

Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Engenharia de  
Estruturas

**Hugo Luiz Oliveira**

**Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização  
topológica probabilística de estruturas bidimensionais:  
uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**

São Carlos

2017

**Hugo Luiz Oliveira**

**Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização  
topológica probabilística de estruturas bidimensionais:  
uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**

**VERSÃO CORRIGIDA**

**A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Programa: Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Edson Denner Leonel

São Carlos

2017

Autorizo a reprodução total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Oliveira, Hugo Luiz  
O895m Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: Uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno / Hugo Luiz Oliveira; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2017.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2017.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Viscoelasticidade. 3. Otimização Topológica. 4. Método Level Set. 5. Variabilidade Geométrica. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **HUGO LUIZ OLIVEIRA**.

Título da tese: "Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno".

Data da defesa: 31/03/2017.

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**  
**(Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Associado **André Teófilo Beck**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dra. **Carla Tatiana Mota Anflor**  
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **Valério Silva Almeida**  
(Escola Politécnica/EP-USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Ovaldo Luis Manzoli**  
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP- Bauru)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):  
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

## **Dedicatória**

Dedico esta tese a toda minha família que sempre me apoiou em todos os momentos.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus. Sem Ele nenhum esforço de minha parte seria válido.

À minha família que sempre me incentivou a sempre seguir em frente.

Ao professor doutor Edson Denner Leonel pela orientação deste trabalho. Seu empenho e boa disposição, desde o início me serviram de inspiração para realização da presente tese.

Ao professor Alaa Chateaneuf da Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, França por suas valiosas contribuições para esta tese.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos pela formação científica que me proporcionou ao longo de todo o tempo que estive aqui. Certamente, mantereí comigo um profundo respeito e admiração por todos os membros constituintes desta casa.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP 2012/24944-5 e 2015/07931-5) pela bolsa de estudos concedida que viabilizou a concretização deste trabalho de pesquisa.

*“O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço: quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contato com o desconhecido.”*

*Blaise Pascal*

## RESUMO

OLIVEIRA, H. L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 199 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

O presente trabalho trata da formulação e implementação de modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Inspirando-se em problemas de engenharia, uma abordagem multidisciplinar é proposta como meio de representação numérica mais realista. Há materiais de uso corrente na engenharia que possuem resposta dependente do tempo. Nesta tese os fenômenos dependentes do tempo são abordados por meio da Mecânica Viscoelástica Linear associada a modelos reológicos. Neste trabalho, se apresenta a dedução do modelo constitutivo de Maxwell para ser utilizado via MEC. As equações deduzidas são verificadas em problemas de referência. Os resultados mostram que a formulação deduzida pode ser utilizada para representar estruturas compostas, mesmo em casos envolvendo uma junção entre materiais viscoelásticos e não viscoelásticos. Adicionalmente as formulações apresentadas se mantêm estáveis na presença de fissuras de domínio e bordo. Verifica-se que a formulação clássica dual pode ser utilizada para simular o comportamento de fissuras com resposta dependente do tempo. Essa constatação serve de base para maiores investigações no campo da Mecânica da Fratura de materiais viscoelásticos. Na sequência, mostra-se como o MEC pode ser aliado a conceitos probabilísticos para fazer estimativas de comportamentos a longo prazo. Estas estimativas incluem as incertezas inerentes nos processos de engenharia. As incertezas envolvem os parâmetros materiais, de carregamento e de geometria. Por meio do conceito de probabilidade de falha, os resultados mostram que as incertezas relacionadas às estimativas das cargas atuantes apresentam maior impacto no desempenho esperado a longo prazo. Esta constatação serve para realizar estudos que colaborem para a melhoria dos processos de concepção estrutural. Outro aspecto de interesse desta tese é a busca de formas otimizadas, por meio da Otimização Topológica. Neste trabalho, um algoritmo alternativo de otimização topológica é proposto. O algoritmo é baseado no acoplamento entre o Método Level Set (MLS) e o MEC. A diferença entre o algoritmo aqui proposto, e os demais presentes na literatura, é forma de obtenção do campo de velocidades. Nesta tese, os campos normais de velocidades são obtidos por meio da sensibilidade à forma. Esta mudança torna o algoritmo propício a ser tratado pelo MEC, pois as informações necessárias para o cálculo das sensibilidades residem exclusivamente no contorno. Verifica-se que o algoritmo necessita de uma extensão particular de velocidades para o domínio a fim de manter a estabilidade. Limitando-se a casos bidimensionais, o algoritmo é capaz de obter os conhecidos casos de referência reportados pela literatura. O último aspecto tratado nesta tese retrata a maneira pela qual as incertezas geométricas podem influenciar na determinação das estruturas otimizadas. Utilizando o MEC, propõe-se um

critério probabilístico que permite embasar escolhas levando em consideração a sensibilidade geométrica. Os resultados mostram que os critérios deterministas, nem sempre, conduzem às escolhas mais adequadas sob o ponto de vista de engenharia. Assim, este trabalho contribui para a expansão e difusão das aplicações do MEC em problemas de engenharia de estruturas.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno (MEC), Viscoelasticidade, Otimização Topológica, Método Level Set (MLS), Variabilidade Geométrica

## ABSTRACT

OLIVEIRA, H. L. **Numerical Models applied to the analysis of Linear Viscoelasticity and Probabilistic Topology Optimization of two-dimensional structures: a Boundary Element Method approach.** 2017. 199 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

The present work deals with the formulation and implementation of numerical models based on the Boundary Element Method (BEM). Inspired by engineering problems, a multidisciplinary combination is proposed as a more realistic approach. There are common engineering materials that have time-dependent response. In this thesis, time-dependent phenomena are approached through the Linear Viscoelastic Mechanics associated with rheological models. In this work, the formulation of Maxwell's constitutive model is presented to be used via MEC. The resultant equations are checked on reference problems. The results show that the presented formulation can be used to represent composite structures, even in cases involving a junction between viscoelastic and non-viscoelastic materials. Additionally the formulations presented remain stable in the presence of cracks. It is found that the classical DUAL-BEM formulation can be used to simulate cracks with time-dependent behaviour. This result serves as the basis for further investigations in the field of Fracture Mechanics of viscoelastic materials. In the sequence, it is shown how the BEM can be associated with probabilistic concepts to make predictions of long-term behaviour. These predictions include the inherent uncertainties in engineering processes. The uncertainties involve the material, loading and geometry parameters. Using the concept of probability of failure, the results show that the uncertainties related to the estimations of loads have important impact on the long-term expected performance. This finding serves to carry out studies that collaborate for the improvement of structural design processes. Another aspect of interest of this thesis is the search for optimized forms through Topological Optimization. In this work, an alternative topological optimization algorithm is proposed. The algorithm is based on the coupling between the Level Set Method (LSM) and BEM. The difference between the algorithm proposed here, and the others present in the literature, is a way of obtaining the velocity field. In this thesis, the normal fields of velocities are obtained by means of shape sensitivity. This change makes the algorithm adequate to be treated by the BEM, since the information necessary for the calculation of the sensitivities resides exclusively in the contour. It is found that the algorithm requires a particular velocity extension in order to maintain stability. Limiting to two-dimensional cases, the algorithm is able to obtain the known benchmark cases reported in the literature. The last aspect addressed in this thesis involves the way in which geometric uncertainties can influence the determination of optimized structures. Using the BEM, it is proposed a probabilistic criterion that takes into consideration the geometric sensitivity. The results show that deterministic

criteria do not always lead to the most appropriate choices from an engineering point of view. In summary, this work contributes to the expansion and diffusion of MEC applications in structural engineering problems.

**Keywords:** Boundary Element Method (BEM), Viscoelasticity, Topology Optimization, Level Set Method (LSM), Geometrical Variability

## LISTA DE ABREVIATURAS

2D – duas dimensões

3D – três dimensões

BESO – Bidirectional Evolutionary Structural Optmization

CFL – condições de estabilidade Courant-Friedrichs-Lewy

CMOD – crack mouth opening displacement – abertura do entalhe inicial

DBEM – Dual Boundary Element Method

EDP – Equação Diferencial Parcial

EPD – Estado Plano de Deformações

EPT – Estado Plano de Tensões

ESO – Evolutionary Structural Optmization

FDA – Função de Distribuição Acumulada

FORM – First Order Reliability Method

K-L – Expansão de Karhunen-Loève

LGV – Linha de Grande Velocidade

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MLS – Método Level Set

MMA – Método das Assíntotas Móveis

MRP – Método dos Resíduos Ponderados

MSR – Método da Superfície de Resposta

MSS – Método da Subtração de Singularidades

OMT – Object Modeling Technique

OT – Otimização Topológica

OTD – Otimização Topológica Determinística

PDF – Probability Density Function, ou, Função Densidade de Probabilidade

PMA – Performance Measure Approach

PVC – Problema de Valor de Contorno

PVI – Problema de Valor Inicial

RBTO – Reliability Based Topology Optmization

RIA – Reliability Index Approach

RTO – Robust Topology Optimization

SET – Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos

SIMP – Solid Isotropic Material with Penalization

SML – Segmental Multipoint Linearization

SORA – Sequential Optimization Reliability Assessment

SORM – Second Order Reliability Method

VA – Variável Aleatória

XFEM – Método dos Elementos Finitos Estendidos

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	17
1.1 Considerações Iniciais .....	17
1.2 Breve contexto histórico .....	19
1.3 Objetivos gerais.....	22
1.4 Objetivos específicos.....	23
1.5 Estrutura do texto .....	23
<b>2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ANÁLISE ESTRUTURAL</b> .....	25
2.1 Tópicos de Teoria da Elasticidade Linear e problemas de valor de contorno	26
2.2 Apresentação da formulação em termos de integrais de contorno.....	30
2.3 Aspectos computacionais do MEC .....	35
2.4 Formulação hipersingular .....	37
2.5 Aplicações.....	39
2.5.1 Cilindro pressurizado .....	40
2.5.2 Chapa tracionada .....	42
<b>3 MODELAGEM DE ESTRUTURAS CONSIDERANDO A PRESENÇA DE FISSURAS E OS EFEITOS DEPENDENTES DO TEMPO EMPREGANDO O MEC</b>	45
3.1 Revisão Bibliográfica .....	46
3.2 Domínio de validade e uso .....	48
3.3 Comportamento dos materiais viscoelásticos .....	49
3.3.1 Definição de História de uma grandeza .....	50
3.3.2 Definindo a Lei constitutiva.....	51
3.3.3 Definição de história admissível .....	51
3.3.4 Definição da equação constitutiva hereditária linear.....	52
3.3.5 Teorema de representação integral.....	53

3.4	Modelos analógicos.....	54
3.5	Formulações viscoelásticas do MEC.....	60
3.5.1	Modelo de Maxwell.....	60
3.5.2	Modelo de Kelvin.....	64
3.5.3	Modelo de Boltzmann.....	64
3.6	Aplicações.....	65
3.6.1	Exemplo 1 (benchmark 1 – estado uniaxial de tensão).....	65
3.6.2	Exemplo 2 (benchmark 2 – estado plano de deformação).....	68
3.6.3	Exemplo 3 (benchmark 3 - Problema fundamental de Griffith modo I) ..	70
3.6.4	Exemplo 4 (benchmark 4 – Viga sob flexão por três pontos).....	75
3.6.5	Exemplo 5 (Painel Sanduíche).....	77
<b>4</b>	<b>ESTIMATIVA DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL LEVANDO EM CONSIDERAÇÃO AS VARIABILIDADES ASSOCIADAS .....</b>	<b>80</b>
4.1	Revisão Bibliográfica.....	80
4.2	Elementos de Teoria das Probabilidades.....	84
4.2.1	Espaço amostral e evento.....	85
4.2.2	Função probabilidade.....	85
4.2.3	Variável aleatória.....	86
4.2.4	Modelos para VA contínuas.....	87
4.2.5	Medidas de centralidade e dispersão .....	88
4.3	Elementos de Teoria de Confiabilidade .....	89
4.3.1	Falha e Estados Limite.....	89
4.3.2	A Técnica de Simulação de Monte Carlo .....	91
4.4	Metamodelagem por Superfície de Resposta .....	92
4.5	Descrição do modelo computacional .....	93
4.5.1	Apresentação da Estrutura .....	94
4.5.2	Definição dos parâmetros do modelo material.....	95

4.5.3	Definição do problema de Confiabilidade .....	96
4.5.4	Algoritmo proposto.....	96
4.6	Resultados obtidos .....	97
<b>5</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA UTILIZANDO</b>	
	<b>ACOPLAMENTO MEC-MLS .....</b>	<b>101</b>
5.1	Revisão Bibliográfica .....	102
5.2	Método Level Set .....	112
5.3	Método de solução da função Level Set.....	115
5.4	Definição do problema de otimização .....	116
5.5	Definição do campo de velocidades.....	116
5.6	Extensão de velocidades.....	118
5.7	Critério para alteração da topologia .....	118
5.8	Reinicialização da função level set .....	120
5.9	Procedimento computacional.....	121
5.10	Aplicações .....	123
5.10.1	Chapa tracionada .....	124
5.10.2	Viga sob flexão.....	130
<b>6</b>	<b>MEC APLICADO AO PROCESSO DE TOMADA DE DECISÃO EM</b>	
	<b>PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIABILIDADE GEOMÉTRICA.....</b>	<b>137</b>
6.1	Revisão bibliográfica.....	137
6.2	Formulação do problema .....	144
6.3	Proposta numérica de solução.....	145
6.3.1	Critério de Escolha e Sensibilidade .....	145
6.3.2	Perturbação do Contorno .....	146
6.3.3	Procedimento Computacional .....	147
6.4	Aplicações.....	148
6.4.1	Viga em balanço.....	148
6.4.2	Ponte biapoiada .....	153

<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	160
7.1	Contribuições da tese.....	160
7.2	Aplicações dos resultados da tese .....	163
7.3	Sugestão de trabalhos futuros .....	165
7.4	Trabalhos divulgados resultantes desta tese .....	167
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	168
	<b>APÊNDICE A - PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS APLICADA AO MEC</b> .....	182
	<b>APÊNDICE B – ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA ENVOLVENDO O MEC</b> .....	184

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais

A engenharia é uma atividade multidisciplinar de extrema importância para o desenvolvimento da sociedade. É responsável por criar alternativas viáveis e seguras para melhorar a qualidade de vida dos seres humanos. Trata-se de uma ciência que utiliza o conhecimento técnico-científico tendo em vista a limitação dos recursos naturais disponíveis.

Entre os vários ramos em que se divide a engenharia, existe a engenharia de estruturas que se dedica à concepção e construção de estruturas em regime estático ou dinâmico para as mais diferentes aplicabilidades como estruturas civis (edifícios, pontes, pavimentos, muros de sustentação, barragens), estruturas marítimas (embarcações, plataformas de exploração petrolíferas), estruturas aeronáuticas e aeroespaciais, robótica, automotivas, estruturas microscópicas para fabricação de materiais, entre outras.

A fase de projeto de qualquer estrutura passa por duas etapas primordiais. A primeira delas constitui a busca da melhor distribuição espacial dos elementos estruturais que atendam à demanda de uso e segurança (concepção estrutural). A segunda constitui a escolha correta dos materiais que serão utilizados para sua fabricação, considerando desempenho mecânico, durabilidade e manutenção. Para auxiliar essa escolha, o conhecimento das propriedades que identificam o comportamento dos materiais é de suma importância.

A viscosidade, por exemplo, é a característica física que descreve a resistência que um material oferece ao escoamento. Quando a força que origina o cisalhamento é retirada o material para de escoar. Esta é uma característica evidente nos líquidos. A elasticidade, por outro lado, relaciona-se com a capacidade que o material possui de recobrar sua forma inicial após a cessação da sollicitação. Este comportamento, embora não exclusivo, é notado nos materiais sólidos.

Há materiais que manifestam tanto viscosidade quanto elasticidade e por isto recebem o nome de viscoelásticos. Pode-se citar como exemplos de materiais viscoelásticos de

interesse para engenharia as borrachas, os polímeros e o concreto. No ramo da bioengenharia, os ossos, que compõem a estrutura dos seres humanos, são considerados meios poro-viscoelásticos.

A concepção estrutural frequentemente é conhecida por ser um processo laborioso, que normalmente depende da experiência do projetista. Embora existam recomendações, e boas práticas difundidas para sua criação, cada projeto estrutural tem características únicas que muitas vezes não exploram de maneira racional e eficiente os materiais disponíveis, ocasionando desperdício de recursos econômicos.

Uma técnica criada para auxiliar o projetista estrutural é a Otimização Estrutural. Esta técnica utiliza os conceitos de Programação Matemática para encontrar o projeto que maximize seus benefícios respeitando restrições conflitantes. Deste modo, as concepções estruturais se tornam mais eficientes e independentes dos critérios heurísticos adquiridos com a experiência de cada indivíduo.

Basicamente existem três tipos de otimização estrutural. São elas a otimização dimensional, a otimização de forma e a otimização topológica (OT). Entre essas, a mais versátil é a OT, por fornecer maior liberdade ao projetista já que é a única que não requer disposições estruturais prévias.

Outro aspecto presente no processo de concepção estrutural, geralmente considerado de forma simplificada, são as fontes de incertezas. Elas podem ter várias origens como, por exemplo, na determinação das propriedades dos materiais, simplificações de modelagem, estimativa das ações à que a estrutura estará sujeita, ou ainda a probabilidade de que um determinado evento ocorra. Se existe alguma incerteza nas informações que alimentam o sistema mecânico, existirá a probabilidade de que a resposta mecânica não corresponda ao esperado. Portanto, é de grande importância estimar com determinado grau de confiança qual é a resposta do sistema frente às variáveis aleatórias. Sejam quais forem suas causas, as incertezas são inevitáveis nos processos de engenharia e por isto um projeto estrutural mais realista deve levar em conta sua existência. O conjunto de técnicas apropriadas para avaliação da propagação das incertezas nos sistemas mecânicos é fornecido pela Confiabilidade Estrutural.

O conhecimento para modelar, analisar, projetar, construir, manter as estruturas está continuamente crescendo. Entretanto, a complexidade desses sistemas cresce à mesma taxa

fazendo com que cada vez mais se crie abordagens de estudo integradas. É preciso entender os efeitos das interações tecnológicas, ambientais, econômicas, sociais e políticas no ciclo de vida das estruturas e infraestruturas. Para alcançar isto, novos métodos devem ser propostos para sistematicamente analisar os sistemas estruturais em que os modelos permitam analisar e avaliar os riscos e benefícios associados às várias alternativas. Conforme apontado Tsompanakis, Lagaros e Papadrakakis (2008), é importante maximizar a vida útil desses sistemas para servir às necessidades da sociedade, selecionando o melhor balanço entre segurança, economia e sustentabilidade, apesar de na maioria das vezes se dispor de conhecimento imperfeito e informações imprecisas.

Desde o início dos anos 1960, os computadores vêm desempenhando um papel cada vez mais relevante dentro da engenharia. Em especial, eles permitiram a implementação de técnicas numéricas que ampliam o campo de aplicação das teorias mecânicas. Atualmente, as etapas sistemáticas que compõem o Método Científico passaram a ser três: teoria, experimento e modelagem numérico-computacional.

Em reconhecimento à complexidade dos fenômenos que afetam a concepção estrutural, fica clara a necessidade de novas pesquisas. O intuito é desenvolver ferramentas computacionais que auxiliem o projetista estrutural a conceber estruturas de maneira mais rápida, econômica, segura e eficaz.

## **1.2 Breve contexto histórico**

A busca por formas de uso mais racional e eficiente dos materiais para a confecção de estruturas não é recente. Anthony George Maldon Michell foi um engenheiro mecânico australiano, a quem frequentemente se atribui o início dos estudos ligados à otimização estrutural. Para tanto, Michell (1904) publicou um trabalho em que deriva critérios de otimalidade para encontrar a geometria de estruturas treliçadas contendo a menor quantidade de material possível. Posteriormente Goetschel (1981) realizou uma correção na demonstração do teorema de Michell sem, entretanto, alterar sua conclusão.

Com o advento da computação nos anos 1970, a busca por estruturas ótimas em vários cenários de engenharia motivou uma mobilização de diferentes áreas de pesquisas que se ocupavam de aplicar teorias, desenvolver métodos numéricos, e modelos experimentais. A

teoria de Michell foi estendida para casos envolvendo placas e chapas (HEMP, 1973), além das estruturas compostas por barras (ROZVANY; ADIDAN, 1972). Rossow e Taylor (1973) são apontados como os autores que propuseram a ideia de inserir cavidades nas placas a fim de melhorar a resposta da estrutura. Era o início da otimização de forma generalizada. Note que inserir furos corresponde a alterar a classe topológica da peça, e portanto, pode-se dizer que se trata do nascimento da OT.

Posteriormente, os pesquisadores começaram a inserir o Método dos Elementos Finitos (MEF) para realizar a otimização. Descobriu-se que as estruturas ótimas possuíam regiões com material e sem material. Dois artigos publicados no fim dos anos 1980 são apontados como responsáveis por impulsionar a área de OT, ao ponto de alcançar a maturidade necessária para ser aplicada na indústria. O trabalho pioneiro, de autoria de Bendsøe e Kikuchi (1988), introduziu o método de homogeneização para realizar a distribuição ótima da mistura entre material e microvazios. O segundo trabalho publicado por Bendsøe (1989) apresentou a técnica chamada de SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), em que a densidade do material é considerada um fator fictício que pode ser alterado para atender aos critérios de otimalidade. Ambas as técnicas foram impactantes por permitir que a análise topológica progredisse sem a necessidade de realizar remalhamentos.

O método da homogeneização foi aplicado com sucesso em casos de múltiplos carregamentos (DIAZ; BENDSØE, 1992), problemas de vibração de estruturas (Diaz; KIKUCHI, 1992) e problemas contínuos tridimensionais (DIAZ; LIPTON 1997, 2000). O método SIMP ganhou popularidade após Sigmund (2001) contribuir com um artigo educacional, em que o autor disponibiliza um código de OT com apenas 99 linhas. Alguns softwares comerciais, como ANSYS, empregam o método SIMP.

A OT tradicional é dita determinística (OTD), pois não leva em consideração as incertezas das condições de carregamento, geometria ou propriedades materiais. Uma vez que as incertezas são inerentes aos processos de engenharia, o determinismo não garante que a função que mede o desempenho da estrutura seja atendida com certo grau de confiança.

Já a otimização do tipo RBTO (*Reliability based topology optimization*) considera a análise de confiabilidade integrada à topológica, uma vez que as restrições de probabilidade de falha são inseridas na formulação. Formulações envolvendo o MEF foram apresentadas por Kharmanda, Mohamed e Lemaire (2001, 2004), Kharmanda et al (2002), envolvendo o método SIMP. Posteriormente, Cho et al (2011), Yoo et al (2011) utilizaram análises de

confiabilidade acoplada com técnicas evolucionárias. Os estudos mostram que a topologia final pode ser alterada dependendo da probabilidade de falha requerida.

Com relação ao material, o processo de otimização clássico considera o material elástico, homogêneo e isotrópico. Algumas pesquisas chegaram a ser direcionadas a materiais viscoelásticos. Por exemplo, em estruturas sob solicitação dinâmica, é importante o uso de amortecedores para atenuar vibrações ressonantes. Normalmente utiliza-se mais material do que necessário, e conseqüentemente maior massa no sistema, o que é desvantajoso do ponto de vista de projeto. Yi, Park e Youn (2000) concluíram que a microestrutura treliçada conduz ao melhor efeito de amortecimento de materiais compósitos viscoelásticos, o que se assemelha às estruturas topologicamente otimizadas. Lee, Youn e Kim (2003) investigaram a topologia ótima que resultasse na menor vibração de isoladores confeccionados com borracha. Ling et al (2011) utilizaram o Método das Assíntotas Móveis para encontrar a topologia que conduzisse à máxima taxa de amortecimento modal em placas compostas. Não são frequentes trabalhos contemplando OT viscoelástica e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Em formulações mecânicas, os Modelos Analógicos construídos a partir de molas e amortecedores podem ser utilizados para representar o comportamento de materiais viscoelásticos. Os modelos precisam reproduzir apenas o comportamento macroscópico observado e não os mecanismos moleculares envolvidos. Esses modelos são frequentemente utilizados para aproximar o comportamento do concreto (MEHTA; MONTEIRO, 2014). No concreto, os efeitos dependentes do tempo são de fundamental importância, tanto para estruturas tradicionais, quanto para obras de arte, como reatores nucleares (STEFANOU, 1981), barragens (BHATTACHARJEE, 1996) ou ainda pontes (CARDONA et al, 2015).

Apesar disso, são escassos os trabalhos dedicados a investigar o acoplamento entre MEC, Otimização Topológica, Viscoelasticidade e Confiabilidade. Este fato justifica e motiva o desenvolvimento da presente tese. Serão propostas maneiras eficientes de acoplar algoritmos que representem vários fenômenos complexos, e que no final resulte em uma ferramenta para auxiliar o projetista estrutural.

### 1.3 Objetivos gerais

A presente tese visa contribuir com o conjunto de trabalhos que vêm sendo desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, na Universidade de São Paulo, que aplicam técnicas numéricas para a simulação de problemas de engenharia, análises de confiabilidade e otimização, em que ênfase especial é dada à compreensão sobre o mecanismo de ruptura dos sólidos.

O estudo dos efeitos dependentes do tempo receberá atenção nesta tese, com o intuito de prever comportamentos estruturais a longo prazo. Torna-se viável ter uma estimativa mais realista do comportamento de estruturas que ainda nem foram construídas. A intenção é identificar falhas ou mau funcionamento, ainda em fase de projeto, e assim modificá-lo caso necessário.

Adicionalmente este trabalho visa contribuir para a área de Otimização Topológica tendo o MEC como modelo numérico de aproximação. A ideia é verificar a estabilidade e a convergência do método ao ser acoplado com outros modelos numéricos. Por viabilizar projetos mais racionais sob o ponto de vista do consumo, esta disciplina tem especial importância no setor de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias.

Outro aspecto importante é a contribuição com o estudo, aplicação e divulgação da influência que as incertezas podem ter nos projetos estruturais. Mostra-se como as aleatoriedades inerentes ao processo de engenharia podem ser levadas em consideração para estimar o comportamento mecânico.

Ressalta-se o desenvolvimento de formulações do MEC em problemas de engenharia em que as informações são processadas na superfície do sólido. Em tais problemas, é vantajosa a aplicação do MEC devido às suas características intrínsecas.

Em última análise, ressalta-se o papel maior do trabalho de doutoramento, que é a formação de recursos humanos. Através de uma abordagem multidisciplinar que trata de vários pontos de interesse da engenharia, esta tese contribuirá para a formação do autor como agente de promoção e disseminação da pesquisa e da ciência.

## 1.4 Objetivos específicos

Por se tratar de um trabalho situado no campo de Mecânica Computacional, os objetivos específicos desta tese são a elaboração e implementação de algoritmos que:

- simulem o comportamento de estruturas compostas por materiais distintos. O algoritmo deve contemplar materiais viscoelásticos;
- estimem o comportamento de estruturas viscoelásticas que contenham fissuras iniciais;
- encontrem a topologia ótima de estruturas bidimensionais utilizando formulações de contorno de forma estável e robusta;
- determinem os efeitos provocados pela consideração das incertezas relacionadas à geometria.

Todos os algoritmos serão direcionados para o uso sistemático do MEC com o intuito de evidenciar sua versatilidade e aplicabilidade.

## 1.5 Estrutura do texto

Este texto trata de aspectos multidisciplinares de interesse para os problemas de engenharia. Cada capítulo apresenta os conceitos que são utilizados no próprio capítulo ou em capítulos posteriores.

O segundo capítulo apresenta a formulação clássica do MEC. Começa-se com uma breve revisão dos conceitos de Mecânica dos Sólidos e Teoria da Elasticidade Linear que servem de base para a construção do método numérico. O MEC é apresentado sob uma formulação fundamentada no teorema dos trabalhos recíprocos de Betti. Logo em seguida mostram-se alguns exemplos de aplicação às estruturas de interesse para os capítulos seguintes, evidenciando as diferenças com métodos de domínio.

O terceiro capítulo apresenta a Viscoelasticidade Linear como teoria para a previsão de comportamentos estruturais de longo prazo. Após uma apresentação dos conceitos chave que apoiam a teoria desenvolvida, o MEC é reformulado de modo a contemplar as análises

evolutivas no tempo. As hipóteses simplificadoras são igualmente explicitadas. Utilizando exemplos de verificação e resultados experimentais, os algoritmos desenvolvidos são testados quanto à convergência e à estabilidade. Em seguida ocorre a demonstração de como estruturas mais complexas podem ter seu comportamento estimado a partir do algoritmo apresentado.

Os efeitos das incertezas geométricas são inseridos no quarto capítulo. Este capítulo utiliza os conceitos apresentados no capítulo precedente e expande a formulação utilizando conceitos de Confiabilidade. Como resultado, consegue-se um algoritmo capaz de prever estatisticamente o comportamento futuro de estruturas concebidas com materiais viscoelásticos. Este estudo permite, em última análise, antecipar maus comportamentos ou falhas potenciais futuras. Com essa informação pode-se modificar os projetos iniciais a fim de obter melhorias de funcionamento e manutenção estrutural.

O quinto capítulo alterna o foco dos assuntos, e traz os conceitos de OT. Este capítulo é utilizado para mostrar a formulação do Método das Curvas de Nível. A partir deste, mostra-se como é possível elaborar um algoritmo capaz de encontrar estruturas ótimas bidimensionais. Utilizando o MEC e as derivadas de forma, consegue-se obter estruturas clássicas presentes na bibliografia, e com isso validar o algoritmo proposto.

O sexto capítulo é dedicado ao processo de escolha. Uma vez que estruturas otimizadas não são únicas, o projetista é chamado a fazer uma escolha. Este capítulo apresenta um critério que pode ser utilizado para fazer esta escolha. O critério leva em consideração as incertezas presentes na geometria da estrutura, e aponta qual seria mais robusta sob o ponto de vista mecânico. Por meio de exemplos de aplicação, apresenta-se uma ampla discussão abordando vários cenários possíveis.

Por fim, o sétimo capítulo traz uma compilação dos principais pontos abordados neste trabalho e suas aplicações. A partir deles, são sugeridas algumas alternativas de pesquisa que podem dar sequência às investigações iniciadas nesta tese.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ANÁLISE ESTRUTURAL

A Análise Estrutural propõe-se a aplicar conceitos da Mecânica para obter os campos de deslocamentos, deformações e tensões atuantes devido a um estado de carregamento específico. Os problemas de interesse da presente tese se limitam àqueles em que não existem forças de domínio. Sendo assim, as forças atuantes bem como as restrições ao deslocamento se dão exclusivamente na superfície do corpo. É legítimo então se perguntar: uma vez que ações e restrições a movimentos ocorrem somente na superfície, será possível obter os campos de interesse sem a necessidade de modelar o domínio da estrutura? A resposta para esta questão é sim, e a metodologia a ser utilizada é conhecida como Método dos Elementos de Contorno (MEC). O objetivo do presente capítulo é apresentar concisamente os aspectos teóricos envolvidos no MEC, e ao final apresentar aplicações em problemas de engenharia.

O MEC é um método numérico computacional para a solução de problemas de valor de contorno descritos por formulações integrais. Possui características intrínsecas que serão exploradas neste trabalho, como a redução da dimensionalidade da malha em uma vez e a possibilidade de obter de forma precisa campos que possuem elevados gradientes. Essas características têm feito com que o método se torne popular para o tratamento de problemas de domínio infinito ou semi-infinito, bem como problemas ligados a descontinuidades fortes, como os de fratura. Para aplicá-lo, é necessário o conhecimento prévio de uma solução particular do problema conhecido como solução fundamental. Os problemas de interesse do presente trabalho são aqueles tratados pela Teoria da Elasticidade Linear bidimensional, considerando o material homogêneo e isotrópico.

As formulações do MEC e suas soluções numéricas para problemas mecânicos surgiram por volta dos anos 1960. O problema potencial 2D foi primeiro formulado por Jaswon (1963) sendo que Rizzo (1967) o estendeu para o caso de problemas elásticos 2D. Seguido a esses esforços, um grande número de pesquisas têm sido feitas para o desenvolvimento de formulações do MEC, como mostrado em Brebbia (1978), Brebbia e Dominguez (1992) e Cheng e Cheng (2005). Com relação aos problemas envolvendo mecânica da fratura, o MEC é amplamente reconhecido na literatura como uma poderosa ferramenta numérica para o estudo deste domínio científico, em especial se o problema trata

da propagação de fissuras. Comparado a outros métodos numéricos, a redução da dimensionalidade da malha diminui fortemente os dados de entrada e também o trabalho de remalhamento durante a análise de crescimento das fissuras. Além disso, a não necessidade de malha de domínio, aliada ao uso de soluções singulares, permite a representação precisa da concentração de tensão existente na extremidade de fissuras. Na área de Mecânica do Contato, o MEC tem sido utilizado para resolver problemas estruturais que envolvam atrito e escorregamento, já que as interações ocorrem justamente ao longo das superfícies de interesse (MAN, 1994).

O próximo item apresenta uma revisão de parte da Teoria da Elasticidade de interesse para o presente trabalho. Para maiores informações sobre a formulação e aplicação, sugere-se consultar obras clássicas sobre o assunto como Timoshenko e Goodier (1980), Timoshenko (1953), Chou e Pagano (1992), Love (1944). Quanto à exposição das formulações, será utilizada a notação indicial juntamente com a convenção de soma de Einstein, devido à apresentação econômica das expressões bem como suas derivações.

## **2.1 Tópicos de Teoria da Elasticidade Linear e problemas de valor de contorno**

A Teoria da Elasticidade, similarmente a outras teorias de campo, envolve variáveis tensoriais de diferentes ordens (escalares, vetoriais, tensoriais de segunda ordem, por exemplo) que dependem das coordenadas espaciais utilizadas para formular o problema em estudo. Para problemas dependentes do tempo, essas variáveis também apresentam variação temporal.

O sólido sofre deformação quando a distância relativa entre seus pontos sofre alteração. Admitindo que não ocorram mudanças apreciáveis na configuração de referência pode-se ter uma medida da alteração das distâncias relativas entre pontos, utilizando variações de deslocamento. Movimentos de corpo rígido como rotação e translação não causam alteração de distâncias relativas. Portanto, somente a parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos contribui efetivamente para a deformação do sólido. Assim, define-se o tensor de deformações infinitesimais da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

No que se refere a problemas simplesmente conexos<sup>1</sup>, o campo de deformações deve atender às condições de compatibilidade para garantir a continuidade do campo de deslocamentos. Fisicamente, esta prerrogativa garante que o processo de deformação ocorra de maneira a não ocasionar descontinuidade do material. Tais condições são expressas pelas relações de compatibilidade de Saint-Venant, expressas indicialmente como:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.2)$$

Quando uma estrutura é solicitada por forças externas ocorre uma indução de forças internas no corpo que segue uma distribuição contínua. Deste modo, é conveniente ter uma maneira de descrever a forma com que as forças internas estão distribuídas a fim de conhecer a forma de transmissão de esforços ao longo da estrutura. Define-se o vetor tensão, que fisicamente, representa o resultado da interação entre dois planos justapostos.

$$t(x, n) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.3)$$

Na expressão acima,  $\Delta F$  representa a distribuição de forças num plano de área  $\Delta A$  caracterizado pelo vetor diretor  $n$ . Note que o vetor tensão depende além da coordenada espacial do ponto, do vetor que caracteriza o plano de interesse. Portanto, em um mesmo ponto existem infinitas possibilidades de vetor tensão, o que é inconveniente para a definição do modelo matemático, e demanda a definição de outra grandeza equivalente. Pode-se então definir o tensor de tensões,  $\sigma_{ij}$ , que representa as componentes do vetor de tensões segundo três planos particulares perpendiculares entre si. Uma vez conhecido o tensor de tensões (de fato um tensor de segunda ordem) é possível obter o vetor de tensões em qualquer plano de interesse por meio da relação de Cauchy:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (2.4)$$

O tensor de tensões é simétrico, devido à garantia de equilíbrio rotacional em um cubo elementar do material. Assim pode-se escrever  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ .

---

<sup>1</sup> Para sólidos multiplamente conexos, as condições de compatibilidade embora necessárias, não são suficientes para garantir a continuidade do campo de deslocamentos. Entretanto, é possível impor condições adicionais para garantir a continuidade. Uma técnica utilizada com frequência é realizar cortes no domínio transformando-o em simplesmente conexo.

Correntemente atribui-se as falhas nos materiais à ocorrência de valores elevados de tensão em determinados pontos do sólido. Isto leva ao interesse em se obter os valores máximos e mínimos de tensão que podem ocorrer em um ponto. Estas são as chamadas tensões principais, e as direções em que ocorrem são as direções principais. A Teoria da Elasticidade utiliza estes valores para estabelecer os chamados critérios de resistência que tem grande aplicabilidade nos problemas de engenharia.

Os sólidos de interesse do presente trabalho devem estar sob equilíbrio estático ou quase estático, o que implica considerar insignificantes as forças de inércia. Para atender a este requisito, sendo  $b_i$  o campo de forças volumétricas, o campo tensorial de tensões deve atender à seguinte equação diferencial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.5)$$

Os materiais de interesse do presente trabalho apresentam duas propriedades fundamentais. A primeira delas é a homogeneidade, isto é, as suas propriedades mecânicas não variam espacialmente. A segunda é a isotropia, que afirma que o material apresenta as mesmas propriedades mecânicas independentemente da orientação escolhida como referência.

Admitindo uma relação linear entre os tensores de deformações e de tensões, pode-se escrever a seguinte lei constitutiva:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.6)$$

O tensor de quarta ordem  $C_{ijkl}$  possui as propriedades de simetrias maior e menor, além de isotropia, o que permite reescrever a lei constitutiva da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.7)$$

O parâmetro  $\lambda$  é a constante de Lamé, enquanto  $G$  é módulo de elasticidade transversal. A expressão (2.7) é conhecida como Lei de Hooke generalizada para sólidos elásticos lineares isotrópicos.

As equações (2.1), (2.5) e (2.7) formam o conjunto fundamental de equações diferenciais de campo da Teoria da Elasticidade Linear. Esse conjunto possui número de incógnitas compatível com o número de equações. Deste modo para resolvê-las é necessário especificar as condições de contorno, que são particulares de cada problema.

Fisicamente, as condições de contorno representam a forma com que o sólido é suportado ou a forma com que ele é solicitado. Geralmente se prescreve deslocamentos ou forças de superfície em partes complementares do contorno do sólido gerando as condições de contorno mistas.

O conjunto formado pelas equações de equilíbrio, compatibilidade, constitutiva e as condições de contorno apropriadas é conhecido como problema de valor de contorno (PVC).

Em casos em que se conhecem as forças de superfície ao longo de todo o contorno, é interessante ter o PVC formulado em termos de tensões. Este procedimento simplifica em alguns aspectos a obtenção da solução. Utilizando a expressão de compatibilidade de deformações e constitutiva, eliminando as expressões de deslocamentos e deformações obtém-se as relações de compatibilidade em tensões, conhecidas como equações de compatibilidade de Michael-Beltrami:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} b_{k,k} - b_{i,j} - b_{j,i} \quad (2.8)$$

Estas equações, em consoante com as relações de equilíbrio, possibilitam a solução do problema formulado em tensões. Observe que o único parâmetro material nesta formulação é o coeficiente de Poisson.

O caso geral tridimensional conduz a seis equações diferenciais a serem resolvidas, uma tarefa complexa para casos gerais. Com respeito a problemas bidimensionais, normalmente faz-se uso das *funções de tensão* que satisfazem automaticamente as equações de equilíbrio. Ao submeter essas funções à equação de Michael-Beltrami, resulta numa equação diferencial única normalmente biarmônica que simplifica a solução do problema por possibilitar a aplicação de soluções clássicas de equações diferenciais.

Caso os deslocamentos ao longo de todo o contorno sejam impostos, a formulação reduzida em deslocamentos é mais apropriada para solução. Esta forma é obtida combinando as equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva, eliminando as tensões e as deformações, obtendo a equação de Navier:

$$G u_{i,kk} + (\lambda + G) u_{k,ki} + b_i = 0 \quad (2.9)$$

Soluções gerais destas equações diferenciais são de difícil obtenção. Entretanto algumas técnicas buscam simplificar estas equações para facilitar o processo de solução. Uma

delas é a obtenção do campo de deslocamentos por meio de uma *função potencial de deslocamentos*, algo semelhante às funções de tensão. Nesse caso, consegue-se obter uma forma desacoplada da função potencial, que admite técnicas clássicas de solução analíticas.

Classicamente, pode-se utilizar três métodos para resolver a equação (2.8) ou (2.9). O *método direto* consiste em integração direta das equações diferenciais envolvidas. O *método inverso* consiste em adotar uma solução, polinomial, por exemplo, e encontrar um problema que possa ser representado por ela. O *método semi-inverso* consiste em especificar parte da solução e encontrar a outra parcela por meio de integração direta.

Esses métodos frequentemente conduzem a soluções práticas somente quando se trata de problemas que possuam formas geométricas e condições de contorno simplificadas. Para superar esta limitação é possível obter soluções do PVC de forma aproximativa, utilizando os chamados métodos numéricos, que possuem a vantagem de tratar formas complexas de geometria e de carregamento.

Dentre os métodos numéricos mais populares estão os métodos de domínio, e os métodos de contorno. Os métodos de domínio baseiam-se na discretização do domínio de interesse em um conjunto finito de pontos denominados nós que fornecem respostas aproximadas para os campos do contínuo. Como exemplo cita-se o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Quanto aos métodos de contorno, busca-se obter respostas com elevado grau de precisão em um conjunto finito de pontos localizados no contorno do sólido de interesse. Como exemplo desta técnica, tem-se o Método dos Elementos de Contorno, que é utilizado na presente tese e será apresentado adiante.

## **2.2 Apresentação da formulação em termos de integrais de contorno**

A seguir, inicia-se uma breve descrição do Método dos Elementos de Contorno. Esta técnica numérica, nos últimos anos, tem se consolidado como uma alternativa para a solução de equações diferenciais parciais provenientes de várias áreas da Ciência. Entretanto, este texto apresenta apenas a formulação para a solução de problemas de valor de contorno resultantes da teoria da Elasticidade Linear. Mais detalhes, bem como inúmeros exemplos de aplicação podem ser consultados em livros-texto clássicos como Brebbia (1978), Brebbia e Dominguez (1992).

Admite-se que o sólido bidimensional de interesse seja representado por um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , possuindo contorno  $\partial\Omega = \Gamma$ . O contorno compreende tanto a interface exterior da estrutura, quanto as interfaces interiores da estrutura. Note que o contorno interno é importante para a caracterização de furos, que será de especial interesse para esta tese, conforme será exposto nos capítulos posteriores. Busca-se resolver as equações fundamentais de equilíbrio da Elasticidade Linear (2.5), respeitando as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u_i(x) = \bar{u}_i, & x \in \Gamma_u \\ t_i(x) = \sigma_{ij}(x)\eta_j(x) = \bar{t}_i, & x \in \Gamma_t \end{cases} \quad (2.10)$$

Sendo  $\bar{u}_i$  os deslocamentos conhecidos,  $\bar{t}_i$  as forças de superfície impostas e  $\eta_j$  o vetor normal externo ao contorno. Note que o contorno é admitido ser composto por duas partes complementares,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ . De fato, esta divisão é apenas simbólica servindo para diferenciar as condições a serem inicialmente impostas, uma vez que de fato, para cada ponto  $x \in \Gamma$  coexistem tanto forças, quanto deslocamentos.

A fim de obter a formulação clássica do MEC duas premissas devem ser seguidas. A primeira delas é dispor da formulação integral do problema, de preferência que envolva integrais de linha ou superfície. No caso dos problemas de elasticidade linear, a forma integral reúne as equações constitutivas, compatibilidade e equilíbrio em apenas uma expressão. A segunda é o conhecimento prévio da *solução fundamental*, ou de Green, que nada mais é que uma solução particular do operador diferencial que rege o problema.

A formulação integral dos problemas de elasticidade pode ser obtida de várias maneiras como: pelos teoremas variacionais, pelo princípio dos trabalhos virtuais, por meio do método dos resíduos ponderados (MRP), conforme descrito por Brebbia, Telles e Wrobel (1984) ou, a que será seguida, utilizando um teorema clássico da Mecânica, a saber, o teorema dos Trabalhos Recíprocos de Betti.

O teorema de Betti afirma que se um corpo linear elástico for submetido a dois sistemas de forças de superfície e de volume, então o trabalho realizado pelo primeiro sistema de forças  $\{t_i^{(1)}, b_i^{(1)}\}$  sobre os deslocamentos  $u_i^{(2)}$  do segundo sistema é igual ao trabalho realizado pelo segundo sistema de forças  $\{t_i^{(2)}, b_i^{(2)}\}$  sobre os deslocamentos  $u_i^{(1)}$  do primeiro, ou matematicamente;

$$\int_{\Gamma} t_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(1)} u_i^{(2)} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(2)} u_i^{(1)} d\Omega \quad (2.11)$$

Este teorema pode levar a resultados importantes se os dois sistemas forem selecionados de maneira especial, como por exemplo, conduzir à formulação integral do PVC.

Seja o primeiro sistema a solução procurada para um problema particular  $\{t_i, b_i, u_i\}$ . O segundo sistema é escolhido como a solução fundamental para as equações da Elasticidade, que corresponde ao campo de deslocamentos em um ponto  $x$  devido a uma força pontual  $e_j$  aplicada no ponto  $y$ , no interior de um sólido de dimensões infinitas. Usando esse conceito, o deslocamento pode ser expresso por:

$$u_i^{(2)}(x) = u_{ij}^*(x, y) e_j(y)$$

Em que  $u_{ij}^*$  representa a função de Green para as equações da Elasticidade. Esta função foi desenvolvida para domínios 2D e 3D. A este campo vetorial, frequentemente atribui-se o nome de solução de Kelvin. Para o estado plano de deformações, a solução fundamental é:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.12)$$

em que  $r_i = x_i - y_i$  e  $r = \sqrt{r_i r_i}$ .

As tensões e as forças de superfície associadas a esta solução fundamental derivam das equações (2.1), (2.4) e (2.7).

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x) = T_{ijk}(x, y) e_k(y)$$

$$t_i^{(2)}(x) = T_{ijk}(x, y) \eta_j e_k(y)$$

$$T_{ijk}(x, y) = \lambda u_{ik,l}^* \delta_{ij} + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Utilizando estes resultados no teorema de Betti, encontra-se a seguinte expressão:

$$u_j(y) = \int_{\Gamma} [t_i(x)u_{ij}^*(x,y) - u_i T_{ikj}(x,y)\eta_k] d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{ij}^*(x,y) d\Omega \quad (2.13)$$

A relação (2.13), válida para pontos interiores do domínio, representa uma formulação integral equivalente do PVC de Elasticidade Linear, sendo conhecida como identidade de Somigliana. Na ausência de forças de volume, a equação (2.13) fica escrita em função apenas de termos de contorno, sem a necessidade de conhecimento de informações de domínio. Portanto o PVC pode ser resolvido utilizando exclusivamente informações do que é imposto na superfície do sólido, evidenciando a tão citada característica do MEC com relação à diminuição de uma dimensão espacial para realização das análises. Esta expressão é utilizada para desenvolver a técnica numérica do MEC.

Pode-se definir  $p_{ij}^*(x,y) = T_{ijk}(x,y)\eta_j(x)$ ;

$$p_{ij}^*(x,y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (2.14)$$

O ponto  $x$  é conhecido como ponto campo. O ponto de aplicação da força concentrada (ponto  $y$ ) é conhecido como ponto de colocação, ou ponto fonte. Nota-se que quando  $y$  se aproxima do contorno os núcleos fundamentais se tornam singulares. Deste modo, um estudo limite deve ser conduzido para avaliar a natureza da singularidade e assim tratá-las caso a caso analiticamente. Após este estudo, obtém-se a equação (2.15) válida exclusivamente para pontos do contorno.

$$\begin{aligned} c_{ij}(y)u_j(y) + \oint_{\Gamma} p_{ij}^*(x,y)u_j(x)d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x,y)t_j(x)d\Gamma(x) \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(x,y)b_j(x)d\Omega \end{aligned} \quad (2.15)$$

O traço na integral indica que a integral deve ser avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy. O termo  $c_{ij}$  surge devido à singularidade forte do núcleo  $p_{ij}^*$ , e vale:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & y \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & y \in \Gamma \text{ suave} \\ 0, & y \text{ fora do domínio} \end{cases}$$

O campo de tensões em pontos internos ao domínio pode ser obtido a partir da equação (2.15) utilizando as expressões fundamentais da Elasticidade Linear, resultando em:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (2.16)$$

em que os núcleos  $S$  e  $D$  são expressos por:

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \right. \\ \left. - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \\ \left. + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

A expressão (2.16) pode ser utilizada para análises não lineares de problemas de propagação de fissuras conforme pode ser visto em Oliveira e Leonel (2013).

Note que a relação (2.15) fornece o campo de deslocamentos procurado de forma analítica. Entretanto, para obtê-lo é preciso impor as condições de contorno de forma contínua ao longo de todo o contorno, o que pode não ser possível em problemas gerais. Além disso, não se conhecem a priori todos os deslocamentos e todas as forças de superfície. Portanto, o MEC propõe uma maneira aproximada de impor estas condições de contorno atendendo à equação integral de forma aproximada. Isto permite que a equação (2.15) seja utilizada para encontrar os deslocamentos e as forças incógnitas em um conjunto finito de pontos e assim obter a solução do problema. Ressalta-se que uma vez que o termo de domínio é conhecido, sua correspondente integral é corriqueiramente suprimida.

Além da redução da dimensionalidade do problema, o MEC possui outras características que podem ser convenientemente exploradas. Por exemplo, tanto a equação (2.15) quanto (2.16) são contínuas no domínio do sólido. Deste modo, é possível obter variações suaves dos campos internos de forma automática. O MEC possui a solução fundamental com singularidade discreta. Esse fato, aliado à ausência de aproximações de domínio, permite obter campos de tensão com elevados gradientes com maior acurácia,

tornando-o vantajoso em análises numéricas envolvendo Mecânica da Fratura. Outro aspecto de interesse, muito utilizado inclusive em acoplamentos com outros métodos numéricos, é o atendimento às condições de contorno no infinito, o que evita a necessidade de discretização de contornos remotos. Como o MEC utiliza apenas informações do contorno, ele se mostra atrativo para tratar problemas de OT.

### 2.3 Aspectos computacionais do MEC

A fim de possibilitar implementações computacionais, é preciso que se disponha de uma formulação algébrica. Para tanto, o contorno pode ser considerado, de forma aproximada, como um conjunto de elementos de extensão finita. Existe a possibilidade de utilizar elementos contínuos ou descontínuos. Os elementos descontínuos são mais indicados em locais que exista descontinuidade de vetor normal, ou de forças de superfície, como em cantos por exemplo. Sendo  $N_e$  o número de elementos, pode-se escrever:

$$\Gamma = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Gamma_e$$

A geometria de cada elemento pode ser parametrizada em termos de coordenadas locais adimensionais  $\xi^e \in [-1,1]$ . É frequente o uso de polinômios de Lagrange para a parametrização, embora seja conhecido que o aumento demasiado da ordem do polinômio possa conduzir a oscilações de resultados nas extremidades dos intervalos (fenômeno de Runge). Assim, escolhe-se um conjunto de  $k$  pontos sobre o contorno local, chamados nós, normalmente com distribuição uniforme, em relação ao qual a parametrização é conduzida:

$$x_i(\xi^e) = \phi_k(\xi^e) x_i^k$$

em que  $x_i^k$  representa o conjunto de coordenadas nodais.  $\phi_k$  é o conjunto de funções de forma fornecidas por polinômios de Lagrange de grau  $k - 1$ , tal que:

$$\phi_k(\xi^e) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^k \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i}$$

A presente tese faz uso de elementos de contorno *isoparamétricos*. Isto significa dizer que o mesmo conjunto de funções de forma utilizado para aproximar a geometria, é utilizado para aproximar as variáveis de contorno:

$$u_i(\xi^e) = \phi_k(\xi^e)u_i^k$$

$$t_i(\xi^e) = \phi_k(\xi^e)t_i^k$$

sendo  $u_i^k$  o conjunto de deslocamentos nodais, e  $t_i^k$  o conjunto de forças de superfície nodais.

Essas adoções permitem reescrever a equação (2.15), suprimindo o termo de forças de volume, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} c_{ij}(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 p_{ij}^*(y, x(\xi^e)) \phi_l(\xi^e) J(\xi^e) d\xi^e \right] u_j^{el} \\ = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m \left[ \int_{-1}^1 u_{ij}^*(y, x(\xi^e)) \phi_l(\xi^e) J(\xi^e) d\xi^e \right] t_j^{el} \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que  $l$  é o número de nós que varia de 1 até  $m = 2, 3, \dots$  para elementos lineares, quadráticos, ou ordem superior, enquanto que  $y$  é o local do ponto fonte.  $u_j^{el}$  e  $t_j^{el}$  são respectivamente, deslocamentos e forças de superfícies do nó local  $l$  sobre o elemento  $e$ . Note que existe uma transformação entre o espaço euclidiano e o espaço adimensional padrão que permite o uso de quadraturas de integração, sendo o Jacobiano fornecido por:

$$J(\xi^e) = \frac{d\Gamma^e}{d\xi^e} = \sqrt{\left(\frac{dx_1^e}{d\xi^e}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^e}{d\xi^e}\right)^2}$$

Para calcular as integrais presentes em (2.19) é necessário avaliá-las segundo o Valor Principal de Cauchy. Uma técnica popular entre os praticantes do MEC, válida para um número finito de singularidades, e que foi implementada neste trabalho, é o método de subtração de singularidade (MSS). Esta técnica consiste em subtrair termos de mesma ordem de singularidade no núcleo integral, de forma a regularizá-lo. Ao fazer isto, um termo singular é extraído da integral e avaliado analiticamente. Essa técnica possui a vantagem de poder ser aplicada para elementos de ordem superior. Assim é possível utilizar a quadratura padrão de Gauss para o cálculo numérico das integrais. Detalhes específicos podem ser consultados em Aliabadi (2002).

Fazendo  $y$  corresponder a um dos nós do elemento, a equação (2.19) fornece:

$$c_{ij}(y)u_j(y) + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m h^{el} u_j^{el} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{l=1}^m g^{el} t_j^{el} \quad (2.20)$$

em que  $h^{el}$  e  $g^{el}$  representam as integrais já avaliadas.

Aplicando a equação (2.20) a todos os nós do contorno, obtém-se um conjunto de equações que podem ser reunidas na forma de uma equação matricial:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (2.21)$$

Para resolver o problema algébrico, é preciso impor as condições de contorno. Lembre-se que em cada nó se conhece a priori ou o deslocamento ou a força de superfície em cada uma das direções. Deste modo, para especificar as condições de contorno, é necessário reposicionar todos os valores conhecidos do lado direito da equação (2.21), resultando num sistema linear  $[A]\{X\} = \{f\}$ . A matriz  $[A]$  é cheia e não simétrica. Uma vez resolvido o sistema, encontra-se a matriz coluna  $\{X\}$  que possui os valores incógnitos do problema.

O MEC não fornece informações sobre os campos internos na etapa de processamento. Entretanto, os deslocamentos podem ser obtidos utilizando a equação (2.19), uma vez que já se conhecem os valores de contorno, tomando o cuidado de fazer  $c_{ij} = \delta_{ij}$ . Caso o valor do campo de tensões seja necessário, a equação (2.16) é utilizada.

A implementação das formulações presentes nesse capítulo foi realizada seguindo o paradigma de Orientação a Objetos. Trata-se de uma metodologia de Engenharia de Software adequada para programas computacionais que preserva modularidade e extensibilidade. A estrutura computacional de dados criada ao longo do presente trabalho está descrita no Apêndice A. Esta estrutura permite a direta ampliação e incorporação de novos algoritmos, fato essencial para a continuação da presente pesquisa.

## 2.4 Formulação hipersingular

A relação (2.15) é utilizada para a formulação direta do MEC em problemas de Elasticidade. Entretanto é possível substituir essa equação na expressão da lei constitutiva

(2.7) e em seguida obter as forças de superfície atuando em um ponto interno qualquer por meio da relação de Cauchy:

$$\frac{1}{2}t_i = \eta_j \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \eta_j \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \eta_j \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (2.22)$$

em que os núcleos S e D são os mesmos das equações (2.17) e (2.18).

A equação (2.22) possui singularidades de ordem  $(1/r)$  e  $(1/r^2)$ , e por isto é conhecida como forma hipersingular. Esta equação pode ser considerada como uma segunda equação integral válida para contornos suaves. É importante lembrar que as integrais envolvidas devem ser avaliadas no sentido de valor principal de Cauchy e parte finita de Hadamard. Nesta tese, a fim de utilizar a quadratura de Gauss, emprega-se o MSS para regularizar os núcleos integrais.

A equação hipersingular é normalmente utilizada para simular problemas envolvendo fissuras. Nesse caso utiliza-se a formulação clássica para discretizar uma face da fissura e a hipersingular para a outra face. É o que se chama de formulação mista ou dual. Guimaraes e Telles (1994) apontam a importância da formulação mista. Primeiramente, em uma fissura, naturalmente ocorrem dois pontos fonte situados no mesmo lugar geométrico, o que corresponde a duas linhas iguais nas matrizes H e G tornando o sistema linear singular. Ao utilizar uma formulação para cada ponto fonte, esse problema é contornado. Sob um ponto de vista mais profundo, os autores demonstram formalmente a complementariedade das formulações. Isto significa que mesmo que se utilizassem soluções fundamentais distintas, ambas em deslocamentos, por exemplo, ainda que se elimine a singularidade do sistema linear, não seria possível modelar corretamente o problema de fratura. O uso de elementos especiais, como o *quarter point*, pode ser adotado para capturar com maior fidelidade o campo de tensões próximo à ponta da fissura.

A formulação do MEC mais utilizada para a análise de problemas de fratura aleatória é a conhecida *Dual Boundary Element Method* (DBEM) (PORTELA; ALIABADI; ROOKE, 1992). Esses autores desenvolveram um modelo para fratura elástico linear, onde para cada ponto da fissura escreviam-se quatro equações algébricas, duas obtidas da representação integral dos deslocamentos e duas da representação integral das forças de superfície. O contorno da fissura é descrito por elementos duplos definidos em direções opostas que permitem impor deslocamentos e forças de superfície distintas em cada uma das faces. É

importante salientar que a utilização de equações integrais de deslocamento e de sua derivada já aparece em trabalhos anteriores como o de Watson (1986, 1988) e de Hong e Chen (1988) para problemas 2D e posteriormente no trabalho de Gray, Martha e Ingrafea (1990) para problemas 3D. Destacam-se ainda os seguintes trabalhos referentes ao DBEM: Portela (1992), Portela, Aliabadi e Rooke (1993), Mi e Aliabadi (1992a, 1992b, 1994a, 1994b, 1995), Mi (1996), Mellings e Aliabadi (1994), Sollero e Aliabadi (1994) e Saleh (1997), Chen et al (1999). Formulações do MEC, usando DBEM, para análises de coalescência e localização são apresentadas em Leonel e Venturini (2010a, 2010b, 2011) considerando problemas de fratura linear, não linear e fadiga.

Uma formulação alternativa para a análise do processo de fratura não linear é a que emprega um campo de tensões iniciais para a correção das tensões coesivas nas faces das fissuras. Neste modelo, a espessura da zona de processo é degenerada para zero. Conseqüentemente, o termo de domínio da formulação clássica do MEC é avaliado somente ao longo do caminho de crescimento das fissuras, simulando assim o comportamento não linear da zona de processo. Mais detalhes são encontrados em Oliveira e Leonel (2013). Formulações similares que empregam a manipulação do termo de domínio do MEC podem ser encontradas em Lopes e Venturini (1997), Jiang e Venturini (1998), Jiang, Hung e Venturini (1999) e Jiang e Venturini (2000).

## **2.5 Aplicações**

A seguir, dois exemplos ilustram a aplicação do MEC na solução de problemas de Teoria da Elasticidade Linear. O primeiro deles é um problema clássico possuindo resposta analítica. O segundo não possui solução analítica conhecida, e por isto, será realizada a comparação com um método numérico de domínio. Todas as malhas de contorno foram definidas a partir de um estudo de convergência por meio de refinamentos sucessivos. A intenção é definir o número mínimo de graus de liberdade adequado para as análises numéricas. Os exemplos foram realizados em um microcomputador com configuração: processador Intel Core i7 de 3,4GHz, RAM 16G.

### 2.5.1 Cilindro pressurizado

Os cilindros pressurizados possuem vasta aplicação na engenharia como, por exemplo, confecção de compartimentos de armazenamento de gás, atuadores hidráulicos e dutos para condução de fluidos. Aqui, um cilindro de parede espessa pressurizado internamente foi escolhido. Como esse cilindro possui simetrias de geometria e carregamento, pode-se utilizar apenas um quadrante para a análise. Os detalhes do material considerado e carregamento são ilustrados pela Figura 2.1. O estado plano simulado é o plano de deformação.

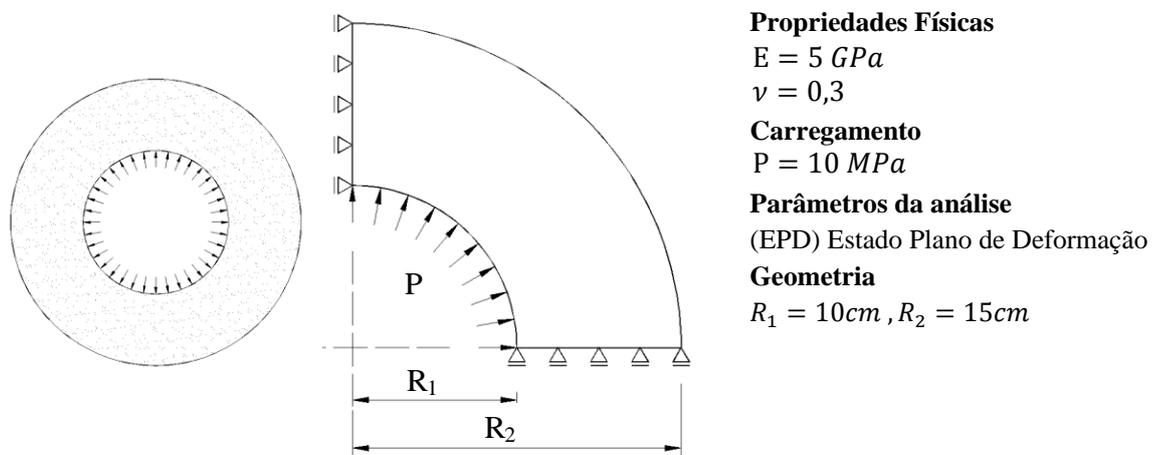


Figura 2.1 Dados do primeiro exemplo

A malha proposta, composta por 14 elementos quadráticos, é mostrada Figura 2.2. Note-se que os pontos de mudança de condição de força de superfície possuem elementos descontínuos conforme sugerido por Brebbia e Dominguez (1992).

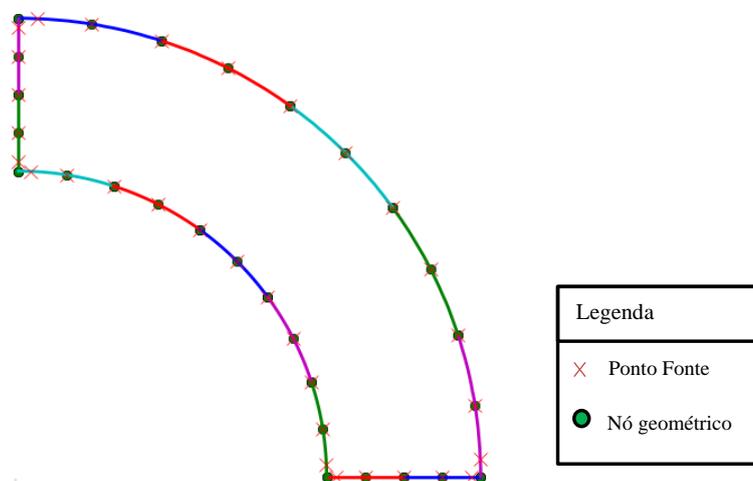


Figura 2.2 Detalhes da malha de contorno

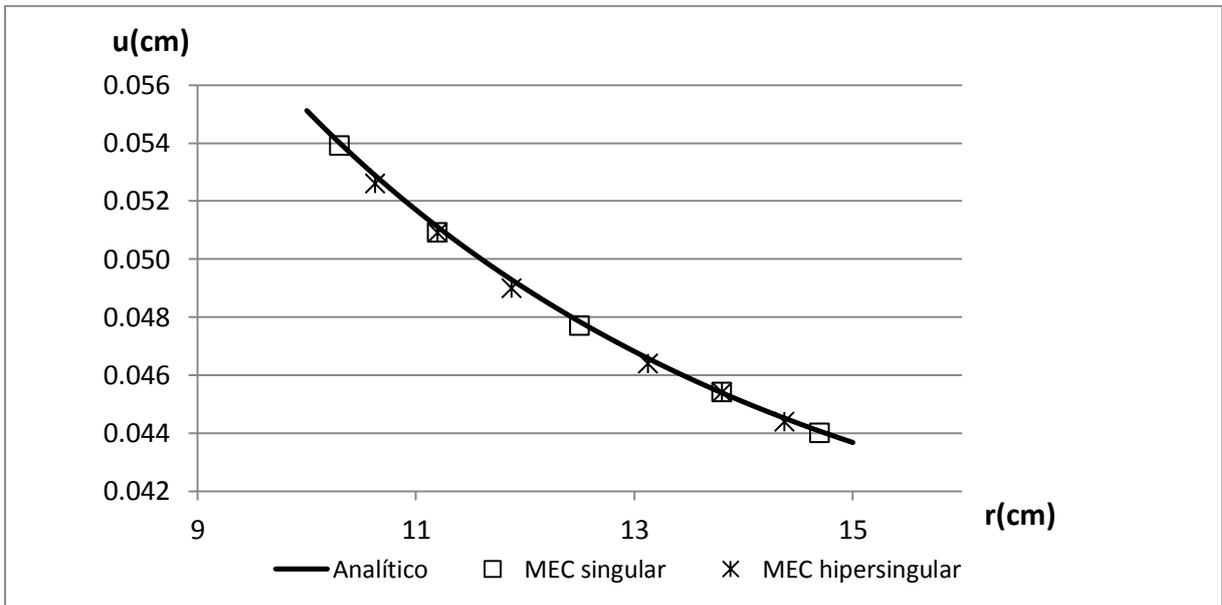


Figura 2.3 Comparação entre resultados numéricos e analíticos, para deslocamentos radiais

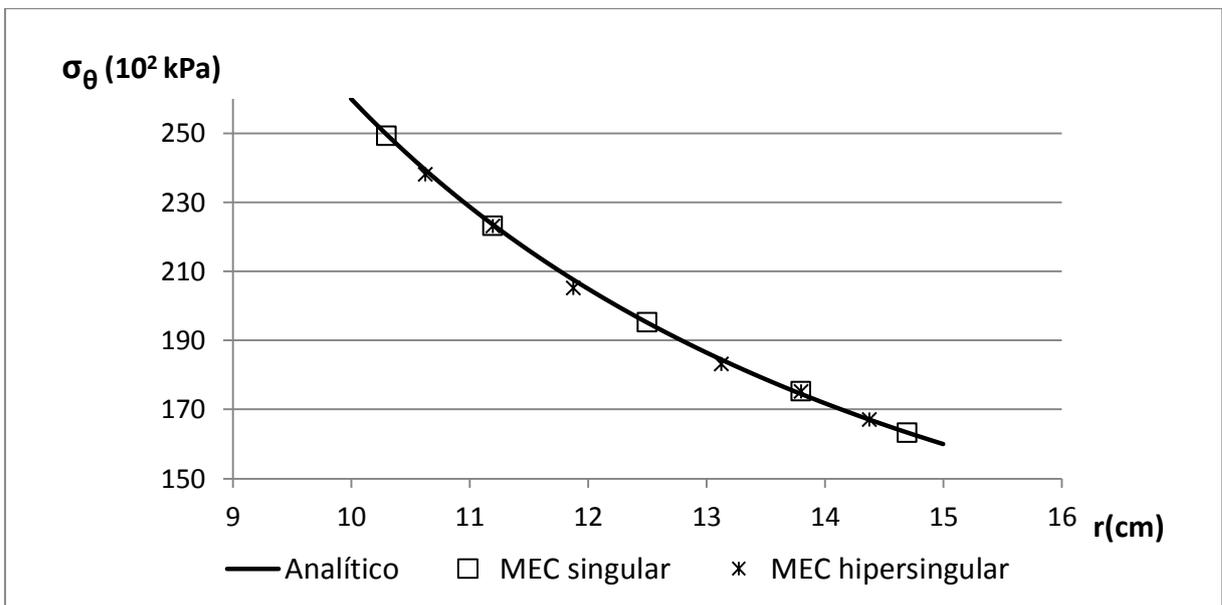


Figura 2.4 Comparação entre resultados numéricos e analíticos, para tensões tangenciais

As expressões analíticas para o cálculo dos deslocamentos na direção radial, e tensões tangenciais do cilindro de parede espessa, considerando o estado plano de deformação, são dadas por:

$$u(r) = \frac{P(1 + \nu)}{E} \left[ \frac{(1 - 2\nu)R_1^2 r^2 + R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)r} \right] \quad (2.23)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{PR_1^2}{(R_2^2 - R_1^2)} \left[ \frac{R_2^2}{r^2} + 1 \right] \quad (2.24)$$

Após realizar a análise por meio do MEC é possível comparar os resultados conforme ilustrados pela Figura 2.3 e Figura 2.4. Os gráficos deixam evidentes a acurácia alcançada pela formulação do MEC tanto em termos de deslocamentos, quanto em termos de tensões tangenciais. São utilizadas tanto a formulação Singular quanto a formulação Hipersingular.

## 2.5.2 Chapa tracionada

A presente aplicação evidencia a versatilidade da ferramenta numérica ao analisar uma estrutura com condições geométricas e de carregamentos mais complexas. Trata-se de uma chapa com dois furos circulares com diâmetros distintos. A peça é tracionada em uma das faces e engastada em outra. Os parâmetros geométricos, materiais e vinculações são ilustrados pela Figura 2.5. Embora a peça seja simétrica, optou-se por simular o comportamento da peça inteira.

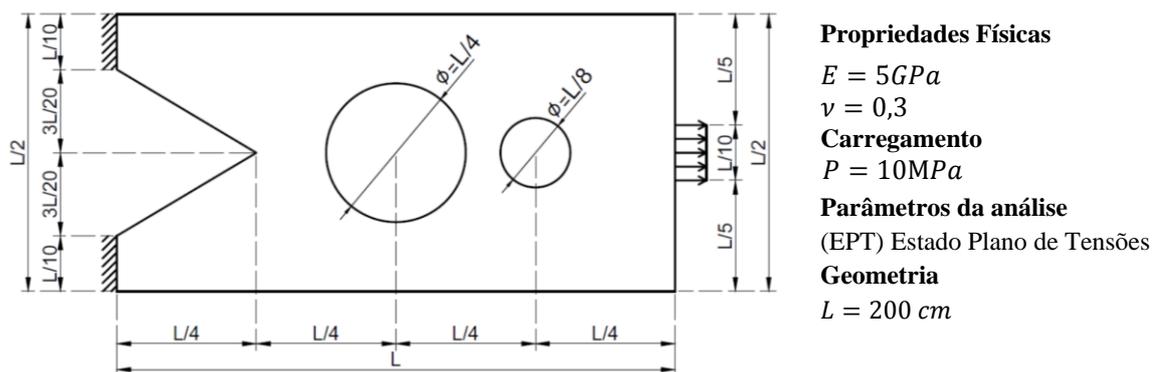


Figura 2.5 Dados do segundo exemplo

Uma vez que não se dispõe de resposta analítica para o presente problema, serão utilizados os resultados fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) como referência. A chapa foi simulada utilizando o software ANSYS e elementos finitos planos do tipo PLANE182. A Figura 2.6 mostra a malha de domínio utilizada. A malha de Elementos de

Contorno pode ser definida conforme ilustrado pela Figura 2.7, tomando o cuidado de adotar elementos descontínuos em pontos de descontinuidade de forças de superfície. Neste exemplo, optou-se por 30 elementos de ordem quadrática.

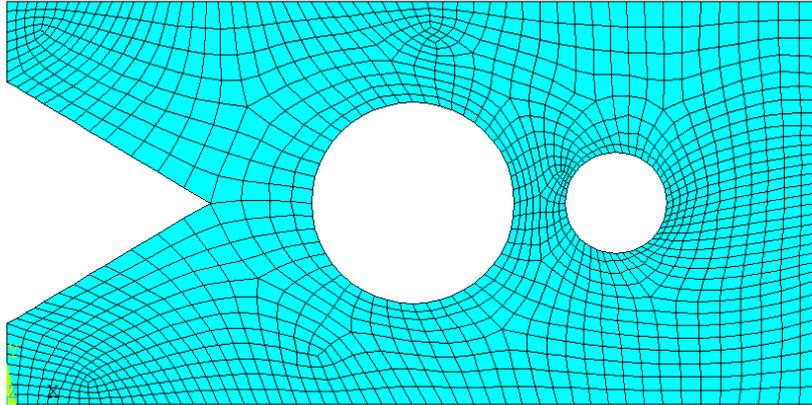


Figura 2.6 Malha de Elementos Finitos gerada pelo ANSYS para o segundo exemplo

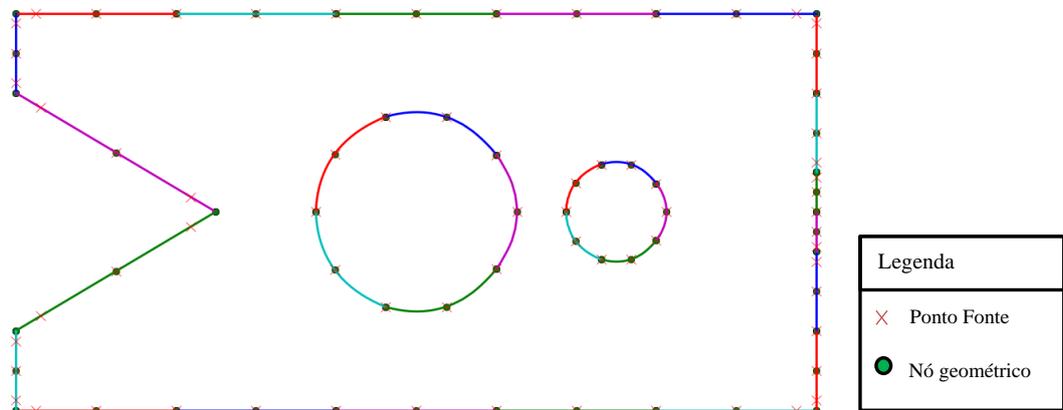


Figura 2.7 Malha de Elementos de Contorno Singulares para o segundo exemplo

A comparação entre essas duas malhas ilustra a diferença entre os métodos numéricos de domínio e de contorno. No caso do MEC, as aproximações numéricas se situam essencialmente no contorno do corpo em análise, enquanto que no MEF as aproximações são realizadas no domínio. A depender da aplicação, como por exemplo, os problemas de interesse desta tese, em que o domínio precise ser constantemente redefinido, o MEC se torna vantajoso por minimizar o trabalho computacional com o remalhamento.

A Figura 2.8 mostra a comparação entre os resultados apresentados pelos dois métodos numéricos, considerando a componente  $x$  do campo de deslocamentos ao longo da

face vertical direita. É possível notar que os resultados apresentados pelo MEC estão em concordância com aqueles do MEF.

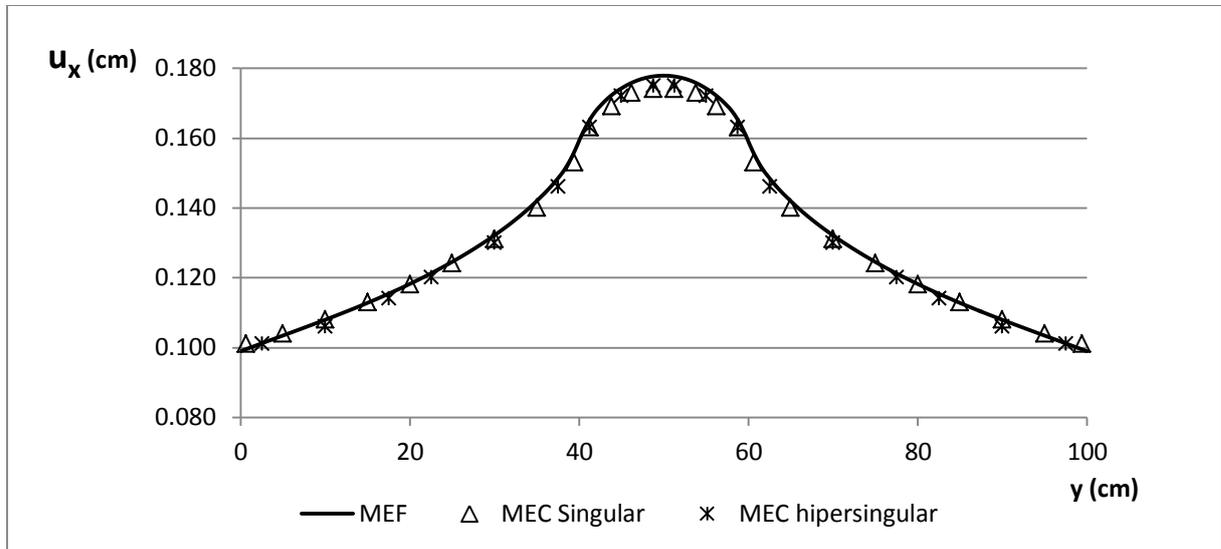


Figura 2.8 Comparação entre os deslocamentos apresentados pelo MEF e MEC ao longo da face vertical direita da peça.

Esses dois exemplos de aplicação se prestam a dois propósitos. O primeiro deles é aplicar a formulação desenvolvida ao longo deste capítulo a fim de resolver problemas de interesse de engenharia. O segundo é mostrar que o MEC preserva a versatilidade dos métodos numéricos da Mecânica Computacional, mostrando acurácia na obtenção dos campos de deslocamentos e forças de superfície incógnitos. Ambas as formulações, singular e hipersingular, mostram suas potencialidades. Esta característica será explorada ao longo dos capítulos posteriores.

### 3 MODELAGEM DE ESTRUTURAS CONSIDERANDO A PRESENÇA DE FISSURAS E OS EFEITOS DEPENDENTES DO TEMPO EMPREGANDO O MEC

Em sistemas estruturais, a durabilidade do material constituinte é uma preocupação crucial. Dois fenômenos manifestados pelo material afetam diretamente a durabilidade estrutural. O primeiro deles, a *fluência*, se caracteriza pelo aumento de deformações ao longo do tempo, mesmo quando não ocorre variação no campo de tensões. No segundo, a *relaxação* se manifesta pelo alívio de tensões mesmo que sem redução de deformações. Ao se remover a solitação, o material recupera completamente seu estado inicial, embora não instantaneamente. Materiais com estas características são chamados *viscoelásticos*.

Outra questão igualmente importante é a presença e a estabilidade das fissuras inerentes ao material. Solitações rápidas, que gerem deformações acima do limite de elasticidade do material, geram um aumento no comprimento das fissuras presentes na matriz. O efeito macroscópico é observado em forma de fluência. A mútua coalescência das fissuras ora presentes ora recém-formadas pode levar ao colapso estrutural. Materiais quase-frágeis apresentam este comportamento.

O MEC é reconhecidamente eficiente na modelagem estrutural envolvendo a presença e a propagação de fissuras. Sendo assim, o objetivo do presente capítulo é responder à seguinte questão: será possível modelar o comportamento estrutural a longo prazo, levando em conta os efeitos dependentes do tempo, e a presença de descontinuidades no domínio utilizando o MEC? A resposta é positiva, e de fato, a ferramenta numérica desenvolvida pode ser empregada para a investigação envolvendo durabilidade e a manutenção estrutural.

A investigação teórica em viscoelasticidade normalmente envolve duas categorias: uma delas trata do desenvolvimento das equações constitutivas consistentes com as observações físicas, a outra corresponde à aplicação destas formulações aos problemas de valor de contorno. O presente trabalho se encontra dedicado à segunda categoria.

### 3.1 Revisão Bibliográfica

A análise estrutural de sólidos compostos por materiais viscoelásticos tem grande importância em engenharia. Muitos materiais utilizados estruturalmente como polímeros, compósitos e concreto, por exemplo, exibem respostas que variam com o tempo. Devido aos efeitos dependentes do tempo, esses materiais sofrem fluência, relaxação e histerese (ZHU et al, 2011, ZHU; CHEN; YANG, 2013).

Os estudos dos efeitos dependentes do tempo encontram aplicações importantes no ramo da protensão de estruturas de concreto, por exemplo. Por meio desta teoria é possível avaliar as perdas de forças compressivas impressas pelos cabos, bem como as variações das reações dos apoios.

Devido à complexidade envolvida na modelagem deste problema estrutural, soluções analíticas estão disponíveis apenas para alguns casos com geometrias e condições de contorno simplificadas. Portanto, a fim de modelar estruturas de engenharia mais realistas, incluindo geometrias complexas e condições de contorno, são necessárias técnicas numéricas.

Entre os métodos numéricos utilizados para modelar problemas viscoelásticos, o MEC tem sido reconhecido como uma opção robusta e precisa. A redução da dimensionalidade da malha, característica do MEC, somado à sua capacidade inerente para representar campos com elevados gradientes, permitem que este método numérico seja usado para tratar problemas viscoelásticos, especialmente no domínio da mecânica da fratura. As formulações tradicionais aplicam o MEC e o princípio de correspondência elástica-viscoelástica por meio da transformada de Laplace (LIU; ANTES, 1997, RIZZO; SHIPPY, 1971, LEE; WESTMANN, 1995, HUANG; MOGILEVSKAYA; CROUCH, 2006a, 2006b). Essa abordagem leva a uma relação de convolução entre os tensores de tensão e deformação.

Os sólidos submetidos a efeitos viscosos foram estudados por Syngellakis e Wu (2004, 2008), em que uma formulação foi apresentada assumindo comportamento mecânico quase-estático e dinâmico. Problemas de fratura em polímeros foram estudados com solução fundamental obtida a partir do princípio da correspondência. Ashafi e Farid (2009) apresentaram uma formulação integral aplicando a solução fundamental de Kelvin, em que as constantes do material são expressas como funções dependentes do tempo. Neste trabalho, os polímeros foram analisados utilizando uma equação constitutiva diferencial de um sólido

viscoelástico linear padrão. Embora integrais de domínio apareçam na sua formulação devido aos efeitos viscosos, apenas o contorno do problema é discretizado.

Formulações dependentes do tempo são apresentadas por Cezario, Santiago e Oliveira (2011) utilizando o princípio da reciprocidade viscoelástica, definida em termos de funções integrais de Stieltjes e materiais simulados pelo modelo de Boltzmann. A análise dinâmica em corpos viscoelásticos foi apresentada por Perez-Gavilan e Aliabadi (2001) onde o problema estrutural foi representado usando o MEC simétrico de Galerkin para o domínio da frequência.

Um procedimento numérico alternativo é utilizado por Mesquita e Coda (2001, 2002, 2003) para a análise viscoelástica utilizando o MEC. Nestes trabalhos, as formulações numéricas, considerando os modelos de Boltzmann e Kelvin, são desenvolvidas com base no método dos resíduos ponderados. Um sistema de equações diferenciais com relação ao tempo, é obtido, o qual é resolvido por um processo de integração temporal apropriada. Devido à sua simplicidade e precisão, esta abordagem foi adotada na presente tese.

Apesar de existirem estudos teóricos e experimentais sobre o comportamento de fratura viscoelástica, aplicações numéricas nesta área são relativamente limitadas (SYNGELLAKIS, 2002). Sladek, Sumec e Sladek (1984) propuseram uma solução numérica, considerando transformadas de Laplace, a fim de prever a abertura da fissura em um material viscoelástico representado pelo modelo de Kelvin. O método de descontinuidade de deslocamentos foi utilizado por Wang e Birgisson (2007), a fim de se obter uma formulação integral aplicável ao estudo do comportamento mecânico quase-estático de asfalto. A taxa de liberação de energia de deformação foi estudada por Lee e Kim (1995), que derivou uma expressão do funcional relacionado com a energia potencial e aplicou a formulação direta do MEC.

Conforme apresentado anteriormente, alguns trabalhos na literatura relatam a análise do comportamento viscoelástico linear usando MEC. Neste sentido, a presente tese contribui com este campo de engenharia de estruturas, por meio do acoplamento dos modelos de Boltzmann, Maxwell, Kelvin-Voigt e equações algébricas do MEC, a fim de analisar fratura em materiais viscoelásticos. A abordagem numérica é baseada na integração de tempo explícita apresentada em Mesquita e Coda (2001, 2002, 2003), no qual é aplicado o método de Euler para aproximar a derivada de tempo. Para representar o comportamento estrutural ao longo do tempo de sólidos fraturados, a formulação do MEC dual é adotada (PORTELA;

ALIABADI; ROOKE, 1992, LEONEL; VENTURINI, 2010a, LEONEL; BECK; VENTURINI, 2011).

A seguir, apresentam-se alguns tópicos essenciais que fundamentam o desenvolvimento do presente trabalho. Para uma abordagem mais ampla sobre o assunto, o leitor é convidado a consultar as clássicas obras de Christensen (1982), Lemaitre e Chaboche (1990), Rabotnov (1980), Ferry (1970), Tschoegl (1989) e Williams (1964).

### 3.2 Domínio de validade e uso

As formulações apresentadas a seguir admitem as seguintes considerações:

- ✓ Transformações isotérmicas: isto significa que a dissipação de energia se dá exclusivamente por mecanismos internos do material sem ocorrência de gradientes térmicos.
- ✓ Comportamento quase estático: embora os deslocamentos sofridos pelos sólidos possam variar com o tempo, esta variação é realizada de modo a não mobilizar forças de inércia.
- ✓ O material é homogêneo: mesmas propriedades mecânicas em todos os pontos do meio.
- ✓ O material é isotrópico: possui as mesmas respostas em termos de tensão e deformação independente das direções adotadas em determinado ponto.
- ✓ Pequenas deformações: as formulações serão desenvolvidas dentro do âmbito das deformações infinitesimais.

Além disto, os materiais considerados devem ser considerados *estáveis*, isto é, suas propriedades características não devem alterar com o tempo. Fenômenos como o envelhecimento do concreto, por exemplo, requerem tratamentos especiais que não serão abordados no presente trabalho. (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990)

### 3.3 Comportamento dos materiais viscoelásticos

O ensaio de solicitação uniaxial de materiais viscoelásticos, cuja resposta típica está esquematizada na Figura 3.1, pode ajudar a identificar algumas características que auxiliem a estabelecer uma lei constitutiva consistente. Algumas observações podem ser feitas:

- ✓ É possível notar que as curvas de carregamento e descarregamento não coincidem, evidenciando um comportamento histerético – Figura 3.1-a. A área destacada corresponde à energia dissipada durante o ciclo. A histerese é característica de sistemas que dependem não apenas do que ocorre no presente, mas também daquilo que ocorreu no passado. Esta dependência surge devido à possibilidade do sistema atingir diferentes estados internos. Nesse caso, para ter uma formulação que de fato preveja o comportamento do sistema no futuro, duas alternativas podem ser adotadas: deve-se conhecer o estado interno do sistema (o que implica em adicionar variáveis internas não observáveis às variáveis observáveis, bem como suas leis de evolução) ou o seu histórico de evolução (apenas das variáveis observáveis).
- ✓ A resposta de tensão depende de alguma maneira da taxa de deformação aplicada, logo, do tempo – Figura 3.1-b. Este comportamento é diferente dos materiais elásticos, cuja lei constitutiva é independente do tempo. Por exemplo, não faz diferença se o material elástico é carregado até determinado nível de tensão em um segundo, ou um dia, a deformação resultante é a mesma.
- ✓ Podem, ou não, ocorrer deformações permanentes. Figura 3.1-a. Deformações irreversíveis não serão abordadas no presente trabalho.

Materiais que apresentem comportamento que dependa do histórico do processo de carregamento são conhecidos como materiais com *memória*. Este comportamento aparece em diferentes níveis nos materiais reais aplicados na Engenharia, como a madeira, o concreto, as ligas metálicas em baixas temperaturas, materiais compósitos, polímeros, materiais asfálticos entre outros.

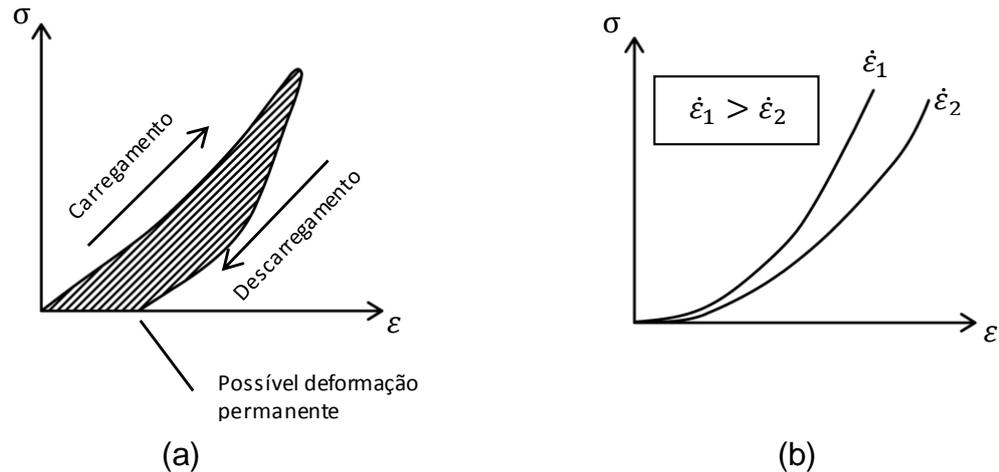


Figura 3.1 Comportamento típico viscoelástico de um sólido sob solitação uniaxial (a) Ciclo de carregamento (b) Curvas para diferentes taxas de deformação

Existem outras teorias do comportamento mecânico dos materiais que levam em consideração o efeito memória. A teoria incremental da Plasticidade é um exemplo, já que o estado de tensão atual depende de todo o histórico de tensões. Entretanto, há uma diferença fundamental entre as duas teorias. A Plasticidade é independente da escala de tempo envolvida nos processos de carregamento e descarregamento enquanto que a viscoelasticidade apresenta dependência específica com o tempo (CHRISTENSEN, 1982).

Uma vez que as evidências experimentais apontam que a resposta atual do sistema mecânico depende do histórico do processo de carregamento, é conveniente introduzir a definição de história em termos mais precisos.

### 3.3.1 Definição de História de uma grandeza

Noll (1958), apresenta a seguinte definição para a história de uma grandeza:

Seja  $\psi: R^+ \rightarrow V$ , uma função escalar, vetorial ou tensorial. Se  $t$  é o tempo presente e  $\tau$  um instante no passado, então o lapso de tempo é dado por  $\rho = t - \tau \geq 0$ , enquanto a *história* de  $\psi$  até o tempo  $t$  fixo é dada por

$$\psi^t(\rho) \triangleq \psi(t - \rho) \quad (3.1)$$

Em particular  $\psi^t(0) = \psi(t)$ . Conforme  $\rho$  percorre o espaço contínuo temporal, a função (3.1) representa o conjunto contínuo formado por todos os valores passados de  $\psi$  até o instante  $t$ .

Pode-se utilizar a seguinte notação para indicar a história:

$$\psi_{-\infty}^t(\tau) \equiv \psi(t + \tau), \quad \tau \in (-\infty, t) \quad (3.2)$$

### 3.3.2 Definindo a Lei constitutiva

Sejam  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , com componentes cartesianas  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$ , funções definidas no intervalo temporal  $(-\infty, \infty)$ , cujos valores  $\sigma(t)$  e  $\varepsilon(t)$  são o tensor de tensões e deformações infinitesimais no instante  $t$ , respectivamente. Pode-se expressar a relação constitutiva da seguinte maneira:

$$\sigma_{-\infty}^t = L(\varepsilon_{-\infty}^t) \quad (3.3)$$

em que  $L$  é uma transformação que associa cada histórico de deformações a um histórico de tensões (GURTIN; STERNBERG, 1962). Note que na expressão (3.3), existe a dependência do ponto do sólido considerado. Porém, esta dependência foi omitida nesta equação para em favor da clareza da exposição.

Equações deste tipo, em que há uma dependência explícita do histórico das variáveis envolvidas, são conhecidas como *equações hereditárias*. A descrição e a previsão das condições de repouso ou movimento dos corpos, descritos por este tipo de equações, sob ação de forças, deu origem à conhecida Mecânica Hereditária, que modernamente passou a ser chamada de Teoria da Viscoelasticidade.

### 3.3.3 Definição de história admissível

Um histórico de deformações  $\varepsilon_{-\infty}^t$  é dito *admissível* se  $\varepsilon_{-\infty}^t$  é contínuo em  $t \in (-\infty, \infty)$ , e ainda,  $\varepsilon = 0$  em  $(-\infty, 0)$ . Definição análoga se aplica ao histórico de tensões. (GURTIN; STERNBERG, 1962)

Esta definição é importante, pois está contida na próxima definição que deixa clara as restrições da teoria da Viscoelasticidade linear.

### 3.3.4 Definição da equação constitutiva hereditária linear

Uma transformação  $L$  que associa a cada histórico de deformações um histórico de tensões,  $\sigma_{-\infty}^t = L(\varepsilon_{-\infty}^t)$ , é uma lei hereditária linear se as seguintes propriedades forem atendidas. Sejam  $\varepsilon_{1-\infty}^t$  e  $\varepsilon_{2-\infty}^t$  dois históricos de deformações admissíveis e suponha que  $\sigma_{1-\infty}^t = L(\varepsilon_{1-\infty}^t)$  e  $\sigma_{2-\infty}^t = L(\varepsilon_{2-\infty}^t)$ . Então:

- (a) Linearidade: sendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  números reais, então,  $L(\alpha_1 \varepsilon_{1-\infty}^t + \alpha_2 \varepsilon_{2-\infty}^t) = \alpha_1 L(\varepsilon_{1-\infty}^t) + \alpha_2 L(\varepsilon_{2-\infty}^t)$ ;
- (b) Invariância à translação temporal: para todo  $\tau$  fixo a relação  $\varepsilon_{2-\infty}^t = \varepsilon_{1-\infty}^{t-\tau}$  para todo  $t \in (-\infty, \infty)$ , implica que  $\sigma_{2-\infty}^t = \sigma_{1-\infty}^{t-\tau}$  para todo  $t \in (-\infty, \infty)$ ;
- (c) Não retroatividade: para todo  $t$  fixo,  $\varepsilon_{2-\infty}^t = \varepsilon_{1-\infty}^t$  implica que  $\sigma_{2-\infty}^t = \sigma_{1-\infty}^t$ ;
- (d) Continuidade: para todo  $t$  fixo e todo  $\alpha > 0$ , existe um  $\delta_t(\alpha) > 0$  tal que  $|\varepsilon_{1-\infty}^t(\tau)| < \delta_t(\alpha)$  para todo  $\tau \in (-\infty, t]$  implica que  $|\sigma_{1-\infty}^t(t)| < \alpha$

O postulado (a) expressa o princípio da superposição linear. Na Teoria da Viscoelasticidade Linear, esse princípio é conhecido como princípio da superposição de Boltzmann.

O postulado (b) garante que a constituição do material permanece invariável com o tempo.

Postulado (c) em termos do postulado (a) pode ser reescrito da seguinte maneira: suponha que antes do instante  $t$ , o histórico de deformações tenha sido nulo, então isto implica que o histórico de tensões até o mesmo instante  $t$ , também é nulo. Esse postulado também é conhecido como *Princípio da causalidade*. Mais ainda, se dois históricos de deformação coincidem até o instante  $t$ , então os dois históricos de tensões associados também tem que ser iguais. Portanto as tensões, em cada instante  $t$ , dependem das deformações no instante  $t$ , e em todos os instantes anteriores, ou ainda,  $\sigma(t)$  é um funcional de  $\varepsilon(\tau)$  ( $-\infty < \tau \leq t$ ).

O postulado (d), em termos de (a) estabelece que se dois históricos de deformação forem suficientemente próximos até o instante  $t$ , então os valores de tensão correspondentes no instante  $t$ , serão arbitrariamente próximos. (GURTIN; STERNBERG, 1962)

Caso estes postulados sejam todos observados, então é possível obter uma forma geral de representação da Lei constitutiva, conhecida como forma integral.

### 3.3.5 Teorema de representação integral

Existe um teorema, conhecido como teorema de Riesz, que afirma que a toda lei hereditária linear  $L$  entre dois tensores de segunda ordem  $(\varepsilon, \sigma)$ , corresponde uma única função tensorial de quarta ordem  $G$ , definida no intervalo temporal  $(-\infty, \infty)$  com a seguinte propriedade:

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{kl} * dG_{ijkl} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{kl}(t - \tau) dG(\tau)_{ijkl} \quad (3.4)$$

A expressão (3.4) representa uma convolução de Stieltjes. A função  $G$  possui as propriedades de simetria  $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$ . A demonstração desse teorema está presente em Gurtin e Sternberg (1962).

O operador integral de convolução possui a propriedade de comutatividade. Isto permite reescrever a equação constitutiva da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t - \tau) d\varepsilon(\tau)_{kl} \quad (3.5)$$

O que foi descrito em termos de deformação também é válido para histórico de tensões e, portanto, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{ij} = \int_{-\infty}^t D_{ijkl}(t - \tau) d\sigma(\tau)_{kl} \quad (3.6)$$

As propriedades constitutivas do material são representadas pelas funções  $G(t)$  e  $D(t)$  que, quando utilizadas nas equações anteriores, fornecem a tensão (ou deformação) para um

dado histórico de deformação (ou de tensão). A equação (3.5) é conhecida como lei integral de relaxação e a função  $G(t)$  é conhecida como função de relaxação.

De modo análogo, a equação (3.6) é chamada de lei integral de fluência e a função  $D(t)$  é chamada de função de fluência.

Uma vez que as funções de relaxação e fluência são funções do tempo, normalmente sua caracterização é feita mediante ensaios específicos de monitoramento. No caso da função de relaxação, pode-se aplicar um histórico de deformações constante no tempo, enquanto se monitora o comportamento das tensões de resposta. O mesmo vale para o caso de ensaios de fluência, em que são aplicados históricos constantes de tensão e monitora-se a evolução das deformações.

Além da clássica forma integral de representação, existe uma forma alternativa para expressar a lei constitutiva, a saber, a forma diferencial.

Gurtin e Sternberg (1962), demonstram a equivalência matemática existente entre as formulações integral e diferencial. A formulação integral possui a vantagem de exigir critérios de regularidade mais fracos que a formulação diferencial, além de possibilitar a inclusão de fenômenos de *envelhecimento* e, por este motivo, é apontada como mais abrangente. Entretanto, este trabalho faz uso apenas da formulação diferencial por possibilitar o tratamento mais direto (especialmente para fins computacionais) de carregamentos que variem com o tempo, conforme será discutido em breve.

Existe outra forma de estabelecer a lei constitutiva viscoelástica além da tradicional forma integral e diferencial, que é utilizando transformadas de Fourier. Entretanto, seu uso é mais adequado para solicitações harmônicas, o que não faz parte do escopo deste trabalho e por este motivo não será abordada. Mais detalhes podem ser consultados em Christensen (1982).

### **3.4 Modelos analógicos**

Segundo Tschoegl (1989), a teoria dos modelos analógicos mecânicos foi inspirada na teoria dos Circuitos Elétricos. Nesses modelos, os fenômenos físicos envolvidos são representados por elementos gráficos que podem ser conectados entre si, de forma a

reproduzir determinado comportamento. Esse procedimento facilita o processo de análise do sistema mecânico.

O elemento de mola unidimensional (Figura 3.2) representa o material com comportamento elástico linear, ou, lei de Hooke. Este comportamento caracteriza-se pela possibilidade de o material recuperar sua condição inicial após a retirada da sollicitação. Além disso, esta deformação (ou recuperação) ocorre de forma instantânea.

O elemento de amortecedor unidimensional (Figura 3.3) representa o material com comportamento puramente viscoso. Esse material apresenta tensões que são proporcionais à taxa de deformação que o material sofre, e não à deformação propriamente dita. Este é o modelo de Newton. Neste caso o material pode alterar sua configuração apresentando deformações permanentes.

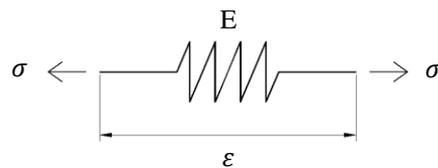


Figura 3.2 Representação do Modelo de Hooke

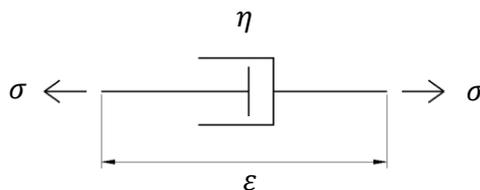


Figura 3.3 Representação do Modelo de Newton

Associação dos dois elementos representa o comportamento viscoelástico (Figura 3.4), que possui características intermediárias aos dois modelos descritos. Uma possibilidade de associação direta é, por exemplo, dispor os dois elementos em série. Este é o modelo viscoelástico de Maxwell.

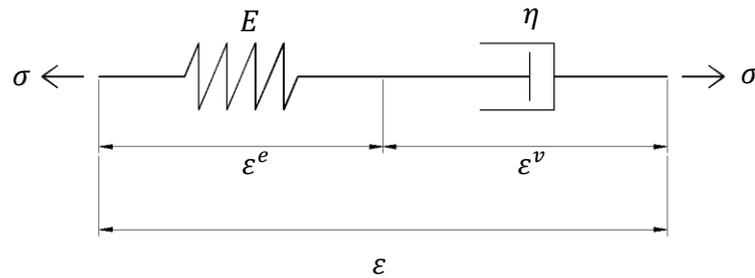


Figura 3.4 Representação do Modelo de Maxwell

Esse modelo é descrito pelas seguintes equações:

$$\text{Equações de equilíbrio: } \sigma(t) = \sigma^e(t) = \sigma^v(t)$$

$$\text{Equação de compatibilidade: } \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^v(t)$$

$$\text{Equações constitutivas: } \sigma^e(t) = E\varepsilon^e(t), \sigma^v(t) = \eta\varepsilon^v(t)$$

Diferenciando a equação de compatibilidade em relação ao tempo e fazendo uso das equações constitutivas e equilíbrio, resulta na equação diferencial do modelo de Maxwell:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (3.7)$$

A equação diferencial pode ser integrada ao longo da história de tensão, por exemplo, fornecendo:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{\eta} \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Ao realizar a integração por partes da equação (3.8) obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{1}{E} + \frac{t - \tau}{\eta} \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Note que essa expressão possui a forma geral da equação (3.6). Isso implica que o termo que aparece entre colchetes é a função fluência do modelo de Maxwell.

$$D(t - \tau) = \frac{1}{E} + \frac{t - \tau}{\eta} \quad (3.10)$$

Para fins práticos, pode-se fazer uso das propriedades da linearidade das funções hereditárias, de invariância à translação temporal e do princípio da causalidade. Como os efeitos são sempre posteriores às causas, esta equação pode ser transladada no eixo temporal sem interferir nas ações anteriores. A Figura 3.5 ilustra essa consideração para o modelo de Maxwell, porém, sem perdas de generalidade.

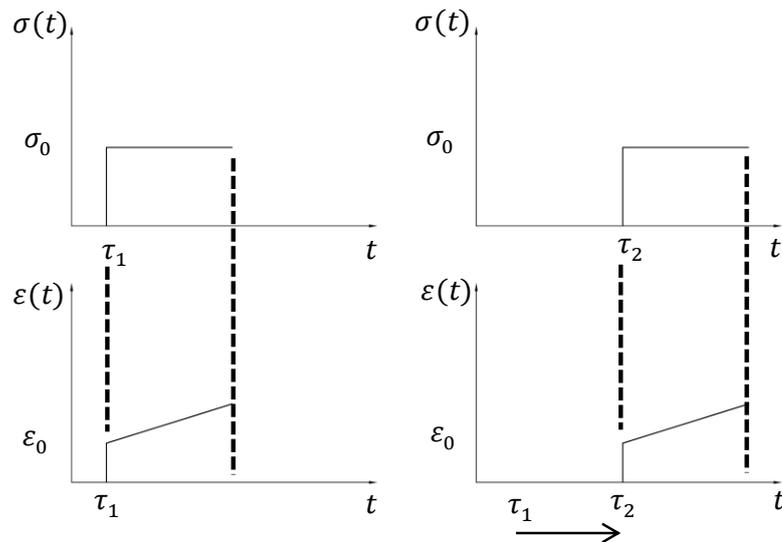


Figura 3.5 Ilustração do princípio de invariância translacional no tempo

A equação (3.10) é uma equação linear com o tempo. Isto implica que caso a tensão seja mantida constante indefinidamente, o material fluirá também indefinidamente. Esta é uma característica de fluidos, e por vezes, é possível encontrar a menção “fluido de Maxwell”.

De modo análogo, é possível obter a função de relaxação fornecida pelo modelo.

$$G(t - \tau) = E e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} \quad (3.11)$$

Outra possibilidade de associação entre os dois elementos é feita em paralelo, conforme Figura 3.6. Esse modelo é conhecido como modelo de Kelvin, ou Kelvin-Voigt.

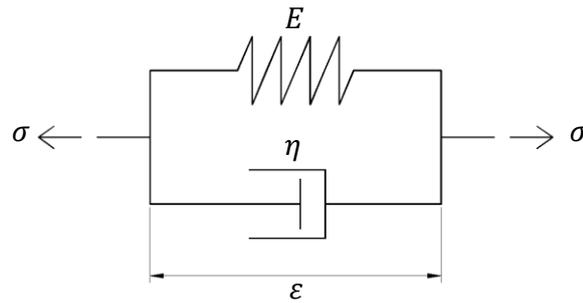


Figura 3.6 Modelo de Kelvin

Nesse caso as equações que governam o modelo são as seguintes:

$$\text{Equilíbrio: } \sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^v(t)$$

$$\text{Compatibilidade: } \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) = \varepsilon^v(t)$$

$$\text{Constitutiva: } \sigma^e(t) = E\varepsilon^e(t), \sigma^v(t) = \eta\dot{\varepsilon}^v(t)$$

Substituindo as equações constitutivas e compatibilidade na equação de equilíbrio, obtém-se a equação diferencial do modelo.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (3.12)$$

Para uma dada história de tensões, a solução da equação diferencial linear de primeira ordem é a seguinte:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)} d\tau \quad (3.13)$$

Integrando (3.13) por partes obtém-se a função de fluência fornecida pelo modelo:

$$D(t - \tau) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}(t-\tau)}) \quad (3.14)$$

Observe-se que quando  $t$  tende ao infinito, obtém-se  $\varepsilon(\infty) = \sigma_0/E$ , que corresponde a uma solução elástica assintótica quando toda tensão é suportada pela mola.

Para uma dada história de deformação é possível obter a tensão atual diretamente por meio da equação (3.12). Um teste de relaxação é fisicamente impossível com o modelo de

Kelvin pois  $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \delta(t)$ , o que corresponderia a uma tensão inicial infinitamente alta. Logo não há função de relaxação correspondente para esse modelo.

A terceira combinação de elementos dá origem ao modelo de Boltzmann, Figura 3.7.

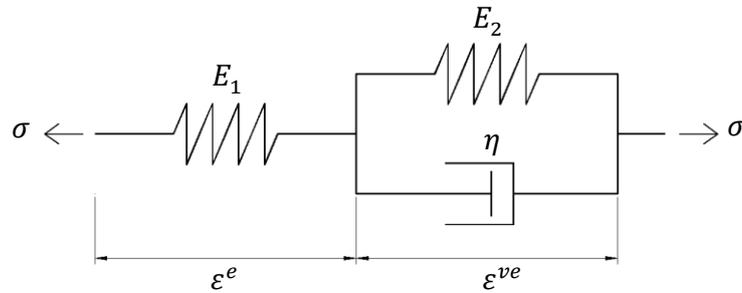


Figura 3.7 Modelo de Boltzmann

Para este modelo, as equações governantes são as seguintes:

$$\text{Equilíbrio: } \sigma(t) = \sigma^e(t) = \sigma^{ve}(t)$$

$$\text{Compatibilidade: } \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^{ve}(t)$$

$$\text{Constitutiva: } \sigma^e(t) = E_1 \varepsilon^e(t), \sigma^{ve}(t) = E_2 \varepsilon^{ve} + \eta \dot{\varepsilon}^{ve}(t)$$

Partindo da diferenciação da equação de compatibilidade, e substituindo as equações de equilíbrio e constitutiva, obtém-se a equação diferencial linear do problema:

$$\eta E_1 \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) = \eta \dot{\sigma}(t) + [E_1 + E_2] \sigma(t) \quad (3.15)$$

Pode-se aplicar uma história de carregamento obtendo:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-\frac{E_2}{\eta}(t-\tau)} \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

Caso um histórico de deformações seja aplicado na equação obtém-se:

$$\sigma(t) = \int_{\tau_0}^t \left[ E_1 - \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} (1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta}(t-\tau)}) \right] \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (3.17)$$

Os termos entre colchetes nas equações (3.16) e (3.17) são respectivamente a função fluência, e função de relaxação.

Essas funções mostram que o material ao ser carregado sofre os dois tipos de manifestação de deformações; as imediatas e as dependentes do tempo. Este modelo também é conhecido como sólido padrão.

De posse das equações constitutivas viscoelásticas em forma diferencial, pode-se aplicá-las à solução numérica de problemas de valor de contorno de interesse para engenharia. A formulação a seguir será desenvolvida considerando o MEC, entretanto, outras técnicas numéricas (MEF, MDF) podem, analogamente, serem utilizadas.

### 3.5 Formulações viscoelásticas do MEC

#### 3.5.1 Modelo de Maxwell

A equação (3.7) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}(t) - \eta \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} \quad (3.18)$$

É possível adotar uma simplificação, conforme mostrado em Mesquita (2002),  $\eta = \gamma E$ , implicando em:

$$\sigma(t) = \gamma [E \dot{\epsilon}(t) - \dot{\sigma}(t)] \quad (3.19)$$

A extensão para o caso tridimensional pode ser feita diretamente, gerando a equação constitutiva do modelo:

$$\sigma_{ij}(t) = \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}(t) - \dot{\sigma}_{kl}(t)] \quad (3.20)$$

Substituindo essa expressão na equação ponderada pela solução fundamental do MEC, omitindo a dependência explícita de  $t$  resulta:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}] d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

Definindo  $I$ , de modo a simplificar o trabalho algébrico:

$$I = - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \gamma [C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}] d\Omega \quad (3.22)$$

Lembrando que  $u_{ki,j}^* C_{ijmn} = \sigma_{kmn}^*$ :

$$\begin{aligned} I &= - \int_{\Omega} \gamma u_{ki,j}^* C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{kl} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \gamma \sigma_{kmn}^* \dot{\epsilon}_{mn} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \dot{\sigma}_{kl} u_{ki,j}^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

Integrando por partes ambas as integrais resultantes:

$$I = - \int_{\Gamma} \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_i n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \gamma \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma \dot{\sigma}_{ij} u_{ki}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma \dot{\sigma}_{ij,j} u_{ki}^* d\Omega \quad (3.24)$$

Lembrando que:

$$\sigma_{kmn,n}^* = -\delta(p, s) \delta_{km} \text{ (equilíbrio fundamental de Kelvin)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i \text{ (equilíbrio físico)}$$

Então,

$$I = - \int_{\Gamma} \gamma p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \gamma [-\delta(p, s) \delta_{ki}] \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma [-\dot{b}_i] u_{ki}^* d\Omega \quad (3.25)$$

A segunda integral se resume a:

$$\int_{\Omega} \gamma [-\delta(p, s) \delta_{ki}] \dot{u}_i d\Omega = -\gamma \dot{u}_k(p) \quad (3.26)$$

Omitindo a posição  $p$  do ponto fonte:

$$I = -\gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \quad (3.27)$$

Substituindo a expressão (3.27) em (3.21) resulta:

$$\begin{aligned} \gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \\ = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.28)$$

Admitindo que não haja forças de volume, tampouco sua variação com o tempo;  $b_i = 0$  e  $\dot{b}_i = 0$ , a equação se resume a:

$$\gamma \dot{u}_k + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma \quad (3.29)$$

Esta equação é válida para pontos internos no domínio.

Para a utilização no MEC é necessário que a equação valha para pontos que estejam sobre o contorno definido pelo domínio. Pode-se fazer um estudo limite desta equação, como se faz com a clássica identidade de Somigliana, resultando em:

$$\gamma c_{ki} \dot{u}_i + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma \quad (3.30)$$

Aproximando o contorno por elementos discretos isoparamétricos de ordem qualquer, é possível obter a seguinte equação matricial:

$$\gamma H \dot{U} = \gamma G \dot{P} + GP \quad (3.31)$$

Note que a discretização referida na etapa anterior é puramente espacial. Entretanto, a equação (3.31) representa uma equação diferencial de primeira ordem no domínio do tempo. Para resolvê-la pode-se aplicar uma aproximação de ordem linear no espaço do tempo para a primeira derivada da função utilizando diferenças finitas progressivas (ou ascendentes). Dividindo o tempo da análise em passos finitos  $\Delta t$ , e seja  $s$  o instante atual, então:

$$\dot{U} = \frac{U^{s+1} - U^s}{\Delta t} \quad (3.32)$$

$$\dot{P} = \frac{P^{s+1} - P^s}{\Delta t} \quad (3.33)$$

Substituindo essa aproximação na fórmula (3.31):

$$\gamma H \frac{U^{s+1} - U^s}{\Delta t} = \gamma G \frac{P^{s+1} - P^s}{\Delta t} + GP^{s+1} \quad (3.34)$$

Que após manipulações algébricas resulta:

$$HU^{s+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\gamma}\right) GP^{s+1} + HU^s - GP^s \quad (3.35)$$

Este é o sistema de equações que deve ser resolvido ao longo do tempo, para encontrar os valores das grandezas de contorno, utilizando o modelo de Maxwell.

As tensões internas podem ser obtidas a partir da equação (3.29). Derivando em relação às coordenadas do ponto fonte:

$$\gamma \dot{u}_{k,l} + \gamma \int_{\Gamma} p_{kil}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} u_{kil}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{kil}^* p_i d\Gamma \quad (3.36)$$

Tendo em vista que as equações de equilíbrio do modelo de Maxwell garantem que

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{u}_{k,l} \quad (3.37)$$

Então resulta:

$$\gamma \dot{\sigma}_{kl} + \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{kil}^* \dot{u}_i d\Gamma = \gamma \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{kil}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{kil}^* p_i d\Gamma \quad (3.38)$$

Ou ainda,

$$\dot{\sigma}_{kl} = \frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{kil}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{kil}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{kil}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (3.39)$$

Tomando a equação (3.39) no contorno discreto:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\gamma} G'P + G'^P - H'\dot{U} \quad (3.40)$$

Tomando a aproximação linear no tempo para o cálculo da tensão:

$$\sigma^{s+1} = \Delta t G' \left( \frac{1}{\gamma} P^{s+1} + \dot{P}^{s+1} \right) - \Delta t H' \dot{U}^{s+1} + \sigma^s \quad (3.41)$$

Como todas as tensões são iguais no modelo, o problema está resolvido.

$$\sigma^{el^{s+1}} = \sigma^{v^{s+1}} = \sigma^{s+1} \quad (3.42)$$

A dedução passo a passo dos demais modelos será omitida neste texto para evitar repetição de conteúdo. Porém, detalhes adicionais da formulação podem ser encontrados em Mesquita (2002).

### 3.5.2 Modelo de Kelvin

Grandezas de contorno:

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) HU^{s+1} = GP^{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} HU^s \quad (3.43)$$

Tensões totais em pontos internos:

$$\sigma^{s+1} = G'P^{s+1} - HU^{s+1} - \gamma H' \dot{U}^{s+1} \quad (3.44)$$

Tensões elásticas em pontos internos:

$$\sigma_{el}^{s+1} = \frac{\left(\sigma^{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_{el}^s\right)}{1 + \frac{\gamma}{\Delta t}} \quad (3.45)$$

Tensões viscosas em pontos internos:

$$\sigma_v^{s+1} = \sigma^{s+1} - \sigma_{el}^{s+1} \quad (3.46)$$

### 3.5.3 Modelo de Boltzmann

Grandezas de contorno:

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) HU^{s+1} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) G + \frac{\gamma}{\Delta t} (HU^s - GP^s) \quad (3.47)$$

Tensões totais em pontos internos:

$$\begin{aligned} \sigma^{s+1} = & \left( G' P^{s+1} - \frac{E_2}{E_1 + E_2} H' U^{s+1} - \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} H' \dot{U}^{s+1} + \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} G' \dot{P}^{s+1} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \sigma^s \right) / \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Tensões elásticas em pontos internos:

$$\sigma_{el}^{s+1} = \frac{\left( \sigma^{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_{el}^s \right)}{1 + \frac{\gamma}{\Delta t}} \quad (3.49)$$

Tensões viscosas em pontos internos:

$$\sigma_v^{s+1} = \sigma^{s+1} - \sigma_{el}^{s+1} \quad (3.50)$$

### 3.6 Aplicações

Apresenta-se a seguir cinco aplicações envolvendo a formulação viscoelástica descrita anteriormente. As aplicações foram realizadas em um microcomputador com configuração: processador Intel Core i7 de 3,4GHz, RAM 16G. Deve-se mencionar que parte dos desenvolvimentos e resultados do presente capítulo foram divulgados por Oliveira e Leonel (2014, 2016a).

#### 3.6.1 Exemplo 1 (benchmark 1 – estado uniaxial de tensão)

O primeiro exemplo de validação do programa busca confrontar os resultados numéricos com os esperados analíticos. Trata-se de uma chapa em estado plano de tensão submetida a um ensaio de fluência que consiste na aplicação de forças de superfície constantes ao longo do tempo. A Figura 3.8 ilustra o experimento.

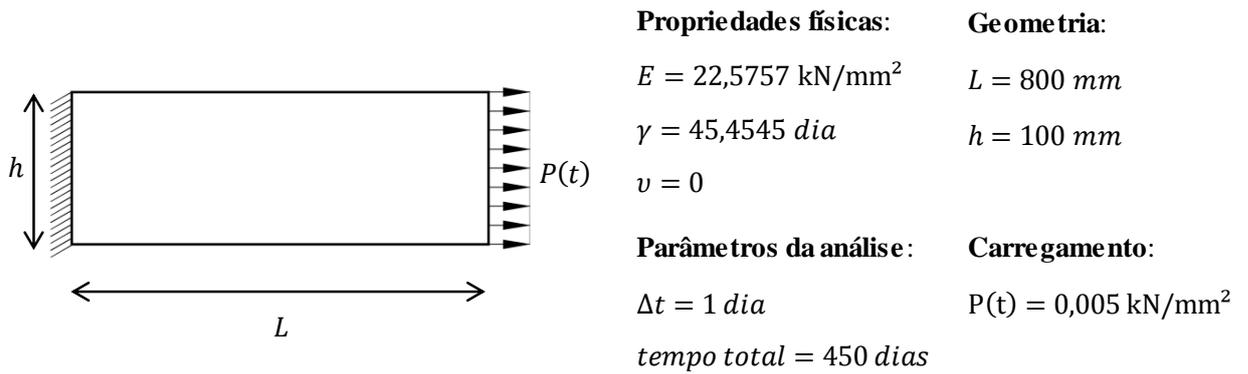


Figura 3.8 Dados do exemplo 1

O modelo viscoelástico adotado para este exemplo foi o modelo de Kelvin. O gráfico da Figura 3.9 ilustra o resultado obtido com a presente formulação. A malha de contorno é composta por 8 elementos cúbicos (2 elementos por face).

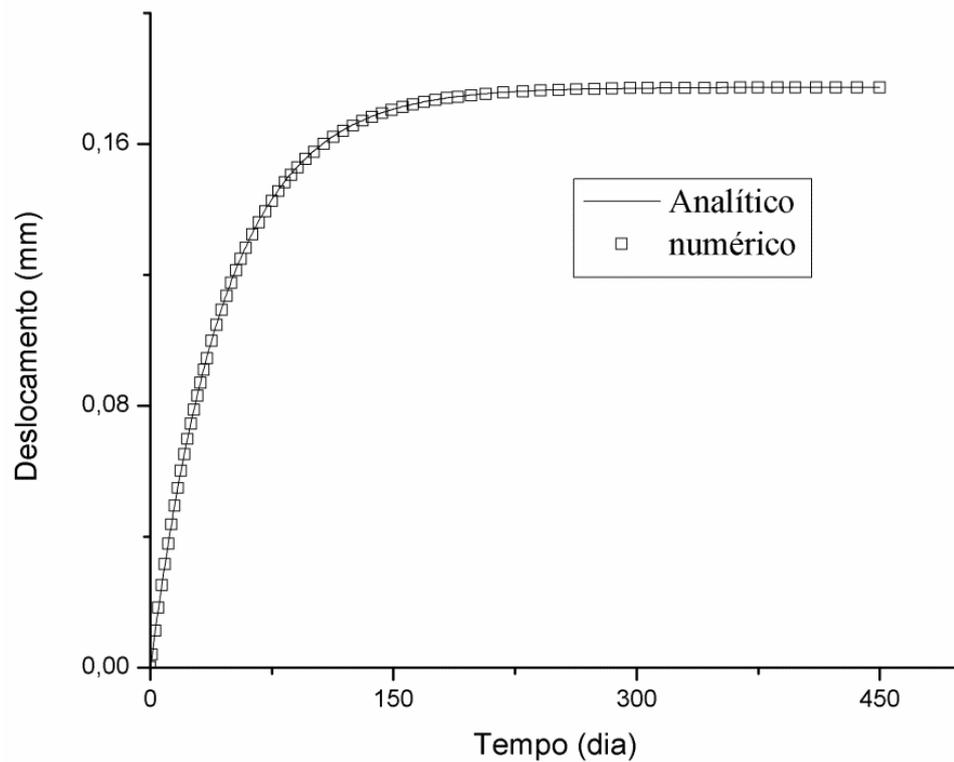


Figura 3.9 Resposta em termos de deslocamentos ao longo para pontos sobre a face carregada

As respostas em termos de parcelas de tensão na direção longitudinal são ilustradas pela Figura 3.10. A tensão total também é apresentada.

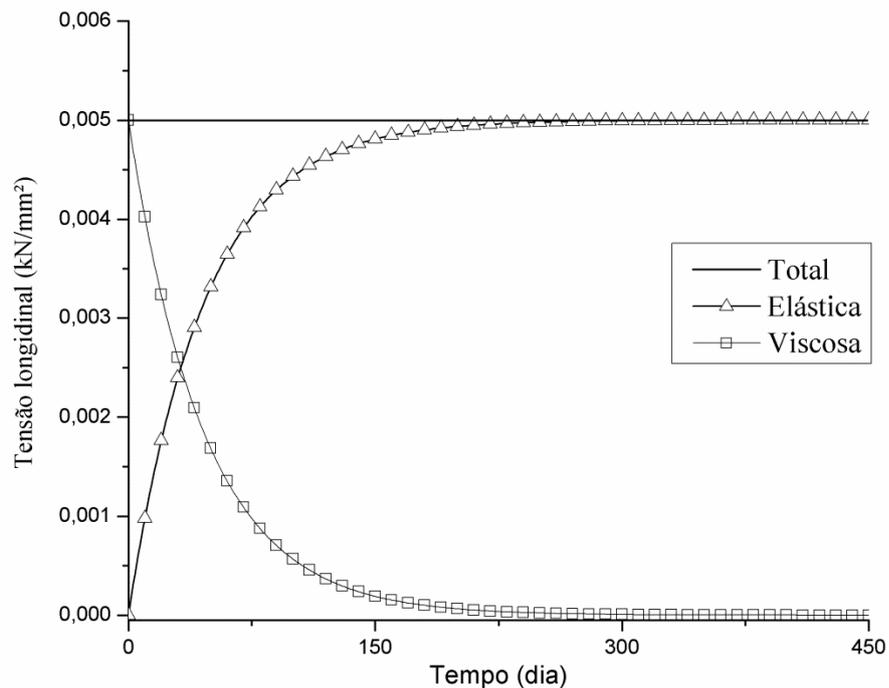


Figura 3.10 Resposta em termos de tensão longitudinal

O gráfico da Figura 3.10 revela uma característica importante da viscoelasticidade linear. Note que a tensão total não varia com o tempo, pois não depende das propriedades do material. Isto significa que sólidos constituídos de materiais elásticos ou viscoelásticos apresentam a mesma tensão quando solicitado pelo mesmo carregamento. Entretanto, suas parcelas elástica e viscosa variam ao longo do tempo.

É possível constatar a estabilidade e convergência do método por meio dos resultados obtidos para intervalos de tempo sucessivamente crescentes. A Figura 3.11 ilustra o procedimento, considerando os deslocamentos da face tracionada. Observa-se que, quanto maior o passo finito de tempo, mais o modelo numérico se distancia do resultado esperado, em idades iniciais. Isto implica em subestimativas dos deslocamentos nas primeiras idades. Entretanto, o resultado converge para o valor analítico ao longo do tempo. Este fato sugere que, caso o interesse seja em obter deslocamentos em idades primitivas, deve-se encontrar o valor do passo de tempo por meio de simulações sucessivas, até que as curvas de fluência resultantes não mostrem diferenças perceptíveis. Se o interesse o deslocamento total esperado após a estabilização, então podem ser escolhidos valores de intervalos de tempo de forma livre. Uma estimativa inicial do valor do passo de tempo é encontrada dividindo o tempo total de análise por 50.

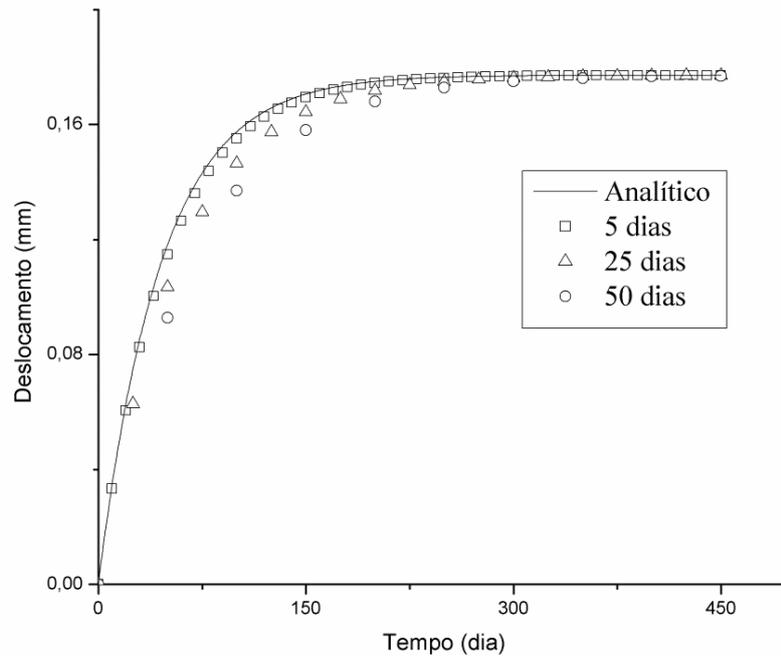


Figura 3.11 Resultado para deslocamento em função de diferentes passos de tempo

### 3.6.2 Exemplo 2 (benchmark 2 – estado plano de deformação)

Este exemplo refere-se a um cilindro de parede espessa pressurizado internamente. O material constituinte será considerado com o modelo de Boltzmann. Os dados necessários para a análise são apresentados pela Figura 3.12. A análise é realizada considerando o Estado Plano de Deformações utilizando 8 elementos de ordem quadrática (2 elementos por face).

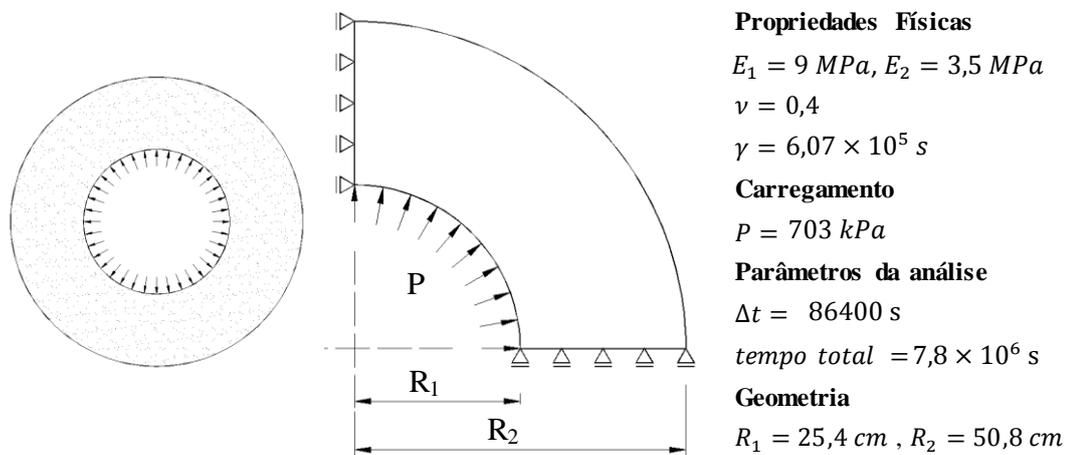


Figura 3.12 Dados do segundo exemplo (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

A resposta analítica para este problema bidimensional foi obtida a partir do *princípio da correspondência* entre problemas elásticos e viscoelásticos. Este princípio afirma que pode-se utilizar a solução da elasticidade linear para problemas descritos no domínio de Laplace desde que suas condições de contorno não variem com tempo ou, caso varie, que possa ser escrito por uma função de variáveis separáveis no tempo. Utilizando a solução para o disco no espaço transformado de Laplace e invertendo a expressão para o domínio do tempo obtém-se:

$$u_r(t) = \frac{P(1 + \nu)}{R_2^2 - R_1^2} [(1 - 2\nu)R_1^3 + R_1R_2^2] \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) H(t) \quad (3.51)$$

Esta expressão representa o deslocamento radial da parede interna do disco em estado plano de deformação em função do tempo.  $H(t)$  é a *função degrau* unitária. Resultado semelhante é apresentado por Ashrafi e Farid (2010). Substituindo os dados fornecidos, encontra-se a curva da Figura 3.13. Nota-se a concordância entre os resultados numéricos obtidos com a presente formulação e a resposta prevista analiticamente em termos de deslocamentos ao longo do tempo, tanto para idades iniciais quanto para idades avançadas em que o deslocamento final tende a estabilizar. A variação de cada uma das parcelas de tensão (elástica e viscosa) pode ser vista na Figura 3.14. Note a alternância entre as parcelas tensão de modo a sustentar o equilíbrio global da estrutura.

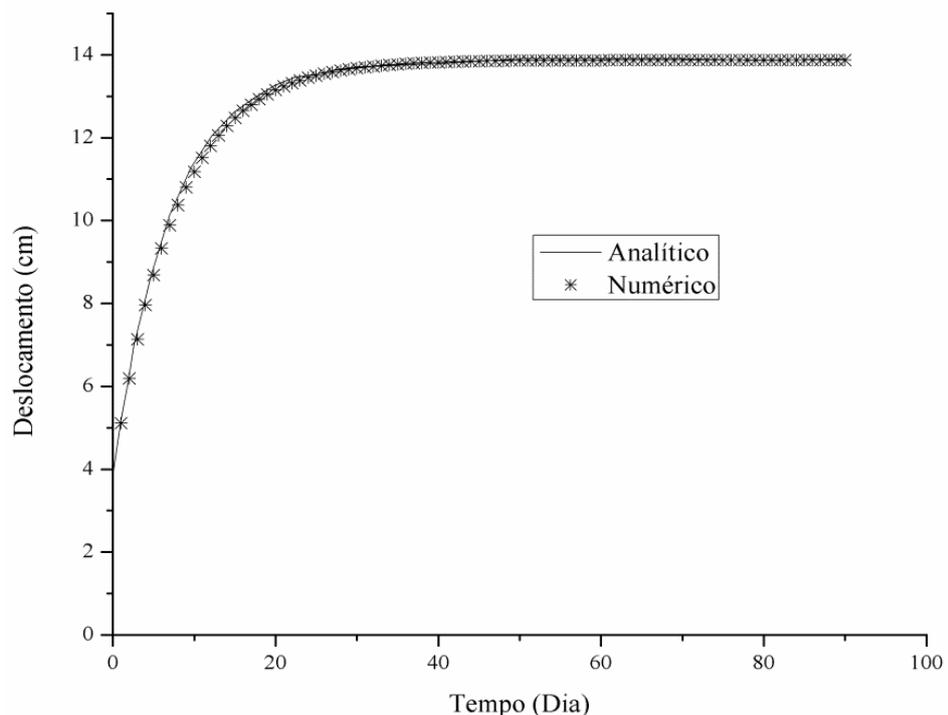


Figura 3.13 Resposta em termos de deslocamento radial (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

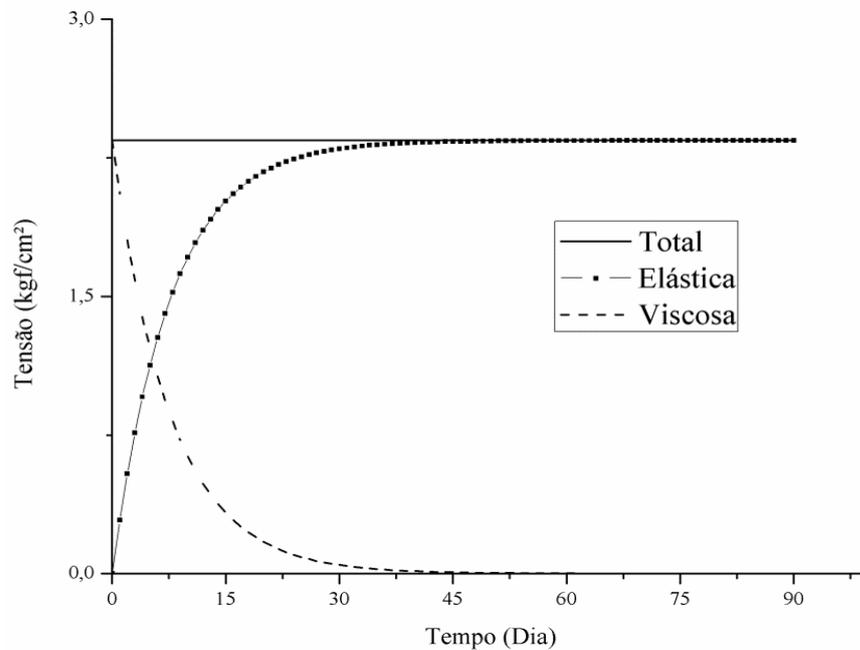


Figura 3.14 Resposta em tensão para o ponto interno central (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

A Figura 3.14 deixa claro que a tensão total não depende do comportamento viscoso do material. Além disso, é possível notar o relaxamento das tensões viscosas ao mesmo passo que há uma mobilização das tensões elásticas.

### 3.6.3 Exemplo 3 (benchmark 3 - Problema fundamental de Griffith modo I)

Este exemplo trata do problema fundamental de Griffith, para solicitação em modo I. A Figura 3.15 apresenta um sólido tracionado em seu contorno remoto. O sólido, considerado em estado plano de deformação, possui uma fissura central de comprimento  $2a$ .

O presente problema possui solução elástica linear analítica para a determinação da abertura das faces da fissura. Utilizando o princípio da correspondência da viscoelasticidade linear, adotando a mesma função de relaxação de Boltzmann para o módulo de elasticidade transversal e para o módulo volumétrico (bulk modulus), encontra-se a seguinte expressão para estado plano de deformações:

$$y(t) = 2aP(1 - \nu^2) \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] H(t) \quad (3.52)$$

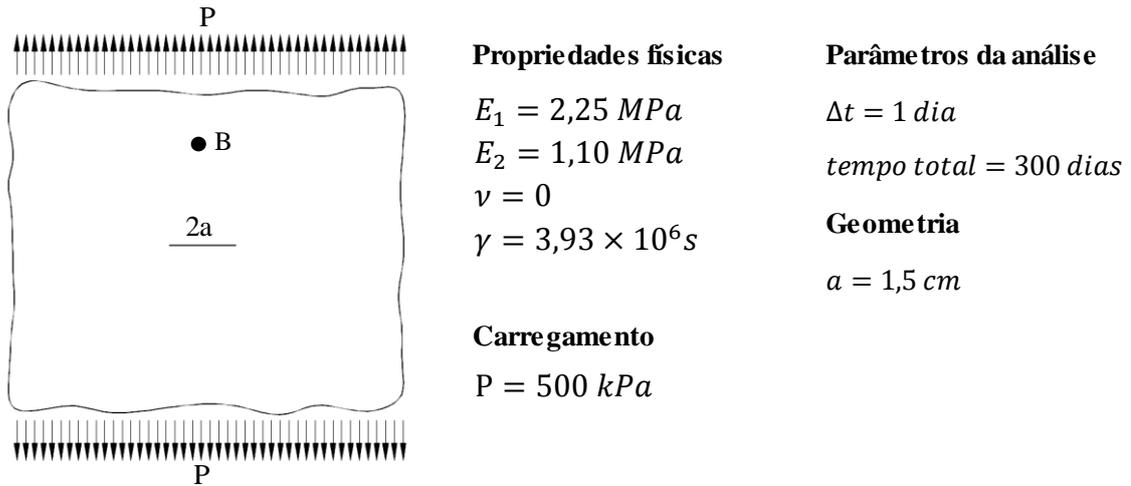


Figura 3.15 Dados do problema 3 (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

A expressão (3.52) refere-se à abertura do ponto central da face superior da fissura. A partir destas informações, a Figura 3.16 ilustra uma comparação entre os resultados obtidos. A malha de contorno é composta por 8 elementos quadráticos na ponta da fissura (4 elementos por face). A formulação utilizada é a Dual.

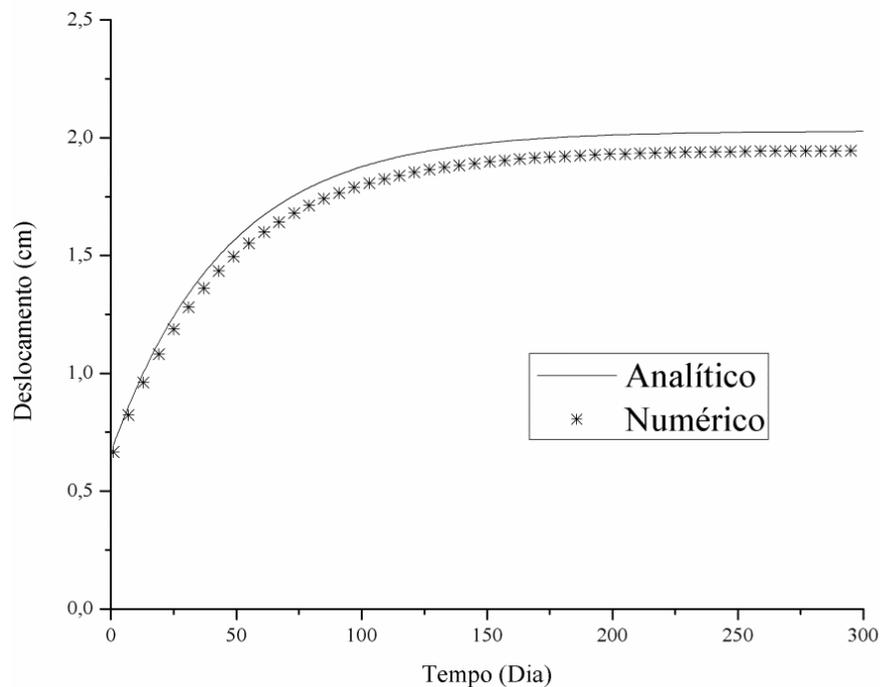


Figura 3.16 Resposta em termos de deslocamento vertical do ponto central da face superior da fissura – Modelo de Boltzmann (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

Nota-se que o modelo numérico apresenta comportamento mais rígido que previsto analiticamente, com diferença relativa máxima de 3%. Este fato está de acordo com o

esperado, pois o campo de deslocamentos está aproximado por um número finito de graus de liberdade. Uma análise de convergência, por meio de sucessivos refinamentos de malha, faz com que o resultado numérico convirja para o analítico. Entretanto, os resultados obtidos são considerados aceitáveis.

A resposta em termos de tensão  $\sigma_y$  para pontos afastados da fissura é ilustrada pela Figura 3.17. O ponto escolhido, B, situa-se  $20a$  acima do centro da fissura. É possível notar que inicialmente existe apenas tensão viscosa que diminui com o passar do tempo, enquanto que a tensão elástica aumenta até atingir o patamar superior. Nota-se que conforme o esperado a tensão total não depende do tempo.

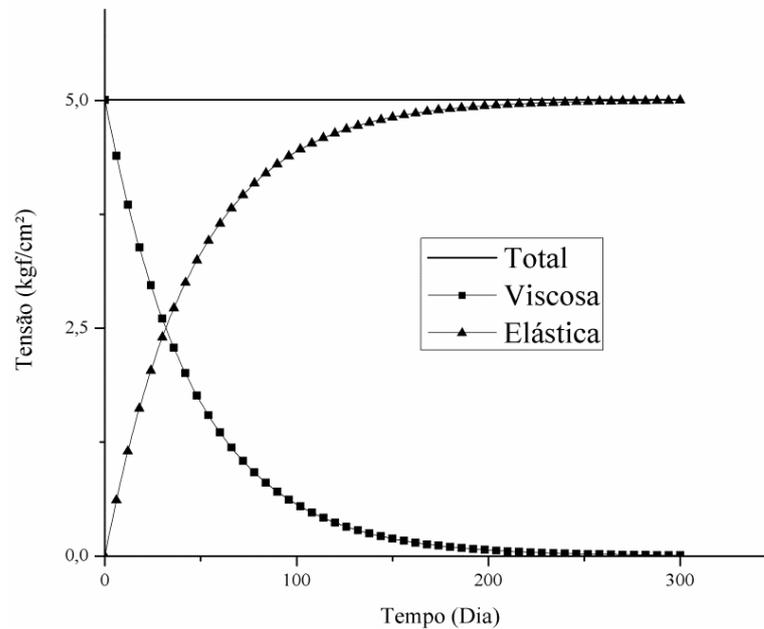


Figura 3.17 Resposta em termos de tensão para pontos afastados da fissura – Modelo de Boltzmann (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

Uma potencialidade da formulação apresentada é a possibilidade da simulação de fases de carregamento. Para tanto, considere o histórico de carregamento apresentado pela Figura 3.18 que ilustra uma descontinuidade de carregamento ao longo do tempo. A formulação permite averiguar as mudanças que ocorrem no campo de tensões conforme observado na Figura 3.19.

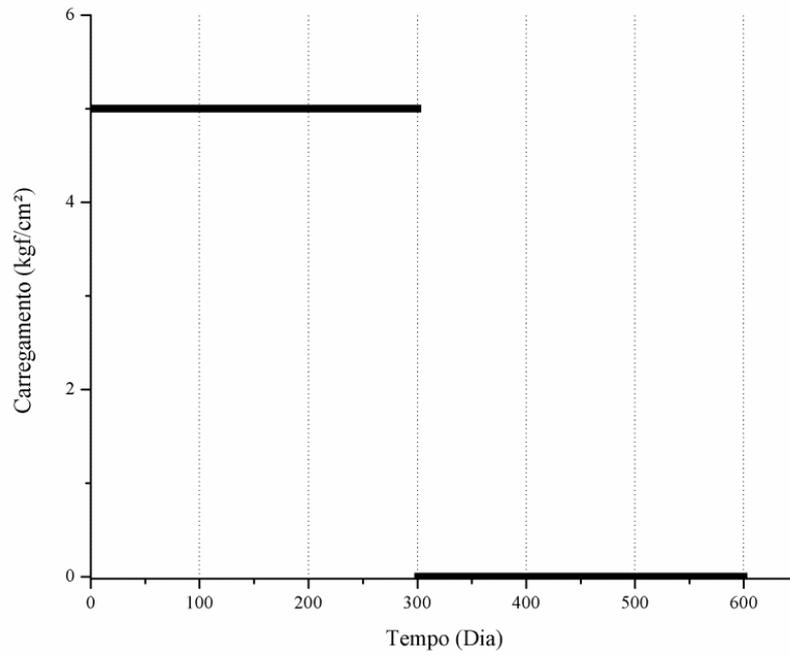


Figura 3.18 Variação do carregamento com o tempo (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

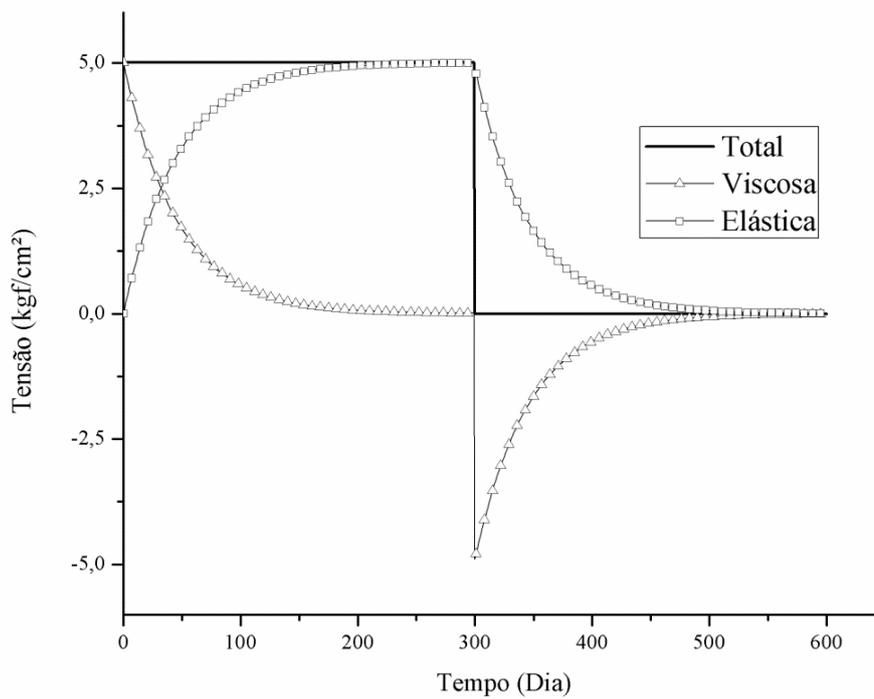


Figura 3.19 Histórico da tensão em pontos afastados da fissura – Modelo de Boltzmann (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

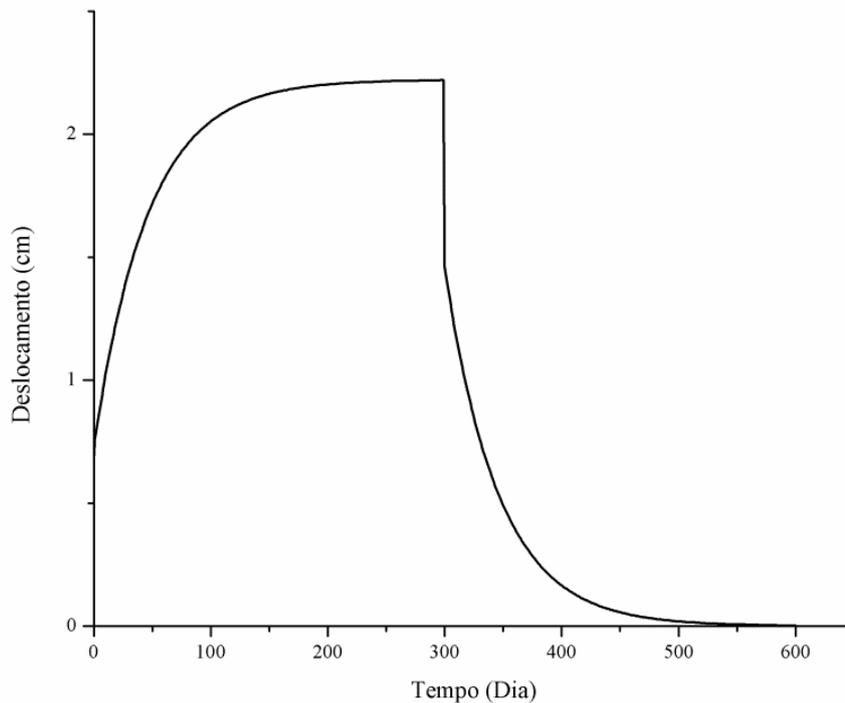


Figura 3.20 Histórico de deslocamentos para o ponto central da face superior da fissura – Modelo de Boltzmann (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

As tensões totais são independentes do tempo, entretanto, suas parcelas variam entre si. É possível notar que no tempo  $t=300$  dias, a estrutura sofre descarregamento, e a partir daí o material recupera seu estado inicial. Este fato pode ser confirmado na Figura 3.20 que mostra a fase de recuperação da abertura da fissura, fazendo com que suas faces ao final de 600 dias se fechem.

Outro aspecto de interesse, é que quando o material sofre o descarregamento, há uma recuperação instantânea característica do modelo viscoelástico de Boltzmann. A Figura 3.20 mostra que as respostas do material quando há descontinuidade no carregamento, na realidade se somam, e ilustram o conhecido princípio da superposição de Boltzmann, sobre o qual se apoia a teoria da viscoelasticidade linear.

O Modelo de Maxwell foi aplicado para a mesma situação de carregamento e descarregamento mostrado na Figura 3.18. Os parâmetros materiais foram mantidos, exceto  $E_2$ , que não é necessário no modelo de Maxwell. Utilizando o princípio da correspondência, a resposta analítica para o deslocamento vertical do ponto central da face superior da fissura dada pela expressão (3.53). Os resultados obtidos com a formulação proposta são mostrados na Figura 3.21.

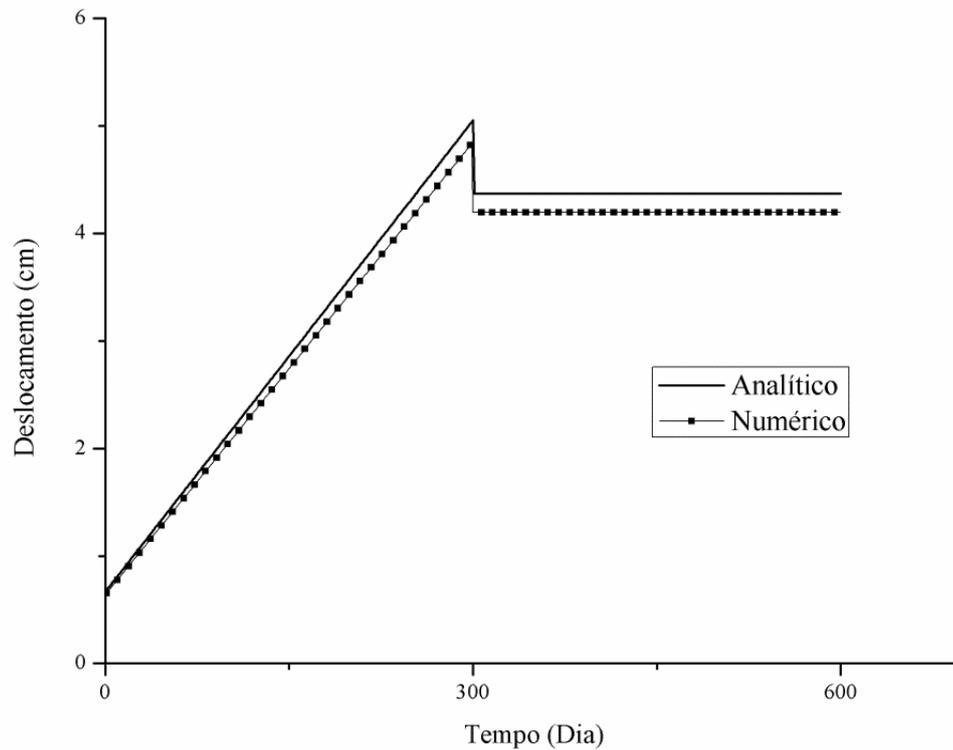


Figura 3.21 Histórico de deslocamentos para o ponto central da face superior da fissura – Modelo de Maxwell (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

$$y(t) = 2aP \frac{(1 - \nu^2)}{E} \left( 1 + \frac{t}{\gamma} \right) H(t) \quad (3.53)$$

Seguindo a mesma tendência do caso anterior, o modelo numérico apresenta-se mais rígido. Este resultado é esperado uma vez que se busca representar conjuntos infinitos de graus de liberdade por meio de um número finito de pontos discretos.

#### 3.6.4 Exemplo 4 (benchmark 4 – Viga sob flexão por três pontos)

O presente exemplo trata de uma viga de concreto sob flexão em três pontos. A viga possui um entalhe inicial no meio do vão. Os dados geométricos são apresentados em Zhou (1992) e são ilustrados pela Figura 3.22.

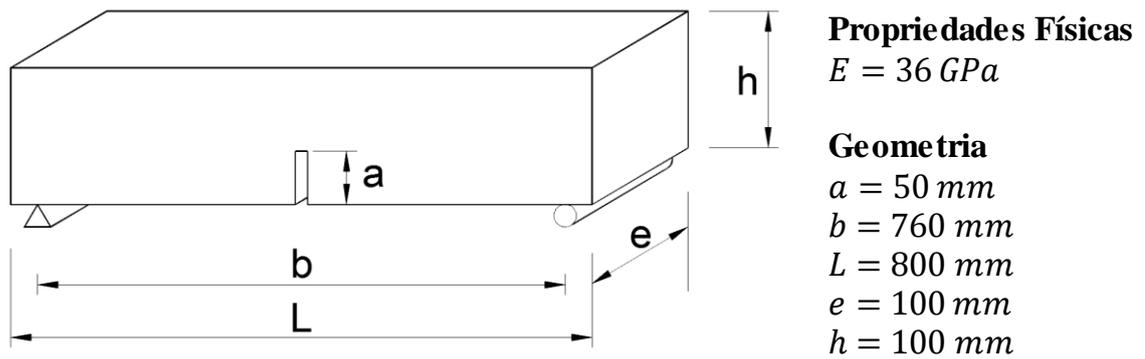


Figura 3.22 Dados do exemplo 4 (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

O material foi admitido como viscoelástico sendo utilizado o modelo de Boltzmann. Adotou-se coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,2$ . O módulo de elasticidade,  $E_2 = 11 \text{ GPa}$ , e o coeficiente,  $\gamma = 450,45 \text{ s}$ , foram obtidos por meio de ajuste não linear. Para a análise, adotou-se intervalos de  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , e tempo total de  $500 \text{ s}$ . A viga é submetida à uma força de superfície constante de  $2,38 \text{ N/mm}^2$  localizado no centro da face superior (estendendo-se por  $40 \text{ mm}$ ). A malha de contorno é composta por 42 elementos de contorno cúbicos. Os valores de CMOD foram tomados no meio do vão, nas faces inferiores do entalhe. Os valores são mostrados pela Figura 3.23.

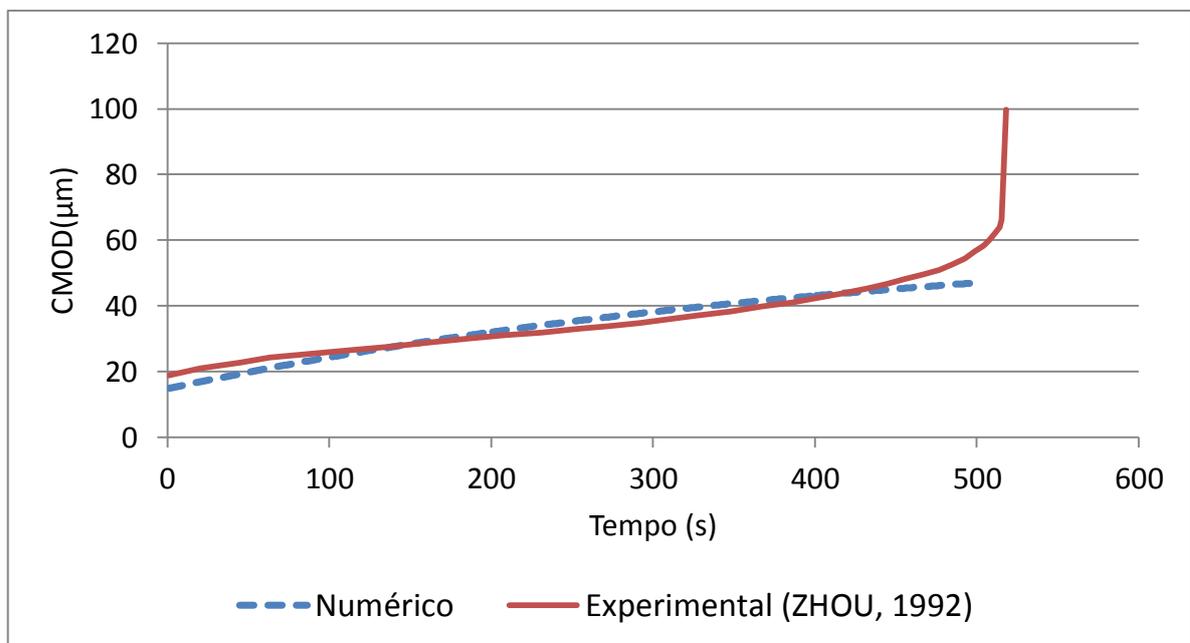


Figura 3.23 Histórico de abertura do entalhe inicial (CMOD) (OLIVEIRA; LEONEL, 2014)

Nota-se que, inicialmente, o modelo apresenta-se mais rígido que o experimental conforme esperado. Entretanto é possível obter parâmetros do modelo viscoelástico que representem com maior fidelidade o comportamento real, especialmente nas idades iniciais. Este fato representa um avanço na descrição do sólido quando submetido a um regime de fraturamento dependente do tempo.

Observe que ocorre uma mudança na concavidade da curva experimental em torno de 250s. Este comportamento, em princípio, pode estar ligado ao fato de ocorrer a propagação da fissura de maneira quase frágil. Para investigar esta hipótese, é necessário o desenvolvimento de um modelo viscocoativo a partir de modelos da Mecânica da Fratura Viscoelástica Não Linear. A fim de manter a consistência, a lei coativa pode ser proposta nos moldes de históricos de tensões, em que a abertura de fissura seja dependente do tempo. Estudos realizados por Bazant e Li (1997), Li e Bazant (1997) reforçam essa ideia.

Se confirmada esta hipótese, o modelo numérico pode ser empregado para previsão de ruptura de materiais que estejam sujeitos a fissuras discretas, especialmente em casos de investigação de integridade estrutural. Outra aplicação de interesse refere-se a casos de solitação em regime de fadiga.

### **3.6.5 Exemplo 5 (Painel Sanduíche)**

A estrutura a seguir ilustra a versatilidade da formulação exposta neste capítulo para analisar domínios planos heterogêneos. O painel sanduíche em balanço é formado por três materiais distintos. No ponto médio da face superior de cada domínio existe uma fissura inicial. O conjunto é solicitado por uma força vertical de variação parabólica, com resultante indicada, em uma das faces livres. As informações sobre geometria e carregamento podem ser encontradas na Figura 3.24. A malha de contorno é composta por 47 elementos cúbicos. Cada um dos domínios tem características próprias, e será simulado com modelo material particular. A Tabela 3.1 resume os parâmetros considerados para cada modelo.

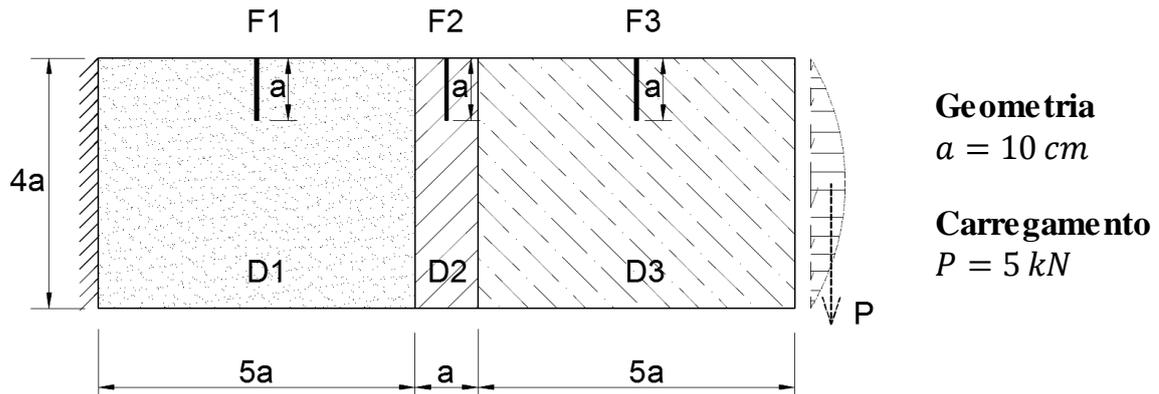


Figura 3.24 Painel sanduíche (OLIVEIRA; LEONEL, 2016a)

Tabela 3.1 Parâmetros materiais (OLIVEIRA; LEONEL, 2016a)

Domínio	Modelo	$E_1$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$E_2$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\nu$	$\gamma$ (dias)
D1	Boltzmann	10000	5000	0,22	30
D2	Hooke	22000	-	0,20	-
D3	Kelvin	30000	-	0,15	45

Com a intenção de monitorar a abertura das fissuras F1, F2 e F3, a análise foi efetuada para um horizonte de 300 dias tomando respostas em intervalos regulares de 1 dia. Os resultados obtidos são mostrados pela Figura 3.25. É possível notar que as fissuras apresentam aberturas conforme esperado fisicamente. Além disso, nota-se o comportamento independente dos modelos constitutivos viscoelásticos, que constituem o sólido em análise. Note que a união dos diferentes domínios ocorre pelo atendimento das condições de equilíbrio e compatibilidade na interface.

A Figura 3.26 ilustra de maneira qualitativa o comportamento das tensões cisalhantes para um ponto interno localizado no centro geométrico do domínio D3. O termo qualitativo, neste contexto, significa que embora os valores estacionários das componentes cisalhantes ( $\tau_{xy}$ ) variem continuamente no domínio, a forma geral dos históricos é a mesma. Esta observação continua válida para as demais componentes de tensão. Mostra-se a evolução das componentes viscosa e elástica bem como o valor constante da tensão total.

Convém assinalar que a formulação aqui apresentada evidencia sua estabilidade e potencialidade para investigações numéricas de estruturas constituídas de material viscoelástico.

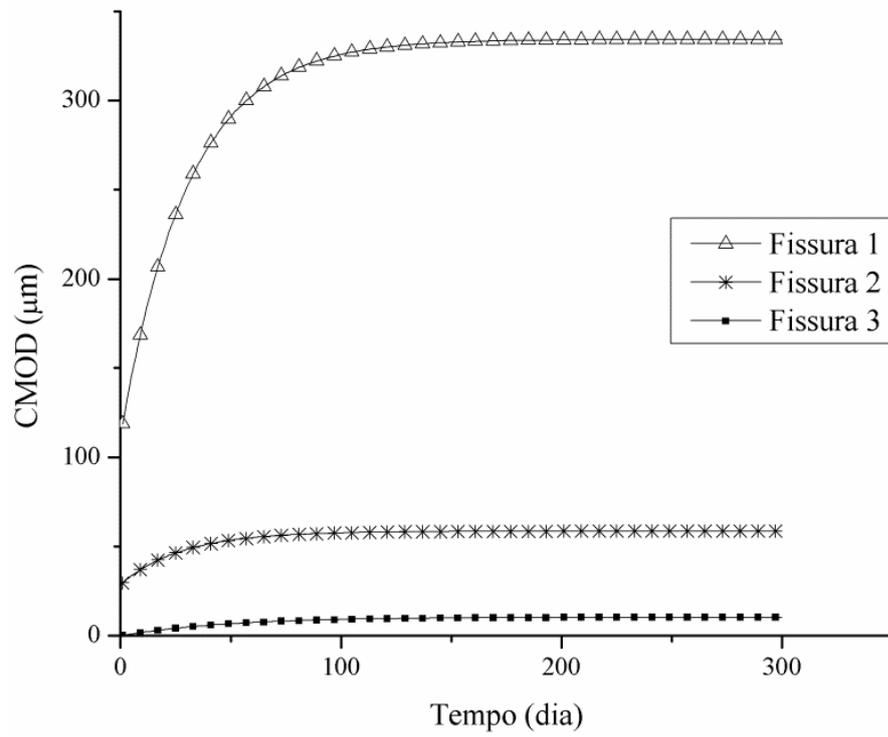


Figura 3.25 Histórico de aberturas das fissuras (OLIVEIRA; LEONEL, 2016a)

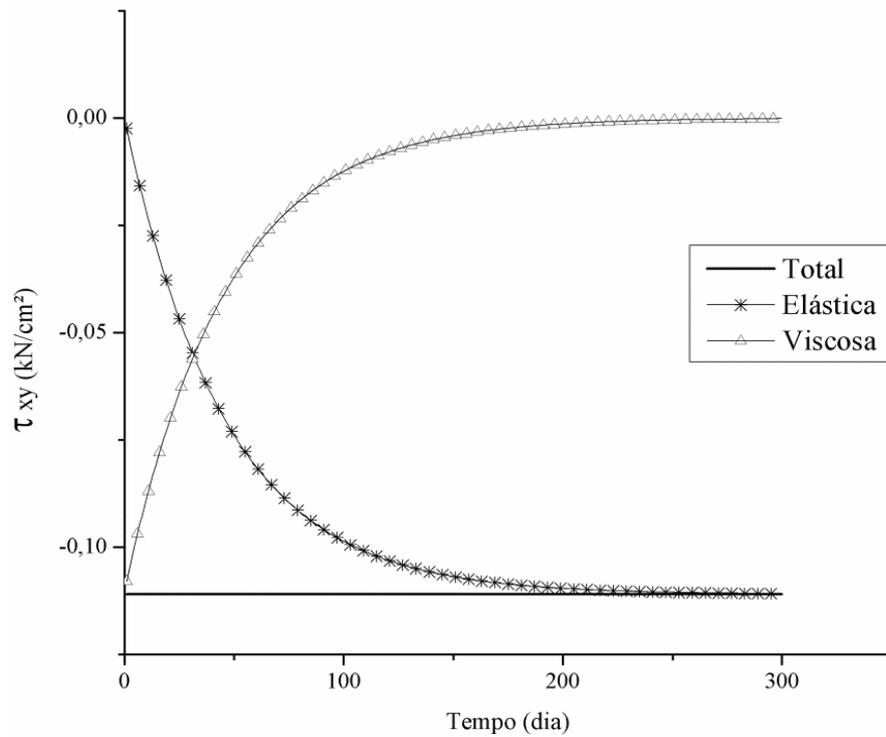


Figura 3.26 Histórico de tensões cisalhantes (OLIVEIRA; LEONEL, 2016a)

## 4 ESTIMATIVA DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL LEVANDO EM CONSIDERAÇÃO AS VARIABILIDADES ASSOCIADAS

No capítulo anterior, apresentou-se uma metodologia que pode ser seguida para se estimar o comportamento a longo prazo de estruturas constituídas de materiais viscoelásticos. Note que a geometria da estrutura foi admitida ser completamente determinada. Entretanto, em estruturas reais, essa hipótese nem sempre se verifica. Tome como exemplo estruturas civis, como edifícios ou pontes moldadas no local. A prática de engenharia mostra que raramente a geometria estrutural executada corresponde exatamente àquela do modelo utilizado na fase de projeto. Existem variações geométricas que podem influenciar o comportamento global e ocasionar esforços não previstos no projeto inicial.

A presente seção se dedica então a responder outra questão que se aproxima bastante da realidade das construções civis. Considere uma estrutura constituída de concreto, que reconhecidamente manifesta fluência. Sabe-se que os parâmetros materiais não são deterministas. Considere que o carregamento não possa ser estimado com certeza absoluta. Admita que a geometria não possa ser executada exatamente como idealizada, devido às limitações inerentes ao processo construtivo. Consequentemente, existe a possibilidade da estrutura não se comportar da maneira esperada. A pergunta que cabe é: Como quantificar essa possibilidade? Uma vez quantificada, será ela relevante? Como utilizar esta informação, ainda na fase de projeto, para estimar a segurança desta estrutura em longo prazo? Existem outras incertezas associadas que merecem atenção?

Para responder a estas perguntas utilizando o MEC, será necessário ampliar o modelo computacional apresentado no capítulo anterior. Serão apresentados novos conceitos vindos de outras disciplinas, e um exemplo prático de aplicação ao final.

### 4.1 Revisão Bibliográfica

A fluência desempenha um papel importante no estado de serviço das estruturas de concreto, especialmente em casos de protensão. Estimativas grosseiras de deformações de

fluência levam a consequências indesejáveis para projetistas, construtores, proprietários, usuários, seguradoras, etc. Apesar disso, não são numerosos os estudos envolvendo integridade, durabilidade e confiabilidade estrutural, juntamente com efeitos dependentes do tempo. Note que o MEC é intrinsecamente formulado em termos de contornos. Isto o torna propício para formulações envolvendo a variabilidade geométrica e carregamentos. Esta característica motiva o estudo realizado no presente capítulo.

A engenharia estrutural, em essência, pode ser vista como uma disciplina que aplica as leis da Mecânica para fins da concepção segura de sistemas estruturais. Esta tarefa exige necessariamente a confecção de modelos de predição de deslocamentos, deformações e tensões. Normalmente esses modelos estruturais se baseiam em variáveis que representam as propriedades de resistência, as dimensões físicas, e as forças envolvidas. Estas variáveis não podem ser conhecidas com certeza absoluta. É possível notar na bibliografia a clara distinção entre pelo menos três vertentes de pesquisa. Jordan (1980), Chateauneuf, Raphael e Pitti (2014) se enquadram em linhas que investigam a influência das incertezas nas *propriedades de resistência*. Philpot, Fridley e Rosowsky (1994), Lima et al (2014) se enquadram em investigações envolvendo incertezas no *carregamento*. O presente capítulo se dedica aos efeitos das incertezas relacionadas à *geometria* física. Note que esta divisão tem aqui o caráter didático de localização do tema proposto.

Nesta tese, o fenômeno da fluência é admitido ocorrer à temperatura e umidade constantes. Segundo Jordan (1980), as variações características de processos estocásticos observáveis em experimentos de fluência se devem às variações de umidade e temperatura do concreto. Além disso, uma alternativa viável para simular as deformações reversíveis de fluência seria utilizar o produto entre funções de envelhecimento e duração do carregamento. É válido lembrar que existem outras maneiras de modelar as deformações reversíveis de fluência, sendo a formulação do capítulo anterior uma delas.

Philpot et al (1994) apresenta um estudo envolvendo os efeitos de carregamentos aleatórios em vigas de madeira. A madeira foi admitida como material que segue o modelo reológico de Burges (uma extensão do modelo de Boltzmann). Mantendo as demais características determinísticas, os autores propõem uma maneira de gerar históricos de carregamento aleatórios, e em seguida calcular a probabilidade de ocorrer deslocamentos excessivos. Os autores sugerem que métodos de simulação, como Monte Carlo, são mais adequados para calcular probabilidade de falha em sistemas compostos de materiais

viscoelásticos. Além disto, fica clara a utilidade da propriedade mostrada no terceiro exemplo do Capítulo 3 da presente tese, que permite facilmente a inserção de fases de carregamento. Note-se que uma maneira de gerar históricos de carregamento é gerar uma sucessão de carregamentos constantes ao longo de intervalos de tempo. Esta possibilidade fica garantida pelo princípio da superposição de Boltzmann. O trabalho desses autores inspirou a escolha pelo método de Monte Carlo para este estudo, conforme será visto adiante. Em seus estudos, Philpot et al (1994), utilizaram modelos analíticos simplificados que permitem a simulação de Monte Carlo de maneira direta. Como o caso de aplicação do presente capítulo não pode ser reduzido a um modelo analítico, outra técnica numérica será associada; a chamada Superfície de Resposta.

A consideração dos efeitos de fluência em estruturas civis constituídas de concreto estrutural é uma prática já adotada pelos códigos normativos nacionais e internacionais. Apesar disto, perdas de protensão de estruturas se manifestam como consequência de deformações tardias. Investigações realizadas por Chateauneuf, Raphael e Pitti, (2014) apontam que expressões existentes em códigos normativos podem fornecer deformações que não reproduzem com fidelidade os resultados constatados experimentalmente. Apesar de expressões normativas estimarem com considerável precisão os valores de pequenas deformações, o mesmo não se verifica em idades mais maduras do concreto. A partir de uma extensa base de dados, os autores observam que à medida que o concreto envelhece, ocorre uma dispersão crescente entre os valores verificados e valores estimados de fluência. Os autores então sugerem que um modelo estatístico possa ser utilizado para caracterizar o conjunto de dados, dando origem a um modelo fenomenológico de fluência. A partir do modelo probabilístico de fluência é possível estimar as possíveis perdas de protensão. O estudo mostra que ao se considerar as incertezas envolvidas tanto no modelo matemático, quanto no modelo material, pode-se estimar perdas de protensão (por fluência) mais realistas. Em essência, este capítulo pode ser visto como uma continuação dessa investigação, já que considera os efeitos da variabilidade geométrica nas deformações de longo prazo. Outro diferencial é o uso do MEC, que expande as possibilidades de aplicação ao contrário de modelos analíticos mais restritivos.

Materiais viscoelásticos podem ser utilizados para atenuação de vibrações em painéis sanduíche. Adicionalmente, o uso de materiais viscoelásticos pode ser benéfico sob o ponto de vista da confiabilidade estrutural. Tendo esta premissa em foco, Lima et al (2014) apresentam uma metodologia para calcular a probabilidade de falha de painéis sanduíche

levando em consideração as incertezas associadas ao carregamento. Os autores não consideram as incertezas associadas aos parâmetros materiais, mas sugerem que a influência da temperatura deva ser investigada. A sugestão não é casual. O aumento da temperatura normalmente diminui os efeitos de amortecimento, que pode levar a um decréscimo da confiabilidade do sistema. Os mesmos autores mostram que o critério de dano por fadiga de Sines (originalmente concebido para materiais não amortecidos) pode ser utilizado para calcular a probabilidade de falha em sistemas amortecidos.

O mesmo fenômeno, embora em um contexto diferente, tem sido explorado para estruturas reticulares, como edifícios altos e pontes. As solicitações de origem natural como ventos e terremotos são causas constantes de preocupação. Essas solicitações podem provocar vibrações excessivas levando à deterioração prematura da estrutura. Para atenuar as vibrações, é comum a instalação de amortecedores lineares viscoelásticos para dissipação de energia. Ultimamente, autores (XU; LI, 2016) têm proposto a utilização de Cálculo Fracionário para a modelagem dos dispositivos de amortecimento. A intenção é capturar a resposta dinâmica estocástica global do sistema de maneira mais direta com alto grau de acurácia. As investigações numéricas confirmam o fato de que a instalação de amortecedores melhora a confiabilidade no desempenho da estrutura em situação de sismos.

Em estudos recentes, Wu et al, (2016a) apresentam uma técnica híbrida para investigar respostas estruturais dependentes do tempo considerando incertezas. O estudo foi concentrado em peças tubulares de aço preenchidas com concreto, muito comuns em pontes de pequeno porte modernas. Os autores sugerem a utilização de modelos probabilísticos para a modelagem de variáveis que possuem comportamentos estatísticos reconhecidos, como por exemplo, o módulo de elasticidade longitudinal. Efeitos dependentes do tempo como fluência e retração, são modelados por *parâmetros de intervalo*, uma variável não probabilística, porém capaz de modelar incertezas. Por meio de uma *Análise Intervalar* (“*Interval Analysis*”) é possível determinar limites inferior e superior para as medidas de primeiro e segundo momento estatístico. Os mesmos autores (WU et al, 2016b) aplicam esta técnica para a previsão de deformações por fluência, mostrando ser possível obter o pior e melhor cenário em um determinado instante de carregamento. Adicionalmente, a técnica híbrida mostra-se mais eficiente computacionalmente se comparada às técnicas estocásticas clássicas.

Modelos probabilísticos não paramétricos também têm encontrado aplicação em análise viscoelástica. Capillon, Descelier e Soize (2016) propuseram um algoritmo

computacional estocástico de ordem reduzida utilizando probabilidade não paramétrica. A redução de ordem é uma técnica empregada para aumentar o desempenho de cálculo computacional minimizando perdas de acurácia. Uma característica que merece atenção é que os autores propuseram um critério (restrição) de causalidade do sistema no domínio das frequências. A *causalidade* é um princípio de sistemas dinâmicos que afirma que ações futuras não podem afetar a resposta presente. Esta equação de compatibilidade é responsável por interligar estatisticamente as matrizes de rigidez e amortecimento do sistema, envolvendo transformadas de Hilbert. Os autores mostram que as incertezas associadas à matriz de amortecimento influenciam de maneira importante a dispersão da matriz de rigidez. Os resultados evidenciam a relevância em se construir modelos probabilísticos que levem em consideração o princípio da causalidade. Não foram encontrados trabalhos que aplicam o MEC para o estudo de efeitos provocados pela variabilidade geométrica de peças estruturais.

A seguir, uma breve descrição de tópicos de teoria de Probabilidades e Confiabilidade. Estas duas disciplinas são combinadas de forma a compor o ferramental necessário para estudar os efeitos das incertezas no modelo mecânico de Elementos de Contorno. A fim de aumentar a eficiência computacional, a metamodelagem por meio de Superfície de Resposta será utilizada. Logo após, apresenta-se o algoritmo computacional desenvolvido para solucionar as questões postas na introdução deste capítulo. Ao mesmo tempo, um exemplo inspirado numa obra de engenharia real servirá para ilustrar a utilização deste algoritmo, bem como algumas análises possíveis.

## **4.2 Elementos de Teoria das Probabilidades**

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos adotados na confecção do modelo probabilístico. As incertezas serão modeladas utilizando as técnicas frequentistas clássicas. Mais detalhes podem ser encontrados em textos como Ang e Tang (1975), Nowak e Collins (2000), Fontes (2009), Milik (1993), Choi, Grandhi e Canfield (2007).

### 4.2.1 Espaço amostral e evento

Um *experimento* pode ser entendido como a execução de um teste (em amplo sentido). Alguns exemplos de experimentos são: lançamento de moedas, lançamentos de dados, escolha de um número real entre zero e um, medida da altura de uma viga de concreto, ou ainda, determinação de resistência à compressão do concreto.

O conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento é o *espaço amostral*, aqui denotado por  $EA$ . Por exemplo, no caso do lançamento da moeda os resultados possíveis são apenas dois, cara ( $K$ ), ou coroa ( $C$ ), logo,  $EA = \{K, C\}$ . Podem ocorrer casos em que os possíveis resultados são quaisquer números num intervalo numérico. Se o experimento for a escolha de um número real entre zero e um, então os possíveis valores são todos os números reais deste intervalo, logo,  $EA = [0,1]$ .

Um subconjunto  $A$  do espaço amostral é chamado de *evento*. No caso da moeda, um exemplo seria o evento cara,  $A = \{K\} \subset EA$ . Ao lançar a moeda, caso saia cara, o evento ocorreu. Caso saia coroa, o evento não ocorreu. Quando o espaço amostral é uma fração da reta real, os eventos são definidos em forma de intervalos. Por exemplo, no caso do espaço  $EA = [0,1]$ , seja o evento  $A = [0, 1/2] \subset EA$ . Escolha  $x \in A \subset \mathbb{R}$ . Nesse caso diz-se que o evento  $A$  ocorreu.

O *espaço de eventos* ou *classe* é definido como o conjunto de eventos que se quer considerar e atribuir probabilidades. É importante que as operações entre eventos desta classe resultem em eventos pertencentes à própria classe. Essas operações são intersecção (ocorrência simultânea), união (ocorrência alternada), complementação (não ocorrência) e diferença. Essas operações podem ser enxergadas como as operações usuais em Teoria dos Conjuntos seguindo a mesma notação inclusive.

### 4.2.2 Função probabilidade

Dados um espaço amostral  $EA$  e uma classe de eventos  $EE$ , uma probabilidade é uma função  $\mathbb{P}: EE \rightarrow [0,1]$  satisfazendo as seguintes propriedades (axiomas):

- $\mathbb{P}(EA) = 1$ , o evento certo tem probabilidade 1;

- Dados dois eventos B e C disjuntos, então;

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \quad (4.1)$$

O *modelo probabilístico* de um experimento aleatório é formado pela tripla: um espaço amostral, uma classe de eventos e uma função de probabilidade.

### 4.2.3 Variável aleatória

Variável aleatória (VA) é uma função que associa números reais a eventos. Vide esquema da Figura 4.1. Normalmente uma VA é representada por uma letra maiúscula X. Um número x é atribuído a cada realização representando a magnitude do acontecimento. Quando a VA pode assumir apenas valores discretos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , dá-se o nome *VA Discreta*. Por outro lado, se a VA puder assumir qualquer valor real dentro de intervalo especificado, tem-se uma *VA Contínua*.

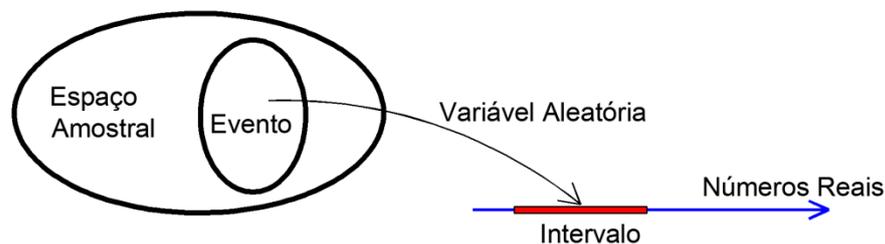


Figura 4.1 Representação esquemática de uma VA como função. Fonte: Nowak e Collins (2000)

Quando se define a VA, na realidade o interesse é por sua *distribuição de probabilidades*. A razão é que a distribuição de probabilidades permite calcular probabilidades dos diversos eventos envolvendo tais variáveis. Por exemplo, tome uma VA discreta. Caso se conheça as probabilidades de todos os eventos unitários, então, é possível, pela propriedade aditiva, obter eventos compostos. Um caso comum envolvendo esta noção é quando se admite eventos unitários equiprováveis. Nesse caso é possível calcular as probabilidades de interesse contando o número de elementos no conjunto dos eventos, utilizando *Teoria da Contagem e Análise Combinatória*.

Caso se tenha VA contínuas, não é suficiente definir probabilidades para eventos unitários. Eventos unitários de VA contínua têm probabilidade nula. Para caracterizar a distribuição de probabilidades de X é suficiente ter as probabilidades dos eventos definidos

em intervalos arbitrários da reta. As probabilidades dos eventos são dadas por *funções de densidade de probabilidade* (PDF)  $f_X$ . Isto é, existe uma função  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  tal que;

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4.2)$$

para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ .

Note ainda que existe a definição de *função de distribuição acumulada* (FDA), de modo que  $F = F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x)$  é a probabilidade de que  $X$  assumira valores menores ou iguais a  $x$ , ou seja:

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (4.3)$$

#### 4.2.4 Modelos para VA contínuas

Existem vários modelos disponíveis na literatura. Entretanto, aqui optou-se por apresentar apenas o modelo Normal (também chamado Gaussiano), já que será este o modelo adotado para representar as VA's da presente tese. Considere uma VA representada por  $X$ , sua PDF é tal que:

$$f_X(x) = \frac{1}{s_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{s_X} \right)^2 \right], x \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

em que  $\mu_X \in \mathbb{R}$  e  $s_X > 0$  são parâmetros. Uma maneira sintética de se referir ao fato que  $X$  apresenta distribuição normal com parâmetros  $\mu$  e  $s$  é utilizar a notação:  $X \sim N(\mu, s)$ . Quando os parâmetros são  $\mu_X = 0$  e  $s_X = 1$ , a distribuição recebe um nome adicional *Padrão*. Veja Figura 4.2 a representação gráfica da PDF *Normal Padrão*.

Não existe expressão analítica para o cálculo da probabilidade:

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx = \int_a^b \frac{1}{s_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{s_X} \right)^2 \right] dx \quad (4.5)$$

Entretanto, é possível obter  $\mathbb{P}(a < X < b)$  por meio de técnicas numéricas ou uso de tabelas.

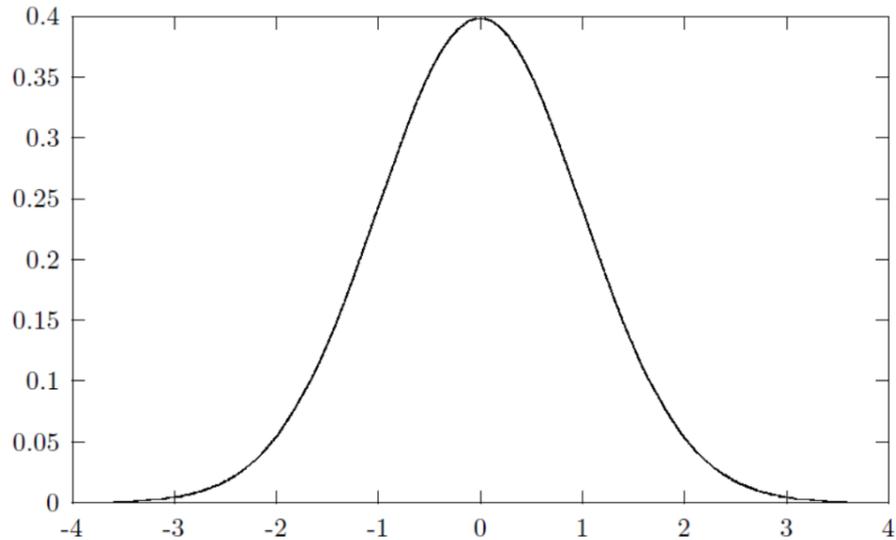


Figura 4.2 Gráfico de  $f_X(x)$ .  $\mu_X = 0$  e  $s_X = 1$

#### 4.2.5 Medidas de centralidade e dispersão

Considere uma VA com nome  $X$  e PDF  $f_X$ . Embora o valor de  $X$  seja incerto, algumas informações podem ser obtidas a partir de  $f_X$  e assim caracterizar  $X$ . Estas informações são matematicamente nomeadas como *medidas*, seja ela de posição (centralidade) ou largura (dispersão). Estão disponíveis na literatura diversas medidas que são utilizadas de acordo com o interesse específico a ser descrito. Aqui, apresentam-se duas medidas de interesse para esta tese, a saber, a média e a variância.

Considerando uma VA contínua, define-se a *média*  $M(X)$  como o centro de massa da distribuição, ou seja:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (4.6)$$

Aplicando este conceito ao caso particular das VA's gaussianas, obtém-se que  $M(X) = \mu_X$ . Isto significa que o parâmetro  $\mu_X$  pode ser interpretado como uma medida de posicionamento da distribuição, e assim viabiliza uma possível comparação entre VA's distintas.

A *variância*  $V(X)$  de uma VA contínua é uma medida que descreve a variabilidade nos valores da distribuição. A variância é definida a partir do *desvio quadrático médio*, ou seja:

$$V(X) = M \left[ (X - M(X))^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f_X(x) dx \quad (4.7)$$

Ao se aplicar a definição de variância ao caso de VA's gaussianas, obtém-se que  $V(X) = s_X^2$ . Tomando-se a raiz quadrada da variância obtém-se o desvio padrão da VA,  $DP(X) = \sqrt{V(X)} = s_X$ . Observe-se que o parâmetro  $s_X$  representa a largura da distribuição. Isto significa que quão maior este valor, maiores serão os desvios (distâncias) em relação à média, logo valores mais dispersos. Como a variância é sempre não negativa, a única forma de ocorrer variância nula é se  $X$  for constante. O mesmo vale para o desvio padrão. É possível a manipulação da equação (4.7) de forma a obter uma fórmula alternativa para o cálculo da variância, a saber;

$$V(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \quad (4.8)$$

### 4.3 Elementos de Teoria de Confiabilidade

Antes de se falar em Análise de Confiabilidade Estrutural, é interessante se definir o que vem a ser segurança e confiabilidade. Uma noção útil para este fim é o conceito de Estado Limite que será brevemente apresentado. Logo a seguir algumas técnicas de Confiabilidade serão descritas, em particular aquelas de interesse para esta tese.

#### 4.3.1 Falha e Estados Limite

Embora pareça simples, o termo “falha” pode ter diferentes significados. Poder-se-ia cogitar que uma estrutura falhe quando não desempenha sua função conforme esperado. Entretanto, esta definição é vaga, pois não foi especificado qual é a função da estrutura. Para ilustrar este ponto, considere uma viga de aço biapoiada, com carregamento distribuído e seção transversal de paredes finas. Pode-se pensar que a falha ocorre quando a deflexão máxima excede um valor crítico. Mas, a viga de aço pode “falhar” por formação de rótula plástica, ou flambagem local da alma, ou mesa. Portanto, é preciso que o termo falha seja claramente definido antes de se proceder a uma análise probabilística.

O conceito de estado limite é usado para definir falha no contexto da Confiabilidade Estrutural. Um *estado limite* é a fronteira entre o comportamento desejado e o não desejado de uma estrutura. Esta fronteira é frequentemente representada por uma função matemática, isto é, a *função de estado limite*, ou *função de desempenho*. Por exemplo, pode-se dizer que uma ponte falha quando não puder mais ser usada para o tráfego de veículos. Este estado indesejado pode ocorrer devido a vários modos de falha: fissuração, corrosão, deslocamentos excessivos, vibração excessiva, flambagem local, esforços solicitantes excessivos, entre outros. Na abordagem tradicional, cada modo de falha é considerado separadamente, e cada modo é definido utilizando o conceito de estado limite.

Em análises de Confiabilidade estrutural, identificam-se dois tipos de estados limite (NOWAK e COLLINS, 2000). O primeiro deles é o *Estado Limite Último*. Este estado é ligado à perda de capacidade portante da estrutura. Exemplos deste estado limite incluem formação de rótulas plásticas, momentos solicitantes excessivos, esmagamento de bielas comprimidas no concreto, perda de estabilidade, escoamento de armaduras, entre outros. O segundo tipo é o *Estado Limite de Serviço*. Este estado é relacionado à deterioração gradual, conforto do usuário ou perdas de condição de serviço. Não necessariamente estão associados à integridade estrutural. Alguns exemplos são: Deslocamentos excessivos, vibrações excessivas, deformações permanentes, fissuração e fadiga. A fadiga está associada à perda de resistência provocada por esforços repetitivos, com mecanismo de falha ocorrendo geralmente em presença de formação e propagação de fissuras.

A noção clássica de margem de segurança serve de inspiração para a definição de uma equação de estado limite. Considere que  $R$  represente a resistência global da estrutura, enquanto que  $Q$  representa os efeitos provocados pelos carregamentos. A função de estado limite definida com estes termos é a seguinte:

$$G(R, Q) = R - Q \quad (4.9)$$

Note que a falha se concretiza toda vez em que os efeitos dos carregamentos forem superiores à capacidade de resistência da estrutura. O estado limite correspondente à fronteira entre os desempenhos desejado e indesejado, e ocorre quando  $G(R, Q) = 0$ . Caso  $G(R, Q) > 0$ , a estrutura é segura (desempenho esperado); se  $G(R, Q) < 0$ , a estrutura não é segura (desempenho indesejado). A probabilidade de falha,  $P_f$ , é definida como a probabilidade de

que o comportamento indesejado ocorra. Matematicamente, a probabilidade de falha pode ser expressa como:

$$P_f = \mathbb{P}(R - Q < 0) = \mathbb{P}(G < 0) \quad (4.10)$$

Caso se tenha um conjunto de VA's representado genericamente por  $\mathbf{Y}$ , uma maneira alternativa de escrever a expressão da probabilidade de falha é:

$$P_f = \mathbb{P}[G(\mathbf{Y}) < 0] = \int_{G(\mathbf{Y}) \leq 0} f_Y(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.11)$$

No integrando da equação (4.11), o termo  $f_Y$  é a PDF conjunta. Embora a equação (4.11) pareça simples, em geral não se consegue avaliar esta integral de forma direta. A razão é que frequentemente a função  $f_Y$  não é conhecida. Além disso, o domínio de falha (região em que  $G(\mathbf{Y}) \leq 0$ ) apresenta fronteira não linear. A integração requer técnicas especiais que garantam elevada precisão. Portanto, na prática, a probabilidade de falha é calculada indiretamente utilizando outros procedimentos como as *Técnicas de Aproximação* e as *Técnicas de Simulação*.

### 4.3.2 A Técnica de Simulação de Monte Carlo

Técnicas de Simulação são vantajosas do ponto de vista teórico, pois permitem a consideração direta das não linearidades envolvidas tanto no modelo mecânico como na função de estado limite. A literatura apresenta diversas técnicas de simulação. A mais simples delas é o método de Monte Carlo, que será utilizado para calcular a probabilidade de falha nesta tese. A metodologia da técnica é a seguinte:

**Etapa 1:** Selecione um número real aleatório  $y^{(r)}$  no intervalo  $[0, 1]$ . Considere  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$  o vetor contendo as variáveis aleatórias de projeto. Como  $\mathbf{X}$  é conhecido a priori, suas funções de probabilidade acumulada,  $F_{X_i}$ , também o são. Portanto pode-se obter o vetor de amostra  $\mathbf{x}^{(r)} = (x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_m^{(r)})$ , que representa o vetor  $\mathbf{X}$ , fazendo:

$$x_i^{(r)} = F_{X_i}^{-1}(y^{(r)}) \quad (4.12)$$

**Etapa 2:** Avaliação da falha,  $G(x^{(r)}) \leq 0$ , ou não-falha,  $G(x^{(r)}) > 0$ , para cada amostra.  $G(x^{(r)})$  representa uma realização da variável aleatória  $G(\mathbf{X})$ .

**Etapa 3:** Estima-se a probabilidade de falha, por meio da Esperança de Falha, após  $N_t$  simulações, em que:

$$P_f = \frac{1}{N_t} \sum_{r=1}^{N_t} I[G(x^{(r)}) \leq 0] \quad (4.13)$$

A função indicadora  $I[G(x^{(r)}) \leq 0]$  é tal que:

$$I[G(x^{(r)})] = \begin{cases} 1, & \text{se } G(x^{(r)}) \leq 0 \\ 0, & \text{se } G(x^{(r)}) > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

O número  $P_f$  obtido é preciso quando  $N$  tende ao infinito. Não existem regras restritas para a definição do número necessário de simulações a serem realizadas. Na prática, segundo El Hami e Radi (2013), o número mínimo de amostras necessário para obter uma probabilidade de  $10^{-n}$ , para um grau de confiança de 95% e erro conhecido de 20% nos resultados, situa-se entre  $10^{n+2}$  e  $10^{n+3}$ . Quanto maior o número  $n$ , mais restritivo se torna este método em termos de tempo de cálculo. A fim de diminuir o tempo total de processamento numérico, torna-se necessário o uso de técnicas auxiliares que permitam obter o comportamento mecânico de forma mais imediata. Uma destas técnicas é a chamada metamodelagem que será descrita a seguir.

#### 4.4 Metamodelagem por Superfície de Resposta

A solução de diversos problemas de engenharia requer complexas análises numéricas e modelagens computacionais. Dependendo da complexidade dos modelos computacionais pode-se levar um tempo restritivo para o seu processamento e análise. Por vezes, é possível se obter estimativas precisas por meio de modelos secundários mais simples. Na prática, um

modelo de modelo, ou também conhecido como *metamodelo*. O processo de obtenção do metamodelo é chamado de *metamodelagem*. Existem diferentes técnicas, como por exemplo, Redes Neurais, Kriging, Regressão Multivariada Adaptativa, entre outras, que são viáveis em casos específicos (WANG e SHAN, 2006). Na presente tese, o Método da Superfície de Resposta (MSR) será utilizado.

O MSR é uma estratégia de modelagem estatística útil para analisar problemas em que várias variáveis independentes influenciam a variável dependente. As variáveis independentes recebem o nome de *variáveis de entrada*, enquanto a variável dependente é chamada *resposta*. Embora a ideia central do MSR esteja contida na clássica teoria de Regressão, o estudo sistemático deste método começou a receber maior atenção a partir do trabalho de Box e Wilson (1951). Neste trabalho os autores discutem procedimentos para encontrar a vizinhança de um ponto estacionário e como aí ajustar um polinômio de segundo grau. A partir de então a técnica vem sendo aperfeiçoada com a escolha mais adequada da localização dos pontos de ajuste da curva. Nesta tese, será utilizada a superfície de resposta de segunda ordem expressa por:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i \leq j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon \quad (4.15)$$

Na equação (4.15), o valor  $k$  representa o número de variáveis a serem estudadas,  $x_i$  é o valor de cada realização da correspondente VA.  $\beta_i$  e  $\beta_{ij}$  são coeficientes reais a serem determinados a partir dos experimentos numéricos utilizando regressão não linear. O parâmetro  $\epsilon$  indica o erro cometido ao aproximar a resposta real por meio desta expressão. Admite-se que a distribuição de  $\epsilon$  seja gaussiana com média nula. (NATH Das, 2014)

#### 4.5 Descrição do modelo computacional

Os conceitos necessários para a confecção do modelo computacional já foram apresentados. Agora será apresentada a metodologia utilizada para concatenar todos os elementos a fim de responder à questão posta no início do presente capítulo. Para tanto, como exemplo, será utilizada uma estrutura de escolha arbitrária.

#### 4.5.1 Apresentação da Estrutura

A Linha de Grande Velocidade (LGV) do leste europeu é uma linha férrea de alta velocidade que deve ligar o departamento de Sena e Marne ao departamento do Baixo Reno, ambos na França. A linha deve acelerar as relações entre o nordeste do país e a capital Paris. A velocidade comercial da linha é de 320 km/h, o que a faz a linha em serviço mais rápida do mundo. O viaduto de Landbach faz parte do quadragésimo lote da décima parte da LGV, e servirá de inspiração para a aplicação dos conceitos apresentados neste capítulo. A largura total do viaduto é de 500m sobre o vale de Landbach (LAMBERT, 2010). Considere a geometria ilustrada na Figura 4.3, em que se representa um esquema típico que compõe o viaduto em questão. Embora a variação da seção ao longo da mísula seja originalmente parabólica, aqui será considerada linear. O viaduto é tridimensional com seção transversal do tipo caixão. Aqui será adotada uma simplificação geométrica tomando uma seção transversal que passe por uma das longarinas, onde a hipótese de estado plano de tensões é admissível. Os carregamentos ilustrados são estimativos apenas para fins deste exemplo, e não correspondem em nenhuma hipótese aos carregamentos de projeto efetivamente utilizados. Note que as condições de simetria podem ser exploradas. Sendo assim, apenas o trecho entre os eixos L2 e L3 foi discretizado, resultando em uma malha de contorno composta por 74 elementos de ordem cúbica.

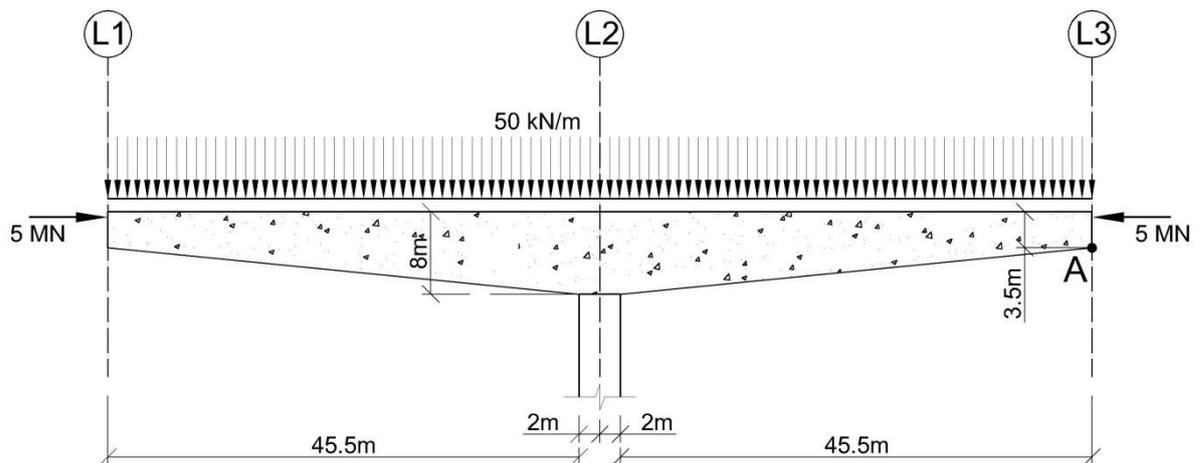


Figura 4.3 Esquema geométrico modificado típico do viaduto de Landbach

#### 4.5.2 Definição dos parâmetros do modelo material

O material constituinte do viaduto é o concreto. Normalmente as informações dos parâmetros materiais são obtidas a partir de ensaios laboratoriais. O procedimento é simples, e baseia-se no ajuste dos parâmetros do modelo material de modo que reproduzam com o menor desvio possível os resultados observados. No presente exemplo, foi utilizada a base de dados coletada por Wassim (2002) por conter observações de deformações ao longo do tempo do concreto. O modelo de fluência de Boltzmann foi o escolhido por capturar uma parcela de deformação imediata e posterior aumento de deformações, comportamento típico do concreto. Apresenta-se na Figura 4.4 o resultado obtido ao fazer o ajuste não linear do modelo de Boltzmann aos resultados experimentais coletados. Observa-se uma boa concordância entre os dados experimentais e o modelo numérico. Os parâmetros obtidos a partir do ajuste são fornecidos na Tabela 4.1. Os desvios padrão obtidos são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.1 Parâmetros de Boltzmann resultantes do ajuste

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$\gamma$ (dias)
22,30	5,60	450,00

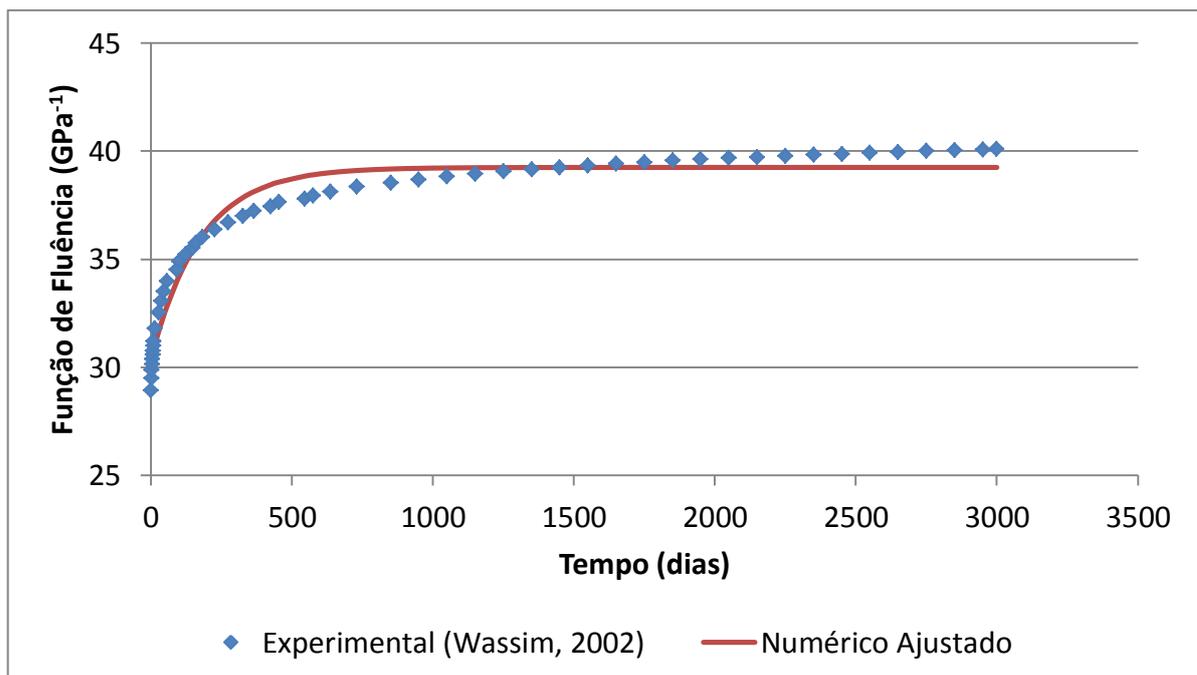


Figura 4.4 Comparação entre os resultados experimental e numérico ajustado

### 4.5.3 Definição do problema de Confiabilidade

As incertezas sobre os parâmetros materiais, os carregamentos e a geometria serão considerados simultaneamente. Embora esta escolha seja livre e dependa do analista, aqui a título de exemplo, serão considerados: os parâmetros materiais de Boltzmann,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $\gamma$ , o carregamento estimado de serviço, a força nos cabos de protensão, e por fim, a altura da viga no Eixo L3 (vide Figura 4.3). Todas as variáveis seguem distribuição gaussiana com média e desvio padrão indicados na Tabela 4.2. Sabe-se que deslocamentos demasiados em junções de mísulas podem ocasionar fissuras no pavimento que podem acelerar os processos de degradação. Considere que se queira saber qual a probabilidade dos deslocamentos serem superiores a 20% do deslocamento médio previsto. O local de interesse será o ponto A (vide Figura 4.3). Considere um horizonte de operação de dez anos. A equação de estado limite pode ser escrita como:

$$g(\mathbf{X}) = 1,2 - u(\mathbf{X})/M_{10}[u(\mathbf{X})] \quad (4.16)$$

Tabela 4.2 Valores adotados para as VA's gaussianas

VA gaussiana	Valor médio	Desvio Padrão
$E_1$	22,30 GPa	6,7 GPa
$E_2$	5,60 GPa	1,7 GPa
$\gamma$	450 dias	120 dias
$Q_1$	50 kN/m	15 kN/m
$Q_2$	5 MN	1 MN
$h_{L3}$	3,5 m	0,70 m

### 4.5.4 Algoritmo proposto

Em termos gerais o algoritmo desenvolvido para este capítulo compõe-se das seguintes etapas:

- Definição da Geometria, Carregamentos e Condições de vinculação. Esta etapa é comumente adotada para fins de estimativa de comportamento estrutural. Vide item 4.5.1;
- Escolha do modelo material. Nesta etapa é importante conhecer os parâmetros do modelo que sejam mais representativos do comportamento global, vide item 4.5.2;
- Escolha das VA's. Etapa em que se inserem as incertezas no modelo computacional. Note que no presente exemplo de estudo, uma das VA's se relaciona à geometria. Isto implica que a cada amostra desta variável, uma nova malha de elementos de contorno deve ser gerada. Vide item 4.5.3;
- Escolha da resposta de interesse. Defina qual a variável de interesse para o estudo. No presente exemplo, utiliza-se o deslocamento esperado ao fim de 10 anos (item 4.5.3);
- Construção da Superfície de Resposta. Vide item 4.4. No presente exemplo foi escolhido um polinômio de segunda ordem. Geram-se as amostras das VA's escolhidas (vetor  $x_i^{(n)}$ ). Para cada amostra é necessário fazer uma análise de elementos de contorno obtendo a resposta  $y^{(n)}$ . Em seguida, faz-se um processo de regressão não linear para encontrar os valores dos coeficientes do polinômio (Equação 4.15). Outra alternativa é substituir os valores de  $y^{(n)}$  na equação (4.16) obtendo  $g^{(n)}$  diretamente. Assim tem-se a superfície de resposta em termos da equação de estado limite;
- Simulação de Monte Carlo. A partir do polinômio definido é possível realizar as simulações conforme item 4.3.2.

Essas etapas podem ser automatizadas para serem executadas sequencialmente utilizando linguagens de programação. Os resultados são apresentados no próximo item.

#### 4.6 Resultados obtidos

A partir do algoritmo descrito no item 4.5.4 obtém-se os resultados a seguir. Cada análise do MEC, considerando a malha apresentada (74 elementos cúbicos para esta

aplicação), leva 65 segundos. As análises probabilísticas são realizadas a partir de numerosas simulações mecânicas. Isto implica que a escolha do algoritmo probabilístico afeta diretamente o tempo total de processamento. Em suma, quanto maior o número de simulações, maior o tempo necessário para as análises. Vide a Tabela 4.3, em que mostra-se o comparativo entre duas versões do algoritmo apresentado no item 4.5.4. Os testes foram conduzidos em um microcomputador com configuração: processador Intel Core i7 de 3,4GHz, RAM 16G. Considerando  $10^5$  simulações, o uso da superfície de resposta torna viável o processo de análise, já que mantém o tempo de processamento em torno de 30 minutos. Ao suspender o uso da metamodelagem, o tempo de processamento sobe para aproximadamente 76 dias. O uso da superfície de Resposta quadrática viabiliza uma considerável economia em termos de tempo de processamento. Por esta razão, o uso do polinômio de resposta foi mantido.

Tabela 4.3 Comparação entre tempos de processamento para o cálculo da probabilidade de falha

Versão do algoritmo	Utilização da Superfície de Resposta Quadrática	Tempo total de processamento (minutos)
1	Não	$1,1 \times 10^5$
2	Sim	35

A função densidade de probabilidades estimada para os deslocamentos esperados num horizonte de 10 anos é ilustrada na Figura 4.5. A relação não linear entre as variáveis de entrada definidas (VA's do item 4.5.3) e os deslocamentos ocorridos após a fluência do material ficam evidentes por meio deste gráfico. O deslocamento médio provável é de 7,70 cm com desvio padrão de 0,5 cm (~ 6%). A probabilidade de que o deslocamento esperado seja 20% superior ao médio previsto é de 2%. Caso se considere um excesso de 10% nos deslocamentos, a probabilidade de falha sobe para 8%.

O comportamento lognormal evidenciado na Figura 4.5 é coerente sob o aspecto físico. Note-se que o gráfico mostra não ser possível a obtenção de deslocamentos negativos. Esse comportamento é confirmado mesmo para intervalos maiores de variabilidade das VA's. Fisicamente, as forças apresentadas na Figura 4.3 são incapazes de gerar deslocamentos para cima (negativos).

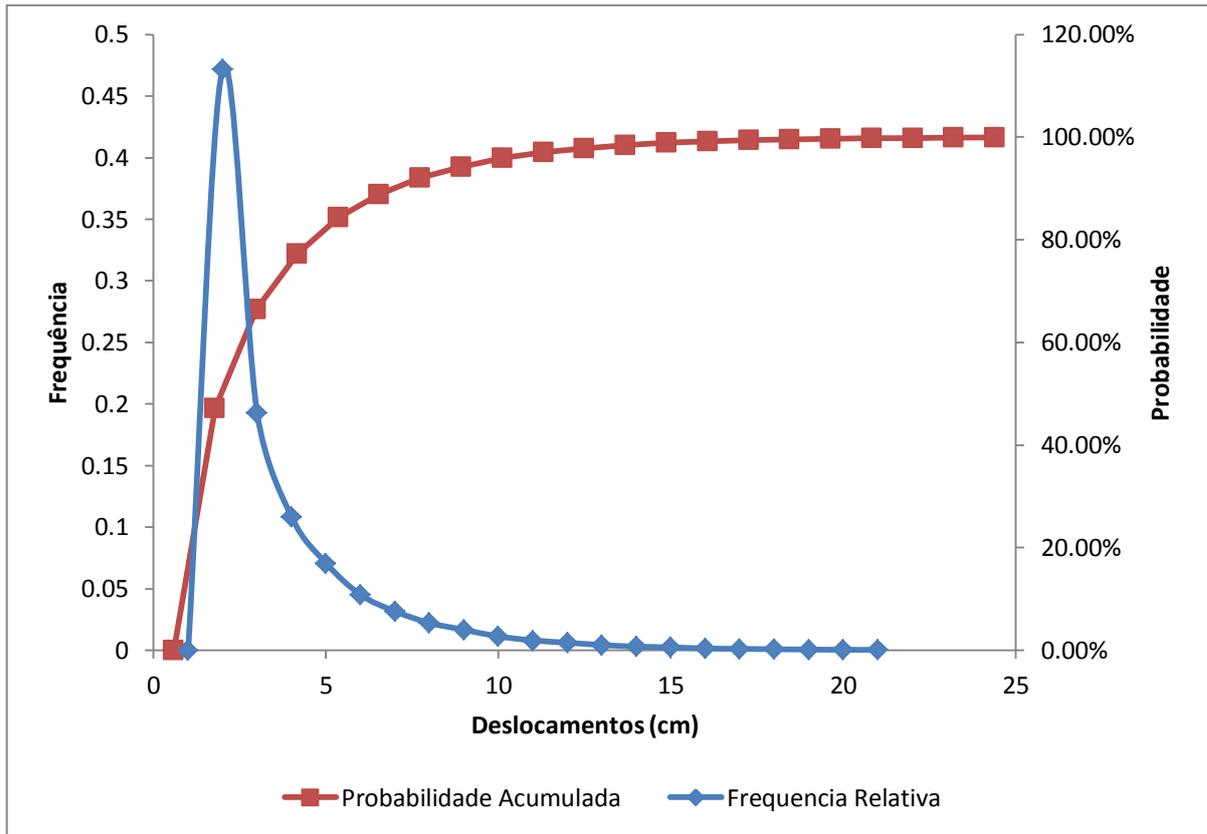


Figura 4.5 Resultados obtidos a partir da Simulação de Monte Carlo

A partir destes dados, pode-se cogitar hipóteses para diminuir a probabilidade de falha. Por exemplo, considere que uma medida imediata tomada pelo responsável do projeto seja garantir uma melhoria do controle de execução de obras. Considere que esse ajuste resulte numa diminuição de 50% da variabilidade, tanto dos parâmetros materiais, quanto da geometria. Refazendo os cálculos, obtém-se um deslocamento médio esperado de 7,65 cm e probabilidade de falha de 1,6%.

Outra solução poderia ser melhorar o método de estimativa do carregamento de serviço. Nesse caso suponha que se consiga reduzir pela metade a variabilidade dos carregamentos de serviço. Nesse caso, refazendo os cálculos obtém-se deslocamento médio de 7,5 cm e probabilidade de falha de  $5,0 \times 10^{-4}$ .

Note que a diminuição das variabilidades faz com que o modelo convirja para a resposta determinista conforme esperado. O deslocamento elástico determinista previsto ao fim de 10 anos é de 7,30 cm. Isto mostra que na ausência de modelos probabilísticos, a análise determinista serve como primeira estimativa, o que pode ser muito útil em situações práticas de engenharia.

Exemplos como esse também permitem o estudo de alternativas que melhorem o desempenho da estrutura em questão. Por exemplo, suponha que se decida minimizar a probabilidade de falha da estrutura em serviço conforme definida acima. De acordo com o modelo construído no item 4.5.4, e os resultados obtidos, seria mais impactante melhorar a estimativa dos carregamentos atuantes, que, por exemplo, aprimorar o controle de execução. Estudos como este podem servir de informação auxiliar ao processo de tomada de decisão.

Essa discussão pode se ramificar para várias outras questões pertinentes, mas é importante lembrar os motivos que deram origem ao algoritmo. O que se queria era encontrar uma maneira de realizar análises viscoelásticas utilizando MEC em um contexto probabilístico. A solução apresentada neste capítulo foi o algoritmo do item 4.5.4 que é fundamentado na Superfície de Resposta, haja vista que as análises por meio do MEC levam um tempo restritivo para fins de Análises Probabilísticas. Em modelos probabilísticos é essencial se dispor de modelos mecânicos acurados a fim de minimizar as fontes de erros. Nesse ponto, o MEC deixa clara a sua eficiência. A possibilidade de que a estrutura não se comporte da maneira esperada foi concretizada e representada pelo termo matemático, probabilidade de falha. Essa quantidade se mostra relevante ainda na fase de projeto, pois, permite que se quantifiquem prováveis comportamentos estruturais de uma estrutura que ainda não foi construída. Essas estimativas permitem antecipar possíveis fontes de problemas e prever soluções, ou mudar hipóteses de projeto. Esse processo sistemático globalmente resulta em projetos mais racionais e eficientes, especialmente em um ambiente que demanda projetos cada vez mais desafiadores e complexos.

O algoritmo proposto neste capítulo poderia ser elaborado, de maneira alternativa, por meio do acoplamento direto do modelo mecânico com o *First Order Reliability Method* (FORM). Esse tipo de acoplamento é sugerido como trabalho futuro.

## 5 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA UTILIZANDO ACOPLAMENTO MEC-MLS

As estruturas são construídas, em última análise, a partir de recursos naturais ou recursos sintéticos produzidos a partir destes. Isto significa que a quantidade de recursos disponíveis é limitada. Os projetos de engenharia devem cada vez mais levar em consideração esse tipo de restrição, somadas às restrições de economia de custos de produção e manutenção.

Uma técnica que vem sendo empregada com sucesso especialmente após a difusão do uso de computadores pessoais, é a otimização estrutural. Esta nova maneira de conceber as estruturas contrasta com a maneira clássica de concepção. Ela permite que sejam alteradas certas características da estrutura a fim de diminuir o emprego de material, mantendo ainda o desempenho mecânico necessário. A OT é uma categoria de otimização estrutural. Ela permite a maior versatilidade possível em termos de concepção, pois requer pouco conhecimento prévio da estrutura final. O que se obtém é a topologia (interpretada como geometria) ótima que atenda às restrições de projeto e que tenha custo mínimo de material.

Estão disponíveis na literatura diversos algoritmos para realizar a OT utilizando o MEC. Alguns deles são baseados em gradientes como Abe, Kazama e Koro (2007), Matsumoto et al (2012), Yamasaki, Yamada e Matsumoto (2013). Outros são conhecidos como *ordem zero* por não utilizarem derivadas, como Ullah, Trevelyan e Matthews (2014), Ullah, Trevelyan e Ivriissimtz (2015). Existem ainda os baseados em Derivada topológica como Marczak (2007). Entretanto, estas metodologias apresentam inconvenientes. Primeiramente, esses procedimentos necessitam de informação ao longo domínio, o que no caso do MEC significa pós-processamento. Outro inconveniente é a dependência de derivadas dos núcleos integrais para o cálculo de problemas adjuntos. É preciso ter em mente que a OT é um problema essencialmente de domínio. Como o MEC é essencialmente de contorno, a alternativa eficiente para acelerar os cálculos é diminuir a dependência de informações de domínio.

Então a pergunta pertinente é: será possível encontrar a topologia ótima de estruturas utilizando o MEC, de uma maneira mais eficiente? A resposta dessa questão passa pela união de dois métodos numéricos distintos, a saber, o MEC e o Método Level Set (MLS). O MLS

pode ser entendido simplifcadamente como uma maneira alternativa de representação de interfaces que de alguma maneira possam se mover. Sua principal característica é que ele permite a união e a dissociação de contornos de forma direta, tornando-o atrativo do ponto de vista computacional. Desde que foi proposto por Osher e Sethian (1988), o MLS tem sido aplicado nas mais diversas disciplinas da Física e da Computação e em última análise, na otimização de estruturas.

Apresenta-se a seguir uma breve revisão do histórico do MLS e algumas características de interesse para o presente capítulo focando sempre que possível em aplicações envolvendo o MEC. É importante deixar claro que não se pretende aqui ser exaustivo sobre o tema. Na sequência serão apresentadas as bases teóricas envolvidas no MLS. Logo após, a flexibilidade é adotada como medida de desempenho, e, portanto, passa-se à procura pela geometria que conduz à estrutura mais rígida para uma quantidade fixa de material. Esse problema será formulado em termos matemáticos seguidos por um algoritmo de solução. Por fim, apresentam-se alguns exemplos de benchmark que comprovam a validade do algoritmo proposto.

## 5.1 Revisão Bibliográfica

Em uma variedade de fenômenos da natureza como, por exemplo, crescimento de cristais, propagação de chamas, derretimento de massas de gelo ou até mesmo corrosões superficiais causadas por ácidos, existe a necessidade de modelar interfaces que podem se mover. Estes modelos podem considerar propriedades locais como curvatura e velocidade normal, propriedades globais, que dependem da posição e da forma da curva, e propriedades independentes da curva como velocidades de um fluido subjacente que transporte a curva passivamente.

A maneira direta de formular estes movimentos, também conhecida como abordagem lagrangeana, consiste em parametrizar a frente móvel e realizar uma discretização num conjunto finito de pontos. As posições destes pontos são então atualizadas ao longo do tempo, de acordo com as aproximações realizadas nas equações de movimento, obtendo a posição atual da frente. Esta técnica mostra-se eficiente para curvas que sofram pequenas perturbações. Para movimentos gerais, esta técnica encontra alguns inconvenientes como

perda de estabilidade devido às distorções da malha, dificuldades de tratar mudanças topológicas como união e separação de curvas e necessidade de algoritmos de monitoramento e remalhamento contínuos.

Osher e Sethian (1988) apresentaram um algoritmo para o monitoramento de superfícies móveis, que supera as dificuldades enfrentadas pelos algoritmos lagrangeanos. Utilizando uma abordagem euleriana para a representação do movimento, os autores propuseram que a interface de interesse fosse representada implicitamente por meio de uma curva de nível de uma função arbitrária,  $\phi$ . Uma observação é que a função  $\phi$  possui necessariamente uma dimensão espacial adicional. Esta maneira alternativa de representação possui a vantagem de não exigir que a interface mantenha um mapeamento conforme e inversível ao longo do tempo. Essa característica possibilita a união ou separação de superfícies de forma natural, tornando-a interessante sob o ponto de vista computacional. O oposto ocorre com as representações lagrangeanas. Uma vez obtida a evolução da função  $\phi$ , a solução está completa. A configuração da curva de interesse pode ser determinada encontrando o lugar geométrico ocupado pelos pontos que satisfizessem à condição  $\phi = 0$ . Esta é a definição de uma curva de nível, fato que justifica o título a partir de então, de Método das curvas de nível. Os autores exploraram o fato de que o problema de valor inicial resultante possui a forma típica das equações clássicas de Hamilton-Jacobi. Utilizando algoritmos de primeira e segunda ordem de acurácia em diferenças finitas, vários exemplos foram apresentados. As características do método são exploradas, fazendo uso de campos de velocidade internos e externos. Mostram-se inclusive a formação de choques e elevados gradientes. O trabalho apresentado por Osher e Sethian (1988) é considerado como aquele que originou o que atualmente é conhecido como Método Level Set (MLS). Mais detalhes e aplicações do MLS, inclusive envolvendo conceitos de geometria diferencial, foram apresentados por Sethian (1990).

Em muitas situações, dispõe-se de informações sobre o campo de velocidade apenas na superfície móvel. Entretanto para viabilizar a solução do problema de valor inicial utilizando o MLS, é preciso conhecer a velocidade em todos os pontos do domínio de estudo. Para tanto, Sethian e Strain (1992) apresentaram uma técnica para a construção, ou extensão, suave da velocidade normal da interface móvel baseada nas características físicas do problema. Esta técnica consiste em reunir as equações de movimento em uma única equação integral de contorno que depende do histórico do movimento. Um algoritmo foi proposto para calcular as integrais hereditárias de forma eficiente. Além disto, o movimento da interface foi

representado por meio da solução da equação Level Set utilizando os procedimentos aplicados por Osher e Sethian (1988). Convém notar que, de fato, os autores apresentaram um acoplamento entre uma formulação integral de um problema físico e a equação diferencial do MLS, técnica que será explorada nesta tese. O algoritmo foi aplicado ao crescimento de cristais contemplando anisotropia cristalina, tensão superficial, cinética molecular e resfriamentos abaixo do ponto de congelamento, mostrando resultados promissores, especialmente devido ao surgimento de interfaces bastante sinuosas.

A priori o MLS pode ser mais custoso do ponto de vista computacional, isto porque uma interface de interesse, inicialmente bidimensional, por exemplo, é transformada em um problema tridimensional, que possui mais pontos a serem analisados. Para diminuir este custo, Adalsteinsson e Sethian (1995) utilizaram o método das faixas estreitas (*narrow band method*) em conjunto com o MLS. Os autores mostraram que é possível seguir a evolução da função  $\phi$ , utilizando apenas um grid adaptativo arbitrário (faixa) de pontos ao redor do contorno móvel, reduzindo o tempo de processamento, e mantendo a acurácia. Outra vantagem desta técnica é que a extensão do campo de velocidades precisa ser realizada apenas ao longo desta faixa estreita, e não para todo o domínio. O procedimento baseia-se num monitoramento contínuo da distância da frente móvel inicial à aresta da faixa determinada. Caso a frente móvel se aproxime da aresta, o algoritmo deve parar o processo, encontrar a curva de nível atual e a partir desta determinar uma nova faixa. Este processo é conhecido com *reinicialização*. Desta forma, a frente móvel nunca avança sobre a aresta da faixa, o que causaria perdas de acurácia. Os autores alertam para possíveis instabilidades nos valores dos pontos do grid pertencentes às arestas da faixa, o que requer o redimensionamento da mesma. Estruturas de dados específicas também são apresentadas como forma de acelerar os cálculos.

Adalsteinsson e Sethian (1999) sugeriram uma nova maneira de gerar um campo de velocidades a partir das informações conhecidas na interface. Esta nova maneira possui duas características adicionais que superam algumas limitações dos métodos de extensão até então apresentados. A primeira delas é a resolução gradual, que permite obter solução suave mesmo na presença de elevadas discrepâncias no campo de velocidade. A segunda é que não é necessário a reinicialização da função Level Set. A técnica se baseia na criação de uma função level Set auxiliar  $\bar{\phi}$ , que possua a mesma curva de nível zero de  $\phi$ . Por meio da solução da equação  $\nabla \bar{\phi} \cdot \nabla F_{ext} = 0$ , determina-se o campo estendido de velocidades. Logo depois é possível atualizar os valores da função  $\phi$ . A solução das equações deve ser baseada em esquemas upwind e passa pela solução da equação Eikonal ( $\nabla T = 1$ ). É interessante notar que

as técnicas de extensão se baseiam no fato de que não é necessário que o campo de velocidades estendido tenha origem física, e por isto, em geral, pode-se construí-lo de forma conveniente. Os resultados obtidos mostram claramente que as curvas de nível mantêm distâncias constantes entre si, o que evidencia a permanência da distância orientada.

A otimização estrutural constitui um campo de pesquisa de engenharia atual e ativo, já que busca maneiras mais eficientes de projetar estruturas. Pode ser dividida em três gêneros: otimização de forma, dimensional e topológica. De maneira simplificada, na otimização de forma, a variável de projeto é o contorno da estrutura. Isto implica que a forma do contorno inicial é alterada até que determinado critério seja atendido, sem inserir novos furos no domínio. A otimização dimensional busca modificar características geométricas (como a área da seção transversal, por exemplo) de uma estrutura pré-definida até que sejam atendidos os quesitos de projeto. Por fim, a otimização topológica, é o gênero mais versátil e desafiador entre todos. A OT busca responder à uma questão básica de engenharia: como distribuir material num domínio de projeto, de modo a obter o melhor desempenho estrutural? Nesse caso, há possibilidade de inserção de novos furos no domínio, bem como a união e a dissociação de contornos existentes.

Um importante estudo é apontado como seminal na aplicação de Métodos Numéricos na busca pela topologia ótima de estruturas. Trata-se do trabalho apresentado por Bendsoe e Kikuchi (1988) utilizando o método de homogeneização. Os autores sugeriram que o material fosse tratado como compósito (substância e vazios) representado por uma função densidade que poderia assumir valores reais entre 0 e 1. Em vez de formular o problema em termos de variação de forma, o problema foi tratado como um problema de busca da melhor distribuição de densidade do material, o que possibilitava a mudança topológica, de forma a atender às restrições de equilíbrio e volume. Esta técnica é interessante, pois supera a dificuldade inerente de parametrização do domínio (variável de projeto), que a princípio é desconhecido. Desde então, uma variedade de técnicas computacionais tem sido propostas para a realização de OT, e dentre elas, aquelas que utilizam o MLS devido à sua característica de modelar superfícies evolutivas.

A primeira aplicação do MLS para determinar a topologia ótima de estruturas lineares elásticas foi realizada por Sethian e Wiegmann (2000). A metodologia seguida pode ser dividida em duas etapas. Num primeiro passo, os autores resolvem as equações de equilíbrio da Elastostática (equações de Lamé) utilizando o Método de Interface Imersa com função de

salto explícito<sup>2</sup>. O método apresenta convergência de segunda ordem para deslocamentos e primeira ordem para tensões. Uma vez obtidas as tensões, o segundo passo consiste em fazer com que a função Level Set, que neste caso representa implicitamente a configuração da estrutura, altere a forma estrutural com velocidades que dependem da tensão atual. Para tanto, os autores propõem uma relação matemática (critério de velocidades) que direcione a evolução, e que se preciso, corrija a forma quando algum critério<sup>3</sup> seja violado. Para inserir descontinuidades de material (furos), os autores eliminam regiões contendo material solicitado por tensões abaixo de um limite estipulado (“material ineficiente”)<sup>4</sup>. Alguns exemplos, bem conhecidos na área de OT, foram utilizados para explorar as características desse conjunto de técnicas recuperando, com êxito, os resultados clássicos.

Wang, Wang e Guo (2003) apresentaram um algoritmo baseado na Programação Matemática Linear para realizar a OT. Para tanto, os autores estipulam uma função objetivo que deve ser minimizada sujeita a um conjunto de restrições, entre elas o equilíbrio em forma fraca e o máximo volume. Utilizando a função Heaviside é possível estender o domínio estrutural, para um domínio maior que deve permanecer fixo. Considerando os conceitos de análise funcional, os autores conseguem obter uma equação integral que pode ser resolvida para encontrar as velocidades normais no contorno de interesse. Deste modo, a velocidade é estipulada pelo próprio problema. Com estas velocidades, é possível resolver a equação do MLS utilizando o método das faixas estreitas e o método de extensão de velocidades. Os resultados obtidos foram comparados com resultados analíticos e com resultados provenientes do método da homogeneização mostrando boa concordância. Os autores deixam claro que a geometria final não depende da topologia inicial, e que quanto mais furos houver na estrutura inicial, mais rápida é a convergência.

Abe, Kazama e Koro (2007) foram os pioneiros na utilização do MLS para OT de estruturas utilizando o MEC. Neste trabalho, os autores formulam o problema de minimização da flexibilidade adicionando uma restrição de volume. Elementos de contorno de ordem linear

---

<sup>2</sup> O Método de Interface Imersa empregando funções de salto explícito foi desenvolvido por Wiegmann e Bube (2000). Trata-se de um método numérico em Diferenças Finitas para solução de equações diferenciais elípticas, como no caso das equações de Lamé.

<sup>3</sup> Exemplos de critério: determinada fração do volume inicial, determinada flexibilidade, determinado nível máximo de tensões atuantes.

<sup>4</sup> Esta forma de retirada de material conduz ao melhor aproveitamento do mesmo, ou “otimização” do ponto de vista de engenharia. Esta característica é explorada nos algoritmos evolutivos, ou otimização evolucionária.

foram utilizados para representar o contorno estrutural extraído da curva de nível zero. O método da variável adjunta foi empregado na análise de sensibilidade para economizar custo computacional. A velocidade normal aos elementos de contorno foi admitida como sendo o gradiente da função objetivo. Posteriormente, uma relação de resíduos ponderados fornece as velocidades na curva de nível, que em seguida são estendidas para as vizinhanças do contorno. Nota-se que o algoritmo converge mais lentamente para a flexibilidade que para o volume imposto. Isto sugere que as estruturas obtidas a partir do atendimento do volume estipulado são possíveis soluções práticas, embora não tenham a menor flexibilidade. Os exemplos mostrados recuperam os resultados obtidos classicamente por outros métodos.

Convém notar que no âmbito das análises de otimização estrutural bidimensional, o MLS é incapaz de originar novos furos durante o processo de otimização. Isto fez com que os primeiros trabalhos baseados nesse método fossem altamente dependentes da estrutura inicial, que por vezes deveria apresentar elevado número de furos. Para solucionar este problema, Allaire e Jouve (2008) combinaram a derivada de forma e derivada topológica para apresentar uma metodologia de otimização baseada no MLS capaz de inserir furos automaticamente. As derivadas de forma foram utilizadas para definir o campo de velocidades válidas para todos os pontos do grid, enquanto que as derivadas topológicas foram utilizadas para indicar os locais onde os furos deveriam ser inseridos. Adicionalmente os autores apresentaram outras possibilidades de minimização além da flexibilidade (conforme usual) como a busca pela mínima tensão equivalente, por exemplo. Exemplos em estruturas 2D e 3D foram apresentados para diferentes tipos de funcionais resultando em topologias finais semelhantes. Observa-se que a minimização da flexibilidade resulta em estruturas do tipo treliça, que possui uniformidade de distribuição de tensões, à exceção dos locais de aplicação dos carregamentos.

Vale ressaltar que esta ideia já era conhecida uma vez que Eschenauer, Kobelev e Schumacher (1994) propuseram o método das bolhas para inserção de furos automaticamente. O procedimento se baseia no fato de que a otimização de forma é incapaz de mudar a classe topológica da estrutura. Baseado na energia de deformação complementar, os autores obtiveram uma expressão que fornece a melhor posição para localização de furos circulares (bolhas), levando em consideração a função objetivo e as restrições. Isto significa um critério de posicionamento de furos. O algoritmo iterativo proposto de otimização consistia em três etapas: primeiro realiza-se otimização de forma até que não ocorram mais melhorias. Depois, altera-se a topologia da estrutura inserindo furos na posição apontada pelo critério. Por último,

realiza-se uma nova otimização de forma para obter a nova configuração ótima. O processo é repetido até obter convergência. Os resultados alcançados foram promissores, embora maiores estudos sobre convergência e restrições locais fossem necessários. Conforme apontado por Sigmund e Maute (2013) o método das bolhas pode ser considerado como precursor do uso de derivadas topológicas e até mesmo das técnicas conjuntas com Level Set, como a proposta de Allaire e Jouve (2008).

Yamada et al (2010) sugeriram o uso de uma energia de interface fictícia para regularização do funcional a ser minimizado. Na realidade esta energia corresponde ao termo de regularização de Tikhonov, utilizado para flexibilizar a função objetivo obtendo suavidade nas respostas. Os autores utilizam o método de campos de fase para redefinir a equação Level Set segundo cada problema de interesse. O MEF é utilizado para resolver as equações de equilíbrio e a equação de reação-difusão para atualizar os valores da função  $\phi$ . Esta abordagem mostra que a geometria ótima é independente das condições iniciais e da estruturação da malha de domínio. Entretanto, os resultados são fortemente dependes do parâmetro de regularização. Esta característica pode ser explorada em termos de engenharia, pois a princípio é possível alterar a geometria ótima da estrutura segundo alguma conveniência provinda de uma necessidade de projeto. Além disto, pode-se utilizar esta dependência para obter evoluções anisotrópicas e, portanto geometrias ótimas segundo determinada direção. Esta técnica foi aplicada a problemas de minimização de flexibilidade, projetos de mecanismos flexíveis, e maximização da menor autofrequência, sendo fixada uma restrição de volume obtendo resultados interessantes.

Pode-se dizer que a maioria dos métodos de OT que utilizam o MLS são do tipo gradiente; isto porque se baseiam na análise de sensibilidade à forma. Estas técnicas são eficientes e bem estabelecidas, embora requeiram alta acurácia no cálculo dos gradientes, algo que nem sempre é possível. Além disto, estes algoritmos podem apresentar dificuldades em lidar com extremos funcionais locais. Normalmente são difíceis de implementar. Em contrapartida os métodos de otimização evolucionária, que se baseiam na análise local de tensão para inferir a melhor maneira de utiliza o material, são simples de utilizar e implementar, e por isto tem se tornado popular entre os pesquisadores. Estas técnicas são conhecidas como ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) quando há somente retirada de material nos locais menos solicitados, e BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) quando há adição de material em regiões de concentração de tensão simultânea à retirada de material ineficiente.

A técnica ESO foi sugerida por Xie e Steven (1993). Os autores propuseram um critério de rejeição de elementos finitos. Dado uma estrutura qualquer sujeita a carregamentos e condições de contorno, é possível encontrar a tensão de von Mises em cada elemento. Caso esta tensão seja menor que determinado valor, anula-se sua contribuição para a rigidez global evitando processos de remalhamento, e o processo é repetido até que todos os elementos restantes atendam ao critério. Em seguida o valor de referência para rejeição é aumentado e o processo é repetido. Vários exemplos foram analisados reproduzindo os resultados conhecidos do método da homogeneização de Bendsøe e Kikichi (1988). Mais detalhes sobre a metodologia BESO podem ser consultados em Huang e Xie (2010b).

Normalmente o uso da tensão de von Mises, como indicador para mudança de topologia, conduz a estruturas com distribuição de tensão uniformes (*fully stressed design*). A princípio pode parecer que não existe conexão com a minimização da flexibilidade. Entretanto, Li, Steven e Xie (1999) apontaram a equivalência entre os critérios de tensão de von Mises e o de rigidez, considerando otimização evolucionária. De fato, os autores mostram que a minimização da flexibilidade (ou, maximização da rigidez) conduz a estruturas semelhantes às aquelas obtidas utilizando a metodologia clássica ESO. Isto pôde ser comprovado por meio da semelhança entre os padrões de distribuição do campo de tensão de von Mises e o número de sensibilidade de flexibilidade. Além disso, as estruturas intermediárias utilizando os dois critérios diferentes, são similares. O estudo apontou que o uso de tensão de von Mises para direcionar a otimização evolucionária, corresponde à minimização da flexibilidade global da estrutura.

O conceito original de derivada topológica está relacionado à sensibilidade que uma função objetivo possui quando material é removido do domínio por meio da inserção de um furo infinitesimal (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013). Entretanto, a dificuldade de estabelecer um mapeamento um-para-um entre domínios (com e sem furos) restringe seu uso computacional. De algum modo, um critério de inserção de vazios precisa ser adotado no algoritmo de otimização. Ullah e Trevelyan (2013) demonstram numericamente a correlação entre dois critérios de inserção de furos. O primeiro critério é o critério da mínima tensão, utilizado nas técnicas ESO/BESO, que remove material das regiões com baixos níveis de tensão de von Mises. O segundo critério utiliza a derivada topológica para a remoção do material em forma de círculos de determinado raio. Utilizando o MLS e MEC os autores confirmaram que ambas as abordagens geram furos nos mesmos locais para as mesmas taxas de retirada de material. Além disto, ambos os critérios conduzem à mesma topologia ótima.

Recentemente, Dunning e Kim (2013a) levantaram uma questão pertinente sobre algoritmos de OT. Tanto as abordagens evolucionárias, quanto os métodos gradientes, que utilizam o MLS direto, baseiam seus critérios de inserção de furos em buscas pela sua posição ótima em cada iteração. Entretanto, isto é feito sem avaliar se é mais benéfico inserir um furo ou atualizar o contorno naquela iteração. Não há interligação formal direta entre otimização de forma e OT, o que faz com que furos tenham que ser inseridos em momentos arbitrários durante o processo de otimização, de certa forma, heurísticos. Os autores propuseram uma ligação entre as duas otimizações, criando um novo critério para inserção de furos em qualquer lugar do domínio de projeto utilizando uma função level set secundária. Esta nova função implícita representa uma pseudoespessura de uma estrutura bidimensional. Para atualizar a função secundária de maneira consistente, propõe-se a utilização do mesmo passo de tempo, mesma restrição de volume e mesma velocidade da função level set primária. Entretanto, o algoritmo de atualização requer cuidados adicionais que sofisticam a implementação. O algoritmo apresentado foi capaz de recuperar formas ótimas clássicas, para problemas de minimização da flexibilidade. Observa-se que a dependência da estrutura inicial é reduzida, porém não eliminada.

Ullah, Trevelyan e Matthews (2014) utilizaram o MLS em conjunto com o MEC, no sentido da otimização BESO para estruturas bidimensionais. Os autores realizaram a suavização do contorno estrutural para eliminar problemas de concentração de tensão. Por meio de uma interpolação linear entre os pontos do grid, é possível obter os pontos da curva de nível zero. Em seguida, pode-se ajustar  $\beta$ -splines entre esses pontos para eliminar as geometrias angulares que podem surgir ao longo do contorno da estrutura. Além disto, os autores utilizaram um critério de velocidades apresentado por Ullah e Trevelyan (2013), que foi inspirado no critério proposto por Sethian e Wiegmann (2000). O critério estipula que tensões locais de von Mises são mapeadas em velocidades normais ao longo do contorno. As velocidades devem ser extrapoladas para uma faixa estreita de domínio seguindo a metodologia de Adalsteinsson e Sethian (1999). Para a inserção de furos, foi proposta uma técnica de busca local em torno do ponto interno de mínima tensão. Caso determinada quantidade de pontos satisfaça o critério, origina-se um furo, removendo material. Em regiões de elevada concentração de tensão, o critério de velocidade faz com que a função  $\phi$  evolua de tal modo a inserir material. Os resultados obtidos foram satisfatórios e recuperaram as soluções classicamente obtidas por outros métodos.

Yamasaki, Yamada e Matsumoto (2013) propuseram uma maneira distinta de acoplar a função Level Set ao MEC. A ideia é incorporar a malha de elementos de contorno na equação de evolução, e, portanto, é possível derivar as sensibilidades de maneira direta. Utilizando elementos lineares para a malha de contorno, consegue-se uma relação direta entre função objetivo e os valores nodais de  $\phi$ . Para garantir a regularidade do algoritmo, os autores sugerem o uso de uma função auxiliar,  $\Psi$ , que funciona como variável de projeto. A construção da geometria MEC segue padrões específicos para garantir a correta representação de regiões com material. O procedimento de eliminação da descrição lagrangeana do MEC também foi estudado formalmente para a solução da equação de Poisson por Kublik, Tanushev e Tsai (2013). Os autores apresentam formulações para integrais de contorno indiretas (*single e double layer potential*). Entretanto, é possível sua extensão para a forma direta.

Yamada et al (2013) propuseram a OT utilizando a derivada topológica acoplada ao MEC. O algoritmo é construído com base na equação de reação-difusão apresentada por Yamada et al (2010). A cada iteração uma nova malha de contorno precisa ser gerada a partir da função Level Set. Os autores demonstram a possibilidade de otimização de estruturas que tenham carregamentos que dependam do contorno. Os resultados mostrados são promissores.

Matsumoto et al (2012) apresentam uma maneira de fazer OT utilizando apenas o MEC e a equação de reação-difusão (YAMADA et al, 2010) sem realizar imersão (YAMADA et al, 2013). A ideia central é calcular todos os termos de domínio, que são baseados em tensão, utilizando o MEC. Uma vez que os termos estão calculados, pode-se resolver a equação level-set e obter a nova estrutura. Entretanto, algoritmos como esse são extremamente lentos já que os cálculos de termos de domínio via MEC são feitos por pós-processamento.

O Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) é integrante da Universidade de São Paulo (USP). Dentre os temas pesquisados pelo grupo de Métodos Numéricos do SET, o MEC recebe atenção pela sua funcionalidade. No âmbito do SET, o primeiro trabalho a utilizar o MLS aplicado em OT foi Vitorio Jr. (2014) empregando o MEC para solucionar o problema mecânico. O autor propôs que o critério de velocidade, válido para a curva zero, poderia ser utilizado para todas as demais curvas, desde que utilizadas as suas próprias tensões locais, o que simplifica a implementação do método. Utilizando uma densa quantidade de elementos de contorno lineares para representar a estrutura, foi possível obter

com acurácia as variáveis de campo. O autor alerta para problemas de concentração de tensão emquinas que pode ser superado inserindo chanfros. Os resultados de benchmark foram obtidos com êxito seguindo este procedimento.

Para mais detalhes relativos aos aspectos históricos, bem como um compêndio dos recentes avanços, discussões, aplicações e desafios na área de OT, sugere-se a consulta às revisões feitas por Rozvany (2009), Huang e Xie (2010a), van Dijk et al (2013), Sigmund e Maute (2013), Deaton e Grandhi (2014).

Outras aplicações dentro da mecânica dos sólidos, embora fujam do escopo da presente tese, são importantes para futuras extensões. Por exemplo, considere domínios compostos por múltiplos materiais. A alternativa natural seria considerar cada material representado por uma função level set independente e realizar a evolução das equações levando em conta as restrições de interface. Isto resulta num método de partição do domínio que possui uma característica intrínseca de sobreposição que deve ser tratada com cautela. Para contornar esta dificuldade, Wang e Wang (2004) propuseram uma metodologia que possibilita a sobreposição das funções de nível para a formação das fases do material. As fases, estas sim, são independentes entre si e compõem o domínio de projeto completo. Isto significa que  $n$  funções level set são capazes de representar até  $2^n$  fases, princípio semelhante à combinação de cores primárias para originar novas colorações. Os autores propõem a minimização da flexibilidade da estrutura composta, atribuindo a variação do funcional objetivo ao campo de velocidades, criando um método de descida do gradiente. Esta é uma maneira prática de obter uma série convergente utilizada por vários autores. Exemplos clássicos foram analisados mostrando resultados interessantes. Outras abordagens de materiais heterogêneos podem ser encontradas em Allaire et al (2014), Vermaak et al (2014).

## 5.2 Método Level Set

Apresenta-se a definição da função level set: seja  $D \subset \mathbb{R}^N$  um domínio fixo de projeto arbitrário,  $\Omega \subset D$  a região onde se encontra material,  $\Gamma$  a interface de separação, e  $D \setminus \Omega$  a região vazia. Então a função  $\phi: \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que:

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) > c \leftrightarrow x \in \Omega & \text{(material)} \\ \phi(\mathbf{x}) = c \leftrightarrow x \in \Gamma & \text{(interface)} \\ \phi(\mathbf{x}) < c \leftrightarrow x \in D \setminus \Omega & \text{(vazio)} \end{cases} \quad (5.1)$$

em que  $c$  é uma constante (normalmente  $c = 0$ ), e  $\mathbf{x}$  um ponto no domínio de projeto,  $N$  o número de dimensões espaciais. A Figura 5.1 ilustra, para o caso bidimensional ( $N = 2$ ), a representação geométrica da função level set. Note que a curva de interesse, no caso  $\Gamma$ , é representada de maneira indireta.

Na representação implícita, a conectividade da discretização não precisa ser determinada explicitamente. Esta é uma das mais atrativas características da representação geométrica implícita, de modo que a união e a dissociação de curvas em duas dimensões ou superfícies em três dimensões seja tratada automaticamente. Maiores especificidades sobre o MLS podem ser consultadas nas obras de Sethian (1999), Osher e Fedkiw (2003).

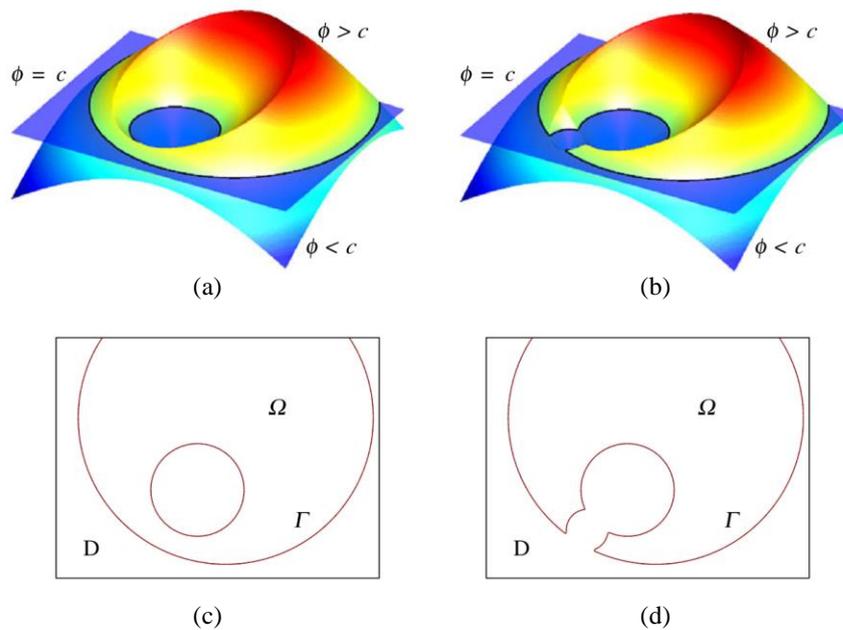


Figura 5.1 Exemplo de função level set,  $\phi$ , antes e depois de uma atualização de projeto. (a) configuração inicial (b) configuração de  $\phi$  após evolução (c) curva de nível correspondente à configuração inicial (d) curva de nível correspondente à configuração atual. Fonte: van Dijk et al (2013)

Aqui, segue-se a apresentação de Adalsteinsson e Sethian (1995). Suponha que se queira acompanhar a evolução de uma curva  $\gamma_0$  propagando em uma direção normal a si mesma com velocidade  $F$ . Pode-se representar o movimento por meio de uma família de

curvas parametrizadas ao longo do tempo fictício,  $\gamma_\tau$ . É possível associar à família de curvas de um parâmetro,  $\gamma_\tau$ , uma família de superfícies móveis de modo que sua curva de nível zero sempre corresponda a  $\gamma_\tau$ . O que resta é encontrar a equação de movimento para a superfície móvel.

Seja  $\gamma_0$  um curva fechada, sem autointersecção (curva simples). Assuma  $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , um campo escalar, tal que, no tempo  $\tau$  a curva de nível zero de  $\phi(\mathbf{x}, \tau)$  seja a curva  $\gamma_\tau$ . Normalmente a função distância orientada é utilizada para definir a função  $\phi$  inicial. Seja  $d(\mathbf{x})$  a distância do ponto  $\mathbf{x}$  ao contorno  $\gamma_0$ . Então, se  $\mathbf{x}$  estiver fora do domínio material  $\phi(\mathbf{x}, 0) = -d(\mathbf{x})$ . Se  $\mathbf{x}$  estiver dentro do domínio material,  $\phi(\mathbf{x}, 0) = d(\mathbf{x})$ . Evidentemente, caso  $\mathbf{x}$  pertença ao contorno,  $\phi(\mathbf{x}, 0) = 0$  (vide Figura 5.1).

Suponha que cada curva de nível de  $\phi$  se propague ao longo do campo gradiente com velocidade  $F$ . Note que esta velocidade pode ser definida de modo arbitrário, desde que ela corresponda à velocidade estipulada pelo problema físico na curva de nível zero. Agora considere o movimento de alguma curva de nível  $\phi(\mathbf{x}, \tau) = C$ . Seja  $\mathbf{x}(\tau)$  a trajetória de uma partícula localizada nesta curva de nível, então:

$$\phi(\mathbf{x}(\tau), \tau) = C \quad (5.2)$$

A velocidade da partícula,  $\partial\mathbf{x}/\partial\tau$ , na direção normal  $\mathbf{n}$  à curva de nível é dada pela função velocidade  $F$ . Então:

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau} \cdot \mathbf{n} = F \quad (5.3)$$

Em que o vetor normal  $\mathbf{n}$  é dado por  $\mathbf{n} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$ . Derivando a relação (5.2) utilizando a regra da cadeia resulta:

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \phi_\tau + \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\tau} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (5.4)$$

Utilizando a definição do vetor normal:

$$\phi_\tau + F|\nabla\phi| = 0 \quad (5.5)$$

Em qualquer tempo  $\tau$ , a curva de interesse  $\gamma_\tau$  é simplesmente a curva de nível da função  $\phi$ . A equação (5.5) é uma equação diferencial parcial (EDP) que representa a evolução da função level set, ou ainda, um problema de valor inicial (PVI) ao longo do tempo. Esta equação possui a mesma forma da equação de Hamilton-Jacobi na Mecânica Hamiltoniana, e

da equação de convecção em fenômenos de transporte. Vários métodos foram propostos para solução geral deste tipo de EDP que podem ser utilizados para solução do MLS.

### 5.3 Método de solução da função Level Set

Para obter a solução da equação (5.5) utiliza-se o esquema de Diferenças Finitas Upwind proposto por Osher e Sethian (1988). Trata-se de uma aproximação de primeira ordem no espaço – pseudotempo para a EDP hiperbólica que necessita de um grid de pontos cobrindo todo o domínio de projeto. Seja  $n$  o número da iteração atual,  $(i, j)$  os índices que identificam o ponto do grid,  $\Delta\tau$  o passo de tempo fictício,  $F_{ij}$  a velocidade no respectivo ponto, então o método explícito de um passo de Euler resulta na seguinte expressão:

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta\tau[\max(F_{ij}, 0)\nabla^+ + \min(F_{ij}, 0)\nabla^-] \quad (5.6)$$

sendo os operadores  $\nabla^+$  e  $\nabla^-$  calculados da seguinte maneira:

$$\nabla^+ = [\max(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}, 0)^2] \quad (5.7)$$

$$\nabla^- = [\max(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y}, 0)^2] \quad (5.8)$$

Nas relações (5.7) e (5.8),  $D_{ij}^{+x}$  e  $D_{ij}^{-x}$  representam, respectivamente, diferenças finitas progressivas e regressivas na direção  $x$ , enquanto que  $D_{ij}^{+y}$  e  $D_{ij}^{-y}$ , também representam diferenças finitas progressivas e regressivas, porém na direção  $y$ .

Para que a solução deste PVI seja estável, o passo de tempo fictício deve atender à condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Seja  $\Delta x$  o menor espaçamento entre pontos do grid. Para uma velocidade advectiva  $F$  e a discretização de primeira ordem no espaço, a condição de CFL estipula que a frente móvel nunca ultrapasse mais que uma célula do grid em cada passo:

$$\max_{\Omega} F\Delta\tau \leq \Delta x \quad (5.9)$$

Nesta tese escolheu-se realizar a atualização do contorno do domínio material em termos de um campo de velocidades, conforme originalmente proposto por Osher e Sethian

(1988). Técnicas baseadas no MEF também são disponíveis. É importante ressaltar a possibilidade de realizar a atualização da função  $\phi$  por meio de métodos baseados na Programação Matemática. Esta maneira alternativa vem ganhando atenção nos últimos anos, e será utilizada para fundamentar o algoritmo a seguir. Mais detalhes podem ser encontrados em van Dijk et al (2013).

Observe que para resolver a equação (5.5) é necessário conhecer o valor da velocidade em todos os pontos do grid. Esta velocidade será definida no item 5.5.

#### 5.4 Definição do problema de otimização

O problema de otimização pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma=\partial\Omega} C &= \int_{\Gamma} u_i t_i d\Gamma \\ \text{Sujeito à} \quad &\int_{\Omega} d\Omega - vol^* \leq 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

A grandeza  $C$  é conhecida como flexibilidade e  $vol^*$  é o volume a ser alcançado.

#### 5.5 Definição do campo de velocidades

Seguindo a sugestão de Sethian (1999) o campo de velocidades pode ser utilizado para acoplar o MLS com outro método numérico, como por exemplo, o MEC. Esta estratégia vem sendo explorada por vários pesquisadores como Sethian e Wiegmann (2000), Abe, Kazama e Koro (2007), Ullah e Trevelyan (2013), Ullah, Trevelyan e Matthews (2014), Matsumoto et al (2012), Vitorio JR (2014), e será utilizada na presente tese.

O principal papel do campo de velocidades na equação de Hamilton Jacobi é conduzir a curva de nível zero da função  $\phi$  para a geometria ótima, enquanto mantém a regularidade da função  $\phi$  em todo o domínio.

O campo de velocidades no contorno será obtido via Análise de Sensibilidade de Forma. O problema de otimização pode ser reescrito utilizando a forma lagrangeana aumentada;

$$L(\Omega) = C(\Omega) + \lambda^k (V(\Omega) - vol^*) + \frac{1}{2\Upsilon^k} (V(\Omega) - vol^*)^2 \quad (5.11)$$

em que  $V(\Omega) = \int_{\Omega} d\Omega$ ,  $\lambda^k$  e  $\Upsilon^k$  são parâmetros arbitrários que controlam a imposição da restrição de volume. O esquema de atualização dos parâmetros é tal que:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{1}{\Upsilon^k} (V(\Omega) - vol^*), \quad \Upsilon^{k+1} = \delta \Upsilon^k \quad (5.12)$$

O valor inicial de  $\lambda$  é considerado nulo.  $\delta$  é um parâmetro arbitrário que varia entre 0 e 1.

Segundo Allaire, Jouve e Toader (2004), pode-se escolher como campo de velocidades o campo gradiente obtido a partir do lagrangeano  $L(\Omega)$  com relação à sua forma. Deste modo, cria-se um conjunto admissível de topologias que leva à uma forma convergente. No caso de contornos livres de forças de superfície, a derivada de forma da flexibilidade é a densidade de energia com sinal inverso. Daí segue:

$$F = -\frac{\partial L}{\partial \Omega} = e - \lambda^k - \frac{1}{\Upsilon^k} (V(\Omega) - vol^*) \quad (5.13)$$

em que  $e$  representa a densidade de energia de deformação. Esta equação é o elemento chave do algoritmo porque permite extensões. Por exemplo, adicionando um termo de derivada topológica nesta equação, resulta em uma formulação capaz de nuclear furos automaticamente.

A equação (5.13) é válida para todos os pontos do domínio incluindo o contorno. Uma vez que o modelo mecânico é o MEC, é suficiente obter esses valores ao longo dos pontos de colocação. Utilizando as funções de forma isoparamétricas, é possível obter prontamente o campo de velocidades ao longo do contorno,  $F = F(\Gamma)$ . Partes não otimizáveis do contorno (como por exemplo, posições de apoios e posições de aplicação de forças de superfície) são consideradas imóveis (velocidade nula).

É importante destacar que a obtenção do campo de velocidade no contorno não requer esforço computacional extra. Após a obtenção das velocidades no contorno, é preciso realizar um processo chamado extensão de velocidades, conforme explicado a seguir.

## 5.6 Extensão de velocidades

Note que a equação (5.5) demanda por um campo normal de velocidades definido em todo o domínio de projeto. Conforme visto no item anterior, apenas as velocidades no contorno-zero são conhecidas. Isto implica que algum procedimento de extrapolação da informação para o grid deva ser realizado. Este procedimento é arbitrário e existem diversas técnicas para este fim. Mais detalhes podem ser encontrados em Osher e Sethian (1988) e Adalsteinsson (1995). Aqui será aplicada a metodologia apresentada por Peng et al (1999). Para tanto é necessário resolver uma equação diferencial adicional:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + S(\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \nabla v = 0 \quad \text{In } D \times t \quad (5.14)$$

A função  $S(\phi)$  pode assumir os valores  $\{-1,0,1\}$  dependendo dos valores de  $\phi$ .

Primeiramente as células interceptadas pela curva de nível zero são identificadas. Utilizando uma extrapolação linear é possível encontrar os pontos do grid pertencentes à estas células. Também são recomendadas técnicas de regularização (ABE; KAZAMA; KORO, 2007). Todos os pontos remanescentes do grid recebem o valor nulo como velocidade. Então a velocidade compatível estendida do contorno será encontrada resolvendo explicitamente a equação (5.14) por diferenças upwind:

$$\begin{aligned} v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^n - \Delta t \left\{ (s_{ij} n_{ij}^x)^+ \frac{v_{ij} - v_{i-1j}}{\Delta x} + (s_{ij} n_{ij}^x)^- \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{\Delta x} \right. \\ \left. + (s_{ij} n_{ij}^y)^+ \frac{v_{ij} - v_{ij-1}}{\Delta y} + (s_{ij} n_{ij}^y)^- \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\Delta y} \right\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

em que  $(x)^+ = \max(x, 0)$ ,  $(x)^- = \min(x, 0)$ .  $(n^x, n^y)$  é o vetor normal à curva de nível-zero que pode ser calculado por diferenças finitas centrais.

## 5.7 Critério para alteração da topologia

Existe a possibilidade de remoção de material inserindo furos em regiões internas da peça que estejam sob baixos níveis de tensão. Os furos, além de remover localmente material

ineficiente, alteram a classe topológica do sólido. Isto permite que o contorno do furo evolua num processo de otimização de forma automaticamente comandado pela função Level Set.

Embora existam algoritmos refinados para a geração de pontos internos (ULLAH; TREVELYAN, 2013), nesta tese adotou-se uma maneira mais simples: utilizar os próprios pontos que definem o grid euleriano como pontos candidatos a receberem furos. Pontos externos à estrutura são automaticamente excluídos da lista de candidatos. No caso dos pontos internos, a equação integral (2.16) é utilizada para encontrar a tensão de von Mises atuante.

Os passos principais para inserção do furo são:

- Identificar pontos internos que satisfaçam a seguinte equação:  $\sigma_i \leq \rho \min(\max(\sigma_{vm,1}), \sigma_y)$ .  $\sigma_i$  é a tensão de von Mises no ponto interno  $i$ ,  $\rho$  é um parâmetro real tal que  $\{\rho \in \mathbb{R}: 0,01 \leq \rho \leq 0,05\}$ ,  $\max(\sigma_{vm,1})$  é máxima tensão de von Mises encontrada na estrutura inicial (primeira iteração).  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. Outros critérios podem ser adotados para inserir furos, como por exemplo, o uso da derivada topológica;
- Adotar estes pontos internos como centro de uma malha de contorno circular que represente um furo (orientada no sentido horário). O raio do furo depende do refinamento do grid;
- Checar se há intersecção de furos. Caso exista, o furo total é composto pela intersecção das curvas externas a todos os furos.

Normalmente não é preciso inserir furos em todas as iterações. Entretanto, uma vez que determinado número de furos seja inserido, é necessário realizar a reinicialização da função Level Set. Este procedimento é importante, pois a função  $\phi$  deve conter os novos furos implicitamente para evoluir corretamente.

Grids mais refinados possuem maior número de pontos candidatos a receber furo. Isto implica que quanto maior o número de pontos internos do MEC, mais furos surgirão ao longo das iterações, e maior será o tempo de processamento. A função level set se encarrega de unir os furos para encontrar uma forma convergente. Grids mais refinados propiciam melhor definição dos contornos curvos. O grid e a malha de contorno são desacoplados. Nesse caso, refinamentos da malha de contorno não interferem no refinamento do grid, e vice-versa.

## 5.8 Reinicialização da função level set

O valor inicial da função  $\phi$  precisa ser calculado antes de realizar a primeira iteração. Essa é a chamada inicialização. Caso no meio das iterações, os valores de  $\phi$  precisem ser recalculados tem-se a reinicialização. Em ambos os casos o procedimento é o mesmo. Faz-se uso da função distância orientada para implicitamente representar o contorno. Este procedimento é conveniente porque evita que gradientes muito altos e muito baixos (OSHER; FEDKIW, 2003). A função distância é definida como:

$$l(x) = \min(|x - x_l|) \text{ para todo } x_l \in \partial\Omega \quad (5.16)$$

Os sinais de  $l(x)$  devem respeitar a convenção apresentada no item 5.2.

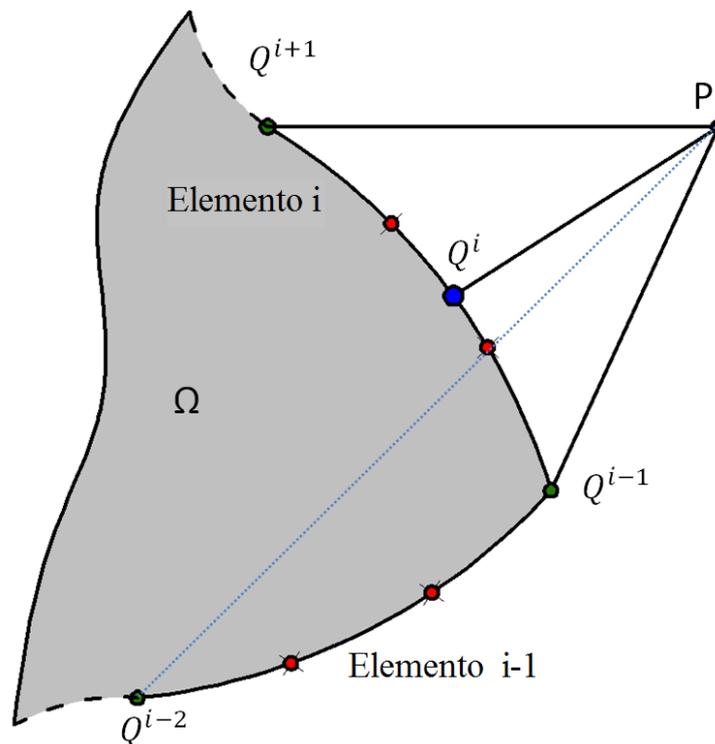


Figura 5.2 Busca pela mínima distância de P

Note que o MEC necessita de uma malha de contorno em cada passo de tempo. Isto implica que essa malha pode ser prontamente utilizada para calcular as distâncias da equação (5.16) com boa acurácia. Na Figura 5.2 encontra-se esquematicamente representado o processo de busca. Dado um ponto P, a partir do qual se deseja conhecer a distância mínima,

faz-se uma busca em todo o conjunto de elementos da malha de MEC procurando pelo ponto Q mais próximo de P. Para encontrar  $Q^i$ , emprega-se um processo de minimização restrita sobre o elemento, tomando vantagem da continuidade das funções de forma. A distância procurada será o mínimo valor entre todos os  $Q^i$ , de acordo com a equação (5.16), ou ainda;

$$\overline{PQ} = \min(\overline{PQ^1}, \dots, \overline{PQ^k}) \quad (5.17)$$

## 5.9 Procedimento computacional

As etapas seguidas durante o processo de otimização são resumidas a seguir:

1. Criar modelo mecânico convencional para análise linear elástica utilizando o MEC. Definir geometria, malha de contorno, carregamentos, material;
2. Iniciar a função Level Set, calculando a distância orientada. Para cada ponto do grid, calcula-se a menor distância deste ao contorno. O sinal é atribuído de acordo com a convenção apresentada na equação (5.1);
3. Determinar se há inserção de furos. Em caso positivo, deve-se analisar novamente a estrutura a fim de obter o novo campo de tensões, para novamente avaliar se é necessário inserir mais furos. Esse processo deve ser repetido até que não mais ocorra inserção de furos. Ao final desta etapa, deve-se recalcular as distâncias orientadas (reinicialização), pois a topologia da estrutura terá sido alterada;
4. A partir das últimas tensões calculadas, obtém-se a velocidade conforme item 5.5 e 5.6. Nesta etapa, deve-se tomar cuidado de atribuir velocidade nula nos pontos que possuem condição de contorno, tanto em forças quanto em deslocamentos;
5. Obter a evolução da equação de Hamilton-Jacobi por meio da relação (5.6);
6. Obter a curva de nível zero da função Level Set. Um procedimento simples para esta finalidade é utilizar interpolação linear entre os pontos do grid;
7. Distribuir uma malha de elementos de contorno sobre a curva de nível zero. Este processo é conhecido como remalhamento. Nesta tese, utilizou-se elementos de contorno de alta ordem, já que a curva de nível é representada por meio de  $\beta$ -splines conforme sugerido por Ullah e Trevelyan (2013);

8. Critério de parada: calcula-se o valor da flexibilidade da estrutura. Caso  $Vol \leq Vol^*$ , e, não haja alteração maior que 1% na flexibilidade das últimas  $N_{fv}$  iterações, o processo é encerrado. Em caso contrário, deve-se retornar à etapa 2.

Nota-se que existem outros modos de realizar a etapa 7. Abe, Kazama e Koro (2007), por exemplo, utilizam uma interpolação linear para encontrar os pontos pertencentes à curva zero e depois filtrar os pontos com base em um comprimento pré-estabelecido. Entretanto, maior eficiência computacional é conseguida quando se emprega a descrição geométrica do contorno por B-splines. Estas funções continuam sendo polinomiais, entretanto elas possuem a vantagem de suas funções de forma se tornarem recursivas e locais:

$$N_{a,0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_a \leq \xi \leq \xi_{a+1} \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (5.18)$$

$$N_{a,p} = \frac{\xi - \xi_a}{\xi_{a+p} - \xi_a} N_{a,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{a+p+1} - \xi}{\xi_{a+p+1} - \xi_{a+1}} N_{a+1,p-1}(\xi)$$

em que  $p$  é a ordem da spline,  $n$  é o número de funções base e  $0 \leq a \leq n$ .

A nova geometria é definida encontrando as novas posições dos pontos de controle, dadas pela solução da equação Level Set. É importante deixar claro que o algoritmo acima não se trata do método dos elementos de contorno isogeométricos, embora faça uso de B-splines. Esta, inclusive, pode ser uma possibilidade de melhoria do presente algoritmo.

Uma representação esquemática das tarefas descritas anteriormente pode ser encontrada na Figura 5.3. O fluxograma proposto neste capítulo é responsável pela minimização da flexibilidade por meio da busca da topologia correta. Note-se o acoplamento entre o MEC e o MLS a fim de compor um algoritmo eficiente para OT. A fase de Análise de Resposta é justamente a solução das equações do MEC. Observe a flexibilidade que esse algoritmo possui, já que outras versões do MEC (meshless, isogeométrico, simétrico de Galerkin entre outros) podem igualmente serem utilizadas.

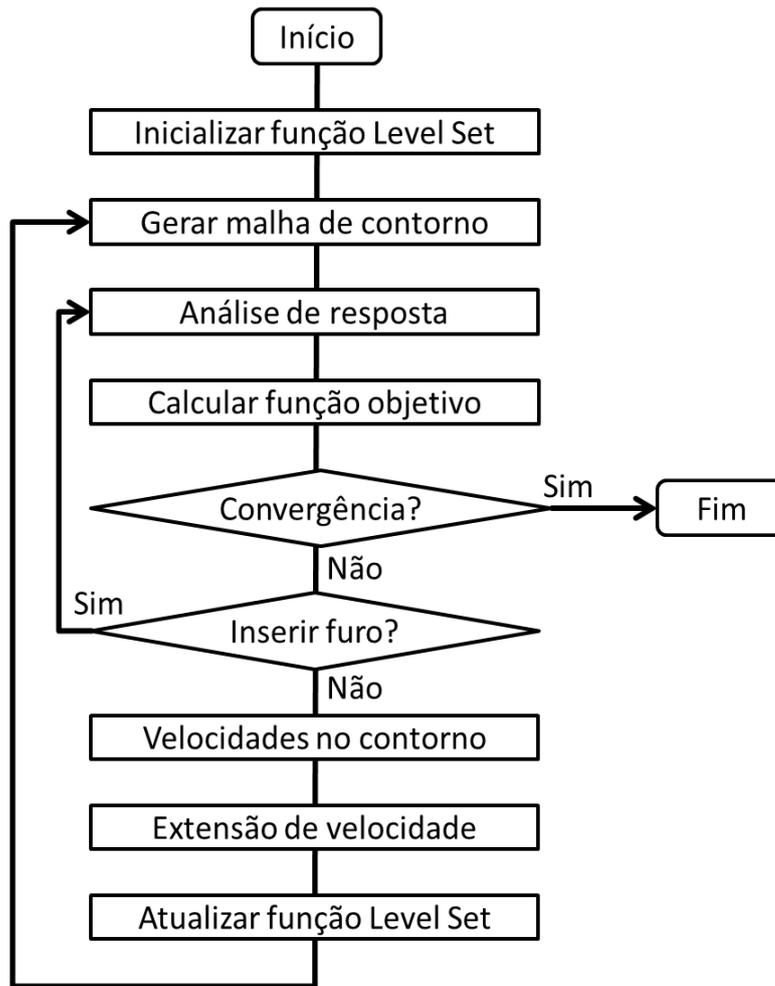


Figura 5.3 Fluxograma do algoritmo de otimização topológica

## 5.10 Aplicações

A seguir serão apresentados dois exemplos de aplicação. Ambos são casos de referência existentes na bibliografia. Os parâmetros materiais considerados são: Módulo de Elasticidade =  $210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson =  $0,3$  e tensão de escoamento =  $180 \text{ MPa}$ . Quanto aos parâmetros de análise:  $\rho = 0.05$  e  $N_{fv} = 5$ . As análises consideram Estado Plano de Tensões com espessura da chapa arbitrária de  $1 \text{ mm}$ . Os testes foram conduzidos em um microcomputador com configuração: processador Intel Core i7 de  $3,4\text{GHz}$ , RAM  $16\text{G}$ .

### 5.10.1 Chapa tracionada

O primeiro exemplo refere-se à uma chapa tracionada por uma força  $P = 100N$  em parte do bordo direito. A extremidade esquerda está fixa na parte superior e inferior. O restante do contorno está livre de forças de superfície. A Figura 5.4-a ilustra o esquema estrutural, enquanto que a Figura 5.4-b fornece um detalhe da malha de contorno inicial de ordem quadrática. A intenção é descobrir qual é a configuração geométrica otimizada desta estrutura que suporte o carregamento aplicado, porém utilizando apenas 30% do volume inicial de material. A malha de contorno inicial desta estrutura é composta por 16 elementos de contorno de ordem quadrática. Em pontos de descontinuidade de campos, como quinas, são utilizados elementos de contorno descontínuos.

A malha de pontos utilizados para solução da equação Level Set é ilustrada pela Figura 5.5. A discretização compõe-se de 41 nós ao longo da direção  $x$ , e 73 nós ao longo da direção  $y$ . Esta divisão resulta num grid regular com espaçamento de 3,125 mm. Esta malha permanece fixa ao longo do processo de otimização. Pontos  $x$  com  $\phi(x) \geq 0$  são representados em cor azul. Pontos  $x$  com  $\phi(x) < 0$  são ilustrados em vermelho.

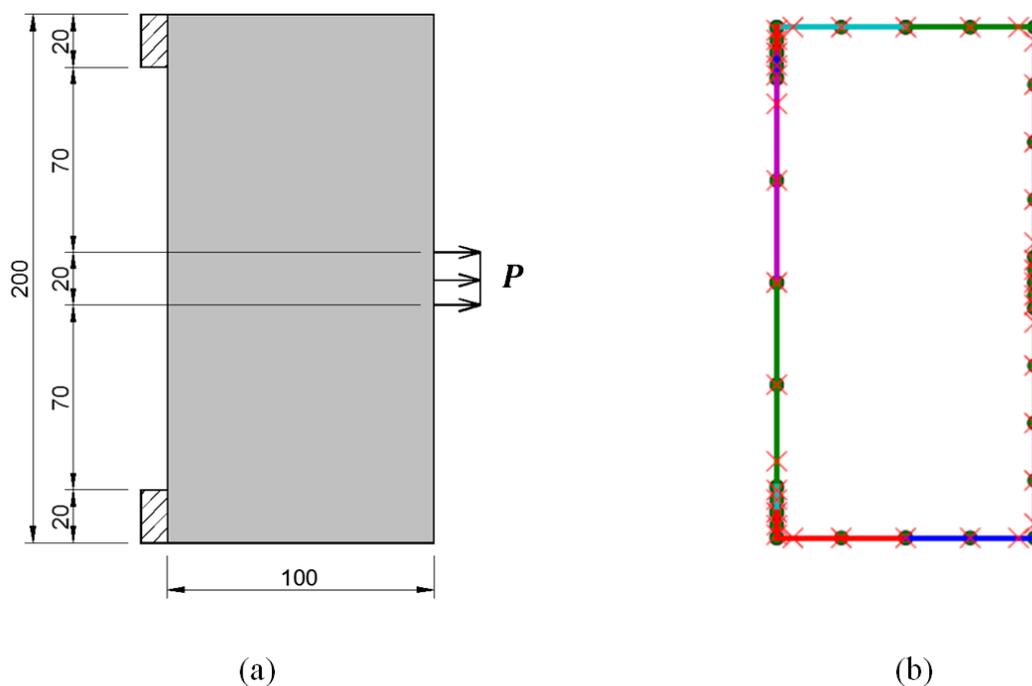


Figura 5.4 Chapa tracionada.(a) Estrutura inicial - medidas em milímetros (b) Malha inicial de elementos de contorno (OLIVEIRA; LEONEL, 2016b)

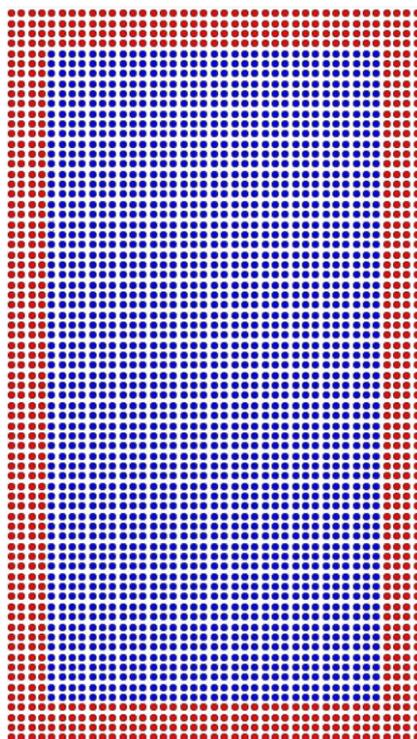


Figura 5.5 Domínio de projeto utilizado para solução da equação Level Set. Pontos azuis representam a existência de material. Pontos vermelhos representam ausência de material

A Figura 5.6 apresenta o histórico de evolução do processo. É possível notar que ao longo das iterações, as estruturas se mantêm simétricas conforme o esperado. A rigor, esta otimização é de forma, pois a classe topológica se mantém inalterada durante todo o processo. Caso seja permitida a variação de topologia, espera-se que para este exemplo a resposta final não se altere. A Figura 5.7 apresenta o mesmo histórico de evolução, porém agora, permitindo a inserção de furos. É possível notar a vantagem do uso da função level set para mover os contornos livres. Os laboriosos algoritmos de monitoramento lagrangeanos de intersecção de contornos são dispensáveis, já que a função level set automaticamente se encarrega de realizar uniões e intersecções de contornos.

A estrutura final, apresentada pela Figura 5.8, manteve-se inalterada (com ou sem alterações topológicas). Sua forma lembra uma estrutura em forma de treliça composta por duas barras inclinadas a  $45^\circ$  com a horizontal. As formas previstas por diferentes formulações envolvendo MEC, MEF e resultados encontrados na literatura, mostram boa concordância entre si.

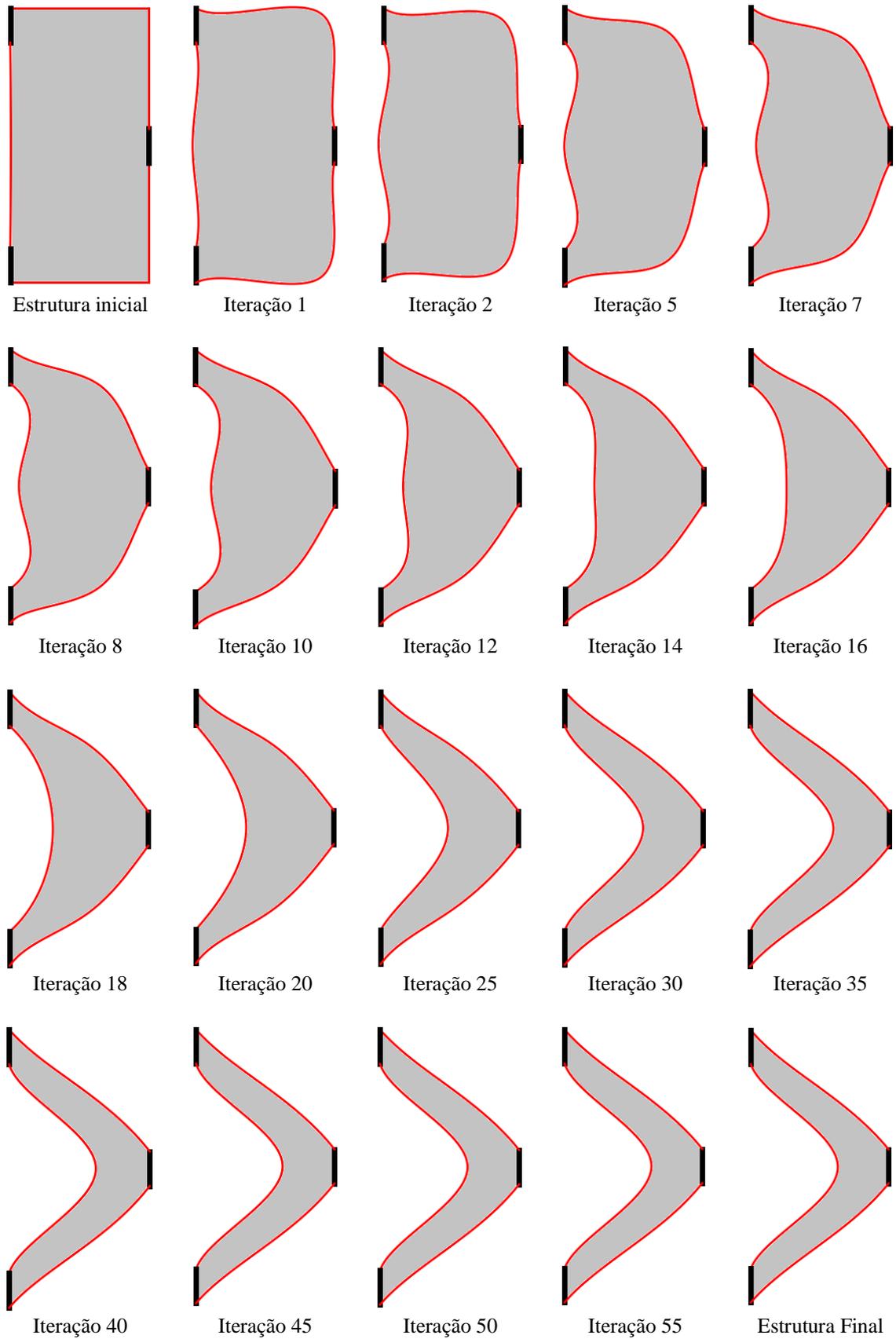


Figura 5.6 Histórico de evolução de forma da estrutura (OLIVEIRA; LEONEL, 2016b)

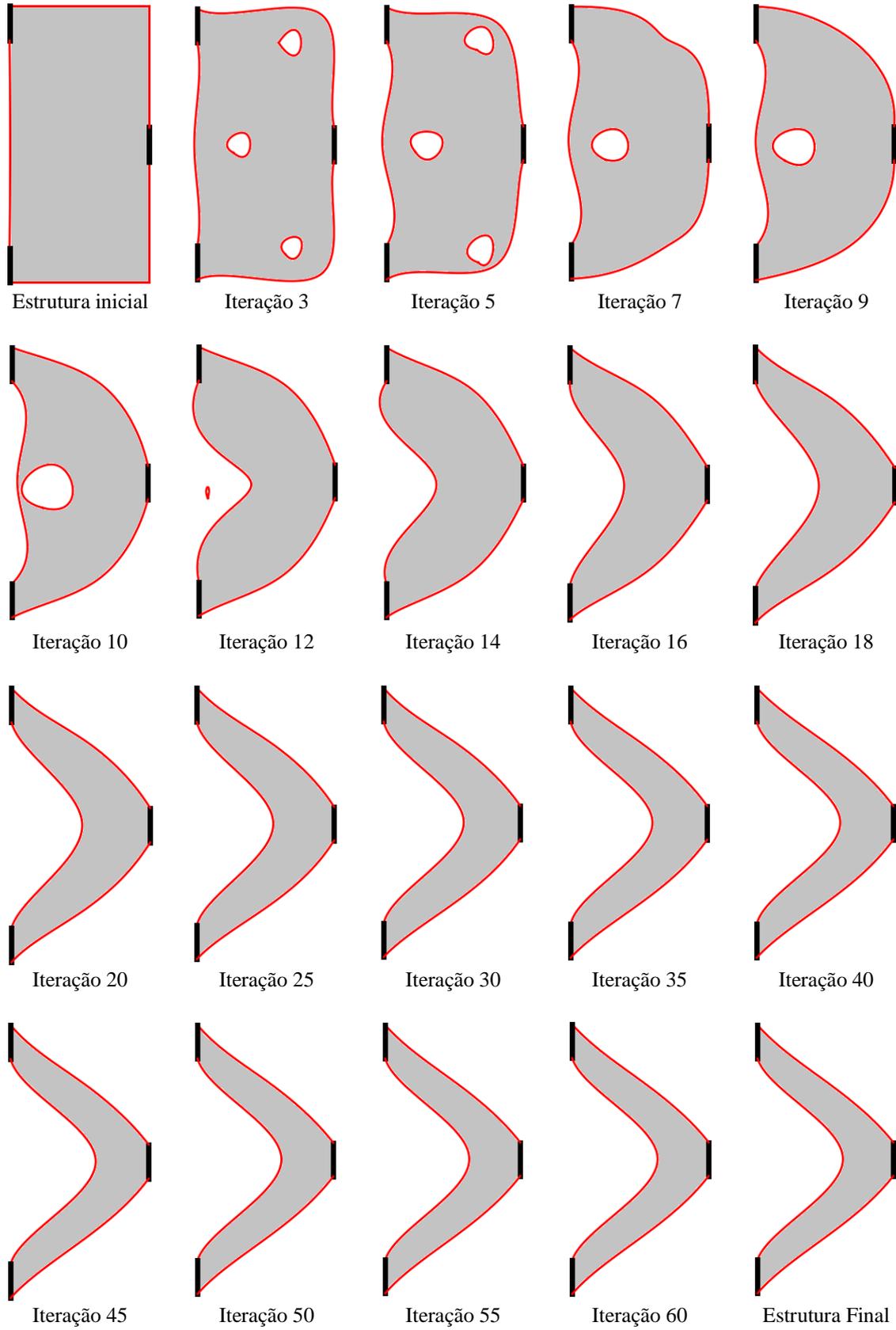


Figura 5.7 Histórico da evolução topológica da estrutura (OLIVEIRA; LEONEL, 2016b)

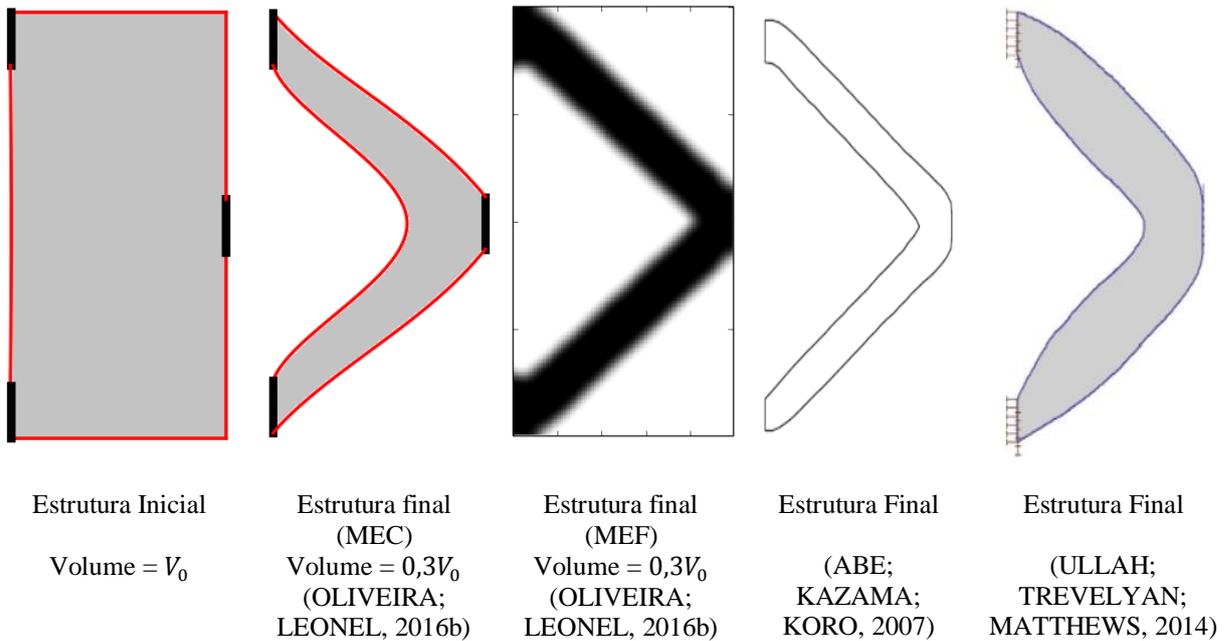


Figura 5.8 Chapa tracionada. Comparação entre resultados

A maior taxa de remoção de material propiciada pela inserção de furos, em geral, não implica menor tempo de análise. Isto se deve ao fato que a cada novo furo, novos elementos são adicionados à malha de contorno e com isto maior o custo de armazenamento e processamento.

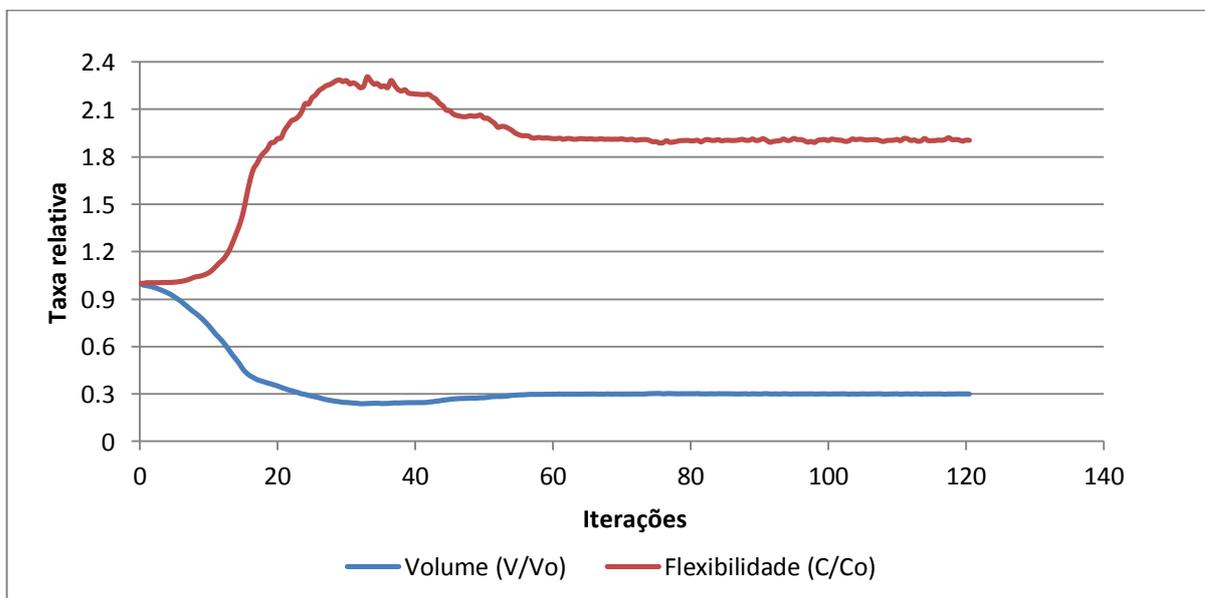


Figura 5.9 Chapa tracionada – Histórico de convergência

O histórico de convergência é ilustrado pela Figura 5.9. Observe que o algoritmo procura primeiramente satisfazer a restrição de volume. Mesmo que se encontrem formas que

tenham volumes inferiores ao estipulado, o algoritmo corrige as formas em questão para que atendam à restrição. Uma vez que o volume correto foi atingido, o algoritmo começa a alterar a forma de modo a diminuir a flexibilidade até encontrar a forma convergente. Esta é uma característica importante dos métodos gradientes, que no caso desta formulação é dada pela derivada de forma (sensibilidade geométrica).

Com relação à função level set, a Figura 5.10 representa os valores da função  $\phi$  no domínio de projeto após a convergência. Observe que tanto na Figura 5.5 quanto na Figura 5.10, o domínio de projeto foi estendido para os limites além da estrutura inicial. Este procedimento foi adotado para evidenciar uma conveniência característica do método Level Set, que é a flexibilidade do domínio de projeto. É importante garantir que os movimentos das curvas ocorram interiormente ao domínio estipulado. Caso as curvas se movimentem para além do domínio de projeto, o algoritmo terá dificuldades em encontrar curvas de nível fechadas, e assim, perde-se estabilidade com relação ao MEC. Para evitar estas instabilidades, recomenda-se deixar uma adicional para garantir a sequência das iterações. Esta funcionalidade será importante no próximo exemplo.

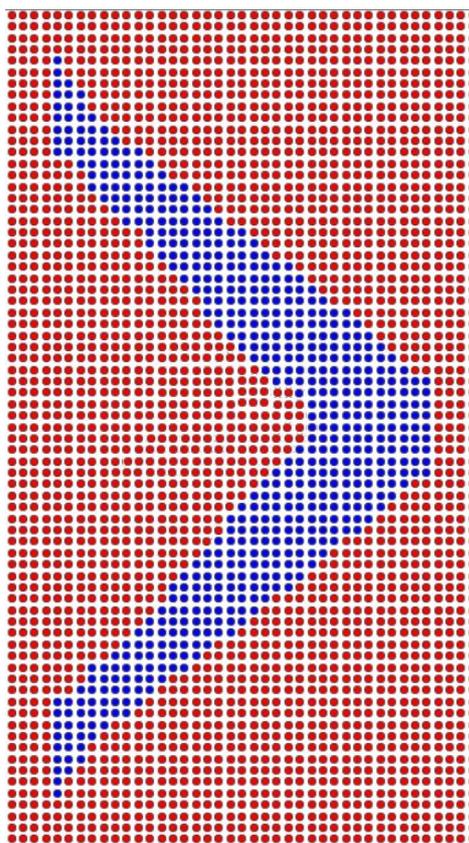


Figura 5.10 Grid level set após a convergência. Pontos azuis simbolizam material. Pontos vermelhos simbolizam vazio.

### 5.10.2 Viga sob flexão

O segundo exemplo simula uma viga sob efeito de flexão. A viga está engastada nos cantos superior e inferior do bordo esquerdo. Existe uma força  $= 100\text{ N}$  no canto inferior direito da viga solicitando-a para baixo. A Figura 5.11-a apresenta o esquema estrutural enquanto a Figura 5.11-b mostra um detalhe da malha inicial de contorno (16 elementos quadráticos) utilizada. Elementos descontínuos foram utilizados nas quinas e em locais de descontinuidade de carregamento. Pretende-se encontrar a topologia otimizada que contenha 30% do volume inicial de material e que suporte o carregamento aplicado. O domínio de projeto é discretizado com 77 nós ao longo da direção  $x$ , e 61 nós ao longo da direção  $y$ . Esta discretização resulta em um grid regular com espaçamento de 2,5mm em ambas as direções.

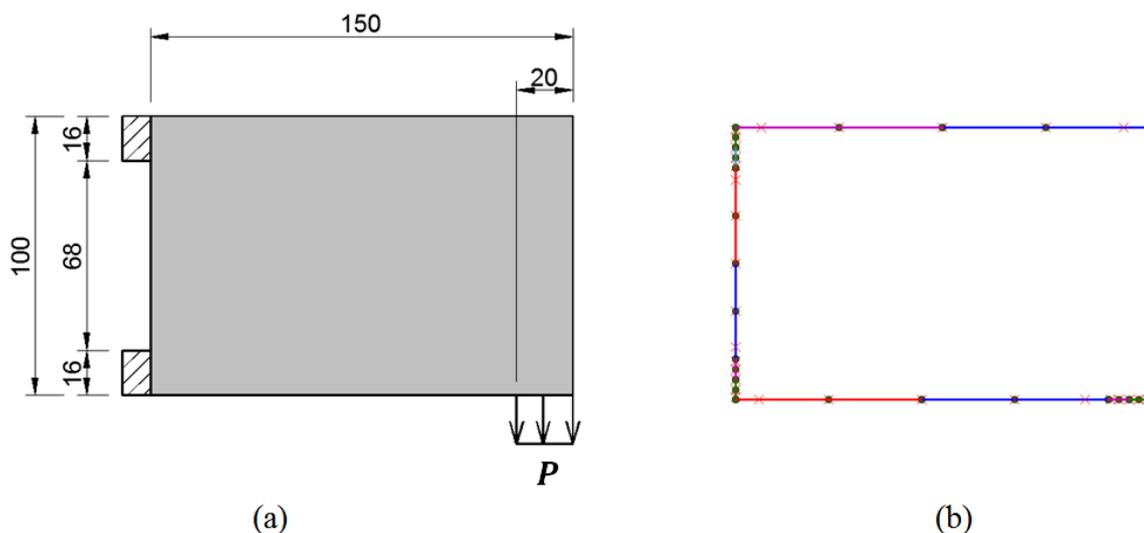


Figura 5.11 Viga sob Flexão. (a) Esquema estrutural - medidas em milímetros. (b) Malha inicial de elementos de contorno

Um comparativo entre as configurações inicial e final do domínio de projeto é ilustrado pela Figura 5.12. Similar ao exemplo da Chapa Tractionada, a estratégia de extensão do domínio de projeto foi empregada. É pertinente fazer uma observação. Suponha que o domínio de projeto correspondesse somente aos limites representados pela Estrutura Inicial da Figura 5.15. Se assim fosse, observe que na iteração 29, o contorno da face superior avançaria os limites definidos como domínio de projeto, e, portanto, a curva de nível resultante seria aberta. Isto implicaria em perda de estabilidade, uma vez que o MEC é definido em termos de curvas fechadas. A fim de evitar tais inconvenientes, duas estratégias podem ser propostas. A primeira consiste em criar dispositivos de monitoramento que identifique se o contorno está

próximo do limite do domínio de projeto. Caso esteja, esse dispositivo deve fechar a curva automaticamente. A segunda alternativa é aumentar o domínio de projeto de modo que englobe totalmente a estrutura, e possíveis expansões próximas às condições de contorno.

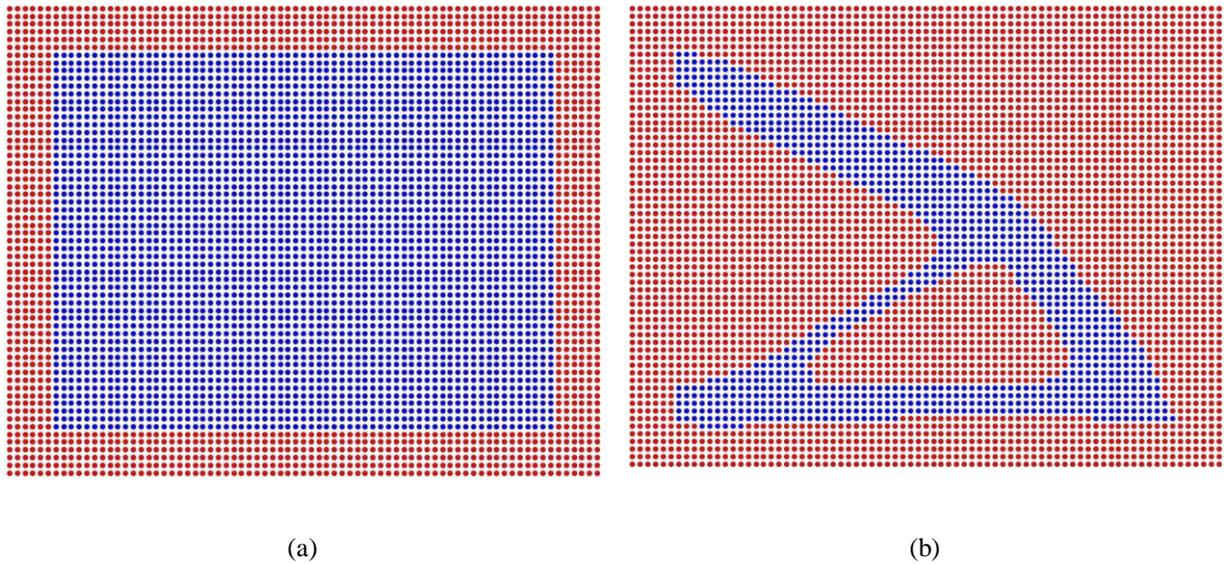


Figura 5.12 Domínio de projeto para solução da equação level set. (a) Configuração Inicial (b) Configuração após a convergência. Pontos azuis indicam material. Pontos vermelhos indicam vazio.

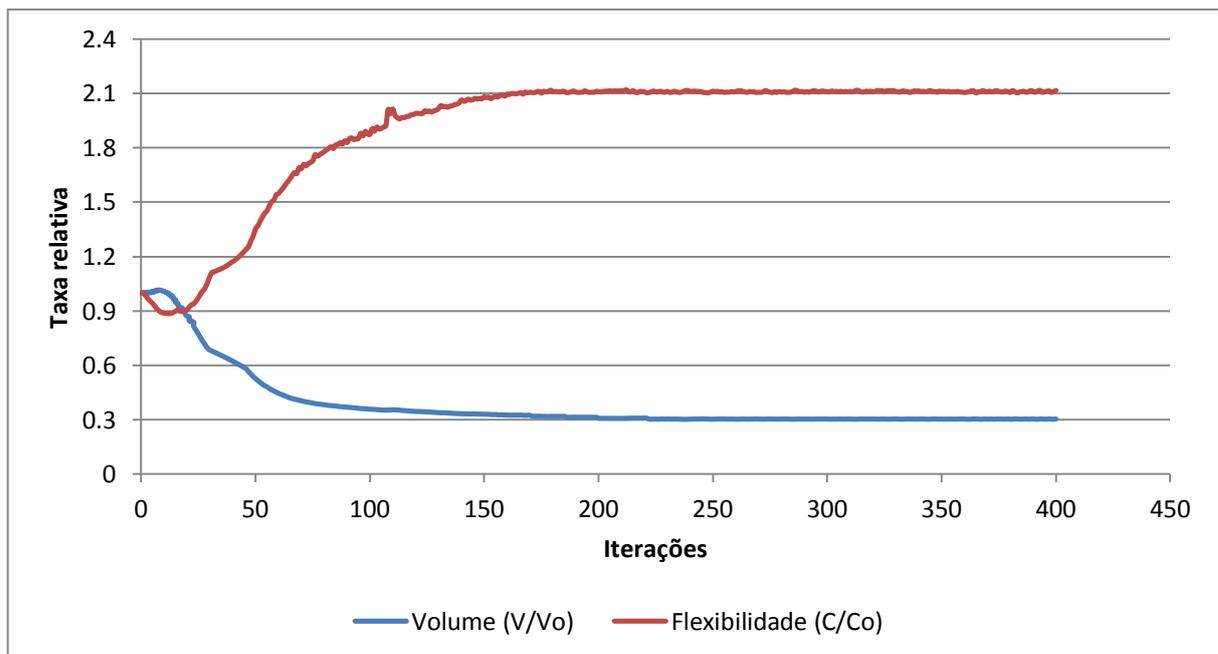


Figura 5.13 Viga sob Flexão – Histórico de convergência

O histórico de convergência é ilustrado pela Figura 5.13. Nota-se que neste exemplo, não há a formação de um pico de flexibilidade para posterior busca do mínimo. Entretanto este fato não impede o algoritmo de buscar uma topologia otimizada e estável.

Este exemplo foi amplamente estudado pelos praticantes de OT. O complicador neste caso é que a topologia final deve conter apenas um furo. Isto significa que mesmo que surjam furos em lugares impróprios ao longo da análise, eles devem desaparecer antes de chegar ao resultado final. O resultado obtido é apresentado pela Figura 5.14, bem como o comparativo entre as estruturas otimizadas previstas utilizando o MEC, o MEF (SIMP), e resultados apresentados na bibliografia. Os resultados mostram boa concordância entre si.

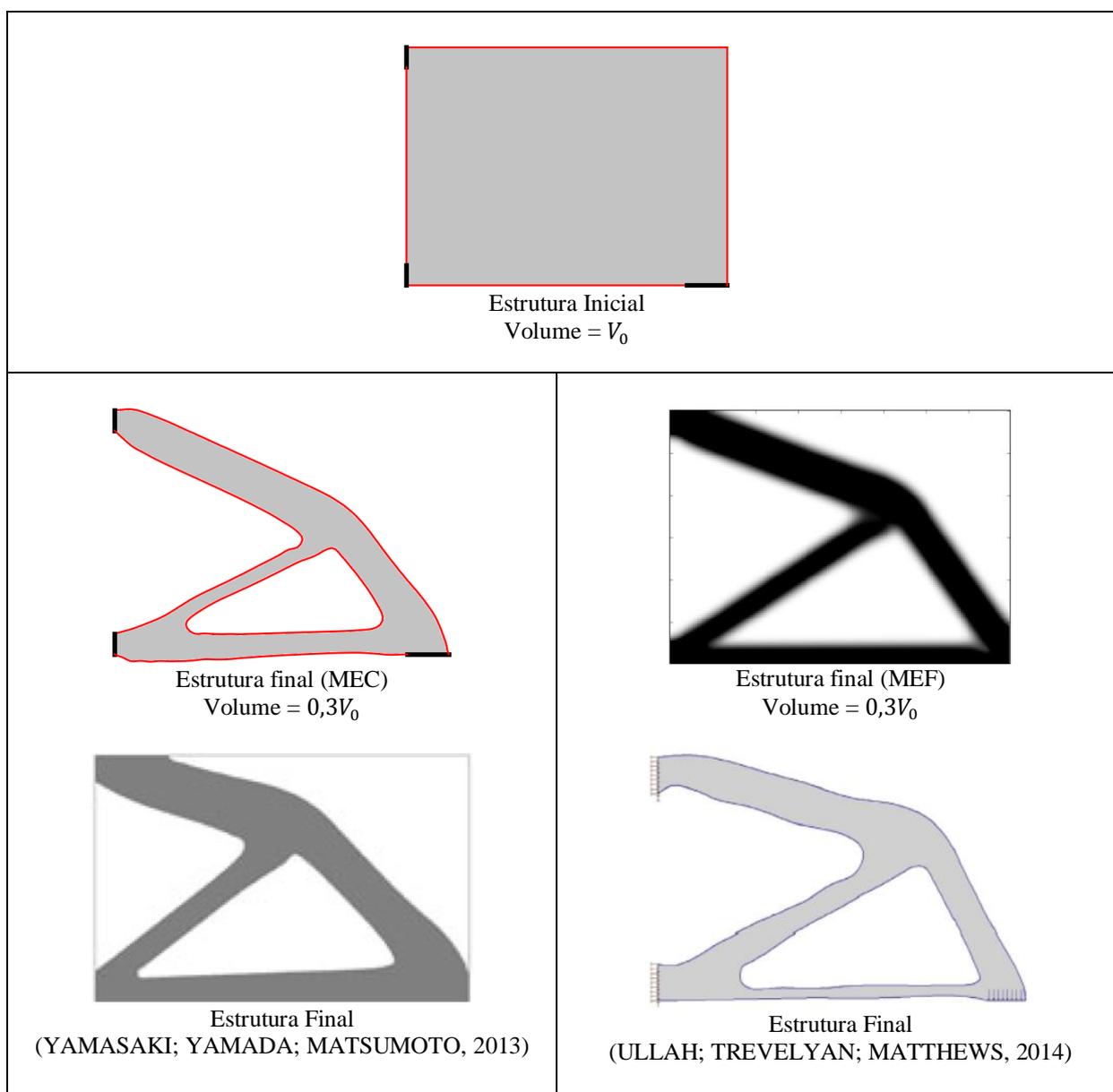


Figura 5.14 Comparação entre resultados obtidos para a Viga sob Flexão

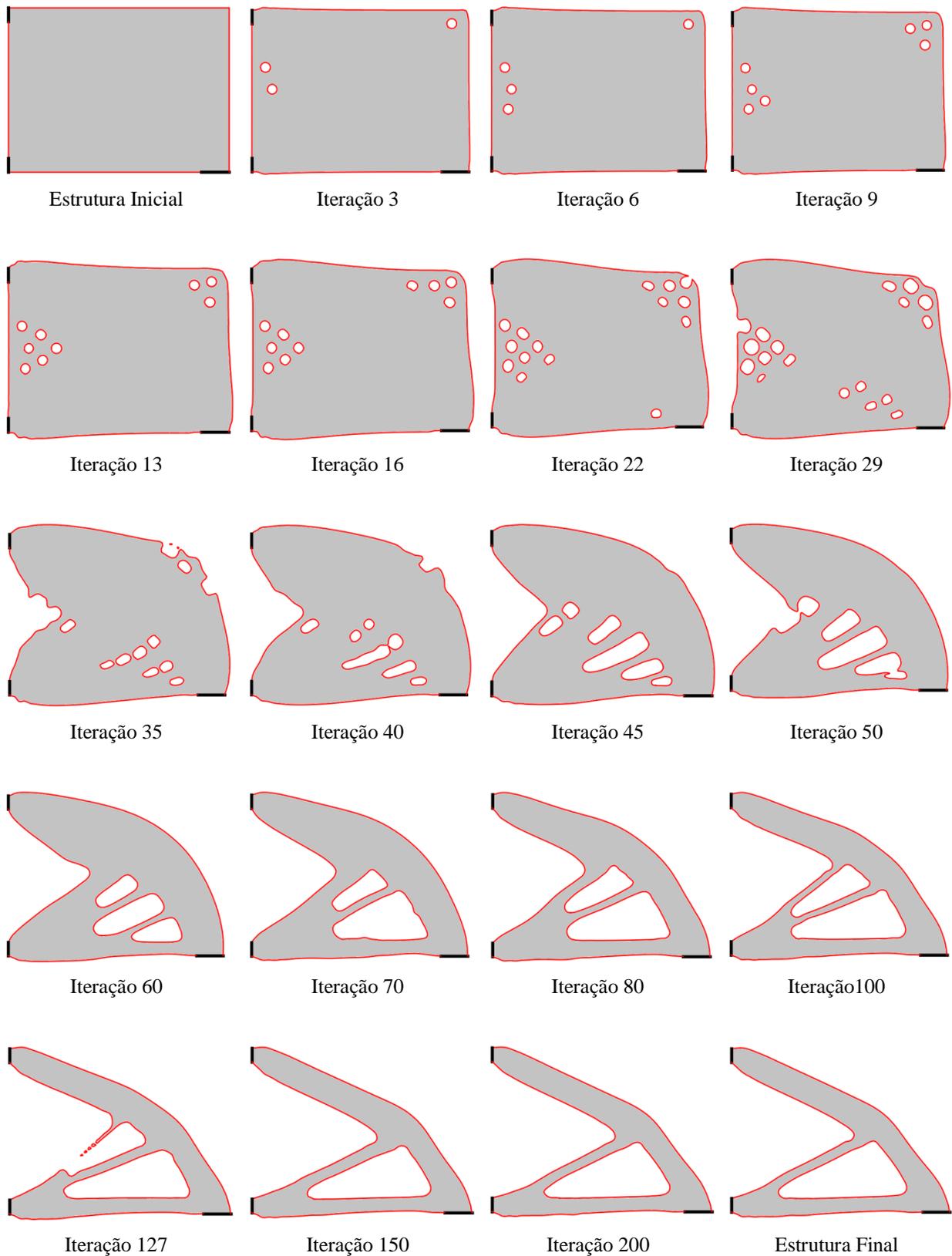


Figura 5.15 Evolução topológica da viga sob flexão

A Figura 5.15 mostra a evolução topológica deste exemplo. A característica propiciada pelo método Level Set fica evidente neste histórico. Note como as complexas mudanças de

forma e topologia são naturalmente consideradas. Mesmo que se tenha completo desprendimento de material, o algoritmo continua estável e converge para a resposta.

Tabela 5.1 Comparação entre eficiências segundo duas abordagens distintas para a Chapa tracionada

Algoritmo proposto por	Número total de iterações até convergência	Tempo total de processamento até a convergência
Vitório Jr. (2014)	96 iterações	8640 minutos
Esta tese em seu item 5.9 (otimização de forma)	60 iterações	2 minutos
Esta tese em seu item 5.9 (otimização topológica)	80 iterações	5 minutos

Tabela 5.2 Comparação entre tempos de processamento para a Viga sob Flexão

Algoritmo proposto por	Número total de iterações até convergência	Tempo total de processamento até a convergência
Vitório Jr. (2014)	154 iterações	7200 minutos
Esta tese em seu item 5.9	250 iterações	35 minutos

Os ganhos em eficiência de processamento são representados pelos dados da

Tabela 5.1 e a Tabela 5.2. Ambas as tabelas trazem os tempos de processamento obtidos no dois exemplos mostrados utilizando as malhas anteriormente indicadas. O algoritmo proposto neste capítulo, no item 5.9, apresenta características que aprimoram o algoritmo proposto por Vitório Jr. (2014). Alguns fatores são fundamentais para a diminuição do tempo de processamento. O primeiro fator é o desacoplamento entre as malhas utilizadas para solução dos métodos envolvidos (MEC, MLS). Isto significa que, pode-se enriquecer o grid de pontos para obter melhor definição do contorno, sem aumentar o número de graus de

liberdade da malha de elementos de contorno. Adicionalmente, os contornos novos que aparecem possuem número de elementos estipulados pela subdivisão das B-splines, que permanece fixo. Estes procedimentos resultam em um baixo número de graus de liberdade para processamento do MEC ao longo de todo o processo de otimização. Como as B-splines também são desacopladas do grid, não há perdas de fidelidade de representação geométrica conforme observado por Ullah, Trevelyan e Matthews (2014). Outro fator importante é a proposição da derivada de forma como direcionadora do campo gradiente normal utilizando o MEC. Além de ser inovadora nesta tese, esta mudança elimina a necessidade do cálculo de velocidades no domínio estrutural. Por meio do processo de extensão de velocidades, é possível obter as velocidades dos pontos de domínio sem custo computacional extra, uma vez que não envolve pós-processamento do MEC.

Estes dois exemplos serviram para ilustrar a aplicação da formulação desenvolvida ao longo deste capítulo. O resultado previsto pelo MEF segundo a metodologia SIMP é obtido por meio do programa TopOpt 2D<sup>5</sup>. As estruturas obtidas via MEC mostram boa concordância com aquelas obtidas por meio do MEF.

Aqui, um comentário se faz oportuno. Note que para obter o resultado SIMP é necessário se dispor de algoritmos de interpretação de densidades, uma vez que a flexibilização do espaço de solução, inerente ao método, permite que as densidades dos elementos finitos tenham variação contínua. Isto implica que a fronteira da estrutura não é claramente definida. Este é o conhecido efeito de *escala de cinza*.

Existem ainda formulações via MEF, como por exemplo, BESO, em que o contorno é identificado claramente. Entretanto, em sua forma comum, a estrutura final possui fronteiras que não são suaves (normalmente em forma de *escada*). A implicação direta é o surgimento de tensões com elevados gradientes que não possuem origem mecânica (física).

Em ambos os casos, para desenvolver formulações que dependam de grandezas calculadas ao longo do contorno via MEF, é preciso se dispor de meios para contornar estes inconvenientes (uso de filtros, por exemplo).

Constata-se que a escolha da malha inicial não influi de maneira significativa no resultado obtido. A malha de contorno passa a ter um papel significativo após as etapas de

---

<sup>5</sup> TopOpt 2D é um programa computacional gratuito desenvolvido e distribuído pelo departamento de Engenharia Mecânica e de Matemática, da Universidade Técnica da Dinamarca (DTU).

remalhamento, em que quão maior o número de elementos, maior o tempo de processamento. Apesar disso, o que se verifica, é que o uso de elementos quadráticos ou cúbicos é benéfico para o processo, pois, consegue-se representar as curvaturas presentes, sem aumentar em demasia o número de graus de liberdade.

O algoritmo aqui proposto é menos susceptível às escolhas de parâmetros de otimização, se comparado aos algoritmos heurísticos. Testes realizados variando o refinamento do grid e o parâmetro  $\rho$  resultam em topologias semelhantes. Enfatiza-se o uso do campo gradiente normal à superfície para guiar o campo de velocidades advectivo. Este procedimento mantém o algoritmo estável e convergente, uma vez que a superfície mantém a suavidade necessária ao longo de todo o processo de otimização, conforme mostrado.

Os resultados mostrados neste capítulo permitem constatar que, o acoplamento MEC-MLS propicia uma descrição clara e suave do contorno da estrutura ao longo de todo o processo de otimização. Isto faz com que este acoplamento seja atrativo, especialmente para formulações que dependam de variação de grandezas descritas ao longo do contorno móvel. Além disso, fica clara a resposta à questão posta no início do capítulo. Sim, é possível acoplar o MEC eficientemente com o MLS a fim de produzir um algoritmo que encontre a topologia ótima de estruturas. No próximo capítulo será destacada a importância que esse algoritmo pode ter em cenários de análise de engenharia mais complexos.

## **6 MEC APLICADO AO PROCESSO DE TOMADA DE DECISÃO EM PROBLEMAS ENVOLVENDO VARIABILIDADE GEOMÉTRICA**

A Otimização topológica, conforme se viu no capítulo anterior, constitui uma ferramenta de concepção muito útil aos engenheiros. Apesar disto, sabe-se que o problema de OT é fortemente não convexo, o que dificulta a obtenção de soluções globais. Adicionalmente, a busca de mínimos é dependente do cálculo de gradientes que condiciona a resposta a mínimos locais. Uma vez que os mínimos locais frequentemente não são únicos, a implicação prática é que o analista estrutural pode ter em mãos estruturas otimizadas com geometrias distintas. Havendo todas elas a mesma quantidade de material, o engenheiro é chamado a fazer uma escolha; qual dentre elas utilizar. Para fazer esta escolha, é preciso ter em mente algum critério de comparação. O critério imediato disponível seria, por exemplo, tomar a flexibilidade. Em seguida, arbitrar que a melhor estrutura é aquela que for mais rígida (menos flexível). Este é um exemplo de critério determinista.

Este capítulo se propõe então a investigar a eficiência do critério determinista baseado em flexibilidade. Será que ele conduz a boas escolhas do ponto de vista de engenharia? Em caso negativo, como apontar um critério mais efetivo que confira maior segurança ao projeto estrutural em questão? Seria possível mensurar esta segurança? Para responder a estas questões, será aqui formulado um novo algoritmo baseado nos conceitos desenvolvidos anteriormente, sendo eles: a teoria de Confiabilidade e o MEC. Uma vez que tenhamos esse algoritmo, serão mostrados alguns casos de aplicação.

### **6.1 Revisão bibliográfica**

Em engenharia estrutural, quando se trata de redução de custos de manufatura, técnicas deterministas têm sido aplicadas com sucesso para a melhoria de desempenho. Entretanto, as técnicas deterministas não englobam o caráter intrinsecamente aleatório dos problemas de engenharia. Uma vez que o material é utilizado em sua capacidade máxima, surge então a necessidade de se maximizar a vida útil das estruturas mantendo níveis satisfatórios de segurança. No que se refere à OT, aparecem com maior frequência duas vertentes de investigações na bibliografia.

A primeira linha de investigação se dedica a otimizar a topologia de uma estrutura para atender à uma determinada probabilidade de falha. É a conhecida técnica Otimização Topológica Baseada em Confiabilidade, em Inglês, *Reliability Based Topology Optimization* (RBTO). Pesquisadores vêm estudando esta técnica nos últimos anos. Kharmanda et al (2004) mostraram o impacto que a probabilidade de falha pode ter na estrutura final otimizada topologicamente. As técnicas utilizadas até então em otimização estrutural probabilística eram baseadas em *loops* encadeados, que são conhecidos por serem custosos computacionalmente. Os autores propuseram uma maneira particular de cálculo de sensibilidades, envolvendo a função de flexibilidade e as variáveis aleatórias de geometria e carregamento em forma de *loops* não encadeados. Utilizando o SIMP, foi mostrado que a depender do nível de confiabilidade pretendido, poderiam ocorrer estruturas otimizadas distintas com o mesmo volume final.

As investigações que envolvem RBTO geralmente partem da mesma função objetivo utilizada por técnicas deterministas. A diferença reside na restrição probabilística e na maneira de calcular as sensibilidades envolvidas. As técnicas clássicas (como o FORM) dependem da determinação do ponto de projeto, que pode ser uma tarefa difícil em estruturas complexas, especialmente para probabilidades de falha muito pequenas. Surge então uma ideia inversa; pode-se criar uma medida de desempenho para uma probabilidade de falha dada. Essa técnica apresentada por Tu et al (1999) é chamada Abordagem Baseada em Desempenho (PMA, do inglês *Performance Measure Approach*). Kim et al (2006) fazem uma comparação entre os resultados encontrados via RIA (do inglês *Reliability Index Approach*) e aqueles obtidos via PMA. O que se verifica é uma leve discrepância entre as topologias otimizadas, o que, entretanto, não altera a tendência geométrica conhecida para esses casos.

A técnica de otimização topológica BESO pode ser utilizada para realizar RBTO. Nesse caso, atenção especial deve ser direcionada ao filtro, já que o número de sensibilidade pode conduzir frequentemente a topologias não convergentes. Eom et al (2011) sugerem o uso de informações de iterações precedentes para calcular as derivadas da iteração atual. Os autores ainda constatarem que o grande número de variáveis de projeto resulta em tempos de cálculo excessivo. A fim de diminuir o tempo de processamento, adota-se um metamodelo. Assim, consegue-se diminuir o número de amostras necessárias para calcular a probabilidade de falha. Os resultados de estruturas tridimensionais são coerentes com aqueles classicamente presentes na bibliografia. As mesmas conclusões são confirmadas por Yoo et al (2011).

A técnica BESO foi utilizada com OT multiobjetiva por Cho et al (2011). A ideia é encontrar a geometria ótima de reforços de capôs automotivos considerando a rigidez à flexão, rigidez à torção e a frequência natural. A associação entre o método PMA e o índice de confiabilidade é utilizada para avaliar as restrições probabilísticas. Uma das conclusões é que reforços com maiores raios de curvatura propiciam maior ganho de rigidez e frequência natural, entretanto não melhoram o desempenho à torção. A técnica BESO também foi aplicada para a otimização probabilística de componentes envolvendo materiais heterogêneos e fenômenos multifísicos (CHO et al, 2012). Uma vez que as análises repetitivas ainda representam um desafio, ainda existem trabalhos dedicados às melhorias operacionais (KANAKASABAI; DINGRA, 2016). Os referidos estudos, a priori, constataam a possibilidade de utilizar BESO para análises de RBTO.

Nguyen, Song e Paulino (2011) investigaram a possibilidade de aplicar a confiabilidade de sistemas para fins de OT. Para tanto, os autores propõem um algoritmo de loop único para a avaliação de probabilidades de falha, utilizando métodos de segunda ordem. Os autores ainda sugerem a possibilidade de existência de interdependência estatística entre as variáveis aleatórias. Os resultados apontam que os métodos de primeira ordem clássicos fornecem probabilidades de falha com precisão aceitável, para estruturas simples. Quando se trata de geometrias mais complexas, os métodos de segunda ordem são vantajosos do ponto de vista da acurácia, especialmente aliados ao ganho de eficiência pela implementação de loop único. Os autores propõem que a malha de elementos finitos utilizada para as análises mecânicas e de otimização tenham resoluções distintas, o que possibilita topologias de alta resolução.

Recentemente Zhao et al (2015), utilizaram de duas técnicas conhecidas, a saber, PMA e SORA (*Sequential Optimization Reliability Assessment*) para comparar eficiência para fins de OT. Para diminuir o custo computacional, os autores aplicam uma superfície de resposta estocástica que aproxima a verdadeira função de estado limite. Além disso, os pontos de amostra são gerados utilizando um algoritmo adaptativo conhecido como *Sparce Grid*. Esse algoritmo, em princípio, permite uma geração mais eficiente de amostras, já que concentra maior número de pontos onde for necessário algum refinamento. Utilizando-se de casos clássicos, os resultados mostram que o número de iterações diminui com o uso do SORA, frente ao PMA, o que pode ser vantajoso computacionalmente. Adicionalmente fica clara a viabilidade deste tipo de combinação algorítmica (PMA/SORA + MEF) para a solução de problemas de RBTO utilizando o SIMP. O caso envolvendo o Level Set (LIU et al, 2016) tem

sido investigado e mostrado sua potencialidade, embora melhoras de acurácia ainda se façam necessárias. Neste sentido o algoritmo proposto no presente capítulo, vem contribuir para constatar a validade desta estrutura algorítmica. Admitindo que Zhao et al (2015) tenham verificado sua eficiência considerando o MEF e SIMP, aqui será mostrado que o mesmo continua válido para o MEC e o Level Set, embora sob enfoque exclusivo de geometria.

Liu, Paulino e Gardoni (2016) apresentaram uma técnica alternativa ao FORM para o cálculo do gradiente das restrições probabilísticas. A técnica recebe o nome de SML (*Segmental Multi-point Linearization*). Esta técnica foi desenvolvida para aproximar as integrais resultantes dos gradientes da probabilidade de falha. Em vez de integrar sobre uma única superfície contínua, o método ajusta a superfície de estado limite ao longo de segmentos de hiperplano, que melhor representem o domínio de falha. Os resultados obtidos são comparáveis àqueles obtidos com o clássico FORM. Entretanto os autores argumentam que o SML é capaz de encontrar respostas convergentes onde o FORM apresenta dificuldades de convergência.

Zhao et al (2016) publicaram um trabalho ilustrando as várias técnicas existentes para problemas de RBTO. Embora as técnicas sejam apresentadas via MEF, são extensíveis ao campo do MEC. As conclusões ratificam as ideias já conhecidas de que as estruturas otimizadas topologicamente, visando uma probabilidade de falha específica, são mais confiáveis que as correspondentes deterministas. No caso de estruturas aeroespaciais, por exemplo, essas geometrias podem ter alto impacto nas etapas posteriores de produção (LOPEZ; BALDOMIR; HERNÁNDEZ, 2016). Além disso, confirma-se que a meta-modelagem se mostra uma ferramenta importante para a diminuição do tempo de processamento, sem comprometer acurácia.

A segunda vertente de investigação se dedica a maximizar a robustez de um sistema não determinístico. Para tanto, determina-se a topologia da estrutura que seja o menos sensível possível às aleatoriedades envolvidas. Esse é o caso da Otimização Topológica Robusta, em Inglês, *Robust Topology Optimization* (RTO). Por meio da Figura 6.1, é possível notar claramente a diferença entre otimização determinista e otimização robusta. Observe que geometrias robustas apresentam menor dispersão do desempenho mecânico.

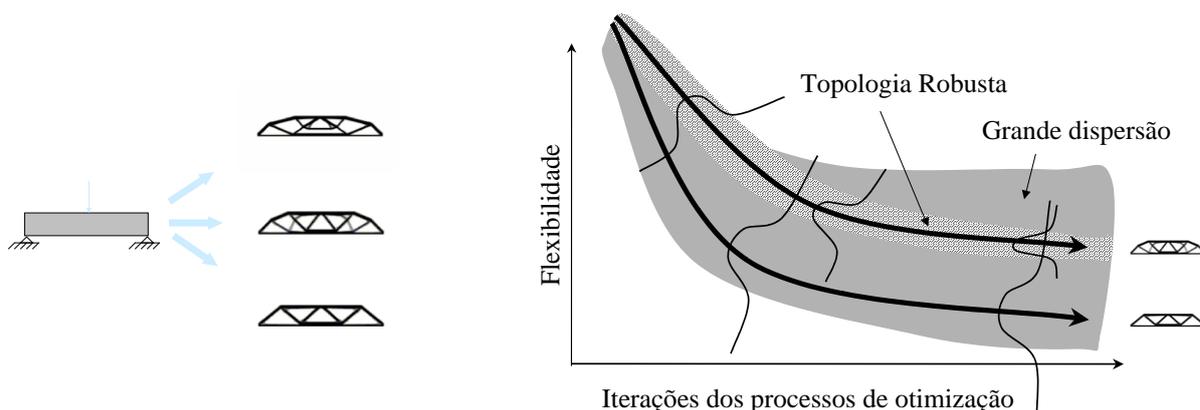


Figura 6.1 Otimização Topológica com diferentes níveis de confiabilidade (CHATEAUNEUF, 2008)

Essencialmente existem duas propostas distintas para se fazer otimização robusta. A primeira, e mais empregada delas, é utilizando métodos estocásticos. Nesses casos, alguma parte dos parâmetros de entrada (carregamentos, por exemplo) é assumida ser aleatória, mas obedecendo alguma conhecida lei de distribuição de probabilidades. A segunda maneira é determinista, também chamada de *Pior Cenário Possível* (do inglês, *worst-case scenario*). Essa situação é utilizada para encontrar estruturas otimizadas que suportem os carregamentos mais desfavoráveis possíveis, ou, os piores erros de manufatura, independentes da probabilidade destes ocorrerem. Abordagens do tipo Pior Cenário são mais conservadoras que métodos estocásticos, já que maiores restrições são impostas ao projeto ótimo. (HOLMBERG; THORE; KLARBRING, 2015)

Chen, Chen e Lee (2010) apresentam um algoritmo de RTO baseado em Level Set. Os autores consideram as propriedades materiais e o carregamento como funções aleatórias de campo. As funções de campo aleatórias são discretizadas por meio da expansão (ou transformada) de Karhunen-Loève (K-L). Essa transformada é utilizada frequentemente por incorrer num menor erro de representação de uma função contínua por meio de uma sequência finita de amostras. Utilizando pontos de quadratura de Gauss e um método de aproximação por funções univariadas que reduz a dimensionalidade das integrais, é possível obter os momentos estatísticos das topologias. Combinando essas técnicas, os autores obtêm as sensibilidades de forma e topológica em cada ponto de Gauss, resultando exatamente na sensibilidade do campo aleatório em questão com relação à topologia, com reduzido custo computacional. Os resultados apontam que topologias robustas, tanto bidimensionais como tridimensionais, apresentam geometrias bem distintas de suas correspondentes deterministas.

Takezawa et al (2011) abordaram a RTO sob o enfoque da maior flexibilidade produzida por um carregamento aleatório. Trata-se de uma abordagem *worst-case*. Utilizando uma decomposição em autovalores e autovetores é possível encontrar qual o deslocamento necessário por meio do teorema das matrizes de Rayleigh-Ritz. A formulação é composta por uma OT do tipo SIMP aliada ao método das assíntotas móveis (MMA) que requer derivadas de primeira ordem da função objetivo com respeito às densidades. Os resultados válidos em duas ou três dimensões apresentam estruturas razoáveis sob o ponto de vista construtivo de engenharia.

O caso em que incertezas relacionadas à geometria afetam o comportamento mecânico foi investigado por Chen e Chen (2011). Esse caso é ainda mais desafiador para fins de otimização, pois as incertezas situam-se exatamente no contorno, que é dinamicamente alterado ao longo do processo. As incertezas geométricas são quantitativamente modeladas combinando a equação Level Set com uma velocidade normal aleatória caracterizada por um conjunto reduzido de VA's usando expansão de K-L. Quadratura de Gauss multivariada é utilizada para propagar as incertezas geométricas, e facilitar a obtenção das sensibilidades. Além de topologias distintas, os projetos finais robustos mostram menor sensibilidade à perturbações geométricas, se comparados aos deterministas.

Quando se trata de estruturas muito finas, em meso/microescala, é usual o processo de fabricação conhecido como *moagem* e a *gravura*. Esses casos são sensíveis a quaisquer variações que possam ocorrer ao longo da superfície de usinagem. Surge então o interesse em saber como produzir estruturas topologicamente otimizadas levando em conta a robustez frente aos possíveis erros de fabricação. Essa problemática foi investigada por Schevenels, Lazarov e Sigmund (2011). Os autores fazem uso de uma distribuição probabilística para o campo de erros de manufatura, e uma função objetivo composta pelo valor médio e pelo desvio padrão do desempenho. As integrais estatísticas são avaliadas por simulações de Monte Carlo. Os resultados mostram que os projetos robustos obtidos permitem maior controle de detalhes geométricos, se comparados aos resultados deterministas. Os exemplos incluem tanto garras manipuladoras (*gripper*) quanto de um dissipador de energia térmica.

Os projetos otimizados de forma robusta encontram aplicação nas mais diversas áreas. Em Aeronáutica, por exemplo, Lee et al (2012) se ocuparam de encontrar a topologia de asas de avião utilizando restrições nas respostas estatísticas. Os resultados apontam que a geometria encontrada possui melhor comportamento aerodinâmico que os projetos iniciais. Já

Wu et al (2014) confere atenção às suspensões de veículos automotivos de forma a minimizar a trepidação. Asadpoure, Tootkaboni e Guest (2011) se ocupam de estruturas reticulares do tipo treliça que podem ter aplicação interessante sob ponto de vista de estruturas civis. Na indústria automobilística, a RTO tem sido aplicada com sucesso para obter chassis que sejam mais leves, mais rígidos, e mais estáveis a esforços dinâmicos (GARDEA e VALENZUELA, 2015).

Sabe-se que estruturas otimizadas topologicamente são sensíveis às variações de geometria sofridas devido ao processo de fabricação. Nesse caso, otimizações que levem em consideração esse fato podem ser muito úteis. Para tanto, Guo, Zhang e Zhang (2013) apresentam um algoritmo que determina a topologia otimizada levando em conta as imprecisões no contorno. Utilizando uma formulação baseada no MLS e no XFEM (método dos elementos finitos estendidos), associada à técnica *worst-case*, os autores concluem que as topologias robustas são semelhantes às determinísticas, embora tenham forma distinta. A influência das imperfeições geométricas na robustez da topologia também foi investigada por Jansen et al (2013).

Dunning e Kim (2013b) trataram o problema de otimização robusta utilizando a minimização simultânea da expectativa da flexibilidade e sua variância na presença de incertezas de carregamento. Os autores utilizaram expressões analíticas para as sensibilidades em conjunto com o MLS e o método das variáveis adjuntas. Embora a variância da flexibilidade seja levada em conta por meio de uma função objetiva ponderada, não se consegue esclarecer sua real influência na estrutura final. Os resultados mostram que as estruturas robustas apresentam mudanças significativas se comparados às equivalentes deterministas.

Garcia-López et al (2013) propõem um algoritmo do tipo evolucionário multiobjetivo. Essa técnica se baseia na busca e posterior refinamento de respostas a partir de um conjunto inicial de amostras (população inicial). Normalmente, os diferentes algoritmos envolvem seleção, recombinação e mecanismos de perturbação (como mutação). Os autores propõem uma maneira de aproximar o ótimo no sentido de Pareto (pontos de compromisso entre objetivos conflitantes). Por meio de exemplos simplificados, os autores conseguem ilustrar a evolução das frentes de Pareto que confirmam os resultados já presentes na bibliografia.

O efeito da variabilidade do carregamento na robustez de topologias otimizadas foi investigado por Zhao e Wang (2014), Guo et al (2015), Richardson, Coelho e Adriaenssens

(2015), Nakazawa et al (2016), Zhang, Kang e Zhang (2016). Otimização robusta levando em consideração os efeitos da linearidade geométrica foi explorada por Jansen, Lombaert e Schevenels (2015). O que se nota é que estruturas que estejam sujeitas às instabilidades por compressão, tem sua topologia completamente alterada para se tornar mais imune. Quanto à manufatura de estruturas otimizadas, problema de especial interesse para a indústria, o leitor é convidado a consultar uma ampla discussão apresentada por Lazarov, Wang e Sigmund (2016). O MEC não tem aparecido com frequência nesse domínio de aplicação.

Dois desafios são ainda hoje apontados quando se tenta aplicar as técnicas de RBTO e RTO (ROZVANY, LEWINSKI, 2014). Uma delas envolve a modelagem eficiente de incertezas de uma estrutura cuja geometria evolua apenas na fase de projeto. A outra dificuldade aparece quando se tenta tratar um grande número de variáveis de projeto e parâmetros aleatórios a custos computacionais aceitáveis. O MEF tem sido o método numérico predominante nos trabalhos envolvendo RBTO e RTO. Como o MEC não tem sido explorado nesse campo de investigação, este capítulo representa uma contribuição para a comunidade de Elementos de Contorno. Tendo em mente as observações de Rozvany e Lewinski (2014), será apresentada uma metodologia que utiliza apenas as geometrias resultantes de otimizações topológicas deterministas. Na prática, esta metodologia permite inferir quais são as geometrias mais ou menos eficientes, baseadas em critérios probabilísticos.

## 6.2 Formulação do problema

Ao se levar em conta a variabilidade da geometria, o próprio desempenho mecânico passa a ser uma função aleatória, e o mesmo ocorre com o volume de material. Seja  $X$  o vetor de VA's que descreve a geometria da estrutura. Utilizando a formulação lagrangeana aumentada (vide item 5.5), pode-se escrever:

$$L(\Omega(X), X) = C(\Omega(X), X) + \lambda^k \left( \int d\Omega(X) - vol^* \right) + \frac{1}{2Y^k} \left( \int d\Omega(X) - vol^* \right)^2 \quad (6.1)$$

Uma maneira de obter a resposta do problema seria minimizar a equação (6.1). Esta opção pode se mostrar complexa já que envolve a geometria como VA, algo que afeta diretamente as formulações do MEC que dependem do contorno. Entretanto, para responder à

pergunta posta no início do capítulo pode-se adotar uma estratégia mais simples que incorpora o algoritmo desenvolvido no capítulo anterior. Basta que se trabalhe com as geometrias finais obtidas com o algoritmo determinista. É possível criar um procedimento computacional que consiga extrair informações adicionais da estrutura otimizada.

A fim de obter as referidas informações, duas etapas se fazem necessárias. A primeira consiste na adoção de um critério de escolha. A segunda consiste num procedimento de obtenção de sensibilidades com relação à estabilidade geométrica. De posse dessas informações, é possível tomar decisões mais racionalmente. No próximo item essas etapas serão descritas.

### 6.3 Proposta numérica de solução

#### 6.3.1 Critério de Escolha e Sensibilidade

Uma vez que se disponha de várias geometrias otimizadas, e todas satisfazendo a restrição de volume, torna-se necessário um critério de escolha. É interessante que se tenha um critério prático do ponto de vista de engenharia. Note que estruturas otimizadas possuem campos de tensões mais uniformes o que dificulta uma possível redistribuição de esforços. Neste caso, parece ser mais sensato a escolha de uma geometria que seja tão insensível quanto possível às alterações geométricas.

Uma maneira de obter esta informação é simular matematicamente uma perturbação aleatória da geometria final, e descobrir qual delas é menos sensível às variações de desempenho. Seja,  $\Omega^*$  a geometria resultante do processo de OT, com correspondente flexibilidade,  $C(\Omega^*)$ . Considere que o cenário de falha fica caracterizado quando a geometria  $\Omega(X)$  possua uma flexibilidade superior a um limite fixado,  $\beta$ .

Matematicamente esse critério pode ser expresso por meio do cálculo da seguinte equação de estado limite:

$$G(\Omega(X), X) = \beta - \frac{C(\Omega(X), X)}{C(\Omega^*)} \quad (6.2)$$

Normalmente estipula-se que a probabilidade de falha esteja abaixo de um valor de referência, o que pode ser escrito como:

$$\Pr[G(\Omega(X), X) \leq 0] \leq P_f^T \quad (6.3)$$

Note-se que, ao se realizar uma perturbação do contorno, o volume de material da estrutura também sofre uma perturbação. Admitindo que as funções envolvidas possuam a regularidade necessária, pode-se expandir o Volume em série polinomial como:

$$\Omega(X + \delta X) = \Omega(X) + \frac{\partial \Omega}{\partial X} \delta X + o[|\delta X|] \quad (6.4)$$

O termo  $o[|\delta X|]$  representa a ordem superior em  $\delta X$ . O mesmo pode ser dito sobre o desempenho mecânico representado pela flexibilidade:

$$C(X + \delta X) = C(X) + \frac{\partial C}{\partial X} \delta X + o[|\delta X|] \quad (6.5)$$

Uma vez que ambas as grandezas de interesse variam de acordo com o mesmo parâmetro, uma medida interessante é justamente obter qual a variação relativa entre elas. As expressões (6.3), (6.4) e (6.5) podem ser utilizadas para fazer a comparação entre estruturas com geometrias distintas. O que se constata é que a primeira variação dessas expressões possuem relação direta com a probabilidade de falha conforme será mostrado nas aplicações.

Embora a perturbação da geometria possa ser realizada de diversas maneiras, aqui será proposta uma maneira particular sem perda de generalidade. Essa escolha é interessante por utilizar as características do MEC que já possui malha distribuída ao longo do contorno, que passa a ser, em si, uma VA. Mais detalhes são elucidados a seguir.

### 6.3.2 Perturbação do Contorno

Incertezas no contorno da estrutura podem advir de imprecisões de manufatura como zonas de afinamento e irregularidades. Para analisar os efeitos das incertezas no contorno, é necessário induzir variações de contorno de maneira parametrizada. Como o contorno é contínuo, e suave por partes, a parametrização permite que se tenha um número limitado de variáveis de controle.

Seja o perímetro de influência, a fração local do contorno afetada pelo movimento normal. A amplitude da perturbação será proporcional ao comprimento do perímetro de influência, normalmente 10%. Todos os movimentos de fronteira serão normais a ela. Portanto, o movimento se dá na direção do vetor normal unitário ao contorno.

Dois casos são considerados dependendo da posição do contorno. Para contornos externos, as variações são realizadas por partes de acordo com a definição do projetista. Para contornos internos, os furos, adota-se um movimento do tipo *offset*. Conseqüentemente o contorno, por inteiro, sofre um processo de encolhimento ou expansão. A Figura 6.2 serve de ilustração para os dois casos. Quando essa perturbação é aplicada à estrutura otimizada, obtêm-se quais são seus efeitos sobre a resposta estrutural, ou seja, a flexibilidade e o volume.

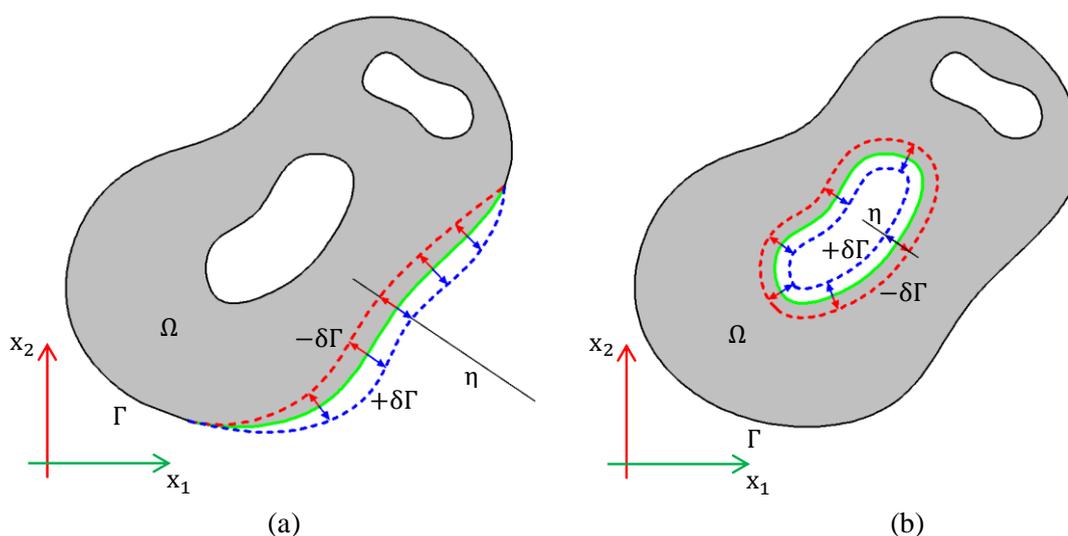


Figura 6.2 Perturbação do contorno. (a) Perturbação do contorno externo (b) Perturbação do contorno interno

A partir dos valores obtidos para flexibilidade e volume em cada perturbação do contorno, é possível aplicar a equação de estado limite e construir uma superfície de resposta (vide item 4.4). Como esta superfície será função da amplitude de perturbação, pode-se realizar simulações de Monte Carlo, considerando a própria geometria como VA. Isso permite a obtenção direta da probabilidade de falha.

### 6.3.3 Procedimento Computacional

As etapas descritas neste item podem ser automatizadas seguindo a seguinte ordem:

- 1 – Definição do conjunto de geometrias otimizadas;
- 2 – Realizar a perturbação do contorno em cada geometria. Vide item 6.3.2. Para cada valor de perturbação, deve-se coletar a correspondente flexibilidade e volume;
- 3 – A partir do conjunto de flexibilidades e volumes do passo anterior, deve-se construir um polinômio de resposta utilizando a equação de estado limite (6.2);
- 4 – Realizar a simulação de Monte Carlo considerando como variável aleatória o parâmetro que governa a amplitude de perturbação geométrica. Aqui o parâmetro que governa a geometria foi adotado como tendo variação Gaussiana, com média nula e desvio padrão de 20% da amplitude máxima. Valores negativos do parâmetro indicam contração, enquanto, os positivos indicam expansão;
- 5 – A partir dos dados das simulações de Monte Carlo, podem ser calculadas as Probabilidades de Falha.

As informações obtidas tanto com a sensibilidade da flexibilidade em relação à variabilidade do contorno, quanto às probabilidades de falha, podem ser úteis ao projetista para melhor embasar suas escolhas. Mais detalhes serão evidenciados nos casos de aplicação a seguir.

## **6.4 Aplicações**

Os exemplos a seguir foram simulados em um microcomputador com configuração: processador Intel Core i7 de 3,4GHz, RAM 16G.

### **6.4.1 Viga em balanço**

Os resultados obtidos com a OT podem ser enriquecidos considerando mais informação sobre as características do projeto final. Para ilustrar essa ideia, tome a estrutura apresentada no item 5.10.2. Considere que a estrutura otimizada deva conter apenas 30% do volume inicial de material. Pelo menos duas geometrias podem ser prontamente obtidas para este caso. Vide Figura 6.3. A primeira é resultado da Otimização de Forma e será chamada

*Topologia 1.* A principal característica dessa geometria é que ela é obtida com o movimento apenas dos contornos livres da estrutura inicial. Embora a geometria seja diferente, tanto a estrutura inicial quanto a estrutura final pertencem à mesma classe topológica. O segundo resultado é a *Topologia 2.* Nesse caso, o resultado foi obtido via OT em que um furo não circular está presente na estrutura final (vide item 5.10.2). A topologia 1 foi modelada por 27 elementos de contorno quadráticos. Para a topologia 2, foram utilizados 51 elementos de contorno quadráticos. Em ambos os casos foram utilizados elementos descontínuos em pontos de descontinuidade de forças de superfície, como em quinas.

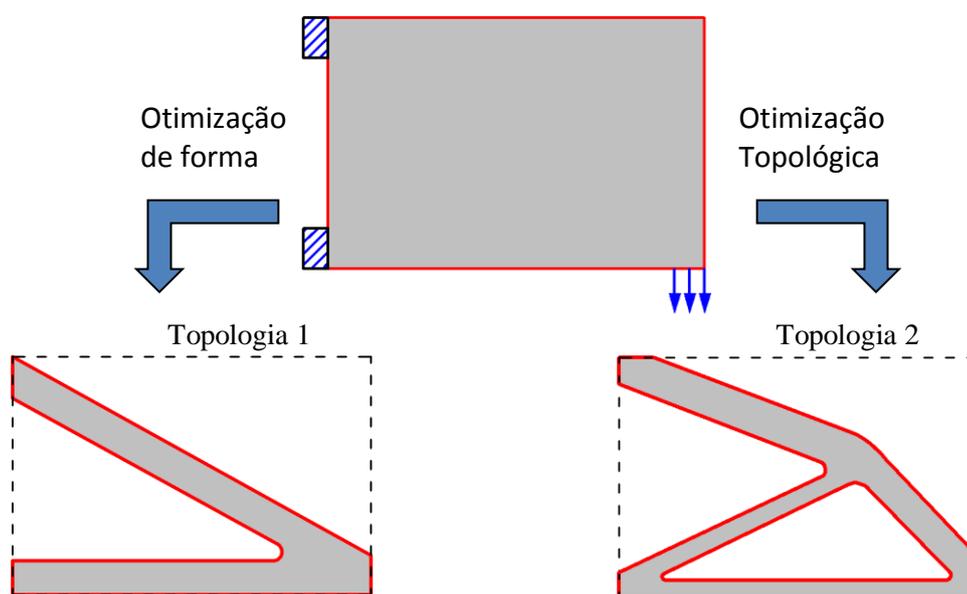


Figura 6.3 Aspectos geométricos das estruturas otimizadas

A ilustração da Figura 6.4 serve para se ter uma ideia comparativa entre as sensibilidades geométricas manifestadas pelas topologias mencionadas. A coluna de gráficos à esquerda é referente à Topologia 1 e a coluna à direita à Topologia 2. Os gráficos são relativos às derivadas de primeira ordem presentes nas expressões (6.4) e (6.5). Todas as curvas foram obtidas aplicando a metodologia mencionada na seção 6.3 para estruturas finais. Em cada caso, a flexibilidade ótima determinada e o respectivo volume são denotados por  $C_0$  e  $V_0$ . Os contornos variáveis são denotados por *Contorno k,l*, simbolizando a parcela de contorno  $l$  pertencente à topologia  $k$ . O eixo horizontal representa a amplitude da variação do contorno na direção normal. Cada segmento de contorno está diferentemente ligado à medida global que é expressa pelas funções,  $C(\Gamma_{k,l})$  e  $V(\Gamma_{k,l})$ . Para fins de comparação, estes valores podem ser mostrados como frações dos valores iniciais, ou seja,  $C(\Gamma_{k,l})/C_0$  e  $V(\Gamma_{k,l})/V_0$ , que serão indicados nos gráficos da Figura 6.4 como *Flexibilidade Relativa* e *Volume Relativo*.

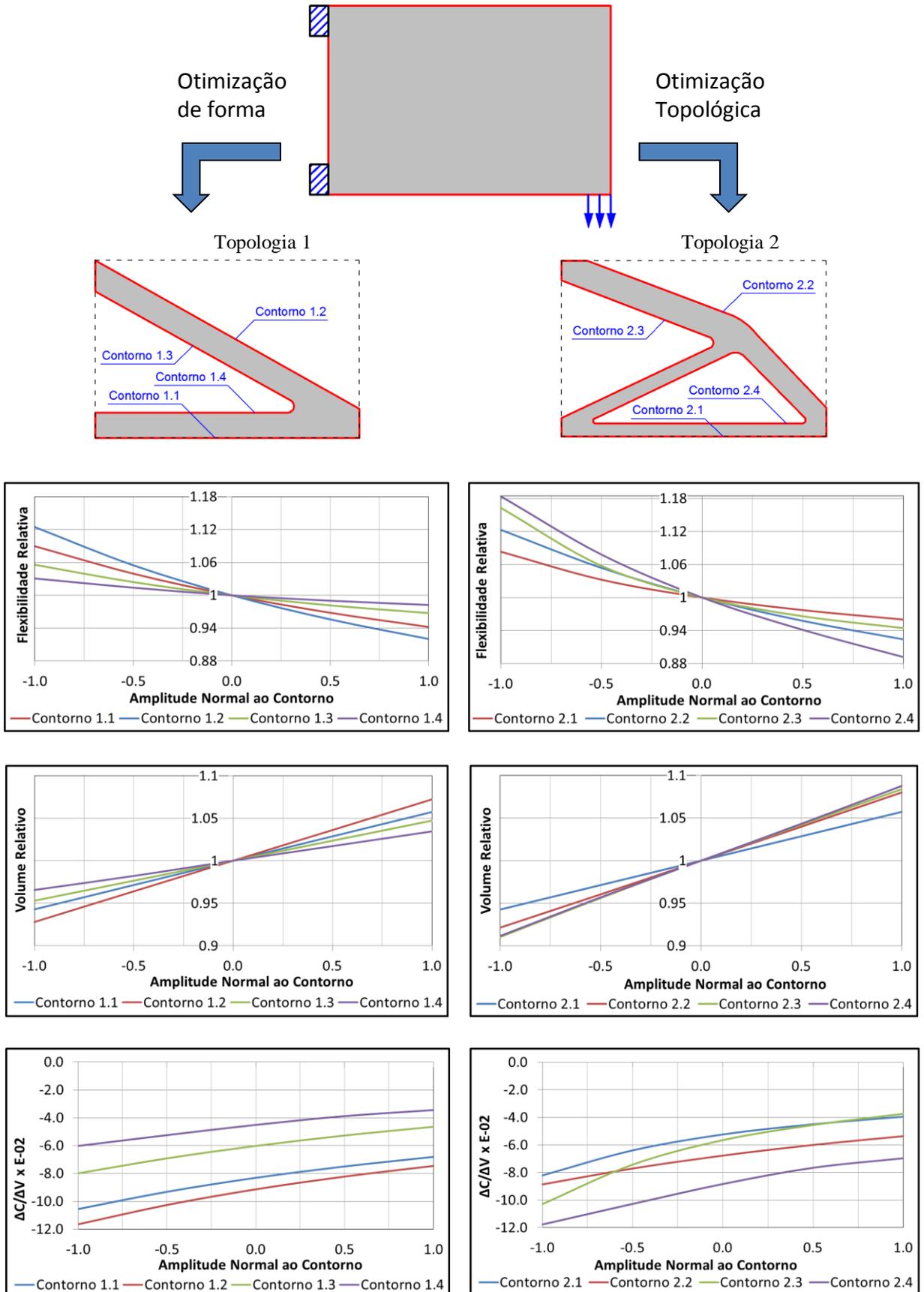


Figura 6.4 Comparação entre sensibilidades para a viga engastada ( $\Delta C/\Delta V$  in N/mm)

Uma perturbação do contorno implica em uma resposta não linear em termos de flexibilidade estrutural. O mesmo não se manifesta em termos de volume, que mantém uma dependência linear. Surge então uma medida de interesse,  $\Delta C(\Gamma_{k,l})/\Delta V(\Gamma_{k,l})$  que é a variação de flexibilidade por variação de volume.

A fim de facilitar a compreensão, adota-se uma análise por meio de intervalos. Seja  $I = [\min(C(\Gamma_{k,l})/C_0), \max(C(\Gamma_{k,l})/C_0)]$ . Pode-se notar na Figura 6.4 que a Topologia 2 tem variação mais preponderante perante  $I$ . Note que para um mesmo nível de contração do contorno (valores negativos do eixo horizontal) a flexibilidade aumenta em até 18% para a Topologia 2 contra apenas 12% para a Topologia 1. Um comportamento similar é observado para o caso de expansão. Mantendo a mesma amplitude de expansão, a segunda topologia reduz sua flexibilidade em 12% frente a 9% de redução da primeira topologia. Em alguns casos, conforme observado no Contorno 2.4, por exemplo, a tendência da taxa de variação da flexibilidade e volume é mais pronunciada. Quando ocorre contração, a variação de flexibilidade devido ao Contorno 2.4 ultrapassa os efeitos dos contornos restantes. Note que esse contorno compõe o membro estrutural inclinado da estrutura. Quando este membro sofre perda de volume, sua rigidez tanto à solicitação normal quanto à flexão sofrem decréscimos. Evidentemente, este membro contribui para a estabilidade global, e, portanto impacta de maneira mais preponderante a flexibilidade medida.

Considere uma variação aleatória dos segmentos de contorno de modo que seja possível obter uma medida global da sensibilidade topológica. Para tanto, adota-se uma variação de cada segmento  $\Gamma_{k,l}$  descrita por uma VA gaussiana com média nula e desvio padrão de 20%. Como as partes do contorno são analisadas separadamente, não se assume correlação entre o conjunto das partes. Isto pode também ser justificado pelas variações de manufatura que não implicam correlação de erros no processo de fabricação. Para fins de ilustração, considere o segmento de contorno que possui maior impacto na variação de flexibilidade, ou seja, o Contorno 1.2 da Topologia 1, e o Contorno 2.4 da Topologia 2. Utilizando  $10^5$  pontos de amostra para as simulações de Monte Carlo, é possível obter a distribuição de flexibilidade mostrada pela Figura 6.5.

Considerando como cenário de falha (solução ineficiente) uma flexibilidade superior a 6% ( $\beta = 1,06$ ) da estrutura de referência, é possível calcular a probabilidade de falha para cada uma das topologias, conforme indicado pela Tabela 6.1. A Topologia 2 tem menor esperança de flexibilidade. Portanto, seria considerada como uma escolha natural sob o ponto

de vista determinista. Entretanto, ela mostra uma dispersão superior assim como sua probabilidade de falha. Portanto, a Topologia 1 possui desempenho mais confiável e melhor qualidade de controle que a Topologia 2. A análise de Confiabilidade sugere, portanto, a Topologia 1 como sendo a melhor opção, contrariamente ao critério determinista.

Tabela 6.1 Comparação entre as duas topologias considerando as incertezas associadas

Topologia	Valor médio da Flexibilidade N.mm	Desvio Padrão N.mm	Probabilidade de Falha $P_f = P[C/C_0 > 1.06]$
1	307.30	6.23	$3.2 \times 10^{-2}$
2	257.63	7.46	$1.0 \times 10^{-1}$

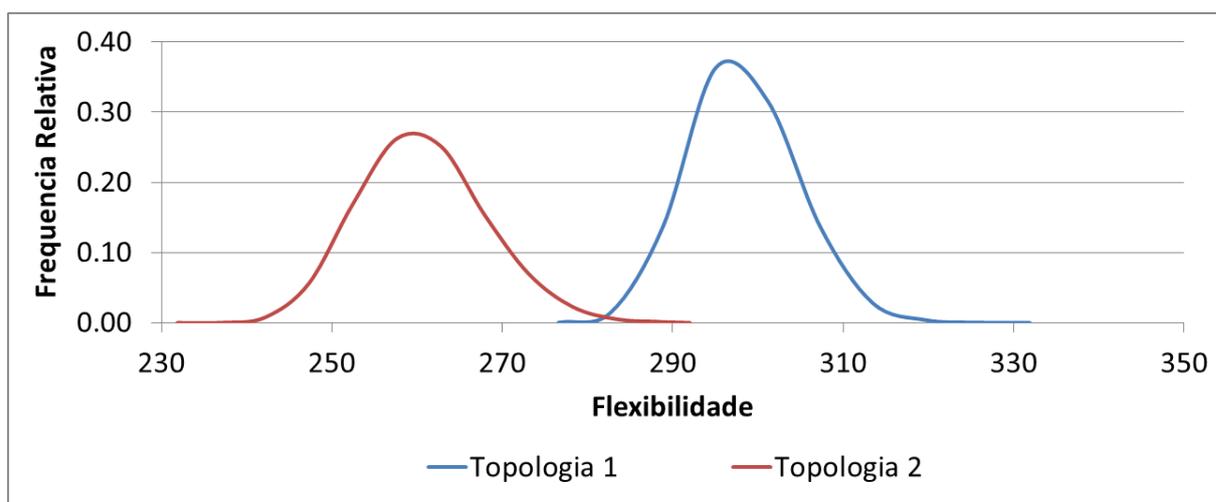


Figura 6.5 Simulações de Monte Carlo para a viga em balanço

Esta informação tem grande importância durante o controle de qualidade de produção. A ideia é simples. Caso se disponha de dispositivos de controle de alta eficiência, a Topologia 2 é a melhor opção desconsiderando o custo de produção. Por outro lado, quando não é possível manter elevada precisão geométrica durante a fabricação, a Topologia 1 se mostra como melhor opção, mesmo possuindo flexibilidade superior. Pode-se obter a mesma conclusão quando se considera manutenção, ou degradação material, como corrosão. A escolha final da topologia apropriada deveria depender do custo material, mas não somente

este. Podem-se acrescentar critérios como nível de qualidade de controle e a durabilidade ao longo do tempo de vida. Portanto, o esquema proposto neste capítulo tem importância para o campo de engenharia, sendo uma contribuição frente aos critérios deterministas. Além disso, a abordagem pode ser diretamente aplicada em problemas reais da indústria.

### 6.4.2 Ponte biapoiada

Esta aplicação trata de uma topologia mais complexa, resultante de um processo de OT de uma viga biapoiada com carregamento centrado inferior (YAMADA et al, 2010). Conforme ilustrado por meio da Figura 6.6, três topologias podem ser encontradas para as mesmas condições iniciais de geometria e carregamento. Todas as topologias otimizadas possuem a mesma fração volumétrica, 50% do volume de material inicial. A única diferença entre elas, é o valor dos parâmetros de otimização que foram utilizados durante o processo. A topologia 1 empregou 91 elementos quadráticos. A topologia 2 utilizou 130 elementos quadráticos. A topologia 3 empregou 170 elementos de contorno quadráticos. Elementos descontínuos foram utilizados nos pontos de descontinuidade de forças.

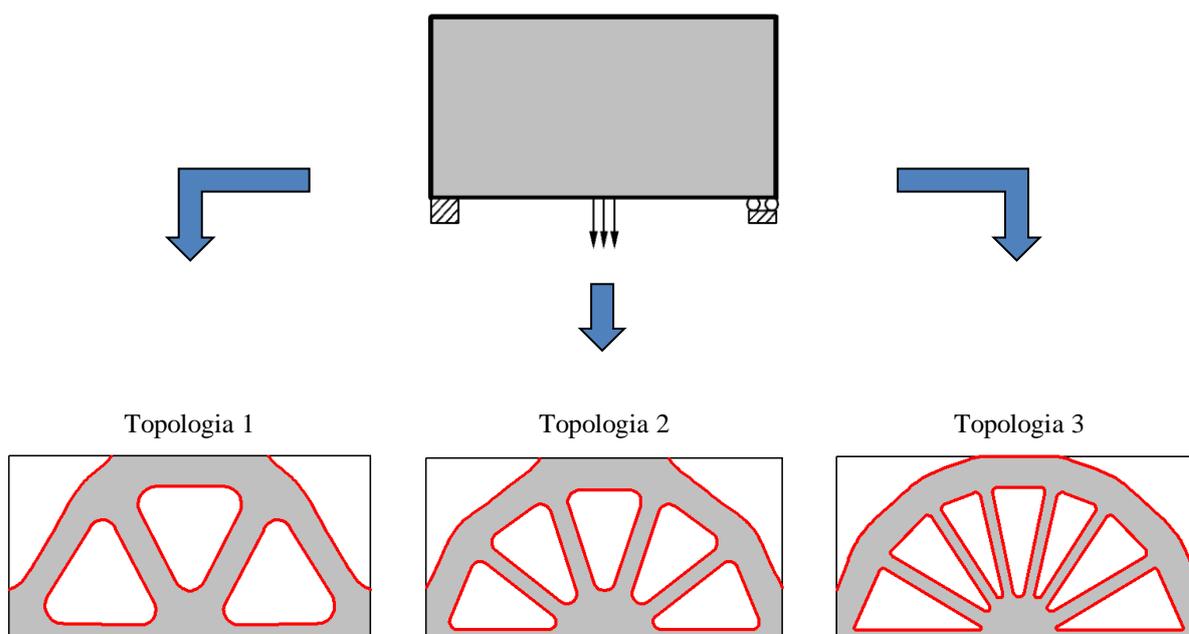


Figura 6.6 Três geometrias otimizadas que possuem o mesmo volume. Fonte: Yamada et al, 2010

As sensibilidades geométricas são apresentadas por meio das Figura 6.7, Figura 6.8 e Figura 6.9. De modo semelhante ao exemplo anterior, adota-se o mesmo esquema de notação. Vide figuras para mais detalhes. As características de simetria serão utilizadas. Notam-se as mesmas tendências; linear para a variação de volume, e, não linear para a variação de flexibilidade.

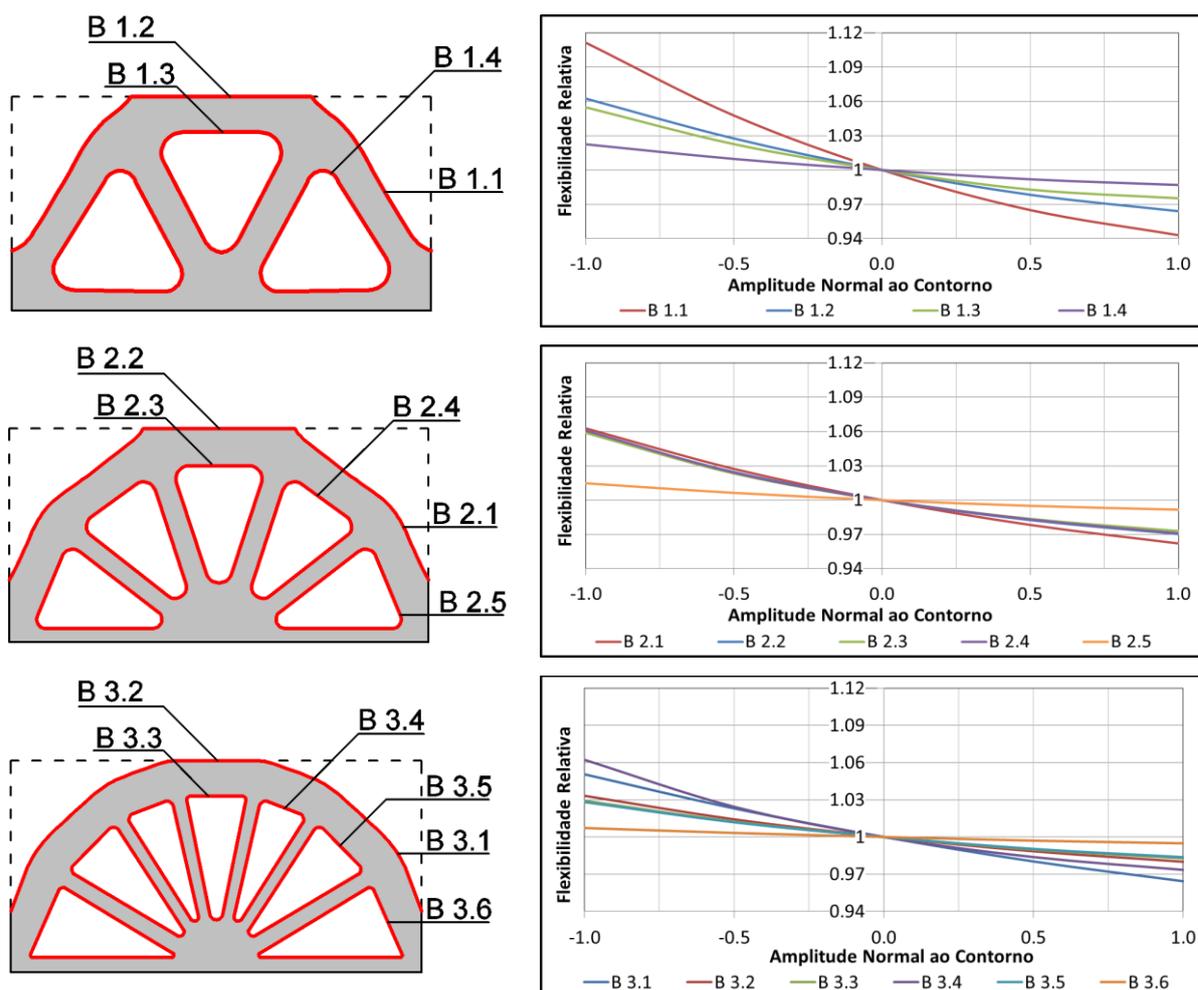


Figura 6.7 Sensibilidade em termos de Flexibilidade Relativa

A Topologia 1 exibe a maior faixa de variação. Para a mesma amplitude de expansão ou contração do contorno, a Topologia 1 manifesta redução máxima de 6% na flexibilidade e respectivo ganho máximo de 11%. É interessante notar que o aumento do número de furos nem sempre é benéfico sob o ponto de vista do desempenho. Globalmente, as Topologias 2 e 3 apresentam comportamento similar. Para fins práticos, o aumento da complexidade geométrica (alteração topológica) pode não ser seguido de ganhos apreciáveis nas sensibilidades.

A dispersão de flexibilidade é obtida por simulações de Monte Carlo com  $10^5$  amostras, seguindo distribuições gaussianas com média nula e desvio padrão de 20%. Os contornos considerados para as simulações são sempre aqueles que manifestam maior influência, ou seja, B 1.1, B 2.1 e B 3.4 respectivamente. Os resultados são resumidamente apresentados pela Figura 6.10.

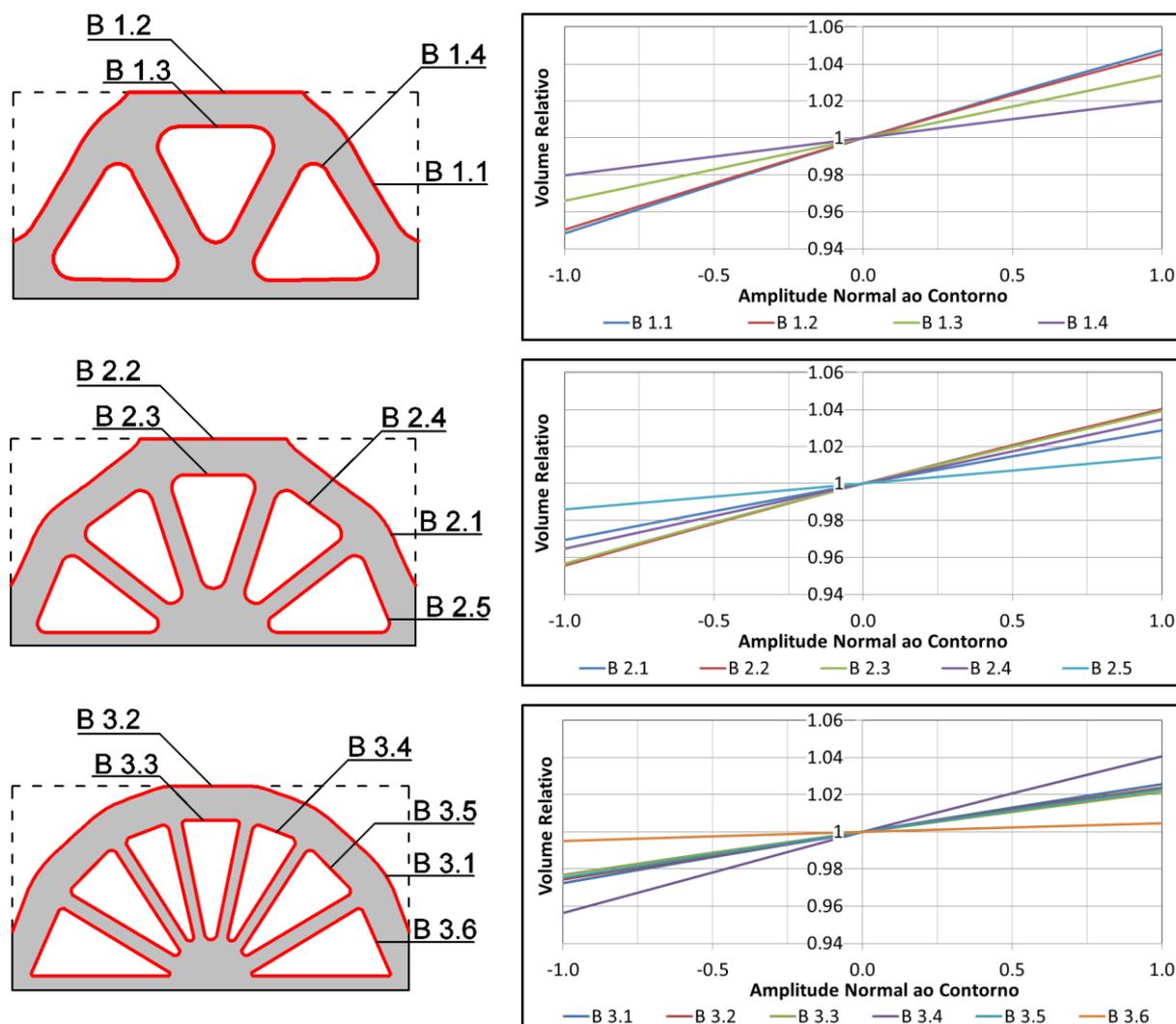


Figura 6.8 Sensibilidade em termos de Volume Relativo

As informações estatísticas obtidas, bem como as probabilidades de falha calculadas, consideram tolerâncias não superiores a 4% na flexibilidade ( $\beta=1,04$ ). Os resultados confirmam as suspeitas apontadas. Embora a Topologia 1 apresente a geometria mais simples de fabricação, ela manifesta a maior dispersão de flexibilidade. Alternativamente, a Topologia 2 tem o menor valor esperado de flexibilidade. A diferença entre as Topologias 2 e 3, em

termos de desempenho, não é relevante. O mesmo pode ser dito com relação às probabilidades de falha. Isto significa que embora a classe topológica tenha mudado, não há melhoria em termos de sensibilidades. Fazendo todas essas considerações, pode-se concluir que entre as três topologias mostradas, a Topologia 2 representa um bom compromisso entre custo de manufatura e desempenho mecânico.

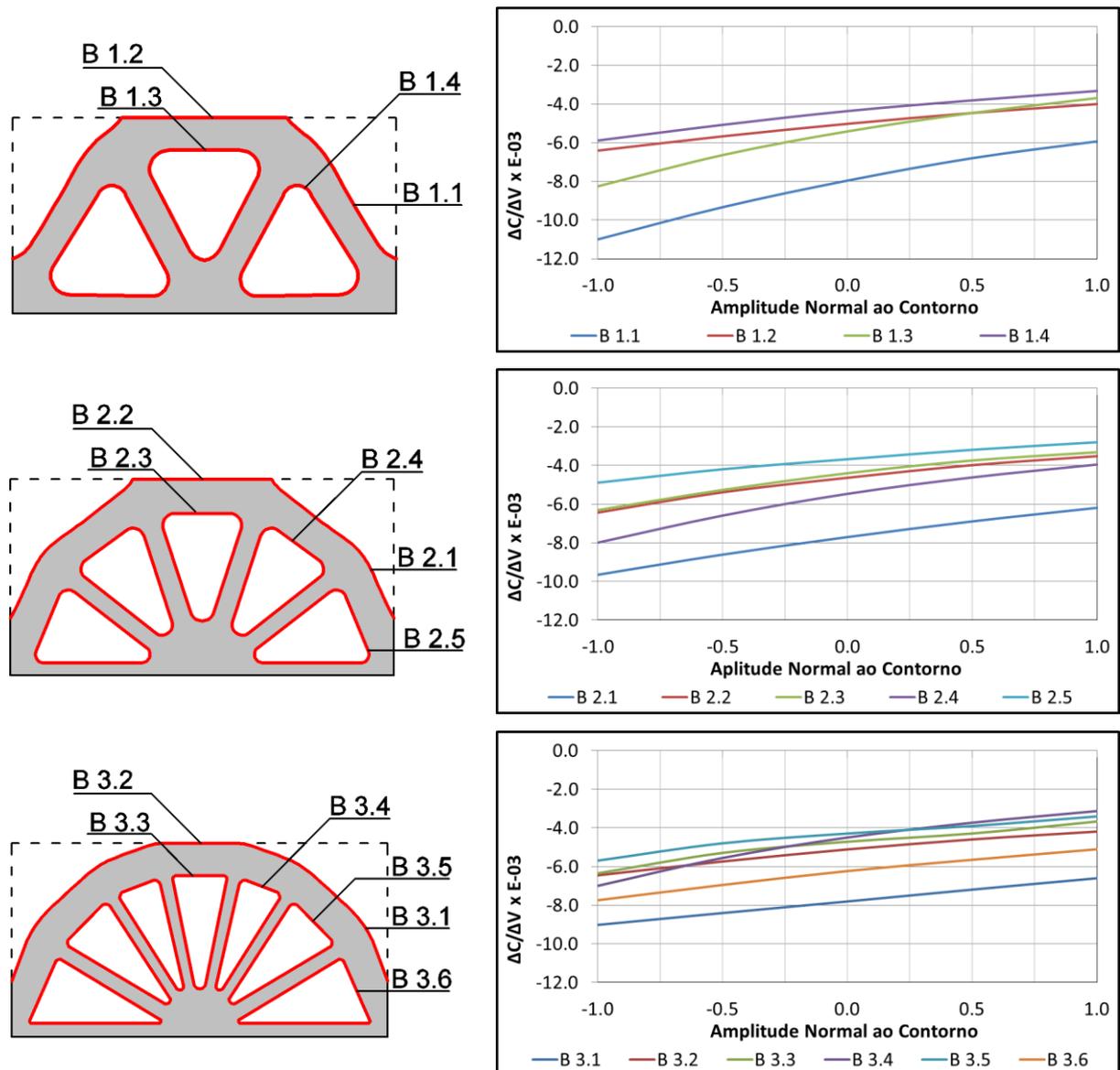


Figura 6.9 Sensibilidade em termos de Flexibilidade por Variação de Volume ( $\Delta C/\Delta V$  em N/mm)

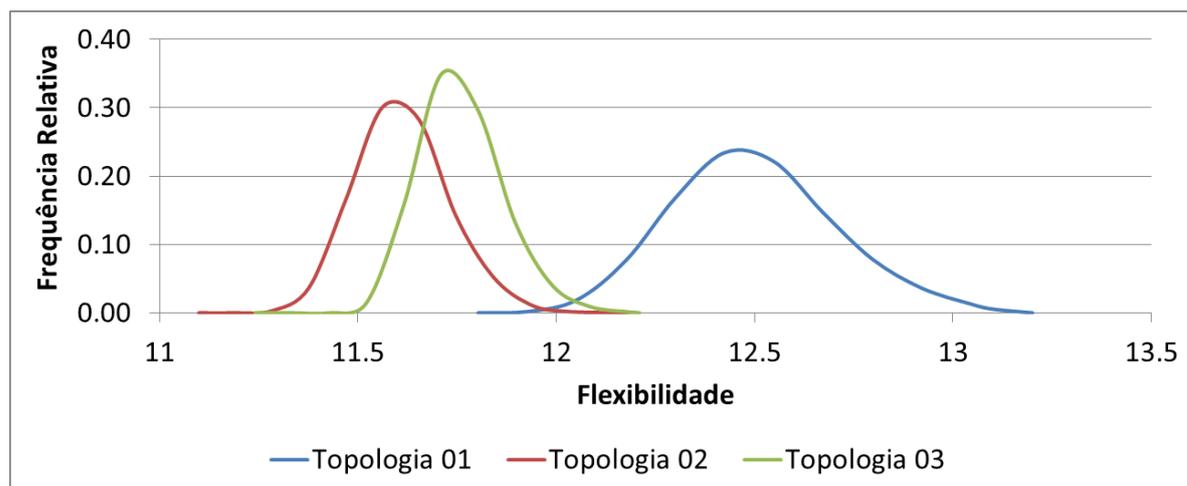


Figura 6.10 Distribuição de flexibilidade para as três topologias

Tabela 6.2 Comparação entre as três topologias do exemplo 02

Topologia	Flexibilidade Média N.mm	Desvio Padrão N.mm	Probabilidade de Falha $P_f = P[C/C_0 > 1.04]$
1	12.42	0.21	$4.8 \times 10^{-2}$
2	11.56	0.11	$2.1 \times 10^{-3}$
3	11.71	0.10	$1.6 \times 10^{-3}$

Considere a topologia com maior probabilidade de falha, a saber, Topologia 1. Essa topologia é mais simples de ser fabricada por conter menor quantidade de detalhes, embora possua menor interesse sob o ponto de vista da flexibilidade esperada e da dispersão. Essa topologia ainda pode ser útil? Mantendo a mesma topologia, seria possível diminuir a sensibilidade mecânica?

Para responder a esta questão, duas modificações são propostas, denotadas por Forma 2 e Forma 3, conforme pode ser observado na Figura 6.11. A Forma 2 é obtida a partir da Topologia 1 aumentando o furo central e diminuindo os dois furos adjacentes de modo que o volume permaneça constante. A Forma 3 é gerada também a partir da Topologia 1, porém diminuindo todos os furos simultaneamente até atingir um volume material 10% superior. Comparando a Figura 6.7, Figura 6.8, Figura 6.9 e Figura 6.11, observa-se que a Forma 2 mantém a tendência geral da Topologia 1, enquanto a Forma 3 mostra menor sensibilidade mecânica. Assim, obtém-se a resposta desejada. Sim, é possível diminuir a sensibilidade da

Topologia 1, porém aumentando o volume material. Essa conclusão é interessante, pois, concorda com observações propostas pela disciplina de Otimização Topológica Robusta, apontando que topologias robustas normalmente possuem mais material que as respectivas deterministas.

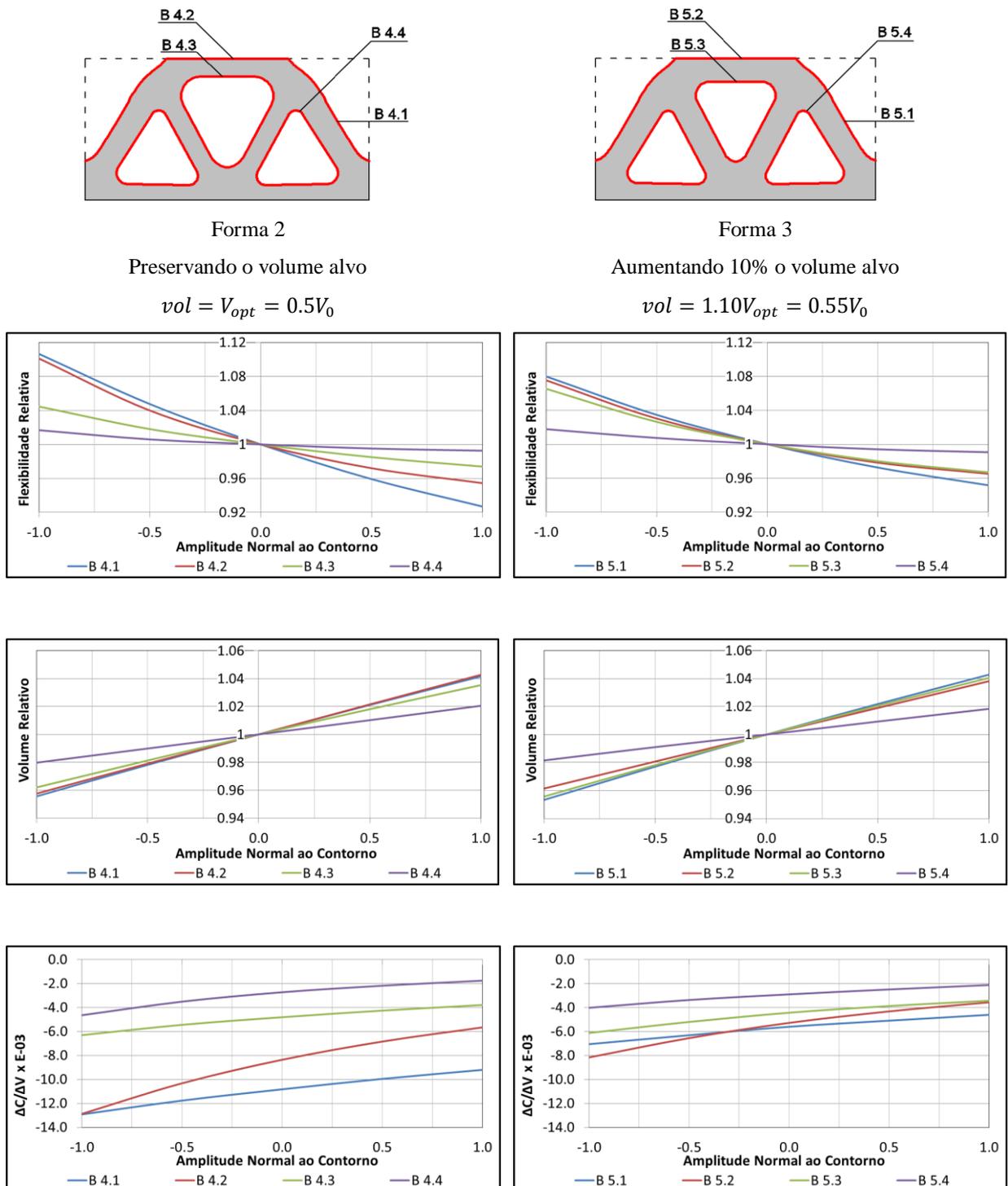


Figura 6.11 Sensibilidade das formas derivadas da Topologia 1

Este capítulo se dedicou a mostrar como a sensibilidade geométrica permite considerar informações adicionais para selecionar a topologia ótima. As aplicações numéricas mostraram como essa informação pode auxiliar o processo de tomada de decisão. Embora maior atenção tenha sido dedicada ao desempenho mecânico, ou flexibilidade, o procedimento é extensível a outras medidas de interesse.

Retomando as questões levantadas no início do capítulo, os resultados mostram que diferentes estruturas com o mesmo volume apresentam dispersões distintas de comportamento. Desse modo, estruturas escolhidas levando em conta apenas o critério determinista podem manifestar mau desempenho na prática, e portanto, inadequadas sob o ponto de vista de engenharia.

A medida de segurança aqui escolhida foi a probabilidade de falha. Quanto maior este número, mais insegura é a estrutura. Essa informação foi utilizada para construir um critério mais eficiente que responde melhor às necessidades de engenharia. A probabilidade de falha está conectada às sensibilidades das equações (6.4) e (6.5). Desse modo, menores sensibilidades implicam em menores probabilidades de falha conforme definido no item 6.3. Menores sensibilidades resultam em menor dispersão de comportamento, e por fim, escolhas mais robustas para aplicação.

É importante salientar que os resultados aqui apresentados servem como primeira aproximação da solução de um problema mais complexo, a saber, aquele da Otimização Estocástica Robusta utilizando o MEC. Os desenvolvimentos deste capítulo contribuem para este campo de investigação, e abrem novas perspectivas de investigações sob o enfoque do MEC.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese se concentra em desenvolver e aplicar algoritmos numéricos privilegiando a aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Os problemas de engenharia tratados nesse trabalho procuram destacar as características do MEC. Ao mesmo tempo, combinam-se conceitos multidisciplinares que permitem abordar os problemas de maneira mais realista. Desse modo, este texto contribui para a promoção, difusão e a expansão dos domínios de aplicação do MEC. A seguir, apontam-se alguns aspectos importantes que foram tratados ao longo desta pesquisa.

### 7.1 Contribuições da tese

Os materiais que manifestam resposta com variação temporal possuem grande interesse para a engenharia estrutural. Este interesse advém do uso corrente de materiais que manifestam esse comportamento. Nesse âmbito, torna-se necessário a proposição de modelos constitutivos que possam ser utilizados para simular os efeitos macroscópicos. Uma contribuição dessa pesquisa refere-se ao modelo constitutivo de Maxwell. Embora o modelo de Maxwell fosse conhecido na literatura, não havia disponibilidade, até o presente, de formulações do MEC envolvendo especificamente esse modelo constitutivo. Essa é a motivação do terceiro capítulo deste trabalho, em que a teoria de base de viscoelasticidade é apresentada sob o enfoque de modelos reológicos. A seguir, mostra-se como foram obtidas as equações a serem implementadas segundo as premissas do MEC. É importante destacar que a metodologia seguida para a dedução das equações do modelo Maxwell pode ser aplicada a outros modelos constitutivos. As equações do MEC envolvendo o modelo de Maxwell se revelaram explícitas no tempo, permitindo a livre escolha dos passos de tempo para as análises, sem perda de convergência e estabilidade. Outro ponto inédito neste trabalho é a utilização do modelo numérico de Maxwell, aqui desenvolvido, para investigar situações de carregamento e descarregamento, envolvendo a presença de fissuras. O modelo numérico se mostrou estável e convergente perante os resultados analíticos. Adicionalmente, o terceiro capítulo confirma a estabilidade do método MEC-DUAL para simular presença de fissuras em domínios viscoelásticos envolvendo outros modelos constitutivos. Outro ponto inédito deste

trabalho é a investigação da estabilidade do modelo de sub-regiões (clássico do MEC). Já se sabia que o modelo é eficiente para simular estruturas heterogêneas compostas por materiais elásticos distintos. Entretanto, não se sabia se esta estabilidade se manteria, caso fossem utilizados modelos constitutivos viscoelásticos envolvendo modelos reológicos. Os exemplos aqui abordados mostraram que sim. A estabilidade é garantida segundo o enfoque do MEC, pois as condições de compatibilidade e equilíbrio são garantidas ao longo de todo o histórico de carregamento. Ineditamente, foi constatado que o MEC-DUAL clássico (segundo as formulações apresentadas nesta tese) no âmbito da Mecânica da Fratura Linear pode ser explorado para se obter primeiras estimativas sobre os mecanismos de colapso de elementos estruturais viscoelásticos.

Com o intuito de explorar o potencial dos modelos viscoelásticos formulados via MEC, o quarto capítulo propõe um aspecto central nesta tese. Trata-se da associação inédita entre três formulações numéricas. São elas, a formulação MEC viscoelástica, Método da Superfície de Resposta (MSR), e Simulações de Monte Carlo. O acoplamento entre o MSR e Simulações de Monte Carlo é frequente na literatura. Entretanto ainda não se tinha observado a inclusão de modelos constitutivos viscoelásticos via MEC nessa associação. Este acoplamento triplo, e particular, foi ineditamente proposto neste trabalho para fornecer respostas a problemas oriundos da prática da engenharia. A ideia é investigar alternativas que melhorem o processo de concepção, fundamentando as escolhas presentes em comportamentos futuros previstos estatisticamente. Note que em estruturas civis de concreto, é de suma importância avaliar comportamentos a longo prazo, uma vez que o material apresenta resposta variável com o tempo. Inspirando-se em um exemplo real, foi mostrado como o MEC pode ser útil para análises preditivas. Foram mostradas algumas alternativas de melhoria de concepção baseando-se nos resultados obtidos.

No que se refere à busca por formas ótimas, o MEC também foi investigado nesta tese. A Otimização Topológica (OT) foi adotada como tema central do quinto capítulo. A ideia era dispor de um algoritmo computacional utilizando o MEC, e que fornecesse formas ótimas. O assunto MEC para OT já existia na bibliografia, e portanto já havia formulações reportadas por alguns autores. Ao todo, sete alternativas de formulação foram investigadas nesta tese. Algumas delas existentes, enquanto outras são inéditas. O leitor pode encontrar um resumo dessas formulações no Apêndice B desta tese. Após estudo e implementação dessas formulações, constatou-se uma possibilidade de melhoria que ainda não havia sido proposta. As razões particulares que levam a esta constatação são apresentadas no referido apêndice.

Em suma era preciso diminuir, o quanto fosse possível, a necessidade de pós-processamento envolvendo grandezas de domínio, como o cálculo de tensões. Isto implica em explorar as potencialidades do MEC. Foi então proposto um algoritmo inédito para a OT envolvendo o MEC. Baseando-se nos vários algoritmos presentes no Apêndice B, decidiu-se propor a utilização da derivada de forma em conjunto com o Método Level Set (MLS). O acoplamento MEC/MLS já era conhecido na bibliografia. Existiam duas maneiras propostas para realizar o acoplamento MEC/MLS. A primeira delas dependia da solução de um problema adjunto, que representa aumento de custo computacional. A segunda maneira é utilizar grandezas de domínio para cálculo de sensibilidades, como a Derivada Topológica, por exemplo. O algoritmo proposto nesta tese difere de ambas. A ideia inédita é utilizar a Derivada de Forma, aliada à extensão de velocidades, para direcionar o algoritmo de busca do MEC. Os dados necessários para o cálculo da derivada de forma estão disponíveis imediatamente após a solução sistema de equações de equilíbrio do MEC. Isto faz com que pós-processamentos não sejam mais necessários para cálculo de gradientes. Esta característica representa aceleração dos tempos de cálculo para obter convergência, e, portanto, ganhos de eficiência. Foi verificado que a extensão e regularização das velocidades para o MLS tem caráter de suma importância para a formulação. O algoritmo proposto foi testado em dois exemplos de benchmark (chapas sob tração e flexão). Os exemplos mostram que as formas encontradas correspondem àquelas previstas por outros algoritmos.

O último aspecto de interesse deste trabalho de pesquisa concerne ainda o campo das formas ótimas. O intuito era desenvolver conhecimentos preliminares que permitam, no futuro, realizar o que se conhece como Otimização Topológica Robusta (RTO) com o MEC. Embora já se conheça alguns resultados envolvendo RTO e o MEF, ainda pouco se sabe sobre o acoplamento RTO e MEC. Decidiu-se então tratar de um problema anterior ao RTO, porém em sua direção. Trata-se de propor uma maneira de escolher a melhor topologia dentre um conjunto discreto de geometrias disponíveis. Note a sutileza desta proposição, uma vez que a topologia robusta pode ser vista como uma busca em num conjunto, não mais discreto, mas contínuo de geometrias. Neste caso, a chamada busca estocástica. Como a otimização robusta é frequentemente formulada em termos de mínimos de pareto, tem-se um problema fundamental para o MEC. O desafio é fazer o MEC representar contornos que não sejam conhecidos a priori. A originalidade do sexto capítulo é utilizar o acoplamento MEC - MSR - Simulação de Monte Carlo, associado a um critério probabilístico baseado em flexibilidade, considerando exclusivamente as variações geométricas. A intenção é fornecer subsídios

numéricos que permitam inferir qual é a estrutura menos sensível às variações de geometria. Guardando os devidos limites da analogia, a ideia é saber qual a estrutura mais robusta em meio a um conjunto solução. Note que todas as estruturas do universo de escolha possuem a mesma quantidade de material. O critério proposto permite notar que existe uma relação entre as derivadas de forma e a probabilidade de falha. Pode ser este um caminho a ser explorado, uma vez que essas derivadas são mais propícias de serem calculadas via MEC. Adicionalmente, verifica-se que estruturas menos sensíveis geometricamente possuem maiores valores de flexibilidade. Esta observação já estava presente na bibliografia, porém, ainda não havia sido observada em formulações envolvendo o MEC. Em suma, a abordagem do sexto capítulo serve como desenvolvimento preliminar na consolidação de uma linha de pesquisa envolvendo o MEC para fins de RTO.

Um elemento resultante desta tese, porém não de forma central, consiste na estrutura de dados pensada para o desenvolvimento do acoplamento MEC-MLS. A estrutura de dados é confeccionada utilizando conceitos de Programação Orientada a Objetos. Esta forma de programação contrasta com a maneira funcional com que o MEC é encontrado na bibliografia. A estrutura desenvolvida no âmbito desta tese está disponível no Apêndice A. Essa estrutura pode ser útil para aqueles que queiram seguir o paradigma de orientação a objetos para confeccionar programas envolvendo o MEC. É possível que se proponham melhoramentos e/ou expansões em pesquisas futuras.

## **7.2 Aplicações dos resultados da tese**

Algumas das aplicações possíveis foram sugeridas ao longo dos capítulos. De maneira geral, pode-se atribuir a cada capítulo uma parcela de importância no conjunto de conceitos apresentados e desenvolvidos ao longo desta tese.

O segundo capítulo apresentou as formulações clássicas que constituem o MEC. Esse conjunto de algoritmos foi abstraído computacionalmente dando origem à estrutura de dados do Apêndice A. Essa estrutura é importante porque permite um tratamento modular do programa computacional de elementos de contorno, o que é fundamental para sua posterior extensão. É interessante destacar que em engenharia de softwares, o conceito de orientação a objetos e o trabalho colaborativo é largamente empregado, o que pode ser bastante útil na

continuidade das pesquisas em métodos computacionais. Esta estrutura de dados pode ser aplicada para a verificação de eficiência de algoritmos, justamente devida à sua modularidade. Embora a estrutura tenha sido proposta tendo em foco análises bidimensionais, a ideia é extensível para três dimensões. O uso de B-splines, embora não inovador, foi utilizado de maneira particular. As B-splines são utilizadas para descrever a geometria e automatizar a geração de elementos, etapa crucial em programas que gerem malhas automaticamente.

No que se refere ao terceiro capítulo, o uso da viscoelasticidade linear permite a simulação do comportamento de estruturas compostas por materiais que sofrem variação de resposta com o tempo. Este estudo é importante em várias áreas da engenharia, incluindo estruturas civis de concreto armado. É sabido que o concreto manifesta fluência e que esse fenômeno influencia seu comportamento a longo prazo. Outro ponto que merece atenção é a versatilidade do MEC para analisar estruturas heterogêneas, incluindo materiais viscoelásticos. As possibilidades de uso vão desde investigações pontuais de seções compostas, painéis sanduíche, vigas compostas, à pré-projetos de grandes estruturas, já que o MEC é capaz de fornecer resultados confiáveis do comportamento mecânico. Adicionalmente, a presença de fissuras foi investigada. Os exemplos mostram que a presença de fissuras modeladas com MEC-Dual não causa instabilidade nas formulações globais. Essa constatação é importante, pois permite, por um lado, a verificação de casos práticos de interesse da indústria; e por outro, a extensão para casos mais complexos como a propagação. Casos de fissuras que se propaguem em meios viscoelásticos merecem maior investigação, já que podem envolver leis coesivas do tipo convolutivas.

Uma das aplicações possíveis dos conceitos desenvolvidos no terceiro capítulo gerou o quarto capítulo. Trata-se do interesse em ter uma estimativa sobre a segurança a longo prazo de uma estrutura que sequer foi construída ainda. Como o material constituinte é muitas vezes susceptível às variações de comportamento, uma estimativa mais realista se torna possível somente num contexto probabilista. Nesse caso as formulações do MEC devem ser readequadas e combinadas com outras técnicas a fim de produzir um algoritmo capaz de responder às questões postas. É preciso lembrar que embora as formulações num primeiro momento se compliquem, o resultado são simulações mais próximas da realidade. O exemplo trabalhado no quarto capítulo foi exclusivamente sob um enfoque de resposta mecânica em serviço. Os resultados podem ser úteis, uma vez que, ainda em fase de projeto, pode-se saber com antecedência se o desempenho esperado será alcançado, e com que medida. Caso o desempenho estimado seja insatisfatório, pode-se alterar os critérios de dimensionamento a

fim de encontrar uma solução mais apropriada. O mesmo raciocínio pode ser aplicado segundo outros interesses, por exemplo, o planejamento de intervenções ou manutenção.

A Otimização Topológica foi o tema do quinto capítulo. Nesse contexto, o MEC foi acoplado ao MLS para dar origem a um novo algoritmo mais eficiente computacionalmente. Esse algoritmo é capaz de dizer qual deve ser a distribuição de material que conduz às estruturas mais rígidas, mantendo um determinado volume de material. Aplicações passam pelas mais distintas áreas da engenharia, desde à automobilística, aeronáutica, às estruturas civis. Ainda na fase de concepção é possível explorar racionalmente as potenciais alternativas estruturais que aliem desempenho e economia. Essas aplicações têm ganhado importância crescente nos escritórios de projetos nas últimas quatro décadas, e o MEC tem mostrado seu potencial neste domínio.

Como as estruturas otimizadas topologicamente, em geral, não são únicas, surge a necessidade de se fazer escolhas. Assim, o MEC foi novamente adaptado no sexto capítulo para construir um critério mais realista sob o ponto de vista da engenharia. Algo que permita ao engenheiro fazer escolhas mais judiciosas. Essa já é uma área conhecida na literatura como Teoria da Decisão, e normalmente envolve aspectos estatísticos. O algoritmo e o critério apresentados são aplicáveis em casos em que se queira descobrir qual a sensibilidade geométrica que a estrutura possui com relação à uma medida arbitrária. A partir da técnica desenvolvida no capítulo, e as informações estatística extraídas, tem-se mais informação a respeito do projeto. Em suma, tem-se uma ferramenta auxiliar do processo de concepção estrutural.

Embora esses pontos tenham sido destacados, esta tese não se limita a eles. A partir das ideias exploradas aqui, várias outras podem ser sugeridas e investigadas. No item seguinte, apresentam-se algumas dessas sugestões.

### **7.3 Sugestão de trabalhos futuros**

Tome-se a área estudos relativos à viscoelasticidade e à Mecânica da Fratura. Esta área demanda por investigações a respeito da integridade mecânica que pode ser estudada por meio de propagação de fissuras. A predição da vida útil de estruturas que apresentem falhas é ainda

tema de investigação na comunidade científica, especialmente quando existem os efeitos dependentes do tempo. Os algoritmos apresentados nesta tese podem ser utilizados para conduzir estudos neste sentido.

Ainda com respeito à viscoelasticidade, mesmo que se disponha de modelos de comportamento eficazes, ainda existe uma demanda fundamental para a engenharia. Não são comuns os critérios de resistência que levem em conta os efeitos variáveis no tempo. Essa pode ser uma linha de investigação possível em Mecânica Teórica. O mesmo vale para o caso de propagação de fissuras nesses materiais.

Referente à Otimização Topológica, existe a demanda por otimização que leve em conta além do comportamento mecânico, o comportamento térmico, elétrico ou magnético. São os referidos casos de multifísica. Existe a necessidade de proposição, verificação e aplicação de algoritmos capazes de realizar este tipo de otimização topológica, possivelmente com a inclusão do peso próprio. Recentemente alguns estudos têm sido conduzidos em Otimização Topológica envolvendo materiais termoelásticos. Vale lembrar que a área de acústica, em que o MEC possui características de interesse, também demanda de algoritmos de otimização topológica e sensibilidade acústica. Desse modo, os algoritmos desenvolvidos no texto podem ser readequados e expandidos para comportar esses casos. Outra extensão possível seria a abordagem tridimensional do algoritmo proposto nesta tese, bem como casos envolvendo a adição de materiais distintos.

No que diz respeito à Otimização Topológica Robusta. Há a possibilidade e necessidade de novos algoritmos capazes de incluir a estocasticidade na otimização topológica. Note que a OT é essencialmente um problema de otimização inteira. Como o MEC não é capaz de notar a presença de furos sem a presença de malha, não há interligação direta entre classe topológica e forma do domínio. Ao se tentar inserir as aleatoriedades o problema se torna ainda mais complexo sob o ponto de vista do MEC. Maiores desafios são reservados às aleatoriedades presentes no contorno otimizável, que passa a ser incerto. Mais investigações são necessárias nessa linha de pesquisa.

#### 7.4 Trabalhos divulgados resultantes desta tese

A seguir, apresenta-se uma lista de trabalhos que foram desenvolvidos e divulgados durante o desenvolvimento da presente tese.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. . A BEM formulation applied in the mechanical material modelling of viscoelastic cracked structures. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, v. 9, p. 1-12, 2017.

OLIVEIRA, HUGO LUIZ; LEONEL E. D. . An improved BEM-LSM coupling-based Topology Optimization. In: **XXXVII CILAMCE, 2016**, Brasília. Proceedings Cilamce, 2016.

OLIVEIRA, H. L.; CHATEAUNEUF, A. ; LEONEL E. D. . Reliability-based topology optimization of structures using the boundary element method. **9e Journées Nationales Fiabilité des Matériaux et des Structures**; École de Mines Nancy, Nancy. 2016.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL E. D. . Fracture Analysis of Viscoelastic Nonhomogeneous Media Using Boundary Element Method. In: International Conference on Boundary Element Techniques, 2014, Florence. **Advances in Boundary Element and Meshless Techniques XV**, p. 248-256, 2014.

OLIVEIRA, HUGO LUIZ; LEONEL E. D. . Boundary Element Formulations applied to analysis of fracture problems in viscoelastic materials. In: 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI), 2014, Barcelona. **Proceedings of WCCM-XI, ECCM-V, ECFD-VI**, v. II. p. 1147-1168, 2014.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABE K., KAZAMA S., KORO K. A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method, **Communications in numerical methods in engineering**, v. 23, p. 405-416, 2007.
- ADALSTEINSSON D., SETHIAN J. A. A fast Level Set Method for propagating interfaces. **Journal of computational physics**, v. 118, p. 269-277, 1995.
- ADALSTEINSSON D., SETHIAN J. A. The fast construction of extension velocities in Level Set Methods. **Journal of computational physics**, v. 148, p. 2-22, 1999.
- ALIABADI, M. H. The boundary Element Method, v.2, J. Wiley, New York, 2002.
- ALLAIRE G. et al. Multi-phase structural optimization via a level set method, **ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations**, v. 20, p. 576-611, 2014.
- ALLAIRE G., JOUVE F. Minimum stress optimal design with the level set method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, p. 909-918, 2008.
- ALLAIRE G., JOUVE F., TOADER A.M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. **Journal of Computational Physics**, vol 194, p.363-393, 2004.
- ANG A. H-S., TANG W. H. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**. Vol. 1, Basic Principles. New York, NY: John Wiley & Sons, 1975.
- ASADPOURE A., TOOTKABONI M., GUEST J.K. Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness – Application to truss members. **Computers and Structures**, vol 89, p.1131-1141, 2011.
- ASHRAFI, H.; FARID, M. A general boundary element formulation for the analysis of viscoelastic problems, **IJE Transactions A: Basics**, v. 23, n.2, p.153, 2010.
- ASHRAFI, H.; FARID, M. A mathematical boundary integral equation analysis of standard viscoelastic solid polymers. **Computational Mathematics and Modelling**, v.20(4), p.397-415, 2009.
- BAZANT Z., LI Y. Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity:I. mathematical model and scaling. **International Journal of Fracture**, vol 86, p. 247-265, 1997.
- BECK A.T., BAZÁN F.A.V. Programação orientada a objetos em FORTRAN. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v.13, n 60, p.17-36, 2011.
- BENDSØE M. P., KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. , p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p. 193-202, 1989.

BHATTACHARJEE S. S. Visco-elastic damage modelling of concrete, 11<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, 23-28 de junho, **Proceedings....**, Oxford, England, 1996

BOX G. E. P.; WILSON K. B. On the experimental attainment of optimum conditions. **Journal of Royal Statistics Society**, Vol 13, p. 1 - 45, 1951.

BREBBIA, C, A. **The boundary element method for engineers**. London, Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C, A; Dominguez, J. **Boundary elements: an introductory course**. Comp. Mech. Publ., Southampton, 1992.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. ; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering**, Springer-Verlag, 1984.

CAPILLON R., DESCELIERS C., SOIZE C. Uncertainty quantification in computational linear structural dynamics for viscoelastic composite structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.305, pp.154-172, 2016.

CARDONA D. A. R. et al. Viscoelastic Behaviour Characterization of a Gap-graded Asphalt Mixture with SBS Polymer modified Bitumen, **Materials Research**, vol 18, n.2, p. 373-381, 2015.

CEZARIO, F.; SANTIAGO, J.A.F.; OLIVEIRA, R.F. Two-dimensional version of Sternberg and Al-Khozaie fundamental solution for viscoelastic analysis using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.35, p.836-844, 2011.

CHATEAUNEUF A. M., RAPHAEL W.E., PITTI R.J.B.M. Reliability of prestressed concrete structures considering creep models, **Structure and Infrastructure Engineering**, v.10, n. 12, p.1595-1605, 2014.

CHATEAUNEUF A., Chapter 1 - Principles of reliability-based design optimization, Structural design optimization considering uncertainties, Editor: Yiannis Tsompanakis, Taylor & Francis, p. 3-30, 2008.

CHEN S., CHEN W. A new level-set based approach to shape and topology optimization under geometric uncertainty. **Struct Multidisc Optim**, vol 44, p.1-18, 2011.

CHEN S., CHEN W., LEE S. Level set based robust shape and topology optimization under random field uncertainties. **Struct Multidisc Optim**, vol 41, p.507-524, 2010.

CHEN, T; WANG, B; CEN, Z; WU, Z. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 63, p. 591-609, 1999.

CHENG A.H.D, CHENG D.T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol 29, n.3, p.268-302, 2005.

CHO K-H et al. Reliability-based topology optimization based on bidirectional evolutionary structural optimization using multi-objective sensitivity numbers. **International Journal of Automotive Technology**, vol 12, n 6, p.849-856, 2011.

CHO K-H et al. Reliability-based Topology Optimization of electro-thermal-compliant mechanisms with a new material mixing method. **International Journal of Precision Engineering and Manufacturing**, vol 13, n 5, p.693-699, 2012.

CHOI S.K., GRANDHI R.V., CANFIELD R.A. **Reliability-based Structural Design**, Springer-Verlag London limited, 2007.

CHOU, P. C.; PAGANO, N. J. **Elasticity. Tensor, dyadic, and engineering approaches**. Dover publications, New York, 1992.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of viscoelasticity: an introduction**, 2 ed, New York: Academic Press, 1982.

DEATON J. D., GRANDHI R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, p. 1-38, 2014.

DIAZ, A. R.; BENDSØE, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading situations using a homogenization method. **Structural Optimization**, v. 4, p. 17-22, 1992.

DIAZ, A. R.; KIKUCHI N. Solution to shape and topology eigenvalue problems using a homogenization method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, p.1487-1502, 1992.

DIAZ, A. R.; LIPTON R. Optimal material layout for 3D elastic structures. **Structural Optimization**, v.13, p. 60-64, 1997.

DIAZ, A. R.; LIPTON R. Optimal material layout in 3D elastic structures subjected to multiple loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.28, p. 219-236, 2000.

DUNNING P. D., KIM H. A. A new hole insertion method for level set based structural topology optimization, **International Journal for Numerical Method in Engineering**, v. 93, p. 118-134, 2013a.

DUNNING P.D., KIM H.A. Robust topology optimization: minimization of expected and variance of compliance. **AIAA Journal**, vol 51, n.11, p.2656-2664, 2013b.

EL HAMI A., RADI B. **Uncertainty and Optimization in structural mechanics**, ISTE Ltd, UK, John Wiley & Sons, USA, 2013.

EOM et al. Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures. **Struct Multidisc Optim**, vol 43, p.287-295, 2011.

ESCHENAUER H. A., KOBELEV V. V., SCHUMACHER A. Bubble method for topology and shape optimization of structures, **Structural Optimization**, v. 8, p. 42-51, 1994.

FERRY, J. D. **Viscoelastic properties of polymers**, New York: John Wiley and Sons, 1970.

FONTES, L. R. **Notas introdutórias em probabilidade e estatística**. IME-USP. Notas de aula, disponível em: <https://www.ime.usp.br/~lrenato/>. Consultado em 2016. Última revisão 2009.

GARCIA-LOPEZ N.P. et al. An improved robust topology optimization approach using multiobjective evolutionary algorithms. **Computers and Structures**, vol 125, p.1-10, 2013.

GARDEA A.M., VALENZUELA J.C.M. Topological optimization of automotive structures under impact using robust design. **Computer-Aided Design and Applications**, vol 12, p.33-47, 2015.

GOETSCHEL D. B. On the derivation of Michell's theorem, **Mechanics Research Communications**, v. 8, p. 319-322, 1981.

GRAY, L, J; Martha, L, F; Ingrafea, A, R. Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, v. 29, p. 135-1158, 1990.

GUIMARAES, S.; TELLES, J. C. F. On the hyper-singular boundary-element formulation for fracture-mechanics applications, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, n.13, p. 353-363, 1994.

GUO X. et al. Multi-scale robust design and optimization considering load uncertainties. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, vol 283, p.994-1009, 2015.

GUO X., ZHANG W., ZHANG L. Robust structural topology optimization considering boundary uncertainties. **Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.**, vol 253, p.356-368, 2013.

GURTIN, M. E.; STERNBERG, E. On the linear theory of viscoelasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 11, p. 291-356, 1962.

HEMP, W. S. **Optimum Structures**. Clarendon Press, Oxford, 1973.

HOLMBERG E., THORE C-J., KLARBRING A. Worst-case topology optimization of self-weight loaded structures using semi-definite programming. **Struct Multidisc Optim**, vol 52, p.915-928, 2015.

HONG H, CHEN J. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**. ASCE, v. 114, p. 1028-1044, 1988.

HUANG X., XIE Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures**, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2010 b.

HUANG X., XIE YI-M. A further review of ESO type methods for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 671-683, 2010 a.

HUANG Y, MOGILEVSKAYA S, CROUCH S. Complex variable boundary integral method for linear viscoelasticity: Part I – basic formulations, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol 30, p. 1049-1056, 2006a.

HUANG Y, MOGILEVSKAYA S, CROUCH S. Complex variable boundary integral method for linear viscoelasticity: Part II – application to problems involving circular boundaries, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol 30, p. 1057-1068, 2006b.

JANSEN M. et al. Robust topology optimization accounting for misplacement of material. **Struct Multidisc Optim**, vol 47, p.317-333, 2013.

JANSEN M., LOMBAERT G., SCHEVENELS M. Robust topology optimization of structures with imperfect geometry based on geometric nonlinear analysis. **Comput. Methods Appl. Mech Engrg.**, vol 285, p.452-467, 2015.

JASWON, M, A. Integral equation methods in potential theory I. **Proc. Royal Society Ser.**, A275, p. 23-32, 1963.

JIANG, Y; HUNG, N, D; VENTURINI, W, S. A 3D crack element based on boundary integrals. **Journée de rencontre du groupe de contact du FNRS**, Liège, Université de Liège, 1999.

JIANG, Y; VENTURINI, W, S. A general boundary element method for analysis of slope stability. In: De Roeck, G; Topping, B, H, V. **Computational civil and structural engineering**, Edinburgh, Civil-Comp Press, 2000.

JIANG, Y; VENTURINI, W, S. Limit analysis of slope stability with boundary element methods, In: Idelsohn, S, R; Oñate, E; Dvorkin, E, N; eds. **Computational mechanics: new trends and applications**, Barcelona, CIMNE/IACM, 1998.

JORDAN I. J. Models for creep of concrete, with special emphasis on probabilistic aspects. **Matériaux et Constructions**, vol 13, n. 73, p. 29-40, 1980.

KANAKASABAI P., DHINGRA A. K. An efficient approach for reliability-based topology optimization. **Engineering Optimization**, vol 48, n 1, p.1-15, 2016.

KHARMANDA et al. Reliability-based topology optimization. **Struct Multidisc Optim**, vol 26, p. 295-307, 2004.

KHARMANDA, G.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. New hybrid formulation for reliability-based optimization of structures. **Proceedings... WCSMO-4** (Dalian), China, 2001.

KHARMANDA, G.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. CAROD: Computer-Aided Reliable and Optimal Design as a concurrent system for real structures. **International Journal of CAD/CAM**, v. 2, p. 1-12, 2002.

KHARMANDA, G.; MOHAMED, A.; LEMAIRE, M. Reliability-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.26, p. 295-307, 2004.

KIM et al. Reliability-Based Topology Optimization with Uncertainties. **Journal of Mechanical Science and Technology**, vol 20, n.4, p.494-504, 2006.

KUBLIK C., TANUSHEV N.M., TSAI R. An implicit interface boundary integral method for Poisson's equation on arbitrary domains. **Journal of Computational Physics**, v.247, p. 279-311, 2013.

LAMBERT L. **Ouvrages précontraints construits par encorbellements successifs**. Projet de fin d'étude, Spécialité Génie Civil, INSA Strasbourg, 2010.

LAZAROV B., WANG F., SIGMUND O. Length scale and manufacturability in desity-based topology optimization. **Arch Appl Mech**, vol 86, p.189-218, 2016.

LEE et al. Robust multidisciplinary UAS design optimization. **Struct Multidisc Optim**, vol 45, p.433-450, 2012.

LEE, S.S.; KIM, Y.J. Time-domain boundary element analysis of cracked linear viscoelastic solids. **Engineering Fracture Mechanics**, v.51, p.585-590, 1995.

LEE, S.S.; WESTMANN, R.A. Application of high-order quadrature rules to time- domain boundary element analysis of viscoelasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.607-629, 1995.

LEE, W.S.; YOUN, S.K.; KIM, B.K. Finite element analysis and design optimization of rubber components for vibration isolation. **Archives of Mechanics**, v. 55, p. 449-479, 2003.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J-L. **Mechanics of solid materials**, Cambridge : Cambridge University Press, 1990.

LEONEL, E, D; VENTURINI, W, S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. **Engineering Analysis with boundary elements**, v. 34, p. 1092-1099, 2010 a.

LEONEL, E, D; VENTURINI, W, S. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. **Engineering fracture mechanics**, v. 78, p. 1077-1090, 2011.

LEONEL, E, D; VENTURINI, W, S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. **Engineering Analysis with boundary elements**, v. 34, p. 122-129, 2010 b.

LEONEL, E.D.; BECK, A.T.; VENTURINI, W.S. On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems. **Structural Safety**, v. 33, p. 261-274, 2011.

Li Q., STEVEN G. P., XIE Y. M. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization, **Structural Optimization**, v. 18, p. 67-73, 1999.

LI Y., BAZANT Z. Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity:II. Numerical algorithm, behaviour and size effect. **International Journal of Fracture**, vol 86, p. 267-288, 1997.

LIMA et al. Fatigue reliability analysis of viscoelastic structures subjected to random loads. **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol 43, p.305-318, 2014.

LING, Z.; Ronglu, X., Yi, W., El-Sabbagh, A. Topology optimization of constrained layer damping on plates using Method of Moving Asymptote (MMA) approach. **Shock and Vibration**, v. 18, p. 221-244, 2011.

LIU et al. A simple reliability-based topology optimization approach for continuum structures using a topology description function. **Engineering Optimization**, vol 47, n7, p.1182-1201, 2016.

LIU K., PAULINO G.H., GARDONI P. Reliability Based topology optimization using a new method for sensitivity approximation – application to ground structures. **Struct Multidisc Optim**, vol 54, p.533-571, 2016.

LIU, Y.; ANTES, H. Application of visco-elastic boundary element method to creep problems in chemical engineering structures. **International Journal Pressure Vessels Piping**, v.70, p.27-31, 1997.

LOPES, Jr, M, C; VENTURINI, W, S. Cohesive crack analysis by the boundary element method. In: Owen, D, R, J; Oñate, E; Hinton, E; eds. **Computational plasticity: fundamentals and applications**, Vol 1, Barcelona, CIMNE, 1997.

LÓPEZ C., BALDOMIR A., HERNÁNDEZ S. Deterministic versus reliability-based topology optimization of aeronautical structures. **Struct Multidisc Optim**, vol 53, p.907-921, 2016.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**, 4 ed., New York, Dover Publications, 1944.

MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**, Englewood Cliffs: N. J. Prentice – Hall, 1969.

MAN K.W. **Contact Mechanics using boundary elements**. Ashurst: Computational Mechanics Publications, 1994.

MARCZAK R. J. Topology optimization and boundary elements – a preliminary implementation for linear heat transfer. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol 31, p.793-802, 2007.

MATSUMOTO et al. A study on topology optimization using the level-set function and BEM, In: **WIT Transactions on Modelling and Simulation**, Wessex Institute of Technology, UK, vol 52, 2012.

MEHTHA P. K., MONTEIRO P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. 2ª edição, Ibracon, 2014.

MELLINGS, S, C; ALIABADI, M, H. Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis. In: Brebbia, C.A. (ed.), **Boundary elements methods 16th**, 149-156, 1994.

MESQUITA A.D.; CODA, H.B. Boundary integral equation method for general viscoelastic analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, p.2643-2664, 2002.

MESQUITA, A. D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/ MEF progressivo**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, p.885-895, 2003.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. An alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: a BEM approach. **Computers & Structures**, v.79(16), p.1487-1496, 2001.

MI, Y. **Three-dimensional analysis of crack growth**. **Topics in Engineering**, Vol. 28, Comp. Mech. Publications, 1996.

MI, Y; ALIABADI, M, H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 11: 167-177, 1995.

MI, Y; ALIABADI, M, H. Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. **Int. J. of Fracture**, v. 67, p. 67-71, 1994 a.

MI, Y; ALIABADI, M, H. Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In: **boundary element 14**, Brebbia C.A. (ed.), 2: 315-329, 1992 a.

MI, Y; ALIABADI, M, H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 10: 161-171, 1992 b.

MI, Y; ALIABADI, M, H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM, **Computers & Structures**, 52: 871-878, 1994 b.

MICHELL A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures, **Philosophical Magazine**, v8, p. 589-597, 1904.

MILIK, T. **Applied methods of structural reliability**. Springer Science + Business media Dordrecht, 1993.

NAKAZAWA Y. et al. Robust topology optimization of thin plate structure under concentrated load with uncertain load position. **Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing**, vol 10, n.4, 2016.

NATH Das R., **Robust Response Surfaces, Regression, and Positive Data Analyses**, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, 2014.

NGUYEN T.H., SONG J., PAULINO G.H. Single-loop system reliability-based topology optimization considering statistical dependence between limit-states. **Struct Multidisc Optim**, vol 44, p.593-611, 2011.

NOLL, W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, **Arch. Rational Mech**, v. 2, p. 198-226, 1958.

NOVOTNY A. A., SOKOLOWSKI J. **Topological Derivatives in Shape Optimization**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

NOWAK A., COLLINS K. **Reliability of structures**. McGraw-Hill, 1ª edição, United States, 2000.

OLIVEIRA H. L., LEONEL, E.D. Na improved BEM-LSM coupling-based topology optimization. XXXVII – CILAMCE, **Proceedings...**, Brasilia – DF, 2016b.

OLIVEIRA H.L., LEONEL E. D. A BEM formulation applied in the mechanical material modelling of viscoelastic cracked structures, **Int J Adv Struct Eng**, doi 10.1007/s40091-016-0144-7, 2016a.

OLIVEIRA H.L., LEONEL E. D. Boundary Element formulations applied to analysis of fracture problems in viscoelastic materials, 11<sup>th</sup> WCCM, Barcelona, Espanha, **Proceedings...** 2014.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v.111, p. 86-97, 2013.

OSHER S., FEDKIW R. **Level Set Methods and dynamical implicit surfaces**, Springer-Verlag, New York, 2003.

OSHER S., SETHIAN J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. **Journal of computational physics**, v. 79, p. 12-49, 1988.

PENG et al. A PDE-Based fast local level set method. **Journal of Computational Physics**, vol 155, p. 410-438, 1999.

PEREZ-GAVILAN, J.J.; ALIABADI, M.H. A symmetric Galerkin boundary element method for dynamic frequency domain viscoelastic problems. **Computers & Structures**, v.79, p.2621-2633, 2001.

PHILPOT T.A., FRIDLEY K.J., ROSOWSKY D.V. Structural reliability analysis method for viscoelastic members. **Computer and Structures**, v. 53, n 3, p. 591-599, 1994.

PORTELA, A. **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, Southampton, 1992.

PORTELA, A; ALIABADI, M, H; ROOKE, D, P. Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. **Int. J. Num. Meth. Engn.**, v. 33, p. 1269-1287, 1992.

PORTELA, A; ALIABADI, M, H; ROOKE, D, P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. **Computers & Structures**, v. 46, p. 237-247, 1993.

RABOTNOV, Y. N. **Elements of hereditary solid mechanics**, Moscow: Moscow Mir Publishers, 1980.

RICHARDSON J.N., COELHO R.F., ADRIAENSSENS S. Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective. **Computers and Structures**, vol 154, p.41-47, 2015.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v.21(2), p.321-330, 1971.

RIZZO, P, J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quart. App. Math.**, v. 25, p. 83-95, 1967.

ROSSOW, M. P.; TAYLOR, J. E. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. **AIAA Journal**, v. 11, p. 1566-1569, 1973.

ROZVANY G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, p. 217-237, 2009.

ROZVANY G.I.N., LEWINSKI T. **Topology Optimization in Structural and Continuum mechanics**, Springer, CISM, 2014.

ROZVANY, G.; ADIDAM S. R. Rectangular grillages of least weight. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 98, p. 1337-1352, 1972.

RUMBAUGH, et al. **Object-Oriented Modeling and Design**, Prentice-Hall, 1990.

SALEH, A, L. **Crack growth in concrete using boundary elements. Topics in Engineering**, 30, Comp. Mech. Publ., 1997.

SCHEVENELS M., LAZAROV B.S., SIGMUND O. Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. **Comput. Methods Appl. Engrg.**, vol 200, p.3613-3627, 2011.

SETHIAN J. A. **Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer visions, and materials science**, ed. 2, Cambridge University Press, New York, 1999.

SETHIAN J. A. Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws, **Journal of Differential Geometry**, v. 31, p. 131-161, 1990.

SETHIAN J. A., STRAIN J. Crystal growth and dendritic solidification. **Journal of computational physics**, v. 98, p.231-253, 1992.

SETHIAN J. A., WIEGMANN A. Structural boundary design via Level Set and Immersed Interface Methods. **Journal of computational physics**, v. 163, p. 489-528, 2000.

SIGMUND O., MAUTE K. Topology optimization approaches: A comparative review, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 1031-1055, 2013.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.21, p. 120-127, 2001.

SLADEK, J.; SUMEC, J.; SLADEK, V. Viscoelastic crack analysis by the boundary integral-equation method. **Ingenieur Archiv**, v.54, p.275-282, 1984.

SOLLERO, P; ALIABADI, M, H. Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element. **Eng. Fract. Mech.**, v. 49, p. 213-224, 1994.

STEFANOU G. D. Viscoelastic and Thermal Behavior of Structural Concrete with Reference to Containment Vessels. **Journal of Nuclear Science and Technology**, vol 18, n.2, p 85-92, 1981.

SYNGELLAKIS S, WU J. Evaluation of various schemes for quasi-static boundary element analysis of polymers. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.28, p.733-745, 2004.

SYNGELLAKIS, S. Boundary element methods for polymer analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, p.125-135, 2002.

SYNGELLAKIS, S.; WU, J. Evaluation of polymer fracture parameters by the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.75, p.1251-1265, 2008.

TAKEZAWA A. et al. Topology optimization for worst load conditions based on the eigenvalue analysis of an aggregated linear system. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, vol 200, p.2268-2281, 2011.

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials**, New York: Dover Publications, 1953.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**, traduzido por Villaça, S. F.; Soriano, H. L.; Souza, H. S., 3 ed., Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TSCHOEGL, N. W. **The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior – an introduction**, Berlin: Springer-Verlag, 1989.

TSOMPANAKIS Y., LAGAROS N. D., PAPADRAKAKIS M. **Structural Design Optimization Considering Uncertainties: Structures and Infrastructures book**, v. 1, CRC press, London, 2008.

TU et al. A new study on Reliability Based Design Optimization. **ASME Journal of Mechanical Design**, vol 121, n. 4, p.557-564, 1999.

ULLAH B., TREVELYAN J. Correlation between insertion criteria in a boundary element and level set based topology optimization method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 1457-1470, 2013.

ULLAH B., TREVELYAN J., IVRISSIMTZIS I. A three-dimensional implementation of the boundary element and level set based structural optimization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol 58, p.176-194, 2015.

ULLAH B., TREVELYAN J., MATTHEWS P. C. Structural Optimisation based on the boundary element and level set methods, **Computer and Structures**, v. 137, p. 14-30, 2014.

van DIJK N. P., MAUTE K., LANGELAAR M., van KEULEN F. Level-set methods for structural topology optimization : a review, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437-472, 2013.

VERMAAK N., et al. Material interface effects on the topology optimization of multi-phase structures using a level set method, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, p. 623 – 644, 2014.

VITORIO JR. P. C. **Análise Level Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos de contorno**. 2014. 146 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

WANG G.G., SHAN S. Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization, **Journal of Mechanical Design**, vol 129, n.4, p. 370-380, 2006.

WANG M. Y., WANG X. “Color” level sets: a multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 469-496, 2004.

WANG M. Y., WANG X., GUO D. A level Set method for structural topology optimization, **Computer Methods in applied mechanics and engineering**, 192, p. 227-246, 2003.

WANG, J.; BIRGISSON, B. A time domain boundary element method for modeling the quasi-static viscoelastic behavior of asphalt pavements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.31, p.226-240, 2007.

WASSIN R. Étude fiabiliste du fluage des structures en béton armé et précontraint. **Tese de doutorado**, Ecole Centrale de Paris, 2002.

WATSON, J, O. Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry. In Cruse, T A (ed) **Advances in Boundary Element Methods**, Springer-Verlag, 1988.

WATSON, J, O. Hermitian cubic end singular elements for plane strain. In: Banerjee P K & Watson J O (eds) **Developments in boundary element methods 4**. Elsevier Applied Science Publ. 1-28, 1986.

WIEGMANN A., BUBE K. P. The explicit jump immersed interface method: finite difference methods for PDE with piecewise smooth solutions, **Society for Industrial and Applied Mathematics**, 37, p. 827-862, 2000.

WILLIAMS M L. Structural Analysis of Viscoelastic Materials, **AIAA Journal**, v.2, n. 5, p.785-798, 1964.

WU B. et al. Structural behaviour evolution of composite steel-concrete curved structures with uncertain creep and shrinkage effects. **Composites Part B**, v.86, p.261-272, 2016b.

WU B. et al. Time-variant random interval response of concrete-filled steel tubular composite curved structures. **Composites Part B**, n.94, p.122-138, 2016a.

WU J. et al. An interval uncertain optimization method for vehicle suspensions using Chebyshev metamodels. **Applied Mathematical Modelling**, vol 38, p.3706-3723, 2014.

XIE Y. M. STEVEN G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization, **Computer and Structures**, v. 49, p. 885-896, 1993.

XU J., LI J. Stochastic dynamic response and reliability assessment of controlled structures with fractional derivative model of viscoelastic dampers. **Mechanical systems and Signal Processing**, v.72-73, p.865-896, 2016.

YAMADA T. et al. A level set-based topology optimization method using 3D BEM, Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIV, **Proceedings...** EC Ltd, Editor: A Sellier and M H Aliabad, 2013.

YAMADA T. et al. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, **Computer Methods in applied mechanics and engineering**, v. 199, p-2876-2891, 2010.

YAMASAKI S., YAMADA T., MATSUMOTO T. An immersed boundary elemento method for level-set based topology optimization. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v.93, p. 960-988, 2013.

YI, YM.; PARK, SH.; YOUN, SK. Design of microstructures of viscoelastic composites for optimal damping characteristics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p. 4791-4810, 2000.

YOO et al. Reliability-based topology optimization using successive standard response surface method. **Finite Elements in Analysis and Design**, vol 47, p. 843-849, 2011.

ZHANG X., KANG Z., ZHANG W. Robust topology optimization for dynamic compliance minimization under uncertain harmonic excitations with inhomogeneous eigenvalue analysis. **Struct Multidisc Optim**, vol 54, p.1469-1484, 2016.

ZHAO et al. Reliability-Based Topology Optimization Using Stochastic Response Surface Method with Sparse Grid Design. **Mathematical Problems in Engineering**, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/487686>, 2016.

ZHAO J., WANG C. Robust topology optimization under loading uncertainty based on linear elastic theory and orthogonal diagonalization of symmetric matrices. **Compt. Methods Appl Mech Engrg**, vol 273, p.204-218, 2014.

ZHAO Q. et al. A comparison of deterministic, Reliability-based topology optimization under uncertainties. **Acta Mechanica Solida Sinica**, vol 29, n.1, 2016.

ZHOU, F. P. Creep cracking and rupture of concrete specimens in bending. In: 9<sup>th</sup> BIENNIAL EUROPEAN CONFERENCE ON FRACTURE, RELIABILITY AND STRUCTURAL INTEGRITY OF ADVANCED MATERIALS, 1992, Bulgaria. **Proceedings...** Bulgaria, p.230-235, 1992.

ZHU et al. A fast multipole boundary elemento method for 2D viscoelastic problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Vol 35, pp. 170-178, 2011.

ZHU X., CHEN W., YANG Z. Prediction of viscoelastic behavior in asphalt concrete using the fast multipole boundary element method. **Journal of Materials in civil engineering**. Vol 25, n.3, p. 328-336, 2013.

## APÊNDICE A - PROGRAMAÇÃO ORIENTADA A OBJETOS APLICADA AO MEC

Um Modelo de Objetos foi desenvolvido e aperfeiçoado ao longo desta tese. A versão final deste modelo é representada no diagrama da Figura A.1. Esse modelo foi elaborado seguindo a técnica OMT (Object Modeling Technique) apresentada por Rumbaugh et al (1990). A ideia é privilegiar o encapsulamento, modularidade e hereditariedade dos códigos criados a fim de facilitar futuras modificações. Todas as implementações utilizam a linguagem de programação FORTRAN 90, segundo a metodologia apresentada por Beck e Bazán (2011).

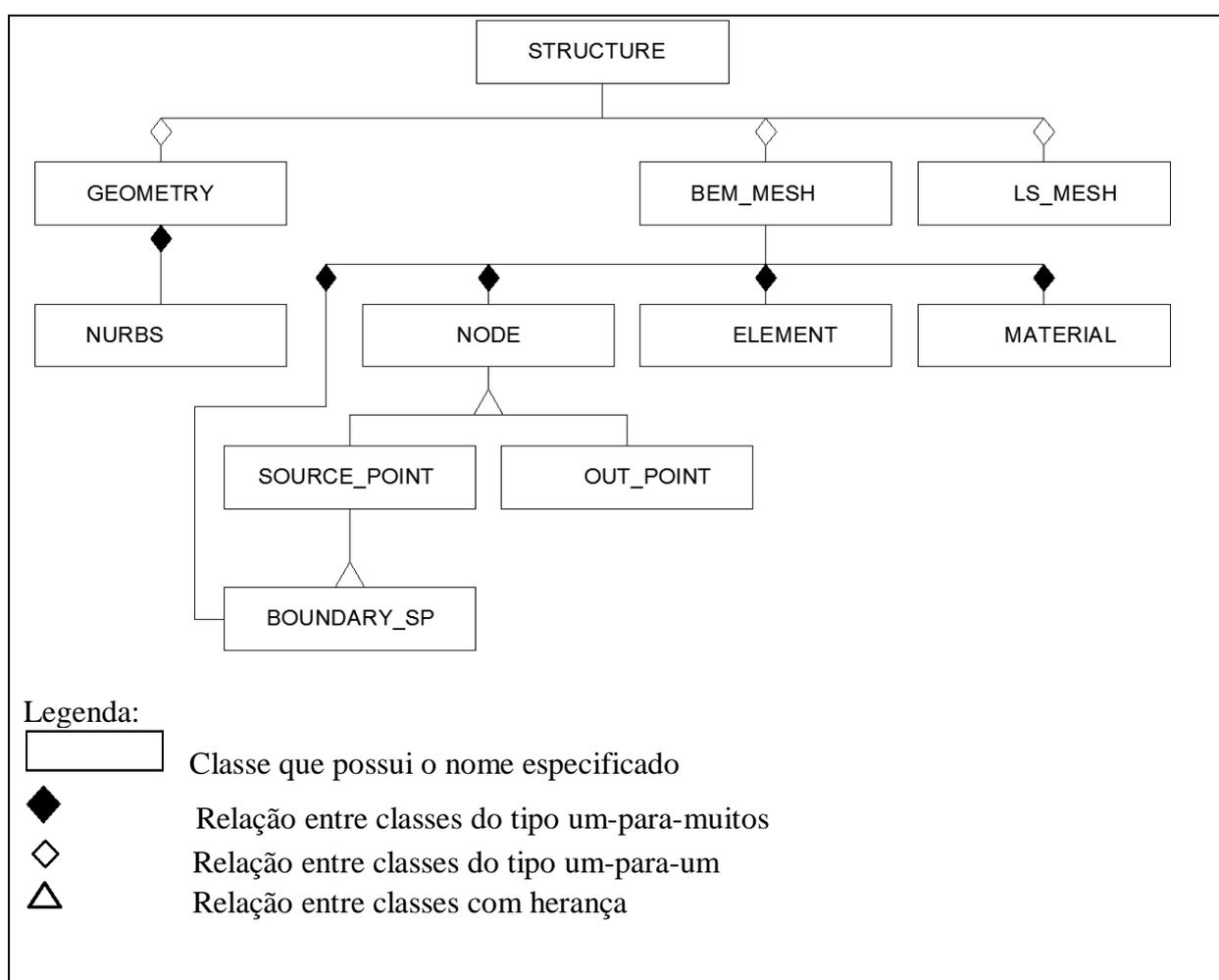


Figura A.1 Modelo de Objetos desenvolvido durante a tese

Quanto à descrição das classes:

- **STRUCTURE:** Esta é a classe que engloba todas as outras classes. É constituída a partir de uma Malha de Contorno, uma Malha de Level Set e uma Geometria. A princípio ela foi definida pensando que pode haver casos em que a definição de mais de uma estrutura, como em problemas de contato, por exemplo.
- **BEM\_MESH:** Classe que guarda todas as informações relativas ao MEC. Sua principal função reside na construção e solução do sistema linear de equações. É composta por Nós, Pontos Fonte, Elementos e Materiais.
- **LS\_MESH:** Classe dedicada a todos os aspectos pertinentes ao MLS. Toda a parte de solução numérica está inclusa nesta classe.
- **GEOMETRY:** Classe responsável exclusivamente pela geometria. Sua principal função é automatizar a geração da malha de contorno. A transmissão das informações entre malhas e geometrias é realizada pela classe Estrutura.
- **NURBS:** Classe de unidade fundamental da geometria. Contém toda a parte algorítmica dos polinômios de aproximação e geração de pontos de controle.
- **ELEMENT:** Classe que define os elementos de contorno. Podem ser do tipo singular ou não singular. Essa classe contém toda informação sobre integração numérica e aproximação dos campos físicos locais que foi apresentado no capítulo 2 deste texto.
- **MATERIAL:** Classe que define o material constituinte. Evidentemente pode haver mais de um. Essa classe contém toda a informação dos modelos constitutivos apresentados no capítulo 3 desta tese.
- **NODE:** Classe de Nós. Esses nós são importantes para a definição das aproximações locais, tanto de geometria quanto dos campos físicos.
- **SOURCE\_POINT:** Classe de ponto fonte presente no interior da estrutura. Deriva da classe fundamental NODE.
- **OUT\_POINT:** Classe de ponto fora. São pontos localizados fora da estrutura. Deriva da classe fundamental NODE.
- **BOUNDARY\_SP:** Classe de ponto fonte singular que reside na superfície do elemento de contorno. Deriva da classe SOURCE\_POINT.

Este modelo de objetos pode ser adaptado segundo as necessidades, ou ainda, servir de inspiração para outros modelos baseados no MEC.

## **APÊNDICE B – ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA ENVOLVENDO O MEC**

Esta seção apresenta um conjunto de sete alternativas que foram testadas ao longo do desenvolvimento da seção 5 desta tese. O intuito da presente seção é apenas de servir como compêndio de informações (uma lista de algoritmos de OT voltados para o MEC). Convém deixar claro, não se pretende aqui, de maneira nenhuma, questionar a aplicabilidade de qualquer uma das formulações citadas. Mas sim, apenas apresentar os motivos que as tornaram inadequadas para o propósito desta tese, e portanto, motivaram a proposição de uma nova abordagem. A principal característica que o algoritmo de OT para fins desta tese deve possuir; é ter baixo custo computacional. A razão é que as análises probabilísticas são de natureza repetitiva. Formulações que resultem em elevados tempos de processamento se mostram inadequadas para este tipo de abordagem. Algumas das sete alternativas não estão presentes na bibliografia, enquanto que, outras estão disponíveis para consulta. Leitores mais generalistas podem se servir das informações aqui expostas para se inteirar de alguns algoritmos disponíveis até o momento, com foco no MEC. Caso o interesse seja em detalhes específicos, os leitores são convidados a consultar os referidos trabalhos para uma abordagem mais profunda.

### ➤ **Alternativa 1: Algoritmo de Vitorio Jr. (2014)**

A primeira alternativa que foi testada nesta tese foi o algoritmo proposto por Vitorio Jr. (2014). O algoritmo acopla o MEC ao MLS para a busca de formas ótimas. O trabalho de Vitorio Jr.(2014) inaugurou a linha de pesquisas de otimização topológica envolvendo o MEC no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, unidade pertencente à Universidade de São Paulo. O elemento básico de acoplamento entre os dois métodos numéricos é a definição de velocidades a partir de critérios heurísticos baseados nos estudos de Ullah e Trevelyan (2013). Os contornos otimizáveis são movidos utilizando uma associação heurística entre as velocidades normais ao contorno, e as tensões aí desenvolvidas. O autor reporta o uso de elementos de contorno de ordem linear, associados a grids finos de diferenças finitas. Cada ponto interno da estrutura é considerado um candidato a

receber furos baseados no critério de eliminação de material tipo *hard-kill*. Esta combinação resulta em elevados tempos de processamento que atingem a marca de dias, tempo considerado nesta tese como proibitivo. Apesar do alto custo computacional, o algoritmo proposto por Vitorio Jr. (2014), representado pela Figura B.1, consegue reproduzir os resultados de referência, tanto para casos envolvendo otimização de forma, quanto para otimização topológica.

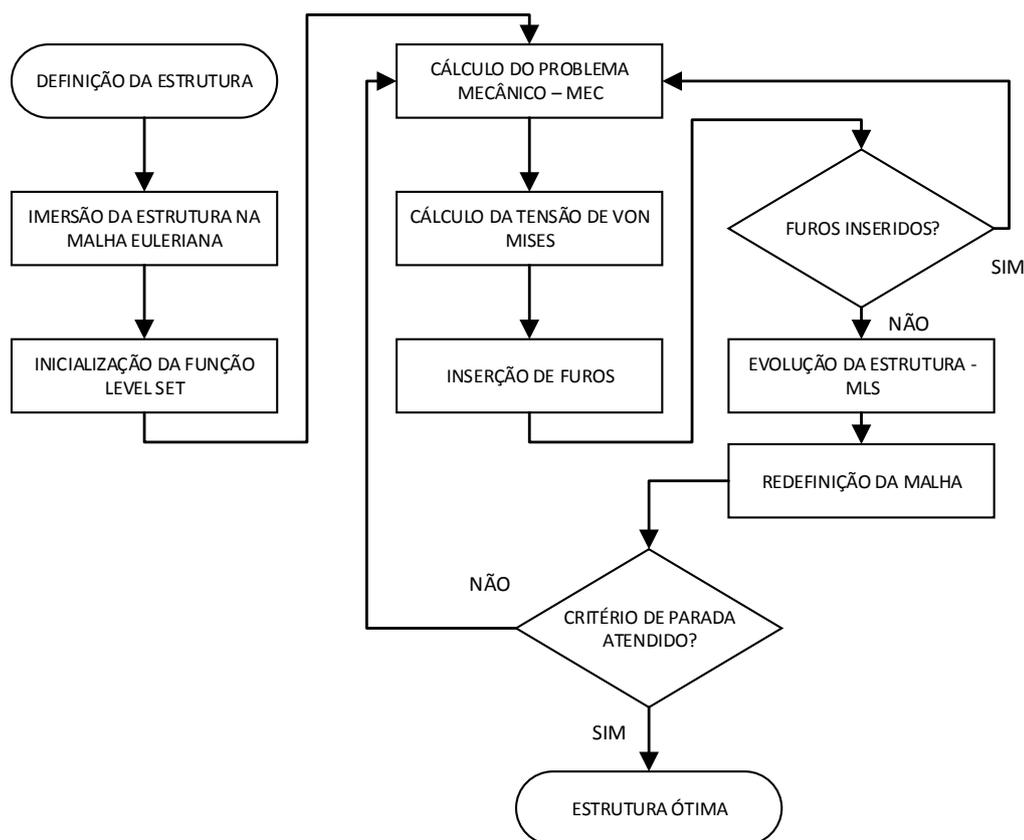


Figura B.1 Fluxograma proposto por Vitorio Jr. (2014)

O principal fator limitante desta formulação, no contexto da presente tese, é o tempo de processamento. Uma hipótese foi levantada durante os estudos. Poderia a programação orientada a objetos diminuir o tempo de processamento? Um novo programa computacional baseado neste paradigma de programação foi confeccionado. Ainda sim, os tempos de processamento elevados se mantiveram. A fim de diminuir o tempo de processamento, decidiu-se recorrer ao algoritmo que inspirou os trabalhos de Vitorio Jr.(2014), levando à Alternativa 2.

➤ **Alternativa 2: Algoritmo de Ullah, Trevelyan e Matthews (2014)**

Este procedimento também advém do acoplamento entre o MEC e o MLS. O algoritmo é baseado nos trabalhos de Ullah, Trevelyan e Matthews (2014) e Ullah e Trevelyan (2013). Posteriormente, esse algoritmo foi estendido para o caso tridimensional (ULLAH; TREVELYAN; IVRISSIMTZIS, 2015). O acoplamento foi inspirado no trabalho precedente de Sethian e Wiegman (2000), pioneiros no uso do level set para fins de otimização topológica. O método heurístico é chamado de bidirecional por permitir tanto a retirada quanto a inserção de material ao longo da otimização. A formulação clássica da otimização topológica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \min C &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2} u_i t_i d\Gamma \\ \text{tal que: } vol^* - \int_{\Omega} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Para classificar regiões em que o material é considerado como “ineficiente”, a tensão local de von Mises,  $\sigma_{vm}$ , é utilizada. Tensões inferiores a um limite, são consideradas baixas, e portanto, o material pode ser removido. O limite em termos de tensão é estipulado como uma fração,  $RR$ , da tensão máxima de von Mises observada. O valor de  $RR$  é definido pelo usuário. Inserem-se furos em regiões em que se verifique a seguinte condição:

$$\sigma_{vm} < RR\sigma_{max} \quad (\text{B.2})$$

$\sigma_{max}$  é a máxima tensão de von Mises observada na primeira iteração.

Caso existam regiões de concentração de tensão, o algoritmo permite a adição de material. Estas regiões são identificadas quando o seguinte critério for atendido:

$$\sigma_{vm} > \min(\sigma_{max}\sigma_y) \quad (\text{B.3})$$

em que  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. A taxa de remoção precisa ser atualizada periodicamente para evitar formas estacionárias antes da convergência de volume. Este procedimento é realizado, desde que não implique em taxas de remoção superiores a 40%. A atualização é feita segundo uma taxa incremental,  $RR_i$ , definida pelo usuário. Tem-se:

$$RR = RR + RR_i \quad (B.4)$$

O critério de velocidade heurístico que direciona o MLS é baseado em tensões locais, e, é válido para pontos exclusivamente localizados no contorno. O critério é descrito pelas equações (B.5) e representado pela Figura B.2. Note que se necessário, o contorno pode se mover para reduzir esforços por meio de adição de material. Por outro lado, regiões que manifestem baixas tensões são eliminadas.

$$F = \begin{cases} -1, \sigma_v \in [0, \sigma_{t1}] \\ (\sigma_v - \sigma_{t2}) / (\sigma_{t2} - \sigma_{t1}), \sigma_v \in [\sigma_{t1}, \sigma_{t2}] \\ 0, \sigma_v \in [\sigma_{t2}, \sigma_{t3}] \\ (\sigma_v - \sigma_{t3}) / (\sigma_{t4} - \sigma_{t3}), \sigma_v \in [\sigma_{t3}, \sigma_{t4}] \\ 1, \sigma_v \in [\sigma_{t4}, \infty) \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{t1} = 0,5RR\sigma_v \max \\ \sigma_{t2} = 0,9RR\sigma_v \max \\ \sigma_{t3} = 0,95\min(\sigma_v \max, \sigma_y) \\ \sigma_{t4} = \min(\sigma_v \max, \sigma_y) \end{cases} \quad (B.5)$$

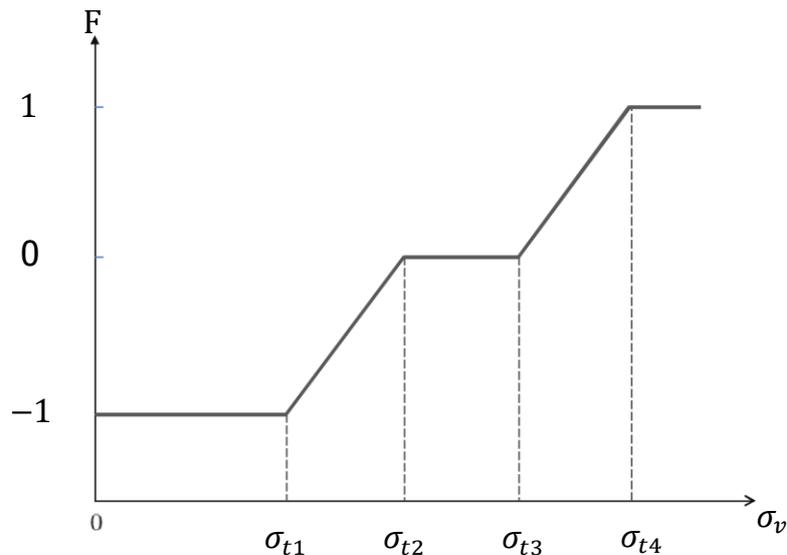


Figura B.2 Critério de velocidade para pontos do contorno (Fonte: Ullah e Trevlyan, 2013)

O procedimento de otimização é proposto de forma a minimizar o volume. Em cada passo de tempo fictício, a geometria precisa ser reconstruída a partir da função level set. Uma malha de elementos de contorno é distribuída ao longo da curva de nível zero. Adicionalmente, um conjunto de pontos internos é distribuído de forma aleatória. O algoritmo proposto pelos autores é representado por meio do fluxograma da Figura B.3. É possível a adoção de uma distribuição regular de pontos, em vez de aleatória. Os pontos internos são utilizados como candidatos a receberem furos.

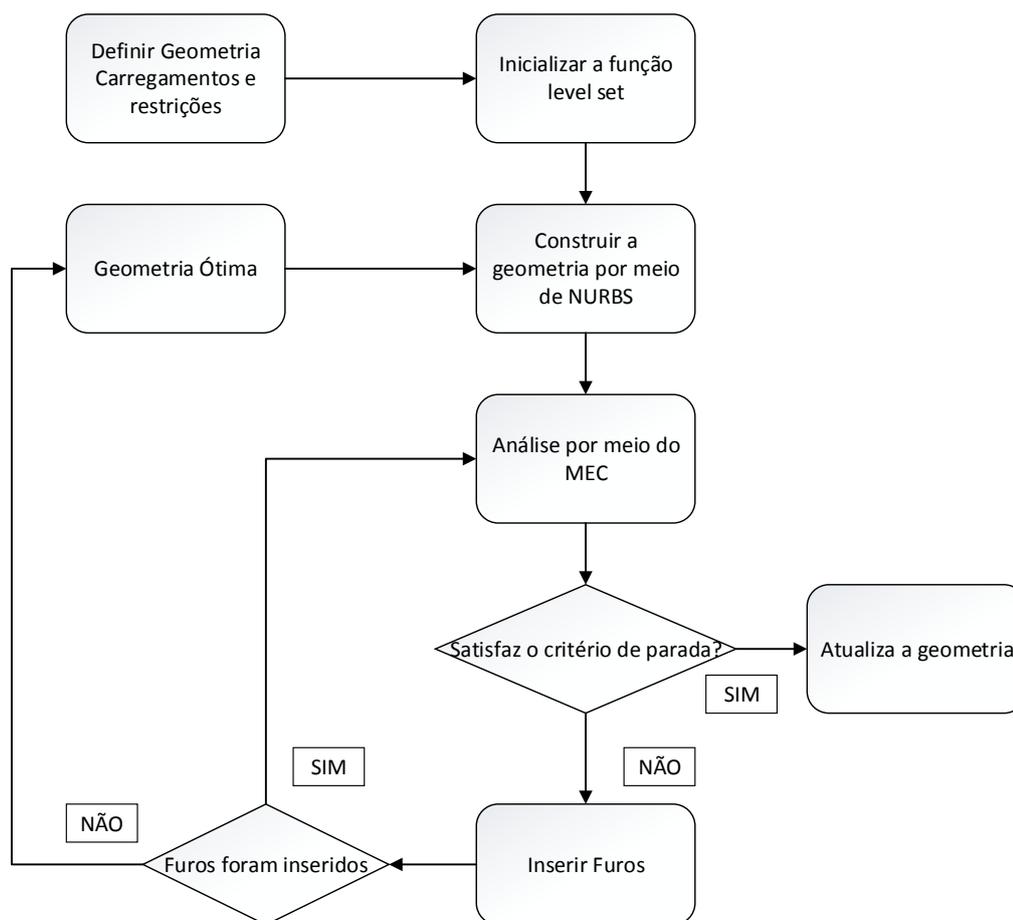


Figura B.3 Algoritmo de Ullah e Trevelyan (2013)

Este algoritmo foi implementado durante o desenvolvimento da presente tese. Na fase de testes, verificaram-se alguns inconvenientes. O primeiro deles consiste na sensibilidade do algoritmo com relação aos parâmetros utilizados. Pequenas variações nos parâmetros ( $RR$ , por exemplo) conduzem a topologias distintas, embora se mantivessem os carregamentos e o material inalterados. Outro ponto inconveniente também se revela por meio do excessivo tempo de processamento. O segundo exemplo do capítulo 5 necessitou de 12h para ser processado, utilizando computador de mesa Core i7 3,4GHz, 16GB RAM. Uma vez que os autores não mostram seus tempos de processamento, não houve como saber se os tempos obtidos nesta tese estavam acima ou abaixo daqueles observados na pesquisa original.

Ambos os problemas foram considerados limitantes ao desenvolvimento pretendido por esta tese. Entretanto, os exemplos mostrados pelos autores do algoritmo são promissores. Decidiu-se então tentar melhorar algum desses inconvenientes e prosseguir com a pesquisa. O ponto escolhido foi o tempo de processamento. Era necessário propor alterações no código

que diminuíssem o tempo total das análises. Esta estratégia conduz à próxima alternativa testada.

➤ **Alternativa 3: Algoritmo de Ullah, Trevelyan e Matthews (2014) modificado**

A terceira tentativa se concentrou em reduzir o tempo de processamento fazendo uso das características do MEC. Já se conhecia que os cálculos do Level Set podem ser confinados à uma faixa estreita sem perdas de acurácia (o chamado *Narrow Band*). Foi pensado então um confinamento de cálculos ainda superior. Partindo de contornos com continuidade de Lipchitz, pensou-se em utilizar uma rede local de pontos em torno dos pontos fonte da malha de contorno. Não há notícias deste tipo de abordagem na literatura. A Figura B.4 apresenta uma ilustração dessa ideia. A evolução geométrica fica sob controle de um número reduzido de pontos do domínio.

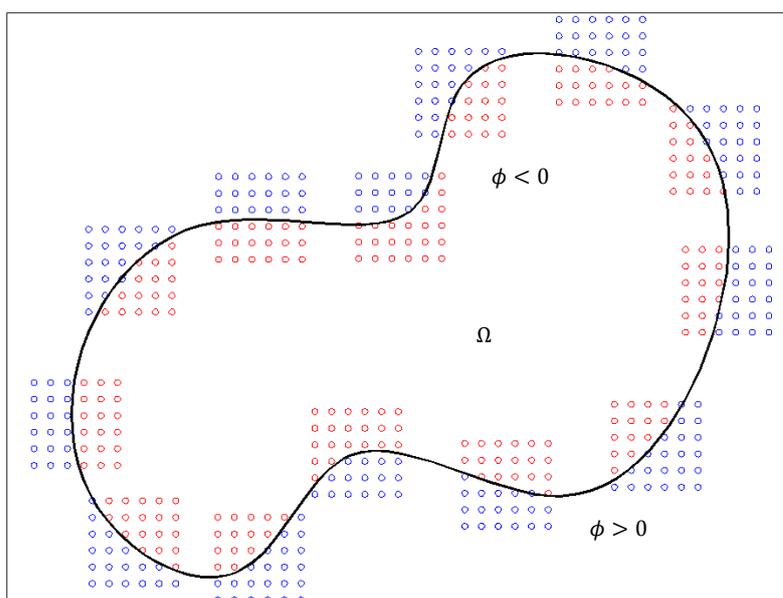


Figura B.4 Domínio material utilizando grids locais

O procedimento consiste em resolver, em cada grid, as equações de movimento do level set. Os grids são centrados nos pontos fonte. O uso de NURBS, proposto no algoritmo original, é mantido para manter a fidelidade da representação geométrica e para manter o contorno suave. É importante deixar claro que não há uso de formulações isogeométricas.

NURBS são usadas para propósitos de remalhamento. O restante da formulação de base é mantida inalterada. Superposição de grids não causam instabilidades.

Durante a fase de testes, este algoritmo melhorou a eficiência de processamento conforme o esperado. Entretanto, outro aspecto se revelou inconveniente. Esta proposta de algoritmo era incapaz de representar formas geométricas mais elaboradas, como aquelas que apresentam muitos furos próximos uns aos outros. Como estas formas são frequentes ao longo do histórico de convergência topológica, ocorre uma perda de informações que degrada a qualidade da solução numérica. De modo geral, grids finos distanciam a resposta das topologias esperadas. Constatou-se que menor quantidade de pontos fonte (da malha de contorno) em geral resulta em melhorias na topologia final. Entretanto, menor quantidade de pontos fonte também implica em perda de qualidade de representação dos campos de contorno. Durante os testes, não foi encontrado compromisso entre acurácia e eficiência computacional.

Tendo em mente as constatações particulares relativas às três alternativas aqui apresentadas, ficou evidente que, a versão heurística do algoritmo de otimização topológica era inadequada para as aplicações que se buscavam nesta tese. O principal problema foi o tempo de processamento. Foi então decidido abandonar a versão heurística baseada no método de Ullah (que fundamentam as três opções mostradas), e tentar reduzir o tempo de processamento por meio de um algoritmo do tipo gradiente. Esta mudança levou à alternativa 4 como primeira versão do código utilizando algum tipo de derivada.

#### ➤ **Alternativa 4: Algoritmo baseado no Método das Diferenças Finitas**

De forma objetiva, mantendo o MLS, basta que se mude a maneira pela qual se calculam as velocidades, para que se altere a essência do algoritmo. Ao mesmo tempo, se aproveitam todas as características do MLS que são atrativas sob o ponto de vista do MEC. A maneira mais simples que foi pensada para se calcular os gradientes necessários foi utilizar o Método das Diferenças Finitas. Utilizando o MEC, é suficiente que se produzam perturbações em pontos específicos do contorno (ponto fonte) e obtenha-se uma aproximação do gradiente de flexibilidade nestes pontos. Com esta informação é possível construir um campo de variação de flexibilidade na direção normal ao contorno. O passo seguinte é atribuir esse

campo ao campo de velocidade do MLS. Esse procedimento, no limite, conduz a formas estáveis e convergentes. A atribuição de velocidades do MLS é realizada segundo a equação:

$$F = -\nabla C \quad (\text{B.6})$$

em que  $C$  é a flexibilidade. Apenas movimentos normais ao contorno geram variação de volume. Por esta razão apenas gradientes normais ao contorno precisam ser considerados. A Figura B.5 ilustra o procedimento. Para cada ponto fonte, é possível calcular a variação de flexibilidade por meio da aproximação:

$$\nabla C = -F \cong \frac{C_1 - C_0}{d} \quad (\text{B.7})$$

$C_1$  representa a flexibilidade após a perturbação.  $C_0$  representa a flexibilidade da estrutura antes de sofrer perturbação.  $d$  é a magnitude da perturbação.

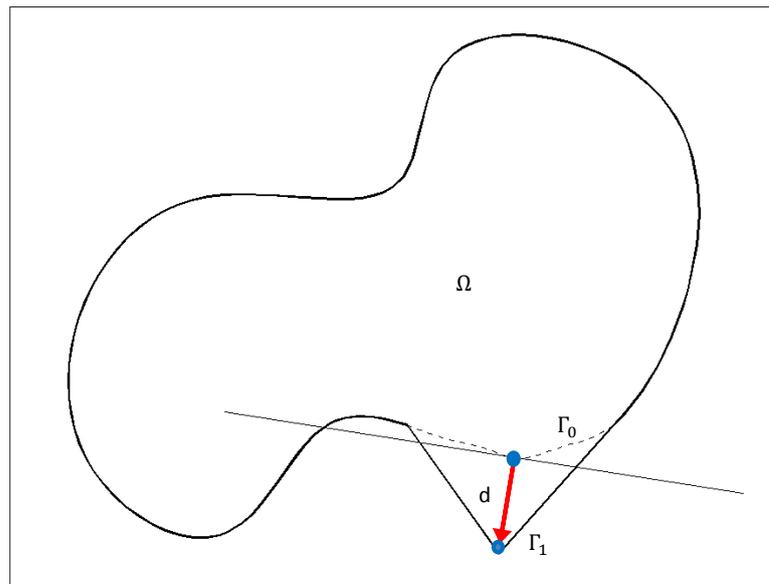


Figura B.5 Perturbação Normal do contorno para o cálculo de gradientes

Durante a fase de testes, algumas características ficaram evidentes. Esse algoritmo prediz topologias corretas somente para casos extremamente simples. A medida que os furos surgem, o algoritmo perde estabilidade, deteriorando as formas. Outro ponto inconveniente é que ao utilizar diferenças finitas para aproximar gradientes, é necessário fazer testes de auto penetração de material. Na prática, isto significa tarefas adicionais de implementação que pouco acrescentam ao algoritmo global. Um conveniente adicional se mostrou ainda persistente, a saber, o tempo de processamento. Como os cálculos dos gradientes são

realizados a partir de análises repetitivas do problema inicial do MEC, quanto mais pontos fontes houver, maior número de repetições será necessário. Este procedimento é improdutivo sob o ponto de vista do MEC, sobretudo para malhas de contorno refinadas. O exemplo da chapa tracionada foi o único testado com esta abordagem. Com todas as dificuldades de convergência, as análises mais otimistas, em termos de tempo, se mantiveram em torno de 7 horas. Embora a topologia fosse predita corretamente, o tempo de processamento foi considerado proibitivo. Este algoritmo apesar de ser simples, não foi encontrado na bibliografia. Essa metodologia, baseada em diferenças finitas, não serviu aos propósitos desta tese. Era preciso buscar na literatura outro tipo de algoritmo gradiente. Esta ação leva à próxima alternativa.

➤ **Alternativa 5: Algoritmo de Abe, Kazama e Koro (2007)**

Esta metodologia foi buscada no trabalho de Abe, Kazama e Koro (2007), pioneiros na aplicação do MLS para fins de otimização topológica utilizando o MEC. A ideia é baseada no conceito de derivada implícita para ao cálculo das sensibilidades (tanto em termos de deslocamentos, quanto em termos de forças de superfície) com relação à mudanças geométricas. É possível resumir o algoritmo proposto pelos autores da seguinte maneira:

- 1- Cálculo das matrizes  $H$ ,  $H'$ ,  $G$ ,  $G'$ . As matrizes  $H$  e  $G$  são clássicas do MEC.  $H'$  e  $G'$  são obtidas a partir das derivadas dos núcleos integrais. Estas derivadas são relativas a pontos de controle da malha de contorno, que por sua vez, controlam a forma;
- 2- Encontrar as derivadas  $\{\partial F/\partial W\} = \{\partial F/\partial U\}$ , em que  $F$ , nesse caso, representa a função objetivo a ser minimizada. No estudo dos autores,  $F$  é justamente a flexibilidade;
- 3- Determinar os valores dos multiplicadores de Lagrange por meio de um problema auxiliar, o problema adjunto. Na prática, se resolve o sistema de equações:  $A\{\lambda\} = -\{\partial F/\partial W\}$ .  $A$  é a matriz clássica do MEC, resultante do processo de troca de colunas devido às imposições das condições de contorno;
- 4- Ativação da restrição de volume:

$$\text{Se } Volume > Volume_{max} \rightarrow \lambda_+ = 0$$

Se  $Volume \leq Volume_{max}$ , obter  $\{\partial V/\partial X\} = \int_{\Gamma} v_n \Delta t \partial \Gamma / \partial X$

$$\{\beta\} = \{\partial F/\partial X\} + [H'U - G'P]^T \{\lambda\}$$

$$\lambda_+ = - \frac{\left\{ \frac{\partial V}{\partial X} \right\}^T \{\beta\}}{\left\{ \frac{\partial V}{\partial X} \right\}^T \left\{ \frac{\partial V}{\partial X} \right\}}$$

O vetor  $X$  representa pontos de controle de geometria.

- 5- Calcular as velocidades do contorno:  $\{V_b\} = -\{\beta\} - \lambda_+ \{\partial V/\partial X\}$
- 6- Resolver as equações do MLS segundo a metodologia upwind;
- 7- Extrair a geometria atual a partir da curva de nível zero, e calcular a flexibilidade;
- 8- Repetir os passos de 1 a 7, até obter convergência.

Os autores recomendam a regularização das velocidades obtidas para o contorno antes de resolver as equações do level set. Este procedimento contribui para manter a estabilidade global do algoritmo. Os exemplos reportados pelos autores mostram boa concordância com algoritmos já existentes na literatura clássica.

Na presente tese, o passo número 1 foi considerado crítico. Note a necessidade de se calcular derivadas dos núcleos integrais. Este procedimento envolve um número de operações aritméticas superior, quando comparado aos integrais originais. Na prática, isso se traduz em um tempo de processamento maior, no cálculo do problema adjunto, quando comparado ao problema mecânico principal. Este inconveniente se torna ainda maior, quando a geometria em questão possui grande número de furos, e portanto, mais complexa. Tem-se excessivos tempos de processamento, comparáveis àqueles evidenciados pelos métodos heurísticos anteriormente mencionados.

A versão original desse algoritmo utiliza filtros geométricos para evitar a definição de elementos de contorno muito pequenos no remalhamento. Os autores do estudo utilizaram apenas elementos de ordem linear. Elementos lineares apresentam menor representatividade mecânica. Nesta tese, foram utilizadas B-splines para construir malhas de elementos de contorno de ordem superior, ou seja, um melhoramento do algoritmo base. Em adição, as derivadas envolvidas foram calculadas utilizando subelementação, que é um conhecido processo de ordenamento de elementos de contorno baseado em distância. Embora essas mudanças, representassem alguns melhoramentos, ainda não eram suficientes. O tempo de

processamento ainda era elevado. Foi necessário retornar à literatura e tentar outra metodologia disponível. Tem-se então uma nova alternativa.

➤ **Alternativa 6: Algoritmo de Yamada et al (2010)**

O algoritmo proposto por Yamada et al (2010) foi concebido nos moldes da proposta do MLS, porém com foco no Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesta tese, foi pensada uma mudança na formulação proposta por Yamada et al (2010) para torná-la adaptada ao MEC. O algoritmo consiste em resolver uma forma regularizada da equação level set. A regularização vem da adição do termo de Tichonov. A equação de evolução resultante é descrita por meio da expressão (B.8). Para evitar remalhamento, os autores apresentam o uso do material de ersatz, em que um valor irrisório é atribuído aos parâmetros materiais de regiões vazias. O intuito desse material é manter a estabilidade da solução numérica.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -K(\phi)[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) - \lambda - \tau \nabla^2 \phi] \text{ em } D \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \text{ em } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi &= 1 \text{ em } \partial D_N \end{aligned} \tag{B.8}$$

Na expressão (B.8), o termo  $D_N$  representa a região em que existem condições de Newman aplicadas.

Para problemas envolvendo minimização de flexibilidade, sabe-se que a solução do campo adjunto corresponde ao campo de deslocamentos com sinal negativo. Então, o termo em negrito da expressão (B.8) se torna a energia de deformação específica, com sinal negativo.

O procedimento global pode ser resumido nas seguintes tarefas:

- 1- Inicializar a função level set. Este passo é direto, pois, cada ponto do malha do domínio recebe valor, +1, ou, -1, a depender de sua posição (interior ou exterior);
- 2- Resolver a equação de equilíbrio do problema mecânico utilizando o MEF. Note que a solução é calculada ao longo de todo o domínio, em cada passo de tempo;

- 3- Calcular o funcional objetivo. Se convergência for constatada, pare o processo. Senão, continue;
- 4- Cálculo das sensibilidades com respeito à função objetivo;
- 5- Atualizar os valores da equação level set, utilizando o MEF. Retorne ao passo 2.

Na presente tese, um novo código computacional foi produzido para executar os passos descritos. A adaptação proposta foi substituir a formulação do problema mecânico que utilizava MEF, por um modelo de elementos de contorno. Observe que Yamada et al (2010) não levaram em consideração os efeitos da expansão assintótica do campo de deslocamentos em sua formulação original. Entretanto os resultados reportados são promissores.

Alguns inconvenientes foram identificados durante a fase de testes. A troca do modelo mecânico, de MEF para MEC, deixa os cálculos mais lentos para se obter as grandezas de domínio. Note que o MEC obtém grandezas de domínio por meio de pós-processamento. Como o número de pontos pode ser elevado (por exemplo, 10000) o cálculo de tensões implica em tempos de cálculos efetivos muito superiores ao tempo de cálculo do problema em si. Adicionalmente, as condições de contorno precisam ser impostas na equação level set em cada passo de tempo. Para tanto, contornos não otimizáveis, em que existam condições de força prescrita, devem receber valores de:  $\phi = 1$ . Note então que o algoritmo de busca do contorno zero deve ser cuidadosamente projetado, pois a estrutura será definida por meio de duas curvas de nível. A parte otimizável reside ao longo de  $\phi = 0$ , enquanto que a parte não otimizável reside na curva  $\phi = 1$ . Lembre que para o MEC, não há maneiras de utilizar o material de ersatz para facilitar o trabalho de remalhamento.

Na fase de implementação e testes iniciais, esse algoritmo também foi considerado inadequado para fins do MEC. A razão é o tempo elevado de processamento, que é comparável aos algoritmos heurísticos testados. O cálculo de campos internos por meio do MEC são restritivos, tanto em volume de informação, quanto em tempo de processamento. Foi concluído que o algoritmo baseado nos estudos de Yamada et al (2010), embora potencialmente resulte em topologias promissoras, não traria os benefícios esperados para a esta tese, sobretudo em termos de tempo de cálculo. Outro inconveniente identificado foi a perda da capacidade de previsão de furos. Para manter a previsibilidade de alterações topológicas, seria preciso adaptar um tipo de malha de imersão, como por exemplo, o algoritmo de Yamasaki, Yamada e Matsumoto (2013). Este procedimento é uma sugestão caso o leitor tenha interesse em seguir esta linha de raciocínio.

A partir destas constatações, foi decidido mudar mais uma vez o procedimento de otimização. Pensou-se então, em tentar algo que não envolvesse Level Set. Estava lançada a próxima alternativa potencial.

➤ **Alternativa 7: Algoritmo de Marczak (2007)**

Esta técnica não envolve a parametrização do material do domínio. Trata-se do algoritmo apresentado por Marczak (2007) usando derivadas topológicas. O algoritmo é inspirado em eliminação de material (*hard kill*) ineficiente. Entretanto, em vez de usar critérios de tensão (como nas alternativas 1, 2 e 3), o autor sugere o uso de derivadas topológicas para determinar as posições corretas para inserção de furos. O procedimento é fundamentalmente uma remoção progressiva de material. A técnica proposta consegue prever topologias coerentes com o esperado nos exemplos de benchmark utilizados.

Esta alternativa também se mostrou ineficiente para os fins desta tese. A partir das experiências anteriores, estava claro que formulações que envolvem pós-processamento de termos de domínio representam perdas de eficiência, além de serem restritivas. A técnica de Marczak (2007) é baseada em derivadas topológicas, que apresentam custo semelhante às tensões em pontos internos para serem calculadas. Para garantir a precisão das topologias, é preciso distribuir uma rede rica de pontos internos, o que para o MEC, significa maior tempo de pós-processamento. Outra inconveniência identificada é a falta de suavidade dos contornos obtidos ao longo do processo de otimização. Contornos não suaves podem induzir o aparecimento de tensões artificiais locais, o que pode ser prejudicial para futuras extensões da formulação, especialmente aquelas que dependam de tensões na superfície.

Em suma, nenhuma das alternativas até aqui apresentadas foi considerada adequada para esta tese. Embora a maior parte delas revele boa capacidade de previsão de topologias ótimas, todas elas apresentam basicamente o mesmo inconveniente, o tempo de processamento. O principal fator de impacto no tempo de processamento foi considerado o cálculo de grandezas internas por meio do MEC. Foi então, que surgiu a ideia de tentar captar as boas características de todos esses algoritmos e propor um algoritmo novo que atendesse às necessidades dessa tese. O resultado é o algoritmo descrito no capítulo 5 desta tese.

- **Alternativa 8 – Procedimento proposto nesta tese**

A ideia central desta alternativa é diminuir a dependência de grandezas internas, e, evitar o cálculo de derivadas dos núcleos integrais do MEC. A solução encontrada foi aplicar o conceito de derivada de forma proposta por Allaire, Jouve e Toader (2004). Os autores propuseram o uso dessa derivada para guiar o campo de velocidades do MLS. A novidade então passa a ser o uso do MEC para calcular as grandezas de superfície necessárias, já que os autores utilizaram o MEF em suas formulações. Sob o ponto de vista do MEC, os deslocamentos e as forças de superfície são obtidos automaticamente, e com acurácia. Adicionalmente, a experiência obtida com algoritmos serviu de base para a proposição do novo algoritmo. Dentre os vários pontos interessantes extraídos dos algoritmos anteriormente mencionados, alguns merecem comentários.

O uso de B-splines. Esta ideia foi encontrada nos trabalhos de Ullah e Trevelyan (2013). Trata-se puramente da descrição geométrica por meio de B-splines a fim de facilitar o processo de remalhamento. Existem vários benefícios. Primeiramente, permite-se uma descrição utilizando menor quantidade de memória virtual, especialmente no caso de geometrias demasiadamente complexas que surgem durante o processo de otimização. Adicionalmente, permite-se que o remalhamento seja realizado com elementos de contorno de ordem específica e pré-determinada. Este procedimento possibilita a criação de malhas regulares, que colabora para a estabilidade global do algoritmo.

Desacoplamento entre malhas. No algoritmo do capítulo 5, o MLS é resolvido utilizando uma rede de pontos distribuída regularmente por meio o Método das Diferenças Finitas. O MEC utiliza os elementos lagrangeanos clássicos. Diferentemente de outros procedimentos, ambas as malhas são completamente desacopladas. Isto é benéfico, devido ao fato de que o modelo mecânico pode ser arbitrariamente refinado sem a necessidade de aumentar os graus de liberdade da equação do MLS, e vice-versa. No caso de geometrias complexas, o ganho de memória virtual é evidente. A bibliografia sugere que as malhas do modelo mecânico não devem conter elevados números de graus de liberdade. Entretanto, no caso de otimização topológica, uma descrição fina do campo de velocidades de contorno é determinante no resultado final.

O campo de velocidades. A equação do MLS é resolvida utilizando o campo de velocidades definido a partir de informações de contorno. A vantagem é que as sensibilidades envolvidas podem ser prontamente obtidas, sem esforço computacional extra. Isto significa um melhoramento sob o ponto de vista do MEC.

Mudanças topológicas. No presente algoritmo, a ideia introduzida por Ullah e Trevelyan (2013) foi mantida. As mudanças topológicas são baseadas em valores estipulados de tensão. Material considerado como ineficiente é removido. Entretanto o procedimento global não é *kard-kill*. Note que se o furo inserido não for necessário, a própria função level set se encarrega de fechá-lo, a partir da sensibilidade mostrada pelo contorno. Sobre esse aspecto, o desacoplamento entre malhas é fundamental. Isto permite, por exemplo, o uso de redes de pontos internas mais grosseiras, apenas para apontar os candidatos a receber furos. Esta alternativa garante o uso mínimo de informações de domínio. É possível eliminar completamente a dependência de informações de domínio. Basta que se trabalhe com estruturas iniciais contendo furos. Nesse caso, o resultado se torna dependente da estrutura inicial. Embora exista esta abordagem, ela não foi tratada nesta tese.

O uso do Level Set. O uso do level set foi mantido por várias razões. Primeiramente, o MLS necessita de informações disponíveis apenas ao longo do contorno, o que está em concordância com a abordagem do MEC. Outro ponto de interesse é relacionado às complexas mudanças topológicas. Para o MLS o processo de união e dissociação de curvas é intrínseco. O MLS é adequado para formulações topológicas via MEC porque fornece uma parametrização automática do domínio de projeto, de forma contínua.

Todas essas características foram herdadas pelo algoritmo apresentado no capítulo 5 desta tese. A Figura B.6 traz um resumo das etapas seguidas para a minimização da flexibilidade estrutural por meio da união entre o MEC e MLS. Para mais detalhes consulte o quinto capítulo desta tese.

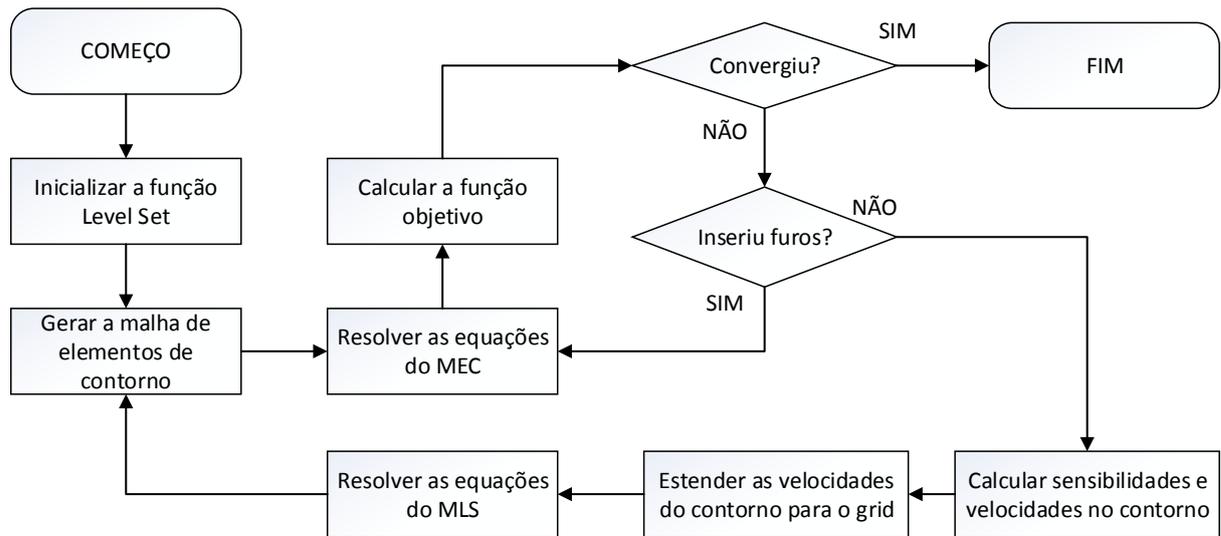


Figura B.6 Fluxograma do algoritmo adotado nesta tese