

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

HIGOR SÉRGIO DANTAS DE ARGÔLO

**Método da partição e formulação híbrido-Trefftz na análise de  
sólidos bidimensionais contendo múltiplas fissuras**

São Carlos

2016



HIGOR SÉRGIO DANTAS DE ARGÔLO

**Método da partição e formulação híbrido-Trefftz na análise de sólidos bidimensionais contendo múltiplas fissuras**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos

2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

A686m Argôlo, Higor Sérgio Dantas de  
Método da Partição e formulação híbrido-Trefftz na análise bidimensional de sólidos contendo múltiplas fissuras / Higor Sérgio Dantas de Argôlo; orientador Sergio Persival Baroncini Proença. São Carlos, 2016.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Splitting Method. 2. Método da Partição. 3. Formulação híbrido-Trefftz. 4. Mecânica da Fratura. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **HIGOR SÉRGIO DANTAS DE ARGÔLO**.

Título da tese: "Método da partição e formulação híbrido-Trefftz na análise de sólidos bidimensionais contendo múltiplas fissuras".

Data da defesa: 06/09/2016.

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**  
**(Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Julio Flórez López**  
(Universidade Federal da Integração Latino-Americana/UNILA)

APROVADO

Prof. Dr. **Flavio Luiz de Silva Bussamra**  
(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

APROVADO

Prof. Titular **Walter Savassi**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Profa. Dra. **Francisco Evangelista Júnior**  
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**



**Dedico esse trabalho aos meus pais Sérgio e Silvânia, pois sem eles eu não teria a oportunidade de chegar até aqui, e a minha namorada Cintia que esteve sempre ao meu lado durante o desenvolvimento deste trabalho.**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais Sérgio e Silvânia que sempre se empenharam em me dar uma boa vida, possibilitando essa minha conquista.

A minha namorada Cintia que conheci justamente em São Carlos e que esteve sempre ao meu lado me dando forças e me incentivando desde o início dessa minha jornada de doutorando. Te amo!!!

Aos meus irmãos Herick e Hiago por estarmos juntos desde o início de nossas vidas.

Aos meus avós e tios que estiveram por perto desde minha chegada ao mundo e que também contribuíram para minha formação.

A todos meus amigos de Aracaju que mantém contato comigo desde a juventude.

Aos meus amigos da graduação, bem como os professores que me ajudaram a dar esse primeiro passo profissional.

A Universidade Federal de Sergipe que me forneceu as bases para seguir na carreira de engenheiro durante o curso de graduação e que agora me deu a oportunidade retribuir os serviços como professor.

Aos amigos da USP de São Carlos que conviveram comigo durante esses anos de mestrado e doutorado.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos.

Ao meu orientador Sergio Proença por ter transmitido muito de seu conhecimento a mim durante a pesquisa de mestrado e doutorado e por sempre visar o crescimento de seus alunos.

À CAPES por ter financiado esta pesquisa.



*"Só se pode alcançar um grande êxito  
quando nos mantemos fiéis a nós mesmos"*

**(Friedrich Nietzsche)**



## RESUMO

ARGÔLO, H. S. D. de (2016). **Método da partição e formulação híbrido-Trefftz na análise de sólidos bidimensionais contendo múltiplas fissuras**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma ferramenta computacional para a análise de sólidos bidimensionais contendo múltiplas fissuras utilizando uma nova estratégia mediante a combinação do método da partição (*splitting method*) e formulação híbrido-Trefftz de tensão. A primeira consiste em um método de decomposição para a análise de sólidos contendo múltiplas fissuras pela partição do problema original ( $P_G$ ) em três subproblemas: subproblema global ( $P_G^{(0)}$ ), onde o sólido é analisado sem a presença de fissuras, subproblemas locais ( $P_L^{(k)}$ ), onde cada fissura é analisada individualmente e inserida em domínio arbitrário, e subproblemas globais ( $P_G^{(k)}$ ), onde são computados os efeitos de interação entre fissuras. A solução de  $P_G$  é obtida impondo a condição de nulidade do somatório das tensões nas faces das fissuras de todos os subproblemas. Por simplicidade, os subproblemas  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$  são analisados via método dos elementos finitos clássico (MEF). Em contrapartida, os  $P_L^{(k)}$  são analisados via formulação híbrido-Trefftz visando uma alta eficiência na avaliação desses subproblemas contendo fissura. Essa formulação promove a aproximação dos campos de tensão e deslocamento no domínio e contorno do elemento, respectivamente, de maneira independente. As bases aproximativas do campo de tensão são formadas por funções solução da equação de Navier adicionadas às funções analíticas da mecânica da fratura. Assim, essa formulação proporciona uma boa solução do problema utilizando malha grosseira. Além disso, é possível obter os fatores de intensidade de tensão (FIT) da fissura diretamente da solução do sistema linear do problema. Resultados numéricos são apresentados a fim de ilustrar a aplicação da estratégia e sua eficiência ao alcançar soluções precisas aliado a um baixo custo computacional na análise.

Palavras-chave: Splitting Method. Método da Partição. Formulação híbrido-Trefftz. Mecânica da Fratura



## ABSTRACT

ARGÔLO, H. S. D. de (2016). **Splitting method and hybrid-Trefftz formulation on the analysis of two dimensional solids containing multiple cracks**. PhD Thesis , School Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos.

This paper presents the development of a computational framework to the analysis of two dimensional solids containing multiple cracks using a new strategy with the combination of splitting method and hybrid-Trefftz stress formulation. The first consists of a decomposition method to the analysis of solids containing multiple cracks through the split of original problem ( $P_G$ ) into three subproblems: global subproblem ( $P_G^{(0)}$ ), where the solid is analyzed without the cracks, local subproblems ( $P_L^{(k)}$ ), where each crack is analyzed individually and insert in an arbitrary domain, and global subproblems ( $P_G^{(k)}$ ), where the effects of the interaction between cracks are evaluated. Solution of  $P_G$  is obtained using the condition that the sum of tractions on crack faces of all subproblems are null. For simplicity, subproblems  $P_G^{(0)}$  and  $P_G^{(k)}$  are analyzed by classical finite element method (FEM). On the other hand,  $P_L^{(k)}$  are analyzed by hybrid-Trefftz formulation aiming a high efficiency on the evaluation of cracked subproblems. This formulation promote the approximation of stresses and displacements fields on domain and boundary of elements, respectively, on an independent manner. Bases of approximation of stress field are constructed by functions that solves the Navier equation with the addition of analitical functions of mechanic of fracture. Hence, this formulaiton provides good solution of the problem with coarse mesh. Moreover, the stress intensity factors (SIF) of cracks may be obtained directly from the solution of linear system of the problem. Numerical results are presented in order to ilustrate the use of the strategy and its efficiency on the evaluating of accurate solutions with a low computational cost of the analysis.

Keywords: Splitting Method. Híbrido-Trefftz formulation. Mechanic of fracture.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 - Decomposição do problema original.....	12
Figura 2-2 - Subproblema original $P_G$ .....	13
Figura 2-3 - Subproblema global $P_G^{(0)}$ .....	13
Figura 2-4 - Funções $Q_j$ .....	15
Figura 2-5 - Subproblema local $P_L^{(k)}$ .....	15
Figura 2-6 - Carregamento unitários de $P_L^{(k)}$ .....	17
Figura 2-7 - Subproblema $P_G^{(k)}$ .....	17
Figura 2-8 - Fissuras internas .....	21
Figura 2-9 - Fissuras de borda .....	21
Figura 2-10 - Eixo de referência para fissura de borda .....	22
Figura 2-11 - Eixo de referência para fissura interna .....	22
Figura 2-12 - Fissura interna .....	23
Figura 2-13 - Aplicação das tensões no primeiro semi-comprimento.....	23
Figura 2-14 - Aplicação das tensões no segundo semi-comprimento .....	24
Figura 3-1 - Sistema de coordenadas no contorno estático do elemento.....	31
Figura 4-1 - Elemento T6 .....	46
Figura 4-2 - Exemplos de elementos híbrido-Trefftz .....	47
Figura 4-3 - Discretização na ponta da fissura com elemento <i>quarter-point</i> .....	49
Figura 5-1 - Duas fissuras internas .....	52
Figura 5-2 - Problema Global $P_G^{(0)}$ .....	53
Figura 5-3 - Domínio destacado do problema original .....	54
Figura 5-4 - Domínio do $P_L^{(k)}$ .....	54
Figura 5-5 - Problemas Locais $P_L^{(k)}$ .....	55
Figura 5-6 - Malha de elementos híbrido-Trefftz para $P_L^{(k)}$ .....	56
Figura 5-7 - Problema Global $P_G^{(k)}$ .....	59
Figura 5-8 - Duas fissuras internas inclinadas.....	61
Figura 5-9 - Problema Global $P_G^{(0)}$ .....	62
Figura 5-10 - Domínio do $P_L^{(k)}$ .....	63

Figura 5-11 - Problema Local $P_L^{(k)}$ .....	64
Figura 5-12 - Malha de elementos híbrido-Trefftz $P_L^{(k)}$ .....	64
Figura 5-13 - Problema Global $P_G^{(k)}$ .....	66
Figura 5-14 - Problema original do 1º cenário .....	68
Figura 5-15 - Problema Global $P_G^{(0)}$ para o 1º cenário .....	69
Figura 5-16 - Domínio do $P_L^{(k)}$ para o 1º cenário .....	70
Figura 5-17 - Problema Local $P_L^{(k)}$ para o 1º cenário .....	70
Figura 5-18 - Malha de elementos híbrido-Trefftz para $P_L^{(k)}$ para o 1º cenário.....	71
Figura 5-19 - Problema Global $P_G^{(k)}$ para 1º cenário .....	73
Figura 5-20 - Problema original do 2º cenário .....	76
Figura 5-21 - Problema Global $P_G^{(0)}$ para o 2º cenário .....	76
Figura 5-22 - Problema Global $P_G^{(k)}$ para 2º cenário .....	77
Figura 5-23 - Problema original do 3º cenário .....	79
Figura 5-24 - Problema Global $P_G^{(0)}$ para o 3º cenário .....	80
Figura 5-25 - Problema Global $P_G^{(k)}$ para 3º cenário .....	81
Figura 5-26 - Problema original .....	83
Figura 5-27 - Problema Global $P_G^{(0)}$ .....	84
Figura 5-28 - Domínios do $P_L^{(k)}$ .....	85
Figura 5-29 - Problema Local da fissura de borda em $P_L^{(k)}$ .....	86
Figura 5-30 - Problema Local da fissura interna em $P_L^{(k)}$ sujeita a carga constante.....	86
Figura 5-31 - Problema Local da fissura interna em $P_L^{(k)}$ sujeita a carga linear.....	87
Figura 5-32 - Malha de elementos híbrido-Trefftz da fissura de borda para $P_L^{(k)}$ .....	88
Figura 5-33 - Malha de elementos híbrido-Trefftz da fissura interna para $P_L^{(k)}$ .....	88
Figura 5-34 - Problema Global $P_G^{(k)}$ .....	93
Figura A-1 - Representação genérica de um sólido bidimensional.....	105
Figura D-0-1 - Sistema de coordenadas na ponta da fissura .....	123
Figura D-0-2 - Modos de abertura da fissura .....	127



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso a.....	57
Tabela 5-2 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso b.....	57
Tabela 5-3 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso c.....	57
Tabela 5-4 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso d.....	58
Tabela 5-5 - FIT de cada ponta da fissura do problema original.....	60
Tabela 5-6 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição.....	60
Tabela 5-7 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso a.....	65
Tabela 5-8 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso b.....	65
Tabela 5-9 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso c.....	65
Tabela 5-10 - FIT das pontas das fissuras $i$ de $P_L^{(k)}$ para o caso d.....	65
Tabela 5-11 - FIT de cada ponta da fissura do problema original.....	67
Tabela 5-12 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição.....	67
Tabela 5-13 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ do 1º cenário para o caso a.....	71
Tabela 5-14 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ do 1º cenário para o caso b.....	72
Tabela 5-15 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ do 1º cenário para o caso c.....	72
Tabela 5-16 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ do 1º cenário para o caso d.....	72
Tabela 5-17 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 1º cenário.....	74
Tabela 5-18 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 1º cenário.....	74
Tabela 5-19 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 1º cenário.....	75
Tabela 5-20 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 1º cenário.....	75
Tabela 5-21 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 2º cenário.....	78

Tabela 5-22 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 2º cenário .....	78
Tabela 5-23 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 2º cenário .....	78
Tabela 5-24 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 2º cenário .....	79
Tabela 5-25 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 3º cenário .....	82
Tabela 5-26 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 3º cenário .....	82
Tabela 5-27 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 3º cenário .....	82
Tabela 5-28 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 3º cenário .....	82
Tabela 5-29 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso a .....	89
Tabela 5-30 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso b .....	89
Tabela 5-31 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso c .....	89
Tabela 5-32 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso d .....	89
Tabela 5-33 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso e .....	90
Tabela 5-34 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso f .....	90
Tabela 5-35 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso g .....	90
Tabela 5-36 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso h .....	91
Tabela 5-37 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso i .....	91
Tabela 5-38 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso j .....	91
Tabela 5-39 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso k .....	91
Tabela 5-40 - FIT da ponta da fissura de $P_L^{(k)}$ o caso l .....	92
Tabela 5-41 - Valores de referência para o FIT de cada ponta da fissura do problema original .....	93
Tabela 5-42 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante .....	94

Tabela 5-43 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante .....	94
Tabela 5-44 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear .....	94
Tabela 5-45 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear .....	94

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

FIT - Fator de intensidade de tensão.

MEF - Método dos elementos finitos.

MEFG - Método dos elementos finitos generalizados.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega$  - Domínio do sólido ou da estrutura.

$\mathbf{b}$  - Vetor de forças volumétricas.

$\Gamma_\Omega$  - Contorno do sólido ou da estrutura.

$\Gamma_u$  - Fronteira cinemática do contorno do sólido ou da estrutura.

$\Gamma_\sigma$  - Fronteira estática do contorno do sólido ou da estrutura.

$\bar{\mathbf{t}}$  - Vetor de forças de superfície prescritas.

$\bar{\mathbf{u}}$  - Vetor de deslocamentos prescritos.

$\mathbf{L}$  - Matriz formada por operadores diferenciais.

$\boldsymbol{\varepsilon}$  - Tensor de deformações.

$\mathbf{u}$  - Vetor de deslocamentos.

$\mathbf{f}$  - Tensor constitutivo de flexibilidade.

$\boldsymbol{\sigma}$  - Tensor de tensões.

$\mathbf{D}$  - Tensor constitutivo de rigidez.

$\mathbf{I}$  - Matriz formada pelas componentes de um vetor unitário normal a  $\Gamma_\sigma$ .

$\partial/\partial x$  - Derivada parcial em relação a  $x$ .

$\partial/\partial y$  - Derivada parcial em relação a  $y$ .

$\sigma_x$  - Componente normal do tensor de tensões na direção  $x$ .

$\sigma_y$  - Componente normal do tensor de tensões na direção  $y$ .

$\tau_{xy}$  - Componente tangencial do tensor de tensões.

$b_x$  - Componente do vetor de forças volumétricas na direção  $x$ .

$b_y$  - Componente do vetor de forças volumétricas na direção  $y$ .

$\varepsilon_x$  - Componente de deformação linear específica do tensor de deformações na direção  $x$ .

$\varepsilon_y$  - Componente de deformação linear específica do tensor de deformações na direção  $y$ .

$\gamma_{xy}$  - Componente referente à distorção angular do tensor de deformações.

$u_x$  - Componente do vetor de deslocamento na direção  $x$ .

$u_y$  - Componente do vetor de deslocamento na direção  $y$ .

$E$  - Módulo de Young.

$\nu$  - Coeficiente de Poisson.

$G$  - Módulo de elasticidade transversal.

$n_x$  - Componentes de um vetor unitário normal a  $\Gamma_\sigma$ .

$n_y$  - Componentes de um vetor unitário normal a  $\Gamma_\sigma$ .

$\bar{t}_x$  - Componente do vetor de forças de superfície prescritas na direção x.

$\bar{t}_y$  - Componente do vetor de forças de superfície prescritas na direção y.

$\bar{u}_x$  - Componente do vetor de deslocamentos prescritos na direção x.

$\bar{u}_y$  - Componente do vetor de deslocamentos prescritos na direção y.

$K_I$  - fator de intensidade de tensão para o modo I de abertura da fissura.

$K_{II}$  - fator de intensidade de tensão para o modo II de abertura da fissura.

$K_{III}$  - fator de intensidade de tensão para o modo III de abertura da fissura.

$P_G$  - problema original.

$P_G^{(0)}$  - subproblema global.

$P_L^{(k)}$  - subproblema local.

$P_G^{(k)}$  - subproblemas locais.

$t_G^{(0)}$  - Tensões nas linhas que representam as fissuras do subproblema global.

$b_{i,j}$  - Constantes da combinação linear de  $t_G^{(0)}$ .

$Q_j(\xi_i / a_i)$  - Termos de aproximação.

$a_i$  - Comprimento da fissura  $i$ .

$t_L^{(k)}$  - Tensões nas linhas que representam as fissuras dos subproblemas locais.

$t_G^{(k)}$  - Tensões nas linhas que representam as fissuras dos subproblemas globais.

$c_{i,j}^{(k)}$  - Constantes para a combinação linear.

$k$  - índice de subproblemas locais e globais.

$\alpha$  - Fator de escala para a determinação do Fator de Intensidade de Tensão.

$M$  - Número máximo de problemas  $P_L^{(k)}$  e  $P_G^{(k)}$ .

$Q_{jj}(\xi_i / a_i)$  - Função ponderadora.

$[IG]$  - Matriz de influência geral.

$K^{(i)}$  - Fator de intensidade final.

$K_j^{(i)}$  - Fator de intensidade de tensão calculado no  $P_L^{(k)}$ .

$S$  - Matriz que armazena as funções aproximadoras para a combinação linear de  $\sigma$  no domínio do elemento híbrido-Trefftz.

$\mathbf{X}$  - Vetor de parâmetros da combinação linear de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$\partial$  - operador diferencial.

$\phi$  - potencial biharmônico de tensão.

$r$  - símbolo de coordenada polar para raio.

$\theta$  - ângulo das coordenadas polar.

$\sigma_r$  - Componente normal do tensor de tensões na direção  $r$  em coordenada polares.

$\sigma_\theta$  - Componente normal do tensor de tensões na direção  $\theta$  em coordenada polares.

$\sigma_{r\theta}$  - Componente tangencial do tensor de tensões coordenada polares.

$S_r$  - componente da matriz  $S$  referente às funções aproximadoras de  $\sigma_r$ .

$S_\theta$  - componente da matriz  $S$  referente às funções aproximadoras de  $\sigma_\theta$ .

$S_{r\theta}$  - componente da matriz  $S$  referente às funções aproximadoras de  $\sigma_{r\theta}$ .

$\mathbf{u}_\Omega$  - vetor de deslocamentos do domínio do elemento.

$\mathbf{U}$  - matriz de funções aproximadoras para os deslocamentos do domínio do elemento.

$\mathbf{u}$  - vetor de deslocamentos do contorno do elemento.

$\mathbf{Z}$  - matriz de funções aproximativas para o contorno do elemento.

$\mathbf{d}$  - Vetor que contém os graus de liberdade para a combinação linear de  $\mathbf{u}$ .

$n$  - grau de aproximação.

$\cos$  - cosseno do ângulo.

$\arccos$  - arco cosseno de ângulo.

$\xi$  - coordenada na face da fissura.

$Z_{ij}$  - posição  $i$  e  $j$  da matriz  $Z$ .

$d_\Omega$  - Vetor que contém os graus de liberdade para a combinação linear de  $\mathbf{u}_\Omega$  para elemento híbrido-misto.

$\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A}_\Omega$ ,  $\mathbf{A}$  - Matrizes do sistema linear das formulações não-convencionais.

$\mathbf{e}$  - vetor de deslocamentos prescritos para formulação híbrido-Trefftz.

$\mathbf{q}$  - vetor de forças prescritas para formulação híbrido-Trefftz.

$q_\Omega$  - vetor de forças volúmicas prescritas para formulação híbrido-Trefftz.

$\mathbf{T}$  - Matriz que armazena as funções aproximadoras para a combinação linear de  $\mathbf{t}$ .

$n_x$  - número de parâmetros das aproximações de tensão no domínio do elemento.

$n_d$  - número de parâmetros das aproximações de deslocamento no contorno do elemento.

$\phi_{k_I}$  - potencial biharmônico de tensão para modo I de abertura de fissura.

$\phi_{k_{II}}$  - potencial biharmônico de tensão para modo II de abertura de fissura.

$X_{k_I}$  - parâmetro referente ao fator de intensidade de tensão modo I.

$X_{k_{II}}$  - parâmetro referente ao fator de intensidade de tensão modo II.

$\xi_0$  - coordenada adimensional da ponta da fissura do contorno do elemento híbrido-Trefftz.

$S_f U_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e  $U$ ;

$S_f U_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e das funções polinomiais de  $U$ ;

$S_p U_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e funções provenientes da mecânica da fratura de  $U$ ;

$S_p U_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e  $U$ ;

$S_f Z_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e do termo referente a fissura de  $Z$ ;

$S_f Z_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e das funções de Tchebychev de  $Z$ ;

$S_p Z_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e do termo referente a fissura de  $Z$ ;

$S_p Z_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e  $U$ ;

$\tilde{U}_p$  - é a matriz  $U_p$  definida na ponta da fissura.

$\tilde{Z}_p$  - é a matriz  $Z_p$  definida na ponta da fissura.

T6 - elemento triangular contendo seis nós.

DR - diferença relativa (%);

Abs - valor absoluto do resultado entre parênteses;

Valor<sub>HT</sub> - valor do FIT obtido via elemento híbrido-Trefftz;

Valor<sub>Ref</sub> - valor de referência do FIT.



## Sumário

LISTA DE FIGURAS .....	i
LISTA DE TABELAS .....	iii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....	vi
LISTA DE SÍMBOLOS .....	vii
1- Introdução .....	1
1.1 - Objetivos .....	7
1.2 - Diferenças entre os trabalhos desenvolvidos no mestrado e doutorado.....	8
1.3 - Estrutura do texto .....	9
2- O Método da Partição .....	11
2.1- Considerações iniciais .....	11
2.2- Etapas do Método da Partição .....	13
2.2.1- 1º Subproblema .....	13
2.2.2- 2º Subproblema .....	15
2.2.3- 3º Subproblema .....	17
2.2.4- Solução numérica .....	18
2.3- Casos particulares quanto à orientação e posicionamento de fissuras .....	21
3- Formulação híbrido-Trefftz .....	25
3.1 - Formulações não convencionais de elementos finitos .....	25
3.2 - Formulação híbrido-Trefftz de tensão.....	27
3.2.1 - Equação de Navier .....	27
3.2.2 - Aproximação do campo de tensões no domínio .....	28
3.2.3 - Aproximação do campo de deslocamentos no contorno estático.....	31
3.2.4 - Equacionamento .....	32
3.3 - Emprego das funções da mecânica da fratura .....	37
3.4 - Integração das componentes das matrizes do sistema linear final .....	40
4- Aspectos Computacionais .....	45

4.1 - Elemento T6 .....	45
4.2 - Elemento híbrido-Trefftz.....	46
4.3 - Método da Partição.....	48
4.4 - Obtenção da solução de referência.....	49
5- Resultados Numéricos .....	51
5.1 - Exemplo 1: Duas fissuras paralelas internas dispostas ortogonalmente à direção do carregamento .....	51
5.1.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$ .....	52
5.1.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$ .....	53
5.1.2 - Subproblema $P_G^{(k)}$ .....	58
5.1.2 - Sobreposição dos subproblemas .....	59
5.2 - Exemplo 2: Duas fissuras internas inclinadas em relação à direção do carregamento	60
5.2.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$ .....	61
5.2.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$ .....	62
5.2.2 - Subproblema $P_G^{(k)}$ .....	66
5.2.3 - Sobreposição dos subproblemas .....	67
5.3 - Exemplo 3: Três possíveis fissuras a partir de furos .....	67
5.3.1 - 1º cenário .....	68
5.3.2 - 2º cenário .....	75
5.3.3 - 3º cenário .....	79
5.4 - Exemplo 4: Domínio contendo furos e fissuras internas e de borda.....	83
5.4.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$ .....	84
5.4.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$ .....	84
5.4.3 - Subproblema $P_G^{(k)}$ .....	92
5.4.4 - Sobreposição dos subproblemas .....	93

6- Considerações finais e conclusões.....	97
6.1 – Breves comentários sobre o conteúdo da tese e conclusões parciais .....	97
6.2 – Conclusões gerais e perspectivas futuras.....	101
Referências .....	103
Apêndice A - Equações da elasticidade linear.....	111
Apêndice B - Dedução do sistema linear final do método da partição.....	115
Apêndice C - Obtenção dos campos de aproximação no domínio do elemento da formulação híbrido-Trefftz .....	121
Apêndice D - Equações analíticas da mecânica da fratura.....	123
Apêndice E – Fluxograma do programa desenvolvido .....	131



## 1- Introdução

Uma análise estrutural representativa que permite avaliar se as solicitações, em termos de tensão, deformação e deslocamento, estão dentro dos limites do material é importante para garantir a integridade dos sólidos. A mecânica do contínuo é a principal ferramenta para a construção de modelos representativos do comportamento estrutural, pressupondo que o meio encontra-se perfeitamente íntegro.

Entretanto, existem várias situações em que a mecânica do contínuo, pelo seu pressuposto fundamental, não fornece uma boa representação do comportamento do material. Uma dessas situações, objeto de estudo deste trabalho, refere-se ao caso de sólidos contendo fissuras, onde o domínio não pode ser representado por um meio inteiramente contínuo. A mecânica da fratura, cujos fundamentos podem ser encontrados, por exemplo, em Williams (1957), Anderson (1991), Gdoutos (1993) e Kundu (2008), permite construir uma modelagem mais representativa, de tal modo que os sólidos fissurados são analisados aplicando os princípios da mecânica do contínuo em regiões afastadas da fissura e os da mecânica da fratura em regiões próximas das fissuras.

Mais especificamente, a limitação do modelo contínuo decorre do fato de que a presença de fissura provoca uma grande concentração de tensão na região próxima à sua ponta, superando o limite de resistência do material, mesmo que as solicitações externas provoquem tensões no restante do sólido muito abaixo desse limite. Portanto, poderá haver falha local do material, eventualmente concluindo-se sobre a própria falha estrutural. A fim de prever essa situação, a mecânica da fratura introduz os conceitos de energia necessária para a propagação de uma fissura e os fatores de intensidade de tensão (FIT). A partir deles, constroem-se critérios consistentes para uma análise mais representativa da segurança estrutural.

Os chamados FIT estão associados a três modos de abertura da fissura a saber: modo I, abertura da fissura na direção perpendicular a suas faces, modo II, abertura da fissura por escorregamento segundo os planos das suas faces, e modo III, abertura da fissura dado por rasgamento também segundo os planos das suas faces. Mediante esses modos, determinam-se os FIT I, II e III, denominados de  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ . O presente trabalho por enfatizar somente análises bidimensionais trata apenas dos dois primeiros fatores.

Em um sólido fissurado, a combinação de múltiplas fissuras durante sua propagação ao longo do sólido pode gerar fissura dominante de maiores dimensões, ocasionando o colapso estrutural. Uma avaliação precisa dos FIT é essencial para garantir a integridade da estrutura ao promover a previsão desse cenário de propagação de fissuras mediante critério baseado naqueles fatores.

Desse modo, é de grande importância a escolha de um método para análise de um cenário de múltiplas fissuras que proporcione resultados confiáveis. Os chamados métodos de decomposição (LE TALLEC, 1994, SMITH, BJORSTAD, GRAPP, 1996) propõe uma metodologia nesse sentido, decompondo o problema fissurado original em subproblemas, obtendo a resposta final pela sobreposição dos resultados de cada subproblema. Entre os métodos de decomposição mais utilizados, atualmente, destaca-se o “Alternating Method”, originalmente proposto por Smith, Emery e Kobayashi<sup>1</sup> (1967 apud ALIABADI; ROOKE, 1991) e posteriormente empregado em, Dong, Atluri (2013), Wang, Atluri (1996), Chen (2009), Atroshchenko, Potapenko e Glinka (2012), Dong e Atluri (2013) e Chaves, Navarro e Larrosa (2015).

O “Alternating Method”, em particular, propõe que o domínio contínuo do sólido seja analisado separadamente do domínio fissurado, onde as grandezas que definem a interação entre eles, deslocamentos e forças na interface de ambos domínios, são obtidas mediante um processo iterativo. Tal procedimento, apesar de proporcionar bom resultado final, pode gerar alto custo computacional durante a análise, sendo inviável em situações mais complexas.

Entretanto, o presente trabalho procura desenvolver uma nova estratégia para a análise de sólidos multifissurados ao adotar um método de decomposição ainda pouco explorado, denominado de Método da Partição (em inglês *splitting method*) (ANDERSSON; BABUŠKA; STEHLIN, 1998; BABUŠKA; ANDERSSON, 2005) combinado com uma formulação não convencional de elementos finitos: a formulação híbrido-Trefftz. Como se trata de uma proposta de conteúdo original, limita-se propositadamente o escopo do trabalho aos problemas bidimensionais, lineares e considerando análises estáticas, sem a propagação de fissuras. Portanto, o objetivo fundamental é a determinação dos fatores de intensidade de tensão.

---

<sup>1</sup>SMITH, F.W., EMERY, A. F., & KOBAYASHI, A. S. (1967). Stress intensity factor for semi-circular cracks, Part 2 Semi-infinite solid. **Journal of Applied Mechanics**, 34, 953-959.

O Método da Partição propõe a busca da solução de problema original ( $P_G$ ), contendo múltiplas fissuras, dividindo-o em três conjuntos de subproblemas assim denominados: subproblema global ( $P_G^{(0)}$ ), subproblemas locais ( $P_L^{(k)}$ ) e subproblemas globais ( $P_G^{(k)}$ ).

Os resultados de cada subproblema são sobrepostos a fim de obter a solução do problema original, em particular os FIT de cada ponta da fissura. A disponibilidade de uma teoria matemática demonstrando a convergência dos FIT, por Babuska e Andersson (2005), e um procedimento não iterativo para considerar a iteração entre as múltiplas fissuras estão entre as vantagens do método da partição em relação aos demais métodos de decomposição. Segue um breve detalhamento das etapas do método da partição, as quais serão melhor descritas no capítulo 2.

O subproblema global  $P_G^{(0)}$  é o primeiro subproblema do método. Nele, o problema original ( $P_G$ ) é analisado sem fissuras, porém mantendo todas as condições de contorno prescritas. O objetivo do  $P_G^{(0)}$  é a obtenção das tensões ao longo das linhas que representam as fissuras do problema original. Para isso, a malha de elementos finitos utilizada na discretização é gerada de maneira que os lados dos elementos correspondam às linhas das fissuras. Há apenas um problema global em toda análise.

Nos subproblemas locais  $P_L^{(k)}$ , cada fissura é analisada separadamente. Entretanto, fissuras iguais, porém, dispostas em distintas direções, podem ser avaliadas pelo mesmo  $P_L^{(k)}$ . Assim, cada subproblema local considera a fissura destacada do domínio original e pertencendo a um domínio local definido arbitrariamente. Adicionalmente, um contorno auxiliar  $\Gamma$  englobando a fissura é definido em sua vizinhança. Uma sequência de carregamentos representados por cada componente de uma base de funções polinomiais com valores máximos unitários são aplicados nas faces das fissuras. Associados a cada componente da base polinomial, FIT e forças ao longo do contorno  $\Gamma$  são computados para todos  $P_L^{(k)}$ .

O último grupo de subproblemas,  $P_G^{(k)}$ , é responsável por avaliar a interação entre fissuras. O problema original  $P_G$  é novamente analisado sem fissuras e carregamentos externos. A sequência de forças obtidas em correspondência com cada componente de carregamento no subproblema local  $P_L^{(k)}$  são impostas em cada domínio  $P_G^{(k)}$  nas linhas que correspondem ao

contorno auxiliar  $\Gamma$ . Então, novamente, distribuições de tensão ao longo das linhas posicionadas onde fissuras existem no problema original são computadas.

Finalmente, todos os subproblemas são sobrepostos mediante a soma de combinações lineares das distribuições de tensão computadas em cada subproblema. Ao impor que a componente de tensão resultante deve ser nula nas faces das fissuras, o procedimento de sobreposição induz a um sistema linear de parâmetros  $Q_l$  das combinações lineares acima mencionadas. Uma vez resolvido o sistema linear, cada  $Q_l$  é utilizado como um fator de multiplicação dos FIT computados em cada subproblema local  $P_L^{(k)}$  a fim de obter os FIT finais de cada ponta da fissura.

Ao contrário dos outros métodos de decomposição, a estratégia de resolução proposta pelo método da partição não é iterativa, e, ao contemplar grupos de subproblemas locais  $P_L^{(k)}$  independentes entre si, é possível a paralelização desta etapa da análise numérica. Esse recurso computacional é muito útil em casos de sólidos submetidos a ações de natureza dinâmica como, por exemplo, carregamentos cíclicos que podem levar à falha do material por fadiga.

As tensões de cada subproblema do método da partição podem ser obtidas via qualquer procedimento numérico. O Método dos Elementos Finitos (MEF) (BATHE, 1996, ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 2000a, ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 2000b, ASSAN, 2003, SAVASSI, 1996, SORIANO, 2003.), na formulação em deslocamentos, será aqui adotado nos subproblemas  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$  dada sua simplicidade conceitual e capacidade de proporcionar soluções suficientemente precisas numa ampla gama de problemas. Apesar dessas vantagens, o MEF apresenta certos entraves que acabam inviabilizando sua aplicação na análise da fissura (característica do subproblema  $P_L^{(k)}$ ), como:

- Sensibilidade à distorção dos elementos;
- Em problemas que contenham fortes gradientes localizados da solução, o emprego de funções de forma polinomiais exige refinamento muitas vezes exagerado da malha de elementos, elevando significativamente o custo computacional;
- Perda de precisão nas ordens superiores de derivadas da solução aproximada em deslocamento, como, por exemplo, ao determinar os campos de deformações e de tensões.



Nos subproblemas  $p_L^{(k)}$ , a análise passa a ser dada mediante a mecânica da fratura. Dessa forma, o elevado gradiente de tensão nas proximidades da ponta da fissura só é reproduzido pelo MEF com um excessivo refinamento da malha de elementos finitos em torno da ponta. Portanto, o método perde eficiência, sendo inviável em casos mais complexos.

Assim, devido à dificuldade de determinar os FIT pelo MEF, formulações numéricas não convencionais foram desenvolvidas nos anos recentes, como, por exemplo, os Métodos Sem Malhas (BELYTSCHKO, LU, GU, 1994, BABUŠKA, MELENK, 1995, DUARTE, ODEN, 1996, ODEN, DUARTE, ZIENKIEWICZ, 1998, LIU, 2010). Tais métodos dispensam o uso de elementos finitos e se fundamentam no conceito de aproximação por mínimos quadrados para a construção de funções de forma nodais (atreladas a pontos do domínio) de caráter não-polinomial. Uma limitação desses métodos é a necessidade de compatibilização das aproximações locais, definidas em suportes (nuvens) que podem estar sobrepostos, para a geração da função global de aproximação. Em contrapartida, uma vantagem é a possibilidade de enriquecimento da função de forma, multiplicando-a por uma função de interesse com boa capacidade de aproximação.

Com o intuito de aproveitar algumas vantagens dos Métodos sem Malha e ao mesmo tempo explorar a simplicidade do MEF, foi criado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (MELENK, BABUŠKA, 1996, DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000, STROUBOULIS, BABUŠKA, COPPS, 2000). Essencialmente, o MEFG combina as metodologias de aproximação na medida em que emprega uma malha de elementos para a definição das aproximações locais e faz uso do enriquecimento seletivo nodal dessas aproximações na forma proposta pelos Métodos Sem Malhas. O enriquecimento nodal pode ser realizado com funções especiais, inclusive com funções analíticas da mecânica da fratura, habilitando o método a reproduzir a solução do problema sem grande refinamento da malha. Porém, a determinação dos FIT deve ser obtida mediante um pós-processamento utilizando algum método de extração, como por exemplo, a integral J (SZABÓ, BABUŠKA, 1991, ISHIKAWA, KITAGAWA & OKAMURA, 1980).

Outra categoria de formulações numéricas não convencionais de elementos finitos são as chamadas formulações híbridas (ALMEIDA, PEREIRA, 1996, FREITAS, 1999, FREITAS, ALMEIDA, PEREIRA, 1999, ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 2000, GÓIS, 2004, GÓIS, 2009, ARGÔLO, 2010). Tais formulações têm como características aproximar campos de tensões e deslocamentos no domínio, além de deslocamentos no contorno do elemento de maneira

independente (daí vem a denominação "híbridas"). Essa peculiaridade tem como vantagem a possibilidade de obter respostas em tensão mais precisas, sem a perda de precisão decorrente da derivação dos campos de deslocamento, como ocorre nas formulações convencionais. Além disso, as aproximações não estão atreladas ao nó do elemento, permitindo uma maior flexibilidade na escolha das bases de funções, recorrendo a funções com características mais próximas da solução analítica quando disponíveis. Dada estas duas características, é possível a obtenção de soluções precisas com malhas grosseiras, inclusive comparativamente ao MEFG.

São três os tipos de formulações não convencionais dessa categoria: híbrido-mista, híbrido e híbrido-Treffz. Elas diferem entre si a depender do grau de restrição imposto sobre as funções de aproximação. A formulação híbrido-mista é vista como a mais simples dentre as três, pois não impõe qualquer restrição sobre as bases de funções aproximativas, proporcionando uma maior facilidade nas escolhas de tais funções. A formulação é construída impondo que as equações básicas do problema em forma forte passem a ser atendidas em forma fraca mediante média ponderada, permitindo a aproximação independente dos campos de tensão e deslocamento no domínio do elemento e campos de deslocamento no contorno do elemento.

A formulação híbrido é um caso particular da híbrido-mista ao impor que as funções de aproximação das tensões no domínio do elemento atendam a equação de equilíbrio. Dessa forma, restringem-se as funções a serem utilizadas para aproximar esse campo. Em contrapartida, essa formulação gera melhores soluções que a anterior. Matematicamente, o campo de deslocamento no domínio do elemento torna-se redundante, portanto, a aproximação é realizada apenas para os campos de tensão no domínio e deslocamento no contorno.

Por fim, a formulação híbrido-Trefftz (JIROUSEK, 1978, JIROUSEK, LEON, 1977, JIROUSEK, TEODORESCU, 1982, JIROUSEK, VENKATESH, 1992, JIROUSEK, WRÓBLEWSKI, 1996, FREITAS, 1998, FREITAS, ALMEIDA, PEREIRA, 1999, FREITAS, BUSSAMRA, 2000, BUSSAMRA, NETO, PONCIANO, 2014, BUSSAMRA, NETO, RODRIGUES, 2016) também é um caso particular da híbrido-mista ao impor que as funções de aproximação das tensões no domínio do elemento atendam a equação governativa: a equação de Navier. Apesar da forte restrição na escolha de funções para a aproximação, essa formulação proporciona soluções mais precisas (mesmo com malhas grosseiras) dentre as três formulações híbridas aqui apresentadas, particularmente nos problemas da elasticidade linear. Além disso, na formulação híbrido-Trefftz, as integrais das matrizes que compõem o sistema linear são

realizadas apenas no contorno do elemento, diminuindo o custo computacional do processamento. Assim como a formulação híbrido, apenas os campos de tensão e deslocamento são aproximados no domínio e contorno do elemento, respectivamente.

A possibilidade de utilização de funções analíticas provenientes da equação de Navier e a obtenção das matrizes do sistema linear pela integração no contorno do elemento são vantagens importantes da formulação híbrido-Trefftz sobre as outras formulações híbridas. Além disso, para o problema de sólidos com fissura é possível adicionar funções analíticas provenientes da solução mecânica da fratura aos campos de tensão no domínio do elemento, enriquecendo ainda mais a solução final. Tais funções da mecânica da fratura podem ser empregadas de forma que os FIT passem a ser incógnitas do sistema linear, dispensando, portanto, um procedimento de pós-processamento para a obtenção desses fatores. Tendo em vista todas essas vantagens, o elemento híbrido-Trefftz é o escolhido neste trabalho para tratar os subproblemas  $p_L^{(k)}$  do método da partição na análise dos problemas de sólidos fissurados.

É importante ressaltar que a contribuição desta pesquisa não se limita apenas à combinação do método da partição com a formulação híbrido-Trefftz, uma vez que o próprio método da partição, independente do método numérico a ele associado, mesmo limitando-se às análises planas, ainda tem sua aplicação pouco testada computacionalmente. De fato, o conjunto de aplicações testadas procura avançar para as possibilidades implícitas na formulação do método de generalização em termos de orientação e posicionamento de fissuras (inclinadas, interiores ou de borda, por exemplo).

Portanto, a utilização de uma nova estratégia para a solução de problemas de sólidos multifissurados via combinação do método da partição com a formulação híbrido-Trefftz e os avanços na formulação do método da partição compõem o conjunto de contribuições originais oferecidas por este trabalho.

## 1.1 - Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

- Contribuir para a análise de sólidos multifissurados via um método de decomposição desenvolvido recentemente: o método da partição;
- Estender a formulação deste método para abordar casos de fissuras internas e sujeitas ao modo I e II de abertura de fissura, pois a formulação apresentada nos trabalhos publicados até o momento não contempla esses casos;
- Aplicar em etapas do método da partição a formulação híbrido-Trefftz para obter uma solução numérica precisa;
- Utilizar funções analíticas da mecânica da fratura para enriquecer as aproximações do elemento híbrido-Trefftz. Com esse procedimento, é possível realizar a extração dos FIT diretamente da solução do sistema linear, dispensando o uso de um pós-processamento;
- Desenvolvimento de uma ferramenta computacional em linguagem FORTRAN para testar a nova formulação proposta do método da partição e sua combinação com a formulação híbrido-Trefftz;

## **1.2 - Diferenças entre os trabalhos desenvolvidos no mestrado e doutorado**

A presente pesquisa de doutorado deu continuidade ao trabalho de mestrado desenvolvido pelo próprio autor (ARGÔLO, 2010). Naquele, o método da partição foi aplicado avaliando fissuras de borda sujeitas apenas ao modo I de abertura. Por se tratar de um problema simples de sólido fissurado, a formulação do método da partição para esse tipo de problema é simplificada. Aqui, a aplicação do método é estendida a outros tipos de problemas, envolvendo fissuras internas sujeitas aos modos I e II de abertura e a casos de sólidos contendo furos, exigindo uma extensão da formulação do método da partição empregada no trabalho de mestrado.

A formulação híbrido-Trefftz também foi explorada no trabalho de mestrado, entretanto, empregada somente a base de funções em variáveis complexas para a aproximação das tensões no domínio do elemento, conforme sugerido em Muskhelishvili (1953 apud JIROUSEK; VENKATESH, 1992), para a resolução da equação de Navier. Naquele trabalho não houve o uso de funções enriquecedoras da mecânica da fratura. A ausência de tal enriquecimento acabou

gerando uma dificuldade maior na convergência da solução e a necessidade de uma estratégia de extração do FIT da fissura.

Já neste trabalho de doutorado, a solução da equação de Navier é alcançada via potenciais biarmônicos de tensão, simplificando a obtenção das funções de aproximação. Funções analíticas da mecânica da fratura também são utilizadas a fim de proporcionar uma melhor solução do problema e a obtenção dos FIT diretamente do sistema linear.

Em relação à base de funções para a aproximação dos deslocamentos no contorno do elemento, foi utilizada, no mestrado, uma estratégia de enriquecimento seletivo dos deslocamentos por três diferentes bases de funções, proposta por SOUZA (2008). No doutorado, essa estratégia de enriquecimento seletivo foi substituída pelo enriquecimento por funções derivadas da mecânica da fratura seletivamente nos contornos dos elementos contendo a ponta da fissura. Essa estratégia se mostrou mais eficiente para analisar os problemas aqui propostos.

### **1.3 - Estrutura do texto**

O texto segue a seguinte sequência: no capítulo 2 apresenta-se a teoria geral envolvendo o método da partição, explicando passo a passo cada subproblema e a obtenção da solução final do método. Além disso, descreve-se a modificação da formulação para incluir problemas contendo fissuras internas e inclinadas. O capítulo 3 trata do equacionamento da formulação híbrido-Trefftz. Destaca-se a construção do elemento a partir das aproximações dos campos de interesse e seu sistema linear final derivado da formulação híbrido-mista. As estratégias de enriquecimento da aproximação via solução da mecânica da fratura e do recurso de integração utilizado também são detalhadas. O capítulo 4 aborda questões referentes aos aspectos computacionais, relatando como foi desenvolvida a ferramenta computacional concebida para a implementação dos métodos descritos nesse trabalho. O capítulo 5 refere-se aos resultados numéricos obtidos utilizando a ferramenta computacional desenvolvida no sentido de validar o modelo de análise de problemas com múltiplas fissuras. O capítulo 6 reúne as conclusões e indica sugestões para futuros trabalhos. Por fim, registram-se as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento da tese. Apêndices foram anexados no texto a fim de fornecer informações complementares mais detalhadas dos métodos aqui utilizados, propositadamente

suprimidas do texto principal por concisão. No apêndice A, reúnem-se as equações básicas da elasticidade linear. No apêndice B, detalha-se a dedução do sistema linear final do método da partição. No apêndice C descreve-se como são obtidos os campos de aproximação no domínio do elemento da formulação híbrido-Trefftz. O apêndice D apresenta as equações das soluções analíticas da mecânica da fratura e sua utilização no enriquecimento dos campos de aproximação do elemento híbrido-Trefftz.

## 2- O Método da Partição

### 2.1- Considerações iniciais

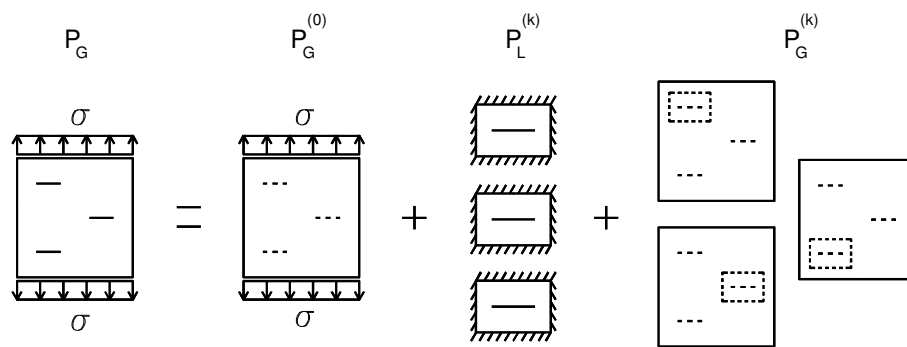
O método da partição foi apresentado originalmente com o nome de *splitting method* por Andersson, Babuška e Stehlin (1998), como uma formulação para análise de sólidos com múltiplas fissuras. Naquele trabalho, os autores descrevem a formulação matemática e apresentam testes numéricos em chapas multifissuradas, analisando vários cenários diferentes de combinação entre elas a fim de detectar as distribuições mais críticas de fissuras. Dando continuidade àquele estudo, Fawaz, Andersson e Newman (2003) realizaram verificações experimentais do FIT em fissuras e empregaram o método para análises numéricas. Na sequência, Fawaz e Andersson (2004) utilizaram o método a fim de calcular com precisão o FIT de fissuras de borda em furos. Em Babuška e Andersson (2005) apresenta-se uma demonstração matemática da convergência do método. Fawaz e Andersson (2006) empregaram o método para análise de fadiga. Alves (2010) propõe a utilização do MEFM no método da partição, particularmente para o cálculo do FIT no modo I. Argôlo (2010) deu continuidade ao trabalho de Alves (2010) utilizando além do MEFM, a formulação híbrido-Trefftz de tensão na análise dos subproblemas locais do método da partição. Ainda sobre o MEFM, Cotta (2016) empregou-o juntamente com o método da partição em problemas de fadiga.

Como se observa é ainda limitado o número de trabalhos publicados a respeito do método, o qual pode ser ainda considerado novo e pouco conhecido pela comunidade científica.

O método da partição tem por base a adoção de uma metodologia de decomposição em subproblemas (LACHENBRUCH, 1961; ALIABADI; ROOKE, 1991) e o Princípio de Bueckner (BUECKNER, 1958) para a solução de problemas da mecânica da fratura. A metodologia de decomposição resolve o problema de uma única fissura pela sobreposição de dois subproblemas: um em que o sólido é analisado sem a presença da fissura, porém com as condições de contorno prescritas, e o outro refere-se ao problema de uma fissura imersa num meio infinito. Este subproblema fornece o FIT, recorrendo-se ao Princípio de Buckner. Tal Princípio garante que o FIT de uma fissura inserida em chapa sob certo carregamento externo pode ser determinado de modo equivalente num problema de fissura imersa num meio infinito com carregamento aplicado nas suas faces.

Outros métodos, como o “Alternating Method”, aplicado originalmente por Smith, Emery e Kobayashi<sup>2</sup> (1967 apud ALIABADI; ROOKE, 1991), também podem ser referenciados como Métodos de Decomposição. O que difere essencialmente o método da partição do “Alternating Method” é que o primeiro dispensa o procedimento iterativo presente no segundo, graças à proposição de um terceiro subproblema na decomposição.

Assim, na sua concepção básica o método da partição procura resolver o problema original dividindo-o em três subproblemas: subproblema global  $P_G^{(0)}$ , subproblemas locais  $P_L^{(k)}$  e subproblemas globais  $P_G^{(k)}$ . A combinação entre os três subproblemas tem como restrição fundamental a condição de nulidade de tensões nas faces da fissura. Resumidamente, as etapas do método podem ser visualizadas na Figura 2-1.



**Figura 2-1 - Decomposição do problema original**

Para melhor entendimento do método, considere o problema original bidimensional da Figura 2-1 reproduzido na Figura 2-2:

A Figura 2-2 trata-se de uma chapa retangular submetida a certo carregamento externo e contendo três fissuras. O objetivo na análise do problema é obter os FIT para cada uma das fissuras. Os três subproblemas que compõem o método da partição são detalhados em seguida.

<sup>2</sup>SMITH, F.W., EMERY, A. F., & KOBAYASHI, A. S. (1967). Stress intensity factor for semi-circular cracks, Part 2 Semi-infinite solid. **Journal of Applied Mechanics**, 34, 953-959.



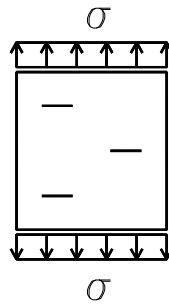


Figura 2-2 - Subproblema original  $P_G$ .

## 2.2- Etapas do Método da Partição

### 2.2.1- 1º Subproblema

O primeiro desses subproblemas é dito subproblema global ( $P_G^{(0)}$ ) e consiste na análise do problema original com as condições de contorno impostas, porém sem a presença de fissuras. No domínio (íntegro) do problema apenas indicam-se as posições e direções das fissuras por linhas tracejadas (Figura 2-3).

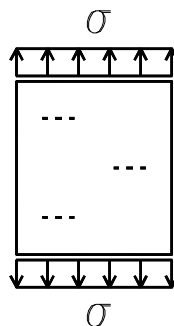


Figura 2-3 - Subproblema global  $P_G^{(0)}$ .

O objetivo dessa etapa é a determinação das tensões, genericamente indicadas por  $t_G^{(0)}$ , nas linhas que representam as posições das fissuras. Para este fim, pode-se empregar qualquer método numérico, por exemplo, o MEF em sua forma convencional. As tensões determinadas a partir de certa discretização adotada são, então, aproximadas por uma combinação linear de

funções polinomiais base (chamadas aqui de termos de aproximação (eq.(2.1)), expressas em função da variável de posição adimensionalizada pelo comprimento de cada fissura e com valor unitário na sua raiz.

$$t_G^{(0)} \approx \sum_{j=1}^J b_{i,j} \cdot Q_j(\xi_i / a_i) \quad (2.1)$$

Na expressão anterior,  $J$  é o número máximo de termos utilizados na combinação linear,  $i$  é o índice que representa a fissura em análise,  $j$  o índice que identifica cada um dos termos de aproximação,  $b_{i,j}$  são constantes e  $Q_j(\xi_i / a_i)$  os termos de aproximação propriamente ditos, representados pela seguinte expressão:

$$Q_j(\xi_i / a_i) = \left( \frac{\xi_i}{a_i} \right)^{j-1} \quad (2.2)$$

sendo  $\xi$  uma coordenada com origem na ponta da fissura e  $a_i$  o comprimento total da fissura  $i$ . A função dada em (2.2) pode ser ilustrada graficamente pela Figura 2-4, considerando caso de fissura de comprimento unitário, variando os valores de  $j$ .

Como as tensões  $t_G^{(0)}$  são encontradas pelo MEF, as constantes  $b_{i,j}$  são obtidas nessa etapa por regressão da equação (2.1), utilizando o método dos mínimos quadrados.

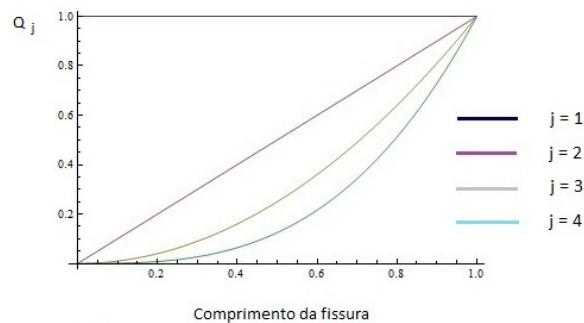


Figura 2-4 - Funções  $Q_j$

### 2.2.2- 2º Subproblema

A segunda etapa do método da partição é formada pelos subproblemas locais  $P_L^{(k)}$ . Nesta etapa, cada fissura é retirada do problema original e locada em um domínio arbitrário com contorno externo qualquer (Figura 2-5). Além disso, um contorno interno  $\Gamma$ , também arbitrário, é definido, devendo envolver completamente a fissura. O objetivo essencial desta etapa é determinar os FIT de cada fissura. No presente trabalho, por praticidade, o contorno interno  $\Gamma$  coincide com o contorno externo do domínio de  $P_L^{(k)}$ .

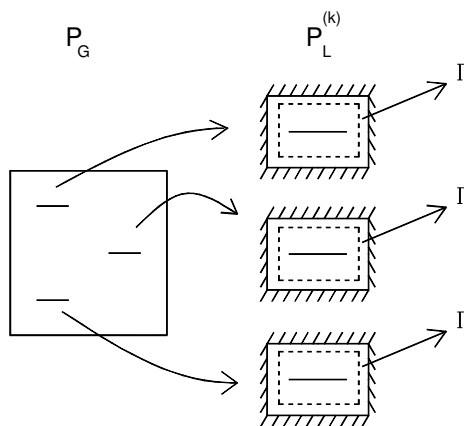


Figura 2-5 - Subproblema local  $P_L^{(k)}$ .

Um problema local é gerado para cada fissura e cada componente da base de aproximação usada em  $P_G^{(0)}$ . O número máximo de subproblemas locais a ser resolvido é dado pela relação (2.3), onde  $J$  é o número máximo de termos da aproximação polinomial da equação (2.2) e  $I$  o

número máximo de diferentes pontas de fissuras do problema original. Cada  $P_L^{(k)}$  pode ser analisado independentemente, assim, estes subproblemas podem ser avaliados simultaneamente via um processador paralelo.

$$\begin{aligned} M &= J \cdot I \\ k &= 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2.3)$$

Portanto, basicamente para cada fissura, carregamentos são aplicados nas suas faces. O carregamento distribuído é dado por cada componente  $Q_j$ , definido na equação (2.2). O número total de cargas aplicadas em uma fissura é igual ao número de termos polinomiais da base de aproximação. Como o valor máximo de cada carregamento é unitário, as distribuições de tensão na face da fissura podem ser expressas mediante combinação linear conforme indicada em (2.4)

$$t_L^{(k)} = - \sum_{j=1}^J \alpha_{j+(i-1)J} \cdot Q_j \quad (2.4)$$

Os parâmetros  $\alpha$  da combinação linear são, nesse momento, desconhecidos e serão avaliados após a solução do sistema final do método da partição. A Figura 2-6 exemplifica a aplicação de carregamentos constantes e lineares em cada face de fissura. Como se tratam de fissuras internas, cada semi-comprimento equivale a uma fissura  $i$  para o método da partição (ver seção 2.3).

O objetivo principal dessa etapa é a extração dos FIT de cada ponta da fissura. Tais fatores serão multiplicados pelos parâmetros  $\alpha$ , obtidos no final do método da partição, a fim de fornecer os FIT finais do problema original. Outro resultado importante é a determinação das forças de superfície no contorno  $\Gamma$  de cada subproblema local  $k$ . Essas forças serão impostas na etapa seguinte para a avaliação da interação entre fissuras.

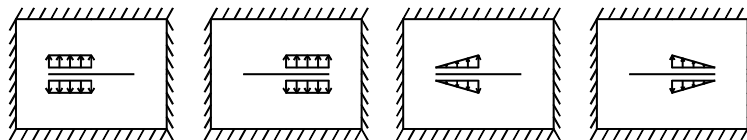


Figura 2-6 - Carregamentos unitários de  $P_L^{(k)}$

### 2.2.3- 3º Subproblema

O último subproblema é, na verdade, composto por um conjunto de subproblemas globais ( $P_G^{(k)}$ ), e tem por objetivo avaliar os efeitos das interações entre as fissuras. Nos  $P_G^{(k)}$ , considera-se o domínio do problema original, bem como as suas condições de contorno em deslocamento, porém sem os carregamentos externos e sem a presença das fissuras, porém, indicando as suas posições e direções.

Para simular os efeitos que uma fissura provoca sobre as demais são aplicadas as forças de superfície obtidas no subproblema  $P_L^{(k)}$  na linha de contorno  $\Gamma$  (Figura 2-7). Como o contorno externo coincide com o contorno  $\Gamma$ , essas forças tratam-se das reações dos vínculos do domínio do problema.

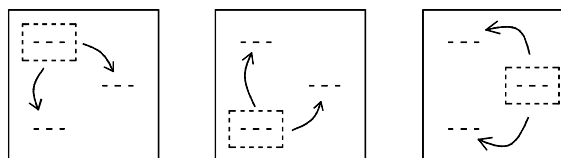


Figura 2-7 - Subproblema  $P_G^{(k)}$ .

O objetivo de cada subproblema atrelada à linha de contorno de uma fissura é a determinação das tensões, genericamente indicadas por  $\mathbf{t}_G^{(k)}$ , nas linhas das faces das outras fissuras. As tensões sucessivamente determinadas também são aproximadas pelos mesmos termos utilizados no  $P_G^{(0)}$ . Desse modo, as tensões  $\mathbf{t}_G^{(k)}$  são representadas por:

$$t_G^{(k)} = \sum_{j=1}^J c_{i,j}^{(k)} \cdot Q_j(\xi_i / a_i) \quad (2.5)$$

Na equação (2.5), os parâmetros  $c_{i,j}^{(k)}$  representam as constantes da combinação linear e cada componente  $Q_j(\xi_i / a_i)$  é dada pela equação (2.2). Observa-se ainda que as constantes  $c_{i,j}^{(k)}$  são conhecidas nessa etapa e que, assim como nos subproblemas  $P_L^{(k)}$ , os  $P_G^{(k)}$  são resolvidos  $k$  vezes.

Observa-se que a diferença entre o subproblema  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$  está apenas no carregamento aplicado.

#### 2.2.4- Solução numérica

A representação conceitual da sobreposição de todos os subproblemas pode ser dada pela seguinte equação:

$$P_G = P_G^{(0)} + \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot P_L^{(k)} + \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot P_G^{(k)} \quad (2.6)$$

Os parâmetros  $\alpha_k$  representam os fatores de escala que determinarão, em particular, os FIT finais das fissuras. Ainda na relação anterior,  $M$  representa o número máximo de problemas  $P_L^{(k)}$  e  $P_G^{(k)}$ , definido na equação (2.3).

Na equação (2.6), os valores de  $P_L^{(k)}$  no domínio externo ao contorno  $\Gamma$  são desconsiderados.

A montagem do sistema para o cálculo dos parâmetros  $\alpha$  decorre da imposição em forma fraca da condição de tensões resultantes nulas nas faces das fissuras. Essa imposição é realizada em forma de resíduos ponderados (eq.(2.7)).

$$\int_0^{a_i} t^T Q_{jj}(\xi_i/a_i) d\xi = 0 \quad \text{com } jj=1, \dots, J \quad (2.7)$$

onde:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_G^{(0)} + \mathbf{t}_L^{(k)} + \mathbf{t}_G^{(k)} \quad (2.8)$$

$$Q_{jj}(\xi_i/a_i) = \left( \frac{\xi_i}{a_i} \right)^{j-1} \quad (2.9)$$

sendo que  $\mathbf{t}$  representa o resultado da soma das tensões nas faces das fissuras de cada um dos três subproblemas (eq.(2.8)). O índice  $i$  faz referência à fissura,  $Q_{jj}$  é a função ponderadora (eq.(2.9)), função do comprimento da fissura ( $a_i$ ) e da coordenada  $\xi_i$ . A variável  $j$  da equação (2.9) representa o número do termo de aproximação de tensão utilizado.

Observando as equações (2.5) e (2.6), obtém-se a expressão final para  $\mathbf{t}_G^{(k)}$ :

$$\mathbf{t}_G^{(k)} = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot c_{i,j}^{(k)} \cdot Q_j(\xi_i/a_i) \quad (2.10)$$

sendo  $\alpha$  o parâmetro a ser determinado (observe que ele aparece tanto em  $P_L^{(k)}$  quanto em  $P_G^{(k)}$ , pois eles são dependentes).

As variáveis  $\mathbf{t}_G^{(0)}$  e  $\mathbf{t}_L^{(k)}$  são representadas pelas equações (2.1) e (2.4).

Substituindo as equações (2.1), (2.4) e (2.10) em (2.8) e o resultado disso em (2.7) obtém-se:

$$\int_0^{a_i} \sum_{j=1}^J \left[ b_{i,j} - \alpha_{j+(i-1)J} + \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot c_{i,j}^{(k)} \right] Q_j(\xi_i / a_i) \cdot Q_{j_2}(\xi_i / a_i) d\xi = 0 \quad (2.11)$$

Agrupando os termos dependentes de  $\alpha$  da equação acima obtêm-se o sistema linear representado em (2.12). A sua dedução pode ser encontrada no Apêndice (B).

$$[IG]\{\alpha\} = \{r\} \quad (2.12)$$

Onde  $[IG]$  é chamada de matriz de influência geral, já que mantém os termos responsáveis pela interação entre fissuras e  $\{r\}$  é o vetor dos termos independentes que inclui os parâmetros  $b_{i,j}$  indicados na equação (2.1). Com o vetor  $\alpha$  identificam-se os fatores de escala responsáveis para encontrar os FIT finais para cada fissura:

$$K^{(i)}(J) = \sum_{j=1}^J \alpha_{j+(i-1)J} \cdot K_j^{(j)} \quad (2.13)$$

sendo  $K_j^{(j)}$  os FIT calculados no subproblema  $P_L^{(k)}$  para cada termo e  $K^{(i)}(J)$  os FIT finais para cada fissura.

Um ponto a ser observado é que os subproblemas  $P_G^{(0)}$  e  $P_L^{(k)}$  são independentes entre si, assim como cada um dos problemas  $k$  do  $P_L^{(k)}$  e do  $P_G^{(k)}$ . Portanto, esse método permite explorar o recurso da paralelização, diminuindo, assim, o custo computacional. Além disso, em problemas cujas fissuras são iguais, só é necessário realizar o subproblema  $P_L^{(k)}$  uma vez, pois o resultado é reutilizado para todas as fissuras.



### 2.3- Casos particulares quanto à orientação e posicionamento de fissuras

Neste item, exemplifica-se o emprego do método da partição mediante dois casos típicos de sólido com fissuras: fissuras internas (Figura 2-8) e fissuras de borda (Figura 2-9).

Naturalmente a formulação do método é a mesma para ambos os casos, porém, como o número de FIT a determinar no caso de fissuras internas é maior, alguns procedimentos complementares devem ser realizados para extraí-los.

A fim de definir as bases de aproximação para o método da partição (eq. (2.2)), em cada fissura consideram-se eixos locais da coordenada  $\xi$ . No caso de fissura de borda, essa coordenada tem origem na ponta da fissura, crescendo em direção à sua raiz (Figura 2-10). Para a fissura interna, dois eixos locais devem ser definidos, sendo que ambos partem das pontas crescendo em direção ao centro (Figura 2-11).

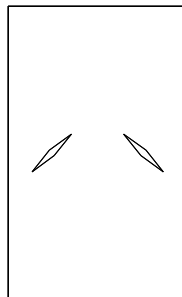


Figura 2-8 - Fissuras internas

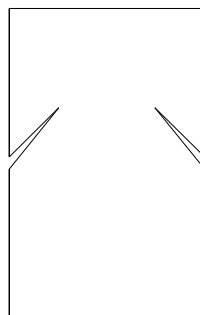
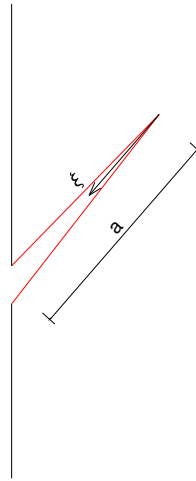
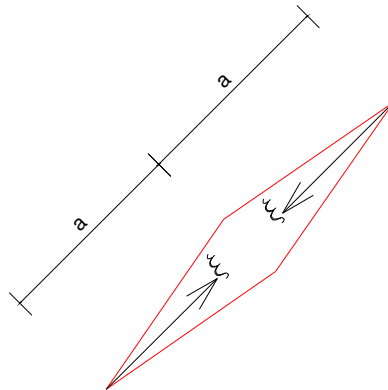


Figura 2-9 - Fissuras de borda



**Figura 2-10 - Eixo de referência para fissura de borda**



**Figura 2-11 - Eixo de referência para fissura interna**

O equacionamento do método para a situação de fissura de borda é realizado seguindo os passos do Apêndice (B).

Para o caso de fissuras internas (Figura 2-12), deve-se dividir as fissuras pela metade, tendo-se, assim, dois semi-comprimentos. Ao aplicar a equação (2.7), cada semi-comprimento será tratado analogamente como se trata uma fissura de borda.

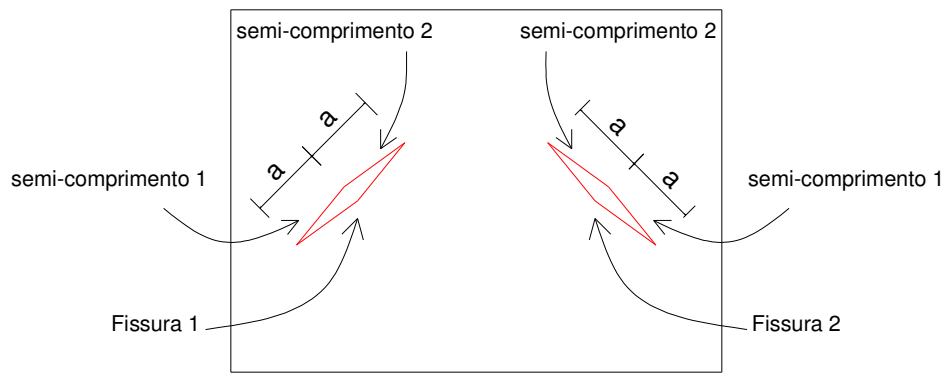


Figura 2-12 - Fissura interna

Nesse caso, o número de incógnitas  $\alpha$  será igual a duas vezes o número de fissuras  $I$  multiplicado pelo número de termos de aproximação  $J$ .

Nota-se que no caso de fissuras inclinadas interessam os FIT associados aos modos I e II de abertura. Portanto, a aplicação das tensões no problema  $P_L^{(k)}$  é realizada em partes, ou seja, primeiro aplicam-se as tensões tangenciais e normais em um semi-comprimento da fissura para em seguida repetir o procedimento para o outro semi-comprimento (Figura 2-13 e Figura 2-14).

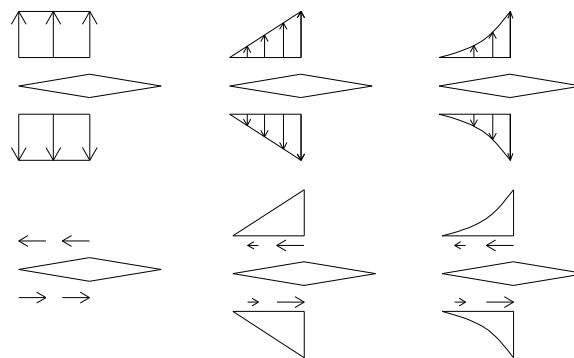


Figura 2-13 - Aplicação das tensões no primeiro semi-comprimento

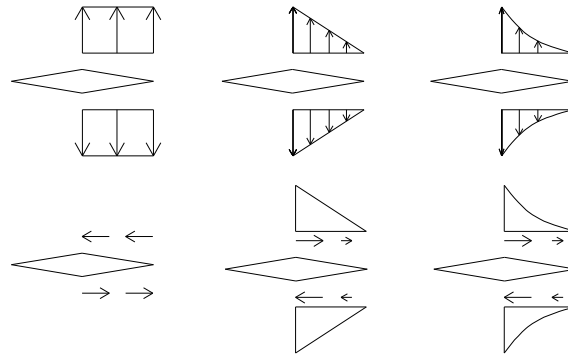


Figura 2-14 - Aplicação das tensões no segundo semi-comprimento

### **3- Formulação híbrido-Trefftz**

#### **3.1 - Formulações não convencionais de elementos finitos**

Pela sua simplicidade e acurácia, o MEF em sua versão clássica é o método mais utilizado na análise do comportamento de sólidos e estruturas. Sua estratégia é baseada na discretização do domínio em subdomínios, denominados elementos finitos, para a obtenção da solução de interesse. Nesse sentido a solução aproximada, em termos dos campos de deslocamentos, é construída pela combinação linear de funções polinomiais atreladas aos elementos, sendo as constantes da combinação linear os graus de liberdade do problema. Apesar de eficiente em uma grande variedade de problemas, há casos em que a solução via MEF não apresenta uma boa eficácia, como, por exemplo, no caso de sólidos fissurados.

A presença de fissura no sólido gera elevado gradiente de tensão nas vizinhanças de sua ponta. Como o MEF utiliza funções polinomiais em sua aproximação, as quais são suaves por definição, é necessário um forte refinamento da malha de elementos finitos a fim de captar esses gradientes. Tal procedimento acaba gerando um alto custo computacional na análise, sendo inviável a sua aplicação em casos mais complexos da mecânica da fratura. A fim de vencer esse entrave, novas formulações foram criadas, sendo denominadas de formulações não convencionais de elementos finitos.

Dentre as várias formulações convencionais existentes, faz-se referência neste trabalho às chamadas formulações híbridas, divididas em formulações híbrido-mista, híbrido e híbrido-Trefftz (ARGÔLO, 2010, BUSSAMRA, 2000, BUSSAMRA, NETO, PONCIANO, 2014, BUSSAMRA, NETO, RODRIGUES, 2016, FREITAS, ALMEIDA, PEREIRA, 1999, GÓIS, 2004, GÓIS, 2009).

As formulações híbridas são assim chamadas por aproximarem mais de um campo de interesse: tensão e deslocamento. Essa aproximação é realizada tanto no domínio quanto no contorno do elemento, independentes entre si. Com esse recurso, a solução pode ser obtida com uma menor discretização da malha de elementos finitos. As três formulações diferem-se de acordo com a restrição das funções de aproximação.

Para essas formulações, as condições de equilíbrio (A.1), compatibilidade (A.2), constitutiva (A.3 e A.4) e condição de contorno de Neumann (A.5) são atendidas em forma fraca via Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin. Dessa forma, campos de tensões e deslocamentos são aproximados no domínio do elemento, enquanto que campos de deslocamentos são aproximados no contorno.

A formulação híbrido-mista é obtida sem restrição sobre as funções aproximativas. Assim, essa formulação possui como vantagem a facilidade de utilização pela livre escolha da base de funções. A formulação híbrido é encontrada ao impor que as funções que aproximam as tensões no domínio do elemento atendam a equação de equilíbrio em forma forte. Com isso, apenas os campos de tensão no domínio e deslocamento no contorno são aproximados. Essa restrição proporciona uma melhor solução do problema em relação à híbrido-mista, porém uma menor liberdade na escolha das bases de funções. Por sua vez, a formulação híbrido-Trefftz é construída ao impor que as funções aproximativas dos campos de tensão no domínio do elemento atendam a equação governativa do problema: a equação de Navier. Assim como na formulação híbrido, a formulação híbrido-Trefftz aproxima apenas os campos de tensão no domínio e deslocamento no contorno. Devido ao tipo de restrição, essa é a formulação que fornece a solução mais precisa dentre as três aqui citadas, ao mesmo tempo que permite utilizar uma malha comparativamente mais grosseira. Em contrapartida, seu emprego exige a obtenção das funções que resolvam a equação de Navier, havendo, portanto, uma grande restrição na escolha da base de funções.

As formulações não convencionais acima permitem a utilização de funções não polinomiais em suas bases de aproximações. Deste modo, a escolha de funções de outra natureza produzem uma melhor aproximação nos campos de tensão em casos de sólidos fissurados, por exemplo, captando bem os gradientes de tensões. Por esse motivo, foi escolhido a formulação híbrido-Trefftz na obtenção das soluções de fissura neste trabalho. A seguir, essa formulação será descrita para problemas da elasticidade linear e mecânica da fratura, em particular.

## 3.2 - Formulação híbrido-Trefftz de tensão

A formulação híbrido-Trefftz foi iniciada mediante os trabalhos de Jirousek (1978), Jirousek & Leon (1977), Jirousek & Teodorescu (1982), Jirousek & Venkatesh (1992) e Jirousek & Wróblewski (1996) e desenvolvido posteriormente como formulação híbrido-Trefftz de tensão por Freitas (1998) e Freitas, Almeida & Pereira (1999), é baseada no Método proposto por Trefftz<sup>3</sup> (1926 apud JIROUSEK; WRÓBLEWSKI, 1996). Esse método consiste em explorar campos que atendam à equação diferencial governativa do problema, a equação de Navier.

A construção da solução aproximada se baseia no conceito de discretização do domínio em elementos finitos proposto pelo MEF. Ao garantir que os campos de tensões atendam à equação de Navier, todas as integrais envolvidas na construção do sistema resolvente ficam definidas apenas no contorno do elemento.

Ao aproximar independentemente dois campos, de tensão no domínio e de deslocamentos no contorno, a formulação passa a ser denominada híbrido-Trefftz de tensão. Conforme já comentado, são as bases de funções de aproximação no domínio do elemento que sofrem a restrição quanto ao atendimento à equação governativa de Navier. Os campos no contorno do elemento, ao contrário do domínio, não sofrem qualquer restrição, havendo uma maior liberdade para a sua escolha.

As funções de aproximação dos campos citados e o equacionamento da formulação é detalhado no que segue.

### 3.2.1 - Equação de Navier

Para ilustrar a formulação híbrido-Trefftz de tensão é necessário, inicialmente, descrever a obtenção da equação diferencial que governa o problema elástico linear: a equação de Navier. Para isso, as equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva da elasticidade linear devem ser conhecidas. Por brevidade, opta-se por descrevê-las no Apêndice (A).

---

<sup>3</sup>TREFFTZ, E. (1926). Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. **Procedures 2nd International Congress of Applied Mechanics**, Zurich, p. 131-137.

Primeiramente a equação aqui referenciada como de compatibilidade (A.2) é substituída na equação constitutiva (A.4), resultando em:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DL}^T \mathbf{u} \quad (3.1)$$

Em seguida, a equação (3.1) é substituída na equação de equilíbrio (A.1), obtendo-se a equação de Navier:

$$\mathbf{L}(\mathbf{DL}^T \mathbf{u}) = -\mathbf{b} \quad (3.2)$$

A solução da eq. (3.2) fornecerá as bases de funções para a aproximação das tensões no domínio do elemento, conforme será demonstrado na sequência do texto.

### 3.2.2 - Aproximação do campo de tensões no domínio

O campo de tensões no domínio do elemento é aproximado de acordo com a relação (3.3)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{SX} \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a matriz que contém as bases de funções aproximativas, soluções da equação de Navier, e  $\mathbf{X}$  o vetor que contém as constantes da combinação linear resultante. A matriz  $\mathbf{S}$  é obtida substituindo, inicialmente, a equação (3.1) em (3.2) resultando, na ausência de forças volúmicas, em:

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$



Aplicando a aproximação (3.3) em (3.4), tem-se:

$$L(SX) = 0 \quad (3.5)$$

Como a equação (3.5) deve ser verdade para qualquer  $X$ , resulta:

$$LS = 0 \quad (3.6)$$

A matriz  $S$  é derivada do potencial biharmônico de tensão  $\phi$ , solução da equação de Navier, conforme descrito em Freitas e Ji (1996a):

$$S = \partial \phi \quad (3.7)$$

Sendo  $\partial$  o operador diferencial dado por:

$$\partial = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

E  $\phi$  escrito em coordenadas polares:

$$\phi = \{ r^n \cos(n\theta) \quad r^n \sin(n\theta) \quad r^n \cos[(n-2)\theta] \quad r^n \sin[(n-2)\theta] \} \text{ com } n > 2 \quad (3.9)$$

Portanto, as componentes da matriz  $S$  são determinadas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} S_r \\ S_\theta \\ S_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} r^n \cos(n\theta) & r^n \sin(n\theta) & r^n \cos[(n-2)\theta] & r^n \sin[(n-2)\theta] \end{matrix} \right\} \quad (3.10)$$

A relação seguinte descreve a aproximação de tensão no domínio do elemento definida pela relação (3.3):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} r^n \cos(n\theta) & r^n \sin(n\theta) & r^n \cos[(n-2)\theta] & r^n \sin[(n-2)\theta] \end{matrix} \right\} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & \dots & S_{m1} \\ S_{12} & S_{22} & \dots & S_{m2} \\ S_{13} & S_{23} & \dots & S_{m3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix}$$

Para  $n = 2$  em (3.9), são geradas três constantes independentes do campo de tensão. Já para  $n > 2$ , quatro polinômios de Tchebychev independentes são obtidos. Tais polinômios são utilizados na construção da aproximação do campo de tensões, definido pela matriz  $S$ . A escolha do número de funções irá depender do grau a ser adotado na aproximação. Um exemplo de obtenção das tensões variando o valor de  $n$  pode ser visualizado no Apêndice (C).

Os deslocamentos no domínio do elemento podem ser obtidos a partir da matriz  $S$ . Para isso, tais deslocamentos são aproximados por:

$$\mathbf{u}_\Omega = \mathbf{U}\mathbf{X} \quad (3.12)$$

Sendo  $\mathbf{U}$  a matriz que contém as bases de função aproximativas para o campo de deslocamento do domínio do elemento.

Substituindo (3.12) em (3.2) e comparando com (3.6), obtém-se:

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T\mathbf{U} \quad (3.13)$$

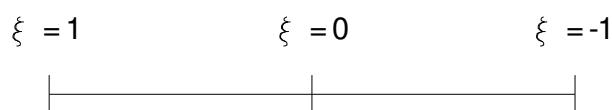
O Apêndice (C) fornece o desenvolvimento dos campos de tensões e a obtenção da matriz  $\mathbf{U}$  dado um grau qualquer para as funções aproximativas.

### 3.2.3 - Aproximação do campo de deslocamentos no contorno estático

No contorno estático do elemento, os campos de deslocamentos não obedecem a uma forte restrição comparada aos campos do domínio do elemento, proporcionando uma ampla escolha das bases de funções para sua composição.

Estas funções são construídas com referência a um sistema local de coordenadas adimensionais ( $\xi$ ) com origem na mediana de cada lado do elemento (Figura 3-1). Os deslocamentos do lado coincidente com o contorno cinemático do sólido são conhecidos e impostos em forma forte.

A equação que define a aproximação dos deslocamentos no contorno é representada pela relação (3.14):



**Figura 3-1 - Sistema de coordenadas no contorno estático do elemento**

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{d} \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{u}$  a aproximação do campo dos deslocamentos,  $\mathbf{Z}$  a matriz contendo a base de funções e  $\mathbf{d}$  o vetor que contém as constantes da combinação linear. Ao contrário do MEF, essas constantes não representam os graus de liberdade do problema.

Aspirando a obtenção de uma boa aproximação dos campos de deslocamento aliada a um bom condicionamento do sistema, a matriz  $\mathbf{Z}$  será formada pelas funções de Tchebychev, dada por:

$$Z_{ij} = \cos \left[ n \arccos(\xi) \right] \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq 1 \text{ e } n \geq 0 \quad (3.15)$$

onde  $i$  e  $j$  correspondem às linhas e colunas na matriz  $\mathbf{Z}$  e  $n$  representa o grau do polinômio aproximador.

A aproximação apresentada em (3.14) é, portanto, representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \dots & \mathbf{Z}_{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_m \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.2.4 - Equacionamento

Após a apresentação das aproximações utilizadas no elemento híbrido-Trefftz, descrevem-se suas aplicações na construção do sistema linear final fundamentado na formulação geral híbrido-mista dos problemas de valor de contorno. É importante, inicialmente,

introduzir tal formulação, derivando-se dela a formulação híbrido-Trefftz, mediante a imposição de restrições nas grandezas a serem determinadas.

O passo inicial consiste em exprimir em forma de resíduos ponderados as equações de equilíbrio (A.1), compatibilidade (A.2), constitutiva (A.3) bem como a condição de Neumann (A.5). Admite-se que as restrições aos deslocamentos no contorno cinemático sejam previamente atendidas em forma forte (A.6).

As expressões em resíduos ponderados envolvidas na formulação são:

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}^T (\mathbf{L}^T \mathbf{u} - \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}^T (\mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{Z}^T (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

Sendo  $\mathbf{S}^T$ ,  $\mathbf{U}^T$  e  $\mathbf{Z}^T$  vetores que reúnem funções ponderadoras e  $\mathbf{f}$  a matriz constitutiva de flexibilidade. Nota-se que a equação (3.17) combina as relações de compatibilidade e constitutiva do material.

Integrando por partes a equação (3.17), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{S})^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}^T \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{I}\mathbf{S})^T \mathbf{u}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{I}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

Para a formulação híbrido-mista, a aproximação do campo de deslocamentos no domínio do elemento é independente da aproximação do campo de tensões. Assim, esses deslocamentos podem ser aproximados por:

$$\mathbf{u}_\Omega = \mathbf{U} \mathbf{d}_\Omega \quad (3.21)$$

Portanto, substituindo as aproximações dadas em (3.3), (3.14) e (3.21) nas equações (3.20), (3.18) e (3.19), obtém-se o sistema linear para a formulação híbrido-mista:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{A}_\Omega & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}_\Omega^\top & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}^\top & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{d}_\Omega \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ -\mathbf{q}_\Omega \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Onde:

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{S}^\top \mathbf{f} \mathbf{S} \, d\Omega \quad (3.23)$$

$$\mathbf{A}_\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{S})^\top \mathbf{U} \mathbf{d} \, d\Omega \quad (3.24)$$

$$\mathbf{A} = \int_{\Gamma} (\mathbf{I}\mathbf{S})^\top \mathbf{Z} \, d\Gamma \quad (3.25)$$

$$\mathbf{e} = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{I}\mathbf{S})^\top \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (3.26)$$

$$\mathbf{q}_\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{U}^\top \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega \quad (3.27)$$

$$\mathbf{q} = \int_{\Gamma} \mathbf{Z}^\top \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (3.28)$$

A fim de particularizar o sistema (3.22) para a formulação híbrido-Trefftz, é necessário impor a restrição de atendimento à equação de Navier por parte da aproximação de tensão no domínio. Assim, substituindo a equação (3.6) no sistema linear (3.22), observa-se que a matriz  $\mathbf{A}_\Omega$  torna-se trivial, não havendo, portanto, aproximação do campo de deslocamentos no domínio do elemento.

O sistema linear para um elemento é, então, representado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e} \\ -\mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Para simplificar as equações (3.25) e (3.26), obtém-se a aproximação do campo de tensões no contorno do elemento pelo teorema de Cauchy, substituindo a equação (3.3) em (A.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}\mathbf{S}\mathbf{X} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{T}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{T} = \mathbf{I}\mathbf{S}$ .

Substituindo a relação  $\mathbf{T} = \mathbf{I}\mathbf{S}$  em (3.25), a matriz  $\mathbf{A}$  fica representada por:

$$\mathbf{A} = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T}^T \mathbf{Z} d\Gamma \quad (3.31)$$

E substituindo a relação  $\mathbf{T} = \mathbf{I}\mathbf{S}$  em (3.26), a matriz  $\mathbf{e}$  fica representada por:

$$\mathbf{e} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (3.32)$$

Como os campos de tensão no domínio do elemento são auto-equilibrados, a matriz  $\mathbf{F}$  é representada por uma integral no contorno do elemento. Esse fato é verificado realizando o

seguinte procedimento: dada a expressão de  $F$  em (3.23), a equação (3.13) e sabendo que a matriz de flexibilidade  $f$  é a inversa da matriz de rigidez  $D$ , tem-se:

$$F = \int_{\Omega} S^T f S d\Omega = F = \int_{\Omega} S^T f D L^T U d\Omega = \int_{\Omega} S^T L^T U d\Omega \quad (3.33)$$

Integrando a equação acima por partes, resulta em:

$$F = \int_{\Omega} S^T L^T U d\Omega = - \int_{\Omega} (LS)^T U d\Omega + \int_{\Gamma} (IS)^T U d\Gamma \quad (3.34)$$

Pela condição (3.6) e sabendo que  $T = IS$ , a equação (3.34) passa a ser:

$$F = \int_{\Gamma} T^T U d\Gamma \quad (3.35)$$

Vale observar que a matriz  $F$  é formada pelo produto de matrizes que possuem colunas linearmente independentes, essa condição garante que a matriz seja não-singular e positiva definida (FREITAS, 1998).

Observando a expressão das matrizes que compõem o sistema linear da formulação híbrido-Trefftz, (3.28), (3.31), (3.32), (3.35), observa-se que todas as integrais são realizadas no contorno do elemento e não no domínio, diminuindo o custo computacional da análise. Essa é uma outra vantagem da formulação.

A condição necessária e suficiente para a existência e unicidade da solução para formulações mistas foi tratada por Zienkiewicz et al. (1986). Para a formulação híbrido-Trefftz, essa condição é dada por:



$$n_x \geq n_d \quad (3.36)$$

ou seja, a solução do sistema linear (3.29) existe e é única se o número de incógnitas provenientes da aproximação das tensões,  $X$ , for maior ou igual ao número de incógnitas provenientes da aproximação dos deslocamentos,  $d$ .

O sistema dado pela equação (3.29) é aplicado apenas a um elemento finito. Como uma malha possui mais de um elemento finito, o sistema linear do conjunto (global) deve ser montado de forma que as condições de equilíbrio e continuidade no contorno dos elementos vizinhos sejam atendidas.

### 3.3 - Emprego das funções da mecânica da fratura

O emprego da formulação híbrido-Trefftz no presente trabalho procurou seguir metodologia descrita nos trabalhos de Freitas e Ji (1996a,b). Os autores propuseram o uso de funções analíticas da mecânica da fratura na aproximação de tensões no domínio do elemento a fim de determinar os FIT diretamente da solução do sistema linear. Essa estratégia consiste no uso de potenciais biarmônicos de tensão  $\phi_k$  (eq. (3.37)) provenientes da mecânica da fratura.

$$\begin{aligned} \phi_{k_I} &= \sqrt{\frac{r^3}{2\pi}} \left[ \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \phi_{k_{II}} &= \sqrt{\frac{r^3}{2\pi}} \left[ -\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Portanto, o vetor de potenciais biarmônicos de tensão (eq. (3.9)), que geram as funções aproximativas da matriz  $S$ , é agora formado por:

$$\phi = \{\phi_{k_I}, \phi_{k_{II}}, r^n \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta), r^n \cos[(n-2)\theta], r^n \sin[(n-2)\theta]\} \quad (3.38)$$

nota-se que  $\phi_{k_I}$  e  $\phi_{k_{II}}$  não variam de acordo com os valores de  $n$ .

Ao aplicar o operador de derivadas parciais  $\partial$ , apresentado em (3.8), nos potenciais  $\phi_{k_I}$  e  $\phi_{k_{II}}$ , as soluções analíticas em tensão da mecânica da fratura para os modos I e II são reproduzidas (KUNDU, 2008).

A adição desses potenciais ocasiona uma ampliação da matriz  $S$ , como observado em (3.39).

$$S = \begin{bmatrix} S_{k11} & S_{k12} & S_{11} & \dots \\ S_{k21} & S_{k22} & S_{21} & \dots \\ S_{k31} & S_{k32} & S_{31} & \dots \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

As duas primeiras colunas da matriz  $S$  correspondem à aproximação particular da mecânica da fratura associada aos potenciais (3.37). A aproximação das tensões no domínio do elemento (eq. (3.11)) é, portanto, dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \end{bmatrix} \left\{ \phi_{k_I}, \phi_{k_{II}}, r^n \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta), r^n \cos[(n-2)\theta], r^n \sin[(n-2)\theta] \right\} \begin{Bmatrix} X_{k_I} \\ X_{k_{II}} \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k11} & S_{k21} & S_{11} & S_{21} & \dots & S_{m1} \\ S_{k12} & S_{k22} & S_{12} & S_{22} & \dots & S_{m2} \\ S_{k13} & S_{k23} & S_{13} & S_{23} & \dots & S_{m3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{k_I} \\ X_{k_{II}} \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix}$$

Portanto, na construção do sistema linear (3.29), as duas primeiras incógnitas,  $X_{k_I}$  e  $X_{k_{II}}$ , representam os FIT dos modos I e II, respectivamente. Assim, nota-se a grande vantagem do método ao determinar tais grandezas diretamente na solução do sistema linear, dispensando o uso de um pós-processamento para a busca desses valores.

Para o campo dos deslocamentos, novas funções de aproximação também são adicionadas visando uma melhor aproximação dos contornos que contém o nó da ponta da fissura. Como as funções analíticas da mecânica da fratura em deslocamento estão na ordem de  $r^{1/2}$ , sendo  $r$  o raio da coordenada polar, serão adicionadas à matriz  $\mathbf{Z}$  da aproximação (3.14) as funções racionais:

$$(\xi - \xi_0)^{1/2} \quad (3.41)$$

Sendo  $\xi_0$  a coordenada adimensional da ponta da fissura.

Com essa adição, a aproximação dos deslocamentos no contorno do elemento, equação (3.16), passa a ser representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\xi - \xi_0)^{1/2} & 0 & Z_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\xi - \xi_0)^{1/2} & 0 & Z_{22} & \dots & Z_{m2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_m \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

As aproximações para tensão e deslocamento da mecânica da fratura devem ser construídas tendo como referência o sistema de coordenadas localizado na ponta da fissura. Já para as demais funções aproximativas, a referência é dada pelo sistema de coordenadas no centróide do elemento, para as tensões, e na mediana dos contornos, para os deslocamentos. Um exemplo de construção dessas aproximações e uma melhor explicação da obtenção dos FIT é ilustrado no Apêndice (D).

A seguir, será ilustrada a integração das expressões que geram as matrizes  $F$  e  $A$ , considerando a adição das funções da mecânica da fratura.

### 3.4 - Integração das componentes das matrizes do sistema linear final

Antes de detalhar a integração das componentes das matrizes do sistema linear (3.29), é necessário ilustrar a obtenção das matrizes  $F$  e  $A$ , com a adição de função da mecânica da fratura em sua aproximação. Portanto, considere a matriz  $F$  reproduzida em (3.43):

$$F = \int (IS)^T U d\Gamma \quad (3.43)$$

Sendo  $I$  obtida no Apêndice (A), pode-se reescrever a equação (3.43) em (3.44):

$$F = \int \left( \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{k11} & S_{k21} & S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ S_{k21} & S_{k22} & S_{21} & \cdots & S_{2n} \\ S_{k31} & S_{k32} & S_{31} & \cdots & S_{3n} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} U_{k11} & U_{k21} & U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ U_{k21} & U_{k22} & U_{21} & \cdots & U_{2n} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (3.44)$$

As duas primeiras colunas das matrizes  $S$  e  $U$  representam as funções de aproximação da mecânica da fratura. Os demais termos são as funções solução da equação de Navier.

A obtenção da matriz  $A$  é realizada de maneira semelhante. Sua expressão é reproduzida em (3.45):

$$A = \int (IS)^T Z d\Gamma \quad (3.45)$$

E reescrevendo em (3.46), tem-se:

$$A = \int \left( \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{k11} & S_{k21} & S_{11} & \dots & S_{1n} \\ S_{k21} & S_{k22} & S_{21} & \dots & S_{2n} \\ S_{k31} & S_{k32} & S_{31} & \dots & S_{3n} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} Z_{k11} & 0 & Z_{11} & \dots & 0 \\ 0 & Z_{k22} & 0 & \dots & Z_{2n} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (3.46)$$

Novamente, as duas primeiras colunas das matrizes  $S$  e  $Z$  representam as funções de aproximação da mecânica da fratura. Os demais termos da matriz  $S$  são as funções solução da equação de Navier, com o referencial localizado no centróide do elemento e os demais termos da matriz  $Z$  são as funções de Tchebychev com o referencial localizado na mediana do contorno do elemento.

As parcelas referentes a aproximação da mecânica da fratura são utilizadas apenas nos elementos que contém a ponta da fissura. Nos demais, as expressões em (3.44) e (3.46) são reproduzidas sem as colunas referentes aos termos  $S_k$ ,  $U_k$  e  $Z_k$ .

Para os elementos que não contém a ponta da fissura, as funções das matrizes  $S$ ,  $U$  e  $Z$ , são funções polinomiais que não geram singularidades. Portanto, a integração das componentes dessas matrizes do sistema linear são realizadas via quadratura de Gauss-Legendre.

Por sua vez, para os elementos que contém a ponta da fissura, as funções das matrizes  $S$ ,  $U$  e  $Z$ , contém funções polinomiais e funções solução da mecânica da fratura. As parcelas das matrizes  $S$  e  $U$  (esta obtida por intermédio da matriz  $S$ ) provenientes da solução analítica da mecânica da fratura são funções racionais da ordem  $r^{-1/2}$ , provocando singularidade na ponta da fissura. Para tais funções, a quadratura de Gauss-Legendre não é suficiente para realizar a integração numérica. Portanto, uma estratégia especial é utilizada aqui para a integração da matriz  $F$  e  $A$ , sendo descrita a seguir.

Inicialmente, a matriz  $F$  pode ser representada, após as operações matriciais de (3.44), da seguinte forma:

$$F = \begin{bmatrix} [S_f U_f] & [S_f U_p] \\ [S_p U_f] & [S_p U_p] \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Onde  $S_f U_f$ ,  $S_f U_p$ ,  $S_p U_f$ ,  $S_p U_p$ , são submatrizes da matriz  $F$ , definidas da seguinte forma:

- $S_f U_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e  $U$ ;
- $S_f U_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e das funções polinomiais de  $U$ ;
- $S_p U_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e funções provenientes da mecânica da fratura de  $U$ ;
- $S_p U_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e  $U$ ;

Cada uma das submatrizes são integradas com diferentes estratégias a depender do contorno que estará sendo integrado. A submatriz  $S_f U_f$  é nula nos contornos que representam a face da fissura, pois, nessa situação, as tensões valem zero. Nos demais contornos que contém a ponta, realiza-se uma integração analítica, pois seus termos são conhecidos a partir da relação (3.37). Já nos contornos que não contém a ponta da fissura, é aplicada uma integração de Gauss-Legendre.

A submatriz  $S_f U_p$  é também nula nos contornos que representam a face da fissura. Nos contornos que não contém a ponta da fissura, sua integração é realizada pela quadratura de Gauss-Legendre. Já nos contornos que contém a ponta da fissura, os termos de  $S_f$  apresentam singularidade na região da ponta. Portanto uma integração semi-analítica deve ser realizada, extraíndo a singularidade da seguinte forma:

$$\int S_f^T U_p d\Gamma = \int S_f^T (U_p - \tilde{U}_p) d\Gamma + \int S_f^T \tilde{U}_p d\Gamma \quad (3.48)$$

Onde  $\tilde{U}_p$  é a matriz  $U_p$  definida na ponta da fissura. A segunda integral de (3.48) é realizada analiticamente. Já a primeira integral, é realizada via quadratura de Gauss-Legendre. Como o termo  $(U_p - \tilde{U}_p)$  tende a zero rapidamente à medida que se aproxima da ponta da fissura, a integral  $\int S_f^T (U_p - \tilde{U}_p) d\Gamma$  não apresentará singularidade.

A submatriz  $S_p U_f$  é também nula nos contornos que representam a face da fissura e, nos contornos que não contém a ponta da fissura, sua integração é realizada pela quadratura de Gauss-Legendre. Apesar de não apresentar singularidade, é realizada a integração semi-analítica nos contornos contendo a ponta da fissura para uma melhor precisão.

Por fim, a submatriz  $S_p U_p$  é integrada via quadratura de Gauss-Legendre em qualquer contorno do elemento, exceto nas faces da fissura, pois sua integral é nula.

Após proceder a integração da matriz  $F$ , parte-se para a integração da matriz  $A$ . Esta pode ser representada, após as operações matriciais de (3.46), da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} [S_f Z_f] & [S_f Z_p] \\ [S_p Z_f] & [S_p Z_p] \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Onde  $S_f Z_f$ ,  $S_f Z_p$ ,  $S_p Z_f$ ,  $S_p Z_p$ , são submatrizes da matriz  $A$ , definidas da seguinte forma:

- $S_f Z_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e do termo (3.41) de  $Z$ ;
- $S_f Z_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções provenientes da mecânica da fratura de  $S$  e das funções de Tchebychev de  $Z$ ;
- $S_p Z_f$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e funções provenientes da relação (3.41) de  $Z$ ;
- $S_p Z_p$  - submatriz contendo a multiplicação das funções polinomiais de  $S$  e  $U$ ;

A submatriz  $S_f Z_f$ , assim como a submatriz  $S_f U_f$ , é nula nos contornos que representam a face da fissura. Nos demais contornos que contém a ponta, faz-se integração analítica, pois seus termos são conhecidos. Já nos contornos que não contém a ponta da fissura, é realizada integração de Gauss-Legendre.

A submatriz  $S_f Z_p$ , assim como a submatriz  $S_f U_p$ , é nula nos contornos que representam a face da fissura. Nos contornos que não contém a ponta da fissura, sua integração é realizada pela quadratura de Gauss-Legendre. Nos contornos que contém a ponta da fissura, os termos de  $S_f$  apresentam singularidade na região da ponta, portanto uma integração semi-analítica deve ser realizada, extraindo a singularidade da seguinte forma:

$$\int S_f^T Z_p d\Gamma = \int S_f^T (Z_p - \tilde{Z}_p) d\Gamma + \int S_f^T \tilde{Z}_p d\Gamma \quad (3.50)$$

Onde  $\tilde{Z}_p$  é a matriz  $Z_p$  definida na ponta da fissura. A segunda integral de (3.50) é realizada analiticamente. Já a primeira integral, é realizada via quadratura de Gauss-Legendre. Como o termo  $(Z_p - \tilde{Z}_p)$  vai a zero rapidamente à medida que se aproxima da ponta da fissura, a integral  $\int S_f^T (Z_p - \tilde{Z}_p) d\Gamma$  não apresentará singularidade.

A submatriz  $S_p Z_f$ , assim como a submatriz  $S_p U_f$ , é nula nos contornos que representam a face da fissura e nos demais contornos, sua integração é realizada pela quadratura de Gauss-Legendre.

Finalmente, a matriz  $S_p Z_p$ , assim como a matriz  $S_p U_p$ , é integrada via quadratura de Gauss-Legendre em qualquer contorno do elemento, exceto nas faces da fissura, pois sua integral é nula.



## 4- Aspectos Computacionais

A fim de testar a formulação desenvolvida para o método da partição referente a fissuras internas inclinadas e a combinação entre este método e a formulação híbrido-Trefftz, foi desenvolvido um programa computacional em linguagem FORTRAN ao longo do doutorado. A estratégia de programação foi baseada na programação modular, ou seja, o programa é dividido em módulos que interagem entre si pelo gerenciamento de um módulo principal. Cada módulo é formado por diversas funções e sub-rotinas invocadas pelo módulo principal.

O programa é dividido em três etapas principais: Elemento T6, híbrido-Trefftz e método da partição. Cada uma das etapas é explicada nas seções seguintes.

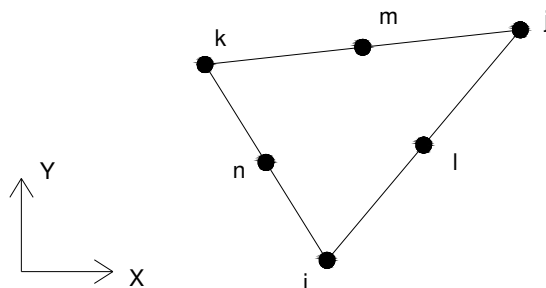
Um fluxograma do programa desenvolvido é apresentado no Apêndice E.

### 4.1 - Elemento T6

Para a etapa do elemento finito clássico, foi programado um elemento finito triangular isoparamétrico de seis nós (Figura 4-1), onde os deslocamentos são aproximados por função quadrática (ASSAN, 2003). No presente trabalho, esse elemento foi denominado elemento T6.

A construção desse elemento é realizada pelos seguintes módulos:

- **Principal T6** - módulo principal para o elemento T6 que irá gerenciar todos os módulos dessa etapa;
- **Matriz Rigidez** - módulo responsável pela construção da matriz de rigidez do elemento T6;
- **Quadratura Hammer** - módulo responsável por fornecer os pontos e pesos de Hammer para a integração numérica do elemento T6;
- **Vetor de Forças** - módulo responsável pela construção do vetor de forças do elemento T6;
- **Tensões e Deformações** - módulo responsável pelo cálculo das tensões e deformações após a obtenção do vetor de deslocamentos.



**Figura 4-1 - Elemento T6**

Basicamente, o módulo Principal T6 irá chamar as funções e sub-rotinas presentes nos demais módulos. Inicialmente, é realizada a construção da matriz de rigidez do elemento, invocando o módulo Quadratura de Hammer para a integração numérica. Em seguida, é realizada a construção do vetor de forças do elemento. Finalmente, o sistema linear é resolvido dentro do próprio Principal T6 utilizando uma rotina de solução da biblioteca IMSL do FORTRAN. Após a solução ser obtida, as deformações e tensões são calculadas na etapa de pós-processamento.

## **4.2 - Elemento híbrido-Trefftz**

Essa etapa envolve a construção do elemento finito híbrido-Trefftz. As rotinas foram programadas para que o elemento pudesse ser utilizado com qualquer formato e número de pontos. Para os exemplos numéricos desta pesquisa, utilizou-se elemento híbrido-Trefftz de formato triangular e quadrilateral, sendo que os lados dos elementos podem ser distorcidos, como acontece nos elementos finitos isoparamétricos clássicos. Em particular, o lado do elemento híbrido-Trefftz desse trabalho pode ser curvado, aproximando a geometria do contorno do elemento por equação do sexto grau. Na Figura 4-2, pode-se observar alguns exemplos de elementos híbrido-Trefftz empregados.

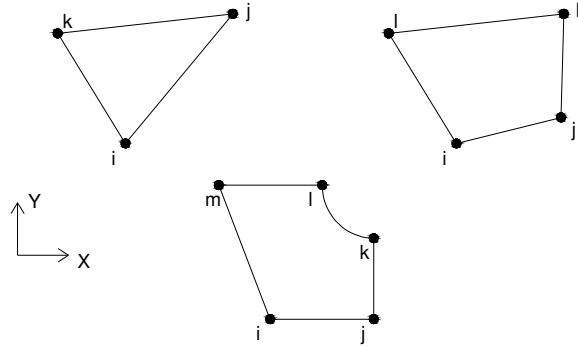


Figura 4-2 - Exemplos de elementos híbrido-Trefftz

Os módulos que formam essa etapa são:

- **Principal HT** - módulo principal para o elemento híbrido-Trefftz que irá gerenciar todos os módulos dessa etapa;
- **Entrada HT** - módulo que realiza a leitura do arquivo de entrada para o elemento híbrido-Trefftz;
- **Domínio HT** - módulo responsável pela formulação do domínio do elemento HT;
- **Contorno HT** - módulo responsável pela formulação do contorno do elemento HT;
- **Biblioteca HT** - módulo com funções e sub-rotinas auxiliares contendo solução do sistema linear e polinômios de Tchebyshev.

O módulo Principal HT irá chamar as funções e sub-rotinas presentes nos demais módulos. Inicialmente, é realizada a leitura do arquivo de entrada para o elemento híbrido-Trefftz invocando o módulo Entrada HT. Em seguida, é processada a construção da matriz referente ao domínio do elemento mediante as sub-rotinas do módulo Domínio HT (matriz  $\mathbf{F}$  da equação (3.29)). A terceira etapa refere-se à construção da matriz dos termos do contorno do elemento (matriz  $\mathbf{A}$  da equação (3.29)) mediante os módulos Contorno HT e Biblioteca HT. As matrizes  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{q}$  da equação (3.29) que tratam, respectivamente, do vetor de deslocamentos e forças prescritas são obtidos diretamente pelo módulo Principal HT. O sistema linear final é calculado pelo método da eliminação de Gauss.

### 4.3 - Método da Partição

O módulo principal do programa refere-se à aplicação do método da partição. Aqui, o programa irá iniciar os subproblemas do método onde serão chamadas as etapas referentes ao MEF, representado aqui pelo elemento T6, ou ao elemento híbrido-Trefftz.

O programa é iniciado pela leitura do arquivo de entrada do método da partição. Foi utilizado um programa auxiliar para gerar as malhas de cada subproblema. Os domínios dos subproblemas  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$  foram modelados e discretizados pelos elementos T6.

Já os subproblemas  $P_L^{(k)}$ , analisados pelo elemento híbrido-Trefftz, possuem arquivo de entrada separado e será comentado na sequência.

Portanto, para o  $P_G^{(0)}$ , o programa irá chamar o módulo Elemento T6, responsável por analisar este subproblema, a fim de determinar as tensões nas linhas que representam as faces das fissuras (equação (2.1)), obtendo, assim, os parâmetros  $b_{i,j}$ . Os resultados são armazenados na memória do programa para a utilização na construção do sistema linear final do método.

Para o  $P_L^{(k)}$ , o módulo Elemento híbrido-Trefftz é invocado. Este realizará a leitura do segundo arquivo de entrada, que trata apenas do  $P_L^{(k)}$ . Por utilizar malhas bem grosseiras, a geração da malha foi realizada manualmente, sem auxílio de nenhum outro software. Os dados de saída obtidos nessa análise, que se referem aos FIT e forças no contorno, são armazenados na memória do programa. Nesta etapa, as tensões nas faces da fissura são obtidas em função dos parâmetros  $\alpha$ . Vale comentar que como os subproblemas locais não dependem do carregamento externo, eles são analisados uma única vez e registrados num banco de dados do programa. Cada vez que um caso de carregamento é considerado, o programa apenas lê esses dados armazenados para que sejam utilizados ao longo do processo. Tais benefícios são características exclusivas do método da partição.

O  $P_G^{(k)}$  é realizado de maneira semelhante ao  $P_G^{(0)}$ , com a diferença que as forças no contorno  $\Gamma$ , obtidas no subproblema anterior, são utilizadas para a obtenção das tensões da face das fissuras de  $P_G^{(k)}$  (equação (2.5)), resultando, assim, os parâmetros  $c_{i,j}^{(k)}$ .

Finalmente, o sistema linear final é construído, via equação (2.12) e detalhado no Apêndice B, empregando as aproximações de tensões de cada subproblema. A solução do sistema linear final fornecerá os parâmetros  $\alpha$  que serão multiplicados pelos FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$ , conforme equação (2.13), resultando, assim, os FIT finais do problema.

#### 4.4 - Obtenção da solução de referência

As soluções de referência dos exemplos numéricos apresentados no capítulo seguinte foram obtidas mediante o uso do software ANSYS. O problema original, dito  $P_G$ , foi modelado utilizando elementos finitos T6 em uma malha refinada. Na ponta da fissura, região de altos gradientes de tensão, a malha foi refinada empregando a técnica do *quarter-point*, onde os FIT foram obtidos mediante a estratégia de correlação dos deslocamentos (BARSOUM, 1976, HENSHELL, SHAW, 1975, KUNDU, 2008). Esta discretização pode ser visualizada na Figura 4-3.

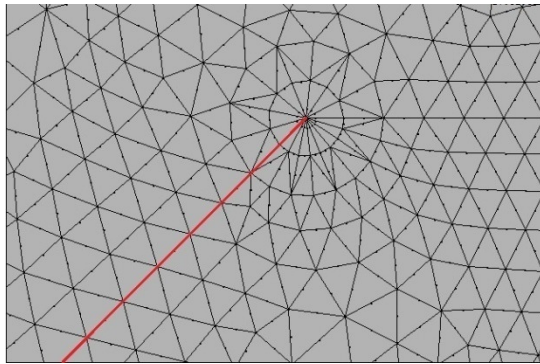


Figura 4-3 - Discretização na ponta da fissura com elemento *quarter-point*

A linha em vermelho da Figura 4-3 representa a fissura. Pode-se observar que na sua ponta há duas camadas de elementos formando círculos concêntricos. Na camada mais interna, os nós do elemento finito T6, que originalmente se localizam na mediana do lado do elemento, são deslocados a fim de permanecerem a uma distância de um quarto do comprimento do lado do elemento a partir da ponta da fissura. Essa técnica, característica do *quarter-point*, promove uma melhor aproximação da solução nessa região.

Empregando esta técnica aliada a uma malha refinada, foi possível obter soluções de referência bem confiáveis. Esses valores são, portanto, comparados aos obtidos pelo programa aqui desenvolvido a fim de validar a pesquisa.

## 5- Resultados Numéricos

A fim de avaliar a estratégia proposta nessa pesquisa, os resultados de exemplos numéricos processados com o programa desenvolvido são apresentados e comparados a valores de referência gerados pelo programa ANSYS, conforme explicado na seção 4.4.

Cada exemplo é apresentado de modo a ilustrar as etapas do método da partição, os elementos finitos utilizados e os resultados obtidos (os FIT das pontas das fissuras). Para simplificar, unidades dimensionais foram omitidas, sendo adotados para todos os exemplos módulo de elasticidade igual a 1000 e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

Para um melhor entendimento do emprego da modelagem, desenvolve-se no primeiro exemplo uma explicação detalhada sobre todos os passos do método da partição. Já a apresentação dos exemplos seguintes é feita de modo sintetizado para não cair em redundância, dado que a lógica de cada etapa do método é a mesma.

Nos subproblemas locais, discretizados com o elemento híbrido-Trefftz, a fissura foi modelada sobrepondo dois contornos, onde esses contornos pertencem a elementos diferentes.

Vale ressaltar que as malhas de elementos finitos utilizados nos subproblemas  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$  poderiam ser menos densas e não alterariam a solução.

### 5.1 - Exemplo 1: Duas fissuras paralelas internas dispostas ortogonalmente à direção do carregamento

Como primeiro exemplo, considere uma chapa retangular contendo duas fissuras internas iguais de comprimento igual a 2 e submetida a um carregamento de tração igual a 1, conforme Figura 5-1. As fissuras estão na direção vertical, sendo perpendiculares ao carregamento, sujeitas, portanto, apenas ao modo I de abertura de fissura (Figura D-0-2). Nota-se na Figura 5-1 que as numerações das pontas das fissuras, inseridas em círculos, é incluída para uma melhor identificação.

A partir do problema original ( $P_G$ ) realiza-se sua partição em subproblemas  $P_G^{(0)}$ ,  $P_L^{(k)}$  e  $P_G^{(k)}$ , descritos a seguir.

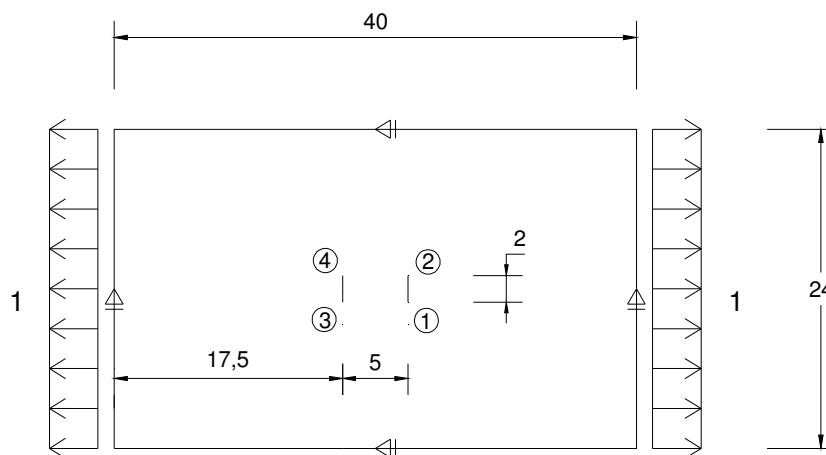


Figura 5-1 - Duas fissuras internas

### 5.1.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

Para o primeiro subproblema, deve-se adotar o mesmo domínio e mesmas condições de contorno do problema original, porém sem a presença de fissuras, conforme ilustra a Figura 5-2. Observa-se nesta figura que as posições das faces das fissuras do problema original são representadas por linhas pontilhadas.

Uma malha de elementos finitos T6 foi gerada e seus dados geométricos lidos pelo programa desenvolvido na pesquisa. A malha foi construída de forma que nós de alguns elementos estivessem posicionados nas linhas das fissuras do problema  $P_G$ . Aqui foi utilizada uma malha de 301 nós e 134 elementos para a obtenção das tensões nos nós que coincidem com as faces das fissuras ( $t_G^{(0)}$ ).

Com os valores das tensões  $t_G^{(0)}$  obtidas em todos os nós das faces, é aplicado o método dos mínimos quadrados para obter um valor médio de tensões. Pela natureza simples do estado de tensão, adotou-se uma aproximação constante para representar a tensão, ou seja,  $j = 1$  em



(2.2). Por fim, utilizando a equação (2.1) foram determinados os valores dos coeficientes  $b_{1,1}$  para fissura 1 e  $b_{2,1}$  para fissura 2, sendo, para este exemplo, iguais a 1.

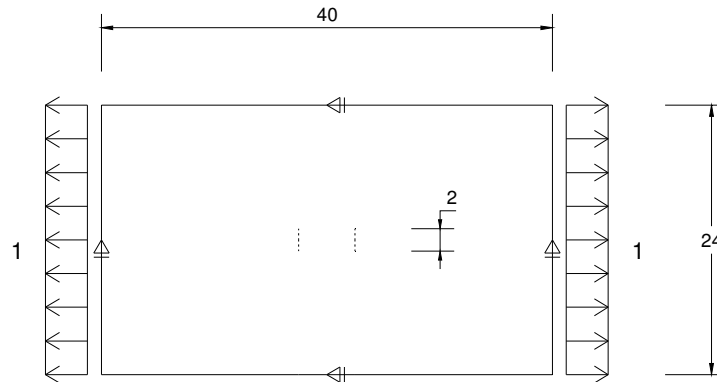


Figura 5-2 - Problema Global  $P_G^{(0)}$

### 5.1.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

Em seguida, realizou-se a etapa referente ao  $P_L^{(k)}$ . Para isso, foram inicialmente identificados dois domínios reduzidos do problema original associados a cada uma das fissuras. O contorno externo desse domínio destacado está representado por linhas pontilhadas na Figura 5-3. Entretanto, por se tratarem de fissuras iguais, apenas um dos domínios foi processado pelo programa, sendo os resultados utilizados para ambas as fissuras.

O domínio reduzido foi definido por uma área retangular 4x4 onde todos seus lados estão fixos (Figura 5-4). Observa-se que de acordo com Babuška e Andersson (2005), uma dimensão qualquer poderia ser utilizada para o domínio de  $P_L^{(k)}$ . Em relação ao contorno  $\Gamma$  de controle, por simplicidade, adotou-se que o mesmo coincide com o contorno externo.

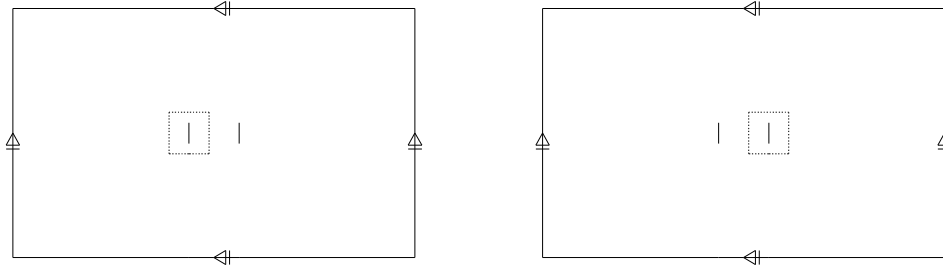


Figura 5-3 - Domínio destacado do problema original

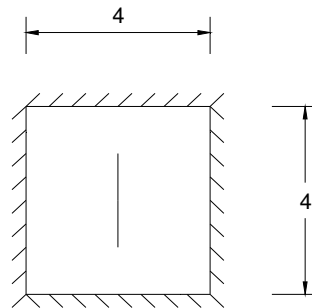


Figura 5-4 - Domínio do  $P_L^{(k)}$

De acordo com a teoria apresentada no capítulo 2, cargas unitárias são aplicadas nas faces de cada fissura, sendo a distribuição desse carregamento consistente com a relação (2.2). Portanto, como em  $P_G^{(0)}$  foi utilizada uma aproximação constante para as bases de tensão, todos os carregamentos unitários aplicados nos subproblemas locais são constantes. Além disso, por se tratar de fissura interna (contendo duas pontas), será considerada na formulação do método da partição que cada semi-comprimento será uma fissura  $i$  (ver seção 2.3). Portanto, nesse exemplo, tem-se que  $i = 4$ . Mesmo antecipando-se neste exemplo o comportamento predominante em modo I, cada fissura  $i$  será solicitada por um carregamento constante normal e um carregamento constante tangente, aplicados nas suas faces, conforme ilustrado na Figura 5-5.

Deste modo, para cada  $i$  têm-se dois subproblemas  $P_L^{(k)}$  (um para cada tipo de carregamento). Ao total, sabendo que  $i = 4$  para o problema original, têm-se oito subproblemas  $P_L^{(k)}$ , ou seja,  $k = 1, 2, \dots, 8$ . Como ambas as fissuras são iguais, pode-se processar apenas uma delas, resultando em quatro subproblemas  $P_L^{(k)}$ , ou seja,  $k = 1, \dots, 4$ . Observa-se que cada problema  $k$  é independente, portanto eles poderiam ser processados simultaneamente em um

processador em paralelo, reduzindo o custo computacional da análise. Entretanto, neste trabalho tal recurso não foi explorado.

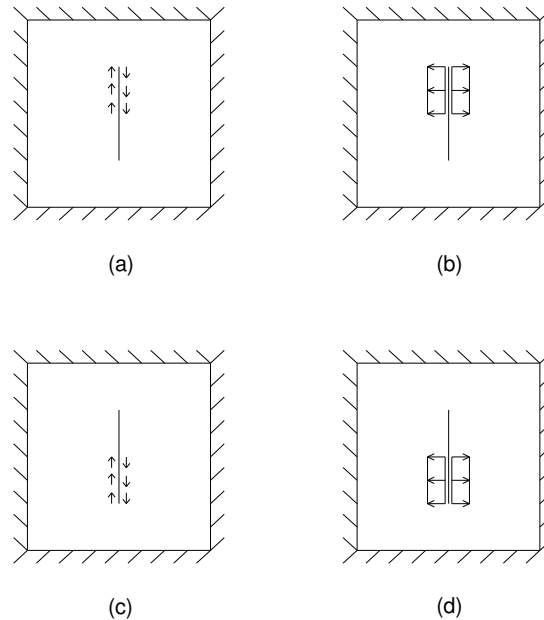


Figura 5-5 - Problemas Locais  $P_L^{(k)}$

Cada subproblema  $k$  foi analisado utilizando a malha de elementos finitos híbrido-Trefftz apresentada na Figura 5-6, contendo 6 elementos, 16 contornos e 10 pontos. Para melhor visualização, a numeração dos elementos está inserida em círculos, a de contornos inserida em retângulos e a de pontos não está inserida em nenhuma figura geométrica. A linha em vermelho coincide com as faces das fissuras  $i$ . Nota-se que a modelagem das fissuras foi realizada sobrepondo os contornos 13, 14, 15 e 16 e os pontos 5 e 6. Os pontos 4 e 7 representam, portanto, as pontas das fissuras  $i$ .

Para as funções aproximativas das tensões no domínio dos elementos (eq. (3.11)), foram adotados graus de 7 a 10 para os elementos. Além disso, como todos os elementos contém uma ponta de fissura, foram adicionadas nessa aproximação funções analíticas da mecânica da fratura conforme equação (3.40).

Já no contorno dos elementos, os deslocamentos foram aproximados de acordo com a equação (3.16), onde os graus das funções aproximativas variam de 3 a 5. Além disso, os

contornos 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15 e 16 contém uma ponta de fissura, portanto a aproximação foi enriquecida de acordo com a equação (3.42).

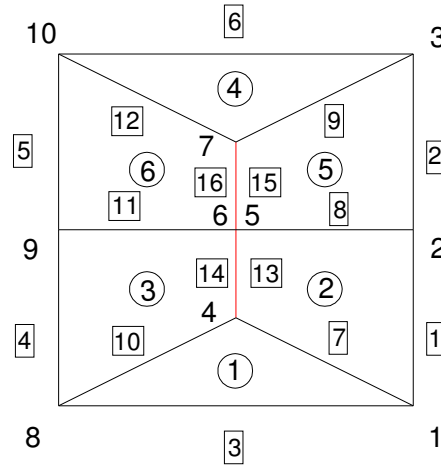


Figura 5-6 - Malha de elementos híbrido-Trefftz para  $P_L^{(k)}$

Os FIT foram obtidos diretamente da solução do sistema linear do elemento híbrido-Trefftz, conforme já comentado. Os valores desses FIT estão ilustrados nas Tabela 5-1 a Tabela 5-4 referentes aos casos *a* a *d* indicados na Figura 5-5, respectivamente. Nessas tabelas também são fornecidos os valores de referência.

Para comparação, tomou-se a diferença relativa da solução obtida pelos elementos híbrido-Trefftz e a solução de referência, conforme está definido pela equação (5.1).

$$DR = \text{Abs} \left( \frac{\text{Valor}_{\text{HT}} - \text{Valor}_{\text{Ref}}}{\text{Valor}_{\text{Ref}}} \right) \cdot 100 \quad (5.1)$$

Onde:

- DR - diferença relativa (%);
- Abs - valor absoluto do resultado entre parênteses;
- Valor<sub>HT</sub> - valor do FIT obtido via elemento híbrido-Trefftz;

- Valor<sub>Ref</sub> - valor de referência do FIT.

**Tabela 5-1 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso a**

Caso a						
Solução de híbrido-Trefftz		Referência			Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	0,208	1,324	0,213	1,284	2,34	3,11

**Tabela 5-2 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso b**

Caso b						
Solução de híbrido-Trefftz		Referência			Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7
K <sub>I</sub>	0,105	1,254	0,115	1,214	8,54	3,34
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

**Tabela 5-3 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso c**

Caso c						
Solução de híbrido-Trefftz		Referência			Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	1,324	0,208	1,284	0,213	3,11	2,34

Tabela 5-4 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso d

Caso d						
Solução de híbrido-Treffitz		Referência			Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7	Ponto 4	Ponto 7
K <sub>I</sub>	1,254	0,105	1,214	0,115	3,34	8,54
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Além dos FIT, são obtidos também as forças de superfície do contorno  $\Gamma$  (coincidente com o contorno externo) para cada subproblema  $k$ .

Vale lembrar que os valores dos FIT obtidos nessa etapa não representam os valores finais do problema original. As tensões  $t_L^{(k)}$  de cada problema  $k$  são aproximadas pela equação (2.4), onde os parâmetros  $\alpha$  são as incógnitas do método da partição. Ao serem determinados no final do método, esses parâmetros serão multiplicadores dos FIT obtidos nessa etapa a fim de, finalmente, fornecer os FIT finais.

Ressalta-se que os valores de K<sub>I</sub> e K<sub>II</sub> nulos nas Tabela 5-1, Tabela 5-2, Tabela 5-3 e Tabela 5-4, estão aproximados para três casas decimais. A partir da sexta casa decimal a solução é diferente de zero. Essa mesma observação vale para os resultados de  $P_L^{(k)}$  dos demais exemplos.

### 5.1.2 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Para os últimos subproblemas, denominados de  $P_G^{(k)}$ , o subproblema  $P_G^{(0)}$  é novamente analisado sem a presença do carregamento externo. Em cada subproblema  $P_G^{(k)}$  reproduz-se o contorno de referência adotado nos subproblemas locais. As forças de superfície nos contornos  $\Gamma$  obtidas em  $P_L^{(k)}$  são impostas nessa etapa do método da partição a fim de determinar as tensões nas faces das demais fissuras. Portanto, esse subproblema é responsável pela avaliação da interação entre fissuras (Figura 5-7).

Assim como no  $P_G^0$ , uma malha de elementos finitos T6 foi gerada e seus dados geométricos lidos pelo programa desenvolvido na pesquisa. A malha foi construída de maneira que nós de alguns elementos estivessem posicionados nas linhas das fissuras do problema  $P_G$  e no contorno  $\Gamma$ . Aqui foi utilizada uma malha de 11705 nós e 5820 elementos para a obtenção das tensões nos nós que coincidem com as faces das fissuras ( $t_G^{(k)}$ ).

Devem ser realizados  $k$  subproblemas  $P_G^{(k)}$ , assim como em  $P_L^{(k)}$ . Deste modo, as forças de superfície do contorno  $\Gamma$  de  $k = 1$  são impostas no subproblema 1 de  $P_G^{(k)}$ , as forças de  $k = 2$  são impostas no subproblema 2 de  $P_G^{(k)}$ , e assim por diante.

As tensões  $t_G^{(k)}$  são aproximadas pela equação (2.5). Assim como em  $P_G^0$ , é aplicado o método dos mínimos quadrados para as tensões em cada nó que representam as faces das fissuras, resultando em um valor médio de tensão para cada fissura  $i$ . Dessa forma, os parâmetros  $c_{i,j}^{(k)}$  da equação (2.5) são determinados. Assim como nos subproblemas anteriores, para essa identificação adotou-se uma aproximação constante.

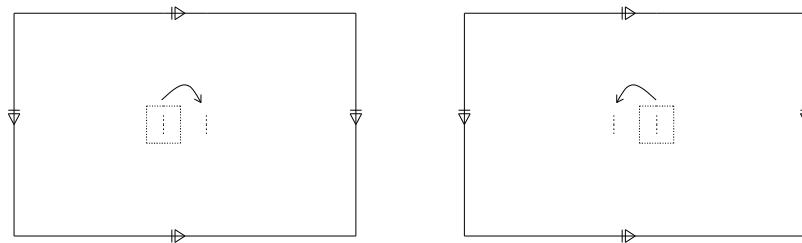


Figura 5-7 - Problema Global  $P_G^{(k)}$

### 5.1.2 - Sobreposição dos subproblemas

Ao final das análises, o sistema linear da equação (2.12) foi construído ao impor a condição de nulidade das tensões nas faces das fissuras (eq. (2.7)). A solução do sistema linear forneceu os valores dos parâmetros  $\alpha$ . Estes valores multiplicaram os FIT obtidos nos respectivos subproblemas  $k$  de  $P_L^{(k)}$  (eq. (2.13)), resultando nos FIT finais do problema original. Esses resultados são apresentados na Tabela 5-5 juntamente com os valores de

referência. A diferença relativa entre os dois valores foi determinada pela equação (5.1) (substituindo os  $\text{Valor}_{\text{HT}}$  pelo valor do método da partição) e apresentado na Tabela 5-6.

**Tabela 5-5 - FIT de cada ponta da fissura do problema original**

FIT	Solução do método da partição				Referência			
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4
$K_I$	1,680	1,681	1,682	1,682	1,701	1,701	1,701	1,701
$K_{II}$	0,001	0,009	0,008	0,001	0,017	0,017	0,017	0,017

**Tabela 5-6 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição**

Diferença relativa (%)				
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4
$K_I$	1,21	1,14	1,13	1,10
$K_{II}$	-	-	-	-

Os valores de diferença relativas para  $K_I$  ficaram em torno de 1%, demonstrando a precisão do método. Os valores de  $K_{II}$  pelo método da partição estão bem próximos do valor nulo, esperado para esse tipo de problema.

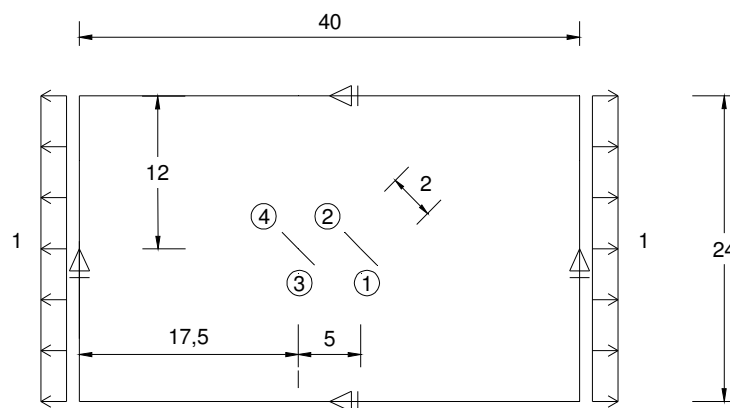
Chama-se a atenção para a pequena falta de simetria dos resultados da solução do método da partição entre as pontas 1 e 3 e 2 e 4. Tal diferença decorreu da discretização diferente adotada em cada subproblema  $P_G^{(k)}$ . Esta observação vale, de resto, para os outros exemplos deste capítulo.

## 5.2 - Exemplo 2: Duas fissuras internas inclinadas em relação à direção do carregamento

Para o segundo exemplo, é adotada a mesma chapa retangular do exemplo anterior, porém contendo duas fissuras internas iguais, de comprimento igual a 2, paralelas entre si e inclinadas (formando um ângulo de 45° com a horizontal). A chapa está submetida a um carregamento



uniforme de tração igual a 1, conforme ilustra a Figura 5-8. Devido a orientação das fissuras, elas estão sujeitas aos modo I e II de abertura de fissura (Figura D-0-2). Na Figura 5-8 também são fornecidas as numerações das pontas das fissuras, inseridas em círculos, para uma melhor identificação.



**Figura 5-8 - Duas fissuras internas inclinadas**

A aplicação do método da partição, dividindo o problema original nos subproblemas propostos, é comentada na sequência do texto.

### 5.2.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

O subproblema  $P_G^{(0)}$  está ilustrado na Figura 5-9, constituído pelo problema original sem a presença das fissuras.

A malha de elementos finitos T6 contém 821 nós e 384 elementos, proporcionando a obtenção das tensões nos nós que coincidem com as faces das fissuras ( $t_G^{(0)}$ ).

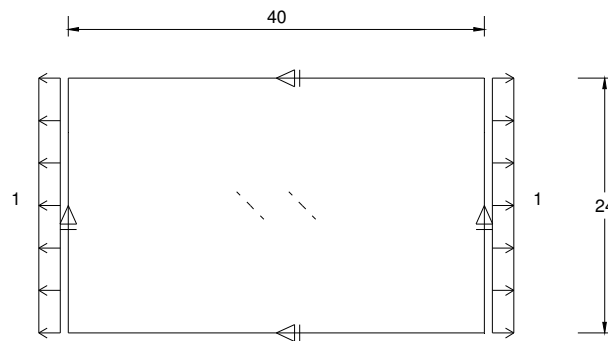


Figura 5-9 - Problema Global  $P_G^{(0)}$

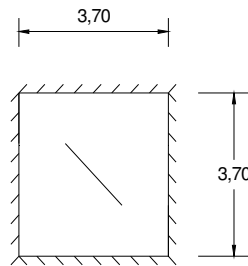
Analogamente ao exemplo anterior, adotou-se uma aproximação constante para representar tais tensões, ou seja,  $j = 1$  na relação (2.2). Os correspondentes coeficientes  $b_{i,j}$  são, portanto, obtidos pela equação (2.1).

### 5.2.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

Para a definição do subproblema  $P_L^{(k)}$  foram idealizados dois domínios reduzidos do problema original em correspondência a cada uma das fissuras. Novamente, por se tratar de figuras iguais, apenas um dos domínios foi processado pelo programa, sendo seus resultados utilizados também para a outra fissura.

O domínio do subproblema está ilustrado na Figura 5-10. Foi adotado um domínio retangular  $3,70 \times 3,70$  onde o contorno  $\Gamma$  coincide com o contorno engastados.

Como foi utilizada no subproblema  $P_G^{(0)}$  aproximação constante para a combinação das tensões, neste subproblema todos os carregamentos unitários aplicados nas faces da fissura são também constantes, conforme Figura 5-11.



**Figura 5-10 - Domínio do  $P_L^{(k)}$**

Cada subproblema  $k$  foi analisado utilizando uma malha de elementos finitos híbrido-Trefftz, apresentada na Figura 5-12, contendo 6 elementos, 18 contornos e 12 pontos. Em vermelho estão representadas as faces das fissuras  $i$ . Nota-se que a modelagem das fissuras foi realizada compatibilizando os contornos 11, 12, 15 e 16 e os pontos 6 e 7. Os pontos 5 e 8 coincidem com as pontas das fissuras  $i$ .

Para as funções aproximativas das tensões no domínio dos elementos (eq. (3.11)), foram adotados graus de 6 a 15 para os elementos. Além disso, como todos os elementos contêm uma ponta de fissura, foram adicionadas nessa aproximação funções analíticas da mecânica da fratura, conforme equação (3.40).

Já nos contornos dos elementos, os deslocamentos foram aproximados de acordo com a equação (3.16), onde os graus das funções aproximativas variaram de 3 a 7. Além disso, como os contornos 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17 e 18 contêm ponta de fissura, portanto a aproximação foi enriquecida de acordo com a equação (3.42).

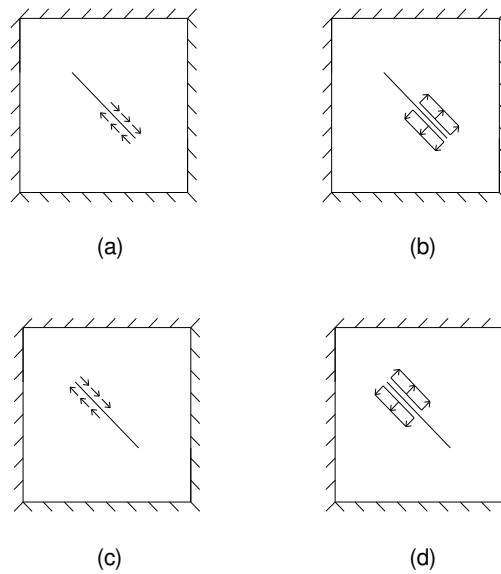


Figura 5-11 - Problema Local  $P_L^{(k)}$

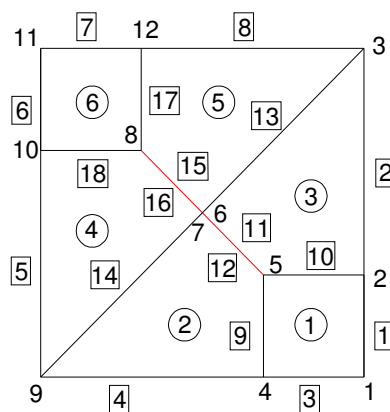


Figura 5-12 - Malha de elementos híbrido-Trefftz  $P_L^{(k)}$

Os FIT obtidos estão apresentados nas Tabela 5-7, Tabela 5-8, Tabela 5-9 e Tabela 5-10.

Tabela 5-7 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso a

Caso a						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	1,330	0,192	1,289	0,187	3,18	2,67

Tabela 5-8 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso b

Caso b						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	1,226	0,087	1,180	0,099	3,90	12,12
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 5-9 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso c

Caso c						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	0,192	1,330	0,187	1,289	2,67	3,18

Tabela 5-10 - FIT das pontas das fissuras  $i$  de  $P_L^{(k)}$  para o caso d

Caso d						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,087	1,226	0,099	1,180	12,12	3,90
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Além dos FIT, foram determinadas as forças de superfície do contorno  $\Gamma$  (coincidente com o contorno externo) para cada subproblema  $k$ .

Nota-se que as diferenças relativas obtidas estão, em sua maioria, abaixo de 4%, indicando resultados bem próximos da solução de referência. Como os valores absolutos de  $K_I$  para o ponto 8 do caso  $b$  e para o ponto 5 do caso  $d$  são muito baixos, na comparação com os valores de referência, as diferenças relativas acabaram sendo altas. Entretanto, ainda assim pode-se observar que esses valores obtidos pelo elemento híbrido-Trefftz ainda estão próximos aos respectivos valores de referência.

### 5.2.2 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Os últimos subproblemas,  $P_G^{(k)}$ , estão apresentados na Figura 5-13. A malha de elementos finitos T6 adotada contém 8815 nós e 4390 elementos.

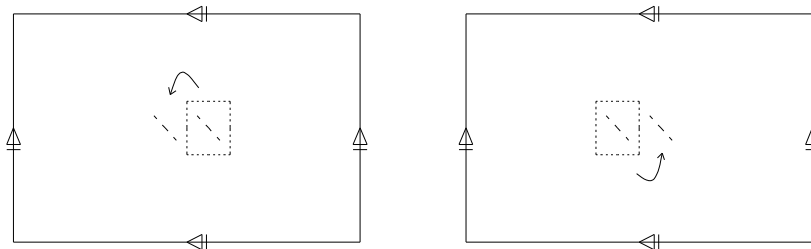


Figura 5-13 - Problema Global  $P_G^{(k)}$

A tensão média de  $t_G^{(k)}$  é aproximada utilizando função constante na combinação. Assim, os parâmetros  $c_{i,j}^{(k)}$  da equação (2.5) são determinados nessa etapa.

### 5.2.3 - Sobreposição dos subproblemas

Os FIT finais do problema original, obtidos mediante a sobreposição dos subproblemas, estão apresentados na Tabela 5-11. As diferenças relativas entre estes valores e os valores de referência são apresentadas na Tabela 5-12.

**Tabela 5-11 - FIT de cada ponta da fissura do problema original**

FIT	Solução do método da partição				Referência (%)			
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4
K <sub>I</sub>	0,896	0,885	0,885	0,896	0,897	0,875	0,875	0,897
K <sub>II</sub>	0,848	0,837	0,837	0,849	0,864	0,847	0,847	0,864

**Tabela 5-12 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição**

Diferença relativa (%)				
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4
K <sub>I</sub>	0,11	1,12	1,14	0,12
K <sub>II</sub>	1,80	1,17	1,18	1,18

Os valores de diferenças relativas para K<sub>I</sub> e K<sub>II</sub> permaneceram em torno de 1%, demonstrando a precisão do método.

### 5.3 - Exemplo 3: Três possíveis fissuras a partir de furos

Para o exemplo 3, adota-se um domínio retangular contendo quatro furos e três fissuras contidas nas bordas dos furos. Serão analisados diferentes cenários, onde cada fissura se encontra em diferentes posições e orientações. O objetivo desse exemplo é simular uma análise de previsão de situação mais crítica ao comparar diferentes possibilidades para o surgimento de fissura. Neste caso, o método da partição apresenta-se vantajoso, pois os subproblemas locais

são avaliados uma única vez e, seus resultados, são aproveitados para todas as análises. A fim de sintetizar o problema, são analisados aqui três cenários diferentes.

### 5.3.1 - 1º cenário

Para o primeiro cenário, considera-se o sólido da Figura 5-14, contendo quatro furos de raios iguais a 1 e três fissuras, com comprimentos iguais a 1. As fissuras estão sujeitas aos modos I e II de abertura. Vale notar que ao contrário dos exemplos anteriores, as fissuras aqui presentes são de borda, portanto, têm-se que  $i=3$ , onde  $i$  é o número de fissuras (ver seção 2.3). As etapas do método da partição são ilustradas nas seções seguintes.

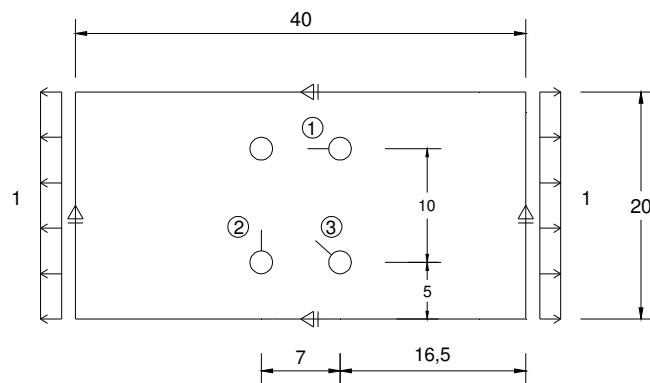


Figura 5-14 - Problema original do 1º cenário

#### 5.3.1.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

Para o primeiro subproblema, considera-se o sólido sem a presença de fissuras, conforme Figura 5-15. A malha adotada para a obtenção das tensões nos nós que coincidem com as faces das fissuras contém 5198 elementos T6 e 10713 nós.



A distribuição de tensão  $t_G^{(0)}$  é aproximada por uma função constante e linear, ou seja,  $j = 1, 2$  na relação (2.2) para as três fissuras. Os coeficientes  $b_{i,j}$  são obtidos, portanto, pela equação (2.1).

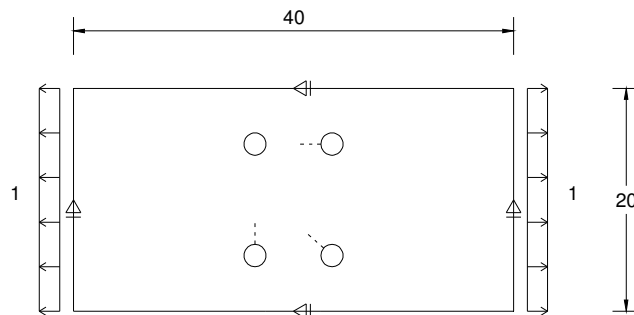


Figura 5-15 - Problema Global  $P_G^{(0)}$  para o 1º cenário

### 5.3.1.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

Para essa etapa, foi adotado domínio quadrado de dimensão  $6 \times 6$  contendo um furo com fissura de borda e contorno  $\Gamma$  coincidente com o contorno externo engastado, conforme Figura 5-16. Como comentado anteriormente, todas as fissuras presentes no problema original do 1º cenário (e posteriormente no 2º e 3º cenário) são iguais, alterando-se apenas a sua direção. Assim, é possível realizar apenas a análise local de uma única fissura e os resultados obtidos são reutilizados na análise das demais fissuras observando sua orientação no problema original.

Como foi empregado uma aproximação constante e linear para a combinação das tensões, são impostos carregamentos constantes e lineares, com valor máximo igual a 1, conforme Figura 5-17.

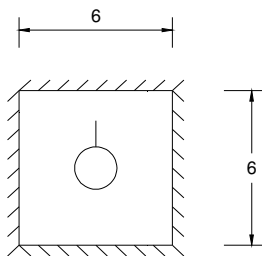


Figura 5-16 - Domínio do  $P_L^{(k)}$  para o 1º cenário

Deste modo, para cada  $i$  têm-se quatro subproblemas  $P_L^{(k)}$ : dois para carregamento constante e dois para linear (Figura 5-17). Ao total, sabendo que  $i = 3$  para o problema original, têm-se doze subproblemas  $P_L^{(k)}$ , ou seja,  $k = 1, 2, \dots, 12$ . Como todas as fissuras são iguais, serão analisados apenas quatro subproblemas  $P_L^{(k)}$  referentes a uma única fissura, ou seja,  $k = 1, \dots, 4$ .

Assim, cada subproblema  $k$  foi analisado utilizando-se uma malha de elementos finitos híbrido-Trefftz, apresentada na Figura 5-18, contendo 7 elementos, 20 contornos e 13 pontos. Em vermelho estão representadas as faces da fissura. Nota-se que a modelagem das fissuras foi realizada compatibilizando-se os contornos 15 e 16 e os pontos 7 e 8. O ponto 9 representa a ponta da fissura.

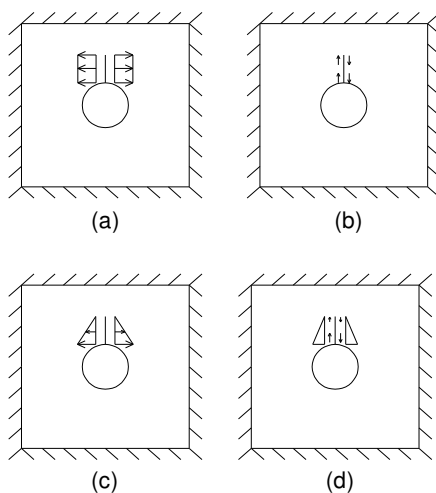


Figura 5-17 - Problema Local  $P_L^{(k)}$  para o 1º cenário

Para as funções aproximativas das tensões nos domínios dos elementos (eq. (3.11)), foram adotados graus de 7 a 17. Com relação ao enriquecimento com as funções analíticas da mecânica da fratura (eq. (3.40)), apenas os elementos 3 e 4 são enriquecidos por serem os únicos a conter a ponta de fissura.

No contorno dos elementos, os deslocamentos foram aproximados de acordo com a equação (3.16), onde os graus das funções aproximativas variam de 3 a 11. Além disso, os contornos 15, 16 e 17 contém ponta de fissura, portanto a aproximação destes foi enriquecida de acordo com a equação (3.42).

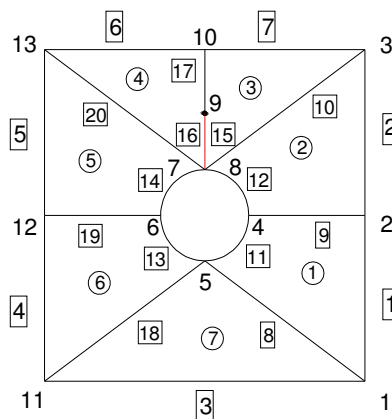


Figura 5-18 - Malha de elementos híbrido-Treffitz para  $P_L^{(k)}$  para o 1º cenário

Os FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$  são dados pela Tabela 5-13, Tabela 5-14, Tabela 5-15 e Tabela 5-16.

Tabela 5-13 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário para o caso a

Caso a			
FIT	Solução de híbrido-Treffitz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	1,381	1,333	3,60
$K_{II}$	0,000	0,000	0,00

Tabela 5-14 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário para o caso b

Caso b			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,000	0,000	0,00
$K_{II}$	1,667	1,632	2,14

Tabela 5-15 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário para o caso c

Caso c			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,391	0,379	3,17
$K_{II}$	0,000	0,000	0,00

Tabela 5-16 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário para o caso d

Caso d			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,000	0,000	0,00
$K_{II}$	0,599	0,576	3,99

Além dos FIT foram obtidas também as forças de superfície do contorno  $\Gamma$  para cada subproblema  $k$ .

As diferenças relativas obtidas são inferiores a 4%, apontando para resultados bem próximos da solução de referência.

### 5.3.1.3 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Os últimos subproblemas,  $P_G^{(k)}$ , estão apresentados na Figura 5-19. A malha de elementos finitos T6 adotada contém 14143 nós e 6976 elementos.

As forças obtidas nos contornos  $\Gamma$  dos  $P_L^{(k)}$  são aplicadas em cada  $P_G^{(k)}$ , observando-se as orientações das fissuras. Ou seja, caso a fissura esteja inclinada em relação à direção da fissura do subproblema  $P_L^{(k)}$ , aplica-se uma transformação de rotação às forças do contorno  $\Gamma$  a fim de respeitar a orientação original da fissura, como pode ser observado na Figura 5-19.

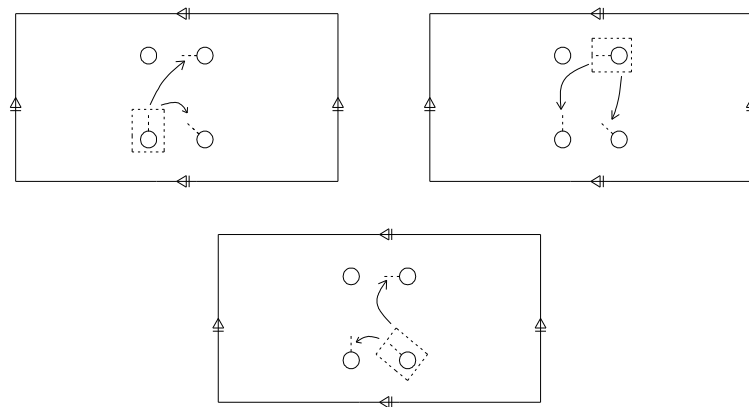


Figura 5-19 - Problema Global  $P_G^{(k)}$  para 1º cenário

Os vetores de tensões  $t_G^{(k)}$  nas linhas das fissuras externas aos contornos são aproximados utilizando função constante e linear na combinação, determinando, assim, os parâmetros  $c_{ij}^{(k)}$  da equação (2.5), para cada fissura.

### 5.3.1.4 - Sobreposição dos subproblemas

Os FIT finais do problema original, obtidos mediante a sobreposição dos subproblemas, considerando aproximação linear completa, são apresentados na Tabela 5-19. As diferenças relativas entre estes valores e os valores de referência são apresentadas na Tabela 5-20.

Para fins de comparação de resultados, foi também extraída a solução do método da partição considerando-se apenas aproximação constante, apresentada na Tabela 5-17. A diferença relativa referente à aproximação constante é apresentada na Tabela 5-18.

**Tabela 5-17 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 1º cenário**

Aproximação constante						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
$K_I$	0,129	2,581	1,088	0,121	2,373	1,055
$K_{II}$	0,019	0,056	0,934	0,018	0,060	0,965

**Tabela 5-18 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 1º cenário**

Diferença relativa (%)			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
$K_I$	6,61	8,77	3,13
$K_{II}$	5,56	6,67	3,21

**Tabela 5-19 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 1º cenário**

Aproximação linear						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
$K_I$	0,127	2,447	1,026	2,373	0,121	1,055
$K_{II}$	0,017	0,057	0,987	0,060	0,018	0,965

**Tabela 5-20 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 1º cenário**

Diferença relativa (%)			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
$K_I$	4,96	3,11	2,75
$K_{II}$	5,56	5,00	2,28

Observa-se que os valores das diferenças relativas, considerando aproximação linear completa, para  $K_I$  e  $K_{II}$  estão abaixo de 6%, ainda assim bem próximos dos valores de referência. Além disso, realizando uma comparação entre as duas aproximações, conclui-se que os resultados do método da partição estão mais próximos dos valores de referência ao se considerar aproximação linear completa em relação a aproximação constante.

### 5.3.2 - 2º cenário

Para o segundo cenário, considere outra possibilidade de fissuração do sólido, ilustrada na Figura 5-20, onde as fissuras se apresentam em direções diferentes do 1º cenário.

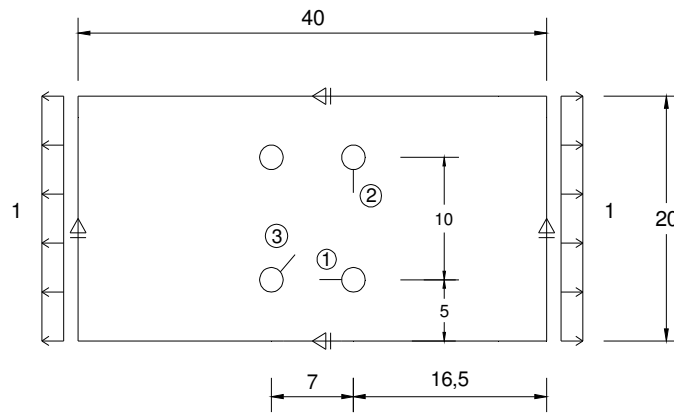


Figura 5-20 - Problema original do 2º cenário

### 5.3.2.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

A Figura 5-21 apresenta o domínio do subproblema  $P_G^{(0)}$ . A malha de elementos finitos T6 a ser utilizada na análise contém 14441 nós e 7070 elementos.

Assim como no primeiro cenário, a tensão  $t_G^{(0)}$  é aproximada por função linear completa, ou seja,  $j = 1, 2$  na relação (2.2), para as três fissuras, resultando nos coeficientes  $b_{i,j}$  da equação (2.1).

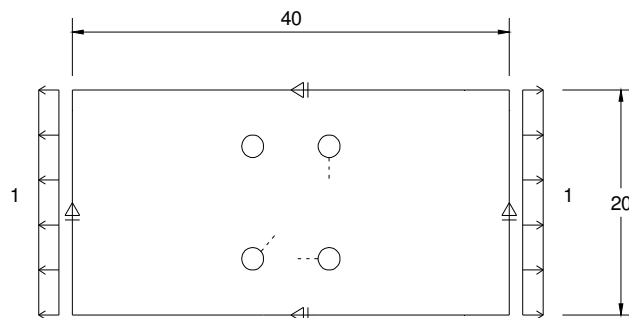


Figura 5-21 - Problema Global  $P_G^{(0)}$  para o 2º cenário



### 5.3.2.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

Conforme já explicado anteriormente, serão reutilizados os dados obtidos da análise de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário, dado pela Figura 5-16, Figura 5-17 e Figura 5-18. Os FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$  são dados pela Tabela 5-13, Tabela 5-14, Tabela 5-15 e Tabela 5-16.

### 5.3.2.3 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Os subproblemas  $P_G^{(k)}$  estão apresentados na Figura 5-22. A malha de elementos finitos T6 adotada contém 17473 nós e 8618 elementos.

As forças obtidas no contorno  $\Gamma$  de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário são aplicadas em cada  $P_G^{(k)}$  observando a orientação da fissura.

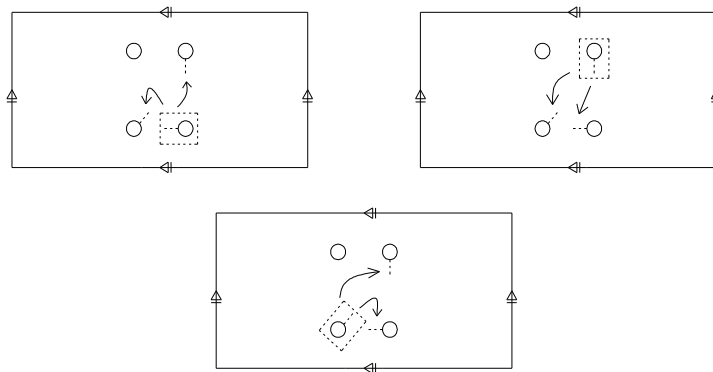


Figura 5-22 - Problema Global  $P_G^{(k)}$  para 2º cenário

### 5.3.2.4 - Sobreposição dos subproblemas

Os FIT finais do problema original, considerando aproximação linear completa, são apresentados na Tabela 5-23 e as diferenças relativas na Tabela 5-24.

Assim como no 1º cenário, a solução do método da partição considerando apenas aproximação constante também foi extraída. Este é apresentado na Tabela 5-21 e a diferença relativa, na Tabela 5-22.

**Tabela 5-21 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 2º cenário**

Aproximação constante						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	0,040	2,126	1,198	0,046	2,391	1,066
K <sub>II</sub>	0,012	0,039	0,963	0,008	0,042	1,060

**Tabela 5-22 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 2º cenário**

Diferença relativa (%)			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	13,04	11,08	12,38
K <sub>II</sub>	50,00	7,14	9,15

**Tabela 5-23 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 2º cenário**

Aproximação linear						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	0,047	2,264	1,078	0,046	2,391	1,066
K <sub>II</sub>	0,007	0,044	1,004	0,008	0,042	1,060

**Tabela 5-24 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 2º cenário**

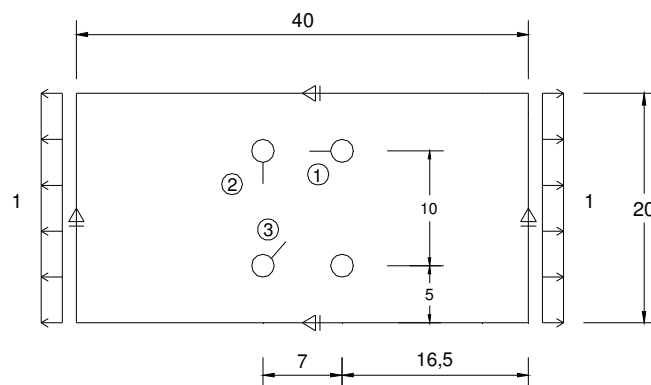
Diferença relativa (%)			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
$K_I$	2,17	5,31	1,13
$K_{II}$	12,50	4,76	5,28

Novamente, os valores de diferenças relativas considerando aproximação linear completa para  $K_I$  e  $K_{II}$  estão abaixo de 6%, considerados próximos dos valores de referência. Observa-se que assim como aconteceu com os exemplos anteriores, o valor de  $K_{II}$  para a ponta 1 é muito baixo, resultando em um alto valor de diferença relativa, apesar de estar bem próximo do valor de referência.

Com relação à comparação entre as duas aproximações, os resultados do método da partição para a aproximação linear completa estão, mais uma vez, mais próximos dos valores de referência em relação aos valores obtidos pela aproximação constante.

### 5.3.3 - 3º cenário

Por fim, para o terceiro cenário, considere uma outra possibilidade de fissuração do sólido, ilustrado na Figura 5-23, onde as fissuras se apresentam em direções diferentes do 1º e 2º cenários.



**Figura 5-23 - Problema original do 3º cenário**

### 5.3.3.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

A Figura 5-24 apresenta o domínio do subproblema  $P_G^{(0)}$ . A malha de elementos finitos T6 a ser utilizada na análise contém 14405 nós e 7052 elementos.

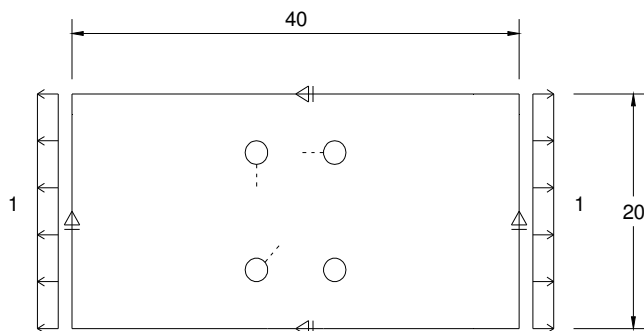


Figura 5-24 - Problema Global  $P_G^{(0)}$  para o 3º cenário

Novamente, a tensão  $t_G^{(0)}$  é aproximada por função constante e linear, ou seja,  $j = 1, 2$  na relação (2.2), para as três fissuras, resultando os coeficientes  $b_{i,j}$  da equação (2.1).

### 5.3.3.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

Assim como no 2º cenário, serão reutilizados os dados obtidos da análise de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário, dado pela Figura 5-16, Figura 5-17 e Figura 5-18. Os FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$  são dados pela Tabela 5-13, Tabela 5-14, Tabela 5-15 e Tabela 5-16.

### 5.3.3.3 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Os subproblemas  $P_G^{(k)}$  estão apresentados na Figura 5-25. A malha de elementos finitos T6 adotada contém 11968 nós e 5875 elementos.

As forças obtidas no contorno  $\Gamma$  de  $P_L^{(k)}$  do 1º cenário são aplicadas em cada  $P_G^{(k)}$  observando a orientação da fissura.

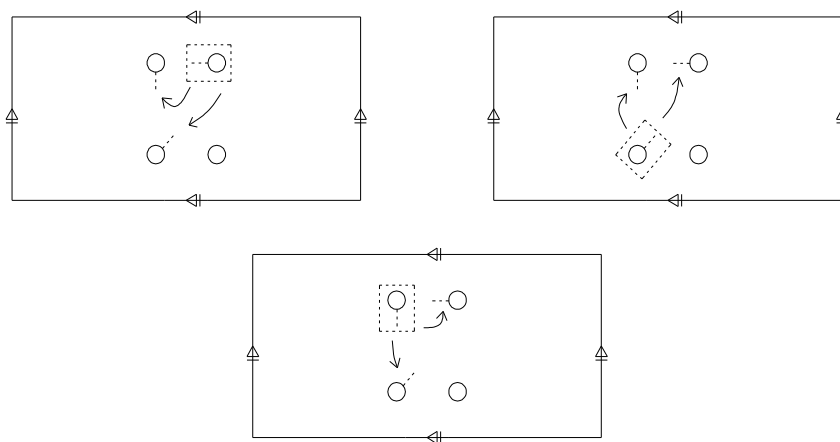


Figura 5-25 - Problema Global  $P_G^{(k)}$  para 3º cenário

### 5.3.3.4 - Sobreposição dos subproblemas

Os FIT finais do problema original, considerando aproximação linear completa, são apresentados na Tabela 5-27 e as diferenças relativas na Tabela 5-28.

Assim como no 1º cenário, a solução do método da partição considerando apenas aproximação constante também foi extraída. Este é apresentado na Tabela 5-25 e as diferenças relativas, na Tabela 5-26.

**Tabela 5-25 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante para o 3º cenário**

Aproximação constante						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	0,049	2,159	1,192	0,054	2,394	1,111
K <sub>II</sub>	0,046	0,056	0,960	0,050	0,062	1,042

**Tabela 5-26 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante para o 3º cenário**

Diferença relativa (%)			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	9,26	9,82	7,29
K <sub>II</sub>	8,00	9,68	7,87

**Tabela 5-27 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear para o 3º cenário**

Aproximação linear						
FIT	Solução do método da partição			Referência		
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	0,056	2,318	1,070	0,054	2,394	1,111
K <sub>II</sub>	0,052	0,061	1,010	0,050	0,062	1,042

**Tabela 5-28 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear para o 3º cenário**

Diferença relativa			
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3
K <sub>I</sub>	3,70	3,17	3,69
K <sub>II</sub>	4,00	1,61	3,07

Os valores de diferença relativas considerando aproximação linear para K<sub>I</sub> e K<sub>II</sub> estão abaixo de 4%, considerados próximos dos valores de referência.

Em relação à comparação entre as duas aproximações, os resultados do método da partição para a aproximação linear completa estão mais próximos dos valores de referência em relação aos valores obtidos pela aproximação constante.

A pior situação pode ser dada adotando como critério o maior valor de  $K_I$ . Assim, o primeiro cenário de fissuração é considerado como o mais crítico para a ocorrência de falha estrutural.

#### 5.4 - Exemplo 4: Domínio contendo furos e fissuras internas e de borda

Como último exemplo, adota-se um problema produzido por Cotta (2016) que consiste em domínio retangular contendo dois furos, duas fissuras contidas nas bordas dos furos e duas fissuras internas e inclinadas em relação a horizontal (Figura 5-26). Os furos possuem raios iguais a 1, as fissuras de borda contém comprimento igual a 2 e as internas, comprimento igual a 2,7.

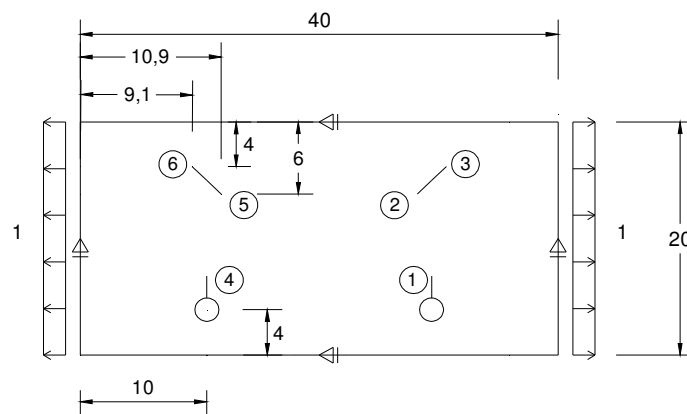


Figura 5-26 - Problema original

### 5.4.1 - Subproblema $P_G^{(0)}$

O domínio do subproblema  $P_G^{(0)}$  está ilustrado na Figura 5-27. A malha de elementos finitos T6 contém 7817 nós e 3780 elementos. Será utilizada na análise aproximação constante e linear das tensões  $t_G^{(0)}$ .

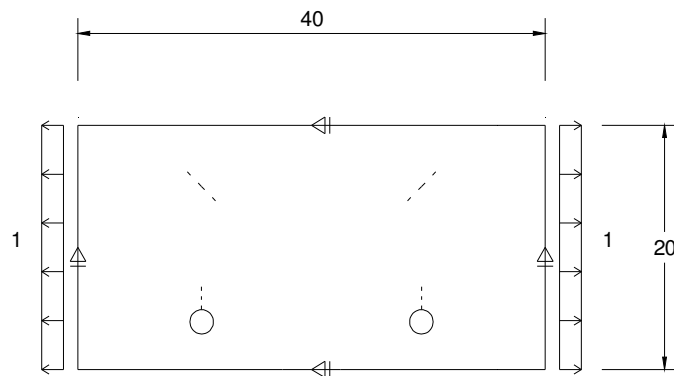


Figura 5-27 - Problema Global  $P_G^{(0)}$

### 5.4.2 - Subproblema $P_L^{(k)}$

De acordo com o problema original (Figura 5-26), as fissuras de borda são iguais entre si, assim como as fissuras internas. Portanto, para essa etapa, serão utilizados dois subproblemas locais diferentes: um consistindo num domínio retangular 6 x 6 com um furo e fissura de borda (Figura 5-28a) e outro sendo um domínio retangular 4 x 4 contendo uma fissura interna (Figura 5-28b). Os dados obtidos no primeiro subproblema local serão utilizados para as fissuras de borda 1 e 4 em  $P_G^{(k)}$  e os dados do segundo serão utilizados para as fissuras internas 2, 3, 4, 5, 6, também na etapa do  $P_G^{(k)}$ .

Desse modo, têm-se ao todo três fissuras compondo os subproblemas locais ( $I = 3$ ), onde o subproblema local  $a$  contém uma ponta de fissura e o subproblema local  $b$ , duas pontas de fissuras.



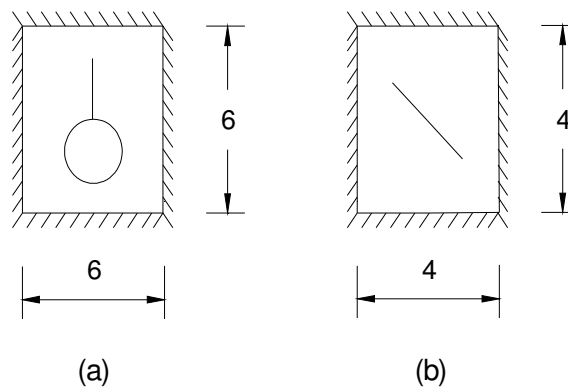


Figura 5-28 - Domínios do  $P_L^{(k)}$

Como foi empregado aproximação linear completa para a combinação das tensões de  $P_G^{(0)}$ , devem ser impostos carregamentos constantes e lineares, com valor máximo igual a 1, para cada fissura  $i$ , na direção paralela e perpendicular às faces. Portanto, têm-se um total de 12 subproblemas locais ( $k = 1, 2, 3, \dots, 12$ ).

Os subproblemas referentes ao  $P_L^{(k)}$  contendo fissura com furo podem ser visualizados na Figura 5-29. Para os  $P_L^{(k)}$  contendo fissura interna, a Figura 5-30 contém as ilustrações da aplicação dos carregamentos constantes, enquanto que a Figura 5-31 contém as ilustrações da aplicação dos carregamentos lineares.

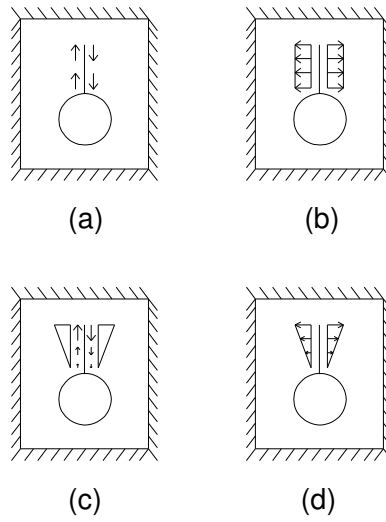


Figura 5-29 - Problema Local da fissura de borda em  $P_L^{(k)}$

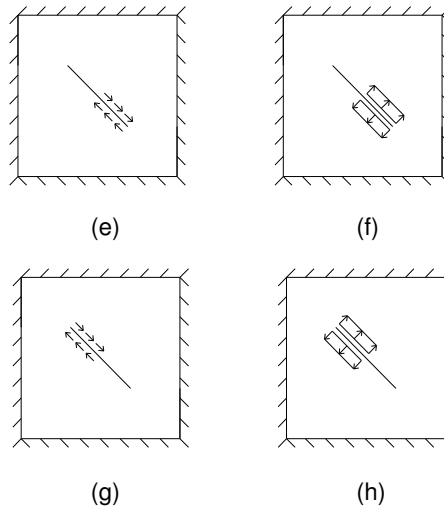
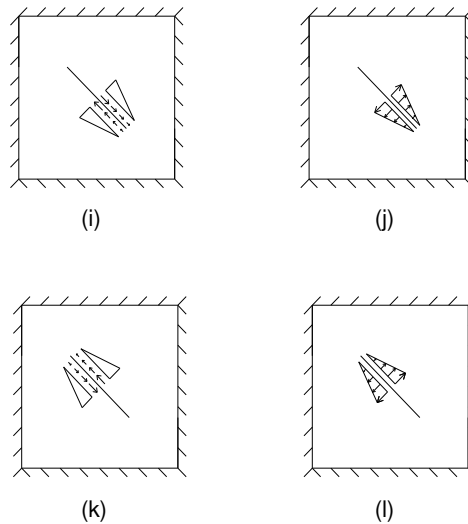


Figura 5-30 - Problema Local da fissura interna em  $P_L^{(k)}$  sujeita a carga constante



**Figura 5-31 - Problema Local da fissura interna em  $P_L^{(k)}$  sujeita a carga linear**

A malha de elementos híbrido-Trefftz para a fissura com furo é ilustrada na Figura 5-32, onde as numerações seguem o mesmo padrão das malhas dos exemplos anteriores.

Foram adotados graus de 7 a 17 para as funções aproximativas das tensões nos domínios dos elementos (eq. (3.11)), onde apenas os elementos 3 e 4 são enriquecidos com as funções analíticas da mecânica da fratura (eq. (3.40)).

Nos contornos dos elementos, os deslocamentos foram aproximados de acordo com a equação (3.16), onde os graus das funções aproximativas variam de 3 a 11. Além disso, os contornos 15, 16 e 17 contêm ponta de fissura, portanto a aproximação destes foi enriquecida de acordo com a equação (3.42).

A malha de elementos híbrido-Trefftz para a fissura interna é ilustrada na Figura 5-33, onde as numerações também seguem o mesmo padrão das malhas dos exemplos anteriores.

Para as funções aproximativas das tensões nos domínios dos elementos (eq. (3.11)), foram adotados graus de 6 a 15 e todos os elementos foram enriquecidos pelas funções analíticas da mecânica da fratura, conforme equação (3.40).

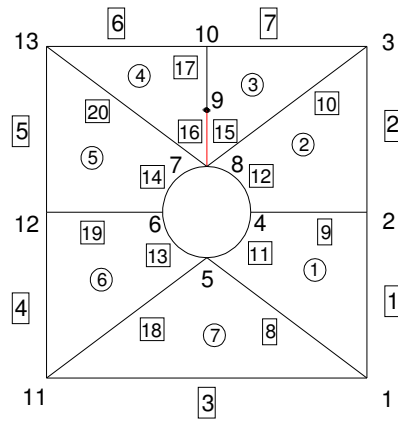


Figura 5-32 - Malha de elementos híbrido-Trefftz da fissura de borda para  $P_L^{(k)}$

Já nos contornos dos elementos, os deslocamentos foram aproximados de acordo com a equação (3.16), onde os graus das funções aproximativas variaram de 3 a 7. Além disso, como os contornos 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17 e 18 contêm ponta de fissura, a aproximação foi enriquecida de acordo com a equação (3.42).

Os FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$  para o caso de fissura e furo são dados pela Tabela 5-29, Tabela 5-30, Tabela 5-31 e Tabela 5-32.

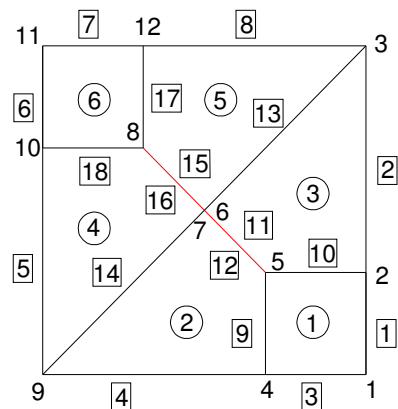


Figura 5-33 - Malha de elementos híbrido-Trefftz da fissura interna para  $P_L^{(k)}$

Tabela 5-29 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso a

Caso a			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,000	0,000	0,00
$K_{II}$	2,111	2,041	3,43

Tabela 5-30 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso b

Caso b			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	1,628	1,579	3,11
$K_{II}$	0,000	0,000	0,00

Tabela 5-31 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso c

Caso c			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,000	0,000	0,00
$K_{II}$	1,002	0,962	4,16

Tabela 5-32 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso d

Caso d			
FIT	Solução de híbrido-Trefftz	Referência	Diferença relativa (%)
	Ponto 9	Ponto 9	Ponto 9
$K_I$	0,369	0,358	3,07
$K_{II}$	0,000	0,000	0,00

As diferenças relativas obtidas estão entre 3 e 4,16%, apontando para resultados bem próximos da solução de referência.

Os FIT obtidos em  $P_L^{(k)}$  para o caso de fissura interna são dados pelas Tabela 5-33 a Tabela 5-40.

**Tabela 5-33 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso e**

Caso e						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	1,558	0,085	1,504	0,0824	3,59	3,11

**Tabela 5-34 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso f**

Caso f						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	1,274	0,058	1,234	0,053	3,24	9,43
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

**Tabela 5-35 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso g**

Caso g						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	0,085	1,558	0,0824	1,504	3,59	3,11

Tabela 5-36 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso h

Caso h						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,058	1,274	0,053	1,234	9,43	3,24
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 5-37 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso i

Caso i						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	0,385	0,119	0,362	0,111	6,25	7,51

Tabela 5-38 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso j

Caso j						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,288	0,046	0,269	0,041	7,14	11,26
K <sub>II</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Tabela 5-39 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso k

Caso k						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
K <sub>I</sub>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
K <sub>II</sub>	0,119	0,385	0,111	0,362	7,51	6,25

Tabela 5-40 - FIT da ponta da fissura de  $P_L^{(k)}$  o caso I

Caso I						
Solução de híbrido-Trefftz			Referência		Diferença relativa (%)	
FIT	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8	Ponto 5	Ponto 8
$K_I$	0,046	0,288	0,041	0,269	11,26	7,14
$K_{II}$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00

Além dos FIT, foram obtidas também as forças de superfície do contorno  $\Gamma$  para cada subproblema  $k$ .

Observa-se que as diferenças relativas, em sua maioria, estão abaixo de 7%, apontando para resultados bem próximos da solução de referência. Para demais valores, nota-se que os FIT são muito pequenos, assim uma pequena variação em relação à referência provoca um aumento grande da diferença relativa. Porém, ainda assim, esses valores estão próximos da referência.

#### 5.4.3 - Subproblema $P_G^{(k)}$

Os últimos subproblemas,  $P_G^{(k)}$ , estão apresentados na Figura 5-34. A malha de elementos finitos T6 adotada contém 11927 nós e 5894 elementos.

Assim como no exemplo 3, as forças obtidas nos contornos  $\Gamma$  dos  $P_L^{(k)}$  são aplicadas em cada  $P_G^{(k)}$ , observando-se as orientações das fissuras. Ou seja, deve-se aplicar uma transformação de rotação às forças do contorno  $\Gamma$  para as fissuras internas 2 e 3 a fim de respeitar a orientação original da fissura.

Seguindo o procedimento do método, os vetores de tensões  $t_G^{(k)}$  nas linhas das fissuras externas aos contornos são aproximados utilizando função constante e linear na combinação, determinando, assim, os parâmetros  $c_{i,j}^{(k)}$  da equação (2.5), para cada fissura.



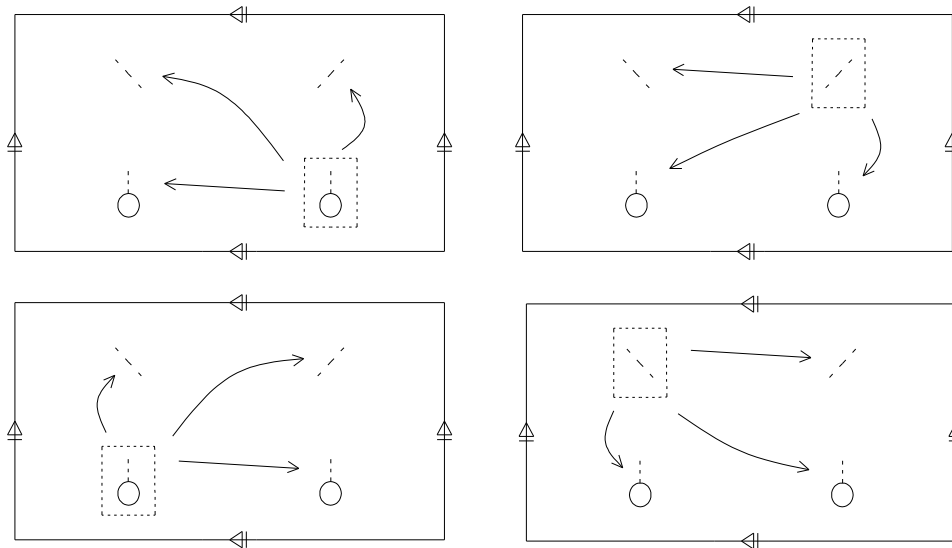


Figura 5-34 - Problema Global  $P_G^{(k)}$

#### 5.4.4 - Sobreposição dos subproblemas

Os FIT finais do problema original, considerando aproximação linear completa, são apresentados na Tabela 5-44. Os valores de referência são apresentados na Tabela 5-41 e as diferenças relativas entre estes valores e os valores obtidos pelo método da partição são apresentadas na Tabela 5-45.

Para fins de comparação de resultados, também foi extraída a solução do método da partição considerando-se apenas aproximação constante, apresentada na Tabela 5-42. A diferença relativa referente à aproximação constante é apresentada na Tabela 5-43.

Tabela 5-41 - Valores de referência para o FIT de cada ponta da fissura do problema original

FIT	Referência					
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
$K_I$	2,827	1,247	1,201	2,827	1,247	1,201
$K_{II}$	0,024	1,016	1,021	0,024	1,016	1,021

**Tabela 5-42 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação constante**

Aproximação constante						
FIT	Solução do método da partição					
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
$K_I$	2,688	1,146	1,299	2,688	1,126	1,299
$K_{II}$	0,030	0,934	0,952	0,030	0,934	0,952

**Tabela 5-43 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação constante**

Diferença relativa (%)						
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
$K_I$	4,917	8,10	8,160	4,917	10,75	8,160
$K_{II}$	25,00	8,78	7,25	25,00	8,78	7,25

**Tabela 5-44 - FIT de cada ponta da fissura do problema original considerando aproximação linear**

Aproximação linear						
FIT	Solução do método da partição					
	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
$K_I$	2,740	1,194	1,271	2,770	1,194	1,271
$K_{II}$	0,028	0,952	0,972	0,028	0,9520	0,972

**Tabela 5-45 - Diferença relativa entre o valor de referência e a solução do método da partição considerando aproximação linear**

Diferença relativa (%)						
FIT	Ponta 1	Ponta 2	Ponta 3	Ponta 4	Ponta 5	Ponta 6
$K_I$	3,03	4,25	5,83	3,03	4,25	5,83
$K_{II}$	16,67	6,30	4,80	16,67	6,30	4,80

Observa-se que os valores das diferenças relativas, considerando aproximação linear completa, para  $K_I$  e  $K_{II}$  estão abaixo de 6,30%, bem próximos dos valores de referência. Além disso, realizando uma comparação entre as duas aproximações, conclui-se que os resultados do

método da partição estão mais próximos dos valores de referência ao se considerar aproximação linear completa em relação à aproximação constante.

Mais uma vez, nota-se que para valores de FIT muito pequenos, uma pequena variação em relação à referência provoca um aumento grande da diferença relativa. Porém, ainda assim, esses valores estão próximos da referência.



## 6- Considerações finais e conclusões

### 6.1 – Breves comentários sobre o conteúdo da tese e conclusões parciais

A presente pesquisa de doutorado teve como objetivo analisar sólidos multifissurados mediante uma nova estratégia baseada na combinação entre o método da partição e a formulação híbrido-Trefftz de tensão.

A pesquisa promoveu contribuições originais ao meio acadêmico ao colaborar com o desenvolvimento do método da partição, pois, trata-se de um método criado recentemente e ainda de aplicação restrita. A extensão de sua formulação para problemas que envolvam fissuras de borda e interna, sujeitas a modo I e II de abertura, contribuiu para o crescimento do método, pois sua formulação original apresentava lacunas nos trabalhos publicados até o presente momento, onde apenas eram apresentados casos de fissuras de borda sujeitas ao modo I de abertura de fissura.

A escolha do método da partição para essa pesquisa se deu devido às suas variadas vantagens:

- Decomposição do problema contendo múltiplas fissuras em subproblemas a fim de facilitar a análise;
- Comprovação da convergência matemática da solução, diferentemente de outros métodos de decomposição;
- Possibilidade de emprego de qualquer método numérico para a análise dos subproblemas;
- Possibilidade de sua implementação em softwares comerciais já existentes para uso nas indústrias;
- Facilidade na obtenção dos resultados de  $P_G^{(0)}$  e  $P_G^{(k)}$ , pois tratam-se de domínios sem a presença de fissuras;
- Análise individual das fissuras pelos subproblemas locais em domínio reduzido, diminuindo a malha de elementos finitos;

- Independência dos subproblemas locais  $P_L^{(k)}$  em relação ao carregamento externo, promovendo a utilização da solução de um único problema para outros casos de carregamento;
- É dispensada a análise de todas as fissuras do problema original nos  $P_L^{(k)}$ , pois a análise de uma única fissura pode ser aproveitada para as demais fissuras semelhantes, mesmo que dispostas em diferentes direções;
- Independência dos subproblemas locais,  $P_L^{(k)}$ , entre si, proporcionando o emprego da paralelização da análise, reduzindo o custo computacional;
- Independência dos subproblemas globais,  $P_G^{(k)}$ , entre si, proporcionando também o emprego da paralelização dessa etapa da análise, reduzindo o custo computacional;
- Análise da interação entre fissuras mediante o subproblema  $P_G^{(k)}$ , evitando, assim, procedimentos iterativos presentes, por exemplo, no “Alternating Method”, reduzindo, também, o custo computacional da análise.

Além do método da partição, o emprego da formulação híbrido-Trefftz também levantou contribuições acadêmicas originais, pois a combinação do método com a referida formulação nunca havia sido adotada pela comunidade científica. A utilização dos elementos híbrido-Trefftz nos subproblemas fissurados ( $P_L^{(k)}$ ) do método da partição proporcionou grandes vantagens em relação ao emprego do MEF, e até mesmo do MEFG, da seguinte maneira:

- Os elementos híbrido-Trefftz não sofrem com efeito de distorção das malhas, pois suas integrais são realizadas apenas nos contornos dos elementos. Além disso, os elementos podem ser empregados com quaisquer número de pontos e lados, e em qualquer formato, inclusive curvos;
- As aproximações independentes dos campos de tensão e deslocamento no domínio e contorno do elemento, respectivamente, geram melhores aproximações das tensões ao evitar sucessivas derivações dos campos de deslocamentos (característica do MEF);
- O uso de funções analíticas da elasticidade linear, obtidas via equação de Navier, promove excelente aproximação dos campos de tensões nos domínios dos

elementos híbrido-Trefftz, proporcionando o uso de malhas grosseiras para a solução dos problemas, diminuindo o custo computacional da análise;

- A adição de funções analíticas da mecânica da fratura na composição das bases de aproximação dos campos de tensão no domínio do elemento e as novas aproximações para o campo de deslocamento no contorno, geram ótimos resultados para problemas de fissuras (objeto deste trabalho), sem refinamento da malha na ponta da fissura;
- Em particular, a adição das funções analíticas da mecânica da fratura nas bases de aproximação dos campos de tensão no domínio do elemento podem ser realizadas de maneira que os FIT sejam incógnitas na solução do sistema linear do problema. Essa característica é de grande contribuição para a análise numérica de fissuras, pois evita o uso de pós-processamento para avaliar esses fatores, como ocorre no MEF;G;

Desse modo, quatro exemplos numéricos foram analisados visando a validação da estratégia aqui adotada.

O primeiro exemplo, tratou de caso mais simples de sólido bidimensional envolvendo duas fissuras internas iguais e sujeitas apenas ao modo I de abertura. Como já era esperado, foi o caso que forneceu as menores diferenças entre a solução via método da partição e a referência. Os resultados obtidos para  $K_I$  quase coincidiram com a solução de referência, enquanto que os valores de  $K_{II}$  da solução do método da partição estavam mais próximos do valor nulo, o que é esperado para esse caso.

O segundo exemplo foi o primeiro caso de análise de fissuras internas sujeitas aos modos I e II de abertura. Apesar de estarem sujeitas a um modo adicional de abertura em comparação com exemplo anterior, esse também é considerado um problema relativamente simples, onde a solução final do método da partição praticamente se igualou à solução de referência.

Ao final dos dois exemplos, pôde-se concluir que a estratégia aqui proposta da formulação do método da partição para fissuras internas e sujeitas aos modos I e II de abertura estava validada. Por se tratarem de casos mais simples, foram adotados apenas aproximações constantes para as tensões dos subproblemas. Adicionalmente, os elementos híbrido-Trefftz foram empregados com sucesso nos subproblemas locais com malhas bem grosseiras, contendo apenas seis elementos.

O terceiro exemplo objetivou realizar a avaliação de sólido contendo furos e fissura de borda. Nesta situação, empregou-se a estratégia de análise de vários cenários do mesmo sólido com fissuras em diferentes posições.

A análise de sólidos contendo furos e fissuras é de grande importância, pois a presença de furos simula os espaços vazios criados para a inserção de conectores na estrutura, como, por exemplo, rebites em uma estrutura aeronáutica. Como a presença de furos acaba gerando uma perturbação das tensões em suas proximidades, a convergência da solução não é obtida facilmente em relação aos casos de sólidos sem furo (exemplos 1 e 2). Portanto, é importante o uso de aproximação linear completa das tensões nos subproblemas do método da partição.

Foi realizada a análise de previsão de situação mais crítica do sólido do terceiro problema ao comparar diferentes possibilidades de surgimento de fissura na estrutura. Nesse tipo de análise, vários cenários diferentes são avaliados visando o cálculo dos FIT e previsão da propagação da fissura no sólido (não considerada no presente trabalho). Para simplificar a análise, foram escolhidos apenas três cenários diferentes de fissuração.

Portanto, ao analisar os três cenários adotados, observa-se que as soluções do método da partição estão próximas da solução de referência, com diferença relativa abaixo de 6%. Conforme comentado no capítulo 5, algumas soluções apresentaram valores de FIT muito baixo, ocasionando aumento da diferença relativa mesmo com pequenos desvios em relação à solução de referência. Porém, tal fato não invalida a análise já que os valores estão muito próximos da referência.

Uma grande potencialidade do método pôde ser observada no terceiro exemplo quando um único subproblema local foi avaliado e seus resultados armazenados pelo programa para serem utilizados na análise das demais fissuras, mesmo para diferentes cenários. Assim, mesmo com um grande número de cenários, obtém-se uma redução do custo computacional ao dispensar as sucessivas análises dos subproblemas locais.

Por fim, o quarto problema objetivou avaliar um sólido contendo fissura de borda com furo ao mesmo tempo que surgem fissuras internas inclinadas. Nessa situação, foi necessário realizar a análise de dois subproblemas locais devido a presença de diferentes conjuntos de fissuras. Apesar de gerar um aumento no número de problemas, o custo computacional pode ser significativamente reduzido ao empregar o recurso da paralelização. Mais uma vez, foi



adotada aproximação linear completa para as tensões devidas à presença de furos e, como no exemplo anterior, foram obtidos resultados próximos dos valores de referência.

Vale comentar também que o uso de uma aproximação linear completa resulta em melhores soluções com relação à aproximação constante no método da partição. Além disso, conforme Andersson, Babuska e Stehlin (1998), em termos práticos, a solução pode ser obtida com aproximação muito baixa, fato confirmado pelos resultados aqui apresentados.

## **6.2 – Conclusões gerais e perspectivas futuras**

Diante dos fatos citados, conclui-se que a estratégia proposta neste trabalho pode ser adotada para a análise de sólidos contendo múltiplas fissuras ao fornecer soluções precisas aliada a malhas grosseiras nos domínios fissurados. Além disso, a pesquisa abre espaço para o desenvolvimento de trabalhos nessa área, algumas listadas a seguir:

- Desenvolvimento da formulação híbrido-Trefftz para computar a propagação da fissura sem re-malha, viabilizando o uso do método da partição para esse tipo de análise;
- Implementação da estratégia de geração automática de possíveis cenários de fissuração a fim de detectar a situação crítica;
- Análise de sólido fissurado sujeito a carregamentos dinâmicos via método da partição, avaliando também a falha do material por fadiga;
- Expansão da formulação do método da partição para domínios tridimensionais;
- Utilização da formulação híbrido-Trefftz para computar a propagação da fissura, sem re-malha, no domínio tridimensional.

A fim de otimizar o software desenvolvido, pode-se realizar as seguintes intervenções no código computacional:

- Implementação de rotina para geração automática da malha de elementos finitos para os subproblemas e rotina para definição automática dos domínios dos subproblemas locais, dispensando o uso de software auxiliar;

- Implementação de rotina para distribuição automática dos graus das aproximações dos campos de tensão e deslocamento, baseando-se no erro da solução para critério de parada;
- Implementação do método da partição em software comercial para seu uso na indústria.

## Referências

ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P. (1991). **Numerical Fracture Mechanics**. Southampton: Computational Mechanics Publications / Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ALMEIDA, J. P. M., PEREIRA, O. J. B. A. (1996). A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 2789-2802.

ALVES, M. M. (2010). **Método da Partição na análise de múltiplas fissuras**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ANDERSON, T. L. (1991). **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**.

ANDERSSON, B., BABUŠKA, I., & STEHLIN, P. (1998). **Reliable Multiple-Site Damage Analysis of 3D Structures**. FFA-TN-1998-18, The Aeronautical Research Institute of Sweden, Stockholm.

ARGÔLO, H. S.D. de (2010). **Emprego de formulações não-convencionais de elementos finitos na análise linear bidimensional de sólidos com múltiplas fissuras**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ASSAN, A. E. (2003). **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2ª ed., editora da UNICAMP. Campinas – SP.

ATROSHCHENKO, E., POTAPENKO, S., GLINKA, G. (2012). Stress Intensity Factor for a Semi-Elliptical Crack Subjected to an Arbitrary Mode I Loading. **Mathematics and Mechanics of Solids**, v 19, n 3, p 289-298.

BABUŠKA, I., ANDERSSON, B. (2005). The Splitting Method as a Tool for Multiple Damage Analysis. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 26, n. 4, p. 1114-1145.

- BABUŠKA, I., MELENK, J. M. (1995). The partition of unity finite element method. Technical Report BN-I 185, **Inst. for Phya. Sci. and Tech.**, University of Maryland.
- BARSOUM, R. S. (1976). On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, p. 25-37.
- BATHE, K.J. (1996). **Finite Element Procedure**. Prentice Hall.
- BELYTSCHKO, T., LU, Y., GU, L. (1994). Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 37, p. 229-256
- BUECKNER, H. F. (1958). The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation. **ASME, Transaction**, v.80, n. 6, p. 1225-1230.
- BUSSAMRA, F. L. da S., NETO, E. L., PONCIANO, W. M. (2014). Simulation of Stress Concentration Problems by Hexahedral Hybrid-Trefftz Finite Element Models. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 99, n. 3, pp. 255-272.
- BUSSAMRA, F. L. da S., NETO, E. L., RODRIGUES, M. A. C. (2016). Simulation of Stress Concentration Problems in Laminated Plates by Quasi-Trefftz Finite Elemet Models. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 13, 1677-1694.
- CHAVES, V., NAVARRO, A., LARROSA, N. O. (2015) Calculating Fatigue Limits of Notched Components of Arbitrary Size and Shape with Cracks Growing in Mode I. **International Journal of Fatigue**, v. 74, p 142-155.
- CHEN, Y. Z. (2009). Solution of Multiple Crack Problem in a Finite Plate Using an Alternating Method Based on Two Kinds of Integral Equation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 35, n. 10, p 1109-1115.

- COTTA, I. F. S. (2016). Splitting Method in Multisite Damage Solids: Mixed Mode Fracturing and Fatigue Problems. **Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.**
- DONG, L., ATLURI, S. N. (2013). Fracture & Fatigue Analyses: SGBEM-FEM or XFEM? **CMES**, v. 90, n. 2, p. 91-146.
- DUARTE, C. A., BABUŠKA, I., ODEN, J. T. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**, v. 77, p. 215-232.
- DUARTE, C. A., ODEN, J. T. (1996). An *h-p* adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237-262.
- FAWAZ, S. A., ANDERSSON, B. (2004). Accurate stress intensity factor solutions for corner cracks at a hole. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 71, p. 1235-1254.
- FAWAZ, S., ANDERSSON, B. (2006). Statistical fatigue and residual strength analysis of new/aging aircraft structure. **IEEE Computer Society.**
- FAWAZ, S. A., ANDERSSON, B., NEWMAN JR., J. C. (2003). Experimental verification of stress intensity factor solutions for corner cracks at a hole subject to general loading. **ICAF 2003 - Fatigue of Aeronautical Structures as an Engineering Challenge.**
- FREITAS, J. A. T. (1998). Formulation of elastostatic hybrid-Trefftz stress elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 127-151.
- FREITAS, J. A. T. (1999). Hybrid finite element formulations for elastodynamic analysis in the frequency domain. **International Journal of Solids and Structures**, 36, 1883-1923.
- FREITAS, J. A. T., ALMEIDA, J. P. B. M., PEREIRA, E. M. B. R. (1999). Non-conventional formulations for the finite element method. **Computational Mechanics**, v. 23, p. 488-501.

FREITAS, J. A. T., BUSSAMRA, F. L. S. (2000). Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 47, 927-950.

FREITAS, J. A. T., JI, Z. -Y. (1996a). Hybrid-Trefftz equilibrium model for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 569-584.

FREITAS, J. A. T., JI, Z. -Y. (1996b). Hybrid-Trefftz finite element formulation for simulation of singular stress fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, p. 281-308.

GDOUTOS, E. E. (1993). **Fracture mechanics - an introduction**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

GÓIS, W. (2004). **Método dos elementos finitos generalizados em formulação variacional mista**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

GÓIS, W. (2009). **Elementos Finitos Híbridos e Híbrido-Mistos de Tensão com Enriquecimento Nodal**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

HENSHELL, R. D., SHAW, K. G. (1975). Crack tip finite elements are unnecessary. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 495-507.

ISHIKAWA, H., KITAGAWA, H., OKAMURA, H. (1980). J-integral of mixed mode crack and application. **Proc. 3rd Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Material**. Pergamon Press. Oxford, Vol. 3, pp. 447-455.

JIROUSEK, J. (1978). Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.14, p.65-92.

JIROUSEK, J., LEON, N. (1977). A powerful finite element for plate bending. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 12, p. 77-96.

JIROUSEK, J., TEODORESCU, P. (1982). Large finite elements methods for the solution of problems in the theory of elasticity. **Computers and Structures**, v. 15, p. 575-587.

JIROUSEK, J., VENKATESH, A. (1992). Hybrid Trefftz plane elasticity elements with p-method capabilities. **Internacional Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 35, p. 1443-1472.

JIROUSEK, J., WRÓBLEWSKI, A. (1996). T-elements: State of the Art and Future Trends. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 3, n. 4, p. 323-434.

KUNDU, T. (2008). **Fundamentals of fracture mechanics**. CRC press.

LACHENBRUCH, A. H. (1961). Depth and Spacing of Tension Cracks. **Journal of Geophysical Research**, v. 66, n. 12, 4273-4292.

LE TALLEC, P. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. **Computational Mechanics/advances**, 1, ed J.T. Oden, p 121-220.

LIU, G. R. (2010). **Meshfree methods: moving beyond the finite element method**. CRC PRESS. 2 edition.

MELENK, J. M., BABUŠKA, I. (1996). The partition of unit finite element method: Basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 139, p. 289-314.

ODEN, J. T., DUARTE, C. A. M., ZIENKIEWICZ, O. C. (1998). A new cloud-based hp finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 153, p. 117-126.

SAVASSI, W. (1996). **Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas**. Editora: EESC-USP.

SMITH, B., BJORSTAD, T. P., GRAPP, W. (1996). Domain decomposition. **Cambridge University Press**. 220 pp.

SORIANO, H. L. (2003). **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora da Universidade de São Paulo. São Paulo - SP.

SOUZA, C. O. de (2008). **Formulação híbrido-Trefftz com enriquecimento seletivo: aplicação a problemas bidimensionais da elasticidade**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

STROUBOULIS, T., BABUŠKA, I., COPPS, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 181, p. 43-69.

SZABÓ, B., BABUŠKA, I. (1991). **Finite Element Analysis**. Wiley-Interscience, 1 edition.

TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. (1980). **Teoria da Elasticidade**. Guanabara Dois S.A.

WANG, L., ATLURI, S.N. (1996). Recent advances in the alternating method for elastic and inelastic fracture analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 137, p. 1-58.

WILLIAMS, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. **ASME Journal of Applied Mechanics**, 24, pp. 109-114.

ZIENKIEWICZ, O. C., QU, S., TAYLOR, R. L., NAKAZAWA, S. (1986). The patch test for mixed formulations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 1873-1883.



ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (2000a). **The Finite Element Method. Volume 1: The Basis**. 5ª edição. Butterworth-Heinemann.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. (2000b). **The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics**. 5ª edição. Butterworth-Heinemann.



## Apêndice A - Equações da elasticidade linear

São revistas aqui as equações que governam o PVC em forma forte da elasticidade linear plana (TIMOSHENKO; GOODIE, 1980).

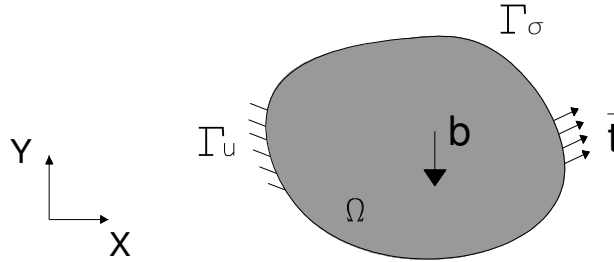


Figura A-1 – Representação genérica de um sólido bidimensional.

A Figura A-1 representa genericamente um sólido bidimensional. O vetor  $\mathbf{b}$  guarda as componentes das forças de volume. O símbolo  $\Omega$  representa o volume e  $\Gamma_\Omega$  o contorno do sólido, sendo  $\Gamma_\sigma$  o contorno estático, onde forças prescritas  $\bar{t}$  são impostos e  $\Gamma_u$  o contorno cinemático, onde deslocamentos  $\bar{u}$  são prescritos. As regiões de contorno são complementares, de modo que a fronteira  $\Gamma_\Omega$  pode ser representada pela seguinte expressão:  $\Gamma_\Omega = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ .

As equações básicas do PVC são:

$$L\sigma + \bar{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L^T u \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = f \sigma \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.3})$$

$$\text{ou } \sigma = D\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.4})$$

$$I\sigma = \bar{t} \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (\text{A.5})$$

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (\text{A.6})$$

A Equação (A.1) é a equação que exprime o equilíbrio no domínio. A matriz  $\mathbf{L}$  reúne operadores diferenciais, o vetor  $\boldsymbol{\sigma}$  contém as componentes do tensor de tensões e  $\bar{\mathbf{b}}$  o vetor das forças volúmicas. Tais elementos são representados por:

- $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}$ , sendo  $\partial/\partial x$  e  $\partial/\partial y$  derivadas parciais;
- $\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$ , sendo  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  as componentes de tensão normal e  $\tau_{xy}$  a componente cisalhante;
- $\bar{\mathbf{b}}^T = \{b_x \quad b_y\}$ , sendo  $b_x$  e  $b_y$  as componentes do vetor segundo os eixos de referência.

A Equação (A.2) é dita equação de compatibilidade, onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor representativo do tensor de deformações e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos. Esses elementos são representados por:

- $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$ , sendo  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  componentes de deformação linear específica e  $\gamma_{xy}$  a distorção angular;
- $\mathbf{u}^T = \{u_x \quad u_y\}$ , sendo  $u_x$  e  $u_y$  componentes do vetor de deslocamento.

As equações (A.3) e (A.4) constituem alternativas para a relação constitutiva do sólido. A primeira é escrita em termos de  $\mathbf{f}$  que é o tensor constitutivo de flexibilidade, representado por:

- $\mathbf{f} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de

Poisson.

A segunda é escrita em termos de  $\mathbf{D}$  que é o tensor constitutivo de rigidez, representado por:

- $\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$

A relação (A.5) é denominada de condição de contorno de Neumann. A matriz  $\mathbf{I}$  é formada pelas componentes de um vetor unitário normal à  $\Gamma_\sigma$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  é o vetor de forças de superfície prescritas em  $\Gamma_\sigma$  (tensões de Cauchy). Essas grandezas são representadas por:

- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$ , sendo  $n_x$  e  $n_y$  as componentes de um vetor unitário normal a  $\Gamma_\sigma$ ;
- $\bar{\mathbf{t}}^T = \{\bar{t}_x \quad \bar{t}_y\}$ , sendo  $\bar{t}_x$  e  $\bar{t}_y$  as componentes do vetor de forças de superfície prescrita.

A Equação (A.6) é dita condição de contorno de Dirichlet. O vetor  $\bar{\mathbf{u}}$  é o vetor de deslocamentos prescritos no contorno  $\Gamma_u$ , representado por:

- $\bar{\mathbf{u}} = \{\bar{u}_x \quad \bar{u}_y\}$ , sendo  $\bar{u}_x$  e  $\bar{u}_y$  componentes do vetor de deslocamentos prescritos no contorno  $\Gamma_u$ ;



## Apêndice B - Dedução do sistema linear final do método da partição

Tem-se a seguinte equação que define a condição essencial do método da partição, expressando a nulidade das tensões ao longo da linha da fissura  $i$ :

$$\int_0^{a_i} \sum_{j=1}^J \left[ b_{i,j} - \alpha_{j+(i-1)J} + \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot c_{i,j}^{(k)} \right] Q_j(\xi_i/a_i) \cdot Q_{j_2}(\xi_i/a_i) d\xi = 0 \quad (\text{B.1})$$

A fim de desenvolver a expressão (B.1), é necessário realizar as variações dos índices  $j$ ,  $k$ :

$$\begin{aligned} j &= 1, \dots, J \\ k &= 1, \dots, M \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Escrevendo cada termo de forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a_i} \left[ \begin{array}{c} b_{1i}^x Q_{1x} + b_{2i}^x Q_{2x} + \dots + b_{Ji}^x Q_{Jx} \\ b_{1i}^y Q_{1y} + b_{2i}^y Q_{2y} + \dots + b_{Ji}^y Q_{Jy} \end{array} \right]^T + \\
& + \alpha_1 \left\{ \left[ \begin{array}{c} c_{1ix}^1 Q_{1x} + c_{2ix}^1 Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^1 Q_{Jx} \\ c_{1iy}^1 Q_{1y} + c_{2iy}^1 Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^1 Q_{Jy} \end{array} \right]^T - \left\{ \begin{array}{c} Q_{1x} \\ 0 \end{array} \right\}^T \right\} + \\
& + \alpha_2 \left\{ \left[ \begin{array}{c} c_{1ix}^2 Q_{1x} + c_{2ix}^2 Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^2 Q_{Jx} \\ c_{1iy}^2 Q_{1y} + c_{2iy}^2 Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^2 Q_{Jy} \end{array} \right]^T - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Q_{1y} \end{array} \right\}^T \right\} + \dots + \\
& + \alpha_M \left\{ \left[ \begin{array}{c} c_{1ix}^M Q_{1x} + c_{2ix}^M Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^M Q_{Jx} \\ c_{1iy}^M Q_{1y} + c_{2iy}^M Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^M Q_{Jy} \end{array} \right]^T - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ Q_{Jy} \end{array} \right\}^T \right\} \left\{ \begin{array}{c} Q_{jix} \\ Q_{jiy} \end{array} \right\} d\xi = 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Procedendo a multiplicação da primeira expressão de (B.3) pela sua segunda expressão

$\left\{ \begin{array}{c} Q_{jix} \\ Q_{jiy} \end{array} \right\}$ , obtém:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a_i} \left\{ \left[ (b_{1i}^x Q_{1x} + b_{2i}^x Q_{2x} + \dots + b_{Ji}^x Q_{Jx}) Q_{jix} + (b_{1i}^y Q_{1y} + b_{2i}^y Q_{2y} + \dots + b_{Ji}^y Q_{Jy}) Q_{jiy} \right] + \right. \\
& + \alpha_1 \left[ (c_{1ix}^1 Q_{1x} + c_{2ix}^1 Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^1 Q_{Jx}) Q_{jix} + (c_{1iy}^1 Q_{1y} + c_{2iy}^1 Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^1 Q_{Jy}) Q_{jiy} - \right. \\
& \left. \left. - (Q_{1x} Q_{jix} + 0 Q_{jiy}) \right] + \right. \\
& + \alpha_2 \left[ (c_{1ix}^2 Q_{1x} + c_{2ix}^2 Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^2 Q_{Jx}) Q_{jix} + (c_{1iy}^2 Q_{1y} + c_{2iy}^2 Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^2 Q_{Jy}) Q_{jiy} - \right. \\
& \left. \left. - (0 Q_{jix} + Q_{1y} Q_{jiy}) \right] + \dots + \right. \\
& \left. + \alpha_M \left[ (c_{1ix}^M Q_{1x} + c_{2ix}^M Q_{2x} + \dots + c_{Jix}^M Q_{Jx}) Q_{jix} + (c_{1iy}^M Q_{1y} + c_{2iy}^M Q_{2y} + \dots + c_{Jiy}^M Q_{Jy}) Q_{jiy} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (0 Q_{jix} + Q_{Jy} Q_{jiy}) \right] \right\} d\xi = 0
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Separando a equação (B.4) em duas, sendo uma referente à direção x (Eq. (B.5)) e a outra à direção y (Eq. (B.6)), resulta em:



$$\begin{aligned}
 & \int_0^{a_i} \left\{ \left[ (b_{1i}^x \mathcal{Q}_{1x} + b_{2i}^x \mathcal{Q}_{2x} + \dots + b_{Ji}^x \mathcal{Q}_{Jx}) \mathcal{Q}_{jix} \right] + \right. \\
 & + \alpha_1 \left[ (c_{1ix}^1 \mathcal{Q}_{1x} + c_{2ix}^1 \mathcal{Q}_{2x} + \dots + c_{Jix}^1 \mathcal{Q}_{Jx}) \mathcal{Q}_{jix} - \mathcal{Q}_{1x} \mathcal{Q}_{jix} \right] + \\
 & + \alpha_2 \left[ (c_{1ix}^2 \mathcal{Q}_{1x} + c_{2ix}^2 \mathcal{Q}_{2x} + \dots + c_{Jix}^2 \mathcal{Q}_{Jx}) \mathcal{Q}_{jix} - 0 \mathcal{Q}_{jix} \right] + \dots + \\
 & \left. + \alpha_M \left[ (c_{1ix}^M \mathcal{Q}_{1x} + c_{2ix}^M \mathcal{Q}_{2x} + \dots + c_{Jix}^M \mathcal{Q}_{Jx}) \mathcal{Q}_{jix} - 0 \mathcal{Q}_{jix} \right] \right\} d\xi = 0
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{a_i} \left\{ \left[ (b_{1i}^y \mathcal{Q}_{1y} + b_{2i}^y \mathcal{Q}_{2y} + \dots + b_{Ji}^y \mathcal{Q}_{Jy}) \mathcal{Q}_{jiy} \right] + \right. \\
 & + \alpha_1 \left[ (c_{1iy}^1 \mathcal{Q}_{1y} + c_{2iy}^1 \mathcal{Q}_{2y} + \dots + c_{Jiy}^1 \mathcal{Q}_{Jy}) \mathcal{Q}_{jiy} - 0 \mathcal{Q}_{jiy} \right] + \\
 & + \alpha_2 \left[ (c_{1iy}^2 \mathcal{Q}_{1y} + c_{2iy}^2 \mathcal{Q}_{2y} + \dots + c_{Jiy}^2 \mathcal{Q}_{Jy}) \mathcal{Q}_{jiy} - \mathcal{Q}_{1y} \mathcal{Q}_{jiy} \right] + \dots + \\
 & \left. + \alpha_M \left[ (c_{1iy}^M \mathcal{Q}_{1y} + c_{2iy}^M \mathcal{Q}_{2y} + \dots + c_{Jiy}^M \mathcal{Q}_{Jy}) \mathcal{Q}_{jiy} - \mathcal{Q}_{Jy} \mathcal{Q}_{jiy} \right] \right\} d\xi = 0
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

Para a montagem do sistema linear, manipula-se as equações (B.5) e (B.6) a fim de transferir os termos independentes das incógnitas  $\alpha$  para o lado direito do sistema. Tais termos formam o vetor  $\{r\}$  do sistema (2.12) e é dado pela expressão (B.7):

$$r = - \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{a_i} (b_{1i}^x \mathcal{Q}_{1x} + \dots + b_{Ji}^x \mathcal{Q}_{Jx}) \mathcal{Q}_{jix} \\ \int_0^{a_i} (b_{1i}^y \mathcal{Q}_{1y} + \dots + b_{Ji}^y \mathcal{Q}_{Jy}) \mathcal{Q}_{jiy} \end{array} \right\} \tag{B.7}$$

Já a matriz  $[IG]$ , que corresponde aos termos dependentes, pode ser dividida em duas: a matriz  $[IG]_{P_L^{(k)}}$  (Eq. (B.8)) e a matriz  $[IG]_{P_G^{(k)}}$  (Eq. (B.9)) que coletam os valores referentes aos problemas  $P_L^{(k)}$  e  $P_G^{(k)}$ , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} -\int_0^{a_i} Q_{1x} Q_{jjx} d\xi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\int_0^{a_i} Q_{1y} Q_{jyy} d\xi & \dots & -\int_0^{a_i} Q_{Jy} Q_{jyy} d\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^{a_i} (c_{1ix}^1 Q_{1x} + \dots + c_{Jix}^1 Q_{Jx}) Q_{jjx} & \int_0^{a_i} (c_{1ix}^2 Q_{1x} + \dots + c_{Jix}^2 Q_{Jx}) Q_{jjx} & \dots \\ \int_0^{a_i} (c_{1iy}^1 Q_{1y} + \dots + c_{Jiy}^1 Q_{Jy}) Q_{jyy} & \int_0^{a_i} (c_{1iy}^2 Q_{1y} + \dots + c_{Jiy}^2 Q_{Jy}) Q_{jyy} & \dots \\ \dots & \int_0^{a_i} (c_{1ix}^M Q_{1x} + \dots + c_{Jix}^M Q_{Jx}) Q_{jjx} & \\ \dots & \int_0^{a_i} (c_{1iy}^M Q_{1y} + \dots + c_{Jiy}^M Q_{Jy}) Q_{jyy} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

A fim de interpretar fisicamente os termos da matriz  $[IG]_{P_L^{(k)}}$ , considere, por exemplo, o termo da matriz do sistema (B.8) referente a posição 1x1:  $-\int_0^{a_i} Q_{1x} Q_{jjx} d\xi$ . Esse termo trata do valor do carregamento  $Q$  imposto na direção  $x$  nas faces da fissura  $i$ . O valor do carregamento  $Q$  pode ser encontrado através da equação (2.2).

Com relação a matriz  $[IG]_{P_G^{(k)}}$ , a interpretação física dos termos pode ser dado observando o termo da matriz do sistema (B.9) na posição  $1 \times 1$ :  $\int_0^{a_i} (c_{1ix}^1 Q_{1x} + \dots + c_{Jix}^1 Q_{Jx}) Q_{jix}$ . Esse termo trata da média das tensões  $t_G^{(k)}$  (Eq. (2.5)) nas faces da fissura  $i$  devido a imposição dos deslocamentos no contorno  $\Gamma$  da fissura 1 devido ao carregamento  $Q_1$  na direção  $x$  do problema  $P_L^{(k)}$ .

A soma das matrizes  $[IG]_{P_L^{(k)}}$  e  $[IG]_{P_G^{(k)}}$  resulta na matriz  $[IG]$  do sistema (2.12). Como os resultados das fissuras internas ao contorno  $\Gamma$  nos problemas  $P_G^{(k)}$  são descartados, os termos da matriz  $[IG]_{P_G^{(k)}}$  referentes às tensões destas fissuras devem ser anulados.

Finalmente, o índice  $jj$  deve também variar de 1 a  $J$  para que o número de equações seja compatível com o número de incógnitas.



## Apêndice C - Obtenção dos campos de aproximação no domínio do elemento da formulação híbrido-Trefftz

Para exemplificar a obtenção dos campos de tensão e deslocamento no domínio do elemento, considere que o potencial  $\phi$  de (3.9) será obtido para um grau 3 de funções aproximativas, ou seja,  $n = 2, 3$ , resultando em:

$$\phi = \left\{ \underbrace{r^2 \cos(2\theta)}_{\phi_1} \quad \underbrace{r^2 \sin(2\theta)}_{\phi_2} \quad \underbrace{\frac{r^2}{r^3}}_{\phi_3} \quad \underbrace{r^3 \cos(3\theta)}_{\phi_4} \quad \underbrace{r^3 \sin(3\theta)}_{\phi_5} \quad \underbrace{r^3 \cos(\theta)}_{\phi_6} \quad \underbrace{r^3 \sin(\theta)}_{\phi_7} \right\} \quad (C.1)$$

Substituindo (C.1) em (3.7), (3.3) e utilizando (3.8), a aproximação dos campos de tensão é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \quad \phi_7 \} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{Bmatrix} \quad (C.2)$$

Para a obtenção da matriz  $U$ , desenvolve-se as equações de compatibilidade (A.2) e equilíbrio constitutiva (A.3) em coordenadas polares, resultando nas expressões (C.3) e (C.4).

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)\end{aligned}\tag{C.4}$$

Substituindo (C.4) em (C.3) e integrando ambos os lados das equações, obtém-se os deslocamentos:

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{1}{E} \int (\sigma_r - \nu\sigma_\theta) dr \\ u_\theta &= \int \left[ \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r) - u_r \right] d\theta\end{aligned}\tag{C.5}$$

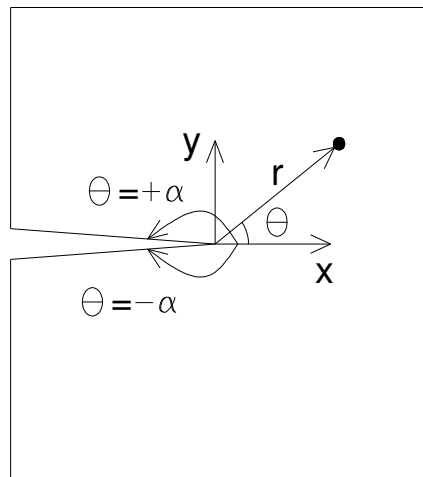
Utilizando as aproximações dos campos de deslocamento (3.12) e tensão (3.3) em (C.5), as matrizes  $U$  são obtidas por:

$$\begin{aligned}U_{1i} &= \frac{1}{E} \int (S_{1i} - \nu S_{2i}) dr \\ U_{2i} &= \int \left[ \frac{r}{E} (S_{2i} - \nu S_{1i}) - U_{1i} \right] d\theta\end{aligned}\tag{C.6}$$

Sendo  $i$  as colunas da matriz  $S$  e  $U$ .

## Apêndice D - Equações analíticas da mecânica da fratura

Para explicar a obtenção dos FIT diretamente da solução do sistema linear do elemento híbrido-Trefftz é necessário apresentar a solução analítica da mecânica da fratura (KUNDU, 2008). Para isso, considere um domínio bidimensional qualquer contendo uma fissura, conforme a Figura D-0-1. Como já comentado neste trabalho, a presença da fissura provoca altos gradientes de tensão na região próxima à fissura. Portanto, para obter a solução nessa região, adota-se, inicialmente, um sistema de coordenadas polares  $(r, \Theta)$  com origem na ponta da fissura.



**Figura D-0-1 - Sistema de coordenadas na ponta da fissura**

A solução analítica das tensões é obtida mediante um potencial (WILLIAMS, 1957), denominado nesse trabalho de  $\phi$ , representado por:

$$\phi = r^{\lambda+1} F(\theta) \quad (D.1)$$

Onde  $\lambda$  define o grau da aproximação e  $F(\theta)$  são funções dependentes do ângulo  $\theta$  iguais a:

$$F(\theta) = c_1 \cos\{(\lambda-1)\theta\} + c_2 \operatorname{sen}\{(\lambda-1)\theta\} + c_3 \cos\{(\lambda+1)\theta\} + c_4 \operatorname{sen}\{(\lambda+1)\theta\} \quad (\text{D.2})$$

Sendo  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  as constantes da expressão.

Aplicando o operador diferencial  $\partial$  da eq. (3.8) em (D.1), obtêm-se a solução analítica do sólido bidimensional para as tensões (equações (D.3) e (D.4)).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial \theta} \end{Bmatrix} r^{\lambda+1} F(\theta) \quad (\text{D.3})$$

Desenvolvendo (D.3), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= r^{\lambda-1} \{F''(\theta) + (\lambda+1)F(\theta)\} \\ \sigma_\theta &= \lambda(\lambda+1)r^{\lambda-1}F(\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\lambda r^{\lambda-1}F'(\theta) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Aplicando as condições de contorno na face da fissura (D.5) na equação (D.4) e realizando as derivadas de  $F(\theta)$ , uma nova função  $F_n(\theta)$  é encontrada, dada pela equação (D.6).

$$\begin{aligned} \theta &= \pm\alpha \\ \sigma_\theta &= \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$



$$\begin{aligned}
 F_n(\theta) &= c_{1n} \cos\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} + c_{2n} \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} \\
 &+ c_{3n} \cos\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\} + c_{4n} \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}
 \end{aligned}$$

com:

$$\begin{aligned}
 c_{3n} &= -\frac{n-2}{n+2} c_{1n} \\
 c_{4n} &= -\frac{n-2}{n+2} c_{2n}
 \end{aligned}$$

onde  $\lambda = \frac{n}{2}$  e  $n = 1, 2, \dots$ . Assim, para diferentes valores de  $n$ , obtêm-se diferentes funções

$F_n(\theta)$ . Consequentemente, as expressões das tensões passam a ser dadas por:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \sum_n r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[ \left\{ \left(\frac{n}{2}+1\right) - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 \right\} \left\{ c_{1n} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + c_{2n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta \right\} + \right. \\
 &+ \left. \left\{ \left(\frac{n}{2}+1\right) - \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 \right\} \left\{ c_{3n} \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta + c_{4n} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= \sum_n \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}+1\right) r^{\frac{n-1}{2}} \left[ c_{1n} \cos\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} + c_{2n} \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} + \right. \\
 &+ c_{3n} \cos\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\} + c_{4n} \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\theta} &= -\sum_n \frac{n}{2} r^{\frac{n-1}{2}} \left[ -c_{1n} \left(\frac{n}{2}-1\right) \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} + c_{2n} \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left\{\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right\} - \right. \\
 &- c_{3n} \left(\frac{n}{2}+1\right) \operatorname{sen}\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\} + c_{4n} \left(\frac{n}{2}+1\right) \cos\left\{\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta\right\}
 \end{aligned}$$

Dentre todos os valores possíveis de  $n$ , aquele que fornece os valores máximos de tensão ocorre quando  $n=1$ . Portanto, substituindo esse valor nas equações (D.7), (D.8) e (D.9), resulta:

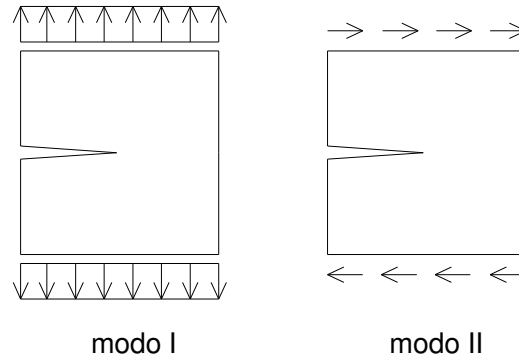
$$\begin{aligned} \sigma_r = \frac{1}{\sqrt{r}} & \left[ \left\{ \frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} c_{11} + \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{5}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} c_{21} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{3}{4\sqrt{r}} & \left[ c_{11} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} - \right. \\ & \left. - c_{21} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = \frac{1}{4\sqrt{r}} & \left[ c_{11} \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} + \right. \\ & \left. c_{21} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

As expressões de (D.10), (D.11) e (D.12) são denominadas termos dominantes. Para tais equações, pode-se afirmar que se o problema possui geometria e carregamento simétrico em relação ao eixo  $x$ , apenas o termo com coeficiente  $c_{11}$  é considerado. Caso contrário, para carregamento assimétrico em relação a  $x$ , apenas o termo com coeficiente  $c_{21}$  é considerado. A determinação dos termos simétricos e assimétricos é importante a fim de definir os modos de abertura da fissura (Figura D-0-2):

- Modo I: abertura da fissura devido a um carregamento perpendicular e simétrico em relação a sua face;
- Modo II: abertura da fissura devido a um carregamento paralelo e assimétrico em relação a sua face.



**Figura D-0-2 - Modos de abertura da fissura**

Portanto, separando os termos referentes ao modo I e II das equações (D.10) a (D.12), simplificando as equações e adotando que  $c_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$  e  $c_{21} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}$ , resulta:

Solução analítica de tensão para o modo I:

$$\sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ 2 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (D.13)$$

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (D.14)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (D.15)$$

Solução analítica de tensão para o modo II:

$$\sigma_r = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ 2 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (D.16)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} 3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (D.17)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ 1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (D.18)$$

Aplicando o operador diferencial  $\partial$  de (3.8) nos potenciais (3.37), observa-se que as equações (D.13) a (D.18) são reproduzidas com a ausência das constantes  $K_I$  e  $K_{II}$ , resultando na seguinte submatriz da matriz  $S$ :

$$\begin{Bmatrix} S_{k11} & S_{k21} \\ S_{k12} & S_{k22} \\ S_{k13} & S_{k23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{2 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} & \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{2 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \frac{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} & -\frac{3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} & \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} \end{Bmatrix} \quad (D.19)$$

Observa-se que a primeira coluna da submatriz  $S_k$  refere-se aos termos do modo I e a segunda coluna aos termos do modo II.

A aproximação das tensões (3.3) levando em conta apenas os termos de (D.19), resulta:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{2 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} & \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{2 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \frac{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} & -\frac{3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2\pi r}} & \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left\{1 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi r}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{k_I} \\ X_{k_{II}} \end{Bmatrix} \quad (D.20)$$

Finalmente, comparando a equação (D.20) com as equações (D.13) a (D.18), conclui-se que os parâmetros  $X_{k_I}$  e  $X_{k_{II}}$ , incógnitas do sistema linear do elemento híbrido-Trefftz, são as constantes  $K_I$  e  $K_{II}$  da solução analítica da mecânica da fratura, denominados de fator de

intensidade de tensão para o modo I e modo II, respectivamente. Sendo, portanto, determinados diretamente da solução do sistema linear.



Apêndice E – Fluxograma do programa desenvolvido

