

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

HEIDER DE CASTRO E ANDRADE

Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método
dos Elementos de Contorno

São Carlos – SP

2017

HEIDER DE CASTRO E ANDRADE

**Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via
Método dos Elementos de Contorno**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos – SP

2017

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

A553a Andrade, Heider de Castro e
Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno / Heider de Castro e Andrade; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2017.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Mecânica da Fratura. 3. Propagação de Múltiplas Fissuras. 4. Domínios Não-Homogêneos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **HEIDER DE CASTRO E ANDRADE**.

Título da dissertação: "Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via método dos elementos de contorno".

Data da defesa: 05/04/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**
(Orientador designado)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Gabriel Hattori da Silva**
(University of Durham)

APROVADO

Prof. Dr. **Walter Libardi**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre guiar os meus passos ao longo da minha vida.

À minha família, por sempre proporcionar condições e fornecer o apoio necessário para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

À minha namorada Yara, por estar sempre ao meu lado, me dando suporte e compartilhando todos os momentos da minha vida.

Ao prof. Edson, pelo companheirismo, pela orientação, pela boa vontade e por todo conhecimento passado.

Ao prof. José Carlos, por me introduzir ao universo da pesquisa durante minha iniciação científica.

Aos professores do SET e a todos os demais professores que participaram da minha formação.

Aos funcionários do SET, por serem sempre tão solícitos.

Ao prof. Rodolfo Sanches e ao prof. João Batista de Paiva, pelas contribuições fornecidas no exame de qualificação.

Ao prof. Gabriel Hattori e ao prof. Walter Libardi, pelo aceite de participação na banca examinadora.

Aos amigos da EESC, pelas conversas e pelos momentos de alegria compartilhados.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), cujo apoio financeiro foi indispensável para o desenvolvimento da pesquisa.

Ex nihilo nihil fit.

RESUMO

ANDRADE, H.C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 241p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

Este trabalho apresenta um modelo numérico para a análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas. O comportamento mecânico é simulado a partir da formulação elastostática do Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicada a materiais isotrópicos. O MEC é uma eficiente e robusta técnica numérica para análises de propagação de fissuras. A não exigência de uma malha de domínio pelo método permite uma representação precisa da concentração de tensão nas pontas. Além disso, a redução da dimensionalidade proporcionada pelo MEC facilita o processo de remalhamento durante o crescimento das fissuras. A formulação dual do MEC é adotada, na qual as equações integrais singular e hipersingular são aplicadas. A modelagem de domínios não-homogêneos é realizada a partir da técnica de sub-regiões. A Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) é aplicada para a análise da fratura em materiais frágeis. Os fatores de intensidade de tensão são determinados a partir da integral-J e a teoria da máxima tensão circunferencial é adotada para definir a direção de propagação das fissuras e o fator de intensidade de tensão equivalente. Problemas envolvendo fraturamento hidráulico também são investigados a partir da aplicação da MFEL. A integral-J é modificada para a consideração da pressão hidrostática atuante sobre as faces da fissura. Estruturas sujeitas à fadiga de alto ciclo também são avaliadas. A lei de Paris é utilizada para a estimativa da taxa de crescimento das fissuras. O último tipo de problema considerado é a fratura em materiais quase-frágeis. O modelo de fissura coesiva é empregado para a representação do comportamento não-linear físico próximo à ponta. O sistema de equações não-linear obtido é resolvido a partir de um algoritmo iterativo denominado operador constante. O estado de tensão na ponta, determinado por extrapolação, é utilizado para a verificação da estabilidade à propagação e o caminho de crescimento é definido a partir da formulação da MFEL. São observadas boas correspondências entre os resultados obtidos e as respostas encontradas na literatura, indicando a eficiência e a robustez do código computacional proposto. Melhorias do modelo numérico implementado também são discutidas.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura, Propagação de Múltiplas Fissuras, Domínios Não-Homogêneos.

ABSTRACT

ANDRADE, H.C. **Crack propagation analysis in non-homogeneous two-dimensional structures using the Boundary Element Method**. 2017. 241p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2017.

This work presents a numerical approach for crack propagation modelling in non-homogeneous two-dimensional structures. The mechanical structural behaviour is simulated using the elastostatic formulation of the Boundary Element Method (BEM) applied to isotropic materials. The BEM is an efficient and robust numerical technique for crack propagation analyses. The non-requirement of a domain mesh enables the BEM for accurately quantifying the stresses concentration at the crack tip. Moreover, the mesh dimension reduction provided by the BEM makes the remeshing procedures during crack growth a less complex task. The dual BEM formulation is adopted, in which singular and hypersingular integral equations are applied. The non-homogeneous domains are modelled using the sub-region technique. The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) is applied to analyze the fracture in brittle materials. The stress intensity factors are evaluated through the J-integral and the maximum circumferential stress theory is adopted to define the crack propagation angle and the equivalent stress intensity factor. Problems involving hydraulic fracture (*fracking*) are also investigated applying the LEFM. A modified J-integral scheme is implemented to consider the hydrostatic pressure acting at the crack faces. Structures subjected to high-cycle fatigue are also addressed. The Paris' law is used to estimate the crack growth rate. The last type of problem considered is the fracture in quasi-brittle materials. The cohesive crack model is used to represent the material nonlinear behaviour next to the crack tip. The nonlinear system of equations obtained is solved by an iterative algorithm named constant operator. The state of stress at the tip, obtained by extrapolation, is used to verify crack growth stability and the crack path is defined by the LEFM formulation. Good agreement is observed among the results achieved by the BEM model and the responses available in literature, showing the efficiency and robustness of the proposed numerical scheme. Further improvements of the BEM code are also discussed.

Keywords: Boundary Element Method, Fracture Mechanics, Multiple Crack Propagation, Non-Homogeneous Domains.

LISTA DE SIGLAS

ZPI	Zona de processos inelásticos
FIT	Fator(es) de intensidade de tensão
MFEL	Mecânica da Fratura Elástico-Linear
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
USP	Universidade de São Paulo
EPD	Estado plano de deformação
EPT	Estado plano de tensão
VPC	Valor Principal de Cauchy
PFH	Parte Finita de Hadamard
MSS	Método de Subtração de Singularidade
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
PU	Partição da Unidade
MSM	Métodos Sem Malha
COD	<i>Crack opening displacement</i> : Deslocamento relativo de abertura entre faces
CSD	<i>Crack sliding displacement</i> : Deslocamento relativo de deslizamento entre faces

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
1.1	Considerações iniciais.....	19
1.2	Objetivos e delimitações do estudo.....	22
1.3	Inserção do trabalho na linha de pesquisa do SET/EESC/USP.....	23
1.4	Estrutura do texto.....	24
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	27
2.1	Formulações integrais de contorno	28
2.2	Formulações integrais para pontos no contorno.....	33
2.3	Implementação numérica do MEC	36
2.4	Método de Subtração de Singularidade.....	40
2.4.1	Formulação singular.....	42
2.4.2	Formulação hipersingular.....	45
2.5	Descontinuidades na malha de elementos de contorno	48
2.6	Método dos Elementos de Contorno Dual	50
2.7	Tensões no contorno	51
2.8	Grandezas em pontos internos.....	53
2.9	Técnica de sub-regiões.....	54
3	FRATURA EM MATERIAIS FRÁGEIS.....	57
3.1	Estudos no âmbito da Teoria da Elasticidade	58
3.2	Balço de energia de Griffith.....	60
3.3	Campos de tensão e de deslocamento na ponta.....	61
3.4	Relação entre as abordagens global e local.....	65
3.5	Métodos numéricos na análise de problemas da MFEL	65
3.5.1	MEC aplicado a problemas da MFEL	67
3.6	Métodos para extração dos FIT.....	69
3.6.1	Correlação de deslocamentos	70
3.6.2	Integral J.....	71
	Exemplo 3.1: Fissura central inclinada - Murakami (1987).....	77
3.7	Critérios de propagação	79
3.7.1	Critério da máxima tensão circunferencial.....	80
3.8	Modelo numérico para solução dos problemas de fratura frágil	82
3.8.1	Pré-processamento	82
3.8.2	Solução dos problemas da MFEL via MECD	83

Exemplo 3.2: Propagação em modo I - Srawley (1976)	89
Exemplo 3.3: Propagação em modo misto - Franc2D.....	91
3.8.3 Tópicos sobre a propagação de múltiplas fissuras em domínios não-homogêneos	93
Exemplo 3.4: Propagação de múltiplas fissuras em domínio homogêneo - Budyn et al. (2004) ...	95
Exemplo 3.5: Propagação de múltiplas fissuras em domínio não-homogêneo	98
4 FRATURAMENTO HIDRÁULICO	103
4.1 Determinação dos FIT	106
Exemplo 4.1: Determinação do FIT para modo I - Tada et al. (2000)	108
Exemplo 4.2: Determinação dos FIT para modos I e II - Erdogan e Arin (1975).....	109
4.2 Modelo numérico para solução dos problemas de fracking	112
4.2.1 Pré-processamento.....	112
4.2.2 Fase de aplicação das condições de contorno externas.....	113
4.2.3 Fase de aplicação da pressão interna	114
Exemplo 4.3: Comparação com resultados experimentais - Abass et al. (1994).....	115
Exemplo 4.4: Fracking aplicado a domínio não-homogêneo e multifissurado	118
5 FADIGA	123
5.1 Desenvolvimento dos estudos sobre fadiga dos materiais.....	125
5.2 Determinação da taxa crescimento da fissura	127
5.3 Estimativa da vida útil.....	128
Exemplo 5.1: Número de ciclos para solicitação de fadiga em modo I - Isida (1971).....	130
5.4 Modelo numérico para solução dos problemas de fadiga.....	133
5.4.1 Pré-processamento.....	134
5.4.2 Solução para as fases de carregamento.....	134
5.4.3 Determinação da vida útil e verificação dos critérios de parada.....	136
5.4.4 Propagação das fissuras por fadiga.....	137
Exemplo 5.2: Caminho de propagação - Ingraffea e Grigoriu (1990).....	137
Exemplo 5.3: Fadiga em domínio não-homogêneo - Kikuchi et al. (2014)	141
Exemplo 5.4: Fadiga em domínio não-homogêneo multifissurado.....	144
6 FRATURA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS.....	149
6.1 Modelos teóricos para a avaliação da fratura em materiais quase-frágeis....	150
6.2 Métodos numéricos na análise da fratura em materiais quase-frágeis	153
6.3 Modelo de fissura fictícia.....	155
6.3.1 Leis coesivas.....	156
6.3.2 Fechamento das faces de fissura fictícia.....	158
6.3.3 Implementação via MEC	159
Exemplo 6.1: Leis coesivas.....	162

6.4	Esquema de propagação.....	165
6.4.1	Crítério de propagação	165
6.4.2	Determinação da direção de crescimento	167
6.4.3	Incremento no comprimento de fissuras fictícias e reais.....	167
	Exemplo 6.2: Flexão em três pontos - Saleh (1997)	168
6.5	Modelo numérico para a solução dos problemas de fratura coesiva	171
6.5.1	Pré-processamento	171
6.5.2	Aplicação de um incremento nas condições externas.....	171
6.5.3	Fase de correção das tensões coesivas.....	172
6.5.4	Propagação das fissuras coesivas	174
	Exemplo 6.3: Propagação em modo misto - Gálvez et al. (1998).....	174
	Exemplo 6.4: Flexão em 4 pontos de uma viga não-homogênea multifissurada	178
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	183
7.1	Conclusões	183
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	185
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	187
	Apêndice I : Fluxogramas	201
I.1	Fratura frágil.....	201
I.2	Fraturamento hidráulico (<i>fracking</i>)	205
I.3	Fadiga.....	207
I.4	Fratura coesiva	209
	Anexo A : Fundamentos da elasticidade bidimensional	213
A.1	Estado de tensão.....	213
A.2	Estado de deformação	216
A.3	Relações constitutivas elásticas lineares.....	218
A.4	Estados planos.....	219
A.5	Equação de Navier	220
A.6	Função de tensão de Airy	220
	Anexo B : Soluções fundamentais	223
	Anexo C : Tópicos de mecânica da fratura	229
C.1	Campos tensão e de deslocamento para o problema elástico-linear	229
C.2	Métodos de energia	236
C.3	Relações entre G e os FIT.....	239

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

A fratura dos materiais é caracterizada pela formação de novas superfícies a partir da propagação de descontinuidades materiais (fissuras) que levam à falha de um componente estrutural. Estudos conduzidos nas décadas de 1980 e 1990 (DUGA, et al., 1983; FARIA, 1991; REED et al., 1983) apontaram que os prejuízos anuais relacionados a danos por fratura chegam a até 4% do produto interno bruto em países desenvolvidos. Esses trabalhos também estimaram a significativa economia de recursos que poderia ser feita com o emprego de procedimentos mais racionais nas análises mecânicas de corpos fissurados. Assim, o desenvolvimento de estudos nessa área é fundamental para a obtenção de estruturas mais seguras e econômicas.

Uma das primeiras investigações sobre o efeito de descontinuidades materiais na resistência dos corpos foi realizada por Leonardo da Vinci em seu trabalho de tração de fios metálicos. Da Vinci observou que a resistência dos fios era inversamente proporcional ao comprimento (TIMOSHENKO, 1953). Apesar de posteriormente questionados pela teoria da resistência dos materiais, os resultados obtidos por da Vinci foram justificados pelo efeito de escala. Segundo o modelo empírico desenvolvido por Weibull (1939), esse efeito reflete o comportamento característico observado em materiais, em especial frágeis e quase-frágeis, de redução da resistência mecânica com o aumento das dimensões características do corpo.

A partir de meados do século XIX, impulsionado pela Revolução Industrial, houve um aumento no uso do ferro e do aço na composição das estruturas, especialmente para suportar esforços de tração. Todavia, essa nova concepção estrutural foi acompanhada de diversos acidentes, muitos dos quais com origem na propagação de fissuras. Os ineficientes processos de manufatura à época favoreceram a existência de vazios intrínsecos à constituição dos materiais. Solicitados à tração, esses vazios coalesciam e propagavam ao longo das estruturas, causando degradação mecânica e, conseqüentemente, os acidentes observados. Os trabalhos de Anderson (1969) e Liebowitz (1968) fornecem compêndios dos principais acidentes ocorridos nessa época.

A investigação das novas formas de colapso deu origem a uma área do conhecimento: a Mecânica da Fratura. Essa disciplina contempla um conjunto de teorias que permite a representação do comportamento mecânico de corpos deformáveis contendo descontinuidades materiais. Além disso, também fornece parâmetros que possibilitam a avaliação consistente do

processo de crescimento das fissuras em função da intensidade do carregamento externo. Atualmente, apesar dos avanços tecnológicos observados nos processos de manufatura, nenhum processo é capaz de produzir materiais livres de vazios. Além disso, materiais naturais que são utilizados para fins estruturais, como madeiras e rochas, possuem descontinuidades inerentes à sua composição e, portanto, são passíveis de apresentarem redução de resistência devido a fenômenos de fratura. Ademais, processos como a corrosão em metais e a degradação mecânica favorecem a introdução de fissuras nos corpos. Dessa forma, o desenvolvimento de estudos no campo da Mecânica da Fratura se tornam imprescindíveis para a precisa avaliação da resistência mecânica das estruturas.

Os primeiros trabalhos no âmbito da Mecânica da Fratura se deram no início do século XX e foram intensificados em meados desse século, especialmente com a observação de acidentes clássicos como, por exemplo, os ocorridos com os navios americanos Liberty durante a Segunda Guerra Mundial, e com os aviões britânicos da frota Comet ao longo da década de 1950. Dentre esses estudos destacam-se os de Griffith (1921), Irwin (1957) e Westergaard (1939). Grande parte desses trabalhos apresentou caráter analítico e teve como objetivo a investigação da fratura em materiais com comportamento frágil, nos quais a zona de processos inelásticos (ZPI) existente próxima à ponta da fissura apresenta pequena dimensão em relação ao comprimento da descontinuidade material e às demais dimensões características do corpo. Irwin (1957) relacionou o campo de tensões no entorno da ponta da fissura nesses materiais a novas grandezas, denominadas fatores de intensidade de tensão (FIT). A partir daí, um critério de propagação instável de fissuras foi estabelecido, no qual a sollicitação, dada pela combinação dos FIT dos modos básicos de sollicitação, é comparado à tenacidade, ou resistência ao fraturamento do material para verificação da estabilidade. Esse é um dos princípios da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL), que analisa a fratura em materiais frágeis. Problemas desse tipo constituem um dos objetos de estudo do presente trabalho.

As fissuras submetidas a sollicitações cíclicas podem apresentar crescimento em regime estável a um nível de carregamento bem inferior ao de fraturamento, comprometendo a resistência da estrutura na qual elas se encontram. Esse fenômeno é conhecido como fadiga dos materiais e também é investigado neste estudo. Paris e Erdogan (1963) propuseram uma lei empírica para a determinação da taxa de crescimento de fissuras submetidas a carregamentos cíclicos. Para tanto, os autores utilizaram os conceitos da MFEL na definição da sollicitação na ponta das descontinuidades material. A análise de fadiga é extremamente importante em estruturas submetidas carregamentos cíclicos, uma vez que a partir dela podem ser definidos intervalos de inspeção de fissuras e de manutenção visando maximizar a vida útil estrutural.

Para a maioria dos materiais utilizados na prática, a ZPI desenvolvida na região próxima às pontas de fissuras apresenta dimensões não desprezáveis. Exemplos de materiais dessa natureza são os materiais quase-frágeis, como concreto, madeira e rochas, nos quais a maior parte da ZPI se encontra parcialmente degradada por microfissuras. A análise de problemas de fratura em materiais com essas características também é escopo do presente trabalho. Para tanto, o modelo proposto por Hillerborg et al. (1976) é utilizado. Nesse modelo, a zona parcialmente degradada da ZPI é substituída por um comprimento de fissura fictícia no qual atuam tensões coesivas que se contrapõem à abertura das faces. Essas tensões concedem uma resistência residual à fissura e conferem um caráter não-linear ao problema.

Outro foco deste trabalho é a análise de problemas de fraturamento hidráulico. Esse processo tem sido cada vez mais empregado pela indústria de óleo e gás para a extração de hidrocarbonetos de maciços rochosos. A correta previsão da propagação de fissuras ao longo da matriz rochosa é de grande importância, pois permite o melhor estímulo e, conseqüentemente, garante uma maior produtividade dos campos de exploração. Além disso, a determinação de um valor confiável para a pressão de quebra é essencial para evitar acidentes relacionados a instabilidades de solos e rochas. Neste trabalho, as análises desse tipo de problema são realizadas à luz dos princípios da MFEL.

A utilização de materiais com diferentes propriedades em sistemas estruturais não-homogêneos vem sendo cada vez mais frequente na atualidade. Isso ocorre, especialmente, nas indústrias mecânica, naval, aeronáutica, aeroespacial e automobilística, onde elevado desempenho mecânico e baixo peso são desejados. Portanto, modelos precisos para a previsão do colapso mecânico e a avaliação da integridade estrutural desses tipos de sistemas com presença de fissuras são necessários, o que justifica o desenvolvimento deste trabalho.

As soluções analíticas apresentadas na Mecânica da Fratura são restritas a um pequeno conjunto de problemas, com simplificadas condições de contorno, geometria e relação constitutiva material. Portanto, de forma a analisar mecanicamente problemas complexos envolvendo domínios não-homogêneos e multifissurados, métodos numéricos devem ser acoplados aos modelos descritos na Mecânica da Fratura.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), em especial a sua formulação dual (MECD), tem demonstrado ser uma excelente técnica numérica para a modelagem de diversos problemas de engenharia, especialmente quando se leva em conta a precisão dos resultados e a representação de gradientes. Devido a não obrigatoriedade de uma malha de domínio, as concentrações de tensão que surgem nas extremidades das fissuras são naturalmente e precisamente representadas por esse método. Portanto, análises de problemas de fratura linear,

não-linear e fadiga são reconhecidamente exemplos de aplicações em que o MEC apresenta ótimo desempenho. O método exige pouca discretização para a realização de uma simulação de propagação de fissuras com bons resultados. Além disso, devido à redução de dimensionalidade da malha possibilitada pelo MEC, o processo de remalhamento (*remeshing*) necessário para a representação do processo de crescimento das fissuras é significativamente facilitado, possibilitando a análise de propagação em geometrias estruturais complexas e mesmo em sistemas estruturais não-homogêneos. Por suas vantagens nesses tipos de problemas, o MEC é utilizado nas análises deste trabalho.

1.2 Objetivos e delimitações do estudo

O objetivo geral desta pesquisa é a análise mecânica envolvendo a fratura linear e não-linear em domínios não-homogêneos, multifissurados e compostos por materiais com propriedades isotrópicas. Para tanto, um modelo numérico baseado no Método dos Elementos de Contorno Dual, com a utilização de elementos isoparamétricos com qualquer grau de aproximação (elementos de alta ordem), é desenvolvido. Dessa forma, busca-se promover o enriquecimento do programa computacional do grupo de pesquisa em Mecânica da Fratura com utilização do MEC vinculado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos.

Nesse sentido, os seguintes objetivos específicos são estabelecidos:

- a) implementação de um código computacional com formulação baseada no Método dos Elementos de Contorno capaz de simular a propagação de múltiplas fissuras discretas em domínios não-homogêneos, incluindo a representação do fenômeno de coalescência;
- b) análise da propagação de fissuras em regime elástico-linear para tratar a fratura em materiais frágeis;
- c) análise de problemas de fraturamento hidráulico considerando fraturamento elástico-linear;
- d) realização de análises de fadiga para estruturas sujeitas a carregamentos cíclicos;
- e) realização de análise semelhante à do item (c), porém com a consideração de um modelo coesivo para tratar a fratura não-linear em materiais quase-frágeis.

Neste trabalho é avaliada a estabilidade à propagação de microfissuras definidas inicialmente nos modelos. Portanto, o fenômeno de iniciação de fissuras não é tratado. Além disso, as análises realizadas são estáticas e independentes do tempo.

As interfaces entre os diferentes materiais em uma estrutura não-homogênea são idealizadas com contato perfeito. Ademais, o fenômeno de delaminação não é considerado nessa região.

1.3 Inserção do trabalho na linha de pesquisa do SET/EESC/USP

Este trabalho dá continuidade aos estudos desenvolvidos pelo grupo de pesquisa em problemas de fratura com o emprego do Método dos Elementos de Contorno (MEC) vinculado ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP, que conta com a supervisão do Prof. Dr. Edson Denner Leonel. Essa linha de pesquisa tem como objetivo geral o desenvolvimento de formulações do MEC para a análise do comportamento mecânico de sólidos fissurados.

Um dos primeiros trabalhos realizados nesse sentido foi desenvolvido por Leonel (2006), que analisou a propagação de múltiplas fissuras em meios bidimensionais, isotrópicos e homogêneos à luz dos conceitos da MFEL. A formulação dual do MEC foi empregada, enquanto a ordem de aproximação adotada para os elementos foi linear.

Já no trabalho de Leonel (2009), a análise de corpos multifissurados foi estendida a materiais com comportamento quase-frágil e também a problemas de fadiga. Nesse trabalho também foram apresentadas as expressões dos operadores tangente para as formulações não-lineares que tratam os problemas de fratura elástico-linear e coesiva, problemas de contato e problemas de domínios enrijecidos. Além disso, o modelo mecânico de fadiga foi acoplado a algoritmos de confiabilidade e otimização para a definição dos custos mínimos associados à estrutura com base nas incertezas envolvidas.

Na sequência de trabalhos do grupo de pesquisa, Oliveira (2013) utilizou uma formulação alternativa do MEC baseada em dipolos juntamente com o operador tangente para tratar o problema não-linear de propagação de fissura isolada em materiais quase-frágeis.

Já Cordeiro (2015) empregou a técnica de sub-regiões para a análise de propagação de fissuras coesivas ao longo de interfaces entre materiais com propriedades isotrópicas ou anisotrópicas. O problema de fratura não-linear foi analisado tanto via operador constante quanto via operador tangente.

O presente trabalho visa expandir a aplicação do código computacional do grupo de pesquisa em problemas de fratura com a utilização do MEC. O modelo computacional inicialmente recebido continha a implementação: das formulações singular e hipersingular do MEC tanto para domínios isotrópicos quanto anisotrópicos considerando elementos de contorno isoparamétricos com qualquer ordem de aproximação (elementos de alta ordem); do

modelo de sub-regiões; e do modelo de fratura coesiva nas interfaces de sub-regiões de domínios não-homogêneos. A eficácia da implementação dessas formulações pode ser verificada nos trabalhos já citados. Neste estudo é implementado o esquema de propagação de múltiplas fissuras em domínios não-homogêneos, compostos por materiais isotrópicos e com a consideração de elementos de alta ordem. A formulação dual do MEC é utilizada em conjunto com modelos propostos pela MFEL e com o modelo de fissura fictícia para as análises de fratura linear e coesiva, respectivamente. Para a solução do problema de fratura não-linear é adotado o operador constante. Uma estratégia auto-adaptativa é empregada para a atualização das matrizes do sistema durante a fase de propagação. Um simples esquema de verificação do contato entre as faces da fissura é usado. Problemas de fraturamento hidráulico e de fadiga também são examinados. Toda a implementação computacional é realizada em linguagem de programação FORTRAN.

1.4 Estrutura do texto

Esta dissertação é organizada em sete capítulos, um apêndice e três anexos, que são descritos na sequência.

Neste Capítulo 1 é apresentada a introdução ao tema, bem como a justificativa para o desenvolvimento desta pesquisa. Em seguida, os objetivos gerais e específicos são definidos. Por fim, os trabalhos prévios desenvolvidos na linha de pesquisa do SET/EESC/USP, aos quais este estudo dá continuidade, são apresentados.

No Capítulo 2, as equações integrais singular e hipersingular do MEC são desenvolvidas. Tal equacionamento é empregado na formulação dual do MEC que é utilizada nas análises mecânicas dos problemas bidimensionais isotrópicos tratados neste trabalho. Detalhes são mostrados com relação à implementação computacional, incluindo o método de subtração de singularidade utilizado para a avaliação numérica das integrais impróprias. Na sequência, o processo para a determinação das tensões nos pontos de colocação no contorno e grandezas nos pontos internos é mostrado. Por fim, a técnica de sub-regiões é apresentada, a qual é aplicada na modelagem de estruturas compostas por diferentes materiais.

O Capítulo 3 é dedicado à exposição dos conceitos da MFEL. Alguns dos trabalhos fundamentais para o desenvolvimento da área são apresentados. A formulação da MFEL aplicada às análises de propagação de fissuras em materiais frágeis é mostrada, incluindo os métodos empregados na determinação dos FIT, no critério de propagação e na definição da direção de crescimento. Por fim, o modelo numérico implementado via MECD é descrito em

maiores detalhes. Alguns exemplos são analisados ao longo do capítulo para demonstrar a eficácia do código computacional desenvolvido.

O Capítulo 4 estende a aplicação da MFEL bidimensional à análise de problemas de fraturamento hidráulico. Nesses problemas é considerado que as faces das fissuras estão sujeitas a uma pressão de magnitude constante. As principais alterações em relação à metodologia mostrada no Capítulo 3 são apresentadas. O módulo computacional desenvolvido para tratar problemas dessa natureza também é descrito e sua competência é verificada a partir de exemplos analisados ao longo do capítulo.

O Capítulo 5 também utiliza os conceitos de fratura linear descritos no Capítulo 3, porém para tratar problemas de fadiga alto ciclo em estruturas. Com base nesses conceitos, é apresentado como se dá a determinação da taxa de crescimento das fissuras pela lei de Paris. Em seguida, uma metodologia para a estimativa da vida útil de estruturas sujeitas à fadiga é proposta. Por fim, o modelo numérico para simular o crescimento das descontinuidades solicitadas a carregamentos cíclicos é descrito. Exemplos são apresentados para ilustrar a aplicabilidade do modelo numérico desenvolvido.

Já o Capítulo 6 aborda problemas relacionado à Mecânica da Fratura Não-Linear, em especial aos envolvendo a propagação de fissuras em materiais quase-frágeis. As principais metodologias empregadas para tal fim encontradas na literatura são brevemente apresentadas. Ênfase é dada ao modelo de fissura fictícia, utilizado nas análises deste trabalho. A técnica de solução do problema não-linear via MEC por meio do operador constante é descrita. Em seguida, o critério de propagação, a definição da direção de crescimento e do incremento no comprimento das fissuras são apresentados. Por fim, a sequência de processamento do modelo computacional desenvolvido para tratar a fratura em materiais quase-frágeis é descrita. Alguns exemplos são apresentados ao longo do capítulo para mostrar a eficácia e as limitações do modelo numérico.

No capítulo 7 são apresentadas as considerações finais resultantes do trabalho desenvolvido e sugestões para estudos futuros.

No Apêndice I, os fluxogramas de cada um dos módulos do código computacional desenvolvido para a análise dos diferentes problemas tratados por este trabalho são apresentados. O Anexo A apresenta os fundamentos da Teoria da Elasticidade bidimensional utilizados como base tanto na formulação do MEC quanto na da Mecânica da Fratura. Já no Anexo B, as soluções fundamentais elastostáticas presentes nas formulações do MEC são desenvolvidas. Alguns conceitos e equacionamentos fundamentais da MFEL empregados neste trabalho são desenvolvidos no Anexo C.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico baseado em equações integrais sobre o contorno, obtidas a partir das equações diferenciais que regem o problema físico. Em problemas com elevados gradientes, como os que apresentam concentração de tensão, e em situações cujo domínio de análise tende ao infinito, o MEC é capaz de fornecer soluções precisas e de forma eficiente (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Outra vantagem do MEC é com relação à redução da dimensão de análise do problema, visto que o método requer que apenas o contorno do problema seja discretizado. Comparado ao Método dos Elementos Finitos (MEF), isso promove uma diminuição substancial no custo de geração de malha e resulta em menores sistemas de equações para solução numérica. Fundamentalmente, a relaxação sobre os requisitos de discretização se dá pela incorporação na formulação de informações sobre a solução da equação que governa o problema por meio de soluções fundamentais.

Por outro lado, a construção do sistema de equações do MEC é custosa computacionalmente pela necessidade da realização de integrações numéricas de núcleos singulares. Além disso, as matrizes resultantes são não-esparsas. Esses são alguns dos motivos que limitaram a aplicação e difusão do MEC. Todavia, a evolução computacional que se verificou nos últimos anos, em especial com relação às técnicas de paralelização, e a associação com outras técnicas numéricas, como método rápido de expansão em multipolos (GREENGARD; ROKHLIN, 1997; ROKHLIN, 1985) e a aproximação cruzada adaptativa (BEBENDORF, 2000; HACKBUSCH, 1999), permitiram a redução significativa do tempo despendido nas análises e tornaram a aplicação do MEC mais atrativa.

O MEC só é aplicável para problemas cuja solução fundamental é conhecida. Para problemas elastostáticos, a solução fundamental corresponde aos campos elásticos de um problema virtual de domínio infinito submetido a um impulso unitário e apresentando as mesmas propriedades do corpo real analisado. Para materiais isotrópicos esta solução foi desenvolvida por Sir William Thompson, conhecido como Lord Kelvin, sendo denominada solução fundamental de Kelvin.

O MEC foi desenvolvido a partir de formulações clássicas, das quais se destacam as obtidas pelos trabalhos de Fredholm (1903) e Mikhlin (1957) no campo da teoria potencial, e de Betti (1872), Kupradze (1965), Muskhelishvili (1953) e Somigliana (1885) em problemas da elasticidade. O desenvolvimento dessas formulações no contexto das equações integrais ao

longo do contorno foi decorrente, principalmente, dos trabalhos de Hess e Smith (1967), Jaswon (1963) e Massonnet (1965). Em todos esses trabalhos as equações integrais foram resolvidas pelo método indireto, no qual as incógnitas do problema não apresentam significado físico, mas são base para a obtenção das grandezas de interesse. O primeiro trabalho a utilizar a formulação direta para a solução de equações integrais em problemas planos da elasticidade foi o de Rizzo (1967), no qual o autor se baseou no teorema de reciprocidade de Betti (1872) e na identidade de Somigliana (1885). Rizzo (1967) obteve como solução os valores de deslocamento e forças de superfície, que são grandezas físicas de interesse do problema.

Para a análise de domínios não-homogêneos, Rizzo e Shippy (1968) desenvolveram a técnica de discretização em sub-regiões com base na imposição de condições de compatibilidade de deslocamento e de equilíbrio de tensões na interface de regiões adjacentes.

Já o trabalho de Lachat e Watson (1976) trouxe importantes avanços no MEC com a introdução de uma parametrização da geometria e dos campos de variáveis semelhante àquela utilizada no MEF (abordagem isoparamétrica). Essa metodologia facilitou a implementação computacional e propiciou a consolidação do MEC como uma eficiente técnica numérica.

Brebbia (1978) deduziu a formulação das equações integrais com o emprego da técnica dos resíduos ponderados. A partir disso, o MEC passou a ser combinado a outros métodos numéricos para solução de problemas de engenharia, o que permitiu a aplicação de diferentes métodos a subdomínios nos quais cada um é mais eficiente. Com a formulação em resíduos ponderados, diversas técnicas foram desenvolvidas para solução de diferentes problemas físicos a partir do MEC, ampliando seu o campo de aplicação.

Nos itens que seguem as principais formulações do MEC que são utilizadas neste trabalho são descritas. Maiores detalhes sobre o desenvolvimento do equacionamento podem ser obtidos em Brebbia e Dominguez (1992), Aliabadi (2002), ou ainda nas referências citadas ao longo do texto. Já um histórico do desenvolvimento da formulação clássica do MEC, com os principais trabalhos e autores, pode ser encontrado no trabalho de Cheng e Cheng (2005)

2.1 Formulações integrais de contorno

A aplicação do teorema da reciprocidade de Betti (1872) em um meio elástico-linear para dois problemas elastostáticos distintos, denominados de (1) e (2), resulta em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}^{(1)} \varepsilon_{jk}^{(2)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^{(2)} \varepsilon_{jk}^{(1)} d\Omega \quad (2.1)$$

onde Ω é o domínio do corpo analisado. A Eq. (2.1) representa a igualdade entre os trabalhos realizados pelos esforços internos de um problema sobre o campo de deformações do outro.

Na sequência da dedução da formulação integral do problema elástico-linear, o problema (1) será tomado como o problema real, do qual são desejados os valores dos campos incógnitos de deslocamento, deformação, tensão e/ou forças de superfície. No equacionamento que segue, tais campos não apresentam sobrescrito. Já o problema (2) será tomado como o problema fundamental, correspondente à aplicação de uma força concentrada unitária em um meio infinito composto pelo mesmo material do problema real. Os campos do problema fundamental para materiais isotrópicos são derivados no Anexo B utilizando os fundamentos da Elasticidade apresentados no Anexo A. Tais campos correspondem às soluções fundamentais e no texto possuem o sobrescrito (*). Utilizando essa simbologia, a Eq. (2.1) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega \quad (2.2)$$

Substituindo a relação entre deformações e deslocamentos (Eq. (A.25)) e aplicando o teorema de Cauchy (Eq. (A.4)) sobre a Eq. (2.2), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{j,k}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* u_{j,k} d\Omega \quad (2.3)$$

O primeiro termo na Eq. (2.3) pode ser integrado por partes, resultando em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{j,k}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{jk} n_k u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_j^* d\Omega \quad (2.4)$$

Aplicando a fórmula de Cauchy (Eq. (A.13)) e a equação de equilíbrio em termos do divergente do tensor de tensões (Eq. (A.9)), a Eq. (2.4) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{j,k}^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_j^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_j^* b_j d\Omega \quad (2.5)$$

Uma expressão semelhante é obtida a partir da integração por partes do segundo termo da Eq. (2.3). Substituindo essas relações na Eq. (2.3), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_j^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_j^* b_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega \quad (2.6)$$

Todavia, a componente b_j^* da força de volume do problema fundamental corresponde a um esforço concentrado e pode ser representada pela função delta de Dirac aplicada sobre um ponto arbitrário f , chamado de ponto fonte, ao longo da direção com versor e_j , ou seja:

$$b_j^* = \Delta^f e_j \quad (2.7)$$

As componentes de deslocamento da solução fundamental apresentam parcelas provenientes da aplicação do esforço concentrado tanto na direção e_1 quanto na direção e_2 , conforme mostrado na Figura 2.1a. Assim, as componentes do deslocamento no ponto c , denominado ponto campo e localizado a uma distância r do ponto f , podem ser expressas como:

$$u_1^* = u_{11}^* e_1 + u_{21}^* e_2 \quad (2.8)$$

$$u_2^* = u_{12}^* e_1 + u_{22}^* e_2 \quad (2.9)$$

A partir da Eq. (2.8) e da Eq. (2.9), a expressão para obtenção dos deslocamentos pode ser escrita em notação indicial como:

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i \quad (2.10)$$

sendo u_{ij}^* as componentes da solução fundamental em deslocamento para materiais isotrópicos determinadas no Anexo B e mostradas na Eq. (B.15).

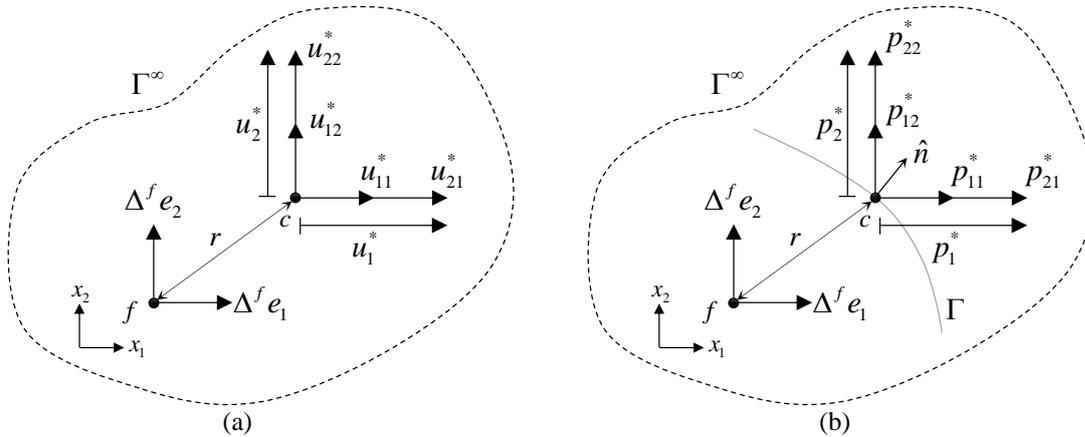


Figura 2.1 - Componentes das soluções fundamentais de (a) deslocamento e (b) força de superfície.

O mesmo é válido para as componentes da força de superfície (Figura 2.1b), que em notação indicial são expressas por:

$$p_j^* = p_{ij}^* e_i \quad (2.11)$$

com p_{ij}^* igual às componentes da solução fundamental em força de superfície para materiais isotrópicos, também deduzidas no Anexo B e mostradas pela Eq. (B.21).

Substituindo a Eq. (2.7), Eq. (2.10) e Eq. (2.11) na Eq. (2.6) e utilizando a propriedade da função delta de Dirac, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^* e_i p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* e_i b_j d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ij}^* e_i u_j d\Gamma + u_j^f e_j \quad (2.12)$$

onde u_j^f indica a componente de deslocamento do ponto fonte f na direção de e_j . O índice j no último termo do segundo membro da Eq. (2.12) é mudo e pode ser trocado por i . Além disso, os versores e_i não dependem da geometria da estrutura e, portanto, a Eq. (2.12) pode ser reescrita como:

$$\left(\int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right) e_i + \left(\int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \right) e_i = \left(\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma \right) e_i + \left(u_i^f \right) e_i \quad (2.13)$$

Agrupando os termos provenientes da aplicação da força concentrada na direção e_i , chega-se à seguinte relação:

$$u_i^f + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.14)$$

Essa expressão é conhecida como identidade de Somigliana, ou ainda, equação integral singular. Ela fornece as componentes de deslocamento u_i^f nos pontos do domínio desde que conhecidos os valores de deslocamento e força de superfície no contorno e as forças de volume ao longo do domínio do corpo.

Neste trabalho, as forças de volume são desprezadas no problema real. Assim, a integral de domínio presente na Eq. (2.14) se anula, resultando em:

$$u_i^f + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.15)$$

A Eq. (2.15) contém apenas integrais relacionadas ao contorno. Essa expressão é utilizada no decorrer deste trabalho para obtenção das grandezas na superfície do corpo a partir da aplicação do MEC. Ela é dita singular, pois as soluções fundamentais u_{ij}^* e p_{ij}^* são singulares quando r , a distância entre o ponto fonte f e os pontos campo c no contorno, tende a zero. A solução fundamental u_{ij}^* possui singularidade da ordem $o(\ln r)$, conhecida como singularidade fraca, enquanto a singularidade na solução fundamental p_{ij}^* é da ordem $o(r^{-1})$, conhecida como singularidade forte. A singularidade ocorre quando o ponto f é levado ao contorno para determinação dos deslocamentos nessa região. O item 2.2 mostra como as integrais da Eq. (2.15) devem ser avaliadas nesse caso.

Outro tipo de formulação integral do problema elastostático pode ser obtido a partir da variação da posição do ponto fonte. Em termos matemáticos, isso representa diferenciar a Eq. (2.15) em relação às coordenadas de tal ponto, resultando em:

$$\frac{\partial u_i^f}{\partial x_k^f} + \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^f} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^f} p_j d\Gamma \quad (2.16)$$

A derivação das soluções fundamentais resulta na definição de novas soluções, conforme demonstrado no Anexo B. Todavia, as novas soluções fundamentais são obtidas a partir da derivação em relação às coordenadas do ponto campo. Para utilização das mesmas expressões mostradas no Anexo B, a mudança em relação ao ponto de derivação deve ser feita. Como as soluções fundamentais dependem da distância r entre o ponto fonte e o ponto campo, as derivadas presentes na Eq. (2.16) podem ser expressas a partir da regra da cadeia como:

$$\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^f} = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k^f} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^f} = \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k^f} \quad (2.18)$$

Porém, tem-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_k^f} = -\frac{\partial r}{\partial x_k^c} \quad (2.19)$$

Dessa forma, a Eq. (2.18) e a Eq. (2.17) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^f} = -\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k^c} = -\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^c} = -u_{ij,k}^* \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^f} = -\frac{\partial p_{ij}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k^c} = -\frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^c} = -p_{ij,k}^* \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq. (2.20) e a Eq. (2.21) na Eq. (2.16), obtém-se:

$$u_{i,k}^f = \int_{\Gamma} -u_{ij,k}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} -p_{ij,k}^* u_j d\Gamma \quad (2.22)$$

Escrevendo a Eq. (2.22) para $u_{j,k}^f$ e $u_{k,j}^f$ e somando ambas as expressões, resulta:

$$u_{j,k}^f + u_{k,j}^f = \int_{\Gamma} -(u_{ji,k}^* + u_{ki,j}^*) p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} -(p_{ji,k}^* + p_{ki,j}^*) u_i d\Gamma \quad (2.23)$$

Utilizando a relação de deformação e deslocamento (Eq. (A.25)) sobre a Eq. (2.23), pode-se escrever a deformação no ponto fonte como:

$$\varepsilon_{jk}^f = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma} -(u_{ji,k}^* + u_{ki,j}^*) p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} -(p_{ji,k}^* + p_{ki,j}^*) u_i d\Gamma \right] \quad (2.24)$$

Aplicando a lei de Hooke generalizada para obtenção das tensões (Eq. (A.30)) e utilizando as deformações determinadas pela Eq. (2.24), obtém-se:

$$\sigma_{jk}^f = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma \quad (2.25)$$

onde D_{ijk}^* e S_{ijk}^* são as soluções fundamentais para materiais isotrópicos determinadas no Anexo B e mostradas, respectivamente, pelas equações (B.23) e (B.25).

A Eq. (2.25) é a identidade de Somigliana que permite a obtenção das componentes de tensão em pontos internos. Essa equação integral é denominada hipersingular, uma vez que apresenta núcleos com ordem de singularidade superior ao da equação singular mostrada pela Eq. (2.15). A solução fundamental D_{ijk}^* possui singularidade da ordem $o(r^{-1})$, dita singularidade forte, enquanto a singularidade na solução fundamental S_{ijk}^* é da ordem $o(r^{-2})$, denominada hipersingular.

O equacionamento até aqui apresentado é válido para o estado plano de deformação (EPD), uma vez que as soluções fundamentais são desenvolvidas considerando esse estado

plano. No caso de um problema com estado plano de tensão (EPT), as expressões das soluções fundamentais são as mesmas. Entretanto, o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν devem ser modificados da seguinte forma:

$$E^* = \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2} \quad (2.26)$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (2.27)$$

As equações integrais singular (Eq. (2.15)) e hipersingular (Eq. (2.25)) desenvolvidas são válidas apenas para pontos internos ao domínio do corpo. A partir delas é possível determinar os deslocamentos e tensões nos pontos internos, desde que conhecidos os valores de deslocamento e forças de superfície no contorno da estrutura. Dessa forma, inicialmente deve-se encontrar uma resposta para os pontos do contorno, o que pode ser feito via MEC a partir da colocação do ponto fonte sobre essa região. Nos itens 2.2, 2.3 e 2.4 é mostrado o que altera e nas equações integrais quando isso é realizado e como as grandezas de interesse podem ser avaliadas numericamente.

2.2 Formulações integrais para pontos no contorno

No item 2.1 foram obtidas as equações integrais singular e hipersingular que permitem a obtenção dos deslocamentos e das tensões nos pontos internos ao domínio. Todavia, quando o ponto fonte é levado ao contorno para obtenção dos deslocamentos e tensões nessa região, as integrais na Eq. (2.15) e na Eq. (2.25) se tornam impróprias, visto que as soluções fundamentais se tornam singulares à medida que o ponto fonte se aproxima dos pontos campo no contorno.

Para avaliar o que ocorre com as identidades de Somigliana quando o ponto fonte está localizado no contorno, realiza-se um processo limite. Para tanto, é adicionado um domínio com contorno circular de raio ε que envolve o ponto fonte (Figura 2.2). Dessa forma, tal ponto passa a ser interno ao domínio fictício, sendo válidas, portanto, a Eq. (2.15) e a Eq. (2.25). Em seguida, verifica-se o que ocorre com essas equações integrais quando ε tende a zero, ou seja, quando o ponto fonte passa a pertencer ao contorno real do corpo.

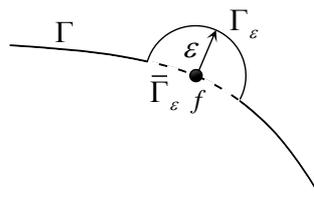


Figura 2.2 - Ponto fonte localizado no contorno da estrutura e envolto por um domínio circular fictício.

Com a adição do domínio fictício mostrado na Figura 2.2, o contorno do corpo passa a ser igual a $\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon$. Realizando o processo limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, a equação integral singular, mostrada pela Eq. (2.15), passa a ser escrita como:

$$u_i^f + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.28)$$

Serão analisadas isoladamente cada uma das integrais improprias na Eq. (2.28). Considerando a integral do segundo membro:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.29)$$

Aplicando o limite sobre a primeira integral do segundo membro da Eq. (2.29) e sabendo que a singularidade de u_{ij}^* para problemas bidimensionais  de $o(\ln r)$, tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.30)$$

onde o traço na integral do segundo membro indica a presença de um núcleo singular que deve ser avaliado no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC).

Passa-se agora  análise da segunda integral do segundo membro da Eq. (2.29). No limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, o domínio fictício passa a ser um ponto e, portanto, a força de superfície do problema real sobre o contorno fictício pode ser tomada como constante, o que resulta em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma = p_j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* d\Gamma \quad (2.31)$$

A soluço fundamental u_{ij}^* para o contorno fictício apresenta singularidade $o(\ln \varepsilon)$. Ja o diferencial do contorno $d\Gamma$ pode ser escrito como uma funo linear em relao a ε a partir da expressão do perímetro de um semicírculo. Dessa forma, o núcleo da integral do segundo membro da Eq. (2.31) apresenta o seguinte limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 \quad (2.32)$$

Consequentemente, a integral da Eq. (2.31) também se anula. Portanto, a partir da Eq. (2.29), Eq. (2.30), Eq. (2.31) e Eq. (2.32), a integral após a igualdade da Eq. (2.28) resulta em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.33)$$

Considerando agora a integral do primeiro membro da Eq. (2.28), pode-se escrever que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (2.34)$$

Aplicando o limite sobre a primeira integral do segundo termo de (3.34) e sabendo que a singularidade de p_{ij}^* para problemas bidimensionais  $o(r^{-1})$ (ver Eq. (B.21)), obtm-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (2.35)$$

Já a segunda integral do segundo termo da Eq. (2.34) apresenta um núcleo que não tende a zero quando aplicado o limite, visto que a singularidade de p_{ij}^* no contorno fictício é da ordem $o(\varepsilon^{-1})$ e $d\Gamma$ apresenta termo linear em ε . Realizando a integração sobre os termos de p_{ij}^* , aplicando o limite e considerando o ponto fonte situado em um contorno suave, tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma = -\frac{1}{2} u_j^f \delta_{ij} = -\frac{1}{2} u_i^f \quad (2.36)$$

Com a Eq. (2.35) e a Eq. (2.36), a integral na Eq. (2.34) pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma - \frac{1}{2} u_i^f \quad (2.37)$$

Substituindo a Eq. (2.33) e a Eq. (2.37) na Eq. (2.28), a identidade de Somigliana escrita para pontos fonte no contorno é expressa por:

$$c_{ij}^f u_j^f + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.38)$$

onde c_{ij}^f representa o termo livre e vale $\delta_{ij}/2$ para ponto fonte localizado em contorno suave. Os valores do termo livre para contornos com descontinuidade geométrica podem ser obtidos em Venturini (1988).

A condição de pontos fonte em contornos suaves é garantida com a utilização de elementos descontínuos ou semicontínuos em locais de descontinuidade do versor normal ao contorno (vértices). Essa estratégia é utilizada neste trabalho e, portanto, o termo livre na Eq. (2.38) será sempre tomado como $\delta_{ij}/2$. Maiores detalhes sobre os elementos descontínuos empregados são apresentados no item 2.5.

O mesmo processo limite pode ser realizado para a equação integral hipersingular (Eq. (2.25)) quando o ponto fonte é levado ao contorno. Nesse caso, as singularidades presentes nos núcleos contendo as soluções D_{ijk}^* e S_{ijk}^* são da ordem $o(r^{-1})$ e $o(r^{-2})$, respectivamente. Do processo limite, resulta:

$$c_{ij}^f \sigma_{ik}^f + \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (2.39)$$

onde $c_{ij}^f = \delta_{ij}/2$ para contornos suaves e o traço duplo indica que a integral cujo núcleo possui S_{ijk}^* deve ser calculada no sentido de Parte Finita de Hadamard (PFH).

Aplicando a fórmula de Cauchy (Eq. (A.13)) sobre a Eq. (2.39), obtém-se:

$$c_{ij}^f p_i^f + n_k^f \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = n_k^f \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (2.40)$$

A Eq. (2.40) representa a equação integral hipersingular escrita em termos de forças de superfície para pontos fonte localizados sobre o contorno.

2.3 Implementação numérica do MEC

As equações integrais para pontos fonte no contorno desenvolvidas no item 2.2 podem ser resolvidas numericamente por meio do MEC. Para tanto, inicialmente o contorno deve ser discretizado em um número finito de elementos de contorno, que no caso deste trabalho podem apresentar qualquer grau de aproximação polinomial. Considerando os pontos de colocação do contorno como pontos fonte e aplicando a equação singular ou hipersingular, o sistema de equações algébricas é obtido. Impondo os valores conhecidos das condições de contorno nos pontos de colocação, os valores incógnitos de deslocamentos e forças de superfície são determinados a partir da resolução do sistema linear.

Neste trabalho são utilizados elementos isoparamétricos. Assim, tanto a geometria quanto as grandezas de interesse são interpoladas ao longo do elemento a partir dos valores nodais e das funções de forma. Tais funções são compostas por polinômios de Lagrange, que são obtidos por:

$$\phi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (2.41)$$

onde ϕ_i é o polinômio de Lagrange de grau $n - 1$ associado ao nó i , ξ é a coordenada adimensional para um ponto qualquer dentro do elemento e ξ_i e ξ_j são, respectivamente, as coordenadas adimensionais dos nós i e j .

A Eq. (2.42) e a Eq. (2.43) mostram, em notação matricial, a expressão de interpolação dos deslocamentos e forças de superfície, respectivamente, para um ponto qualquer em um elemento k :

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi} \mathbf{u}^k \quad (2.42)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Phi} \mathbf{p}^k \quad (2.43)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{p} são matrizes coluna de dimensão 2×1 que contêm, respectivamente, os deslocamentos e as forças de superfície de um ponto qualquer do elemento k ; $\mathbf{\Phi}$ é a matriz de funções de forma do elemento k com dimensão $2 \times 2n$; \mathbf{u}^k e \mathbf{p}^k são os respectivos valores de deslocamento e forças de superfície para os nós do elemento k , com dimensão $2n \times 1$; e n é o número de nós do elemento considerado.

Para um ponto fonte i qualquer, a equação integral singular (Eq. (2.38)) é escrita em notação matricial como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (2.44)$$

onde \mathbf{P}^* e \mathbf{U}^* são matrizes 2x2 contendo as componentes das soluções fundamentais e \mathbf{C}^i é a matriz de termos livres, que para contornos suaves é dada por:

$$\mathbf{C}^i = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Considerando a discretização do contorno em $nelem$ elementos e aplicando a aproximação das grandezas nos pontos do contorno conforme a Eq. (2.42) e a Eq. (2.43), a Eq. (2.44) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^k \quad (2.46)$$

As integrais presentes na Eq. (2.46) podem ser calculadas com a utilização da quadratura de Gauss-Legendre. Para tanto, faz-se uma transformação do espaço real de integração Γ_k , representativo do domínio de cada um dos elementos, para um espaço adimensional ξ , que varia de -1 a 1 . Nesse caso, as coordenadas de qualquer ponto no interior de um elemento k podem ser obtidas a partir da interpolação das coordenadas nodais x_i^j por:

$$x_i(\xi) = \phi_j(\xi) x_i^j \quad (2.47)$$

ou em notação matricial:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^k \quad (2.48)$$

Com a mudança de espaço, a equação integral na Eq. (2.46) é reescrita como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{-1}^1 \mathbf{P}^* \Phi Jac d\xi \right\} \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{-1}^1 \mathbf{U}^* \Phi Jac d\xi \right\} \mathbf{p}^k \quad (2.49)$$

onde Jac é o jacobiano da transformação do espaço adimensional para o espaço real, dado por:

$$Jac = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2} \quad (2.50)$$

Definindo o número de pontos de integração utilizados para cada elemento como npg , a expressão da integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre para a equação integral singular fica dada por:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \sum_{l=1}^{npg} (\mathbf{P}^* \Phi)_l Jac_l \omega_l \right\} \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \sum_{l=1}^{npg} (\mathbf{U}^* \Phi)_l Jac_l \omega_l \right\} \mathbf{p}^k \quad (2.51)$$

A Eq. (2.51) é válida para um ponto de colocação particular i , e, uma vez integrada numericamente, fornece:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.52)$$

sendo N o número de pontos de colocação utilizados na discretização da estrutura e \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são as matrizes coluna 2×1 que armazenam, respectivamente, as componentes de deslocamento e de força de superfície do ponto de colocação j . Já $\bar{\mathbf{H}}^{ij}$ e \mathbf{G}^{ij} são matrizes de influência de um ponto de colocação i sobre outro ponto de colocação j e apresentam dimensão 2×2 .

Denominando:

$$\mathbf{H}^{ij} = \begin{cases} \bar{\mathbf{H}}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \bar{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{C}^i & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.53)$$

a Eq. (2.52) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.54)$$

A Eq. (2.54) representa as equações do sistema algébrico escritas para os pontos de colocação aos quais a formulação singular do MEC é aplicada.

O processo de construção do sistema de equações algébricas para os pontos fonte que apresentam a formulação hipersingular é feita de maneira análoga. Para esses pontos, o método numérico é empregado sobre a Eq. (2.40). Dessa forma, aplicando a integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{p}^i + \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \mathbf{n}^i \sum_{l=1}^{npg} (\mathbf{S}^* \Phi)_l Jac_l \omega_l \right\} \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \mathbf{n}^i \sum_{l=1}^{npg} (\mathbf{D}^* \Phi)_l Jac_l \omega_l \right\} \mathbf{p}^k \quad (2.55)$$

onde \mathbf{S}^* e \mathbf{D}^* são matrizes 4×2 que contêm as soluções fundamentais e \mathbf{n}^i é uma matriz 2×4 que contém os valores das componentes do versor normal ao contorno no ponto fonte i e é dada por:

$$\mathbf{n}^i = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

sendo cada uma das componentes obtidas por meio de:

$$n_1 = \frac{\phi_{j,\xi}(\xi) x_2^j}{Jac(\xi)} \quad (2.57)$$

$$n_2 = -\frac{\phi_{j,\xi}(\xi)x_1^j}{Jac(\xi)} \quad (2.58)$$

A integração numérica da Eq. (2.55) resulta em:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{p}^j + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{G}}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.59)$$

sendo \mathbf{H}^{ij} e $\bar{\mathbf{G}}^{ij}$ as matrizes que contêm os coeficientes de influência de determinado ponto de colocação i , que apresenta a formulação hipersingular, sobre os pontos de colocação j . O termo livre \mathbf{C}^i pode agora ser incorporado à matriz $\bar{\mathbf{G}}^{ij}$ aplicando as seguintes relações:

$$\mathbf{G}^{ij} = \begin{cases} \bar{\mathbf{G}}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \bar{\mathbf{G}}^{ij} - \mathbf{C}^i & \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.60)$$

Utilizando a Eq. (2.60), a Eq. (2.59) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.61)$$

A Eq. (2.61), válida para os pontos de colocação aos quais a formulação hipersingular é utilizada, é similar à Eq. (2.54) empregada para pontos de colocação com formulação singular. As diferenças existentes entre ambas são: a determinação dos coeficientes de influência (Eq. (2.51) para formulação singular e Eq. (2.55) para formulação hipersingular); e a matriz de inclusão do termo livre. Todavia, por apresentarem a mesma estrutura, ambas podem ser reunidas em um sistema de equações global, dado por:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} \quad (2.62)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes $2N \times 2N$ que armazenam os coeficientes de influência e \mathbf{u} e \mathbf{p} são matrizes coluna $2N \times 1$ que contêm as componentes de deslocamento e de força de superfície nos pontos de colocação do contorno. Cada linha do sistema representa uma equação para os graus de liberdade do problema, com coeficientes de influência dados em função de um determinado ponto de colocação e da consideração de uma direção. As equações são definidas a partir da aplicação da formulação singular ou hipersingular, dependendo de qual é escolhida para o ponto de colocação. Assim, pode-se observar que as matrizes envolvidas são não-esparsas e não-simétricas.

Aplicando as condições de contorno conhecidas em deslocamento e força de superfície e reorganizando o sistema mostrado na Eq. (2.62) a partir da troca de colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , pode-se obter o sistema linear para determinação dos valores incógnitos do contorno da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (2.63)$$

onde \mathbf{A} é a matriz composta pelas colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} contendo coeficientes dos valores incógnitos do contorno; \mathbf{x} é a matriz coluna que contém os valores incógnitos do contorno; e \mathbf{f} é a matriz coluna resultante da multiplicação da matriz de coeficientes de influência pelos respectivos valores conhecidos no contorno.

Cabe ressaltar que as expressões das integrações numéricas desenvolvidas neste item utilizando a quadratura de Gauss-Legendre não são válidas para a integração dos elementos que contêm o ponto fonte, visto que para tais elementos as integrais apresentam singularidade. Nesse caso, primeiramente deve ser realizada a regularização dos núcleos de integração para posterior avaliação numérica. Para tanto, o Método de Subtração de Singularidade, apresentado no item 2.4, pode ser utilizado.

2.4 Método de Subtração de Singularidade

A Eq. (2.51) e a Eq. (2.55), mostradas no item 2.3, apresentam as expressões numéricas para a avaliação das equações integrais singular e hipersingular do MEC, respectivamente. Entretanto, essas equações não são válidas para o elemento k que contém o ponto fonte i . Nesse caso, conforme discutido no item 2.2, as integrais envolvidas se tornam singulares e, portanto, devem ser avaliadas no sentido de VPC ou ainda PFH, a depender do tipo de singularidade envolvida.

Conforme Aliabadi (2002), uma forma de avaliar núcleos de integração $S(x)$ com algum tipo de singularidade consiste em subtrair e somar outro núcleo $S^*(x)$ com a mesma ordem de singularidade, dando origem a um núcleo regular e a um núcleo com integração analítica conhecida:

$$\underbrace{\int S(x)dx}_{\text{Singular}} = \underbrace{\int [S(x) - S^*(x)]dx}_{\text{Regular}} + \underbrace{\int S^*(x)dx}_{\substack{\text{Singular com} \\ \text{expressão analítica} \\ \text{conhecida}}} \quad (2.64)$$

Essa técnica é conhecida como Método de Subtração de Singularidade (MSS) e é utilizada neste trabalho para a avaliação das integrais impróprias envolvidas nas formulações integrais do MEC. O trabalho de Kzam (2009) apresenta a formulação necessária para a avaliação dos núcleos singulares e hipersingulares que surgem na formulação elastostática do MEC para meios isotrópicos. Na sequência do texto são desenvolvidas as expressões implementadas computacionalmente para a avaliação das integrais sobre o elemento que contém o ponto fonte.

Inicialmente considera-se um elemento auxiliar tangente ao elemento avaliado, sendo o ponto de tangência igual ao ponto fonte com coordenada adimensional ξ_0 (Figura 2.3). Esse elemento é utilizado para definir as funções S^* empregadas na regularização dos núcleos singulares.

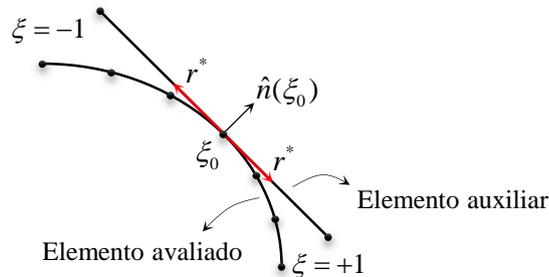


Figura 2.3 - Representação do elemento auxiliar utilizado para o MSS.

Sobre o elemento auxiliar é definida a variável r^* , que representa a distância de um ponto qualquer pertencente a esse elemento ao ponto fonte.

As coordenadas reais de um ponto com coordenada adimensional ξ situado sobre o elemento avaliado podem ser aproximadas a partir das funções de forma ϕ_j e das coordenadas nodais x_i^j como:

$$x_i(\xi) = \phi_j(\xi)x_i^j \quad (2.65)$$

Já as derivadas das coordenadas reais em relação à coordenada adimensional são dadas por:

$$x_{i,\xi}(\xi) = \phi_{j,\xi}(\xi)x_i^j \quad (2.66)$$

As coordenadas reais podem ser escritas a partir da expansão em série de Taylor em torno do ponto fonte por meio de:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n) \quad (2.67)$$

onde:

$$\varepsilon = \xi - \xi_0 \quad (2.68)$$

As coordenadas ao longo do elemento auxiliar podem ser determinadas tomando até o termo linear da expansão mostrada na Eq. (2.67), o que resulta em:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon \quad (2.69)$$

Já a expressão da variável r^* pode ser obtida a partir da sua definição como:

$$r^*(\xi_0, \xi) = \sqrt{(x_1(\xi) - x_1(\xi_0))^2 + (x_2(\xi) - x_2(\xi_0))^2} \quad (2.70)$$

Substituindo a expressão das coordenadas reais sobre o elemento auxiliar, mostrada pela Eq. (2.69), na Eq. (2.70) e desenvolvendo, obtém-se:

$$r^*(\xi_0, \xi) = |\varepsilon| \sqrt{(x_{1,\xi}(\xi_0))^2 + x_{2,\xi}(\xi_0)^2} \quad (2.71)$$

Substituindo a Eq. (2.66) na Eq. (2.71) e utilizando a definição do jacobiano da transformação do espaço adimensional para o espaço real (Eq. (2.50)), obtém-se:

$$r^*(\xi_0, \xi) = |\varepsilon| Jac(\xi_0) \quad (2.72)$$

2.4.1 Formulação singular

Neste item, o MSS é aplicado para a regularização das integrais da formulação singular do MEC (Eq.(2.38)). Inicialmente é analisada a integral com núcleo u_{ij}^* . Para a integração do elemento k que contém o ponto fonte, pode-se escrever que:

$$\int_{\Gamma_k} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \left[\int_{-1}^1 u_{ij}^*(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi \right] p_j^{km} \quad (2.73)$$

A solução fundamental u_{ij}^* é mostrada pela Eq. (B.15) e pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_{ij}^*(\xi_0, \xi) = u_1 \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} + u_2 r_{,i} r_{,j} \quad (2.74)$$

onde:

$$u_1 = -\frac{3-4\nu}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (2.75)$$

$$u_2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (2.76)$$

Substituindo a Eq. (2.74) na Eq. (2.73), a integral do segundo membro da Eq. (2.73) é dividida em duas parcelas conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u_{ij}^*(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi = & \underbrace{\int_{-1}^1 u_1 \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi}_{I_1} + \\ & + \underbrace{\int_{-1}^1 u_2 r_{,i} r_{,j} \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi}_{I_2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

A integral I_2 é regular e pode ser integrada numericamente via quadratura Gauss-Legendre. Já a integral I_1 possui singularidade $o(\ln r)$. Aplicando o MSS sobre essa integral, resulta:

$$I_1 = \int_{-1}^1 u_1 \delta_{ij} \left[\ln(r(\xi_0, \xi)) \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) - \ln(r^*(\xi_0, \xi)) \phi_m^*(\xi) Jac_k(\xi_0) \right] d\xi \\ + \int_{-1}^1 u_1 \ln(r^*(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} \phi_m^*(\xi) Jac_k(\xi_0) d\xi \quad (2.78)$$

sendo ϕ_m^* as funções de forma utilizadas para o elemento auxiliar, que podem ser escritas a partir de suas expansões em série de Taylor em torno do ponto fonte como:

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) + \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon + o(\varepsilon^n) \quad (2.79)$$

Para a subtração da singularidade $o(\ln r)$ basta considerar o termo constante das funções de forma. Assim:

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) \quad (2.80)$$

Substituindo a Eq. (2.80) na Eq. (2.78) e utilizando a Eq. (2.72) e a Eq. (2.68), obtém-se:

$$I_1 = \underbrace{\int_{-1}^1 u_1 \delta_{ij} \left[\ln(r(\xi_0, \xi)) \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) - \ln(Jac_k(\xi_0) |\xi - \xi_0|) \phi_m(\xi_0) Jac_k(\xi_0) \right] d\xi}_{I_3} \\ + u_1 \delta_{ij} \phi_m(\xi_0) Jac_k(\xi_0) \underbrace{\int_{-1}^1 \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\xi}_{VPC^{\ln r^*}} \quad (2.81)$$

A integral I_3 é regular e pode ser integrada via quadratura de Gauss-Legendre. Já o valor principal de Cauchy $VPC^{\ln r^*}$ pode ser avaliado como:

$$VPC^{\ln r^*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(Jac_k(\xi_0) \varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \ln(Jac_k(\xi_0) \varepsilon) d\varepsilon \right] \quad (2.82)$$

Realizando as integrações e aplicando o limite na Eq. (2.82), resulta que:

$$VPC^{\ln r^*} = (1 + \xi_0) \ln \left[|(1 + \xi_0) Jac_k(\xi_0)| \right] + (1 - \xi_0) \ln \left[|(1 - \xi_0) Jac_k(\xi_0)| \right] \\ - \left[(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0) \right] \quad (2.83)$$

A Eq. (2.83) é válida apenas para $|\xi_0| \neq 1$. No caso de elementos contínuos, ξ_0 assume o valor +1 para um elemento e -1 para o elemento adjacente. As singularidades para os casos $\xi_0 = +1$ e $\xi_0 = -1$ na Eq. (2.83) se anulam e, portanto, para esses valores de ξ_0 o $VPC^{\ln r^*}$ pode ser avaliado como:

$$VPC^{\ln r^*} = 2 \ln \left[|2 Jac_k(\xi_0)| \right] - 2 \quad (2.84)$$

Reunindo as expressões apresentadas, a equação para a integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre do elemento que contém o ponto fonte pode ser escrita na forma final:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} u_{ij}^* p_j d\Gamma = & \left[\sum_{n=1}^{npg} \left[u_1 \delta_{ij} \left[\ln(r(\xi_0, \xi_n)) \phi_m(\xi_n) Jac_k(\xi_n) - \ln(Jac_k(\xi_0) |\xi_n - \xi_0|) \phi_m(\xi_0) Jac_k(\xi_0) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + u_2 r_i r_j \phi_m(\xi_n) Jac_k(\xi_n) \right] \omega_n \right] + \\ & + u_1 \delta_{ij} \phi_m(\xi_0) Jac_k(\xi_0) VPC^{\ln r^*} \} p_j^{km} \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde $VPC^{\ln r^*}$ é dado pela Eq. (2.83) para $|\xi_0| \neq 1$ e pela Eq. (2.84) para $|\xi_0| = 1$.

Procedendo da mesma forma para a integral com núcleo p_{ij}^* , pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma_k} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \left[\int_{-1}^1 \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi \right] u_j^{km} \quad (2.86)$$

onde a solução fundamental, mostrada pela Eq. (B.21), foi decomposta em:

$$p_{ij}^*(\xi_0, \xi) = \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \quad (2.87)$$

sendo:

$$\bar{p}_{ij} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)(r_j n_i - r_i n_j) + r_n [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \right\} \quad (2.88)$$

Aplicando o MSS sobre a integral do segundo termo da Eq. (2.86) e utilizando a Eq. (2.72) e a Eq. (2.68):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) d\xi = & \int_{-1}^1 \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_k(\xi) - \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \phi_m(\xi_0) d\xi \\ & + \int_{-1}^1 \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \phi_m(\xi_0) d\xi \end{aligned} \quad (2.89)$$

com:

$$\bar{p}_{ij}(\xi_0) = -\frac{(1-2\nu)(r_j(\xi_0)n_i(\xi_0) - r_i(\xi_0)n_j(\xi_0))}{4\pi(1-\nu)} \quad (2.90)$$

uma vez que $r_n(\xi_0) = 0$, visto que o elemento auxiliar é tangente ao elemento de contorno integrado, com ponto de tangência na posição do ponto fonte.

A primeira integral do segundo membro da Eq.(2.89) é regular e pode ser avaliada a partir da quadratura de Gauss-Legendre. Já a segunda integral do segundo membro da Eq.(2.89) pode ser reescrita como:

$$\bar{p}_{ij}(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{1}{|\xi - \xi_0|} d\xi = \bar{p}_{ij}(\xi_0) \phi_m(\xi_0) VPC^{\varepsilon^{-1}} \quad (2.91)$$

O valor principal de Cauchy $VPC^{\varepsilon^{-1}}$ pode ser avaliado como:

$$VPC^{\varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right] \quad (2.92)$$

Resolvendo a Eq. (2.92) resulta:

$$VPC^{\varepsilon^{-1}} = -\ln[|1 + \xi_0|] + \ln[|1 - \xi_0|] \quad (2.93)$$

Como no caso anterior, a Eq. (2.93) só é válida para $|\xi_0| \neq 1$. Para elementos contínuos, o módulo de ξ_0 assume valor unitário e a Eq. (2.93) se torna singular. Nessa situação, o valor de $VPC^{\varepsilon^{-1}}$ é tomado como:

$$VPC^{\varepsilon^{-1}} = -\ln 2 \quad (2.94)$$

para $\xi_0 = +1$ e:

$$VPC^{\varepsilon^{-1}} = \ln 2 \quad (2.95)$$

para $\xi_0 = -1$.

Dessa forma, a expressão para integração numérica do elemento que contém o ponto fonte é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} p_{ij}^* u_j d\Gamma = & \\ \left\{ \left[\sum_{n=1}^{npg} \left[\frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0, \xi_n)}{r(\xi_0, \xi_n)} \phi_m(\xi_n) Jac_k(\xi_n) - \frac{\bar{p}_{ij}(\xi_0)}{|\xi_n - \xi_0|} \phi_m(\xi_0) \right] \omega_n \right] + \bar{p}_{ij}(\xi_0) \phi_m(\xi_0) VPC^{\varepsilon^{-1}} \right\} u_j^{km} \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde $VPC^{\varepsilon^{-1}}$ é obtido pela Eq. (2.93) para $|\xi_0| \neq 1$ e pela Eq. (2.94) e Eq. (2.95) para $\xi_0 = +1$ e $\xi_0 = -1$, respectivamente.

2.4.2 Formulação hipersingular

O MSS também pode ser aplicado para a regularização dos núcleos das integrais da equação integral hipersingular do MEC (Eq. (2.40)). Para o núcleo D_{ijk}^* , a integração do elemento l que contém o ponto fonte é escrita como:

$$n_k^f \int_{\Gamma_l} D_{ijk}^* p_i d\Gamma = \left[n_k(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{\bar{D}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_l(\xi) d\xi \right] p_i^{lm} \quad (2.97)$$

onde a solução fundamental, mostrada pela Eq. (B.23), foi decomposta em:

$$D_{ijk}^*(\xi_0, \xi) = \frac{\bar{D}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \quad (2.98)$$

sendo \bar{D}_{ijk} a parte não singular da solução fundamental D_{ijk}^* dada por:

$$\bar{D}_{ijk}(\xi_0, \xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.99)$$

A expressão mostrada pela Eq. (2.97) é semelhante à apresentada na Eq. (2.86). Assim, o processo de regularização desse núcleo é similar ao realizado para o núcleo com p_{ij}^* da equação integral singular. Portanto, a expressão utilizada para integração numérica do elemento que contém o ponto fonte é dada por:

$$n_k^f \int_{\Gamma_i} D_{ijk}^* p_i d\Gamma = \left\{ n_k(\xi_0) \left[\sum_{n=1}^{npg} \left[\frac{\bar{D}_{ijk}(\xi_0, \xi_n)}{r(\xi_0, \xi_n)} \phi_m(\xi_n) Jac_l(\xi_n) - \frac{\bar{D}_{ijk}(\xi_0)}{|\xi_n - \xi_0|} \phi_m(\xi_0) \right] \omega_n \right] + \right. \\ \left. + n_k(\xi_0) \bar{D}_{ijk}(\xi_0) \phi_m(\xi_0) VPC^{\varepsilon^{-1}} \right\} p_i^{lm} \quad (2.100)$$

onde $VPC^{\varepsilon^{-1}}$ é obtido pela Eq. (2.93) para $|\xi_0| \neq 1$ e pela Eq. (2.94) e Eq. (2.95) para $\xi_0 = +1$ e $\xi_0 = -1$, respectivamente.

Já a integral contendo S_{ijk}^* pode ser escrita para o elemento que contém o ponto fonte como:

$$n_k^f \int_{\Gamma_i} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = \underbrace{\left[n_k(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_l(\xi) d\xi \right]}_{I_1} u_i^{lm} \quad (2.101)$$

onde a solução fundamental mostrada pela Eq. (B.25) foi escrita como:

$$S_{ijk}^*(\xi_0, \xi) = \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r^2} \quad (2.102)$$

sendo \bar{S}_{ijk} a parte não singular da solução fundamental S_{ijk}^* .

A integral I_1 na Eq. (2.101) pode ser regularizada a partir do MSS como:

$$I_1 = n_k(\xi_0) \int_{-1}^1 \left[\frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_l(\xi) - \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{r^{*2}(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) Jac_l(\xi_0) \right] d\xi + \\ + n_k(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{r^{*2}(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) Jac_l(\xi_0) d\xi \quad (2.103)$$

A singularidade $o(r^{-2})$ é regularizada considerando até o termo linear da expansão das funções de forma no elemento auxiliar. Da Eq. (2.79):

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) + \phi_{m,\varepsilon}(\xi_0)\varepsilon \quad (2.104)$$

Utilizando a Eq. (2.104), Eq. (2.72) e a Eq. (2.68) a Eq. (2.103) é reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_1 = n_k(\xi_0) \int_{-1}^1 \left[\frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) Jac_l(\xi) - \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} \phi_m(\xi_0) + \right. \\
\left. - \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \right] d\xi + n_k(\xi_0) \mathfrak{f}_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} \phi_m(\xi_0) d\xi + \\
+ n_k(\xi_0) \mathfrak{f}_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} \phi_{m,\xi}(\xi_0) d\xi
\end{aligned} \quad (2.105)$$

A primeira integral do segundo membro da Eq. (2.105) é regular e pode ser avaliada com a quadratura de Gauss-Legendre. Já a segunda integral apresenta singularidade $o(\varepsilon^{-2})$ e deve ser avaliada no sentido da Parte Finita de Hadamard ($PFH^{\varepsilon^{-2}}$) conforme:

$$\frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_m(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} \mathfrak{f}_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi = \frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_m(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} PFH^{\varepsilon^{-2}} \quad (2.106)$$

sendo $PFH^{\varepsilon^{-2}}$ dada por:

$$PFH^{\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{1-\xi_0} - \frac{1}{1+\xi_0} \right] \quad (2.107)$$

O valor da $PFH^{\varepsilon^{-2}}$ é tomado apenas como a parte finita da última igualdade, o que resulta em:

$$PFH^{\varepsilon^{-2}} = -\frac{1}{1-\xi_0} - \frac{1}{1+\xi_0} \quad (2.108)$$

A soma das partes infinitas desprezadas no limite da Eq. (2.107) se anulam quando o sistema algébrico do MEC é construído a partir da integração de todos os elementos de contorno singulares, desde que o contorno do corpo analisado seja fechado.

Já a terceira integral da Eq. (2.105) possui singularidade $o(\varepsilon^{-1})$ e deve ser avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy ($VPC^{\varepsilon^{-1}}$) como:

$$\frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} \mathfrak{f}_{-1}^1 \frac{1}{|\xi - \xi_0|} d\xi = \frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} VPC^{\varepsilon^{-1}} \quad (2.109)$$

onde $VPC^{\varepsilon^{-1}}$ é o mesmo apresentado anteriormente.

Com as equações apresentadas, a expressão para a integração numérica do núcleo contendo S_{ijk}^* para o elemento l que contém o ponto fonte pode finalmente ser escrita como:

$$\begin{aligned}
n_k^f \oint_{\Gamma_l} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = & \left\{ n_k(\xi_0) \left[\sum_{n=1}^{npg} \left[\frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0, \xi_n)}{r^2(\xi_0, \xi_n)} \phi_m(\xi_n) Jac_l(\xi_n) - \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_m(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0) (\xi_n - \xi_0)^2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0) |\xi_n - \xi_0|} \right] \omega_n \right] + \frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_m(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} PFH^{\varepsilon^{-2}} + \right. \\
& \left. \frac{n_k(\xi_0) \bar{S}_{ijk}(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0)}{Jac_l(\xi_0)} VPC^{\varepsilon^{-1}} \right\} u_i^{lm} \quad (2.110)
\end{aligned}$$

A Eq. (2.110) exige que as derivadas das funções de forma sejam definidas e únicas nos pontos fonte. Dessa forma, não é possível a utilização de elementos contínuos para a formulação hipersingular, visto que a continuidade das derivadas das funções de forma entre elementos adjacentes não é garantida com a utilização dos polinômios de Lagrange. Assim, o emprego da formulação hipersingular deve ser acompanhado do uso de elementos descontínuos, uma vez que no interior do elemento é verificada a continuidade das derivadas das funções de aproximação.

Por fim, cabe ressaltar que cuidado especial deve ser tomado para a integração numérica via quadratura Gauss-Legendre da Eq. (2.85), Eq. (2.96), Eq. (2.100) e Eq. (2.110) de forma a garantir que nenhum ponto de integração coincida com o ponto fonte. Nesse caso, ter-se-ia r e $|\xi - \xi_0|$ nulos, o que causaria um erro numérico na montagem do sistema de equações algébricas.

2.5 Descontinuidades na malha de elementos de contorno

Os elementos de contorno podem ser classificados em relação à continuidade com os elementos adjacentes em três categorias: elementos contínuos; elementos descontínuos; e elementos semicontínuos.

Nos elementos contínuos, as posições dos pontos de colocação coincidem com as posições dos nós correspondentes (Figura 2.4a). Nessa situação, elementos adjacentes compartilham um ponto de colocação na extremidade comum. Já no caso dos elementos descontínuos, os pontos de colocação referentes aos nós de extremidade são deslocados para o interior do elemento, criando uma região de descontinuidade entre os campos dos elementos adjacentes (Figura 2.4b). Por fim, para os elementos semicontínuos, apenas um dos pontos de colocação de extremidade é descontínuo (Figura 2.4c).

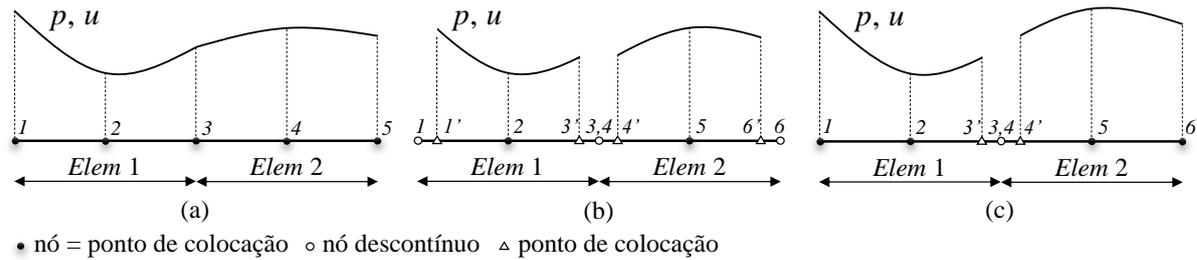


Figura 2.4 - Representação de elementos (a) contínuos, (b) descontínuos e (c) semicontínuos.

Neste trabalho, os pontos de descontinuidade da malha são definidos a partir da duplicação dos nós. Dessa forma, os pontos de colocação referentes a nós na mesma posição são deslocados para o interior dos elementos correspondentes. As novas coordenadas adimensionais dos pontos de colocação são determinadas a partir do acréscimo ou decréscimo, se correspondente ao primeiro ou último nó do elemento, respectivamente, de 25% da distância adimensional entre os nós do elemento $\xi_{\text{nós}}$ (Figura 2.5).

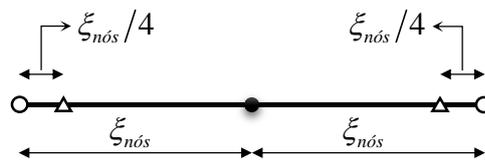


Figura 2.5 - Deslocamento dos pontos de colocação da extremidade em um elemento descontínuo.

Os pontos angulosos da estrutura (vértices) são locais nos quais o contorno não é suave. Neste trabalho, para evitar a utilização de termos livres c_{ij} diferentes de $\delta_{ij}/2$ nas formulações integrais do MEC, são utilizados elementos descontínuos ou semicontínuos nessas regiões. Desse modo, garante-se que os pontos de colocação estão sempre localizados em contornos suaves.

Outra situação de interesse de descontinuidade da malha é para pontos nos quais há transição do tipo prescrito de condição de contorno. Como os campos de deslocamento ou força de superfície podem ser descontínuos entre elementos descontínuos, é possível aplicar condições de contorno distintas entre elementos adjacentes.

Por fim, os elementos descontínuos são empregados nos locais para os quais a equação integral hipersingular do MEC é aplicada, uma vez que a formulação exige a utilização desse tipo de elemento (ver item 2.4.2). Desse modo, na análise de problemas de fratura via Método dos Elementos de Contorno Dual (item 2.6), as faces das descontinuidades são discretizadas com elementos descontínuos. Ademais, segundo Brebbia e Dominguez (1992), a utilização de elementos descontínuos em situações com vértices com concentrações de tensão, como as encontradas na Mecânica da Fratura, pode fornecer melhores respostas.

2.6 Método dos Elementos de Contorno Dual

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) tem fundamento no trabalho de Hong e Chen (1988) e é útil na geração de um sistema de equações não singular mesmo com pontos de colocação situados na mesma posição. Para tanto, as formulações singular e hipersingular do MEC são utilizadas separadamente para cada um dos pontos coincidentes. Essa situação ocorre, por exemplo, na discretização das faces de fissuras (Figura 2.6). Portela (1992) foi o primeiro a utilizar essa estratégia na análise de problemas de fratura.

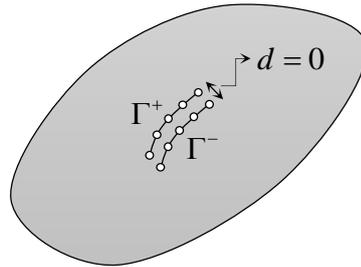


Figura 2.6 - Representação da discretização das faces de fissuras situadas na mesma posição.

Em casos com pontos de colocação na mesma posição, do processo limite abordado no item 2.2 surgem novos termos livres para as formulações integrais singular e hipersingular além daqueles apresentados pela Eq. (2.38) e pela Eq. (2.40), respectivamente. Esses novos termos livres estão relacionados a pontos de colocação em posições coincidentes aos avaliados. Dessa forma, garantindo os pontos de colocação em contornos suaves com a utilização de elementos descontínuos (item 2.5), a equação integral singular para aplicação do MECD a um ponto fonte f é escrita como:

$$\frac{u_i^f}{2} + \frac{u_i^{f^*}}{2} + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.111)$$

onde f^* é o ponto em posição coincidente a f .

Do ponto de vista de implementação numérica da equação integral singular, a Eq. (2.111) indica que um termo livre deve ser adicionado à matriz de influência do ponto fonte f sobre o ponto f^* , ou seja, à Eq. (2.53) deve ser adicionada a seguinte condição:

$$\mathbf{H}^{ij} = \bar{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{C}^i \quad \text{se } i = f \text{ e } f^* = j, \text{ com } f \equiv f^* \quad (2.112)$$

sendo \mathbf{C}^i dado pela Eq. (2.45).

Já a equação integral hipersingular é escrita para utilização do MECD como:

$$\frac{p_j^f}{2} - \frac{p_j^{f^*}}{2} + n_k^f \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = n_k^f \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (2.113)$$

Assim, a seguinte condição deve ser adicionada à Eq. (2.60) para considerar o novo termo livre da Eq. (2.113):

$$\mathbf{G}^{ij} = \bar{\mathbf{G}}^{ij} + \mathbf{C}^i \quad \text{se } i = f \text{ e } f^* = j, \text{ com } f \equiv f^* \quad (2.114)$$

2.7 Tensões no contorno

As tensões nos pontos de colocação no contorno são determinadas a partir das componentes das forças de superfície e da aproximação dos deslocamentos ao longo do elemento correspondente, como é mostrado na sequência.

A Figura 2.7a apresenta as componentes da força de superfície em relação ao sistema de coordenadas cartesiano global, obtidas a partir da solução do problema mecânico via MEC. Essas componentes podem ser rotacionadas para o sistema local, como representado pela Figura 2.7b, por meio das seguintes relações:

$$p'_1 = p_1 n_1 + p_2 n_2 \quad (2.115)$$

$$p'_2 = p_1 t_1 + p_2 t_2 \quad (2.116)$$

onde n_i e t_i são os cossenos diretores dos versores normal \hat{n} e tangente \hat{t} , respectivamente, sendo:

$$t_1 = -n_2 \quad (2.117)$$

$$t_2 = n_1 \quad (2.118)$$

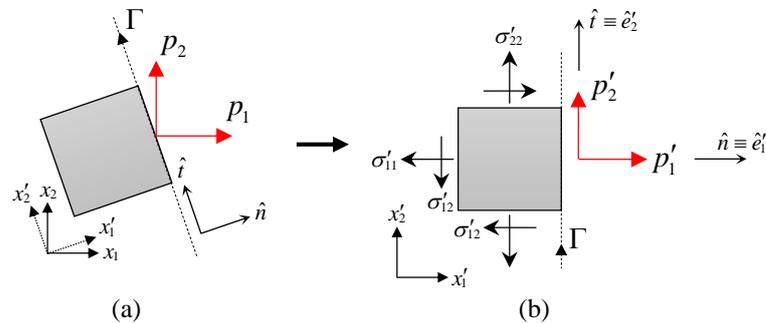


Figura 2.7 - Representação das componentes da força de superfície em um ponto de colocação em relação ao sistema de coordenadas (a) global e (b) local.

A Eq. (2.115) e a Eq. (2.116) podem ser reunidas em notação matricial aberta como:

$$\begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (2.119)$$

onde a matriz:

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

é a transposta da matriz de rotação \mathbf{R} .

As componentes da força de superfície no sistema de coordenadas local podem ser relacionadas às componentes de tensão mostradas na Figura 2.7b por meio da fórmula de

Cauchy (Eq. (A.13)). Sabendo que no referencial local o versor normal à superfície possui componente unitária na direção x'_1 , obtém-se:

$$p'_1 = \sigma'_{11} \quad (2.121)$$

$$p'_2 = \sigma'_{12} \quad (2.122)$$

Já a componente de tensão σ'_{22} pode ser determinada a partir das componentes de deslocamento obtidas a partir da solução do sistema de equações. As componentes de deslocamento u_i também podem ser rotacionadas para o sistema local por meio da Eq. (2.119) para determinação das componentes u'_i . Realizando essa rotação para todos os pontos de colocação situados no mesmo elemento que o ponto de colocação avaliado, a componente u'_2 pode ser aproximada a partir das funções de forma do elemento por meio de:

$$u'_2(\xi) = \phi_j(\xi)u'^j_2 \quad (2.123)$$

Assim, a deformação normal na direção x'_2 pode ser obtida a partir da derivação da Eq. (2.123), conforme mostrado na Eq. (A.25), resultando em:

$$\varepsilon'_{22}(\xi) = u'_{2,2}(\xi) = \phi_{j,2}(\xi)u'^j_2 \quad (2.124)$$

Substituindo o valor de ξ correspondente ao ponto de colocação avaliado na Eq. (2.124), a deformação normal na direção x'_2 fica determinada.

Com o valor de ε'_{22} , a componente de tensão σ'_{22} pode ser calculada a partir da lei de Hooke generalizada (Eq. (A.28)):

$$\varepsilon'_{22} = \frac{1}{2\mu} \sigma'_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}) \quad (2.125)$$

No caso de um EPD, a tensão σ'_{33} é dada pela Eq. (A.32). Substituindo essa expressão na Eq. (2.125) e isolando σ'_{22} , obtém-se:

$$\sigma'_{22} = \frac{1}{1-\nu} (2\mu \varepsilon'_{22} + \nu \sigma'_{11}) \quad (2.126)$$

Já no caso de um EPT, $\sigma'_{33} = 0$. Assim, a Eq. (2.125) resulta em:

$$\sigma'_{22} = E\varepsilon'_{22} + \nu\sigma'_{11} \quad (2.127)$$

Com isso, a componente σ'_{22} é obtida a partir da Eq. (2.126) ou da Eq. (2.127) no caso de um EPD ou de um EPT, respectivamente.

Por fim, as componentes de tensão no sistema de coordenadas global podem ser obtidas a partir da rotação do tensor de tensões no sistema local a partir de:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & t_1 \\ n_2 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} \\ \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

ou ainda:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{R}^T \quad (2.129)$$

2.8 Grandezas em pontos internos

Após a determinação dos valores das grandezas no contorno via MEC, os deslocamentos e as tensões nos pontos internos podem ser obtidos, respectivamente, pela aplicação das identidades de Somigliana apresentadas na Eq. (2.15) e na Eq. (2.25). Para tanto, os pontos internos são admitidos como novos pontos fonte e as integrais no contorno são avaliadas numericamente para a determinação do sistema de equações que fornece as grandezas internas. Cabe ressaltar que, como nesse caso o ponto fonte não pertence ao contorno, as integrais na Eq. (2.15) e na Eq. (2.25) não são singulares em nenhum elemento. Portanto, as integrações podem ser realizadas utilizando a quadratura de Gauss-Legendre padrão, sem necessidade de utilização do MSS.

Com a mesma discretização e aproximação dos elementos utilizados na determinação das grandezas incógnitas do contorno, os deslocamentos em um ponto fonte interno qualquer $\hat{f}in$ podem ser expressos, por meio da notação matricial, por:

$$\mathbf{u}^{\hat{f}in} = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{U}^* \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \right\} \mathbf{p}^k - \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{P}^* \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \right\} \mathbf{u}^k \quad (2.130)$$

onde $\mathbf{u}^{\hat{f}in}$ é o vetor coluna 2x1 contendo as componentes de deslocamento no plano do ponto fonte interno $\hat{f}in$.

Já as tensões são determinadas por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\hat{f}in} = \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{D}^* \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \right\} \mathbf{p}^k - \sum_{k=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_k} \mathbf{S}^* \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \right\} \mathbf{u}^k \quad (2.131)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{\hat{f}in}$ é o vetor coluna 4x1 contendo as componentes de tensão no plano do ponto fonte interno $\hat{f}in$.

Realizando a integração numérica sobre os elementos e alocando a contribuição sobre cada um dos graus de liberdade, a Eq. (2.130) é reescrita como:

$$\mathbf{u}^{\hat{f}in} = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{\hat{f}in,j} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{\hat{f}in,j} \mathbf{u}^j \quad (2.132)$$

onde $\mathbf{G}^{\hat{f}in,j}$ e $\mathbf{H}^{\hat{f}in,j}$ são matrizes 2x2 determinadas a partir da integração numérica dos núcleos contendo \mathbf{U}^* e \mathbf{P}^* , respectivamente.

Procedendo da mesma forma para a Eq. (2.131), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{fin} = \sum_{j=1}^N \mathbf{D}^{fin,j} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \mathbf{S}^{fin,j} \mathbf{u}^j \quad (2.133)$$

onde $\mathbf{D}^{fin,j}$ e $\mathbf{S}^{fin,j}$ são matrizes 4x2 determinadas a partir da integração numérica dos núcleos contendo \mathbf{D}^* e \mathbf{S}^* , respectivamente.

As deformações dos pontos internos podem ser obtidas a partir das componentes de tensão com a utilização da lei de Hooke generalizada (Eq. (A.28)). Já no caso de um estado plano de deformação, a componente de tensão σ_{33} pode ser determinada a partir da aplicação da Eq. (A.32).

2.9 Técnica de sub-regiões

A técnica de sub-regiões, também conhecida como técnica multirregiões, foi inicialmente proposta por Rizzo e Shippy (1968) para a discretização de meios compostos por diferentes materiais. A Figura 2.8 mostra um domínio não-homogêneo discretizado em subdomínios homogêneos conforme a técnica. Nas interfaces há a definição de elementos pares, que ocupam a mesma posição, porém cada um pertence a um dos subdomínios.

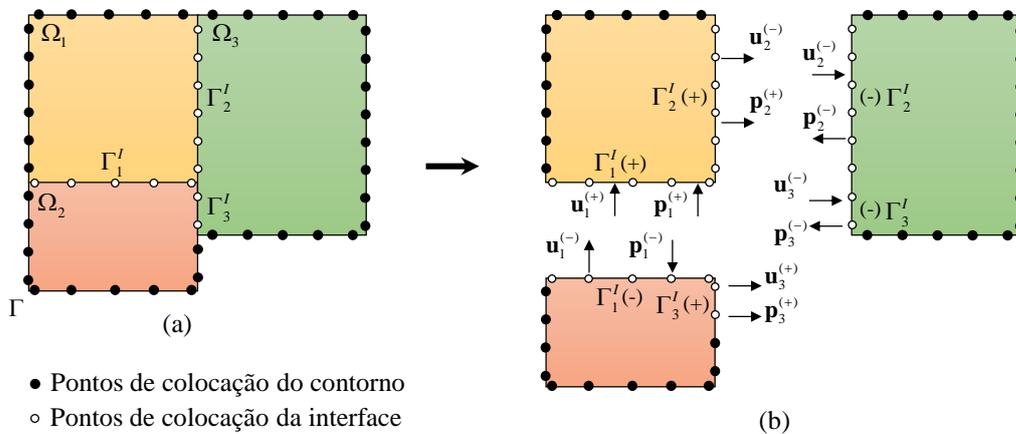


Figura 2.8 - Discretização de um (a) domínio não homogêneo em (b) subdomínios.

Cada sub-região pode ser analisada isoladamente, conforme mostrado pela Figura 2.8b. Dessa forma, é possível aplicar a equação singular e/ou hipersingular para obter as matrizes \mathbf{H}_i e \mathbf{G}_i para cada subdomínio $i = 1, \dots, N_{sr}$, sendo N_{sr} o número total de sub-regiões no qual a estrutura foi discretizada. Assim, é possível escrever o seguinte sistema linear global de equações:

$$\sum_{i=1}^{N_{sr}} \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{N_{sr}} \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i \quad (2.134)$$

onde \mathbf{u}_i e \mathbf{p}_i contêm, respectivamente, os deslocamentos e as forças de superfície dos pontos de colocação de cada sub-região i .

A Eq. (2.134) pode ser desmembrada considerando separadamente os pontos de colocação pertencentes ao contorno e os pontos de colocação pertencentes às interfaces. Por sua vez, os pontos de colocação de interfaces podem ser divididos em dois grupos, um denominado pelo índice (+) e outro pelo índice (-), cada um pertencente a um dos elementos pares situados em diferentes subdomínios (ver Figura 2.8b). Desse modo, considerando o número de pontos de colocação de contorno igual a N_c , o número de interfaces igual a NI e o número de pontos de colocação da interface k igual N_i^k , a Eq. (2.134) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{H}_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{NI} \left(\sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{H}_n^{(+)} \mathbf{u}_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{H}_n^{(-)} \mathbf{u}_n^{(-)} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{G}_j \mathbf{p}_j + \sum_{k=1}^{NI} \left(\sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{G}_n^{(+)} \mathbf{p}_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{G}_n^{(-)} \mathbf{p}_n^{(-)} \right) \end{aligned} \quad (2.135)$$

sendo $\mathbf{u}_n^{(+)}$ e $\mathbf{p}_n^{(+)}$ os vetores de deslocamento e de forças de superfície dos pontos de colocação em uma das faces da interface, denominada como (+), e $\mathbf{u}_n^{(-)}$ e $\mathbf{p}_n^{(-)}$ os vetores de forças e deslocamento dos pontos de colocação pertencentes à interface (-).

Impondo as condições de contorno conhecidas para os pontos de colocação do contorno e realizando a troca de colunas entre as matrizes \mathbf{H}_j e \mathbf{G}_j da mesma forma como feito para a obtenção da Eq. (2.63), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j + \sum_{k=1}^{NI} \left(\sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{H}_n^{(+)} \mathbf{u}_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{H}_n^{(-)} \mathbf{u}_n^{(-)} \right) = \mathbf{f} + \sum_{k=1}^{NI} \left(\sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{G}_n^{(+)} \mathbf{p}_n^{(+)} + \sum_{n=1}^{N_i^k/2} \mathbf{G}_n^{(-)} \mathbf{p}_n^{(-)} \right) \quad (2.136)$$

Todavia, o sistema resultante da Eq. (2.136) é indeterminado se aplicadas apenas as condições de contorno conhecidas. Para que uma solução seja obtida, as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de forças internas entre os pontos de colocação das interfaces devem ser utilizadas. Neste trabalho, as interfaces são consideradas com contato perfeito e, portanto, as relações de compatibilidade são expressas por:

$$\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{u}^{(-)} \quad (2.137)$$

$$\mathbf{p}^{(+)} + \mathbf{p}^{(-)} = \mathbf{0} \quad (2.138)$$

Impondo a Eq. (2.137) e a Eq. (2.138) sobre a Eq. (2.136) e reorganizando, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{N_c} \mathbf{A}_j \mathbf{x}_j + \sum_{k=1}^{NI} \left[\sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{H}_n^{(+)} + \mathbf{H}_n^{(-)}) \mathbf{u}_n^{(+)} \right] - \sum_{k=1}^{NI} \left[\sum_{n=1}^{N_i^k/2} (\mathbf{G}_n^{(+)} - \mathbf{G}_n^{(-)}) \mathbf{p}_n^{(+)} \right] = \mathbf{f} \quad (2.139)$$

O sistema na Eq. (2.139) pode então ser resolvido e os valores incógnitos do contorno e da interface (+) podem ser determinados. Já os valores das grandezas para a interface (-) podem ser obtidos a partir da aplicação das relações de compatibilidade mostradas pela Eq. (2.137) e pela Eq. (2.138).

3 FRATURA EM MATERIAIS FRÁGEIS

Em materiais com comportamento frágil, a formação de novas superfícies de fissura se dá sem a dissipação significativa de energia relacionada à evolução de deformações plásticas. Nesses materiais, a zona de processos inelásticos (ZPI) presente na ponta apresenta dimensão desprezível em relação ao tamanho da descontinuidade e às demais dimensões características da estrutura. Desse modo, a maior parte do corpo apresenta comportamento elástico, inclusive em regiões próximas às pontas e fora da ZPI. Esse tipo de fraturamento é analisado à luz dos conceitos da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL). Os primeiros estudos para avaliar a influência de fissuras sobre a resistência das estruturas se inserem nesse campo.

Segundo Broek (1982), a fratura em materiais frágeis comumente ocorre pelo mecanismo de clivagem, no qual ocorre separação direta das ligações ao longo de planos cristalográficos com pequeno desenvolvimento de deformações plásticas. Exemplos de materiais com esse comportamento são alguns materiais cerâmicos, como o vidro, e certos tipos de aços com alto teor de carbono. Além disso, materiais com fraturamento tipicamente dúctil podem passar a ter comportamento frágil a depender da temperatura ou da taxa de carregamentos às quais ele é exposto. O aço, por exemplo, apresenta uma temperatura de transição abaixo da qual passa a ter comportamento frágil. Essa mudança de regime de fraturamento inicialmente observada por Constance Tipper e foi apontada como uma das causas para os acidentes ocorridos com os navios da frota Liberty durante a Segunda Guerra Mundial.

O crescimento de fissuras em meios frágeis usualmente se dá de forma instável, ou seja, uma vez iniciada, a propagação tende a continuar mesmo sem incremento no carregamento externo. Além disso, pelas deformações plásticas estarem restritas a uma pequena região nas proximidades das pontas, existem poucos indícios de uma ruptura iminente. Essas características favorecem um tipo de colapso abrupto e inesperado, que foi verificado em diversos acidentes estruturais por fratura ao longo da história.

No caso de materiais frágeis, como a ZPI existente na ponta das fissuras apresenta pequena dimensão, os campos de tensão previstos pela MFEL podem ser utilizados para estimar a sollicitação nas pontas. Esses campos são associados aos chamados fatores de intensidade de tensão (FIT), que por sua vez são utilizados para a verificação da estabilidade à propagação. Os FIT estão associados aos três modos básicos de sollicitação da fissura, que são caracterizados pelos deslocamentos relativos entre as faces (Figura 3.1). Toda sollicitação na ponta de uma descontinuidade pode ser decomposta em uma combinação desses modos (IRWIN,1960).

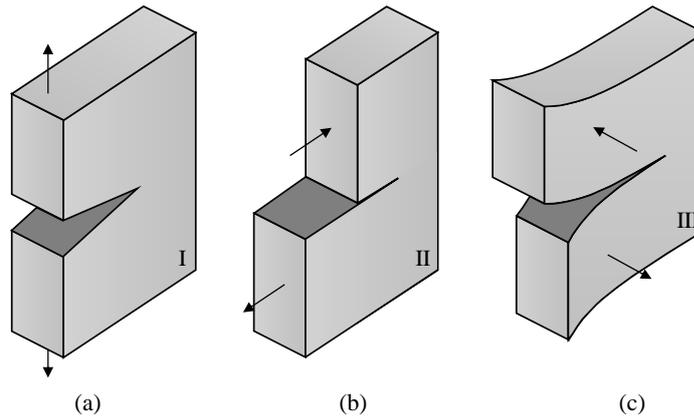


Figura 3.1 - Modos básicos de sollicitação de uma fissura: (a) modo I; (b) modo II; (c) modo III.

- Modo I – Modo de abertura: As faces da fissura se separam simetricamente em relação ao plano por elas formado antes da mudança de configuração. Nesse caso, a sollicitação é normal ao plano da fissura, tendendo a abri-la.
- Modo II – Modo de deslizamento: Causado por uma ação cisalhante atuando no plano da fissura, provocando um deslocamento relativo ao longo do comprimento da fissura.
- Modo III – Modo de rasgamento: Causado por uma ação cisalhante atuando fora do plano da fissura, provocando um deslocamento relativo perpendicular ao eixo da fissura.

Neste trabalho serão tratados apenas problemas planos e, portanto, no decorrer do texto apenas os modos I e II serão abordados.

Na sequência deste capítulo são mostrados os primeiros trabalhos, ainda no campo da Teoria da Elasticidade, que evidenciaram os efeitos destrutivos das descontinuidades materiais. Em seguida, alguns dos principais estudos que fundamentaram os conceitos da MFEL são abordados. As deduções das relações consideradas mais relevantes são mostradas no Anexo C, de modo a evidenciar as hipóteses adotadas na teoria da MFEL. Posteriormente, os modelos e o esquema de propagação utilizados neste trabalho para solução dos problemas de fratura são apresentados. Exemplos de verificação e de aplicação são realizados para ilustrar a robustez do código computacional desenvolvido.

3.1 Estudos no âmbito da Teoria da Elasticidade

O primeiro trabalho que avaliou analiticamente o efeito de descontinuidade material em estruturas se deve a Kirsch (1898). No âmbito da Teoria da Elasticidade (ver Anexo A), Kirsch (1898) propôs uma função de tensão que descreve o efeito de orifícios circulares na distribuição de tensões em chapas de dimensões infinitas submetidas a uma tração uniforme σ

em uma dada direção (Figura 3.2a). Os resultados obtidos mostraram que nas extremidades do diâmetro perpendicular à direção de carregamento a tensão máxima no material é três vezes superior ao valor da tensão aplicada. O fator de amplificação, dado pela razão entre a tensão máxima e a tração aplicada, foi denominado como Fator de Concentração de Tensão e é comumente utilizado no dimensionamento de máquinas submetidas a diferentes tipos de carregamento (SANFORD, 2003).

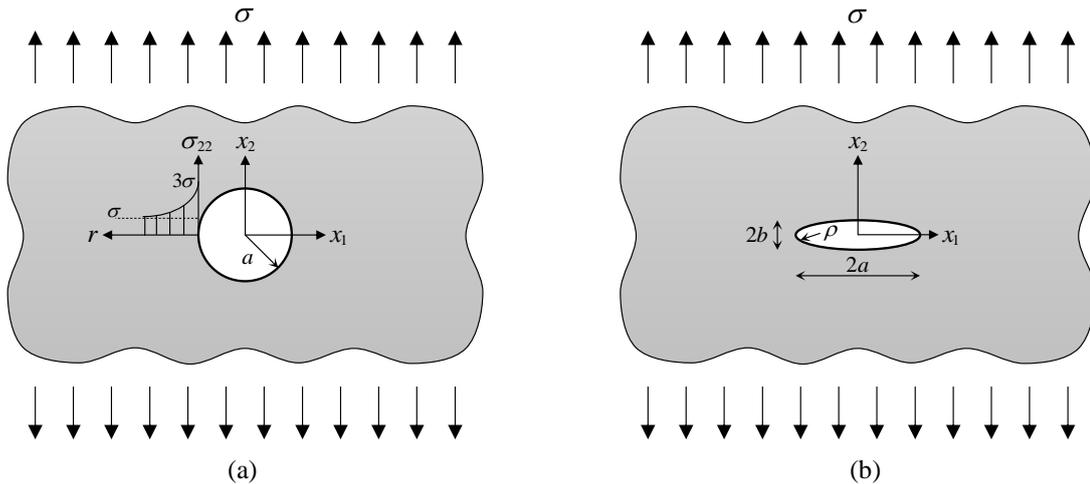


Figura 3.2 - Problemas analisados pela Teoria da Elasticidade: (a) meio infinito com abertura circular e (b) meio infinito com abertura elíptica.

Algum tempo depois, Inglis (1913), com a utilização de coordenadas curvilíneas, obteve expressões para a distribuição de tensões no entorno de furos elípticos em chapas de dimensões infinitas submetidas a tração uniforme σ . Para o caso em que a direção do esforço aplicado é perpendicular ao eixo maior da elipse (Figura 3.2b), Inglis (1913) mostrou que a tensão na ponta σ_p é obtida por:

$$\sigma_p = \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (3.1)$$

onde $\rho = b^2/a$ é o raio de curvatura na ponta e a e b são, respectivamente, o semieixo maior e o semieixo menor da elipse.

Nas situações nas quais o raio de curvatura assume valores muito reduzidos, ou seja, quando $a \gg b$, a elipse se degenera em uma fissura reta. Nesses casos, a tensão em sua extremidade atinge altas magnitudes (ver Eq. (3.1)), o suficiente para causar a degradação do material. Baseado nisso, Inglis (1913) justificou a influência destrutiva de fissuras nos materiais, especialmente naqueles com comportamento frágil.

3.2 Balanço de energia de Griffith

O resultado obtido por Inglis (1913) foi recebido com questionamentos, uma vez que a teoria proposta indicava que materiais que apresentassem fissuras com ponta aguda falhariam com a aplicação de cargas infinitesimais. Esse paradoxo motivou Griffith (1921) a publicar uma teoria de crescimento das descontinuidades materiais baseada em um balanço de energia em contraposição à análise local de tensão na ponta.

Seja o corpo elástico com volume V , área superficial S e com uma fissura com extensão s mostrada na Figura 3.3a. Considera-se um conjunto de forças externas p atuando sobre o corpo, de forma que ocorra a propagação da fissura de uma extensão Δs e a mudança de configuração conforme mostrado na Figura 3.3b. Nessa situação, o trabalho realizado pelas forças externas introduz certa quantidade de energia $\Delta\Omega$ no sistema. Uma parcela dessa energia é convertida em energia de deformação do corpo ΔU , enquanto outra, ΔF , é utilizada na formação das novas faces da descontinuidade, ou seja:

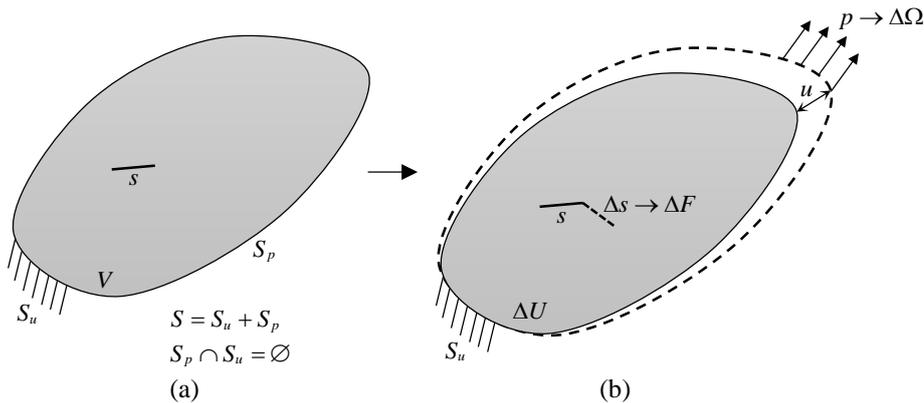


Figura 3.3 - Representação de (a) um corpo elástico contendo uma fissura de comprimento s e (b) evolução da fissura com ação do carregamento externo.

$$\Delta\Omega = \Delta U + \Delta F \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) pode ser reescrita como:

$$-(\Delta U - \Delta\Omega) = \Delta F \quad (3.3)$$

O termo entre parênteses no primeiro membro é definido como a variação da energia potencial total do corpo $\Delta\Pi$:

$$\Delta\Pi = \Delta U - \Delta\Omega \quad (3.4)$$

Admitindo um incremento infinitesimal $\Delta s \rightarrow 0$ na extensão da fissura e utilizando as expressões apresentadas na Eq. (3.3) e na Eq. (3.4), a relação diferencial que representa o crescimento estável da fissura é dada por:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} -\frac{\Delta \Pi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} \rightarrow -\frac{d\Pi}{ds} = \frac{dF}{ds} \quad (3.5)$$

ou ainda:

$$G = R \quad (3.6)$$

sendo:

$$G = -\frac{d\Pi}{ds} \quad (3.7)$$

definido como a taxa de liberação de energia e:

$$R = \frac{dF}{ds} \quad (3.8)$$

a resistência ao fraturamento, uma propriedade intrínseca do material.

A Eq. (3.6) representa um critério energético de propagação da fissura. Essa relação possui caráter global por lidar com o balanço de energia existente do corpo.

Em seu trabalho, Griffith (1921) associou a resistência ao fraturamento R apenas à tensão superficial do material, sem considerar o efeito de outros fenômenos de dissipação de energia que podem existir na ZPI durante a propagação. Consequentemente, seu critério de crescimento da fissura foi satisfatório apenas para materiais frágeis, como o vidro. Já para materiais com certo grau de ductilidade, o critério de Griffith (1921) se mostrou inadequado por subestimar a resistência ao fraturamento. Além disso, para a obtenção da taxa de liberação de energia, Griffith (1921) utilizou a solução elástica desenvolvida por Inglis (1913) para uma fissura em uma placa de dimensões infinitas. Dessa forma, a teoria proposta só é válida para problemas reais que se aproximam dessa condição.

Para a verificação da estabilidade à propagação via o balanço de energia proposto por Griffith (1921) é necessária a determinação de G , que reflete um estado global da estrutura e, portanto, sua avaliação pode não ser tão simples. Porém, a fundamentação energética do critério teve importante papel no desenvolvimento de outras teorias no campo da Mecânica da Fratura, uma vez que permitiu com que as verificações do fraturamento deixassem de ser puramente por meio da análise do campo de tensão singular existente na ponta.

3.3 Campos de tensão e de deslocamento na ponta

A Figura 3.4 mostra os chamados problemas fundamentais de Griffith em modo I e modo II, que consistem de uma fissura imersa em um meio infinito e solicitada exclusivamente ao modo de abertura e ao modo de deslizamento, respectivamente.

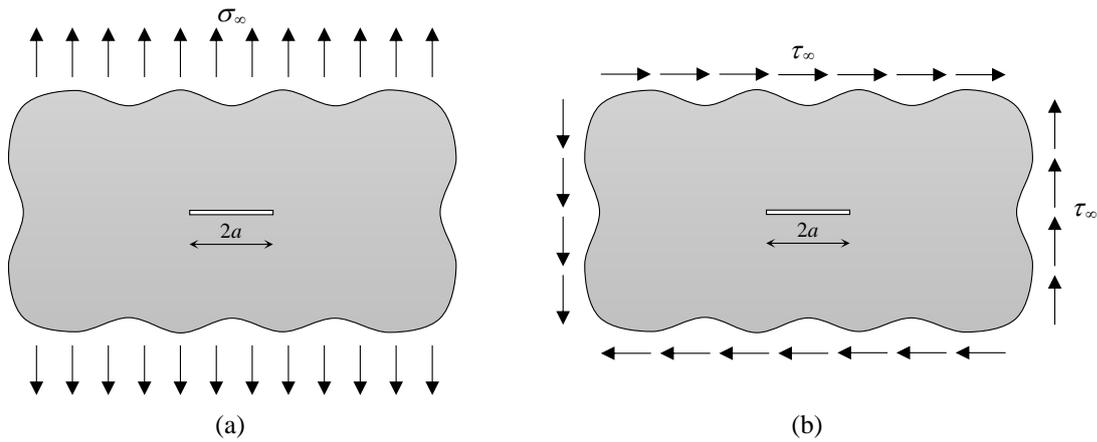


Figura 3.4 - Problemas fundamentais de Griffith em (a) modo I e (b) modo II.

Para avaliar os campos de tensão e deslocamento nas proximidades da ponta da fissura nos problemas de Griffith, Westergaard (1939) utilizou funções de tensão de variáveis complexas que satisfazem as relações de Cauchy-Riemann (ver Anexo C). Westergaard (1939), assim como Inglis (1913), obteve um campo de tensão que apresenta singularidade na ponta.

Utilizando as funções de tensão de Westergaard, Irwin (1957) e Sneddon (1946) obtiveram os campos de tensão e de deslocamento em função de coordenadas polares $r-\theta$ (Figura 3.5). A demonstração é apresentada em maiores detalhes no Anexo C, item C.1. A Eq. (3.9), Eq. (3.10) e Eq. (3.11) mostram as expressões para as componentes cartesianas de tensão, considerado a sobreposição das sollicitações nos modos I e II.

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \sigma_\infty \quad (3.9)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (3.10)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (3.11)$$

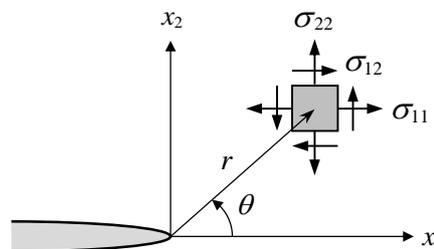


Figura 3.5 - Componentes de tensão na região próxima à ponta da fissura.

No caso de estado plano de deformação (EPD), a componente de tensão σ_{33} é dada por:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.12)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

A Figura 3.6 representa a concentração de tensão que ocorre nas proximidades da ponta para as componentes σ_{22} e σ_{12} nos problemas fundamentais de Griffith. A Figura 3.6a mostra a distribuição da componente σ_{22} para modo I puro. Já a Figura 3.6b esquematiza a distribuição da componente σ_{22} para modo II puro ou da componente σ_{12} para modo I puro. Já a Figura 3.6c representa a distribuição da componente σ_{12} para o problema fundamental em modo II.

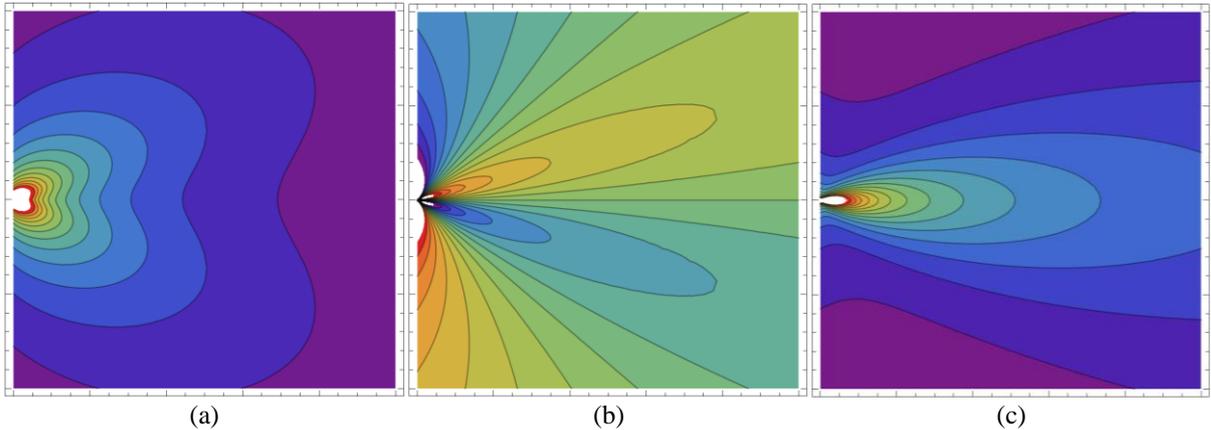


Figura 3.6 - Distribuição das componentes de tensão na região próxima à ponta de uma fissura para modos básicos de solitação: (a) σ_{22} para modo I; (b) σ_{22} para modo II ou σ_{12} para modo I; (c) σ_{12} para modo II.

Já a Eq. (3.13) e a Eq. (3.14) mostram as relações para as componentes de deslocamento nas direções x_1 e x_2 , respectivamente.

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos\theta) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa + 2 + \cos\theta) \quad (3.13)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos\theta) - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - 2 + \cos\theta) \quad (3.14)$$

onde $\mu = E/2(1 + \nu)$ é o módulo de elasticidade transversal, E é o módulo de elasticidade longitudinal, $\kappa = 3 - 4\nu$ para estado plano de tensão e $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para estado plano de deformação.

Nas relações das componentes de tensão e de deslocamento, K_I e K_{II} correspondem aos FIT dos modos I e II, respectivamente. Esses parâmetros foram inicialmente propostos por Irwin (1957) e são independentes das coordenadas polares $r-\theta$. Logo, os FIT estão associados à intensidade dos campos nas proximidades da ponta da fissura. Do ponto de vista matemático, os FIT dos modos I e II são definidos conforme as relações a seguir:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{22}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \right] \quad (3.15)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{12}(r, 0) \sqrt{2\pi r} \right] \quad (3.16)$$

Para os problemas fundamentais de Griffith, os FIT dependem do carregamento imposto e do semicomprimento da fissura, sendo $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ e $K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a}$. Já no caso bidimensional geral, as componentes de tensão nas proximidades da ponta podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) \right) \quad (3.17)$$

onde $f_{ij}^I(\theta)$ e $f_{ij}^{II}(\theta)$ são funções conhecidas de θ e os FIT dos modos $M = I$ e II assumem a seguinte forma:

$$K_M = \sigma \sqrt{\pi a} g(D) \quad (3.18)$$

onde $g(D)$ é uma função adimensional do parâmetro D que representa as variáveis dependentes das dimensões do corpo fissurado e das condições de contorno do problema.

Assim, os FIT dependem da geometria da estrutura e das condições de carregamento impostas e, uma vez obtidos, descrevem completamente as componentes de tensão na ponta da fissura. O mesmo é válido para as componentes de deslocamento. Maiores detalhes sobre as metodologias para determinação dos FIT são mostrados no item 3.5.

A partir da Eq. (3.17) observa-se que o campo de tensão é singular para $r \rightarrow 0$, não sendo, portanto, admissível para os materiais reais. Consequentemente, quando as solicitações na região próxima à ponta excedem o valor de resistência elástica, ocorre a degradação do material de modo que as tensões são mantidas em níveis finitos. Essa região degradada recebe o nome de zona de processos inelásticos, ou ZPI. No interior da ZPI as soluções elásticas da MFEL não são mais válidas. Todavia, no caso de materiais frágeis, como a ZPI apresenta dimensões reduzidas, existe outra região nas proximidades da ponta na qual os campos de tensão e deslocamento associados aos FIT são aplicáveis. Essa região é denominada de zona de domínio de K (Figura 3.7).

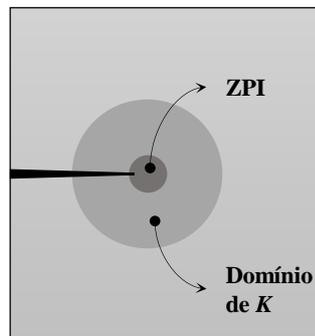


Figura 3.7 - Representação da ZPI e da zona de domínio de K .

O tamanho da ZPI depende do nível de solicitação na ponta, que por sua vez pode ser associada ao campo de tensão determinados pelos FIT. Por outro lado, como apontado por Tada et al. (2000), uma pequena degradação material na ponta não perturba significativamente os

campos elásticos na zona de domínio de K e, portanto, os campos relacionados aos FIT são válidos nessa região para situações com pequena extensão da ZPI. Consequentemente, toda sollicitação próxima da ponta pode ser associada aos FIT e os valores de K podem ser utilizados para verificar a estabilidade à propagação da fissura.

3.4 Relação entre as abordagens global e local

No item 3.2 é apresentado o parâmetro taxa de liberação de energia, definido por Griffith (1921), que reflete o estado global do corpo. Tal parâmetro pode ser entendido como a energia disponível para formação de novas faces de fissura. Logo, essa energia é empregada para realização de trabalho que sollicita a ponta da descontinuidade material e, portanto, pode ser relacionada aos fenômenos locais que ocorrem na ponta.

Do exposto, no caso de materiais frágeis, G pode ser associado aos FIT, uma vez que eles são capazes de descrever completamente as sollicitações nas proximidades da ponta, conforme mostrado no item 3.3. Dessa forma, a abordagem global e local via MFEL são equivalentes.

No caso de sollicitações no plano, a taxa de liberação de energia pode ser decomposta em duas parcelas, uma associada às sollicitações em modo I e outra associada às sollicitações em modo II, ou seja:

$$G = G_I + G_{II} \quad (3.19)$$

Por sua vez, como mostrado no Anexo C, cada uma dessas parcelas está associada ao modo de sollicitação correspondente por:

$$G_M = \frac{K_M^2}{E'} \quad (3.20)$$

onde K_M é o FIT para o modo M e $E' = E$ para EPT e $E' = E/(1 - \nu^2)$ para EPD.

Substituindo a Eq. (3.20) na Eq. (3.19), G fica escrito em função dos FIT para sollicitações no plano como:

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (3.21)$$

3.5 Métodos numéricos na análise de problemas da MFEL

Para problemas com geometria, condições de contorno e relação constitutiva material complexas, a obtenção de uma solução só é possível a partir da aplicação de métodos numéricos. Esse tipo de abordagem foi intensificado a partir da década de 1970, concomitante aos avanços na área da computação. O Método dos Elementos Finitos (MEF), pela sua maior

difusão entre os pesquisadores, é o mais aplicado na solução desses tipos de problemas, sendo Barsoum (1976) e Chan et al. (1970) alguns dos trabalhos que ajudaram o desenvolvimento nesse campo. Com relação à aplicação do MEF em problemas de múltiplas fissuras em materiais frágeis, podem ser destacados os trabalhos de Azadi e Khoei (2010) e Bouchard et al. (2000). Ademais, diversos softwares foram desenvolvidos para análises de fratura com a utilização do MEF, dos quais pode-se citar o Franc2D (WAWRZYNEK; INGRAFEEA, 1994), desenvolvido por membros da universidade de Cornell/EUA e reconhecidamente eficiente na solução de problemas com fissuras.

Todavia, o MEF clássico, cujas aproximações ao longo do domínio são realizadas por meio de funções polinomiais, não é eficaz para a representação da concentração de tensão que ocorre nas pontas das fissuras. Para uma adequada representação desses campos singulares, uma malha muito refinada é necessária nessas regiões, gerando um aumento no custo computacional. Além disso, no caso de análises de propagação, outra dificuldade surge no processo de remalhamento que deve ser realizado à medida que a fissura cresce. Uma alternativa ao uso do MEF clássico com o objetivo de contornar as deficiências mencionadas é a utilização do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), cujos fundamentos estão baseados nos conceitos de partição da unidade (PU) (MELENK; BABUSKA, 1996). O método prevê o enriquecimento das PU com funções especiais que contêm as propriedades da resposta esperada para o problema em análise. No âmbito da Mecânica da Fratura, o MEFG foi originalmente empregado nos trabalhos de Belytschko e Black (1999) e Moës et al. (1999), nos quais os autores propuseram métodos para análises de propagação sem grandes alterações na malha a partir do uso de funções de enriquecimento descontínuas. Já Budyn et al. (2004) aplicou o MEFG para a análise do crescimento de múltiplas fissuras em materiais homogêneos e heterogêneos.

Outros métodos numéricos empregados nas análises de estruturas fissuradas como alternativa ao MEF clássico são os Métodos Sem Malha (MSM). Tais métodos se baseiam em informações apenas dos nós da estrutura (BELYTSCHKO et al., 1996). Essa propriedade constitui uma vantagem dos MSM para análises de propagação, uma vez que poucas alterações no modelo são necessárias à medida que a fissura cresce (BELYTSCHKO et al., 1994). Barbier e Petrinic (2013) aplicaram o método com sucesso para a análise de propagação de múltiplas fissuras em materiais frágeis.

Outro método amplamente aplicado na modelagem de problemas de fratura é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma grande vantagem do MEC é a redução da dimensão da malha, uma vez que apenas o contorno da estrutura é discretizado. Isso simplifica o

remalhamento durante as análises de propagação, já que novos elementos são apenas adicionados às novas faces de fissura. Além disso, devido à ausência de malha de domínio, as concentrações de tensão que surgem nas pontas das fissuras são naturalmente representadas com precisão pelo método. Um dos grandes empecilhos para a difusão do MEC refere-se ao elevado custo computacional para a construção do sistema de equações, determinado a partir da integração numérica de núcleos singulares. Todavia, com os avanços recentes na computação, computação em paralela em especial, o tempo despendido nas análises vem sendo cada vez menor, favorecendo a aplicação do MEC. Neste trabalho, as análises de fratura são realizadas a partir desse método numérico. Na sequência é mostrado o histórico do desenvolvimento das aplicações do MEC para solução de problemas de fratura em materiais frágeis.

3.5.1 MEC aplicado a problemas da MFEL

Uma das primeiras aplicações do MEC em problemas de fratura foi feita por Cruze e Van Buren (1971). Os autores utilizaram a simetria do problema analisado para modelar apenas parte da estrutura e uma face da fissura, a fim de evitar a singularidade do sistema de equações que ocorre quando a mesma formulação integral é aplicada a ambas as faces. Porém, essa metodologia é limitada a problemas com um eixo de simetria coincidente com o eixo da fissura. Já Cruze (1972) mostrou que a aplicação direta do MEC para problemas de fratura considerando as duas faces da fissura coplanares leva a um sistema de equações indeterminado. Para contornar esse problema, o autor aproximou forma da fissura como uma elipse, porém obteve resultados com erros significativos.

Para evitar a aproximação da forma da fissura, Snyder e Cruze (1975) analisaram o problema de chapas anisotrópicas fissuradas com o uso de uma solução fundamental especial, baseada nas funções de Green. Essas soluções satisfazem as condições de contorno do problema, incluindo a condição de faces das fissuras livres de tensões. Dessa forma, como as descontinuidades já são consideradas na solução fundamental, elas não precisam ser discretizadas. Além disso, as respostas fornecidas para os campos tensões e de deslocamentos são precisas, uma vez que esses campos estão contemplados nas funções de Green utilizadas. A aplicação das funções de Green para problemas de fratura também foi realizada por Mir-Mogammad-Sadegh e Altiero (1979) e Young et al. (1988) para problemas de chapas isotrópicas fissuradas. Entretanto, a derivação das funções de Green não é uma tarefa matemática fácil e fica, portanto, restringida a problemas com geometria e condições de contorno mais simples.

Para ampliar o campo de aplicação das funções de Green em problemas de fratura, Telles et al. (1995) e Castor e Telles (2000) propuseram um método numérico capaz de determinar a função de Green necessária para problemas isotrópicos bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Ang e Telles (2004) expandiram essa técnica para problemas anisotrópicos bidimensionais com múltiplas fissuras. O método é baseado na superposição da solução de Kelvin e de uma solução complementar que resultam na função de Green procurada. Todavia, a abordagem via funções de Green é limitada a problemas com configurações mais simples e não permite a avaliação da propagação das descontinuidades de forma prática, uma vez que tais funções satisfazem apenas a configuração inicial do problema.

Outro método para a análise mecânica de fissuras com faces coplanares via MEC foi proposto por Blandford et al. (1981). Os autores utilizaram a técnica de sub-regiões para a análise de propagação de fissuras. Nessa estratégia, cada uma das faces da fissura se encontra em regiões distintas. A compatibilidade entre os deslocamentos e os esforços entre as regiões adjacentes é imposta na montagem do sistema de equações (ver item 2.9). Segundo Aliabadi (2002), esse processo tem como desvantagem a introdução de contornos artificiais, o que resulta em um sistema de equações maior do que o estritamente necessário. Além disso, a técnica de multirregiões não é prática para a avaliação da propagação pela necessidade de conhecimento *a priori* da trajetória de crescimento da ponta. Todavia, para as análises problemas de fissuras em interfaces entre diferentes materiais, a técnica de sub-regiões fornece boas respostas. Aplicações dessa técnica para esse tipo de problema foram realizadas por Lee e Choi (1988), Tan e Gao (1990) e Xiao e Hui (1994).

Uma alternativa à técnica de multirregiões para a análise de propagação de fissuras com faces coplanares é a utilização de integrais de deslocamento (singular) e de forças de superfície (hipersingular) aplicadas separadamente a cada uma das faces. A partir desse procedimento obtém-se um sistema de equações determinado. A formulação básica dessa técnica foi inicialmente proposta por Hong e Chen (1988). Os autores mostraram como obter a equação integral para forças de superfície a partir da derivação da equação integral para deslocamentos e aplicação da lei de Hooke. Essa técnica é conhecida como Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) (item 2.6) e foi aplicada em problemas de fratura nos trabalhos de Mi e Aliabadi (1995), Portela (1992), Portela et al. (1992, 1993) e Sollero et al. (1994). Leonel (2006, 2009), Leonel e Venturini (2010a, 2011) e Oliveira e Leonel (2013) aplicaram com eficiência o MECD nas análises de propagação de múltiplas fissuras em meios isotrópicos para problemas de fratura linear. Por suas vantagens, o MECD é empregado nas análises de propagação de fissuras neste trabalho.

3.6 Métodos para extração dos FIT

Diversas metodologias podem ser empregadas para obtenção dos FIT, dentre as quais podem ser citados os métodos analíticos, experimentais e numéricos. A aplicabilidade de cada um dos métodos está relacionada ao grau de complexidade do problema analisado.

Na abordagem analítica, as equações da elasticidade bidimensional formuladas a partir de funções de variáveis complexas são normalmente utilizadas. Os métodos analíticos são empregados apenas para um restrito conjunto de problemas de fratura, com geometria e carregamento mais simples. Porém, apresentam a vantagem de fornecer respostas exatas no contexto de modelagem mecânica e, portanto, são frequentemente usados para controlar a precisão de outros métodos. Inúmeras soluções analíticas podem ser encontradas em *handbooks*, tais como Fett (2008), Murakami (1987) e Tada et al (2000). Maiores detalhes sobre os métodos analíticos podem ser obtidos em Broberg (1999).

Os métodos experimentais são comumente utilizados para problemas práticos nos quais certas características necessárias para a modelagem não são completamente conhecidas, como, por exemplo, condições de contorno, condições de carregamento e propriedades da estrutura. Dentre os métodos experimentais destacam-se: a técnica que emprega *strain gauges*; a fotoelasticidade; a técnica de correlação de imagens digitais; e a termoelasticidade. Epstein (1993) fornece maiores informações sobre a aplicação dos métodos experimentais nos problemas de fratura.

Já os métodos numéricos são aplicáveis a problemas com carregamento e geometria complexos, mais próximos dos casos gerais encontrados em situações reais. Algumas soluções numéricas de problemas mais simples, porém com grande apelo prático, também estão disponíveis em *handbooks*. Os FIT são usualmente obtidos a partir de uma análise de pós-processamento, após determinados os campos de tensão e deslocamento para a estrutura fissurada. Essas metodologias são conhecidas como métodos indiretos, dentre as quais destacam-se: a técnica de extrapolação baseada em tensões (CHAN et al. (1970)); a técnica de correlação de deslocamentos (PARIS; SIH, 1965); método da integral de fechamento da fissura (RYBICKI; KANNINEN, 1977); e via integral J (RICE, 1968).

Como alternativa aos métodos indiretos, os FIT podem ser obtidos diretamente da solução do sistema de equações do problema a partir da ampliação da base de aproximação do método numérico utilizado por meio de funções de enriquecimento. Maiores detalhes sobre a obtenção direta dos FIT podem ser obtidos em Xiao e Karihaloo (2003), no âmbito do Método

dos Elementos Finitos Generalizados, e em Alatawi e Trevelyan (2015), em uma abordagem via Método dos Elementos de Contorno Generalizados.

Na sequência, maiores detalhes são apresentados acerca das metodologias utilizadas neste trabalho para a avaliação dos FIT, incluindo pormenores sobre a implementação computacional. Os métodos utilizados são: a técnica de correlação de deslocamentos e o método da integral J.

3.6.1 Correlação de deslocamentos

A técnica de correlação de deslocamentos se baseia na correspondência dos valores do campo de deslocamento obtidos a partir da análise numérica com as expressões analíticas da MFEL (Eq. (3.13) e Eq. (3.14)) em pontos da face da fissura.

A Figura 3.8 esquematiza dois pontos, B e C , localizados nas faces opostas de uma fissura e que estão inicialmente na mesma posição. Na configuração deformada, esses pontos apresentam um deslocamento relativo de abertura (COD – *crack opening displacement*) e um deslocamento relativo de deslizamento (CSD – *crack sliding displacement*), que podem ser utilizados para a determinação dos FIT dos modos I e II, respectivamente. Para tanto, os deslocamentos relativos são escritos em função das componentes de deslocamento referenciados ao sistema de coordenadas local x'_1 - x'_2 como:

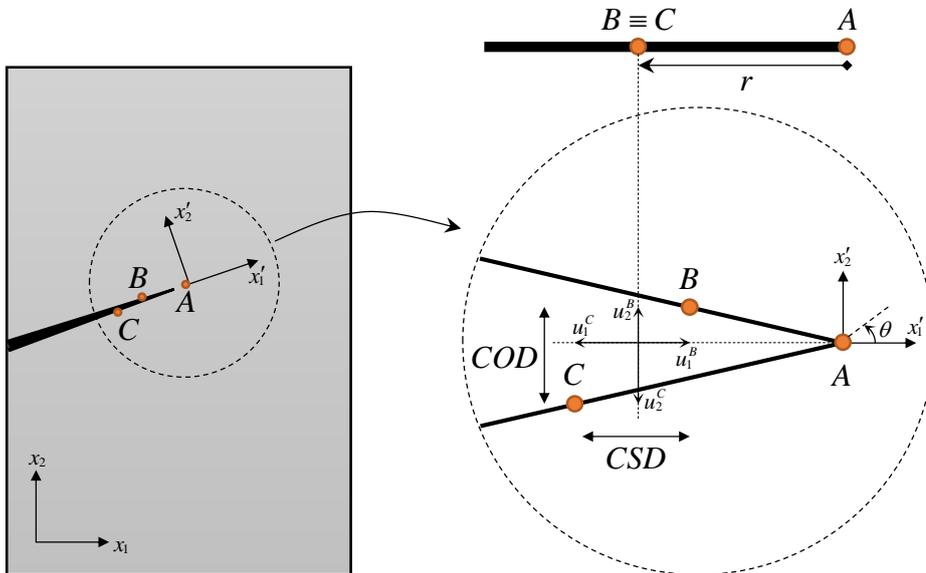


Figura 3.8 - Determinação deslocamentos relativos entre as faces das fissuras.

$$COD = \left| u_2^B \right| + \left| u_2^C \right| = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) \quad (3.22)$$

$$CSD = \left| u_1^B \right| + \left| u_1^C \right| = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi) \quad (3.23)$$

Utilizando as relações de deslocamento da Eq. (3.13) e da Eq. (3.14) e desenvolvendo, as expressões para obtenção dos FIT ficam dadas por:

$$K_I = \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} COD \quad (3.24)$$

$$K_{II} = \frac{\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} CSD \quad (3.25)$$

Assim, a Eq. (3.24) e a Eq. (3.25) permitem a determinação dos valores de K_I e K_{II} , respectivamente, a partir dos valores de COD e CSD obtidos numericamente para pontos próximos à ponta. A proximidade da ponta deve ser verificada para garantir que os pontos estejam dentro da zona de domínio de K .

3.6.1.1 Implementação computacional da técnica de correlação de deslocamentos

A técnica de correlação de deslocamentos é de fácil implementação e utiliza valores de deslocamentos que são obtidos diretamente da solução do problema mecânico pelo método numérico. Portanto, uma etapa de pós-processamento adicional não é necessária. No âmbito do MEC, isso implica que não é preciso definir os campos elásticos em pontos internos, como deve ser feito, por exemplo, no método da integral J (item 3.6.2), o que representa uma economia no custo computacional. Por essa simplicidade, a técnica de correlação de deslocamentos é um dos métodos de extração dos FIT implementados neste trabalho. Entretanto, sua precisão está associada aos limites de validade das expressões analíticas da MFEL utilizadas. Além disso, a resposta fornecida pela técnica é susceptível a oscilações, uma vez que é dependente das componentes de deslocamentos de pontos arbitrários.

A implementação da técnica de correlação de deslocamentos neste trabalho segue os seguintes passos:

- 1) os valores dos FIT são determinados para todos os pares de pontos de colocação do elemento da ponta da fissura a partir da Eq. (3.24) e da Eq. (3.25). Assim, admite-se que o elemento da ponta esteja dentro da região de domínio de K ;
- 2) utilizando um polinômio de mesmo grau de aproximação do elemento, os valores dos FIT para a ponta são obtidos a partir da extrapolação para $r = 0$ (ponta), local para o qual as expressões analíticas da MFEL são teoricamente exatas.

3.6.2 Integral J

Rice (1968) propôs um método para a determinação da taxa de liberação de energia em materiais elásticos a partir de uma integral, denominada integral J, avaliada ao longo de um caminho fechado arbitrário S que engloba a ponta da fissura (Figura 3.9). O caminho S é

composto por um contorno Γ situado no domínio que contém a descontinuidade e pelos contornos Γ^s e Γ^i presentes, respectivamente, nas faces superior e inferior da fissura. Assim, $S = \Gamma + \Gamma^s + \Gamma^i$. A expressão da integral J independente de caminho obtida por Rice (1968), considerando o sistema cartesiano local em relação à ponta da fissura, é mostrada pela Eq. (3.26).

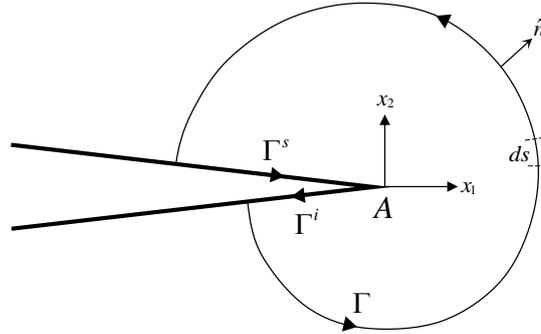


Figura 3.9 - Contorno ao redor da ponta da fissura para o cálculo da integral J .

$$J = \int_S (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (3.26)$$

sendo W a densidade de energia de deformação dada por $\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$; p_j as componentes da força de superfície dadas por $\sigma_{ij} n_i$; u_j as componentes do vetor deslocamento; n_1 a componente do versor normal ao caminho na direção x_1 ; e ds o comprimento infinitesimal do contorno S . Essa relação é válida para corpos homogêneos, com comportamento elástico, sem a presença de forças de volume e sujeito a um campo bidimensional de pequenas deformações.

Se as faces das fissuras estiverem livres de força de superfície, então $p_j = 0$. Além disso, a componente n_1 dos versores normais aos contornos situados nas faces, tomados como trechos retos ao longo de x_1 , é nula. Dessa forma, a Eq. (3.26) se reduz a:

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (3.27)$$

A integral J se fundamenta no teorema de conservação de energia e representa um balanço de energia ao longo do caminho arbitrado. Portanto, se a integral for avaliada em um contorno fechado em um corpo elástico em equilíbrio que não engloba a ponta de uma descontinuidade material, então o seu valor será nulo. Caso contrário, o valor da integral J será diferente de zero e corresponderá à variação da energia potencial total para uma extensão infinitesimal da fissura ao longo do seu eixo. Dessa forma, pode-se observar que há uma correspondência entre o valor da integral J e da taxa de liberação de energia G (Eq. (3.7)). De fato, para um corpo com comportamento elástico-linear, J se relaciona com G e com os FIT para solicitações no plano a partir de (RICE, 1968):

$$J = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (3.28)$$

onde a Eq. (3.21) foi utilizada para a segunda igualdade.

Portanto, o valor da integral J pode ser utilizado para determinação dos FIT no âmbito da MFEL. A propriedade de independência do caminho garante uma vantagem a esse método de extração dos FIT, uma vez que possibilita diversas escolhas de Γ para a determinação de J . Entre essas possibilidades estão as trajetórias distantes da zona de singularidade de tensões, dentro da qual a representação computacional dos campos elásticos pode não ser tão precisa.

3.6.2.1 Decomposição de modos

Como mostrado na Eq. (3.28), o valor da integral J pode ser utilizado para a obtenção dos FIT para uma determinada ponta de uma fissura. Todavia, a obtenção direta dos FIT a partir da Eq. (3.28) só é possível se apenas um modo de solitação estiver atuando. No caso de modo misto de solitação, a determinação dos FIT pode ser realizada a partir da decomposição dos campos de tensão e deslocamento ao longo do caminho de integração em componentes simétricas (Figura 3.10) e antissimétricas (Figura 3.11) em relação ao eixo da fissura (KITAGAWA et al, 1978). Para a aplicação desse procedimento, o caminho de integração e sua discretização devem apresentar simetria em relação ao eixo da fissura.

Utilizando os campos de deslocamento e de tensão definidos em relação ao sistema cartesiano posicionado na ponta da fissura, as componentes simétricas e antissimétricas podem ser expressas como:

$$\begin{cases} u_1^I \\ u_2^I \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{cases} \quad \begin{cases} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{cases} \quad (3.30)$$

onde o sobrescrito I e II indicam, respectivamente, as parcelas simétricas (relacionadas ao modo I) e antissimétricas (relacionadas ao modo II) dos campos no ponto P (ver Figura 3.10 e Figura 3.11). No segundo membro das expressões, as componentes sem linha estão associadas ao ponto P , enquanto as componentes com linha estão relacionadas ao ponto P' , simétrico a P em relação ao eixo da fissura.

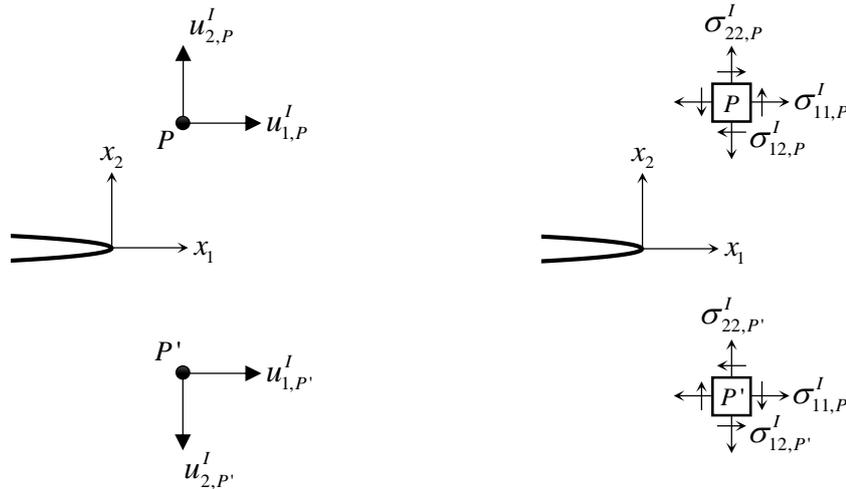


Figura 3.10 - Componentes simétricas dos campos elásticos relacionadas ao modo I.

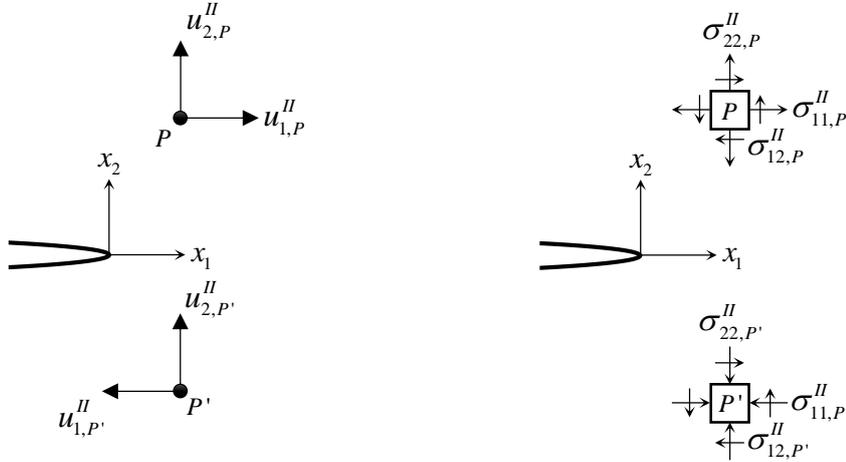


Figura 3.11 - Componentes antissimétricas dos campos elásticos relacionadas ao modo II.

A aplicação da Eq. (3.29) e da Eq. (3.30) leva à seguinte decomposição dos campos de deslocamento e de tensão:

$$u_j = u_j^I + u_j^{II} \tag{3.31}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \tag{3.32}$$

Substituindo a Eq. (3.29) e a Eq. (3.30) na Eq. (3.27), a integral J fica dividida em duas parcelas, uma relacionada ao modo I e outra relacionada ao modo II, cuja expressão geral é dada por:

$$J^M = \int_{\Gamma} (W^M n_1 - p_j^M u_{j,1}^M) ds \tag{3.33}$$

onde M denomina o modo analisado.

A igualdade entre J e G , mostrada pela Eq. (3.28), pode ser estendida às suas parcelas para cada modo de sollicitação específico. Assim, utilizando a Eq. (3.20), os FIT K_I e K_{II} podem ser obtidos por:

$$K_I = \sqrt{E' J^I} \quad (3.34)$$

$$|K_{II}| = \sqrt{E' J^{II}} \quad (3.35)$$

K_I é maior ou igual a zero e pode ser diretamente obtido a partir de Eq. (3.34). Já K_{II} pode assumir valores negativos e, portanto, a Eq. (3.35) fornece apenas sua magnitude. O sinal dessa grandeza pode ser determinado pelo o valor do deslocamento diferencial entre as faces da fissura em relação ao eixo x_1 . Caso o deslocamento u_1 da face superior seja maior que o deslocamento u_1 da face inferior, o valor de K_{II} é positivo. Caso contrário, K_{II} é negativo.

3.6.2.2 Implementação computacional da integral J

Neste trabalho, a implementação da integral J associada ao MEC é feita da seguinte forma: inicialmente é criado um caminho, arbitrado como circular, que engloba a ponta da fissura. Tal caminho se inicia em um dos pontos de colocação da face inferior da fissura e termina no ponto de colocação simétrico da face oposta. Ao longo do trajeto são definidos pontos internos, localizados em posições simétricas em relação ao eixo da fissura (Figura 3.12). O caminho da integral J se encontra dentro de um domínio homogêneo e não cruza com nenhuma outra descontinuidade.

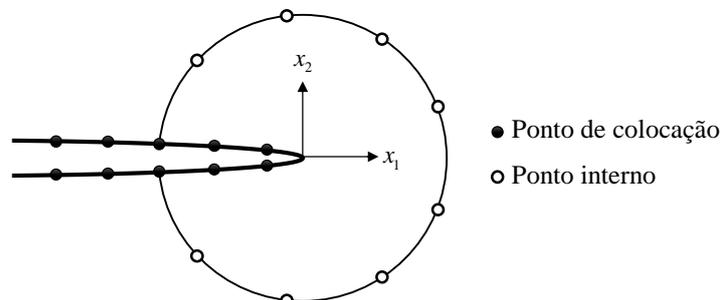


Figura 3.12 - Definição do caminho para cálculo da integral J.

Após a análise elástica via MEC, os campos de deslocamento e de tensão de cada um dos pontos que definem o caminho de integração são obtidos em uma etapa de pós-processamento. Em seguida, passa-se à etapa de determinação da integral J. Os campos de deslocamento e de tensão são rotacionados para um sistema cartesiano referenciado à ponta da fissura (Figura 3.12) e, em seguida, são decompostos com a aplicação da Eq. (3.29) e da Eq. (3.30). Caso exista um ponto interno situado no eixo da fissura, o seu simétrico será o próprio ponto. Nesse caso, a decomposição pode ser feita considerando ambas as componentes envolvidas nas transformações da Eq. (3.29) e da Eq. (3.30) iguais às componentes dos campos no ponto.

Na sequência, o caminho de integração é discretizado em elementos com aproximação polinomial qualquer para a realização da integração numérica via quadratura de Gauss-

Legendre. As componentes da integral J (Eq. (3.33)) podem ser escritas na forma discretizada como:

$$J^M = \sum_{e=1}^{nelem} \sum_{n=1}^{npg} \left\{ \left[W^M(\xi_n) n_1(\xi_n) - p_1^M(\xi_n) u_{1,1}^M(\xi_n) - p_2^M(\xi_n) u_{2,1}^M(\xi_n) \right] Jac(\xi_n) \omega(\xi_n) \right\} \quad (3.36)$$

onde $nelem$ é o número de elementos utilizados na discretização do caminho, npg é o número de pontos de Gauss utilizados para a realização da integração numérica em cada elemento, ξ_n é a n -ésima coordenada adimensional do elemento, ω é o peso associado a cada uma das coordenadas adimensionais e Jac é o jacobiano da transformação do espaço adimensional ξ para o espaço real e pode ser calculado por:

$$Jac(\xi_n) = \left[\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 \Big|_{\xi_n} + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \Big|_{\xi_n} \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

As derivadas existentes na Eq. (3.37) são avaliadas no ponto com coordenada adimensional ξ_n e são determinadas como mostrado na sequência. As coordenadas x_i podem ser aproximadas pelas funções de formas ϕ_j e coordenadas x_i^j associadas a cada um dos nós j de um elemento por:

$$x_i(\xi) = x_i^j \phi_j(\xi) \quad (3.38)$$

Dessa forma, as derivadas das coordenadas reais em relação à coordenada adimensional são dadas em notação indicial por meio de:

$$x_{i,\xi}(\xi) = x_i^j \phi_{j,\xi}(\xi) \quad (3.39)$$

Já a componente n_1 do versor normal ao caminho de integração é calculada por:

$$n_1(\xi) = \frac{x_2^j \phi_{j,\xi}(\xi)}{Jac(\xi)} \quad (3.40)$$

Por fim, as derivadas das componentes de deslocamento em relação à direção x_1 , presentes na Eq. (3.36), são obtidas conforme exposto a seguir. A derivada $u_{1,1}^M$ corresponde à deformação ε_{11}^M e pode ser determinada com a aplicação da lei de Hooke generalizada. Já para a avaliação de $u_{2,1}^M$, a generalização do esquema utilizado por Aliabadi e Rooke (1991) para elementos com aproximação linear pode ser feita. Inicialmente, a derivada total da componente de deslocamento u_2 em relação à coordenada adimensional ξ é escrita como:

$$u_{2,\xi}^M = u_{2,1}^M x_{1,\xi} + u_{2,2}^M x_{2,\xi} \quad (3.41)$$

O termo $u_{2,2}^M$ corresponde à deformação ε_{22}^M , que por sua vez também pode ser avaliada com a aplicação da lei de Hooke generalizada. As derivadas das coordenadas x_i são obtidas conforme a Eq. (3.39). Já para a determinação da derivada presente no primeiro membro da Eq. (3.41), a componente de deslocamento u_2^M é aproximada pelas funções de forma do elemento, seguindo o mesmo procedimento feito para as coordenadas na Eq. (3.38). Em seguida, a expressão de aproximação é derivada em relação a ξ , resultando em:

$$u_{2,\xi}^M = u_2^j \phi_{j,\xi} \quad (3.42)$$

Substituindo a Eq. (3.39) e a Eq. (3.42) na Eq. (3.41) e isolando $u_{2,1}^M$, chega-se a:

$$u_{2,1}^M(\xi) = \frac{u_2^j \phi_{j,\xi}(\xi) - \varepsilon_{22}^M(\xi) \left(x_2^j \phi_{j,\xi}(\xi) \right)}{x_1^j \phi_{j,\xi}(\xi)} \quad (3.43)$$

Com isso, é possível realizar os somatórios presente na Eq. (3.36) e determinar o valor das componentes da integral J. Em seguida, com a aplicação da Eq. (3.34) e da Eq. (3.35), os FIT são calculados.

Cabe ressaltar que mais de um caminho pode ser utilizado para a determinação da integral J. Nesse caso o resultado final é calculado a partir da média dos valores obtidos para cada uma das trajetórias.

Exemplo 3.1: Fissura central inclinada - Murakami (1987)

Este exemplo visa mostrar a aplicação da integral J para a extração dos FIT para uma solicitação em modo misto. O problema analisado é representado pela Figura 3.13a. A base da estrutura tem os deslocamentos restritos nas direções x_1 e x_2 e o topo é submetido a uma tração uniforme σ na direção x_2 .

Na Figura 3.13b é mostrada a malha de elementos de contorno utilizada na discretização da superfície externa do corpo, composta por 48 elementos quadráticos. O comprimento da fissura $2a$ é variado de $0,2w$ até $0,6w$, em passos de $0,1w$. Na discretização de cada face são utilizados elementos cúbicos descontínuos com comprimento igual a $0,05w$. A fissura está inclinada a 45 graus em relação à horizontal. O cálculo da integral J é feito considerando três caminhos distintos: o primeiro se inicia no segundo ponto de colocação mais próximo da ponta ($r_1 = 0,01667w$); o segundo se inicia no último ponto de colocação do elemento da ponta ($r_2 = 0,04583w$); e o terceiro se inicia no último ponto de colocação do elemento vizinho ao da ponta ($r_3 = 0,09583w$). Cada um dos caminhos é discretizado com cinco elementos com aproximação cúbica, conforme representado pela Figura 3.13c.

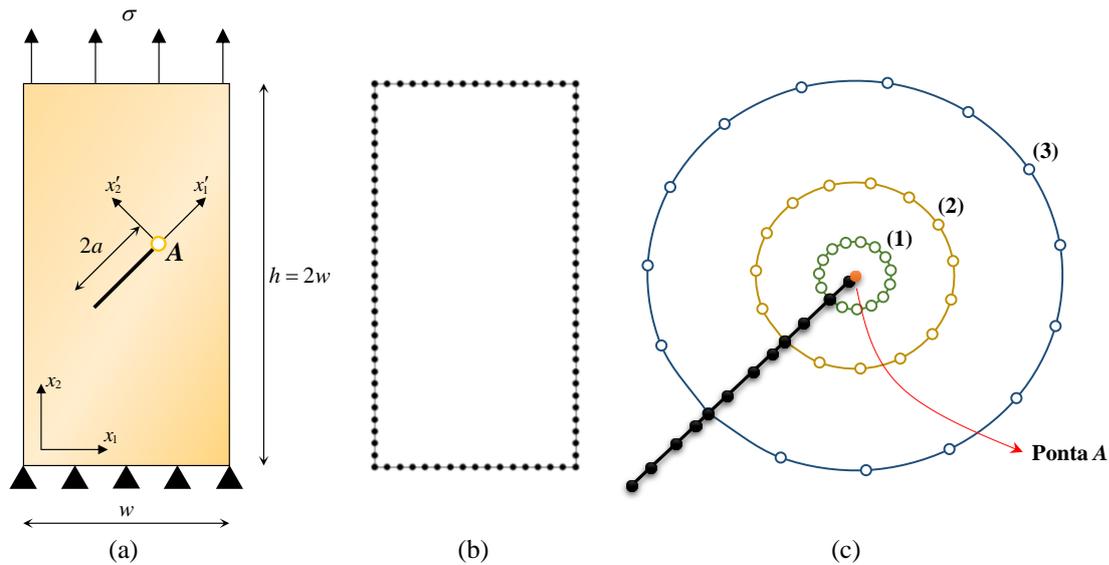


Figura 3.13 - Problema analisado no Exemplo 3.1: (a) geometria, (b) discretização do contorno externo e (c) discretização dos caminhos de integração utilizados.

Os fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} são determinados para a ponta A a partir da utilização dos diferentes caminhos de integração. Os valores obtidos e normalizados por $\sigma\sqrt{\pi a}$ são mostrados na Tabela 3.1. Na Tabela 3.1 também estão indicados os valores de referência apresentados por Murakami (1987). Este problema também foi analisado por Portela et al. (1992) com o emprego do MECD.

Tabela 3.1 - FIT obtidos para o Exemplo 1

a/w	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$				$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$			
	Caminho			Ref.	Caminho			Ref.
	1	2	3		1	2	3	
0,2	0,371	0,370	0,370	0,366	0,362	0,362	0,360	0,359
0,3	0,386	0,385	0,385	0,383	0,367	0,368	0,366	0,365
0,4	0,409	0,407	0,407	0,404	0,376	0,377	0,374	0,374
0,5	0,437	0,436	0,435	0,433	0,388	0,389	0,386	0,386
0,6	0,472	0,471	0,470	0,467	0,402	0,404	0,401	0,401

Já na Tabela 3.2 são mostrados os erros percentuais relativos entre os valores determinados e os valores de referência.

Tabela 3.2 - Erros percentuais relativos aos valores de referência para os FIT determinados para o Exemplo 1

a/w	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$			$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$		
	Caminho			Caminho		
	1	2	3	1	2	3
0,2	1,257	1,033	0,905	0,857	1,083	0,462
0,3	1,004	0,741	0,587	0,653	0,970	0,289
0,4	0,998	0,712	0,549	0,495	0,852	0,100
0,5	0,998	0,695	0,528	0,381	0,757	0,045
0,6	1,075	0,759	0,588	0,390	0,775	0,078

Como pode ser observado a partir da Tabela 3.1 e da Tabela 3.2, os valores determinados para os FIT K_I e K_{II} apresentam boa correspondência com os valores de referência, com a maioria dos erros percentuais abaixo de 1%. Além disso, a partir dos valores similares obtidos para os diferentes caminhos, pode-se notar a propriedade de independência de caminho da integral J. Dessa forma, a técnica de extração dos FIT a partir da integral J se mostra bastante eficaz e é predominantemente utilizada ao longo deste trabalho.

A título de ilustração, a Figura 3.14 mostra a concentração de tensão existente na ponta A para o comprimento de fissura igual a $0,6w$. A componente representada é σ_{22} referenciada ao sistema de coordenadas local $x'_1-x'_2$, cuja origem está sobre a ponta.

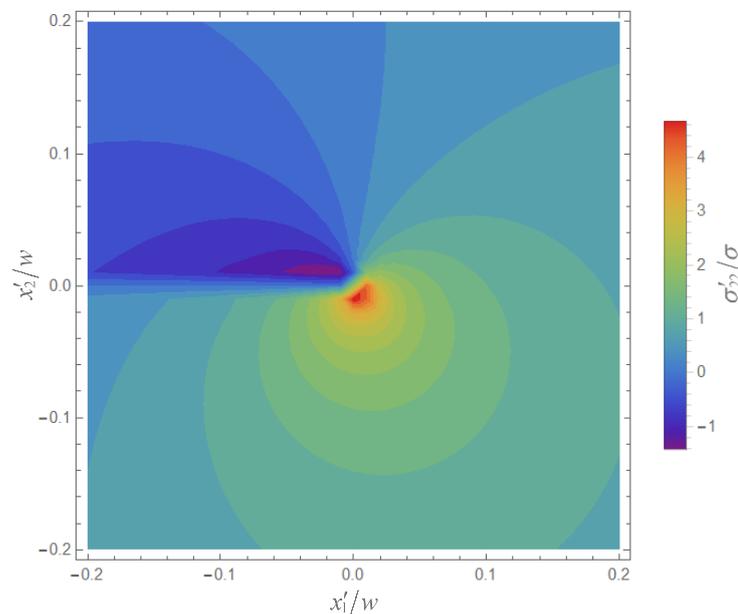


Figura 3.14 - Distribuição da componente de tensão σ'_{22} na região da ponta.

3.7 Critérios de propagação

Nos casos da prática as fissuras estão submetidas a uma combinação dos diferentes modos básicos de sollicitação indicados na Figura 3.6. Esse tipo de sollicitação é denominado modo misto. Diversos autores investigaram os critérios de propagação para modos mistos e desenvolveram teorias de interação que buscam determinar a direção de propagação da fissura bem como a carga crítica de fratura. Essas teorias apresentam fundamentação nos conceitos da MFEL e são verificadas experimentalmente, porém nenhuma é tida como geral (BROEK, 1982). Dentre os métodos que se destacam, podem ser citados os critérios da: máxima taxa de liberação de energia; mínima densidade de energia de deformação e máxima tensão circunferencial.

O critério da máxima taxa de liberação de energia se baseia na energia potencial que é liberada durante o processo de fraturamento. Esse critério estabelece que a fissura cresce quando G atinge um valor crítico. Já a direção de crescimento é tomada como aquela na qual G é máximo. Hussain et al. (1974) propuseram uma expressão para obtenção de G em função do ângulo de crescimento da descontinuidade. A partir da maximização dessa expressão é possível obter a direção de crescimento e o valor máximo de G , que pode ser comparado ao valor crítico para o material para verificar a estabilidade à propagação.

O critério da mínima densidade de energia de deformação, desenvolvido por Sih (1974), estabelece que a fissura cresce na direção cuja energia de deformação é mínima. Utilizando a lei de Hooke generalizada (Eq. (A.28)), juntamente com as expressões das componentes de tensão na ponta da fissura desenvolvidas no item 3.3, é possível obter uma expressão para o cálculo da energia de deformação. A partir da minimização da relação obtida, pode-se obter a direção de crescimento da ponta e determinar o valor mínimo da densidade de energia de deformação. Esse valor pode ser comparado ao valor crítico do material para verificar a estabilidade à propagação.

Já o critério da máxima tensão circunferencial, utilizado como critério de propagação neste trabalho, é discutido em maiores detalhes no item que segue.

3.7.1 Critério da máxima tensão circunferencial

O critério de máxima tensão circunferencial foi proposto por Erdogan e Sih (1963) e assume que a fissura irá crescer na direção perpendicular à máxima tensão circunferencial na ponta da fissura. Essa componente de tensão será, portanto, uma tensão principal.

Para o desenvolvimento do critério da máxima tensão circunferencial, as componentes de tensão são reescritas em termos das coordenadas polares $r-\theta$. Utilizando as expressões das componentes cartesianas de tensão no plano mostradas pela Eq. (3.9), Eq. (3.10) e Eq. (3.11), as relações obtidas para as componentes de tensão normal circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ e de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ são:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (3.44)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \sin(\theta) + K_{II} [3 \cos(\theta) - 1] \right\} \quad (3.45)$$

O valor máximo de $\sigma_{\theta\theta}$ é associado a uma tensão $\sigma_{r\theta}$ nula por se tratar de uma tensão principal. A partir daí, igualando a Eq. (3.45) a zero e desenvolvendo para a obtenção de θ

$$\theta_p = 2\text{atan} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \right\} \quad (3.46)$$

sendo θ_p o ângulo que fornece a possível direção de propagação da fissura em relação ao referencial local. Na Eq. (3.46), o sinal positivo é tomado quando K_{II} apresenta sinal negativo e o sinal negativo é tomado quando K_{II} apresenta sinal positivo. No limite de K_{II} tendendo a zero, θ_p será nulo. Dessa forma, a Eq. (3.46) pode ser reescrita de forma geral como:

$$\theta_p = \begin{cases} 0 & , \text{ se } K_{II} = 0 \\ 2\text{atan} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \right\} & , \text{ se } K_{II} \neq 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

onde $\text{sign}(\cdot)$ representa o operador sinal, que retorna o sinal do argumento.

A partir da Eq. (3.44) e do ângulo θ_p , um fator de intensidade de tensão equivalente K_{eq} , dado pela combinação de K_I e K_{II} , pode ser definido. Para tanto, a Eq. (3.44) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \text{sen}(\theta_p) \right] \quad (3.48)$$

O primeiro termo da Eq. (3.48) apresenta unidade equivalente ao FIT e é definido como K_{eq} . Assim, a equação que fornece o FIT equivalente dado na direção que maximiza a tensão circunferencial é escrita como:

$$K_{eq} = \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \text{sen}(\theta_p) \right] \quad (3.49)$$

A Eq. (3.49) fornece um valor equivalente da solitação em modo misto da ponta de uma descontinuidade. Tal valor pode ser comparado à resistência ao fraturamento do material K_{Ic} para verificar a estabilidade à propagação. Essa resistência, também denominada tenacidade, é obtida a partir de ensaios de fraturamento em modo I, como os propostos nos trabalhos de Brown e Srawley (1966) e Srawley e Brown (1965). O valor de K_{Ic} é determinado a partir da taxa de liberação de energia, que por sua vez é conhecida para o esquema de carregamento e para a geometria dos corpos-de-prova utilizados no ensaio.

A partir do valor de K_{Ic} , admite-se que há propagação da ponta caso a seguinte desigualdade seja verificada:

$$K_{eq} \geq K_{Ic} \quad (3.50)$$

Apesar da tenacidade ao fraturamento estar relacionada apenas ao modo de abertura, o critério de propagação definido na Eq. (3.50) a partir do critério da máxima tensão circunferencial ainda é apropriado. Isso porque K_{eq} é definido na direção θ_p , na qual não há tensão de cisalhamento. Portanto, a sollicitação equivalente é semelhante a uma sollicitação em modo I puro.

A Figura 3.15 mostra a curva que representa o lugar geométrico da fratura em modo misto considerando o critério da máxima tensão circunferencial. De acordo com o critério, haverá propagação quando os FIT para os modos I e II assumirem valores tais que a curva de interação seja ultrapassada.

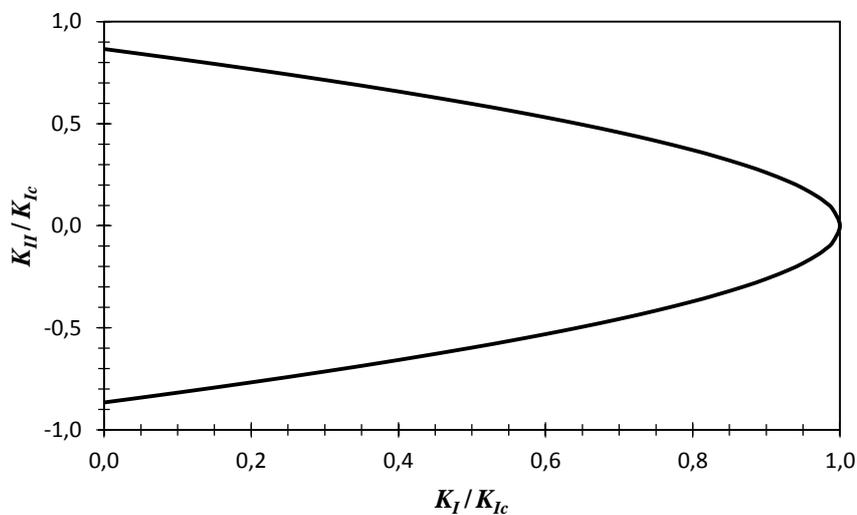


Figura 3.15 - Curva de interação de modos na situação de propagação.

O critério da máxima tensão circunferencial apresenta boa correspondência experimental para a avaliação tanto da direção de propagação quanto da sollicitação crítica de propagação (ERDOGAN; SIH, 1963).

3.8 Modelo numérico para solução dos problemas de fratura frágil

A seguir o modelo numérico implementado para tratar problemas de fratura frágil é descrito. Os fluxogramas referentes a esse módulo se encontram no Apêndice I, item I.1.

3.8.1 Pré-processamento

Para a solução dos problemas de fratura a partir do código desenvolvido neste trabalho, inicialmente são definidas a geometria e sua discretização, as condições de contorno e as propriedades do material para cada um dos subdomínios que compõem a estrutura analisada. Os subdomínios são considerados isotrópicos, porém podem apresentar propriedades diferentes entre si, compondo um domínio não-homogêneo. Com relação às condições de contorno, pode

ser realizada tanto a aplicação de deslocamentos quanto de forças de superfície. O controle de deslocamentos permite a representação do comportamento após o colapso da estrutura e, além disso, pelas características do MEC, possibilita simular a situação na qual existe a divisão do corpo e ocorre o movimento relativo de corpo rígido entre as partes separadas.

Na sequência, passa-se à definição das fissuras e das suas malhas de elementos de contorno. Cada fissura definida é tratada como um trecho de reta. Geometrias complexas de fissuras podem ser aproximadas a partir da interseção de trechos retos. As descontinuidades material podem ser inseridas pelo usuário ou podem ser aleatoriamente distribuídas ao longo de uma região. Para as fissuras definidas pelo usuário, são fornecidas as coordenadas do ponto central, o comprimento e a inclinação em relação à horizontal. Já para as fissuras aleatórias, inicialmente é escolhido o número de fissuras para determinado conjunto que será distribuído aleatoriamente ao longo de uma região retangular. Para cada conjunto de fissuras são definidas as distribuições estatísticas para as coordenadas do ponto central, comprimento e inclinação em relação à horizontal. As opções de distribuições são: uniforme, normal, log-normal e exponencial. A posição do ponto central das descontinuidades aleatoriamente distribuídas é verificada para garantir que elas se encontram dentro do subdomínio para o qual foram definidas. Já com relação à discretização, são fornecidos o número de elementos em cada uma das faces da fissura e o grau do polinômio de Lagrange utilizado para a aproximação das grandezas. O programa implementado permite a escolha de qualquer grau de aproximação polinomial (elementos de alta ordem).

3.8.2 Solução dos problemas da MFEL via MECD

3.8.2.1 Definições iniciais

No início da análise, as coordenadas adimensionais e reais dos pontos de colocação da malha de elementos de contorno são definidas. No caso de nós contínuos, as posições dos pontos de colocação correspondentes coincidem com as posições dos nós definidos pelo usuário. Já a definição de nós descontínuos é realizada com a inserção de nós duplos na malha. A posição dos nós duplos será um ponto de descontinuidade da malha e cada um dos nós fará parte de elementos semicontínuos ou descontínuos distintos. Nessa situação, a definição das coordenadas adimensionais dos pontos de colocação segue o procedimento apresentado no item 2.5. Já as coordenadas reais são obtidas a partir das coordenadas adimensionais a partir da aplicação da Eq. (2.47).

Na sequência, as componentes dos vetores normais aos pontos de colocação são determinadas a partir da aplicação da Eq. (2.57) e da Eq. (2.58).

Em seguida, os elementos da fissura são definidos como elementos de interface com contato perfeito. Assim, os pontos de colocação correspondentes de faces opostas apresentam deslocamento relativo restrito e forças de superfície com sentidos opostos, conforme mostrado no item 2.9. Essa abordagem é adotada para tratar o problema de contato inicial entre as faces e garantir que não exista interpenetração material.

Posteriormente, passa-se à etapa de integração numérica do MECD para a determinação das matrizes dos coeficientes de influência mútua \mathbf{H} e \mathbf{G} (ver capítulo 2). Após a definição das matrizes, dá-se início ao processo incremental iterativo para solução do problema de fratura. A verificação da estabilidade à propagação das pontas e do contato entre as superfícies de fissura é realizado ao final de cada incremento de carregamento, daí a característica incremental do processo de solução. Já a propriedade iterativa decorre da reaplicação dos esforços nas faces da fissura à medida que elas se abrem. Maiores detalhes do processo incremental iterativo são fornecidos no decorrer deste item.

3.8.2.2 Etapa de verificação dos pares de pontos de colocação das faces

O processo de solução é iniciado com a aplicação de um incremento das condições de contorno conhecidas. A partir do processo de troca de colunas exposto no item 2.3, chega-se ao sistema final de equações (Eq. (2.63)) que, resolvido, fornece os valores incógnitos de deslocamentos e forças de superfície dos pontos de colocação para o incremento. Ao final de cada incremento, os valores dos deslocamentos e forças de superfície determinados pela solução do sistema são acrescentados a variáveis acumuladoras (\mathbf{u}_{acum} e \mathbf{p}_{acum} , respectivamente). Com os valores acumulados, a etapa de verificação do contato entre as faces da fissura é realizada a partir da determinação da abertura (COD) entre pares de pontos de colocação. Seja um par de pontos A e B com componentes de deslocamento conforme representado pela Figura 3.16a. O valor do COD para esse par genérico pode ser obtido a partir de:

$$COD = -(u_1^A n_1^A + u_2^A n_2^A + u_1^B n_1^B + u_2^B n_2^B) \quad (3.51)$$

onde u_i e n_i correspondem às componentes de deslocamento e do vetor normal na direção x_i .

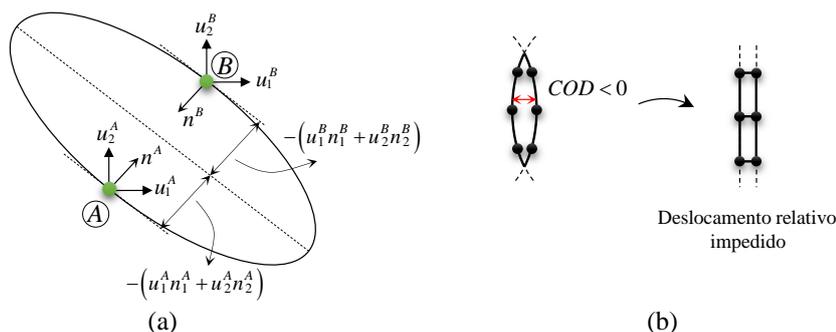


Figura 3.16 - (a) Representação do deslocamento normal relativo entre pares de pontos de colocação e (b) restrição dos deslocamentos relativos de pares com abertura negativa.

Valores negativos de COD indicam que ocorre a interpenetração de material com a aplicação do último incremento de carregamento, o que não é admissível. Para contornar essa situação, os pares de pontos que apresentam COD negativo são redefinidos como de interface (Figura 3.16b), as variáveis acumuladoras são decrementadas do último acréscimo e o último incremento é reaplicado. Os valores de COD dos pares são novamente verificados com as variáveis acumuladoras atualizadas. Esse processo se repete até que ocorra a convergência de todos os pares de pontos. Cabe ressaltar que, na situação inicial, todos pontos de colocação de fissuras são tratados como de interface e, portanto, a verificação do COD não é realizada.

Terminada a verificação do fechamento das fissuras ao final de um dado incremento, passa-se à verificação das forças de contato entre os pares que estão definidos como pontos de interface (Figura 3.17a). A partir dos valores acumulados de forças de superfície, a força normal à face da fissura p_n em um ponto de colocação qualquer é determinada por:

$$p_n = p_1 n_1 + p_2 n_2 \quad (3.52)$$

onde p_i são as componentes da força de superfície na direção x_i .

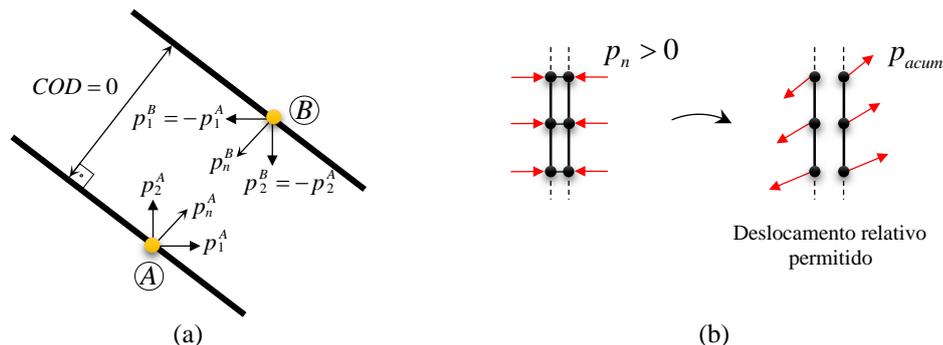


Figura 3.17 - (a) Representação da força normal relativa entre pares de pontos de colocação e (b) liberação dos deslocamentos relativos de pares com força normal relativa positiva.

Valores positivos de p_n indicam que há força de tração entre as faces das fissuras, o que no caso de fratura elástico-linear é considerado impossível. Quando isso ocorre, passa-se à etapa iterativa de correção das forças de superfície. Nessa etapa, o maior valor de p_n em cada subdomínio é determinado. Em seguida, os pares de pontos de colocação em dado subdomínio com valores de p_n superior a uma fração do p_n máximo têm os deslocamentos relativos liberados. Tal fração é definida pelo usuário e tem como objetivo garantir a liberação paulatina dos pontos de colocação com p_n positivo e impedir com que pares recém liberados voltem a ser definidos como interface durante a etapa iterativa. Sobre os pares retirados da interface são reaplicados os valores acumulados de força de superfície, que constituem o carregamento aplicado na fase de correção (Figura 3.17b). Após a solução do sistema para essa fase, os valores incógnitos obtidos são acrescentados às variáveis acumuladoras. A abertura das faces

das fissuras é novamente verificada conforme o processo descrito anteriormente. Em caso de não convergência, os pares com *COD* negativo têm o deslocamento restrito e a etapa de reaplicação dos esforços é novamente realizada. Esse processo é repetido até que ocorra a convergência de todos os pares. Na sequência, outros pares são verificados em relação a p_n positivo e, em caso de ocorrência, o processo de correção das forças de superfície é realizado em uma nova iteração. Ao final da etapa de reaplicação dos esforços, os pares recém liberados apresentam forças de superfície nulas.

Após a convergência de todos os pares de pontos de colocação, os campos de deslocamento e tensão nos pontos internos definidos pelo usuário são determinados conforme a Eq. (2.132) e a Eq. (2.133), respectivamente. Além disso, os campos de tensão para os pontos de colocação no contorno são obtidos conforme o item 2.7.

3.8.2.3 Fase de propagação

Na sequência da análise, a verificação da estabilidade à propagação das fissuras é realizada com base nos fundamentos da MFEL. Os valores dos FIT são determinados a partir da técnica de correlação de deslocamentos ou da integral J, conforme discutido no item 3.6.1 e no item 3.6.2, respectivamente, para as pontas cujos pares de pontos de colocação correspondentes apresentam deslocamento relativo liberado. No caso da integral J, o caminho circular é sempre definido de forma a não cruzar outro elemento. Para tanto, um esquema adaptativo é utilizado para reduzir o tamanho do raio do caminho até que nenhum elemento seja interceptado. Se para o menor raio possível, igual à distância entre o nó da ponta e o ponto de colocação correspondente, houver cruzamento do caminho com algum elemento, então a técnica de correlação de deslocamentos é utilizada para estimar os FIT.

Com os valores dos FIT, o ângulo potencial de propagação e o FIT equivalente são determinados a partir do critério da máxima tensão circunferencial (item 3.7.1). K_{eq} é então comparado com a tenacidade do material do subdomínio que contém ponta para verificar a estabilidade à propagação. Para as pontas que propagam, o comprimento de crescimento da fissura ΔL_f é determinado a partir de:

$$\Delta L_f = \Delta L \frac{K_{eq}}{K_{eq}^{sd}} \frac{R_{st}^{sd}}{R_{st}^{máx}} \quad (3.53)$$

onde ΔL é o valor do incremento padrão definido pelo usuário, K_{eq}^{sd} é o maior valor do FIT equivalente no subdomínio da ponta, R_{st}^{sd} é a razão máxima entre a sollicitação e a tenacidade no subdomínio da ponta e $R_{st}^{máx}$ é a maior razão entre a sollicitação e a tenacidade na análise. A razão entre sollicitação e tenacidade para determinada ponta é definida como:

$$R_{st} = \frac{K_{eq}}{K_{lc}^{sd}} \quad (3.54)$$

onde K_{lc}^{sd} é a tenacidade do material do subdomínio que contém a ponta.

Como pode ser observado na Eq. (3.53), existem dois fatores de ponderação do valor do incremento em relação ao comprimento padrão definido pelo usuário. O primeiro fator, dado pela relação entre o K_{eq} da ponta e o máximo K_{eq} no subdomínio no qual ela se encontra, tem como objetivo relativizar o comprimento adicionado para pontas situadas em um mesmo material. Já o segundo fator, definido como a relação entre o máximo R_{st} no subdomínio que contém a ponta e o máximo R_{st} na análise, busca relativizar o comprimento acrescentado para fissuras em diferentes subdomínios.

De modo a impedir pequenos incrementos no comprimento das fissuras, que podem resultar em pontos de colocação muito próximo e, conseqüentemente, em singularidades nas matrizes do MEC, é estabelecido um valor mínimo de crescimento igual à distância padrão entre os nós da fissura definida pelo usuário.

A partir do ângulo de propagação e do comprimento de crescimento, são definidos novos pontos de colocação ao longo do caminho de propagação que representam a discretização das novas faces criadas (Figura 3.18a-b). As pontas que apresentam maior comprimento de crescimento possuem prioridade na definição das novas faces. Os pares de pontos de colocação inseridos ao longo dos novos caminhos são inicialmente considerados como de interface e, portanto, se encontram fechados. O grau de aproximação utilizado para os novos elementos da fissura é igual ao prescrito inicialmente.

A cada novo ponto de colocação definido, duas novas linhas e colunas, correspondentes aos novos graus de liberdade criados, são adicionadas às matrizes **H** e **G**. As linhas representam a influência do novo ponto de colocação sobre os demais, enquanto as colunas representam a influência inversa. Ademais, o comprimento de fissura adicionado pode interceptar um elemento preexistente. Nesse caso, o elemento original cruzado é modificado e um novo elemento é criado (Figura 3.18b). Os coeficientes dos graus de liberdade do elemento modificado são alterados nas matrizes **H** e **G**, enquanto novos coeficientes referentes ao elemento criado são adicionados. A Figura 3.18c mostra o esquema de alteração das matrizes do MEC com a adição e a modificação de elementos na malha da estrutura. Maiores detalhes sobre os tipos de interseção entre os elementos são apresentados no item 3.8.3.

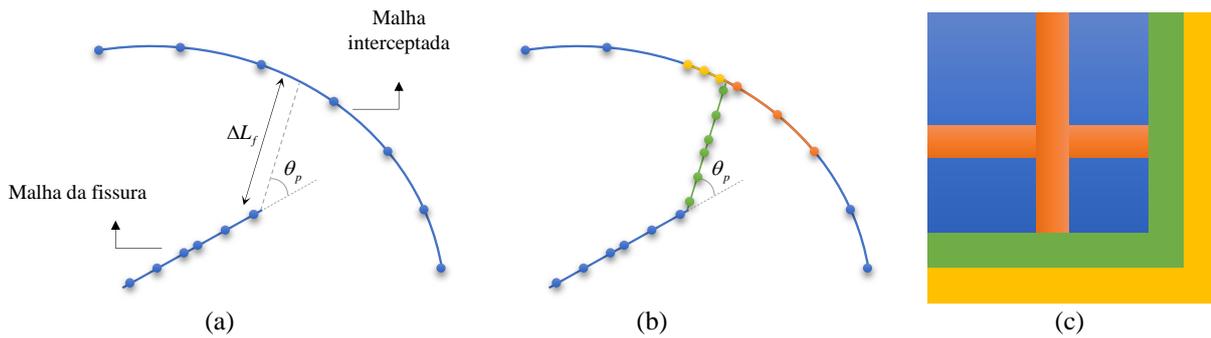


Figura 3.18 - (a) Malha inicial; (b) remalhamento na propagação e interseção de algum elemento durante a propagação de uma fissura; e (c) alteração das matrizes H e G com a criação e modificação de elementos durante a propagação.

Os valores acumulados de deslocamento e força de superfície para os pontos de colocação dos elementos modificados e dos elementos criados a partir da divisão de um elemento preexistente são obtidos a partir da interpolação dos valores acumulados dos pontos de colocação do elemento original (Figura 3.19a). Já para a determinação dos valores acumulados para as novas faces de fissura, a estrutura é resolvida adotando os valores acumulados como condições de contorno conhecidas para o problema. Dessa forma, após a solução do sistema de equações, os valores acumulados desconhecidos de deslocamento e força de superfície para os pontos de colocação das novas faces, definidos como pontos de interface, são obtidos (Figura 3.19b).

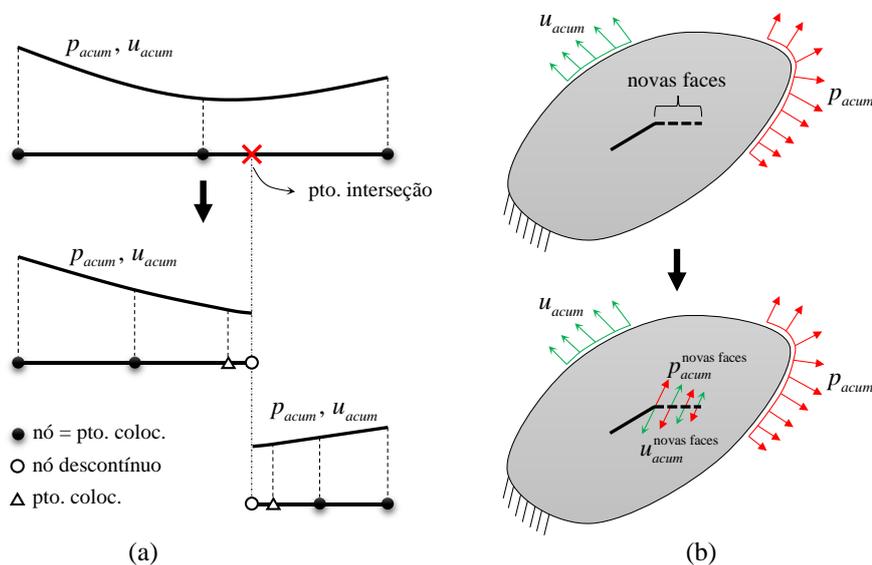


Figura 3.19 - (a) Interpolação dos campos acumulados de deslocamento e força de superfície para os novos elementos criados a partir da divisão de outro. (b) Determinação dos campos acumulados para novas faces.

Após a atualização das variáveis acumuladoras para os pontos de colocação modificados e criados, a etapa de verificação dos pares é novamente realizada para analisar a abertura e o fechamento das faces na fase de reaplicação dos esforços. Terminada essa etapa, a estabilidade à propagação das pontas é novamente examinada. Se houver propagação de uma ou mais

pontas, a fase de propagação é realizada mais uma vez. Caso contrário, um novo incremento das condições de contorno é aplicado sobre a estrutura.

Exemplo 3.2: Propagação em modo I - Srawley (1976)

Este exemplo trata do problema de propagação de uma fissura em modo I em uma viga submetida a um ensaio de flexão em três pontos (Figura 3.20a). Esse esquema experimental é comumente utilizado para determinação do valor de K_{Ic} do material a partir da expressão analítica desenvolvida por Srawley (1976). A relação L/h é tomada igual a 4, sendo L a distância entre os centros dos apoios. Nesse caso, a expressão para a obtenção de K_I determinada por Srawley (1976) é dada por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\alpha) \quad (3.55)$$

sendo σ e $F(\alpha)$ dados por:

$$\sigma = \frac{6P}{h} \quad (3.56)$$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1,99 - \alpha(1-\alpha)(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2)}{(1+2\alpha)(1-\alpha)^{3/2}} \quad (3.57)$$

onde $\alpha = a/h$.

A Figura 3.20b mostra a discretização do contorno externo da estrutura. Os apoios e a região de aplicação da força P , com comprimento $l = 0,01L$, são discretizados com um elemento linear descontínuo. O restante do contorno é discretizado com 40 elementos quadráticos contínuos ou semicontínuos.

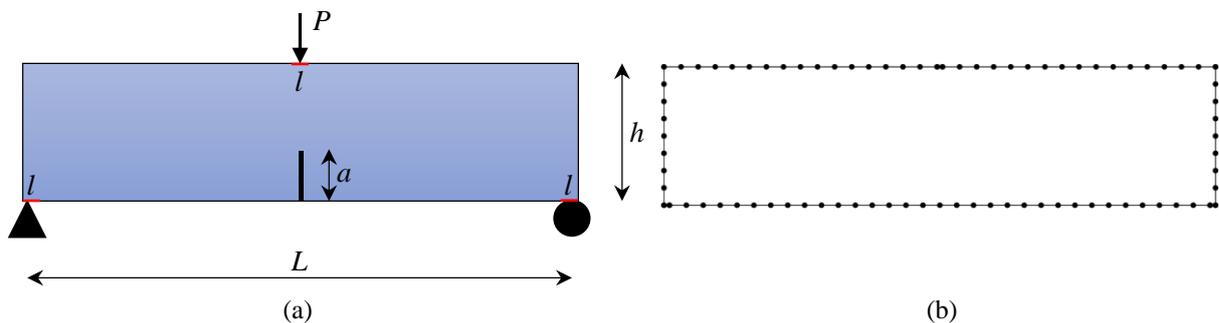


Figura 3.20 - Problema analisado no Exemplo 3.2: (a) geometria e (b) discretização do contorno externo.

O comprimento inicial da fissura é tomado igual a $a = 0,2h$ e em cada face são inseridos 8 elementos cúbicos com comprimento igual a $0,025h$. O cálculo da integral J é realizado a partir de um caminho com raio igual a aproximadamente $0,0479h$, discretizado com cinco elementos cúbicos.

Sobre a estrutura é aplicado um carregamento uniformemente distribuído com magnitude igual a P/l , equivalente à força P . Na sequência, a fissura propaga com incrementos no comprimento igual a $0,1h$ até $0,8h$. A Figura 3.21 mostra a evolução do valor de K_I obtido numericamente e o valor de referência fornecido por Srawley (1976). Na Figura 3.21 também é representada a curva de variação do erro percentual relativo.

Analisando o gráfico da Figura 3.21 observa-se uma boa correspondência entre os valores obtidos de K_I e os valores de referência durante a propagação da fissura. Os erros relativos obtidos ficaram, na média, em torno de 1%. Isso indica a eficácia na implementação do esquema adaptativo para solução do problema de propagação em modo I.

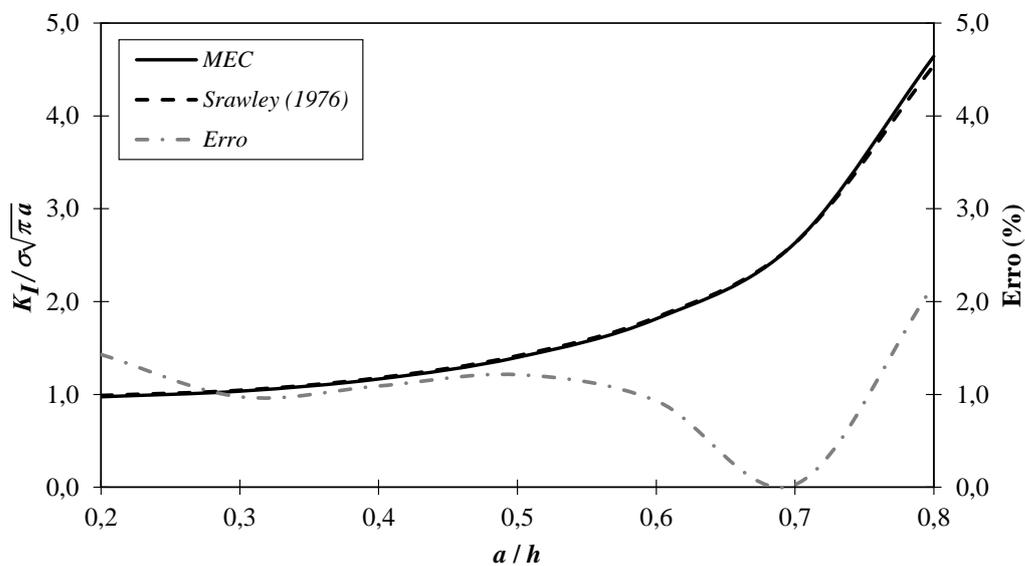


Figura 3.21 - Histórico do valor de K_I em relação ao comprimento da fissura.

Já a Figura 3.22 mostra a configuração deformada dos pontos de colocação da estrutura em três instantes distintos, nos quais: $a = 0,2h$, $a = 0,5h$ e $a = 0,8h$. Como pode ser observado, o caminho de propagação segue a direção de 90 graus, o que era esperado pelo fator do problema possuir uma sollicitação em modo I puro.

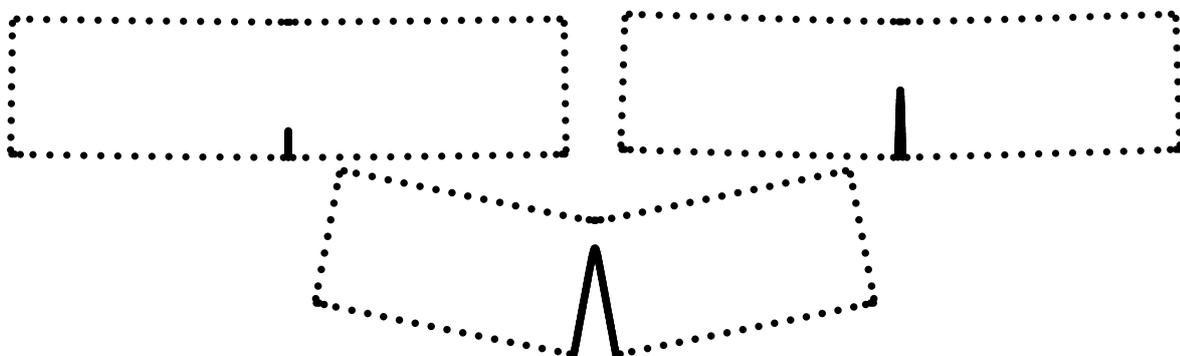


Figura 3.22 - Evolução do caminho de propagação da fissura sujeita a modo I puro.

Exemplo 3.3: Propagação em modo misto - Franc2D

Este exemplo analisa a propagação em modo misto de uma fissura presente na estrutura mostrada pela Figura 3.23. O corpo apresenta comprimento igual a $2D$, altura igual a D e está submetido a uma tração uniforme σ . Existem duas aberturas de diâmetro $\phi = 0,4D$ posicionadas conforme indicado na Figura 3.23. Os pontos de colocação ao longo da face esquerda da estrutura apresentam deslocamentos restritos no plano.

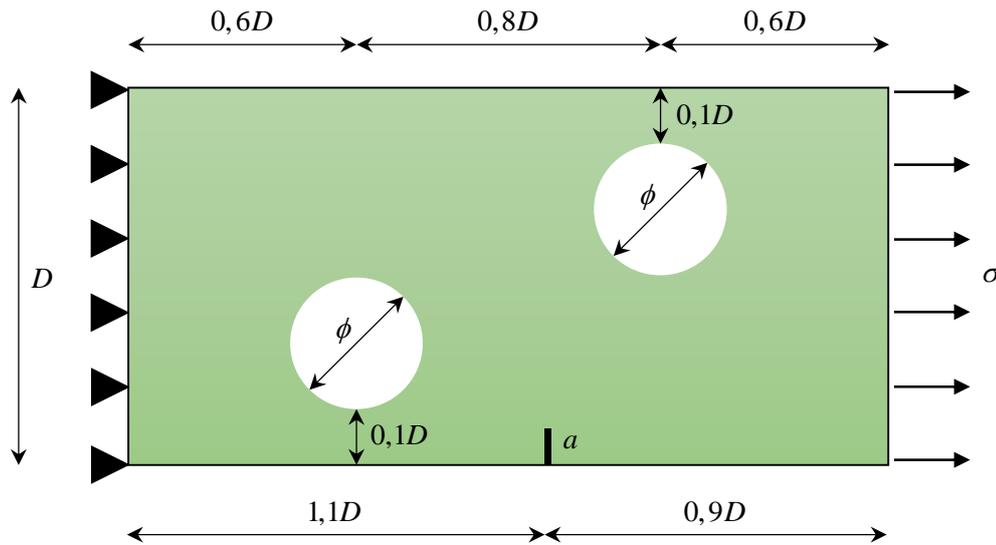


Figura 3.23 - Geometria do problema analisado no Exemplo 3.4.

O comprimento inicial da fissura é igual a $0,05D$. A malha de elementos de contorno em cada face é composta por 4 elementos quadráticos. Já o contorno externo é discretizado com 48 elementos quadráticos, enquanto cada abertura é discretizada com 8 elementos quadráticos. A Figura 3.24a mostra a discretização da estrutura em elementos de contorno.

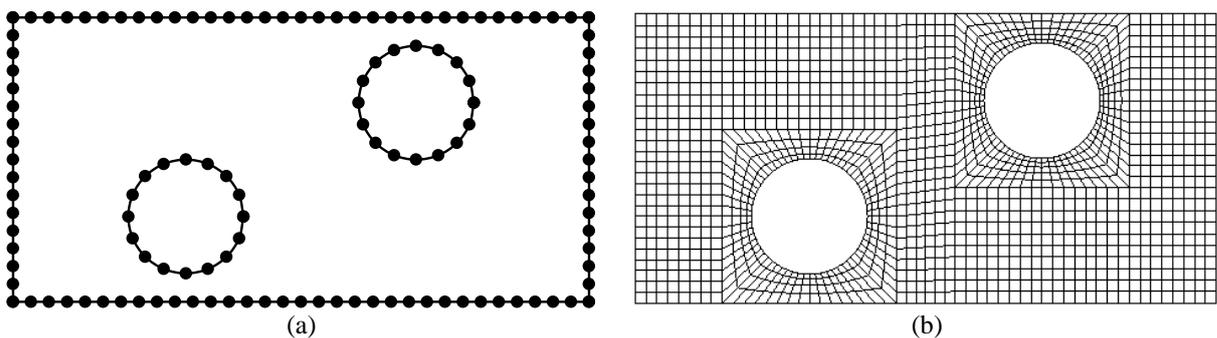


Figura 3.24 - Discretização da estrutura em (a) elementos de contorno e (b) elementos finitos.

A estrutura também é analisada pelo MEF por meio do *software* Franc2D. A malha de elementos finitos utilizada, composta por elementos quadriláteros com aproximação quadrática, é representada pela Figura 3.24b.

Sob a ação do carregamento representado, a fissura se propaga com incrementos no comprimento igual a $0,025D$. Em ambos os métodos numéricos empregados, os FIT são

determinados a partir da integral J, enquanto a direção de propagação é determinada a partir do critério da máxima tensão circunferencial.

Os seguintes valores (em unidades adequadas arbitrárias) para os parâmetros envolvidos são adotados: $D = 1$, $E = 10000$, $\nu = 0,25$ e $\sigma = 10$ e a análise é realizada considerando EPT. Os históricos dos valores de K_I e K_{II} em função do comprimento da fissura, determinados a partir do código desenvolvido utilizando o MEC e do Franc2D são apresentados na Figura 3.25 e na Figura 3.26.

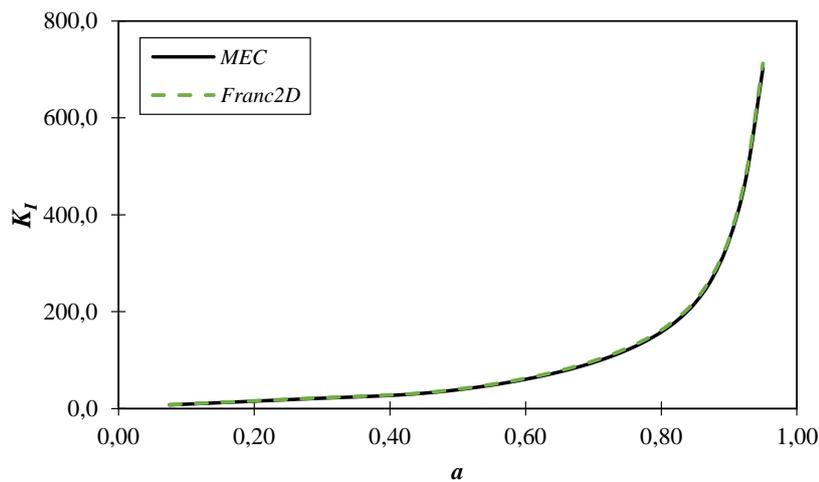


Figura 3.25 - Variação de K_I com o comprimento da fissura.

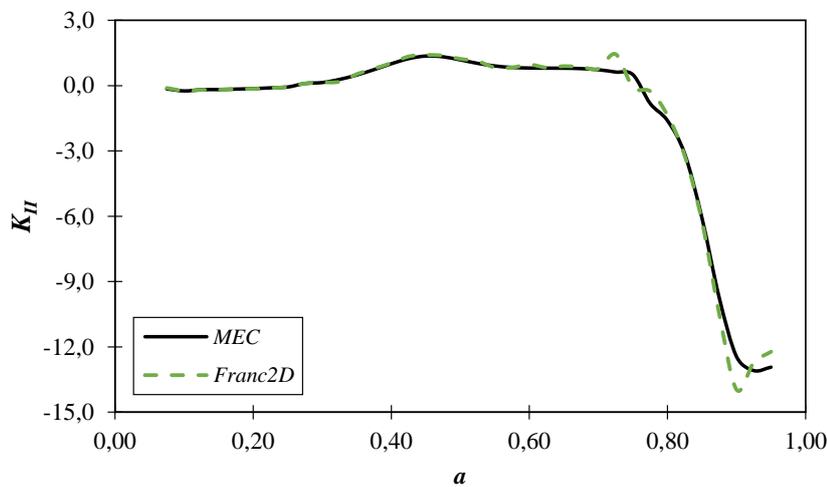


Figura 3.26 - Variação de K_{II} com o comprimento da fissura.

Como pode ser observado pelo gráfico apresentado na Figura 3.25, há uma boa correspondência entre os valores de K_I obtidos pelo programa desenvolvido neste trabalho e os obtidos via Franc2D. Tal correspondência é verificada desde o comprimento inicial de fissura até o comprimento final simulado de 0,95. Com relação ao histórico de K_{II} mostrado pela Figura 3.26, uma boa correspondência entre as respostas é novamente verificada. Todavia, a resposta obtida via MEF apresenta algumas regiões com oscilações nos valores de K_{II} , enquanto a variação desse fator determinada via MEC é mais suave.

A boa correspondência entre os valores dos FIT ainda pode ser observada a partir da comparação entre os caminhos de propagação, uma vez que a relação entre K_I e K_{II} define o ângulo de propagação no critério da máxima tensão circunferencial (Eq. (3.47)). A Figura 3.27 mostra a sobreposição entre os caminhos de propagação determinados via MEC e via Franc2D. Em destaque está o caminho determinado a partir do código desenvolvido neste trabalho, enquanto no caso do Franc2D o caminho de propagação está localizado onde a malha de elementos finitos está mais refinada. Como pode ser observado, os caminhos de propagação são praticamente coincidentes. Tal resultado é justificado pela boa relação entre os valores de K_I e K_{II} determinados em ambos os métodos numéricos.

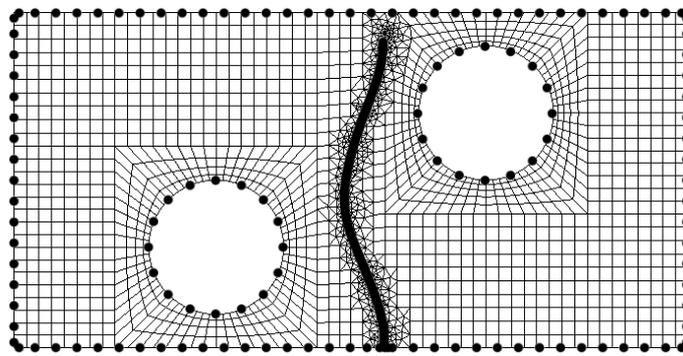
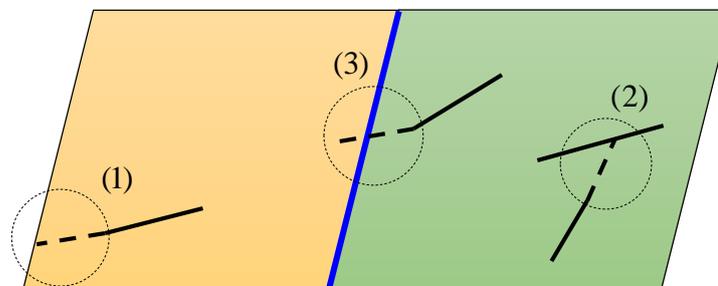


Figura 3.27 - Sobreposição dos caminhos de propagação determinados via MEC e Franc2D.

3.8.3 Tópicos sobre a propagação de múltiplas fissuras em domínios não-homôneos

Nos problemas envolvendo a propagação de múltiplas fissuras situadas em diferentes subdomínios, a definição do comprimento a ser adicionado às pontas que propagam é feita conforme a Eq. (3.53). O comprimento de fissura adicionado durante a propagação de uma ponta pode interceptar três tipos de elementos: de contorno externo, de fissura ou de interface (Figura 3.28).



Interseção de: (1) contorno externo
(2) fissura
(3) interface

Figura 3.28 - Casos possíveis de interseção entre elementos.

No caso de interseção com contorno externo a ponta deixa de ser ativa, ou seja, não é mais capaz de propagar. Se o elemento for cruzado em seu interior, ele é dividido em dois e o ponto de interseção se torna um ponto de descontinuidade da malha (Figura 3.29a). Nessa situação, a alteração das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} se dá conforme já discutido no item 3.8.2. Caso o elemento seja cruzado em um nó de continuidade com outro elemento, um novo ponto de colocação é adicionado à malha e a interseção se torna um ponto de descontinuidade entre os elementos (Figura 3.29b). Nesse caso, apenas as linhas e colunas referentes ao ponto modificado e adicionado são alteradas e acrescentadas, respectivamente, nas matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} .

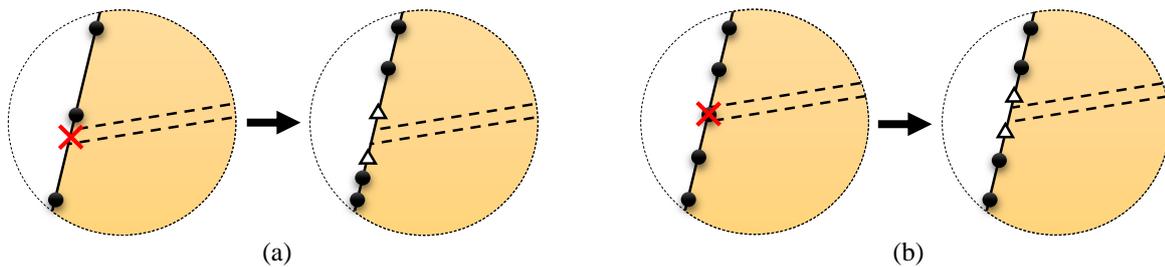


Figura 3.29 - Interseção de um elemento de contorno externo (a) em um ponto interno qualquer e (b) em um nó de continuidade com um elemento vizinho.

Já a interseção do novo comprimento de fissura com elementos de fissura preexistentes representa o fenômeno de coalescência entre as descontinuidades. Nesse caso, tanto o elemento cruzado quando o seu par na face oposta são divididos em dois elementos descontínuos e a ponta que sofreu propagação deixa de ser ativa (Figura 3.30a). As linhas e colunas referentes aos dois elementos modificados são alteradas nas matrizes do MEC, enquanto as linhas e colunas correspondentes aos dois elementos adicionados são inseridas. Caso a interseção ocorra em um nó de descontinuidade entre os elementos, não há alteração na malha preexistente (Figura 3.30b).

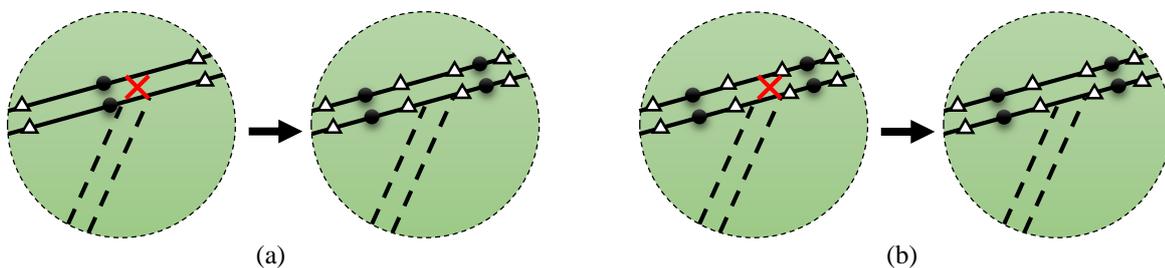


Figura 3.30 - Interseção de um elemento de fissura (a) em um ponto interno qualquer e (b) em um nó de descontinuidade com um elemento vizinho.

Por fim, se o novo comprimento de fissura adicionado interceptar uma interface, a ponta continua ativa e passa a pertencer ao novo subdomínio. Os elementos adicionados às novas faces da fissura ficam contidos em apenas um subdomínio. Já os elementos pares interceptados na interface são modificados e dois novos elementos são criados (Figura 3.31a). Como no caso de elementos de contorno externo, caso a interseção ocorra em um nó de continuidade, ele é

transformado em um ponto de descontinuidade entre os elementos da interface (Figura 3.31b). O processo de modificação das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} segue a mesma metodologia já apresentada.

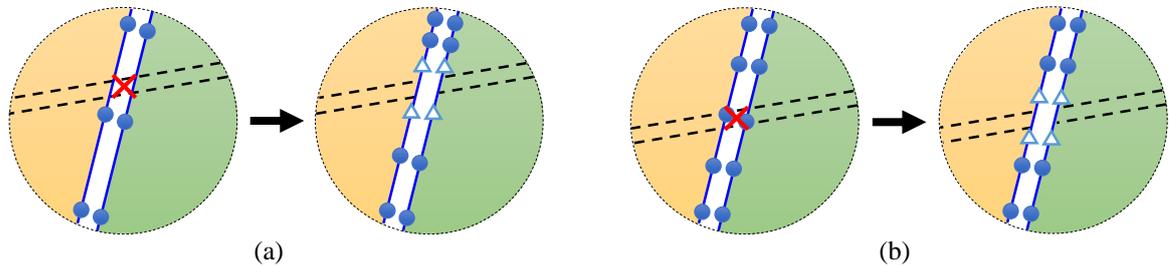


Figura 3.31 - Interseção de elementos de interface (a) em um ponto interno qualquer e (b) em um nó de continuidade com um elemento vizinho.

As condições de contorno e os valores acumulados de deslocamento e força de superfície para os novos graus de liberdade criados a partir da modificação de um elemento preexistente são obtidos a partir da interpolação dos valores do elemento original com a utilização das funções de forma polinomiais, conforme discutido no item 3.8.2.3 e representado pela Figura 3.19a.

Exemplo 3.4: Propagação de múltiplas fissuras em domínio homogêneo - Budyn et al. (2004)

Neste exemplo é analisado o domínio homogêneo multifissurado mostrado na Figura 3.32. Essa estrutura também foi examinada por Budyn et al. (2004) via MEFG. O material é admitido como vidro frágil com módulo de elasticidade $E = 10^5$ psi, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e tenacidade $K_{Ic} = 800$ psi.in^{0,5}. O problema é analisado como um EPD. A dimensão W é igual 2 in e o comprimento médio das fissuras é igual a 0,25 in. A largura da estrutura é admitida como unitária.

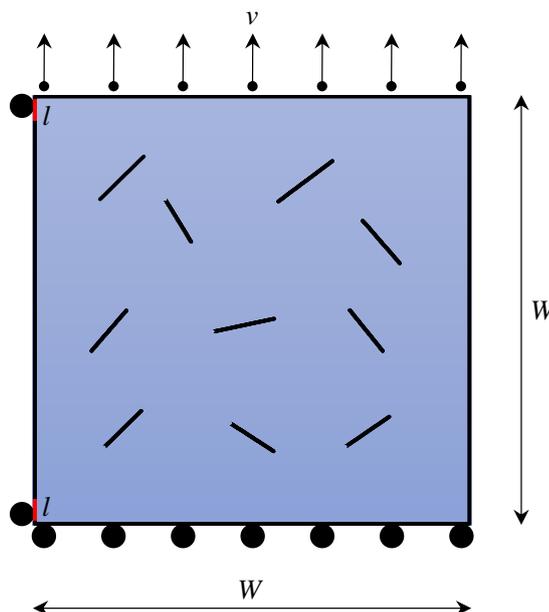


Figura 3.32 - Geometria do problema analisado no Exemplo 3.4.

A discretização do contorno externo é feita com 40 elementos quadráticos e 2 elementos lineares. Os elementos lineares são dispostos no topo e na base da lateral esquerda da estrutura, possuem dimensão $l = 0,05W$ e têm o deslocamento horizontal restringido. A base da estrutura apresenta deslocamento vertical restrito, enquanto sobre o topo é prescrito um deslocamento vertical igual a 0,04 in em 40 passos. As faces das fissuras são discretizadas com 6 elementos quadráticos. A malha de elementos de contorno utilizada é mostrada pela Figura 3.33a. Já a Figura 3.33b representa a malha de elementos finitos utilizada por Budyn et al. (2004). O valor de incremento padrão para a propagação das fissuras é tomado igual à 0,07 in.

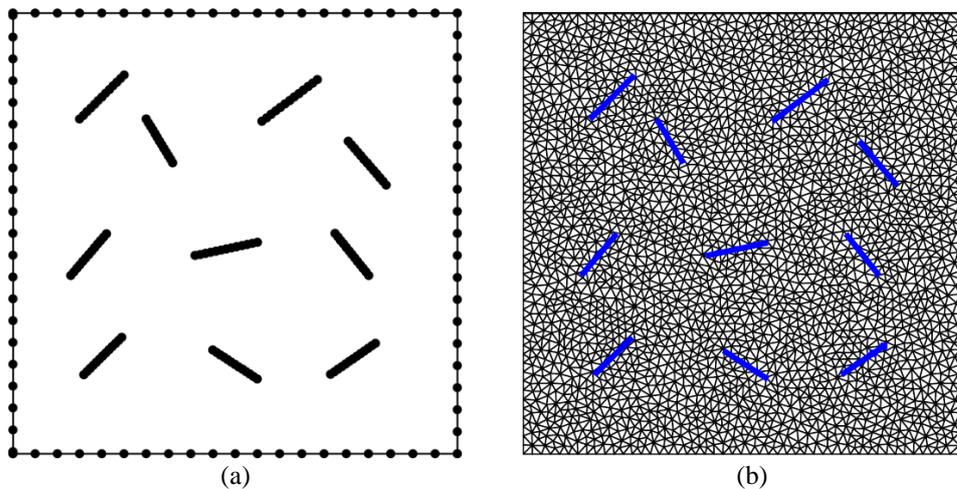


Figura 3.33 - Discretização em (a) elementos de contorno e (b) elementos finitos (BUDYN et al., 2004).

A Figura 3.34 mostra as curvas de força equivalente aplicada pelo deslocamento no topo da estrutura determinadas neste trabalho e por Budyn et al. (2004). O trecho de regime elástico e a força equivalente máxima aplicada foram praticamente coincidentes em ambos os casos. Neste trabalho, atingido o valor crítico de força, o deslocamento no topo é mantido constante enquanto as fissuras se propagam. Durante o crescimento das discontinuidades, há um alívio da força equivalente no topo da estrutura causado pela redistribuição de esforços. A fissura central é a primeira a se propagar. As suas pontas crescem até coalescer com as fissuras vizinhas, que por sua vez se propagam até dividir a estrutura em duas partes (Figura 3.35a). Nessa situação, a força equivalente no topo assume valor nulo. Os incrementos de deslocamentos seguintes são dados na metade superior da estrutura como deslocamento de corpo rígido e, portanto, a força equivalente no topo se mantém nula.

Todavia, a curva F_{eq-v} obtida por Budyn et al. (2004) após a propagação da primeira ponta apresenta comportamento distinto. Isso pode ser explicado pelas diferentes metodologias utilizadas para tratar o problema de propagação. Enquanto neste trabalho é realizada uma análise incremental com controle de deslocamentos, Budyn et al. (2004) utilizam uma técnica de solução com controle do comprimento das fissuras. Nessa técnica, a cada novo incremento

no comprimento da descontinuidade, busca-se uma nova configuração das solicitações externas que recupera o equilíbrio da estrutura, mesmo que de forma instável. Como o tamanho da descontinuidade é uma função monotonamente crescente, essa técnica é capaz de capturar o fenômeno de *snap-back*, conforme apresentado pela Figura 34, o que não é possível apenas com o controle de deslocamentos feito neste trabalho.

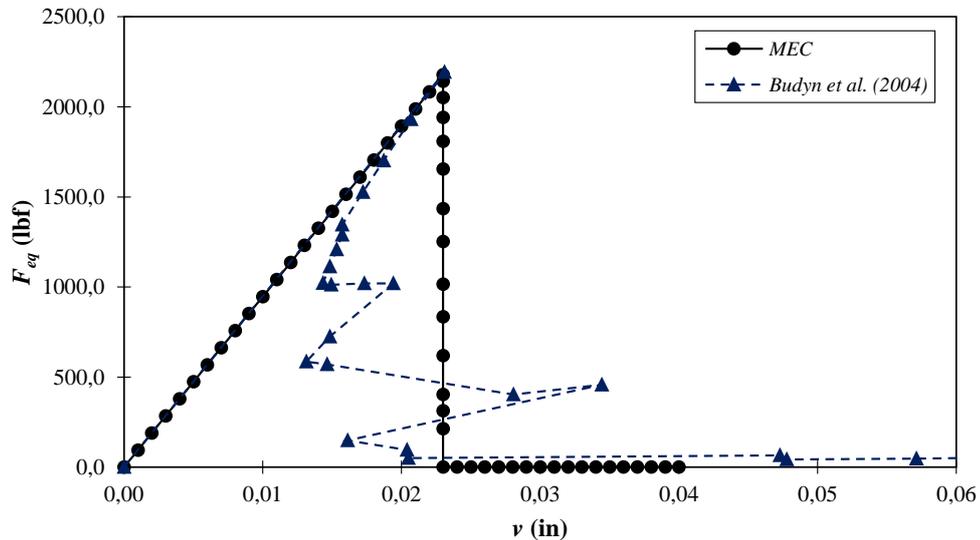


Figura 3.34 - Curva força equivalente pelo deslocamento no topo.

A Figura 3.35a e a Figura 3.35b mostram as configurações finais obtidas neste trabalho e por Budyn et al. (2004), respectivamente. Como pode ser observado, há uma boa correspondência entre os caminhos de propagação determinados.

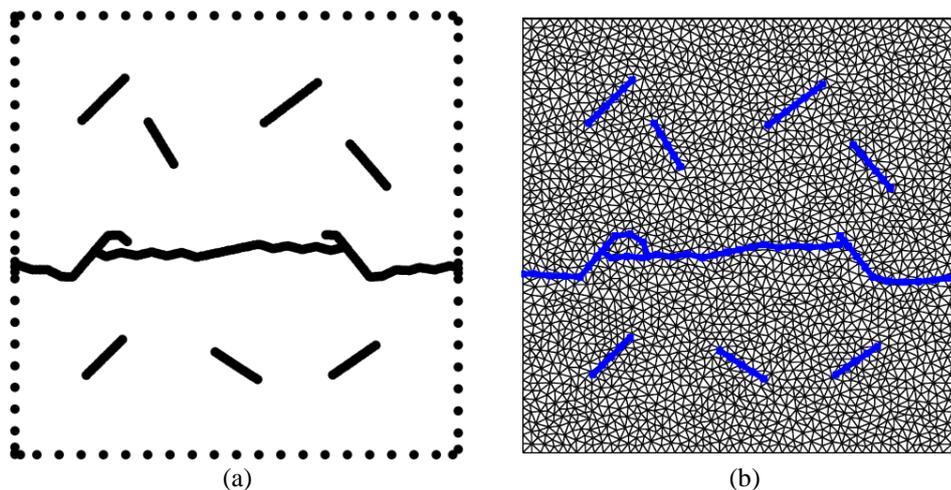


Figura 3.35 - Caminhos de propagação obtidos (a) neste trabalho e (b) por Budyn et al. (2004).

A Figura 3.36 mostra o detalhe da superfície de separação entre as partes da estrutura ao final da fase de aplicação dos deslocamentos. O deslocamento vertical relativo entre as duas metades é de 0,4 in, igual ao deslocamento total prescrito no topo. Isso evidencia o deslocamento de corpo rígido da parte superior e mostra que esse tipo de comportamento é satisfatoriamente representado com a utilização do MEC.

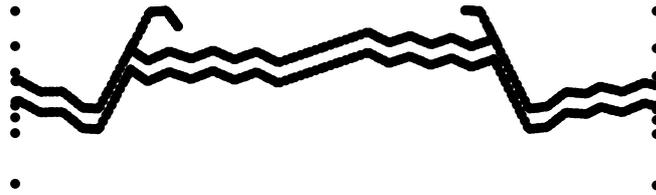


Figura 3.36 - Superfície de separação entre as duas metades da estrutura ao final do último incremento.

Exemplo 3.5: Propagação de múltiplas fissuras em domínio não-homogêneo

A Figura 3.37a mostra o domínio não-homogêneo multifissurado que é analisado neste Exemplo 3.5. O material na região inferior é denominado material 1 e apresenta módulo de elasticidade E_1 . Já o material na região superior é denominado material 2 e apresenta módulo de elasticidade E_2 . O coeficiente de Poisson para ambos é tomado como nulo. A dimensão W é tomada igual 2 (unidade arbitrária) e o comprimento das fissuras segue uma distribuição normal com média 0,1 e coeficiente de variação igual a 0,05. A largura da estrutura é admitida como unitária.

A estrutura é submetida a um estado biaxial, com deslocamentos prescritos iguais a \bar{u} tanto na lateral direita quanto no topo. A lateral esquerda e a base apresentam deslocamentos restritos na horizontal e vertical, respectivamente.

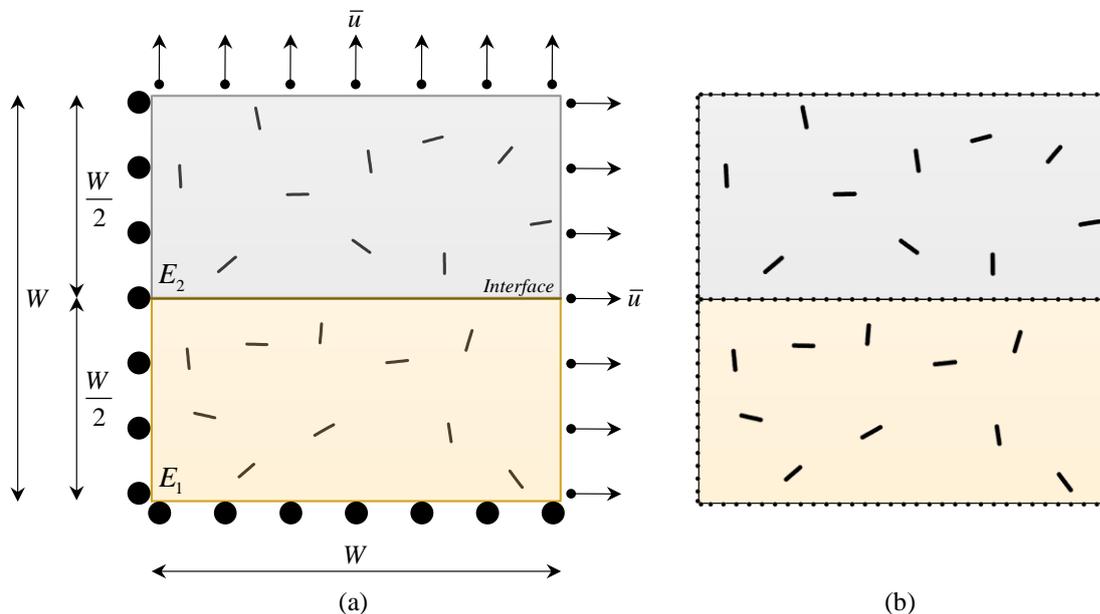


Figura 3.37 - (a) Geometria e (b) discretização do problema analisado no Exemplo 3.5.

A discretização do contorno externo de cada um dos subdomínios é realizada com 48 elementos quadráticos, totalizando 96 elementos. Já as faces de cada uma das fissuras são discretizadas com 4 elementos quadráticos. A malha de elementos de contorno utilizada é representada pela Figura 3.37b. Durante a fase de propagação, o valor do incremento padrão para o crescimento das fissuras é tomado igual à 0,05.

Inicialmente é feita a avaliação da variação dos FIT máximos em cada subdomínio com a mudança da rigidez relativa entre os dois materiais. Para tanto, são definidas as variáveis α e β que representam, respectivamente, a razão entre os módulos de elasticidade e a razão entre os valores máximos de K_{eq} em cada subdomínio:

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1} \quad (3.58)$$

$$\beta = \frac{K_{eq,2}^{máx}}{K_{eq,1}^{máx}} \quad (3.59)$$

Adotando $\alpha = \{0,1; 0,125; 0,167; 0,25; 0,5; 1; 2; 4; 6; 8; 10\}$, para a configuração inicial os valores de β apresentados na Tabela 3.3 são determinados:

Tabela 3.3 - Valores de α e β

α :	0,1	0,125	0,167	0,25	0,5	1	2	4	6	8	10
β :	0,18	0,22	0,29	0,40	0,67	1,02	1,54	2,58	3,62	4,67	5,72

A partir dos valores apresentados pela Tabela 3.3 e das definições de α e β (Eq. (3.58) e Eq. (3.59)) observa-se que o subdomínio com maior módulo de rigidez elástico possui a fissura com maior valor máximo do FIT equivalente. Isso está de acordo com o esperado, visto que subdomínios mais rígidos tendem a absorver maiores esforços e, conseqüentemente, as suas fissuras têm maiores níveis de solicitação. Os valores de α e β podem ser representados em um gráfico log-log, como mostrado na Figura 3.38. A partir do gráfico pode-se observar que, para o intervalo de valores analisado, os parâmetros apresentam uma boa correspondência exponencial, cuja expressão também é indicada na Figura 3.38.

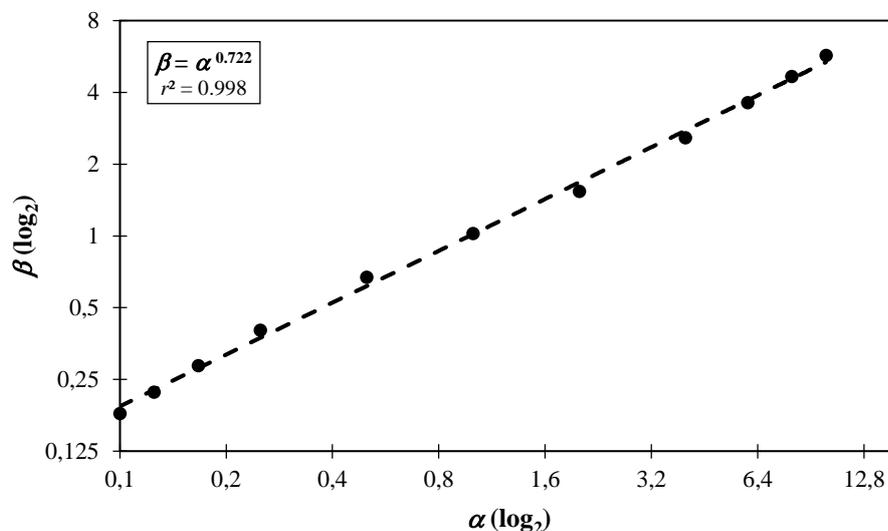


Figura 3.38 - Relação entre os parâmetros α e β .

Outro ponto relevante a ser observado é em relação a qual descontinuidade apresenta o maior nível de sollicitação em cada domínio com a mudança na rigidez relativa. A Figura 3.39 indica as fissuras com sollicitação máxima para as situações nas quais $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$.

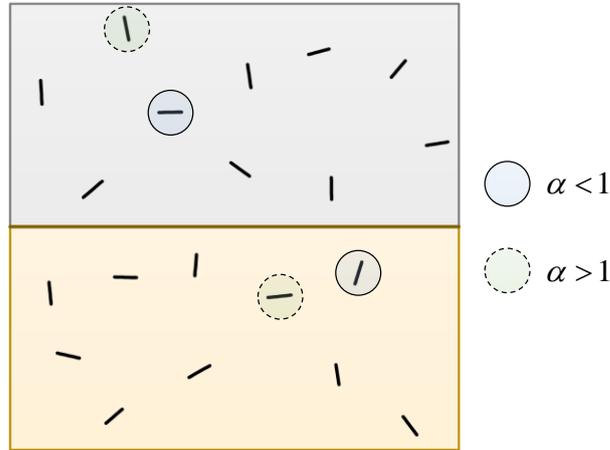


Figura 3.39 - Indicação das fissuras com sollicitação máxima em cada um dos subdomínios para $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$.

A Figura 3.39 mostra que a fissura com sollicitação crítica tende a ser horizontal para os subdomínios mais flexíveis e vertical para os subdomínios mais rígidos. Esse fato pode ser justificado a partir de uma análise da sollicitação média em cada uma das direções. Como o coeficiente de Poisson para ambos os materiais foi admitido como nulo, as duas direções de sollicitação podem ser assumidas como independentes. Dessa forma, pode-se definir uma deformação média para cada material i nas direções horizontal e vertical como:

$$\bar{\varepsilon}_h = \frac{\Delta L_h^{(i)}}{L_h^{(i)}} = \frac{\bar{u}}{W} \quad (3.60)$$

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{\Delta L_v^{(i)}}{L_v^{(i)}} = \frac{2\Delta L_v^{(i)}}{W} \quad (3.61)$$

onde $\bar{\varepsilon}_h$ e $\bar{\varepsilon}_v$ são as deformações médias horizontal e vertical, respectivamente, $\Delta L_h^{(i)} = \bar{u}$ é a variação do comprimento horizontal de ambos os subdomínios e $\Delta L_v^{(i)}$ é a variação do comprimento vertical de determinado subdomínio i , sendo que:

$$\bar{u} = \Delta L_v^{(1)} + \Delta L_v^{(2)} \quad (3.62)$$

A partir de $\bar{\varepsilon}_h$ e $\bar{\varepsilon}_v$ e do módulo de elasticidade de cada material, pode-se determinar uma tensão normal média nas direções horizontal e vertical por:

$$\bar{\sigma}_h = E_i \bar{\varepsilon}_h \quad (3.63)$$

$$\bar{\sigma}_v = E_i \bar{\varepsilon}_v \quad (3.64)$$

Para o caso no qual ambos os materiais possuem o mesmo módulo elástico de rigidez, ambos apresentam o mesmo valor de variação de comprimento vertical, sendo $\Delta L_v^{(i)} = \bar{u}/2$.

Nessa situação, as deformações médias na horizontal e na vertical são as mesmas. Entretanto, quando os materiais apresentam propriedades distintas, aquele com menor rigidez terá maior variação do comprimento vertical, sendo que $\Delta L_v^{(i)} > \bar{u}/2$. Isso implica que, para o material mais flexível, a deformação média vertical é maior do que a deformação média horizontal. Logo, a partir da Eq. (3.63) e da Eq. (3.64), para esse material a solicitação média vertical será maior do que a horizontal. Como a solicitação média vertical causa maiores solicitações sobre as fissuras posicionadas horizontalmente, essa orientação das descontinuidades tende a ser mais crítica para o material mais flexíveis. O comportamento oposto é observado para o material mais rígido.

Do exposto e a partir da Eq. (3.60) e da Eq. (3.63), conclui-se que se o módulo de elasticidade do material mais rígido for mantido constante, a solicitação para a fissura vertical crítica, e conseqüentemente o valor do K_{eq} máximo para o subdomínio, tende a se manter constante com a variação de α . Esse comportamento é observado a partir das simulações realizadas, para as quais foram adotados E_1 constante e igual a 10000 e $\bar{u} = 0,01$ (unidades arbitrárias). A Figura 3.40 mostra que para valores de $\alpha < 1$, situação na qual o material 1 é mais rígido, o valor do FIT equivalente máximo para o subdomínio foi praticamente constante e aproximadamente igual a 20.

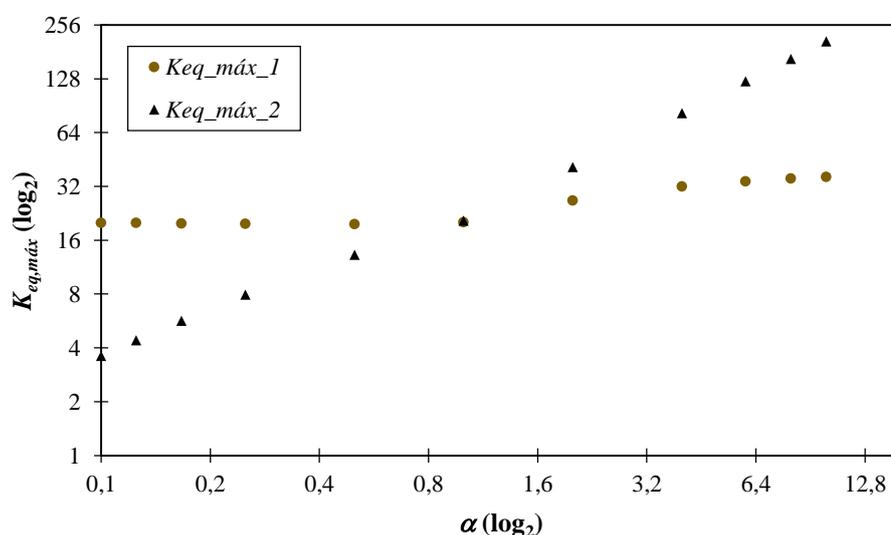


Figura 3.40 - Valores dos FIT equivalentes máximos determinados para cada um dos subdomínios.

Por fim, procede-se a análise dos caminhos de propagação para diferentes razões entre os módulos de elasticidade dos materiais. Para α são adotados os valores iguais a 0,25, 1 e 4. Em todas as análises $E_1 = 10000$ e $\bar{u} = 0,01$. Os valores da tenacidade dos materiais são tomados ligeiramente inferiores ao máximo FIT equivalente no subdomínio de modo a garantir que inicialmente ocorra a propagação das pontas com solicitação crítica. A Figura 3.41 mostra

as configurações deformadas (ampliadas em cinco vezes) sobre as indeformadas nas situações finais de equilíbrio da estrutura para os casos analisados. Observa-se a tendência da propagação horizontal no material mais rígido e vertical no material mais flexível pelas razões expostas anteriormente. No caso de $\alpha = 1$, equivalente a um domínio homogêneo, não se nota uma direção preferencial de propagação.

Além disso, a partir da Figura 3.41 é possível verificar o efeito de *shielding* (ver LOEHNERT; BELYTSCHKO, 2007) das microfissuras sobre as demais. As descontinuidades com maiores comprimentos em determinada direção tendem a restringir os esforços e, conseqüentemente, os deslocamentos na direção oposta das fissuras mais afastadas das faces de aplicação dos deslocamentos prescritos. Assim, como pode observado na Figura 3.41, as microfissuras verticais limitam os deslocamentos verticais das fissuras mais à esquerda da estrutura, enquanto as microfissuras horizontais limitam os deslocamentos horizontais das fissuras mais próximas à base.

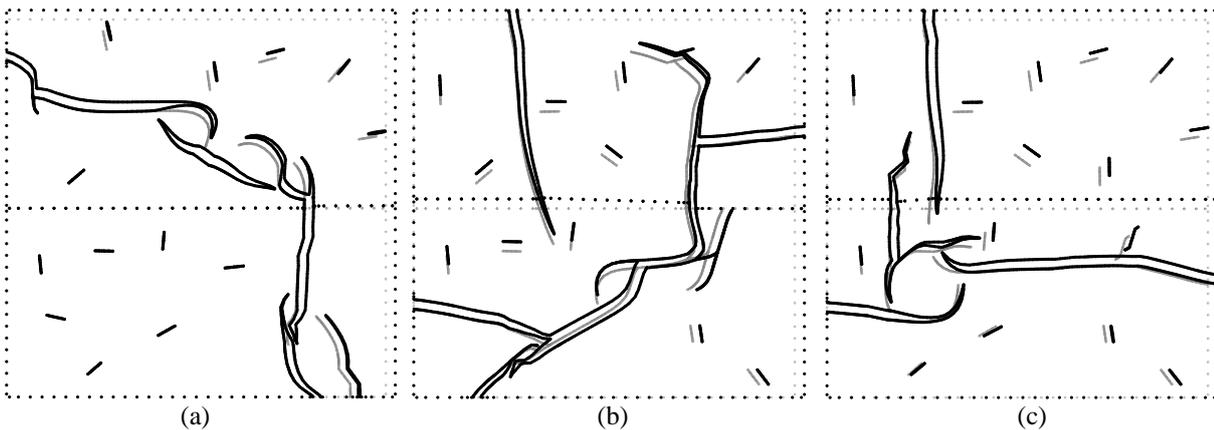


Figura 3.41 - Representação das configurações finais para (a) $\alpha = 0,25$, (b) $\alpha = 1,0$ e (c) $\alpha = 4$. Deslocamentos ampliados por um fator igual a 5 na configuração deformada.

4 FRATURAMENTO HIDRÁULICO

O fraturamento hidráulico (*fracking*) é uma técnica não-convencional largamente utilizada pela indústria petrolífera para a estimulação da produção de poços de extração de gás natural e óleo. Esta técnica é especialmente aplicada em poços que possuem níveis de decaimento de produção (ECONOMIDES et al., 2011). O *fracking* consiste em injetar um fluido de fraturamento, composto normalmente por água, areia e produtos químicos, sob alta pressão em um poço previamente perfurado na rocha reservatório com o objetivo de induzir a propagação de fissuras e, conseqüentemente, criar caminhos para viabilizar o fluxo e produção de hidrocarbonetos (Figura 4.1).

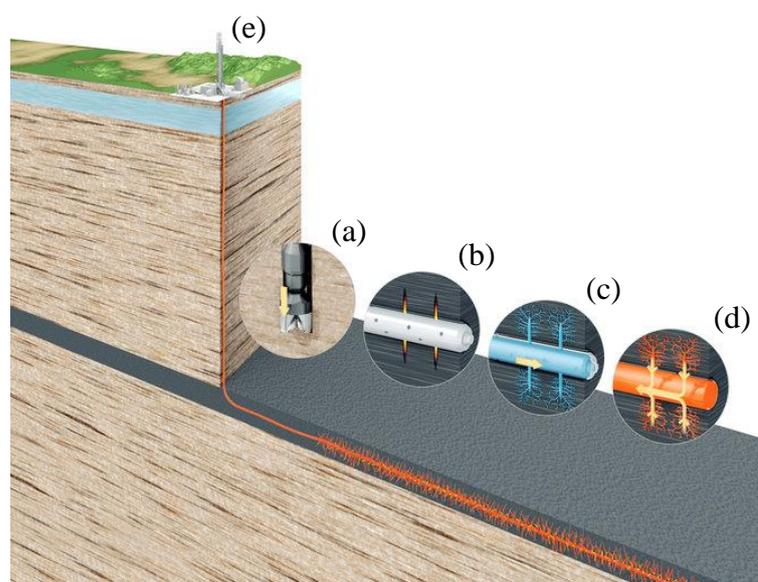


Figura 4.1 - Representação da técnica de fraturamento hidráulico: (a) perfuração até rocha reservatório; (b) criação de fissuras; (c) bombeamento do fluido de fraturamento para propagação das fissuras e formação de novos caminhos para o (d) fluxo de hidrocarbonetos até o (e) local de produção.

Fonte: Adaptado de Gertner (2013).

A importância maior atribuída ao fraturamento hidráulico está centrada ao custo operacional inicial de execução em poços já fraturados. Eshkalak et al. (2014) explicam que o custo de estimular um poço já existente é mais rentável economicamente por fraturamento do que perfurar um novo poço nas proximidades deste.

Os reservatórios de combustíveis fósseis líquidos e gasosos são usualmente compostos por rochas sedimentares com alta permeabilidade, denominadas rochas reservatório, das quais os hidrocarbonetos são extraídos com o emprego de técnicas convencionais. Entretanto, em situações nas quais os combustíveis fósseis estão depositados em rochas com baixa permeabilidade, a extração não é economicamente viável com o uso dessas técnicas. Nessas

casos, a utilização do fraturamento hidráulico mostra-se atrativo, uma vez que promove o aumento da permeabilidade pelo fraturamento da matriz rochosa e permite acesso aos conteúdos antes inacessíveis. Nos últimos anos a técnica tem sido cada vez mais empregada, particularmente para a extração de gás e óleo em folhelho betuminoso (também conhecido como xisto betuminoso).

A primeira aplicação experimental do fraturamento hidráulico foi realizada em 1947 pela companhia Stanolind Oil & Gas Co, atualmente British Petroleum (BP), em um campo de exploração de gás em Kansas, EUA. Entretanto, não foi observado aumento significativo da produção (SMITH; MONTGOMERY, 2015). Os fundamentos da técnica foram apresentados posteriormente no trabalho de Clark (1949). Nos anos seguintes as primeiras patentes relacionadas ao fraturamento hidráulico foram depositadas, dentre elas as desenvolvidas por Clark (1952), Ferris (1952) e Howard (1954) e concedidas à Stanolind. Maiores detalhes sobre as patentes sobre o fraturamento hidráulico podem ser obtidos em Cahoy et al. (2013).

No final dos anos 1940 e ao longo dos anos 1950, houve uma ampliação expressiva da aplicação da técnica com o intuito de aumentar a produtividade em campos de exploração já existentes. Segundo Smith e Montgomery (2015), o fraturamento hidráulico foi utilizado em cerca de 3000 poços por mês em meados dos anos 1950. Com o aumento das aplicações, novos trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de descrever o comportamento do processo de fraturamento e do fluxo de combustíveis com base nos fundamentos da Teoria da Elasticidade, Mecânica da Fratura e Mecânica dos Fluidos. Dentre esses trabalhos destacam-se: Hubbert e Willis (1957), no qual os autores buscaram determinar a direção das fissuras induzidas pelo processo de fraturamento; Perkin e Kern (1961), em que são apresentados ábacos para obtenção da largura das fissuras induzidas em função de diferentes parâmetros; e Geertsma e Klerk (1969), no qual se buscou prever a dimensão das fissuras que emanam radialmente ou linearmente do poço perfurado.

Nas aplicações iniciais, o fluido de fraturamento utilizado para o *fracking* eram à base de óleos. Em meados dos anos 1950, a Dowell, atualmente Schlumberger, passou a utilizar fluido de fraturamento à base de água com adição de agentes espessantes, o que proporcionou uma grande revolução da técnica e a redução dos custos. Já em 1997, a partir da utilização de um fluido de fraturamento menos viscoso à base de água, a companhia Michell Energy, atualmente Devon Energy, passou a empregar o fraturamento hidráulico com sucesso para a extração de depósitos gás natural em folhelho betuminoso no campo de exploração de Barnett, no estado do Texas nos EUA. Com a aquisição da Mitchell Energy pela Devon, em 2001, a utilização desse tipo de fluido foi aliada à técnica de poços horizontais, especialidade da Devon,

o que promoveu a maior eficiência na extração de hidrocarbonetos de folhelho betuminoso por solicitar a rocha ao longo dos seus planos horizontais de estratificação (CAHOY et al, 2013). A partir daí, houve um grande aumento do emprego desse processo e, conseqüentemente, da produtividade proveniente desse tipo de rocha, como é ilustrado pelo gráfico de produção de gás natural seco dos EUA mostrado pela Figura 4.2.

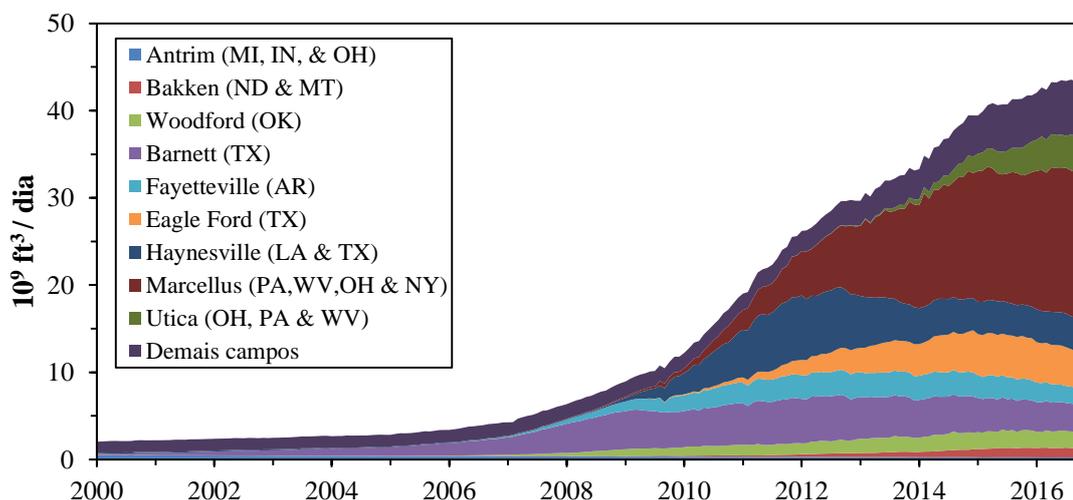


Figura 4.2 - Produção norte-americana de gás natural seco proveniente de folhelho betuminoso.
Fonte: U.S. Department of Energy, Energy Information Administration (2016).

A crescente exploração de hidrocarbonetos provenientes de folhelho betuminoso em países como EUA, Canadá e China a partir da utilização do fraturamento hidráulico estimulou o desenvolvimento de novos estudos, especialmente com aplicação de métodos numéricos, para a melhor compreensão e previsão dos fenômenos que ocorrem durante o processo. Dentre esses estudos podem ser citados os realizados por Adachi et al. (2007), Gordeliy e Peirce (2013), Lecampion (2009) e Olson e Dahi-Taleghani (2009). Já Hattori et al. (2016) fornece uma visão geral sobre as possíveis aplicações da modelagem numérica em problemas de fraturamento hidráulico.

Nesta pesquisa é realizada a análise numérica da propagação de fissuras em problemas de fraturamento hidráulico via Método dos Elementos de Contorno (Capítulo 2). São considerados domínios bidimensionais, homogêneos ou não-homogêneos, compostos por materiais isotrópicos e podendo conter múltiplas fissuras. Os materiais são admitidos com comportamento frágil em relação ao fraturamento e, portanto, as análises de propagação são realizadas a partir dos conceitos da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) mostrados no Capítulo 3. Além disso, é considerado um regime de pressão hidrostática constante atuando nas faces das discontinuidades. Algumas das hipóteses adotadas são simplificadoras, uma vez que as rochas submetidas ao *fracking* normalmente apresentam propriedades anisotrópicas e fraturamento coesivo, além do problema ser tipicamente tridimensional. Entretanto, o modelo

proposto é capaz de fornecer respostas satisfatórias para diversas situações e pode ser futuramente estendido para contemplar casos mais gerais.

Na sequência são apresentadas as modificações necessárias para a determinação dos fatores de intensidade de tensão (FIT) com a utilização da integral J em relação ao item 3.6.2 para o caso de fissuras submetidas à pressão hidrostática. Em seguida, a estratégia de solução numérica utilizada para a solução de problemas de fraturamento hidráulico em domínios não-homogêneos multifissurados é descrita.

4.1 Determinação dos FIT

No item 3.6.2 é mostrado como são obtidos os FIT a partir da integral J considerando as faces da fissura livres de esforços. Nessa situação, a integral J é avaliada ao longo do caminho Γ que engloba a ponta (ver Figura 3.9) sendo expressa pela Eq. (3.27). Todavia, em problemas de *fracking*, as faces estão submetidas à pressão introduzida pelo fluido de fraturamento. Neste trabalho, essa pressão é considerada constante com magnitude igual a p , conforme representado pela Figura 4.3, e atua na direção normal à superfície da face.

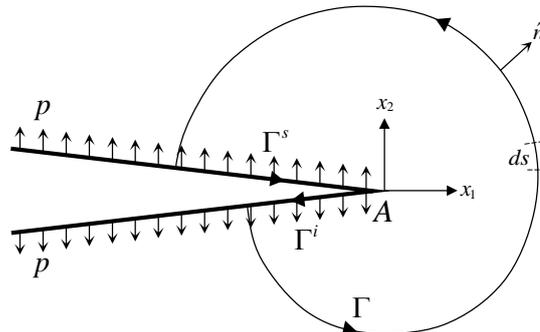


Figura 4.3 - Representação da pressão hidrostática atuante sobre as faces da fissura e do contorno utilizado para o cálculo da integral J.

A determinação da integral J nesse caso pode ser realizada conforme Karlsson e Bäcklund (1978). A partir da Figura 4.3, observa-se que o caminho de integração passa a ser $S = \Gamma + \Gamma^s + \Gamma^i$, onde Γ é o caminho que engloba a ponta e Γ^s e Γ^i são, respectivamente, os caminhos ao longo das faces superior e inferior da fissura. Dessa forma, a expressão da integral J apresentada pela Eq. (3.26) pode ser desmembrada em três parcelas como:

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds + \int_{\Gamma^s} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds + \int_{\Gamma^i} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (4.1)$$

Considerando o referencial local indicado na Figura 4.3 e o regime de pequenas deformações, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\begin{cases} p_1 \text{ e } n_1 = 0 \text{ para } \Gamma^i \text{ e } \Gamma^s \\ p_2 = p \text{ e } ds \equiv dx_1 \text{ para } \Gamma^s \\ p_2 = -p \text{ e } ds \equiv -dx_1 \text{ para } \Gamma^i \end{cases} \quad (4.2)$$

Substituindo as relações na Eq. (4.2) na Eq. (4.1), obtém-se:

$$J = \underbrace{\int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds}_{J_{\Gamma}} - p \underbrace{\left(\int_{\Gamma^s} u_{2,1} dx_1 + \int_{\Gamma^i} u_{2,1} dx_1 \right)}_{J_f} \quad (4.3)$$

Assim, na situação de faces carregadas, a integral J é obtida a partir da composição de duas parcelas: J_{Γ} , que pode ser obtida conforme mostrado no item 3.6.2, e J_f , proveniente da pressão p aplicada sobre as faces. Considerando o final do caminho Γ^i e início do caminho Γ^s em pontos de colocação correspondentes e localizados nas faces opostas da fissura (Figura 3.12), J_f pode ser calculado conforme segue:

$$J_f = -p \left(\int_{-\gamma^s}^0 u_{2,1} dx_1 + \int_0^{-\gamma^i} u_{2,1} dx_1 \right) \quad (4.4)$$

onde γ^s é a distância da ponta ao ponto de colocação corresponde ao início do caminho Γ^s e γ^i é a distância da ponta ao ponto de colocação correspondente ao final do caminho Γ^i , sendo que $\gamma^s = \gamma^i$ pelas considerações realizadas.

Determinando as integrais da Eq. (4.4), obtém-se:

$$J_f = p \left(u_2(-\gamma^s) - u_2(-\gamma^i) \right) = p COD(\gamma) \quad (4.5)$$

onde para a última igualdade foi utilizado o fato de que a diferença $u_2(-\gamma^s) - u_2(-\gamma^i)$ é a abertura normal, ou o *COD*, do par de pontos de colocação considerado.

Cabe ressaltar que J_f , quando da realização da decomposição de modos (ver item 3.6.2.1), só modifica o termo referente ao modo I, uma vez que a sollicitação gerada pela pressão p é exclusiva desse modo. Portanto, as componentes J^I e J^{II} da integral J, mostradas pela Eq. (3.33), ficam explicitadas como:

$$J^I = \int_{\Gamma} \left(W^I n_1 - p_j^I u_{j,1}^I \right) ds + J_f \quad (4.6)$$

$$J^{II} = \int_{\Gamma} \left(W^{II} n_1 - p_j^{II} u_{j,1}^{II} \right) ds \quad (4.7)$$

sendo J_f dado por:

$$J_f = p \left(u_2^I(-\gamma^s) - u_2^I(-\gamma^i) \right) = p COD^I(\gamma) \quad (4.8)$$

As integrais na Eq. (4.6) e Eq. (4.7) podem ser avaliadas numericamente conforme a Eq. (3.36) utilizando a discretização da Figura 3.12. Com os valores de J^I e J^{II} , os FIT são determinados a partir da Eq. (3.34) e da Eq. (3.35).

A seguir são apresentados dois exemplos que avaliam a eficácia dessa metodologia para determinação dos FIT em situações nas quais as faces das fissuras estão submetidas a uma pressão uniforme.

Exemplo 4.1: Determinação do FIT para modo I - Tada et al. (2000)

Este exemplo apresenta a aplicação da integral J para a extração de K_I para um problema no qual as faces das fissuras estão sujeitas a uma pressão uniformemente distribuída com magnitude p . O problema original consiste de um domínio infinito contendo um furo circular de raio R com duas fissuras de borda de comprimento a , conforme mostrado pela Figura 4.4a. Neste trabalho, o domínio infinito é aproximado por um domínio quadrado biapoiado com lado $L \gg R$, conforme apresentado na Figura 4.4b. Como valores de R e L são adotados, respectivamente, 0,25 e 50. Além disso, são assumidos $E = 10000$ e $\nu = 0$ como propriedades do material e magnitude unitária da pressão p . As unidades envolvidas são arbitrárias.

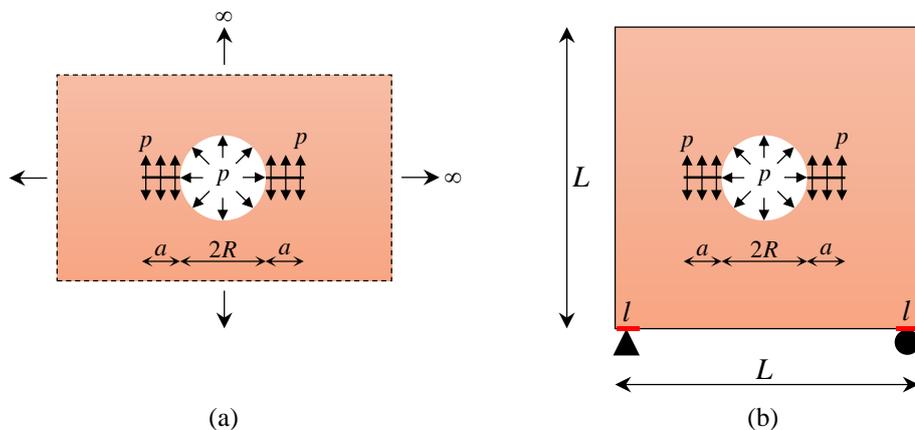


Figura 4.4 - (a) Problema original com domínio infinito. (b) Problema analisado no Exemplo 4.1.

A resposta de referência no caso do problema apresentado na Figura 4.4a pode ser encontrada no *handbook* de Tada et al (2000) e é dada por:

$$K_I = p\sqrt{\pi a}F(s) \quad (4.9)$$

onde $F(s)$ é expresso por:

$$F(s) = 1 + (1-s) \left[0,5 + 0,743(1-s)^2 \right] \quad (4.10)$$

e é função do parâmetro adimensional s definido como:

$$s = \frac{a}{a+R} \quad (4.11)$$

No problema analisado, o comprimento das fissuras é tomado de tal modo que o parâmetro s assuma os valores de 0,1 a 0,9, com passo de 0,1, totalizando nove simulações.

O contorno externo é discretizado com 80 elementos quadráticos e 2 elementos lineares, sendo esses últimos utilizados para representar os apoios com comprimento $l = 0,5$. Já o furo é discretizado com 8 elementos cúbicos. As faces das fissuras também são discretizadas por meio de elementos cúbicos. Já para o caminho circular utilizado na avaliação da integral J são adotados 5 elementos com aproximação cúbica.

Os resultados obtidos para K_I , normalizados por $p\sqrt{\pi a}$, para os diferentes valores avaliados de s são mostrados pela Figura 4.5. A resposta de referência fornecida por Tada et al. (2000) e dada pela Eq. (4.9) também é apresentada. Como pode ser observado, há uma boa correspondência entre os valores de referência e os valores obtidos numericamente via MEC com a utilização da metodologia mostrada no item 4.1. Os erros percentuais relativos estão em torno de 1,5%, conforme mostra a curva correspondente na Figura 4.5, sendo considerados satisfatórios. Uma das principais fontes de erro é a aproximação do domínio infinito do problema original pelo domínio finito utilizado. Cabe ressaltar que com a utilização do MEC é possível representar domínios infinitos, entretanto esse tipo de análise não é contemplado por este trabalho.

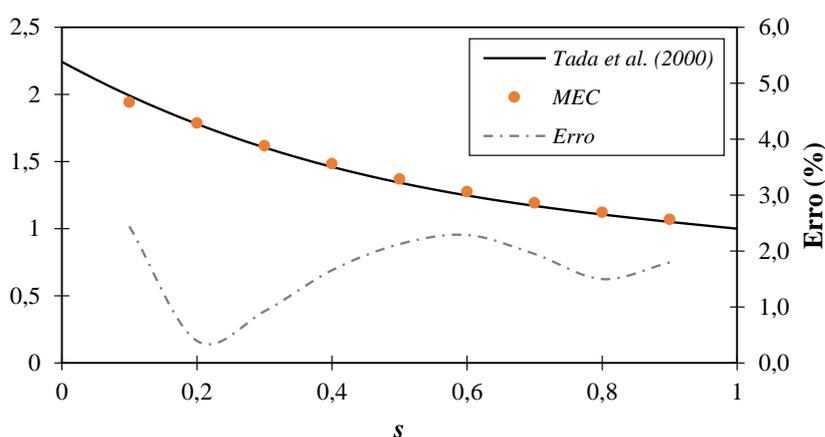


Figura 4.5 - Variação de $K_I/p\sqrt{\pi a}$ com o valor do parâmetro s .

Exemplo 4.2: Determinação dos FIT para modos I e II - Erdogan e Arin (1975)

Este exemplo busca avaliar a eficácia da formulação apresentada no item 4.1 para a determinação dos FIT K_I e K_{II} para uma fissura sujeita a um modo misto de sollicitação e cujas faces estão submetidas a uma pressão uniforme p . O problema original é mostrado pela Figura 4.6a e consiste de uma fissura de comprimento $2a$, inclinada de um ângulo θ em relação

à horizontal e presente em um domínio semi-infinito. O centro da descontinuidade está a uma distância d em relação à borda livre. A avaliação analítica desse problema foi realizada no trabalho de Erdogan e Arin (1975).

Como no Exemplo 4.1, o domínio é aproximado por uma estrutura biapoiada com dimensões finitas, conforme a Figura 4.6b. As dimensões são tomadas como $h = L = 50$. Já a distância d é tomada igual a $2a$, sendo $a = 1$. As análises numéricas são realizadas adotando o ângulo θ entre 0 e 90 graus, com variação de 10 graus. Como propriedades do material, são assumidos os valores $E = 10000$ e $\nu = 0$. Já a magnitude da pressão p é tomada como unitária. As unidades adotadas são arbitrárias.

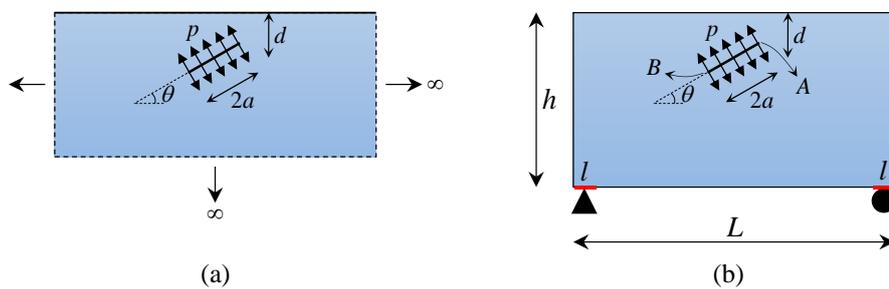


Figura 4.6 - (a) Problema original com domínio semi-infinito. (b) Problema analisado no Exemplo 4.2.

Para o contorno externo é adotada uma malha com 102 elementos quadráticos e 2 elementos lineares, sendo esses últimos utilizados para representar os apoios com comprimento $l = 0,5$. O lado mais próximo da descontinuidade possui uma densidade de malha igual ao dobro dos demais. Cada uma das faces da fissura é discretizada com 16 elementos cúbicos, enquanto para os caminhos utilizados na avaliação da integral J são adotados 5 elementos com aproximação cúbica. A Figura 4.7 representa a discretização utilizada para a estrutura na situação na qual a fissura apresenta inclinação $\theta = 90$ graus.

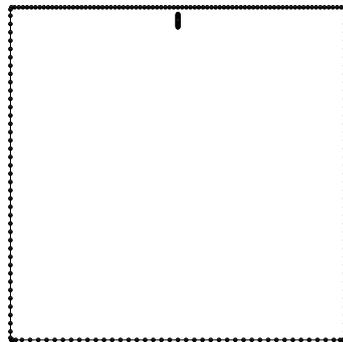


Figura 4.7 - Representação da malha de elementos de contorno utilizada na discretização da estrutura.

As variações dos valores de K_I , normalizados por $p\sqrt{\pi a}$, determinadas para as pontas A e B em função do ângulo de inclinação da fissura são mostradas pela Figura 4.8. Na Figura 4.8 também são apresentadas as respostas analíticas de referência obtidas por Erdogan e Arin (1975) para cada uma das pontas e os respectivos erros percentuais relativos.

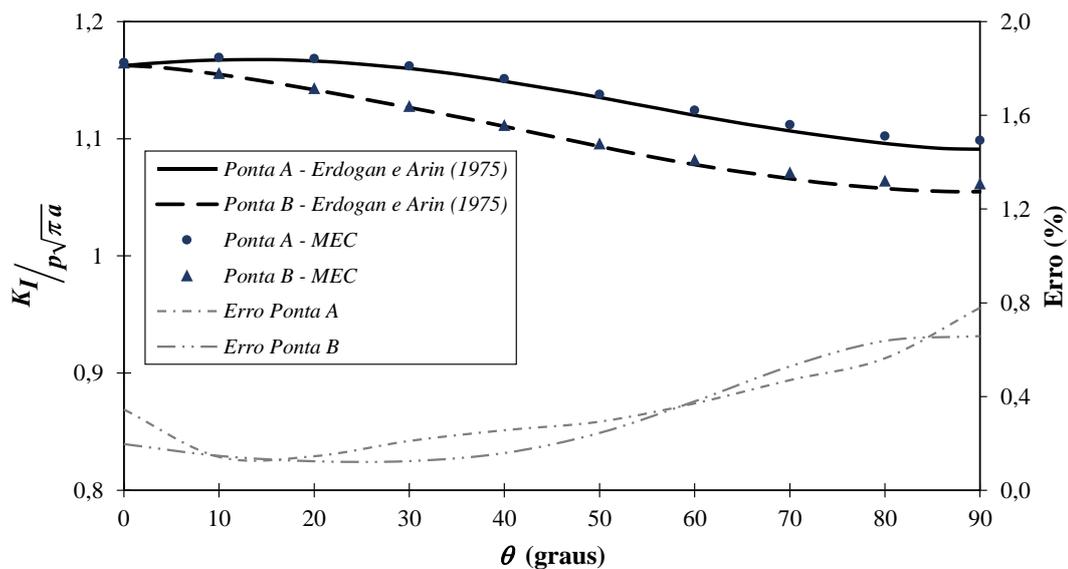


Figura 4.8 - Variação de $K_I/p\sqrt{\pi a}$ para pontas A e B.

Como pode ser observado a partir dos resultados mostrados pela Figura 4.8, há uma boa correspondência entre os valores determinados por este trabalho e os apresentados por Erdogan e Arin (1975). O erro tende a aumentar para maiores valores de inclinação, o que pode ser atribuído, principalmente, às aproximações feitas para a simulação do domínio infinito do problema original a partir de um domínio com dimensões finitas. Entretanto, mesmo para os resultados com maiores desvios da resposta de referência, os erros obtidos estão abaixo de 0,8%, o que é considerado satisfatório.

Já a Figura 4.9 apresenta os valores normalizados de K_{II} obtidos para cada uma das pontas e os valores de referência determinados por Erdogan e Arin (1975). Novamente é observado uma boa correspondência entre os resultados numéricos deste trabalho com as respostas analíticas.

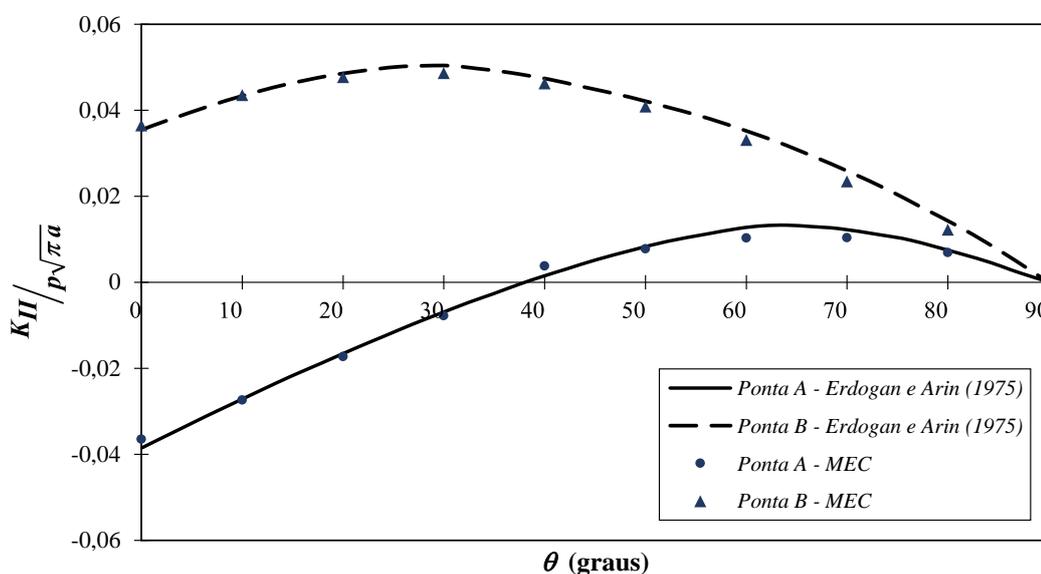


Figura 4.9 - Variação de $K_{II}/p\sqrt{\pi a}$ para pontas A e B.

A partir dos resultados apresentados pelo Exemplo 4.1 e pelo Exemplo 4.2, pode-se observar que a metodologia utilizada neste trabalho para a obtenção dos FIT em situações nas quais as faces da fissura estão submetidas a uma pressão uniformemente distribuída é eficaz.

4.2 Modelo numérico para solução dos problemas de *fracking*

O modelo numérico para a solução dos problemas de fraturamento hidráulico é semelhante àquele apresentado no Capítulo 3 para tratar da fratura em materiais frágeis. Todavia, no caso de *fracking*, o processo de resolução numérica é dividido em duas etapas. A primeira corresponde à solução da estrutura sob ação exclusiva das condições de contorno externas, conforme representado pela Figura 4.10a. Essa etapa tem como objetivo introduzir estados de tensão e deformação sobre a estrutura que são utilizados como condições iniciais para o problema de fraturamento hidráulico propriamente dito. Já a segunda etapa consiste na aplicação da pressão interna sobre elementos predefinidos, como mostrado pela Figura 4.10b, com o intuito de promover a propagação das descontinuidades. Na sequência são apresentados maiores detalhes sobre as estratégias numéricas para cada uma das etapas envolvidas no processo de análise de uma estrutura submetida a *fracking*. Os fluxogramas referentes a esse módulo se encontram no Apêndice I, item I.2.

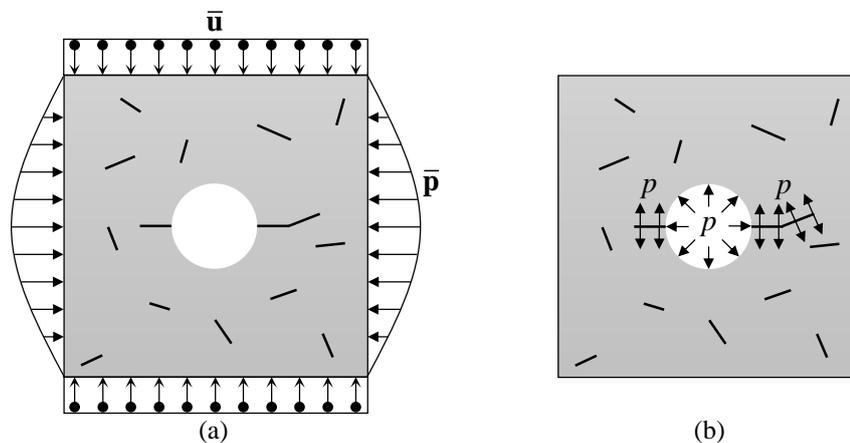


Figura 4.10 - Etapas de análise dos problemas de fraturamento hidráulico: (a) fase de aplicação das condições de contorno externas e (b) fase de aplicação da pressão interna.

4.2.1 Pré-processamento

A etapa de pré-processamento para os problemas de *fracking* é semelhante à dos problemas de fratura frágil exposta no item 3.8.1. Inicialmente são definidos os dados de entrada do problema de fraturamento hidráulico: geometria, condições de contorno da primeira etapa de solução, propriedades dos materiais dos subdomínios e discretização da estrutura. Na

sequência são definidas as fissuras na análise, bem como as respectivas malhas de elementos de contorno e os parâmetros para a determinação dos FIT via integral J.

No caso de análises de *fracking*, também é necessário identificar quais elementos apresentam pressão aplicada na etapa de fraturamento hidráulico. Tais elementos podem representar tanto o contorno de fissuras quanto o contorno de um furo. Em seguida, é indicado o valor de pressão total que deve ser aplicado sobre esses elementos. Durante a etapa de aplicação da pressão interna, as fissuras que cruzam com algum elemento com pressão prescrita são identificadas e a pressão também é distribuída ao longo de suas faces caso elas se encontrem abertas (ver Figura 4.10b). O cruzamento de fissuras com elementos com pressão prescrita pode ocorrer já na definição inicial das descontinuidades ou durante a fase de propagação.

4.2.2 Fase de aplicação das condições de contorno externas

Na primeira etapa de solução, as definições iniciais do problema são realizadas, da mesma forma como exposto no item 3.8.2.1. Inicialmente são definidas as coordenadas adimensionais e reais dos pontos de colocação da malha de elementos de contorno e as respectivas componentes dos vetores normais. Em seguida, os elementos da fissura são definidos como elementos de interface com contato perfeito.

Na sequência as integrações numéricas para a determinação das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são realizadas. Após a definição das matrizes, inicia-se o processo de solução com a aplicação de um incremento das ações externas. O sistema de equações da forma da Eq. (2.63) é formado a partir da troca de colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} e resolvido. Em seguida as variáveis acumuladoras são atualizadas e inicia-se a fase de verificação dos pares de pontos de colocação das faces conforme apresentado no item 3.8.2.2.

Após a convergência de todos os pares de pontos de colocação, os campos de deslocamento e tensão para os pontos internos definidos pelo usuário e os campos de tensão para os pontos de colocação no contorno são determinados. Na fase de aplicação das condições de contorno externas, a verificação da estabilidade à propagação das pontas não é realizada, pois é admitido que as faces da fissura se encontram comprimidas sob ação dessas condições. Assim, na sequência da análise é aplicado um novo incremento até que ocorra a aplicação da magnitude total das condições externas. Ao final, as variáveis acumuladoras de deslocamento e força de superfície irão conter o estado correspondente à aplicação total do carregamento externo, que representa a condição inicial para a fase de aplicação da pressão interna, descrita no item a seguir.

4.2.3 Fase de aplicação da pressão interna

Na fase de aplicação da pressão interna, que corresponde à etapa de fraturamento hidráulico propriamente dita, inicialmente são modificadas as condições de contorno externas do problema. As condições de contorno não-nulas na etapa anterior passam a ser nulas nesta nova fase. Ademais, as forças de superfície dos pontos de colocação dos elementos que apresentam pressão prescrita são atualizadas de modo que a magnitude da componente normal ao ponto (p_n) corresponda à pressão aplicada.

Em seguida, um incremento da pressão atuante é aplicado sobre os elementos sujeitos a essa ação. No caso de elementos de fissura, esse incremento só é aplicado sobre os pares de pontos de colocação que se encontram abertos ou em pares que apresentam deslocamento relativo restrito e que são forçados a receber a pressão interna. Para a última situação, o par passa a ter deslocamento relativo livre e a força de superfície acumulada também é reaplicada. Com isso, as componentes conhecidas do vetor \mathbf{p} são determinadas, bem como as componentes conhecidas (nulas) do vetor \mathbf{u} , e, portanto, o sistema final de equações é determinado pela troca apropriada de colunas entre as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} . A partir da resposta obtida pela resolução do sistema, as variáveis acumuladoras são incrementadas e os pares de pontos de colocação são verificados. Após a convergência de todos os pares, passa-se à determinação das grandezas nos pontos internos e das tensões no contorno.

Na sequência, a verificação da estabilidade à propagação das fissuras é realizada. Para as pontas cujos respectivos pontos de colocação se encontram abertos, são inseridos pontos internos que definem o caminho de integração para o cálculo da integral J . Os FIT para as fissuras com pressão aplicada são determinados a partir da formulação apresentada no item 4.1. Caso não seja possível traçar o caminho de integração da integral J sem que este intercepte algum outro elemento, as integrais na Eq. (4.6) e Eq. (4.7) são aproximadas pela técnica de correlação de deslocamentos. Já os FIT para as fissuras sem pressão prescrita são determinados conforme mostrado no item 3.6.2.

Com os valores dos FIT para as pontas abertas, o valor do FIT equivalente e da direção potencial de propagação são determinados a partir do critério da máxima tensão circunferencial. O valor de K_{eq} é então comparado com a tenacidade do material que contém a ponta para verificar a estabilidade à propagação.

Para as pontas que propagam, o comprimento acrescentado às discontinuidades é determinado a partir da Eq. (3.53). Novos pontos de colocação são acrescentados à malha de elementos de contorno e, caso a fissura intercepte algum elemento, é realizada a modificação

do elemento cruzado conforme exposto no item 3.8.2.3 e no item 3.8.3. Os novos pares de pontos de colocação das fissuras que propagam são definidos com deslocamentos restritos. Caso esses novos pares se abram durante a etapa de verificação das faces e pertençam a uma fissura com pressão prescrita, sob eles são reaplicadas forças de superfície correspondentes ao valor da força de superfície acumulada entre os pares somada à pressão interna.

Se a fissura que propaga apresentar pressão prescrita e interceptar uma outra fissura com faces livres de solicitação, a pressão é então aplicada sobre os pontos de colocação das faces da descontinuidade cruzada caso eles se encontrem abertos ou venham a se abrir no decorrer da análise (Figura 4.11a). Já se a fissura que propaga não apresentar pressão prescrita e cruzar com algum elemento com pressão aplicada, os pontos de colocação das faces da fissura passam a ser solicitados por p quando abertos (Figura 4.11b).

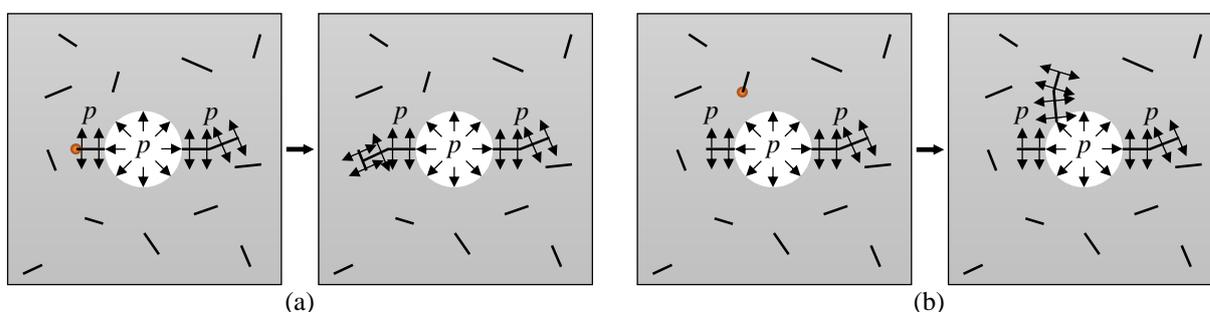


Figura 4.11 - Possibilidades de redistribuição da pressão aplicada: (a) fissura com pressão aplicada intercepta outra sem solicitação nas faces e (b) fissura sem pressão aplicada intercepta elemento com pressão prescrita.

Após o processo de remalhamento, as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são atualizadas e os valores das variáveis acumuladoras são interpolados para os elementos modificados. Já os valores das variáveis acumuladoras para os pontos de colocação definidos para as novas faces de fissura são determinados pela solução do sistema de equações utilizando, para \mathbf{u} e \mathbf{p} , os valores acumulados conhecidos. Todos esses procedimentos seguem o esquema apresentado em maiores detalhes no item 3.8.2.3. Em seguida, a etapa de verificação dos pares é novamente realizada para analisar a abertura e o fechamento das faces na fase de reaplicação dos esforços. Terminada essa etapa, a estabilidade à propagação das pontas é novamente examinada. Se houver propagação de uma ou mais pontas, a fase de propagação é realizada mais uma vez. Caso contrário, um novo incremento de pressão é aplicado sobre os pontos de colocação sujeitos a essa solicitação.

Exemplo 4.3: Comparação com resultados experimentais - Abass et al. (1994)

Este exemplo busca simular o experimento de fraturamento hidráulico realizado por Abass et al. (1994). Um esquema bidimensional do corpo de prova utilizado é mostrado pela

Figura 4.12a. As dimensões apresentadas possuem os seguintes valores: $L = 6$ in, $2R = 0,61$ in e $a = 0,5$ in. O material apresenta $E = 2,52 \cdot 10^6$ psi e $\nu = 0,228$. As pressões de confinamento aplicadas sobre as faces possuem magnitudes $\bar{\sigma}_1 = 2500$ psi e $\bar{\sigma}_2 = 1400$ psi. O ângulo de inclinação θ em relação à horizontal das fissuras é variado de 0 a 90 graus, em passos de 15 graus. É adotado um EPD. Para cada uma das inclinações, a pressão que causa a propagação das fissuras, denominada pressão de quebra, é avaliada.

Nas simulações numéricas via MEC, cada uma das faces do corpo é discretizada com 20 elementos quadráticos e 1 elemento linear. Este último apresenta comprimento $l = 0,06$ in, está localizado no centro da face e tem os deslocamentos restritos na direção perpendicular à pressão aplicada. Todos os elementos da face estão submetidos ao carregamento mostrado pela Figura 4.12a, inclusive aqueles com aproximação linear. O furo é discretizado com 16 elementos cúbicos, enquanto a discretização de cada uma das faces das fissuras é realizada com 8 elementos cúbicos. A Figura 4.12b mostra a malha de elementos de contorno utilizada para o contorno externo do corpo de prova e para o furo.

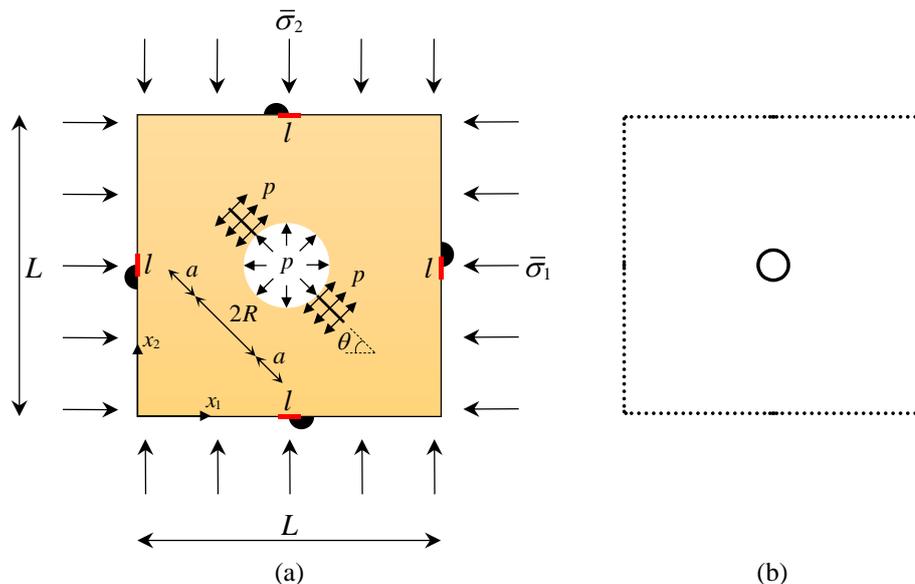


Figura 4.12 - Representação do corpo de prova utilizado por Abass et al. (1994) e analisado no Exemplo 4.3.

Para a avaliação computacional da pressão de quebra, é adotado o valor de resistência ao fraturamento utilizado por Medinas (2015), sendo $K_{Ic} = 2300$ psi $\sqrt{\text{in}}$. Além disso, as fissuras são forçadas a receber a pressão aplicada inicialmente. Esse procedimento é realizado para garantir que as faces das discontinuidades estejam sujeitas às mesmas condições da situação experimental, na qual as fissuras apresentam um diâmetro igual a 0,135 in e estão sempre submetidas à sollicitação do fluido.

Os valores de pressão de quebra determinados numericamente via MEC e experimentalmente por Abass et al. (1994) são apresentados pela Figura 4.13.

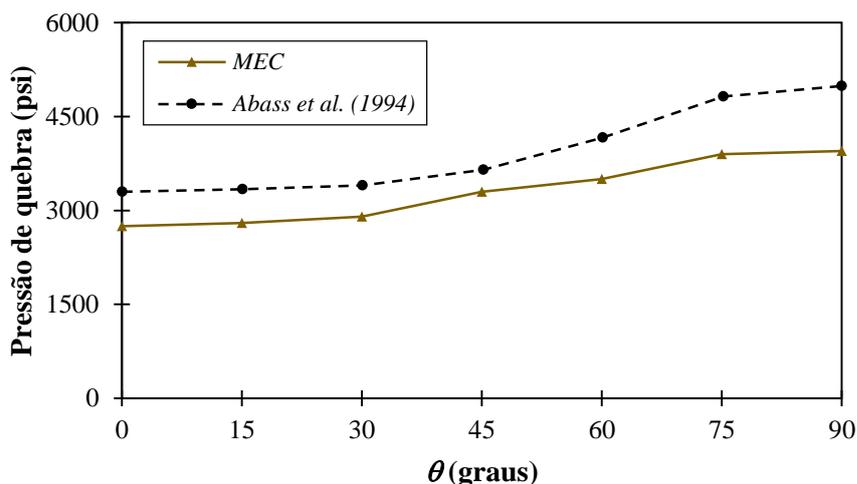


Figura 4.13 - Variação da pressão de quebra para as diferentes inclinações avaliadas.

Como pode ser observado a partir da Figura 4.13, as curvas numérica e experimental apresentam comportamentos semelhantes. Para ambas é verificado um aumento da pressão de quebra com o crescimento da inclinação das descontinuidades. Esse fato é justificado pelo estado de tensão existente no corpo de prova antes da aplicação da pressão interna. Quanto maior a inclinação, maiores são as tensões de compressão nas regiões nas quais as pontas das fissuras se encontram quando aplicado o carregamento externo, como é representado pela Figura 4.14. Portanto, maiores são as forças necessárias e, conseqüentemente, a pressão de quebra para promover a propagação das descontinuidades.

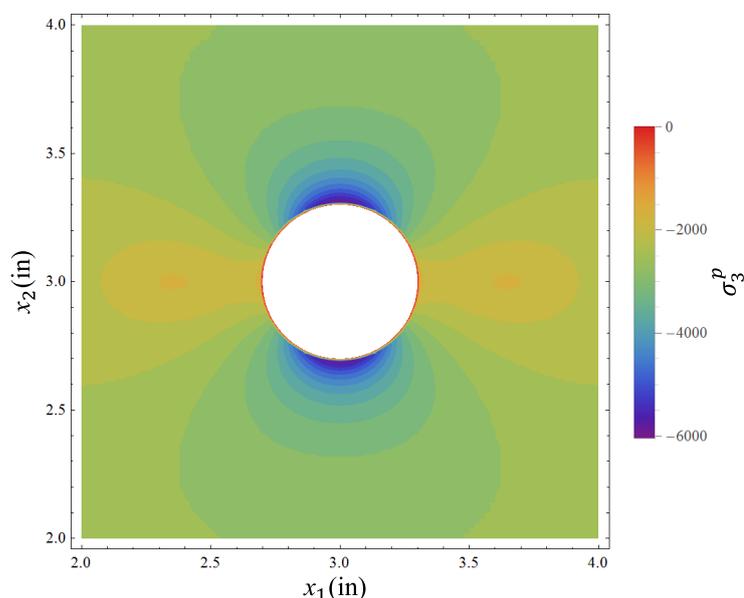


Figura 4.14 - Distribuição da tensão principal mínima (máxima compressão) na região próxima ao furo quando aplicado o carregamento externo.

Já os valores de pressão de quebra determinados numericamente são, em média, 15% inferiores aos valores obtidos experimentalmente por Abass et al. (1994). Esse resultado tem fundamento nas hipóteses adotadas para a simulação, dentre as quais podem ser destacadas: a

consideração de um modelo bidimensional, enquanto o problema analisado é tipicamente tridimensional; o valor desconhecido de K_{Ic} para o material utilizado nos experimentos de Abass et al. (1994); e a consideração de fratura frágil. Apesar das limitações do modelo, a resposta numérica foi capaz de fornecer uma boa representação do comportamento experimental.

Por fim, a Figura 4.15a apresenta a comparação entre os caminhos de propagação das fissuras determinados numericamente e experimentalmente para o caso no qual $\theta = 45$ graus. Para a análise numérica é utilizado um incremento no comprimento das fissuras igual a 0,05 in. Como pode ser observado, os caminhos determinados neste trabalho são praticamente coincidentes com os obtidos por Abass et al. (1994), indicando uma boa representação do crescimento das descontinuidades pelo modelo computacional implementado. Já a Figura 4.15b mostra o detalhe do resultado experimental obtido por Abass et al. (1994).

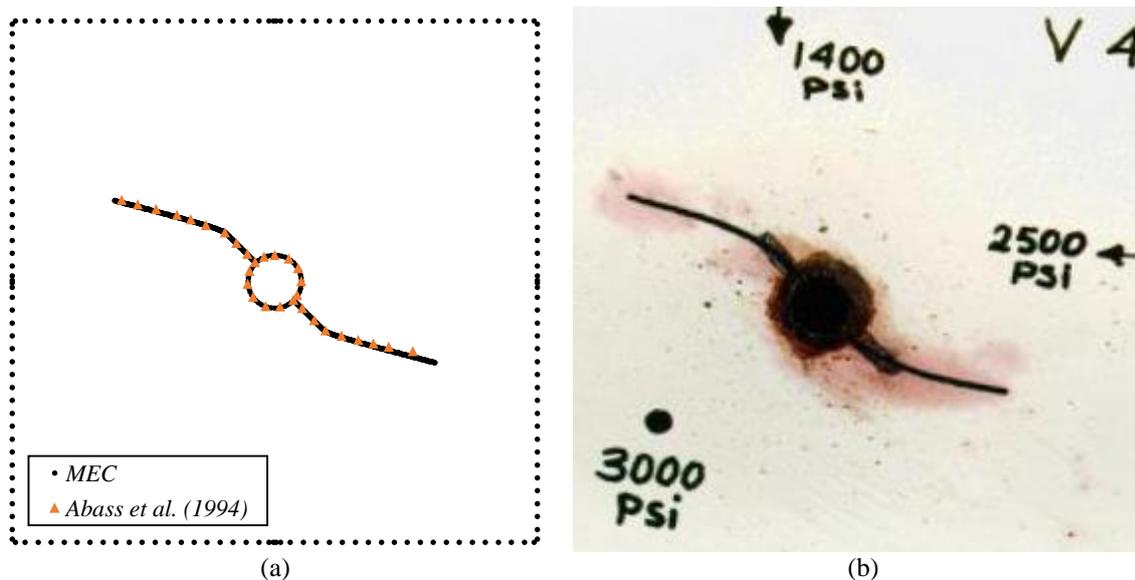


Figura 4.15 - (a) Comparação entre os caminhos de propagação determinados numericamente e experimentalmente. (b) Detalhe do caminho de propagação determinado experimentalmente por Abass et al. (1994).

Exemplo 4.4: Fracking aplicado a domínio não-homogêneo e multifissurado

Este exemplo visa ilustrar o potencial de aplicação do código computacional desenvolvido em problemas de fraturamento hidráulico envolvendo domínios multifissurados e compostos por materiais com diferentes propriedades. A estrutura analisada é representada pela Figura 4.16a. O domínio possui cinco materiais distintos com módulos de elasticidade dados por: $E_1 = 0,5E$, $E_2 = 0,75E$, $E_3 = E$, $E_4 = 1,25E$ e $E_5 = 1,5E$, sendo $E = 20000$ MPa. Já os coeficientes de Poisson e as resistências ao fraturamento para todos os subdomínios são tomados como 0,25 e $1,0 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, respectivamente.

A dimensão W é tomada igual a 25 m. No centro da estrutura há um furo circular de raio 0,5 m com duas fissuras comunicantes (1 e 2) com comprimento igual a 1 m e inclinadas 30 graus em relação à horizontal. A lateral esquerda e a base da estrutura apresentam os deslocamentos horizontais e verticais restritos, respectivamente. Sobre a lateral direita é aplicado um deslocamento horizontal com magnitude $u_1 = 0,001$ m, enquanto sobre o topo é prescrito um deslocamento vertical com magnitude $u_2 = 0,0075$ m, conforme representado pela Figura 4.16a. O problema é analisado como um EPD.

Ao longo da estrutura são uniformemente distribuídas 13 fissuras, cujos comprimentos e inclinações seguem distribuições normais com parâmetros ($\mu = 2$ m; $\sigma = 0,2$ m) e ($\mu = -45^\circ$; $\sigma = 2,25^\circ$), respectivamente.

A etapa de fraturamento hidráulico é realizada com a aplicação de uma pressão igual a 2 MPa sobre o furo e as duas fissuras comunicantes. O comprimento padrão utilizado durante a etapa de propagação das descontinuidades é tomado igual a 1 m.

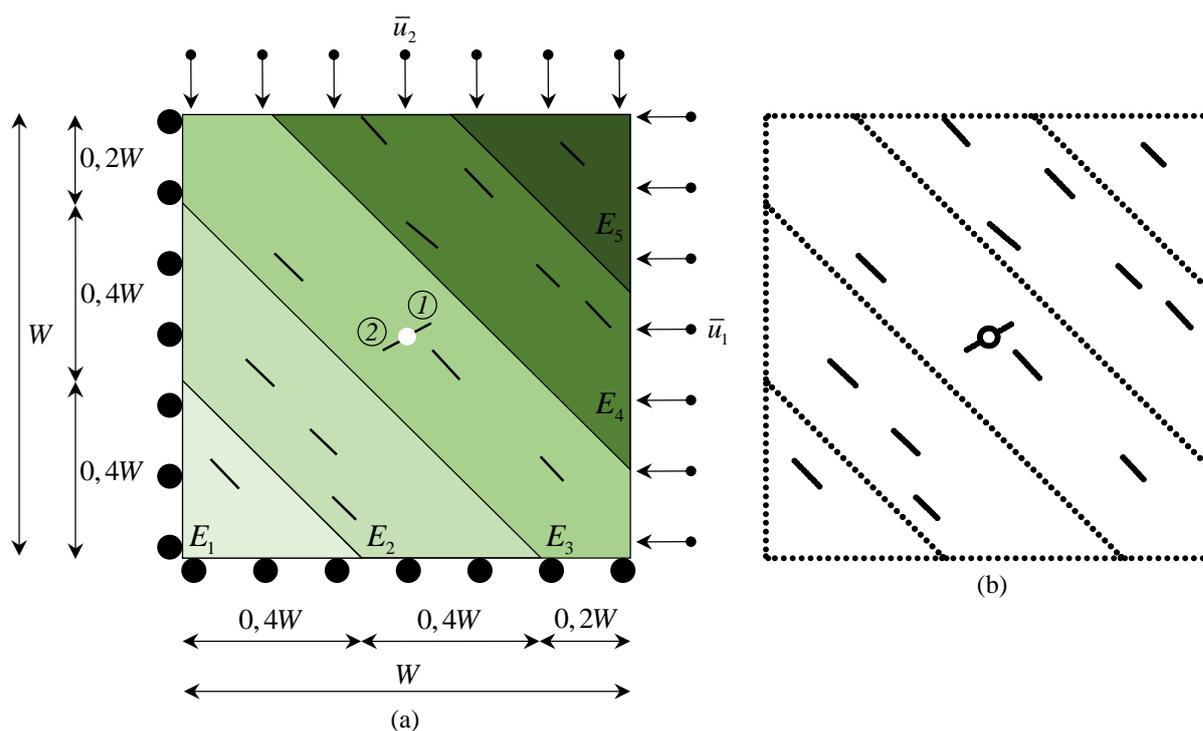


Figura 4.16 - (a) Estrutura analisada pelo Exemplo 4.4 e (b) discretização adotada.

O contorno externo e as interfaces da estrutura são discretizados com 280 elementos quadráticos, enquanto para o furo são utilizados 16 elementos quadráticos. As fissuras também são discretizadas com elementos com aproximação quadrática, com comprimento médio igual a 0,5 m. Ou seja, as faces das fissuras comunicantes e das fissuras distribuídas ao longo do domínio são discretizadas com 2 e 4 elementos, respectivamente. A Figura 4.16b representa a malha de elementos de contorno adotada.

Inicialmente são prescritos os deslocamentos externos, introduzindo de um estado de compressão sobre a estrutura. Em seguida, a pressão interna é aplicada sobre o furo e sobre as fissuras comunicantes, provocando a propagação das descontinuidades (Figura 4.17a-f).

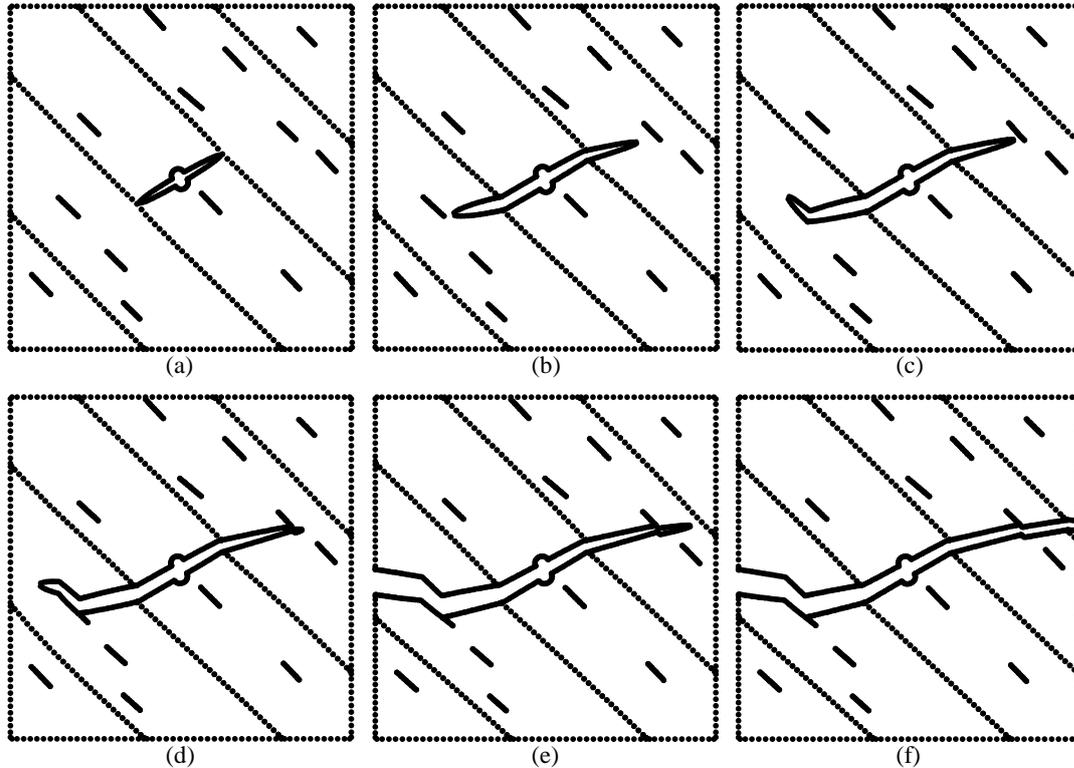


Figura 4.17 - Evolução do crescimento das fissuras. Deslocamentos ampliados em 1000 vezes.

No início da propagação, as fissuras 1 e 2 crescem praticamente em linha reta, como pode ser visto pela Figura 4.17a, uma vez que os valores de K_{II} são praticamente nulos (ver Figura 4.18).

Na sequência, as fissuras cruzam interfaces e passam a propagar em outros subdomínios, conforme representado pela Figura 4.17b. Nessa situação, as descontinuidades material passam a apresentar desvio no eixo, tendendo a se alinhar com a direção do deslocamento prescrito de maior magnitude (horizontal). Às mudanças de subdomínios correspondem variações nos FIT, como mostrado pela Figura 4.18. As alterações nos valores de K_{II} são responsáveis pelas modificações na direção de propagação.

Já a Figura 4.17c e a Figura 4.17d esquematizam o fenômeno de coalescência entre as fissuras 1 e 2 com outras fissuras distribuídas ao longo do domínio da estrutura. Nesse caso a pressão também passa a atuar nas faces das descontinuidades cruzadas, induzindo a propagação de suas pontas. Observa-se pela Figura 4.18 que também ocorrem variações nos valores dos FIT quando as pontas tendem a cruzar ou cruzam outras descontinuidades.

A Figura 4.17e apresenta o cruzamento da fissura 2 com o contorno da lateral esquerda do domínio. Já a Figura 4.17f mostra o cruzamento da fissura 1 com uma interface e com o contorno externo da lateral direita. A Figura 4.17f representa a situação final de equilíbrio da estrutura e mostra que a abertura da superfície de separação entre as partes obtidas é maior na região de menor rigidez (região de propagação da fissura 2), como era de se esperar.

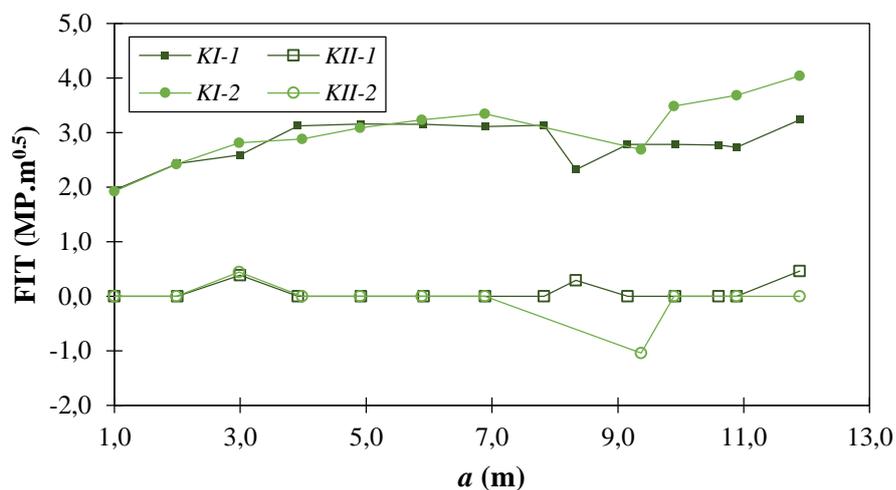


Figura 4.18 - Variação dos FIT para as pontas 1 e 2.

A partir deste exemplo pode-se concluir que o código desenvolvido é capaz de simular satisfatoriamente o fenômeno de fraturamento hidráulico em uma abordagem via MFEL para domínios multifissurados, não-homogêneos, compostos por diferentes materiais perfeitamente unidos entre si.

5 FADIGA

O fenômeno de fadiga nas estruturas está associado à degradação mecânica causada pela aplicação de solicitações com caráter cíclico que promovem mudanças na organização da estrutura interna dos materiais. Essas mudanças normalmente estão associadas ao processo de fissuração decorrente da variação periódica dos campos de tensão e de deformação que pode levar à falha da estrutura.

As análises de fadiga podem ser separadas em duas classes de problemas: a fadiga de baixo ciclo e a fadiga de alto ciclo. Segundo Pineau e Bathias (2010), na primeira classe encontram-se os problemas com evolução significativa de deformações plásticas a cada ciclo de carregamento e a fratura do material ocorre após um número relativamente baixo de ciclos, da ordem de 100 a 10000. Já na segunda classe estão os casos nos quais os materiais são submetidos a pequenos níveis de tensão e, portanto, as deformações desenvolvidas são predominantemente elásticas. Nessas situações, a vida útil da estrutura, ou o número de ciclos até a falha, é muito superior à observada nos problemas de fadiga de baixo ciclo. Neste trabalho, ênfase é dada à fadiga de alto ciclo.

Na fadiga de alto ciclo o processo de degradação mecânica é controlado pela amplitude das tensões aplicadas. Como os níveis de tensão desenvolvidos nesses problemas são brandos, a zona de processos inelásticos (ZPI) existente nas pontas das descontinuidades apresenta pequenas dimensões, da mesma forma como nos problemas de fratura de materiais frágeis tratados no Capítulo 3. Desse modo, os conceitos apresentados pela Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) podem ser empregado na análise de situações com fadiga de alto ciclo. Conseqüentemente, a amplitude das tensões aplicadas pode ser representada pela amplitude dos fatores de intensidade de tensão (FIT) na ponta das fissuras, que por sua vez pode ser utilizada para a verificação do crescimento das descontinuidades.

As falhas por fadiga geralmente consistem de três estágios: iniciação (estágio I), propagação estável (estágio II) e propagação instável (estágio III). A Figura 5.1 mostra uma curva sigmoideal típica representando a taxa de crescimento de fissuras por fadiga e os três estágios até a falha.

A fase de iniciação da fissura é caracterizada pelo desenvolvimento de dano na escala microscópica governado, principalmente, pelo escorregamento dos cristais que compõem a estrutura interna do material. Nesse estágio ocorre a nucleação e o crescimento de microfissuras até a formação de uma fissura principal, que passa a se propagar de maneira estável (estágio II).

Na fase de iniciação pode ser definido o valor limite de variação do FIT, denominado ΔK_{th} , abaixo do qual se considera desprezável a formação de fissuras.

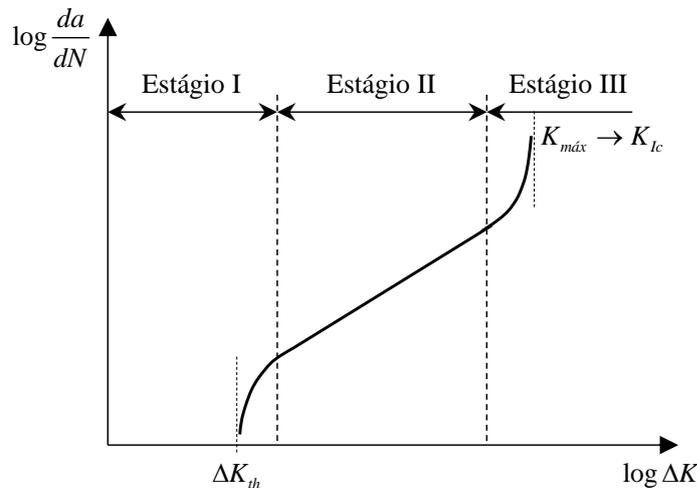


Figura 5.1 - Curva típica da taxa de crescimento de fissuras por fadiga.

A fissura principal formada a partir das microfissuras passa ao regime de crescimento estável sob o carregamento cíclico (estágio II). Segundo Pineau e Bathias (2010), nesse estágio a fissura tende a se propagar perpendicularmente à direção de maior tensão principal. Dessa forma, as tensões normais existentes no material possuem grande influência, uma vez que elas são responsáveis pela abertura das faces e, conseqüentemente, pelo crescimento das descontinuidades. O estágio II é caracterizado pela variação praticamente linear, em um gráfico log-log, da taxa de crescimento da fissura pelo número de ciclos (da/dN) em função da amplitude de variação do FIT na ponta (ΔK), conforme representado pela Figura 5.1. A maior parte do período de propagação das descontinuidades se encontra nessa região. Dessa forma, a grande maioria dos modelos de análises de fadiga procuram descrever o comportamento nessa fase. O código implementado neste trabalho busca representar o crescimento das fissuras no estágio II.

Já no estágio III, o máximo valor do FIT na ponta da fissura verificado dentro de um ciclo de carregamento tende ao valor de tenacidade K_{Ic} do material. Conseqüentemente, as taxas de propagação observadas são altas e o problema deixa de ser de fadiga e passa a ser de fratura.

Maiores detalhes sobre o processo de falha por fadiga em diferentes materiais podem ser obtidos em Bathias e Pineau (2010), Schijve (2009) e Suresh (1998).

As falhas de estruturas por fadiga de alto ciclo são geralmente repentinas e inesperadas. Isso se deve à ocorrência de propagação das descontinuidades sob ação de carregamentos a nível de serviço, no qual o material está submetido a tensões bem abaixo do seu limite elástico. Assim, não há desenvolvimento de deformações plásticas ou de grandes deformações, que

seriam indícios de uma falha iminente. Diversos colapsos catastróficos com essas características foram observados ao longo da história, com destaque aos ocorridos com estruturas ferroviárias após a revolução industrial em meados do século XIX, e com aeronaves na segunda metade do século XX. Portanto, a correta avaliação desse fenômeno de degradação mecânica é indispensável para a obtenção de estruturas seguras e econômicas. Este trabalho se insere neste contexto, no qual se busca desenvolver uma ferramenta computacional capaz de simular e prever a vida útil de estruturas não-homogêneas, multifissuradas e sujeitas a carregamentos cíclicos.

No item a seguir são apresentados os principais estudos realizados no campo da fadiga dos materiais. Na sequência, o modelo de estimativa da taxa de crescimento das fissuras por fadiga empregado nas análises deste trabalho é mostrado. Em seguida, é apresentada a formulação utilizada para a estimativa da vida útil das estruturas avaliadas. Por fim, o modelo numérico implementado é exposto em detalhes. Exemplos são apresentados ao longo do capítulo para demonstrar a eficácia do código desenvolvido.

5.1 Desenvolvimento dos estudos sobre fadiga dos materiais

Segundo Schütz (1996), os primeiros estudos realizados para tratar a fadiga de materiais foram conduzidos por Albert (1837), que examinou experimentalmente correntes utilizadas em minas. Por motivo da revolução industrial, o emprego de materiais metálicos foi cada vez mais observado na composição de estruturas ao longo do século XIX. Com a maior utilização desse tipo de material, novas formas de colapso foram observadas. Um dos principais acidentes registrados foi o ocorrido em 1842 com uma locomotiva em Versailles devido à falha de um dos eixos, que vitimou 60 pessoas (SMITH, 1990). Nas posteriores investigações dos sinistros ocorridos, grande parte das falhas foi atribuída à fadiga de componentes estruturais. Desse modo, houve um aumento dos estudos com o objetivo de compreender esse fenômeno, dentre os quais destacam-se os trabalhos de Rankine (1843) e York (1842) no estudo de eixos de locomotivas e Braithwaite (1854) na determinação de cargas admissíveis em serviço para diferentes estruturas sujeitas à fadiga.

Ainda no século XIX, Wöhler (1860), a partir de ensaios experimentais, observou o efeito destrutivo da amplitude de tensão aplicada sobre as estruturas. O autor relacionou o nível de variação de tensão aplicada com a vida útil do material, medida em número de ciclos até a falha, dando origem às curvas conhecidas como *S-N*, ou curvas de Wöhler. Basquin (1910) observou que as curvas *S-N*, quando plotadas em um gráfico log-log, apresentam uma variação

praticamente linear. Dessa forma, uma relação exponencial envolvendo a amplitude de tensão aplicada e o número de ciclos foi proposta:

$$S^k N = \text{constante} \quad (5.1)$$

onde o parâmetro k é uma propriedade do material determinada experimentalmente. A Eq. (5.1) é conhecida como equação de Basquin.

Outra formulação clássica para a previsão da vida útil de estruturas submetidas a carregamento cíclico foi desenvolvida a partir dos trabalhos de Miner (1945) e Palmgren (1924). Essa formulação é conhecida como regra de Miner e estabelece o conceito de acumulação de dano por fadiga. Nesse modelo, o dano é tido como uma consequência do trabalho absorvido pelo material, que por sua vez é admitido como proporcional ao número de ciclos de carregamento.

Na década de 1950, a partir dos acidentes com os aviões da frota Comet, a consideração dos efeitos da fadiga no projeto de estruturas foi intensificada. Segundo Schütz (1996), a partir de 1955 se iniciou discussões sobre as filosofias de projeto *safe life* e *fail safe*. Na abordagem *safe life* a estrutura é retirada de serviço ao atingir a vida útil previamente determinada a partir de ensaios. Nessa abordagem busca-se evitar a iniciação das fissuras e o tempo de propagação estável das descontinuidades material é desconsiderado. Dessa forma, impõe-se um limite inferior à vida útil da estrutura. Por outro lado, o objetivo da abordagem *fail safe* é evitar que a falha de um componente estrutural resulte na falha global. Para tanto, são utilizados componentes chamados de redundantes. Já em 1974, a força aérea dos EUA elaborou novas especificações de projeto para aeronaves, que ficaram conhecidas por abordagem de tolerância ao dano. Nessa nova abordagem, a existência de defeitos pré-existentes nas estruturas é admitida. Todavia, o projetista deve ser capaz de garantir durabilidade e resistência residual da estrutura fissurada. Para tanto, são definidos períodos de inspeção para a detecção de defeitos e para a realização da manutenção necessária para estender a vida útil da estrutura. Assim, a previsão do crescimento das descontinuidades por fadiga é fundamental para a correta determinação do intervalo de inspeção.

Nas décadas de 1960 e 1970, diversas leis de crescimento das fissuras foram propostas, dentre as quais podem ser destacadas as desenvolvidas por Donahue et al. (1972), Erdogan e Ratwani (1970), Forman et al. (1967) e Paris e Erdogan (1963). As taxas de crescimento das fissuras propostas pelos autores têm em comum o emprego dos conceitos da Mecânica da Fratura. Além disso, todas as leis apresentam caráter empírico e necessitam da determinação experimental de parâmetros materiais relacionados à fadiga. Entretanto, elas apresentam grande apelo prático e são largamente empregadas em problemas que buscam prever o crescimento de

fissuras por fadiga. Maiores detalhes sobre o critério desenvolvido por Paris e Erdogan (1963), que é utilizado ao longo deste trabalho, são apresentados no item 5.2.

Com a evolução dos computadores, os métodos numéricos foram cada vez mais utilizados para determinar a vida útil de componentes fissurados. Alguns dos trabalhos nesse campo de aplicação são: Bittencourt et al. (1996) e McClung e Sehitoglu (1989) com o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF); Moës et al. (1999) e Stolarska (2001) com aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG); Belytschko et al. (1995) com utilização de Métodos Sem Malha (MSM); e Ingraffea et al. (1983) e Portela et al. (1993) no campo de aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Estruturas multifissuradas submetidas à fadiga foram analisadas por Zi et al. (2004) e Leonel e Venturini (2011), Leonel et al. (2011) e Judt e Ricoeur (2015). Já Kikuchi et al. (2014) aplicou o MEF para a análise da propagação de fissuras por fadiga em domínios não-homogêneos.

Uma abordagem histórica mais detalhada da evolução dos estudos em fadiga pode ser obtida a partir dos trabalhos de Plumbridge (1972), Schijve (2003), Schütz (1996) e Suresh (1998).

5.2 Determinação da taxa crescimento da fissura

Até o trabalho de Paris e Erdogan (1963), a amplitude da tensão introduzida pelo carregamento cíclico era admitida como o principal fator de influência na taxa de crescimento da fissura. Porém, Paris e Erdogan (1963) aplicaram os fundamentos da MFEL recém consolidados (ver Capítulo 3) e propuseram uma relação para a taxa de crescimento da fissura por ciclo de carregamento como:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^n \quad (5.2)$$

onde C e n são constantes do material determinadas experimentalmente.

A Eq. (5.2) é conhecida como lei de Paris e é amplamente utilizada na previsão do crescimento de fissuras solicitadas por carregamentos cíclicos. A lei de Paris representa o trecho linear da curva mostrada pela Figura 5.1 e, portanto, a relação é válida apenas para a propagação das fissuras no estágio II. Por sua simplicidade e por fornecer resultados satisfatórios, essa lei é empregada na análise dos problemas de fadiga deste trabalho.

Em relação à amplitude de variação do FIT da ponta mostrada pela Eq. (5.2), existem vários critérios que buscam determinar o seu valor para problemas com modo misto de sollicitação. O trabalho de Qian e Fatemi (1996) apresenta alguns desses critérios encontrados na literatura, além de relações utilizadas na previsão da direção de propagação da fissura. As

diferenças entre os critérios para tratar a propagação por fadiga em modo misto são atenuadas pelo fato de que as fissuras tendem a se propagar em modo I puro após o início do processo de propagação.

Neste trabalho, o valor de ΔK é tomado como a diferença entre os valores máximo e mínimo de K_{eq} determinados para a ponta via critério da máxima tensão circunferencial (ver item 3.7.1) dentro de um ciclo de carregamento. Já o ângulo de propagação θ_p é adotado igual à direção obtida a partir do máximo valor de K_{eq} dentre todas as fases de carregamento em um ciclo.

5.3 Estimativa da vida útil

Neste item é apresentada a formulação utilizada para determinação da vida útil da estrutura. O incremento necessário no número de ciclos para o crescimento da fissura de um comprimento inicial a_i até um comprimento final a_{i+1} pode ser obtido a partir da integração da lei de Paris (Eq. (5.2)), resultando em:

$$\Delta N^{(i+1)} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{C(\Delta K(a))^n} \quad (5.3)$$

onde $\Delta N^{(i+1)}$ é o incremento no número de ciclos necessário para a fissura alcançar o comprimento na nova configuração a_{i+1} .

O incremento $\Delta N^{(i+1)}$ também pode ser obtido a partir da lei de Paris escrita a partir de incrementos discretos conforme:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a}{C\Delta \bar{K}^n} \quad (5.4)$$

onde $\Delta a = a_{i+1} - a_i$ e $\Delta \bar{K}$ é um valor de amplitude do FIT situado entre os valores de ΔK correspondentes aos comprimentos a_i e a_{i+1} . O valor de $\Delta \bar{K}$ é escolhido de modo a fornecer o valor procurado de $\Delta N^{(i+1)}$, como mostrado na sequência.

Igualando a Eq. (5.3) à Eq. (5.4) resulta em:

$$\frac{\Delta a}{\Delta \bar{K}^n} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{(\Delta K(a))^n} \quad (5.5)$$

O valor de ΔK é função do comprimento a da fissura. Admitindo incremento Δa suficientemente pequeno, ΔK pode ser expandido em uma função linear de a conforme:

$$\Delta K(a) = \beta a + \gamma \quad (5.6)$$

onde β e γ são parâmetros conhecidos dados por:

$$\beta = \frac{\Delta K_{i+1} - \Delta K_i}{\Delta a} \quad (5.7)$$

$$\gamma = \Delta K_i - \beta a_i \quad (5.8)$$

sendo ΔK_i e ΔK_{i+1} os valores de variação do FIT equivalente na ponta para os comprimentos de fissura a_i e a_{i+1} , respectivamente.

Utilizando a Eq. (5.6), o segundo membro da Eq. (5.5) pode ser reescrito como:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{(\Delta K(a))^n} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\beta a + \gamma)^{-n} da \quad (5.9)$$

Realizando a integração do segundo membro da Eq. (5.9), obtém-se:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{(\Delta K(a))^n} = \left[\frac{(\beta a + \gamma)^{1-n}}{(1-n)\beta} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} \quad (5.10)$$

A substituição dos limites de integração resulta em:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{da}{(\Delta K(a))^n} = \frac{\Delta a (\Delta K_{i+1}^{1-n} - \Delta K_i^{1-n})}{(1-n)(\Delta K_{i+1} - \Delta K_i)} \quad (5.11)$$

Substituindo a Eq. (5.11) na Eq. (5.5) e isolando $\Delta \bar{K}^n$, obtém-se:

$$\Delta \bar{K}^n = \frac{(1-n)(\Delta K_{i+1} - \Delta K_i)}{\Delta K_{i+1}^{1-n} - \Delta K_i^{1-n}} \quad (5.12)$$

Por fim, a substituição da Eq. (5.12) na Eq. (5.4) resulta no valor de incremento no número de ciclos para um aumento de Δa no comprimento da fissura:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a (\Delta K_{i+1}^{1-n} - \Delta K_i^{1-n})}{C(1-n)(\Delta K_{i+1} - \Delta K_i)} \quad (5.13)$$

Caso a ponta seja desativada na configuração $i + 1$, a determinação de ΔK_{i+1} não é possível. Nessa situação, o incremento no número de ciclos é obtido com base apenas no valor da variação do FIT na configuração anterior a partir da aplicação da lei de Paris na forma discreta (Eq. (5.4)), conforme:

$$\Delta N^{(i+1)} = \frac{\Delta a}{C \Delta K_i^n} \quad (5.14)$$

Com o valor de $\Delta N^{(i+1)}$, o número total de ciclos $N_c^{(i+1)}$ para se obter a configuração atual $i + 1$ pode ser atualizado a partir do valor acumulado até a configuração anterior $N_c^{(i)}$ como:

$$N_c^{(i+1)} = N_c^{(i)} + \Delta N^{(i+1)} \quad (5.15)$$

O próximo exemplo mostra a aplicação dessa metodologia para a determinação da vida útil de uma estrutura com a presença de uma fissura solicitada em modo I.

Exemplo 5.1: Número de ciclos para solicitação de fadiga em modo I - Isida (1971)

Este exemplo busca obter o número de ciclos a partir da formulação proposta para um problema de fadiga com solicitação em modo I puro e comparar com a resposta analítica fornecida por Isida (1971). Para tanto, a estrutura mostrada pela Figura 5.2a é analisada sob solicitação do carregamento de tração cíclico com distribuição apresentada pela Figura 5.2b. O contorno vertical esquerdo da estrutura apresenta os deslocamentos restritos no plano.

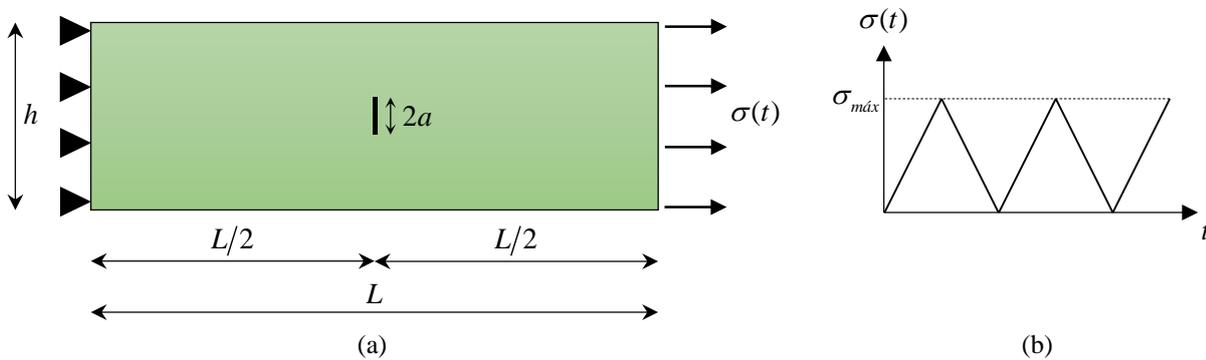


Figura 5.2 - Representação do problema analisado no Exemplo 5.1: (a) geometria e (b) distribuição do carregamento cíclico aplicado.

Isida (1971) determinou os valores de K_I para diferentes razões L/h . Tada et al. (2000), baseado em Isida (1971), sugerem que para uma relação $L/h \geq 3$ a estrutura pode ser avaliada como uma tira com comprimento infinito, cuja expressão para obtenção de K_I é dada por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(\beta) \quad (5.16)$$

onde $\beta = 2a/h$ e o fator adimensional $F(\beta)$ é obtido conforme:

$$F(\beta) = \left(1 - 0,025\beta^2 + 0,06\beta^4\right) \sqrt{\sec\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)} \quad (5.17)$$

Neste exemplo é adotado $L/h = 3$. Como o modo I é o único modo de solicitação das pontas, o valor da variação do FIT equivalente é obtido a partir de:

$$\Delta K_{eq} = K_I^{m\acute{a}x} - K_I^{m\acute{i}n} \quad (5.18)$$

O carregamento aplicado varia de zero até o valor máximo $\sigma_{m\acute{a}x}$, conforme apresentado pela Figura 5.2b. Assim, o valor de $K_I^{m\acute{i}n}$ é nulo, enquanto $K_I^{m\acute{a}x}$ é determinado a partir da Eq. (5.16):

$$K_I^{m\acute{a}x} = \sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{\pi a} F(\beta) \quad (5.19)$$

Substituindo a Eq. (5.19) na Eq. (5.18), obtém-se o valor de ΔK_{eq} para o problema em função do comprimento da fissura:

$$\Delta K_{eq} = \sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{\pi a} F(\beta) \quad (5.20)$$

A Eq. (5.20) pode ser substituída na lei de Paris (Eq. (5.2)), fornecendo:

$$\frac{da}{dN} = C \left(\sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{0,5\pi\beta h} F(\beta) \right)^n \quad (5.21)$$

onde o fato de $a = 0,5\beta h$ foi utilizado.

Dessa forma, a expressão analítica para a determinação do número de ciclos para um valor de inicial β_i até um valor final β_f é dada por:

$$\Delta N = \frac{h^{1-n/2}}{2C \left(\sigma_{m\acute{a}x} \sqrt{0,5\pi} \right)^n} \int_{\beta_i}^{\beta_f} \frac{1}{\left(\sqrt{\beta} F(\beta) \right)^n} d\beta \quad (5.22)$$

A estrutura é avaliada a partir do código computacional desenvolvido considerando a dimensão $h = 1$. Já as propriedades elásticas do material são $E = 30000$ e $\nu = 0$, enquanto os coeficientes da lei de Paris são $C = 1,5 \cdot 10^{-8}$ e $n = 2,25$. O comprimento inicial da fissura é tomado igual a $2a = 0,1$, o que corresponde a um $\beta_i = 0,1$. Já o valor máximo do carregamento aplicado é $\sigma_{m\acute{a}x} = 10$. As unidades adotadas para as grandezas são arbitrárias.

O contorno estrutura é discretizada com 64 elementos quadráticos, enquanto cada uma das faces da fissura é discretizada com 4 elementos cúbicos (Figura 5.3).

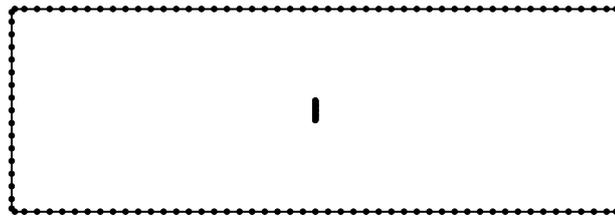


Figura 5.3 - Discretização inicial da estrutura para o Exemplo 5.1.

São adotados valores de incrementos no comprimento da fissura durante a propagação iguais a 0,025, 0,05, 0,075 e 0,1. Os resultados para o número de ciclos determinados para cada um deles, bem como a resposta analítica determinada via integração numérica da Eq. (5.22), são mostrados na Figura 5.4. Como pode ser observado, há uma boa correspondência entre os valores determinados e os valores analíticos, sem grande variação entre as respostas para os diferentes incrementos de fissura. Os erros no número final de ciclos foram da ordem de 1% em todos os casos. Esse resultado indica a eficiência na determinação do número de ciclos pelo algoritmo proposto neste trabalho, para o qual foram obtidas boas respostas independentemente dos incrementos adotados.

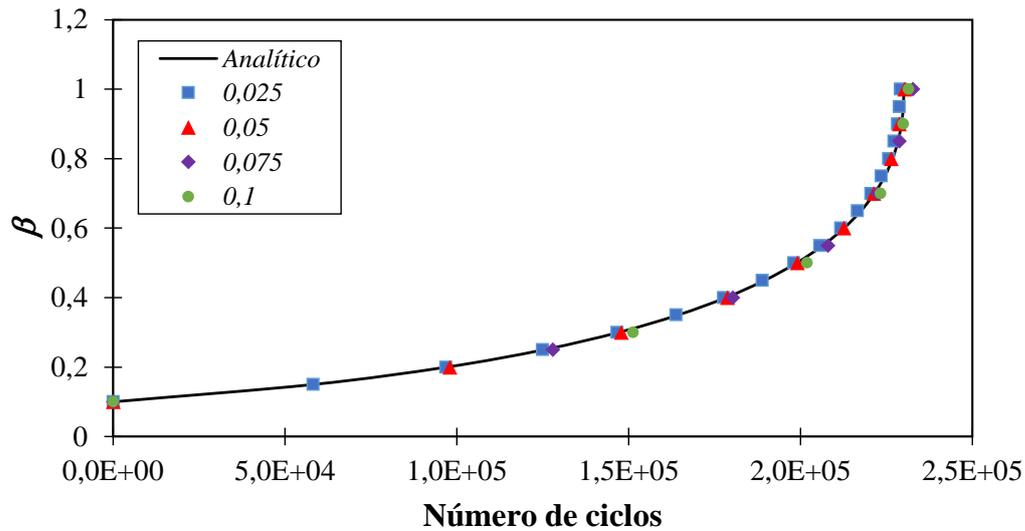


Figura 5.4 - Evolução do número de ciclos para diferentes valores de incrementos no comprimento da fissura.

Já Figura 5.5 mostra o histórico da evolução dos valores de K_I com a variação do crescimento da fissura para o incremento $\Delta a = 0,25$. A resposta analítica determinada via Eq. (5.16) também é apresentada. Observa-se novamente uma boa correspondência entre os valores numéricos obtidos e a resposta analítica, indicando a eficiência da formulação proposta.

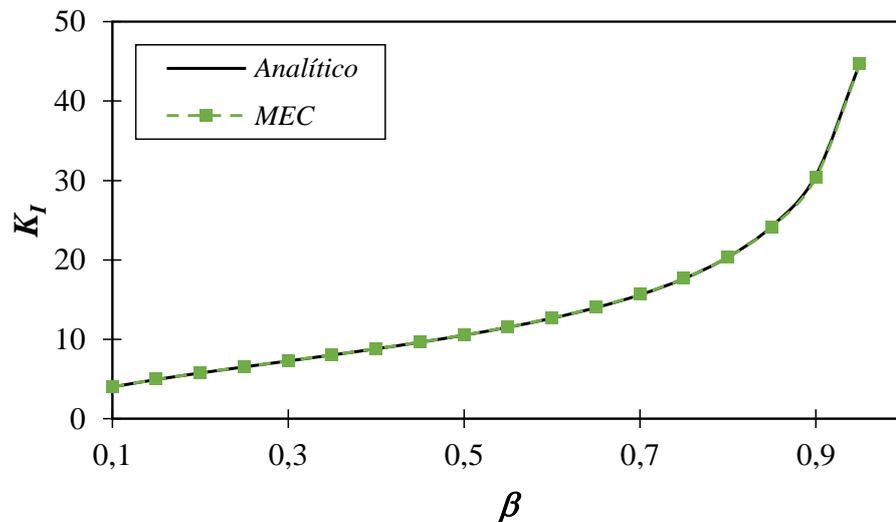


Figura 5.5 - Evolução de K_I em função de β .

Por fim, a Figura 5.6 apresenta a situação deformada da estrutura sob ação do carregamento máximo para três configurações distintas, com β igual a 0,1, 0,5 e 0,9. A partir da sequência mostrada é possível observar que a descontinuidade cresce na vertical, como esperado, visto que o problema trata de uma sollicitação em modo I puro.

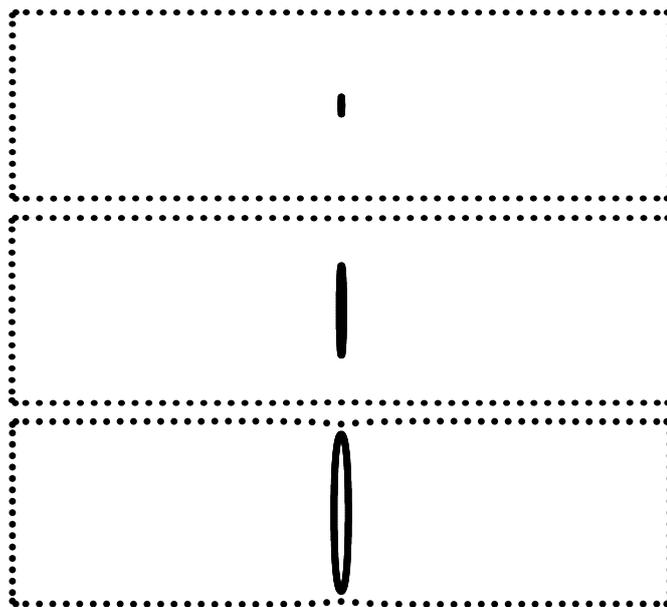


Figura 5.6 - Representação da deformada da estrutura na situação do carregamento máximo para β igual a 0,1, 0,5 e 0,9. Deslocamentos ampliados em 50 vezes.

5.4 Modelo numérico para solução dos problemas de fadiga

O modelo numérico implementado para a solução dos problemas de fadiga apresenta certas semelhanças com aquele apresentado no Capítulo 3 para tratar fratura frágil. Uma das principais diferenças está na necessidade de análise da estrutura para as diferentes fases de carregamento que compõem a sollicitação oscilatória típica de problemas de fadiga. A Figura 5.7 mostra uma representação esquemática da variação das condições de contorno para uma sollicitação desse tipo. No modelo numérico, para cada configuração de fissuras, a estrutura é avaliada para as diferentes fases de carregamentos. Essas fases correspondem aos picos e aos vales da curva de variação do carregamento dentro de determinado período de oscilação T .

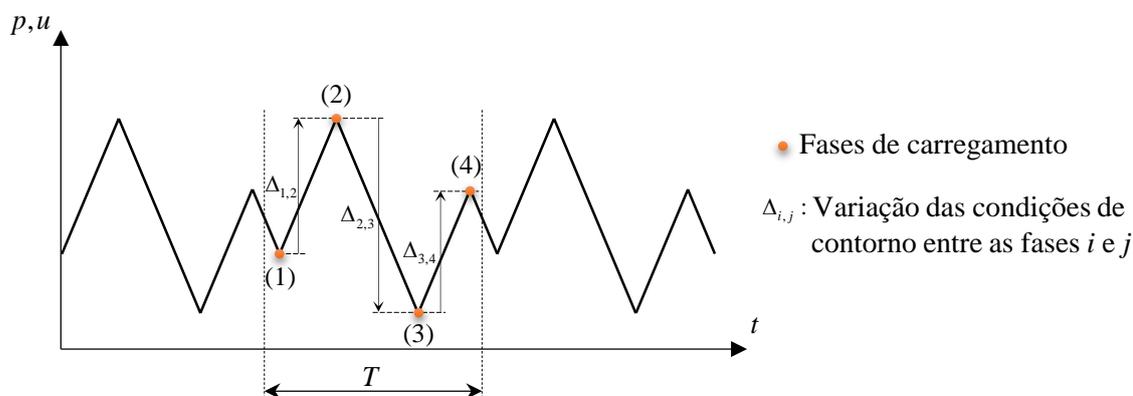


Figura 5.7 - Representação da variação de um carregamento oscilatório.

A estrutura é inicialmente avaliada para a primeira fase de carregamento. Em seguida são aplicadas as variações das condições de contorno entre as fases de carregamento sucessivas,

conforme representado na Figura 5.7. A partir da avaliação da estrutura para as diferentes fases de carregamento, é possível determinar a amplitude de variação da solitação das pontas para determinada configuração de fissuras e realizar a previsão do crescimento das descontinuidades pelo efeito de fadiga. O modelo numérico implementado é descrito em maiores detalhes nos itens a seguir. Já os fluxogramas referentes a esse módulo se encontram no Apêndice I, item I.3.

5.4.1 Pré-processamento

A etapa de pré-processamento para os problemas de fadiga é semelhante à dos problemas de fratura frágil (item 3.8.1). Inicialmente são definidas a geometria e a discretização do contorno da estrutura. Na sequência, são fornecidas as condições de contorno para as diferentes fases de carregamento dentro de um período de oscilação do carregamento externo (ver Figura 5.7). Em seguida, as propriedades dos materiais dos subdomínios são fornecidas, incluindo os parâmetros da lei de Paris, tenacidade à fratura e os valores de ΔK_{th} e da máxima taxa admissível de crescimento da fissura por ciclo. Por fim, são definidas as fissuras na análise, bem como as respectivas malhas de elementos de contorno e os parâmetros para a determinação dos FIT via integral J.

5.4.2 Solução para as fases de carregamento

Na primeira etapa de solução são realizadas as definições iniciais do problema, da mesma forma como exposto no item 3.8.2.1. Inicialmente são definidas as coordenadas adimensionais e reais dos pontos de colocação da malha de elementos de contorno e as respectivas componentes dos vetores normais. Em seguida, os elementos da fissura são definidos como elementos de interface com contato perfeito.

Na sequência, as integrações numéricas para a determinação das matrizes **H** e **G** são realizadas. Após a definição das matrizes, inicia-se o processo de solução para a primeira fase de carregamento com a aplicação de um incremento das ações externas. O sistema de equações da forma da Eq. (2.63) é formado a partir da troca de colunas das matrizes **H** e **G** e resolvido. Em seguida as variáveis acumuladoras são atualizadas com os valores calculados para **u** e **p**. Posteriormente, a fase de verificação dos pares de pontos de colocação das faces descrita no item 3.8.2.2 é realizada. Após a convergência de todos os pares de pontos de colocação, é aplicado um novo incremento da primeira fase de carregamento. O processo de solução é novamente executado até a aplicação do último incremento de carga.

Após a aplicação da magnitude total da fase de carregamento, inicia-se a etapa de pós-processamento. Nessa etapa, os campos de deslocamento e tensão para os pontos internos

definidos pelo usuário e os campos de tensão para os pontos de colocação no contorno são determinados.

Na sequência, os valores dos FIT são calculados para a fase de carregamento correspondente. Para as pontas cujos respectivos pontos de colocação se encontram abertos são inseridos pontos internos que definem o caminho de integração para o cálculo da integral J. Os FIT são então obtidos conforme a metodologia apresentada no item 3.6.2. Caso não seja possível traçar o caminho de integração da integral J sem que este intercepte algum outro elemento, os FIT são determinados a partir da técnica de correlação de deslocamentos (item 3.6.1).

Com os valores dos FIT para as pontas abertas, os FIT equivalentes e as direções potenciais de propagação são determinados a partir do critério da máxima tensão circunferencial (item 3.7.1). O valor de K_{eq} é então comparado aos valores mínimo e máximo armazenados para a respectiva ponta, que por sua vez são obtidos a partir da solução das fases de carregamento anteriores. Se o K_{eq} calculado para a fase de carregamento atual for menor que o mínimo, então o valor mínimo é atualizado. Já se K_{eq} for maior que o máximo, então o valor máximo é atualizado. Nesse último caso, o valor da direção potencial de propagação θ_p também é atualizado, uma vez que se considera que a fissura cresce na direção obtida a partir do máximo valor de K_{eq} dentre todas as fases de carregamento.

Em seguida, o processo descrito anteriormente é executado para uma nova fase de carregamento. Cabe ressaltar que os valores acumulados até a fase de carregamento anterior são mantidos como condições iniciais para a nova etapa. Ao final da aplicação de todas as fases de carregamento, as pontas apresentam variação do FIT equivalente conforme esquematizado pela Figura 5.8. Os valores máximo e mínimo armazenados para a ponta fornecem a variação do FIT equivalente para um ciclo de carregamento, que é posteriormente utilizado para o cálculo da taxa de crescimento da fissura. Além disso, o ângulo de propagação correspondente ao FIT equivalente máximo também é determinado.

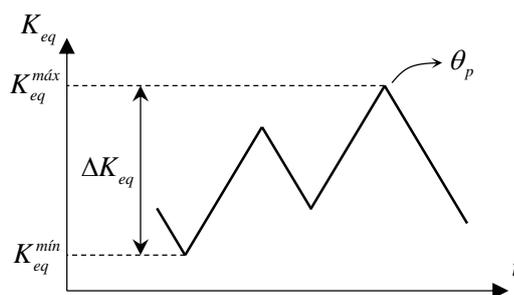


Figura 5.8 - Representação esquemática da variação do FIT equivalente para uma ponta para as diferentes fases de carregamento.

5.4.3 Determinação da vida útil e verificação dos critérios de parada

Após a obtenção da variação do FIT equivalente e da direção potencial de propagação para todas as pontas em um ciclo de carregamento, o número de ciclos necessário para promover a propagação das descontinuidades por fadiga da configuração anterior i até a configuração atual $i + 1$ é determinado conforme o item 5.3. Como na formulação é utilizada a variação do FIT na configuração anterior, a determinação no número de ciclos não é feita caso a configuração atual seja a inicial.

Para o cálculo de $\Delta N^{(i+1)}$, previamente é definida a ponta na análise com a maior taxa de crescimento por ciclo na configuração anterior com o uso da lei de Paris (Eq. (5.2)). Com o incremento do comprimento Δa da ponta da configuração i até a $i + 1$ e com a utilização da Eq. (5.13), ou Eq. (5.14) caso a ponta deixe de ser ativa na configuração atual, $\Delta N^{(i+1)}$ é determinado e o número total de ciclos é atualizado conforme a Eq. (5.15). Os parâmetros da lei de Paris na Eq. (5.15) correspondem ao material que contém a ponta na configuração anterior.

Na sequência, os critérios de parada da análise são verificados. Tais critérios são: máximo incremento no comprimento da fissura por ciclo; pontas ativas na análise; $K_{eq}^{máx}$ maior que a tenacidade do material; e ΔK_{eq} menor que ΔK_{th} do material. O critério do máximo incremento no comprimento da fissura por ciclo é verificado a partir do cálculo da taxa da/dN para as pontas na análise a partir da lei de Paris (Eq. (5.2)). Se essa taxa for superior à máxima taxa admissível de crescimento da fissura por ciclo para o material que contém a ponta, a análise é interrompida. Já o critério de pontas ativas consiste em determinar a quantidade de pontas na análise que têm o potencial de propagar por fadiga. Se não houver pontas ativas no modelo, então a análise é finalizada. O terceiro critério busca verificar se há propagação instável de alguma ponta a partir da comparação do máximo valor do FIT equivalente dentro de um ciclo com a tenacidade à fratura do material no qual ela se encontra. Se a desigualdade $K_{eq}^{máx} > K_{Ic}$ for verificada, então a análise é interrompida. Por fim, o último critério de parada avalia se existe o fenômeno de fadiga na estrutura. Para tanto, para cada uma das pontas, a amplitude de variação do FIT equivalente é comparada ao valor limite de variação do FIT do material que a contém. Se a desigualdade $\Delta K_{eq} < \Delta K_{th}$ for verificada para todas as pontas, então não há fenômeno de fadiga e, portanto, a análise é finalizada.

5.4.4 Propagação das fissuras por fadiga

Caso nenhum dos critérios de parada seja satisfeito, a análise continua com a propagação das fissuras por fadiga. Nessa etapa, inicialmente os incrementos no comprimento de cada uma das pontas são determinados a partir da seguinte relação:

$$\Delta L_f = \Delta L \frac{C_{sd} \Delta K_{eq}^{n_{sd}}}{[da/dN]_{máx}} \quad (5.23)$$

onde ΔL é o valor do incremento padrão definido pelo usuário, C_{sd} e n_{sd} são os parâmetros da lei de Paris para o subdomínio que contém a ponta avaliada e $[da/dN]_{máx}$ é a máxima taxa de crescimento de fissura por ciclo observada na análise.

Como pode ser observado a partir da Eq. (5.23), o incremento no comprimento das pontas é proporcional à taxa de crescimento por ciclos determinada via lei de Paris. A análise pode apresentar pontas que possuem taxa de crescimento por fadiga muito menor do que outras. Dessa forma, para evitar que um pequeno comprimento seja adicionado a essas pontas, o que poderia levar a pontos de colocação muito próximos e, conseqüentemente, a um mau condicionamento das matrizes do sistema de equações para solução da estrutura, o valor de ΔL_f é limitado a um valor mínimo. Tal valor mínimo é tomado como o menor valor entre a distância padrão entre os nós da fissura correspondente e $\Delta L/8$. Assim, se o valor de ΔL_f calculado via Eq. (5.23) for inferior ao valor mínimo, a respectiva ponta não sofre propagação.

Definidos os incrementos a serem adicionados a cada uma das pontas, a etapa de remalhamento é iniciada. Novos pontos de colocação são adicionados às novas faces criadas e, caso a fissura intercepte algum elemento, é realizada a modificação do elemento cruzado conforme exposto no item 3.8.2.3 e no item 3.8.3. Os novos pares de pontos de colocação das fissuras que propagam são definidos com deslocamentos relativos restritos.

Após o processo de remalhamento, as matrizes **H** e **G** são atualizadas segundo o esquema apresentado em maiores detalhes no item 3.8.2.3. Em seguida, as variáveis acumuladoras de deslocamentos e de forças de superfície são reinicializadas para a realização de um novo ciclo de carregamento na nova configuração de fissuras.

Exemplo 5.2: Caminho de propagação - Ingraffea e Grigoriu (1990)

A estrutura analisada pelo Exemplo 5.2 é mostrada pela Figura 5.9a. Ela consiste de uma chapa de dimensões 20 x 8 in, com espessura igual a 0,5 in, contendo três furos com diâmetro igual a 0,5 in e um entalhe inicial com 1,5 in de comprimento. Sobre o centro da face superior da estrutura é aplicado um carregamento concentrado cíclico cuja variação é

apresentada pela Figura 5.9b. Esse problema foi analisado experimentalmente no trabalho de Ingraffea e Grigoriu (1990), no qual foi obtido o caminho de propagação da fissura. Neste exemplo, o caminho de crescimento determinado numericamente a partir do MEC é comparado com o resultado experimental. Além disso, a vida útil da estrutura é determinada.

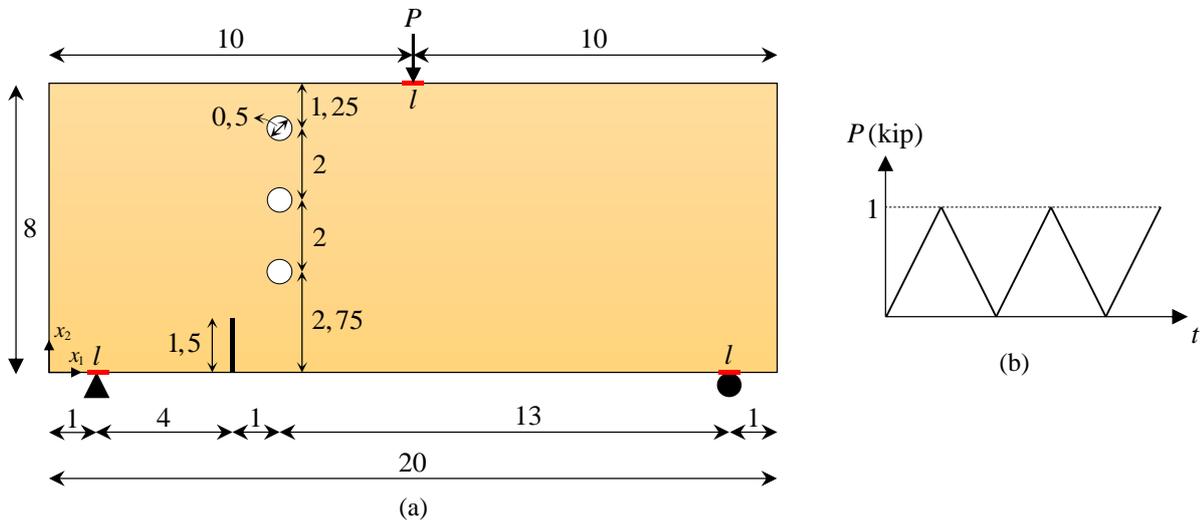


Figura 5.9 - Representação do problema analisado no Exemplo 5.2: (a) geometria (dimensões em in) e (b) variação do carregamento cíclico aplicado.

A estrutura é constituída por um material com módulo de elasticidade $E = 450$ ksi e coeficiente de Poisson $\nu = 0,37$. Como propriedades para fadiga são adotados os mesmos valores utilizados por Leonel e Venturini (2010a), sendo a tenacidade ao fraturamento $K_{Ic} = 3,0 \cdot 10^8$ ksi $\sqrt{\text{in}}$, a tenacidade limitante $\Delta K_{Ih} = 0,1$ ksi $\sqrt{\text{in}}$ e os parâmetros da lei de Paris $C = 7,0 \cdot 10^{-9}$ in.[ciclos.(ksi.in 0,5) n] $^{-1}$ e $n = 3,0$. O problema é admitido como um EPT.

O contorno externo da estrutura é discretizado com 112 elementos quadráticos e 3 elementos lineares com comprimento $l = 0,1$ in, sendo esses últimos utilizados para a aplicação das condições de contorno. Já os furos e a fissura são discretizados com elementos cúbicos. Para cada furo são utilizados 8 elementos, enquanto para cada face da fissura inicial são utilizados 15 elementos. A Figura 5.10 apresenta a malha de elementos de contorno adotada.

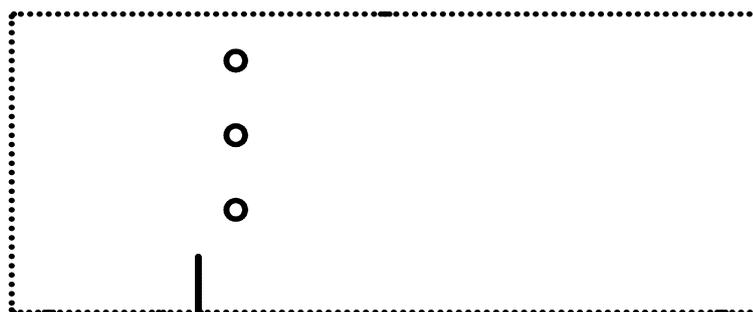


Figura 5.10 - Discretização inicial da estrutura para o Exemplo 5.2.

O caminho de propagação determinado numericamente a partir do modelo desenvolvido neste trabalho é mostrado pela Figura 5.11. Para a determinação desse caminho são utilizados incrementos no comprimento da fissura iguais a 0,15 in. Na Figura 5.11 também é apresentado o caminho de crescimento da fissura obtido experimentalmente por Ingraffea e Grigoriu (1990).

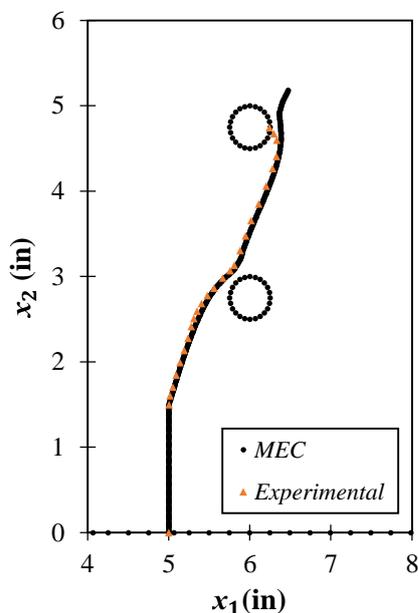


Figura 5.11 - Comparação entre os caminhos de propagação determinados numericamente e experimentalmente.

Como pode ser observado a partir da Figura 5.11, o resultado numérico apresenta uma boa correspondência com o resultado experimental na maior parte do caminho de propagação. A maior diferença observada entre as respostas é verificada nas proximidades do furo central. No caso experimental, a fissura cruza com a abertura, enquanto no caso numérico a fissura passa próximo à abertura, porém sem cruzá-la.

Uma das razões para a diferença observada entre as respostas pode ser atribuída à degradação material causada na região próxima ao furo central durante a sua perfuração. Para contemplar esse dano, Leonel e Venturini (2010a) consideraram a presença de fissuras na borda da abertura e determinaram um caminho próximo ao experimental. Neste trabalho, para explorar a capacidade de simulação do modelo desenvolvido para tratar domínios não-homogêneos, é adotada uma faixa de degradação com raio $R = 0,4$ in no entorno do furo central, que possui raio $r = 0,25$ in (Figura 5.12). O valor de R é tomado a partir do ponto no qual se verifica o desvio do caminho numérico em relação ao experimental. O dano nessa região é considerado a partir da penalização do módulo de elasticidade do material, que passa a ser igual a $E = 200$ ksi. Cabe ressaltar que a faixa de degradação é considerada apenas ao redor da abertura central. Nos experimentos conduzidos por Ingraffea e Grigoriu (1990) é possível que tenha ocorrido degradação em torno dos demais furos. Todavia, como não são verificados

grandes desvios entre os caminhos de propagação mostrados pela Figura 5.11 nas proximidades do furo inferior, o dano nas proximidades das demais aberturas é considerado restrito a uma zona de menor dimensão e, portanto, não é contemplado na análise que segue.

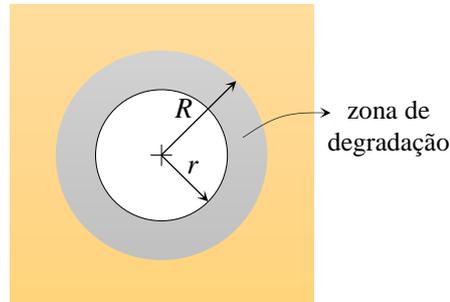


Figura 5.12 - Detalhe da zona de degradação próxima ao furo central.

Para a discretização do contorno da zona de degradação são adotados 16 elementos cúbicos. A comparação entre o novo caminho determinado numericamente via MEC e o obtido experimentalmente por Ingrassia e Grigoriu (1990) é mostrada pela Figura 5.13. Como pode ser observado, a partir das considerações realizadas os caminhos de propagação passam a apresentar uma boa correspondência ao longo de toda a trajetória de crescimento da fissura.

Apesar da arbitrariedade dos valores adotados para a consideração do dano na nova simulação realizada, esse exemplo mostra a aplicação eficaz do modelo desenvolvido para um problema com não-homogeneidade material provocada pela degradação mecânica de determinada região.

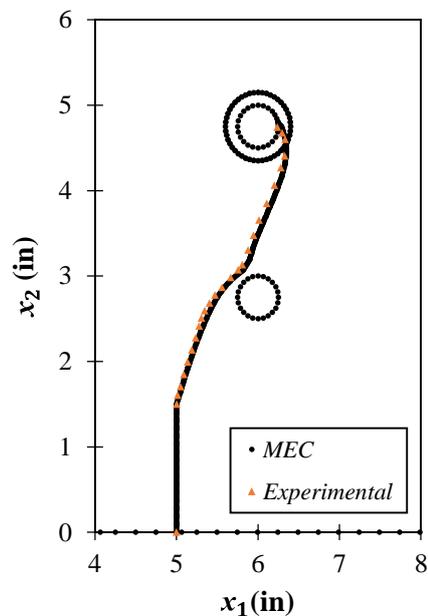


Figura 5.13 - Comparação entre os caminhos de propagação determinados numericamente e experimentalmente com a consideração de uma zona de degradação em torno do furo central.

Já a Figura 5.14 apresenta a variação do comprimento da fissura com o número de ciclos de carregamento para a segunda situação analisada. Duas regiões de alteração no

comportamento da curva podem ser observadas e são destacadas. Tais regiões correspondem às situações nas quais a ponta da fissura se encontra próxima às aberturas. Os furos provocam a perturbação dos campos elásticos nas suas vizinhanças, causando a redução da amplitude de variação do FIT equivalente da ponta. Conseqüentemente, há uma diminuição da taxa de crescimento da fissura, representada pelo maior número de ciclos necessário para promover um mesmo incremento no comprimento. Todavia, para locais nos quais a ponta se encontra distante dos furos, a taxa de crescimento tende a crescer. A Figura 5.14 também indica que o número necessário de ciclos de carregamento para a fissura interceptar o furo central é igual a aproximadamente 130 milhões.

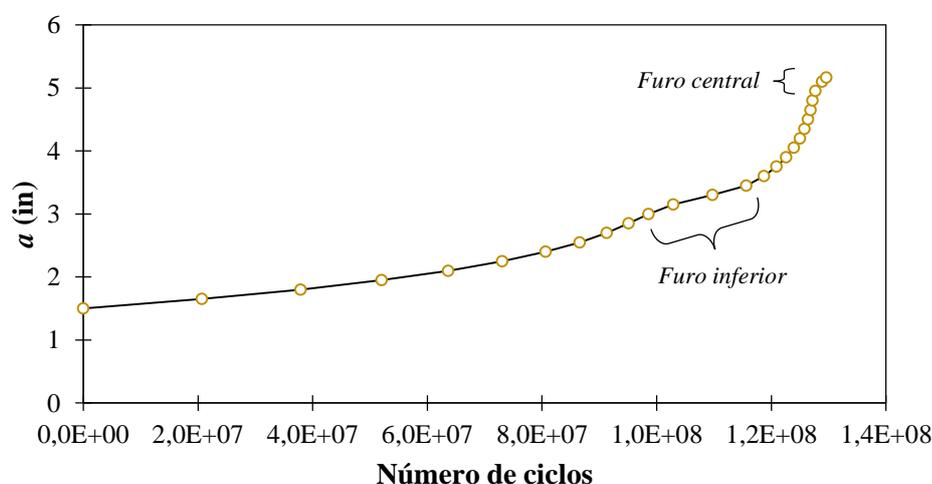


Figura 5.14 - Evolução do comprimento da fissura com o número de ciclos de carregamento.

Exemplo 5.3: Fadiga em domínio não-homogêneo - Kikuchi et al. (2014)

A estrutura não-homogênea analisada pelo Exemplo 5.3 é apresentada pela Figura 5.15a. Ela é constituída por uma chapa com largura $2w$ e altura $8w$, sendo $w = 10$ mm. A interface entre os dois materiais componentes possui uma inclinação $\theta = 30$ graus. Para os módulos de elasticidade dos materiais, os seguintes valores são admitidos: $E_1 = 40000$ MPa e $E_2 = 10000$ MPa. Além disso, os coeficientes de Poisson são tomados iguais a: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Os coeficientes da lei de Paris para ambos os materiais são adotados iguais a $C = 1,67 \cdot 10^{-12}$ e $n = 3,23$, com da/dN dado em mm/ciclo e ΔK_{eq} dado em $\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$. A fissura horizontal apresenta comprimento inicial $a_0 = 2$ mm e está localizada na posição indicada pela Figura 5.15a. Sobre o topo da estrutura é aplicada uma força de superfície com magnitude variando de zero até o valor máximo $\sigma = 10$ MPa. Para a análise é admitido um EPT. Esse problema também foi tratado por Kikuchi et al. (2014) com o uso do MEF.

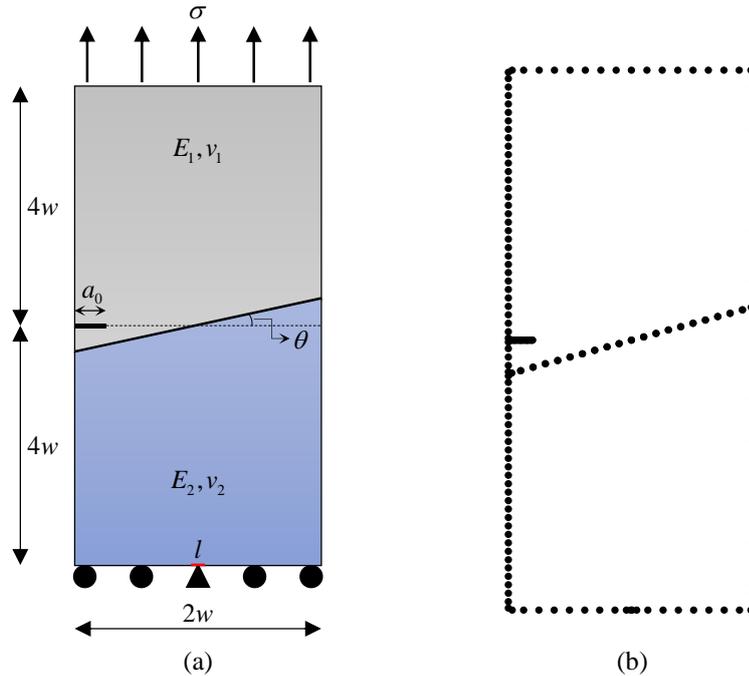


Figura 5.15 - Representação do problema analisado no Exemplo 5.3: (a) geometria e (b) discretização.

Para a análise da estrutura via MEC, a discretização representada pela Figura 5.15b é utilizada. São utilizados 100 elementos quadráticos e 1 elemento linear para a discretização do contorno e da interface, sendo o elemento linear, com comprimento $l = 0,2$ mm, utilizado para restrição dos deslocamentos no plano do centro da face inferior. O restante da base da estrutura apresenta apenas os deslocamentos verticais restritos. Já para cada uma das faces da fissura são utilizados 4 elementos com aproximação cúbica.

O crescimento da fissura por fadiga é admitido em incrementos de $\Delta a = 0,3$ mm. A variação obtida para os valores dos FIT dos modos I e II, normalizados por $\sigma\sqrt{\pi w}$, com o comprimento total da fissura é mostrada pela Figura 5.16. Na Figura 5.16 também é apresentada a resposta de referência determinada por Kikuchi et al. (2014).

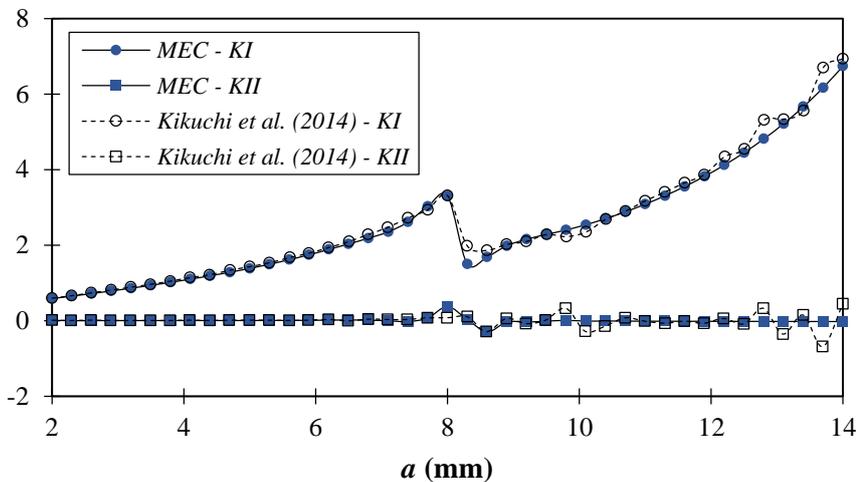


Figura 5.16 - Variação dos FIT com o comprimento da fissura.

Como pode ser observado a partir das curvas apresentadas pela Figura 5.16, há uma boa correspondência entre os resultados determinados neste trabalho e os encontrados em Kikuchi et al. (2014). Para valores de a próximos a 8 mm, ambas as respostas capturam uma perturbação nos valores dos FIT. Nesses comprimentos a fissura se encontra próxima e chega a cruzar a interface entre os materiais. Na proximidade da interface, há uma grande variação dos campos elásticos na ponta da fissura, resultando nas mudanças bruscas dos valores dos FIT.

Para algumas regiões correspondentes a valores de a superiores a 8 mm, a resposta obtida via MEF possui algumas oscilações sem nenhuma justificativa física aparente. Já a resposta determinada via MEC apresenta uma variação mais estável ao longo de toda trajetória de crescimento da fissura, indicando uma maior eficiência do método na solução deste problema.

As discrepâncias verificadas entre as soluções nas regiões de oscilação da resposta determinada via MEF por Kikuchi et al. (2014) são suficientes para produzir diferenças entre os caminhos de propagação. A partir da Figura 5.17, observa-se que as trajetórias de crescimento da fissura deixam de ser similares após o cruzamento da interface, justamente a partir de onde se verificam as perturbações na resposta de referência.

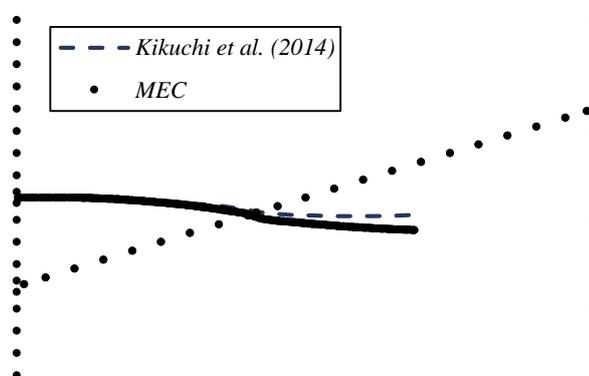


Figura 5.17 - Comparação entre os caminhos de propagação determinados neste trabalho e por Kikuchi et al. (2014).

Por fim, a Figura 5.18 apresenta a curva de aumento no comprimento da fissura em função do número de ciclos de carregamento determinada neste trabalho. Como pode ser observado, há um aumento da taxa de crescimento, dada pela inclinação da tangente à curva, com a evolução do comprimento da fissura até um valor de a próximo a 8 mm. Nesse ponto a fissura cruza para o material 2 e é verificado um ponto de inflexão na curva apresentada pela Figura 5.18. Nessa situação é observada uma menor taxa de crescimento, o que é justificado pela diminuição da amplitude de variação do FIT equivalente dentro de um ciclo de carregamento. Essa diminuição é fundamentada, principalmente, na redução do valor de K_I quando da mudança de subdomínio (ver Figura 5.16). Para comprimentos maiores, a taxa de

crescimento da fissura volta a aumentar e o número de ciclos atinge um valor assintótico igual a aproximadamente 8 milhões de ciclos de carregamento.

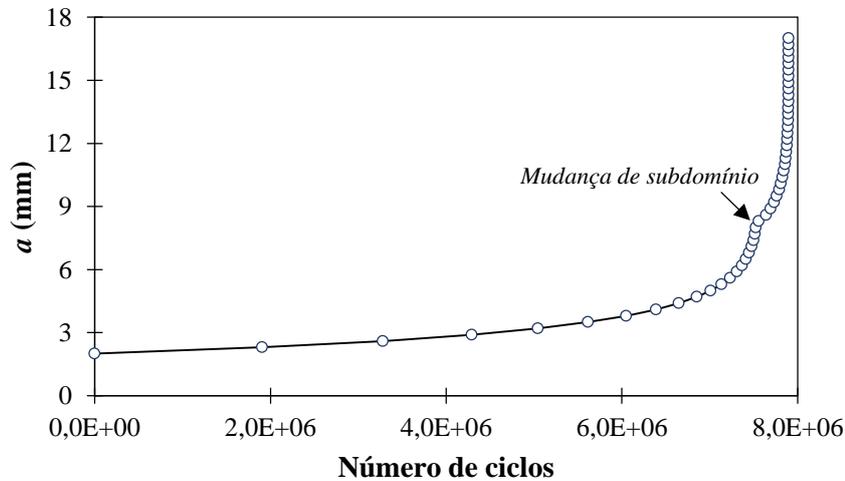


Figura 5.18 - Evolução do comprimento da fissura com o número de ciclos de carregamento.

Exemplo 5.4: Fadiga em domínio não-homogêneo multifissurado

Este exemplo busca simular o crescimento de fissuras por fadiga em uma estrutura composta por diferentes materiais e multifissurada (Figura 5.19a). As dimensões apresentadas possuem os seguintes valores em unidade arbitrária de comprimento: $L = 1,0$, $b = 0,25$, $r = 0,2$ e $R = 0,5$. A base da estrutura tem os deslocamentos restritos tanto na horizontal quanto na vertical. O domínio é composto por três materiais distintos, com módulos de elasticidade iguais a $E_1 = 5000$, $E_2 = 2500$ e $E_3 = 10000$. O coeficiente de Poisson para todos os subdomínios é igual a $\nu = 0,25$. O problema é analisado como um EPT. Já os parâmetros da lei de Paris para os materiais são arbitrados como $C_1 = 1,0 \cdot 10^{-8}$, $n_1 = 3,0$, $C_2 = 7,0 \cdot 10^{-9}$, $n_2 = 2,75$, $C_3 = 1,5 \cdot 10^{-8}$ e $n_3 = 2,25$.

O carregamento é aplicado sobre o furo presente no material 3 ao longo da semicircunferência indicada na Figura 5.19b. A direção do carregamento possui inclinação θ em relação à horizontal e sua magnitude varia entre o valor máximo $p_{máx} = 10,0$ e o valor mínimo $p_{mín} = 5,0$, conforme indicado pela Figura 5.19c.

A estrutura possui 20 fissuras uniformemente distribuídas ao longo do domínio, como mostrado pela Figura 5.19a. O comprimento das fissuras segue uma distribuição log-normal, com média 0,5 e desvio padrão 0,05, enquanto a inclinação segue uma distribuição uniforme entre 0 e 360 graus. A discretização de cada uma das faces das fissuras é feita com 2 elementos cúbicos. Já para o restante da estrutura são utilizados 374 elementos quadráticos.

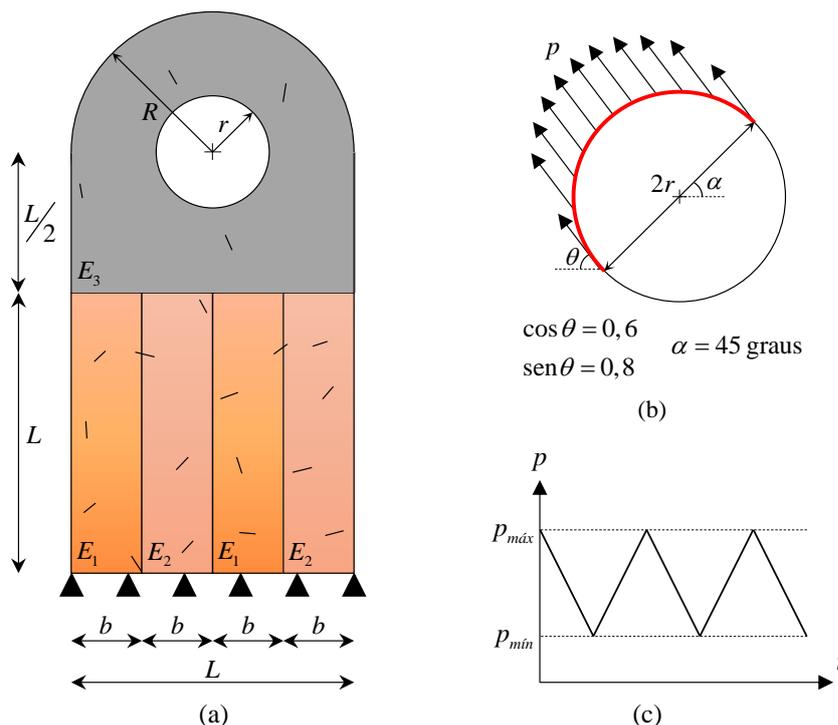


Figura 5.19 - Representação do problema analisado no Exemplo 5.4: (a) geometria, (b) carregamento sobre o furo e (c) variação da magnitude do carregamento aplicado.

A Figura 5.20a e Figura 5.20b mostram a configuração deformada da estrutura sobre a geometria inicial quando aplicado o carregamento máximo e mínimo, respectivamente.

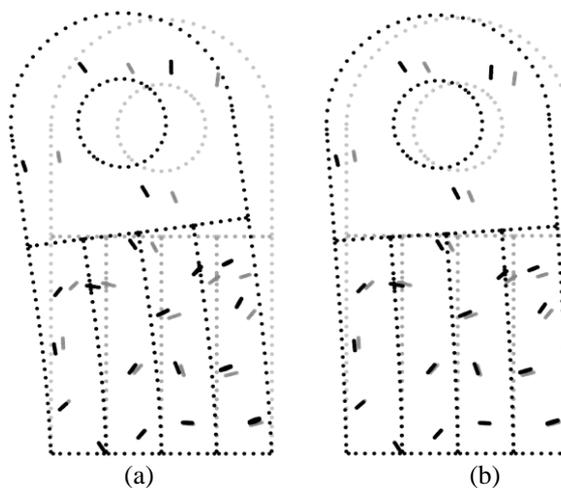


Figura 5.20 - Deformada da configuração inicial para aplicação do carregamento (a) máximo e (b) mínimo. Deslocamentos ampliados em 10 vezes.

Sob ação do carregamento cíclico, as fissuras tendem a propagar pelo fenômeno de fadiga. A Figura 5.21 mostra a evolução do comprimento das discontinuidades material obtida a partir do código implementado. Como pode ser observado, as fissuras que apresentam maior crescimento são as duas mais próximas à base localizadas nos subdomínios mais à direita da estrutura. Isso está de acordo com o esperado, uma vez que essas fissuras são mais solicitadas pela combinação dos efeitos de tração e flexão da força resultante aplicada. Comparando o

crescimento de ambas, pode ser verificado que a fissura presente no material 1 atinge maior comprimento. Esse resultado é justificado pela combinação dos parâmetros da lei de Paris adotada para os materiais, visto que o material 1 tende a apresentar a maior taxa de crescimento para valores moderados de variação do fator de intensidade de tensão equivalente.

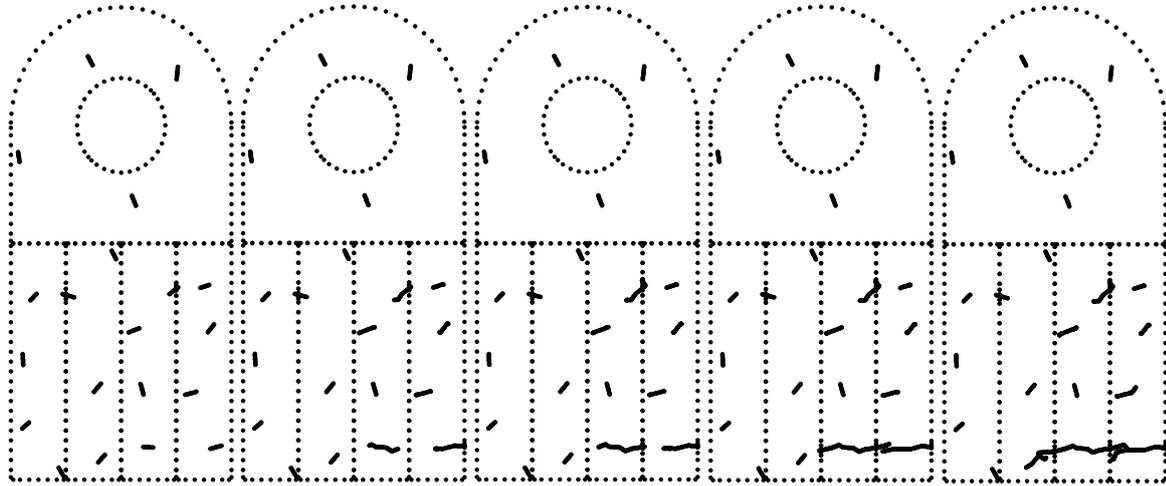


Figura 5.21 - Representação da propagação das fissuras pela ação do carregamento cíclico.

A partir da Figura 5.21 também é possível observar o cruzamento das descontinuidades com o contorno externo da estrutura, com a interface e a coalescência entre elas, indicando a eficácia do código desenvolvido para capturar esses fenômenos.

Já a Figura 5.22a e a Figura 5.22b apresentam, respectivamente, as configurações deformadas para a aplicação do carregamento máximo e mínimo logo após a coalescência entre as fissuras com maior crescimento. Como pode ser observado, nessa situação há separação de mais da metade da largura da estrutura ao longo de uma superfície que tende a ser paralela à base. A Figura 5.22 também mostra uma abertura bem definida entre faces da fissura principal formada e, com isso, as divisões do contorno externo e das interfaces cruzadas podem ser vistas.

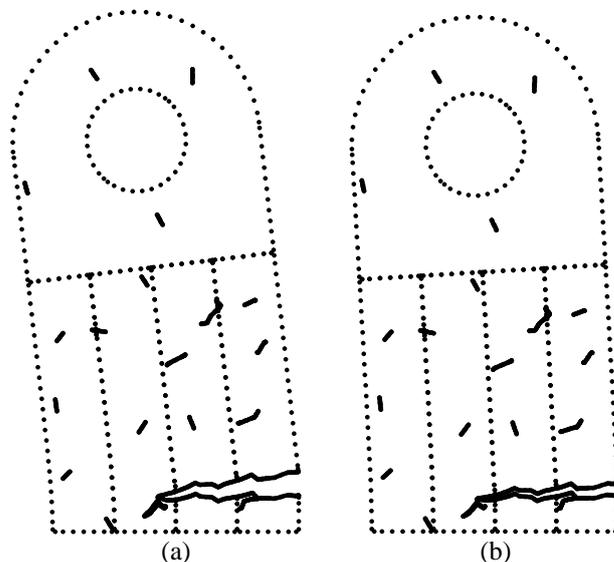


Figura 5.22 - Deformada da configuração final para aplicação do carregamento (a) máximo e (b) mínimo.

Finalmente, a Figura 5.23 apresenta as quantidades necessárias de ciclos de carregamento para atingir as configurações fissuradas obtidas ao longo da análise. Nota-se uma grande variação do comportamento da taxa de crescimento da fissura. Um dos motivos é a possibilidade de alteração da ponta crítica de uma configuração para outra. A ponta crítica corresponde àquela que apresenta a maior taxa de crescimento em uma dada configuração i , e, portanto, define o número de ciclos para atingir a configuração $i + 1$. Além disso, a taxa de crescimento obtida para a estrutura depende das propriedades do subdomínio que contém a ponta crítica. Assim, se ela estiver contida em um subdomínio que tende a apresentar menores taxas de crescimento (como é o caso do material 2 em relação ao material 1 no exemplo), então o número necessário de ciclos para um mesmo incremento no comprimento da ponta crítica é maior. Esse fato é observado entre as configurações 1-2 e 11-12 na Figura 5.23. Por fim, outro motivo para a alteração do comportamento da taxa de crescimento é a mudança brusca na geometria da estrutura. Isso ocorre, por exemplo, com o cruzamento de uma fissura com o contorno externo, alterando subitamente as condições de carregamento sobre as demais pontas e, conseqüentemente, o comportamento da taxa de crescimento.

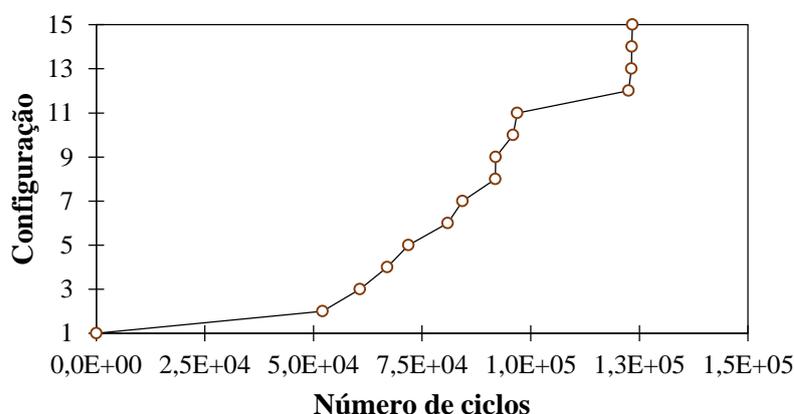


Figura 5.23 – Número de ciclos de carregamento para a obtenção das diferentes configurações fissuradas.

6 FRATURA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS

Nos capítulos anteriores foram abordados problemas de fratura nos quais a zona de processos inelásticos (ZPI) desenvolvida à frente das pontas das fissuras apresenta pequenas dimensões. Essa condição é frequentemente observada em materiais que possuem comportamento frágil e em estruturas sujeitas a fadiga de alto ciclo. Para as análises nessas situações, os conceitos da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) apresentados no Capítulo 3 podem ser utilizados. Entretanto, para materiais que apresentam ductilidade não desprezável, a fratura ocorre com o desenvolvimento significativo da ZPI em relação ao tamanho da descontinuidade material e às demais dimensões da estrutura. Nesses casos, a modelagem mecânica deve ser efetuada com a consideração dos efeitos dos fenômenos inelásticos que ocorrem dentro da ZPI. Tais fenômenos podem apresentar origem em processos com características distintas, a depender do tipo de comportamento estrutural do material, conforme será discutido na sequência.

Em materiais dúcteis, como as ligas metálicas, são observados fenômenos associados ao escoamento e ao encruamento do material na maior parte da ZPI. Já a zona fissurada é restrita a uma pequena porção da ZPI (Figura 6.1a). Desse modo, o processo é governado pelo critério de plastificação do material. Esses casos são analisados à luz da Mecânica da Fratura Elastoplástica e não serão abordados neste trabalho.

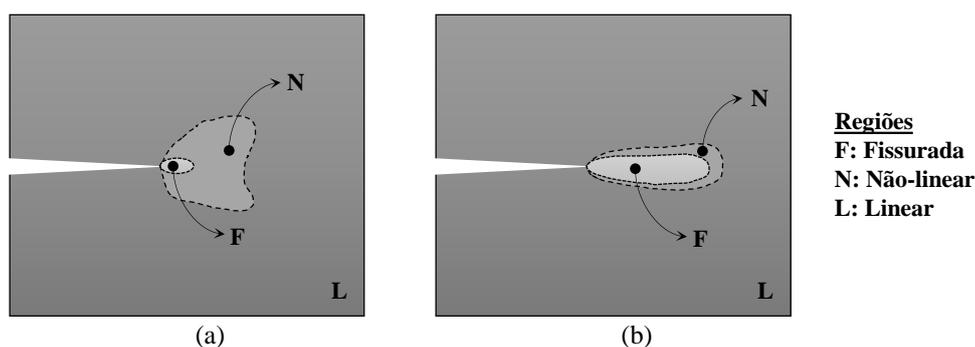


Figura 6.1 - Representação da ZPI em materiais com comportamento (a) dúctil e (b) quase-frágil.
 Fonte: Adaptado de Bazant (1985).

Já em materiais quase-frágeis não há evolução significativa de deformações residuais, sendo nesse tipo de material observado o fenômeno de amolecimento (*softening*) que é contrário ao encruamento (*hardening*) observado em metais. Todavia, a ZPI possui dimensão significativa, sendo a maior parte dos processos inelásticos associados ao dano ocorrido na região próxima à ponta devido aos altos níveis de tensão e de deformação (Figura 6.1b). Esse dano provoca o amolecimento, o qual decorre da degradação da microestrutura do material. As

novas superfícies de fissura não são completamente definidas dentro da ZPI e ainda é possível ocorrer a transferência de esforços entre faces recém-formadas. A resistência residual do material na ZPI é inversamente proporcional à abertura das faces, o que caracteriza o amolecimento. Alguns dos mecanismos de transferência de esforços são apresentados na Figura 6.2, dentre os quais destacam-se: superfícies de fissura formadas a partir da conexão de microfissuras e vazios (Figura 6.2a); degradação incompleta de matriz fibrosa (Figura 6.2b); superfícies irregulares de fraturamento associadas à composição do material e susceptíveis ao desenvolvimento de forças de contato (Figura 6.2c). Exemplos de materiais quase-frágeis que apresentam esse comportamento na fratura são: os materiais cimentícios, como concreto e argamassa; as rochas; as madeiras; além de materiais compósitos, todos com grande apelo prático em aplicações diversas de engenharia. Neste capítulo, ênfase é dada à propagação de fissuras nesse tipo de material.

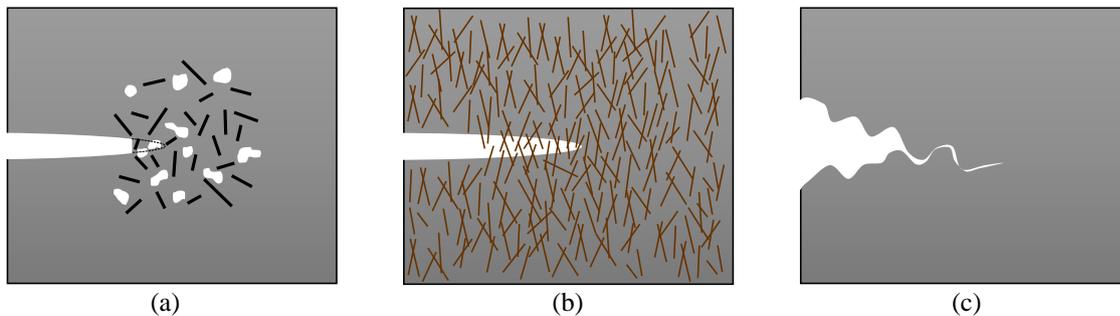


Figura 6.2 - Exemplos de mecanismos de transferência de esforços entre faces: (a) superfície formada a partir da microfissuração e de vazios; (b) transpasse de fibras; (c) superfície irregular de fraturamento.

Na sequência, os principais modelos teóricos e numéricos utilizados para tratar a fratura em materiais quase-frágeis serão mostrados. Em seguida, o modelo de fissura fictícia, utilizado nas análises deste trabalho, é descrito em maiores detalhes. Posteriormente, o esquema de propagação adotado é apresentado. Por fim, o código computacional implementado baseado no Método de Elementos de Contorno Dual (MECD) é descrito. Exemplos de aplicação são expostos ao longo do capítulo para evidenciar a precisão e a robustez do modelo numérico desenvolvido.

6.1 Modelos teóricos para a avaliação da fratura em materiais quase-frágeis

A taxa de liberação de energia G necessária para o fraturamento de um material quase-frágil pode ser decomposta em duas parcelas como:

$$G = G_{Ic} + G_c \quad (6.1)$$

onde G_{Ic} é a taxa de liberação de energia despendida na formação de novas superfícies de fissura e G_c é a taxa de liberação de energia dissipada pelos processos de degradação mecânica existentes na ZPI.

No caso do fraturamento de materiais frágeis discutido no Capítulo 3, a ZPI possui pequenas dimensões e, portanto, a energia dissipada pelos processos inelásticos nessa região é admitida como desprezável. Dessa forma, assume-se que a taxa de liberação de energia para esse material é igual à energia utilizada para a formação de novas faces, que por sua vez pode ser relacionada à tenacidade do material para verificar a estabilidade à propagação.

Já para o fraturamento de materiais quase-frágeis, existem duas abordagens principais baseadas em hipóteses distintas sobre o balanço energético apresentado pela Eq. (6.1) que dão origem a dois modelos distintos: os modelos de fissura elástica equivalente e os modelos coesivos.

Os modelos de fissura elástica equivalente assumem que a energia necessária para propagar a fissura é igual à energia necessária para a formação de novas superfícies, ou seja, $G = G_{Ic}$, semelhante à abordagem para materiais frágeis. Assim, a energia despendida pelos processos de propagação G_c é desprezada. Todavia, essa parcela é levada em conta nas adaptações realizadas pelos modelos na formulação da MFEL, como a alteração de parâmetros do material e a consideração de um comprimento de fissura equivalente maior que o real, com a ponta localizada dentro da ZPI. Esses modelos têm a vantagem de serem simples, pois consideram a fratura com comportamento elástico-linear. Todavia, eles possuem caráter aproximado, visto que os fenômenos não lineares são considerados a partir de adaptações da formulação da MFEL. Dentre os modelos de fissura elástica equivalente podem ser destacados os propostos por Nallathambi e Karihaloo (1986) e Swartz et al. (1978) para tratar geometrias específicas de ensaios experimentais. Pode-se citar também o modelo de Jenq e Shah (1985), proposto para a determinação da carga crítica de fratura para qualquer tipo de geometria e que possui boa correspondência com os métodos numéricos apresentados na sequência (SMITH, 1995; TANG et al., 1992). Os modelos de fissura elástica equivalente não serão tratados neste trabalho.

Já nos modelos coesivos, os fenômenos inelásticos da ZPI são considerados como a principal fonte de dissipação de energia para o fraturamento do material. Dessa forma, admite-se que $G = G_c$. Os processos não-lineares são considerados na análise a partir da definição de uma lei coesiva, que expressa as tensões residuais, ou tensões coesivas, na zona parcialmente degradada.

O primeiro modelo coesivo foi proposto por Dugdale (1960) para a análise de fratura em metais. Dugdale (1960) assumiu que as deformações plásticas estavam localizadas em uma faixa estreita posicionada à frente da ponta da fissura. Essa faixa representa uma extensão virtual s da fissura real sobre a qual atuam as tensões coesivas, cuja magnitude é igual à tensão de escoamento do material σ_y . A Figura 6.3 esquematiza o modelo coesivo de Dugdale (1960) para uma sollicitação em modo I e em meio infinito.

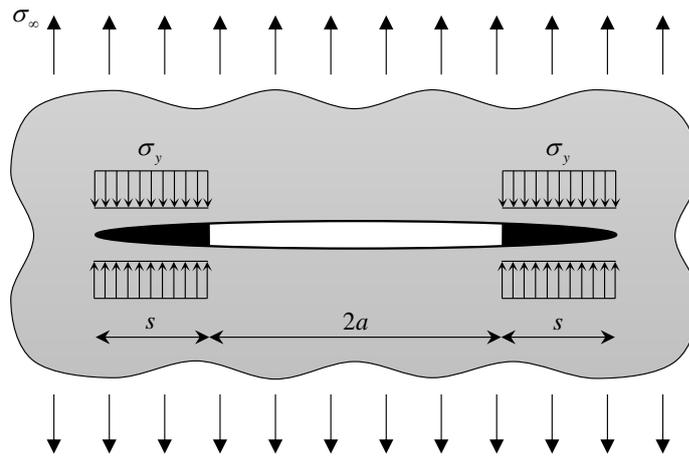


Figura 6.3 - Modelo coesivo proposto por Dugdale (1960).

Já Barenblatt (1962) foi o primeiro a propor um modelo coesivo para a análise de fratura em materiais quase-frágeis. O modelo de Barenblatt (1962), assim como o de Dugdale (1960), também considerou uma extensão virtual da fissura real. Entretanto, a variação das tensões coesivas foi relacionada às forças interatômicas ao longo dessa extensão. Segundo Bazant e Planas (1998), o modelo de Barenblatt (1962) é limitado a fissuras com comprimento muito maior do que a zona coesiva.

Os fundamentos dos modelos de Dugdale (1960) e de Barenblatt (1962), apesar de simples, foram utilizados para o desenvolvimento de modelos coesivos mais completos. Um desses modelos é o de fissura fictícia proposto por Hillerborg et al. (1976) para a análise de fratura em concreto, que posteriormente também foi aplicado com sucesso a outros tipos de materiais quase-frágeis. O modelo recebe esse nome pois admite que a zona de degradação à frente da ponta possa ser aproximada por um comprimento de fissura fictícia. Ao longo desse comprimento atuam as tensões coesivas, cuja magnitude é inversamente proporcional à abertura das faces. A relação entre as tensões coesivas e a abertura das faces da fissura fictícia é dada por uma lei de amolecimento, ou lei coesiva, que depende do material analisado. O modelo de fissura fictícia é adotado nas análises de fratura de materiais quase-frágeis neste trabalho e será descrito em maiores detalhes no item 6.3.

Outro modelo coesivo bastante utilizado nas análises de fratura em materiais quase-frágeis, especialmente com a aplicação do método dos elementos finitos (MEF), é o de banda de fissuração proposto por Bazant e Oh (1983). Conforme representado pela Figura 6.4, nesse modelo a ZPI à frente da ponta é substituída por uma banda de largura h_c considerada microfissurada. No caso do concreto, a largura h_c é comumente associada ao diâmetro do agregado graúdo. O efeito da degradação sobre a banda de fissuração é representado a partir de um modelo de amolecimento dado por uma relação inversamente proporcional entre as tensões atuantes e as deformações na região. Dessa forma, a energia de fraturamento $G = G_c$ nesse modelo é considerada distribuída ao longo da banda de fissuração (BORST, 2002). Conforme mostrado por Elices e Planas (1989), apesar de apresentarem abordagens distintas, os modelos de banda de fissuração de Bazant e Oh (1983) e o de fissura fictícia de Hillerborg et al. (1976) fornecem respostas numéricas equivalentes com a adoção de parâmetros adequados.

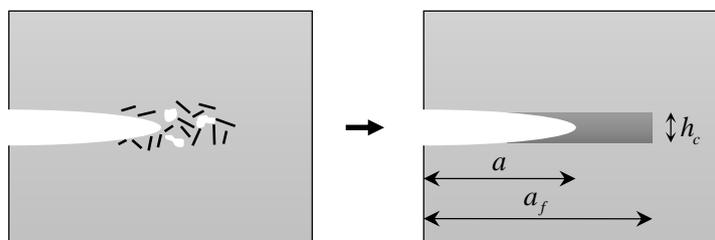


Figura 6.4 - Modelo de banda de fissuração de Bazant e Oh (1983).

Maiores detalhes sobre os modelos utilizados para a análise de fratura em materiais quase-frágeis podem ser obtidos em Bazant e Planas (1998), Bazant (2002), Borst (2002), Elices et al. (2002) e Planas et al. (2003).

6.2 Métodos numéricos na análise da fratura em materiais quase-frágeis

Os modelos coesivos buscam incorporar às análises de fratura os efeitos dos processos inelásticos que ocorrem na ZPI, que são tipicamente não-lineares. Desse modo, uma técnica de solução iterativa de previsão e correção é necessária, o que só é viável a partir da aplicação de métodos numéricos.

Um dos pioneiros no estudo de fratura em materiais quase-frágeis foi Rashid (1968), que analisou, via MEF, o fraturamento de vasos de pressão de concreto protendidos sujeitos a sobrepressão. Em suas análises, Rashid (1968) admitiu a penalização da rigidez dos elementos finitos localizados nas regiões de fissuração, situadas onde a tensão de tração do material foi superada. Todavia, segundo Bazant e Planas (1998), posteriormente foi observado que o modelo de Rashid (1968) é fortemente dependente da malha de elementos finitos adotada.

Apesar de suas limitações, o modelo de penalização de rigidez utilizado por Rashid (1968) serviu como base para o desenvolvimento de outros modelos que assumem o meio como contínuo, sem a consideração explícita da descontinuidade material. Um desses modelos, desenvolvido a partir de modificações de Rashid (1968), é o de banda de fissuração proposto por Bazant e Oh (1983), apresentado no item 6.1. Os modelos baseados no contínuo são especialmente apropriados para métodos numéricos que possuem discretização de domínio, uma vez que sua implementação é simples e evita o remalhamento para análises de propagação.

Para melhor representar a descontinuidade dos campos internos associadas às fissuras, Lotfi e Shing (1995) e Oliver (1996a, 1996b) utilizaram elementos finitos especiais ao longo do caminho da descontinuidade. Os autores adotaram funções de aproximação descontínuas para esses elementos, o que permitiu a adequada representação dos campos ao longo do comprimento da fissura. Todavia, como essa abordagem é realizada para os elementos especiais isolados, não há garantia de continuidade dos campos analisados entre elementos adjacentes.

Com o objetivo de contornar o problema de continuidade, foram desenvolvidos trabalhos baseados nas partições da unidade (PU). Para tanto, as PU são construídas a partir das funções de forma adotadas para os elementos finitos e são atreladas aos nós da discretização, em uma abordagem via Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Nesse sentido, a partir do enriquecimento da base de aproximação com funções descontínuas, Moës e Belytschko (2002) e Wells e Sluys (2001) foram capazes de simular problemas de fraturamento em materiais quase-frágeis.

No que diz respeito à consideração das fissuras de forma discreta, uma das principais contribuições na análise de fratura de materiais quase-frágeis foi o trabalho de Hillerborg et al. (1976), no qual foi proposto o modelo de fissura fictícia com aplicação do MEF. As primeiras aplicações do MEF com a consideração de fissura discreta admitiram a localização e a propagação das descontinuidades ao longo da interface entre elementos, como nos trabalhos de Ingraffea e Saouma. (1985) e de Petersson (1981). Todavia, com a implementação de algoritmos de remalhamento, o MEF também foi aplicado a modelos com a consideração de fissuras discretas que permitiram a propagação ao longo de qualquer direção, como em Bittencourt et al. (1992) e Bocca et al. (1991).

Entretanto, o método dos elementos de contorno (MEC) apresenta vantagens nas análises de fissuras discretas devido à facilidade na discretização do caminho de propagação. As aplicações iniciais do MEC na análise de fratura em materiais quase-frágeis se deu no início da década de 1990, dentre as quais destacam-se os trabalhos de Cen e Maier (1992) e Liang e

Li (1991). Nesses trabalhos, a propagação das fissuras foi realizada ao longo de caminhos pré-definidos com a consideração do modelo de fissura fictícia.

Um grande avanço foi obtido a partir do trabalho de Saleh e Aliabadi (1995). Os autores utilizaram a formulação dual do MEC (ver item 2.6) para a análise de fratura em concreto com a consideração do modelo de fissura fictícia. Com essa metodologia, o caminho de propagação pode ser determinado ao longo da análise. Ademais, o esquema de remalhamento durante a propagação é simples, uma vez que é necessária apenas a adição de novos elementos para representar as novas faces criadas. Esse esquema também foi utilizado nos trabalhos de Leonel e Venturini (2010b) e Oliveira e Leonel (2014). Por suas vantagens, essa técnica também é empregada nas análises deste trabalho.

Maiores detalhes sobre a aplicação de métodos numéricos para a solução de problemas de fratura em materiais quase-frágeis podem ser obtidos na bibliografia citada e também em Shi (2009) e Rabczuk (2013).

6.3 Modelo de fissura fictícia

No modelo de fissura fictícia, ou fissura coesiva, proposto por Hillerborg et al. (1976), a zona degradada à frente da ponta é substituída por um comprimento l_f de fissura fictícia ao longo do qual atuam as tensões coesivas. Essas tensões tendem a se contrapor à separação das superfícies da descontinuidade e buscam representar os mecanismos ainda existentes de transferência de esforços entre as faces devido à degradação incompleta do material, sendo alguns deles representados na Figura 6.2. A magnitude das tensões coesivas (σ) é considerada inversamente proporcional à abertura (w) das faces da fissura fictícia e essas duas grandezas são relacionadas a partir de um lei constitutiva coesiva. O valor de l_f é definido de tal forma que na ponta fictícia, considerada com abertura nula, a tensão coesiva seja igual à tensão resistente à tração f_t do material. Já no início do comprimento fictício, correspondente à ponta da fissura real e com abertura crítica w_c , a tensão coesiva é nula (Figura 6.5).

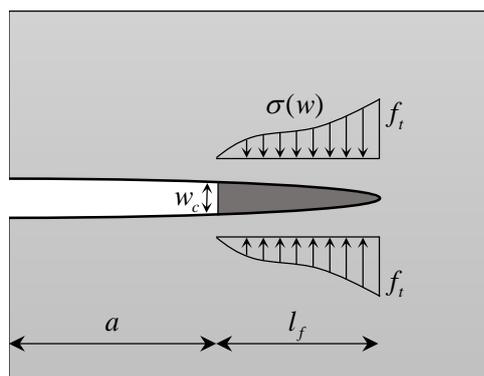


Figura 6.5 - Modelo de fissura fictícia de Hillerborg et al. (1976).

Pela consideração da região de degradação a partir da fissura fictícia, a singularidade de tensões observada na formulação da MFEL (Capítulo 3) deixa de existir no modelo coesivo. Desse modo, a verificação da estabilidade à propagação pode ser realizada pela comparação do estado de tensão existente na ponta fictícia com a tensão resistente à tração do material a partir de um critério de resistência.

Quando novas faces de fissura fictícia são criadas, a tensão não se reduz a zero subitamente, mas decresce com a abertura em função da lei coesiva (Figura 6.6). Já para a formação de novas faces de fissura real, é necessária uma taxa de liberação de energia G_c capaz de contrapor o trabalho realizado pelas tensões coesivas. Essa taxa corresponde à área abaixo da curva que representa a lei coesiva, conforme esquematizado na Figura 6.6. Portanto, o valor de G_c para o crescimento da fissura real pode ser obtido por:

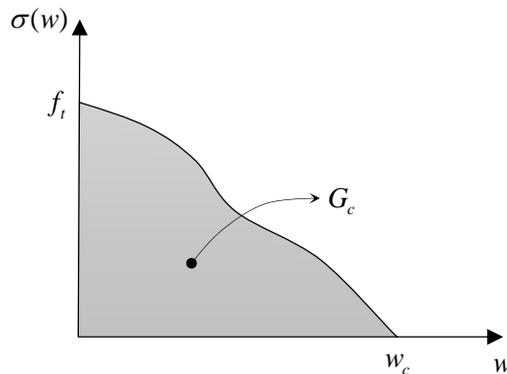


Figura 6.6 - Representação de uma lei coesiva genérica que relaciona as tensões coesivas σ com a abertura w das faces da fissura fictícia.

$$G_c = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (6.2)$$

Existem várias leis propostas pela literatura para a representação da variação das tensões coesivas com a abertura da fissura fictícia. Algumas delas são apresentadas a seguir.

6.3.1 Leis coesivas

Neste trabalho são utilizadas três leis constitutivas coesivas para representar o amolecimento de materiais quase-frágeis no modelo de fissura fictícia: linear, bilinear e exponencial. As leis coesivas são dadas em função da resistência à tração f_t e da energia ao fraturamento G_c do material. Cada uma das leis adotadas é apresentada na sequência.

6.3.1.1 Lei constitutiva linear

A Figura 6.7 apresenta a variação das tensões coesivas para a lei constitutiva linear. Para essa lei, a expressão que relaciona as tensões coesivas à abertura das faces é dada por:

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t \left(1 - \frac{w}{w_c}\right) & \text{se } 0 \leq w \leq w_c \\ 0 & \text{se } w > w_c \end{cases} \quad (6.3)$$

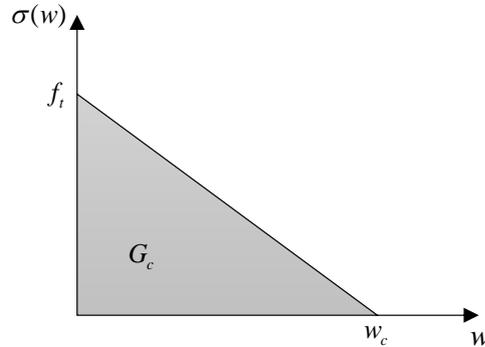


Figura 6.7 - Representação da lei coesiva linear.

Já o valor de abertura crítica pode ser determinado a partir da resistência à tração e da energia ao fraturamento do material por meio da seguinte relação:

$$w_c = \frac{2G_c}{f_t} \quad (6.4)$$

6.3.1.2 Lei constitutiva bilinear

A Figura 6.8 apresenta a variação das tensões coesivas para a lei constitutiva bilinear. Nessa lei, as tensões coesivas são relacionadas à abertura das fissuras a partir de duas retas com diferentes inclinações. As expressões que regem as diferentes situações possíveis nesse caso são apresentadas a seguir:

$$\sigma(w) = \begin{cases} f_t - \left(\frac{f_t - \sigma^*}{w^*}\right)w & \text{se } 0 \leq w \leq w^* \\ \frac{\sigma^* w}{w^* - w_c} + \sigma^* \left(1 - \frac{w^*}{w^* - w_c}\right) & \text{se } w^* \leq w \leq w_c \\ 0 & \text{se } w > w_c \end{cases} \quad (6.5)$$

sendo σ^* e w^* parâmetros auxiliares que indicam o ponto de bifurcação entre as retas.

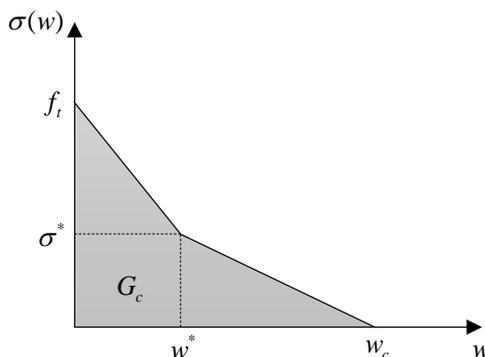


Figura 6.8 - Representação da lei coesiva bilinear.

Segundo o modelo de Petersson (1981), desenvolvido para representar o comportamento de concreto, os parâmetros auxiliares para a lei coesiva bilinear são dados por:

$$\sigma^* = \frac{f_t}{3} \quad (6.6)$$

$$w^* = 0,8 \frac{G_c}{f_t} \quad (6.7)$$

A partir desses valores, a abertura crítica é determinada por meio da seguinte expressão:

$$w_c = 3,6 \frac{G_c}{f_t} \quad (6.8)$$

6.3.1.3 Lei constitutiva exponencial

A Figura 6.9 mostra a distribuição das tensões coesivas em função da abertura das faces para a lei constitutiva exponencial. Para essa lei não há definição de uma abertura crítica. Dessa forma, as fissuras fictícias permanecem sob ação de tensões coesivas ao longo de toda a análise. Nesse caso, o valor de G_c é obtido a partir da Eq. (6.2) com os limites de integração variando de 0 até ∞ . Com isso, a expressão que relaciona σ com w é dada por:

$$\sigma(w) = f_t e^{-\frac{f_t}{G_c} w} \quad \forall w \geq 0 \quad (6.9)$$

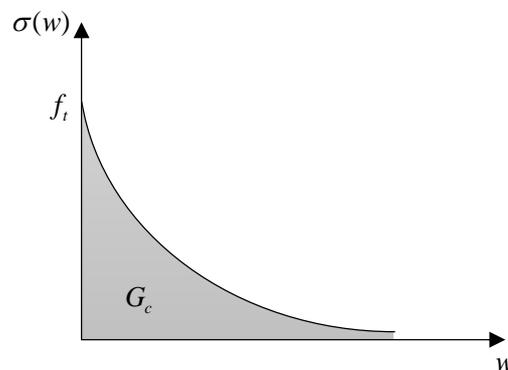


Figura 6.9 - Representação da lei coesiva exponencial.

6.3.2 Fechamento das faces de fissura fictícia

Durante as análises de propagação, algumas faces das fissuras fictícias já abertas podem desenvolver deslocamento relativo no sentido das tensões coesivas, tendendo a se fechar. Nesse caso, considera-se que há uma redução na magnitude dos esforços coesivos. Esse descarregamento se dá ao longo de uma reta ligando a origem O ao ponto a partir do qual se verifica a inversão do sentido de movimento (ponto A ou B na Figura 6.10). Nessa nova situação, a expressão que relaciona as tensões coesivas com a abertura é obtida a partir da máxima abertura w' já desenvolvida pela face e é dada por:

$$\sigma = \sigma' \frac{w}{w'} \quad \text{se } 0 \leq w \leq w' \quad (6.10)$$

onde σ' é a tensão coesiva correspondente a w' que pode ser determinada a partir da lei coesiva adotada.

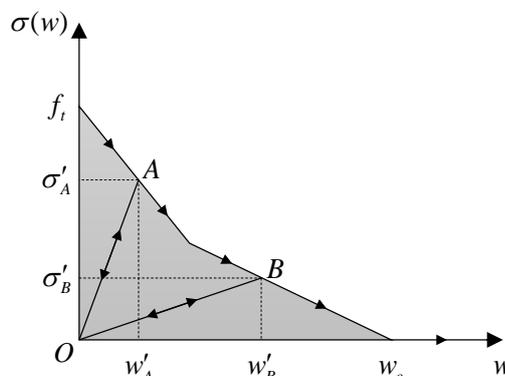


Figura 6.10 - Representação da situação de descarregamento de uma face de fissura fictícia.

Se a abertura das faces voltar a crescer, as tensões coesivas também podem ser determinadas a partir da Eq. (6.10) se a abertura w não superar w' . Porém, se o valor de w obtido para a face for maior que w' , a variação das tensões coesivas volta a seguir a lei constitutiva coesiva adotada. O valor de w' relativo aos pares de pontos de colocação das faces é atualizado ao final do processo iterativo de correção das tensões coesivas, descrito no item 6.5.3.

6.3.3 Implementação via MEC

No modelo de fissura coesiva, a não-linearidade física existente na ZPI é restrita ao contorno fictício adicionado e os processos inelásticos são representados pela distribuição das tensões coesivas, que atuam na direção normal às faces. Isso favorece a aplicação do MEC, uma vez que a formulação elastostática (Capítulo 2) pode ser utilizada, sendo necessária apenas a introdução de uma etapa iterativa de solução com passos de previsão e correção das tensões coesivas.

Neste trabalho, para a solução dessa etapa iterativa é utilizada uma estratégia baseada em um operador constante. Na solução do problema não-linear por meio dessa estratégia, as principais matrizes do sistema algébrico são mantidas constantes, enquanto os valores não-balanceados de forças de superfície são atualizados a cada iteração. Apesar de simples e de necessitar de um número significativo de iterações até a convergência, essa estratégia conduz a bons resultados. Cabe ressaltar que existem outras técnicas de solução mais eficientes que não foram implementadas neste trabalho, como a inclusão direta de leis coesivas lineares por trechos diretamente na formulação do MEC (SALEH; ALIABADI, 1995) ou o operador tangente consistente (LEONEL; VENTURINI, 2010b; CORDEIRO; LEONEL, 2016).

Seja uma configuração inicial em equilíbrio que, devido à aplicação de um incremento no carregamento externo ou à reaplicação de esforços durante a etapa de propagação, apresenta um aumento da abertura das faces, conforme esquematizado pela Figura 6.11a. Na configuração inicial, determinado par de pontos de colocação localizados nas faces da fissura apresenta abertura w_0 . Na nova configuração, a abertura desse par sofre um incremento Δw_1 até o valor w_1 . Entretanto, nessa nova situação, as forças de superfície ao longo da fissura fictícia se encontram em desequilíbrio com a lei coesiva, uma vez que estão associadas à configuração inicial. Para buscar uma nova condição balanceada, uma correção sobre as tensões, dada em função da lei coesiva, é reaplicada sobre as faces fictícias para representar o amolecimento decorrente do aumento de abertura, conforme a Figura 6.11b.

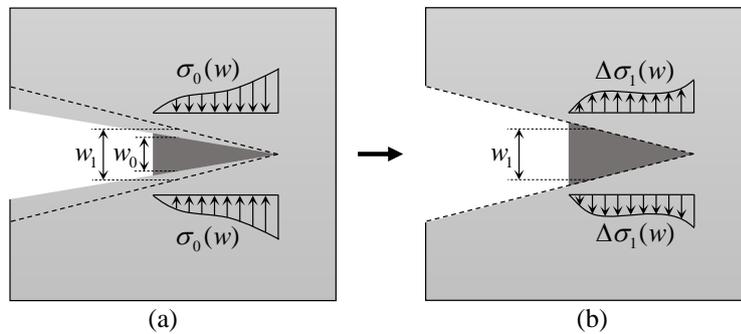


Figura 6.11 - Variação da abertura das faces de (a) uma configuração inicial em equilíbrio até (b) uma configuração não-balanceada.

Com a reaplicação de esforços, as faces fictícias tendem a apresentar um novo incremento Δw_i na abertura. Dessa forma, uma nova correção $\Delta \sigma_i$ sobre as tensões coesivas deve ser reaplicada. Esse processo se repete até que as variações das tensões coesivas nos pontos de colocação das faces fictícias sejam inferiores a uma tolerância. A Figura 6.12 representa o processo de busca de uma nova configuração equilibrada B a partir da perturbação de uma configuração inicial A para uma lei coesiva linear. Cabe ressaltar que se durante o esquema iterativo a abertura de algum par de pontos de colocação da face superar o valor de abertura crítica w_c do modelo coesivo, então esse par passa a ser de uma fissura real, com força de superfície nula.

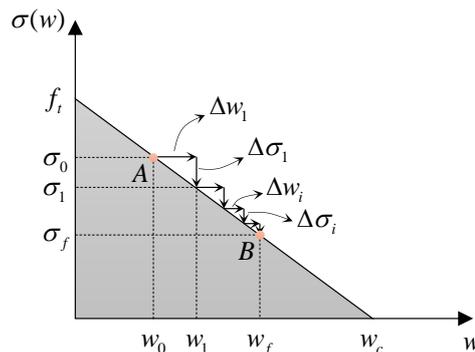


Figura 6.12 - Processo de busca do novo ponto de equilíbrio via estratégia do operador constante.

O equacionamento do operador constante para o MEC é obtido conforme descrito na sequência. Após a integração numérica da formulação integral para cada um dos pontos de contorno da discretização da estrutura, obtém-se o sistema de equações conforme apresentado pela Eq. (2.62) e dado por:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (6.11)$$

A partir do processo de troca de colunas descrito no item 2.3, o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (6.12)$$

onde \mathbf{B} é a matriz composta pelas colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} que representam os coeficientes dos valores conhecidos no contorno e \mathbf{y} é a matriz coluna que contém os valores conhecidos do contorno. A multiplicação de \mathbf{B} por \mathbf{y} resulta no vetor \mathbf{f} apresentado pela Eq. (2.63).

A matriz \mathbf{A} na Eq. (6.12) pode ser invertida, resultando em:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{y} \quad (6.13)$$

onde a matriz \mathbf{C} é obtida pelo produto da inversa da matriz \mathbf{A} pela matriz \mathbf{B} .

Os valores das tensões coesivas atuantes nos pontos de colocação localizados ao longo das faces abertas da fissura fictícia são conhecidos e, portanto, compõem uma parcela do vetor \mathbf{y} . Dessa forma, um incremento $\Delta\sigma_i$ em determinada iteração i para a busca de uma nova configuração em equilíbrio corresponde a um incremento $\Delta\mathbf{y}_i$. Assim, a Eq. (6.13) pode ser utilizada para a determinação da variação $\Delta\mathbf{x}_i$ sobre as condições de contorno desconhecidas, resultando em:

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{C}\Delta\mathbf{y}_i \quad (6.14)$$

Com o valor de $\Delta\mathbf{x}_i$, os graus de liberdade desconhecidos no contorno são atualizados da iteração anterior $i - 1$ para a iteração atual i por meio da seguinte relação:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{x}_i \quad (6.15)$$

Com \mathbf{x}_i , os valores acumulados desconhecidos do contorno são determinados.

Como pode ser observado pela Eq. (6.14), durante a etapa iterativa de correção das tensões coesivas, a matriz \mathbf{C} , obtida a partir das matrizes de coeficientes de influência do MEC, permanece constante. É por essa razão que esse esquema de solução recebe o nome de operador constante. Entretanto, a matriz \mathbf{C} deve ser modificada caso, em alguma iteração, ocorra a liberação ou a restrição dos deslocamentos relativos entre pares de pontos de colocação das faces (ver item 3.8.2.2). Nessa situação, um novo processo conveniente de troca de colunas entre as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} é realizado e, em seguida, uma nova matriz \mathbf{C} é determinada para a continuação do processo iterativo.

Após a convergência para uma nova configuração em equilíbrio, é realizada a verificação da estabilidade à propagação das pontas. Essa etapa é descrita no item 6.4.

Exemplo 6.1: Leis coesivas

Neste exemplo é realizada a verificação das leis coesivas e do processo iterativo de solução apresentados no item 6.3.1 e no item 6.3.3, respectivamente. Para tanto, a estrutura mostrada pela Figura 6.13a é analisada. O problema consiste de uma chapa com comprimento $L = 4$ m e altura $h = 1$ m submetida a um deslocamento prescrito horizontal $\bar{u} = 0,001$ m sobre a face vertical direita. A face vertical esquerda apresenta os deslocamentos verticais e horizontais restritos, enquanto a face vertical direita possui os deslocamentos verticais impedidos. No meio do vão, ao longo de toda a altura h , existe uma fissura coesiva, como representado pela Figura 6.13a. As propriedades utilizadas para material são: $E = 25000$ MPa, $\nu = 0$, $f_t = 2,5$ MPa e $G_c = 0,00125$ MPa.m. O carregamento é aplicado em 20 incrementos. Já a tolerância adotada para convergência da fase iterativa de correção das tensões coesivas é igual a 10^{-10} MPa.

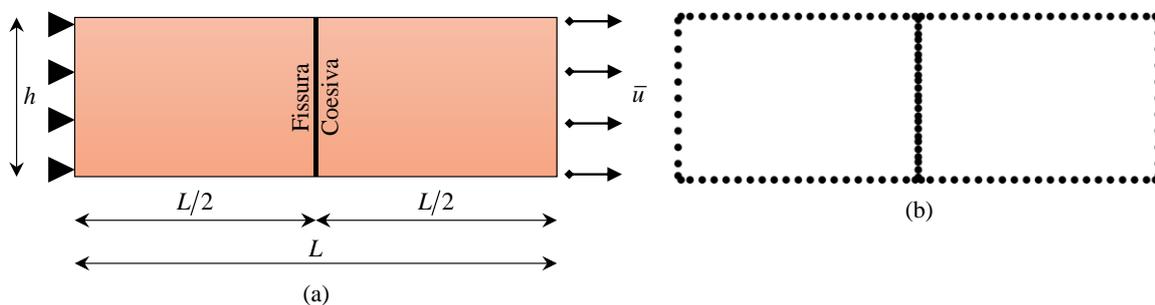


Figura 6.13 - Problema analisado pelo Exemplo 6.1: (a) geometria e (b) discretização.

A Figura 6.13b apresenta a malha de elementos de contorno utilizada na discretização da estrutura e da fissura coesiva. No total são utilizados 66 elementos, sendo 16 deles empregados na discretização das faces da fissura.

As três leis coesivas apresentadas no item 6.3.1 são utilizadas para descrever o comportamento da fissura após a sua abertura devido a uma sollicitação normal maior que a resistência à tração do material. Os valores numéricos determinados são comparados às respostas analíticas, que podem ser obtidas a partir do equilíbrio horizontal do corpo e da compatibilidade imposta pelas leis coesivas.

A Figura 6.14 mostra o resultado obtido para a lei coesiva linear. No início da análise, a fissura permanece fechada e as faces são cada vez mais solicitadas pelo aumento do deslocamento imposto. No oitavo incremento, a tensão entre as faces atinge 2,5 MPa,

equivalente à resistência a tração do material. Incapazes de absorver maiores níveis de esforços, as faces da fissura fictícia se abrem para os incrementos seguintes. Assim, o processo iterativo de correção das tensões coesivas descrito no item 6.3.3 passa a ser utilizado a partir do nono incremento para a determinação das novas configurações equilibradas. Como pode ser observado pela Figura 6.14, os resultados obtidos por esse processo estão em total acordo com a resposta analítica do problema. Por fim, pode-se notar que o deslocamento horizontal imposto é igual à abertura crítica da fissura fictícia no caso da lei coesiva linear. Conseqüentemente, ao término da análise, a tensão coesiva entre as faces é nula e a estrutura é separada em duas partes independentes.

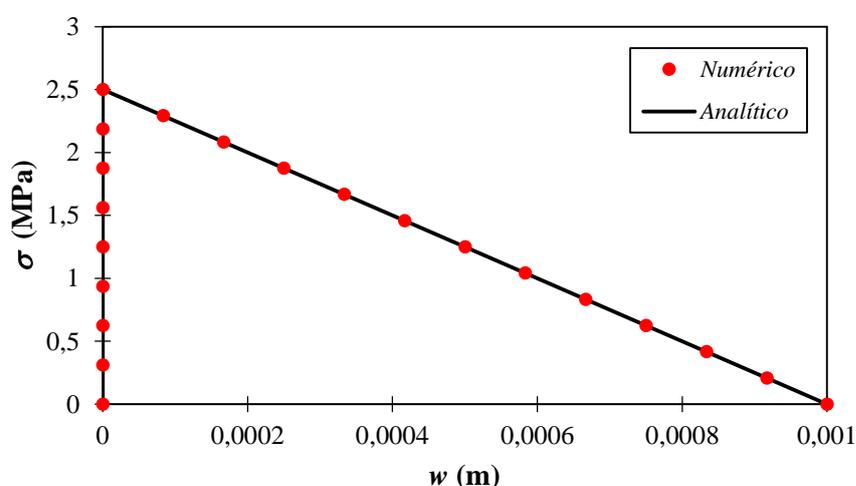


Figura 6.14 - Variação das tensões coesivas com a abertura da fissura fictícia para lei coesiva linear.

Já a Figura 6.15 apresenta a variação das tensões entre as faces da fissura para a lei coesiva bilinear. Até a separação das faces devido à violação da resistência à tração do material, a resposta obtida é idêntica à observada para o caso de lei coesiva linear, uma vez que até então a estrutura apresenta comportamento elástico-linear em ambas as situações.

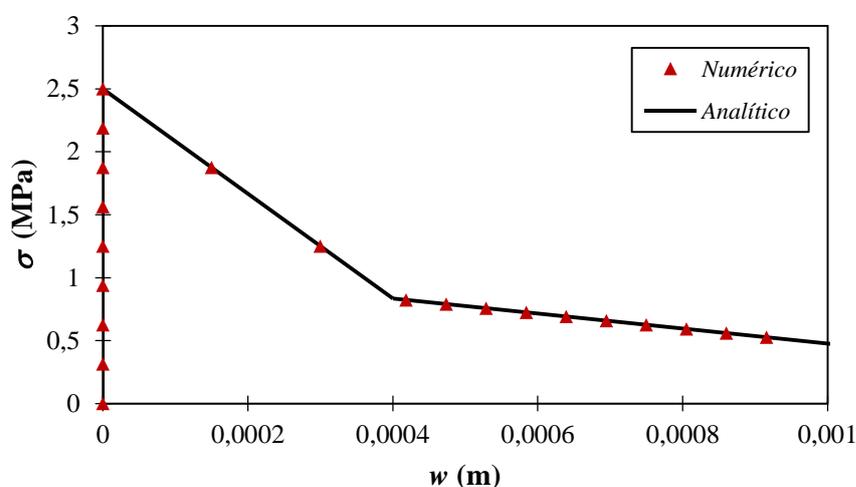


Figura 6.15 - Variação das tensões coesivas com a abertura da fissura fictícia para lei coesiva bilinear.

Após a abertura das faces, verifica-se que no ramo inicial da lei coesiva há uma maior abertura das faces pela aplicação de um novo incremento no deslocamento imposto. Isso ocorre pelo maior amolecimento considerado nesse trecho do modelo bilinear. A partir do décimo primeiro incremento, as faces da fissura coesiva passam a seguir o segundo ramo da lei coesiva, apresentando, assim, uma menor redução das tensões coesivas para cada incremento.

Como mostrado pela Figura 6.15, o resultado numérico obtido a partir da lei coesiva bilinear está em conformidade com a resposta analítica. Cabe ressaltar que para esse caso a abertura da fissura coesiva não supera o valor crítico e, portanto, ainda existem tensões coesivas entre as faces ao término da aplicação de todo o deslocamento prescrito.

Já os resultados obtidos para a lei coesiva exponencial são apresentados pela Figura 6.16. Como nos casos anteriores, há um aumento das tensões coesivas entre as faces da fissura até a abertura, observada a partir do nono incremento de deslocamento prescrito. Logo após a abertura, é verificado um maior amolecimento do material, que tende a se reduzir nos incrementos seguinte. Como mostrado pela Figura 6.16, para a lei coesiva exponencial também é observada uma boa correspondência entre os resultados numéricos e a resposta analítica.

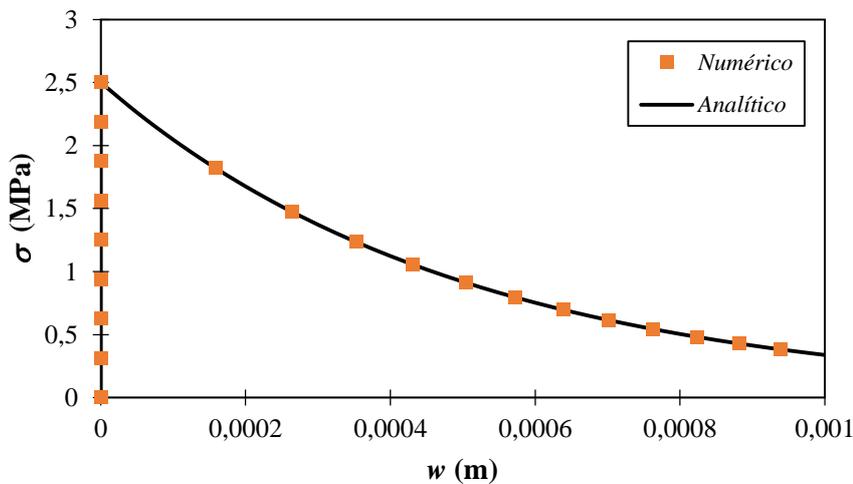


Figura 6.16 - Variação das tensões coesivas com a abertura da fissura fictícia para lei coesiva exponencial.

Por fim, a Figura 6.17 apresenta as curvas de variação da força equivalente sobre a face vertical direita da estrutura com a magnitude do deslocamento aplicado para as diferentes leis coesivas. Como pode ser observado, os trechos iniciais das curvas são idênticos, o que é esperado, uma vez que em todos os casos o material apresenta comportamento elástico-linear. Após atingida a resistência à tração do material, a estrutura passa a apresentar redução da resistência residual de acordo com a lei coesiva adotada para a fissura fictícia. Nota-se que, inicialmente, a maior e a menor resistência residual correspondem à lei coesiva linear e bilinear, respectivamente. Ao final da análise, a resistência residual relativa ao modelo linear é nula, uma

vez que as faces da fissura estão livres de esforços nesse instante, enquanto para os modelos bilinear e exponencial a estrutura ainda resiste a algum esforço.

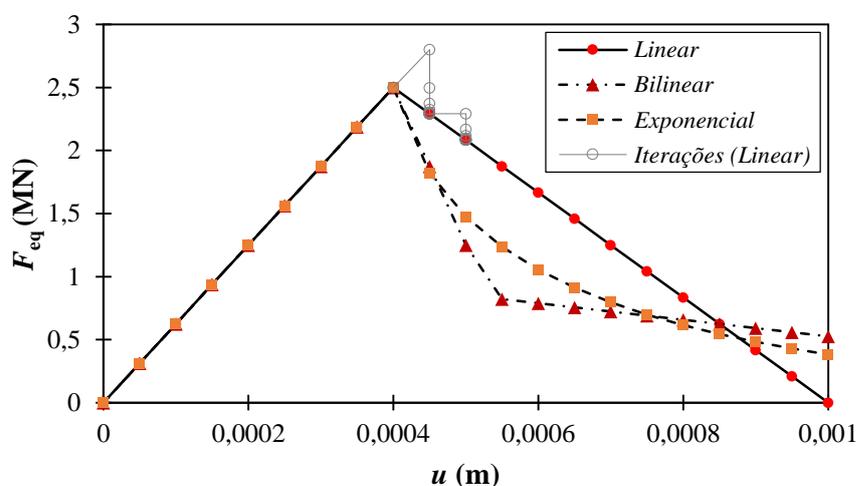


Figura 6.17 - Variação da força equivalente sobre a face vertical direita com o deslocamento aplicado para as diferentes leis coesivas adotadas.

A Figura 6.17 também apresenta a busca iterativa pelos novos pontos de equilíbrio para os dois primeiros incrementos após a abertura das faces no caso da lei linear. Para a convergência do primeiro e do segundo incremento foram necessárias 24 e 23 iterações, respectivamente. Nota-se que o incremento dado após atingida a resistência à tração do material é realizado considerando as faces ainda fechadas e, assim, a estrutura tende a seguir a resposta elástica-linear. Como esse estado não é possível, o processo de correção das tensões coesivas é executado até alcançar uma nova configuração estável.

6.4 Esquema de propagação

6.4.1 Critério de propagação

O critério de propagação adotado neste trabalho é baseado no estado de tensão na ponta das fissuras. Para a determinação desse estado, um esquema de extrapolação semelhante ao utilizado por Leonel e Venturini (2010b) é empregado. Nesse esquema, pontos internos são definidos ao longo de raios de semicircunferências concêntricas no entorno da ponta, conforme representado pela Figura 6.18a. O ângulo entre os raios é igual a γ . O número de raios é adotado de acordo com a precisão desejada, enquanto a quantidade de pontos internos por raio é tomada conforme o grau do polinômio escolhido para extrapolação das componentes de tensão. Os raios são distribuídos ao longo de uma abertura total de no máximo 180 graus. As semicircunferências utilizadas como base para a distribuição dos pontos internos estão afastadas entre si por uma distância d . Já a semicircunferência mais interna está a uma distância d_0 da

ponta. O valor de d_0 é igual à distância entre um nó descontínuo e o ponto de colocação correspondente, localizados em um elemento da fissura cuja ponta é avaliada.

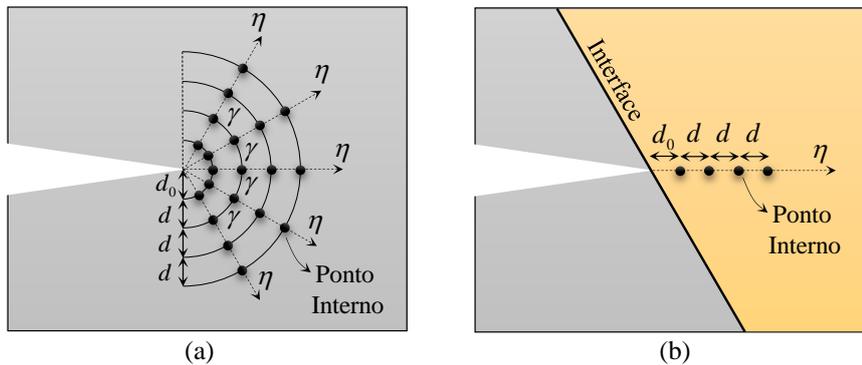


Figura 6.18 - Distribuição de pontos internos para determinação do estado de tensão na ponta para (a) caso geral e (b) ponta situada na interface entre subdomínios.

As componentes de tensão para os pontos internos são determinadas em uma etapa de pós-processamento. Em seguida, para cada um dos raios é realizada a extrapolação das tensões para a ponta por meio de um polinômio de grau $n - 1$, sendo n o número de pontos internos ao longo dos raios. Para tanto, inicialmente é definido um sistema de coordenadas de suporte η , com origem localizada na ponta, conforme mostrado pela Figura 6.18a. As coordenadas η representam a distância dos pontos internos em relação à ponta. A partir dessas distâncias e do grau do polinômio escolhido, o seguinte sistema de equações pode ser construído para determinado raio:

$$\begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 & \dots & \eta_1^{n-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 & & \eta_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 & \dots & \eta_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

onde η_k é a distância do ponto interno k em relação à ponta; a_i são os coeficientes do polinômio de grau $n - 1$ utilizado para a extrapolação; e σ_k representa determinada componente de tensão associada ao ponto interno k ao longo do raio.

Invertendo a matriz apresentada pela Eq. (6.16) e multiplicando a primeira linha da inversa pelo vetor das componentes de tensão, obtém-se a_0 . Esse coeficiente representa a componente de tensão procurada para a ponta. Alterando os valores do vetor de tensões de modo a contemplar todas as componentes de tensão dos pontos internos ao longo do raio considerado, obtém-se o estado de tensão para a ponta. Esse processo é repetido para os demais raios e o estado de tensão final para a ponta resulta da média dos valores encontrados.

A ponta de fissura que tende a crescer para um novo subdomínio é restrita à interface para posterior verificação da estabilidade à propagação no novo material. Para essas situações,

o estado de tensão é determinado por apenas um raio na direção do eixo da fissura, de modo que todos os pontos internos utilizados para a extrapolação se encontram no novo subdomínio (Figura 6.18b).

Com o estado de tensão para as pontas, a estabilidade à propagação é verificada a partir do critério de Rankine. Para tanto, a máxima componente de tensão principal no plano σ_1 é determinada por meio de:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (6.17)$$

O valor de σ_1 é então comparado à resistência à tração f_t do material que contém a ponta para verificar se ocorre propagação.

6.4.2 Determinação da direção de crescimento

Para as pontas que propagam, a direção de crescimento é admitida como aquela correspondente a um problema equivalente da MFEL, no qual não atuam as tensões coesivas. Para tanto, toma-se o estado em equilíbrio e reaplicam-se as tensões coesivas, de modo que ao final se obtenha faces livres de esforços. Nessa nova situação, a ponta volta a apresentar campos singulares de tensão que podem ser representados pelos FIT (ver Capítulo 3).

Em seguida, os valores de K_I e K_{II} são determinados a partir da técnica de correlação de deslocamentos (item 3.6.1) ou da integral J (item 3.6.2). Com os valores dos FIT, o ângulo de propagação é obtido por meio do critério da máxima tensão circunferencial (item 3.7.1).

A determinação do caminho de propagação para materiais quase-frágeis via formulação da MFEL também foi utilizada nos trabalhos de Cendon e Gálvez (2000), Gálvez et al. (1998), e Moës e Belytschko (2002). Como mostrado por esses trabalhos, essa metodologia é capaz de fornecer boa correspondência com resultados experimentais.

6.4.3 Incremento no comprimento de fissuras fictícias e reais

Com a definição do ângulo de propagação, a determinação da nova ponta é realizada ao longo de uma direção de busca, conforme apresentado pela Figura 6.19a. Inicialmente, a uma distância l_{elem} da ponta, equivalente ao comprimento do elemento de discretização das faces da fissura, é adicionado um novo ponto interno. O estado de tensão nesse ponto é determinado e a tensão normal σ_n relativa à direção de busca é calculada. Se esse valor de tensão for inferior à resistência à tração do material, então, pela continuidade do campo, existe um ponto ao longo do comprimento l_{elem} tal que $\sigma_n = f_t$, que corresponde à nova ponta da fissura fictícia. Caso

contrário, considera-se que todo o comprimento l_{elem} encontra-se degradado e passa-se à análise de um comprimento l_{elem} adjacente, conforme mostrado pela Figura 6.19b. Esse processo é repetido até que a resistência à tração do material se encontre entre os valores de σ_n associados ao primeiro e ao último ponto interno do comprimento de busca.

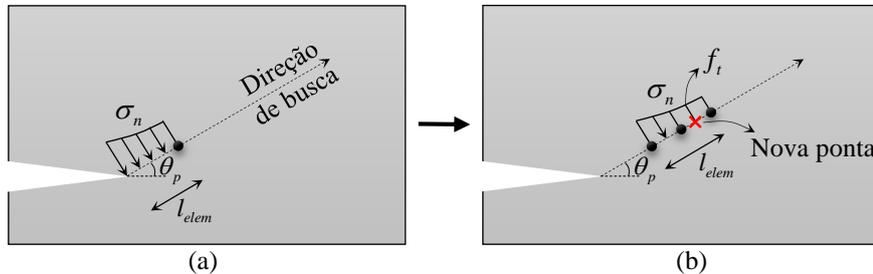


Figura 6.19 - Esquema de busca da nova ponta: (a) tentativa inicial e (b) tentativas seguintes com definição da nova ponta.

Quando isso ocorre, novos pontos internos são definidos ao longo de l_{elem} de modo a definir um polinômio com o mesmo grau de aproximação utilizado para os elementos nas faces da fissura. Em seguida, o ponto no qual se verifica $\sigma_n = f_t$, considerado a nova ponta fictícia, é determinado pelo método de Newton-Raphson.

Caso o processo de busca intercepte algum outro elemento de contorno externo, de fissura ou de interface, então um ponto interno é definido próximo à interseção. Se o valor de σ_n para esse ponto for inferior a f_t , o processo de busca da nova ponta via Newton-Raphson é aplicado. Caso contrário, a ponta é estendida até a interseção. Se ocorrer a interseção com um elemento de interface, a ponta continua ativa e a verificação da sua propagação nas etapas posteriores é realizada conforme exposto no item 6.4.1.

A distância da antiga à nova ponta da fissura fictícia corresponde ao incremento a ser adicionado à descontinuidade. O valor desse incremento é limitado a um mínimo definido pelo usuário, de modo a impedir pontos de colocação muito próximos quando realizada a discretização das novas faces, o que pode levar a um mau condicionamento das matrizes do sistema de equações.

Exemplo 6.2: Flexão em três pontos - Saleh (1997)

Neste exemplo é analisada uma viga submetida a um ensaio de flexão em três pontos, conforme mostrado pela Figura 6.20a. Esse problema também foi simulado por Saleh (1997), cujo resultado é utilizado como referência. A estrutura apresenta vão $L = 0,8$ m, altura $h = 0,2$ m e espessura unitária. O entalhe inicial apresenta comprimento $a = 0,05$ m. Sobre o ponto central da face superior é aplicado um deslocamento vertical no sentido indicado com

magnitude $\bar{u} = 0,21$ mm, dividido em 25 incrementos. As condições de contorno são aplicadas ao longo de comprimentos $l = 0,008$ m.

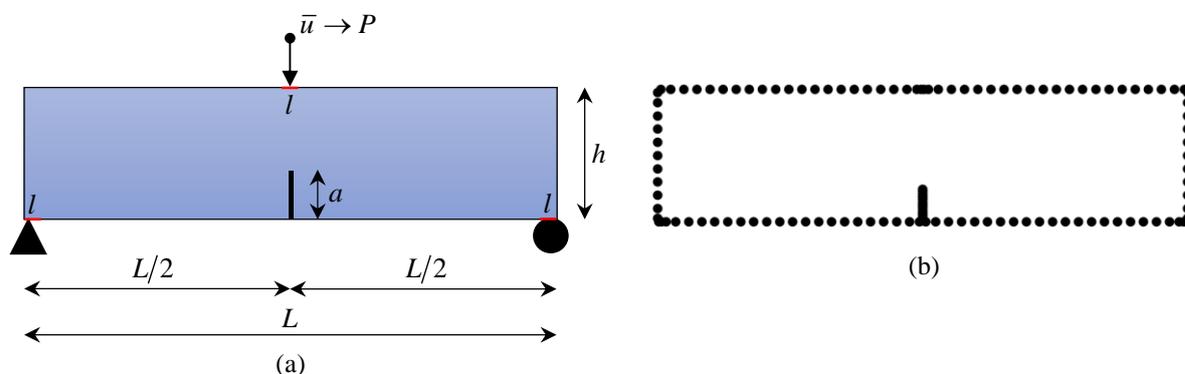


Figura 6.20 - Problema analisado pelo Exemplo 6.2: (a) geometria e (b) discretização.

As propriedades do material são: $E = 30000$ MPa, $\nu = 0,15$, $f_t = 3,0$ MPa e $G_c = 75$ N/m. A análise é realizada como um EPT.

A discretização da estrutura é apresentada pela Figura 6.20b. Na discretização do contorno são utilizados 50 elementos quadráticos e 3 elementos lineares, sendo esses últimos empregados nos locais de aplicação das condições de contorno. Para cada uma das faces da fissura inicial são utilizados 4 elementos com aproximação cúbica.

Para a determinação da tensão na ponta são utilizados três raios, separados por um ângulo $\gamma = 30$ graus e compostos por 4 pontos internos. Durante a fase de propagação, o comprimento mínimo adicionado é equivalente a um elemento de discretização da fissura. A tolerância adotada para a convergência da fase iterativa de correção é igual a 10^{-10} MPa.

As diferentes leis coesivas apresentadas no item 6.3.1 são utilizadas na análise da estrutura. As curvas carga-deslocamento obtidas são apresentadas pela Figura 6.21.

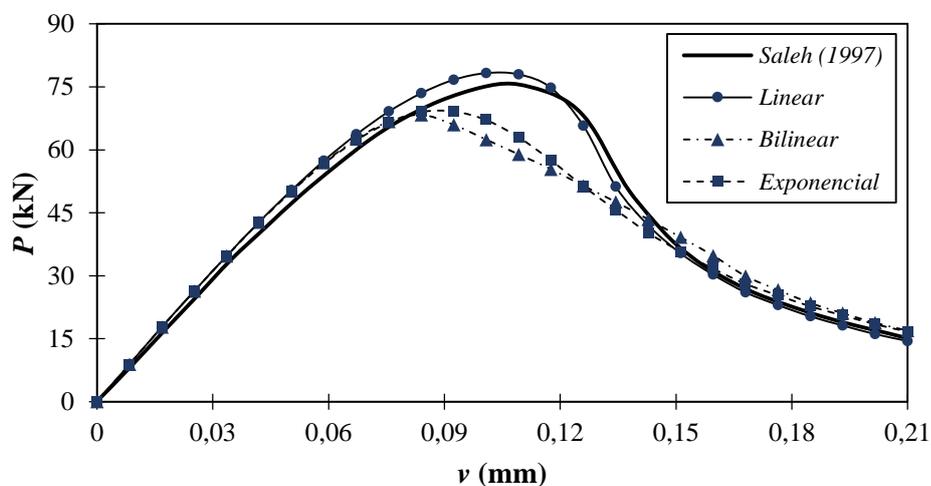


Figura 6.21 - Comparação entre as curvas carga-deslocamento obtidas a partir das diferentes leis coesivas.

Na Figura 6.21 também é apresentada a resposta de referência obtida por Saleh (1997), que foi determinada via MECD juntamente com a lei coesiva linear. Como pode ser observado, para essa lei existe a melhor correspondência entre a curva determinada neste trabalho e a resposta de referência. Nos casos dos modelos bilinear e exponencial, a carga crítica é obtida para um menor deslocamento vertical correspondente e apresenta magnitude inferior à determinada no caso linear. Porém, a partir de um deslocamento de aproximadamente 0,14 mm, as resistências residuais para todas as leis apresentam comportamento semelhante.

A Figura 6.22 mostra o crescimento das faces de fissura real e fictícia para o caso no qual é utilizada a lei coesiva linear. Inicialmente só há crescimento da fissura fictícia, que representa a degradação do material à frente da ponta do entalhe. Como pode ser observado, há uma evolução considerável do comprimento fictício sem propagação da fissura real. A formação de faces livres de tensões coesivas só começa a partir do incremento 16. Em seguida, ainda ocorre a propagação de fissuras fictícias, porém a formação de faces reais é mais acentuada. A última figura da sequência mostra a configuração equilibrada final obtida.

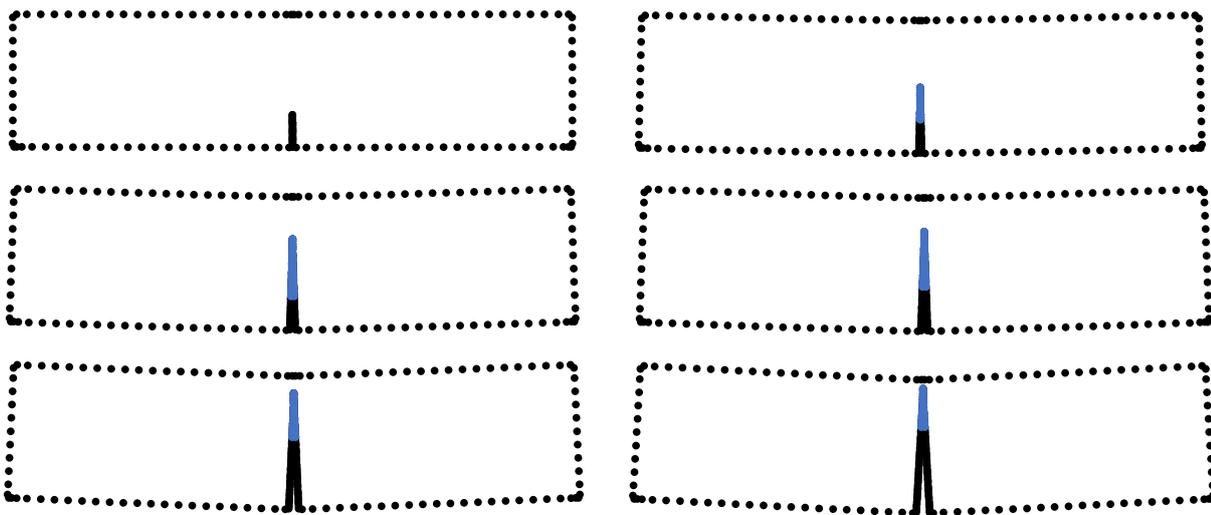


Figura 6.22 - Evolução da fissura fictícia e da fissura real para a lei coesiva linear. Os pontos de colocação referentes às faces de fissura fictícia estão em destaque. Deslocamentos ampliados em 100 vezes.

Já a Figura 6.23a e a Figura 6.23b apresentam, respectivamente, as configurações finais para os casos de lei coesiva bilinear e exponencial. Para essas situações, o comprimento fictício final é superior ao obtido via modelo linear. No caso da lei coesiva exponencial, por não existir um valor de abertura crítica, não há a formação de faces de fissura real, apenas fictícia.

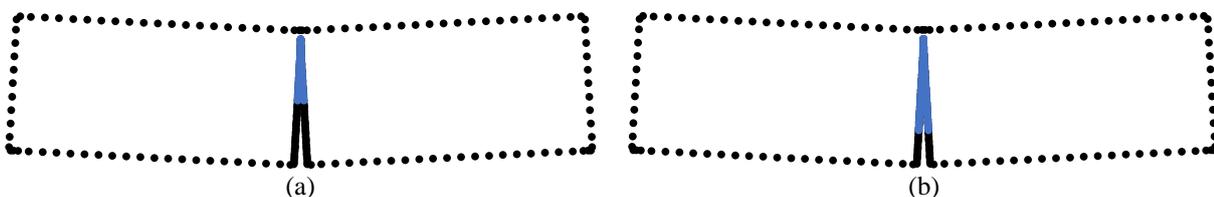


Figura 6.23 - Configuração final para a lei coesiva (a) bilinear e (b) exponencial. Os pontos de colocação referentes às faces de fissura fictícia estão em destaque. Deslocamentos ampliados em 100 vezes.

6.5 Modelo numérico para a solução dos problemas de fratura coesiva

O modelo numérico implementado para a solução dos problemas de fratura em materiais quase-frágeis via MECD é semelhante àquele apresentado no Capítulo 3 para tratar fratura frágil. Uma das principais diferenças decorre do processo iterativo necessário para a correção das tensões coesivas existentes nas faces de fissura fictícia. Maiores detalhes sobre o modelo utilizado nas simulações deste trabalho serão apresentados na sequência. Os fluxogramas referentes a esse módulo se encontram no Apêndice I, item I.4.

6.5.1 Pré-processamento

Na etapa de pré-processamento para os problemas de fratura coesiva, inicialmente são definidas a geometria e a discretização do contorno da estrutura. Na sequência, são estabelecidas as condições de contorno externas do problema. Em seguida, as propriedades dos materiais dos subdomínios são fornecidas, incluindo a lei coesiva, resistência à tração e energia ao fraturamento. Posteriormente, são definidas as fissuras na análise, bem como as respectivas malhas de elementos de contorno. As fissuras podem ser inseridas como fissuras reais, cujas faces são livres de tensões coesivas, ou como fissuras fictícias. Por fim, os parâmetros utilizados na determinação dos pontos internos para o cálculo do estado de tensão nas pontas são definidos.

6.5.2 Aplicação de um incremento nas condições externas

A análise começa com as definições iniciais do problema, da mesma forma como exposto no item 3.8.2.1. Inicialmente são determinadas as coordenadas adimensionais e reais dos pontos de colocação da malha de elementos de contorno e as respectivas componentes dos vetores normais. Em seguida, os elementos da fissura são definidos como elementos de interface com contato perfeito.

Na sequência, as integrações numéricas para a determinação das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são realizadas. Após o cálculo das matrizes, o esquema incremental iterativo de solução é iniciado com a aplicação de um incremento das ações externas. O sistema de equações da forma da Eq. (2.63) é formado a partir da troca de colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} e resolvido. Em seguida, as variáveis acumuladoras são atualizadas e inicia-se a fase de verificação dos pares de pontos de colocação das faces de fissura real e fictícia. Os pares de pontos de colocação abertos das faces de fissuras reais e fictícias são verificados quanto ao fechamento conforme exposto no

item 3.8.2.2. Os pares de fissura real fechados são investigados quanto à abertura pelo esquema também apresentado no item 3.8.2.2. Já os pares de fissura fictícia fechados são verificados quanto à abertura a partir da determinação da componente normal de força de superfície pela Eq. (3.52) e comparação com o valor da resistência à tração do material. Assim, admite-se que o par de fissura fictícia se abre caso a desigualdade $p_n \geq f_t$ seja satisfeita.

Se durante a aplicação das condições de contorno sobre a estrutura algum dos pares abertos de fissura, seja ele real ou fictício, se fechar, o par é redefinido com deslocamento relativo restrito e o carregamento é reaplicado. Terminada a verificação quanto ao fechamento, passa-se à determinação das forças de contato entre os pares definidos como pontos de interface para verificação quanto à abertura. Se algum par se abrir, então o excedente de força de superfície entre os pontos de colocação é reaplicado durante a fase de correção, conforme descrito na sequência.

6.5.3 Fase de correção das tensões coesivas

No início da fase de correção, as condições de contorno aplicadas sobre a estrutura são modificadas. As posições no vetor \mathbf{u} correspondentes a deslocamentos conhecidos são atualizadas com o valor nulo. Já os valores do vetor \mathbf{p} são atualizados a partir da correção sobre as tensões coesivas dos pares já abertos de fissura fictícia, como mostrado no item 6.3.3, e da reaplicação de parcela das forças de superfície acumuladas dos pares fechados que se abrem. No caso de fissuras reais, toda a força de superfície acumulada entre os pares é reaplicada. Já no caso de fissuras coesivas, existem duas possibilidades para a definição da força de superfície a ser reaplicada, conforme apresentado pela Figura 6.24. No primeiro caso, parte do valor reaplicado consiste da diferença entre a componente de força de superfície normal p_n e a resistência à tração f_t do material. A outra parte é originária da reaplicação de um fator χ , que varia de 0 a 1, da componente tangencial da força de superfície acumulada p_t . Nessa situação, o deslocamento tangente relativo entre os pares permanecem livres e, portanto, considera-se que as faces fictícias não são capazes de resistir a um esforço tangencial maior que $(1 - \chi) p_t$. Já no segundo caso, a força de superfície reaplicada consiste apenas da diferença entre p_n e f_t . O deslocamento tangencial relativo entre os pares de pontos de colocação que se abrem permanecem restritos. Assim, considera-se que a resistência das faces fictícias na direção tangencial não é afetada quando da abertura do par.

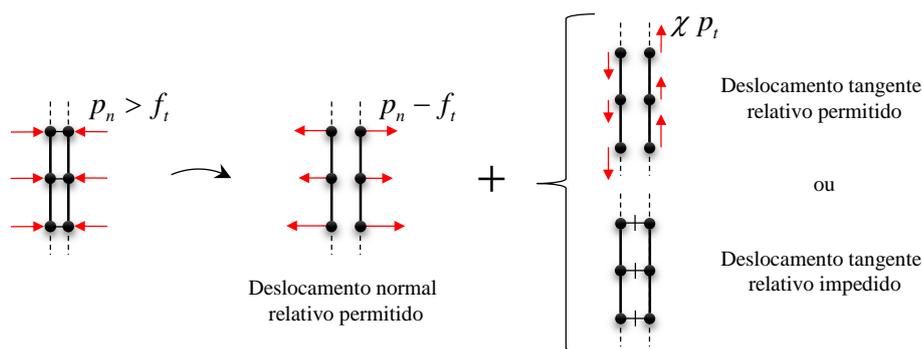


Figura 6.24 - Situações possíveis após a abertura de pares de fissura fictícia.

Em seguida, é realizada a construção da matriz \mathbf{C} conforme apresentado no item 6.3.3. Com os valores determinados para \mathbf{p} , o vetor \mathbf{y} é obtido. A partir da multiplicação de \mathbf{C} por \mathbf{y} , os valores de \mathbf{x} são calculados e utilizados na atualização das variáveis acumuladoras \mathbf{u}_{acum} e \mathbf{p}_{acum} . Posteriormente, as tensões coesivas são atualizadas em função da lei coesiva e dos valores de abertura determinados a partir de \mathbf{u}_{acum} . O processo iterativo prossegue até que o máximo valor obtido de correção para as tensões coesivas seja inferior a uma tolerância. Cabe ressaltar que durante as iterações a matriz \mathbf{C} não sofre alteração desde que não ocorra a mudança de vínculo entre os pares de pontos de colocação. Se ocorrer o fechamento ou a abertura de algum par em determinada iteração, o deslocamento relativo é restrito ou liberado, respectivamente. Em seguida, a matriz \mathbf{C} e o vetor \mathbf{y} são atualizados e os esforços associados à iteração são novamente aplicados.

Durante as iterações da fase de correção, as aberturas dos pares de fissura fictícia também são comparadas com o valor de abertura crítica definida pela lei coesiva adotada. Se alguma abertura superar o valor crítico, então na iteração seguinte é reaplicado todo o valor de força de superfície acumulada entre o par. Assim, ao final do processo reaplicação, os respectivos pontos de colocação estarão livres de forças de superfície e, portanto, farão parte de faces de fissura real.

Ao término do processo iterativo de correção das forças de superfície dos pares de pontos de colocação das faces das fissuras, os campos de deslocamento e tensão para os pontos internos definidos pelo usuário e os campos de tensão para os pontos de colocação no contorno são determinados. Em seguida, a estabilidade à propagação de cada uma das pontas é verificada, como mostrado no item a seguir.

6.5.4 Propagação das fissuras coesivas

Para a verificação da estabilidade à propagação, para cada uma das pontas é definida uma rede de pontos internos conforme apresentado no item 6.4.1. A semicircunferência que engloba todos os pontos internos não deve cruzar outro elemento. Caso isso ocorra, o seu raio é reduzido de forma a não ocorrer interseção.

Em seguida, os campos de tensão dos pontos internos são calculados e o estado de tensão para cada uma das pontas é determinado via extrapolação, conforme o esquema mostrado no item 6.4.1. A estabilidade à propagação da ponta é então verificada a partir do critério de Rankine.

Para as pontas que propagam, a direção de crescimento é definida conforme o item 6.4.2. Já a localização da nova ponta ao longo da direção de crescimento é determinada segundo a metodologia apresentada no item 6.4.3.

Com o incremento no comprimento das pontas que propagam, passa-se à etapa de remalhamento. As pontas com maior razão σ_1/f_t têm prioridade na propagação. Ao longo das novas faces de fissura fictícia são definidos elementos com o mesmo grau de aproximação da fissura original. Caso a fissura intercepte algum elemento, a modificação do elemento cruzado é realizada conforme exposto no item 3.8.2.3 e no item 3.8.3. Os novos pares de pontos de colocação das fissuras que propagam são definidos com deslocamentos relativos restritos.

Após o processo de remalhamento, as matrizes **H** e **G** são atualizadas e os valores das variáveis acumuladoras são interpolados para os elementos modificados. Já os valores das variáveis acumuladoras para os pontos de colocação definidos para as novas faces de fissura são determinados pela solução do sistema de equações utilizando, para **u** e **p**, os valores acumulados conhecidos. Todos esses procedimentos seguem o esquema apresentado em maiores detalhes no item 3.8.2.3. Em seguida, a fase de correção das tensões coesivas descrita no item 6.5.3 é novamente realizada devido à reaplicação de esforços sobre as novas faces de fissuras fictícias que se abrem. Terminada essa etapa, a estabilidade à propagação das pontas é novamente examinada. Se houver propagação de uma ou mais pontas, o esquema de propagação, seguido da fase de correção, é executado mais uma vez. Caso contrário, um novo incremento das condições de contorno é aplicado sobre a estrutura.

Exemplo 6.3: Propagação em modo misto - Gálvez et al. (1998)

Neste exemplo, o código computacional desenvolvido é utilizado na simulação dos experimentos com vigas de concreto conduzidos por Gálvez et al. (1998). A Figura 6.25a

apresenta a geometria da estrutura analisada. A dimensão D é igual a 150 mm, enquanto o comprimento a do entalhe inicial é 75 mm. A viga possui largura igual a 50 mm. As propriedades do material fornecidas por Gálvez et al. (1998) são: $E = 38000$ MPa, $\nu = 0,20$, $f_t = 3,0$ MPa e $G_c = 69$ N/m.

Sobre o local indicado pela Figura 6.25a é aplicado um deslocamento vertical com magnitude $\bar{u} = 0,1$ mm, dividido em 25 incrementos. A força equivalente aplicada sobre essa região é determinada para a representação da curva carga-deslocamento. As três leis coesivas implementadas neste trabalho e apresentadas no item 6.3.1 são utilizadas. Quanto ao deslocamento tangencial entre as faces fictícias, são admitidas duas hipóteses: a primeira considera que, quando os pares de pontos de colocação das faces se encontram abertos, o deslocamento tangencial relativo é restrito; já a segunda assume que o esforço tangencial acumulado até o momento da abertura se mantém até a face fictícia se tornar real ($\chi = 0$), o que é equivalente a uma lei coesiva retangular. As simulações são realizadas adotando um EPT.

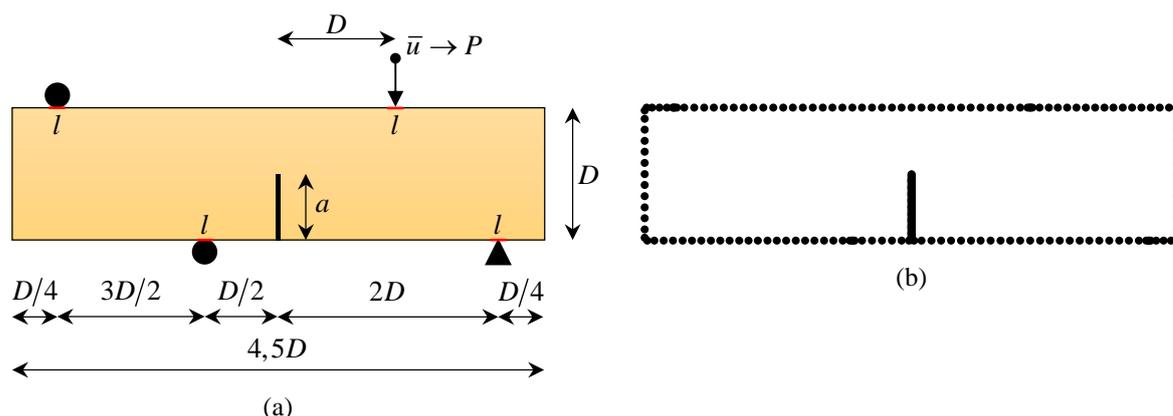


Figura 6.25 - Problema analisado pelo Exemplo 6.3: (a) geometria e (b) discretização.

A Figura 6.25a apresenta a discretização adotada para a solução do problema. Para o contorno externo são utilizados 68 elementos quadráticos e 4 elementos lineares, sendo esses últimos correspondentes aos locais de aplicação das condições de contorno. Já cada uma das faces da fissura é discretizada com 10 elementos cúbicos.

Para a determinação do estado de tensão na ponta são utilizados 5 raios, com ângulo de separação igual a 30 graus e com 4 pontos internos cada. A integral J é utilizada para a determinação dos FIT para a obtenção da direção de crescimento. A tolerância para a convergência da fase iterativa é tomada igual a 10^{-8} MPa.

A Figura 6.26 apresenta as curvas carga-deslocamento obtidas para as leis coesivas considerando deslocamento tangencial restrito entre as faces da fissura fictícia. Como pode ser observado, há uma boa correspondência entre as curvas obtidas com os resultados

experimentais fornecidos por Gálvez et al. (1998), especialmente para o trecho ascendente, até o máximo valor da força aplicada. Para a lei coesiva linear, a carga máxima é ligeiramente maior à envoltória superior, enquanto para as demais esse valor se encontra dentro do intervalo experimental. Com relação à região de amolecimento das curvas, as leis bilinear e exponencial apresentam trecho inicial dentro da envoltória experimental. Todavia, para maiores valores de deslocamentos prescritos, todas as três leis tendem a fornecer valores de resistência residual maiores em relação aos ensaios experimentais. Isso se deve, principalmente, pela consideração da integridade da fissura fictícia em relação à direção tangencial às faces.

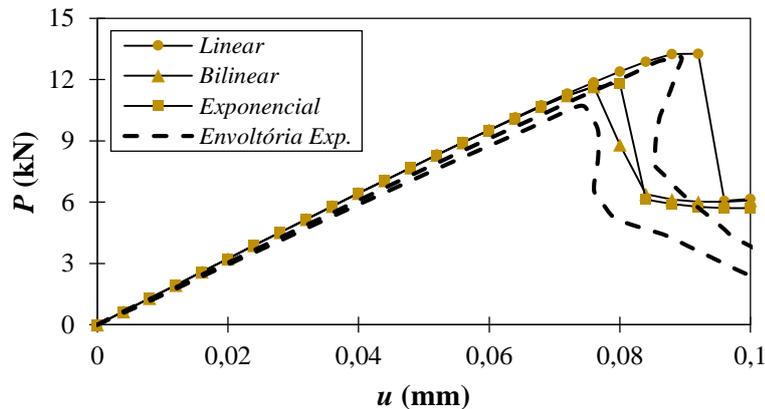


Figura 6.26 - Curvas carga-deslocamento para as diferentes leis coesivas considerando o deslocamento relativo tangencial entre faces fictícias restrito.

Já a Figura 6.27 apresenta as curvas obtidas a partir da consideração de uma lei coesiva retangular para a abertura tangencial das faces de fissura fictícia. Como pode ser observado, o ramo ascendente das curvas é semelhante ao obtido no caso anterior (Figura 6.26), bem como os valores de carga máxima. Entretanto, os modelos numéricos tendem a subestimar as resistências residuais na fase de amolecimento da resposta estrutural. Tal fato indica que o modelo no qual as faces fictícias são livres ao deslocamento relativo tangencial não contempla mecanismos que possam conferir resistência residual à estrutura após o máximo carregamento admissível ser atingido.

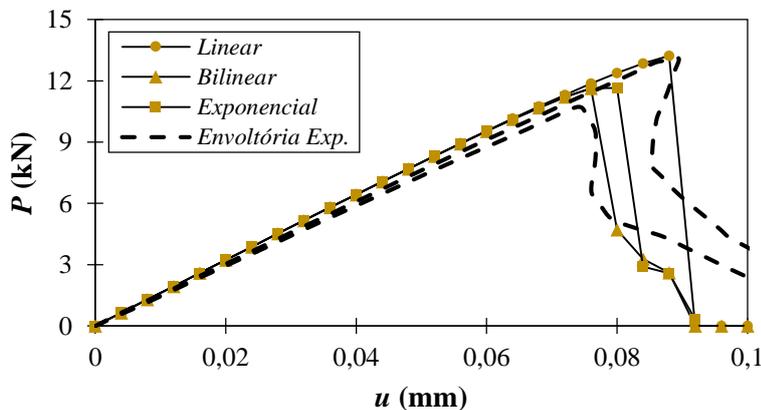


Figura 6.27 - Curvas carga-deslocamento para as diferentes leis coesivas considerando o deslocamento relativo tangencial entre faces fictícias liberado.

Apesar das divergências obtidas para o trecho de amolecimento, o código desenvolvido é considerado satisfatório para a representação da fratura em materiais quase-frágeis devido, principalmente, à boa reprodução do comportamento da estrutura até a carga crítica. Para melhorar a resposta pós-pico, modelos com outras hipóteses em relação ao deslocamento tangencial entre as faces podem ser implementados para tratar propagação em modo misto. Outro ponto que pode ser melhorado é com relação à metodologia de solução do problema de fratura não-linear. Observa-se que os resultados experimentais tendem a apresentar *snap-back*, cuja representação não é possível apenas com o controle de deslocamentos utilizado na solução numérica deste problema. Outras técnicas, como comprimento de arco ou o controle do comprimento da fissura, podem ser utilizadas para fornecer uma melhor representação da resposta estrutural após a carga máxima.

Por fim, a boa correspondência entre os resultados numéricos determinados neste trabalho com os resultados experimentais também pode ser verificada pela Figura 6.28 e pela Figura 6.29, que apresentam os caminhos de propagação obtidos a partir da consideração de deslocamento tangencial entre as faces fictícias restrito e liberado, respectivamente. Como pode ser observado, os caminhos obtidos se encontram no interior da envoltória experimental, com exceção do trecho final dos casos (a) e (b) da Figura 6.28. Esse resultado mostra a eficácia na definição do caminho de propagação a partir do modelo numérico desenvolvido.

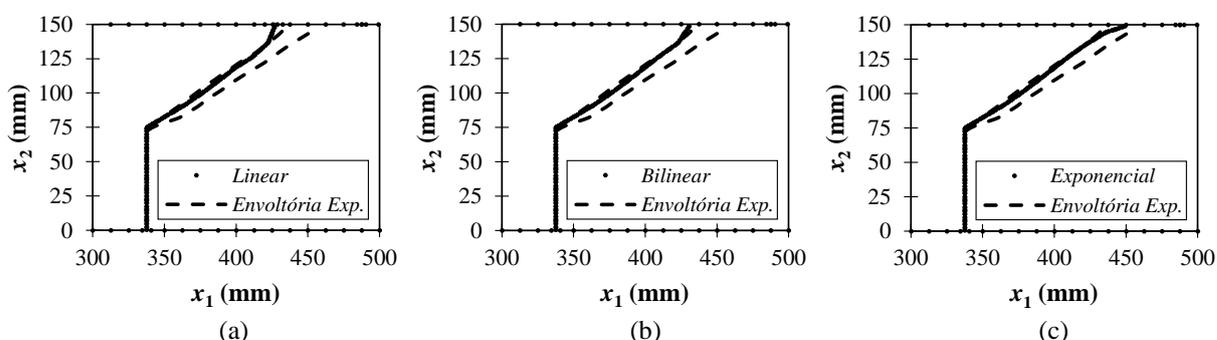


Figura 6.28 - Caminhos de propagação considerando o deslocamento relativo tangencial entre faces fictícias restrito para as leis coesivas (a) linear, (b) bilinear e (c) exponencial.

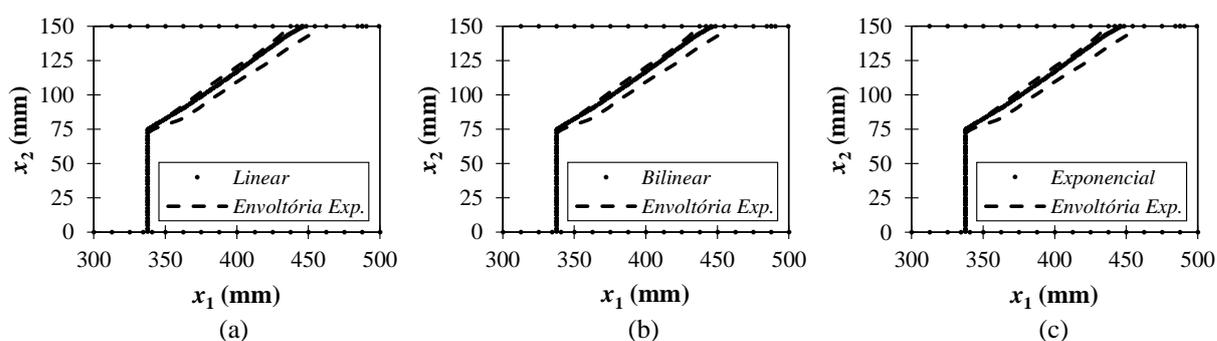


Figura 6.29 - Caminhos de propagação considerando o deslocamento relativo tangencial entre faces fictícias liberado para as leis coesivas (a) linear, (b) bilinear e (c) exponencial.

Além disso, observa-se que, para os caminhos de propagação obtidos para os casos de deslocamento relativo tangencial livre, a fissura fictícia cruza com o topo da estrutura (Figura 6.29). Nesses casos, a estrutura fica dividida em duas partes. A parte à esquerda apresenta hipostaticidade ao longo da direção horizontal quando a fissura fictícia se encontra aberta. Nessa mesma situação, a parte à direita apresenta deslocamentos de corpo rígido quando aplicados novos incrementos da ação externa. Consequentemente, a estrutura não possui resistência residual, conforme é representado pelas curvas apresentadas na Figura 6.27.

Exemplo 6.4: Flexão em 4 pontos de uma viga não-homogênea multifissurada

A estrutura analisada pelo Exemplo 6.4 é mostrada pela Figura 6.30. Ela consiste de uma viga com altura $h = 500$ mm, largura $b = 200$ mm e composta por dois materiais distintos dispostos ao longo do comprimento $L = 1500$ mm. As propriedades mecânicas do material inferior (material 1) são: $E_1 = 30000$ MPa, $\nu = 0,2$, $f_t = 3$ MPa. Já para o material superior (material 2): $E_2 = 20000$ MPa, $\nu = 0,2$, $f_t = 3$ MPa. Com relação aos valores da energia de fraturamento dos materiais, os 4 casos apresentados na Tabela 6.1 são analisados de modo a verificar a influência desse parâmetro no comportamento global da estrutura.

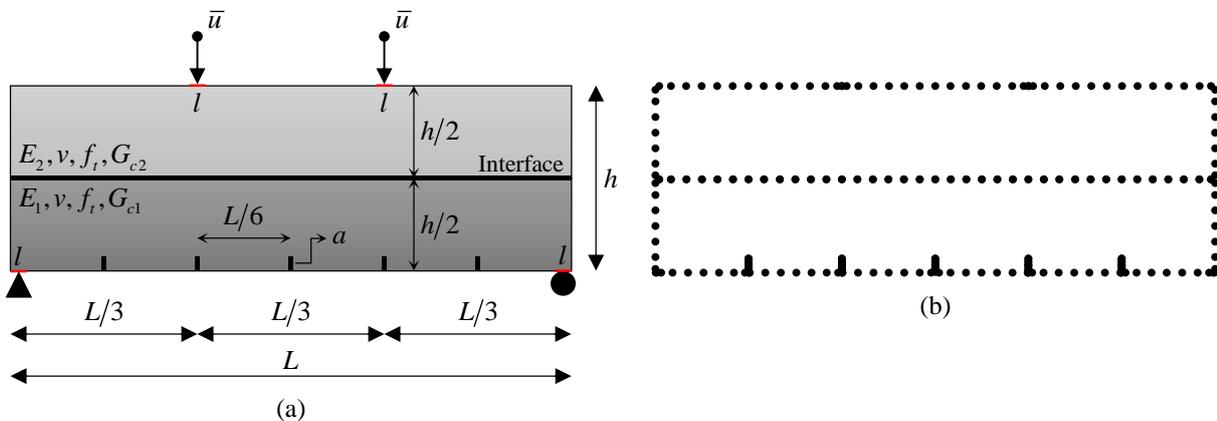


Figura 6.30 - Problema analisado pelo Exemplo 6.4: (a) geometria e (b) discretização.

Tabela 6.1 - Valores adotados para G_c nos diferentes casos analisados no Exemplo 6.4

Material	G_c (N/m)			
	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
1	75	75	50	100
2	50	100	75	75

Na face inferior da viga existem 5 fissuras com comprimento $a = 40$ mm e igualmente espaçadas por 250 mm. Sobre a face superior, nas extremidades do terço central, são prescritos deslocamentos $\bar{u} = 0,2$ mm, aplicados em 30 incrementos. A força equivalente total aplicada P

é determinada para a representação da curva carga-deslocamento da estrutura. Um EPT é admitido.

Para as fissuras fictícias é utilizada a lei coesiva bilinear. O deslocamento transversal relativo das faces dessas fissuras é livre, porém a reaplicação dos esforços acumulados é realizada após a fissura se tornar real (modelo coesivo retangular). O estado de tensão nas pontas é determinado a partir de 7 raios, espaçado entre si por 30 graus e compostos por 5 pontos internos cada. Os FIT para a determinação da direção de propagação durante a fase de propagação são determinados via integral J. O incremento mínimo no comprimento da fissura é tomado como 60 μm . Já a tolerância para convergência da fase de correção das tensões coesivas é adotada igual a 10^{-8} MPa.

Para as análises via MEC, a discretização do contorno externo da estrutura e das interfaces é realizada com um total de 84 elementos quadráticos e 4 elementos lineares, sendo esses últimos utilizados nos locais de aplicação das condições de contorno. Já para cada uma das faces dos entalhes iniciais são empregados 2 elementos quadráticos.

A Figura 6.31 apresenta as curvas carga-deslocamento para todos os casos analisados. Como pode ser observado, o máximo valor da carga total P está relacionado ao valor da taxa de energia de fraturamento do material 1. Isso ocorre porque os entalhes iniciais se encontram nesse material e, assim, o crescimento das fissuras fictícias é restrito à resistência à abertura das faces nesse material. Assim, quanto maior o valor de G_c do material 1, maior é o valor da magnitude total do carregamento. Essa observação também é confirmada a partir dos casos 1 e 2, que possuem mesmo valor de G_c para o material 1. Nessas situações são determinados os mesmos valores de P máximo.

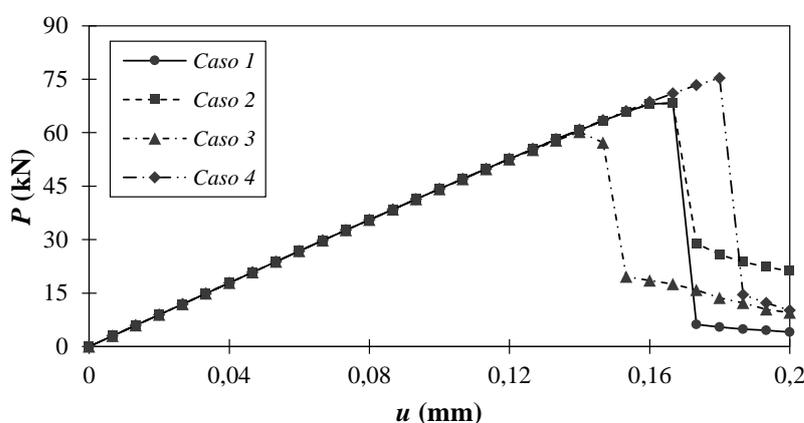


Figura 6.31 - Curvas carga-deslocamento para os diferentes casos analisados.

Já os valores de resistência residual das situações apresentadas na Figura 6.31 estão relacionados, principalmente, à energia de fraturamento do material 2, que passa a conter a maior parte da fissura crítica (fissura central) quando ela atinge um grande comprimento.

Assim, maiores valores de G_c para esse material conduzem a maiores resistências residuais. Para os casos 3 e 4, com iguais energias de fraturamento para o material 2, os comportamentos das curvas carga-deslocamento na região de amolecimento da estrutura tendem a ser semelhantes.

A Figura 6.32 ilustra a evolução das fissuras para o caso 1. Inicialmente, todas as descontinuidades tendem a se propagar pelo efeito da concentração de tensão nas pontas dos entalhes. A fissura central tende a crescer em linha reta, uma vez que se encontra em uma zona de flexão pura, enquanto as demais apresentam um caminho levemente desviado para o centro da viga pelo efeito do esforço de cisalhamento. Na sequência, apenas a fissura central, mais solicitada pelo efeito do momento fletor no terço central da viga, tende a crescer mantendo a orientação vertical. Essa descontinuidade cruza a interface entre os materiais e continua a se propagar ao longo do material 2, enquanto as demais permanecem com comprimento inalterado.

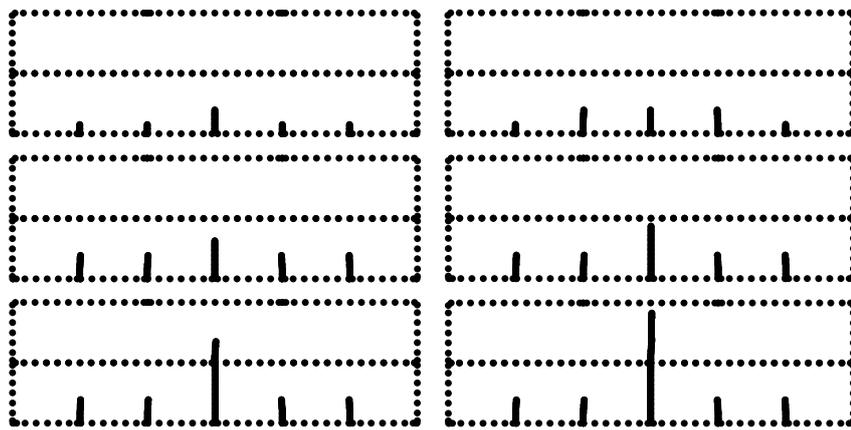


Figura 6.32 - Evolução do comprimento das fissuras para o caso 1.

A evolução das fissuras para os demais casos analisados é semelhante ao mostrado pela Figura 6.32, com a fissura central dominando o comportamento global da estrutura. A Figura 6.33a-d apresenta as configurações deformadas finais para os 4 casos analisados e, portanto, refletem a resistência residual das curvas apresentadas pela Figura 6.31.

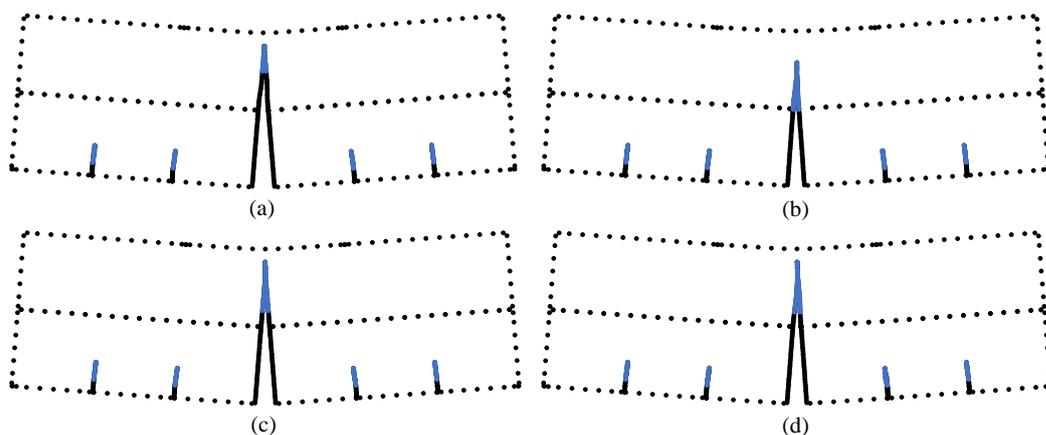


Figura 6.33 - Configurações finais para casos (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4. Os pontos de colocação referentes às faces de fissura fictícia estão em destaque. Deslocamentos ampliados em 200 vezes.

No caso 1 (Figura 6.33a), o material 2 possui menor energia de fraturamento. Consequentemente, a fissura central na configuração final apresenta um maior comprimento real e um menor comprimento fictício, o que reflete em uma menor resistência residual. O oposto é observado para o caso 2 (Figura 6.33b). Pelo fato do material 2 apresentar o mesmo valor de G_c para os casos 3 e 4 (Figura 6.33c e Figura 6.33d, respectivamente), a configuração final das fissuras reais e fictícias são semelhantes para ambos os casos. Ademais, em todas as situações pode ser verificado que as demais fissuras só causam a degradação do material próximo da ponta com a formação de novas faces de fissura fictícia, porém não há formação de novas faces de fissura real.

Do exposto nos exemplos tratados neste capítulo, pode-se observar que o código implementado conduz a bons resultados na análise de problemas de fratura em materiais quase-frágeis. Entretanto, melhorias podem ser realizadas para tornar o modelo numérico mais eficaz, em especial com relação ao esquema de solução do problema não-linear e com novas considerações sobre o mecanismo de propagação em modo misto.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Conclusões

O presente trabalho aplicou o Método dos Elementos de Contorno Dual em análises de propagação de múltiplas fissuras em domínios bidimensionais, não-homogêneos e compostos por materiais isotrópicos. Dentre as vantagens observadas do método na solução desse tipo de problema destacam-se: a definição automática do caminho de propagação no decorrer da análise; a discretização apenas do contorno da estrutura, que facilita o processo de remalhamento e de alteração do sistema de equações algébricas durante o crescimento das fissuras; e a precisa avaliação dos campos internos próximos às pontas, o que é fundamental para correta verificação da estabilidade à propagação. Problemas de fratura frágil, fadiga, fraturamento hidráulico e fratura coesiva foram abordados pelo modelo numérico desenvolvido.

Para a avaliação da fratura em materiais frágeis foram utilizados os princípios da MFEL. No modelo numérico implementado, a estabilidade à propagação das pontas foi verificada a partir da comparação da tenacidade do material com a sollicitação representada pelo valor do FIT equivalente. Esse valor, por sua vez, foi obtido pela combinação dos FIT dos modos I e II a partir critério da máxima tensão circunferencial. Esse critério também foi aplicado para a determinação da direção de crescimento das pontas. Os FIT dos modos básicos de sollicitação no plano foram calculados pela técnica da integral J, que forneceu resultados precisos para os exemplos analisados. Para casos nos quais o caminho para determinação da integral J não pôde ser traçado sem interceptar algum elemento, a técnica correlação deslocamentos foi aplicada para a extração dos FIT da ponta. Para as situações envolvendo domínios não-homogêneos multifissurados, o fenômeno de coalescência e o cruzamento de fissuras com interfaces de materiais e com o contorno externo foram satisfatoriamente representados. Os resultados obtidos apresentaram boa correspondência com as referências encontradas na literatura, indicando a eficácia do código implementado.

A formulação para a análise de fratura em materiais frágeis foi estendida para a aplicação em problemas de fraturamento hidráulico. Para tanto, a técnica da integral J foi modificada para calcular os FIT considerando as faces de fissuras sujeitas a uma pressão hidrostática. Boa correspondência com valores de referência foi observada com o uso dessa técnica. Uma fase prévia de solução foi considerada para a introdução do estado inicial de tensão e de deformação na análise de fraturamento hidráulico. O modelo numérico

implementado, apesar das limitações, foi capaz de representar satisfatoriamente o comportamento de ensaios experimentais. Além disso, problemas envolvendo diferentes tipos de materiais e múltiplas fissuras, situações comuns de serem encontradas nos maciços de exploração sujeitos ao processo de fraturamento hidráulico, foram bem representados.

Com relação às análises de problemas de fadiga, um procedimento baseado na lei de Paris foi proposto para a estimativa da vida útil estruturas submetidas a carregamentos cíclicos. No processo de solução, a estrutura foi resolvida para cada uma das fases de carregamento. A propagação das pontas foi considerada quando a amplitude de variação do FIT equivalente, definido a partir do critério máxima tensão circunferencial, superou o valor limite do material. O referido critério também foi utilizado para a definição da direção de crescimento, que por sua vez está associada ao máximo valor do FIT equivalente determinado dentro de um ciclo de carregamento. O modelo numérico desenvolvido forneceu boas respostas para os exemplos simulados.

Para a análise de problemas de fratura em materiais quase-frágeis, o modelo de fissura fictícia foi utilizado. Esse modelo se adequa bem à aplicação em conjunto do MEC, pois restringe a não-linearidade física na ZPI às faces virtuais de fissura adicionadas. Três tipos de leis coesivas foram implementados para simular o comportamento da zona de degradação: linear, bilinear e exponencial. A solução do problema não-linear foi realizada via operador constante, um procedimento simples e que conduz a um grande número de iterações até a convergência. Todavia, conforme mostrado pelos exemplos, esse esquema fornece boas respostas. A propagação foi verificada a partir do estado de tensão nas pontas, obtido a partir da extrapolação das componentes de tensão de pontos internos definidos nas proximidades. Já a direção de crescimento foi determinada com base nos fundamentos da MFEL. Diferentes considerações sobre abertura transversal entre as faces de fissura fictícia foram adotadas. Resultados satisfatórios de problemas envolvendo o crescimento de fissuras em materiais quase-frágeis foram obtidos, incluindo a boa representação de problemas com múltiplos domínios e fissuras.

O modelo numérico implementado é robusto e eficaz na solução dos diversos tipos de problemas analisados neste trabalho. Existem, entretanto, algumas limitações. Dentre elas, destacam-se: o simples procedimento utilizado de verificação do contato entre as faces, baseado na abertura normal ao eixo da fissura em uma abordagem nó-nó. Além disso, admitiu-se o contato perfeito entre as faces quando fechadas; o contato perfeito também foi considerado para as interfaces entre os diferentes materiais componentes das estruturas não-homogêneas. Ademais, o fenômeno de delaminação da interface também não foi considerado; o esquema de

solução do problema não-linear leva a um grande número de iterações; por fim, o processo de solução do problema de fratura a partir do esquema incremental iterativo com controle de deslocamento ou força não permite a representação de instabilidades da estrutura, como o *snap-back*. Algumas melhorias e avanços que podem ser realizados neste estudo são destacados a seguir.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

A avaliação numérica das equações integrais do MEC toma um elevado tempo computacional pela existência de núcleos singulares. Todavia, o tempo desse processo pode ser substancialmente otimizado a partir da aplicação de técnicas de computação paralela e de algoritmos mais eficientes de integração, como por exemplo, o proposto por Telles (1987).

Na abordagem isoparamétrica do MEC adotada, tanto a geometria quanto as variáveis do contorno são descritas a partir de polinômios de grau qualquer. Todavia, em algumas situações, as respostas não são precisamente descritas por meio dessas aproximações. Uma alternativa é o emprego da formulação isogeométrica do MEC, que utiliza de funções de aproximação do tipo NURBS (*Non-Uniform Rational Basis Spline*). Essas funções e suas derivadas são capazes de gerar geometrias complexas de forma precisa. Assim, os erros associados às aproximações do contorno são minimizados por meio dessa abordagem. A abordagem isogeométrica do MEC vem recebendo especial atenção nos últimos anos, como pode ser observado nos trabalhos de Scott et al. (2013) e Simpson et al. (2012).

Com relação ao modelo mecânico de fratura, materiais com propriedades anisotrópicas, com um grande campo de aplicações de engenharia, podem ser contemplados. Para tanto, as soluções fundamentais anisotrópicas para o problema elastostático do MEC desenvolvidas por Cruze e Swedlow (1971) podem ser utilizadas. Para a avaliação da fratura nesses materiais, os trabalhos de Bank-Sills et al. (2005), Hoening (1982), Sih et al. (1965) e Sollero e Aliabadi (1995) podem ser aplicados.

Para a precisa avaliação da fratura em certos tipos de estruturas não-homogêneas, é importante a consideração da delaminação entre os diferentes materiais componentes. Para tanto, o modelo numérico deve ser capaz de contemplar a propagação de fissuras ao longo de interfaces.

Em relação aos problemas apresentados neste trabalho, outras metodologias podem ser implementadas para as análises com vista à comparação entre as respostas fornecidas pelos diferentes critérios. No caso da propagação em materiais frágeis, por exemplo, novos critérios de propagação, como o da máxima taxa de liberação de energia e o da mínima densidade de

energia de deformação, podem ser adicionados ao código existente. Já o fraturamento hidráulico também pode ser avaliado a partir de uma abordagem via fratura coesiva em materiais anisotrópicos, que constituem situações mais próximas de alguns casos práticos. Além disso, novas considerações podem ser realizadas sobre a pressão atuante sobre as faces. Em relação às análises de fadiga, outras leis para a taxa de crescimento por ciclo podem ser contempladas. Novos critérios para a definição da amplitude de variação do FIT e do caminho de propagação em solicitações em modo misto também podem ser avaliados. Já para problemas de fratura coesiva, novas considerações podem ser feitas acerca da abertura tangencial entre as faces de fissura fictícia em problemas de solicitação em modo misto. Ademais, o operador tangente pode ser empregado para a solução do problema não-linear, de forma a reduzir o número de iterações e tornar o processo mais eficiente.

O operador tangente também pode ser aplicado para a melhor representação do problema de contato entre as faces de fissura, como mostrado por Leonel (2009). O deslocamento relativo entre as faces também pode ser avaliado com a consideração de uma lei de atrito. A precisa avaliação do contato entre as faces de fissuras é especialmente importante em problemas de fadiga com inversão de solicitação.

Para a melhor representação da resposta estrutural, em especial para situações que apresentam instabilidades como o *snap-back*, novas técnicas de solução do problema de fratura podem ser utilizadas. Um exemplo é a aplicação da técnica de comprimento de arco para a solução do sistema não-linear. Outra solução é a partir do controle incremental da extensão das fissuras que propagam, conforme empregado nos trabalhos de Bocca et al. (1991), Budyn et al. (2004) e Saleh e Aliabadi (1995). Nessas técnicas, o controle dos fatores de carregamento é corrigido automaticamente no curso da análise.

Por fim, algoritmos de confiabilidade podem ser acoplados ao modelo mecânico para a análise probabilística da fratura em estruturas. Nessa abordagem, a determinação de soluções é realizada com base nas incertezas envolvidas, o que resulta em respostas mais realísticas.

A consideração desses e de outros tópicos será realizada na continuação desta pesquisa ao longo do doutoramento do autor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABASS, H.H.; BRUMLEY, J.L.; VENDITTO, J.J. Oriented Perforations - A Rock Mechanics View. **Spe Annual Technical Conference and Exhibition**, p.411-425, 1994.

ADACHI, J.; SIEBRITS, E.; PEIRCE, A.; DESROCHES, J. Computer simulation of hydraulic fractures. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v.44, n.5, p.739-757, 2007.

ALATAWI, I.A.; TREVELYAN, J. A direct evaluation of stress intensity factors using the Extended Dual Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.52, p.56-63, 2015.

ALBERT, W.J. Über Treibseile am Harz. Archiv für Mineralogie, Geognosie. **Bergbau und Hüttenkunde**. v.10, p.215-234, 1837.

ALIABADI, M.H. **The Boundary Element Method: Application in solids and structures**. v.2. New York: Wiley, 2002.

ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. **Numerical Fracture Mechanics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991.

ANDERSON, W.E. An engineer views brittle fracture history. **Boing report**, 1969.

ANG, W.T.; TELLES, J.C.F. A numerical Green's function for multiple cracks in anisotropic bodies. **Journal of Engineering Mathematics**, v.49, n.3, p.197-207, 2004.

AZADI, H.; KHOEI, A.R. Numerical simulation of multiple crack growth in brittle materials with adaptive remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.85, n.8, p.1017-1048, 2010.

BANKS-SILLS, L.; HERSHKOVITZ, I.; WAWRZYNEK, P.A.; ELIASI, R.; INGRAFFEA, A.R. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I— $z=0$ is a symmetric plane. **Engineering Fracture Mechanics**, v.72, n.15, p.2328-2358, 2005.

BARBIER, E.; PETRINIC, N. Multiple Crack Growth and Coalescence in Meshfree Methods with a Distance Function-Based Enriched Kernel. **Key Engineering Materials**, v.560, p.37-60, 2013.

BARENBLATT, G.I. The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. **Advances in Applied Mechanics**, p.55-129, 1962.

BARSOUM, R.S. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.10, n.1, p.25-37, 1976.

BASQUIN, O.H. The exponential law of endurance tests. **American Society of Testing Materials**, v.10, p 625-630, 1910.

BATHIAS, C.; PINEAU, A. (eds.). **Fatigue of Materials and Structures**. London: ISTE, 2010.

BAZANT, Z.P. Mechanics of Fracture and Progressive Cracking in Concrete Structures. **In:** SIH, G.C.; DITOMMASO, A (eds.). **Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation**. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1985.

_____. Concrete fracture models: testing and practice. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, n.2, p.165-205, 2002.

BAZANT, Z.P.; OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. **Matériaux Et Constructions**, v.16, n.3, p.155-177, 1983.

BAZANT, Z.P.; PLANAS, J. **Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials**. Boca Raton: CRC Press, 1998.

BEBENDORF, M. Approximation of boundary element matrices. **Numerische Mathematik**, v. 86, n. 4, p.565-589, 2000.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y.Y.; GU, L. Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.37, n.2, p.229-256, 1994.

_____. Crack propagation by element-free Galerkin methods. **Engineering Fracture Mechanics**, v.51, n.2, p.295-315, 1995.

BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M.; KRYSL, P. Meshless methods: An overview and recent developments. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.139, n.1-4, p.3-47, 1996.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.45, n.5, p.601-620, 1999.

BETTI, E. Teori Dell elasticita. **Il Nuovo Cimento**, p.7-10, 1872.

BITTENCOURT, T.N.; INGRAFFEA, A.R.; LLORCA, J. Simulation of Arbitrary, Cohesive Crack Propagation. **In:** BAZANT, Z.P. (ed.). **Fracture Mechanics of Concrete Structures**. London: Elsevier Applied Science, 1992.

BITTENCOURT, T.N.; WAWRZYNEK, P.A.; INGRAFFEA, A.R.; SOUSA, J.L. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. **Engineering Fracture Mechanics**, v.55, n.2, p.321-334, 1996.

BLANDFORD, G.E.; INGRAFFEA, A.R.; LIGGETT, J.A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, n.3, p.387-404, 1981.

BOCCA, P.; CARPINTERI, A.; VALENTE, S. Mixed mode fracture of concrete. **International Journal of Solids and Structures**, v.27, n.9, p.1139-1153, 1991.

BORST, R.de. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, n.2, p.95-112, 2002.

BOUCHARD, P.O.; BAY, F.; CHASTEL, Y.; TOVENA, I. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.189, n.3, p.723-742, 2000.

BRAITHWAITE, F. On the Fatigue and Consequent Fracture of Metals. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v.13, n.1854, p.463-467, 1854.

BREBBIA, C.A. Weighted residual classification of approximate methods. **Applied Mathematical Modelling**, v.2, n. 3, p.160-164, 1978

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. 2ed. Southampton: McGraw Hill, 1992.

BROBERG, K.B. **Cracks and Fracture**. Cambridge: Academic Press, 1999.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1982.

BROWN, W.F.; SRAWLEY, J.E. **Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials**. Philadelphia: ASTM STP, 1966.

BUDYN, É.; ZI, G.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.61, n.10, p.1741-1770, 2004.

CAHOY, D.R.; GEHMAN, J; LEI, Z. Fracking Patents: The Emergence of Patents as Information-Containment Tools in Shale Drilling. **Michigan Telecommunications and Technology Law Review**, v.19, n.2, p.279-377, 2013.

CASTOR, G.S.; TELLES, J.C.F. The 3-D BEM implementation of a numerical Green's function for fracture mechanics applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.48, n.8, p.1199-1214, 2000.

CEN, Z.; MAIER, G. Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-Softening Structures: A Boundary Element Analysis. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures**, v.15, n.9, p.911-928, 1992.

CENDÓN, D.A.; GÁLVEZ, J.C.; ELICES, M.; PLANAS, J. Modelling the fracture of concrete under mixed loading. **International Journal of Fracture**, v.103, n.3, p.293-310, 2000.

CHAN, S.K.; TUBA, I.S.; WILSON, W.K. On the finite element method in linear fracture mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v.2, n.1, p.1-17, 1970.

CHENG, A.H.-d.; CHENG, D.T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 3, p.268-302, 2005.

CLARK, J.B. A Hydraulic Process for Increasing the Productivity of Wells. **Journal of Petroleum Technology**, v.1, n.1, p.1-8, 1949.

CORDEIRO, S.G.F. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. 266p. Dissertação

(Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

CORDEIRO, S.G.F.; LEONEL, E.D. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.64, p.111-121, 2016.

CRUZE, T.A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factor by the Boundary-integral Equation Method. **In: Swedlow, J.L. (ed.). The surface crack: Physical problems and computational solutions.** New York: American Society of Mechanical Engineers, 1972.

CRUZE, T.A.; SWEDLOW, J.L. **Interactive program for analysis and design problems in advanced composites.** Pittsburg: Carnegie-Mellon University. 1971. 300p. Technical Report, Carnegie-Mellon University, Report AFLM-TR-71-268, 1971.

CRUZE, T.A.; VAN BUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Mechanics**, v.7, n.1, p.7-15, 1971.

DONAHUE, R. J.; CLARK, H.; ANTANMO, P.; KUMBLE, R.; MCEVILY, A.J. Crack opening displacement and the rate of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.8, n.2, p.209-219, 1972.

DUGA, J.J.; FISCHER, W.H.; BUXBAUM, R.W.; ROSENFELD, A.R.; BUHR, A.R.; HONTON, E.J.; MCMILLAN, S.C. The economic effects of fracture in the United States: Part 2. **National Bureau of Standards Special Publication**, n.647-2, 1983.

DUGDALE, D.S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.8, n.2, p.100-104, 1960.

ECONOMIDES, M.; OLIGNEY, R.; VALKÓ, P. **Projeto unificado de fraturamento.** Rio de Janeiro: E-Papers, 2011.

ELICES, M.; PLANAS, J. Material models. **In: ELFGREN, L. (ed.). Fracture Mechanics of Concrete Structures.** London: Chapman and Hall, 1989.

ELICES, M.; GUINEA, G.V.; GÓMEZ, J.; PLANAS, J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, n.2, p.137-163, 2002.

EPSTEIN, J.S. (ed.). **Experimental Techniques in Fracture.** New Jersey: John Wiley, 1993.

ERDOGAN, F.; ARIN, K. A half plane and a strip with an arbitrarily located crack. **International Journal of Fracture**, v.11, n.2, p.191-204, 1975.

ERDOGAN, F.; RATWANI, M. Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.6, n.4, p.379-392, 1970.

ERDOGAN, F.; SIH, G.C. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. **Journal of Basic Engineering**, v.85, n.4, p.519-527, 1963.

ESHKALAK, M.O.; AYBAR, U.; SEPEHRNOORI, K. An Economic Evaluation on the Re-fracturing Treatment of the U.S. Shale Gas Resources. **Spe Eastern Regional Meeting**, p.21-23, 2014.

FARIA, L. **The economic effects of fracture in Europe**. Technical Report Study Contract No. 32105, Commission of the European Communities, 1991.

FETT, T. **Stress intensity factors - T-stresses - Weight Functions**. Karlsruhe: Universität Karlsruhe, 2008.

FORMAN, R.G.; KEARNEY, V.E.; ENGLE, R.M. Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures. **Journal of Basic Engineering**, v.89, n.3, p.459-463, 1967.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Math**, v.27, p.365-390, 1903.

GÁLVEZ, J.C.; ELICES, M. GUINEA, G.V.; PLANAS, J. Mixed Mode Fracture of Concrete under Proportional and Nonproportional Loading. **International Journal of Fracture**, v.94, n.3, p.267-284, 1998.

GEERTSMA, J.; KLERK, F. de. A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulically Induced Fractures. **Journal of Petroleum Technology**, v.21, n.12, p.1571-1581, 1969.

GERTNER, J. The lives they lived 2013: George Mitchell. **The New York Times Magazine**, 2013. Disponível em: <https://www.nytimes.com/news/the-lives-they-lived/2013/12/21/george-mitchell/>. Acesso em: 17/01/2017.

GORDELIY, E; PEIRCE, A. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.253, p.305-322, 2013.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A Fast Algorithm for Particle Simulations. **Journal of Computational Physics**, v. 135, n. 2, p.280-292, 1997.

GRIFFITH, A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. **Philosophical Transactions Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v.221, n.582-593, p.163-198, 1921.

HACKBUSCH, W. A Sparse Matrix Arithmetic Based on H-Matrices. Part I: Introduction to H-Matrices. **Computing**, v.62, n.2, p.89-108, 1999.

HATTORI, G.; TREVELYAN, J.; AUGARDE, C.E.; COOMBS, W.M.; APLIN, A.C. Numerical Simulation of Fracking in Shale Rocks: Current State and Future Approaches. **Archives of Computational Methods in Engineering**, p.1-37, 2016.

HELLAN, K. **Introduction to Fracture Mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1984.

HESS, J.L; SMITH, A.M.O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. In KUCHEMANN, D (ed.). **Progress in aeronautical sciences**. 8ed. London: Pergamon Press, p.1 138, 1967.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v.6, n.6, p.773-781, 1976.

HOENING, A. Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body. **Engineering Fracture Mechanics**, v.16, n.3, p.393-403, 1982.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v.114, n.6, p.1028-1044, 1988.

HUBBERT, M.K.; WILLIS, D.G. Mechanics of Hydraulic Fracturing. **Petroleum Transactions**, v.210, p.153-168, 1957.

HUSSAIN, M.A.; PU, S.U.; UNDERWOOD, J. Strain energy release rate for a crack under combined mode I and II. **ASTM STP**, v.569, p.2-28, 1974.

INGLIS, C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Transaction of the Royal Institution of Naval Architects**, v.221, series A, p.163-198, 1913.

INGRAFFEA, A.R.; BLANDFORD, G.E.; LIGGET, J.A. Automatic Modelling of Mixed-Mode Fatigue and Quasi-Static Crack Propagation Using the Boundary Element Method. In: LEWIS, J.C.; SINES, G. (eds.). **Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium – Volume I: Theory and Analysis**. ASTM STP 791, American Society for Testing and Materials, p.407-426, 1983.

INGRAFFEA, A.R.; GRIGORIU, M. **Probabilistic Fracture Mechanics: A Validation of Predictive Capability**. Report 90-8 for AFOSR Project. Ithaca, 1990.

INGRAFFEA, A.R.; SAOUMA, V. Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: SIH, G.C.; DiTOMMASO, A. (eds.). **Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation**. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1985.

IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**, v.24, p.361-364, 1957.

_____. Fracture. In: **Handbuch der Physik**. v.6. Berlin: Springer, 1958.

_____. Fracture Mechanics. In: GOODIER, J.N.; HOFF, N.J. (Eds.). **Structural Mechanics**. New York: Pergamon Press, p.557-591, 1960.

ISIDA, M. Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.7, n.3, p.301-316, 1971.

JASWON, M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory. I. **Proceedings Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v.275, n.1360, p.23-32, 1963.

JENQ, Y.; SHAH, S.P. Two Parameter Fracture Model for Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v.111, n.10, p.1227-1241, 1985.

JUDT, P.O.; RICOEUR, A. Crack growth simulation of multiple cracks systems applying remote contour interaction integrals. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v.75, p.78-88, 2015.

KARLSSON, A.; BÄCKLUND, J. J-integral at loaded crack surfaces. **International Journal of Fracture**, v.14, n.6, p.311-318, 1978.

KIKUCHI, M.; WADA, Y.; SHINTAKU, Y.; SUGA, K.; LI, Y. Fatigue crack growth simulation in heterogeneous material using s-version FEM. **International Journal of Fatigue**, v.58, p.47-55, 2014.

KIRSCH, G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v.42, p.797-807, 1898.

KITAGAWA, H.; OKAMURA, H.; ISHIKAWA, H. Application of J-integral to mixed-mode crack problems. **Transactions of the JSME**. n.780-4, p.52-54, 1978.

KUPRADZE, V.D. **Potential methods in the theory of elasticity**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

KZAM, A.K.L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. 2009. 202p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LACHAT, J.C.; WATSON, J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.10, n. 5, p.991-1005, 1976.

LECAMPION, B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.25, n.2, p.121-133, 2009.

LEE, K.Y.; CHOI, H.J. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks. **Engineering Fracture Mechanics**, v.29, n.4, p.461-472, 1988.

LEONEL, E.D. **Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise de sólidos multifraturados**. 2006. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

_____. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. 406p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.34, n.12, p.1092-1099, 2010a.

_____. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyze crack propagation in quasi-brittle materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.34, n.2, p.122-129, 2010b.

_____. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v.78, n.6, p.1077-1090, 2011.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S.; CHATEAUNEUF, A. A BEM model applied to failure analysis of multi-fractured structures. **Engineering Failure Analysis**, v.18, n.6, p.1538-1549, 2011.

LIANG, R.Y.K.; LI, Y.-N. Simulations of nonlinear fracture process zone in cementitious material - a boundary element approach. **Computational Mechanics**, v.7, n.5-6, p.413-427, 1991.

LIEBOWITZ, H. (ed.). **Fracture: an advanced treatise**. v.5. New York: Academic Press, 1968.

LOEHNERT, S.; BELYTSCHKO, T. Crack shielding and amplification due to multiple microcracks interacting with a macrocrack. **International Journal of Fracture**, v.145, n.1, p.1-8, 2007.

LOTFI, H.R.; SHING, P.B. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, n.8, p.1307-1325, 1995.

MASSONNET, C.E. Numerical use of integral procedures. In: ZIENKIEWICZ, O.C.; HOLISTER, G.S. **Stress analysis**. Cap.10, p.198-235. London: Wiley, 1965.

MCCLUNG, R.C.; SEHITOGLU, H. On the finite element analysis of fatigue crack closure—2. Numerical results. **Engineering Fracture Mechanics**, v.33, n.2, p.253-272, 1989.

MEDINAS, M.T. **An Extended Finite Element Method (XFEM) approach to hydraulic fractures: Modelling of oriented perforations**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Petróleo) – Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2015.

MELENK, J.M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.139, n.1-4, p.289-314, 1996.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.11, n.2, p.167-177, 1995.

MIKHLIN, S.G. **Integral equations**. London: Pergamon Press, 1957.

MINER, M.A. Cumulative damage in fatigue. **Journal of Applied Mechanics**, v.12, n.3, p.159-164, 1945.

MIR-MOHAMAD-SADEGH, A.; ALTIERO, N.J. Solution of the problem of a crack in a finite plane region using an indirect boundary-integral method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.11, n.4, p.831-837, 1979.

MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, n.7, p.813-833, 2002.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.46, n.1, p.131-150, 1999.

MURAKAMI, Y. **Stress intensity factors handbook**. New York: Pergamon Press, 1987.

MUSKHELISHVILI, N.I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Leiden: Noordhoff, 1953.

NALLATHAMBI, P.; KARIHALOO, B.L. Determination of specimen-size independent fracture toughness of plain concrete. **Magazine of Concrete Research**, v.38, n.135, p.67-76, 1986.

OLIVEIRA, H.L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. 132p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

OLIVEIRA, H.L.; LEONEL, E.D. Dual BEM Formulation Applied to Analysis of Multiple Crack Propagation. **Key Engineering Materials**, v.560, p.99-106, 2013.

_____. Cohesive Crack Propagation Analysis Using a Non-Linear Boundary Element Formulation. **Proceedings of 10th World Congress on Computational Mechanics**, p.1-19, 2014.

OLIVER, J. Modelling Strong Discontinuities in Solid Mechanics via Strain Softening Constitutive Equations. Part 1: Fundamentals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.39, n.21, p.3575-3600, 1996a.

OLIVER, J. Modelling Strong Discontinuities in Solid Mechanics via Strain Softening Constitutive Equations. Part 2: Numerical Simulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.39, n.21, p.3601-3623, 1996b.

OLSON, J.E.; TALEGHANI, A. D. Modeling simultaneous growth of multiple hydraulic fractures and their interaction with natural fractures. **Spe Hydraulic Fracturing Technology Conference**, p.1-7, 2009.

PALMGREN, A. Die Lebensdauer von Kugellagern. **VDI-Zeitschrift**. v.68, p.339-341, 1924.

PARIS, P.; ERDOGAN, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. **Journal of Basic Engineering**, v.85, n.4, p.528-533, 1963.

PARIS, P.C.; SIH, G.C. Stress analysis of cracks. **In: ASTM (American Society for Testing and Materials). Fracture Toughness Testing and its Applications**, ASTM STP 381, p.30-83, Philadelphia, 1965.

PERKINS, T.K.; KERN, L.R. Widths of Hydraulic Fractures. **Journal of Petroleum Technology**, v.13, n.9, p.937-949, 1961.

PETERSSON, P.-E. **Crack Growth and Development of Fracture Zone in Plain Concrete and Similar Materials**. Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1981.

PINEAU, A.; BATHIAS, C. Introduction to Fatigue: Fundamentals and Methodology. **In:** BATHIAS, C.; PINEAU, A. (eds.). **Fatigue of Materials and Structures**. London: ISTE, 2010.

PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G.V.; GÓMEZ, F.J.; CENDÓN, D.A.; ARBILLA, I. Generalizations and specializations of cohesive crack models. **Engineering Fracture Mechanics**, v.70, n.14, p.1759-1776, 2003.

PLUMBRIDGE, W. J. Review: Fatigue-crack propagation in metallic and polymeric materials. **Journal of Materials Science**, v.7, n.8, p.939-962, 1972.

PORTELA, A. **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**. 1992. Tese – Wessex Institute of Technology, Universidade de Portsmouth, Portsmouth, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, n.6, p.1269-1287, 1992.

_____. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. **Computers and Structures**, v.46, n.2, p.237-247, 1993.

QIAN, J.; FATEMI, A. Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey. **Engineering Fracture Mechanics**, v.55, n.6, p.969-990, 1996.

RABCZUK, T. Computational Methods for Fracture in Brittle and Quasi-Brittle Solids: State-of-the-Art Review and Future Perspectives. **Isrn Applied Mathematics**, v.2013, p.1-38, 2013.

RANKINE, W.M. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles; and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v.2, n.1843, p.105-107, 1843.

RASHID, Y.R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear Engineering and Design**, v.7, n.4, p.334-344, 1968.

REED, R. P.; SMITH, J. H.; CHRIST, B. W. The economic effects of fracture in the United States: Part 1. **National Bureau of Standards Special Publication**, n.647-1, 1983.

RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.35, n.2, p.379-386, 1968.

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.25, n.1, p.83-95, 1967.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, v. 4, n. 12, p.1161-1179, 1968

ROKHLIN, V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. **Journal of Computational Physics**, v.60, n.2, p.187-207, 1985.

RYBICKI, E.F.; KANNINEN, M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. **Engineering Fracture Mechanics**, v.9, n.4, p.931-938, 1977.

SALEH, A.L. **Crack growth in Concrete using Boundary Elements**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1997.

SALEH, A.L.; ALIABADI, M.H. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.51, n.4, p.533-545, 1995.

SANFORD, R.J. **Principles of Fracture Mechanics**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.

SCHIJVE, J. Fatigue of Structures and Materials in the 20th Century and the State of the Art. **Materials Science**, v.39, n.3, p.307-333, 2003.

_____. **Fatigue of Structures and Materials**. 2ed. Dordrecht: Springer, 2009.

SCHÜTZ, W. A history of fatigue. **Engineering Fracture Mechanics**, v.54, n.2, p.263-300, 1996.

SCOTT, M.A.; SIMPSON, R.N.; EVANS, J.A.; LIPTON, S.; BORDAS, S.P.A.; HUGHES, T.J.R.; SEDERBERG, T.W. Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.254, p.197-221, 2013.

SHI, Z. **Crack Analysis in Structural Concrete: Theory and Applications**. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2009.

SIH, G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. **International Journal of Fracture**, v.10, n.3, p.305-321, 1974.

SIH, G.C.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. **International Journal of Fracture Mechanics**, v.1, n.3, p.189-203, 1965.

SIMPSON, R.N.; BORDAS, S.P.A.; TREVELYAN, J.; RABCZUK, T. A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.209-212, p.87-100, 2012.

SMITH, E. A comparison of the Jenq-Shah two-parameter procedure and the cohesive zone procedure for predicting the failure of large concrete structures. **Advanced Cement Based Materials**, v.2, n.3, p.85-90, 1995.

SMITH, M.B.; MONTGOMERY, C.T. **Hydraulic Fracturing**. Boca Raton: CRC Press, 2015.

SMITH, R.A. The Versailles railway accident of 1842 and the first research into metal fatigue. In: KITAGAWA, H.; TANAKA, T (eds.). **Fatigue 90**. v. IV, p.2033-2041. Birmingham: Materials and Component Engineering Publications, 1990.

SNEDDON, I.N. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. **Proceedings Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v.187, n.1009, p.229-260, 1946.

SNYDER, M.D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**, v.11, n.2, p.315-328, 1975.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H. Anisotropy analysis of cracks in composites laminates using the boundary element method. **Composite Structures**, v.31, n.3, p.229-233, 1995.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. Anisotropic analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.49, n.2, p.213-224, 1994.

SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. **Il Nuovo Cimento**, v.17, p.140-148, 1885.

SRRAWLEY, J.E.; BROWN, F.W. **Fracture Toughness Test**. NASA Technical Note DN-2599, Washington D.C., 1965.

SRRAWLEY, J.E. **Wide range stress intensity factor expressions for ASTM E 399 standard fracture toughness specimens**. NASA Technical Memorandum TM-X-71881, Cleveland, 1976.

STANOLIND OIL & GAS CO (Tulsa, Oklahoma, EUA). Joseph B. Clark. **Treatment of wells**. US2596844, 31 dez. 1949, 13 mai. 1952.

STANOLIND OIL & GAS CO (Tulsa, Oklahoma, EUA). Riley F. Ferris. **Fracturing formations in wells**. US2596843, 31 dez. 1949, 13 mai. 1952.

STANOLIND OIL & GAS CO (Tulsa, Oklahoma, EUA). George C. Howard. **Well completion process**. US2667224, 29 jun. 1949, 26 jan. 1954.

STOLARSKA, M.; CHOPP, D.L.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.51, n.8, p.943-960, 2001.

SURESH, S. **Fatigue of Materials**. 2ed. New York: Cambridge University Press, 1998.

SWARTZ, S.E.; JONES, G.L.; HU, K-K. Compliance monitoring of crack growth in concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v.104, n.4, p.789-800, 1978.

TADA, H.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. **The stress analysis of cracks handbook**. 3ed. New York: ASME Press, 2000.

TAN, C.L.; GAO, Y.L. Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.36, n.6, p.919-932, 1990.

TANG, T.; SHAH, S.P.; OUYANG, C. Fracture Mechanics and Size Effect of Concrete in Tension. *Journal of Structural Engineering*, v.118, n.11, p.3169-3185, 1992.

TELLES, J. C. F.. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, n.5, p.959-973, 1987.

TELLES, J.C.F.; CASTOR, G.S.; GUIMARÃES, S. A numerical green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, n.19, p.3259-3274, 1995.

TIMOSHENKO, S.P. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. New York: McGraw-Hill, 1953.

U.S. ENERGY DEPARTMENT. Energy Information Administration. **Shale in the United States**. Dez., 2016. Disponível em: https://www.eia.gov/energy_in_brief/article/shale_in_the_united_states.cfm. Acesso em: 17/01/2017.

VENTURINI, W.S. **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia**. 1988. Tese de Livre Docência – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

WARWRZYNEK, P.; INGRAFFEA, A. **Franc2D: a two-dimensional crack propagation simulator (Version 2.7 User's Guide)**. NASA Contractor Report 4572, 1994.

WEIBULL, W. A statistical theory of strength of materials. **Ingvetensk Akad Handl**, v.151, 45p., 1939.

WELLS, G.N.; SLUYS, L.J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.50, n.12, p.2667-2682, 2001.

WESTERGAARD, H.M. Bearing pressures and cracks. **Journal of applied mechanics**, v.6, p.49-53, 1939.

WÖHLER, A. (1860). Versuche über die Festigkeit der Eisenbahnwagenachsen. **Zeitschrift für Bauwesen**, v.10, p.160-161, 1867.

XIAO, F.; HUI, C.-Y. A boundary element method for calculating the K field for cracks along a bimaterial interface. **Computational Mechanics**, v.15, n.1, p.58-78, 1994.

XIAO, Q.Z.; KARIHALOO, B.L. Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. **Fatigue Fracture Engineering Material Structure**, v.26, n.8, p.719-729, 2003.

YORK, J.O. An account of a series of experiments on the comparative strength of solid and hollow axles. **Institution of Civil Engineers, Minutes of Proceedings**, v.2, p.105-108, 1842.

YOUNG, A.; CARTWRIGHT, D.J.; ROOKE, D.P. The boundary element method for analysing repair patches on cracked finite sheets. **The Aeronautical Journal**, v.92, n.920, p.416-421, 1988.

ZEHNDER, A.T. **Fracture Mechanics**. Dordrecht: Springer, 2012.

ZI, G.; SONG, J.-H.; BUDYN, E.; LEE, S.-H.; BELYTSCHKO, T. A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v.12, n.5, p.901-915, 2004.

APÊNDICE I: FLUXOGRAMAS

I.1 Fratura frágil

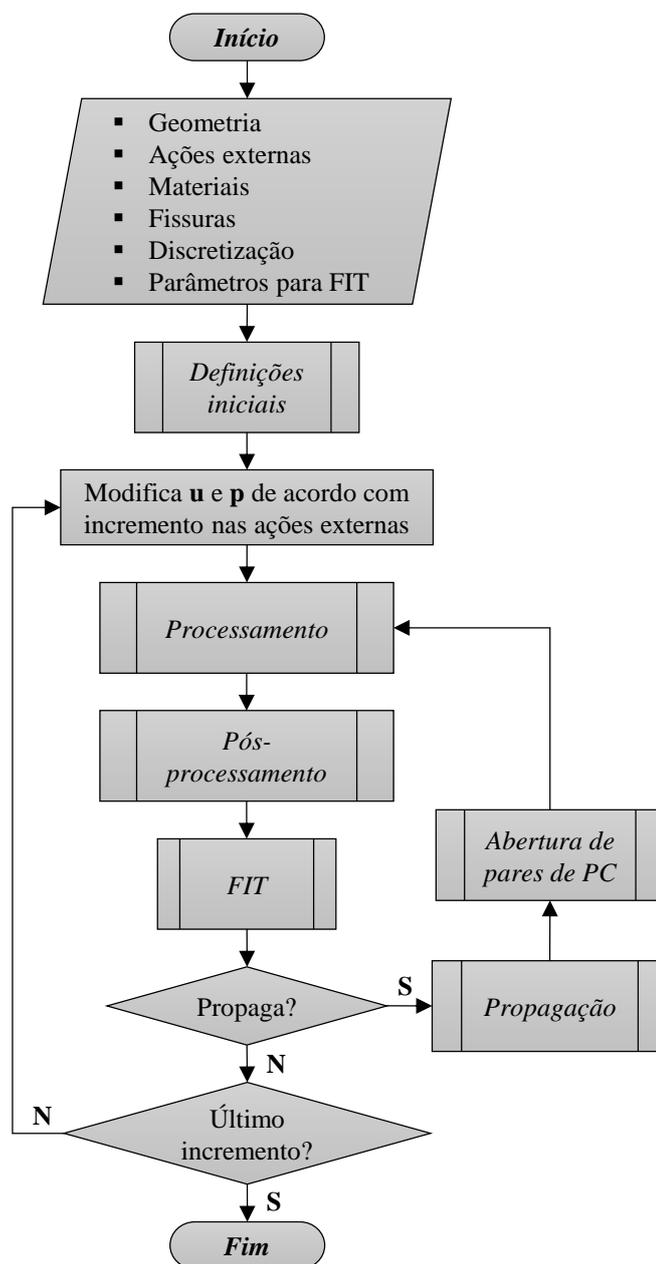


Figura I.1 - Fluxograma principal do módulo de fratura frágil.

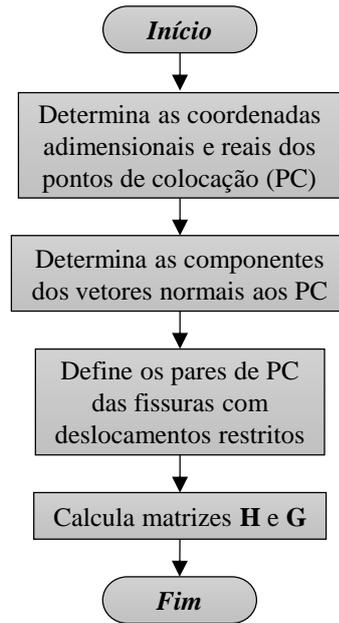


Figura I.2 - Processo definido: *Definições iniciais*.

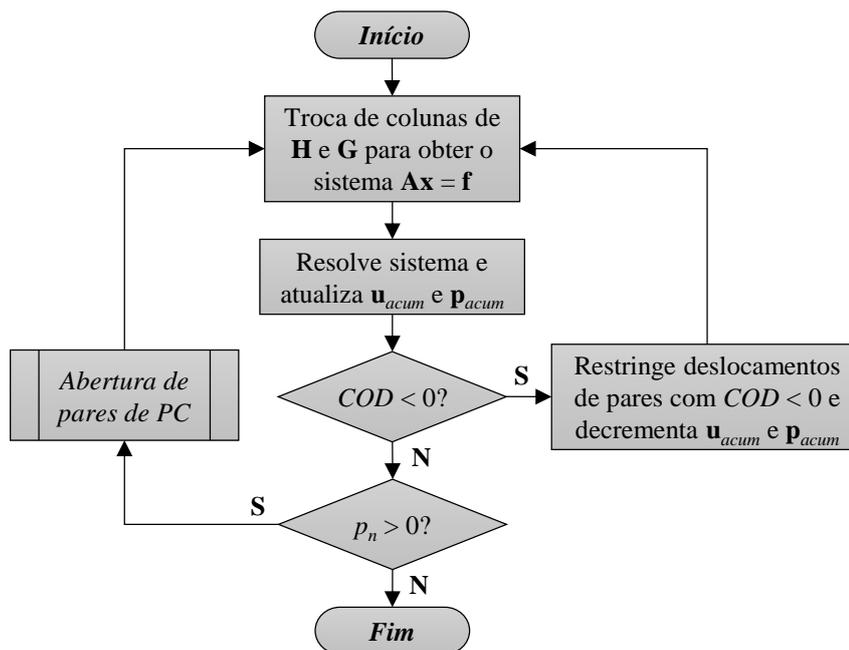


Figura I.3 - Processo definido: *Processamento*.

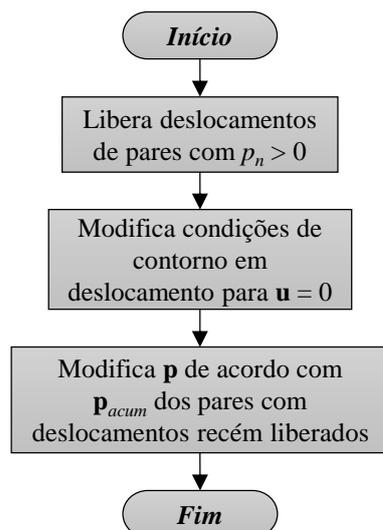


Figura I.4 - Processo definido: *Abertura de pares de PC*.

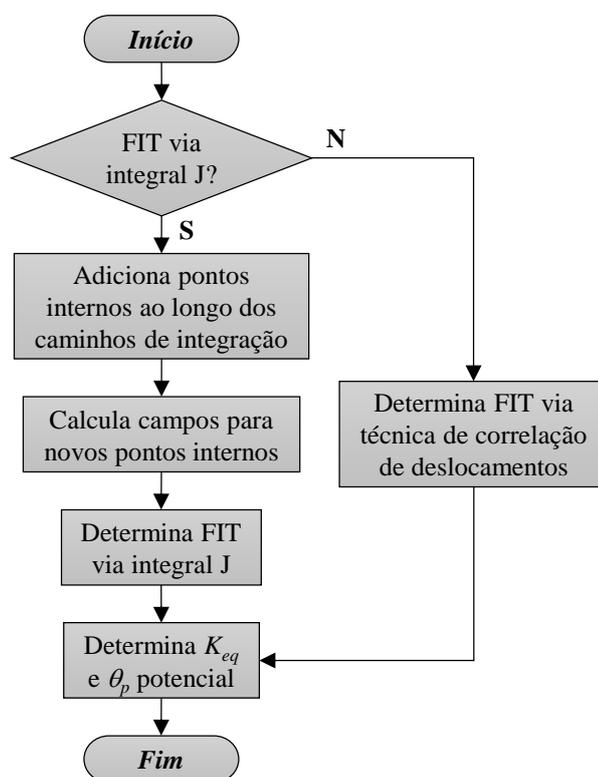
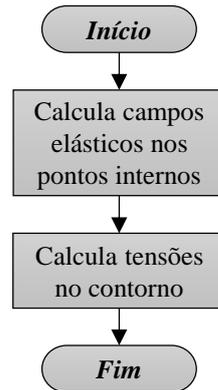
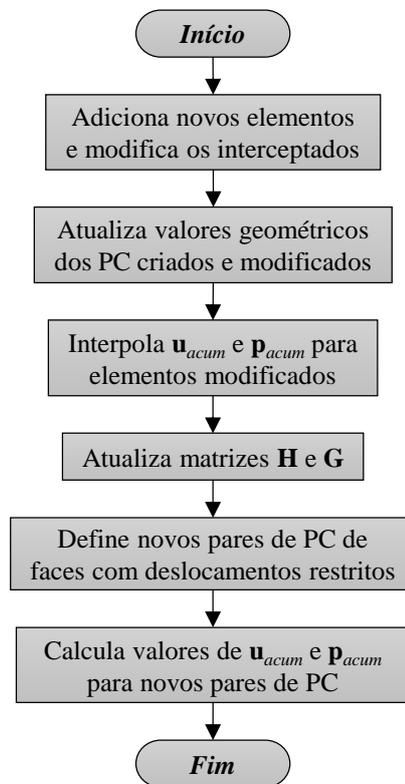


Figura I.5 - Processo definido: *FIT*.

Figura I.6 - Processo definido: *Pós-processamento*.Figura I.7 - Processo definido: *Propagação*.

I.2 Fraturamento hidráulico (*fracking*)

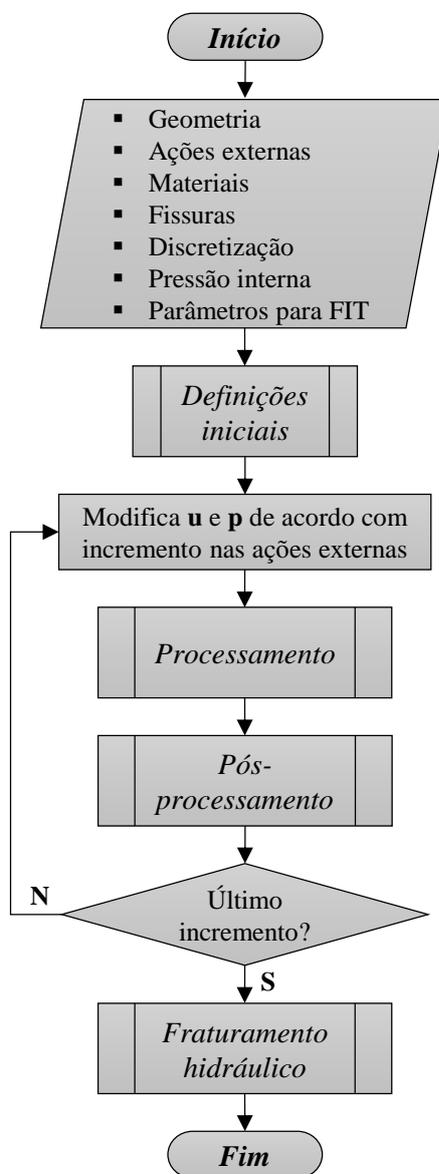


Figura I.8 - Fluxograma principal do módulo de fraturamento hidráulico.

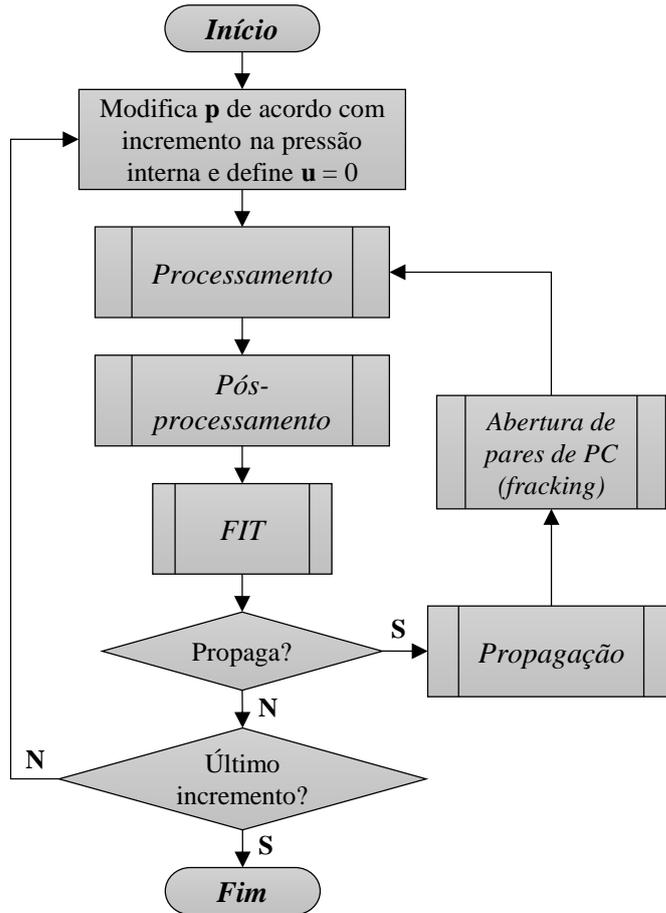


Figura I.9 - Processo definido: *Fraturamento hidráulico*.

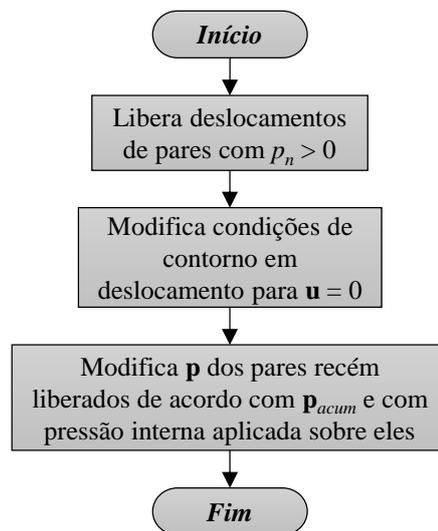


Figura I.10 - Processo definido: *Abertura de pares de PC (fracking)*.

I.3 Fadiga

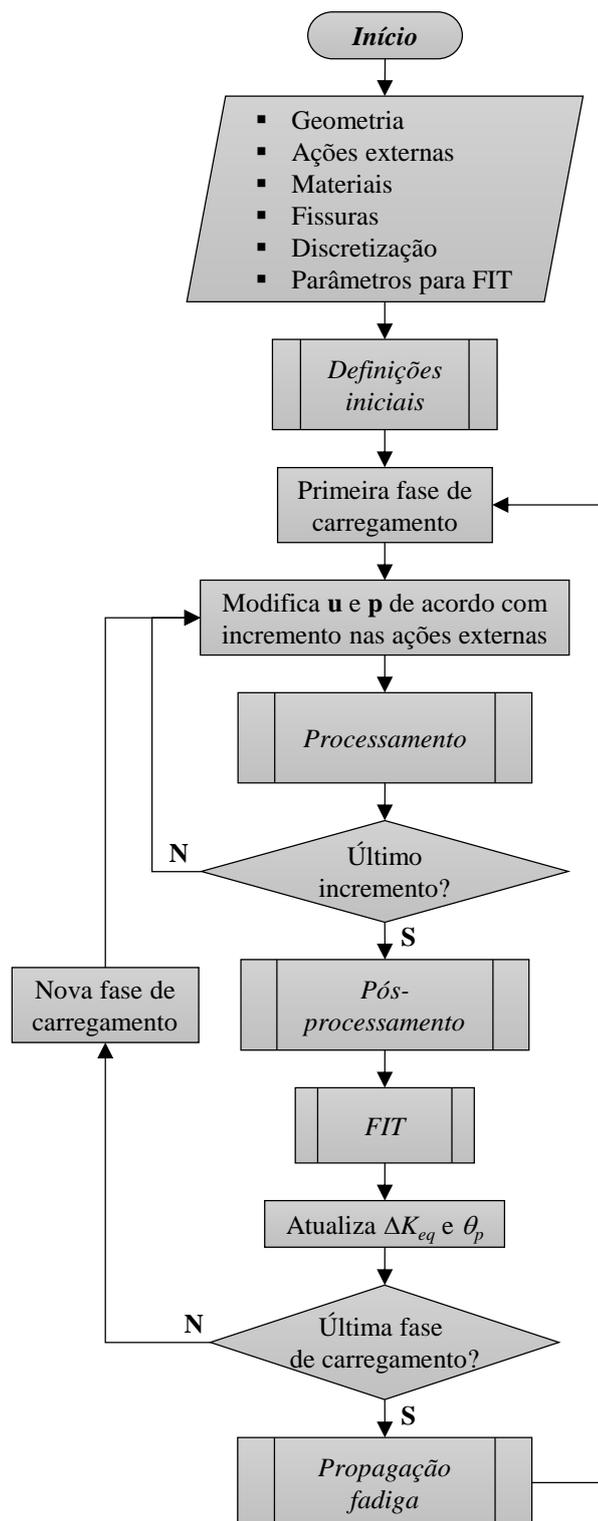
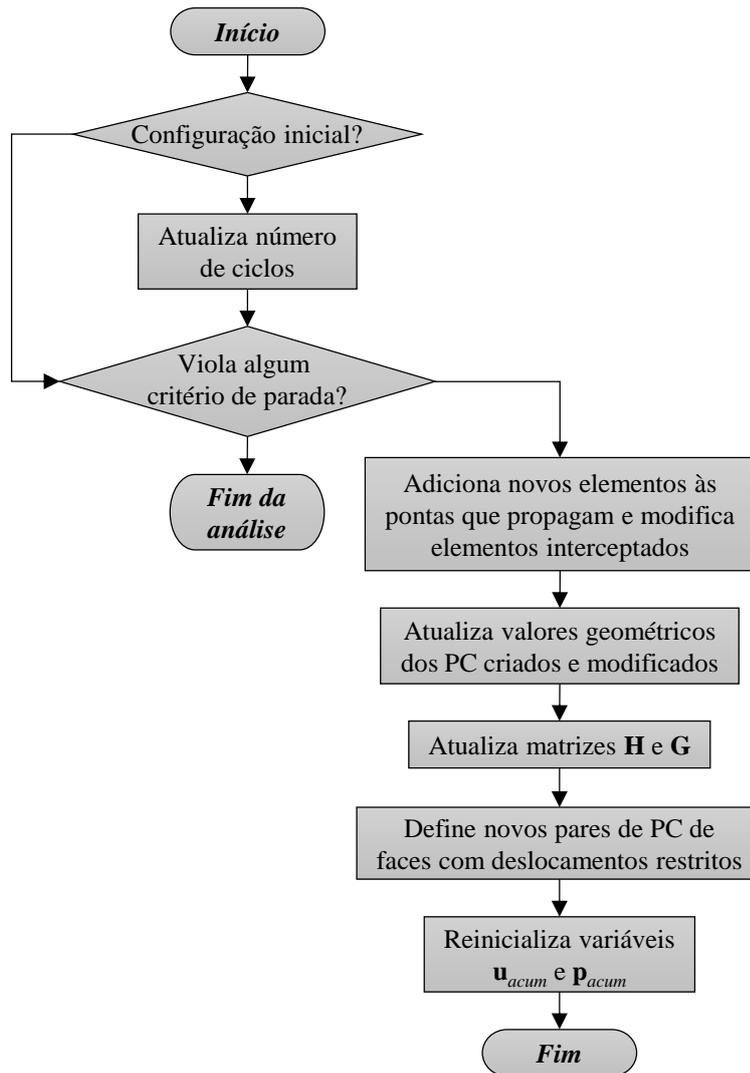


Figura I.11 - Fluxograma principal do módulo de fadiga.

Figura I.12 - Processo definido: *Propagação fadiga*.

I.4 Fratura coesiva

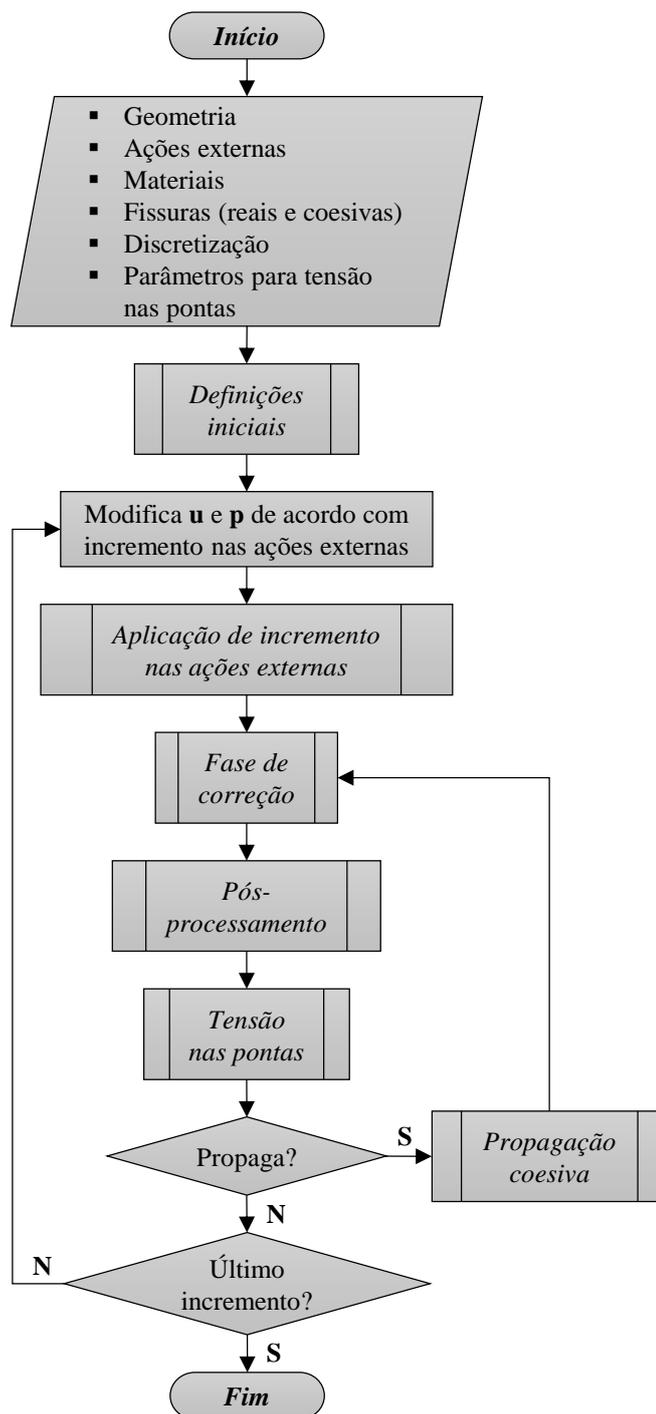


Figura I.13 - Fluxograma principal do módulo de fratura coesiva.

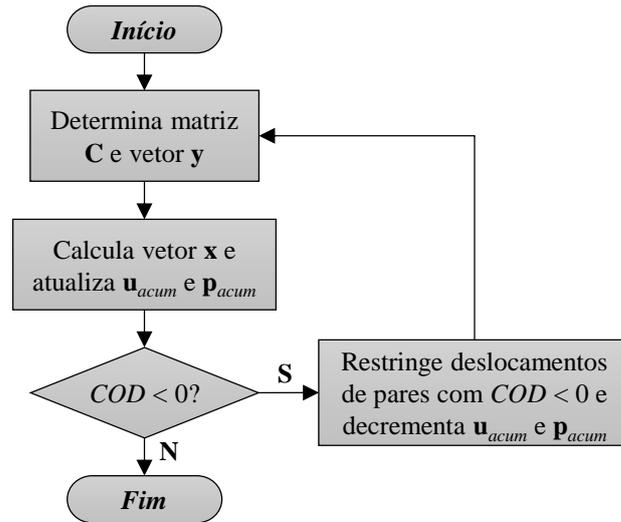


Figura I.14 - Processo definido: *Aplicação de incremento nas ações externas.*

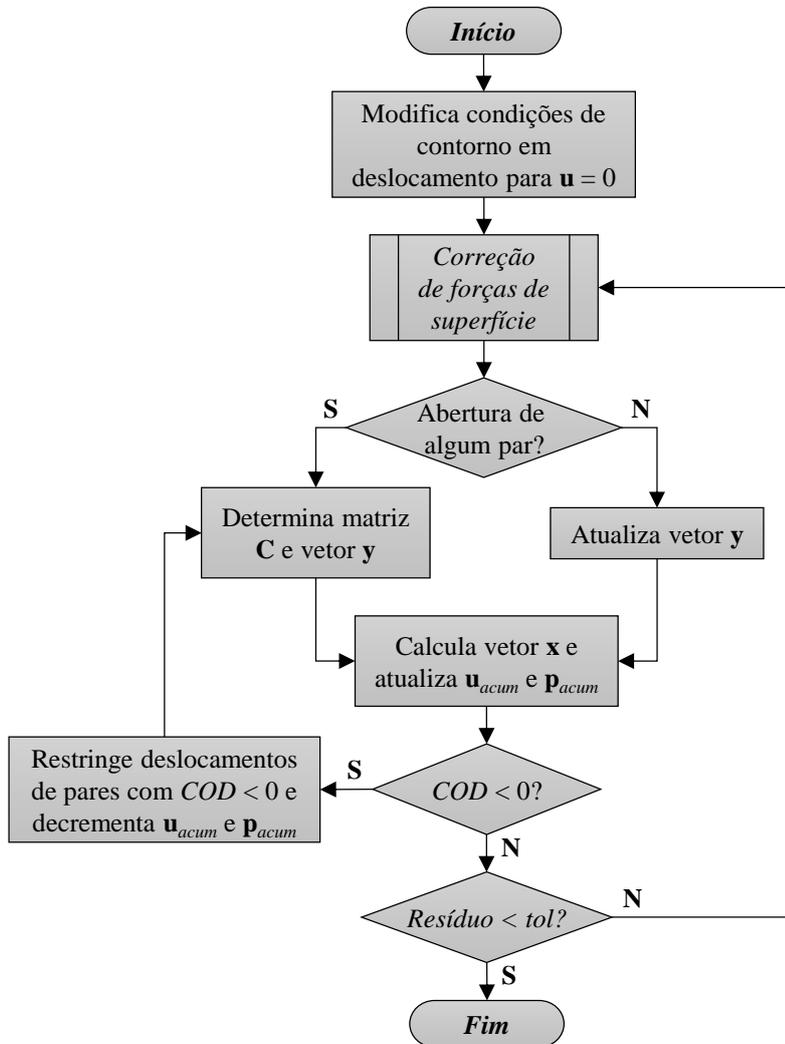


Figura I.15 - Processo definido: *Fase de correção.*

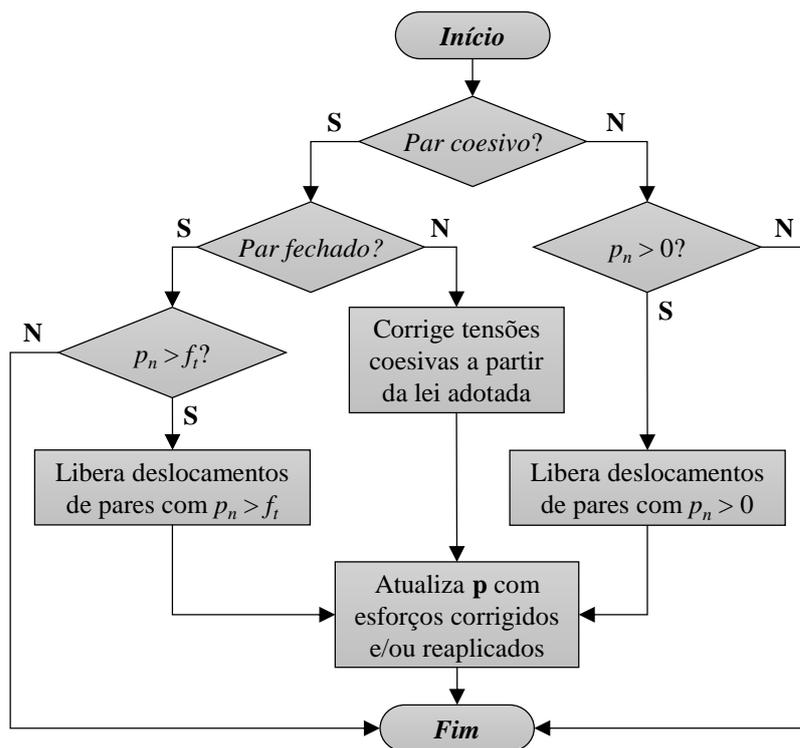


Figura I.16 - Processo definido: *Correção de forças de superfície.*

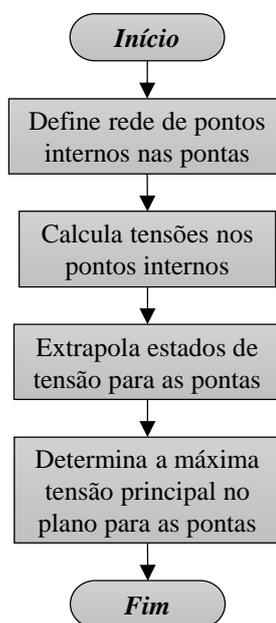
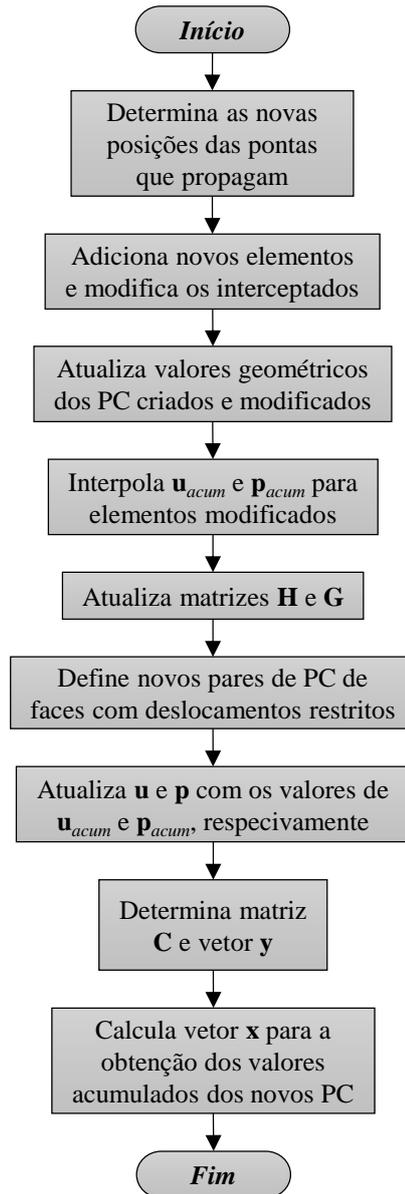


Figura I.17 - Processo definido: *Tensão nas pontas.*

Figura I.18 - Processo definido: *Propagação coesiva*.

ANEXO A: FUNDAMENTOS DA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Grande parte dos materiais, para determinados níveis de tensão, apresentam comportamento elástico, caracterizado pela propriedade de recuperação da forma e das dimensões originais quando as ações que produzem as deformações deixam de atuar. A análise de corpos elásticos submetidos a ações externas é realizada pela Teoria da Elasticidade. Nela, o meio é assumido como contínuo, no qual toda porção do espaço é preenchido por material. Dessa forma, um elemento com dimensões infinitesimais é representativo de todo o domínio.

Apesar de em muitos casos ser necessário o conhecimento do comportamento dos materiais além da sua fase elástica, os conceitos da Teoria da Elasticidade ainda possuem grande valia por fornecerem subsídios para teorias inelásticas mais complexas. Alguns desses conceitos serão expostos nos itens que se seguem e compõem a base para as formulações do MEC e da Mecânica da Fratura que são utilizadas neste trabalho.

A.1 Estado de tensão

Quando um sólido, suficientemente vinculado para impedir movimentos de corpo rígido, é submetido a um conjunto de ações externas, forças internas são introduzidas na estrutura. Essas forças são resultado da interação intermolecular existente entre as partículas componentes do meio. As componentes de tensão são definidas como a relação infinitesimal das componentes de esforços internos pela área em que eles atuam. No espaço tridimensional, para determinada superfície, é comum decompor as componentes de tensão em três direções distintas: uma direção normal à superfície e duas outras tangentes a ela e ortogonais entre si. A Figura A.1 esquematiza as componentes de tensão em um ponto representado por um elemento cúbico com dimensões infinitesimais.

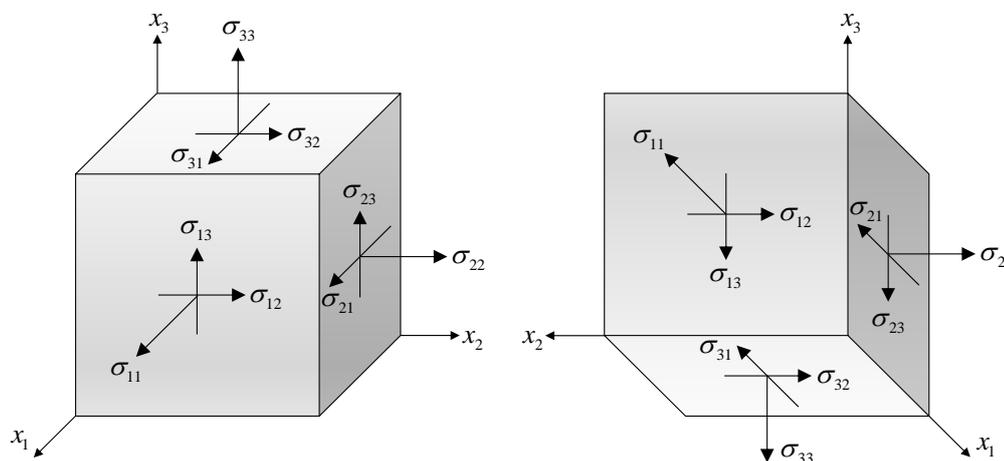


Figura A.1 - Estado de tensão em um ponto

As nove componentes de tensão em um ponto podem ser agrupadas em um tensor, chamado de tensor de tensões, conforme mostrado na Eq. (A.1).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Neste trabalho são analisados problemas bidimensionais. Nesse caso, apenas as componentes de tensão em um plano, adotado como o plano x_1 - x_2 , são de interesse. No chamado estado plano de deformação, a componente normal ao longo da direção x_3 também é de interesse, porém pode ser expressa a partir das componentes normais de tensão no plano x_1 - x_2 . A Figura A.2 representa a distribuição de tensões em um ponto infinitesimal no plano. Nela são mostradas as variações das componentes de tensão em cada uma das direções, bem como as componentes forças de volume que atuam sobre o elemento.

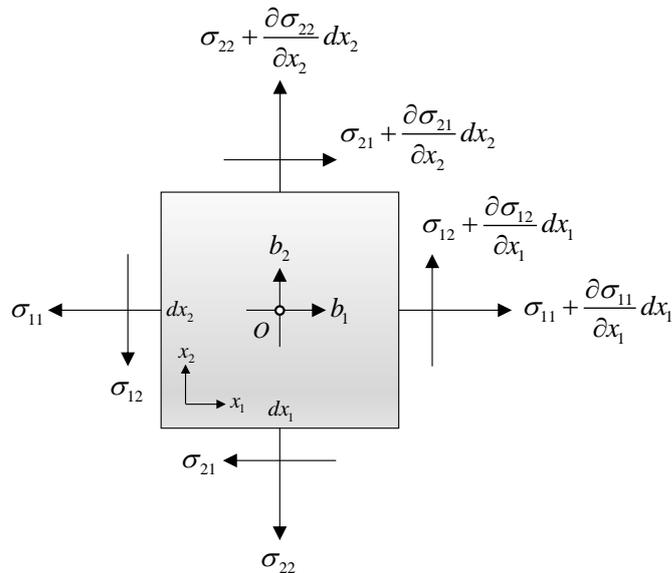


Figura A.2 - Distribuição de tensões em um ponto infinitesimal no plano.

Realizando o equilíbrio de momentos em relação ao ponto O, tem-se que:

$$\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \frac{dx_1}{2} + \sigma_{12} dx_2 \frac{dx_1}{2} - \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \frac{dx_2}{2} - \sigma_{21} dx_1 \frac{dx_2}{2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Desenvolvendo e desprezando os termos de ordem superior, obtém-se:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (\text{A.3})$$

O mesmo raciocínio pode ser estendido para o caso tridimensional, obtendo igualdades semelhantes à da Eq. (A.3) para as demais componentes de tensão de cisalhamento. Em notação indicial, essas igualdades podem ser expressas por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.4})$$

A Eq. (A.4) é conhecida como teorema de Cauchy. A partir dela, pode-se concluir que o tensor de tensões mostrado na Eq. (A.1) é simétrico. Assim, apenas seis das componentes de tensão mostradas são independentes entre si.

O equilíbrio de forças em relação ao eixo x_1 também pode ser determinado, resultando em:

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - \sigma_{11} dx_2 - \sigma_{21} dx_1 + b_1 dx_1 dx_2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Desenvolvendo, chega-se a:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + b_1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Uma expressão análoga pode ser obtida a partir do equilíbrio de forças ao longo do eixo x_2 , resultando em:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

A Eq. (A.6) e a Eq. (A.7) podem ser agrupadas por meio da notação indicial como:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (\text{A.8})$$

Utilizando a simetria do tensor de tensões, expressa pela Eq. (A.4), a Eq. (A.8) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{A.9})$$

A Eq. (A.9) representa a equação de equilíbrio em termos de tensões. A mesma relação é válida quando considerado o problema tridimensional.

Outra relação de interesse é a expressão para a determinação das componentes da força de superfície p_i em um plano cujo versor normal é \hat{n} a partir do estado de tensão no ponto. Esse problema é esquematizado pela Figura A.3 para o estado bidimensional.

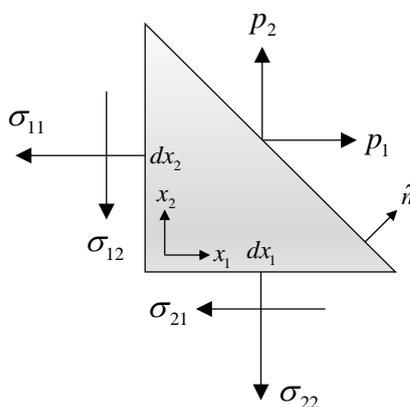


Figura A.3 - Representação das forças de superfície em um plano com versor normal \hat{n} .

Fazendo o equilíbrio de forças em relação ao eixo x_1 , tem-se que:

$$p_1 \frac{dx_1}{n_2} - \sigma_{11} \frac{dx_1 n_1}{n_2} - \sigma_{21} dx_1 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Simplificando e desenvolvendo, obtém-se:

$$p_1 = \sigma_{11} n_1 - \sigma_{21} n_2 \quad (\text{A.11})$$

Fazendo o equilíbrio de forças na direção x_2 chega-se a uma expressão semelhante, dada por:

$$p_2 = \sigma_{12} n_1 - \sigma_{22} n_2 \quad (\text{A.12})$$

A Eq. (A.11) a Eq. (A.12) podem ser agrupadas por meio da notação indicial como:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A.13})$$

onde para a segunda igualdade foi utilizado o teorema de Cauchy. A Eq. (A.13) é chamada de fórmula de Cauchy e fornece as componentes de forças de superfície para um plano cujo versor normal é \hat{n} .

A.2 Estado de deformação

As deformações em um corpo contínuo estão associadas ao campo de deslocamento. Neste tópico serão mostradas as relações que relacionam as duas grandezas para o caso de pequenas deformações, deslocamentos e giros. As deformações determinadas a partir dessas restrições são conhecidas como deformações lineares.

Seja o elemento infinitesimal bidimensional mostrado na Figura A.4, considerado inicialmente retangular e cujas arestas formam um ângulo reto entre si. Na configuração deformada, os vértices A , B , C e D passam a ocupar as posições A' , B' , C' e D' , respectivamente, preservando a continuidade do meio. Os ângulos existentes entre as arestas não são mais retos, porém a variação é pequena, muito inferior à unidade angular.

Os segmentos AB e AC , na configuração deformada, passam a ocupar, respectivamente, a posição dos segmentos $A'B'$ e $A'C'$, cujos comprimentos são dados por:

$$A'B' = \frac{1}{\cos(\gamma_1)} \left[\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - (u_1 - dx_1) \right] \cong dx_1 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$A'C' = \frac{1}{\cos(\gamma_2)} \left[\left(u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \right) - (u_2 - dx_2) \right] \cong dx_2 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (\text{A.15})$$

onde o fato de γ_1 e $\gamma_2 \ll 1$ foi utilizado.

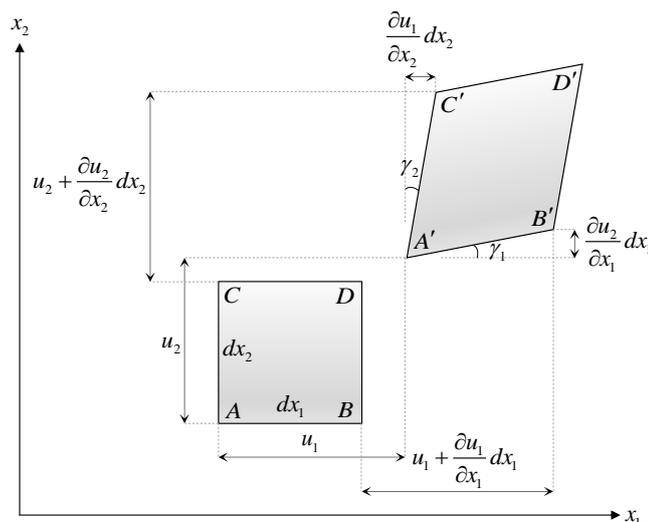


Figura A.4 - Representação da deformação de um elemento infinitesimal no espaço bidimensional.

As deformações longitudinais em relação aos eixos x_1 e x_2 são obtidas a partir da variação relativa dos comprimentos de reta AB e AC em relação ao comprimento inicial. Elas são calculadas por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{1}{dx_1} \left[dx_1 \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) - dx_1 \right] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} \quad (\text{A.16})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{1}{dx_2} \left[dx_2 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - dx_2 \right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = u_{2,2} \quad (\text{A.17})$$

Já a distorção angular corresponde à variação do ângulo formados pelos segmentos AB e AC , ou seja:

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (\text{A.18})$$

Porém, sabendo que $\gamma_1 \ll 1$, pode-se escrever que:

$$\gamma_1 \cong \text{sen}(\gamma_1) = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{A'B'} = \frac{u_{2,1} dx_1}{dx_1 (1 + u_{1,1})} \quad (\text{A.19})$$

Utilizando a hipótese de pequenas deformações, tem-se que $u_{1,1} = \varepsilon_{11} \ll 1$ e, portanto:

$$\gamma_1 \cong u_{2,1} \quad (\text{A.20})$$

Da mesma forma, para γ_2 :

$$\gamma_2 \cong u_{1,2} \quad (\text{A.21})$$

Substituindo a Eq. (A.20) e a Eq. (A.21) na Eq. (A.18), tem-se que a distorção angular é expressa por:

$$\gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} \quad (\text{A.22})$$

A semidistorção, ou distorção matemática, pode ser definida como uma medida de deformação angular da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} \quad (\text{A.23})$$

Dessa forma, pela própria definição das semidistorções, nota-se que:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad (\text{A.24})$$

Ou seja, da mesma forma que o tensor de tensões, o tensor de deformações lineares também é simétrico. A mesma ideia pode ser expandida para o caso tridimensional.

A Eq. (A.16), a Eq. (A.17) e a Eq. (A.23) podem ser expressas por meio da notação indicial, resultando em uma relação geral para as medidas lineares de deformação dada por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (\text{A.25})$$

A.3 Relações constitutivas elásticas lineares

Nos tópicos anteriores foram obtidas expressões que envolvem tensões e deformações de forma isolada. Todavia, quando um corpo elástico está sujeito a um estado de tensão, a ele também está associado um estado de deformação. Assim, pode-se notar que as tensões e deformações estão correlacionadas. As relações que exprimem as tensões em função das deformações dependem das propriedades do material constituinte da estrutura e, portanto, são chamadas de relações constitutivas. Neste item serão apresentadas as relações lineares entre tensão e deformação para um material isotrópico, conhecidas como lei de Hooke generalizada.

A lei de Hooke generalizada pode ser expressa a partir da notação indicial como:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.26})$$

onde o tensor de quarta ordem D_{ijkl} é composto pelas constantes de elásticas e corresponde à matriz de rigidez do material. Esse tensor admite inversa e, portanto, a lei de Hooke generalizada pode também ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{A.27})$$

O tensor C_{ijkl} é denominado tensor de compilância e corresponde à matriz de flexibilidade do material. Por serem tensores de quarta ordem, os tensores D_{ijkl} e C_{ijkl} apresentam 81 componentes no espaço tridimensional. Todavia, pode-se mostrar por meio de critérios energéticos e com o uso da simetria do tensor de tensão e de deformação, que apenas 21 das componentes elásticas são independentes para o caso anisotrópico geral. No caso de materiais isotrópicos, existem apenas duas constantes elásticas independentes: o módulo de

elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν . Para esses materiais, as deformações lineares podem ser expressas a partir das tensões a partir da seguinte equação:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.28})$$

onde $i, j, k = 1, 2, 3$, δ_{ij} é o delta de Kronecker e μ é o módulo de elasticidade transversal dado por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.29})$$

Escrevendo as tensões em termos da tensão, pode-se obter a seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.30})$$

onde λ é chamada de constante de Lamé e é dada por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{A.31})$$

A.4 Estados planos

Certos problemas tridimensionais, dependendo da geometria do corpo em análise, das ações atuantes e das condições de contorno, podem ser simplificados em problemas planos. Tais problemas são denominados como estado plano de deformação (EPD) ou estado plano de tensão (EPT).

O EPD ocorre em estruturas que apresentam uma dimensão muito superior às demais. Nesses casos, a análise é realizada em uma seção transversal do corpo perpendicular à maior dimensão. As deformações fora do plano de análise são restringidas e, portanto, são admitidas nulas. Assim, tem-se que $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Para materiais isotrópicos, as componentes de deformação e de tensão ainda podem ser determinadas a partir da Eq. (A.28) e da Eq. (A.30), respectivamente. Já a componente normal ao plano x_1 - x_2 pode ser expressa em função das tensões normais no plano por:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{A.32})$$

Já o EPT ocorre em estruturas que possuem uma dimensão muito menor que as demais. O plano que contém as maiores dimensões constitui o plano de análise. Todas as componentes de tensão fora deste plano são consideradas nulas. Todavia, essa hipótese é uma aproximação, uma vez que contraria as relações de compatibilidade que existem entre as deformações. No caso de meios isotrópicos, as deformações podem ser obtidas pela Eq. (A.28). Todavia, a Eq. (A.30) não é mais válida para obtenção das componentes de tensão por causa da violação

das relações de compatibilidade. As tensões nesse caso são obtidas a partir da seguinte expressão.

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.33})$$

para $i, j, k = 1, 2$. Observa-se que há uma mudança apenas na constante de Lamé em relação à Eq. (A.30), que agora passa a ser dada por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad (\text{A.34})$$

A.5 Equação de Navier

A equação de Navier representa a equação de equilíbrio expressa em termos de deslocamento para materiais isotrópicos com comportamento elástico-linear. É a partir dela que são obtidas as soluções fundamentais do problema elastostático para meio isotrópico que são utilizadas na formulação do MEC.

A lei de Hooke para materiais isotrópicos (Eq. (A.30)) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \quad (\text{A.35})$$

Derivando esta expressão em relação à direção x_j , tem-se que:

$$\sigma_{ij,j} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij,j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk,j}\delta_{ij}\right) \quad (\text{A.36})$$

Derivando a Eq. (A.25) em relação a x_j , substituindo na Eq. (A.36) e desenvolvendo chega-se a:

$$\sigma_{ij,j} = \mu\left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right) \quad (\text{A.37})$$

Substituindo a Eq. (A.37) na equação de equilíbrio em tensões, Eq. (A.9), obtém-se:

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (\text{A.38})$$

A Eq. (A.38) é chamada de Equação de Navier ou equação de equilíbrio em termo dos deslocamentos.

A.6 Função de tensão de Airy

Sejam as funções escalares ϕ e V tais que as componentes de tensão e de forças de volume no plano sejam definidas como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \phi_{,22} + V \\
\sigma_{22} &= \phi_{,11} + V \\
\sigma_{12} &= -\phi_{,12} \\
b_1 &= -V_{,1} \\
b_2 &= -V_{,2}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

A função ϕ é chamada função de tensão de Airy. Substituindo essas expressões na equação de equilíbrio em tensões (Eq. (A.9)) verifica-se que elas são satisfeitas.

A partir da lei de Hooke generalizada (Eq. (A.28)) escrita para o EPT, e das relações em na Eq. (A.39) assumindo $V = 0$, as componentes de deformação podem ser expressas em termos da função de tensão de Airy como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \phi_{,22} - \frac{\nu}{E} \phi_{,11} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \phi_{,11} - \frac{\nu}{E} \phi_{,22} \\
2\varepsilon_{12} &= \frac{1}{\mu} \phi_{,12}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Já as expressões para a determinação das deformações lineares, definidas pela Eq. (A.25), podem ser reunidas a partir da eliminação dos deslocamentos de forma a obter a seguinte relação de compatibilidade de deformações:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \tag{A.41}$$

Por meio das relações mostradas na Eq. (A.40) e na Eq. (A.41) é possível escrever a equação diferencial que rege o problema elástico-linear isotrópico sem forças de volume em termos da função de tensão de Airy:

$$\nabla^4 \phi = \phi_{,2222} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,1111} = 0 \tag{A.42}$$

A Eq. (A.42) indica que a função de tensão de Airy satisfaz a equação biarmônica homogênea para o problema analisado. Tomando uma função de tensão de Airy que satisfaça Eq. (A.42), as relações de deformação e deslocamento e as relações constitutivas também são satisfeitas. Ademais, como já comentado, as componentes de tensão definidas conforme as expressões da Eq. (A.39) também satisfazem as condições de equilíbrio. Dessa forma, o emprego da função de tensão de Airy contempla todas as relações do problema elástico-linear. A dificuldade no tratamento dos problemas da elasticidade a partir dessa abordagem passa a ser a definição da função de Airy que representa o caso analisado.

ANEXO B: SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Como mostrado no item 2.1, a formulação integral de contorno do problema elastostático pode ser obtida a partir do teorema da reciprocidade de Betti (1872). Esse teorema estabelece que para um corpo com comportamento elástico-linear o trabalho realizado pelos esforços em um estado elastostático (1) assumindo o campo de deformações de um estado elastostático (2) é igual ao trabalho realizado pelos esforços do estado (2) tomando o campo de deformações do estado (1).

Na derivação do equacionamento utilizado no MEC, o estado elastostático (1) corresponde ao problema real, cujos campos de tensão e deformação se deseja determinar por completo. Já o estado (2) é tomado como um problema virtual, que não existe na prática, porém possui seus efeitos conhecidos. Tal problema é usualmente adotado como o de uma força concentrada unitária atuando em um meio infinito que apresenta as mesmas propriedades materiais do corpo avaliado no problema real. Os campos de deslocamentos, tensões, deformações e forças de superfície gerados pela aplicação de força concentrada unitária em meios isotrópicos são conhecidos e recebem o nome de soluções fundamentais. A partir dessas soluções e do teorema da reciprocidade de Betti, os campos incógnitos do problema real podem ser aproximados por meio do MEC. Na sequência serão obtidas as soluções fundamentais para o problema elastostático bidimensional para materiais isotrópicos obtidas por Lord Kelvin.

Seja a equação de Navier, apresentada pela Eq. (A.38), que representa as equações de equilíbrio escritas em função das componentes de deslocamento. No problema virtual, a força de volume corresponde à força concentrada unitária aplicada no ponto genérico f , chamado de ponto fonte, ao longo da direção do versor e_i e pode ser escrita como:

$$b_i = \Delta^f e_i \quad (\text{B.1})$$

sendo Δ^f a função delta de Dirac aplicada sobre o ponto f .

A equação de Navier pode ser resolvida a partir da utilização dos vetores de Galerkin. As componentes de deslocamento podem ser escritas em função desses vetores por meio de:

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (\text{B.2})$$

onde G_j representa as componentes do vetor de Galerkin.

Substituindo a Eq. (B.1) e a Eq. (B.2) na Eq. (A.38) e desenvolvendo, chega-se a:

$$G_{i,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_i = 0 \quad (\text{B.3})$$

que pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_i = 0 \quad (\text{B.4})$$

onde $\nabla^2(\cdot)$ é o operador de Laplace e $\nabla^2(\nabla^2(\cdot))$ representa o operador biharmônico.

Fazendo a componente F_i de um vetor \mathbf{F} igual ao operador de Laplace aplicado sobre a componente G_i do vetor de Galerkin, pode-se reescrever (B.4) como:

$$\nabla^2 F_i + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_i = 0 \quad (\text{B.5})$$

Uma solução possível para a Eq. (B.5) no caso de problemas bidimensionais é dada por:

$$F_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r+1) e_i \quad (\text{B.6})$$

Outras soluções também podem ser obtidas apenas alterando o termo constante na Eq. (B.6). Todavia, essa alteração modifica apenas o termo de deslocamento de corpo rígido na solução fundamental que será obtida e, portanto, não influi na formulação do MEC em problemas nos quais as forças de volume são desconsideradas (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Assim, as componentes do vetor de Galerkin podem ser obtidas a partir da resolução da seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 G_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r+1) e_i \quad (\text{B.7})$$

Definindo as componentes G_i como:

$$G_i = G e_i \quad (\text{B.8})$$

tem-se que o escalar G deve satisfazer:

$$\nabla^2 G = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r+1) \quad (\text{B.9})$$

Resolvendo a equação de Poisson mostrada na Eq. (B.9) para o problema bidimensional, obtém-se:

$$\nabla^2 G = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln r \quad (\text{B.10})$$

Considerando o pulso unitário em cada uma das direções como independentes, pode-se escrever:

$$G_{ij} = G\delta_{ij} \quad (\text{B.11})$$

onde G_{ij} é a componente j do vetor de Galerkin em qualquer ponto campo c quando uma força concentrada é aplicada sobre o ponto fonte f na direção i .

Os deslocamentos gerados em qualquer ponto campo pela aplicação do esforço unitário em direções independentes podem ser escritos por:

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i \quad (\text{B.12})$$

onde u_{ij}^* representa o deslocamento em qualquer ponto campo na direção j quando uma força concentrada é aplicada no ponto fonte f na direção i . Esses deslocamentos são esquematizados na Figura B.1, na qual a linha tracejada indica o domínio infinito.

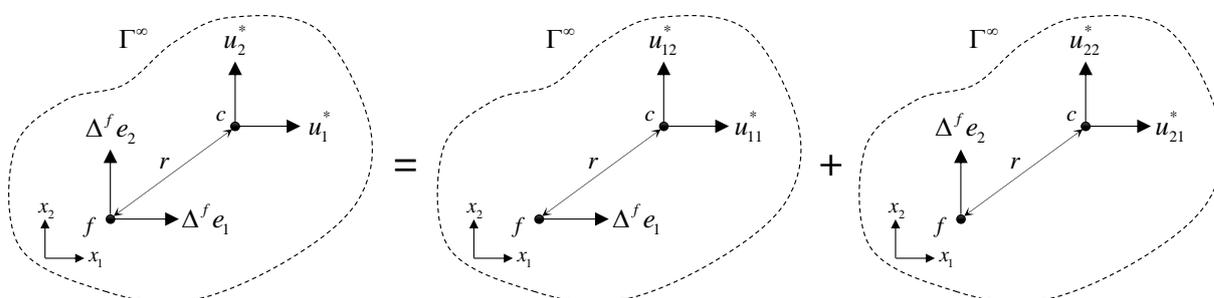


Figura B.1 - Representação das componentes da solução fundamental em deslocamentos.

Aplicando as definições de G_{ij} e u_{ij}^* , a Eq. (B.2) pode ser reescrita como:

$$u_{ij}^* = G_{ij,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,jm} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo a Eq. (B.10) e a Eq. (B.11) na Eq. (B.13), chega-se à solução fundamental em deslocamentos:

$$u_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} + \left(\frac{7-8\nu}{2} \right) \delta_{ij} \right] \quad (\text{B.14})$$

Conforme Brebbia e Dominguez (1992), o termo constante na Eq. (B.14) representa um deslocamento de corpo rígido e não altera a solução do sistema de equações de um problema sem forças de volume analisado via MEC. Portanto, tal termo pode ser desprezado e a solução fundamental fica dada por:

$$u_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (\text{B.15})$$

Todavia, caso exista forças de volume, a solução fundamental mostrada na Eq. (B.14) deve ser utilizada.

As derivadas em relação a r , que representa a distância do ponto fonte ao ponto campo, são tomadas em relação às coordenadas do ponto campo. Assim, elas podem ser expressas por:

$$r_i = \frac{x_i^c - x_i^f}{r} \quad (\text{B.16})$$

onde x_i^c e x_i^f representam as coordenadas do ponto campo do ponto fonte, respectivamente.

As demais soluções fundamentais para o problema isotrópico podem ser obtidas a partir das relações desenvolvidas no Anexo A para corpos elásticos. A Eq. (A.25) pode ser escrita em termos de soluções fundamentais como:

$$\varepsilon_{ijk}^* = \frac{u_{ji,k}^* + u_{ki,j}^*}{2} \quad (\text{B.17})$$

Derivando a solução fundamental em deslocamentos (Eq. (B.16)) em relação às coordenadas do ponto campo, substituindo na Eq. (B.17) e desenvolvendo, obtém-se:

$$\varepsilon_{ijk}^* = -\frac{1}{8\pi\mu r(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - r_{,i}\delta_{jk} \right] \quad (\text{B.18})$$

Aplicando a lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos (Eq. (A.35)), tem-se que:

$$\sigma_{ijk}^* = 2\mu \left(\varepsilon_{ijk}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{imm} \delta_{jk} \right) \quad (\text{B.19})$$

Substituindo a Eq. (B.18) na Eq. (B.19) e desenvolvendo, obtém-se:

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (\text{B.20})$$

Utilizando a fórmula de Cauchy (Eq. (A.13)) e a Eq. (B.20), obtém-se a solução fundamental em termos de forças de superfície:

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j) + \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] \right\} \quad (\text{B.21})$$

onde:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,m}n_m \quad (\text{B.22})$$

A solução fundamental D_{ijk}^* , presente na identidade de Somigliana escrita em termos da tensão interna (Eq. (2.25)) e na formulação hipersingular do MEC, é obtida a partir da solução fundamental em tensão. Para tanto, à solução apresentada na Eq. (B.20) é incorporado o sinal negativo proveniente da derivação da equação integral singular (Eq. (2.15)) em relação às coordenadas do ponto fonte (ver item 2.1). Desse modo, D_{ijk}^* fica expresso por:

$$D_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (\text{B.23})$$

Já a solução fundamental S_{ijk}^* é obtida a partir da aplicação da lei de Hooke generalizada considerando as forças de superfície no lugar dos deslocamentos. Dessa operação resulta:

$$S_{ijk}^* = -2\mu \left[\left(\frac{p_{ji,k}^* + p_{ki,j}^*}{2} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} p_{mi,m}^* \delta_{jk} \right] \quad (\text{B.24})$$

onde foi utilizada a Eq. (A.25). O sinal negativo incorporado tem a mesma origem exposta para a solução D_{ijk}^* .

Substituindo a Eq. (B.21) na Eq. (B.24) e desenvolvendo, obtém-se:

$$S_{ijk}^* = \frac{E}{4\pi r^2 (1-\nu^2)} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) r_{,k} \delta_{ij} + \nu (r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) - 4 r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (\text{B.25})$$

Pode-se notar que a ordem da singularidade aumenta de $o(\ln r)$ na solução fundamental u_{ij}^* para $o(r^{-1})$ nas soluções fundamentais p_{ij}^* e D_{ijk}^* , e para $o(r^{-2})$ na solução fundamental S_{ijk}^* .

ANEXO C: TÓPICOS DE MECÂNICA DA FRATURA

Algumas das principais relações da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) utilizadas neste trabalho são desenvolvidas no presente anexo. As demonstrações são apresentadas para enfatizar algumas das hipóteses assumidas na formulação. O equacionamento mostrado está relacionado a domínios bidimensionais com comportamento elástico-linear, isotrópico, sem força de volume e homogêneo.

As formulações da MFEL estão baseadas nos conceitos da elasticidade (ver Anexo A). Inicialmente as componentes de tensão e de deslocamento na região próxima à ponta das fissuras são desenvolvidas para os modos básicos de solitação I e II. Para tanto, é utilizada a abordagem via funções de Airy em termos de variáveis complexas, que satisfazem a equação biharmônica mostrada pela Eq. (A.42).

Na sequência, uma expressão para determinação da taxa de liberação de energia (G) é desenvolvida, chamada de integral de fechamento da fissura. Essa relação foi desenvolvida por Irwin (1957) e é útil para relacionar o balanço global de energia de Griffith (1921) com a abordagem local da MFEL via fatores de intensidade de tensão (FIT). A relação entre G e os FIT é apresentada posteriormente.

C.1 Campos tensão e de deslocamento para o problema elástico-linear

Os campos elásticos de tensão e de deslocamento para modos básicos de solitação serão obtidos por meio das metodologias encontradas em Hellan (1984) e Zehnder (2012) para o modo I e em Broek (1982) e Tada et al. (2000) para o modo II, ambas baseadas em funções de tensões complexas de Westergaard. Seja uma função de tensão Φ que satisfaz a equação biharmônica do problema elástico-linear plano (Eq. (A.42)) definida por:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \psi(z)] \quad (\text{C.1})$$

onde $\phi(z)$ e $\psi(z)$ são funções complexas analíticas da variável imaginária $z = x_1 + ix_2$, \bar{z} é o conjugado de z e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.

Para que uma função complexa f seja considerada analítica ela deve satisfazer a equação de Cauchy-Riemann escrita em forma complexa como:

$$i \frac{\partial f(z)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(z)}{\partial x_2} \quad (\text{C.2})$$

da qual decorrem as seguintes igualdades entre as partes real e imaginária:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x_2} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x_1} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x_2} = \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x_1} \quad (\text{C.4})$$

A partir da função de tensão Φ , as componentes de tensão do problema são obtidas a partir das relações mostrada pela Eq. (A.39). Substituindo a Eq. (C.1) nas expressões das componentes de tensão e desenvolvendo com a aplicação das condições de Cauchy-Riemann (Eq. (C.3) e Eq. (C.4)) e da regra da cadeia, obtém-se:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \operatorname{Re} \left[\phi' - \frac{1}{2} \bar{z} \phi'' - \frac{1}{2} \psi'' \right] \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \operatorname{Re} \left[\phi' + \frac{1}{2} \bar{z} \phi'' + \frac{1}{2} \psi'' \right] \quad (\text{C.6})$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\bar{z} \phi'' + \psi''] \quad (\text{C.7})$$

onde cada linha indica derivada em relação a z .

Já as componentes de deslocamento do problema podem ser determinadas a partir da aplicação da lei de Hooke generalizada (Eq. (A.28)) e das relações de compatibilidade entre deslocamento e deformação (Eq. (A.25)). Admitindo um estado plano de deformação, as derivadas das componentes de deslocamento u_1 e u_2 podem ser escritas em função das componentes de tensão como:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} (1-\nu) - \frac{\sigma_{22}}{2\mu} \nu \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{2\mu} (1-\nu) - \frac{\sigma_{11}}{2\mu} \nu \quad (\text{C.9})$$

As componentes de deslocamento u_1 e u_2 podem ser determinadas a partir da integração da Eq. (C.8) e da Eq. (C.9), respectivamente. Utilizando as expressões de tensões mostradas na Eq. (C.5) e na Eq. (C.6) e as relações de Cauchy-Riemann, tais componentes são obtidas por:

$$4\mu u_1 = \operatorname{Re} [\kappa \phi - \bar{z} \phi' - \psi'] \quad (\text{C.10})$$

$$4\mu u_2 = \operatorname{Im} [\kappa \phi + \bar{z} \phi' + \psi'] \quad (\text{C.11})$$

onde $\kappa = (3 - 4\nu)$ para estado plano de deformação. Para um estado plano de tensão, basta tomar $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

As funções complexas $\phi(z)$ e $\psi(z)$ que definem as componentes de tensão e deslocamento são escolhidas de acordo com as condições de contorno do problema elástico a

ser resolvido. Na sequência serão mostradas as escolhas de $\phi(z)$ e $\psi(z)$ de acordo com a abordagem feita por Westergaard (1939) para a determinação dos campos elásticos para os modos I e II de sollicitação da fissura.

Modo I:

O modo I está relacionado ao modo de sollicitação de abertura e pode ser esquematizado como o problema de uma fissura imersa em um meio infinito e sollicitada a uma ação de tração com direção perpendicular ao seu eixo, conforme mostrado pela Figura C.1a.

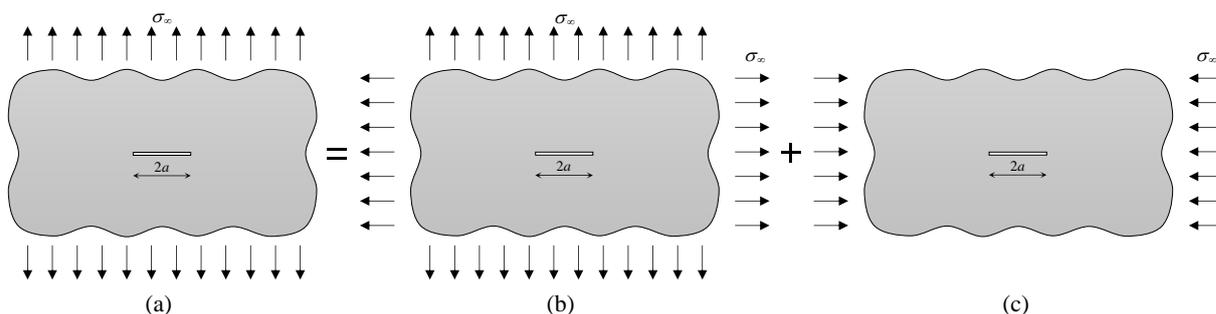


Figura C.1 - Decomposição do (a) modo I puro em (b) um estado biaxial de tração e (c) um estado uniaxial de compressão ao longo do eixo da fissura.

A condição conhecida para o modo I (abertura) pode ser escrita como:

$$\sigma_{12}(x_2 = 0) = 0 \quad (\text{C.12})$$

Essa condição pode ser imposta na Eq. (C.7) fazendo:

$$\psi'' = -z\phi'' \quad (\text{C.13})$$

Integrando a Eq. (C.13) resulta que:

$$\psi' = -z\phi' + \phi + C_I \quad (\text{C.14})$$

onde C_I é uma constante de integração.

A partir da Eq. (C.13) as componentes de tensão podem ser escritas como:

$$\sigma_{11} = \text{Re } \phi' - x_2 \text{Im } \phi'' \quad (\text{C.15})$$

$$\sigma_{22} = \text{Re } \phi' + x_2 \text{Im } \phi'' \quad (\text{C.16})$$

$$\sigma_{12} = -x_2 \text{Re } \phi'' \quad (\text{C.17})$$

Já as componentes de deslocamento podem ser escritas substituindo a Eq. (C.14) na Eq. (C.10) e na Eq. (C.11), resultando em:

$$2\mu u_1 = \frac{\kappa-1}{2} \text{Re } \phi - x_2 \text{Im } \phi' \quad (\text{C.18})$$

$$2\mu u_2 = \frac{\kappa+1}{2} \text{Im}\phi - x_2 \text{Im}\phi' \quad (\text{C.19})$$

Westergaard (1939) propôs a seguinte função analítica capaz de representar as condições de contorno do problema representado pela Figura C.1b.

$$\phi' = \frac{\sigma_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (\text{C.20})$$

onde a é o semicomprimento da fissura e σ_∞ é o carregamento aplicado.

Na verdade, Westergaard (1939) propôs, de forma equivocada, a função representada pela Eq. (C.20) para tratar o problema representado pela Figura C.1a. Todavia, a única alteração da resposta em tensões da solitação em modo I puro e da solitação com tração biaxial é um termo livre correspondente ao carregamento mostrado pela Figura C.1c para a tensão σ_{11} . Portanto, o caráter singular da resposta não é alterado, como é mostrado adiante.

A derivada da Eq. (C.20) é desejada, e é dada por:

$$\phi'' = -\frac{\sigma_\infty a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \quad (\text{C.21})$$

De forma a simplificar os cálculos, Sneddon (1946) e Irwin (1957) propuseram a seguinte mudança de coordenadas (Figura C.2):

$$z = a + re^{i\theta} \quad (\text{C.22})$$

onde r é dado por:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (\text{C.23})$$

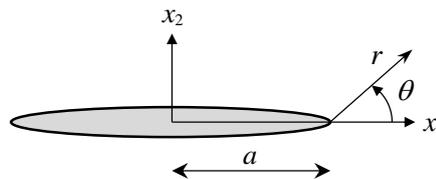


Figura C.2 - Mudança de coordenadas no plano imaginário para coordenadas polares.

Já termo $re^{i\theta}$ é chamado de relação de Euler, que pode ser expressa como:

$$re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \quad (\text{C.24})$$

Substituindo a Eq. (C.22) na Eq. (C.20) e na Eq. (C.21) e desenvolvendo, tem-se que:

$$\phi' = \frac{\sigma_{\infty} a \left(1 + \frac{r}{a} e^{i\theta}\right)}{\sqrt{2ar e^{i\theta} \left(1 + \frac{r}{a} e^{2i\theta}\right)}} \quad (\text{C.25})$$

$$\phi'' = -\frac{\sigma_{\infty} a^2}{\left[2ar e^{i\theta} \left(1 + \frac{r}{a} e^{i\theta}\right)\right]^{3/2}} \quad (\text{C.26})$$

Admitindo que $r \ll a$, ou seja, regiões próximas à ponta a uma distância inferior ao comprimento da fissura e utilizando a relação de Euler, a Eq. (C.25) e a Eq. (C.26) são reescritas como:

$$\phi' = \frac{\sigma_{\infty} \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.27})$$

$$\phi'' = -\frac{\sigma_{\infty} \sqrt{a}}{2r\sqrt{2r}} \left[\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.28})$$

Substituindo a Eq. (C.27) e a Eq. (C.28) na expressão de σ_{22} , representada pela Eq. (C.16), e sabendo que $x_2 = r \operatorname{sen}\theta$, obtém-se:

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{\infty} \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.29})$$

Aplicando a definição matemática para obter o FIT para o modo I conforme Irwin (1957):

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22}(r, 0) \sqrt{2\pi r} = \sigma_{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (\text{C.30})$$

Aplicando o mesmo procedimento para obter as demais componentes de tensão a partir da Eq. (C.15) e da Eq. (C.17) e utilizando o valor obtido para K_I na Eq. (C.30), chega-se a:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.31})$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.32})$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (\text{C.33})$$

Essas componentes de tensão estão relacionadas ao problema representado pela Figura C.1b. Sobrepondo esse caso com o problema esquematizado pela Figura C.1c para a obtenção da solução para a sollicitação em modo I puro (Figura C.1a), a única componente que sofre alteração é σ_{11} , que passa a ser expressa por:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \sigma_\infty \quad (\text{C.34})$$

O termo livre adicionado é normalmente omitido por não modificar a parcela singular de tensão e por ter sido o resultado decorrente da proposta original de Westergaard (1939).

Para a obtenção das componentes de deslocamento, inicialmente é feita a integração da expressão de ϕ' , mostrada pela Eq. (C.20):

$$\phi = \sigma_\infty \sqrt{z^2 - a^2} + C_\phi \quad (\text{C.35})$$

onde C_ϕ é uma constante de integração.

Substituindo a Eq. (C.22), desprezando a constante de integração e desenvolvendo, chega-se a:

$$\phi = \sigma_\infty \sqrt{ar \left(\frac{r}{a} e^{2i\theta} + 2e^{i\theta} \right)} \quad (\text{C.36})$$

Admitindo novamente que $r \ll a$ e empregando a relação de Euler, a Eq. (C.36) fica reescrita como:

$$\phi = \sigma_\infty \sqrt{2ar} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.37})$$

Tomando a parte real de ϕ na Eq. (C.37) e a parte imaginária de ϕ' na Eq. (C.27), substituindo na Eq. (C.18), utilizando a definição de K_I (Eq. (C.30)) e desenvolvendo, chega-se à seguinte expressão para determinação da componente de deslocamento u_1 :

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos\theta) \quad (\text{C.38})$$

Procedendo de maneira análoga, para u_2 tem-se que:

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - \cos\theta) \quad (\text{C.39})$$

Modo II:

O modo II está relacionado ao modo de solitação de deslizamento e pode ser esquematizado como o problema de uma fissura imersa em um meio infinito e solicitada a uma ação de cisalhamento (problema de Griffith em modo II), conforme mostrado pela Figura C.3.

O problema em modo II puro foi analisado por Irwin (1958) partindo da mesma metodologia baseada em funções de tensão complexas utilizada por Westergaard (1939) para a solitação em modo I.

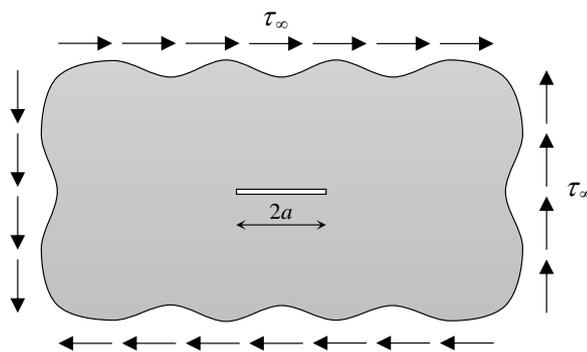


Figura C.3 - Modo II puro de solitação.

De acordo com a abordagem de Irwin (1958), a função ψ na Eq. (C.1) é escolhida como:

$$\psi(z) = -2x_2\phi(z) - \bar{z}\phi(z) \quad (C.40)$$

Assim, a função de tensão fica expressa por:

$$\Phi(z) = -x_2\phi(z) \quad (C.41)$$

Utilizando o mesmo procedimento utilizado para o modo I, as componentes de tensão para o modo II ficam expressas por:

$$\sigma_{11} = 2\text{Im}\phi' + x_2\text{Re}\phi'' \quad (C.42)$$

$$\sigma_{22} = -x_2\text{Re}\phi'' \quad (C.43)$$

$$\sigma_{12} = \text{Re}\phi' - x_2\text{Im}\phi'' \quad (C.44)$$

E as componentes de deslocamento ficam dadas por:

$$2\mu u_1 = \frac{\kappa+1}{2}\text{Im}\phi + x_2\text{Re}\phi' \quad (C.45)$$

$$2\mu u_2 = -\frac{\kappa-1}{2}\text{Re}\phi - x_2\text{Im}\phi' \quad (C.46)$$

Empregando uma função semelhante à proposta por Westergaard (1939) para análise do modo I da forma:

$$\phi' = \frac{\tau_\infty z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (C.47)$$

o problema de modo II puro de solitação pode ser resolvido. Adotando o mesmo procedimento feito para o modo I, para o modo II são obtidas as seguintes componentes de tensão:

$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (C.48)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (C.49)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{C.50})$$

onde o FIT K_{II} é definido por:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{12}(r, 0) \sqrt{2\pi r} = \tau_{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (\text{C.51})$$

Já as componentes de deslocamento ficam dadas por:

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa + 2 + \cos\theta) \quad (\text{C.52})$$

$$u_2 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (\kappa - 2 + \cos\theta) \quad (\text{C.53})$$

C.2 Métodos de energia

A abordagem energética da MFEL é uma alternativa à análise local de tensões a partir dos campos singulares desenvolvidos no item C.1. Essa abordagem foi originalmente proposta por Griffith (1921) e consiste de um balanço energético global da estrutura fissurada para determinar a energia disponível ao fraturamento. Todavia, como será apresentado neste item, existe uma equivalência entre as abordagens global e local da MFEL, uma vez que ambas estão relacionadas aos processos de fraturamento que ocorrem na região da ponta.

A energia potencial total Π de um corpo elástico sujeito a ações mecânicas pode ser escrita conforme:

$$\Pi = U - \Omega \quad (\text{C.54})$$

onde U é a energia de deformação do corpo e Ω é o trabalho realizado pelas forças externas. A energia de deformação pode ser obtida a partir da energia específica de deformação W por:

$$U = \int_V W(\varepsilon) dV \quad (\text{C.55})$$

Já a energia específica de deformação pode ser determinada a partir da resposta elástica do material (Figura C.4) e é dada por:

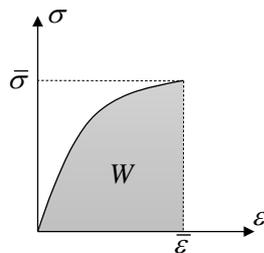


Figura C.4 - Diagrama tensão-deformação para um material elástico.

$$W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (\text{C.56})$$

Considerando as forças de volume nulas, o trabalho realizado pelas forças externas é obtido a partir de:

$$\Omega = \int_S p_i u_i dS \quad (\mathbf{b} = \mathbf{0}) \quad (\text{C.57})$$

Seja um corpo fissurado mostrado pela Figura C.5a no qual, na situação inicial, as forças de superfície prescritas no contorno S_p são dadas pelo vetor \mathbf{p}^o , enquanto os deslocamentos prescritos no contorno S_u são dados por \mathbf{u}^o . Nesse caso, o corpo apresenta campo de tensão σ^o , campo de deformação ε^o e campo de deslocamento d^o ao longo de seu volume V . Mantendo as condições de contorno prescritas em S_p e S_u , a descontinuidade é acrescida de um volume ΔV com a formação de novas superfícies Δs (Figura C.5b). Nessa nova configuração, o corpo possui campo de tensão $\bar{\sigma} = \sigma^o + \Delta\sigma$, campo de deformação $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^o + \Delta\varepsilon$ e campo de deslocamento $\bar{d} = d^o + \Delta d$ ao longo do seu volume $V - \Delta V$. Utilizando a Eq. (C.54), Eq. (C.55), Eq. (C.56) e Eq. (C.57), a diferença entre o potencial total entre as configurações em equilíbrio antes e após o crescimento da descontinuidade é dada por:

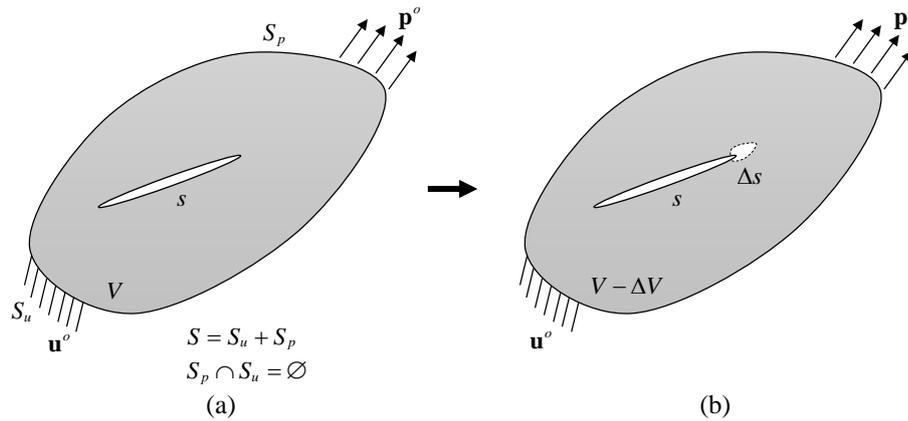


Figura C.5 - Representação de um corpo com descontinuidade material. (a) e (b) representam, respectivamente, a configuração antes e após o crescimento da descontinuidade.

$$-\Delta\Pi = \int_V W(\varepsilon^o) dV - \int_{S_i} p_i^o u_i^o dS - \int_{V-\Delta V} W(\bar{\varepsilon}) dV + \int_{S_i+\Delta S} \bar{p}_i \bar{u}_i dS \quad (\text{C.58})$$

onde \bar{u}_i e \bar{p}_i são as componentes de deslocamento e força de superfície ao longo do corpo após a propagação da descontinuidade.

A última integral do segundo membro da Eq. (C.58) pode ser reescrita como:

$$\int_{S_i+\Delta S} \bar{p}_i \bar{u}_i dS = \int_{S_i+\Delta S} \bar{p}_i u_i^o dS + \int_{S_i+\Delta S} \bar{p}_i \Delta u_i dS \quad (\text{C.59})$$

Porém, $\bar{p}_i = 0$ em ΔS pela condição de força nula nas novas faces da descontinuidade e $\bar{p}_i = p_i^o$ em S_i por serem mantidas as condições de contorno em forças de superfície durante a propagação. Portanto, a Eq. (C.59) é expressa por:

$$\int_{S_i+\Delta S} \bar{p}_i \bar{u}_i dS = \int_{S_i} p_i^o u_i^o dS + \int_{S_i} p_i^o \Delta u_i dS \quad (\text{C.60})$$

Substituindo a Eq. (C.60) na Eq. (C.58) e desenvolvendo, a variação do potencial total é obtida por:

$$-\Delta\Pi = \int_{\Delta V} W(\varepsilon^o) dV - \int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV + \int_{S_i} p_i^o \Delta u_i dS \quad (\text{C.61})$$

A segunda integral do segundo membro da Eq. (C.61) pode ser escrita a partir da definição da energia de deformação (Eq. (C.56)) como:

$$\int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV = \int_{V-\Delta V} \left\{ \int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \int_0^{\varepsilon^o} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right\} dV \quad (\text{C.62})$$

ou ainda:

$$\int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV = \int_{V-\Delta V} \int_{\varepsilon^o}^{\bar{\varepsilon}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (\text{C.63})$$

Utilizando a relação deformação-deslocamento (Eq. (A.25)) e a equação de equilíbrio sem consideração de forças de volume (Eq. (A.9)), a Eq. (C.63) pode ser reescrita como:

$$\int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV = \int_{V-\Delta V} \int_{d_{i,j}^o}^{d_{i,j}^o + \Delta d_{i,j}} (\sigma_{ij} dd_i)_{,j} dV \quad (\text{C.64})$$

Aplicando o teorema da divergência e a fórmula de Cauchy (Eq. (A.13)), chega-se a:

$$\int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV = \int_{S+\Delta S} \int_{u_i^o}^{u_i^o + \Delta u_i} p_i du_i dS \quad (\text{C.65})$$

Sabendo que $\Delta u_i = 0$ em S_u e que p_i é constante em S_i durante a propagação da descontinuidade, a Eq. (C.65) é reescrita como:

$$\int_{V-\Delta V} [W(\bar{\varepsilon}) - W(\varepsilon^o)] dV = \int_{S_i} p_i^o \Delta u_i dS + \int_{\Delta S} \int_{u_i^o}^{u_i^o + \Delta u_i} p_i du_i dS \quad (\text{C.66})$$

Substituindo a Eq. (C.66) na Eq. (C.61) e desenvolvendo, tem-se que:

$$-\Delta\Pi = \int_{\Delta V} W(\varepsilon^o) dV - \int_{\Delta S} \int_{u_i^o}^{u_i^o + \Delta u_i} p_i du_i dS \quad (\text{C.67})$$

Ou seja, a variação do potencial total é composta por uma parcela proveniente da retirada de energia de deformação devido à remoção de um volume ΔV de material e outra parcela correspondente ao trabalho realizado pelo alívio das forças de superfície que atuavam na configuração inicial sobre as novas superfícies criadas ΔS .

No caso da descontinuidade material ser tomada como uma fissura, não há remoção de material ($\Delta V = 0$), mas apenas formação de novas superfícies. Considerando pequenos incrementos de novas superfícies, os campos de deslocamento sofrerão variações também pequenas. Dessa forma, pode-se admitir uma relação linearizada entre o alívio de forças de

superfície e os deslocamentos ocorridos nas novas faces criadas, conforme mostrado pela Figura C.6. Pelo exposto, a Eq. (C.67) fica dada por:

$$-\Delta\Pi = -\int_{\Delta S} \int_{u_i^o}^{u_i^o + \Delta u_i} p_i^o \frac{(u_i^o + \Delta u_i - u_i)}{\Delta u_i} du_i dS = -\int_{\Delta S} \frac{1}{2} p_i^o \Delta u_i dS \quad (\text{C.68})$$

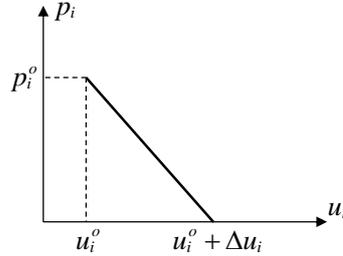


Figura C.6 - Relação esquemática do comportamento das forças de superfície durante o crescimento da fissura.

As novas superfícies criadas podem ser decompostas em uma superfície superior (ΔS^s) e outra inferior (ΔS^i) da fissura, ou seja: $\Delta S = \Delta S^s + \Delta S^i$, sendo $\Delta S^s = \Delta S^i = \Delta s$. Δs é o acréscimo de superfície fraturada. Ademais, antes da propagação, as forças de superfície que atuavam em cada uma das futuras faces possuíam mesma intensidade, mesma direção, porém sentidos contrários. Então: $p_i^{o,s} = -p_i^{o,i} = p_i^o$. Portanto, a Eq. (C.68) pode ser reescrita como:

$$-\Delta\Pi = -\int_{\Delta s} \frac{1}{2} p_i^o (\Delta u_i^s - \Delta u_i^i) dS \quad (\text{C.69})$$

A taxa de liberação de energia G pode ser então obtida a partir da aplicação de sua definição (Eq. (3.7)):

$$G = -\frac{\partial\Pi}{\partial S} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta s} \int_{\Delta s} \frac{1}{2} p_i^o (\Delta u_i^s - \Delta u_i^i) dS \quad (\text{C.70})$$

A Eq. (C.70) representa a integral de fechamento da fissura e foi originalmente proposta por Irwin (1957). Ela fornece a taxa de liberação de energia por novas superfícies de fraturamento. Tal energia é proveniente do trabalho realizado pelo alívio das forças de superfície durante a abertura das novas faces de fissura. Cabe ressaltar que o trabalho realizado possui sinal negativo, uma vez que as forças de superfície tendem a manter as faces unidas e, portanto, atuam em sentido contrário aos deslocamentos relativos entre as faces. Consequentemente, G é sempre positivo.

C.3 Relações entre G e os FIT

Apesar da taxa de liberação de energia ser determinada a partir do balanço de energia total no corpo (caráter global), a Eq. (C.70) mostra que G pode ser obtido a partir dos campos elásticos na região próxima às pontas durante a propagação. Consequentemente, G pode ser relacionada com os FIT, uma vez que tais fatores são capazes de descrever completamente os

campos de tensão e deslocamento existentes nas proximidades das pontas, como mostrado no item C.1. Para tanto, pode-se admitir, sem perda de generalidade, um incremento no comprimento da fissura igual a Δa ao longo do seu eixo. Assumindo o corpo como bidimensional com espessura B , o acréscimo de superfície fissurada é dado por $\Delta s = B\Delta a$. Dessa forma, a Eq. (C.70) pode ser escrita como:

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} p_i^o (\Delta u_i^s - \Delta u_i^i) dx_1 \quad (C.71)$$

A integral do segundo membro da Eq. (C.71) representa o trabalho das forças que atuam na situação anterior à propagação, representada pela Figura C.7a, sobre os deslocamentos na configuração após a propagação, esquematizada pela Figura C.7b. Admitindo o corpo com comportamento elástico-linear, as componentes p_i^o correspondem às componentes de tensão para à região próxima da ponta (item C.1) assumindo $\theta = 0$ e $r = x_1$. Assim, tem-se que:

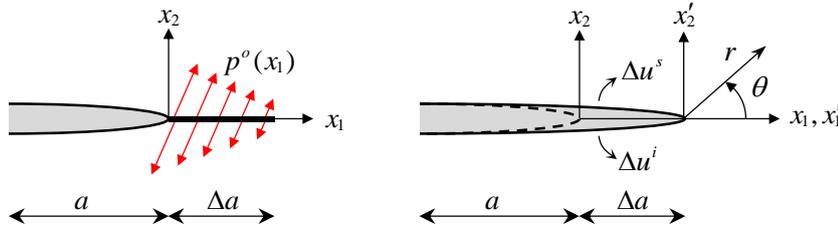


Figura C.7 - Relação esquemática do comportamento das forças de superfície durante o crescimento da fissura.

$$p_1^0 = \sigma_{12}(x_1, 0) \quad (C.72)$$

$$p_2^0 = \sigma_{22}(x_1, 0) \quad (C.73)$$

ou reunindo ambas as expressões em notação indicial:

$$p_i^0 = \sigma_{i2}(x_1, 0) \quad (C.74)$$

Já para os incrementos nos deslocamentos da face superior e inferior, pode-se escrever que:

$$\Delta u_i^s - \Delta u_i^i = 2\Delta u_i^s \quad (C.75)$$

Todavia, o incremento de deslocamento na face superior pode ser relacionado às componentes de deslocamento assumindo o sistema de coordenadas polares localizado na nova ponta. Nesse caso, ao longo do comprimento de propagação Δa , $\theta = \pi$, $r = \Delta a - x_1$ e, portanto:

$$\Delta u_i^s = u_i(\Delta a - x_1, \pi) \quad (C.76)$$

Substituindo a Eq. (C.76), Eq. (C.75) e Eq. (C.74) na Eq. (C.71), chega-se a:

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} -\frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{i2}(x_1, 0) u_i(\Delta a - x_1, \pi) dx_1 \quad (C.77)$$

A partir da Eq. (C.77), G pode ser decomposto em duas parcelas:

$$G = G_I + G_{II} \quad (C.78)$$

onde:

$$G_I = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} - \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{22}(x_1, 0) u_2(\Delta a - x_1, \pi) dx_1 \quad (C.79)$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} - \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_{12}(x_1, 0) u_1(\Delta a - x_1, \pi) dx_1 \quad (C.80)$$

Para a avaliação da parcela G_I pode-se empregar a Eq. (C.32) e a Eq. (C.39) para determinar as componentes σ_{22} e u_2 , respectivamente:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x_1}} \quad (C.81)$$

$$u_2(\Delta a - x_1, \pi) = \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{\Delta a - x_1}{2\pi}} \quad (C.82)$$

onde $E' = E$ para EPT e $E' = E/(1 - \nu^2)$ para EPD.

Substituindo a Eq. (C.81) e a Eq. (C.82) na Eq. (C.79) e desenvolvendo, obtém-se:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (C.83)$$

Procedendo de forma análoga para G_{II} , chega-se a:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (C.84)$$

Assim, para corpos bidimensionais com comportamento elástico-linear submetidos a solicitações no plano, a taxa de liberação de energia pode ser relacionada aos FIT substituindo a Eq. (C.83) e a Eq. (C.84) na Eq. (C.78), resultando em:

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (C.85)$$