

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

TIAGO MORKIS SIQUEIRA

Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados
planos com ligações deslizantes

São Carlos

2016

TIAGO MORKIS SIQUEIRA

Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados
planos com ligações deslizantes

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentado ao Programa de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Áreas de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

São Carlos

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL, DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S618a Siqueira, Tiago Morkis
Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes / Tiago Morkis Siqueira; orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2016.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Método dos elementos finitos posicional. 2. Ligações deslizantes. 3. Dinâmica não linear. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **TIAGO MORKIS SIQUEIRA**.

Título da dissertação: "Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes".

Data da defesa: 26/02/2016

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Sergio Lima Segantine**

Para minha família:
Rafael, Ana Maria
e Maria Emília

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar meus sinceros agradecimentos:

A Deus, pela oportunidade que Ele dá a cada novo dia para realizar o que é bom e justo.

À minha família – meu pai, minha mãe e minha irmã – e minha namorada pela paciência durante a minha ausência e pelo suporte em todas as escolhas que fiz.

Ao professor Humberto Breves Coda pela valiosa orientação, paciência na transmissão de conhecimentos e estímulo durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos amigos, novos e antigos, pelo companheirismo e pela camaradagem durante a peleja do mestrado.

A todos os professores com quem tive a alegria de poder aprender, pela disposição de ensinar.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo pelas instalações e recursos disponíveis e aos seus funcionários pela atenção dada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida, sem a qual este trabalho não seria possível.

*“Assim como casas são feitas de pedras,
a ciência é feita de fatos.
Mas uma pilha de pedras não é uma casa
e uma coleção de fatos não é,
necessariamente,
ciência.”*

Jules Henri Poincaré

RESUMO

SIQUEIRA, T. M. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes**. 2016. 137 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Desenvolve-se uma formulação lagrangeana total do método dos elementos finitos para análise dinâmica de estruturas e mecanismos reticulados planos contendo ligações deslizantes sujeitas a grandes deslocamentos e rotações. Estas são introduzidas ao sistema mecânico na forma de juntas prismáticas e cilíndricas por meio do método dos multiplicadores de Lagrange, permitindo sua utilização na simulação de diversos tipos de estruturas e mecanismos. Também são consideradas rótulas entre as barras, estas introduzidas por meio da compatibilidade cinemática dos graus de liberdade dos nós comuns. A formulação do método dos elementos finitos adotada utiliza como parâmetros nodais as posições e os giros de modo desacoplado. Assim, pode-se utilizar a cinemática exata para barras de Reissner na análise de deslocamentos e giros finitos da estrutura. Adota-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a medida de deformação objetiva de Green-Lagrange com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. O equilíbrio dinâmico do sistema é obtido pelo princípio da energia total estacionária e a solução do sistema não linear de equações resultante é obtida pelo método de Newton-Raphson. A integração temporal é realizada pelo método de Newmark. São apresentados diversos exemplos para validação da formulação desenvolvida, os quais são comparados com soluções analíticas de modo a evidenciar as possibilidades de aplicação da formulação proposta.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos posicional. Ligações deslizantes. Dinâmica não linear.

ABSTRACT

SIQUEIRA, T. M. **Geometrical nonlinear dynamical analysis of plane frame structures and mechanisms with sliding joints**. 2016. 137 p. Dissertation (Masters in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

A total lagrangian finite element method formulation is developed for the dynamic analysis of plane frame structures and mechanisms containing sliding joints that undergoes large displacements and rotations. Those connections are introduced in the mechanical system as prismatic and cylindrical joints by the method of Lagrange multipliers, allowing its use on the simulation of several types of structures and mechanisms. Hinges between bars are also considered by kinematic compatibility of the degrees of freedom on the common node. The adopted finite element formulation uses as nodal parameters uncoupled positions and angles. Therefore, Reissner exact kinematics for bars can be utilized for structural finite deformation. The Saint-Venant-Kirchhoff constitutive model, which relates the objective Green-Lagrange strain measure with the second Piola-Kirchhoff stress tensor, is adopted. The principle of stationary total energy is used to obtain the dynamic nonlinear equilibrium of the system and the solution of the resulting nonlinear system of equations is done by the Newton-Raphson method. The Newmark method is adopted for time integration. Several examples are presented for the validation of the developed formulation, and those are compared with analytical solutions in order to clarify the possibilities of application of the proposed formulation.

Keywords: Positional finite element method. Sliding joints. Nonlinear dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conexões entre elementos e indicação do movimento relativo entre as partes: a) junta rotacional (rótula), b) junta prismática (engaste móvel) e c) junta cilíndrica (apoio móvel) ...	25
Figura 2 – Parametrização da linha de referência para a configuração inicial de um elemento com aproximação cúbica	42
Figura 3 – Ponto genérico na configuração inicial da barra	44
Figura 4 – Mapeamento da configuração atual – detalhe para os ângulos	45
Figura 5 – Mudança de configuração – mapeamento posicional	46
Figura 6 – Transferência de energia entre os sistemas	48
Figura 7 – Carregamentos externos aplicados no elemento finito.....	51
Figura 8 – Sistema de eixos locais para o cálculo das tensões de Cauchy	60
Figura 9 – Renumeração dos graus de liberdade: a) conexão monolítica e b) junta rotacional	62
Figura 10 – Diversas conexões rotuladas entre elementos graus de liberdade.....	63
Figura 11 – Coluna submetida à uma força compressiva e pequeno momento fletor.....	64
Figura 12 – Evolução dos deslocamentos a) transversal e b) axial da extremidade livre da coluna	65
Figura 13 – Deslocamentos transversais (m) da coluna para diversos níveis de carregamento	65
Figura 14 – Geometria inicial e deformada do pórtico.....	66
Figura 15 – Tração: a) carga x deslocamento b) configurações deformadas	67
Figura 16 – Compressão: a) carga x deslocamento b) configurações deformadas.....	68
Figura 17 – Configuração inicial e função de giro	68
Figura 18 – Configuração atual: deslocamentos medidos a partir do movimento de corpo rígido	69
Figura 19 – Deslocamento axial da ponta da hélice	70
Figura 20 – Deslocamento transversal da ponta da hélice.....	70
Figura 21 – Rotação relativa da ponta da hélice.....	70
Figura 22 – Configuração inicial do mecanismo biela-manivela	71
Figura 23 – Evolução da posição horizontal do apoio direito	72
Figura 24 – Configuração inicial da estrutura e histórico de carregamento	73
Figura 25 – Deslocamentos de um ponto distante de $\frac{1}{4}$ do vão da rótula esquerda da viga	73

Figura 26 – Deslocamentos verticais (m) para intervalos de 0,1 s	74
Figura 27 – Trajetória dos nós da viga a cada 18 cm (linhas tracejadas) e configurações inicial e final da viga (linhas contínuas).....	74
Figura 28 – Esforço normal no ponto de integração imediatamente à esquerda da massa concentrada.....	74
Figura 29 – Ligações deslizantes: a) junta prismática, b) junta cilíndrica	75
Figura 30 – Diferença dos ângulos para o mesmo nó em elementos distintos.....	77
Figura 31 – Pórtico plano com junta prismática.....	85
Figura 32 – Diagramas de esforços internos	85
Figura 33 – Configurações finais para ambas seções transversais (escala real).....	86
Figura 34 – Carga móvel com velocidade constante sobre viga flexível	86
Figura 35 – Deslocamento vertical no meio vão	87
Figura 36 – Momento fletor no meio vão.....	87
Figura 37 – Esforço cortante no meio vão.....	88
Figura 38 – Configuração deformada da estrutura	89
Figura 39 – Evolução do ângulo de inclinação da barra rígida	89
Figura 40 – Evolução do deslocamento horizontal do apoio direito	90
Figura 41 – Configuração inicial do veículo e geometria	90
Figura 42 – Linha de influência de deslocamento vertical do meio vão da ponte	91
Figura 43 – Linha de influência de momento fletor do meio vão da ponte.....	92
Figura 44 – Linha de influência de esforço cortante do meio vão da ponte.....	92
Figura 45 – Configuração inicial e geometria	93
Figura 46 – Trajetória do extremo livre do braço.....	93
Figura 47 – Configurações selecionadas e trajetória do extremo livre do braço.....	94
Figura 48 – Configuração inicial da estrutura	94
Figura 49 – Trajetória de equilíbrio: a) momento fletor reativo e configurações da estrutura, b) esforço normal do no ponto médio da alavanca, c) posição vertical do ponto central do arco	95
Figura 50 – Mecanismo de retorno rápido na configuração inicial.....	96
Figura 51 – Velocidade do apoio N na direção do eixo 1	97
Figura 52 – Deflexão da ponta do braço	97
Figura 53 – Momento fletor de um ponto a $\frac{1}{4}$ do apoio B	98
Figura 54 – Linha de referência para os elementos mestre e escravo com aproximação cúbica	112

Figura 55 – Diferença entre o ângulo do ponto P medido no elemento mestre e no elemento escravo (a seta nos elementos finitos indica a orientação desses)..... 113

LISTA DE SÍMBOLOS

O significado dos símbolos utilizados neste trabalho é descrito junto ao texto onde estes aparecem pela primeira vez.

A respeito da notação utilizada, preferiu-se, quando possível, apresentar as equações em notação diádica de modo a abreviar suas expressões. Entretanto, quando necessário para clareza, é utilizada a notação indicial nas fórmulas deste trabalho.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	25
1.1 Considerações Iniciais	25
1.2 Motivação	28
1.3 Metodologia.....	28
1.4 Organização da Dissertação.....	29
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
3. ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO.....	41
3.1 Cinemática do Elemento Finito de Pórtico Plano.....	41
3.1.1 Configuração inicial	41
3.1.2 Configuração atual.....	44
3.1.3 Mudança de configuração e gradiente	45
3.2 Elastodinâmica Não Linear Geométrica Aplicada ao MEF Posicional.....	47
3.2.1 Energia de deformação do elemento de pórtico	49
3.2.2 Energia total e equilíbrio elastodinâmico	51
3.2.3 Tensão de Piola-Kirchhoff e derivada da deformação de Green.....	54
3.3 Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal	55
3.3.1 Hessiana do elemento de pórtico plano	58
3.4 Cálculo dos Esforços Internos Seccionais	60
3.5 Incorporação de Rótulas	62
3.6 Exemplos de Pórticos com Ligações Monolíticas e Rotuladas	63
3.6.1 Exemplo 1 – Flambagem elástica de uma coluna.....	64
3.6.2 Exemplo 2 – Pórtico diamante articulado.....	66
3.6.3 Exemplo 3 – Rotação de hélice flexível	68
3.6.4 Exemplo 4 – Mecanismo biela-manivela	71
3.6.5 Exemplo 5 – Balanço de três barras	72

4.	INTRODUÇÃO DE LIGAÇÕES DESLIZANTES	75
4.1	Restrições Cinemáticas por meio de Multiplicadores de Lagrange	76
4.2	Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal	79
4.2.1	Comentários sobre a integração temporal	81
4.3	Variáveis Curvilínea e Adimensional.....	83
4.4	Exemplos	84
4.4.1	Exemplo 1 – Pórtico simples com junta prismática	84
4.4.2	Exemplo 2 – Carga móvel sobre viga biapoiada flexível.....	86
4.4.3	Exemplo 3 – Flambagem de uma estrutura tracionada.....	88
4.4.4	Exemplo 4 – Linhas de influência de uma ponte – carga móvel.....	90
4.4.5	Exemplo 5 – Mecanismo gerador de curvas.....	92
4.4.6	Exemplo 6 – Trajetória de equilíbrio de um arco abatido com manivela.....	94
4.4.7	Exemplo 7 – Mecanismo de retorno rápido	96
5.	CONCLUSÕES	99
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	100
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICE A – LIGAÇÕES DESLIZANTES POR MEIO DE ELEMENTOS MESTRE E ESCRAVO	111
A.1	Restrições Cinemáticas.....	111
A.2	Alterações nas Equações do Movimento.....	116
A.2.1	Energia de deformação (vetor de força interna)	117
A.2.2	Energia potencial das forças externas (vetor de força externa).....	119
A.2.3	Energia cinética (vetor de força inercial).....	120
A.2.4	Dissipação por amortecimento viscoso (vetor de força de amortecimento).....	123
A.2.5	Novas equações do movimento	126
A.3	Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal	129
A.3.1	Hessiana do conjunto de elementos mestre e escravo	131

ANEXO A – POLINÔMIOS DE LAGRANGE E SUAS DERIVADAS	137
---	-----

1. INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

A análise dinâmica linear de estruturas é um tema tradicional e de grande importância na engenharia, uma vez que permite o estudo do comportamento de sólidos sujeitos a ações variáveis com o tempo. Entretanto, quando rotações ou deslocamentos finitos são essenciais à descrição do comportamento da estrutura, as diferenças entre a configuração inicial e atual dos corpos não podem ser desprezadas na formulação do problema, como é o caso de aplicações voltadas a máquinas ou mecanismos.

Além disso, a evolução da tecnologia dos materiais permite, cada vez mais, a utilização de estruturas com maior esbeltez e flexibilidade. Impondo, assim, a necessidade de modelos estruturais mais precisos e menos usuais, o que motiva a realização de análises em âmbito não linear geométrico – sejam estas estáticas ou dinâmicas.

Uma maneira de aperfeiçoar a modelagem de algumas estruturas particulares é por meio da consideração de conexões entre partes do sistema as quais não sejam monolíticas, mas que permitam o movimento relativo entre seus componentes. Notadamente em estruturas planas essas são denominadas rótulas e ligações deslizantes internas. Ilustram-se na Figura 1 essas conexões onde se distingue os dois tipos de ligações deslizantes: juntas prismática e cilíndrica.

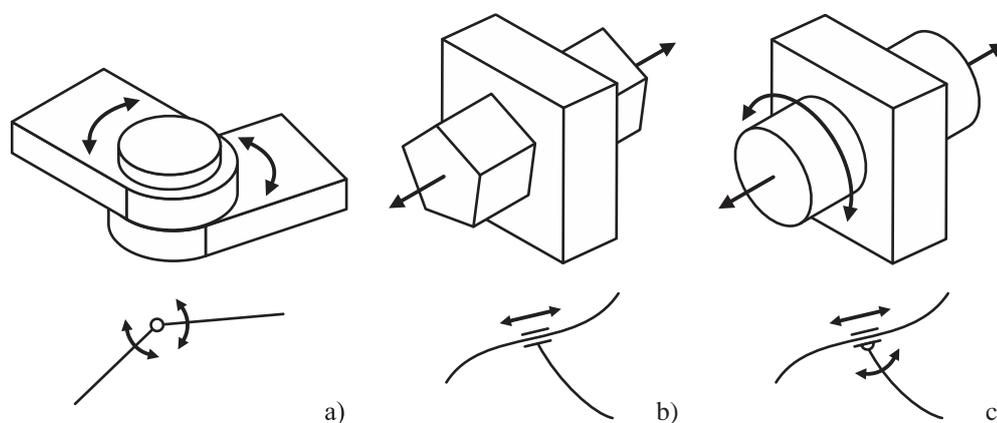


Figura 1 – Conexões entre elementos e indicação do movimento relativo entre as partes: a) junta rotacional (rótula), b) junta prismática (engaste móvel) e c) junta cilíndrica (apoio móvel)

O uso desses tipos de conexões entre os corpos, conjuntamente a uma análise dinâmica na qual sejam considerados grandes deslocamentos e rotações, abre caminho para a modelagem de diversas aplicações na análise não linear geométrica de estruturas, em especial no estudo de multicorpos flexíveis, aproximando o modelo numérico da realidade.

Nesse trabalho, enfoque é dado sobre a simulação numérica de estruturas aperticadas planas que possuem rótulas e ligações deslizantes entre seus componentes através do método dos elementos finitos.

No que diz respeito à consideração da não linearidade geométrica dos corpos, será utilizada uma formulação do método dos elementos finitos baseada em posições em uma versão lagrangeana total, tal como proposta inicialmente em Coda (2003), na qual foi utilizada a cinemática de Euler-Bernoulli. Entretanto, a cinemática adotada para os componentes flexíveis no presente trabalho, elementos finitos de pórtico plano, é a de Reissner, a qual também é geometricamente exata, tendo sido utilizada para análise de sistemas aperticados monolíticos e rotulados em Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

Nesta formulação do método dos elementos finitos as equações de movimento, ou equilíbrio dinâmico, do sistema são obtidas a partir do princípio da energia total estacionária e o sistema não linear de equações resultante é resolvido utilizando-se o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson. Já a integração temporal é obtida a partir do clássico método de Newmark.

Conforme mencionado, serão consideradas neste trabalho restrições no movimento entre os membros estruturais na forma de rótulas e ligações deslizantes especialmente formuladas para o elemento finito utilizado.

As rótulas são introduzidas ao sistema de equações através da compatibilidade cinemática dos nós comuns aos elementos conectados. Isso é realizado por meio de uma renumeração dos graus de liberdade nodais, conforme procedimento análogo ao descrito em Greco e Coda (2006).

O equacionamento para inclusão de ligações deslizantes foi desenvolvido nesse trabalho por meio de multiplicadores de Lagrange de modo a restringir o funcional de energia total. Uma formulação alternativa através da concepção de elementos mestre-escravo também foi considerada, mas sua implementação foi preterida em relação ao método adotado dada sua complexidade. Mesmo assim, esta é apresentada no Apêndice A.

O campo de aplicação de conexões na forma de rótulas e ligações deslizantes é vasto. Estas podem ser utilizadas para modelar sistemas utilizados na indústria aeroespacial tais como aeronaves de asas rotativas (BAUCHAU; BOTTASSO; NIKISHKOV, 2001; BAUCHAU;

BOTTASSO, 2001), sistemas desdobráveis como antenas de satélites, radiotelescópios e demais apêndices flexíveis (AMBROSIO; NETO; LEAL, 2007; BAUCHAU, 2000; DAI; GUAN; GUEST, 2014; GÉRADIN; CARDONA, 2001; KIPER; SÖYLEMEZ, 2009; MITSUGI et al., 2000).

Rótulas e ligações deslizantes também podem ser utilizadas em outros tipos de estruturas desdobráveis, com os mais distintos propósitos, desde guarda-chuvas até cúpulas treliçadas expansíveis (MERCHAN, 1987; TEMMERMAN, 2007).

No âmbito da biomecânica as ligações deslizantes podem ser utilizadas para modelar o sistema locomotor humano ou animal de forma simplificada, já que em alguns casos o efeito do deslizamento entre as partes do corpo é importante para caracterizar sua mobilidade, como no mecanismo craniano de aves, répteis e peixes ósseos (HOSHINO; TASHMAN, 2012; MULLER, 1996; SYNEK; SETTLES; STILLFRIED, 2012; YOGANANDAN et al., 1998).

Encontram-se também aplicações no estudo da dinâmica do tráfego de veículos, incluindo a análise da vibração e do seu acoplamento sobre pontes rodoviárias ou ferroviárias, mas também a simulação do deslizamento entre o pantógrafo e a formação da catenária na rede de alimentação de locomotivas (ESCALONA; SUGIYAMA; SHABANA, 2013; FRÝBA, 1972; SHABANA; ZAAZAA; SUGIYAMA, 2008).

De maneira geral, o emprego de rótulas e ligações deslizantes em sistemas mecânicos e estruturais pode ser notado em estruturas aporricadas que possuem estas conexões especiais, mecanismos flexíveis articulados como os utilizados em pistões de automóveis, mecanismos de retorno rápido utilizados em máquinas de conformação, braços robóticos e maquinários diversos como retroescavadeiras (BAUCHAU; BOTTASSO, 2001; BAUCHAU, 2000; GARCIA-VALLEJO et al., 2003; GRECO; CODA, 2006; HONG; REN, 2011; MOON et al., 2014; YOO et al., 2007).

As aplicações almejadas neste trabalho são: estruturas e mecanismos em geral utilizados nas indústrias mecânica e aeroespacial; estruturas civis aporricadas, cujo comportamento dinâmico não linear se mostra importante; e o acoplamento veicular móvel em pontes. Diversos exemplos são apresentados para validar e demonstrar as possíveis aplicações da formulação desenvolvida.

1.2 Motivação

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma formulação matemática para ligações deslizantes aplicada à análise dinâmica não linear geométrica de pórticos planos através do método dos elementos finitos em uma versão lagrangeana total baseada em posições, incluindo a sua implementação computacional.

Os avanços técnico-científicos almejados nesta proposta são muito atuais e a articulação das diversas aplicações a partir da criação das ligações deslizantes, por si só justifica a proposta deste trabalho. Além disso, a formação de um mestre em engenharia de estruturas com conhecimentos associados à análise dinâmica não linear é de grande importância para o cenário científico nacional.

Com relação ao desenvolvimento do trabalho ser adequado ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET EESC-USP) pode-se comentar que desde a concepção da formulação do método dos elementos finitos baseado em posições, introduzida com as publicações de Bonet et al. (2000) e Coda (2003), o Grupo de Mecânica Computacional (GMEC) do SET vem desenvolvendo ao longo dos anos a extensão e aplicação desta formulação para a resolução da mais variada gama de problemas. Assim, este trabalho dá continuidade à generalização dos procedimentos desta abordagem.

1.3 Metodologia

De modo a alcançar os objetivos propostos para o desenvolvimento deste trabalho inicialmente utilizou-se de uma formulação de pórticos planos com ligações monolíticas fundamentada no método dos elementos finitos – semelhante à proposta por Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014) – para o desenvolvimento de um código computacional capaz de realizar a análise dinâmica não linear geométrica dessas estruturas reticuladas.

A este código básico desenvolvido foram introduzidas às conexões rotuladas por meio da reorganização dos graus de liberdade da estrutura tal como indicado no trabalho de Greco e Coda (2006).

Realizadas as verificações dos resultados fornecidos pelo programa, iniciou-se o desenvolvimento da formulação para a introdução das restrições cinemáticas que as ligações deslizantes impõem ao sistema. Em um primeiro momento adotou-se a abordagem dos elementos mestre e escravo. Entretanto, dada à extensão e complexidade que esse equacionamento apresentou resolveu-se adotar a técnica dos multiplicadores de Lagrange para introdução dessas restrições. O que foi desenvolvido para os elementos mestre e escravo é apresentado no Apêndice A.

Todos os códigos computacionais foram desenvolvidos na linguagem Fortran utilizando o compilador Intel® Visual Fortran (versão 11.1) em ambiente Windows® de 64 bits. Para a análise dos resultados foi utilizado o *software* livre de pós-processamento AcadView (PACCOLA; CODA, 2005).

Foi também realizada uma pesquisa bibliográfica que abarca conteúdos relativos à mecânica computacional, não linearidade geométrica, dinâmica de sistemas não lineares e a introdução de restrições cinemáticas ao movimento do sistema por meio das conexões mencionadas. Desse modo localizando o tema do trabalho nos desenvolvimentos científicos presentes na literatura até o momento.

1.4 Organização da Dissertação

A dissertação se organiza da seguinte forma. No capítulo seguinte é apresentada a revisão bibliográfica dos temas pertinentes ao trabalho. O capítulo 3 apresenta a formulação para o elemento finito de pórtico plano não linear geométrico com ligações monolíticas e rótulas. Nele também são apresentados exemplos de aplicação do código computacional desenvolvido. No capítulo 4 desenvolve-se o equacionamento para introdução das ligações deslizantes por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange que toma como base o elemento de pórtico plano do capítulo anterior. Também são apresentados exemplos para demonstrar a capacidade da formulação e do código desenvolvido. Por fim, no capítulo 5, são feitas as conclusões do trabalho e sugestões para continuação da pesquisa.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No estudo de máquinas e mecanismos, seus componentes usualmente estão sujeitos a grandes rotações. Todavia, as deformações presentes podem ser pequenas, e em diversas aplicações o comportamento dos membros estruturais é considerado, de maneira simplificada, como o de corpos rígidos, ao passo que as ligações entre eles podem ser tomadas como rígidas, livres ou até semirrígidas.

O estudo do movimento de corpos rígidos se fundamenta nos princípios da Mecânica Racional, especialmente nos conceitos de ponto material e corpo rígido, propostos por Newton e Euler, respectivamente. Além das contribuições de d'Alembert para a consideração de restrições no movimento entre corpos e nos formalismos introduzidos pela mecânica de Lagrange (1788), (SCHIENLEN, 2005).

Esta área de estudo apresenta, portanto, uma base matemática solidamente fundamentada há bastante tempo. Aplicações destes conceitos na modelagem de sistemas dinâmicos de corpos rígidos, através de procedimentos sistemáticos, podem ser encontradas em trabalhos tais como Shigley e Uicker (1981), Nikravesh (1988, 2005), Norton (2011), Shabana (2013), dentre diversos outros.

Contudo, desprezar a deformação dos corpos não é apropriado para todos os tipos de análises, especialmente em situações que envolvam membros flexíveis, altas velocidades de operação ou ainda equipamentos que requeiram precisão no movimento.

Dessa forma, a preocupação com a necessidade em se considerar a deformação dos componentes flexíveis, seja ela grande ou pequena, se soma às dificuldades presentes no estudo da dinâmica de corpos rígidos em representar grandes movimentos de translação e rotação dos componentes.

Acrescenta-se a esse entrave as dificuldades em modelar as restrições que podem existir entre o movimento relativo dos componentes ou destes com a vizinhança, o que, por si mesmas, já tornam o equacionamento do problema bastante não linear – ainda mais se tratando de corpos deformáveis. Além do mais, por ser um problema dinâmico, existe a necessidade da integração temporal das equações do movimento, o que nem sempre é simples.

Diversas soluções foram propostas ao longo do tempo para resolver estes entraves. Uma delas, de modo a aproveitar os códigos computacionais existentes, tentou estender a formulação aos componentes deformáveis do sistema por meio de referenciais intermediários móveis, em

analogia ao procedimento já existente para corpos rígidos, como se encontra nos trabalhos pioneiros de De Veubeke (1976) e Kane, Ryan e Banerjee (1987).

Esta abordagem utilizou-se de conceitos da teoria de análise linear geométrica de estruturas, tornando o equacionamento acessível e permitindo a introdução de componentes flexíveis nos programas existentes de análise de corpos rígidos com maior facilidade. Além disso, dada à possibilidade de se utilizar análise modal, a rapidez no processamento dos resultados é a principal vantagem da técnica e fez com que ela fosse amplamente difundida (WASFY; NOOR, 2003). Entretanto, as hipóteses adotadas restringem as suas aplicações a problemas de pequenas deformações, além de muitas vezes negligenciar efeitos não lineares importantes, como o enrijecimento centrífugo. Conforme mencionam Ibrahimbegović, Taylor e Lim (2003), este método se assemelha bastante à técnica corrotacional, sobre a qual se referirá posteriormente.

De modo a suplantar estas limitações recorreu-se, então, à adaptação dos modelos da mecânica não linear de sólidos e estruturas desenvolvidos para análises de grandes deslocamentos.

A análise não linear geométrica de corpos deformáveis é atualmente realizada, em sua maior parte, por meio de simulações numéricas. Isto porque, mesmo que existam soluções analíticas para a resposta dos corpos, estas são, com frequência, bastante complexas e, principalmente, restritivas em relação a gama de problemas que podem ser estudados e utilizados na prática.

Mesmo assim, algumas soluções analíticas foram propostas para estruturas reticuladas, tais como os trabalhos de Barten (1944), Bisshopp e Drucker (1945), Frisch-Fay (1962), Kerr (1964), Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966) e Mattiasson (1981). Estes trazem soluções analíticas para problemas de vigas em balanço, vigas biapoiadas, arcos e pórticos simples com ligações rígidas e articuladas, com diversos tipos de carregamentos.

Em relação aos métodos numéricos para simulação de grandes deslocamentos e rotações em sólidos, apesar desses fornecerem uma resposta aproximada do comportamento estrutural, quando bem utilizados, fornecem resultados suficientemente precisos para uma análise de engenharia.

Os métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, têm a vantagem de possibilitar o estudo de tipos diferenciados de estruturas por meio de procedimentos mais gerais e sistemáticos. Isto possibilita a modelagem de sólidos que possuam geometrias complexas e também abre caminho para a consideração de outros efeitos não lineares ao problema, sejam eles dependentes dos materiais constituintes dos corpos ou da mudança das condições de

contorno – sejam em forças ou deslocamentos – durante o carregamento e a deformação da estrutura.

O método dos elementos finitos, como conhecido hoje em dia, teve seu início na década de 1950 com o trabalho de TURNER et al. (1956). Entretanto, somente por volta da década de 1970 que ele se tornou bastante popular dado ao vigoroso desenvolvimento da capacidade computacional em resolver grandes sistemas de equações (SHABANA, 1997). A difusão do método levou a criação e desenvolvimento de várias formulações matemáticas voltadas à análise de sistemas industriais e tecnológicos nos quais a deformação dos componentes tem um papel preponderante na análise dinâmica do sistema estrutural.

Usualmente classificam-se as formulações para análise não linear geométrica em lagrangeana e euleriana. Na descrição lagrangeana, também chamada de descrição material, estuda-se o comportamento de uma partícula, ou ponto material, quando esta se move no espaço. Já na descrição euleriana, ou espacial, descreve-se o que acontece a um ponto fixo do espaço com o passar do tempo (HOLZAPFEL, 2000).

Isto implica que na descrição material todo o comportamento do sólido é especificado em uma configuração prévia à sua mudança de configuração. Portanto, de posse da configuração tomada como referência, qualquer configuração posterior do corpo é obtida em relação àquela onde este estava. Já na descrição espacial o comportamento é especificado na sua configuração atual e, desse modo, não está associado à localização inicial do corpo, mas onde este realmente se encontra.

Independentemente da descrição utilizada, de uma maneira cinematicamente exata, o equacionamento deve ser capaz de descrever a posição onde o corpo se encontra, portanto formulado em descrição espacial. Em seguida, este pode ser transformado para descrição material (BONET; WOOD, 2008).

A descrição euleriana é bastante vantajosa no estudo da mecânica dos fluídos já que nela é descrita uma região de análise e, portanto, não é preciso acompanhar o movimento de cada ponto material específico. Esta também pode ser utilizada para modelagem de sólidos com o método dos elementos finitos, como é o caso dos trabalhos de Elghazaly (1991) que aborda instabilidade em pórticos planos, Izzuddin e Elnashai (1993) que tratam de pórticos tridimensionais e Izzuddin e Smith (1996) sobre análise elastoplástica de pórticos com paredes finas. Porém, verificando-se a quantidade de trabalhos presentes na literatura conclui-se que esta é preterida pela comunidade científica em favor da descrição lagrangeana.

As formulações lagrangeanas utilizadas em elementos finitos são comumente classificadas em lagrangeana total, atualizada e parcialmente atualizada.

Na concepção lagrangeana total utiliza-se um referencial único e fixo para determinação de todas as variáveis do problema, associa-se, portanto, a uma única configuração de referência, usualmente a configuração inicial. Encontra-se esta abordagem para elementos de viga e pórtico em, por exemplo, Mondkar e Powell (1977), Wood e Zienkiewicz (1977), Surana (1983), Crivelli e Felippa (1993), Coda e Greco (2004), Xiao e Zhong (2012) e Mamouri, Hammadi e Ibrahimbegović (2014).

Na descrição lagrangeana atualizada a configuração de análise é continuamente atualizada, de modo que a configuração anterior do corpo passa a ser agora a nova referência. Desse modo, o sistema de coordenadas é periodicamente transladado e as equações de equilíbrio são escritas para este novo referencial (CRISFIELD, 1991). Empregam essa técnica Gadala, Dokainish e Oravas (1984), Gattass e Abel (1987), Chen e Blandford (1991), Rice e Ting (1993) e Turkalj, Brnic e Prpic-Orsic (2004).

Wong e Tin-Loi (1990) distinguem ainda a formulação lagrangeana parcialmente atualizada na qual o referencial é modificado apenas no início dos incrementos de tempo ou carga. Esta pode ser observada nos trabalhos de Jetteur et al. (1983), Wen e Rahimzadeh (1983) e Peterson e Petersson (1985) para elementos de pórtico.

Deve-se observar que a descrição lagrangeana atualizada é uma tentativa de simplificar a descrição euleriana.

Uma técnica que procura tornar mais simples a concepção lagrangeana atualizada, e é bastante difundida para a solução de problemas não lineares geométricos, é a chamada formulação corrotacional. Ela foi introduzida com os trabalhos de Wempner (1969), Belytschko e Hsieh (1973) e Belytschko e Glaum (1979), sendo bastante semelhante à técnica proposta por Argyris et al. (1979).

Esta metodologia usualmente consiste na utilização de sistemas de coordenadas locais que acompanham o movimento dos elementos finitos, e, portanto, giram e transladam, como um corpo rígido junto ao elemento. Assim, torna-se possível considerar os efeitos de curvatura através da utilização de medidas de tensão e deformação empregadas na análise de pequenos deslocamentos e deformações (CRISFIELD, 1991).

Outra maneira de desenvolver a técnica corrotacional, válida para análises de grandes deslocamentos e deformações, é utilizando um sistema de coordenadas para cada ponto de integração e girando-os com o material (BELYTSCSKO; LIU; MORAN, 2000). Contudo, esta última alternativa é contrária à maior vantagem da técnica, notadamente a simplificação do cálculo das forças internas e matrizes de rigidez dos elementos (WASFY; NOOR, 2003).

Alguns exemplos de formulações corrotacionais aplicadas na análise de pórticos podem ser encontrados nos artigos de Belytschko, Schwer e Klein (1977), Crisfield (1990), Behdinan, Stylianou e Tabarrok (1998), Teh e Clarke (1998), Battini e Pacoste (2002) e Li (2007).

Entretanto, na análise dinâmica, técnicas que utilizam de sistemas de coordenadas intermediários que giram, como a corrotacional, dependem de referenciais não inerciais. Portanto, surgem pseudo-forças referentes a não uniformidade da velocidade de rotação do referencial, à aceleração centrífuga e à aceleração de Coriolis. Desse modo, os termos da matriz de massa acabam se tornando não lineares dificultando a análise, em especial no que diz respeito à integração temporal (IBRAHIMBEGOVIĆ; TAYLOR; LIM, 2003; MAKINEN, 2007). Isso não ocorre na formulação lagrangeana total, pois suas variáveis são todas descritas em relação a um único referencial, que é, portanto, inercial.

Em relação à cinemática da barra, podem ser adotados os modelos de Euler-Bernoulli ou de Reissner. A primeira é a cinemática frequentemente empregada na literatura técnica. Nela, considera-se que as seções transversais da barra, inicialmente planas e ortogonais ao eixo da mesma, permanecem planas e ortogonais após o deslocamento da estrutura, não havendo consideração do efeito distorcional oriundo das tensões de cisalhamento. Assim, o giro da seção está acoplado ao deslocamento transversal da mesma. Alguns trabalhos utilizam esta cinemática na análise de grandes deslocamentos, por exemplo, Von Dombrowski (2002), Coda (2003) e Coda e Greco (2004).

Já na cinemática de Reissner, também conhecida por Reissner-Simo (MUÑOZ; JELENÍČ, 2004) ou Reissner-Timoshenko, a seção transversal também permanece plana na configuração deformada. Entretanto, o vetor normal à seção não é mais necessariamente paralelo ao vetor tangente ao eixo de referência, levando-se em consideração, portanto, os efeitos cisalhantes.

No espaço bidimensional, os trabalhos de Reissner (1972) e Antman (1976) foram os primeiros a descrever teorias capazes de representar grandes deslocamentos e rotações sem impor limitações à cinemática da barra – tal como o desacoplamento entre a rotação e o deslocamento transversal e a consideração da deformação por esforço normal no modelo. A extensão destas ideias para o espaço tridimensional foi realizada nos trabalhos de Reissner (1973) e Simo (1985). Esses modelos, e os decorrentes desses, para os quais não existem limitações na cinemática da barra, são conhecidos na literatura como geometricamente exatos.

Desenvolvimentos desta cinemática em estruturas reticuladas planas e tridimensionais aplicados ao método dos elementos finitos, tanto em casos estáticos quanto dinâmicos, foram realizados em diversos trabalhos. Citam-se neste sentido alguns trabalhos importantes como os

de Simo e Vu-Quoc (1986a, 1986b, 1986c, 1988), Cardona e Geradin (1988), Ibrahimbegović (1995), Crisfield, Jelenić e Gordan (1999), Jelenić Crisfield (1999), Ibrahimbegović e Taylor (2002), Makinen (2007) e Auricchio, Carotenuto e Reali (2008).

Para a apropriada descrição do comportamento de sólidos tridimensionais por meio de corpos unidimensionais utilizam-se comumente deslocamentos e giros como parâmetros essenciais da sua cinemática.

No espaço tridimensional as rotações podem acontecer em torno de três eixos distintos. Isto torna mais complexa a sua consideração como variável do problema, já que para giros finitos não é válida a propriedade comutativa, pois a ordem na qual são realizadas as rotações altera a posição final do corpo. Usualmente este problema é contornado com a utilização da fórmula de Euler-Rodrigues, apesar de existirem alternativas como o uso de quatérnios e vetores generalizados.

A consideração de giros finitos é, entretanto, trivial quando a análise é restrita ao caso plano já que existe rotação em torno de um único eixo.

O outro parâmetro habitualmente utilizado para descrever o comportamento de estruturas reticuladas é o deslocamento. A aproximação do campo de deslocamentos é a abordagem clássica do método dos elementos finitos. Deste modo, além dos giros dos nós, os deslocamentos no espaço são utilizados como parâmetros nodais.

Uma abordagem alternativa à adoção de deslocamentos, utilizada na análise não linear geométrica de estruturas, é o chamado método dos elementos finitos posicional. Neste, os parâmetros nodais são as coordenadas dos nós, isto é, suas posições no espaço, além dos giros.

Este tratamento foi utilizado para análise não linear geométrica estática de pórticos planos com cinemática de Euler-Bernoulli em uma descrição lagrangeana total nos trabalhos de Coda (2003) e Coda e Greco (2004). Um procedimento semelhante foi utilizado por Bonet et al. (2000) para análise de membranas. Em Maciel e Coda (2005) esta mesma formulação foi utilizada para análise dinâmica de pórticos planos com a cinemática de Reissner. Posteriormente, foi feita a análise estática de treliças espaciais em Greco et al. (2006) e a análise dinâmica de sistemas de multicorpos flexíveis em Greco e Coda (2006) por meio de elementos finitos de pórtico plano.

Os trabalhos de Coda (2009) e Coda e Paccola (2010) apresentaram a extensão da formulação posicional para elementos de barras tridimensionais. Nestes utilizam-se, além das posições, vetores generalizados para descrição da seção transversal e seu giro, permitindo a consideração da cinemática de Reissner. Em seguida, a análise dinâmica com este elemento finito foi apresentada em Coda e Paccola (2011). Em Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014)

foi realizado o acoplamento desta formulação baseada em posições com problemas termomecânicos aplicados a análise estática de estruturas de aço submetidas a altas temperaturas. Já nos trabalhos de Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014) a formulação posicional de pórticos planos foi utilizada para simulação de efeitos elastoplásticos na estrutura.

A utilização da formulação posicional se estendeu para outras áreas e aplicações além de estruturas de barras. Citam-se aqui os recentes trabalhos de Gomes e Beck (2013) na análise de otimização estrutural com a formulação não linear geométrica posicional para treliças, Sanches e Coda (2014) no estudo da interação fluido-casca, o trabalho de Pascon e Coda (2015) no estudo de materiais com gradação funcional por meio de elementos sólidos e o trabalho de Sampaio, Paccola e Coda (2015) na análise de placas e cascas reforçadas com fibras.

Esta abordagem do método dos elementos finitos baseada em posições se provou bastante eficiente e é o método adotado neste trabalho.

Conforme mencionado previamente, as conexões entre elementos – ligações deslizantes e rótulas – têm grande importância na modelagem de diversas aplicações por atuarem como restrições geométricas ao movimento relativo entre as partes componentes do corpo. Assim, a implementação destas com o uso do método dos elementos finitos posicional dá sequência à generalização desta abordagem em posições e é contribuição deste trabalho.

Usualmente as conexões entre corpos, também chamadas de juntas ou pares cinemáticos, são consideradas como ideais, isto é, desprezam-se efeitos de atrito, lubrificação, desgastes e folgas de modo a simplificar o modelo dinâmico.

Em sistemas planos são utilizados três tipos básicos de juntas, a rotacional, a prismática e a cilíndrica. O primeiro tipo permite a rotação relativa entre dois membros e os dois últimos, a translação relativa entre eles.

A rótula plana pode ser considerada como uma junta rotacional, liberando um grau de liberdade da estrutura em rotação. Já as ligações deslizantes podem ser vistas como uma junta puramente prismática com um grau de liberdade translacional ou uma composição com a junta rotacional, conhecida também como junta cilíndrica, se além da translação permitir a rotação relativa e, portanto, liberando dois graus de liberdade da estrutura.

Em contraposição às análises complexas e computacionalmente mais custosas envolvendo o estudo do contato que as conexões impõem entre os corpos, nas quais o comportamento local é mais importante, pode-se estudar o comportamento global da estrutura de modo mais simples e satisfatório pela introdução e reorganização dos graus de liberdade das ligações. Em elementos finitos, as técnicas comumente utilizadas para este fim são o método

dos multiplicadores de Lagrange, técnica da penalização, método do lagrangeano aumentado, a compatibilidade cinemática e o método dos elementos mestre-escravo.

O uso dos multiplicadores de Lagrange é uma ideia natural para consideração da cinemática da ligação. Neste método utilizam-se multiplicadores para cada restrição que se deseja introduzir ao sistema. Isso aumenta a quantidade de incógnitas do problema, por causa dos graus de liberdade adicionais e dos próprios multiplicadores, e faz com que equações algébricas para as restrições e equações diferenciais do movimento sejam misturadas. Este sistema de equações algébrico-diferenciais não é necessariamente positivo definido mesmo em regiões de equilíbrio estável, o que pode levar a ocorrência de instabilidades (MUÑOZ; JELENIC, 2004). Além do mais, este pode gerar problemas não triviais na construção de integradores temporais, como indicado em Cardona e Geradin (1989), Jelenić e Crisfield (2001), Laulusa e Bauchau (2008) e Bauchau e Laulusa (2008).

Apesar disso, o método dos multiplicadores de Lagrange é bastante utilizado por permitir a construção sistemática de diversos tipos de ligações. Utiliza-se este procedimento na introdução de ligações em Cardona, Geradin e Doan (1991), Bauchau (2000), Bauchau e Bottasso (2001), Gêradin e Cardona (2001), Garcia-Vallejo et al. (2003), Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) e Lee et al. (2008), dentre outros.

Na abordagem que utiliza penalização para introdução das conexões também há acréscimo do número de incógnitas no sistema, entretanto, estas são relativas aos graus de liberdade criados e não ao parâmetro de penalização, assim, possuem significado físico óbvio, ao contrário dos multiplicadores de Lagrange.

A precisão da resposta neste método depende diretamente do parâmetro de penalidade utilizado tendendo a mau condicionamento numérico do sistema. Além disso, nem todos os tipos de ligações podem ser modelados por esta técnica, tornando-a menos geral (JELENIC; CRISFIELD, 1996). Trabalhos baseados em penalização para a introdução de ligações são, por exemplo, Yang e Sadler (1990), Avello, De Jalon e Bayo (1991) e Ledesma e Bayo (1994).

O método do lagrangeano aumentado é um método criado para a estabilização das equações que restringem o movimento. Ele combina as vantagens do método dos multiplicadores de Lagrange e da penalização de modo a evitar a característica aproximada deste último, ao mesmo tempo em que elimina as equações algébricas e reduz o problema a um sistema de equações diferenciais. Origina, assim, uma matriz hessiana positiva definida para regiões de equilíbrio estável, simplificando a solução do sistema. Os multiplicadores, entretanto, permanecem como graus de liberdade adicionais ao sistema (BAUCHAU; LAULUSA, 2008; MUÑOZ; JELENIC, 2004). A utilização da técnica para a introdução de

ligações pode ser observada em Bayo, Dejalon e Serna (1988), Bayo et al. (1991), Bayo e Ledesma (1996) e Gérardin e Cardona (2001).

Outra maneira de introduzir restrições ao movimento é por meio da compatibilidade cinemática. Este tratamento é utilizado para modelagem de juntas rotacionais, já que neste caso permite-se que componentes do sistema compartilhem um nó e seus graus de liberdade translacionais, liberando os relativos à rotação na montagem do sistema de equações da estrutura. Simo e Vu-Quoc (1986c), Park et al. (1991) e Greco e Coda (2006) utilizam este método na implantação de ligações.

O método dos elementos mestre-escravo é uma abordagem mais recente na literatura. Ele se baseia em relacionar os graus de liberdade de um nó do elemento escravo com os graus de liberdade do elemento mestre, o que acaba por reduzir o número de incógnitas do problema.

Esta técnica é especialmente apropriada para o caso de juntas que possuem algum grau de liberdade translacional, tais como juntas prismáticas, cilíndricas e planas, já que para conexões que somente permitem a rotação, como juntas rotacionais, universais e esféricas, a compatibilidade cinemática aparenta ser mais vantajosa.

Nesta abordagem a cinemática das ligações é introduzida simultaneamente à montagem do sistema de equações de equilíbrio da estrutura. Portanto, não é necessário incluir equações de restrição, de modo que não são utilizados multiplicadores de Lagrange nem fatores de penalização, evitando os problemas mencionados previamente naquelas técnicas.

Apesar deste método não introduzir mais graus de liberdade ao sistema, ele requer reformulações matemáticas nos elementos finitos que possuem tais ligações, o que pode se mostrar bastante exaustivo. Os trabalhos de Jelenić e Crisfield (1996), Mitsugi (1997), Ibrahimbegović e Mamouri (2000), Jelenić e Crisfield (2001), Muñoz, Jelenić e Crisfield (2003), Ibrahimbegović, Taylor e Lim (2003), Muñoz e Jelenić (2004, 2006) e Muñoz (2008) utilizam este procedimento na introdução de ligações que permitem o movimento relativo tanto sobre componentes rígidos, quanto flexíveis.

Para uma explicação mais profunda a respeito de algumas das técnicas de introdução de restrições em sistemas mecânicos recomenda-se o trabalho de Gérardin e Cardona (2001) no qual encontram-se mais detalhes sobre seu equacionamento.

3. ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento da formulação utilizada para modelagem dinâmica de pórticos planos. Inicialmente é descrita a cinemática do elemento finito e sua mudança de configuração para deslocamentos e giros finitos. Em seguida são obtidas as equações do movimento a partir da estacionariedade do funcional de energia total. O sistema não linear resultante é então integrado no tempo pelo método de Newmark e linearizado para resolução por meio do algoritmo de Newton-Raphson.

Por fim, indica-se também o cálculo dos esforços internos seccionais, como é realizada a incorporação de rótulas ao sistema e apresentam-se diversos exemplos de aplicação da formulação.

3.1 Cinemática do Elemento Finito de Pórtico Plano

A cinemática de Reissner foi escolhida para o elemento finito de pórtico plano, o qual tem como parâmetros nodais as posições dos nós – e não os deslocamentos como encontrado tradicionalmente na literatura – além do ângulo da seção transversal, tal como nos trabalhos de Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

3.1.1 Configuração inicial

Para consideração da não linearidade geométrica é necessário mapear o elemento finito em duas configurações distintas: a inicial e a atual. O mapeamento da configuração inicial, Figura 2, inicia-se pela aproximação da linha de referência da barra de acordo com a seguinte expressão:

$$f_i^{0m}(\xi) = x_i^m(\xi) = \phi_i(\xi)X_i^\ell, \quad (3.1)$$

nesta, i indica a direção (1 ou 2), m se refere à linha de referência e ℓ designa somatório (notação indicial) das funções de forma $\phi_i(\xi)$ e das coordenadas X_i^ℓ de cada nó sobre a linha de referência.

Na Figura 2 é ilustrado o mapeamento para um elemento cúbico, entretanto, tanto na formulação apresentada quanto no código desenvolvido pode-se escolher qualquer quantidade de nós ou aproximação desejada. As funções de forma adotadas neste trabalho são os polinômios de Lagrange, tal como indicado no Anexo A.

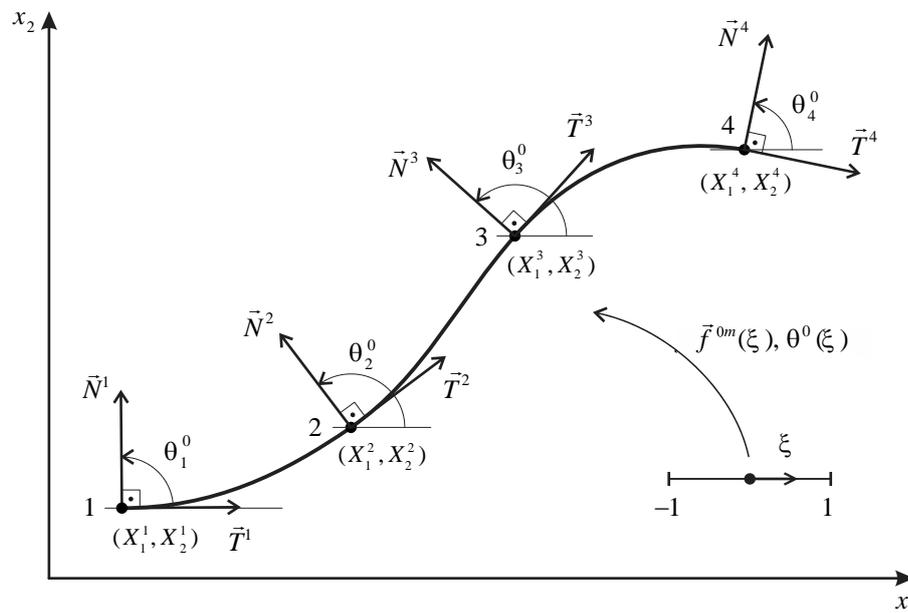


Figura 2 – Parametrização da linha de referência para a configuração inicial de um elemento com aproximação cúbica

A função vetorial que realiza o mapeamento da linha de referência a partir do espaço adimensional da variável ξ , equação (3.1), é chamada $\vec{f}^{0m}(\xi)$, e pode ainda ser representada em notação diádica como:

$$\vec{f}^{0m}(\xi) = \vec{x}^m(\xi) = \vec{\phi}(\xi) \cdot \vec{X} \quad (3.2)$$

Além da localização dos nós do elemento de pórtico no espaço bidimensional através das suas coordenadas é necessário associar uma variável ao giro da seção transversal. Assim, a posição inicial da seção transversal de cada nó k do elemento é definida por um ângulo θ_k^0 medido a partir da direção horizontal (eixo x_1), Figura 2. Para a configuração inicial esse é considerado ortogonal à linha de referência.

Os ângulos iniciais dos nós são dados pela expressão (3.3) a partir do vetor N_i^k , normal à linha de referência:

$$\theta_k^0 = \text{arctg} \left(\frac{N_2^{(k)}}{N_1^{(k)}} \right) \quad (3.3)$$

Em concordância com a notação indicial, nessa equação não há soma para variável entre parênteses. Tem-se também que as componentes do vetor normal são dadas por:

$$N_1^{(k)} = -\frac{T_2^{(k)}}{\|\vec{T}\|} \quad \text{e} \quad N_2^{(k)} = \frac{T_1^{(k)}}{\|\vec{T}\|}, \quad (3.4)$$

na qual $\|\vec{T}\|$ denota a norma euclidiana do vetor T_i^k , tangente à linha de referência. Este é obtido por:

$$T_i^k = x_{i,\xi}(\xi_k) = \phi_{\ell,\xi}(\xi_k) X_i^\ell \quad (3.5)$$

Nesta expressão, conforme a notação indicial, a variável escrita após a vírgula indica a operação de derivação em relação à mesma.

Conhecidos os ângulos que definem a seção transversal para os nós do elemento é possível utilizar-se das mesmas funções de forma para aproximar um ângulo $\theta^0(\xi)$ qualquer ao longo da configuração inicial da barra, Figura 2, como:

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0 \quad (3.6)$$

De posse dessas informações pode-se determinar a posição de qualquer ponto no interior da barra utilizando-se do vetor $g_i^0(\xi, \eta)$, Figura 3, normal a um ponto da linha de referência na configuração inicial. Considera-se para isto a existência de uma variável adimensional a mais, η , ortogonal a ξ , e que auxilia na descrição da altura da barra no espaço real. Assim, um ponto genérico fica expresso por:

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

Adotando-se altura h_0 e base b_0 constantes para toda a barra – pois será tomado coeficiente de Poisson nulo, como explicado posteriormente – e uma linha de referência coincidente com a linha média, pode-se determinar $g_i^0(\xi, \eta)$ em função do ângulo e da altura da seção transversal como:

$$\begin{aligned} g_1^0(\xi, \eta) &= \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \\ g_2^0(\xi, \eta) &= \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \end{aligned} \quad (3.8)$$

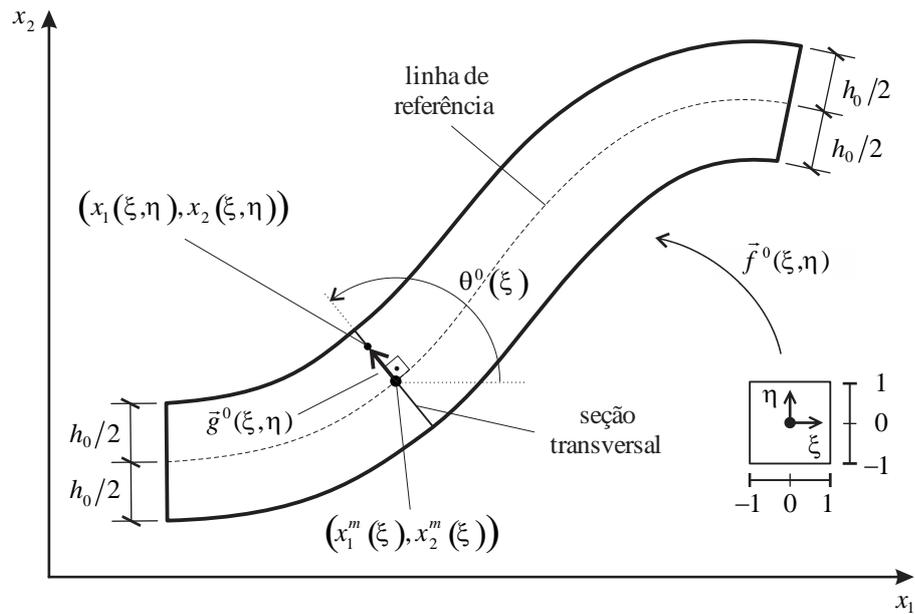


Figura 3 – Ponto genérico na configuração inicial da barra

Substituindo as equações (3.1) e (3.8) na expressão (3.7) obtêm-se o mapeamento completo do elemento de pórtico na configuração inicial como:

$$f_1^0(\xi, \eta) = x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_1^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (3.9)$$

$$f_2^0(\xi, \eta) = x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell(\xi) X_2^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \quad (3.10)$$

3.1.2 Configuração atual

As informações necessárias para que seja determinada a configuração inicial incluem as coordenadas da linha de referência, a altura e a base da seção transversal. A configuração atual é obtida por um processo iterativo não linear, de modo que, nesse momento, se escreve a configuração atual analogamente à inicial, imaginando-se que as variáveis incógnitas são conhecidas como tentativa no processo numérico de solução. Assim, a função de mapeamento da configuração atual $f_i^1(\xi, \eta)$ é dada por:

$$f_1^1(\xi, \eta) = y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_1^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (3.11)$$

$$f_2^1(\xi, \eta) = y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_2^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \quad (3.12)$$

Nestas expressões y_i representa as coordenadas atuais de um ponto genérico dentro da barra, Y_i^l são as coordenadas atuais dos nós do elemento e θ_l são os ângulos atuais que definem a seção transversal. A partir da Figura 4 e das equações (3.11) e (3.12) nota-se que as seções transversais permanecem planas, mas não mais ortogonais à linha de referência. Portanto, caracterizando uma cinemática tal como a de Reissner, na qual se consideram os efeitos do cisalhamento. Além disso, como a altura de referência da seção permanece constante, a lei constitutiva adotada é relaxada de modo a evitar travamento volumétrico ao impor-se coeficiente de Poisson nulo.

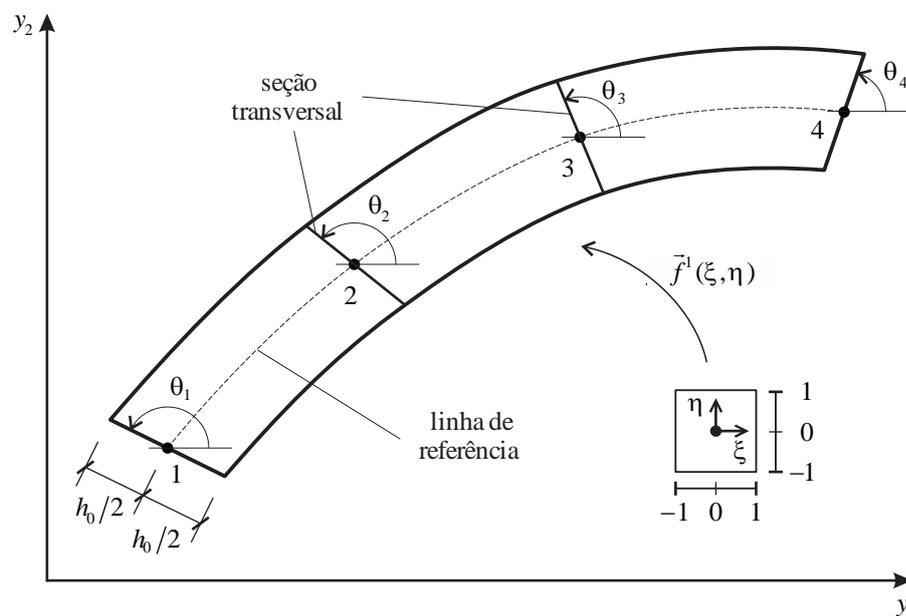


Figura 4 – Mapeamento da configuração atual – detalhe para os ângulos

3.1.3 Mudança de configuração e gradiente

Definidos os mapeamentos do espaço adimensional para as configurações inicial e atual pode-se descrever a mudança de configuração do corpo analisado. Isto é feito reunindo os mapeamentos da Figura 3 e da Figura 4 em uma única representação, Figura 5, na qual a função vetorial \vec{f} descreve a mudança de configuração do estado inicial, B_0 , para o estado atual, B . Esta função pode ser escrita como a composição entre os mapeamentos \vec{f}^0 e \vec{f}^1 descritos pelas equações (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12) como:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (3.13)$$

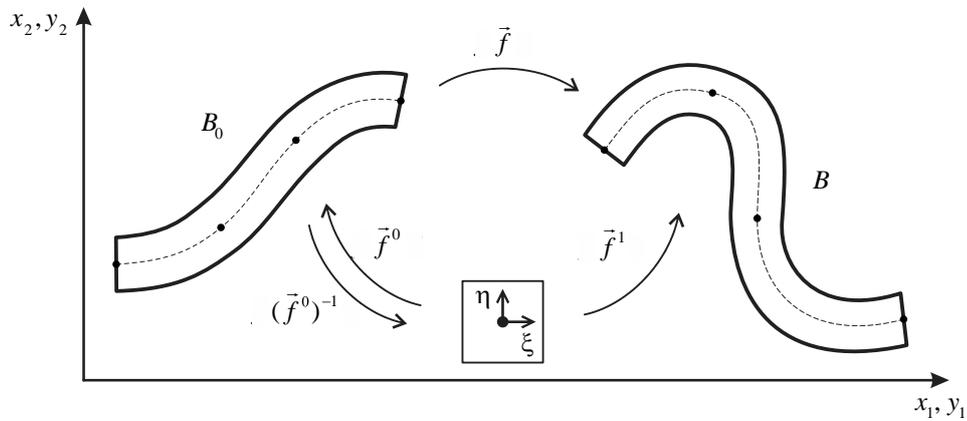


Figura 5 – Mudança de configuração – mapeamento posicional

O gradiente de \vec{f} , chamado de \mathbf{A} , que é um tensor de segunda ordem, é escrito a partir dos gradientes dos mapeamentos \vec{f}^0 e \vec{f}^1 como (BONET et al., 2000; CODA, 2003):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.14)$$

Os gradientes para os mapeamentos inicial e atual são dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Estas derivadas são obtidas diretamente das expressões de \vec{f}^0 e \vec{f}^1 para serem avaliadas em pontos de integração nas coordenadas ξ e η . Realizadas as operações, os gradientes resultam em:

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell, \xi}(\xi) X_1^\ell - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \phi_{k, \xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \\ \phi_{\ell, \xi}(\xi) X_2^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \phi_{k, \xi}(\xi) \theta_k^0 & \frac{h_0}{2} \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0] \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{\ell, \xi}(\xi) Y_1^\ell - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \phi_{k, \xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \\ \phi_{\ell, \xi}(\xi) Y_2^\ell + \frac{h_0}{2} \eta \cos[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \phi_{k, \xi}(\xi) \theta_k & \frac{h_0}{2} \text{sen}[\phi_\ell(\xi) \theta_\ell] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

De posse do gradiente da função mudança de configuração pode-se utilizar da medida de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} , que é objetiva (OGDEN, 1984), para desenvolver o elemento finito. Esta medida é expressa por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (3.18)$$

Nesta, \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e \mathbf{C} é o tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita.

3.2 Elastodinâmica Não Linear Geométrica Aplicada ao MEF Posicional

Nesta seção é apresentada uma aplicação do método dos elementos finitos para discretização de um sistema mecânico constituído por pórticos planos com a cinemática apresentada anteriormente, a qual se diferencia por utilizar uma descrição por meio de giros e posições. Para tanto, empregam-se princípios variacionais de modo a se obter as equações do movimento através da estacionariedade do funcional de energia.

A adoção de um método de energia na aplicação da técnica dos elementos finitos não é a única abordagem possível. Entretanto, a determinação da forma fraca do problema de valor inicial e de contorno, a ser discretizada, por essa alternativa, é consequência da condição de estacionariedade da energia total e foi escolhida por julgar-se esta ser bastante clara e possuir uma abordagem geral para esse propósito.

Para um sistema mecânico, a aplicação do princípio da estacionariedade sobre seu funcional de energia somente é possível se as quantidades de energia de entrada e de saída estiverem em balanço. Isto é, se houver conservação da energia total do sistema. Havendo alguma forma de dissipação existe variação da energia total ao longo do tempo (LANCZOS, 1970).

Gurtin, Fried e Anand (2010) afirmam que nem todo o trabalho das forças atuantes pode ser convertido em energia cinética ou energia interna – em se tratando de corpos flexíveis, fala-se de energia de deformação – já que é intuitivo que parte dessa energia deva ser dissipada. Mesmo em um processo que não considere influências de origem térmica, como é o caso do sistema mecânico tratado, o balanço de energia decorre como consequência da manifestação mecânica da primeira e segunda leis da Termodinâmica, de modo que a dissipação é efeito do aumento de entropia do sistema. Lemaitre e Chaboche (1994) associam essa dissipação à evolução de variáveis internas do sistema denominando-a de dissipação intrínseca ou mecânica.

Este raciocínio pode ser aplicado quando a energia de um sistema mecânico não conservativo Π_0 é escrita como (CODA, 2009b):

$$\Pi_0 = \Pi - \mathbb{Q}, \quad (3.19)$$

sendo \mathbb{Q} a quantidade de energia dissipada de uma parcela de energia total Π . Como consequência dessa equação a energia total é reescrita como:

$$\Pi = \Pi_0 + \mathbb{Q} \quad (3.20)$$

A forma alternativa apresentada na equação (3.20) pode ser simplesmente entendida como a redefinição de um sistema mecânico ideal conservativo na forma de um sistema maior que compreende em si as perdas por dissipação, conforme ilustra a Figura 6 de forma esquemática. Dessa maneira, recupera-se a possibilidade de utilização de princípios variacionais sobre o funcional de energia para buscar a análise de equilíbrio.

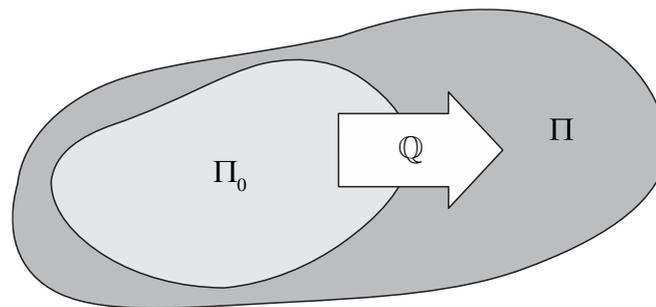


Figura 6 – Transferência de energia entre os sistemas

Para um problema estrutural associado a uma configuração de referência fixa, a energia total do sistema mecânico, Π , pode ser expressa como a soma da energia de deformação de todos os elementos de pórtico, U_e , a energia potencial das cargas externas, \mathbb{P} , a energia cinética dos corpos, \mathbb{K} , e a dissipação de energia, neste caso por amortecimento viscoso, \mathbb{Q} , na forma:

$$\Pi = U_e - \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{Q} \quad (3.21)$$

De modo a se obter a configuração de equilíbrio aplica-se o princípio estacionariedade sobre a expressão da energia total. Para isso, tal como descrito na cinemática, utilizam-se como parâmetros as coordenadas dos nós do elemento finito de pórtico e os ângulos das seções transversais – escritos como sendo a terceira direção $\theta_\ell = Y_3^\ell$, de modo a simplificar a notação.

Estes parâmetros nodais são agrupados no vetor \vec{Y} como:

$$\vec{Y} = \left\{ Y_1^1 \quad Y_2^1 \quad Y_3^1 \quad Y_1^2 \quad Y_2^2 \quad Y_3^2 \quad \dots \right\}^t, \quad (3.22)$$

ou, em notação indicial, como Y_i^ℓ sendo ℓ referente aos nós do elemento finito e i às direções 1, 2 e 3, sendo esta última o ângulo da seção.

A primeira variação do funcional de energia é, então, escrita a partir da expressão (3.21) como:

$$\delta\Pi = \delta U_e - \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{Q}, \quad (3.23)$$

ou ainda, em função dos parâmetros adotados:

$$\delta\Pi = \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} - \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} + \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} \quad (3.24)$$

Nos itens seguintes desenvolvem-se os termos desta equação de modo a se obter a equação de movimento do sistema.

3.2.1 Energia de deformação do elemento de pórtico

No estudo não linear geométrico de sólidos comumente se utiliza o tensor de deformação de Green-Lagrange, \mathbf{E} , tal como na expressão (3.18) apresentada na cinemática do elemento finito como medida de deformação. Este tensor também é chamado de deformação lagrangeana porque esta medida de deformação associa um mapeamento da configuração inicial para a configuração atual do sólido (OGDEN, 1984).

A deformação de Green é bastante útil na análise de problemas de grandes deslocamentos e rotações por apresentar objetividade, isto é, ela não é afetada por movimentos de corpo rígido tal como a medida de deformação linear (CRISFIELD, 1991).

De fato, para pequenos valores de deformações a deformação de Green se confunde com a medida de deformação linear. Isso por aquela possuir um termo quadrático que tende a zero muito mais rapidamente do que seu termo linear quando em pequenas mudanças de configuração dos corpos como é apresentado em Crisfield (1991) e Reddy (2004).

Em relação ao modelo constitutivo adotado utiliza-se o material de Saint-Venant-Kirchhoff. Este tipo de material hiperelástico é bastante simples por representar uma relação linear entre a deformação de Green e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} , que é seu conjugado energético (OGDEN, 1984). A expressão para esse modelo constitutivo é análoga à lei de Hooke generalizada, mas escrita com essa medida de deformação. Sendo bastante conveniente para análise de grandes deslocamentos, com a limitação do material

trabalhar com deformações moderadas – o que atende às situações comuns de solicitação dos materiais usualmente empregados na engenharia.

Para um material homogêneo e isotrópico, no estado plano de tensões, a energia específica de deformação de Saint-Venant-Kirchhoff pode ser simplificada na seguinte expressão:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathbb{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad \text{ou} \quad u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad (3.25)$$

Nesta, o coeficiente \mathbb{E} se confunde com o módulo de elasticidade longitudinal para o caso de pequenas deformações e $\mathbb{G} = \mathbb{E}/[2(1+\nu)]$ com o módulo de elasticidade transversal, sendo ν o coeficiente de Poisson. O tensor de deformações de Green em notação indicial é escrito como E_{ij} e em notação diádica como \mathbf{E} . Já o tensor constitutivo elástico \mathfrak{C} pode ser obtido por:

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.26)$$

A expressão (3.25) evita o travamento por efeito Poisson (travamento volumétrico) ao desconsiderar a contração ou expansão do material quando adotado coeficiente de Poisson nulo, em concordância com a cinemática adotada para a barra que não permite a variação das dimensões da seção transversal com a deformação. O travamento por cisalhamento também é evitado pela alta ordem de aproximação utilizada para o elemento finito (BISCHOFF; RAMM, 2000), além disso, permite-se a variação do módulo de elasticidade transversal independentemente do módulo longitudinal.

Da equação (3.18) nota-se que a deformação de Green é dada em função do tensor de alongamento de Cauchy-Green, e este, é obtido pelo gradiente da função mudança de configuração. Este gradiente, por sua vez, foi escrito em função do ângulo da seção transversal e das posições nodais, aqui agrupadas no vetor \vec{Y} . Conseqüentemente, a energia de deformação acumulada nos elementos estruturais é também função dos parâmetros nodais e expressa pela integral da energia específica como:

$$U_e(\vec{Y}) = \int_{V_0} u_e(\vec{Y}) dV_0 \quad (3.27)$$

Nesta equação, por ser uma formulação lagrangeana total, a energia específica é integrada no volume inicial da estrutura V_0 (CODA; GRECO, 2004; CODA; PACCOLA, 2008).

3.2.2 Energia total e equilíbrio elastodinâmico

Para desenvolver a variação da energia total é necessário definir todas as suas parcelas de energia. A energia de deformação é obtida a partir da expressão (3.27). Já o potencial das cargas externas pode ser dividido em duas partes: uma relativa às cargas externas concentradas e outra relativa às cargas distribuídas, escrito como:

$$\mathbb{P} = \vec{F} \cdot \vec{Y} + \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y}^m dS_0, \quad (3.28)$$

sendo, \vec{F} o vetor de forças externas nodais (incluindo os momentos), \vec{q} o vetor de forças externas distribuídas nas duas direções cartesianas, Figura 7, \vec{y}^m a posição atual da linha de referência do elemento de pórtico e dS_0 o comprimento infinitesimal inicial da linha de referência do elemento de pórtico curvo.

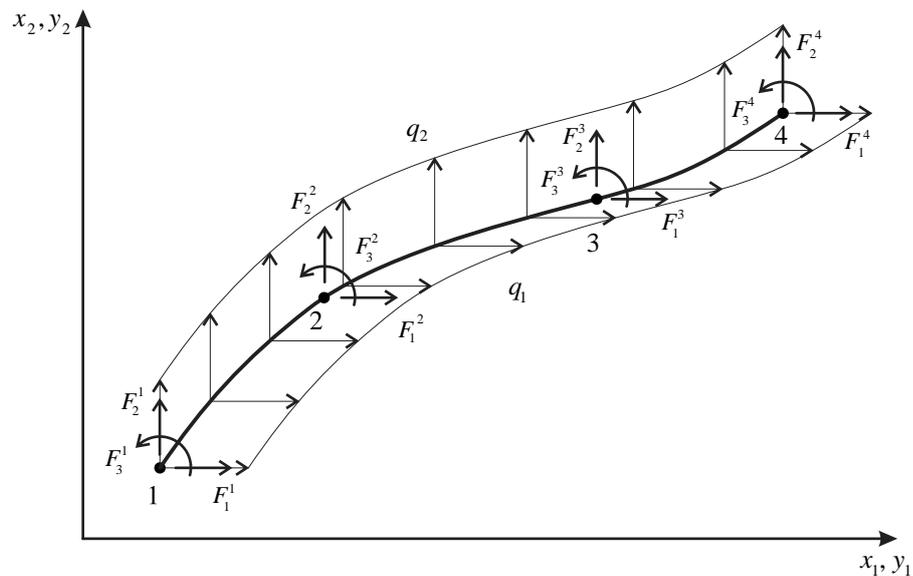


Figura 7 – Carregamentos externos aplicados no elemento finito

A energia cinética é expressa por:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0, \quad (3.29)$$

onde, ρ_0 é a massa específica associada à configuração inicial e $\dot{\vec{y}}$ é a velocidade de um ponto genérico dentro do domínio V_0 .

Já a energia dissipada por amortecimento viscoso é escrita na sua forma diferencial como sua taxa de variação em relação à configuração atual $\bar{\mathbf{y}}$ do corpo, para ser introduzida posteriormente, como:

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{y}}} = \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} dV_0, \quad (3.30)$$

sendo, λ_D uma constante de proporcionalidade.

Substituindo-se as expressões (3.25), (3.28) e (3.29) na equação (3.21) a energia total do sistema fica determinada por:

$$\Pi(\bar{\mathbf{Y}}) = \int_{V_0} u_e(\bar{\mathbf{Y}}) dV_0 - \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{Y}} - \int_{S_0} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{y}}^m dS_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{y}}} dV_0 + Q \quad (3.31)$$

De modo a se obter a configuração de equilíbrio aplica-se o princípio da estacionariedade sobre a expressão da energia total. Para isso, utilizam-se como parâmetros o giro e as posições nodais agrupados no vetor $\bar{\mathbf{Y}}$. A primeira variação do funcional de energia é escrita a partir da expressão (3.31) como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\bar{\mathbf{Y}}) = & \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 - \frac{\partial(\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{Y}})}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} - \int_{S_0} \frac{\partial(\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{y}}^m)}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dS_0 + \\ & + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial(\dot{\bar{\mathbf{y}}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{y}}})}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 + \frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sabendo que a energia específica de deformação é escrita em função das posições e giros nodais por meio da deformação de Green, $u_e = u_e(\mathbf{E}(\bar{\mathbf{Y}}))$, e que as forças externas são conservativas (independem da posição atual da estrutura), pode-se reescrever a expressão (3.32) como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\bar{\mathbf{Y}}) = & \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 - \bar{\mathbf{F}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} - \int_{S_0} \bar{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}^m}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dS_0 + \\ & + \int_{V_0} \rho_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{y}}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 + \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{y}}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 = \bar{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na qual, para o termo de amortecimento, se utilizou da equação (3.30) para a seguinte passagem:

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} = \frac{\partial Q}{\partial \bar{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} = \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \dot{\bar{\mathbf{y}}} \cdot \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{y}}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \bar{\mathbf{Y}} dV_0 \quad (3.34)$$

Do princípio do conjugado energético, nota-se que o primeiro termo da primeira integral da expressão (3.33) é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} .

De acordo com a cinemática adotada para o elemento finito, a posição atual da linha de referência pode ser obtida como $\vec{y}^m = \vec{\phi} \cdot \vec{Y}$, sendo $\vec{\phi}$ um vetor que agrupa as funções de forma. Assim, no termo das forças externas distribuídas, sua derivada resulta em $\partial \vec{y}^m / \partial \vec{Y} = \vec{\phi}$.

Utilizando-se, de modo simplificado, uma relação análoga para a posição \vec{y} e para a velocidade de qualquer ponto do domínio $\dot{\vec{y}}$, pode-se descrever as duas últimas integrais da equação (3.33) em função das velocidades nodais $\dot{\vec{Y}}$ e das funções de forma $\vec{\phi}$ por meio das expressões $\vec{y} = \vec{\phi} \cdot \vec{Y}$ e $\dot{\vec{y}} = \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}}$, resultando em:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\vec{Y}) = & \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \otimes \vec{\phi} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \\ & + \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{Y}}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 + \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde o símbolo \otimes representa produto tensorial.

É importante ressaltar que estas simplificações para a posição e sua velocidade nos termos da energia cinética e do amortecimento implicam em se desprezar a inércia rotacional da barra e o amortecimento para os graus de liberdade de giro. Todavia, neste trabalho se lidam com barras relativamente esbeltas para as quais estas aproximações não influem de modo significativo na resposta do problema, conforme discutido no trabalho de Coda e Greco (2004).

A derivada da velocidade $\dot{\vec{Y}}$ em relação às posições nodais \vec{Y} , presente no termo da energia cinética na expressão (3.35), pode ser desenvolvida em notação indicial, como:

$$\frac{\partial \dot{Y}_i}{\partial Y_{(i)}} = \frac{d\dot{Y}_i}{dY_{(i)}} = \frac{d\dot{Y}_i}{dt} \frac{dt}{dY_{(i)}} = \frac{d\dot{Y}_i}{dt} \left(\frac{dY_{(i)}}{dt} \right)^{-1} = \dot{Y}_i \frac{1}{\dot{Y}_{(i)}}, \quad (3.36)$$

nesta fórmula os parênteses indicam que não há soma na variável i , relativa às direções. As passagens acima só são possíveis, pois as derivadas são unidimensionais, ou seja, cada componente de velocidade só depende de sua componente de posição. Substituindo a relação expressa pela equação (3.36) na equação (3.35) obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\vec{Y}) = & \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \otimes \vec{\phi} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \\ & + \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 + \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por fim, as forças de superfície podem ser escritas em função dos valores nodais equivalentes como $\vec{q} = \vec{\phi} \cdot \vec{Q}$, ou $q_i = \phi_i(\xi) Q_i^l$, a equação (3.37) fica escrita como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\vec{Y}) = & \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \vec{Q} \cdot \delta \vec{Y} dS_0 + \\ & + \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \ddot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 + \int_{V_0} \lambda_D \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.38)$$

De modo a simplificar o entendimento físico do procedimento não linear apresentado pode-se reescrever a equação (3.38) como:

$$\delta\Pi(\vec{Y}) = \vec{F}^{\text{int}} \cdot \delta \vec{Y} - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} = \vec{0} \quad (3.39)$$

Nesta, \vec{F}^{int} representa o vetor de esforços internos, \mathbf{L} é a matriz que transforma as cargas distribuídas em cargas nodais equivalentes, \mathbf{M} é a matriz de massa (constante) e \mathbf{D} é a matriz de amortecimento proporcional à massa introduzida ao sistema (CODA; PACCOLA, 2009, 2011; LANCZOS, 1970).

Dada à arbitrariedade da variação $\delta \vec{Y}$, a expressão (3.39) representa a equação do movimento (equilíbrio dinâmico não linear geométrico) dada por:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} - \mathbf{L} \cdot \vec{Q} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (3.40)$$

A seguir são indicadas as expressões para o cálculo do termo $\partial \mathbf{E} / \partial \vec{Y}$ e do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff presentes na equação (3.38).

3.2.3 Tensão de Piola-Kirchhoff e derivada da deformação de Green

Desenvolvendo-se as derivadas da energia específica de deformação, equação (3.25), em relação ao tensor de deformação de Green obtêm-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S} presente na equação (3.38) por:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2\mathbb{G} E_{12} \\ 2\mathbb{G} E_{12} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A derivada do tensor de deformações de Green em relação às incógnitas nodais é escrita utilizando-se das equações (3.14) e (3.18) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} [(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nota-se que como $\partial(\mathbf{A}^1)' / \partial\vec{Y} = (\partial\mathbf{A}^1 / \partial\vec{Y})'$ a primeira parcela da soma é a transposta da segunda, o que proporciona simplificações em termos de implementação computacional.

Conhecido o gradiente \mathbf{A}^1 a partir da equação (3.17), suas derivadas para os graus de liberdade Y_α^β , sendo α a direção (1, 2 ou 3, para o ângulo) e β o nó do elemento, são escritas como:

$$\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y_1^\beta} = \begin{bmatrix} \phi_{\beta,\xi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y_2^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\beta,\xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta} = \frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial\theta_\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{h_0}{2}\eta\cos(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_\beta(\phi_{k,\xi}\theta_k) - \frac{h_0}{2}\eta\text{sen}(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_{\beta,\xi} & -\frac{h_0}{2}\text{sen}(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_\beta \\ -\frac{h_0}{2}\eta\cos(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_\beta(\phi_{k,\xi}\theta_k) + \frac{h_0}{2}\eta\text{sen}(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_{\beta,\xi} & \frac{h_0}{2}\cos(\phi_\ell\theta_\ell)\phi_\beta \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

Assim, a partir destas expressões é possível calcular as forças internas \vec{F}^{int} do elemento, conforme indicam as equações desde (3.32) a (3.40), por:

$$\vec{F}^{\text{int}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (3.46)$$

Neste trabalho a integral acima é avaliada por meio de integração numérica com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela seguinte expressão:

$$\vec{F}^{\text{int}} = b_0 w_{ig} w_{jg} \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \text{Det}[\mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg})], \quad (3.47)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e os índices ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

3.3 Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal

Utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson para solução do sistema não linear de equações conjuntamente às expressões de Newmark para integração temporal. A equação (3.40) é reescrita, agrupando-se as forças externas conservativas em um único vetor \vec{F} , como:

$$\vec{g} = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (3.48)$$

Nesta expressão \vec{g} é um vetor nulo quando a posição tentativa \vec{Y} é a solução correta do problema, caso contrário, este vetor representa o desbalanceamento mecânico do sistema. A expressão (3.48) representa a equação de equilíbrio dinâmico para qualquer instante de tempo. De modo a resolvê-la inicialmente se escreve este equilíbrio para um instante de tempo qualquer t_{s+1} como:

$$\vec{g}|_{s+1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} = \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} - \vec{F}_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} = \vec{0} \quad (3.49)$$

As aproximações de Newmark (NEWMARK, 1959) são dadas pelas expressões abaixo, sendo β e γ os seus parâmetros usuais e Δt o incremento de tempo.

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \Delta t \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \quad (3.50)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \quad (3.51)$$

A integração temporal por meio dessa abordagem é amplamente conhecida da literatura sobre análise dinâmica linear de estruturas e pode ser encontrada em diversos livros textos clássicos como Hughes (1987) e Argyris e Mlejnek (1991), dentre outros. Adotando-se os parâmetros $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$, que correspondem à regra do trapézio para integração entre dois instantes de tempo, e que implicam em aceleração média constante dentro desse passo de tempo, obtêm-se um algoritmo incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem no caso linear, o qual conserva a energia do sistema.

Entretanto, para problemas não lineares a estabilidade do conjunto de aproximações de Newmark não é garantida em todos os casos. Uma maneira de contornar esse problema é alterando-se os parâmetros do método de maneira à introduzir dissipação numérica às altas frequências do sistema. Todavia, essa alternativa pode modificar os resultados das análises transientes por diminuir a ordem de precisão do método, além de necessitar de pequenos passos de tempo (GÉRADIN; CARDONA, 2001).

Apesar da limitação do método ser reconhecida, seu uso se justifica por sua simplicidade e direta aplicação em equações diferenciais de segunda ordem do tipo apresentado na expressão (3.49). Sua característica implícita, com o uso das informações somente de um passo de tempo anterior, também é bastante favorável à implementação e ao desempenho computacional.

Desse modo, substituindo as expressões (3.50) e (3.51) na equação (3.49), chega-se a:

$$\begin{aligned} \vec{g}|_{s+1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} &= \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} - \vec{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{T}_s \\ &+ \mathbf{D} \cdot \vec{R}_s + \frac{\gamma \mathbf{D}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \gamma \Delta t \mathbf{D} \cdot \vec{T}_s = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Na qual os vetores \vec{T}_s e \vec{R}_s apresentam as contribuições do instante de tempo passado t_s e são escritos como:

$$\vec{T}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \quad \text{e} \quad \vec{R}_s = \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \quad (3.53)$$

A equação (3.52) pode ser entendida simplesmente como $\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{0}$ e é claramente não linear em relação à \vec{Y}_{s+1} . De modo a resolver esse sistema pode-se expandir esta equação em série de Taylor truncada na aproximação de primeira ordem como:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) \cong \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) + \nabla \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta \vec{Y}_{s+1} = \vec{0} \quad (3.54)$$

No qual \vec{Y}_{s+1}^0 é uma posição tentativa – usualmente a posição de equilíbrio do corpo no instante anterior – para o cálculo de \vec{Y}_{s+1} utilizado na equação (3.52).

Resulta desta última expressão o procedimento de Newton-Raphson para solução do sistema não linear como:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y}_{s+1} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad \text{e} \quad \Delta \vec{Y}_{s+1} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (3.55)$$

Na qual a matriz hessiana \mathbf{H} é dada pela segunda derivada da energia total como:

$$\mathbf{H} = \nabla \vec{g} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{D}}{\beta \Delta t} \quad (3.56)$$

Determinando-se $\Delta \vec{Y}_{s+1}$ pode-se calcular a nova posição tentativa para \vec{Y}_{s+1} como:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_{s+1}^0 + \Delta \vec{Y}_{s+1} \quad (3.57)$$

Em cada iteração a velocidade é corrigida pela expressão (3.51) e a aceleração pela expressão abaixo:

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{T}_s \quad (3.58)$$

O critério de parada para uma dada tolerância TOL é satisfeito quando:

$$\frac{\|\vec{g}(\vec{Y}_{s+1})\|}{\|\vec{F}\|} \leq TOL \quad \text{e} \quad \frac{\|\Delta \vec{Y}_{s+1}\|}{\|\vec{X}\|} \leq TOL, \quad (3.59)$$

sendo \vec{X} a posição inicial da estrutura.

No item posterior são indicadas as expressões para o cálculo da hessiana \mathbf{H} presente na equação (3.55).

3.3.1 Hessiana do elemento de pórtico plano

Conforme indicado na equação (3.55), a hessiana \mathbf{H} do elemento finito é o operador tangente necessário ao processo de solução do sistema não linear de equações. Ela é dada, para o caso dinâmico, pela equação (3.56). Caso fosse necessária uma análise estática bastaria desconsiderar as parcelas decorrentes da energia cinética e do amortecimento, tanto na expressão da hessiana, quanto na equação do movimento.

Como a função da energia específica de deformação u_e é contínua, finita no domínio V_0 do elemento e seu intervalo de integração possui valores constantes, a primeira parcela da equação (3.56) pode ser desenvolvida como:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \bar{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} \right) dV_0 \quad (3.60)$$

Nesta última integral, a derivada do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $\partial \mathbf{S} / \partial \bar{Y}$ em relação às incógnitas nodais é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \bar{Y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \begin{bmatrix} \mathbb{E} E_{11} & 2\mathbb{G} E_{12} \\ 2\mathbb{G} E_{21} & \mathbb{E} E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial E_{11}}{\partial \bar{Y}} & 2\mathbb{G} \frac{\partial E_{12}}{\partial \bar{Y}} \\ 2\mathbb{G} \frac{\partial E_{21}}{\partial \bar{Y}} & \mathbb{E} \frac{\partial E_{22}}{\partial \bar{Y}} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

de modo que somente precisa-se das derivadas da deformação de Green, as quais são conhecidas do cálculo da força interna \vec{F}^{int} , equação (3.42).

Ainda é necessário calcular a segunda derivada da deformação de Green dada por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} = \frac{1}{2} \left[2(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \bar{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \bar{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \mathbf{O} + \mathbf{O}' \right], \quad (3.62)$$

com,

$$\mathbf{O} = (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.63)$$

Nestas expressões todos os termos são conhecidos, exceto $\partial^2 \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y} \partial \vec{Y}$, entretanto este assume valores não nulos somente para os graus de liberdade de giro (direção 3) resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^\beta \partial Y_3^\zeta} &= \frac{\partial^2 \mathbf{A}^1}{\partial \theta_\beta \partial \theta_\zeta} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} \eta \left\{ \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi_{k,\xi} \theta_k) - \cos(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi_{\zeta,\xi} + \phi_{\beta,\xi} \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \\ -\frac{h_0}{2} \eta \left\{ \cos(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta (\phi_{k,\xi} \theta_k) + \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) [\phi_\beta \phi_{\zeta,\xi} + \phi_{\beta,\xi} \phi_\zeta] \right\} & -\frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell \theta_\ell) \phi_\beta \phi_\zeta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

sendo β e ζ os nós do elemento e com somatório sobre os nós ℓ e k do elemento (notação indicial).

A integração da segunda derivada da energia de deformação, expressão (3.60), é realizada numericamente, de modo análogo à expressão das forças internas, com o uso da quadratura de Gauss-Legendre pela expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} &= b_0 w_{ig} w_{jg} \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \right] \text{Det}[\mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg})], \end{aligned} \quad (3.65)$$

na qual w_{ig} e w_{jg} são os pesos de Gauss para os pontos de integração ξ_{ig} e η_{jg} , respectivamente, e os índices ig e jg indicam soma para a quantidade de pontos escolhida em cada direção.

A matriz de massa, presente na equação (3.38), é integrada numericamente de modo similar como:

$$\mathbf{M} = \rho_0 b_0 w_{ig} w_{jg} \vec{\phi}(\xi_{ig}) \otimes \vec{\phi}(\xi_{ig}) \text{Det}[\mathbf{A}^0(\xi_{ig}, \eta_{jg})] \quad (3.66)$$

A matriz de amortecimento, também presente na equação (3.38), é obtida pelo fator de proporcionalidade λ_D como $\mathbf{D} = \lambda_D \mathbf{M}$, conforme a equação (3.30). Nota-se que esta é a parcela do amortecimento de Rayleigh proporcional à massa. Não se adota a parcela de amortecimento proporcional à rigidez neste trabalho já no caso não linear geométrico a matriz de rigidez (operador tangente) é variável com a análise.

3.4 Cálculo dos Esforços Internos Seccionais

Para o cálculo dos esforços seccionais é realizada a integração das tensões de Cauchy sobre a área da seção transversal da barra. A tensão real $\boldsymbol{\sigma}$, ou de Cauchy, está relacionada com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S} pela expressão (OGDEN, 1984):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\text{Det } \mathbf{A}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t, \quad (3.67)$$

sendo, \mathbf{A} o gradiente da função mudança de configuração dado pela equação (3.14).

Determinada a tensão de Cauchy para o sistema coordenado global dado por y_1 e y_2 , convencionou-se um sistema de eixos local definido pelo ângulo $\varphi = \theta - \pi/2$ no qual sua coordenada local \tilde{y}_1 é perpendicular à seção transversal e \tilde{y}_2 pertence ao plano da seção, tal como na Figura 8, sendo θ o ângulo da seção.

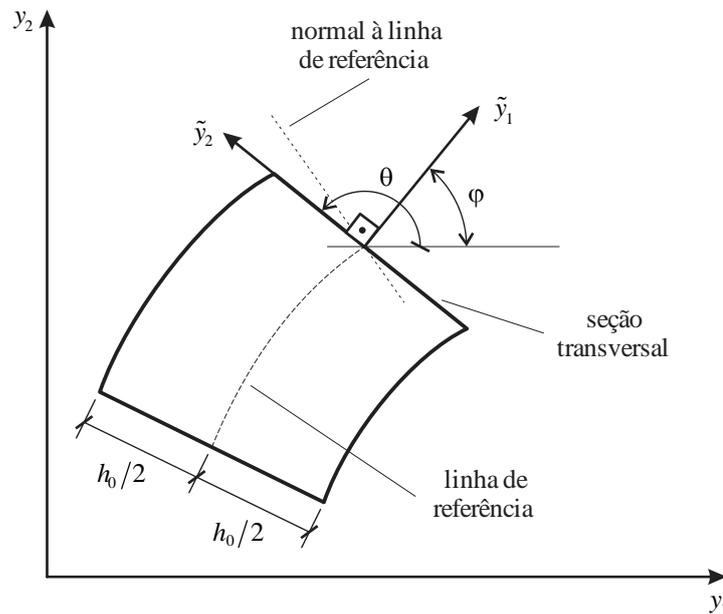


Figura 8 – Sistema de eixos locais para o cálculo das tensões de Cauchy

A tensão de Cauchy para o sistema de eixos local é obtida pela fórmula de rotação (CHOU; PAGANO, 1992) como:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}, \quad (3.68)$$

sendo, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ o tensor de tensões rotacionado para os eixos \tilde{y}_1 e \tilde{y}_2 e \mathbf{R} a matriz de rotação dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Dessa maneira, o esforço normal N , o esforço cortante V e o momento fletor M de uma seção transversal da barra são dados pela integral das tensões como:

$$N = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} dA_0, \quad V = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{12} dA_0 = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{21} dA_0 \quad \text{e} \quad M = \int_{A_0} \tilde{\sigma}_{11} \tilde{y}_2 dA_0, \quad (3.70)$$

sendo A_0 a área da seção transversal, neste caso igual à área inicial.

Conhecidos os tensores de tensões para os pontos de integração (ξ_{ig}, η_{jg}) pode-se avaliar os esforços internos dados pelas expressões (3.70) por meio da quadratura de Gauss-Legendre. Sabendo-se que a relação entres os infinitésimos de comprimento na direção transversal da barra do espaço adimensional, $d\eta$, e do espaço real, $d\tilde{y}_2$, é dada por $d\tilde{y}_2 = (h_0/2)d\eta$, e que a base da seção transversal tem valor constante b_0 , tem-se para cada ponto de integração ig na direção longitudinal as seguintes expressões para os esforços internos:

$$N_{ig} = \frac{b_0 h_0}{2} w_{jg} \tilde{\sigma}_{11}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (3.71)$$

$$V_{ig} = \frac{b_0 h_0}{2} w_{jg} \tilde{\sigma}_{12}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) = \frac{b_0 h_0}{2} w_{jg} \tilde{\sigma}_{21}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \quad (3.72)$$

$$M_{ig} = \frac{b_0 h_0^2}{4} w_{jg} \tilde{\sigma}_{11}(\xi_{ig}, \eta_{jg}) \eta_{jg}, \quad (3.73)$$

sendo, w_{jg} o valor do peso de Gauss para o ponto de integração η_{jg} , e o índice jg indicando soma para a quantidade de pontos de integração adotados na direção transversal.

Considerando-se um caso particular no qual o número de pontos de integração na longitudinal é igual ao número de nós do elemento finito, pode-se escrever qualquer esforço interno de um ponto de integração \hat{B}_{ig} em função dos esforços nodais B_ℓ como:

$$\hat{B}_{ig} = \phi_\ell(\xi_{ig}) B_\ell \quad \text{ou} \quad \vec{\hat{B}} = \Phi \cdot \vec{B} \quad (3.74)$$

Portanto, os esforços internos nodais são calculados como:

$$\vec{B} = \Phi^{-1} \cdot \vec{\hat{B}} \quad (3.75)$$

Nestas expressões, $\phi_\ell(\xi_{ig})$ é a função de forma do nó ℓ do elemento finito avaliada no ponto de integração ξ_{ig} do espaço adimensional, ou Φ em notação diádica, e \vec{B} e $\vec{\hat{B}}$ são os

vetores de qualquer dos esforços internos para os nós e para os pontos de integração, respectivamente.

3.5 Incorporação de Rótulas

A introdução de juntas rotacionais (rótulas) aos elementos finitos de pórtico plano pode ser feita com qualquer técnica de introdução de restrições cinemática ao sistema estrutural como o método dos multiplicadores de Lagrange ou uma técnica de penalização. Todavia, uma maneira melhor, e mais simples, é por meio da compatibilidade cinemática dos graus de liberdade no nó rotulado.

O procedimento consiste em permitir que os componentes do sistema compartilhem um nó e seus graus de liberdade translacionais, liberando os relativos à rotação na montagem do sistema de equações da estrutura. Os trabalhos de Simo e Vu-Quoc (1986c), Park et al. (1991), Greco e Coda (2006) e Coda e Paccola (2014) utilizam este método na implementação dessas ligações.

Na Figura 9 indica-se de forma esquemática a renumeração dos graus de liberdade de um nó comum a dois elementos finitos quando em uma conexão monolítica ou rotulada. Em comparação à uma conexão monolítica, na qual existem somente três graus de liberdade para o nó compartilhado (duas translações e um giro), nota-se a criação de um grau de liberdade de giro extra, o qual permite o movimento rotacional relativo entre os elementos.

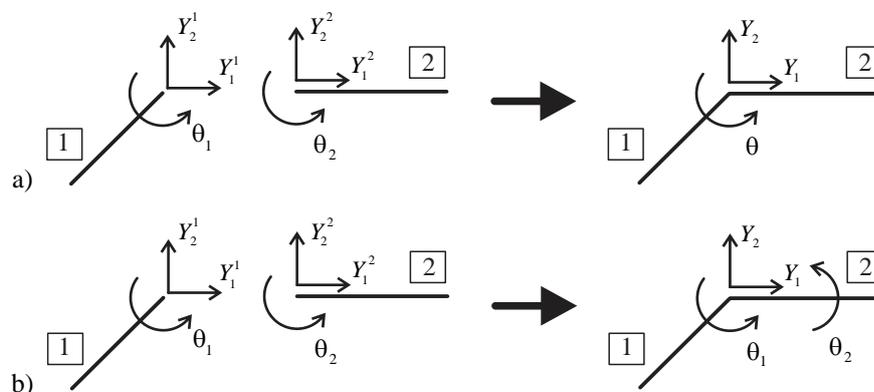


Figura 9 – Renumeração dos graus de liberdade: a) conexão monolítica e b) junta rotacional

Imaginando-se que o nó comum aos elementos possua as seguintes matrizes, relativas a cada um dos elementos:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

sendo as duas primeiras linhas e colunas relativas aos graus de liberdade de translação e a última linha e coluna relativa ao giro. Para uma ligação monolítica tem-se a seguinte matriz global:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} & A_{33} + B_{33} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Já em uma ligação rotulada o espalhamento para a matriz global se torna:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} & B_{13} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & A_{23} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & 0 & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

na qual a penúltima linha e coluna é relativa ao grau de liberdade de giro do primeiro elemento e a última linha ao giro do segundo elemento.

Essa mesma abordagem não se restringe somente a dois elementos, mas a qualquer número de elementos ou combinação entre ligações rígidas e articuladas conforme é exemplificado na Figura 10.

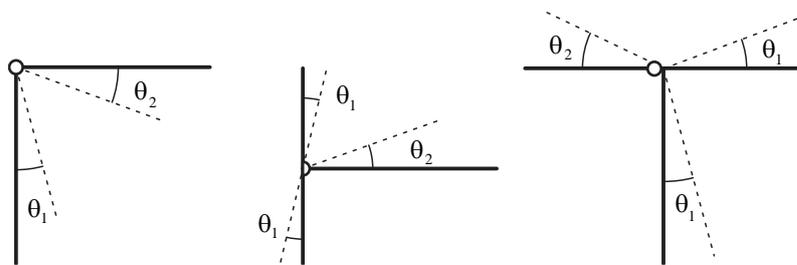


Figura 10 – Diversas conexões rotuladas entre elementos graus de liberdade

3.6 Exemplos de Pórticos com Ligações Monolíticas e Rotuladas

A seguir são apresentados alguns exemplo de aplicação da formulação apresentada neste capítulo na solução de estruturas e mecanismos formados por pórticos planos com ligações monolíticas e rotuladas.

3.6.1 Exemplo 1 – Flambagem elástica de uma coluna

Neste exemplo uma coluna esbelta de comprimento $L = 10,0m$ engastada na sua base é submetida à uma força compressiva $F = 1152,0N$ e a um pequeno momento fletor $M = 0,96 N.m$ na sua extremidade livre tal como indicado na Figura 11. Este carregamento é incrementado em 100 passos de carga de modo a se obter a trajetória de equilíbrio da extremidade livre da coluna para os deslocamentos nas direções transversal, v , e axial, u , como apresentado na Figura 12.

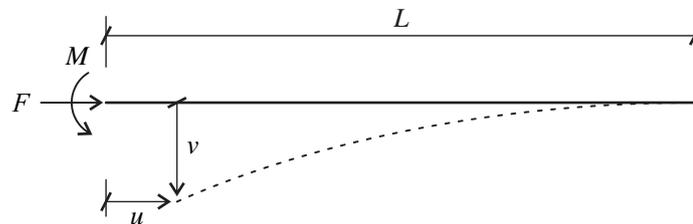


Figura 11 – Coluna submetida à uma força compressiva e pequeno momento fletor

De modo a se obter um grande índice de esbeltez, igual a 100,0, adotou-se uma seção transversal quadrada de lado $b_0 = h_0 = 69,282 cm$. Também foi adotado módulo de elasticidade longitudinal $\mathbb{E} = 1,0 \cdot 10^6 Pa$ e módulo transversal $\mathbb{G} = 4,0 \cdot 10^5 Pa$.

A simulação numérica realizada com 5 elementos finitos de aproximação cúbica foi comparada com a resposta analítica para o problema apresentada no trabalho de Goto, Yoshimitsu e Obata (1990). A comparação dos resultados do deslocamento transversal apresentados de forma adimensional na Figura 12 a) demonstra a capacidade da formulação utilizada para o pórtico plano na adequada representação do comportamento não linear geométrico da estrutura. De posse da trajetória de equilíbrio pode-se também verificar que a estrutura apresenta a bifurcação do equilíbrio quando a força compressiva atinge a carga crítica de flambagem elástica, obtida pela teoria clássica de Euler igual a 473,74 N, ou na forma adimensional, utilizada nos gráficos, igual a 2,467.

Nota-se ainda que a formulação leva em consideração o efeito de encurtamento da coluna, Figura 12 b), e a deformação por esforço cortante, apesar desta última não prevalecer dada a grande esbeltez da coluna. Na Figura 13 são apresentadas as configurações deformadas da coluna para carregamentos com incremento de 5% a partir de uma carga que corresponde à 40% da carga final, valor próximo à carga crítica. Nota-se que no início do processo de

instabilidade o mesmo incremento de carga leva a grandes saltos de deslocamentos conforme esperado do fenômeno da flambagem.

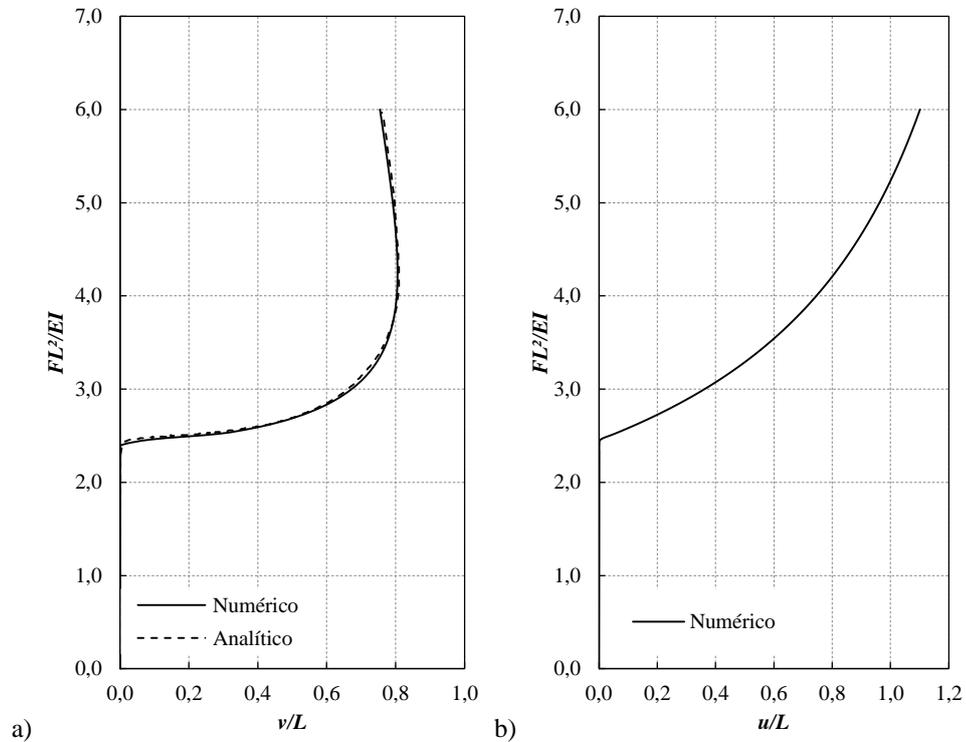


Figura 12 – Evolução dos deslocamentos a) transversal e b) axial da extremidade livre da coluna

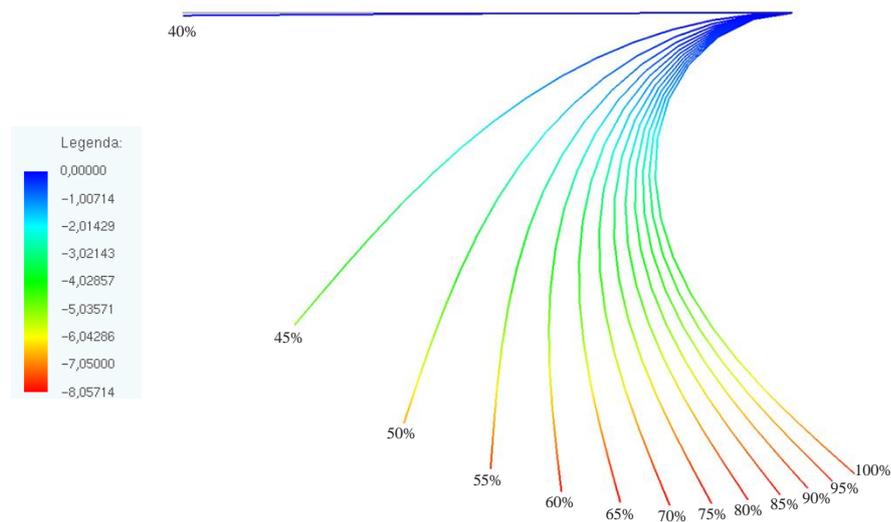


Figura 13 – Deslocamentos transversais (m) da coluna para diversos níveis de carregamento

3.6.2 Exemplo 2 – Pórtico diamante articulado

Este exemplo consiste na análise estática de um pórtico em forma de losango de lado $L = 6,0$ com rótulas em vértices opostos e sujeito a forças concentradas nestes nós rotulados conforme ilustra a Figura 14. Este pórtico foi proposto e resolvido analiticamente por Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966), entretanto, no trabalho de Mattiasson (1981) encontram-se valores tabelados os quais foram utilizados para comparação dos resultados.

Utiliza-se este problema para demonstrar a capacidade da formulação apresentada e do programa desenvolvido na análise não linear geométrica, além da possibilidade do uso de rótulas, já que não foram utilizados artifícios de simetria, o que poderia eliminar a presença delas entre as barras.

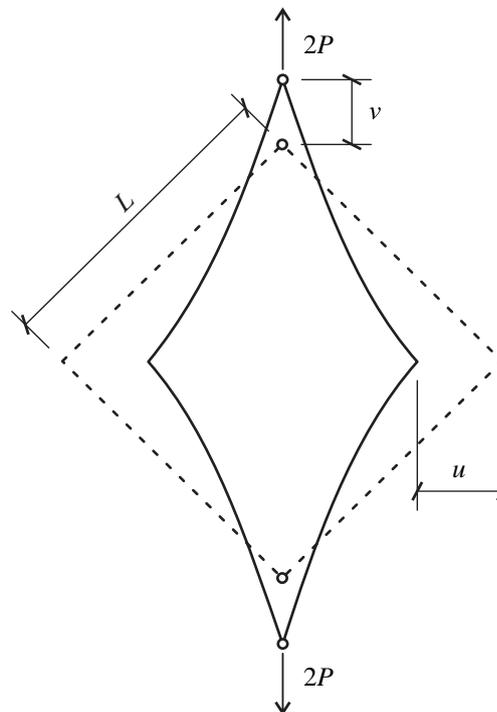


Figura 14 – Geometria inicial e deformada do pórtico

Para a simulação numérica da estrutura completa foram utilizados 12 elementos finitos de aproximação cúbica, três elementos por lado do pórtico. O módulo de elasticidade longitudinal adotado foi $\mathbb{E} = 1,0 \cdot 10^4$ e o módulo transversal foi $\mathbb{G} = 5,0 \cdot 10^3$. Todas as barras possuem seção transversal retangular de base $b_0 = 0,20$ e altura $h_0 = 0,60$.

Os deslocamentos e algumas configurações deformadas calculados para 20 passos de carga são apresentados na Figura 15 para força P de tração e na Figura 16 para força de compressão.

Conforme se observa das figuras, a formulação apresentou excelentes resultados para o problema. As pequenas diferenças que se encontram nos deslocamentos para cargas maiores se devem em parte às diferentes cinemáticas utilizadas. Na resolução analítica do problema foi empregado a cinemática de Euler-Bernoulli enquanto neste trabalho utiliza-se a cinemática de Reissner, portanto naquele não foram consideradas as deformações axiais ou transversais. Além disso, a medida de deformação e a lei constitutiva empregadas no presente trabalho apresentam valores ligeiramente diferentes da medida de deformação não linear de engenharia para grandes valores de deformações. Por estes motivos encontram-se estas diferenças nos valores finais de carga.

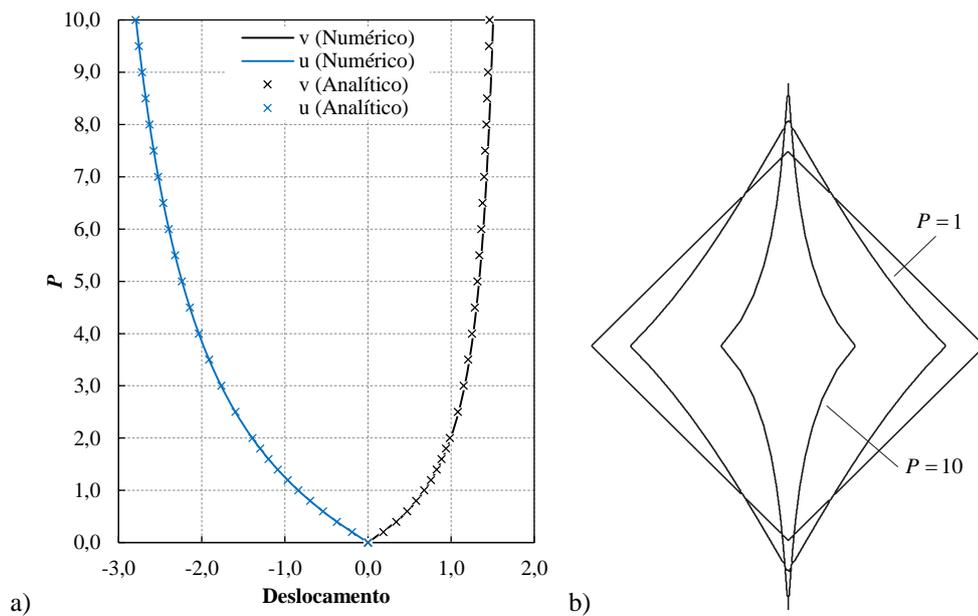


Figura 15 – Tração: a) carga x deslocamento b) configurações deformadas

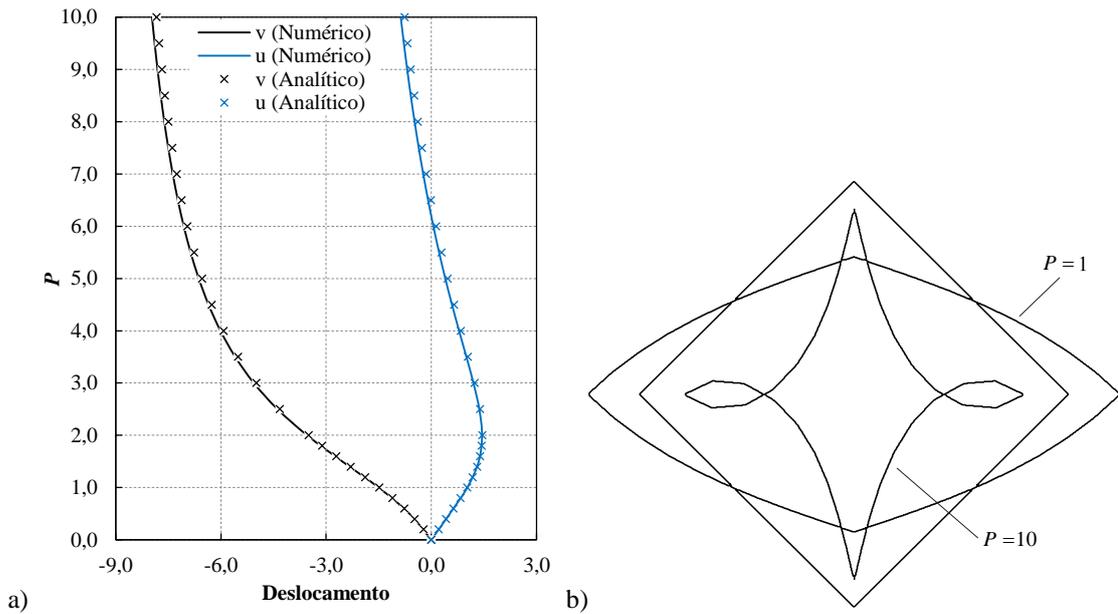


Figura 16 – Compressão: a) carga x deslocamento b) configurações deformadas

3.6.3 Exemplo 3 – Rotação de hélice flexível

Este exemplo, apresentado aqui para verificação dos resultados da formulação dinâmica, é amplamente utilizado na literatura como referência para programas de análise dinâmica de estruturas flexíveis. Ele consiste em um mecanismo presente em hélices de helicóptero, antenas de satélite e braços robóticos dado por uma barra de comprimento $L = 10,0$ submetida à uma função de giro $\psi(t)$ prescrita no seu nó vinculado, Figura 17, dada por:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{2}{5} \left[\frac{t^2}{2} + \left(\frac{15}{2\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{2\pi t}{15} - 1 \right) \right] \text{ rad}, & 0 \leq t \leq 15 \\ (6t - 45) \text{ rad}, & t > 15 \end{cases}$$

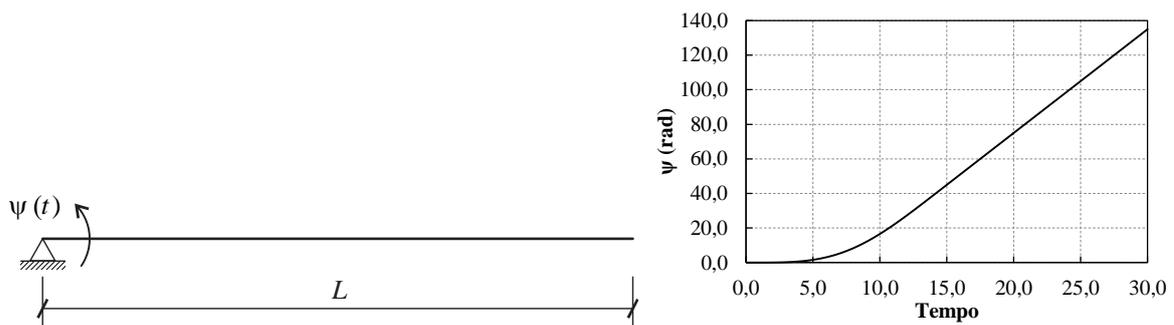


Figura 17 – Configuração inicial e função de giro

Kane, Ryan e Banerjee (1987) foram os primeiros a apresentar uma solução numérica para este problema levando em consideração os efeitos de enrijecimento centrífugo e vibrações decorrentes das forças de Coriolis resolvendo-o por meio de análise modal. Simo e Vu-Quoc (1986c) resolvem este problema por meio de uma formulação lagrangeana total utilizando o método de Galerkin e discretização temporal com as aproximações de Newmark. Outros trabalhos que apresentam a solução para o problema são os de Christensen e Lee (1986), Hsiao, Yang e Lee (1994), Elkaranshawy e Dokainish (1995), Greco e Coda (2006) e Coda e Paccola (2014).

Para a simulação numérica foram utilizados cinco elementos finitos de aproximação cúbica e incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-3}$ com os parâmetros usuais de Newmark para aceleração média constante, $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$. Adotou-se para estrutura as mesmas propriedades apresentadas nas referências: seção retangular de lado $b_0 = h_0 = 0,07746$, módulo de elasticidade longitudinal $\mathbb{E} = 4,67 \cdot 10^9$, módulo transversal $\mathbb{G} = 2,0 \cdot 10^9$ e massa específica $\rho_0 = 200,0$.

São apresentados resultados de deslocamentos e giro para a extremidade livre da hélice a partir do seu movimento de corpo rígido conforme ilustra a Figura 18. A Figura 19 apresenta o deslocamento axial U_1 da ponta, nota-se que após o período de aceleração, $t < 15$, com grande encurtamento da barra há uma resposta estacionária com alongamento constante igual a $5,14 \cdot 10^{-4}$. Este valor é o mesmo obtido da solução técnica para o problema análogo de uma barra giratória com velocidade angular constante ω , sendo seu alongamento dado por $\rho_0 \omega^2 L^3 / (3\mathbb{E})$. Na Figura 20 apresenta-se o deslocamento transversal U_2 e na Figura 21 o giro relativo α da ponta da hélice. Portanto, nota-se dos resultados boa concordância com a literatura e a adequabilidade da formulação apresentada e do programa desenvolvido para a análise dinâmica.

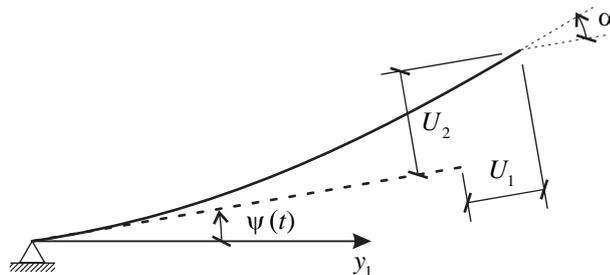


Figura 18 – Configuração atual: deslocamentos medidos a partir do movimento de corpo rígido

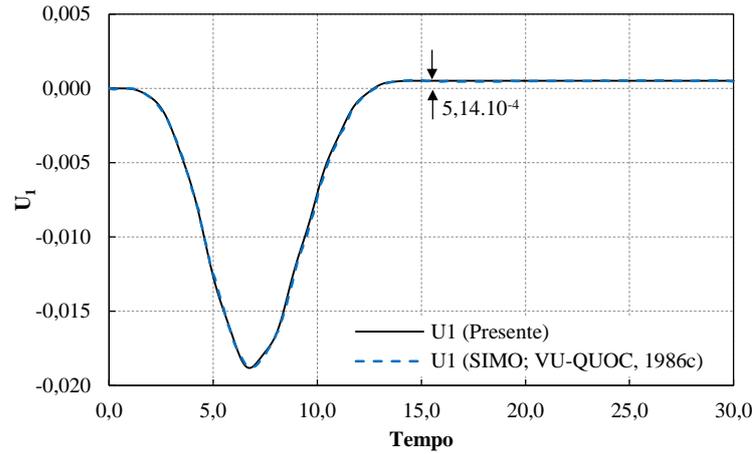


Figura 19 – Deslocamento axial da ponta da hélice

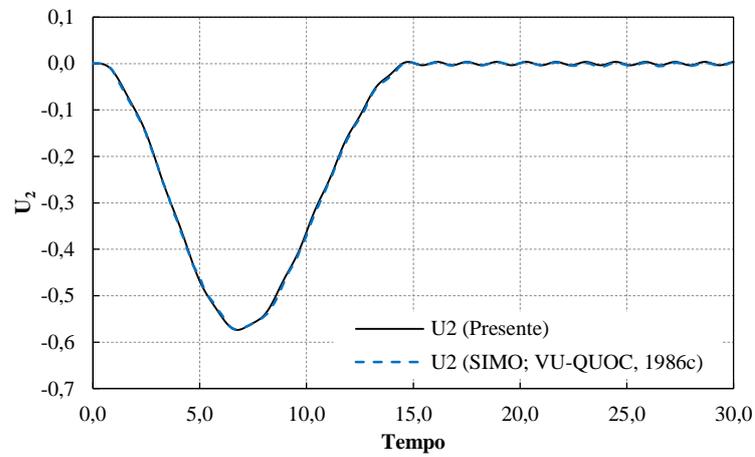


Figura 20 – Deslocamento transversal da ponta da hélice

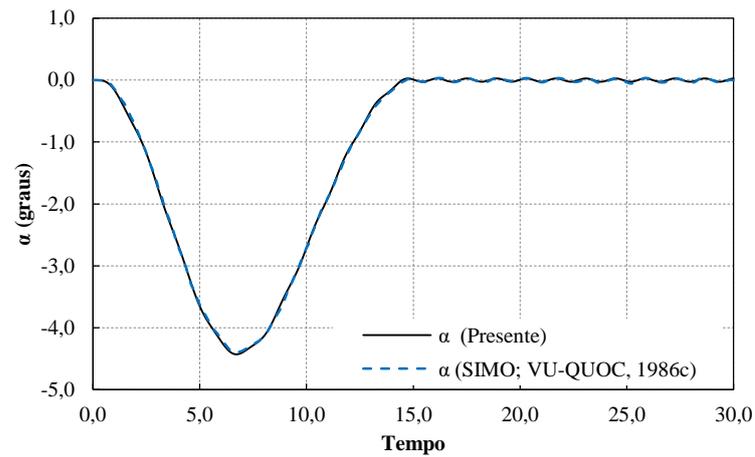


Figura 21 – Rotação relativa da ponta da hélice

3.6.4 Exemplo 4 – Mecanismo biela-manivela

Apresenta-se neste exemplo um mecanismo clássico composto por uma biela e uma manivela o qual é submetido a um momento no seu apoio fixo tal como ilustra a Figura 22. Conforme os trabalhos de Escalona, Hussien e Shabana (1998) e Greco e Coda (2006) são adotadas duas funções para a evolução do momento aplicado à manivela: $M_1(t)$ e $M_2(t)$. Estas são dadas por:

$$M_1(t) = 0,01(1 - e^{-t/0,167}) N.m,$$

e,

$$M_2(t) = \begin{cases} 0,01(1 - e^{-t/0,167}) N.m, & 0 \leq t \leq 0,7 s \\ 0, & t > 0,7 s \end{cases}$$

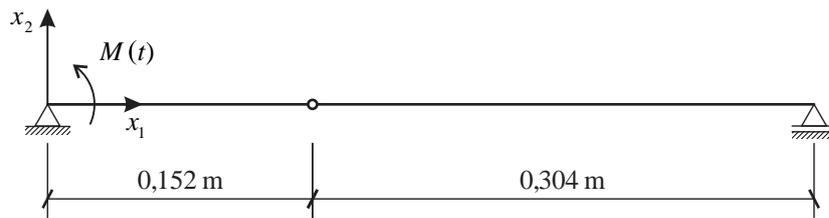


Figura 22 – Configuração inicial do mecanismo biela-manivela

Tanto a biela quanto a manivela possuem massa específica $\rho_0 = 2770,0 kg / m^3$ e seção transversal retangular de base $b_0 = 0,9069 cm$ e altura $h_0 = 0,8660 cm$. De modo a considerar a manivela como rígida adota-se módulo de elasticidade longitudinal igual a $\mathbb{E} = 1,0 GPa$ e para a biela flexível $\mathbb{E} = 0,05 GPa$. O módulo de elasticidade transversal foi adotado como a metade do longitudinal. Para a simulação do mecanismo foram adotados três elementos finitos cúbicos para a manivela e seis para a biela. O incremento de tempo adotado foi $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4} s$ com os parâmetros usuais do método de Newmark para aceleração média constante, $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$.

A Figura 23 apresenta a evolução da posição horizontal do apoio direito com o tempo para as duas funções de momento e para os valores obtidos das referências. Ressalta-se que no trabalho de Escalona, Hussien e Shabana (1998) somente são apresentados resultados até 1,6 s. Nota-se boa concordância de resultados, especialmente para a segunda função de momento a qual solicita menos a manivela. As maiores diferenças observadas nos ciclos finais da simulação

com a primeira função de carregamento são decorrentes das distintas cinemáticas e medidas de deformação empregadas pelas referências – cinemática de Euler-Bernoulli e deformação não linear de engenharia.

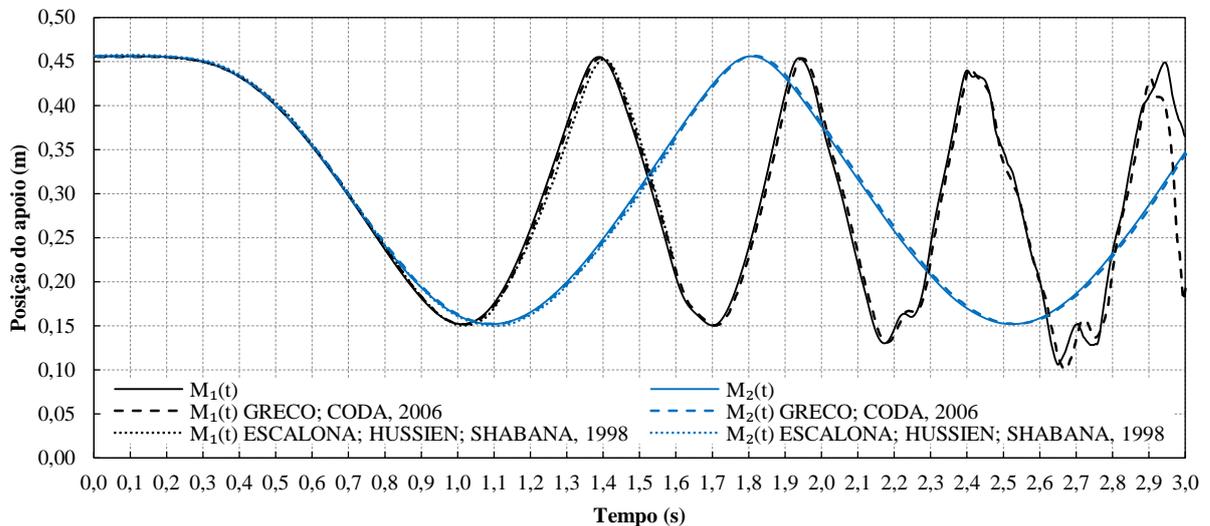


Figura 23 – Evolução da posição horizontal do apoio direito

3.6.5 Exemplo 5 – Balanço de três barras

Apresenta-se um pórtico formado por uma viga flexível rotulada nos seus extremos à duas barras consideradas rígidas, Figura 24. No ponto médio da viga existe uma massa concentrada $m = 0,5 \text{ kg}$ à qual é aplicado um pulso $P(t)$ na direção horizontal. Essa estrutura foi proposta por Bauchau, Damilano e Theron (1995) e utilizada na comparação entre um algoritmo de integração temporal que conserva energia com o método α generalizado, o qual introduz amortecimento numérico ao sistema para estabilização de altas frequências presentes. Esse mesmo exemplo também pode ser encontrado nos trabalhos de Ibrahimbegović et al. (2000) e Leyendecker, Marsden e Ortiz (2008) os quais também apresentam alternativas para integração numérica das equações do movimento.

Para simulação numérica foram adotados os mesmos parâmetros geométricos, constitutivos e malha de elementos finitos apresentados nas referências. Todas as barras da estrutura possuem massa específica $\rho_0 = 2700,0 \text{ kg} / \text{m}^3$ e seção transversal retangular de base $b_0 = 5,0 \text{ mm}$ e altura $h_0 = 1,0 \text{ mm}$. A viga tem módulo de elasticidade longitudinal

$E = 73,0 GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e foi modelada com quatro elementos finitos de aproximação cúbica. Para cada uma das barras rígidas utiliza-se um único elemento finito cúbico e módulo de elasticidade 100 vezes superior à viga. Foi utilizado o mesmo incremento de tempo das referências $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-4} s$. Para integração temporal utilizou-se os parâmetros usuais do método de Newmark para aceleração média constante, $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$.

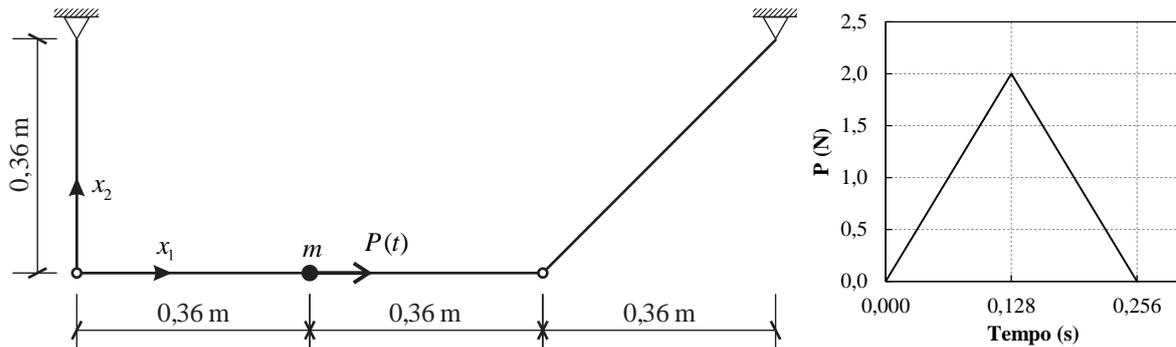


Figura 24 – Configuração inicial da estrutura e histórico de carregamento

Os resultados obtidos estão em total concordância com o que é apresentado na literatura. A Figura 25 ilustra os deslocamentos horizontal e vertical de um ponto da viga localizado a $\frac{1}{4}$ do comprimento do vão, a partir da rótula esquerda. Observa-se que a partir do instante de tempo próximo a 0,64 s há uma mudança brusca no movimento da estrutura.

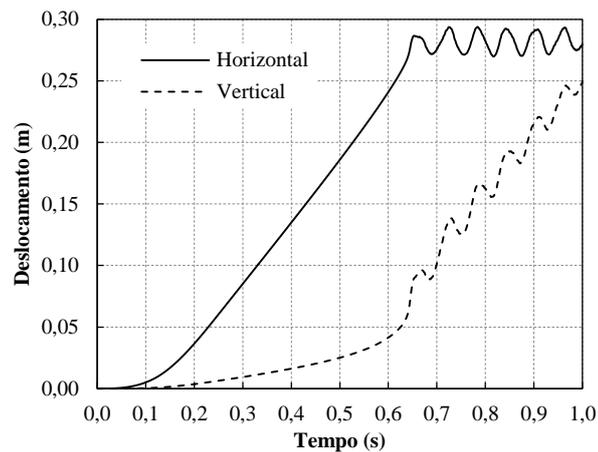


Figura 25 – Deslocamentos de um ponto distante de $\frac{1}{4}$ do vão da rótula esquerda da viga

Da Figura 26, que apresenta configurações da estrutura a cada 0,1 s, e da Figura 27, que ilustra a trajetória de alguns pontos da viga, pode-se notar que a barra rígida da direita muda sua direção de giro levada pelo movimento da barra da esquerda. Isso causa grandes vibrações axiais na viga que se refletem em um salto no valor do seu esforço normal, Figura 28, do mesmo

modo como reportado nos trabalhos referidos. Nota-se, portanto, a capacidade da formulação apresentada mesmo sabendo-se que a estabilidade do método de Newmark não é garantida para problemas não lineares.

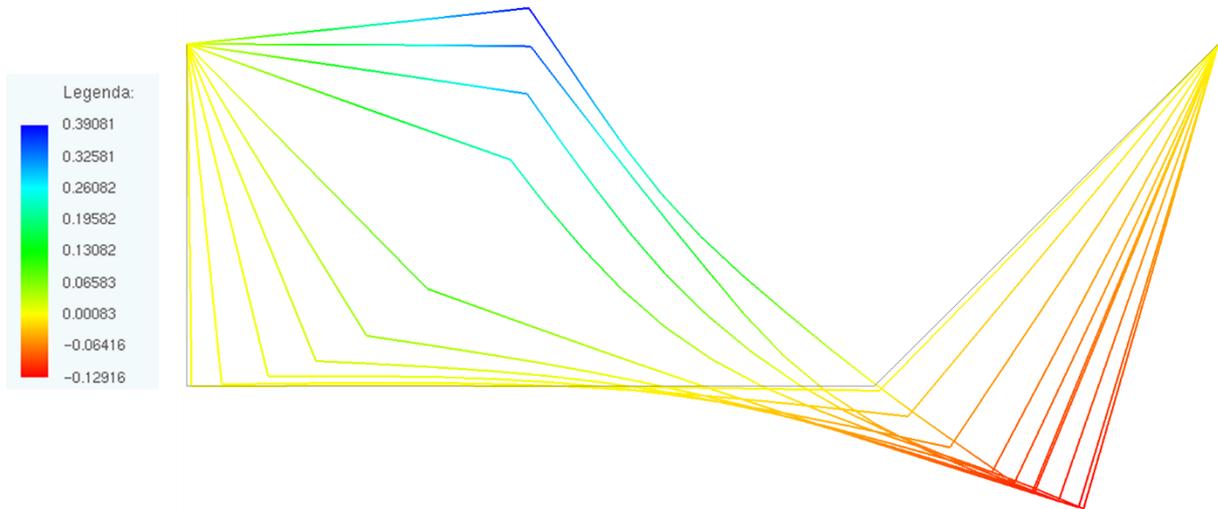


Figura 26 – Deslocamentos verticais (m) para intervalos de 0,1 s

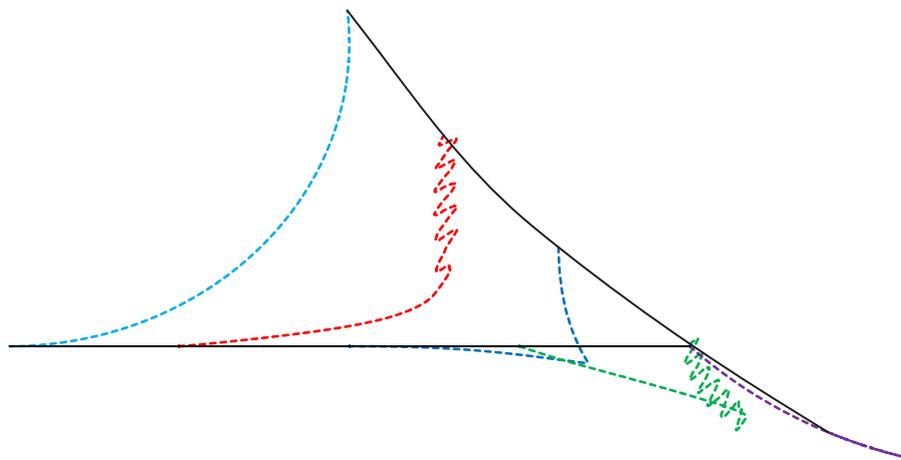


Figura 27 – Trajetória dos nós da viga a cada 18 cm (linhas tracejadas) e configurações inicial e final da viga (linhas contínuas)

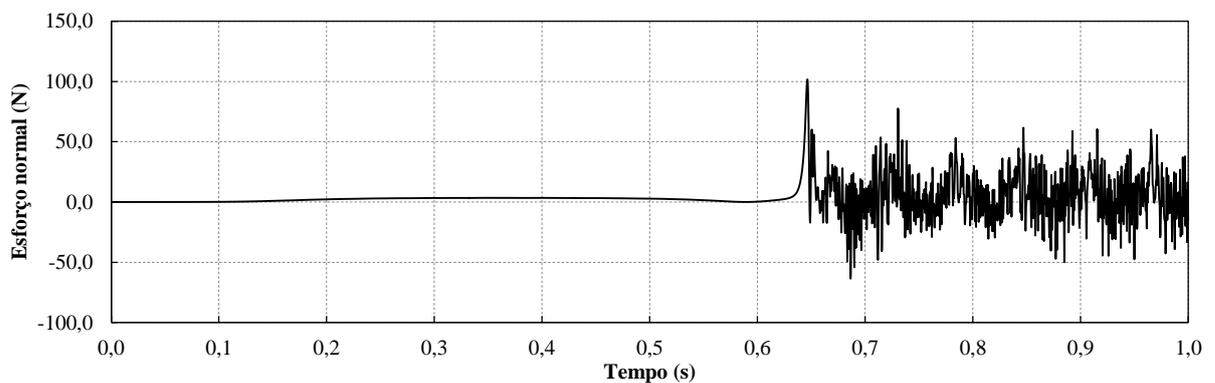


Figura 28 – Esforço normal no ponto de integração imediatamente à esquerda da massa concentrada

4. INTRODUÇÃO DE LIGAÇÕES DESLIZANTES

Desenvolve-se neste capítulo uma formulação para introduzir ligações deslizantes na forma de juntas prismáticas e cilíndricas ao elemento de pórtico plano não linear geométrico apresentado anteriormente.

Uma junta prismática, ilustrada de maneira esquemática na Figura 29 a), restringe a posição da extremidade de um elemento deslizante a se movimentar sobre um elemento da trajetória sem que exista rotação relativa entre esses elementos. A junta cilíndrica também restringe o deslizamento do nó de extremidade do elemento deslizante, mas libera o giro entre os elementos, Figura 29 b).

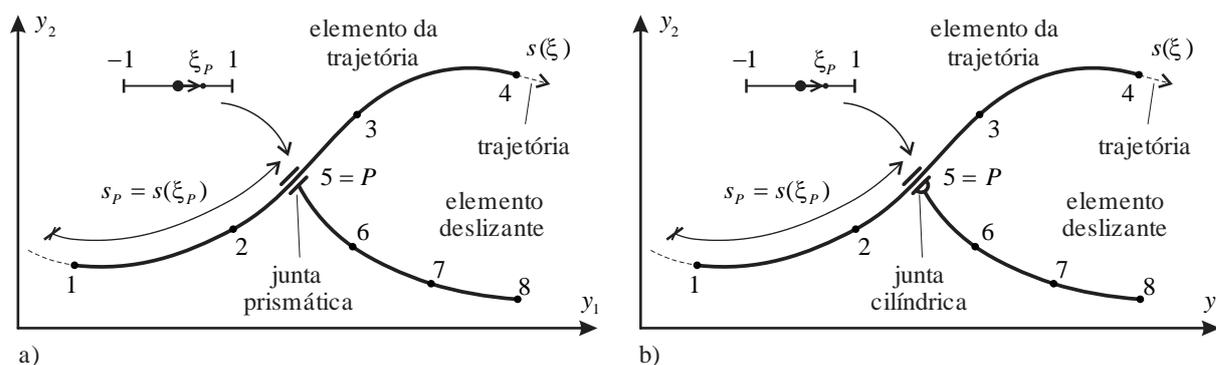


Figura 29 – Ligações deslizantes: a) junta prismática, b) junta cilíndrica

Descreve-se detalhadamente o equacionamento desenvolvido para a junta prismática no qual multiplicadores de Lagrange são utilizados para restringir a energia total do sistema em relação às posições e ângulos relativos do conjunto de elementos deslizante e trajetória. Para a junta cilíndrica indicam-se de forma breve quais termos das equações que governam as restrições devem ser desconsiderados.

Uma vantagem importante na utilização dos multiplicadores de Lagrange é a simplicidade da técnica quando considerada a estacionariedade do funcional de energia e a descrição lagrangeana total.

Nota-se que, diferentemente do que se propõe, os trabalhos consultados se baseiam em formulações lagrangeanas atualizadas aplicadas a análise dinâmica de sistemas de multicorpos e, quando considerados elementos flexíveis, encontram-se duas alternativas para conexões deslizantes. A primeira considera uma direção de deslizamento fixa, de modo que os elementos não são vinculados. A segunda considera a variável livre como sendo a coordenada

adimensional que descreve o comprimento do elemento da trajetória e não seu comprimento real. Esta última alternativa cria dificuldades na interpretação das forças e massas que realmente existem no nó conectado. Indicam-se aqui os trabalhos de Cardona, Geradin e Doan (1991), Jelenic e Crisfield (1996), Bauchau (1998), Bauchau (2000), Géradin e Cardona (2001), Bauchau e Bottasso (2001), Garcia-Vallejo et al. (2003), Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) e Lee et al. (2008).

4.1 Restrições Cinemáticas por meio de Multiplicadores de Lagrange

A introdução das ligações deslizantes entre elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio de um grupo de elementos finitos os quais definem uma trajetória de deslizamento para um nó conectado à um elemento deslizante. A este nó, que é livre para se movimentar sobre a trajetória, denomina-se nó deslizante.

No que segue a notação $(\bar{\bullet})$ é utilizada para os elementos pertencentes à trajetória e $(\hat{\bullet})$ para os elementos deslizantes, incluindo o nó deslizante.

A variável $s_p = s(\xi_p)$, ilustrada na Figura 29, define a posição curvilínea e a orientação da seção transversal de um ponto \bar{P} , com coordenadas \bar{Y}_i^p , sobre a trajetória. Para juntas cilíndricas as coordenadas cartesianas \hat{Y}_i^p do nó deslizante \hat{P} devem ser iguais às coordenadas cartesianas do ponto \bar{P} pertencente à trajetória. Para juntas prismáticas, além da posição do ponto, a diferença entre os ângulos de orientação da seção transversal $\Delta\theta_p^0$, calculada na configuração inicial (Figura 30), deve permanecer constante durante o movimento. Essas restrições são descritas por:

$$\hat{Y}_i^p = \bar{y}_i^m(s_p(\xi)) = \bar{y}_i^m(\xi(s_p)) = \bar{y}_i^m(\xi_p) = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell \quad \text{para } i=1,2, \quad (4.1)$$

e,

$$\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p - \phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell \quad \text{ou} \quad \hat{Y}_i^p = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell + \Delta\theta_p^0 \quad \text{para } i=3, \quad (4.2)$$

sendo \bar{y}_i^m a posição de um ponto da linha de referência do elemento ativo da trajetória na configuração atual. Ou, de forma genérica:

$$\hat{Y}_i^p(s_p(\xi), \bar{Y}_i^\ell) = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell + \Delta\theta_p^0\delta_{i3}, \quad (4.3)$$

na qual δ_{i3} é o delta de Kronecker.

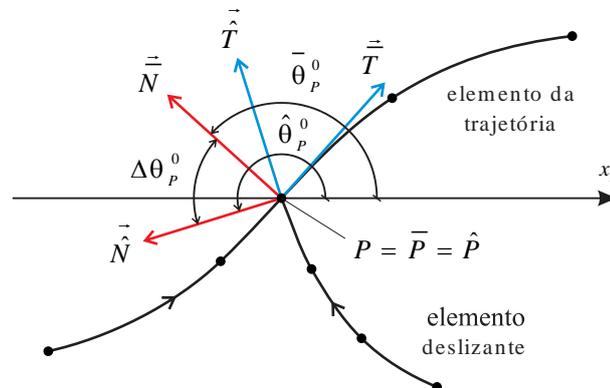


Figura 30 – Diferença dos ângulos para o mesmo nó em elementos distintos

Durante o deslizamento a posição curvilínea $s_p = s(\xi_p)$, ou, inversamente, a coordenada adimensional $\xi_p = \xi(s_p)$, irá variar. Ressalta-se que a variável curvilínea $s(\xi)$ representa uma função de comprimento de arco definida a partir de um parâmetro ξ e das coordenadas do elemento.

De modo a impor as restrições cinemáticas de uma junta prismática por meio de multiplicadores de Lagrange deve-se incluir o seguinte potencial à expressão da energia total:

$$\mathbb{L}(\vec{Y}_L, s_p, \vec{\lambda}) = \lambda_i \left[\hat{Y}_i^P - \phi_i(\xi(s_p)) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_P^0 \delta_{i3} \right], \quad (4.4)$$

na qual o termo entre colchetes é exatamente a restrição cinemática dada pela equação (4.3), λ_i são denominados multiplicadores de Lagrange para cada direção i (somatório implícito), e \vec{Y}_L é um vetor que representa os graus de liberdade conectados, isto é, as coordenadas e ângulos do elemento da trajetória e do elemento deslizante.

Na Mecânica, uma interpretação física interessante pode ser dada ao multiplicador de Lagrange. O seu valor, quando atingida a situação de equilíbrio, é a força auto equilibrada (ação e reação) necessária para manter ambas barras conectadas.

A nova energia total do sistema é escrita como:

$$\Pi_L(\vec{Y}, \vec{L}) = \Pi(\vec{Y}) + \mathbb{L}(\vec{Y}_L, \vec{L}), \quad (4.5)$$

na qual \vec{Y} inclui todos os graus de liberdade, exceto os novos $\vec{L} = \{\vec{\lambda}, s_p\}$, já que \vec{Y}_L está incluído em \vec{Y} , e $\Pi(\vec{Y})$ é dado a partir da equação (3.31). O princípio de energia total estacionária pode ser aplicado à equação (4.5) para encontrar as equações do movimento como:

$$\delta\Pi_L = \delta\Pi + \delta\mathbb{L} = 0 \quad (4.6)$$

Nesta, $\delta\Pi$ foi detalhado nas seções anteriores e inclui as variações da energia de deformação, energia cinética, dissipação e forças externas aplicadas em relação as posições atuais \vec{Y} .

Para completar a variação de $\Pi_L(\vec{Y}, \vec{L})$ é preciso resolver a parcela $\delta\mathbb{L}$. Isso é feito em relação à $\vec{L} = \{\vec{\lambda}, s_p\}$ e a $\vec{Y}_L = \{\bar{Y}_i^\alpha, \hat{Y}_i^P\}$ como:

$$\delta\mathbb{L} = \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\bar{Y}_L} \delta\bar{Y}_{(L)} + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\vec{L}} \delta\vec{L} = \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\bar{Y}_i^\alpha} \delta\bar{Y}_i^\alpha + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\hat{Y}_i^P} \delta\hat{Y}_i^{(P)} + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial\lambda_i} \delta\lambda_i + \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial s_p} \delta s_{(p)}, \quad (4.7)$$

sendo, α os nós do elemento ativo da trajetória e P o nó com a ligação deslizante. Nota-se que a como a variável \bar{Y}_L pertence à \vec{Y} essa variação resultará em termos a serem adicionados ao vetor de forças internas e a matriz Hessiana durante o processo de solução. Nesse ponto é importante mencionar que a literatura consultada que lida com conexões sobre elementos flexíveis utiliza ξ_p no lugar de s_p como variável principal. No entanto, o uso da variável curvilínea torna mais simples a determinação das forças e massa presentes nas ligações.

Para juntas prismáticas, desenvolvendo-se as derivadas, é possível se escrever de forma aberta:

$$\delta\mathbb{L} = \vec{\Lambda} \cdot \delta\{\bar{Y}_L, \vec{L}\} = \left\{ \delta\bar{Y}_i^\alpha \delta\hat{Y}_i^P \delta\hat{Y}_i^k \delta\lambda_i \delta s_p \right\} \left\{ \begin{array}{c} -\lambda_i \phi_\alpha(\xi_p) \\ \lambda_i \\ 0_k \\ \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_p^0 \delta_{i3} \\ -\lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell / J_p \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

Nessa expressão, os nós do elemento deslizante, exceto o nó deslizante, são representados pelo índice k de modo a simplificar a montagem do vetor de “forças de Lagrange” $\vec{\Lambda}$.

Na equação (4.8) foi utilizada a seguinte propriedade:

$$ds_p = J(\xi_p) d\xi \quad \text{ou} \quad \frac{ds_p}{d\xi} = J(\xi_p), \quad (4.9)$$

na qual o jacobiano da transformação é dado por:

$$J(\xi_p) = J_p = \sqrt{[\phi_{\ell,\xi}(\xi_p) \bar{Y}_1^\ell]^2 + [\phi_{\ell,\xi}(\xi_p) \bar{Y}_2^\ell]^2} \quad (4.10)$$

A nova equação do movimento com as restrições cinemáticas, respeitando a correspondência dos graus de liberdade, é reescrita a partir da equação (3.40) como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{\Lambda} = \vec{0}, \quad (4.11)$$

onde, se reúnem todas as forças externas no vetor \vec{F} , $\dot{\vec{Y}}$ é o vetor de velocidade, $\ddot{\vec{Y}}$ é a aceleração da estrutura, \mathbf{M} e \mathbf{D} são as matrizes de massa e amortecimento viscoso, respectivamente.

Para a junta cilíndrica utiliza-se do mesmo procedimento, lembrando-se que o ângulo relativo é livre, chega-se a:

$$\delta \mathbb{L} = \vec{\Lambda} \cdot \delta \left\{ \vec{Y}_L, \vec{L} \right\} = \left\{ \delta \bar{Y}_i^\alpha \quad \delta \hat{Y}_i^P \quad \delta \hat{Y}_i^k \quad \delta \lambda_i \quad \delta s_P \right\} \left\{ \begin{array}{c} -\lambda_i \phi_\alpha(\xi_P) \\ \lambda_i \\ 0_k \\ \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \\ -\lambda_i \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \end{array} \right\} \quad i = 1, 2 \quad (4.12)$$

4.2 Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal

O conjunto de equações de equilíbrio dinâmico (4.11) também pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson e com a utilização das aproximações de Newmark conforme se apresenta a seguir.

O vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g}_L é escrito como:

$$\vec{g}_L(\vec{Y}, \vec{L}) = \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{\Lambda} = \vec{0} \quad (4.13)$$

Para um instante de tempo arbitrário t_{s+1} , utilizando-se das expressões (3.50) e (3.51) para integração temporal, chega-se a uma equação análoga à obtida no capítulo 3 para o vetor de desbalanceamento:

$$\begin{aligned} \vec{g}_L(\vec{Y}_{s+1}, \vec{L}_{s+1}) &= \vec{F}_{s+1}^{\text{int}} - \vec{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{T}_s \\ &+ \mathbf{D} \cdot \vec{R}_s + \frac{\gamma \mathbf{D}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \gamma \Delta t \mathbf{D} \cdot \vec{T}_s + \vec{\Lambda}_{s+1} = \vec{0} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Com as contribuições do instante de tempo anterior, \vec{T}_s e \vec{R}_s , dadas conforme a equação (3.53). Para um vetor solução tentativa $\left\{ \vec{Y}_{s+1}^0, \vec{L}_{s+1}^0 \right\}$ a igualdade da equação (4.14) não se mantém, portanto, uma expansão em série de Taylor até a primeira ordem e a nulidade é imposta de onde se chega à:

$$\mathbf{H}_L \cdot \{\Delta \vec{Y}_{S+1}, \Delta \vec{L}_{S+1}\}^t = -\vec{g}_L(\vec{Y}_{S+1}^0, \vec{L}_{S+1}^0) \quad (4.15)$$

Determinando-se $\{\Delta \vec{Y}_{S+1}, \Delta \vec{L}_{S+1}\}^t$ pode-se calcular o novo vetor tentativa para $\{\vec{Y}_{S+1}, \vec{L}_{S+1}\}^t$ como:

$$\begin{Bmatrix} \vec{Y}_{S+1} \\ \vec{L}_{S+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{Y}_{S+1}^0 \\ \vec{L}_{S+1}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y}_{S+1} \\ \Delta \vec{L}_{S+1} \end{Bmatrix}, \quad (4.16)$$

até que se respeite uma determinada tolerância, tal como indicado no capítulo 3.

Com a introdução das restrições cinemáticas, tanto a matriz Hessiana quanto o vetor tentativa contêm as contribuições usuais dos nós conectados, e também dos nós desconectados, além das novas contribuições de s_p e λ_i . Entretanto, a determinação do valor de s_p não é suficiente para atualizar $\vec{\Lambda}$ e a matriz Hessiana já que a função $\xi_p = \xi(s_p)$ não é escrita de maneira explícita. A solução desta etapa é descrita no item seguinte.

A nova matriz Hessiana \mathbf{H}_L é obtida pela segunda derivada do funcional de energia restrito $\Pi_L(\vec{Y}, \vec{L})$ em relação aos parâmetros nodais e as novas variáveis s_p e λ_i . Essa matriz pode ser obtida pela soma de duas parcelas como:

$$\mathbf{H}_L = \nabla \vec{g}_L = \mathbf{H} + \mathbf{H}_L^{\text{con}}, \quad (4.17)$$

sendo \mathbf{H} a matriz Hessiana apresentada no capítulo 3 para o pórtico com ligações monolíticas e $\mathbf{H}_L^{\text{con}}$ a parcela relativa à conexão entre os graus de liberdade dos elementos obtida por:

$$\mathbf{H}_L^{\text{con}} = \frac{\partial \vec{\Lambda}}{\partial \{\vec{L}, \vec{Y}_L\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \vec{Y}_L \partial \vec{Y}_L} & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \vec{Y}_L \partial \vec{L}} \\ \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \vec{L} \partial \vec{Y}_L} & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \vec{L} \partial \vec{L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

ou, escrita de forma a identificar as variáveis correspondentes:

$$\mathbf{H}_L^{\text{con}} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y}_L \\ \Delta \vec{L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^t & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y}_L \\ \Delta \vec{L} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Na qual $\Delta \vec{Y}_L = \{\Delta \vec{Y}_i^\alpha, \Delta \hat{Y}_i^p, \Delta \hat{Y}_i^k\}$ e $\Delta \vec{L} = \{\Delta \lambda_i, \Delta s_p\}$. Os termos de $\mathbf{H}_L^{\text{con}}$ são dados por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\phi_\alpha(\xi_P) & -\lambda_i \phi_{\alpha, \xi}(\xi_P) / J_P \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P \\ -\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P & H_{s_p s_p} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

com,

$$\mathbf{H}_{s_p s_p} = \lambda_i \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^4 \phi_{n, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^n \phi_{m, \xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^m - \lambda_i \phi_{\ell, \xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \left(\frac{1}{J_P} \right)^2 \quad (4.21)$$

Nestas, a notação indicial é utilizada. O índice i corresponde as direções (1, 2 e 3 para juntas prismáticas), k também representa as direções (1 e 2), e, ℓ , m e n referem-se aos nós do elemento da trajetória ativo. Em juntas cilíndricas i assume somente 1 ou 2. Os termos nulos da matriz $\mathbf{H}_L^{\text{con}}$ já foram calculados na matriz \mathbf{H} e correspondem à segunda derivada das energias de deformação, energia cinética e dissipação em relação as posições e ângulos nodais dos elementos conectados (elemento deslizando e ativo da trajetória).

4.2.1 Comentários sobre a integração temporal

Do que foi desenvolvido nos itens anteriores, deve-se observar que a natureza da equação do movimento com a introdução das restrições por meio de multiplicadores de Lagrange, equação (4.11), é diferente da equação para o problema sem restrições obtida no capítulo anterior, equação (3.40).

Ambos são conjuntos de equações diferenciais não lineares de segunda ordem no tempo. Entretanto, as restrições impostas pelos multiplicadores introduzem equações algébricas ao sistema, relativas as novas variáveis s_p e λ_i .

Esse conjunto de equações diferenciais e algébricas possui características que tornam sua solução numérica mais complexa, podendo apresentar instabilidades e altas frequências de oscilação originadas do método numérico escolhido para sua integração temporal conforme advertem os trabalhos de Cardona e Geradin (1989), Bauchau, Damilano e Theron (1995), Bauchau (1998), Jelenić e Crisfield (2001), Laulusa e Bauchau (2008) e Bauchau e Laulusa (2008).

As equações do movimento de sistemas estruturais flexíveis possuem a peculiaridade de serem rígidas, isto é, para elas, incrementos de tempo menores são necessários para se obter estabilidade nos resultados, embora para precisão da resposta incrementos maiores fossem possíveis (BOYCE; DIPRIMA, 2001). De um ponto de vista físico, a rigidez das equações está associada às altas frequências de oscilação dos graus de liberdade existentes em um sistema mecânico flexível, as quais se distribuem em uma ampla faixa de valores.

Para o caso das equações com restrições introduzidas por meio de multiplicadores de Lagrange há uma dificuldade adicional: como as novas variáveis do problema não estão associadas à uma massa, seus autovalores geram frequências de oscilação com valores infinitos (GÉRADIN; CARDONA, 2001).

Dessa maneira, o método numérico utilizado para solução do sistema mecânico com restrições deve ser capaz de lidar com estas particularidades. Em relação à aplicabilidade do método de Newmark na solução de sistemas de equações diferenciais e algébricas, Gêradin e Cardona (2001) provam que o método apresenta instabilidade fraca, para seus parâmetros usuais que não introduzem amortecimento numérico (regra do trapézio), em problemas com restrições. Entretanto, para qualquer valor de passo de tempo, essa instabilidade se propaga e torna o método incondicionalmente instável em períodos de análise mais longos.

Uma solução seria a adoção de parâmetros que introduzissem amortecimento numérico de modo a filtrar as altas frequências de vibração e reestabelecer a estabilidade do método. Todavia, as baixas frequências, que são importantes à solução, também são dissipadas, o que se traduz em uma rápida perda de energia do sistema e, assim, alteração dos resultados das análises por diminuir a ordem de precisão do método (BAUCHAU; DAMILANO; THERON, 1995; BAUCHAU, 1998).

Diversas outras alternativas são apresentadas na literatura para contornar esses problemas como o método α (HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977; HILBER; HUGHES, 1978), o método α generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993), algoritmos formulados para conservar a energia do sistema (LEYENDECKER; MARSDEN; ORTIZ, 2008; SIMO; TARNOW; WONG, 1992; SIMO; WONG, 1991) e outros especificamente desenvolvidos para decair a energia do sistema (BAUCHAU; THERON, 1996a, 1996b). Uma discussão a respeito dessas alternativas pode ser encontrada no trabalho de Gêradin e Cardona (2001).

Neste trabalho o método de Newmark foi adotado para o problema com restrições, apesar das suas limitações, por ser possível sua imediata extensão a partir da formulação de pórticos planos com ligações monolíticas e rotuladas apresentada por Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014). Além disso, o estudo específico de outros integradores temporais e de suas próprias limitações foge do escopo deste trabalho, apesar de abrir campo para pesquisa futura.

4.3 Variáveis Curvilínea e Adimensional

A definição da variável curvilínea $s_p = s(\xi_p)$, que é determinada diretamente pela atualização das variáveis, equação (4.15), no procedimento de solução do método de Newton-Raphson, é de valiosa importância para aplicações futuras, tal como a consideração de atrito seco.

Entretanto, o cálculo da força interna $\vec{\Lambda}$, equações (4.8) ou (4.12), e da matriz Hessiana, equação (4.19), associado à técnica dos multiplicadores de Lagrange é dependente da variável adimensional $\xi_p = \xi(s_p)$, que não é explicitamente determinada. Portanto, para sua obtenção, é preciso calcular ξ_p de modo iterativo para uma posição tentativa. Isso é feito definindo-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$r_i(\xi_p) = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell = 0_i \quad i = 1, 2, \quad (4.22)$$

o qual é exatamente a restrição cinemática presente na equação (4.4), obviamente com valores conhecidos de \hat{Y}_i^P e \bar{Y}_i^ℓ , e representa, para as duas direções coordenadas, o resíduo $r_i(\xi_p)$ quando do processo iterativo ou o valor nulo para a solução.

Como esse sistema é sobredeterminado, pode-se aplicar uma técnica de mínimos quadrados para sua solução (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Para tanto, a seguinte função objetivo é definida:

$$p(\xi_p) = \frac{1}{2} [r_i(\xi_p) r_i(\xi_p)] = 0 \quad (4.23)$$

Esta pode ser expandida em série de Taylor de primeira ordem como:

$$p(\xi_p) \cong p(\xi_p^0) + \nabla p(\xi_p^0) \Delta \xi_p = 0, \quad (4.24)$$

sendo ξ_p^0 um valor tentativa conhecido previamente. Como a técnica dos mínimos quadrados se baseia em minimizar a função objetivo para encontrar o menor valor do resíduo, é necessário que $\nabla p(\xi_p) = 0$. A partir da expressão (4.24) tem-se:

$$\nabla p(\xi_p) = \nabla p(\xi_p^0) + \nabla^2 p(\xi_p^0) \Delta \xi_p = 0 \quad (4.25)$$

Resulta desta expressão o método de Newton aplicado à um problema de minimização ao se determinar $\Delta \xi_p$ por:

$$\Delta \xi_p = -\frac{\nabla p(\xi_p^0)}{\nabla^2 p(\xi_p^0)}, \quad (4.26)$$

e atualizar-se a variável incógnita por $\xi_p = \xi_p^0 + \Delta \xi_p$ até que $|\Delta \xi_p / \xi_p^0| \leq TOL$ para uma tolerância TOL previamente estabelecida. Os termos da equação (4.26) são dados por:

$$\nabla p(\xi_p) = \phi_{\ell, \xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell \left[\phi_m(\xi_p) \bar{Y}_i^m - \hat{Y}_i^P \right] \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 p(\xi_p) = \phi_{\ell, \xi\xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell \left[\phi_m(\xi_p) \bar{Y}_i^m - \hat{Y}_i^P \right] + \left[\phi_{\ell, \xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^\ell \right]^2, \quad (4.28)$$

com somatório em relação aos índices ℓ e m para os nós do elemento ativo da trajetória nas duas direções coordenadas i .

Conhecido o valor da coordenada adimensional ξ_p para um valor de s_p , implícito nos valores de \hat{Y}_i^P e \bar{Y}_i^ℓ , o processo global de solução prossegue conforme descrito pelas equações (4.15) e (4.16). Nota-se que, conhecido o valor de ξ_p , a transição entre elementos da trajetória é direta.

4.4 Exemplos

Neste item são apresentados diversos exemplos de aplicação da formulação proposta para ligações deslizantes em elementos de pórtico plano não linear geométrico com a formulação lagrangeana total exposta.

4.4.1 Exemplo 1 – Pórtico simples com junta prismática

Esta é uma estrutura tipicamente utilizada na Engenharia Civil sendo constituída por elementos pré-moldados. Ela consiste em um pórtico plano que possui uma junta prismática (engaste móvel interno) na ligação entre um pilar e uma viga como ilustrado na Figura 31. A estrutura está submetida à uma carga concentrada $P = 1000 N$ aplicada no meio do vão e a um momento fletor $M = 500 N.m$ na extremidade em balanço. A seção transversal de todas as

barras é retangular com altura $h_0 = 0,6\text{ m}$ e base $b_0 = 0,2\text{ m}$. O módulo de elasticidade longitudinal adotado é $E = 20,0\text{ GPa}$ e o módulo transversal é $G = 10,0\text{ GPa}$. Foram utilizados 8 elementos finitos de aproximação cúbica para modelar a viga e 3 para cada pilar.

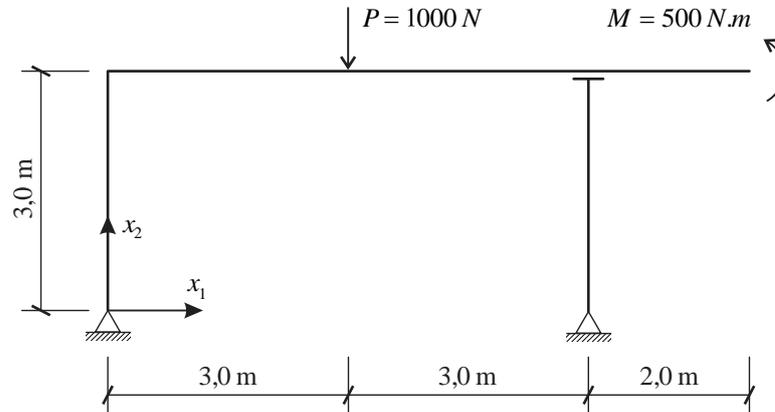


Figura 31 – Pórtico plano com junta prismática

Os esforços internos são ilustrados na Figura 32 e, para este nível de carga, coincidem com a resposta analítica linear obtida por uma análise de equilíbrio.

Para ilustrar o aspecto não linear geométrico da formulação as dimensões da seção transversal são reduzidas para uma altura $h_0 = 0,06\text{ m}$ e base $b_0 = 0,02\text{ m}$, que corresponde a 0,01% do valor inicialmente adotado para a rigidez flexional e 1,0% da rigidez axial inicial. As configurações finais para ambas seções transversais são comparadas na Figura 33. Conforme esperado, os deslocamentos para a nova seção transversal são muito maiores do que para a seção inicial. Entretanto, o máximo valor do momento fletor, que continua no mesmo ponto, agora é igual a $-1363,47\text{ N.m}$, diferindo 22,1% do valor inicial. Esses resultados demonstram a grande diferença obtida de uma análise não linear forte mesmo para uma estrutura isostática.

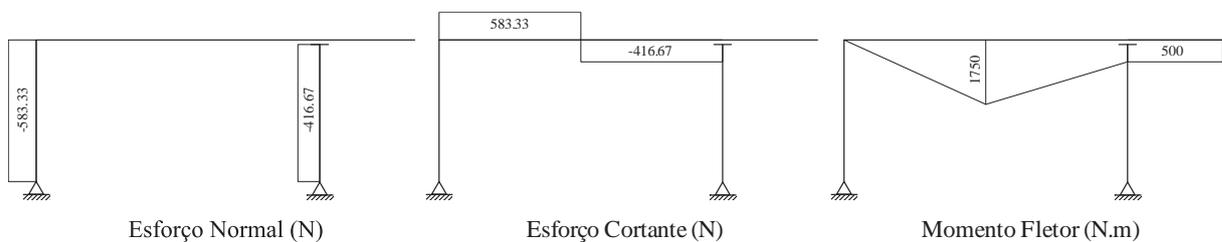


Figura 32 – Diagramas de esforços internos

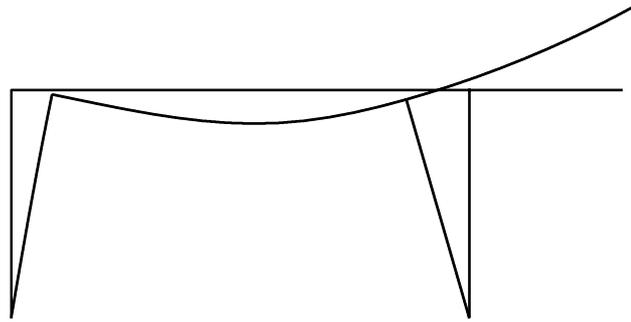


Figura 33 – Configurações finais para ambas seções transversais (escala real)

4.4.2 Exemplo 2 – Carga móvel sobre viga biapoiada flexível

Neste exemplo apresenta-se uma carga constante $P = 628,48 \text{ N}$ que se move horizontalmente com uma velocidade v por sobre uma viga simplesmente apoiada de 4,0 m de comprimento conforme a Figura 34.

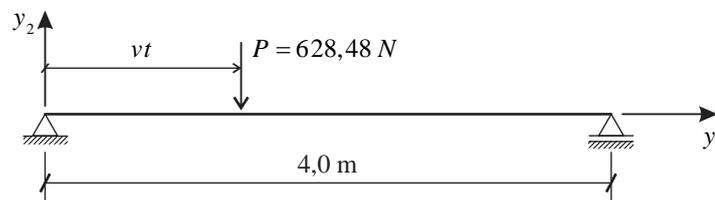


Figura 34 – Carga móvel com velocidade constante sobre viga flexível

A movimentação da carga é idealizada por meio de um elemento finito orientado verticalmente com deslocamento imposto na direção da velocidade e em contato com a viga por meio de uma ligação deslizante. A carga concentrada é, então, aplicada ao nó que possui a ligação. Considera-se este elemento sem massa e com comprimento de 0,01% do comprimento da viga.

A viga possui seção quadrada de lado 0,10 m, massa específica de $8000,0 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidade longitudinal de 207,0 GPa e módulo transversal de 103,5 GPa. Esta foi modelada com 26 elementos finitos cúbicos sendo que se concentram seis elementos finitos em um trecho central com extensão de 0,10 m. Apesar de não ser necessária tal discretização para obtenção dos deslocamentos (Figura 35) ela foi adotada de modo a se obter maior precisão dos esforços internos (Figura 36 e Figura 37) do nó no meio do vão.

Os dados desse problema foram adotados tal qual o exemplo apresentado por Hong e Ren (2011) e comparados com a solução analítica do problema da carga móvel apresentada por Frýba (1972). São analisadas três velocidades distintas: $0,2v_{cr}$, $0,4v_{cr}$ e $1,0v_{cr}$, sendo $v_{cr} = 115,33\text{ m/s}$ a velocidade crítica que impõe deslocamento máximo durante o percurso da carga na viga. A resposta ilustrada nas figuras é coincidente com a solução analítica demonstrando, assim, a consistência da formulação proposta.

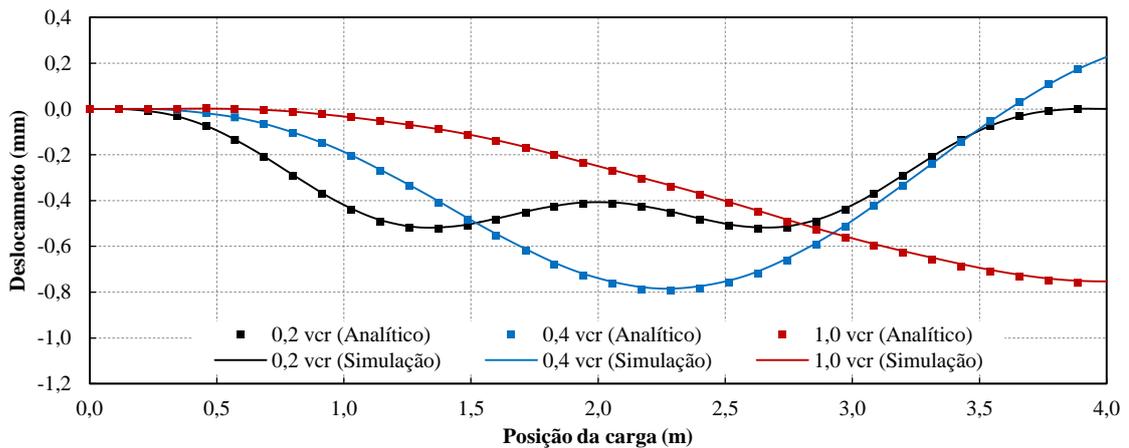


Figura 35 – Deslocamento vertical no meio vão

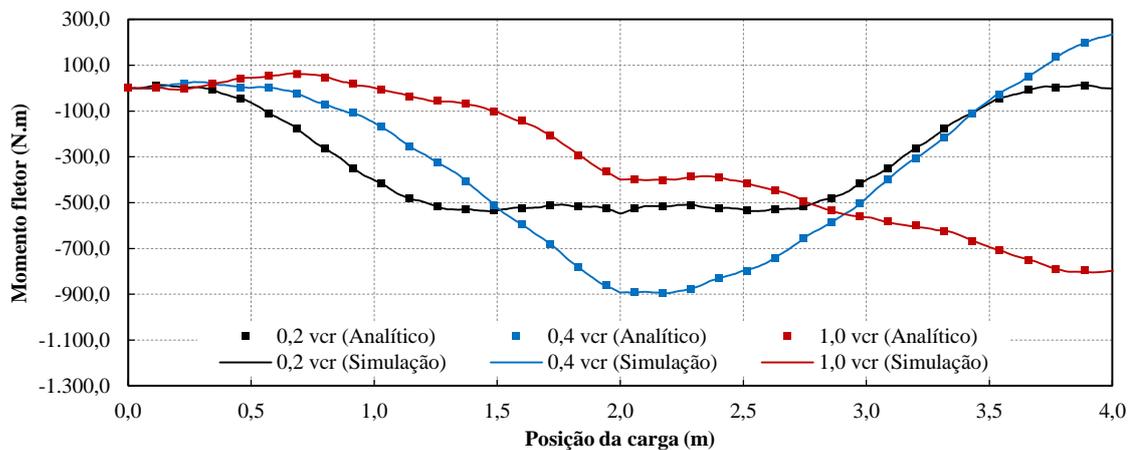


Figura 36 – Momento fletor no meio vão

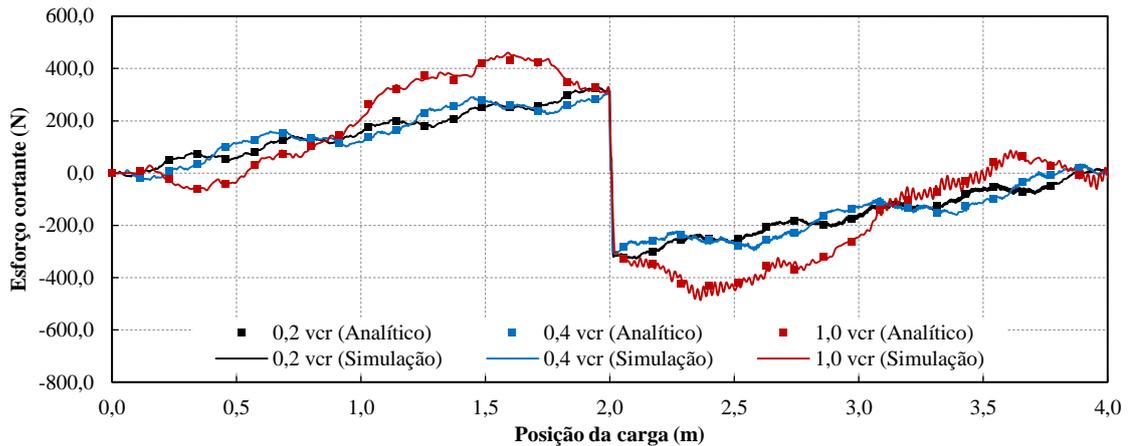


Figura 37 – Esforço cortante no meio vão

4.4.3 Exemplo 3 – Flambagem de uma estrutura tracionada

A estrutura apresentada na Figura 38 é um exemplo interessante de bifurcação de equilíbrio em tração. Ela consiste em duas barras flexíveis de comprimento $L = 0,25\text{ m}$, inicialmente alinhadas na direção horizontal, às quais é aplicado um deslocamento horizontal u e medida a força de tração reativa F . Estas barras são unidas por meio de juntas prismáticas à uma barra rígida com comprimento suficiente para permitir o deslocamento da estrutura. Para fins de simulação numérica foi adotado comprimento igual a 10,0 m.

A solução analítica e validação experimental do fenômeno da flambagem em tração foi apresentada por Zaccaria et al. (2011). Para simulação numérica a seção transversal adotada para as barras flexíveis é retangular com altura $h_0 = 1,0\text{ mm}$ e base $b_0 = 25,0\text{ mm}$. O módulo de elasticidade longitudinal adotado é $\mathbb{E} = 200,0\text{ GPa}$ e o módulo transversal é $\mathbb{G} = 100,0\text{ GPa}$. Para barra rígida adota-se seção quadrada de lado igual a 1,0 m e as mesmas propriedades do material. Cada uma das três barras foram modeladas com quatro elementos finitos de aproximação cúbica.

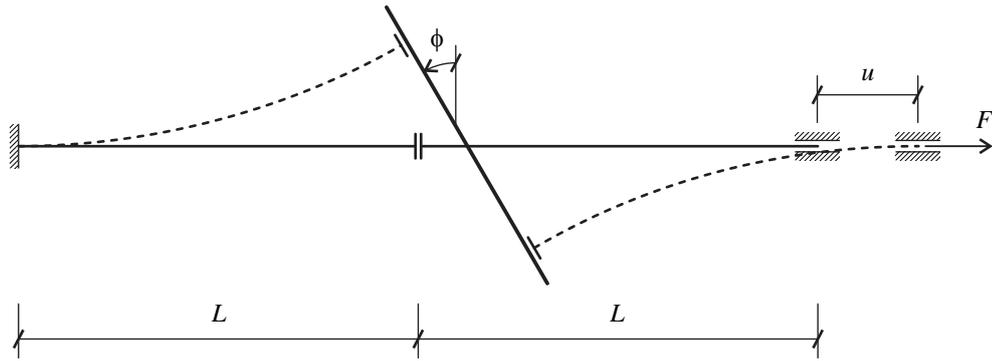


Figura 38 – Configuração deformada da estrutura

Para que se encontre a solução não trivial do problema, é criada uma perturbação ao sistema inclinando-se a barra rígida na configuração inicial com um ângulo ϕ_0 . Diversos valores para o ângulo inicial foram adotados para mostrar a convergência para a solução analítica com ângulos cada vez menores. A Figura 39 mostra a evolução do ângulo de inclinação da barra rígida com a força de tração adimensional $4FL^2 / EI\pi^2$. Já a Figura 40 ilustra a trajetória de equilíbrio para o deslocamento imposto à extremidade direita contra a mesma força de tração adimensional.

A partir dos resultados fica comprovada a capacidade da formulação proposta para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas planas com apoios deslizantes.

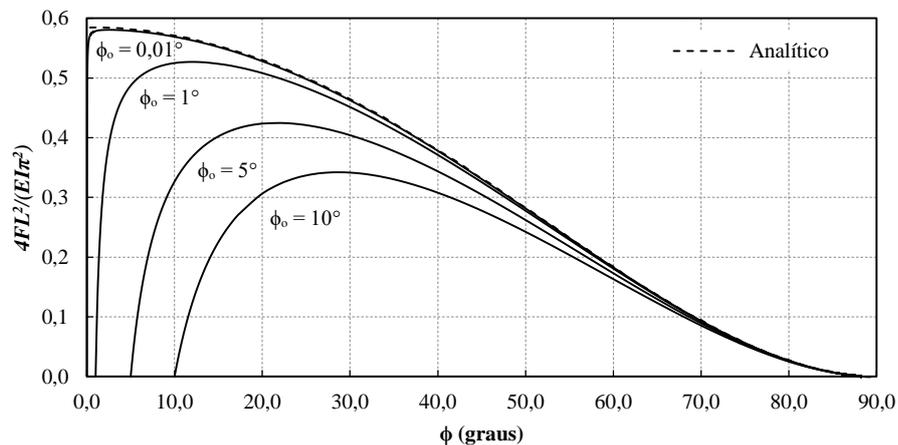


Figura 39 – Evolução do ângulo de inclinação da barra rígida

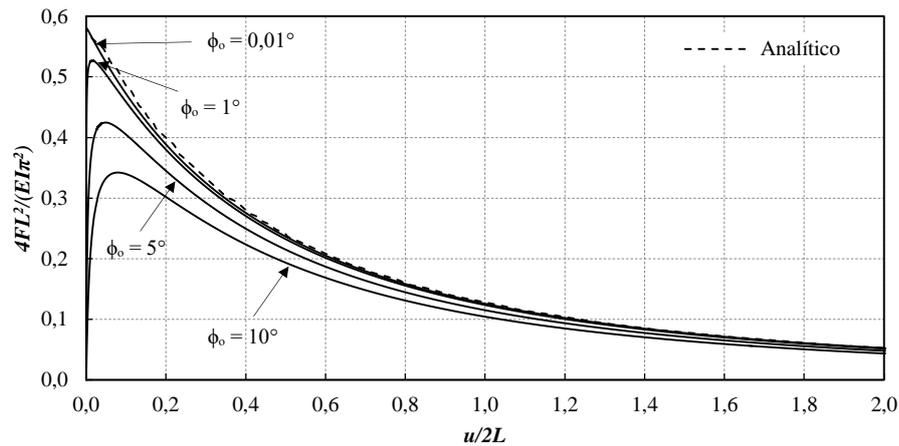


Figura 40 – Evolução do deslocamento horizontal do apoio direito

4.4.4 Exemplo 4 – Linhas de influência de uma ponte – carga móvel

Este exemplo é apresentado para demonstrar a capacidade da formulação proposta para as ligações deslizantes na determinação das linhas de influência de qualquer seção transversal de estruturas genéricas. Ressalta-se que em aplicações não lineares o princípio da superposição de efeitos não é válido para as linhas de influência nem sua envoltória de modo que deve-se resolver a estrutura separadamente para cada carregamento. Contudo, quando da ocorrência de pequenos deslocamentos a superposição dos resultados é recuperada.

Particularmente para este exemplo, calculam-se as linhas de influência para a seção transversal central da ponte, ponto P , sujeita a um trem-tipo conforme ilustra a Figura 41. O veículo é modelado por um pórtico com 4,0 m de comprimento e 1,0 m de altura. O contato entre o veículo e a ponte é modelado por duas juntas cilíndricas que permitem seu movimento relativo. Uma força vertical de 15 kN é aplicada no meio do vão do pórtico móvel e um deslocamento horizontal $u = 26,0\text{ m}$, dividido em 500 passos, é imposto à sua aresta esquerda. A Figura 41 descreve a geometria da ponte e do veículo para a configuração inicial.

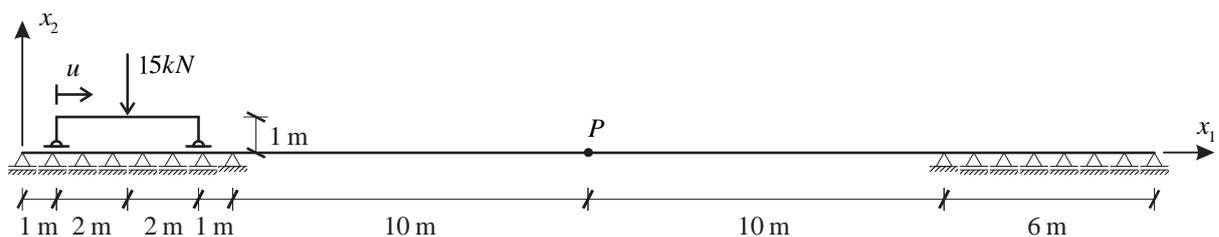


Figura 41 – Configuração inicial do veículo e geometria

Uma seção retangular de base $b_0 = 1,0\text{ m}$ e altura $h_0 = 2,0\text{ m}$ é adotada para a ponte e uma seção transversal quadrada de lado $b_0 = h_0 = 0,1\text{ m}$ é adotada para o veículo. O módulo de elasticidade longitudinal e transversal da ponte são $\mathbb{E} = 20,0\text{ GPa}$ e $\mathbb{G} = 10,0\text{ GPa}$, respectivamente. Para o veículo as propriedades do material são dez vezes maiores. Para modelar o pórtico que representa o veículo foram utilizados seis elementos finitos cúbicos e 34 elementos para a ponte. Como o objetivo é avaliar os esforços internos dois elementos finitos de 1,0 mm de comprimento foram colocados em ambos lados do ponto P para evitar a passagem de cargas concentradas pelo seu domínio. Isso é necessário dada a descontinuidade dos esforços internos e a natureza contínua das funções de forma, inerentes ao método dos elementos finitos.

A Figura 42 apresenta a linha de influência de deslocamento vertical para o meio vão da ponte. Como esperado, o maior deslocamento de $-0,55\text{ mm}$ ocorre quando o veículo está no centro da ponte. A Figura 43 ilustra a linha de influência de momento fletor e a Figura 44 ilustra a linha de influência de esforço cortante para a mesma seção. Conforme se esperava, os valores máximos dos esforços ocorrem quando uma das juntas cilíndricas (rodas) está sobre o ponto P .

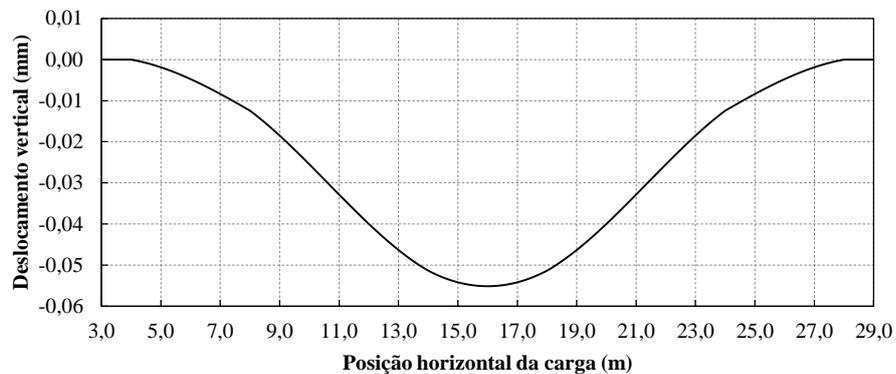


Figura 42 – Linha de influência de deslocamento vertical do meio vão da ponte

Como se nota, os resultados representam o comportamento esperado e não existe limitação para a geometria da ponte ou para o número de rodas do veículo na formulação apresentada, revelando, assim, a versatilidade da técnica para aplicações práticas.

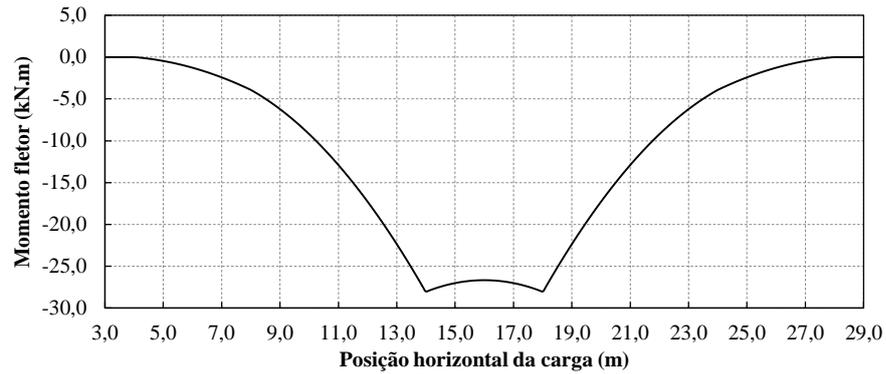


Figura 43 – Linha de influência de momento fletor do meio vão da ponte

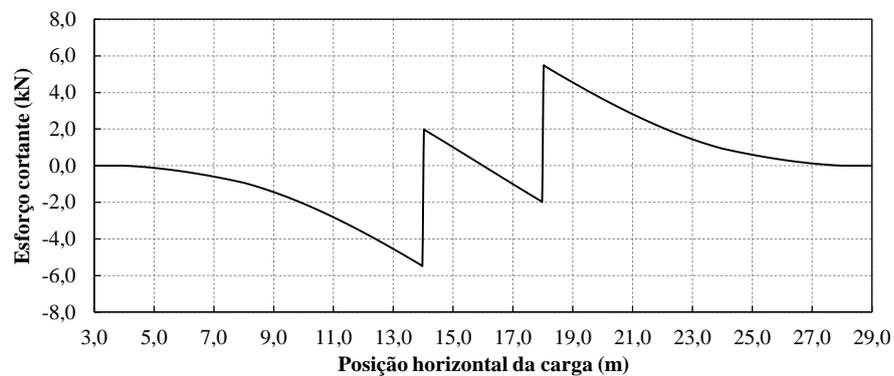


Figura 44 – Linha de influência de esforço cortante do meio vão da ponte

4.4.5 Exemplo 5 – Mecanismo gerador de curvas

Outro uso interessante para ligações deslizantes está em mecanismo capazes de descrever algum tipo de geometria prévia, como máquinas que cortam rochas ou chapas metálicas nas indústrias civil e mecânica. Tais mecanismos são descritos em livros textos clássicos como Shigley e Uicker (1981) e Norton (2011), dentre outros. O modelo numérico desse tipo de mecanismo é comumente realizado em uma versão dinâmica. Entretanto, se a intenção é ajustar a geometria a ser descrita, uma análise estática é mais adequada. A Figura 45 descreve a configuração inicial de uma estrutura com uma junta prismática que liga um braço flexível de 6,0 m de comprimento a uma barra suporte de 1,0 m de comprimento. Um giro ψ é prescrito à alavanca que se liga ao braço por meio de uma rótula. A rotação da alavanca impõe o movimento do mecanismo conforme a Figura 46.

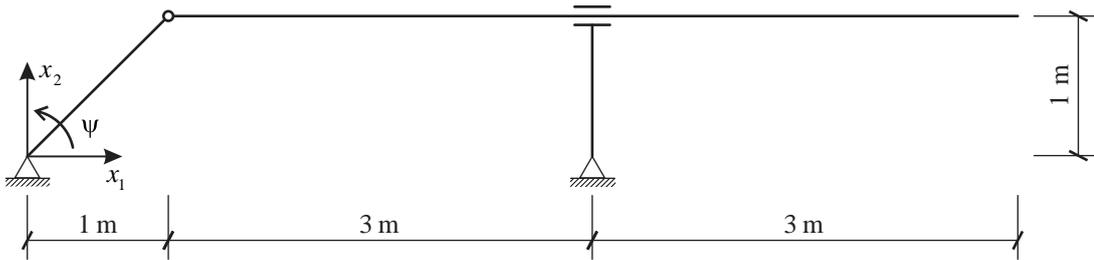


Figura 45 – Configuração inicial e geometria

Tendo em vista os graus de liberdade restritos e as condições de contorno, este é um sistema articulado isostático não flexível. Conseqüentemente, durante a imposição do movimento quase estático não se espera obter tensões ou deformações nas barras. Assim, as dimensões da seção transversal e as propriedades do material das barras envolvidas podem ter quaisquer valores. De maneira a obter uma solução numérica, entretanto, adota-se para todos os elementos seção quadrada de lado igual a 0,1 m, módulo de elasticidade longitudinal $\mathbb{E} = 2,0 \text{ GPa}$ e módulo transversal $\mathbb{G} = 1,0 \text{ GPa}$. Dezessete elementos finitos de aproximação cúbica são empregados na discretização.

A Figura 46 mostra a trajetória da extremidade livre do braço para uma revolução completa da alavanca e algumas configurações selecionadas são apresentadas na Figura 47.

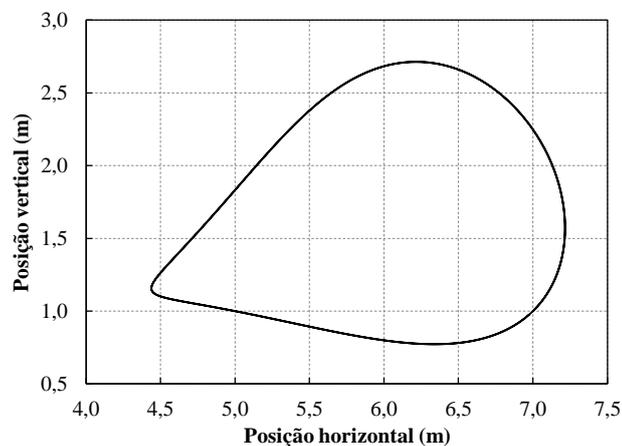


Figura 46 – Trajetória do extremo livre do braço

O movimento do mecanismo foi dividido em 250 passos e menos de quatro iterações são necessárias para convergência em cada passo. Deste modo, conclui-se que a formulação apresentada funciona bem e pode ser aplicada em análises gerais.

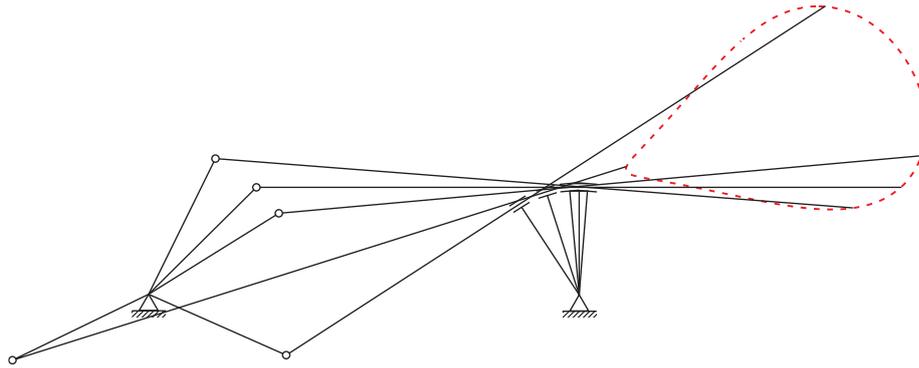


Figura 47 – Configurações selecionadas e trajetória do extremo livre do braço

4.4.6 Exemplo 6 – Trajetória de equilíbrio de um arco abatido com manivela

Um arco abatido com uma manivela que impõe seu movimento é apresentado nesse exemplo. O arco é fixo por apoios que limitam os deslocamentos, mas não a rotação, e possui vão $L=10,0m$ e altura $h=1,0m$. A manivela é submetida a um giro $\psi = 1,8rad$ dividido em 1000 passos. A ligação entre a alavanca e o arco é realizada por meio de uma junta cilíndrica, tal como ilustra a Figura 48. Na configuração inicial as dimensões indicadas na Figura 48 são: $H = 2,4606m$, $d_1 = 1,6178m$ e $d_2 = 0,5523m$.

Todos os componentes da estrutura são flexíveis e possuem seção transversal quadrada de lado 10,0 cm. Doze elementos finitos de aproximação cúbica foram utilizados para modelar o arco, que possui módulo de elasticidade longitudinal $E = 200,0GPa$. A alavanca é discretizada com cinco elementos finitos cúbicos e tem módulo de elasticidade dez vezes maior do que o arco. O módulo de elasticidade transversal é adotado como metade do valor longitudinal para todos os elementos.

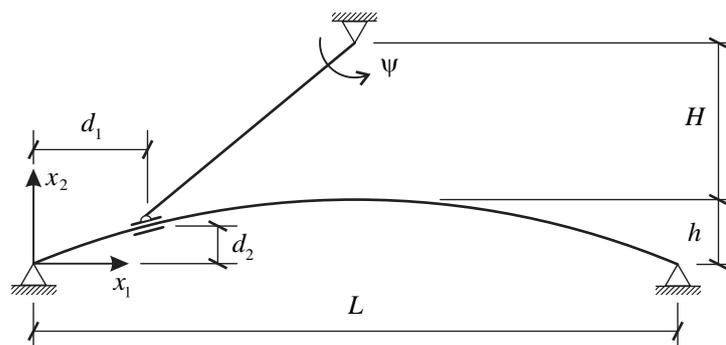


Figura 48 – Configuração inicial da estrutura

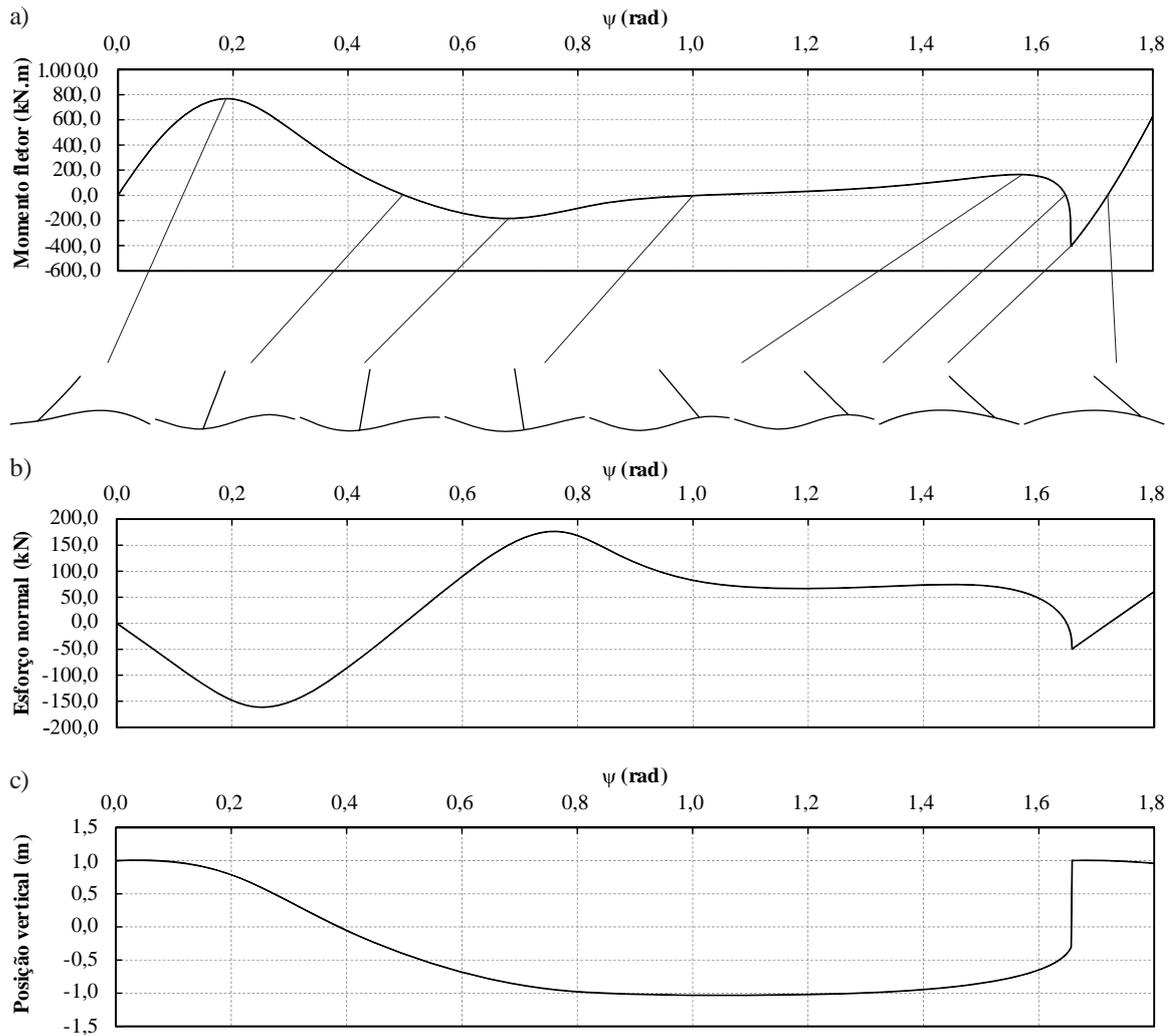


Figura 49 – Trajetória de equilíbrio: a) momento fletor reativo e configurações da estrutura, b) esforço normal do no ponto médio da alavanca, c) posição vertical do ponto central do arco

A evolução do momento fletor reativo necessário para movimentar a extremidade fixa da alavanca é apresentado na Figura 49a) ao lado de algumas configurações deformadas do sistema. A evolução do esforço normal da alavanca é apresentada na Figura 49b) e a posição vertical do ponto central do arco é ilustrada na Figura 49c). Nota-se a partir dessas curvas a ocorrência de instabilidades por pontos limites, indicadas pela mudança de sinal do esforço normal e do momento fletor. Nessas posições o arco assume um configuração de equilíbrio indiferente.

Além disso, a partir da descontinuidade das curvas para rotação $\psi = 1,656 \text{ rad}$ é clara a existência do fenômeno do *snap-back*. Todavia, como é sabido, não é possível descrever o equilíbrio para esta situação utilizando o método de Newton-Raphson. O *snap-back* acontece nesse caso porque a forma instável do arco não é controlada. Para descrever esta parcela da curva seria necessário o uso de um método de comprimento de arco na solução do sistema, o

que está além do escopo desse trabalho. Os resultados, as potencialidades da formulação proposta e sua consistência na avaliação do comportamento estrutural são evidentes.

4.4.7 Exemplo 7 – Mecanismo de retorno rápido

Apresenta-se um clássico mecanismo de retorno rápido utilizado amplamente em diversas máquinas como ilustrado na Figura 50. A configuração e as propriedades deste mecanismo foram adotadas tal como em Bauchau (2000). O mecanismo é composto por um braço AB de 1,00 m de comprimento que gira em torno do apoio B e é ligado a uma barra NA de 0,25 m de comprimento. O movimento do sistema é imposto por uma manivela RS de 0,20 m de comprimento que gira em torno do apoio R com uma velocidade angular constante $\Omega = 5\pi \text{ rad} / \text{s}$ e desliza sobre o braço por meio de uma junta cilíndrica localizada no nó S.

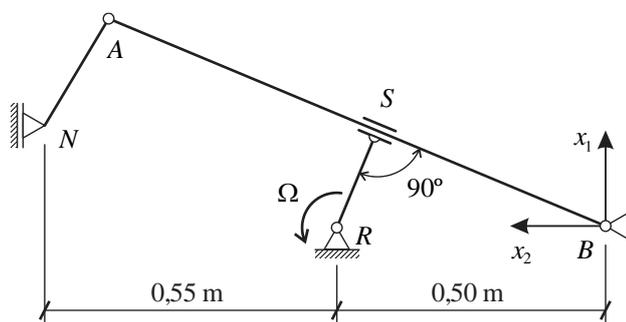


Figura 50 – Mecanismo de retorno rápido na configuração inicial

Todas as barras possuem seção transversal quadrada de lado 6,0 cm e massa específica de $1724,82 \text{ kg/m}^3$ e são modeladas com elementos finitos de aproximação cúbica. O braço é modelado com 24 elementos finitos e possui módulo de elasticidade longitudinal igual a 47,04 GPa. As demais barras são modeladas com 2 elementos finitos e possuem módulo de elasticidade longitudinal igual a 47,04.106 GPa de modo a simular um comportamento rígido. O módulo transversal é adotado como metade do valor longitudinal. Ainda são introduzidos nos nós N e S massas concentradas de 0,31 kg e 2,50 kg, respectivamente.

Foram simulados três ciclos do mecanismo com incremento de tempo de $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Os resultados indicados a seguir se referem ao terceiro ciclo. Na Figura 51 é ilustrada a velocidade do apoio N na direção do eixo 1.

A deflexão da ponta do braço, nó A, medida ortogonalmente a uma linha que acompanha o giro do braço no nó B é apresentada na Figura 52 e o momento fletor de um ponto do braço a $\frac{1}{4}$ do apoio é informado na Figura 53.

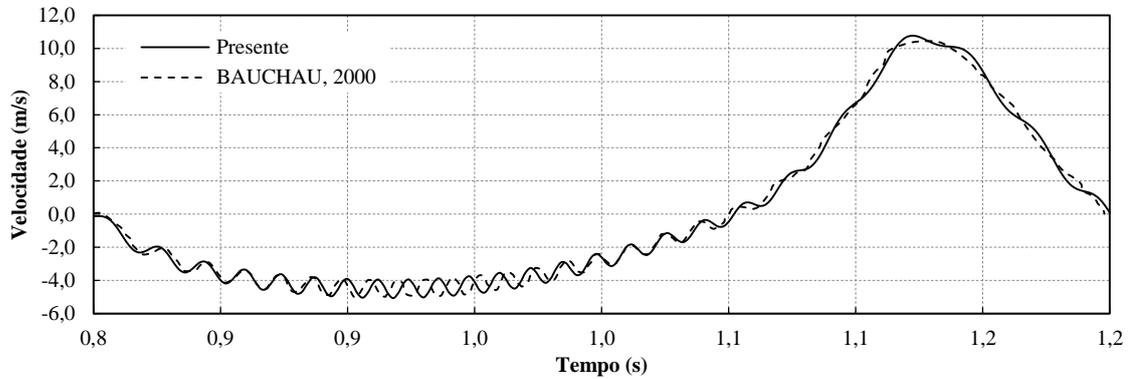


Figura 51 – Velocidade do apoio N na direção do eixo 1

Destas figuras nota-se boa concordância dos resultados com a referência de modo que o comportamento do mecanismo foi bem representado. Presume-se que as pequenas diferenças de fase entre as curvas se devam aos diferentes integradores temporais utilizados. Neste trabalho o integrador de Newmark foi empregado com os parâmetros que definem aceleração média constante dentro de cada passo de tempo ($\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$). Já no trabalho de Bauchau (2000) foi utilizado um esquema de estabilização que realiza o decaimento da energia total em cada passo de tempo, o qual, além disso, é variável para toda a análise, acarretando as pequenas diferenças notadas.

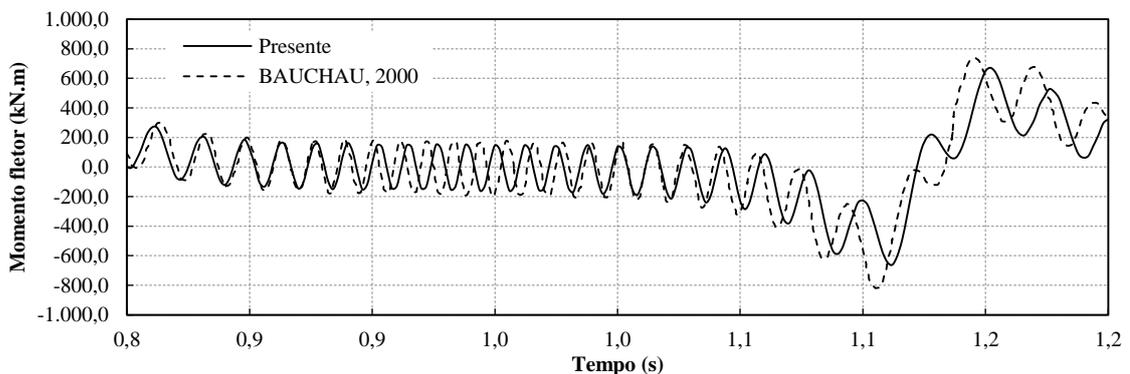


Figura 52 – Deflexão da ponta do braço

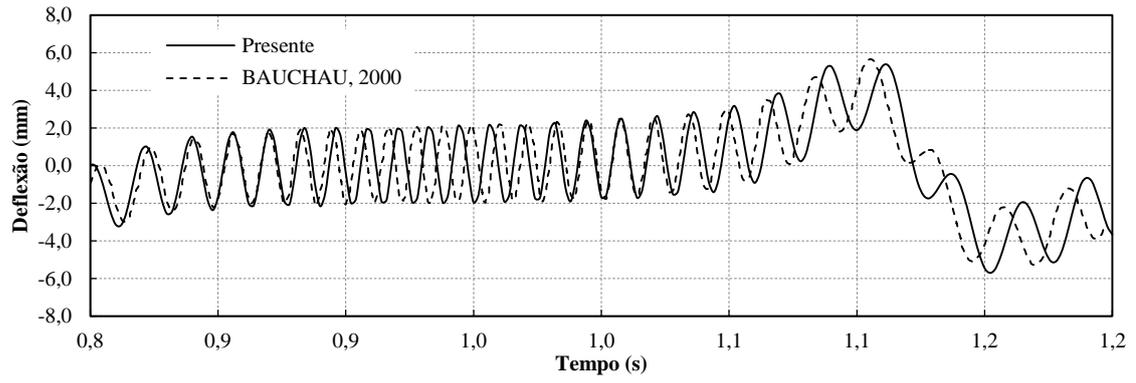


Figura 53 – Momento fletor de um ponto a $\frac{1}{4}$ do apoio B

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido e implementado um equacionamento para introdução de ligações deslizantes na forma de juntas prismáticas e cilíndricas em elementos finitos de pórtico plano. A formulação utilizada para análise não linear geométrica é lagrangeana total, se diferenciando por ter como parâmetros nodais do elemento de pórtico, além de giros, as posições dos nós. No código computacional e na formulação desenvolvida os elementos finitos são isoparamétricos e, portanto, podem ser curvos e com qualquer ordem de aproximação desejada.

O equilíbrio dinâmico do sistema foi obtido pelo princípio da energia total estacionária utilizando-se da medida de deformação de Green-Lagrange e do segundo tensor de tensões de Piola- Kirchhoff, seu conjugado energético, para descrição da lei constitutiva do material. Já a integração temporal foi realizada pelo método de Newmark que apresentou bons resultados nos exemplos estudados.

As ligações deslizantes foram introduzidas pelo método dos multiplicadores de Lagrange ao funcional de energia total do sistema de maneira simples e eficiente. A coordenada utilizada para descrever o movimento das conexões deslizantes existe no comprimento real da trajetória, e não no seu espaço adimensional como se encontra na literatura, o que simplifica bastante a consideração de forças e massas presentes no nó conectado. Além disso, acredita-se que essa concepção facilitará a futura incorporação do atrito seco nas juntas.

Para solução do sistema não linear resultante foi utilizado o clássico método incremental-iterativo de Newton-Raphson com os vetores de forças e operador tangente obtidos por meio de integração numérica a partir da quadratura de Gauss-Legendre.

A formulação apresentada foi utilizada para resolução de diversos exemplos de estruturas e mecanismos demonstrando sua precisão e versatilidade de aplicações. Grandes deslocamentos e rotações foram corretamente modelados pelo elemento finito com as juntas prismáticas e cilíndricas propostas tanto em simulações estáticas quanto dinâmicas.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Trabalhos decorrentes do apresentado podem se beneficiar com a introdução de atrito seco entre os elementos com ligações deslizantes, conforme mencionado anteriormente, como também nas juntas rotacionais.

A introdução de elementos finitos que funcionem como atuadores também é uma possibilidade para ampliação dos tipos de mecanismos que podem ser modelados, como, por exemplo: braços robóticos, maquinários com pistões hidráulicos como retroescavadeiras, hélices com diâmetros variáveis em aeronaves, dentre outros.

Em relação ao integrador temporal de Newmark, como comentado no decorrer do trabalho, apesar dos bons resultados obtidos, sabe-se das suas limitações em sistemas de equações algébrico-diferenciais para simulações muito extensas. Desse modo, sugere-se a utilização de outros métodos para integração no tempo, como algoritmos formulados para conservar ou decair a energia do sistema.

Por fim, sugere-se a extensão da abordagem proposta para as ligações deslizantes em elementos finitos tridimensionais de pórtico e de casca, tanto em análise estáticas quanto dinâmicas.

REFERÊNCIAS

- AMBROSIO, J. A. C.; NETO, M. A.; LEAL, R. P. Optimization of a complex flexible multibody systems with composite materials. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 2, p. 117–144, 2007.
- ANTMAN, S. S. Ordinary differential equations of non-linear elasticity I: Foundations of the theories of non-linearly elastic rods and shells. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 61, n. 4, p. 307–351, 1976.
- ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method — the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17–18, Par, n. 0, p. 1–106, 1979.
- ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H. P. **Dynamics of structures. Texts on computational mechanics**. Amsterdam: North-Holland, 1991.
- AURICCHIO, F.; CAROTENUTO, P.; REALI, A. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, n. 17, p. 4766–4781, 2008.
- AVELLO, A.; DE JALON, J. G.; BAYO, E. Dynamics of flexible multibody systems using cartesian co-ordinates and large displacement theory. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1543–1563, 1991.
- BARTEN, H. J. On the deflection of a cantilever beam. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 2, n. 2, p. 168–171, 1944.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 17-18, p. 1755–1789, 2002.
- BAUCHAU, O. A. Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body Systems. **Multibody System Dynamics**, v. 2, n. 2, p. 169–225, 1998.
- BAUCHAU, O. A. On the modeling of prismatic joints in flexible multi-body systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 87–105, 2000.
- BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L. Contact Conditions for Cylindrical, Prismatic, and Screw Joints in Flexible Multibody Systems. **Multibody System Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 251–278, 2001.
- BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L.; NIKISHKOV, Y. G. Modeling rotorcraft dynamics with finite element multibody procedures. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 33, n. 10-11, p. 1113–1137, 2001.
- BAUCHAU, O. A.; DAMILANO, G.; THERON, N. J. Numerical integration of non-linear elastic multi-body systems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, n. 16, p. 2727–2751, 1995.
- BAUCHAU, O. A.; LAULUSA, A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 3, n. 1, 2008.

BAUCHAU, O. A.; THERON, N. J. Energy decaying scheme for nonlinear elastic multi-body systems. **Computers & Structures**, v. 59, n. 2, p. 317–331, 1996a.

BAUCHAU, O. A.; THERON, N. J. Energy decaying scheme for non-linear beam models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 134, n. 1-2, p. 37–56, jul. 1996b.

BAYO, E. et al. An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully cartesian coordinates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 92, n. 3, p. 377–395, 1991.

BAYO, E.; DEJALON, J. G.; SERNA, M. A. A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 183–195, 1988.

BAYO, E.; LEDESMA, R. Augmented Lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 9, n. 1-2, p. 113–130, 1996.

BEHDINAN, K.; STYLIANOU, M. C.; TABARROK, B. Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 154, n. 3-4, p. 151–161, 1998.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 10, n. 1–2, p. 175–182, 1979.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, n. 3, p. 255–271, 1973.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2000.

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 1, p. 65–84, 1977.

BISCHOFF, M.; RAMM, E. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 46, p. 6933–6960, 2000.

BISSHOPP, K. E.; DRUCKER, D. C. Large deflection of cantilever beams. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 3, n. 3, p. 272–275, 1945.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2^a ed. ed. New York: Cambridge University Press, 2008.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. 7th. ed. New York: Wiley, 2001.

CARDONA, A.; GERADIN, M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 11, p. 2403–2438, 1988.

CARDONA, A.; GERADIN, M. Time integration of equations of motion in mechanism

analysis. **Computers & Structures**, v. 33, n. 3, p. 801–820, 1989.

CARDONA, A.; GERADIN, M.; DOAN, D. B. Rigid and flexible joint modeling in multibody dynamics using finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1-3, p. 395–418, 1991.

CHEN, H.; BLANDFORD, G. E. Thin-walled space frames .1. Large-deformation analysis theory. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 117, n. 8, p. 2499–2520, 1991.

CHOU, P. C.; PAGANO, N. J. **Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches**. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 1992.

CHRISTENSEN, E. R.; LEE, S. W. Nonlinear finite element modeling of the dynamics of unrestrained flexible structures. **Computers & Structures**, v. 23, n. 6, p. 819–829, jan. 1986.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371, 1 jun. 1993.

CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. IN: 17H INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. 2003, São Paulo. **Anais...**São Paulo: ABCM, 2003

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47–48, p. 3712–3722, 2009a.

CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 3, p. 187–212, 2009b.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1–32, 2009.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1–15, 2014.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures. Vol 1**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

- CRISFIELD, M. A.; JELENIĆ; GORDAN. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 455, n. 1983, p. 1125–1147, 1999.
- CRIVELLI, L. A.; FELIPPA, C. A. A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 21, p. 3647–3673, 1993.
- DAI, L.; GUAN, F.; GUEST, J. K. Structural optimization and model fabrication of a double-ring deployable antenna truss. **Acta Astronautica**, v. 94, n. 2, p. 843–851, 2014.
- DE VEUBEKE, B. F. The dynamics of flexible bodies. **International Journal of Engineering Science**, v. 14, n. 10, p. 895–913, 1976.
- ELGHAZALY, H. A. Nonlinear terms in frame analysis using eulerian moving coordinates. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 7, n. 6, p. 423–428, 1991.
- ELKARANSHAWY, H. A.; DOKAINISH, M. A. Corotational finite element analysis of planar flexible multibody systems. **Computers & Structures**, v. 54, n. 5, p. 881–890, 1995.
- ESCALONA, J. L.; HUSSIEN, H. A.; SHABANA, A. A. Application of the absolute nodal co-ordinate formulation to multibody system dynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 214, n. 5, p. 833–850, 1998.
- ESCALONA, J. L.; SUGIYAMA, H.; SHABANA, A. A. Modelling of structural flexibility in multibody railroad vehicle systems. **Vehicle System Dynamics**, v. 51, n. 7, p. 1027–1058, 2013.
- FRISCH-FAY, R. **Flexible Bars**. London: Butterworths, 1962.
- FRÝBA, L. **Vibration of solids and structures under moving loads**. Groningen: Noordhoff, 1972.
- GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVAS, G. A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 5, p. 887–914, 1984.
- GARCIA-VALLEJO, D. et al. Describing rigid-flexible multibody systems using absolute coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 34, n. 1-2, p. 75–94, 2003.
- GATTASS, M.; ABEL, J. F. Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 11, p. 2119–2141, 1987.
- GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- GOMES, W. J. S.; BECK, A. T. Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ANN surrogates. **Computers and Structures**, v. 126, n. 1, p. 56–68, 2013.
- GOTO, Y.; YOSHIMITSU, T.; OBATA, M. Elliptic integral solutions of plane elastica with axial and shear deformations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 26, n. 4, p. 375–390, jan. 1990.
- GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.

- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.
- GURTIN, M. E.; FRIED, E.; ANAND, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. New York: Cambridge University Press, 2010.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R. Collocation, dissipation and [overshoot] for time integration schemes in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 6, n. 1, p. 99–117, jan. 1978.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 283–292, jul. 1977.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2000.
- HONG, D. F.; REN, G. X. A modeling of sliding joint on one-dimensional flexible medium. **Multibody System Dynamics**, v. 26, n. 1, p. 91–106, 2011.
- HOSHINO, Y.; TASHMAN, S. Internal tibial rotation during in vivo, dynamic activity induces greater sliding of tibio-femoral joint contact on the medial compartment. **Knee Surgery Sports Traumatology Arthroscopy**, v. 20, n. 7, p. 1268–1275, 2012.
- HSIAO, K. M.; YANG, R. T.; LEE, A. C. A consistent finite element formulation for non-linear dynamic analysis of planar beam. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 1, p. 75–89, 15 jan. 1994.
- HUGHES, T. J. R. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey, New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- IBRAHIMBEGOVIĆ, A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 122, n. 1-2, p. 11–26, 1995.
- IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et al. Finite Element Method in Dynamics of Flexible Multibody Systems: Modeling of Holonomic Constraints and Energy Conserving Integration Schemes. **Multibody System Dynamics**, v. 4, n. 2-3, p. 195–223, 2000.
- IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; MAMOURI, S. On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 188, n. 4, p. 805–831, 2000.
- IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 45, p. 5159–5176, 2002.
- IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; TAYLOR, R. L.; LIM, H. Non-linear dynamics of flexible multibody systems. **Computers & Structures**, v. 81, n. 12, p. 1113–1132, 2003.
- IZZUDDIN, B. A.; ELNASHAI, A. S. Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 119, n. 3, p. 549–569, 1993.
- IZZUDDIN, B. A.; SMITH, D. L. Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames .2. Verification and application. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 122, n. 8, p. 915–925, 1996.

- JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Non-linear “master-slave” relationships for joints in 3-D beams with large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 135, n. 3-4, p. 211–228, 1996.
- JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 171, n. 1-2, p. 141–171, 1999.
- JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Dynamic analysis of 3D beams with joints in presence of large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32-33, p. 4195–4230, 2001.
- JENKINS, J. A.; SEITZ, T. B.; PRZEMIENIECKI, J. S. Large deflections of diamond-shaped frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 2, n. 4, p. 591–600, IN1–IN2, 601–603, 1966.
- JETTEUR, P. et al. Improved nonlinear finite elements for oriented bodies using an extension of marguerre’s theory. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 129–137, 1983.
- KANE, T. R.; RYAN, R. R.; BANERJEE, A. K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 10, n. 2, p. 139–151, 1987.
- KERR, C. N. Large deflections of a square frame. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 23–38, 1964.
- KIPER, G.; SÖYLEMEZ, E. **Deployable space structures** (S. et. al. Kurnaz, Ed.). IN: Proceedings of 4th International Conference on Recent Advances Space Technologies. **Anais...Istambul, Turquia: 2009**
- LAGRANGE, J. L. **Mécanique Analytique**. Paris: L’Académie Royale des Sciences, 1788.
- LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. New York: Dover Publications , 1970.
- LAULUSA, A.; BAUCHAU, O. A. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 3, n. 1, 2008.
- LEDESMA, R.; BAYO, E. A Lagrangian approach to the non-causal inverse dynamics of flexible multibody systems: The three-dimensional case. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 19, p. 3343–3361, 1994.
- LEE, S. H. et al. The development of a sliding joint for very flexible multibody dynamics using absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 3, p. 223–237, 2008.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press, 1994.
- LEYENDECKER, S.; MARSDEN, J. E.; ORTIZ, M. Variational integrators for constrained dynamical systems. **ZAMM**, v. 88, n. 9, p. 677–708, 24 set. 2008.
- LI, Z. X. A mixed co-rotational formulation of 2D beam element using vectorial rotational variables. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 1, p. 45–69, 2007.
- MACIEL, D. N.; CODA, H. B. **Positional description for nonlinear 2-D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner kinematics**. IN: 3rd M.I.T.

CONFERENCE ON COMPUTATIONAL FLUID AND SOLID MECHANICS: 2005, Cambridge, Massachusetts. **Anais...**Cambridge, Massachusetts: Elsevier, 2005

MAKINEN, J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, n. 9, p. 1009–1048, 2007.

MAMOURI, S.; HAMMADI, F.; IBRAHIMBEGOVIĆ, A. Decaying/conserving implicit scheme and non-linear instability analysis of 2D frame structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 67, p. 144–152, 2014.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

MERCHAN, C. H. H. **Deployable structures**. Cambridge, MA, 1987: Massachusetts Institute of Technology, 1987.

MITSUGI, J. Direct strain measure for large displacement analyses on hinge connected beam structures. **Computers & Structures**, v. 64, n. 1-4, p. 509–517, 1997.

MITSUGI, J. et al. Deployment analysis of large space antenna using flexible multibody dynamics simulation. **Acta Astronautica**, v. 47, n. 1, p. 19–26, 2000.

MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.

MOON, Y. et al. Design and Kinematic Analysis of a New End-Effector for a Robotic Needle Insertion-Type Intervention System. **International Journal of Advanced Robotic Systems**, v. 11, 2014.

MULLER, M. A novel classification of planar four-bar linkages and its application to the mechanical analysis of animal systems. **Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences**, v. 351, n. 1340, p. 689–720, 29 maio 1996.

MUÑOZ, J. J. Modelling unilateral frictionless contact using the null-space method and cubic B-Spline interpolation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 9-12, p. 979–993, 2008.

MUÑOZ, J. J.; JELENIC, G. Sliding contact conditions using the master-slave approach with application on geometrically non-linear beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 24-25, p. 6963–6992, 2004.

MUÑOZ, J. J.; JELENIC, G. Sliding joints in 3D beams: Conserving algorithms using the master-slave approach. **Multibody System Dynamics**, v. 16, n. 3, p. 237–261, 2006.

MUÑOZ, J.; JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Master-slave approach for the modelling of joints with dependent degrees of freedom in flexible mechanisms. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 19, n. 9, p. 689–702, 2003.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 44, p. 67–94, 1959.

NIKRAVESH, P. E. **Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

NIKRAVESH, P. E. An overview of several formulations for multibody dynamics. In:

TALABÁ, D.; ROCHE, T. (Eds.). . **Product Engineering: Eco-Design, Technologies and Green Energy**. [s.l.] Springer Netherlands, 2005. p. 189–226.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999.

NORTON, R. L. **Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines**. 5^a. ed. Boston: McGraw-Hill, 2011.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.

PARK, K. C. et al. A modular multibody analysis capability for high-precision, active control and real-time applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1767–1798, 1991.

PASCON, J. P. J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59–75, jan. 2015.

PETERSON, A.; PETERSSON, H. On finite element analysis of geometrically nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1-3, p. 277–286, 1985.

REDDY, J. N. **An introduction to nonlinear finite element analysis**. New York: Oxford University Press Inc., 2004.

REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 7, p. 1163–1189, 2014.

REISSNER, E. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, v. 23, n. 5, p. 795–804, 1972.

REISSNER, E. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. **Studies in Applied Mathematics**, v. 52, n. 2, p. 87–95, 1973.

RICE, D. L.; TING, E. C. Large displacement transient analysis of flexible structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 9, p. 1541–1562, 1993.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; MUNAIAR NETO, J. A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 68–83, 2014.

SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.

SCHIENLEN, W. Recent developments in multibody dynamics. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 19, n. 1 SPEC. ISS., p. 227–236, 2005.

SHABANA, A. A. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments.

Multibody System Dynamics, v. 1, n. 2, p. 189–222, 1997.

SHABANA, A. A. **Dynamics of multibody systems**. 4 ed. ed. Chicago: Cambridge University Press, 2013.

SHABANA, A. A.; ZAAZAA, K. E.; SUGIYAMA, H. **Railroad vehicle dynamics: a computational approach**. Boca Raton, FL: CRC Press, 2008.

SHIGLEY, J.; UICKER, J. **Theory of machines and mechanisms**. Auckland: McGraw-Hill, 1981.

SIMO, J. C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 49, n. 1, p. 55–70, 1985.

SIMO, J. C.; TARNOW, N.; WONG, K. K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 100, n. 1, p. 63–116, out. 1992.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 58, n. 1, p. 79–116, 1986a.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. I. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, v. 53, n. 4, p. 849–854, 1986b.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. II. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, v. 53, n. 4, p. 855–863, 1986c.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics in space of rods undergoing large motion - a geometrically exact approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 66, n. 2, p. 125–161, 1988.

SIMO, J. C.; WONG, K. K. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 31, n. 1, p. 19–52, 1991.

SUGIYAMA, H.; ESCALONA, J. L.; SHABANA, A. A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 167–195, 2003.

SURANA, K. S. Geometrically non-linear formulation for two dimensional curved beam elements. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 105–114, 1983.

SYNEK, A.; SETTLES, M.; STILLFRIED, G. **Multi-body simulation of a human thumb joint by sliding surfaces**. IN: 4th IEEE RAS and EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob) / Symposium on Surgical Robotics. **Anais...**: Proceedings of the IEEE RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics. Rome, Italy: 2012

TEH, L. H.; CLARKE, M. J. Co-rotational and Lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 48, n. 2-3, p. 123–144, 1998.

TEMMERMAN, N. **Design and analysis of deployable bar structures for mobile architectural applications**. Brussels, 2007: Vrije Universiteit Brussel, 2007.

- TURKALJ, G.; BRNIC, J.; PRPIC-ORSIC, J. ESA formulation for large displacement analysis of framed structures with elastic-plasticity. **Computers & Structures**, v. 82, n. 23-26, p. 2001–2013, 2004.
- TURNER, M. J. et al. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 29 ago. 1956.
- VON DOMBROWSKI, S. Analysis of large flexible body deformation in multibody systems using absolute coordinates. **Multibody System Dynamics**, v. 8, n. 4, p. 409–432, 2002.
- WASFY, T. M.; NOOR, A. K. Computational strategies for flexible multibody systems. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 6, p. 553–613, 2003.
- WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117–153, 1969.
- WEN, R. K.; RAHIMZADEH, J. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 8, p. 1952–1971, 1983.
- WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers and Structures**, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.
- WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. **Computers and Structures**, v. 7, n. 6, p. 725–735, 1977.
- XIAO, N.; ZHONG, H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 47, n. 5, p. 481–488, 2012.
- YANG, Z.; SADLER, J. P. **Finite element modeling of spatial robot manipulators** (M. McCarthy, S. Derby, A. Pisano, Eds.). IN: American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE. **Anais...**Chicago: ASME, 1990
- YOGANANDAN, N. et al. **Head-neck biomechanics in simulated rear impact**. IN: 42nd Annual Meeting of the Association-for-the-Advancement-of-Automotive-Medicine. **Anais...**: Proceedings - Annual Conference of the Association for the Advancement of Automotive Medicine.Charlottesville, Va: 1998
- YOO, W. S. et al. Developments of multibody system dynamics: Computer simulations and experiments. **Multibody System Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 35–58, 2007.
- ZACCARIA, D. et al. Structures buckling under tensile dead load. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 467, n. 2130, p. 1686–1700, 12 jan. 2011.

APÊNDICE A – LIGAÇÕES DESLIZANTES POR MEIO DE ELEMENTOS MESTRE E ESCRAVO

Neste apêndice é apresentada uma formulação para introdução de ligações deslizantes na forma de juntas prismáticas e cilíndricas através da concepção de elementos mestre-escravo. Apesar de desenvolvido seu equacionamento, esta abordagem não foi implementada dada à sua complexidade, como se observa a seguir.

Nesta construção, os graus de liberdade restritos do nó escravo, o qual possui internamente o apoio deslizante, são removidos do sistema de equações por meio de relações cinemáticas com as posições dos nós do elemento mestre. A cinemática das ligações deslizantes é, então, introduzida simultaneamente à montagem do sistema de equações de equilíbrio da estrutura.

A introdução de ligações deslizantes pela abordagem dos elementos mestre e escravo tem como vantagem a redução do número de graus de liberdade do sistema mecânico pela utilização do menor número possível de coordenadas para descrição do seu movimento. Além disso, não apresenta problemas numéricos de mau condicionamento do sistema de equações, o que pode ser vantajoso do ponto de vista da integração temporal.

Inicia-se pela descrição das restrições cinemáticas que a ligação deslizante impõe ao nó escravo seguido das alterações no sistema de equações do movimento e sua solução e integração temporal.

A.1 Restrições Cinemáticas

A introdução das ligações deslizantes, seja na forma de uma junta prismática ou cilíndrica, nos elementos finitos de pórtico plano é realizada por meio da consideração de um elemento escravo o qual possui um nó restrito a se deslocar sobre outro elemento, chamado mestre. O grupo de elementos mestres sobre os quais a ligação deslizante tem liberdade de movimento é designado por trajetória da ligação. A Figura 54 exemplifica um conjunto de elementos mestre e escravo de aproximação cúbica. Apesar dessa ilustração, a formulação desenvolvida a seguir é válida para elementos finitos com qualquer número de nós.

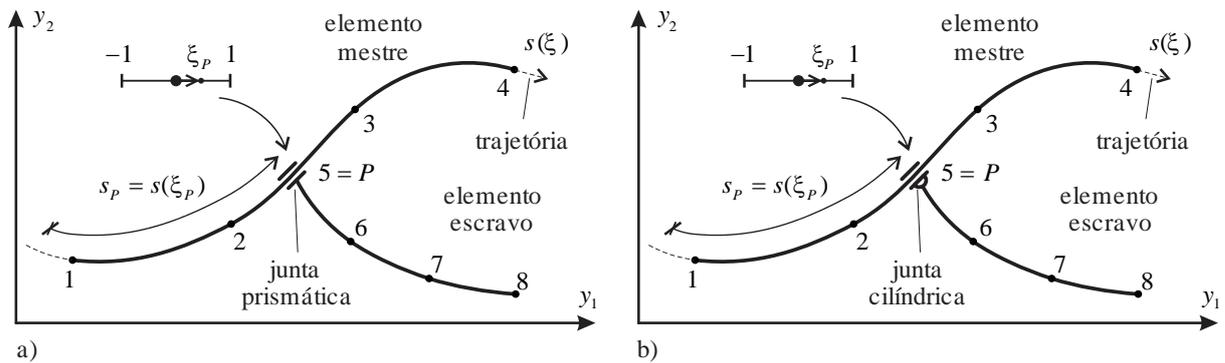


Figura 54 – Linha de referência para os elementos mestre e escravo com aproximação cúbica

Nessa seção, utiliza-se no que segue a notação $(\bar{\bullet})$ para o elemento mestre e $(\hat{\bullet})$ para o elemento escravo, em analogia ao que foi apresentado no capítulo 4 para o método dos multiplicadores de Lagrange.

Os parâmetros nodais (posição e giro) do nó com a ligação deslizante, denominado nó escravo e referido pelo índice P, podem ser descritos em função dos parâmetros nodais do elemento mestre e da variável $s_p = s(\xi_p)$. Essa última indica a localização do nó escravo sobre o comprimento da linha de referência de um elemento mestre a partir de um ponto arbitrário da sua trajetória. Já a coordenada ξ_p localiza o nó escravo no espaço adimensional de um determinado elemento mestre.

A cinemática da ligação deslizante é então escrita por meio das relações:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1^P(s_p(t), \bar{Y}_1^\ell(t)) &= \phi_\ell(\xi_p(t)) \bar{Y}_1^\ell(t) \\ \hat{Y}_2^P(s_p(t), \bar{Y}_2^\ell(t)) &= \phi_\ell(\xi_p(t)) \bar{Y}_2^\ell(t) \\ \hat{\theta}_P(s_p(t), \bar{\theta}_\ell(t)) &= \phi_\ell(\xi_p(t)) \bar{\theta}_\ell(t) + \Delta\theta_P^0\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Sendo esse um problema dinâmico, nas expressões anteriores a variável t indica o tempo decorrido a partir de um instante inicial. As demais variáveis são: i indica a direção sobre os eixos y_1 ou y_2 ; ℓ se refere aos nós do elemento mestre (notação indicial); \hat{Y}_i^P e $\hat{\theta}_P$ são as coordenadas e o giro do nó escravo, respectivamente; ϕ_ℓ são as funções de forma do elemento; \bar{Y}_i^ℓ e $\bar{\theta}_\ell$ são as coordenadas e o giro dos nós do elemento mestre, respectivamente; e $\Delta\theta_P^0$ é a diferença, na configuração inicial, entre o ângulo do nó escravo e o ângulo do elemento mestre no mesmo ponto P.

A presença de $\Delta\theta_p^0$ na equação (A.1) se deve ao fato da variável de giro ser medida a partir do eixo horizontal no sentido positivo (de y_1 para y_2) até o vetor normal de um ponto da linha de referência, fazendo com que o valor do ângulo dependa da disposição e orientação do elemento finito no plano. Esse fato leva a diferença existente entre o ângulo do nó escravo e um ângulo medido no elemento mestre no ponto P, que, apesar de ser o mesmo ponto do plano, pertencem a elementos distintos.

Conforme se observa a partir da Figura 55, pode-se expressar a diferença entre ângulos como $\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \bar{\theta}_p^0$. O valor do ângulo medido no elemento mestre $\bar{\theta}_p^0$ é obtido pela interpolação dos demais ângulos desse elemento com as funções de forma. Assim, chega-se à expressão:

$$\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell^0 \quad (\text{A.2})$$

Ressalta-se que pelo próprio caráter da junta prismática (engaste móvel) essa diferença se mantém constante durante o tempo, portanto seu valor obtido na configuração inicial não se altera com as mudanças de configuração do corpo.

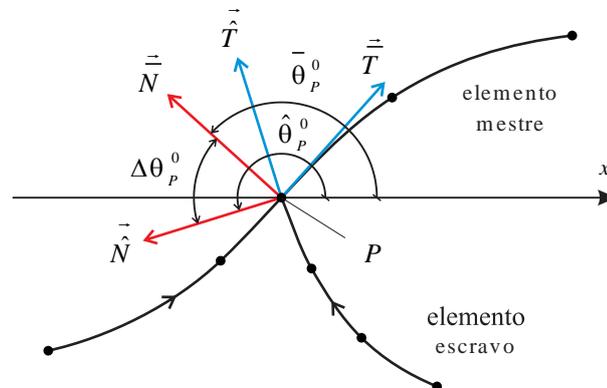


Figura 55 – Diferença entre o ângulo do ponto P medido no elemento mestre e no elemento escravo (a seta nos elementos finitos indica a orientação desses)

As equações (A.1) podem ser reescritas com uma notação mais conveniente considerando-se que o giro de um nó α qualquer é a terceira direção coordenada, de modo que $\theta_\alpha = Y_3^a$. Portanto:

$$\hat{Y}_i^P(s_p(t), \bar{Y}_i^\ell(t)) = \phi_\ell(\xi_p(t))\bar{Y}_i^\ell(t) + \Delta\theta_p^0\delta_{i3}, \quad (\text{A.3})$$

sendo δ_{i3} o operador delta de Kronecker, igual a unidade quando $i = 3$ e zero caso contrário.

A equação (A.3) implica na diminuição do número de graus de liberdade do nó escravo já que esses não são mais as suas coordenadas e o giro, os quais passam a ser descritos

completamente por meio da variável s_p . Desse modo, no caso de uma junta prismática têm-se um grau de liberdade nodal. Para uma junta cilíndrica a hipótese é a mesma, entretanto, é liberado o giro, totalizando dois graus de liberdade no apoio deslizando. Isso é possível simplesmente desconsiderando-se a restrição cinemática para o giro.

A velocidade e a aceleração do nó escravo são importantes na determinação das forças de inércia e amortecimento viscoso presentes na estrutura. Assim, é fundamental determinar as expressões para essas grandezas.

Por brevidade na notação, dado que se sabe que todas as incógnitas nodais são funções do tempo, não se indica mais, a partir deste ponto, as variáveis como função deste. Partindo da expressão (A.3) obtém-se a velocidade do nó escravo $\dot{\hat{Y}}_i^P$ pela derivada total no tempo da sua posição como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{Y}}_i^P &= \frac{d\hat{Y}_i^P}{dt} = \frac{d\phi_\ell}{dt} \Big|_P \bar{Y}_i^\ell + \phi_\ell(\xi_P) \frac{d\bar{Y}_i^\ell}{dt} \\ \dot{\hat{Y}}_i^P &= \frac{d\phi_\ell}{d\xi} \Big|_{\xi_P} \frac{d\xi}{ds} \Big|_{s_P} \frac{ds}{dt} \Big|_P \bar{Y}_i^\ell + \phi_\ell(\xi_P) \dot{\bar{Y}}_i^\ell \\ \dot{\hat{Y}}_i^P &= \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{s}_P + \phi_\ell(\xi_P) \dot{\bar{Y}}_i^\ell,\end{aligned}\tag{A.4}$$

sendo: $\phi_{\ell,\xi}$ a derivada para ξ da função de forma do nó ℓ (notação indicial); $J_P = J(\xi_P)$ o jacobiano da transformação do espaço adimensional da variável ξ para o comprimento da linha de referência s avaliado no ponto P; \dot{s}_P a velocidade do grau de liberdade s_p ; e $\dot{\bar{Y}}_i^\ell$ a velocidade dos graus de liberdade dos nós ℓ do elemento mestre na direção i .

Na expressão da velocidade total do nó escravo, equação (A.4), pode-se perceber a contribuição de duas parcelas. A primeira representa a velocidade tangencial desse nó em relação ao elemento mestre, já que o termo $\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P$ indica o vetor tangente unitário ao ponto P do elemento mestre enquanto \dot{s}_P é a intensidade dessa velocidade tangencial. Já a segunda parcela evidencia a contribuição da velocidade do próprio elemento mestre na velocidade total do nó escravo.

O jacobiano da transformação $ds = J(\xi)d\xi$ da variável paramétrica ξ do espaço adimensional para o comprimento s da linha de referência é obtido por:

$$J(\xi) = \sqrt{y_{1,\xi}y_{1,\xi} + y_{2,\xi}y_{2,\xi}}\tag{A.5}$$

Nessa expressão $y_{i,\xi}$ é a derivada da função de mapeamento y_i para a variável paramétrica. O mapeamento y_i , ao contrário do apresentado previamente no capítulo 3, equações (3.11) e (3.12), considera-se somente a parcela que descreve a linha de referência, $\phi_\ell(\xi)Y_i^\ell$, desprezando-se o mapeamento da altura. Isso é possível por considerar-se que a ligação deslizante não pode se deslocar transversalmente ao eixo da barra. Desenvolvendo a equação (A.5) para o ponto P chega-se a:

$$J_P = \sqrt{[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_1^\ell]^2 + [\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_2^\ell]^2} \quad (\text{A.6})$$

Observa-se que, nesse caso, o jacobiano é o módulo do vetor tangente a um ponto da linha de referência.

A aceleração do nó escravo \ddot{Y}_i^P é obtida de modo análogo à velocidade. Partindo da equação (A.4) e desenvolve-se a sua derivada total no tempo como:

$$\ddot{Y}_i^P = \frac{d\dot{Y}_i^P}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{s}_P \right] + \frac{d}{dt} \left[\phi_\ell(\xi_P)\dot{\bar{Y}}_i^\ell \right],$$

chega-se a:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_i^P = & \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \dot{s}_P \dot{s}_P + 2\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\dot{\bar{Y}}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{s}_P + \phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \ddot{s}_P + \\ & + \phi_\ell(\xi_P)\ddot{\bar{Y}}_i^\ell - \phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \dot{J}_P \dot{s}_P \end{aligned}, \quad (\text{A.7})$$

sendo: $\phi_{\ell,\xi\xi}$ a segunda derivada para ξ da função de forma do nó ℓ (notação indicial); \ddot{s}_P a aceleração do grau de liberdade s_P ; $\ddot{\bar{Y}}_i^\ell$ a aceleração dos graus de liberdade dos nós ℓ do elemento mestre na direção i ; e $\dot{J}_P = \dot{J}(\xi_P)$ a derivada do jacobiano no tempo avaliado no ponto P. Essa última pode ser expressa como:

$$\dot{J}(\xi_P) = \frac{dJ}{dt} \Big|_P = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{(\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_1^\ell)^2 + (\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_2^\ell)^2} \right),$$

que desenvolvendo as operações obtêm-se:

$$\dot{J}_P = \frac{1}{J_P} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \left[\phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P) \frac{1}{J_P} \dot{s}_P (\bar{Y}_1^\ell \bar{Y}_1^\ell + \bar{Y}_2^\ell \bar{Y}_2^\ell) + \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) (\bar{Y}_1^\ell \dot{\bar{Y}}_1^\ell + \bar{Y}_2^\ell \dot{\bar{Y}}_2^\ell) \right] \quad (\text{A.8})$$

Na expressão (A.7) da aceleração total do nó escravo percebe-se a existência de cinco parcelas de aceleração que contribuem para o valor total.

A primeira parcela é a aceleração normal desse nó em relação ao elemento mestre, composta do produto da curvatura da linha de referência no ponto P pela velocidade \dot{s}_p ao quadrado. A segunda parcela é um termo cruzado que tem origem na velocidade do grau de liberdade e do elemento mestre.

De modo análogo ao que se observa na expressão (A.4) para a velocidade do nó escravo, a terceira parcela representa a aceleração tangencial desse nó em relação ao elemento mestre e a quarta parcela é a contribuição da aceleração do elemento mestre na aceleração total do nó escravo.

Por fim, última parcela da aceleração total envolve uma correção referente à taxa de variação do jacobiano com o tempo, já que esse é descrito a partir das coordenadas atuais do elemento mestre e do grau de liberdade s_p , os quais variam no tempo.

A.2 Alterações nas Equações do Movimento

A energia total do sistema mecânico, Π , compreendido pelo elemento mestre e escravo, pode ser expressa como a soma da energia de deformação, U_e , energia potencial das forças externas, \mathbb{P} , energia cinética, \mathbb{K} , e a dissipação de energia por amortecimento viscoso, \mathbb{Q} , de cada um desses elementos separadamente.

De acordo com os desenvolvimentos do capítulo 3 para os elementos finitos de pórtico plano com ligações monolíticas, a aplicação da estacionariedade ao funcional de energia total, utilizando como parâmetros os graus de liberdade do sistema, resulta na equação de movimento do sistema mecânico, isto é, seu equilíbrio dinâmico não linear geométrico. Aquela equação pode ser escrita de um modo genérico como:

$$\delta\Pi = \delta U_e - \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{Q} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Ou ainda, mais explicitamente, derivando em relação às posições e giros nodais Y_i^α do sistema:

$$\delta\Pi = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha - \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha + \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha = 0 \quad (\text{A.10})$$

Dada à arbitrariedade das variações e utilizando do princípio do conjugado energético também é possível entender essa equação em termos de equilíbrio de forças como:

$$F_i^{\alpha,int} - F_i^{\alpha,ext} + F_i^{\alpha,iner} + F_i^{\alpha,amort} = 0_i^\alpha, \quad (\text{A.11})$$

sendo, $F_i^{\alpha,int}$ a força interna, $F_i^{\alpha,ext}$ a força externa, $F_i^{\alpha,iner}$ a força inercial e $F_i^{\alpha,amort}$ a força devida à dissipação por amortecimento, para cada direção i dos nós α do sistema.

Como se observa das relações cinemáticas do item anterior, para um conjunto de elementos mestre e escravo que possuem uma ligação deslizante há uma redução do número de graus de liberdade. Sabe-se, então, que o elemento mestre é descrito em função das posições e giros \bar{Y}_i^γ dos nós γ do próprio elemento, e que o elemento escravo é função das posições e giros \hat{Y}_i^ω dos seus nós independentes ω e do seu nó escravo. Como decorrência da equação (A.3), o nó escravo é descrito pela variável s_p , associada ao movimento desse nó sobre o comprimento da trajetória, mas também é função das posições e giros do elemento mestre. Fazendo, assim, com que o elemento escravo dependa dos parâmetros nodais do elemento mestre.

É possível, então, separar a energia total do sistema entre o elemento mestre, $\bar{\Pi}$, e o elemento escravo, $\hat{\Pi}$, como:

$$\Pi = \bar{\Pi}(\bar{Y}_i^\gamma) + \hat{\Pi}(\hat{Y}_i^\omega(s_p, \bar{Y}_i^\gamma), \hat{Y}_i^\omega) \quad (\text{A.12})$$

Logo, sabendo como os graus de liberdade de cada parcela do funcional de energia se relacionam aos elementos mestre e escravo, é possível utilizar do princípio do conjugado energético para encontrar as correções necessárias à equação do movimento, de modo a incluir o apoio deslizante. Essas correções são expostas a seguir, de modo independente para cada quantia de energia.

A.2.1 Energia de deformação (vetor de força interna)

Conhecida a energia de deformação dos elementos mestre e escravo, \bar{U}_e e \hat{U}_e , respectivamente, determina-se o vetor de forças internas $F_i^{\alpha,int}$ do sistema a partir do conjugado energético dos graus de liberdade nodais do conjunto Y_i^α como:

$$F_i^{\alpha,int} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \bar{U}_e}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial Y_i^\alpha} \quad (\text{A.13})$$

Para os graus de liberdade do elemento mestre \bar{Y}_i^γ , utilizando-se da equação (A.3), desenvolve-se a expressão como:

$$F_i^{\gamma,int} = \frac{\partial \bar{U}_e}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,int} + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{Y}_{(i)}^P} \frac{\partial \hat{Y}_{(i)}^P}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_{(i)}^{P,int} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_{(i)}^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{(i)3} \right]$$

Em notação indicial, ℓ representa o somatório sobre os nós do elemento mestre e os parênteses em i indicam não haver soma sobre essa direção. Chega-se, então, a:

$$F_i^{\gamma,int} = \bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_i^{P,int} \phi_\gamma(\xi_P) \quad (\text{A.14})$$

sendo $\bar{F}_i^{\gamma,int}$ a força interna dos nós γ , na direção i , do elemento mestre e $\hat{F}_i^{P,int}$ a força interna do nó escravo, na direção i , do elemento escravo. Esses valores são obtidos pelas respectivas derivadas da energia de deformação de cada elemento como indicado no capítulo 3.

Para os nós independentes do elemento escravo, os quais não possuem a ligação deslizante, é possível escrever a força interna dos seus graus de liberdade \hat{Y}_i^ω , com ω assumindo todos os nós do elemento exceto o nó escravo P. De modo análogo ao elemento mestre, a expressão se desenvolve como:

$$F_i^{\omega,int} = \frac{\partial \bar{U}_e}{\partial \hat{Y}_i^\omega} + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{Y}_i^\omega} = 0 + \hat{F}_i^{\omega,int}$$

$$F_i^{\omega,int} = \hat{F}_i^{\omega,int} \quad (\text{A.15})$$

Como $\hat{F}_i^{\omega,int}$ é a força interna dos nós independentes na direção i , do elemento escravo, nota-se que não há nenhuma correção a ser feita nesses graus de liberdade no vetor do conjunto.

Considerando-se que os antigos graus de liberdade \hat{Y}_i^P do nó escravo são, agora, descritos completamente por s_P , determina-se a força interna relativa a este grau de liberdade

$F_{s_P}^{int}$ como:

$$F_{s_P}^{int} = \frac{\partial \bar{U}_e}{\partial s_P} + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial s_P} = 0 + \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial \hat{Y}_i^P} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial s_P} = \hat{F}_i^{P,int} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_P}$$

$$F_{s_P}^{int} = \hat{F}_i^{P,int} \frac{\partial}{\partial \xi_P} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \right] \frac{1}{J_P}$$

$$F_{s_P}^{int} = \hat{F}_i^{P,int} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}, \quad (\text{A.16})$$

com somatório sobre as direções i e os todos os nós ℓ do elemento mestre. Nota-se que a equação (A.16) representa o produto interno entre o vetor de forças internas $\hat{F}_i^{P,int}$ e o vetor tangente unitário $\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell/J_P$ do ponto P da linha de referência do elemento mestre.

A.2.2 Energia potencial das forças externas (vetor de força externa)

A energia potencial das forças, e momentos, externas, consideradas todas conservativas, pode ser escrita para o sistema mecânico de elementos mestre e escravo como:

$$\mathbb{P} = \bar{P}_i^\gamma \bar{Y}_i^\gamma + \hat{P}_i^\omega \hat{Y}_i^\omega + \hat{P}_i^P \hat{Y}_i^P + \hat{P}_{s_p} s_p, \quad (\text{A.17})$$

sendo: i o índice que representa as direções; \bar{P}_i^γ as forças externas aplicadas aos nós γ do elemento mestre; \hat{P}_i^ω as forças externas aplicadas aos nós independentes ω do elemento escravo; \hat{P}_i^P a força externa aplicada ao nó escravo nas direções i ; e \hat{P}_{s_p} outra parcela de força externa do nó escravo, sendo que esta pode ser aplicada diretamente na direção do grau de liberdade s_p . Considera-se que as forças distribuídas já estejam aí incluídas com seus valores nodais equivalentes.

Conhecida a expressão do potencial das forças externas, determina-se o vetor de forças externas $F_i^{\alpha,ext}$ do sistema pelo princípio do conjugado energético para os graus de liberdade nodais do conjunto Y_i^α como:

$$F_i^{\alpha,ext} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\alpha} \quad (\text{A.18})$$

As operações realizadas para o potencial das forças externas são análogas às realizadas anteriormente para a determinação das forças internas a partir da energia de deformação.

Para os graus de liberdade \bar{Y}_i^γ dos nós do elemento mestre, utilizando-se da equação (A.3), desenvolve-se a expressão da força externa $F_i^{\gamma,ext}$ como:

$$F_i^{\gamma,ext} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{P}_i^\gamma + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} \left(\hat{P}_{(i)}^P \hat{Y}_{(i)}^P \right) = \bar{P}_i^\gamma + \hat{P}_{(i)}^P \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_{(i)}^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{(i)3} \right]$$

com ℓ representando o somatório sobre os nós do elemento mestre e os parênteses em i indicando não haver soma na direção. Chega-se, assim, a:

$$F_i^{\gamma,ext} = \bar{P}_i^\gamma + \hat{P}_i^P \phi_\gamma(\xi_P) \quad (\text{A.19})$$

Nota-se nessa expressão, além da força externa aplicada diretamente ao grau de liberdade, uma parcela de força proveniente do nó escravo.

Para os graus de liberdade \hat{Y}_i^ω dos nós independentes do elemento escravo não resulta nenhuma parcela de correção. A expressão da força externa resulta em:

$$F_i^{\omega,ext} = \hat{P}_i^\omega \quad (\text{A.20})$$

Considerando-se agora o grau de liberdade s_p do nó escravo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} F_{s_p}^{ext} &= \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial s_p} = \frac{\partial}{\partial s_p} \left(\hat{P}_i^P \hat{Y}_i^P \right) + \hat{P}_{s_p} = \hat{P}_i^P \frac{\partial}{\partial s_p} \left(\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \right) + \hat{P}_{s_p} \\ F_{s_p}^{ext} &= \hat{P}_i^P \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{P}_{s_p}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

com somatório sobre as direções i e os todos os nós ℓ do elemento mestre. Observa-se que o primeiro termo da equação (A.21) representa o produto interno entre o vetor de forças \hat{P}_i^P e o vetor tangente unitário $\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P$ do ponto P da linha de referência do elemento mestre do mesmo modo que ocorreu para a força interna desse grau de liberdade.

A.2.3 Energia cinética (vetor de força inercial)

Para determinação do vetor de forças inerciais do conjunto procede-se de maneira análoga ao vetor de forças internas. Conhecida a energia cinética dos elementos mestre e escravo, $\bar{\mathbb{K}}$ e $\hat{\mathbb{K}}$, respectivamente, determina-se o vetor de forças inerciais $F_i^{\alpha,iner}$ do sistema a partir do conjugado energético dos graus de liberdade nodais do conjunto Y_i^α como:

$$F_i^{\alpha,iner} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \bar{\mathbb{K}}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial Y_i^\alpha} \quad (\text{A.22})$$

Para os graus de liberdade \bar{Y}_i^γ dos nós γ elemento mestre, utilizando-se da equação (A.3), desenvolve-se a força inercial como:

$$F_i^{\gamma,iner} = \frac{\partial \bar{\mathbb{K}}}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,iner} + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial \hat{Y}_{(i)}^P} \frac{\partial \hat{Y}_{(i)}^P}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,iner} + \hat{F}_{(i)}^{P,iner} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{(i)}^\gamma} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_{(i)}^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{(i)3} \right],$$

com ℓ representando o somatório sobre os nós do elemento mestre e os parênteses em i indicando não haver soma na direção. Chega-se, assim, a:

$$F_i^{\gamma,iner} = \bar{F}_i^{\gamma,iner} + \hat{F}_i^{P,iner} \phi_\gamma(\xi_P), \quad (A.23)$$

sendo $\bar{F}_i^{\gamma,iner}$ a força inercial dos nós do elemento mestre e $\hat{F}_i^{P,iner}$ a força inercial do nó escravo, na direção i .

Para um elemento finito com ligações monolíticas, de modo genérico, os valores das forças de inércia $F_r^{\psi,iner}$ na direção r de um nó ψ são obtidos pela derivada da sua energia cinética em relação aos seus graus de liberdade. De acordo com o capítulo 3 essa operação resulta em:

$$F_r^{\psi,iner} = M_{\psi\zeta} \ddot{Y}_r^\zeta, \quad (A.24)$$

sendo: ζ um índice que indica somatório sobre todos os nós do elemento finito, $M_{\psi\zeta}$ entradas da matriz de massa, e \ddot{Y}_r^ζ a aceleração do nó na direção da força.

Dado que a inércia rotacional foi desconsiderada, a matriz de massa é calculada por:

$$M_{\psi\zeta} = \begin{cases} \int_{V_0} \rho_0 \phi_\psi \phi_\zeta dV_0, & \text{se } r=1,2 \\ 0, & \text{se } r=3 \end{cases} \quad (A.25)$$

sendo: ρ_0 a densidade do material do elemento finito medida no volume inicial V_0 , e, ϕ_ζ e ϕ_ψ as funções de forma dos nós do elemento.

Nota-se da equação (A.24) que a força inercial depende da aceleração dos graus de liberdade e da matriz de massa, que é constante para o elemento finito com ligações monolíticas. De modo a utilizar um método para a integração temporal da equação de movimento é importante apresentar essa força escrita em função das acelerações dos graus de liberdade incógnitos do sistema mecânico. Isso é especialmente relevante para o nó escravo, já que nele há mudança nos seus graus de liberdade.

Expressando a força inercial para os graus de liberdade do elemento mestre, equação (A.23), em função das acelerações, com auxílio da equação (A.24), têm-se:

$$F_i^{\gamma,iner} = \bar{M}_{\gamma\beta} \ddot{Y}_i^\beta + \hat{M}_{P\ell} \ddot{Y}_i^\ell \phi_\gamma(\xi_P), \quad (A.26)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós ℓ do elemento escravo. O somatório da segunda parcela da equação pode ser separado entre o nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo como:

$$F_i^{\gamma,iner} = \bar{M}_{\gamma\beta} \ddot{Y}_i^\beta + \hat{M}_{PP} \ddot{Y}_i^P \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{M}_{Pk} \ddot{Y}_i^k \phi_\gamma(\xi_P) \quad (A.27)$$

De modo a explicitar a dependência com a aceleração \ddot{s}_p , substitui-se na equação (A.27) a equação (A.7) que descreve o valor de \ddot{Y}_i^p , resultando em:

$$F_i^{\gamma,iner} = \left[\bar{M}_{\gamma\beta} + \hat{M}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_\beta(\xi_P) \right] \ddot{Y}_i^\beta + \hat{M}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_{\beta,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \ddot{s}_p + \\ + \hat{M}_{Pk}\phi_\gamma(\xi_P)\ddot{Y}_i^k + \hat{M}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\Lambda_i \quad (A.28)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo. E sendo Λ_i um termo que não depende da aceleração, dado por:

$$\Lambda_i = \phi_{\beta,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \dot{s}_p \dot{s}_p + 2\phi_{\beta,\xi}(\xi_P)\dot{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \dot{s}_p - \phi_{\beta,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \dot{j}_p \dot{s}_p \quad (A.29)$$

Para os nós independentes do elemento escravo é possível escrever a força inercial dos seus graus de liberdade \hat{Y}_i^ω de modo análogo ao elemento mestre. A expressão dessa força se desenvolve como:

$$F_i^{\omega,iner} = \frac{\partial \bar{\mathbb{K}}}{\partial \hat{Y}_i^\omega} + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial \hat{Y}_i^\omega} = 0 + \hat{F}_i^{\omega,iner} \\ F_i^{\omega,iner} = \hat{F}_i^{\omega,iner}, \quad (A.30)$$

sendo $\hat{F}_i^{\omega,iner}$ a força inercial dos nós independentes ω , na direção i , do elemento escravo.

Expressando a equação (A.30) em função das acelerações de acordo com a equação (A.24) e separando as parcelas referentes ao nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo têm-se:

$$F_i^{\omega,iner} = \hat{M}_{\omega P}\ddot{Y}_i^P + \hat{M}_{\omega k}\ddot{Y}_i^k \quad (A.31)$$

A luz da equação (A.7) é possível reescrever essa equação como:

$$F_i^{\omega,iner} = \hat{M}_{\omega P}\phi_\beta(\xi_P)\ddot{Y}_i^\beta + \hat{M}_{\omega P}\phi_{\beta,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \ddot{s}_p + \hat{M}_{\omega k}\ddot{Y}_i^k + \hat{M}_{\omega P}\Lambda_i, \quad (A.32)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo. O termo Λ_i é o mesmo dado na equação (A.29).

A força inercial $F_{s_p}^{iner}$ relativa ao grau de liberdade do nó escravo s_p é obtida com auxílio da equação (A.3) como:

$$F_{s_p}^{iner} = \frac{\partial \bar{\mathbb{K}}}{\partial s_p} + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial s_p} = 0 + \frac{\partial \hat{\mathbb{K}}}{\partial \hat{Y}_i^P} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial s_p} = \hat{F}_i^{P,iner} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p}$$

$$F_{s_p}^{iner} = \hat{F}_i^{P,iner} \frac{\partial}{\partial \xi_P} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \right] \frac{1}{J_P}$$

$$F_{s_p}^{iner} = \hat{F}_i^{P,iner} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}, \quad (\text{A.33})$$

com somatório sobre as direções i e os todos os nós ℓ do elemento mestre. Nota-se que a equação (A.33), tal como a equação (A.16) para a força interna, representa o produto interno entre um vetor de forças, $\hat{F}_i^{P,iner}$, e o vetor tangente unitário $\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P$ do ponto P da linha de referência do elemento mestre.

Expressando a equação (A.33) em função das acelerações de acordo com a equação (A.24) e separando as parcelas referentes ao nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo têm-se:

$$F_{s_p}^{iner} = \hat{M}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \ddot{Y}_i^P + \hat{M}_{Pk} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \ddot{Y}_i^k \quad (\text{A.34})$$

Substituindo nesta a equação (A.7), que determina o valor de \ddot{Y}_i^P , têm-se, finalmente:

$$F_{s_p}^{iner} = \hat{M}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \phi_\beta(\xi_P) \ddot{Y}_i^\beta + \hat{M}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \phi_{m,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^m \frac{1}{J_P} \ddot{s}_P +$$

$$+ \hat{M}_{Pk} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \ddot{Y}_i^k + \hat{M}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \Lambda_i \quad (\text{A.35})$$

com somatório sobre as direções i , os nós β , ℓ e m do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo. O termo Λ_i é o mesmo dado na equação (A.29).

A.2.4 Dissipação por amortecimento viscoso (vetor de força de amortecimento)

Para determinação do vetor de forças de amortecimento do conjunto procede-se de maneira análoga aos vetores de forças internas e inerciais. Entretanto, para a dissipação supõe-se conhecer somente sua taxa de variação para a posição, que é o próprio vetor de forças de amortecimento $F_i^{\alpha,amort}$. Assim, para os graus de liberdade nodais do conjunto Y_i^α , têm-se:

$$F_i^{\alpha,amort} = \frac{\partial Q}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial Y_i^\alpha} \quad (\text{A.36})$$

Para os graus de liberdade \bar{Y}_i^γ dos nós γ do elemento mestre, utilizando-se da equação (A.3), desenvolve-se a força de amortecimento como:

$$F_i^{\gamma,amort} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,amort} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{Y}_{(i)}^P} \frac{\partial \hat{Y}_{(i)}^P}{\partial \bar{Y}_i^\gamma} = \bar{F}_i^{\gamma,amort} + \hat{F}_{(i)}^{P,amort} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{(i)}^\gamma} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_{(i)}^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{(i)3} \right],$$

com ℓ representando o somatório sobre os nós do elemento mestre e os parênteses em i indicando não haver soma na direção. Chega-se, assim, a:

$$F_i^{\gamma,amort} = \bar{F}_i^{\gamma,amort} + \hat{F}_i^{P,amort} \phi_\gamma(\xi_P), \quad (A.37)$$

sendo $\bar{F}_i^{\gamma,amort}$ a força de amortecimento dos nós do elemento mestre e $\hat{F}_i^{P,amort}$ a força de amortecimento do nó escravo, na direção i .

Para um elemento finito com ligações monolíticas, de modo genérico, os valores das forças de amortecimento $F_r^{\psi,amort}$ na direção r de um nó ψ são obtidos pela derivada da dissipação em relação aos seus graus de liberdade. De acordo com o capítulo 3 essa operação resulta em:

$$F_r^{\psi,amort} = D_{\psi\zeta} \dot{Y}_r^\zeta, \quad (A.38)$$

sendo: ζ um índice que indica somatório sobre todos os nós do elemento finito, $D_{\psi\zeta}$ entradas da matriz de amortecimento viscoso, e \dot{Y}_r^ζ a velocidade do nó na direção da força.

As considerações realizadas no capítulo 3 para a dissipação de energia por amortecimento viscoso resultam na consideração do amortecimento de Rayleigh proporcional à massa. Assim, a matriz de amortecimento é dada por:

$$D_{\psi\zeta} = \lambda M_{\psi\zeta} \quad (A.39)$$

sendo λ um fator de proporcionalidade e $M_{\psi\zeta}$ dada pela equação (A.25).

Como era esperado, da equação (A.38) observa-se que a força de amortecimento depende da velocidade dos graus de liberdade e da matriz de amortecimento, que é constante para o elemento finito com ligações monolíticas. Semelhantemente ao que ocorre com a força inercial, para utiliza-se de um método para a integração temporal é importante apresentar a força de amortecimento escrita em função das velocidades dos graus de liberdade incógnitos do sistema mecânico. Isso é especialmente relevante para o nó escravo, já que nele há mudança nos seus graus de liberdade.

Expressando a força de amortecimento para os graus de liberdade do elemento mestre, equação (A.37), em função das velocidades, com auxílio da equação (A.38), têm-se:

$$F_i^{\gamma,amort} = \bar{D}_{\gamma\beta} \dot{Y}_i^\beta + \hat{D}_{P\ell} \dot{Y}_i^\ell \phi_\gamma(\xi_P), \quad (A.40)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós ℓ do elemento escravo. O somatório da segunda parcela da equação pode ser separado entre o nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo como:

$$F_i^{\gamma,amort} = \bar{D}_{\gamma\beta} \dot{Y}_i^\beta + \hat{D}_{PP} \dot{Y}_i^P \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{D}_{Pk} \dot{Y}_i^k \phi_\gamma(\xi_P) \quad (A.41)$$

De modo a explicitar a dependência com a velocidade \dot{s}_p , substitui-se na equação (A.41) a equação (A.4), que descreve o valor de \dot{Y}_i^P , resultando em:

$$F_i^{\gamma,amort} = \left[\bar{D}_{\gamma\beta} + \hat{D}_{PP} \phi_\gamma(\xi_P) \phi_\beta(\xi_P) \right] \dot{Y}_i^\beta + \hat{D}_{PP} \phi_\gamma(\xi_P) \phi_{\beta,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \dot{s}_p + \hat{D}_{Pk} \phi_\gamma(\xi_P) \dot{Y}_i^k, \quad (A.42)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo.

Para os nós independentes do elemento escravo é possível desenvolver a força de amortecimento dos seus graus de liberdade \hat{Y}_i^ω , de modo análogo ao elemento mestre, como:

$$F_i^{\omega,amort} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \hat{Y}_i^\omega} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{Y}_i^\omega} = 0 + \hat{F}_i^{\omega,amort}$$

$$F_i^{\omega,amort} = \hat{F}_i^{\omega,amort}, \quad (A.43)$$

sendo $\hat{F}_i^{\omega,amort}$ a força de amortecimento dos nós independentes ω , na direção i , do elemento escravo.

Expressando a equação (A.43) em função das velocidades de acordo com a equação (A.38) e separando as parcelas referentes ao nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo têm-se:

$$F_i^{\omega,amort} = \hat{D}_{\omega P} \dot{Y}_i^P + \hat{D}_{\omega k} \dot{Y}_i^k \quad (A.44)$$

A luz da equação (A.4) é possível reescrever essa equação como:

$$F_i^{\omega,amort} = \hat{D}_{\omega P} \phi_\beta(\xi_P) \dot{Y}_i^\beta + \hat{D}_{\omega P} \phi_{\beta,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \dot{s}_p + \hat{D}_{\omega k} \dot{Y}_i^k, \quad (A.45)$$

com somatório sobre os nós β do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo.

A força de amortecimento $F_{s_p}^{amort}$ relativa ao grau de liberdade do nó escravo s_p é obtida, com auxílio da equação (A.3) como:

$$\begin{aligned}
F_{s_p}^{amort} &= \frac{\partial \bar{Q}}{\partial s_p} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial s_p} = 0 + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \hat{Y}_i^P} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial s_p} = \hat{F}_i^{P,amort} \frac{\partial \hat{Y}_i^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p} \\
F_{s_p}^{amort} &= \hat{F}_i^{P,amort} \frac{\partial}{\partial \xi_P} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} \right] \frac{1}{J_P} \\
F_{s_p}^{amort} &= \hat{F}_i^{P,amort} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}, \tag{A.46}
\end{aligned}$$

com somatório sobre as direções i e os todos os nós ℓ do elemento mestre. Nota-se que essa expressão, tal como a equação (A.16) para a força interna e a equação (A.33) para a força inercial, representa o produto interno entre um vetor de forças, $\hat{F}_i^{P,amort}$, e o vetor tangente unitário $\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell / J_P$ do ponto P da linha de referência do elemento mestre.

Expressando a equação (A.46) em função das velocidades de acordo com a equação (A.38) e separando as parcelas referentes ao nó escravo, P, e os nós independentes, k , do elemento escravo têm-se:

$$F_{s_p}^{amort} = \hat{D}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{Y}_i^P + \hat{D}_{Pk} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{Y}_i^k \tag{A.47}$$

Substituindo nesta a equação (A.4) que determina o valor de \dot{Y}_i^P , têm-se, finalmente:

$$\begin{aligned}
F_{s_p}^{amort} &= \hat{D}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \phi_\beta(\xi_P) \dot{Y}_i^\beta + \hat{D}_{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \phi_{\beta,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\beta \frac{1}{J_P} \dot{s}_P + \\
&+ \hat{D}_{Pk} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \dot{Y}_i^k, \tag{A.48}
\end{aligned}$$

com somatório sobre as direções i , os nós β e ℓ do elemento mestre e os nós independentes k do elemento escravo.

A.2.5 Novas equações do movimento

A partir das correções dos itens anteriores sobre o conjunto de elementos mestre e escravo é possível reescrever a equação (A.11), que representa o equilíbrio dinâmico do sistema mecânico, como:

$$F_i^{\alpha,int} - F_i^{\alpha,ext} + M_{ij}^{*\alpha\zeta} \ddot{Y}_j^\zeta + D_{ij}^{*\alpha\zeta} \dot{Y}_j^\zeta + \Gamma_i^\alpha = 0_i^\alpha, \tag{A.49}$$

sendo, i e j as direções (1, 2 ou 3), α e ζ os nós do sistema, $M_{ij}^{*\alpha\zeta}$ e $D_{ij}^{*\alpha\zeta}$ as matrizes de massa e amortecimento corrigidas para o conjunto, e Γ_i^α um vetor de termos cruzados entre velocidades advindo das correções sobre a energia cinética. Ressalta-se que, dadas às restrições cinemáticas impostas, quando α , ou ζ , assumir a posição do nó escravo o par de índices do nó com as direções i , ou j , somente pode se referir a um grau de liberdade, s_p .

A equação (A.49) pode ser escrita de forma compacta em notação diádica como:

$$\vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} + \mathbf{M}^* \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D}^* \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{\Gamma} = \vec{0} \quad (\text{A.50})$$

De modo a resumir as expressões dos itens anteriores pode-se apresentar cada parcela dessa equação em um formato matricial. Para tanto, convencionou-se nas expressões seguintes que os nós do elemento mestre serão indicados por γ , os nós do elemento escravo por ω e o índice i representa as direções.

O vetor de forças internas do conjunto \vec{F}^{int} pode ser escrito como:

$$\vec{F}^{int} = \begin{Bmatrix} F_i^{\gamma,int} \\ F_i^{\omega,int} \\ F_{s_p}^{int} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_i^{P,int} \phi_\gamma(\xi_P) \\ \hat{F}_i^{\omega,int} \\ \hat{F}_i^{P,int} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.51})$$

com ℓ indicando soma sobre os nós do elemento mestre.

De maneira análoga o vetor de forças externas do conjunto pode ser escrito matricialmente como:

$$\vec{F}^{ext} = \begin{Bmatrix} F_i^{\gamma,ext} \\ F_i^{\omega,ext} \\ F_{s_p}^{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_i^\gamma + \hat{P}_i^P \phi_\gamma(\xi_P) \\ \hat{P}_i^\omega \\ \hat{P}_i^P \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{P}_{s_p} \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.52})$$

com ℓ indicando soma sobre os nós do elemento mestre.

Já o vetor de forças inerciais do conjunto pode ser escrito pelo seguinte produto:

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{iner} &= \mathbf{M}^* \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} F_i^{\gamma,iner} \\ F_i^{\omega,iner} \\ F_{s_p}^{iner} \end{Bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \bar{M}_{\gamma\beta} + \hat{M}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_\beta(\xi_P) & \hat{M}_{Pk}\phi_\gamma(\xi_P) & \hat{M}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \\ \hat{M}_{\omega P}\phi_\beta(\xi_P) & \hat{M}_{\omega k} & \hat{M}_{\omega P}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \\ \hat{M}_{PP}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}\phi_\beta(\xi_P) & \hat{M}_{Pk}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} & \hat{M}_{PP}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}\phi_{m,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^m \frac{1}{J_P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_i^\beta \\ \ddot{Y}_i^k \\ \ddot{s}_p \end{Bmatrix} \\
&\quad (A.53)
\end{aligned}$$

sendo: ℓ e m índices que indicam soma sobre os nós do elemento mestre; \ddot{Y}_i^β as acelerações dos graus de liberdade dos nós β do elemento mestre; \ddot{Y}_i^k as acelerações dos graus de liberdade dos nós independentes k do elemento escravo; e \ddot{s}_p a aceleração do grau de liberdade do nó escravo.

O vetor de forças de amortecimento do conjunto pode ser escrito de modo similar como:

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{amort} &= \mathbf{D}^* \cdot \dot{\mathbf{Y}} = \begin{Bmatrix} F_i^{\gamma,amort} \\ F_i^{\omega,amort} \\ F_{s_p}^{amort} \end{Bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \bar{D}_{\gamma\beta} + \hat{D}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_\beta(\xi_P) & \hat{D}_{Pk}\phi_\gamma(\xi_P) & \hat{D}_{PP}\phi_\gamma(\xi_P)\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \\ \hat{D}_{\omega P}\phi_\beta(\xi_P) & \hat{D}_{\omega k} & \hat{D}_{\omega P}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \\ \hat{D}_{PP}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}\phi_\beta(\xi_P) & \hat{D}_{Pk}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} & \hat{D}_{PP}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P}\phi_{m,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^m \frac{1}{J_P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{Y}_i^\beta \\ \dot{Y}_i^k \\ \dot{s}_p \end{Bmatrix} \\
&\quad (A.54)
\end{aligned}$$

sendo: ℓ e m índices que indicam soma sobre os nós do elemento mestre; \dot{Y}_i^β as velocidades dos graus de liberdade dos nós β do elemento mestre; \dot{Y}_i^k as velocidades dos graus de liberdade dos nós independentes k do elemento escravo; e \dot{s}_p a velocidade do grau de liberdade do nó escravo.

Por fim, o vetor de termos cruzados do conjunto pode ser escrito matricialmente como:

$$\vec{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \Gamma_i^\gamma \\ \Gamma_i^\omega \\ \Gamma_{s_P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{M}_{PP} \phi_\gamma(\xi_P) \Lambda_i \\ \hat{M}_{\omega P} \Lambda_i \\ \hat{M}_{PP} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \Lambda_i \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.55})$$

com o termo Λ_i obtido da equação (A.29).

A.3 Solução do Sistema Não Linear e Integração Temporal

Para encontrar a solução da nova equação do movimento, equação (A.50), procede-se de maneira semelhante ao que foi desenvolvido no capítulo 3 para o elemento finito de pórtico com ligações monolíticas. Inicialmente reescreve-se essa equação como:

$$\vec{g} = \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} + \mathbf{M}^* \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D}^* \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{\Gamma} = \vec{0} \quad (\text{A.56})$$

O vetor \vec{g} representa o desbalanceamento mecânico do sistema quando a posição tentativa \vec{Y} não é ainda a solução correta, e tem valor nulo caso contrário.

De modo a resolver a equação de equilíbrio dinâmico e realizar sua integração temporal, ela deve ser escrita para um instante de tempo arbitrário t_{s+1} como:

$$\vec{g}_{s+1} = \vec{F}_{s+1}^{int} - \vec{F}_{s+1}^{ext} + \mathbf{M}_{s+1}^* \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{D}_{s+1}^* \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} + \vec{\Gamma}_{s+1} = \vec{0} \quad (\text{A.57})$$

As aproximações de Newmark podem ser aplicadas diretamente sobre as parcelas de força inercial e de amortecimento já que os termos de velocidade e aceleração, $\dot{\vec{Y}}_{s+1}$ e $\ddot{\vec{Y}}_{s+1}$, estão claramente separados das respectivas matrizes. Entretanto, aplicar essas aproximações sobre o vetor $\vec{\Gamma}$, que também é escrito em função das velocidades, é uma tarefa de pouca praticidade em virtude dos termos cruzados de velocidade.

Para evitar tal entrave algumas alternativas podem ser tomadas. Essa parcela pode ser simplesmente desprezada da equação ou escrita para um instante de tempo anterior, t_s , sendo atualizada de modo ligeiramente atrasado. Ou ainda, levando em consideração que o sistema não linear é resolvido por um processo iterativo, escreve-se essa parcela no instante de tempo t_{s+1} , mas considera-se que seu valor é conhecido por ser tomado da iteração anterior, portanto, deixando de ser incógnita na iteração atual.

Adotando-se esta última alternativa, e valendo-se das expressões de Newmark, equações (3.50) e (3.51), aproxima-se a equação (A.57) no tempo como:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{S+1} = & \vec{F}_{S+1}^{int} - \vec{F}_{S+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}_{S+1}^*}{\beta\Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{S+1} - \mathbf{M}_{S+1}^* \cdot \vec{T}_S + \mathbf{D}_{S+1}^* \cdot \vec{R}_S + \\ & + \frac{\gamma\mathbf{D}_{S+1}^*}{\beta\Delta t} \cdot \vec{Y}_{S+1} - \gamma\Delta t\mathbf{D}_{S+1}^* \cdot \vec{T}_S + \vec{\Gamma}_{S+1} = \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Nessa equação, γ e β são os parâmetros usuais do método de Newmark, Δt é o incremento de tempo, $\vec{\Gamma}_{S+1}$ indica o vetor no instante de tempo atual com o valor da iteração anterior, e os vetores \vec{T}_S e \vec{R}_S apresentam as contribuições do instante de tempo anterior, t_S , e são escritos como:

$$\vec{T}_S = \frac{\vec{Y}_S}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_S}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\vec{Y}}_S \quad \text{e} \quad \vec{R}_S = \dot{\vec{Y}}_S + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\vec{Y}}_S \quad (\text{A.59})$$

A equação (A.58) pode ser entendida simplesmente como $\vec{g}(\vec{Y}_{S+1}) = \vec{0}$ e é claramente não linear em relação à \vec{Y}_{S+1} . Para resolvê-la, é feita a expansão do vetor de desbalanceamento mecânico em série de Taylor até o termo de primeira ordem como:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{S+1}) \cong \vec{g}(\vec{Y}_{S+1}^0) + \nabla\vec{g}(\vec{Y}_{S+1}^0) \cdot \Delta\vec{Y}_{S+1} = \vec{0} \quad (\text{A.60})$$

Nesta expressão \vec{Y}_{S+1}^0 é um vetor de tentativa para o cálculo de \vec{Y}_{S+1} , usualmente a configuração de equilíbrio do corpo no instante anterior, e $\Delta\vec{Y}_{S+1}$ é o incremento das incógnitas para as iterações. O termo $\nabla\vec{g}_{S+1}$ representa a matriz hessiana da energia total do sistema mecânico de elementos mestre e escravo, obtida por:

$$\nabla\vec{g}_{S+1} = \left. \frac{\partial\vec{g}}{\partial\vec{Y}} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial^2\Pi}{\partial\vec{Y}\partial\vec{Y}} \right|_{S+1} = \mathbf{H}_{S+1} \quad (\text{A.61})$$

As expressões para a matriz hessiana são indicadas neste capítulo no item seguinte.

Resulta da expressão (A.60) o procedimento de Newton-Raphson para solução do sistema não linear como:

$$\mathbf{H}_{S+1} \cdot \Delta\vec{Y}_{S+1} = -\vec{g}(\vec{Y}_{S+1}^0) \quad \text{e} \quad \Delta\vec{Y}_{S+1} = -(\mathbf{H}_{S+1})^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{S+1}^0) \quad (\text{A.62})$$

Determinando-se $\Delta\vec{Y}_{S+1}$ pode-se calcular a nova posição tentativa para \vec{Y}_{S+1} como:

$$\vec{Y}_{S+1} = \vec{Y}_{S+1}^0 + \Delta\vec{Y}_{S+1} \quad (\text{A.63})$$

Em cada iteração a velocidade é corrigida pela expressão (3.51) e a aceleração pela expressão abaixo:

$$\ddot{\vec{Y}}_{S+1} = \frac{\vec{Y}_{S+1}}{\beta\Delta t^2} - \vec{T}_S \quad (\text{A.64})$$

O critério de parada para uma dada tolerância TOL é satisfeito quando:

$$\frac{\|\vec{g}(\vec{Y}_{S+1})\|}{\|\vec{F}^{ext}\|} \leq TOL \quad \text{e} \quad \frac{\|\Delta\vec{Y}_{S+1}\|}{\|\vec{X}\|} \leq TOL \quad (\text{A.65})$$

sendo \vec{X} a posição inicial da estrutura.

A.3.1 Hessiana do conjunto de elementos mestre e escravo

A matriz hessiana do conjunto de elementos mestre e escravo é obtida da derivada do vetor de desbalanceamento mecânico, dado pela equação (A.58), para os graus de liberdade do conjunto.

Entretanto, como o vetor de forças externas e as matrizes de massa e amortecimento corrigidas dependem das posições e giros estes também devem ser derivados. Como esse procedimento é bastante dispendioso, tanto no desenvolvimento das expressões quanto em termos de implementação e custo computacional, utiliza-se da mesma alternativa que para o vetor $\vec{\Gamma}_{S+1}$, indicando o vetor de forças externas e as matrizes no instante de tempo atual com o valor da iteração anterior. Isso é possível porque a hessiana nada mais é do que um operador tangente do algoritmo de Newton-Raphson.

Assim, da equação (A.61), chega-se à seguinte expressão para hessiana:

$$\mathbf{H}_{S+1} = \mathbf{H}_{S+1}^{int} + \frac{\mathbf{M}_{S+1}^*}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{D}_{S+1}^*}{\beta\Delta t} \quad (\text{A.66})$$

Sendo a parcela \mathbf{H}_{S+1}^{int} dependente exclusivamente da energia de deformação e escrita como:

$$\mathbf{H}_{S+1}^{int} = \left. \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{Y}} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right|_{S+1} \quad (\text{A.67})$$

De modo a obter as expressões para o conjunto de elementos mestre e escravo é realizada a operação da equação (A.67) para cada grau de liberdade do sistema utilizando-se da expressão (A.3) quando necessário. Para indicar os nós referentes ao elemento mestre adota-se

as variáveis γ e μ , enquanto que para os nós independentes do elemento escravo adota-se ω e ζ . O nó escravo é indicado pelo seu grau de liberdade s_p .

Derivando a força interna dos graus de liberdade \bar{Y}_i^γ referentes aos nós do elemento mestre, expressão (A.14), em relação ao grau de liberdade \bar{Y}_j^μ também do elemento mestre, obtêm-se a seguinte hessiana:

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\gamma\mu,int} &= \frac{\partial F_i^\gamma}{\partial \bar{Y}_j^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \left[\bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_i^{P,int} \phi_\gamma(\xi_P) \right] = \bar{H}_{ij}^{\gamma\mu} + \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial \hat{Y}_{(j)}^P} \frac{\partial \hat{Y}_{(j)}^P}{\partial \bar{Y}_{(j)}^\mu} \phi_\gamma(\xi_P) \\ &= \bar{H}_{ij}^{\gamma\mu} + \hat{H}_{i(j)}^{PP} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{(j)}^\mu} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_{(j)}^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{(j)3} \right] \phi_\gamma(\xi_P) \\ H_{ij}^{\gamma\mu,int} &= \bar{H}_{ij}^{\gamma\mu} + \hat{H}_{ij}^{PP} \phi_\mu(\xi_P) \phi_\gamma(\xi_P), \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

sendo, \bar{H} e \hat{H} referentes às segundas derivadas da energia de deformação dos elementos mestre e escravo, respectivamente, tal como indicado no capítulo 3.

Para a força interna dos mesmos nós γ do elemento mestre, mas agora derivando para os grau de liberdade \hat{Y}_j^ζ dos nós independentes do elemento escravo, têm-se:

$$\begin{aligned} H_{ij}^{\gamma\zeta,int} &= \frac{\partial F_i^\gamma}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} = \frac{\partial}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} \left[\bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_i^{P,int} \phi_\gamma(\xi_P) \right] \\ H_{ij}^{\gamma\zeta,int} &= \hat{H}_{ij}^{P\zeta} \phi_\gamma(\xi_P) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Derivando em relação ao grau de liberdade s_p do nó escravo tem-se:

$$\begin{aligned} H_{i s_p}^{\gamma,int} &= \frac{\partial F_i^\gamma}{\partial s_p} = \frac{\partial}{\partial s_p} \left[\bar{F}_i^{\gamma,int} + \hat{F}_i^{P,int} \phi_\gamma(\xi_P) \right] = 0 + \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial s_p} \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{F}_i^{P,int} \frac{\partial \phi_\gamma(\xi_P)}{\partial s_p} \\ &= \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial \hat{Y}_j^P} \frac{\partial \hat{Y}_j^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p} \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{F}_i^{P,int} \frac{\partial \phi_\gamma(\xi_P)}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p} \\ &= \hat{H}_{ij}^{PP} \frac{\partial}{\partial \xi_P} \left[\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{j3} \right] \frac{1}{J_P} \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{F}_i^{P,int} \phi_{\gamma,\xi}(\xi_P) \frac{1}{J_P} \\ H_{i s_p}^{\gamma,int} &= \hat{H}_{ij}^{PP} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell \frac{1}{J_P} \phi_\gamma(\xi_P) + \hat{F}_i^{P,int} \phi_{\gamma,\xi}(\xi_P) \frac{1}{J_P}, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

com somatório na direção j e nos nós ℓ do elemento mestre.

Para a força interna dos graus de liberdade dos nós independentes \hat{Y}_i^ω do elemento escravo, expressão (A.15), a hessiana em relação aos graus de liberdade \bar{Y}_j^μ dos nós do elemento mestre, é dada por:

$$H_{ij}^{\omega\mu,int} = \frac{\partial F_i^\omega}{\partial \bar{Y}_j^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} (\hat{F}_i^{\omega,int}) = \frac{\partial \hat{F}_i^{\omega,int}}{\partial \hat{Y}_{(j)}^P} \frac{\partial \hat{Y}_{(j)}^P}{\partial \bar{Y}_j^\mu} = \hat{H}_{ij}^{\omega P} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} [\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{j3}]$$

$$H_{ij}^{\omega\mu,int} = \hat{H}_{ij}^{\omega P} \phi_\mu(\xi_P) \quad (\text{A.71})$$

Para a mesma força interna dos nós do elemento escravo, mas agora derivando para os próprios graus de liberdade \hat{Y}_j^ζ dos nós independentes do elemento escravo não constam termos adicionais já que:

$$H_{ij}^{\omega\zeta,int} = \frac{\partial F_i^\omega}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} = \frac{\partial}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} (\hat{F}_i^{\omega,int})$$

$$H_{ij}^{\omega\zeta,int} = \hat{H}_{ij}^{\omega\zeta} \quad (\text{A.72})$$

Derivando, então, em relação ao grau de liberdade s_p do nó escravo tem-se:

$$H_{i s_p}^{\omega,int} = \frac{\partial F_i^\omega}{\partial s_p} = \frac{\partial \hat{F}_i^{\omega,int}}{\partial s_p} = \frac{\partial \hat{F}_i^{\omega,int}}{\partial \hat{Y}_j^P} \frac{\partial \hat{Y}_j^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p} = \hat{H}_{ij}^{\omega P} \frac{\partial}{\partial \xi_P} [\phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell + \Delta \theta_P^0 \delta_{j3}] \frac{1}{J_P}$$

$$H_{i s_p}^{\omega,int} = \hat{H}_{ij}^{\omega P} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell \frac{1}{J_P}, \quad (\text{A.73})$$

com somatório na direção j e nos nós ℓ do elemento mestre.

Finalmente, a hessiana obtida a partir da expressão (A.16) da força interna do nó escravo para os graus de liberdade \bar{Y}_j^μ dos nós do elemento mestre, é dada por:

$$H_{s_p j}^{\mu} = \frac{\partial F_{s_p}^{int}}{\partial \bar{Y}_j^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \left[\hat{F}_i^{P,int} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \right]$$

$$= \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P,int} \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \left[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \right]$$

$$= \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial \hat{Y}_j^P} \frac{\partial \hat{Y}_j^P}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P,int} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} [\phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell] \frac{1}{J_P} + \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \left(\frac{1}{J_P} \right) \right\}$$

$$= \frac{\partial \hat{F}_i^{P,int}}{\partial \hat{Y}_j^P} \frac{\partial \hat{Y}_j^P}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P,int} \left[\phi_{\mu,\xi}(\xi_P) \delta_{ij} \frac{1}{J_P} - \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \frac{\partial J_P}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \right]$$

O jacobiano J_P dado pela equação (A.6) pode ser reescrito como:

$$J_P = (T_k T_k)^{1/2}, \quad k = 1, 2$$

sendo $T_k = \phi_{\ell,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^\ell$ com somatório sobre os nós ℓ do elemento mestre. Assim, a derivada do jacobiano para os graus de liberdade \bar{Y}_j^μ dos nós do elemento mestre é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_P}{\partial \bar{Y}_j^\mu} &= \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j^\mu} \left[(T_k T_k)^{1/2} \right] (1 - \delta_{(j)3}) = \frac{1}{J_P} T_k \frac{\partial T_k}{\partial \bar{Y}_j^\mu} (1 - \delta_{(j)3}) \\
&= \frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^\ell \phi_{\mu, \xi}(\xi_P) \delta_{k(j)} (1 - \delta_{(j)3}) \\
&= \frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^\ell \phi_{\mu, \xi}(\xi_P) (1 - \delta_{(j)3})
\end{aligned}$$

Substituindo esse termo a hessiana resulta em:

$$\begin{aligned}
H_{s_p j}^\mu &= \hat{H}_{ij}^{PP} \phi_\mu(\xi_P) \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_j^{P, int} \phi_{\mu, \xi}(\xi_P) \frac{1}{J_P} + \\
&\quad - \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \phi_{m, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^m \phi_{\mu, \xi}(\xi_P) (1 - \delta_{(j)3})
\end{aligned} \tag{A.74}$$

com somatório na direção i e nos nós ℓ e m do elemento mestre. Os parênteses em torno do índice j indicam a ausência de somatório para a variável.

Para a mesma força interna do nó escravo, derivando para os graus de liberdade \hat{Y}_j^ζ dos nós independentes do elemento escravo resulta em:

$$\begin{aligned}
H_{s_p j}^\zeta &= \frac{\partial F_{s_p}^{int}}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} = \frac{\partial}{\partial \hat{Y}_j^\zeta} \left[\hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \right] \\
H_{s_p j}^\zeta &= \hat{H}_{ij}^{P\zeta} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P},
\end{aligned} \tag{A.75}$$

com somatório na direção i e nos nós ℓ do elemento mestre.

Por fim, derivando em relação ao próprio grau de liberdade s_p do nó escravo tem-se:

$$\begin{aligned}
H_{s_p s_p} &= \frac{\partial F_{s_p}^{int}}{\partial s_p} = \frac{\partial}{\partial s_p} \left[\hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \right] = \\
&= \frac{\partial \hat{F}_i^{P, int}}{\partial s_p} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P, int} \frac{\partial}{\partial s_p} \left[\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \right] \\
&= \frac{\partial \hat{F}_i^{P, int}}{\partial \hat{Y}_j^P} \frac{\partial \hat{Y}_j^P}{\partial \xi_P} \frac{\partial \xi_P}{\partial s_p} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P, int} \frac{\partial}{\partial s_p} \left[\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \right] \frac{1}{J_P} + \\
&\quad + \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{\partial}{\partial s_p} \left(\frac{1}{J_P} \right) \\
&= \hat{H}_{ij}^{PP} \phi_{m, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^m \frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} + \\
&\quad - \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \frac{\partial J_P}{\partial s_p}
\end{aligned}$$

O jacobiano J_P dado pela equação (A.6) pode ser reescrito como:

$$J_P = (T_k T_k)^{1/2}, \quad k = 1, 2$$

sendo $T_k = \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^\ell$ com somatório sobre os nós ℓ do elemento mestre. Assim, a derivada do jacobiano para o grau de liberdade do nó escravo é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_P}{\partial s_P} &= \frac{\partial}{\partial s_P} \left[(T_k T_k)^{1/2} \right] = \frac{1}{J_P} T_k \frac{\partial T_k}{\partial s_P} \\ &= \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^\ell \phi_{m, \xi \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^m, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

Substituindo esse termo a hessiana resulta em:

$$\begin{aligned} H_{s_P s_P} &= \hat{H}_{ij}^{PP} \phi_{m, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_j^m \frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} + \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} + \\ &\quad - \hat{F}_i^{P, int} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \frac{1}{J_P} \phi_{n, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^n \phi_{m, \xi \xi}(\xi_P) \bar{Y}_k^m \end{aligned}, \quad (\text{A.76})$$

com somatório nas direções i e j (1, 2 e 3) e na direção k (1 e 2) e nos nós ℓ , m e n do elemento mestre.

As equações para a matriz Hessiana do conjunto de elementos mestre e escravo podem ser resumidas de forma organizada como:

Grau de liberdade	\bar{Y}_j^μ	\hat{Y}_j^ζ	s_P
\bar{Y}_i^γ	$H_{ij}^{\gamma\mu, int}$ (A.68)	$H_{ij}^{\gamma\zeta, int}$ (A.69)	$H_{i s_P}^{\gamma, int}$ (A.70)
\hat{Y}_i^ω	$H_{ij}^{\omega\mu, int}$ (A.71)	$H_{ij}^{\omega\zeta, int}$ (A.72)	$H_{i s_P}^{\omega, int}$ (A.73)
s_P	$H_{s_P j}^\mu$ (A.74)	$H_{s_P j}^\zeta$ (A.75)	$H_{s_P s_P}$ (A.76)

ANEXO A – POLINÔMIOS DE LAGRANGE E SUAS DERIVADAS

As funções de forma utilizadas para um elemento com ordem de aproximação $n - 1$ são obtidas por polinômios de Lagrange descritos pelo seguinte produtório:

$$\phi_\ell(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_\ell - \xi_j},$$

no qual ϕ_ℓ é a função de forma para cada nó ℓ descrita por uma coordenada adimensional ξ que assume valores no intervalo $[-1, +1]$, e as coordenadas ξ_ℓ e ξ_j descrevem a posição no espaço adimensional dos n nós existentes.

Nota-se que estas funções possuem valor unitário sobre o nó associado e valor nulo nos demais nós.

Em algumas passagens desse trabalho são indicadas as derivadas da função de forma, portanto, suas expressões são apresentadas a seguir.

A primeira derivada dessas funções pode ser obtida pelo artifício da diferenciação logarítmica o qual resulta na seguinte expressão:

$$\phi_{\ell, \xi}(\xi) = \frac{d\phi_\ell(\xi)}{d\xi} = \phi_\ell(\xi) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{1}{\xi_\ell - \xi_j}$$

Já a segunda derivada é obtida utilizando-se a regra da cadeia para a expressão acima, resultando em:

$$\phi_{\ell, \xi\xi}(\xi) = \frac{d^2\phi_\ell(\xi)}{d\xi^2} = \frac{d\phi_\ell(\xi)}{d\xi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{1}{\xi - \xi_j} - \phi_\ell(\xi) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{1}{(\xi - \xi_j)^2}$$