

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

THAÍS GOMES PEDROSA

Otimização Estrutural sob Incertezas considerando Conseqüências de Falha

Versão corrigida
A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

SÃO CARLOS

2015

THAÍS GOMES PEDROSA

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL SOB
INCERTEZAS CONSIDERANDO
CONSEQUÊNCIAS DE FALHA**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos – USP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências, Programa de Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. André Teófilo Beck, Ph.D.

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

G372o Gomes Pedrosa, Thais
Otimização Estrutural sob Incertezas considerando
Consequências de Falha / Thais Gomes Pedrosa;
orientador André Teófilo Beck. São Carlos, 2015.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. Confiabilidade Estrutural. 2. Otimização
Estrutural. 3. Análise não linear. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **THAÍS GOMES PEDROSA**.

Título da dissertação: "Otimização estrutural sob incertezas considerando consequências de falha."

Data da defesa: 24/03/2015

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **André Teófilo Beck (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Profa. Dra. **Maíra Martins da Silva**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Rafael Holdorf Lopes**
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

APROVADO

(por vídeo-conferência)

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Dedico este trabalho àqueles que planejam se aventurar no ramo da otimização e da confiabilidade.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Túlio e Eliana, pelo exímio apoio financeiro dedicado a todo o meu crescimento acadêmico e pessoal e à minha irmã, Luciana, pela companhia.

Aos meus padrinhos a minha mais profunda gratidão: Lillian pelo acolhimento emocional constante e Junior pelos sábios conselhos de um experiente mentor universitário. Também à minha prima Sílvia, pelo exemplo a seguir.

Aos meus familiares, Evandro, Nereide, Egberto, Marcos, Camila, família e amigos pelo constante incentivo e pela compreensão de que o aprendizado é obtido a partir de alguns sacrifícios como a distância e afastamento do mercado de trabalho.

Ao meu eterno amigo Miguel pela companhia, paciente nos momentos de desânimo e inquieta nas ocasiões de distração necessárias.

Ao meu orientador Prof. André Beck, que soube lidar com a minha personalidade, acalmar minhas angustias e me apontar o melhor rumo.

À Escola de Engenharia de São Carlos, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pela concessão da bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas pela convivência e experiências adquiridas neste período.

Ao corpo docente de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, pela contribuição em minha formação.

“Assim como aquele que busca o projeto ótimo de uma estrutura, a evolução de um indivíduo deve ser determinada, entre outros aspectos, pelo conhecimento das consequências de suas falhas.”

A autora

RESUMO

PEDROSA, T. G. **Otimização estrutural sob incertezas considerando consequências de falha**. 2015. 102 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Enfrentar situações de falha é o principal desafio do engenheiro estrutural. Parece paradoxal, mas a fim de obter um projeto bem sucedido, o engenheiro estrutural deve estudar e examinar todos os possíveis modos de falha de uma estrutura. Na otimização estrutural não é diferente. Assim, na otimização estrutural deve-se considerar os custos esperados de falha. No projeto de engenharia estrutural, economia e segurança são aparentemente objetivos conflitantes. No entanto, quando custos esperados de falha são considerados, nota-se que investimentos em segurança são necessários a fim de não arcar com os custos esperados de falha. O ponto ideal de compromisso pode ser encontrado por uma otimização de risco, onde a função objetivo inclui todos os custos ao longo do ciclo de vida da estrutura: construção, operação, manutenção inspeção, descarte e as consequências de falha esperadas. Este último é um remanescente que não pode ser desconsiderado dos modos de falha contra os quais a estrutura precisa ser projetada.

Esta dissertação aborda a otimização de sistemas estruturais simples, considerando o equilíbrio entre modos de falha concorrentes, tais como escoamento (esmagamento), flambagem e *snap-through*. O estudo mostra como os diferentes modos de falha, associados a diferentes custos de falha, levam a diferentes projetos ótimos. Uma estrutura de treliça plana é estudada como exemplo de aplicação. A forma (posições nodais) e tamanho dos elementos são consideradas como variáveis de projeto. Resultados mostram que projetos ótimos suficientemente diferentes são obtidos quando o equilíbrio entre modos de falha concorrentes é alterado.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural, Otimização Estrutural, Análise não linear.

ABSTRACT

PEDROSA, T. G. **Structural optimization under uncertainties considering consequences of failure.** 2015. 102 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Defying failure is the primary challenge of the structural engineer. It sounds paradoxical, but in order to achieve a successful design, the structural engineer must think about and account for all possible failure modes of a structure. This is not different in structural optimization. Hence, in structural optimization one has to consider the expected costs of failure. In structural engineering design, economy and safety are apparently conflicting goals. However, when expected costs of failure are considered, one notes that investments in safety are necessary in order not to pay for the expected costs of failure. The optimum point of compromise can be found by a risk optimization, where the objective function includes all costs over the life-cycle of the structure: construction, operation, inspection maintenance, disposal, and the expected consequences of failure. The latter are an undeletable remainder of the failure modes that the structure needs to be designed against.

This paper addresses the optimization of simple structural systems, considering the balance between competing failure modes such as yielding (squashing), buckling and *snap-through*. The study shows how different failure modes, associated to different costs of failure, lead to different optimal designs. A plane truss structure is studied as application example. The shape (nodal positions) and member size are considered as design variables. Results show that quite different optimal designs are obtained when the balance between competing failure modes is changed.

Keywords: Structure – Reliability. Structure – Optimization. Structure – Safety. Failure Modes.

LISTA DE SIGLAS

CET	Custo Esperado Total
EEL	Equação de Estado Limite
FDA	Função de Distribuição Acumulada de Probabilidades
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FORM	<i>First Order Reliability Method</i> - método de aproximação de primeira ordem
MEF	Método dos Elementos Finitos
RBDO	<i>Reliability-based Design Optimization</i> – Otimização baseada em confiabilidade
SMCI	Simulação de Monte Carlo com amostragem por Importância
SMCS	Simulação de Monte Carlo Simples
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i> - método de aproximação de segunda ordem
StRAnD	<i>Structural Reliability Analysis and Design</i> – Programa de confiabilidade estrutural
VA	Variável Aleatória

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área da seção transversal
$c.o.v.$	coeficiente de variação
E	módulo de elasticidade do material
$g(x)$	equação de estado limite do problema
I	momento de inércia da seção transversal
P_f	probabilidade de falha
\mathbf{x}	vetor das variáveis aleatórias
\mathbf{d}	vetor das variáveis de projeto
X	variável aleatória, definida por sua FDP e por seus momentos
β	índice de confiabilidade
μ	valor médio da variável aleatória X
δ	desvio-padrão da variável aleatória
σ	tensão no elemento estrutural
σ_y	tensão de escoamento do material
η	constante de não linearidade física
K_t	Matriz de Rigidez tangente
P_a	Carga aplicada
P_{lim}	Carga limite (Força P calculada em u_{lim} : deslocamento limite)
N_{cr}	Normal crítica de Euler
u_{comp}	Deslocamento ou ponto no qual ocorre a maior normal de compressão
u_{crit}	Deslocamento correspondente ao menor valor da diferença $N - N_{cr}$
$C_{inicial}$	Custo inicial
C_{ref}	Custo de referência

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	23
1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS	23
1.2 OBJETIVOS.....	28
1.3 METODOLOGIA	29
1.4 ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO.....	29
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	31
2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	32
2.2.1 Otimização estrutural determinística.....	32
2.2.2 Otimização de risco	32
2.3 COMPORTAMENTO ESTRUTURAL.....	38
2.3.1 Teoria da elasticidade não-linear.....	38
2.3.2 Aspectos de não-linearidade	39
2.3.3 Comportamentos pós críticos	40
2.3.4 Estados limites e modos de falha	42
3. EXEMPLO ANALÍTICO DE APLICAÇÃO: TRELIÇA PLANA	45
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	45
3.2 FORMULAÇÃO: NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	46
3.3 FORMULAÇÃO: NÃO LINEARIDADE FÍSICA.....	49
3.4 ANÁLISE NÃO LINEAR DA ESTRUTURA.....	50
3.4.1 Definição das características geométricas e do material.....	50
3.4.2 Resolução em programa comercial ANSYS	51
3.4.3 Definição da matriz de rigidez tangente algebricamente	53
3.4.4 Definição do deslocamento final da estrutura.....	54
3.4.5 Estudo comparativo dos comportamentos não lineares.....	56
4. EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE	61
4.1 ESTUDO DA FALHA POR <i>SNAP-THROUGH</i>	61
4.1.1 Análise em programa comercial ANSYS	62
4.1.2 Cálculo analítico do ponto limite	63

4.1.3	Equação de estado limite.....	66
4.2	ESTUDO DA FALHA POR FLAMBAGEM	67
4.2.1	Equação de estado limite.....	67
4.3	ESTUDO DA FALHA POR ESMAGAMENTO E ESCOAMENTO	74
4.3.1	Equação de estado limite.....	74
4.4	COMENTÁRIOS GERAIS.....	77
5.	OTIMIZAÇÃO DE RISCO COM CONSEQUÊNCIAS DE FALHA.....	79
5.1	FUNÇÃO OBJETIVO.....	79
5.2	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DE PROJETO.....	80
5.3	PROBABILIDADES DE FALHA.....	81
5.3.1	Falha por <i>snap-through</i>	82
5.3.2	Falha por flambagem.....	82
5.3.3	Falha por esmagamento/escoamento	82
5.4	OTIMIZAÇÃO DE RISCO.....	83
5.4.1	Resultados para modos de falha concorrentes	83
5.4.2	Alteração da constante de não linearidade.....	87
5.4.3	Variação multi paramétrica.....	88
6.	COMPARAÇÃO COM A OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA	93
6.1	CONFIGURAÇÃO DE COMPARAÇÃO.....	93
6.2	RESOLUÇÃO DETERMINÍSTICA E LINEAR DE FOX	94
6.3	OTIMIZAÇÃO DE RISCO PARA MESMA CONFIGURAÇÃO.....	94
6.3.1	Consideração de linearidade física.....	95
6.3.2	Consideração de ambas não linearidades	96
6.3.3	Comparação dos resultados	96
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
7.1	OBSERVAÇÕES GERAIS	99
7.2	SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS.....	100

1. INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS

A otimização estrutural tem por objetivo cumprir determinada função estrutural com o menor uso de recursos possível. No entanto, já é conhecido que esta otimização, realizada de forma determinística não é robusta em relação às incertezas de solicitação e resistência. Essa falta de robustez está associada à conversão das condições de falha da estrutura em restrições de projeto e à consideração indireta das incertezas através de valores característicos e coeficientes de segurança. Tais considerações têm herança na metodologia de projeto baseada em normas técnicas, que por natureza não é ótima, pois tal cálculo geralmente exige aproximações feitas sempre em favor da segurança.

Por outro lado, o projeto ótimo resultante de uma otimização determinística, em virtude da diminuição das seções e da mudança de forma, tem mais modos de falha projetados “contra o limite” quando comparado a um projeto convencional “de norma”, no qual a estrutura tem mais alternativas para resistir à solicitação. Portanto, a estrutura resultante da otimização determinística pode ter sua segurança comprometida em comparação à estrutura original ou não-otimizada.

Como exemplo, considere a estrutura ilustrada na Figura 1.1. Todos os pontos materiais da estrutura ótima resultante estão projetados contra o limite, chamado *fully-stressed design*; logo, não há caminhos alternativos para a solicitação, e a estrutura ótima torna-se mais propensa ao colapso. Nesta estrutura, qualquer perturbação como inclusões, defeitos de micro-estrutura, trincas, defeitos de corrosão, ou uma pequena variação no carregamento poderia, teoricamente, levar ao colapso da estrutura.

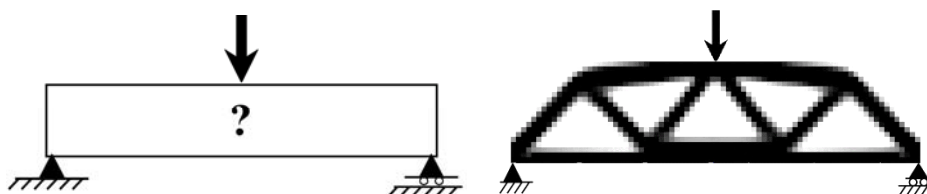


Figura 1.1 – Problema Clássico de otimização topológica determinística.

A percepção de que a otimização estrutural deve ser robusta em relação às incertezas em resistências e solicitação levou ao desenvolvimento de diferentes metodologias:

- a. Otimização robusta (Beyer; Sendhoff, 2006; Schueller; Jensen, 2008);
- b. Otimização (ou programação) *fuzzy* (Zimmermann, 1992);
- c. Otimização baseada em confiabilidade (RBDO) - *Reliability-Based Design Optimization* - (Cheng;Xu;Liang, 2006).

Objetivos típicos da otimização robusta são a maximização da performance média do sistema e a minimização da variância. Em geral, trata-se de um problema de otimização multi-objetivo (Sanchis et al., 2008; Ritto et al., 2010), cuja solução envolve soma ponderada (Das e Dennis, 1997), pontos de compromisso (frente de Pareto) entre objetivos (Chen et al., 1999) e agregação preferencial (Dai e Mourelatos, 2003).

Na otimização robusta, uma vertente da otimização estocástica, incertezas são representadas como variáveis aleatórias ou processos estocásticos. Já na otimização *fuzzy*, as incertezas são representadas através de números *fuzzy*. Enquanto a otimização estocástica tem uma abordagem probabilística, a otimização *fuzzy* apresenta uma abordagem possibilística. Em geral, a quantidade de informação disponível determina a abordagem apropriada (Bastin, 2004).

Na RBDO busca-se a minimização de uma função objetivo envolvendo volume de materiais, custo (de manufatura) ou performance do sistema estrutural, sujeito à restrições probabilísticas envolvendo as condições de falha da estrutura. A RBDO endereça explicitamente as incertezas em ações e resistências, modeladas probabilisticamente, e usa, como restrições de projeto, probabilidades de falha admissíveis associadas aos possíveis modos de falha. Portanto, esta formulação garante que a segurança da estrutura ótima encontrada não será comprometida. A Figura 1.2 ilustra um exemplo prático, onde a estrutura à esquerda é resultado de um processo de otimização determinista, e a estrutura à direita é resultado da otimização baseada em confiabilidade.

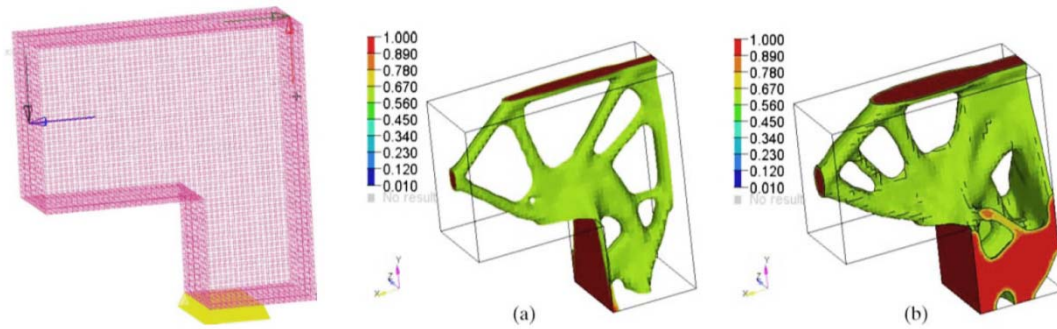


Figura 1.2 – Comparação entre resultado de otimização topológica determinística (a) e otimização baseada em confiabilidade (b). (Fonte: Silva et al.,2010)

Na otimização determinística, a robustez dos elementos é determinada pelos coeficientes de segurança utilizados como restrição de projeto. Na RBDO, a robustez dos elementos é determinada pelas probabilidades de falha utilizadas como restrições. A diferença entre estas restrições é latente nos resultados da Figura 1.2. Considerando a otimização robusta e a RBDO, pode-se dizer que a consideração de incertezas na otimização estrutural não é uma novidade. No entanto, uma revisão da literatura mostra que na maioria dos artigos clássicos de RBDO (Du e Chen, 2004; Tu, Choi e Park, 1999; Cheng, Xu e Jiang, 2006; Youn e Choi, 2004; Agarwal et al., 2007; Yi, Cheng e Jiang, 2008; Aoues e Chateaneuf, 2010; Valdebenito e Schueller, 2010), as consequências de falha são desconsideradas ou descartadas.

Uma função objetivo utilizada com frequência é a minimização da energia de deformação (*compliance*) da estrutura. Funções objetivo envolvendo custos também são encontradas, entretanto tais custos se referem ao volume de materiais ou a custos de manufatura. Um termo de custo frequentemente desprezado na formulação de problemas de otimização estrutural é o custo esperado de falha. Custo esperado de falha é o produto de um custo de falha por uma probabilidade de falha. Esta definição coincide com a definição de risco¹: logo, o custo esperado de falha pode ser entendido como risco associado a cada modo de falha da estrutura. O custo esperado total é a soma dos custos esperados de falha, para cada um dos possíveis modos de falha, somado aos custos iniciais de construção, de manutenção e operação da estrutura. O custo esperado total de um sistema estrutural é diretamente afetado pelo risco que a estrutura oferece a usuários, empregados, ao público em geral e ao meio ambiente.

¹ Definição de “risco” associado a um evento: produto da consequência do evento pela probabilidade de ocorrência do mesmo.

À otimização estrutural que leva em conta as incertezas juntamente com as consequências de falha através da minimização dos custos esperados totais dá-se o nome de Otimização de Risco - *Risk Optimization* (RO) -. Tratada, entre outros, em Beck e Verzenhassi (2008) e Beck e Gomes (2012), a formulação permite equacionar o compromisso entre segurança e custo de uma estrutura. Como confirmado no trabalho de Beck, Gomes e Bazán (2012), que discute como a consideração de incertezas epistêmicas² afeta a robustez do projeto ótimo. Neste trabalho, conclui-se que resultados da otimização robusta mostram-se mais conservadores e caros, porém menos susceptíveis a tais incertezas em comparação a otimizações não-robustas.

A Figura 1.3 compara o escopo da otimização de risco com o escopo das otimizações determinística e RBDO.

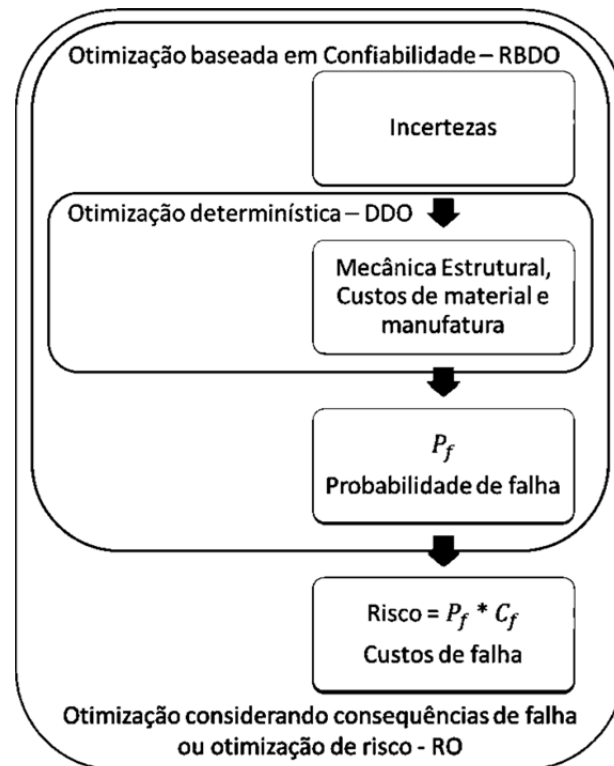


Figura 1.3 – Comparação do escopo de formulações de otimização determinística, RBDO, e otimização de risco.

² Incertezas epistêmicas estão relacionadas ao nível de conhecimento do problema, podendo ser do tipo estatística, de decisão, de modelo e fenomenológica. Tais incertezas podem ser reduzidas ou eliminadas através da coleta de mais dados sobre os processos envolvidos ou através de melhor conhecimento do problema (Beck et al., 2012).

Por outro lado, métodos de confiabilidade e otimização estrutural são usados em conjunto com métodos numéricos de resolução mecânica da estrutura.. Não obstante, a crescente busca por economia e aplicação otimizada de material gera a concepção de estruturas extremamente flexíveis. Como consequência, a análise de equilíbrio na forma não-deslocada não é mais aceitável para grande parte das aplicações. A inclusão de um modelo de comportamento mecânico com resposta não linear geométrica e do material visa, desta forma, representar com melhor precisão o comportamento dessas estruturas, sendo fundamental para representar falhas por instabilidade.

O estudo de não linearidades no método dos elementos finitos (MEF ou FEM –*Finite element method*-) foi abordado por Crisfield (1991,1997) e Pimenta (1988 e 1996), que tratam da não linearidade geométrica. Já o estudo das não linearidades físicas fixou-se na utilização de materiais elásticos não lineares através da teoria da elasticidade. A diferença entre as análises linear e não linear geométrica e física pode ser vista na Figura 1.4, que mostra a posição deslocada após aplicação de uma carga de compressão de uma mesma treliça com alturas distintas.

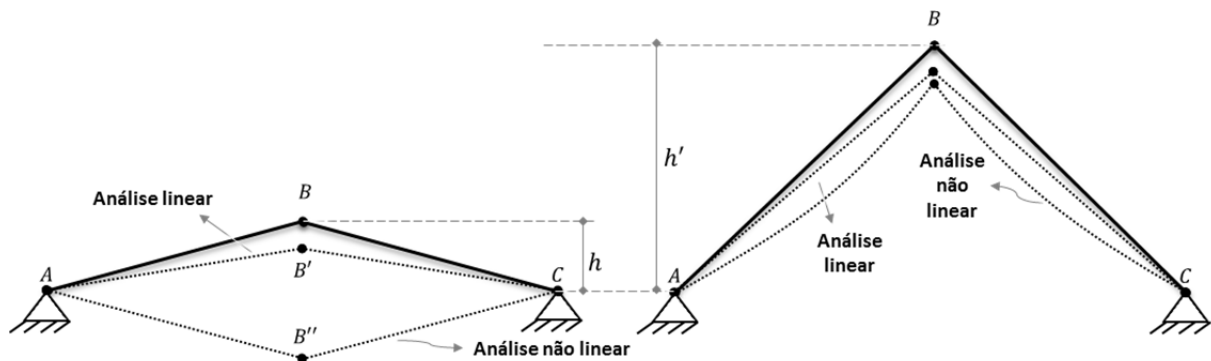


Figura 1.4 - Posição deslocada de uma treliça em análises mecânicas linear e não-linear.

Diferentes modos de falha têm consequências distintas e diferentes custos associados. Modos de falha frágeis ou súbitos, que ocorrem sem aviso prévio, têm consequências mais graves do que modos de falha dúcteis. Modos de falha ditos de serviço, que levam à suspensão (temporária) do uso da estrutura, têm custos menores do que modos de falha ditos últimos, que levam ao colapso da estrutura. O estudo da relação entre **forma da estrutura e consequências de falha** é relevante porque, além do material, a forma de uma estrutura determina quais os modos de falha mais prováveis. Já as proporções da estrutura, de modo geral, determinam quão prováveis estes modos serão.

Quando o custo dos diferentes modos de falha é levado em consideração, o resultado **depende dos parâmetros do problema, em particular dos diferentes custos de falha**. Mais ainda, a solução seria um compromisso entre os custos dos diferentes modos de falha. Para a configuração da esquerda, na Figura 1.4, os mecanismos relevantes são *snap-through*³ e instabilidade das barras comprimidas. Para a estrutura da direita, o problema de *snap-through* foi eliminado e o modo de falha mais relevante (mais provável) é a instabilidade das barras comprimidas. Em ambos os casos também pode ocorrer ruptura das barras tracionadas ou esmagamento das barras comprimidas.

A Figura 1.4 ilustra um problema clássico em que **existe uma relação de compromisso entre diferentes modos de falha**. Cada configuração possível favorece alguns e desfavorece outros modos de falha. Encontrar o ponto ótimo de compromisso entre estes modos de falha requer a quantificação das consequências de falha. Estas são multiplicadas pela probabilidade de ocorrência de cada modo de falha, obtendo-se os custos esperados de falha para cada modo. Os custos esperados de falha são incluídos na função objetivo, de forma a obter-se a configuração ótima como aquela que leva ao menor custo esperado total. Em contrapartida, quando os diferentes modos de falha são considerados como restrições de projeto (otimização determinística ou RBDO), a solução do problema passa a ser determinada por estas restrições.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal desta dissertação é otimizar uma estrutura sob incertezas considerando o custo esperado de falhas. Três falhas serão consideradas: falhas por instabilidade de ponto limite e de bifurcação (flambagem) e de tensão admissível. As não linearidades físicas e geométricas podem ter um papel importante na ocorrência dessas falhas e serão incluídas nesse estudo. Espera-se compreender como a quantificação das consequências de falha afeta a forma ótima de sistemas estruturais, obter a relação de compromisso entre diferentes modos de falha bem como a margem de segurança ótima em relação a cada modo.

³ A falha por *snap-through*, que ocorre devido à mudança brusca da configuração de equilíbrio, será explicada em detalhes no item 4.1.

1.3 METODOLOGIA

As análises são feitas em uma treliça de duas barras utilizando o modelo mecânico com não linearidade geométrica e física. As variáveis de solicitação, resistência e de módulo de elasticidade são consideradas com distribuições probabilísticas. O equacionamento das equações de estado limite é feito com falhas por tensão (esmagamento e escoamento) e falhas por instabilidades (bifurcação e ponto limite). O cálculo das probabilidades de falha é feito através do programa Strand com a utilização do FORM. A função objetivo é então montada somando-se as parcelas de custos esperadas de falha para cada modo e o custo inicial. Tal custo inicial é dependente das variáveis de projeto que são de forma (altura e comprimento do vão) e de tamanho (características da seção transversal: diâmetro e espessura). A otimização estrutural é feita através da procura exaustiva do ponto de mínimo para cada cenário de consequências de falha. Os resultados são comparados entre os diferentes cenários e entre a otimização determinística e ainda com a alteração da constante de não linearidade física.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO

O capítulo 1 traz uma introdução à dissertação abordando os principais conceitos a serem trabalhados e também uma justificativa ao trabalho. Os objetivos principais e secundários, incluindo a metodologia utilizada no trabalho também estão inclusos neste item.

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, na qual são abordados os tópicos de confiabilidade estrutural, otimização estrutural determinística e de risco, bem como comportamento estrutural não linear, estados limites e modos de falha.

No capítulo 3 faz-se a modelagem da estrutura proposta considerando os aspectos de análise não linear geométrica e física.

O capítulo 4 estuda as principais falhas associadas à estrutura definindo as equações de estado limite para os modos de falha de *snap-through*, flambagem e falha por tensão admissível.

No capítulo 5 é aplicada a otimização de risco, no qual é definida a função objetivo do problema, as variáveis aleatórias e de projeto e realizado o cálculo das probabilidades de

falha. Por fim, os custos esperados totais são apresentados em análises em função de um e dois parâmetros e discutidos de acordo com a variação dos custos de falha.

O capítulo 6 realiza uma comparação entre a otimização determinística e a de risco desenvolvida.

Por fim, o capítulo 7 traz as conclusões observadas e sugestões para continuação do trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Sejam \mathbf{X} e \mathbf{d} dois vetores de parâmetros de um sistema estrutural. O vetor \mathbf{X} representa todas as variáveis aleatórias do problema, como dimensões, propriedades de resistência de materiais e de membros estruturais, e solicitações. Alguns destes parâmetros são variáveis aleatórias por natureza, outros não podem ser definidos deterministicamente devido a diversas fontes de incerteza.

Tipicamente, variáveis de resistência são representadas como variáveis aleatórias e ações são representadas como variáveis aleatórias ou processos estocásticos. O vetor \mathbf{d} contém as variáveis de projeto do sistema, ou variáveis de otimização, como coeficientes parciais de segurança, dimensões, coordenadas nodais e mesmo alguns parâmetros (determinísticos) dos modelos de distribuição de probabilidade das variáveis \mathbf{X} .

A existência de incertezas e de comportamento aleatório implica em riscos, isto é, na possibilidade de respostas estruturais indesejadas. A fronteira entre respostas estruturais desejadas e indesejadas é formulada através de equações de estado limite $g(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0$ de tal forma que:

$$\Omega_f(\mathbf{d}) = \{x | g(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0\} \text{ é o domínio de falha.} \quad (2.1)$$

$$\Omega_s(\mathbf{d}) = \{x | g(\mathbf{X}, \mathbf{d}) > 0\} \text{ é o domínio de sobrevivência.}$$

Cada função de estado limite descreve um modo de falha possível para a estrutura, em termos de performance (estado limite de serviço) ou em termos de capacidade última da estrutura. A probabilidade de uma resposta indesejada, ou probabilidade de falha, para cada modo de falha, é dada por:

$$P_f = P[\mathbf{X} \in \Omega_f(\mathbf{d})] = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(x) dx \quad (2.2)$$

onde $f_{\mathbf{X}}(x)$ representa a função de densidade de probabilidades conjunta do vetor aleatório \mathbf{X} e $P[.]$ representa *probabilidade*. Probabilidades de falha para cada função de estado limite bem como para falha do sistema são calculadas através de técnicas de confiabilidade estrutural como o método de aproximação de primeira ordem (FORM) -

First Order Reliability Method-, o de segunda ordem (SORM) -*Second Order Reliability Method*- ou simulação de Monte Carlo (Melchers, 1999; Ang e Tang, 2007).

2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

2.2.1 Otimização estrutural determinística

Um problema de otimização estrutural determinística pode ser posto como:

$$\mathbf{d}^* = \arg \min[C(\mathbf{d}): \mathbf{d} \in S] \quad (2.3)$$

onde C é a função objetivo, \mathbf{d} são as variáveis de projeto (coordenadas nodais, área dos elementos, densidade dos elementos) e $S = \{g_i(\mathbf{d}) \leq 0, 1 \leq i \leq n_c\}$ é o espaço de projeto admissível formado pelas n_c restrições g_i do problema de otimização. Na otimização determinista, as restrições g_i correspondem às equações de estado limite da Eq. (2.1). No entanto, as variáveis aleatórias X são substituídas por valores característicos ou nominais das resistências e ações, ponderadas por coeficientes parciais de segurança, todos valores determinísticos.

Funções objetivo usuais em otimização de topologia são o custo, volume ou energia de deformação elástica (*compliance*) de uma estrutura. As restrições geralmente utilizadas são: rigidez mínima, volume máximo ou ainda tensão admissível.

2.2.2 Otimização de risco

A otimização de risco se distingue de outras formulações de otimização estrutural por levar em consideração o efeito de incertezas em termos de probabilidades e os custos de falha.

O custo total esperado ($C_{esperado\ total}$) de um sistema estrutural em um problema de otimização de risco é formado pelo somatório dos seguintes custos:

1. $C_{inicial}$: custo inicial ou de construção da estrutura;
2. $C_{operação}$: custo de operação;
3. $C_{inspeção\ e\ manutenção}$: custos de inspeções, manutenção, reparo e substituição;
4. $C_{descarte}$: custo de descarte.

Somados aos custos esperados de falha, que vem a ser produto dos custos de falha pelas respectivas probabilidades de falha (Beck e Gomes, 2012):

$$C_{falha\ esperado}(\mathbf{d}) = C_{falha}(\mathbf{d})P_f(\mathbf{d}) \quad (2.4)$$

Custos de falha incluem custos de reparo ou de substituição dos componentes danificados, custo de reconstrução completa do sistema, custo de indenizações pagas a funcionários e a terceiros em decorrência de falha acidental, e outros. Para determinar o custo esperado de falha é necessário quantificar o custo de falha em termos monetários, bem como determinar a probabilidade de falha. A probabilidade de falha é avaliada utilizando-se a teoria de confiabilidade estrutural, definida segundo a Eq. (2.4).

Para cada modo de falha do sistema ou de componentes do mesmo haverá um componente de custo esperado de falha. O custo esperado total do sistema é dado pela soma de todos os termos parciais de custo:

$$\begin{aligned} C_{esperado\ total}(\mathbf{d}) &= C_{inicial}(\mathbf{d}) + C_{operação}(\mathbf{d}) + C_{inspeção\ e\ manutenção}(\mathbf{d}) \\ &+ C_{descarte}(\mathbf{d}) + \sum_{k=1}^{modos\ de\ falha} C_{falha}(\mathbf{d})P_f(\mathbf{d}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

O custo inicial aumenta diretamente com o nível de controle ou de segurança planejados em projeto. Os custos de inspeção, manutenção, reparo e substituição variam conforme a política adotada. Em geral, gastos com estas ações tem impacto na probabilidade de falha do sistema, e, conseqüentemente nos custos esperados de falha. Portanto, gastos com inspeção, manutenção, reparo e substituição aumentam a terceira parcela da Eq. (2.5), mas tendem a diminuir a parcela dos custos esperados de falha. Maiores investimentos em inspeção, manutenção, reparo e substituição têm um efeito aproximadamente linear nos custos diretos, $C_{inspeção\ e\ manutenção}$, da Eq. (2.5)), mas um efeito não-linear nas probabilidades de falha, conforme ilustrado na Figura 2.1. Segundo Beck e Gomes (2012), isto ocorre porque, a partir de um determinado nível de investimento nestas ações, a probabilidade de falha já não é mais afetada pelas mesmas.

A quantidade ideal de recursos a investir em políticas de inspeção e manutenção é aquela que leva ao mínimo custo esperado total. Esta quantidade pode ser encontrada

através da solução do seguinte problema de otimização de risco, também ilustrado na Figura 2.1.

$$\mathbf{d}^* = \arg \min [C_{esperado\ total}(\mathbf{d}); \mathbf{d} \in S] \quad (2.6)$$

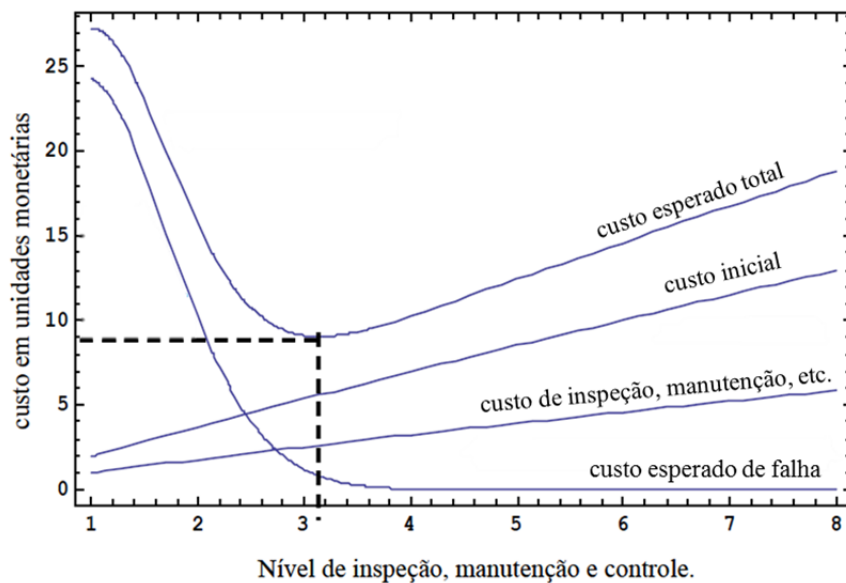


Figura 2.1 - Composição do custo esperado total de um sistema estrutural hipotético. (Fonte: Beck, 2009)

onde $S = \{\mathbf{d}_{min} \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_{max}\}$ é o espaço de projeto admissível e \mathbf{d}_{min} e \mathbf{d}_{max} são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto (coordenadas nodais, área dos elementos, densidade dos elementos). É importante observar que nesta formulação as restrições correspondentes às equações de estado limite foram incorporadas à função objetivo. Nas otimizações determinística e baseada em confiabilidade (RBDO), as equações de estado limite representam restrições de projeto, enquanto na otimização de risco o problema está livre: logo, esta última formulação permite encontrar o balanço adequado entre os modos de falha, ou as margens de segurança apropriadas em relação a cada modo de falha. Esta formulação é também chamada de otimização de custos sobre o ciclo de vida. No entanto, os custos de ciclo de vida não precisam estar necessariamente envolvidos, isto é, pode-se resolver o problema de otimização de risco envolvendo somente a primeira parcela, $C_{inicial}$, e a última, referente ao custo esperado de falha, do lado direito da Eq. (2.5).

A otimização de risco pode ser realizada através do controle das probabilidades de falha e/ou dos custos de falha. No entanto, a mitigação de risco através de preparo, educação, treinamento e outros estão fora do escopo desta investigação. Embora custos de falha sejam constantes, é importante notar que esta formulação permite um balanço entre modos de falha conflitantes com custos de falha distintos. Consequentemente, os estados limites últimos e de serviço, com seus diferentes custos de falha intrínsecos, são facilmente representados na formulação de otimização de risco (Gomes e Beck, 2013).

Deve-se ressaltar que a otimização de risco acima é bastante diferente da RBDO. Embora esta separação não seja sempre clara na literatura, artigos clássicos de RBDO, como o de Qu e Haftka (2004), referem-se ao seguinte problema:

$$\mathbf{d}^* = \arg \min [C_{inicial}(\mathbf{d}) : \mathbf{d} \in \mathcal{S}] \quad (2.7)$$

onde $C_{inicial}$ é o custo inicial ou de produção, que pode incluir custo de materiais (calculados a partir do volume) e custos de mão-de-obra e $P_{f_{admissível}}$ é a restrição em termos de uma probabilidade de falha admissível. O espaço de projeto do problema de otimização torna-se $\mathcal{S} = \{P_f^{(i)}(\mathbf{d}) \leq P_{f_{admissível}}^{(i)}, 1 \leq i \leq n_c\}$, onde cada equação de estado limite dá origem a uma restrição em termos de probabilidades de falha admissível.

Em problemas convencionais de RBDO, as incertezas sobre os valores dos parâmetros de projeto são modelados como variáveis aleatórias. Um método eficiente de resolução é considerar as médias destas variáveis aleatórias como variáveis de projeto, assim a função objetivo torna-se uma função determinística. Já nas restrições considera-se que a probabilidade da restrição não ser satisfeita deve ser inferior a certa probabilidade de falha admissível, escolhida *a priori* pelo projetista. Portanto, formulações clássicas de RBDO não incluem custos de falha na função objetivo. Isto gera diferenças significativas nas estruturas ótimas encontradas, como evidenciado por Beck e Gomes (2012).

Na otimização de risco, as análises de confiabilidade são repetidas centenas de vezes. Portanto, o algoritmo usado para análises de confiabilidade deve ser muito eficiente. O FORM é razoavelmente preciso e bastante eficiente para problemas de alta e baixa probabilidade de falha.

No FORM, a Eq. (2.2). é resolvida, segundo Melchers (1999), através do mapeamento do espaço de variáveis aleatórias \mathbf{X} do espaço original para o assim chamado espaço Gaussiano padrão.

$$\mathbf{u} = T[\mathbf{x}] \quad g_u(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = g(T^{-1}[\mathbf{u}], \mathbf{d}) \quad (2.8)$$

onde \mathbf{u} representa um vetor⁴ cujos componentes são variáveis aleatórias Gaussianas padrão independentes e identicamente distribuídas. Este mapeamento pode ser realizado pela transformação de Nataf ou de Rosenblatt (MELCHERS, 1999). No espaço Gaussiano padrão, a função conjunta de probabilidades $f_u(\mathbf{u})$ é rotacionalmente simétrica e, portanto, o ponto \mathbf{u}^* na função de estado limite $g_u(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = 0$ que é mais próximo à origem representa o ponto de maior probabilidade de falha, também conhecido como ponto de projeto. Essa característica também permite que a busca pelo ponto de projeto seja feita por um problema de otimização com restrição:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \arg \min \|\mathbf{u}\| \\ &\text{sujeito a } g_u(\mathbf{u}, \mathbf{d}) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da Eq. (2.9), $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ é o índice de confiabilidade de Hasofer-Lind, que vem a ser a distancia entre \mathbf{u}^* e a origem do espaço padrão. O FORM, portanto, consiste em encontrar o ponto de projeto \mathbf{u}^* e aproximar a função de estado limite original $g_u(\mathbf{u})$ por um hiper-plano tangente no ponto de projeto. A aproximação de primeira ordem da probabilidade de falha é dada por:

$$P_f(\mathbf{d}) = P[g_u(\mathbf{u}, \mathbf{d}) \leq 0] \simeq \Phi(-\beta) \quad (2.10)$$

onde Φ é a função de distribuição cumulativa de probabilidades de uma distribuição normal com média nula e desvio-padrão unitário, chamada de distribuição normal padrão.

O cálculo das probabilidades de falha pode variar de acordo com o método usado para a sua determinação. Sendo possível utilizar simulações de Monte Carlo para avaliar a probabilidade de falha. A probabilidade de falha, via Monte Carlo simples (SMCS), é

⁴ A letra \mathbf{u} em negrito se refere a um vetor do espaço Gaussiano padrão e não tem relação com os deslocamentos u utilizados ao longo deste trabalho.

obtida integrando-se sobre todo domínio o produto da função indicadora, $I[x]$, pela função de densidade de probabilidade conjunta $f_x(\mathbf{x})$, por definição, esta expressão representa o valor esperado⁵ da função indiciadora, $E[I[x]]$.

$$P_f = \int I[x]f_x(\mathbf{x})d\mathbf{x} = E[I[x]] \quad (2.11)$$

Já a amostragem por importância (SMCI) procura deslocar os pontos de amostragem para regiões importantes do domínio de falha utilizando uma função de amostragem $h_x(\mathbf{x})$. Uma das várias estratégias para a determinação da função de amostragem é centra-la no ponto de projeto. A Eq. (5.5) mostra a alteração em relação ao SMCS:

$$P_f = \int I[x] \frac{f_x(\mathbf{x})}{h_x(\mathbf{x})} h_x(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.12)$$

Problemas de otimização de risco e RBDO envolvem análises de otimização internas quando a probabilidade de falha é avaliada pelo FORM (Eq. (2.8)). Esta é uma dificuldade importante, uma vez que análises de otimização envolvem a realização de centenas de respostas estruturais. Portanto, o custo computacional de resolver o modelo (via MEF) é composto, pois o modelo deve ser resolvido centenas ou milhares de vezes. Muitos atalhos foram desenvolvidos para problemas de RBDO, tais como a utilização programação sequencial, fator de probabilidade e outros. No entanto, esses atalhos não servem para problemas de otimização de risco sendo, portanto, problemas de resolução mais trabalhosa. Além disso, foi observado que a formulação da Eq. (2.5), por incluir as "restrições" de projeto na função objetivo, dá origem a problemas de otimização com múltiplos mínimos locais (Beck e Gomes, 2012).

⁵ Não confundir a expressão de valor esperado com o módulo de elasticidade do material de estudo.

2.3 COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

2.3.1 Teoria da elasticidade não-linear

O uso do modelo elástico não linear abandona a hipótese de pequenas deformações e obriga a usar um tensor de deformação não-linear e não-infinitesimal, dando maior complexidade à lei constitutivas. Além disso, as equações resultantes da anulação desta hipótese incluem fenômenos de não-linearidade geométrica (flambagem, abaulamento, *snap-through*,...).

Considerando o material como um meio de resposta elástico-linear, a Lei de Hooke com resume a relação constitutiva, sendo expressa, no caso unidimensional, pela seguinte relação tensão-deformação:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.13)$$

Nesta Eq. (2.13), o módulo de elasticidade ou módulo de Young, E , é entendido como uma constante de proporcionalidade entre as duas grandezas: tensão (σ) e deformação (ε).

Embora existam na literatura várias medidas de deformação, a medida de deformação quadrática ou de Green dada pela Eq. (2.14) será adotada, dando origem a seguinte relação de compatibilidade:

$$\varepsilon_G = \frac{\lambda^2 - 1}{2} \quad (2.14)$$

onde λ é a razão entre o comprimento final e inicial do elemento. A Eq. (2.14) será escrita, na sequência, em função dos comprimentos, como é possível ver na Eq. (3.3). Resta a definição da lei constitutiva que prescreva a variação do módulo de elasticidade com o deslocamento. Admitindo-se a seguinte lei de variação, que ilustra tal dependência, tem-se:

$$E(u) = E_0(1 - \eta\varepsilon_G(u))c/ \quad \eta > 0 \text{ e } 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{\eta} \text{ ou } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{m\acute{a}x} \quad (2.15)$$

A lei adotada, embora ilustrativa, é representativa de um caso de elasticidade não-linear, sendo $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ uma limitação que garante a restrição do modelo ao regime de pequenas deformações e η uma constante positiva limitada pelo inverso de $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ para que não resultem valores negativos do módulo de elasticidade.

2.3.2 Aspectos de não-linearidade

Uma estrutura tem seu comportamento dito linear quando as relações de equilíbrio tomam como referência a configuração inicial da estrutura. Adotando hipóteses consistentes com essa teoria, variações lineares e angulares associadas às deformações são descritas adotando-se simplificações de natureza geométrica. Além disso, outras restrições são necessárias para reproduzir uma resposta estrutural linear, como a adoção de uma relação de proporcionalidade entre tensões e deformações e invariância das condições de contorno durante o processo de deformação.

O regime de comportamento não linear de uma estrutura pode ser obtido através da retirada de qualquer uma dessas hipóteses. A não linearidade física surge da admissão de não proporcionalidade entre tensão e deformação; a não linearidade geométrica da retirada das restrições nas descrições das mudanças de geometria. A variação das condições de contorno, por sua vez, determina a não linearidade de contato, que não será estudada neste trabalho.

Do ponto de vista mais geral, pode ocorrer mais de um fator indutor de comportamento não linear, razão pelas quais ambas as não linearidades física e geométrica serão alvo deste estudo. A ocorrência de uma não linearidade tem, no entanto, influencia sobre outra, razão pela qual estudos de não linearidades únicas não podem ser sobrepostos.

Na não linearidade física, procura-se considerar a resposta de certo meio além dos limites do regime elástico linear idealizado. Quando há uma relação constitutiva não linear surgem mudanças na resposta física dos materiais (distribuição das tensões ao longo da extensão de uma barra, bem como ao longo dos eixos e das faces das suas próprias seções). A variação das leis constitutivas que governam o comportamento não linear material tem como inconveniente o fato das equações de equilíbrio terem que ser determinadas para estruturas cujas propriedades físicas dependem da tensão, existindo o problema de não poderem ser conhecidas antecipadamente.

A não linearidade geométrica, também conhecida como “efeito de segunda ordem”, surge devido à modificação da geometria de referência da análise ao longo do processo de deformação do corpo. Pode ocorrer devido a grandes deformações, grandes deslocamentos e rotações da configuração de referência, ou dos dois juntos. A estas alterações somam-se acréscimos nos esforços, resultado direto das novas e sucessivas

excentricidades criadas pelos movimentos próprios da estrutura em deformação acompanhados de alterações da rigidez da estrutura gerada pelo significativo valor que as forças internas venham a assumir. A descrição geral da condição de equilíbrio na posição deslocada é feita através do princípio dos trabalhos virtuais (Paula e Proença, 2008).

A consideração geral de grandes deslocamentos e pequenas deformações ou, de modo mais geral, grandes deformações deve ser usada com cautela, uma vez que em situações particulares, como a de estruturas esbeltas abatidas, mesmo com pequenos deslocamentos lineares e regime de pequenas deformações podem ocorrer fenômenos de instabilidade estrutural, o que só é convenientemente representado através da correta descrição das rotações globais (Martins e Greco, 2013).

2.3.3 Comportamentos pós críticos

Ilustram-se nesta seção alguns dos processos de deformação não linear que uma estrutura pode sofrer em comportamento pós-crítico, devendo ainda em certos casos falar-se de instabilidade, desde que em qualquer momento tenha existido uma perda de equilíbrio caracterizada por um valor mínimo da rigidez da estrutura numa fase intermediária do processo. A Figura 2.2 mostra as curvas de carga versus deslocamentos para o caso normal e de comportamento pós-críticos.

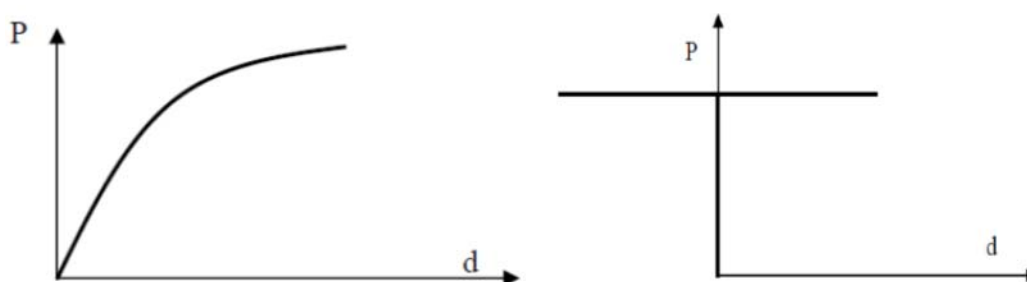


Figura 2.2- Caso normal (esquerda) e caso de bifurcação do equilíbrio (direita).(Fonte: Martins e Greco, 2013)

O caso normal é caracterizado por alguma perda na rigidez e no aumento moderado da deformação. Neste caso existe uma relação univocidade entre cargas e deslocamentos, isto é, existe uma única deformação associada a uma dada carga. Além disso, as deformações não necessariamente comprometem a utilização no regime plástico. A bifurcação de equilíbrio é caracterizada por um comportamento essencialmente linear,

até atingir um ponto a partir do qual entra-se em ampla não linearidade. O nome bifurcação surge aqui, ligado à possibilidade de existirem duas trajetórias que passem pelo mesmo estado de equilíbrio, a partir do qual estas se tornam instáveis. É uma situação em que deixa de haver univocidade entre a carga e o deslocamento no seu ponto de aplicação.

Os próximos comportamentos, mostrados na Figura 2.3, dizem respeito às instabilidades causadas por inflexão. Em ambos os casos, a mudança entre as fases de perda e ganho de rigidez é caracterizada por um ponto de inflexão, daí a designação do próprio fenômeno.

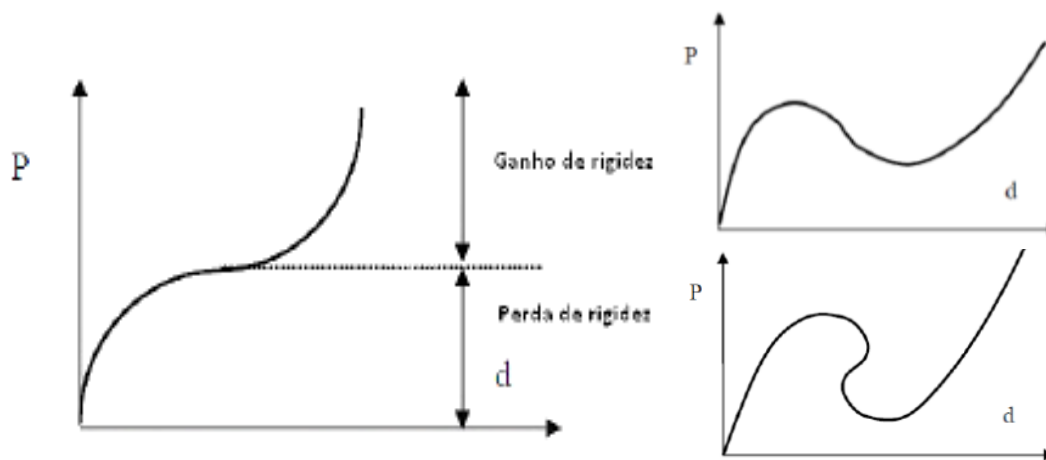


Figura 2.3- Caso de inflexão da trajetória de equilíbrio: sem descontinuidade (esquerda); com descontinuidade do tipo “*snap-through*” (direita acima) e com descontinuidade tipo “*snap-back*” (direita abaixo). (Fonte: Martins e Greco, 2013)

No caso de inflexão na trajetória sem descontinuidade, a rigidez da estrutura apresenta um valor mínimo numa fase intermediária do processo. Na situação particular com descontinuidade, chamada “*snap-through*”, os efeitos de não linearidade, acompanhados de uma diminuição da rigidez, vão-se acentuando com o aumento de carga, prosseguindo até que a trajetória alcança um ponto de máximo, onde a rigidez se anula e a estrutura se torna instável. É então procurada uma nova configuração de estabilidade e a estrutura vê o seu equilíbrio restituído, após o aumento brusco de deformação. A energia potencial assim libertada está associada a um fenômeno fortemente dinâmico que acompanha a variação profunda da geometria da estrutura. Um caso análogo, mas em que se verifica adicionalmente uma diminuição transitória em termos de deslocamento é designado por “*snap-back*”.

Como noção teórica muito importante, nunca será o valor absoluto desta carga-tipo que fará variar o aspecto da curva carga-deslocamento. O valor dessa ação só determinará quanto longo vai ser a extensão total da linha representativa da relação carga versus deslocamento, jamais a sua forma. Segundo Martins e Greco (2013), a aparência da trajetória está intimamente ligada às propriedades geométricas e físicas das secções dos elementos. Uma variação da inércia destas secções, por sua vez, pode determinar maior ou menor concavidade e convexidade do percurso (em que, no extremo, tem-se uma situação de instabilidade por inversão de equilíbrio).

Assim, nota-se que o grau de comportamento não linear de uma estrutura, para uma mesma geometria global, **varia decisivamente com a rigidez dos seus membros**. Secundariamente o valor da carga-tipo assume importância fundamental, sendo esta mais relevante quando sua dimensão coloca a estrutura já perto do colapso geométrico, ou seja, na iminência da bifurcação de equilíbrio.

2.3.4 Estados limites e modos de falha

A formulação das restrições do problema de otimização é feita através das equações de estado limite. Cada modo de falha dá origem a um estado limite que corresponde a um estado indesejável da estrutura por não atendimento de um requisito de serviço ou de segurança. Para ajudar a definir fronteiras entre estados desejável e indesejável são usadas, em termos matemáticos, funções de estados limites. Os modos de falha e os estados limites correspondentes representam modelos idealizados da falha de estruturas.

Os estados limites podem ser divididos em últimos e de serviço. Os últimos levam ao colapso ou dano grave e permanente da estrutura, correspondendo aos requisitos de segurança que envolve a capacidade máxima de carga ou de deformação da estrutura. Os de serviço correspondem aos requisitos de serviço da estrutura e a condições normais de uso, que podem ser reversíveis ou irreversíveis. Como estes últimos só caracterizam falha após um período prolongado de tempo ou de uma sucessão de ocorrências não serão utilizados neste estudo.

Existe, no entanto, a probabilidade de que o sistema estrutural atinja um ou mais estados limites. Essa probabilidade é ocasionada pela existência de parâmetros que são

variáveis aleatórias por natureza e de outros que não podem ser definidos deterministicamente devido a fontes diversas de incerteza. Os resultados produzidos quando um modo de falha ocorre são determinados como consequências de falha.

O conhecimento da relação entre a forma de uma estrutura e a ocorrência dos modos de falha inerentes à mesma permite auxiliar nos aspectos de segurança, aumentando o nível de confiabilidade da estrutura. Para determinar o quão crítico é um modo de falha, pode-se multiplicar a probabilidade de ocorrência deste modo pela quantificação monetária das consequências da falha englobando tanto abrangência do impacto quanto gravidade dos efeitos.

3. EXEMPLO ANALÍTICO DE APLICAÇÃO: TRELIÇA PLANA

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Treliças são estruturas nas quais as forças nas barras são transmitidas ao longo do comprimento dos elementos, sendo as forças aplicadas somente nos nós de modo concentrado. No caso do elemento finito de treliça (barra), tem-se como graus de liberdade as posições finais dos dois nós extremos. A configuração inicial ou indeformada é apresentada pelas coordenadas cartesianas e a atual ou deformada pode ser representada pela soma dos deslocamentos aplicados às coordenadas iniciais (ver Figura 3.1).

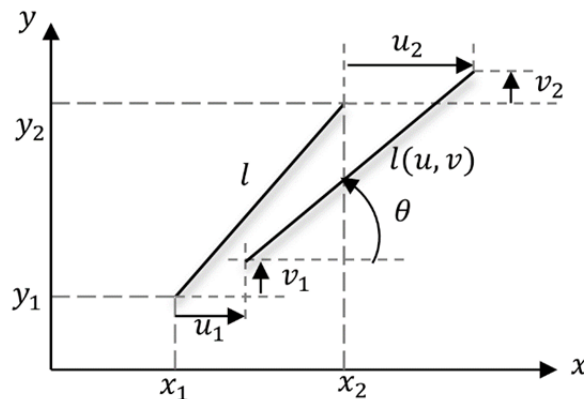


Figura 3.1 – Elemento de barra no estado deformado e indeformado. A barra em linha traçada representa o estado indeformado dado pelas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Após a aplicação de deslocamentos horizontais (u) e verticais (v) as coordenadas iniciais e finais que definem o comprimento da barra deformada sofrem os acréscimos de deslocamento $(x_1 + u_1, y_1 + v_1)$ e $(x_2 + u_2, y_2 + v_2)$. O comprimento final da barra passa então a ser uma função em termo dos deslocamentos sofridos, o mesmo ocorre para o ângulo θ de inclinação.

A treliça de Von Misses, a ser estudada neste trabalho, é caracterizada por um sistema mecânico com duas barras. Sua análise será feita considerando não linearidades física e geométrica. A carga será aplicada no ponto de junção das barras produzindo uma deformação simétrica. Tal aplicação de carga pode produzir instabilidades a depender do ângulo entre as barras. Uma instabilidade não muito abordada é a instabilidade por ponto limite, chamada fenômeno do *snap-through*. Nesta falha, a carga crítica de compressão faz com que a estrutura assuma uma forma de equilíbrio reversa de modo repentino, por isso, a designação *snap-through* (movimento súbito de um lado a outro) Portanto, é possível afirmar que a treliça de Von Misses possui comportamento

biestável. Com a diminuição do ângulo entre as barras, e portanto, aumento da esbeltez das barras, aumenta-se a probabilidade de ocorrência de instabilidade por bifurcação, caracterizada pela flambagem do elemento estrutural. Tais instabilidades são tratadas como falhas da estrutura sendo calculada uma probabilidade de falha a cada modo. Trata-se ainda da falha por tensão admissível que é descrita por esmagamento ou escoamento das barras a depender da solicitação.

Para modelar o problema, será feita uma solução analítica que trate o comportamento não linear físico através de uma lei constitutiva de variação para o módulo de elasticidade, com o deslocamento e o comportamento não linear geométrico através da incorporação da posição deslocada na equação de equilíbrio do problema.

3.2 FORMULAÇÃO: NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A formulação do problema com a consideração de não linearidade geométrica depende da consideração da posição deformada da estrutura, isto é, a posição final da estrutura é dada em função dos deslocamentos sofridos a cada passo de carga. A princípio, na configuração (posição) inicial, as barras formam, com a horizontal, um ângulo θ_0 como indicado na Figura 3.2. Com aplicação de uma carga, a configuração da estrutura é alterada e a posição deslocada é calculada a partir do equilíbrio do nó central, o qual é feito segundo o balanço de forças nas direções vertical e horizontal.

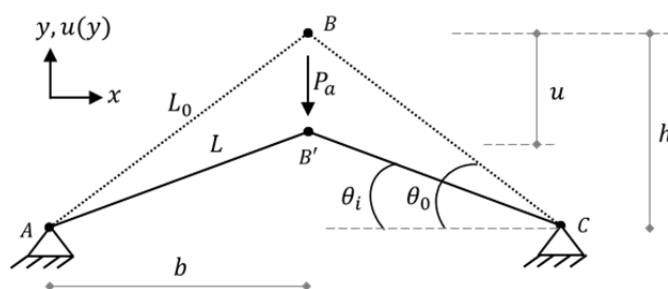


Figura 3.2 - Treliça de duas barras em posição deformada. A direção de aplicação da força foi tomada como positiva a fim de minimizar desgastes de cálculos com deslocamentos negativos. Em casos de compressão o módulo da força e dos deslocamentos deve ser tomado como negativo. Os valores com índice $_0$ representam posição indeformada ou inicial, os índices $_i$ representam posições deslocadas após aplicação de passos de carga.

Para obter o equilíbrio do nó central faz-se o detalhamento das forças atuantes no nó B segundo a Figura 3.3 à direita, na qual é considerada a representação simétrica da estrutura.

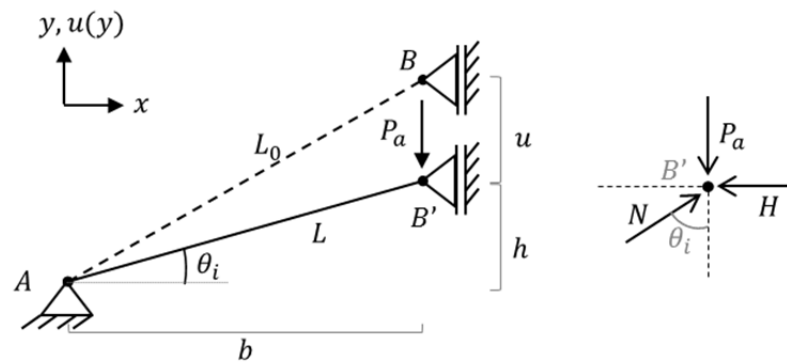


Figura 3.3 – Treliça simples em representação com simetria. O apoio que corretamente representa o comportamento do nó central é aquele que restringe movimentos horizontais e libera deslocamentos verticais, objetivo do estudo.

Considerando a condição de equilíbrio de forças no ponto B na direção vertical (y) e admitindo-se que o ângulo θ é muito pequeno, tem-se:

$$P(u) = P_a = N \sin \theta_i = \frac{N(h + u)}{L} \quad (3.1)$$

onde P_a é a carga vertical aplicada, N é o esforço normal na barra e o seno do ângulo θ_i é dado na posição deslocada, considerando o comprimento final da barra e o deslocamento vertical $u(y)$.

O cálculo do esforço de compressão normal (N) na barra representada na Figura 3.3 também é feito através dos esforços internos, onde a normal é dada pela tensão aplicada em uma determinada área; tal tensão é dada pela lei de Hooke (deformação por módulo de elasticidade).

$$N = \sigma A = E \varepsilon A \quad (3.2)$$

Dentre outras medidas de deformação, emprega-se a medida quadrática ou medida de Green definida por:

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2} \right) \quad (3.3)$$

Considerando-se a geometria, os comprimentos envolvidos são escritos como:

$$L_0 = \sqrt{b^2 + h^2} \quad e \quad L = \sqrt{b^2 + (h + u)^2} \quad (3.4)$$

Sendo assim:

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} \frac{(b^2 + (h + u)^2 - (b^2 + h^2))}{b^2 + h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2hu + u^2}{L_0^2} \right) \tag{3.5}$$

Sendo assim, de forma sucinta o esforço normal nas barras é dado por:

$$N = E(u) \varepsilon_G(u) A_0 \tag{3.6}$$

onde A_0 representa a área nominal, ou inicial, da seção transversal. Não é considerado o efeito de Poisson; portanto as áreas inicial e final são equivalentes.

Em termos de não linearidade geométrica, a carga P escrita em função do deslocamento u é dada por:

$$P = \frac{EA_0}{l_0^3} \left(h^2u + \frac{3}{2}hu^2 + \frac{1}{2}u^3 \right) \tag{3.7}$$

ou

$$g(u) = E A \left(\frac{h}{l_0} \right)^3 \left[\frac{u}{h} + \frac{3}{2} \left(\frac{u}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{h} \right)^3 \right] \tag{3.8}$$

A representação gráfica das Eqs. (3.8) e (3.7), ilustrada na Figura 3.4, mostra claramente um comportamento não linear. Observa-se que, se as barras forem carregadas com uma força crescente $-F$, no ponto A, não seria possível acompanhar a trajetória real, e poderia ocorrer um salto brusco para uma configuração referente ao ponto C. A este salto se associam efeitos dinâmicos não desprezíveis. Em situações como esta, faz-se necessário o uso de estratégias adequadas à construção da trajetória de equilíbrio, tais como métodos iterativos capazes de representar as soluções em cada ponto dessa trajetória.

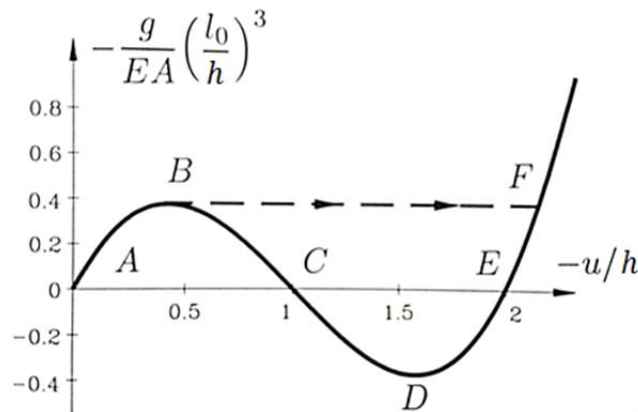


Figura 3.4 - Diagrama carga-deslocamento para treliça de duas barras. (Fonte: Crisfield, 1991)

Segundo Crisfield (1991), a construção da curva com comportamento não linear pode ser feita através do conhecimento da inclinação tangente da mesma em vários pontos. Esta tangente é a derivada da força F em relação ao deslocamento u . Assim, tem-se:

$$K_t = \frac{dF}{du} = \frac{EA_0}{l_0^3} \left(h^2 + 3hu + \frac{3}{2}u^2 \right) \quad (3.9)$$

ou

$$K_t = \frac{EA}{l_0} \left(\frac{h}{l_0} \right)^2 \left[1 + 3 \left(\frac{u}{h} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{u}{h} \right)^2 \right] \quad (3.10)$$

onde K_t é chamada de matriz de rigidez tangente. Na configuração inicial, ainda sem o conhecimento do deslocamento u , a matriz de rigidez tangente é equivalente à matriz de rigidez elástica linear, que depende somente da configuração geométrica inicial da estrutura. Nas configurações seguintes, a matriz de rigidez tangente é a soma da matriz de rigidez elástica e da matriz de rigidez geométrica.

3.3 FORMULAÇÃO: NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Adotando-se a validade do modelo para pequenas deformações descrito na Eq. (2.15) com $\eta = 100$, tem-se $\varepsilon_{m\acute{a}x} = 1/\eta = 0,01$. A relação tensão-deformação para definir a resposta constitutiva são dados pela igualdade:

$$\sigma = E_0(1 - \eta\varepsilon)\varepsilon \quad (3.11)$$

Na Eq. (3.11), a constante de não linearidade física η tem o papel de reger a influência da não linearidade física no comportamento do material. A Figura 3.5 ilustra o gráfico obtido após a adoção de valores arbitrários de deformação para obter a tensão respectiva.

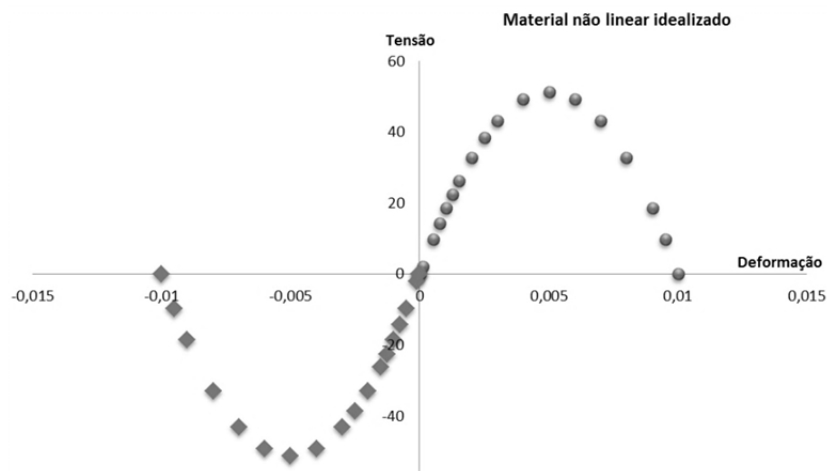


Figura 3.5- Comportamento do material elástico não linear idealizado.

Os pares positivos de tensão-deformação gerados na Figura 3.5, no entanto, não representam o problema de aplicação de forças de compressão. No problema em questão, as deformações geradas nas barras são negativas, sendo o comportamento da tensão representado pela parábola com concavidade inversa. Para manter o módulo de elasticidade positivo, tendo em vista deformações negativas em virtude da orientação dos deslocamentos, usa-se a Eq. (3.11) com sinal positivo.

3.4 ANÁLISE NÃO LINEAR DA ESTRUTURA

A análise não linear da estrutura pode ser feita de diversas formas. Primeiramente, procurou-se resolver o problema variando a altura da treliça em software comercial ANSYS. Em seguida, estratégias do programa comercial, como o uso do comprimento de arco e dos incrementos de carga, foram implementadas em um algoritmo.

3.4.1 Definição das características geométricas e do material

A estrutura a ser analisada consiste em uma treliça simples de duas barras sob força concentrada aplicada no nó central e com material de resposta elástico não-linear. Como propriedades geométricas iniciais, adota-se um vão unitário, com 1 metro. Por se tratar de uma estrutura simétrica, cada semi-vão tem 50 cm. A altura inicial adotada é igual a 5 cm, uma vez que estruturas abatidas apresentam instabilidade por ponto limite.

A força aplicada $P_a = 50kN$ foi determinada de modo a ter intensidade suficiente para causar os modos de falha a serem estudados, direção vertical e sentido negativo e é

aplicada no nó central da estrutura. O módulo de elasticidade inicial E_0 vale 20500 kN/cm^2 , as barras tem seção circular com diâmetro de $2,54 \text{ cm}$ e área de seção transversal igual a $5,07 \text{ cm}^2$, constante ao longo do comprimento das barras. O peso da barra é $3,98 \text{ kg/m}$ e o momento de inércia a flexão é $\pi d^4/64 = 2,043 \text{ cm}^4$.

3.4.2 Resolução em programa comercial ANSYS

Neste primeiro estudo foram feitas sucessivas análises no ANSYS com variação na altura da treliça. Considerou-se material não linear elástico, regime de grandes deslocamentos e os dados geométricos do item anterior. A Tabela 3.1 resume os dados de deslocamento e força normal em dois pontos da trajetória de equilíbrio e a Figura 3.6 mostra tal variação em função da altura.

Tabela 3.1- Dados obtidos da análise não linear no ANSYS .

Altura	U_{final}	Normal	U_{limite}	N_{lim}	Carga Limite
2,0	-6,997	251,3	-0,968	-90,258	-2,4
3,0	-8,246	239,6	-1,291	-158,389	-7,6
3,5	-8,931	231,5	-1,383	-218,413	-11,5
3,8	-9,355	226,4	-1,488	-238,931	-14,2
4,0	-9,645	222,9	-1,578	-249,104	-16,2
4,5	-10,403	213,2	-1,689	-253,437	-21,6
5,0	-11,217	203,0	-1,717	-259,835	-27,5
5,2	-11,535	198,9	-1,753	-259,135	-30,0
5,5	-12,037	192,8	-1,948	-258,765	-33,1
6,0	-12,901	182,8	-1,917	-259,247	-39,7
6,5	-13,785	173,4	-1,825	-259,439	-46,5
6,6	-13,963	171,6	-1,779	-258,414	-47,9
6,7	-14,143	169,8	-1,746	-235,850	-49,2
6,8	-1,556	-239,7	-1,556	-185,076	-50,0
7,0	-1,170	-215,8	-1,170	-156,882	-50,0
8,0	-0,711	-173,3	-0,711	-136,870	-50,0
9,0	-0,516	-149,5	-0,516	-122,768	-50,0
10	-0,398	-132,6	-0,398	-111,606	-50,0
11	-0,321	-119,7	-0,321	-90,258	-50,0
12	-0,267	-109,4	-0,267	-158,389	-50,0

Os valores U_{final} e $Normal$ representam o deslocamento total da estrutura e força normal da estrutura após aplicação total da carga, considerando grandes deslocamentos com comprimento de arco. Os valores que seguem são referentes ao ponto limite, ou seja, o deslocamento imediatamente anterior à inflexão das barras (U_{limite}), a normal nas barras neste dado momento (N_{lim}) e a respectiva carga aplicada na estrutura.

Na Tabela 3.1, é possível ver que a partir da altura igual a 6,8 já não se observa o fenômeno do *snap-through*, sendo o deslocamento no ponto limite igual ao deslocamento total e a carga neste ponto igual ao carregamento total. Nesta configuração, a estrutura já não apresenta uma forma tão abatida.

Segundo Lima e Venâncio Filho (1992), quando a elevação h é suficientemente pequena, ou seja, tal que o ângulo de inclinação inicial das barras da treliça seja inferior a 5 graus, as deformações permanecem pequenas para todo o carregamento, verificando-se, portanto⁶, $\lambda \cong 1$. Assim, as medidas de deformação se confundem.

Para treliças com inclinações superiores a cinco graus, os resultados de deslocamento são coincidentes enquanto as deformações são ainda pequenas. Assim, tomar 'a priori' $\lambda \cong 1$ pode constituir uma aproximação significativa, particularmente quanto à determinação da carga limite. Vale observar que, para essas inclinações, pode ocorrer bifurcação do equilíbrio antes de atingir o ponto limite.

A Figura 3.6 mostra a variação dos deslocamentos ao final do carregamento U_{total} e imediatamente antes da inflexão (U_{limite}) em função da altura.

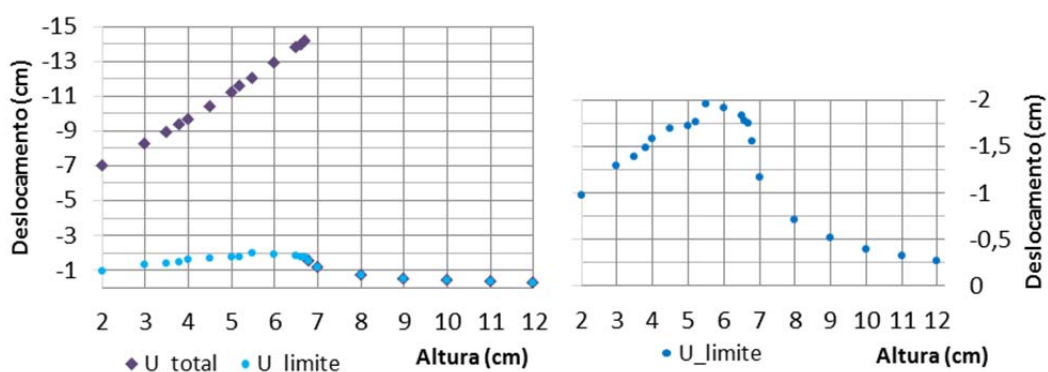


Figura 3.6- Variação do deslocamento total e limite em função da mudança da altura da treliça. Pontos de deslocamento limite coincidentes se referem a configurações que não sofreram inflexão.

⁶ λ foi definido anteriormente no item 2.3.1 como a razão entre o comprimento final e inicial do elemento.

É preciso lembrar que os deslocamentos limites são calculados com porcentagens parciais do carregamento total. A irregularidade da curva de (U_{limite}) pode ser explicada pelo comportamento da matriz de rigidez tangente com relação a cada configuração, como será visto na Figura 3.9.

3.4.3 Definição da matriz de rigidez tangente algebricamente

A definição da não-linearidade do material permite expressar na Eq. (3.12) a força normal nas barras em função dos deslocamentos. Tal equação é fundamental para a resolução numérica, uma vez que a matriz de rigidez tangente depende da sua derivada parcial em função dos deslocamentos.

$$N(u) = E_0 A_0 \varepsilon_G (1 + \eta \varepsilon_G) = E_0 A_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2hu + u^2}{L_0^2} \right) + \frac{\eta}{4} \left(\frac{2hu + u^2}{L_0^2} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

Utilizando o procedimento incremental iterativo de Newton-Raphson, que pode empregar tanto força quanto deslocamento como parâmetro controlador, o resíduo dado pela equação de equilíbrio na posição deslocada deve ser nulo. Assim, tem-se o resíduo dado por:

$$R(u) = 2N(u) \frac{(h + u)}{L} - P \quad (3.13)$$

Impondo anulação deste resíduo em $u + \Delta u$:

$$R(u + \Delta u) = 0 \quad (3.14)$$

Expandindo a Eq. (3.14) em série de Taylor até a primeira ordem tem-se:

$$R(u + \Delta u) = R(u) + \frac{dR}{du} \Big|_u \Delta u \quad (3.15)$$

Onde a derivada parcial do resto em relação ao deslocamento é conhecida como matriz de rigidez tangente (K_T) e, portanto:

$$R(u) + K_t \Delta u = 0 \quad (3.16)$$

Considerando (3.13) em (3.14)

$$2 N(u + \Delta u) \frac{h + u}{L} + 2 N(u + \Delta u) \frac{\Delta u}{L} - P = 0 \quad (3.17)$$

Aplicando a expansão em série de Taylor até a primeira ordem do termo $N(u + \Delta u)$:

$$2 \left[N(u) + \frac{dN}{du} \Big|_u \Delta u \right] \frac{h+u}{L} + 2 \left[N(u) + \frac{dN}{du} \Big|_u \Delta u \right] \frac{\Delta u}{L} - P = 0 \quad (3.18)$$

A derivada de N em relação ao deslocamento (u) é:

$$\frac{dN}{du} \Big|_u \Delta u = E_0 A_0 \left(\frac{h+u}{L_0^4} \right) [L_0^2 + \eta(2hu + u^2)] \Delta u \quad (3.19)$$

Assim, substituindo os termos (3.19) em (3.18):

$$\begin{aligned} 2 N(u) \frac{h+u}{L} + 2 E_0 A_0 \left(\frac{h+u}{L_0^4} \right) [L_0^2 + \eta(2hu + u^2)] \Delta u \frac{h+u}{L} + 2 N(u) \frac{\Delta u}{L} \\ + E_0 A_0 \left(\frac{h+u}{L_0^4} \right) [L_0^2 + \eta(2hu + u^2)] \frac{\Delta u^2}{L} - P = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nesta etapa, as parcelas de segunda ordem são desconsideradas, uma vez que Δu^2 é desprezível. Separando as parcelas em função de Δu :

$$2 N(u) \frac{h+u}{L} - P + 2 \left[E_0 A_0 \left(\frac{h+u}{L_0^4} \right) [L_0^2 + \eta(2hu + u^2)] \frac{h+u}{L} + N(u) \frac{1}{L} \right] \Delta u = 0 \quad (3.21)$$

Agora, tomando a relação (3.16), termos em função de u formam o $R(u)$ e termos múltiplos de Δu são denominados componentes da matriz de rigidez tangente:

$$\begin{aligned} R(u) &= 2 N(u) \frac{h+u}{L} - P \\ K_t &= 2 \left\{ E_0 A_0 \left(\frac{h+u}{L_0^4} \right) [L_0^2 + \eta(2hu + u^2)] \frac{h+u}{L} + \frac{N(u)}{L} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim, o cálculo iterativo de u é dado por:

$$u = K_t^{-1}(u) P \quad (3.23)$$

onde a matriz de rigidez tangente (K_t) é dada em função de h, b, η, u :

$$K_t(u, h, b, \eta) = \frac{E_0 A_0 (4 h^4 + 4 h^3 (3 - 2 \eta) u + 6 h^2 (1 - 4 \eta) u^2 + 20 h \eta u^3 - 5 \eta u^4 + 2 b^2 (2 h^2 + 6 h u + 3 u^2))}{2(b^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (3.24)$$

3.4.4 Definição do deslocamento final da estrutura

Para encontrar a equação do deslocamento em função da carga aplicada, é necessário resolver a equação:

$$P(u) - P_a = 0 \quad (3.25)$$

Substituindo $P(u)$ na Eq. (3.25) tem-se:

$$2 E_0 A_0 \left(\frac{\eta(2hu + u^2)^2}{4Sqrt[b^2 + h^2]^4} + \frac{2hu + u^2}{2Sqrt[b^2 + h^2]^2} \right) \left(\frac{h + u}{Sqrt[b^2 + h^2]} \right) - P_a = 0 \quad (3.26)$$

onde utilizou-se valores característicos do módulo de elasticidade (E_0) e da carga aplicada (P_a) visto que a introdução de variáveis aleatórias inviabiliza o cálculo das raízes.

Como $P(u)$ é um polinômio de quinto grau, a solução é iterativa e dada, usando o software Mathematica, pela seguinte fórmula:

$$u(P) \rightarrow \text{Root}[2 b^4 P \sqrt{b^2 + h^2} + 4 b^2 P h^2 \sqrt{b^2 + h^2} + 2 P h^4 \sqrt{b^2 + h^2} + (-4 A_0 b^2 E_0 h^2 - 4 A_0 E_0 h^4) \#1 + (-6 A_0 b^2 E_0 h - 6 A_0 E_0 h^3 + 4 A_0 E_0 h^3 \eta) \#1^2 + (-2 A_0 b^2 E_0 - 2 A_0 E_0 h^2 + 8 A_0 E_0 h^2 \eta) \#1^3 + 5 A_0 E_0 h \eta \#1^4 + A_0 E_0 \eta \#1^5 \&, i] \quad (3.27)$$

Cada raiz real corresponde a um ponto crítico da trajetória de equilíbrio. Com base na modelagem do problema, determinou-se a correlação das raízes aos deslocamentos: total e limite. A variação do índice das raízes é dada pela alteração das raízes de imaginárias para reais, **basicamente o deslocamento procurado é sempre aquele valor real mais próximo à origem**. Logo, a escolha da raiz é dada pelo menor valor em módulo entre as raízes reais. A Tabela 3.2 mostra o comportamento da função para três configurações cuja trajetória de equilíbrio apresenta mudanças significativas: a) configuração de falha por instabilidade limite, b) configuração intermediária e c) configuração sem falha.

Tabela 3.2 – Raízes da equação $P(u)-P$ que exprime a resposta iterativa do problema.

Para $h/2b=0,05$	Para $h/2b=0,07$	Para $h/2b=0,1$
$\left\{ \begin{array}{l} \{u \rightarrow -10.8232\}, \\ \{u \rightarrow -5.88402 - 5.44642 i\}, \\ \{u \rightarrow -5.88402 + 5.44642 i\}, \\ \{u \rightarrow 1.20437 - 1.72618 i\}, \\ \{u \rightarrow 1.20437 + 1.72618 i\} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \{u \rightarrow -14.4987\}, \\ \{u \rightarrow -2.14233\}, \\ \{u \rightarrow -1.17959\}, \\ \{u \rightarrow 8.58969 - 3.5156 i\}, \\ \{u \rightarrow 8.58969 + 3.5156 i\} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \{u \rightarrow 20.2763\}, \\ \{u \rightarrow 16.2678\}, \\ \{u \rightarrow 10.7015\}, \\ \{u \rightarrow 2.35551\}, \\ \{u \rightarrow -0.398863\} \end{array} \right\}$

3.4.5 Estudo comparativo dos comportamentos não lineares

Em busca de analisar os efeitos do comportamento não linear físico, a Figura 3.7 mostra a comparação entre comportamento de um material com não linearidade física e geométrica e de outro material considerando apenas não linearidade geométrica. A comparação é feita para três configurações representativas: a) sob falha, b) intermediária e c) sem falha.

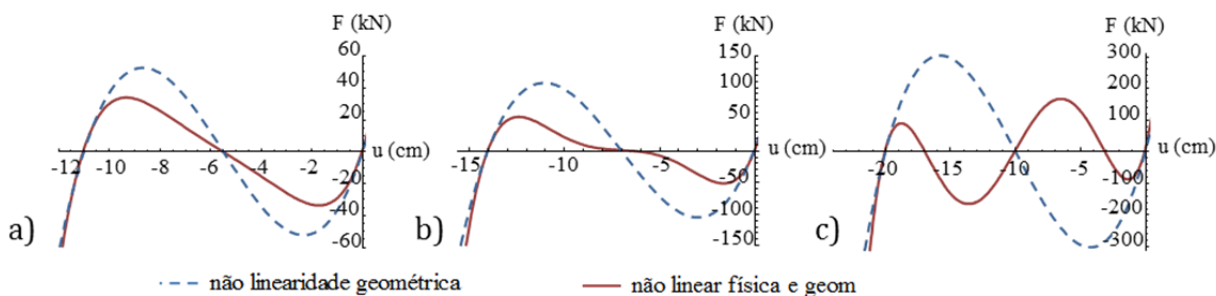


Figura 3.7- Gráficos de deslocamento em função da carga, para $h/2b=\{5,5\%,7,0\%,10,0\%\}$.

Observa-se que a desconsideração da não linearidade física do material altera o comportamento da trajetória de equilíbrio da estrutura. Consequentemente, o cálculo do deslocamento final equivalente a 100% da carga aplicada ($P_a = 50kN$) é alterado, como é possível observar com clareza na configuração sob falha (Figura 3.7a). Em pequenos deslocamentos, a diferença entre os comportamentos não lineares é desprezível.

A Figura 3.8 mostra o comportamento da trajetória de equilíbrio obtida via ANSYS para a mesma estrutura, porém com considerações diferentes de material e comportamento. É possível observar que a análise em pequenos deslocamentos com não linearidade física não apresentou falha por *snap-through*. Tal falha só é visualizada com consideração de não linearidade geométrica, ou seja, em análise com grandes deslocamentos. Nesta análise, um material linear (módulo de elasticidade constante) captou falha com uma carga limite maior, aproximadamente 39kN contra os 27kN da análise com não linearidades física e geométrica.

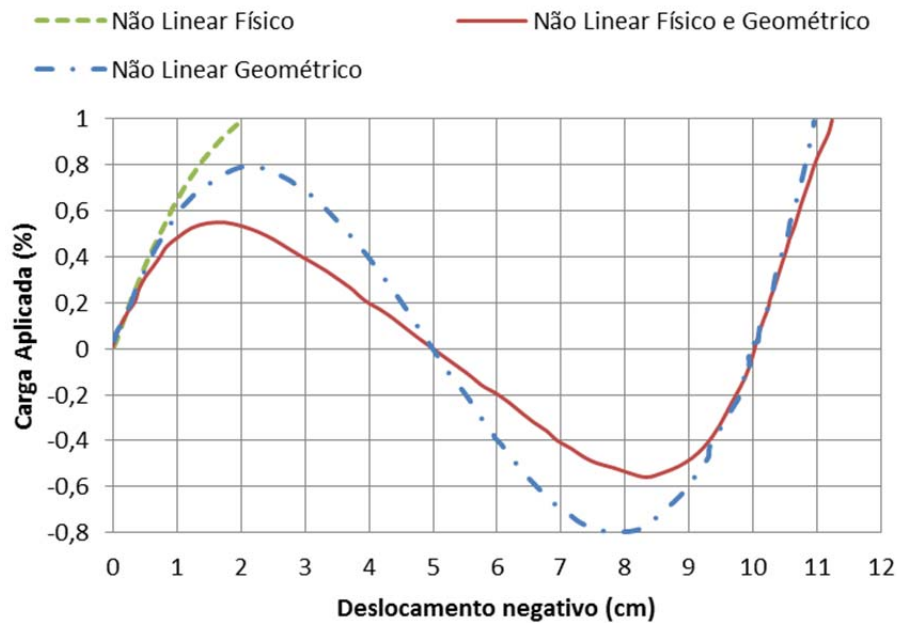


Figura 3.8- Variação da trajetória de equilíbrio de acordo com as não linearidades adotadas para configuração $h/2b=0,05$. O eixo dos deslocamentos é representado em seu valor absoluto uma vez que todos os deslocamentos listados são contrários ao sistema de coordenadas adotado.

Claramente, a consideração diferenciada de não linearidades altera o comportamento geométrico da estrutura e conseqüentemente sua configuração final (deslocamento total). A carga limite da estrutura, no entanto, diminui cerca de 30% quando a não linearidade física é considerada na análise em grandes deslocamentos.

Pode-se concluir que, naquelas configurações onde se observa falha, verifica-se uma diminuição da rigidez global da estrutura e, portanto, **a iminência de falha na estrutura aumenta com a consideração de ambas as não linearidades**. A Figura 3.9 mostra a trajetória de equilíbrio de uma estrutura de treliça de altura ($h/2b=0,05$ e $P_a = 50kN$) em um gráfico de força versus deslocamento e a matriz de rigidez tangente, para cada uma das análises não lineares individuais e em conjunto.

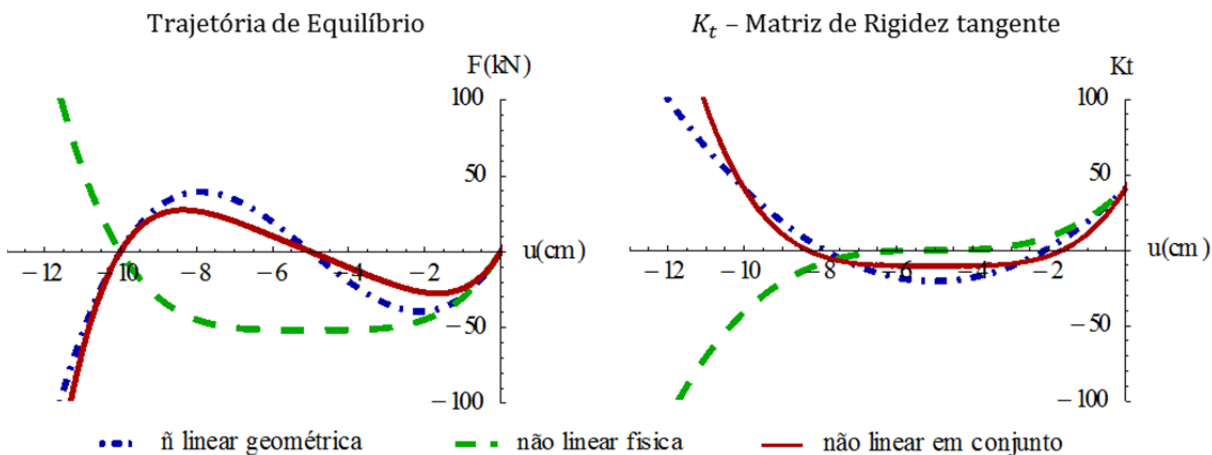


Figura 3.9- Trajetória de equilíbrio e matriz de rigidez tangente para configuração h=5cm com três considerações de análise não linear.

Observa-se que, de fato, a rigidez da estrutura com ambas as não linearidades é menor, em módulo, que em comparação com a análise não linear geométrica. A comparação com a análise não linear física não considera a posição deslocada da estrutura, e, portanto, não é capaz de representar o intervalo de falha da estrutura.

O cálculo analítico da rigidez tangente mostra as relações entre as diferentes análises, atentando-se às parcelas que se mantem com relação à análise individual e conjunta.

Tabela 3.3- Comportamento de $K_t(u)$ com não linearidades.

Tipo de análise não linear	Rigidez tangente
Geométrica	$2 \left(\frac{A_0 E_0 (h^2)}{L L_0^2} + \frac{N[u]}{L} + A_0 E_0 \frac{2\varepsilon}{L} \right)$
Física	$2 A_0 E_0 \frac{h+u}{L_0^2} \left(\frac{h}{L_0} \right) (1 + 2\eta\varepsilon)$
Física + Geométrica	$2 \left(\frac{N[u]}{L} + E_0 A_0 \frac{h+u}{L_0^2} \frac{h+u}{L} (1 + 2\eta\varepsilon) \right)$

É cabível salientar que a diferença entre a $K_t(u)$ com não linearidade geométrica e com ambas não linearidades não corresponde à matriz de rigidez tangente com consideração da não linearidade física, uma vez que o cálculo da rigidez é feito anulando-se o resto em função dos deslocamentos.

Por sua vez, a não linearidade física pode ser estudada através da variação da constante de não linearidade η do material. A Figura 3.10 mostra a trajetória de equilíbrio para

uma dada configuração $h/2b= 0,09$, sob três valores de η (1,40 e 100) e sem consideração de não linearidade física. Neste último caso, os efeitos da não linearidade geométrica pura são observados, e equivalem a $\eta = 0$ na curva situada imediatamente próxima da curva $\eta = 1$. Sendo assim, a formulação utilizando $\eta = 1$ permite modelar o comportamento não linear geométrico puro. Ao passo que o aumento de η modela maiores influências da não linearidade física associada à geométrica, na qual são observadas mais regiões de instabilidade redução da carga limite, ou seja, maior iminência de falha.

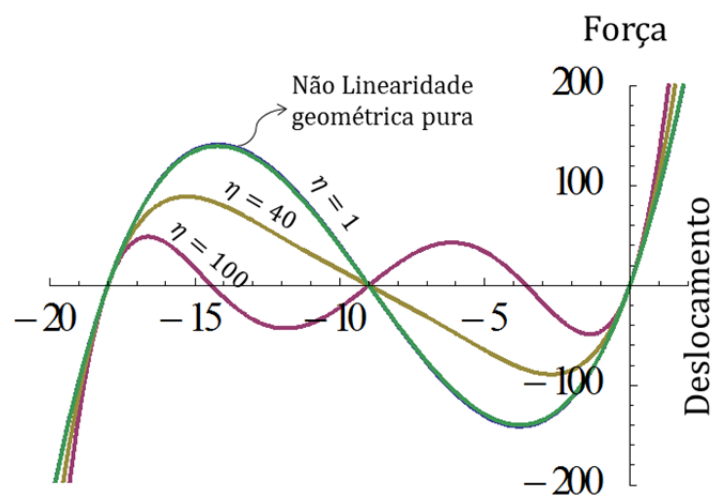


Figura 3.10 - Alteração da constante de não linearidade física.

Tendo frisado a importância da consideração das não-linearidades físicas e geométrica na descrição analítica do problema e, conseqüentemente, na descrição da falha por *snap-through*, passa-se agora à definição das equações de estado limite.

4. EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE

As equações de estado limite definidas aqui para os três modos de falha estudados: *snap-through*, flambagem e falha por tensão admissível serão utilizadas para o cálculo das probabilidades de falha e custos esperados de falha ao longo de todo o estudo. Tais modos de falha serão analisados separadamente, devido ao objetivo de se mostrar o efeito das diferentes consequências de falha na otimização estrutural.

4.1 ESTUDO DA FALHA POR *SNAP-THROUGH*

O fenômeno do *snap-through* pode ser destacado na trajetória de equilíbrio de uma treliça comprimida, conforme a Figura 4.1:

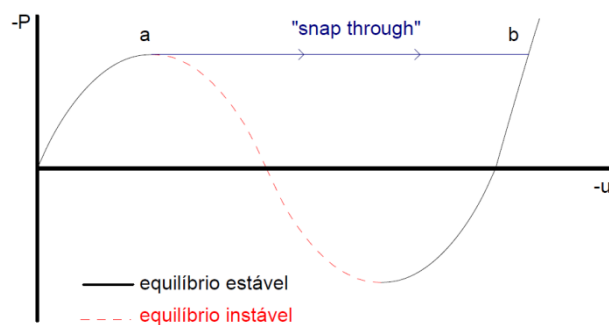


Figura 4.1 - Trajetória não-linear de equilíbrio de uma treliça simples.

O ponto [a], indicado na figura, determina a força limite, isto é, a força máxima que a estrutura suportaria em regime estável de equilíbrio estático. No entanto, neste ponto, se a resposta estrutural for dada pelo processo de força controlada e não de deslocamento controlado, um pequeno incremento na intensidade da força aplicada provoca um movimento dinâmico violento do nó. Este movimento causa a inversão da inclinação das barras e prossegue até o restabelecimento do equilíbrio correspondente ao deslocamento no ponto [b].

O movimento de [a] para [b] é chamado "*snap-through*", onde o trecho tracejado reúne configurações de equilíbrio instável: uma pequena perturbação sobre qualquer delas leva, por *snap-through*, à busca de configurações estáveis em correspondência ao mesmo nível de força equilibrada. O ponto [a] é então, um ponto crítico, que caracteriza a chamada instabilidade por ponto limite.

Esse ponto crítico, onde a rigidez da estrutura diminui, pode ser usado para determinar a força limite em que a estrutura suporta o regime estável de equilíbrio estático através da imposição $\frac{dP}{du} = 0$, substituindo o valor desta raiz na equação de $P(u)$ tem-se a carga limite P_{lim} .

4.1.1 Análise em programa comercial ANSYS

Com objetivo de verificar o comportamento da estrutura neste modo de falha foi feita uma análise no software ANSYS. O material tem comportamento multilinear elástico e a análise de grandes deslocamentos foi realizada com a estratégia do comprimento de arco. A visualização da configuração final da estrutura, Figura 4.2, após a aplicação total de 50kN de força, mostra o deslocamento máximo igual a 11,217 cm, superior à altura inicial de 5 cm, representando uma situação de equilíbrio oposta à configuração inicial.

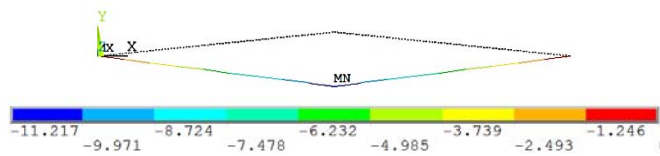


Figura 4.2 - Estrutura deslocada e indeformada.

A adoção do método do comprimento de arco permite a visualização correta da trajetória de equilíbrio com ambos os equilíbrios estável e instável. A Figura 3.8, que analisou a diferença entre a adoção de uma ou mais não-linearidades, mostra o comportamento deste problema, identificado pela curva escura (de ambas não linearidades). Sabendo que o ponto limite é atingido com aproximadamente 55% do carregamento total, tem-se o correspondente valor da carga limite e do deslocamento limite.

$$P_{lim} = 0,55248 P = -27,624 \text{ kN} \rightarrow u_{lim} = -1,77331 \text{ cm} . \quad (4.1)$$

Portanto, cargas inferiores a esta não provocam falha. Tal carga corresponde a um deslocamento vertical que é menor que a altura h ; portanto, a utilização da equação de estado limite (EEL) simplória, por exemplo: $g(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = h + u$, não descreve perfeitamente o fenômeno, além de ser contra a segurança.

As trajetórias de equilíbrio da Figura 4.3 demonstram o comportamento do ponto limite. Nas configurações em que não se observa falha, somente o equilíbrio estável é

observado e o comportamento da estrutura (pequenos deslocamentos) se assemelha ao linear.

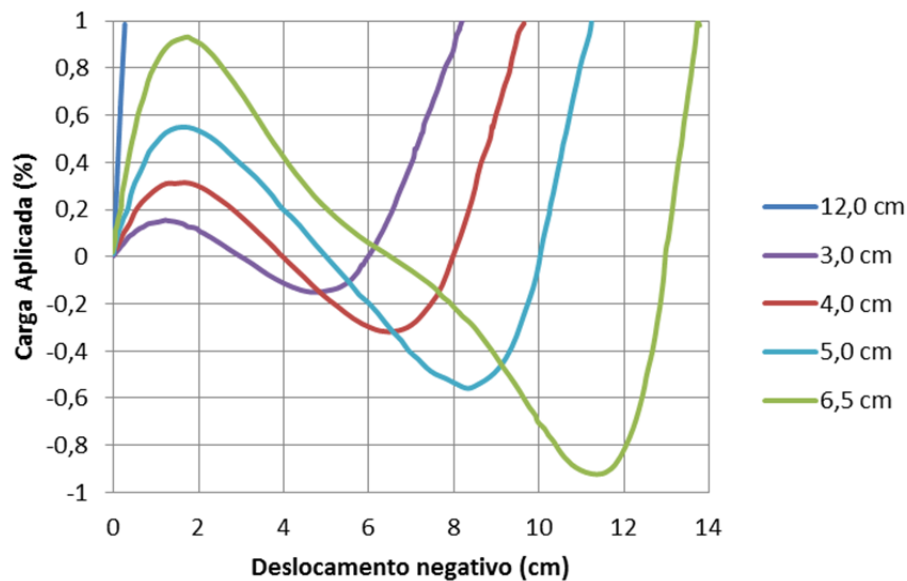


Figura 4.3- Trajetórias de equilíbrio para diferentes configurações de $h = \{3, 0; 4, 0; 5, 0; 6, 5; 12, 0\}$ cm. Com o aumento da altura da estrutura, o ponto limite se aproxima do passo de carga completo.

4.1.2 Cálculo analítico do ponto limite

O valor do deslocamento limite pode ser calculado utilizando-se de propriedades do cálculo diferencial. Para isso, é necessário formular adequadamente a equação que descreve a trajetória de equilíbrio, ou seja, a equação de P em função dos deslocamentos u . Substituindo a função $N(u)$ dada pela Eq. (3.12) na condição de equilíbrio em Eq. (3.1), sem a consideração da simetria, tem-se:

$$P(u) = 2E_0A_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2hu + u^2}{L_0^2} \right) + \frac{\eta}{4} \left(\frac{2hu + u^2}{L_0^2} \right)^2 \right] \left(\frac{h + u}{L} \right) \quad (4.2)$$

No entanto, a utilização do valor de comprimento atualizado, L , aumenta a complexidade⁷ dos cálculos, por ser L dependente de u , sendo assim será usado o

⁷ A consideração do comprimento final atualizado aumenta o esforço computacional, além de aumentar o número de raízes imaginárias (não possuem sentido físico). Conforme será visto, a consideração do comprimento inicial retrata o problema de maneira satisfatória.

comprimento L_0 sem detrimento da resposta final por se tratar de pequenas deformações.

Com a equação de força em função dos deslocamentos impõe-se $dP/du = 0$ para calcular os pontos críticos da trajetória de equilíbrio. Tal imposição resulta na matriz de rigidez tangente obtida na Eq. (3.24) dada por uma função polinomial de quarto grau que têm quatro raízes negativas, sendo duas imaginárias e duas reais.

$$\frac{dP}{du} = K_t = \frac{E_0 A_0 (4 h^4 + 4 h^3 (3 - 2\eta)u + 6 h^2 (1 - 4\eta)u^2 + 20 h \eta u^3 - 5 \eta u^4 + 2 b^2 (2 h^2 + 6 h u + 3 u^2))}{2(b^2 + h^2)^{5/2}} \quad (4.3)$$

Anulando-se a Eq. (4.3) encontram-se as seguintes raízes:

$$u_{lim} = \frac{-5 h \eta \pm \sqrt{5} \sqrt{-3 L_0^2 \eta + 3 h^2 \eta^2 \pm \eta \sqrt{9 L_0^4 - 8 h^2 L_0^2 \eta + 4 h^4 \eta^2}}}{5 \eta} \quad (4.4)$$

Adotando-se os valores inicialmente adotados para o problema, as respostas numéricas são iguais a:

$$\{u \rightarrow -8.33805\}, \{u \rightarrow -5. -3.38269 i\}, \{u \rightarrow -5. +3.38269 i\}, \{u \rightarrow -1.66195\} \quad (4.5)$$

As raízes negativas reais correspondem aos pontos críticos, ou de inflexão, da trajetória de equilíbrio e às raízes da matriz de rigidez tangente. A Figura 4.4 confirma a equivalência da matriz de rigidez tangente com a primeira derivada variacional da força em função dos deslocamentos.

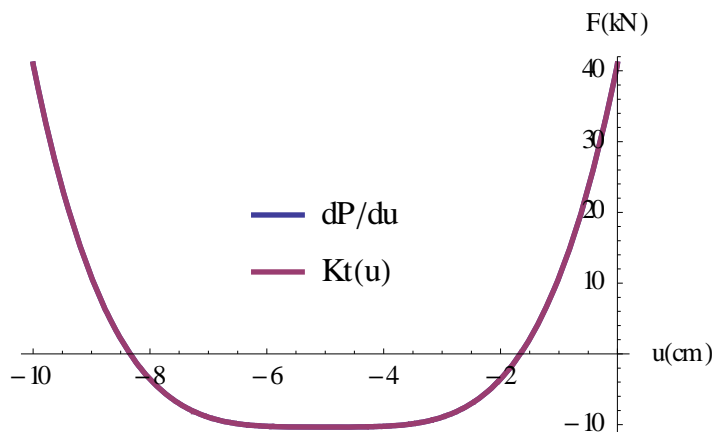


Figura 4.4- $K_t(u)$ ou matriz de rigidez tangente em função dos deslocamentos e derivada parcial de $P(u)$ para valores definidos inicialmente para o estudo com $h=5$ cm. Os pontos em que as curvas cruzam o eixo x são pontos críticos da trajetória de equilíbrio.

Por se tratar de uma força de compressão, a carga limite é dada pela primeira raiz negativa desta equação, isto é, o valor de deslocamento causado por carga de

compressão mais próximo do eixo, ou que ocorre primeiro. Embora a comparação das raízes exija valores numéricos para determinar qual raiz corresponde ao ponto limite de interesse, as raízes explicitadas podem ser comparadas com os valores encontrados no ANSYS. Esta comparação permite verificar a validade do cálculo para o intervalo de h em estudo $\{2 \leq h \leq 15\}$

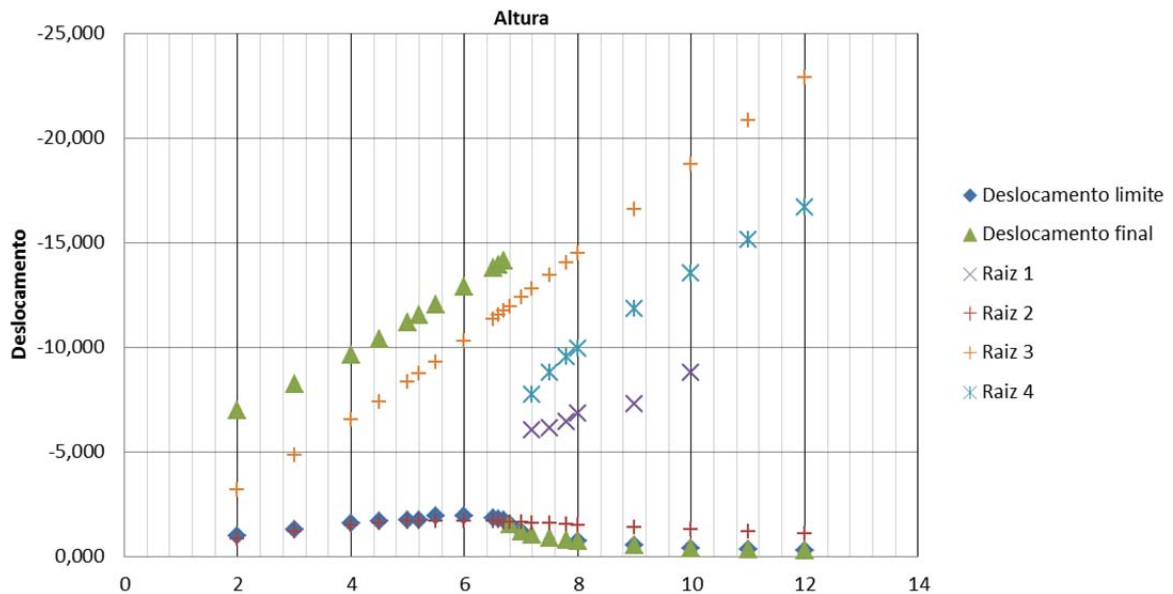


Figura 4.5- Comparação dos pontos críticos encontrados analiticamente com resultados numéricos de programa comercial. Os pontos cheios correspondem a deslocamentos totais e limites encontrados no ANSYS. Já os pontos em (+ e ×) são raízes da primeira derivada da força com relação aos deslocamentos.

As raízes 1,2,3 e 4 representadas na Figura 4.5 foram escolhidas de acordo com a nomenclatura a seguir⁸:

$$\left\{ \left\{ u_1 = A + \sqrt{5} \sqrt{B - \eta \sqrt{C}} \right\}, \left\{ u_2 = A + \sqrt{5} \sqrt{B + \eta \sqrt{C}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ u_3 = A - \sqrt{5} \sqrt{B + \eta \sqrt{C}} \right\}, \left\{ u_4 = A - \sqrt{5} \sqrt{B - \eta \sqrt{C}} \right\} \right\} \quad (4.6)$$

A não ocorrência das raízes 1 e 4 para valores de $h \leq 7,14 \text{ cm}$ se deve à valores imaginários. Conclui-se que a raiz que representa o deslocamento limite é a raiz 2.

Assim o valor de u_{lim} em função de h , b e η , já considerando o sinal, é dado por:

⁸ As variáveis A, B e C representam polinômios descritos na Eq. (4.4). O foco é dado nos sinais que distinguem cada uma das raízes.

$$u_{lim} = \frac{-5\eta h + \sqrt{5} \sqrt{-3 b^2 \eta - 3 \eta h^2 + 3 \eta^2 h^2 + \eta \sqrt{9 b^4 + 18 b^2 h^2 - 8 b^2 \eta h^2 + 9 h^4 - 8 \eta h^4 + 4 \eta^2 h^4}}}{5\eta} \quad (4.7)$$

Com o deslocamento do ponto limite definido, pode-se calcular, através da Eq. (4.2), o valor corresponde de força aplicada, imaginando-se a situação em que a força aplicada provoca compressão nas barras da treliça.

4.1.3 Equação de estado limite

A ocorrência de falha por instabilidade por ponto limite poderia, então, ser definida de uma maneira simplória pela diferença entre o valor de deslocamento limite da Eq. (4.7) e o valor de deslocamento ao final da aplicação do carregamento descrito na Eq. (3.27), conforme Eq. (4.8):

$$g_1(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \eta) = u_{lim} - u_{final} \quad (4.8)$$

No entanto, como u_{lim} independe da carga aplicada, essa diferença, que exprime a distância entre os dois deslocamentos (ver Figura 4.5), se mantém constante para configurações que não apresentam falha. Para melhor representar a ocorrência da falha por *snap-through* utiliza-se um EEL em força, descrita a seguir.

$$g_1(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \eta) = -P_{lim} + P_a \quad (4.9)$$

Neste caso, a EEL compara a força limite P_{lim} , calculada pela substituição de u_{lim} na Eq. (4.2), com a força total aplicada. A Figura 4.6 mostra os valores de ambas as EEL para os dados do exemplo. Conforme dito, segundo a definição, valores negativos da EEL indicam valores pertencente ao domínio de falha e valores positivos indicam valores pertencente ao domínio de sobrevivência.

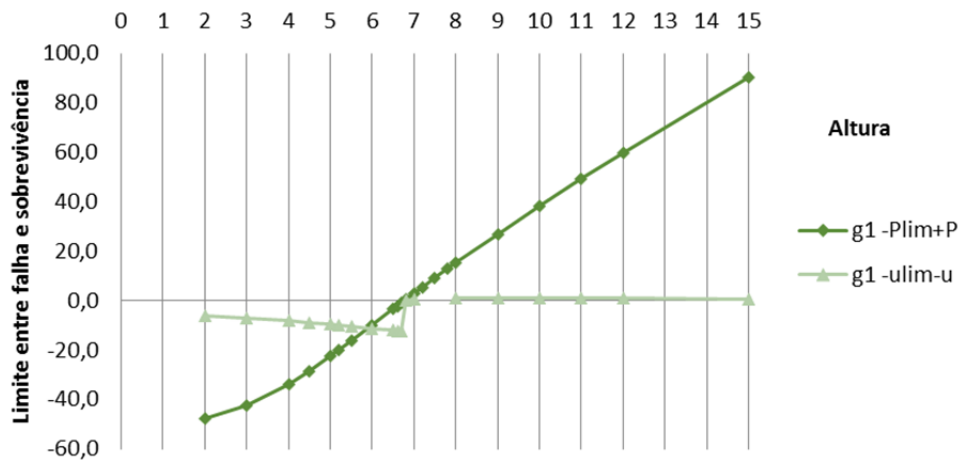


Figura 4.6 – Equações de estado limite em força e deslocamento, para valores característicos das VA envolvidas.

A Eq. (4.9) em força é mais representativa, pois a EEL assume valores negativos (dentro do domínio de falha) quando a estrutura está mais abatida (menores alturas) e que diminuem à medida que as alturas aumentam. Em seguida, a EEL apresenta valores positivos (dentro do domínio de sobrevivência) cada vez maiores em virtude do afastamento da configuração abatida.

4.2 ESTUDO DA FALHA POR FLAMBAGEM

Para a consideração da instabilidade de barras comprimidas ou instabilidade por bifurcação na análise da treliça é importante ressaltar que as barras são biarticuladas e submetidas exclusivamente à solicitação por força normal. Nessa situação idealizada, de força normal perfeitamente centrada, e ainda considerando-se as barras livres de defeitos de natureza geométrica e de material, para cada uma delas, isoladamente, pode-se determinar uma solicitação crítica de flambagem dada pela relação de Euler:

$$N_{cr}(u) = \frac{\pi^2 E I}{L_0^2} = \frac{\pi^2 E_0 (1 + \eta \varepsilon) I}{L_0^2} \quad (4.10)$$

onde o comprimento de flambagem coincide com o comprimento inicial da barra, para o caso de barra biarticulada.

4.2.1 Equação de estado limite

Para a determinação da EEL do modo de falha de flambagem será usada comparação das forças normais atuantes e críticas. Verificando a Figura 4.7 é possível ver que a força

normal atinge um limite máximo de compressão. Para encontrar os valores de deslocamento correspondentes às forças normais máximas devem-se calcular os pontos críticos da curva $N(u)$ anulando a sua derivada.

A derivada de N em relação aos deslocamentos u é dada por:

$$\frac{dN}{du} = \frac{A_0 E_0 (h + u)(b^2 + h^2 + 2 h \eta u + \eta u^2)}{(b^2 + h^2)^2} \quad (4.11)$$

Sendo uma equação de terceiro grau, têm-se três raízes. A depender das constantes utilizadas, duas dessas raízes podem ser imaginárias fazendo com que a máxima compressão seja encontrada em $u = -h$. Nos demais casos, a raiz $u = -h$ determina um valor de máxima tração local e as outras são simétricas e determinam um valor de máxima compressão.

$$\{u = -h\}, \left\{ u = \frac{-1 h \eta \pm \sqrt{-b^2 \eta - h^2 \eta + h^2 \eta^2}}{\eta} \right\} \quad (4.12)$$

Como a primeira ocorrência da máxima compressão é a mais importante, temos:

$$u_{comp} = \frac{-1 h \eta + \sqrt{-b^2 \eta - h^2 \eta + h^2 \eta^2}}{\eta} \quad (4.13)$$

A normal deve ainda ser analisada no deslocamento máximo sofrido pela estrutura após aplicação total do carregamento, isto é, quando $u = u_{final}$. Pode-se, então, definir que a máxima compressão pode ocorrer em três pontos, $u = \{-h, u_{comp}, u_{final}\}$, devendo-se escolher máximo valor em módulo da normal nesses pontos.

Apesar do valor da normal em u_{comp} ($N(u_{comp})$) ser máximo, não é possível afirmar com certeza que a diferença entre as forças normais (atuante e crítica) seja a máxima, uma vez que a normal crítica não é constante. A Figura 4.7 mostra o comportamento da normal atuante, da normal crítica e da sua diferença durante o carregamento de diversas configurações iniciais da estrutura.

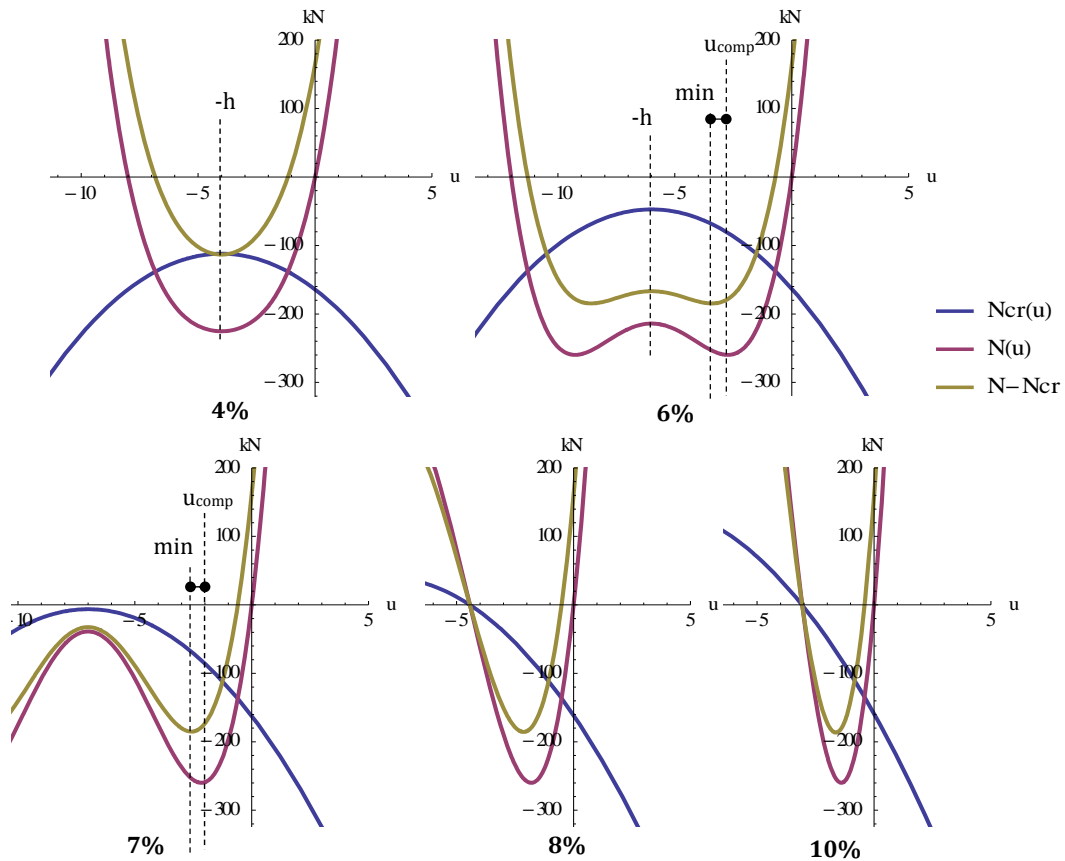


Figura 4.7 – Comparação entre N e N_{cr} para $h/2b=\{4,6,7,8,10\}\%$. O mínimo observado na curva $N-N_{cr}$ corresponde a maior distância entre as normais.

O cálculo da EEL como a máxima distância entre essas normais é mais preciso. Para obter o valor do deslocamento correspondente à esse ponto, toma-se a raiz da derivada parcial em função de u da diferença $N - N_{cr}$ igualada à zero, da qual temos:

$$\frac{d(N - N_{cr})}{du} = \left(E_0 A_0 (1 + \eta \varepsilon) \varepsilon + \frac{\pi^2 E_0 (1 + \eta \varepsilon) I}{L_0^2} \right)' = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{E_0 (h + u) (I \eta \pi^2 + A_0 (b^2 + h^2 + 2 h \eta u + \eta u^2))}{b^2 + h^2} = 0 \quad (4.15)$$

Isto resulta em três raízes:

$$\{u \rightarrow -h\}, \left\{ u \rightarrow \frac{-2 A_0 h \eta \pm \sqrt{4 A_0^2 h^2 \eta^2 - 4 A_0 \eta (A_0 b^2 + A_0 h^2 + I \eta \pi^2)}}{2 A_0 \eta} \right\} \quad (4.16)$$

Define-se como ponto crítico a raiz que corresponde ao primeiro deslocamento sofrido, ou seja, o de menor módulo.

$$u_{crit} = \frac{-2 A_0 h \eta + \sqrt{4 A_0^2 h^2 \eta^2 - 4 A_0 \eta (A_0 b^2 + A_0 h^2 + I \eta \pi^2)}}{2 A_0 \eta} \quad (4.17)$$

Na prática, a diferenciação entre u_{crit} e u_{comp} não traz mudanças ao cálculo (ver Figura 4.9). Para definir a EEL, deve se ter em mente que a normal nas barras não deve ultrapassar a normal crítica, isto é, a falha ocorre se $N > N_{cr}$, em módulo. Porém como se trata de forças de compressão, $-N > -N_{cr}$, isto é:

$$g_2(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \eta) = -N_{cr}(u) + N(u) \quad (4.18)$$

onde o cálculo da força normal atuante é dado pela substituição de u na Eq. (3.12). Cada comparação deve ser feita comparando normais (crítica e atuante) no mesmo ponto.

A Figura 4.8 ilustra os comportamentos dos deslocamentos calculados até agora com a variação da configuração inicial da estrutura. Tal comportamento delinea a análise de deslocamentos feita na definição das equações de estado limite que se seguem (flambagem e tensão admissível).

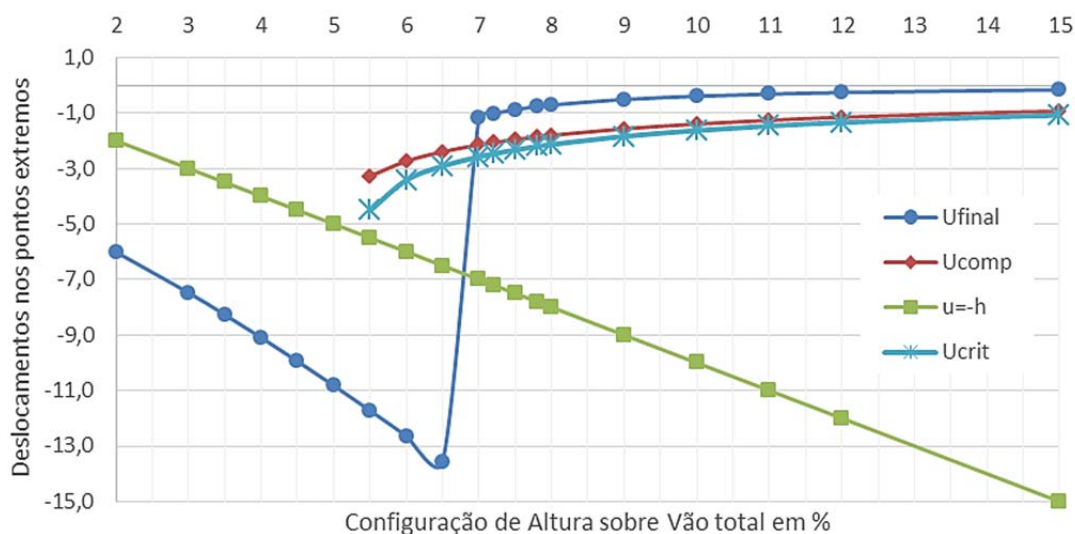


Figura 4.8 - Comportamento dos deslocamentos dos pontos extremos em função das configurações iniciais adotadas de 2 a 15% de h/2b.

Primeiramente, tem-se a variação do deslocamento u_{final} para as diferentes configurações. O deslocamento u_{final} , como o nome se refere, é o último deslocamento sofrido pela estrutura diante da aplicação total do carregamento. Neste sentido, deslocamentos de intensidade maior não pertencem à trajetória de equilíbrio da estrutura e, portanto não devem ser levados em conta nos cálculos da EEL.

Em segundo lugar, os pontos onde u_{comp} e u_{crit} são nulos na Figura 4.8, correspondem às raízes imaginárias. Nestas configurações, a curva de $N(u)$ possui somente uma concavidade para baixo, como na configuração $h/2b = 4\%$ da Figura 4.7. Neste caso, os dados são calculados somente em $u = -h$, a única raiz real.

A força normal nos pontos ressaltados, calculada através do equilíbrio dos esforços internos, é mostrada na Figura 4.9 para as diversas configurações iniciais. A curva do esforço normal ao final do carregamento (u_{final}) mostra a mudança de comportamento súbita da normal devido à mudança da configuração de equilíbrio. A inflexão da estrutura faz com que a força normal ao final do carregamento seja de tração e não de compressão. Como conclusão, os valores de normal da Figura 4.9 devem ser usados em conjunto com o comportamento dos deslocamentos da Figura 4.8 devido à delimitação do cálculo das normais de acordo com o deslocamento considerado.

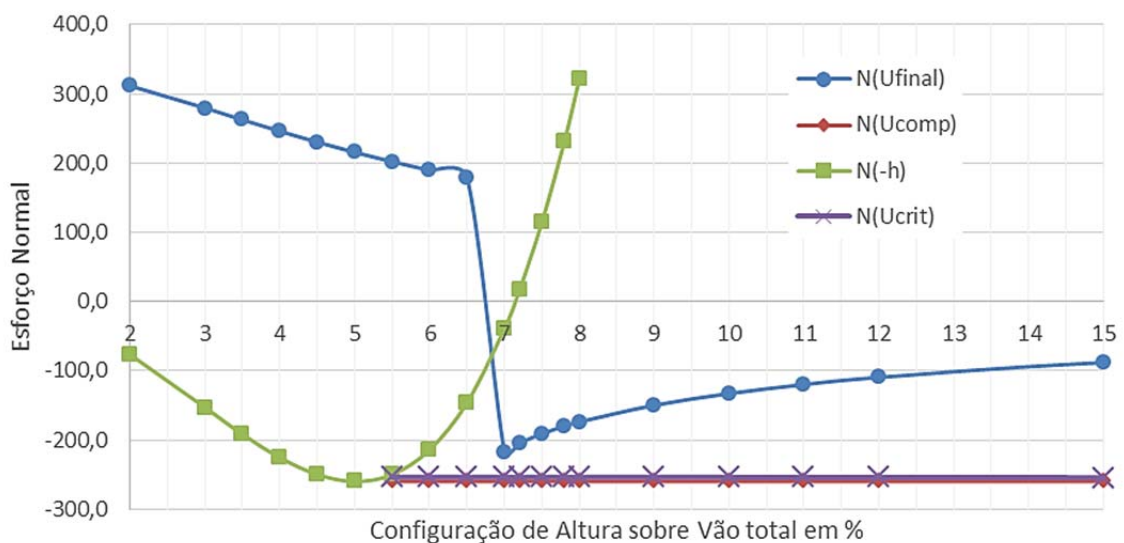


Figura 4.9 – Comportamento do esforço interno normal calculado nos pontos extremos para cada uma das configurações iniciais adotadas.

A seguir, a Figura 4.10 mostra o comportamento da normal crítica, calculada a partir da Eq. (4.10), nos mesmos pontos. Nesta figura verifica-se uma diferença significativa no valor da normal crítica calculada nas raízes (u_{comp} e u_{crit}) indicando uma preferência à utilização da raiz u_{crit} por apresentar valores críticos menores.

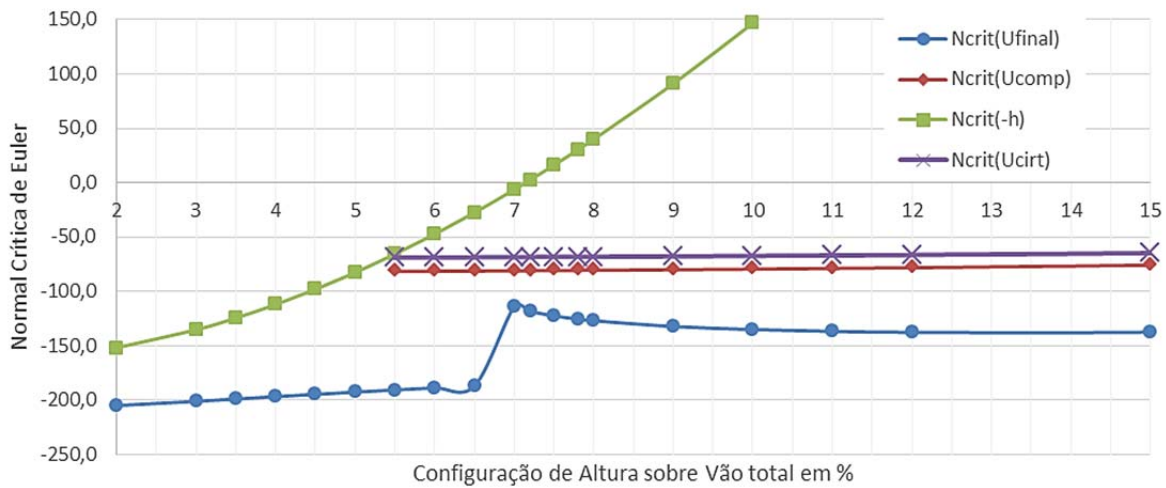


Figura 4.10 - Comportamento da normal crítica nos pontos ressaltados para cada uma das configurações iniciais adotadas.

A regra utilizada para definir as equações de estado limite que definem o problema é:

$$\text{which } \left[\begin{array}{l} \text{Min}[u_{final}, u_{crit}, -h] = u_{final}, \\ g(x) = \left\{ \text{Min} \left[\begin{array}{l} (-N_{cr}[h, u_{crit}] + N[h, u_{crit}]) \\ (-N_{cr}[h, -h] + N[h, -h]) \end{array} \right] \right\}, \\ \text{Max}[u_{final}, u_{crit}, -h] = u_{final}, \\ g(x) = \{(-N_{cr}[h, u_{final}] + N[h, u_{final}])\} \end{array} \right]; \quad (4.19)$$

onde o comando *which* avalia cada teste (análise dos deslocamentos) e retorna o valor de $g(x)$ em caso verdadeiro. Desta forma, escolhe-se o menor valor da $g(x)$ no decorrer da trajetória de equilíbrio da estrutura, inclusive durante o *snap-through*.

Na Figura 4.11 é possível observar a correspondência da EEL que rege o problema com as EEL individuais analisadas em cada ponto. Nas configurações iniciais, com falha por *snap-through*, a EEL é avaliada em $u = -h$. Nas configurações intermediárias, a $g(x)$ é calculada em $u = u_{crit}$. Já em regime de pequenas deformações, utiliza-se o cálculo em $u = u_{final}$.

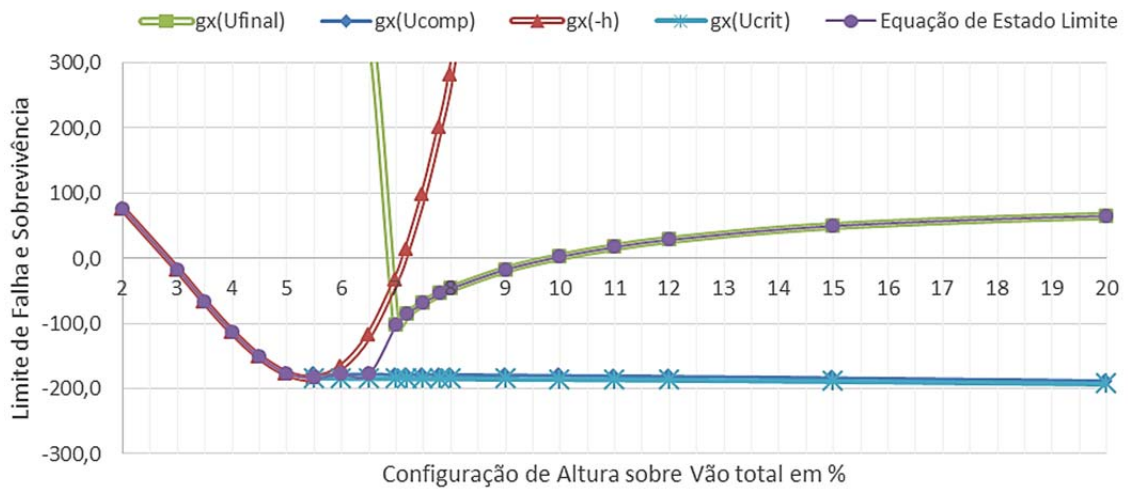


Figura 4.11 – Comportamento da EEL que define o problema.

A seguir, a EEL é extrapolada para configurações esbeltas. Nestas, o aumento do comprimento de flambagem ocasiona decréscimo dos valores da EEL, caracterizando falha por flambagem.

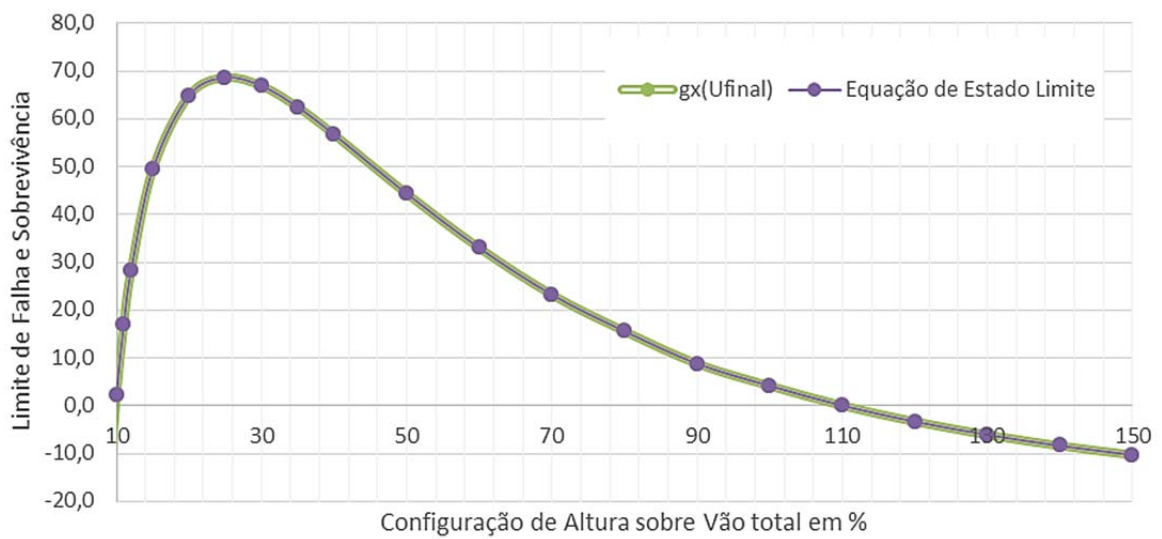


Figura 4.12 – Variação da EEL para treliças de configuração esbelta.

4.3 ESTUDO DA FALHA POR ESMAGAMENTO E ESCOAMENTO

Materiais dúcteis como o aço, cobre, alumínio apresentam escoamento, isto é, atingido um valor crítico de tensão σ_E , o material sofre uma grande deformação plástica com mínimo aumento da carga aplicada. Essa deformação desproporcional ao carregamento faz com que a seção transversal seja alterada devido à perda de resistência local. A esse fenômeno é dado o nome de estrição. A tensão σ_R correspondente à carga máxima aplicada ao material é conhecida como tensão limite de resistência e a tensão σ_r correspondente ao ponto de ruptura é chamada tensão de ruptura.

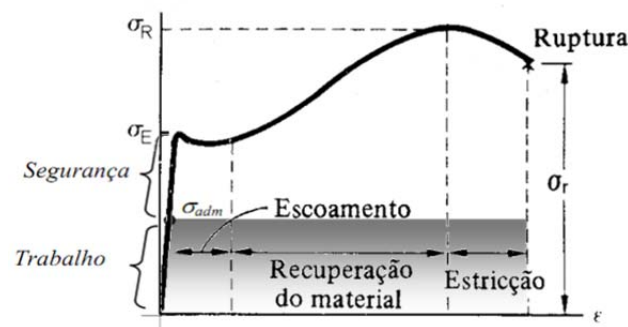


Figura 4.13 - Diagrama Tensão x Deformação e definição da Tensão admissível.

No projeto de um elemento estrutural, a carga limite deve ser menor que o carregamento admissível, de trabalho ou de projeto. Nesta situação, a capacidade do material é reservada para garantir condições de utilização segura. Geralmente, a tensão admissível é mantida na região de deformação elástica, em outros casos, visando principalmente à redução do peso de construção ela pode estar na região de deformação plástica.

4.3.1 Equação de estado limite

Para a análise de esmagamento basta comparar a tensão nas barras com a tensão admissível do material. Assim, a tensão nas barras é dada por σ em função da normal obtida da Eq. (3.1) conforme:

$$\sigma = \frac{N(P, u)}{A} \quad e \quad N(P, u) = \frac{P L}{2(h + u)} \quad (4.20)$$

Para determinar os valores de deslocamento para os quais a força normal atinge seus valores extremos, plotou-se o gráfico da Figura 4.14 que mostra o comportamento da normal para diferentes configurações.

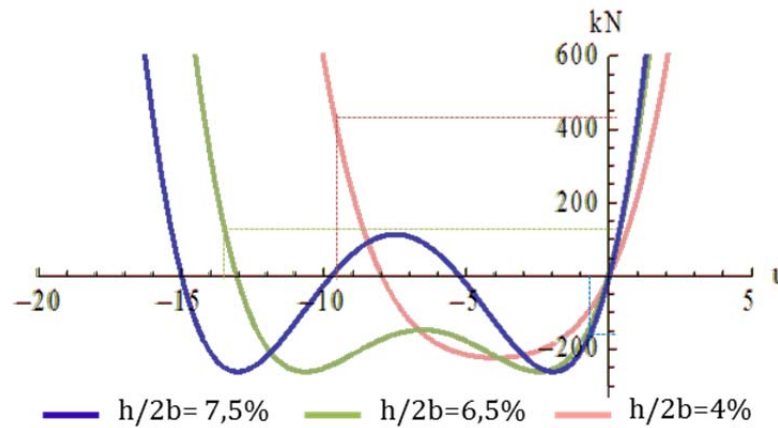


Figura 4.14 - Comportamento da força normal para diferentes configurações. As linhas tracejadas mostram o valor da normal ao final do carregamento (Tabela 3.1).

Conforme se observa na Figura 4.14, para $h/2b = 4\%$, a máxima compressão é encontrada em $u = -h$ e a máxima tração em $u = u_{final}$. Já a segunda configuração, igual a 6,5%, apresenta máxima compressão em $u = u_{comp}$ e máxima tração em $u = u_{final}$. A terceira configuração já não apresenta *snap-through* para a carga aplicada, obtendo somente máxima compressão em $u = u_{final}$.

Sendo assim, a máxima compressão pode ocorrer em três pontos, a saber, $u = \{-h, u_{comp}, u_{final}\}$. Para a máxima força de compressão, escolhe-se o valor mínimo (máximo em módulo).

$$N_{comp} = \text{Min}[N[h, -h], N[h, u_{comp}], N[h, u_{final}]] \quad (4.21)$$

Já a máxima tração pode ocorrer em $u = \{-h, u_{final}\}$. Por se tratar de forças positivas, o valor máximo é escolhido.

$$N_{trac} = \text{Max}[N[h, -h], N[h, u_{final}]] \quad (4.22)$$

No entanto, faz-se necessidade de uma comparação dos deslocamentos válidos para a definição da máxima força de compressão e de tração e utilização de condições se e senão, representadas por [T] – True e [F] – False nas Eq. (4.23) e (4.24).

No caso da compressão:

$$If \left[\begin{array}{l} \text{Min}[u_{final}, u_{comp}, -h] = u_{final}, \\ [T] \rightarrow N_{comp} = \text{Min}[N[h, -h], N[h, u_{comp}]] \\ [F] \rightarrow N_{comp} = N[h, u_{final}] \end{array} \right] \quad (4.23)$$

e para tração:

$$If \left[\begin{array}{l} -u_{final} < h, \\ [T] \rightarrow N_{trac} = \text{Max}[N[h, u_{final}], 0] \\ [F] \rightarrow N_{trac} = \text{Max}[0, N[h, -h], N[h, u_{final}]] \end{array} \right] \quad (4.24)$$

onde os valores de normal são calculados substituindo-se o valor de deslocamento na Eq. (4.20). Portanto, a EEL de esmagamento ou escoamento é dada por:

$$g_3(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \eta) = -\sigma_{adm} \cdot A + N(P, u) \quad (4.25)$$

ou, em função das normais de compressão e tração tal como:

$$g_3(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \eta) = \text{Min}[(\sigma_{adm} A_0 + N_{comp}), (\sigma_{adm} A_0 - N_{trac})] \quad (4.26)$$

A EEL é dada em força, tal como nos demais modos de falha e N_{comp} e N_{trac} estão em função da carga aplicada à estrutura. A Figura 4.15 mostra a escolha do valor da EEL em função do máximo esforço na estrutura (compressão e tração) que ocasionam, respectivamente, as falhas de esmagamento e escoamento.

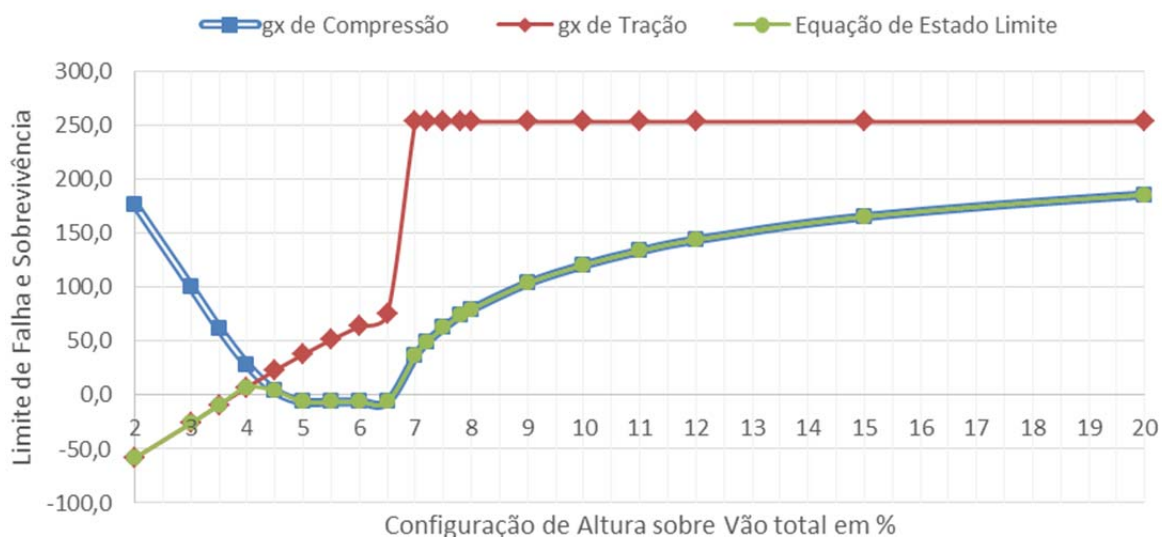


Figura 4.15 - Comportamento da EEL que define o problema em comparação com as EELs de compressão e tração.

4.4 COMENTÁRIOS GERAIS

Deslocamentos críticos como: u_{lim} e u_{comp} foram calculados de maneira a efetuar o cálculo das equações de estado limite somente em situações específicas. Quando efetuado nessas situações, probabilidades de falha máximas são obtidas, não havendo necessidade de efetuar o mesmo cálculo para todos os pontos do domínio da trajetória de equilíbrio.

No entanto, para a maioria dos casos se desconhece a equação da força normal e o comportamento da trajetória de equilíbrio. A definição da equação de estado limite nesses casos pode depender da avaliação de esforços normais e de deslocamentos ao decorrer do carregamento, ou seja, ao final de cada avaliação do MEF para um dado passo de carga.

Para o modo de falha de *snap-through*, deve-se comparar a carga aplicada à carga limite, que deve ser determinada com uma verificação de nulidade da matriz de rigidez. Para a flambagem, o procedimento mais adequado é analisar a diferença entre o esforço normal e a normal crítica a cada passo, uma vez que ambas variam com o deslocamento. Já no esmagamento/escoamento é feita a comparação com os esforços normais das barras, multiplicando-os pela área da seção transversal da barra analisada com a tensão admissível. Neste caso, a probabilidade de falha está associada aos valores extremos de tensão nas barras, uma vez que a tensão de escoamento é uma constante definida pelo usuário.

A Figura 4.16 resume de maneira simplificada o cálculo das EEL para cada modo de falha tratado anteriormente.

Assim, tomando a análise de um programa de MEF para estruturas de barras, um elemento é definido pelas coordenadas (x,y) do seu nó inicial e final, a sua seção (constante) e material são então definidas. Em seguida através da aplicação de cargas nos nós anteriormente definidos e da imposição dos deslocamentos em cada direção para cada nó, é calculado o esforço normal para cada barra (constante).

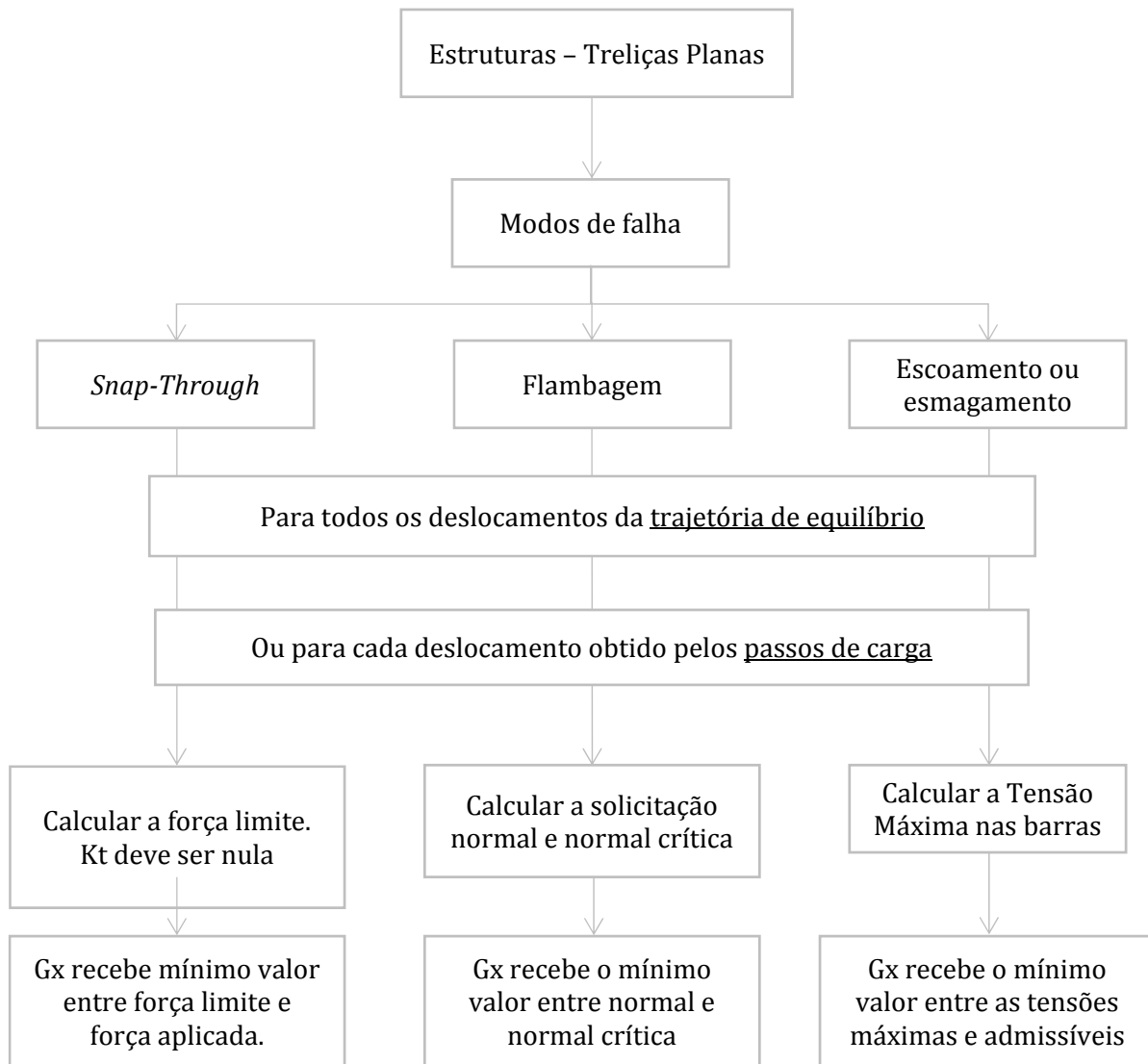


Figura 4.16 - Fluxograma para resolução geral.

Cada configuração inicial é analisada através de um processo de controle de carregamento. A cada passo de carga, um conjunto de esforços normais, reações externas e carregamento aplicado são gerados e analisados pelas equações de estado limite. Posteriormente, as EEL são enviadas ao programa de análise de confiabilidade para o cálculo das probabilidades de falha.

Por fim, com os dados gerados é possível formar um gráfico com os custos esperados totais em função da variação de cada variável de projeto. A escolha do ponto ótimo vem da análise destes custos totais, mas também pode ser feita baseada na escolha da configuração com menores probabilidades de falha, ainda que o custo esperado de falha total não seja o mínimo, mas próximo deste.

5. OTIMIZAÇÃO DE RISCO COM CONSEQUÊNCIAS DE FALHA

5.1 FUNÇÃO OBJETIVO

A otimização de risco se distingue de outras formulações de otimização estrutural por levar em consideração o efeito de incertezas em termos de probabilidades e custos de falha. Para determinar o custo esperado de falha é necessário quantificar o custo de falha em termos monetários, bem como determinar a probabilidade de falha. Assim, o custo esperado de falha para cada modo de falha é dado por:

$$C_{falha\ esperado}(\mathbf{d}) = C_{falha}(\mathbf{d})P_f(\mathbf{d}) \quad (5.1)$$

É de conhecimento geral que cada falha está associada a um custo distinto. Falhas frágeis, que ocorrem sem aviso, têm consequências mais severas que falhas de origem dúctil. Falhas por limite de serviço podem levar a suspensão temporária de uso, que geralmente representam custos menores que o colapso (falha por limite último). Tal custo pode ser calculado em função da gravidade da falha englobando demais custos como o de reparo, retirada de material danificado, etc.

A treliça simples de duas barras, aqui considerada, poderia ter diferentes aplicações, portanto, os custos de falha não são irrelevantes. Para não limitar o estudo a somente uma possível aplicação, os custos de falha são dados, de maneira genérica, proporcionais ao custo inicial.

Supondo que a falha por *snap-through* tenha custo:

$$C_{falha\ snap} = A C_{inicial} \quad (5.2)$$

que a falha por instabilidade de barras comprimidas tenha como custo:

$$C_{falha\ flamb} = B C_{inicial} \quad (5.3)$$

e que a falha por tensão admissível tenha custo:

$$C_{falha\ t.adm} = C C_{inicial} \quad (5.4)$$

onde A , B e C são fatores de custos de falha a serem explorados na sequência.

Para cada modo de falha do sistema ou de componentes do mesmo haverá um componente de custo esperado de falha. O custo esperado total do sistema é dado pela soma de todos os termos parciais de custo:

$$C_{esperado\ total}(\mathbf{d}) = C_{inicial}(\mathbf{d}) + \sum_{k=1}^{modos\ de\ falha} C_{falha}(\mathbf{d})P_f(\mathbf{d}) \quad (5.5)$$

Assim, a função objetivo a ser minimizada pode ser dada por:

$$C_{esperado\ total}(\mathbf{d}) = C_{inicial}(\mathbf{d}) + C_{falha\ snap}P_{f\ snap} + C_{falha\ flamb}P_{f\ instab} + C_{falha\ t.adm}P_{f\ tens\ao} \quad (5.6)$$

$$C_{esperado\ total}(\mathbf{d}) = C_{inicial}(\mathbf{d})(1 + AP_{f\ snap} + B P_{f\ instab} + C P_{f\ tens\ao})$$

$$C_{inicial}(\mathbf{d}) = 2 L_0 A_0 \rho 1000 c_{unit} = C_{ref} L_0 A_0 \quad (5.7)$$

onde C_{ref} é um valor de referência para custos, dado por $2000 \rho c_{unit}$. L_0 é dado em cm e a área A_0 em cm^2 . O custo inicial pode ser definido pelo volume de material multiplicado pela sua massa volumétrica ($7,86\ g/cm^3$) e pelo preço unitário ($3,50\ R\$/kg$). O volume de material é $V = 2L_0A_0$. O custo inicial é, de maneira clara, função das variáveis de projeto.

5.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DE PROJETO

As variáveis aleatórias, três no total, e seus parâmetros são mostrados na Tabela 5.1. Portanto, o vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} é dado por: $\mathbf{X} = \{P_a, E_0, \sigma_y\}$.

Tabela 5.1- Variáveis aleatórias e seus parâmetros usados no exemplo.

Variável	Distribuição	Média (μ)	c.o.v.	Desvio-padrão (σ)
E^*	Log-Normal	20500 kN/cm ²	0,05	1025 kN/cm ²
σ_y^*	Log-Normal	50 kN/cm ²	0,05	2,5 kN/cm ²
P_a	Normal	50 kN	0,10	5 kN

O vetor de variáveis de projeto é dado por: $\mathbf{d} = \{h, d, t, b\}$. Para realizar o cálculo dos deslocamentos utilizam-se variáveis de projeto (altura, diâmetro, espessura, vão) e variáveis físicas ou de comportamento do material (módulo de elasticidade e constante de não linearidade física). Outras variáveis usadas, como a área, inércia são calculadas em função das variáveis de projeto (diâmetro e espessura). Já, os cálculos dos esforços normais e críticos são função, além das variáveis de projeto, das variáveis aleatórias (carga aplicada, tensão de escoamento e módulo de elasticidade). As tabelas a seguir

definem as variáveis de projeto (Tabela 5.2) e o cálculo dos parâmetros geométricos da seção (Tabela 5.3).

O custo inicial, que depende do volume de material, também é obtido através das variáveis de projeto. Por sua vez, o custo de referência é calculado utilizando a densidade do material e seu custo unitário por peso de material. O custo final é dado em reais. A Tabela 5.4 resume as constantes de custo adotadas.

Tabela 5.2 - Variáveis de projeto

Variável	Valor
Altura (cm)	$h = 10.7$
Diâmetro externo (cm)	$d = 3.34$
Espessura (cm)	$t = 0.34$
Largura total do vão (cm) = $2b$	$2b = 100$

Tabela 5.3 - Valores calculados a partir das variáveis de projeto.

Variável	Valor
Diâmetro interno	$d_i = d_e - 2t$
Área da seção circular	$A_0 = \pi (d_e^2 - d_i^2)/4$
Momento de inércia	$I = \pi (d_e^4 - d_i^4)/64$

Tabela 5.4 - Valores para cálculo dos custos iniciais e esperados de falha

Variável	Valor
Densidade do material	$\rho = 8.304 \text{ (g/cm}^3\text{)}$
Custo unitário por grama	$c_{unit} = 3.5 * 10^{-3} \text{ (R\$/g)}$

5.3 PROBABILIDADES DE FALHA

O cálculo das probabilidades de falha foi efetuado segundo as técnicas de confiabilidade estrutural descritas na revisão bibliográfica. O método de simulação SMC não mostrou diferenças significativas quando comparado ao FORM, mesmo após a inclusão da não linearidade na EEL. Como conclusão, a utilização do FORM é suficiente para a solução deste problema de otimização de risco.

5.3.1 Falha por *snap-through*

Com base na EEL da Eq. (4.9) efetua-se o cálculo da probabilidade de falha via FORM tendo em vista as variáveis aleatórias e de projeto. A curva de probabilidades de falha em função da razão de configuração apresenta valores intermediários entre 0 e 1 de forma contínua e suave. Tal variação se deve aos valores próximos de zero da função de estado limite em torno da altura correspondente ao deslocamento limite.

5.3.2 Falha por flambagem

A variação das probabilidades de falha devido à flambagem, por sua vez é discreta, não possuindo valores intermediários. Em configurações abatidas, a flambagem ocorre, principalmente, devido à força de compressão gerada durante a inflexão da estrutura. Além disso, tanto a normal crítica quanto a de compressão dependem da posição deslocada da estrutura, sendo fundamental o conhecimento do comportamento da trajetória de equilíbrio da estrutura. Conforme a esbeltez da estrutura aumenta, o comprimento de flambagem passa a ser fator decisivo.

5.3.3 Falha por esmagamento/escoamento

As probabilidades de falha causadas por esmagamento ou/e escoamento são analisadas em conjunto considerando tensões de tração e compressão. Sendo assim, existem intervalos de predominância de cada falha. A Figura 5.1 mostra o comportamento da tensão normal para quatro configurações iniciais diferentes, representadas pelas diferentes curvas nomeadas. As razões 3% e 5% representam estruturas que sofrem inflexão, enquanto que a curva 7% se refere a uma situação intermediária e a de 9% a uma estrutura de configuração padrão. As setas indicam: 1) ponto de máxima tração em u_{final} na curva 3%; 2) máxima compressão em $u = -h$ na curva 5%; 3) máxima compressão em u_{comp} na curva 7%; 4) máxima compressão em u_{final} na curva 9%.

Assim como na flambagem, ocorre falha por esmagamento conforme as forças normais de compressão aumentam em função da esbeltez.

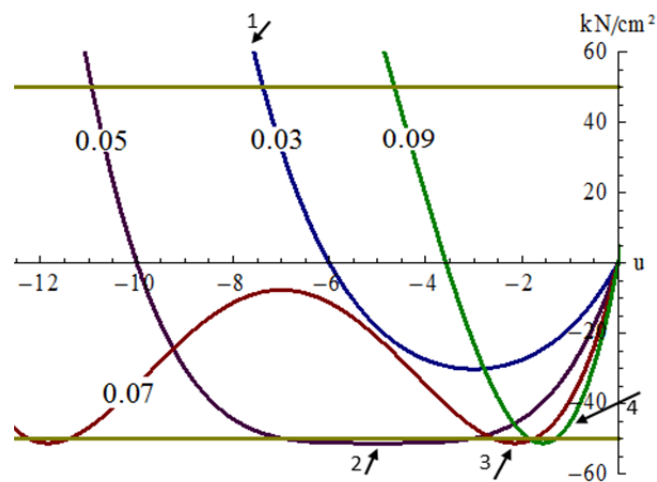


Figura 5.1 - Comportamento da tensão normal para quatro configurações iniciais $h/2b = \{3, 5, 7, 9\}\%$.

5.4 OTIMIZAÇÃO DE RISCO

Tendo definidas as probabilidades de falha para cada modo de falha e seus custos associados, é possível realizar o cálculo dos custos esperados de falha. À soma destes custos se dá o nome de custo esperado total (CET). Neste capítulo serão analisados problemas de minimização de custo esperado total para uma série de propriedades físicas e geométricas. O intuito é mostrar o comportamento da curva e sua relação com diferentes custos de falha associados.

5.4.1 Resultados para modos de falha concorrentes

Para diversas configurações do problema, um (ou dois) modo(s) de falha é (são) dominante(s) em relação aos demais. Dentro dos objetivos do presente trabalho, é interessante trabalhar com uma configuração em torno da qual ocorra uma disputa entre os diferentes modos de falha. Estudos preliminares, não apresentados aqui, mostraram que a configuração descrita na Tabela 5.2 com constante de não linearidade física $\eta = 100$ leva a modos de falha concorrentes.

Para que os modos de falha sejam concorrentes é necessário que a variação das probabilidades de falhas esteja num intervalo próximo de configurações. Para isso, considerou-se seção circular vazada de diâmetro externo $3,34\text{cm}$ e espessura igual $3,4\text{mm}$ e demais características físicas expressas na Tabela 5.1. Tais características conferem uma área 30% menor e inércia 80% maior quando comparadas à seção sólida de uma polegada.

A variação das probabilidades de falha e a composição do CET são mostradas na Figura 5.2. Neste caso, consideraram-se custos de falha unitários ($A = B = C = 1$).

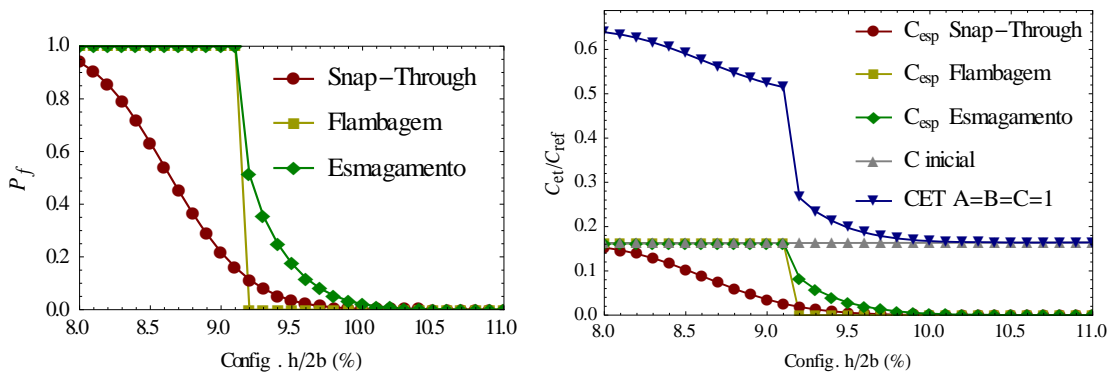


Figura 5.2 - Probabilidade de falha e Custo esperado de falha para modos de falha reunidos.

Como decorrência desta concorrência, o ponto de ótimo apresenta reservas de falha mínimas. O ponto de ótimo é encontrado, por busca exaustiva em $h/2b = 10,7$ % e tem CET igual a 9,56 reais. Um dimensionamento abaixo do ponto ótimo pode significar falha de todos os modos.

Para demonstrar a influência dos diferentes custos de falhas associados, três composições de custo diferentes são comparadas com a versão unitária. Em cada composição foi adotado um custo dez vezes maior para cada falha separadamente. Os resultados são mostrados na Figura 5.3.

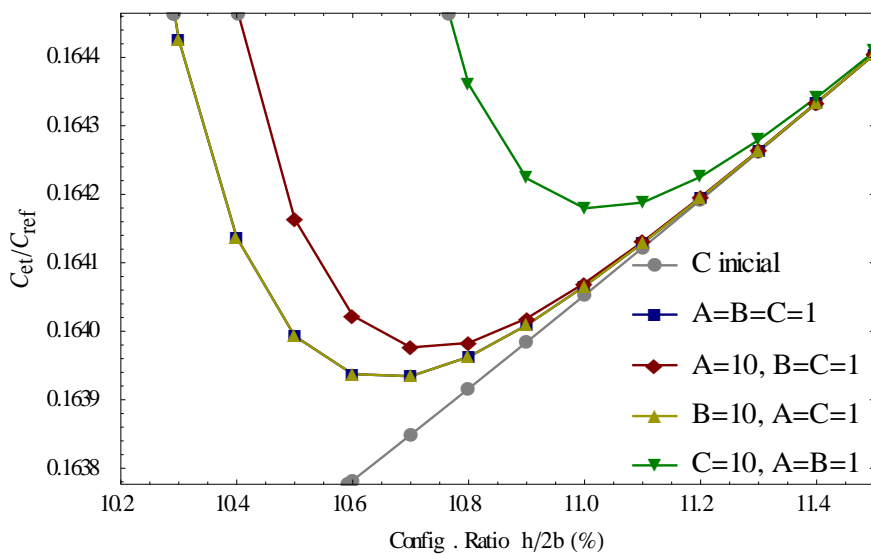


Figura 5.3 - Custo esperado total para quatro diferentes considerações de custo de falha.

Como é possível observar, a composição de 10 vezes o custo de *snap-through* e de escoamento, tiveram alteração significativa no custo mínimo em relação ao observado para a curva unitária ($A = B = C = 1$). A curva com custo maior de flambagem, no entanto, não sofreu alteração, estando sobreposta à curva de custo unitária. Conforme esperado, a curva de custo com o modo de falha por escoamento predominante apresentou maior alteração no ponto ótimo ($h/2b = 11\%$, $C_{et}/C_{ref} = 0,1642$) devido à queda menos acentuada das probabilidades de falha.

A Figura 5.4 mostra a função objetivo de CET em termos da razão de configuração ($h/2b$) da estrutura (acima), do diâmetro (centro) e da espessura (abaixo) para diferentes cenários de custos de falha. Para cada gráfico, as variáveis de projeto restantes (não visualizadas no gráfico) são fixadas em $d = 3,34\text{ cm}$, $t = 3,4\text{ mm}$, $b = 50\text{ cm}$ e $h = 10,7\text{ cm}$, que é a altura ótima na configuração de referência. Para o cenário de custos de falha unitários ($A = B = C = 1$), $C_{te}/C_{ref} = 0,1639$. e os índices de confiabilidade são: $\beta_{snap} = 4,03$, $\beta_{flamb} = \infty$ e $\beta_{tensão} = 3,29$. Os valores de custo são dados em função do custo de referência.

Conforme visto na Figura 5.4, as mudanças no custo de falha de *snap-through* e esmagamento afetam a função objetivo. Tais mudanças não são discrepantes, mas mostram que diferentes pontos de equilíbrio são obtidos entre modos de falha concorrentes.

A Tabela 5.5 mostra as diferenças obtidas com relação a cada variável de projeto. Os valores máximos observados são de: 4,67% para h ; 7,74% para d e 9,68% para t .

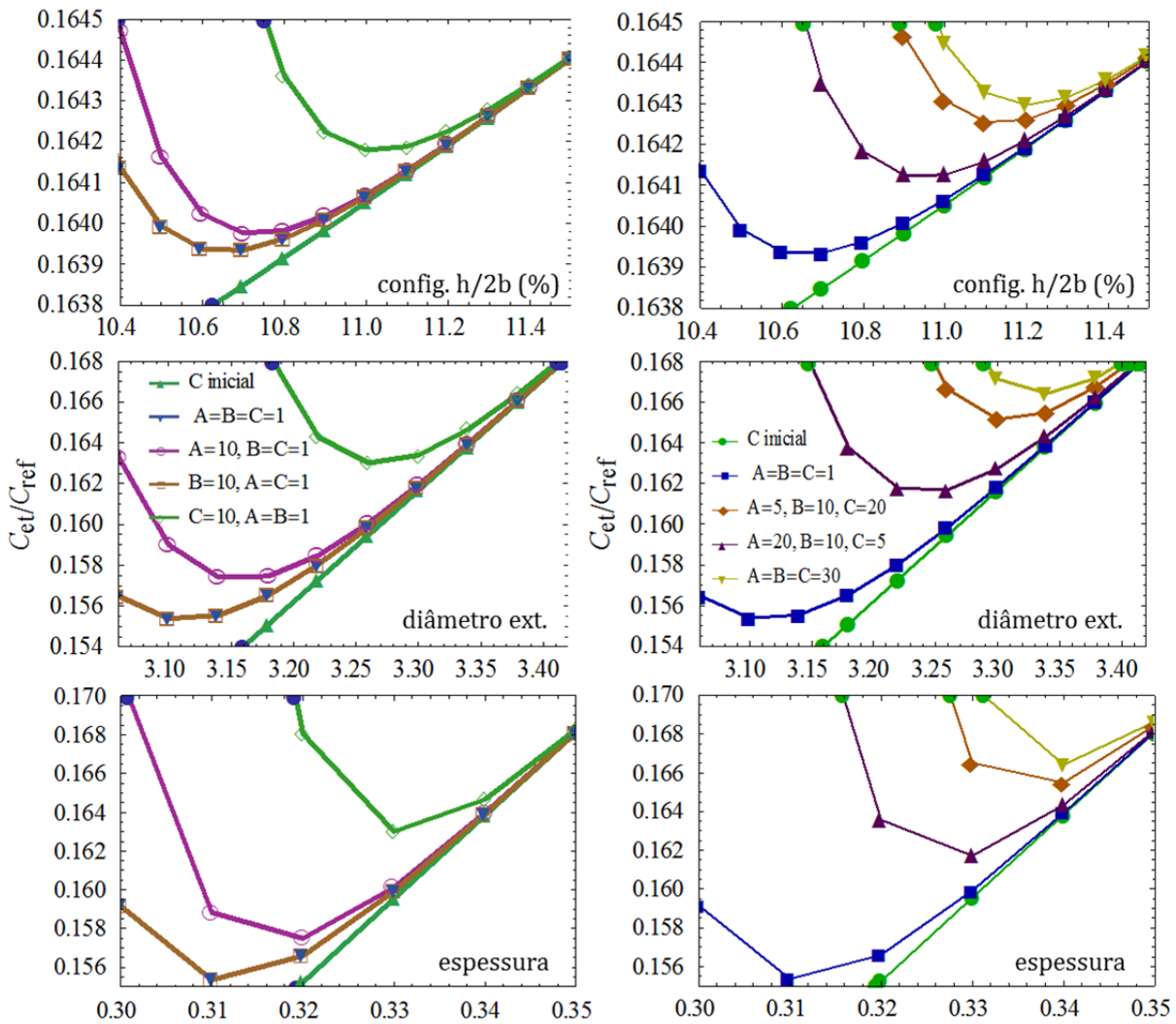


Figura 5.4 – CET para diferentes cenários de custos de falha em termos das variáveis de projeto {h,d,t}.

Tabela 5.5 – Variação dos valores mínimos de cada variável de projeto.

A	B	C	h/2b	%	d	%	t	%
1	1	1	0,107	-	3,10	-	0,31	-
10	1	1	0,107	0	3,14	1,29	0,31	0
1	10	1	0,107	0	3,10	0	0,32	3,23
1	1	10	0,110	2,80	3,26	5,16	0,33	6,45
5	10	20	0,111	3,74	3,30	6,45	0,34	9,68
20	10	5	0,109	1,87	3,26	5,16	0,33	6,45
30	30	30	0,112	4,67	3,34	7,74	0,34	9,68

5.4.2 Alteração da constante de não linearidade

Em alusão ao item “3.4.5 - Estudo comparativo dos comportamentos não lineares” foram estudados diferentes valores de η a fim de verificar as diferenças do comportamento não linear do material na configuração ótima e seu respectivo custo. A Tabela 5.6 sintetiza os resultados obtidos para custos de falha unitários ($A = B = C = 1$) e variação paramétrica da razão de configuração.

Tabela 5.6 - Variação da razão de configuração em virtude da alteração da não linearidade do material.

Valor da constante de não linearidade η	Razão de configuração $h/2b$ ótima (%)	C_{et}/C_{ref}
1	10,5	0,1638
40	10,5	0,1638
100	10,7	0,1639
120	11,7	0,1647

Como se espera, o aumento da não linearidade do material resulta em configurações ótimas mais altas. Porém, o aumento excessivo da constante de não linearidade afeta negativamente a falha por flambagem e tensão admissível que têm seu intervalo de ocorrência aumentado resultando em configurações ótimas ainda mais esbeltas. A influência no custo esperado total no ponto de ótimo é ínfima uma vez que as probabilidades de falha são pequenas e foram tomados custos unitários de falha.

Neste caso, relatado na Tabela 5.6, o CET está diretamente relacionado ao custo inicial ou volume de material. No entanto, caso o objetivo fosse definir uma estrutura ótima com uma probabilidade de falha definida (e, portanto, maior que a do ponto ótimo), teríamos aumento dos custos esperados de falha. Tal aumento se refletiria em maiores variações na razão de configuração ótima, principalmente se levássemos em conta valores de custo de falha não unitários.

5.4.3 Variação multi paramétrica

Com a variação multi-paramétrica, o problema de otimização será tridimensional. Desta forma, o custo esperado total mínimo será obtido em função de três variáveis de projeto, $\{h, d, t\}$. O comprimento do vão e os parâmetros das variáveis aleatórias se mantem inalterados. Tendo por base a configuração que gera modos de falha concorrentes, determinou-se os intervalos: $h/2b = [0,08; 0,12]$, $d = [3,1; 3,5]$ e $t = [0,25; 0,43]$. A constante de não linearidade usada é $\eta = 100$.

Primeiramente é realizado o cálculo dos custos iniciais da estrutura, tal função de custo é dependente das variáveis de projeto, devendo ser calculada a cada nova configuração. A Figura 5.5 mostra a representação tridimensional do custo inicial versus altura e diâmetro, sendo a variação das espessuras visível através das diferentes superfícies geradas.

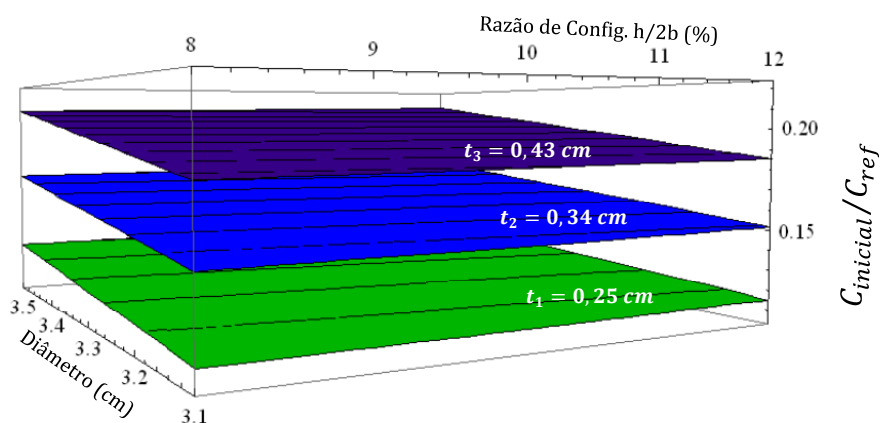


Figura 5.5- Custo inicial da estrutura para $t = \{0,25, 0,34, 0,43\}$ cm e $\eta = 100$.

Os custos iniciais são diretamente proporcionais ao volume de material. Assim, o aumento da espessura reflete no aumento do custo. O aumento do diâmetro, por sua vez, pode ser observado na leve inclinação positiva ao fundo da superfície, em direção a diâmetros maiores. Tais comportamentos são compatíveis, uma vez que os aumentos de espessura, e do diâmetro interferem proporcionalmente no cálculo da área da seção transversal. A variação da altura, por sua vez, tem menor influência, uma vez que está relacionada indiretamente através do comprimento da barra.

O custo inicial se faz necessário para a definição dos custos esperados de falha para cada modo, dispostos na Figura 5.6. Nesta figura, observa-se não só a variação dos custos em

função da razão de configuração (descrita no item 5.3), mas também em função do diâmetro e da espessura.

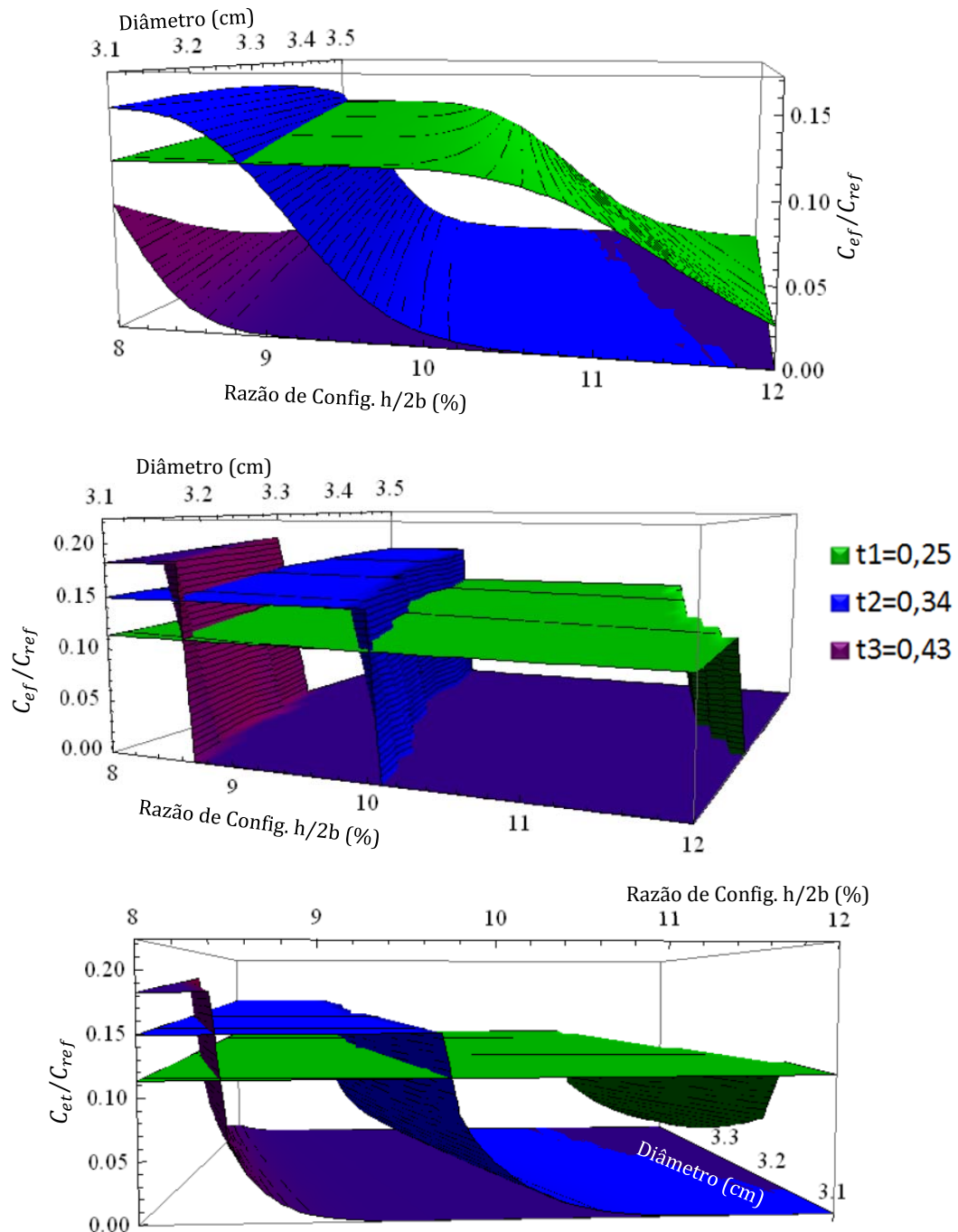


Figura 5.6 - Custo esperado de falha para *snap-through* (acima), flambagem (centro) e esmagamento/escoamento (abaixo)

Observa-se que o aumento da espessura, além da sua influência no aumento do custo inicial, desloca e aumenta o intervalo de probabilidades de falha intermediárias, produzindo inclinações mais suaves. Com relação ao diâmetro, quando mantida a altura

constante, seu aumento determina custos de falha menores em função da probabilidade de falha.

A seguir, os custos inicial e esperado de falha serão somados para a constituição dos custos esperados totais, necessários para a definição da configuração ótima. Na Figura 5.7, fixou-se o diâmetro $d = 3,34 \text{ cm}$. É possível observar, que a variação das variáveis de projeto altera a concorrência entre os modos. Razão pela qual a configuração escolhida como referência (Tabela 5.2) não é aquela de custo mínimo global do intervalo analisado. Para este diâmetro $C_{et}/C_{ref} = 0,157$ e demais variáveis de projeto são $h/2b = 0,12$; $t = 0,25$.

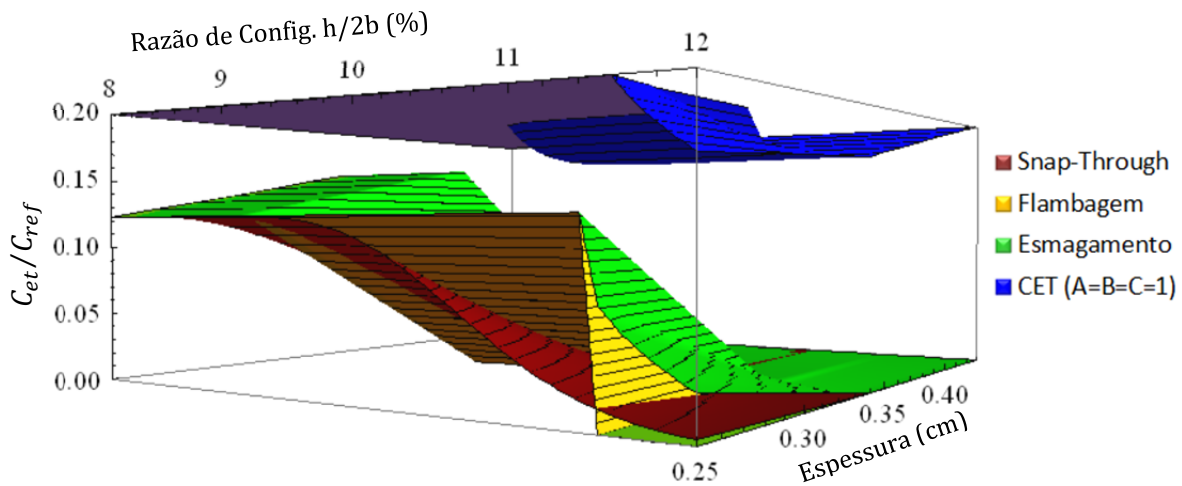


Figura 5.7 - Custos esperados de falha e CET de referência.

Em uma análise com diversas espessuras, a configuração de menor CET unitário observado no intervalo analisado corresponde a $h/2b = 0,12$; $d = 3,5$; $t = 0,25$; cujo custo é $C_{et}/C_{ref} = 0,139$. A Figura 5.8 mostra as curvas de nível da função CET em função do diâmetro e da razão de configuração. O comportamento da região de mínimo custo pode ser visto para cada espessura.

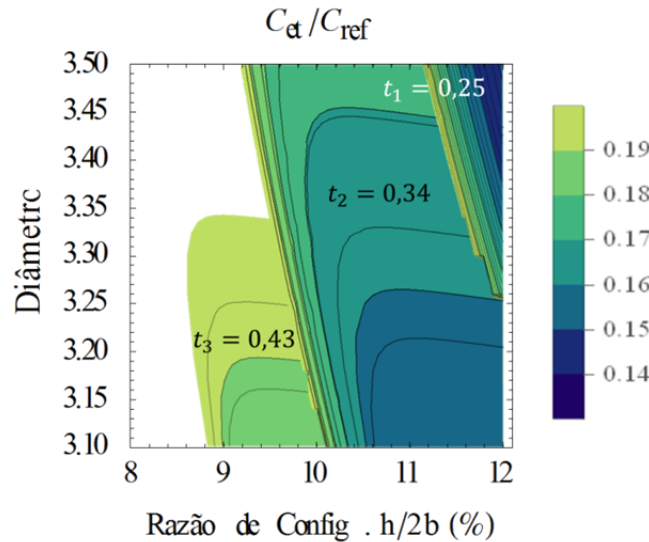


Figura 5.8 - Curva de nível dos custos totais para cada espessura.

Para a espessura utilizada como configuração de referência ($t_2 = 0,34 \text{ cm}$), o custo mínimo encontrado é $C_{et}/C_{ref} = 0,151$ correspondente a configuração com variáveis de projeto $h/2b = 0,115$; $d = 3,1$. A Figura 5.8 mostra, ainda, o comportamento da região de mínimo e a distância do ponto de mínimo local ao custo referência à configuração escolhida da Tabela 5.2, cujo custo é de $C_{et}/C_{ref} = 0,164$.

A seguir, a Figura 5.9 mostra o comportamento da curva de custos esperados totais termos da razão de configuração *versus* diâmetro (acima), razão de configuração *versus* espessura (centro) e do diâmetro *versus* espessura (abaixo) para diferentes cenários de custo de falha. Para cada gráfico, a variável de projeto restante (não visualizada no gráfico) foi mantida em $d = 3,34 \text{ cm}$, $t = 3,4 \text{ mm}$, $h/2b = 0,107$.

Em comparação à Figura 5.4, esta análise tridimensional dos custos esperados totais permite visualizar o comportamento em função de duas variáveis de projeto do problema. O intervalo utilizado mostra, principalmente, no gráfico diâmetro *versus* espessura (abaixo) que se trata de uma função convexa com ponto de mínimo.

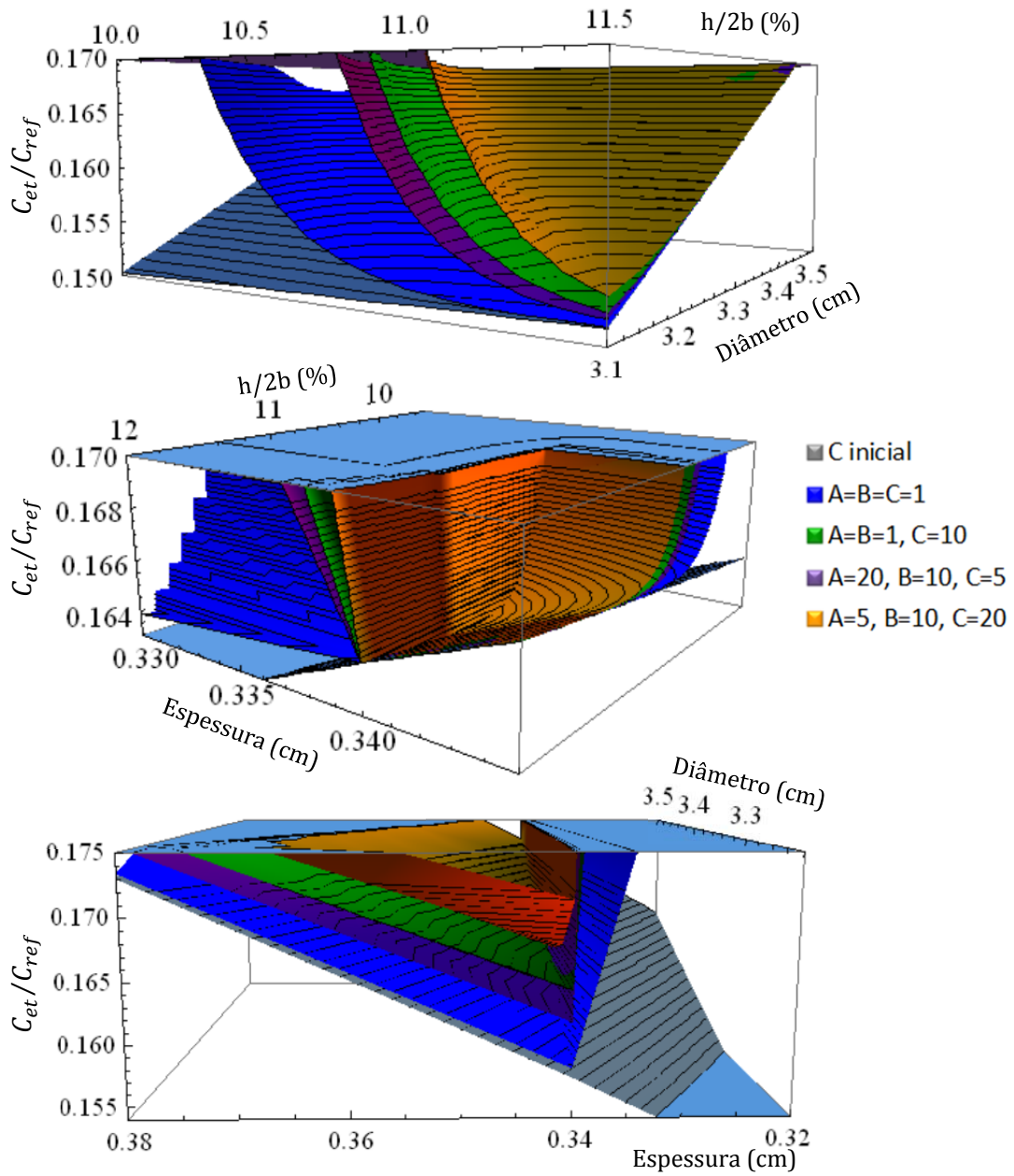


Figura 5.9 - CET para diferentes cenários de custos de falha.

6. COMPARAÇÃO COM A OTIMIZAÇÃO DETERMINÍSTICA

6.1 CONFIGURAÇÃO DE COMPARAÇÃO

Em Fox (1971) considera-se uma treliça plana de duas barras semelhante ao problema analisado neste trabalho. As constantes usadas em Fox (1971) são usadas como referência nesta comparação, e são apresentadas na Tabela 7.1.

Tabela 6.1 - Variáveis adotadas por Fox (1971).

Variável	Valor	Unidade	Valor no SGI
P (carga aplicada)	2x33	kips	293,58 kN
2 b (vão total)	2x30	in	152,4 cm
t (espessura)	0,1	in	0,254 cm
σ_y (Tensão)	100	ksi	68,95 kN/cm ²
E (módulo de Elast.)	3x10 ⁴	ksi	20684,27 kN/cm ²
ρ (densidade)	0,3	Lb/in ³	8,304 g/cm ³

O problema resolvido por Fox, no entanto, considera material linear e pequenos deslocamentos, sendo a tensão nas barras igual a:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\frac{P L}{h}}{\pi \frac{d_e^2 - d_i^2}{4}} = \frac{4 P L}{\pi h (d_e^2 - (d_e - 2t)^2)} = \frac{P L}{\pi h t (d_e - t)} = \frac{P (b^2 + h^2)^{1/2}}{\pi t h d} \quad (6.1)$$

A tensão crítica de Euler para flambagem é calculada por:

$$\sigma^e = \frac{\pi^2 E I}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{16(b^2 + h^2)} [(d_m + t)^2 + (d_m - t)^2] = \frac{\pi^2 E (d^2 + t^2)}{8 (b^2 + h^2)} \quad (6.2)$$

A função objetivo do problema de Fox é dada em função do peso da estrutura:

$$Peso = \rho A 2 L = 2 \rho (\pi d t) (b^2 + h^2)^{1/2} \quad (6.3)$$

6.2 RESOLUÇÃO DETERMINÍSTICA E LINEAR DE FOX

Para o critério de máxima tensão admissível, a treliça otimizada é obtida com um conjunto de valores candidatos. Desses valores mínimos ótimos, mostrados na Tabela 6.2, somente alguns estão acima da tensão crítica de Euler.

Tabela 6.2 - Valores candidatos a ponto ótimo.

Diâmetro (cm)	Altura(cm)	Peso (kg)
3,81	76,20	5,44
4,44	58,42	5,95
5,08	48,26	6,07
5,71	40,64	6,54
6,35	35,56	7,08

Os valores riscados na Tabela 7.2 correspondem a configurações que levam a tensões superiores à tensão crítica de Euler e, portanto, representam configurações inviáveis. A configuração ótima, na solução determinística de Fox (1971), corresponde à terceira linha da Tabela 7.2, com $d = 5,08 \text{ cm}$ e $h = 48,26 \text{ cm}$, cujo peso total é igual a 6,07 kg. Utilizando o custo unitário de $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ R\$/g}$. A configuração ótima de Fox tem custo igual a:

$$C_{FOX} = 6,07 \text{ kg} (3,50 \text{ R\$/kg}) = 21,25 \text{ reais.} \quad (6.4)$$

6.3 OTIMIZAÇÃO DE RISCO PARA MESMA CONFIGURAÇÃO

Para a otimização de risco serão utilizando os dados de entrada da Tabela 7.1 e o diâmetro ótimo encontrado por Fox (1971). Para o diâmetro cabe uma ressalva, uma vez que Fox adota diâmetro médio igual a $5,08 \text{ cm}$. Neste trabalho será utilizado o diâmetro externo calculado por: $d_e = d_m + t = 5,334 \text{ cm}$, onde a espessura t é mantida em $2,54 \text{ mm}$. As médias e desvios padrão das variáveis tomadas como aleatórias são dadas na Tabela 6.3. Os valores da largura total do vão ($152,4 \text{ cm}$), densidade do material e custo unitário são mantidos conforme Fox.

Tabela 6.3 - Parâmetros das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Média (μ)	c.o.v.	Desvio-padrão (σ)
E	Log-Normal	20684 kN/cm ²	0,05	1124 kN/cm ²

σ_y	Log-Normal	68,95 kN/cm ²	0,05	3,4 kN/cm ²
P_a	Normal	293,6 kN	0,10	-29,4 kN

6.3.1 Consideração de linearidade física

Primeiramente, é feita uma otimização de risco com variação do parâmetro de altura, tendo em vista que será utilizado o diâmetro ótimo encontrado por Fox (1971). Para destacar os efeitos da não linearidade geométrica no problema, a constante de não linearidade física é reduzida a $\eta = 1$. Como a consideração da posição deslocada ocasiona o modo de falha por *snap-through*, o mesmo será considerado adicionalmente ao problema de Fox (1971). O comportamento da curva de CET é mostrado na Figura 6.1.

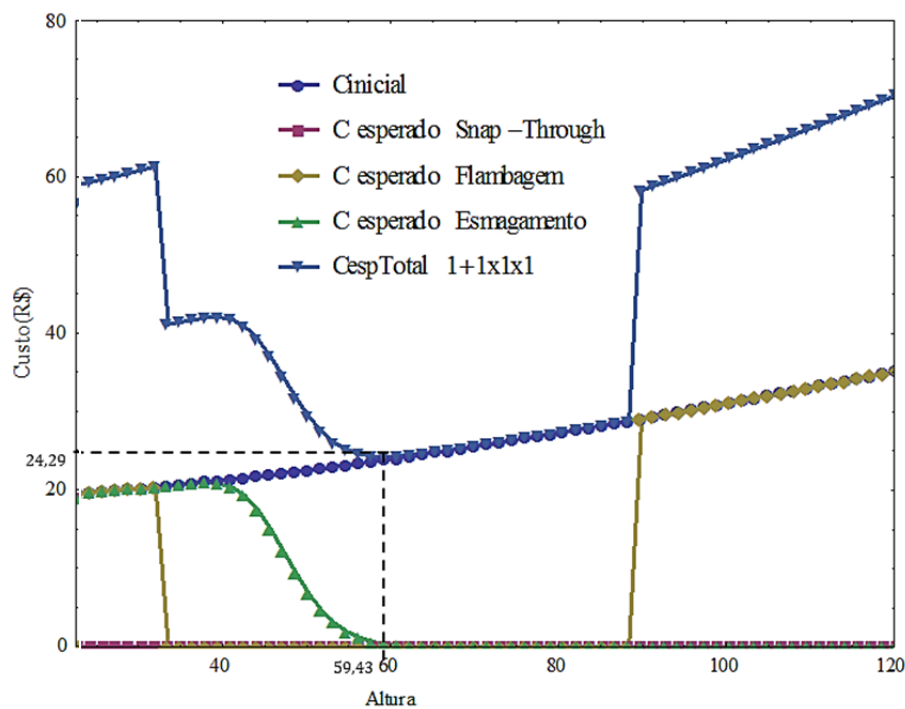


Figura 6.1 - Visualização dos custos parciais e totais para $\eta = 1$.

Observa-se que a configuração ótima da otimização de risco é regida pela falha por tensão admissível. O custo esperado total, segundo a Figura 6.1, apresentou um mínimo global em $h = 59,43 \text{ cm}$ com custo de $24,29 \text{ reais}$. Se considerarmos a falha por tensão admissível satisfatória aos $48,26 \text{ cm}$, que equivale a $P_f \cong 46\%$ e $\beta_{tensão} \cong 0,09$ obteríamos um custo de 31 reais . Tal custo tem cerca de 30% de custo esperado de falha.

6.3.2 Consideração de ambas não linearidades

Na análise com ambas não linearidades, utilizou-se constante de não linearidade igual a $\eta = 100$. Tal valor provoca comportamento altamente não linear da estrutura, sendo observada $P_f = 1$ para flambagem no domínio analisado. Sendo assim, decidiu-se diminuir a constante de não linearidade em 60%. Tal valor permitiu a observação de um mínimo global sem alterar diretamente as características materiais e geométricas da estrutura. O ponto de mínimo global, caracterizado por probabilidades de falha aceitáveis em todos os modos considerados, pode ser observado na curva de custo esperado total da Figura 6.2.

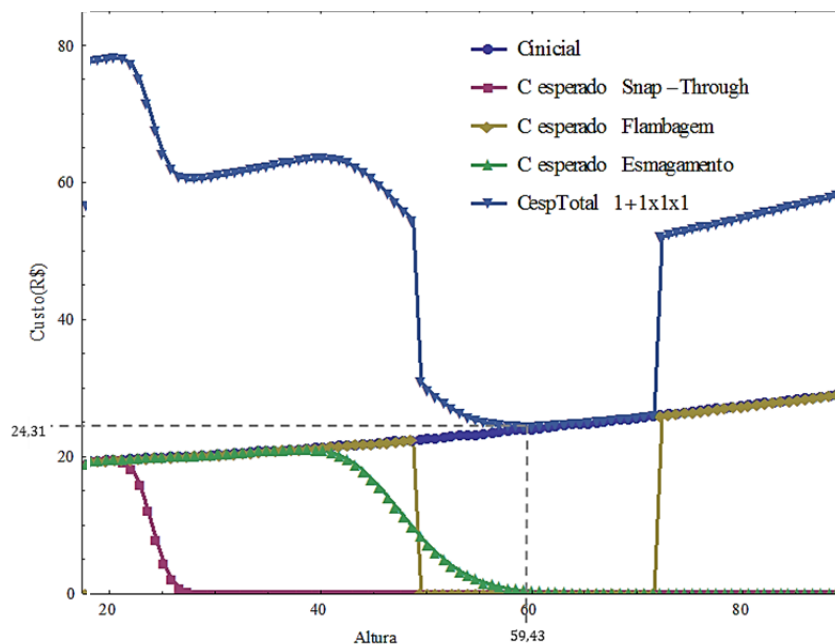


Figura 6.2 - Visualização dos custos parciais e totais para $\eta = 40$.

Neste caso, o mínimo custo esperado total foi encontrado em $h = 59,43 \text{ cm}$ com custo de $24,31 \text{ reais}$. Dentre outras diferenças, após diminuição da constante de não linearidade, destaca-se o comportamento da curva de flambagem que passa a exibir sobrevivência em configurações maiores

6.3.3 Comparação dos resultados

De forma geral, a mudança do comportamento não linear do material idealizado modifica os intervalos de ocorrência de cada falha. Na Tabela 6.4, dispõe-se um quadro

comparativo da otimização de risco para as diferentes constantes de não linearidade física adotadas.

Tabela 6.4 – Comparação das configurações ótimas com relação às diferentes constantes de não linearidade física adotadas para diâmetro externo igual a 5,08 cm.

η	h otim. de risco	Custo Mínimo	Custo projetado para h otim. de Fox (1971)
100	-	-	89,5
40	59,43	24,31	54,5
1	59,43	24,29	31,5
Fox (1971)	48,26	21,25	-

Os custos projetados para a altura ótima encontrada na otimização determinística evidenciam a diferença entre as otimizações adotadas. Tal diferença está relacionada à função objetivo da otimização de risco, que leva em conta não só a minimização do custo em função do volume, mas também os custos associados a cada modo de falha. Portanto, os custos projetados são claramente maiores que o custo ótimo determinístico (21,25 *reais*) por incluírem custos esperados de falha. Por sua vez, as configurações ótimas encontradas na otimização de risco são mais robustas devido às restrições de falha e consideração das incertezas nas equações de estado limite do problema. O custo mínimo, no entanto, é afetado basicamente pelo custo inicial ou de material.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho trata da otimização não linear de uma estrutura de treliça considerando os efeitos dos custos esperados de falha. O modelo mecânico considera não linearidades físicas e geométricas. Em termos de falha considerou-se falhas por tensão de tração (escoamento) e por tensão de compressão (esmagamento), além de falhas por instabilidades, sendo a de bifurcação conhecida como flambagem e a de ponto de limite ou chamada de *snap-through*. A seleção do problema, e de suas variáveis aleatórias e de projeto, objetivou expor a concorrência entre os modos de falha, para custos de falha diferentes. As diferenças entre as configurações ótimas observadas são sutis; entretanto, demonstram como a concorrência entre modos de falha de custo distinto pode afetar a configuração estrutural ótima.

7.1 OBSERVAÇÕES GERAIS

Com relação aos modos de falha, é possível afirmar que a falha por *snap-through* determina a mudança de comportamento dos demais modos de falha, uma vez que a configuração deslocada é levada em conta nas equações de estado limite, através da consideração da não linearidade geométrica.

A comparação da otimização de risco com a otimização determinística chegou a configurações com maior uso de material. Porém, com menor custo esperado total, quando comparado ao custo de Fox (1971). A otimização determinística de Fox (1971) não levou em conta a posição deslocada (análise não-linear) nem falhas relacionadas com este comportamento. Tal resultado mostra a influência da consideração dos custos de falha na otimização, propiciando não só resultados de peso mínimo (uma vez que o custo é dado em função do peso), como também mais seguros pela consideração de mais modos de falha e incertezas.

7.2 SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS

Como desenvolvimento futuro da presente pesquisa cita-se a sua aplicação à otimização topológica de estruturas redundantes planas e tridimensionais, bem como a utilização de algoritmos inteligentes para escolha dos modos de falha dominantes.

Com relação ao modelo mecânico, extensão para materiais de comportamento elasto-plástico, mantendo a inclusão das análises não lineares geométricas.

Com relação à solução de problemas de otimização, cita-se o desenvolvimento de ferramental (software) para otimização topológica de estruturas planas e tridimensionais, considerando quantificação de incertezas e consequências de falha. Sugere-se considerar modos de falha tradicionais, como falha dúctil/frágil por sobre-tensão, falha por excesso de deformações; bem como falha por instabilidade elasto-plástica, para problemas envolvendo estruturas de barras (treliças e vigas) e para problemas envolvendo elasticidade plana.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGARWAL, H.; MOZUMDER, C.K.; RENAUD, J.E.; WATSON, L.T., (2007). An inverse-measure-based unilevel architecture for reliability-based design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v.33, p.217–227.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A.; (2010): Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. **Struct Multidisc Optim**, v. 41, p.277–294.
- ANG, A. H-S; TANG, W. H. (2007). **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2.ed. John Wiley & Sons.
- BASTIN, F., (2004). **Trust-region algorithms for nonlinear stochastic programming and mixed logit models**. Thesis (PhD). Facultes Universitaires Notre-Dame de la Paix Namur.
- BECK, A.T., (2007) **Desenvolvimento de Programa Computacional para Análise de Confiabilidade de Estruturas**, projeto de pesquisa FAPESP, 2007/00154-4.
- BECK, A. T. (2009) **Curso de Confiabilidade Estrutural**, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- BECK, A. T.; GOMES, W. J. S.; BAZÁN, F.A.V., (2012): On the Robustness of Structural Risk Optimization with Respect to Epistemic Uncertainties. **International Journal for Uncertainty Quantification**. , v.2, p.1-20.
- BECK, A. T.; GOMES, W. J., (2012): A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. **Probabilistic Engineering Mechanics** v.28, p.18-29.
- BEYER, H-G.; SENDHOFF, B., (2006): Robust optimization – a comprehensive review. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v.196,p.3190-3218
- CHEN, W.; WIECEK, M.M.; ZHANG, J., (1999). Quality utility: a compromise programming approach to robust design, **ASME Journal of Mechanical Design**, 121(2), 179–187.
- CHENG, G.D., XU, L.; JIANG, L., (2006). Sequential approximate programming strategy for reliability-based optimization, **Computer and Structures**, 84(21), 1353–1367.
- CRISFIELD, M.A. (1991). **Non-linear finite element analysis of solids and structures: Essentials**. New York, John Wiley. v.1.
- CRISFIELD, M.A. (1997). **Non-linear finite element analysis of solids and structures: Advanced Topics**. New York, John Wiley. v.2.
- DAS, I.; DENNIS, J.E. (1997). A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multi-criteria optimization problems, **Structural Optimization**. v.14, p.63–69.
- DAI, Z.; MOURELATOS, Z. P., (2003). Robust design using preference aggregation methods. In: **ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference**, Chicago.
- DU, X.; CHEN, W. (2004): Sequential Optimization and Reliability Assessment method for Efficient Probabilistic Design. **ASME J. Mech. Des.**, v.126(2), p.225–233.
- FOX, R. L. (1971) **Optimization Methods for engineering Design**. Addison-Wesley Publishing Company.
- GOMES, W.J.; BECK. A. T. (2013) Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ANN surrogates. **Computers and Structures**. v. 126, p.56-68

- MARTINS, T. V.; GRECO, M. (2013) Otimização paramétrica de estruturas treliçadas, em comportamento pós-crítico, via Algoritmos genéticos. Mostra PROOPEEs, UFMG. 29 e 30 de Abril de 2013
- MELCHERS, R.E. (1999). **Structural Reliability Analysis and Prediction**, 2.ed.. New York: John Wiley and Sons.
- PAULA, C. F.; PROENÇA, S. P. B. (2008) Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v.10, n. 42, p. 35-50, 2008
- PIMENTA, P. M. (1988) Análise não-linear de treliças espaciais. **Anais Epusp**, São Paulo 1(1a):461-486
- PIMENTA, P. M. (1996) Geometrically exact analysis of Initially Curved Rods. In: **Advances in Computational Techniques for Structural Engineering**, Edinburgh, UK, v. 1, p. 99-108
- QU, X.; HAFTKA, R. T. (2004) Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v.27 p.314-325
- RITTO, T.; LOPEZ, R.H. ; SAMPAIO, R. ; CURSI E. S. (2011): Robust optimization of a flexible rotor-bearing system using the Campbell diagram. **Engineering Optimization**. v.43, p.77-96.
- SANCHIS, J.; MARTINEZ, M.; BLASCO, X., (2008). Multi-objective engineering design using preferences, **Engineering Optimization**. v. 40(3), p. 253-269.
- SCHUËLLER, G. I.; JENSEN H.A. (2008) Computational methods in optimization considering uncertainties - An overview. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v.198(1), p.2-13.
- SILVA, M.; TORTORELLI, D.; NORATO, J.; HA, C.; BAE, H., (2010). Component and system reliability-based topology optimization using a single-loop method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v.41, p. 87-106.
- LIMA, V.M.S.; VENÂNCIO FILHO, F. (1992) **Considerações sobre a não linearidade geométrica de estruturas reticuladas**. In: ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA, 3., Laboratório de Computação Científica (CNPq), Rio de Janeiro, p.1-38.
- TU, J.; CHOI, K.K.; PARK, Y.H., (1999): A New Study on Reliability-Based Design Optimization, **J. Mech. Des.**, v.121 (4), p.557- 565.
- VALDEBENITO, M.A., SCHUELLER, G.I., (2010): A survey on approaches for reliability-based optimization, **Struct Multidisc Optim**. v.42, p.645-663.
- VERZENHASSI, C., (2008): **Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade**, dissertação de mestrado, Engenharia de Estruturas, EESC, USP.
- YI, P.; CHENG, G.D.; JIANG, L., (2008): A Sequential approximate programming strategy for performance measure based probabilistic structural design optimization. **Structural Safety**, v.30, p.91-109.
- ZIMMERMANN, H. J. (1992). **Fuzzy Set Theory and Its Applications**. Second Revised Edition. Kluwer academic publishers.