

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

JOSÉ ANTONIO VARGAS BAZÁN

**Fadiga de Pórticos Planos via Mecânica do Dano Concentrado
Considerando Incertezas**

SÃO CARLOS

2017

JOSÉ ANTONIO VARGAS BAZÁN

**Fadiga de Pórticos Planos via Mecânica do Dano Concentrado
Considerando Incertezas**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. André Teófilo Beck

SÃO CARLOS

2017

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

B362f Bazán, José Antonio Vargas
Fadiga de Pórticos Planos via Mecânica do Dano
Concentrado Considerando Incertezas / José Antonio
Vargas Bazán; orientador André Teófilo Beck. São
Carlos, 2017.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Dano Concentrado. 2. Fadiga. 3. Mecânica da
Fratura. 4. Incertezas. 5. Simulação de Monte Carlo. 6.
Confiabilidade Estrutural. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JOSÉ ANTÔNIO VARGAS BAZÁN**.

Título da tese: "Fadiga de pórticos planos via mecânica do dano considerando incertezas".

Data da defesa: 17/11/2017.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **André Teófilo Beck**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Luis Volnei Sudati Sagrilo**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

APROVADO

Prof. Associado **Gilberto Francisco Martha de Souza**
(Escola Politécnica/EP-USP)

APROVADO

Prof. Dr. **David Leonardo Nascimento de Figueirêdo Amorim**
(Universidade Federal de Sergipe/UFS)

APROVADO

Dedicado a todos
os portadores de
esclerose múltipla.

*“A nossa esperança não pode vir
senão dos desesperados”*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Prof. André Beck, pela ajuda nas dúvidas teóricas e práticas, desde a ideia inicial da tese até a defesa. Fico muito agradecido pelas contribuições a este trabalho.

Também, gostaria de agradecer, especialmente, ao Prof. Julio Flórez-López, que foi professor visitante no Departamento de Estruturas. Suas contribuições foram essenciais no desenvolvimento desta tese.

Ao Prof. Sagrilo, pela pronta ajuda em algumas questões no trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro.

À minha família, dividida aos dois lados da Cordilheira dos Andes. Em especial, meu irmão Felipe, meu pai, minha cunhada Márcia, minha afilhada “Silvinha”, meu irmão David. *In memoriam*, agradeço todos os ensinamentos da minha mãe Silvia e a ela dedico também este trabalho.

Aos velhos amigos dos meus tempos na Cidade Maravilhosa. *Old but gold*. Portuga, Paredes, Astronauta, Pastor, Outsider, Quintino, PV, Garrincha e Róger.

Aos amigos que fiz nestes anos são-carlenses. Especialmente, a Iván Gómez, amigo colombiano de bares e tertúlias.

¡Qué buenos amigos!

Aos profissionais da área de Neurologia do Hospital das Clínicas de Ribeirão Preto. Em particular, aos enfermeiros e enfermeiras da sala de infusão. Também agradeço à Associação Amigos Múltiplos pela Esclerose (AME). A todos eles, pelo denodado trabalho em favor dos pacientes de esclerose múltipla. Na escuridão, uma luz.

E, finalmente e não menos importante, a Bojana Galušić, minha noiva, élan da minha saúde frágil. A ela, que deixou a sua terra por nós, por me mostrar a alegria de viver apesar dos contratemplos da vida. Como reza o verso do poeta argentino, ela é “*mi desventura y mi ventura, inagotable y pura*”.

RESUMO

BAZÁN, J. A. V. **Fadiga de Pórticos Planos via Mecânica do Dano Concentrado Considerando Incertezas**. 2017. 123 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

O fenômeno de fadiga é uma das principais considerações quando se verifica a integridade de estruturas sujeitas a carregamentos cíclicos. Para analisar o problema, devem-se considerar os efeitos da significativa dispersão observada nos dados estatísticos das variáveis relacionadas à fadiga. Para contemplar tais incertezas, métodos de confiabilidade são particularmente recomendados. Nesse sentido, quando utilizada uma técnica baseada em simulações, procuram-se métodos de análise estrutural que minimizem o tempo de processamento para viabilizar a análise de confiabilidade. Este trabalho apresenta uma formulação geral para a análise de fadiga de pórticos planos baseada na Mecânica do Dano Concentrado (LDM) considerando as incertezas associadas. A abordagem proposta é verificada através da comparação dos resultados obtidos com as curvas S-N disponíveis em diversas normas. Exemplos de estruturas mais complexas são apresentados posteriormente.

Palavras-chave: Dano Concentrado. Fadiga. Mecânica da Fratura. Incertezas. Simulação de Monte Carlo. Confiabilidade Estrutural.

ABSTRACT

BAZÁN, J. A. V. **Fatigue of Plane Frames via Lumped Damage Mechanics Considering Uncertainties.** 2017. 123 p. Thesis (D. Sc. in Civil Engineering (Structures)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2017.

Fatigue analysis is one of the main tasks when assessing the integrity of structures under cyclic loading. In order to properly approach the fatigue process, the effects of the great scatter observed in statistical data of fatigue variables must be considered. Facing such uncertainties, reliability methods are particularly recommended. If a sampling-based technique is to be used, one of the critical points is the huge number of analyses required for computing failure probabilities. Consequently, those methods of structural analysis that minimize the processing time are highly convenient to make the analysis feasible without significant loss of accuracy. This work presents a general formulation for probabilistic structural fatigue analysis of frames, based on Lumped Damage Mechanics (LDM). The proposed approach is first validated comparing the number of cycles to failure with the S-N curves found in building codes. Further examples of more complex structures, represented as plane frames, are also presented.

Keywords: Lumped damage. Fatigue. Fracture Mechanics. Uncertainties. Monte Carlo simulation. Structural Reliability.

LISTA DE ABREVIATURAS

FM	Mecânica da Fratura (Fracture Mechanics)
SCF	Fator de Concentração de tensões (Stress Concentration Factor)
FDF	Fator de cálculo de fadiga (Fatigue Design Factor)
PFM	Mecânica da Fratura Probabilística (Probabilistic Fracture Mechanics)
CDM	Mecânica do Dano Contínuo (Continuum Damage Mechanics)
LDM	Mecânica do Dano Concentrado (Lumped Damage Mechanics)
MC	Monte Carlo
BS	British Standards
DNV	Det Norske Veritas
ABS	American Bureau of Shipping

LISTA DE SÍMBOLOS

σ_{max} :	Tensão máxima
σ_{avg} :	Tensão aplicada
SCF :	Fator de concentração de tensões
P :	Força aplicada
Δ :	Deslocamento
U :	Energia de deformação
W :	Energia complementar de deformação
PE :	Energia potencial ou trabalho externo
TE :	Energia total
SE :	Energia superficial
Γ_{sup} :	Energia superficial por unidade de área
a :	Profundidade da trinca
t :	Espessura
E :	Módulo de elasticidade
\mathcal{G} :	Taxa de liberação de energia por unidade de área
R :	Resistência da trinca
F :	Flexibilidade
S :	Rigidez
K :	Fator de intensidade de tensões
ΔK :	Variação do fator de intensidade de tensões ($K_{max} - K_{min}$)
K_{max} :	Fator de intensidade de tensões máximo

K_{min} :	Fator de intensidade de tensões mínimo
R :	Razão entre K_{max} e K_{min}
N :	Número de ciclos de carregamento
K_{crit} :	Tenacidade do material
K_{th} :	Limite mínimo para a propagação
C, m :	Coefficientes da lei de Paris
$\frac{da}{dN}$:	Taxa de crescimento da trinca
J :	Integral J
W :	Densidade de energia de deformação
R :	O tamanho da região na qual a carga domina
C', m' :	Coefficientes análogos às da lei de Paris
Π :	Energia potencial
D :	Dano
A_d :	Área de microvazios
A :	Área do elemento intacto
$\bar{\sigma}$:	Tensão efetiva
σ :	Tensão de Cauchy
Φ :	Deformação total
Φ^p :	Deformação plástica
Φ^e :	Deformação elástica
Φ^d :	Deformação devido ao dano
u_i, w_i, θ_i :	Deslocamentos generalizados de um nó i

$\{q\}$:	Deslocamentos generalizados de um elemento
$\{X\}$:	Deslocamentos generalizados da estrutura
Φ_i, Φ_j, δ :	Deformações generalizadas de um elemento
$[B(\tau)]$:	Matriz de transformação deslocamento x deformação
$[B_0]$:	Matriz $[B]$ na configuração indeformada
$\{Q\}$:	Forças internas generalizadas
$\{M\}$:	Tensões generalizadas em um elemento
m_i, m_j :	Tensões generalizadas de momentos fletores
n :	Tensão generalizada normal
$[F^e]$:	Matriz de flexibilidade do elemento intacto
$\{D\}$:	Vetor com os parâmetros do dano
d_i, d_j, d_n :	Dano relacionado aos graus i, j e n
$[C(D)]$:	Matriz de flexibilidade associada ao dano
$[F^d(D)]$:	Matriz de flexibilidade do elemento danificado
$\{G\}$:	Vetor de forças termodinâmicas conjugadas ao dano
G_i, G_j, G_n :	Forças termodinâmicas relacionadas aos graus i, j e n
$P_f(T)$:	Probabilidade de falha no intervalo $(0; T)$
η :	Taxa de chegada de sobrecargas
$R(t)$:	Resistência da estrutura
$S(t)$:	Solicitação
D_C :	Dano crítico
D ou $D(\mathbf{X}, t)$:	Dano acumulado

\mathbf{X} :	Conjunto de variáveis aleatórias
t :	Tempo
N_S :	Vida de projeto
N :	Número de ciclos até a falha
$A(\mathbf{X}, t)$:	Profundidade da trinca
A_C :	Profundidade crítica de trinca
$K_I(\mathbf{X}, t)$:	Fator de intensidade de tensões
K_{IC} :	Fator de intensidade de tensões crítico (tenacidade)
N_i :	Número de ciclos de carregamento do nível de tensão S_i
C, m :	Coefficientes da curva S-N
Δ_i :	Parcela de dano do nível de tensão S_i
Δ :	Dano acumulado pela regra de Palmgren-Miner
a_0, a_1, a_2, γ :	Coefficientes da curva S-N não-linear
$\frac{\partial D}{\partial \Lambda}$:	Varição do dano por unidade de área
I_o :	Momento de inércia da peça intacta
\bar{I} :	Momento de inércia da peça danificada
\bar{c}, \bar{m} :	Coefficientes da lei de propagação do dano
\bar{C}, M :	Coefficientes da lei de propagação do dano

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Placa infinita com furo elíptico (Flórez-López et al., 2014).	6
Figura 2.2 – Energia de deformação em um sólido sujeito a uma força P (adaptado de Flórez-López et al., 2014).	8
Figura 2.3 – Energia total em função do comprimento da fissura (Eq. 2-10, Flórez-López et al., 2014).	10
Figura 2.4 – a) Estrutura sujeita a uma força concentrada P, b) estrutura sujeita a um deslocamento Δ (Flórez-López et al., 2014).	11
Figura 2.5 – Crescimento da trinca versus variação do fator de intensidade de tensões (Anderson, 1995).	13
Figura 2.6 – Integral de linha ao redor da trinca (Sobczyk e Spencer, 1992).	14
Figura 2.7 – Determinação de J a partir da curva carga versus deflexão (Dowling e Begley, 1976).a.	16
Figura 2.8 – Taxa de crescimento da trinca como função de J para corpos de prova típicos de aço submetidos a fadiga (Dowling e Begley, 1976).	17
Figura 2.9 – Elemento danificado sob carga axial.	19
Figura 2.10 – Deformações generalizadas de um elemento entre os nós i e j.	22
Figura 2.11 – (a) Forças internas de um elemento. (b) Tensões generalizadas de um elemento.	23
Figura 2.12 – Elemento de pórtico plano no modelo de dissipação concentrada.	25
Figura 2.13 – Problema de confiabilidade estrutural típico envolvendo carregamento estocástico e variação da resistência no tempo (Beck, 2011).	29
Figura 2.14 – Problema de confiabilidade estrutural típico envolvendo carregamento estocástico e variação paramétrica da resistência no tempo (Beck, 2011).	31
Figura 2.15 – Esquema do processo de acúmulo de dano (Zhu et al., 2017).	33

Figura 2.16 – Curva S-N probabilística (Rathod et al., 2011).....	36
Figura 2.17 – Obtenção de dados para estabelecer a resistência à fadiga de um material (adaptado de Wirsching, 1995).....	37
Figura 2.18 –Exemplo de tensões aleatórias que podem produzir fadiga.	42
Figura 2.19 – (a) Processo de tensões de banda larga. (b) Processo de banda estreita equivalente.....	44
Figura 2.20 – Acúmulo de dano para carregamento com diferentes níveis de tensão e a sua distribuição (Rathod et al., 2011).	47
Figura 2.21 – Componentes básicos de modelo determinístico de mecânica da fratura para predição do crescimento da trinca e instabilidade da trinca (adaptado de Harris, 1995).....	51
Figura 2.22 – Esquema de uma trinca superficial interna numa peça tubular (adaptado de Harris, 1995).	52
Figura 2.23 – Esquema de uma trinca no interior de uma chapa de espessura h (adaptado de Harris, 1995).	55
Figura 2.24 – Histograma e função de densidade de probabilidades correspondente para profundidades iniciais de trincas (adaptado de Harris, 1995)	56
Figura 3.1 – Pórtico plano e carregamento cíclico aleatório.	58
Figura 3.2 – Deslocamentos generalizados de um nó de um pórtico plano.	58
Figura 3.3 – Forças internas de um elemento.	59
Figura 3.4 – Deformações generalizadas de um elemento.	59
Figura 3.5 – Tensões generalizadas de um elemento.	60
Figura 3.6 – Elemento danificado com profundidade da trinca a	62
Figura 3.7 – Metodologia de análise de fadiga via LDM.	64
Figura 3.8 – Fluxograma do programa implementado de análise de fadiga via LDM...	66

Figura 4.1 – Viga em balanço analisada via LDM.	67
Figura 4.2 – Resultados das análises via LDM x curvas S-N.	71
Figura 4.3 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 80$ kN.	72
Figura 4.4 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 100$ kN.	73
Figura 4.5 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 120$ kN.	73
Figura 4.6 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 160$ kN.	74
Figura 4.7 – Probabilidade de falha por número de ciclos de carregamento de amplitude constante.	74
Figura 4.8 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim \text{LN}(80 \text{ kN}, \text{cov} = 10\%)$	76
Figura 4.9 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim \text{LN}(100 \text{ kN}, \text{cov} = 10\%)$	76
Figura 4.10 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim \text{LN}(120 \text{ kN}, \text{cov} = 10\%)$	77
Figura 4.11 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim \text{LN}(160 \text{ kN}, \text{cov} = 10\%)$	77
Figura 4.12 – Probabilidade de falha por número de ciclos de carregamento de amplitude variável.	78
Figura 4.13 – Histograma do dano após 90 000 ciclos – $\Delta P \sim \text{LN}(100 \text{ kN}; 10\%)$	80
Figura 4.14 – Pórtico com 6 nós e 6 elementos.	81
Figura 4.15 – Pórtico com seis elementos submetido a uma força de amplitude aleatória.	82
Figura 4.16 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos e uma força aleatória.	83

Figura 4.17 – Pórtico com seis nós e seis elementos submetido a duas forças de amplitude aleatória.	84
Figura 4.18 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos e duas forças aleatórias.	84
Figura 4.19 – Probabilidade de falha por número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos.	85
Figura 4.20 – Média do dano final após 100 000 ciclos de carregamento.	87
Figura 4.21 – Histograma do dano no Nó 1 – Elemento [1] após 100 000 ciclos de carregamento.	88
Figura 4.22 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [6] após 100 000 ciclos de carregamento.	88
Figura 4.23 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [1] após 100 000 ciclos de carregamento.	89
Figura 4.24 – Pórtico com 25 elementos e 18 nós.	91
Figura 4.25 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com 25 elementos e cinco forças aleatórias.	93
Figura 4.26 – Probabilidade de falha por número de ciclos até a falha – Pórtico com 25 elementos e cinco forças aleatórias.	93
Figura 4.27 – Média do dano final após 15 000 000 ciclos.	96
Figura 4.28 – Histograma do dano no Nó 3 – Elemento [18] após 15 000 000 ciclos de carregamento.	97
Figura 4.29 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [16] após 15 000 000 ciclos de carregamento.	97
Figura 4.30 – Histograma do dano no Nó 7 – Elemento [6] após 15 000 000 ciclos de carregamento.	98

LISTA DE TABELAS

Tabela 2-1 – Alguns resultados do dano acumulado Δ na falha (Wirsching, 1998)	40
Tabela 4-1 – Dados do problema.....	69
Tabela 4-2 – Parâmetros deduzidos para a lei de propagação do dano (Equações 3-15 e 3-17).	69
Tabela 4-3 – Resultados das análises.	70
Tabela 4-4 – Dados da lei de Paris.	71
Tabela 4-5 – Dados da lei de Paris.	75
Tabela 4-6 – Dados da amplitude força $P(t)$	75
Tabela 4-7 – Comparação do número de ciclos: força amplitude constante x variável.	78
Tabela 4-8 – Dados do problema.....	79
Tabela 4-9 – Resultados das análises – 90 000 ciclos de carga.....	79
Tabela 4-10 – Dados do problema.....	81
Tabela 4-11 – Dados da amplitude de $F1(t)$	82
Tabela 4-12 – Dados da amplitude das forças $F1(t)$ e $F2(t)$	83
Tabela 4-13 – Resultados das análises – 100 000 ciclos.	86
Tabela 4-14 – Dano final após 100 000 ciclos de carregamento.....	86
Tabela 4-15 – Dados do problema.....	90
Tabela 4-16 – Dados das amplitudes das forças.....	92
Tabela 4-17 – Resultados das análises – 15 000 000 ciclos de carga.....	94
Tabela 4-18 – Dano final após 15 000 000 ciclos de carregamento.....	95

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
2	Fundamentos teóricos.....	5
2.1	Elementos da Mecânica da Fratura.....	5
2.1.1	O critério de Griffith.....	6
2.1.2	A Lei de Paris-Erdogan.....	11
2.1.3	A integral J.....	13
2.1.4	Taxa de crescimento da trinca em função da integral J.....	16
2.2	Elementos da Mecânica do Dano Contínuo (CDM).....	18
2.3	Elementos da Mecânica do Dano Concentrado (LDM).....	20
2.3.1	Cinemática de pórticos planos.....	20
2.3.2	Tensões generalizadas e forças externas.....	23
2.3.3	Modelo de dano concentrado.....	24
2.3.4	Forças termodinâmicas conjugadas ao dano.....	26
2.4	Confiabilidade dependente do tempo.....	28
2.4.1	Falha à primeira sobrecarga.....	28
2.4.2	Modelo de falha por acúmulo de dano.....	33
2.5	Soluções do problema de acúmulo de dano em fadiga.....	35
2.5.1	As curvas S-N (Wöhler).....	36
2.5.2	Acumulação de dano linear: Regra de Palmgren-Miner.....	39
2.5.3	Acumulação do dano não-linear.....	41
2.5.4	Alternativa de Wirsching (WIRSCHING; LIGHT, 1980).....	41

2.6	Soluções do problema de acúmulo de dano	46
2.6.1	Média, distribuição e variância do dano acumulado	46
2.6.2	Análise de confiabilidade	48
2.7	Soluções de Acúmulo de Dano empregando Mecânica da Fratura	49
2.7.1	Aspectos determinísticos	51
2.7.2	Aspectos probabilísticos	54
3	Metodologia de análise de fadiga via LDM considerando incertezas.....	57
3.1	Introdução	57
3.2	Análise de estruturas sujeitas a fadiga de alta ciclagem via Mecânica do Dano Concentrado	57
3.2.1	Equações cinemáticas e estáticas.....	57
3.2.2	Lei constitutiva	60
3.2.3	Lei de evolução do dano	61
3.3	Resumo da metodologia de análise de fadiga via LDM	64
3.4	Análise de confiabilidade.....	64
3.5	Programa implementado para a análise	65
4	Exemplos numéricos de análise de fadiga via LDM considerando incertezas	67
4.1	Viga em balanço	67
4.1.1	Análise determinística	67
4.1.2	Coeficiente c da lei de propagação aleatório.....	71
4.1.3	Força de amplitude aleatória.....	75
4.1.4	Força de amplitude aleatória e número fixo de ciclos de carregamento ..	79
4.2	Pórtico com 6 elementos	80

4.2.1	Uma força aleatória	82
4.2.2	Duas forças aleatórias. Número de ciclos até a ruptura.....	83
4.2.3	Duas forças aleatórias. Número fixo de ciclos de carregamento.....	85
4.3	Pórtico com 25 elementos	89
4.3.1	Número de ciclos até a falha.....	92
4.3.2	Número fixo de ciclos de carregamento	94
5	Considerações finais e conclusões	99
6	Referências bibliográficas	103

1 INTRODUÇÃO

É conhecido que processos de fadiga são responsáveis por mais de 80% de todas as falhas observadas em serviço em sistemas mecânicos e estruturais (WIRSCHING, 1998). Além disto, falhas por fadiga e fratura costumam ser catastróficas. Vários componentes críticos da fratura são observados em aplicações nas quais as falhas não tinham sido previamente encontradas (WIRSCHING, 1995). Em estruturas submetidas a cargas oscilantes e vibrações mecânicas decorrentes, a fadiga é a forma mais comum de falha mecânica, causada pela propagação gradual das trincas em regiões críticas de tensões (NEWLAND, 1993). Porém, o fenômeno da fadiga ainda é apenas parcialmente entendido (STEPHENS et al., 2001).

As variáveis mais sensíveis consideradas nas análises de fadiga costumam apresentar grande dispersão quando se faz um levantamento estatístico. Comumente, a dispersão dos dados obtidos nos testes de fadiga é considerada através de fatores de segurança, como o FDF (*Fatigue Design Factor*), que é um parâmetro que incrementa o tempo de vida calculado ou reduz o dano acumulado admissível (American Bureau of Shipping, 2003). Esta abordagem pode levar a resultados excessivamente conservativos. Por isto, métodos de confiabilidade são particularmente apropriados para levar em conta as significativas incertezas que existem nas variáveis utilizadas numa análise de fadiga.

A grande dispersão observada nos resultados experimentais de fadiga (SINCLAIR; DOLAN, 1953; GHONEM; DORE, 1987; VIRKLER et al., 1979) sugere uma aleatoriedade intrínseca no processo de propagação de trincas. Sobczyk e Spencer (1992) identificam três fontes principais de variabilidade nos dados obtidos em testes de fadiga:

- (i) diferença no comportamento do material;
- (ii) incerteza no próprio processo de fadiga e fratura, e
- (iii) diferença no ambiente entre testes do mesmo material e sob as mesmas condições de carregamento.

Existem ainda incertezas como as listadas a seguir (WIRSCHING, 1995):

1. A extrapolação dos dados obtidos no laboratório para a prática.

2. A geometria do componente, como defeitos e descontinuidades em juntas soldadas, que complicam a predição da iniciação e da propagação da trinca.
3. A força dinâmica no sistema originada por carregamentos ambientais é aleatória por natureza.
4. A tensão oscilante que causa a fadiga no detalhe, produzida por uma força sobre o sistema, contém incertezas nos procedimentos de análise de tensões.

Levando em conta estas incertezas, os engenheiros devem tomar decisões para preservar a integridade dos componentes com respeito à fadiga. A abordagem probabilística e estatística da fadiga, em função do tempo, ganha particular relevância.

Na avaliação da probabilidade de falha devido à fadiga, os métodos baseados em simulação de Monte Carlo (MELCHERS, 1999) possuem algumas vantagens, tais como: generalidade dos seus resultados, facilidade de implementação e capacidade para lidar com possíveis dependências entre as variáveis aleatórias.

Porém, o custo computacional demandado nas análises estruturais no domínio do tempo costuma ser um ponto crítico na análise. Este fator é ainda mais proibitivo quando se faz uma abordagem probabilística via Monte Carlo e um número elevado de análises deve ser realizado para a estimativa de resultados como probabilidade de falha para um dado tempo ou vida à fadiga. Nesse sentido, procuram-se métodos de análise estrutural que minimizem o tempo de processamento sem prejudicar a confiabilidade dos resultados.

Uma das teorias mais utilizadas na análise estrutural quando a influência das trincas é determinante no comportamento mecânico é a Mecânica da Fratura (*Fracture Mechanics* ou FM). Como definido em Kanninen e Popelar (1985), a FM é uma disciplina de engenharia que quantifica as condições sob as quais a estrutura pode colapsar devido ao crescimento de uma trinca dominante. A teoria da FM pode ser encontrada em diversos trabalhos, como Dowling (2013), Anderson (1995), Kanninen e Popelar (1985), e Provan (1987). A FM é uma poderosa ferramenta para a avaliação da vulnerabilidade estrutural; porém, embora realista, apresenta algumas limitações. As análises via mecânica da fratura são computacionalmente caras; por isto, seus métodos não são convenientes nos casos de arranjos de várias fissuras propagando-se simultaneamente (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014). Adicionalmente, mesmo conseguindo descrever a degradação global da estrutura modificando os contornos, a FM assume um

comportamento elástico ou elasto-plástico dos elementos diferenciais do sólido, embora tenha sido observado que uma extensiva degradação local precede a propagação da fissura. Esta degradação local não é considerada na elasticidade ou na plasticidade. A FM introduz conceitos como Fator de Intensidade de tensões, Integral-J e leis que descrevem as fases de propagação da trinca.

Uma abordagem alternativa para descrever o problema é a Mecânica do Dano Contínuo (*Continuum Damage Mechanics* ou CDM). Desde o trabalho pioneiro de Kachanov (1958), a teoria da CDM tem-se tornado um dos campos mais ativos na mecânica dos sólidos (por exemplo, Kachanov, 1986, Lemaitre e Chaboche, 1988, Lemaitre, 1996, Krajcinovic e Lemaitre, 1996). A CDM parte da introdução de uma nova variável interna, o dano, que descreve a densidade de microvazios ou microfissuras. Porém, o número de aplicações práticas em estruturas complexas mostrou-se limitado. Como apontado por Amorim et al. (2013), modelos contínuos podem ser utilizados apenas em estruturas relativamente simples.

Nesse contexto, a Mecânica do Dano Concentrado (*Lumped Damage Mechanics* ou LDM) apresenta-se como uma alternativa robusta para análise de estruturas mais complexas, superando as limitações da CDM. A LDM é baseada em modelos de dissipação concentrada, nos quais se assume que os efeitos inelásticos podem ser concentrados em locais específicos, chamados “rótulas plásticas”. Até agora, a LDM foi aplicada satisfatoriamente na análise de pórticos com elementos retos com dano dominante por flexão (FLÓREZ-LÓPEZ, 1995; CIPOLLINA et al., 1995; FEBRES et al., 2003), dano por cisalhamento (PERDOMO et al., 2013), arcos (AMORIM et al., 2013) e túneis (AMORIM et al., 2014).

Este trabalho apresenta uma formulação geral de análise de fadiga baseada em modelos de dissipação concentrada de energia, contemplando a resposta de estruturas submetidas a carregamentos de fadiga de alto ciclo e levando em consideração as incertezas envolvidas. O relativo baixo custo computacional da abordagem via LDM permite a realização de um grande número de simulações necessárias para o cálculo da probabilidade de falha, o número de ciclos até a falha e/ou o dano final nas seções em que há trincas. Na metodologia, levam-se em conta as incertezas associadas tanto aos parâmetros do carregamento como aos parâmetros que descrevem a resistência.

Organização dos capítulos

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos da análise estrutural através da Mecânica do Dano Concentrado. Na primeira parte, descrevem-se os conceitos e a metodologia da Mecânica da Fratura, Mecânica do Dano Contínuo e Mecânica do Dano Concentrado. Posteriormente, apresentam-se considerações gerais da análise de confiabilidade dependente do tempo, incluindo o modelo de falha por acúmulo de dano. Finalmente, apresentam-se os métodos tradicionalmente usados na fadiga determinística e os avanços na análise de fadiga e Mecânica da Fratura probabilísticas.

No Capítulo 3, descreve-se a metodologia de análise de fadiga via Mecânica do Dano Concentrado e a equação do estado limite utilizada em termos do dano acumulado.

No Capítulo 4, apresentam-se os resultados para uma viga em balanço obtidos via LDM, comparados com as curvas S-N da norma BS 7910. Posteriormente, são apresentados exemplos de pórticos planos formados por mais de um elemento (com seis e com vinte e cinco elementos).

No Capítulo 5, encontram-se as principais conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Embora existam métodos simplificados para a avaliação da vida à fadiga de uma estrutura sob carregamentos cíclicos (métodos espectrais ou métodos determinísticos), as técnicas baseadas em análises no domínio do tempo são as mais confiáveis, especialmente em sistemas estruturais sujeitos a respostas estruturais não-lineares ou carregamentos não-lineares (ABS, 2003). As análises estruturais no domínio do tempo, porém, costumam demandar um elevado custo computacional.

Por exemplo, em uma análise estrutural completa no domínio do tempo de uma estrutura sujeita à força de onda que considere todas as condições possíveis, o histórico da cinemática é gerado a partir do espectro que produz o carregamento. As tensões na estrutura são calculadas através da análise estrutural. Os efeitos não-lineares podem assim ser incluídos diretamente na análise.

As análises estruturais no domínio do tempo, porém, apresentam a desvantagem do alto custo computacional. Mais ainda, em abordagens que considerem as incertezas associadas (probabilísticas) em que uma grande quantidade de análises aleatórias precisa ser simulada, esta demanda é ainda mais restritiva (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014).

No presente trabalho, a análise estrutural é realizada empregando o conceito de dano concentrado e o correspondente desenvolvimento da Mecânica do Dano Concentrado (CIPOLLINA et al., 1995; FLÓREZ-LÓPEZ, 1995; FEBRES et al., 2003; AMORIM et al., 2013; FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014). Esta abordagem apresenta a vantagem de reduzir significativamente o tempo de processamento sem perda de representabilidade, o que viabiliza a realização de grande número de simulações a fim de calcular probabilidades de falha.

2.1 Elementos da Mecânica da Fratura

Em teorias clássicas de elasticidade e plasticidade, assume-se que os contornos do sólido analisado são fixos e não-modificáveis durante a análise. Esta hipótese simplificadora elimina a possibilidade de representar as descontinuidades e a propagação de uma trinca num sólido. No entanto, este fenômeno é uma das principais

causas de falha estrutural. A mecânica da fratura diferencia-se dessas teorias porque não desconsidera a possibilidade de modificar os contornos do sólido devido à propagação de trincas. Especificamente, o principal objetivo da mecânica da fratura é a determinação das condições da propagação da trinca em sólidos elásticos ou elasto-plásticos (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014) e o comportamento mecânico considerando essas descontinuidades materiais.

2.1.1 O critério de Griffith

Fatores de concentração de tensões em sólidos

Com frequência, é necessário perfurar componentes estruturais. Quando a geometria da estrutura é modificada desta maneira (Figura 2.1), as tensões locais aumentam (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014). A razão entre a máxima tensão local e a tensão média na estrutura é chamada de Fator de concentração de tensões (SCF):

$$SCF = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}} \rightarrow \sigma_{max} = SCF \sigma_{avg} \quad 2-1$$

sendo σ_{avg} a tensão média aplicada (Figura 2.1).

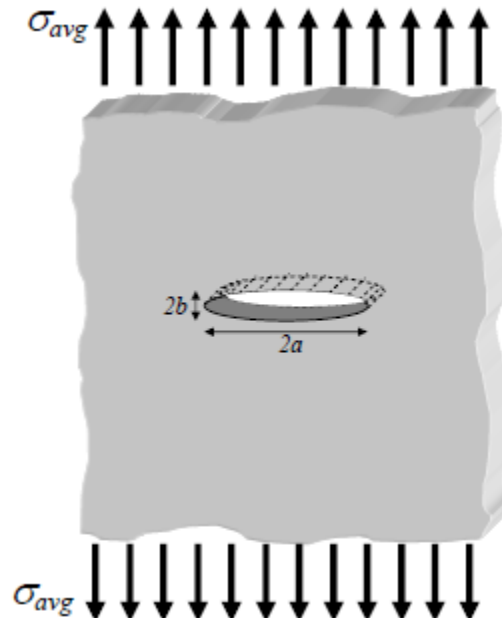


Figura 2.1 – Placa infinita com furo elíptico (Flórez-López et al., 2014).

Um problema importante na teoria da elasticidade e na resistência dos materiais é a determinação destes fatores para configurações típicas de mudanças da seção transversal, furos e outras descontinuidades. Um caso de particular relevância na mecânica da fratura está ilustrado na Figura 2.1. Considere-se uma placa infinita de espessura t com um furo elíptico de diâmetro maior $2a$ e diâmetro menor $2b$, no centro da placa. A placa é submetida a uma tensão remota σ_{avg} , como mostrado na Figura 2.1. Pode demonstrar-se que o fator de concentração de tensões no caso elástico linear é dado por:

$$SCF = 1 + 2\frac{a}{b} \quad 2-2$$

A geometria de uma fissura pode ser representada como uma elipse achatada infinitesimal. Note-se que a tensão local máxima tende a infinito quando o semi-eixo b tende a zero, independentemente da magnitude da tensão aplicada à placa (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014).

Porém, uma fissura infinitesimal em um meio contínuo é uma abstração matemática que não é relevante para materiais reais, que são feitos de átomos. Metais, por exemplo, deformam-se plasticamente, o que causa uma trinca inicial na ponta. Na ausência de deformação plástica, o raio mínimo que uma trinca pode ter está na ordem do raio atômico. As equações relacionadas com o SCF não podem ser utilizadas como condição para a propagação da trinca, uma vez que não são válidas no nível atômico (ANDERSON, 1995).

Balanco de energia numa estrutura com fissuras

A trabalho externo PE de uma força P é dada por

$$PE = -P\Delta \quad 2-3$$

sendo Δ o deslocamento da força.

Considere, por exemplo, um sólido rígido de massa M . A força gravitacional do sólido é $P = -M \cdot g$ (considerando a direção positiva para cima), onde g é a aceleração da gravidade. Se o corpo é elevado uma distância Δ , a energia potencial é dada por $Mg\Delta$, isto é, $PE = -P\Delta$.

Considere-se agora um sólido elástico de rigidez S , sujeito a uma força P . Esta força induz alongamentos no sólido denotados por Δ :

$$P = S\Delta \quad 2-4$$

O trabalho total exercido para deformar a estrutura fica armazenado no sólido. Este novo termo de energia é chamado de energia de deformação U (Figura 2.2):

$$U = \int_0^{\Delta} P d\delta = \frac{1}{2} S\Delta^2 = \frac{1}{2} P\Delta \quad 2-5$$

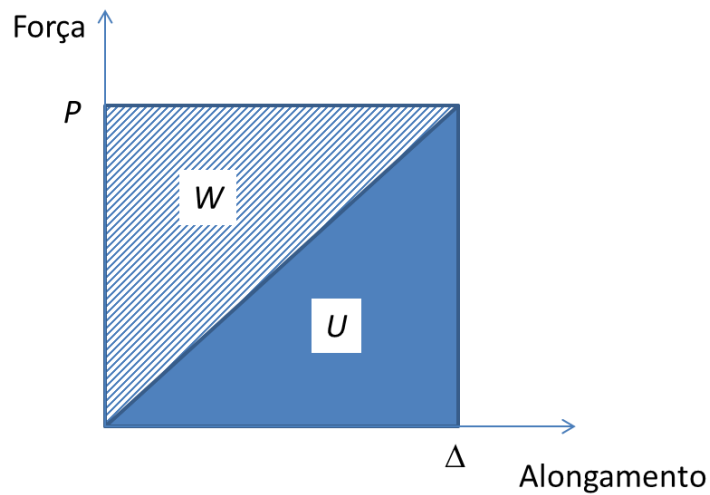


Figura 2.2 – Energia de deformação em um sólido sujeito a uma força P (adaptado de Flórez-López et al., 2014).

Na Figura 2.2, a outra área, determinada pela curva e o eixo da força, corresponde à energia complementar de deformação, W :

$$W = \int_0^P \Delta dp = \frac{1}{2S} P^2 = \frac{1}{2} FP^2 \quad 2-6$$

sendo $F = 1/S$ é a flexibilidade do sólido. Num sólido elástico linear, ambas as energias são iguais.

A energia total TE em um sólido elástico é agora definida como a soma da energia de deformação (U) mais a energia potencial (PE):

$$TE = U + PE \quad 2-7$$

Considere agora um sólido elástico com uma espessura t , uma trinca de profundidade a , e área da trinca igual a $4 \cdot a \cdot t$. Um novo termo de energia deve ser considerado: a energia superficial SE . Assume-se que este termo é proporcional à superfície da fissura. Assim, a energia superficial aumenta com a propagação da trinca:

$$SE = 4\Gamma_{sup} a t \quad 2-8$$

sendo Γ_{sup} a energia superficial por unidade de área.

A energia total de um sólido elástico com uma fissura é, então, dada por:

$$TE = U + PE + SE \quad 2-9$$

Taxa de liberação de energia e critério de Griffith

Considere-se novamente uma chapa infinita (Figura 2.1). Pode demonstrar-se (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014) que a energia total por unidade de comprimento (espessura) é dada por:

$$TE = U + PE + SE = U_0 - \frac{\pi\sigma_{avg}^2}{E} a^2 + 4\Gamma_{sup}a \quad 2-10$$

onde U_0 é a energia de deformação por unidade de comprimento de uma placa similar mas sem fissura, e E é o módulo de elasticidade. Note-se que a curva da energia total vs. comprimento da trinca corresponde a uma parábola côncava (Figura 2.3). Esta curva explica por que existem trincas que não se propagam, mesmo se o fator de concentração de tensões tender ao infinito. Considere-se o caso de uma pequena trinca a_0 , i.e., uma fissura cujo comprimento está à esquerda do pico na curva da Figura 2.3. Suponha-se que esta fissura se propaga, i.e., seu comprimento incrementa-se de a_0 até $a_0 + da$. A energia total deveria também incrementar-se. Porém, este processo é fisicamente impossível, pois as forças externas (σ_{avg}) são constantes nesta análise. Portanto, nenhum trabalho externo adicional está sendo feito. Independentemente do fator de concentração de tensões, a propagação da fissura não pode acontecer sob estas condições.

Considere-se agora o caso de uma fissura maior, a_{cr} , i.e., uma fissura cujo comprimento corresponde ao pico da curva. Se a trinca se propaga, seu comprimento varia de a_{cr} até $a_{cr} + da$. Então, a energia total decresce neste caso. Este processo é fisicamente possível. O excesso de energia pode ser transformado, por exemplo, em energia cinética enquanto a estrutura rompe. Se a propagação da trinca é energeticamente possível, então acontecerá, pois o fator de concentração de tensões tende ao infinito.

Esta análise indica que existe um comprimento crítico da trinca para cada conjunto de forças externas: trincas menores não crescem, enquanto trincas maiores se propagam.

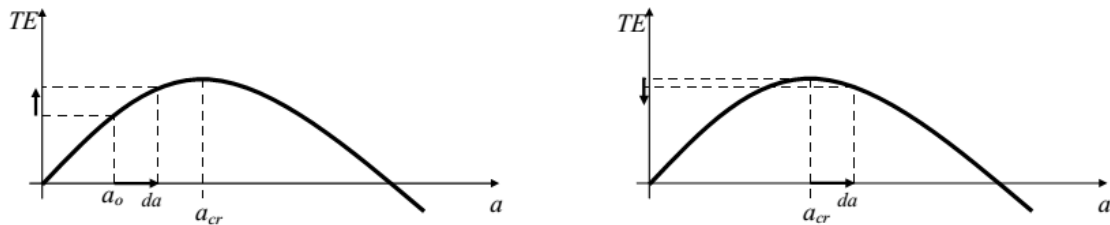


Figura 2.3 – Energia total em função do comprimento da fissura (Eq. 2-10, Flórez-López et al., 2014).

Se a estrutura não é uma placa infinita ou se o carregamento não é o indicado, então a equação de equilíbrio de energia não é mais válida. Porém, o raciocínio ainda se aplica. A energia total é uma função côncava do comprimento da fissura, e possui um máximo para um valor crítico. Assim, no caso geral, a propagação da trinca é possível somente se a derivada da energia total em relação ao comprimento da trinca é igual a zero (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014):

$$\mathcal{G} = R \quad 2-11$$

sendo $\mathcal{G} = -\frac{d}{da}(U + PE)$, e $R = \frac{d}{da}(SE)$.

O termo \mathcal{G} é chamado de taxa de liberação de energia, e R é denominado resistência da trinca. Se a taxa de liberação \mathcal{G} é menor que a resistência R , então a trinca não pode propagar-se. A propagação ocorre somente se $\mathcal{G} = R$. Este é o critério de Griffith. A taxa de liberação de energia pode ser calculada por meio de uma análise estrutural; a resistência à fissuração pode ser medida em análises experimentais.

Taxa de liberação de energia em termos da rigidez ou flexibilidade

Considere-se uma estrutura com uma fissura, sujeita a uma força externa P (Figura 2.4.a). A flexibilidade da estrutura depende do comprimento da trinca e , portanto, o deslocamento resultante também. A taxa de liberação de energia neste caso é:

$$\mathcal{G} = -\frac{d}{da}(U + PE) = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}P\Delta(a) - P\Delta(a)\right) = \frac{1}{2}\frac{dF(a)}{da}P^2 \quad 2-12$$

sendo $F(a) = \frac{\Delta(a)}{P}$ a flexibilidade.

Se a estrutura estiver sujeita a um deslocamento imposto Δ (Figura 2.4.b), então

$$\mathcal{G} = -\frac{d}{da}(U + PE) = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}P(a)\Delta - P(a)\Delta\right) = \frac{1}{2}\frac{dS(a)}{da}\Delta^2 \quad 2-13$$

sendo $S(a) = \frac{P(a)}{\Delta}$ a rigidez.

Note-se que ambas as expressões são equivalentes. Estas equações mostram que a taxa de liberação de energia pode ser calculada se é conhecida a dependência da rigidez estrutural (ou a flexibilidade) em função do comprimento da trinca.

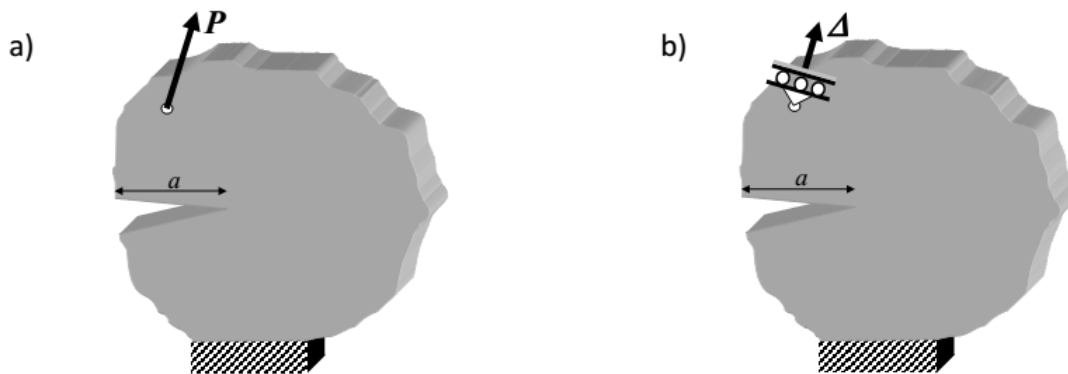


Figura 2.4 – a) Estrutura sujeita a uma força concentrada P , b) estrutura sujeita a um deslocamento Δ (Flórez-López et al., 2014).

2.1.2 A Lei de Paris-Erdogan

Na Mecânica da Fratura, existem vários modelos empíricos e semi-empíricos que expressam a taxa de crescimento do tamanho da trinca, a , como função do fator de

intensidade de tensões (PARIS; ERDOGAN, 1960; WALKER, 1970; FORMAN et al., 1967; WEERTMAN, 1969; MCEVILY, 1988). Estas equações relacionam convenientemente a taxa de crescimento aos valores máximo e mínimo do fator de intensidade de tensões (diferença entre o valor máximo e o mínimo, ΔK , e a razão entre eles, R):

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R) \quad 2-14$$

sendo:

$$\Delta K = K_{max} - K_{min};$$

$$R = \frac{K_{max}}{K_{min}};$$

$\frac{da}{dN}$: taxa de crescimento da trinca por ciclo de carregamento;

N : número de ciclos de carregamento.

Na Figura 2.5 (ANDERSON, 1995), mostra-se esquematicamente o gráfico log-log de $\frac{da}{dN}$ versus ΔK , que ilustra o comportamento típico da propagação da trinca em metais. A curva sigmoideal contém três regiões distintas (I, II e III). Na região II, a curva é aproximadamente linear, mas a taxa desvia-se da tendência linear para valores muito altos ou muito baixos de ΔK . No primeiro caso, a taxa de crescimento da trinca acelera conforme K_{max} se aproxima de K_{crit} , a tenacidade à fratura do material. No outro extremo, $\frac{da}{dN}$ aproxima-se de zero no limite (ΔK_{th}) de ΔK .

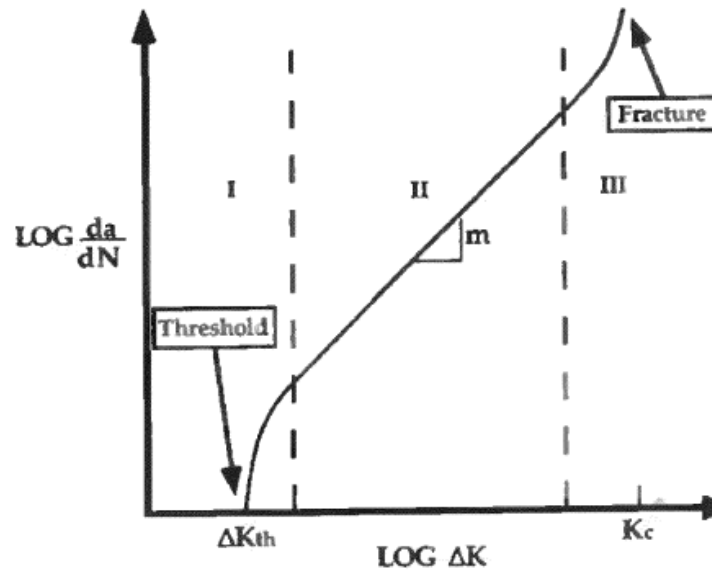


Figura 2.5 – Crescimento da trinca versus variação do fator de intensidade de tensões (Anderson, 1995).

Devido à sua simplicidade e sua precisão na região central do crescimento da trinca, a equação mais utilizada é a chamada Lei de Paris (PARIS; ERDOGAN, 1960), que descreve o crescimento da trinca mediante uma função de potência em ΔK :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad 2-15$$

2.1.3 A integral J

As bases matemáticas da integral J em termos da elasticidade não-linear foram estudadas por Eshelby (1956), que descreveu as forças generalizadas em descontinuidades e defeitos pontuais em um campo elástico introduzindo o conceito de tensor de energia de momento. Este conceito é idêntico ao da integral J . O desenvolvimento posterior do conceito é descrito por autores como Rice (1968), Dowling (2013), Sobczyk e Spencer (1992) e Anderson (1995), entre outros. Rice (1968) apresentou uma integral de contorno independente do caminho para a análise de trincas. Ele mostrou que o valor desta integral, a integral J , é igual à taxa de dissipação de energia em um corpo elástico não-linear com uma trinca. Foi confirmado, através de vários estudos (KUAI et al., 2010), que a integral J é uma versão mais geral da taxa de liberação de energia \mathcal{G} .

A integral J pode ser expressa segundo (SOBCZY; SPENCER, 1992):

$$J = \int_C W dy - \mathbf{T} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) ds \quad 2-16$$

sendo C um contorno fechado (em sentido anti-horário por exemplo) ao redor da ponta da trinca (Figura 2.6), $T_i = \sigma_{ij}n_j$, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos, ds é o diferencial de comprimento de arco ao longo de C , e W é a densidade de energia de deformação, isto é,

$$W = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad 2-17$$

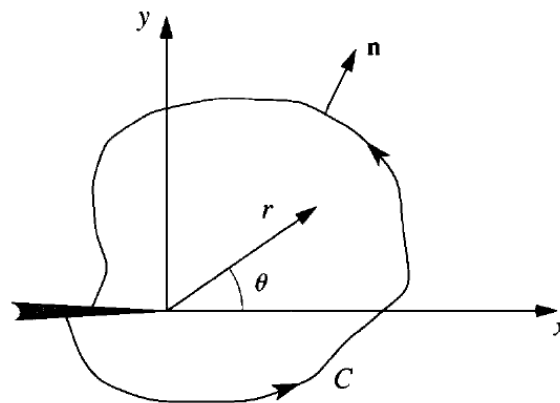


Figura 2.6 – Integral de linha ao redor da trinca (Sobczyk e Spencer, 1992).

O uso da integral J para o cálculo do crescimento da trinca na presença de deformações plásticas não é exato. A razão é que a integral J é definida (independente do caminho) para materiais elásticos (lineares ou não-lineares) assim como para comportamento plástico dentro das deformações da teoria da plasticidade (pequenas deformações). Em geral, a plasticidade pode apenas ser descrita por uma teoria incremental da plasticidade; mas, para tensões e deformações momentâneas, estas não são relacionadas de maneira única (como na teoria da elasticidade ou na plasticidade de deformação). Portanto, a densidade de energia de deformação W , de acordo com a definição na Equação 2-17, não é mais função das deformações momentâneas, mas torna-se

dependente do histórico do carregamento. Portanto, as tensões não podem ser obtidas de W por diferenciação. Como resultado, a independência do caminho de J não pode ser demonstrada (SOBCZYK; SPENCER, 1992).

Assim, pode-se esperar que a integral J seja aplicável no caso em que os resultados da teoria incremental da plasticidade sejam próximos aos resultados da teoria plástica da deformação, e a Equação 2-16 seja válida em um sentido prático.

Há dois critérios básicos para a validade do crescimento da trinca controlado por J . O primeiro é que as regiões de descarregamento elástico e de carregamento plástico não proporcional (que são da ordem de Δa) sejam pequenas, isto é (SOBCZYK; SPENCER, 1992),

$$\frac{\Delta a}{R} \ll 1 \quad 2-18$$

sendo R o tamanho da região na qual a carga aproximadamente proporcional (descrita pela integral J) domina.

A segunda condição é que J deve aumentar suficientemente rápido com o tamanho da trinca (para que a região de carregamento não proporcional seja pequena); esta condição pode ser estabelecida como (DOWLING; BEGLEY, 1976):

$$\omega = \frac{b}{J} \frac{dJ}{da} \gg 1 \quad 2-19$$

onde b é a parcela do ligamento sem trinca (Figura 2.7).

Valores de J devem ser determinados a partir de curvas carregamento versus deflexão, como indicado na Figura 2.7. Para uma dada deflexão, δ_0 , a variação de energia potencial, dU , causada por um pequeno incremento no comprimento da fissura, da , está relacionada a J como segue (DOWLING; BEGLEY, 1976):

$$J = -\frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right) \quad 2-20$$

onde B é a espessura do espécime, U é a energia potencial e a é o tamanho da trinca.

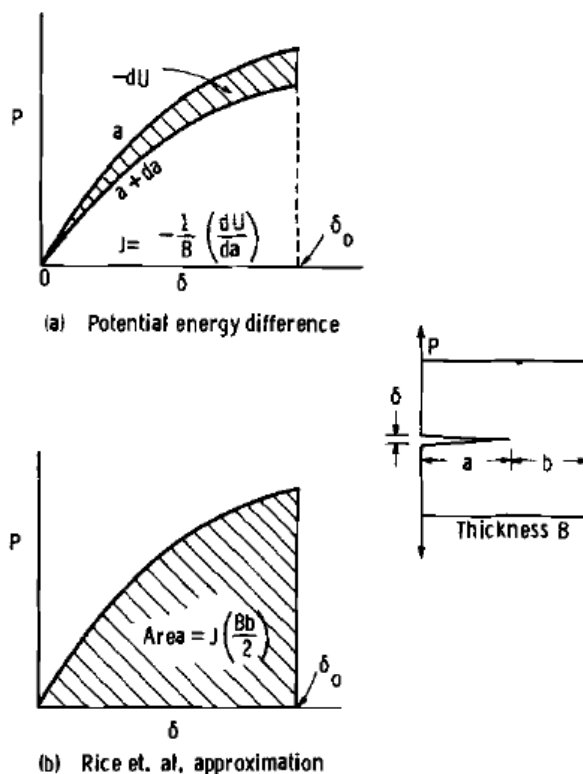


Figura 2.7 – Determinação de J a partir da curva carga versus deflexão (Dowling e Begley, 1976).

2.1.4 Taxa de crescimento da trinca em função da integral J

Se as condições são satisfeitas e a curva $J - R$ (ou seja, J versus Δa) pode ser vista como característica da resposta do material, então o crescimento da trinca pode ser previsto com o uso de valores de J . Isto foi confirmado por inúmeros estudos. Por exemplo, Dowling e Begley (1976) demonstraram que existe uma boa correlação entre a variação da integral J e a taxa de crescimento da fissura, para testes realizados no regime elasto-pástico (SOBCZYK; SPENCER, 1992).

Dowling e Begley (1976) utilizaram o conceito da integral J para calcular o crescimento da trinca sob condições de escoamento em que K não é mais válido. Estes autores ajustaram a taxa de crescimento a uma função de potência em ΔJ . Os resultados dos testes realizados estão mostrados na Figura 2.8 e são representados pela Equação 2-21 (obtida através do ajuste de mínimos quadrados):

$$\frac{da}{dN} = 2.13 \cdot 10^{-8} (\Delta J)^{1.587}$$

2-21

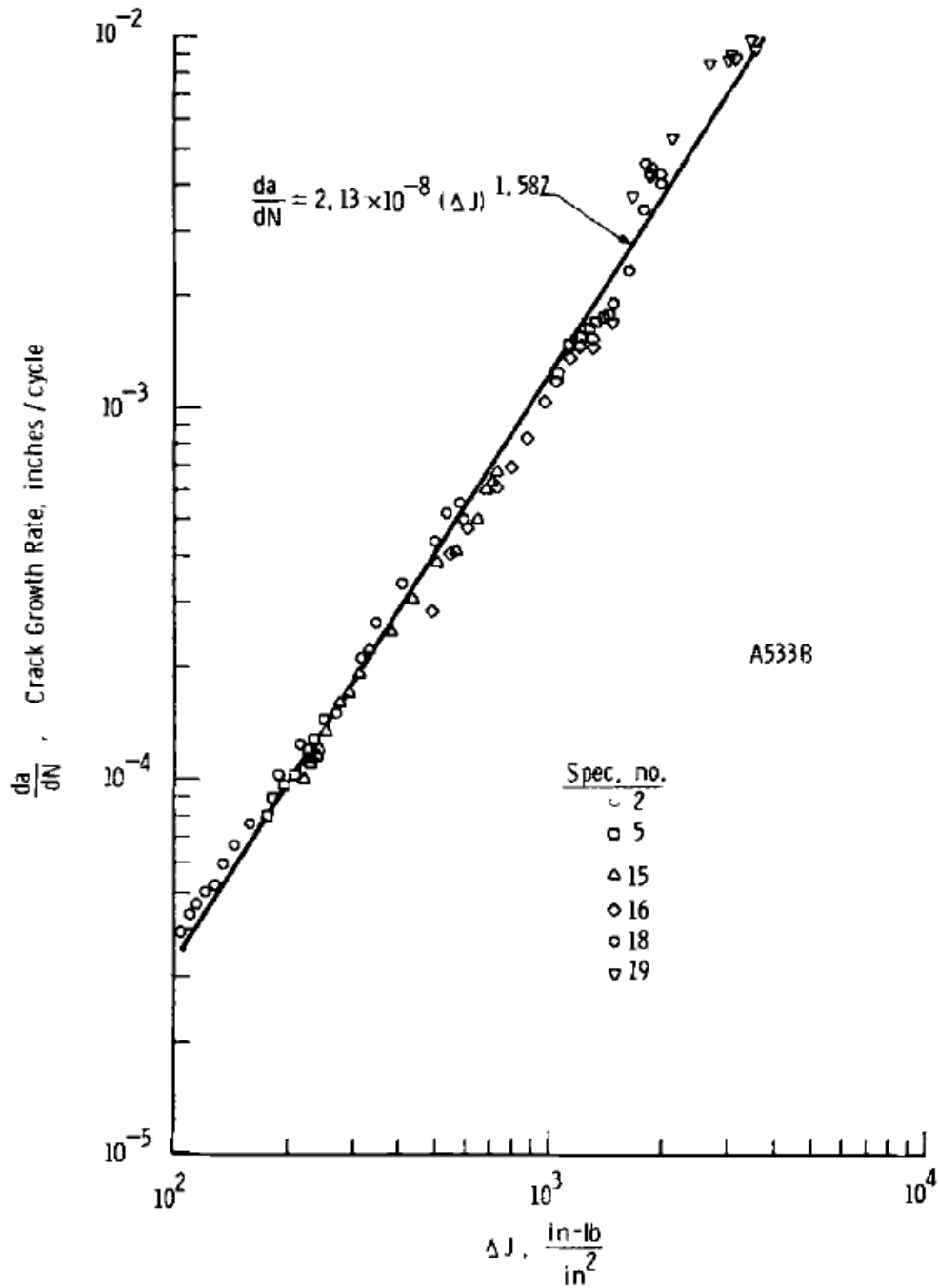


Figura 2.8 – Taxa de crescimento da trinca como função de J para corpos de prova típicos de aço submetidos a fadiga (Dowling e Begley, 1976).

Em geral, a equação que governa o crescimento da trinca pode ser escrita em uma forma similar à Lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C' \Delta J^{m'} \quad 2-22$$

sendo C' e m' constantes análogas às da Lei de Paris.

A utilidade da integral J está na sua relação com a taxa de liberação de energia, \mathcal{G} . De fato, se o espécime se comporta de maneira elástica e linear, isto é, se a curva carregamento versus deflexão na Figura 2.7 é uma reta, então a integral J se reduz a \mathcal{G} (RICE, 1968). Ainda, as duas quantidades se relacionam com o fator de intensidade de tensões, K , pelas expressões a seguir (KANNINEN; POPELAR, 1985):

$$J = -\frac{d\Pi}{da} = \mathcal{G} \quad 2-23$$

$$J = \mathcal{G} = \frac{K^2}{E} \quad 2-24$$

sendo Π a energia potencial, K o fator de intensidade de tensões e E o módulo de elasticidade. Se a espessura do espécime for suficiente para causar uma condição de estado plano de deformação (EPD), o módulo elástico utilizado na Equação 2-24 deve ser substituído por $E/(1 - \nu^2)$, onde ν é o coeficiente de Poisson. Esta mudança, porém, produz uma variação menor que 10%.

2.2 Elementos da Mecânica do Dano Contínuo (CDM)

Desde o trabalho pioneiro de Kachanov (1958), a mecânica do dano tornou-se um dos campos mais ativos de pesquisa na mecânica dos sólidos. A principal ideia é a introdução de uma nova variável interna, o dano, que mede a densidade de microfissuras e microvazios, e a sua influência no comportamento do material. A ideia básica é tão simples e tão geral que tem sido utilizada para modelar a maioria de materiais de construção (CIPOLLINA et al., 1995).

A mecânica do dano contínuo (LEMAITRE; CHABOCHE, 1988; LEMAITRE, 1992) baseia-se na introdução do dano, \mathbf{D} , uma nova variável interna que caracteriza a densidade superficial de microfissuras e/ou microvazios. O objetivo da CDM é descrever a evolução desta variável e sua influência no comportamento mecânico da estrutura, seja num material elástico ou elasto-plástico. A CDM introduz a influência do dano \mathbf{D} nas relações constitutivas através do conceito de **tensão equivalente** e da **hipótese de equivalência de deformações** (LEMAITRE; CHABOCHE, 1988).

Considere-se o caso de uma barra danificada sujeita ao esforço axial P , como mostrado na Figura 2.9. Seja A_d a área de microdefeitos, incluindo efeitos de concentração de tensões, de um elemento de volume representativo, e A a área total nominal. O dano D é definido como:

$$D = \frac{A_d}{A} \quad 2-25$$

O dano pode ter valores entre zero (elemento intacto) e um (elemento fraturado).

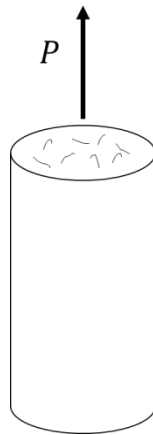


Figura 2.9 – Elemento danificado sob carga axial.

A tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é definida como

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad 2-26$$

sendo σ a tensão de Cauchy ($\sigma = P/A$).

A hipótese da equivalência de deformações estabelece que **o comportamento de um material danificado é igual quando submetido à tensão efetiva ($\bar{\sigma}$) ou à tensão de**

Cauchy (σ). Portanto, assumindo a hipótese de equivalência de deformações, a lei de elasticidade linear para um material danificado é dada por:

$$\bar{\sigma} = E(\Phi - \Phi^p) \rightarrow \sigma = E(1 - D)(\Phi - \Phi^p) \quad 2-27$$

sendo Φ^p a parcela da deformação correspondente à deformação plástica; Φ , a deformação total; E , o módulo de elasticidade; e D , o dano.

Uma apresentação alternativa da lei de elasticidade (PERDOMO et al., 2013) é formulada decompondo o termo $(\Phi - \Phi^p)$ em uma parcela elástica, Φ^e , e uma parcela adicional devida ao dano, Φ^d :

$$\Phi - \Phi^p = \Phi^e + \Phi^d \quad 2-28$$

sendo $\Phi^e = \frac{1}{E}\sigma$ and $\Phi^d = \frac{D}{E(1-D)}\sigma$.

2.3 Elementos da Mecânica do Dano Concentrado (LDM)

A CDM, porém, não é a abordagem mais adequada para a análise de diversas estruturas na engenharia civil. Estas são mais convenientemente modeladas como treliças ou pórticos, pois modelos contínuos são usualmente utilizados para estruturas relativamente simples. Teorias da plasticidade foram adaptadas à análise de pórticos através da noção de modelos de dano concentrado. Na mecânica do dano concentrado (LDM), assume-se que os efeitos plásticos podem ser concentrados em locais específicos chamados rótulas plásticas (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014). Na LDM, o conjunto de microvazios em um elemento é medido através da variável dano com três componentes: dois termos relacionados aos momentos fletores e um termo relacionado à força axial, $\{\mathbf{D}\} = (d_i, d_j, d_n)$.

2.3.1 Cinemática de pórticos planos

Notação

Considere-se um pórtico plano de m elementos conectados por n nós. Os nós são agrupados em dois conjuntos \mathbf{N}_σ e \mathbf{N}_u . \mathbf{N}_σ contém os nós sujeitos a carregamento

externo e \mathbf{N}_u inclui os apoios da estrutura, isto é, os nós com deslocamentos prescritos. Estuda-se o movimento da estrutura durante um intervalo $[0, T]$. O estado da estrutura no tempo t igual a zero é denominado configuração inicial ou indeformada. Para t maior que zero, a configuração é chamada deformada.

Um par de eixos coordenados ortogonais, X e Y , é introduzido. Este sistema de coordenadas é estacionário. Definem-se as seguintes variáveis:

- (a) Deslocamentos generalizados de um nó i são denotados por $\{U\}_i^t = (u_i, w_i, \theta_i)$, onde u_i e w_i são os deslocamentos em X e Y , respectivamente, e θ_i é a rotação do nó com respeito à configuração inicial.
- (b) Deslocamentos generalizados de um elemento b entre os nós i e j são denotados por $\{q\}^t = (\{U\}_i^t, \{U\}_j^t)$. A notação $\{q\}_b$ indica esses mesmos deslocamentos, mas com zeros nos outros graus de liberdade, isto é,

$$\{q\}_b^t = \left((0,0,0), (0,0,0), \dots, \{U\}_i^t, \dots \{U\}_j^t, \dots (0,0,0) \right) \quad 2-29$$

- (c) Deslocamentos generalizados da estrutura são denotados por

$$\{X\}^t = (\{U\}_1^t, \{U\}_2^t, \dots \{U\}_n^t) \quad 2-30$$

sendo n o número de nós da estrutura.

- (d) Deformações generalizadas de um elemento b entre os nós i e j são denotadas por $\{\Phi\}^t = (\Phi_i, \Phi_j, \delta)$, onde Φ_i e Φ_j indicam, respectivamente, rotações do elemento nas extremidades i e j , e δ é o alongamento da corda com respeito ao seu comprimento na configuração inicial, como mostrado na Figura 2.10.

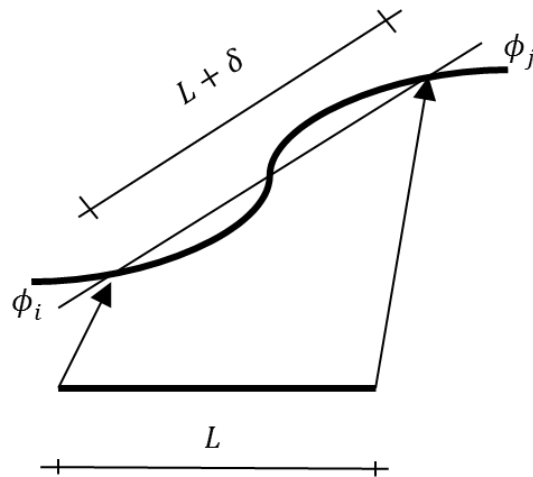


Figura 2.10 – Deformações generalizadas de um elemento entre os nós i e j .

Equações de compatibilidade

As taxas de deformações ($\dot{\Phi}$) e de deslocamentos (\dot{q}) de um elemento são relacionadas pela seguinte expressão:

$$\{\dot{\Phi}\} = [B(t)]\{\dot{q}\} \quad 2-31$$

onde a matriz de transformação deslocamento-deformação, $B(t)$, é função da configuração deformada. As equações de compatibilidade são obtidas integrando a Equação 2-31 desde a configuração inicial até o tempo t :

$$\{\Phi\} = \int_0^t [B(\tau)]\{\dot{q}\}d\tau \quad 2-32$$

Se os deslocamentos são pequenos, a matriz de transformação se mantém aproximadamente constante, ou seja, $[B(\tau)] \cong [B_0]$, sendo $[B_0]$ a matriz de transformação na configuração indeformada. Assim, a Equação 2-32 resulta

$$\{\Phi\} = [B_0]\{q\} \quad 2-33$$

2.3.2 Tensões generalizadas e forças externas

Notação

Para a análise das equações estáticas, utiliza-se a seguinte notação:

- (a) Forças internas generalizadas em um elemento b são denotadas por $\{\mathbf{Q}\}^t = (Q_1, Q_2, \dots, Q_6)$ (Figura 2.11.a) ou pela matriz $\{\mathbf{Q}\}_b$, construída da mesma maneira que $\{q\}_b$.
- (b) Introduzem-se as tensões generalizadas de um elemento $\{M\}^t = (m_i, m_j, n)$, que se relacionam com as deformações generalizadas $\{\Phi\}$ através das relações constitutivas. m_i e m_j são os momentos nas extremidades do elemento, e n representa a força axial (Figura 2.11.b).
- (c) Assume-se que a estrutura está sujeita a forças e momentos concentrados nos nós. Estas ações externas estão dispostas na matriz $\{\mathbf{P}\}$:

$$\{\mathbf{P}\} = ((p_1, p_2, p_3), \dots, (p_{3n-2}, p_{3n-1}, p_{3n})) \quad 2-34$$

A matriz $\{\mathbf{P}\}$ contém as forças externas e as reações de apoio.

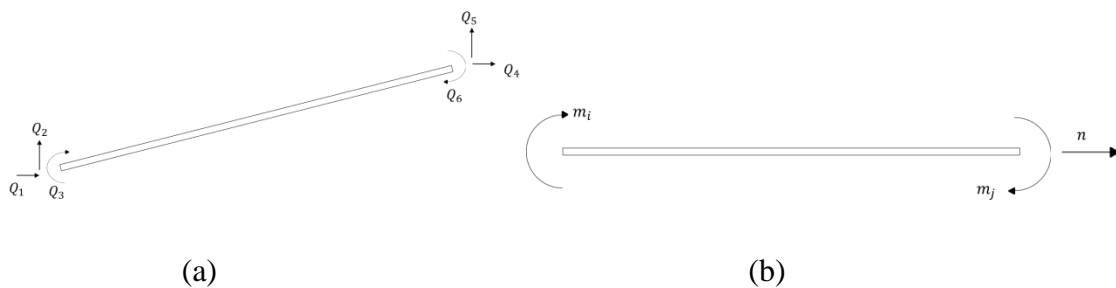


Figura 2.11 – (a) Forças internas de um elemento. (b) Tensões generalizadas de um elemento.

Equações de equilíbrio

- (a) O equilíbrio estático dos elementos determina a relação entre as forças internas e as tensões generalizadas nas configurações deformadas:

$$\{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{B}(t)]^t \{M\} \quad 2-35$$

Se os deslocamentos são pequenos, $[\mathbf{B}(t)] \cong [\mathbf{B}^0]$ (Anexo A).

(b) O equilíbrio quasi-estático dos nós é expresso como:

$$\{\mathbf{P}\} - \sum_{b=1}^m \{\mathbf{Q}\}_b = 0 \quad 2-36$$

2.3.3 Modelo de dano concentrado

A relação entre tensões generalizadas e o histórico de deformações deve ser incluída para definir completamente o problema. Se o elemento tem comportamento elástico, esta relação é expressa segundo:

$$\{\Phi\} = [\mathbf{F}^e(\{q\})]\{M\} \quad 2-37$$

sendo $[\mathbf{F}^e(\{q\})]$ a matriz local de flexibilidade e $\{q\}$ os deslocamentos do elemento. Esta matriz é função da configuração deformada. Se os deslocamentos $\{q\}$ são pequenos, então a matriz de flexibilidade pode ser considerada constante, e é definida como:

$$[\mathbf{F}^e] = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & F_{12}^0 & F_{13}^0 \\ \dots & F_{22}^0 & F_{23}^0 \\ \text{sym.} & \dots & F_{33}^0 \end{bmatrix} \quad 2-38$$

sendo $F_{11}^0 = F_{22}^0 = L/(3EI)$, $F_{12}^0 = -L/(6EI)$ e $F_{33}^0 = L/(EA)$.

Sob condições severas de sobrecarregamento, o modelo elástico é inadequado porque o elemento sofre plastificação, dano (fissuramento em estruturas de concreto armado, por exemplo), encruamento e outros fenômenos de dissipação de energia. Uma equação constitutiva mais geral pode ser obtida utilizando o modelo de dano concentrado (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2014).

No modelo de dano concentrado, o elemento é caracterizado como a combinação de uma viga-coluna elástica e duas rótulas inelásticas de tamanho zero nos extremos, como indicado na Figura 2.12. Este modelo é chamado de dano concentrado (FLÓREZ-LÓPEZ, 1993) ao invés de plasticidade concentrada porque o dano e outros efeitos inelásticos também são considerados. Assume-se que a dissipação de energia esteja concentrada apenas nas rótulas, enquanto o comportamento da viga-coluna permanece elástico.

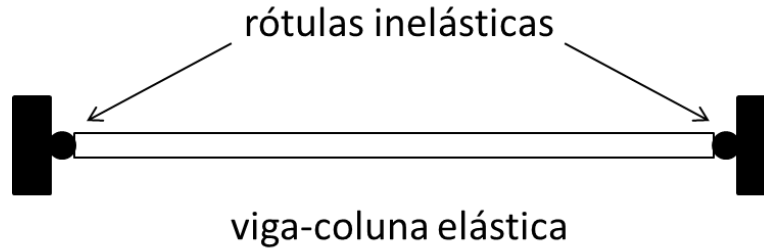


Figura 2.12 – Elemento de pórtico plano no modelo de dissipação concentrada.

As deformações do elemento podem agora ser expressas como

$$\{\Phi\} = [\mathbf{F}^e]\{M\} + \Phi^h \quad 2-39$$

sendo $[\mathbf{F}^e]\{M\}$ o termo correspondente às deformações da viga-coluna, e Φ^h corresponde à deformação inelástica da rótula.

Assume-se que as deformações inelásticas Φ^h da rótula resultam das deformações plásticas (Φ^p) mais um termo adicional devido ao dano (Φ^d):

$$\Phi^h = \Phi^p + \Phi^d \quad 2-40$$

Para considerar os vários graus de liberdade numa rótula, postula-se a existência de um conjunto de parâmetros de dano $\{D\}^t = (d_i, d_j, d_n)$, cujas componentes podem assumir valores entre zero e um. Se o dano por flexão é dominante (ou seja, $d_n = 0$), a deformação das rótulas devida ao dano é então dada por (FLÓREZ-LÓPEZ, 1993):

$$\{\Phi^d\} = [\mathbf{C}(D)]\{M\} \quad 2-41$$

sendo

$$[\mathbf{C}(D)] = \begin{bmatrix} \frac{d_i F_{11}^e}{(1 - d_i)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j F_{22}^e}{(1 - d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O termo $[\mathbf{C}(D)]$ é a matriz de flexibilidade adicional devido ao dano.

Define-se então a relação generalizada entre tensões e deformações para um elemento elasto-plástico danificado:

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [\mathbf{F}^d(D)]\{M\} \quad 2-42$$

sendo $[\mathbf{F}^d(D)] = [\mathbf{F}^e] + [\mathbf{C}(D)]$.

O termo $[\mathbf{F}^d(D)]$ representa a matriz de flexibilidade de um elemento danificado. Os parâmetros d_i e d_j medem o dano flexional das rótulas i e j , respectivamente. Se um parâmetro de dano flexional é igual a zero (sem dano), então, não há descontinuidades e tem-se uma ligação rígida. Se o parâmetro tem valor igual a um (dano total), a rótula terá o mesmo comportamento de uma rótula interna numa estrutura elástica.

Como exemplo, a matriz de flexibilidade de um elemento de inércia I , área A e comprimento L (no domínio de pequenas deformações) é dado por:

$$[\mathbf{F}^d(D)] = \begin{bmatrix} \frac{F_{11}^0}{1-d_i} & F_{12}^0 & 0 \\ F_{21}^0 & \frac{F_{22}^0}{1-d_j} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33}^0 \end{bmatrix} \quad 2-43$$

sendo $F_{11}^0 = F_{22}^0 = L/(3EI)$, $F_{12}^0 = -L/(6EI)$ e $F_{33}^0 = L/(EA)$.

Note-se que, quando um dos parâmetros de dano por flexão tende a 1, há uma singularidade (divisão por zero) e o elemento correspondente da matriz de flexibilidade tende ao infinito.

2.3.4 Forças termodinâmicas conjugadas ao dano

A energia potencial complementar de um elemento danificado, U^* , é dada por (CIPOLLINA et al., 1995):

$$U^*(\sigma, D) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t [\mathbf{C}(D)] \{\sigma\} + W^* \quad 2-44$$

sendo a primeira parcela a contribuição das rótulas, e W^* , a energia potencial complementar da viga-coluna elástica. Assume-se que a entalpia livre χ de um elemento

possa ser expressa como a soma de uma energia potencial complementar mais um potencial plástico adicional que depende de variáveis internas:

$$\chi = U^*(\sigma, D) + U^p \quad 2-45$$

A parcela U^p depende de variáveis cinemáticas e de encruamento, independentes do dano e do estado tensional. Portanto, a Equação 2-41 pode ser reescrita como:

$$\{\Phi^d\} = \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} \right\} \quad 2-46$$

As forças termodinâmicas conjugadas ao dano podem ser definidas de maneira similar, segundo:

$$\{G\} = - \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial D} \right\} \quad 2-47$$

Esta força é equivalente à taxa de liberação de energia \mathcal{G} utilizada na mecânica da fratura e na mecânica do dano contínuo. Note-se que a diferença é que \mathcal{G} expressa a variação de energia por variação de área de trinca, enquanto G expressa a variação de energia por incremento de dano. As parcelas de G têm as seguintes expressões explícitas generalizadas para cada um dos graus i, j e n :

$$\begin{aligned} G_i &= - \frac{\partial \chi}{\partial d_i} = \frac{F_{11}^0}{2} \left[\frac{m_i}{1 - d_i} \right]^2 \\ G_j &= - \frac{\partial \chi}{\partial d_j} = \frac{F_{22}^0}{2} \left[\frac{m_j}{1 - d_j} \right]^2 \\ G_n &= - \frac{\partial \chi}{\partial d_n} = \frac{F_{33}^0}{2} \left[\frac{n}{1 - d_n} \right]^2 \end{aligned} \quad 2-48$$

As equações 2-48 expressam as forças termodinâmicas G conjugadas ao dano em função das tensões generalizadas (m_i , m_j e n). Os parâmetros do dano são explicitamente introduzidos na equação constitutiva 2-43. Precisa-se, adicionalmente, de uma lei de evolução do dano em função de G , como será descrito no Capítulo 3.

2.4 Confiabilidade dependente do tempo

É conhecido que ações ambientais apresentam grande incerteza e são melhor representadas como quantidades aleatórias, i.e., como variáveis aleatórias ou processos estocásticos (BECK, 2011). Isto acontece, por exemplo, porque os carregamentos mudam ao longo do tempo (mesmo quando são quase-estáticos) ou porque as propriedades de resistência do material variam com o tempo, seja como resultado direto de ações previamente aplicadas ou devido a algum mecanismo de deterioração. A fadiga é um exemplo típico de deterioração da resistência (MELCHERS, 1999).

2.4.1 Falha à primeira sobrecarga

Formulação do problema

O problema de confiabilidade estrutural dependente do tempo consiste na avaliação da probabilidade de que um processo estocástico de carregamento $S(t)$ exceda a resistência $R(t)$ da estrutura (Figura 2.13), a qualquer instante durante o período de vida útil da mesma (BECK, 2003):

$$P_f(T) = P \left[\min_{0 \leq t \leq T} g(R, S, t) \leq 0 \right] \quad 2-49$$

onde T é a vida de projeto ou vida útil da estrutura. A equação $g(R, S, t) = 0$ é a equação de estado limite, que divide os domínios de falha e de segurança:

$$\begin{aligned} D_f(t) &= \{r, s \mid g(R, S, t) \leq 0\} \\ D_s(t) &= \{r, s \mid g(R, S, t) > 0\} \end{aligned} \quad 2-50$$

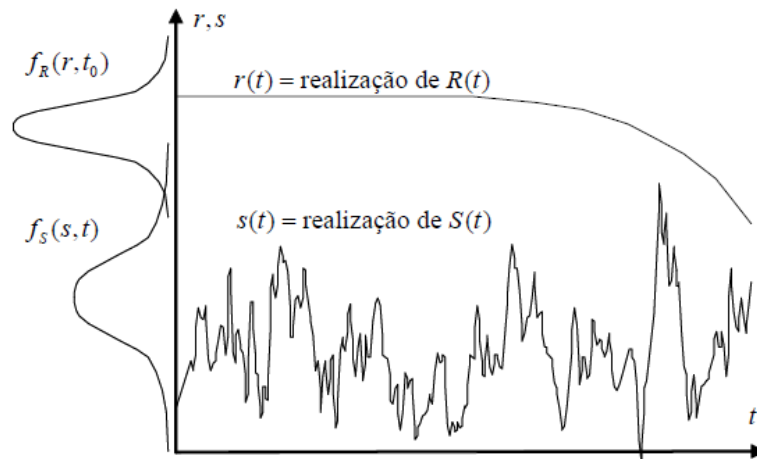


Figura 2.13 – Problema de confiabilidade estrutural típico envolvendo carregamento estocástico e variação da resistência no tempo (Beck, 2011).

Tipicamente, tanto o processo de carregamento como a resistência da estrutura são funções multi-dimensionais e dependentes do tempo (BECK, 2003).

No modelo de falha à primeira sobrecarga, a falha da estrutura fica caracterizada na primeira ocasião em que o carregamento exceder a capacidade de carga (resistência) da estrutura. Este problema pode ser formulado representando-se a chegada de sobrecargas no tempo como um processo de Poisson.

Seja $\eta(r, t)$ uma taxa de chegadas de sobrecargas, a ser determinada posteriormente. Se a ocorrência de sobrecargas é aproximada como um processo de Poisson (CRAMER; LEADBETTER, 1967), assume-se a independência entre eventos sobrecarga e o tempo entre sobrecargas torna-se exponencialmente distribuído. Neste caso, a probabilidade de sobrevivência para um período $(0, T)$ é dada pela probabilidade de que o número de sobrecargas $N^+(r, T)$ no período seja igual a zero (BECK, 2003):

$$P_S(r, T) = P[\{N^+(r, T) = 0\}]$$

$$P_S(r, T) = \frac{\left[\int_0^T \eta(r, u) du\right]^0}{0!} \exp\left[-\int_0^T \eta(r, u) du\right] \quad 2-51$$

$$P_S(r, T) = \exp\left[-\int_0^T \eta(r, u) du\right]$$

A probabilidade de falha para uma vida de projeto T é o complemento da probabilidade de sobrevivência:

$$P_f(r, T) = 1 - P_S(r, T)$$

$$P_f(r, T) = 1 - \exp\left[-\int_0^T \eta(r, u) du\right] \quad 2-52$$

Uma limitação deste modelo é o fato de que, para que ocorra uma primeira sobrecarga (passagem de barreira de baixo para cima) durante o intervalo $(0, T)$ é necessário que o processo estocástico esteja abaixo do nível r no instante inicial $t = 0$. Tal condição pode ser imposta escrevendo:

$$P_S(r, T) = P[\{S(0) < r\}]P[\{N(r, T) = 0 | S(0) < r\}]$$

$$P_S(r, T) = P_{S_0}(r) \exp\left[-\int_0^T \eta(r, u) du\right] \quad 2-53$$

O complemento da probabilidade de sobrevivência inicial $P_{S_0}(r)$ é a chamada probabilidade de falha inicial:

$$P_{f_0}(r) = 1 - P_{S_0}(r) \quad 2-54$$

Utilizando as Equações 2-52 a 2-54, a probabilidade de falha fica:

$$P_f(r, T) = 1 - P_S(r, T) \quad 2-55$$

$$P_f(r, T) = 1 - P_{S_0}(r) \exp \left[- \int_0^T \eta(r, u) du \right]$$

$$P_f(r, T) = P_{f_0}(r) + \left(1 - P_{f_0}(r) \right) \left(1 - \exp \left[- \int_0^T \eta(r, u) du \right] \right)$$

A equação 2-55 expressa a probabilidade de falha para uma vida T como uma soma de probabilidade de falha inicial mais a probabilidade de falha devido a uma sobrecarga, dado que a falha não tenha ocorrido no instante inicial. É importante notar que só existe diferença significativa entre as equações 2-52 e 2-55 quando a probabilidade de falha inicial é significativa (BECK, 2011).

Teorema de probabilidade total

Seja a resistência da estrutura uma função de um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{R} , constante no tempo ou com função de degradação determinística (variação paramétrica). Uma barreira distinta $r(t)$ é obtida para cada realização $\mathbf{R} = r$ do vetor de variáveis aleatórias, conforme mostrado na Figura 2.14:

$$r(t) = \text{função de resistência}[\mathbf{r}, t] \quad 2-56$$

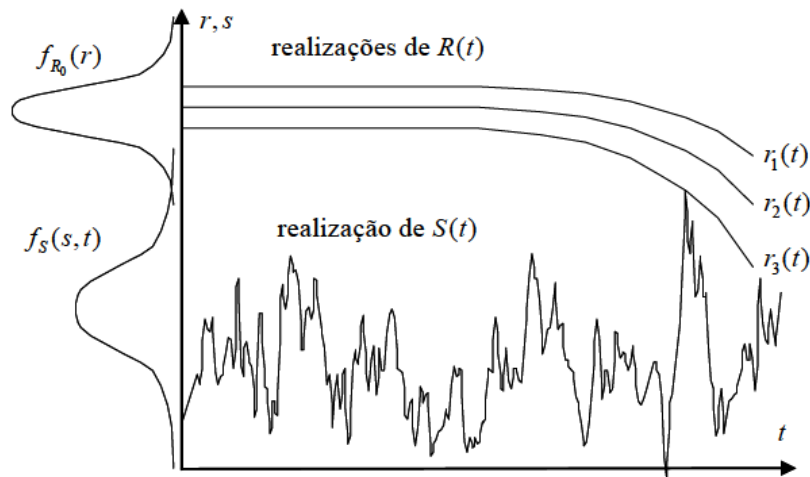


Figura 2.14 – Problema de confiabilidade estrutural típico envolvendo carregamento estocástico e variação paramétrica da resistência no tempo (Beck, 2011).

Para cada realização \mathbf{r} , o modelo de falha à primeira sobrecarga fornece uma probabilidade de falha condicional (BECK, 2003):

$$P_f(T|\mathbf{r}) = P_{f_0}(\mathbf{r}) + (1 - P_{f_0}(\mathbf{r})) \left(1 - \exp \left[- \int_0^T v^+(\mathbf{r}, u) du \right] \right) \quad 2-57$$

A probabilidade de falha para resistência aleatória é obtida através do teorema da probabilidade total (Equação 2-58):

$$P_f(T) = \int_{\mathbf{R}} P_f(T|\mathbf{r}) f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad 2-58$$

Esta integral é semelhante à integral que caracteriza o problema de confiabilidade independente do tempo. Ela pode ser avaliada, a princípio, por simulação de Monte Carlo. No entanto, é importante observar que cada ponto de integração da equação representa uma solução do modelo de falha à primeira sobrecarga para uma barreira condicional. Quando a dimensão do vetor \mathbf{R} é grande, ou quando o problema envolve mais de um processo estocástico de carregamento, a integração direta da Equação 2-58 se torna proibitiva. Além disto, esta solução é específica para um tempo T , e precisa ser repetida para determinar a probabilidade de falha ao longo da vida da estrutura. Por isto, esquemas alternativos para a integração da Equação 2-58 foram desenvolvidos (BECK, 2011).

O modelo de falha à primeira sobrecarga se aplica a problemas nos quais a variação do(s) carregamento(s) no tempo é significativa, em relação à variação da resistência, de forma que o tempo no qual a sobrecarga ocorre é desconhecido. Esta abordagem pode ser empregada na solução de problemas de mecânica da fratura estocástica, como ilustrado em Beck e Melchers (2004).

Nesta tese, no entanto, é adotada uma formulação alternativa, conhecida como “falha por acúmulo de dano”, que é a abordagem mais comum da literatura. No modelo de falha por acúmulo de dano, a incerteza no(s) carregamento(s) afeta apenas a forma como o dano é acumulado na estrutura, mas não implica em incerteza a respeito do tempo em que a sobrecarga ocorre. Este modelo assume que a sobrecarga ocorre quando o dano acumulado se torna crítico. O modelo da falha por acúmulo de dano se aplica

quando a variabilidade do(s) carregamento(s) não é significativa em relação à variação do dano, ao longo da vida.

2.4.2 Modelo de falha por acúmulo de dano

O acúmulo de dano é um processo de degradação complexo e irreversível. O dano acumula-se em componentes mecânicos ao longo do tempo, e eventualmente conduz à falha. Na abordagem conhecida como fadiga dos materiais, o acúmulo de dano se dá pelo acúmulo de ciclos de carregamento (de determinada intensidade). Na abordagem conhecida como mecânica da fratura, o acúmulo de dano se dá pelo crescimento de trincas de fadiga. Nesta tese, o problema é abordado como um problema de acúmulo de dano por fadiga, conforme descrito em detalhes na Seção 2.5. No entanto, o modelo de falha por acúmulo de dano também se aplica a problemas de encruamento, corrosão e desgaste (ZHU et al., 2017).

Há uma série de abordagens probabilísticas propostas para modelar o acúmulo de dano (HWANG; HAN, 1986; SHEN et al., 2000; LIU; MAHADEVAN, 2007; WU; HUANG, 1993; ZHU et al., 2017). Como destacado por Rathod et al. (2011), dois aspectos são importantes do ponto de vista da modelagem probabilística do dano por fadiga. Em primeiro lugar, o modelo deve prever o valor do dano esperado ou nominal. Em segundo lugar, precisa-se de uma técnica de modelagem das incertezas apropriada para levar em conta a natureza aleatória do fenômeno.

O acúmulo de dano é probabilístico por natureza, conforme ilustrado na Figura 2.15.

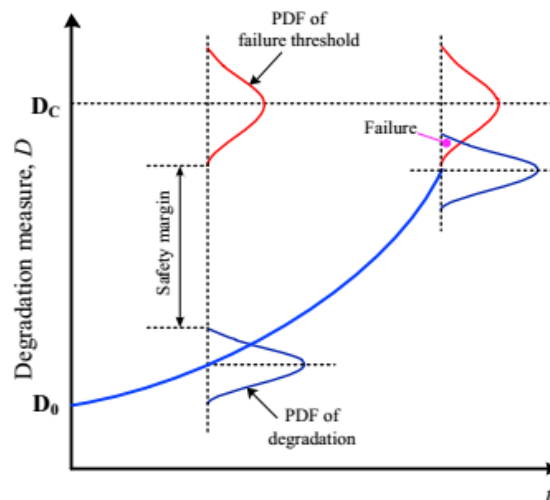


Figura 2.15 – Esquema do processo de acúmulo de dano (Zhu et al., 2017).

Wang e Coit (2007) explicam que, para um determinado tempo (ou número de ciclos), existe uma distribuição da medida de degradação considerando uma população de características semelhantes. Como o acúmulo de dano é também uma medida de degradação, seguindo Wang e Coit (2007), pode se assumir que o acúmulo de dano segue uma determinada distribuição de probabilidades, e o valor esperado e a variância do dano acumulado aumentam com o tempo. Devido ao grande número de fontes de dispersão nos dados de fadiga, o número de ciclos até a falha para um determinado nível de tensão pode também ser tratado como uma variável aleatória. Consequentemente, o dano acumulado é também uma variável aleatória (ZHU et al., 2017).

No modelo de acúmulo de dano por fadiga (Figura 2.15), as variações do processo de carregamento no tempo são relevantes apenas para identificar o número e amplitude dos ciclos de carregamento. Por outro lado, resultados experimentais mostram que o número de ciclos resistente, ou o dano crítico de fadiga, também são variáveis aleatórias.

Como a regra para cálculo do dano é uma regra empírica, resulta que, sob solicitações variáveis, se observam falha de componentes para níveis variados de dano (WIRSCHING, 1998). Portanto, observa-se que o dano crítico é também uma variável aleatória. O modelo de falha por acúmulo de dano envolve, portanto, variáveis aleatórias e o tempo. De forma genérica, a equação de estado limite pode ser escrita como:

$$g(\mathbf{X}, t) = D_c - D(\mathbf{X}, t) \quad 2-59 \quad (a)$$

sendo D_c o dano crítico (uma variável aleatória), e \mathbf{X} o vetor que reúne as demais variáveis aleatórias do problema. Por natureza, o dano $D(\mathbf{X}, t)$ aumenta com o tempo, logo a equação de estado limite vai se aproximando do zero (falha). Como o problema de confiabilidade só depende de variáveis aleatórias, este pode ser resolvido por FORM, SORM ou simulação de Monte Carlo, **para valores fixos do tempo (t)**.

A Equação 2-49a pode ser particularizada para o problema de dano por fadiga. Sendo N_s a vida de projeto, medida em tempo (meses, anos, horas de uso, etc.) ou em número de ciclos, e $N(\mathbf{X})$ a vida de fadiga da estrutura ou componente, pode-se escrever (WIRSCHING, 1995):

$$g(\mathbf{X}) = N(\mathbf{X}) - N_S \quad 2-59 \quad (b)$$

Neste caso, a vida de projeto N_S é variável determinística, que corresponde à variável tempo (t) na Eq. (2-59a). O vetor \mathbf{X} inclui variáveis aleatórias como níveis de tensão aplicada, dimensões, acabamento superficial, etc.

A Equação 2-59a também pode ser particularizada para o problema de mecânica da fratura. Neste caso, a medida tradicional do dano é o tamanho da trinca de fadiga:

$$g(\mathbf{X}, t) = A_C - A(\mathbf{X}, t) \quad 2-59 \quad (c)$$

sendo A_C o tamanho crítico de trinca (uma variável aleatória), e \mathbf{X} o vetor que reúne as demais variáveis aleatórias do problema, como taxa de propagação da trinca, níveis de tensão aplicados, tamanho inicial da trinca, etc. A formulação baseada na mecânica da fratura também pode ser escrita em termos de fatores de intensidade de tensão. Tomando como exemplo o modo I:

$$g(\mathbf{X}, t) = K_{IC} - K_I(\mathbf{X}, t) \quad 2-59 \quad (d)$$

sendo K_{IC} o fator de intensidade de tensão crítico (uma variável aleatória determinada diretamente a partir de ensaios de tenacidade à fratura), e \mathbf{X} o vetor que reúne as demais variáveis aleatórias do problema (taxa de propagação da trinca, níveis de tensão aplicados, tamanho inicial da trinca, entre outros).

As formulações apresentadas nas Eqs. (2-59 a-d) são equivalentes em termos de técnicas de solução. Todas envolvem apenas variáveis aleatórias, mas dependem do parâmetro tempo (t). Para t fixo, as probabilidades de falha podem ser determinadas usando técnicas de confiabilidade independente do tempo, como FORM, SORM ou simulação de Monte Carlo.

2.5 Soluções do problema de acúmulo de dano em fadiga

Existe uma série de trabalhos publicados sobre métodos para fadiga probabilística. Em 1982, o Comitê de Fadiga e Confiabilidade em Fratura da *American Society of Civil Engineers* (ASCE) publicou um sumário do estado da arte em fadiga probabilística (ASCE, 1982). Na maioria dos casos, as análises de confiabilidade são realizadas

empregando conceitos básicos de probabilidade e métodos de confiabilidade analíticos (FORM, SORM, AMV) ou baseados em simulação de Monte Carlo. Neste trabalho, são de especial interesse os métodos baseados em simulação.

A Figura 2.16 mostra uma interpretação probabilística da curva S-N (definidas no item 2.5.1), em que estão ilustradas as funções de densidade de probabilidade do número de ciclos para diferentes níveis de tensão.

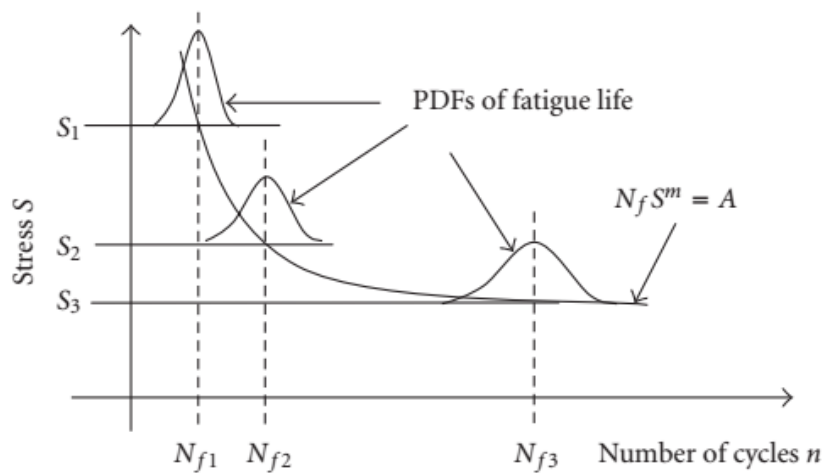


Figura 2.16 – Curva S-N probabilística (Rathod et al., 2011).

2.5.1 As curvas S-N (Wöhler)

É a abordagem mais comum no cálculo da vida à fadiga de uma estrutura. A resistência e o número de ciclos são apresentados aos pares (em tabelas, curvas ou equações). Cada par representa o número de ciclos (N) que seriam necessários para que uma tensão de certa amplitude (S) leve à falha do membro. Os dados utilizados para construir as curvas S-N são obtidos de coleções de dados experimentais.

Porém, quando se comparam detalhes nas estruturas reais com os espécimes de laboratório utilizados para determinar a curva S-N recomendada, aparecem questões como os ajustes que devem ser feitos para refletir o comportamento da estrutura real. Assim, devem ser levados em conta fatores como o efeito da espessura e a corrosividade relativa do ambiente. A maneira em que estes fatores são tratados nos diferentes conjuntos de curvas S-N varia, principalmente, como resultado de como foram

escolhidos os diferentes corpos de prova utilizados para calibrar as previsões da fadiga com relação a dados de testes e experiência de serviço (ABS, 2003).

Nos testes típicos de fadiga, o espécime é submetido a tensões de amplitude constante, como mostrado na Figura 2.17. Registra-se o número de ciclos para atingir a “falha”. Os dados são plotados num gráfico log-log, como mostrado na Figura 2.17. Estes se caracterizam-se pela sua grande dispersão estatística (Figura 2.17). Tipicamente, coeficientes de variação do número de ciclos, N , oscilam entre 30 e 150% (WIRSCHING, 1995).

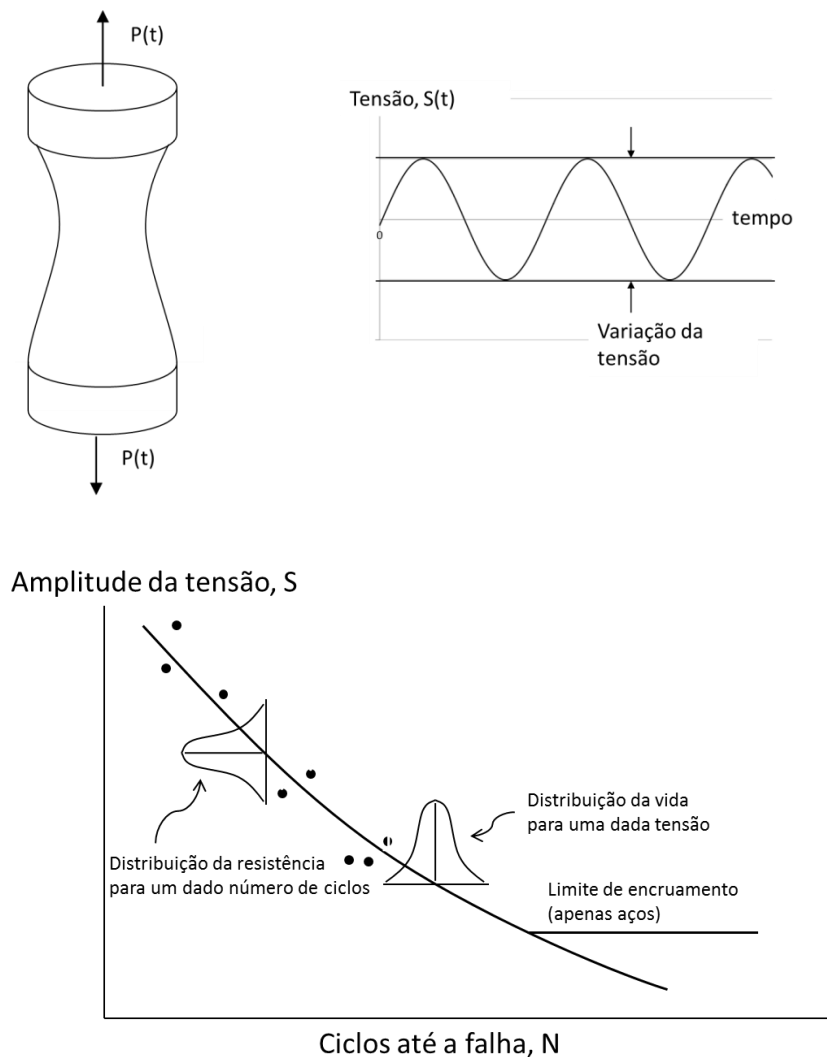


Figura 2.17 – Obtenção de dados para estabelecer a resistência à fadiga de um material (adaptado de Wirsching, 1995).

A vida em serviço do componente é definida como N_S . Diz-se que acontece uma falha por fadiga se a amplitude das tensões excede a resistência como definido pela curva S-N

em N_s , ou se N_s excede a vida como definido pela curva S-N num dado nível de tensão. Note-se que devido à dispersão dos dados da curva S-N, os eventos de falha têm grande incerteza associada. Portanto, métodos de confiabilidade são apropriados para análise e cálculo de fadiga (WIRSCHING, 1995).

O modelo tradicional para descrever a vida à fadiga N_i de um componente ou estrutura sob carregamentos repetidos e de amplitude constante é dado por (MELCHERS, 1999):

$$N_i = CS_i^{-m} \quad 2-60$$

onde C e m são convencionalmente adotadas como constantes, mas podem também ser tomadas como variáveis aleatórias, e N_i é o número de ciclos de tensão de amplitude constante S_i . Resultados de testes permitem estimar valores para C e m . Tipicamente, valores conservativos são utilizados para que 2-60 resulte numa estimativa segura de N_i . Para uma análise de confiabilidade, o modelo S-N deve prever N_i de maneira realista e não conservativa. Assim, valores típicos de C e m encontrados na literatura podem não ser apropriados para uma análise probabilística. Valores esperados devem ser utilizados, junto com a análise de influência da incerteza destes parâmetros. Esta análise pode ser realizada da maneira convencional, usando procedimentos de confiabilidade estrutural.

A margem de segurança Z pode ser escrita como:

$$Z = CS_i^{-m} - N_s \quad 2-61$$

sendo N_s é o número de ciclos que a estrutura deve suportar para um desempenho satisfatório (função do tempo de vida esperado para o funcionamento da estrutura). N_s pode estar sujeito a incerteza (MELCHERS, 1999).

De maneira mais geral, a curva S-N é não-linear. Uma ampla variedade de formas empíricas é empregada. Um exemplo é dado em Wirsching (1995):

$$(\log N)^\alpha = a_0 + a_1 \log S + a_2 \log S^\gamma \quad 2-62$$

sendo α , a_0 , a_1 , a_2 e γ os coeficientes a serem determinados dos dados S-N.

2.5.2 Acumulação de dano linear: Regra de Palmgren-Miner

Na prática, a amplitude dos ciclos de tensão não é constante, mas uma variável aleatória. Se o número de ciclos que ocorrem a cada nível de amplitude pode ser medido ou estimado, então a hipótese empírica de Palmgren-Miner pode ser adotada:

$$\sum \Delta_i = \sum \frac{n_i}{N_i} = \Delta \quad 2-63$$

Nesta expressão, n_i representa o número de ciclos de tensão atuando com a amplitude S_i , e N_i é o limite de fadiga para S_i (isto é, o número de ciclos até a falha).

O parâmetro dano, Δ , é convencionalmente adotado como a unidade, mas pode ser também uma variável aleatória. Tipicamente, está no intervalo 0.9-1.5. Aqui, Δ representa a incerteza que resulta da natureza empírica da expressão 2-63; uma distribuição lognormal com média unitária e um coeficiente de variação entre 0.4 e 0.7 parece apropriada (WIRSCHING, 1998). Devido à simplicidade da regra de Palmgren-Miner, espera-se que esta tenha um erro de modelo significativo. Assim, é conveniente tratar o dano Δ como uma variável aleatória. A Tabela 2-1 apresenta um resumo de testes da qualidade da regra de acúmulo linear de dano.

As fraquezas da regra de Miner são óbvias. Talvez a sua maior limitação seja não levar em conta os efeitos da sequência; isto é, assume que o dano causado por um ciclo de tensão é independente da sua posição no histórico do carregamento. Deve também ser observado que a única característica do material envolvida nesta regra é o número de ciclos de tensão até a falha sob carregamento de amplitude constante. Porém, sua utilidade como critério simples para comparar diferentes cálculos de uma estrutura é considerável (SOBCZYK; SPENCER, 1992).

A princípio, a margem de segurança (equação de estado limite) pode ser formulada diretamente em termos do parâmetro Δ (MELCHERS, 1999):

$$Z = \Delta - X_0 \sum_{i=1}^N C^{-1} S_i^m \quad 2-64$$

sendo o parâmetro X_0 introduzido para contemplar a incerteza do modelo, como quando existe dificuldade para medir S_i com precisão.

Tabela 2-1 – Alguns resultados do dano acumulado Δ na falha (Wirsching, 1998)

	Dano na falha	
	Mediana	C.O.V.
Minerpol: Miner's original work	0.95	0.26
Fatigue under complex stress: SAE	1.09	0.90
Schütz crack initiation		
(a) 29 random sequence test series	1.05	0.55
(b) tests with large quasi-static mean load changes	0.60	0.60
(c) significant plastic strains at notch	0.37	0.78
Schilling et al. tests on welded steel beams	1.15	0.48
Berne & Eider tests on welded sections. some stress relieved	1.06	0.40
Eide & Berge tests on welded sections, some stress relieved	0.78	0.19
Shin & Lukens: extensive survey of random test data	0.90	0.67
Gurney test data on welded joints	0.85	0.28
Wirsching default value used in reliability analysis for welded joints	1.0	0.30

A Equação 2-64 apresentará dificuldades se, como esperado, N for uma quantidade aleatória. Uma abordagem possível consiste em agrupar as amplitudes de tensão em l grupos (sendo l um número dado) e deixar o número de ciclos N_i em cada grupo como uma quantidade aleatória. Assim (MELCHERS, 1999):

$$Z = \Delta - X_0 \sum_{i=1}^l C^{-1} N_i S_i^m \quad 2-65$$

2.5.3 Acumulação do dano não-linear

Para superar as deficiências da regra de Palmgren-Miner, várias hipóteses de dano não-linear foram propostas. Uma das primeiras regras de dano não-linear foi proposta por Marco e Starkey (1954) e tem a seguinte forma analítica:

$$\Delta_i = \left(\frac{n_i}{N_i} \right)^{x_S} \quad 2-66$$

onde x_S é função do nível de tensões e é assumido no intervalo 0 – 1 (com o valor incrementando-se com o nível de tensão); e Δ_i denota a fração associada com a amplitude de tensão S_i .

A falha ocorre quando a soma de Δ_i atinge um valor crítico. Análoga à regra de Palmgren-Miner, os valores de N_i são as vidas até a falha correspondente a S_i na curva S–N. A deficiência desta abordagem é que a família de curvas de tensão deve ser desenvolvida experimentalmente para um dado material. Quando o expoente x_S na Equação 2-66 é independente da tensão (i.e., é um valor constante para todas as condições de tensão), o dano especificado na Equação 2-66 se reduz à *regra de Miner modificada*.

Em situações mais complexas (especialmente, quando se quer considerar os efeitos da sequência), requer-se uma grande quantidade de testes. Por esta razão, uma simples regra linear de Palmgren-Miner ainda é útil (SOBCZYK; SPENCER, 1992).

2.5.4 Alternativa de Wirsching (WIRSCHING; LIGHT, 1980)

O problema de prever a fadiga sob processos estocásticos de tensões recai nos dados limitados de testes de fadiga e nos modelos empíricos baseados nesses dados, desenvolvidos considerando amplitudes constantes. Na prática, porém, processos de tensões apresentam-se, tipicamente, como mostrado na Figura 2.18.

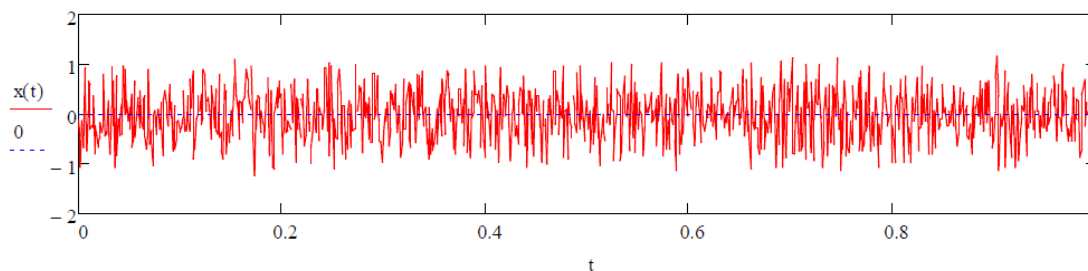


Figura 2.18 –Exemplo de tensões aleatórias que podem produzir fadiga.

Em geral, o problema da fadiga devida a tensões aleatórias é de difícil descrição. A sequência, ou o histórico específico, do carregamento pode ser importante quando há grandes diferenças em ciclos contíguos. Uma alternativa é o acúmulo do dano pela regra de Palmgren-Miner, apresentada na Equação 2-63. Outros modelos propostos encontram-se em Sobczyk e Spencer (1992) e Collins (1981).

Para históricos de tensões que são típicos de respostas estruturais vibratórias ao ambiente, a regra de Palmgren-Miner fornece resultados satisfatórios. Wirsching e Light (1980) e Wirsching (1984) resumiram testes de fadiga aleatórios e propuseram um modelo estatístico para o dano na falha, Δ . Para propósitos de análise de fadiga, é razoável modelar Δ como lognormal com uma mediana de 1.0 e COV de 0.30. Este COV representa o erro da modelagem da resistência associado ao uso da regra de Palmgren-Miner (WIRSCHING, 1995).

A acumulação do dano linear pode ser expressa considerando n ciclos de um processo de amplitude variável. Seja S_i a variação da tensão (ou amplitude) para o ciclo i -ésimo. O dano pode ser definido como:

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{N(S_i)} \quad 2-67$$

onde N é o número de ciclos para que aconteça a falha no nível de tensão S_i (tomado de uma curva S–N de amplitudes constantes). No caso particular em que a curva S–N é dada por $NS^m = C$, a expressão pode ser escrita como (WIRSCHING, 1984):

$$D = nE(S^m)/C \quad 2-68$$

onde $E(S^m)$ é o valor esperado de S^m e n é o número de ciclos de tensão aplicados. No caso particular em que a distribuição das amplitudes de tensão é de Rayleigh (o histórico das tensões é um processo Gaussiano de banda estreita) tem-se (WIRSCHING, 1995):

$$E(S^m) = (2\sqrt{2}\sigma)^m \Gamma\left[\frac{m}{2} + 1\right] \quad 2-69$$

onde $\Gamma(.)$ é a função gama.

A aplicação da regra de acumulação linear de dano requer que se conheça a condição (média e amplitude das tensões ou deformações) à qual o evento deve ser comparado. Quando o processo é de banda larga, como mostrado na Figura 2.18, não é óbvia a identificação do número de ciclos a ser utilizado na regra de Miner. Conforme aumenta a largura de banda, vários pequenos picos acontecem, obscurecendo os ciclos de carregamento e fazendo com que o conteúdo de frequência do processo torne-se consideravelmente mais complicado. Para predizer a vida de um componente sujeito a complexos históricos de carregamento, usualmente reduz-se o carregamento a uma sequência de eventos que podem ser vistos como compatíveis com dados de fadiga de amplitude constante. Os métodos que fazem tais reduções possíveis são conhecidos como técnicas de contagem de ciclos (SOBCZYK; SPENCER, 1992). Em Dowling (2013), encontra-se um sumário de métodos de contagem de ciclos.

Contagem de ciclos através do método de Rainflow

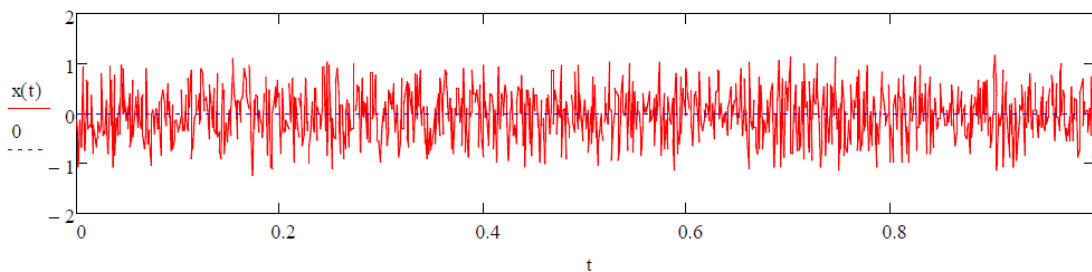
Três métodos diferentes de contagem de ciclos são os mais comuns: contagem de picos, contagem de variações e o método *Rainflow*. Entre os especialistas em fadiga, hoje é reconhecido que o *Rainflow* é o melhor modelo de contagem de ciclos (STEPHENS et al., 2001; WIRSCHING, 1995).

O método *rainflow* é uma abordagem para a contagem no número de ciclos de um processo de banda larga, seja a partir do histórico do carregamento, das tensões ou das deformações. Os autores que propuseram o método (MATSUISHI; ENDO, 1968) pensaram no histórico de picos e vales como uma série de linhas que formariam um teto de tipo “pagoda”, por onde avança o fluxo da chuva. Daí vem o nome.

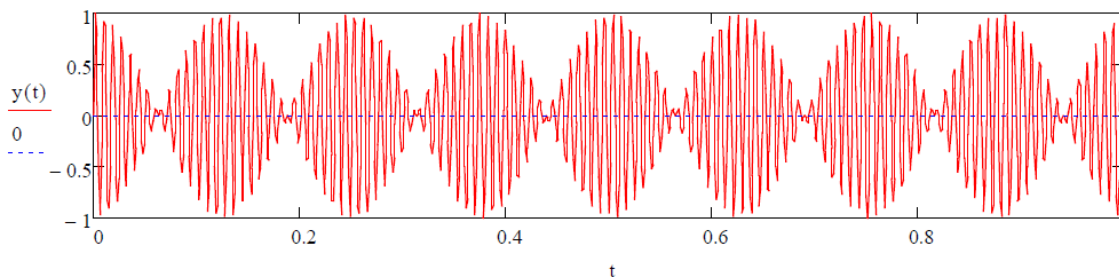
Uma descrição detalhada pode ser encontrada em Stephens et al. (2001).

Processo de banda estreita equivalente

Uma abordagem alternativa ao *rainflow* é o método da banda estreita equivalente (WIRSCHING, 1995; WIRSCHING, 1998). Para um processo de banda larga, o RMS (desvio padrão de um processo com média zero) e a taxa de cruzamento zero são calculados. Assumindo que um processo de banda estreita que tem o mesmo RMS e a mesma taxa de cruzamento pelo zero causa o mesmo dano, as fórmulas fechadas das Equações 2-68 e 2-69 podem ser aplicadas (Figura 2.19). Utilizando o método *rainflow*, um fator empírico de correção para o processo de banda estreita equivalente foi desenvolvido por Wirsching e Light (1980), e refinado por Lutes e Larsen (1990).



(a)



(b)

Figura 2.19 – (a) Processo de tensões de banda larga. (b) Processo de banda estreita equivalente.

O formato lognormal (WIRSCHING, 1984) foi proposto como um método de fórmula fechada para realizar avaliações de confiabilidade de cálculos existentes e para desenvolver critérios de cálculo probabilísticos.

Assumindo que (1) a resistência à fadiga é dada por $NS^m = A$; (2) a equação é válida até $S = 0$, ou seja, não há limite de fadiga (encruamento); e (3) a regra de Miner é válida. O dano acumulado é dado por:

$$D = \frac{n}{A} E(S^m) \quad 2-70$$

Da regra de Miner, deduz-se que a amplitude da tensão de amplitude constante equivalente é:

$$S'_e = [E(S^m)]^{1/m} \quad 2-71$$

onde o apóstrofo indica “melhor estimativa”. Introduce-se o erro do modelo através de uma variável aleatória B , que quantifica as incertezas associadas à regra de Miner e ao método de processo de banda estreita equivalente. Assim, a amplitude de tensão equivalente é:

$$S_e' = B \cdot S_e \quad 2-72$$

Por sua vez, o dano D resulta:

$$D = \frac{n}{A} B^m S_e^m \quad 2-73$$

Quando acontece a falha, $D = \Delta$, e $n = N$. O número total de ciclos até a falha é N .

$$N = \frac{C\Delta}{B^m S_e^m} \quad 2-74$$

Assume-se que Δ , B e C são variáveis aleatórias com distribuição lognormal. Portanto, N também terá uma distribuição lognormal (NOWAK; COLLINS, 2000). Então, é possível encontrar uma solução fechada para a probabilidade da falha por fadiga antes do tempo de vida pretendido, N_S :

$$p_f = P(N \leq N_S) \quad 2-75$$

A fórmula exata para a probabilidade de falha de uma variável aleatória lognormal é:

$$p_f = \Phi(-\beta) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad 2-76$$

sendo Φ a função cumulativa de probabilidades normal padrão, e β o índice de segurança (índice de confiabilidade), definido para este estado limite como:

$$\beta = \frac{\ln(\tilde{N}/N_S)}{\sigma_{\ln N}} \quad 2-77$$

sendo o \sim para a mediana.

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{A}\tilde{\Delta}}{\tilde{B}^m S_e^m} \quad 2-78$$

$$\sigma_{\ln N} = \sqrt{\ln[(1 + C_\Delta^2)(1 + C_A^2)(1 + C_B^2)^{m^2}]} \quad 2-79$$

sendo C os coeficientes de variação.

As vantagens do formato lognormal são: fornece uma fórmula exata e fácil para calcular o índice de segurança; em geral, modelos lognormais para as variáveis de cálculo fornecem bons ajustes para a maioria das variáveis; em particular, uma série de estudos dirigidos por Wirsching tem mostrado que o lognormal é o melhor ajuste para as variáveis para o cálculo dos ciclos até a falha (WIRSCHING, 1998).

2.6 Soluções do problema de acúmulo de dano

2.6.1 Média, distribuição e variância do dano acumulado

Rathod et al. (2011) deduziram uma expressão para a média do dano acumulado, baseada nas curvas S-N e na regra de Palmgren-Miner. Dada a curva S-N definida por $N_f S^m = A$, o dano acumulado devido a k diferentes níveis de tensão é dado por:

$$D = \sum_{i=1}^k D_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{fi}} = \sum_{i=1}^k \frac{S_i^m n_i}{A} \quad 2-80$$

sendo D o dano total acumulado, D_i o dano acumulado devido ao nível de tensão S_i , n_i o número de ciclos aplicado, e N_{fi} o número de ciclos até a falha para o nível de tensão S_i .

Rathod et al. (2011) também propuseram uma função distribuição de probabilidades normal do dano total, dada por:

$$f_d(D) = \frac{1}{m' \sigma_{Nf} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\frac{D}{m'} - \mu_{Nf}}{\sigma_{Nf}} \right)^2 \right) \quad 2-81$$

sendo $\sigma_D = m' \sigma_{Nf}$,

σ_D : desvio padrão do dano acumulado,

σ_{Nf} : desvio padrão do número de ciclos até a falha.

O desvio padrão para o caso mais geral de carregamento, com diferentes níveis de tensão, é ilustrado na Figura 2.20. O valor é calculado por (RATHOD et al., 2011):

$$\sigma_D = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(C S_i^m n_i \left(\frac{\sigma_{Nfi}}{N_{fi}} \right) \right)^2} \quad 2-82$$

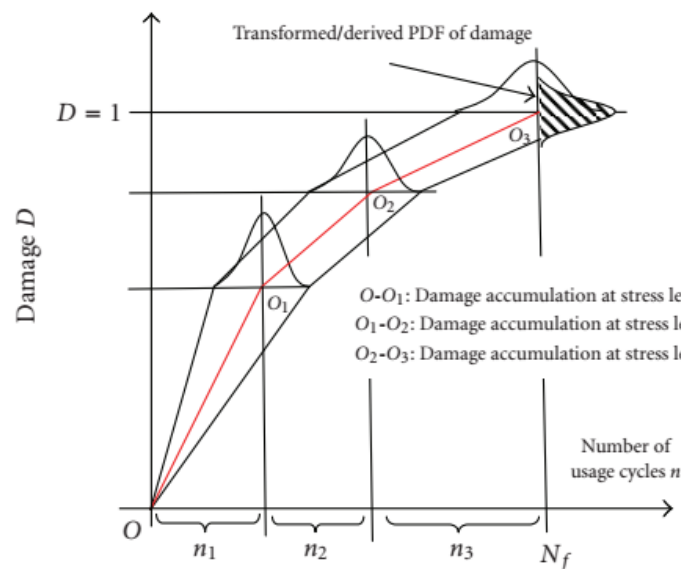


Figura 2.20 – Acúmulo de dano para carregamento com diferentes níveis de tensão e a sua distribuição (Rathod et al., 2011).

Zhu et al. (2017) apresentaram resultados similares, mas considerando uma lei de acúmulo de dano não linear com expoente a_i para cada nível de tensão i :

$$D = \sum_{i=1}^k D_i = \sum_{i=1}^k \left(\frac{S_i^m}{A} \right)^{a_i} n_i^{a_i} \quad 2-83$$

Também deduziram uma distribuição de probabilidades lognormal do dano acumulado, dada por (ZHU et al., 2017):

$$f_d(D) = \frac{1}{D a \sigma_{N_f} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln D - \ln k - a \mu_{N_f}}{a \sigma_{N_f}} \right)^2 \right) \quad 2-84$$

sendo $\sigma_D = a \sigma_{N_f}$,

σ_D : desvio padrão do dano acumulado,

σ_{N_f} : desvio padrão do número de ciclos até a falha,

$k = D_c \left(\frac{S^m}{A} \right)^a$, D_c : limite crítico do dano.

2.6.2 Análise de confiabilidade

Liao et al. (1995) classificam os modelos de confiabilidade de dano acumulado em estáticos e dinâmicos. Nos modelos dinâmicos, ambos os parâmetros da variável (média e variância) são tomados como dependentes do tempo. Rathod et al. (2011) propõem um modelo estatístico dinâmico com as seguintes considerações:

- A falha acontece quando o dano acumulado (D) atinge o limite crítico de dano, quando $E(D_c) = 1$.
- O limite do dano ou dano crítico tem a mesma distribuição que o dano acumulado.
- Quando a vida útil é igual à vida até a falha por fadiga ($n = N_f$), a variância do limite do dano acumulado ($\sigma_{D_c}^2$) é igual à variância do dano acumulado (σ_D^2).

Para um dado limite crítico de dano, D_c , a falha ocorre quando o dano acumulado, D , é maior que D_c . Se a medida do acúmulo de dano for tratada como uma variável normal

dinâmica, a confiabilidade em termos do acúmulo de dano é modelada como (RATHOD et al., 2011):

$$\begin{aligned} R &= \text{prob}(D < D_c) \\ &= 1 - \text{prob}(D_c - D \leq 0) \end{aligned} \quad 2-85$$

$$R = 1 - \Phi \left(- \frac{(\mu_{Dc} - \sum_{i=1}^k C S_i^m n_i)}{\sqrt{\sigma_{Dc}^2 + \sum_{i=1}^k \left(C S_i^m n_i \left(\frac{\sigma_{Nfi}}{N_{fi}} \right)^2 \right)}} \right) \quad 2-86$$

2.7 Soluções de Acúmulo de Dano empregando Mecânica da Fratura

Uma abordagem alternativa para a modelagem da fadiga consiste em calcular o crescimento da trinca sob sistemas de carregamento cíclicos e/ou aleatórios através da Mecânica da Fratura (DOWLING, 2013; ANDERSON, 1995). Esta abordagem costuma ter importância em estudos auxiliares ou de apoio, como no cálculo do tamanho aceitável ou mínimo de falha detectável e a predição do crescimento da trinca (ABS, 2003).

O crescimento de uma trinca dominante pode acontecer durante um extenso período, devido a carregamentos cíclicos e/ou efeitos ambientais adversos. Este crescimento subcrítico da trinca dominante eventualmente leva a condições críticas, a partir das quais a fissura cresce rapidamente e de maneira instável. A tecnologia da mecânica da fratura (determinística) para predição de crescimento da trinca e a instabilidade final está bem estabelecida, e é descrita em livros como Kanninen e Popelar (1985), Dowling (2013) e Anderson (1995), que fornecem informação compreensível sobre a matéria.

Numa abordagem probabilística da mecânica da fratura, as quantidades básicas envolvidas são o tamanho inicial da trinca, a solução para a força que guia o crescimento (fatores de intensidade para problemas elástico-lineares), as tensões aplicadas, e propriedades do material que descrevem as características e condições do crescimento subcrítico até a instabilidade final. Uma análise convencional determinística via mecânica da fratura fornece o tempo (ou número de ciclos) até a falha

para um dado conjunto de condições iniciais. Parte deste processo é a avaliação do tamanho crítico da trinca. Porém, muitos dos dados necessários para uma análise através da mecânica da fratura costumam estar sujeitos a uma dispersão ou incerteza significativa. Comumente, são empregados limites conservadores nos dados de entrada, de maneira a fornecer uma estimativa conservadora do tempo até a falha. Isto acumula conservadorismo e pode levar a resultados excessivamente conservadores e não-realistas.

Uma maneira de obter um resultado mais realista é considerar alguns dos dados de entrada como variáveis aleatórias, e entender o resultado como uma distribuição estatística do tempo de vida, ao invés de um simples valor determinístico. Esta distribuição do tempo de vida fornece a confiabilidade do componente como uma função do tempo, e decisões como substituição, cálculo, inspeção, etc., podem ser baseadas na confiabilidade do componente. Considerando as variáveis de entrada como aleatórias, elimina-se a necessidade de limites conservativos (HARRIS, 1995).

A mecânica da fratura probabilística (*Probabilistic Fracture Mechanics* ou PFM) é a mecânica da fratura que considera alguns dos dados de entrada da análise como variáveis aleatórias. Um primeiro exemplo de variável aleatória é o tamanho inicial da trinca. Este valor raramente é conhecido com precisão, e usualmente tem uma forte influência no tempo de vida. O tamanho inicial da trinca, a ser utilizado no cálculo do tempo de vida, deve ser avaliado em cada caso, levando em conta o tamanho para diferentes soldas utilizadas na fabricação, geometrias e acurácia das inspeções. Numa abordagem determinística, para trincas superficiais iniciadas na interface solda/material base, pode adotar-se uma profundidade de trinca de 0.5 mm se outros dados confiáveis sobre o tamanho da trinca não estiverem disponíveis (ABS, 2003).

Todos os outros dados de entrada, como tensões, ciclos, características do crescimento subcrítico e tenacidade, podem também ser considerados como variáveis aleatórias. Outro fator que naturalmente é incorporado nas análises via PFM são os efeitos das inspeções. Estes entram através da probabilidade de detectar um defeito por um dado processo de inspeção como uma função do tamanho e da probabilidade de medir o defeito com precisão, e repará-lo satisfatoriamente (HARRIS, 1995).

2.7.1 Aspectos determinísticos

Os procedimentos básicos de uma análise de fadiga determinística via mecânica da fratura estão resumidos na Figura 2.21 (HARRIS, 1995).

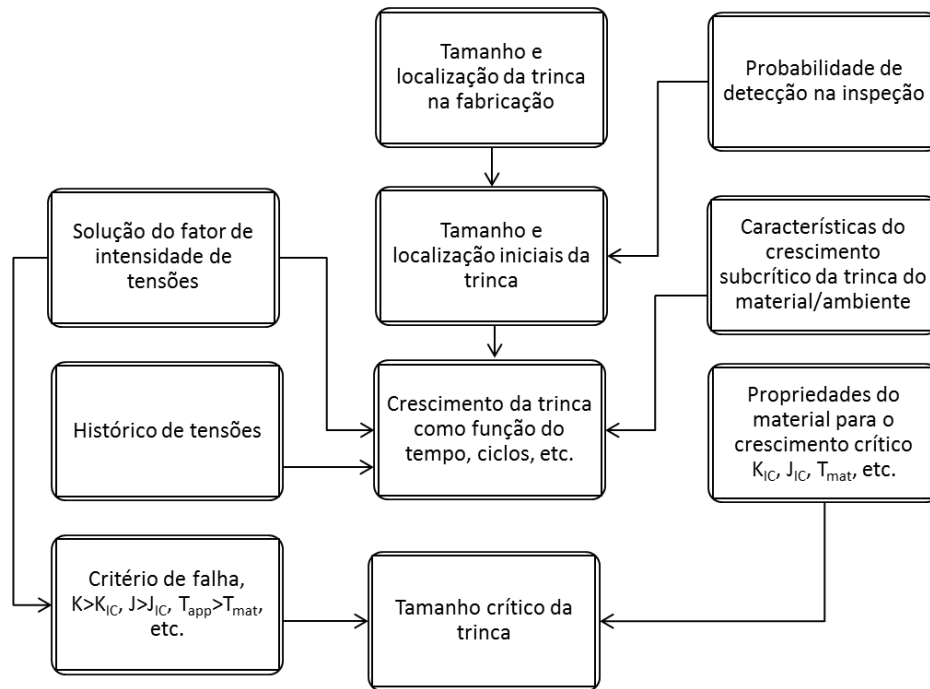


Figura 2.21 – Componentes básicos de modelo determinístico de mecânica da fratura para predição do crescimento da trinca e instabilidade da trinca (adaptado de Harris, 1995).

O comportamento de uma trinca é usualmente governado pela taxa de liberação de energia de deformação (isto é, a taxa de liberação de energia de deformação armazenada por unidade de área da extensão da trinca). Em sólidos elástico-lineares, esta taxa pode ser expressa em termos do fator de intensidade de tensões, K (KANNINEN; POPELAR, 1985). Para sólidos não-lineares, o valor da integral J descreve melhor esta taxa de liberação de energia (DOWLING; BEGLEY, 1976). J e K também controlam a resistência da trinca em matérias elásticos não-lineares e lineares, respectivamente. A força que conduz a fissura depende do nível de deformação e da sua distribuição, do tamanho da trinca, e da geometria do corpo. Por exemplo, para uma fissura de comprimento $2a$ sobre uma chapa infinita sujeita a uma tensão remota S , o fator de intensidade de tensões é dado pela expressão (STEPHENS et al., 2001):

$$K = S(\pi a)^{1/2} \quad 2-87$$

Para geometrias mais complexas, a expressão é similar, mas inclui um fator relacionado à geometria da fissura e do corpo. Por exemplo, o fator de intensidade de tensões para uma fissura circunferencial num cilindro carregado axialmente (Figura 2.22) é dado por (HARRIS, 1995):

$$K = S(\pi a)^{1/2} F\left(\frac{a}{h}, \frac{R_i}{R_o}\right) \quad 2-88$$

onde h , a , R_i e R_o estão indicados na figura. A função F é obtida usualmente através de técnicas numéricas, como elementos finitos. Resultados análogos para F estão disponíveis para diferentes geometrias em manuais. Igualmente, expressões análogas à Equação 2-88 estão disponíveis para a integral J para uma ampla variedade de geometrias (KANNINEN; POPELAR, 1985; ANDERSON, 1995).

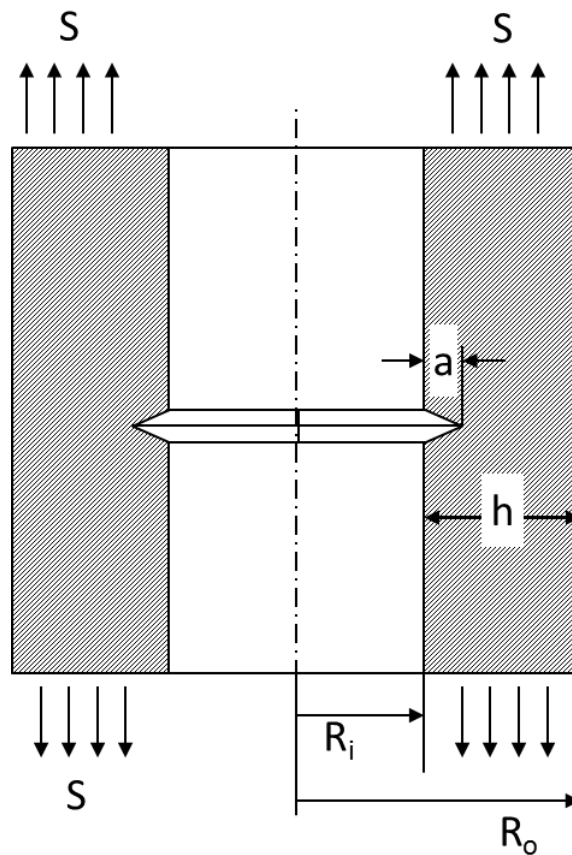


Figura 2.22 – Esquema de uma trinca superficial interna numa peça tubular (adaptado de Harris, 1995).

A instabilidade da fissura é usualmente controlada por valores críticos de K ou J , denotados por K_{IC} e J_{IC} , denominados tenacidade. Em alguns materiais, esta resistência pode crescer com a extensão da trinca, e faz-se necessário um tratamento da resistência em função do crescimento da trinca. Valores de K_{IC} ou J_{IC} para um dado material são medidos em laboratório, e podem estar sujeitos a uma dispersão considerável, podendo também ter forte influência da temperatura (HARRIS, 1995).

O crescimento subcrítico acontece antes de atingir o tamanho crítico da trinca. Este pode acontecer devido a carregamento cíclico (fadiga), encruamento, trincamento por tensões de corrosão, crescimento da trinca por hidrogênio, etc. A Equação 2-89 é um funcional geral para ajuste da curva dos dados do crescimento da trinca da fadiga (HARRIS, 1995):

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n (1 - R)^m \frac{[\Delta K - (1 - C_0 R)^d \Delta K_0]^p}{[(1 - R)K_c - \Delta K]^q} \quad 2-89$$

onde $\Delta K = K_{máx} - K_{mín}$ durante o ciclo de fadiga, $R = K_{mín}/K_{máx}$, e C , n , m , C_0 , d , ΔK_0 , p , K_c e q são parâmetros do ajuste da curva. Esta equação é uma forma da relação modificada de Forman (FORMAN et al., 1967), que comprovadamente fornece um bom ajuste para uma ampla variedade de materiais (a fórmula de Forman foi utilizada no desenvolvimento do programa NASGRO). Quando m , q e p são iguais a zero, a relação se reduz à conhecida fórmula de Paris (PARIS; ERDOGAN, 1960).

Com base em evidências experimentais, a taxa de crescimento da trinca a pode ser relacionada à variação do fator de intensidade de tensões ΔK por

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad 2-90$$

onde a é o tamanho da trinca, N é o número de ciclos de tensão, e C e m são “constantes” experimentais, que dependem, usualmente, da frequência do carregamento, a tensão média e as condições ambientais, incluindo os procedimentos precisos dos testes de fadiga nos experimentos em laboratório (numa análise de confiabilidade, C e m devem ser tratados como quantidades incertas). A variação do fator de intensidade de tensões ΔK , para situações em que $K(a)$ não varia significativamente com o nível de tensão, pode ser expressa como (MELCHERS, 1999)

$$\Delta K = K(a) \cdot \Delta S \cdot (\pi a)^{1/2}, \Delta K > \Delta K_{th} \quad 2-91$$

onde ΔS representa a diferença entre a máxima e a mínima tensão, e $K(a)$ é função do tamanho da trinca a , da geometria local e da natureza do campo de tensões. ΔK_{th} é o limite abaixo do qual não há crescimento da trinca.

A variação do tamanho da trinca, a , com o número de ciclos de tensão aplicados, N , pode ser obtida da integração de 2-90 e utilizando 2-91:

$$a(N) = a[a_0, K(a), \Delta S, C, m, \Delta K, \Delta K_{th}, N] \quad 2-92$$

onde a_0 é o tamanho inicial da trinca. A expressão pode ser utilizada para obter a média e a variância de $a(N)$ quando são dados os parâmetros estatísticos das variáveis envolvidas na expressão. A amplitude da variação da tensão, ΔS , dependerá da sequência do carregamento e será também uma variável aleatória.

2.7.2 Aspectos probabilísticos

Uma vez que é definida uma abordagem determinística da mecânica da fratura, esta pode ser transformada em uma abordagem probabilística considerando alguns dos dados de entrada como variáveis aleatórias. As quantidades candidatas a serem consideradas aleatórias incluem a localização inicial da fissura e o seu tamanho (profundidade e comprimento), tenacidade, características do crescimento subcrítico da trinca, e níveis e ciclos de tensões. Adicionalmente, os efeitos das inspeções podem ser incluídos através da sua influência na detecção da fissura, dimensionamento e reparo (HARRIS, 1995).

A distribuição de probabilidades do tamanho inicial da trinca é um dos dados mais importantes em qualquer análise de PFM. Em muitos problemas práticos, trincas enterradas ou superficiais de tamanho finito são encontradas. Para propósitos de análise da mecânica da fratura, as trincas são genericamente idealizadas como elípticas ou semi-elípticas. A Figura 2.23 mostra esquematicamente uma trinca elíptica interna em uma chapa de espessura finita. Três números são necessários para descrever esta trinca: a , c e s . Cada uma destas pode ser considerada uma variável aleatória. Fatores de intensidade de tensões para este tipo de trinca estão disponíveis na literatura, especialmente para trincas superficiais ($s = 0$) (NEWMAN; RAJU, 1983). As estatísticas do tamanho e da posição da trinca são geralmente dispersas. A dimensão s

costuma ser adotada como zero (trincas superficiais), ou com distribuição uniforme ou normal.

A profundidade da fissura a é o parâmetro de maior importância, pois tem uma influência muito maior do que c sobre K . A informação sobre a distribuição de a é dispersa, e depende do material, espessura, processo de soldagem, etc. Provavelmente, a distribuição mais familiar seja a adotada em Marshall (1976), no relatório sobre reservatórios nucleares. Neste caso, a adotou-se como tendo distribuição exponencial, com uma função densidade de probabilidades dada por:

$$p(a) = \frac{1}{\lambda} e^{-a/\lambda} \quad 2-93$$

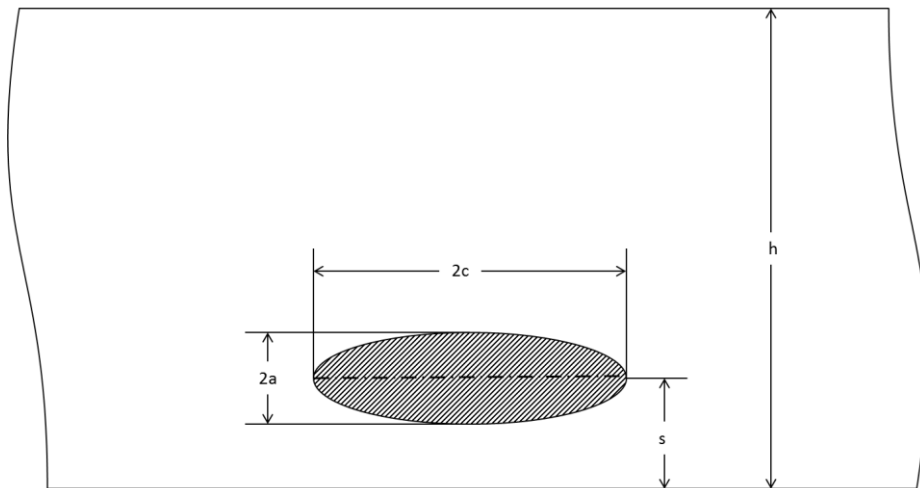


Figura 2.23 – Esquema de uma trinca no interior de uma chapa de espessura h (adaptado de Harris, 1995).

com $\lambda = 0.246$ pol. Uma média de 0.246 pol para uma espessura de 10 pol é razoável, mas o uso desta distribuição com o mesmo valor de λ não é satisfatória para materiais mais finos.

Um exemplo raro de distribuição do tamanho da trinca baseada em observações está disponível em Hudak et al. (1990). Trincas superficiais semi-elípticas de comprimento $2c$ e profundidade a foram estudadas, e o histograma de a está mostrado na Figura 2.24.

A distribuição lognormal foi obtida no processo de ajuste. Esta função de densidade de probabilidades é expressa por (ANG; TANG, 1975)

$$p(a) = \frac{1}{\mu a (2\pi)^{1/2}} \exp \left\{ - \left[\frac{\ln(a/a_{50})}{\mu^{1/2}} \right]^2 \right\} \quad 2-94$$

onde $a_{50} = 0.38 \text{ mm}$, e $\mu = 0.807$. O ajuste está mostrado também na Figura 2.24.

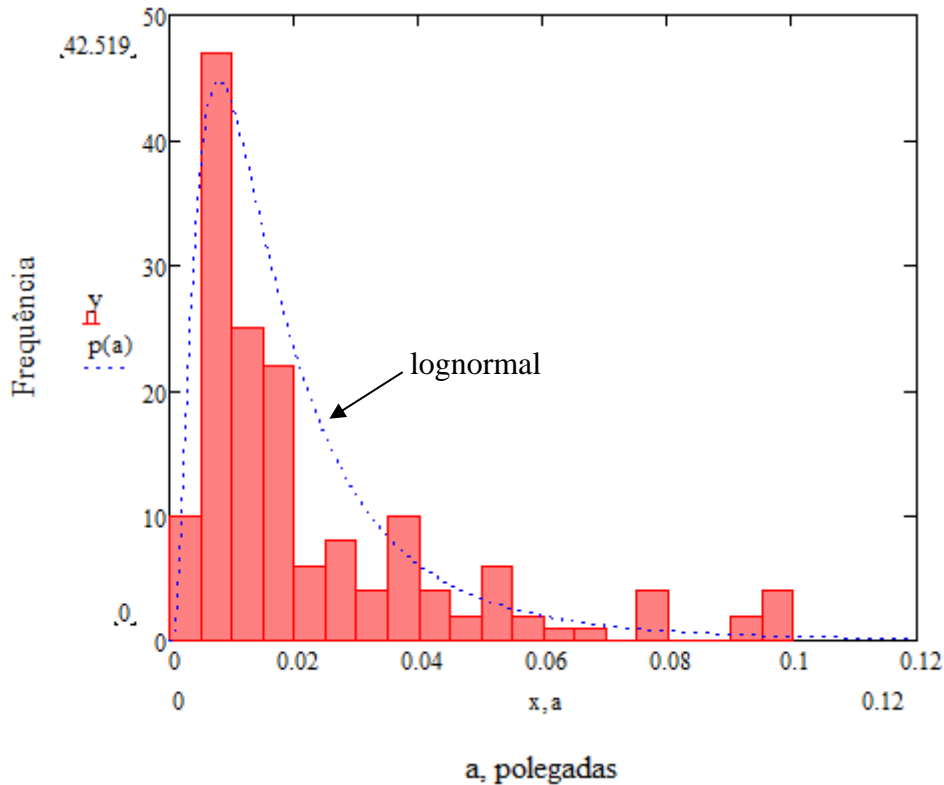


Figura 2.24 – Histograma e função de densidade de probabilidades correspondente para profundidades iniciais de trincas (adaptado de Harris, 1995)

A segunda dimensão do tamanho da trinca, c , também é importante. Porém, existe pouca informação sobre a distribuição de c , e assume-se que a razão c/a é independente de a . Isto simplifica significativamente a descrição estatística do tamanho da trinca, e fornece uma boa aproximação. Alguns dados estão disponíveis para verificar esta hipótese (HARRIS, 1995).

Características do material necessárias para uma análise de mecânica da fratura estão sujeitas a dispersão considerável. A dispersão pode ser caracterizada convenientemente.

3 METODOLOGIA DE ANÁLISE DE FADIGA VIA LDM CONSIDERANDO INCERTEZAS

3.1 Introdução

A motivação para o presente trabalho surgiu da necessidade de realizar um grande número de análises estruturais no domínio do tempo para calcular a probabilidade de falha devido à fadiga utilizando métodos baseados em simulação (métodos de Monte Carlo). Sabe-se que estes apresentam resultados robustos e confiáveis, mas podem apresentar a desvantagem de um elevado custo computacional.

Nesse sentido, propõe-se uma metodologia em que as análises estruturais de fadiga são realizadas através da LDM. A maior vantagem deste método é a demanda computacional relativamente baixa das análises de estruturas complexas sem perda de representabilidade. Isto possibilita a realização do grande número de análises aleatórias necessárias. Esta metodologia é descrita na seção 3.2.

Os aspectos probabilísticos da análise serão posteriormente considerados na aleatoriedade 1) da amplitude das forças solicitantes e 2) dos parâmetros que descrevem a evolução do dano.

3.2 Análise de estruturas sujeitas a fadiga de alta ciclagem via Mecânica do Dano Concentrado

3.2.1 Equações cinemáticas e estáticas

A partir das equações da mecânica do dano concentrado, apresentadas no Capítulo 2 (Equações 2-29 a 2-43), formulam-se as relações adaptadas a uma análise de fadiga. Considere-se um pórtico plano submetido a fadiga de alta ciclagem, tal como acontece em estruturas *offshore*, pontes, estruturas utilizadas na geração de energia eólica, entre outras, como exemplificado na Figura 3.1.

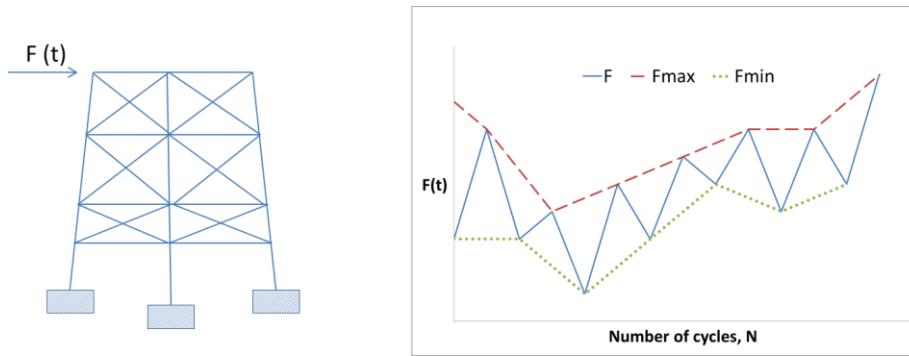


Figura 3.1 – Pórtico plano e carregamento cíclico aleatório.

Em cada ciclo, a força varia entre dois valores limite. Estes valores podem variar no tempo, que será medido em termos do número de ciclos N . Para caracterizar o padrão de movimento sob estas condições, a matriz de deslocamentos (expandida) é introduzida, como mostrado na Equação 3-1. Na Figura 3.2, mostram-se os seis graus de liberdade por nó.

$$\{U\}_i^t = (u_i^{\min}, u_i^{\max}, w_i^{\min}, w_i^{\max}, \theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}) \quad 3-1$$

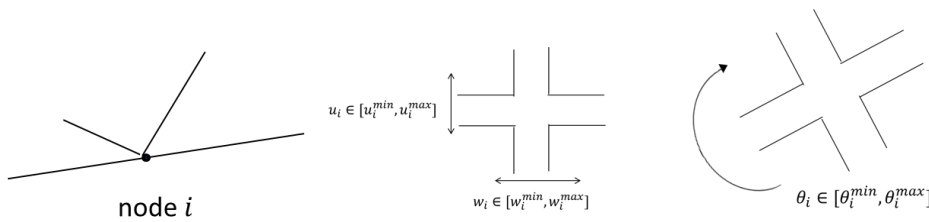


Figura 3.2 – Deslocamentos generalizados de um nó de um pórtico plano.

Portanto, a matriz ampliada de deslocamentos nodais de um elemento b , entre os nós i e j , é definida como:

$$\{q\}_b^t = (\{U\}_i^t \{U\}_j^t) \quad 3-2$$

Observe-se que, mesmo no caso de uma estrutura plana, há seis graus de liberdade por nó da estrutura: o deslocamento horizontal mínimo por ciclo u_i^{\min} , e o máximo u_i^{\max} ; o mesmo se aplica aos deslocamentos verticais, w_i^{\min} e w_i^{\max} , e às rotações, $\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}$. Desta maneira, a matriz de deslocamentos inclui os dois valores limite de deslocamento (ou rotação) produzido em cada ciclo do histórico de carregamento da estrutura.

A matriz de forças externas, $\{\mathbf{P}\}$, e forças internas, $\{\mathbf{Q}\}$, mostrada na Figura 3.3, é definida de maneira análoga.

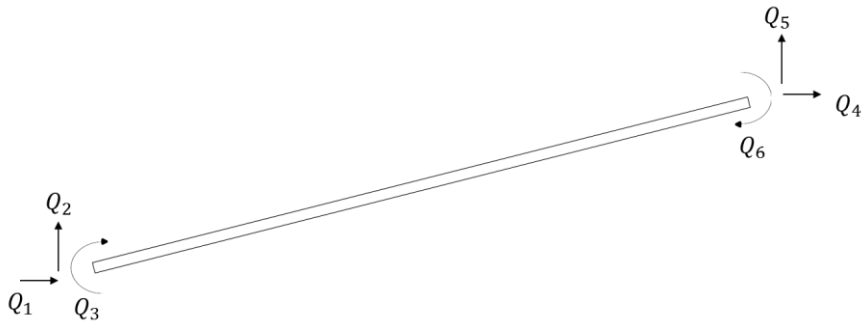


Figura 3.3 – Forças internas de um elemento.

Utilizando a notação usual na LDM, outras variáveis cinemáticas e estáticas são introduzidas para cada elemento do pórtico. Estas são as matrizes de deformações, $\{\Phi\}$, e de tensões generalizadas, $\{M\}$. Porém, diferentemente do caso de estruturas planas sujeitas a carregamentos monotônicos, estas matrizes têm agora seis componentes (correspondentes aos valores máximos e mínimos após cada ciclo de carregamento):

$$\begin{aligned} \{\Phi(N)\}^t &= (\phi_i^{min}, \phi_i^{max}, \phi_j^{min}, \phi_j^{max}, \delta_i^{min}, \delta_i^{max}) \\ \{M(N)\}_b^t &= (m_i^{min}, m_i^{max}, m_j^{min}, m_j^{max}, n_i^{min}, n_i^{max}) \end{aligned} \quad 3-3$$

Na Figura 3.4 estão mostrados os valores máximos e mínimos das deformações generalizadas. Na Figura 3.5 estão ilustrados os valores máximos e mínimos das tensões generalizadas.

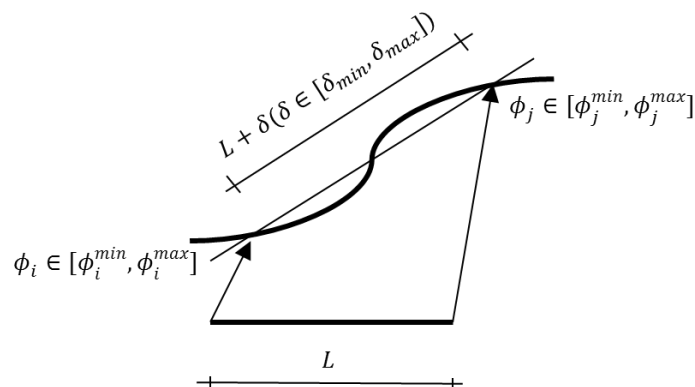


Figura 3.4 – Deformações generalizadas de um elemento.

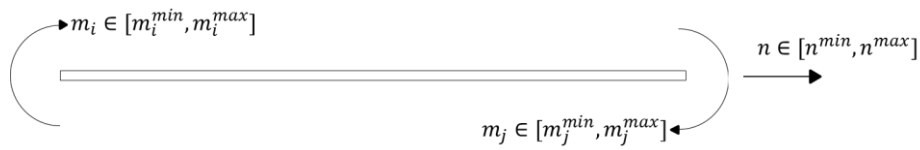


Figura 3.5 – Tensões generalizadas de um elemento.

A equação cinemática que relaciona os deslocamentos e deformações generalizadas (compatibilidade) tem a mesma forma geral da equação utilizada segundo a abordagem do dano acumulado, e pode ser derivada através do mesmo procedimento. Note que as dimensões da matriz $[\mathbf{B}]$ e os termos restantes são modificados:

$$\{\dot{\Phi}\} = [\mathbf{B}]\{\dot{q}\} \quad 3-4$$

Se os deslocamentos são pequenos e os efeitos não lineares são desprezados, a matriz de transformação, $[\mathbf{B}]$, permanece constante, i.e., $[\mathbf{B}] \cong [\mathbf{B}_0]$ (Anexo A). Integrando a Equação 3-4, tem-se:

$$\{\Phi\} = [\mathbf{B}_0]\{q\} \quad 3-5$$

sendo $[\mathbf{B}_0]$ a matriz de transformação na configuração indeformada.

Analogamente, a equação de equilíbrio que relaciona as tensões generalizadas e as forças externas tem a seguinte forma geral:

$$\sum [\mathbf{B}_0]^t \{M\} = \{P\} \quad 3-6$$

3.2.2 Lei constitutiva

O dano neste tipo de estruturas manifesta-se na forma fissuras nas juntas sujeitas a forças axiais ou momentos fletores. Como apresentado na Seção 2.3, na LDM, o conjunto de fissuras numa junta é medido pela variável adimensional dano. O grau de liberdade normal n pode ser desprezado quando os momentos fletores são preponderantes em relação à força normal.

Portanto, desconsiderando o dano axial, d_n , tem-se a matriz de dano \mathbf{D} (no caso de fadiga, expressa como função do número de ciclos N):

$$\{\mathbf{D}(N)\} = (d_i, d_j) \quad 3-7$$

Como na CDM, as deformações totais são divididas em um termo elástico e um termo relativo ao dano (deformações plásticas, Φ^p , foram desconsideradas, mas poderiam ser incluídas desde que se disponha das leis de evolução da deformação plástica):

$$\{\Phi\} = \{\Phi^e\} + \{\Phi^d\} \quad 3-8$$

Novamente, as deformações elásticas, Φ^e , e as deformações relativas ao dano, Φ^d , podem ser expressas como função das tensões generalizadas através de matrizes de flexibilidade:

$$\{\Phi^e\} = [\mathbf{F}^e]\{M\}; \quad \{\Phi^d(N)\} = [\mathbf{C}(\mathbf{D}(N))]\{M\} \quad 3-9$$

As matrizes mostradas na Equação 3-9 são similares às matrizes convencionais, mas são expandidas para relacionar os valores máximos e mínimos das deformações com os valores máximos e mínimos das tensões.

Portanto, a lei da elasticidade de um elemento de pórtico submetido a fadiga de alto ciclo resulta:

$$\{\Phi(N)\} = [\mathbf{F}(\mathbf{D}(N))]\{M\}; \quad [\mathbf{F}(\mathbf{D}(N))] = [\mathbf{F}^e] + [\mathbf{C}(\mathbf{D}(N))] \quad 3-10$$

Alternativamente, as expressões podem ser escritas em função da matriz de rigidez:

$$\{M\} = [\mathbf{E}(\mathbf{D}(N))]\{\Phi(N)\}; \quad [\mathbf{E}(\mathbf{D}(N))] = [\mathbf{F}(\mathbf{D}(N))]^{-1} \quad 3-11$$

3.2.3 Lei de evolução do dano

Para completar a metodologia proposta, procura-se uma equação que expresse a variação do dano em termos da variação do fator de intensidade de tensões, ΔK , ou da variação da taxa de liberação de energia por dano, ΔG , como visto na Equação 2-22.

A taxa de liberação de energia por incremento de área da trinca, ΔG , relaciona-se com o fator de intensidade de tensões segundo $\Delta K = \sqrt{E\Delta G}$ (ANDERSON, 1995). Note-se que, por definição, ΔG expressa a variação de energia por variação de área da trinca, Λ ,

enquanto as forças termodinâmicas G (definidas na Equação 2-48) expressam a variação de energia por variação de dano.

Por exemplo, para um elemento com seção transversal retangular de base b , pode deduzir-se a expressão para ΔG :

$$\Delta G = \Delta G \frac{\partial D}{\partial \Lambda} = \frac{\Delta G}{b} \frac{\partial D}{\partial a} \rightarrow \Delta K = \sqrt{E \frac{\Delta G}{b} \frac{\partial D}{\partial a}} \quad 3-12$$

sendo a a profundidade da trinca.

Para estabelecer uma relação entre D e a , assume-se que o momento de inércia do elemento intacto, I_o , e o momento de inércia do elemento danificado, \bar{I} (Figura 3.6), relacionam-se ao dano como visto em Amorim (2016):

$$\frac{\bar{I}}{I_o} = \left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^3 = \left(1 - \frac{a}{h}\right)^3 \cong 1 - D \rightarrow D = 1 - \left(1 - \frac{a}{h}\right)^3 \quad 3-13$$

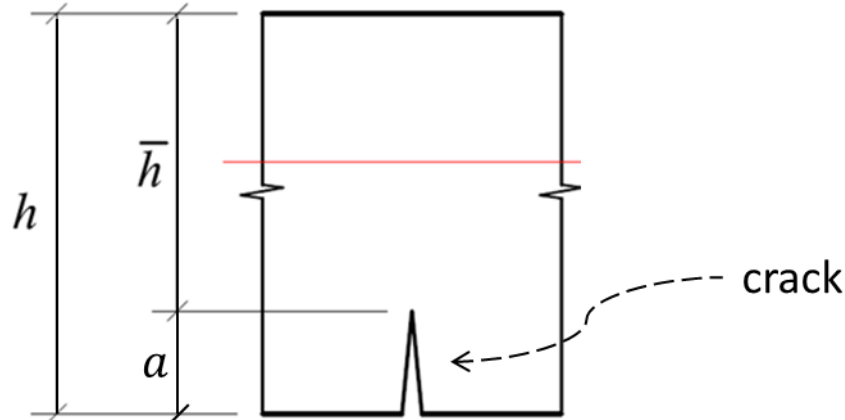


Figura 3.6 – Elemento danificado com profundidade da trinca a .

Para outros tipos de seção transversal, Bai et al. (2016) propõem modificar a expressão considerada em 3-13 por uma relação com um expoente α :

$$D = 1 - \left(1 - \frac{a}{h}\right)^\alpha \quad 3-14$$

Das equações 3-12 e 3-13, e utilizando a regra da cadeia para derivadas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dN} &= \frac{da}{dN} \frac{\partial D}{\partial a} \rightarrow \frac{dD}{dN} = c(\Delta K)^m \frac{\partial D}{\partial a} = c(E\Delta G)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial D}{\partial a} = c\left(E \frac{\Delta G}{b} \frac{\partial D}{\partial a}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial D}{\partial a} \\ &= \left[c \left(\frac{E}{B} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial D}{\partial a}^{\left(\frac{m}{2}+1\right)} \right] \Delta G^{\frac{m}{2}} = \bar{c}(D) \Delta G^{\bar{m}} \end{aligned} \quad 3-15$$

sendo $\bar{c}(D) = \left[c \left(\frac{E}{B} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial D}{\partial a}^{\left(\frac{m}{2}+1\right)} \right]$ e $\bar{m} = m/2$. c e m são as constantes da Lei de Paris.

Assim estabelece-se uma lei de evolução do dano:

$$\frac{dD}{dN} = [\bar{c}(D)] \Delta G^{\frac{m}{2}} \quad 3-16$$

Note-se que $\bar{c}(D)$ não é constante, mas uma função do dano D . A LDM permite considerar o crescimento de D a partir de $D = 0$, desde que $\bar{c}(0)$ não seja nulo (condição para crescimento do dano). Os valores da Lei de Paris, c e m , são encontrados em normas e trabalhos acadêmicos. No presente trabalho, c será considerada como uma variável aleatória e m como uma constante. Johnston (1983) e Lassen e Sorensen (2002), entre outros, fornecem a informação estatística de c como uma variável com distribuição lognormal.

Alternativamente, a lei de propagação do dano poderia ser deduzida a partir de uma expressão que relacione diretamente $\frac{da}{dN}$ e ΔG , i.e., $\frac{da}{dN} = C(\Delta G)^M$. Procedendo analogamente à dedução em 3-15:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dN} &= \frac{da}{dN} \frac{\partial D}{\partial a} \rightarrow \frac{dD}{dN} = C(\Delta G)^M \frac{\partial D}{\partial a} = C \left(\frac{\Delta G}{B} \frac{\partial D}{\partial a} \right)^M \frac{\partial D}{\partial a} = \\ &= \left[C \left(\frac{1}{B} \right)^M \left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)^{(M+1)} \right] (\Delta G)^M = \bar{C}(D) \Delta G^M \end{aligned} \quad 3-17$$

sendo $\bar{C}(D) = C \left(\frac{1}{B} \right)^M \left(\frac{\partial D}{\partial a} \right)^{(M+1)}$. As constantes C e M podem ser encontradas, por exemplo, em Dowling e Begley (1976). Note-se que $\bar{C}(D)$ é uma função do dano D .

3.3 Resumo da metodologia de análise de fadiga via LDM

Na Figura 3.7, mostra-se, resumidamente, a metodologia empregada numa análise de fadiga via LDM.

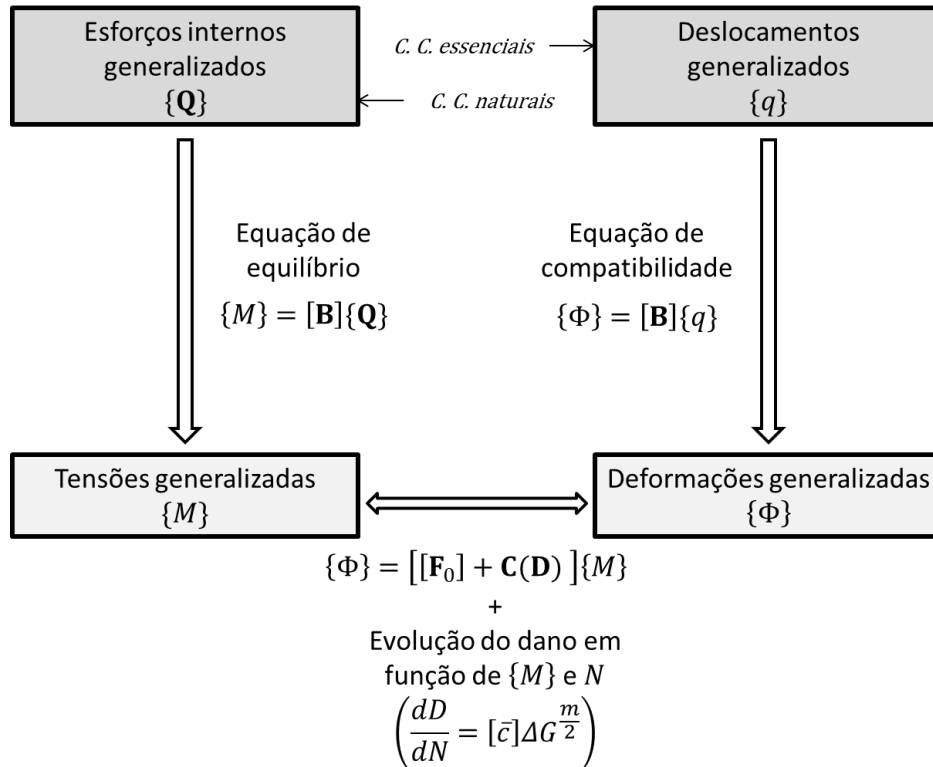


Figura 3.7 – Metodologia de análise de fadiga via LDM.

3.4 Análise de confiabilidade

Na equação de estado limite anteriormente apresentada na Equação 2-59 (a), $g(\mathbf{X}, t) = D_C - D(\mathbf{X}, t)$, o dano $D(\mathbf{X}, t)$ é calculado em função de t através da metodologia descrita neste capítulo e resumida na Figura 3.7. A falha ocorre quando $g(\mathbf{X}, t) < 0$, i.e., quando o dano acumulado $D(\mathbf{X}, t)$ atinge o limite D_C . Destaca-se que, neste trabalho, **o dano crítico D_C será considerado igual a 0.9**, que corresponde a uma profundidade da trinca a igual a 0.53 da altura de um perfil retangular.

Para levar em conta a natureza aleatória do crescimento do dano, o parâmetro \bar{c} da Equação 3-16 é considerado como uma variável aleatória. As forças solicitantes oscilantes que provocam as tensões internas também são consideradas como sendo de amplitude aleatória.

Para o cálculo da probabilidade de falha $P_f = P[g(\mathbf{X}, t) < 0]$, utiliza-se o método de simulação de Monte-Carlo. Uma das principais vantagens é que, como resultado, obtém-se a probabilidade de falha para qualquer tempo t . Adicionalmente, para um t fixo, obtém-se o histograma do dano final em cada um dos nós da estrutura.

3.5 Programa implementado para a análise

Na Figura 3.8, mostra-se o fluxograma do programa implementado para a análise estrutural.

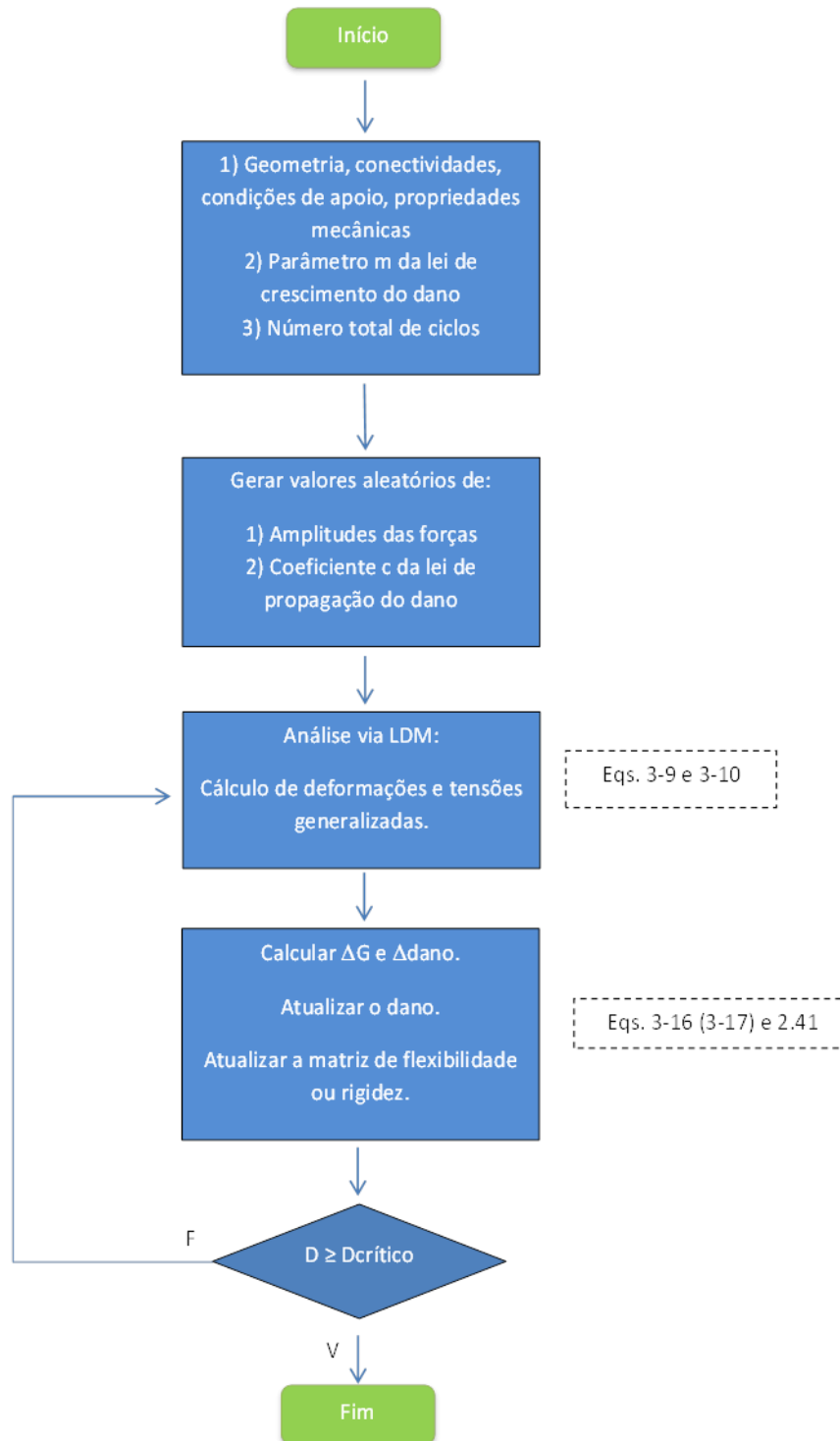


Figura 3.8 – Fluxograma do programa implementado de análise de fadiga via LDM.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE DE FADIGA VIA LDM CONSIDERANDO INCERTEZAS

4.1 Viga em balanço

4.1.1 Análise determinística

Como primeiro exemplo de verificação da metodologia proposta, analisa-se o caso de uma viga de aço em balanço submetida a uma carga cíclica $P(t)$ de **amplitude constante, determinística**, ΔP na extremidade livre. O número de ciclos obtido é comparado com as curvas S-N encontradas na norma BS 7910.

Analizou-se a viga em balanço submetida à força oscilante de amplitude ΔP , mostrada na Figura 4.1. A máxima tensão normal $\sigma(t)$ no extremo engastado é dada por:

$$\sigma(t) = \frac{P(t) \cdot L}{W} \quad 4-1$$

Sendo L : comprimento da viga,

W : módulo da seção transversal.

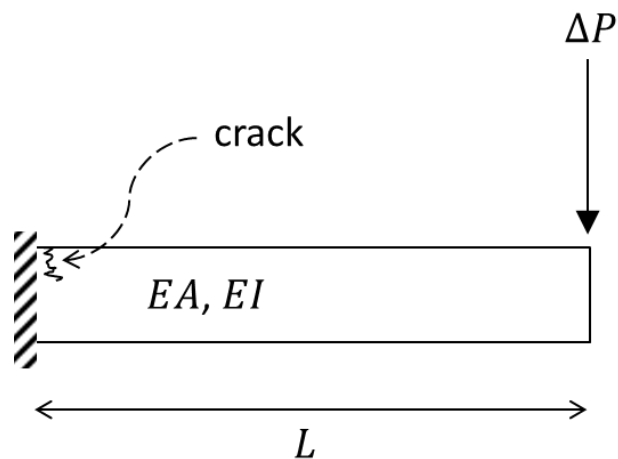


Figura 4.1 – Viga em balanço analisada via LDM.

Sendo a amplitude de $P(t)$ constante, a força varia no intervalo ΔP , e a tensão normal resultante varia no intervalo $\Delta\sigma$, dado por:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta P \cdot L}{W} \quad 4-2$$

Os valores dos parâmetros utilizados para descrever o crescimento do dano (Equações 3-15 e 3-17), foram **deduzidos** a partir de Darcis et al. (2015) e de Dowling e Begley (1976), respectivamente. Os dados do problema são mostrados na Tabela 4-1. Na Tabela 2-1 mostram-se os valores dos parâmetros deduzidos (Equações 3-15 e 3-17). Os resultados (em termos do número de ciclos até a falha, N_f) para diferentes amplitudes da tensão $\sigma(t)$ são mostrados na Tabela 4-3 e na Figura 4.2. Como pode ser visto, os resultados obtidos encontram-se entre as curvas Q5-Q6 e Q7-Q8 da BS 7910, respectivamente. Para obter resultados correspondentes a alguma outra das curvas Q da BS 7910, o parâmetro c deve ser multiplicado por um fator de ajuste apropriado, **antes da análise**.

Tabela 4-1 – Dados do problema.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>	<i>Ref.</i>
L	1.0 m	-
EA	$8 \cdot 10^9 N$	-
EI	$2.7 \cdot 10^7 N \cdot m^2$	-
c	$1.85 \cdot 10^{-13} (mm/cycle) \cdot (N/mm^{3/2})^{-3}$	<i>Darcis et al. (2015)</i>
m	3.0	
C	$1.54 \cdot 10^{-13} (m/cycle) \cdot (N \cdot m/m^2)^{-1.587}$	<i>Dowling and Begley (1976)</i>
M	1.587	

Tabela 4-2 – Parâmetros deduzidos para a lei de propagação do dano (Equações 3-15 e 3-17).

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>
$\bar{c}(0)$	$3.27 \cdot 10^{-10}$
\bar{m}	1.5
$\bar{C}(0)$	$1.249 \cdot 10^{-10}$
M	1.587

Tabela 4-3 – Resultados das análises.

$\Delta\sigma$ (N/mm ²)	ΔP (kN)	N_f (ciclos)		
		<i>Lei de Paris</i>	<i>Dowling and Begley</i>	<i>Ajustado a Q1</i>
10.00	13.3	7.04E+07	1.85E+08	1.52E+09
20.00	26.7	8.69E+06	2.32E+07	1.90E+08
30.00	40.0	2.60E+06	6.83E+06	5.62E+07
50.00	66.7	5.64E+05	1.48E+06	1.22E+07
60.00	80.0	3.26E+05	8.58E+05	7.03E+06
75.00	100.0	1.68E+05	4.42E+05	3.60E+06
90.00	120.0	9.63E+04	2.55E+05	2.08E+06
120.00	160.0	4.04E+04	1.07E+05	8.79E+05

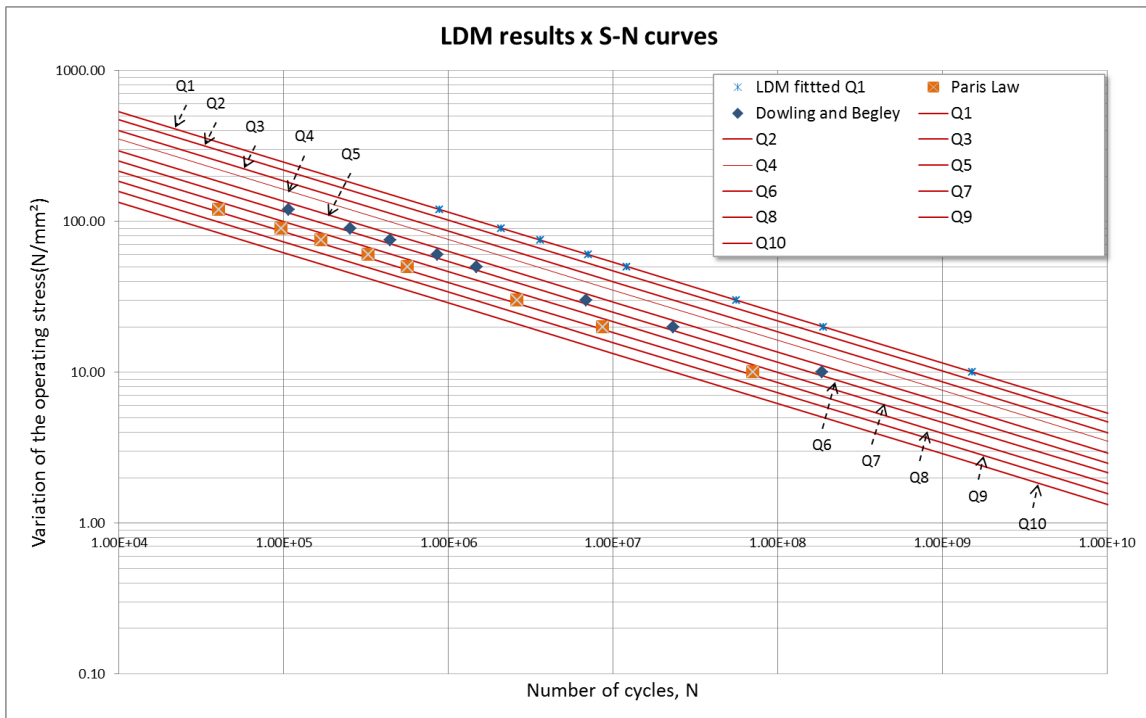


Figura 4.2 – Resultados das análises via LDM x curvas S-N.

4.1.2 Coeficiente c da lei de propagação aleatório

Como é prática comum nas abordagens probabilísticas de fadiga (JOHNSTON, 1983; LASSEN; SORENSEN, 2002; DARCIS et al., 2015; BECK; MELCHERS, 2004), considera-se o coeficiente c da Lei de Paris (item 2.1.2) como uma variável aleatória, e o expoente m como uma constante. A partir da Lei de Paris, deduz-se a lei de crescimento do dano, como mostrado previamente na Equação 3-15. Portanto, o coeficiente \bar{c} da lei de propagação do dano também será uma variável aleatória.

Tabela 4-4 – Dados da lei de Paris.

Variável	Valor	Unidades	Ref.
c	$LN(-25.86, 0.24)$	$(m/cycle) \cdot (MPa \cdot m^{1/2})^{-3}$	Johnston (1983)
m	3.0	—	Johnston (1983)

Foram considerados valores de amplitude de força constante ΔP iguais a **80kN**, **100kN**, **120kN** e **160kN**. Para cada situação, foram geradas 100 000 simulações até a

falha, usando o chamado método de Monte Carlo simples ou cru. Os resultados são mostrados nas Figuras 4.3 a 4.6. Na Figura 4.7, estão mostradas as probabilidades de falha em função do número de ciclos, para cada uma das forças analisadas.

O tempo de processamento médio foi de 1.0 s por simulação.

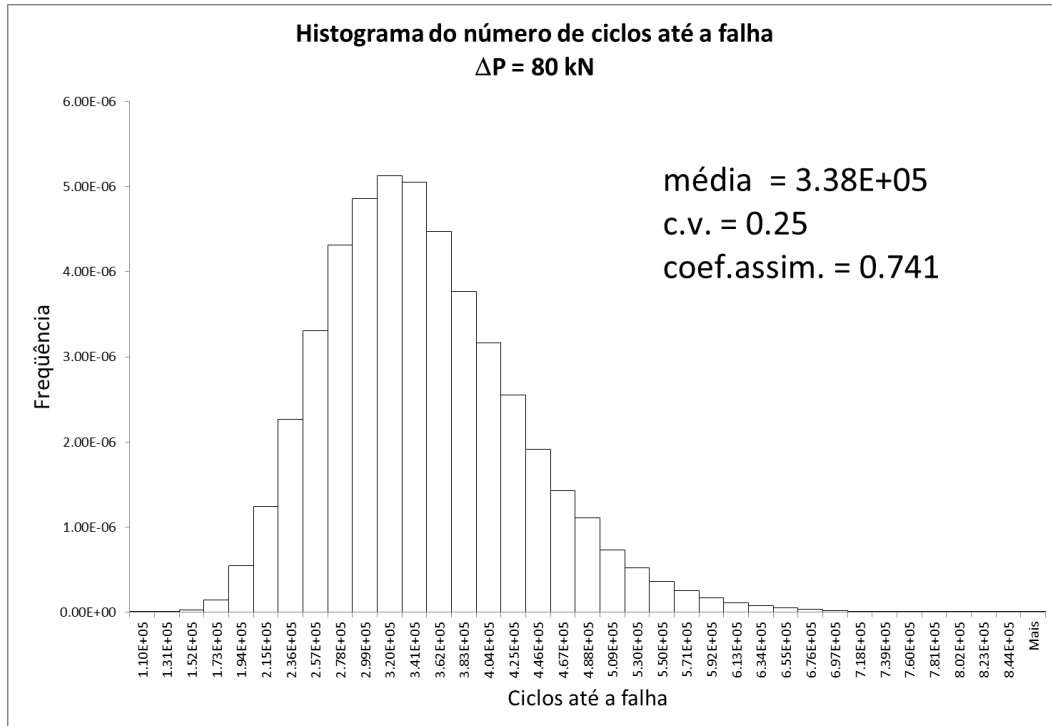


Figura 4.3 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 80 \text{ kN}$.

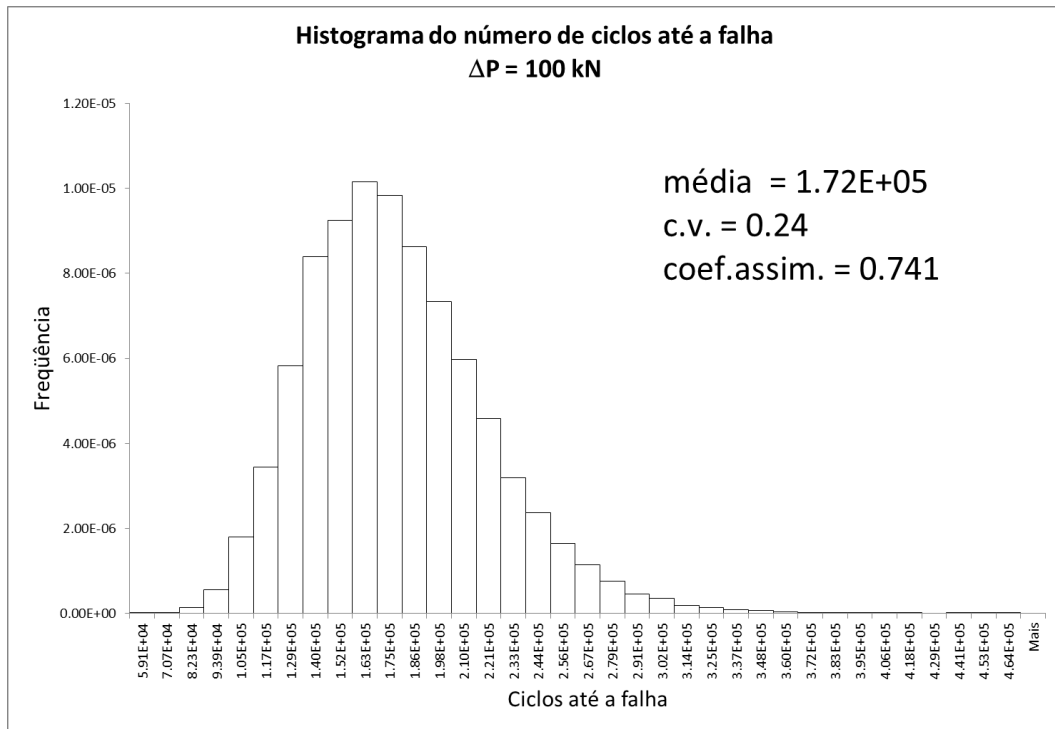


Figura 4.4 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 100 \text{ kN}$.

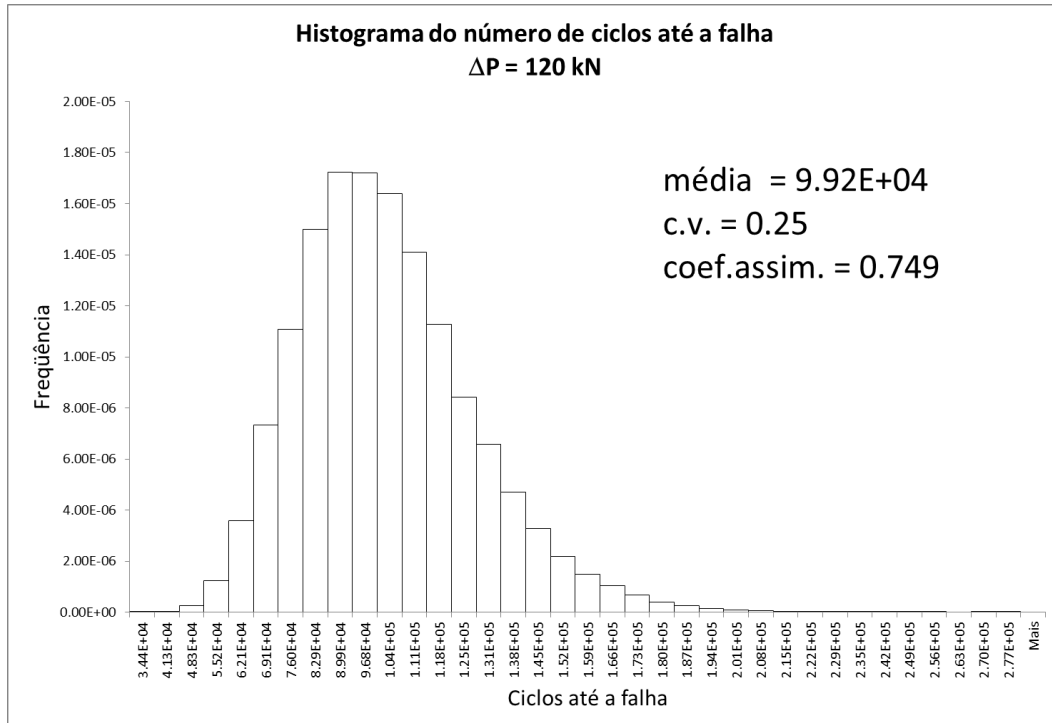


Figura 4.5 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 120 \text{ kN}$.

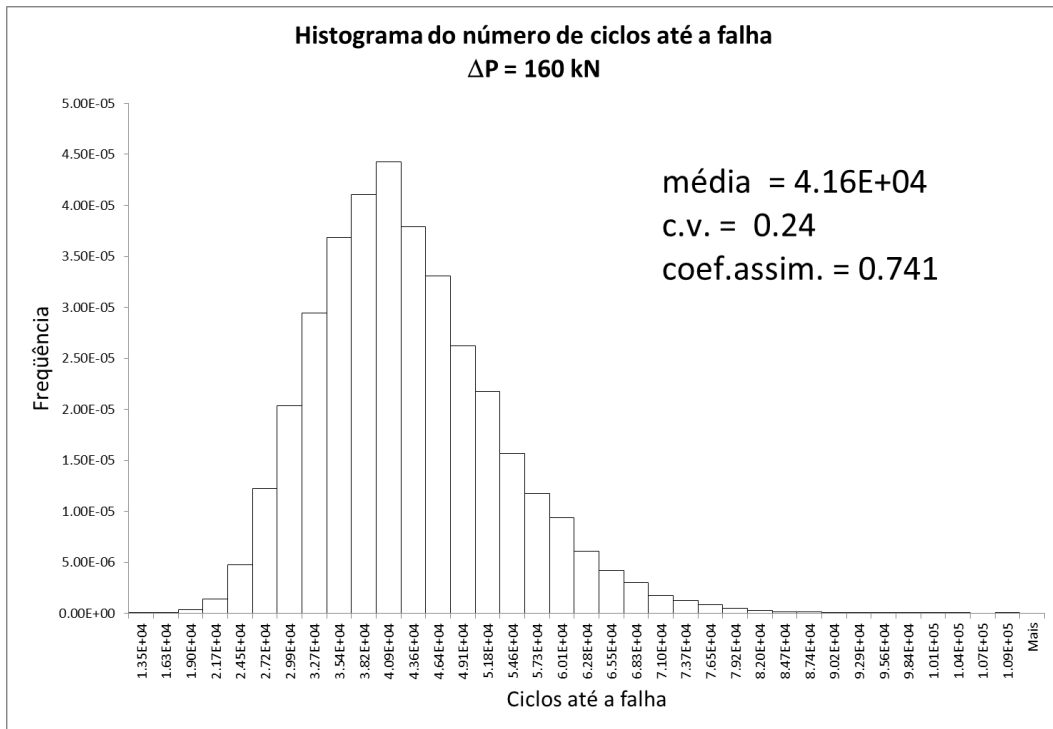


Figura 4.6 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P = 160 \text{ kN}$.

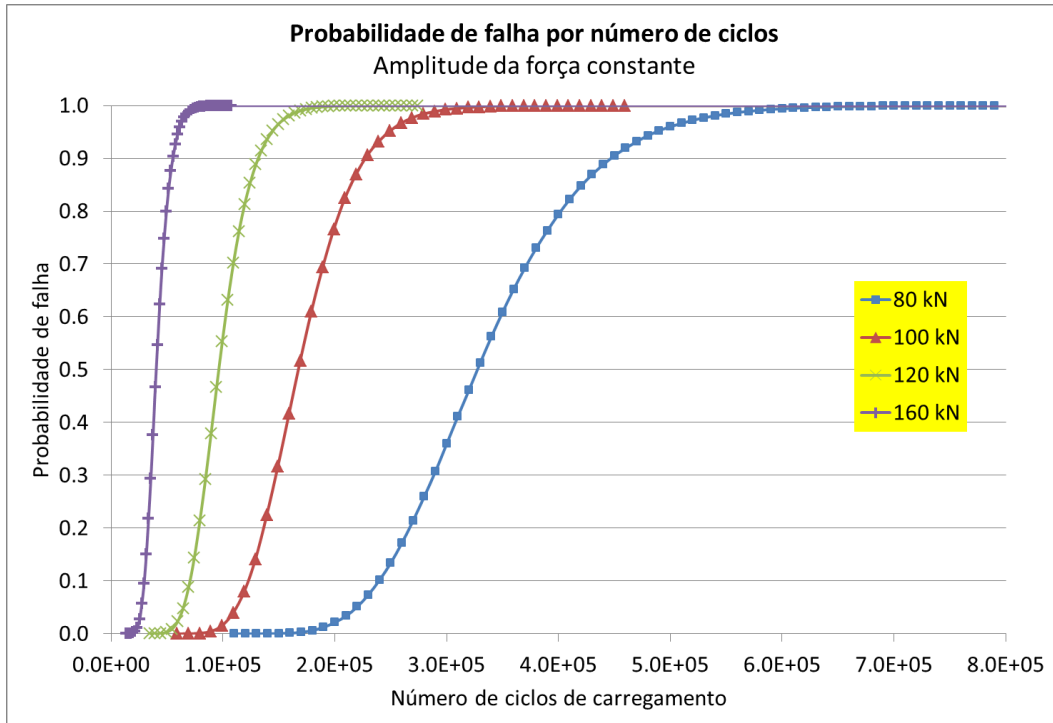


Figura 4.7 – Probabilidade de falha por número de ciclos de carregamento de amplitude constante.

4.1.3 Força de amplitude aleatória

Como exemplo para representar a aleatoriedade da ação externa, considera-se uma força $P(t)$ de amplitude aleatória ΔP com **distribuição lognormal**. Consideraram-se quatro médias das amplitudes das forças iguais a **80kN, 100kN, 120kN e 160kN**. Devido a diversas incertezas na análise, considera-se um coeficiente de variação de **10%**, como no Exemplo 5.3 de Madsen, Krenk e Lind (2006). Os resultados são mostrados nas Figuras 4.8 a 4.11. Na Figura 4.12, estão mostradas as probabilidades de falha em função do número de ciclos, para cada uma das situações analisadas.

Para cada situação, foram geradas 100 000 simulações até a falha. O tempo de processamento médio foi de 1.0 s por simulação.

Tabela 4-5 – Dados da lei de Paris.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>	<i>Ref.</i>
<i>c</i>	$LN(-25.86, 0.24)$	$(m/cycle) \cdot (MPa \cdot m^{1/2})^{-3}$	<i>Johnston (1983)</i>
<i>m</i>	3.0	–	<i>Johnston (1983)</i>

Tabela 4-6 – Dados da amplitude força $P(t)$.

<i>Média (kN)</i>	<i>Coeficiente de variação</i>	<i>Distribuição</i>
80	10%	<i>Lognormal</i>
100	10%	<i>Lognormal</i>
120	10%	<i>Lognormal</i>
160	10%	<i>Lognormal</i>

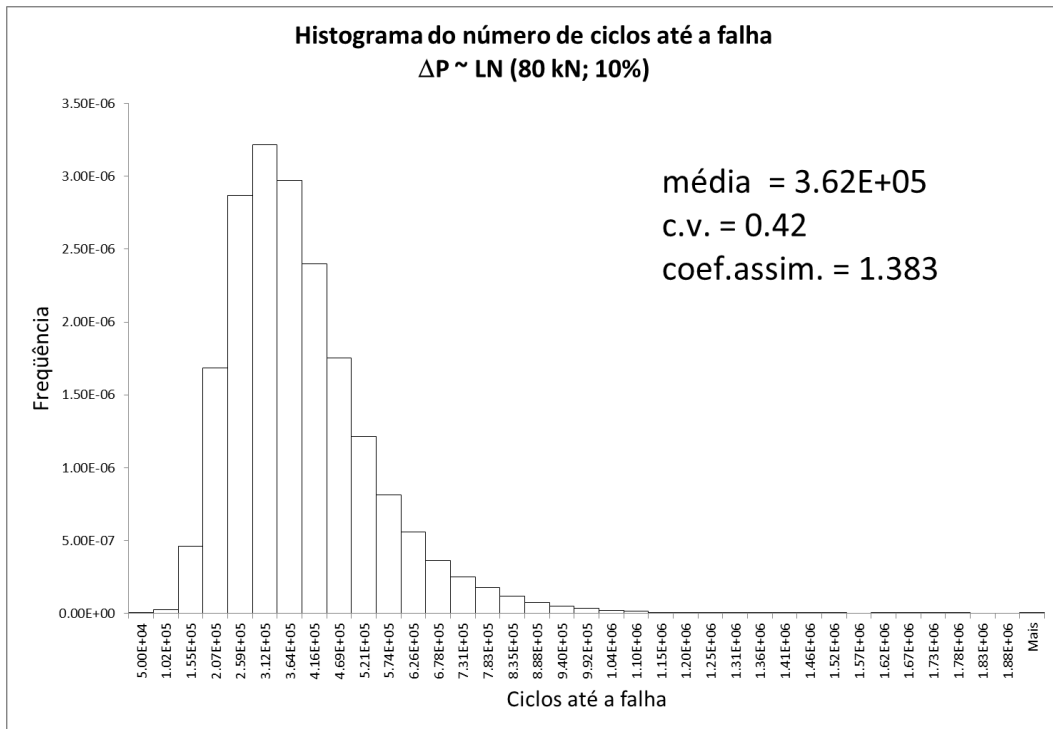


Figura 4.8 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim LN(80 \text{ kN}, cov = 10\%)$.

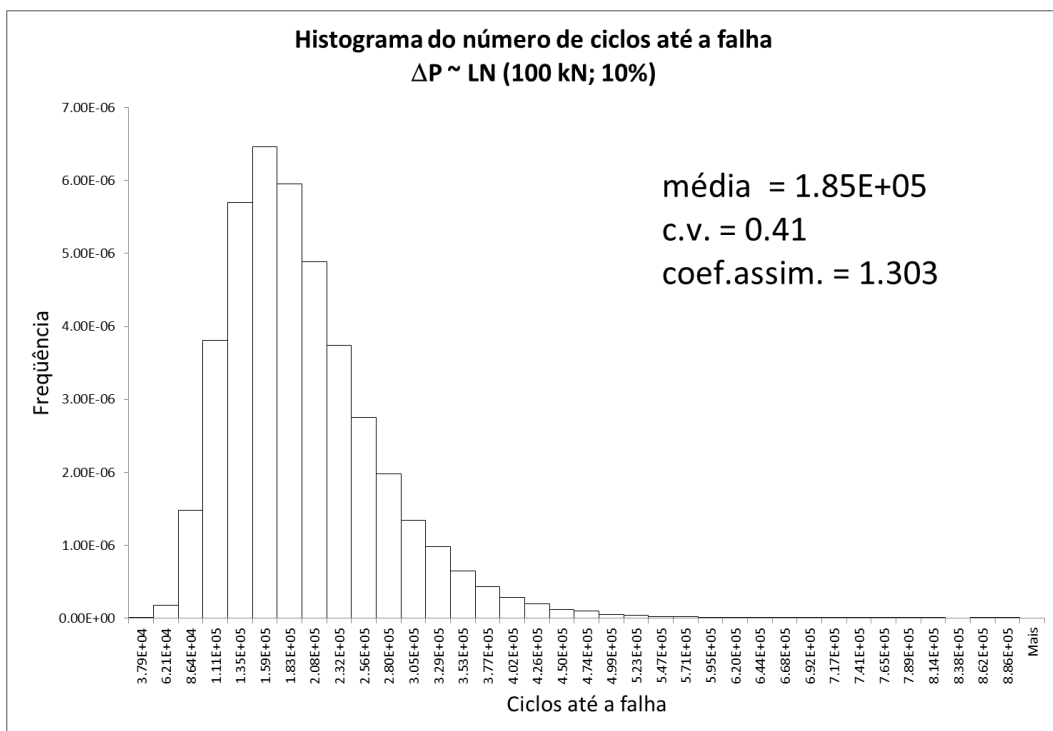


Figura 4.9 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim LN(100 \text{ kN}, cov = 10\%)$.

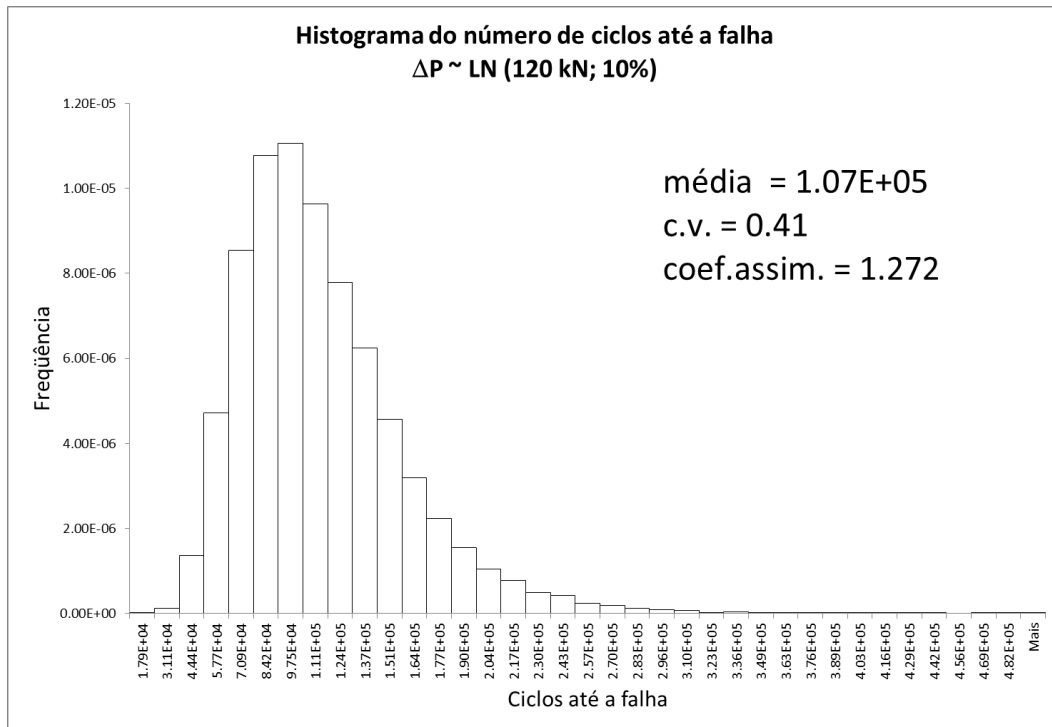


Figura 4.10 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim LN(120 \text{ kN}, cov = 10\%)$.

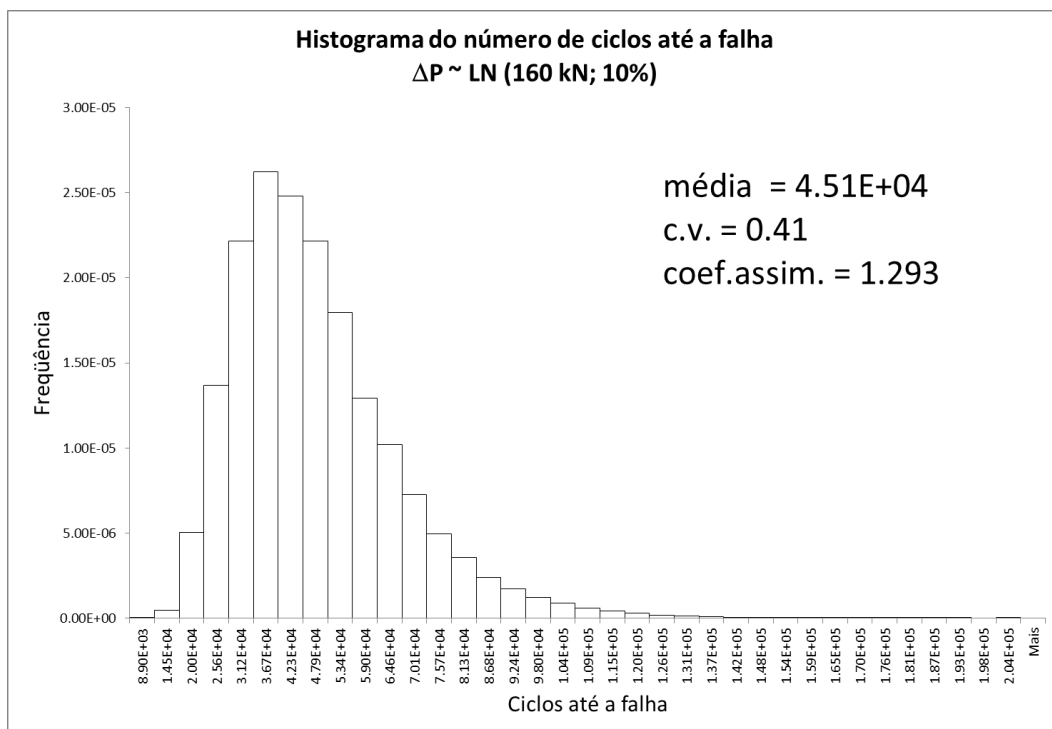


Figura 4.11 – Histograma do número de ciclos até a falha – $\Delta P \sim LN(160 \text{ kN}, cov = 10\%)$.

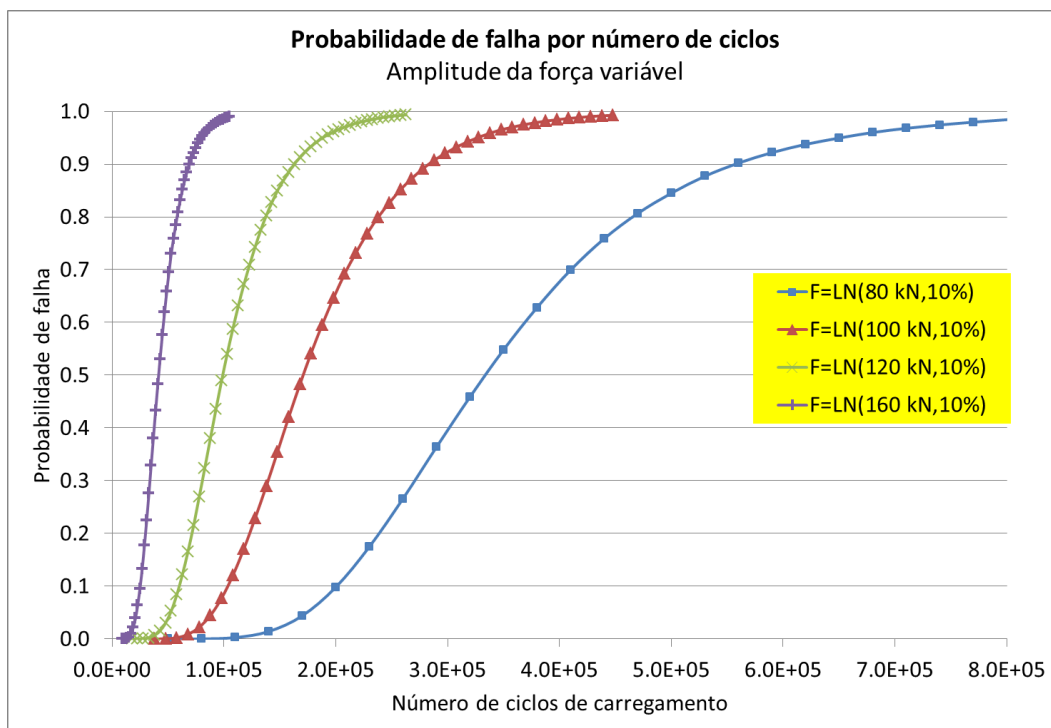


Figura 4.12 – Probabilidade de falha por número de ciclos de carregamento de amplitude variável.

Na Tabela 4-7, comparam-se os resultados entre os casos com força de amplitude constante e de amplitude aleatória. Verifica-se uma diferença de aproximadamente 8%.

Tabela 4-7 – Comparação do número de ciclos: força amplitude constante x variável.

Força (kN)	Número de ciclos até a falha		Diferença
	Amplitude constante	Amplitude variável	
80	3.38E5	3.62E5	7.10%
100	1.72E5	1.85E5	7.56%
120	9.92E4	1.07E5	7.86%
160	4.16E4	4.51E4	8.41%

4.1.4 Força de amplitude aleatória e número fixo de ciclos de carregamento

Para exemplificar o dano resultante de um número fixo de ciclos de carregamento (que pode levar à ruptura ou não), analisou-se o mesmo exemplo da viga em balanço (item 4.1.3) submetida a uma força de amplitude aleatória com distribuição lognormal, valor médio de **100 kN** e coeficiente de variação de **10%**, submetida a **90 000 ciclos de carregamento**. Na Tabela 4-9, mostra-se o número de casos que atingiram a ruptura.

Foram geradas 100 000 simulações. O tempo médio de processamento foi de 0.5 s por simulação.

Tabela 4-8 – Dados do problema.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
c	$LN(-25.86, 0.24)$	$(m/cycle) \cdot (MPa \cdot m^{1/2})^{-3}$
m	3.0	–
ΔP	$LN(1.508, 0.1)$	N

Tabela 4-9 – Resultados das análises – 90 000 ciclos de carga.

<i>Casos</i>		<i>Probabilidade de falha</i>
<i>Total</i>	<i>Falharam</i>	
100 000	4933	$Pf \cong \frac{4933}{100000} = 4.933 \cdot 10^{-2}$

Na Figura 4.13, mostra-se o histograma do dano final após os 90 000 ciclos de carregamento. Note-se a concentração no dano $D = 0.9$, que corresponde aos casos que levaram à falha.

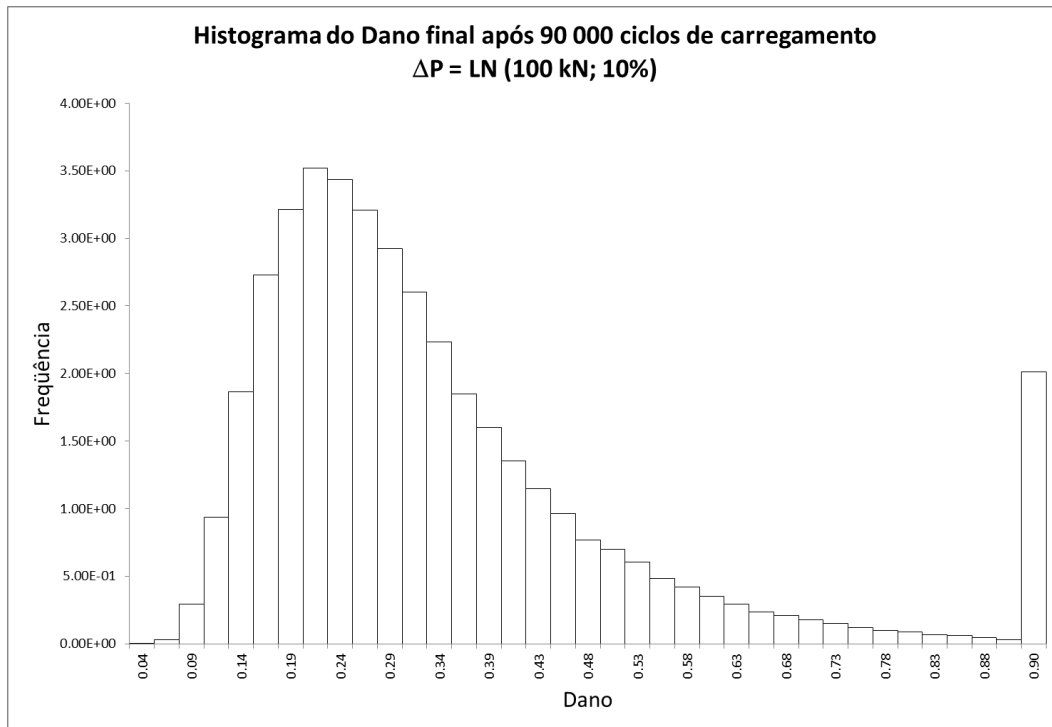


Figura 4.13 – Histograma do dano após 90 000 ciclos – $\Delta P \sim LN (100 \text{ kN}; 10\%)$.

Também, pode-se ajustar uma função de densidade de probabilidades $f_D(d)$, descrita na Equação 4-3:

$$f_D(d) = (1 - Pf) \cdot f_{LN}(d) + Pf \cdot \delta(d - 0.9) \quad 4-3$$

sendo

$\delta(d - 0.9)$: função delta de Dirac centrada em 0.9,

$Pf = 4.933 \cdot 10^{-2}$: probabilidade de falha,

$f_D(d)$: função densidade de probabilidades do dano D ,

$f_{LN}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi d} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(d)-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$, $\lambda = -1.32$, $\xi = 0.4528$: função densidade de probabilidades para $d < 0.9$.

4.2 Pórtico com 6 elementos

Como segundo exemplo, analisou-se o caso de um pórtico com 6 nós e 6 elementos, mostrado na Figura 4.14. Na Tabela 4-10, encontram-se os dados do problema.

Tabela 4-10 – Dados do problema.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
EA	$2.4 \cdot 10^{10}$	N
EI	$7.2 \cdot 10^8$	$N \cdot m^2$
c	$LN(-25.86, 0.24)$	$(m/cycle) \cdot (MPa \cdot m^{1/2})^{-3}$
m	3.0	–

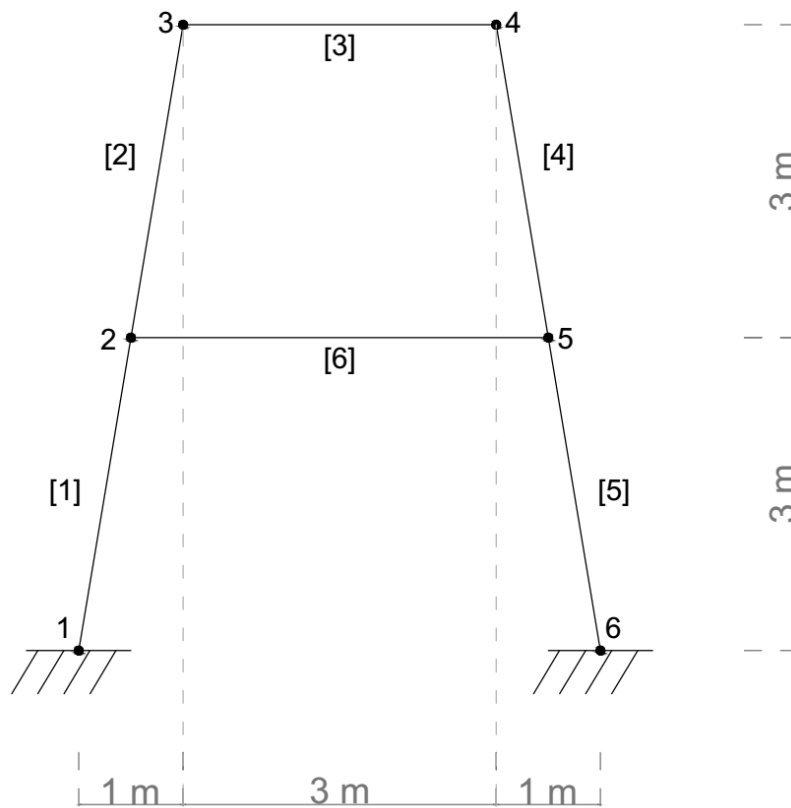


Figura 4.14 – Pórtico com 6 nós e 6 elementos.

Consideram-se duas situações para o pórtico: submetido a **uma** e a **duas forças independentes** de amplitude aleatória, como mostrado nas Figuras 4.15 e 4.17. Posteriormente, na Figura 4.19, mostra-se a probabilidade de falha em relação ao número de ciclos de carregamento para as duas situações.

4.2.1 Uma força aleatória

O pórtico é submetido a uma força de amplitude aleatória, como mostrado na Figura 4.15. O histograma do número de ciclos até a falha é mostrado na Figura 4.16.

Foram geradas 100 000 simulações, com tempo médio de processamento igual a 1,5 s por simulação.

Tabela 4-11 – Dados da amplitude de $F_1(t)$.

<i>Média (kN)</i>	<i>Coefficiente de variação</i>	<i>Distribuição</i>
500	10%	<i>Lognormal</i>

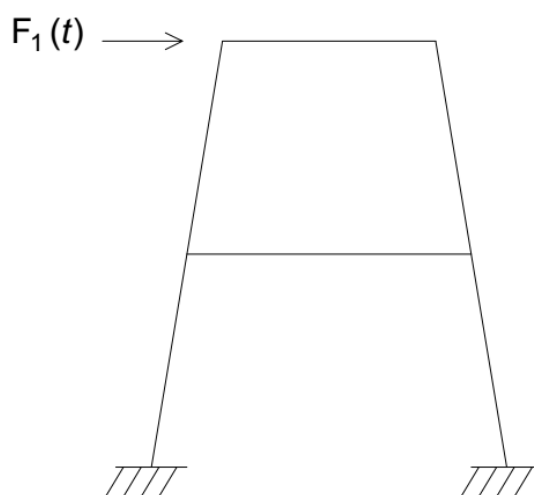


Figura 4.15 – Pórtico com seis elementos submetido a uma força de amplitude aleatória.

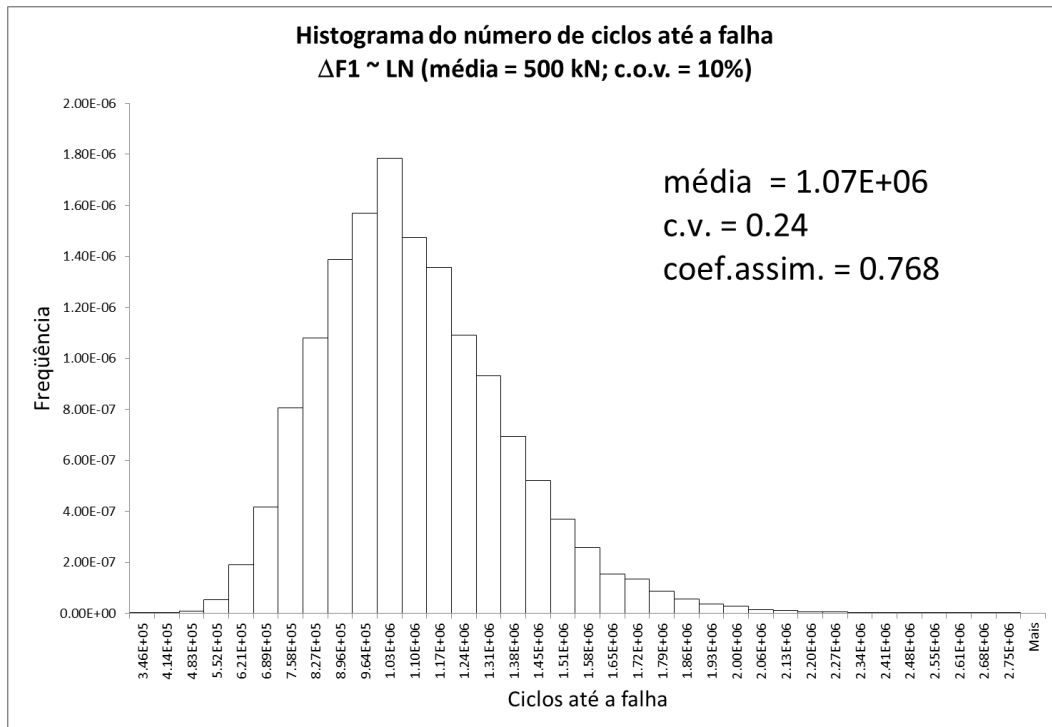


Figura 4.16 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos e uma força aleatória.

4.2.2 Duas forças aleatórias. Número de ciclos até a ruptura

Neste caso, o pórtico foi submetido a duas forças estatisticamente independentes e de amplitude aleatória, como mostrado na Figura 4.17. O histograma do número de ciclos até a falha é mostrado na Figura 4.18.

Foram geradas 100 000 simulações, com tempo médio de processamento igual a 1,4 s por simulação.

Tabela 4-12 – Dados da amplitude das forças $F1(t)$ e $F2(t)$.

Força	Média (kN)	Coefficiente de variação	Distribuição
$\Delta F1$	500	10%	Lognormal
$\Delta F2$	300	10%	Lognormal

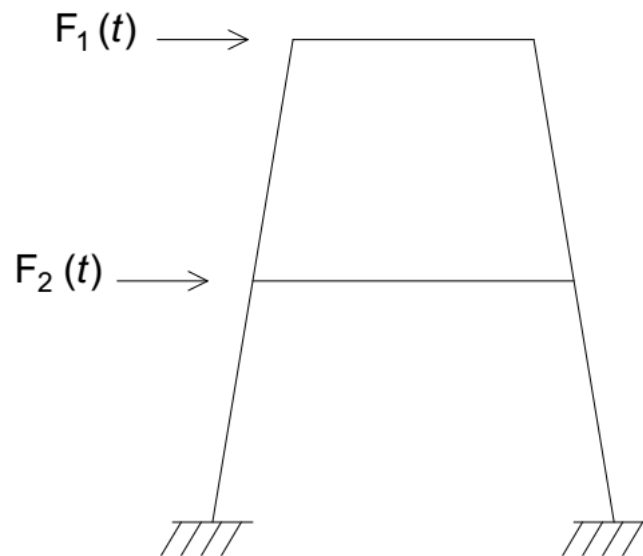


Figura 4.17 – Pórtico com seis nós e seis elementos submetido a duas forças de amplitude aleatória.

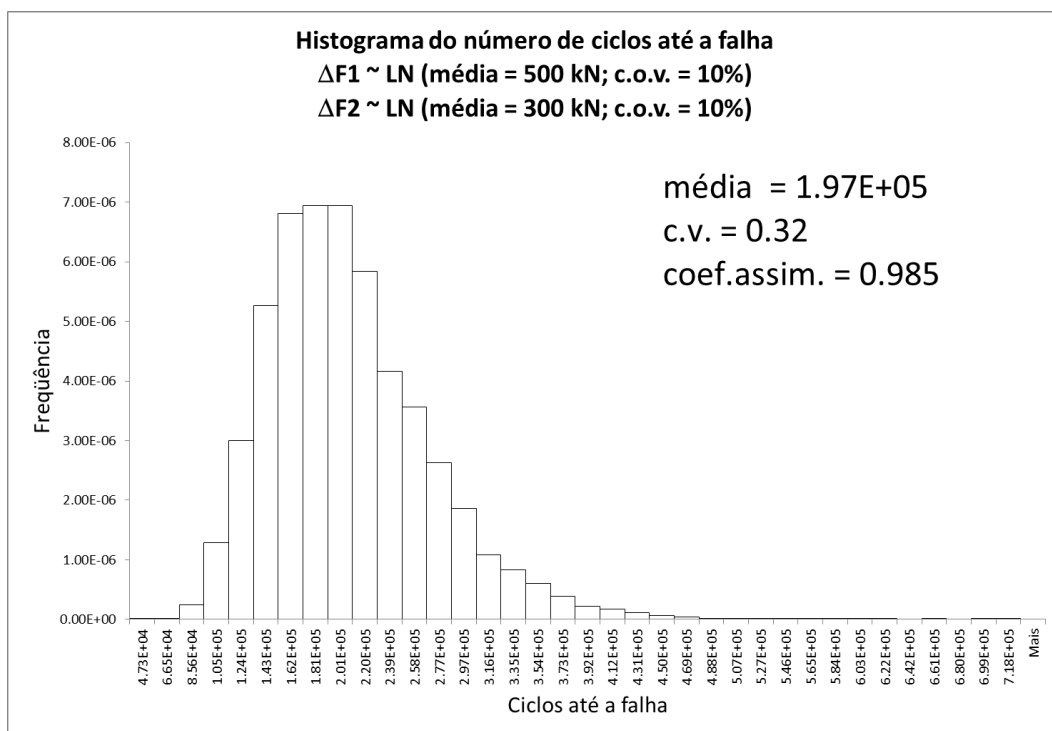


Figura 4.18 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos e duas forças aleatórias.

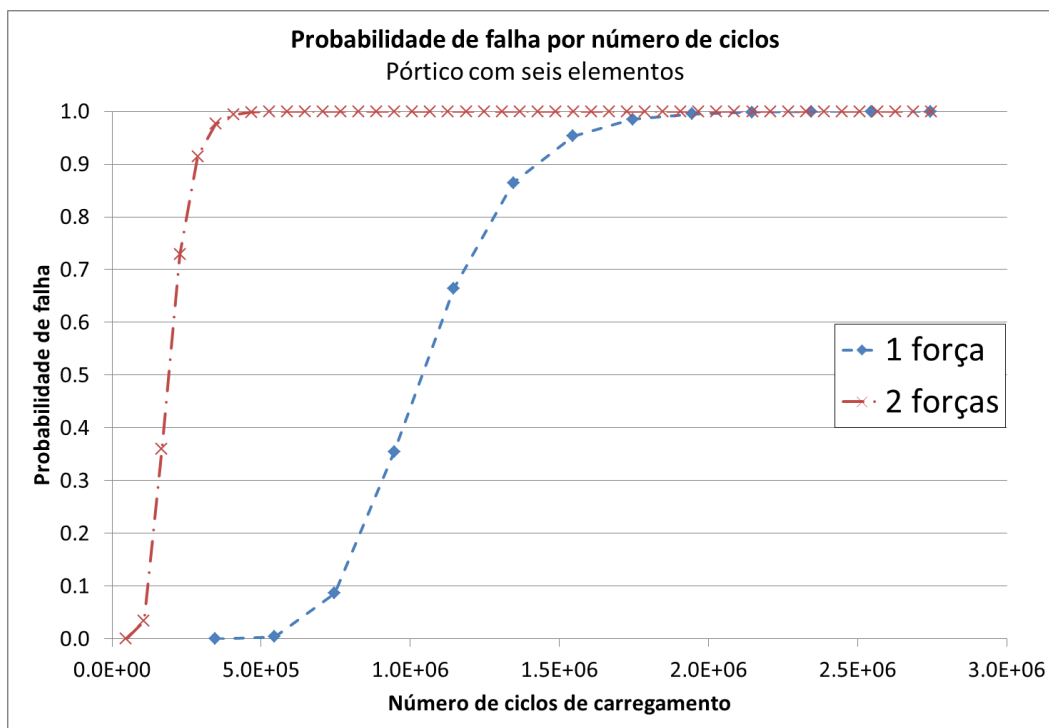


Figura 4.19 – Probabilidade de falha por número de ciclos até a falha – Pórtico com seis elementos.

4.2.3 Duas forças aleatórias. Número fixo de ciclos de carregamento

Neste caso, foram aplicados 100 000 ciclos das duas forças mostradas na Figura 4.17.

Na Tabela 4-13, indica-se o número de casos que atingiram a falha. Na Tabela 4-14 e na Figura 4.20, mostra-se a média do dano final em cada um dos nós.

Identificou-se que o Nó 1 é o que apresenta o maior dano. Na Figura 4.21, apresenta-se o histograma do dano no **Nó 1 do Elemento [1]**. Note-se a concentração no dano $D = 0.9$ no histograma, **que corresponde a todos os casos que levaram à falha**. O histograma do dano final médio do Nó 2 do Elemento [6] é mostrado na Figura 4.22, e o do Nó 2 do Elemento [1], na Figura 4.23.

Foram geradas 100 000 simulações, e o tempo médio de processamento foi de 0.5 s por simulação.

Tabela 4-13 – Resultados das análises – 100 000 ciclos.

Casos		Probabilidade de falha
Total	Falharam	
100 000	2069	$Pf \cong \frac{2069}{100000} = 2.069 \cdot 10^{-2}$

Tabela 4-14 – Dano final após 100 000 ciclos de carregamento.

Elemento	Nó	Dano final	
		Média	Desv. Pad.
[1]	1	0.419628	0.167052
	2	0.125528	0.061708
[2]	2	0.001416	0.000966
	3	0.079898	0.047977
[3]	3	0.078130	0.046766
	4	0.079469	0.04707
[4]	4	0.081270	0.048292
	5	0.001679	0.000997
[5]	5	0.119614	0.060235
	6	0.408952	0.168314
[6]	2	0.381609	0.136502
	5	0.380342	0.136932

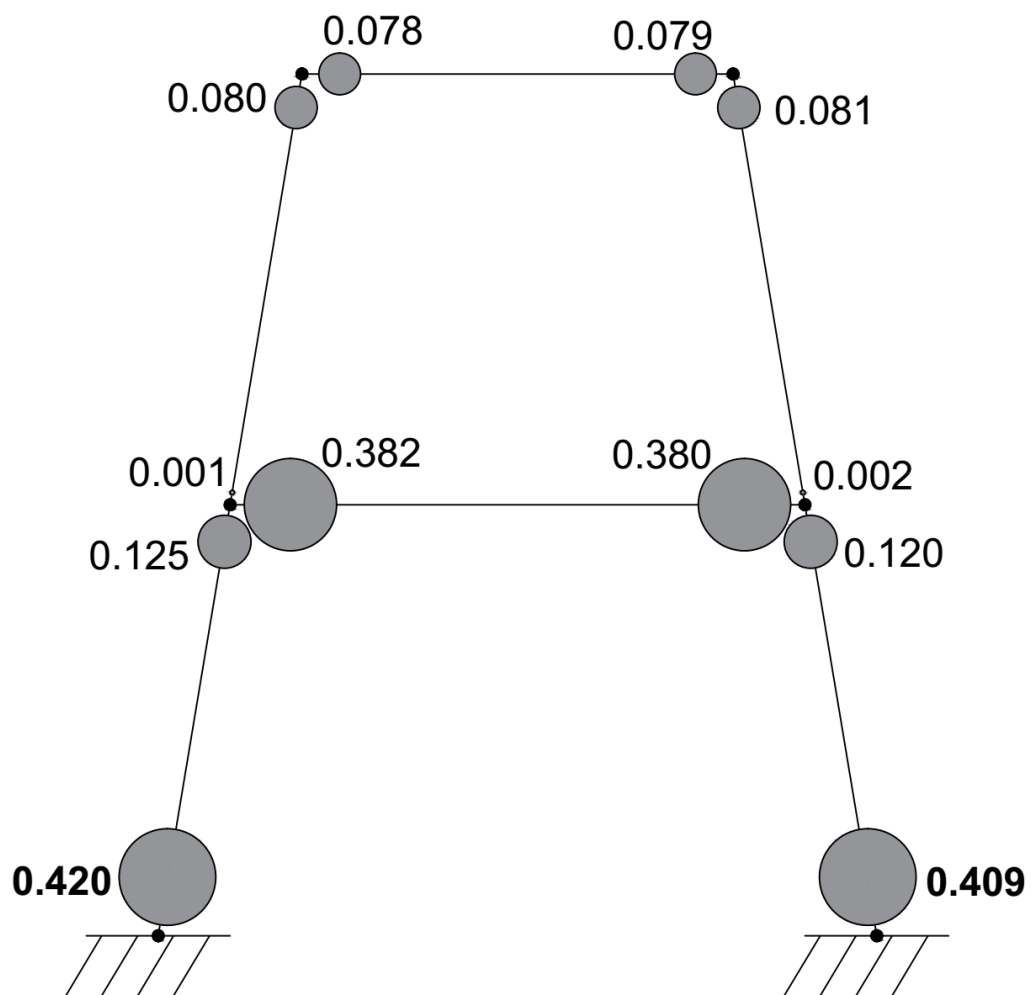


Figura 4.20 – Média do dano final após 100 000 ciclos de carregamento.

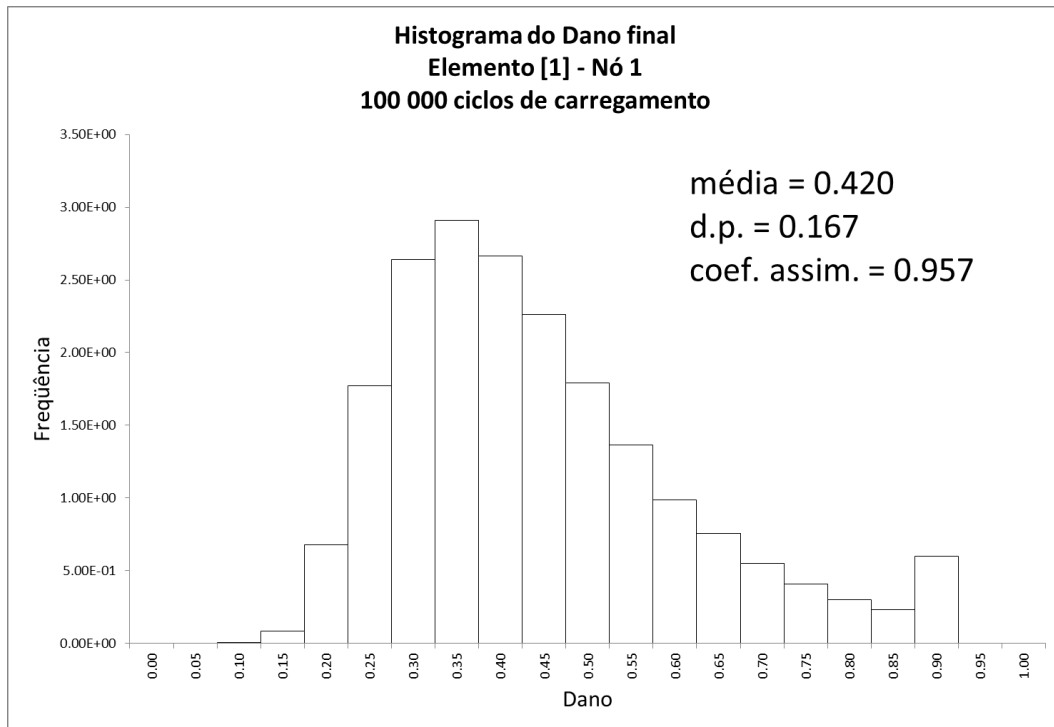


Figura 4.21 – Histograma do dano no Nó 1 – Elemento [1] após 100 000 ciclos de carregamento.

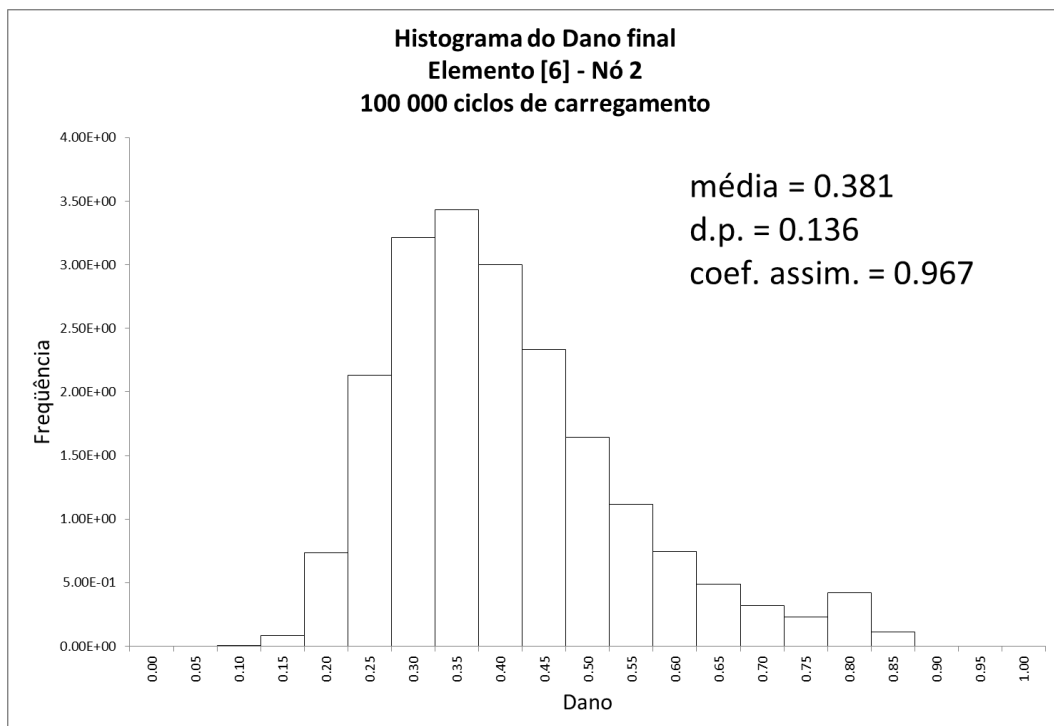


Figura 4.22 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [6] após 100 000 ciclos de carregamento.

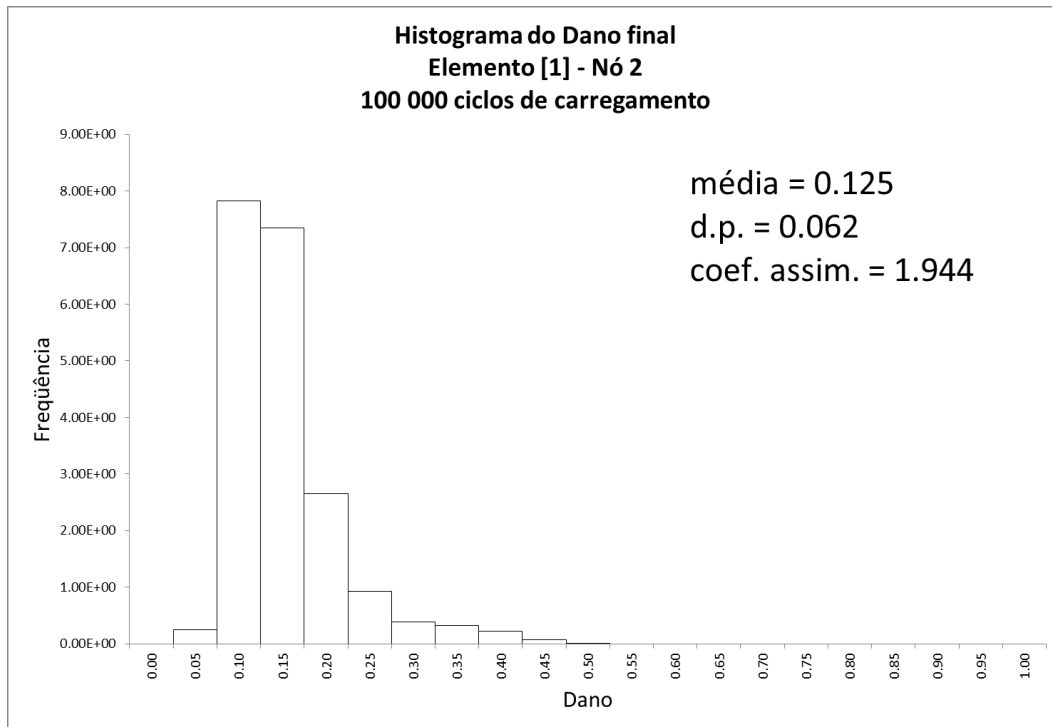


Figura 4.23 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [1] após 100 000 ciclos de carregamento.

Para o Nó 1, ajustou-se uma função de densidade de probabilidades $f_D(d)$, descrita na Equação 4-4:

$$f_D(d) = (1 - Pf) \cdot f_{LN}(d) + Pf \cdot \delta(d - 0.9) \quad 4-4$$

sendo

$\delta(d - 0.9)$: função delta de Dirac centrada em 0.9,

$Pf = 2.069 \cdot 10^{-2}$: probabilidade de falha,

$f_D(d)$: função densidade de probabilidades do dano D no Nó 1,

$f_{LN}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi d} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(d)-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$, $\lambda = -0.958$, $\xi = 0.3627$: função densidade de probabilidades para o dano no Nó 1, $d < 0.9$.

4.3 Pórtico com 25 elementos

Como terceiro exemplo, analisou-se o caso de um pórtico com 25 elementos e 18 nós, mostrado na Figura 4.24. Na Tabela 4-15, encontram-se os dados do problema. O

pórtico foi submetido a cinco forças estatisticamente independentes e de amplitude aleatória, ilustradas na Figura 4.24 e caracterizadas na Tabela 4-16.

Tabela 4-15 – Dados do problema.

<i>Variável</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
<i>EA</i>	$2.4 \cdot 10^{10} N$	<i>N</i>
<i>EI</i>	$7.2 \cdot 10^8 N \cdot m^2$	$N \cdot m^2$
<i>c</i>	$LN(-25.86, 0.24)$	$(m/cycle) \cdot (MPa \cdot m^{1/2})^{-3}$
<i>m</i>	3.0	–

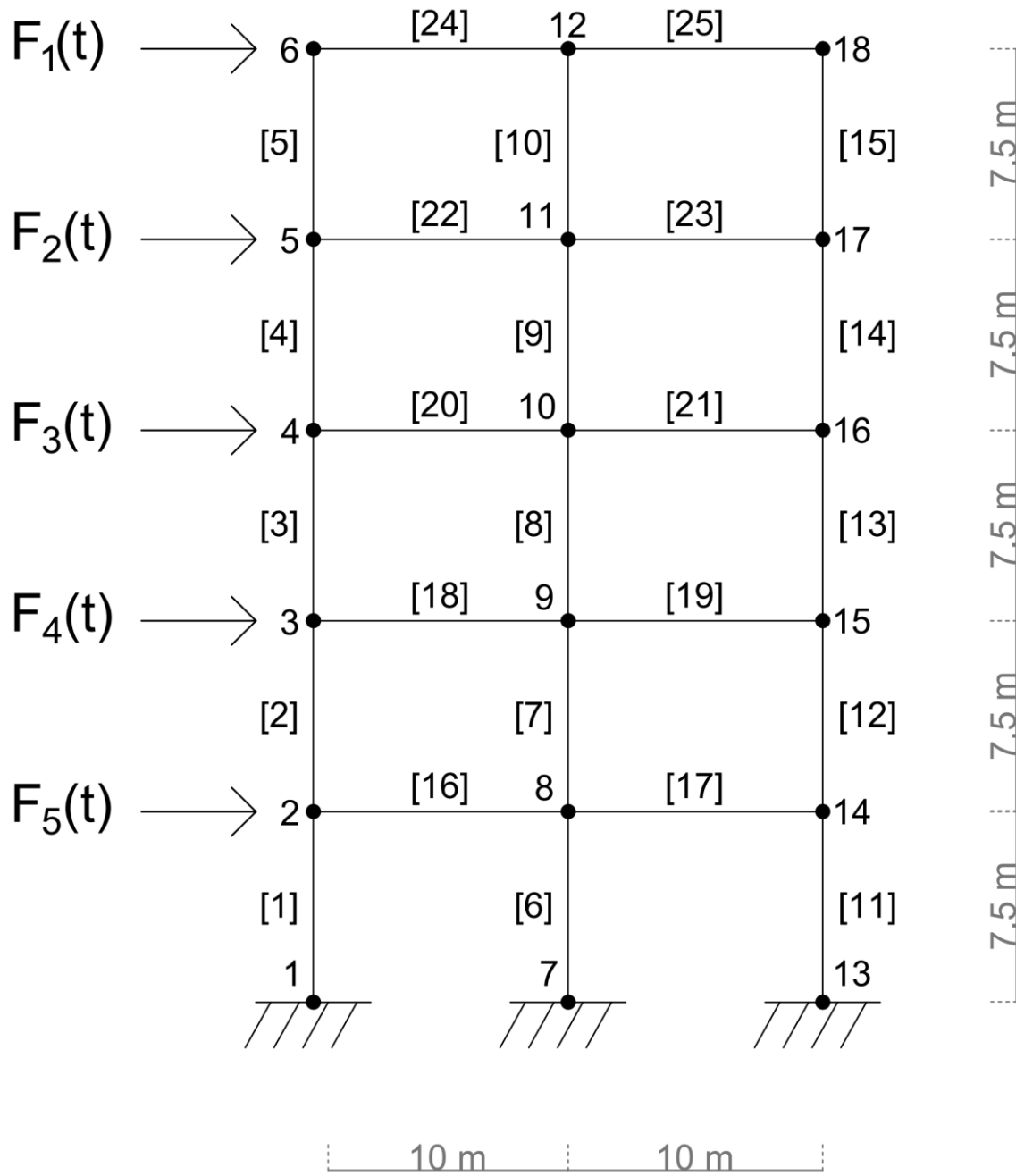


Figura 4.24 – Pórtico com 25 elementos e 18 nós.

Tabela 4-16 – Dados das amplitudes das forças.

<i>Força</i>	<i>Média (kN)</i>	<i>Coefficiente de variação</i>	<i>Distribuição</i>
$\Delta F1$	8.259	5%	<i>Lognormal</i>
$\Delta F2$	8.021	5%	<i>Lognormal</i>
$\Delta F3$	5.318	5%	<i>Lognormal</i>
$\Delta F4$	3.785	5%	<i>Lognormal</i>
$\Delta F5$	2.82	5%	<i>Lognormal</i>

4.3.1 Número de ciclos até a falha

O histograma obtido do número de ciclos até a falha encontra-se na Figura 4.25. Na Figura 4.26, mostra-se a probabilidade de falha por número de ciclos de carregamento. Foram geradas 100 000 simulações, e o tempo médio de processamento foi de 4.0 s por simulação.

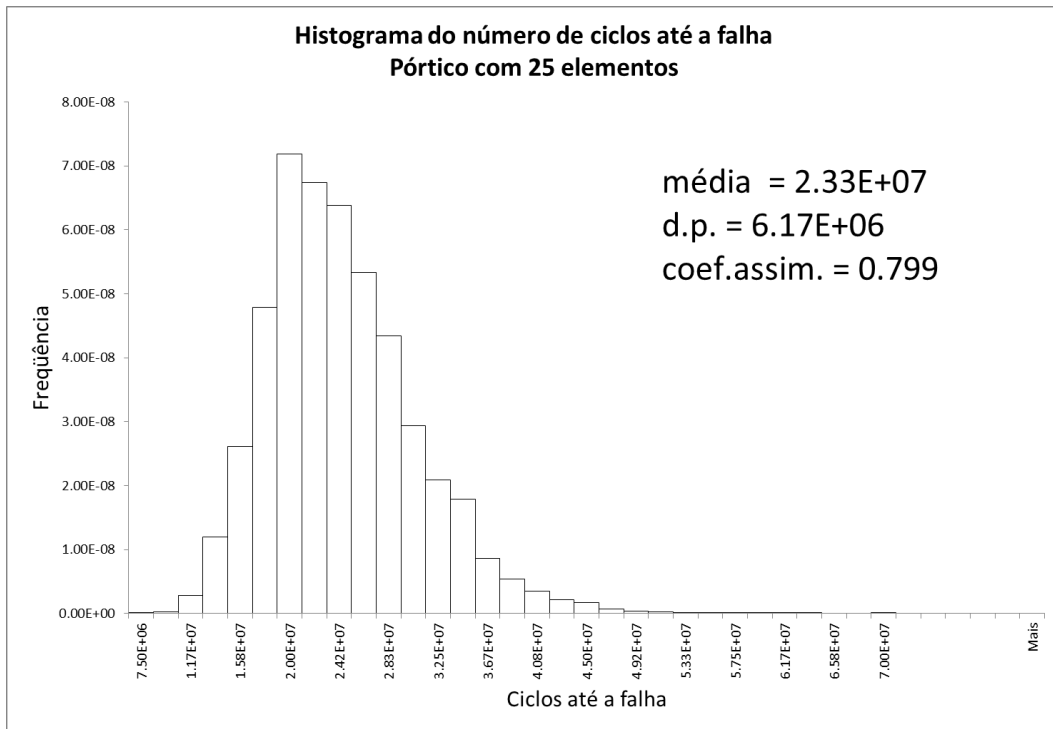


Figura 4.25 – Histograma do número de ciclos até a falha – Pórtico com 25 elementos e cinco forças aleatórias.

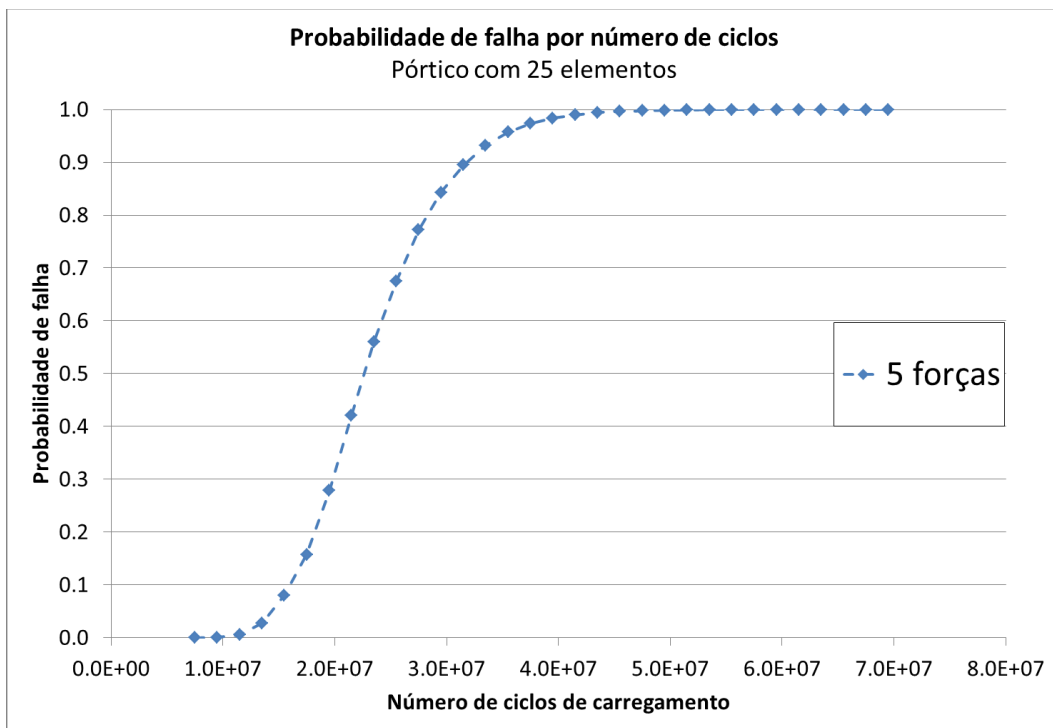


Figura 4.26 – Probabilidade de falha por número de ciclos até a falha – Pórtico com 25 elementos e cinco forças aleatórias.

4.3.2 Número fixo de ciclos de carregamento

Neste caso, foram aplicados 15 000 000 ciclos do carregamento descrito na Figura 4.24 e na Tabela 4-16.

Na Tabela 4-17, indica-se o número de casos que atingiram a falha. Na Tabela 4-18 e na Figura 4.27, mostra-se a média do dano final em cada um dos nós. Identificou-se que os nós que apresentaram a maior média do dano final foram **Nó 3 (Elemento [18])**, **Nó 2 (Elemento [16])** e **Nó 7 (Elemento [6])**. Nas Figuras 4.29 a 4.31, mostram-se os histogramas do dano nestes nós. Note-se a concentração no dano $D = 0.9$, **que corresponde a casos que levaram à falha.**

Foram 6351 casos que levaram à falha em um dos nós da estrutura. O presente trabalho **não** estuda a falha do sistema ou a formação de mecanismo de colapso.

Foram também geradas 100 000 simulações, e o tempo médio de processamento foi de 2.1 s por simulação.

Tabela 4-17 – Resultados das análises – 15 000 000 ciclos de carga.

<i>Casos</i>		<i>Probabilidade de falha de um nó da estrutura após 15E6 ciclos de carregamento</i>
<i>Total</i>	<i>Falharam</i>	
100 000	6351	$Pf \cong \frac{6351}{100000} = 6.351 \cdot 10^{-2}$

Tabela 4-18 – Dano final após 15 000 000 ciclos de carregamento.

Elemento	Nó	Dano final	
		Média	Desv. Pad.
[1]	1	0.3657	0.1809
	2	0.0123	0.0013
[2]	2	0.0528	0.0122
	3	0.0533	0.0157
[3]	3	0.0133	0.0013
	4	0.0617	0.0298
[4]	4	0.0039	0.0004
	5	0.0296	0.0110
[5]	5	0.0002	0.0000
	6	0.0041	0.0012
[6]	7	0.4625	0.1760
	8	0.1184	0.0417
[7]	8	0.3179	0.0934
	9	0.2916	0.0926
[8]	9	0.1469	0.0351
	10	0.2608	0.1050
[9]	10	0.0535	0.0138
	11	0.1124	0.0417
[10]	11	0.0063	0.0017
	12	0.0204	0.0062
[11]	13	0.3650	0.1795
	14	0.0123	0.0013
[12]	14	0.0528	0.0122
	15	0.0532	0.0155

[13]	15	0.0133	0.0013
	16	0.0616	0.0294
[14]	16	0.0039	0.0004
	17	0.0294	0.0109
[15]	17	0.0002	0.00005
	18	0.0041	0.0012
[16]	2	0.5120	0.1653
	8	0.3464	0.1347
[17]	8	0.3464	0.1348
	14	0.5117	0.1654
[18]	3	0.5140	0.1546
	9	0.3709	0.1277
[19]	9	0.3709	0.1277
	15	0.5138	0.1547
[20]	4	0.2933	0.1023
	10	0.2034	0.0686
[21]	10	0.2033	0.0686
	16	0.2929	0.1022
[22]	5	0.0762	0.0245
	11	0.0557	0.0178
[23]	11	0.0557	0.0178
	17	0.0761	0.0245
[24]	6	0.0064	0.0019
	12	0.0039	0.0012
[25]	12	0.0039	0.0012
	18	0.0064	0.0019

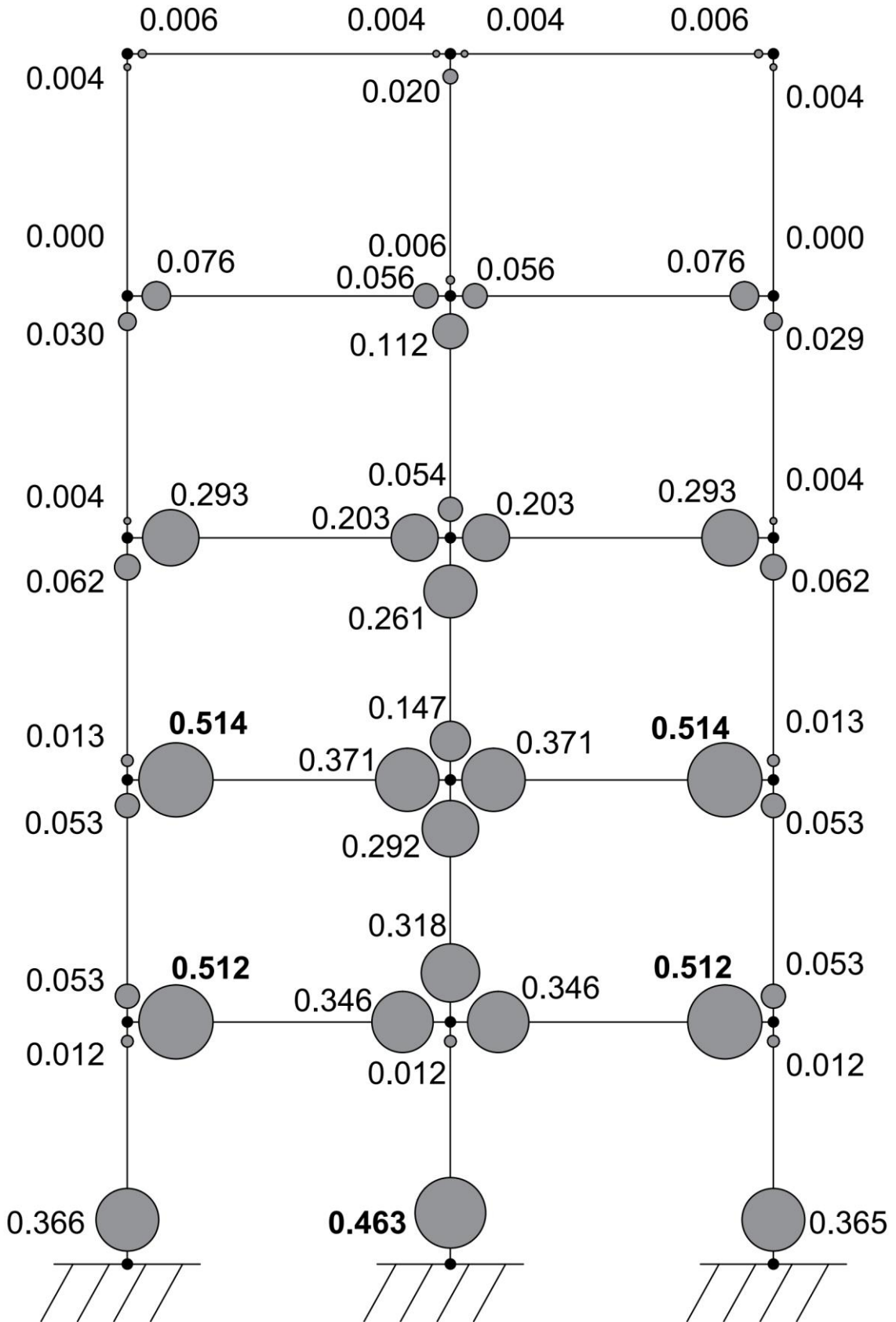


Figura 4.27 – Média do dano final após 15 000 000 ciclos.

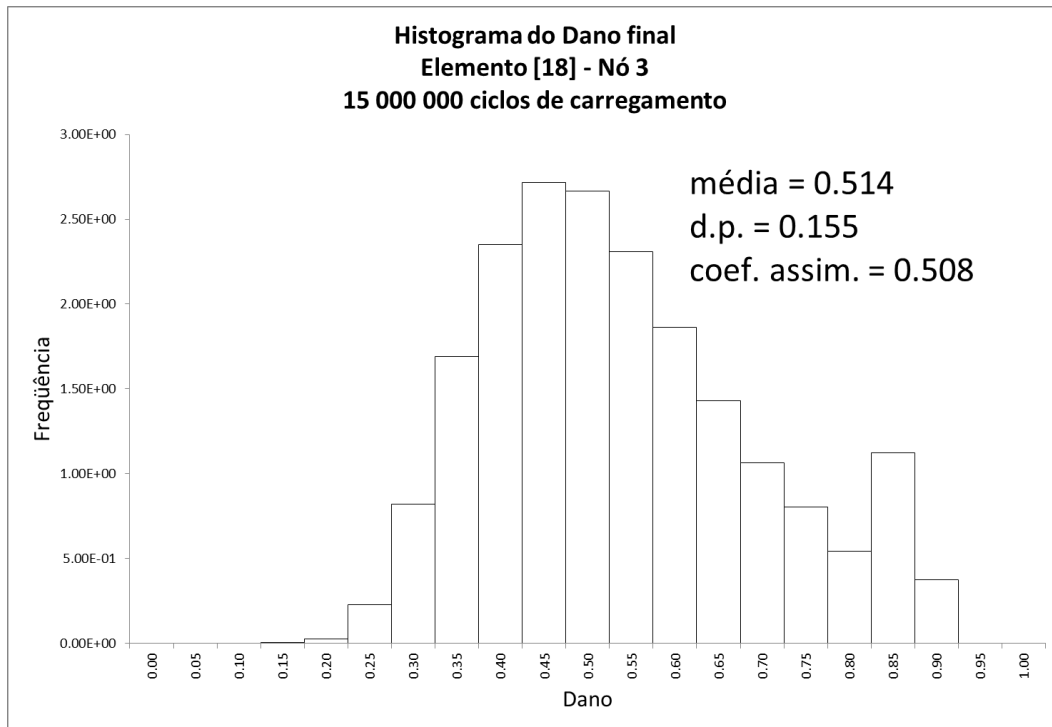


Figura 4.28 – Histograma do dano no Nó 3 – Elemento [18] após 15 000 000 ciclos de carregamento.

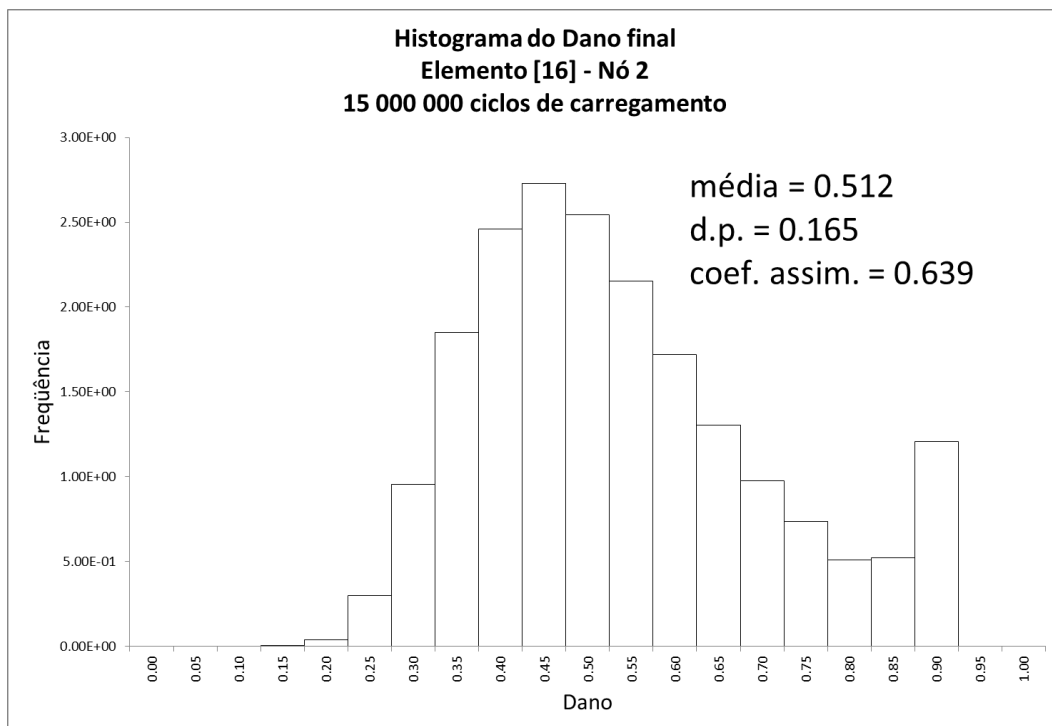


Figura 4.29 – Histograma do dano no Nó 2 – Elemento [16] após 15 000 000 ciclos de carregamento.

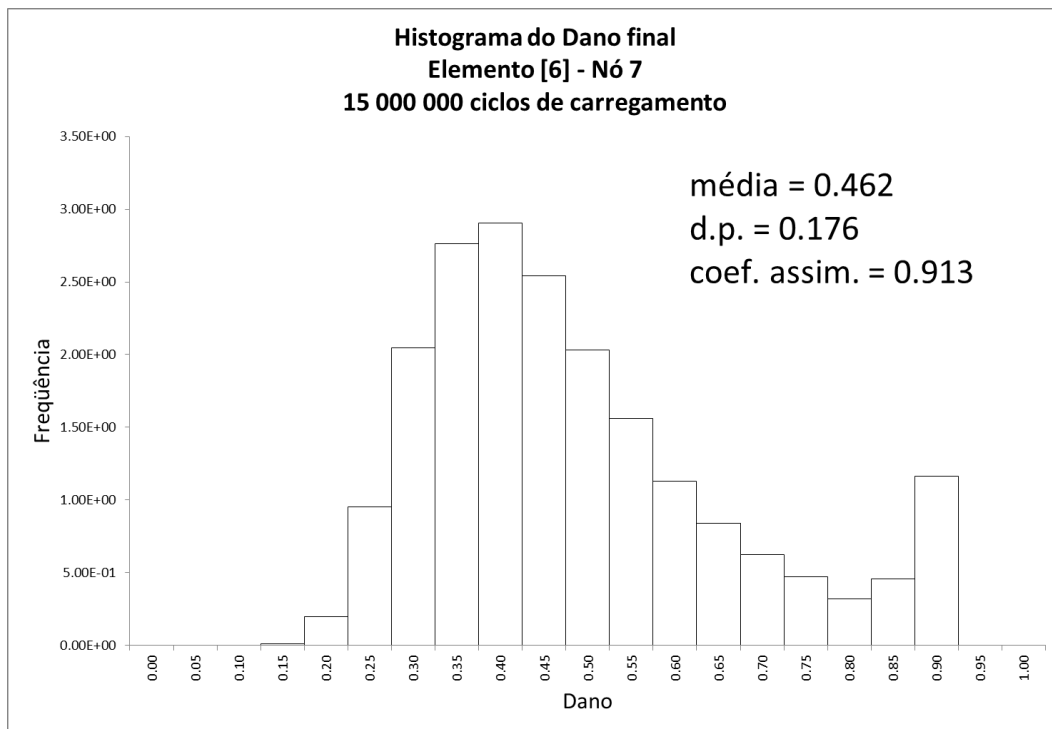


Figura 4.30 – Histograma do dano no Nó 7 – Elemento [6] após 15 000 000 ciclos de carregamento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A presente tese apresentou uma metodologia de análise de fadiga de alto ciclo via Mecânica do Dano Concentrado (LDM) considerando as incertezas envolvidas. Destaca-se, como contribuição original, a inclusão das incertezas, associadas a variáveis que descrevem a resistência e as solicitações. A análise estrutural da fadiga em pórticos planos foi descrita e aplicada satisfatoriamente, como uma alternativa que permite análises com baixo tempo de processamento. Salienta-se que, enquanto a grande maioria dos modelos baseados na LDM apresenta abordagens determinísticas para estruturas de concreto armado, os exemplos apresentados neste trabalho envolvem estruturas de aço e uma abordagem probabilística.

Na análise estrutural via LDM, a matriz de flexibilidade (ou de rigidez) depende do valor da variável dano (Equação 2-41), que varia em função dos esforços internos e de uma lei que descreve o crescimento do dano. Neste trabalho, utilizou-se uma lei de propagação do dano (seção 3.2.3) deduzida a partir da lei de Paris, cujos coeficientes podem ser encontrados em normas e trabalhos acadêmicos. Nas análises iniciais determinísticas, utilizaram-se os coeficientes c e m da Lei de Paris disponíveis na norma BS 7910 (2005) e em Darcis et al. (2015). Exemplificou-se o método, primeiro, através da análise de uma viga em balanço (um elemento) submetida a uma força oscilante de amplitude constante. Verificou-se que o número de ciclos até a falha obtido apresentou concordância com as curvas S-N da norma BS 7910 (2005). Mostrou-se, ainda, que, para ajustar os resultados a uma curva S-N específica, deve-se multiplicar o coeficiente c da lei de propagação por um fator apropriado (seção 4.1.1).

A aleatoriedade das variáveis de resistência foi incluída considerando o coeficiente c da lei de Paris como uma variável aleatória com distribuição lognormal. Como mostrado na Equação 3-15, o coeficiente \bar{c} da lei de propagação do dano é proporcional a c . Também será, portanto, uma variável aleatória lognormal. Inicialmente, foram analisados casos em que a força oscilante tinha uma amplitude constante determinística (exemplo da seção 4.1.2).

Posteriormente, a aleatoriedade da solicitação foi incluída através de forças oscilantes de amplitude aleatória (exemplos das seções 4.1.3 e 4.1.4), e seus resultados (número de ciclos até a falha) foram comparados com aqueles obtidos para o caso de força oscilante

determinística. Verificou-se uma diferença relativa em torno de 8%. Não houve diferença significativa no tempo de análise entre os dois casos. Finalmente, na seção 4.1.4, mostrou-se o exemplo de uma análise com um número fixo de ciclos de carregamento. Apresentou-se o histograma do dano final médio.

Como visto nas seções 4.2 e 4.3, a abordagem simplificada aqui proposta permitiu a análise de estruturas complexas com vários elementos, em que há propagação de fissuras (dano) em vários nós simultaneamente. Mostraram-se as análises de estruturas com mais de um elemento (seis e 25, respectivamente). Primeiro, foram analisados casos até atingir a ruptura. Como resultado, foram apresentados os histogramas do número de ciclos até a ruptura.

Posteriormente, analisaram-se as mesmas estruturas submetidas a um número fixo de ciclos de carregamento. Neste caso, a metodologia permitiu calcular o histograma do dano final em cada um dos nós, e um mapa de dano final na estrutura.

Conclui-se que a LDM constitui uma metodologia alternativa que permite a análise de fadiga através da introdução de conceitos oriundos da mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo. A LDM fornece soluções para estruturas não lineares com um custo computacional relativamente baixo, o que possibilita realizar um grande número de simulações para a estimativa da probabilidade de falha e/ou o número de ciclos até a falha, numa abordagem probabilística do fenômeno.

Sugestões para trabalhos futuros

O método apresenta um grande potencial para generalização e novas aplicações. Sugerem-se como possíveis temas para trabalhos futuros:

- Considerar a possibilidade de acúmulo de dano nas duas faces do elemento. Este seria o caso mais geral, quando há tensões solicitantes significativas positivas e negativas no histórico de carregamento sobre uma seção, que produziriam propagação de fissuras em ambas as faces do elemento.
- Os exemplos apresentados consideraram estruturas com elementos retos e com dano devido ao momento fletor. Em Perdomo et al. (2013), estudam-se estruturas em que

há dano devido ao esforço cortante. Em Amorim et al. (2014), considera-se o caso de estruturas com elementos curvos.

- No trabalho, adotou-se o expoente m da lei de Paris como sendo constante e igual a 3.0. Existem trabalhos (LASSEN; SORENSEN, 2002) que consideram um valor de m ajustado a dados experimentais. O coeficiente m poderia, ainda, ser considerado como uma variável aleatória.
- O passo da análise é um fator sensível do método. Valores muito pequenos podem levar a tempos totais de análise muito grandes, e valores muito grandes podem levar a resultados muito grosseiros ou não convergência. Um algoritmo que identifique automaticamente o passo ótimo poderia ser implementado.
- Contemplar situações considerando os efeitos dinâmicos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABS. **Fatigue Assessment of Offshore Structures**. American Bureau of Shipping. Houston, TX, p. 62. 2003.

AMORIM, D. L. N. **On the lumped damage mechanics for nonlinear analyses: new developments and applications**. São Carlos, São Paulo: Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016. 158 p.

AMORIM, D. L. N.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solid and Structures**, v. 50, p. 4070-4079, 50 2013.

AMORIM, D.L.N., PROENÇA, S.P.B., FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modeling of cracking in concrete Application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, p. 23-35, 2014.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. Second Edition. ed. [S.l.]: CRC, 1995.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**. [S.l.]: John Wiley & Sons, v. I: Basic Principles, 1975.

ASCE, C. O. F. A. F. R. Fatigue and fracture reliability: A state-of-the-art review. **Journal of the Structural Division of American Society of Civil Engineers**, p. 108:3-104, 1982.

BAI, Y.; KURATA, M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; NAKASHIMA, M. Macromodeling of Crack Damage in Steel Beams Subjected to Nonstationary Low Cycle Fatigue. **Journal of Structural Engineering**, Abril 2016.

BECK, A. T. **Reliability Analysis of Degrading Uncertain Structures**. Newcastle, Australia: The University of Newcastle, 2003.

BECK, A. T. **Desenvolvimento de Programa Computacional para Análise de Confiabilidade de Estruturas**. Projeto de pesquisa FAPESP, 2007/ 00154-4. [S.l.]. 2007.

BECK, A. T. **Curso de Confiabilidade Estrutural**. São Carlos, SP: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2011.

BECK, A. T.; MELCHERS, R. E. Overload Failure of Structural Components under Random Crack Propagation and Loading - a Random Process Approach. **Structural Safety**, n. 26, p. 471-488, 2004.

BS 7910:2005. **Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures**. [S.l.]: British Standards, 2005.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, p. 1113-1126, No. 6 1995.

COLLINS, J. A. **Failure of Materials in Mechanical Design**. New York: McGraw Hill, 1981.

CRAMER, H.; LEADBETTER, M. R. **Stationary and Related Stochastic Processes**. New York: John Wiley & Sons, 1967.

DARCIS, P.; SANTAROSA D.; RECHO N.; LASSEN, T. **A fracture mechanics based approach for crack growth in welded joints with referene to BS 7910**. Proceedings of the 15th European Conference on Fracture. Estocolmo, Suécia: [s.n.].

DNV-RP-C203. **Fatigue Design of Offshore Steel Structures**. [S.l.]: Det Norske Veritas, 2008.

DOWLING, N. E. **Mechanical behavior of materials**. [S.l.]: Prentice Hall, 2013.

DOWLING, N. E.; BEGLEY, J. A. Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the J-Integral. **Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590**, p. 82-103, 1976.

ESHELBY, J. D. The Continuum Theory of Lattice Defects. In: _____ **Solid State Physics, Vol. 3**. [S.l.]: Academic Press, 1956.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Análisis de estructuras aporricadas mediante la mecánica de la degradación. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, p. 123-139, 9 (2) 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified Model of Unilateral Damage for RC Frames. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, p. 1765-1772, December 1995.

FLÓREZ-LÓPEZ, J., MARANTE, M.E., PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Applications**. [S.l.]: IGI Global, 2014.

FORMAN, R. G.; KEARY, V. E.; ENGLE, R. M. Numerical Analysis of Crack Propagation in Cyclic-Loaded Structures. **Journal of Basic Engineering**, v. 89, p. 459-464, 1967.

GHONEM, H.; DORE, S. Experimental Study of the Constant Probability Crack Growth Curves under Constant Amplitude Loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 27 (1), p. 1-25, 1987.

HARRIS, D. O. Probabilistic Fracture Mechanics. In: SUNDARAJAN, C. **Probabilistic Structural Mechanics Handbook**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1995. p. 106-145.

HUDAK, S.J.; MCCLUNG, R.C.; BARTLETT, M.L.; FITZGERALD, J.H.; RUSSELL, D.A. **A Comparison of Single-Cycle Versus Multiple-Cycle Proof Testing Strategies**. National Aeronautic and Space Administration. Washington, D.C. 1990. (Contractor Report No. 4318).

HWANG, W.; HAN, K. S. Cumulative damage models and multi-stress fatigue life prediction. **Journal of Composite Materials**, v. 20, no. 2, p. 125-153, 1986.

JOHNSTON, G. O. Statistical scatter in fracture toughness and fatigue crack growth rate data. In: BLOOM, J. M.; EKVALL, J. C. **Probabilistic fracture mechanics and**. [S.l.]: ASTM STP 798, 1983. p. 42-66.

KACHANOV, L. M. On creep rupture time. **Izv. Akad. Nau. SSSR**, v. 8, p. 26-31, 1958.

KACHANOV, L. M. **Introduction to continuum damage mechanics**. [S.l.]: Dordrecht Boston : M. Nijhoff, 1986.

KANNINEN, M. F.; POPELAR, C. H. **Advanced Fracture Mechanics**. New York: Oxford University Press, 1985.

KRAJCIKOVIC, D.; LEMAITRE, D. **Continuum damage mechanics: theory and applications**. New York: Springer-Verlag, 1987.

KUAI, H.D.; LEE, H. J.; LEE, J. H.; MUN, S. Fatigue Crack Propagation Model of Asphalt Concrete Based on Viscoelastic Fracture Mechanics. **Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board**, Washington, D.C., n. 2181, p. 11-18, 2010.

LASSEN, T.; SORENSEN, J. D. A probabilistic damage tolerance concept for welded joints. **Marine Structures**, v. 15, p. 615-626, 2002.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. 2nd. ed. Berlin: Springer, v. xix, 1996. 228 p.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. E. **Mechanics of Solid Materials**. Paris: Dunod, 1988.

LIU, Y.; MAHADEVAN, S. Stochastic fatigue damage modelling under variable amplitude loading. **International Journal of Fatigue**, v. 29, no. 6, p. 1149-1161, 2007.

LUTES, L. D.; LARSEN, C. E. Improved spectral method for variable amplitude fatigue prediction. **Journal of Structural Division of American Society of Civil Engineers** **116**, p. 1149-1164, 1990.

MADSEN, H. O.; KRENK, S.; LIND, N. C. **Methods of Structural Safety**. 2a. ed. New York: Dover Publications, 2006.

MARCO, S. M.; STARKEY, W. L. A Concept of Fatigue Damage. **ASME Transactions** **76**, p. 627, 1954.

MARSHALL, W. **An Assessment of the Integrity of PWR Vessels. Report of a Study Group chaired by W. Marshall**. H. M. Stationery Office. London. 1976.

MATSUSHI, M.; ENDO, T. Fatigue of Metals Subjected to Varying Stress. **Presented to the Japan Society of Mechanical Engineers**, Fukuoka, Japan, March 1968.

MCEVILY, A. J. On Closure in Fatigue Crack Growth. **ASTM STP 582**, Philadelphia, p. 35-43, 1988.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. Second edition. ed. [S.l.]: John Wiley&Sons, 1999.

NEWLAND, D. E. **An introduction to Random vibrations, spectral and wavelet analysis**. Third edition. ed. [S.l.]: Longman Scientific & Technical, 1993.

NEWMAN, J. C.; RAJU, I. S. **Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies**. Fracture Mechanics, Fourteenth Symposium, Vol. I: Theory of Analysis. [S.l.]: ASTM STP 791. 1983. p. 238-265.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. New York: McGraw Hill Higher Education, 2000.

PARIS, P. C.; ERDOGAN, F. A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. **Journal of Basic Engineering**, v. 85, p. 528-534, 1960.

PARIS, P. C.; GOMEZ, M. P.; ANDERSON, W. P. A Rational Analytic Theory of Fatigue. **The Trend in Engineering**, v. 13, p. 9-14, 1961.

PERDOMO, M.E., PICÓN,R., MARANTE, M.E., HILD, F., ROUX S.,FLÓREZ-LÓPEZ,J. Experimental analysis and mathematical modeling of fracture in RC elements with any aspect ratio. **Engineering Structures**, p. 407-416, 2013.

RATHOD, V.; YADAV, O.P.; RATHORE, A.; JAIN, R. Probabilistic Modeling of Fatigue Damage Accumulation for Reliability Prediction. **International Journal of Quality, Statistics and Reliability**, p. 10, 2011.

RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanichs**, v. 35, p. 379-386, 1968.

SHEN, H.; LIN, J.; MU, E. Probabilistic model on stochastic fatigue damage. **International Journal of Fatigue**, v. 22, no. 7, p. 569-572, 2000.

SINCLAIR, G. M.; DOLAN, T. J. Effect of Stress Amplitude on Statistical Variability in Fatigue Life of 75S-T6 Aluminium Alloy. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 75, p. 867-872, 1953.

SOBCZYK, K.; SPENCER, B. F. **Random Fatigue: From Data to Theory**. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1992.

STEPHENS, R. I.; FATEMI, A.; STEPHENS, R. R.; FUCHS, H. O. **Metal Fatigue in Engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

UZCATEGUI, M. **Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la web**. Mérida: Tese (Doutorado) - Universidad de Los Andes, 2012. 250 p.

VIRKLER, D. A.; HILLBERRY, B. M.; GOEL, P. K. The Statistical Nature of Fatigue Crack Propagation. **Journal of Engineering Materials and Technology, ASME**, v. 101, p. 148-153, 1979.

WALKER, E. K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. In: MATERIALS, A. S. F. T. A. **Effect of environment and complex load history on fatigue life, ASTM STP 462**. Philadelphian: [s.n.], 1970. p. 1-14.

WANG, W.; COIT, D. W. Reliability and degradation modeling with random or uncertain failure threshold. **Reliability and Maintainability Symposium**, p. 392-397, 2007.

WEERTMAN, J. Rate of Growth of Fatigue Cracks Calculated from the Theory of Infinitesimal Dislocations Distributed on a Plane. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 4, p. 77-92, 1972.

WIRSCHING, P. H. Fatigue reliability for offshore structures. **Journal of Structural Division of American Society of Civil Engineers** 110, p. 2340-2356, 1984.

WIRSCHING, P. H. Probabilistic Fatigue Analysis. In: SUNDARAJAN, C. **Probabilistic Structural Mechanics Handbook**. [S.l.]: Chapman & Hall, 1995. p. 146-165.

WIRSCHING, P. H. Fatigue reliability. **Progress in Structural Engineering and Materials**, v. I (2), p. 200-206, 1998.

WIRSCHING, P. H.; LIGHT, M. C. Fatigue under wide band random stresses. **Journal of the Structural Division of American Society of Civil Engineers** 106, p. 1593-1607, 1980.

WU, . W. F.; HUANG, T. H. Prediction of fatigue damage and fatigue life under radom loading. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 53, no.2, p. 273-298, 1993.

ZHU, S. P.; LIU, Q.; HUANG, H. Z. **Proabilistic Modeling of Damage Accumulation for Fatigue Reliability Analysis**. Procedia Structural Integrity. Leoben, Austria: [s.n.]. 2017. p. 3-10.

Anexo A

Se os deslocamentos da estrutura são considerados pequenos e os efeitos não lineares são desprezíveis, a matriz de transformação $[\mathbf{B}]$ aumentada é definida, para um elemento de barra, como:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{s}{L} & 0 & -\frac{c}{L} & 0 & 1 & 0 & -\frac{s}{L} & 0 & \frac{c}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{L} & 0 & -\frac{c}{L} & 0 & 1 & 0 & -\frac{s}{L} & 0 & \frac{c}{L} & 0 & 0 \\ \frac{s}{L} & 0 & -\frac{c}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{L} & 0 & \frac{c}{L} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{s}{L} & 0 & -\frac{c}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{L} & 0 & \frac{c}{L} & 0 & 1 \\ -c & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & c & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & c & 0 & s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sendo $s = \sin(\alpha)$, $c = \cos(\alpha)$, α o ângulo entre a corda do elemento e o eixo X , L é o comprimento da corda.

De maneira similar, a matriz de flexibilidade $[\mathbf{F}_0]$ aumentada de um elemento danificado é definida como:

$$[\mathbf{F}_0] = \begin{bmatrix} F_{11}^0 & 0 & F_{12}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{11}^0 & 0 & F_{12}^0 & 0 & 0 \\ F_{21}^0 & 0 & F_{22}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{21}^0 & 0 & F_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{33}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{33}^0 \end{bmatrix}$$

sendo $F_{11}^0 = F_{22}^0 = \frac{L}{3EI}$, $F_{12}^0 = F_{21}^0 = -\frac{L}{6EI}$, $F_{33}^0 = \frac{L}{EA}$.