

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ENIO CARLOS MESACASA JÚNIOR

APLICAÇÃO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS À
ANÁLISE DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM
LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

São Carlos

2016

ENIO CARLOS MESACASA JÚNIOR

**APLICAÇÃO DA TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS À
ANÁLISE DE PÓRTICOS METÁLICOS PLANOS COM
LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor em Ciências do programa de Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Maximiliano Malite

Coorientador: Prof. Dr. Dinar Reis Zamith Camotim

SÃO CARLOS
2016

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Mesacasa Júnior, Enio Carlos.

M578a Aplicação da teoria generalizada de vigas à análise de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas / Enio Carlos Mesacasa Júnior; orientador Maximiliano Malite; coorientador Dinar Reis Zamith Camotim. São Carlos, 2016.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2016.

1. Pórticos metálicos. 2. Ligações semirrígidas. 3. Análise de estabilidade. 4. Teoria generalizada de vigas (GBT). 5. Elementos finitos baseados na GBT. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ENIO CARLOS MESACASA JÚNIOR.**

Título da tese: "Aplicação da teoria generalizada de vigas à análise de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas".

Data da defesa: 15/09/2016.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **Dinar Reis Zamith Camolim**
(Co-Orientador)
(Universidade de Lisboa/UL)

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Cilmar Donizeti Baságila**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Alex Sander Clemente de Souza**
(Universidade Federal de São Carlos/UFScar)

Prof. Dr. **Alexandre Landesmann**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Resultado:

APROVADO

APROVADO

APROVADO

APROVADO

APROVADO.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**

Aos meus pais, Enio e Maisa, e às
minhas irmãs, Franciele e Heloísa,
porque a família sim, é a “estrutura” mais
importante que pode existir.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as condições que fogem ao controle humano, e que permitem que possamos, de alguma forma, trabalhar pelo bem de nossos semelhantes.

Em segundo, àqueles que sempre me deram a tranquilidade necessária para poder me dedicar à carreira acadêmica, nomeadamente, a minha família.

Depois, ao Prof. Maximiliano Malite, pela fundamental motivação em todos os momentos, e por todo o esforço e presteza a mim dedicados, sem dúvidas será sempre um espelho em minha carreira.

Ao Prof. Dinar Camotim, não apenas pelo papel fundamental no direcionamento científico do trabalho, mas por todos os constantes ensinamentos, os quais permitiram um desenvolvimento pessoal e profissional imensurável.

Ao Prof. Cilmar Basaglia, que partilhou seu saber em inúmeras questões relacionadas ao seu trabalho.

Às pessoas que, juntas, trabalham incansavelmente para que o Departamento de Estruturas da EESC ofereça as melhores condições possíveis aos que dele fazem uso, nomeadamente, Rosi, Maria Nadir, Sylvia, Daniane, Dorival, Melina, Francisco, todo o pessoal do laboratório de estruturas, bem como os professores, coordenadores e administradores do programa e do departamento de estruturas.

Às pessoas que trabalharam para me receber em Portugal, e garantiram que me sentisse em casa enquanto continuava a aprender junto ao IST-UL, em especial a Manuela Carvalho (DECivil).

Aos Profs. Nuno Silvestre, Borges Dinis e Rodrigo Gonçalves, que compartilharam sem limitação todo o seu saber, e, mais do que professores, foram amigos com quem compartilhei grandes momentos.

Ao colega, e grande amigo, Rui Bebiano, pela magnífica tutoria sobre as formulações fundamentais da GBT, pelo valioso partilhar de sua experiência na programação das técnicas numéricas coincidentes em nossos trabalhos, e, em especial, pelos momentos de descontração e ideias que são como sementes de um bom futuro.

Aos colegas do SET-EESC, com quem compartilhei o caminho ao longo de anos, e que são peças sem as quais tudo seria mais difícil (ou mesmo impossível). Devo citar aqui, em especial, o Fabio Rocha, Gisele Martins, David Amorim, Gabriel Rocha, e Socorro Sampaio, e também os colegas do IST-UL, André Martins e Pedro Natário.

Aos amigos que me suportaram, e que, ao longo deste período, prestaram apoio fundamental em todos os momentos, em especial Felipe Farina, Adriano Santana, Maria Trafimovich, Amós Magalhães, Nuno Silva, Pedro Oliveira, Rafael Batezini, Bernardo Tams, e, finalmente, Daniella Souza (esta última um pouco mais, pois também “me aguentou” um pouco mais). Além desses, registro meus sinceros agradecimentos àqueles que foram como pais para mim na cidade de São Carlos desde o começo, Maria Senhoras, e Acyr Senhoras (*in memoriam*).

À FAPESP, pela bolsa de doutorado concedida – Processo 2013/12348-1.

À CAPES, pela bolsa de doutorado sanduíche – Processo BEX 7208/14-6.

Enfim, a todos esses, e a todos os demais, que por motivos de falha em minhas conexões sinápticas (espero que não se ofendam e que eu possa reparar qualquer gafe de esquecimento), o meu “muito obrigado”.

RESUMO

MESACASA JR., E. C. (2016). **Aplicação da teoria generalizada de vigas à análise de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas**. 158p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

Sistemas estruturais constituídos por perfis de aço são, em geral, dimensionados de uma forma “indireta”, isto é, cada componente é analisado e verificado segundo suas capacidades teóricas individualmente, normalmente associando-se condições de extremidade e comprimentos teóricos para cada barra de modo a aproximar a sua capacidade portante sob a condição real. Contudo, importantes efeitos como a transmissão do empenamento entre as barras devido à torção e/ou distorção, as restrições localizadas impostas por sistemas de contraventamento ou componentes diversos, e também a compatibilidade de deslocamentos locais/globais entre barras conectadas não alinhadas entre si, são desconsiderados, uma vez que o estudo de tais efeitos envolve, normalmente, custosos trabalhos de modelagem através de elementos finitos de casca (e/ou sólidos), soluções numéricas complexas e demoradas, e/ou estudos experimentais caros e trabalhosos. Neste contexto, alguns recentes trabalhos apontam para um vasto campo de aplicações das inovadoras potencialidades da Teoria Generalizada de Vigas (GBT), permitindo, em particular, a análise de sistemas estruturais que consideram os diversos efeitos provocados por condições de apoio arbitrárias, diferentes posições do carregamento e efeitos decorrentes das ligações entre as barras. Contudo, apesar de tais recursos ampliarem as aplicações da GBT na análise de estabilidade de sistemas estruturais, apenas um conjunto limitado de problemas pode ser atendido, especialmente quanto às ligações entre as barras. Os recentes trabalhos envolvendo a aplicação da GBT para a análise de estabilidade de pórticos metálicos dedicaram-se ao estudo de alguns casos específicos de ligações rígidas, isto é, assumem a hipótese de transferência completa dos deslocamentos generalizados entre as barras. Assim, uma vez que a rigidez de tais ligações pode ser responsável por mudanças significativas no comportamento do sistema estrutural em questão, este trabalho procura fornecer uma solução capaz de considerar a semirrígidez das ligações metálicas associada aos parâmetros modais típicos da GBT. Além disso, dada a possibilidade de ampliar os tipos de ligações analisadas por meio da GBT, incluindo as configurações mais comumente utilizadas na prática, apresentam-se novos conjuntos de relações cinemáticas desenvolvidas para tal, assim como as referidas validações, que são realizadas por meio de análises utilizando o programa computacional ANSYS®.

Palavras-chave: Pórticos metálicos. Ligações semirrígidas. Análise de estabilidade. Teoria generalizada de vigas. Elementos finitos baseados na GBT.

ABSTRACT

MESACASA JR., E. C. (2016). **Application of generalized beam theory to semi-rigid plane steel frames**. 158p. (Doctoral thesis) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2016.

Steel structural systems are usually associated with an "indirect approach", *i.e.*, each component of the respective structure is analysed and verified according to its theoretical individual capacity. Normally, in order to approximate the real behaviour of the structural system, specific support conditions and effective length concepts are used to analyse each structural member separately. However, some important effects are disregarded in this procedure, like the warping transmission at frame joints (due to torsion and/or distortion), or those stemming from localized supports associated with bracing systems, as well as the local/global displacements compatibility of the cross-section walls at the joint region. Additionally, studies considering the above mentioned effects involves rather complicated and time-consuming numerical analyses using shell and/or solid finite elements, and/or expensive experimental investigation. On the other hand, some recent studies revealed a large field for application of the Generalized Beam Theory (GBT) in the context of the stability, first and second order analyses of structural systems, considering, particularly, the effects caused by arbitrary support conditions, different load positions, and the effects caused by connections between members. Nonetheless, all the recent works applying GBT for stability analysis of steel frames are focused on some specific cases of rigid connections, *i.e.*, they assume the full transfer of the generalized displacements between the non-aligned members. Thus, given the well-known fact that the rigidity of connections may lead to considerable changes of the structural behaviour of steel structural systems, this work deals with the development of a solution to incorporate the semi-rigidity of the steel frame connections to the modal parameters of the GBT. Furthermore, given the possibility to expand the connection types analysed by means of GBT, including the most commonly used configurations adopted in practice, it is presented the related new kinematic relations developed, as well as the validation studies carried out in the software ANSYS®.

Keywords: Steel frames. Semi-rigid connections. Stability analyses. Generalized Beam Theory. GBT-Based Finite Elements.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 – Exemplos de estruturas constituídas por perfis de aço formados a frio: (a) galpões para usos gerais e (b) estruturas para armazenamento..... | 21 |
| Figura 1.2 – Exemplo ilustrativo (a) de pórtico formado por perfis do tipo I enrijecidos, submetido a forças concentradas, (b) cujo modo crítico de instabilidade é influenciado pelo tipo de ligação | 22 |
| Figura 1.3 – Discretização de uma barra em (a) um elemento finito de barra, (b) elementos finitos de casca, e (c) faixas finitas | 24 |
| Figura 1.4 – Discretização dos deslocamentos de uma seção transversal de acordo com (a) o MFF (discretização nodal) e (b) a GBT (discretização modal) | 25 |
| Figura 1.5 – Tipos de ligações estudadas por Basaglia (2010), para perfis I ou U, (a) sem chapas de enrijecimento na alma, (b) com chapa diagonal, (c) chapas paralelas (ligação em caixa), e (d) chapas paralelas e diagonal | 28 |
| Figura 1.6 – Classificação das ligações segundo a rigidez – ligação rígida, semirrígida e flexível (rotulada). 29 | |
| Figura 1.7 – Tipos de ligação (a) completa e (b) parcial..... | 30 |
| Figura 1.8 – Exemplos de ligações tipicamente semirrígidas, que são normalmente utilizadas em sistemas formados por perfis de paredes finas | 30 |
| Figura 2.1 – Etapas de uma análise por meio da GBT..... | 40 |
| Figura 2.2 – Configuração no plano da seção transversal dos 9 primeiros modos de deformação de uma seção tipo cartola..... | 40 |
| Figura 2.3 – Configuração no plano da seção transversal dos 9 primeiros modos de deformação de uma seção tipo cartola..... | 41 |
| Figura 2.4 – Barra prismática com sessão transversal aberta ramificada arbitrária de paredes finas, juntamente com o campo de deslocamentos e sistemas de eixos global e local adotados..... | 42 |
| Figura 2.5 – Cinemática no plano xz de uma placa genérica, segundo as hipóteses de Kirchhoff-Love | 43 |
| Figura 2.6 – Deslocamento axial num elemento de placa infinitesimal: decomposição em parcelas de membrana e flexão. | 44 |
| Figura 2.7 – Deslocamentos axiais $u_i(s)$ (fora do plano) para os 4 primeiros modos de deformação ($1 \leq i \leq 4$) de uma seção tipo cartola. | 50 |
| Figura 2.8 – (a)-(e) Ordem adotada para o cálculo de $\tau_{xs,j}^0$, conforme os eixos locais s , (f) fluxo de corte e (g) distribuição (qualitativa) de tensões $\tau_{xs,2}^0$ consistente com a orientação de s | 53 |
| Figura 2.9 – Força externa genérica sobre o plano médio da seção transversal, e suas componentes q_x , q_s e q_z | 54 |
| Figura 2.10 – Seções de paredes finas: (a) abertas não ramificadas; (b) abertas ramificadas; (c) fechadas uniloculares não ramificadas, e (d) fechadas multiloculares ramificadas. | 56 |
| Figura 2.11 – Esquema de discretização de uma seção transversal, com a (a) classificação, (b) simbologia adotada, e (c) as respectivas funções elementares | 60 |
| Figura 2.12 – Seção transversal aberta ramificada, com 9 paredes, 6 nós de extremidade, e 4 nós naturais. ... | 60 |
| Figura 2.13 – Definições de caminhos principais: (a) – (b) válidas, e (c) – (d) inválidas..... | 60 |
| Figura 2.14 – Definições, para a seção transversal de exemplo, dos caminhos (a) principal, (b) secundários, e (c) terciário. | 61 |

| | |
|--|----|
| Figura 2.15 – (a) Discretização nodal, e (b) segmentos de paredes numerados, com respectiva orientação..... | 61 |
| Figura 2.16 – Nó de ramificação r : (a) distribuição das paredes e nós adjacentes, e modos elementares de deslocamento axial associados aos nós (b) $r-1$, e (c) r | 63 |
| Figura 2.17 – Deslocamentos axiais associados a cada modo elementar de uma seção ramificada. | 64 |
| Figura 2.18 – Imposição de um deslocamento unitário de flexão em (a) nó de extremidade, e (b) nó intermediário.64 | |
| Figura 2.19 – Funções elementares de flexão associadas a cada nó intermediário e de extremidade. | 65 |
| Figura 2.20 – Modos de deformação da GBT para uma seção aberta ramificada: deslocamentos $v_i(s)$ e $w_i(s)$. 69 | |
| Figura 2.21 – Modos de deformação da GBT para uma seção aberta ramificada: deslocamentos $u_i(s)$ | 69 |
| Figura 2.22 – Decomposição/aproximação dos diagramas não lineares de tensões. | 72 |
| Figura 2.23 – Graus de liberdade nodais para cada modo de deformação. | 74 |
| Figura 2.24 – Exemplos de apoios não convencionais: restrições pontuais rígidas ou flexíveis | 75 |
| Figura 2.25 – (a) Deslocamentos e rotações relativos ao ponto P , e alguns tipos de restrições aplicáveis: (b) deslocamentos e/ou (c) rotações fixas, ou molas (d) translacionais, e/ou (e) rotacionais. | 78 |
| Figura 3.1 – (a) Eixos de coordenadas para cada barra individual, e (b) graus de liberdade da GBT relativos aos modos globais em relação aos respectivos eixos. | 80 |
| Figura 3.2 – Representação gráfica dos graus de liberdade da GBT em relação aos seus respectivos eixos de referência para cada barra individual: (a) extensão axial; (b) derivada da flexão em torno do eixo de maior inércia; (c) valor de flexão em torno do eixo de maior inércia; (d) rotação de torção em torno do centro de corte; e (e) empenamento ... | 81 |
| Figura 3.3 – Graus de liberdade relativos aos modos globais da GBT em relação a um eixo de referência | 81 |
| Figura 3.4 – (a) Discretização de um pórtico em elementos finitos de barra da GBT, e elemento de nó em cada ligação, (b) representado separadamente com seus eixos de referência | 82 |
| Figura 3.5 – Sequência de rotações para compatibilização dos graus de liberdade globais: (a) rotação em torno de X , (b) rotação em torno de Z , (c) rotação em torno de Y , e (d) os graus de liberdade resultantes. | 84 |
| Figura 3.6 – (a) Pórtico discretizado em elementos finitos da GBT, com (b) detalhe da ligação, que é (c) representada pelo elemento de nó de pórtico da GBT. | 85 |
| Figura 3.7 – Deslocamentos devidos à torção em um perfil I, (a) com empenamento livre, e (b) com empenamento restringido nas extremidades..... | 86 |
| Figura 3.8 – Pórtico em L com diferentes tipos de ligação para avaliação da transmissão do empenamento. Dimensões em centímetros. | 91 |
| Figura 3.9 – Rotação do pilar em torno do eixo longitudinal obtida por meio de elementos finitos de casca e elementos finitos de barra tridimensional, para quatro tipos de ligações, e três condições de transmissão de empenamento. | 92 |
| Figura 3.10 – Rotação da viga em torno do eixo longitudinal obtida por meio de elementos finitos de casca e elementos finitos de barra tridimensional, para quatro tipos de ligações, e três condições de transmissão de empenamento. | 92 |
| Figura 3.11 – Ligação com enrijecedores em caixa e diagonal, com definições individuais de propriedades de material..... | 94 |
| Figura 3.12 – Ligação com enrijecedores em caixa e diagonal, com definições individuais de propriedades de material..... | 95 |
| Figura 3.13 – Ligação com enrijecedores em caixa e dupla diagonal. | 96 |
| Figura 3.14 – Rotação do pilar em torno do eixo longitudinal obtida por meio do MEFc e do MEFb, para três tipos de ligações, e duas condições de transmissão de empenamento específicas, respectivamente. | 97 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.15 – Rotação da viga em torno do eixo longitudinal obtida por meio do MEFc e do MEFb, para três tipos de ligações, e duas condições de transmissão de empenamento específicas, respectivamente. | 97 |
| Figura 3.16 – Ligação entre perfis I com continuidade na alma e sem enrijecedores – configuração indeformada (cinza) e deformada (escala de cores). | 99 |
| Figura 3.17 – (a) Ligação entre dois perfis I sem enrijecimento na alma, representada pelo elemento de nó, que permite a compatibilização entre os (b) graus de liberdade na extremidade de cada barra..... | 99 |
| Figura 3.18 – Análise pelo MEFc mostrando a continuidade nos deslocamentos locais e distorcionais entre dois perfis U enrijecidos e ligação com continuidade nas mesas | 100 |
| Figura 3.19 – (a) Ligação entre dois perfis U idênticos com continuidade nas mesas, (b) discretização em elementos finitos da GBT associada e (c) representação e localização dos nós onde é materializada a ligação. | 102 |
| Figura 3.20 – Localização dos nós onde se inicia a intersecção das mesas, e materializam ligações entre dois e três perfis I com mesas no mesmo plano | 103 |
| Figura 3.21 – (a) Ligação entre dois perfis I com almas no mesmo plano, e (b) projeção lateral identificando as seções de intersecção entre as barras, bem como os nós a serem considerados em cada uma para a compatibilização..... | 105 |
| Figura 3.22 – (a) Localização dos eixos para identificação dos pontos coordenados, (b) distribuição linear das rotações ao longo dos eixos 3 e 5, e (c) representação da condição deformada para a rotação de flexão lateral na Barra B..... | 106 |
| Figura 3.23 – Ligação entre perfis I enrijecidos com alma no mesmo plano: Disposição, e nós para compatibilizações (a) globais, (b) das almas, (c) mesas, e (d) enrijecedores..... | 108 |
| Figura 4.1 – Ligação viga-pilar unilateral (a) tipicamente flexível, (b) tipicamente rígida, e (c) semirrígida. ... | 111 |
| Figura 4.2 – Representação esquemática de um elemento de mola de comprimento nulo conectando duas extremidades de elementos de barra da GBT em seus deslocamentos de rotações do modo j | 112 |
| Figura 4.3 – Seção transversais em (a) I enrijecido, e (b) I simples, com respectivas discretizações. | 113 |
| Figura 4.4 – Primeiros modos de deformação obtidos para as seções transversais em I enrijecido e I simples | 114 |
| Figura 4.5 – Seção transversais em (a) I enrijecido, e (b) I simples, com respectivas discretizações. | 114 |
| Figura 4.6 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico. | 116 |
| Figura 4.7 – Configuração deformada do pórtico plano nos casos de (a) $\rho_k=1$ e (b) $\rho_k=0$ | 116 |
| Figura 4.8 – Pórtico simétrico sob combinação de carregamentos e molas rotacionais nos nós B e C..... | 116 |
| Figura 4.9 – Diagrama de momentos fletores (valores em kN.cm) para pórtico com ligações (a) perfeitamente rígidas – $\rho_k = 1$ e (b) perfeitamente rotuladas – $\rho_k = 0$ | 117 |
| Figura 4.10 – Representação esquemática de uma ligação entre viga e pilar compostos por perfis I enrijecidos, com chapa de topo e quatro parafusos – (a) montagem, (b) configuração final e (c) detalhe da chapa de topo..... | 117 |
| Figura 4.11 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica (P_{cr}) em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico (ρ_k) exibido na Fig. 4.8..... | 120 |
| Figura 4.12 – Pórtico com $\rho_k=1$: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (c) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (d) correspondente composição da seção transversal mais deformada..... | 120 |
| Figura 4.13 – Pórtico com $\rho_k=0,02$: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada..... | 121 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.14 – Pórtico com $0,38 < \rho_k < 0,39$: (a) Deformada do modo crítico de instabilidade obtido com (a) o ANSYS e (b) com a GBT, (c) funções de amplitude modal, e (d) correspondente composição das seções transversais mais deformadas. | 123 |
| Figura 4.15 – (a) Pórtico em L, com carregamentos e mola rotacional no nó B, e seus respectivos diagramas de momento fletor para condições de (b) $\rho_k = 0$ e (c) $\rho_k = 1$ | 124 |
| Figura 4.16 – Representação esquemática de uma ligação entre viga e pilar compostos por perfis I, com chapa de topo e quatro parafusos – (a) montagem e (c) detalhe da chapa de topo. | 125 |
| Figura 4.17 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica (P_{cr}) em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico (ρ_k) exibido na Fig. 4.15 | 126 |
| Figura 4.18 – Pórtico em L associado a $\rho_k=1$: Configuração deformada do modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada | 127 |
| Figura 4.19 – Pórtico em L associado a $\rho_k=0,03$: Configuração deformada do modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada | 128 |
| Figura 4.20 – Pórtico em L associado a $\rho_k=0,09$ no caso da GBT e $\rho_k=0,05$ no caso do ANSYS: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com a GBT e (b) com o ANSYS, (c) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (d) correspondente composição da seção transversal mais deformada | 129 |
| Figura 4.21 – Detalhamento da região da ligação associado ao fator de rigidez resultantes de $\rho_k=0,05$ | 130 |
| Figura 4.22 – Esquema de atribuição dos elementos finitos no modelo numérico implementado no programa ANSYS. | 131 |
| Figura 4.23 – Malha característica de elementos finitos na região da ligação | 132 |
| Figura 4.24 – Detalhamento da região da ligação associado aos fatores de rigidez resultantes de (a) $\rho_k=0,24$ e (b) $\rho_k=0,38$, para o pórtico ilustrado na Fig. 4.8. | 132 |
| Figura 4.25 – Eixos para determinação da rigidez rotacional da ligação. Condição indeformada e deformada. | 133 |
| Figura 4.26 – Deslocamento horizontal medido ao longo dos eixos V1-V2 e P1-P2, e respectivas regressões lineares | 134 |
| Figura 4.27 – Condição deformada (em grande escala) da ligação exibida na Fig. 4.21 (associada a $\rho_k=0,05$) quando submetida a um momento fletor | 136 |
| Figura 4.28 – Modelo constitutivo bilinear com encruamento isotrópico. | 136 |
| Figura 4.29 – Distribuição de tensões de von-Mises na região da ligação (em MPa). | 137 |
| Figura 4.30 – Deslocamento horizontal medido ao longo dos eixos V1-V2 e P1-P2 (Fig. 4.18), e respectivas regressões lineares | 137 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1.1 – Atributos que influenciam a estabilidade de pórticos metálicos..... | 27 |
| Tabela 1.2 – Componentes consideradas para determinação da rigidez à rotação de uma ligação parafusada com chapa de topo ajustada unilateral, de acordo com o Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c). | 32 |
| Tabela 2.1 – Expressões analíticas e significados físicos associados aos tensores lineares de rigidez da GBT..... | 49 |
| Tabela 2.2 – Expressões analíticas e significados físicos associados às matrizes de rigidez geométrica da GBT. | 53 |
| Tabela 2.3 – Expressões analíticas e significados físicos associados aos vetores de força da GBT | 54 |
| Tabela 3.1 – Relações de transmissão de empenamento em diversos casos de ligações com continuidade nas mesas ou na alma de perfis I ou U..... | 89 |
| Tabela 4.1 – Resultados da análise de estabilidade elástica do pórtico ilustrado na Fig. 4.8..... | 121 |
| Tabela 4.2 – Resultados da análise de estabilidade elástica do pórtico em L ilustrado na Fig. 4.15..... | 125 |
| Tabela 4.3 – Coeficientes de rigidez para as componentes da ligação exibida na Fig. 4.21, segundo o Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c)..... | 136 |

LISTA DE SÍMBOLOS

Índices e Operadores

| | |
|-------------------|---|
| $()_i$ | componente i de um tensor de primeira ordem |
| $()_{ik}$ | componente (i,k) de um tensor de segunda ordem |
| $()_{jik}$ | componente (j,i,k) de um tensor de segunda ordem |
| $()^M, ()^F$ | componente de membrana e de flexão |
| $()^L, ()^{NL}$ | componente linear e não linear |
| $()^I, ()^{II}$ | primeiro e segundo termo de um tensor; indicação relativa à etapa de diagonalização das matrizes da GBT |
| $()^\wedge$ | relativo ao sistema de coordenadas do elemento de nó |
| $()_{,x}$ | derivada parcial em relação a x |
| $()^T$ | transposta de uma matriz |
| $()^o$ | associado às funções de deslocamento elementares da seção transversal |

Caracteres Latinos

| | |
|-----------------------|---|
| A | área da seção transversal |
| b_p | comprimento (na direção do eixo s) de uma parede da seção transversal |
| $B_{ik}, [B]$ | matriz da GBT associada à flexão transversal das paredes da seção |
| $C_{ik}, [C]$ | matriz da GBT associada ao empenamento |
| CG, CT | centros de gravidade e de corte da seção transversal |
| $D_{ik}, [D]$ | matriz da GBT associada à torção generalizada |
| $[d_G], [d_D], [d_L]$ | vetor de deslocamentos generalizados associados aos modos globais, distorcionais e locais |
| E | módulo de elasticidade longitudinal |
| e | espessura da parede da seção transversal |
| $[f]$ | vetor de forças generalizadas |
| F_j | força generalizada associada à ação de uma mola para o modo de deformação j |
| G | módulo de elasticidade transversal |
| $[G]$ | matriz de rigidez geométrica |
| I_Y | momento de inércia em relação ao eixo Y |
| I_Z | momento de inércia em relação ao eixo Z |
| I_ω | momento de inércia setorial |
| $[I]$ | matriz identidade |
| k_{jd} | constante de mola translacional associada ao modo j |
| $k_{j\theta}$ | constante de mola rotacional associada ao modo j |
| $[K]$ | matriz de rigidez linear |
| L | comprimento |
| L_e | comprimento de um elemento finito |
| $[L]$ | matriz de translação de deslocamentos generalizados |
| M | momento fletor |
| N | esforço axial |
| $[N]$ | matriz de transformação dos graus de liberdade de uma barra para compatibilização em pórticos |
| N_d | número de modos de deformação |
| N_{dist} | número de modos distorcionais |
| N_{loc} | número de modos locais |
| N_{ef} | número total de elementos finitos em um sistema |
| N_v | número de autovalores |
| n_p | número de paredes que compõem uma seção transversal |
| n_d | número de nós dependentes (seção transversal) |
| n_e | número de nós de extremidade (seção transversal) |

| | |
|-----------------|---|
| m | número de nós intermediários na discretização da seção transversal |
| P_{cr} | força associada à bifurcação do equilíbrio em uma análise de estabilidade elástica |
| q | força externa genérica aplicada sobre uma seção transversal |
| q_x, q_y, q_z | componentes da força q decompostos segundo sistema de coordenadas local (x, s, z) |
| $[R_X]$ | matriz de rotação em torno do eixo X |
| $[R_{\hat{Y}}]$ | matriz de rotação em torno do eixo \hat{Y} |
| $[R_Z]$ | matriz de rotação em torno do eixo \hat{Z} |
| $[S]$ | matriz que relaciona os deslocamentos associados aos modos globais entre barras |
| T | energia cinética |
| T_{ik} | matriz de transformação associada à diagonalização das matrizes da GBT |
| s | coordenada local de uma parede da seção transversal |
| U | funcional de energia de deformação da barra; componente de deslocamento generalizado |
| (u, v, w) | componentes do campo de deslocamentos no sistema local da parede da seção transversal |
| $u_i(s)$ | deslocamento axial (empenamento) associado ao modo de deformação i , na posição s |
| $u(x, s)$ | componente axial do campo de deslocamentos do plano médio de uma seção transversal |
| V | energia potencial |
| $v_i(s)$ | deslocamento transversal de membrana associado ao modo de deformação i , na posição s |
| $v(x, s)$ | componente transversal de membrana do campo de deslocamentos do plano médio de uma seção |
| W_i^σ | resultante dos esforços generalizados referente às tensões normais |
| W_i^τ | resultante dos esforços generalizados referente às tensões de corte |
| (X, Y, Z) | coordenadas globais de uma barra |
| (x, s, z) | coordenadas locais da parede de uma seção transversal |
| $w_i(s)$ | deslocamento transversal de flexão associado ao modo de deformação i , na posição s |
| $w(x, s)$ | componente transversal de flexão do campo de deslocamentos do plano médio de uma seção |

Caracteres Gregos

| | |
|--|--|
| α_r | ângulo de inclinação da parede r em relação ao eixo horizontal |
| $\alpha_X, \alpha_{\hat{Y}}, \alpha_{\hat{Z}}$ | ângulo de uma barra em relação ao eixo X, \hat{Y} , ou \hat{Z} |
| Γ | constante que relaciona os deslocamentos de empenamento |
| γ_{xs} | distorção da parede no plano da seção transversal |
| δ | operador de variação da energia |
| ε_{ss} | deformação da direção transversal (eixo s) |
| ε_{xx} | deformação na direção axial (eixo x) |
| $\zeta_i(x)$ | função de amplitude longitudinal (x) associada ao modo de deformação i |
| η | grau de liberdade relativo aos modos locais |
| $[\eta_p]$ | matriz diagonal com os fatores de penalização para cada grau de liberdade |
| Θ | componente de rotação generalizada |
| Θ' | empenamento devido à torção generalizado |
| $\theta_{Xj}, \theta_{Yj}, \theta_{Zj}$ | rotação em torno dos eixos globais da barra X, Y e Z , associados ao modo j |
| λ | autovalor |
| μ | grau de liberdade relativo aos modos distorcionais |
| ν | coeficiente de Poisson de um material |
| ρ | fator de fixação de uma ligação metálica |
| $\phi_k(x)$ | função de amplitude longitudinal (x) associada ao modo de deformação k |
| Π | potencial das forças externas; equações de restrição cinemática |
| Π_T | equações de restrição relacionadas aos deslocamentos transversais de flexão lateral (global) |
| Π_Θ | equações de restrição relacionadas às rotações de flexão lateral |
| σ_{ss} | tensão normal na direção do eixo s |
| σ_{xx} | tensão normal na direção axial (eixo x) |
| τ_{xs} | tensão de corte no plano $x-s$ |
| Ψ^H, Ψ^L | funções cúbicas de Hermite e de Lagrange |
| $[\Omega]$ | matriz de compatibilidade associada aos elementos de nó |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 21 |
| 1.1. Métodos Numéricos para Análise de Estabilidade | 23 |
| 1.2. Estabilidade de Sistemas Estruturais | 26 |
| 1.3. Influência das Ligações | 28 |
| 1.3.1. Método das Componentes para Determinação da Rigidez Rotacional de Ligações | 31 |
| 1.4. Objetivos..... | 32 |
| 2. TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS | 34 |
| 2.1. Aspectos Históricos | 34 |
| 2.2. Conceitos Iniciais | 39 |
| 2.3. Formulação Básica | 41 |
| 2.3.1. Equações de Equilíbrio para Análises de Primeira Ordem..... | 55 |
| 2.3.2. Equações de Equilíbrio para Análises de Estabilidade..... | 55 |
| 2.4. Análise da Seção Transversal | 56 |
| 2.4.1. Modos Elementares de Deformação | 59 |
| 2.4.1.1. Funções Elementares de Deslocamento Axial | 62 |
| 2.4.1.2. Funções Elementares de Flexão | 64 |
| 2.4.2. Modos de Deformação da GBT | 65 |
| 2.4.2.1. Normalização e Modos de Deformação..... | 68 |
| 2.5. Análise de Barras Isoladas..... | 69 |
| 2.5.1. Elemento Finito Baseado na GBT..... | 71 |
| 2.5.2. Condições de Apoio Não Convencionais | 75 |

| | |
|---|------------|
| 3. GBT NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS | 79 |
| 3.1. Compatibilização dos Deslocamentos Entre Barras Não Colineares..... | 80 |
| 3.1.1. Compatibilização dos Deslocamentos de Empenamento Entre as Barras..... | 86 |
| 3.1.2. Deslocamentos e Rotações na Região da Ligação..... | 98 |
| 3.1.2.1. Ligação Entre Perfis I ou U com as Mesas no Mesmo Plano..... | 100 |
| 3.1.2.2. Ligação Entre Perfis I ou U com a Alma no Mesmo Plano..... | 103 |
| 3.1.2.3. Ligação Entre Perfis I ou U enrijecidos com a Alma no Mesmo Plano | 106 |
| 3.1.2.4. Incorporação das Equações de Compatibilidade no Sistema de Equações da GBT..... | 108 |
| 4. ESTABILIDADE DE PÓRTICOS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS | 110 |
| 4.1. Elemento de Mola..... | 111 |
| 4.2. Aplicações da GBT com Ligações Semirrígidas | 113 |
| 4.2.1. Pórtico com Pilares sob Compressão Apenas com Modos Globais | 114 |
| 4.2.2. Pórtico com Esforços Variáveis e Ligações com Chapa de Topo Ajustada..... | 116 |
| 4.2.3. Pórtico em L com Ligação com Chapa de Topo Ajustada..... | 124 |
| 4.2.4. Análise pelo Método dos Elementos Finitos no Programa ANSYS..... | 130 |
| 4.2.5. Aplicação do Método das Componentes na Determinação da Rigidez Rotacional das Ligações Analisadas..... | 134 |
| 5. CONCLUSÕES | 139 |
| 5.1. Sugestões Para Trabalhos Futuros | 141 |
| REFERÊNCIAS | 143 |

1. INTRODUÇÃO

A vasta utilização de perfis de aço formados a frio na indústria da construção metálica está intimamente ligada à sua elevada eficiência estrutural, isto é, elevadas relações inércia/peso, facilidade de transporte e montagem, e baixo custo de estocagem. Além disso, sua considerável versatilidade de fabricação, que envolve equipamentos como prensas dobradeiras ou mesas de roletes, contribui para uma ampla gama de possibilidades de perfis, que são produzidos segundo critérios de resistência, economia e estética para cada projeto. Atualmente, sistemas estruturais inteiros têm sido concebidos com a aplicação desses perfis (*e.g.*, galpões para usos gerais, e sistema de armazenamento – Fig. 1.1), cuja geometria destaca sua principal característica, que são as paredes da seção transversal tipicamente finas.

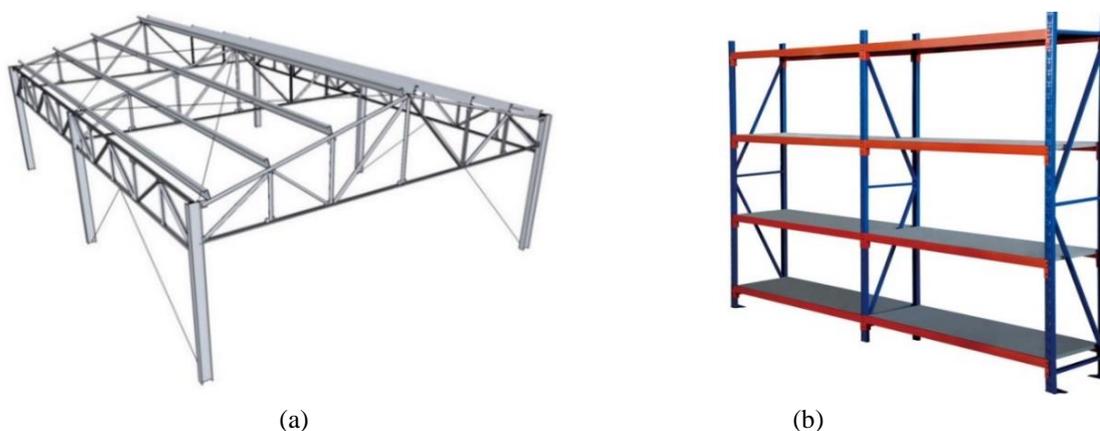


Figura 1.1 – Exemplos de estruturas constituídas por perfis de aço formados a frio: (a) galpões para usos gerais e (b) estruturas para armazenamento

Contudo, é justamente devido a sua natureza esbelta que os perfis de aço formados a frio estão geralmente sujeitos a fenômenos de instabilidade por muitas vezes complexos, que são classificados primeiramente entre modos locais, distorcionais e globais, e estão sujeitos ainda a fenômenos de interação e acoplamento entre os mesmos, assim como problemas localizados de diversas naturezas, como esmagamentos da alma (“*web crippling*”) e outros relacionados às ligações.

Dentre os sistemas estruturais compostos por perfis de aço formados a frio, os pórticos metálicos, na qualidade de estrutura principal em edificações, possuem fundamental importância e merecem especial atenção, e um dos aspectos mais relevantes nesse contexto é o dimensionamento das barras que compõem essas estruturas, que é feito de forma

majoritariamente indireta, isto é, a etapa de análise estrutural procura obter os máximos esforços internos solicitantes nas barras (segundo as normas atuais, em princípio, por meio de análises de segunda ordem), enquanto a verificação de fenômenos de instabilidade é feita individualmente (modos locais, distorcionais e/ou interações modais), e na maior parte das vezes, sem levar em consideração os efeitos das ligações e condições de contorno a que estão realmente submetidos. A título ilustrativo a Fig. 1.2 apresenta um pórtico formado por perfis do tipo I enrijecido, submetido a forças concentradas, contraventado fora do plano, e cujo modo crítico de instabilidade é influenciado pela configuração das ligações.

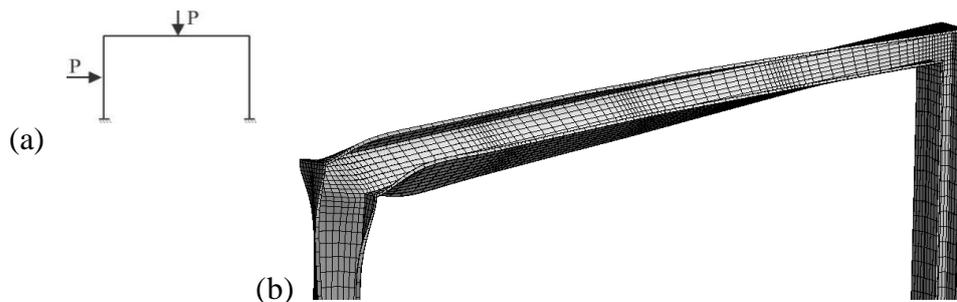


Figura 1.2 – Exemplo ilustrativo (a) de pórtico formado por perfis do tipo I enrijecidos, submetido a forças concentradas, (b) cujo modo crítico de instabilidade é influenciado pelo tipo de ligação

Dentre os procedimentos normativos para o dimensionamento de perfis de aço formados a frio, merece destaque o recente Método da Resistência Direta – MRD, que integra grande parte das normas atuais (*e.g.*: ABNT NBR14762:2010; ANSI AISI-S100-12; ou AS/NZS 4600:2005). Diferentemente do clássico Método das Larguras Efetivas (MLE), o MRD requer a análise de estabilidade da barra em questão, de modo a identificar as forças/momentos críticos de estabilidade elástica, assim como os modos a que se referem, para que seja então determinada a capacidade resistente da barra por meio de curvas específicas de dimensionamento.

Contudo, apesar do MRD ser mais promissor que o clássico MLE por tratar a barra analisada de forma mais adequada (superando aspectos aproximados do MLE, em especial a consideração da instabilidade local que dá nome ao método), os efeitos decorrentes das ligações entre as barras, assim como a compatibilização entre os deslocamentos das paredes da seção transversal na região da ligação, não são levados em consideração, juntamente com a transmissão do empenamento entre as barras, que é tratada de forma simplificada, conforme será visto mais adiante neste trabalho.

De forma semelhante, a análise do sistema estrutural em questão admite simplificadamente, na grande maioria das vezes, um comportamento típico ideal para as ligações, e não trata a ocorrência de fenômenos localizados diretamente, dado que geralmente são utilizados para tal elementos finitos de pórtico, ou até mesmo soluções mais simples, advindas da análise matricial de estruturas.

É importante destacar que os aspectos então relatados podem ser analisados de forma mais rigorosa e precisa, e dada a complexidade de sua representação, as soluções por meio de sistemas discretos são as únicas que podem ser aplicadas de forma ampla. Assim, dentre as possibilidades, o método mais popular é o método dos elementos finitos, e para a análise de perfis de paredes finas são utilizados, de forma geral, elementos finitos de casca (MEFc) e/ou (mais raramente) sólidos, eventualmente incorporando formulações de contato, restrições cinemáticas, entre outros (*e.g.*, Krenk & Damkilde, 1991; Masarira, 2002; Tong *et al.*, 2005).

Evidente que para o estudo do comportamento das estruturas formadas por perfis de paredes finas, são aplicados não apenas métodos de simulação numérica, mas também análises experimentais, tanto de sistemas estruturais completos ou de partes isoladas (*e.g.*, Dubina, 2008; Zhang & Rasmussen, 2014). Contudo, é inegável que, tanto as soluções numéricas por meio de MEFc, como os estudos experimentais, são de difícil e rara integração à rotina prática profissional (e por muitas vezes, mesmo em pesquisas acadêmicas), uma vez que ambas demandam tempo de estudo e execução, dispendiosos recursos em softwares de análise e/ou realização de experimentos, além de um complexo estudo na interpretação de resultados.

Portanto, é diante deste contexto que se apresenta a atual busca por soluções alternativas mais simples, porém capazes de apanhar os fenômenos de instabilidade mais complexos, conforme as condições já citadas. Tais soluções, que estão intimamente relacionadas a métodos de dimensionamento mais modernos, como o MRD, justificam a realização deste trabalho.

1.1. Métodos Numéricos para Análise de Estabilidade

Para suprir as necessidades de eficiência, no que se refere tanto à preparação da análise (modelagem), quanto à interpretação dos resultados, procura-se tirar vantagem do fato de os sistemas estruturais metálicos serem formados, majoritariamente, por barras prismáticas, o que permitiu o desenvolvimento e a popularização de alguns métodos, dentre os quais* citam-se aqui (i) o método das faixas finitas (MFF), e (ii) a Teoria Generalizada de Vigas (GBT, do inglês “*generalized beam theory*”):

- Método das Faixas Finitas: O MFF constitui uma variação do MEFc muito mais eficiente do ponto de vista computacional, pois utiliza um número de graus de liberdade muito

* Exemplos alternativos, podem ser consultados em Rasmussen (1997), Young & Rasmussen (1997), Zhang *et al.* (2015) e Rasmussen *et al.* (2016).

menor, uma vez que a discretização é feita apenas na linha média da seção transversal do perfil, que fica definido por um conjunto de faixas com o mesmo comprimento da barra, ligadas entre si por meio de “linhas nodais” (Fig. 1.3).

Originalmente, o MFF convencional, como é chamado o método semianalítico, permitia somente a análise de barras submetidas a diagramas de esforços uniformes e condições de apoios simples, além da aplicação de restrições localizadas num ponto da seção transversal e contínuas longitudinalmente. Contudo, Li e Schafer (2010) ampliaram o seu domínio de aplicação para casos de barras envolvendo outras condições de apoio típicas (*e.g.*, extremidades engastadas ou livres), o que foi feito por meio da aplicação de diferentes funções de forma longitudinais.

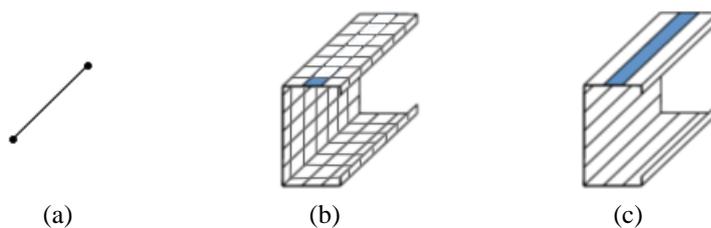


Figura 1.3 – Discretização de uma barra em (a) um elemento finito de barra, (b) elementos finitos de casca, e (c) faixas finitas

Além disso, há que se citar o Método das Faixas Finitas Restringidas (MFFr), que é a mais recente variação do MFF convencional, para o qual utilizam-se restrições específicas aplicadas as placas (faixas) que compõem a barra, de modo a se obterem modos de deformação pré-definidos consistentes com modos típicos de instabilidade, o que permite a avaliação da influência de cada um desses modos (locais, distorcionais ou globais) na configuração deformada final da barra. No caso do MFFr, a aplicabilidade das funções de forma para condições de apoio típicas variadas também foi recentemente testada e validada por Li e Schafer (2013).

(i) Teoria Generalizada de Vigas: Com popularidade ascendente na última década, a GBT emergiu como uma alternativa promissora no campo das análises de estabilidade de perfis de aço formados a frio, e tem se expandido com resultados satisfatórios em todo o campo de análises de primeira e segunda ordem de estruturas metálicas e materiais compósitos. De forma sucinta, pode-se dizer que a GBT se desenvolve a partir da ideia de aproximar o campo de deslocamentos através de uma combinação linear de “modos de deformação” previamente identificados, fazendo com que os graus de liberdade do sistema sejam os fatores de participação de cada um desses modos na configuração deformada final da barra.

Para melhor introduzir tal conceito, parte-se da ideia de que as filosofias subjacentes à GBT e ao MFF sejam semelhantes no sentido de que ambas aproximam as variações do campo de deslocamentos ao longo da linha média de uma seção transversal e ao longo do comprimento da barra de formas distintas e independentes, *i.e.*, um conjunto de funções descreve as

deformações da linha média da seção transversal, enquanto funções $\phi_k(x)$ associam a amplitude das mesmas ao longo do comprimento da barra. No entanto, enquanto no MFF as funções da linha média da seção transversal são definidas sobre o domínio restrito da largura de cada faixa finita, na GBT tais funções são determinadas ao longo de toda linha média da seção através de uma sequência especial de procedimentos.

Bebiano (2010) oferece um bom exemplo da distinção entre a GBT e o MFF, aqui apresentado na figura 1.4, que mostra uma seção transversal em U não enrijecido, com abas e alma discretizadas em uma faixa finita simples, para a qual mostra-se a seção deformada como a composição, em cada um dos métodos, das respectivas funções da linha média da seção, multiplicadas pelo fator de amplitude (grau de liberdade) relacionado. No caso da GBT, tais funções representam os chamados “modos de deformação”, e sendo que cada modo possui um significado físico distinto (*e.g.*, flexão em torno do eixo de menor ou maior inércia, torção, etc.), o resultado da análise permite uma excelente compreensão do fenômeno apresentado pela estrutura, além do notável ganho na eficiência computacional devido ao número reduzido de graus de liberdade quando comparado a métodos como o MEFc.

(a)
$$\text{Seção deformada} = \phi_1(x) \cdot d_1 + \phi_2(x) \cdot d_2 + \phi_3(x) \cdot d_3$$

(b)
$$\text{Seção deformada} = \phi_i(x) \cdot \text{modo } i + \phi_k(x) \cdot \text{modo } k$$

Figura 1.4 – Discretização dos deslocamentos de uma seção transversal de acordo com (a) o MFF (discretização nodal) e (b) a GBT (discretização modal) – *Adaptado de Bebiano (2010)*

Portanto, é justificável que autores (*e.g.*: Dinis *et al.*, 2006; Basaglia, 2010) descrevam a GBT como sendo uma teoria de barras (*i.e.*, elementos unidimensionais – Fig. 1.3.a) cuja formulação integra conceitos de teoria de placas (elementos bidimensionais – Fig. 1.3.b), para a qual a deformação da seção transversal da barra é expressa como uma combinação linear de funções de forma (modos de deformação – Fig. 1.4.b).

Além disso, é nesse ponto que a GBT se destaca de todos os demais métodos, e justifica-se como uma ferramenta especial, pois diferentemente do MFF, tem sido aplicada com sucesso na análise de sistemas estruturais, como pórticos planos e tridimensionais (Basaglia *et al.* 2006a;b; Basaglia *et al.*, 2008; Basaglia *et al.*, 2009), além de vigas contínuas (Basaglia *et al.*, 2012a e Basaglia e Camotim, 2013a) e treliças (Basaglia e Camotim, 2011). E para ampliar ainda mais o

leque de aplicações do método, os trabalhos de Basaglia *et al.* (2010) e Basaglia e Camotim (2013b) concentram-se na aplicação de carregamentos e condições de apoio arbitrárias, tornando possível a aplicação da GBT para a análise de sistemas estruturais considerando a maioria dos fatores citados na introdução deste trabalho.

Contudo, no que se refere à aplicação da GBT na análise de sistemas estruturais, os casos de ligações estudados com a GBT ainda são limitados a alguns tipos, que, dentre outras características, assumem apenas condições de transmissão dos deslocamentos de forma integral, ou nula, isto é, admite-se que a ligação em questão seja, para todos os efeitos, perfeitamente rígida em sua capacidade de transmitir qualquer deslocamento generalizado entre as barras conectadas.

1.2. Estabilidade de Sistemas Estruturais

São diversos os fatores que podem influenciar a estabilidade de estruturas metálicas. Para o caso de pórticos, por exemplo, Ziemian (2010) sugere uma lista de atributos bastante ampla, aqui reproduzida na tabela 1.1, que não tem a intenção de ser exaustiva, mas refere, em linhas gerais, boa parte dos principais fatores físicos relacionados à estabilidade dessas estruturas. Para além disso, uma outra “classe” de fatores também é citada pelo autor, que advém de hipóteses simplificativas sobre o comportamento das estruturas e também de parâmetros de modelagem (*e.g.*: resposta elástica linear; resposta geometricamente e fisicamente não linear; etc).

Evidentemente, cada um dos parâmetros citados possui importância variável de acordo com o problema estudado, contudo, os parâmetros geométricos estão invariavelmente entre os fatores que mais influenciam a estabilidade de um sistema. Um exemplo clássico a ser citado são os próprios comprimentos das barras associados ao parâmetro de comprimento efetivo, largamente utilizado ao longo das últimas décadas (ASCE Task Committee, 1997). Além disso, hipóteses simplificativas quanto às ligações entre as barras, contraventamentos, ou condições de apoio também são parâmetros geométricos importantes para o condicionamento real de um sistema estrutural.

Sobre o comportamento das condições de apoio e os vínculos adotados entre as barras nas análises, já é bastante conhecida a aplicação de apoios elásticos, desde os trabalhos de Prager (1936) e Chwalla (1938), além de inúmeros outros posteriormente incorporados em livros texto como Bleich (1952), Horne e Merchant (1965), Simitses (1976), e Chen *et al.* (1996). Contudo, trabalhos envolvendo problemas como a transmissão do empenamento entre as barras ou a compatibilidade de deslocamentos transversais das paredes da seção na região da ligação, que podem ter uma importância significativa, especialmente no caso de perfis de paredes finas, se mostram muito mais escassos.

Dentre os pioneiros neste tema, Vacharajuttphan e Trahair (1974), assim como Morrel (1979), apresentaram resultados sobre o comportamento de estruturas formadas por barras não alinhadas entre si, demonstrando os efeitos decorrentes da transmissão do empenamento entre as barras em função da configuração da ligação entre as mesmas. Posteriormente, Sharman (1985) investigou numericamente o comportamento de diversas ligações soldadas entre duas barras com seção transversal em I ou U, mostrando resultados quantitativos sobre a transmissão das deformações de empenamento devido à torção. Além disso, uma outra abordagem foi dada por Krenk (1990), e Krenk e Damkilde (1991), que propuseram uma formulação capaz de incorporar a rigidez da ligação e a transmissão do empenamento devido à torção para duas barras com seção transversal em I.

Tabela 1.1 – Atributos que influenciam a estabilidade de pórticos metálicos (Ziemian, 2010)

| |
|---|
| Geometria do pórtico |
| Dimensões entre linhas de eixos |
| Detalhes de ligações |
| Fundações e condições de vínculo |
| Conectores de cisalhamento |
| Paredes de vedação ou elementos estruturais secundários |
| Contraventamentos fora do plano |
| Propriedades do material |
| Módulo de elasticidade |
| Tensões de escoamento e/ou ruptura real e nominal |
| Ductilidade e resistência à fratura |
| Imperfeições geométricas |
| Montagem fora de prumo/esquadro |
| Falta de retilineidade dos elementos |
| Excentricidades adicionais nas ligações e/ou aplicação de forças |
| Tensões residuais |
| Oriundas de processos de fabricação |
| Oriundas do processo de montagem/sequência de construção |
| Oriundas de variações térmicas |
| Oriundas da fixação de suportes |
| Carregamentos |
| Magnitude e distribuição |
| Taxa de carregamento da estrutura e duração |

Ainda neste contexto, é importante mencionar o recente trabalho de Basaglia *et al.* (2012b), que apresentam um conjunto bem definido de relações cinemáticas capazes de descrever a transmissão do empenamento devido à torção entre barras não alinhadas entre si, com seção em I ou U, e considerando configurações de ligação específicas conforme ilustrado na Fig. 1.5. Vale lembrar que tais ligações envolvem aquelas estudadas por autores de trabalhos antecedentes como Morrel (1979), Sharman (1985) e Krenk e Damkilde (1991), embora as relações propostas por Basaglia *et al.* (2012b), em casos como o ilustrado na Fig. 1.5.c, sejam aplicáveis para um número maior de barras concorrendo na mesma ligação.

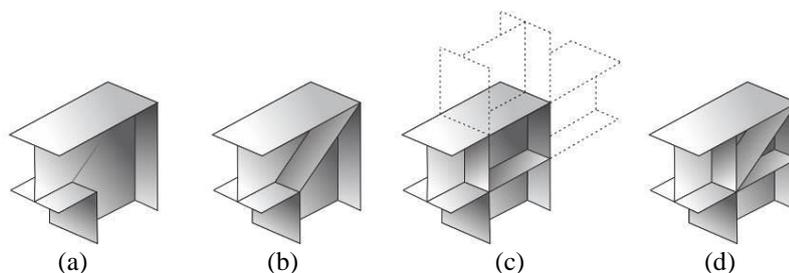


Figura 1.5 – Tipos de ligações estudadas por Basaglia (2010), para perfis I ou U, (a) sem chapas de enrijecimento na alma, (b) com chapa diagonal, (c) chapas paralelas (ligação em caixa), e (d) chapas paralelas e diagonal

Por último, mas não menos importante, o trabalho de Shayan e Rasmussen (2014) propõe uma solução ampla, por meio da técnica de subestruturação (Han e Abel, 1984), associando os resultados obtidos por meio de elementos finitos de casca para a ligação desejada, com um conjunto de molas lineares ligado a elementos de viga unidimensionais que simulam as barras do sistema estrutural. Esta solução, mais consistente com a ideia de generalização das ligações a serem analisadas, apesar de fornecer resultados menos aproximados, exige em contrapartida a análise prévia da ligação em questão por meio do MEFc.

1.3. Influência das Ligações

Com relação às ligações metálicas, existe um leque de variáveis consideravelmente extenso, que está ligado às incontáveis configurações possíveis para cada caso em particular. Nesse contexto, é fato inegável, conforme bem demonstrado em trabalhos citados no item anterior, que as ligações podem alterar de forma significativa o comportamento de um determinado sistema estrutural, conforme a redistribuição que provoca nos esforços internos, e pela forma como transmite deslocamentos como o empenamento ou a flexão das paredes da seção transversal da região conectada.

Um dos aspectos mais complexos a serem considerados na análise de ligações metálicas é a rigidez de cada um dos seus componentes, o que também é citado por Shayan e Rasmussen (2014) por ser uma fonte de incerteza nas aproximações propostas por autores que os precedem. De fato, a rigidez de alguns componentes pode, por exemplo, determinar a transmissão de deformações de empenamento, a qual é, na maioria das análises práticas realizadas com a ajuda de elementos finitos de barra, assumida como nula ou integral. Contudo, trabalhos como os de Dinno e Gill (1964), e Ojalvo e Chambers (1977), demonstram a dificuldade em se obter uma restrição efetiva do empenamento em barras com seção transversal em I, e muito embora os perfis de paredes finas possuam uma rigidez à torção (normalmente) baixa, é seguro afirmar

que a solução ideal deve tratar a transmissão do empenamento de forma a considerar restrições parciais, e levando em consideração a rigidez dos elementos que compõem tais ligações.

Naturalmente, o estudo de ligações metálicas apresenta o conceito de semirrigidez para definir o comportamento nem perfeitamente rígido, nem perfeitamente rotacional, das ligações quanto à transmissão da rotação de flexão entre as barras conectadas. Conforme ilustrado na Fig. 1.6, a rigidez de uma ligação entre uma viga e um pilar pode ser definida a partir da rotação desta viga no plano (θ_v) em função da respectiva rotação do pilar (θ_p), junto à ligação.

No caso de uma ligação idealmente rígida, as rotações θ_v e θ_p são idênticas, e o momento fletor é transmitido integralmente de um elemento para o outro. Um gráfico relacionando o momento fletor nesta ligação (M_j) com a rotação relativa entre os elementos conectados (*i.e.*, $\theta = \theta_v - \theta_p$), conforme a Fig. 1.6.a, ilustra bem esta situação. Por outro lado, sendo esta ligação perfeitamente flexível, a rotação de um elemento não é transmitida ao elemento adjacente, configurando uma situação de momento nulo na ligação, conforme a Fig. 1.6.c. Contudo, o que se tem em situações práticas é, normalmente, uma relação mais complexa entre momento fletor e rotação relativa (Jaspart 2002), situação esta que é tratada de forma simplificada por meio de uma semirrigidez associada à ligação (k_j) – Fig. 1.6.b.

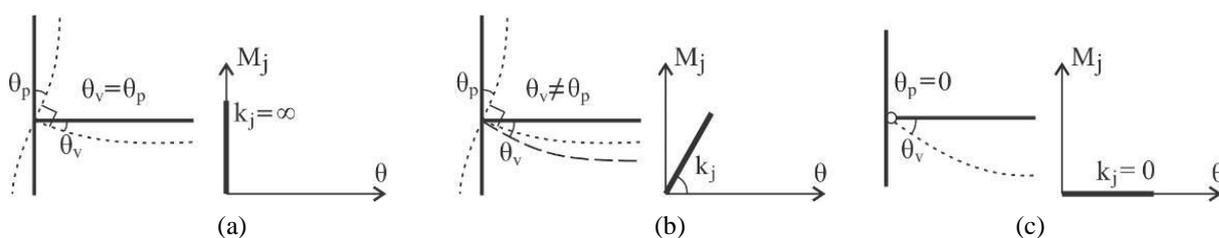


Figura 1.6 – Classificação das ligações segundo a rigidez – (a) ligação rígida, (b) semirrígida e (c) flexível (rotulada)

Para além dos aspectos relacionados à rigidez dos componentes das ligações metálicas, Hancock (1985) apresenta outro ponto a ser ponderado, que diz respeito mais particularmente à configuração de cada ligação. Segundo o autor, é possível visualizar as ligações de duas formas. A primeira, mais comum no caso de ligações rígidas, foi também a forma mais estudada entre os autores citados anteriormente neste trabalho, e envolve a vinculação completa da seção transversal, *i.e.*, todas as paredes da seção são rigidamente vinculadas a chapas de enrijecimento ou as paredes do elemento adjacente (Fig. 1.7.a). Por outro lado, a utilização mais frequente de perfis de paredes finas tem sido associada a ligações menos rígidas, como se vê no exemplo da figura 1.7.b, onde dois perfis U seriam ligados por meio de uma chapa soldada à alma da seção transversal, deixando livres as mesas de cada perfil, o que caracteriza uma situação de empenamento livre em relação à alma, e descontinuidade na transmissão do bimomento pela ligação.

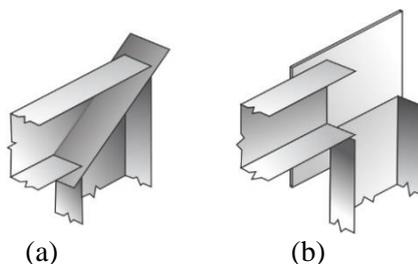


Figura 1.7 – Tipos de ligação (a) completa e (b) parcial. *Adaptado de Hancock (1985).*

De forma geral, as ligações metálicas têm sido amplamente investigadas, abrangendo em muitos casos um número consideravelmente grande de publicações. Apenas em caráter geral, sobre a influência das condições de vínculo em barras, podem ser citados Chen (1980), Jones *et al.* (1980, 1982), Chapuis e Galambos (1982), Vinnakota (1982, 1983), Shen e Lu (1983), entre outros. Além disso, a análise de pórticos com ligações semirrígidas foi objeto de estudo de muitos autores, como Lui e Chen (1987, 1988), Nethercot e Chen (1988) Goto *et al.* (1993), King e Chen (1993, 1994), e Kishi *et al.* (1993a, b). Finalmente, vale citar também os livros originados de congressos internacionais sobre ligações metálicas, como Rhodes (1991), Hancock (1998), Yu (2000), Leon (2002), Bijlaard (2005), Bjorhovde (2008), e Dubina e Grecea (2013).

Apesar disso, a consideração da influência das ligações na estabilidade geral (*i.e.*, modos globais, distorcionais, locais, etc.) ainda é complexa e incomum, e um campo de aplicações especialmente relacionado à GBT permanece em aberto. Ligações completas, cujo comportamento, muitas vezes assumido como rígido, depende fundamentalmente de parâmetros geométricos e do material dos seus componentes (como as ligações parafusadas por meio de chapas de topo – Fig. 1.8.a-b), e ligações parciais, como as aquelas parafusadas e/ou soldadas em chapas *gusset* (Fig. 1.8.c-e) correspondem a exemplos de utilização prática muito comum, e cuja abordagem em análises de estabilidade se dá de forma majoritariamente aproximada.

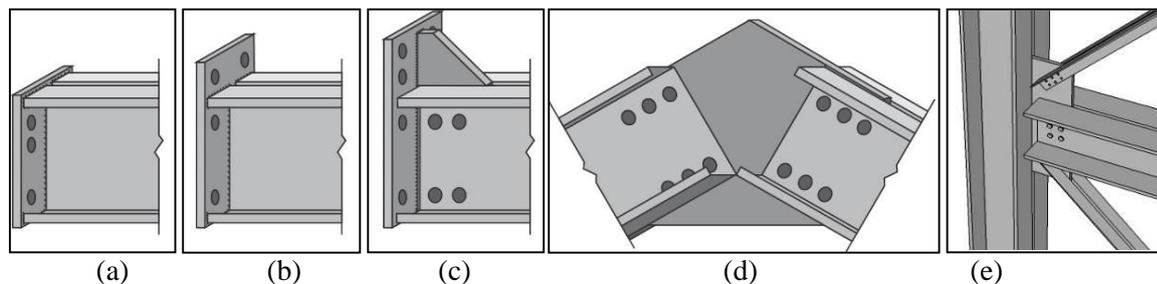


Figura 1.8 – Exemplos de ligações tipicamente semirrígidas, que são normalmente utilizadas em sistemas formados por perfis de paredes finas

1.3.1. Método das Componentes para Determinação da Rigidez Rotacional de Ligações

Uma ferramenta importante a ser citada é o chamado Método das Componentes, que é um método geral para determinação da rigidez (informação de grande interesse no presente trabalho, conforme será visto) e capacidade resistente de ligações metálicas, presente na norma europeia (Eurocódigo 3, Parte 1-8 – CEN 2005c), e a sua publicação é resultado de décadas de investigação, como fica claro ao se consultarem trabalhos dedicados ao estudo de ligações metálicas, em especial às ligações semirrígidas, como o de Jaspert (1988), Jaspert e Maquoi (1990), Weynand, *et al.* (1998), Rhodes (1991), Hancock (1998), Chen (2000), Yu (2000), Leon (2002), Bijlaard (2005), e Bjorhovde (2008).

Adicionalmente, muitos trabalhos poderiam ser citados no contexto das aplicações do Método das Componentes ao estudo de ligações semirrígidas, entretanto, no que se refere às ligações envolvendo perfis de aço formados à frio, não muitos apresentam estudos com a aplicação do método. De fato, o próprio Eurocódigo 3, Parte 1-3 (CEN, 2005b), apresenta os procedimentos apropriados à correta verificação de ligações envolvendo perfis de aço formados por chapas com espessura menor do que 4 mm, não recomendando a aplicação do Método das Componentes para esses casos.

O trabalho de Bursi e Jaspert (1998), envolvendo ligações com chapa de topo estendida e perfis de paredes finas, demonstra que nesses casos, o modelo analítico subestima a capacidade da ligação (medida experimentalmente) em até 25%. Além disso, também são reveladas grandes diferenças nos resultados de rigidez inicial da ligação, a qual também é subestimada pelo método das componentes.

Não obstante, outros trabalhos como o de Nagy *et al.* (2006), Lim (2001), Lim e Nethercot (2003, 2004 e 2004b), e Wrzesien *et al.* (2012), mostram que, com ajustes específicos, o Método das Componentes pode conduzir a resultados adequados para alguns tipos de ligações entre perfis de paredes finas.

Segundo Jaspert *et al.* (1998), a aplicação do Método das Componentes segue três etapas:

1. Identificação das componentes da ligação associadas a deformações significativas e/ou falha na ligação;
2. Determinação da lei constitutiva para cada componente da ligação, o que pode ser feito analiticamente, experimentalmente ou numericamente;
3. Composição das componentes de modo a se quantificar a rigidez total (e resistência) da ligação.

Assim, a aplicação do Método das Componentes para uma ligação com chapa de topo ajustada, unindo uma viga a um pilar com perfis do tipo I, por exemplo, no que se refere à determinação somente da rigidez à rotação da ligação*, preconiza a consideração de seis componentes, das quais quatro são associadas a esforços de tração, uma é associada à esforços de compressão, e uma à esforços de cisalhamento, conforme identificado na Tabela 1.2.

Tabela 1.2 – Componentes consideradas para determinação da rigidez à rotação de uma ligação parafusada com chapa de topo ajustada unilateral, de acordo com o Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c).

| TIPO DE SOLICITAÇÃO | REFERÊNCIA | COMPONENTE | REPRESENTAÇÃO |
|---------------------|------------|-----------------------------------|---------------|
| Tração | 10 | Parafuso à tração | |
| | 4 | Mesas do perfil do pilar à flexão | |
| | 5 | Chapa de topo à flexão | |
| | 3 | Alma do pilar à tração | |
| Cisalhamento | 1 | Cisalhamento na alma do pilar | |
| Compressão | 2 | Alma do pilar à compressão | |

1.4. Objetivos

O desenvolvimento da presente tese baseia-se, fundamentalmente, na aplicação da GBT para análises de estabilidade (e primeira ordem) de sistemas estruturais metálicos, considerando os efeitos oriundos das ligações, bem como condições especiais de apoios e restrições de deslocamentos (tais como contraventamentos, peças estruturais secundárias, etc.). Adicionalmente, sobre este ponto, é importante lembrar que há um vasto campo de aplicações da GBT como possível solução de problemas relacionados a sistemas estruturais metálicos, e espera-se que, com este trabalho, se possa contribuir de modo a ampliar o domínio de aplicações possíveis, envolvendo tipos de ligações ainda não estudados.

Em caráter específico, pode-se compor o objetivo geral com os seguintes itens parciais:

- Acrescentar às formulações até então desenvolvidas para a aplicação da GBT na análise de pórticos e treliças metálicas (elementos finitos baseados em GBT), uma adaptação que permita considerar o comportamento semirrígido dos diferentes componentes das ligações em questão;

* Para a determinação do momento resistente da ligação, também devem ser consideradas as componentes associadas à alma e mesa da viga à compressão, alma da viga à tração, soldas entre a viga e a chapa de topo (tração e cisalhamento) e o cisalhamento vertical nos parafusos.

- Determinar, para ligações diferentes daquelas já aplicadas em trabalhos com a GBT, as relações cinemáticas capazes de transcrever o seu comportamento geral. Lembrando que essa tarefa deve ser feita conforme forem estudados os exemplos, segundo o entendimento prévio dos efeitos de eventuais transmissões de empenamento, compatibilização dos deslocamentos, e (des)continuidade na transmissão de deformações e esforços internos;
- Demonstrar os resultados obtidos com as formulações propostas, em comparação com análises rigorosas, feitas através de MEFc, e incorporando também, quando necessário, elementos sólidos, molas, formulações de contato, etc.;
- Com os exemplos, espera-se demonstrar o potencial das soluções através da GBT como propostas simples para a análise de problemas complexos, fornecendo uma possível ferramenta para o estudo futuro de problemas de estabilidade estrutural, com a ajuda de implementações computacionais de fácil utilização.

2. TEORIA GENERALIZADA DE VIGAS

Este capítulo dedica-se à apresentação da Teoria Generalizada de Vigas, com seus conceitos e formulações. Contudo, é importante mencionar que todos os desenvolvimentos da GBT compreendem uma variedade consideravelmente ampla de aplicações, para além das análises de primeira ordem e de estabilidade elástica a serem abordadas neste trabalho. Exemplos disso são as análises geometricamente não lineares de barras isoladas (*e.g.*: Silvestre e Camotim 2003a; Silva *et al.* 2006, 2008a) e sistemas estruturais (*e.g.*: Basaglia *et al.*, 2011, Basaglia *et al.*, 2012a, e Basaglia *et al.*, 2013a), análises fisicamente não lineares (*e.g.*: Abambres *et al.*, 2013, 2014), vibração (*e.g.*: Silvestre e Camotim, 2006a,b; Bebiano *et al.*, 2008a,b), análises dinâmicas (*e.g.*: Bebiano *et al.*, 2013), além de formulações específicas para a análise de barras com seção transversal circular, elíptica, retangular ou poligonal (*e.g.*: Silvestre, 2007, 2009; Basaglia e Camotim 2010, 2012; Bebiano *et al.*, 2015; Gonçalves e Camotim, 2016), e barras não prismáticas (*e.g.*: Nedelcu, 2010; Nedelcu, 2011), dentre muitos outros.

Assim, é importante mencionar o quanto é difícil ser exaustivo nas abordagens teóricas por meio da GBT. Portanto, muito contrariamente a este pensamento, apresentam-se nesta tese somente as formulações mais importantes utilizadas para o próprio trabalho, e, quando oportuno, são citados trabalhos com formulações mais amplas ou recentes, que podem ser utilizadas como alternativa para a implementação em questão.

2.1. Aspectos Históricos

O primeiro trabalho sobre a GBT foi publicado em meados da década de 60, em língua alemã, pelo Professor Richard Schardt da Universidade Técnica de Darmstadt (Schardt, 1966), sendo seguido por algumas pesquisas do mesmo grupo ao longo da década de 80 (Schardt, 1983 e Schardt, 1989). Apesar disso, segundo Silvestre (2005), esta teoria permaneceu despercebida à comunidade científica internacional até o início da década de 90, uma vez que a maioria dos trabalhos publicados até então foi escrito em língua alemã, e teve um alcance limitado. Este cenário, no entanto, passou a mudar com a contribuição de Davies e seus colaboradores (Davies e Leach, 1994a,b e Davies, 1998), que são, reconhecidamente, os responsáveis por identificar as enormes potencialidades do método nos estudos da estabilidade de perfis de aço formados e frio, e divulgá-las mundialmente (em língua inglesa).

Apesar do elevado número de publicações empregando a GBT em diferentes campos de análise, especialmente na última década, faz-se aqui uma breve referência a alguns trabalhos importantes no âmbito da realização da presente tese, isto é, envolvendo análises de estabilidade elástica, elementos finitos baseados na GBT, e aplicações da GBT à análise de sistemas estruturais metálicos, dentre outros, cujas formulações mostram-se importantes na obtenção de soluções relacionadas, ou historicamente contribuíram para tal:

- (i) *Silvestre e Camotim, 2002a,b,c*: Foram os primeiros artigos do grupo orientado pelo Prof. Dinar Camotim, dando início a uma sequência de mais de uma centena de trabalhos envolvendo a GBT com diversos outros autores. Nesses três trabalhos, os autores apresentam as formulações para análises de estabilidade, primeira e segunda ordem de perfis com materiais isotrópicos e ortotrópicos, envolvendo seções transversais abertas e não ramificadas*;
- (ii) *Silvestre e Camotim, 2003a,b*: Trazem as primeiras formulações e implementações de elementos finitos baseados na GBT, e abrangem também o comportamento geometricamente não linear de barras com materiais compósitos. Vale destacar que a formulação não linear envolve também a consideração de modos de deformação da GBT ditos “não convencionais”, que são os modos de corte e os modos de extensão transversal, comentados brevemente no item 2.4;
- (iii) *Camotim et al., 2006*: Trabalho em língua portuguesa que condensa o estado da arte da GBT, envolvendo os principais desenvolvimentos até então para a análise de estabilidade, vibração, e análises geometricamente não lineares de barras com seções transversais abertas ramificadas arbitrárias, fechadas, e fechadas e ramificadas;
- (iv) *Dinis et al., 2006*: Trabalho que apresenta a primeira formulação geral para a análise de seções transversais abertas ramificadas arbitrárias. Esta formulação, devido ao seu caráter prático, e por ser aplicável a qualquer seção transversal, com exceção de seções fechadas (retangulares, poligonais, circulares, etc.), tem sido amplamente utilizada desde então em muitos outros trabalhos com a GBT;
- (v) *Basaglia et al., 2006a,b*: Trabalhos que marcam as primeiras implementações da GBT para a análise de estabilidade de pórticos metálicos. Ainda considerando apenas os modos globais, os artigos apresentam a formulação do elemento finito da GBT, e a compatibilização entre os graus de liberdade globais criada;

* Nas aplicações da GBT, as seções transversais dividem-se em (i) abertas e não ramificadas, (ii) abertas e ramificadas, (iii) fechadas (iii₁) unicelulares e (iii₂) multicelulares, e (iv) circulares/elípticas (vide mais no item 2.4).

- (vi) *Bebiano et al., 2007*: Outra importante publicação no que diz respeito às possibilidades de aplicação da GBT. Os autores apresentam uma formulação capaz de incorporar os efeitos decorrentes das variações longitudinais de tensões. Em outras palavras, tornando possível a análise de barras com momento fletor variável, e considerando o efeito das tensões de corte (tangenciais) sobre a rigidez das mesmas;
- (vii) *Bebiano et al., 2008b, 2013*: A apresentação do programa computacional de livre utilização GBTUL (disponível em [www.civil.ist.utl.pt/gbt], e hoje em sua segunda versão, GBTUL 2, trouxe uma contribuição imensurável à popularização da GBT pelo mundo. Parte disso pode ser explicado pela popularização do Método da Resistência Direta, para o dimensionamento para perfis de aço formados à frio, proposto na norma americana (ANSI AISI-S100-12), o qual torna necessária a análise numérica de estabilidade dos elementos dimensionados, remetendo os engenheiros à utilização de métodos como o MFF, MEF, ou à GBT;
- (viii) *Basaglia et al. (2007a, 2008)*: Primeiros trabalhos em revista científica demonstrando a aplicação da GBT nas análises de estabilidade de pórticos planos e tridimensionais. Os autores apresentam detalhadamente as estratégias utilizadas para promover a compatibilização dos deslocamentos globais entre as barras de pórticos metálicos, considerando, no entanto, apenas os 4 primeiros modos de deformação da GBT (modos globais). Esta mesma estratégia segue, atualmente, sendo utilizada para a compatibilização dos graus de liberdade globais, através do chamado “elemento de nó”;
- (ix) *Camotim et al., 2010a,b*: Dois trabalhos de revisão, que apresentam resumidamente os desenvolvimentos recentes da GBT, assim como suas perspectivas para os próximos desenvolvimentos. Em especial, são comentadas as aplicações da GBT (1) à análise de primeira ordem de tabuleiros de pontes compostos de aço e concreto, (2) na estabilidade e análises geometricamente não lineares com carregamentos e condições de apoio arbitrários, (3) na vibração livre, e sob carregamento, de barras com seção transversal aberta, e (4) na análise dinâmica de barras submetidas a carregamentos cíclicos e cargas móveis, entre outros tópicos;
- (x) *Basaglia e Camotim (2010)*: Outro trabalho aplicando a GBT na análise de estabilidade pórticos metálicos, no entanto, este considerando barras com seções tubulares retangulares (*Rectangular Hollow Section – RHS*);
- (xi) *Camotim et al., 2010c*: Trabalho de revisão, condensando os principais desenvolvimentos relacionados à aplicação da GBT na análise de pórticos metálicos até então. A importância deste trabalho está relacionada à proposição de modelos de relação cinemática para

compatibilizar as deformações locais das paredes da seção transversal na região da ligação, e transmissão das deformações de empenamento devido à torção e distorção. Tais proposições foram baseadas em quatro tipos de ligação específicos, entre perfis I ou U enrijecido de iguais dimensões, soldadas, com continuidade na alma ou nas mesas, podendo ser (1) sem enrijecedores, (2) com enrijecedor na alma paralelo às abas (*i.e.*, em forma de caixa), (3) com enrijecedor na alma em diagonal, ou (4) com enrijecedores na alma em caixa e diagonal;

- (xii) *Basaglia et al. (2010, 2011)*: A aplicação de condições de apoio arbitrárias em análises de estabilidade (2010), e análises geometricamente não lineares (2011) são apresentadas pelos autores, assim como os efeitos de tais condições, juntamente com os efeitos causados pelos gradientes de tensões longitudinais nas barras (recorde-se o trabalho de *Bebiano et al., 2007*), para exemplos de pórticos metálicos planos e tridimensionais;
- (xiii) *Basaglia e Camotim (2011)*: Trabalho apresentando a aplicação da GBT como solução na análise de treliças metálicas. Como técnica, um conjunto de equações de restrição é aplicado para garantir o comportamento da ligação analisada, conceitualmente não diferente da técnica utilizada nas soluções dos trabalhos anteriores envolvendo os pórticos metálicos. Um outro trabalho envolvendo treliças foi apresentado no ano seguinte (*Basaglia e Camotim, 2012*), contudo, voltado à aplicação de perfis RHS;
- (xiv) *Basaglia et al. (2012a)*: A continuidade dos trabalhos dos referidos autores aqui avança no estudo do comportamento de estabilidade e geometricamente não linear de vigas contínuas e pórticos metálicos, com foco também no dimensionamento dessas estruturas através de ajustes no Método da Resistência Direta;
- (xv) *Basaglia et al. (2012b)*: Outro estudo específico de grande importância relacionado à análise numérica de sistemas estruturais metálicos. Os autores demonstram aqui um conjunto de relações cinemáticas capazes de descrever a transmissão das deformações de empenamento devido à torção entre barras não alinhadas entre si, para as mesmas ligações descritas no trabalho do item x;
- (xvi) *Basaglia e Camotim (2013a)*: Neste trabalho, os autores focam no estudo do comportamento de estabilidade e geometricamente não linear de vigas contínuas, constituídas por perfis em U enrijecido, e apresentam equações de dimensionamento via MRD, comparando as previsões com resultados numéricos obtidos por meio de análises rigorosas com elementos finitos de casca;
- (xvii) *Basaglia e Camotim (2013b)*: Outro importante trabalho, onde os autores apresentam duas formulações possíveis para implementação de modo a permitir levar em consideração a

- posição de aplicação do carregamento na seção transversal de uma barra. Resultados demonstrando os efeitos de tal consideração são demonstrados para barras isoladas e pórticos;
- (xviii) *Camotim e Basaglia (2013)*: Artigo de revisão, onde os autores apresentam os recentes avanços da GBT relacionados à análise de sistemas estruturais constituídos por perfis de aço de paredes finas, assim como as aplicações práticas desenvolvidas até então. Importante mencionar que algumas das soluções apresentadas neste trabalho apresentam a aplicação de molas lineares como condições de apoio específicas para determinadas circunstâncias;
- (xix) *Basaglia et al. (2013b)*: Neste trabalho, os autores aplicam apoios com molas lineares para simular as restrições provocadas pelas telhas em terças com seção transversal em U enrijecido e Z enrijecido. A aplicação de tais molas como condições de apoio não convencionais também é uma importante referência no desenvolvimento da presente tese;
- (xx) *Camotim e Basaglia (2014)*: Outro trabalho que visa o dimensionamento de sistemas estruturais, tais como vigas contínuas e pórticos, através de procedimentos diretos baseados no MRD. Tal abordagem, apesar de não fazer parte dos desenvolvimentos da presente tese, é citada aqui por demonstrar como possíveis aplicabilidades diretas podem estar relacionadas às análises de estabilidade de sistemas estruturais aqui estudadas;
- (xxi) *Basaglia e Camotim (2015)*: Um trabalho bastante completo, que aborda de forma detalhada algumas das aplicações da GBT para sistemas estruturais até então estudadas, nomeadamente (1) vigas contínuas pertencentes a estruturas de armazenamento (racks), (2) pórticos com duas águas (vigas inclinadas) de galpões industriais, (3) pórticos planos constituídos por perfis RHS, e (4) treliças de coberturas apresentando diferentes condições de apoio e carregamentos. Vale comentar, no entanto, que o referido trabalho se mostra mais voltado aos resultados das análises propostas, as quais envolvem estruturas consideravelmente mais complexas que aquelas analisadas por meio da GBT até então;
- (xxii) *Casafont et al. (2015)*: Trabalho recente utilizando a GBT para a análise de perfis do tipo U enrijecido perfurados. Apesar das implementações não apresentarem relação com a GBT para análise de sistemas estruturais, os autores utilizam um conjunto de equações de restrição para unir o que seriam barras com seções transversais diferentes (umas sem furos, e outras com furos – onde as paredes na região do furo foram consideradas com espessura reduzida para permitir a simulação). As referidas equações são implementadas no sistema através da técnica de Multiplicadores de Lagrange, a mesma sugerida em publicações anteriores de outros autores para implementações da GBT para sistemas estruturais, e por isso vale aqui o registro.

Não obstante, também é importante citar os trabalhos que nortearam desde o início os processos de implementação da GBT no presente trabalho, que são, (i) a tese de doutorado de Silvestre (2005), que é a mais didaticamente detalhada, especialmente para a compreensão de etapas como a análise da seção transversal para a GBT (muito embora seja aplicável somente para seções transversais abertas), (ii) a tese de Bebiano (2010), que apresenta com riqueza de detalhes a implementação do elemento finito baseado na GBT, assim como as formulações que permitem considerar os efeitos dos gradientes longitudinais de tensões nas barras, bem como as formulações para a análise de seções transversais abertas ramificadas arbitrárias, e (iii) a tese de Basaglia (2010), única que trata da aplicação da GBT para sistemas estruturais metálicos, e de fundamental importância para a compreensão dos conceitos que permitem as implementações relacionadas a este fim.

2.2. Conceitos Iniciais

Este item segue a mesma metodologia apresentada em trabalhos como o de Bebiano (2010) e Basaglia (2010), no que se refere à apresentação de uma formulação unificada, aplicável à análise de estabilidade e primeira ordem de perfis metálicos com seção transversal aberta ramificada arbitrária (não aplicável a seções fechadas poligonais, circulares ou elípticas). Outros detalhes relacionados aos métodos utilizados são comentados conforme apresentada a formulação.

Primeiramente, descreve-se o procedimento de uma análise por meio da Teoria Generalizada de Vigas, o qual segue, invariavelmente, três etapas, conforme apresentado ilustrativamente na figura 2.1.

Dada uma certa seção transversal e propriedades do material que a constitui, a primeira etapa, denominada análise da seção transversal, deve ser realizada, que consiste na determinação dos modos de deformação. O processo relacionado a esta etapa constitui o cerne da GBT, uma vez que as variáveis que figuram nas equações de equilíbrio são relacionadas as funções de amplitude ϕ de cada modo de deformação k obtido nesta primeira etapa (recorde-se a Fig. 1.4.a). O aspecto mais importante a ser lembrado nesta etapa é que cada modo de deformação obtido possui um significado mecânico específico relativo ao comportamento da barra que aquela seção transversal constitui, *i.e.*, pode representar, por exemplo, um modo de flexão da barra em torno do eixo de menor ou maior inércia da seção transversal, ou um modo de torção (puro), etc.

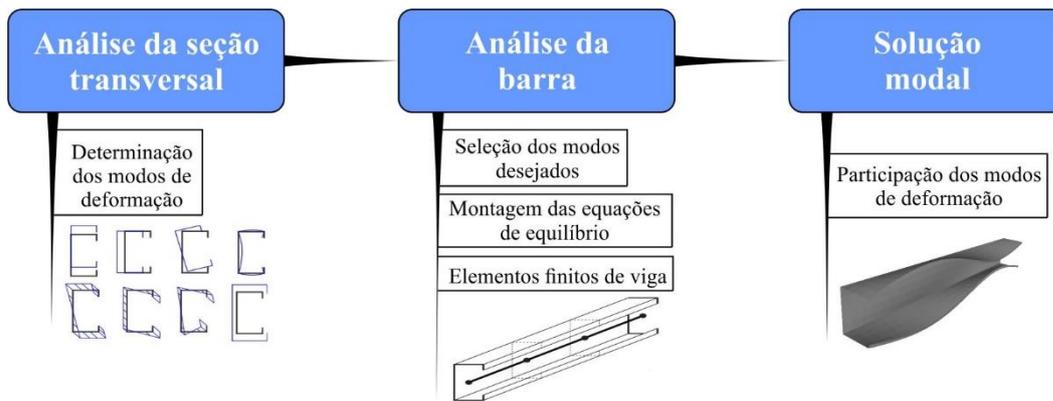


Figura 2.1 – Etapas de uma análise por meio da GBT.

A Fig. 2.2 ilustra, para uma seção do tipo cartola, os nove primeiros modos de deformação da GBT divididos em modos globais (1 ao 4, são modos de corpo rígido, iguais aos representados pela teoria de Vlasov – Vlasov, 1961), distorcionais (quando existentes, pois dependem da geometria da seção transversal), e locais (cujo número de modos depende da discretização adotada para a seção transversal).

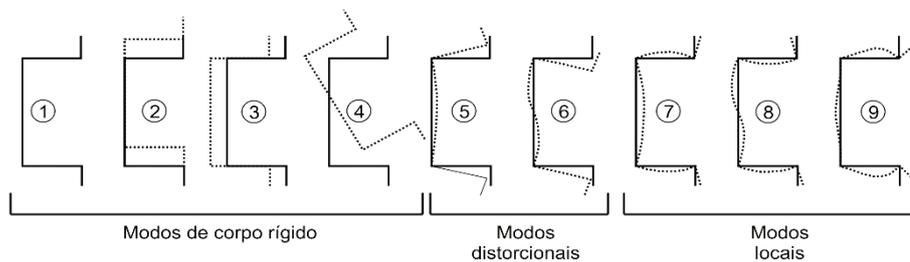


Figura 2.2 – Configuração no plano da seção transversal dos 9 primeiros modos de deformação de uma seção tipo cartola.

Uma vez determinados os modos de deformação, procede-se a determinação das equações de equilíbrio que constituem o problema a ser solucionado. Nesta etapa, outra grande vantagem da GBT apresenta-se pela possível “seleção modal”, *i.e.*, podem ser levados em consideração apenas os modos de deformação de interesse na solução, desprezando-se os demais, o que permite uma redução considerável no número de graus de liberdade do sistema, otimizando o processo de análise consideravelmente. A solução do sistema de equações pode utilizar técnicas analíticas, em determinados casos de carregamentos e condições de apoio convencionais, ou, a solução mais tradicional e versátil, a técnica dos elementos finitos, utilizada e descrita oportunamente no presente trabalho.

Finalmente, a solução é expressa em função de cada modo de deformação considerado inicialmente para a análise. De modo a exemplificar (de forma introdutória) o resultado de uma análise de estabilidade por meio da GBT, considere uma barra uniformemente comprimida com seção transversal do tipo cartola discretizada em um total de 6 segmentos de parede (6 nós naturais – dobras,

e 1 intermediário – no centro da mesa do perfil), conforme ilustra a Fig. 2.3.a, cuja análise da seção transversal conduz à determinação de 9 modos de deformação, que são observados na Fig. 2.2.

Resolvendo-se as equações de equilíbrio que descrevem o problema de estabilidade relacionado, são obtidos os resultados que fornecem: (i) (Fig. 2.3.b) a variação, em função do comprimento L da barra (em escala logarítmica), das forças axiais de bifurcação P_{cr} relativas à cada modo de deformação (linhas pontilhadas e numeradas conforme o respectivo modo de deformação exibido na Fig. 2.2), e também relativas à possibilidade de ocorrência de todos os modos de deformação (*i.e.*, com acoplamento modal), o que leva à identificação do “modo real” que rege a instabilidade da barra (curva cheia inferior); e (ii) (Fig. 2.3.c), o nível de participação de cada modo de deformação no modo de instabilidade para um determinado comprimento da barra.

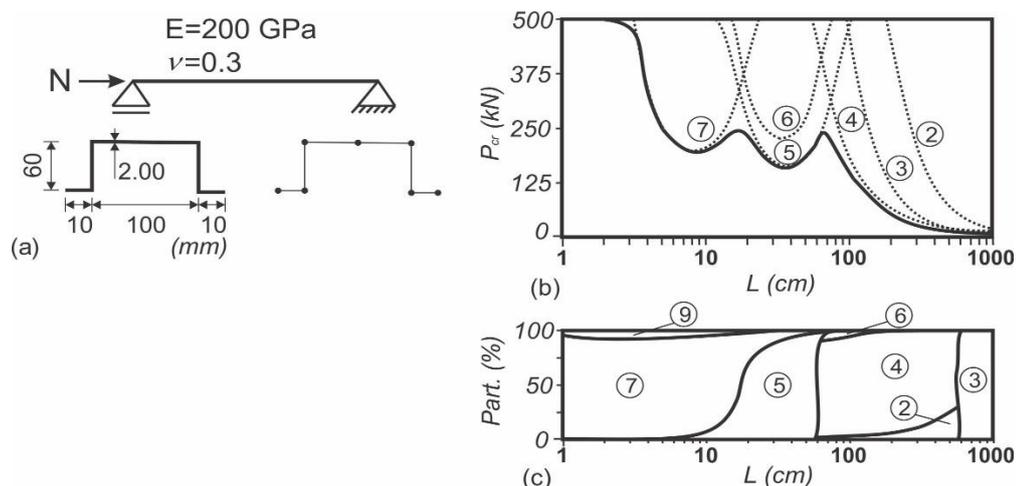


Figura 2.3 – Configuração no plano da seção transversal dos 9 primeiros modos de deformação de uma seção tipo cartola.

Os resultados apresentados nas figuras 2.3.b-c permitem uma apreciação detalhada dos fenômenos de instabilidade envolvidos para a referida seção transversal, e demonstram algumas capacidades exclusivas da GBT, como a possibilidade de se investigar separadamente cada modo de deformação, bem como a sua contribuição em um modo de instabilidade, que pode ser representado por um grupo específico ou mesmo por todos os modos de deformação determinados através da análise da seção transversal.

2.3. Formulação Básica

Para dar início às deduções das equações de equilíbrio da GBT, considera-se uma barra prismática com seção transversal aberta ramificada genérica, e comprimento L , representada na

Fig. 2.4. Na mesma figura são ilustrados o sistema de coordenadas global X - Y - Z , sendo Y e Z os eixos principais no plano da seção transversal, e X o eixo longitudinal da barra, bem como o sistema de coordenadas local de cada parede que constitui a seção transversal s - z - x , sendo x paralelo ao eixo longitudinal da barra, s o eixo que define o plano central da parede em questão, e z o eixo ortogonal ao plano da referida parede. Para além disso, cada uma das n_p paredes que compõem a referida seção transversal possui espessura constante e_i , e é constituída por um determinado material elástico linear isotrópico. Em um elemento infinitesimal de uma parede i qualquer, é possível observar, ainda, a decomposição do campo de deslocamentos, que no plano local tem suas componentes designadas por u , v e w .

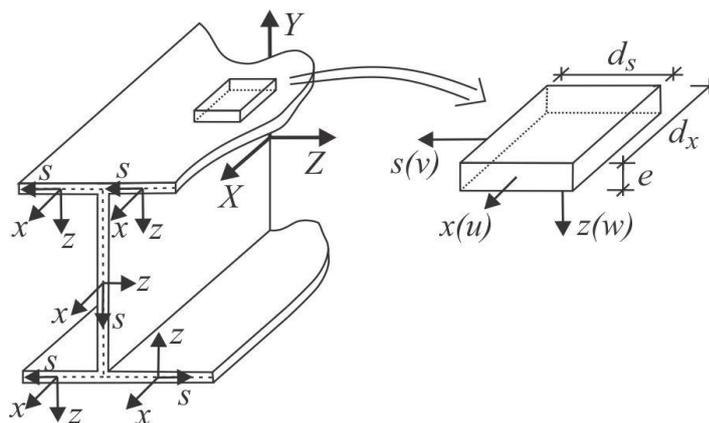


Figura 2.4 – Barra prismática com seção transversal aberta ramificada arbitrária de paredes finas, juntamente com o campo de deslocamentos e sistemas de eixos global e local adotados.

Como fundamentação para os problemas de primeira ordem e de estabilidade, envolvendo material elástico linear isotrópico, as seguintes hipóteses, também adotadas por Schardt, 1989, são mantidas:

- (i) *Hipótese de Kirchhoff-Love* (Brush e Almroth, 1975): válida para cada parede que compõe a seção transversal (de pequena espessura), estabelece que (i₁) as fibras normais ao plano médio na configuração indeformada, permanecem retas, normais ao plano médio e inextensíveis ($\varepsilon_{zz}=0$, equivale a estabelecer para cada parede um estado plano de deformação), e (i₂) as tensões normais na direção z (perpendicular ao plano médio) podem ser consideradas nulas ($\sigma_{zz}=0$, equivale a ter-se um estado plano de tensão);
- (ii) *Hipótese de Vlasov* (Vlasov, 1961): as fibras paralelas aos eixos x e s , pertencentes ao plano médio de cada parede, permanecem perpendiculares entre si após a deformação – $\gamma_{xs}=0$. Esta hipótese, segundo a teoria de flexão de vigas introduzida por Navier, implica em considerar as distorções de membrana no plano médio de cada parede – $\gamma_{xs}^M=0$;
- (iii) *Hipótese de inextensibilidade transversal*: Assume-se que as paredes são inextensíveis transversalmente, *i.e.*, as fibras paralelas ao eixo s pertencentes ao plano médio de cada

parede não sofrem extensão durante a deformação, o que equivale a dizer que a extensão transversal de membrana é nula – $\varepsilon_{ss}^M=0$. Tal consideração se deve ao fato de se considerarem desprezíveis tais deformações em análises de primeira ordem e de estabilidade, muito embora, em análises de segunda ordem essas deformações possam ter significado.

Com relação à cinemática, a Fig. 2.5 ilustra o perfil transversal, no plano xz , de uma placa nas configurações indeformada e deformada, onde admite-se que os pontos $O(x, s, z=0)$ e $P(x, s, z)$ pertencem a à mesma fibra normal ao plano médio, e (u, v, w) e (u^P, v^P, w^P) são os deslocamentos de O e P , respectivamente.

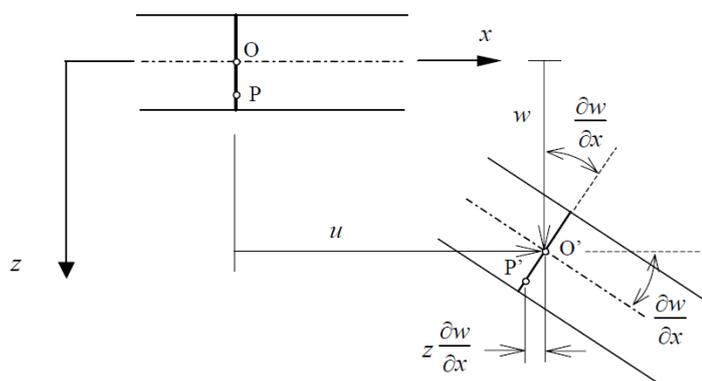


Figura 2.5 – Cinemática no plano xz de uma placa genérica, segundo as hipóteses de Kirchhoff-Love.
Fonte: Silvestre (2005).

Inicialmente, verifica-se que as hipóteses (i_1) e (i_2) , que implicam na inextensibilidade de uma fibra normal ao plano médio da parede, conduzem a:

$$\varepsilon_{zz} = w_{,z}^P = 0 \quad (2.1)$$

Lembrando que na notação adotada, a vírgula como índice indica operação de derivação em relação à(s) variável(eis) que a segue(m), *e.g.*, $(.)_{,z} = \partial(\cdot)/\partial z$. Com isso, w^P torna-se independente de z , ou seja,

$$w^P(x, s, z) = w(x, s) \quad (2.2)$$

Além disso, as hipóteses de Kirchhoff-Love também implicam que as distorções nos planos xz e sz sejam nulas, ou seja:

$$\gamma_{xz} = u_{,z}^P + w_{,x}^P = 0 \quad \gamma_{sz} = v_{,z}^P + w_{,s}^P = 0 \quad (2.3)$$

Logo, introduzindo 2.2 em 2.3, e integrando em relação à z , obtém-se:

$$u^P(x, s, z) = u(x, s) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v^P(x, s, z) = v(x, s) - z \frac{\partial w}{\partial s} \quad (2.4)$$

Assim, tem-se a decomposição do deslocamento axial u (num elemento infinitesimal de placa ds) nas parcelas de membrana $u(x, s)$ e de flexão $z(\partial w / \partial x)$, conforme ilustrado na Fig. 2.6.

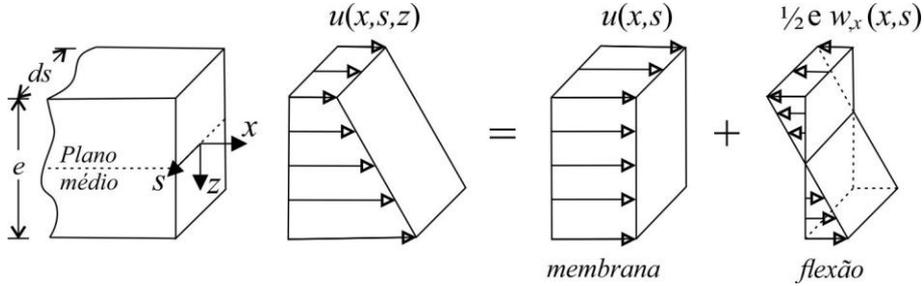


Figura 2.6 – Deslocamento axial num elemento de placa infinitesimal: decomposição em parcelas de membrana e flexão. Fonte: Silvestre (2005).

As relações deformações-deslocamentos lineares associadas ao campo de deslocamentos (u^P, v^P, w^P) , são fornecidas por

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}^P \quad \varepsilon_{ss} = v_{,s}^P \quad \gamma_{xs} = u_{,s}^P + v_{,x}^P \quad (2.5)$$

que, por sua vez, ao introduzir 2.2 e 2.4, passam a

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^F \quad \varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss}^M + \varepsilon_{ss}^F \quad \gamma_{xs} = \gamma_{xs}^M + \gamma_{xs}^F \quad (2.6)$$

onde,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^M &= u_{,x} & \varepsilon_{xx}^F &= -z w_{,xx} \\ \varepsilon_{ss}^M &= v_{,s} & \varepsilon_{ss}^F &= -z w_{,ss} \\ \gamma_{xs}^M &= u_{,s} + v_{,x} & \gamma_{xs}^F &= -2z w_{,xs} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo $()^M$ e $()^F$, respectivamente, os termos de deformação de membrana e flexão.

Não obstante, tem-se ainda as hipóteses (ii) e (iii), que implicam diretamente em assumir que $\gamma_{xs}^M = 0$, e $\varepsilon_{ss}^M = 0$. E para as aplicações relativas à análise linear de estabilidade, também a componente não linear da deformação de membrana é necessária, a qual pode ser definida a partir da equação 2.8, num ponto P genérico.

$$2\varepsilon_{xx}^{NL} = (u_{,x}^P)^2 + (v_{,x}^P)^2 + (w_{,x}^P)^2 \quad (2.8)$$

Onde, ao se considerar um regime de pequenas deformações e rotações moderadas, pode-se admitir $(u_{,x}^P)^2 \approx 0$, o que permite reescrever 2.8 como:

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \frac{1}{2}(v_{,x}^P)^2 + \frac{1}{2}(w_{,x}^P)^2 \quad (2.9)$$

Introduzindo a Eq. 2.2 e a parcela de membrana de 2.4 na Eq. 2.9, tem-se

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \equiv \varepsilon_{xx}^{M.NL} \quad \varepsilon_{xx}^M = u_{,x} + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \quad (2.10)$$

De forma semelhante, é necessária a componente não linear associada às distorções de membrana, que é dada por

$$\gamma_{xx}^{NL} = w_{,s}w_{,x} + v_{,s}v_{,x} \quad (2.11)$$

Lembrando que, pela hipótese de Vlasov, tem-se $\varepsilon_{ss} = 0 \Rightarrow v_{,s} = 0$, portanto,

$$\gamma_{xx}^{NL} = w_{,s}w_{,x} \quad (2.12)$$

Com isso, resumidamente, ficam definidas as relações cinemáticas (deformações – deslocamentos) mais relevantes conforme as equações 2.13. Uma abordagem mais detalhada sobre a definição de tais relações pode ser encontrada no trabalho de Bebiano (2010).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{M.L} &= u_{,x} & \varepsilon_{xx}^{M.NL} &= \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) & \varepsilon_{xx}^F &= -zw_{,xx} \\ \varepsilon_{ss}^M &= 0 & \varepsilon_{ss}^F &= -zw_{,ss} & & \\ \gamma_{xs}^{M.L} &= 0 & \gamma_{xs}^{M.NL} &= w_{,s}w_{,x} & \gamma_{xs}^F &= -2zw_{,xs} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para obter uma representação de deslocamentos compatível com a teoria clássica de vigas com seção transversal de paredes finas, cada componente de deslocamento ($u(x,s)$, $v(x,s)$ e $w(x,s)$) é expresso como uma soma de produtos entre dois tipos de funções: (i) uma que depende apenas de x (coordenada na direção do eixo longitudinal), e (ii) outra que depende apenas de s (coordenada ao longo da linha média da seção transversal), conforme apresentado nas Eqs. 2.14.

$$\begin{aligned} u(x,s) &= u_i(s)\zeta_{i,x}(x) \\ v(x,s) &= v_i(s)\zeta_i(x) \\ w(x,s) &= w_i(s)\zeta_i(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Onde $\zeta_i(x)$ é uma função que descreve a amplitude para o respectivo perfil de deslocamentos ao longo do comprimento da barra. Além disso, é importante notar que a presença da derivada em ζ_i para $u(x,s)$ está relacionada à hipótese de Vlasov (distorções de membrana nulas em cada parede – $\gamma_{xs}^M = u_{,s} + v_{,x} = 0$) – Silvestre (2005). Este fato faz com que as equações diferenciais de equilíbrio apresentem ordens de diferenciação distintas para a extensão axial (2ª ordem) e flexão e/ou torção (4ª ordem), e sendo $\zeta_i(x)$ uma função adimensional, o perfil $u_i(s)$ acaba por resultar com unidades (l^2), de modo a garantir que $u(x,s)$ tenha unidade de deslocamento. Tal solução é frequentemente utilizada em outras formulações, como, por exemplo, a do MFF (Cheung, 1976). Por fim, vale comentar que com relação às coordenadas (x), os deslocamentos longitudinais, de fato, são de uma ordem superior à dos restantes deslocamentos ($u_{,s} = -v_{,x}$).

Recomenda-se ainda, como fonte de consulta mais completa sobre este tópico, o trabalho de Bebiano (2010), que apresenta as deduções matemáticas completas, e o trabalho de Gonçalves (2007), que discute mais a respeito das hipóteses simplificativas adotadas.

Assim, mostra-se a representação na GBT, proposta inicialmente por Schardt (1989), das componentes de deslocamentos do plano médio de cada parede da seção transversal de uma barra $u(x,s)$, $v(x,s)$ e $w(x,s)$, dadas por

$$\begin{aligned} u(x,s) &= u_k(s)\phi_{k,x}(x) \\ v(x,s) &= v_k(s)\phi_k(x) \\ w(x,s) &= w_k(s)\phi_k(x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde, (i) $u_k(s)$, $v_k(s)$ e $w_k(s)$, são obtidos através da análise da seção transversal, apresentada no item 2.4 deste trabalho, e representam o campo de deslocamentos da seção para o modo k de deformação, (ii) $\phi_k(x)$ é a função que fornece a amplitude ao longo do comprimento da barra do modo de deformação k . Lembrando que aplica-se a convenção de soma ao índice k .

Portanto, as relações entre as componentes de deformações e deslocamentos definidas em 2.13, com a aplicação da representação dada em 2.15, passam a ser dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{M.L} &= u_k \phi_{k,xx} & \varepsilon_{xx}^{M.NL} &= \frac{1}{2} (v_k v_i + w_k w_i) \phi_{k,x} \phi_{i,x} & \varepsilon_{xx}^F &= -z w_k \phi_{k,xx} \\ \varepsilon_{ss}^M &= 0 & \varepsilon_{ss}^F &= -z w_{k,ss} \phi_k & & \\ \gamma_{xs}^{M.L} &= 0 & \gamma_{xs}^{M.NL} &= w_{k,s} w_i \phi_k \phi_{i,x} & \gamma_{xs}^F &= -2z w_{k,s} \phi_{k,x} \end{aligned} \quad (2.16)$$

e as correspondentes variações, dadas por

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx}^{M.L} &= u_k \delta \phi_{k,xx} & \delta \varepsilon_{xx}^{M.NL} &= (v_k v_i + w_i w_k) \phi_{i,x} \delta \phi_{k,x} & \delta \varepsilon_{xx}^F &= -z w_k \delta \phi_{k,xx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ss}^M &= 0 & \delta \varepsilon_{ss}^F &= -z w_{k,ss} \delta \phi_k \\ \delta \gamma_{xs}^{M.L} &= 0 & \delta \gamma_{xs}^{M.NL} &= w_{i,s} w_k (\phi_i \delta \phi_{k,xx} + \phi_{k,xx} \delta \phi_i) & \delta \gamma_{xs}^F &= -2z w_{k,s} \delta \phi_{k,x} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A seguir, considere-se a relação constitutiva de materiais elásticos isotrópicos, baseada na lei de Hooke generalizada, e considerando um estado plano de tensão ($\sigma_{xz} = \sigma_{sz} = \sigma_{zz} = 0$), dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{M.L} \\ \sigma_{xx}^{F.L} \\ \sigma_{ss}^{F.L} \\ \tau_{xs}^{F.L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{M.L} \\ \varepsilon_{xx}^{F.L} \\ \varepsilon_{ss}^{F.L} \\ \gamma_{xs}^{F.L} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

onde, (i) $\{\sigma_{xx}, \sigma_{ss}, \tau_{xs}\}$ são as tensões axial, transversal e de corte, (ii) $\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{xs}\}$ são as deformações homólogas, ambas referidas à componente linear (índice superior L) de flexão (índice superior F) ou membrana (índice superior M), e (iii) E , G , e ν são o módulo de elasticidade, o módulo de distorção e o coeficiente de Poisson do material, respectivamente.

É importante notar que, uma vez que $\sigma_{ss}^{M.L} = 0$, nenhum efeito de Poisson é considerado com relação às tensões longitudinais de membrana $\sigma_{xx}^{M.L}$ (o trabalho de *Ádány et al.*, 2009 discute sobre a relevância desta hipótese). Além disso, a relação simplificada entre as tensões longitudinais de membrana e as respectivas extensões longitudinais, desprezando o efeito de Poisson, foi proposta ainda por Schardt (1989), para preservar a consistência entre a GBT e as teorias clássicas de vigas.

Introduzindo as relações deformações-deslocamentos (2.16) na relação constitutiva (2.18), as seguintes relações tensões-deslocamentos são obtidas:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{M.L} &= E u_k \phi_{k,xx} & \sigma_{xx}^{F.L} &= -z \frac{E}{1-\nu^2} (w_k \phi_{k,xx} + \nu w_{k,ss} \phi_k) \\ \sigma_{ss}^M &= 0 & \sigma_{ss}^F &= -z \frac{E}{1-\nu^2} (\nu w_k \phi_{k,xx} + w_{k,ss} \phi_k) \\ \tau_{xs}^{M.L} &= 0 & \tau_{xs}^{F.L} &= -2z G w_{k,s} \phi_{k,x} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Resta escrever, no entanto, o sistema de equações de equilíbrio que descreve o comportamento de uma barra. Assim, para o esclarecimento desta questão recorre-se ao princípio de Hamilton, o qual pode ser expresso como

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (2.20)$$

onde T e V representam a energia cinética e a energia potencial se um sistema conservativo ($L = T - V$ é a Função Lagrangeana), que evoluem ao longo de um determinado intervalo de tempo

$[t_1, t_2]$ arbitrário. Decompondo a energia potencial no somatório entre a energia de deformação U e o potencial das forças externas Π , a equação 2.20 pode ser reescrita como

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta \Pi - \delta T) dt = 0 \quad (2.21)$$

Sabendo-se que a variação da energia cinética é nula nos problemas estáticos lineares (ou de estabilidade elástica), e que os termos restantes são invariantes no tempo, obtém-se a equação de equilíbrio que constitui o conhecido Princípio da Mínima Energia Potencial, dada por

$$\delta V = \delta U + \delta \Pi = 0 \quad (2.22)$$

No que se refere à variação da energia de deformação, esta pode ser obtida pela soma de (i) um termo linear U^L , associado com a rigidez linear do sistema, e um termo não linear U^{NL} , associado aos efeitos geometricamente não lineares, resultantes das forças externas. Portanto, a variação da energia de deformação pode ser expressa por

$$\delta U = \delta U^L + \delta U^{NL} \quad (2.23)$$

Por sua vez, o termo linear δU^L pode ser expresso pela combinação das componentes lineares de tensão $\sigma_{xx}^{M,L}$, $\sigma_{xx}^{F,L}$, σ_{ss}^F , e $\tau_{xs}^{F,L}$, bem como as respectivas componentes de deformação $\varepsilon_{xx}^{L,M}$, $\varepsilon_{xx}^{F,L}$, $\varepsilon_{ss}^{F,L}$, e $\gamma_{xs}^{F,L}$ (vide Eq. 2.18), conforme mostra a Eq. 2.24.

$$\delta U^L = \delta U_{xx}^{L,M} + \delta U_{xx}^{L,F} + \delta U_{ss}^{L,F} + \delta U_{xs}^{L,F} \quad (2.24)$$

$$= \int_L \int_S \int_e \left(\sigma_{xx}^{M,L} \delta \varepsilon_{xx}^{M,L} + \sigma_{xx}^{F,L} \delta \varepsilon_{xx}^{F,L} + \sigma_{ss}^{F,L} \delta \varepsilon_{ss}^{F,L} + \tau_{xs}^{F,L} \delta \gamma_{xs}^{F,L} \right) dz ds dx \quad (2.25)$$

onde L indica o comprimento da barra, e S a largura total da linha média da seção transversal.

Em seguida, introduzindo as equações 2.17, e 2.19, em 2.25, e procedendo as integrações sobre a seção transversal (*i.e.*, na espessura e , e na largura S), obtém-se

$$\delta U^L = \int_L \left(C_{ik} \phi_{k,xx} \delta \phi_{i,xx} + D_{ik}^I \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} + D_{ik}^{II} \phi_k \delta \phi_{i,xx} + D_{ki}^{II} \phi_{k,xx} \delta \phi_i + B_{ik} \phi_k \delta \phi_i \right) dx \quad (2.26)$$

ou, alternativamente,

$$\begin{aligned} \delta U^L = & \int_L \left(C_{ik} \phi_{k,xx} \delta \phi_{i,xx} + D_{ik} \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} + B_{ik} \phi_k \delta \phi_i \right) dx + \\ & + \left[D_{ik}^{II} \phi_k \delta \phi_{i,x} \right]_0^L - \left[D_{ik}^{II} \phi_{k,x} \delta \phi_i \right]_0^L \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde C_{ik} , D_{ik} , D_{ik}^I , D_{ik}^{II} , e B_{ik} , são tensores de segunda ordem que representam diferentes componentes de rigidez linear associados à barra. Lembrando que na GBT convencional é

comum definir os tensores C_{ik} e D_{ik} , como $(C_{ik}^I + C_{ik}^{II})$, e $(D_{ik}^I - (D_{ik}^{II} + C_{ki}^{II}))$, respectivamente, as expressões analíticas, juntamente com o principal significado físico associado a cada um dos tensores são apresentadas na Tabela 2.1 a seguir.

Tabela 2.1 – Expressões analíticas e principais significados físicos associados aos tensores lineares de rigidez da GBT

| Matriz | Expressão | Principal Significado Físico |
|---------------|--|--|
| C_{ik}^I | $Ee \int_S u_i u_k ds$ | Empenamento primário generalizado |
| C_{ik}^{II} | $\frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \int_S w_i w_k ds$ | Empenamento secundário generalizado |
| D_{ik}^I | $\frac{Ge^3}{3} \int_S w_{i,s} w_{k,s} ds$ | Torção generalizada (rotação transversal da linha média das paredes $w_{k,s}(s)$) |
| D_{ik}^{II} | $\frac{\nu Ee^3}{12(1-\nu^2)} \int_S w_i w_{k,ss} ds$ | Efeitos de Poisson pela flexão transversal das paredes $w_{k,ss}(s)$ * |
| B_{ik} | $\frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \int_S w_{i,ss} w_{k,ss} ds$ | Deformações locais (flexão transversal generalizada em cada parede) |

Por sua vez, o termo não linear da energia de deformação δU^{NL} , que representa os efeitos geometricamente não lineares das forças aplicadas, equilibrados por uma distribuição de tensões normais σ_{xx}^0 e tangenciais τ_{xs}^0 , e que são necessários para a obtenção das equações de equilíbrio das análises de estabilidade elástica, passa a ser descrito como

$$\delta U^{NL} = \delta \Pi_{\sigma} + \delta \Pi_{\tau} = \int \int \int_{L S e} (\sigma_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^{NL.M} + \tau_{xs}^0 \delta \gamma_{xs}^{NL.M}) dz ds dx \quad (2.28)$$

onde $\delta \Pi_{\sigma}$ e $\delta \Pi_{\tau}$ representam a energia potencial das tensões normais e tangenciais da solução fundamental, aqui referidas pelo termo mais popular, tensões de pré-flambagem.

Neste ponto, incorpora-se à formulação, até então baseada nas proposições apresentadas por Silvestre (2005) e Camotim *et al.* (2007), a contribuição de Bebiano *et al.* (2007), que permite a consideração de distribuições variáveis de esforços ao longo da barra, uma vez que até então apenas problemas envolvendo esforços constantes eram analisados.

* Este termo envolve, mais especificamente, a rotação das fibras ao longo da espessura da parede devido ao acoplamento entre a flexão transversal da mesma ($w_{k,ss}(s)$) e os efeitos de Poisson. Note que no caso de se ter $\nu=0$, então $D_{ik}^{II}=0$.

Para tal, considere-se a resultante das tensões longitudinais como uma combinação advinda da força axial $N(X)$, momentos flectores em torno dos eixos de maior $M_Z(X)$ e menor $M_Y(X)$ inércia, e bimomento $M_\omega(X)$, conforme mostra a equação 2.29.

$$\sigma_{xx}^0(X, Y, Z) = -\frac{N(X)}{A} + \frac{M_Y(x)}{I_Y} Z - \frac{M_Z(X)}{I_Z} Y + \frac{M_\omega(X)}{I_\omega} \omega \quad (2.29)$$

Por outro lado, a figura 2.7 ilustra, para a mesma secção transversal utilizada no exemplo das Figs. 2.2 e 2.3, o campo de deslocamentos axiais $u_i(s)$ para os quatro primeiros modos de deformação da GBT, que estão associados à (i) extensão axial, flexão em torno dos eixos de (ii) maior e (iii) menor inércia, e (iv) torção. Baseado nisso, considere-se o respectivo campo de deslocamentos axiais, expresso como

$$u(x, s, e) = u_j(s) \phi_{j,x}^0(x, e) \quad (2.30)$$

onde, ϕ_j^0 é a função de amplitude correspondente à contribuição do modo de deformação j .

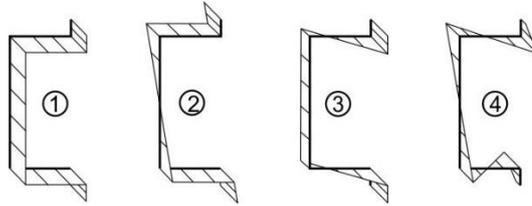


Figura 2.7 – Deslocamentos axiais $u_i(s)$ (fora do plano) para os 4 primeiros modos de deformação ($1 \leq i \leq 4$) de uma secção tipo cartola.

Com base nas equações para ε_{xx} em 2.16, 2.18, e a equação 2.30, a distribuição de tensões normais passa a ser dada por

$$\sigma_{xx}^0 = \sum_{j=1}^4 \sigma_{xx,j}^0 = \sum_{j=1}^4 E u_j \phi_{j,xx}^0 \quad (2.31)$$

sendo $\sigma_{xx,j}^0$ a distribuição de tensões longitudinais relativa ao modo j ($1 \leq j \leq 4$). Enquanto as resultantes associadas, segundo os trabalhos clássicos de Schard (1989) e Davies e Leach (1994a,b), são dadas por

$$W_j = \int \int_S u_j \sigma_{xx,j}^0 dz ds = -C_{jj} \phi_{j,xx}^0 \quad (2.32)$$

onde (i) $W_1(x) \equiv -N(x)$, (ii) $W_2(x) \equiv M_Y(x)$, (iii) $W_3(x) \equiv -M_Z(x)$, e (iv) $W_4(x) \equiv -M_\omega(x)$.

Incorporando, então, (i) a equação de $\delta \varepsilon_{xx}^{M,NL}$ em 2.17, e (ii) as equações 2.31 – 2.32, no primeiro termo da equação 2.28, tem-se

$$\delta U_{\sigma}^{NL} = - \int_L W_j X_{jik}^{\sigma} \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} dx \quad (2.33)$$

para a qual, X_{jik}^{σ} ($1 \leq j \leq 4$), são as matrizes de rigidez geométrica relacionadas a cada resultante W_j .

Quanto ao segundo termo da equação 2.28 – δU_{τ}^{NL} – nota-se que devido à hipótese de Vlasov estabelecer que $\gamma_{xs}^{L,M} = 0$, a distribuição de tensões τ_{xs}^0 relacionada não pode ser obtida por meio das relações constitutivas 2.18 (estado plano de tensões). Alternativamente, recorre-se ao equilíbrio longitudinal de tensões para a obtenção dos valores de τ_{xs}^0 , portanto, na ausência de forças externas e para um estado plano de tensões o equilíbrio longitudinal é dado por

$$\sigma_{xx,x}^0 + \tau_{xs,s}^0 = 0 \quad (2.34)$$

que, após um rearranjo, e tendo em consideração as equações 2.31 – 2.32, pode ser expressa em função de cada modo de deformação j ($1 \leq j \leq 4$), como

$$d\tau_{xs,j}^0 = \frac{-a_j E W_{j,x}}{C_{jj}} u_j ds \quad (2.35)$$

onde a_j é um multiplicador que corrige a validade da equação 2.35 para o caso de $j=1$, uma vez que o modo de extensão axial não envolve tensões tangenciais, *i.e.*, $\tau_{xs,1}^0 = 0$, portanto, $a_j=0$ para $j=1$, e $a_j=1$ para $2 \leq j \leq 4$. Além disso, $W_{j,x}$ representa o esforço cortante associado, para $2 \leq j \leq 3$, aos momentos fletores em torno dos eixos principais de inércia, e para $W_{4,x}$, ao bimomento, ou seja,

$$W_{2,x}(x) \equiv V_2(x) \quad W_{3,x}(x) \equiv V_3(x) \quad W_{4,x}(x) \equiv T(x) \quad (2.36)$$

Outra contribuição importante a ser citada neste ponto é a de Basaglia *et al.* (2007b), que expandiu a formulação apresentada 2.34 – 2.36, que no trabalho de Bebiano *et al.* (2007) incorporava apenas as tensões tangenciais de pré-flambagem devidas à variação longitudinal dos momentos fletores, *i.e.*, $2 \leq j \leq 3$, permitindo considerar também as tensões tangenciais causadas pela variação longitudinal dos esforços associados à torção não uniforme.

Como a determinação dos valores para 2.35 envolve ainda algumas propriedades que vale a pena detalhar, considere-se as figuras 2.8.a-e, que ilustram uma seção transversal em I enrijecido, pertencente a uma certa coordenada longitudinal x , e cujos eixos locais s apresentam orientações específicas para a análise.

Muito embora as definições de orientação dos eixos locais s ainda sejam comentadas no item sobre a análise da seção transversal, considere-se aqui, como exemplo inicial, as orientações adotadas para uma seção do tipo aberta ramificada, na qual assume-se o ponto $A(x, s_A)$

como origem do eixo que caracteriza o plano médio das paredes da seção transversal, e $P(x, s_P)$ um ponto genérico sobre o mesmo eixo em questão. O valor de $\tau_{xs,j}^0(x, s_P)$, obtido por meio da integração da equação 2.35 ao longo da linha média da seção transversal, é dado por

$$\tau_{xs,j}^0 = \frac{-a_j EW_{j,x}}{C_{jj}} \int_{S_A}^{S_P} u_j(s) ds \quad (2.37)$$

ou, considerando a integral em 2.35 como $S_j(s)/e$, esta pode ser reescrita como

$$\tau_{xs,j}^0 = \frac{-a_j EW_{j,x} S_j(s)}{C_{jj} e} \quad (2.38)$$

onde, por conta da amplitude (normalmente) unitária* para u_2 e u_3 , tem-se as funções $S_2(s)$ e $S_3(s)$ representando o momento estático da seção compreendida entre os pontos A e P, em relação aos eixos de maior e menor inércia, e devido à normalização do modo de torção ($j=4$) para uma rotação unitária, $S_4(s)$ passa a representar o momento estático setorial (em relação ao centro de corte da respectiva seção).

Em caráter mais específico, considerando-se o exemplo da seção transversal exibida na Fig. 2.8 como uma barra sujeita à flexão em torno do eixo de maior inércia (relacionado a um esforço cortante positivo $V_2 > 0$), tem-se na Fig. 2.8.f a bem conhecida distribuição do fluxo de corte relacionada, e na Fig. 2.8.g, o diagrama (qualitativo) que mostra a distribuição de $\tau_{xs,2}^0$. É importante notar que o sinal da distribuição de tensões é definido de forma coerente com a direção do eixo s em relação ao fluxo de corte (vide sinal negativo para o trecho B-E).

Finalmente, incorporando a equação para $\delta\gamma_{xs}^{M,NL}$ (2.17), bem como 2.35, no segundo termo da equação 2.28, tem-se

$$\delta U_{\tau}^{NL} = - \int_L W_{j,x} X_{jik}^{\tau} (\phi_i \delta \phi_{k,x} + \phi_{k,x} \delta \phi_i) dx \quad (2.39)$$

sendo X_{jik}^{τ} as componentes de rigidez geométrica associada às tensões tangenciais relativas à variação longitudinal dos momentos fletores e de torção atuantes, cuja expressão é exibida na Tab. 2.2.

* A amplitude dos movimentos de corpo rígido associados aos 4 primeiros modos de deformação da GBT é normalizada na etapa de análise da seção transversal (item 2.4).

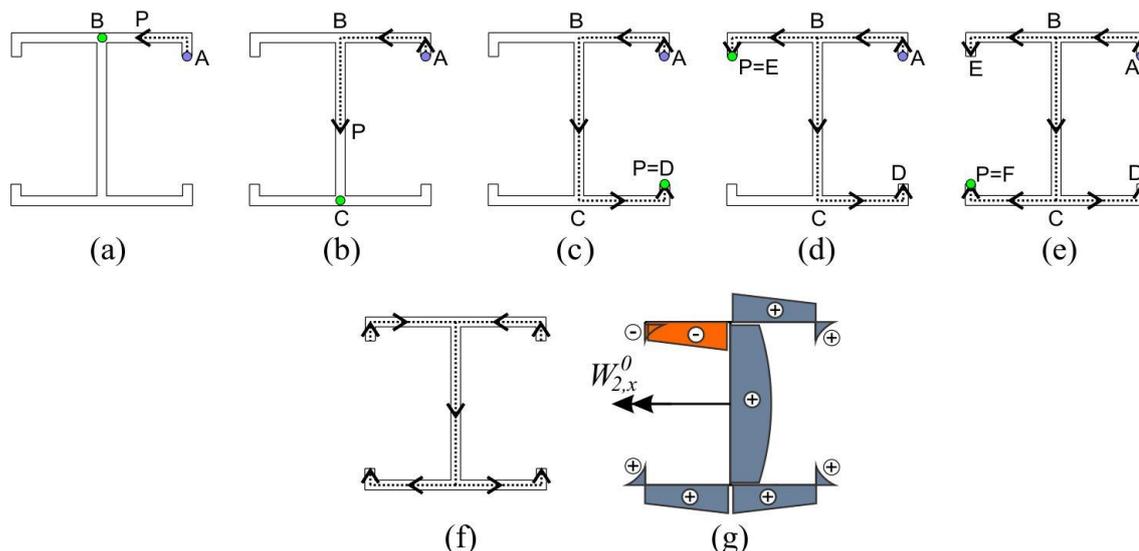


Figura 2.8 – (a)-(e) Ordem adotada para o cálculo de $\tau_{xs,j}^0$, conforme os eixos locais s , (f) fluxo de corte e (g) distribuição (qualitativa) de tensões $\tau_{xs,2}^0$ consistente com a orientação de s .

Por fim, da mesma forma como para os termos de rigidez linear apresentados anteriormente, apresenta-se na Tabela 2.2 as expressões analíticas obtidas para os termos de rigidez geométrica, associados às tensões normais e tangenciais, juntamente com o principal significado físico associado.

Tabela 2.2 – Expressões analíticas e significados físicos associados às matrizes de rigidez geométrica da GBT (X^σ e X^τ).

| Matriz | Expressão | Significado Físico |
|------------------|---|---|
| X_{jik}^σ | $\frac{Ee}{C_{jj}} \int_S u_j (v_i v_k + w_i w_k) ds$ | Rigidez geométrica associada às tensões normais longitudinais |
| X_{jik}^τ | $\frac{a_j E}{C_{jj}} \int_S S_j w_{i,s} w_k ds$ | Rigidez geométrica associada às tensões tangenciais |

Finalmente, a equação de equilíbrio 2.22 lembra a necessidade de se definir a parcela relativa à energia potencial das forças externas Π , as quais podem ser representadas por meio de um campo vetorial de tensões aplicadas no plano médio da seção transversal, tal como

$$Q^0(x, s) = \begin{Bmatrix} Q_x(x, s) \\ Q_s(x, s) \\ Q_z(x, s) \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

onde Q_x , Q_s e Q_z representam as componentes longitudinal, transversal e normal das forças externas. Contudo, assume-se que a sua representação pode ser dada na forma

$$\begin{Bmatrix} Q_x(x, s) \\ Q_s(x, s) \\ Q_z(x, s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x(s) \\ q_s(s) \\ q_z(s) \end{Bmatrix} \varphi(x) \quad (2.41)$$

na qual q_x , q_s e q_z representam as componentes de força externa atuantes sobre a linha do plano médio da seção, conforme ilustrado na Fig. 2.9, e $\varphi(x)$ é a correspondente função de amplitude longitudinal. Assim, define-se o potencial das forças aplicadas $\delta\Pi$, como

$$\delta\Pi = -\int_L \int_S (q_x \delta u + q_s \delta v + q_z \delta w) ds dx \quad (2.42)$$

que, após introduzir 2.15 e efetuar a integração, passa a ser dada por

$$\delta\Pi = -\int_L (q_i^x \varphi \delta\phi_{i,x} + q_i^{s,z} \varphi \delta\phi) dx \quad (2.43)$$

onde q_i^x e $q_i^{s,z}$, são vetores de forças aplicadas, cuja representação é dada na tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Expressões analíticas e significados físicos associados aos vetores de força da GBT (q_i^x e $q_i^{s,z}$).

| Matriz | Expressão | Significado Físico |
|-------------|---------------------------------|---|
| q_i^x | $\int_S q_x u_i ds$ | Resultante de forças aplicadas longitudinalmente, que produzem trabalho no modo i |
| $q_i^{s,z}$ | $\int_S (q_s v_i + q_z w_i) ds$ | Resultante de forças aplicadas perpendicularmente (z) ou transversalmente (s) ao plano médio das paredes, que produzem trabalho no modo i |

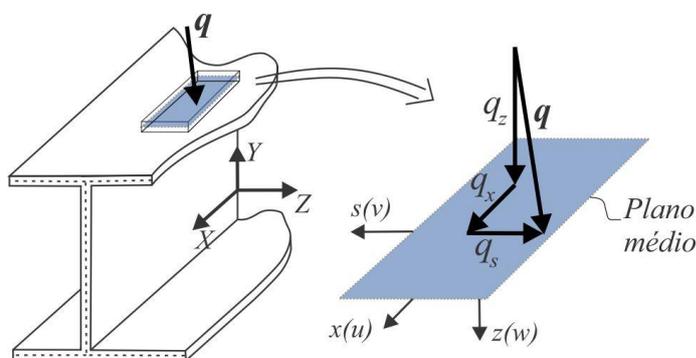


Figura 2.9 – Força externa genérica sobre o plano médio da seção transversal, e suas componentes q_x , q_s e q_z .

2.3.1. Equações de Equilíbrio para Análises de Primeira Ordem

Considerando-se a aplicação da equação de equilíbrio apresentada em 2.22, obtida a partir da aplicação do princípio da energia potencial mínima, e inserindo-se as equações relativas à energia interna (2.26, 2.33 e 2.35), e à energia potencial das forças externas (2.42), obtém-se a forma fraca para as equações de equilíbrio, dada por

$$\int_L \left(C_{ik} \phi_{k,xx} \delta\phi_{i,xx} + D_{ik}^I \phi_{k,x} \delta\phi_{i,x} + D_{ik}^{II} \phi_k \delta\phi_{i,xx} + D_{ki}^{II} \phi_{k,xx} \delta\phi_i + B_{ik} \phi_k \delta\phi_i - q_i^x \varphi \delta\phi_{i,x} - q_i^{s,z} \varphi \delta\phi_i \right) dx = 0 \quad (2.44)$$

enquanto o sistema de equações diferenciais de equilíbrio correspondentes, considerando as condições de contorno da barra em $x=0$ e $x=L$, é expresso como

$$C_{ik} \phi_{k,xxxx} + D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k + q_i^x \varphi_{,x} - q_i^{s,z} \varphi = 0 \quad (2.45)$$

$$\left[W_i^\tau - q_i^x \varphi \right] \delta\phi_i \Big|_0^L = 0 \quad W_i^\sigma \delta\phi_{i,x} \Big|_0^L = 0 \quad (2.46)$$

onde W_i^σ e W_i^τ são as resultantes dos esforços generalizados, referentes às tensões normais e tangenciais, dados por

$$W_i^\sigma = C_{ik} \phi_{k,xx} + D_{ik}^{II} \phi_k \quad W_i^\tau = -W_{i,x}^\sigma + W_i^{xs} \quad W_i^{xs} = D_{ik}^I \phi_{k,x} \quad (2.47)$$

2.3.2. Equações de Equilíbrio para Análises de Estabilidade

Para as análises de estabilidade elástica, a forma fraca das equações de equilíbrio é dada por

$$\int_L \left(C_{ik} \phi_{k,xx} \delta\phi_{i,xx} + D_{ik}^I \phi_{k,x} \delta\phi_{i,x} + D_{ik}^{II} \phi_k \delta\phi_{i,xx} + D_{ki}^{II} \phi_{k,xx} \delta\phi_i + B_{ik} \phi_k \delta\phi_i - W_j X_{jik}^\sigma \phi_{k,x} \delta\phi_{i,x} - W_{j,x} X_{jik}^\tau (\phi_i \delta\phi_{k,x} + \phi_{k,x} \delta\phi_i) \right) dx = 0 \quad (2.48)$$

ou, na forma forte, juntamente com as condições de contorno, tem-se que

$$C_{ik} \phi_{k,xxxx} + D_{ik} \phi_{k,xx} + B_{ik} \phi_k + X_{jik}^\sigma (W_j \phi_{k,x})_{,x} + X_{jki}^\tau (W_{j,x} \phi_k)_{,x} - X_{jik}^\tau W_{j,x} \phi_{k,x} = 0 \quad (2.49)$$

$$\left[W_i^\tau - W_j X_{jik}^\sigma \phi_{k,x} - W_{j,x} X_{jki}^\tau \phi_k \right] \delta\phi_i \Big|_0^L = 0 \quad W_i^\sigma \delta\phi_{i,x} \Big|_0^L = 0 \quad (2.50)$$

Lembrando que todas as matrizes e vetores da GBT que figuram nas equações 2.44 a 2.50 são apresentados nas Tabelas 2.1 a 2.3.

2.4. Análise da Seção Transversal

Como pôde ser visto na formulação básica da GBT (itens 2.3.1 e 2.3.2), as componentes tensoriais apresentadas (Tabelas 2.1 a 2.3) são definidas em função dos modos de deformação da GBT, os quais, por sua vez, são representados pelas funções $u_i(s)$, $v_i(s)$ e $w_i(s)$, e possuem, em geral, um significado físico associado, que é um dos aspectos mais atraentes na utilização da GBT frente a outros métodos tradicionais como o MFF ou o MEFc.

Entretanto, como a definição dessas funções específicas exige uma série de procedimentos, que, historicamente, é dependente do tipo de seção transversal em questão, é importante destacar, como parte de uma nomenclatura tipicamente utilizada em trabalhos com a GBT, os tipos de seção transversal normalmente estudados.

Primeiramente, classificam-se as seções transversais entre (i) abertas (Figs. 2.10.a-b) ou (ii) fechadas (Figs. 2.10.c-d). Para esta designação, entende-se que, se a seção transversal possuir pelo menos uma “célula fechada”, ela é designada então como fechada, do contrário, ela é dita aberta. O segundo aspecto, separa as seções transversais entre (iii) não ramificadas (Fig. 2.10.a) ou (iv) ramificadas (Fig. 2.10.b). A diferença básica entre elas é a presença de um nó, onde concorrem mais de duas paredes da seção transversal (dito “nó de ramificação”). Outra característica desse tipo de seção transversal, dentre as seções abertas, é que possuem um número de “nós de extremidade” (onde apenas uma parede da seção transversal é ligada) maior do que 2, que é um caso exclusivo das seções abertas não ramificadas. Portanto, entende-se que uma seção transversal pode ser aberta ou fechada, e ramificada ou não ramificada.

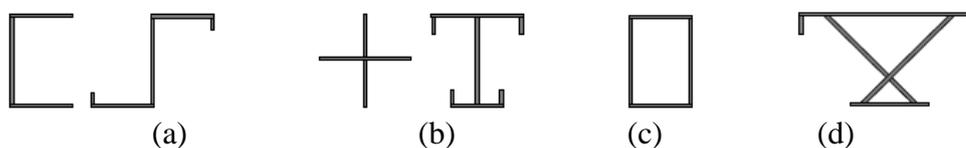


Figura 2.10 – Seções de paredes finas: (a) abertas não ramificadas; (b) abertas ramificadas; (c) fechadas unicelulares não ramificadas, e (d) fechadas multicelulares ramificadas. *Fonte:* Basaglia (2010).

Os primeiros trabalhos com a GBT, apresentados por Schardt e seus colaboradores (*e.g.*, Schardt 1989; Leach, 1989), envolveram a análise de seções transversais abertas não ramificadas, e materiais isotrópicos, para análises de primeira ordem e estabilidade.

Posteriormente, Möller (1982), Mörschardt (1990), e também Degée e Boissonnade (2004), ainda trabalharam a possibilidade de se considerar ramificações na seção, muito embora tenham se limitado a alguns casos mais simples, envolvendo uma seção aberta, com

um número arbitrário de ramificações constituídas por uma única parede, o que pode ser visto de forma semelhante no trabalho de Dinis *et al.* (2004).

Contudo, foram Dinis *et al.* (2006) que apresentaram uma metodologia generalizando as propostas anteriores, e possibilitaram a análise de seções transversais abertas ramificadas arbitrárias, *i.e.*, qualquer seção transversal, desde que não contenha células fechadas. A proposta de Dinis *et al.* (2006) foi amplamente utilizada posteriormente (*e.g.*, Bebiano *et al.* 2008b, 2013; Basaglia *et al.*, 2007a, 2008, 2010), e também é utilizada nos desenvolvimentos da presente tese, especialmente por ser consideravelmente ampla, e por envolver uma sequência relativamente simples de procedimentos, que serão apresentados em detalhes mais adiante neste capítulo.

Outro aspecto relativo à sequência inicial de trabalhos envolvendo a análise da seção para a GBT, diz respeito à possibilidade de se analisarem seções fechadas, as quais apresentam a particularidade de não poderem ter as distorções de membrana desprezadas, *i.e.*, a hipótese simplificativa de Vlasov não poderia, a rigor, ser satisfeita. Schardt (1989) então propôs uma metodologia baseada na adição aos modos convencionais da GBT, de um modo de torção envolvendo distorções de membrana.

Com isso em mente, mais tarde, Silvestre e Camotim (2003a) apresentaram, de forma mais completa, outras duas famílias de modos de deformação, ou seja, para além dos (i) modos ditos convencionais (*i.e.*, baseados nas hipóteses simplificativas apresentadas anteriormente), também foram definidos (ii) modos de corte e (iii) modos de extensão transversal, obtidos pela imposição unitária, em cada nó da seção, de deslocamentos axiais (u) e transversais (v), respectivamente.

A necessidade de se considerar outros tipos de modos de deformação, violando as hipóteses simplificativas de Vlasov, está relacionada, principalmente, às análises geometricamente não lineares, e também aos casos envolvendo distribuições não uniformes de esforços internos, sobretudo decorrentes da aplicação de forças fora do centro de corte da seção transversal.

Paralelamente, foi proposta por Bebiano *et al.* (2007) uma alternativa para possibilitar a consideração das distribuições não uniformes de tensões, sem a necessidade dos modos de corte para contabilizar os efeitos relacionados, que são considerados de forma direta, a partir de relações conhecidas da Resistência dos Materiais. Esta formulação já vem sendo considerada na presente tese a partir do item 2.3, e também é explicitada no item 2.5.1. Vale comentar, entretanto, que uma desvantagem direta da utilização deste método, é de que as forças são consideradas sempre sobre o centro de corte da seção, e com isso, os efeitos devidos à aplicação de esforços fora do centro de corte não são contabilizados de forma direta.

Por fim, também é importante citar aqui alguns trabalhos mais recentes, que oferecem uma alternativa para a análise da seção transversal:

- (i) *Gonçalves et al. (2005, 2009)*: Propuseram uma nova abordagem geral para seções arbitrárias, permitindo inclusive a aplicação em seções fechadas unicelulares. Segundo os autores, a obtenção de novos modos de deformação associados às distorções de membrana, juntamente com os modos convencionais, permite a obtenção de boas respostas lineares de primeira ordem, assim como de estabilidade elástica, inclusive para elementos tubulares, como tabuleiros de pontes. Contudo, vale comentar que, para além da ausência de um significado físico evidente para os modos de corte, a impossibilidade de se isolar o modo de torção em seções poligonais fechadas, conduz à necessidade de se considerar sempre um número bastante elevado de modos de deformação;
- (ii) *Silva et al. (2008b), Silva (2013)*: Propuseram uma alternativa interessante para a análise de seções transversais abertas ou fechadas arbitrárias. De forma semelhante aos elementos finitos de casca, os autores propõem uma imposição unitária para cada grau de liberdade nodal (anulando os restantes), bem como a utilização de funções de forma polinomiais em cada parede (e subparede). Posteriormente, as diagonalizações simultâneas das matrizes por meio de problemas de autovalores e autovetores dão origem aos modos (i) convencionais, (ii) de corte, (iii) de extensão transversal, e (iv) de fluxo de corte, sendo que esses últimos permitem o isolamento do modo de torção nas seções fechadas, que até então era obtido pela combinação linear de outros modos;
- (iii) *Gonçalves et al. (2010)*: Na sequência dos trabalhos anteriores, os autores apresentam uma alternativa inovadora para a determinação dos modos de deformação, baseada na imposição de hipóteses cinemáticas específicas, que culmina na obtenção de modos convencionais, de corte e de extensão transversal, sendo que desta vez, a torção no caso de seções fechadas pode ser caracterizada por um único modo;
- (iv) *Bebiano et al. (2015)*: Neste recente* trabalho, os autores propõem o procedimento mais geral até então, visto que é aplicável às seções abertas ou fechadas (uni e multicelulares) ramificadas arbitrárias. O procedimento separa os modos de deformação, obtidos por meio de imposições cinemáticas específicas, em famílias de modos com significado físico bem definido, podendo ser implementadas computacionalmente, segundo os autores, de uma forma mais automatizada que nas propostas anteriores. O referido método é atualmente parte integrante da versão 2.0 do programa de uso livre para análises por meio da GBT (GBTUL 2.0 – *Bebiano et al. 2014*).

* Ainda mais recentemente, Gonçalves e Camotim (2016) apresentam um procedimento voltado às seções transversais com trechos curvos, que é tratada através de linhas poligonais.

2.4.1. Modos Elementares de Deformação

Para a obtenção dos modos de deformação convencionais, que caracterizam o cerne da GBT em sua implementação e utilização, é necessário, primeiramente, a determinação dos chamados “modos elementares”, que são definidos por conjuntos de funções $u_i^0(s)$, $v_i^0(s)$ e $w_i^0(s)$. Assim, de modo a respeitar a hipótese de Vlasov, bem como da inextensibilidade transversal das paredes, que fundamentam a obtenção dos modos de deformação convencionais da GBT, os modos elementares, impostos em determinados nós da seção transversal, são separados em dois tipos básicos: (i) deslocamentos unitários axiais, e; (ii) deslocamentos unitários de flexão.

De acordo com a metodologia proposta por Dinis *et al.* (2006), algumas designações iniciais auxiliam na correta determinação dos modos elementares. Assim, considere que uma dada seção transversal aberta ramificada arbitrária, é formada por um conjunto de nós e paredes. Essa formação, que constitui uma “discretização” particular para a seção, distingue-se pela consideração de três tipos de nós, os (i) naturais (nas intersecções entre as paredes), os (ii) de extremidade (nas extremidades livres das paredes), e os (iii) intermediários (ao longo das paredes) – repare que os nós naturais e de extremidade são naturalmente definidos pela geometria da seção transversal, enquanto os nós intermediários são determinados livremente.

A rigor, os (i) modos elementares de deslocamento axial são associados aos (i₁) nós de extremidade, e (i₂) nós naturais, enquanto os (ii) modos elementares de flexão são associados aos (ii₁) nós de extremidade e (ii₂) nós intermediários. Contudo, para assegurar a compatibilidade com a hipótese de Vlasov, assim como da inextensibilidade transversal, os deslocamentos axiais não podem ser atribuídos livremente aos nós naturais e de extremidade. Portanto, conforme Dinis *et al.* (2006), fica necessário designar tais nós como “dependentes” ou “independentes”, o que significa, no primeiro caso, que o deslocamento axial no nó em questão é dependente do deslocamento axial do nó independente adjacente (que pode ser natural ou de extremidade). De forma esquemática, a Fig. 2.11.a-c ilustra como os nós da seção transversal são classificados, a simbologia utilizada para designar cada qual, e a(s) função(ões) elementar(es) a eles associada(s).

No que se refere à classificação dos nós em dependentes ou independentes, alguns passos são necessários, os quais seguem algumas premissas básicas. Para isso, considere como exemplo a seção transversal exibida na Fig. 2.12.a, composta por 9 paredes, definidas por 10 nós, dos quais 6 são de extremidade, e 4 são nós naturais. Os nós intermediários são atribuídos livremente.

- (i) O primeiro passo é a escolha de um “caminho principal da seção”, que deve respeitar as seguintes condições: (i) unir duas extremidades da seção, *i.e.*, precisar ser delimitada por

dois nós de extremidade; (ii) afim de evitar que o ângulo relativo entre duas paredes adjacentes seja de 180°, o “caminho” precisa mudar de direção em cada nó natural, *i.e.*, no caminho adotado, jamais existirão duas paredes adjacentes, definidas por nós naturais, partilhando o mesmo eixo local (*s*). Exemplificando tais conceitos, as Figs. 2.13.a-b apresentam caminhos principais da seção apropriados, enquanto as Figs. 2.13.c-d apresentam possíveis caminhos inválidos;

(ii) Seguindo as mesmas regras, são definidos, então, todos os subcaminhos necessários, que podem ser secundários, terciários, e assim sucessivamente, até que toda a seção transversal esteja definida (vide Fig. 2.14.a-c). É importante reparar que, quanto mais nós naturais um caminho abranger, menos subcaminhos posteriores serão necessários, e por esse motivo, um caminho principal definido somente pelas paredes 4 e 8 (Fig. 2.12), por exemplo, é tido como pouco apropriado;

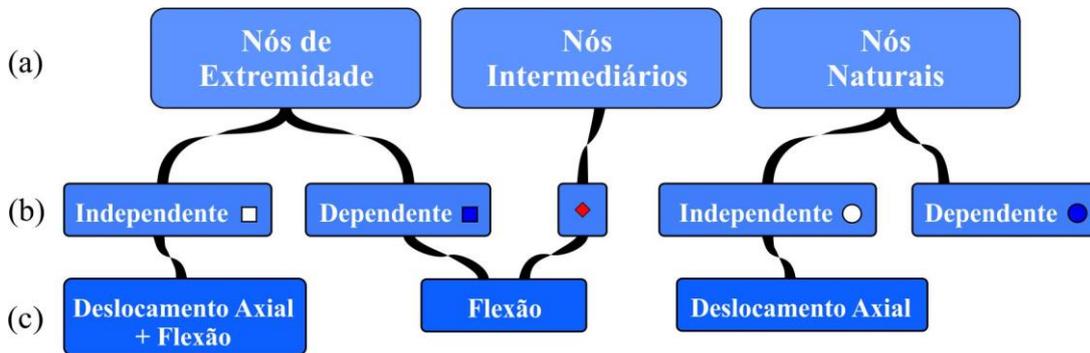


Figura 2.11 – Esquema de discretização de uma seção transversal, com a (a) classificação, (b) simbologia adotada, e (c) as respectivas funções elementares. (Bebiano, 2010)

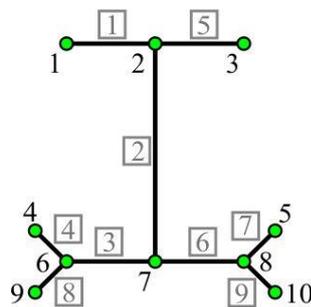


Figura 2.12 – Seção transversal aberta ramificada, com 9 paredes, 6 nós de extremidade, e 4 nós naturais.

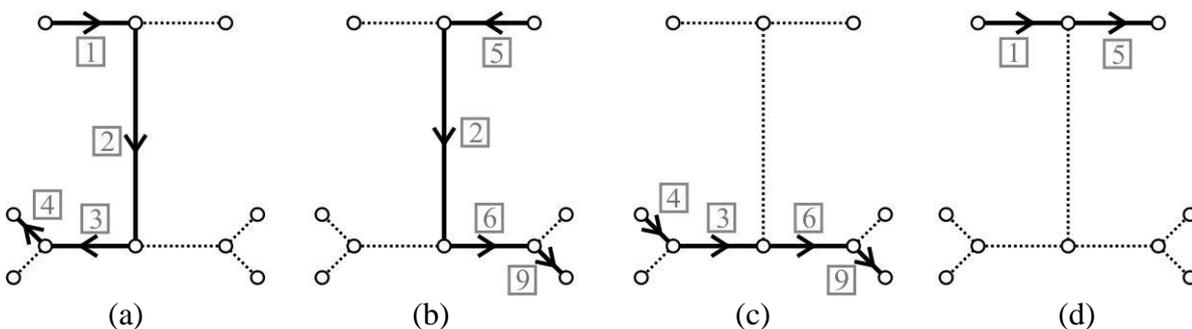


Figura 2.13 – Definições de caminhos principais: (a) – (b) válidas, e (c) – (d) inválidas.

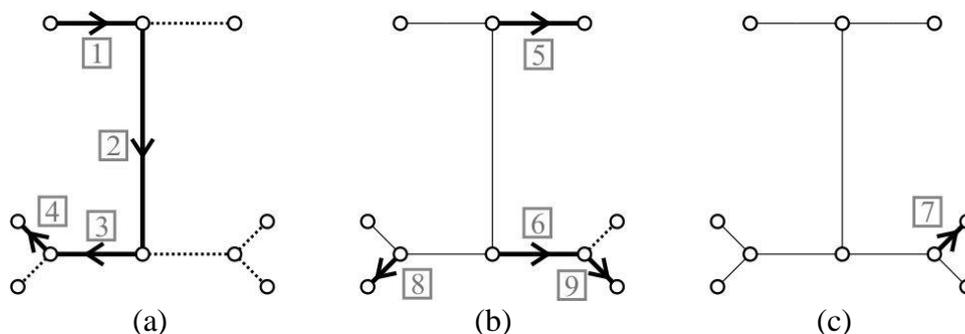


Figura 2.14 – Definições, para a seção transversal de exemplo, dos caminhos (a) principal, (b) secundários, e (c) terciário.

- (iii) Uma vez definidos os “caminhos” e “subcaminhos”, aqui chamados também por “seção, e subseção, não ramificada”, resta proceder a classificação dos nós, o que, nesta etapa, passa a ser uma tarefa simples. A começar pelos nós “dependentes”, basta olhar para cada subseção ora definida. São classificados como dependentes, todos os nós naturais ou de extremidade, situados imediatamente após o nó de ramificação, *i.e.*, o segundo nó de qualquer subseção, é dependente. O número de nós dependentes n_d em uma seção aberta ramificada, pode ser dado em função do número de nós de extremidade n_e , sendo $n_d = n_e - 2$;
- (iv) Finalmente, sabendo quais são os nós definidos como dependentes, e sendo todos os demais, nós de extremidade ou naturais, independentes, a classificação final, a partir da qual são definidos os modos elementares fica definida. A Fig. 2.15.a ilustra, com base nas seções adotadas (Fig. 2.14.a-c), a classificação dos nós, bem como a adição (novamente, apenas com finalidade ilustrativa) de 2 nós intermediários na parede 2, e 1 nó intermediário em cada uma das paredes 3 e 6. Além disso, é importante referir a orientação do eixo local de cada parede, e a definição final de cada segmento de parede, ilustrados na Fig. 2.15.b.

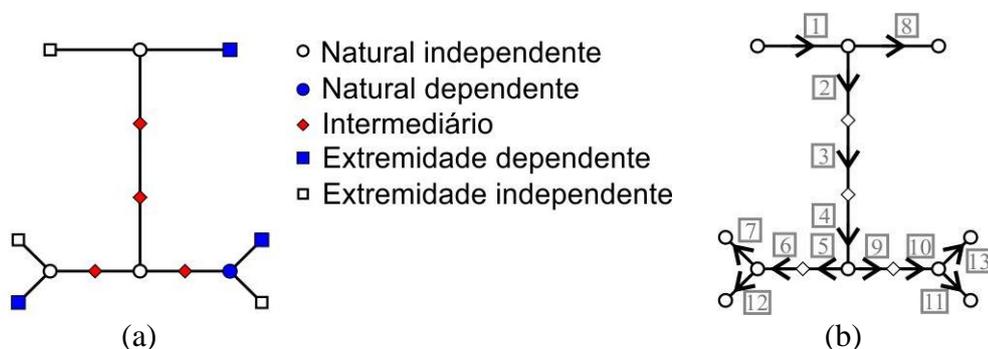


Figura 2.15 – (a) Discretização nodal, e (b) segmentos de paredes numerados, com respectiva orientação.

O procedimento seguinte, segundo a proposta de Dinis *et al.* (2006), é definir (i) as funções elementares de deslocamentos axiais, e (ii) de flexão, baseando-se na classificação dos nós da seção transversal, e conforme definido esquematicamente na Fig.2.11.

2.4.1.1. Funções Elementares de Deslocamento Axial

Os modos elementares de deslocamento axial estão associados a cada um dos nós independentes da seção (natural ou de extremidade). Assim, sem qualquer perda de generalidade, considere, por exemplo, o trecho de seção transversal ramificada ilustrado na Fig. 2.16. Na referida seção, o nó de ramificação (independente) r faz parte da definição de três paredes P_{r-1} , P_r , e P_{rd-1} , e tem como nós adjacentes, os nós independentes $r-1$ e $r+1$ (caminho principal), e o nó dependente (início da ramificação) r_d , que por sua vez seguido pelo sucessor independente r_d+1 . A orientação das paredes está definida pelas setas, sendo a inclinação de cada uma, medida no sentido horário, dada por α_{r-1} , α_r , e α_{rd-1} (vide Fig. 2.16.a).

De forma sucinta, descreve-se a determinação das funções de deslocamentos axiais da seguinte forma:

- (i) As funções de deslocamento axial $u_r^0(s)$ são definidas pela imposição de um deslocamento axial unitário no nó r , (i.e., $u_r^0(s_r) = 1$), deslocamento nulo nos demais nós independentes (i.e., $u_r^0(s_j) = 0$, para $j \neq r$), e valores de deslocamento nos nós dependentes determinado particularmente, de forma compatível com a Hipótese de Vlasov, sendo a variação linear entre os respectivos nós;
- (ii) A imposição de deslocamentos axiais implica necessariamente em considerar os deslocamentos transversais de membrana (relembrando o início do item 2.3, em que se mostra a relação $u_{,s} = -v_{,x}$), os quais resultam uniformes em uma dada parede. Uma vez que $u_r^0(s)$ varia linearmente, pode-se demonstrar simplificadaamente que,

$$v_{P,r}^0(s) \equiv v_{P,r}^0 = \frac{-\Delta u_{P,r}}{b_P} \quad (2.51)$$

onde $\Delta u_{P,r}$ representa a diferença entre os valores de deslocamento axial nos nós que definem a parede P , devido ao deslocamento axial imposto no nó r , e b_P é o comprimento da referida parede. Consequentemente, os deslocamentos transversais nas paredes P_{r-1} e P_r (Fig. 2.16.a), são dados diretamente por

$$v_{Pr-1,r}^0 = \frac{-1}{b_{Pr-1}} \quad v_{Pr,r}^0 = \frac{1}{b_{Pr}} \quad (2.52)$$

Como o deslocamento transversal da parede P_{rd-1} depende da posição final do nó r , e das inclinações das paredes adjacentes e dela mesma, pode-se determinar pela geometria que,

$$v_{Prd-1,r}^0 = v_{Pr,r}^0 \left[\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha) \left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{v_{Pr-1,r}^0}{v_{Pr,r}^0 \operatorname{sen}(\beta)} \right) \right] \quad (2.53)$$

onde $\alpha = (\alpha_{Prd-1} - \alpha_{Pr})$, e $\beta = (\alpha_{Pr-1} - \alpha_{Pr})$.

Repare que no caso de $v_{Pr,r}^0=0$ um resultado inconsistente é obtido, nesse caso, sugere-se que sejam alternadas as paredes P_r e P_{r-1} , isto é,

$$v_{Prd-1,r}^0 = -v_{Pr-1,r}^0 \left[\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha) \left(\frac{1}{\tan(\beta)} \right) \right] \quad (2.54)$$

onde $\alpha = (\alpha_{Prd-1} - \alpha_{Pr-1})$, e $\beta = (\alpha_{Pr-1} - \alpha_{Pr})$.

Com isso, pode-se definir o valor do deslocamento axial final para o nó r_d , dado por

$$u_{rd}^0(s_{rd-1}) = u_r(s_r) - v_{Pr-1,r}^0 b_{rd-1} \quad (2.55)$$

A título ilustrativo, a Fig. 2.16.b e 2.16.c representam os deslocamentos axiais associados à imposição de deslocamento unitário axial nos nós $r-1$, e r , respectivamente.

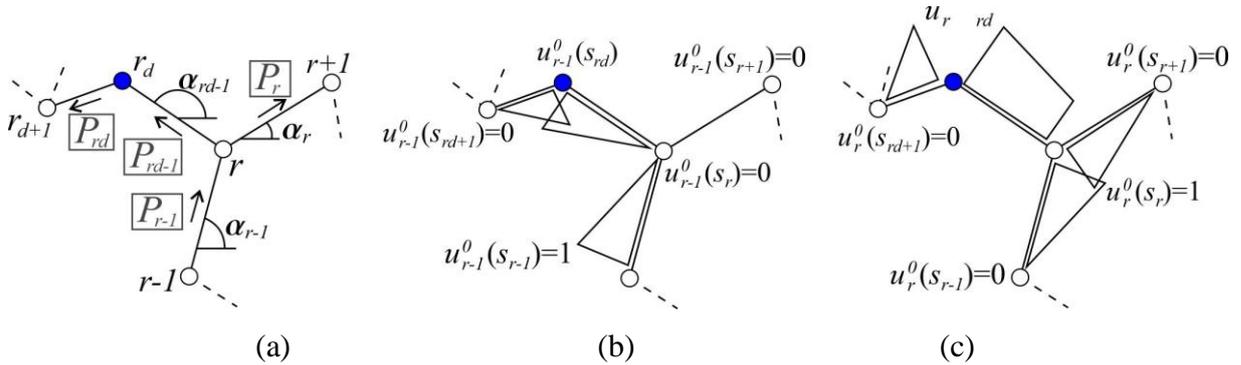


Figura 2.16 – Nó de ramificação r : (a) distribuição das paredes e nós adjacentes, e modos elementares de deslocamento axial associados aos nós (b) $r-1$, e (c) r . Fonte: *Bebiano (2010)*.

De forma análoga, também os deslocamentos de flexão nos respectivos nós são obtidos por relações geométricas, dados por (para $v_{Pr,r}^0 \neq 0$),

$$w_{Pr-1,r}^0 = \frac{v_{Pr,r}}{\operatorname{sen}(\beta)} - \frac{v_{Pr-1,r}}{\tan(\beta)} \quad w_{Pr,r}^0 = \frac{v_{Pr,r}}{\tan(\beta)} - \frac{v_{Pr-1,r}}{\operatorname{sen}(\beta)} \quad (2.56)$$

$$w_{Prd-1,r}^0 = v_{Pr,r}^0 \left[\operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) \left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \frac{v_{Pr-1,r}^0}{v_{Pr,r}^0 \operatorname{sen}(\beta)} \right) \right] \quad (2.57)$$

A título ilustrativo, a Fig. 2.16.b e 2.16.c representam os deslocamentos axiais associados à imposição de deslocamento unitário axial nos nós $r-1$, e r , respectivamente, e de modo complementar, a Fig. 2.17 apresenta os deslocamentos axiais (sem considerar as componentes transversais) associados a cada modo (a seta indica o nó em que é imposto o deslocamento axial unitário), para a seção transversal apresentada na Fig. 2.15.

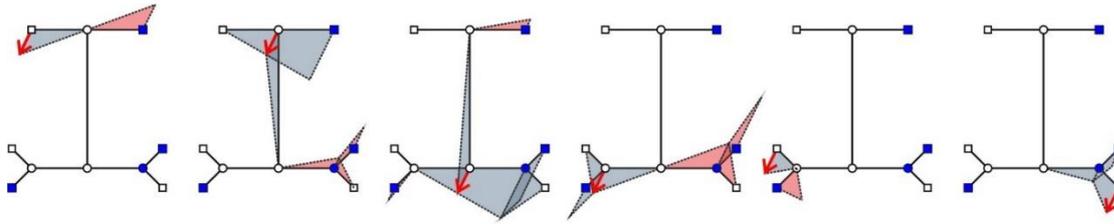


Figura 2.17 – Deslocamentos axiais associados a cada modo elementar de uma seção ramificada.

- (iii) É certo que a imposição dos referidos deslocamentos axiais, bem como a determinação dos deslocamentos transversais associados, mantendo nulas as rotações nodais, conduz ao surgimento de momentos desequilibrados atuando em cada um dos nós. Assim, para a determinação das rotações nodais que asseguram o equilíbrio de momentos em questão, é necessária a utilização do Método dos Deslocamentos (Dinis *et al.*, 2006);
- (iv) Somente com as condições de equilíbrio e compatibilidade entre as paredes da seção satisfeitos para cada modo elementar de deslocamento axial, é que ficam completamente definidos os modos elementares de deslocamento axial, que envolvem funções lineares para os deslocamentos axiais $u_i^0(s)$, constantes para os deslocamentos transversais de membrana $v_i^0(s)$, e cúbicos para os deslocamentos transversais de flexão $w_i^0(s)$.

2.4.1.2. Funções Elementares de Flexão

As funções elementares de flexão são obtidas pela imposição de um deslocamento unitário de flexão em cada nó intermediário e de extremidade (Fig. 2.11), mantendo fixos os deslocamentos e rotações de todos os demais. A título ilustrativo, a Fig. 2.18.a-b mostra essa imposição em um nó intermediário, e em um nó de extremidade, respectivamente.

Além disso, da mesma forma como no caso dos deslocamentos axiais, os deslocamentos unitários de flexão conduzem a uma situação de momentos transversais desequilibrados, cuja solução pode ser obtida por meio do Método dos Deslocamentos.

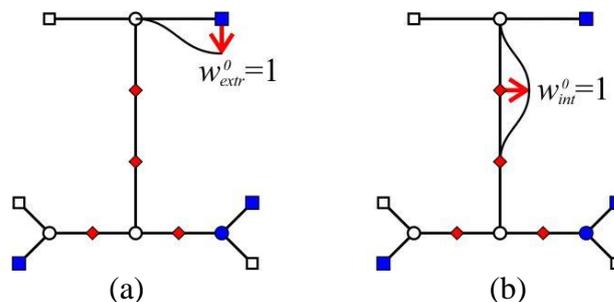


Figura 2.18 – Imposição de um deslocamento unitário de flexão em (a) nó de extremidade, e (b) nó intermediário.

Para melhor ilustrar as funções elementares de flexão, a Fig. 2.19 apresenta, para a mesma seção transversal da Fig. 2.15, as configurações finais de cada modo, relativo ao nó em que foi imposto o deslocamento unitário (representado no desenho da seção por uma estrela). Neste caso, como existem 6 nós de extremidade, e 4 nós intermediários (Fig. 2.15.a), um total de 10 modos elementares de flexão são obtidos.

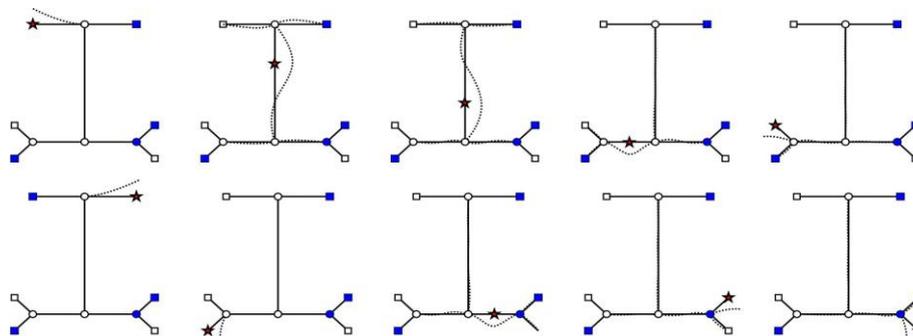


Figura 2.19 – Funções elementares de flexão associadas a cada nó intermediário e de extremidade.

2.4.2. Modos de Deformação da GBT

Uma vez determinadas as funções elementares de deformação $u_i^0(s)$, $v_i^0(s)$ e $w_i^0(s)$, relativas a cada um dos modos de extensão axial e de flexão, podem ser determinadas as componentes das matrizes associadas às equações de equilíbrio da GBT (Eqs. 2.45 e 2.49), dadas pelas Tabelas 2.1 a 2.3. Entretanto, as referidas matrizes, aqui designadas \bar{B}_{ik} , \bar{C}_{ik} , \bar{D}_{ik} , \bar{X}_{jik}^σ e \bar{X}_{jik}^τ , resultam, de modo geral, cheias, e qualquer interpretação de suas componentes não demonstra um significado físico aparente para os mesmos. De fato, isto evidencia um forte acoplamento entre as componentes dessas matrizes, dificultando a resolução de problemas, e também dificultando (ou mesmo impossibilitando) a interpretação dos resultados.

Para solucionar essa questão, Schardt (1989), assim como a maioria dos pesquisadores seguintes (*e.g.*, Davies e Leach, 1994; Dinis *et al.*, 2006; Bebiano, 2010), utiliza um processo baseado na diagonalização simultânea de determinadas matrizes, procurando, dessa forma, obter uma base de coordenadas que possibilite o maior desacoplamento possível entre as componentes do sistema. Assim, uma vez que seja encontrada tal base, as funções que descrevem os modos de deformação $u_i^0(s)$, $v_i^0(s)$ e $w_i^0(s)$ podem ser transformadas, de modo que sua forma final esteja relacionada claramente a comportamentos específicos bem definidos, conforme exemplificado no item 2.2 deste trabalho.

O procedimento utilizado para a diagonalização das matrizes da GBT é dividido em três etapas principais, cuja descrição é discutida com mais detalhes nos trabalhos de Silvestre (2005), Gonçalves (2007) ou Bebiano (2010).

A primeira etapa, que tem por consequência a identificação dos modos de deformação locais e distorcionais, envolve as matrizes \bar{B}_{ik} , \bar{C}_{ik} e \bar{D}_{ik} . Primeiramente, recorde-se que \bar{B}_{ik} e \bar{C}_{ik} são matrizes associadas com o empenamento e a flexão transversal das paredes da seção, respectivamente (Tab. 2.1), e são elas as primeiras matrizes no processo de diagonalização simultânea, ou seja, o primeiro problema de autovalores e autovetores generalizados é dado por,

$$\left(\bar{B}_{ik} - \lambda_k \bar{C}_{ik}\right) a_k = 0 \quad (2.58)$$

onde λ_k representam os N_v autovalores (sendo que $N_v = n_p + m + 3$, onde n_p e m são o número de paredes e de nós intermediários da seção transversal), e $\{a_k\}$, os respectivos autovetores.

Os resultados desta operação devem conter 4 autovalores nulos ($\lambda_k = 0, k = 1, \dots, 4$), e $N_v - 4$ autovalores positivos ($\lambda_k > 0, k = 5, \dots, N_v$). Segundo Silvestre (2005), aos primeiros quatro autovalores (nulos), corresponde um espaço vetorial definido por 4 autovetores associados a movimentos de corpo rígido da seção transversal (extensão axial, flexão em torno dos eixos principais de inércia, e torção). Aos demais autovalores, um espaço vetorial associado aos modos de deformação no próprio plano (sem empenamento), que são os modos locais, e, dependendo da geometria de seção transversal, também relacionados aos modos de deformação no próprio plano com empenamento, *i.e.*, os modos distorcionais.

Com isso, toma-se uma matriz formada pelos primeiros 4 autovetores da solução de 2.58 (associados aos autovalores nulos), aqui designada T_{ik}^I , e também as primeiras 4 linhas e 4 colunas das matrizes \bar{B}_{ik} , \bar{C}_{ik} e \bar{D}_{ik} , para proceder a seguinte transformação,

$$\bar{B}_{ik}^I = T_{ki}^I \bar{B}_{ik} T_{ik}^I \quad \bar{C}_{ik}^I = T_{ki}^I \bar{C}_{ik} T_{ik}^I \quad \bar{D}_{ik}^I = T_{ki}^I \bar{D}_{ik} T_{ik}^I \quad (2.59)$$

sendo importante referir que \bar{B}_{ik}^I resulta nula, enquanto \bar{C}_{ik}^I , geralmente, resulta ainda numa matriz não diagonal.

O passo seguinte, diz respeito à completa diagonalização de \bar{C}_{ik}^I , e também à obtenção dos 4 modos globais clássicos associados aos movimentos de corpo rígido da seção. Para isso, considere o problema de autovalores e autovetores formado pelas matrizes 4×4 , \bar{C}_{ik}^I e \bar{D}_{ik}^I ,

$$\left(\bar{D}_{ik}^I - \lambda_k \bar{C}_{ik}^I\right) b_k = 0 \quad (2.60)$$

cuja solução conduz à obtenção de 3 autovalores nulos ($\lambda_k = 0, k = 1, \dots, 3$), e 1 autovalor positivo ($\lambda_4 > 0$).

Novamente, os três autovalores nulos obtidos estão associados aos movimentos de corpo rígido da seção, exceto pela torção, definida pelo quarto autovetor obtido na mesma operação. Assim, considere agora a matriz de transformação T_{ik}^{II} , de dimensão 4x3, formada pelos primeiros 3 autovetores da solução de 2.60, bem como as matrizes anteriores \bar{C}_{ik}^I e \bar{D}_{ik}^I , de dimensão 4x4, para efetuar a transformação que resulta nas matrizes 3x3 \bar{C}_{ik}^{II} e \bar{D}_{ik}^{II} ,

$$\bar{C}_{ik}^{II} = T_{ki}^{II} \bar{C}_{ik}^I T_{ik}^{II} \quad \bar{D}_{ik}^{II} = T_{ki}^{II} \bar{D}_{ik}^I T_{ik}^{II} \quad (2.61)$$

onde \bar{C}_{ik}^{II} permanece como uma matriz não diagonal, e \bar{D}_{ik}^{II} é uma matriz nula.

Neste ponto, repare que já foi obtida a base capaz de diagonalizar completamente \bar{B}_{ik} e \bar{D}_{ik} , restando a determinação da mesma para a matriz \bar{C}_{ik} . Desse modo, considere o terceiro e último sistema de autovalores e autovetores generalizado, definido por

$$\left(\bar{X}_{1ik}^{\sigma, II} - \lambda_k C_{ik}^{II} \right) c_k = 0 \quad (2.62)$$

no qual,

$$\bar{X}_{1ik}^{\sigma, II} = T_{ki}^{II} T_{ki}^I \bar{X}_{1ik}^{\sigma} T_{ik}^I T_{ik}^{II} \quad (2.63)$$

Para possibilitar a implementação de 2.63, lembre-se que \bar{X}_{1ik}^{σ} pode ser obtido por,

$$\bar{X}_{1ik}^{\sigma} = \frac{Ee}{C_{11}} \int_S u_1 (v_i v_k + w_i w_k) ds \quad (2.64)$$

e considerando, necessariamente, que, devido à normalização dos modos em deslocamentos unitários, $u_1(s) \equiv u_1 = 1$, tem-se que $C_{11} = Ee \int_S 1 ds = EA$, onde A é a área total da seção transversal.

Com isso, 2.64 pode ser simplificado para a obtenção de \bar{X}_{1ik}^{σ} , de modo que,

$$\bar{X}_{1ik}^{\sigma} = \frac{e}{A} \int_S (v_i^0 v_k^0 + w_i^0 w_k^0) ds \quad (2.65)$$

Finalmente, tem-se, com a solução de 2.62, um único autovalor nulo ($\lambda_1 = 0$), e dois autovalores definidos ($\lambda_2, \lambda_3 > 0$), que correspondem, respectivamente, ao modo de extensão axial, e aos modos de flexão em torno dos eixos principais de inércia.

Neste ponto, é possível a obtenção da matriz final de transformação T_{ik} , que envolve o agrupamento dos autovetores obtidos em cada etapa, isto é, $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, e $\{c_k\}$, de forma que,

$$T_{ik} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{N_V} \end{bmatrix}}_{\times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{\times \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}} \quad (2.66)$$

E, por fim, os procedimentos definitivos de transformação associados às matrizes da GBT, por meio da matriz de transformação recém montada, são dados por,

$$B_{ik} = T_{ki} \bar{B}_{ik} T_{ik} \quad C_{ik} = T_{ki} \bar{C}_{ik} T_{ik} \quad D_{ik} = T_{ki} \bar{D}_{ik} T_{ik} \quad X_{lik}^\sigma = T_{ki} \bar{X}_{lik}^\sigma T_{ik} \quad (2.67)$$

$$u_i(s) = T_{ik} u_k^0(s) \quad v_i(s) = T_{ik} v_k^0(s) \quad w_i(s) = T_{ik} w_k^0(s) \quad (2.68)$$

Repare que todas as demais matrizes definidas nas Tabelas 2.1 a 2.3 podem ser obtidas já considerando as funções que definem os modos de deformação da GBT, dadas por 2.68. Alternativamente, as matrizes poderiam ser obtidas utilizando as funções elementares $u_i^0(s)$, $v_i^0(s)$ e $w_i^0(s)$, e só então diagonalizadas.

2.4.2.1. Normalização e Modos de Deformação

Para demonstrar de forma mais clara os modos de deformação obtidos após o processo de diagonalização, deve ser considerado ainda um processo de normalização das funções de cada modo, de forma que resulte uma amplitude unitária para cada uma das funções dadas nas Eqs. 2.68.

Particularmente, no que se refere aos modos globais, a normalização é aplicada de forma a garantir, (i) para o modo 1, um deslocamento axial (fora do plano) unitário, (ii) para os modos 2 e 3, um deslocamento unitário no plano, e (iii) para o modo 4, uma rotação unitária no plano, ou seja,

$$u_1(s) \equiv u_1 = 1 \quad (2.69)$$

$$\sqrt{v_2(s)^2 + w_2(s)^2} \equiv \sqrt{v_2^2 + w_2^2} = 1 \quad (2.70)$$

$$\sqrt{v_3(s)^2 + w_3(s)^2} \equiv \sqrt{v_3^2 + w_3^2} = 1 \quad (2.71)$$

$$w_{4,s}(s) \equiv w_{4,s} = \pm 1 \quad (2.72)$$

Para os modos locais (e distorcionais), aplica-se a mesma regra de deslocamento unitário no plano, ou seja,

$$\max(s) \left[\sqrt{v_i(s)^2 + w_i(s)^2} \right] = 1, \text{ para } i=5, \dots, N_d. \quad (2.73)$$

Considerando a seção transversal apresentada na Fig. 2.15, são apresentados a seguir os modos finais de deformação da GBT, com suas configurações no plano (Fig. 2.20), e fora do plano (Fig. 2.21).

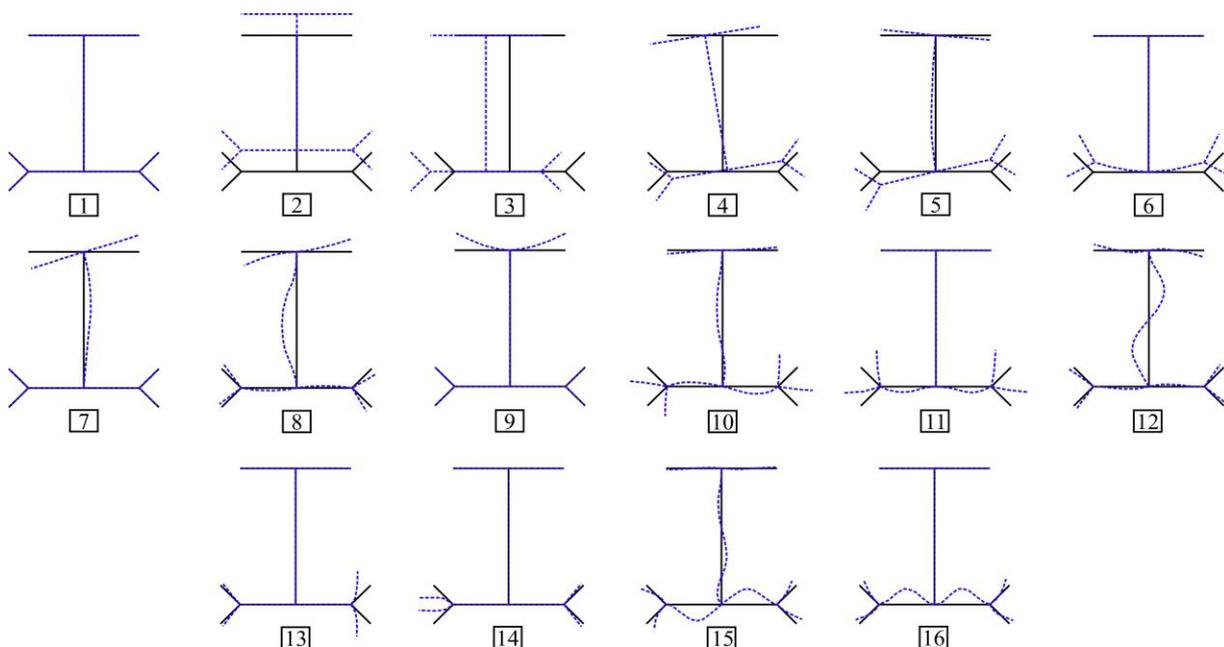


Figura 2.20 – Modos de deformação da GBT para uma seção aberta ramificada: deslocamentos $v_i(s)$ e $w_i(s)$.

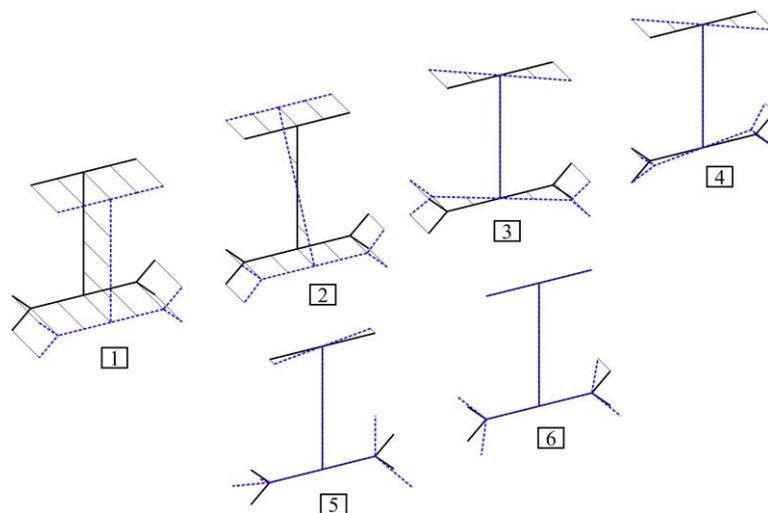


Figura 2.21 – Modos de deformação da GBT para uma seção aberta ramificada: deslocamentos $u_i(s)$.

2.5. Análise de Barras Isoladas

Após concluir os procedimentos relativos à análise da seção transversal (item 2.4), e de posse das equações de equilíbrio da GBT (2.45 e 2.49) e das correspondentes condições de contorno (2.46 e 2.50), é possível proceder a análise da barra, cujas incógnitas são as funções de amplitude modal $\phi_i(x)$, as quais são dadas em número igual ao número total de modos de

deformação N_d considerados na análise, sendo que para seções abertas ramificadas arbitrárias, N_d é igual a n_p+m+3 , onde n_p é o número de paredes, e m o número de nós intermediários da seção transversal. Ainda no que se refere aos modos de deformação considerados na análise, é de interesse comentar a possibilidade de envolver na solução somente alguns modos de deformação, bastando para isso resolver o subsistema relativo aos modos desejados. A resposta será dada, naturalmente, por uma combinação linear somente entre os modos envolvidos.

Para a solução do respectivo sistema de equações, podem ser adotados tanto procedimentos semianalíticos*, como numéricos. Contudo, é uma realidade bastante comum no universo das análises de estruturas metálicas (e mesmo para outros tipos de estruturas), o maior apelo às soluções aproximadas por métodos numéricos, já que permitem a significativa ampliação do leque de aplicações das análises pretendidas.

Apenas como referência, algumas soluções semianalíticas são demonstradas nos trabalhos de Silvestre (2005), e Bebiano (2010), entre outros. No entanto, a sua aplicação é limitada aos casos (i) em que um único modo de deformação da GBT é levado em consideração, *i.e.*, envolvem a solução de uma única equação diferencial, (ii) casos de análise estática linear em que os termos não nulos da matriz D_{ik} (para $i \neq k$) podem ser ignorados, o que envolve a solução de um problema envolvendo N_d equações diferenciais desacopladas, ou (iii) casos de análises de estabilidade de barras simplesmente apoiadas e submetidas a distribuições uniformes de tensão, o que envolve o uso de funções sinusoidais conhecidas para a solução do problema de autovalores e autovetores.

Por outro lado, no que se refere às soluções numéricas, várias alternativas utilizadas por outros autores podem ser citadas, como o método das diferenças finitas (*e.g.*, Schardt 1989, Leach 1989, Davies e Leach (1994a,b) e Leach e Davies 1996), o método de Galerkin (Silvestre *et al.* 2001, Silvestre e Camotim 2002a) ou de Rayleigh-Ritz (Simões da Silva e Simão 2002). Entretanto, é a conhecida versatilidade e eficiência do MEF que se apresenta na grande maioria dos trabalhos com a GBT da última década, dado o trabalho pioneiro em sua implementação publicado por Silvestre e Camotim (2003b), aplicando a técnica às análises de 1ª ordem (geometricamente lineares), lineares de estabilidade (geometricamente não lineares) e de vibração livre.

Naturalmente, os problemas envolvendo a aplicação da GBT às análises de sistemas estruturais, ou mesmo de barras isoladas, mas considerando condições de contorno não convencionais, justificam de forma clara a utilização do MEF, e por este motivo, todas as análises realizadas nesta tese recorrem ao referido método.

* Muito embora a solução do sistema de equações da GBT, *i.e.*, a determinação das funções $\phi_i(x)$, possa ser dada, em alguns casos, de forma analítica, é preciso levar em consideração a etapa da análise da seção transversal, que envolve a discretização da seção para as respectivas soluções, portanto, a solução é dita semianalítica.

2.5.1. Elemento Finito Baseado na GBT

De modo a apresentar a implementação do elemento finito baseado na GBT proposto no trabalho de Silvestre e Camotim (2003b), e posteriormente melhorado nos trabalhos de Bebiano *et al.* (2007) e Basaglia *et al.* (2010), convém primeiramente recordar o sistema de equações diferenciais de equilíbrio obtido a partir da equação 2.22, aqui reescrito por completo na forma fraca, dado por

$$\int_{L_e} \left(C_{ik} \phi_{k,xx} \delta \phi_{i,xx} + D_{ik}^I \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} + D_{ik}^{II} \phi_k \delta \phi_{i,xx} + D_{ki}^{II} \phi_{k,xx} \delta \phi_i + B_{ik} \phi_k \delta \phi_i - \right. \\ \left. - W_j X_{jik}^\sigma \phi_{k,x} \delta \phi_{i,x} - W_{j,x} X_{jik}^\tau (\phi_i \delta \phi_{k,x} + \phi_{k,x} \delta \phi_i) - q_i^x \varphi \delta \phi_{i,x} - q_i^{s,z} \varphi \delta \phi_i \right) dx = 0 \quad (2.74)$$

sendo que $1 \leq i, k \leq N_d$, $1 \leq j \leq 4$, e a integração agora passa a ser realizada no domínio do comprimento do elemento finito L_e .

Dessa forma, as funções de amplitude modal $\phi_i(x)$ também passam a ser escritas em função do comprimento do elemento finito, de forma que $\xi=x/L_e$ ($0 \leq \xi \leq 1$), e são aproximadas por meio de combinações lineares (2.75 e 2.76) de polinômios cúbicos de Lagrange (2.80 e 2.81) no que se refere ao modo 1 (extensão axial), e polinômios de Hermite (2.82 e 2.83) para os demais modos.

A utilização de polinômios de Lagrange para o primeiro modo decorre do fato da equação diferencial de equilíbrio relativa ao modo de extensão axial não ser de 4ª ordem, mas sim de 2ª ordem (Eq. 2.15), *i.e.*, os deslocamentos relativos a este modo são uma ordem de grandeza inferior aos deslocamentos transversais e de flexão.

$$\phi_{1,x}(\xi) = d_{1,1}^e \Psi_1^L(\xi) + d_{1,2}^e \Psi_2^L(\xi) + d_{1,3}^e \Psi_3^L(\xi) + d_{1,4}^e \Psi_4^L(\xi) \quad (2.75)$$

$$\phi_i(\xi) = d_{i,1}^e \Psi_1^H(\xi) + d_{i,2}^e \Psi_2^H(\xi) + d_{i,3}^e \Psi_3^H(\xi) + d_{i,4}^e \Psi_4^H(\xi) \quad (2.76)$$

onde,

$$d_{1,1}^e = \phi_{1,x}(0) \quad d_{1,2}^e = \phi_{1,x}(1/3) \quad d_{1,3}^e = \phi_{1,x}(2/3) \quad d_{1,4}^e = \phi_{1,x}(1) \quad (2.77)$$

$$d_{i,1}^e = \phi_{i,x}(0) \quad d_{i,2}^e = \phi_i(0) \quad d_{i,3}^e = \phi_{i,x}(1) \quad d_{i,4}^e = \phi_i(1) \quad (2.78)$$

$$\Psi_1^L = 1/2 \cdot (1 - \xi)(3\xi - 1)(3\xi - 2) \quad \Psi_2^L = 9/2 \cdot \xi(\xi - 1)(3\xi - 1)(3\xi - 2) \quad (2.79)$$

$$\Psi_3^L = 9/2 \cdot \xi(1 - \xi)(3\xi - 1) \quad \Psi_4^L = 1/2 \cdot \xi(3\xi - 1)(3\xi - 2) \quad (2.80)$$

$$\Psi_1^H = L_e(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \quad \Psi_2^H = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \quad (2.81)$$

$$\Psi_3^H = L_e(\xi^3 - \xi^2) \quad \Psi_4^H = -2\xi^3 + 3\xi^2 \quad (2.82)$$

Além disso, tem-se para as resultantes das tensões normais longitudinais associadas aos modos 1 (esforço normal), 2 e 3 (momentos fletores em torno do eixo de maior e menor inércia, respectivamente), e 4 (bimomento), a seguinte expressão ($1 \leq j \leq 4$):

$$W_j^0 = W_{0j}^0 + W_{1j}^0 \xi + W_{2j}^0 \xi^2 + W_{3j}^0 \xi^3 \quad (2.83)$$

Onde W_{ij}^0 é o coeficiente do termo de ordem i , relativo ao modo j ($j=1$ a 4). A figura 2.4 ilustra a aproximação obtida através dos polinômios (cúbicos) da Eq. 2.75.

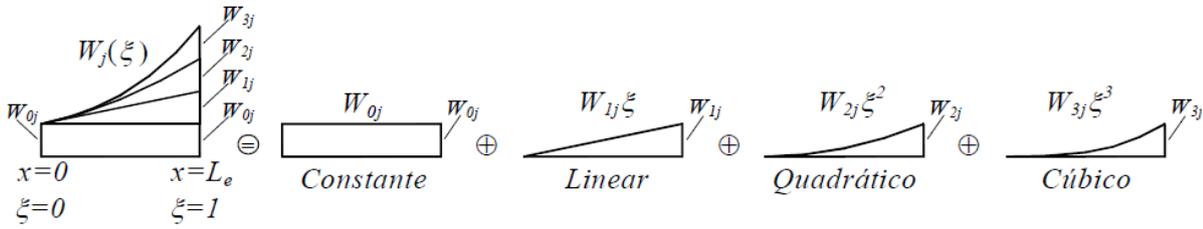


Figura 2.22 – Decomposição/aproximação dos diagramas não lineares de tensões. Fonte: *Bebiano (2010)*.

Finalmente, ao se substituir 2.75, 2.76 e 2.83 no sistema de equações diferenciais de equilíbrio 2.74, e conduzindo-se a integração para $0 \leq \xi \leq 1$, são obtidas as matrizes de elemento finito, de rigidez linear $[K^e]$, e geométrica $[G^e]$, vetor de forças $\{f^e\}$, e vetor de deslocamentos generalizados $\{d^e\}$, que possuem a forma

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [0] & [0] & [0] & [K_{15}] & \dots \\ & [K_{22}] & [0] & [0] & [K_{25}] & \dots \\ & & [K_{33}] & [0] & [K_{35}] & \dots \\ & & & [K_{44}] & [K_{45}] & \dots \\ & & & & [K_{55}] & \dots \\ \text{sim.} & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad [G^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{15}] & \dots \\ & [G_{22}] & [0] & [G_{24}] & [K_{25}] & \dots \\ & & [G_{33}] & [G_{32}] & [K_{35}] & \dots \\ & & & [G_{44}] & [K_{45}] & \dots \\ & & & & [G_{55}] & \dots \\ \text{sim.} & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_d} \end{Bmatrix} \quad \{d^e\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N_d} \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

onde os índices das submatrizes 4x4 em 2.84, ou dos subvetores 4x1 em 2.85, identificam os modos de deformação envolvidos. Assim, assumindo $\{\Psi^L\} = \{\Psi_1^L(\xi), \Psi_2^L(\xi), \Psi_3^L(\xi), \Psi_4^L(\xi)\}$, e $\{\Psi^H\} = \{\Psi_1^H(\xi), \Psi_2^H(\xi), \Psi_3^H(\xi), \Psi_4^H(\xi)\}$, essas submatrizes e subvetores são dados por

$$[K_{11}] = C_{11} \int_0^1 \{\Psi_{,x}^L\}^T \cdot \{\Psi_{,x}^L\} d\xi \quad (2.86)$$

$$\{f_1\} = q_1^x \phi \int_0^1 \{\Psi^L\}^T d\xi \quad (2.87)$$

$$[K_{ik}] = C_{ik} \int_0^1 \{\Psi_{,xx}^H\}^T \cdot \{\Psi_{,xx}^H\} d\xi + D_{ik}' \int_0^1 \{\Psi_{,x}^H\}^T \cdot \{\Psi_{,x}^H\} d\xi + D_{ik}'' \int_0^1 \{\Psi_{,xx}^H\}^T \cdot \{\Psi^H\} d\xi + D_{ki}'' \int_0^1 \{\Psi^H\}^T \cdot \{\Psi_{,xx}^H\} d\xi + B_{ik} \int_0^1 \{\Psi^H\}^T \cdot \{\Psi^H\} d\xi \quad (2.88)$$

$$[G_{ik}] = X_{jik}^\sigma \int_0^1 \left[(W_{0j} + W_{1j}\xi + W_{2j}\xi^2 + W_{3j}\xi^3) \{\Psi_{,x}^H\}^T \cdot \{\Psi_{,x}^H\} \right] d\xi - X_{jik}^\tau \int_0^1 \left[\frac{1}{L_e} (W_{1j} + 2W_{2j}\xi + 3W_{3j}\xi^2) \left(\{\Psi_{,x}^H\}^T \cdot \{\Psi^H\} + \{\Psi^H\}^T \cdot \{\Psi_{,x}^H\} \right) \right] d\xi \quad (2.89)$$

$$\{f_i\} = q_i^x \varphi \int_0^1 \{\Psi_{,x}^L\}^T d\xi + q_i^{s,z} \varphi \int_0^1 \{\Psi^L\}^T d\xi \quad (2.90)$$

Neste ponto cabe uma observação importante a respeito da participação do modo de extensão axial ($k=1$), que no contexto das análises de estabilidade de barras isoladas, pode ser normalmente desconsiderado, mas no que se refere às análises de estabilidade envolvendo duas barras ou mais, não alinhadas entre si, possui fundamental importância, e deve, necessariamente, fazer parte do conjunto de modos de deformação considerados, conforme será explicado com mais detalhes no capítulo 3 desta tese.

Ainda no contexto do primeiro modo de deformação da GBT, o trabalho de Basaglia (2010) sugere a possibilidade de se aproximar a sua respectiva função de amplitude por meio dos polinômios de Hermite (Eqs. 2.81 a 2.82, e 2.88 a 2.90) em vez de utilizar os polinômios de Lagrange. Como resultado disso, segundo o autor, obtém-se uma uniformização do número de graus de liberdade envolvidos nas várias equações descritas pela Eq. 2.74, o que implica numa implementação computacional mais simples, porém engloba o “custo” de se ter um grau de liberdade adicional por nó, associado à função $\phi_1 = \int u$, e que não possui significado físico bem definido (a extensão axial é representada pela derivada $\phi_{1,x} = u$).

Para auxiliar na visualização dos modos de deformação no contexto dos elementos finitos, Basaglia (2010) oferece também a seguinte interpretação, aqui reproduzida, de acordo com a Fig. 2.23, para os modos de deformação globais, distorcionais e locais:

- (i) Deslocamento associado ao modo de extensão axial (modo 1), e sua primitiva: $u_a(d_{11})$ e $\int u_a(d_{12})$, para $x=0$, e $u_b(d_{13})$ e $\int u_b(d_{14})$, para $x=L_e$;
- (ii) Deslocamentos transversais e rotações associados aos modos de flexão em torno dos eixos de maior e menor inércia (modos 2 e 3): $v_a(d_{22}+d_{32})$ e $\theta_a(d_{21}+d_{31})$, para $x=0$, e $v_b(d_{24}+d_{34})$ e $\theta_b(d_{23}+d_{33})$, para $x=L_e$;
- (iii) Rotação de torção e sua derivada associada ao empenamento (modo 4): $r_a(d_{42})$ e $r_a'(d_{41})$, para $x=0$, e $r_b(d_{44})$ e $r_b'(d_{43})$, para $x=L_e$;

- (iv) Deslocamento associado ao empenamento do(s) modo(s) distorcional(ais) (quando existente(s)) e sua(s) derivada(s) – (modos $k = 5, \dots, 5+N_{dist}-1$, sendo N_{dist} o número de modos distorcionais): $\mu_a(d_{k2})$ e $\mu'_a(d_{k1})$, para $x=0$, e $\mu_b(d_{k4})$ e $\mu'_b(d_{k3})$, para $x=L_e$;
- (v) Deslocamento associado ao(s) modo(s) local(ais) e sua(s) derivada(s) – (modos $k=5+N_{dist}, \dots, N_d$): $\eta_a(d_{k2})$ e $\eta'_a(d_{k1})$, para $x=0$, e $\eta_b(d_{k4})$ e $\eta'_b(d_{k3})$, para $x=L_e$.

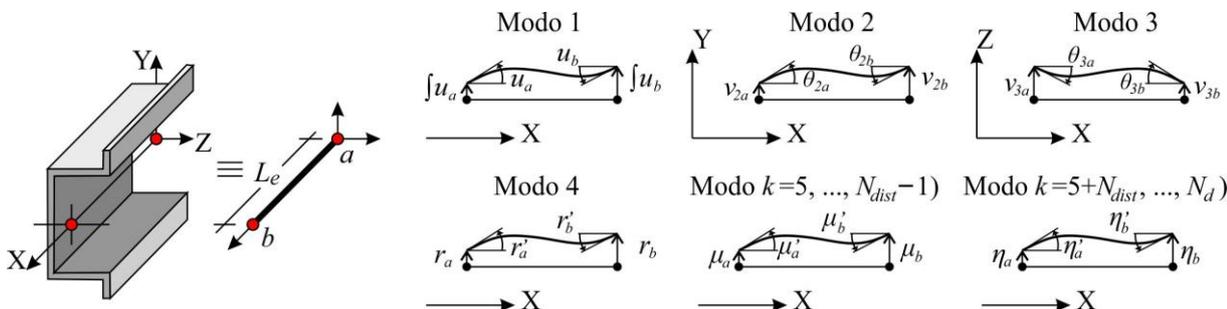


Figura 2.23 – Graus de liberdade nodais para cada modo de deformação. Adaptado de Basaglia (2010).

Com isso, é possível proceder a montagem das matrizes globais de rigidez $[K]$ e geométrica $[G]$, assim como do vetor de forças $\{f\}$, relativos ao problema a ser analisado. Como parte deste procedimento, está a aplicação das matrizes de incidência (Zienkiewicz e Taylor, 2000), de acordo com a continuidade dos graus de liberdade modais em cada nó da discretização definida para a barra, e também de acordo com as condições de apoio da barra analisada. Alternativamente, este passo pode ser realizado por algoritmos computacionais específicos, e que, em geral, são computacionalmente mais eficientes (Savassi, 1996), já que eliminam a necessidade de um conjunto considerável de operações matriciais.

As dimensões totais do sistema (sem as condições de apoio aplicadas) envolvem o número de modos de deformação N_d considerados na análise, e o número de elementos finitos N_{ef} na discretização adotada, sendo dado por $2 \times N_d \times N_{ef}$. Contudo, a maioria das análises não requer a consideração de todos os modos de deformação, o que permite que a solução seja obtida com uma significativa redução do número de graus de liberdade envolvidos. Não obstante, esta seleção modal é, obviamente, particular para cada caso em estudo.

Finalmente, uma vez definidas as matrizes globais de rigidez e geométrica, e vetor de forças associado, a análise envolve somente a solução dos problemas clássicos linear e de estabilidade elástica, dados, respectivamente, por

$$[K]\{d\} = \{f\} \tag{2.91}$$

$$([K] + \lambda[G])\{d\} = \{0\} \tag{2.92}$$

2.5.2. Condições de Apoio Não Convencionais

Conforme visto no item anterior, a GBT é expressa em termos de seus graus de liberdade, que são, essencialmente, modos de deformação da seção transversal da barra em questão. Esta “natureza modal” é, de fato, bastante conveniente quando condições de contorno também se aplicam desta forma. Exemplos disso são particularmente comuns, especialmente no que se refere aos modos globais, como apoios envolvendo deslocamentos e/ou rotações em torno de um eixo principal de inércia, ou esforços como momentos fletores, aplicados na extremidade de uma barra, entre outros.

Além disso, a linguagem modal da GBT permite tratar de forma simples e direta, os três tipos de apoios convencionalmente utilizados nas análises por meio de elementos de barra, que são: (i) engastes (valores e derivadas nulos); (ii) apoios simples (valores nulos e derivadas livres); e (iii) extremidades livres (valores e derivadas livres).

Entretanto, uma vasta quantidade de condições de apoio não pode ser representada pelos modos convencionais (*e.g.*, barras de contraventamentos, apoios em ligações parafusadas, etc. – Fig. 2.24), e para que possam ser incorporadas às análises feitas pela GBT, os trabalhos de Basaglia *et al.* (2007b), e Camotim *et al.* (2008), apresentam de forma pioneira a aplicação de uma metodologia geral, possibilitando considerar condições de apoio arbitrárias, rígidas e também elásticas, conforme descrito a seguir. Além desses trabalhos, vale citar também Basaglia *et al.* (2010), e Basaglia *et al.* (2011), que demonstram a mesma metodologia, porém aplicada às análises de estabilidade elástica de pórticos, e não linear geométrica de pórticos, respectivamente.

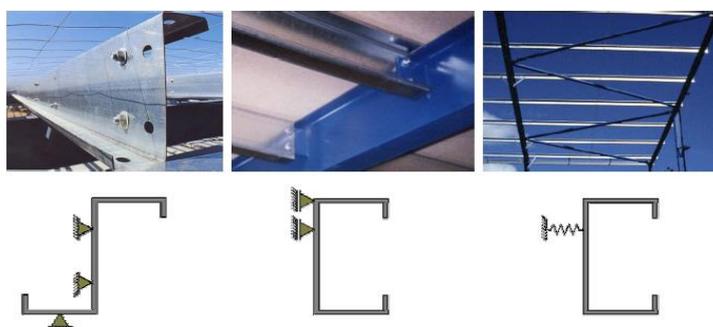


Figura 2.24 – Exemplos de apoios não convencionais: restrições pontuais rígidas ou flexíveis.
Fonte: Basaglia (2010).

De modo geral, o procedimento pode ser aplicado para representar a restrição de um deslocamento (\bar{d}) ou rotação ($\bar{\theta}$) de um ponto P qualquer da linha média da seção transversal, desde que este ponto esteja representado por um nó da seção transversal, seja ele natural, de extremidade ou intermediário (Fig. 2.25.a).

Uma vez que o ponto em que se materializa a restrição desejada é definido por um nó qualquer da seção transversal, a condição de restrição passa a ser definida pela equação

$$\Pi_P = \{\Delta\}^T \{\Phi\} = 0 \quad (2.93)$$

onde as componentes dos vetores $\{\Delta\}$ e $\{\Phi\}$ representam os valores, dos deslocamentos modais em P ($u_k(s_P)$, $v_k(s_P)$ ou $w_k(s_P)$), e da amplitude modal ou da sua derivada na posição x a que pertence o ponto P , respectivamente.

Para mais bem ilustrar, considere-se um exemplo, o caso de uma restrição ao deslocamento transversal (normal ao plano da parede) aplicado na alma do perfil U ilustrado na figura 2.25.b, bem como, em um segundo caso, a restrição do mesmo ponto P somente à rotação (Fig. 2.25.c). Para aplicar a restrição no primeiro caso, todos os valores deslocamentos $w_i(s_P)$ devem resultar nulos, portanto, a equação de restrição é escrita como 2.94. Por outro lado, para que o mesmo ponto tenha a restrição aplicada à rotação, as derivadas no mesmo ponto é que necessitam ser anuladas, conforme a equação de restrição 2.95.

$$\bar{d}_Z(x_P, s_P) = \sum_{k=1}^{N_d} w_k(s_P) \phi_k(x_P) = 0 \quad (2.94)$$

$$\bar{\theta}_Y(x_P, s_P) = \sum_{k=1}^{N_d} w_k(s_P) \phi_{k,x}(x_P) = 0 \quad (2.95)$$

Assim, tem-se de forma genérica, a possibilidade de se considerar, por meio de equações específicas, a restrição de qualquer nó da seção transversal, quanto aos seus deslocamentos $u(s_P)$, $v(s_P)$, e/ou $w(s_P)$. Ainda, segundo Basaglia (2010), uma das formas de se incorporar as equações de restrição em questão, é por meio de Multiplicadores de Lagrange (Zienkiewicz e Taylor, 2000), o qual consiste na resolução do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} [K + \lambda G] & \{\Delta\}_1 & \cdots & \{\Delta\}_i \\ \{\Delta\}_1^T & & & \\ \vdots & & 0 & \\ \{\Delta\}_i^T & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \lambda_{L1} \\ \vdots \\ \lambda_{Li} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_i \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

onde cada componente λ_{Li} é um multiplicador de Lagrange associado à condição de restrição i .

Não obstante, Basaglia *et al.* (2007b) e Camotim *et al.* (2008), oferecem também um procedimento para a implementação de molas elásticas nos apoios em questão, tal como ilustrado nas Figs. 2.25.d-e. Para este procedimento considere-se a equação 2.93, dada em

função da constante elástica (k) de uma mola, e da força “nodal” generalizada no nó em questão (F_P), dada por

$$\Pi_P = \{\Delta\}^T \{\Phi\} = \frac{F_P}{k} \quad (2.97)$$

Para incorporar esta condição nos sistemas de equações 2.91 – 2.92, os autores propõem dois procedimentos, dos quais apenas um é aqui apresentado, por serem equivalentes.

Além disso, como é importante referir, o caso de apoios envolvendo molas elásticas requer o tratamento diferenciado do nó que incorpora a restrição elástica, uma vez que tal restrição não pode ser tratada diretamente na forma modal.

Primeiramente, é necessário identificar o(s) nó(s) com restrição elástica, e transferir o(s) grau(s) de liberdade(s) associado(s) para um “elemento de nó”, onde são asseguradas as compatibilidades, através da transformação dos graus de liberdade modais da GBT em graus de liberdade nodais generalizados, com base em um sistema de eixos \bar{X} - \bar{Y} - \bar{Z} . Com esta transformação, pode ser incluído o coeficiente de rigidez elástica da mola na componente da matriz de rigidez linear associada ao deslocamento restringido.

A transformação dos graus de liberdade modais em graus de liberdade nodais generalizados, é feita por meio de uma matriz de transformação T_b , que relaciona os graus de liberdade modais com graus de liberdade nodais generalizados com as restrições, e é dada por

$$\{\bar{d}\} = [T_b]\{d\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \{\bar{d}_G\} \\ \{\bar{d}_D\} \\ \{\bar{d}_L\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [L] & \\ & & \{\Delta\}_1^T \\ & & \vdots \\ & & \{\Delta\}_i^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_G\} \\ \{d_D\} \\ \{d_L\} \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

onde $\{\bar{d}_G\}$, $\{\bar{d}_D\}$ e $\{\bar{d}_L\}$ são os subvetores dos deslocamentos generalizados, associados aos modos globais, distorcionais e locais, $\{d_G\}$, $\{d_D\}$ e $\{d_L\}$ são os subvetores com os graus de liberdade modais da GBT, e as matrizes $[R]$ e $[L]$ são relacionadas às rotações e translação dos referidos graus de liberdade, de forma a contabilizar o a transferência dos deslocamentos nodais (onde são aplicadas as restrições elásticas), dos eixos que cruzam o centro de corte da seção transversal para o ponto onde é materializado o referido apoio elástico.

Como a transformação aqui descrita é um passo que também integra o tratamento dado às ligações entre barras não alinhadas entre si, será descrita com mais detalhes, incluindo as componentes das matrizes $[R]$ e $[L]$, no Cap. 3 desta tese.

Com isso, a compatibilização dos referidos graus de liberdade é incorporada no sistema de equações do problema, por meio das transformações

$$([\bar{K}] + \lambda[\bar{G}]) = [T_b]([K] + \lambda[G])[T_b]^T \quad (2.99)$$

$$\{\bar{d}\} = [T_b]\{d\} \quad (2.100)$$

$$\{\bar{f}\} = [T_b]\{f\} \quad (2.101)$$

onde, $[\bar{K}]$, $[\bar{G}]$, $\{\bar{f}\}$ e $\{\bar{d}\}$ indicam as matrizes transformadas, que possuem agora uma natureza “mista”, combinando graus de liberdade modais, e graus de liberdade nodais generalizados envolvidos nos apoios elásticos.

Por fim, a inclusão dos valores de rigidez de mola k_m associados aos graus de liberdade (i) envolvidos no(s) apoio(s) elástico(s) na matriz de rigidez elástica $[\bar{K}]$, de modo que o termo \bar{K}_{ii} passa a ser \bar{K}_{ii+k_m} , e com isso, fica definida a matriz de rigidez linear incluindo o(s) apoio(s) elástico(s) $[\bar{\bar{K}}]$, para a solução do problema,

$$\left([\bar{\bar{K}}] + \lambda[\bar{G}]\right)\{\bar{d}\} = 0 \quad (2.102)$$

$$[\bar{\bar{K}}]\{\bar{d}\} = \{\bar{f}\} \quad (2.103)$$

Como \bar{d} , definido pela solução dos problemas, possui natureza mista, é possível transformá-lo novamente para os graus de liberdade modais da GBT, por meio da operação inversa de 2.99, e com isso manter a representação modal clássica dos resultados da GBT.

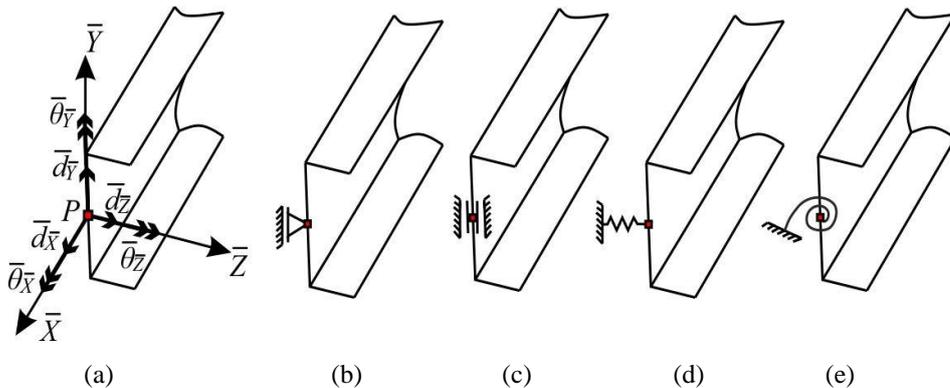


Figura 2.25 – (a) Deslocamentos e rotações relativos ao ponto P , e alguns tipos de restrições aplicáveis: (b) deslocamentos e/ou (c) rotações fixas, ou molas (d) translacionais, e/ou (e) rotacionais.

3. GBT NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE PÓRTICOS

De modo geral, conforme citado nos itens 1.2 e 1.3 desta tese, a estabilidade de sistemas estruturais está ligada a diversos fatores geométricos, de material e condições de contorno aplicadas. Assim, qualquer método que se proponha a analisar a estabilidade dessas estruturas deve, naturalmente, ser capaz de contemplar a influência dos principais fatores sobre o comportamento das mesmas.

Do ponto de vista da formulação da GBT abordada nesta tese (Cap. 2), naturalmente envolvendo a sua aplicação por meio da técnica dos elementos finitos, parâmetros associados ao comportamento de barras isoladas de aço, como (i) a geometria da seção transversal (abertas ramificadas arbitrárias), (ii) os carregamentos uniformes ou não uniformes, e (iii) as condições de apoio convencionais ou não convencionais arbitrárias, podem ser considerados de forma a não implicar prejuízos aos resultados, entretanto, algumas condições colocam-se em destaque nos casos envolvendo a análise de duas ou mais barras conectadas e não alinhadas entre si. Entre os principais problemas, está a compatibilização dos deslocamentos relativos aos vários modos de deformação entre as barras, especialmente quando se trata de deformações de empenamento, o que, conforme também já citado no item 1.2 da introdução, tem sido tema de recentes trabalhos de investigação há algumas décadas (*e.g.*, Vacharajuttphan e Trahair, 1974; Morrel, 1979; Sharman, 1985; Krenk, 1990; e Krenk e Damkilde, 1991).

De forma a superar essas questões e demonstrar a viabilidade da aplicação da GBT nas análises de estabilidade em pórticos metálicos, Basaglia *et al.*, 2006a,b apresentam de forma pioneira uma metodologia capaz de garantir a compatibilidade dos deslocamentos de barras conectadas e não alinhadas entre si, tirando proveito dos elementos finitos baseados na GBT. Posteriormente, vários trabalhos expandiram sistematicamente as aplicações do método nas análises de sistemas estruturais, conforme condensado nos trabalhos de Camotim *et al.* (2010c), Camotim e Basaglia (2013) e, mais recentemente, Basaglia e Camotim (2015).

Assim, fundamentado nesses recentes trabalhos, este capítulo dedica-se à introdução e desenvolvimento dos conceitos necessários para permitir a aplicação da GBT na análise de estabilidade de sistemas estruturais, que no caso da presente tese, são ilustrados por meio de exemplos aplicados somente a pórticos planos, muito embora a mesma metodologia seja aplicável também a pórticos tridimensionais de qualquer dimensão.

3.1. Compatibilização dos Deslocamentos Entre Barras Não Colineares

A aplicação da técnica dos elementos finitos para a solução de problemas de análise com a GBT envolve, naturalmente, a discretização da estrutura em um conjunto de elementos de barra. No caso de barras isoladas, conforme comentado no item 2.5.1, a incidência de cada elemento em relação aos elementos adjacentes é tratada de forma descomplicada, dada a continuidade dos graus de liberdade da GBT entre os respectivos elementos.

Por outro lado, no caso de barras conectadas e não alinhadas entre si, a compatibilidade dos graus de liberdade da GBT deixa de ser algo trivial, pois depende, entre outros fatores, da geometria do conjunto de barras, e também do tipo de ligação entre elas.

Para melhor expor os as variáveis em questão, primeiramente, tenham-se em consideração os modos de deformação da GBT como os graus de liberdade do sistema, que são dados, para cada barra, de forma desacoplada. Com isso, o que se tem é que o eixo de referência para cada um dos modos deve ser entendido separadamente. Considerando-se apenas os modos de deformação globais (modos de Vlasov), tem-se na Fig. 3.1.a, para duas barras não alinhadas entre si, os eixos globais de coordenadas para os quais os graus de liberdade da GBT de cada uma fazem referência. Os graus de liberdade são referenciados na Fig. 3.1.b, ou, para ilustrar de forma representativa (lembrando que a amplitude de cada grau de liberdade varia ao longo do eixo longitudinal – $\phi_i(x)$), as Figs. 3.2.a-e mostram cada um dos referidos graus de liberdade em relação ao seu eixo de referência nas barras individuais.

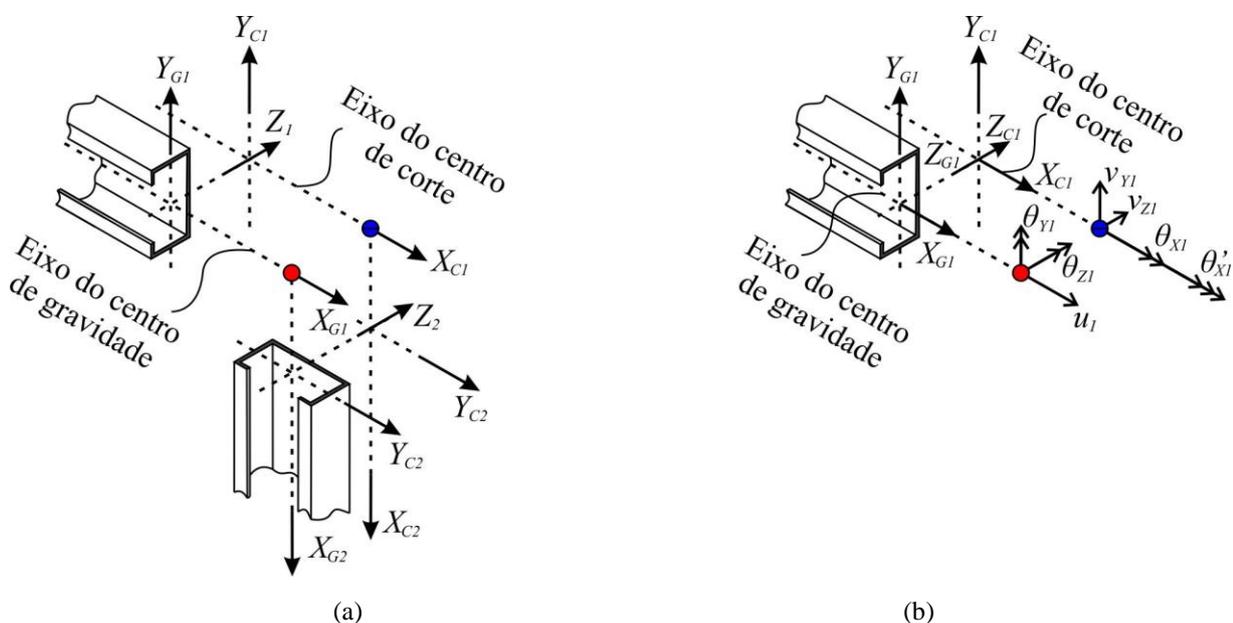


Figura 3.1 – (a) Eixos de coordenadas para cada barra individual, e (b) graus de liberdade da GBT relativos aos modos globais em relação aos respectivos eixos.

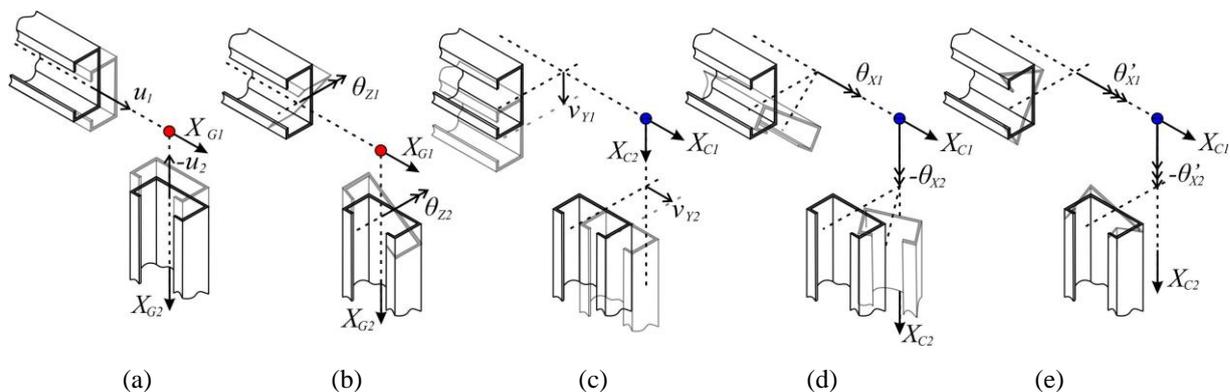


Figura 3.2 – Representação gráfica dos graus de liberdade da GBT em relação aos seus respectivos eixos de referência para cada barra individual: (a) extensão axial; (b) derivada da flexão em torno do eixo de maior inércia; (c) valor de flexão em torno do eixo de maior inércia; (d) rotação de torção em torno do centro de corte; e (e) empenamento.

Como fica claro ao observar as Figs. 3.1.a ou 3.2.a-e, para que os graus de liberdade possam ser compatibilizados e associados segundo uma dada ligação metálica, é necessário que os graus de liberdade de cada uma das barras sejam “transformados”, de modo que estejam relacionados ao mesmo ponto (nó de ligação). Essa transformação, exige a adoção de um “eixo longitudinal de referência” (Fig. 3.3), o qual pode ser, por questões de conveniência, coincidente com o centro de corte, ou centro de gravidade da seção transversal, sendo este último comumente adotado para o projeto de ligações metálicas. Este procedimento, referenciado no trabalho de Basaglia (2010), também é apresentado nos trabalhos de Baigent e Hancock (1982), e Papangelis *et al.* (1998), no contexto da análise de pórticos por meio de elementos finitos de barra baseados na Teoria de Vlasov.

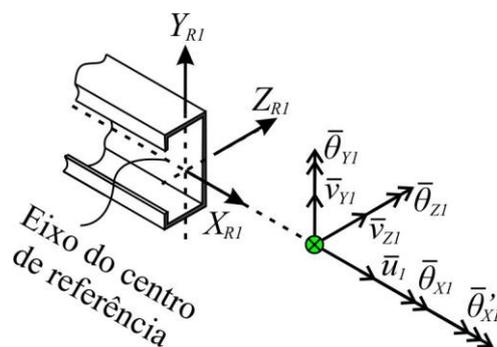


Figura 3.3 – Graus de liberdade relativos aos modos globais da GBT em relação a um eixo de referência.

Não obstante, a transformação dos eixos de referência dos graus de liberdade das barras analisadas, conforme ilustrado anteriormente, conduz ao inevitável acoplamento entre os modos de deformação, antes desacoplados. Para contornar o problema, Basaglia (2010) propõe uma transformação pontual, isto é, os eixos de referência para os graus de liberdade relativos à flexão ou torção (ao longo de toda a barra), permanecem inalterados (Fig. 3.1.b), enquanto a

compatibilidade dos mesmos, para fins de sua ligação com graus de liberdade da barra adjacente, é tratada em um chamado “elemento de nó”. Com isso, os efeitos das excentricidades entre o eixo de referência e os demais eixos de origem de cada modo, que produzem o acoplamento modal citado, não necessitam de ser incorporados à matriz de rigidez dos elementos, uma vez que o referido elemento de nó trata da compatibilização dessas excentricidades para a ligação em questão, segundo eixos de coordenadas globais do sistema estrutural analisado \hat{X} - \hat{Y} - \hat{Z} , conforme ilustrado pela Fig. 3.4.a-b.

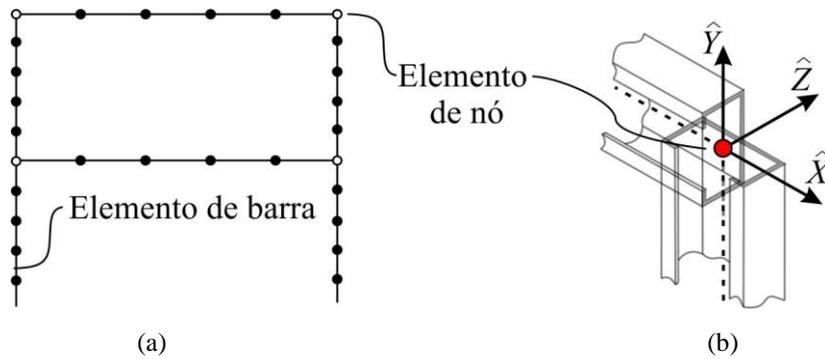


Figura 3.4 – (a) Discretização de um pórtico em elementos finitos de barra da GBT, e elemento de nó em cada ligação, (b) representado separadamente com seus eixos de referência.

Adaptado de Basaglia (2010).

Basicamente, o então definido “elemento de nó” se fundamenta na aplicação de uma matriz $[N]$, que transforma os graus de liberdade da GBT na seção extrema dos elementos finitos que nele convergem (os quais se encontram referidos aos eixos de coordenadas locais da barra a que pertencem), em deslocamentos generalizados, segundo o sistema de coordenadas \hat{X} - \hat{Y} - \hat{Z} do ponto onde se admite materializada a ligação, aqui designado \hat{O} . A transformação é dada na seguinte forma:

$$[\hat{\xi}] = [N]\{d\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\hat{\xi}_G\} \\ \{\hat{\xi}_D\} \\ \{\hat{\xi}_L\} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{l} [R_{\hat{Y}+\hat{Z}}]_{6 \times 6} [R_X]_{6 \times 6} [L]_{6 \times 6} \\ [I]_{q \times q} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{d_G\} \\ \{d_D\} \\ \{d_L\} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Onde, (i) $\{\hat{\xi}\}$ é o vetor que contém os subvetores relativos aos deslocamentos generalizados associados aos modos globais $\{\hat{\xi}_G\}$, distorcionais $\{\hat{\xi}_D\}$ e locais $\{\hat{\xi}_L\}$, (ii) $\{d\}$ é o vetor que contém os graus de liberdade da GBT associados aos modos globais $\{d_G\}$, distorcionais $\{d_D\}$ e locais $\{d_L\}$, e (iii) $[N]$ é a matriz que contém as transformações na ordem em que devem ser aplicadas, as quais são designadas pelas submatrizes, (iii₁) $[R_{\hat{Y}+\hat{Z}}]$, que descreve a transformação associada a duas rotações sucessivas, sendo a primeira em torno de eixo \hat{Z} e a

segunda em torno do eixo \hat{Y} , (iii₂) $[R_X]$, que descreve a rotação em torno do eixo longitudinal da barra, (iii₃) $[I]$, que é uma matriz identidade associada ao empenamento devido à torção e aos modos de deformação distorcionais e locais, de dimensão qxq , onde q é dado por $2(N_{dist}+N_{loc})+1$ (N_{dist} e N_{loc} são o número de modos distorcionais e locais incluídos na análise, respectivamente), e (iii₄) $[L]$, que está associada à translação que contabiliza os efeitos da transferência dos deslocamentos generalizados, dos eixos que coincidem com o centro de gravidade (CG) e com o centro de corte (CC) da seção transversal, para um ponto comum \hat{O} .

As submatrizes de $\{\hat{\xi}\}$ e $\{\hat{d}\}$ são dadas por,

$$\{\hat{\xi}_G\} = \{U_{\hat{X}} \quad U_{\hat{Y}} \quad U_{\hat{Z}} \quad \Theta_{\hat{X}} \quad \Theta_{\hat{Y}} \quad \Theta_{\hat{Z}} \quad \Theta'_{\hat{X}}\}^T \quad (3.2)$$

$$\{d_G\} = \{u \quad v_Y \quad v_Z \quad r_X \quad \theta_Y \quad \theta_Z \quad r'_X\}^T \quad (3.3)$$

$$\{\hat{\xi}_D\} = \{\hat{\mu}'_{k=5} \quad \hat{\mu}_{k=5} \quad \cdots \quad \hat{\mu}'_{k=5+N_d-1} \quad \hat{\mu}_{k=5+N_d-1}\}^T \quad (3.4)$$

$$\{d_D\} = \{\mu'_{k=5} \quad \mu_{k=5} \quad \cdots \quad \mu'_{k=5+N_d-1} \quad \mu_{k=5+N_d-1}\}^T \quad (3.5)$$

$$\{\hat{\xi}_L\} = \{\hat{\eta}'_{k=5+N_d} \quad \hat{\eta}_{k=5+N_d} \quad \cdots \quad \hat{\eta}'_{k=N_d} \quad \hat{\eta}_{k=N_d}\}^T \quad (3.6)$$

$$\{d_L\} = \{\eta'_{k=5+N_d} \quad \eta_{k=5+N_d} \quad \cdots \quad \eta'_{k=N_d} \quad \eta_{k=N_d}\}^T \quad (3.7)$$

enquanto, por sua vez, as componentes das matrizes $[R_{\hat{Y}+\hat{Z}}]$, $[R_X]$ e $[L]$, são dadas por

$$[R_{\hat{Y}+\hat{Z}}] = \begin{bmatrix} [R_{\hat{Y}+\hat{Z}}]' \\ [R_{\hat{Y}+\hat{Z}}]' \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[R_{\hat{Y}+\hat{Z}}] = [R_{\hat{Y}}]' \cdot [R_{\hat{Z}}]' = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\hat{Y}} & -\text{sen} \alpha_{\hat{Y}} \\ & 1 \\ \text{sen} \alpha_{\hat{Y}} & \cos \alpha_{\hat{Y}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\hat{Z}} & -\text{sen} \alpha_{\hat{Z}} & 0 \\ \text{sen} \alpha_{\hat{Z}} & \cos \alpha_{\hat{Z}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$[R_X] = \begin{bmatrix} [R_X]' \\ [R_X]' \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$[R_X]' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_X & -\text{sen} \alpha_X \\ 0 & \text{sen} \alpha_X & \cos \alpha_X \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_Z & C_Y & 1 & 0 & 0 \\ G_Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G_Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

É importante notar que a transformação contida em $[M]$ envolve uma sequência de rotações, e uma vez que as matrizes de rotação não são comutativas, deve seguir a sequência específica* para os ângulos de referência indicados, conforme ilustrado na Fig. 3.5.a-c, isto é, primeiramente executa-se uma rotação em torno do eixo longitudinal da barra X (Fig. 3.5.a), em seguida a rotação em torno do eixo global \hat{Z} (Fig. 3.5.b) e do eixo global \hat{Y} (Fig. 3.5.c).

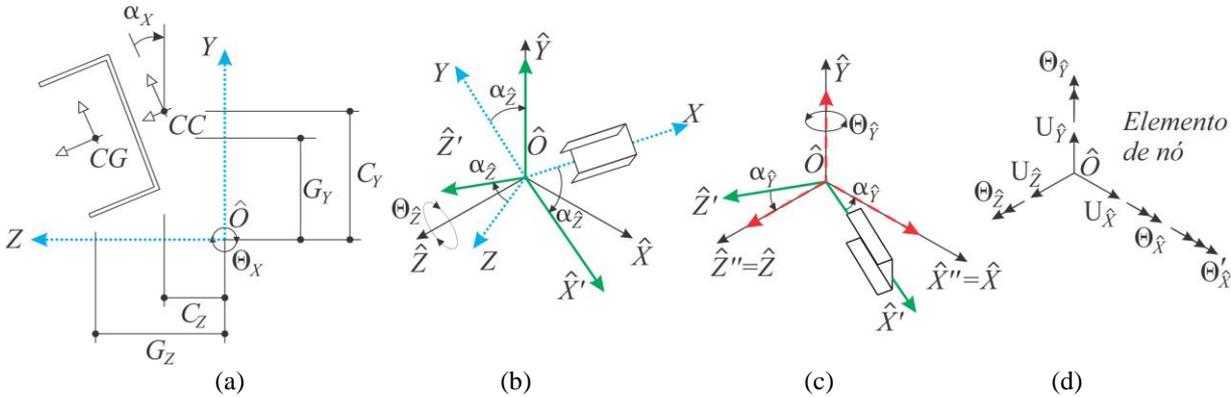


Figura 3.5 – Sequência de rotações para compatibilização dos graus de liberdade globais: (a) rotação em torno de X , (b) rotação em torno de \hat{Z} , (c) rotação em torno de \hat{Y} , e (d) os graus de liberdade resultantes.

A Fig. 3.6.a ilustra um pórtico plano qualquer, discretizado em elementos finitos de barra da GBT, e para o qual a ligação, materializada nas seções extremas dos elementos finitos a e $a+1$ (Fig. 3.6.b), é representada por um elemento de nó (Fig. 3.6.c). Assim, tem-se as transformações representadas pela Eq. 3.1, que conduzem à definição de um conjunto de (i) 7 graus de liberdade relacionados aos modos globais, e $N_{dist}+N_{loc}$ graus de liberdade associados aos modos distorcionais e locais, para cada uma das respectivas seções extremas de barra. Esses graus de liberdade, que são dados em função do mesmo sistema de coordenadas global (elemento de nó), devem satisfazer as relações

$$\begin{Bmatrix} \hat{\xi} \\ \xi \end{Bmatrix}_{m_a} = \begin{bmatrix} [S]_{7 \times 7} \\ \Pi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\xi} \\ \xi \end{Bmatrix}_{n_{a+1}} \quad (3.13)$$

onde os índices m e n identificam as seções extremas dos elementos a e $a+1$, $[S]$ é uma matriz diagonal cujas componentes S_{ii} relacionam os deslocamentos e rotações relativos aos modos globais

* É natural que hajam diferentes sequências de rotação envolvendo outros ângulos de referência.

de cada seção extrema, e Π são condições de restrição associadas às compatibilizações entre os deslocamentos locais e distorcionais na ligação, isto é, aqueles deslocamentos que envolvem a flexão transversal das paredes das seções ligadas no nó.

De forma específica, no que diz respeito às relações entre os modos globais, tem-se que

$$\begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ U_{\hat{Z}} \\ \Theta_{\hat{X}} \\ \Theta_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \\ \Theta'_{\hat{X}} \end{Bmatrix}_{m_a} = \begin{bmatrix} S_{11} & & & & & & \\ & S_{22} & & & & & \\ & & S_{33} & & & & \\ & & & S_{44} & & & \\ & & & & S_{55} & & \\ & & & & & S_{66} & \\ & & & & & & \Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ U_{\hat{Z}} \\ \Theta_{\hat{X}} \\ \Theta_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \\ \Theta'_{\hat{X}} \end{Bmatrix}_{n_{a+1}} \quad (3.14)$$

onde Γ é uma constante relacionada à transmissão das deformações de empenamento devido à torção entre as barras (*i.e.*, relaciona a derivada das rotações de torção – modo 4).

Paralelamente, as condições de restrição Π são particulares para cada tipo de ligação analisada, e são dadas em função dos nós naturais e intermediários pertencentes às paredes da seção transversal, onde são previstas as intersecções com as paredes da seção transversal da barra adjacente, sendo expressas de forma semelhante à 2.93, aqui replicada para o caso em questão,

$$\Pi_p = \{\Delta\}^T \{\Phi\} = 0 \quad (3.15)$$

Sendo que as componentes do vetor $\{\Delta\}$ são valores das funções de empenamento $u_i(s_p)$ ou de flexão transversal $w_i(s_p)$ no ponto P , que é o ponto representado por nó natural ou intermediário onde é tratada a intersecção entre as paredes citadas.

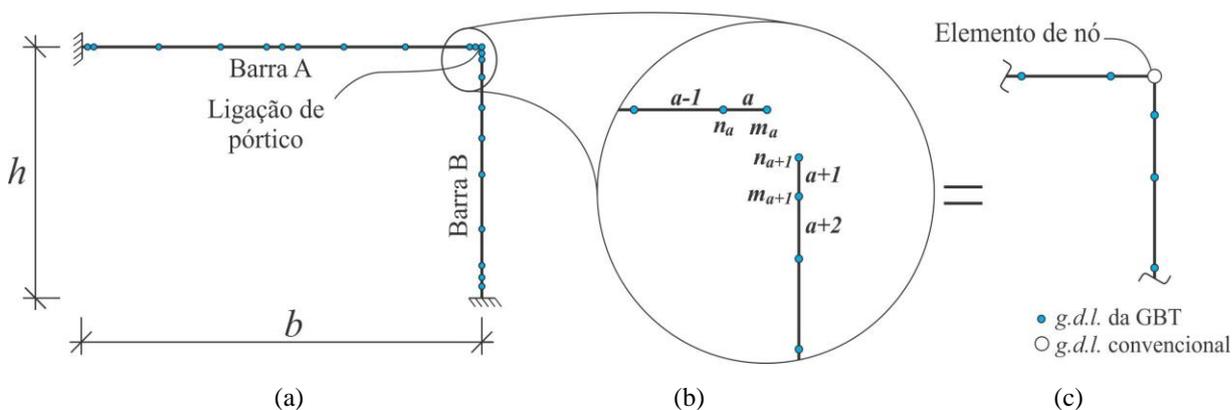


Figura 3.6 – (a) Pórtico discretizado em elementos finitos da GBT, com (b) detalhe da ligação, que é (c) representada pelo elemento de nó de pórtico da GBT.

Finalmente, uma vez que sejam determinadas, as relações expressas nas Eqs. 3.1 e 3.13 podem ser agrupadas em uma matriz de compatibilidade $[\Omega]$, de forma que

$$\{d\} = [\Omega]\{\hat{d}\} \quad (3.16)$$

onde $\{d\}$ é um vetor de graus de liberdade da GBT de todas as seções extremas dos elementos, antes das compatibilizações no nós do pórtico, e $\{\hat{d}\}$ é um vetor de graus de liberdade misto, que também envolve todas as seções extremas dos elementos, mas possui graus de liberdade modais (d_{ki}) sem alterações (nós interiores das barras), e graus de liberdade nodais ($\hat{\xi}$) nos nós de ligação do pórtico.

A determinação da matriz $[\Omega]$, por sua vez, permite que as operações de compatibilização dos elementos de nó possam ser diretamente aplicadas às matrizes globais de rigidez linear e geométrica $[K]$ e $[G]$, montadas de forma que as barras do sistema estrutural em questão não apresentem qualquer incidência entre si. Lembrando que a solução do sistema com as matrizes transformadas conduz à obtenção de uma solução mista, que deve ser transformada novamente por meio da matriz $[\Omega]$ de forma a se obterem as soluções modais típicas da GBT, de forma semelhante ao que se faz nos casos apresentados no item 2.5.2.

3.1.1. Compatibilização dos Deslocamentos de Empenamento Entre as Barras

Os deslocamentos associados ao empenamento devido à torção, de fato, constituem parcela muitas vezes fundamental no que diz respeito ao comportamento de um perfil metálico com seção de paredes finas, e a sua restrição ou não, pode conduzir a resultados de força crítica de estabilidade elástica bastantes distintos (*e.g.*: Dinno e Gill, 1964; Ojalvo e Chambers, 1977; Pignataro *et al.*, 2009). A Fig. 3.7 ilustra as deformações envolvidas na torção livre de um perfil metálico do tipo I, bem como as deformações adicionais no caso de haver restrições ao empenamento nas extremidades, isto é, caso haja um impedimento capaz de restringir qualquer deslocamento longitudinal das mesas do perfil em ambas as extremidades.

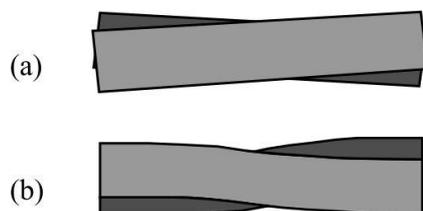


Figura 3.7 – Deslocamentos devidos à torção em um perfil I, (a) com empenamento livre, e (b) com empenamento restringido nas extremidades. Adaptado de Medland e Segedin (1985).

Não obstante, o tratamento do empenamento devido à torção no caso de barras não colineares ligadas entre si, se mostra consideravelmente mais complexo, pois o empenamento de uma barra é acoplado aos deslocamentos de torção de barra(s) adjacente(s), havendo também, em contrapartida, alguma restrição ao empenamento da barra carregada. Além disso, a forma como se dá a referida interação depende da geometria da seção transversal das barras, e da configuração da ligação entre as mesmas, o que complica consideravelmente a utilização de elementos de barra em análises.

Habitualmente, a solução mais utilizada com relação aos elementos finitos de barra tem sido tratar a “transmissão do empenamento” entre as barras com a ajuda de um grau de liberdade adicional. Contudo, a dificuldade principal emerge, por exemplo, quando os deslocamentos de empenamento na extremidade de uma viga precisam ser compatibilizados com um pilar (ou situação qualquer análoga), exigindo a transformação do sistema de coordenadas local da viga para um sistema de coordenadas global. No caso de programas comerciais como o ANSYS® (SAS, 2015) ou ABAQUS (Dassault Systèmes, 2016), essa transformação é dada por um fator (associado a componente da matriz de transformação, pertencente à diagonal principal, que corresponde ao grau de liberdade de empenamento, enquanto as componentes fora da diagonal principal são nulas), tipicamente configurado para um valor nulo ou unitário, o que corresponde, respectivamente, ao impedimento dos deslocamentos de empenamento, ou continuidade dos mesmos.

Trabalhos como o de Yang e McGuire (1984) ou Mohammed e Frank (1996), apresentam o uso de formulações contendo graus de liberdade relacionados ao empenamento, enquanto molas nas extremidades das barras promovem a compatibilização desses graus de liberdade. Entretanto, as ligações nos referidos trabalhos são tratadas de forma genérica.

Entre os principais trabalhos a tratar de forma particular a transmissão do empenamento em função do tipo de ligação, pode-se citar Sharman (1985), que apresenta algumas relações cinemáticas para o caso de pórticos formados por perfis I ou U, com ligações do tipo apresentadas nas Figs. 1.5.b-c. Nomeadamente, no caso de ligações com enrijecedores de alma na forma de caixa (Fig. 1.5.c), o autor sugere a relação entre o empenamento das barras ligadas entre si como completa e inversa ($\Theta'_{\hat{x}.m_a} = -\Theta'_{\hat{x}.n_{a+1}}$), enquanto no caso de ligações com enrijecedor em diagonal (Fig. 1.5.b) a relação passa a ser completa e direta ($\Theta'_{\hat{x}.m_a} = \Theta'_{\hat{x}.n_{a+1}}$)*. Corroborando com tais relações, o trabalho de Krenk e Damkilde (1991), que investigou quatro diferentes ligações entre perfis I, acrescentou ainda a configuração de enrijecimento em caixa

* Repare que para as relações cinemáticas descritas, equivale a dizer, segundo a Eq. 3.14, que $\Gamma=-1$, no caso de ligações com enrijecedores de alma na forma de caixa, ou que $\Gamma=1$, no caso de ligações com enrijecedor em diagonal, ou para ligações entre vigas não alinhadas entre si.

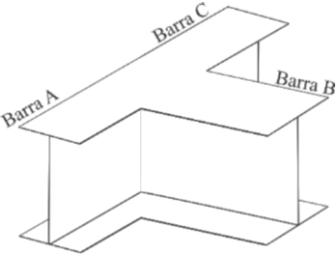
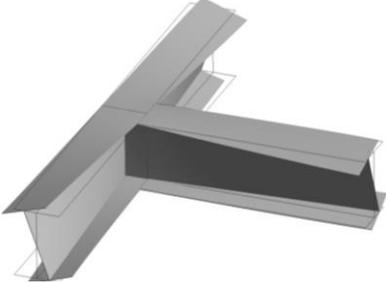
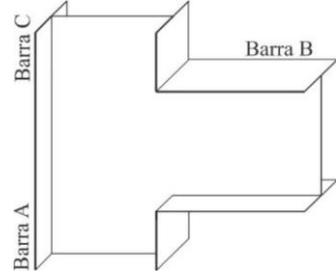
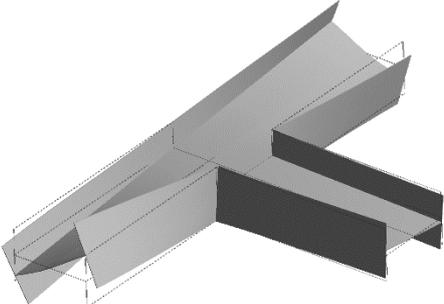
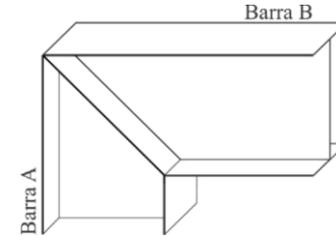
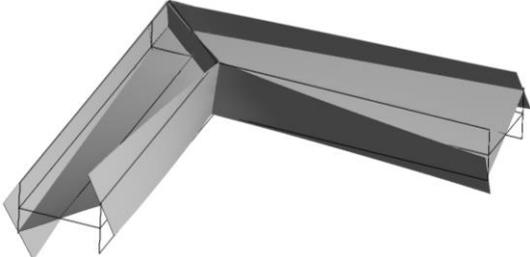
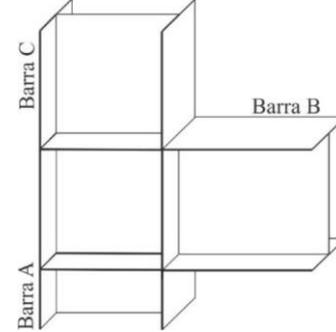
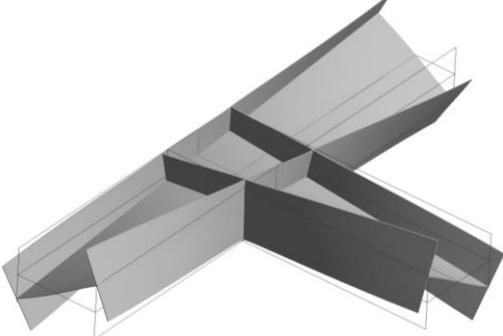
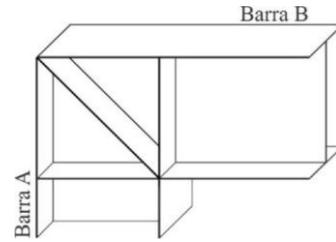
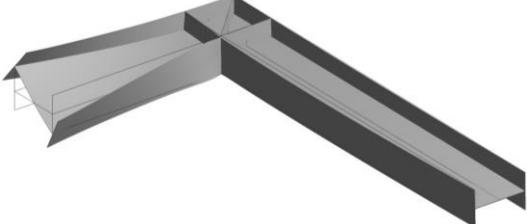
e diagonal (Fig. 1.5.d), a qual, segundo os autores, foi assumida como suficiente para impedir a distorção e o empenamento nas extremidades das barras conectadas.

Outros trabalhos que vale relacionar neste tópico são o de Krenk (1990), Morrel *et al.* (1996), e não menos importante, o de Tong *et al.* (2005), sendo este último dedicado somente às ligações com enrijecedor em diagonal para pórticos com perfis I. Tong *et al.* (2005) demonstram que algumas considerações adotadas sobre a rigidez dos elementos finitos utilizados para simular os enrijecedores das ligações, tomadas em pesquisas anteriores, podem conduzir a resultados pouco precisos, demonstrando uma relação de transmissão incompleta de empenamento entre perfis I por meio da ligação exibida na Fig. 1.5.b. Os autores propuseram uma metodologia capaz de considerar a rigidez do enrijecedor em questão, mostrando bons resultados comparativamente às análises feitas por meio de simulações com elementos finitos de casca.

Mais recentemente, com um trabalho bastante completo, Basaglia *et al.* (2012b) demonstram analiticamente, para seções transversais em I ou U, que devido à existência de um eixo de rotação (paralelo à alma desses perfis, cruzando por pontos de área setorial nula) em torno do qual os deslocamentos de empenamento se desenvolvem, sempre haverá transmissão completa de empenamento em ligações envolvendo perfis com essas seções, desde que não haja nenhuma deformação de flexão transversal na alma dos mesmos. Adicionalmente, Basaglia *et al.* (2012b) demonstram que as relações cinemáticas adotadas para as ligações entre perfis I ou U simples, também são válidas para perfis I ou U enrijecidos, pois embora o empenamento dessas paredes, em uma barra, provoque flexão transversal nas paredes respectivas da barra adjacente, nenhuma flexão transversal na alma desses perfis é verificada por conta do enrijecedor, o que, novamente, assegura a transmissão completa do empenamento.

Para melhor compreender as relações cinemáticas avaliadas para os vários tipos de ligações entre perfis I ou U citados anteriormente, a tabela 3.1 ilustra, de forma resumida, o que é proposto nos trabalhos de Sharman (1985), Krenk e Damkilde (1991), Tong *et al.* (2005) e Basaglia *et al.* (2012b). Nomeadamente, são apresentados 5 tipos de ligações entre perfis I (com a mesma validade para perfis U), envolvendo a continuidade das mesas ou da alma, e as respectivas relações cinemáticas para transmissão de empenamento. Além disso, é ilustrada também a configuração deformada de cada caso de ligação, para as quais uma das barras é carregada com um binário de forças (momento de torção), e estando todas livres para deslocamentos de torção, as barras adjacentes à barra carregada se deformam unicamente devido aos deslocamentos de empenamento devidos à torção da barra carregada (deslocamentos de flexão no centro da ligação foram impedidos, segundo mesmo procedimento de Basaglia *et al.* (2012b)).

Tabela 3.1 – Relações de transmissão de empenamento em diversos casos de ligações com continuidade nas mesas ou na alma de perfis I ou U.

| Tipo de ligação | Relações de transmissão de empenamento | Condição deformada |
|---|---|--|
| (i)  | $\theta'_C = \theta'_B = \theta'_A$ |  |
| (ii)  | Transmissão incompleta |  |
| (iii)  | $\theta'_B = \theta'_A$ (Basaglia <i>et al.</i> 2012b) ----- Transmissão incompleta (Tong <i>et al.</i> 2005) |  |
| (iv)  | $\theta'_B = -\theta'_A$ $\theta'_C = \theta'_A$ |  |
| (v)  | Transmissão nula |  |

No que se refere à ligação *i* da Tab. 3.1, que envolve a continuidade das mesas dos perfis, trata-se, notavelmente, de uma ligação entre vigas de mesma seção transversal, e a relação entre o empenamento nas extremidades das barras conectadas é completa e direta, isto é, não ocorre nenhum tipo de flexão transversal na alma da seção transversal devido à torção, e os mesmos valores de empenamento são transmitidos da barra carregada às demais barras conectadas de forma integral, conforme ilustra a configuração deformada respectiva.

Quanto às ligações com continuidade na alma, 4 diferentes configurações foram avaliadas pelos autores (ii a v). A primeira, que não apresenta qualquer tipo de enrijecimento (ligação ii), é um exemplo em que se pode notar as deformações de flexão transversal nas paredes da alma, e com isso, não é possível garantir a transmissão completo do empenamento, o que só ocorre nos casos em que a alma tem algum tipo de enrijecimento, seja através de chapas de enrijecimento em diagonal (lig. iii), ou de chapas de enrijecimento na forma de caixa (lig. iv). Repare que no caso de haver uma chapa em diagonal na ligação, alguns autores (*e.g.*: Krenk e Damkilde, 1991, e Basaglia *et al.*, 2012b) sugerem uma relação de transmissão de empenamento completa e direta (*i.e.*, $\Theta'_{\chi.m_a} = \Theta'_{\chi.n_{a+1}}$, ou $\Gamma=1$), enquanto Tong *et al.* (2005) sugerem que as deformações de flexão e torção da chapa do enrijecedor devem ser levadas em consideração, uma vez que esta pode não garantir a ausência de flexão na alma da seção na região ligação, caracterizando uma transmissão incompleta de empenamento.

Paralelamente, quando a ligação envolve o enrijecimento pelo prolongamento das mesas internas dos perfis, até a mesa oposta, formando uma caixa (lig. iv), a compatibilidade entre arestas de cada parede que forma a caixa obriga que as rotações de paredes adjacentes tenham sentidos opostos, o que caracteriza a transmissão de empenamento inversa, a qual, segundo os autores citados anteriormente, se dá de forma completa (*i.e.*, $\Theta'_{\chi.m_a} = -\Theta'_{\chi.n_{a+1}}$, ou $\Gamma = -1$). Contudo, uma vez que a ligação tenha, além da caixa, uma chapa em diagonal (lig. v), unindo arestas que se deslocariam em sentidos opostos, fica impedida qualquer transmissão de empenamento entre as barras*.

Neste ponto, com base no que é exposto nos trabalhos citados anteriormente, parece lícito afirmar que, apesar da transmissão do empenamento entre as barras poder ser admitida como completa (direta ou inversa, dependendo do caso) para as ligações com enrijecedores em caixa ou em diagonal, existe uma dependência natural da rigidez das componentes que promovem o enrijecimento da alma da seção na região da ligação, e apesar do fato de a rigidez à flexão no plano das chapas de enrijecimento ser muito maior do que a rigidez de empenamento das

* A influência da chapa em diagonal na ligação com enrijecedores na forma de caixa é apresentada em pormenor por Basaglia *et al.* (2012b).

barras conectadas, espera-se que a transmissão do empenamento nunca seja, de fato, completa, embora, em alguns casos, possa se mostrar muito próxima disso.

Para melhor ilustrar a questão acima, considere-se como exemplo um pórtico em L, formado por dois perfis I iguais, com dimensões da seção transversal e do pórtico indicadas conforme a Fig. 3.8 (em centímetros). As condições de apoio envolvem o engaste total (com empenamento também restringido) na base do pilar, e um vínculo de garfo (deslocamentos na direção \hat{X} e \hat{Y} , e rotação em torno de \hat{Z} , impedidos – e empenamento livre) na extremidade da viga, além disso, uma restrição no centro da ligação impede o deslocamento fora do plano. No que se refere à ligação entre as barras, 4 diferentes tipos são avaliados, (i) sem enrijecimento, (ii) com chapa em diagonal, (iii) em caixa, e (iv) em caixa e diagonal, conforme também indicado na figura (a espessura das chapas de enrijecimento é a mesma das mesas do perfil). Para avaliar a transmissão do empenamento, um binário de forças é aplicado no centro do pilar, e o material é considerado elástico linear com $E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu=0.3$.

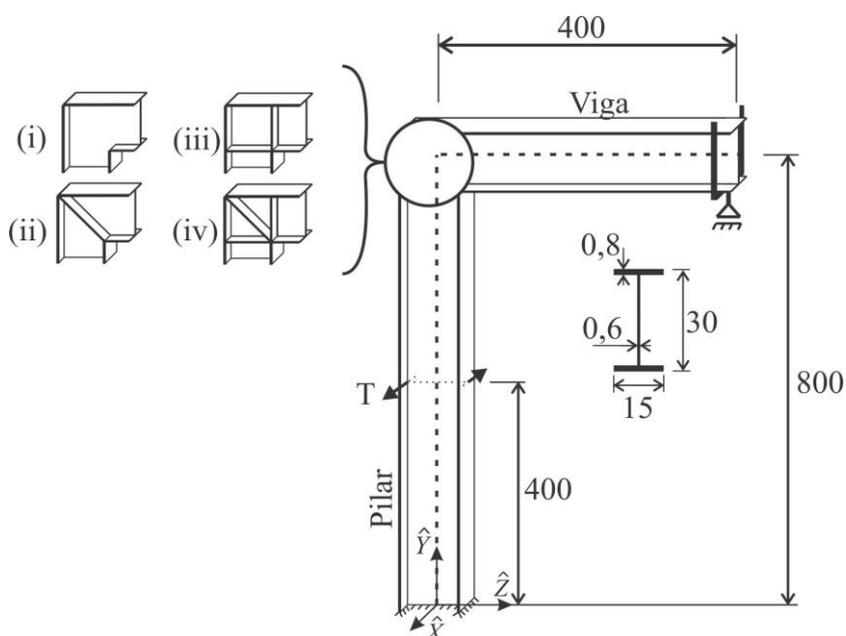


Figura 3.8 – Pórtico em L com diferentes tipos de ligação para avaliação da transmissão do empenamento. Dimensões em centímetros.

Para realizar as análises, duas metodologias são utilizadas, ambas com a ajuda do programa comercial ANSYS. A primeira, utiliza elementos finitos de barra tridimensional com 7 graus de liberdade por nó (BEAM188) – MEFb, dos quais um grau de liberdade é relacionado ao empenamento, enquanto a segunda análise utiliza elementos finitos de casca isoparamétricos (SHELL181) – MEFc.

Naturalmente, a modelagem da região da ligação por meio de elementos de casca é feita conforme a geometria da mesma, contudo, no caso dos elementos de barra tridimensional,

equações de acoplamento entre os graus de liberdade nas extremidades das barras conectadas devem ser impostas, em especial no que se refere ao grau de liberdade relacionado ao empenamento. Esse acoplamento se dá de forma semelhante ao representado pela Eq. 3.14, e para o caso em análise, todos os 6 graus de liberdade relacionados às translações e rotações são diretamente acoplados ($S_{ii} = 1$, para $i=1, \dots, 6$), enquanto o grau de liberdade relacionado ao empenamento é avaliado conforme a relação de transmissão admitida para a ligação em questão.

Com isso, e considerando-se o carregamento T de forma a produzir um momento de torção de 1 kN.cm , são obtidos os resultados da análise linear elástica, dos quais as Figs. 3.9 e 3.10 exibem o perfil de rotação em torno do eixo longitudinal de cada barra, para os modelos com elementos finitos de casca (MEFc) relativos a cada uma das 4 ligações (linhas cheias), e para os modelos com elementos finitos de barra (MEFb) relativos a transmissão de empenamento completa direta ($\Gamma=1$), completa inversa ($\Gamma=-1$), e nula ($\Gamma=0$) (linhas tracejadas).

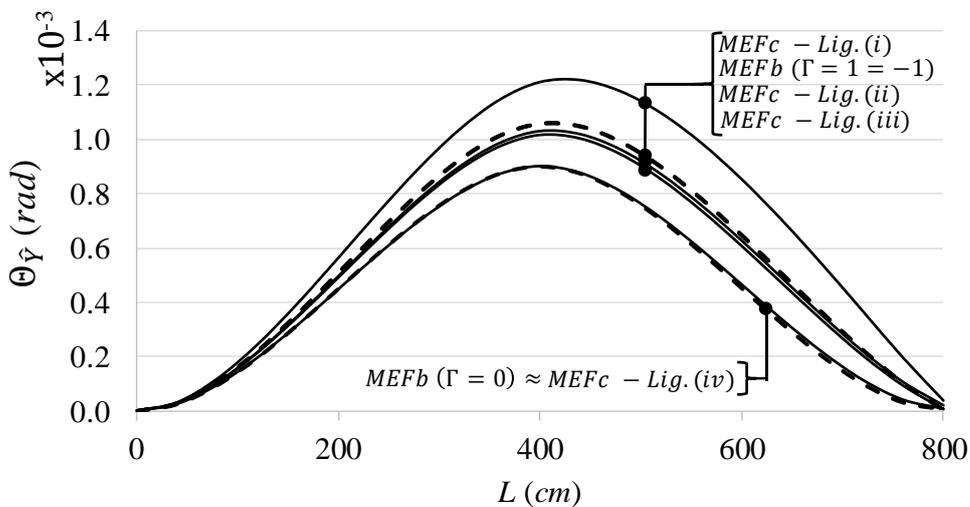


Figura 3.9 – Rotação do pilar em torno do eixo longitudinal obtida por meio de elementos finitos de casca e elementos finitos de barra tridimensional, para quatro tipos de ligações, e três condições de transmissão de empenamento.

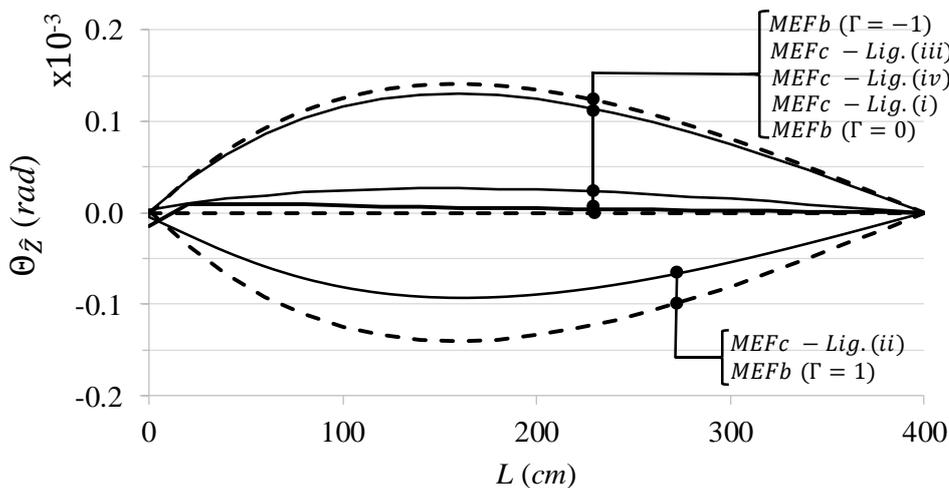


Figura 3.10 – Rotação da viga em torno do eixo longitudinal obtida por meio de elementos finitos de casca e elementos finitos de barra tridimensional, para quatro tipos de ligações, e três condições de transmissão de empenamento.

Os resultados exibidos pelas Figs. 3.9 e 3.10 conduzem às seguintes considerações:

- a) Primeiramente, situam-se os resultados obtidos por meio do MEFb para cada condição de transmissão de empenamento. No caso do pilar, (a₁) os perfis de rotação Θ_{φ} nos casos de transmissão completa direta e completa inversa de empenamento coincidem ($\Gamma = 1 = -1$), enquanto (a₂) o perfil de rotação Θ_{φ} no caso de transmissão nula de empenamento exhibe rotações consideravelmente menores ($\cong 20\%$ ao meio do vão). Conforme o esperado, os perfis de rotação Θ_{χ} da viga resultam (a₃) iguais e opostos nos casos de transmissão de empenamento completa direta e inversa, e (a₄) nulos no caso de transmissão de empenamento nula;
- b) Considerando-se o caso da ligação (i), sem qualquer tipo de enrijecimento, e para a qual espera-se uma transmissão de empenamento intermediária, verifica-se que para (b₁) o pilar, os valores de rotação Θ_{φ} resultam bastante próximos dos resultados obtidos com MEFb com transmissão de empenamento nula. De fato, esta transmissão muito pequena de empenamento verifica-se com o perfil de rotações Θ_{χ} da viga, o que se deve às grandes deformações de flexão transversal que resultam na região da ligação na ausência de chapas de enrijecimento;
- c) O segundo tipo de ligação analisado por meio do MEFc, com uma única chapa de enrijecimento em diagonal (ii), apresenta resultados (c₁) para rotação do pilar Θ_{φ} muito próximos com aqueles obtidos com MEFb para $\Gamma = 1$, o que é esperado conforme as relações exibidas na Tab. 3.1, entretanto, (c₂) o perfil de rotações Θ_{χ} da viga não apresenta valores de rotação tão próximos da condição $\Gamma = 1$, sendo a maior diferença relativa no meio do vão, de aproximadamente 33%;
- d) No caso de ligação com enrijecedores em forma de caixa (iii), os resultados esperados de transmissão completa inversa de empenamento verificam-se com maior acerto. Tanto no (d₁) caso do pilar, como no (d₂) caso da viga, os perfis de rotações Θ_{φ} e Θ_{χ} obtidos por meio do MEFc são bastante próximos dos resultados do MEFb na condição $\Gamma = -1$, sendo a maior diferença verificada no centro do vão da viga, de cerca de 7%;
- e) Enfim, considerando-se o caso da ligação (iv), com enrijecedores em caixa e diagonal, para o qual, conforme discutido anteriormente, pode ser assumida uma transmissão nula de empenamento entre as barras, (*i.e.*, $\Gamma = 0$), duas constatações são notáveis. Primeiramente, (e₁) no caso do pilar, as análises por meio do MEFc conduziram a resultados praticamente idênticos aos obtidos por meio do MEFb na condição de $\Gamma = 0$, contudo, (e₂) os resultados do MEFc para a viga ainda exibiram valores de rotações longitudinais significativas se comparadas à amplitude máxima possível, obtida com o MEFb na condição $\Gamma = -1$. Em outras palavras, ao invés de impedir por completo a transmissão do empenamento, a ligação ainda conduz a uma rotação da viga com cerca de 20% da amplitude máxima;

f) Não obstante, é importante notar que as rotações verificadas na viga resultam sempre uma ordem de grandeza menor do que aquelas verificadas no pilar, entretanto, a avaliação geral é feita comparativamente aos resultados em cada barra, obtidos com o MEFb sob condições de transmissão de empenamento perfeitamente completa ou nula.

Para melhor compreender a influência das chapas de enrijecimento na transmissão do empenamento, de forma complementar ao que já foi apresentado pelos autores citados no começo deste subitem, as seguintes análises também foram realizadas.

Considerando-se como variável principal o módulo de elasticidade dos elementos referentes às diferentes chapas de enrijecimento, é possível separar três variações características que permitem observar como a transmissão do empenamento entre as barras se altera em função de cada chapa. Para isso, diferentes definições de material são aplicadas a cada chapa que caracteriza uma determinada ligação, conforme ilustrado na Fig. 3.11, assim, pode-se considerar, por exemplo, um valor de rigidez muito pequeno para as chapas em diagonal, caracterizando o comportamento de uma ligação com enrijecimento somente em caixa, ou vice-versa, ou, ainda, sem nenhuma chapa de enrijecimento, e, naturalmente, valores intermediários entre essas condições.

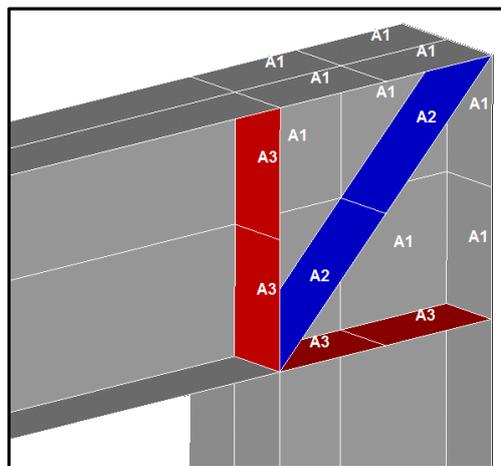


Figura 3.11 – Ligação com enrijecedores em caixa e diagonal, com definições individuais de propriedades de material.

O gráfico da Fig. 3.12 ilustra a rotação máxima em torno do eixo longitudinal da viga $\Theta_{\hat{z}}$, normalizada em função do valor de rotação máximo respectivo obtido sob a condição de transmissão completa de empenamento ($T=1$, ou -1), segundo as três variações da rigidez das componentes da ligação da Fig. 3.11, que permitem, em seus extremos, as mesmas condições de ligação da Fig. 3.8. São essas variações:

- Da rigidez da chapa em diagonal (chapas A2 da Fig. 3.11), de modo que $E/E_{barra}=1$ caracteriza a ligação (iv), e $E/E_{barra}=0$ resulta no comportamento da ligação (iii);
- Da rigidez das chapas A3 da Fig. 3.11, sendo que $E/E_{barra}=1$ equivale à ligação (iv), enquanto $E/E_{barra}=0$ caracteriza o comportamento da ligação (ii), e

- c) Da rigidez de todas as chapas de enrijecimento (A2 e A3, da Fig. 3.11), sendo $E/E_{barra}=1$ característica da ligação (iv), e $E/E_{barra}=0$ a representação da ligação (i).

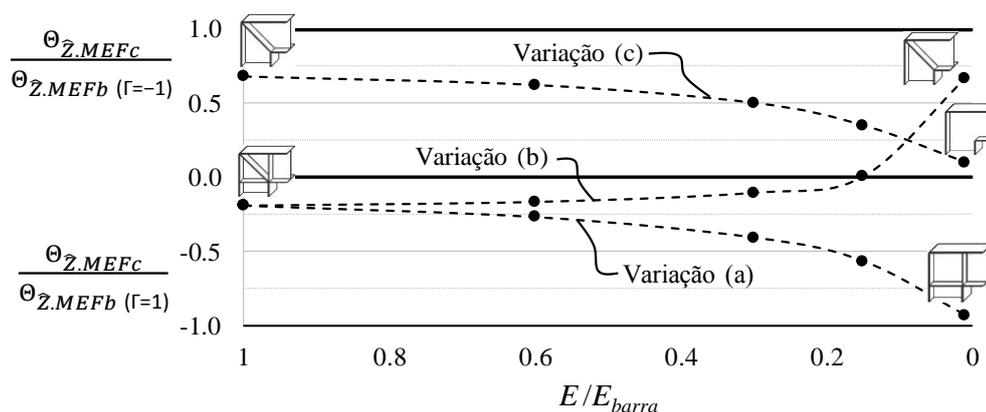


Figura 3.12 – Ligação com enrijecedores em caixa e diagonal, com definições individuais de propriedades de material.

No caso dos resultados exibidos pela Fig. 3.12, alguns comentários podem ser elencados, conforme segue:

- Primeiramente, tomando-se como referência os valores extremos das três variações de rigidez analisadas, nota-se que os resultados que mais se aproximam das condições de transmissão completa, direta ou inversa, ou transmissão nula de empenamento, são aqueles que correspondem (a₁) à ligação com enrijecedores em caixa, que resulta próximo da condição de transmissão completa inversa (diferença de 7%), (a₂) à ligação sem enrijecedores, que não apresentou significativa transmissão de empenamento (diferença de 10%), e (a₃) à ligação com enrijecedores em caixa e diagonal, que, embora com uma diferença maior do que a esperada (20%), se mostrou relativamente próxima da condição de transmissão nula de empenamento;
- Quando analisada a variação da rigidez da chapa em diagonal, de acordo com a variação (c), nota-se claramente uma tendência para a condição de transmissão completa direta de empenamento, entretanto, a variação de rigidez demonstra claramente que uma única chapa em diagonal não é suficiente para evitar as deformações de flexão transversal e/ou torção da alma na região da ligação para o caso em análise, o que faz com que esse tipo de ligação apresente uma transmissão incompleta de empenamento. Certamente, a depender da geometria da seção transversal e material que compõe as barras, haverá casos em que esta transmissão se aproximará mais do valor inteiro, entretanto parece lícito afirmar que não deve ser uma regra;
- Outra constatação relacionada à variação de rigidez (c), é relacionada à ligação sem qualquer enrijecedor. A partir deste caso, é razoável admitir que haverá sempre uma transmissão pequena de empenamento em situações envolvendo seções transversais mais esbeltas, mas, assim como no caso das ligações com enrijecedores em diagonal, não é possível afirmar isso genericamente, sendo, portanto, um caso dependente da geometria e material da seção transversal em questão;

- d) Ainda no que se refere à influência da chapa em diagonal, as variações (a) e (c) permitem observar que, em valores absolutos, esta componente é igualmente responsável por uma contribuição na transmissão do empenamento, independentemente da ligação conter enrijecedores na forma de caixa ou não;
- e) Com base na variação (b), é possível constatar que os enrijecedores em caixa promovem uma grande influência na transmissão do empenamento, e uma vez que estas chapas de enrijecimento promovem a transmissão inversa, enquanto a chapa em diagonal promove a transmissão direta, existem condições de composição de rigidez das mesmas em que a transmissão de empenamento resulta nula. Para o exemplo aqui exposto, esta condição envolveu as chapas que formam a caixa com uma rigidez de 15% em relação ao valor da rigidez do restante do sistema (incluindo, naturalmente, da chapa em diagonal);
- f) Por fim, uma vez que todas as variações estão sob a influência da rigidez da chapa em diagonal, e mais especificamente, as ligações (ii) e (iv), que apresentam uma diferença significativa das condições de transmissão de empenamento esperadas, pode-se notar mais claramente como as deformações implicadas à alma na região da ligação não são suprimidas somente com esta chapa, o que acaba por resultar, nessas condições de enrijecimento, invariavelmente, em uma transmissão de empenamento parcial.

Uma vez que as condições de transmissão de empenamento para o exemplo analisado não foram obtidas por conta do enrijecimento insuficiente promovido pela chapa em diagonal, um quinto tipo de ligação foi analisado, apenas para fins comparativos, no qual uma segunda chapa na diagonal oposta é inserida, de forma a promover o completo enrijecimento da região da ligação, e, com isso, conseguir uma condição de transmissão de empenamento nula. Portanto, considere-se a ligação (v) ilustrada pela Fig. 3.13, e os resultados obtidos pela análise linear elástica, exibidos pelos gráficos das Figs. 3.14 e 3.15, que mostram os perfis de rotações em torno do eixo longitudinal de cada barra, juntamente com os perfis de rotação obtidos por meio do MEFb, e as condições de transmissão de empenamento completa inversa, e nula, bem como o perfil de rotações obtido por meio do MEFc para as ligações (iii) e (iv), para fins comparativos.

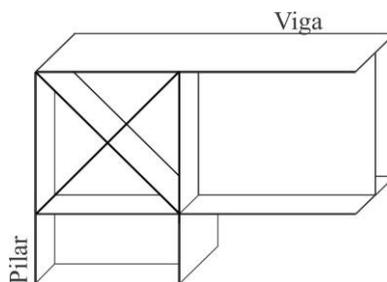


Figura 3.13 – Ligação com enrijecedores em caixa e dupla diagonal.

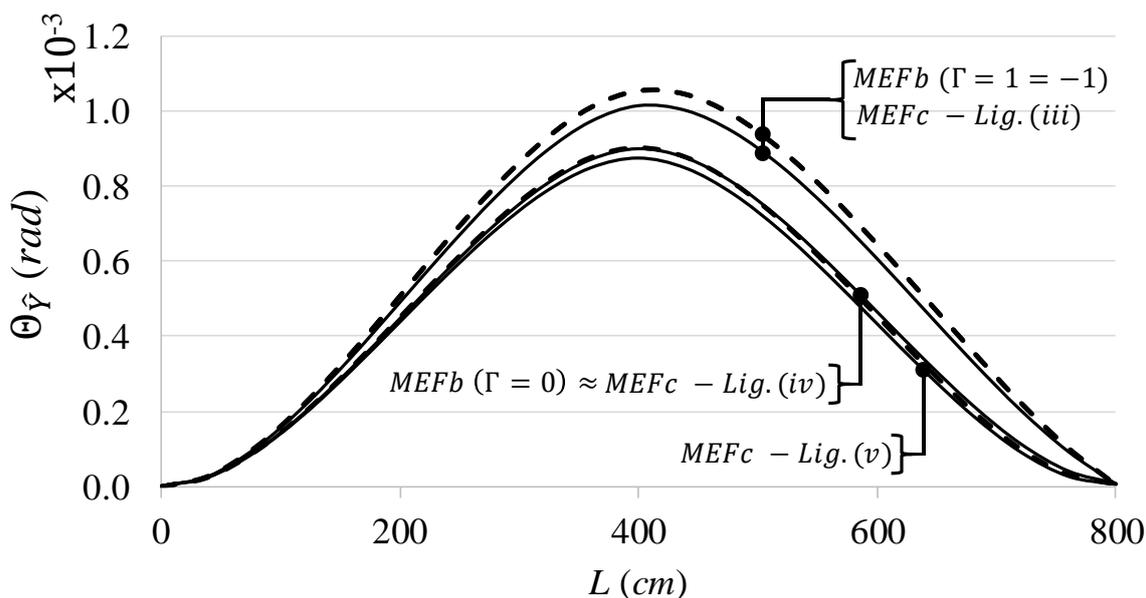


Figura 3.14 – Rotação do pilar em torno do eixo longitudinal obtida por meio do MEFc e do MEFb, para três tipos de ligações, e duas condições de transmissão de empenamento específicas, respectivamente.

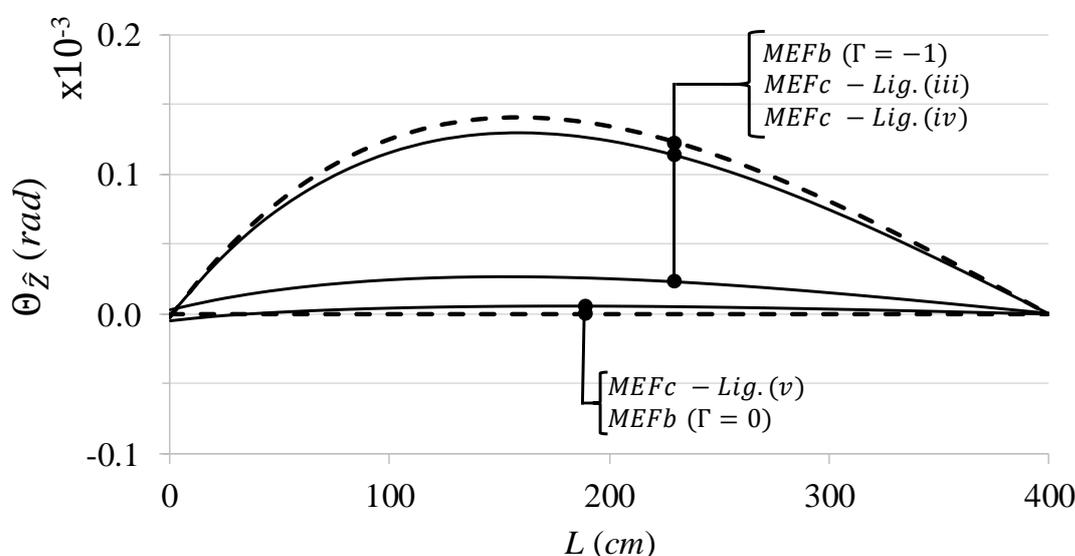


Figura 3.15 – Rotação da viga em torno do eixo longitudinal obtida por meio do MEFc e do MEFb, para três tipos de ligações, e duas condições de transmissão de empenamento específicas, respectivamente.

O que se confirma com base nos resultados acima ilustrados, é que a presença de chapas adicionais na diagonal oposta contribui com o completo enrijecimento da região da ligação, de tal forma que não mais se verifica qualquer transmissão de empenamento, conforme se observa pelo perfil de rotações longitudinais da viga, na Fig. 3.15. Com relação ao perfil de rotações no pilar, uma variação muito pequena é constatada, sendo que os resultados do MEFc para a ligação (v) resultam em rotações cerca de 3% menores no meio do vão, em comparação com aquelas obtidas com o MEFb e $\Gamma=0$.

Este resultado, já esperado devido ao óbvio impedimento das deformações da alma na região da ligação, corrobora com a demonstração analítica apresentada por Basaglia *et al.* (2012b)

sobre a relação entre essas deformações e a transmissão de empenamento, e complementa os resultados obtidos por Tong *et al.* (2005), de forma a clarificar as relações entre o empenamento das barras unidas por ligações de rigidez intermediária, entre as quais se inclui a ligação com enrijecedor em diagonal.

3.1.2. Deslocamentos e Rotações na Região da Ligação

A completa compatibilização dos deslocamentos e rotações, conforme a geometria da ligação adotada, exige não somente a relação entre os deslocamentos globais e de empenamento entre as barras conectadas, mas também um conjunto de compatibilizações relacionadas aos modos locais e distorcionais.

Para além disso, conforme comentado no subitem anterior, alguns tipos de ligação entre as barras oferecem uma dificuldade maior, mesmo no que se refere às relações entre os deslocamentos e rotações globais (Eq. 3.14). Nomeadamente, foi demonstrado que as ligações com continuidade na alma, mas sem o devido enrijecimento da mesma, estão associadas à uma condição de transmissão parcial de empenamento, e, conseqüentemente, a compatibilidade entre as deformações de flexão e torção (globais) entre as barras conectadas também resultam incompletas.

Dentre os casos de ligações entre perfis I com continuidade na alma analisados, especificamente aqueles sem enrijecedor ou com enrijecedores em diagonal, são exemplos em que os deslocamentos devidos à torção em uma barra não podem ser diretamente associados aos deslocamentos de flexão da barra adjacente, uma vez que se convertem em uma combinação de deformações locais, flexão e torção. Em caráter ilustrativo, a Fig. 3.16 possibilita a visualização de como os deslocamentos devidos a aplicação de um binário de forças em uma barra se distribuem pelas demais e pela região da ligação, no caso de não haverem enrijecedores na alma na região da ligação. Na análise ilustrada, a configuração deformada é mostrada em escala de cores para deslocamentos absolutos, e a configuração indeformada em cinza.

Com isso em mente, apenas os deslocamentos permanecem com a compatibilização dada de forma direta, isto é, tomando-se um exemplo de ligação entre dois perfis I, com continuidade na alma e sem enrijecedores (Fig. 3.17.a), a compatibilidade entre os graus de liberdade na extremidade de cada barra (Fig. 3.17.b) deve respeitar as condições dadas pela Eq. 3.17. No que se refere às relações entre $\Theta_{\bar{x}}$, $\Theta_{\bar{y}}$ e $\Theta'_{\bar{x}}$, não podem ser quantificadas à priori, e sua compatibilização envolve um conjunto de condições de restrição explicados a seguir. Já a relação entre as rotações $\Theta_{\bar{z}}$, é admitida como direta ($S_{66}=1$) para as ligações em questão (e também assim no trabalho de Basaglia, 2010), mas esta variável volta a ser comentada no Cap. 4 desta tese.

$$\begin{Bmatrix} U_{\hat{x}} \\ U_{\hat{y}} \\ U_{\hat{z}} \\ \Theta_{\hat{x}} \\ \Theta_{\hat{y}} \\ \Theta_{\hat{z}} \\ \Theta'_{\hat{x}} \end{Bmatrix}_{m_a} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & S_{44} & & & \\ & & & & S_{55} & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\hat{x}} \\ U_{\hat{y}} \\ U_{\hat{z}} \\ \Theta_{\hat{x}} \\ \Theta_{\hat{y}} \\ \Theta_{\hat{z}} \\ \Theta'_{\hat{x}} \end{Bmatrix}_{n_{a+1}} \quad (3.17)$$

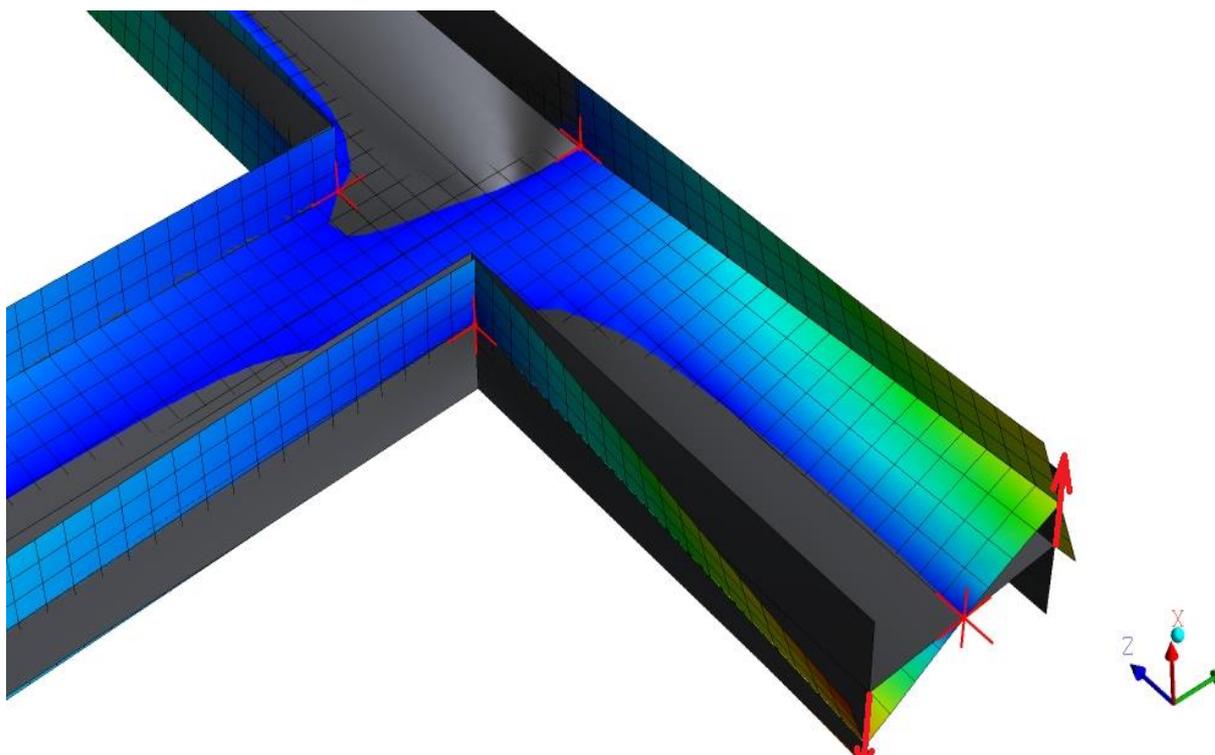


Figura 3.16 – Ligação entre perfis I com continuidade na alma e sem enrijecedores – configuração indeformada (cinza) e deformada (escala de cores).

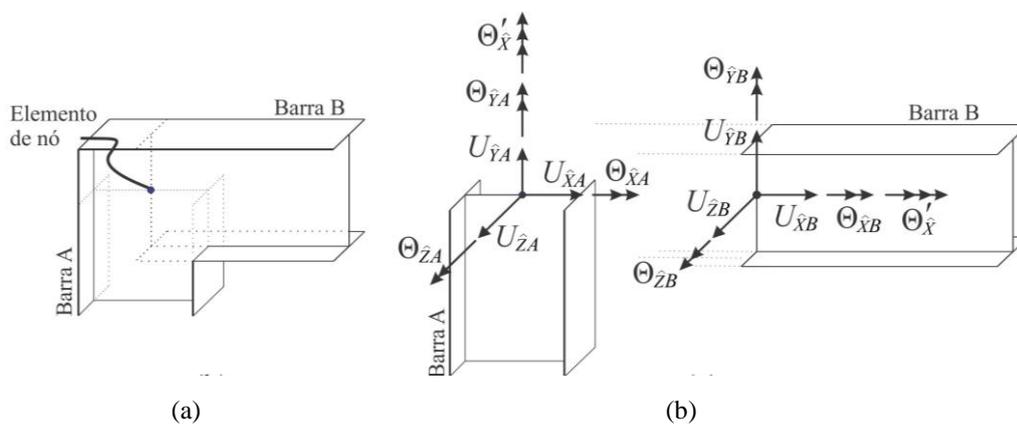


Figura 3.17 – (a) Ligação entre dois perfis I sem enrijecimento na alma, representada pelo elemento de nó, que permite a compatibilização entre os (b) graus de liberdade na extremidade de cada barra.

Uma vez que sejam definidas as compatibilidades entre os modos globais possíveis, a metodologia proposta por Basaglia (2010) para proceder os acoplamentos entre os deslocamentos devidos aos modos locais e distorcionais, bem como aqueles graus de liberdade globais que não puderam ter a sua relação definida à priori no elemento de nó, é semelhante àquela apresentada no item 2.5.2, para as condições de apoio arbitrárias, com a diferença que ao invés de equações de restrição de deslocamentos generalizados de nós específicos de uma seção transversal, têm-se equações de acoplamento (II) dos deslocamentos generalizados entre dois (ou mais) nós pertencentes a uma seção transversal de cada barra em questão.

Naturalmente, a definição destas equações de restrição depende da seção transversal das barras conectadas, e também da geometria da ligação em questão. Como exemplos da metodologia, embora não restritivos à aplicação da mesma, considere-se como exemplos os dois tipos de ligações a seguir.

3.1.2.1. *Ligação Entre Perfis I ou U com as Mesas no Mesmo Plano*

Para uma ligação entre dois perfis U simples (idênticos), com continuidade entre as mesas, para a qual admite-se transmissão direta e completa de empenamento (vide ligação (i) na Tab. 3.1), a compatibilidade entre as deformações devidas aos modos locais é dada por um conjunto de equações definidas em função da continuidade nos deslocamentos em determinados pontos de intersecção das seções transversais de ambas as barras conectadas.

Segundo Basaglia (2010), a continuidade total nos deslocamentos locais das mesas em perfis do tipo U, pode ser verificada com a ajuda de análises por meio do MEFc, conforme apresentado pelos autores, aqui reproduzido na Fig. 3.18. Além disso, também é base para as relações a serem escritas, a notável ausência de flexão transversal na intersecção das almas dos perfis.

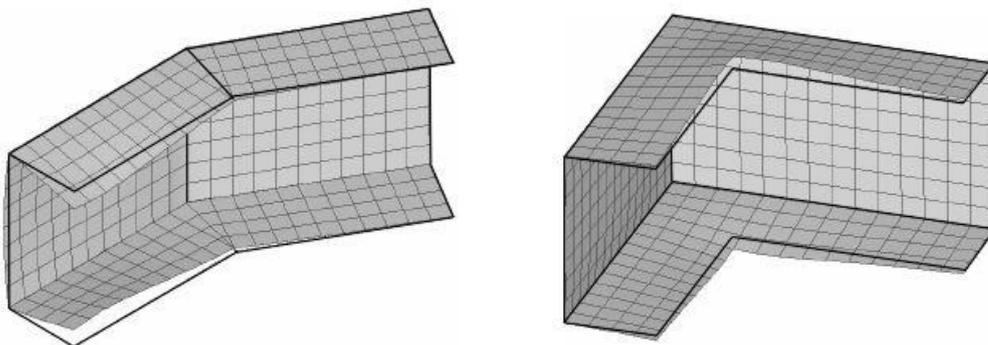


Figura 3.18 – Análise pelo MEFc mostrando a continuidade nos deslocamentos locais e distorcionais entre dois perfis U enrijecidos e ligação com continuidade nas mesas. *Fonte: Basaglia (2010).*

Tendo em vista o comportamento exibido nas análises realizadas pelo MEFc, é possível então determinar as condições de restrição necessárias para a compatibilidade aproximada dos deslocamentos locais neste tipo de ligação, as quais podem ser separadas em dois grupos, um envolvendo a alma do perfil, e outro envolvendo as mesas. Para ambos, no entanto, é necessário que se compreenda a ideia de intersecção entre os perfis associados à ligação em questão.

Para isso, a Fig. 3.19.a mostra a representação tridimensional de dois perfis U conectados, e orientados entre si segundo um ângulo $\alpha \neq 0$. Assumindo-se que o elemento de nó esteja representado no encontro dos eixos que interceptam o centro de gravidade (CG) da seção transversal das barras, é possível identificar o eixo \hat{Y} do elemento de nó (em torno do qual a orientação α das barras pode variar), e juntamente com ele, os pontos de intersecção R' e R'' , e Q' e Q'' , onde se materializam as ligações de partes das mesas de ambos os perfis. Vale notar ainda que a intersecção entre a alma de cada um dos elementos (cuja representação tridimensional individual da extremidade está em linhas tracejadas), só existe no caso de $\alpha < 0$.

No que diz respeito às mesas dos perfis, diferenciam-se os pontos R' e R'' , cuja intersecção entre as barras se dá na seção transversal mais extrema de cada barra, e os pontos Q' e Q'' , os quais são localizados a uma distância f da extremidade de cada barra, e dependem geometricamente do ângulo α e da distância entre a posição do CG e a extremidade da mesa (g), conforme ilustrado na Fig. 3.19.c. Com isso, é importante notar a necessidade de uma discretização dos elementos finitos de barra da GBT tal que sejam providos, no mínimo, dois nós na extremidade de cada barra, conforme ilustrado na Fig. 3.19.b.

a) *Compatibilidade na alma*: A restrição entre os deslocamentos da alma de cada perfil é dada por um conjunto de equações envolvendo os nós intermediários desta parede, segundo a discretização inicial da seção transversal (são necessários nós intermediários para esta compatibilização). Os referidos nós intermediários (m_i, m_{i+1}, \dots) são tomados da seção transversal extrema de cada barra*, conforme ilustrado na Fig. 3.19.c, e as equações de restrição, que compatibilizam os deslocamentos transversais de cada um, são dadas por

$$\Pi_i^I = \sum_{k=5}^{Nd} w_k(m_i) \hat{\eta}_k = 0 \quad (3.18)$$

b) *Compatibilidade nas mesas*: Para impor a condição de igualdade entre os deslocamentos e rotações de flexão na intersecção das mesas, faz-se uso dos nós intermediários representados por R' e R'' , localizados na seção transversal extrema de cada barra, e dos nós de extremidade

* No caso de perfis U, a depender do ângulo α , tomar a referida compatibilização pelos nós pertencentes à seção transversal mais extrema de cada barra pode representar mais uma pequena aproximação, dada a posição longitudinal da mesma em relação à posição onde verdadeiramente se materializa a ligação.

Q' e Q'' , localizados numa seção transversal localizada a uma distância f da extremidade da barra, conforme ilustra a Fig. 3.19.c. Assim, são dadas as seguintes equações de restrição:

$$\Pi_{R,1} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_A) \phi_k (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_B) \phi_k (x_{R_B}) = 0 \quad (3.19)$$

$$\Pi_{R,2} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_A) \phi_{k,x} (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_B) \phi_{k,x} (x_{R_B}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\Pi_{Q,1} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (Q_A) \phi_k (x_{Q_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (Q_B) \phi_k (x_{Q_B}) = 0 \quad (3.21)$$

$$\Pi_{Q,2} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (Q_A) \phi_{k,x} (x_{Q_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (Q_B) \phi_{k,x} (x_{Q_B}) = 0 \quad (3.22)$$

$$x_{Q_A} = L_A - f \quad x_{Q_B} = f = g \cdot \tan(\alpha / 2) \quad (3.23)$$

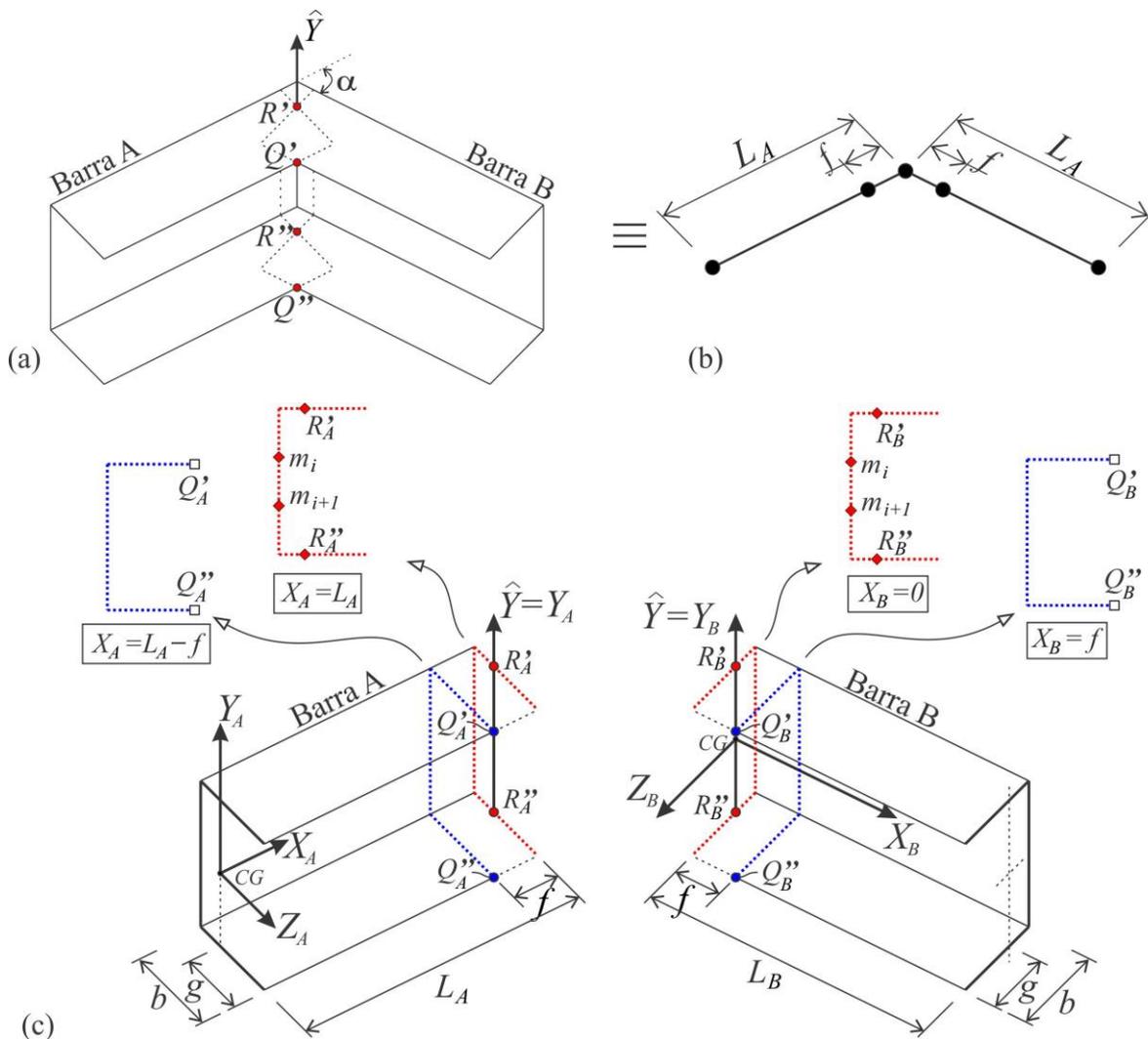


Figura 3.19 – (a) Ligação entre dois perfis U idênticos com continuidade nas mesas, (b) discretização em elementos finitos da GBT associada e (c) representação e localização dos nós onde é materializada a ligação.

A compreensão da metodologia proposta por Basaglia (2010) permite, naturalmente, a aplicação direta das equações de restrição de deslocamentos entre barras conectadas com continuidade nas mesas, formadas por perfis I (e também I enrijecidos). Neste caso, assim como em casos envolvendo um número maior de barras concorrendo na mesma ligação, os pontos onde se dá a intersecção das mesas deve ser identificado, conforme ilustra a Fig. 3.20.

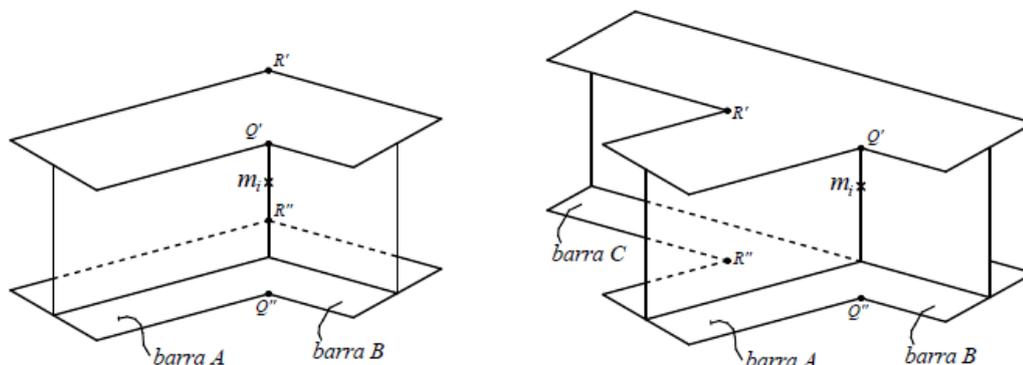


Figura 3.20 – Localização dos nós onde se inicia a intersecção das mesas, e materializam ligações entre dois e três perfis I com mesas no mesmo plano. Fonte: Basaglia (2010).

3.1.2.2. Ligação Entre Perfis I ou U com a Alma no Mesmo Plano

As ligações com continuidade na alma, por sua vez, envolvem três grupos de equações que se referem, especificamente, à compatibilidade (i) dos deslocamentos associados às mesas, (ii) dos deslocamentos associados à alma, e, como não puderam ser tratadas diretamente através da Eq. 3.17, (iii) também às rotações de torção e flexão lateral (globais).

Assim, com uma metodologia semelhante à apresentada no subitem anterior, determinam-se os pontos de intersecção das projeções tridimensionais das barras que são ligadas entre si (Fig.3.21.a), e com o auxílio de nós de elementos finitos de barra da GBT devidamente posicionados (discretização mínima na região da ligação), e dos nós das seções transversais associados às posições de intersecção de interesse (Fig. 3.21.b), são escritas as equações de:

- a) *Compatibilidade na alma*: Diferentemente do caso relacionado às vigas, a compatibilização na região da alma no presente caso precisa ser dada em termos de deslocamentos e rotações (devido à ocorrência de flexão transversal). Assim, as equações de restrição, que devem envolver nós intermediários (aqui representados unicamente pelo nó R – Fig. 3.21.b), são dadas por

$$\Pi_{R.1} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_A) \phi_k (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_B) \phi_k (x_{R_B}) = 0 \quad (3.24)$$

$$\Pi_{R.2} = \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_A) \phi_{k,x} (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{Nd} w_k (R_B) \phi_{k,x} (x_{R_B}) = 0 \quad (3.25)$$

b) *Compatibilidade nas mesas*: Identificam-se como “pontos chave” para este conjunto de equações de restrição, os pontos P' e P'' , e Q' e Q'' , conforme ilustrado na Fig. 3.21.b. Neste caso, entretanto, é importante notar que os deslocamentos de flexão transversal da parede de uma barra, estão associados aos deslocamentos de empenamento da barra adjacente, e, assumindo-se que a união entre essas paredes é rígida, também as rotações de ambas as paredes devem ser acopladas, conforme as equações

$$\Pi_{P.1} = \sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} \text{sen } \alpha \left(u_k(P_A) \phi_{k,x}(x_{P_A}) \right) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k(P_B) \phi_k(x_{P_B}) = 0 \quad (3.26)$$

$$\Pi_{P.2} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k(P_A) \phi_{k,x}(x_{P_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k(P_B) \phi_{k,x}(x_{P_B}) = 0 \quad (3.27)$$

$$\Pi_{Q.1} = \sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} \text{sen } \alpha \left(u_k(Q_A) \phi_{k,x}(x_{Q_A}) \right) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k(Q_B) \phi_k(x_{Q_B}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\Pi_{Q.2} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k(Q_A) \phi_{k,x}(x_{Q_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k(Q_B) \phi_{k,x}(x_{Q_B}) = 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} x_{P_A} &= L_A - f & x_{P_B} &= f \\ x_{Q_A} &= L_A & x_{Q_B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Repare que as equações acima são apresentadas de forma genérica, isto é, P aplica-se a P' e P'' , e Q aplica-se a Q' e Q'' , e mais do que isso, podem envolver nós intermediários pertencentes às mesas em questão, sendo tão maior o número de equações, quanto maior o número de nós com deslocamentos e rotações compatibilizados. Além disso, sabe-se que para perfis I simples não há modos distorcionais, por isso apenas o empenamento devido à torção figura nas Eqs. 3.26 e 3.28.

c) *Compatibilidade de deslocamentos e rotações de flexão lateral e torção*: A compatibilização dos deslocamentos e rotações associados aos modos globais que não pôde ser identificada de forma prévia (comentado no item 3.1.1), envolve a imposição de dois conjuntos de equações de restrição (Π_T e Π_θ), sendo um relacionado aos deslocamentos transversais devidos à flexão lateral (global) e/ou à rotação de torção, e outro associado às rotações de flexão lateral.

Primeiramente, define-se o acoplamento dos deslocamentos de flexão lateral, que se dão de forma direta envolvendo somente o ponto T , identificado na Fig. 3.21.b, assim, de modo que

$$\Pi_T = \sum_{k=3}^4 w_k(T_A) \phi_k(x_{T_A}) - \sum_{k=3}^4 w_k(T_B) \phi_k(x_{T_B}) = 0 \quad (3.31)$$

Por sua vez, a compatibilidade das rotações globais, devidas à flexão lateral e/ou torção, envolvem um comportamento complexo na região da ligação, e foi proposta de forma aproximada por Basaglia (2010), com base no comportamento típico verificado em análises por meio do MEFc. Assim, considere-se a ligação dada na Fig. 3.22.a, que facilita a visualização de 6 eixos de referência, orientados paralelamente ao eixo longitudinal das barras A e B. Os pontos de intersecção desses eixos, aqui identificados em função do número de cada eixo (e.g., [1,4], [1,5], [1,6], [2,4], ...), auxiliam a determinação das relações fundamentais, que são dadas para um caso envolvendo uma rotação de flexão na barra B, conforme ilustrado na Fig. 3.22.c.

É importante mencionar, que as relações propostas pelo autor se fundamentam nos movimentos de corpo rígido das seções transversais que cruzam os eixos 1 e 6, e a partir disso é possível escrever que

$$\Theta_{[3,6]} = \Theta_{[2,6]} = \Theta_{[1,6]} = \Theta_{[1,5]} \quad (3.32)$$

Uma vez que as simulações por meio do MEFc resultam em rotações $\Theta_{[3,4]}$ muito pequenas (ou praticamente nulas – Fig. 3.22.c) comparadas às rotações $\Theta_{[3,6]}$, e admitindo-se uma variação linear das rotações ao longo do eixo 3 (Fig. 3.22.b), tem-se que

$$\Theta_{[3,5]} = 0,50 \cdot \Theta_{[3,6]} \quad \Theta_{[3,4]} = 0 \quad (3.33)$$

E assumindo outra variação linear entre as rotações $\Theta_{[1,5]}$ e $\Theta_{[3,5]}$ (eixo 5 – Fig. 3.22.b), tem-se

$$\Theta_{[2,5]} = 0,75 \cdot \Theta_{[1,5]} = 0,75 \cdot \Theta_{[2,6]} \quad (3.34)$$

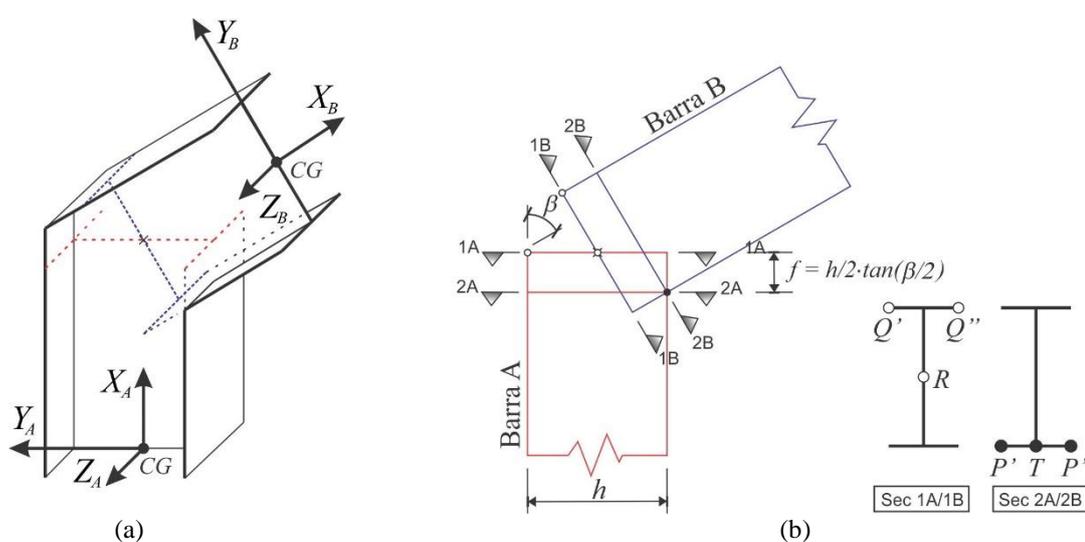


Figura 3.21 – (a) Ligação entre dois perfis I com almas no mesmo plano, e (b) projeção lateral identificando as seções de intersecção entre as barras, bem como os nós a serem considerados em cada uma para a compatibilização.

Assim, com a normalização unitária (item 2.4.2.1), e as relações 3.34, as condições de restrição aplicadas às rotações de flexão lateral, dadas em função dos nós localizados na alma, nas intersecções $[1,5]$, $[2,5]$, e $[2,6]$, para cada barra, podem ser dadas como

$$\Pi_{\Theta.1} = \frac{w_3([1,5]_A) \phi_{k,x}(x_{[1,5]_A})}{w_3([2,5]_A) \phi_{k,x}(x_{[2,5]_A})} = \frac{1}{0,75} \quad (3.35)$$

$$\Pi_{\Theta.2} = \frac{w_3([2,6]_B) \phi_{k,x}(x_{[2,6]_B})}{w_3([2,5]_B) \phi_{k,x}(x_{[2,5]_B})} = \frac{1}{0,75} \quad (3.36)$$

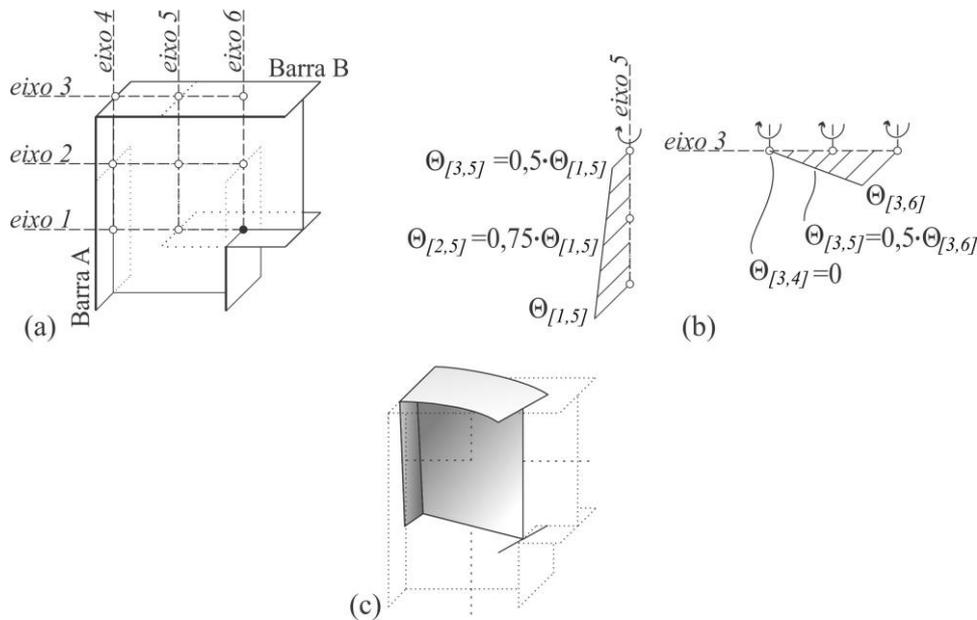


Figura 3.22 – (a) Localização dos eixos para identificação dos pontos coordenados, (b) distribuição linear das rotações ao longo dos eixos 3 e 5, e (c) representação da condição deformada para a rotação de flexão lateral na Barra B.

3.1.2.3. Ligação Entre Perfis I ou U enrijecidos com a Alma no Mesmo Plano

A metodologia proposta por Basaglia (2010) para a compatibilização dos deslocamentos e rotações entre perfis I ou U simples, também se aplica de forma muito semelhante (pois segue os mesmos princípios) ao caso de seções em I ou U enrijecidos.

Assim, a Fig. 3.23.a-d apresenta o exemplo de uma ligação entre dois perfis I enrijecidos, para a qual devem ser compatibilizados (i) os deslocamentos de flexão transversal e rotações na alma, (ii) os deslocamentos de flexão transversal e empenamento, e rotações nas mesas, (iii) os deslocamentos de flexão transversal e empenamento, e rotações nos enrijecedores, e, finalmente, (iv) as rotações de torção e flexão lateral globais. De forma resumida, portanto, podem ser determinadas as seguintes equações de compatibilidade:

- *Compatibilidades na alma:* Conforme ilustrado na Fig. 3.23.b, e sendo $R=R'$, ..., ou R'' , tem-se

$$\Pi_{R.1} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k (R_A) \phi_k (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (R_B) \phi_k (x_{R_B}) = 0 \quad (3.37)$$

$$\Pi_{R.2} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k (R_A) \phi_{k,x} (x_{R_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (R_B) \phi_{k,x} (x_{R_B}) = 0 \quad (3.38)$$

- *Compatibilidades nas mesas:* Conforme ilustrado na Fig. 3.23.c, e sendo $Q=Q_i'$, Q_i'' , Q_e' , ou Q_e'' , tem-se

$$\Pi_{Q.1} = \text{sen } \alpha \left[\sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} u_k (Q_A) \phi_{k,x} (x_{Q_A}) \right] - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (Q_B) \phi_k (x_{Q_B}) = 0 \quad (3.39)$$

$$\Pi_{Q.2} = \text{sen } \alpha \left[\sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} u_k (Q_B) \phi_{k,x} (x_{Q_B}) \right] - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (Q_A) \phi_k (x_{Q_A}) = 0 \quad (3.40)$$

$$\Pi_{Q.3} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k (Q_A) \phi_{k,x} (x_{Q_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (Q_B) \phi_{k,x} (x_{Q_B}) = 0 \quad (3.41)$$

- *Compatibilidades nos enrijecedores:* Conforme ilustrado na Fig. 3.23.d, e sendo $T=T_i'$, T_i'' , T_e' , ou T_e'' , tem-se

$$\Pi_{T.1} = \text{sen } \alpha \left[\sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} u_k (T_A) \phi_{k,x} (x_{T_A}) \right] - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (T_B) \phi_k (x_{T_B}) = 0 \quad (3.42)$$

$$\Pi_{T.2} = \text{sen } \alpha \left[\sum_{k=4}^{5+N_{dist}-1} u_k (T_B) \phi_{k,x} (x_{T_B}) \right] - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (T_A) \phi_k (x_{T_A}) = 0 \quad (3.43)$$

$$\Pi_{T.3} = \sum_{k=5}^{N_d} w_k (T_A) \phi_{k,x} (x_{T_A}) - \sum_{k=5}^{N_d} w_k (T_B) \phi_{k,x} (x_{T_B}) = 0 \quad (3.44)$$

- *Compatibilidade de deslocamentos e rotações de flexão lateral e torção:* Segue as mesmas recomendações apresentadas para seções I ou U não enrijecidas, isto é, devem ser obedecidas as seguintes restrições, com base nos pontos indicados na Fig. 3.23.a:

$$\Pi_{Q_m} = \sum_{k=3}^4 w_k (Q_{mA}) \phi_k (x_{Q_{mA}}) - \sum_{k=3}^4 w_k (Q_{mB}) \phi_k (x_{Q_{mB}}) = 0 \quad (3.45)$$

$$\Pi_{\Theta.1} = \frac{w_3 (M_A) \phi_{k,x} (x_{M_A})}{w_3 (J_A) \phi_{k,x} (x_{J_A})} = \frac{1}{0,75} \quad (3.46)$$

$$\Pi_{\Theta.2} = \frac{w_3 (F_B) \phi_{k,x} (x_{F_B})}{w_3 (J_B) \phi_{k,x} (x_{J_B})} = \frac{1}{0,75} \quad (3.47)$$

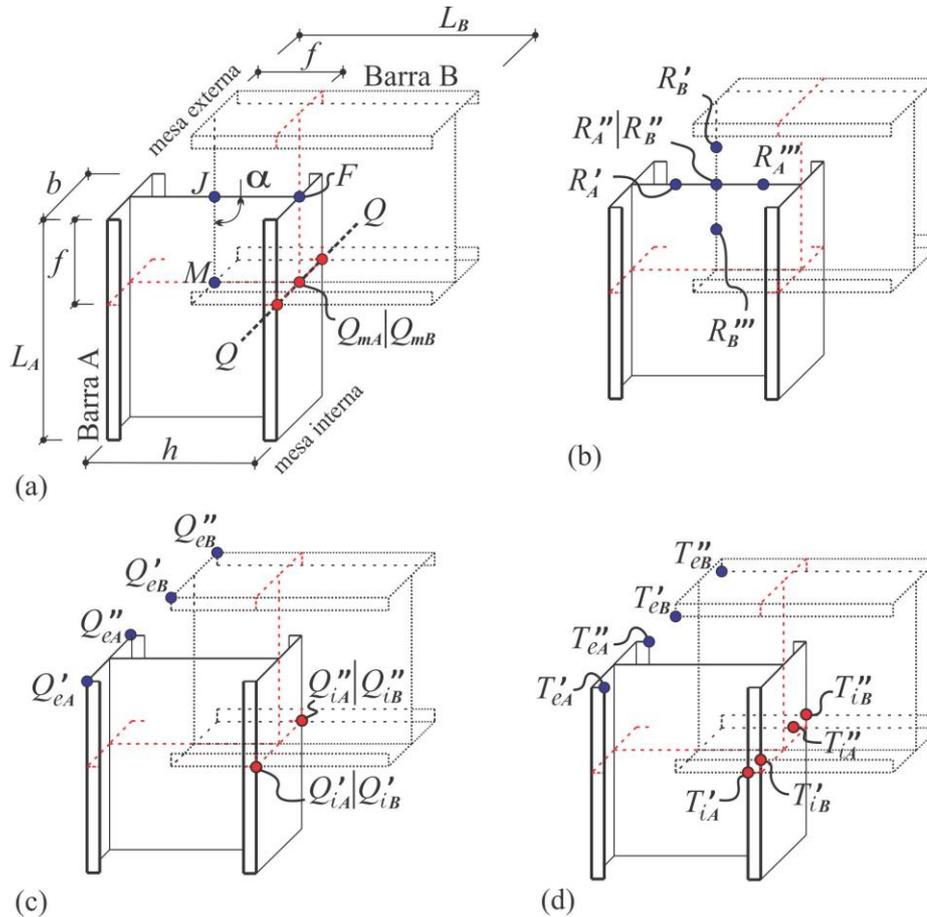


Figura 3.23 – Ligação entre perfis I enrijecidos com alma no mesmo plano: Disposição, e nós para compatibilizações (a) globais, (b) das almas, (c) mesas, e (d) enrijecedores.

3.1.2.4. Incorporação das Equações de Compatibilidade no Sistema de Equações da GBT

Como pôde ser visto nos itens 3.1.2.1 a 3.1.2.3, um número variável de equações de restrição complementa a função do elemento de nó, na completa compatibilização dos deslocamentos entre as barras conectadas entre si por meio de determinadas ligações, conforme generaliza a Eq. 3.13.

A incorporação deste conjunto de equações de restrição no sistema de equações da GBT, no entanto, diferentemente do que é indicado no caso de apoios não convencionais, pode conduzir a dificuldades na obtenção da solução, especialmente quando utilizada a estratégia baseada em Multiplicadores de Lagrange, recomendada no item 2.5.2.

Uma alternativa mais estável, verificada ao longo das implementações das análises na presente tese, é a utilização de uma estratégia baseada em penalização, na qual a condição de restrição é obtida por meio de um fator de penalização η_P . Nesta estratégia, como existe uma dependência do valor adotado para o fator de penalização, existe a desvantagem de que este fator

pode, em algum caso, relaxar a condição de restrição em questão, ou, por outro lado, conduzir a dificuldades numéricas devido à sua ordem de grandeza, uma vez que o relaxamento da condição de restrição tende a anular-se no limite de η_P tendendo ao infinito, e isso faz com que valores elevados sejam adotados para o mesmo. Não obstante, verifica-se a vantagem de que as dimensões do sistema permanecem inalteradas, e as soluções de problemas envolvendo um número elevado de equações de restrição, no que se refere aos problemas analisados nesta tese, apresentam-se numericamente mais estáveis (exemplos de estudos comparativos sobre as diferentes estratégias podem ser consultados em Yeniyay (2005) e Dong (2006)).

Desta forma, para proceder a incorporação das equações de restrição $[\Pi]$ no sistema de equações 2.91, basta considerar a matriz de penalização dada por $[\Pi]^T \cdot [\eta_P] \cdot [\Pi]$, de modo que,

$$\left([K] + [\Pi]^T [\eta_P] [\Pi] + \lambda G \right) \{d\} = \{0\} \quad (3.48)$$

onde $[\Pi]$ é a matriz que contém as equações de restrição, e $[\eta_P]$ é uma matriz diagonal que contém os fatores de penalização para cada grau de liberdade, sendo que se o mesmo valor for adotado igualmente, então $[\eta_P] = \eta_P [I]$.

4. ESTABILIDADE DE PÓRTICOS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

O tratamento dado às ligações analisadas no capítulo anterior se fundamenta em um conjunto de premissas que, naturalmente, procura dar uma representatividade suficientemente aproximada do comportamento típico dessas ligações. Contudo, algumas propriedades podem evidenciar uma limitação dos procedimentos apresentados, especialmente no que se refere à transmissão de alguns deslocamentos associados à rigidez das componentes dessas ligações, como, por exemplo, a rotação de flexão no plano.

Conforme já comentado no item 1.3, a rigidez à rotação de flexão conduz à caracterização da ligação entre rígidas, semirrígidas ou flexíveis. No entanto, como na prática é muito difícil que qualquer ligação seja perfeitamente rotulada (flexível), ou perfeitamente rígida, diferentes critérios de classificação podem ser adotados, dentre os quais destaca-se o Eurocódigo 3, Parte 1-8 – CEN 2005c, que classifica as ligações com base no chamado Método das Componentes. Na prática, uma grande parcela das ligações habitualmente empregadas em construções metálicas (em especial no caso de estruturas leves) poderiam ser classificadas como semirrígidas (Chen *et al.*, 1996; Chan e Chui, 2000; e Faella *et al.*, 2000).

As Figs. 1.1.a-c ilustram três ligações distintas entre viga e pilar formados por perfis I com a alma no mesmo plano, em uma situação tal que sejam responsáveis pela transmissão de um momento fletor. A primeira ligação (a), que se distingue pela união apenas na região da alma da viga por meio de uma cantoneira auxiliar (solução amplamente conhecida), devido à baixa rigidez característica, faz com que a transmissão de momento fletor seja desprezível, e as rotações de flexão sejam visíveis somente no elemento carregado (comportamento típico de rótula). Por outro lado, (b) uma ligação rigidamente soldada, com chapas de enrijecimento em caixa e diagonal (enrijecedor de cisalhamento), tende a se comportar de forma consideravelmente mais rígida, sendo capaz de transmitir o momento fletor com muito mais efetividade. Contudo, a ausência de enrijecedores, caracterizando a ligação exibida em (c), faz com que a região da alma seja responsável majoritária pela transmissão dos referidos esforços, com a conseqüente deformação por cisalhamento significativa o suficiente para caracterizar um comportamento intermediário entre os casos (a) e (b), de transmissão parcial de momento fletor.

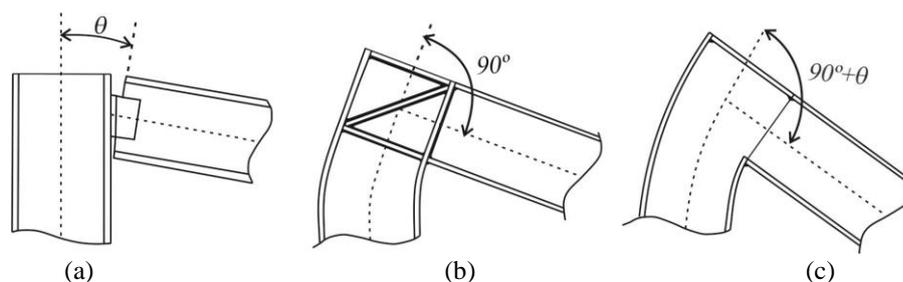


Figura 4.1 – Ligação viga-pilar unilateral (a) tipicamente flexível, (b) tipicamente rígida, e (c) semirrígida.

Para além dos casos ilustrados nas Figs. 4.1.a-c, inúmeros outros exemplos típicos de ligações semirrígidas (*e.g.*: ligações parafusadas ilustradas na Fig. 1.8) têm aplicação comum na indústria da construção metálica. No que se referem aos perfis de aço formados a frio, algumas das ligações mais utilizadas são aquelas do tipo parciais, envolvendo chapas de ligação (Fig. 1.7.b), o que, embora caracterize, na maioria dos casos, a total ausência de transmissão de empenamento, também são comuns os casos de ligações cuja transmissão dos deslocamentos generalizados se dá de forma parcial (ligações semirrígidas) devido à baixa rigidez dos componentes da ligação.

Com o objetivo de possibilitar nas análises da GBT, de forma mais ampla, a consideração do comportamento semirrígido das ligações, propõe-se neste capítulo a utilização de um conjunto de molas lineares associadas ao elemento de nó apresentado no capítulo 3, bem como, a depender do tipo de ligação em questão, novas condições de compatibilização dos deslocamentos entre as barras.

Neste mesmo contexto, alguns exemplos de aplicação da GBT são apresentados, juntamente com resultados obtidos por meio de rigorosas análises por meio do Método dos Elementos Finitos de Casca e/ou Sólidos, considerando formulações de contato e acoplamentos necessários à simulação de cada tipo de ligação. Os detalhes das implementações com o Método dos Elementos Finitos são apresentados separadamente no item 4.2.4.

4.1. Elemento de Mola

A primeira inclusão de molas em análises por meio da GBT, apresentada em Schardt (1989), Heinz (1994) e Jiang e Davies (1997), deu-se com a ajuda de análises não convencionais da seção transversal de modo a incorporar a ação das molas em modos específicos de deformação. Posteriormente, e de forma menos limitada, os trabalhos de Basaglia *et al.* (2007b) e Camotim *et al.* (2008), apresentam duas formulações capazes de incorporar molas para representar apoios elásticos (uma das quais apresentada no item 2.5.2), assim como o mais recente trabalho, de

Basaglia *et al.* (2013b), apresenta sua metodologia para possibilitar a inclusão de apoios elásticos contínuos ou discretos, com a finalidade de analisar conjuntos de terças com as restrições impostas pelas telhas.

Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia distinta, com a finalidade de possibilitar a consideração das molas de forma a ligar dois ou mais elementos de barras da GBT, através de graus de liberdade globais e/ou locais. Para isso, considere-se um elemento finito de mola e comprimento nulo, tal como ilustrado esquematicamente na Fig. 4.2, unindo os elementos de barra da GBT a e $a+1$.

O referido elemento finito consiste em duas molas, uma translacional (k_{jd}) e uma rotacional ($k_{j\theta}$), que são associadas a cada um dos graus de liberdade da GBT incluídos na análise, e que representam valores e suas derivadas, respectivamente.

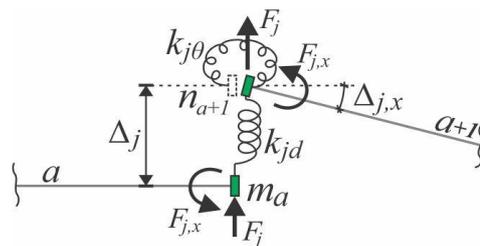


Figura 4.2 – Representação esquemática de um elemento de mola de comprimento nulo conectando duas extremidades de elementos de barra da GBT em seus deslocamentos de rotações do modo j .

O sistema de equações de equilíbrio relacionado ao elemento de mola, associado a uma determinada seção transversal, e a um modo de deformação j específico, é dado por

$$[k]_j \{\Delta_j\}^T \{\phi_j\} = \{F_j\} \quad (4.1)$$

onde $[k]_j$ é a matriz de rigidez do elemento de mola, e $\{\Delta_j\}$ e $\{F_j\}$ são os vetores associados aos deslocamentos e forças generalizadas associados à ação da mola para o modo de deformação em questão. A representação matricial da Eq. 4.2 é dada por,

$$\begin{bmatrix} k_{j\theta} & 0 & -k_{j\theta} & 0 \\ 0 & k_{jd} & 0 & -k_{jd} \\ -k_{j\theta} & 0 & k_{j\theta} & 0 \\ 0 & -k_{jd} & 0 & k_{jd} \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \Delta_{j,x}(m_a) \\ \Delta_j(m_a) \\ \Delta_{j,x}(n_{a+1}) \\ \Delta_j(n_{a+1}) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \phi_{j,x}(m_a) \\ \phi_j(m_a) \\ \phi_{j,x}(n_{a+1}) \\ \phi_j(n_{a+1}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{j,x}(m_a) \\ F_j(m_a) \\ F_{j,x}(n_{a+1}) \\ F_j(n_{a+1}) \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

sendo (i) k_{jd} e $k_{j\theta}$ os valores de rigidez translacional e rotacional da mola aplicada, e (ii) Δ_j e $\Delta_{j,x}$ os valores e derivadas dos deslocamentos associados ao modo de deformação j ($u_j(s)$, $v_j(s)$, $w_j(s)$ e/ou suas derivadas), que ocorrem nos pontos m_a e n_{a+1} , os quais representam uma seção transversal no caso dos modos globais, ou ponto da seção transversal no caso dos modos locais e distorcionais, entre os quais se situa a mola em questão. Além disso, tem-se (iii) os valores

das amplitudes dos valores ϕ_j e derivadas $\phi_{j,x}$ relativos ao modo j , para a seção transversal ou ponto da seção transversal em questão, e (iv) as forças generalizadas F_j e $F_{j,x}$ associadas à ação da mola entre as seções transversais ou pontos relacionados.

É importante reparar que, uma vez que os elementos finitos da GBT são representados, para cada modo de deformação, por uma matriz de dimensão 4x4, a incorporação do elemento de mola no formato apresentado é trivialmente realizada por meio dos mesmos métodos utilizados na montagem das matrizes globais de rigidez da GBT para os sistemas estruturais.

4.2. Aplicações da GBT com Ligações Semirrígidas

Com o objetivo de ilustrar e validar algumas das possíveis aplicações da GBT na análise de pórticos com ligações semirrígidas, são apresentados alguns exemplos implementados com as formulações descritas até então, porém envolvendo tipos de ligações inéditas, conforme comentado nos casos particulares.

Por questões de simplicidade, os exemplos implementados se fundamentam em duas únicas seções transversais ilustradas nas Figs. 4.3.a-b, que são uma seção em I enrijecido e I simples, respectivamente, definidas por um conjunto de 10 nós naturais e 10 intermediários no primeiro caso, e 6 nós naturais e 7 intermediários no segundo. Além disso, também as propriedades materiais são adotadas uniformemente, com $E=210\text{GPa}$ e $\nu=0.3$. Assim, a análise de tais seções conduz a um total de 22 e 19 modos de deformação, respectivamente, dos quais os primeiros 9 (sem contar o modo de extensão axial – 1) são ilustrados nas Figs. 4.4.a-b.

Adicionalmente, refira-se ainda ao fato de que embora sejam seções transversais abordadas nos trabalhos apresentados no capítulo 3 desta tese, as ligações estudadas envolvem um conjunto de considerações particulares, que são apresentadas na introdução de cada exemplo. Finalmente, todas as análises são avaliadas comparativamente com resultados obtidos por meio das também comentadas implementações no programa comercial ANSYS.

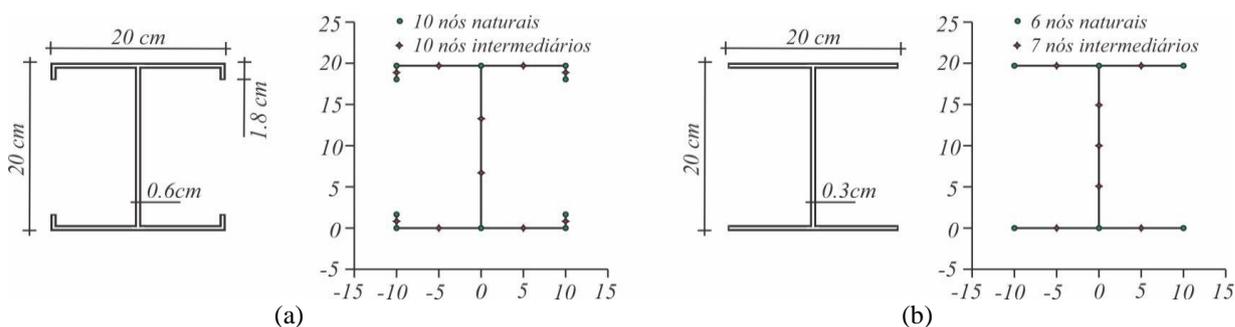


Figura 4.3 – Seção transversais em (a) I enrijecido, e (b) I simples, com respectivas discretizações.

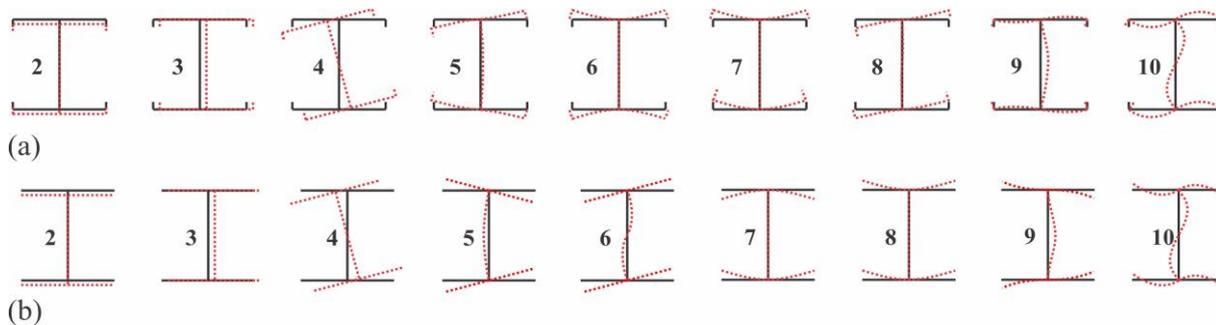


Figura 4.4 – Primeiros modos de deformação obtidos para as seções transversais em (a) I enrijecido e (b) I simples.

4.2.1. Pórtico com Pilares sob Compressão Apenas com Modos Globais

Um dos casos mais triviais possíveis envolvendo não apenas a GBT, mas também outros métodos discretos, e cujos resultados podem ser comparados com valores exatos obtidos analiticamente, o pórtico plano envolvendo somente modos globais (extensão axial – 1, e flexão no plano do pórtico – 2) ilustrado na Fig. 4.5 permite verificar a implementação do elemento de mola para verificação do seu comportamento semirrígido, o que é feito por meio da associação da mola somente à rotação do modo global de flexão no plano do pórtico.

Assim, sendo as dimensões do pórtico L_b 510 cm e L_c 410 cm, e as barras compostas por perfis do tipo I enrijecido conforme a Fig. 4.3.a, a mola rotacional com rigidez k passa a representar genericamente a ligação entre os elementos do pórtico, cujo carregamento P é aplicado somente nos pilares, e, portanto, não envolve nenhuma distribuição de momentos fletores.

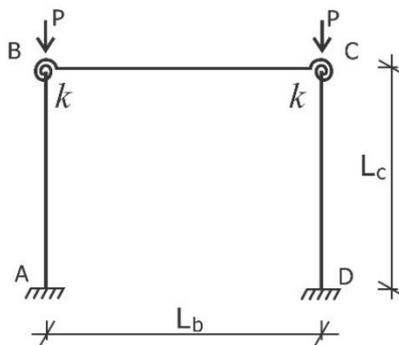


Figura 4.5 – Seção transversais em (a) I enrijecido, e (b) I simples, com respectivas discretizações.

Para a compatibilização dos deslocamentos entre as barras, aplicam-se os conceitos referentes ao elemento de nó apresentados no item 3.1, mas com a facilidade de se considerarem apenas dois modos de deformação, a relação ilustrada pela Eq. 3.14 se reduz a

$$\begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \end{Bmatrix}_{m_a} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \end{Bmatrix}_{n_{a+1}} \quad (4.3)$$

onde S_{33} representa um valor associado à transmissão da rotação de flexão entre os elementos conectados, e é representado pelo elemento de mola inserido na posição das ligações, ou seja, apenas os graus de liberdade associados aos deslocamentos $U_{\hat{X}}$ e $U_{\hat{Y}}$ são diretamente compatibilizados pelo elemento de nó, enquanto a rotação $\Theta_{\hat{Z}}$ são tratadas com a mola rotacional.

Como resultado, a Fig. 4.6 ilustra graficamente a variação da força crítica de instabilidade elástica $P_{cr,k}$ normalizada em relação ao valor obtido para o mesmo pórtico com ligações rígidas ($P_{cr,\infty} = \pi^2 EI / (1,423 L_c^2)$, onde I é o momento de inércia no plano do pórtico – Chajes, 1974)*, em função de um *Fator de Rigidez* $\rho_k = 1 / (1 + 3EI / kL_b)$, associado ao valor da rigidez rotacional k da ligação, conforme ideia apresentada no trabalho de Monforton e Wu (1963) – repare que o valor do fator de rigidez ρ_k representa uma relação entre a rigidez da viga que concorre na ligação, e da própria ligação, de modo que os valores desta relação variam entre 0, para uma ligação perfeitamente rotulada, e 1, para uma ligação rígida. Os valores intermediários representam a semirrigidez da ligação em questão.

Com base, nos resultados obtidos, os seguintes comentários podem ser apresentados:

- (i) Primeiramente, conforme o esperado, os resultados obtidos por meio da GBT praticamente coincidem com aqueles obtidos por meio de elementos finitos de barra com a ajuda do programa computacional ANSYS. As Figs. 4.7.a-b ilustram a configuração deformada do pórtico para o caso de ligações perfeitamente rígidas ($\rho_k = 1$) e perfeitamente rotuladas ($\rho_k = 0$). Os casos de ligações semirrígidas, naturalmente, possuem um comportamento intermediário entre os dois extremos;
- (ii) Existe uma relação praticamente linear entre P_{cr} e ρ_k , e para o caso em particular, a variação da força crítica entre os dois extremos de ρ_k é de cerca de 185%;
- (iii) Apesar da simplicidade do exemplo, ele demonstra o funcionamento do elemento de mola proposto quando acoplado a um grau de liberdade global (no caso em particular, o elemento de mola é associado somente aos graus de liberdade relativos à rotação de flexão no plano do pórtico, *i.e.*, derivada do modo 2).

* Para o pórtico com ligações rotuladas, a força crítica de instabilidade elástica passa a $P_{cr,0} = \pi^2 EI / 4L_c^2$, uma vez que passa a se comportar como dois pilares com uma extremidade engastada e a outra livre.

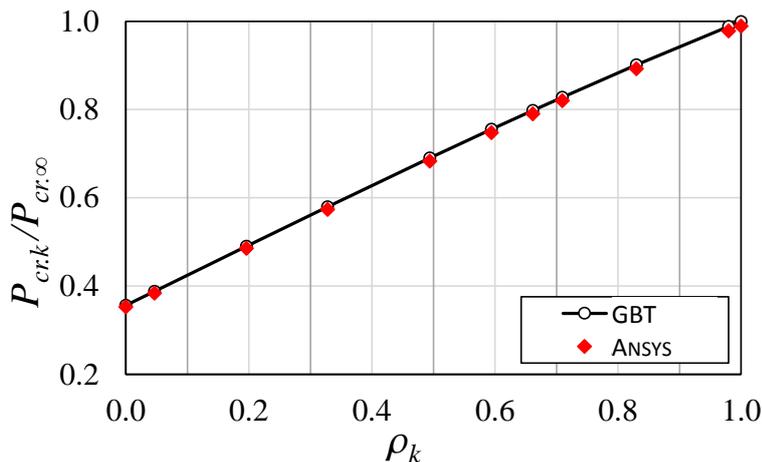


Figura 4.6 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico.

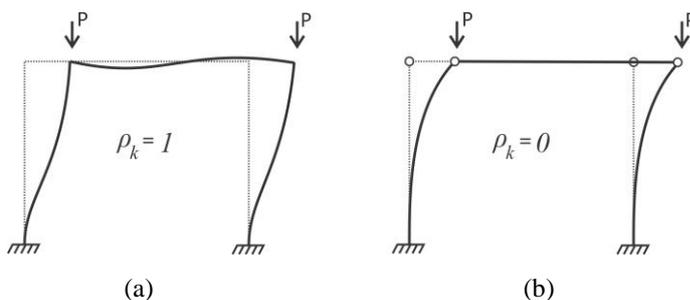


Figura 4.7 – Configuração deformada do pórtico plano nos casos de (a) $\rho_k=1$ e (b) $\rho_k=0$.

4.2.2. Pórtico com Esforços Variáveis e Ligações com Chapa de Topo Ajustada

Para o segundo caso, um pórtico semelhante àquele apresentado no item anterior é utilizado, com mesmas dimensões L_b e L_c , mas com o diferencial relacionado ao carregamento, que consiste em uma força concentrada no centro do pilar AB, com intensidade P, e outra força concentrada no centro da viga, com intensidade $0,8P$. É importante mencionar, ainda, que foram consideradas restrições fora do plano do pórtico na posição das ligações B e C.

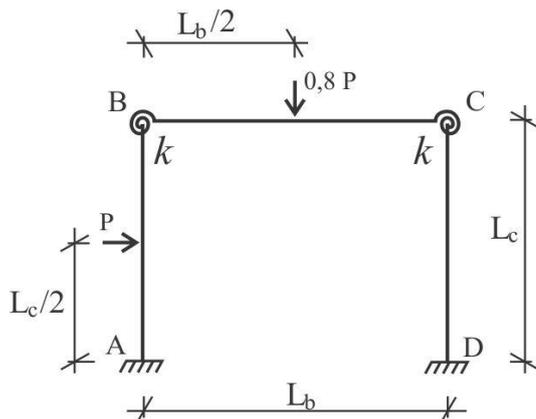


Figura 4.8 – Pórtico simétrico sob combinação de carregamentos e molas rotacionais nos nós B e C.

Naturalmente, as condições de carregamento descritas envolvem uma combinação de momentos fletores e esforços de compressão, que são diretamente influenciados pela rigidez rotacional das ligações em B e C, que passa a ser representada neste conjunto de análises também pelo elemento de mola introduzido neste capítulo, ou seja, novamente o grau de liberdade relativo à rotação de flexão passa a ser vinculado ao elemento de mola. Neste contexto, as Figs. 4.9.a-b ilustram os diagramas de momento fletor para o pórtico em questão, considerando duas condições específicas para as ligações, uma totalmente rígida, e a outra totalmente rotulada. O que se verifica nos casos envolvendo ligações semirrígidas, naturalmente, é uma condição intermediária de distribuição dos referidos esforços.

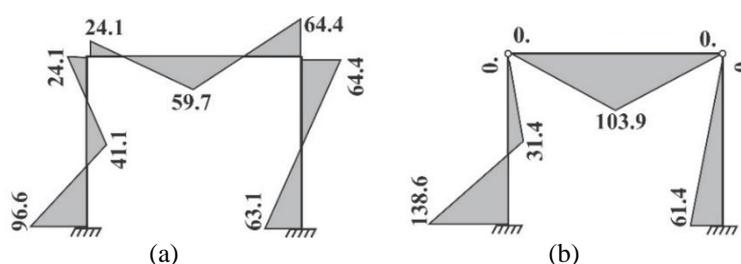


Figura 4.9 – Diagrama de momentos fletores (valores em kN.cm) para pórtico com ligações (a) perfeitamente rígidas – $\rho_k = 1$ e (b) perfeitamente rotuladas – $\rho_k = 0$.

Adicionalmente, há que se considerar, na intenção de se avaliarem os possíveis efeitos das ligações semirrígidas sobre os modos de instabilidade distorcionais e locais das barras conectadas, o tipo de ligação em questão, para isso, introduz-se aqui o estudo envolvendo ligações parafusadas com chapa de topo, que são amplamente utilizadas na prática da construção metálica, e são associadas, tradicionalmente, a um comportamento semirrígido.

As Figs. 4.10.a-c ilustram esquematicamente uma ligação com chapa de topo ajustada (conhecida do inglês por “*flush end plate*”), a qual envolve a união por solda entre o perfil da viga a uma chapa de topo, que, por sua vez, é unida ao pilar por meio de parafusos.

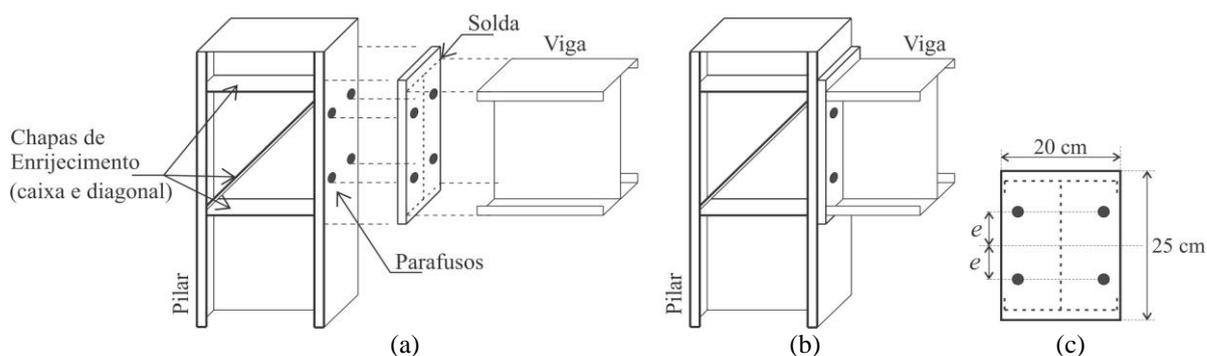


Figura 4.10 – Representação esquemática de uma ligação entre viga e pilar compostos por perfis I enrijecidos, com chapa de topo e quatro parafusos – (a) montagem, (b) configuração final e (c) detalhe da chapa de topo.

Contudo, antes de apresentar as condições de compatibilidade utilizadas para a simulação da ligação em questão, algumas condições adicionais merecem especial atenção:

- a) *Chapas de enrijecimento na alma do pilar*: Tal como verificado nos estudos do Cap. 3 desta tese, e em trabalhos anteriores também citados, em se tratando de perfis com baixa rigidez, é sensível o efeito das chapas de enrijecimento da alma na região das ligações, especialmente no que se refere à prevenção de deformações de flexão transversal da alma, e rotação de flexão lateral do conjunto. Assim, com a intenção de se avaliar apenas o problema da transmissão das rotações de flexão no plano, evitando outros efeitos como os relacionados à transmissão do empenamento, as referidas chapas são mantidas em todas as análises, conforme ilustra a Fig. 4.9.a, podendo ser, no entanto, alterada a sua espessura;
- b) *Chapas de topo*: Normalmente é um elemento de espessura mais elevada, e entende-se que possua rigidez suficiente para provocar a restrição do empenamento devido à torção e/ou distorção da extremidade da barra, bem como o engaste de uma borda das paredes da seção a ela soldadas, o que influencia diretamente nos modos locais e distorcionais nessas extremidades. Nos exemplos aqui analisados, a espessura desta chapa é mantida em todos os casos com um valor elevado (2 cm) comparativamente às espessuras das paredes das seções transversais analisadas, de forma a garantir a ausência de deformações de empenamento nos casos envolvendo instabilidades laterais com torção na viga, e permitir o estudo isolado dos fenômenos pretendidos;
- c) *Parafusos*: Dispostos conforme ilustra a Fig. 1.9.c, a uma distância e do eixo que cruza o CG da seção transversal da viga, os parafusos influenciam diretamente na rigidez rotacional da ligação, e por este motivo foram utilizados nas análises implementadas no programa ANSYS de forma a possibilitar a variação da rigidez rotacional da ligação e fornecer resultados comparativos àqueles obtidos por meio da GBT. De fato, esta variação na geometria da ligação é possível porque, nas análises propostas com a GBT, são desprezados os efeitos localizados na chapa de topo e na mesa do perfil do pilar*, bem como o comportamento dos próprios parafusos, tendo em vista que os efeitos decorrentes desses fatores são considerados por meio da rigidez rotacional do conjunto da ligação. Em outras palavras, o que se considera é que o diâmetro e posição (e) dos parafusos possam ser variáveis, de modo a possibilitar a variação da rigidez rotacional da ligação nas análises por meio do MEFc, enquanto nas análises pela GBT, esta variação é representada pelo valor de rigidez da mola rotacional associada ao modo 2.

Com isso, apresenta-se novamente uma situação nas análises por meio da GBT, em que a compatibilização dos graus de liberdade entre as barras nas ligações é dada pelo elemento de

* Refira-se aqui ao fato de que possíveis falhas, como rasgamentos ou esmagamentos das paredes na borda dos furos, por exemplo, podem conduzir a um comportamento completamente distinto do previsto para o conjunto em análise.

nó, envolvendo somente os modos globais, pois são restringidos os deslocamentos e rotações das paredes da seção transversal junto às extremidades das barras. Desta forma, a Eq. 3.14, que bem permite visualizar a compatibilização dos deslocamentos globais nas extremidades das barras, passa a ser dada por

$$\begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{X}} \\ \Theta_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \end{Bmatrix}_{m_a} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & S_{33} & & \\ & & & S_{44} & \\ & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\hat{X}} \\ U_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{X}} \\ \Theta_{\hat{Y}} \\ \Theta_{\hat{Z}} \end{Bmatrix}_{n_{a+1}} \quad (4.4)$$

onde S_{33} e S_{33} são tratadas com as equações de restrição 3.35 e 3.36, e S_{55} é tratado por meio do elemento de mola associado uma rigidez rotacional, que é dada pela rigidez rotacional total da ligação em questão.

No que se refere à metodologia detalhada utilizada para as análises realizadas no programa ANSYS, é apresentada no item 4.2.4, juntamente com os devidos comentários.

Dessa forma, a tabela 4.1 apresenta os resultados obtidos com a GBT ($P_{cr.k.GBT}$) e com o ANSYS ($P_{cr.k.ANSYS}$) para diversas análises envolvendo valores crescentes de rigidez rotacional da ligação (ρ_k)*. Além disso, para as análises realizadas com a GBT, também são dados os valores de $k_r L_b / EI$, os quais servem como referência, uma vez que, nas aplicações mais comuns de ligações metálicas “rígidas”, esses valores costumam variar entre 10 e 50 (Gerstle, 1988), o que implica em dizer que a maior parte das ligações está associada a um fator de rigidez ρ_k entre 0,77 e 0,95. Finalmente, também a natureza do modo crítico de instabilidade verificado na análise é referenciada (resultados obtidos tanto com a GBT quanto com o ANSYS).

Além disso, a Fig. 4.11 apresenta o gráfico que mostra a variação da força crítica de estabilidade elástica obtida pela GBT e pelo ANSYS, normalizada em relação ao valor obtido por meio da GBT para ligações consideradas idealmente rígidas ($P_{cr.\infty.GBT}$), em função do fator de rigidez das ligações (ρ_k). As Figs. 4.12.a-d, e 4.13.a-d, por sua vez, ilustram os modos de instabilidade críticos obtidos (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, assim como (c) o diagrama de participação dos modos da GBT para a barra na qual ocorre a instabilidade, e (d) a configuração dos respectivos modos na formação da configuração deformada final da seção transversal indicada, para casos de pórticos com ligações associadas a valores de $\rho_k=1$ (Figs. 4.12.a-d), e $\rho_k=0,02$ (Figs. 4.13.a-d).

* É importante justificar que, devido à intrínseca dificuldade para controlar com precisão a rigidez de uma determinada ligação por meio da metodologia utilizada para as simulações numéricas com o ANSYS, alguns resultados apresentam valores distintos de ρ_k em relação àqueles obtidos por meio da GBT, o que, no entanto, não prejudica o estudo comparativo dos resultados.

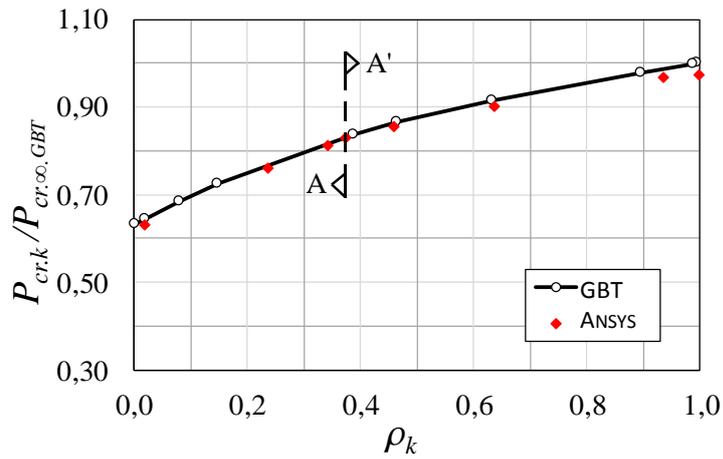


Figura 4.11 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica (P_{cr}) em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico (ρ_k) exibido na Fig. 4.8.

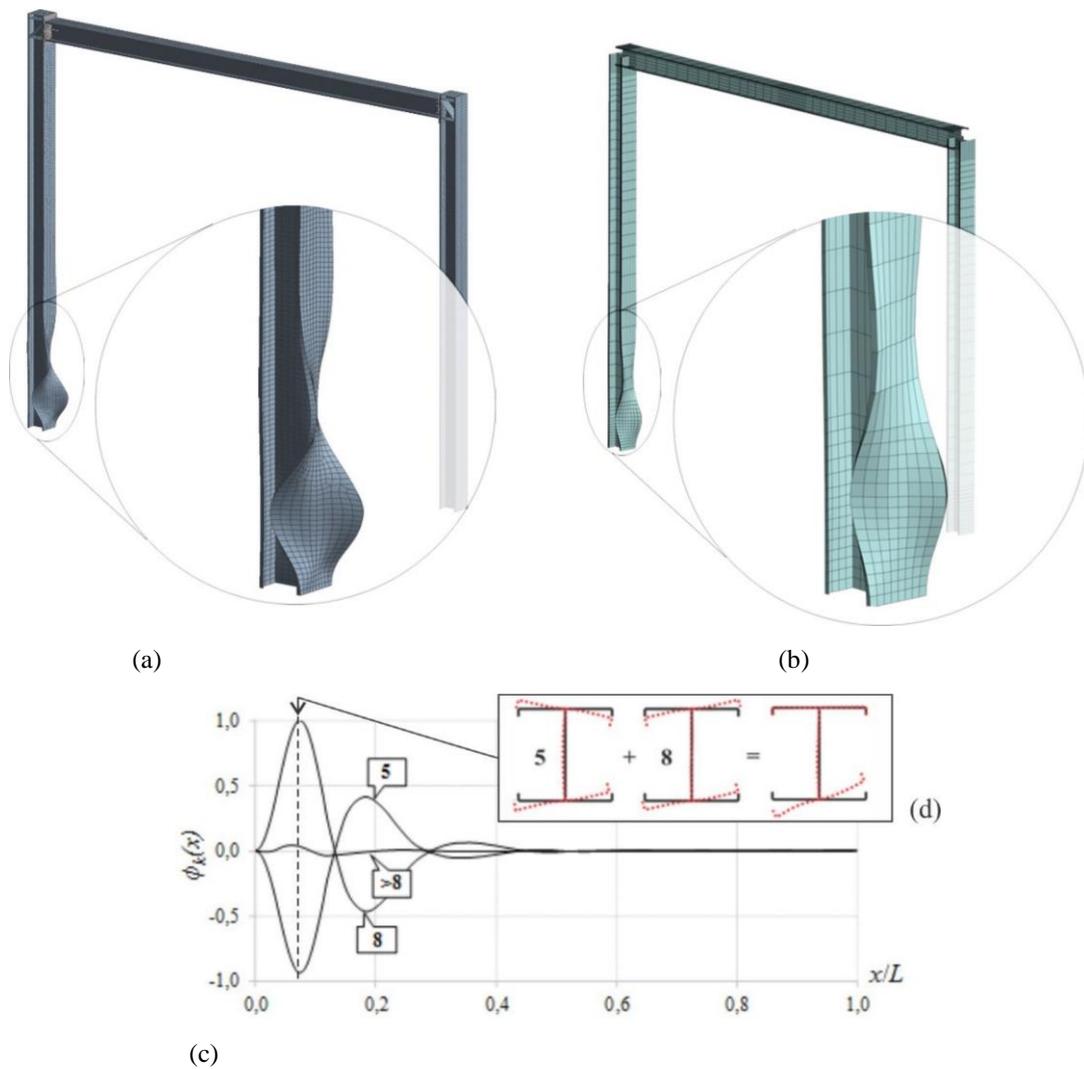


Figura 4.12 – Pórtico com $\rho_k=1$: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (c) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (d) correspondente composição da seção transversal mais deformada.

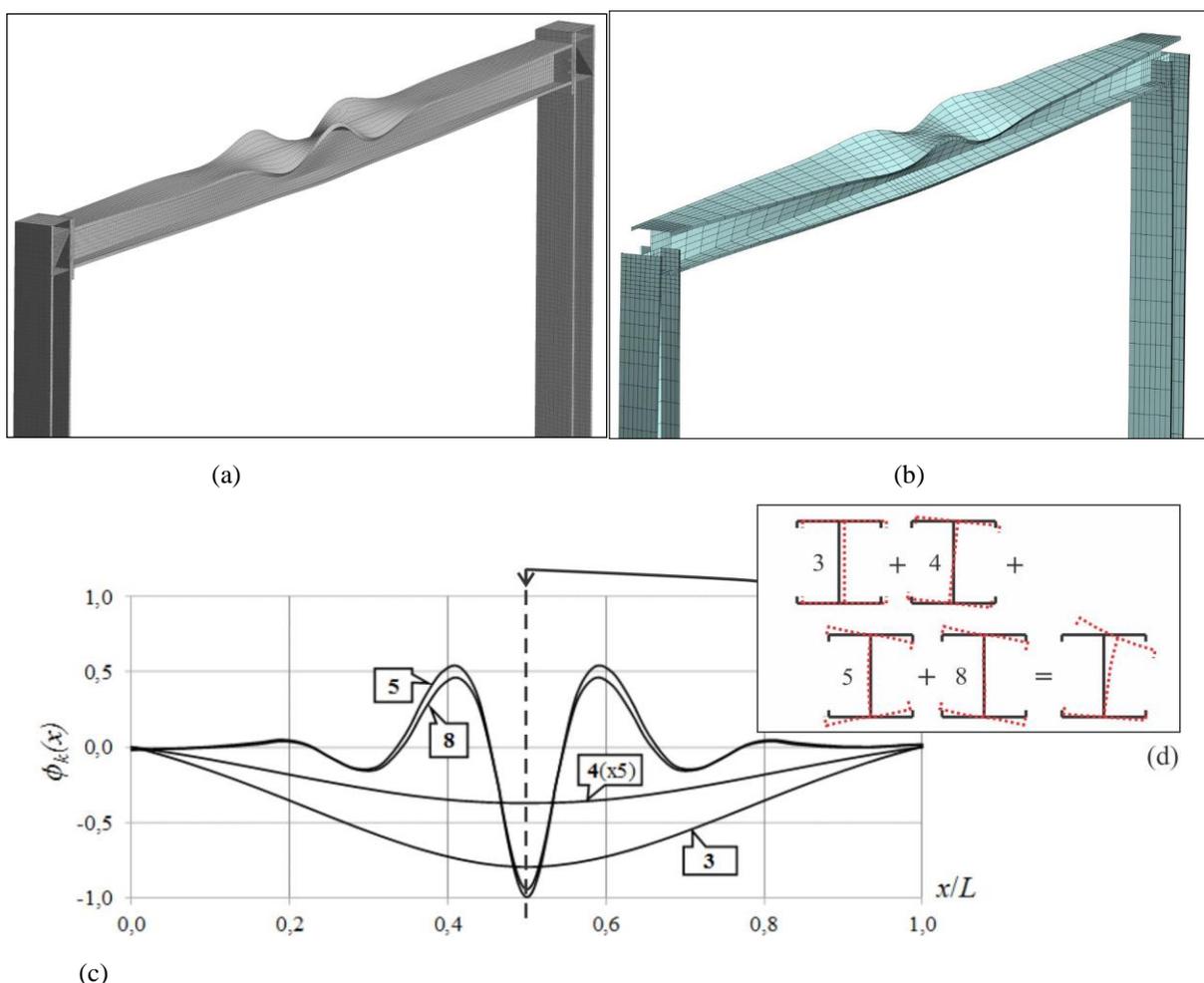


Figura 4.13 – Pórtico com $\rho_k=0,02$: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada.

Tabela 4.1 – Resultados da análise de estabilidade elástica do pórtico ilustrado na Fig. 4.8.

| $\rho_k.GBT$ | $k_r L_b / EI$ | $P_{cr.k.GBT}$ (kN) | $\rho_k.ANSYS$ | $P_{cr.k.ANSYS}$ (kN) | Modo de Instabilidade |
|--------------|----------------|------------------------|----------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1,00 | 520, | 178,5 | 1,00 | 173,5 | D (pilar esquerdo) |
| 0,99 | 260, | 178,3 | - | - | D (pilar esquerdo) |
| 0,90 | 26, | 174,5 | 0,94 | 172,4 | D (pilar esquerdo) |
| 0,63 | 5,0 | 163,3 | 0,64 | 161,0 | D (pilar esquerdo) |
| 0,46 | 2,5 | 154,4 | 0,46 | 152,4 | D (pilar esquerdo) |
| 0,39 | 1,9 | 149,6 | 0,38 | 148,1 | D (pilar esquerdo) / F-T-D (viga) |
| 0,15 | 0,5 | 129,2 | 0,34 | 144,7 | F-T-D (viga) |
| 0,08 | 0,3 | 121,9 | 0,24 | 135,5 | F-T-D (viga) |
| 0,02 | 0,1 | 114,9 | 0,02 | 112,4 | F-T-D (viga) |
| 0 | 0 | 113,1 | - | - | F-T-D (viga) |

*onde: D – distorção; F-T-D – Flexão, torção e distorção.

Assim, a análise dos resultados obtidos com o ANSYS e com a GBT exibidos nas Figs. 4.12.a-d e 4.13.a-d, bem como os valores de força crítica e modos de instabilidade respectivos ilustrados na Tabela 4.1 e no gráfico da Fig. 4.11, permite as seguintes observações:

- (i) Os resultados de força crítica de estabilidade elástica obtidos com o ANSYS e com a GBT apresentam-se muito próximos, com diferenças gerais inferiores a 3%, que foi verificada no caso de $\rho_k=1$, sendo os valores obtidos com a GBT sensivelmente maiores. Adicionalmente, os modos críticos de instabilidade apresentam grande similaridade*, com a diferença de que a GBT permite, ainda, uma compreensão profunda dos fenômenos que ocorrem em cada barra, por meio dos diagramas de amplitudes modais;
- (ii) Os pórticos associados às ligações rígidas ($\rho_k=1$) e rotuladas (a rigor, “praticamente” rotuladas, pois $\rho_k=0,02$), exibiram modos de instabilidade diferentes, sendo para o primeiro caso a instabilidade conduzida pelo pilar esquerdo (recorde-se a concentração de momentos fletores exibida na Fig. 4.9.a), e no segundo a instabilidade conduzida pela viga (diagrama de momentos fletores exibido na Fig. 4.9.b). Em termos dos resultados obtidos pela GBT, é possível dizer, ainda, que a instabilidade conduzida pelo pilar é governada pelos modos distorcionais 5 e 8, enquanto a instabilidade na viga é governada pelos modos de flexão em torno do eixo de menor inércia (3), de torção (4), e distorcionais (5 e 8);
- (iii) Verificou-se, ainda, que os modos de instabilidade pouco se alteram em termos de amplitudes nos casos das ligações semirrígidas. No entanto, ocorre uma mudança praticamente abrupta entre as instabilidades exibidas nas Figs. 4.12 e 4.13, conforme demarcado pela linha A-A’ no gráfico da Fig. 4.11, para valores de ρ_k em torno de 0,38 ou 0,39, no caso dos resultados obtidos com o ANSYS ou GBT, respectivamente. Além disso, para esses valores específicos de ρ_k , o modo de instabilidade envolve uma configuração deformada tanto no pilar esquerdo quanto na viga, como será comentado em detalhes mais adiante;
- (iv) Embora não muito claro, o gráfico da Fig. 4.11 evidencia também um comportamento praticamente bilinear para a variação das forças críticas de estabilidade elástica, sendo cada reta característica para um modo crítico de instabilidade, ora no pilar ($0,39 < \rho_k < 1$), ora na viga ($0 < \rho_k < 0,39$).

Além dos resultados comentados acima, cabe melhor avaliar a questão relacionada à mudança praticamente abrupta na natureza dos modos de instabilidade, verificada para um valor de $\rho_k \approx 0,39$, conforme ilustra o gráfico da Fig. 4.11. Neste contexto, buscando-se a condição mais próxima possível da transição, é possível verificar os fenômenos de instabilidade associados à viga (modo característico aos casos com ligações menos rígidas, *i.e.*, com menor capacidade de transmitir momento fletor) e ao pilar (modo característico aos casos com ligações mais rígidas, *i.e.*, com maior capacidade de transmitir momento fletor), no mesmo resultado.

* Recorde-se que as imagens obtidas pela GBT são representações tridimensionais obtidas a partir de um modelo de barras unidimensional.

As Figs. 4.14.a-d, apresentam os resultados obtidos nesta condição de transição, onde se nota, mais uma vez, resultados semelhantes para a configuração deformada obtida com o ANSYS (a) e com a GBT (b), os quais foram obtidos para valores de rigidez da ligação sensivelmente diferentes (no caso da GBT associado a $\rho_k \approx 0,39$, enquanto os resultados do ANSYS são associados a $\rho_k \approx 0,38$). Adicionalmente, a análise com a GBT oferece um resultado mais elucidativo do fenômeno analisado, conforme ilustra a Fig. 4.14.c, onde se tem as funções de amplitude modal para todas as barras do pórtico, que permitem visualizar a instabilidade governada pelo pilar, mas com amplitudes significativas para os modos 3, 4, 5 e 8 na região central da viga. A Fig. 4.14.d auxilia a compreensão deste gráfico ilustrando, para as seções mais deformadas no pilar (A-A') e na viga (B-B'), a composição dos modos de deformação para a configuração deformada final.

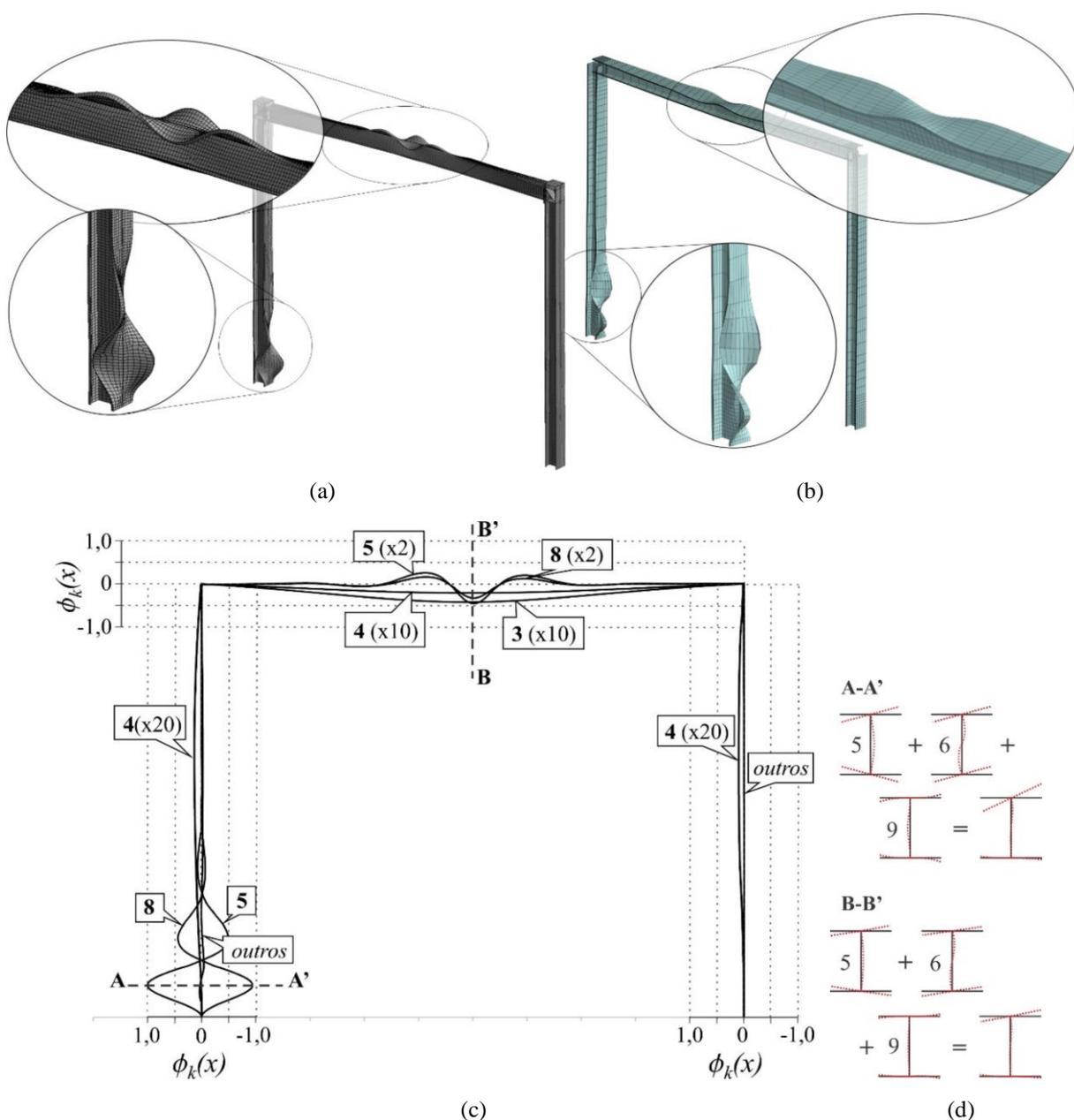


Figura 4.14 – Pórtico com $0,38 < \rho_k < 0,39$: (a) Deformada do modo crítico de instabilidade obtido com (a) o ANSYS e (b) com a GBT, (c) funções de amplitude modal, e (d) correspondente composição das seções transversais mais deformadas.

4.2.3. Pórtico em L com Ligação com Chapa de Topo Ajustada

Outro caso interessante é ilustrado pela Fig. 4.15.a-c, sendo um pórtico em L, formado por perfis I simples indicados na Fig. 4.3.b, com propriedades materiais $E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu=0,3$, contraventado fora do plano no nó B, e sujeito a uma combinação de forças concentradas de amplitude $0,3P$ no meio do comprimento da viga e $0,7P$ na metade da altura do pilar. Adicionalmente, tal como nos casos anteriores, o pórtico também sofre a influência de uma mola rotacional na ligação do nó B, de tal forma que a distribuição de momento fletor varie entre os extremos ilustrados na Fig. 4.15.b, para o caso de uma ligação idealmente rotulada ($\rho_k = 0$), e Fig. 4.15.c, no caso de uma ligação idealmente rígida ($\rho_k = 1$).

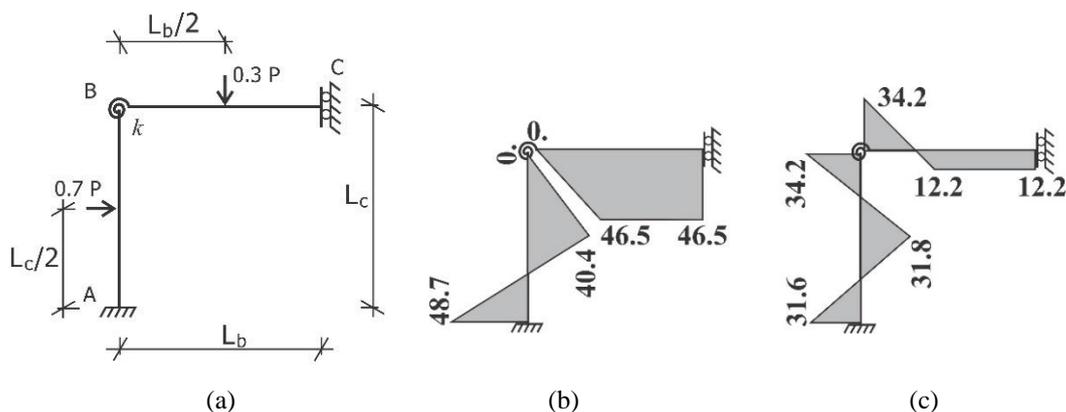


Figura 4.15 – (a) Pórtico em L, com carregamentos e mola rotacional no nó B, e seus respectivos diagramas de momento fletor para condições de (b) $\rho_k = 0$ e (c) $\rho_k = 1$.

Além disso, este pórtico é avaliado considerando-se o mesmo tipo de ligação do exemplo apresentado em 4.2.2, isto é, parafusada com chapa de topo ajustada, conforme indica esquematicamente a Fig. 4.16. Além disso, mantêm-se válidas as premissas adotadas no item 4.2.2, de que em todas as análises considera-se a existência de chapas de enrijecimento da alma em caixa e diagonal, e uma chapa de topo de espessura elevada (2 cm), unida rigidamente à viga (solda), e unida à mesa do pilar por meio de 4 parafusos de diâmetro igual a 2 cm, espaçados a uma distância variável e , do eixo horizontal do CG da viga, sendo esta distância e , juntamente com a espessura das chapas de enrijecimento da alma na ligação, os fatores que permitem a variação do coeficiente de rigidez da ligação em questão sem que sejam alteradas as condições relativas às hipóteses adotadas para simulação por meio da GBT.

Portanto, com as mesmas compatibilizações necessárias, a serem aplicadas pelo elemento de nó da GBT, daquelas apresentadas em 4.2.2, bem como a mesma metodologia aplicada nas análises com ajuda do programa ANSYS (item 4.2.4), a Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos com a GBT ($P_{cr,k,GBT}$) e com o ANSYS ($P_{cr,k,ANSYS}$) para diversas análises envolvendo valores crescentes de rigidez rotacional da ligação (representados por $\rho_k=1/(1+4EI/kL_b)$). Da

mesma forma, também são apresentados valores de $k_r L_b / EI$, e a natureza do modo crítico de instabilidade verificado.

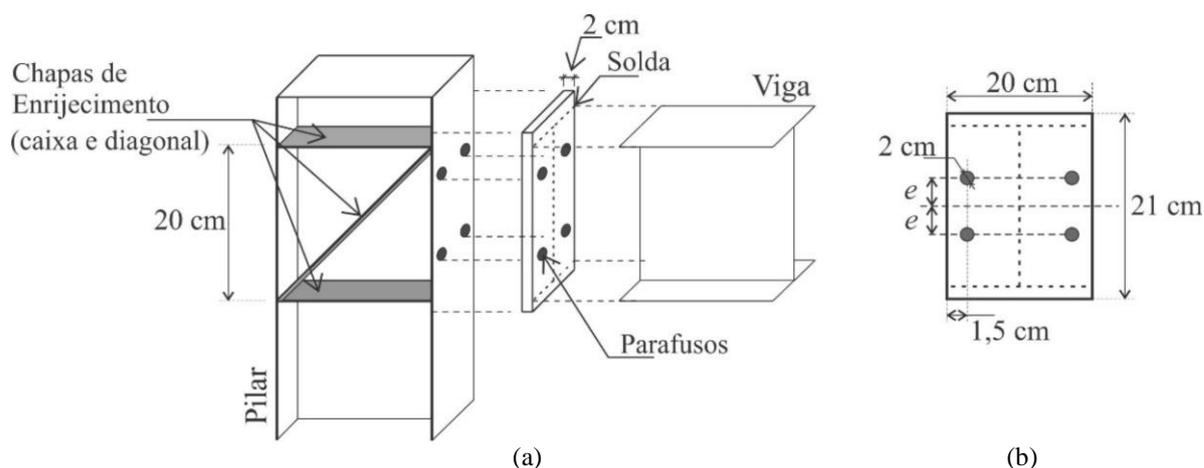


Figura 4.16 – Representação esquemática de uma ligação entre viga e pilar compostos por perfis I, com chapa de topo e quatro parafusos – (a) montagem e (c) detalhe da chapa de topo.

Paralelamente, a Fig. 4.17 ilustra o gráfico com a variação da força crítica de estabilidade elástica, obtida pela GBT e pelo ANSYS, normalizadas em relação ao valor obtido por meio da GBT para uma ligação considerada idealmente rígida ($P_{cr.\infty.GBT}$), em função do fator de rigidez das ligações (ρ_k). As Figs. 4.18.a-d a 4.20.a-d, apresentam, para pórticos associados a $\rho_k=1$ (Figs. 4.18.a-d), $\rho_k=0,03$ (Figs. 4.19.a-d), e $\rho_k=0,09$ no caso da GBT e $\rho_k=0,05$ no caso do ANSYS (Figs. 4.20.a-d), os modos de instabilidade críticos obtidos com o ANSYS e com a GBT, bem como o diagrama de participação modal da GBT para a barra na qual ocorre a instabilidade (no caso da Fig. 4.20.c, pórtico completo), e a configuração dos respectivos modos na formação da deformada final da seção transversal indicada.

Tabela 4.2 – Resultados da análise de estabilidade elástica do pórtico em L ilustrado na Fig. 4.15.

| $\rho_{k.GBT}$ | $k_r L_b / EI$ | $P_{cr.k.GBT}$ (kN) | $\rho_{k.ANSYS}$ | $P_{cr.k.ANSYS}$ (kN) | Modo de Instabilidade |
|----------------|----------------|------------------------|------------------|--------------------------|-----------------------|
| 1,00 | 5195,1 | 63,78 | 1,00 | 65,69 | L (pilar) |
| 0,97 | 259,8 | 63,66 | - | - | L (pilar) |
| 0,76 | 26,0 | 62,77 | 0,33 | 61,60 | L (pilar) |
| 0,38 | 5,2 | 60,45 | 0,14 | 57,51 | L (pilar) |
| 0,24 | 2,6 | 58,4 | 0,11 | 56,30 | L (pilar) |
| 0,11 | 1,0 | 55,19 | 0,06 | 53,68 | L (pilar) |
| 0,09 | 0,8 | 54,31 | 0,05 | 53,32 | L (pilar) / L (viga) |
| 0,06 | 0,5 | 49,38 | 0,04 | 50,65 | L (viga) |
| 0,03 | 0,3 | 44,85 | 0,03 | 48,46 | L (viga) |
| 0,01 | 0,1 | 40,8 | 0,00 | 43,84 | L (viga) |

*onde: L – local.

Deste modo, a observação dos resultados apresentados no parágrafo anterior, permite que sejam citadas as seguintes considerações:

- (i) Primeiramente, é possível identificar, com ajuda do gráfico da Fig. 4.17 e da Tabela 4.2, dois tipos de instabilidades que ocorrem para valores distintos de ρ_k . No caso de ligações mais rígidas, o modo de instabilidade preponderante é observado na metade da altura do pilar, com modos locais na mesa externa do perfil, enquanto no caso de ligações mais flexíveis, o modo característico observado (também do tipo local), ocorre na mesa superior da viga, ao longo da metade extrema do seu comprimento. As Figs. 4.18.a-b, e 4.19.a-b apresentam a configuração deformada obtida com o (a) ANSYS e (b) com a GBT, para ligações mais rígidas ($\rho_k=1$) e flexíveis ($\rho_k=0,03$), respectivamente, e demonstram a grande similaridade entre os respectivos resultados. Adicionalmente, a GBT oferece os diagramas que ilustram a combinação entre os modos locais 5, 6 e 9 (Figs. 4.18.c e 4.19.c);
- (ii) Em segundo lugar, no que se refere aos valores de P_{cr} obtidos, é possível apreciar resultados bastante próximos entre GBT e ANSYS. Não obstante, duas amplitudes na diferença entre as soluções são identificadas, associadas aos cada um dos modos de instabilidade do pórtico, sendo, no caso dos resultados associados à instabilidade local da viga, uma diferença máxima de 3%, e no caso de resultados associados à instabilidade local no centro do vão do pilar, uma diferença máxima de 7%, dentre os quais, os valores obtidos com a GBT resultam sempre menores do que aqueles obtidos com o ANSYS;
- (iii) Uma vez que ocorram dois tipos de instabilidade distintos, também a influência dos mesmos na força crítica do pórtico apresenta-se com impacto diferente, conforme facilmente pode ser identificado pelas curvas do gráfico da Fig. 4.17, em seus dois trechos que se interceptam para $\rho_k=0,09$ nos resultados obtidos com a GBT, e $\rho_k=0,05$ nos resultados obtidos com ANSYS. De fato, pode-se notar que a instabilidade governada pelo pilar apresenta o impacto mais significativo;

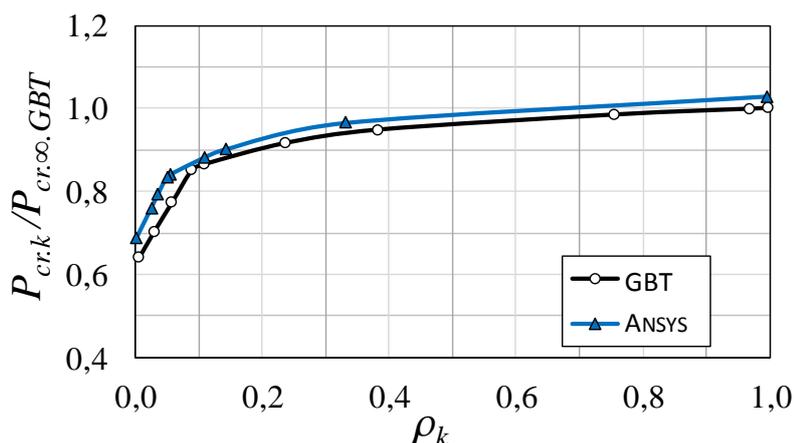


Figura 4.17 – Variação dos resultados de força crítica de estabilidade elástica (P_{cr}) em relação ao fator de rigidez da ligação do pórtico (ρ_k) exibido na Fig. 4.15.

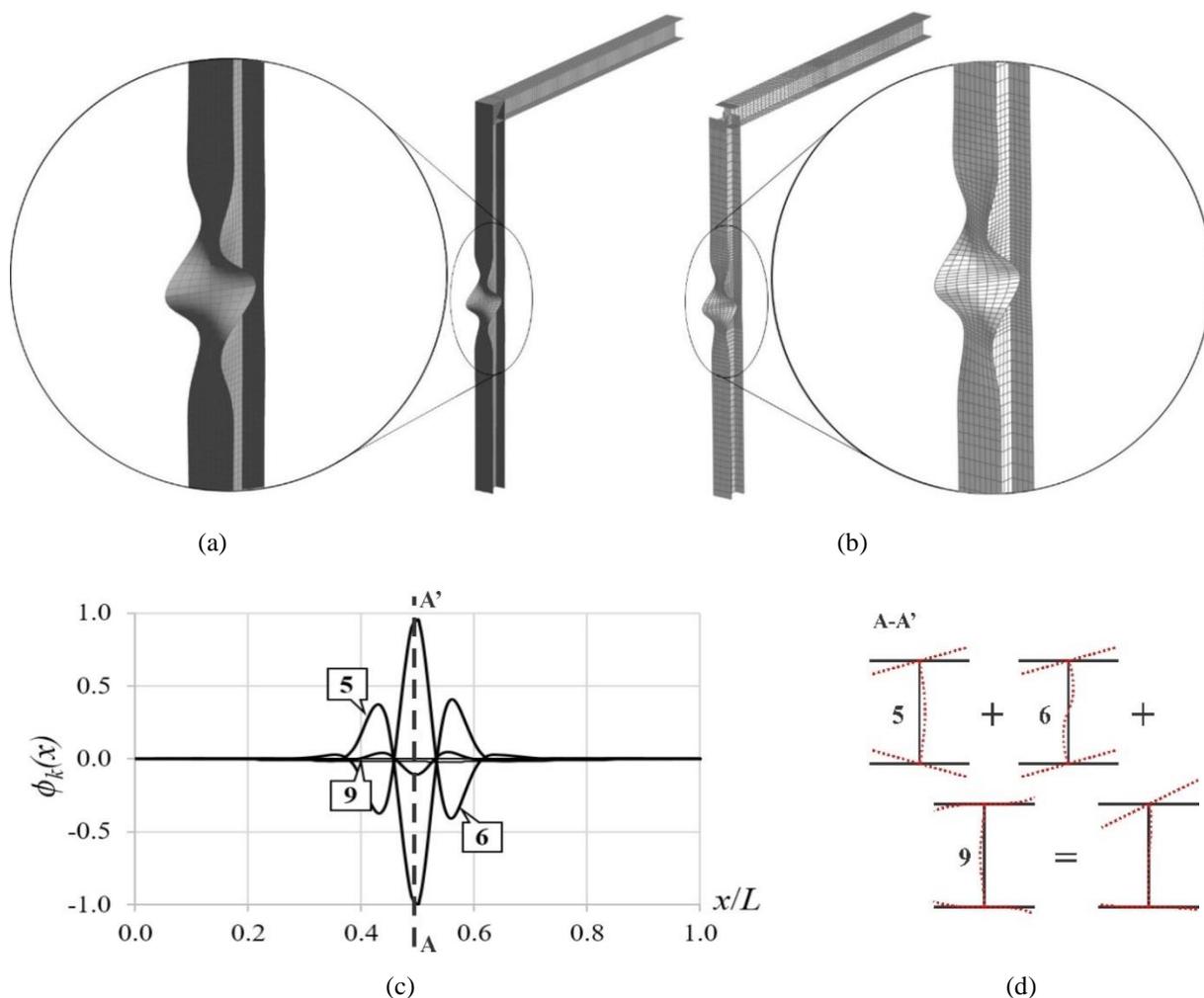


Figura 4.18 – Pórtico em L associado a $\rho_k=1$: Configuração deformada do modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada.

- (iv) A passagem entre os modos críticos de instabilidade verificados se dá de forma praticamente abrupta, sendo possível visualizar um fenômeno de transição somente para condições muito específicas de rigidez da ligação. No caso da GBT, esta condição é resultado de uma mola rotacional com rigidez igual a 45000kN.cm/rad ($\rho_k=0,09$), mas no caso das análises com o ANSYS, esta condição está relacionada a uma configuração de ligação, tal como complementarmente ilustrada na Fig. 4.21 ($\rho_k=0,05$);
- (v) Conforme as Figs. 4.20.a-d, a situação particular que conduz ao surgimento simultâneo dos dois fenômenos de instabilidade, representa nada mais do que a transição entre os mesmos. Onde, conforme a Fig. 4.20.c, para um valor de $\rho_k=0,09$ (resultados da GBT*), apresenta-se claramente a instabilidade governada pelos modos locais no centro do pilar (composição dos modos 5, 6 e 9), mas com amplitude não desprezível nos modos locais (5, 6 e 9) da viga.

* Naturalmente, apesar da grande semelhança verificada na configuração deformada dos modos de instabilidade obtidos com o Ansys e com a GBT (Figs. 4.20.a-b), a quantificação da participação modal apenas se aplica aos resultados da GBT.

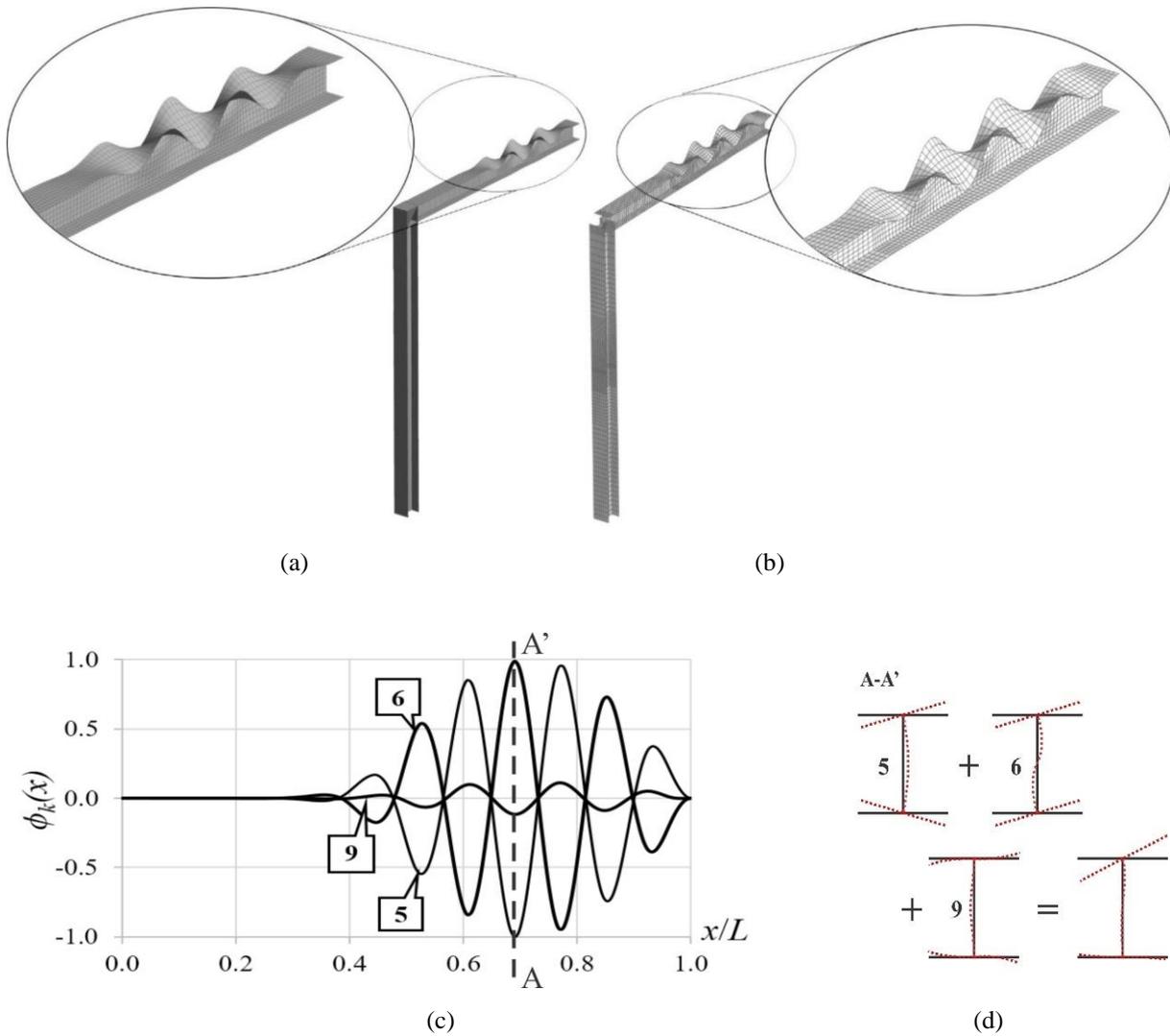


Figura 4.19 – Pórtico em L associado a $\rho_k=0,03$: Configuração deformada do modo crítico de instabilidade obtido (a) com o ANSYS e (b) com a GBT, (b) funções de amplitude modal da GBT para o pilar, e (c) correspondente composição da seção transversal mais deformada.

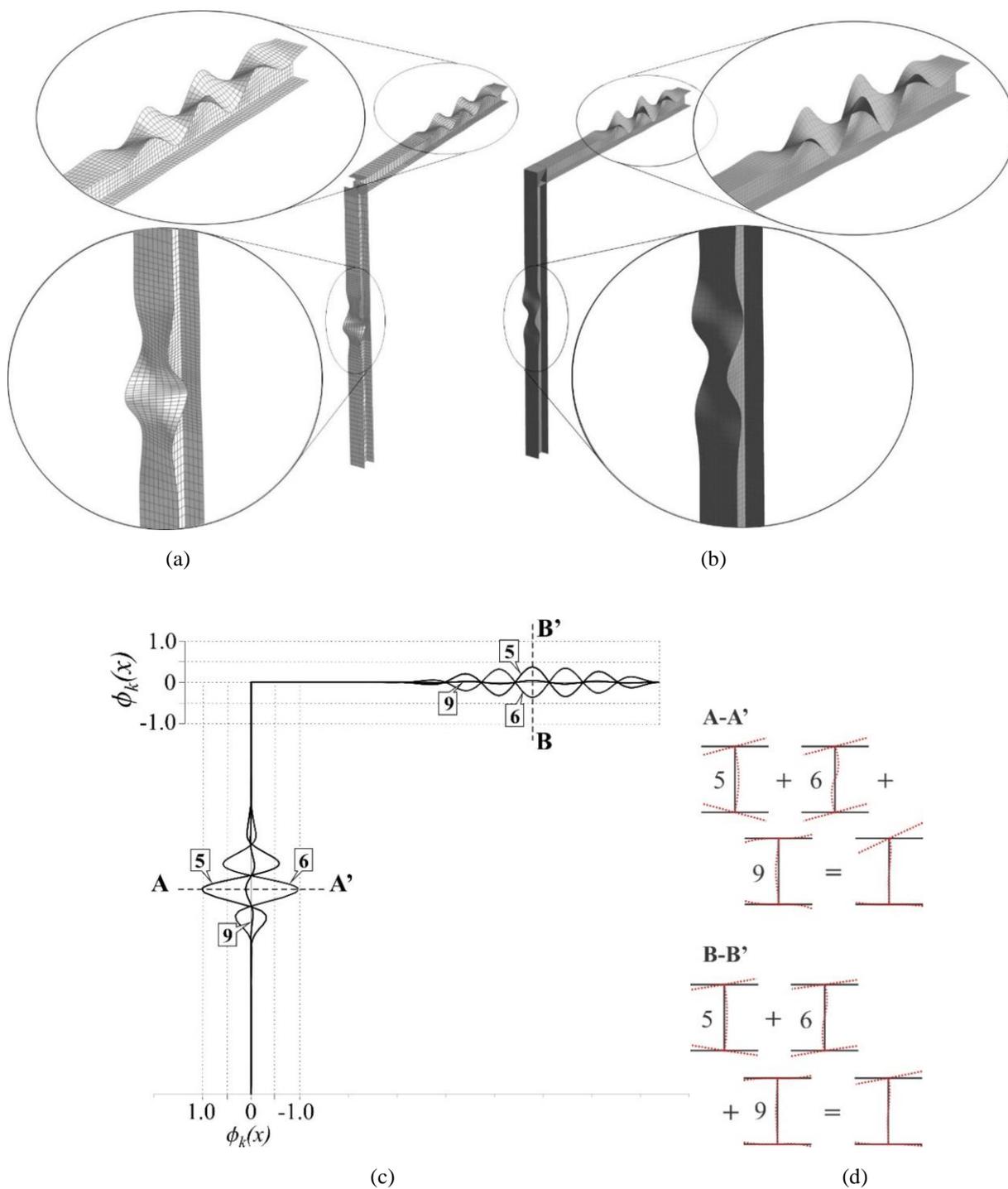


Figura 4.20 – Pórtico em L associado a $\rho_k=0,09$ no caso da GBT e $\rho_k=0,05$ no caso do ANSYS: Configuração deformada para o modo crítico de instabilidade obtido (a) com a GBT e (b) com o ANSYS, (c) funções de amplitude modal da GBT para o pilar esquerdo, e (d) correspondente composição da seção transversal mais deformada.

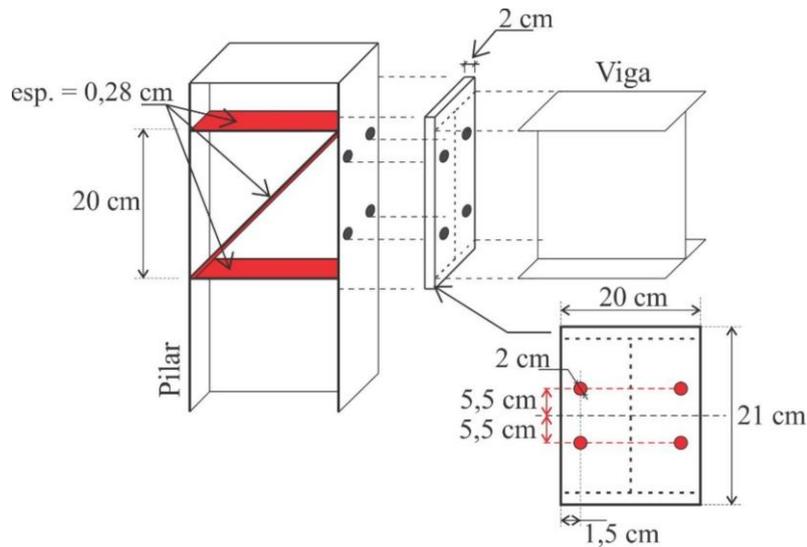


Figura 4.21 – Detalhamento da região da ligação associado ao fator de rigidez resultantes de $\rho_k=0,05$.

4.2.4. Análise pelo Método dos Elementos Finitos no Programa ANSYS

O trabalho de modelagem e análise dos pórticos estudados, com as ligações descritas em 4.2.2 e 4.2.3, no programa ANSYS, envolve, para além dos elementos finitos de casca tradicionalmente utilizados em análises de perfis de aço de paredes finas, também elementos sólidos, elementos de contato entre superfícies, e entre superfície e nós, e, ainda, elementos de viga tridimensional. Toda a formulação e detalhes associados a esses elementos finitos podem ser consultados no Manual de Referências do Programa ANSYS (SAS, 2009).

Esquemáticamente, a atribuição global dos referidos tipos de elementos finitos é ilustrada pela Fig. 4.22, e as seguintes observações detalham a metodologia adotada:

- (i) Dada a pequena espessura das paredes que compõem os perfis dos pilares e viga, é justificável a atribuição de elementos finitos de casca, sendo adotado, para isso, o elemento chamado Shell181 do programa ANSYS, que é um elemento isoparamétrico, definido por 4 nós com 6 graus de liberdade por nó (3 translações e 3 rotações), e cuja formulação se fundamenta na teoria de cascas de Mindlin-Reissner;
- (ii) No que se refere à chapa de topo, as suas dimensões características, bem como interação com demais elementos da região da ligação, tornam elegível a aplicação de elementos sólidos, os quais estão sujeitos a malhas irregulares (devido aos furos dos parafusos), e por isso aplicou-se o elemento definido por 20 nós e 3 graus de liberdade por nó (com deslocamentos descritos por funções quadráticas) – elemento Solid164;
- (iii) Os parafusos foram simulados de forma menos rigorosa, por meio de elementos finitos de viga tridimensional, definidos por 2 nós com 7 graus de liberdade por nó (3 translações, 3 rotações e 1 grau de liberdade dedicado ao empenamento), baseados na teoria de vigas de

- Timoshenko considerando a deformação por corte, referenciados pelo nome Beam188 no ANSYS. Com uma seção transversal circular atribuída, de mesmo diâmetro do parafuso simulado, os referidos elementos tiveram seus graus de liberdade acoplados às bordas dos furos da chapa de topo e da mesa do pilar, de forma a serem capazes de transmitir os esforços de cisalhamento, tração/compressão, torção e momentos entre os elementos a eles acoplados;
- (iv) O contato entre a chapa de topo e a viga simula uma condição de acoplamento rígido (solda), *i.e.*, envolve graus de liberdade de translação e rotação. Uma vez que os elementos sólidos da chapa de topo não possuem graus de liberdade de rotação a serem acoplados com respectivos graus de liberdade dos elementos de casca adjacentes, o programa oferece como solução uma formulação chamada MPC (“*Multi point constraint*”), que nada mais é do que um conjunto de equações de restrição internas envolvendo os nós adjacentes do elemento sólido ao qual está acoplado o elemento de casca, estabelecendo, assim, as relações cinemáticas adequadas à uma condição de engaste. Para esta aplicação foram utilizados os elementos de contato chamados Conta175 e Targe170;
- (v) Finalmente, o contato entre a chapa de topo e as mesas do pilar, para o qual não foi considerado atrito, foi simulado com a ajuda de pares de elementos de contato entre superfícies, nomeadamente, no ANSYS, elementos Conta174 e Targe170*;

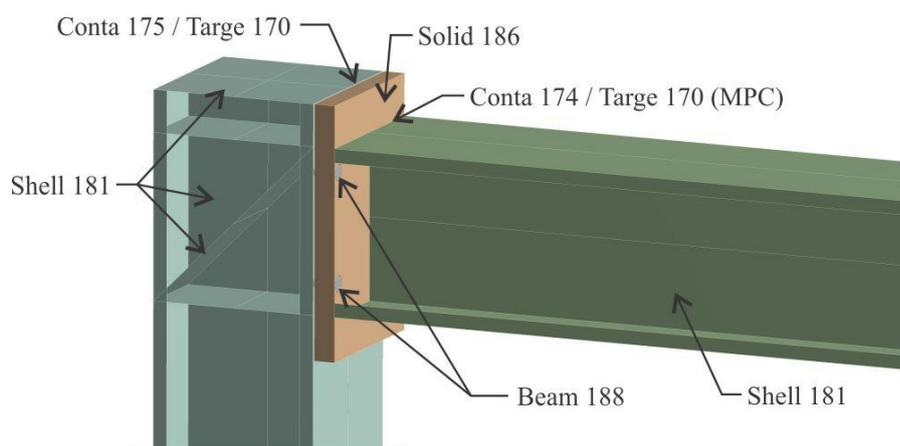


Figura 4.22 – Esquema de atribuição dos elementos finitos no modelo numérico implementado no programa ANSYS.

Para a criação da malha de elementos finitos, além de buscar-se uma geometria suficientemente regular na sua distribuição, dimensões de no máximo 2 cm para os elementos dos pilares, e 1 cm para os elementos da viga, foram suficientes para conduzir a resultados

* Esse par de elementos de contato, apesar de sua finalidade óbvia na simulação da ligação em questão, teve suas propriedades alteradas em um único caso, envolvendo a simulação da ligação rígida ($\rho_k \approx 1$). Neste caso, a condição de contato passou a envolver a técnica de MPC, de modo a obter uma condição de acoplamento rígido, que, embora irreal, foi necessária para que se conseguisse um valor de rigidez rotacional da ligação mais elevado.

adequados em todas as análises. A discretização da chapa de topo e dos elementos de viga associados aos parafusos apresentou pouca influência nos resultados. A Fig. 4.23 ilustra uma malha de elementos finitos típica para os modelos analisados.

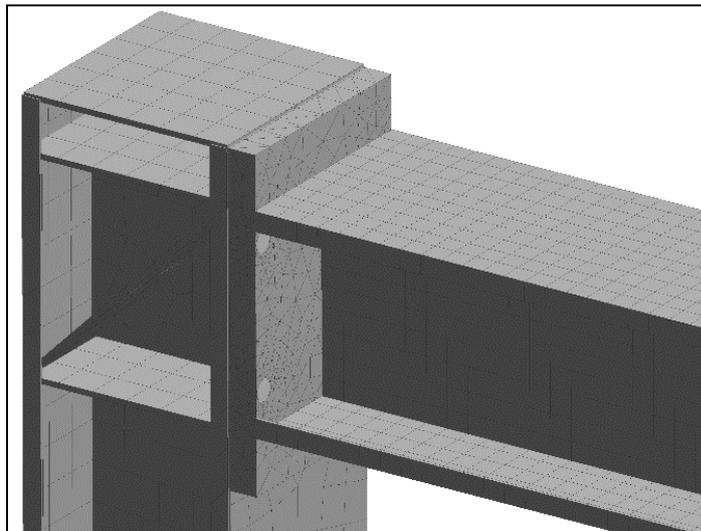


Figura 4.23 – Malha característica de elementos finitos na região da ligação.

Conforme comentado anteriormente, para tornar possível analisar a variação da rigidez rotacional da ligação, sem alterar a sua topologia (*i.e.*, de forma a manter válidas as mesmas condições assumidas para a análise com a GBT), foram modificadas apenas duas propriedades das ligações, conforme ilustram as Figs. 4.24.a-b, para dois casos de ligações associadas a dois valores de rigidez rotacional distintos. Como exemplo associado ao pórtico apresentado no item 4.2.2, a configuração da ligação apresentada em (a) conduz a um fator de rigidez $\rho_k=0,24$, e a configuração apresentada em (b) conduz a $\rho_k=0,38$.

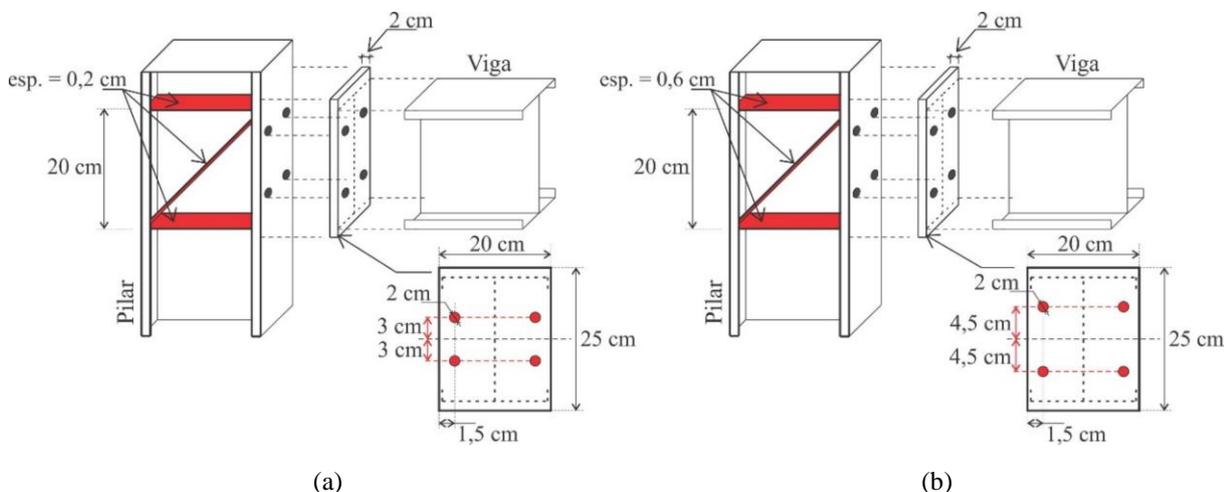


Figura 4.24 – Detalhamento da região da ligação associado aos fatores de rigidez resultantes de (a) $\rho_k=0,24$ e (b) $\rho_k=0,38$, para o pórtico ilustrado na Fig. 4.8.

Para a determinação do fator de rigidez da ligação analisada por meio da metodologia apresentada, é necessária a determinação da rigidez rotacional em cada modelo. Para isso, buscou-se uma metodologia suficientemente aproximada para contabilização da deformabilidade associada a todos os componentes da ligação.

Assim, considere-se dois eixos verticais como referência, um determinado pela linha central da alma da viga, na seção transversal extrema da mesma (conforme linha V1-V2 nas Figs. 4.25.a-b), e outro posicionado no eixo do pilar, iniciando na altura da mesa superior da viga, até a altura da mesa inferior (vide linha P1-P2 indicada nas Figs. 4.25.a-b).

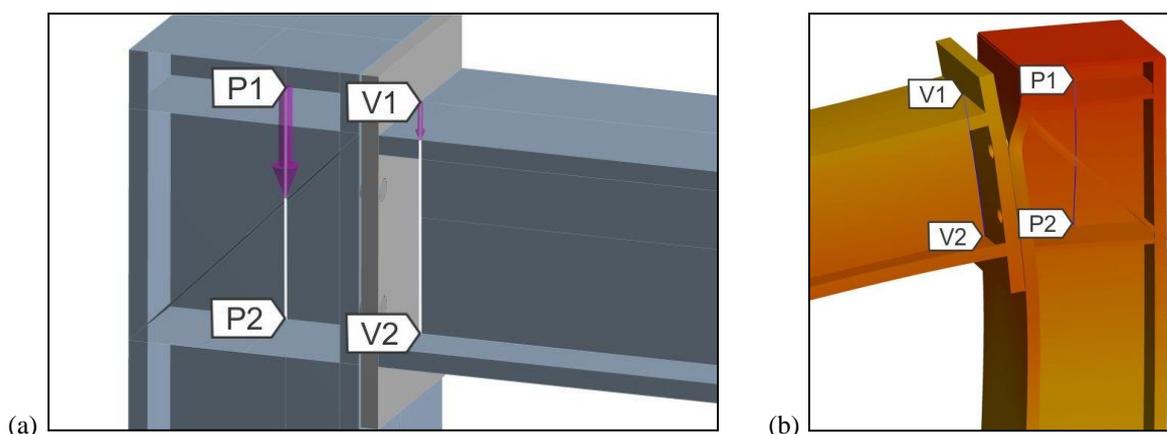


Figura 4.25 – Eixos para determinação da rigidez rotacional da ligação. Condição (a) indeformada e (b) deformada.

Com a aplicação de um momento fletor constante (unitário) na viga, e o pilar perfeitamente engastado, é possível, através dos deslocamentos medidos ao longo dos eixos V1-V2 e P1-P2, determinar a rotação relativa entre a seção extrema da viga e o eixo central da alma do pilar. Nesse sentido, o gráfico da Fig. 4.26 ilustra os deslocamentos horizontais de ambos os eixos a partir do ponto P2.

Para facilitar a leitura dos valores obtidos, uma regressão linear é aplicada a cada perfil de deslocamentos (vide linhas tracejadas no gráfico Fig. 4.26), assim, aplica-se facilmente a Eq. 4.5, que permite obter o valor da rigidez associada à diferença relativa entre as rotações dos referidos eixos. Para o caso ilustrado nas Figs. 4.25 a 4.26, que se refere a um caso de ligação do pórtico apresentado no item 4.2.2 (Fig. 4.8) o valor obtido é de 123150 kN.cm/rad, que aplicado ao cálculo de $\rho_k = 1/(1 + 3EI/kL_b)$, com base nas dimensões do pórtico e seção transversal utilizados no exemplo ilustrado pela Fig. 4.8, resulta em $\rho_k=0,38$.

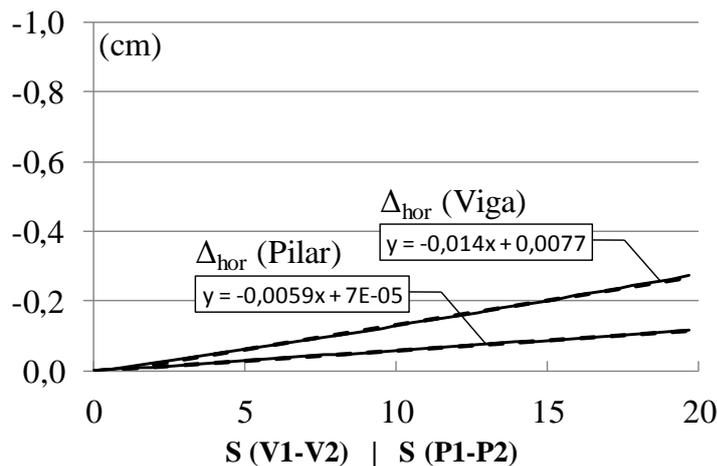


Figura 4.26 – Deslocamento horizontal medido ao longo dos eixos V1-V2 e P1-P2, e respectivas regressões lineares.

$$k_{\theta} = \frac{M}{(\theta_{viga} - \theta_{pilar})} \quad (4.5)$$

onde k_{θ} representa a rigidez rotacional da ligação, M é o momento fletor aplicado, e θ_{viga} e θ_{pilar} são as rotações medidas no eixo V1-V2 (viga) e P1-P2 (pilar), respectivamente.

4.2.5. Aplicação do Método das Componentes na Determinação da Rigidez Rotacional das Ligações Analisadas

Os exemplos apresentados nos itens 4.2.2 e 4.2.3 foram implementados por meio da GBT com a ajuda de molas rotacionais associadas somente aos deslocamentos de rotação de flexão no plano dos pórticos. Este fato, em uma primeira abordagem, foi pensado de modo que seja possível, por meio de um único fator (rigidez rotacional da ligação) simular a condição semirrígida característica da ligação em questão*.

Neste ponto, o Método das Componentes se coloca como uma possível solução na aplicação conjunta com a GBT, uma vez que a determinação da rigidez das ligações pode ser realizada de forma analítica mas sem perda de generalidade, permitindo, de forma imediata, que vários tipos de ligações sigam uma abordagem semelhante. Esta abordagem envolve, basicamente duas etapas: (i) a determinação da rigidez rotacional da ligação analiticamente; e (ii) a análise do pórtico por meio da GBT para a ligação em questão (considerando o coeficiente de rigidez previamente determinado).

* A rigor, a utilização de um conjunto de molas associadas a diferentes componentes de uma ligação também pode ser utilizado, mas esta estratégia não foi implementada nesta tese, apesar de ser um estudo praticamente subsequente.

Considerando-se o caso das ligações apresentadas nos exemplos dos itens 4.2.2 e 4.2.3, nomeadamente, ligações unilaterais entre viga e pilar com perfis tipo I, parafusadas com chapa de topo ajustada, as componentes identificadas a serem consideradas são: (i) parafusos à tração; (ii) mesas do perfil do pilar à flexão; (iii) chapa de topo à flexão; (iv) alma do perfil do pilar à tração; (v) cisalhamento na alma do pilar; e (vi) alma do perfil do pilar à compressão.

Entretanto, dentre as componentes supracitadas, aquelas associadas à alma do perfil do pilar (v e vi) são diretamente afetadas pela presença das chapas de enrijecimento, e, segundo as recomendações indicadas na Tabela 6.11 do Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c), passam a ter um valor de coeficiente de rigidez infinito.

Particularmente sobre este fato, as recomendações da norma europeia são pouco claras, uma vez que a influência da rigidez desses enrijecedores sobre a deformabilidade da alma do pilar devido ao cisalhamento ou devido à compressão sobre a mesma, não é levada em consideração. Naturalmente, considerando-se o caso das ligações entre perfis de paredes intermediárias a espessas, tem-se que a rigidez dessas chapas, devidamente dimensionadas segundo regras específicas também sugeridas normativamente, seja suficientemente grande para que as componentes associadas às deformações na alma do pilar passem a ser desprezadas. Contudo, qualquer variação na espessura ou material das chapas de enrijecimento, que seja suficiente para alterar a capacidade dessas chapas de restringir deformações na alma do perfil na região da ligação, não é tomada em consideração pelo procedimento do Eurocódigo.

Outro aspecto relevante diz respeito à mesa do perfil do pilar à flexão. Conforme explicado em Simões da Silva e Santiago (2003), nos casos em que as mesas do pilar sejam finas em relação à chapa de topo e à resistência dos parafusos, é natural que o momento plástico da ligação seja condicionado pela resistência das mesas do pilar, bem como a capacidade de rotação da ligação, que é provida majoritariamente por esta componente. A Fig. 4.27 ilustra a condição deformada da ligação exibida na Fig. 4.21, em escala elevada para facilitar a visualização, onde claramente se nota a diferença na deformabilidade das mesas do perfil do pilar, muito maior que de todos as demais componentes.

Demonstrando tais afirmações, a Tabela 4.3 exibe os valores obtidos para os coeficientes de rigidez das quatro componentes, do caso da ligação apresentada na Fig. 4.21, que são os parafusos à tração, mesas do perfil do pilar à flexão, chapa de topo à flexão, e alma do perfil do pilar à tração, cujas referências dizem respeito à Tabela 6.11 do Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c). Tais componentes conduzem, conforme procedimento descrito em detalhes pelo Eurocódigo, ao valor de rigidez inicial à rotação de 103 kN.m/rad.

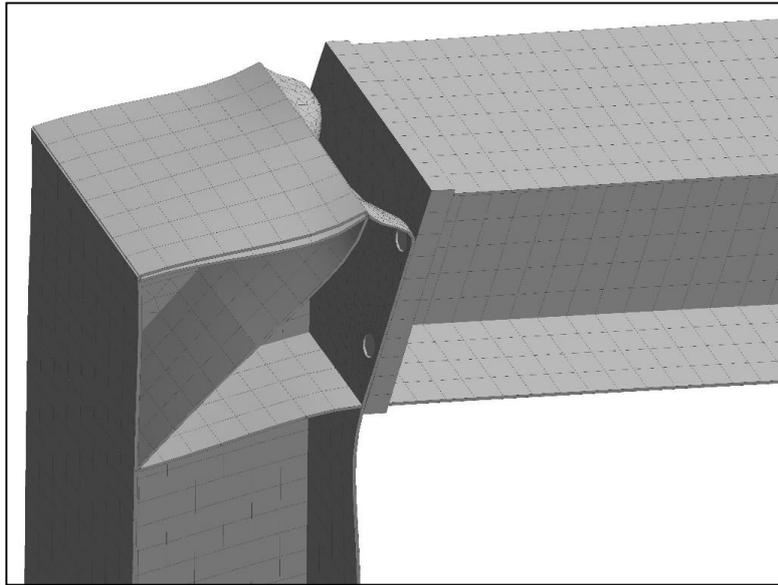


Figura 4.27 – Condição deformada (em grande escala) da ligação exibida na Fig. 4.21 (associada a $\rho_{\kappa}=0,05$) quando submetida a um momento fletor.

Tabela 4.3 – Coeficientes de rigidez para as componentes da ligação exibida na Fig. 4.21, segundo o Eurocódigo 3 – Parte 1-8 (CEN, 2005c).

| REFERÊNCIA | COMPONENTE | COEFICIENTE DE RIGIDEZ (k_j)* |
|------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 10 | Parafusos à tração | 12,1 mm |
| 4 | Mesas do perfil do pilar à flexão | 0,02 mm |
| 5 | Chapa de topo à flexão | 5,91 mm |
| 3 | Alma do pilar à tração | 3,47 mm |

* Aplicados a cada uma das duas linhas de parafusos.

Para avaliar comparativamente este resultado, uma nova análise numérica com ajuda do programa ANSYS foi realizada, desta vez considerando o comportamento não linear do material, tendo em vista que o modelo analítico se baseia em mecanismos de plastificação para a determinação do momento resistente e rigidez da ligação. Assim, considerando-se um modelo bilinear com encruamento isotrópico associado a uma tensão de escoamento de 250 MPa, conforme ilustrado na Fig. 4.28, foi realizada a análise do pórtico em L, com a ligação ilustrada pela Fig. 4.21.

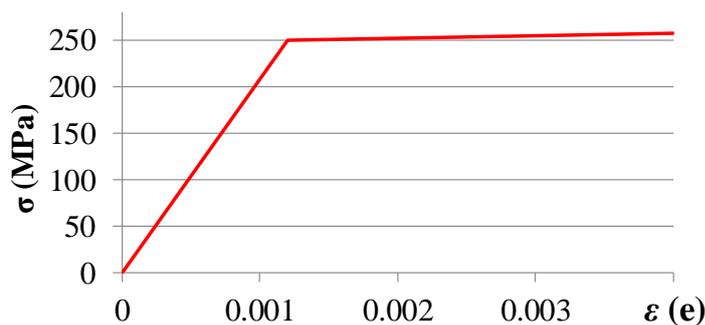


Figura 4.28 – Modelo constitutivo bilinear com encruamento isotrópico.

Como resultado, a Fig. 4.29 ilustra, para a solicitação de momento fletor de 1 kN.m na região da ligação, a distribuição de tensões de von-Mises, onde é possível visualizar o mecanismo de plastificação em torno dos furos superiores na mesa do pilar. Além disso, a Fig. 4.30 apresenta o gráfico de deslocamento horizontal dos eixos da seção extrema da alma da viga e do centro da alma do pilar (V1-V2 e P1-P2, conforme ilustrado na Fig. 4.25.a-b), de onde se obtém a rotação relativa entre os perfis, e, com base no momento fletor aplicado, também a rigidez inicial da ligação de 160 kN.m/rad.

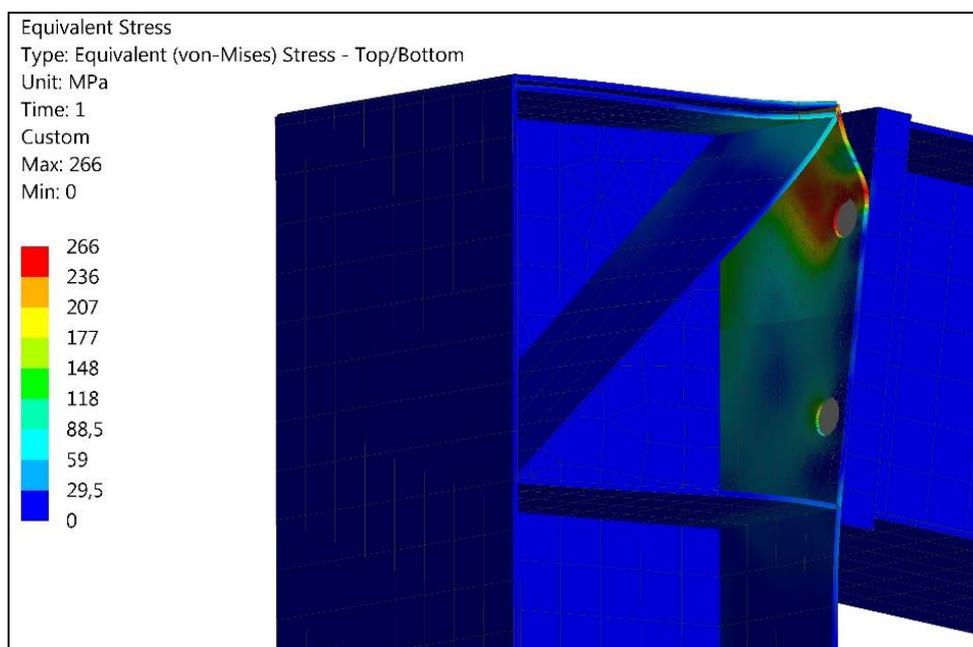


Figura 4.29 – Distribuição de tensões de von-Mises na região da ligação (em MPa).

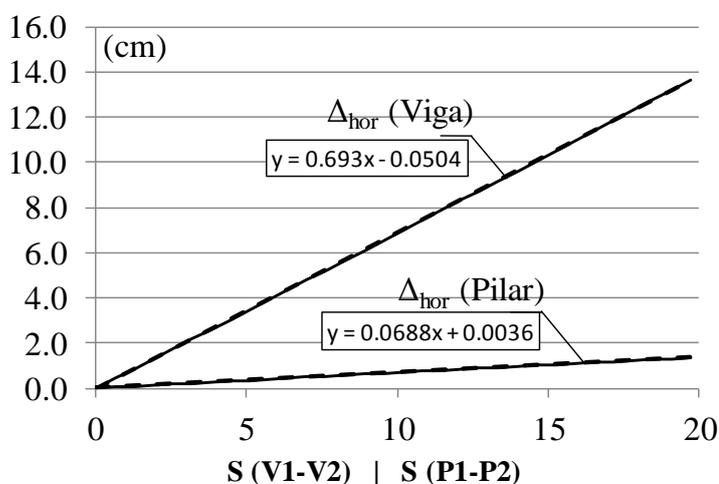


Figura 4.30 – Deslocamento horizontal medido ao longo dos eixos V1-V2 e P1-P2 (Fig. 4.18), e respectivas regressões lineares.

Com isso, a comparação entre os resultados numéricos e analíticos mostra que o Método das Componentes, de fato, subestima a rigidez inicial da ligação, com uma diferença de cerca de 35%

no valor obtido. Esta diferença, conforme comentado anteriormente, precisa ser compensada por meio de ajustes específicos para compatibilizar o Método das Componentes as ligações entre perfis de paredes finas.

Adicionalmente, vale comentar que, segundo o que foi observado nos resultados apresentados, alguns fatores como a contribuição da rigidez das chapas de enrijecimento da alma, não são contabilizados, e podem conduzir a diferenças nos resultados. Além disso, o fator governante na determinação da rigidez subestimada está associado ao padrão de ruptura por escoamento nos furos das mesas do pilar submetida à flexão (vide resultado de coeficiente de rigidez da componente 4, na Tabela 4.3). Nomeadamente, este fator leva em consideração, dentre outros fatores, a distância entre o centro do furo e a borda das mesas do perfil do pilar, o que, conforme ilustrado nas Figs. 4.16, 4.21, e 4.24, trata-se de um valor elevado nos exemplos adotados, e não compatível com valores de espaçamento habitualmente utilizados. Naturalmente, a utilização de valores não habituais também pode ser origem de diferenças nos resultados.

5. CONCLUSÕES

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo a implementação de formulações da GBT para a aplicação em análises de primeira ordem e de estabilidade de pórticos metálicos planos, considerando os efeitos das ligações, bem como, com o estudo e aplicação das devidas adaptações, possibilitando atender a tipos de ligações de pórtico não estudadas até então.

Para isso, o trabalho apresentado nesta tese compreendeu três etapas que são brevemente comentadas nesta conclusão: (i) Estudo e implementação das formulações da GBT para análises de estabilidade de pórticos metálicos; (ii) Implementação de um elemento de mola linear a ser incorporado nas soluções de problemas envolvendo ligações semirrígidas; e, (iii) Aplicação e validação da GBT para casos de ligações parafusadas com comportamento semirrígido.

Na primeira etapa, foram estudadas e implementadas as formulações existentes, associadas a um elemento finito de barra baseado na GBT, com a consideração dos mais recentes trabalhos sobre o assunto, necessários para a adequada compatibilização dos deslocamentos nas extremidades das barras conectadas.

Ainda no que se refere à primeira etapa do trabalho, nomeadamente sobre a questão da transmissão do empenamento entre barras ligadas entre si e não alinhadas, foram avaliadas as relações cinemáticas que descrevem a transmissão do empenamento, sugeridas por autores como Sharman (1985), Krenk e Damkilde (1991) e Basaglia *et al.* (2012b). O estudo apresentado no item 3.1.1 da presente tese demonstra, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, que embora as relações sugeridas pelos referidos autores tenham validade do ponto de vista do equilíbrio de bimomentos, é difícil que as chapas de enrijecimento da alma na região da ligação sejam, de fato, suficientemente rígidas para impedir o surgimento de deformações transversais na alma. Consequentemente, demonstra-se que, em casos de ligações com continuidade na alma e com enrijecedores (ligações ii, iii, iv e v da Tabela 3.1), é muito provável que sempre haja transmissão de empenamento com alguma amplitude (diferente de transmissão nula ou total), o que corrobora com o trabalho de Tong *et al.* (2005).

Complementarmente, a influência da rigidez das chapas de enrijecimento da ligação pôde ser avaliada com a análise de uma ligação com chapas de enrijecimento em caixa e em x, ou seja, duas diagonais opostas conferindo rigidez transversal à alma da região da ligação, que conduz a uma transmissão de empenamento praticamente nula.

Quanto a segunda etapa do trabalho, foi apresentado no capítulo 4, de forma a permitir a maior contribuição desta tese, um elemento finito de mola linear elástico de comprimento nulo. Este elemento foi aplicado com foco na transmissão parcial das rotações de flexão no plano, a qual foi adotada em todos os trabalhos até então (envolvendo a aplicação da GBT em sistemas estruturais) como sendo uma transmissão completa.

A compatibilidade do elemento de mola proposto com os elementos de barra da GBT é feita de forma simplificada, uma vez que apresenta o mesmo número de graus de liberdade de um elemento finito baseado na GBT para cada modo de deformação. Assim, o elemento de mola é facilmente associado aos modos globais, embora também possa ser associado como uma mola nodal generalizada, com a ajuda de uma transformação semelhante a que é aplicada em apoios não convencionais, conforme apresentado no item 4.5.2.

Sobre a etapa de aplicação e validação da GBT em pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas (terceira etapa citada no início deste item de conclusões), foram propostos alguns exemplos básicos, onde a influência da rotação de flexão no plano pode ser observada, tanto nos resultados de valores críticos de instabilidade, quanto nos modos críticos. Fato que se deve, principalmente, à alteração provocada pelas molas rotacionais sobre a distribuição dos esforços internos dos pórticos, principalmente momentos fletores.

A ligação adotada para possibilitar os estudos de variação de rigidez à rotação foi do tipo parafusada com chapa de topo ajustada (Fig. 4.10), de modo que, com o ajuste da distância vertical entre as linhas de parafusos e o centro da chapa, foi possível variar a rigidez da ligação à rotação, sem alterar qualquer outra condição topológica da mesma, mantendo válidas as hipóteses adotadas na formulação implementada com a GBT.

Sobre os exemplos apresentados, primeiramente, buscou-se uma análise simples, envolvendo apenas dois modos globais da GBT (comportamento global no plano) e uma mola rotacional em cada nó de um pórtico retangular com bases engastadas (exemplo apresentado no item 4.2.1). A validação deste exemplo é realizada de forma simples, por meio da aplicação de elementos finitos de barra e molas rotacionais, demonstrando bons resultados com a implementação proposta por meio da GBT.

Por outro lado, os exemplos seguintes (itens 4.2.2 e 4.2.3), representam uma aplicação mais completa da GBT para pórticos com ligações semirrígidas, de modo que foi apresentado um conjunto de hipóteses para o modelo proposto de ligação, as quais fundamentam novas equações de relação cinemática aplicadas no sistema de equações da GBT, juntamente com o elemento de mola responsável pela transmissão parcial dos deslocamentos de rotação de flexão no plano do pórtico.

Para a validação destes exemplos, complexos modelos utilizando o método dos elementos finitos foram implementados no programa ANSYS, envolvendo a consideração de elementos de casca e sólidos, com formulações de contato e molas, conforme descrito no item 4.2.4. Não obstante, apesar da grande diferença na complexidade das diferentes soluções (GBT e MEFc), os resultados observados apresentaram uma ótima aproximação, sugerindo a boa aplicabilidade da GBT para este tipo de análise.

De forma complementar, também foi estudada a possibilidade de se obter, por meio do conhecido Método das Componentes, do Eurocódigo 3, Parte 1-8 (CEN, 2005c), o valor da rigidez rotacional das ligações em questão (item 4.2.5), fato que simplificaria a obtenção do valor da rigidez rotacional de quaisquer ligações para aplicação conjunta com a GBT. No entanto, em consenso com trabalhos citados de outros autores (*e.g.*: Bursi e Jaspart, 1998; Nagy *et al.*, 2006) o Método das Componentes acaba por menosprezar a capacidade (e rigidez) da ligação com perfis de paredes finas.

Além disso, embora algumas pesquisas (*e.g.*: Nagy *et al.*, 2006; Lim (2001); Lim e Nethercot, 2003, 2004, e 2004b) têm se focado na possível adaptação do Método das Componentes para alguns casos de ligações envolvendo perfis de paredes finas (ligações diferente das que são abordadas na presente tese), ainda se trata de um tema consideravelmente insipiente, e a sua aplicação no contexto dos trabalhos apresentados nesta tese (*i.e.*, análises de pórticos planos por meio da GBT, considerando valores de rigidez rotacional das ligações obtidos por meio do Método das Componentes) não pode ser recomendada.

Por fim, conclui-se este trabalho dando destaque à GBT para análises de estabilidade de pórticos metálicos semirrígidos, uma vez que, em comparação com o MEFc (cuja aplicação depende de formulações de contato, molas, e de composições com elementos sólidos), se mostra uma ferramenta que, após implementada em um programa computacional, apresenta, invariavelmente, uma fácil aplicação e grande eficiência computacional, principalmente nas etapas de pré-processamento e análise (processamento), para além de oferecer as vantagens da interpretação modal dos resultados de fenômenos de instabilidade.

5.1. Sugestões Para Trabalhos Futuros

Algumas questões abertas no contexto dos tópicos abordados nesta tese se mostram interessantes, dentre as quais, citam-se aqui:

- (i) Uma alternativa à aplicação de uma mola rotacional associada ao comportamento semirrígido do conjunto da ligação como um todo, é a partição da rigidez da ligação por meio das componentes associadas. Isto é, molas translacionais passariam a relacionar a flexão transversal entre as mesas do pilar e a chapa de topo, especialmente na região dos parafusos e do centro de compressão na altura da mesa inferior da viga, enquanto uma mola rotacional representaria a rigidez à flexão da chapa de topo em relação à viga. Em contrapartida, algumas condições de restrição precisam ser estudadas para simular o efeito das chapas de enrijecimento da alma do pilar e a parcela de rigidez conferida pela resistência da alma do pilar ao corte;
- (ii) A metodologia utilizada para consideração, por meio da GBT, dos efeitos de ligações metálicas diversas está intimamente associada à cinemática de cada ligação. Nesse contexto, é importante que cada ligação seja avaliada sob diferentes tipos de esforços, incluindo inversão dos mesmos, o que pode ser importante em análises dinâmicas, ainda não avaliadas no contexto da GBT no caso de pórticos. Portanto, parece lúcido afirmar que a aplicação da GBT em sistemas estruturais avança paralelamente a trabalhos de investigação focados no comportamento das ligações, o que garante que as aproximações adotadas não comprometem os resultados;
- (iii) A criação de um programa computacional envolvendo os tipos de ligações já estudados, além de difundir o método e estimular novos trabalhos, também é uma forma de se aprimorarem as relações cinemáticas propostas. Além disso, a utilização deste tipo de programa pode auxiliar importantes estudos voltados para a verificação da segurança de sistemas estruturais metálicos;
- (iv) Com a incorporação das componentes associadas aos efeitos das forças de inércia (matriz de massa), já presente em formulações da GBT, no tratamento de ligações com o elemento de nó, é possível também implementar análises de vibração e dinâmica em pórticos metálicos;
- (v) De modo mais amplo, a aplicação do Método das Componentes às ligações envolvendo perfis de paredes finas mostra-se um tópico de estudos com vasto potencial, e sua aplicação pode conduzir a novas metodologias no dimensionamento de ligações entre esse tipo de perfis.

REFERÊNCIAS

ABAMBRES, M.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2013). **Physically Non-Linear GBT Analysis of Thin-Walled Members**. Computers & Structures 129: 148–65.

ABAMBRES, M.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; RASMUSSEN, K.J.R. (2014). **GBT-Based Structural Analysis of Elastic-plastic Thin-Walled Members**. Computers & Structures 136: 1–23.

ÁDÁNY, S.; SILVESTRE, N.; SCHAFER, B.W.; CAMOTIM D. (2009). **GBT and cFSM: two modal approaches to the buckling analysis of unbranched thin-walled members**. Advanced Steel Construction, 5(2), 195-223.

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE – AISI, (2007). **North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members**. Washington, DC.

ASCE TASK COMMITTEE (1997). **Effective length and notional load approaches to frame stability: Implications for American Steel Design**. Task Committee on Effective Length, ASCE p. 442.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT, (2010). **NBR 14762 – Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio (Procedimento)**. Rio de Janeiro, RJ. Brasil.

AUSTRALIAN/NEW ZEALAND STANDARD (AS/NZS). (2005). **Cold-formed steel structures, AS/NZS 4600:2005**, Standards Australia, Sydney.

BAIGENT, A.; HANCOCK, G. (1982). **Structural analysis of assemblages of thin-walled members**. Engineering Structures, 4(7), pp. 207-216.

BASAGLIA, C. (2010). **Análise Não-Linear de Barras e Pórticos Metálicos Utilizando a Teoria Generalizada de Vigas**. Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa – Portugal.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2010). **Buckling Analysis of Cold-Formed RHS Frames Using Generalised Beam Theory**. In: Proceedings of 13th International Symposium on Tubular Structures (Hong Kong, 15-17/12), CRC Press, 187–95.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2011) **Gbt-based buckling analysis of cold-formed steel trusses**. In: D. Dubina & V. Ungureanu, eds. Proceedings of the 6th International Conference on Thin-Walled Structures: Recent Research Advancements and Trends. Timisoara, pp. 149–156.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2012). **Buckling Analysis of Steel Trusses with Thin-Walled RHS Members Using Generalised Beam Theory (GBT)**. *In: Proceedings of the 14th International Symposium on Tubular Structures - ISTS, Stalutube OY: Taylor & Francis - Balkema, 655–662.*

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2013a). **Buckling, Postbuckling, Strength, and DSM Design of Cold-Formed Steel Continuous Lipped Channel Beams**. *Journal of Structural Engineering*, v.139 (5), pp. 657–668.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2013b). **Enhanced generalised beam theory buckling formulation to handle transverse load application effects**. *International Journal of Solids and Structures*, v.50 (3-4), pp. 531–547.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D. (2015) **Buckling Analysis of Thin-Walled Steel Structural Systems Using Generalized Beam Theory (GBT)**. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 15(1): 1540004.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N., (2006a). **Formulation of a GBT-based finite element to analyze the global buckling behaviour of plane and spatial thin-walled frames**. *In: Book of abstracts of III European conference on computational mechanics: solids, structures and coupled problems in engineering, III ECCM. pp. 682, Ed.: Soares et al., Springer, Lisboa, 5–9/jun.*

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE N., (2006b). **GBT-based global buckling analysis of plane and space thin-walled steel frames**. *In: Proceedings of international colloquium on stability and ductility of steel structures, SDSS. pp. 381, IST Press, Lisboa, 6–8/Set.*

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D; SILVESTRE, N. (2007a) **Análise do comportamento global plano e espacial de pórticos metálicos utilizando a teoria generalizada de vigas**. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, 4(1), 9-44.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N; BEBIANO, R. (2007b). **GBT-based buckling analysis of thin-walled members with arbitrary loading and support conditions**. *Book of Abstracts of the 18th Engineering Mechanics Division Conference (EMD 2007 – Blacksburg, USA.*

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2008). **Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT**. *Thin-Walled Structures*, v.46(1), pp.79–101.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE (2009). **GBT-based local, distortional and global buckling analysis of thin-walled steel frames**. *Thin-Walled Structures*, v.47(11), pp. 1246–1264.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2010). **Gbt-Based Buckling Analysis of Thin-Walled Steel Frames with Arbitrary Loading and Support Conditions**. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.10(03), pp. 363–385.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2011). **Non-linear GBT formulation for open-section thin-walled members with arbitrary support conditions**. *Computers & Structures*, 89(21-22), 1906–1919.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; CODA, H. B. (2012a). **Buckling, Post-Buckling, Collapse and Design of Thin-Walled Steel Continuous Beams and Frames**. *In: Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*. Dubrovnik: Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2012b). **Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: Kinematics, modelling and structural response**. *Journal of Constructional Steel Research*, 69(1), pp.39-53.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2013a). **Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (GBT)**. *Thin-Walled Structures*, 62, 229–242.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; GONÇALVES, R.; GRAÇA, A. (2013b) **GBT-Based Assessment of the Buckling Behaviour of Cold-Formed Steel Purlins Restrained by Sheeting**. *Thin-Walled Structures* 72: 217–29.

BEBIANO, R. (2010). **Stability and Dynamics of Thin-Walled Members: Application of Generalised Beam Theory**. Tese (Doutorado), Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa – Portugal.

BEBIANO, R.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2007). **GBT formulation to analyze the buckling behaviour of thin-walled members subjected to non-uniform bending**. *Em: International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(1), 23-54.

BEBIANO, R.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2008a). **Local and global vibration of thin-walled members subjected to compression and non-uniform bending**. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3), 509-535.

BEBIANO, R.; PINA, P.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2008b). **GBTUL – A GBT-based code for thin-walled member analysis**. *In: Proceedings of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures – Recent Innovations and Developments (ICTWS 2008)*, M. Mahendran (Ed.), Brisbane, vol.2, 1173-1180.

BEBIANO R.; CAMOTIM D.; GONÇALVES R. (2013). **Desenvolvimentos recentes no programa GBTUL: Análise de barras de parede fina utilizando a GBT**, *In*: USB-drive Proc. of the Congress on Numerical Methods in Eng., Bilbao (Spain), 25-28/6.

BEBIANO, R.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2013). **Dynamic Analysis of Thin-Walled Members Using Generalised Beam Theory (GBT)**. *Thin-Walled Structures* 72: 188–205.

BEBIANO, R.; CAMOTIM, D.; GONÇALVES, R.; SILVESTRE, N. (2014) **GBTUL 2.0 – Buckling and vibration of thin-walled members**. Programa computacional de livre utilização disponível em [www.civil.ist.utl.pt/gbt].

BEBIANO, R.; GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. (2015). **A Cross-Section Analysis Procedure to Rationalise and Automate the Performance of GBT-Based Structural Analyses**. *Thin-Walled Structures* 92: 29–47.

BIJLAARD, F. S. K.; GRESNIGT, A. M.; VAN DER VEGTE, G. J. (2005) **Connections in Steel Structures V – Behaviour, Strength and Design**. Bouwen met Staal, The Netherlands.

BJORHOVDE, R.; BIJLAARD, F. S. K.; GESCHWINDNER, L. F. (2008) **Connections in Steel Structures VI – Behaviour, Strength and Design**. AISC, Chicago, Illinois.

BLEICH, F. (1952). **Buckling Strength of Metal Structures**, McGraw-Hill, New York.

BRUSH, D.O.; ALMROTH, B.O. (1975). **Buckling of Bars, Plates and Shells**. McGraw-Hill, New York.

BURSI, O. S.; JASPART, J. P. (1998). **Basic issues in the finite element simulation of extended end plate connections**. *Computer & Structures*, 69, pp.361-382.

CAMOTIM, D.; BASAGLIA, C. (2012). **On the behaviour, failure and direct strength design of slender thin-walled steel structural systems**. *In*: Proceedings of Sixth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures. Eds: J. Loughlan, D. Nash, J. Rhodes. pp. 69–85. Glasgow - UK.

CAMOTIM, D.; BASAGLIA, C. (2014). **On the behaviour, failure and direct strength design of slender thin-walled steel structural systems**. *In*: Proceedings of Sixth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (Vol. 81, pp. 69–85). Glasgow, UK: Elsevier.

CAMOTIM, D; SILVESTRE, N; DINIS, P.B. (2006). **Análise Numérica de Elementos Estruturais de Aço Enformados a Frio: Desenvolvimentos Recentes E Perspectivas Futuras**. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural* 3(1): 55–100.

CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; BEBIANO, R. (2007). **GBT local and global vibration analysis of thin-walled members**. Analysis and Design of Plated Structures – Volume 2: Dynamics, N.E. Shanmugam and C.M. Wang (eds.), Woodhead Publishing Ltd., Cambridge, 36-76.

CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N.; BASAGLIA, C.; BEBIANO, R. (2008). **GBT-based buckling analysis of thin-walled members with non-standard support conditions**. Thin-Walled Structures, 46(7–9), 800–815.

CAMOTIM D.; BASAGLIA C.; BEBIANO R.; GONÇALVES R.; SILVESTRE N. (2010a). **Latest developments in the GBT analysis of thin-walled steel structures**. In: Proceedings of International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures (SDSS'Rio Rio de Janeiro, 8-10/9), 33-58.

CAMOTIM D.; BASAGLIA C.; SILVA N.F.; SILVESTRE N. (2010b). **Numerical analysis of thin-walled structures using Generalised Beam Theory (GBT): recent and future developments**. Computational Technology Reviews, 1, B. Topping et al. (eds.), Saxe-Coburg Publications (Stirlingshire), 315-354.

CAMOTIM, D.; BASAGLIA, C.; SILVESTRE, N. (2010c). **GBT buckling analysis of thin-walled steel frames: A state-of-the-art report**. Thin-Walled Structures, v.48(10-11), pp.726–743.

CASAFONT, M.; BONADA, J.; PASTOR, M.M.; ROURE, F. (2015) **GBT calculation of distortional and global buckling loads of cold-formed steel channel columns with multiple perforations**. In: Proceedings of Eighth International Conference on Advances in Steel Structures. Lisbon, Portugal, 22-24/07.

CEN (COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION) (2005). **Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings**, EN 1993-1-1, Brussels.

CEN (COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION) (2005). **Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.3: Supplementary rules for cold-formed members and sheeting**, EN 1993-1-3:2005, Brussels.

CEN (COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION) (2005). **Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.8: Design of Joints**, EN 1993-1-8:2005, Brussels.

CHAN, S.L.; CHUI, P.P.T. (2000) **Nonlinear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. Amsterdam: Elsevier.

CHAJES, A. (1974) **Principles of Structural Stability Theory**. Prentice Hall, Inc. (Englewood Cliffs).

CHAPUIS, J.; GALAMBOS, T. V. (1982). **Restrained Crooked Aluminum Columns**. ASCE J. Struct. Div., Vol. 108, No. ST3, pp. 511–524.

CHEN, W. F. (1980). **End Restraint and Column Stability**. ASCE J. Struct. Div., 105, ST11, pp. 2279–2295.

CHEN, W.F. (2000) **Practical analysis for semi-rigid frame design**. World Scientific Publishing Company.

CHEN, W.F.; GOTO, Y.; LIEW, J.Y.R., (1996). **Stability Design of Semi-Rigid Frames**. John Wiley & Sons. EUA.

CHEUNG, Y.K. (1976). **Finite strip method in structural analysis**. Pergamon Press, Oxford.

CHWALLA, E. (1938). **Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen**. Der Bauingenieur, 19(5-6), pp.69.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.; WITT, R.J. (2001) **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. University of Wisconsin – Madison. 4th Ed. John Wiley & Sons, Inc.

DAVIES J.M. (1998). **Generalised Beam Theory (GBT) for coupled instability problems**. *In: Coupled Instabilities in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects*. Ed: J. Rondal, CISM Course n°379, Springer-Verlag, Wien, Part IV, pp.151-223.

DAVIES, J.M.; LEACH, P. (1994a). **First order Generalized Beam Theory**. Journal of Constructional Steel Research, 31(2-3), pp.187–220.

DAVIES, J.M.; LEACH P. (1994b). **Second-order Generalized Beam Theory**. Journal of Constructional Steel Research, 31, 221-241.

DEGÉE, H.; BOISSONNADE, N. (2004) **An investigation on the use of GBT for the study of profiles with branched cross-sections**. *In: Proceedings of 4th International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures (CIMS 2004 – Roma, 27-29/09)*, pp. 87-96.

DINIS, P.B.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE N. (2004). **Generalised Beam Theory to Analyse the Buckling Behaviour of Thin-Walled Steel Members with “Branched” Cross-Sections**. Thin-Walled Structures: Advances in Research, Design and Manufacturing Technology (ICTWS 2004), Institute of Physics Publishing, Bristol, pp. 819-826.

DINIS, P. B.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2006). **GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily “branched” open cross-sections**. Thin-Walled Structures, v.44(1), pp. 20–38.

- DINNO, K. S.; GILL, S. S. (1964). **The plastic torsion of I-sections with warping restraint**. International Journal of Mechanical Sciences, 6(1), pp. 27–43.
- DONG, S. (2006) **Methods for constrained optimization**. Internal Publications 18.086, MIT.
- DUBINA, D. (2008). **Structural analysis and design assisted by testing of cold-formed steel structures**. Thin-Walled Structures, 46(7-9), 741-764.
- DUBINA, D.; GRECEA, D. (2013) **Connections in Steel Structures VII – Behaviour, Strength and Design**. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin.
- FAELLA, C.; PILUSO, V.; RIZZANO G. (2000) **Structural steel semi-rigid connections. Theory, design and software**. FL: CRC Press.
- GERSTLE, K. H. (1988) **Effects of connections on frames**. Steel beam-to-column building connections, W. F. Chen, ed., Elsevier Science Publishers Ltd., New York, N.Y., pp. 241-267.
- GONÇALVES, R.; DINIS, P.B.; CAMOTIM, D. (2005). **GBT formulation to analyze the stability of thin-walled members with fully arbitrary cross-section shapes**. In: Proceedings of the 2005 Joint ASME/ASCE/SES Conference on Mechanics and Materials (McMat 2005 – Baton Rouge, 1-3/6).
- GONÇALVES, R.; DINIS, P.B.; CAMOTIM D. (2009). **GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections**. Thin-Walled Structures, 47(5), 583-600.
- GONÇALVES, R.; RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. (2010). **A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory**. Computational Mechanics, 46(5), 759-781.
- GONÇALVES, R.; CAMOTIM, D. (2016). **GBT Deformation Modes for Curved Thin-Walled Cross-Sections Based on a Mid-Line Polygonal Approximation**. Thin-Walled Structures 103, 231–43.
- GOTO, Y.; SUZUKI, S.; CHEN, W. F. (1993). **Stability Behavior of Semi-rigid Sway Frames**. Engineering and Structures, 15(3), 209–219.
- HAN, T.-Y.; ABEL, J. F. (1984) **Substructure condensation using modified decomposition**. Numerical Methods in Engineering, 20(11), pp.1959–1964.
- HANCOCK, G.J., (1985) **Portal frames composed of cold-formed channel- and Z- sections**. In: NARAYANAN, R., Steel Framed Structures – Stability and Strength. Elsevier Applied Science Publishers Ltds Crown House, Linton Road, Barking, England.

HANCOCK, G.J. (1998) **Design of Cold-Formed Steel Structures**. Australian Institute of Steel Construction, Sydney.

HORNE, M.R.; MERCHANT, W. (1965) **The Stability of Frames**. Pergamon Press, London.

JASPART, J.P. (1988) **Extending of the merchant-rankine formula for the assessment of the ultimate load of frames with semi-rigid joints**. Journal of Constructional Steel Research. v.11(4). pp.283–312.

JASPART, J.P.; MAQUOI, R. (1990) **Guidelines for the design of braced frames with semi-rigid connections**. Journal of Constructional Steel Research.16(4): 319–28.

JASPART, J.P.; STEENHUIS, M.; ANDERSON, D. (1998). **Characterisation of the joint properties by means of the component method**. *In*: Proceedings of the COST C1 International Conference. 17-19/09. Liège, Bélgica.

JASPART, J. P. (2002). **Design of structural joints in building frames**. Progress in Structural Engineering and Materials, 4, pp.18–34.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. (1980), **Effect of Semi-rigid Connections on Steel Column Strength**. J. Constr. Steel Res., Vol. 1, No. 1, pp. 35–46.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. (1982), **Columns with Semi-rigid Joints**. ASCE Journal of Struct. Div., Vol. 108, No. ST2, pp. 361–372.

KING, W. S.; CHEN, W. F. (1993). **LRFD Analysis for Semi-rigid Frame Design**. AISC Eng. Journal, 30(4), 30–140.

KING, W. S.; CHEN, W. F. (1994). **Practical Second-Order Inelastic Analysis of Semi-Rigid Frames**. ASCE Journal of Structural Engineering, 120(7), 2156–2175.

KISHI, N.; CHEN, W. F.; GOTO, Y.; MATSUOKA, K. G. (1993a). **Design Aid of Semi-Rigid Connections for Frame Analysis**. AISC Eng. Journal, 30(3), 90–103.

KISHI, N.; GOTO, Y.; CHEN, W. F.; MATSUOKA, K. (1993b). **Analysis Program for the Design of Flexibly Jointed Frames**. Computer and Structures, 49(4), 705–713.

KRENK, S. (1990) **Constrained lateral buckling of I-beam gable frames**. Journal of Structural Engineering (ASCE), 116(12), pp.3268-3284.

KRENK, S.; DAMKILDE, L. (1991). **Warping of Joints in I-Beam Assemblages**. Journal of Engineering Mechanics, 117(11), 2457–2474.

- LEACH, P. (1989) **The Generalized beam Theory with Finite Difference Applications**. Tese (Doutorado), University of Salford, UK.
- LEACH, P.; DAVIES J.M. (1996). **An Experimental Verification of the Generalised Beam Theory Applied to Interactive Buckling Problems**. *Thin-Walled Structures*, 25(1), 61-79.
- LEON, R.; EASTERLING, W. S. (2002) **Connections in Steel Structures IV – Behaviour, Strength and Design**. AISC, Chicago, Illinois.
- LIM, J.B.P. (2001) **Joint effects in cold-formed steel portal frames**. Tese (Doutorado). University of Nottingham.
- LIM, J.B.P.; NETHERCOT, D.A. (2003) **Ultimate strength of bolted moment-connections between cold-formed steel members**. *Thin-Walled Structures*, v.41, n.11, pp. 1019-1039.
- LIM, J.B.P.; NETHERCOT, D.A. (2004) **Stiffness prediction for bolted moment-connections between cold-formed steel members**. *Journal of Constructional Steel Research*, v.60, n.1, pp. 85-107.
- LUI, E.M.; CHEN, W.F. (1987) **Steel frame analysis with flexible joints**. *J Constructional Steel Res.* 8, 161– 202.
- LUI, E. M.; CHEN, W. F. (1988), “Behavior of Braced and Unbraced Semi-rigid Frames,” *Solids Structures*, 24, (9), 893–913.
- MASARIRA, A. (2002). **The effect of joints on the stability behaviour of steel frame beams**. *Journal of Constructional Steel Research*, 58(10), 1375–1390.
- MEDLAND, I.C.; SEGEDIN, C.M. (1985) **Interbraced Columns and Beams**. *In: NARAYANAN, R., Steel Framed Structures – Stability and Strength*. Elsevier Applied Science Publishers Ltds Crown House, Linton Road, Barking, England.
- MESACASA JR., E. C.; BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; MALITE, M. (2016) **GBT-Based Buckling Analysis of Thin-Walled Steel Frames with Semi-Rigid Joints**. *In: SSRC Annual Stability Conference*. Structural Stability Research Council, Orlando - FL.
- MOHAMMED, Z.A.; FRANK, E.W. (1996) **Torsion constant for matrixanalysis of structure including warping effect**. *International Journal of Solids and Structures*. 33(3). pp.361–374.
- MÖLLER R. (1982) **Zur Berechnung Prismatischer Strukturen mit Beliebigen Nicht Formtreuen Querschnitt**. (Analysis of Prismatic Structures with Arbitrary Deformable Sections). Bericht nr. 2, Institut für Statik, Technische Hochschule Darmstadt, (em alemão).

- MONFORTON, G.R.; WU, T.S. (1963) **Matrix analysis of semi-rigidly connected frames**. Journal of the Structural Division (ASCE), 89(6), 13-42.
- MORREL, P. (1979) **The influence of the joint detail on the torsional behaviour of thin-walled structures having an axial discontinuity**. In: Proc. Int. Conf. Thin-Walled structures, University of Strathclyde. London, pp.539-552.
- MÖRSCHARDT S. (1990). **Die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie für Kaltwerke mit Kragteilen**. (*GBT for FPS with Cantilever Elements in the Section*). Festschrift Richard Schardt (Sechzigsten Geburtstag), THD SWT 51, Darmstadt, 259-275, (em alemão).
- NAGY, ZS.; STRATAN, A.; DUBINA, D. (2006). **Application of component method for bolted cold-formed steel joints**. In: Proceedings of the Int. Conf. on Metal Structures ICMS "Steel – a new and traditional material for building", Poiana Brasov, September 20-22, 2006.
- NEDELUCU, M. (2010). **GBT Formulation to Analyse the Behaviour of Thin-Walled Members with Variable Cross-Section**. Thin-Walled Structures 48(8): 629–38.
- NEDELUCU, M. (2011). **GBT Formulation to Analyse the Buckling Behaviour of Isotropic Conical Shells**. Thin-Walled Structures 49(7): 812–18.
- NETHERCOT, D. A.; CHEN, W. F. (1988). **Effects of Connections on Columns**. Journal of Constr. Steel Research, 10, 201–239.
- OJALVO, M.; CHAMBERS, R. S. (1977). **Effect of Warping Restraints on I-Beam Buckling**. Journal of the Structural Division, 103(12), pp.2351–2360.
- PAPANGELIS, J.P.; TRAHAIR, N.S.; HANCOCK, G.J. (1998). **Elastic flexural-torsional buckling of structures by computer**. Computers and Structures, 68(1-3), pp. 125-137.
- PHAM, C. H.; HANCOCK, G. J. (2009). **Direct Strength Design of Cold-Formed Purlins**. Journal of Structural Engineering, 135(3), 229–238.
- PIGNATARO, M.; RIZI, N.; RUTA, G.; VARANO, V. (2009) **The Effects of Warping Constraints on the Buckling of Thin-Walled Structures**. Journal of Mechanics of Material and Structures 4(10), pp.1711-1727.
- PRAGER, W. (1936) **Elastic stability of plane frameworks**. Journal of the Aeronautical Sciences. 3(11), pp.388-392.
- RASMUSSEN, K. J. R. (1997). **Bifurcation of locally buckled members**. Thin-Walled Structures, 28(2), 117–154.

- RASMUSSEN, K. J. R.; ZHANG, X.; ZHANG, H. (2016). **Beam-element-based analysis of locally and/or distortionally buckled members: Theory**. *Thin-Walled Structures*, 98, 285–292.
- RHODES J. (1991). **Introduction to Cold-Formed Steel Sections – Design of Cold-Formed Steel Members**, Elsevier Applied Science, New York.
- SAS – Swanson Analysis Systems Inc. (2009). **Ansys Reference Manual**. (Versão 16).
- SAVASSI, W. (1996) **Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas**. Ed. EESC-USP, 260 p., São Carlos – SP, Brasil.
- SCHARDT R. (1989). **Verallgemeinerte Technische Biegetheorie**, Springer-Verlag, Berlin.
- SHARMAN, P.W. (1985) **Analysis of structures with thin-walled open sections**. *International Journal of Mechanical Sciences*, 27(10), pp.665-677.
- SHAYAN, S.; RASMUSSEN, K.J.R., (2014). **A model for warping transmission through joints of steel frames**. *Thin-Walled Structures*, 82, pp.1-12.
- SHEN, Z.-Y.; LU, L.-W. (1983). **Analysis of Initially Crooked, End Restrained Columns**. *J. Constr. Steel Res.*, Vol. 3, No. 1, pp. 10–18.
- SILVA, N.F.; SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2006). **GBT formulation to analyse the post-buckling behaviour of FRP composite thin-walled members**. *In: Proceedings of 8th International Conference on Computational Structures Technology (CST 2006 – Las Palmas de Gran Canaria, Spain)*.
- SILVA, N.F.; DEGENHARDT, R.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2008a). **On the Use of Generalised Beam Theory to Assess the Buckling and Post-Buckling Behaviour of Laminated CFRP Cylindrical Stiffened Panels**. CD-ROM Proceedings of 2nd International Conference on Buckling and Post-Buckling Behaviour of Composite Laminated Shell Structures, Braunschweig, paper 44.
- SILVA, N.F.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2008b). **GBT cross-section analysis of thin-walled members with arbitrary crosssections: A novel approach**. *In: Proceedings of 5th International Conference on Thin-Walled Structures – Recent Innovations and Developments (Brisbane, 18-20/6)*, pp. 1189-1196 (vol. 2).
- SILVA, N.F. (2013). **Behaviour and Strength of Laminated FRP Composite Structural Elements**. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa – Portugal.
- SILVESTRE, N. (2005) **Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações**. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa – Portugal.

SILVESTRE, N. (2007). **Non-classical effects in FRP composite tubes**. Thin-Walled Structures, 45(2): 185–98

SILVESTRE, N. (2009). **Generalised Beam Theory to Analyse the Buckling Behaviour of Circular Cylindrical Shells and Tubes**. Composites Part B: Engineering, 40(8): 681-697.

SILVESTRE N.; CAMOTIM D. (2002a). **Aplicação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) ao estudo da estabilidade de barras com secção de parede fina**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, 50, 21-40.

SILVESTRE N.; CAMOTIM D. (2002b). **First order Generalised Beam Theory for arbitrary orthotropic materials**. Thin-Walled Structures, 40(9), 755-789.

SILVESTRE N.; CAMOTIM D. (2002c). **Second order Generalised Beam Theory for arbitrary orthotropic materials**. Thin-Walled Structures, 40(9), 791-820.

SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2003a). **Non-linear generalized beam theory for cold-formed steel members**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 03(04), 461–490.

SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2003b). **GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members**. Computers & Structures, 81(18-19), 1889–1904.

SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2006a). **Vibration Behaviour of Axially Compressed Cold-Formed Steel Members**. Steel & Composite Structures, 6(3), 221-236.

SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. (2006b). **GBT-based local and global vibration analysis of loaded composite thin-walled members**. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 6(1), 1-29.

SILVESTRE, N.; SIMÃO, P.; CAMOTIM, D; SIMÕES DA SILVA, L. (2001). **Aplicação da Teoria Generalizada de Vigas (GBT) à Análise de Estabilidade de Perfis de Aço Enformados a Frio**. Construção Metálica e Mista 3, A. Lamas, P. Vila Real e L. Simões da Silva (Eds.), Aveiro, 617-626.

SIMITSES, G. J. (1976). **An Introduction to the Elastic Stability of Structures**. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.

SIMÕES DA SILVA, L; SIMÃO, P. (2002). **GBT – Teoria Generalizada de Peças Lineares: Aplicação a Perfis Metálicos Enformados a Frio com Secção Aberta**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, 50, 49-65.

SIMÕES DA SILVA, L; SANTIAGO, A. (2003). **manual de Ligação Metálicas**. CMM – Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista, Coimbra - PT.

- DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP. (2008) **ABAQUS Standard**. (Versão. 6.14).
- TONG, G. S.; YAN, X. X.; ZHANG, L. (2005). **Warping and bimoment transmission through diagonally stiffened beam-to-column joints**. Journal of Constructional Steel Research, 61(6), pp.749–763.
- VACHARAJITTIPHAN, P.; TRAHAIR, N. (1974). **Warping and distortion at I-section joints**. Journal of the Structural Division (ASCE), 100(3), pp.547-564.
- VINNAKOTA, S. (1982). **Planar Strength of Restrained Beam-Columns**. ASCE J. Struct. Div., Vol. 108, No. ST11, pp. 2496–2516.
- VINNAKOTA, S. (1983). **Planar Strength of Directionally and Rotationally Restrained Steel Columns**. Proc. 3rd Int. Colloq. Stab. Met. Struct., Toronto, May, pp. 315–325.
- VLASOV, V. Z. (1961). **Thin-walled elastic beams**. National Science Foundation, Washington.
- WEYNANDK, J.P.; STEENHUIS M. (1998) **Economystudies of steel building frames with semirigid joints**. Journal of Constructional Steel Research. v.46(1–3):85.
- WRZESIEN, A; LIM, J.B.P.; NETHERCOT, D.A. (2012) **Optimum Joint Detail for a General Cold-Formed Steel Portal Frame**. Advances In Structural Engineering, V.15, pp. 1623-1639.
- YANG, Y.B.; MCGUIRE, W. (1984) **A procedure for analyzing space frames with partial warping restraint**. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 20. pp. 1377–1398.
- YENIAY, O. (2005) **Penalty function methods for constrained optimization with genetic algorithms**. Mathematical and Computational Applications, v.10(1), pp. 44–56.
- YOUNG, B.; RASMUSSEN, K. J. R. (1997). **Bifurcation of singly symmetric columns**. Thin-Walled Structures, 28(2), 155–177.
- YU W. W. (2000). **Cold-formed steel design**. John Wiley and Sons Inc. New York.
- YU, C.; SCHAFFER, B. W. (2007). **Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method**. Journal of Constructional Steel Research, v.63(5), pp. 581–590.
- ZHANG, X.; RASMUSSEN, K.J.R. (2014). **Tests of cold-formed steel portal frames with slender sections**. Steel Construction, Design and Research, 7(3), 199-203.
- ZHANG, X.; RASMUSSEN, K. J. R.; ZHANG, H. (2015). **Beam-element-based analysis of locally and/or distortionally buckled members: Application**. Thin-Walled Structures, 95, 127–137.

ZIEMIAN, R. D. (2010). **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**. (6th edition) John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (2000). **The Finite Element Method** (5th ed.), Butterworth-Heinemann, Oxford.