

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Leonardo Pioto Borges

Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise de problemas de
integridade estrutural de interesse para a indústria aeronáutica

São Carlos
2017

LEONARDO PIOTO BORGES

Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise de problemas de integridade estrutural de interesse para a indústria aeronáutica

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos
2017

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

B581m Borges, Leonardo Pioto
 Método dos Elementos Finitos Generalizados na
 análise de problemas de integridade estrutural de
 interesse para a indústria aeronáutica / Leonardo Pioto
 Borges; orientador Sergio Persival Baroncini Proença.
 São Carlos, 2017.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
 em Engenharia Civil(Engenharia de Estruturas) e Área de
 Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
 São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

 1. Método dos Elementos Finitos Generalizados. 2.
 Mecânica da Fratura. 3. Fadiga. 4. Propagação de
 trinca. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **LEONARDO PIOTO BORGES**.

Título da dissertação: "Método dos elementos finitos generalizados na análise de problema de integridade estrutural de interesse para a indústria aeronáutica".

Data da defesa: 11/04/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**
(Orientador designado)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Francisco Evangelista Junior**
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Grazielle, pela paciência, amor e cumplicidade durante todos estes anos juntos. Assim como, pelo constante e incondicional apoio e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, José Solimar e Clara, que sempre me apoiaram e deram o suporte indispensável na busca das minhas realizações.

Ao professor Sérgio Proença, pela grande competência na orientação deste trabalho e pela compreensão das dificuldades e limitações encontradas pela execução desta pesquisa em regime parcial.

Aos professores Rodrigo R. Paccola e Edson Denner Leonel, pelas importantes contribuições dadas durante meu exame de qualificação.

A Embraer S.A, por ter me proporcionado a conciliação das atividades desenvolvidas na empresa com o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

BORGES, L. P. **Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise de problemas de integridade estrutural de interesse para a indústria aeronáutica.** 2017. 106p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) tem se mostrado uma ferramenta bastante eficaz para a obtenção de soluções dos problemas da Mecânica da Fratura. O MEFG/MEFX permite que trincas estejam imersas na malha de elementos, o que contribui para a redução do custo computacional. Particularmente, ao se tratar da modelagem do processo de propagação, a combinação do método geométrico denominado '*level-set*' com o MEFG/MEFX traz a vantagem de permitir descrever mais claramente o posicionamento e o caminho de propagação da trinca. A previsão das soluções dos problemas de fratura obtidas com o MEFG/MEFX indicam como ferramenta importante para a simulação de processos que envolvem carregamento repetido e previsão de resposta em fadiga. Nesse contexto, a vida em fadiga é um dos principais fatores determinantes na análise de integridade estrutural. Esta pesquisa tem por objetivo avaliar, mediante simulações numéricas, a representatividade e as dificuldades da aplicação do MEFG/MEFX, combinado ao método '*level-set*', para a estimativa de vida em fadiga de elementos estruturais aeronáuticos. Consideram-se abordagens estática e cinemática, de um modo geral e em particular para as análises em fadiga. A abordagem estática requer precisão na determinação dos fatores de intensidade de tensão. A abordagem cinemática inclui a propagação da trinca. Os exemplos considerados consistem em problemas planos e tridimensionais. As ferramentas empregadas são códigos computacionais para o MEFG/MEFX: MXFEM e ABAQUS. Conclui-se que o MEFG/MEFX pode se constituir em instrumento de grande interesse para a indústria aeronáutica, ao permitir análises de integridade estrutural que viabilizam a definição de um plano de inspeção personalizado para os operadores. Além disso, o uso do MEFG/MEFX no campo de definição e projeto de reparos estruturais também é algo promissor, dadas suas características e vantagens demonstradas neste trabalho.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados. Fadiga. Mecânica da Fratura. Propagação de trinca.

ABSTRACT

BORGES, L. P. **Generalized Finite Element Method in the analysis of structural integrity problems of interest to the aeronautical industry**. 2017. 106p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

The Generalized Finite Element Method (GFEM) has proved to be a very effective tool for obtaining solutions to the problems of Fracture Mechanics. The GFEM/XFEM allows cracks to be immersed in a finite the element mesh, which contributes to the reduction of the computational cost. Particularly, regarding modeling the propagation process, the combination of the geometric method called '*level-set*' with the GFEM/XFEM has the advantage of being able to describe more clearly the positioning and propagation path of the crack. The prediction of solutions of the fracture problems obtained with the GFEM/XFEM indicate it as an important tool for the simulation of processes involving repeated loading and prediction of fatigue response. In this context, life in fatigue is one of the main determining factors in the structural integrity analysis. The aim of this research was to evaluate the representativeness and difficulties of the application of the GFEM/XFEM, combined with the '*level-set*' method, to estimate fatigue life of aeronautical structural elements using numerical simulations. Static and kinematic approaches were considered, and in particular for fatigue analysis. The static approach requires precision in the determination of the stress intensity factors. The kinematic approach includes the propagation of the crack. The considered examples consist of plane and three-dimensional problems. The tools used are computational codes for the GFEM/XFEM: MXFEM and ABAQUS. As a conclusion, the GFEM/XFEM can be an instrument of great interest for the aeronautical industry, allowing structural integrity analyzes that allow the definition of a personalized inspection plan for the operators. In addition, the use of GFEM/XFEM in the field of definition and design of structural repairs is also promising, given its characteristics and advantages demonstrated in this work.

Keywords: Generalized Finite Element Method. Fatigue. Fracture Mechanics. Crack propagation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama de blocos do MXFEM	21
Figura 2 - Elementos disponíveis para MEFG/MEFX no Abaqus.....	22
Figura 3 – Fluxograma de Abordagem Estática	24
Figura 4–Fluxograma de abordagem cinemática	25
Figura 5–Acidente da aeronave Havilland Comet 1	29
Figura 6- Modos de Fraturamento.....	35
Figura 7 - Tensões Elásticas próximas á ponta da trinca ($r/a \ll 1$)	36
Figura 8 - Abaco para cálculo de K	37
Figura 9 - Nuvens no MEFG/MEFX: definidas a partir da rede de elementos finitos	40
Figura 10 -Definição dos nós enriquecidos	46
Figura 11 - Discretização explícita de uma trinca em duas dimensões	48
Figura 12 - Três funções do tipo level-set em duas dimensões	48
Figura 13 - Placa Finita sob tensão Uniaxial com trinca de Borda (Geometria)	49
Figura 14 -Campos de Tensão para o 1º Exemplo	52
Figura 15–Detalhe da região da trinca (Enriquecimento)	52
Figura 16 - Level-Set para enriquecimento Heavisideno Exemplo 1	53
Figura 17 - Level-Set para enriquecimento com solução da fraturano Exemplo 1	54
Figura 18 -Campo de Tensão S11 para o Exemplo 1	54
Figura 19 -Campo de Tensão S22 para o Exemplo 1	54
Figura 20 - Placa Finita sob tensão Uniaxial com trinca de Centro (Geometria).....	55
Figura 21–Campos de tensão YY para o Exemplo 2	57
Figura 22–Distribuição de K para o modo I	58
Figura 23–Detalhe da distribuição de K (modo I) para $a/b > 0,7$	58
Figura 24 - Elemento PLANE 183 (ANSYS®)	60
Figura 25 - Elemento Singular (ANSYS)	60

Figura 26–Malha para Cálculo de do fator de Intensidade de Tensão (ANSYS®)	61
Figura 27 - Campo de Tensão Sigma YY para o Exemplo 2	62
Figura 28–Comparação da distribuição de K (modo I): MEF e MEEG/MEFX.....	62
Figura 29 -Level-Sets calculado pelo abaqus	64
Figura 30 - Campo de deformação e33 calculado pelo abaqus.....	64
Figura 31 -Campo de tensão s11calculado pelo abaqus.....	65
Figura 32 - Campo de tensão s22calculado pelo abaqus.....	65
Figura 33 - Malha para simulação de trinca circular em um dominio finito	67
Figura 34 - Malha #1do Exemplo 4.....	69
Figura 35 - Posição da trinca na malha #1 - Método Level-set.....	69
Figura 36 -Distribuição de tensão Exemplo 4	70
Figura 37 - Distribuição dos pontos para o cálculo dos FITs	71
Figura 38 – Malha #2 do Exemplo 4	72
Figura 39 - Posição da trinca na malha #2 - Método Level-set.....	73
Figura 40 - Distribuição de tensão Exemplo 4	74
Figura 41 - Distribuição dos pontos para o cálculo dos FITs	75
Figura 42 - Placa InFinita sob tensão Uniaxial com trinca interna (Geometria)	77
Figura 43 - Comparação entre MXFEM e solução Analítica pela Lei de Paris	78
Figura 44 - Histórico de Carregamento #1.....	80
Figura 45 - Gráfico do número de ciclos x comprimento da trinca (carregamento #1)	80
Figura 46 - Histórico de carregamento #2.....	81
Figura 47 - Gráfico do número de ciclos x comprimento da trinca (carregamento #2)	81
Figura 48 - Histórico de carregamento #3.....	82
Figura 49 -Gráfico do número de ciclos x comprimento da trinca (carregamento #3)	82
Figura 50 - Chapa com um Furo.....	84
Figura 51 - Estrutura na configuração final.....	85

Figura 52 - Comparação entre valores deK para o modo I	86
Figura 53 - Comparação entre valores deK para o modo II	86
Figura 54 - Gráfico do número de ciclos x comprimento da trinca	87
Figura 55 - Gráfico do número de ciclos x comprimento da trinca – Convergência de Malha	88
Figura 56 - Campos de Tensão (Sigma YY) para propagação Com incremento de 0.05m e LElem = 1/30	89
Figura 57 - Geometria do vaso de pressão com trinca inicial (Esquerda) e detalhe da localização da trinca inicial (Direita).	92
Figura 58 - Geometria da trinca após a propagação para o caso do vaso de pressão com trinca inicial.....	93
Figura 59 - Campos de Tensão Principal Máxima em diferentes estágios da propagação para o caso do vaso de pressão com trinca inicial	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros para simulação da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de borda no MXFEM	50
Tabela 2 - Propriedades do material para simulação da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de borda no MXFEM.....	50
Tabela 3 - Fatores de Intensidade de Tensão Teóricos para o problema da PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA	50
Tabela 4 – Resultados das simulações da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de borda no MXFEM	51
Tabela 5 - Propriedades do material para simulação da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de borda no ABAQUS.....	53
Tabela 6 - Valores numéricos de $F(a/b)$ para placa plana com trinca no centro	56
Tabela 7 - Parâmetros para simulação da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de centro no MXFEM	56
Tabela 8 - Propriedades do material para simulação da Placa Finita sob tensão uniaxial com trinca de centro no MXFEM.....	56
Tabela 9 - Valores de K_I calculados no MXFEM	59
Tabela 10 - Valores do erro do K para o modo I calculado no MXFEM e ANSYS. ...	63
Tabela 11 - Fatores de intensidade de tensão calculados pelo ABAQUS para o problema estático e 3D da placa finita sob tensão uniaxial com trinca de borda	66
Tabela 12 - Fator de intensidade de tensão para o caso "Penny-Shaped" usando o XFEM.	68
Tabela 13 - Resultados obtidos usando malha com refinamento na região da trinca	72
Tabela 14 - Resultados obtidos usando malha com elementos uniformemente distribuídos	76
Tabela 15 - Parâmetros geométricos	79
Tabela 16 - Propriedades elásticas do material	79
Tabela 17 - Propriedades do Material	84
Tabela 18 - Propriedades do material para simulação do vaso de pressão com trinca inicial no ABAQUS	92

SUMÁRIO

1	Introdução, objetivos e justificativas	17
1.1	Objetivos.....	19
1.2	Materiais e métodos	20
1.2.1	Materiais	20
1.2.2	Métodos.....	24
1.3	Forma de análise dos resultados.....	26
1.4	Composição dos capítulos.....	27
2	Conceitos Gerais	29
2.1	Fadiga em Estruturas Aeronáuticas.....	29
2.1.1	Filosofias de projeto.....	30
2.1.2	Requisitos de Certificação	31
2.1.3	Métodos de Previsão de Vida em Fadiga	32
2.2	Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE):	35
2.2.1	Modelamento da trinca	36
2.2.2	Fator de intensidade de tensão	37
2.3	Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).....	38
2.3.1	Histórico.....	38
2.3.2	Formulação.....	40
2.3.3	Principais Características	42
2.3.4	Funções de Enriquecimento para Trincas	45
2.3.5	Método de “ <i>Level-Set</i> ”	46
3	Resultados.....	49
3.1	Abordagem Estática	49
3.1.1	Bidimensional	49
3.1.2	Tridimensional	64
3.2	Abordagem Cinemática	77
3.2.1	Bidimensional	77
3.2.2	Tridimensional	91
4	Conclusões.....	95
4.1	Em um contexto geral.....	95
4.2	Sobre o uso do MEFG na indústria aeronáutica	97

5	Proposta de desenvolvimento de trabalhos futuros	99
	Referências.....	101

1 INTRODUÇÃO, OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

A Engenharia Aeronáutica vem se desenvolvendo cada vez mais para atender as necessidades exigidas pelo Mercado da Aviação. Dentre as principais necessidades observadas nos dias de hoje estão a redução de custos de operação e manutenção, além de uma resposta cada vez mais rápida as mudanças de cenário. Para atender estas expectativas inúmeras melhorias vêm sendo desenvolvidas, dentre elas pode-se citar o desenvolvimento de novos modelos conceituais e métodos numéricos para o projeto estrutural o que pode propiciar o projeto de aviões cada vez mais leves, e alongar os intervalos de inspeção estrutural.

A previsão de vida em fadiga das estruturas aeronáuticas é uma das análises de integridade estrutural que ainda tem um alto custo computacional e que exige fortemente da adoção de fatores de segurança, devido às incertezas dos modelos de análise, prioritariamente baseados em resultados empíricos.

O uso de métodos computacionais, como é o caso do Método dos Elementos Finitos (MEF), já é algo indispensável no projeto de uma aeronave e a busca por métodos cada vez mais precisos e menos custosos se justifica tendo-se em vista a diminuição dos custos e do tempo para a certificação.

No âmbito dos estudos de integridade, inúmeras estratégias utilizando o método dos elementos finitos (MEF) para o modelamento de fraturas, incluindo-se a sua propagação, vêm sendo desenvolvidas ao longo dos últimos anos. Entretanto, as dificuldades para alcançar um bom compromisso entre precisão das respostas e esforço computacional ainda representam uma barreira importante que acabam por limitar o emprego daquelas estratégias a problemas de menor complexidade.

Durante as últimas décadas novas formulações numéricas vêm sendo desenvolvidas, sendo que algumas têm se mostrado bastante promissoras quando a solução não é suave, como no caso de problemas da mecânica da fratura. Entre as propostas de maior destaque estão o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Duarte *et al.*, 2000), (Strouboulis *et al.*, 2000), e o Método dos Elementos

Finitos Estendido (MEFX) (Belytschko e Black, 1999),(Moes *et al.*, 1999), ambos baseados no Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU) (Melenk e Babuska, 1996). Uma característica marcante de tais métodos é, por exemplo, sua elevada capacidade de aproximação, garantida mediante a expansão do espaço de aproximação mediante o enriquecimento das funções de forma. Apesar de terem sido propostos de modo independente, recentemente ambos foram reconhecidos como o sendo um mesmo método, como será apresentado na seção 2.3.1.

O nível de desenvolvimento alcançado até aqui pelo método dos elementos finitos generalizados/estendidos (MEFG/MEFX) indica que o mesmo pode se constituir em alternativa com elevado grau de robustez e representatividade na solução de problemas da mecânica da fratura e de integridade estrutural em geral.

As pesquisas com o MEFG/MEFX no Departamento de Engenharia de Estruturas vêm sendo conduzidas com sucesso há vários anos, destacando-se, para o seu desenvolvimento, as colaborações realizadas com a Universidade de Illinois em Urbana-Champaign. Procurando reunir as várias contribuições alcançadas, um sistema computacional robusto para o MEFG/MEFX foi construído, e continuamente aprimorado, permitindo realizar análises bidimensionais lineares e não lineares. O sistema SCIEEnCE (**S**ão **C**arlos **I**ntegrity **E**nvironment for **C**omputational **E**ngineering) atualmente vem sendo especializado para as análises de integridade estrutural, nas quais a modelagem de fadiga, objeto desta pesquisa, ocupa lugar de destaque.

Não obstante os recursos disponíveis no SCIEEnCE, nesta dissertação optou-se por desenvolver uma etapa preliminar de investigação sobre as possibilidades de análise de fadiga, empregando recursos computacionais encontrados num código MatLab e no ABAQUS. Entre os recursos está a combinação do MEFG/MEFX com o método “*level-set*”, que permite identificar as regiões de enriquecimento da solução e monitorar o avanço da trinca. A partir do melhor entendimento sobre a eficácia dos recursos desses códigos, a sua inserção no SCIEEnCE poderá ser feita futuramente.

1.1 OBJETIVOS

Objetivo principal da pesquisa em proposição é o de proporcionar avanços no campo da modelagem de problemas de integridade estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados.

Nessa classe de problemas, a previsão da vida em fadiga de componentes estruturais tem importância fundamental. Entretanto, tal previsão depende da disponibilidade de um método de simulação robusto e confiável, requisitos que podem ser contemplados pelo MEFG/MEFX.

Um passo essencial nesse sentido consiste em avaliar as vantagens e eficiência do uso de uma combinação entre o MEFG/MEFX e o método de *'level-set'* objetivando a determinação dos campos de tensão, campos de deslocamentos e consequentemente dos fatores de intensidade de tensão, os quais são fundamentais para uma previsão mais precisa da vida em fadiga de um componente estrutural. Além disto, alguns ganhos consideráveis de eficiência e representatividade são esperados nas simulações de propagação de trincas a partir dessa combinação, e deverão ser validados.

Um objetivo mais específico em relação à estimativa de vida em fadiga consiste em realizá-la usando abordagens estática e cinemática. A primeira visando à determinação precisa dos fatores de intensidade de tensão, enquanto que na segunda é importante uma modelagem representativa da propagação da trinca, por sua vez indispensável para uma análise baseada na filosofia de tolerância ao dano.

1.2 MATERIAIS E MÉTODOS

Essencialmente, a metodologia geral adotada para o desenvolvimento desta pesquisa prevê primeiramente, um levantamento, estudo e consolidação da bibliografia aplicável ao tema. Em seguida avaliam-se os recursos computacionais disponíveis e, finalmente, descrevem-se as conclusões.

O módulo de MEFM/MEFM no ABAQUS é avaliado principalmente para trincas bidimensionais e tridimensionais estacionária levando em conta uma variedade de parâmetros envolvidos, técnicas de criação de malha e refinamentos.

A estratégia utilizada é baseada na verificação da robustez e flexibilidade do modelamento da trinca mediante comparação dos resultados obtidos com casos descritos na literatura.

As simulações têm o intuito de validar a utilização dos programas e métodos previamente definidos e de avaliar a potencialidade dos mesmos para problemas mais complexos como de simulação de processos de fraturamento evolutivo por meio de análises bidimensionais e tridimensionais e, conseqüentemente, a previsão de vida em fadiga.

1.2.1 MATERIAIS

As análises bidimensionais são conduzidas utilizando principalmente o código denominado MXFEM implementado no software MATLAB. Algumas simulações para fins de comparação foram feitas com os softwares ABAQUS e ANSYS®.

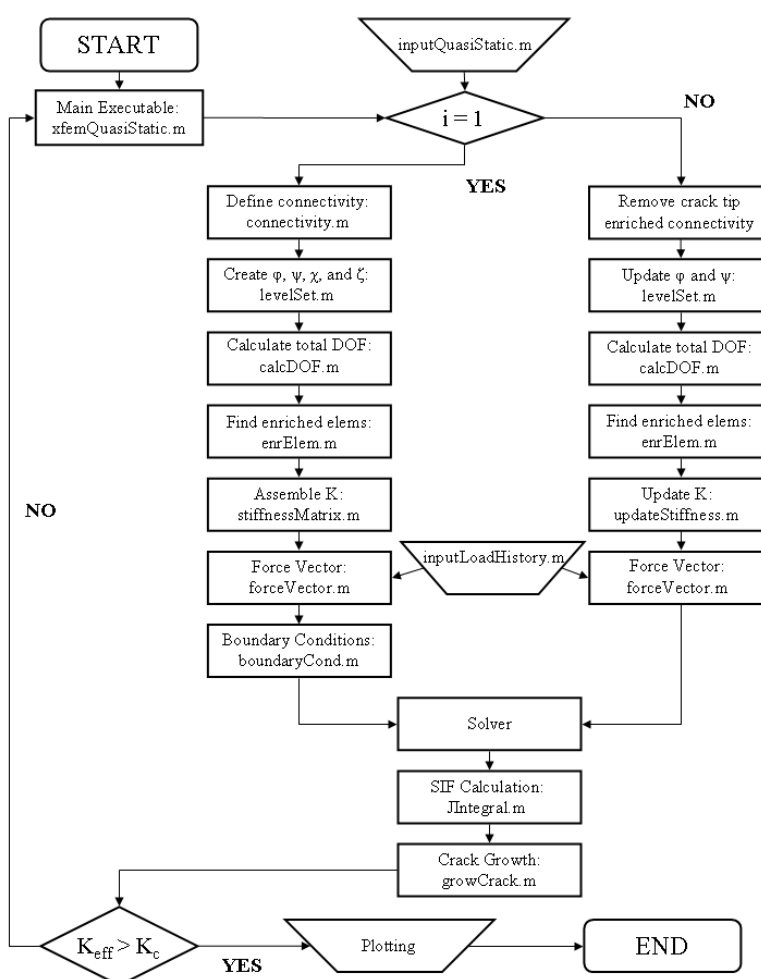
As análises tridimensionais utilizam o software ABAQUS, o qual possui o MEFM/MEFM implementado em seus aspectos básicos, porém, sem disponibilizar o enriquecimento com as funções de fratura.

1.2.1.1 MXFEM

Este é um código em MATLAB desenvolvido por (Pais, 2011) para a análise de problemas de fratura bidimensionais, como estados planos de tensão ou deformação, utilizando o MEFX. Neste código também estão implementadas as funções de *level-set*. Duas funções de enriquecimento são disponibilizadas: Função Heaviside, utilizada para reproduzir a abertura da trinca, e Função de Ponta de Trinca.

Segundo o desenvolvedor, todos os módulos do código foram verificados no MATLAB R2009 e, portanto, versões mais antigas do MATLAB podem apresentar falhas na execução do programa. Na Figura 1 ilustra-se o diagrama de blocos do programa.

FIGURA 1 - Diagrama de blocos do MXFEM



Fonte:(PAIS, 2010)

1.2.1.2 ABAQUS

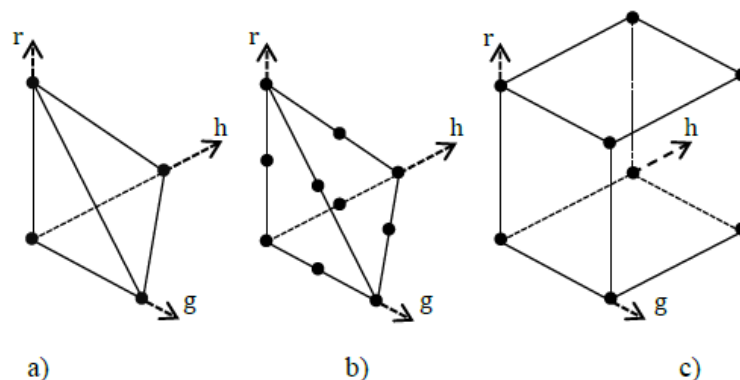
A versão 6.9 do ABAQUS foi a primeira a introduzir a capacidade de modelar trincas utilizando o MEFX descrito por (Moes *et al.*, 1999) juntamente com a formulação introduzida por (Hansbo e Hansbo, 2004). Ambas as metodologias foram implementadas de forma compatível com o MEF já existente, utilizando a técnica descrita por (Song *et al.*, 2006). Como toda nova implementação, algumas limitações discutidas em (**Abaqus 6.9 Update Seminar**, 2009) devem ser levadas em conta quando da utilização do software. Entre elas destacam-se:

1. Apenas análises estáticas estão disponíveis;
2. Apenas elementos contínuos lineares estão disponíveis;
3. Sem paralelização no processamento;
4. Sem propagação por fadiga;
5. Domínio deve conter trinca única ou trincas que não interajam entre si;
6. Apenas uma trinca pode existir em cada elemento;

Dois tipos diferentes de elementos podem ser utilizados para simulações utilizando o MEFX/MEFG no ABAQUS: Elemento Tetraédrico e Elemento Hexaédrico.

Os elementos tetraédricos estão disponíveis em primeira e segunda ordem de aproximação, o seja linear e quadrática respectivamente. Já os elementos hexaédricos estão disponíveis apenas em primeira ordem. Estes elementos estão mostrados na Figura 2.

FIGURA 2 - ELEMENTOS DISPONÍVEIS PARA MEFX/MEFG NO ABAQUS



a) Tetraedro de primeira ordem, b) Tetraedro de segunda ordem, c) Hexaedro de primeira ordem

Fonte: (Levén e Daniel, 2012)

Apenas um ponto de integração para o cálculo da matriz de rigidez é utilizado nos elementos tetraédricos lineares (C3D6) enquanto nos quadráticos são utilizados quatro pontos de integração (C3D10).

Para os elementos hexaédricos duas opções são disponibilizadas: elementos com oito pontos de integração (C3D8) ou com apenas um (C3D8R).

Neste trabalho, as análises no ABAQUS, feitas com a versão 6.12, são limitadas àquelas com trincas estacionárias. As análises de fadiga e propagação não foram realizadas em razão da indisponibilidade das funções de ponta de trinca para capturar as singularidades características da ponta da trinca.

Com relação aos materiais estruturais, foram escolhidos aqueles geralmente mais utilizados na indústria aeronáutica, como o alumínio. A modelagem linear elástica foi escolhida devido ao fato de que o ABAQUS considera apenas estes modelos para as simulações estacionárias utilizando o MEFM/MEFX.

Apenas um exemplo de propagação tridimensional de cunho ilustrativo foi incluído neste trabalho, devido às limitações do ABAQUS versão 6.12 que serão discutidas posteriormente.

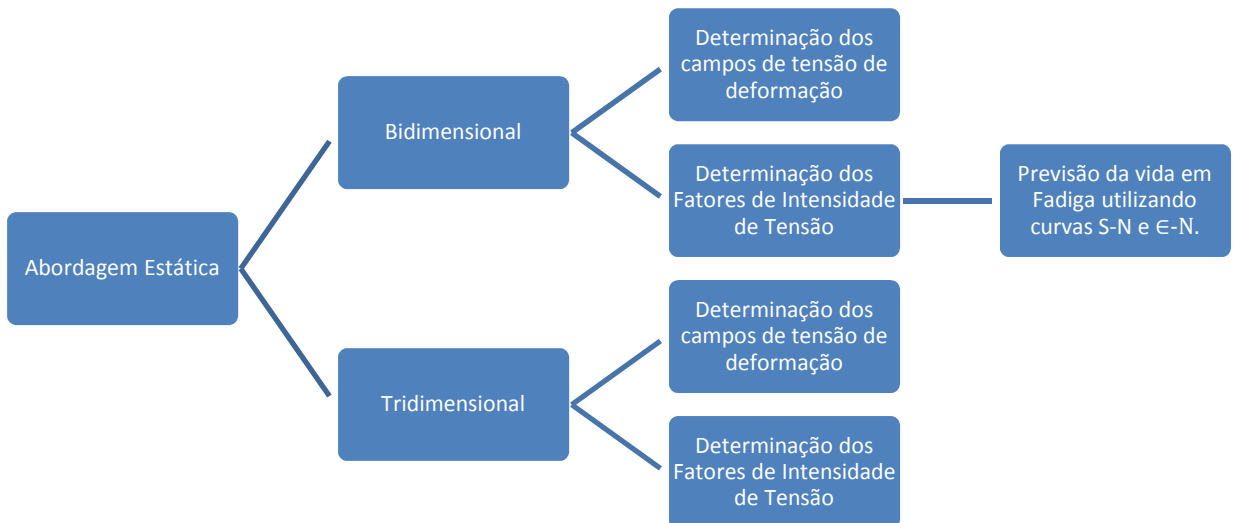
1.2.2 MÉTODOS

As simulações numéricas previstas dividem-se basicamente em dois grupos:

1.2.2.1 ABORDAGEM ESTÁTICA

Neste grupo as análises de componentes estruturais são restritas aos regimes de resposta linear. Primeiramente determinam-se os campos de deslocamento, tensão e deformação em elementos contendo ou não fraturas e submetidos a solicitações de valor unitário. Numa etapa seguinte, assumindo um histórico de carregamento de interesse, os campos de tensão podem ser escalonados, os fatores de intensidade de tensão determinados e as estimativas de vida em fadiga realizadas empregando-se diretamente as curvas S-N ou ϵ -N.

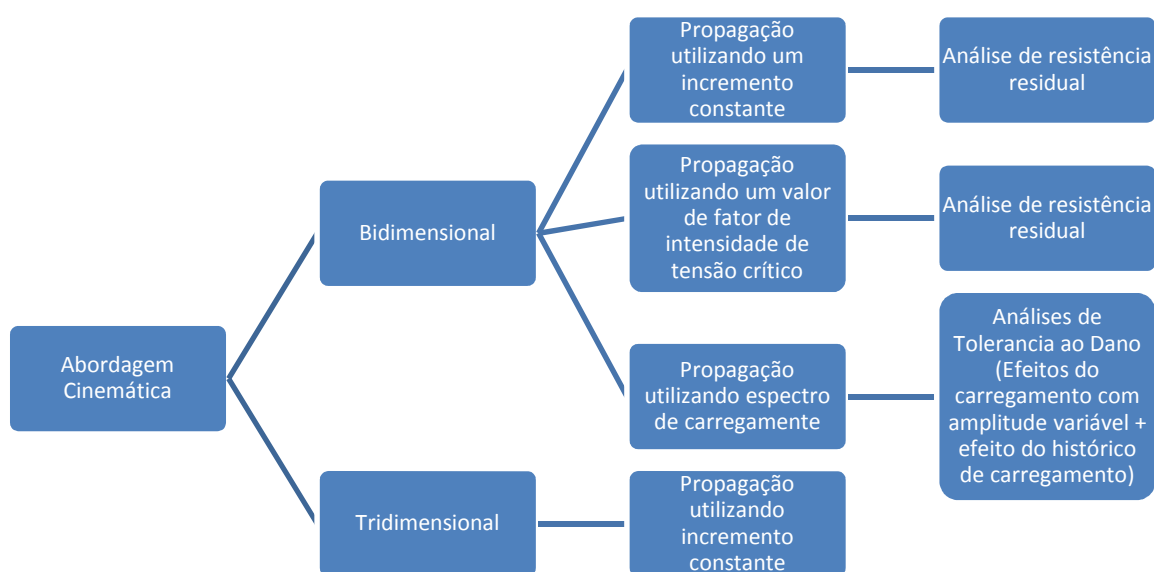
FIGURA 3 – FLUXOGRAMA DE ABORDAGEM ESTÁTICA



1.2.2.2 ABORDAGEM CINEMÁTICA

Neste grupo são feitas análises de estruturas com trincas iniciais, podendo-se levar em conta a resposta não-linear do meio na região próxima à ponta da trinca. Entretanto, dá-se maior destaque nesta abordagem para a simulação da propagação da trinca, explorando-se, conceitualmente, para este estudo, a Mecânica da Fratura Linear. Numa etapa seguinte, a partir de espectros de carga previamente definidos para aeronaves podem ser conduzidas análises de tolerância ao dano das estruturas. Nesse âmbito analisa-se, por exemplo, a influência de carregamentos com amplitude variável sobre o retardamento da propagação e a resistência residual da estrutura com o avanço trinca.

FIGURA 4-FLUXOGRAMA DE ABORDAGEM CINEMÁTICA



1.3 FORMA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados das simulações feitas nesta pesquisa são comparados com casos clássicos disponíveis na literatura ou com resultados previamente obtidos com outros tipos de simulação ou, ainda, com resultados experimentais. Além disso, a eficiência e robustez da metodologia de análise adotada foram avaliadas mediante o controle de parâmetros associados a medidas de convergência, tempo de processamento, erros de aproximação e etc.

Um aspecto importante a destacar é que as metodologias e abordagens empregadas foram avaliadas quanto aos ganhos obtidos com relação ao que já é utilizado na indústria, e o seu potencial de utilização em casos reais de operação de aeronaves.

1.4 COMPOSIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Além do capítulo de introdução, este texto reúne mais quatro capítulos. A seguir é colocada de maneira sucinta uma descrição do conteúdo dos demais capítulos.

No capítulo 2 é apresentado o fenômeno da fadiga nas estruturas aeronáuticas e são descritas de forma breve as filosofias de projeto e os métodos de previsão de vida em fadiga. Neste contexto é apresentado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e suas funções de enriquecimento especiais para trincas. Além disto, o Método de “*Level-Set*” é descrito, assim como a sua possível aplicação em conjunto com o MEFG/MEFX. Também são discutidos os códigos computacionais e programas que foram utilizados nesta pesquisa. Dentre eles o MXFEM e o ABAQUS. As abordagens, estática e cinemática, que serão utilizadas durante a pesquisa também estão detalhadas.

O capítulo 3 reúne uma série de exemplos numéricos comparando primeiramente soluções obtidas com aquelas descritas na literatura. A intenção neste ponto é indicar as potencialidades e limitações de cada tipo de abordagem assim como dos softwares utilizados.

Finalmente, os capítulos 4 e 5 apresentam, respectivamente, as conclusões obtidas pelo autor e as propostas para desenvolvimentos futuros.

2 CONCEITOS GERAIS

A conceituação geral apresentada neste capítulo está fundamentada nas seguintes referências: (Hosford, 2010), (Stephens *et al.*, 2000), (Broek, 2012) e (Megson, 2012).

2.1 FADIGA EM ESTRUTURAS AERONÁUTICAS

Pode-se definir a fadiga como um mecanismo progressivo de falha e de degradação do material que ocorre devido à ação de um carregamento cíclico ou qualquer outro tipo de carregamento repetido com amplitude variável em que sua intensidade seja inferior ou, ao menos, nunca ultrapasse o valor para o qual haveria falha em uma única aplicação. A Figura 5 ilustra uma falha real em estrutura aeronáutica.

FIGURA 5—ACIDENTE DA AERONAVE HAVILLAND COMET 1



A aeronave modelo Havilland Comet1, a esquerda, sofreu uma série de acidentes em voo na década de 50. Após análise dos destroços e testes foi descoberto que a vida em fadiga da fuselagem era bem diferente da calculada, devido a uma concentração de tensão nas extremidades das janelas o que gerava o colapso estrutural como indicado à direita. FONTE:(Faa)

Nas aeronaves este fenômeno é muito preocupante devido às características de sua operação.

2.1.1 FILOSOFIAS DE PROJETO

Nesta seção são descritas metodologias de projeto de estruturas e componentes aeronáuticos. Cabe ressaltar que no projeto de uma aeronave, todas as filosofias podem ser utilizadas. A escolha sobre cada uma delas é feita de acordo com a região, a possibilidade de inspeção, os custos e inúmeros outros fatores.

2.1.1.1 *INFINITE-LIFE*

Esta é a filosofia de projeto mais antiga e visa garantir que um componente nunca falhe durante toda a sua vida. Para isso é necessário que as tensões e deformações locais estejam dentro dos limites do regime de comportamento linear da estrutura e seguramente abaixo dos limites de fadiga.

Nas aeronaves essa filosofia de projeto pode levar a um aumento considerável de peso, principalmente nas estruturas primárias e secundárias. Entretanto, este conceito é utilizado ainda em alguns componentes particulares, como por exemplo em molas de válvulas de motor.

2.1.1.2 *SAFE-LIFE*

Esta filosofia de projeto visa garantir que um componente não falhe durante um período determinado de vida, levando-se em conta certa margem de segurança. Isso faz com que as estruturas sejam otimizadas e conseqüentemente mais leves.

Uma penalidade deste método é que os componentes são retirados de serviço mesmo quando ainda parecem ter uma vida remanescente considerável.

Na indústria aeronáutica, as estruturas e componentes que são projetados usando esta filosofia possuem uma “Vida Limite”, as quais são indicadas no plano de manutenção e nos respectivos “*log-cards*”.

Rolamentos e componentes de motores aeronáuticos ainda utilizam estes critérios. No caso de helicópteros, praticamente toda a estrutura dos rotores, principal e de cauda, assim como a transmissão possuem vida limite.

2.1.1.3 *FAIL-SAFE*

Esta filosofia de projeto visa garantir que se um componente falhar o sistema no qual ele faz parte não deve falhar. Desse modo, garante-se um melhor aproveitamento da vida de cada componente individualmente.

Possibilitar múltiplos caminhos de carga, transferência de carga entre elementos e redundância estrutural são recursos muito utilizados em projetos aeronáuticos dentro desta filosofia.

Entretanto, é importante que as estruturas sejam inspecionadas periodicamente a fim de detectar e reparar as possíveis falhas.

2.1.1.4 *DAMAGE-TOLERANT*

Pode-se se dizer que se trata de um refinamento do conceito Fail-safe. Esta filosofia de projeto visa garantir que mesmo que haja um defeito em um componente, diante da avaliação deste defeito, é possível garantir que este componente ainda possa ser utilizado.

Baseada na Mecânica da Fratura, este tipo de análise pressupõe a necessidade de inspeções periódicas em pontos críticos da estrutura. Além disto, ela permite uma otimização do projeto, aumentando sua viabilidade econômica e, mesmo, a segurança das aeronaves.

2.1.2 REQUISITOS DE CERTIFICAÇÃO

Nesta seção são apresentados, resumidamente, os requisitos de certificação impostos pelos órgãos homologadores quanto às margens de segurança para estruturas sujeitas à fadiga e sua interpretação. Vale ressaltar que os requisitos decorrem de observações colhidas em ensaios realizados em uma aeronave dedicada à campanha de certificação.

A certificação das estruturas aeronáutica é um assunto muito vasto e não será aprofundado neste texto.

Basicamente existem dois tipos de requisitos, os quais são aplicáveis de acordo com as características de operação da aeronave.

Certificação Civil:

§ 25.571 -- Damage-tolerance and fatigue evaluation of structure

Certificação Militar:

JSSG-2006 a qual substituiu a MIL-A-83444, criada em 1974 após o acidente com um F-111, no qual a asa da aeronave se desprendeu em voo devido a falha de um componente de junção asa-fuselagem, estando este com um número de ciclos bem abaixo da vida prevista.

2.1.3 MÉTODOS DE PREVISÃO DE VIDA EM FADIGA

Nesta seção são descritos de forma sucinta os principais métodos de previsão de vida em fadiga.

A vida total de um componente é composta pela fase de iniciação da trinca seguida da fase de propagação. A proporção entre estas fases varia de acordo com a geometria, o carregamento e, principalmente, com o material. A vida total geralmente é definida até a completa separação da estrutura em duas partes, mas essa definição pode variar de acordo com o componente. A presença de uma trinca de um determinado tamanho pode ser o critério limitante da vida.

2.1.3.1 VIDA BASEADA EM TENSÃO (S-N)

Essa metodologia é geralmente utilizada para a determinação da vida total. Considerada um método empírico, consiste em determinar curvas que relacionam uma tensão nominal aplicada e números de ciclos até a falha. Utilizam-se, também, tabelas e gráficos para a determinação do fator de concentração de tensão, procurando levar em conta efeitos de tensão média, descontinuidades geométricas e acabamento superficial, os quais nem sempre possuem exatamente as mesmas características do problema em questão.

Assume-se que toda a estrutura se comporta de maneira elástica, ou seja, de maneira geral, nenhuma das máximas tensões atuantes pode ser maior do que a resistência ao escoamento do material. Essa metodologia é apropriada para previsões de vidas longas ou mais conhecida como fadiga de alto ciclo.

O MIL-HDBK-5¹ contém curvas S-N para 156 materiais de aplicação aeronáutica para diferentes fatores de concentração de tensão.

Para os casos de cargas com amplitude variável, emprega-se a Regra de Palmgren-Miner, a qual estabelece que a falha deva ocorrer quando a soma das frações de vida correspondente a cada nível distinto de amplitude constante de tensão for igual à unidade. Além disso, esta regra leva em conta o acúmulo de danos causados por um dado nível de tensão. Entretanto não leva em conta a influência do histórico do carregamento. Na prática, esses efeitos podem ser consideráveis.

2.1.3.2 VIDA BASEADA EM DEFORMAÇÃO (ϵ -N)

Para cargas elevadas ou ainda devido a altas concentrações de tensão podem ocorrer deformações plásticas em regiões localizadas. O método ϵ -N permite levar em conta tais situações e, por isso, geralmente é utilizado para análise de fadiga de baixo ciclo.

Este método também é capaz de levar em conta as histereses de resposta do material, tanto de encruamento quanto de amolecimento.

Apesar de inicialmente baseado em relações ϵ -N empíricas uma estimativa precisa do campo de tensões e deformações elastoplásticas, necessária para a aplicação do método ϵ -N para casos mais gerais, pode ser obtida com o auxílio de métodos numéricos.

As curvas ϵ -N também devem ser corrigidas para incluir efeitos de tensões médias, assim como no método S-N.

Principalmente devido a uma base de dados restrita, esta metodologia ainda não vem sendo amplamente utilizada na indústria aeronáutica, embora seja mais abrangente e consistente que o método S-N. De fato, segundo (Tita, 2007) há uma preferência por cálculos baseados exclusivamente em análise linear elástica, geralmente mais conservativos.

¹ Metallic materials and elements for aerospace vehicle structures - Department of Defense Handbook of the United States of America

2.1.3.3 *MODELOS DE PROPAGAÇÃO*

Para que a fase de propagação da trinca seja considerada, são necessários modelamentos capazes de gerar duas respostas. A primeira é a previsão da taxa de propagação e a segunda é o tamanho máximo da trinca antes que no próximo pico de carregamento surja uma falha catastrófica.

Nos dois problemas o fator de intensidade de tensão na ponta da trinca é a informação mais importante que deve ser determinada. Esta depende basicamente do tamanho da trinca e do campo de tensões próximo à ponta da trinca.

Nota-se que o material junto à ponta da trinca apresenta um comportamento plástico, entretanto quando analisado como meio elástico geram-se campos de tensão que tendem ao infinito naquela região.

Ambas estas respostas acima mencionadas podem ser dadas pela Mecânica da Fratura. Esta pode ser dividida em dois tipos básicos:

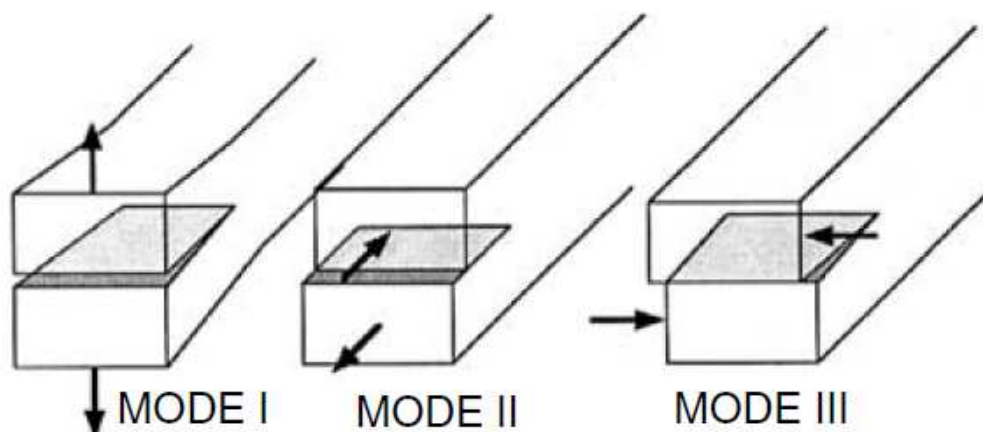
- Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE): aplicável para os casos em que a resposta global da estrutura é linear elástica. Considerando apenas que pequenas regiões próximas à ponta da trinca podem apresentar deformações plásticas.
- Mecânica da Fratura Elásto-Plástica (MFEP): aplicável para os casos em que a resposta global da estrutura é plástica.

Em relação à trinca, vale destacar que três modos básicos de abertura relativa de suas faces em correspondência a solicitações distintas conforme Figura 6:

- MODO I: Separação;
- MODO II: Escorregamento no plano;
- MODO III: Escorregamento fora do plano.

Nos casos práticos, o modo I é predominante na maioria das vezes.

FIGURA 6- MODOS DE FRATURAMENTO



Fonte: (Hosford, 2010)

Existem tabelas e gráficos para essas análises assim como para cálculo dos fatores de intensidade de tensão. Entretanto, uma base de dados representativa para incluir a propagação de trincas é bastante limitada, visto que muitas das variáveis se alteram com o crescimento da trinca. Já o uso de ferramentas numéricas permite que estes parâmetros sejam estimados, levando-se em conta a geometria, o material e eventuais danos que por ventura venham a existir na estrutura em questão. Um procedimento comum para a estimativa da vida na fase de propagação é considerar que o componente contenha uma trinca de determinado tamanho quando este é posto em serviço, e com isso assume-se que a vida de iniciação é nula.

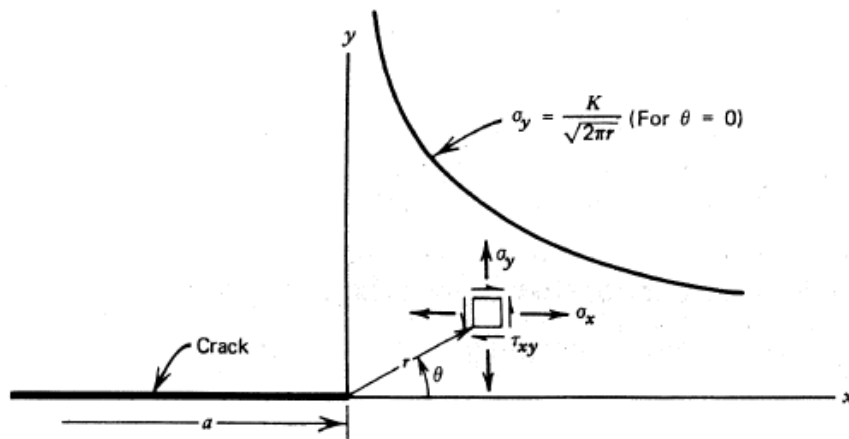
2.2 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA (MFLE):

De forma geral, a Mecânica da Fratura é usada na análise da resistência de um componente estrutural na presença de uma trinca. Em particular, a mecânica da fratura linear elástica é um dos métodos mais utilizados para analisar processos de propagação de trincas. Para o uso deste método é necessário assumir que a resposta do material é predominantemente linear elástica durante todo o processo da fadiga.

2.2.1 MODELAGEM DA TRINCA

Considerando uma trinca em um sólido linear elástico e isotrópico submetido a um carregamento em modo I, em um ponto arbitrário nas proximidades da ponta da trinca o estado de tensão pode ser calculado através das equações de Westegard conforme mostrado na Figura 7.

FIGURA 7 - TENSÕES ELÁSTICAS PRÓXIMAS À PONTA DA TRINCA ($R/A \ll 1$)



$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin 3 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin 3 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos 3 \frac{\theta}{2}$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{for plane stress}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_z = \mu [\sigma_x + \sigma_y] \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{for plane strain}$$

Fonte: (Stephens *et al.*, 2000)

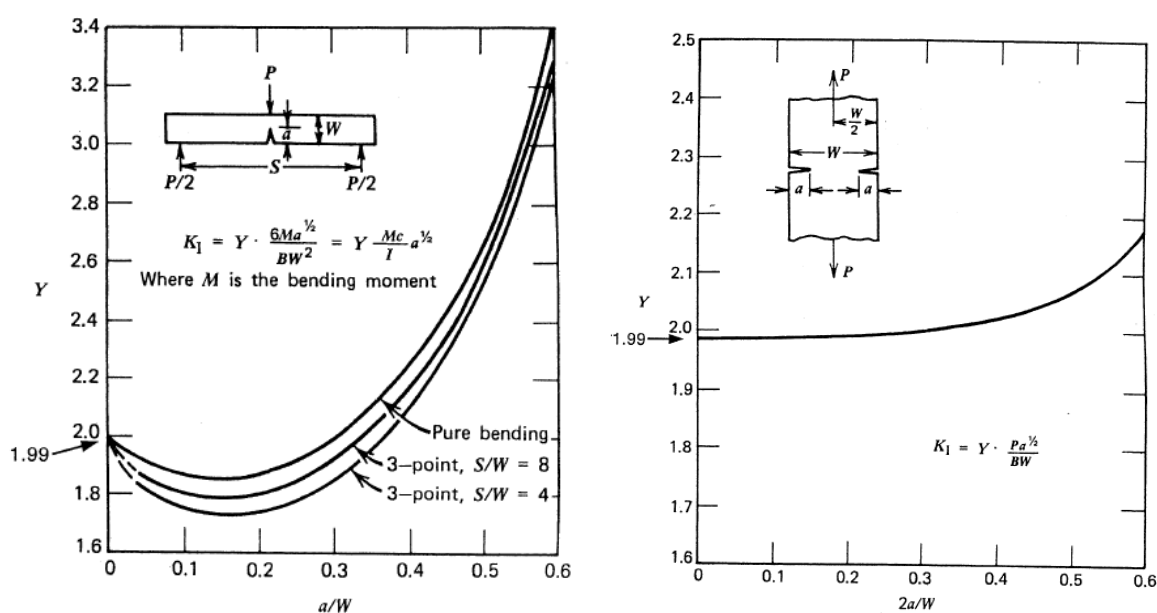
Este equacionamento mostra que as tensões normais e de cisalhamento nas proximidades da ponta da trinca são dependentes somente de r , θ e K . Entretanto, levando em conta somente a magnitude destas tensões em um determinado ponto, conclui-se que estas dependem somente de K . Por esta razão K é chamado de fator de intensidade de tensão.

2.2.2 FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO

Diferentemente do fator de concentração de tensão (K_T), que é definido pela razão da máxima tensão em um entalhe pela tensão nominal ou média no entalhe, o valor do fator de intensidade de tensão K , depende do tipo de carregamento, formato da trinca, modo de fraturamento e geometria da estrutura.

Inúmeros experimentos e simulações numéricas foram feitos e, para muitos casos, é possível obter uma expressão para o cálculo do K . Assim como descrito anteriormente, é necessário que para cada configuração de geometria, carregamento e trinca haja um modelo. Na Figura 8 é possível ver alguns ábacos de estimativa do valor de K .

FIGURA 8 - ABACO PARA CÁLCULO DE K



À esquerda, um exemplo de trinca de borda sob flexão. À direita, um exemplo de trinca nas extremidades sob tensão. Fonte: (Stephens *et al.*, 2000)

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS (MEFG)

Nesta seção é apresentada uma revisão sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Esta revisão contempla um breve histórico, sua formulação e uma descrição sobre suas principais características. Também são descritas as funções de enriquecimento usadas neste trabalho, suas limitações e desafios para implementação.

2.3.1 HISTÓRICO

O MEFG/MEFX tem sua origem no Método da Partição da Unidade (PUM), proposto originalmente por (Melenk e Babuska, 1996). Esse método explora o conceito de enriquecimento de funções partição da unidade para a geração de aproximações globais conformes de Galerkin dos Problemas de Valor de Contorno (PVC). Em uma definição menos rigorosa matematicamente, Partição da Unidade é o conjunto de funções cujos valores têm somatória unitária em um ponto. A característica que diferencia o MEFG/MEFX do PUM é que naquele método o conceito de partição da unidade é emprestado pelas funções de forma de elementos finitos lineares (ou bilineares) convencionais. Mais especificamente, uma malha de elementos finitos convencional é empregada para a discretização do domínio do problema em estudo, emprestando as funções de forma nodais que constituem partição da unidade e definindo os domínios de integração para a geração do sistema resolvente.

De acordo com (Babuška e Banerjee, 2012) o conceito de adicionar funções de base não polinomial ao espaço de aproximações do MEF iniciou-se na década de 70 com os trabalhos de (Byskov, 1970), (Fix *et al.*, 1973) e (Benzley, 1974).

Este conceito foi incorporado ao PUM levando ao MEFG/MEFX a partir de contribuições independentes, as quais de acordo com (Duarte *et al.*, 2000) podem ser divididas em dois grandes grupos.

- Trabalhos propostos por Babuška e colaboradores sob os nomes de “Método dos Elementos Finitos Especiais”, “Método dos

Elementos Finitos Generalizados” e “Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade”:

- (Babuška *et al.*, 1994) Descrevem o método dos Elementos Finitos Especiais no qual o conceito de partição da unidade e funções de forma não polinomiais são utilizadas na resolução de equações diferenciais.
 - (Babuska e Melenk, 1995) e (Melenk e Babuska, 1996) aprofundaram a teoria matemática ampliando assim a variedade de aplicações do chamado Métodos dos Elementos Finitos Especiais que passou a ser chamado de Método Partição da Unidade.
- Trabalhos propostos por Duarte e Oden:
- (Duarte e Oden, 1996b) e (Duarte e Oden, 1996a) adotaram enriquecimentos polinomiais juntamente com a filosofia dos métodos sem malha que recebeu o nome de Método das Núvens-Hp.

Portanto, dos trabalhos Babuška e colaboradores tem-se o uso de funções de forma típicas do MEF como partição da unidade e o emprego de uma malha de elementos. Entretanto, dos trabalhos de Duarte e Oden tem-se a ideia de enriquecimento da função a partir da adição de novos parâmetros nodais e o uso dos conceitos de nuvem para suporte da função de enriquecimento.

De acordo com (Babuška e Banerjee, 2012) a mudança definitiva para o nome “Método dos Elementos Finitos Generalizados” se deu no trabalho de (Strouboulis *et al.*, 2000), denominação está indicando que o MEF é um caso particular do MEFG/MEFX.

Neste contexto de Métodos Partição da Unidade, mas um pouco mais voltado para estudo de trincas, outra proposta foi apresentada por (Belytschko e Black, 1999) e (Moes *et al.*, 1999) sendo chamada Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFX). O fato de não ser necessário alterar a malha em problemas que envolviam propagação trincas foi o maior diferencial do MEFX em sua origem. Isso

se dava pelo uso da função degrau, que será descrita na seção 2.3.4, como enriquecimento.

Entretanto, em (Fries e Belytschko, 2010) foi reconhecido que o MEFG e o MEFX são no fundo o mesmo método. A partir daí alguns autores passaram a usar o termo MEFG/MEFX. Neste trabalho será utilizado o termo MEFG/MEFX.

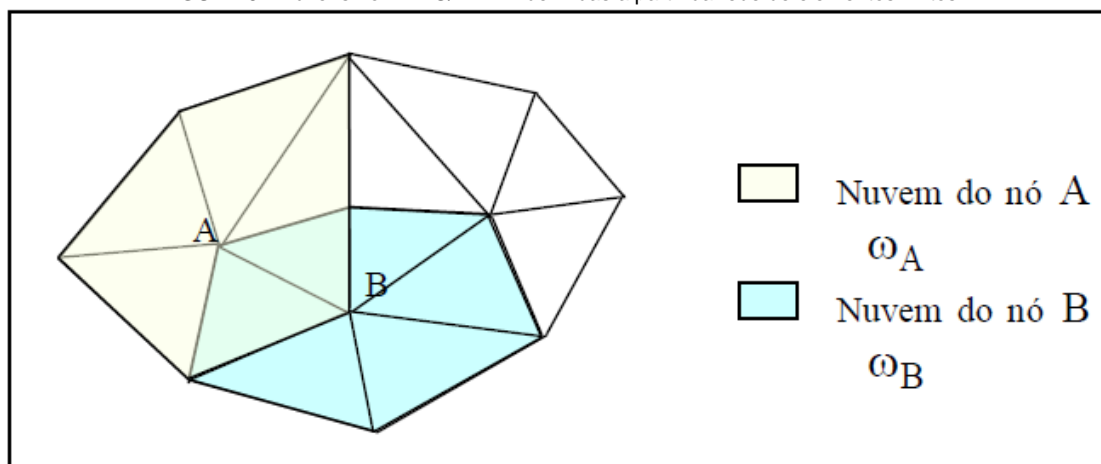
2.3.2 FORMULAÇÃO

É possível afirmar que a diferença entre o MEF e o MEFG/MEFX é a definição das funções de forma.

As funções de forma do MEFG/MEFX resultam de enriquecimentos, que podem ser realizados de forma seletiva, construídos multiplicando-se as funções partição da unidade por uma base de aproximação com boas propriedades de representação da solução.

No MEFG/MEFX utilizando a rede de elementos finitos do MEF, caracterizam-se “nuvens”, definidas pelo conjunto de elementos que têm um nó como vértice comum.

FIGURA 9 - Nuvens no MEFG/MEFX: definidas a partir da rede de elementos finitos



Fonte: (Proença, 2013)

Tendo como domínios as nuvens (α) as funções de forma no MEFG/MEFX resultam do produto entre as chamadas funções de enriquecimento, $L_{\alpha i}$ e as funções PU do MEF, φ_{α} , ou seja:

$$\phi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} \quad (2.0)$$

Na equação (2.1) vale a seguinte notação:

- φ_{α} - são as funções de forma do MEF emprestadas de cada elemento que compõe a nuvem α e atreladas ao nó comum. Tais funções, considerando-se todas as nuvens, compõem uma PU.
- $L_{\alpha i}$ - componente de bases de funções de enriquecimento adotadas, com $i = 1, \dots, nl$, onde nl é o número total de funções. Vale ressaltar que a base contém a unidade para $i=1$.

As funções de enriquecimento têm por objetivo aprimorar a qualidade da aproximação local e podem apresentar características especiais, ou mesmo serem definidas a partir de um conhecimento prévio da solução, de modo que não se resumem somente a bases polinomiais.

Outra propriedade importante decorrente do uso da PU é *reprodutibilidade*. Esta propriedade indica que “se o conjunto L_{α} , que contém a base de enriquecimento, for o mesmo adotado para todas as nuvens que contém determinado ponto (isto é, cada componente da base é comum para todas as nuvens: $L_{i\alpha} = L_i$), então combinações lineares das funções de forma do MEF/MEFX podem reproduzir localmente as funções de enriquecimento.” (Proença, 2013)

No caso bidimensional, uma representação formal das aproximações globais do MEF/MEFX de cada uma das componentes do campo de deslocamentos, considerando-se todo o conjunto de n nuvens definidas por certa discretização adotada, pode ser dada por:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^n \varphi_j u_j + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=2}^{nl} \phi_{\alpha i} b_{\alpha i} \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^n \varphi_j v_j + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=2}^{nl} \phi_{\alpha i} c_{\alpha i} \quad (2.2)$$

Onde:

- u_j e v_j são parâmetros associados aos graus de liberdade nodais usuais do MEF

• $b_{\alpha i}$ e $c_{\alpha i}$ são parâmetros nodais adicionais introduzidos pelo enriquecimento.

Nota-se, de imediato, que o enriquecimento conduzido de modo geral, como colocado nas equações (2.2) e (2.3), acaba por destruir o significado inicial dos parâmetros nodais usuais, além de complicar a imposição das condições de contorno essenciais. Conseqüentemente, o valor nodal da aproximação, ou de suas derivadas, por exemplo, precisa ser recuperado por um processo de pós-processamento. Entretanto, o significado original dos parâmetros nodais iniciais pode ser preservado mediante o uso do chamado enriquecimento “*shifted*”. Com esse tipo de enriquecimento as equações (2.2) e (2.3) passam a ser escritas como:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^n \varphi_j u_j + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=2}^{nl} \varphi_{\alpha} [L_{\alpha i} - L_{\alpha i}(\mathbf{x}_{\alpha})] b_{\alpha i} \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^n \varphi_j v_j + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=2}^{nl} \varphi_{\alpha} [L_{\alpha i} - L_{\alpha i}(\mathbf{x}_{\alpha})] c_{\alpha i} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{x}_{α} se refere as coordenadas globais do nó enriquecido.

A determinação do conjunto de parâmetros nodais segue a mesma formulação e procedimentos utilizados no Método dos Elementos Finitos. Constata-se das próprias relações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) que no caso do MEFG/MEFX o enriquecimento implica no aparecimento de novos graus de liberdade nos nós do elemento sobre o qual foi aplicado e conseqüentemente de novas linhas e/ou colunas na matriz de rigidez e vetor de forças nodais.

2.3.3 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

O MEFG/MEFX é capaz de reunir as principais vantagens do MEF com algumas características muito favoráveis típicas dos métodos sem malha. Isso acontece, pois, como destacado anteriormente, houve várias contribuições independentes que originaram o MEFG/MEFX.

Por exemplo, a ideia proposta pelo método das nuvens sobre o enriquecimento das funções de forma partição da unidade é totalmente incorporada no MEFG/MEFX. Entretanto, aquelas funções não são obtidas por um procedimento de mínimos quadrados típico dos métodos sem malha, mas sim fornecidas diretamente por uma malha de elementos finitos.

Como descrito por (Torres, 2003) as principais características positivas do MEFG/MEFX provindas do MEF são:

1. A malha de elementos finitos é utilizada como domínio para a integração numérica;
2. É um método robusto para o qual já existem inúmeros códigos de MEF que podem ser adaptados ao MEFG/MEFX;
3. Facilidade na imposição das condições de contorno essenciais.

O mesmo autor citado no parágrafo anterior argumenta que as propriedades favoráveis típicas dos métodos sem malha presentes no MEFG/MEFX são:

1. A possibilidade de modelar a ocorrência de trincas ou regiões de maior concentração de tensões através da introdução de funções especiais como enriquecimento;
2. Uma maior facilidade de aplicar o refinamento-p e a possibilidade de enriquecer a aproximação apenas numa região do domínio, sem comprometer, como no MEF, a conformidade entre elementos.

Devido as suas potencialidades, o MEFG/MEFX vem sendo empregado em uma grande quantidade de problemas de engenharia, principalmente naqueles que apresentam descontinuidades, singularidades, gradientes elevados ou qualquer outra propriedade que torna a solução não suave. No âmbito dos estudos desenvolvidos na EESC/USP algumas dessas aplicações podem ser encontradas nos trabalhos de (Barros, 2002),(Torres, 2003),(Alves, 2010)e(Piedade Neto, 2013)

Como qualquer outro método numérico o MEFG/MEFX também tem suas limitações oriundas, principalmente, do fato de que qualquer tipo de função pode ser usada como enriquecimento. Seguem algumas das dificuldades:

- Mau condicionamento numérico: certas funções de enriquecimento afetam de forma severa o condicionamento numérico da matriz de rigidez do sistema. Por exemplo, quando estas funções são polinomiais, e as funções de forma dos elementos finitos também o são, existe uma chance considerável das funções de forma geradas resultarem linearmente dependentes. Esse fato acaba proporcionando uma matriz de rigidez global mal condicionada que não apresenta a propriedade de ser positivo-definida.
- Integração numérica: quando a função de enriquecimento é descontínua (função degrau) ou não polinomial (funções usadas na mecânica da fratura) as regras de integração numérica convencionais deixam de ser eficientes e nestes casos é necessário recorrer a outras técnicas.
- Elementos de mistura: nestes elementos que compartilham nós com e sem enriquecimento deixa de existir a reprodutibilidade e conseqüentemente em alguns casos são afetadas a precisão e a convergência do método;

Outra vantagem do MEFG/MEFX é que ele contém, em particular, o MEF convencional, e sua programação pode ser realizada explorando-se todos os recursos de um programa para esse método.

Alguns trabalhos, como o de (Duarte *et al.*, 2000), têm demonstrado os benefícios de desempenho que o uso do MEFG/MEFX tem em relação do MEF. Neste trabalho, os autores compararam o desempenho do MEFG/MEFX e do MEF na solução de um problema 3D elástico. O tamanho do problema e a malha eram representativos aos usados na indústria aeroespacial. Foi demonstrado que para uma mesma malha e grau de aproximação, o MEFG/MEFX resultou em um número menor de equações que o MEF. Isto se mostrou mais pronunciado em malhas com elementos tetraédricos para estruturas complexas. Esse número de equações reduzido foi traduzido em menor tempo de processamento com o MEFG/MEFX. Também se constatou que mesmo usando a mesma malha do MEF, obtiveram-se soluções mais precisas e com menor esforço computacional.

2.3.4 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO PARA TRINCAS

Nos problemas de fratura uma das vantagens operacionais do uso do MEFG/MEFX em relação ao MEF é a redução do custo computacional. De fato, o enriquecimento por funções que permitem melhor colher as características de descontinuidade do campo de deslocamentos através da linha da trinca, e de concentração de tensões nas vizinhanças de sua ponta, permite reduzir a quantidade de elementos necessários para a discretização. No MEFG/MEFX, não é exigida a discretização explícita da superfície, ou linha (no caso bidimensional), da fratura, já que é possível inserir uma fratura arbitrariamente dentro da malha explorando-se convenientemente as funções de enriquecimento (Belytschko e Black, 1999).

Para ilustrar os comentários anteriores, vale referenciar algumas das funções de enriquecimento especiais empregadas na análise de problemas envolvendo trincas.

(Moes et al., 1999) propuseram o uso de funções de enriquecimento descontínuas para o modelamento da perda de continuidade dos deslocamentos através da linha da trinca em regiões afastadas da ponta. Essas funções $H(x, y)$ são do tipo degrau e tem a seguinte forma, considerando-se que pontos tais que $y = 0$ coincidem com a linha da descontinuidade:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

(Fleming et al., 1997) propuseram o uso de funções trigonométricas típicas das soluções de fratura para componentes de uma base de enriquecimento aplicada aos nós nas vizinhanças da ponta da trinca. Essas funções aparecem no seguinte vetor que reúne as componentes polinomiais e trigonométricas da base de enriquecimento:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \left[1, x, y, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (2.7)$$

As funções de enriquecimento trigonométricas são conhecidas como “*Branchfunctions*” ou funções “*Crack-tip*”.

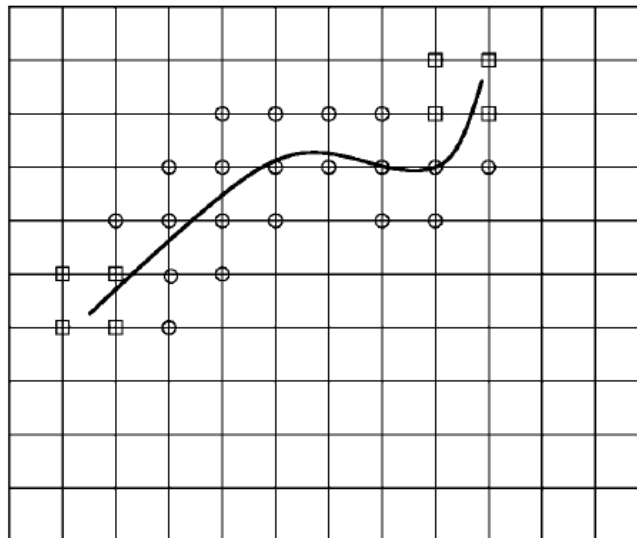
Portanto, utilizando uma base conveniente de funções de enriquecimento é possível gerar pelo MEFG/MEFX uma aproximação global aonde se leva em conta,

por exemplo, as funções de formas usuais do método dos elementos finitos, as funções de enriquecimento $H(x)$, descontínua, e as funções de fratura para a região próxima a ponta da trinca. Para uma descontinuidade imersa num sólido, tal aproximação representa-se como:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in D} \mathbf{u}_i \phi_i + \sum_{j \in D'} \mathbf{b}_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K_1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^{l2} F_l^2(x) \right)$$

Na relação anterior D' representa o conjunto de nós que são vértices de nuvens de elementos cortadas pela trinca. Já os conjuntos K_1 e K_2 dizem respeito, respectivamente, aos nós nas vizinhanças de cada uma das extremidades da trinca, cujas nuvens contêm a ponta da trinca. Na Figura 9 estão indicados, sobre uma discretização em elementos finitos contendo uma trinca interna ao sólido, os nós e respectivas funções de enriquecimento a eles atreladas (com símbolos distintos para cada tipo de função).

FIGURA 10 -Definição dos nós enriquecidos



Os nós enriquecidos com funções degrau estão circulados. Aqueles que foram enriquecidos com funções de "ponta de trinca" estão indicados por quadrados. Fonte: (Stolarska *et al.*, 2001)

2.3.5 MÉTODO DE "LEVEL-SET"

No sentido de identificar a posição da trinca no sólido, mas ainda fora do contexto do MEEG/MEFX, um método baseado no conceito de 'level-set' foi proposto por (Osher e Sethian, 1988). Originalmente o método 'level-set' tinha por objetivo modelar o movimento de uma interface ("moving boundary") em uma, duas ou três

dimensões. As funções ‘*level-set*’ são contínuas e são definidas num domínio Ω de tal forma que:

$$\begin{aligned}\emptyset(x(t), t) &< 0, & \text{para } x \in \Omega \\ \emptyset(x(t), t) &> 0, & \text{para } x \notin \Omega \\ \emptyset(x(t), t) &= 0, & \text{para } x \in \Gamma\end{aligned}$$

A fronteira móvel (Γ) é determinada pelos pontos que satisfazem a condição ‘*level-set*’ zero:

$$\emptyset(x(t), t) = 0 \quad (2.8)$$

A combinação entre o MEFM/MEFX e o método ‘*level-set*’ foi feita pela primeira vez por (Stolarska *et al.*, 2001) e, desde então, tem sido aprimorada para contemplar uma ampla variedade de aplicações, que incluem não somente a identificação mais precisa das posições das descontinuidades no meio, mas, também, a identificação de interfaces entre materiais distintos.

Resumindo, o método de *level-set* permite uma simplificação na implementação do MEFM/MEFX uma vez que fornece, de forma simples, a indicação de “onde e como enriquecer”.

Para a representação da propagação de uma curva aberta, como é o caso de uma trinca, são necessárias pelo menos duas funções do tipo *level-set*: uma para o percurso da trinca e outra para a ponta. Usualmente estas duas funções são φ e ψ .

O percurso da trinca é representado pelo nível zero da função:

$$\psi(x(t), t)$$

Esta função é orientada de forma que seu nível zero passe pela atual ponta da trinca e considera também a direção da função de velocidade de propagação da ponta.

O nível zero da função:

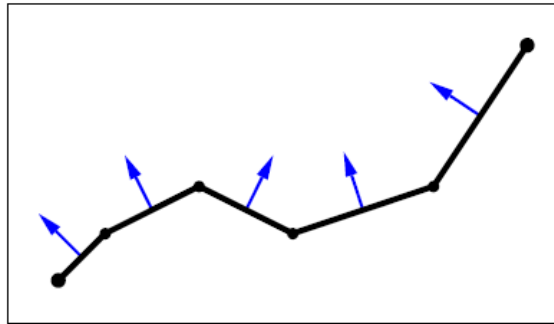
$$\varphi(x(t), t)$$

É dado pela intersecção da atual ponta da trinca e ortogonal ao nível zero da função ψ .

É necessário adotar uma convenção de sinal, pois cada nó da malha deve receber um valor para as funções de *level-set*.

(Fries e Baydoun, 2012) propõe o uso de três funções para do tipo *level-set* em conjunto com uma discretização explícita da trinca para casos bidimensionais.

FIGURA 11 - Discretização explícita de uma trinca em duas dimensões

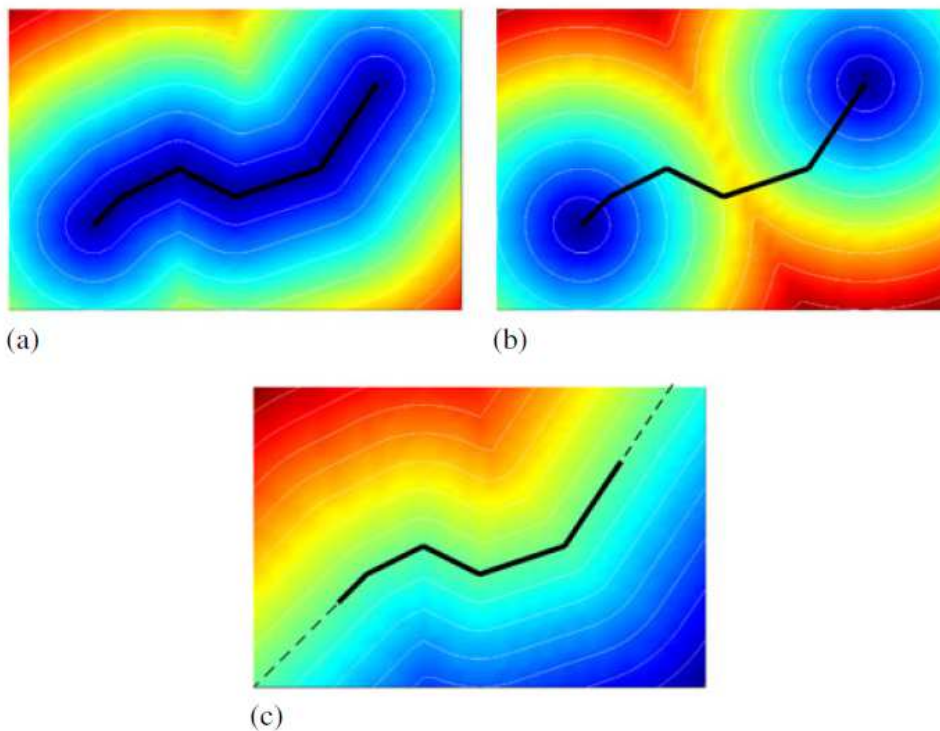


São mostrados os nós, as pontas e os vetores normais aos segmentos. Fonte: (FRIES E BAYDOUN, 2012)

As três funções *level-set* propostas por (Fries e Baydoun, 2012) são:

- $\varphi_1(x)$ é o módulo da distância à linha da trinca, ou seja, o valor desta função é a menor distância do ponto em relação à trinca.
- $\varphi_2(x)$ é o módulo da distância à ponta da trinca, ou seja, o valor desta função é a menor distância do ponto em relação à ponta da trinca.
- $\varphi_3(x)$ é a distância à linha da trinca estendida. O sinal é baseado na direção do vetor normal associado ao segmento que contém o ponto mais próximo.

FIGURA 12 - Três funções do tipo *level-set* em duas dimensões



(a) $\varphi_1(x)$, (b) $\varphi_2(x)$, (c) $\varphi_3(x)$ Fonte: (Fries e Baydoun, 2012)

3 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados oito exemplos, selecionados com o objetivo de verificar a viabilidade do uso das ferramentas e metodologias descritas anteriormente, assim como suas capacidades e limitações. Nas simulações numéricas foram utilizadas ambas as abordagens propostas neste trabalho: estática e cinemática. Além disso, para a maioria dos exemplos foram adotadas geometrias simples que proporcionam resultados bem definidos na literatura, de modo a avaliar as capacidades dos códigos e a eficácia das abordagens de forma mais concreta.

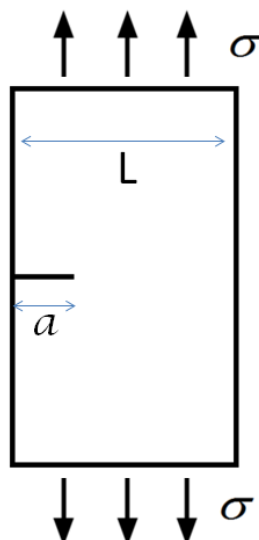
3.1 ABORDAGEM ESTÁTICA

3.1.1 BIDIMENSIONAL

3.1.1.1 *EXEMPLO 1: PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA*

Este primeiro exemplo consiste em uma chapa da largura finita com trinca de borda e submetida à um carregamento uniaxial constante, conforme ilustra a Figura 13.

FIGURA 13 - PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA (GEOMETRIA)



Para este caso, é possível obter analiticamente o fator de intensidade de tensão (FIT) do Modo I, através da equação 3.1.

$$K_I = F(\delta)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.1)$$

Na relação anterior a é o comprimento da trinca, σ é a tensão nominal aplicada e $F(\delta)$ é um fator que leva em conta o fato da placa possuir largura finita. De acordo com (Brown, 1966) este fator pode ser calculado utilizando a equação 3.2:

$$F(\delta) = 1,12 - 0,23\delta + 10,55\delta^2 - 21,72\delta^3 + 30,39\delta^4 \quad (3.2)$$

onde δ é a razão entre o comprimento (a) da trinca e a largura (L) da placa.

$$\delta = a/L \quad (3.3)$$

Utilizando o MXFEM foram feitas simulações considerando-se estado plano de deformação e usando os parâmetros mostrados na Tabela 1 e na Tabela 2:

TABELA 1 - PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA NO MXFEM

	1º Caso	2º Caso
Largura da placa (L)	3	4
Comprimento da Trinca (a)	1	1
Tensão Nominal Aplicada (σ)	1	1

TABELA 2 - PROPRIEDADES DO MATERIAL PARA SIMULAÇÃO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA NO MXFEM

Módulo de Elasticidade	10e6
Coeficiente de Poisson	0,3

Com os valores adotados podem ser calculados os fatores de intensidade de tensão teóricos, mostrados na Tabela 3.

TABELA 3 - FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO TEÓRICOS PARA O PROBLEMA DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA

	1º Caso	2º Caso
Fator de intensidade de tensão - Modo I (K_I)	3,17	2,66
Fator de intensidade de tensão - Modo II (K_{II})	0	0

Os resultados obtidos para os fatores de intensidade de tensão nas simulações com três malhas distintas de elementos quadrilaterais estão indicados na Tabela 4.

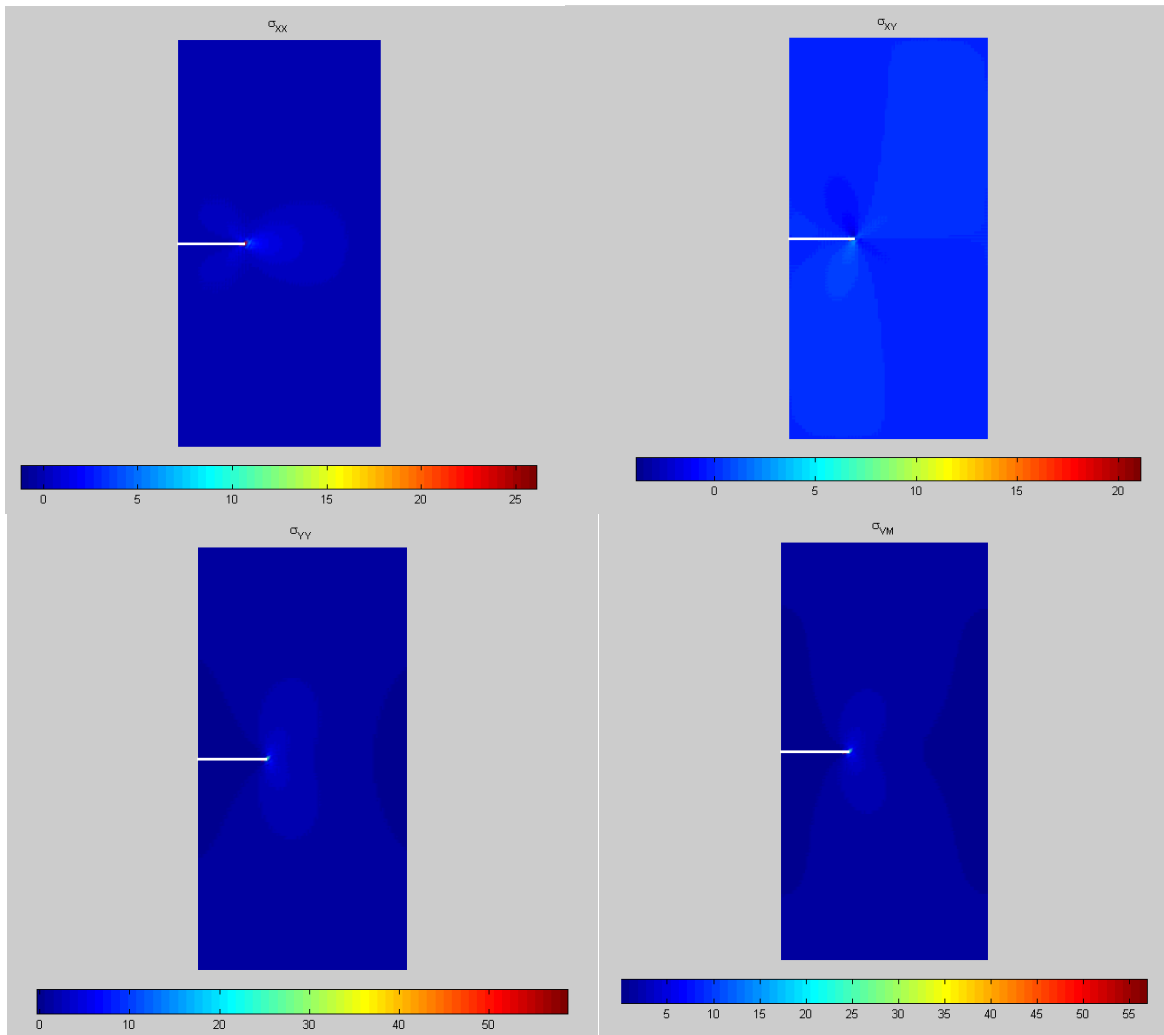
TABELA 4 – RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA NO MXFEM

	1º Caso			2º Caso		
Tamanho do Elemento	1/10	1/20	1/30	1/10	1/20	1/30
Quantidade de Elementos	1800	7200	16200	2400	9600	21600
Tempo de Processamento [s]	6,46	8,88	14,01	6,59	10,17	17,41
Fator de intensidade de tensão - Modo I (K_I)	3,1356	3,1687	3,1699	2,6504	2,6813	2,6819
Fator de intensidade de tensão - Modo II (K_{II})	0,0016	0,0011	-3.8e-04	0,0015	0,001	-2,8e-04

Em ambos os casos é possível notar claramente a convergência com o refinamento da malha, tanto para o valor do K_I quanto para o valor do K_{II} . Além disso, os fatores de intensidade de tensão calculados em ambos os casos se aproximam muito do valor analítico, com um erro inferior a 0,5% já para elementos menores que $1/20$.

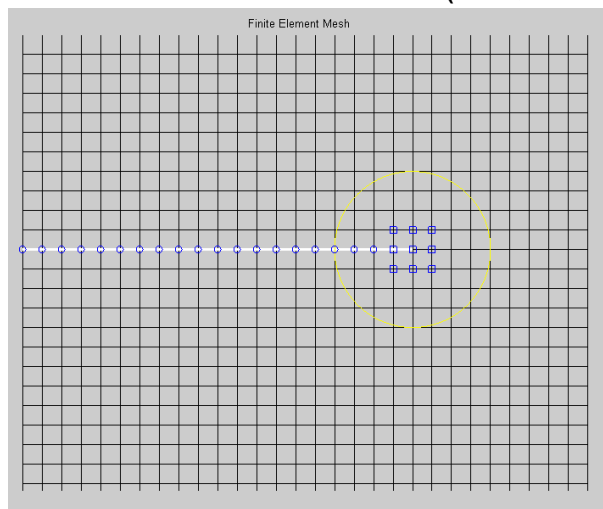
Além dos resultados dos FIT mostrados previamente, o MXFEM também tem a capacidade de pós-processar alguns dos resultados obtidos na simulação, como os campos de tensão mostrados na Figura 14 e a visualização dos nós enriquecidos mostrados na Figura 15.

FIGURA 14 -CAMPOS DE TENSÃO PARA O 1º EXEMPLO



CAMPOS DE TENSÃO CALCULADOS PELO MXFEM PARA O 1º CASO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,05.

FIGURA 15–DETALHE DA REGIÃO DA TRINÇA (ENRIQUECIMENTO)



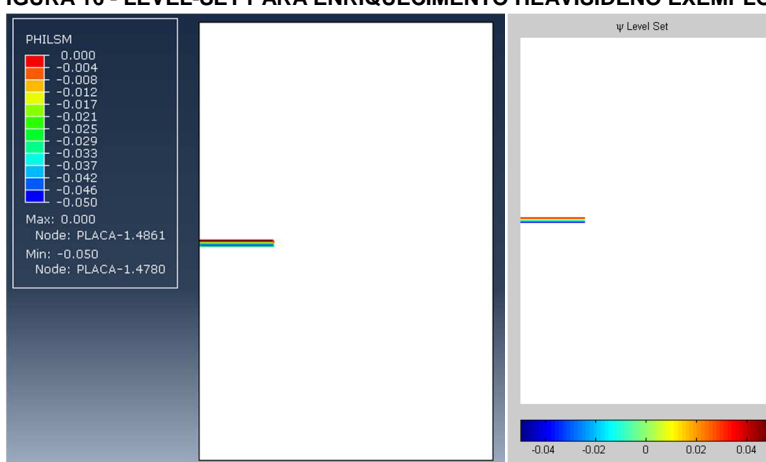
DETALHE DA REGIÃO DA TRINCA COM DESTAQUE PARA OS NÓS COM DIFERENTES ENRIQUECIMENTOS E O RAIOS UTILIZADO PARA O CÁLCULO DA INTEGRAL J. OS NÓS INDICADOS COM CÍRCULOS FORAM ENRIQUECIDOS COM FUNÇÃO DEGRAU E OS NÓS INDICADOS COM QUADRADOS FORAM ENRIQUECIDOS COM FUNÇÕES DE PONTA DE TRINCA.

Para avaliação do emprego do ABAQUS, procurou-se simular o 2º caso descrito na Tabela 1 com elementos de tamanho $1/20$, utilizando as funções de enriquecimento Heaviside. Apesar de o software possibilitar o cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizando diferentes métodos, nenhum destes está disponível para análises 2D. Portanto, serão apresentados apenas os campos de tensão obtidos e seus respectivos valores máximos, de modo que a comparação possível com o MXFEM é qualitativa. Assim sendo, optou-se por adotar propriedades do material descritas na Tabela 5, representativas do alumínio, material bastante utilizado na indústria aeronáutica. Os contornos de e os campos de tensão obtidos pelo ABAQUS e MXFEM, considerando-se mesma geometria, material e solitação aplicados, estão mostrados na Figura 16, Figura 17, Figura 18 e Figura 19.

TABELA 5 - PROPRIEDADES DO MATERIAL PARA SIMULAÇÃO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA NO ABAQUS

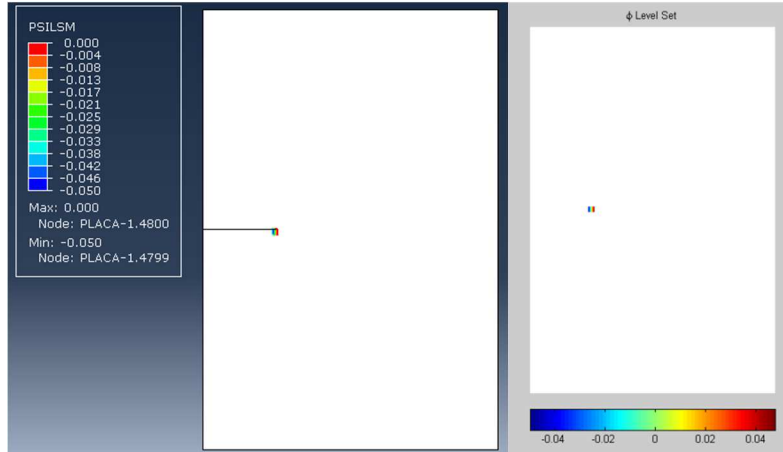
Módulo de Elasticidade	70e9
Coefficiente de Poisson	0,33

FIGURA 16 - LEVEL-SET PARA ENRIQUECIMENTO HEAVISIDENO EXEMPLO 1



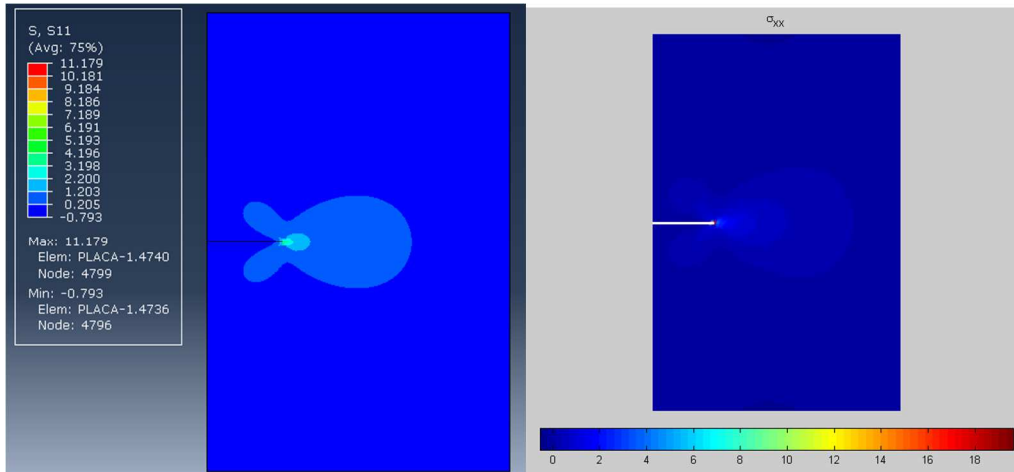
CONTORNO DE LEVEL-SET CALCULADO PELO ABAQUS (ESQUERDA) E PELO MXFEM (DIREITA) PARA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,05.

FIGURA 17 - LEVEL-SET PARA ENRIQUECIMENTO COM SOLUÇÃO DA FRATURANO EXEMPLO 1



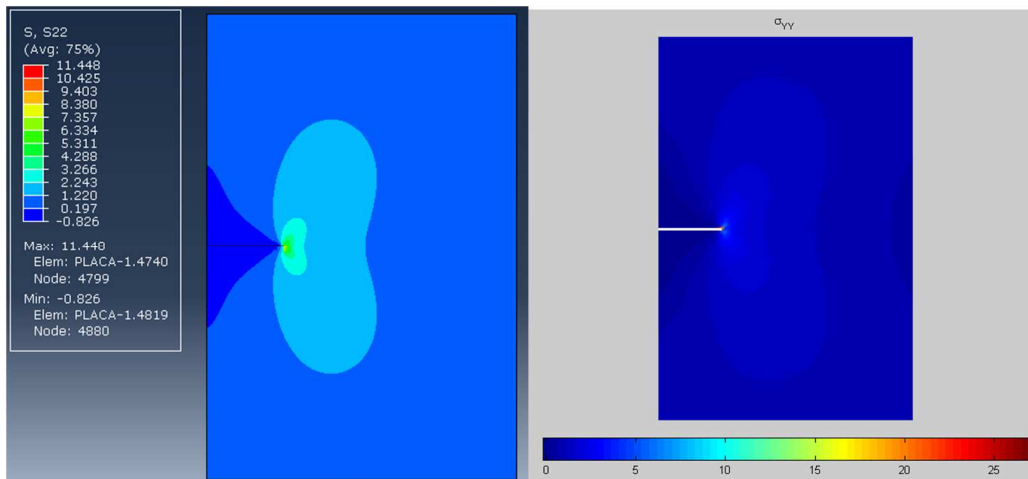
CONTORNO DE LEVEL-SET CALCULADO PELO ABAQUS (ESQUERDA) E PELO MXFEM (DIREITA) PARA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,05.

FIGURA 18 -CAMPO DE TENSÃO S11 PARA O EXEMPLO 1



CAMPO DE TENSÃO S11 CALCULADO PELO ABAQUS (ESQUERDA) E PELO MXFEM (DIREITA) PARA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,05.

FIGURA 19 -CAMPO DE TENSÃO S22 PARA O EXEMPLO 1



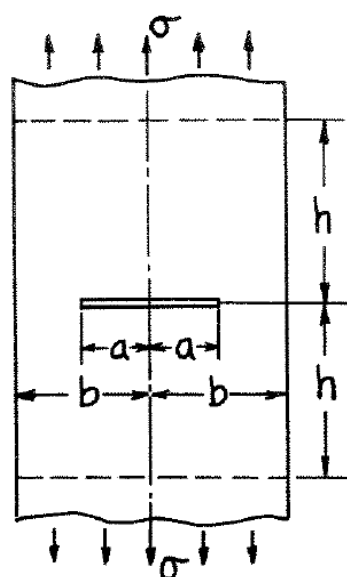
CAMPO DE TENSÃO S22 CALCULADO PELO ABAQUS (ESQUERDA) E PELO MXFEM (DIREITA) PARA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,05.

Observa-se que as funções do MEEG/MEFX implementadas no ABAQUS utilizam o método de *level-set* para a definição da localização da trinca e conseqüentemente da região que será enriquecida com funções Heaviside. Apesar de não terem muita utilidade prática em uma abordagem estática, em que a localização da trinca é conhecida, os contornos do *level-set* são úteis em casos de propagação, por permitirem identificar a localização da trinca.

3.1.1.2 EXEMPLO 2: PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA INTERNA

Este segundo exemplo, ilustrado na Figura 17, consiste em uma placa de largura finita com uma trinca interna centralizada submetida à uma solicitação uniaxial constante.

FIGURA 20 - PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE CENTRO (GEOMETRIA)



FORNE:(TADA ET AL., 1973)

Para este caso, é possível obter analiticamente o fator de intensidade de tensão (FIT) do Modo I através da equação 3.4.

$$K_I = F(a/b)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.4)$$

onde $2a$ é o comprimento da trinca, $2b$ é a largura da placa, σ é a tensão nominal aplicada e $F(a/b)$ é um fator que leva em conta o fato da placa possuir largura finita.

A Tabela 6 apresenta os valores analíticos do fator $F(a/b)$ para razões a/b inferiores a 0,9, (Tada *et al.*, 1973).

TABELA 6 - VALORES NUMÉRICOS DE F (A/B) PARA CHAPA COM TRINCA NO CENTRO

a/b	F(a/b)
0	1,0000
0,1	1,0060
0,2	1,0246
0,3	1,0577
0,4	1,1094
0,5	1,1867
0,6	1,3033
0,7	1,4882
0,8	1,8160
0,9	2,5776

Utilizando o MXFEM foram feitas simulações considerando-se estado plano de deformação e usando os parâmetros mostrados na Tabela 7 e na Tabela 8.

TABELA 7 - PARÂMETROS PARA SIMULAÇÃO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE CENTRO NO MXFEM

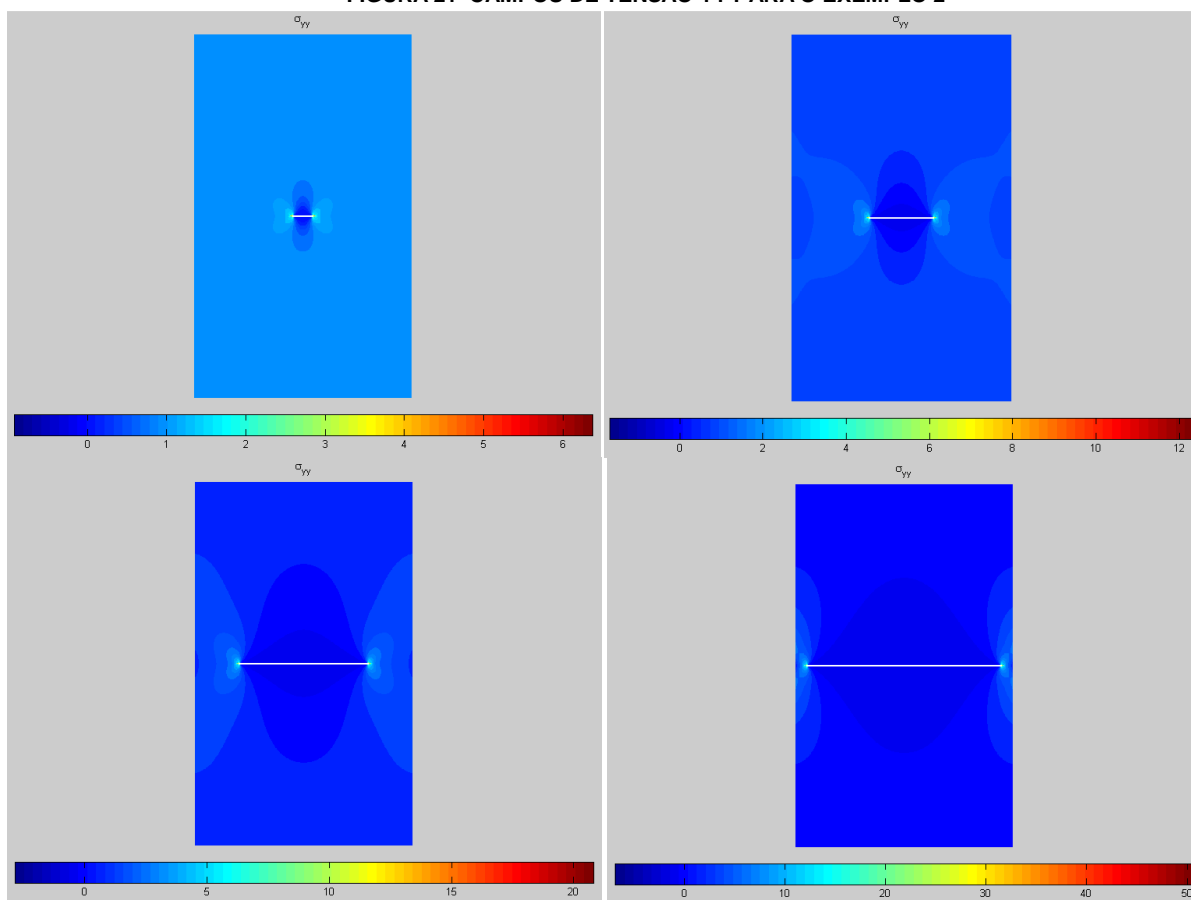
Largura da placa (2b)	6
Altura da Placa (h)	5
Tensão Nominal Aplicada (σ)	1

TABELA 8 - PROPRIEDADES DO MATERIAL PARA SIMULAÇÃO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE CENTRO NO MXFEM

Módulo de Elasticidade	70e9
Coefficiente de Poisson	0,33

Os campos de tensão normal sigma YY para algumas configurações de tamanho de trinca estão ilustrados na Figura 22.

FIGURA 21—CAMPOS DE TENSÃO YY PARA O EXEMPLO 2

CAMPOS DE TENSÃO CALCULADOS PELO MXFEM PARA O CASO DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE CENTRO $a/B = 0.1, 0.3, 0.6, 0.9$

Foram calculados os fatores de intensidade de tensão para o modo I de fraturamento para vários tamanhos de trinca. Estes resultados foram comparados com os valores teóricos e estão apresentados na Figura 22 e Figura 23.

As simulações foram feitas levando-se em conta diferentes níveis de discretização. O parâmetro utilizado para definir estes níveis foi o LElem que indica o nível de discretização utilizado com elementos quadrilaterais. Vale à pena destacar que todas as malhas utilizadas foram estruturadas e uniformes.

FIGURA 22—DISTRIBUIÇÃO DE K PARA O MODO I

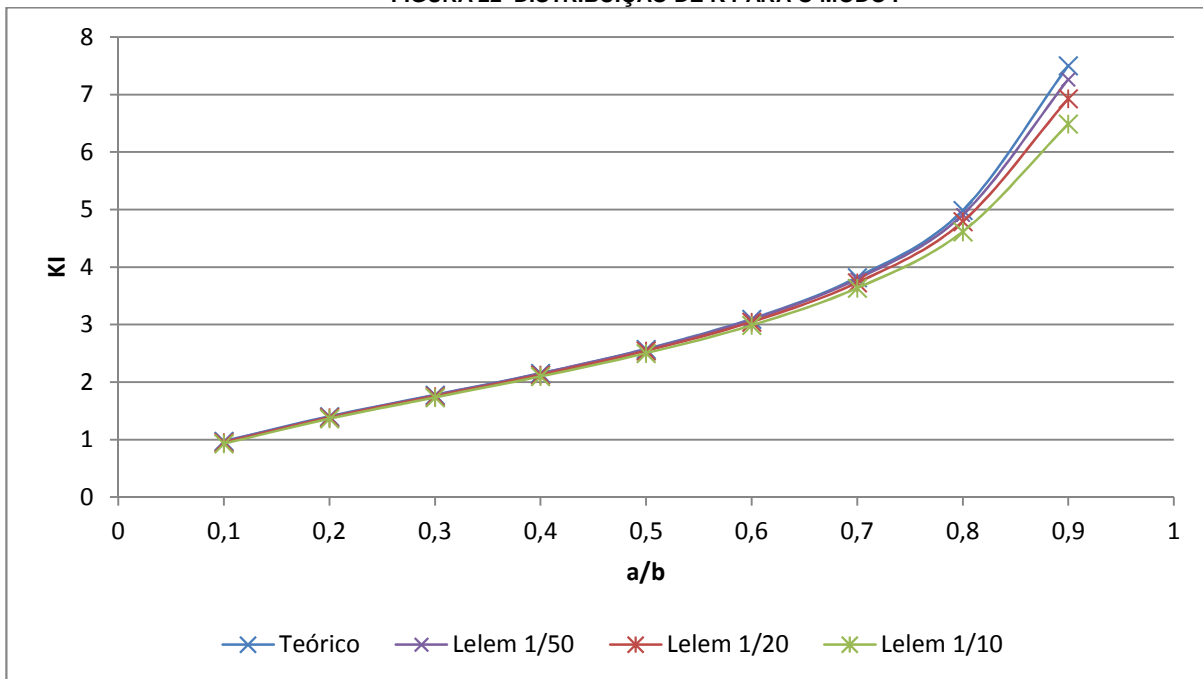
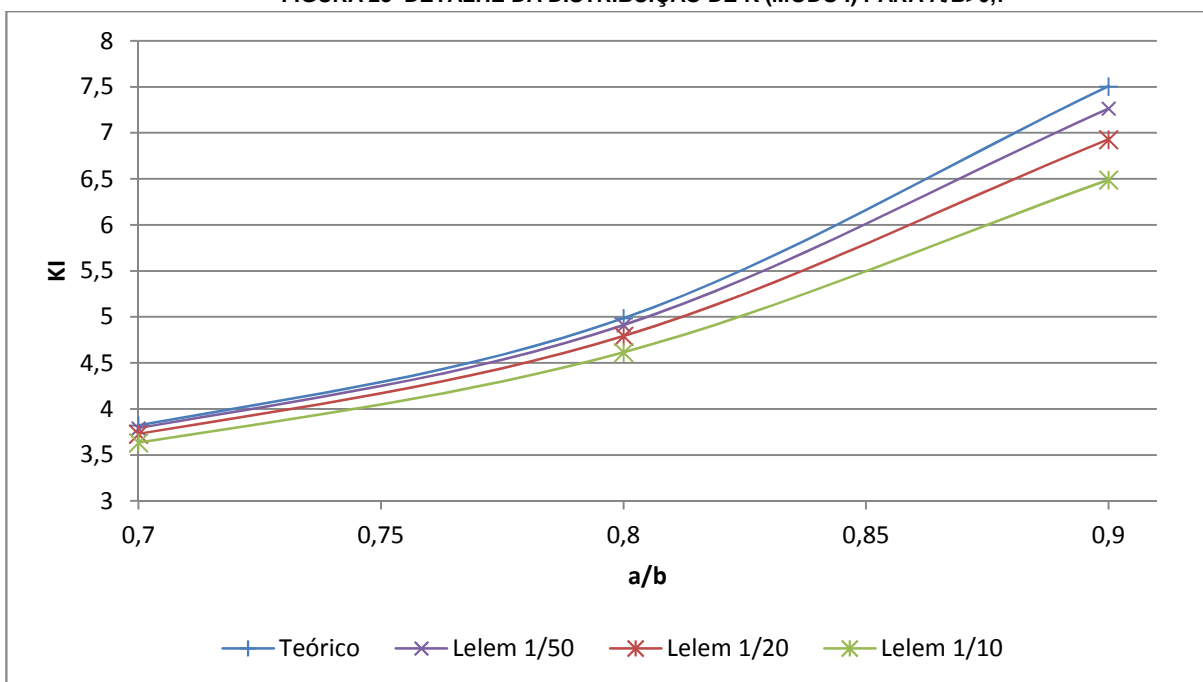


FIGURA 23—DETALHE DA DISTRIBUIÇÃO DE K (MODO I) PARA A/B>0,7



Verifica-se, da análise das figuras acima, que os resultados obtidos pelo código que utiliza o MEFM/MEFX são bastante semelhantes aos valores teóricos. Também é possível verificar que a partir do ponto que a relação a/b ultrapassa o valor de 0,5, passa a aparecer uma diferença entre os valores teóricos e numéricos. Tal diferença pode ser explicada pelo fato de que a ponta da trinca se encontra em uma zona onde a concentração de tensão é maior e, devido a uma limitação do MXFEM, os elementos que são enriquecidos com as funções de ponta de trinca ficam limitados à

uma região ao redor da trinca que depende do tamanho dos elementos. Além disso, neste código, o cálculo do fator de intensidade de tensão também depende do tamanho dos elementos, visto que a linha de integração da Integral-J é definida levando-se em conta o tamanho dos elementos.

Em síntese, a forma como o MXFEM está programado, limitando a quantidade de camadas de enriquecimento com funções de ponta de trinca e variação da distância da linha de integração da integral-J, faz com que os resultados obtidos tenham uma relação de dependência com a malha.

Para todos os pontos calculados é possível notar claramente a convergência com o refinamento da malha para o valor do K_I . Os valores de K_I calculados podem ser observados na Tabela 9.

TABELA 9 - VALORES DE KI CALCULADOS NO MXFEM

a/b	KI (Teórico)	KI Lelem 1/10	KI Lelem 1/20	KI Lelem 1/30	KI Lelem 1/50
0,1	0,97664	0,93015	0,95260	0,96043	0,96649
0,2	1,40671	1,36513	1,38610	1,39411	1,39843
0,3	1,77852	1,73493	1,75799	1,76682	1,77224
0,4	2,15404	2,10102	2,13039	2,14167	2,14919
0,5	2,57609	2,50376	2,54407	2,55945	2,57008
0,6	3,09924	2,98927	3,04838	3,06966	3,08685
0,7	3,82249	3,63562	3,73023	3,76461	3,79288
0,8	4,98651	4,61612	4,79215	4,85761	4,91198
0,9	7,50710	6,48982	6,92998	7,11076	7,26516

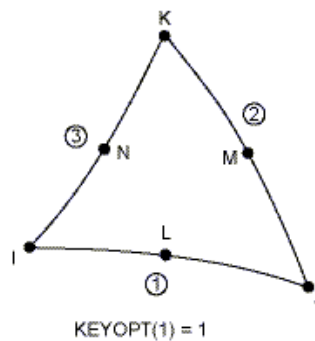
Devido ao método reproduzir os valores teóricos para relações a/b pequenas, para as simulações envolvendo propagação de trinca e fadiga é esperado uma independência dos resultados em relação à malha adotada nas etapas iniciais do processo de crescimento da trinca. Esta característica será mais bem discutida nos exemplos de propagação e fadiga.

Para complementar a análise, no sentido de verificar as vantagens do emprego do MEFM/MEFX em relação ao MEF convencional, algumas simulações foram realizadas utilizando um código para o MEF. O software ANSYS® foi empregado para o cálculo do fator de intensidade de tensão com “elementos singulares”, característicos das simulações de fratura. Entretanto, é importante observar que não é possível reproduzir no ANSYS® a mesma malha empregada no MXFEM.

O elemento utilizado foi o PLANE 183, triangular de 6 nós, como pode ser observado na Figura 24. Toda a simulação foi feita explorando os recursos específicos para o cálculo do fator de intensidade de tensão previstos no manual do usuário do software.

A discretização da malha foi feita ativando um parâmetro de controle global (de 0,5) que permite gerar uma malha bem menos refinada nas regiões afastadas da ponta da trinca em comparação com aquelas das simulações anteriores com o MXFEM.

FIGURA 24 - ELEMENTO PLANE 183 (ANSYS®)

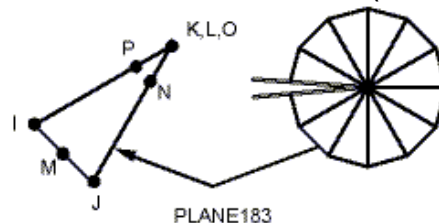


Fonte: Manual Usuário ANSYS®

O uso do elemento singular (Figura 25) na ponta da trinca gera um alto nível de refinamento nesta região e conseqüentemente aumenta consideravelmente o número de graus de liberdade do problema.

As características da malha gerada utilizando a metodologia proposta pelo ANSYS® pode ser observada na Figura 26

FIGURA 25 - ELEMENTO SINGULAR (ANSYS)

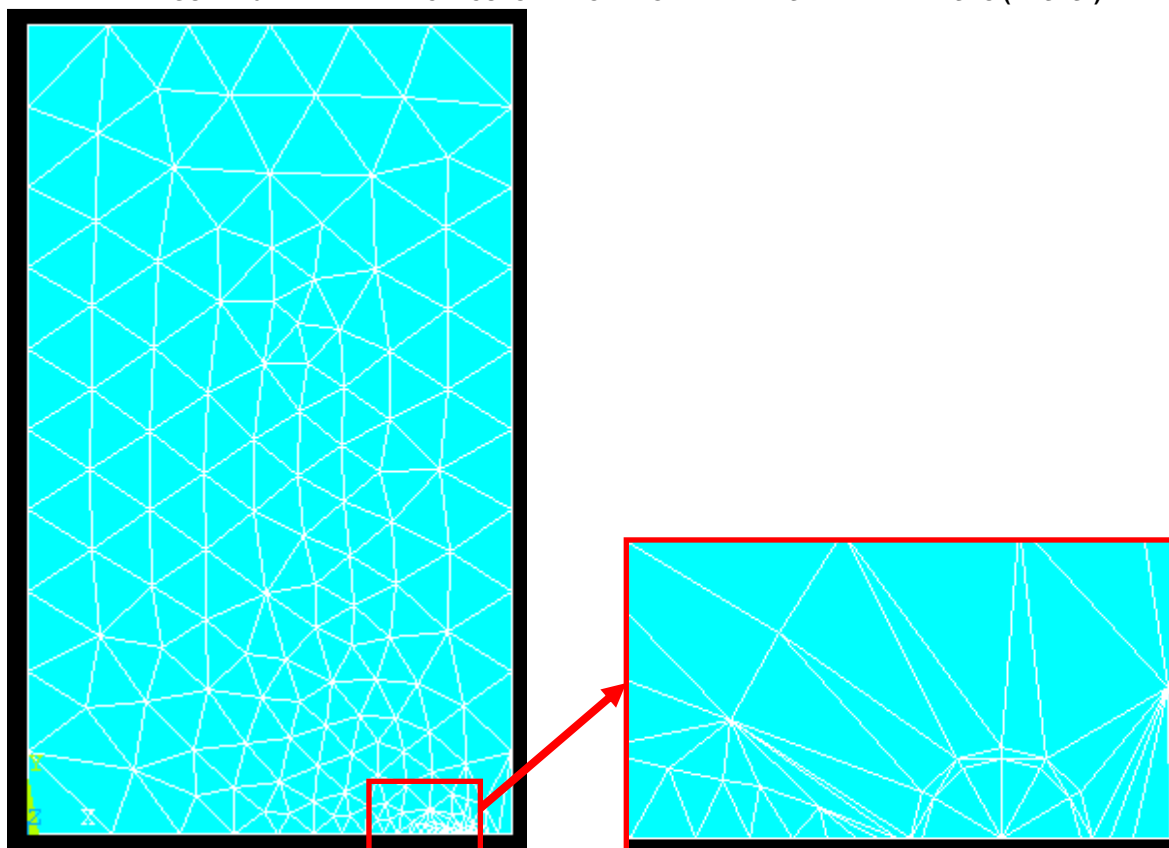


Fonte: Manual Usuário ANSYS®

Na simulação do ANSYS® também foi utilizado o recurso da simetria e, portanto, o problema pôde ser representado apenas utilizando $\frac{1}{4}$ da estrutura, com ganho de eficiência computacional.

A Figura 27 mostra o campo de tensões YY calculado pelo ANSYS® para uma trinca com a relação $a/b=0,3$. Nesta figura é possível observar que devido ao baixo nível de refinamento global da malha a distribuição das tensões se dá de maneira bem menos suave do que aquelas calculadas pelo MXFEM e mostradas na Figura 21.

FIGURA 26–MALHA PARA CÁLCULO DE DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO (ANSYS®)



Foram calculados os fatores de intensidade de tensão para o modo I de fraturamento para vários tamanhos de trinca usando um recurso existente no pós-processador do ANSYS®. Estes resultados foram comparados com os valores teóricos e valores calculados com o MXFEM. A Figura 28 ilustra a comparação entre estes resultados.

FIGURA 27 - CAMPO DE TENSÃO SIGMA YY PARA O EXEMPLO 2

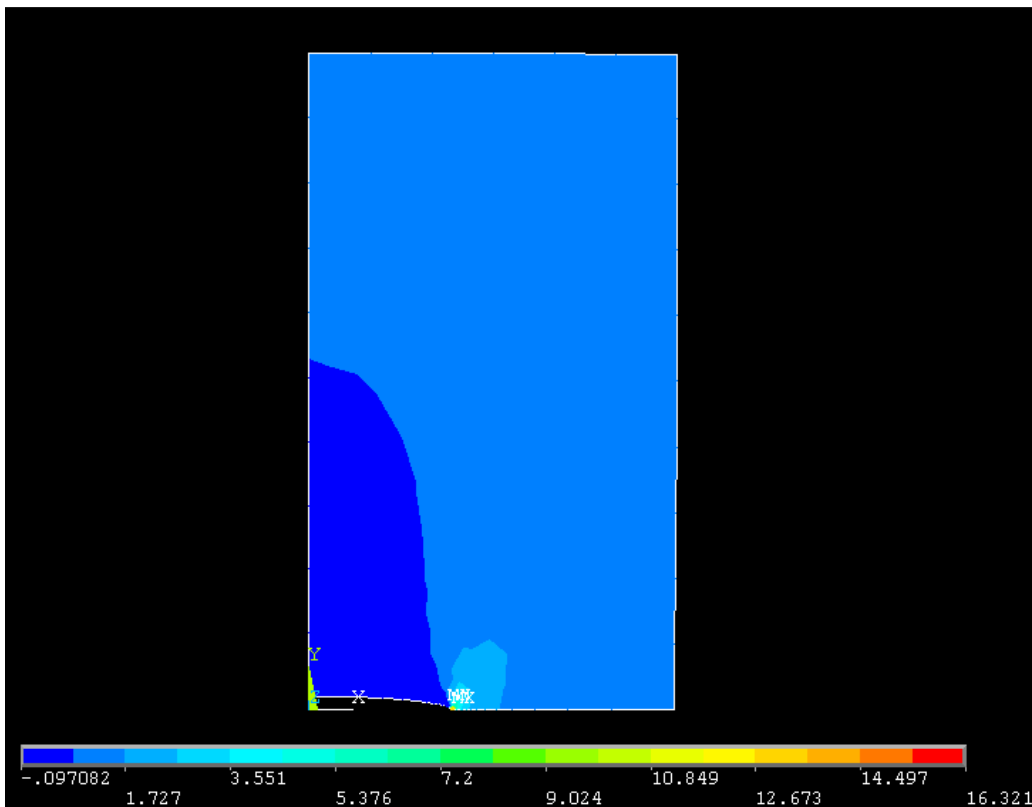
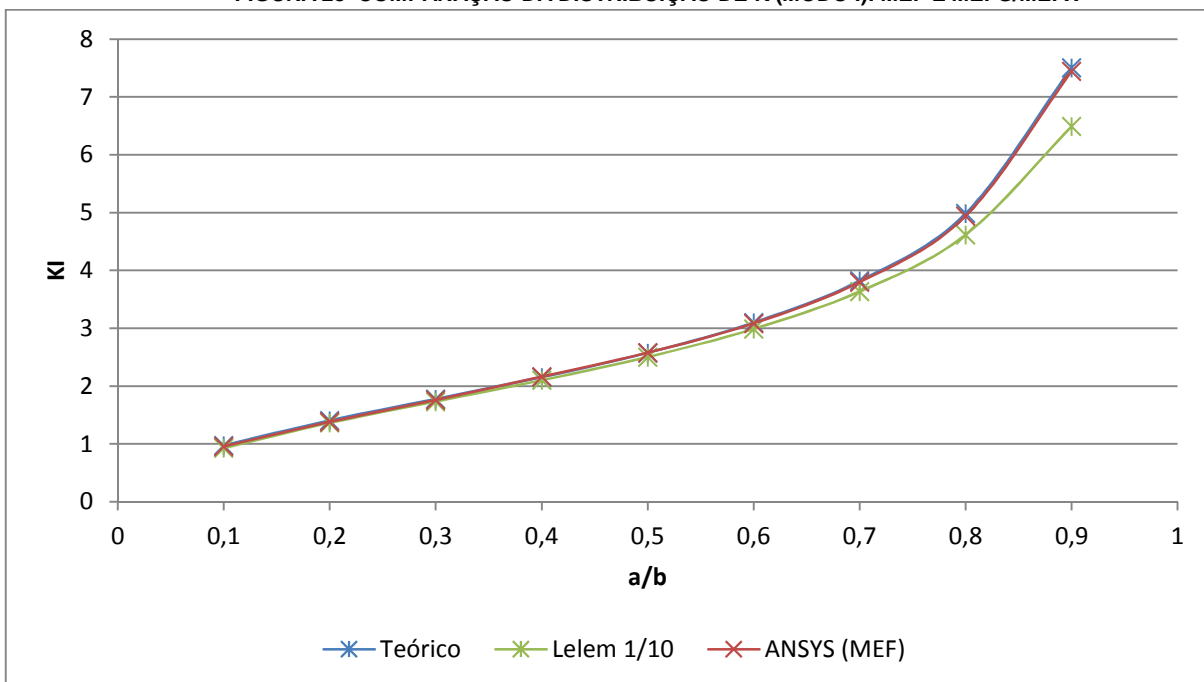


FIGURA 28—COMPARAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE K (MODO I): MEF E MEFG/MEFX



Observa-se claramente que os valores dos fatores de intensidade de tensão obtidos com o MEF são mais próximos dos valores teóricos do que aqueles obtidos com o MEFG/MEFX. Como já discutido anteriormente, isso se dá pelo fato da forma como os códigos estão construídos. No ANSYS® existe a possibilidade de controle

de refinamento na região da ponta da trinca com elementos finitos que possuem boa características para este tipo de análise. Além disso, a estrutura analisada neste exemplo não possui uma geometria complexa o que faz com que a única região de interesse seja a ponta da trinca e com o MEF para melhorar a precisão basta refinar a região vizinha à ponta. Já com o MXFEM, a malha é sempre uniforme e uma equivalência do número de graus de liberdade exigiria o enriquecimento de um número maior de nós, em camadas sucessivas a partir da ponta da trinca, algo que o código não permite.

Na Tabela 10 é possível observar que o erro chega a ser cerca de dez vezes menor para relações a/b maiores que a 0,5. Isto vem reforçar o que já havia sido observado no parágrafo anterior com relação às limitações do código MXFEM.

TABELA 10 - VALORES DO ERRO DO K PARA O MODO I CALCULADO NO MXFEM E ANSYS®.

a/b	KI (Teórico)	KI Lelem 1/10	Erro	KI Lelem 1/30	Erro	KI (ANSYS)	Erro
0,1	0,97664	0,93015	-4,76%	0,96043	-1,66%	0,95851	-1,86%
0,2	1,40671	1,36513	-2,96%	1,39411	-0,90%	1,3832	-1,67%
0,3	1,77852	1,73493	-2,45%	1,76682	-0,66%	1,7594	-1,08%
0,4	2,15404	2,10102	-2,46%	2,14167	-0,57%	2,1623	0,38%
0,5	2,57609	2,50376	-2,81%	2,55945	-0,65%	2,5781	0,08%
0,6	3,09924	2,98927	-3,55%	3,06966	-0,95%	3,0857	-0,44%
0,7	3,82249	3,63562	-4,89%	3,76461	-1,51%	3,7995	-0,60%
0,8	4,98651	4,61612	-7,43%	4,85761	-2,58%	4,9418	-0,90%
0,9	7,50710	6,48982	-13,55%	7,11076	-5,28%	7,4439	-0,84%

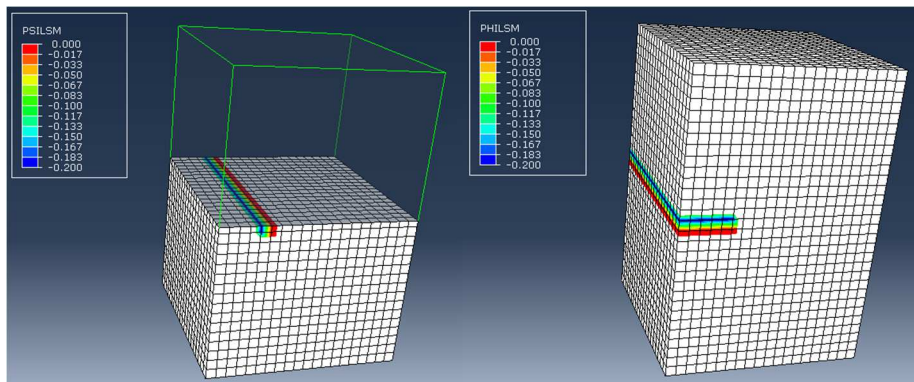
As simulações utilizando o MEF e o MEFG/MEFX apresentam ainda outras diferenças. Dentre elas o pré-processamento e a geração da malha fazem com que o uso do MEF apresente uma grande desvantagem com relação ao MEFG/MEFX. Nestas simulações de diferentes relações a/b , no MEF, é necessário gerar uma malha para cada caso enquanto no MEFG/MEFX, para uma mesma malha, basta apenas alterar o tamanho da trinca. Essa vantagem do MEFG/MEFX faz com que simulações de propagação de trinca, nas quais o tamanho da trinca varia a cada passo no tempo tenham um custo computacional relacionado à geração de malhas muito menor que o MEF.

3.1.2 TRIDIMENSIONAL

3.1.2.1 EXEMPLO 3: SÓLIDO SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA

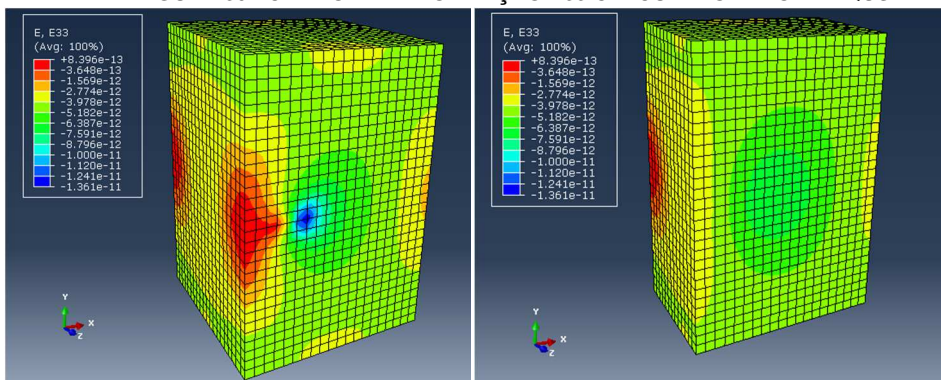
Esta análise tridimensional, realizada no ABAQUS, explorando as funções Heaviside disponíveis, procura reproduzir os resultados do 2º caso do exemplo 1, descrito na Tabela 1 para uma placa com espessura de 4 e com elementos de tamanho 0,25 e 0,20. Para as definições de material foram usados os valores descritos na Tabela 5. Campos de tensão e deformação e os contornos de *level-set* estão mostrados na Figura 29, Figura 30, Figura 31 e Figura 32.

FIGURA 29 - LEVEL-SETS CALCULADO PELO ABAQUS



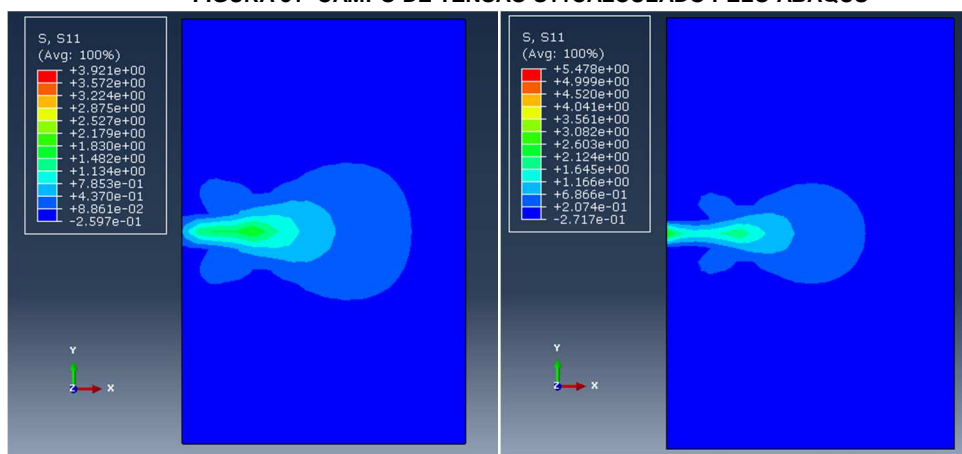
CONTORNO DE PSI, EM CORTE NA REGIÃO DA TRINÇA (ESQUERDA) E CONTORNO DE PHI (DIREITA) PARA PLACA FINITA EM 3D SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,2.

FIGURA 30 - CAMPO DE DEFORMAÇÃO E33 CALCULADO PELO ABAQUS



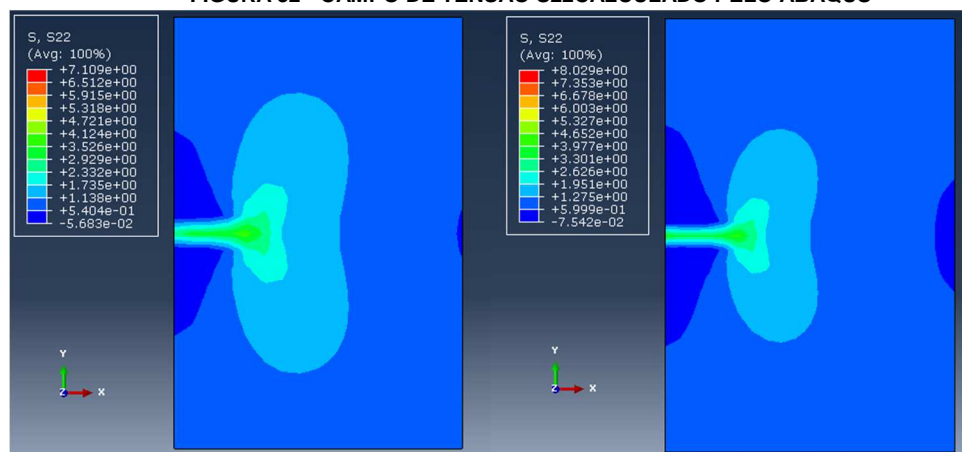
CAMPO DE DEFORMAÇÃO E33 CALCULADO PELO ABAQUS (ESQUERDA) E CAMPO DE DEFORMAÇÃO E33 EM CORTE NA REGIÃO EQUIDISTANTE DAS BORDAS (DIREITA) PARA PLACA FINITA EM 3D SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,2.

FIGURA 31 -CAMPO DE TENSÃO S11CALCULADO PELO ABAQUS



CAMPO DE TENSÃO S11, EM CORTE, DA REGIÃO CENTRAL COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,25 (ESQUERDA) E COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,2 (DIREITA) PARA PLACA FINITA EM 3D SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA.

FIGURA 32 - CAMPO DE TENSÃO S22CALCULADO PELO ABAQUS



CAMPO DE TENSÃO S22, EM CORTE, NA REGIÃO CENTRAL COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,25 (ESQUERDA) E COM ELEMENTOS DE TAMANHO 0,2 (DIREITA) PARA PLACA FINITA EM 3D SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA.

É possível verificar na Figura 30 que a região central do sólido tridimensional valida a hipótese de estado plano de deformação (EPD). Considerando-se apenas a região central, mostrada em corte, é possível considerá-la como EPD e, conseqüentemente, com uma resposta mais próxima ao valor analítico. Tal valor foi bastante próximo do obtido por uma análise bidimensional com EPD usando o MXFEM. Entretanto, observa-se que esta analogia não é válida nas regiões próximas das bordas.

Na Figura 31 e Figura 32 é possível identificar uma aparente coerência dos campos de tensão indicados com os campos obtidos na análise bidimensional mostrados na Figura 18 e Figura 19.

Ao contrário das análises 2D, para análises 3D estáticas o ABAQUS possibilita o cálculo dos fatores de intensidade de tensão, utilizando diferentes critérios. Neste exemplo foram calculados os FIT pelo critério “Maximum Energy Release Rate”, mais indicado para este tipo de caso segundo o manual do usuário do ABAQUS. Para o cálculo da integral J, desprezou-se a região muito próxima da ponta da trinca (um raio com dimensão de aproximadamente 3 elementos), analogamente ao que foi feito no MXFEM. Os resultados obtidos na região central da placa estão mostrados na Tabela 11, sendo possível identificar uma aparente convergência para o resultado teórico mostrado na Tabela 3.

TABELA 11 - FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO CALCULADOS PELO ABAQUS PARA O PROBLEMA ESTÁTICO E 3D DA PLACA FINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA DE BORDA

Tamanho do Elemento	$1/4$	$1/5$
Fator de intensidade de tensão - Modo I (K_I)	2,8836	2,8311
Fator de intensidade de tensão - Modo II (K_{II})	0,0297	0,0128

3.1.2.2 EXEMPLO 4: SÓLIDO COM TRINCA INTERNA CIRCULAR (“PENNYSHAPED”)

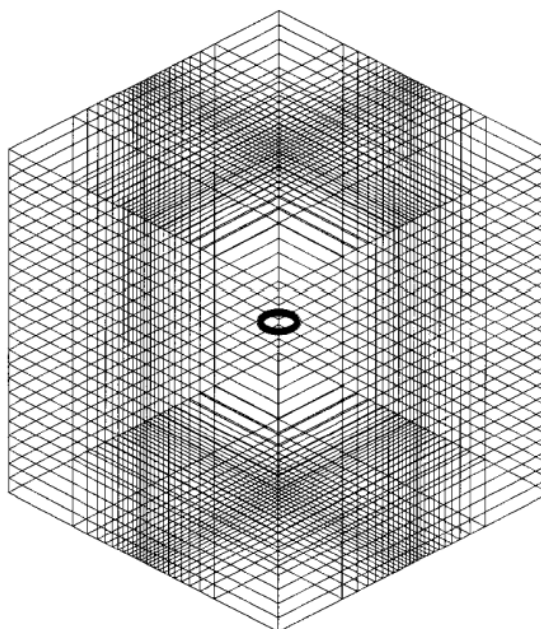
Este quarto exemplo consiste em um sólido finito com uma trinca em formato de “moeda” no centro do domínio, sendo submetido à uma solicitação uniaxial constante e unitária.

É possível obter analiticamente o fator de intensidade de tensão (FIT) do Modo I para uma trinca circular imersa em um domínio sob tensão uniaxial através da equação 3.7, definida por (Green e Sneddon, 1950).

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (3.7)$$

Este exemplo está baseado na simulação executada por (Sukumar *et al.*, 2000), que considerou uma trinca circular com raio $a=0.1$ imersa em um cubo com arestas de dimensão unitária, e empregou uma malha de $24 \times 24 \times 24 = 13824$ elementos hexaédricos, mostrada na Figura 33.

FIGURA 33 - MALHA PARA SIMULAÇÃO DE TRINCA CIRCULAR EM UM DOMÍNIO FINITO



MALHA UTILIZADA POR PARA SIMULAÇÃO DE TRINCA CIRCULAR EM UM DOMÍNIO FINITO COM 24X24X24=13824 ELEMENTOS FINITOS UTILIZADAS POR(SUKUMAR ET AL., 2000).

Considerando-se a geometria e as características descritas, este exemplo apresenta um fator de intensidade de tensão para o primeiro modo de fraturamento calculado analiticamente de 0,3568.

A distribuição dos resultados obtidos por (Sukumar *et al.*, 2000) está descrita na Tabela 12.

TABELA 12 - FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO PARA O CASO "PENNY-SHAPED" USANDO O XFEM. TABELA RETIRADA DE (DONG E ATLURI, 2013).

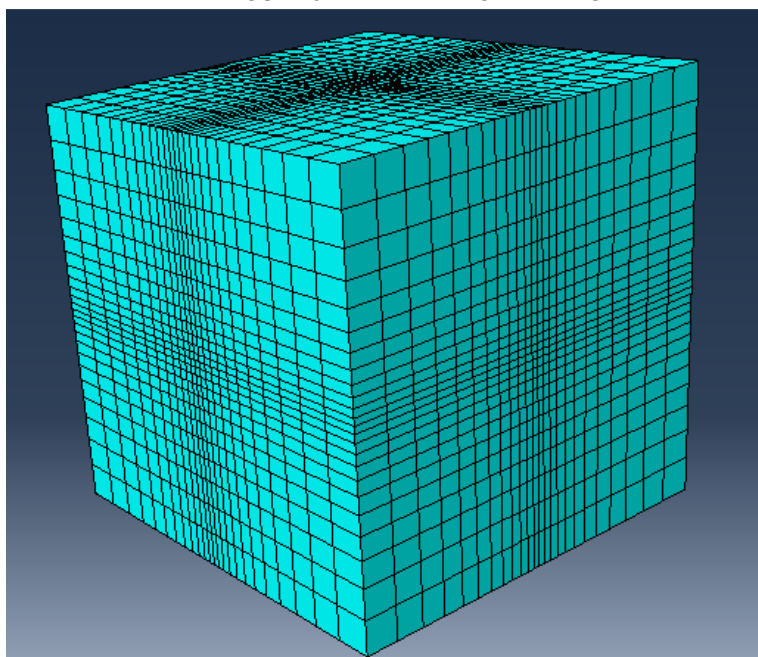
θ (degree)	XFEM with Mesh 1	
	K_1	error
0	0.3508	-1.68%
10	0.3583	0.42%
20	0.3592	0.67%
30	0.3467	-2.83%
40	0.3535	-0.92%
50	0.3535	-0.92%
60	0.3467	-2.83%
70	0.3592	0.67%
80	0.3583	0.42%
90	0.3508	-1.68%

Tendo-se em vista os objetivos deste trabalho foram feitas simulações com o software ABAQUS para duas malhas com a mesma quantidade e tipo de elementos, mas que apresentam características de refinamento diferentes. Ambas formadas por $24 \times 24 \times 24 = 13824$ elementos hexaédricos.

Dada à geometria do problema, em ambas as discretizações realizadas a trinca se encontra definida nas faces dos elementos.

A primeira malha possui seus elementos concentrados na região próxima a trinca de forma análoga ao que foi feito por (Sukumar *et al.*, 2000). A malha gerada pode ser observada na Figura 34.

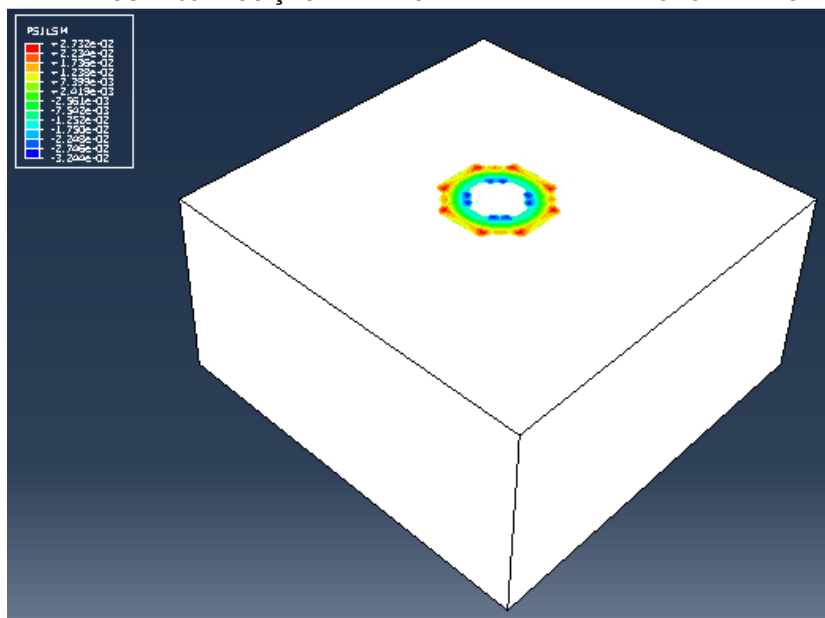
FIGURA 34 - MALHA #1 DO EXEMPLO 4



MALHA COM REFINAMENTO NA REGIÃO DA TRINCA (PENNY-SHAPED)

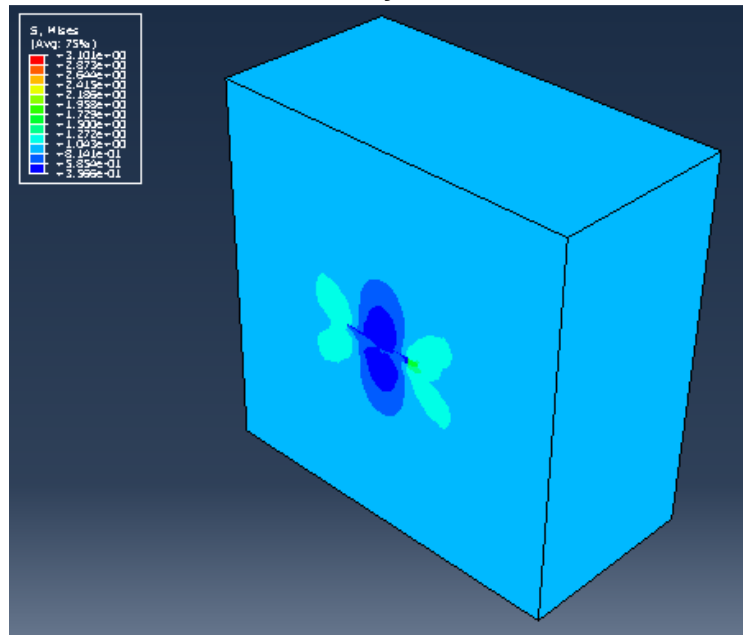
Na Figura 35 ilustra-se a geometria da trinca definida através do métodos de level set em um corte na região central do domínio. Claramente é possível notar que devido à geometria dos elementos e sua distribuição, a definição do posicionamento da trinca não se dá de forma uniforme ao longo da sua circunferência.

FIGURA 35 - POSIÇÃO DA TRINCA NA MALHA #1 - MÉTODO LEVEL-SET



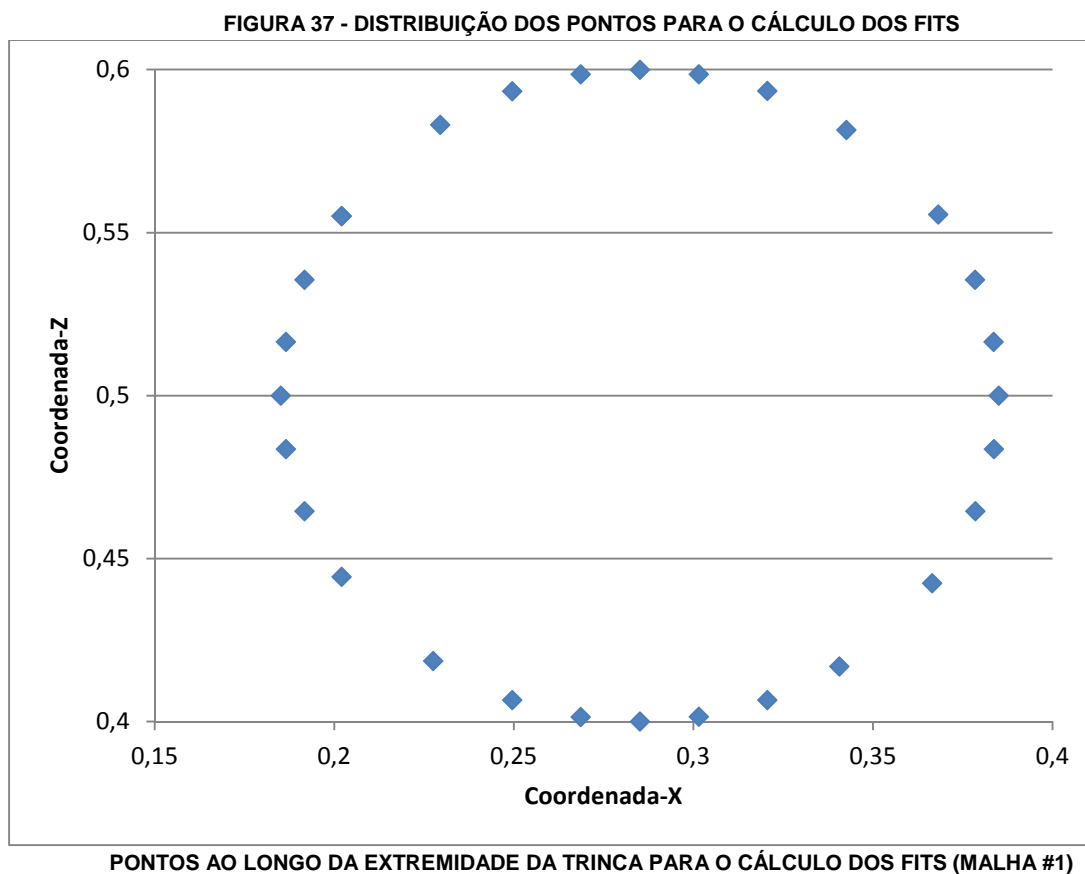
Na Figura 36 está mostrada em um corte no centro do domínio a distribuição de tensão ao redor da trinca.

FIGURA 36 -DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO EXEMPLO 4



DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO NA REGIÃO PRÓXIMA A TRINCA - VISTA EM CORTE – MALHA #1

Para simulações tridimensionais e estacionária o ABAQUS permite o cálculo dos fatores de intensidade de tensão para os modos I, II e III. Neste caso foram calculados os fatores de intensidade de tensão em alguns pontos ao longo do perímetro da trinca. Estes pontos são definidos através dos elementos que a contém. Na Figura 37 esta distribuição é mostrada, sendo possível verificar que mesmo com refinamento da malha na região central não há uma distribuição uniforme ao longo da circunferência.



A distribuição dos resultados obtidos está descrita na Tabela 13 assim como o erro de aproximação em relação ao valor analítico. Os valores dos fatores de intensidade de tensão foram calculados nos pontos indicados na Figura 37. Verifica-se que o erro máximo obtido foi de 9,65%, um valor superior àquele obtido por Sukumar e mostrado na Tabela 12 de 2,83%. Apesar da semelhança relativa à quantidade de elementos e refinamento, a diferença no erro máximo pode ser explicada pelo fato de que a versão utilizada do ABAQUS não possui implementado o enriquecimento com funções de ponta de trinca. Além disso, a não uniformidade dos pontos nos quais os FIT foram calculados geram não uniformidade e falta de simetria nos resultados obtidos. Uma forma de contornar este problema, dada a característica do problema, é considerar o valor médio obtido. Verifica-se que neste exemplo, este valor médio apresenta um erro de somente 0,52% em relação ao valor analítico. Erro este da mesma ordem de grandeza obtido por Sukumar. Isso mostra que para simulações nas quais o nível de concentração de tensão é baixo e consequentemente o comportamento plástico do material próximo à ponta da trinca não é determinante, o uso do enriquecimento por funções de ponta de trinca não são

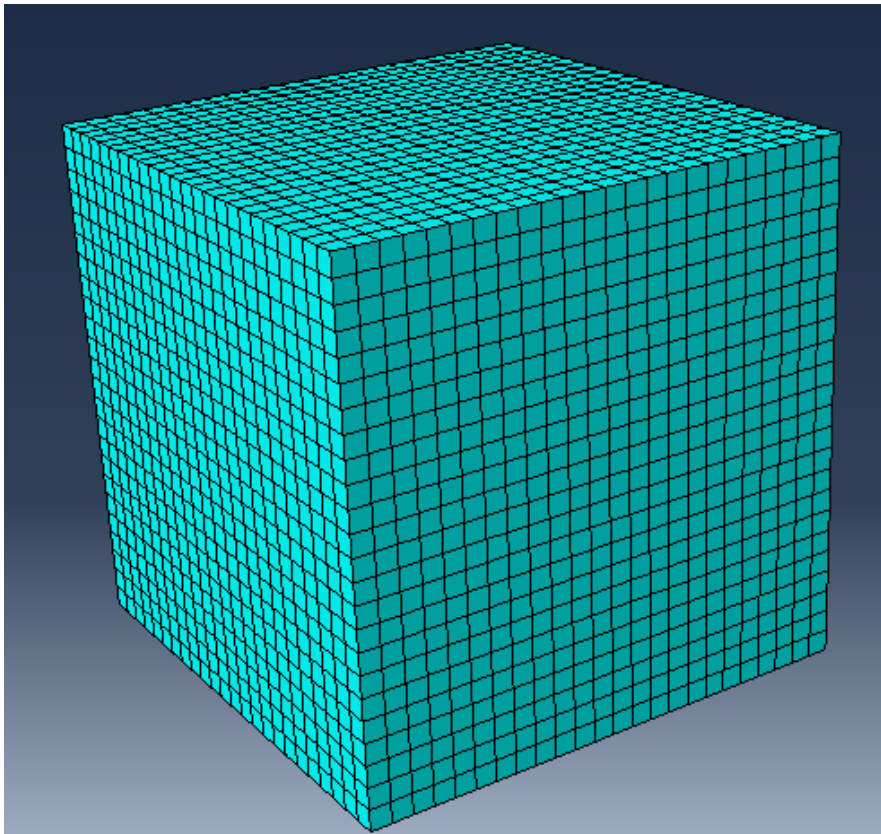
requeridos. Isto, portanto, é uma característica que pode diminuir o custo computacional em alguns tipos de problema.

TABELA 13 - RESULTADOS OBTIDOS USANDO MALHA COM REFINAMENTO NA REGIÃO DA TRINCA

Teta (Graus)	K1	Erro	Analítico
0,0	0,3224	-9,65%	0,3568
9,5	0,3739	4,80%	0,3568
20,8	0,3406	-4,53%	0,3568
33,8	0,3432	-3,81%	0,3568
54,8	0,3772	5,72%	0,3568
69,2	0,3482	-2,40%	0,3568
80,5	0,3791	6,26%	0,3568
90,0	0,3224	-9,65%	0,3568

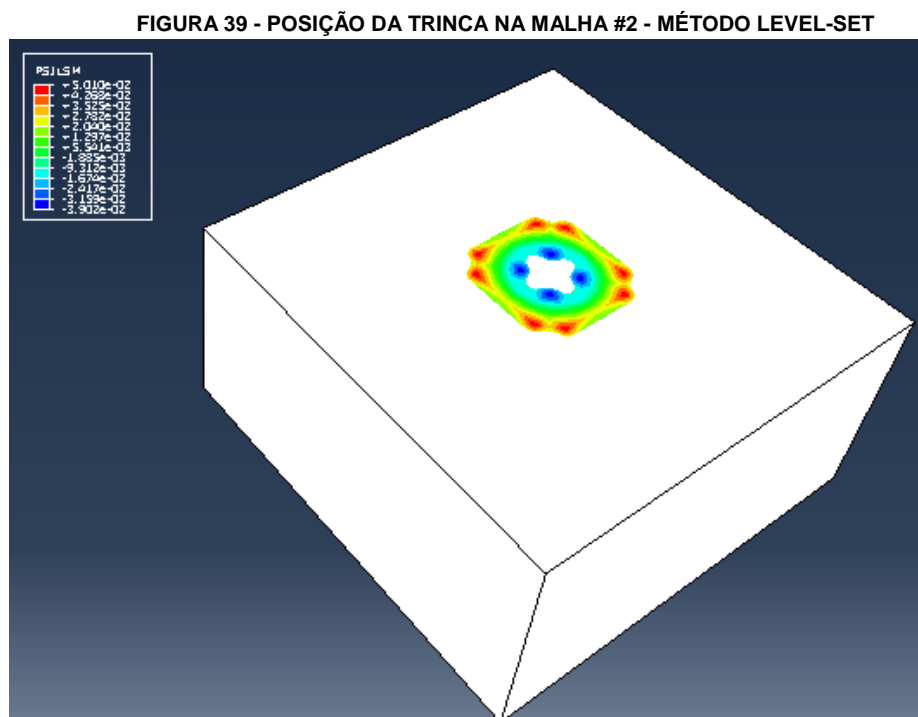
A segunda malha possui seus elementos uniformemente distribuídos ao longo de todo o domínio, buscando manter a simetria que o problema real possui e que não pôde ser observada nos resultados obtidos com a primeira malha. Esta segunda malha gerada pode ser observada na Figura 38.

FIGURA 38 – MALHA #2 DO EXEMPLO 4



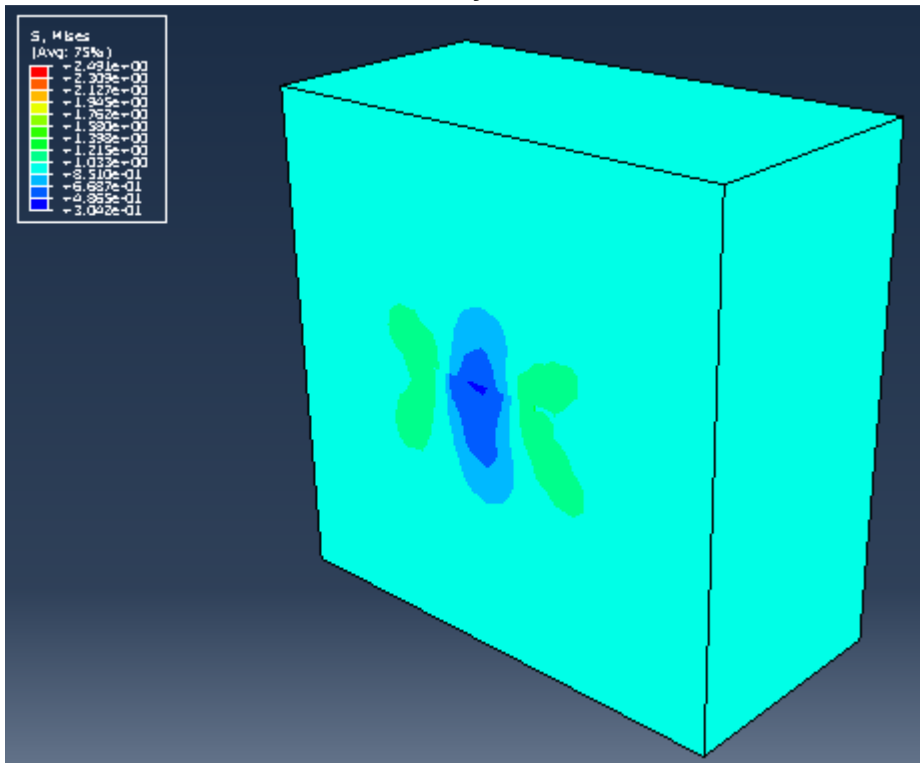
MALHA COM ELEMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS AO LONGO DO DOMÍNIO (PENNY-SHAPED)

Na Figura 39 é possível observar a geometria da trinca definida através do métodos de level set em um corte na região central do domínio. Claramente, nota-se que a distribuição dos campos de *level-set* utilizando a malha com elementos uniformemente distribuídos ao longo do domínio não apresentou melhora em relação àquela obtida utilizando a malha com refinamento na porção central. Isso permite verificar que a uniformidade dos campos de *level-set* no ABAQUS não depende somente do refinamento da malha, mas sim de outros fatores como por exemplo a geometria dos elementos utilizados.



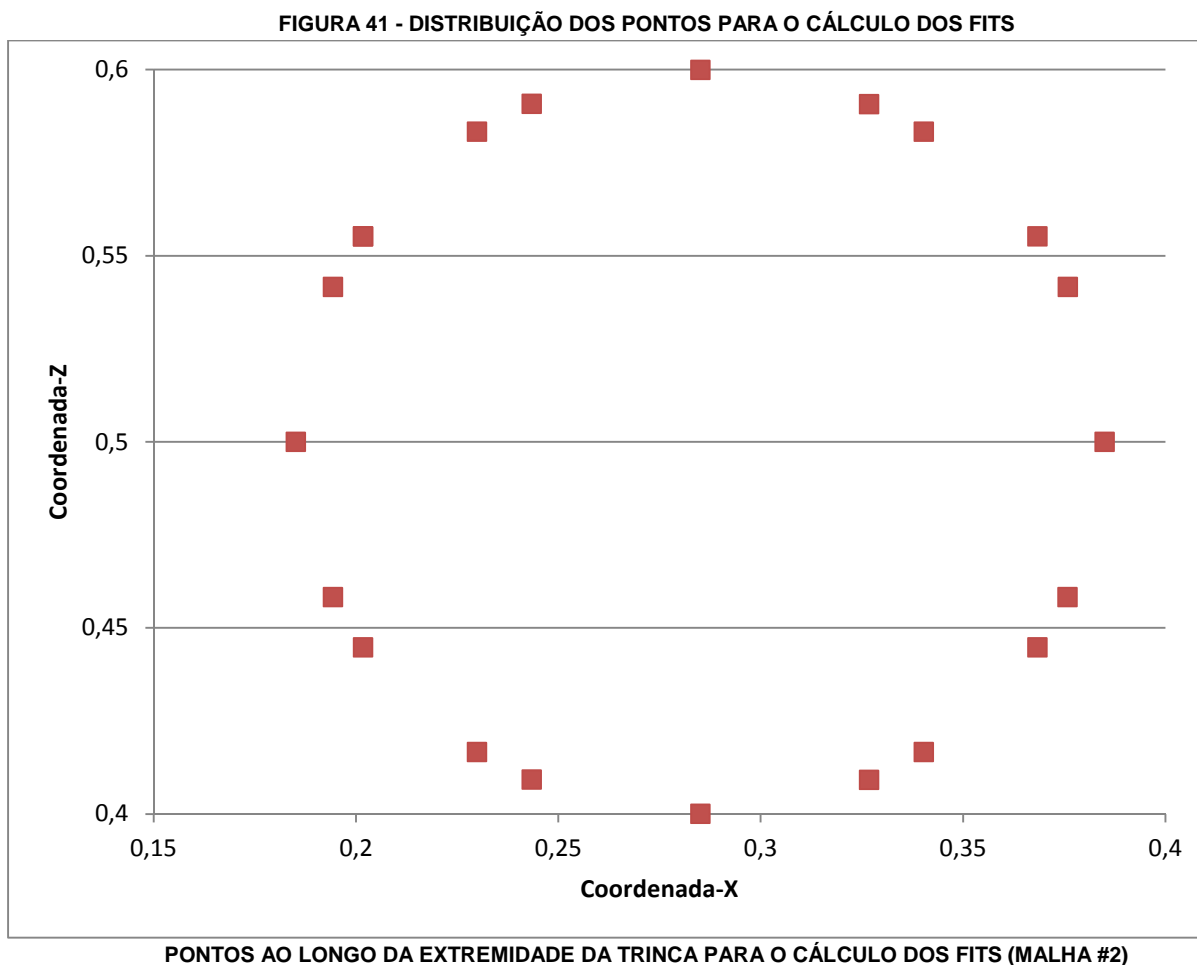
Na Figura 40 está mostrada, em um corte no centro do domínio a distribuição de tensão ao redor da trinca. Claramente há uma diferença considerável de suavidade e continuidade entre a distribuição obtida utilizando esta malha com elementos uniformemente distribuídos diante do resultado observado na Figura 35, relativo à malha que possui um refinamento na região próxima a trinca.

FIGURA 40 - DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO EXEMPLO 4



DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO NA REGIÃO PRÓXIMA A TRINCA - VISTA EM CORTE – MALHA #2

Como na análise anterior, foram calculados os fatores de intensidade de tensão em alguns pontos ao longo da extremidade da trinca. Na Figura 41 esta distribuição é mostrada e é possível verificar que com a distribuição uniforme dos elementos no domínio não se obtém uma distribuição uniforme ao longo da circunferência. Em comparação com a distribuição da análise anterior (Figura 37) é notável a diminuição da uniformidade. Isso permite verificar que a uniformidade na distribuição dos pontos para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão no ABAQUS não depende somente do refinamento da malha, mas sim de outros fatores como por exemplo a geometria dos elementos utilizados.



Assim como feito para malha com refinamento na região da trinca, a distribuição dos resultados obtidos com esta malha está descrita na Tabela 14, bem como o erro dos resultados obtidos em relação ao valor analítico. Os valores dos fatores de intensidade de tensão foram calculados nos pontos indicados na Figura 41. Verificou-se que o erro máximo obtido foi de 8,40%, um valor superior àquele obtido por Sukumar e mostrado na Tabela 12 de 2,83%. Apesar da quantidade de elementos semelhante esta diferença pode ser explicada pelo fato de que a versão utilizada do ABAQUS não possui o enriquecimento com funções de ponta de trinca implementado. Além disso, a não uniformidade dos pontos nos quais os FIT foram calculados geram a não uniformidade e falta de simetria nos resultados obtidos assim como verificado na simulação anterior. Verifica-se que neste exemplo, o valor médio dos FITs apresenta um erro de somente 1,72% em relação ao valor analítico. Na comparação deste valor médio frente aquele obtido na discretização anterior, de 0,52% é possível verificar que o refinamento da malha na região próximo a trinca é uma estratégia que se mostrou eficiente. Com a mesma quantidade de elementos e,

portanto, com custo computacional semelhante, obteve-se um resultado cerca de três vezes mais preciso.

TABELA 14 - RESULTADOS OBTIDOS USANDO MALHA COM ELEMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS

Teta (Graus)	K1	Erro	Analítico
0,0	0,3868	8,40%	0,3568
24,6	0,3414	-4,31%	0,3568
33,5	0,3746	4,99%	0,3568
56,5	0,3739	4,79%	0,3568
65,3	0,3379	-5,29%	0,3568
90,0	0,3868	8,41%	0,3568

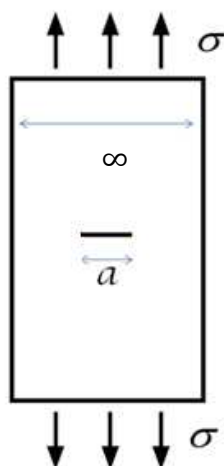
3.2 ABORDAGEM CINEMÁTICA

3.2.1 BIDIMENSIONAL

3.2.1.1 EXEMPLO 5: PLACA INFINITA COM TRINCA INTERNA (APLICAÇÃO DA LEI DE PARIS)

Este exemplo idealiza o caso de uma trinca de 20 mm no centro da parede de um vaso de pressão de uma liga de alumínio ($E=70\text{GPa}$ e Poisson 0,33). Considerou-se uma pressão (p) de 0.06 MPa, raio (r) de 3.25 m e espessura (t) de 0.00248 m. A idealização considera uma placa infinita com uma trinca no centro, como mostrado na Figura 42. A simulação computacional foi feita no MXFEM.

FIGURA 42 - PLACA INFINITA SOB TENSÃO UNIAXIAL COM TRINCA INTERNA (GEOMETRIA)



Para este caso é possível obter uma solução analítica para o crescimento da trinca com o número de ciclos a partir da Lei de Paris, utilizando a equação 3.8:

$$a_N = \left[NC \left(1 - \frac{m}{2} \right) \left(\frac{pr}{t} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^m + a_0^{1-\frac{m}{2}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{m}{2}}} \quad (3.8)$$

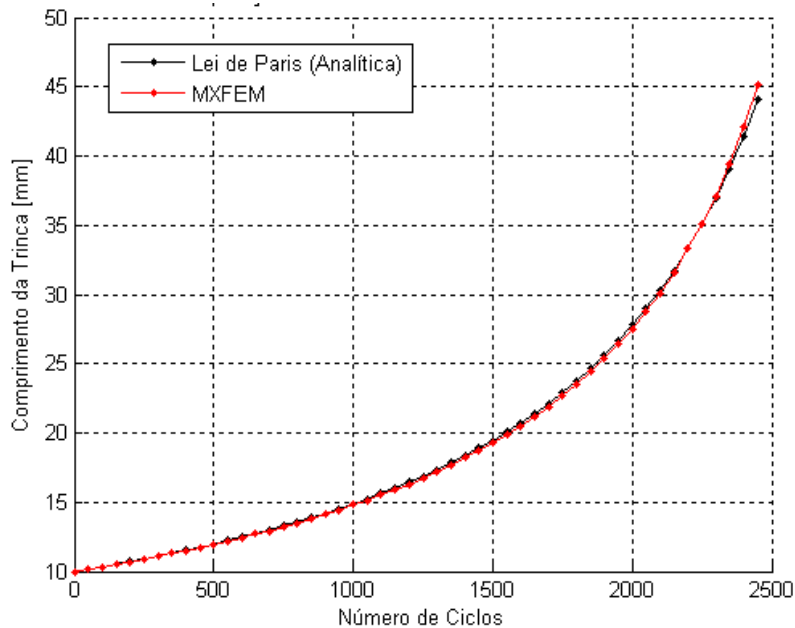
Na relação anterior \mathbf{N} é o número de ciclos, \mathbf{C} é a constante da Lei de Paris, \mathbf{m} é um parâmetro de identificação experimental e a_0 é o tamanho inicial da trinca.

Na simulação, a evolução da propagação se desenvolveu tendo como critérios de parada o limite de 3000 ciclos ou até que o fator de intensidade de tensão do

Modo I atingisse um valor crítico pré-definido, de 30×10^6 . Para as constantes da Lei de Paris foram usados os seguintes valores: $C = 1,5 \times 10^{-10}$ e $m = 3,8$.

Do conjunto de resultados do MXFEM foram selecionadas as medidas de comprimento da trinca em intervalos de 50 ciclos, comparadas com os valores teóricos calculados de acordo com a equação 3.8. A comparação entre os dois resultados está indicada na Figura 43.

FIGURA 43 - COMPARAÇÃO ENTRE MXFEM E SOLUÇÃO ANALÍTICA PELA LEI DE PARIS



Vale destacar que no MXFEM foi atingido o valor crítico, pré-definido, do fator de intensidade de tensão do Modo I (K_{Ic}) por volta dos 2400 ciclos, o que fez com que a simulação fosse encerrada, como era esperado.

3.2.1.2 EXEMPLO 6: PLACA FINITA COM TRINCA DE BORDA SUBMETIDA A UM HISTÓRICO DE CARREGAMENTO

Este exemplo consiste em uma chapa finita com uma trinca de borda geometricamente similar àquela descrita no exemplo 1. Entretanto, para uma abordagem cinemática, a estrutura foi submetida a três diferentes históricos de carregamento.

Utilizando o MXFEM foram feitas simulações considerando-se estado plano de deformação e adotando-se os parâmetros geométricos e de material mostrados na Tabela 15 e Tabela 16. Para a análise da propagação da trinca os parâmetros da lei de Paris utilizados foram $n=2,7$ e $C = 2 \times 10^{-10} m / \text{ciclos} \left(\frac{kN}{m^{\frac{3}{2}}} \right)^n$.

TABELA 15 - PARÂMETROS GEOMÉTRICOS

	1º Caso
Largura da placa (L)	1 m
Comprimento inicial da Trinca (a)	0,1 m

TABELA 16 - PROPRIEDADES ELÁSTICAS DO MATERIAL

Módulo de Elasticidade	3e7
Coefficiente de Poisson	0,2

Em uma malha com refinamento indicado por LElem de 1/20 foi feita a simulação cinemática, considerando-se 30000 ciclos. Foram definidos três históricos de carregamento distribuídos ao longo dos 30000 ciclos. Em todos os históricos manteve-se a quantidade de ciclos aplicados para cada nível de tensão variando apenas a sequência de aplicação.

O primeiro histórico de carregamento pode ser visto na Figura 44. Foram consideradas amplitudes de tensão decrescentes ao longo dos ciclos, tendo seu valor máximo ao longo dos mil primeiros ciclos.

FIGURA 44 - HISTÓRICO DE CARREGAMENTO #1

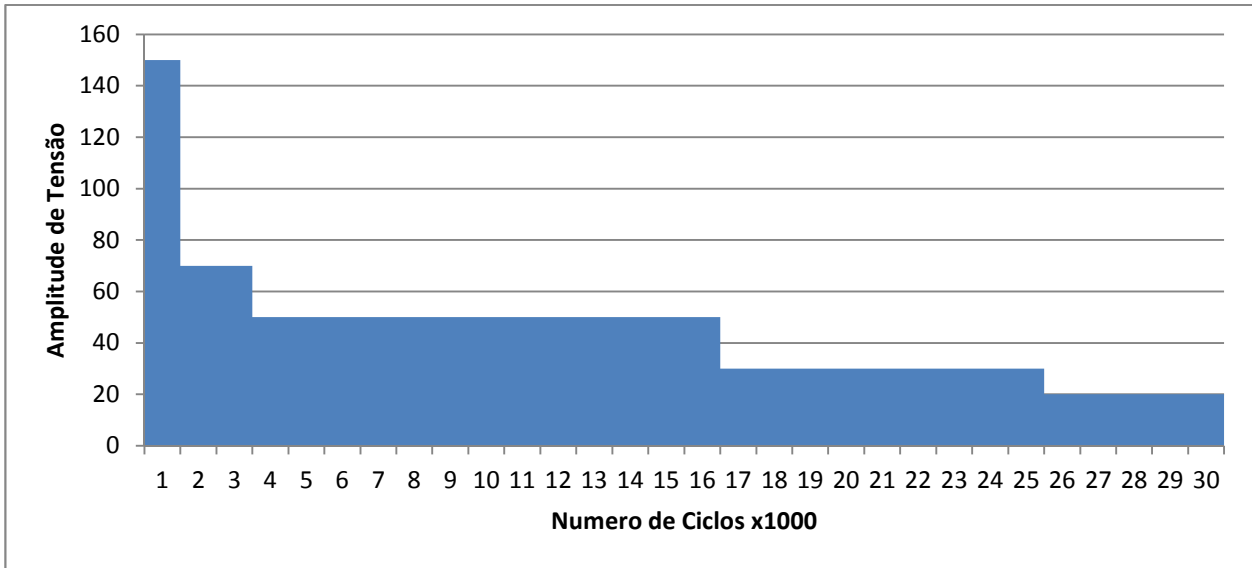
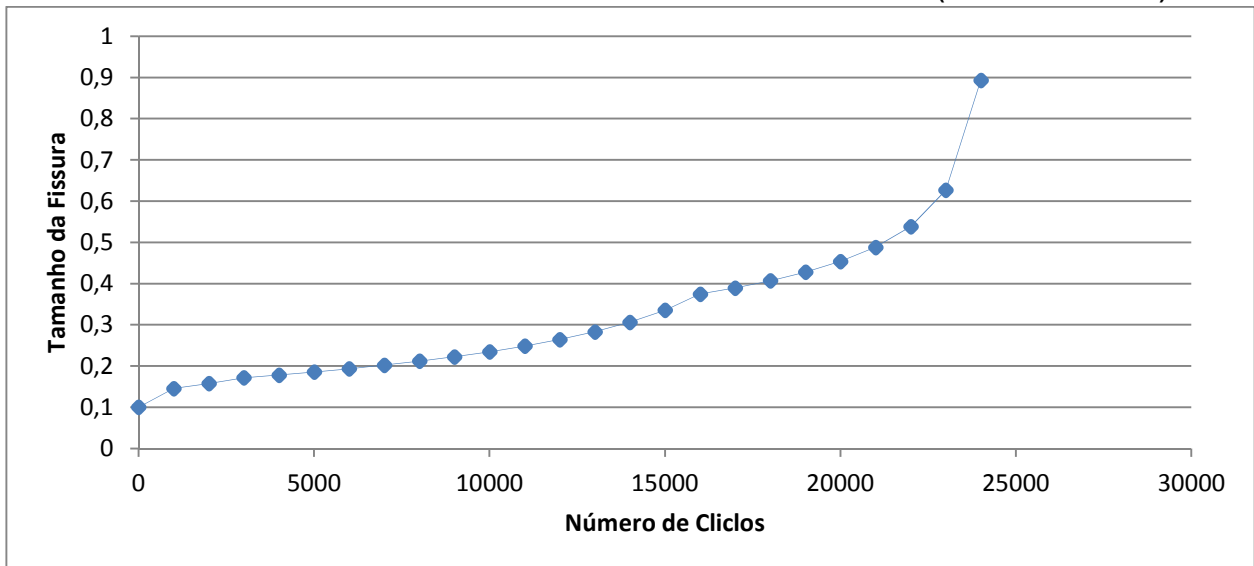


FIGURA 45 - GRÁFICO DO NÚMERO DE CICLOS X COMPRIMENTO DA TRINCA (CARREGAMENTO #1)



Na Figura 45, mostra-se o tamanho da trinca ao longo dos ciclos de carregamento da estrutura submetida ao primeiro histórico. Nota-se que passa a ocorrer um crescimento abrupto por volta dos 24000 ciclos, com evolução contínua, o que é um indicativo de propagação instável e de falha da estrutura, podendo ser usado para definir a vida em fadiga da mesma.

Nota-se que a propagação da trinca se dá de maneira suave durante todas as fases de propagação: inicial, crescimento e ruptura, caracterizadas pela taxa de crescimento (da/dN). A partir disso, é possível definir claramente a fase de iniciação nos 1000 primeiros ciclos, seguida de uma fase de crescimento até cerca de 22000 ciclos e finalmente a fase de ruptura aos 24000 ciclos.

O segundo histórico de carregamento pode ser visto na Figura 46. Foram consideradas as amplitudes de tensão crescentes até os 25000 ciclos, valor aproximado de vida em fadiga da estrutura obtido com o primeiro histórico de carregamento, tendo seu máximo entre os 24000 e 25000 ciclos.

FIGURA 46 - HISTÓRICO DE CARREGAMENTO #2

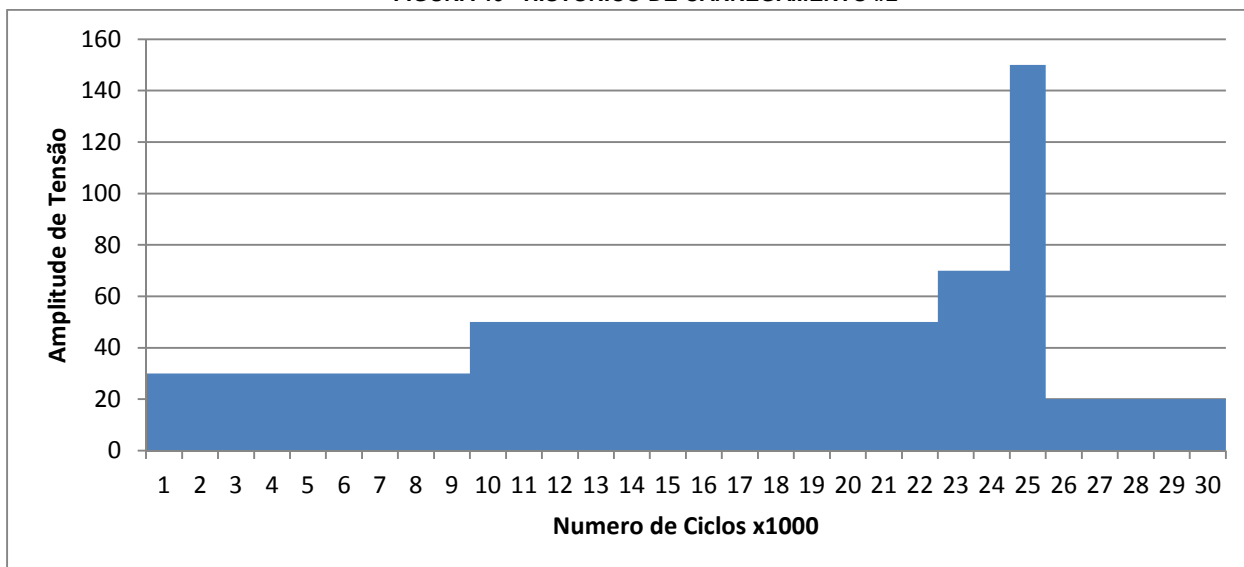
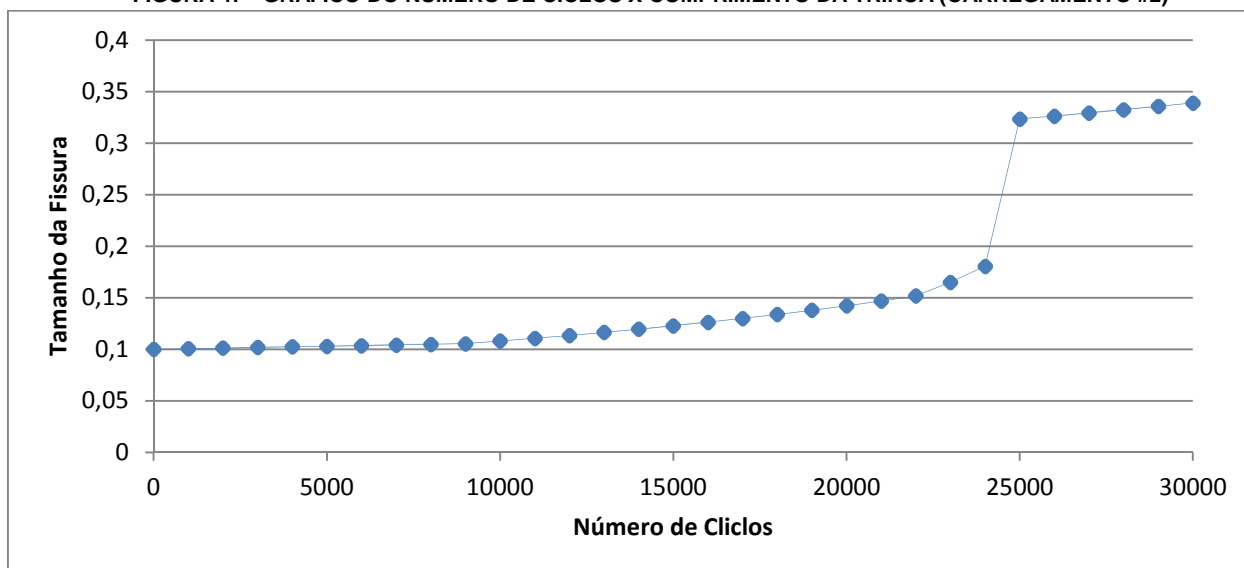


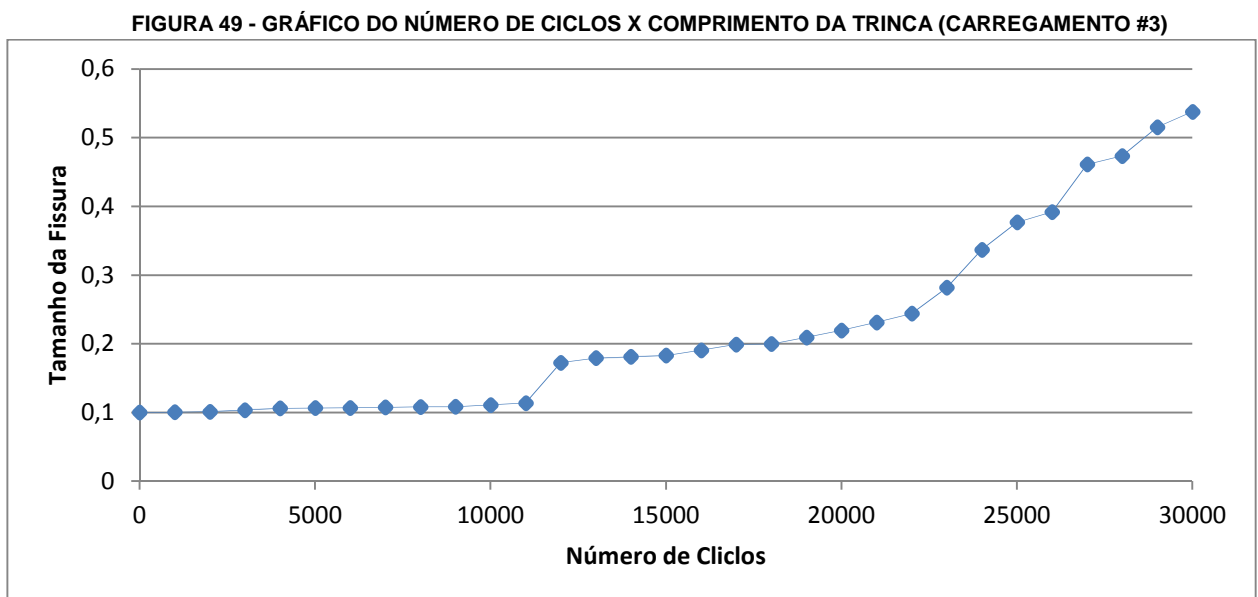
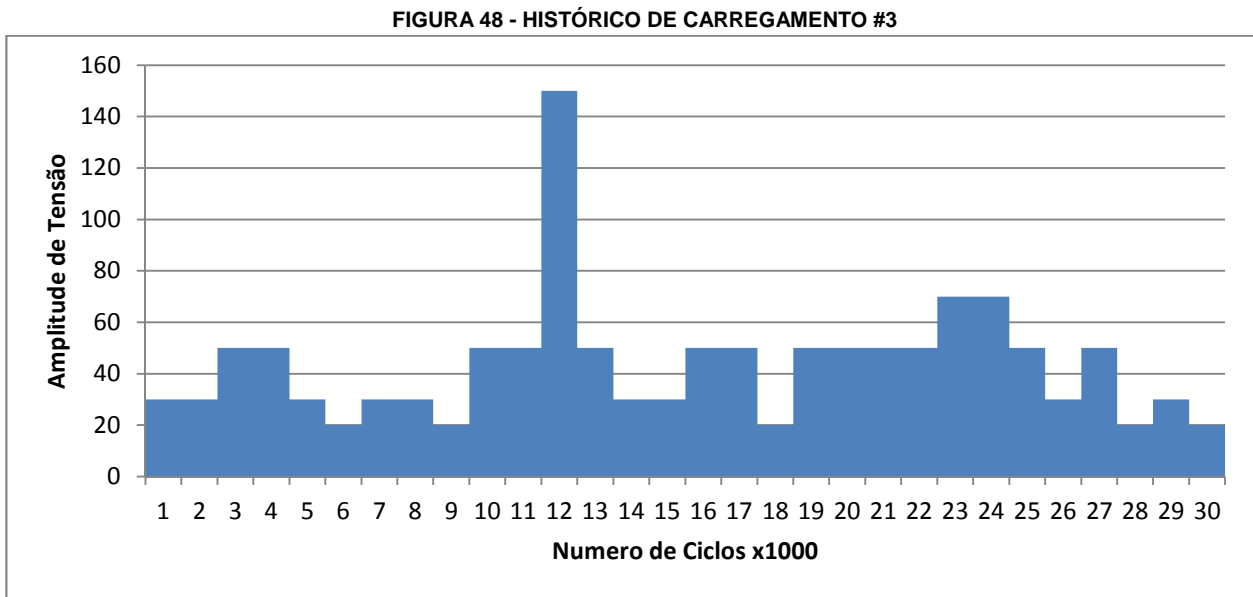
FIGURA 47 - GRÁFICO DO NÚMERO DE CICLOS X COMPRIMENTO DA TRINCA (CARREGAMENTO #2)



Na Figura 47, mostra-se o tamanho da trinca ao longo dos ciclos de carregamento da estrutura submetida ao segundo histórico. A análise do gráfico indica que a propagação da trinca praticamente não acontece até os 9000 ciclos devido ao baixo nível de sollicitação. A maior taxa de crescimento ocorre durante a aplicação da carga máxima, entre 24000 e 25000 ciclos, mas que não se mantém, voltando a apresentar uma taxa menor logo em seguida. Ao fim dos 30000 ciclos

prescritos conclui-se que não há indicação de ruptura da estrutura, tendo a trinca atingido nesta condição um tamanho de 0,33 metros.

O terceiro histórico de carregamento pode ser visto na Figura 48. Foram prescritas amplitudes de tensão de forma aleatória, tendo seu máximo entre os 11000 e 12000 ciclos.



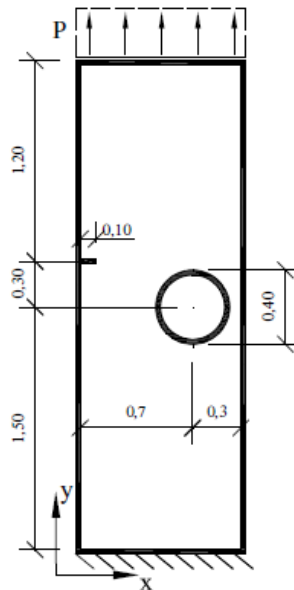
Na Figura 49, mostra-se o tamanho da trinca ao longo dos ciclos de carregamento da estrutura submetida ao terceiro histórico. Nota-se que ao fim dos 30000 ciclos não indicativo de ruptura da estrutura, tendo a trinca nesta condição atingido um tamanho de 0,54 metros.

Como conclusão geral deste exemplo, nota-se que a propagação da trinca se comporta diferentemente quando submetida aos diferentes históricos de carregamento. Vale novamente observar que em todos os históricos manteve-se a quantidade de ciclos aplicados para cada nível de tensão variando apenas a sequência de aplicação. As diferentes respostas de propagação se devem, provavelmente, ao fato de o fator de intensidade de tensão associado a cada tamanho da trinca influenciar diretamente o seu crescimento em função da amplitude seguinte da solicitação definida pelo histórico de carregamento.

3.2.1.3 EXEMPLO 7: CHAPA COM TRINCA DE BORDA E FURO

Este exemplo consiste em uma chapa com uma trinca de borda e que contém um furo conforme apresentado na Figura 50. Este caso foi analisado utilizando a mesma metodologia proposta por (Leonel, 2009).

FIGURA 50 - CHAPA COM UM FURO



Dimensões em metros. Fonte: (Leonel, 2009)

A borda superior da estrutura está submetida a um carregamento oscilatório P , com um valor máximo de 50kN/m e mínimo igual a zero.

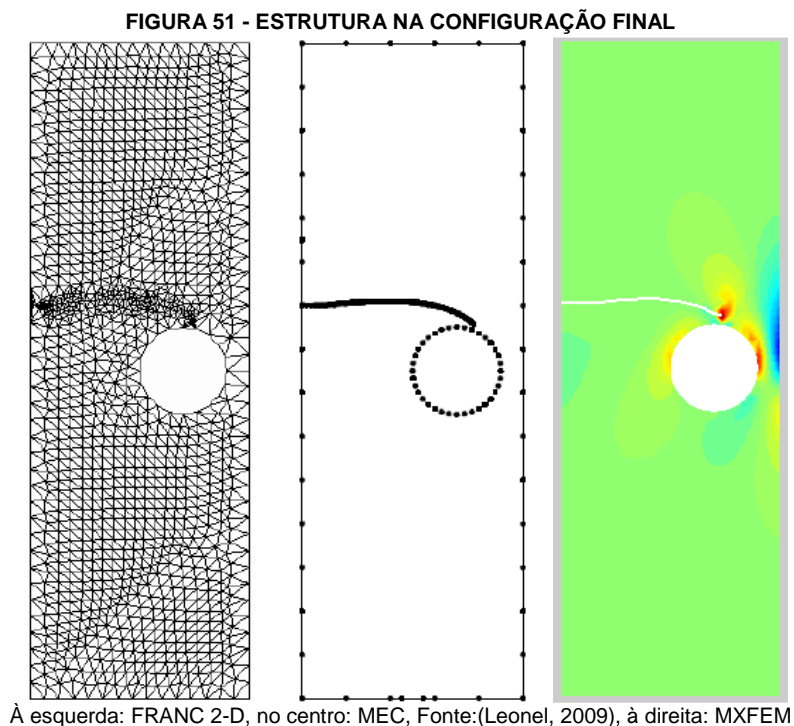
As propriedades do material da estrutura estão descritas na Tabela 17 e os parâmetros da lei de Paris utilizados foram: $n=2,7$ e $C = 2 \times 10^{-10} \text{ m} / \text{ciclos} \left(\frac{\text{kN}}{\text{m}^{\frac{3}{2}}} \right)^n$

Tabela 17 - Propriedades do Material

Módulo de Elasticidade	$3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
Coefficiente de Poisson	0,2

As análises a seguir incluem os resultados obtidos por (Leonel, 2009) com o programa FRANC 2D, utilizando uma malha com 20825 elementos finitos triangulares de aproximação quadrática. Vale ressaltar que o programa FRANC 2D permite realizar simulações de propagação de trincas utilizando o MEF.

Na Figura 51 é possível observar um comparativo de trajetórias de crescimento da trinca obtidas por meios de três simulações, com métodos diferentes: MEF, MEC e MEFG/MEFX.



É notável que a trajetória obtida com o MEFG/MEFX é muito similar àquelas obtidas pelos outros dois métodos, demonstrando assim sua eficácia e viabilidade.

Foram também calculados os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de fraturamento. Estes resultados foram comparados com os obtidos através do FRANC 2D por (Leonel, 2009) e estão apresentados na Figura 52 e na Figura 53.

FIGURA 52 - COMPARAÇÃO ENTRE VALORES DEK PARA O MODO I

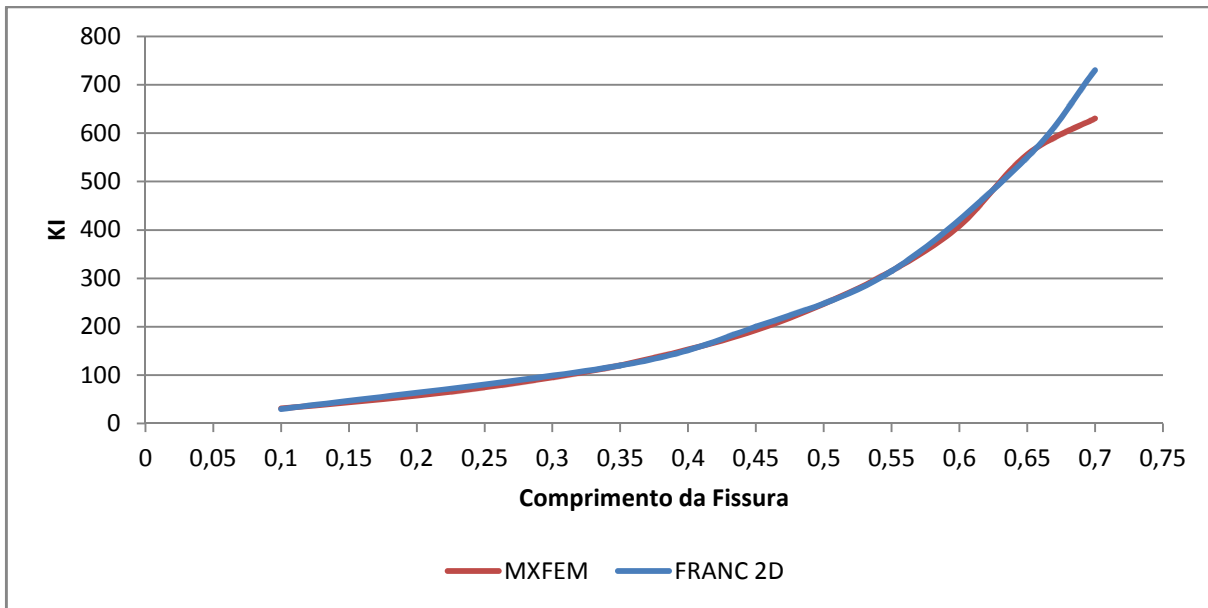
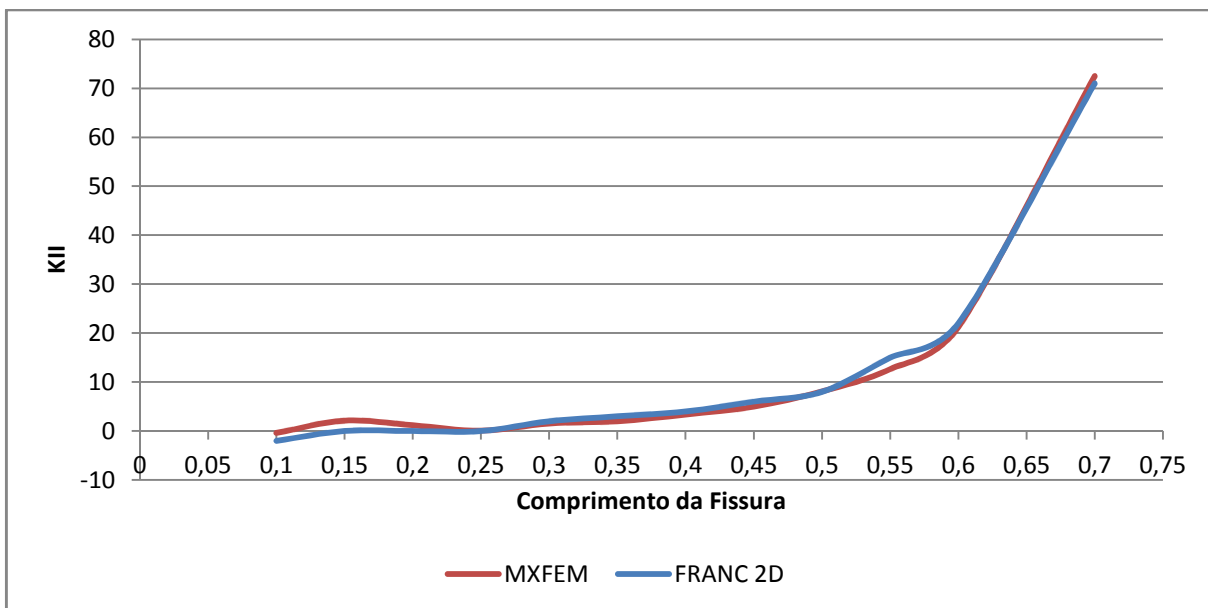


FIGURA 53 - COMPARAÇÃO ENTRE VALORES DEK PARA O MODO II

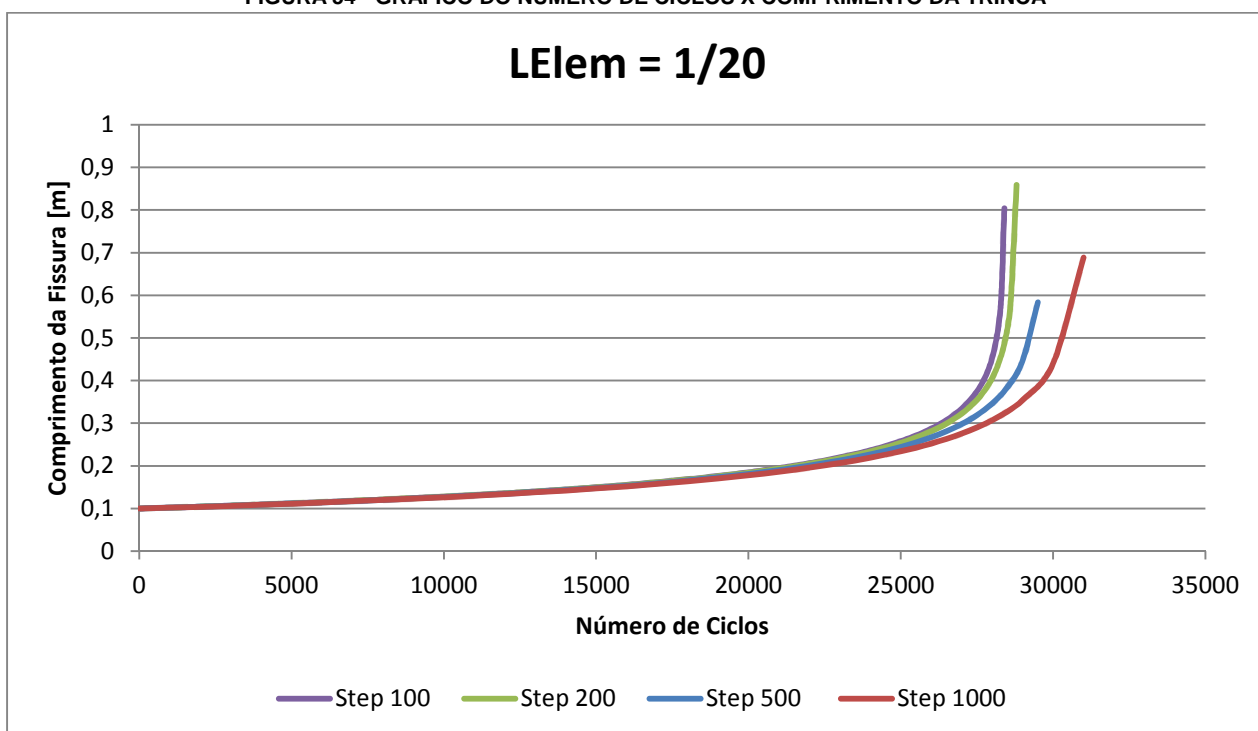


Verifica-se pela análise das figuras acima que os resultados obtidos pelo código que utiliza o MEFM/MEFX são bastante semelhantes aos providos pelo FRANC 2D. Analogamente ao efeito descrito por (Leonel, 2009), na simulação com o MXFEM foi possível verificar que a partir do ponto que a trinca atinge o comprimento de 0,65m passa a ocorrer uma diferença entre os valores obtidos com os dois códigos para o fator KI. Essa discordância pode ser explicada pelo fato de que a trinca se encontra numa zona onde a concentração de tensão é maior, dada a

iminência de ruptura, indicada computacionalmente, a partir do comprimento 0,7m pela instabilidade numérica dos resultados.

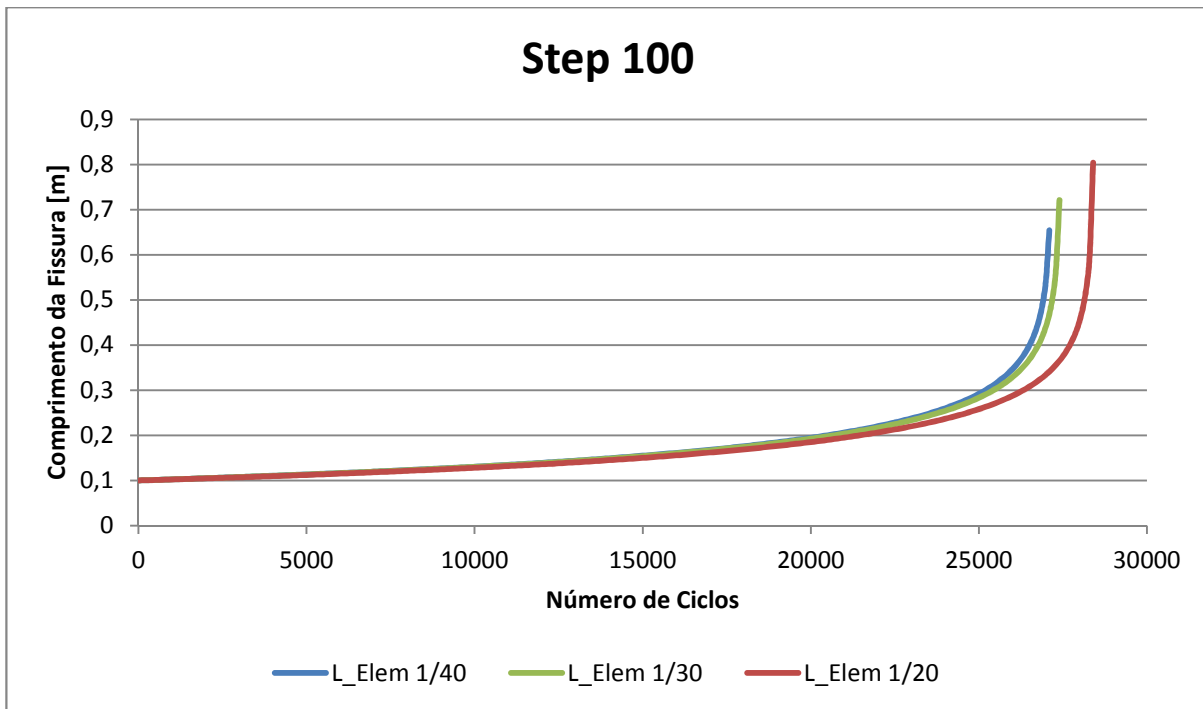
A análise segue com o estudo do comportamento da estrutura submetida à fadiga. Na Figura 54, para uma malha com refinamento de $LElem=1/20$, ilustra-se o comportamento da estrutura de acordo com o número de ciclos ao qual ela é submetida. Conforme permite o código MXFEM foram adotados diferentes intervalos entre ciclos para o cálculo do comprimento da trinca, utilizando para tanto a Lei de Paris. A característica das curvas para cada intervalo é semelhante, no entanto quanto menor o intervalo de ciclos mais concentrado em torno de um valor as curvas chegam demonstrando claramente a convergência do resultado.

FIGURA 54 - GRÁFICO DO NÚMERO DE CICLOS X COMPRIMENTO DA TRINCA



Dado um intervalo entre ciclos de 100, que foi considerado um valor adequado diante do observado na figura anterior, procurou-se realizar uma análise de convergência com o refinamento de malha, ilustrada na Figura 55.

FIGURA 55 - GRÁFICO DO NÚMERO DE CICLOS X COMPRIMENTO DA TRINCA – CONVERGÊNCIA DE MALHA



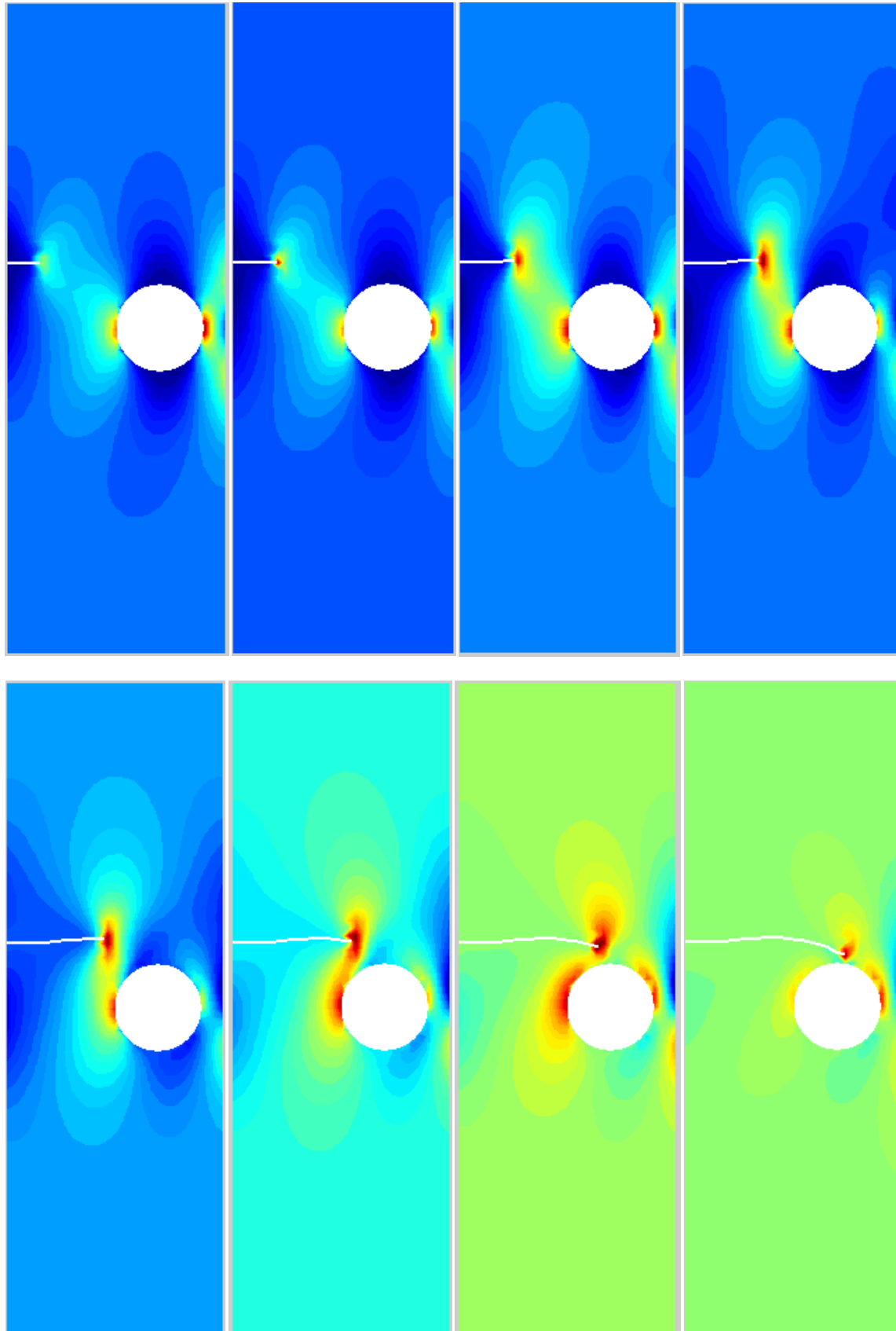
A característica das curvas obtidas para cada refinamento é semelhante, no entanto quanto maior o refinamento mais os resultados convergem para um mesmo valor máximo do número de ciclos.

Também é possível observar que para o trecho envolvendo o início do processo de crescimento da trinca, o método gera resultados um tanto quanto independentes de malha e do intervalo de integração da Lei de Paris. A dispersão dos valores passa a ocorrer na região próxima da ruptura. Nas metodologias de projetos aeronáuticos atuais as estruturas não devem trabalhar nesta região próxima da ruptura, devido ao fato de que há uma sensibilidade considerável decorrente de diversos fatores como: microestrutura, processo de fabricação, métodos de inspeção, desgaste e etc.

Além da propagação utilizando a Lei de Paris implementada no MXFEM, foi feita a simulação da propagação impondo-se um incremento constante de 0,05m em cada passo de propagação, para uma malha com refinamento de $LElem=1/30$. Na

Figura 56 estão ilustrados os campos de tensão normal Sigma YY calculados durante o processo de propagação. É possível observar claramente a influência que o furo tem sobre as tensões na ponta da trinca na medida em que ocorre a propagação.

FIGURA 56 - CAMPOS DE TENSÃO (SIGMA YY) PARA PROPAGAÇÃO COM INCREMENTO DE 0.05M E LELEM = 1/30



Vale ressaltar que no MXFEM o uso do *level-set* para controlar o enriquecimento das funções do MEF permite que a geometria da placa não seja necessário discretizar o furo e a trinca. A posição da trinca inicial e o furo são determinados após a geração da malha e, portanto, independem dela. Assim como a trinca, a definição da posição do furo com o *level-set* gera enriquecimentos das funções de forma dos elementos que estão nas proximidades e no interior do furo.

3.2.2 TRIDIMENSIONAL

3.2.2.1 EXEMPLO 8: VASO DE PRESSÃO COM TRINCA INICIAL

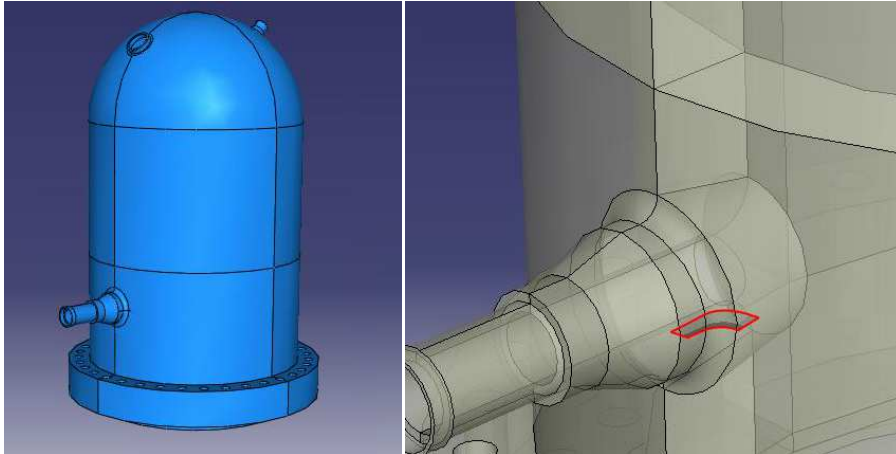
Neste exemplo, realiza-se a simulação de propagação tridimensional de uma trinca inicial em um vaso de pressão. Trata-se de um caso proposto no manual do usuário do ABAQUS e está aqui reproduzido para ilustrar a possibilidade de análise com esse código, chamando-se a atenção para as limitações da versão 6.12.

De fato, as simulações tridimensionais pelo MEF3D/MEF3D no ABAQUS, principalmente em estruturas que possuem uma geometria mais complexa, ainda não são representativas. Dentre as limitações estão a incapacidade de uso de funções de ponta de trinca para enriquecimento nodal dos elementos e a indisponibilidade do cálculo dos fatores de intensidade de tensão para trincas não estacionárias.

Por outro lado, entre os recursos disponíveis atuais estão o uso das funções de *level-set* para definir no pré-processamento a posição da trinca numa malha gerada e a capacidade de mapeamento da evolução da trinca e campos de tensão na etapa de pós-processamento.

Na Figura 57 mostra-se o problema e a localização da trinca inicial adotada. A Tabela 18 indica os dados de referência do material e a tensão máxima de controle na propagação.

FIGURA 57 -GEOMETRIA DO VASO DE PRESSÃO COM TRINCA INICIAL (ESQUERDA) E DETALHE DA LOCALIZAÇÃO DA TRINCA INICIAL (DIREITA).



Como descrito na seção 3.1.1, apesar de o ABAQUS possibilitar o cálculo dos fatores de intensidade de tensão utilizando diferentes métodos para as análises 3D, nenhum destes está disponível quando das análises de propagação. Portanto, serão ilustrados na Figura 58 apenas a geometria da trinca após a propagação e os campos de tensão obtido sem diferentes fases da propagação, assim como seus respectivos valores máximos na Figura 59.

TABELA 18 - PROPRIEDADES DO MATERIAL PARA SIMULAÇÃO DO VASO DE PRESSÃO COM TRINCA INICIAL NO ABAQUS

Módulo de Elasticidade	210e09
Coefficiente de Poisson	0,3
Tensão Principal Máxima	84,4e06

O manual do usuário do ABAQUS recomenda que é necessário adotar características de simulação baseadas em problemas não lineares (descontinuidades, pequenos incrementos de tempo e etc.) para garantir a convergência dos resultados. Neste exemplo foram utilizadas tais recomendações.

FIGURA 58 - GEOMETRIA DA TRINCA APÓS A PROPAGAÇÃO PARA O CASO DO VASO DE PRESSÃO COM TRINCA INICIAL

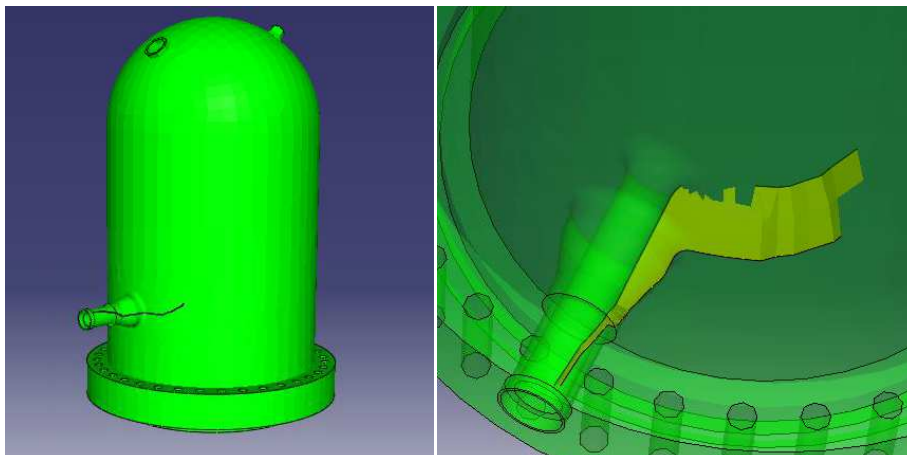
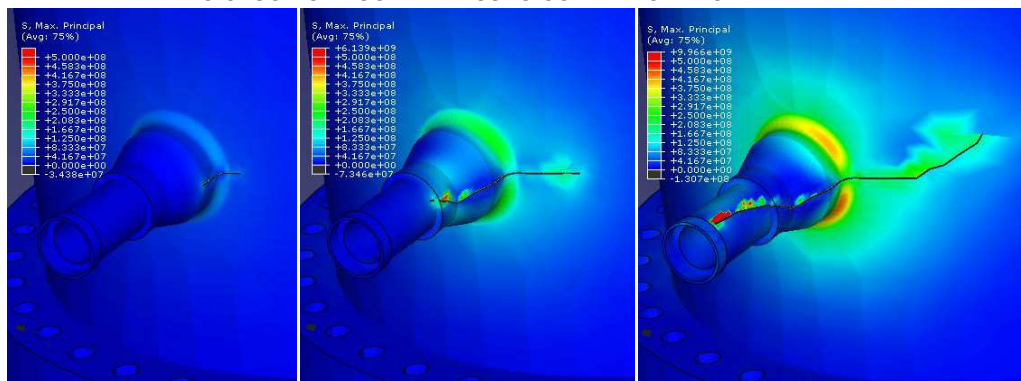


FIGURA 59 - CAMPOS DE TENSÃO PRINCIPAL MÁXIMA EM DIFERENTES ESTÁGIOS DA PROPAGAÇÃO PARA O CASO DO VASO DE PRESSÃO COM TRINCA INICIAL



4 CONCLUSÕES

4.1 EM UM CONTEXTO GERAL

Com relação às ferramentas utilizadas, o software MXFEM versão 1.2 viabilizou a análise da eficácia do Método dos Elementos Finitos Generalizados com um baixo custo computacional. Entretanto é importante mencionar algumas de suas características e limitações:

1. O crescimento da trinca é modelado usando o critério da tensão máxima circunferencial para previsão da direção da propagação
2. É possível definir um incremento constante ou usar a lei de Paris para as simulações de propagação;
3. Caso um nó possa ser enriquecido por função degrau e função de ponta de trinca, apenas a função de ponta de trinca é utilizada;
4. A matriz de rigidez global é modificada e fatorada a cada iteração;
5. Os fatores de intensidade de tensão são calculados usando integral J, integrada nos valores do domínio;
6. O domínio para a integral J tem um raio pré-definido de 4 elementos ao redor da ponta da trinca;

Com relação ao emprego do ABAQUS, versão 6.12, ele permite realizar simulações tridimensionais, porém com grande custo computacional, além de não permitir o desenvolvimento de análises de propagação de trincas e de fadiga.

A partir dos exemplos estudados, pode-se concluir que o uso do MEFG/MEFX em conjunto com o *level-set*, especificamente em relação à etapa de simulação da propagação da trinca, apresentou algumas vantagens como:

- Grande parte da matriz de rigidez permanece constante durante a simulação da propagação;

- A função de forma nodal enriquecida com função Heaviside gera contribuições para as componentes na matriz de rigidez, invariáveis ao longo do tempo;

- No processo de propagação da trinca, somente os nós previamente enriquecidos com funções “crack-tip” passam ter sua função de enriquecimento substituída por funções do tipo Heaviside, enquanto que apenas os novos nós cujas nuvens passam a conter a ponta da trinca deverão ser enriquecidos com funções “crack-tip”;

- Como o incremento no tamanho da trinca durante a simulação de propagação é arbitrário, as alterações mencionadas acima devem afetar apenas uma região contida nas vizinhanças da ponta da trinca;

- Nos casos de geometria e tamanho de trinca nos quais os fatores de intensidade de tensão são baixos, considerando-se um mesmo número de graus de liberdade envolvidos, o enriquecimento com a solução da fratura pode ser dispensado em face da eficiência de um limitado refinamento de malha nas vizinhanças da ponta;

- O fato de se poder inserir a trinca numa malha previamente definida, permite estudar com maior eficiência, em relação a uma simulação convencional pelo MEF, a sua propagação associada a diferentes históricos de carregamento;

4.2 SOBRE O USO DO MEFG/MEFX NA INDÚSTRIA AERONÁUTICA

Apesar de ser muito importante durante o desenvolvimento e certificação de uma aeronave, a análise do comportamento e da propagação de trincas é indispensável mesmo após sua entrada em serviço. Por serem, em geral, projetadas utilizando a filosofia de tolerância ao dano, as estruturas aeronáuticas devem ser capazes de resistir a diversos tipos de carregamento mesmo com a presença de danos. Estes podem estar associados à própria fadiga do material, à corrosão, a defeitos do material ou, até mesmo, a algum dano causado por incidente ou acidente durante a operação da aeronave.

Atualmente, os fabricantes de aeronaves definem intervalos de inspeção baseados em probabilidades de dano em pontos críticos da estrutura submetidos a carregamentos teóricos. Estes intervalos de inspeção são cumpridos por todos os operadores e visam detectar as trincas nas estruturas antes que estas estejam com tamanhos definidos como críticos.

Cada operador possui características únicas que poderão ser levadas em conta na definição dos intervalos de inspeção da sua frota. O uso de uma metodologia eficaz e robusta como o MEFG/MEFX tem-se mostrado poderia ser muito útil nesse sentido.

Todas as características do MEFG/MEFX demonstradas neste trabalho (como a possibilidade de inserção do posicionamento das trincas de forma simples em estruturas com geometrias complexas, sem necessidade de geração de novas malhas e a capacidade de simulação cinemática da propagação das trincas com o carregamento real), podem possibilitar com que a indústria aeronáutica venha a ter capacidade de definir os intervalos de inspeção personalizados de acordo com o operador, ou até mesmo de acordo com cada aeronave.

É importante observar que numa empresa aérea parte dos custos são gerados por reparos de danos estruturais causados na sua frota devido aos incidentes. Os fabricantes de aeronaves preveem em seus manuais diversos tipos de reparos que,

assim como os intervalos de inspeção, são baseados em probabilidades de dano em pontos críticos da estrutura e carregamentos teóricos.

O uso do MEFG/MEFX no campo de definição e projeto de reparos estruturais também é algo promissor, dadas suas características e vantagens demonstradas neste trabalho. A capacidade do próprio operador em prever o comportamento da propagação de uma trinca poderá trazer um aumento do nível de segurança de suas aeronaves assim como uma diminuição nos seus custos de operação.

5 PROPOSTA DE DESENVOLVIMENTO DE TRABALHOS FUTUROS

Propõe-se o desenvolvimento de uma ferramenta numérica capaz de simular o comportamento de trincas que possam ser posicionadas em malhas pré-existentes e que possa ser submetida a um histórico de carregamento particular. O ABAQUS se mostrou um software capaz de realizar tais análises tridimensionais, no entanto sendo necessário, como descrito no capítulo anterior, a implementação do enriquecimento utilizando funções de ponta de trinca.

Por outro lado, o SCIEnCE, também se mostra promissor neste campo, diante das características bidimensionais de inúmeras estruturas aeronáuticas e possibilidade de personalização do programa. Ainda assim, esse código pode ser estendido para análises tridimensionais. Por completude, descrevem-se no que segue as características desse programa.

O SCIEnCe (São Carlos Integrated Environment for Computational Engineering) é um programa desenvolvido em linguagem Phyton dentro da filosofia de orientação a objetos, sendo dedicado às análises não-lineares utilizando o MEFG/MEFX.

A escolha da linguagem de programação e da orientação ao objeto se deu devido às inúmeras vantagens que esta combinação proporciona para a implementação do MEFG/MEFX, como descrito por (Piedade Neto, 2013).

É importante mencionar que este programa vem sendo constantemente atualizado e complementado por diversos pesquisadores. Além disto, um grupo de pesquisa tendo o SCIEnCE como sua principal ferramenta foi concebido e registrado no CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico)

Dentre as principais características atuais deste programa pode-se destacar:

- Restrito a análises bidimensionais
- Capacidade de paralelização do processamento
- Capacidade de desenvolver análises estática e dinâmica contemplando não-linearidades geométrica, de material e de contato.

- Capacidade de resolução de problemas de fratura, incluindo-se a sua propagação

- Possibilidade de integração de novas ferramentas

Apesar de o SCIEnCe não ter sido diretamente empregado para a geração de resultados neste trabalho, o mesmo já mostrou potencial para a análise de integridade estrutural, incluindo a propagação de trincas, apresentando bons resultados, como os descritos por (Alves, 2010) e (Piedade Neto, 2013).

Entretanto, diante das análises realizadas durante a execução desta pesquisa, e das conclusões obtidas, é possível propor a inserção, no SCIEnCE, das vantagens evidenciadas nos códigos empregados, de tal modo a evitar os problemas e desvantagens observados. Dessa forma seria possível ampliar a robustez e a eficácia do programa.

Com essas alterações o programa pode possibilitar o uso do MEEG/MEFX no âmbito do desenvolvimento e certificação de estruturas aeronáuticas, além de propiciar o avanço das investigações realizadas pelo grupo.

REFERÊNCIAS

Abaqus 6.9 Update Seminar. Extended Finite Element Method (XFEM): Dassault Systemes 2009.

ALVES, M. M. **Método da Partição na análise de múltiplas trincas**. 2010. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

BABUSKA, I.; MELENK, J. M. **The partition of unity finite element method**. DTIC Document. 1995

BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201–204, n. 0, p. 91-111, 2012. ISSN 0045-7825. Disponível em: <
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511003082> >.

BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, n. 4, p. 945-981, 1994. ISSN 0036-1429.

BARROS, F. B. **Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas**. 2002. Universidade de São Paulo

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601-620, Jun 20 1999. ISSN 0029-5981.

BENZLEY, S. Representation of singularities with isoparametric finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, n. 3, p. 537-545, 1974. ISSN 1097-0207.

BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 9400943334.

BROWN, S. Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. In: (Ed.). **Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials**: ASTM International, 1966.

BYSKOV, E. Calculation of stress intensity factors using finite element method with cracked elements. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 6, n. 2, p. 159-167, 1970. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:A1970H370900005 >.

DONG, L.; ATLURI, S. N. Fracture & fatigue analyses: SGBEM-FEM or XFEM? Part 2: 3D solids. **CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 90, n. 5, p. 379-413, 2013.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers & Structures**, v. 77, n. 2, p. 215-232, 2000. ISSN 0045-7949. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794999002114> >.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, n. 1, p. 237-262, 1996a. ISSN 0045-7825.

_____. Hp clouds-an hp meshless method. **Numerical methods for partial differential equations**, v. 12, n. 6, p. 673-706, 1996b. ISSN 0749-159X.

FAA.Lessonslearned.

http://lessonslearned.faa.gov/ll_main.cfm?TabID=3&LLID=28&LLTypeID=0,
Acesso em: 06 de Agosto de 2015.

FIX, G. J.; GULATI, S.; WAKOFF, G. I. On the use of singular functions with finite element approximations. **Journal of Computational Physics**, v. 13, n. 2, p. 209-228, 1973. ISSN 0021-9991. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999173900235> >.

FLEMING, M. et al. Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 8, p. 1483-1504, Apr 30 1997. ISSN 0029-5981.

FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 3, p. 253-304, Oct 15 2010. ISSN 0029-5981. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000283202200001 >.

FRIES, T. P.; BAYDOUN, M. Crack propagation with the extended finite element method and a hybrid explicit-implicit crack description. **International Journal for numerical methods in engineering**, v. 89, n. 12, p. 1527-1558, 2012. ISSN 1097-0207.

GREEN, A.; SNEDDON, I. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1950, Cambridge Univ Press. p.159-163.

HANSBO, A.; HANSBO, P. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 193, n. 33, p. 3523-3540, 2004. ISSN 0045-7825.

HOSFORD, W. F. **Mechanical behavior of materials**. Cambridge University Press, 2010. ISBN 0521195691.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. Universidade de São Paulo

LEVÉN, M.; DANIEL, R. Stationary 3D crack analysis with Abaqus XFEM for integrity assessment of subsea equipment. 2012.

MEGSON, T. H. G. **Aircraft structures for engineering students**. Elsevier, 2012. ISBN 0080969062.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, Dec 15 1996. ISSN 0045-7825.

MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131-150, Sep 10 1999. ISSN 0029-5981.

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed - algorithms based on hamilton-jacobi formulations. **Journal of Computational Physics**, v. 79, n. 1, p. 12-49, Nov 1988. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<Go to ISI>://WOS:A1988Q745800002 >.

PAIS, M. **"MATLAB Extended Finite Element (MXFEM) Code v1.2**. www.matthewpais.com 2011.

PAIS, M. J. **MATLAB eXtended Finite Element Method (MXFEM) - User's Guide**. Gainesville: University of Florida 2010.

PIEDADE NETO, D. **On the Generalized Finite Element Method in nonlinear solid mechanics analyses**. 2013. Universidade de São Paulo

PROENÇA, S. P. B. **Método dos Elementos Finitos Generalizados - Notas de Aula**. São Carlos: Universidade de São Paulo 2013.

SONG, J.-H.; AREIAS, P. M.; BELYTCHKO, T. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, n. 6, p. 868-893, 2006. ISSN 0029-5981.

STEPHENS, R. I. et al. **Metal fatigue in engineering**. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0471510599.

STOLARSKA, M. et al. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 51, n. 8, p. 943-960, Jul 20 2001. ISSN 0029-5981. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000169624300003 >.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. L. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 43-69, Jan 7 2000. ISSN 0045-7825. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000084887500003 >.

SUKUMAR, N. et al. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 11, p. 1549-1570, 2000. ISSN 0029-5981.

TADA, H.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R. The stress analysis of cracks. **Handbook, Del Research Corporation**, 1973.

TITA, V. **Projeto de elementos estruturais de aeronaves II – Notas de Aula**. 2007. Universidade de São Paulo, São Carlos.

TORRES, I. F. R. **Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos**. 2003. Universidade de São Paulo