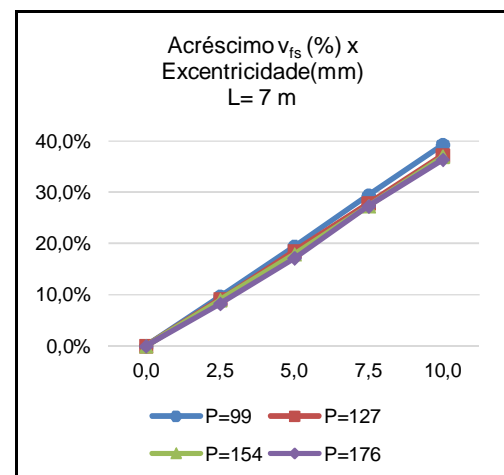


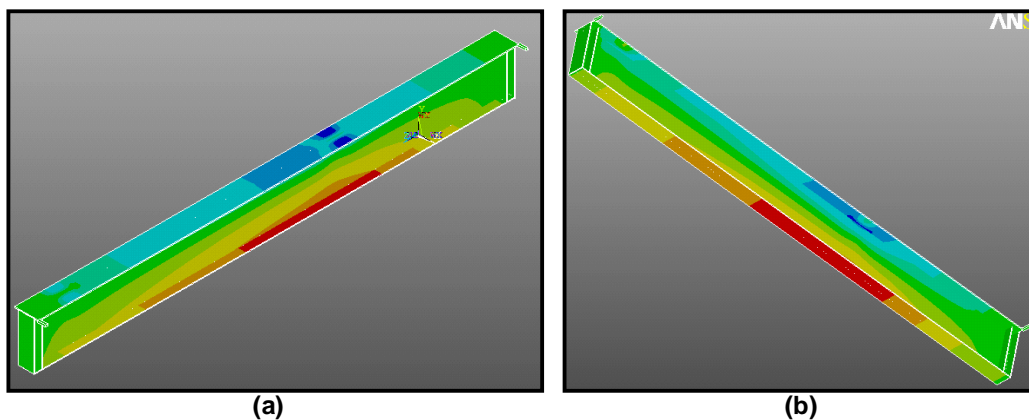
Gráfico 4.30: Acréscimo em  $v_{sf}$  – Vão de 7 metros

## 4.2 INFLUÊNCIA DA ADIÇÃO DO IMPACTO LATERAL AO MOMENTO TORÇOR

### 4.2.1 Tensões longitudinais com impacto lateral

O impacto lateral foi adotado igual a 10% da soma da força vertical da roda da ponte e do peso do trole (operação por controle pendente) e sua introdução no modelo foi no sentido de maximizar o momento torçor. Nesta fase da análise, conclui-se que os resultados são consideravelmente divergentes dos anteriores, devido à presença do binário atuante na viga de rolamento.

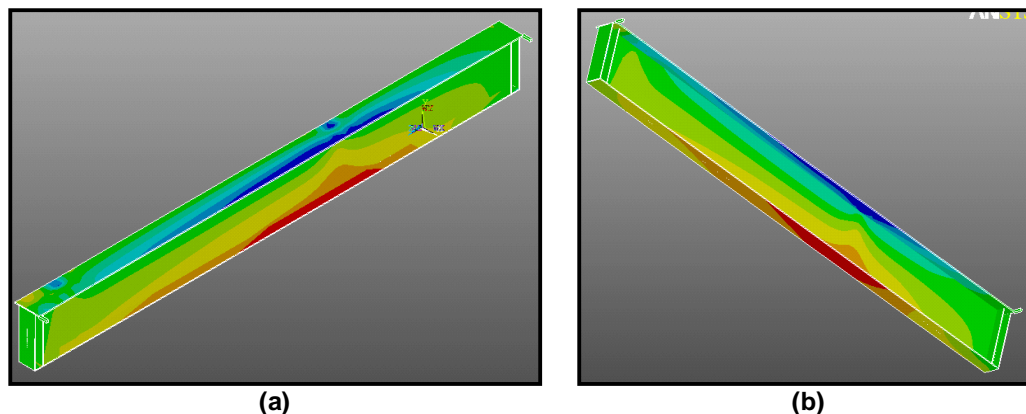
A adição do binário provoca, além da torção, a flexão na direção da menor inércia da seção e um efeito alavanca sobre a mesa superior da viga nos pontos de aplicação. Estas novas solicitações são responsáveis pela alteração na distribuição das tensões longitudinais e esta mudança é significativa, como pode ser observado através da comparação das figuras 4.9(a) e 4.9(b), que mostram as tensões para a viga com força vertical alinhada com o plano da alma e sem impacto lateral, com as figura 4.10(a) e 4.10(b), nas quais foi adicionado o impacto lateral.



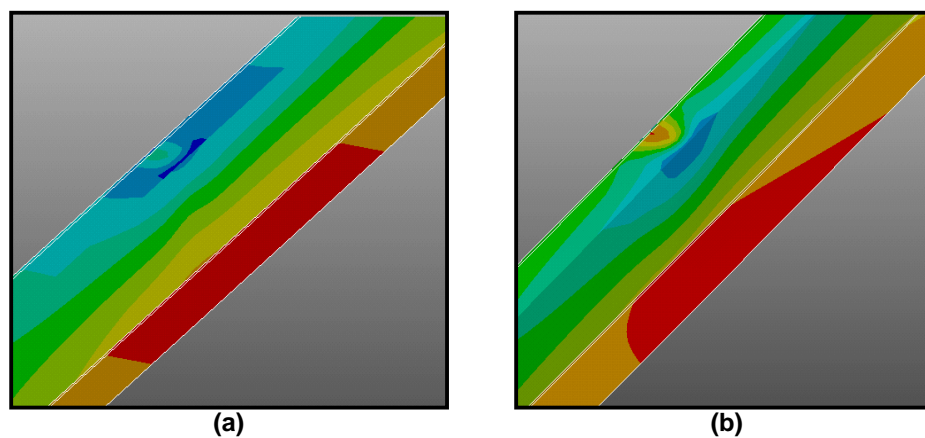
**Figura 4.9:** Tensões longitudinais – força alinhada com plano da alma a e sem impacto lateral.

A figura 4.11(a) destaca a parte inferior da mesa superior na região de aplicação da pressão da roda antes da atuação do impacto lateral. A aplicação do binário de forças causa inversão de tensões, ou seja, tensões de tração nas fibras inferiores da mesa (figura 4.11(b)). Uma vez que o impacto lateral é tomado como

uma parcela da força vertical, a inversão de tensões nesta região depende da estimativa do impacto lateral para o problema.



**Figura 4.10:** Tensões longitudinais – força alinhada com plano da alma e com impacto lateral.



**Figura 4.11:** Tensões longitudinais – inversão de tensões na mesa superior

Do lado oposto da alma ocorre o efeito contrário, isto é, tração nas fibras superiores da mesa, porém em menor intensidade, pois a pressão da roda sobre o topo da mesa não permite a inversão de tensões de compressão para tração.

As figuras 4.12(a) e 4.12(b) mostram em detalhe o segmento da viga com 500 mm de comprimento, contido entre as seções de análise escolhidas. Nas figuras é possível ver melhor a mudança significativa da distribuição de tensões longitudinais na mesa superior com a inclusão do impacto lateral. Apesar da alteração, a seção de análise foi mantida para comparação com os resultados encontrados anteriormente. A tabela 4.4 contém os resultados de tensão para a viga com vão de 6,0 metros.

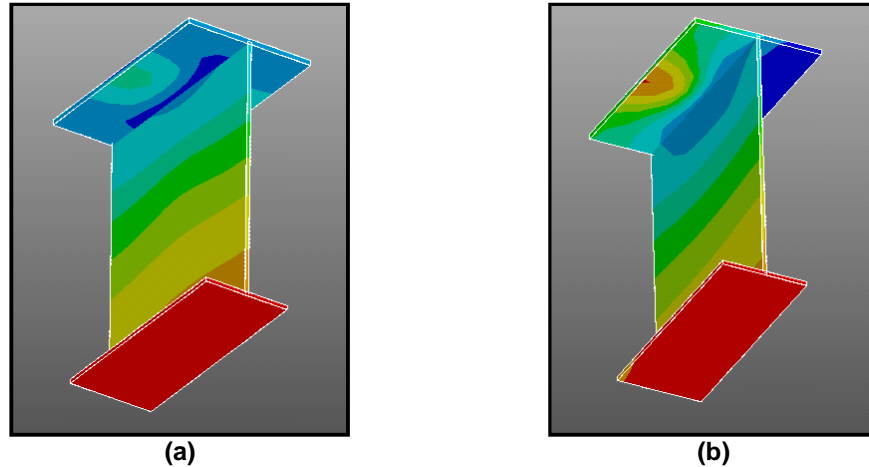


Figura 4.12: Segmento da viga - tensões longitudinais com atuação do impacto lateral.

**Tabela 4.4:** Tensão nas mesas da viga com impacto lateral (VSA600x81 e L=6,0 metros).

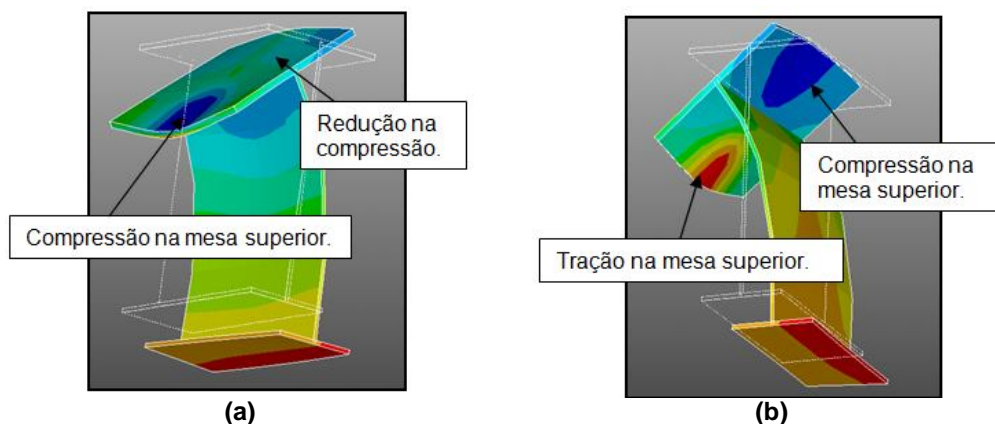
Força Vertical	P=99 (kN)	P=127 (kN)	P=154 (kN)	P=176 (kN)
Excentricidade (mm)	$\sigma_x$ (mesa superior) (MPa)			
0,0	124,3	158,0	174,5	177,9
2,5	123,9	156,4	172,5	174,6
5,0	123,9	155,3	170,1	171,0
7,5	124,0	154,5	167,6	166,8
10,0	124,5	154,2	164,9	162,8
	$\sigma_x$ (mesa inferior) (MPa)			
0,0	99,3	127,3	153,7	175,7
2,5	101,3	129,8	156,5	176,3
5,0	103,3	132,2	159,2	176,7
7,5	105,2	134,5	161,7	177,3
10,0	107,1	136,7	164,2	177,8

O binário de forças influenciou a seção de análise de tal forma que ocorreu a redução das tensões de compressão com o aumento da excentricidade do trilho. Quanto maior a força vertical e, conseqüentemente, o impacto lateral, maior foi a redução na tensão de compressão. Vale lembrar que o impacto lateral aplicado na forma de binário acompanha a excentricidade do trilho.

As inversões de tensões foram de tal intensidade que, localmente, a tração na mesa superior superou a tensão de tração máxima na mesa inferior. Contudo, os

valores mostrados na tabela 4.4 para tensões de tração correspondem às máximas tensões observadas na mesa inferior, não as de efeito localizado na mesa superior.

As figuras 4.13(a) e 4.13(b) ilustram a inversão de tensões e a posição final deslocada do segmento da viga. Os deslocamentos na figura são ampliados para melhor visualização e, em linhas tracejadas, aparece a posição inicial da viga.



**Figura 4.13:** Segmento da viga - tensões longitudinais e posição final deslocada.

Embora as tensões de compressão na seção de análise sofram um decréscimo com o aumento da excentricidade do trilho, as tensões com o impacto lateral são maiores quando comparadas aos casos sem o impacto lateral. No caso das tensões de tração, elas são sempre crescentes, porém, o aumento é menos acentuado na presença do impacto lateral. As comparações entre as tensões antes e após a aplicação do impacto lateral estão representadas nos gráficos 4.31 e 4.32, sendo o primeiro para tensões de compressão e o segundo para tensões de tração. Nos gráficos, as linhas contínuas são referentes às tensões sem a contribuição do impacto lateral e as linhas tracejadas com o impacto lateral.

A tensão de compressão máxima, considerando os efeitos localizados, é sempre crescente, uma vez que o binário gera compressão na parte superior da mesa onde ocorre a maior parcela da pressão da roda, aumentando a tensão localizada. Estes valores também são mais elevados que os casos sem o impacto lateral e a diferença entre seus módulos é maior para as forças de menor intensidade, como mostra o gráfico 4.33. Dado que para as pontes leves as forças verticais são relativamente baixas, esse aumento de tensão localizada na região de fixação do trilho pode levar a situações não previstas em projeto, resultando em

perda de vida útil da estrutura e manutenções mais frequentes do sistema ponte-viga de rolamento.

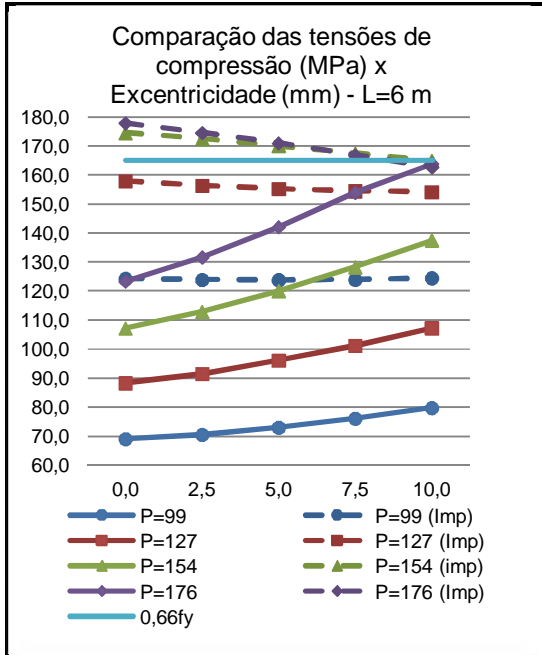


Gráfico 4.31: Comparação entre tensões de compressão – L=6 m

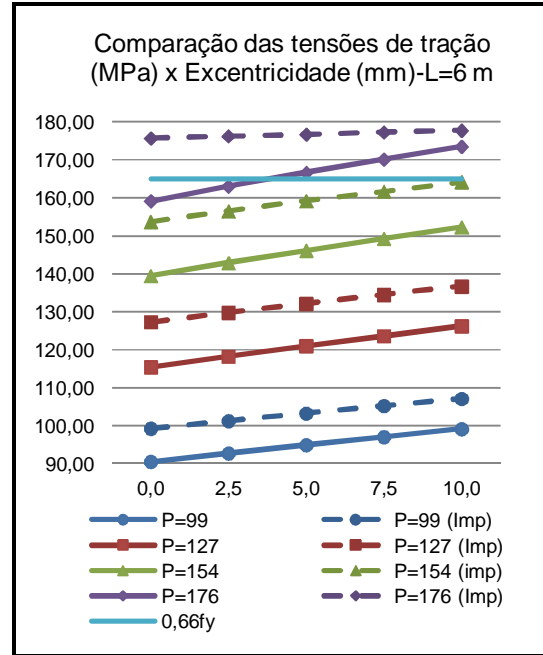


Gráfico 4.32: Comparação entre tensões de tração – L=6 m

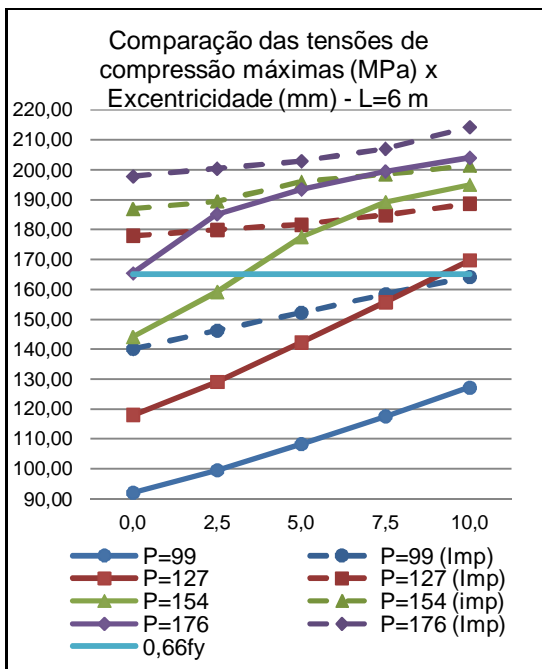
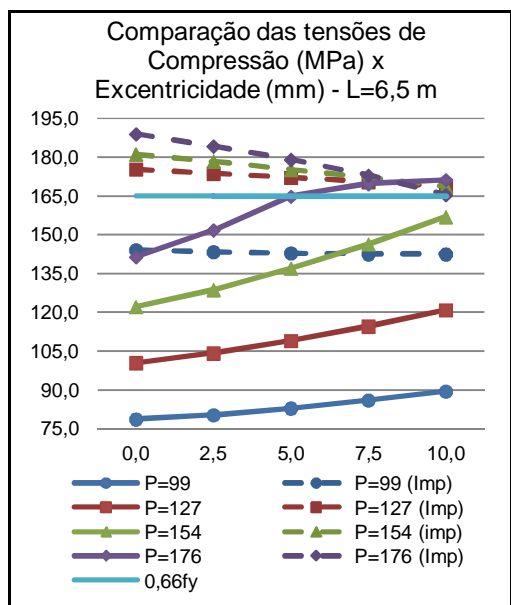


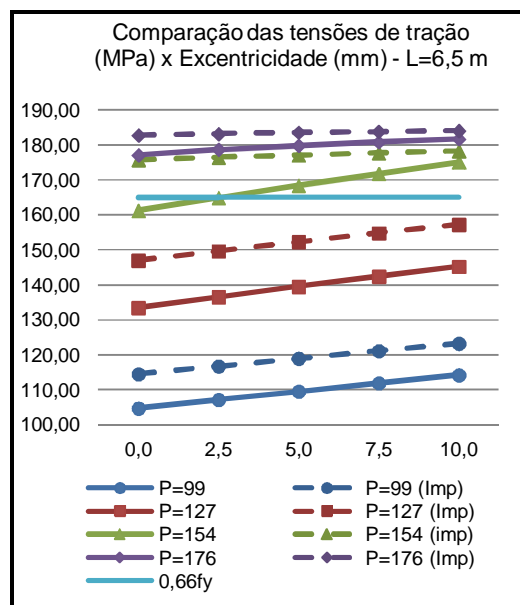
Gráfico 4.33: Comparação entre tensões de compressão máximas – L=6 m

De maneira geral, a introdução do impacto lateral elevou as tensões na mesa superior além do limite de combinação frequente de fadiga para alguns dos casos em que antes isso não ocorria, por exemplo, para a força vertical de 154 kN e 176 kN com pequenas excentricidades (gráficos 4.31 e 4.32). Se o impacto lateral tiver sentido contrário, o que é possível pelo caráter dinâmico desta força, ele provoca a redução do momento torçor, conseqüentemente reduzindo as tensões longitudinais na viga.

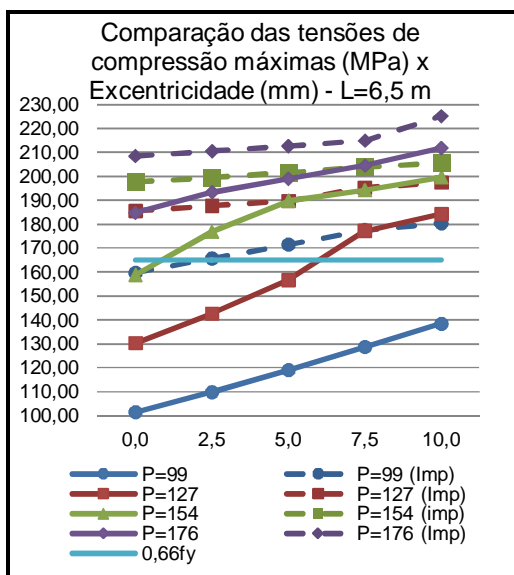
As considerações sobre a adição do impacto lateral para os vãos de 6,5 e 7,0 metros são as mesmas comentadas para o vão de 6,0 metros. Os resultados comparativos entre as tensões para o vão de 6,5 metros são mostrados nos gráficos 4.34, 4.35, 4.36, para tensões de compressão, tração e compressão máxima, respectivamente. Nos gráficos 4.37, 4.38, 4.39, na mesma sequência de dados, aparecem os resultados para o vão de 7,0 metros.



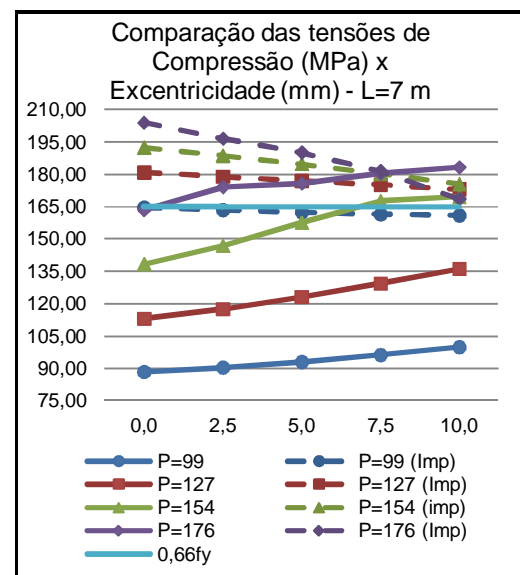
**Gráfico 4.34:** Comparação entre tensões de compressão – L=6,5 m



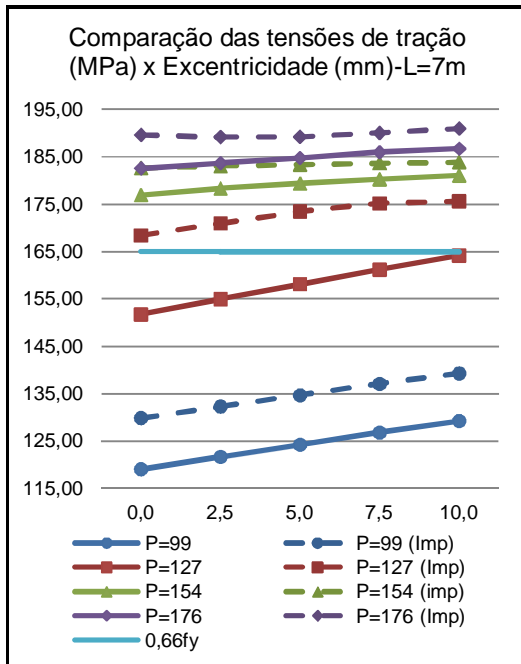
**Gráfico 4.35:** Comparação entre tensões de tração – L=6,5 m



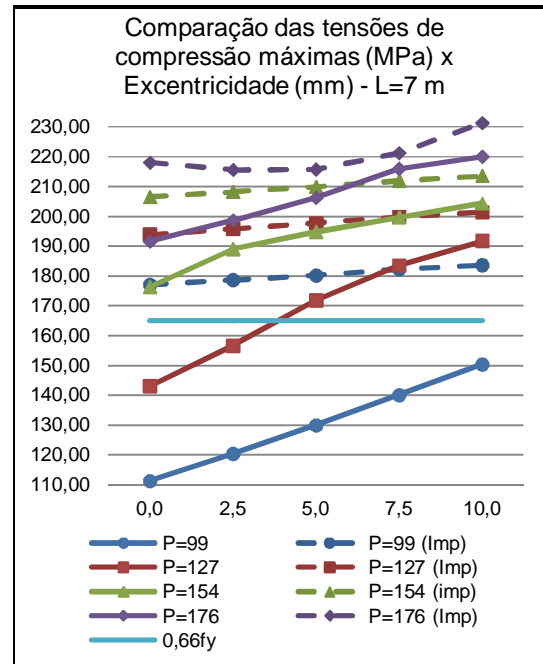
**Gráfico 4.36:** Comparação entre tensões de compressão máximas – L=6,5 m



**Gráfico 4.37:** Comparação entre tensões de compressão – L=7 m



**Gráfico 4.38:** Comparação entre tensões de tração – L=7 m



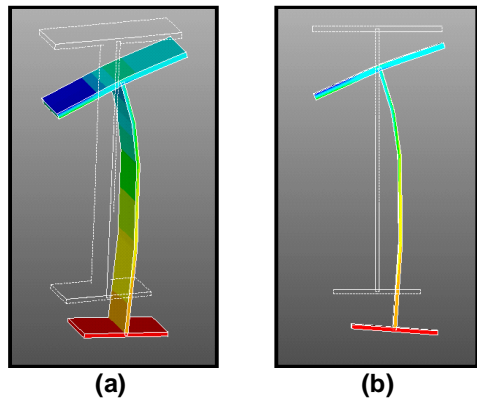
**Gráfico 4.39:** Comparação entre tensões de compressão máximas – L=7 m

#### 4.2.2 Deslocamentos com impacto lateral

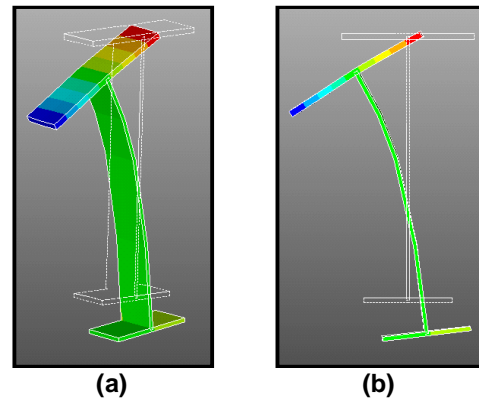
A introdução do impacto lateral altera também a posição final deslocada da viga de maneira considerável, principalmente nos pontos contidos na alma e mesa inferior, sendo importante ressaltar que a atuação do binário tem menor influência sobre os deslocamentos verticais e maior relevância em relação ao giro e deslocamentos laterais da seção.

Sob a atuação única da excentricidade do trilho, a curvatura da alma resulta em deslocamentos laterais orientados no mesmo sentido e o giro da mesa inferior tem sentido contrário ao giro da mesa superior, como pode ser observado nas figuras 4.14(a) e 4.14(b), as quais mostram o deslocamento da seção de máximo momento com a excentricidade do trilho de 10 mm. Com a introdução do binário de forças na mesa, mesmo sem excentricidade do trilho, o giro da seção é maior e produz deslocamentos laterais em sentidos opostos nos pontos da alma, como pode ser visto nas figuras 4.15(a) e 4.15(b). Ocorre, também, a alteração do sentido do giro da mesa inferior, que passa a ter o mesmo sentido da mesa superior.

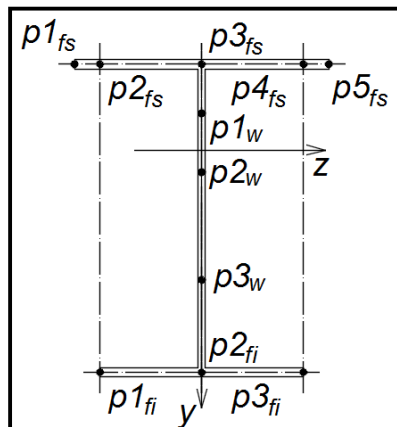




**Figura 4.14:** Deslocamento total – trilho excêntrico em relação a viga.



**Figura 4.15:** Deslocamento total – trilho alinhado com a viga e impacto lateral.



**Figura 4.16:** Pontos de controle do deslocamento da seção transversal da viga.

Por esta razão, o deslocamento lateral da alma não pôde mais ser analisado como a média dos dois pontos posicionados nos terços da altura da viga. Com a presença do impacto lateral, o deslocamento lateral de cada ponto foi analisado separado e para controle dos deslocamentos, adotou-se a nomenclatura dos pontos como apresentado na figura 4.16.

O deslocamento vertical do ponto  $p1_{fs}$  ( $v_{fs}$ ), deslocamento vertical dado pela média dos pontos  $p2_w$  e  $p3_w$  ( $v_w$ ) e o deslocamento lateral do ponto  $p2_{fi}$  ( $w_{fi}$ ) foram mantidos e comparados com os resultados da primeira análise. A tabela 4.5 contém os dados da viga com vão de 6,0 metros.

**Tabela 4.5:** Deslocamentos - impacto lateral (VSA600x81; L=6 metros). (continua)

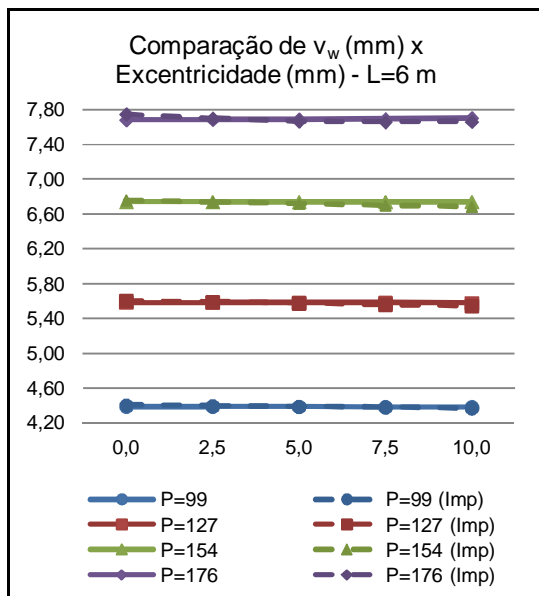
Deslocamento (mm)	$v_w$	$v_{fs}$	$w_w(p2_w)$	$w_w(p3_w)$	$w_{fi}$
Excentricidade (mm) <span style="float: right;">F = 99 (kN)</span>					
0,0	4,403	10,032	-2,343	0,401	2,214
2,5	4,395	10,784	-1,710	1,066	2,713
5,0	4,387	11,548	-1,078	1,731	3,214
7,5	4,378	12,317	-0,433	2,402	3,714

(conclusão Tabela 4.5)

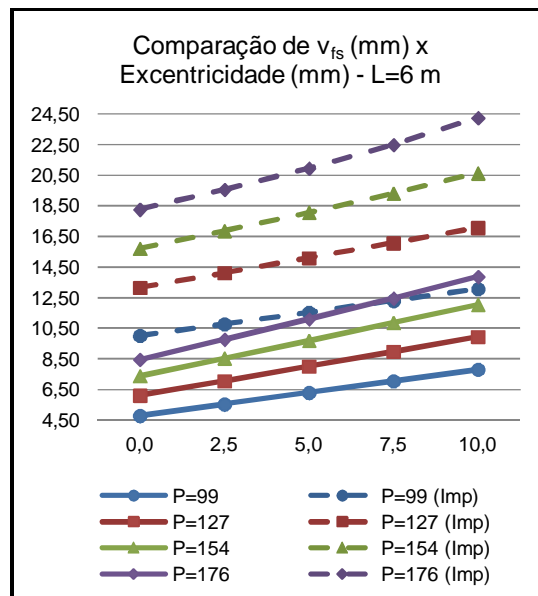
Deslocamento (mm)	$v_w$	$v_{fs}$	$w_w (p2_w)$	$w_w (p3_w)$	$w_{fi}$
Excentricidade (mm)					
F = 99 (kN)					
10,0	4,369	13,085	0,190	3,059	4,212
F = 127 (kN)					
0,0	5,604	13,164	-2,547	0,936	3,091
2,5	5,589	14,134	-1,610	1,849	3,713
5,0	5,575	15,103	-0,687	2,749	4,331
7,5	5,560	16,088	0,254	3,658	4,950
10,0	5,546	17,084	1,174	4,552	5,572
F = 154 (kN)					
0,0	6,760	15,722	-2,262	1,572	3,745
2,5	6,738	16,877	-0,987	2,732	4,462
5,0	6,718	18,078	0,315	3,904	5,187
7,5	6,699	19,328	1,642	5,075	5,909
10,0	6,685	20,649	3,000	6,262	6,649
F = 176 (kN)					
0,0	7,749	18,266	-2,138	2,151	4,422
2,5	7,701	19,572	-0,325	3,627	5,199
5,0	7,670	20,966	1,466	5,094	6,006
7,5	7,658	22,504	3,324	6,607	6,851
10,0	7,664	24,264	5,411	8,202	7,700

Novamente o deslocamento vertical da alma sofreu pequena variação, em sentido contrário às forças gravitacionais, com o aumento da excentricidade do trilho. Comparando os deslocamentos verticais sem impacto lateral com os deslocamentos com atuação do impacto, verificou-se que os deslocamentos verticais são levemente menores no primeiro caso para as menores excentricidades do trilho, porém, o aumento da excentricidade inverte esta situação, tornando-os levemente maiores (gráfico 4.40). As diferenças entre os deslocamentos, apesar deste comportamento, não são significativas. Os deslocamentos verticais da borda da mesa superior (gráfico 4.41), assim como os laterais da mesa inferior (gráfico

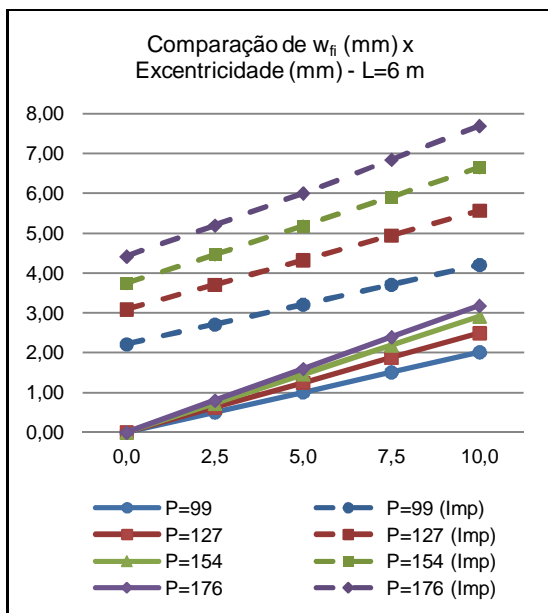
4.42), são intensificados pela ação do impacto, ampliando os valores já excessivos nestes pontos.



**Gráfico 4.40:** Comparação entre deslocamentos verticais da alma – Vão de 6 metros



**Gráfico 4.41:** Comparação entre deslocamentos verticais da borda da mesa – Vão de 6 metros

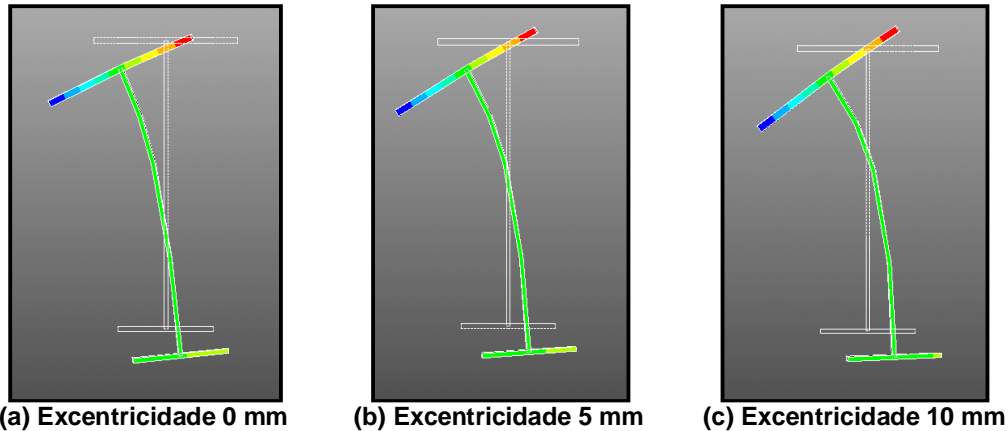


**Gráfico 4.42:** Comparação entre deslocamentos laterais da mesa inferior – Vão de 6 metros

Sobre o deslocamento lateral da alma é interessante ressaltar que o ponto  $p_{2w}$  tem deslocamento negativo inicialmente e o ponto  $p_{3w}$  positivo, ambos como mostrado na figura 4.15(b). Com o aumento da força vertical, a compressão na alma cresce, sobrepondo-se ao binário e modificando a curvatura da alma para uma configuração mais próxima da figura 4.14(b). Desta forma, o deslocamento do ponto  $p_{2w}$  altera seu lado em relação ao eixo vertical da seção.

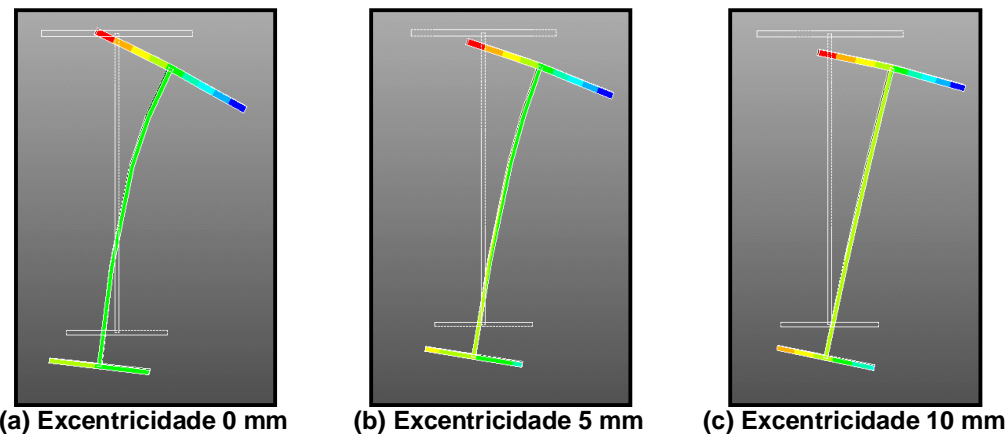
As figuras 4.17(a), 4.17(b) e 4.17(c) mostram essa alteração gradual da posição do ponto  $p_{2w}$ . Nesta sequência de figuras aparece a posição final da seção

$X_1$  para três valores de excentricidades crescentes, de modo que a combinação do impacto lateral e excentricidade do trilho maximizam o momento torçor sobre a viga.



**Figura 4.17:** Deslocamento da seção com aumento da excentricidade do trilho e impacto lateral – Combinação de máximo momento torçor.

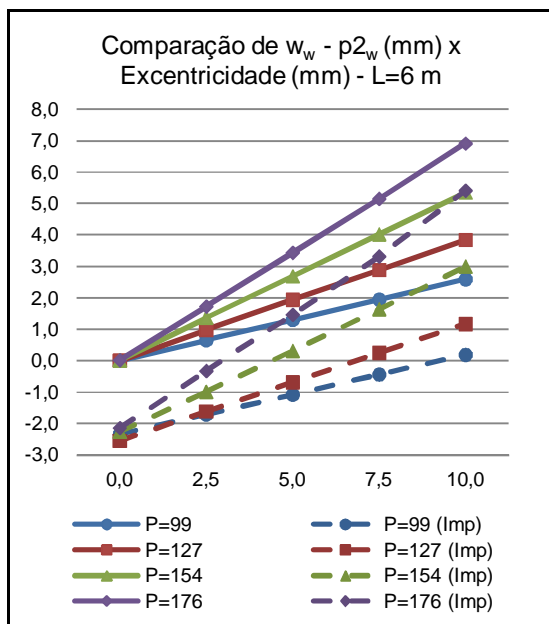
Já o deslocamento lateral do ponto  $p_{3w}$  cresceu com a atuação da máxima torção. Este ponto poderia apresentar deslocamento lateral negativo caso o impacto fosse introduzido no sentido de reduzir o momento torçor causado pela excentricidade da força vertical. As figuras 4.18(a), 4.18(b) e 4.18(c) ilustram esta condição.



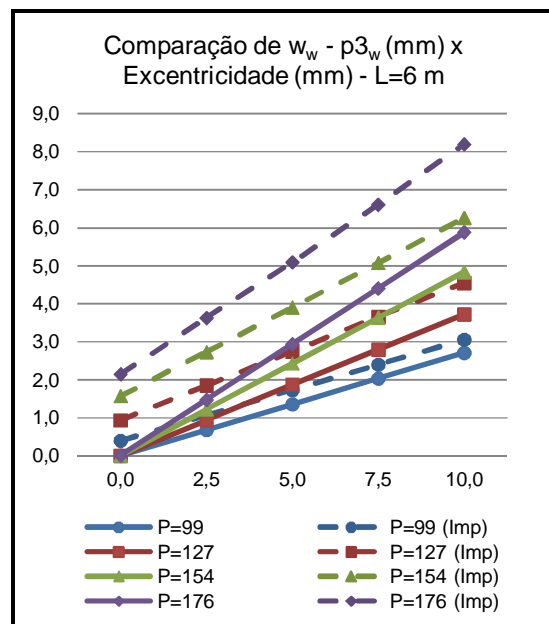
**Figura 4.18:** Deslocamento da seção com aumento da excentricidade do trilho e impacto lateral – Combinação de mínimo momento torçor.

Se, por um lado, a menor intensidade do momento torçor causa redução das tensões longitudinais na viga e favorece seu desempenho em estados limites último (ELU), por outro, para os deslocamentos laterais não existe ganho real, pois estes são elevados, sejam orientados para um lado ou outro do eixo vertical da seção.

O gráfico 4.43 mostra a variação do deslocamento lateral no ponto  $p2_w$  para o máximo momento torçor comparado ao seu deslocamento devido à torção causada apenas pela força vertical excêntrica. O gráfico 4.44 mostra a comparação da mesma situação para o ponto  $p3_w$ .

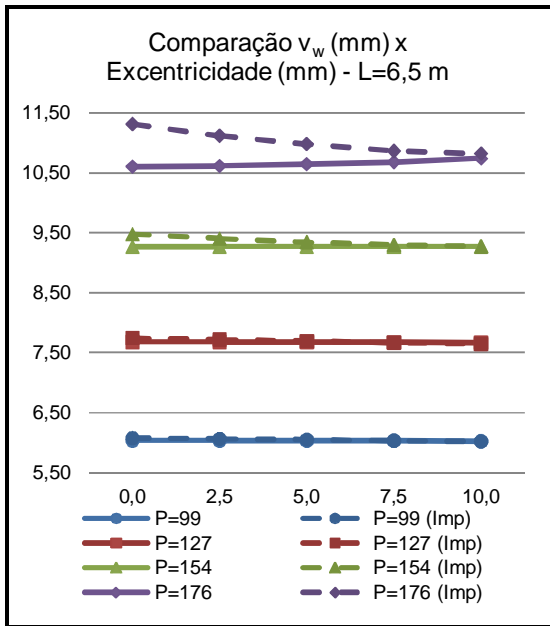


**Gráfico 4.43:** Comparação entre deslocamentos laterais da alma ( $p2_w$ ) – Vão de 6 metros

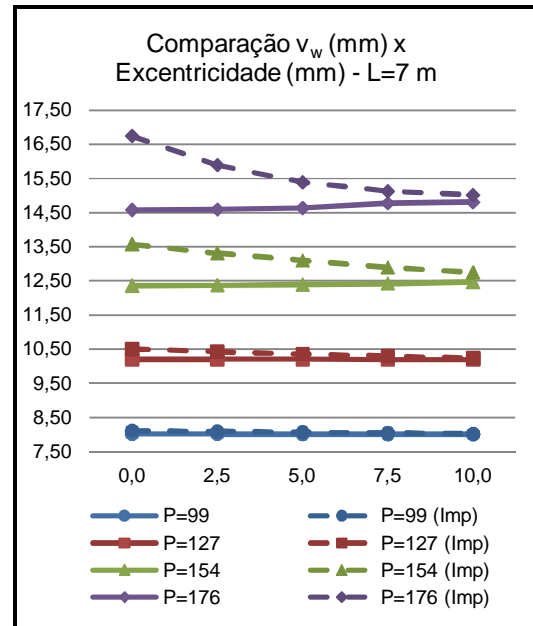


**Gráfico 4.44:** Comparação entre deslocamentos laterais da alma ( $p3_w$ ) – Vão de 6 metros

A evolução dos deslocamentos nos vãos de 6,5 e 7,0 metros é similar ao caso de 6,0 metros, contudo, a diferença entre os deslocamentos verticais da alma na presença e ausência do impacto lateral é maior, variando com o aumento do vão, força vertical mais intensa e pequenas excentricidades do trilho. Com esse resultado, a presença da excentricidade acaba tendo efeito favorável na redução dos deslocamentos verticais, se as forças e os vãos são relativamente elevados. Por exemplo, a diferença entre o deslocamento vertical na ausência e presença do impacto lateral supera 2 mm para a força vertical de 176 kN, vão de 7 metros e sem excentricidade do caminho de rolamento. O gráfico 4.45 mostra a comparação dos deslocamentos verticais para o vão de 6,5 metros, enquanto o gráfico 4.46 mostra a mesma comparação para o vão de 7,0 metros.



**Gráfico 4.45:** Comparação entre deslocamentos verticais da alma – Vão de 6,5 metros.

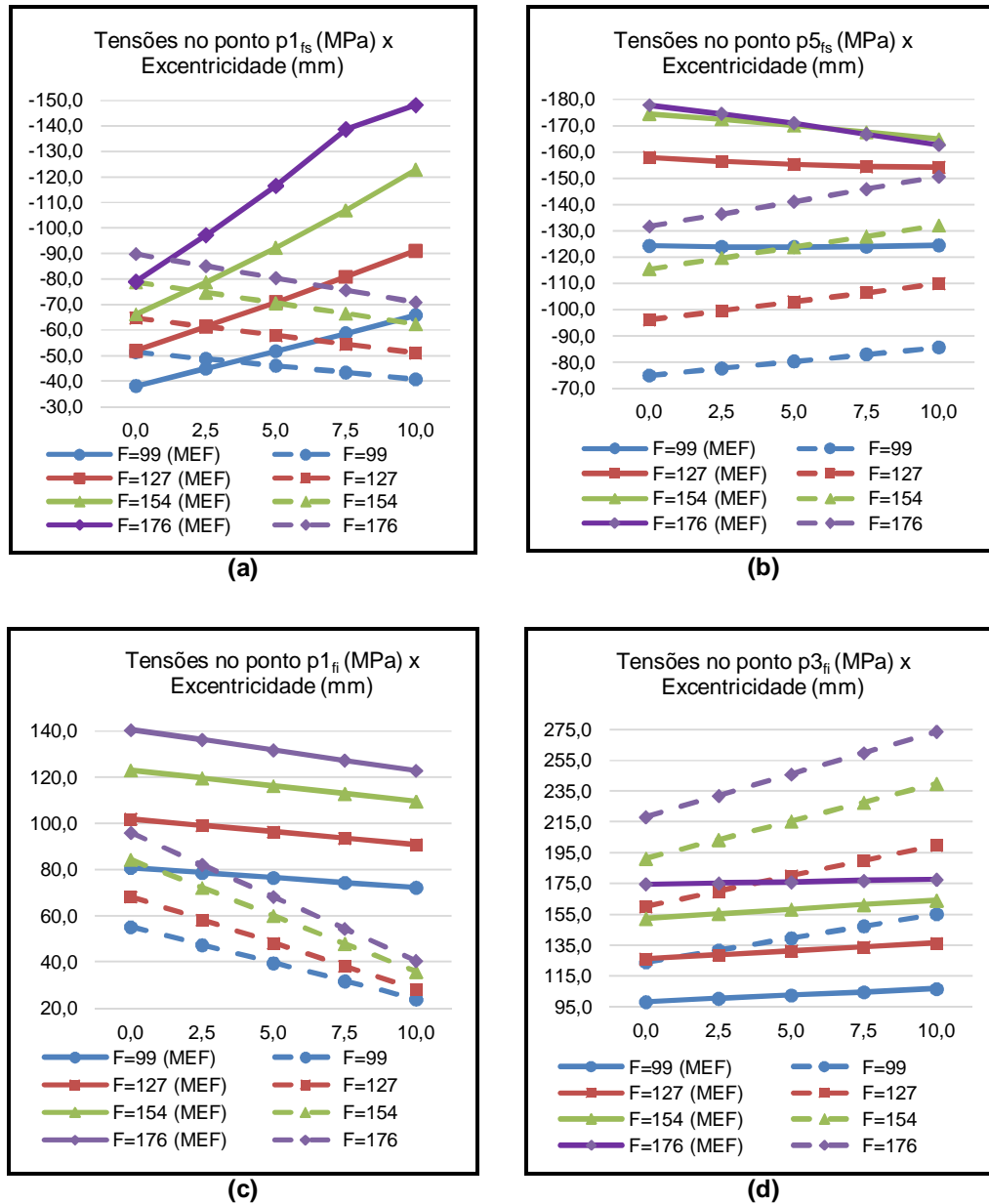


**Gráfico 4.46:** Comparação entre deslocamentos verticais da alma – Vão de 7 metros.

### 4.3 COMPARAÇÃO DAS TENSÕES DO MODELO NUMÉRICO COM A TEORIA DA FLEXTORÇÃO

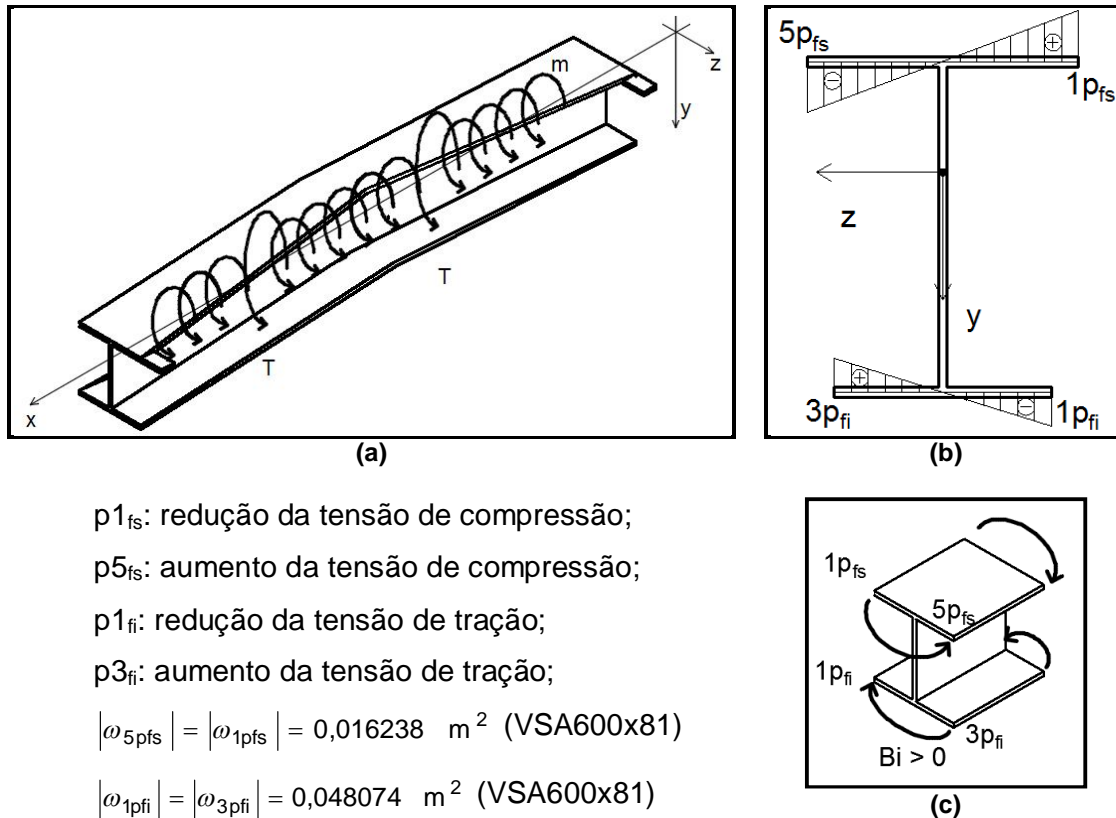
A última fase da análise de tensões comparou os resultados do modelo numérico com a teoria da flexo-torção, sendo as verificações realizadas nos pontos  $p1_{fs}$ ,  $p5_{fs}$ ,  $p1_{fi}$  e  $p3_{fi}$ , pois nestes pontos ocorrem as variações máximas nas tensões devido ao bimomento. Os gráficos 4.47(a), 4.47(b), 4.47(c) e 4.47(d) mostram a alteração das tensões nos pontos  $p1_{fs}$ ,  $p5_{fs}$ ,  $p1_{fi}$  e  $p3_{fi}$ , respectivamente, em resposta ao máximo momento torçor sobre a viga com vão de 6 metros. Nos gráficos, as tensões determinadas via MEF aparecem em linhas cheias e em linhas tracejadas as tensões esperadas pela teoria da flexo-torção, conforme equacionado na seção 2.2.3.

Os resultados do modelo numérico mostraram que na mesa superior o aumento e redução da tensão ocorrem em pontos contrários ao esperado pela convenção de sinais adotada (figura 4.19), ou seja, aumento de compressão no ponto  $p1_{fs}$  e redução no ponto  $p5_{fs}$ . Além disso, nota-se uma grande divergência entre os valores teóricos e numéricos para as tensões em ambas as mesas.



**Gráfico 4.47:** Comparação das variações das tensões devido ao bimomento - Vão de 6 metros e seção de análise padrão.

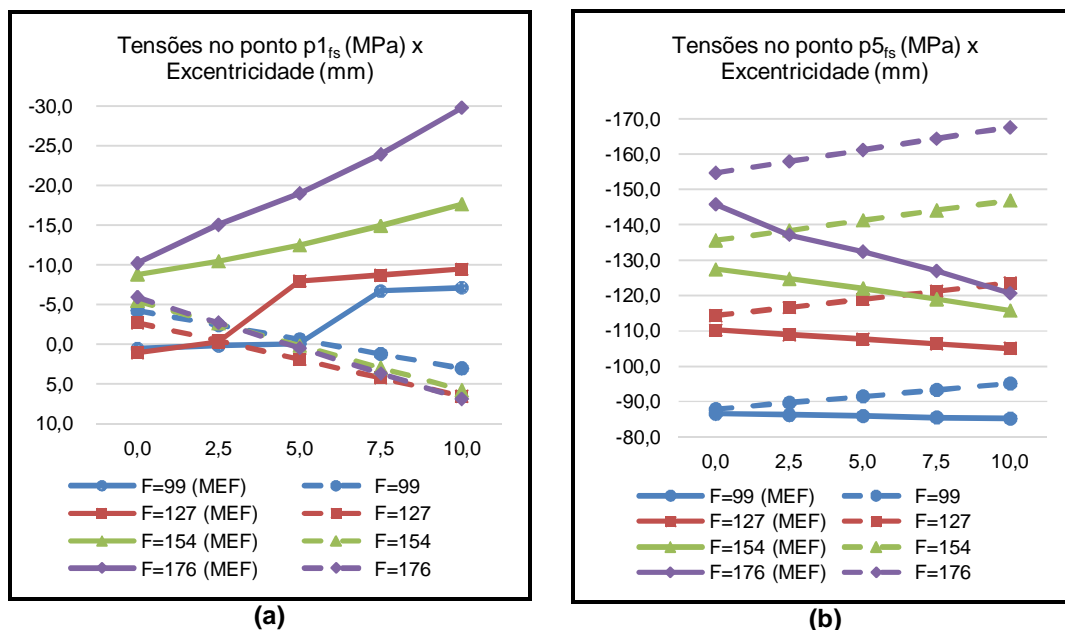
Dado que as tensões foram determinadas na seção de análise padrão, a divergência entre os resultados poderia ser consequência da proximidade da seção com o local de aplicação das ações. Neste caso, uma vez que o binário e a excentricidade do caminho de rolamento se deslocam em direção ao ponto  $p1_{fs}$ , incrementos da tensão de compressão podem ocorrer devido ao aumento da contribuição da pressão da roda sobre este ponto e, de maneira contrária, alívio de pressão sobre o ponto  $p5_{fs}$ . Porém, a verificação numa seção afastada dos efeitos localizadas mostrou a mesma disparidade.



**Figura 4.19:** Aumento e redução de tensões longitudinais nas bordas da mesa da seção.

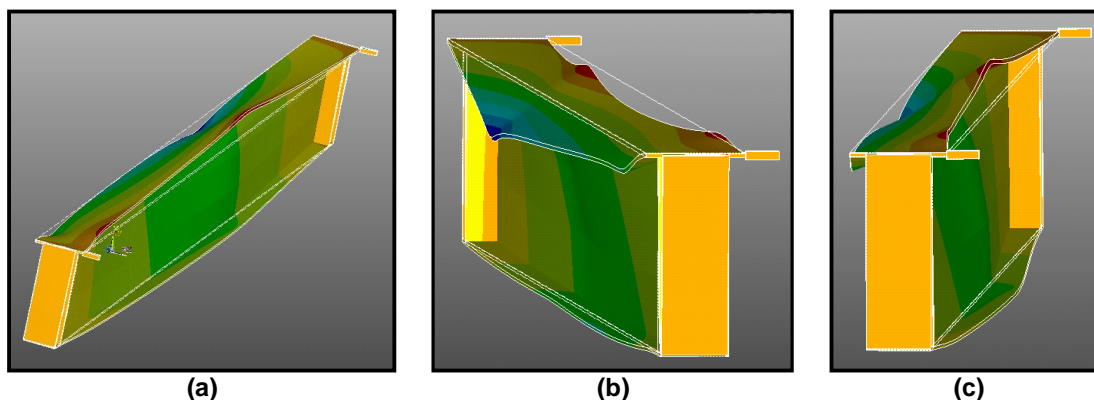
Chamando de posição  $X_3$  a seção média entre as rodas da ponte, ela é tal que está igualmente distante das forças introduzidas no modelo. Mesmo neste local a alteração da compressão na mesa superior permaneceu, bem como a divergência entre valores (gráficos 4.48(a) e 4.48(b)). Vale salientar que o modelo numérico considera a não linearidade geométrica da estrutura, decorrente dos grandes deslocamentos, e a não linearidade física do material, introduzida pelo diagrama tensão x deformação, enquanto as hipóteses da teoria da flexo-torção assumem pequenos deslocamentos e seções indeformadas no seu plano, ou seja, são simplificadoras e lineares. Sob esta ótica, é razoável acatar que o modelo numérico é mais confiável, resultando em tensões finais mais próximas das condições reais do problema da viga de rolamento.





**Gráfico 4.48:** Comparação das variações de tensões devido ao bimomento – Vão de 6 metros e seção equidistante das rodas da ponte ( $X_3$ ).

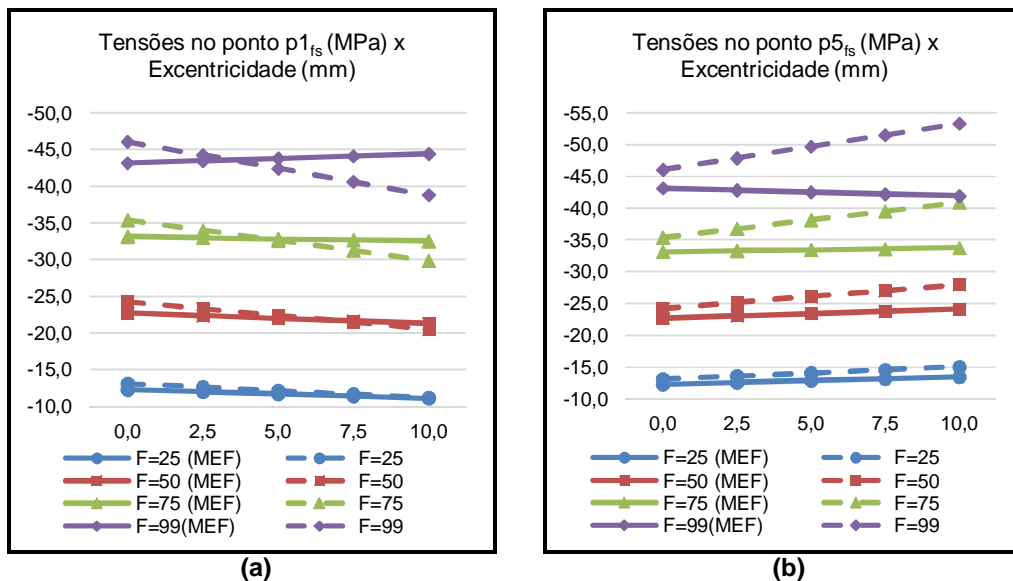
Para melhorar o modelo teórico de barra, seria necessário sobrepor todas as ações, isto é, momento torçor, flexão em torno dos dois eixos principais e efeito alavanca do sistema de fixação. Contudo, tal feito não é simples e se torna economicamente inviável de ser realizado pelo projetista em cada caso de dimensionamento. As figuras 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c) mostram, dando destaque para a mesa superior, a posição final da viga sujeita a todas as ações. Nas figuras, os deslocamentos estão em escala ampliada e é fácil perceber que as hipóteses de pequenos deslocamentos e seções indeformadas no plano perdem força.



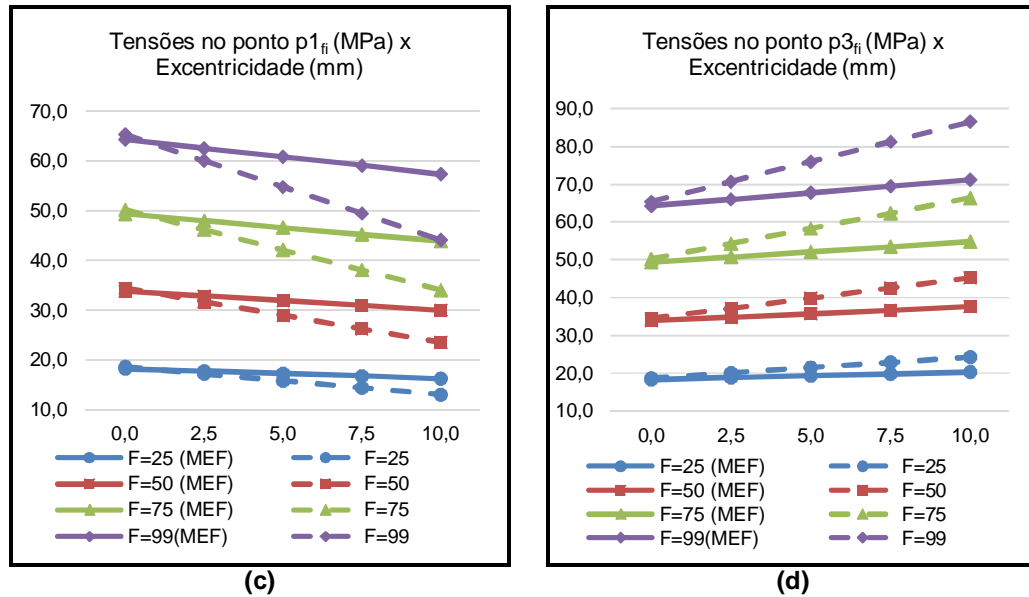
**Figura 4.20:** Posição final deslocada da viga sobre as ações da ponte rolante. Deslocamentos ampliados em 15 vezes.

Aplicando sobre a viga o momento torçor em função apenas da excentricidade do trilho e analisando as tensões na seção  $X_3$ , ocorreu a inversão do bimomento na mesa superior, permitindo concluir que a presença do impacto lateral não é a única causa das divergências entre resultados numéricos e teóricos.

Investigou-se a influência da intensidade da força vertical sobre este problema utilizando forças de menor intensidade e, gradativamente, elevando seus valores. Análises realizadas com forças de 25 kN, 50 kN e 75 kN mostraram aumento e redução de compressão nos pontos da mesa superior de acordo com a convenção de sinais e, para o valor de 99 kN, ocorreu a inversão. Portanto, para algum valor de força entre 75 kN e 99 kN ocorre a mudança. A determinação do valor através de tentativa e erro não foi realizada, pois a intenção era apenas confirmar que a intensidade da força vertical tem influência sobre a inversão. Apesar do comportamento esperado para as forças de menor intensidade, ainda ocorrem divergências entre os valores de tensões. No caso das forças verticais alinhadas com o plano de simetria, a tensão na mesa inferior tem valor praticamente igual ao do modelo de barra e, para as tensões de compressão na mesa superior, ocorrem pequenas diferenças. As diferenças, contudo, não são significativas.



**Gráfico 4.49:** Comparação das variações de tensões devido ao bimomento – Vão de 6 metros e seção equidistante das rodas da ponte ( $X_3$ ).



**Gráfico 4.49:** Comparação das variações de tensões devido ao bimomento – Vão de 6 metros e seção equidistante das rodas da ponte ( $X_3$ ).

As dimensões da mesa superior também tem influência sobre a inversão de sentido do bimomento. Aumentando gradativamente a espessura da mesa superior do perfil VSA600x81 e mantendo fixas todas suas outras dimensões, o sentido do bimomento foi de acordo com o teórico esperado. Os valores de tensão, contudo, continuaram divergentes. As espessuras utilizadas foram de 16 mm, 20 mm e 25,4 mm combinadas com a força vertical de 99 kN. Para a espessura de 16 mm, ainda que pouco significativa em valores, já houve a alteração no sentido do bimomento para o esperado teórico. As tensões nos pontos da mesa superior aparecem na tabela 4.6.

**Tabela 4.6:** Tensão nos pontos extremos da mesa superior – seção  $X_3$  (VSA600x81;  $F=99$  kN e  $L=6,0$  metros). (continua)

Espessura ( $t_s$ )	12,5 (mm)	16 (mm)	20 (mm)	25,4 (mm)
Excentricidade (mm)	$\sigma_x - p1_{fs}$ (Modelo numérico) (MPa)			
0,0	-43,16	-35,53	-29,42	-24,03
2,5	-43,47	-35,45	-29,24	-23,87
5,0	-43,78	-35,37	-29,07	-23,71
7,5	-44,10	-35,30	-28,92	-23,58
10,0	-44,41	-35,24	-28,77	-23,46

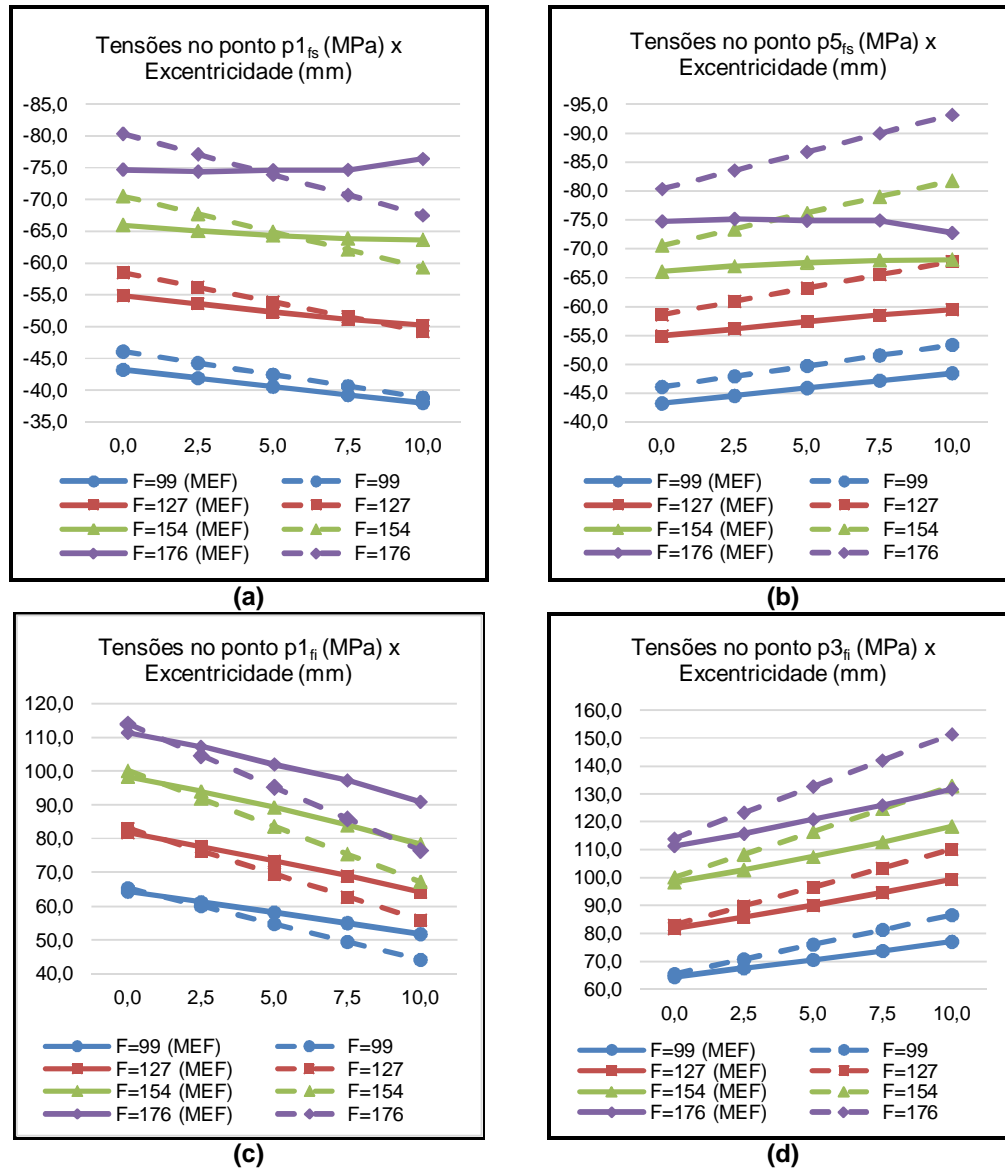
(conclusão Tabela 4.6)

Espessura ( $t_{fs}$ )	12,5 (mm)	16 (mm)	20 (mm)	25,4 (mm)
Excentricidade (mm)	$\sigma_x - p5_{fs}$ (Modelo numérico) (MPa)			
0,0	-43,16	-35,53	-29,42	-24,03
2,5	-42,84	-35,62	-29,61	-24,21
5,0	-42,53	-35,71	-29,81	-24,40
7,5	-42,22	-35,80	-30,01	-24,59
10,0	-41,90	-35,90	-30,23	-24,81

Por fim, a posição das ações sobre a viga também é fator determinante na inversão do bimomento na mesa superior. A posição, inclusive, é mais decisiva que a intensidade da própria força e espessura da mesa, pois modificando a posição de atuação da roda para a mesa inferior, o aumento e redução das tensões longitudinais nos pontos  $p1_{fs}$  e  $p5_{fs}$  foi de acordo com o esperado teórico mesmo para as forças de maior intensidade, embora ainda permaneçam as diferenças com os valores teóricos. Com a força da roda posicionada na mesa inferior, a redução de compressão no ponto  $p1_{fs}$  ocorreu para forças de 176 kN e excentricidades do trilho de até 2,5 mm. A inversão do bimomento ocorre e a compressão no ponto aumenta acima dessa excentricidade. A variação de tensões na mesa inferior também sofreu considerável aumento devido ao momento torçor atuar diretamente sobre ela. A comparação entre as tensões aparecem no grupo de gráficos 4.50.

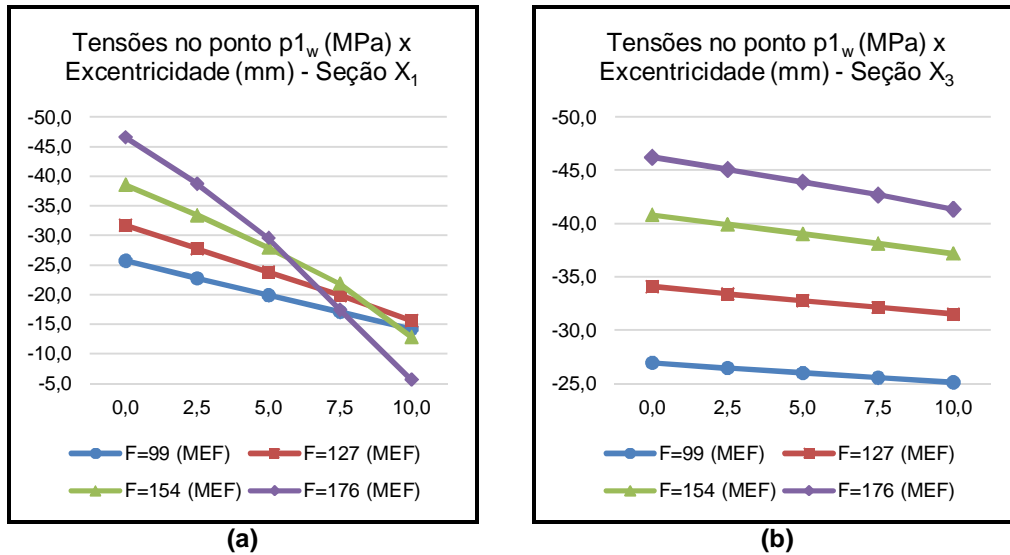
A última análise da variação das tensões longitudinais devido à torção trata do equilíbrio da seção. Pela teoria, o aumento de compressão de um lado da mesa é balanceado pela redução no lado oposto. Também não ocorre variação das tensões longitudinais no plano da alma para perfil I (área setorial principal nula).

Com o máximo momento torçor atuando sobre a viga, o equilíbrio da seção  $X_1$  não pode ser obtido considerando apenas o bimomento nas mesas, pois de um lado da mesa superior (ponto  $p1_{fs}$  e  $p2_{fs}$ ) ocorre um aumento de compressão maior que a redução no lado oposto (ponto  $p4_{fs}$  e  $p5_{fs}$ ). A diferença atinge tensões acima de 50 MPa para as maiores forças e excentricidades aplicadas no modelo. Na mesa inferior também não ocorre o equilíbrio, sendo a diferença nesta mesa de até 10 MPa.



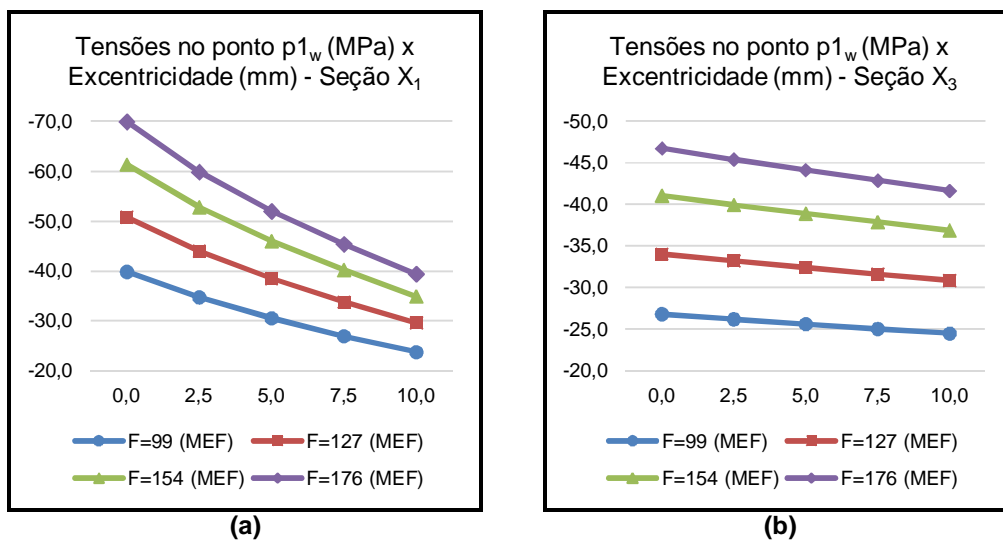
**Gráfico 4.50:** Comparação das variações de tensões devido ao bimomento (forças na mesa inferior) – Vão de 6 metros e seção equidistante das rodas da ponte ( $X_3$ )

Movendo a seção de análise para a posição  $X_3$ , longe do efeito localizado das forças, o desequilíbrio na mesa superior tem menor intensidade, atingindo valores da ordem de 5 MPa, e na mesa inferior praticamente desaparece. Em ambos os casos, seja maior ou menor a diferença, a alma é responsável por contrabalancear a tensão residual, fato que contradiz a teoria da flexo-torção aplicada às seções I. O gráfico 4.51(a) mostra a variação das tensões longitudinais do ponto  $p1_w$  na seção  $X_1$ . Neste ponto ocorre significativa redução de compressão, compensando o aumento não balanceado na mesa. Já o gráfico 4.51(b) mostra o mesmo ponto na seção  $X_3$ .



**Gráfico 4.51:** Variação de tensões longitudinais no plano da alma - Vão de 6 metros e máximo momento torçor.

Se o momento torçor for causado apenas pela excentricidade da força vertical, o desequilíbrio das tensões é menor. Na seção  $X_1$  é da ordem de 15 MPa, na mesa superior, e de 1 MPa na mesa inferior. Na seção  $X_3$  praticamente inexistente desequilíbrio, sendo as diferenças menores que 2 MPa em ambas as mesas. O gráfico 4.52(a) mostra a variação de tensão do ponto  $p1_w$  na seção  $X_1$  e o gráfico 4.52(b) do mesmo ponto na seção  $X_3$ .



**Gráfico 4.52:** Variação de tensões longitudinais no plano da alma - Vão de 6 metros e momento torçor devido à excentricidade da força vertical.

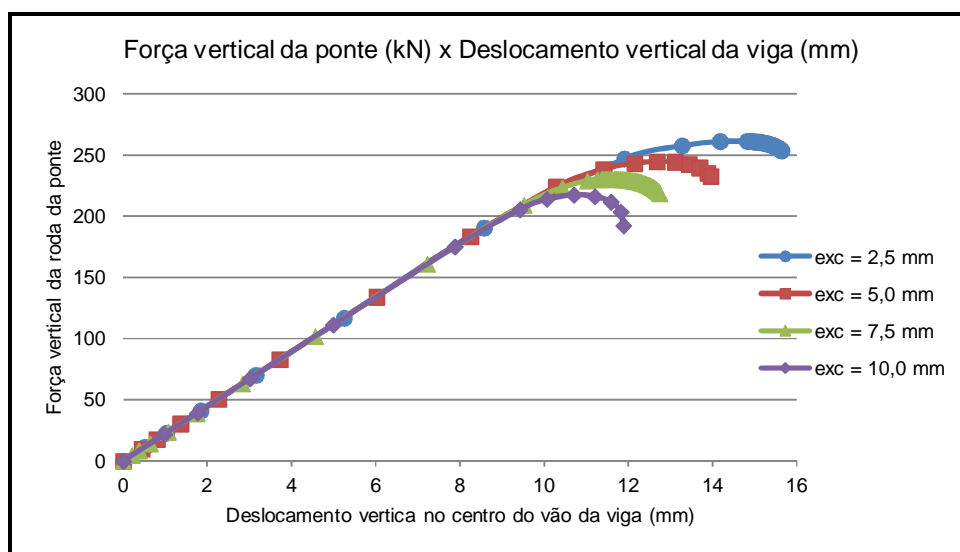
#### 4.4 FORÇA MÁXIMA DA PONTE SOBRE A VIGA

A atuação do momento torçor sobre a viga reduz a força máxima vertical que ela é capaz de suportar. Quanto maiores forem a excentricidade do trilho e a intensidade do impacto lateral, menor é a capacidade resistente da viga. Exemplificando a ordem de grandeza dessa redução, no caso da viga com 6,0 metros de vão, o momento crítico teórico é o de plastificação e, por consequência, a máxima força que a roda da ponte pode exercer sobre a viga é da ordem de 361 kN. Este valor na presença do momento torçor é reduzido em até 39,77% de acordo os resultados do modelo.

A tabela 4.7 mostra as forças máximas da roda da ponte em função da excentricidade vertical do trilho e a redução percentual em relação a capacidade teórica máxima. O gráfico 4.53 mostra a relação entre a força vertical da roda e o deslocamento vertical da viga no centro do vão.

**Tabela 4.7:** Forças verticais máximas (VSA600x81 e L=6,0 metros).

Excentricidade (mm)	2,5	5,0	7,5	10,0
$P_{\max}$ (kN)	261	245	230	217
Redução em relação a $P_{\max}$ (%)	27,60	32,26	36,18	39,77



**Gráfico 4.53:** Análise de pico para forças da roda da ponte – Viga com 6 metros de vão.

## 5 EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO E COMPARAÇÕES

Nesta seção é apresentado o dimensionamento de uma viga de rolamento segundo as exigências da ABNT NBR 8800:2008. A influência do momento torçor nas tensões longitudinais foi considerada no dimensionamento através de duas alternativas: Pela tensão do bimomento, obtida pela teoria da flexo-torção mostrada na seção 2.2.3, e pela simplificação em Bellei (2000), como na seção 2.4. A mesma viga, incluindo a majoração das ações, foi construída no modelo numérico para comparação das tensões.

A ponte rolante tem força vertical ( $F_1$ ) de 91 kN, incluindo já o peso próprio da ponte, do trole, de todos dispositivos necessários para o levantamento da carga e o peso desta. É operada por controle remoto, portanto o coeficiente de impacto vale 1,1 e a distância entre rodas é de 2,4 metros. A viga de rolamento tem vão de 6,0 metros, o perfil para a viga é o PSM600x90 e o material utilizado é o aço ASTM A36.

As dimensões do perfil aparecem na figura 5.1(a) e na mesma figura estão marcadas a linha neutra elástica (L.N.E.) e a linha neutra plástica (L.N.P.). Na figura 5.1(b) é destacada a seção T formada pela união da mesa superior e parcela comprimida da alma em regime elástico. É em relação a esta seção T que se calcula o raio de giração ( $r_{yc}$ ) utilizado na verificação da flambagem lateral com torção (FLT). Os valores de interesse para o dimensionamento da viga estão na tabela 5.1.

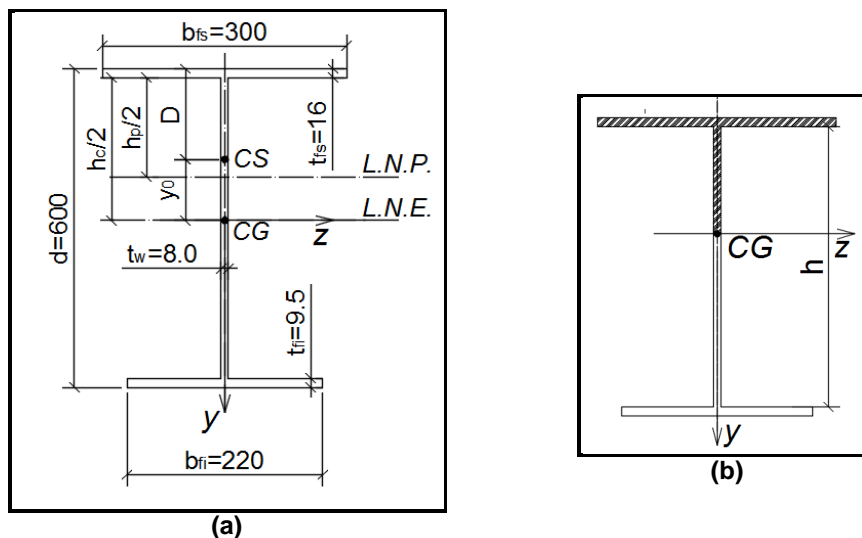


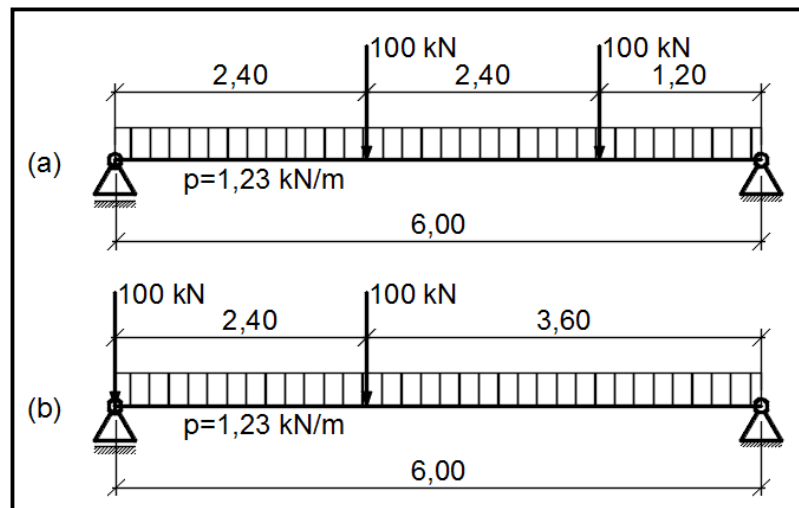
Figura 5.1: Dimensões do Perfil PSM600x90



**Tabela 5.1:** Características geométricas do perfil PSM600x90.

A (cm <sup>2</sup> )	114,9	I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	4445
D (cm)	11,9	C <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> )	2.355.515
y <sub>o</sub> (cm)	13,58	J (cm <sup>4</sup> )	57,1
I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> )	66647	r <sub>yc</sub> (cm)	7,42
W <sub>zs</sub> (cm <sup>3</sup> )	2860	h <sub>c</sub> (cm)	43,4
W <sub>zi</sub> (cm <sup>3</sup> )	1816	h <sub>p</sub> (cm)	23,6
ρ (adimensional)	0,810	Z (cm <sup>3</sup> )	2458

Admitiu-se que o número de ciclos de utilização da ponte é menor que 20.000, descartando a verificação de resistência à fadiga. A figura 5.2(a) mostra o trem tipo da ponte posicionado no local de máximo momento fletor (M<sub>max</sub>), distante 2,40 metros do apoio à esquerda, enquanto a figura 5.2(b) ilustra a posição de máxima força cortante (V<sub>max</sub>). No carregamento distribuído (p) estão inclusos o peso próprio da viga e do trilho TR37. As equações (5.1) e (5.2) mostram que os limites de proporcionalidade para tensões longitudinais e cisalhantes, respectivamente, são respeitados.

**Figura 5.2:** Posição de máximo momento fletor e máxima força cortante.

$$\sigma_x = \frac{M_{\max}}{W_{zi}} = \frac{198}{1,816 \times 10^{-3}} \rightarrow \sigma_x = 109 \text{ MPa} \leq 0,66f_y = 165 \text{ MPa} \quad (5.1)$$

$$\tau = \frac{V_{\max}}{A_{\dots}} = \frac{164}{0,6(0,008)} \rightarrow \tau = 34 \text{ MPa} \leq 0,4f_y = 100 \text{ MPa} \quad (5.2)$$

A norma brasileira, no anexo G, impõe às seções monossimétricas duas limitações geométricas: uma é que a soma das áreas da menor mesa e da alma seja maior que a área da maior mesa; a outra é mostrada na equação 5.3.

$$\frac{1}{9} \leq \alpha_y = \frac{I_{yc}}{I_{yt}} \leq 9 \quad (5.3)$$

Sendo:

$I_{yt}$  o momento de inércia da mesa tracionada em torno do eixo  $y$ .

O valor de  $\alpha_y$  é 4,27 (adimensional) e está dentro do intervalo estipulado. A desigualdade entre as áreas da seção também é respeitada.

Para a flexão da viga verificou-se o fenômeno da FLT, flambagem local da mesa (FLM) e flambagem local da alma (FLA). Os índices de esbeltez ( $\lambda$ ) em cada caso de instabilidade são dados pelas equações (5.4), (5.5) e (5.6).

$$\lambda_{(FLM)} = \frac{b_{fs}}{2t_{fs}} = \frac{300}{2(16)} = 9,4 \quad (5.4)$$

$$\lambda_{(FLA)} = \frac{h_c}{t_w} = \frac{434}{8} = 54,3 \quad (5.5)$$

$$\lambda_{(FLT)} = \frac{L}{r_{yc}} = \frac{600}{7,42} = 80,8 \quad (5.6)$$

Verificando-se o caso das instabilidades locais, tem-se:

$$\lambda_{p(FLM)} = 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 11 \quad (5.7)$$

$$\lambda_{p(FLA)} = \frac{\frac{h_c}{h_p} \sqrt{\frac{E}{f_y}}}{\left(0,54 \frac{M_{pl}}{M_r} - 0,09\right)^2} \leq \lambda_{r(FLA)} \quad (5.8)$$

Sendo:

$M_{pl}$  o momento fletor de plastificação da seção transversal;

$M_r$  o momento fletor que corresponde ao início do escoamento na seção;

$\lambda_p$  o parâmetro de esbeltez limite para seção compacta;

$\lambda_r$  o parâmetro de esbeltez limite para seção semicompacta;

O momento de plastificação da seção é o produto da resistência ao escoamento do aço ( $f_y$ ) pelo módulo de resistência plástico ( $Z$ ) e para o material e seção escolhidos vale 615 kN.m. O momento de início de escoamento é igual ao produto da resistência ao escoamento com o menor módulo de resistência elástico, ou seja,  $W_{zi}$ , resultando que  $M_r$  é igual a 454 kN.m. Por último,  $\lambda_r$  é dado pela equação (5.9).

$$\lambda_{r(FLA)} = 5,70 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 161 \quad (5.9)$$

Substituindo os valores de interesse em (5.8), tem-se que  $\lambda_{p(FLA)}$  é igual a 127, valor menor que  $\lambda_{r(FLA)}$ , concluindo que a mesa e a alma da viga são compactas. Verificando os limites de esbeltez para estabilidade global da viga:

$$\lambda_{p(FLT)} = 1,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 50 \quad (5.10)$$

$$\lambda_{r(FLT)} = \frac{1,38 \sqrt{I_y J}}{r_{yc} J \beta_1} \sqrt{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + \frac{27 C_w \beta_1^2}{I_y}}} \quad (5.11)$$

Sendo os coeficientes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  dados pelas equações (5.12), (5.13) e (5.14).

$$\beta_1 = \frac{(f_y - \sigma_r) W_{zs}}{EJ} = 4,391 \quad (5.12)$$

$$\beta_2 = 5,2 \beta_1 \beta_3 + 1 = 4,744 \quad (5.13)$$

$$\beta_3 = 0,45 \left( d - \frac{t_{fs} + t_{fi}}{2} \right) \left( \frac{\alpha_y - 1}{\alpha_y + 1} \right) = 0,164 \quad (5.14)$$

O parâmetro  $\beta_3$  reflete a monossimetria da seção e, quando o momento de inércia em torno de  $y$  das mesas é igual, seu valor é nulo, levando a verificação de FLT para o caso de seção com 2 eixos de simetria. A tensão residual ( $\sigma_r$ ) é tomada como 30% da resistência ao escoamento do material.

Substituindo os valores na equação (5.11), determinou-se o valor de  $\lambda_{r(FLT)}$  igual a 129, concluindo que a viga trabalha em regime inelástico. O momento resistente de cálculo ( $M_{Rd}$ ) é dado pela equação (5.15).

$$M_{Rd} = \frac{C_b}{\gamma_{a1}} \left[ M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \left( \frac{\lambda - \lambda_p}{\lambda_r - \lambda_p} \right) \right] \leq \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} \quad (5.15)$$

O valor de  $C_b$  é calculado como mostra a equação (2.65), na qual  $R_m$  é igual à unidade para o problema estrutural em questão. Majorando as ações permanentes em 1,25 e as variáveis em 1,5, tem-se o valor de  $C_b$  de 1,19. O momento fletor de início de escoamento para a FLT é dado pela equação (5.16).

$$M_{r(FLT)} = (f_y - \sigma_r) W_{zs} \leq f_y W_{zi} \rightarrow M_{r(FLT)} = 501 \geq 454 \rightarrow M_{r(FLT)} = 454 \text{ kNm} \quad (5.16)$$

Portanto, o momento fletor resistente de cálculo para FLT é igual a:

$$M_{Rd} = 597 \geq M_{pl} = \frac{615}{1,1} = 559 \rightarrow M_{Rd(FLT)} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} = 559 \text{ kNm} \quad (5.17)$$

O momento solicitante de cálculo ( $M_{Sd}$ ) é igual a 295 kN.m, ou seja, representa 52,7% do momento resistente determinado. O perfil escolhido tem folga no dimensionamento do estado limite último (ELU) da flexão, podendo ser adotada uma seção mais leve para atender a operação da ponte sem a consideração do momento torção sobre a viga.

São utilizados enrijecedores transversais para a viga apenas na região dos apoios, portanto a relação entre a distância destes elementos ( $a_{st}$ ) e distância entre as faces internas das mesas ( $h$ ) é maior que 3, resultando no coeficiente de flambagem local por cisalhamento ( $k_v$ ) igual a 5. Então, os parâmetros de esbeltez limite de interesse são:

$$\lambda_{pw} = 1,10 \sqrt{\frac{k_v E}{f_y}} = 70 \quad (5.18)$$

(5.19)

$$\lambda_{rw} = 1,37 \sqrt{\frac{k_v E}{f_y}} = 87$$

$$\lambda_w = \frac{h}{t_w} = \frac{574,5}{8} = 72 \rightarrow \lambda_{pw} < \lambda_w < \lambda_{rw} \rightarrow V_{Rd} = \frac{\lambda_{pw}}{\lambda} \frac{V_{pl}}{\gamma_{a1}} \quad (5.20)$$

$$V_{Rd} = \frac{70}{72} \frac{V_{pl}}{1,1} = \frac{70}{72} \left( \frac{d(t_w)0,6f_y}{1,1} \right) = \frac{70}{72} \left( \frac{600(8)0,6f_y}{1,1} \right) = 636 \text{ kN} \quad (5.21)$$

A máxima força cortante solicitante de cálculo ( $V_{Sd}$ ) é igual 245 kN, valor que representa 35,8% da máxima resistente de cálculo. Embora o perfil escolhido seja capaz de resistir às solicitações, é necessário ainda verificar algumas condições devido às forças concentradas. Salienta-se que a norma impõe que as forças localizadas devem estar centradas em relação à alma (item 5.7.1 da ABNT NBR 8800:2008).

A verificação do escoamento local da alma (item 5.7.3 da ABNT NBR 8800:2008) é feita na equação (5.22).

$$F_{Rd} = \frac{1,1[(L_w + 2t_{fs})t_w]f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{1,1[(244 + 32)8]}{1,1(1000^2)} 250 \times 10^3 = 552 \text{ kN} > F_{Sd} = 150 \text{ kN} \quad (5.22)$$

O ELU de enrugamento da alma, item 5.7.4 da ABNT NBR 8800:2008, é verificado próximo ao apoio e neste local existem enrijecedores transversais.

$$F_{Rd} = \frac{0,66t_w^2}{\gamma_{a1}} \left[ 1 + 3 \left( \frac{L_w}{d} \right) \left( \frac{t_w}{t_{fs}} \right)^{1,5} \right] \sqrt{\frac{E f_y t_{fs}}{t_w}} = 549 \text{ kN} > F_{Sd} = 150 \text{ kN} \quad (5.23)$$

A terceira e última verificação necessária é a flambagem lateral da alma, item 5.7.5 da ABNT NBR 8800:2008. Uma vez que o deslocamento entre as mesas é impedido apenas na região dos apoios, tem-se:

$$\left( \frac{h}{t_w} \right) / \left( \frac{L}{b_{fs}} \right) \leq 2,30 \rightarrow \left( \frac{574,5}{8} \right) / \left( \frac{6000}{300} \right) = 3,59 > 2,30 \quad (5.24)$$

A relação (5.24) supera o valor de 2,30, portanto, a flambagem lateral da alma não tem possibilidade de ocorrer (item 5.7.5.3 ANBT NBR 8800:2008).

Os enrijecedores de apoio têm a mesma espessura da alma e largura de 106 mm, resultando em elementos compactos, como mostra a equação (5.25).

$$\frac{b_{st}}{t_{sf}} = \frac{106}{8} = 13,2 < \left( \frac{b_{st}}{t_{sf}} \right)_{lim} = 0,56 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 15,8 \quad (5.25)$$

Todos os ELU são respeitados, restando apenas a verificação dos estados limites de serviço (ELS). A ponte não é siderúrgica e tem capacidade nominal inferior a 200 kN, logo, pelo Anexo C da ABNT NBR 8800:2008, os limites de deslocamento vertical e horizontal são dados pelas equações (5.26) e (5.27), respectivamente.

$$\delta_V = \frac{L}{600} = \frac{6000}{600} = 10\text{mm} \quad (5.26)$$

$$\delta_H = \frac{L}{400} = \frac{6000}{400} = 15\text{mm} \quad (5.27)$$

Posicionando o trem tipo da ponte com uma das rodas sobre o meio do vão da viga, determinou-se que o deslocamento vertical é de 4,973 mm, incluindo a contribuição do peso próprio e lembrando que a força da roda é contabilizada sem o coeficiente de impacto. O impacto lateral é tomado como 10% da força da roda, ou seja, igual a 10 kN. Este valor de força produz deslocamentos transversais de 6,56 mm. Ambos os deslocamentos estão dentro do limite normativo.

A norma brasileira, como mencionado no item 2.4, recomenda que a tensão solicitante de cálculo seja dada pela sobreposição das ações atuantes sobre o elemento estrutural. O momento fletor solicitante de cálculo foi determinado e, conseqüentemente, as tensões provocadas por ele ficam definidas. Resta determinar a contribuição da torção sobre as tensões longitudinais.

## 5.1 CONSIDERAÇÃO DA TORÇÃO POR MEIO DA ANALOGIA DE FLEXÃO

Sobre a viga atua o impacto lateral de 10 kN e o trilho apresenta excentricidade acidental de 4 mm. Desprezando o momento de torção distribuído do trilho e transportando o momento de torção para as mesas do perfil pela analogia de flexão, as forças horizontais atuando sobre as mesas são dadas pelas equações (5.28) e (5.29).

$$H_s = HT \left( 1 + \frac{C}{d} \right) + \frac{P(e)}{d} = 10 \left( 1 + \frac{0,122}{0,6} \right) + \frac{100(0,004)}{0,60} = 12,7 \text{ kN} \quad (5.28)$$

$$H_i = HT \left( \frac{C}{d} \right) + \frac{P(e)}{d} = 2,7 \text{ kN} \quad (2.71)$$

As forças transversais provocam flexão lateral nas mesas do perfil e esta flexão leva ao aumento das tensões longitudinais. Pela recomendação de Bellei (2000), as mesas são tratadas independentes, logo, para a mesa superior considera-se apenas a flexão causada pela força  $H_s$  e seu módulo de resistência elástico em relação a y ( $W_{ys}$ ). De maneira análoga, na mesa inferior considera-se a flexão causada por  $H_i$  e o módulo de resistência elástico em relação a y ( $W_{yi}$ ). A máxima tensão de compressão na mesa superior é dada pela equação (5.59).

$$\sigma_{xfs} = \frac{M_{Sd}}{W_{zs}} + \frac{M_{SdHs}}{W_{ys}} = \frac{295}{2,860 \times 10^{-3}} + \frac{36}{2,40 \times 10^{-4}} \rightarrow 253 \text{ MPa} \quad (5.29)$$

De maneira análoga, a máxima tensão de tração na mesa inferior é:

$$\sigma_{xfi} = \frac{M_{Sd}}{W_{zi}} + \frac{M_{SdHi}}{W_{yi}} = \frac{295}{1,816 \times 10^{-3}} + \frac{7,68}{7,66 \times 10^{-5}} \rightarrow 262 \text{ MPa} \quad (5.30)$$

A tensão resistente de cálculo para o estado limite de escoamento sob efeito de tensão normal é dada pela equação (5.31).

$$\sigma_{xRd} = \frac{f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{250}{1,1} = 227 \text{ MPa} \quad (5.31)$$

As tensões longitudinais solicitantes de cálculo, considerando a contribuição do momento torçor pela analogia de flexão, são maiores que a tensão resistente de cálculo em ambas as mesas, embora as verificações da viga pelos ELU de flexão e força cortante tenham concluído que o perfil selecionado seria suficiente para resistir as solicitações.

## 5.2 CONSIDERAÇÃO DA TORÇÃO POR MEIO DA FLEXO-TORÇÃO

O momento torçor de cálculo devido ao impacto lateral é dado pela equação (5.32) e o momento de torção distribuído de cálculo pela equação (5.33).

$$T = HT(C + D) + P(e) = 15(0,122 + 0,1194) + 150(0,004) = 4,22 \text{ kNm} \quad (5.32)$$

$$m = 1,25[e(P_{TR})] = 1,25[0,004(0,36)] = 1,82 \times 10^{-3} \text{ kNm/m} \quad (5.33)$$

O valor da área setorial principal, em módulo, nos pontos extremos da mesa superior ( $\omega_{fs}$ ) é de  $1,67 \times 10^{-2} \text{ m}^2$  e na mesa inferior ( $\omega_{fi}$ ) de  $5,23 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ . O valor do bimomento na seção de máximo momento fletor é de  $6,22 \text{ kN.m}^2$ , calculado conforme equacionado da seção 2.2.3. A máxima tensão de compressão na mesa superior vale, então:

$$\sigma_{xfs} = \frac{M_{Sd}}{W_{zs}} + \frac{Bi\omega_{fs}}{C_w} = \frac{295}{2,860 \times 10^{-3}} + \frac{6,22(1,67 \times 10^{-2})}{2,35552 \times 10^{-6}} \rightarrow 147 \text{ MPa} \quad (5.34)$$

De maneira semelhante, a máxima tensão de tração na mesa inferior é:

$$\sigma_{xfs} = \frac{M_{Sd}}{W_{zi}} + \frac{Bi\omega_{fi}}{C_w} = \frac{295}{1,816 \times 10^{-3}} + \frac{6,22(5,23 \times 10^{-2})}{2,35552 \times 10^{-6}} \rightarrow 300 \text{ MPa} \quad (5.35)$$

De acordo com o equacionamento pela flexo-torção, a tensão solicitante de cálculo na mesa superior é inferior a resistente de cálculo. Na mesa inferior, porém, a tensão solicitante supera o valor da resistente.



### 5.3 COMPARAÇÃO COM MODELO NUMÉRICO

A análise comparativa com o modelo numérico foi realizada na seção  $X_3$  para evitar os efeitos localizados. Na tabela 5.2 são mostradas as tensões de compressão e tração determinadas pela analogia de flexão, flexo-torção e modelo numérico. É importante lembrar que neste exemplo também ocorreu a inversão do bimomento na mesa superior. As tensões apresentadas na tabela 5.2 são as solicitantes de cálculo na seção  $X_3$ .

**Tabela 5.2:** Comparação das tensões longitudinais solicitantes de cálculo (MPa)

	Analogia de flexão	Flexo-torção	MEF
Máxima compressão	223	127	178
Máxima tração	230	256	169

Percebe-se que, pela analogia de flexão, as tensões de compressão são superdimensionadas, superando a tensão no modelo em 25,3%, enquanto pela teoria da flexo-torção as tensões são subdimensionadas, tendo um déficit de 40,1%. No caso das tensões de tração, ambos os métodos levam a resultados superdimensionados. Pela analogia de flexão, a tensão estimada é 36,9% maior e, pela teoria da flexo-torção, 51,5%. Conclui-se que ambos os modelos teóricos não representam bem a mesa superior, responsável por absorver a maior parcela das ações. Os modelos de barra possuem também dificuldades para determinar a contribuição da mesa inferior no problema, conferindo-lhe uma parcela maior de atuação no equilíbrio da viga do que acontece na realidade.

## 6 CONCLUSÕES

O problema da viga de rolamento para pontes com capacidade nominal de até 250 kN, vigas com vãos de até 7 metros, com sistema de travamento lateral da mesa superior apenas nos pontos de apoio e seção monossimétrica foi investigado. A análise, realizada via método dos elementos finitos, permitiu verificar algumas das hipóteses simplificadoras de cálculo utilizadas no dimensionamento da viga de rolamento.

Para efeitos de projeto, admite-se que o impacto lateral atuando no boleto do trilho é absorvido pela mesa superior, mais rígida, assim como o momento torçor devido a eventual excentricidade do caminho do rolamento em relação ao eixo vertical. O acréscimo de tensões longitudinais destas ações é contabilizado através da analogia de flexão ou da teoria da flexo-torção, sendo mais comum a utilização do primeiro método.

A análise numérica mostrou que os momentos torçores produzem deslocamentos excessivos, os quais invalidam a utilização do modelo teórico de barra que tem como hipótese simplificadora os pequenos deslocamentos. Além disso, as ações aplicadas no modelo são mais próximas do efeito real que a ponte rolante tem sobre a viga e, desta forma, a mesa superior é solicitada por ações mais complexas, como a inversão de tensões que pode ocorrer nos pontos de fixação do caminho de rolamento. A complexidade destas ações, aliadas aos deslocamentos excessivos, mostra porque os modelos teóricos apresentados tem dificuldade de prever as tensões finais no problema.

Os resultados também mostraram que na mesa superior, onde se aplicam as ações da ponte, ocorre a inversão do bimomento e, conseqüentemente, do aumento e redução da tensão longitudinal, isto é, nos pontos onde haveria o aumento da tensão de compressão, houve redução e vice-versa. Esta inversão pode ou não ocorrer em função da intensidade da força vertical da roda, espessura da mesa superior e, principalmente, posição de aplicação das forças. Supondo o momento torçor atuando na mesa inferior, o sentido do bimomento em ambas as mesas é de acordo com as convenções de sinais, mesmo para forças mais elevadas e espessuras menores da mesa. Porém, a aplicação das ações para pontes rolantes será sempre na mesa superior, logo, pode-se concluir que na prática haverá a inversão do aumento e redução das tensões longitudinais na mesa.

Outro ponto que os modelos teóricos não representam bem é a diferença entre rigidez da mesa superior e inferior do perfil. Na analogia de flexão, as tensões adicionais em ambas as mesas são superestimadas. Já pela teoria da flexo-torção, a tensão final na mesa inferior é elevada, enquanto na mesa superior é subestimada. Nenhuma das duas abordagens representa, de maneira satisfatória, a proporção com que as mesas da viga recebem as tensões adicionais.

Em relação aos deslocamentos, a presença do momento torçor sobre a viga causa acréscimos pequenos para o deslocamento vertical, com exceção das situações que envolvem elevado impacto lateral e pequenas excentricidades do caminho de rolamento. Nestes casos, o deslocamento vertical aumenta substancialmente. Os deslocamentos laterais são um fator de maior preocupação, pois são elevados na presença da torção, podendo ainda ocorrer curvatura reversa da alma na região de máximo momento fletor e torçor. Dadas as limitações dos modelos teóricos, salienta-se a importância da correta execução da estrutura, respeitando os limites construtivos e realizando manutenções periódicas na ponte rolante e seus acessórios, pois estas são medidas importantes para garantir a segurança durante a operação.

Para pesquisas futuras, fica a sugestão de se aprofundar os estudos sobre o problema de viga de rolamento, buscando um melhor modelo teórico, incluindo as considerações sobre a posição das ações, rigidez da mesa superior e análise não linear da estrutura.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. (2010). **ANSI/AISC 360-10**: Specification for Structural Steel Buildings. Chicago, IL, 2010.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. (2010). **ASCE/SEI 7-10**: Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures. Washington, DC, 2010.

ANDERSON, J. M.; TRAHAIR, N. S. Stability of monosymmetric beams and cantilevers. **Journal of the Structural Division**, v. 98, n. 1, p. 269-286, 1972.

ANDO, K. A. **Análise da estabilidade de estruturas metálicas com comportamento não linear**. 2008. 153p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2008). **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2013). **NBR 5884**: Perfil I estrutural de aço soldado por arco elétrico — Requisitos. Rio de Janeiro, 2013.

ASSOCIATION OF IRON AND STEEL ENGINEERS. (2003). **Technical report no 13**: Guide for the design and construction of mill buildings. Pittsburgh, PA, 2003.

BARSOUM, R. S.; GALLAGER, R. H. Finite element analysis of torsional and torsional-flexure stability problems. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 2, p. 335-352, 1970.

BELLEI, I. H. **Edifícios industriais em aço**: Projetos e cálculo. 3. ed. São Paulo: PINI, 2000. 489 p.

BONFÁ, J. L. Z. **Análise das vigas de rolamento para pontes rolantes**. 1980. 169p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.

BRADFORD, M. A.; RONAGH, H. R. Generalized elastic buckling of restrained I-beams by FEM. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 12, p. 1631-1637, 1997.

CAGLAYAN, O. et al. Fatigue life prediction of existing crane runway girders. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n.10, p. 1164-1173, 2010.

CANADIAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. (2012). **CISC/ICCA: Guide for the design of crane-supporting steel structures**. Markham, ON, 2012.

DESAMBIAGIO, E. R. **Um modelo geometricamente exato de barras com grandes deformações, que considera a distorção e o empenamento geral da seção transversal, e sua discretização pelo método dos elementos finitos**. 2008. 89p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

ELLIFRITT, D. S.; LUE, D. M. Design of Crane Runway Beam with Channel Cap. **Engineering Journal**, v. 35, n. 2, p. 41-49, 1998.

EULER, M.; KUHLMANN, U. Crane runways: Fatigue evaluation of crane rail welds using local concepts. **International Journal of Fatigue**, v. 33, n. 8, p. 1119-1126, 2011.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDISATION. (2005). **Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.1: General rules and rules for buildings**. Brussels, BE, 2005.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDISATION. (2006). **Eurocode 1: Actions on Structures. Part 3: Actions induced by cranes and machinery**. Brussels, BE, 2006.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDISATION. (2007). **Eurocode 3: Design of steel structures. Part 6: Crane supporting structures**. Brussels, BE, 2007.

FISHER, J. M. **Steel design guide series 7: Industrial building-roofs to anchor rods**. 2. ed. Milwaukee: ASCE, 2004. 98 p.

FRUCHTENGARTEN, J. **Sobre a estabilidade de perfis de seção aberta**. 1995. 273p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

FRUCHTENGARTEN, J. **Sobre o estudo da flambagem lateral de vigas de aço por meio da utilização de uma teoria não-linear geometricamente exata**. 2005. 251p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

GALAMBOS, T. V. **Guide to stability desing criteria for metal structures**. New York: JohnWiley&Sons, 1998.

GALAMBOS, T. V.; SUROVEK, A. E. **Structural stability of steel: Concepts and applications for structural engineers**. New Jersey: JohnWiley&Sons, 2008. 373 p.

GREINER, H. G. **Crane Handbook: Design data and engineering information used in the manufacture and application of cranes**. 3. ed. Harvey: Whiting Corporation, 1967. 205 p.

JUNIOR, A. N. **Sobre a modelagem de estruturas delgadas usando elementos finitos tridimensionais**. 2006. 144p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

KITIPORNCHAI, S.; TRAHAI, N. S. Buckling properties of monosymmetric I-beams. **Journal of the Structural Division**, v. 106, n. 5, p. 941-957, 1979.

KITIPORNCHAI, S.; WANG, C. M. Buckling capacities of monosymmetric I-beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 11, p. 2373-2391, 1986.

KITIPORNCHAI, S.; WANG, C. M.; TRAHAI, N. S. Buckling of monosymmetric I-beams under moment gradient. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, n. 4, p. 781-799, 1986.

LAGO, L. B. **Estudo dos efeitos constitutivos sobre a estabilidade elástica de perfis metálicos**. 2012. 66p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

LAMAN, J. A.; JOHNSON, P. C. Singly symmetric combination section crane girder design aids. **Engineering Journal**, v. 47, n. 4, p. 21-268, 2010.

LIM, N. H. et al. Elastic buckling of I-beams under linear moment gradient. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 21, p. 5635-5647, 2003.

MA, M.; HUGHES, O. Lateral distortional buckling of monosymmetric I-beams under distributed vertical load. **Thin-Walled Structures**, v. 26, n. 2, p.123-145, 1996.

- MAHDY, G. M.; EL-SAADAWY, M. M. Ultimate strength of singly symmetrical I-section steel beams with variable flange ratio. **Thin-Walled Structures**, v. 87, p.149-157, 2015.
- MOHEBKHAH, A. Lateral buckling resistance of inelastic I-beams under off-shear center loading. **Thin-Walled Structures**, v. 49, n. 3, p. 431-436, 2011.
- MOTTA, A. F. A. **Tensões locais em vigas de rolamento de instalações siderúrgicas**. 1981. 251p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Programa de Pós-Graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1981.
- MORI, D. D.; NETO, J. M. **Flexo-torção: barras de seção delgada aberta**. 1 ed. São Carlos: EESC-USP, 2009. 180 p.
- MORKHADE, S. G.; GUPTA, L. M. (2013). Effect of load height on buckling resistance of steel beams. **Procedia Engineering**, v. 51, p. 151-158, 2013.
- MUELLER, J. E. Lessons from Crane Runways. **Engineering Journal**, v.2, n.1, 1965.
- OJALVO, M.; CHAMBERS, R. S. Effect of warping restraints on I-beam buckling. **Journal of the Structural Division**, v. 103, n. 12, p. 2351-2360, 1977.
- ROBERTS, T. M.; AZIZIAN, Z. G. Instability of monosymmetric I-beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 110, n. 6, p. 1415-1419, 1984.
- ROBERTS, T. M.; BURT, C. A. Instability of monosymmetric I-beams and cantilevers. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 27, n. 6, p. 313-324, 1985.
- SALVADORI, M. G. Lateral buckling of I-beams. **Journal of Structural Division**, v. 120, p. 1165-1177, 1995.
- SEABURG, P. A.; CARTER, C. J. **Steel design guide series 9: Torsional analysis of structural steel members**. 2. ed. Chicago: ASCE, 2003. 116 p.
- SHEN, Z.; ZHANG, Q. Nonlinear stability analysis of steel members by finite element method. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 118, n. 3, p. 445-461, 1992.

SILVA, V. P. **Flambagem lateral de vigas de aço em regime elástico-linear**. 1992. 176p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

SOUZA, L. A. **Flambagem lateral com torção de vigas de aço em regime elasto-plástico**. 1999. 123p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1999.

TRAHAIR, N. S.; KITIPORNCHAI, S. Buckling of inelastic I-beams under uniform moment. **Journal of the Structural Division**, v. 98, n. 11 p. 2551-2556, 1972.

TRAHAIR, N. S.; KITIPORNCHAI, S. Buckling properties of monosymmetric I-beams. **Journal of the Structural Division**, v. 106, p. 941-957, 1980.

TRAHAIR, N. S.; PI, Y. L. Inelastic bending and torsion of steel I-beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 12, p. 3397-3417, 1994.

TRAHAIR, N. S. Steel cantilevers strength by inelastic lateral buckling. **Civil Engineering Research Report: R912**, 2010.

TRAHAIR, N. S. Inelastic buckling design of monosymmetric I-beams. **Engineering Structures**, v. 34, p. 564-571, 2012.

VACHARAJITTIPHAN, P.; TRAHAIR, N. S. Warping and distortion at I-sections joints. **Journal of the Structural Division**, v. 101, n. 8, p. 1703-1705, 1975.

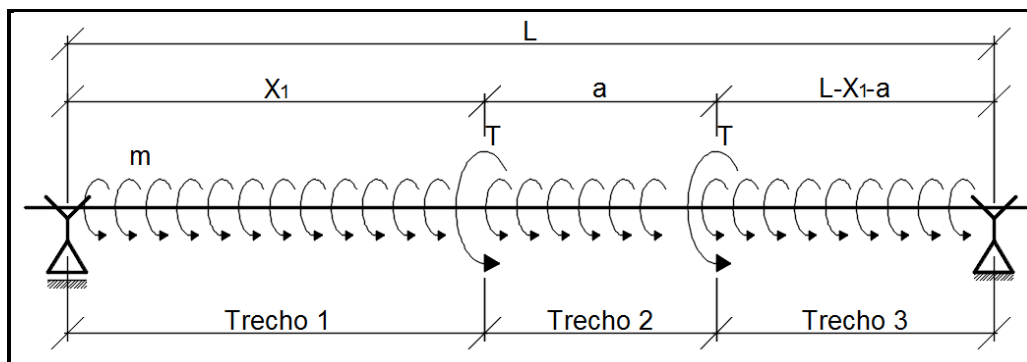
VENSKO, J. M. **Lateral-torsional buckling of structures with monosymmetric cross-section**. 2008. 175 p. Dissertation (M. Sc. In Engineering) – Swanson School of Engineering, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 2008.

WAGNER, H. Torsion and buckling of open sections. **Technical Memorandums National Advisory Committee for Aeronautics**, n. 807, 1936.

ZHANG, L.; TONG, G. S. Out-of-plane stability of simply supported beams with knee braces. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 63, p. 175-181, 2007.



**APÊNDICE A – EQUAÇÃO DO BIMOMENTO PARA VIGA DE ROLAMENTO**



**Figura A-1:** Esquema estático de viga para cálculo do bimomento.

$$m = e(P_{TR}) \tag{A-72}$$

$$T = HT(C + D) + Pe \tag{A-73}$$

$$X_2 = X_1 + a \tag{A-74}$$

TRECHO 1:

Condições de contorno:

- (1)  $B_{i1}(0) = 0$ , extremidade livre sem aplicação de forças;
- (2)  $\phi_1(0) = 0$ , vínculo de garfo;

Da condição (1):

$$B_{i1}(0) = \alpha_1 \sinh\left(\frac{0}{r}\right) + \alpha_2 \cosh\left(\frac{0}{r}\right) + r^2 m \rightarrow \alpha_2 = -r^2 m \tag{A-75}$$

Integrando duas vezes a equação do bimomento e relacionando com a função do giro da seção, tem-se:

$$\int B_{i1} dx = \bar{B}_{i1} = \alpha_1 \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r + \alpha_2 \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r + r^2 mx + \alpha_3 \tag{A-76}$$

$$\iint B_{i1} dx = \bar{\bar{B}}_{i1} = \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \frac{r^2 mx^2}{2} \tag{A-77}$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{EC_w} \iint B_{i1} dx = \frac{1}{EC_w} \left[ \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) r^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \frac{r^2 m x^2}{2} \right] \quad (\text{A-78})$$

Da condição (2), uma vez que o produto  $EC_w$  é diferente de zero:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) = 0 &\rightarrow \frac{1}{EC_w} \left[ \alpha_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) r^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \frac{r^2 m x^2}{2} \right] = 0 \rightarrow \bar{B}_{i1} = 0 \\ \bar{B}_{i1}(0) &= \alpha_1 \sinh\left(\frac{0}{r}\right) r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{0}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{m 0^2}{2} + \alpha_3 0 + \alpha_4 \rightarrow \alpha_4 = -r^2 \alpha_2 = r^4 m \end{aligned} \quad (\text{A-79})$$

TRECHO 2:

As condições de contorno no trecho 2 são:

(3)  $B_{i1}(X_1) = B_{i2}(X_1)$ , continuidade do Bimomento;

$$\begin{aligned} B_{i2}(X_1) &= \alpha_5 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) + \alpha_6 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) + r^2 m = B_{i1}(X_1) = \alpha_1 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) + \\ &+ \alpha_2 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) + r^2 m \rightarrow \\ \alpha_1 &= \alpha_5 + (\alpha_6 + r^2 m) \operatorname{cogh}\left(\frac{X_1}{r}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-80})$$

(4)  $\phi_1(X_1) = \phi_2(X_1)$ , continuidade do giro da seção;

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{EC_w} \iint B_{i1} dx = \phi_2 = \frac{1}{EC_w} \iint B_{i2} dx \rightarrow \bar{B}_{i1}(X_1) = \bar{B}_{i2}(X_1) \rightarrow \\ \alpha_1 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) r^2 + \alpha_2 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{m X_1^2}{2} + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 &= \alpha_5 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) r^2 + \\ + \alpha_6 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{m X_1^2}{2} + \alpha_7 X_1 + \alpha_8 &\rightarrow \\ \alpha_8 &= (\alpha_3 - \alpha_7) X_1 + r^4 m \end{aligned} \quad (\text{A-81})$$

(5)  $\phi'_1(X_1) = \phi'_2(X_1)$ , continuidade do empenamento da seção;

De maneira análoga ao giro da seção,  $\bar{B}_{i1}(X_1) = \bar{B}_{i2}(X_1)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right)r + \alpha_2 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right)r + r^2 m X_1 + \alpha_3 = \alpha_5 \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right)r + \\ + \alpha_6 \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right)r + r^2 m X_1 + \alpha_7 \end{aligned} \quad (A-82)$$

Substituindo (A-9) em (A-11) e lembrando-se da identidade hiperbólica ( $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ):

$$\alpha_6 = \left[ (\alpha_7 - \alpha_3) \sinh\left(\frac{X_1}{r}\right) - r^3 m \right] \frac{1}{r} \quad (A-83)$$

TRECHO 3:

(6)  $B_{i3}(L) = 0$ , extremidade livre sem aplicação de forças;

$$B_{i3}(L) = \alpha_1 \sinh\left(\frac{L}{r}\right) + \alpha_2 \cosh\left(\frac{L}{r}\right) + r^2 m = 0 \rightarrow \alpha_9 = \frac{-r^2 m - \alpha_{10} \cosh\left(\frac{L}{r}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{r}\right)} \quad (A-84)$$

Ou ainda:

$$\alpha_{10} = \frac{-r^2 m - \alpha_9 \sinh\left(\frac{L}{r}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{r}\right)} \quad (A-85)$$

(7)  $B_{i2}(X_2) = B_{i3}(X_2)$ , continuidade do bimomento;

$$\begin{aligned} B_{i2}(X_2) = \alpha_5 \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \alpha_6 \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + r^2 m = B_{i3}(X_2) = \alpha_9 \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \\ + \alpha_{10} \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + r^2 m \rightarrow \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = (\alpha_{10} - \alpha_6) \operatorname{cotgh}\left(\frac{X_2}{r}\right) + \alpha_9 \quad (\text{A-86})$$

(8)  $\phi_2(X_2) = \phi_3(X_2)$ , continuidade do giro da seção;

$$\phi_2 = \frac{1}{EC_w} \iint B_{i2} dx = \phi_3 = \frac{1}{EC_w} \iint B_{i3} dx \rightarrow \bar{B}_{i2}(X_2) = \bar{B}_{i3}(X_2) \rightarrow$$

$$\alpha_5 \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) r^2 + \alpha_6 \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{mX_2^2}{2} + \alpha_7 X_2 + \alpha_8 = \quad (\text{A-87})$$

$$\alpha_9 \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) r^2 + \alpha_{10} \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{mX_2^2}{2} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12}$$

Substituindo (A-15) em (A-16).

$$\alpha_8 = (\alpha_{11} - \alpha_7) X_2 + \alpha_{12} \quad (\text{A-88})$$

(9)  $\phi'_2(X_2) = \phi'_3(X_2)$ , continuidade do empenamento da seção;

$$\alpha_5 \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) r + \alpha_6 \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) r + r^2 m X_2 + \alpha_7 = \alpha_9 \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) r + \quad (\text{A-89})$$

$$+ \alpha_{10} \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) r + r^2 m X_2 + \alpha_{11}$$

Substituindo (A-15) em (A-18) e lembrando-se da identidade hiperbólica ( $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ):

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = \frac{(\alpha_{11} - \alpha_7)}{r} \sinh\left(\frac{X_2}{r}\right) \quad (\text{A-90})$$

(10)  $\phi_3(L) = 0$ , vínculo de garfo;

$$\bar{B}_{i3}(L) = \alpha_9 \sinh\left(\frac{L}{r}\right) r^2 + \alpha_{10} \cosh\left(\frac{L}{r}\right) r^2 + r^2 \frac{mL^2}{2} + \alpha_{11} L + \alpha_{12} = 0 \rightarrow$$

$$\alpha_{11} = \frac{-\alpha_{12}}{L} + \frac{r^4 m}{L} \left( 1 - \frac{L^2}{2r^2} \right) \quad (\text{A-91})$$

Para a resolução do sistema faltam duas condições de contorno conhecidas. O momento torçor, composto pela soma dos momentos de torção livre e da flexo-torção, é dado pela equação (A-21).

$$M_t = -B'_i + GJ\phi' \quad (\text{A-92})$$

A esquerda do ponto  $X_1$  o valor do momento torçor é diferente do valor à direita, sendo a diferença igual ao momento torçor externo aplicado, portanto:

$$M_{t2} - M_{t1} = T = (-B'_{i2} + GJ\phi'_2) - (-B'_{i1} + GJ\phi'_1) \quad (\text{A-93})$$

A primeira derivada da função giro é igual a integral do bimomento, resultando na equação (A-23).

$$M_{t2} - M_{t1} = T = \left( -B'_{i2} + \frac{\int B_{i2} dx}{r^2} \right) - \left( -B'_{i1} + \frac{\int B_{i1} dx}{r^2} \right) = \left( -B'_{i2} + \frac{\bar{B}_{i2}}{r^2} \right) - \left( -B'_{i1} + \frac{\bar{B}_{i1}}{r^2} \right) \quad (\text{A-94})$$

$$M_{t1} = \frac{-\alpha_1}{r} \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{r^2 m}{r} \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \left[ \alpha_1 \cosh\left(\frac{x}{r}\right)r - (r^2 m) \sinh\left(\frac{x}{r}\right)r + \right. \\ \left. + r^2 mx + \alpha_3 \right] \rightarrow$$

$$M_{t1} = mx + \frac{\alpha_3}{r^2} \quad (\text{A-95})$$

De maneira análoga para os momentos torçores no trecho 2 e trecho 3:

$$M_{t2} = mx + \frac{\alpha_7}{r^2} \quad (\text{A-96})$$

$$M_{t3} = mx + \frac{\alpha_{11}}{r^2} \quad (\text{A-97})$$

As equações (A-24), (A-25) e (A-26) levam a concluir, então:

$$T = \frac{\alpha_7}{r^2} - \frac{\alpha_3}{r^2} \quad (\text{A-98})$$

$$T = \frac{\alpha_{11}}{r^2} - \frac{\alpha_7}{r^2} \quad (\text{A-99})$$

Pelo processo de substituição encontram-se todas as variáveis de integração. Primeiramente, a equação (A-27) em (A-12):

$$\alpha_6 = \left[ (\alpha_7 - \alpha_3) \operatorname{senh} \left( \frac{X_1}{r} \right) - r^3 m \right] \frac{1}{r} \rightarrow \alpha_6 = (\operatorname{Tr}) \operatorname{senh} \left( \frac{X_1}{r} \right) - r^2 m \quad (\text{A-100})$$

Substituindo a equação (A-27) em (A-10):

$$\alpha_8 = (\alpha_3 - \alpha_7) X_1 + r^4 m \rightarrow \alpha_8 = -(\operatorname{Tr}^2) X_1 + r^4 m \quad (\text{A-101})$$

Como o valor de  $\alpha_8$  é agora conhecido, substituindo a equação (A-30) em (A-17) tem-se:

$$\alpha_{12} = \alpha_8 - (\operatorname{Tr}^2) X_2 \rightarrow \alpha_{12} = r^4 m - \operatorname{Tr}^2 (X_1 + X_2) \quad (\text{A-102})$$

Substituindo as equações (A-28) e (A-29) em (A-19):

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = \frac{(\alpha_{11} - \alpha_7)}{r} \operatorname{senh} \left( \frac{X_2}{r} \right) \rightarrow \alpha_{10} = (\operatorname{Tr}) \left( \operatorname{senh} \left( \frac{X_1}{r} \right) + \operatorname{senh} \left( \frac{X_2}{r} \right) \right) - r^2 m \quad (\text{A-103})$$

Equação (A-31) em (A-20):

$$\alpha_{11} = \frac{-\alpha_{12}}{L} + \frac{r^4 m}{L} \left( 1 - \frac{L^2}{2r^2} \right) \rightarrow \alpha_{11} = -\frac{\operatorname{Tr}^2 (X_1 - X_2)}{L} - \frac{r^2 mL}{2} \quad (\text{A-104})$$

A equação (A-33) em (A-28) resulta em:

$$\alpha_7 = -Tr^2 \left(1 + \frac{X_1 - X_2}{L}\right) - \frac{r^2 mL}{2} \quad (\text{A-105})$$

$$\alpha_3 = -Tr^2 \left(2 + \frac{X_1 - X_2}{L}\right) - \frac{r^2 mL}{2} \quad (\text{A-106})$$

Substituindo as equações (A-31) em (A-13):

$$\alpha_9 = \frac{r^2 m \left( \cosh\left(\frac{L}{r}\right) - 1 \right) - Tr \left( \sinh\left(\frac{X_1}{L}\right) + \sinh\left(\frac{X_2}{L}\right) \right) \cosh\left(\frac{L}{r}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{r}\right)} \quad (\text{A-107})$$

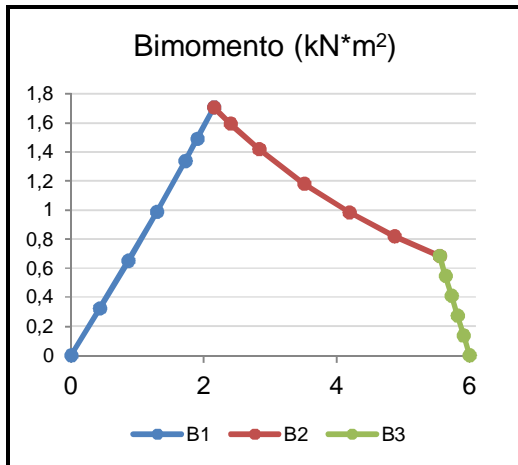
Substituindo as equações (A-29), (A-32) e (A-33) em (A-12):

$$\alpha_5 = (Tr) \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \alpha_9 \quad (\text{A-108})$$

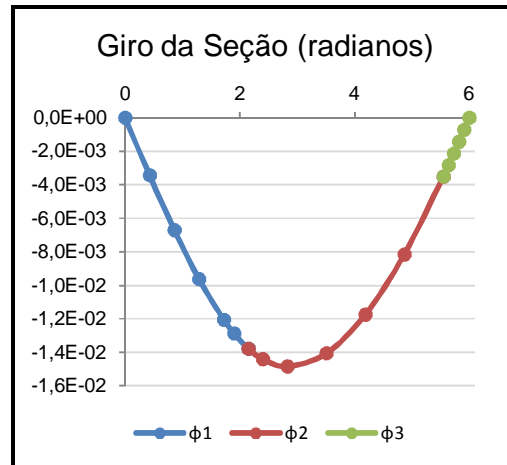
Finalmente, (A-37) em (A-9):

$$\alpha_1 = (Tr) \left[ \cosh\left(\frac{X_2}{r}\right) + \cosh\left(\frac{X_1}{r}\right) \right] + \alpha_9 \quad (\text{A-109})$$

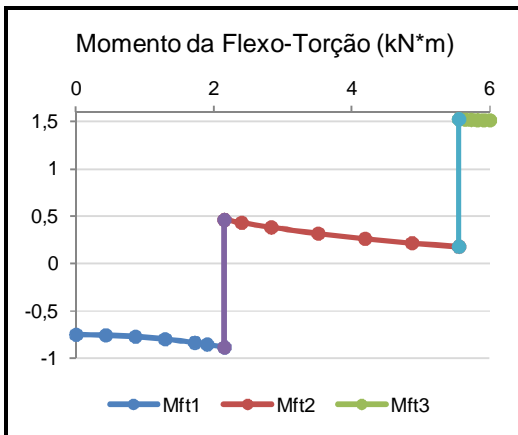
Desta forma, ficam todas as variáveis de integração determinadas para o problema da flexo-torção sobre a viga de rolamento. Supondo a viga de rolamento com 6,0 metros de vão livre, força vertical da roda da ponte de 99 kN, excentricidade da roda de 2,5 mm e impacto lateral de 9 kN, a figura A-2 ilustra o bimomento sobre a viga se os momentos torçores tiverem sentido positivo e combinação para valor máximo. Na figura A-3 é mostrado o giro da seção, na figura A-4 o momento torçor da flexo-torção, na figura A-5 o momento torçor livre e, por último, o momento torçor total na figura A-6.



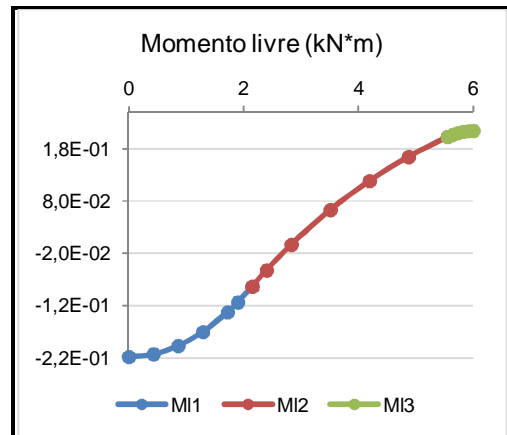
**Figura A-2:** Bimomento atuando sobre a viga de rolamento



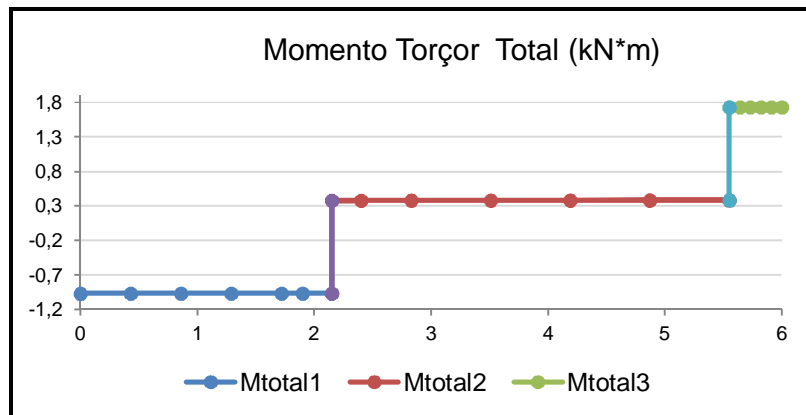
**Figura A-3:** Giro da seção da viga de rolamento



**Figura A-4:** Momento da Flexo-torção.



**Figura A-5:** Momento Livre (Saint-Venant).



**Figura A-6:** Momento Torçor Total.