

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

SERGIO ANDRÉS PARDO SUÁREZ

Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque.

SÃO CARLOS

2016

SERGIO ANDRÉS PARDO SUÁREZ

Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque.

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

P939a Pardo Suárez, Sergio Andrés
Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque / Sergio Andrés Pardo Suárez; orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos, 2016.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Interação fluido-estrutura. 2. Explosões. 3. Ondas de choque. 4. Análise não Linear Geométrica. 5. Barra Geral 3D. 6. MEF. 7. ALE. 8. Métodos Particionados. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **SERGIO ANDRÉS PARDO SUÁREZ**.

Título da dissertação: "Análise numérica de barras gerias 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque".

Data da defesa: 16.12.2016.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Rodolfo André Kuche Sanches (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Wilson Wesley Wutzow**
(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

*Dedicado à minha família, especialmente à
memória da minha tia María Isbelia.*

“Confia em Deus de todo teu coração, pois sempre chove a sua misericórdia no tempo em que estão mais secas as esperanças.”

(Miguel de Cervantes)

Agradecimentos

Gostaria dedicar meus sinceros agradecimentos:

A Deus, por fortalecer meu coração nos momentos mais difíceis, por ter colocado no meu caminho às melhores pessoas e principalmente pela saúde e pela vida.

À minha mãe pelo amor, a educação, pelo apoio durante este trabalho e pela motivação para não me deixar desistir.

Ao professor Dr. Rodolfo André Kuche Sanches pela valiosa orientação, a disposição em me ajudar sempre, pelos conhecimentos transmitidos e especialmente pela paciência com meu portunhol e as dificuldades que tive ao longo do trabalho.

Aos meus caros colegas e amigos da ME1 pela companhia em tantos bons momentos, pelas experiências e as atenções recebidas. Ao Rodolfo Tessari por me abrir as portas da sua casa e me fazer sentir da sua família, ao Jeferson e ao Tiago Morkis pelas ajudas na pesquisa, pelo tempo e a disposição em me ajudar e ao Victor, Julito, Fernando e Delfino pela amizade e me fazer esquecer que estava longe de casa.

Aos meus amigos Santiago, Polo, Beto e Cindy pela motivação e tantos anos de amizade, ao Juan Camilo, a Silvia, Edwin, Julieshi, Zorany e Puyita pela companhia e valiosa amizade neste tempo, sem duvida foi uma grande fortaleza ter recorrido esse caminho do seu lado.

Aos professores Rodrigo Ribeiro Paccola e Edson Denner Leonel pelas contribuições na banca de qualificação e ao professor Humberto Breves Coda pela disponibilização e ajuda com o programa de Barra 3D e especialmente pelos conhecimentos transmitidos.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo pelos recursos disponíveis e aos funcionários pela atenção dada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

RESUMO

SUAREZ, S. A. P. **Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque**. 2016. 121 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

O presente trabalho consiste no uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a análise de interação fluido–estruturas de barras com foco em problemas transientes envolvendo explosões ou outras ações com propagação de ondas de choque. Para isso é necessário o estudo de três diferentes aspectos: a dinâmica das estruturas computacional, a dinâmica dos fluidos computacional e o problema do acoplamento. No caso da dinâmica das estruturas computacional deve-se identificar em função da cinemática de deformações, quais são os requisitos para que um elemento seja adequado para analisar tais problemas, tendo em vista que a formulação deve admitir grandes deslocamentos. Para evitar problemas relacionados com aproximações de rotações finitas, opta-se por empregar uma formulação descrita em termos de posições e que leva em consideração os efeitos de empenamento da seção transversal. No caso da dinâmica dos fluidos computacional, busca-se uma formulação para escoamentos compressíveis que seja estável e ao mesmo tempo sensível ao movimento da estrutura, sendo empregado um algoritmo de integração temporal explícito baseado em características com as equações governantes descritas na forma Lagrangeana–Euleriana Arbitrária (ALE). No que se refere ao acoplamento, busca-se modularidade e versatilidade, empregando-se um modelo particionado fraco (explícito) de acoplamento e técnicas de transferência das condições de contorno (Dirichlet–Neumann), sendo estudados os efeitos de utilizar transferência bidirecional ou unidirecional dessas condições de contorno.

Palavras–chave: Explosões. Ondas de choque. Interação fluido–estrutura. MEF. ALE. Métodos Particionados. Dinâmica das Estruturas Computacional. Dinâmica dos Fluidos Computacional. Análise não Linear Geométrica. Barra Geral 3D

ABSTRACT

SUAREZ, S. A. P. **Numerical analysis of general 3D bars under mechanical effects of explosions and shock waves**. 2016. 121 p. Dissertation (Master in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2016.

This work consists in the use of the Finite Element Method (FEM) for numerical analysis of fluid-bar structures, focusing on transient problems involving explosions or other actions with shock waves propagation. For this purpose, one needs to study three different aspects: the computational structural dynamics, the computational fluid dynamics and the coupling problem. Regarding computational structural dynamics, one need firstly to identify the requirements for an element to be adequate to analyze such problems, taking into account the fact that such element should admit large displacements. In order to avoid problems related to finite rotation approximations and to give a realist representation of a 3D bar structure, we chose a formulation defined in terms of positions and that considers the cross-section warping effects. Regarding computational fluid dynamics, we seek for a stable formulation for compressible flows, and at same time, sensitive to the movement of the structure, leading to an explicit time integration algorithm based on characteristics with governing equations described in the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) form. Regarding to coupling, we chose to use a weak (explicit) partitioning coupling model in order to ensure modularity and versatility. The developed coupling scheme is bases on boundary conditions transfer techniques (Dirichlet-Neumann), and we study the effects of using bidirectional or unidirectional boundary conditions transfers.

Keywords: Explosions. Shock Waves. Fluid-Structure Interaction. FEM. ALE. Partitioned Methods. Computational Structural Dynamics. Computational Fluid Dynamics. Geometric Nonlinear Analysis. General Bar 3D.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1: Volume de controle infinitesimal.....	36
Figura 2.2: Equilíbrio de forças no corpo sólido.....	41
Figura 2.3: Forças internas do sólido.	42
Figura 2.4: Cinemática adotada na descrição ALE.	45
Figura 3.1: Tetraedro de ordem linear para o domínio do fluido (SANCHES, 2011).	57
Figura 3.2: Dimensões do canal.	57
Figura 3.3: Discretização do canal.	58
Figura 3.4: Propagação da onda de pressão para diferentes valores de q_{dif}	59
Figura 3.5: Propagação da onda de pressão para $q_{dif} = 1.0$	60
Figura 3.6: Geometria da malha do canal com ressalto.....	61
Figura 3.7: Distribuição de densidade para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)	62
Figura 3.8: Distribuição de densidade para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)	63
Figura 3.9: Distribuição de pressão para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)	64
Figura 3.10: Distribuição de pressão para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)	65
Figura 3.11: Distribuição de densidade e pressão para valores de q_{dif} igual a 1,0; 1,2 e 1,4. .	66
Figura 3.12: Esquema da geometria e condições iniciais.....	67
Figura 3.13: Discretização do problema.....	68
Figura 3.14: Linhas de pressão obtidas por Ofengeim e Drikakis (1997) (à esquerda) e no presente trabalho.....	68
Figura 3.15: Variação de pressão obtida por Ofengeim e Drikakis (1997) (à esquerda) e no presente trabalho.....	68
Figura 4.1: Cinemática de deformação de um sólido.	70
Figura 5.1: Mapeamento posicional das configurações inicial e atual (Adaptado de Coda e Paccola 2011)	78
Figura 5.2: Discretização geral da seção transversal: (a) configuração inicial, (b) configuração atual. Adaptado de (CODA; PACCOLA, 2011).	79
Figura 5.3: Viga engastada submetida a carregamento pontual.	82

Figura 5.4: Carregamento dinâmico.....	83
Figura 5.5: Resposta dinâmica amortecida	83
Figura 5.6: Resposta dinâmica para caso sem amortecimento.....	84
Figura 6.1: Nós pertencentes à interface Γ_s	86
Figura 6.2: Forças no contorno da estrutura.	87
Figura 6.3: Acoplamento unidirecional (Adaptado de Benra et al. (2001))	89
Figura 6.4: Esquema de acoplamento (SANCHES; CODA 2013).....	90
Figura 6.5: Esquema do ensaio (Extraído de Giordano et al.(2005))	91
Figura 6.6: Discretização da estrutura: (a) Seção transversal, (b) contorno do elemento.....	92
Figura 6.7: Discretização da malha do fluido	92
Figura 6.8: Melhor resultado obtido 2-way (1 subciclo) comparado com resultados experimentais e numéricos de Giordano (2005)	93
Figura 6.9: Resultados caso bidirecional (2-way).....	94
Figura 6.10: Resultados caso unidirecional 1-way	94
Figura 6.11: Melhor e pior resultado 1-way comparados com o melhor resultado 2-way	95
Figura 6.12: Melhor resultado para pressão 2-way (1 subciclo) comparado com os resultados experimental e numérico de Giordano (2005)	96
Figura 6.13: Resultados de pressão caso bidirecional.....	97
Figura 6.14: Resultados de pressão caso unidirecional.....	97
Figura 6.15: Melhor resultado 2-way (1 subciclo) comparado com melhor resultado e pior resultado 1-way (1 e 50 subciclos respectivamente).....	98
Figura 6.16: Variação da pressão no canal	99
Figura 6.17: Malha 3D do canal com degrau.....	100
Figura 6.18: Discretização do painel: (a) Seção transversal, (b) contorno do elemento.....	101
Figura 6.19: Análise do deslocamento do painel	101
Figura 6.20: Variação da pressão corte longitudinal.....	102
Figura 6.21: Variação da pressão corte transversal.....	102
Figura 6.22: Variação da pressão corte horizontal.....	103
Figura 6.23: (a) Esquema do problema, (b) Seção transversal do pilar	103
Figura 6.24: Discretização da malha do problema da explosão.....	105
Figura 6.25: (a) seção transversal, (b) contorno estrutura.....	106
Figura 6.26: Análise do deslocamento no tempo no centro do pilar de aço	106
Figura 6.27: Análise da pressão em (a) $t = 5\mu s$; (b) $t = 50 \mu s$; (c) $t = 95 \mu s$; (d) $t = 115 \mu s$..	108
Figura 6.28: Análise da pressão perto da estrutura.	108

Figura 6.29: Esquema do exemplo.	109
Figura 6.30: Medidas do perfil NACA 63-210.....	109
Figura 6.31: Discretização do perfil NACA 63-210.....	109
Figura 6.32: Discretização da malha do canal.....	110
Figura 6.33: Deslocamento no tempo no eixo x.....	111
Figura 6.34: Deslocamento no tempo no eixo y.....	111
Figura 6.35: Deslocamento no tempo no eixo z.....	112
Figura 6.36: Giro da seção transversal no tempo.	112
Figura 6.37: Variação da pressão em diferentes instantes de tempo.	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Propriedades do material e da seção.....	82
Tablea 6.1: Parâmetros da equação de estado do material explosivo.....	104

SUMÁRIO

1	Introdução.....	23
1.1	Estado da Arte	26
1.1.1	Dinâmica das Estruturas Computacional	26
1.1.2	Dinâmica dos Fluidos Computacional	28
1.1.3	Problema de Acoplamento.....	30
1.3	Objetivos	32
1.4	Metodologia	33
1.5	Justificativa.....	34
2	Mecânica dos fluidos compressíveis.....	35
2.1	Conservação da massa	35
2.2	Conservação da quantidade de movimento	37
2.3	Conservação da energia	39
2.4	Tensor de tensões e tensões desviadoras.....	41
2.4.1	Lei da viscosidade de Newton e Hipótese de Stokes	43
2.5	Lei dos gases ideais	44
2.6	Equações governantes na descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE).....	44
3	Análise numérica de dinâmica dos fluidos compressíveis	49
3.1	Integração temporal.....	49
3.2	Forma fraca	50
3.3	Procedimentos para a solução	54
3.4	Captura de choque	54
3.5	Elemento utilizado	56
3.6	Testes do programa de mecânica dos fluidos.....	57
3.6.1	Problema da propagação de onda de choque em um canal retangular.....	57
3.6.2	Escoamento não viscoso transiente em um canal com degrau	58
3.6.3	Problema da propagação de onda de choque sobre um cilindro	66
4	Mecânica dos sólidos	69
4.1	Cinemática dos sólidos.....	69
4.1.1	Medida de deformação	71
4.2	Lei constitutiva	71
4.3	Equilíbrio de um sólido.....	72
5	Análise numérica de estruturas de barra geral 3D	77

5.1	Cinemática do método dos elementos finitos posicional para barra geral 3D	77
5.2	Equilíbrio dinâmico e procedimento de solução	80
5.3	Testes do programa de barra	82
5.3.1	Viga engastada com carregamento no extremo livre com amortecimento	82
6	Acoplamento fluido-estrutura	85
6.1	Transferência de forças e velocidades	85
6.2	Movimentação dinâmica da malha do domínio do fluido	87
6.3	Processo dinâmico de acoplamento.....	88
6.4	Estudos numéricos de estruturas de barra submetidas a ondas de choque	90
6.4.1	Onda de choque sobre painel deformável	90
6.4.2	Onda de choque sobre perfil I	100
6.4.3	Pilar de aço submetido a explosão	103
6.4.4	Onda de choque sobre aerofólio	109
7	Conclusão.....	115
	Referências.....	117

1 Introdução

O uso de ferramentas computacionais se tornou um dos mais importantes meios para o desenvolvimento tecnológico, ajudando a criar soluções com menor custo, maior eficácia e em menos tempo. Tais ferramentas têm fornecido importantes contribuições para a análise e projeto de estruturas nos últimos anos, proporcionando ao engenheiro opções para encarar problemas complexos. Um dos problemas que pode ser abordado usando recursos computacionais são ondas de choque atingindo estruturas, o que é muito comum em casos de explosões, por exemplo.

Durante uma explosão, uma grande quantidade de energia confinada é liberada, geralmente produto de gases provenientes de reações químicas, produzindo uma área de alta pressão que se expande supersônicamente para fora do núcleo explosivo de forma concêntrica, seguido por escoamentos subsônicos de gases. Maiores detalhes sobre esse assunto podem ser vistos nos trabalhos de Taylor (1950), Bethe (1947) e Krehl (2009). A propagação da variação de pressão gerada numa explosão, em termos de modelagem numérica, consiste na propagação de uma descontinuidade forte que podem causar oscilações espúrias nas soluções numéricas tradicionalmente descritas sobre a hipótese de meio contínuo, sendo necessário o uso de técnicas que modelem de forma adequada esses picos de pressão.

Para ter uma boa visão conceitual dos efeitos causados por ondas de choque sobre estruturas, é necessária uma análise que considere além do impacto sobre a estrutura, o acoplamento entre o escoamento do fluido e a estrutura flexível. O problema pode ser ainda mais complexo quando se trata de estruturas compostas por barras reticuladas, tais como torres de transmissão de energia, pois há a necessidade da determinação das forças que agem sobre cada barra, sendo que essas dependem também da interação do escoamento com as barras vizinhas.

Considerando que análises experimentais nesse campo são muito limitadas e dispendiosas, demandando muito tempo e recursos, opta-se por buscar ferramentas computacionais que simulem de maneira adequada tais problemas. O desenvolvimento dos computadores tem feito com que problemas cada vez maiores possam ser simulados em computadores pessoais (PC's), porém simulações realísticas para os problemas multi-físicos

em questão neste trabalho só são possíveis em *clusters* com muitos processadores e com bastante tempo de processamento. Isso ocorre porque, em muitos casos, o domínio computacional do meio fluido precisa ser bastante detalhado e em geral necessita uma discretização que demanda o uso de técnicas de computação de alto desempenho.

Nesse sentido, o presente trabalho propõe o estudo numérico de interação fluido-estrutura (IFE) em situações de explosões e ondas de choque, por meio do acoplamento de um programa tridimensional de dinâmica dos fluidos compressível com um programa de barra geral tridimensional. Por ser um trabalho de inserção nesse campo de estudos, é considerado que as estruturas estão distantes o suficiente dos pontos fontes de forma que a propagação das ondas de choque possa ser modelada pelas equações de Navier-Stokes.

A modelagem numérica de problemas de IFE compreende necessariamente três principais problemas: a mecânica dos fluidos computacional, a mecânica das estruturas computacional e o problema de acoplamento (SANCHES; CODA, 2013).

A dinâmica dos fluidos computacional ou *Computational Fluid Dynamics* (CFD), é a área que estuda o comportamento dos fluidos por meio de métodos numéricos computacionais. Diversos métodos numéricos têm sido amplamente usados para a análise de escoamentos de fluidos, entre os quais se destacam o Método das Diferenças Finitas (MDF), Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) (ver por exemplo ANDERSON, 1995; CHUNG, 2002).

Para que seja possível ao mesmo tempo aproveitar as vantagens da descrição Euleriana da mecânica dos fluidos e acompanhar a movimentação do domínio da estrutura, em descrição Lagrangeana, o fluido é descrito em uma forma Lagrangeana-Euleria arbitrária (ALE, do Inglês), que permite a imposição de um domínio de referência com movimento independente das partículas.

Já nos estudos da dinâmica das estruturas encontra-se o Método dos Elementos Finitos como o mais implementado, como pode-se facilmente observar na literatura técnica-científica.

Em se tratando de estruturas de barra (estruturas com um eixo bem definido), para definir corretamente o domínio do escoamento é necessário ter definição da forma tridimensional das barras e não apenas do seu eixo, tanto na configuração inicial como na configuração deformada ao longo do tempo, sendo assim, a maioria dos trabalhos

desenvolvidos nessa área modelam as estruturas por meio de elementos de casca, placa ou sólidos.

No presente trabalho adota-se um elemento do tipo barra geral que foi introduzido por Coda e Paccola (2010) e seu movimento é descrito empregando posições atuais como parâmetros nodais, sendo esta abordagem chamada de formulação Posicional.

A formulação posicional para estruturas reticuladas foi introduzida por Coda (2003), motivado por Bonet et al. (2000) e utiliza posições e componentes na configuração final de vetores inicialmente normais ao eixo da barra como parâmetros nodais ao invés de deslocamentos e rotações, sendo mais robusta e de simples implementação.

O problema do acoplamento fluido-estrutura pode ser abordado de forma monolítica onde o domínio do fluido e da estrutura são resolvidos de forma simultânea como se fossem uma única entidade, como visto nos trabalhos de Blom (1998) e Hübner et al. (2004); ou de forma particionada, no qual o domínio da estrutura e do fluido são tratados de forma separada.

Entre os modelos de acoplamento particionado se destacam dois tipos: particionado unidirecional (*one-way coupling*), no qual ocorre o deslocamento da estrutura devido aos efeitos do fluido, desprezam-se os efeitos do movimento da estrutura (deslocamentos e velocidades) sobre o escoamento de forma que o domínio do fluido permanece indeformável, como no trabalho de Benra et al. (2011); e o particionado bidirecional ou de duas vias (*two-way coupling*), no qual são considerados os efeitos do fluido sobre a estrutura, como a perturbação do fluido induzida pela movimentação da estrutura, como visto no trabalho de Sonntag (2013).

Neste trabalho, parte-se de códigos computacionais já desenvolvidos no grupo de pesquisa, um para dinâmica dos fluidos compressível e outro para estruturas de barra geral 3D e implementa-se o acoplamento entre ambos. Aspectos referentes ao acoplamento bem como à análise de dinâmica dos fluidos compressível com propagação de ondas de choque e de dinâmica das estruturas são estudados e o modelo de acoplamento é testado e verificado por meio de simulações comparadas com resultados da literatura.

1.1 Estado da Arte

Para que o tema proposto nesta pesquisa tenha uma melhor compreensão, deve-se ter uma base conceitual sólida, sendo necessário o estudo de três problemas: dinâmica das estruturas computacional, dinâmica dos fluidos computacional e o problema de acoplamento. Desse modo é realizada uma breve revisão bibliográfica sobre os avanços científicos nessas áreas nos últimos anos.

1.1.1 Dinâmica das Estruturas Computacional

A análise de estruturas mediante métodos computacionais começa a ser desenvolvida na década de 1960, sendo o Método das Diferenças Finitas pioneiro entre as técnicas de solução matemática que hoje conhecemos. Porém, foi nos anos seguintes que o Método dos Elementos Finitos se destacou como uma ferramenta importante no cálculo estrutural. O papel que tomou o MEF na análise estrutural é tão importante que apesar de terem surgido outras técnicas, esse método continua sendo o mais utilizado. Trabalhos como os de Malvern (1969), Ogden (1984), Belytschko, Schwer e Klein (1977), Argyris et al. (1978), Argyris et al. (1979) e Crisfield (1991), dentre outros, tiveram grande importância para consolidar o que é hoje o MEF na área das estruturas.

Diversas abordagens para análise de estruturas mediante o MEF foram surgindo ao longo do tempo, dentre as quais se encontra a formulação co-rotacional, que foi inicialmente proposta por Truesdell (1955). Essa formulação consiste em separar o movimento de translação e rotação do corpo rígido das suas deformações, fixando o sistema de coordenadas em cada elemento, o que significa que o sistema gira e traslada junto com o elemento, realizando-se unicamente análise de deformações. Como exemplo do avanço da abordagem co-rotacional podem ser citados os trabalhos de Hughes e Liu (1981a), Simo e Fox (1989), Ibrahimbegovic e Taylor (2002), Argyris (1982), Battini e Pacoste (2006) e Bathe (1996), Belo (2009).

Casos de estruturas submetidas a grandes deslocamentos ou onde não se pode desprezar o acoplamento entre os efeitos axiais e de flexão, como em cabos, podem ser encontrados nos problemas em estudo nesta pesquisa. Para que tais situações sejam adequadamente modeladas, é necessária uma análise não linear geométrica. O grande desenvolvimento nos trabalhos de Belytschko et al. (1977), Argyris et al. (1978, 1982) e

Wempner (1969), são a prova do progresso que o método dos elementos finitos alcançou para análise de estruturas submetidas a grandes deslocamentos por volta da década de 1970, destacando o uso da formulação co-rotacional.

Alternativamente, Bonet et al. (2000) e Coda (2003) introduzem uma nova formulação não linear geométrica de elementos de barra em descrição Lagrangeana, a qual possui como parâmetros nodais, ao invés de deslocamentos e rotações, as posições finais e coordenadas finais de um vetor generalizado inicialmente perpendicular ao eixo da barra. Tal formulação é didaticamente simples e apresenta solução independente do caminho da rotação, condição imprescindível para aplicações em interação fluido-estrutura (SANCHES e CODA; 2013), evitando aproximações de rotações finitas, e assim, garantindo matriz de massa constante. Dadas essas vantagens, essa formulação é empregada neste trabalho.

No caso particular do SET, a formulação vem sendo desenvolvida com ótimos resultados na análise dinâmica de estruturas como visto nos trabalhos de Coda (2009b), Greco e Coda (2006) e Maciel e Coda (2005) onde é desenvolvida a formulação para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas de pórtico bidimensionais. Se destacam também os trabalhos de Coda e Paccola (2007) e Sanches e Coda (2013) onde é implementada a descrição posicional para a análise não linear geométrica de elemento tipo casca, enquanto nos trabalhos de Coda (2009a), Coda e Paccola (2010) e Coda e Paccola (2011), é introduzido o elemento de barra geral 3 (barra que transmite esforços normais, cortantes, de momento fletor e de momento torçor), o qual, em sua forma mais atual, é descrito em cinemática de Reissner e leva em consideração o empenamento e as deformações na direção da altura e da largura da seção transversal, que são considerados como graus de liberdade adicionais na formulação. Nos trabalhos de Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014) é desenvolvido acoplamento fluido-estrutura de casca e Sanches e Coda (2016) apresentam um modelo para simulação de problemas de colapso progressivo em estruturas de barra 2D.

No que se refere ao estudo da dinâmica das estruturas no campo das explosões e ondas de choque, tem-se realizado diversos estudos nos últimos anos com ajuda do desenvolvimento computacional. Destacam-se os trabalhos de Canet e Bonet (1987) e Goicolea (2000) onde são analisados fenômenos dinâmicos impulsivos sobre estruturas de concreto mediante o método dos elementos finitos, diferenciando os distintos tipos de ruptura. Pode-se mencionar também o trabalho de Magnusson (2007), onde são usados métodos

baseados em redução a modelos de um grau de liberdade para se analisar o comportamento dinâmico de estruturas de concreto submetidas a solicitações dinâmicas de impacto.

Cabe mencionar também, os trabalhos de Casagrande (2006), Shi et al. (2007), Qi et al. (2010) e Bermejo et al. (2015), onde se avalia a solicitação produzida por ondas explosivas, assim como a resposta dinâmica de estruturas, optando-se pela utilização do método de elementos finitos mediante pacotes comerciais como Ansys/Autodyn e LS-Dyna.

1.1.2 Dinâmica dos Fluidos Computacional

A mecânica dos fluidos é melhor descrita na forma Euleriana, tendo como variáveis principais as velocidades, sendo que os deslocamentos podem assumir valores indefinidamente grandes, de forma que, diferentemente da mecânica dos sólidos, surgem termos convectivos em suas equações governantes: conservação da quantidade de movimento, conservação da massa e a conservação da energia. A Dinâmica dos Fluidos Computacional busca solucionar de forma numérica essas equações de forma a obter valores que determinam o campo do escoamento no tempo e no espaço.

Muitos trabalhos vêm desenvolvendo de forma significativa métodos estáveis para a dinâmica dos fluidos computacional, com destaque para os métodos das Diferenças Finitas e dos Volumes Finitos que já são consagrados e largamente utilizados, como pode ser visto em Anderson (1995) e Chung (2002).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo bastante estudado no contexto da mecânica dos fluidos, ganhando espaço nessa área devido a aspectos como a facilidade para a representação e imposição de condições de contorno em fronteiras de formas complexas. O MEF foi inserido na mecânica dos fluidos há cerca de 40 anos, sendo aplicado pela primeira vez na mecânica dos fluidos, na análise de escoamentos viscosos incompressíveis na década de 1970 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

O MEF sofreu certa resistência para ser introduzido na análise da mecânica dos fluidos, a sua aceitação não foi imediata devido à algumas características das equações governantes e a exigência de análise bidimensional ou tridimensional para gerar uma boa representação dos fenômenos físicos inerentes aos problemas de escoamentos. A introdução

do MEF na análise de escoamento compressível deve-se à extensão do método de Lax-Wendroff, segundo Teixeira (2001), do contexto do método das Diferenças Finitas.

Em geral, autores de trabalhos baseados no MEF para a dinâmica dos fluidos computacional têm discretizado as equações características da mecânica dos fluidos no tempo, empregando um integrador numérico explícito ou implícito, seguido da aplicação de algum processo do método dos resíduos ponderados, como o processo de Galerkin clássico ou uma variação como o processo de Petrov-Galerkin. Isso pode ser visto em trabalhos como Zienkiewicz e Taylor (2000), Zienkiewicz e Codina (1994), Teixeira (2001) e Chung (2002).

Ao contrário do que acontece em problemas de elasticidade onde, em geral, se pode usar qualquer método variacional para produzir uma matriz de rigidez simétrica, que representa uma boa aproximação com grande facilidade de manipulação matemática, os problemas de dinâmica dos fluidos podem apresentar convecção dominante, no caso de escoamentos compressíveis, o que implica, quando da aplicação do método clássico de Galerkin, em matrizes assimétricas e no surgimento de oscilações espúrias, que são basicamente soluções físicas não reais criando descontinuidades nos resultados.

O problema diminui com o refinamento da malha, no entanto, um método eficiente deve ser capaz de tratar o problema de forma estável ainda que a malha não seja refinada em demasia. Nesse sentido, foram sugeridas algumas alterações no processo de Galerkin, para obter melhores resultados usando o MEF, adicionando ao problema de difusividade artificial capaz de suprimir as variações espúrias (CHUNG, 2002. ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000c; TEIXEIRA; 2001).

Uma forma tradicional de resolver esse problema consiste em usar os métodos “*upwind*” que surgiram dentro do contexto dos Elementos Finitos, tais como *Galerkin Least-Square* (GLS), *Galerkin Descontínuo*, *Petrov-Galerkin*, e o mais utilizado atualmente *Stream Line Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), introduzido por Brooks e Hughes (1982), que consiste em usar funções ponderadoras diferentes das funções de interpolação, escolhidas de forma que adicionem difusividade na direção das linhas de corrente. Contudo, em alguns casos, aparecem variações espúrias em direções perpendiculares às linhas de corrente quando há presença de fortes gradientes, segundo Heno (2004).

Quando se trata de problemas compressíveis, surgem também descontinuidades devidas às ondas de choque, o que também provoca variações espúrias quando é empregado o

método de Galerkin. A solução mais empregada tem sido incluir uma viscosidade artificial no problema, que é controlada pelo usuário do programa como visto nos trabalhos de Zienkiewicz e Taylor (2000b) e Nithiarasu et al. (1998). Essa viscosidade artificial causa um amortecimento que suaviza a descontinuidade na densidade do material o suficiente para que seja representada pela discretização adotada, deixando a formulação para o método de Galerkin numa equação contínua.

1.1.3 Problema de Acoplamento

O estudo da interação dos fluidos com as estruturas abarca uma considerável quantidade de áreas de desenvolvimento. Embora nos casos de estruturas aeronáuticas, aeroespaciais e navais, esse problema ganhe mais atenção, pode-se encontrar a mencionada interação em estruturas mais comuns, como pontes, plantas industriais, equipamentos que contenham ou estejam contidos em meios fluidos, silos de armazenagem que contêm fluidos em estado líquido ou gasoso, além de torres e grandes edifícios sob ações atmosféricas.

Nos casos de dutos ou outras estruturas que contenham fluido, o comportamento do fluido se torna importante na resposta dinâmica da estrutura que o contém, como pode ser visto no trabalho de Morand e Ohayon (1995), onde foram estudadas as vibrações de estruturas elásticas lineares com escoamento interno de fluido. Outras estruturas que apresentam interação com fluidos que têm sido amplamente estudadas são barragens e plataformas marítimas do tipo *off-shore*.

Para abordar o problema de interação, deve-se entender a mecânica dos problemas de forma separada, pois podem ser necessárias duas descrições matemáticas diferentes. No caso do sólido, que desenvolve deslocamentos finitos, a descrição Lagrangeana é a mais adequada, descrevendo o movimento de um meio contínuo em função da configuração inicial e de um tempo inicial de referência. Isso resulta em uma discretização com deslocamentos ou posições como variáveis principais (parâmetros nodais incógnitos). Por outro lado, os fluidos em geral não resistem às tensões tangenciais, podendo se deformar indefinidamente, de modo que a descrição Euleriana, com velocidades como variáveis principais, torna-se mais adequada para a maior parte dos problemas. Isso implica na necessidade de se acoplar duas descrições matemáticas diferentes.

Uma estratégia bastante difundida para facilitar o acoplamento, é resolver o fluido empregando uma descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE), onde o domínio de referência pode se mover arbitrariamente independente do movimento da partícula do fluido (KANJI; MASUD, 2007, DONEA et al., 1982). Assim, pode-se impor uma movimentação à malha de forma a acompanhar a deformação da estrutura.

O acoplamento numérico de problemas multi-físicos, onde dois ou mais sistemas interagem entre si, como os problemas de interação fluido-estrutura, pode ser modelado por duas abordagens diferentes: monolítica ou particionada.

O esquema de acoplamento monolítico, utilizado em trabalhos como os de Blom (1998), Hron e Madlik (2007), Hübner, Walhorn e Dinkler (2004), consiste em tratar os domínios do fluido e da estrutura como uma única entidade, sendo integrados numa etapa simultaneamente, o que significa que o algoritmo de integração temporal deve ser aplicado tanto para o fluido como para a estrutura, realizando a análise do problema de forma global, como se fosse um único domínio, garantindo a convergência do sistema, mesmo que os subsistemas apresentem comportamento e características totalmente diferentes entre si.

Nesse esquema, o passo de tempo é igual para ambos subdomínios e também deve existir compatibilidade entre as malhas dos domínios do fluido e da estrutura, de tal forma que hajam posições nodais coincidentes, da mesma forma, o algoritmo é próprio do problema representado, restringindo bastante sua gama de aplicações.

Nos métodos de acoplamento particionado, utilizados, por exemplo, nos trabalhos de Felippa, Park e Farhat (2001), Teixeira e Awruch (2005), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014), Sanches (2011) e Piperno (1997), as equações governantes são integradas no tempo de forma separada. Assim podem ser usados diferentes integradores numéricos realizando a interação entre os domínios por meio da transferência das condições de contorno.

Em comparação com os métodos de acoplamento monolítico, o esquema particionado apresenta vantagens como a modularidade do algoritmo, o que significa que existe a possibilidade de realizar modificações em cada subdomínio de acordo com as condições do problema sem afetar o avanço da interação. Além disso, o custo computacional pode ser reduzido comparado com o uso da abordagem monolítica. (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001; HEIL; HAZEL; BOYLE, 2008).

O esquema de acoplamento particionado pode ser abordado de duas formas: o acoplamento unidirecional (*1-way coupling*) e o acoplamento bidirecional (*2-way coupling*).

Esses tipos de acoplamento particionado referem-se ao esquema adotado para tratar a superfície da interação em cada subdomínio. No esquema unidirecional são transferidas para a estrutura a pressão e as tensões desviadoras do fluido, na forma de forças de superfície, como condições de contorno de Neumann, porém não se considera o efeito dos movimentos e mudança de forma da estrutura sobre o escoamento. Esse esquema é adequado para os casos nos quais os deslocamentos e vibrações da estrutura são tão pequenos que não alteram de forma significativa a velocidade do escoamento ao redor, como visto no trabalho de Benra et al. (2011).

Já no esquema bidirecional (*2-way*), considera-se tanto o efeito dos deslocamentos da estrutura sobre o escoamento como o efeito do fluido sobre a estrutura, impondo-se continuidade de forças e velocidades. O esquema mais clássico é através de imposição de condições de contorno de Dirichlet sobre o fluido a partir dos valores de deslocamento e velocidades da estrutura, e de condições de contorno de Neumann sobre a estrutura, à partir dos valores de pressão e tensões de cisalhamento no fluido. A implementação desse esquema pode ser visto nos trabalhos de Sonntag (2013), Wall; Genkinger; Ramm (2007), Sanches, (2011); Olsson; Kesti, 2014 e Benra et al., 2007.

O esquema particionado pode ser forte (implícito), onde há um processo iterativo para se garantir a continuidade de deslocamentos e forças de superfície entre os meios, ou fraco (explícito) onde a transferência de forças ou velocidades se dá de forma explícita no início de cada passo no tempo.

No presente trabalho é usada a descrição ALE, com acoplamento particionado fraco, utilizando tanto o esquema bidirecional (*2-way*) como o unidirecional (*1-way*).

1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo principal a implementação de acoplamento particionado entre uma formulação de elementos finitos para análise dinâmica de estruturas de barras gerais 3D e uma formulação de elementos finitos para análise transiente 3D de escoamentos compressíveis, gerando um código computacional preciso e eficiente, para a

simulação de estruturas de barra tridimensionais submetidas a ondas de choque. Para o desenvolvimento do trabalho destacam-se alguns objetivos específicos:

- i. Estudo aprofundado da dinâmica não linear geométrica de estruturas, com enfoque em formulações de elementos finitos de barra geral de alta ordem, livres de aproximações de grandes rotações;
- ii. Estudo aprofundado da dinâmica dos fluidos compressível com ênfase em técnicas de estabilização e captura de ondas de choque;
- iii. Realização de adaptações que sejam necessárias nos programas de dinâmica dos fluidos em descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) e de barra geral 3D já existentes.
- iv. Implementação de modelos de acoplamento particionado em forma fraca com o programa de dinâmica não linear de barra geral 3D.
- v. Estudo da eficiência dos modelos implementados por comparação com dados numéricos e experimentais da literatura.

1.4 Metodologia

Os problemas de interação fluido-estrutura podem demandar bastante recursos computacionais, requerendo muitas vezes o uso de computação de alto desempenho. O departamento de Engenharia de Estruturas (SET), mediante o Laboratório de Informática e Mecânica Computacional (LIMC), disponibiliza os recursos necessários para a aplicação nesta pesquisa, permitindo a paralelização de processos computacionais, o que permite a modelagem de problemas mais complexos e com domínios maiores.

Três diferentes problemas são abordados simultaneamente: a dinâmica das estruturas computacional, a dinâmica dos fluidos computacional e o problema de interação. Para se cumprir com os objetivos que foram propostos de maneira eficiente, deve-se aproveitar os códigos desenvolvidos anteriormente no grupo de pesquisa. Destaca-se, portanto, que dois programas fonte estão disponíveis para o desenvolvimento desta pesquisa.

O primeiro programa trata de interação fluido-casca compressível, tendo sido desenvolvido durante o Doutorado do orientador deste trabalho, sendo escrito em linguagem Fortran 77, empregando processamento paralelo com protocolo MPI (*Message Passing Interface*). O segundo, consiste em um programa para a análise de estruturas de barra geral

3D, que foi desenvolvido pelo grupo de mecânica computacional do departamento de estruturas sob coordenação do professor Humberto Breves Coda, também desenvolvido em Fortran 77. Nesta pesquisa é mantido o protocolo MPI bem como a linguagem Fortran, sendo utilizado o ambiente LINUX.

A interpretação dos resultados (pós-processamento) é feita através de programas de visualização científica livres, como KitwareParaView e GNUplot. Problemas mais simples são comparados com resultados da literatura a fim de verificar os resultados deste trabalho e problemas mais elaborados são propostos a fim de se testar a robustez e eficiência da formulação empregada.

1.5 Justificativa

Dada a importância dos problemas em estudo para a engenharia, da necessidade de que obras em estruturas de barras expostas, tais como linhas de transmissão e torres de comunicação, permaneçam seguras durante catástrofes, como na decorrência de uma explosão, e o fato de que a cada dia se busca projetar estruturas mais leves com o fim de otimizar os processos construtivos e os custos, implicando em estruturas mais sensíveis aos efeitos do meio fluido com o qual podem interagir, qualquer estudo ou aporte que ajude na compreensão desse tema se torna bastante relevante.

Aliado a isso ainda pesa o fato de que a análise experimental dos problemas em questão é bastante custosa e difícil, impulsionando o emprego de métodos numéricos para mecânica estrutural e de fluidos.

Por outro lado, mesmo com o desenvolvimento atual dos computadores, simulações realísticas para os problemas multi-físicos em questão neste trabalho demandam muito tempo de processamento. Isso deve-se principalmente à necessidade de o domínio computacional do meio fluido ser bastante detalhado e, em geral, necessitar uma discretização que demanda o uso de técnicas de computação de alto desempenho.

Dessa forma, fica justificado o emprego de elemento de barra geral 3D em substituição aos tradicionalmente empregados elementos de casca ou sólidos, proporcionando diminuição de graus de liberdade.

2 Mecânica dos fluidos compressíveis

O estudo da dinâmica dos fluidos é de fundamental importância para a solução de problemas de interação fluido-estrutura. Neste capítulo é apresentado um breve apanhado sobre fundamentos da mecânica dos fluidos compressíveis sendo o equacionamento apresentado inicialmente em descrição Euleriana e em seguida reescrito na descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitraria.

As grandezas de maior interesse na análise de escoamento de um fluido Newtoniano compressível, considerado gás ideal, são a massa específica, a temperatura e as componentes da velocidade, sendo que a partir dessas e de constantes físicas do fluido, se podem conhecer as tensões desviadoras e a pressão em qualquer ponto de interesse.

A análise da mecânica dos fluidos é baseada na aplicação das leis fundamentais que governam o movimento: Lei da Conservação da Massa, que enuncia o princípio de indestrutibilidade da matéria; Lei da Conservação da Quantidade de Movimento, devido à presença de massa e tensões pode haver variação da velocidade no tempo (aceleração), conhecida como segunda lei de Newton no contexto de pontos materiais e estendida por Euler para problemas contínuos (primeira Lei de Euler), e a Lei da Conservação da Energia, devido à que pode haver variação de temperatura, ou fluxo de calor, conhecida como primeira Lei da Termodinâmica.

Para os fluidos, é válido supor que se trabalha com um meio contínuo, da mesma forma que para os sólidos. Maiores detalhes podem ser encontrados nos livros texto da mecânica dos fluidos, tais como White (2007), Fox; McDonald; Alan (2004) e Potter; Wiggert; Ramadan (2011), entre outros.

2.1 Conservação da massa

Sendo uma das leis fundamentais da natureza, a lei da conservação da massa, ou da matéria como também é conhecida, consiste em que, para um sistema sem perdas, a massa nem se cria nem se destrói. Assim, o fluxo de massa que entra em um volume de controle

num dado intervalo de tempo menos o fluxo de massa que sai no mesmo intervalo, é igual à variação de massa ao longo do tempo. Isso se cumpre sem importar quão curto seja o intervalo mencionado:

$$\dot{m}_{entrada} - \dot{m}_{saida} = \frac{\partial m}{\partial t}, \quad (2.1)$$

Baseando-se no princípio anteriormente mencionado, faz-se o balanço de fluxo de massa num volume de controle infinitesimal de dimensões dx , dy , e dz , mostrado na Fig.(2.1), o qual é submetido a um escoamento de velocidade $\vec{V}(x, y, z)$. De acordo com o sistema de referência adotado, o balanço pode-se escrever como segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = -((\rho V) \cdot dA_{x1} + (\rho V) \cdot dA_{y1} + (\rho V) \cdot dA_{z1} + (\rho V + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x}) \cdot dA_{x2} + (\rho V + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y}) \cdot dA_{y2} + (\rho V + \frac{\partial(\rho V)}{\partial z}) \cdot dA_{z2}), \quad (2.2)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, e dA_{x1} , dA_{x2} , dA_{y1} , dA_{y2} , dA_{z1} , dA_{z2} , são os vetores das áreas à primeira e segunda face ortogonal aos eixos x , y e z .

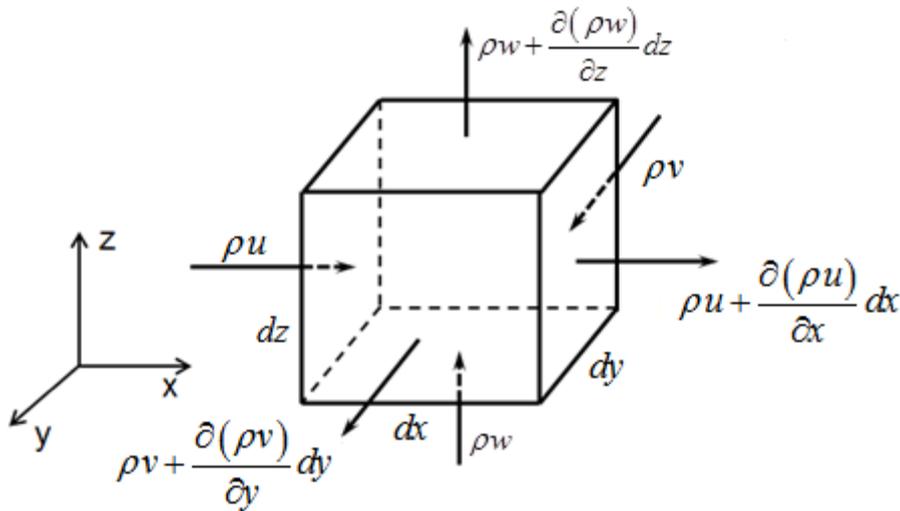


Figura 2.1: Volume de controle infinitesimal

Resolvendo os produtos internos presentes na Eq. 2.2 e considerando que a única componente dos vetores de área com valor diferente de zero é aquela na direção normal à sua face, sendo dA quando seu sentido seja o mesmo do eixo de referência normal à sua face e $-dA$ quando tiver o sentido contrário, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = (\rho u + \rho v + \rho w)(-dA) + \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx + \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy + \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) dA. \quad (2.3)$$

Dividindo-se a Eq. 2.3 pelo volume $dV = dx dy dz$ e somando termos comuns, chega-se à equação diferencial da conservação da massa em descrição Euleriana:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}, \quad (2.4)$$

onde u , v e w são as componentes da velocidade nas direções x , y e z respectivamente e ρ a massa específica do fluido. Usando notação indicial, reescreve-se (2.4) como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}, \text{ com } i=1,2,3. \quad (2.5)$$

onde o índice i indica soma.

2.2 Conservação da quantidade de movimento

Da segunda Lei de Newton, tem-se que a resultante das forças atuantes num sistema infinitesimal que se comporte como ponto material, deve ser igual à variação da quantidade do movimento do mesmo com respeito ao tempo.

O princípio da conservação da quantidade de movimento indica que a soma das quantidades de movimento (o produto da massa pela velocidade) dos corpos em interação se conserva invariável. A segunda Lei de Newton permite resolver o problema de movimento de pontos materiais, baseando-se nela tem-se:

$$\sum \mathbf{F}_s + \sum \mathbf{F}_c = \frac{D(m \cdot \mathbf{u})}{Dt}, \quad (2.6)$$

onde a força resultante \mathbf{F} é substituída pelo somatório das forças de campo \mathbf{F}_c e as forças atuantes no seu contorno, também chamadas de forças de superfície \mathbf{F}_s .

A extensão da segunda Lei de Newton para corpos extensos é conhecida como primeira Lei de Euler, e implica que a integral da quantidade de movimento sobre o corpo é igual ao produto de sua massa total pela velocidade do centro de gravidade.

Em um volume de controle infinitesimal, como o ilustrado na Fig. 2.1, tem-se a variação da quantidade de movimento para a direção do eixo x num intervalo infinitesimal de tempo, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{D(mu)}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dx dy dz + (\rho u (\vec{V} \cdot dA_{x1}) + \rho u (\vec{V} \cdot dA_{y1}) + \rho u (\vec{V} \cdot dA_{z1}) \\ & + (\rho u V + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial x} dx) \cdot dA_{x2} + (\rho u V + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial y} dy) \cdot dA_{y2}, \\ & + (\rho u V + \frac{\partial(\rho u V)}{\partial z} dz) \cdot dA_{z2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Resolvendo-se os produtos internos da Eq. 2.7 e eliminando termos nulos, pode-se escrever, considerando-se apenas a componente horizontal:

$$\left(\left. \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} \right|_x + \left. \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} \right|_x + \left. \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} \right|_x \right) dx dy dz = \sum F_{cx} + \sum F_{sx}, \quad (2.8)$$

onde u , v e w são as componentes da velocidade.

Simplificando a representação, chamando-se de g_x à constante das forças de campo na direção x e partindo do fato de que as forças externas devem estar em equilíbrio com as forças internas, pode-se escrever a soma das componentes na direção x das forças externas por unidade de volume, resultando:

$$\frac{1}{dx dy dz} (\sum F_{cx} + \sum F_{sx}) = g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.9)$$

onde τ_{xx} , τ_{xy} e τ_{xz} são as tensões desviadoras e p a pressão.

Substituindo a Eq. 2.9 na Eq. 2.8, tem-se a equação da quantidade de movimento na direção x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho u)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = g_x \rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.10)$$

Desenvolvendo o mesmo procedimento para as direções restantes obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho v)}{\partial z} = g_y \rho + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(u\rho w)}{\partial x} + \frac{\partial(v\rho w)}{\partial y} + \frac{\partial(w\rho w)}{\partial z} = g_z\rho + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (2.12)$$

onde novamente ρ representa a massa específica, u , v e w são as componentes da velocidade nas três direções, g_x , g_y , g_z são as componentes das forças de campo e τ_{ij} as componentes desviadoras de tensões de Cauchy.

Finalmente, na forma indicial, tem-se:

$$\frac{\partial\rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_j\rho u_i)}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}, \text{ com } i, j=1,2,3. \quad (2.13)$$

2.3 Conservação da energia

A primeira lei da termodinâmica, também conhecida como o princípio da conservação da energia, estabelece que para qualquer processo de um sistema fechado, sua energia deve permanecer constante ao longo do tempo, o qual pode-se descrever como:

$$E_{entra} - E_{saída} = E_{sistema}, \quad (2.14)$$

onde uma mudança positiva de energia implica acumulação no sistema e um valor negativo significa perda.

Somente se for realizado trabalho sobre o sistema ou troca de calor com outro, a energia interna do sistema muda. Isso quer dizer que a energia interna do sistema é a soma de todas as energias (cinética, potencial, etc.) de todos os subsistemas que o compõem.

Representando o fluxo de calor por Q , o trabalho realizado pelo sistema por w e a energia específica total por E , pode-se escrever o balanço de energia como segue:

$$\frac{D(mE)}{Dt} = Q - W. \quad (2.15)$$

Fazendo o balanço de energia para o volume de controle infinitesimal da Fig. 2.1, num intervalo de tempo dt , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D(mE)}{Dt} = \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dx dy dz - \left((\rho EV) \cdot dA_{x1} + (\rho EV) \cdot dA_{y1} + (\rho EV) \cdot dA_{z1} \right) \\ - \left((\rho EV + \frac{\partial(\rho EV)}{\partial x} dx) \cdot dA_{x2} + (\rho EV + \frac{\partial(\rho EV)}{\partial y} dy) \cdot dA_{y2} \right) \\ + (\rho EV + \frac{\partial(\rho EV)}{\partial z} dz) \cdot dA_{z2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dividindo a Eq. 2.16 pelo volume, resolvendo os produtos internos e igualando a 2.15, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - \frac{Q}{dx dy dz} + \frac{W}{dx dy dz} = 0. \quad (2.17)$$

Do balanço da quantidade de calor no volume de controle, tem-se:

$$\frac{Q}{dx dy dz} = k \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.18)$$

sendo k o coeficiente de condutividade térmica e T a temperatura.

Fazendo o balanço de trabalho sobre o volume de controle e dividindo pelo volume, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{W}{dx dy dz} = \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} + \left(-\frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \right) - \rho g_x u \\ - \rho g_y v - \rho g_z w. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Finalmente chega-se à forma final da equação da conservação da energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Eu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Ev)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Ew)}{\partial z} - k \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial T}{\partial y} - k \frac{\partial T}{\partial z} \\ + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_{xy}v)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} \\ - \frac{\partial(\tau_{yy}v)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y} - \frac{\partial(\tau_{zz}w)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} - \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z} \\ - \rho g_x u - \rho g_y v - \rho g_z w = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ou, em notação indicial:

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} = \rho g_i u_i - \frac{\partial (\rho E u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial (p u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j}, \text{ com } i, j = 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Têm-se agora as equações governantes da mecânica dos fluidos para uma descrição matemática Euleriana: equação da conservação da massa (2.4), equação da quantidade de movimento (2.10), (2.11) e (2.12) e equação da energia (2.20), nota-se que o número de variáveis ainda não permite a solução de tais equações, devendo-se levar em conta outras considerações, como a hipótese de Stokes e a lei dos gases ideais no caso dos fluidos compressíveis.

2.4 Tensor de tensões e tensões desviadoras

Devido à importância do tensor de tensões na mecânica do meio contínuo se faz necessário o estudo das suas características principais para dar continuidade ao equacionamento da mecânica dos fluidos.

Supondo um corpo em equilíbrio sob o efeito de um sistema de forças como mostrado na Fig. 2.2, seccionado mediante um plano S-S, toma-se a região I do corpo para análise.

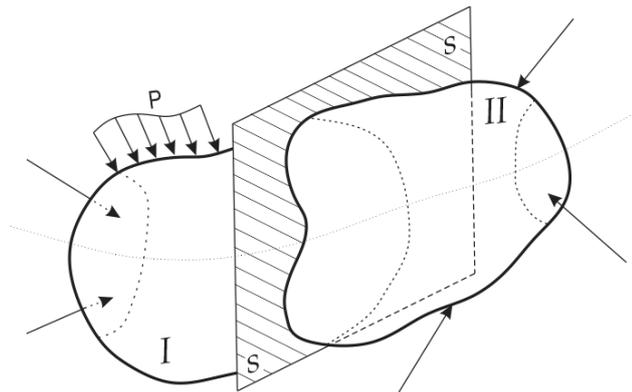


Figura 2.2: Equilíbrio de forças no corpo sólido.

Observa-se na Fig. 2.2 a presença das forças externas e uma distribuição contínua de forças internas no plano de corte S-S, as quais conjuntamente equilibram o corpo. Ditas forças distribuídas podem ser entendidas como o efeito do restante do corpo complementar ao plano, atuando na seção $d\Omega$ uma força $d\vec{F}$, como visto na Fig. 2.3.

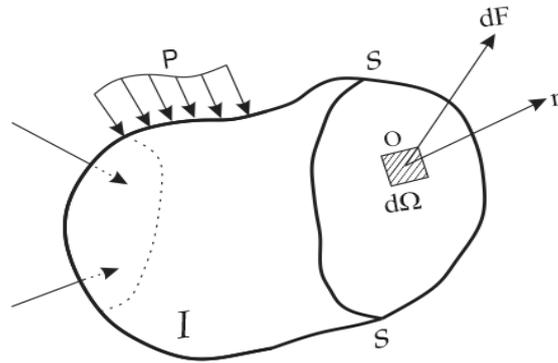


Figura 2.3: Forças internas do sólido.

onde \vec{n} é o vetor unitário normal à superfície $d\Omega$.

Define-se o vetor de Cauchy \vec{t} que determina a influência da região II sobre a região I através de $d\Omega$, o qual será melhor compreendido analisando um ponto O no plano S-S, o vetor \vec{t} pode ser escrito como:

$$\vec{t} = \frac{dF}{d\Omega} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\Omega}. \quad (2.22)$$

Naturalmente o vetor \vec{t} é uma função linear do vetor \vec{n} . Tal aplicação linear é denominada tensor de tensões de Cauchy representado por σ , dessa forma é válido escrever:

$$\vec{t} = \sigma \vec{n}. \quad (2.23)$$

Para um ponto O qualquer situado no sólido existe um único valor de tensor de tensões σ para um determinado estado de cargas. No sistema de coordenadas cartesianas o tensor pode ser escrito como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Cabe ressaltar que o tensor de tensões de Cauchy é simétrico e que os valores das tensões normais e tangenciais variam conforme o plano considerado, o que faz com que seja possível encontrar um plano para o qual o valor da tensão normal seja o máximo e os valores das tensões tangenciais sejam nulos. Nesse caso as tensões normais serão chamadas de tensões principais e as três direções ortogonais para as quais não existam tensões tangenciais serão chamadas de direções principais.

Para um fluido estático é valido afirmar que as tensões normais num ponto são constantes e não dependem do plano de análise, pelo qual pode-se adotar um tensor com valores médios σ_m sobre os quais se adiciona o incremento das perturbações causadas pela presença de escoamento viscoso dadas por τ_{ij} , onde i pode ser qualquer direção, dessa forma chega-se num tensor médio diagonal, no qual os valores não nulos equivalem à pressão termodinâmica no caso de escoamentos compressíveis e equivalentes à pressão no caso de escoamento incompressível e um tensor desviador:

$$\boldsymbol{\sigma}_{nn} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

de forma que o tensor das tensões é a soma dos dois (SANCHES, 2011).

2.4.1 Lei da viscosidade de Newton e Hipótese de Stokes

Os fluidos a serem analisados neste trabalho apresentam um comportamento Newtoniano, seguindo a lei da viscosidade de Newton a qual estabelece que as tensões viscosas são proporcionais à variação da deformação no tempo (módulo da viscosidade) na direção normal das referidas tensões, como descrito na seguinte equação:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (2.27)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, δ_{ij} é o delta de Kronecker e λ é um parâmetro constitutivo que segundo a hipótese de Stokes pode se expressar na seguinte relação:

$$3\lambda + 2\mu = 0, \quad (2.28)$$

com as últimas duas equações pode-se reescrever o tensor desviador em notação cartesiana:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & -\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathbf{V} + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

substituindo as componentes de (2.29) nas equações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.20) têm-se as equações de Navier-Stokes para fluidos newtonianos na descrição Euleriana e o número de incógnitas é reduzido, mas ainda há a necessidade de fazer mais uma consideração para eliminar uma incógnita do sistema.

2.5 Lei dos gases ideais

Considerar que o fluido pode ser um gás ideal é dizer, que obedece exatamente às leis de Boyle-Mariotte, Charles e Gay Lussac (ver RESNICK, HALLIDAY, 1965). Partindo das ditas leis, pode-se escrever a equação de Clapeyron:

$$pV = nrT, \quad (2.30)$$

Ou, em função da massa específica:

$$p = \rho RT, \quad (2.31)$$

onde V é o volume do gás, n o número de mols do gás, r ou R são: as constantes universais dos gases perfeitos e T a temperatura. Tendo uma relação entre pressão e temperatura o sistema pode ser resolvido, as equações (2.4), (2.10), (2.11), (2.12), (2.20), (2.29) e (2.31), contém as seis incógnitas; u , v , w , p , ρ e T .

2.6 Equações governantes na descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE)

O problema de interação fluido-estrutura está condicionado ao acoplamento de duas descrições matemáticas diferentes. Como já mencionado, o sólido possui deformações finitas sendo adequado o emprego de uma descrição Lagrangeana, onde se acompanha o movimento

de cada partícula do corpo ao longo do tempo e as principais incógnitas são os deslocamentos ou posições. Entretanto, os fluidos se deformam indefinidamente na presença de forças tangenciais, pelo que classicamente é empregada uma descrição Euleriana, na qual se atribui o sistema de coordenadas num volume de controle fixo onde as variáveis principais são as velocidades do fluido. Assim, busca-se uma descrição da mecânica dos fluidos que possa garantir as vantagens da descrição Euleriana e ao mesmo tempo permitir a movimentação da malha.

A descrição ALE é obtida introduzindo um domínio de referência com movimento arbitrário e independente dos pontos materiais, Fig. 2.4, onde R , $C(t_0)$ e $C(t)$ são respectivamente os domínios de referência e contínuo nos instantes inicial t_0 e atual t (Donea, 1982).

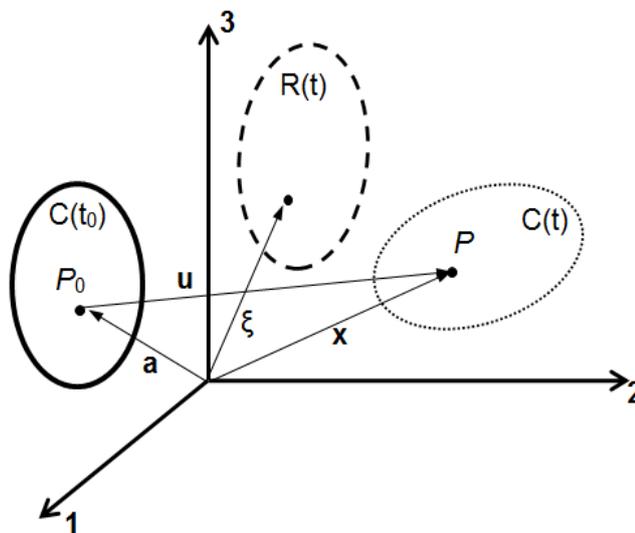


Figura 2.4: Cinemática adotada na descrição ALE.

Da mesma forma que na formulação Lagrangeana, uma partícula na formulação ALE é definida nas suas coordenadas materiais na configuração inicial do contínuo, mas o processo de definição é indireto e feito sobre o vetor de coordenadas ξ ligado à partícula e à variável t , de acordo com a lei que regue o movimento do domínio de referência (DONEA et al., 1982; SANCHES, 2011).

Assim, de forma simples, a formulação ALE logra fazer um mapeamento da configuração inicial do contínuo para a configuração atualizada, sendo realizada mediante a matriz jacobiana \mathbf{A} que liga matematicamente o domínio material e o domínio de referência:

$$J = \det(\mathbf{A}) \text{ onde } A_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} \text{ com } i \text{ e } j = 1, 2 \text{ ou } 3, \quad (2.32)$$

onde ξ_i e a_j são os vetores posição dos domínios $R(t)$ e $C(t)$, respectivamente. Pode-se escrever a variação no tempo de J (ver DONEA et al., 1982) como:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (2.33)$$

sendo \mathbf{w} a velocidade do domínio de referência R .

Considerando uma propriedade física expressa com relação ao domínio de referência $f(\xi_i, t)$ com $i = 1, 2$ ou 3 e representada por F na configuração inicial, pode-se deduzir, à partir de 2.32 que:

$$f(\xi_i, t) = F(a_i, t). \quad (2.34)$$

Derivando F com relação ao tempo:

$$\frac{\partial F(a_i, t)}{\partial t} = \left. \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial t} \right|_{\xi} + \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial \xi_i} \cdot \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right). \quad (2.35)$$

Considerando as regras da derivação, tendo em vista 2.33, escreve-se:

$$J \nabla \cdot (f \mathbf{w}) = \frac{\partial J}{\partial t} f + J \mathbf{w} \cdot \nabla f, \quad (2.36)$$

levando em conta a velocidade $w_i = \partial \xi_i / \partial t$ se tem:

$$\frac{\partial (JF)}{\partial t} = J \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{w}) \right], \quad (2.37)$$

fazendo $f = \rho$ em 2.36 e considerando a Eq. 2.5 da conservação da massa, tem-se que:

$$\frac{\partial (J\rho)}{\partial t} = J \frac{\partial (\rho(w_i - u_i))}{\partial x_j}, \quad (2.38)$$

ou numa forma mais simplificada:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \rho}{\partial u_i}, \quad (2.39)$$

a última equação representa a conservação da massa na descrição ALE. De igual forma pode-se escrever as equações da conservação da quantidade de movimento e energia como:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = w_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j}, \quad (2.40)$$

e

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (u_j \rho E)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial (u_j p)}{\partial x_j} - \frac{\partial (\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j} - \rho g_i u_i = w_i \frac{\partial (\rho E)}{\partial x_i}. \quad (2.41)$$

Observa-se que se a velocidade do domínio de referência for nula, ou seja, $\mathbf{w} = 0$, a formulação torna-se Euleriana, e se $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ Lagrangeana, conforme Donea et al., (1982).

3 Análise numérica de dinâmica dos fluidos compressíveis

Seguindo a estratégia de análise dinâmica dos fluidos adotada neste trabalho, opta-se por discretizar no tempo as equações governantes da mecânica dos fluidos apresentadas no capítulo anterior para aplicar depois o método dos resíduos ponderados e em seguida estabelecer o procedimento de solução.

Os problemas de interesse são transientes, o que quer dizer que em cada ponto as propriedades do escoamento não se consideram constantes no tempo, sendo necessária a imposição de condições iniciais para a sua solução. Quando os problemas transientes necessitam também de condições de contorno (condições que durante todo o intervalo de tempo são conhecidas sobre determinada região do espaço que delimita o domínio da análise), também se consideram problemas de valor de contorno.

3.1 Integração temporal

Utiliza-se, para integração temporal, um algoritmo explícito, proposto por Zienkiewicz e Codina (1994), em versão puramente explícita, aplicada no trabalho de Sanches (2011). Tal algoritmo é baseado na integração temporal ao longo das curvas características das equações.

Aplicando o procedimento para problemas transientes em mecânica dos fluidos, podem ser obtidas as equações (ver Sanches e Coda (2014)):

Equação da quantidade de movimento em descrição ALE:

$$\Delta(\rho u_i)_{n+1} = \Delta t \left(-\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \right)_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) \right)_n. \quad (3.1)$$

Equação da conservação da energia em descrição ALE:

$$\Delta(\rho E)_{n+1} = \Delta t \left(-\frac{\partial(u_i \rho E)}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right)_n + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} - \rho g_i u_i \right)_n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial(u_i \rho E)}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_i} + \rho g_i u_i \right)_n, \quad (3.2)$$

Equação da conservação da massa em descrição ALE:

$$\Delta \rho_{i n+1} = -\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i)_n + \theta \frac{\partial(\Delta(\rho u_i))_{n+1}}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \right)_n. \quad (3.3)$$

onde θ é uma constante arbitrária com valores entre 0.5 e 1.0.

Esse método é condicionalmente estável, cujo intervalo de tempo crítico é limitado a que a onda não percorra um valor maior que a dimensão h de um elemento finito. Para fazer o algoritmo estável, desprezando-se os efeitos da difusão, se assume que:

$$\Delta t \leq \frac{h}{c + |u|}, \quad (3.4)$$

onde c é a velocidade do som e $|u|$ é o valor da velocidade do escoamento.

3.2 Forma fraca

Após a discretização no tempo, aplica-se o método de Bubnov-Galerkin às equações 3.1, 3.2 e 3.3, de forma a obter uma solução fraca.

As variáveis podem ser aproximadas pelas funções \mathbf{N} , tal que:

$$\rho u_i = \mathbf{N} \mathbf{U}_i, \quad (3.5)$$

$$\rho = \mathbf{N} \boldsymbol{\rho}, \quad (3.6)$$

$$\Delta \rho E = \mathbf{N} \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{N} é o vetor das funções aproximadoras, para $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ e os vetores \mathbf{U}_i , $\boldsymbol{\rho}$ e \mathbf{E} , sendo vetores coluna dos valores nodais respectivamente da quantidade de movimento específica na direção i , massa específica e energia específica.

Após a aplicação do método de resíduos ponderados em (3.1) para obter a forma fraca da equação da quantidade de movimento segundo o processo de Galerkin, é aplicado o teorema da divergência nos termos das tensões desviadoras e pressão resultando:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \Delta (\rho u_i)_{n+1} d\Omega &= \Delta t \left[\int_{\Omega} N_i \left(-\frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j} + \rho g_i \right) d\Omega \right]_n \\ &\quad - \Delta t \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \delta_{ij} p) d\Omega + \int_{\Gamma} N_i (\tau_{ij} n_j - p n_i) d\Gamma \right]_n, \quad (3.8) \\ -\frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial (N_i u_k)}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) - w_j \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i \right) d\Omega \right]_n \end{aligned}$$

Tomando como referência a lei da viscosidade de Newton e as equações 3.5-3.7, escreve-se matricialmente a Eq.3.8 como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} (\Delta \mathbf{U}_i)_{n+1} &= \Delta t \left[-\mathbf{C} \mathbf{U}_i + \mathbf{C}_w \mathbf{U}_i - \mathbf{K}_{visc(u_i)} \mathbf{u}_i - \mathbf{K}_{visc(u_j)} \mathbf{u}_f + \mathbf{f}_i \right]_n \\ &\quad + \Delta t^2 \left[\mathbf{K} \mathbf{U}_i + \mathbf{K}_w \mathbf{U}_i + \mathbf{P} \mathbf{p} + \mathbf{f}_{si} \right]_n, \quad (3.9) \end{aligned}$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} de convecção e \mathbf{K} viscosidade (ou difusão), o resto de matrizes e vetores são descritos como segue:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \frac{\partial (u_i \mathbf{N})}{\partial x_i} d\Omega, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{C}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T w_i \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{K}_{visc(u_i)} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \right) d\Omega, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K}_{visc(u_j)} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mu \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} d\Omega, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho g_i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T (\tau_{ij} n_j - p n_i) d\Gamma, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla (\mathbf{u} \mathbf{N}))^T (\nabla (\mathbf{u} \mathbf{N})) d\Omega, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}_w = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla (\mathbf{u} \mathbf{N}))^T (\mathbf{w}^T \nabla (\mathbf{N})) d\Omega, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla (\mathbf{u} \mathbf{N}))^T (\nabla \mathbf{N}) d\Omega, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}_{si} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \mathbf{N}^T) \rho g_i d\Omega, \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ e ∇ é o operador divergente é dado como $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$.

Aplicando-se o método de Galerkin agora em (3.3) e fazendo uso do teorema da divergência, escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i (\Delta \rho)_{n+1} d\Omega &= \Delta t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_i} \left((\rho u_i)_n + \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1} \right) - \frac{\partial (N_i w_i)_n}{\partial x_i} \rho_n \right) d\Omega + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (N_i u_k)}{\partial x_k} w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_n d\Omega - \\ &\quad \Delta t \int_{\Gamma} N_i \left((\rho u_i)_n + \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1} - (\rho w_i)_n + \frac{\Delta t}{2} \left(w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_n \right) n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.20)$$

matricialmente pode-se expressar:

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{p} = \Delta t \left[\mathbf{G}_i \mathbf{U}_i - \mathbf{C}_{wi} \rho + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_{wi} \rho \right]_n + \Delta t \mathbf{G}_i (\theta (\Delta \mathbf{U}_i)_{n+1}) - \mathbf{f}_p, \quad (3.21)$$

onde:

$$\mathbf{G}_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{C}_{wi} = \int_{\Omega} \frac{\partial (w_i \mathbf{N}^T)}{\partial x_i} \mathbf{N} d\Omega, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{K}_{w_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial (u_k \mathbf{N}^T)}{\partial x_k} w_i \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} d\Omega \quad (3.24)$$

e

$$\mathbf{f}_{\rho} = \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left(\rho u_i - \rho w_i + \frac{\Delta t}{2} w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma + \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{N} \theta \Delta (\rho u_i)_{n+1} n_i d\Gamma. \quad (3.25)$$

Finalmente segue-se o mesmo processo para a equação da energia (3.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i \Delta (\rho E)_{n+1} d\Omega &= \Delta t \int_{\Omega} N_i \left(- \frac{\partial (u_i (\rho E + p))}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial (\rho E)}{\partial x_i} \right) \\ &\quad \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \left(\tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (u_j N_l)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (-u_i (\rho E + p))}{\partial x_i} + w_i \frac{\partial (\rho E)}{\partial x_i} \right) d\Omega + \\ &\quad \Delta t \int_{\Gamma} N_i \left(\tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.26)$$

sua forma matricial dada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \mathbf{E}_{n+1} &= -\Delta t \left[\mathbf{C} (\mathbf{E} + \mathbf{p}) - \mathbf{C}_w \mathbf{E} + \mathbf{K}_T \mathbf{T} + \mathbf{K}_{\tau Ei} \mathbf{u}_i + \mathbf{f}_e \right]_n + \\ &\quad \frac{\Delta t^2}{2} \left[\mathbf{K}_u (\mathbf{E} + \mathbf{p}) + \mathbf{K}_w (\mathbf{E}) \right]_n, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde:

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} (\nabla^T \mathbf{N})^T k (\nabla^T \mathbf{N}) d\Omega, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K}_{\tau Ei} = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \tau_{ij} \phi d\Omega, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{f}_e = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left(\tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma. \quad (3.30)$$

Pode se observar que a matriz de massa \mathbf{M} pode ser substituída por uma matriz de massa concentrada, o que possibilita impor condições de contorno essenciais como condições iniciais a cada passo de tempo, além de evitar a resolução de sistemas complexos.

3.3 Procedimentos para a solução

O processo de solução consiste de 3 passos a serem executados a cada passo de tempo:

1. Calcular a variação da quantidade de movimento por 3.9;
2. Calcular a variação da densidade por 3.21;
3. Calcular a variação da energia por 3.27.

Após os 3 passos anteriores, calcula-se a velocidade no instante atual:

$$u^{n+1} = \frac{(\rho u)^{n+1}}{\rho^{n+1}}. \quad (3.31)$$

Tendo obtido o valor da energia total e a massa específica no instante atual, calculam-se a temperatura, velocidade do som e a pressão, mediante equações próprias da termodinâmica:

$$T = \frac{1}{c_v} \left(E - \frac{1}{2} u_i u_i \right), \quad (3.32)$$

$$c^2 = (\gamma - 1) T c_p \text{ com } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.33)$$

e

$$p = (\gamma - 1) \left(\rho E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right). \quad (3.34)$$

Onde c_p é o calor específico à volume constante e c_v é o calor específico à pressão constante. Determinando-se todas as variáveis, se repete o processo para o próximo passo de tempo e seguidamente a aplicação das condições de contorno.

3.4 Captura de choque

Em meios compressíveis, as perturbações se transmitem como ondas de pressão que viajam mais rápido do que a velocidade do som, na maioria dos casos. Independente da sua origem pode-se caracterizar as referidas perturbações de acordo à velocidade de propagação. Se a perturbação se produz com velocidade menor à velocidade do som será ela quem

condiciona a adaptabilidade do fluido à forma dos obstáculos físicos que possa encontrar dentro da sua trajetória. Entretanto, se a perturbação viaja com velocidades que ultrapassam à velocidade do som, pode interagir com a matéria do meio na vizinhança da origem da perturbação o qual conduz a que os valores das propriedades do fluido (densidade, pressão, temperatura, velocidade, etc.) mudem de forma instantânea para se adaptar à perturbação. Dessa forma se produzem ondas de perturbação com aumento de pressão e temperatura, chamadas ondas de choque.

Para as discontinuidades que aparecem devido às ondas de choque, é adicionado um termo viscoso às equações, com o fim de gerar um amortecimento artificial para fornecer continuidade na zona de influência dessas discontinuidades. Dentre os modelos de captura presentes na literatura, destaca-se o processo baseado na segunda derivada, utilizados por vários autores, (ver Zienkiewicz e Taylor (2000b) para maiores detalhes), o qual consiste em introduzir o termo dissipativo numérico f_{μ_a} , calculado por:

$$f_{\mu_a} = \Delta t \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|, \quad (3.35)$$

onde μ_a é a viscosidade artificial, a qual deve ser nula longe da discontinuidade e apresentar seu valor máximo sobre ela. Dessa forma Zienkiewicz e Taylor (2000b) propõem a seguinte expressão para a viscosidade artificial:

$$\mu_a = q_{dif} h^3 \frac{(|\mathbf{u}| + c)}{P_{med}} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right|_e, \quad (3.36)$$

sendo \mathbf{u} o vetor velocidade, P_{med} o valor médio da pressão sobre o elemento, q_{dif} um coeficiente que permite ao usuário calibrar o valor da viscosidade artificial com valores entre 0 e 2, faixa recomendada na literatura (ver Zienkiewicz e Taylor (2000b)), c a velocidade do som e h o tamanho do elemento.

Para elementos de aproximação linear não pode ser feita a obtenção direta da segunda derivada da pressão, então adota-se a aproximação em função da diferença entre as matrizes de massa consistente e concentrada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; 2000b):

$$h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \Phi. \quad (3.37)$$

chegando na equação:

$$\overline{\mu}_a = q_{dif} h \frac{(|u| + c)}{P_{med}} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \mathbf{p} \quad (3.38)$$

onde $\overline{\mu}_a$ e \mathbf{p} são, respectivamente, o vetor dos valores nodais da viscosidade artificial e da pressão. Pode-se obter também um valor da viscosidade artificial constante sobre cada elemento, como proposto por Zienkiewicz e Taylor (2000b):

$$\mu_{a_e} = q_{dif} h (|u| + c) S_e, \quad (3.39)$$

sendo S_e a média dos valores S_i calculada para cada nó do elemento, conforme:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|}, \quad (3.40)$$

onde \sum_e indica somatória sobre todos os elementos aos que o nó i está relacionado e k os demais nós destes elementos.

De (3.35), (3.37) e (3.39), chega-se à expressão que representa a variável amortecida na região de choque:

$$\phi_s(t = n + 1) = \phi(t = n + 1) + \Delta t M^{-1} \frac{q_{dif} S_e}{h} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L) \phi(t = n). \quad (3.41)$$

A técnica apresentada é aplicada à quantidade de movimento específica (3.9), à massa específica (3.21) e à energia específica (3.27).

3.5 Elemento utilizado

No domínio do fluido utiliza-se, para sua discretização, o elemento tetraédrico de quatro nós e funções polinomiais de primeira ordem N_i referentes ao nó i , sendo iguais às funções ponderadoras (método Bubnov-Galerkin), como se observa na Fig.3.1.

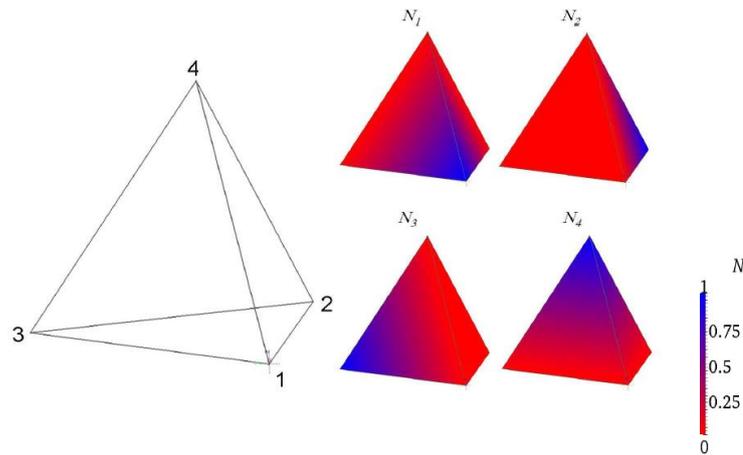


Figura 3.1: Tetraedro de ordem linear para o domínio do fluido (SANCHES, 2011).

3.6 Testes do programa de mecânica dos fluidos

Nesta seção apresenta-se a avaliação da formulação numérica apresentada para aplicações em problemas da dinâmica de fluidos com propagação de ondas de choque.

3.6.1 Problema da propagação de onda de choque em um canal retangular

O primeiro teste a ser feito no algoritmo numérico de análise transiente de escoamentos compressíveis para as aplicações almejadas é a propagação de onda de pressão. Para pequenas diferenças de pressão, onde os efeitos tanto na temperatura como na velocidade do escoamento são reduzidos, a onda de pressão se propaga com a velocidade do som. Autores como Texeira (1996) e Kawahara e Hirano (1983) incluem o teste para a verificação dos seus códigos.

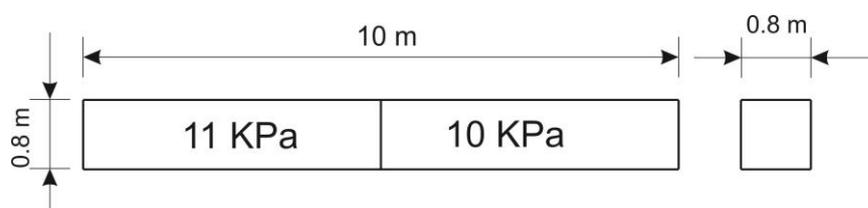


Figura 3.2: Dimensões do canal.

O canal de seção quadrada da Fig. 3.2, com 10 m de comprimento e 0,8 m de altura e largura, encontra-se inicialmente cheio de um fluido a uma pressão de 11 kPa na primeira metade do seu comprimento e de 10 kPa na segunda metade. É adotada a velocidade do som com valor de $c = 1000$ m/s e a relação entre calores específicos $\gamma = 1,4$.

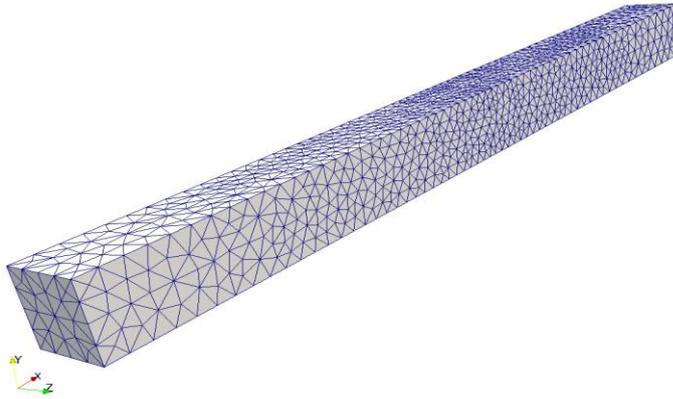


Figura 3.3: Discretização do canal.

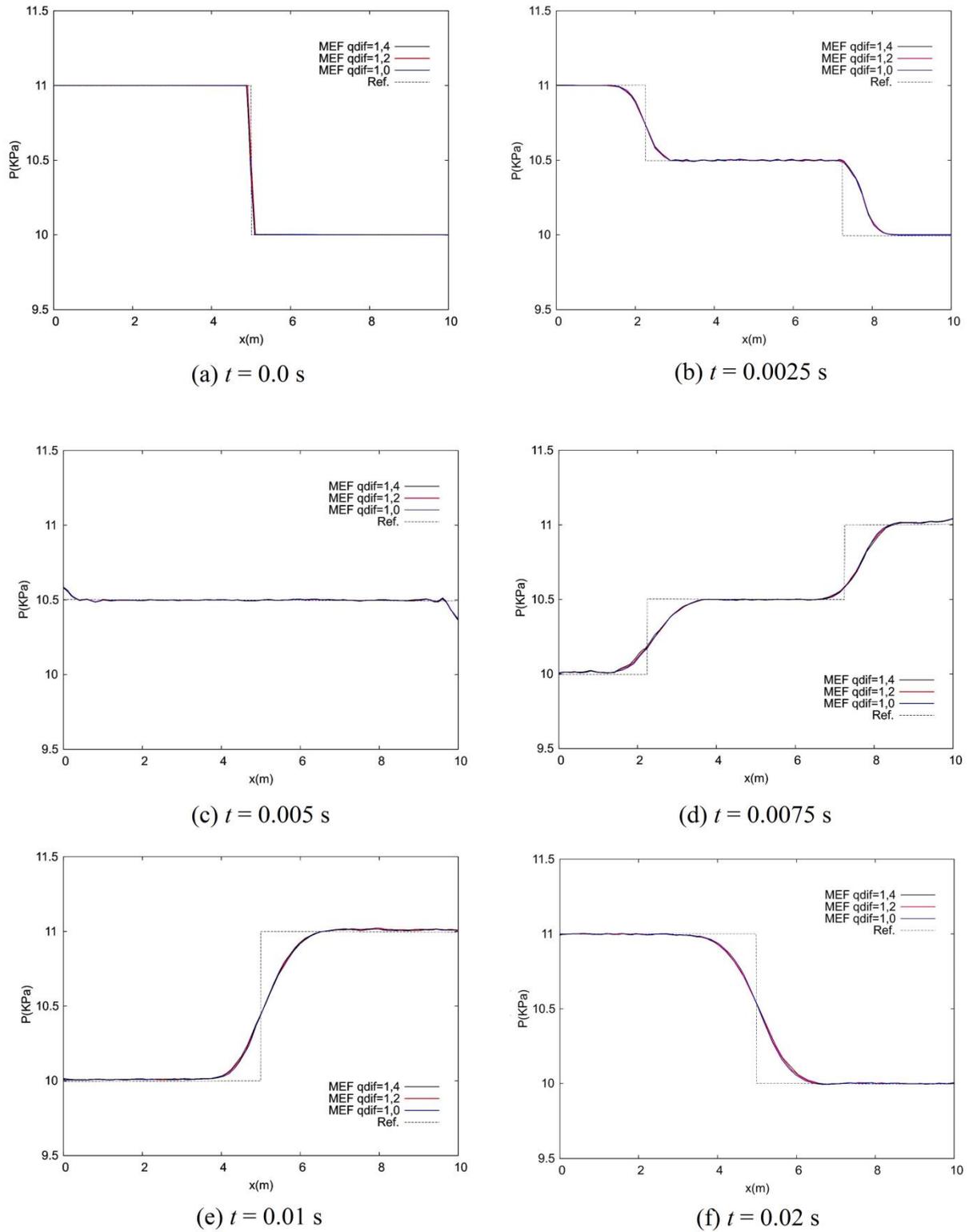
O problema foi discretizado com 9526 elementos tetraédricos e 2360 nós como observado na Fig. 3.3. São testados diferentes valores para o coeficiente de captura de choque da Eq. 3.36 e seus resultados mostrados na Fig. 3.4.

Com base nos resultados, conclui-se primeiramente que a propagação da onda de pressão está sendo representada corretamente e com pouca difusão numérica tendo em vista à discretização adotada como visto na Fig. 3.5. Nota-se ainda que a adoção de diferentes valores para o coeficiente de difusão do operador de captura de choque não muda significativamente a resposta do problema no caso analisado.

3.6.2 escoamento não viscoso transiente em um canal com degrau

O problema de escoamento não viscoso em canal com degrau, inicialmente proposto por Woodwar e Colella (1984), tem sido um teste clássico para validação de algoritmos numéricos para análises transientes de fluidos compressíveis.

Na Fig. 3.6 é apresentada a geometria da malha utilizada. Inicialmente o fluido está em escoamento supersônico não perturbado e as restrições de velocidade nas paredes são impostas no instante inicial da análise.

Figura 3.4: Propagação da onda de pressão para diferentes valores de q_{dif} .

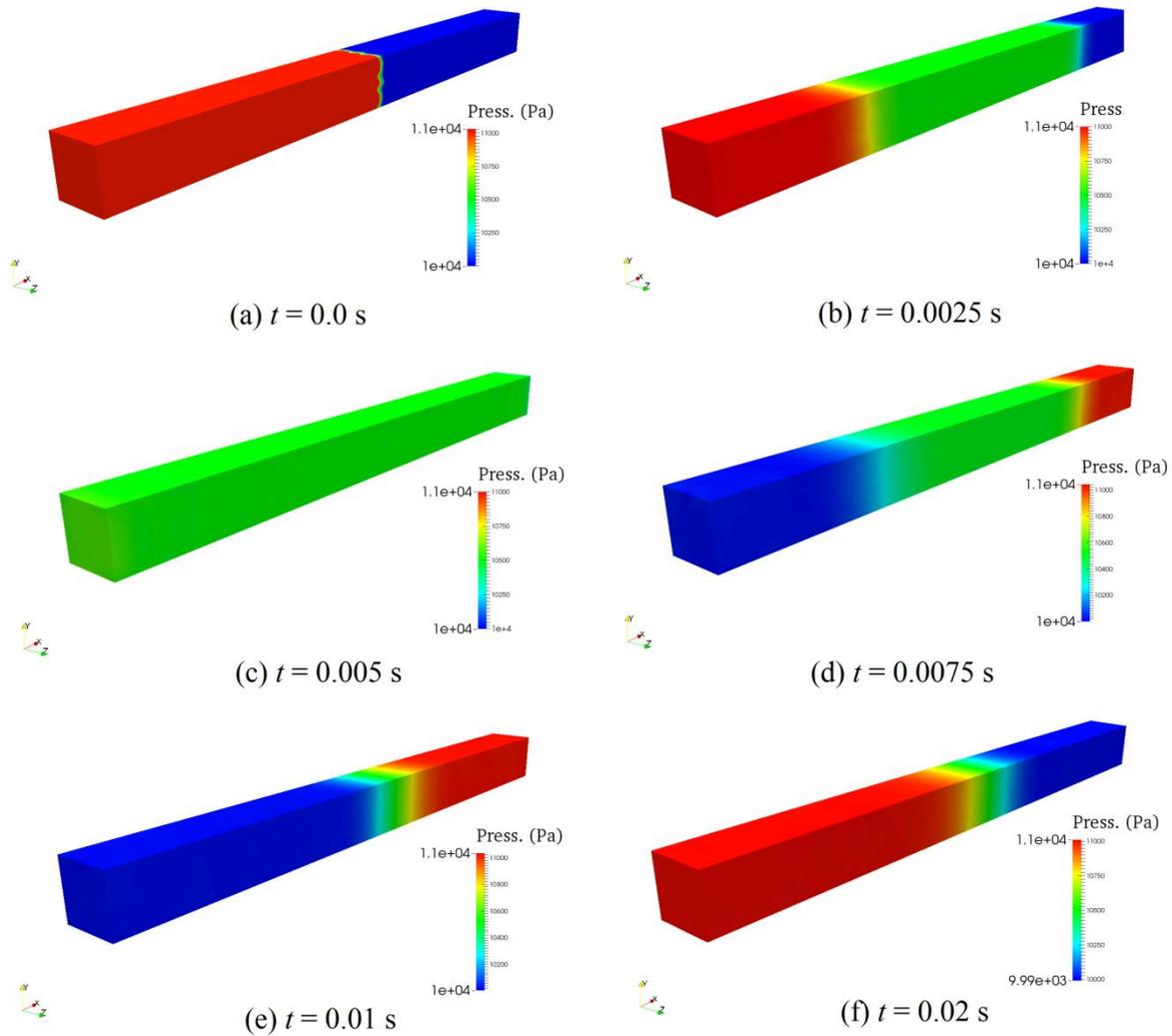


Figura 3.5: Propagação da onda de pressão para $q_{dif} = 1.0$.

As condições de contorno de escoamento não perturbado (número de $Mach$ 3, densidade $\rho = 1$ e velocidade na componente horizontal $u = 1$), o fluxo na direção normal nas paredes é restrito e na saída não foram aplicadas condições de contorno, tendo em vista que o escoamento é supersônico. O valor adotado para a taxa de calor específico é $\gamma = 1,4$.

O canal foi discretizado mediante uma malha de 18728 elementos tetraédricos e 4738 nós em total e suas dimensões podem ser observadas na Fig. 3.6.

Nas Fig. 3.7 - 3.10 são mostradas as distribuições de massa específica e de pressão cada 0,5 unidades adimensionais de tempo até o instante $t = 4,0$ para um valor de parâmetro

de captura de choque q_{dif} igual a 1,0 e os resultados podem ser comparados com linhas de pressão e densidade obtidas por Löhner et al. (1985). Também são mostrados os resultados de pressão e massa específica para valores de q_{dif} igual a 1,2 e 1,4 comparados com os resultados de $q_{dif} = 1,0$ no instante de tempo $t = 3,0$ na Fig. 3.11.

Os resultados mostrados deixam em evidência a coerência entre os dois trabalhos ressaltando a similaridade das curvas de nível de pressão e densidade ao longo do tempo mesmo para valores diferentes do parâmetro de captura de choque.

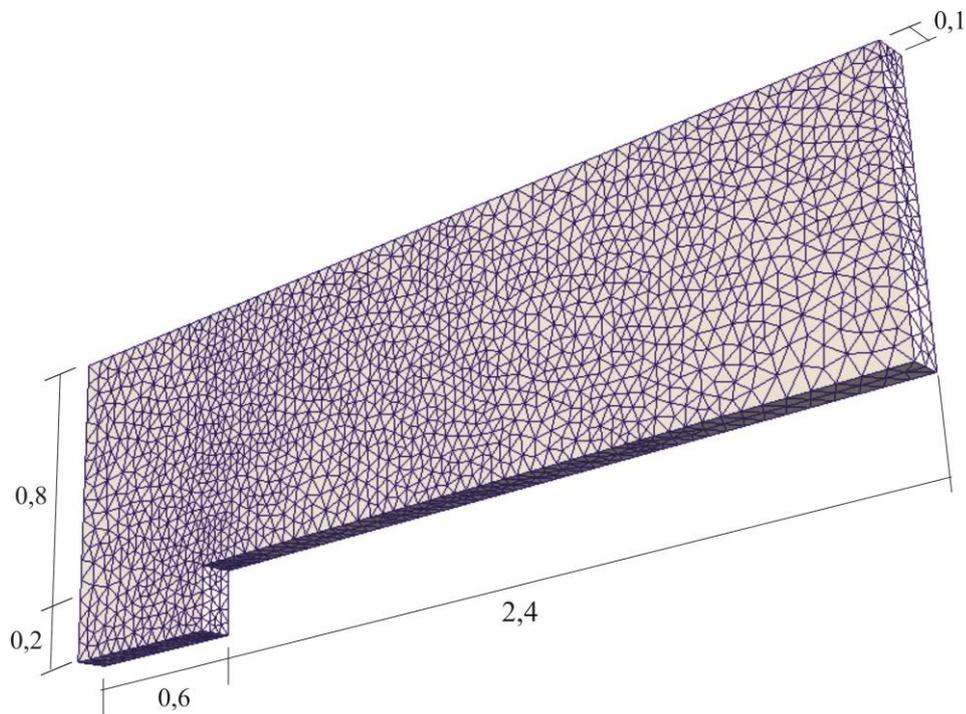


Figura 3.6: Geometria da malha do canal com ressalto.

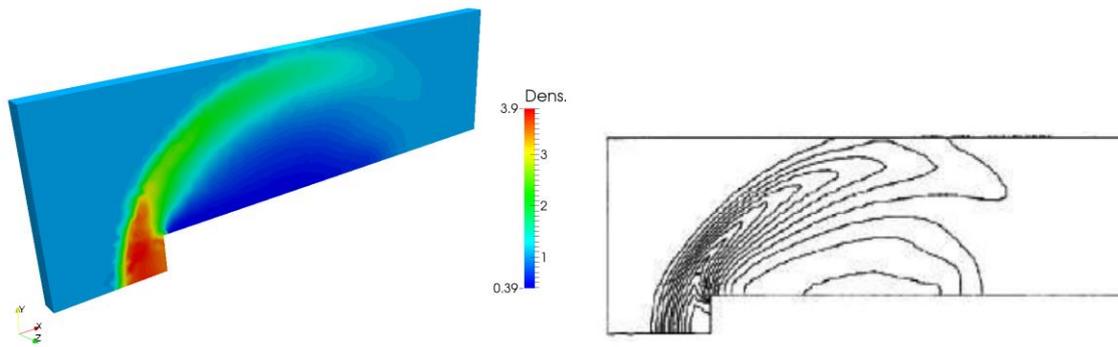
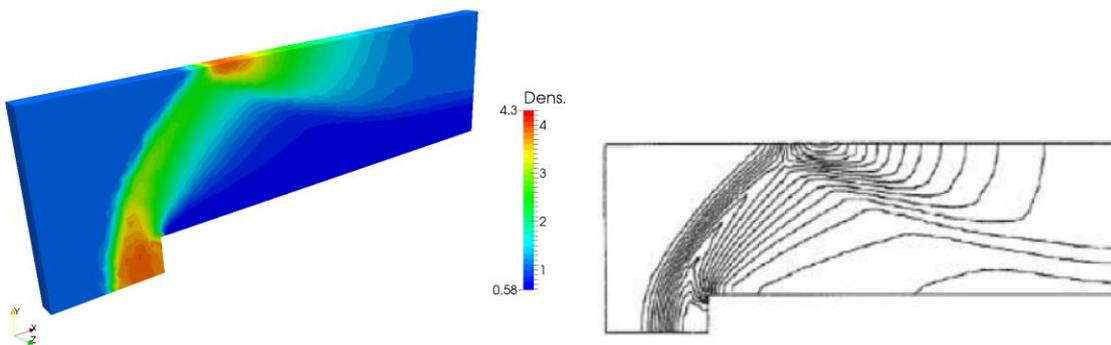
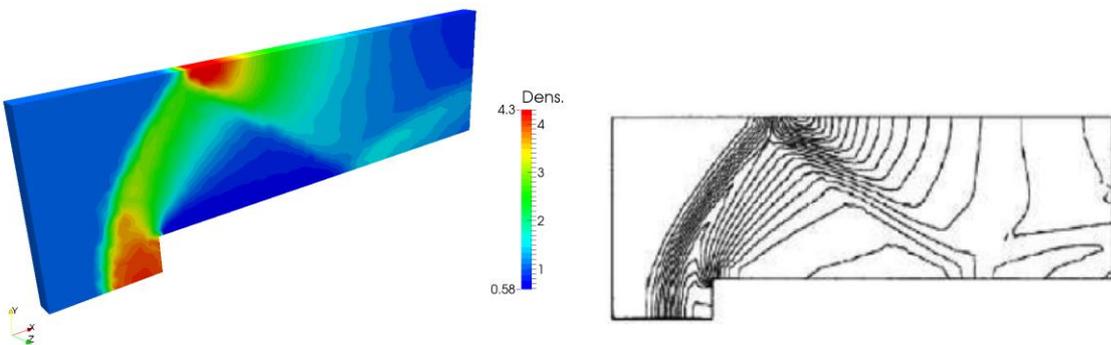
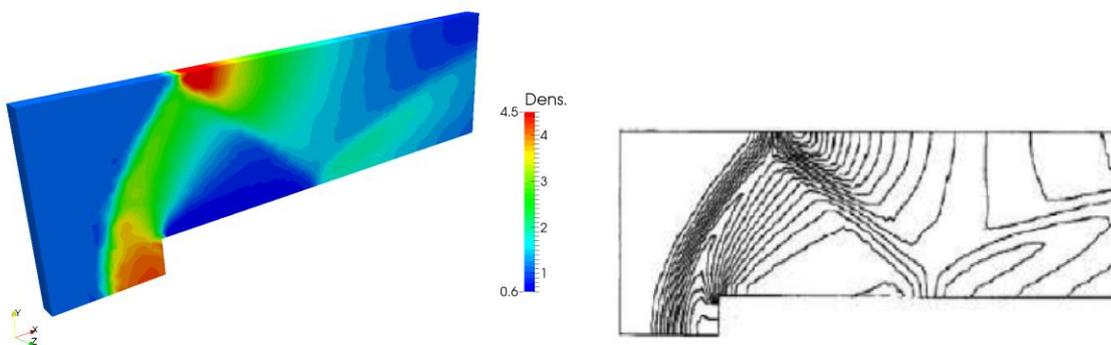
(a) $t = 0.5$ (b) $t = 1.0$ (c) $t = 1.5$ (d) $t = 2.0$

Figura 3.7: Distribuição de densidade para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

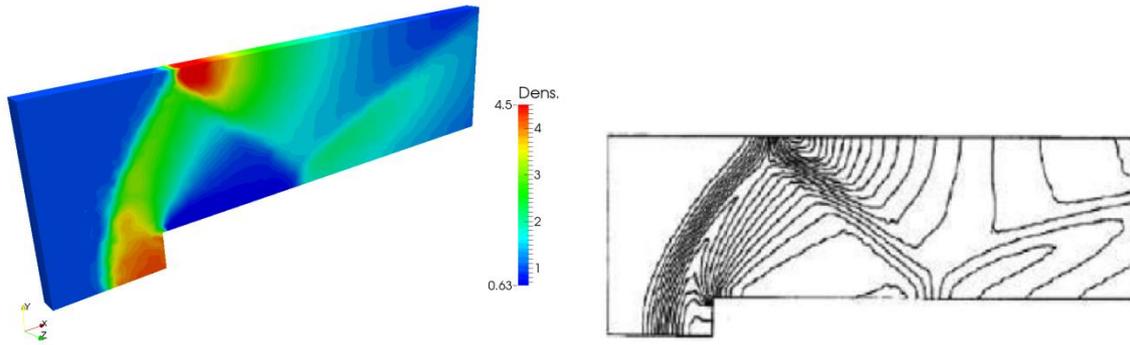
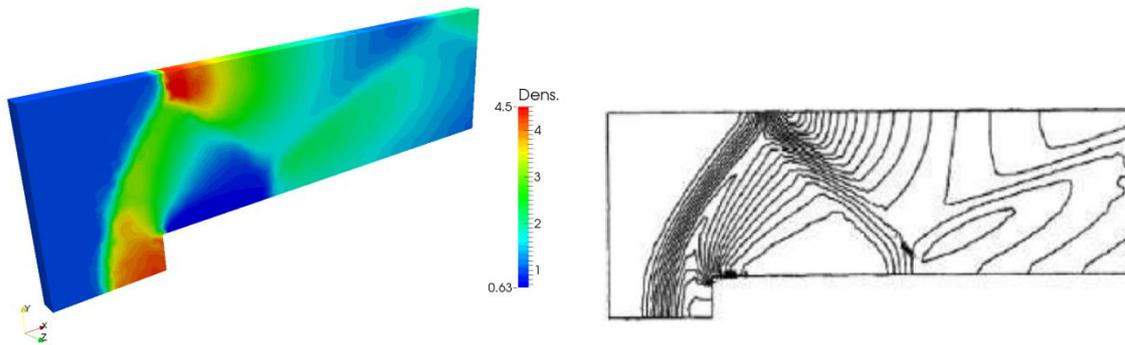
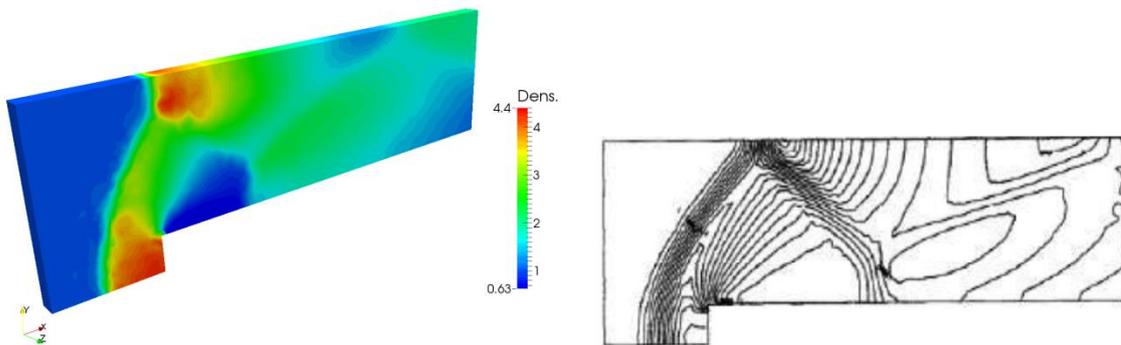
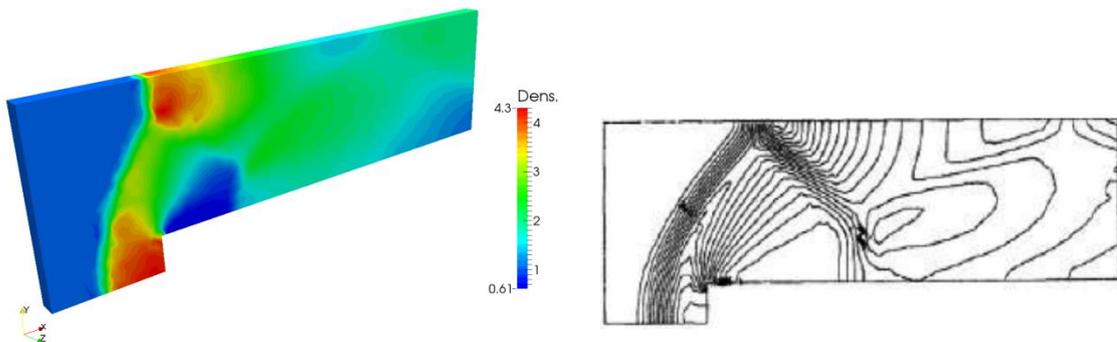
(e) $t = 2.5$ (f) $t = 3.0$ (g) $t = 3.5$ (h) $t = 4.0$

Figura 3.8: Distribuição de densidade para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

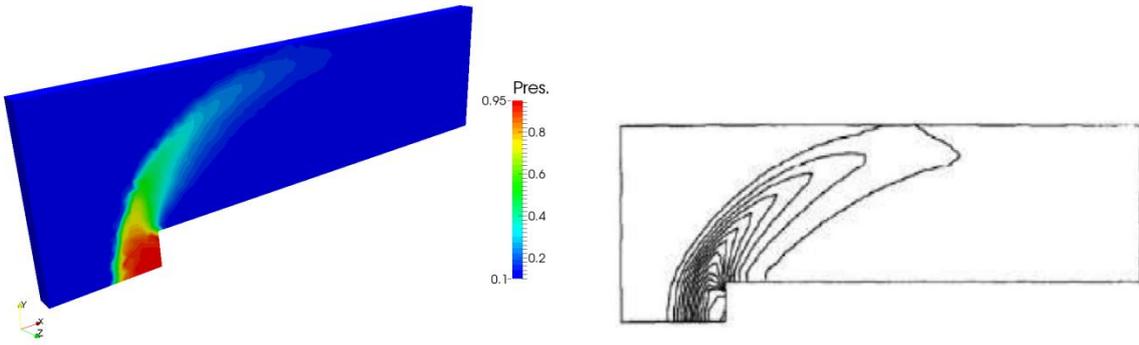
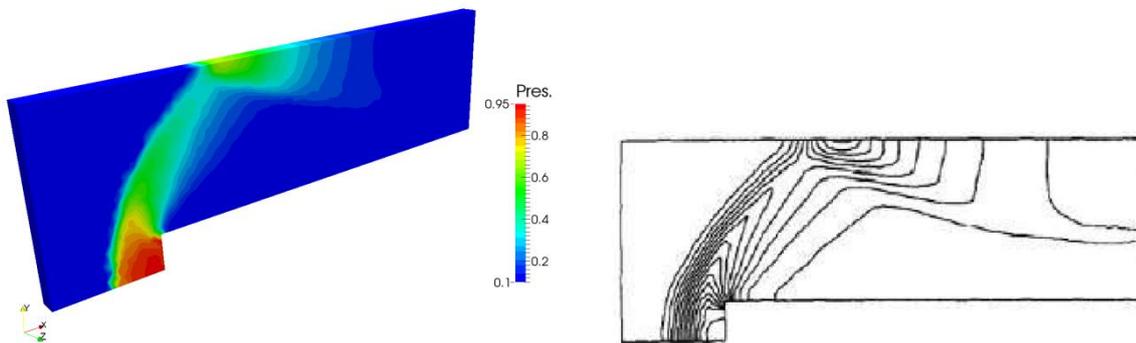
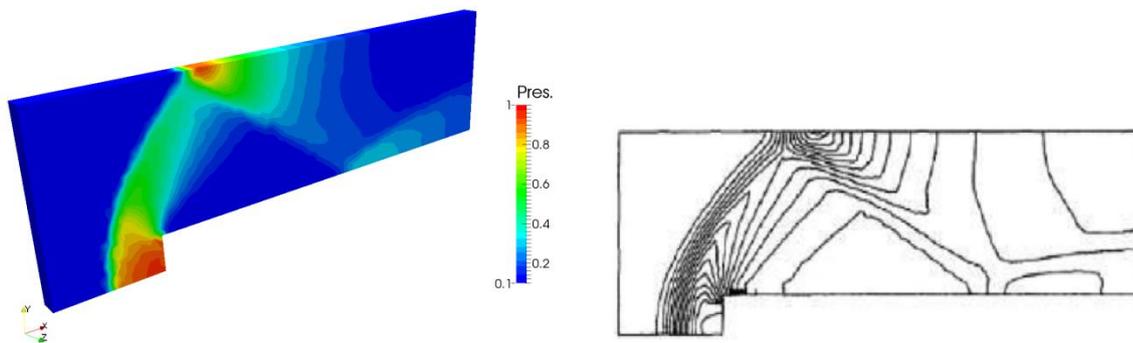
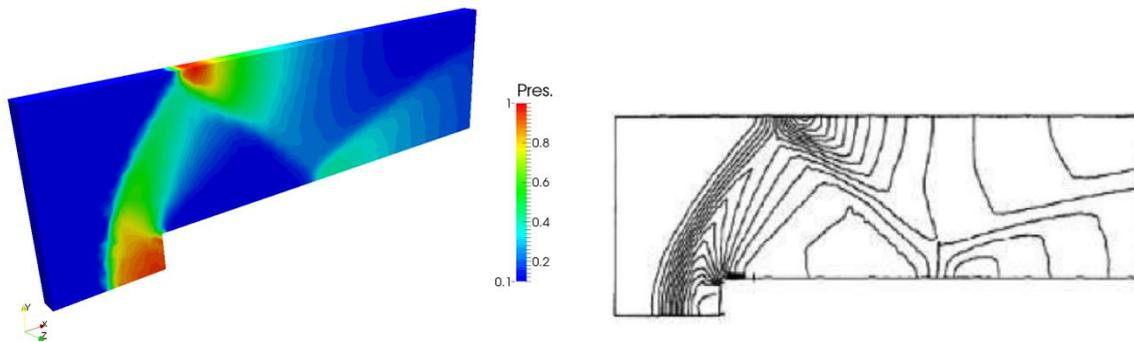
(a) $t = 0.5$ (b) $t = 1.0$ (c) $t = 1.5$ (d) $t = 2.0$

Figura 3.9: Distribuição de pressão para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

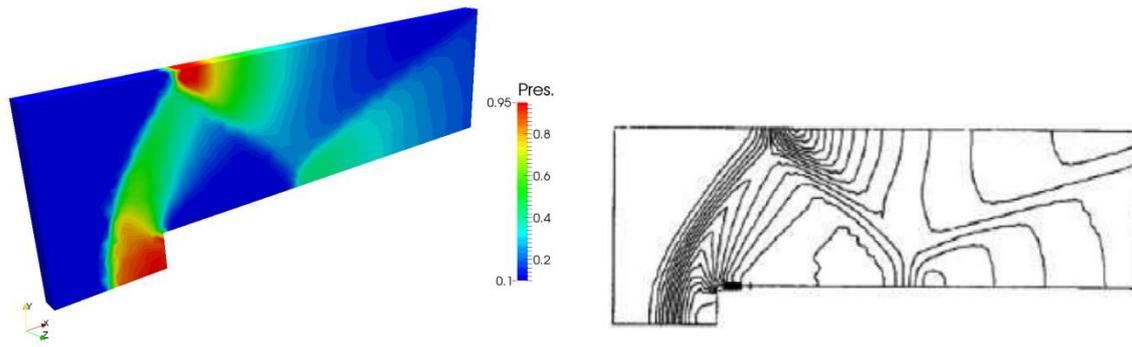
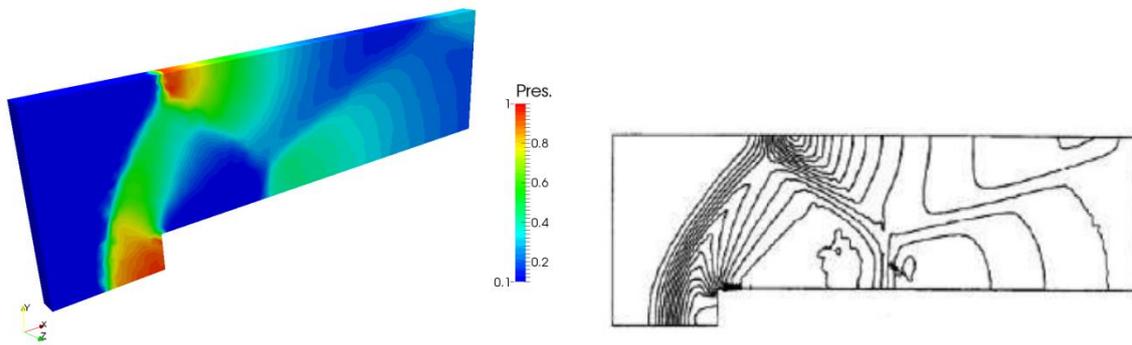
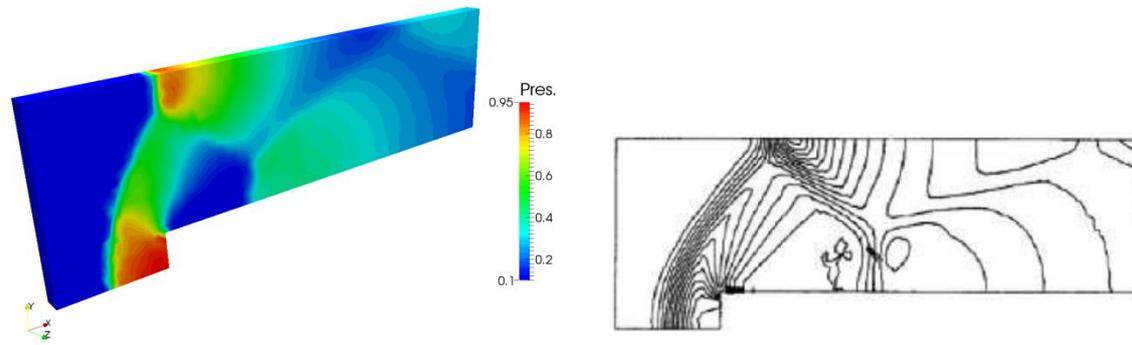
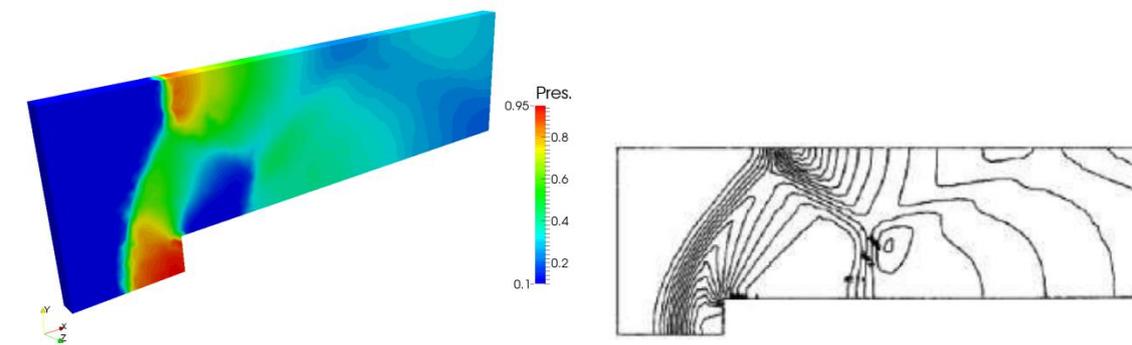
(e) $t = 2.5$ (f) $t = 3.0$ (g) $t = 3.5$ (h) $t = 4.0$

Figura 3.10: Distribuição de pressão para $q_{dif} = 1.0$. Esquerda: Presente trabalho, direita: Löhner et al. (1985)

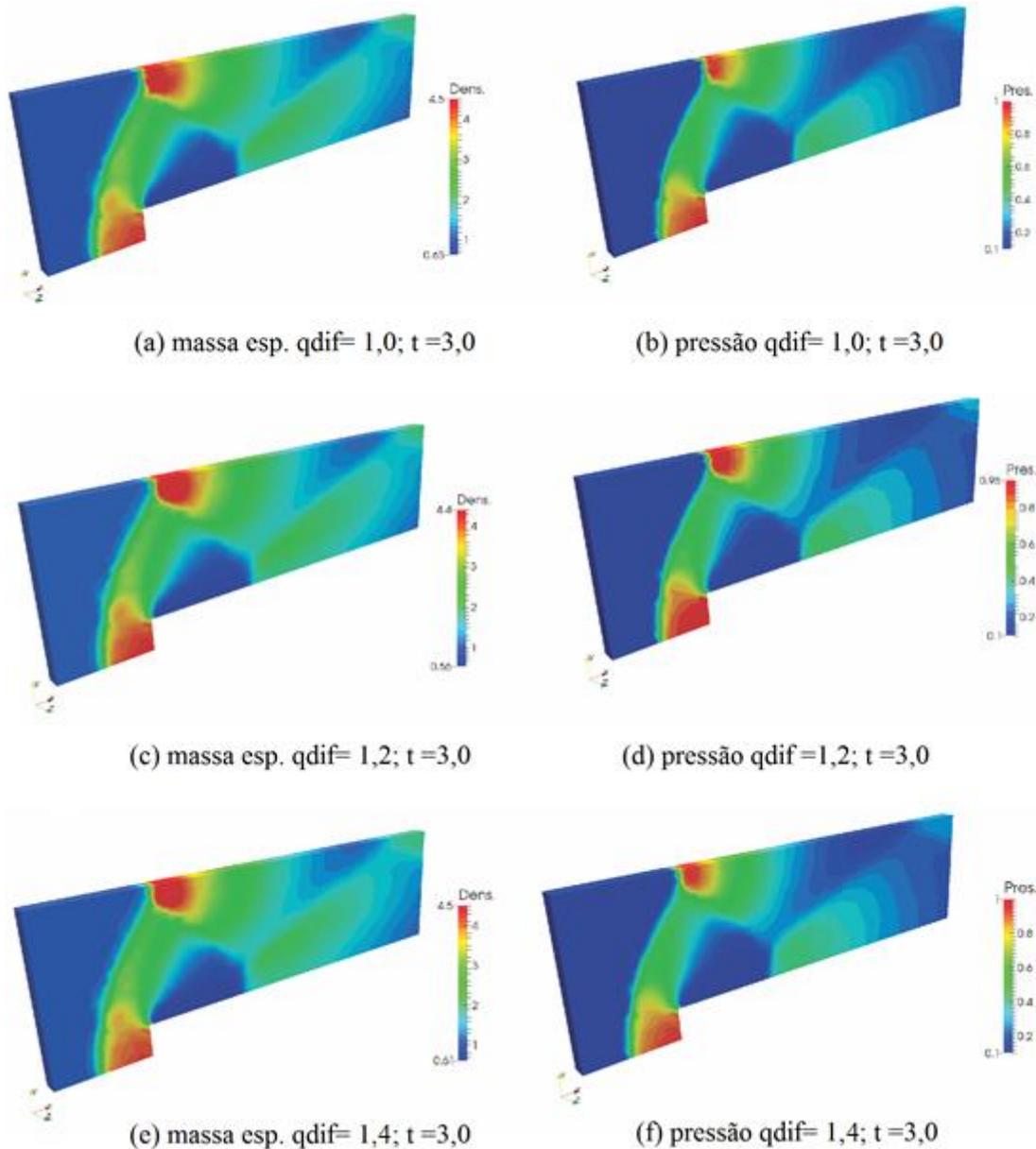


Figura 3.11: Distribuição de densidade e pressão para valores de q_{dif} igual a 1,0; 1,2 e 1,4.

3.6.3 Problema da propagação de onda de choque sobre um cilindro

Neste caso, estuda-se o comportamento da propagação da onda de choque sobre um corpo cilíndrico completamente rígido em um canal fechado. O domínio computacional e as condições iniciais são mostrados na Fig. 3.12 Aproveitando-se da simetria do problema, discretiza-se apenas a parte superior do canal e, portanto, as condições de contorno em (AB) e (CD) são de simetria (apenas velocidade vertical restringida). O limite (EF) é considerado impermeável e sem atrito (parede lisa), assim como a parede do cilindro. (AF) e (DE), de

condições de contorno de saída, são fixados longe com o fim de evitar efeitos numéricos nos limites de saída.

Para gerar a onda expansiva, uma faixa de alta pressão de 4 mm de espessura se encontra inicialmente a 68 mm do centro do cilindro onde se situa a origem das coordenadas do sistema, com pressão inicial de 1837,5 KPa, massa específica $\rho = 7,629 \text{ kg/m}^3$ e número de Mach $M=1,7$. Supõe-se como meio de expansão o ar em condições de atmosfera padrão ($p_\infty = 10^5 \text{ kPa}$, $T_\infty = 293 \text{ K}$ e $\gamma = 1,4$).

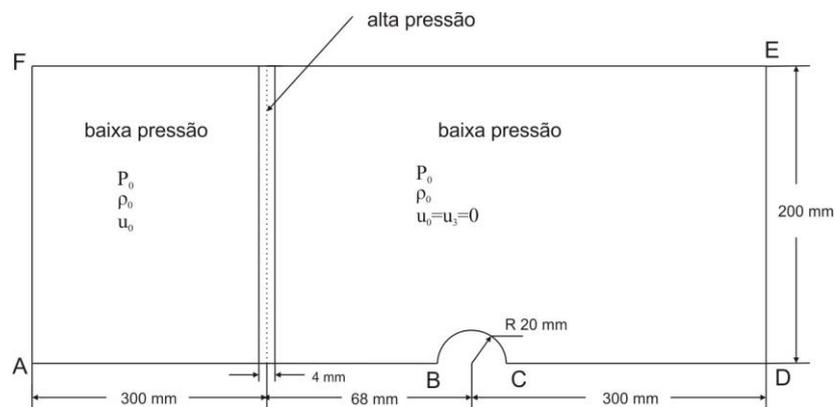


Figura 3.12: Esquema da geometria e condições iniciais.

O problema foi discretizado em 27695 elementos tetraédricos e 8030 nós como observado na Fig. 3.13.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos para a distribuição de pressão nos instantes $t = 85,25 \mu\text{s}$ e $t = 138,75 \mu\text{s}$ em comparação com os obtidos por Ofengeim e Drikakis (1997) (ver Fig 3.14 e 3.15).

Deve-se notar que Ofengeim e Drikakis (1997) utilizaram um processo adaptativo com malha muito refinada para se obter as curvas de nível de pressão com a definição apresentada na Fig 3.14, (ver Fig 3.15), de forma que os resultados do presente trabalho, com malha muito menos refinada, são totalmente aceitáveis.

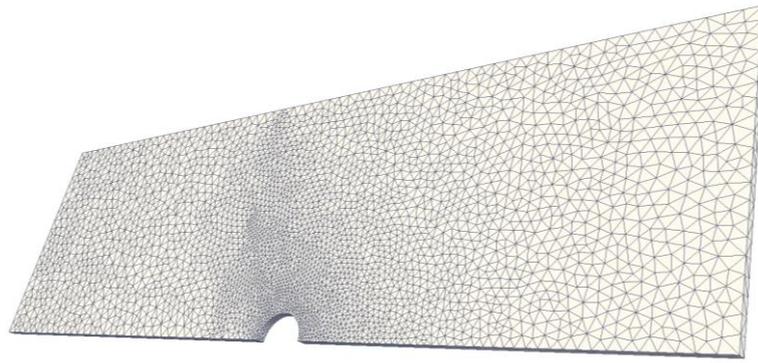
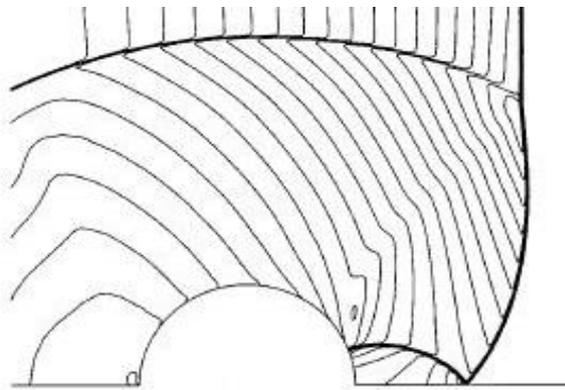
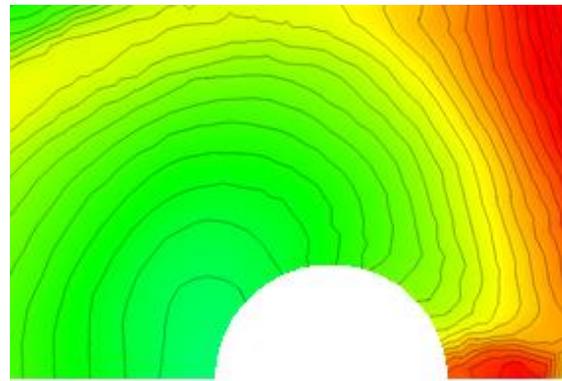


Figura 3.13: Discretização do problema.

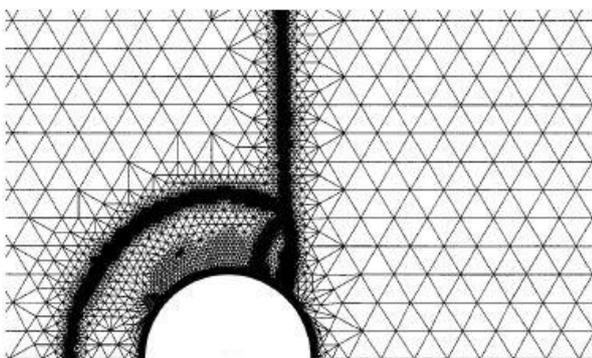


(a) Ofengeim e Driakis (1997), $t = 138.75 \mu\text{s}$

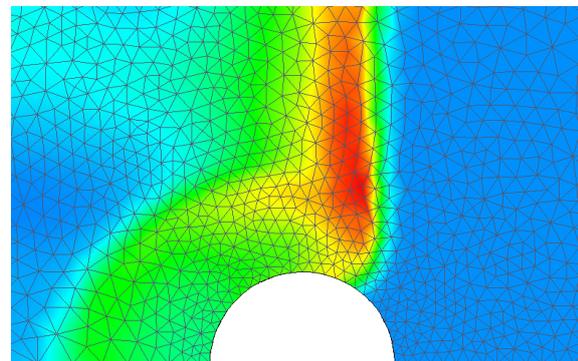


(b) Presente trabalho, $t = 138.75 \mu\text{s}$

Figura 3.14: Linhas de pressão obtidas por Ofengeim e Drikakis (1997) (à esquerda) e no presente trabalho.



(a) Ofengeim e Driakis (1997), $t = 85,25 \mu\text{s}$



(b) Presente trabalho, $t = 85,25 \mu\text{s}$

Figura 3.15: Variação de pressão obtida por Ofengeim e Drikakis (1997) (à esquerda) e no presente trabalho

4 *Mecânica dos sólidos*

Para modelar matematicamente a mecânica dos sólidos, é adequado assumir que o sólido consiste em um meio contínuo. Tal como nos fluidos, a movimentação dos sólidos é governada por três principais leis: Conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, e é a partir da aplicação delas que se obtém o equacionamento de um sólido de massa constante, porém deformável e de volume variável.

O estudo da mecânica dos sólidos, em relação à geometria, pode ser dividido em linear e não linear. A grande diferença entre os dois recai na consideração do estado de equilíbrio de forças, pois na abordagem linear se faz considerando o equilíbrio na configuração inicial do corpo, quando o mesmo se encontra indesejado e indeformado, assumindo-se que as mudanças na forma são pequenas a ponto de que os deslocamentos sofridos pelas forças não produzam diferença na resposta, enquanto a análise não linear geométrica considera o equilíbrio em relação à configuração atual do corpo, apresentando deslocamentos e deformações conforme as solicitações externas.

A mecânica dos sólidos com modelagem geometricamente linear é amplamente útil em aplicações na engenharia ao apresentar equacionamento simples, o que dá lugar ao emprego de técnicas de solução pouco complexas, porém, é uma aproximação limitada da realidade, não podendo ser aplicada a casos com grandes deslocamentos.

Por outro lado, a análise não linear geométrica, apresenta um equacionamento mais complexo, o que deixa como necessidade, na maioria dos casos, o uso de técnicas avançadas de solução, porém é uma abordagem adequada para tratar problemas onde os corpos apresentam grandes deslocamentos.

4.1 *Cinemática dos sólidos*

A cinemática é a ciência que estuda o movimento dos corpos em condições de espaço e tempo independentemente das causas que o produzem. Restrições quanto à cinemática de estruturas de barra são feitas de forma a se reduzir o número de variáveis.

A descrição cinemática empregada aqui tem início por considerar um ponto arbitrário do conjunto de pontos materiais que definem ao corpo sólido com carregamentos e restrições quaisquer num instante de tempo t_0 (instante da configuração inicial, indeformada e indeslocada), cuja posição indica-se por meio do vetor \mathbf{x} , como visto na Fig. 4.1.

Num instante de tempo t , posterior a t_0 , o ponto escolhido para a análise se encontra na configuração deformada, e a sua posição é representada mediante o vetor \mathbf{y} .

Existe, então, uma função vetorial \vec{f} que descreve a mudança da configuração inicial em um tempo t_0 , para a configuração atual no tempo t de qualquer ponto pertencente ao domínio do corpo, a referida função depende tanto da posição inicial quanto do tempo:

$$\mathbf{y} = \vec{f}(\mathbf{x}, t). \quad (4.1)$$

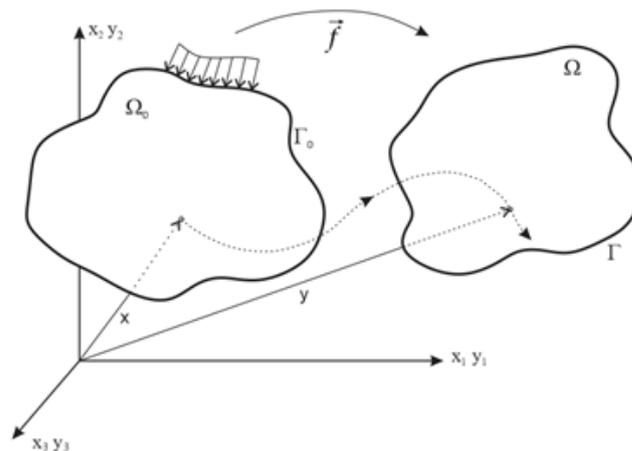


Figura 4.1: Cinemática de deformação de um sólido.

Para definir a função mudança de configuração \vec{f} na qual Ω_0 é o domínio e Ω sua imagem, é realizada a seguinte aplicação linear de \vec{f}^1 sobre a imagem de $(\vec{f}^0)^{-1}$, o que resulta em:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1}. \quad (4.2)$$

De forma análoga, tem-se o gradiente de \vec{f} de forma matricial, definido por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (4.3)$$

e em notação indicial:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (4.4)$$

onde f_i é a função de mapeamento e x_j representa a variação relativa à posição inicial.

4.1.1 Medida de deformação

Na análise não linear geométrica de sólidos, busca-se empregar uma medida de deformação objetiva, o que garante que na existência de movimento de corpo rígido, sejam rotações ou translações, a medida de deformação não registre nenhum valor.

Classicamente se utiliza o tensor de deformação de Green-Lagrange que atinge satisfatoriamente o critério de objetividade sendo amplamente útil em problemas que envolvem grandes deslocamentos. A deformação de Green-Lagrange é representada como segue:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (4.5)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e \mathbf{C} o alongamento à direita de Cauchy-Green, o qual pode-se definir relacionando o conceito de função mudança de configuração:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad (4.6)$$

sendo \mathbf{A} o gradiente da função \bar{f} .

O tensor de deformação de Gree-Lagrange também pode ser expresso em notação indicial como segue:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}] = \frac{1}{2} [C_{ij} - \delta_{ij}], \quad (4.7)$$

4.2 Lei constitutiva

Conhecer uma lei constitutiva capaz de relacionar deformações e tensões de forma apropriada é imprescindível para solucionar as equações que descrevem o equilíbrio dos

sólidos em regime não linear. Neste trabalho, é empregada a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, a qual relaciona a deformação de Green-Lagrange com o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff.

A lei constitutiva adotada estabelece uma relação linear baseada na deformação, resultando na seguinte expressão quadrática para energia de deformação por unidade de volume:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} . \quad (4.8)$$

ou em notação indicial:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{ij} C_{ijkl} E_{kl} . \quad (4.9)$$

Na anterior expressão representativa da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, a deformação de Green-Lagrange tem como seu conjugado energético o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, escrito como:

$$S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl} E_{kl} , \quad (4.10)$$

e o tensor constitutivo elástico \mathbf{C} possui as componentes:

$$C_{ijkl} = \left[\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \right] \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (4.11)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson do material e G o módulo de elasticidade transversal, definido como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (4.12)$$

4.3 Equilíbrio de um sólido

A determinação da posição de equilíbrio de um corpo sólido que muda de uma configuração inicial para uma configuração deformada é imprescindível na análise não linear geométrica, sendo necessário descrever o estado de equilíbrio considerando as forças atuantes às quais tem sido submetido.

Se a entrada e saída de energia em um sistema mecânico está em equilíbrio, se diz que o sistema garante a conservação da energia. Se existe dissipação da energia total no sistema, esta mudará ao longo do tempo. A mencionada dissipação é incluída no potencial da energia total do sistema como segue:

$$\Pi = \Pi_0 - Q(t, x), \quad (4.13)$$

onde $Q(t, x)$ se expressa como a quantidade de energia subtraída do sistema idealizado sem perdas Π_0 . Assim, Π é a energia mecânica restante do sistema a Eq. 4.13 pode-se escrever como:

$$\Pi_0 = \Pi + Q(t, x). \quad (4.14)$$

Com a equação 4.14 podem ser usadas as propriedades estacionárias para a análise do sistema mecânico, dessa forma é possível utilizar o princípio da energia potencial estacionária no funcional da energia ideal do sistema Π_0 para a consideração do equilíbrio.

Escreve-se, então, o funcional da energia potencial ideal de um sistema mecânico, o qual relaciona a energia de deformação armazenada pelo corpo ao trabalho realizado pelas forças externas conservativas, efeitos de forças não conservativas e à energia cinética do corpo:

$$\Pi_0 = U_e + K - P \mp Q. \quad (4.15)$$

A primeira parcela da Eq. 4.15 corresponde à energia interna de deformação do sistema, a qual se expressa como:

$$U_e = \int_{\Omega_0} u_e d\Omega_0, \quad (4.16)$$

sendo u_e a energia específica de deformação e Ω_0 o domínio do corpo na configuração inicial.

A segunda parcela indica a energia cinética do sólido, a qual se define como:

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 (\dot{y}_i \cdot \dot{y}_i) d\Omega_0, \quad (4.17)$$

onde ρ_0 é a massa específica do sólido associada à configuração inicial e \dot{y}_i é a velocidade de um ponto arbitrário dentro do domínio do corpo.

A terceira parcela corresponde ao trabalho realizado pelas forças externas e é definida como:

$$P = \sum F_i \cdot y_i + \int_{S_0} t_i y_i ds_0, \quad (4.18)$$

onde F é a representação das forças externas nodais conservativas, t_i as forças distribuídas conservativas e ds_0 o diferencial de área do contorno do elemento finito sobre o qual atua t_i .

Finalmente, a última parcela corresponde ao termo dissipativo e ao o efeito das forças não conservativas:

$$\frac{\partial}{\partial y} Q(t, x) = \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 (\dot{y}_i) d\Omega_0 - \int_{S_0} q_i ds_0, \quad (4.19)$$

onde λ_m é a constante de amortecimento, \dot{y}_i a velocidade de um ponto arbitrário no corpo e q_i são as componentes de forças não conservativas distribuídas no corpo, dadas por:

$$q_i = q_i^\ell \mathbf{N}_\ell(\xi_1, \xi_2), \quad (4.20)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de função de forma com ℓ correspondente a cada nó.

Dessa forma, o funcional de energia de um sistema mecânico pode ser reescrito como:

$$\Pi_0 = \int_{\Omega_0} u_e d\Omega_0 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 (\dot{y}_i \cdot \dot{y}_i) d\Omega_0 - \sum F_i \cdot y_i - \int_{S_0} t_i y_i ds_0 + Q. \quad (4.21)$$

De modo a obter a relação de equilíbrio dinâmico procede-se a aplicar o princípio da energia potencial total estacionária sobre a expressão anterior e de acordo com a cinemática adotada para o emprego do MEF posicional, se tomam como parâmetros nodais as posições atuais y , o que permite chegar à seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial Y_{\ell_j}} &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e(\xi, Y_i)}{\partial Y_{\ell_j}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{N}_{\ell_j}(\xi) \mathbf{N}_{ki}(\xi) d\Omega_0 \ddot{Y}_{ki} \\ &+ \int_{\Omega_0} \lambda_m \rho_0 \mathbf{N}_{\ell_j}(\xi) \mathbf{N}_{ki}(\xi) d\Omega_0 \dot{Y}_{ki} - F_{\ell_j} - \int_{S_0} \mathbf{N}_{\ell_j}(\xi) \mathbf{N}_{ki}(\xi) ds_0 t_{ki} \\ &- \int_{S_0} q_j \mathbf{N}_{\ell_j}(\xi) ds_0 = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

Onde ℓ e k correspondem a cada nó e i e j às direções.

5 *Análise numérica de estruturas de barra geral 3D*

O objetivo deste capítulo é mostrar a cinemática de movimentação de elementos de barra geral conforme descrita mediante o MEF na abordagem posicional.

5.1 **Cinemática do método dos elementos finitos posicional para barra geral 3D**

A cinemática adotada permite mapear o movimento do sólido interpolando as posições dos pontos com o auxílio das funções de forma do elemento.

As formulações tradicionais de elementos finitos de estruturas de barra 3D não consideram nenhuma deformação no plano da seção transversal como parte da sua cinemática. Na cinemática apresentada aqui, será abordado esse problema incluindo o empenamento da seção e as deformações na direção da altura e da largura, que são considerados como graus de liberdade a mais na formulação, incluídos através de técnica de enriquecimento nodal, como visto nos trabalhos de Coda e Paccola (2007) e (2010).

A Fig. 5.1 mostra a representação 2D do mapeamento para um problema de barra geral incluindo sua configuração inicial e atual, onde f e \mathbf{A} representam a mudança de configuração e seu gradiente e f^0 , f^1 , \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 são, respectivamente, o mapeamento e seus gradientes do espaço adimensional (empregado para a quadratura) respectivamente para as configurações inicial e atual, as quais podem ser escritas como:

$$f^0 = x = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{X}^m + \left[\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{A}} \right] \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{V}^1 + \left[\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{B}} \right] \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{V}^2 \quad (5.1)$$

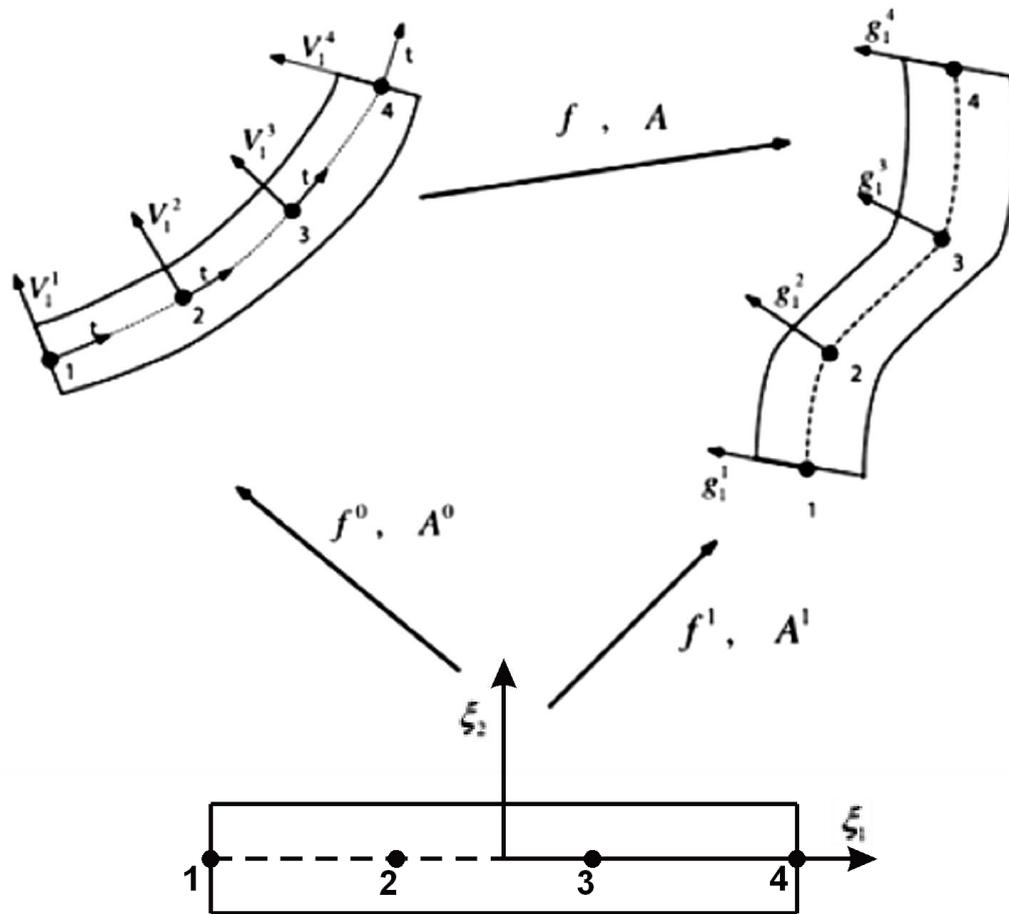


Figura 5.1: Mapeamento posicional das configurações inicial e atual (Adaptado de Coda e Paccola 2011)

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^1 = \mathbf{y} = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{Y}^m + [\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{A}}] \Phi(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_1 + [\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{B}}] \mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_2 \\
 \left\{ [\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{A}}]^2 (\mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{a}_1) \right\} \mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_1 + \left\{ [\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \tilde{\mathbf{B}}]^2 (\mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{a}_2) \right\} \mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_2, \quad (5.2) \\
 [\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2) \mathbf{D}] \left\{ [\mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_1] \times [\mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_2] \right\} \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{W}
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{N}(\xi_1)$ representa a função de forma ao longo da linha de referência do elemento, $\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2)$ o vetor função de forma dos elementos triangulares da discretização da seção transversal como visto na Figura 5.2, com γ_1 e γ_2 como coordenadas adimensionais e $\tilde{\mathbf{A}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ sendo coordenadas dos pontos que constituem a malha auxiliar da seção transversal, \mathbf{x}^m , \mathbf{v}^1 e \mathbf{v}^2 compreendem as coordenadas iniciais da linha de referência e \mathbf{Y}^m , $\bar{\mathbf{g}}_1$ e $\bar{\mathbf{g}}_2$ a posição atual e os vetores generalizados livres de restrição, o vetor \mathbf{D} representa o modo de

empenamento para todos os nós auxiliares do elemento finito de uma discretização geral de seção transversal. A direção de empenamento é dada por:

$$\mathbf{n} = \left[\mathbf{N}(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_1 \right] \times \mathbf{N} \left[(\xi_1) \bar{\mathbf{g}}_2 \right] \quad (5.3)$$

os termos escalares:

$$a_1(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{a}_1 \quad (5.4)$$

$$a_2(\xi_1) = \mathbf{N}(\xi_1) \mathbf{a}_2 \quad (5.5)$$

representam a intensidade da variação da deformação da seção transversal e \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 são parâmetros nodais associados com essa cinemática, enquanto \mathbf{w} representa a intensidade de empenamento para cada nó de elemento finito de barra (CODA; PACCOLA, 2011).

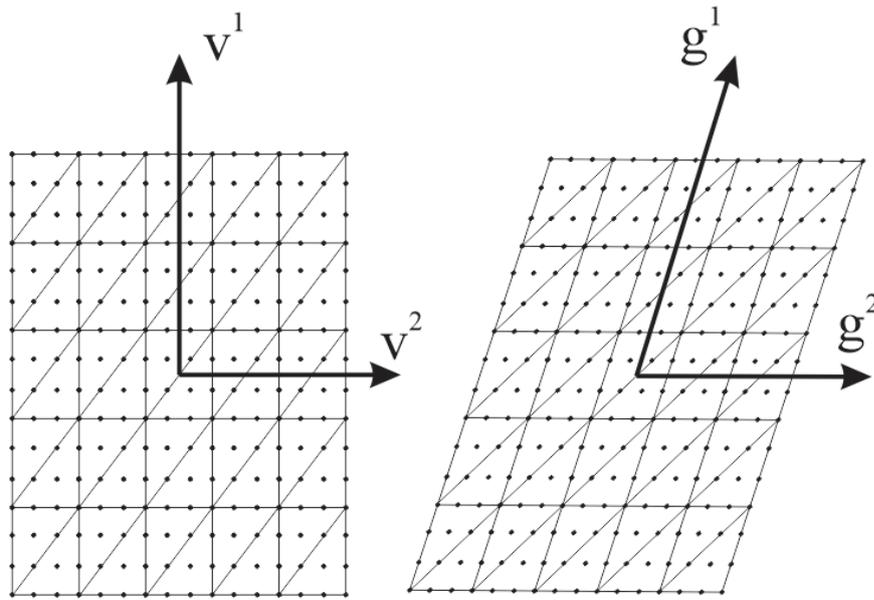


Figura 5.2: Discretização geral da seção transversal: (a) configuração inicial, (b) configuração atual. Adaptado de (CODA; PACCOLA, 2011).

A expressão (5.2) representa o mapeamento vetorial de um espaço adimensional para a configuração atual do corpo, incluindo intensidade de empenamento e deformação da seção transversal. Para escrever esse mapeamento são utilizados 12 graus de liberdade por nó, dos quais 6 são componentes vetoriais de $\bar{\mathbf{g}}_1$ e $\bar{\mathbf{g}}_2$, 2 taxas de deformação a_1 e a_2 nas direções da altura e largura e a intensidade de empenamento \mathbf{w} .

Ao usar o método dos Elementos Finitos, pode se relacionar a representação na descrição Lagrangeana do mapeamento \bar{f} e seu gradiente \mathbf{A} como visto nas equações 4.2 e 4.3, de forma que o alongamento à direita de Cauchy-Green pode ser escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} = (\mathbf{A}^0)^{-t} (\mathbf{A}^1)^t \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1}. \quad (5.6)$$

5.2 Equilíbrio dinâmico e procedimento de solução

O equilíbrio dinâmico do elemento de barra geral é baseado no teorema da estacionariedade da energia potencial total descrita pela equação 4.15, com o qual se pode definir o funcional de energia potencial total como segue:

$$\Pi_0 = \int u_e dV + \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} dV - \mathbf{F} \cdot \mathbf{y} + Q. \quad (5.7)$$

Onde \mathbf{F} representa as forças externas conservativas, $\dot{\mathbf{y}}$ é o vetor de velocidade de qualquer ponto do corpo, \mathbf{y} é o vetor de posições, u_e é a energia específica de deformação e Q representa os efeitos dissipativos e das forças não conservativas.

A derivada da energia potencial total em relação aos parâmetros nodais pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{Y}} dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{m} (\xi_1, \gamma_1, \gamma_2) dV \ddot{\mathbf{Y}} - \mathbf{F} + \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{Y}} = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Onde \mathbf{Y} é o vetor dos parâmetros nodais e os dois pontos sobrepostos indicam segunda derivada temporal.

A Eq. 5.8 pode ser rescrita como:

$$\mathbf{d} = \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{inert} + \mathbf{F}^{dump} - \mathbf{F}^c - \mathbf{F}^{nc} = 0 \quad (5.9)$$

ou

$$\mathbf{d} = \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{F}^c - \mathbf{F}^{nc} = 0. \quad (5.10)$$

Quando o vetor \mathbf{a} é igual à zero podemos concluir que existem equilíbrio dinâmico, se não for assim, o vetor \mathbf{d} é conhecido como o vetor de desbalanceamento mecânico.

Ainda é necessário proceder com a discretização temporal. Para tal é empregada a integração temporal, adotando o algoritmo de Newmark- β , com valores paramétricos de γ e β de 0.5 e 0.25 respectivamente (equivalente à regra dos trapézios, que é exata para aceleração constante).

Para um instante de tempo ($t = s + 1$), a Eq. 5.10 pode ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{s+1} - \mathbf{F}_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}}_{s+1} = \mathbf{0} . \quad (5.11)$$

Aplicando a aproximação de Newmark (γ e β) a posição e a velocidade atuais podem ser escritas como:

$$\mathbf{Y}_{s+1} = \mathbf{Y}_s + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_s + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{Y}}_s + \beta \ddot{\mathbf{Y}}_{s+1} \right], \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{s+1} = \dot{\mathbf{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{s+1}. \quad (5.13)$$

Substituindo (5.12) e (5.13) em (5.11) pode se obter o vetor \mathbf{a} para um passo de tempo atual:

$$\mathbf{d}(\mathbf{Y}_{s+1}) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{Y}} \right|_{s+1} - \mathbf{F}_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \mathbf{q}_s + \mathbf{C} \mathbf{R}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{s+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{q}_s = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

onde os vetores \mathbf{q}_s e \mathbf{R}_s são dados por:

$$\mathbf{q}_s = \frac{\mathbf{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{Y}}_s \quad (5.15)$$

e

$$\mathbf{R}_s = \dot{\mathbf{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_s \quad (5.16)$$

A Eq. (5.14) define um sistema não linear, o qual é solucionado através do método de Newton Raphson.

5.3 Testes do programa de barra

5.3.1 Viga engastada com carregamento no extremo livre com amortecimento

Este exemplo trata de uma viga engastada submetida a um carregamento pontual no extremo livre, amortecida conforme Fig. 5.3. As propriedades geométricas e do material são apresentadas na tabela. 5.1.

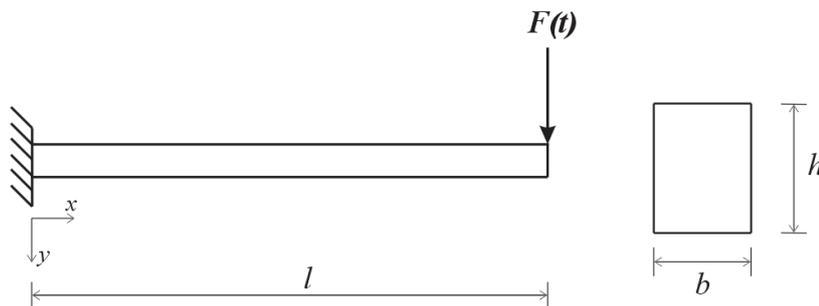


Figura 5.3: Viga engastada submetida a carregamento pontual.

Módulo de Elasticidade [Pa]	$2,1 \cdot 10^{11}$
Inércia da seção [m ⁴]	$5,333 \cdot 10^{-4}$
Área da seção [m ²]	0,04
Comprimento viga [m]	1,2
Massa específica [Ns ² /m ⁴]	$7,85 \cdot 10^3$
Coefficiente amortecimento [s ⁻¹]	200

Tabela 5.1: Propriedades do material e da seção.

Para esta análise, a viga é discretizada com 4 elementos finitos de barra geral, cada um com 4 nós, totalizando um número de 13 nós e a seção transversal é discretizada com dois elementos triangulares e um total de 16 nós. No instante inicial aplica-se subitamente um carregamento vertical de 5 MN no extremo livre da viga, o qual é constante ao longo do tempo, conforme Fig. 5.4.

Como a altura da viga é pequena em relação a seu comprimento, é possível comparar a resposta com a obtida por Greco (2004), que considerou barras bidimensionais com cinemática de Bernoulli-Euler.

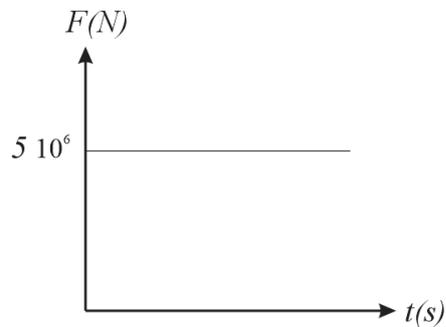


Figura 5.4: Carregamento dinâmico.

Na Fig. 5.5 apresenta-se a resposta dinâmica para a situação amortecida e a comparação com o trabalho de Greco (2004). De igual forma é apresentada a resposta sem amortecimento na Fig. 5.6.

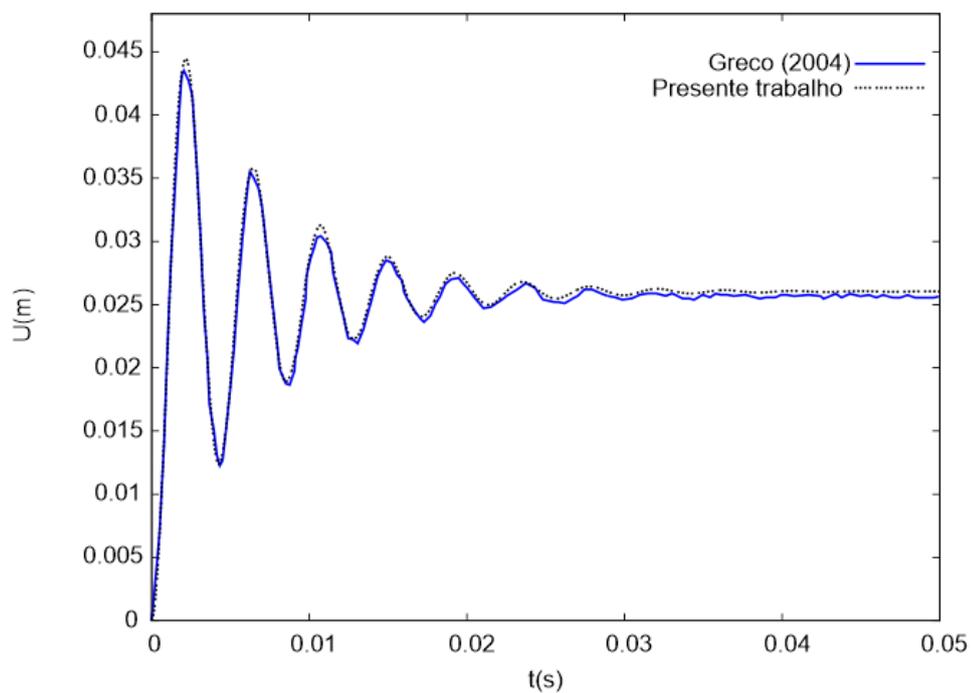


Figura 5.5: Resposta dinâmica amortecida

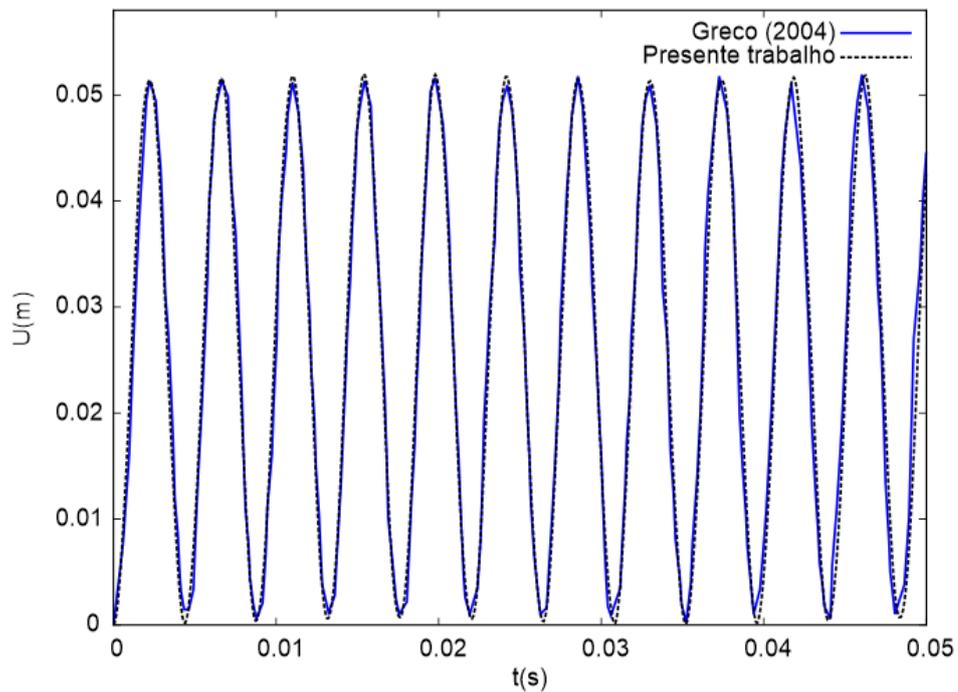


Figura 5.6: Resposta dinâmica para caso sem amortecimento.

Nota-se que os resultados estão de acordo com os da referência, permitindo-se aceitar o código computacional testado para ser aplicado aos problemas de interação fluido-estrutura.

6 *Acoplamento fluido-estrutura*

Neste trabalho é implementado um método particionado, sendo que, dentre as grandes vantagens que oferece esse tipo de método, destaca-se a liberdade de se poder utilizar algoritmos diferentes, eficientes e específicos para cada subdomínio, o que torna melhor a sua implementação, permitindo versatilidade no momento de se confrontar um problema. Isso garante modularidade ao programa, bem como a possibilidade de se empregar diferentes passos de tempo para fluido e estrutura.

6.1 **Transferência de forças e velocidades**

No caso dos problemas de interação fluido-estrutura abordados neste trabalho, optou-se por um esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann, no qual a movimentação da barra é transferida para o fluido como condição de Dirichlet e as tensões atuantes no contorno do fluido são transferidas para a barra como condição de Neumann.

Para que seja possível identificar a forma da barra para o fluido, introduz-se uma malha para definir seu contorno, usando como referência os pontos dos perímetros das seções transversais para cada elemento de barra, dessa forma é possível representar a barra como sólido e assim facilitar a interação com o fluido. A discretização do contorno é feita com elementos triangulares de 10 nós e aproximação cúbica, garantindo a mesma ordem de aproximação com a qual as equações são solucionadas.

Como temos quatro diferentes malhas envolvidas no processo de acoplamento, uma que define a linha de referência (do centro de torção da barra), outra que define a seção transversal, outra que define a forma do contorno e, por fim, a malha do fluido, para que o acoplamento fique versátil, é desejado que não haja necessidade de coincidência de nós. Para tanto, na fase de pré-processamento, para cada nó do contorno de fluido, identificam-se a coordenada local ε_1 , sobre a linha do elemento de barra e as coordenadas ε_2 e ε_3 sobre a malha que define o contorno para a seção transversal correspondente. Além disso, para cada nó da malha do contorno da estrutura k , deve-se conhecer o ponto P_{f_k} pertencente ao contorno Γ_s da malha do fluido tal que P_{f_k} ocupe a mesma posição que o nó k , ou seja:

$$\mathbf{x} (P f_k) = \mathbf{x} (k) , \quad (6.1)$$

sendo \mathbf{x} o vetor de coordenadas no espaço cartesiano.

O mesmo processo se repete para cada ponto de Gauss do contorno Γ_s de forma que seja possível determinar forças nodais através da integral:

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Gamma_s} f_i \mathbf{N} d \Gamma_s , \quad (6.2)$$

onde \mathbf{N} é o vetor das funções aproximadoras do elemento de barra e f_i são as componentes das forças que atuam na estrutura, a qual pode ser escrita como:

$$f_i = p n_i + \tau_{ij} n_j , \quad (6.3)$$

sendo p o valor da pressão, τ a tensão tangencial e n o vetor normal ao contorno do fluido na posição correspondente ao ponto de quadratura da malha de contorno.

Tais forças geram na seção transversal um momento torçor dado por:

$$\mathbf{M}_t = \int_{\Gamma_s} \left(\vec{d} \times \vec{f} \right) \cdot \mathbf{N} d \Gamma_s , \quad (6.4)$$

onde \vec{d} é o vetor que liga a linha do centro de torção da barra ao ponto de quadratura do elemento considerado na malha de contorno (ver Fig. 6.2).

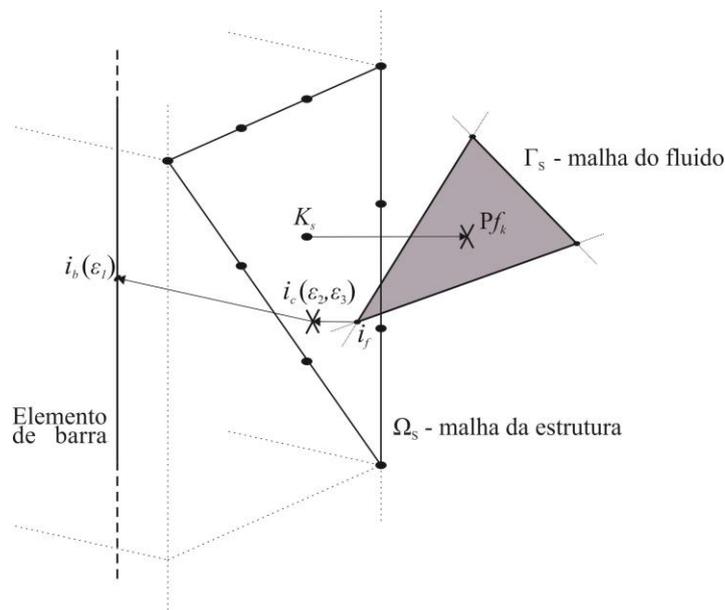


Figura 6.1: Nós pertencentes à interface Γ_s

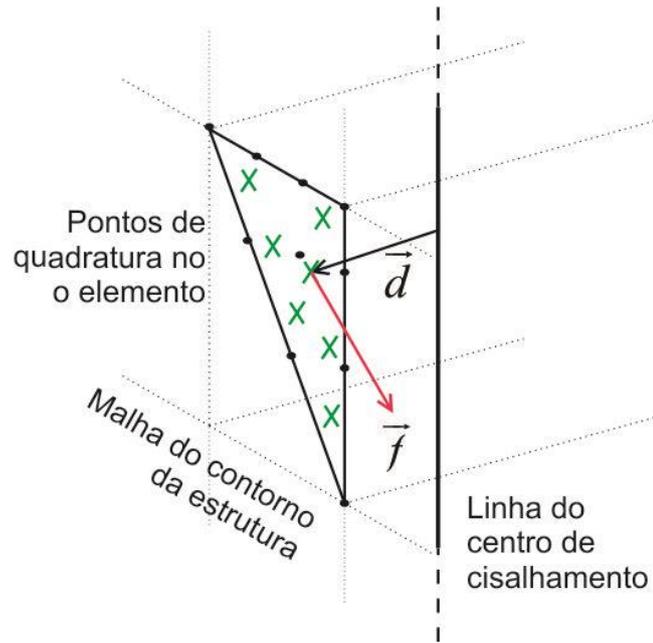


Figura 6.2: Forças no contorno da estrutura.

6.2 Movimentação dinâmica da malha do domínio do fluido

Para que a distorção da malha do fluido seja mínima ao mesmo tempo em que essa se adapte à movimentação da estrutura, é necessário impor um campo de deformação, que seja compatível com os deslocamentos e velocidades da estrutura, ao mesmo tempo em que haja uma transição suave na movimentação entre os contornos fixos e os móveis. Os elementos da malha do fluido ainda não devem assumir grandes alterações de forma no contorno próximo à estrutura, pois por essa região ser mais susceptível a vórtices e ondas de choque, a malha é em geral mais refinada.

Dessa forma busca-se um algoritmo que faça com que os nós mais próximos à estrutura assumam uma velocidade próxima à velocidade da estrutura, tomando o movimento dessa região próximo ao de corpo rígido e à medida em que os nós se afastam do domínio, os deslocamentos da malha diminuem e sejam nulos no contorno fixo. Um modelo que satisfaz as mencionadas características é a equação de Laplace:

$$\nabla^2 w_i = 0, \quad (6.5)$$

onde w_i pode ser o deslocamento ou a velocidade da malha do fluido e i indica a sua direção. Essa equação pode ser resolvida facilmente usando elementos finitos, mas surge um sistema a mais para se resolver.

Assim, opta-se por adotar um método capaz de reproduzir resultados semelhantes sem essa necessidade baseado no trabalho de Teixeira e Awruch (2005). O método consiste em distribuir velocidades w_i^k para os pontos k da malha em qualquer direção $i = x, y$ ou z , variando em função da distância aos pontos do contorno da estrutura de acordo com:

$$w_i^k = \frac{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} u_{si}^j}{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} + \sum_{l=1}^{nf} b_{kl}}, \quad (6.6)$$

onde ne , número de nós da estrutura, nf é o número de nós do contorno fixo Γ_f , a_{kj} são os coeficientes de influência dos nós da estrutura no ponto k e b_{kl} coeficientes de influência dos nós do contorno fixo no ponto k , descritos como:

$$a_{kj} = \frac{1}{d_{kj}^{e1}}, \quad (6.7)$$

$$b_{kl} = \frac{1}{d_{kl}^{e2}}, \quad (6.8)$$

sendo d_{kj} a distância entre o nó k e o nó j e $e1$ e $e2$ são expoentes referentes à influência dos contornos móvel e fixo, dados pelo operador do programa, adotados nesse trabalho como: $e1=e2=4$.

6.3 Processo dinâmico de acoplamento

Como anteriormente visto, o acoplamento particionado foi empregado devido às vantagens que oferece, como a flexibilidade para analisar separadamente os domínios da estrutura e do fluido, independente de se é usado um método de acoplamento unidirecional ou bidirecional.

Um dos esquemas de acoplamento adotado para a interação é o unidirecional (*one-way coupling*), onde somente a pressão e as tensões desviadoras do fluido são transferidas para a estrutura, sem se considerar o efeito da movimentação desta sobre o fluido.

Na Fig. 6.3 mostra-se o procedimento de solução para o acoplamento unidirecional. Inicialmente resolve-se o fluido para um passo de tempo, a pressão e tensões desviadora do fluido atuando na interface da estrutura são transferidas em forma de força de superfície para a estrutura. Na sequência resolve-se a estrutura com a imposição das forças, passando para a solução do fluido para o seguinte passo de tempo, repetindo-se o processo até alcançar o instante desejado.

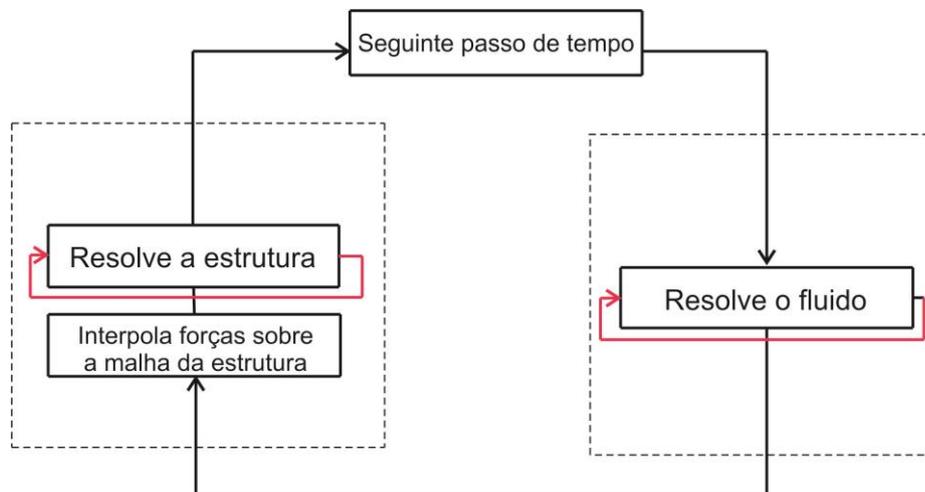


Figura 6.3: Acoplamento unidirecional (Adaptado de Benra et al. (2001))

Ao usar um processo explícito para o fluido (condicionalmente estável) e um processo implícito para o sólido (incondicionalmente estável), se torna interessante o uso de subciclos de tempo para o fluido dentro de um ciclo na solução da estrutura, economizando recursos computacionais e otimizando tempos de processamento.

Adota-se para o acoplamento particionado o algoritmo mostrado da figura 6.4 o qual permite que a estrutura e o fluido possam ter diferentes passos de tempo. O esquema pode ser descrito da seguinte forma:

Num instante $t_s = i$, resolve-se um passo de tempo para a estrutura com as cargas impostas pelo escoamento, obtendo-se as velocidades e posições da estrutura para o instante seguinte $t_s = i + 1$. As posições para cada passo de tempo do fluido durante esse intervalo de tempo são interpoladas por um polinômio cúbico a partir das posições e velocidades da estrutura em

$t_x = i$ e $t_s = i + 1$, sendo então impostas como condições de contorno de Dirichlet para o escoamento até alcançar o instante de tempo superior $t_s = i + 1$, nesse momento as cargas do fluido são novamente transmitidas para a estrutura e o ciclo se repete até o instante final da análise.

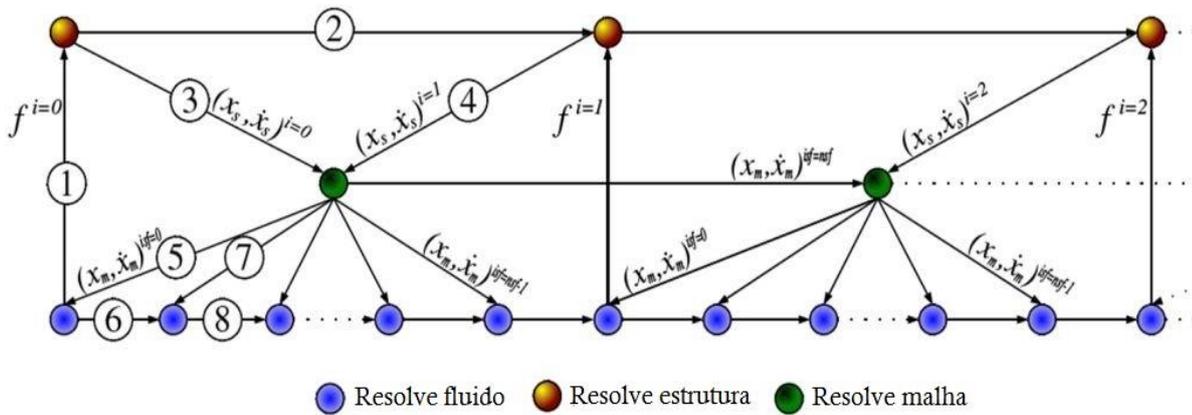


Figura 6.4: Esquema de acoplamento (SANCHES; CODA 2013)

6.4 Estudos numéricos de estruturas de barra submetidas a ondas de choque

Nesta seção são apresentados exemplos visando verificar a eficácia do algoritmo implementado para análise transiente de estruturas de barra submetidas a ondas de choque.

6.4.1 Onda de choque sobre painel deformável

Este problema consiste num caso experimental estudado no *Institut Universitaire des Systèmes Thermiques (IUSTI)*, apresentados na literatura por Giordano (2005). O esquema do ensaio é mostrado na Fig. 6.5, o qual consiste na montagem de um painel deformável engastado na base, assumida rígida. A montagem do painel se encontra dentro de um tubo de choque (T80) por onde as ondas de choque se propagam. A onda de pressão interage com o painel deslocando seu extremo livre ao longo do tempo.

Um sensor é localizado na parede superior do tubo a 10 mm à esquerda do topo do painel, o qual realiza a leitura da pressão. Os deslocamentos no topo do painel também são monitorados ao longo do tempo.

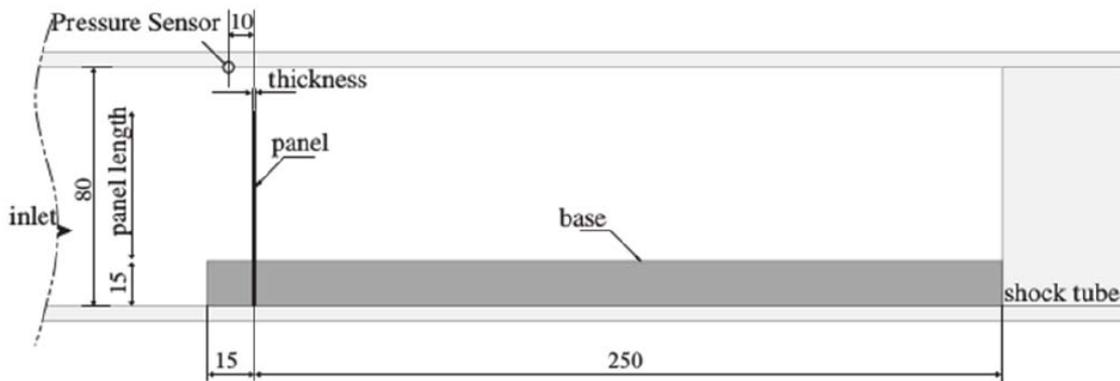


Figura 6.5: Esquema do ensaio (Extraído de Giordano et al.(2005))

A onda de choque entra no tubo com $Mach_{sw}$ 1,21, medido segundo a razão entre a velocidade de propagação da onda de choque e a velocidade do som nas condições iniciais do fluido, sendo as condições de contorno obtidas através das condições de Rankine-Hugonit. O ar se encontra inicialmente em condições de atmosfera padrão ($p_{\infty} = 10^5 \text{kPa}$ e $T_{\infty} = 293 \text{K}$).

O painel tem 40 mm de comprimento, 1 mm de espessura e 5 mm de largura, com módulo de elasticidade de 220 GPa e massa específica de 7600 kg/m^3 . O ensaio é completamente descrito em Giordano (2005).

A estrutura apresenta seção transversal homogênea e constante ao longo do seu comprimento, sendo discretizada com dois elementos triangulares e 16 nós, como apresentado na Fig. 6.6.(a). A malha do contorno, imprescindível para impor as forças do fluido na estrutura e levar a cabo a interação, possui quatro faces, cada uma discretizada com 8 elementos, conformando um total de 32 elementos e 156 nós, como observado na Fig. 6.6.(b). O detalhe da malha do fluido próximo ao domínio da barra pode ser vista na Fig. 6.7.

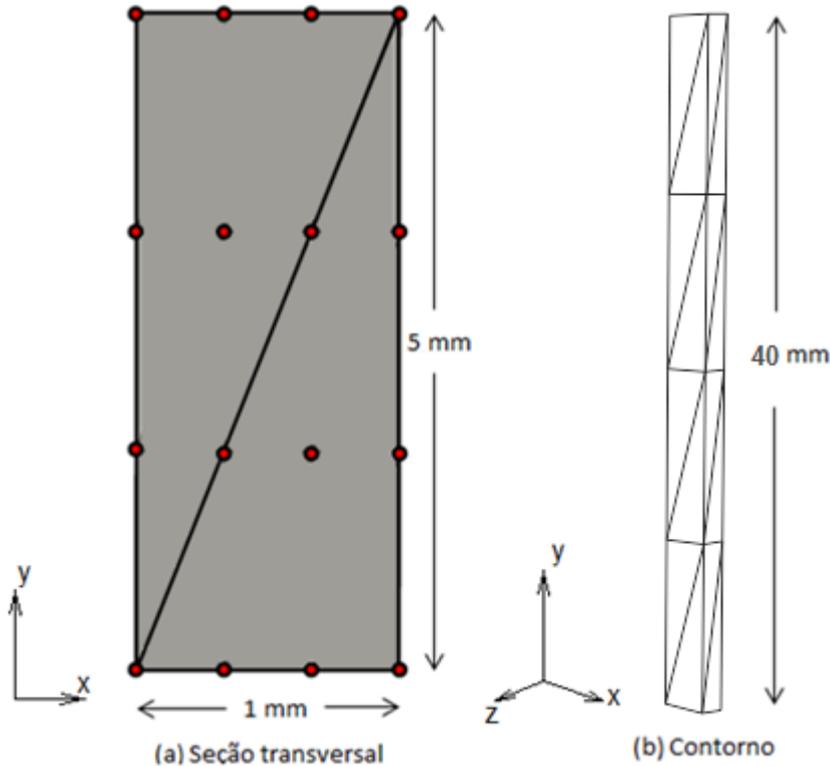


Figura 6.6: Discretização da estrutura: (a) Seção transversal, (b) contorno do elemento

Inicialmente é empregado o modelo de acoplamento bidirecional, com passo de tempo (Δt) igual para o fluido e para a estrutura de 5×10^{-7} . O resultado obtido é comparado com os resultados experimentais e a referência numérica do ensaio apresentados por Giordano (2005), mostrando-se semelhantes, evidenciando a eficácia do código computacional.

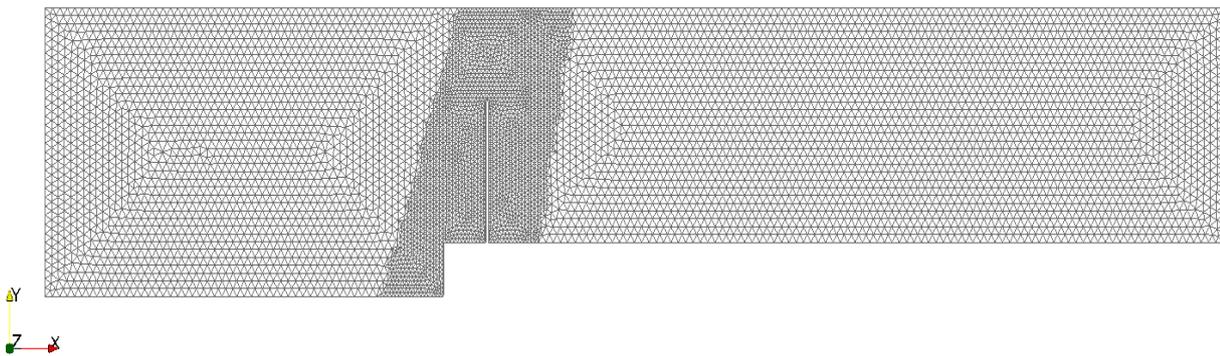


Figura 6.7: Discretização da malha do fluido

6.4.1.1 *Análise do deslocamento*

O resultado do deslocamento obtido no presente trabalho considerando o acoplamento bidirecional (2-way), sem subciclos de tempo entre o fluido e a estrutura, é

apresentado na Fig. 6.87, sendo uma referência para as demais análises. Pode-se observar que o resultado obtido é mais próximo do resultado experimental do que o apresentado por Giordano (2005), apesar da pequena diferença.

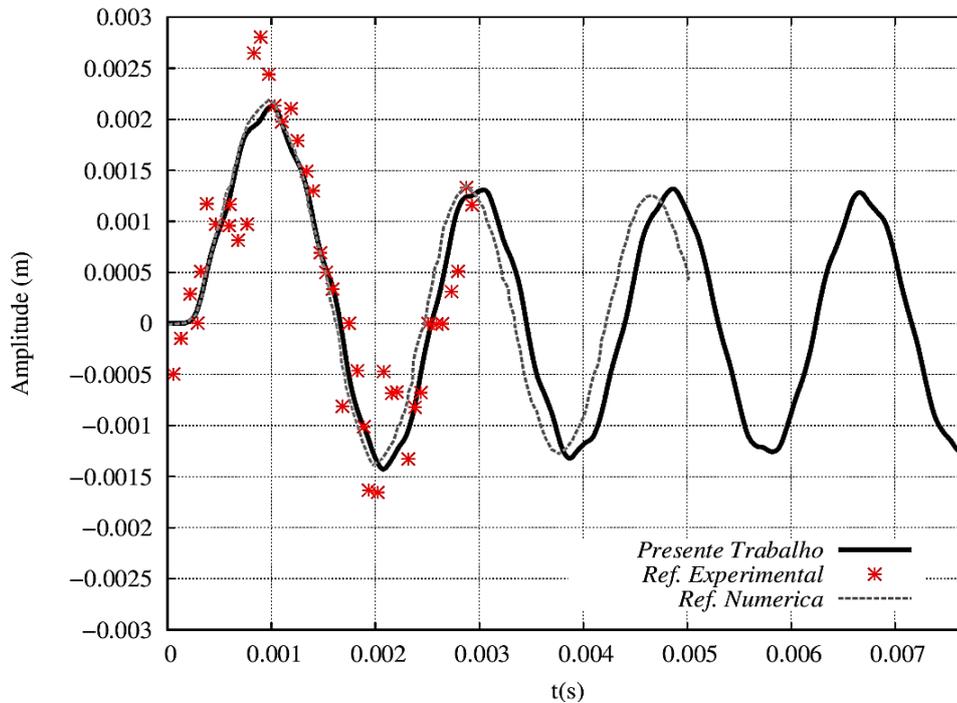


Figura 6.8: Melhor resultado obtido 2-way (1 subciclo) comparado com resultados experimentais e numéricos de Giordano (2005)

Na sequência, mantém-se o esquema de acoplamento bidirecional e modifica-se o intervalo de tempo para a estrutura, sendo o intervalo de tempo do fluido (Δt_f) fixo em $0,5 \mu\text{s}$ e empregando-se 5, 10 e 100 subciclos (passos de tempo para a estrutura $\Delta t = 2,5 \times 10^{-6}\text{s}$, $5,0 \times 10^{-6}\text{s}$ e $5,0 \times 10^{-7}\text{s}$, respectivamente) entre o fluido e a estrutura. A seguir, altera-se o passo de tempo do fluido para $0,1 \mu\text{s}$ e depois para $0,00625 \mu\text{s}$ e são empregados 50 e 200 subciclos, respectivamente.

Pode-se observar na Fig. 6.9, que as respostas para 1, 5, 10 e 50 subciclos não apresentam grandes diferenças, mantendo-se o comportamento quase inalterado, e para 100 subciclos a resposta ainda é muito próxima da resposta de referência (1 subciclo). Isso claramente manifesta a eficiência do modelo de acoplamento particionado bidirecional com subciclos.

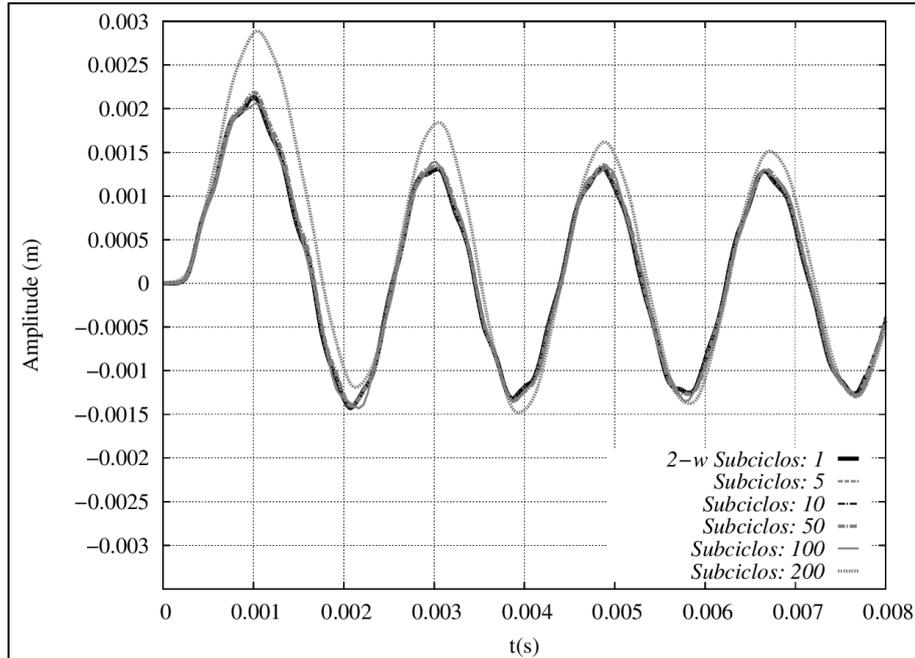


Figura 6.9: Resultados caso bidirecional (2-way)

Após verificar a eficiência do modelo de acoplamento bidirecional, é interessante indagar se, devido aos deslocamentos não serem muito grandes, é possível reduzir ainda mais o custo computacional empregando o modelo de acoplamento unidirecional. Esse modelo consiste só na transferência das forças do fluido para a estrutura sendo que a geometria do domínio do fluido permanece inalterada. Os resultados são mostrados na Fig. 6.10, onde pode-se observar que aparentemente não existe uma diferença significativa no erro ao se empregar subciclos em comparação com o caso bidirecional.

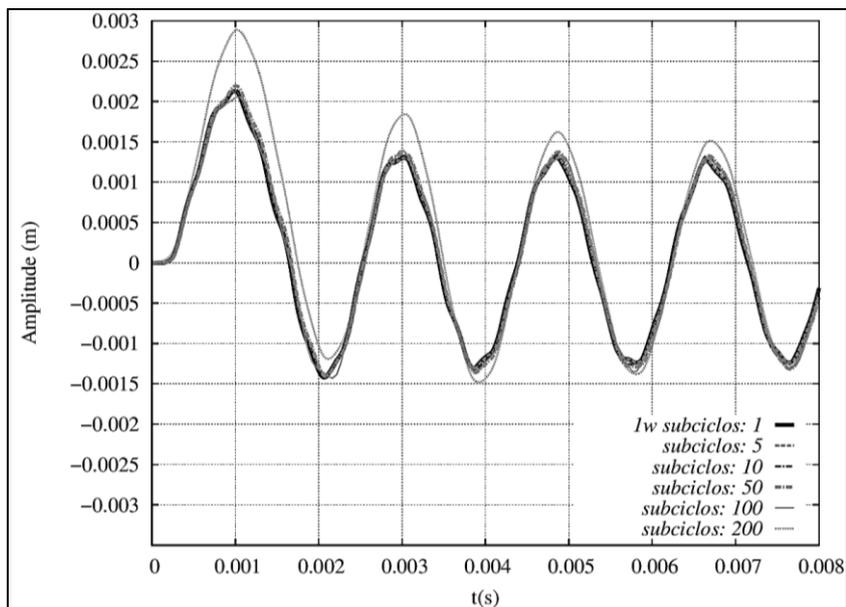


Figura 6.10: Resultados caso unidirecional 1-way

Na Fig. 6.11 o resultado bidirecional com 1 subciclo é comparado com o resultado unidirecional com 1 e 200 subciclos, deixando em evidência que de igual forma para o caso com 1 subciclo não existem grandes diferenças em relação ao caso bidirecional. Para 5-100 subciclos a diferença aumenta em relação ao acoplamento bidirecional, porém ainda é muito pequena.

Tomando-se como referência a resposta bidirecional e partindo dos dados obtidos dos ensaios, pode-se observar uma diferença relativa máxima de 0,0639% para 1 subciclo e de 35,649% para 200 subciclos no caso unidirecional. O que quer dizer que para problemas que apresentam pequenas amplitudes de deslocamento, o caso unidirecional é adequado e os erros podem ser significativos ao ser adotado o esquema com um número elevado de subciclos de tempo, o que faz recomendável que nesse caso não sejam usados.

6.4.1.2 Análise da pressão

De igual forma, analisa-se a pressão no ponto onde está localizado o sensor na montagem experimental e compara-se com o resultado da pressão obtido no presente trabalho o qual também ficou mais próximo do resultado experimental do que o apresentado por Giordano (2005), como visto na Fig. 6.12.

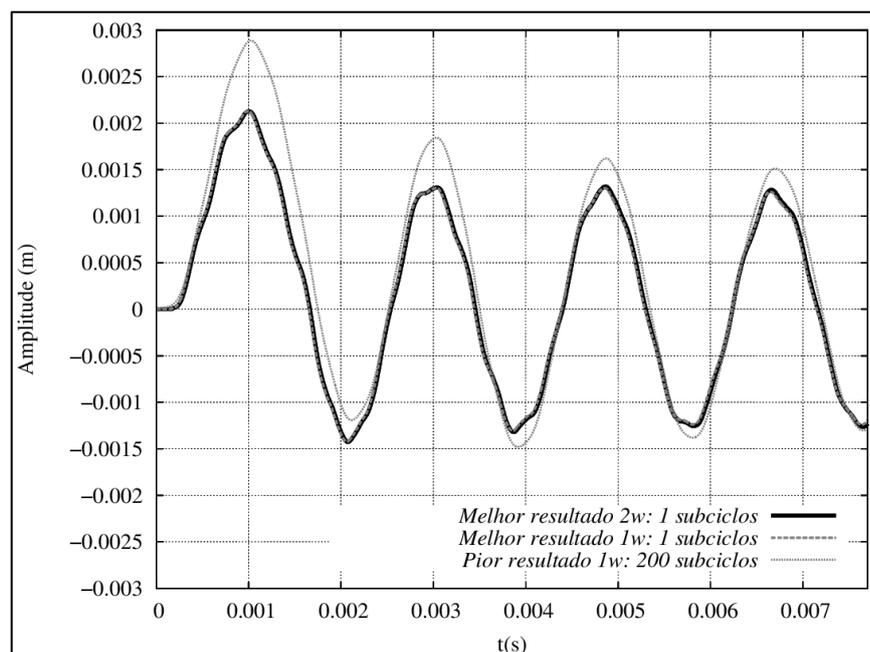


Figura 6.11: Melhor e pior resultado 1-way comparados com o melhor resultado 2-way

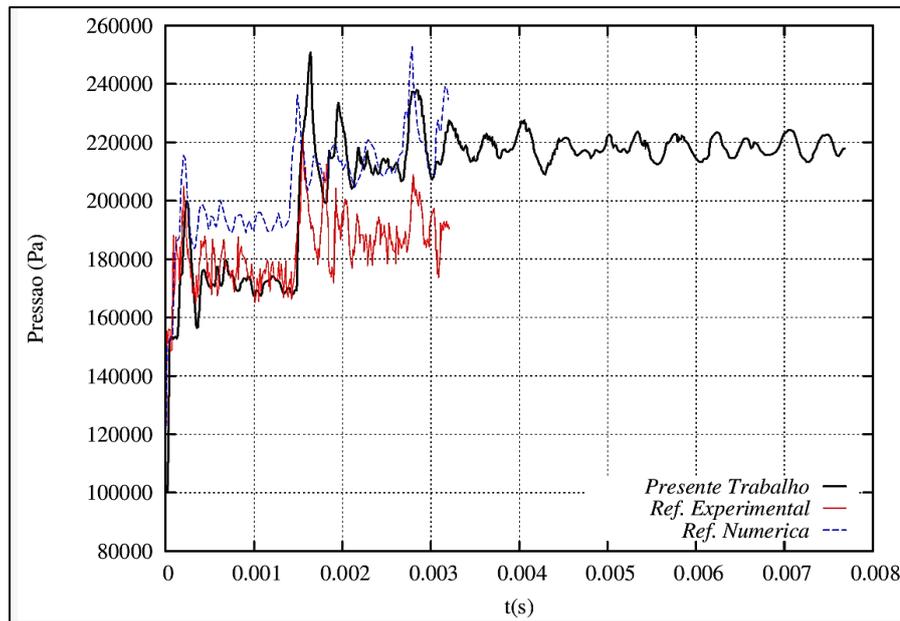


Figura 6.12: Melhor resultado para pressão 2-way (1 subciclo) comparado com os resultados experimental e numérico de Giordano (2005)

Na Fig. 6.13, são apresentados todos os resultados para o caso de acoplamento bidirecional, alterando-se o passo de tempo da estrutura de forma análoga à análise do deslocamento. É importante destacar que as diferenças aparentam ser menores do que no caso do deslocamento.

Buscando verificar se é possível diminuir o custo computacional para a análise, como feito também para o deslocamento, repete-se a simulação utilizando o acoplamento unidirecional (ver Fig. 6.14). Nota-se que novamente a diferença do problema com 1 subciclo é maior no caso unidirecional do que no caso bidirecional.

Pode-se observar uma diferença relativa máxima de 0,359% para 1 subciclo e de 9,855% para 50 subciclos, sendo que na Fig. 6.15, o resultado bidirecional com 1 subciclo é comparado com o resultado unidirecional para 1 e 50 subciclos. Isso evidencia que para a análise de pressão, o acoplamento unidirecional pode ser utilizado satisfatoriamente reduzindo o custo computacional devido à pouca variação observada nos resultados.

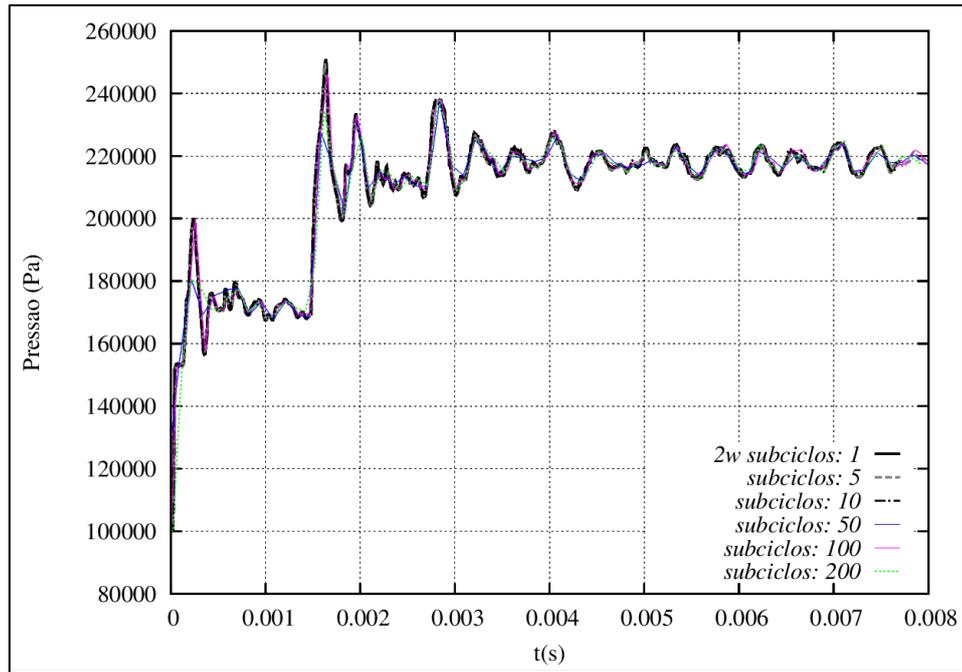


Figura 6.13: Resultados de pressão caso bidirecional

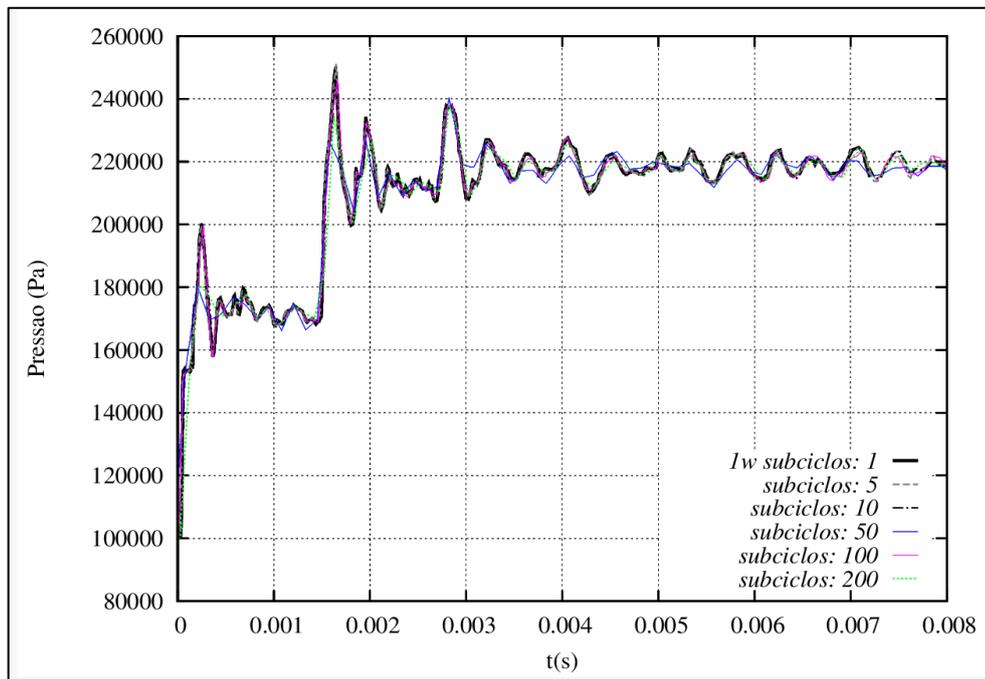


Figura 6.14: Resultados de pressão caso unidirecional

Na Fig. 6.15, o resultado bidirecional com 1 subciclo é comparado com o resultado unidirecional para 1 e 50 subciclos.

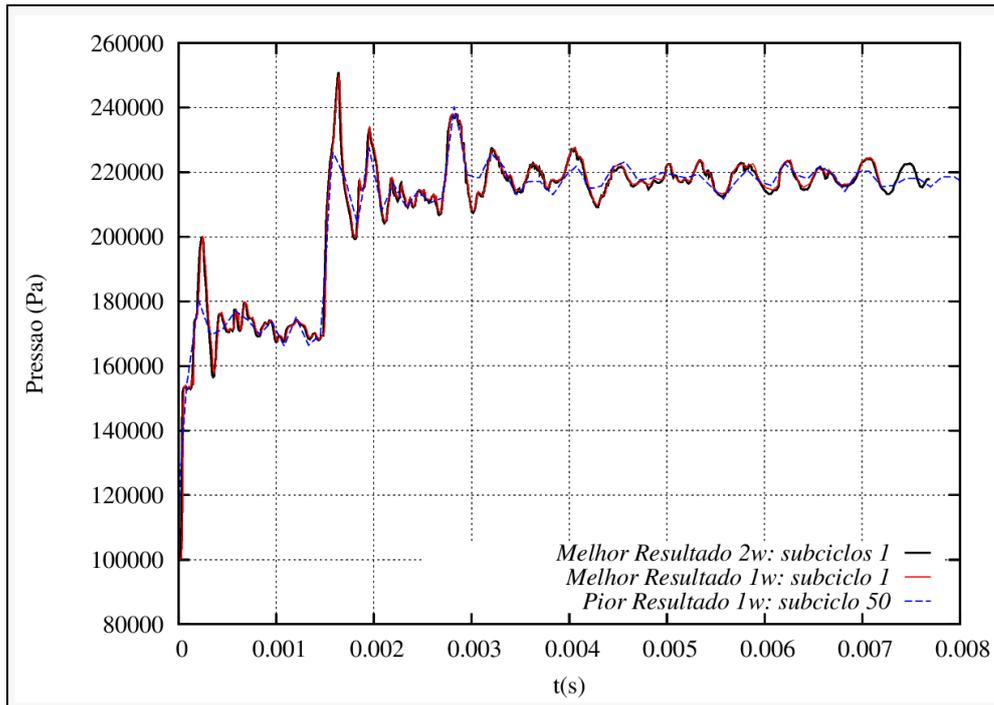


Figura 6.15: Melhor resultado 2-way (1 subciclo) comparado com melhor resultado e pior resultado 1-way (1 e 50 subciclos respectivamente)

Também é possível analisar a pressão para o caso bidirecional (1 subciclo) em diferentes tempos como se observa na Fig. 6.16.

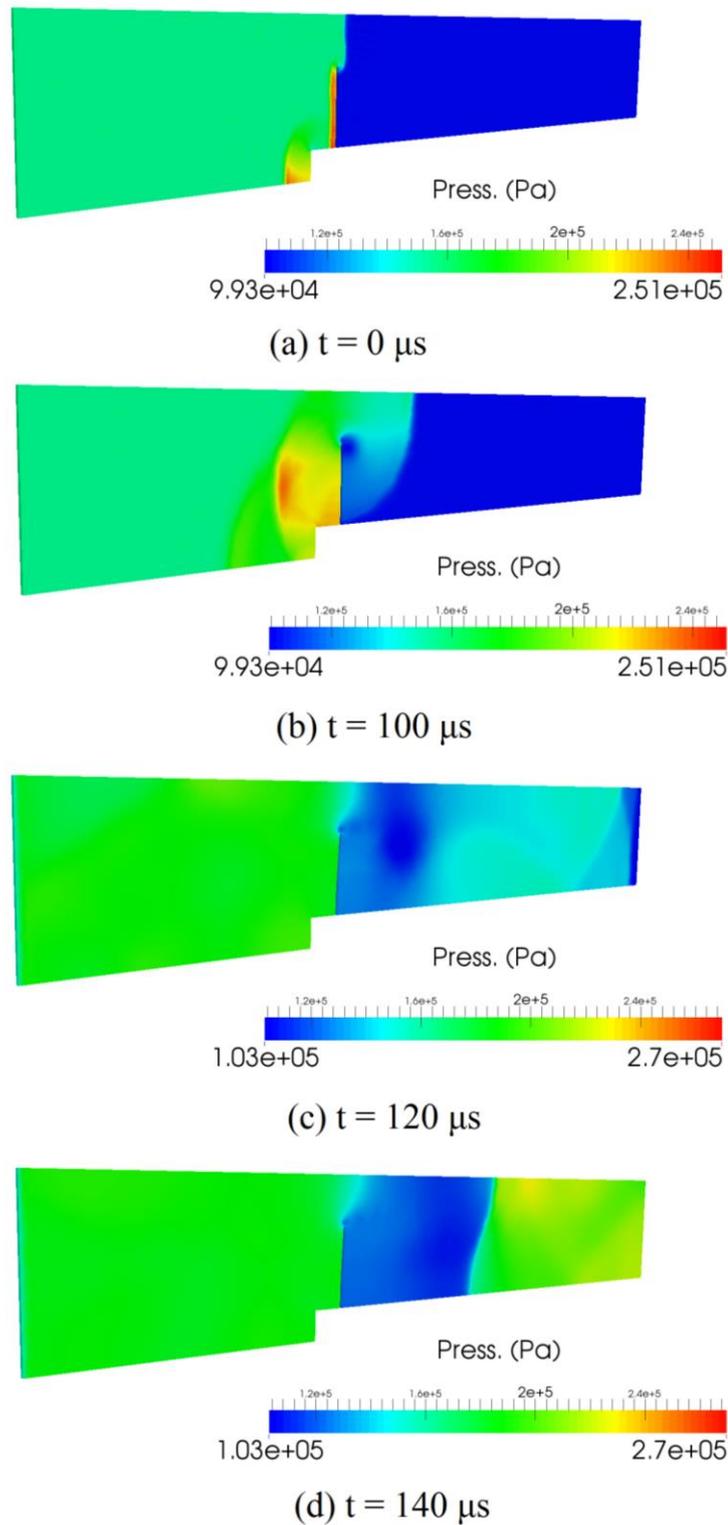


Figura 6.16: Variação da pressão no canal

6.4.2 Onda de choque sobre perfil I

Neste exemplo as condições iniciais e de contorno do exemplo anterior são mantidas tanto para a onda que entra no canal ($Mach_{sw} 1,21$) quanto para o ar inicialmente em repouso ($p_{\infty} = 10^5 \text{kPa}$, $T_{\infty} = 293 \text{K}$ e $\gamma = 1,4$), alterando-se a estrutura e as dimensões do canal. A onda adentra um canal semelhante ao do exemplo anterior, porém mais largo e interage com uma barra de seção transversal tipo I conforme a malha apresentada na Fig. 6.17. sendo que as medidas da malha do canal com degrau nas direções x e y se mantem mudando só a dimensão da largura do canal sendo 20 mm, as dimensões da seção transversal e a malha do painel deformável são mostradas na Fig. 6.18.

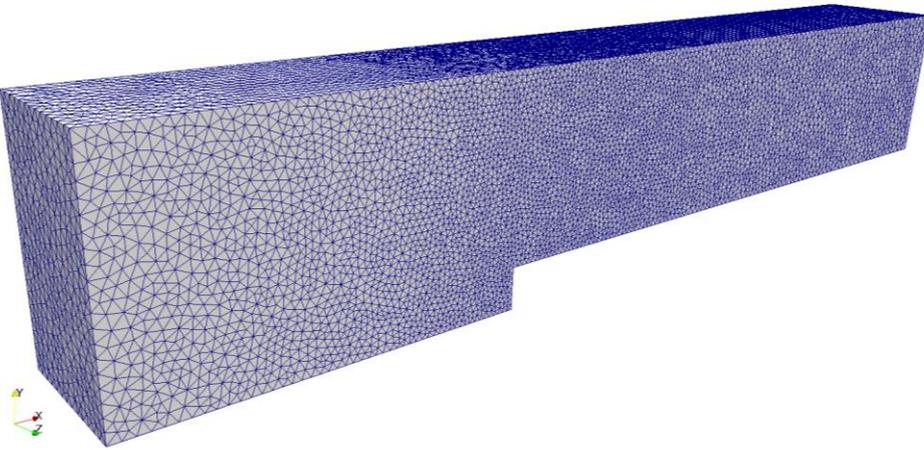


Figura 6.17: Malha 3D do canal com degrau.

A barra flexível foi discretizada com 4 elementos tipo barra geral e 13 nós no total, sendo que o material apresenta módulo de Young $E = 220 \text{ GPa}$, massa específica $\rho = 7600 \text{ kg/m}^3$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. A seção transversal é discretizada com 20 elementos finitos triangulares e 109 nós.

O resultado do deslocamento da extremidade livre do painel deformável obtido neste exemplo, considerando o acoplamento bidirecional (2-way), sem subciclos de tempo entre o fluido e a estrutura é apresentado na Fig. 6.19.

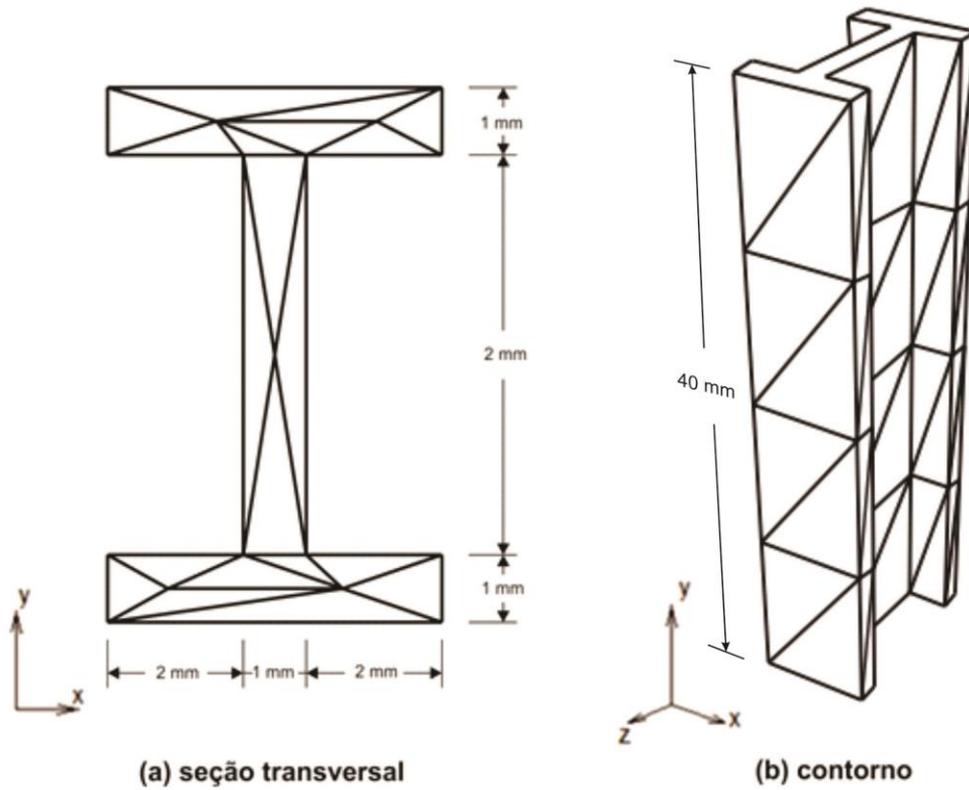


Figura 6.18: Discretização do painel: (a) Seção transversal, (b) contorno do elemento.

A distribuição de pressão durante a propagação da onda de choque, para diferentes cortes, são apresentadas para diversos instantes nas figuras 6.20-6.22.

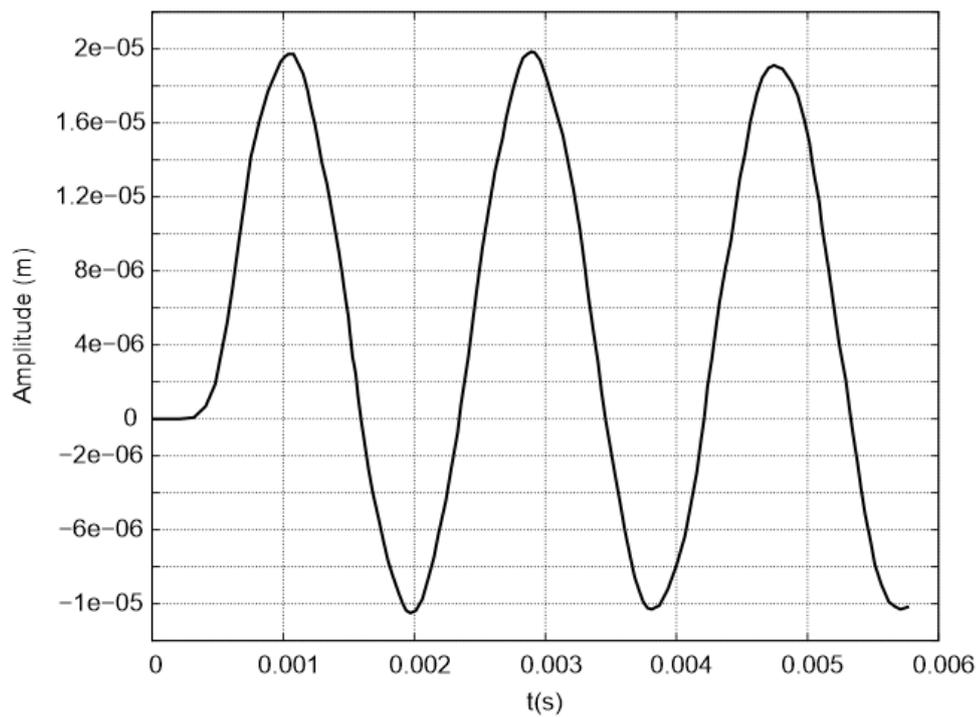


Figura 6.19: Análise do deslocamento do painel

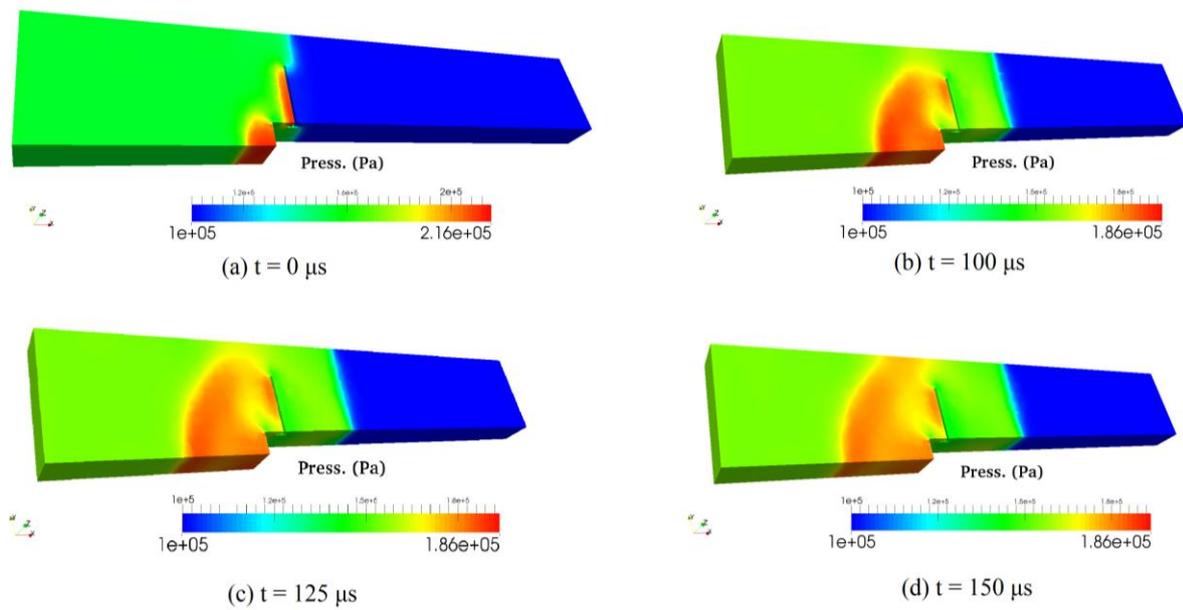


Figura 6.20: Variação da pressão corte longitudinal

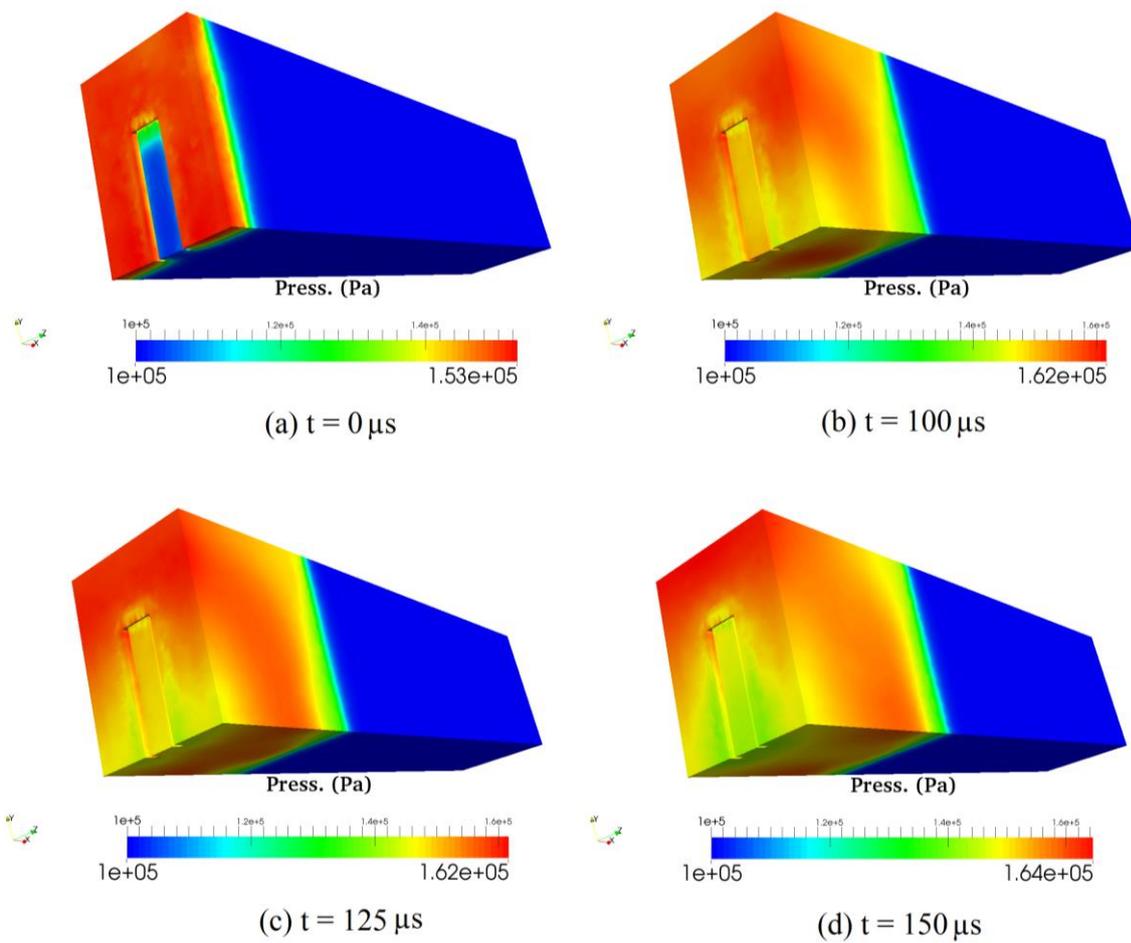


Figura 6.21: Variação da pressão corte transversal

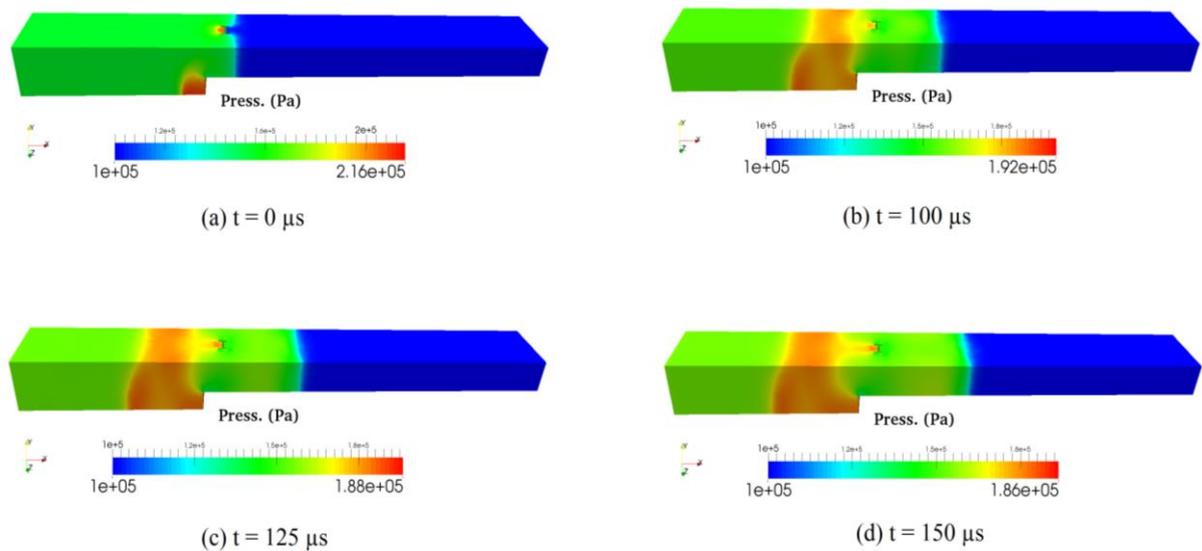


Figura 6.22: Variação da pressão corte horizontal

Com base nesses resultados observa-se que o programa está robusto e pode ser utilizado para casos mais complexos.

6.4.3 Pilar de aço submetido a explosão

Neste exemplo é analisada, com algumas considerações feitas no sentido de simplificar o problema, a explosão de uma carga de 100 kg de material explosivo atingindo um pilar de aço bi-engastado de altura $H = 3$ m, o qual se encontra a uma distância $L = 10$ m do núcleo explosivo. Uma força vertical $P_0 = 1470$ KN é aplicada no topo do pilar como mostrado no esquema da Fig. 6.23.

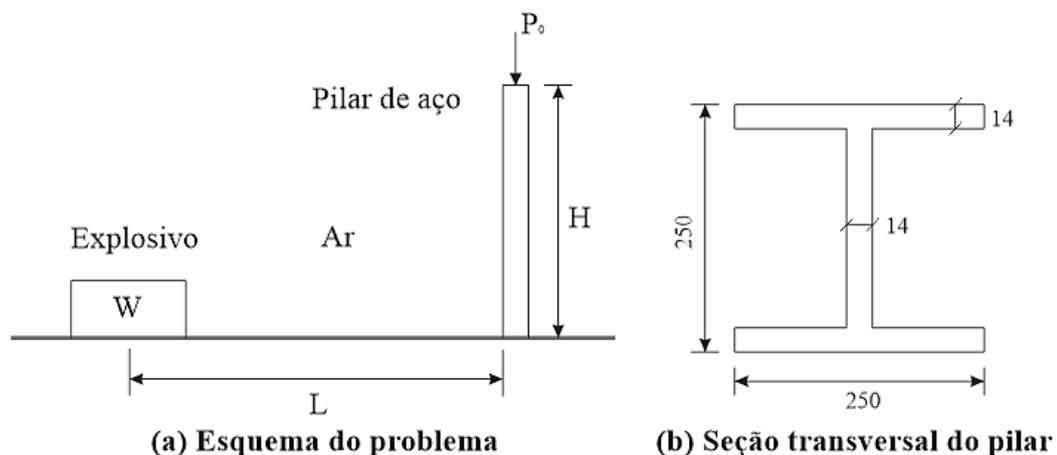


Figura 6.23: (a) Esquema do problema, (b) Seção transversal do pilar

O problema foi discretizado com uma malha de geometria igual a um quarto de esfera com 203857 elementos finitos tetraédricos e 39659 nós como observado na Fig. 6.23 enquanto a estrutura foi discretizada com 5 elementos de barra geral e 16 nós e a seção transversal com 20 elementos finitos triangulares e 109 nós, Fig 6.25.

Foi definida uma região de alta pressão representando os efeitos da expansão do núcleo explosivo. As condições iniciais para essa região foram baseadas nos seguintes dados: o explosivo usado no núcleo foi *TNT* com densidade $\rho = 1630 \text{ kg/m}^3$, a pressão da detonação segue a equação de estado do material explosivo como visto em Johnson et al. (1985):

$$P = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 V} \right) e^{-R_1 V} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 V} \right) e^{-R_2 V} + \frac{\omega E_0}{V}, \quad (6.10)$$

onde P é a pressão de detonação, V o volume relativo e A , B , R_1 , R_2 e ω são constantes próprias do material explosivo determinadas com ensaios dinâmicos experimentais. Os parâmetros do material são mostrados na tabela 6.1.

Parâmetros	A / GPa	B / GPa	ω	R_1	R_2	$E_0 / J \cdot \text{cm}^{-3}$
Valor	371	7,43	0,3	4,15	0,950	$7,0 \times 10^9$

Tablea 6.1: Parâmetros da equação de estado do material explosivo

Para os anteriores valores paramétricos na Eq. 6.10, obtém-se uma pressão de detonação igual a 31,086 GPa. Assim, adotou-se como condições iniciais na região de alta pressão massa específica $1630,00011 \text{ kg/m}^3$, temperatura $66450,05 \text{ K}$ e relação entre calores específicos 1,4.

O aço usado tem módulo de elasticidade $E = 2.05 \times 10^{11} \text{ Pa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

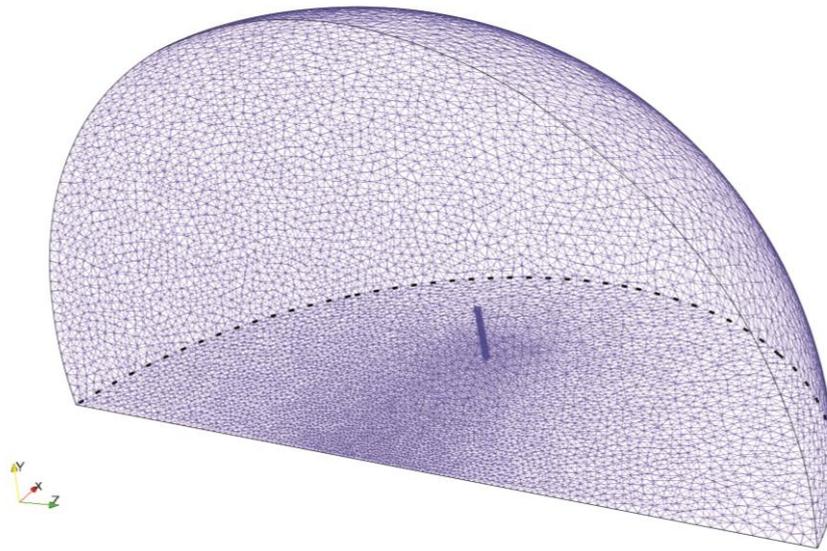


Figura 6.24: Discretização da malha do problema da explosão

Analisa-se o comportamento dinâmico no centro do elemento estrutural até o instante $162 \mu s$. A resposta do deslocamento no tempo é mostrada na Fig. 6.26. De igual forma apresenta-se o esquema de expansão da onda da explosão e a variação da pressão nas Fig. 6.27-6.28 para diferentes instantes.

Embora a análise tenha sido efetuada para um curto intervalo, devido à complexidade do problema e conseqüente alto custo computacional, nota-se que o programa apresenta resultados coerentes.

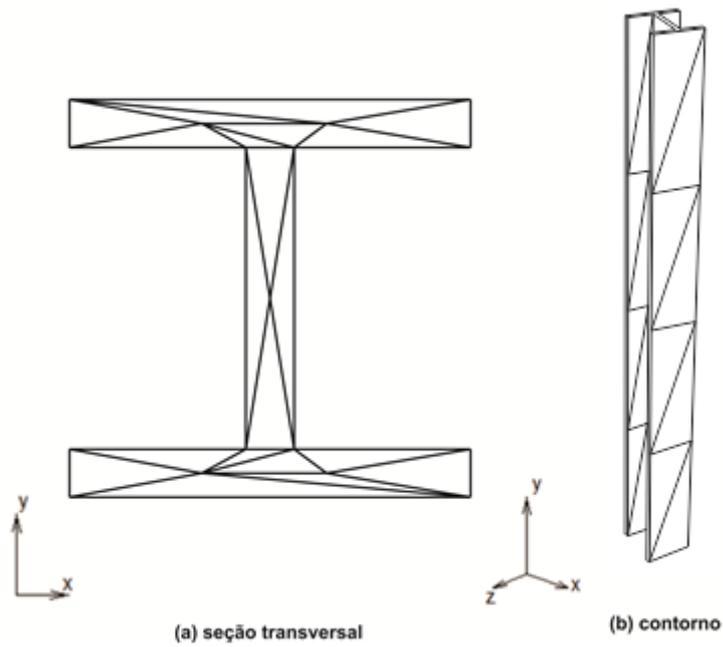


Figura 6.25: (a) seção transversal, (b) contorno estrutura

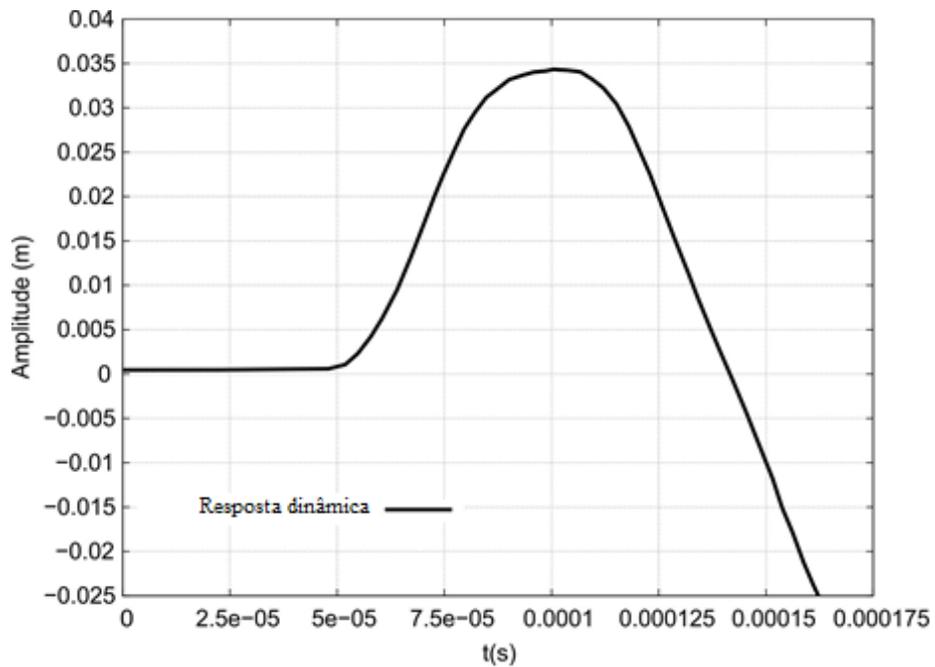
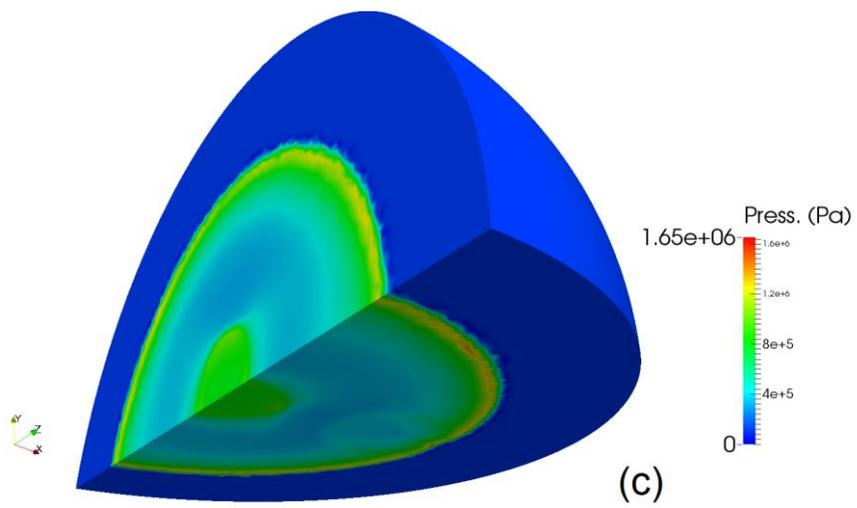
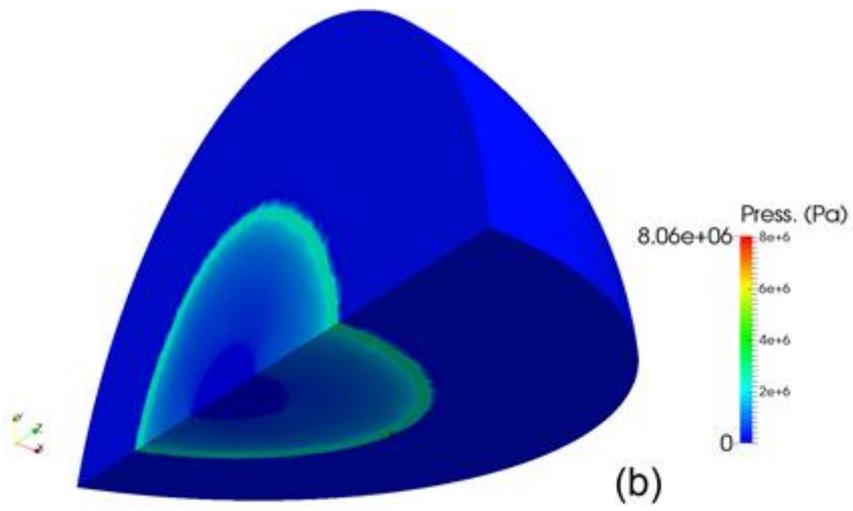
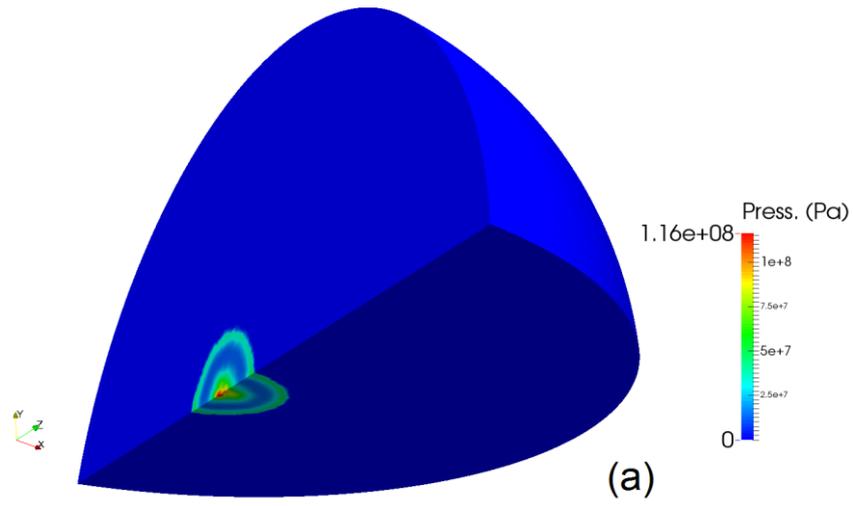


Figura 6.26: Análise do deslocamento no tempo no centro do pilar de aço



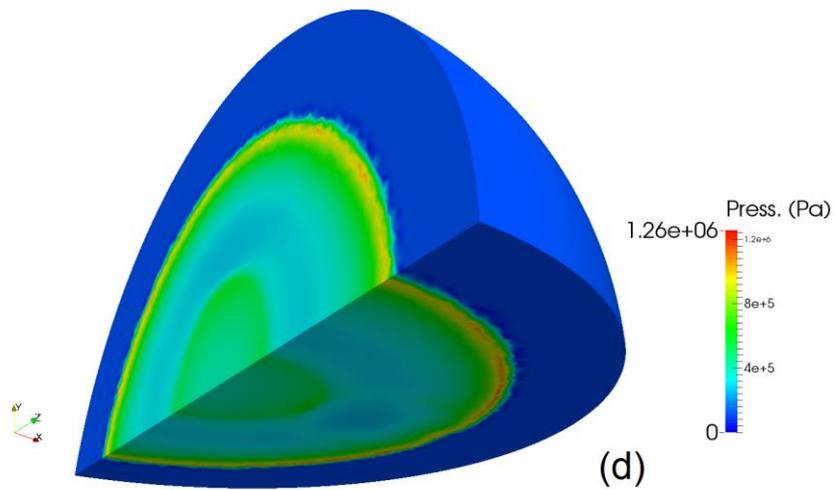


Figura 6.27: Análise da pressão em (a) $t = 5 \mu\text{s}$; (b) $t = 50 \mu\text{s}$; (c) $t = 95 \mu\text{s}$; (d) $t = 115 \mu\text{s}$.

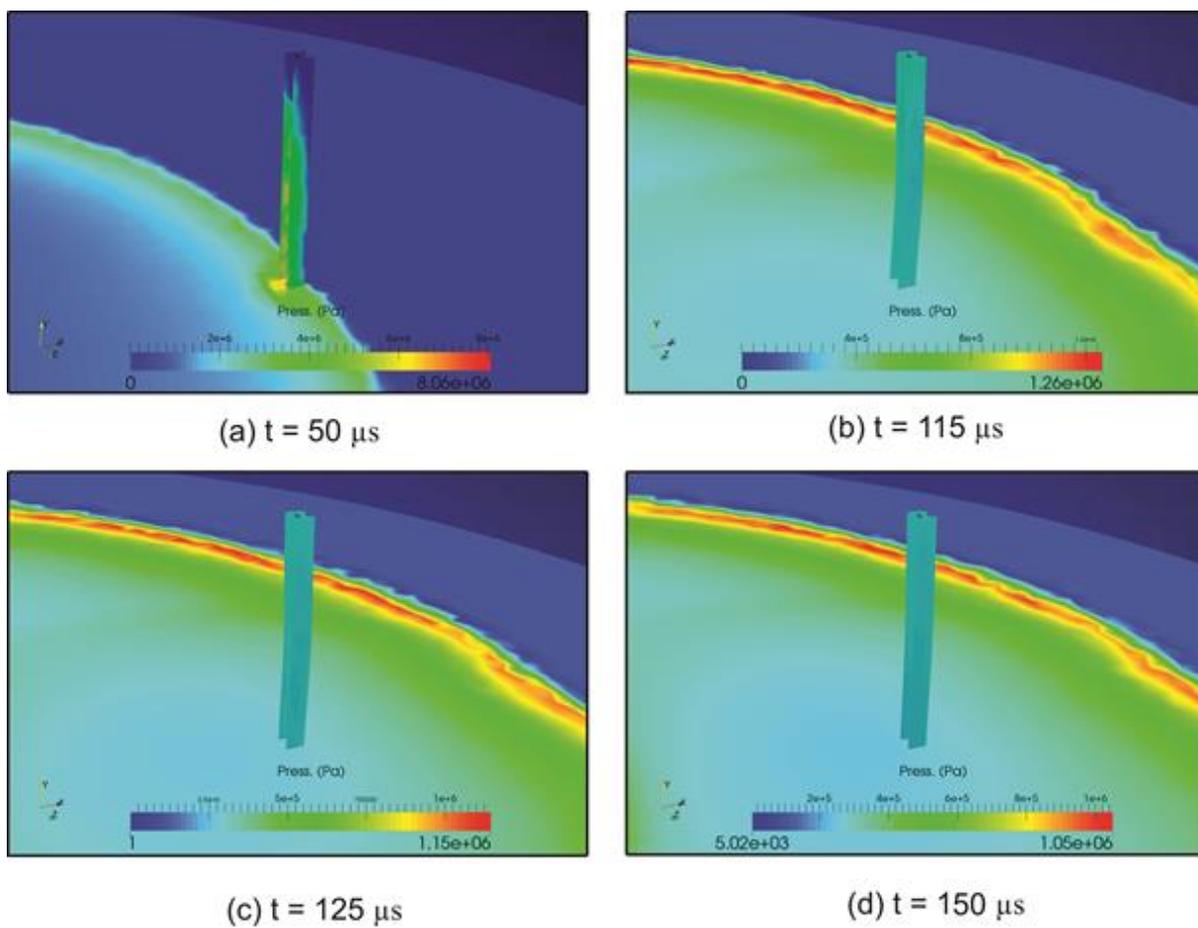


Figura 6.28: Análise da pressão perto da estrutura.

6.4.4 Onda de choque sobre aerofólio

Este exemplo consiste na análise de um aerofólio de perfil NACA 63-210 assimétrico submetido a uma onda de choque. Na Fig. 6.29 podem-se observar as dimensões no esquema do exemplo e na sequencia as dimensões do perfil do aerofólio na Fig. 6.30.

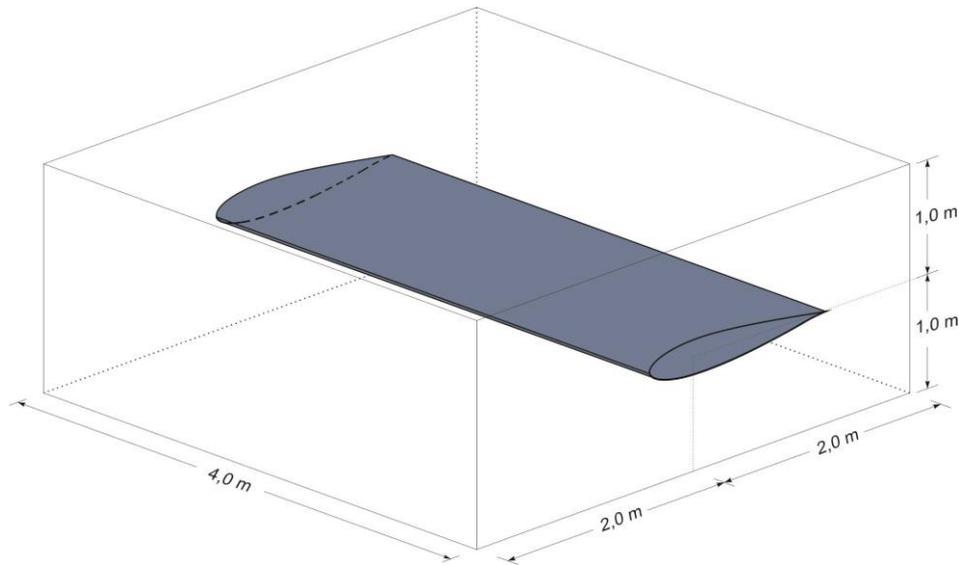


Figura 6.29: Esquema do exemplo.

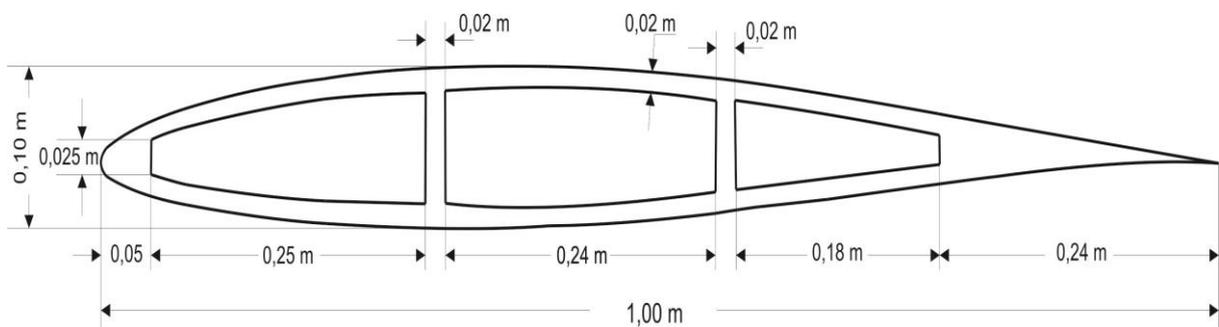


Figura 6.30: Medidas do perfil NACA 63-210.

A seção transversal do aerofólio foi discretizada com 90 elementos triangulares como observado na Fig. 6.31.

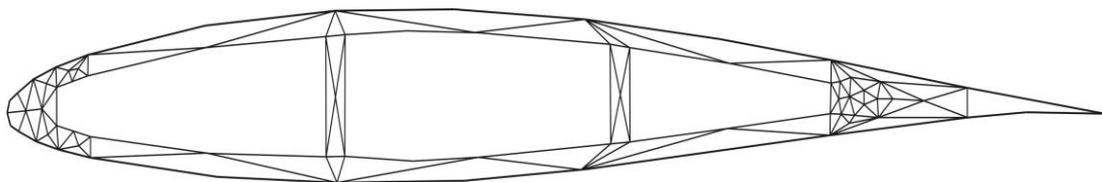


Figura 6.31: Discretização do perfil NACA 63-210.

A onda de choque entra no canal com numero de *Mach* igual a 1,2. O canal, inicialmente cheio de ar em condições padrão ($p_{\infty} = 10^5 \text{kPa}$ e $T_{\infty} = 293 \text{K}$) é discretizado com uma malha de 201524 elementos tetraédricos (Fig. 6.32). O aerofólio de 4 m de comprimento e 1 m de corda com modulo de elasticidade de 22 GPa é discretizado com 6 elementos de barra, sendo engastado nas paredes laterais do canal.

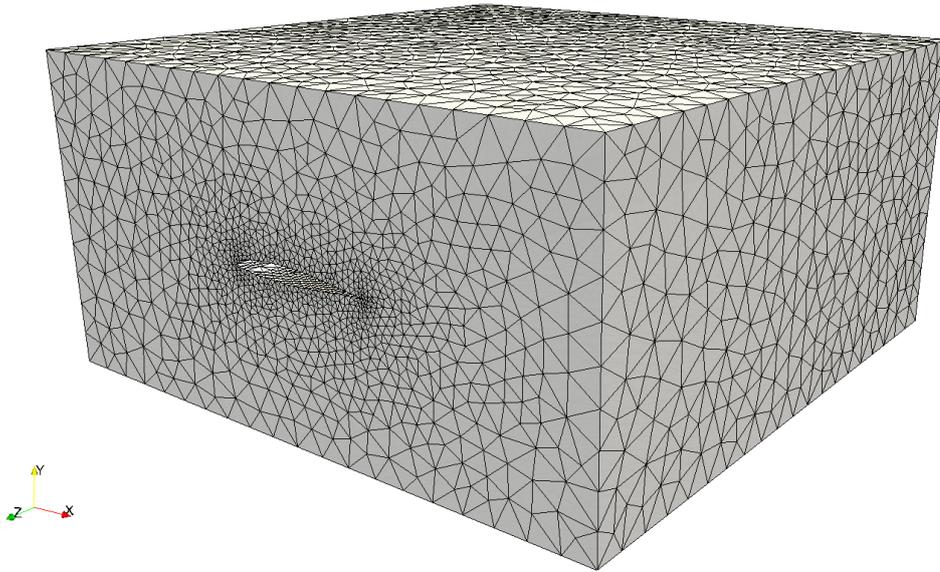


Figura 6.32: Discretização da malha do canal.

Analisa-se o comportamento dinâmico no centro do aerofólio até o instante $55 \mu s$. O resultado da análise do deslocamento no tempo nas direções x , y e z é mostrado nas Fig. 6.33-6.35 e de igual forma o giro da seção transversal no tempo na Fig. 6.36. Também apresenta-se o esquema de expansão da onda através do canal e a variação da pressão na Fig. 6.37.

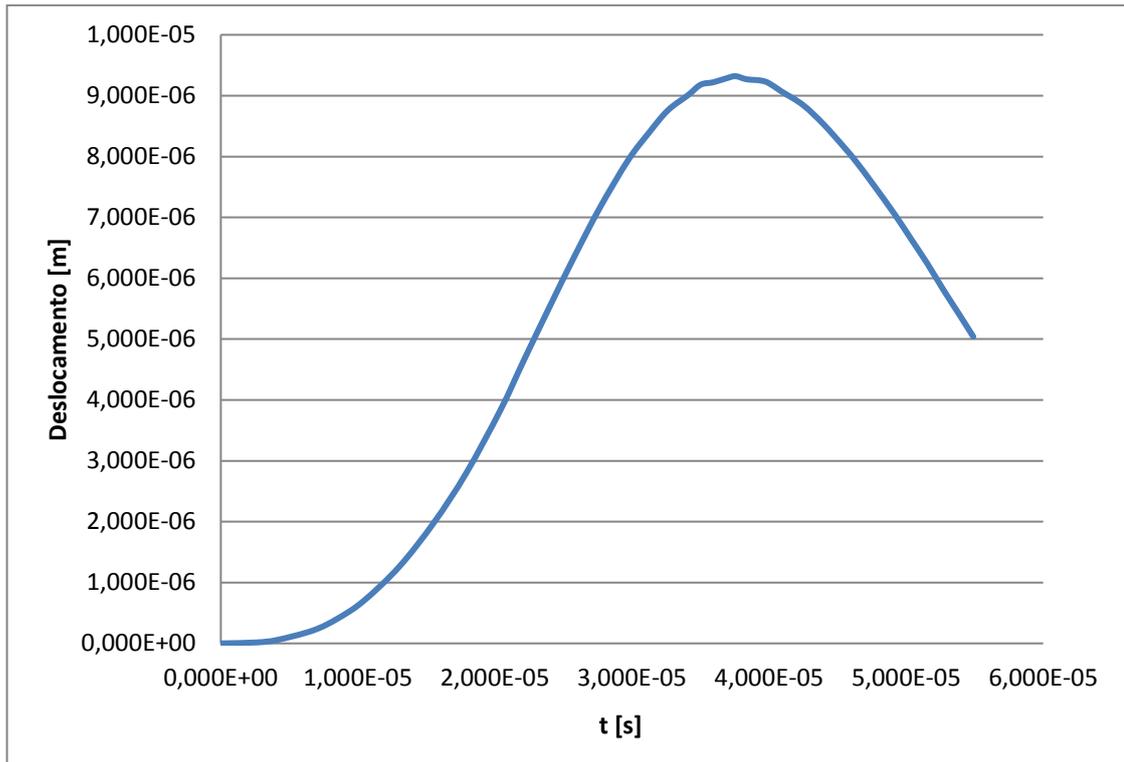


Figura 6.33: Deslocamento no tempo no eixo x.

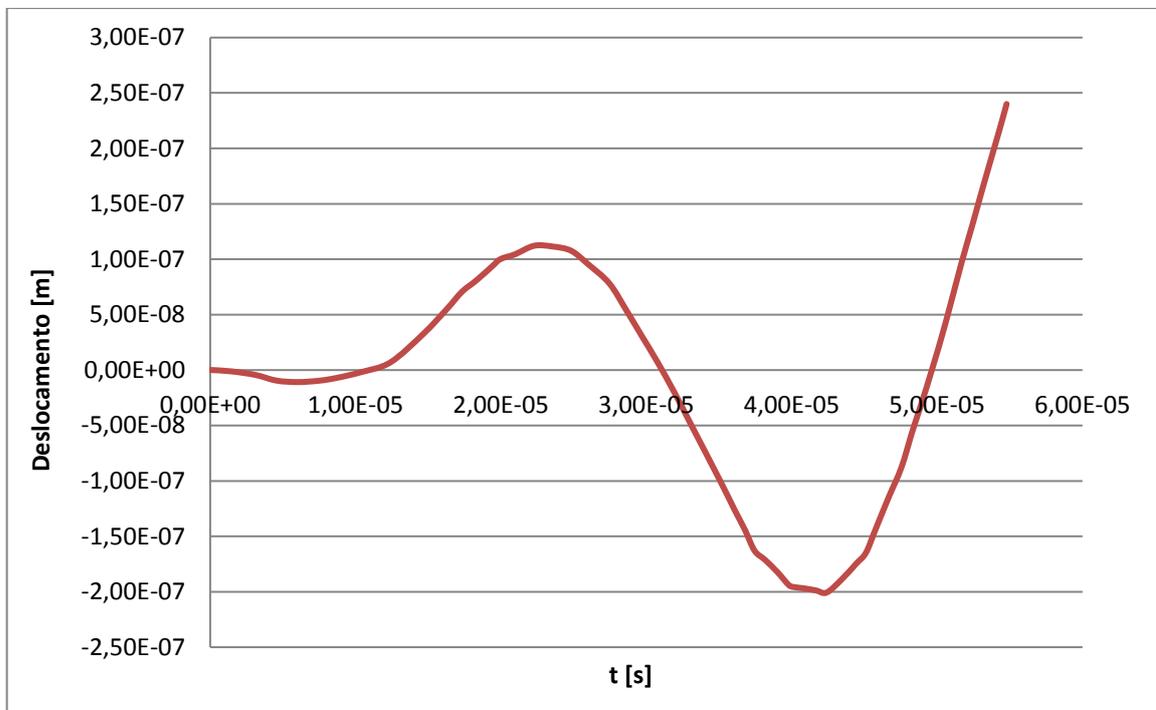


Figura 6.34: Deslocamento no tempo no eixo y.

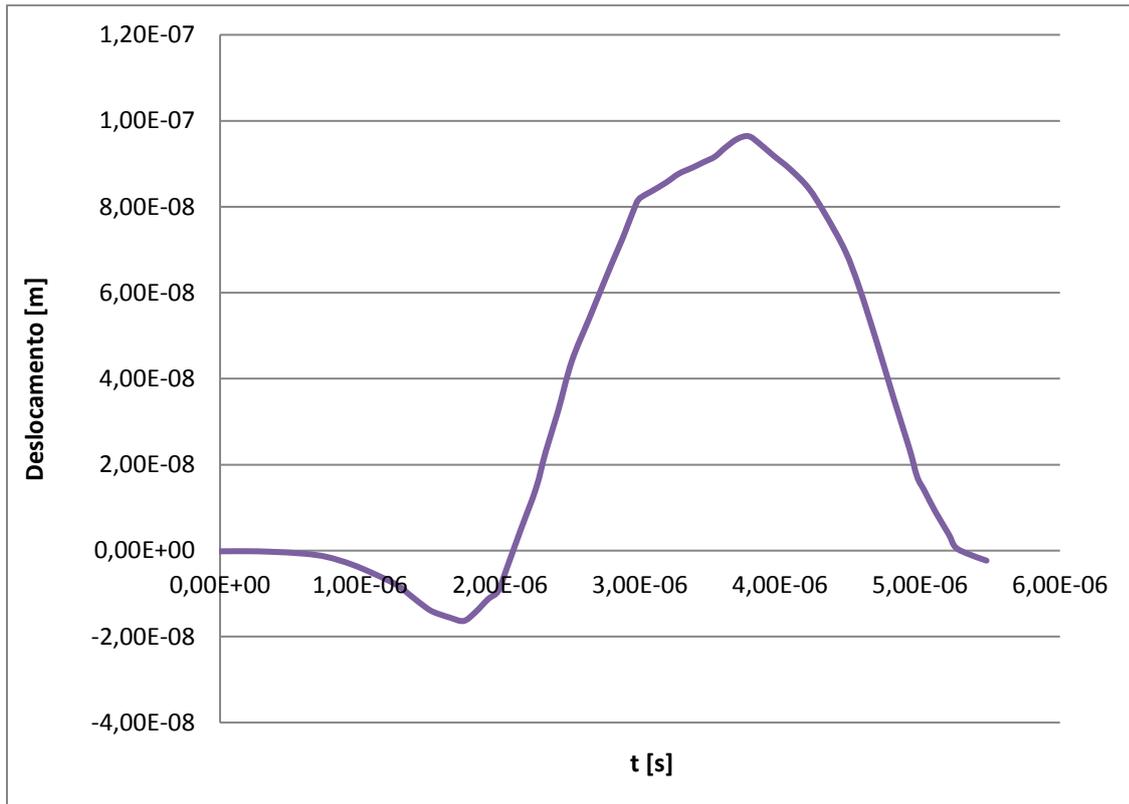


Figura 6.35: Deslocamento no tempo no eixo z.

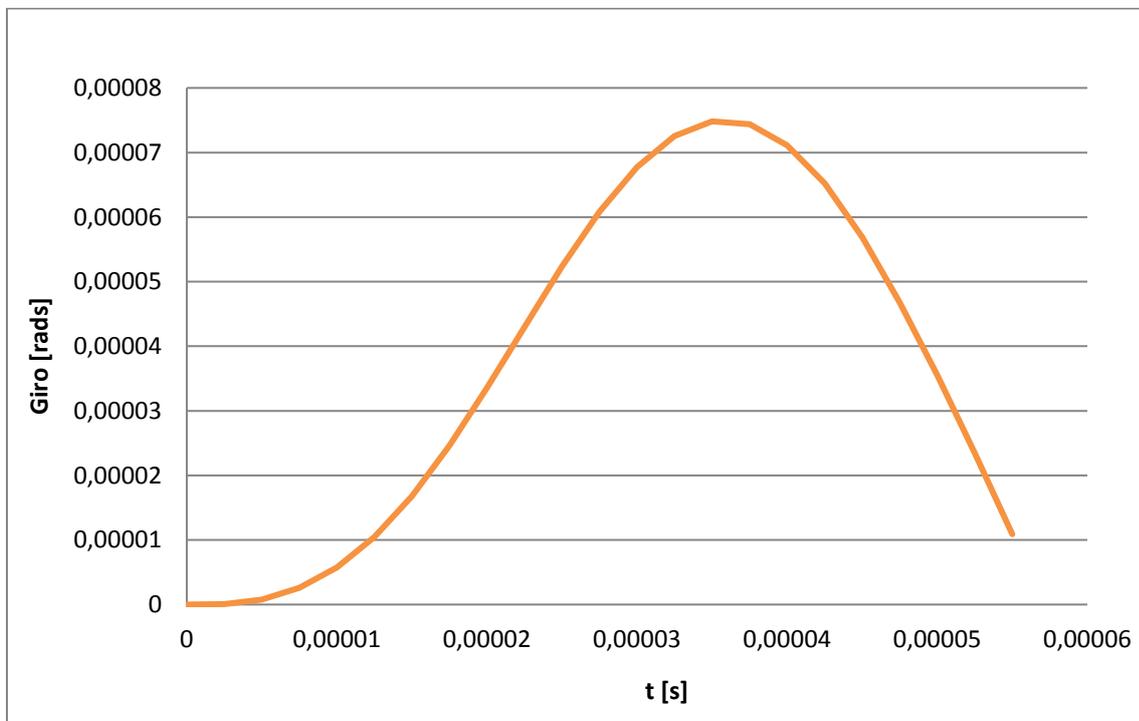


Figura 6.36: Giro da seção transversal no tempo.

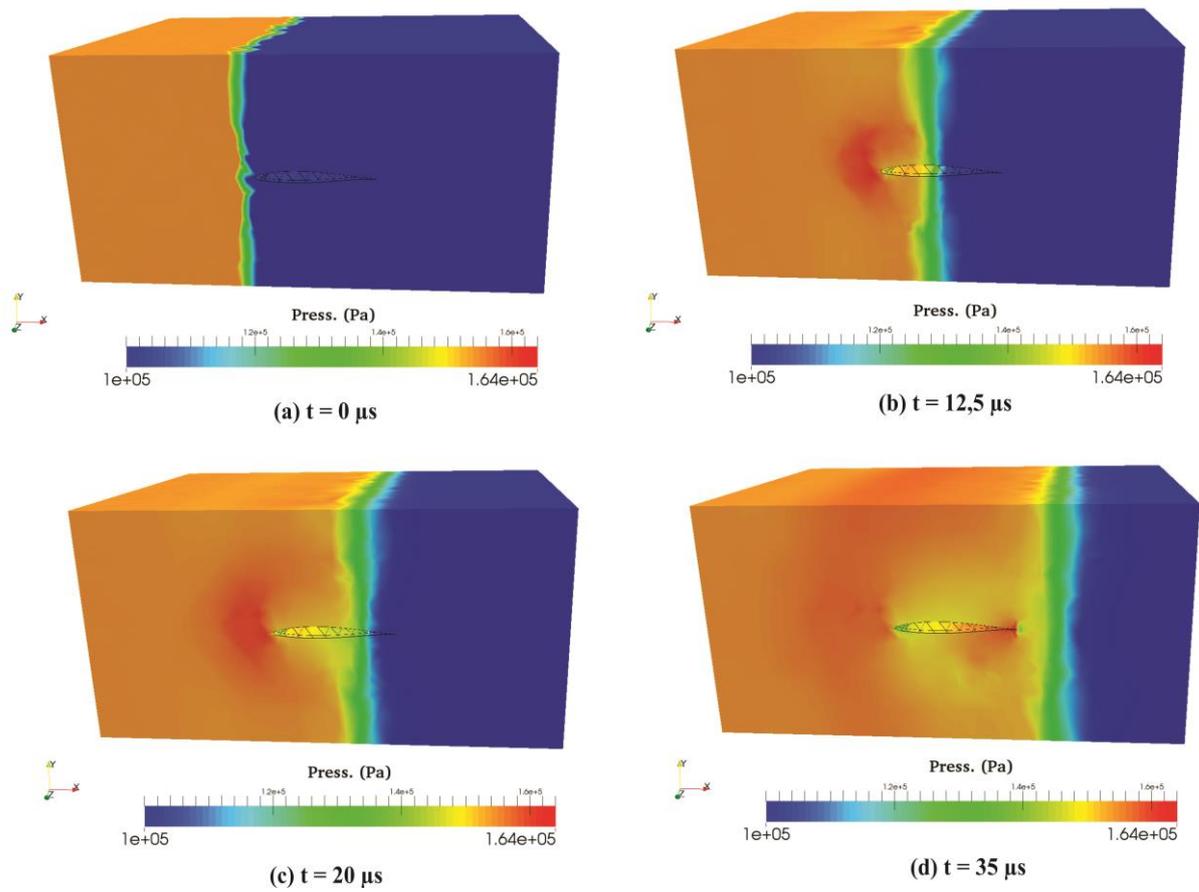


Figura 6.37: Variação da pressão em diferentes instantes de tempo.

7 *Conclusão*

O presente trabalho apresenta um estudo computacional baseado no método dos elementos finitos (MEF) e para análise particionada de interação fluido-estrutura de barra geral 3D, visando aplicações em situações de estruturas sob ação de ondas de choque e explosões. Tanto o fluido como a estrutura são modelados através do MEF devido às vantagens que este oferece, tal como a facilidade de aplicação das condições de contorno, dentre outras.

Para a dinâmica das estruturas, opta-se por uma abordagem posicional do MEF, considerando não linearidade geométrica, de estruturas de barra geral conforme apresentado por Coda e Paccola (2009). Tal formulação usa, ao invés de deslocamentos e rotações, as posições e as componentes finais de vetores inicialmente normais à superfície media como parâmetros nodais, sendo a seção transversal discretizada por elementos triangulares a fim de que seja possível considerar as variações na altura, largura e empenamento. Tal formulação tem se mostrado bastante robusta e de simples implementação, mostrando bons resultados como pode ser visto nos trabalhos citados neste texto. A integração temporal é implícita e baseada no integrador de Newmark, que conforme mostram Sanches e Coda (2013), se mostra estável e com propriedades conservativas suficientes para os problemas aqui analisados.

Para a dinâmica dos fluidos, emprega-se um algoritmo com integração temporal explícita baseada em linhas características. Para tratar a dificuldade de se trabalhar com descrições matemáticas diferentes para os problemas multi-físicos (sendo a descrição Lagrangeana adequada para o sólido e Euleriana adequada para o fluido) utiliza-se uma descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) das equações governantes do fluido, como apresentado por Donea et al (1982), a qual permite que a movimentação e a mudança de forma do domínio do escoamento seja independente da movimentação das partículas do fluido. A movimentação da malha é definida com base nos deslocamentos e velocidades do contorno da barra, bem como na distância aos contornos móveis e fixos.

Tanto para dinâmica das estruturas de barra geral 3D quanto para dinâmica dos fluidos utilizou-se códigos computacionais já desenvolvidos pelo grupo sendo os programas desenvolvidos por Coda e Paccola (2009) para a dinâmica de Barras e por Sanches (2011) para a dinâmica dos fluidos.

Para o problema do acoplamento, foram implementados modelos particionados uni- e bidirecionais, ambos permitindo diferentes passos no tempo para o fluido e para a estrutura. Dessa forma, a modularidade total entre os algoritmos do fluido e da estrutura foi garantida.

No caso do modelo bidirecional de acoplamento, a continuidade de forças e deslocamentos é imposta por meio de transferência de forças do fluido para a estrutura como condições de Neuman e da movimentação da barra para o fluido como condições de Dirichlet. Já no modelo unidirecional, assume-se para o fluido que a estrutura permanece rígida e apenas as forças do fluido são transferidas para a estrutura.

O efeito do uso de diferentes passos de tempo para o fluido e para a estrutura foi analisado e considerado bastante prático, uma vez que o programa de dinâmica dos fluidos é explícito (condicionalmente estável) no tempo e o programa de estrutura é implícito (incondicionalmente estável). Também foi estudada a precisão e a aplicabilidade dos esquemas particionados com acoplamento unidirecional e bidirecional (*1-way* e *2-way coupling*) para problemas de curta duração e pouca mudança de forma da estrutura, sendo que, a partir dos estudos numéricos realizados sobre o experimento de Giordano (2005), pode-se notar que, para ensaios que não apresentam deslocamentos elevados na estrutura, o acoplamento unidirecional não apresenta erros consideráveis em comparação com o acoplamento bidirecional.

Recomenda-se, no entanto, fazer uma análise prévia para determinar se os valores de amplitude do deslocamento e a duração dos efeitos do fluido são pequenos suficientemente para que se possa considerar o acoplamento unidirecional bem como para se determinar o número adequado de subciclos de tempo. Por fim, o modelo de acoplamento implementado foi testado em exemplos tridimensionais com maior complexidade evidenciando a eficácia do mesmo, sendo que tanto o modelo de acoplamento, bem como os programas de análise de dinâmica de barras e de dinâmica dos fluidos, são considerados robustos e precisos para análise de problemas de interação fluido-estrutura em eventos de curta duração.

Referências

- AKIN, J. E.; TEZDUYAR, T. E. Calculation of the advective limit of the supg stabilization parameter for linear and higher-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 21-22, p. 1909 – 1922, 2004.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamics - the basics with applications*. 1st. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; SCHARPF, D. W. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 14, n. 3, p. 401 – 451, 1978. ISSN 0045-7825.
- ARGYRIS, J.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. S.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G. A.; MLEJNEK, H. P.; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. W. Finite element method - the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.17-18, n. 1, p. 1–106, 1979.
- B. BRENDDEL, E. RAMM, Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells, *Computers & Structures*, Volume 12, Issue 4, October 1980, Pages 549-558.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deromation dynamic analysis. *International journal for numerical methodods in engineering*, 9, p. 353–386, 1975.
- BATTINI, J.-M. A non-linear corotational 4-node plane element. *Mechanics Research Communications*, v. 35, n. 6, p. 408 – 413, 2008. ISSN 0093-6413.
- BATTINI, J.-M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362 – 6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BELO, I. M. *Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para análise hiperelástica*. Tese (Doutorado) — UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2009.

- BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11, n. 1, p. 65–84, 1977. ISSN 0029-5981.
- BENRA, Friedrich-Karl et al. A Comparison of One-Way and Two-Way Coupling Methods for Numerical Analysis of Fluid-Structure Interactions. *Journal of applied mathematics*, v. 2011, p. 16, 2011.
- BERMEJO, M.; SANTOS, A. P.; GOICOLEA, J. M.; PEREZ, A. Evaluation of Blasts Loads on Reinforced Concrete Structures with Finite Elements. *Informes de la Construcción*, 67(539), 2015
- BETHE, H. A., et al, *Blast wave*, Los Alamos Report LA-2000, Ch. 2, 1947.
- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369 – 391, 1998. ISSN 0045-7825.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579 – 595, 2000. ISSN 0045-7825.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navierstokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199 – 259, 1982.
- BRUN, M.; BATTI, A.; LIMAM, A.; GRAVOUIL, A., Explicit/implicit multi-time step co-computations for blast analyses on a reinforced concrete frame structure, *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 52, May 2012, Pages 41-59.
- CANET, J. M.; BONET, J. Estudio de estructuras sometidas a esfuerzos de impacto en régimen elastoplástico y con grandes deformaciones por el método de los elementos finitos. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*. Vol 3, p. 275-296, 1987.
- CASAGRANDE, A. S. Estudo de cargas impulsivas com ênfase em explosões: estratégias de análises utilizando métodos numéricos. Dissertação (mestrado). Escola de engenharia UFRGS, 2006.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. A. Implicit supg solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477 – 3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

- CLUBLEY, S. K., Non-linear long duration blast loading of cylindrical shell structures, *Engineering Structures*, Volume 59, February 2014, Pages 113-126
- CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, n. 47-48, p. 3712–3722, 2009 a.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. 168 p. Tese (Tese para concurso de professor titular) —Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 6, n. 3, p. 187–212, 2009 b.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, 40, n. 1, p. 185–200, Jun 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107 – 1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamics of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, p. 319 – 333, 2011.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. England: JohnWiley & Sons, 1991.
- DE BORBON, F.; AMBROSINI, D.; KIM, S.C.K.; NURICK, G. Respuesta dinámica de placas compuestas sometidas a cargas explosivas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, v. 30, p. 1098-11195, 2011.
- DE BORBON, F.; AMBROSINI, D. Modelación de placas compuestas sometidas a cargas explosivas localizadas. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, v.30, p. 2265-2281. Salta, Argentina, 2012.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689 – 723, 1982.
- FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247 – 3270, 2001.6
- FOX, R. W.; McDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introduction to fluid mechanics*. 6th edition. John Wiley and sons, inc. 2004, 778 p.

GIORDANO, J. et al. Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction. *Shock Waves*, Springer Berlin / Heidelberg, v. 14, p. 103-110, 2005. ISSN 0938-1287.

GOICOLEA, J.M. *Estructuras sometidas a impacto*. Estructuras sometidas acciones dinámicas. Barcelona, España: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2000, p. 535-567.

GONZALEZ, M. C. A; PEREZ, M. C. A. *Analysis of Explosions on public interest structures and scenarios by computer simulations*. Departamento de Física de la Materia Condensada, Laboratorio de Ensayos Industriales, TRIM, 2 (2011), pp. 61-72, 2012.

GRECO, M.; CODA, H.B. *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis*. Journal of Sound Vibration, n. 290, p. 1141-1174, Mar., 2006.

GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2004.

HAN, C.-S.; WRIGGERS, P. An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 189, Issue 2, 1 September 2000, Pages 651-671.

HEIL, M; HAZEL, A. L; BOYLE, J. Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches. *Computational Mechanics*, volume 43, Issue 1, December 2008, pp 91-101.

HENAO, C. A. *Um estudo sobre operadores de captura de descontinuidades para problemas de transporte adectivos*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HRON,J.;MADLIK, M. *Fluid-structure interaction with applications in biomechanics*. v. 8, n. 5, p. 1431 – 1458, 2007

HÜBNER, Björn; WALHORN, Elmar; DINKLER, Dieter; A monolithic approach to fluid.– structure interaction using space.–time finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 23.–26, 2004, p. 2087-2104, ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; CARNOY, E. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, n. 1, p. 69 – 82, 1983.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells- part ii. Twodimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 27, n. 2, p. 167 – 181, 1981. ISSN 0045-7825.

- HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. threedimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331 – 362, 1981. ISSN 0045-7825.
- JACINTO A.; AMBROSINI D.; DANESI R. Experimental and computational analysis of plates under air blast loading. *International Journal of Impact Engineering*, v. 25, n.10, p.927–947, 2001.
- JOHNSON, J. N.; TANG, P. K.; FOREST, C.A. Shock-wave initiation of heterogeneous reactive solids. *J. Appl. Phys.* 57(6), 4323-4334, 1985.
- KANCHI, H. and MASUD, A.; A 3D adaptive mesh moving scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2007; 54:923–944.
- KASSIOTIS, C.; IBRAHIMBEGOVIC, A.; MATTHIES, H. Partitioned solution to fluid—structure interaction problem in application to free-surface flows, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, v. 29, n. 6, 2010, p. 510-521, ISSN 0997-7546.
- KREHL, P. O. K. *History of Shock Waves, Explosions and Impact: A Chronological and Biographical Reference*, Springer-verlag, 2009.
- LÖHNER, R, et al. Na adaptative finite elemento procedure for compressible high speed flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 441-465, 1985.
- MACIEL D. N.; CODA, H. B. *Positional description for non-linear 2D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner Kinematics*. *Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2005.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2004.
- MAGNUSSON, J. *Structural concrete elements subjected to air blast loading*. Tese (Doutorado) — KTH, Stockholm, 2007.
- MALVERN, L. E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.
- MARTÍ, J.; GOICOLEA, J.M. Impactos y grandes deformaciones. *Revista de la Sociedad Nuclear Española*, v. 68, p. 23-27, 1988.
- MORAND, H. J. P.; OHAYON, R. *Fluid structure interaction*. Paris, França: John Wiley & Sons e Masson, 1995.
- NITHIARASU, P. et al. Shock capturing viscosities for the general fluid mechanics algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, n. 9, p. 1325–1353, Dec 15 1998. ISSN 0271-2091.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p.5159–5176, 2002.

OFENGEIM, D. H.; DRIKAKIS, D. Simulation of blast wave propagation over a cylinder. *Shock Waves*, v. 7, p. 305-317, 1997.

OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.

OLSSON, S; KESTI, J. *Fluid structure interaction analysis on the aerodynamic performance of underbody panels*. 2014. Göteborg: Chalmers University of Technology. Master Thesis, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2014.

PIPERNO, S. Explicit-implicit fluid-structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 25, p.1207–1226, 1997.

POTTER, M. C.; WIGGERT, D.C.; RAMADAN, B. H. *Mechanics of fluids*. Cengage Learning, 2001. 794 p.

QI, B. X.; YAN, S.; LI, W.; LI, X. J. Numerical Simulation on Dynamic Responses and Damages of Steel Frame Structures Column under Blast Loads. *Earth and Space 2010: Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments*, p. 3309-3317, 2010.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. *Física - Parte I*. Rio de Janeiro, Brasil: Ao livro Técnico S. A., 1965.

SANCHES, R. A. K. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2011.

SANCHES, R. A. K. ; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177-196, 2013.

SANCHES, R. A. K. ; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian Shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, 38(2014): 3401-3418, Jul 2014.

SANCHES, R. A. K. ; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, 2016.

SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, n. 4, p. 761–785, Feb 10 2001. ISSN 0029-5981.

- SHI, Y.; HAO, H.; LI, Z. X. Numerical Simulation of Blast Wave Interaction With Structure Columns. *Shock Waves*, v. 17, p. 113-133, 2007.
- SIMO, J. C. et al. Finite deformations postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, n. 5, p. 779–800, May 1986. ISSN 0029-5981.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elastoviscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42, n. 3, p. 301–330, 1984. ISSN 0045-7825.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p.267–304, 1989.
- SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42, n. 1, p. 97–116, Jan 1992.
- SONNTAG, Simon J. et al. Simulation of a pulsatile total artificial heart: Development of a partitioned Fluid Structure Interaction model, *Journal of Fluids and Structures*, v. 38, 2013, p. 187-204, ISSN 0889-9746.
- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2nd. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- TAYLOR, Sir G. I. . The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. I. *Theoretical Discussion. Proceedings of the Royal Society A* 201 (1065): 159–174, 1950.
- TEICH, M.; GEBBEKEN, N., Analysis of FSI effects of blast loaded flexible structures, *Engineering Structures*, Volume 55, October 2013, Pages 73-79.
- TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica de escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis Aplicando o Método de Elementos Finitos*. Tese (Dissertação de Mestrado) — UFRGS, Rio Grande do Sul, Brasil, 1996.
- TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica da interação de escoamentos tridimensionais de fluidos compressíveis e incompressíveis e estruturas deformáveis usando o método de elementos finitos*. 237 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- TEIXEIRA, P. R. F. E.; AWRUCH, A. M. Numerical Simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, 34, p. 249–273, 2005.
- TEZDUYAR, T. E.; SENGA, M. Stabilization and shock-capturing parameters in sup formulation of compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 13-16, p. 1621 – 1632, 2006.
- TRUESDELL, C. A. *Hypo-elasticity. J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.

VAN BRUMMELEN, E. H., Added Mass Effects of Compressible and Incompressible Flows in Fluid-Structure Interaction *Journal of Applied mechanics*, 76: 021206, 2009.

WALL, W. A.; GENKINGER, S.; RAMM, E.; A strong coupling partitioned approach for fluid–structure interaction with free surfaces, *Computers & Fluids*, Volume 36, Issue 1, January 2007, Pages 169-183

WEMPNER, Gerald. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 2, p. 117-153, 1969.

WHITE, F. M. *Fluid Mechanics. 6th edition*. New York, NY: McGraw-Hill, 2007. 865 p.

PENG, W.; ZHANG, Z.; GOGOS, G.; GAZONAS, G. Fluid Structure Interactions for Blast Wave Mitigation. *ASME J. of Applied Mechanics*, v. 78, 2011.

SHI, Y; HAO, H; LI, Z-X. Numerical simulation of blast wave interaction with structure columns. *Shock Waves*, v. 17, p. 113-133, 2007.

WOODWARD, P; COLELLA, P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, volume 54, n 1, p. 115-173, 1984.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. Search for a general fluid mechanics algorithm. *Frontiers of computational fluid dynamics*, John Wiley & Sons Inc., p. 101–113, 1994.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v1: The Basis*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000a. 689 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v2: Solid Mechanics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000b. 459 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method, v3: Fluid Dynamics*. [S.l.]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000c. 334 p.