

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO

**Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à
análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2015

SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO

**Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à
análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

C794f Cordeiro, Sérgio Gustavo Ferreira
Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas / Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2015.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Estruturas Compostas. 3. Técnica de Multi-regiões. 4. Meios Anisotrópicos. 5. Modelo Coesivo de Fratura. 6. Operador Tangente. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **SÉRGIO GUSTAVO FERREIRA CORDEIRO**.

Título da dissertação: "Formulações do método dos elementos de contorno para análise elástica e fratura coesiva de estruturas compostas planas."

Data da defesa: 09/03/2015

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Titular **Leandro Palermo Junior**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Rodrigo Bresciani Canto**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Resultado:

APROVADO

APROVADO

APROVADO

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Profª. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

Aos meus pais Regina Celi e Paulo Sérgio (em memória)...

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me proporcionado saúde e paz ao longo de toda minha vida, permitindo assim que eu trilhasse meus caminhos e concluísse mais essa importante etapa.

A toda minha família, em especial aos meus pais, Paulo e Regina (em memória), e tios/tias que me incentivaram a me tornar uma pessoa digna. Também ao meu irmão Robson que por muitas vezes me serviu de inspiração no desenvolver da pesquisa.

À minha noiva Beatriz e aos meus sogros pelo carinho e compreensão ao longo dessa jornada me ajudando a superar os desafios enfrentados.

Ao prof. Dr. Edson Leonel por toda a atenção, paciência, humildade e disponibilidade para me atender em todos os momentos. Agradeço também por sua coerência profissional como orientador/pesquisador e companheirismo. Acredito que além de uma grande orientação, também levarei uma prospera amizade.

Aos professores, Dr. Humberto Coda, Dr. Rodrigo Paccola, Dr. Sérgio Proença, Dr. André Beck, Dr. Julio López e Dr. Ana Lucia El Debs, por todos os ensinamentos transmitidos os quais contribuíram muito para a minha formação. Agradeço também a toda equipe da secretaria do SET pelo acolhimento e adicionais ajudas burocráticas.

Aos professores Dr. João Batista de Paiva e Dr. Rodrigo Bresciani Canto por examinarem minha qualificação e contribuírem com importantes sugestões para a pesquisa. Também agradeço ao professor Dr. Leandro Palermo Junior e novamente ao prof. Rodrigo pela disponibilidade de participar da comissão examinadora do presente trabalho.

Aos companheiros, Giovanni, Gustavo, Henrique, Jackson, Ana, Thais, Karen, Ayrton, Lara, Geovanne, Caio, Hugo, Paulo, Matheus, Ketson, Carlinhos, Lucas, Rodolfo, Thiago, Jeferson, Júlio e todos os outros pelos momentos de amizade e descontração. Aos alunos de pós-doutorado Dorival e Edimar pelos ensinamentos transmitidos.

Aos professores Christian Duenser e Thomas Fries, e também aos pesquisadores e funcionários do Institut für Baustatik da Technische Universität Graz pelo acolhimento proporcionado durante minha estadia na universidade.

Ao programa IRSES- Marie Curie Actions pelo apoio financeiro concedido no período de estágio na universidade Austríaca, e por fim, à CAPES pelo suporte financeiro que me possibilitou a dedicação exclusiva à presente pesquisa.

LISTA DE SIGLAS

COD	Crack Opening Displacement
CSD	Crack Sliding Displacement
EPT	Estado Plano de Tensão
EPD	Estado Plano de Deformação
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEC HP	Formulação Hiper Singular do Método dos Elementos de Contorno
MEC S	Formulação Singular do Método dos Elementos de Contorno
MEC S-H	Formulação mista Singular e Hiper Singular do MEC
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFE	Método dos Elementos Finitos Estendidos
MF	Mecânica da Fratura
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
MFNL	Mecânica da Fratura Não Linear
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
MSS	Método de Subtração de Singularidade
NC	Número de condição
OC	Operador Constante
OT	Operador Tangente
PFH	Parte Finita de Hadamard
PVC	Problema de Valor de Contorno
VPC	Valor Principal de Cauchy
ZPI	Zona de Processos Inelásticos

RESUMO

CORDEIRO, S. G. F. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. 266 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

O presente trabalho trata do desenvolvimento de formulações numéricas para avaliar o comportamento mecânico de estruturas compostas planas, no contexto de elasticidade linear e mecânica da fratura não linear. As formulações propostas são baseadas no Método dos Elementos de Contorno (MEC), por meio das representações integrais singular e hiper singular dos problemas elastostáticos. A técnica de multi-regiões é considerada para acoplar a interface de sólidos multifásicos. O MEC é uma técnica numérica robusta e precisa para analisar o fenômeno da fratura em sólidos. Esse método numérico apresenta uma natural redução na dimensionalidade do problema, tornando mais simples a modelagem das superfícies de fratura. Além disso, essa redução de dimensionalidade faz também com que o tratamento de interfaces materiais em estruturas compostas seja uma tarefa menos árdua. Com o uso da solução fundamental de Kelvin nas representações integrais, materiais isotrópicos podem ser considerados para constituir as estruturas compostas. Por outro lado, utilizando a solução fundamental de Cruse & Swedlow, também é possível lidar, de maneira geral, com materiais anisotrópicos em estruturas compostas. Nessas estruturas, as fraturas são assumidas como ocorrendo ao longo das interfaces e o comportamento não linear é introduzido pelo modelo coesivo de fratura, o qual é aplicável a materiais quase frágeis. Nessas análises, o sistema não linear de equações pode ser solucionado utilizando dois distintos algoritmos de resolução iterativa. O primeiro sempre leva em consideração a rigidez elástica da estrutura e é, portanto denominado Operador Constante (OC). Já o segundo é denominado Operador Tangente (OT), pois considera uma rigidez tangente à resposta estrutural não linear, o que resulta em melhores taxas de convergência em comparação ao OC. Como aplicações das formulações, estruturas compostas teóricas foram analisadas em regime elástico. Além disso, testes experimentais de fratura em espécimes de concreto e madeira também foram simulados. A comparação dos resultados com as referências demonstrou que, as formulações foram efetivas e precisas para avaliar respostas mecânicas de estruturas, seja em regime elástico linear ou nos testes de fratura quase frágil.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Estruturas Compostas, Técnica de Multi-regiões, Meios Anisotrópicos, Modelo Coesivo de Fratura, Operador Tangente.

ABSTRACT

CORDEIRO, S. G. F. **Boundary Element Method formulations applied to elastic analysis and cohesive fracture of plane composed structures**. 2015. 266 p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2015.

The present work deals the development of numerical formulations to evaluate the mechanical behaviour of plane composed structures, in the context of linear elasticity and nonlinear fracture mechanics. The proposed formulations are based on the Boundary Element Method (BEM), through its classical singular and hyper singular integral equations. The multi-region technique is adopted to couple the interfaces of non-homogeneous multiphase bodies. The BEM is a robust and accurate numerical technique to analyse fracture phenomena in solids. This numerical method presents a mesh dimensionality reduction, which makes easier the modelling of cracks surfaces. Besides, this dimensionality reduction also makes the treatment of interfaces in composed structures a less complex task. Considering the use of Kelvin fundamental solutions at the integrals equations, isotropic materials can be represent as parts of the composed structures. On the other hand, using Cruse & Swedlow fundamental solution it is also possible to deal with general anisotropic materials. At the composed structures, cracks can propagate along the materials interfaces and the cohesive crack model is responsible for the nonlinear structural behaviour of the quasi-brittle failures. The nonlinear system of equations at the fracture analyses is solved using two different algorithms for iterative resolution. The first always takes into account the structure elastic strength and, hence it is called Constant Operator (CO). On the other hand, the second is denominated Tangent Operator (TO) due to the fact that it considers strengths at the tangent directions of the nonlinear structural response. Therefore, convergence rates are faster when compared with the CO. As applications, composed structures were analysed with the developed formulations in linear elastic range. In addition, experimental fracture testes performed in concrete and wood specimens were also analysed. The confront of obtained results with the reference ones show that, the formulation was effective and accurate to evaluate the mechanical responses of composed structures in linear elastic range, and also to perform nonlinear quasi-brittle fracture tests.

Keywords: Boundary Element Method, Composed Structures, Multi-region Technique, Anisotropic Medias, Cohesive Fracture Model, Tangent Operator.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	21
1.2	OBJETIVOS DO ESTUDO	29
1.3	REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA.....	30
1.3.1	Mecânica da Fratura	30
1.3.2	Método dos Elementos de contorno	34
1.3.3	Aplicações do MEC e do MEF à fratura dos materiais	37
1.4	ESTRUTURA DO TEXTO	41
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE	45
2.1	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	45
2.2	RELAÇÃO DESLOCAMENTO DEFORMAÇÃO	47
2.3	LEIS CONSTITUTIVAS ELÁSTICAS LINEARES DOS MATERIAIS.....	49
2.3.1	Materiais com anisotropia geral	53
2.3.2	Materiais com simetria elástica em um plano	54
2.3.3	Materiais com simetria elástica em três planos (ortotrópico).....	54
2.3.4	Materiais transversalmente isotrópicos	55
2.3.5	Materiais isotrópicos	55
2.4	EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA ELÁSTICO	56
2.5	ESTADOS PLANOS	57
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MEIOS ISOTRÓPICOS	61
3.1	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA ELÁSTICO ISOTRÓPICO	62
3.2	FORMULAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO SINGULAR E HIPER SINGULAR	65
3.3	EQUAÇÃO INTEGRAL SINGULAR ESCRITAS PARA PONTOS NO CONTORNO	69
3.4	EQUAÇÃO INTEGRAL HIPER SINGULAR ESCRITAS PARA PONTOS NO CONTORNO.....	72

3.5	FORMULAÇÃO SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	75
3.6	FORMULAÇÃO HIPER SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	81
3.7	MÉTODO DE SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE	82
3.8	ELEMENTOS DESCONTÍNUOS.....	92
3.9	TÉCNICA DE MULTI-REGIÕES	94
3.10	GRANDEZAS INTERNAS	96
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MEIOS ANISOTRÓPICOS.....	99
4.1	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA ELÁSTICO ANISOTRÓPICO.....	99
4.2	FORMULAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO SINGULAR E HIPER SINGULAR.....	108
4.3	EQUAÇÃO INTEGRAL SINGULAR ESCRITA PARA PONTOS NO CONTORNO.....	111
4.4	EQUAÇÃO INTEGRAL HIPER SINGULAR ESCRITA PARA PONTOS NO CONTORNO.....	115
4.5	FORMULAÇÕES SINGULAR E HIPER SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	116
4.6	MÉTODO DE SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE	117
5	MECÂNICA DA FRATURA	125
5.1	MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR	127
5.2	MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR ANISOTRÓPICA	134
5.3	MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR.....	135
5.4	MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO.....	142
5.5	MECÂNICA DA FRATURA APLICADA À MADEIRA	150
6	FRATURA COESIVA NA INTERFACE DE MULTI-REGIÕES.....	161
6.1	MODELAGEM DAS INTERFACES COESIVAS.....	163
6.2	ALGORITMO NÃO-LINEAR COM OPERADOR CONSTANTE.....	169
6.3	ALGORITMO NÃO-LINEAR COM OPERADOR TANGENTE.....	172
6.4	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DOS ALGORITIMOS.....	178

7	APLICAÇÕES EM REGIME ELÁSTICO	179
7.1	CHAPA NÃO HOMOGÊNEA	179
7.2	ANEL ANISOTRÓPICO.....	183
7.3	VIGA NÃO HOMOGÊNEA ANISOTRÓPICA	187
7.4	CHAPA ANISOTRÓPICA COM INCLUSÕES RÍGIDAS	191
7.5	OBTENÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I	197
8	TESTES DE FRATURA COESIVA.....	201
8.1	CHAPA HOMOGÊNEA TRACIONADA	202
8.2	CHAPA NÃO HOMOGÊNEA TRACIONADA.....	204
8.3	VIGA DE CONCRETO SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS	206
8.4	VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A ENSAIO DE CISALHAMENTO: ENTALHE ÚNICO.....	213
8.5	VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A ENSAIO DE CISALHAMENTO: ENTALHE DUPLO	220
8.6	COMPACT TENSION TEST EM CHAPA DE MADEIRA (PINUS SILVESTRIS)	225
8.7	VIGA COMPOSTA DE PEÇAS DE MADEIRA (NORWAY SPRUCE) SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS	230
8.8	DESCOLAMENTO DE PLACAS ESTRUTURAIS.....	237
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	241
9.1	CONSIDERAÇÕES SOBRE AS APLICAÇÕES ELÁSTICAS	241
9.2	CONSIDERAÇÕES SOBRE OS TESTES DE FRATURA	242
9.3	SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	243
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	245
	ANEXO.....	259
	CHAPA ANISOTRÓPICA SOB TRAÇÃO UNIFORME	259
	CHAPA ANISOTRÓPICA SOB CISALHAMENTO PURO	261
	VIGA ORTOTRÓPICA SOB FLEXÃO PURA	264

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A humanidade, desde tempos antigos, transforma recursos disponíveis a sua volta de modo a facilitar suas necessidades. Dessa maneira, o ser humano tem produzido moradias, ferramentas auxiliares, meios de locomoção, computadores e máquinas modernas em geral. Com a evolução ao longo dos anos dos processos de concepção das manufaturas, os conhecimentos empírico/científico adquiridos pelo homem na transformação dos recursos deu origem à ciência, hoje conhecida como, engenharia. Em linhas gerais, a engenharia aplica esses conhecimentos na produção de manufaturas.

Diversos foram os motivos que levaram o ser humano a questionar e investigar o comportamento dos materiais. Entre esses, podem ser citados falhas estruturais que ocasionaram perdas humanas e materiais, a otimização de formas estruturais visando à economia dos recursos e a adequabilidade do comportamento de diferentes materiais a diferentes utilizações da humanidade. Nesse contexto surge a ciência/engenharia de materiais e também a engenharia de estruturas.

A engenharia estrutural tem como um de seus principais objetivos a prevenção de falhas em estruturas que possam ocasionar perdas humanas e materiais. Assim, por meio da avaliação do comportamento mecânico das estruturas e de sua interação com o meio externo, modelos matemáticos foram desenvolvidos baseados em leis físicas do comportamento de sólidos e fluidos. Esses modelos são, de maneira geral, expressos em forma de equações diferenciais e integrais e constituem parte de uma ciência conhecida como mecânica do contínuo. Podem ser citadas como derivações dessa ampla área de conhecimento, a mecânica dos fluidos, a mecânica dos sólidos, a teoria da elasticidade linear e a teoria da elasticidade não linear.

Os modelos matemáticos são aplicados na mecânica dos sólidos com o objetivo de determinar as incógnitas de seus problemas, que são geralmente os campos de deslocamentos, tensões e deformações dentro do domínio de um corpo, submetido a um conjunto de condições de contorno. De acordo com os conceitos da teoria da elasticidade, esses campos

estão relacionados entre si pelas equações de equilíbrio, relações de compatibilidade entre os campos de deslocamento e deformação e lei constitutiva do material, a qual relaciona as deformações às tensões. Esse conjunto de equações, somado às condições prescritas no contorno do corpo, dão origem a um problema fundamental da mecânica dos sólidos, o problema de valor de contorno (PVC).

O equacionamento pode abranger comportamentos lineares, não lineares, modais, transientes, isotrópicos, anisotrópicos (entre outros) de estruturas constituídas por materiais elásticos, plásticos, viscosos, dúcteis, frágeis, quase frágeis (entre outros) submetidas a carregamentos dinâmicos e estáticos. No entanto, sempre serão assumidas simplificações em relação ao problema real, cabendo ao engenheiro conhecer suas limitações. As simplificações são feitas de maneira a possibilitar a obtenção das incógnitas do problema. Por fim, a solução pode ser determinada de maneira analítica ou numérica. Nem sempre é fácil a obtenção de uma solução analítica dos modelos matemáticos criados para representar os problemas. Portanto, o número de problemas que podem ser resolvidos analiticamente é muito limitado, uma vez que a geometria, as condições de contorno e a resposta do material nos problemas podem possuir considerável complexidade. Portanto, para muitos problemas onde a solução analítica não é conhecida, é possível obter boas aproximações para a resposta via aplicação de métodos numéricos.

Apesar da evolução das teorias sobre o comportamento dos sólidos e fluidos, falhas estruturais de máquinas, equipamentos e estruturas em geral ainda ocorrem. Entre essas falhas podem ser destacados colapsos de pontes, falhas fatais em aeronaves e navios, fissuras em usinas hidroelétricas e nucleares, falhas em plataformas submersas e muitas outras que resultaram em perdas humanas e materiais. Um fator em comum em muitos acidentes foi a propagação de fissuras no material, a qual acarretava a falha da estrutura por fraturamento. A fratura dos materiais é um fenômeno físico que pode ocasionar colapsos estruturais. A depender do tipo de fraturamento, os materiais aplicados na engenharia são geralmente classificados em três grandes grupos: Nos materiais frágeis, como por exemplo, o vidro ou o ferro fundido, a fratura ocorre de maneira instável com perda total de rigidez praticamente instantânea. Já nos materiais dúcteis como os metais, grandes deformações plásticas são verificadas antes do colapso por fraturamento. Por fim, os materiais denominados quase frágeis apresentam uma preferência por perder energia via fraturamento, ao invés de sofrerem deformações irreversíveis como os metais. Porém, devido a alguns mecanismos resistentes presentes nesses últimos materiais, a fratura pode ocorrer estável ou instavelmente sendo a

perda de rigidez da estrutura menos catastrófica em comparação aos materiais frágeis. Alguns materiais que se enquadram no terceiro grupo dessa classificação são concretos e outros materiais cimentícios, rochas, madeiras e também alguns polímeros sob a ação de determinados agentes químicos.

Entre as falhas de estruturas ocorridas por fraturamento, podem ser destacados alguns graves acidentes envolvendo barragens de concreto, os quais causaram a morte de um significativo número de pessoas (SOUZA, 2001). Em 1889, a ruína catastrófica da barragem de concreto “South Fork” em Johnstown na Pennsylvania, Estados Unidos, causou a morte 2,2 mil de pessoas (pt.wikipedia.org/wiki/Inundação_de_Johnstown).

No dia 12 de março de 1928, a barragem de Saint Francis, a 60 quilômetros de Los Angeles, não aguentou a pressão do lago artificial e rompeu apenas dois anos depois de ter sido inaugurada. Cerca de 450 pessoas morreram por causa da enxurrada (<http://super.abril.com.br/tecnologia/barragem-st-francis-686408.shtml>).

A barragem Malpasset na França chegou ao colapso matando cerca de 500 pessoas, semanas depois de terem sido noticiadas as primeiras fissuras na estrutura. A Figura 1.1 traz uma imagem da barragem ruída.



Figura 1.1 Barragem Malpasset ruída em 1959, França

(fonte: http://www.simscience.org/cracks/advanced/malpasset_current.html)

Além desses acidentes com barragens, pode também ser apontado o caso dos 2500 navios “Liberty”, produzidos para a II guerra mundial, em que 145 partiram-se ao meio ainda nas docas e 700 apresentaram danos que impossibilitaram sua utilização.

O navio Schenectady, por exemplo, partiu ao meio em Janeiro de 1943 devido ao crescimento de fissuras em seu casco. A Figura 1.2 a seguir ilustra o acidente.

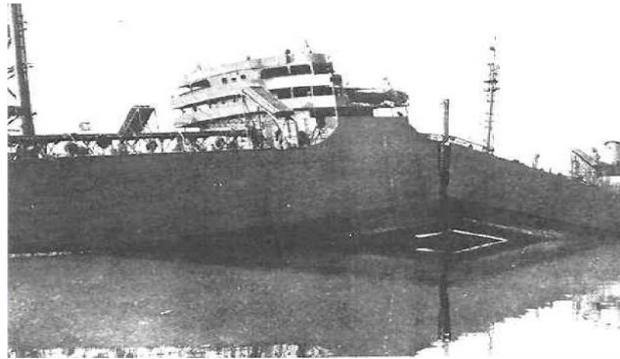


Figura 1.2 Navio Schenectady fraturado ao meio em 1943

(fonte: <http://inspecaoequipto.blogspot.com.br/2013/11/caso-050-fratura-fragil-dos-navios.html>)

Esses e muitos outros acidentes ocorreram em estruturas cujo nível de solicitação, calculado à luz da teoria da elasticidade, estava muito abaixo da resistência mecânica do material, despertando assim a curiosidade de diversos pesquisadores. Muitas dessas falhas ocorreram devido à falta de conhecimento dos projetistas em relação a um importante fenômeno, a concentração de tensão. Tal fenômeno surge em regiões de descontinuidade da estrutura, como em furos e entalhes. As fissuras em corpos passaram então a ser entendidas como descontinuidades de material. Nesse contexto, em paralelo a esses acidentes, se desenvolveu uma nova teoria muito importante para a engenharia de estruturas, a mecânica da fratura (MF). Devido ao fenômeno de concentração de tensões nas proximidades das pontas de fissura, sempre existe nessa região uma porção de material degradado denominada na literatura de Zona de Processos Inelásticos (ZPI). Nessas regiões, perdas significativas de energia podem ocorrer ao longo do fraturamento, ocasionando respostas não lineares nas estruturas.

Os primeiros conceitos da MF se iniciaram analisando falhas em materiais frágeis para os quais, em estruturas de dimensões recorrentes na engenharia, a ZPI é suficientemente pequena para que possa ser considerada desprezível. Nesse caso, a fratura pode ser avaliada como elástica linear. Já no caso de outros tipos de materiais, como os dúcteis ou os quase frágeis, a zona degradada não é desprezível em relação às dimensões das fissuras e das peças estruturais. Portanto, nessas circunstâncias, mecanismos materiais resistentes começam a atuar na região de degradação mecânica, ocasionando significativas perdas de energia ao longo do fraturamento. Tais fraturas são denominadas na literatura fraturas não lineares.

Apesar do avanço da MF, acidentes envolvendo fratura de materiais ainda continuam a ocorrer nos dias atuais, justificando assim o desenvolvimento de ferramentas para auxiliar engenheiros em projetos estruturais. Entre tais acidentes, estão os colapsos de edifícios de concreto armado ocorridos no Brasil na década de 90 e que ocasionaram um considerável número de perdas humanas (SOUZA, 2001):

- Desabamento de edifício residencial em 1990 na Praia do Gonzaga, em Santos, Estado de São Paulo;
- Ruína do Edifício Atlântico, em Janeiro de 1995, na cidade de Guaratuba, Litoral do Paraná, ocasionando a morte de 28 pessoas;
- Desabamento parcial do Edifício Palace II, com 22 pavimentos, na cidade do Rio de Janeiro, em Fevereiro de 1998, ocasionando a morte de 8 pessoas e desalojamento de 130 famílias (Figura 1.3);



Figura 1.3 Desabamento do edifício Palace II em 1998

(<http://www.palace2.org.br/desaba05.html> apud, SOUZA (2001))

Outro recente acidente que pode ser citado, foi a fratura em estruturas de concreto da usina nuclear de Fukushima Daiichi, nas proximidades dos reatores da mesma. A usina sofreu sob a ação de um terremoto de magnitude 9 seguido por um tsunami, o qual atingiu seus reatores em março de 2011, resultando na contaminação radioativa do mar na costa leste japonesa e no deslocamento de 270 mil pessoas.

Na Figura 1.4 é mostrado uma macro fissura próxima a um dos reatores da usina (http://pt.wikipedia.org/wiki/acidente_nuclear_de_Fukushima_I)



Figura 1.4 Macro fissura próxima a um reator da usina nuclear de Fukushima no Japão em 2011
(fonte: <http://www.ibtimes.co.uk/fukushima-nuclear-crisis-japan-faces-power-shortages-175089>)

Esses e diversos outros acidentes envolvendo propagação de fissuras na história da humanidade, comprovam a importância de se estudar tal modo de falha. No entanto, os problemas relacionados à MF são complexos o suficiente para inviabilizar o tratamento analítico. No caso de chapas com trinca centrada submetidas a carregamentos específicos, soluções analíticas foram determinadas utilizando funções de tensão de origem complexa por WESTERGAARD (1939). Porém, em estruturas reais constituídas de distintos materiais com múltiplas fissuras e geometrias complexas, a abordagem analítica se torna inviável. Além disso, outras dificuldades podem aparecer nas análises. Respostas mecânicas anisotrópicas, por exemplo, são muitas vezes observadas em materiais que constituem diversos problemas atuais de engenharia. A substituição dos materiais clássicos de engenharia por materiais mais eficientes como os polímeros, por exemplo, tem crescido de forma significativa nos últimos anos. Segundo SANCHES (2006) e DAMASCENO (2010), a fratura frágil pode ocorrer em estruturas poliméricas em serviço causando significativas implicações na indústria e na economia. Principalmente em polímeros amorfos, tal falha é verificada quando a ação de elevadas tensões mecânicas ocorre conjuntamente com a ação química de determinados agentes em contato com a peça. A Figura 1.5 apresenta como o agente químico em contato com a peça pode alterar a resposta mecânica do Poli Tereftalato de Etileno (PET) de uma falha dúctil para uma fratura frágil.

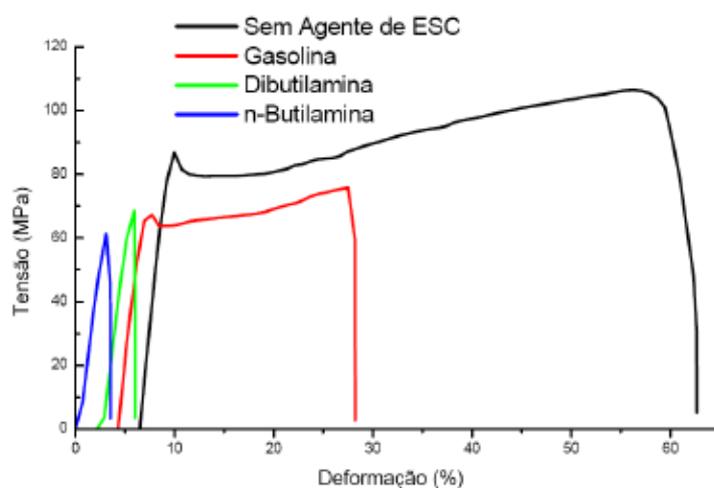


Figura 1.5 Influência de agentes agressivos na fratura do PET (SANCHES, 2006).

Alguns dos mecanismos de resistência à fratura verificados em materiais clássicos da engenharia, como a madeira, também são verificados nos polímeros utilizados na indústria. Por exemplo, na Figura 1.6 são ilustradas fibras microscópicas transversais à frente de uma fissura em um material polimérico, mecanismo esse que também é comumente verificado na fratura em madeiras.

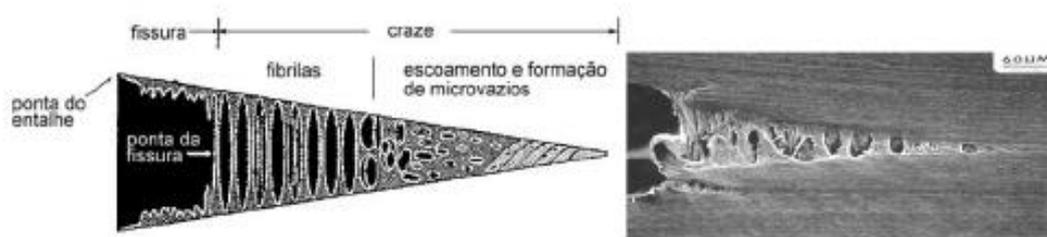


Figura 1.6 Imagens de fratura em polímeros (WRIGHT, 1996)

No presente trabalho pretende-se desenvolver uma ferramenta computacional para avaliar estruturas compostas em regime elástico e também a fratura não linear de peças estruturais. Para isso, um modelo não linear de fratura dos materiais quase frágeis foi acoplado à técnica de multi-regiões do MEC, no intuito de reproduzir fraturas nas interfaces de problemas compostos. Algumas aplicações em regime elástico de estruturas compostas anisotrópicas bem como aplicações de fratura em peças de concreto e madeira são apresentadas nos capítulos finais para validar o trabalho.

Devido à complexidade das análises mecânicas de estruturas reais, a abordagem mais conveniente envolve a aplicação de algum método numérico. Os métodos numéricos podem

ser divididos de forma ampla em dois grandes grupos, métodos de domínio e métodos de contorno. No primeiro desses, são admitidas satisfeitas as condições de contorno do problema e as aproximações se dão no domínio. Podem ser citados como exemplos desse grupo o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE). Em contrapartida, no segundo grupo admite-se que a equação que governa o problema é obedecida no domínio, e as aproximações inerentes ao método são feitas no contorno. Nesse grupo se enquadra o método adotado nesse trabalho, Método dos Elementos de Contorno (MEC), o qual possui grande aplicabilidade também em outras áreas da física.

O MEC tem se mostrado uma técnica numérica robusta e precisa para a análise de problemas da mecânica da fratura, mecânica do contato e análise de corpos multifásicos. Devido ao fato de ser um método de contorno, o MEC apresenta uma redução na dimensionalidade da malha, ou seja, a discretização é feita apenas no contorno dos problemas. Assim, a análise de problemas contendo fissuras, superfícies em contato ou ainda interfaces entre distintos materiais torna-se uma tarefa menos complexa. Isso porque as superfícies a serem analisadas nesses problemas possuem uma dimensão a menos em relação ao domínio e, portanto podem ser discretizadas por malhas de contorno. As vantagens da redução de dimensões são verificadas também em problemas de propagação de fissuras internas uma vez que o remalhamento necessário fica restrito apenas às novas superfícies de trinca que venham a aparecer. Além disso, devido ao fato da aproximação se encontrar apenas no contorno, o MEC é uma ferramenta muito precisa na determinação de problemas cujas grandezas de interesse possuam elevados gradientes. Situações desse tipo são verificadas em problemas estruturais como no caso da concentração de tensões nas extremidades de fissuras, ou ainda no caso de bruscas variações de tensões e deformações em regiões próximas a interfaces de materiais com consideráveis diferenças de rigidez. Nas análises apresentadas no presente trabalho, os materiais que constituem as estruturas compostas podem ser isotrópicos ou anisotrópicos a depender da solução fundamental adotada na formulação integral do MEC.

Devido a suas características, o MEC tem sido utilizado na literatura como uma ferramenta para a análise de diversos problemas de engenharia. Apesar de sua ampla aplicabilidade, o presente trabalho será mais focado especificamente na análise de estruturas compostas em regime elastostático e também no fraturamento quase frágil de peças estruturais.

1.2 OBJETIVOS DO ESTUDO

O objetivo principal do presente estudo foi desenvolver formulações do MEC para tratar estruturas compostas em regime elástico linear ou submetidas à fratura não linear. Para as análises de fratura, o modelo coesivo foi acoplado à técnica de multi-regiões introduzindo comportamento não linear nos problemas. O sistema de equações não lineares foi solucionado usando o clássico Newton-Raphson denominado Operador Constante (OC) ou ainda via o esquema Operador Tangente (OT) o qual converge mais rapidamente para a solução não linear em comparação ao primeiro. Nas formulações integrais do MEC, primeiramente foi utilizada a solução fundamental de Kelvin para representar o comportamento de materiais isotrópicos. Posteriormente, foi também incorporada às formulações, a solução fundamental de Cruse & Swedlow para lidar com regiões anisotrópicas. Todas as formulações do trabalho foram programadas em linguagem Fortran 90 sendo que, para alcançar o objetivo final, o trabalho foi dividido em etapas específicas conforme a seguir apresentado.

- Revisão bibliográfica;
- Formulação singular do MEC para meios isotrópicos;
- Formulação hiper singular do MEC para meios isotrópicos;
- Técnica de sub-regiões para modelar domínios não homogêneos;
- Acoplamento do modelo coesivo de fratura nas interfaces via OC;
- Formulação singular do MEC para meios anisotrópicos;
- Formulação hiper singular do MEC para meios anisotrópicos;
- Implementação do OT para solucionar o sistema não linear;
- Aplicações em regime elástico linear;
- Aplicações de fratura coesiva;
- Comparativo de eficiência entre o OC e o OT nas análises de fratura.

No trabalho, todas essas etapas foram finalizadas e, a partir disso, foi possível apresentar uma discussão dos resultados obtidos juntamente com conclusões sobre aplicações e limitações da presente formulação desenvolvida para problemas de engenharia.

1.3 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Na revisão da bibliografia são abordados trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento das áreas de conhecimento relacionadas à presente pesquisa. Por uma questão de organização, o texto da revisão foi segmentado nos seguintes tópicos: Mecânica da fratura, Método dos Elementos de Contorno e Aplicações do MEC e do MEF à fratura dos materiais. Em cada um desses itens são abordados, cronologicamente, em um aspecto histórico, os trabalhos que subsequentemente foram ampliando essas áreas do conhecimento.

1.3.1 Mecânica da Fratura

Conforme apresentado na introdução, o desenvolvimento da MF se deu em paralelo a falhas estruturais ocasionadas por propagação de fissuras, as quais não podiam ser explicadas pela teoria da elasticidade (ALLEN; BOOTH, JUTLA, 1988). A evolução dessa ciência ocorreu, em grande parte, devido a diversos pesquisadores cuja contribuição, através de importantes trabalhos, levou à melhor compreensão do fenômeno da fratura em sólidos.

Em 1898, o engenheiro alemão Kirsch resolveu analiticamente o problema de uma chapa infinita tracionada com um furo circular em seu centro. Ele então observou que havia uma concentração de tensão na região próxima ao furo, onde a intensidade chegou até a valores três vezes maiores do que a tensão aplicada. INGLIS (1913) resolveu um problema semelhante de elasticidade. Trata-se de uma chapa infinita tracionada com um furo elíptico em seu centro. Novamente verificou-se o efeito de concentrações de tensões, porém ainda mais significativo do que no caso estudado por Kirsch. Dessa maneira, percebeu-se que a medida que um dos raios da elipse se aproxima de zero e a geometria do furo se aproxima da de uma fissura, o estado de tensão a sua frente tende a ser singular. A partir desses pioneiros trabalhos, o fenômeno da concentração de tensões começou a ser estudado por diversos pesquisadores (SANFORD, 2003).

WESTERGAARD (1939) resolveu analiticamente o problema de um corpo infinito sob tensão contendo uma fissura central, por meio de conceitos da teoria da elasticidade. Para isso, o autor fez uso de funções de tensão de origem complexa, as quais foram denominadas funções de tensão de Westergaard. No entanto, o equacionamento resulta em tensões singulares na extremidade da fissura, independentemente da intensidade finita de tensão aplicada. Portanto, a análise da previsão de falha por fraturamento resultava inconsistente.

Em 1950 a MF foi apresentada como uma disciplina pelo engenheiro George Irwin, que trabalhava no *Naval Research Laboratory* (SANFORD, 2003). As primeiras ideias foram desenvolvidas para materiais frágeis como o vidro e alguns tipos de metais. Verificou-se que em tais materiais, as dimensões da ZPI são consideravelmente pequenas em relação às dimensões das estruturas analisadas. Portanto, a partir dos estudos desenvolveram-se alguns dos principais conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) (SURENDRA et al., 1995). Uma das ideias básicas da MFEL é a de que, próximo a qualquer trinca de um corpo constituído por qualquer material, a distribuição de tensões terá o comportamento descrito por:

$$\sigma(r) = C_F r^{-1/2} \quad (1.1)$$

Sendo r a distância entre o ponto de análise e a ponta da trinca e C_F uma constante que depende do comprimento da fissura, geometria estrutural e carregamentos. Tal conceito novamente esbarra na inconsistência de tensões singulares já apontada anteriormente por Westergaard, ou seja, $\sigma \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$. Portanto, para resolver o impasse da previsão de falha por propagação da fissura, o problema foi tratado através de uma abordagem energética. Nesse contexto, IRWIN (1957) propôs o emprego de uma grandeza denominada fator de intensidade de tensão, K , a qual permite avaliar o processo de evolução das fissuras, prevendo critérios para o fraturamento que não sejam baseados em estados de tensão. No entanto, a obtenção dos fatores de intensidade de tensão dependia de um custoso balanço energético envolvendo toda a estrutura.

RICE (1968) introduziu a “Integral J ”, uma formulação capaz de quantificar o fluxo de energia em um contorno fechado na região próxima à ponta da fissura. Por meio da “integral J ”, os fatores de intensidade de tensão podem ser determinados analisando-se apenas o campo de tensões e deslocamentos nas proximidades da fissura. Portanto, tal integral viabilizou as simulações de fraturamento em materiais frágeis para o caso de pequenas dimensões da ZPI.

Posteriormente, os conceitos da MF se expandiram para a análise de corpos dúcteis e também quase frágeis. Em tais materiais, a zona de dissipação de energia, ou ZPI, não é desprezível. Nos materiais dúcteis, a dissipação de energia ocorre principalmente devido às deformações plásticas, as quais são verificadas a frente da ponta da fissura. O colapso por fraturamento nesse caso começa a ocorrer quando não houver mais regiões de material disponíveis para se deformar plasticamente. Já nos ditos corpos quase frágeis, a energia

dissipada na ZPI não decorre das deformações plásticas, mas sim devido a outros mecanismos resistentes. Em concretos e rochas, esses mecanismos de dissipação estão relacionados à coalescência de micro fissuras, intertravamento de partículas agregadas e fricção das faces de trincas (SURENDRA, 1995). Já em madeiras, alguns polímeros e compósitos fibrosos, tais mecanismos estão relacionados principalmente à conexão de fibras cruzantes à trinca (SMITH, LANDIS e GONG, 2003).

Em alguns casos de estruturas com grandes dimensões constituídas de materiais quase frágeis, como barragens de concreto por exemplo, os conceitos da MFEL podem ser aplicados uma vez que a dimensão da ZPI começa a se tornar desprezível em comparação às dimensões da estrutura (SOUZA, 2001). Porém, em estruturas laboratoriais e estruturas civis usuais, os conceitos da MFEL não se aplicam no caso desses materiais, visto que os fenômenos não lineares na ZPI não podem ser desprezados na análise. Durante o fenômeno da fratura quase frágil, a concentração de tensão nas partículas a frente da fissura, e também a presença de micro descontinuidades do material, provocam o fenômeno da localização de deformações o acarretando a perda progressiva de rigidez. Durante o fraturamento, a energia dissipada na ZPI é empregada na degradação mecânica do material e, portanto, à frente da extremidade da fissura, sempre existe uma região de rigidez variável e inferior à do restante do corpo.

Nos processos de fraturamento, a taxa de energia total liberada devido aos carregamentos aplicados no corpo é composta por duas parcelas. Uma é referente à energia consumida na criação de novas superfícies da fissura. Já a outra corresponde à energia necessária à fratura, ou seja, a energia para superar a resistência residual do material na ZPI, permitindo a propagação da fissura. A partir desse balanço energético é possível obter diferentes modelos para a previsão do processo de fraturamento realizando aproximações sobre os mecanismos de dissipação energética. Os modelos que são aplicáveis a materiais quase frágeis podem ser classificados como de fissura fictícia ou de fissura elástica equivalente. No primeiro desses grupos é assumido que a energia necessária para a criação de novas superfícies é desprezível quando comparada à energia necessária para separá-las. Já no segundo, é considerada apenas a energia necessária para a criação das superfícies da fissura e a energia necessária à fratura é desprezada. Ambos os tipos de modelo são capazes de reproduzir resultados experimentais de fraturas em materiais quase frágeis desde que as propriedades de fratura sejam adequadamente determinadas (PLANAS; ELICES, 1990).

Na presente pesquisa, optou-se por descrever o fenômeno da fratura através de um modelo de fissuras fictícias. Nesses modelos, a ZPI à frente da ponta da trinca é substituída pela fissura fictícia onde tensões coesivas são responsáveis pela representação da rigidez residual nessa região degradada. Um dos modelos de fissura fictícia mais utilizados na literatura é o modelo coesivo desenvolvido por HILLERBORG et al. (1976) para análise de fratura em concreto e outros materiais quase frágeis. Tal modelo tem sido utilizado com sucesso em conjunto com formulações numéricas em diversos trabalhos da literatura para representar o processo de fratura não linear dos materiais (SALEH & ALIABADI, 1995; LI et al., 1998; BARPI & VALENTE, 1998; ALIABADI & SALEH, 2002; ELICES et al., 2002; MAI, 2002; CARPINTERI et al., 2003; PLANAS et al., 2003; TVERGAARD, 2003; PAZENCA, ZITO e TERRAVECCHIA, 2008; REYES et al., 2009; FERREIRA, VENTURINI e HILD, 2011; e GÁLVEZ et al., 2013). Portanto, no presente trabalho optou-se por incorporar o modelo de Hillerborg na formulação do MEC para reproduzir resultados de teste de fratura em peças de concreto e madeira.

Modelos com tensões coesivas foram apresentados pela primeira vez por DUGDALE (1960) para a análise de propagação de fissuras em materiais dúcteis. No trabalho, a zona plástica foi representada por uma estreita fissura fictícia posicionada à frente da ponta da trinca real. Nesse caso, a fissura fictícia está sujeita a uma tensão coesiva constante de valor igual à tensão de escoamento do material.

Para a fratura em materiais quase frágeis, a primeira abordagem com tensões coesivas foi proposta por BARENBLATT (1962). Posteriormente esses modelos foram bastante detalhados e estudados numérico e experimentalmente por HILLERBORG et al. (1976) para a aplicação no concreto. Os autores propuseram o amolecimento do material na ZPI através de tensões coesivas variáveis em função da abertura da trinca dando origem assim ao modelo coesivo previamente mencionado.

Posteriormente, outros autores argumentaram e aplicaram tal modelo para a fratura não linear em diferentes materiais, como por exemplo, concretos, plásticos reforçados com fibras, rochas e materiais geológicos, peças de madeiras, peças de alvenaria, interfaces de bi materiais cimentícios e materiais policristalinos (HILLERBORG, 1991; BOSTROM, 1992; CERVENKA et al., 1997; GUINEA et al., 2000; DOURADO et al., 2008; BENEDETTI & ALIABADI, 2013; LISJAK et al., 2014). Tal adequabilidade à fratura de distintos materiais

foi um fator determinante para a escolha do modelo a ser utilizado na fratura das aplicações a serem apresentadas nesse trabalho.

1.3.2 Método dos Elementos de contorno

O MEC é um dos mais conhecidos métodos numéricos para a resolução de problemas governados por equações diferenciais. Esse pode ser uma alternativa em relação a outros métodos numéricos como o MEF ou MDF. O método possui uma rica formulação matemática permitindo a resolução de diversos PVC na mecânica dos sólidos. As origens da implementação numérica de equações integrais de contorno, as quais são a base do MEC, são observadas desde o início dos anos 1960, quando os computadores começaram a se tornar viáveis para tais análises. Dessa data em diante tem se observado crescente o número de artigos publicados a respeito do tema. A seguir será abordado um pouco sobre o contexto histórico do surgimento do MEC.

Sua formulação é baseada na transformação de equações diferenciais que governam problemas físicos em equações integrais escritas sobre o contorno do domínio de análise. Para isso, faz-se necessário conhecer uma solução fundamental para o tipo de problema a ser analisado.

Em problemas elastostáticos, a solução fundamental é a solução de um problema elástico de domínio infinito constituído pelo material de interesse nas análises e solicitado por uma força concentrada agindo em determinado ponto fonte. De acordo com LOVE (1944), para materiais isotrópicos esta solução foi desenvolvida por Sir William Thomson (Lorde Kelvin) em 1848 e posteriormente ficou conhecida como solução fundamental de Kelvin.

Dessa maneira, as equações diferenciais que governam o problema físico podem ser ponderadas pela solução fundamental e integradas em todo o domínio. Através de manipulações matemáticas convenientes utilizando integração por partes e o teorema da divergência de Gauss ou teorema de Green para o caso bidimensional, é possível transformar as equações diferenciais ponderadas em equações integrais escritas sobre o contorno.

Nesse contexto, pode ser destacado o trabalho de ABEL (1823) que visando solucionar o problema de um “pêndulo isócrona” foi o primeiro a deduzir uma equação integral. Depois de Abel, muitos estudos buscaram solucionar problemas físicos por meio de equações integrais. Dentre esses se destaca o estudo de FREDHOLM (1903) o qual

desenvolveu as condições para determinação da existência e unicidade das soluções de equações integrais, através dos teoremas de Fredholm.

Os primeiros problemas físicos formulados por equações integrais foram solucionados via métodos indiretos. Nessa abordagem, as incógnitas são variáveis fictícias associadas ao contorno, obtidas por meio de condições de contorno prescritas em um determinado número de pontos. As variáveis fictícias não possuem significado físico, sendo essas utilizadas como auxílio para obter as grandezas físicas de interesse. Ainda no âmbito dos métodos de resolução das equações integrais, outros importantes trabalhos publicados por autores russos fizeram com que o método das equações integrais se tornasse mais conhecido na Europa. Destacam-se dentre esses autores os trabalhos de MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957), SMIRNOV (1964) e KUPRADZE (1965) os quais foram predecessores do trabalho de KELLOG (1929), que foi o pioneiro na utilização dessas equações integrais para resolver problemas governados pela equação fundamental de Laplace. Em seu trabalho, KUPRADZE (1965) propôs uma formulação por meio de equações integrais para determinar uma aproximação para deslocamentos em corpos sob regime elástico linear.

RIZZO (1967) foi o primeiro a resolver as equações integrais dos problemas de elasticidade bidimensionais de maneira direta. Em seu trabalho, as variáveis resultantes da solução eram os deslocamentos e as forças de superfície sendo que o contorno do problema foi discretizado por elementos de geometria reta. Vale também destacar que RIZZO e SHIPPY (1968) sugeriram discretizar domínios em sub-regiões para tratar problemas não homogêneos. A técnica consiste basicamente em impor condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio das tensões na interface das sub-regiões forçando assim a continuidade das regiões. A utilização das sub-regiões na discretização de problemas de engenharia tem sido adotada em diversos trabalhos da literatura envolvendo diferentes formulações do MEC (RODRIGUES, 1986; PÉREZ & ALIABADI, 2001; LOUKAS et al., 2005; KALLIVOKAS et al., 2005; CRAVO, 2008). Conforme comentando anteriormente, tal técnica será bastante explorada no decorrer do presente trabalho.

Uma maior generalização do método veio com a contribuição do trabalho de LACHAT (1975) que parametrizou as funções de aproximação dos elementos de contorno admitindo para as mesmas variações lineares, quadráticas e cúbicas. Nesse trabalho, Lachat resolveu as integrações do método numericamente através da quadratura de Gauss.

BREBBIA (1978) deduziu a formulação integral dos problemas da elasticidade a partir da técnica dos resíduos ponderados, a qual dá suporte a outras técnicas numéricas. Portanto, a partir desse ponto, o método baseado nas equações integrais de contorno passou a possuir uma raiz comum com outros métodos numéricos, como o MEF e o MDF. Desde então, a combinação do MEC com outras formulações oriundas dos resíduos ponderados começou a ser mais explorada. O acoplamento do MEC a outros métodos numéricos permite um melhor aproveitamento das técnicas uma vez cada região da estrutura pode ser representada pelo método presente as melhores vantagens. Também se deve a Brebbia a nomenclatura “Método dos Elementos de Contorno” (BREBBIA, 1978) que até então vinha sendo conhecido como Método das equações integrais.

Para tratar com o MEC materiais anisotrópicos, CRUSE & SWELDON (1971) propuseram soluções fundamentais elásticas bidimensionais deduzidas a partir do formalismo analítico das funções de tensão de origem complexas de LEKHNITISKII (1963/1968). Posteriormente WILSON & CRUSE (1978) desenvolveram soluções fundamentais anisotrópicas para tratar também problemas elásticos tridimensionais. Assim como a solução fundamental isotrópica de Kelvin, a solução anisotrópica de Cruse & Sweldon também vai ser utilizada nesse trabalho para analisar a resposta mecânica das estruturas.

AZEVEDO (2007) ao invés de recorrer ao formalismo das soluções fundamentais de Cruse & Swedlow apresenta uma formulação alternativa para analisar inclusões anisotrópicas em problemas planos. Para isso, o autor faz uso da solução fundamental de kelvin e também de representações integrais com campo de tensões iniciais. No trabalho, as regiões do domínio com propriedades anisotrópicas são discretizadas em células triangulares. Nessas células, as componentes do tensor de tensões são definidas por meio de uma correção das tensões elásticas do material isotrópico de referência procedida através de uma matriz de penalização.

RICARDELA (1973) apresentou formulações do MEC para análise elastoplástica admitindo-se materiais anisotrópicos a partir da solução fundamental de Swedlow & Cruse. VANALLI (2004) também fez uso dessa solução fundamental e apresentou formulações do MEC e MEF para a análise viscoplástica e viscoelástica de meios anisotrópicos.

A partir da consolidação do método, diversas formulações do MEC foram desenvolvidas para tratar diferentes problemas como os referentes à mecânica dos solos e rochas, interação solo-estrutura, mecânica dos fluidos, plasticidade, viscoplasticidade, meios anisotrópicos, mecânica da fratura, mecânica do contato, problemas dinâmicos entre outros

(CHEN & MEI, 1974; RICADELA 1973; CODA 1990; PAIVA, 1993; KOMATSU, 1995; ALBUQUERQUE, 2001; LEHMANN & ANTES, 2001; MESQUITA, 2002).

1.3.3 Aplicações do MEC e do MEF à fratura dos materiais

Conforme comentado nas considerações iniciais, para o tratamento de problemas mecânicos envolvendo fratura de matérias uma boa abordagem é a utilização de técnicas numéricas como o MEC, por exemplo. Atualmente na literatura pode ser encontrada uma vasta quantidade de trabalhos importantes os quais utilizaram métodos numéricos para o tratamento de problemas de fraturamento.

HILLERBORG et al. (1976) em seu trabalho pioneiro sobre a fratura coesiva utilizou uma formulação numérica baseada no MEF para acoplar o modelo coesivo proposto e simular a fratura em concretos.

Já em relação a aplicação do MEC, um dos primeiros trabalhos que trataram da análise de trincas foi de autoria de CRUSE & VAN BUREN (1971) na década de setenta. No trabalho os autores investigaram o campo de tensões nas proximidades de trincas em modelos elásticos tridimensionais. Pouco depois, CRUSE (1972) trabalhou com modelos bi e tridimensionais que aproximavam a geometria da trinca por uma elipse o que ocasionou significativos erros na análise (LEONEL, 2009).

Posteriormente, BLANDFORD, INGRAFFEA e LIGGET (1981) utilizaram a equação integral singular do MEC em conjunto com a técnica de multi-regiões para o tratamento de trincas. Nesse caso, as fissuras encontram-se ao longo das interfaces das regiões.

CEN & MAIER (1992) utilizaram também a técnica de multi-regiões com formulação singular do MEC, porém acoplando o modelo coesivo nas interfaces para descrever o fenômeno da fratura quase frágil. A modelagem de fissuras com a técnica de multi-regiões apresenta o mesmo problema que o MEF clássico. Em ambos os casos existe a necessidade de se fazer previsões sobre o caminho de propagação e o crescimento das trincas. Uma alternativa para evitar as previsões do caminho de fissuração é a utilização de critérios de propagação como o critério da máxima tensão circunferência ou da máxima taxa de liberação de energia (BROEK, 1986).

No entanto, a utilização de tais critérios nas análises de fratura com o MEF clássico ou a técnica de multi-regiões do MEC faz com que um remalhamento do problema seja necessário à medida que a fissura se propaga (LEONEL, 2009).

O remalhamento de problemas fraturados muitas vezes requer um elevado custo computacional. Portanto, para evitar problemas dessa natureza, formulações alternativas do MEF e do MEC foram propostas na literatura.

Baseados nos conceitos de partição de unidade, BELYTSCHKO & BLACK (1999) apresentaram uma formulação alternativa do MEF para problemas de fratura. A proposta foi minimizar a necessidade de remalhamento com a adição de bases de funções descontínuas para enriquecer as funções de forma clássicas. Posteriormente, MOES et al. (1999) e DOLBONW (1999) aprimoraram o método e o denominaram de Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE). Com o MEFE é possível analisar problemas com propagação de fissuras sem que haja a necessidade do remalhamento. Tal formulação é apresentada detalhadamente no livro MOHAMADI (2008) e em diversos artigos da literatura como em MARINI & PEREGO (2003) que incorporaram à formulação o modelo coesivo de fratura.

Para o MEC, duas principais alternativas em relação à técnica de multi-regiões para tratar a propagação de fissuras sem remalhamento foram encontradas na literatura.

A primeira é mais conhecida das alternativas faz uso em conjunto das equações integrais de deslocamentos (singular) e de forças de superfície (hiper singular). Cada equação é aplicada em cada uma das opostas faces de uma fissura. Assim, mesmo que os elementos de ambas as faces da trinca estejam localizados na mesma posição geométrica, o sistema de equações algébricas não se torna linearmente dependente visto que foram utilizadas diferentes equações. Tal procedimento hoje em dia é bem difundido como o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) e foi introduzido nos trabalhos de WATSON (1986) e GRAY et al. (1990) para problemas mecânicos bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Entre os importantes trabalhos que ampliaram e difundiram a utilização de tal técnica os seguintes podem ser apontados PORTELA ALIABADI e ROOKE. (1992, 1993), MI & ALIABADI (1992, 1994, 1995), MELLINGS & ALIABADI (1994), SOLLERO & ALIABADI (1995), SALEH (1997), CHEN et al. (1999). Análises de coalescência de fissuras e localização foram tratadas com mais facilidade através do MECD nos trabalhos de LEONEL & VENTURINI (2010a, 2010b, 2011) para problemas de fratura linear e não linear.

A segunda alternativa via MEC é aplicável à propagação coesiva de fissuras. Para isso, um campo de tensões iniciais é empregado para corrigir o estado de tensão na ZPI respeitando uma lei coesiva pré-estabelecida. Tal campo de tensões é oriundo do termo de domínio da equação singular do MEC o qual é degenerado para atuar apenas em uma estreita faixa na frente da fissura com espessura tendendo a zero. Tal procedimento dá origem a uma nova variável denominada dipolo, responsável por garantir o atendimento das condições de contorno. A técnica demonstrou-se bastante eficiente e pode ser encontrada em trabalhos como VENTURINI (1994), LOPES & VENTURINI (1997), JIANG & VENTURINI (1998, 2000) e mais recentemente OLIVEIRA & LEONEL (2013).

Com as formulações alternativas do MEC, as fissuras podem ser modeladas no interior dos domínios e, portanto o remalhamento é apenas necessário para inserir incrementos no comprimento da trinca conforme ilustrado na Figura 1.7 (LEONEL, VENTURINI e CHATEAUNEUF, 2011).

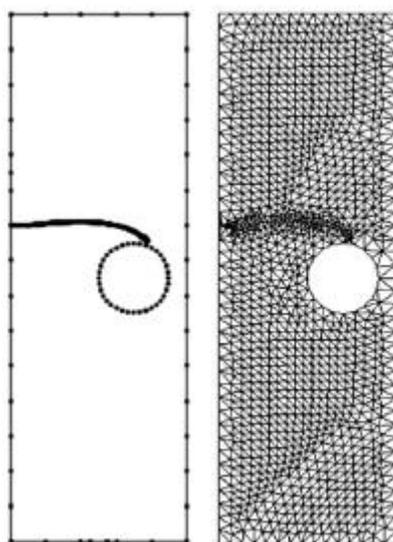


Figura 1.7 Incrementos de fissuras via MEC (esquerda) versus análise convencional via MEF (direita) (LEONEL, VENTURINI e CHATEAUNEUF, 2011).

Em contra partida, análises de propagação de fissuras nas interfaces das multi-regiões proporcionam um tratamento mais natural para sólidos multifaturados uma vez que lida mais naturalmente com a evolução e coalescências das múltiplas fissuras. Além disso, a técnica também permite avaliar fratura em domínios compostos como é o caso do presente trabalho. Nesse sentido, BENEDETTI & ALIABADI (2013) apresentaram uma formulação para tratar a degradação inter granular e falhas em materiais policristalinos (Figura 1.8).

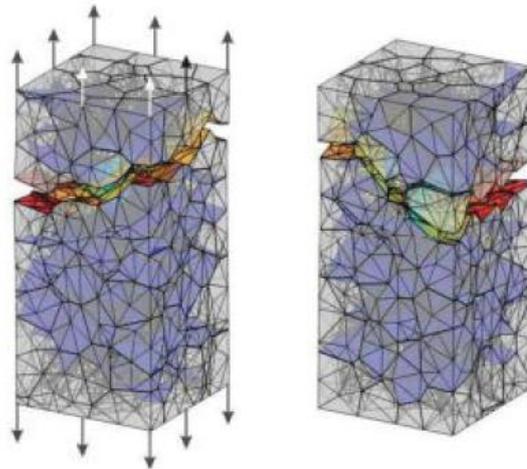


Figura 1.8 degradação e fratura Inter granular em materiais policristalinos (BENEDETTI & ALIABADI, 2013).

Para modelar a interação entre grãos ortotrópicos os autores propuseram a técnica de Multi-regiões e a utilização da solução fundamental anisotrópica tridimensional. A geometria e distribuição dos grãos na microestrutura do material foi representada por uma *Voronoi tessellation*. A danificação do material é considerada por fratura nas interfaces das regiões via modelo coesivo e o contato entre faces fraturadas também é avaliado via um modelo não linear de fricção.

Mais exemplos de fratura em meios anisotrópicos abordados via MEC são encontrados nos trabalhos de SOLLERO E ALIABADI (1993, 1994). Porém, os autores trataram apenas da determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão em chapas elástica lineares sem considerar critérios de propagação. Problemas de fratura não linear quase frágil foram abordados com o modelo coesivo para tratar a falha em peças ortotrópicas de madeira nos trabalhos de BOSTRON (1992), DOURADO et al. (2008) e DOURADO, MOURA e MORAIS (2011). No entanto, os autores adotaram uma formulação baseada em elementos finitos de interface com amolecimento bilinear por meio de uma sub-rotina do software comercial ABAQUS. Além das madeiras, a falha por fraturamento coesivo em outros materiais não isotrópicos como argilas e alvenaria também foi analisada via formulações de elementos finitos com o auxílio de sub-rotinas do ABAQUS (CERVENKA et al.,1997; GUINEA et al. ,2000 e LISJAK et al., 2014).

Apesar dos trabalhos citados a cima, ainda há muito a ser desenvolvido no contexto de fratura não linear de estruturas compostas e anisotrópicas. Nesse sentido, o presente trabalho se apresenta como uma singela contribuição a essa linha de pesquisa.

1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

Para melhor compreensão do trabalho, nesse tópico apresenta-se como a estrutura do texto foi dividida no decorrer de seus capítulos.

No Capítulo 1 foram apresentados a introdução ao tema, a justificativa do estudo, os objetivos da pesquisa e também uma revisão bibliográfica sobre as principais áreas de conhecimento da engenharia necessárias para a elaboração dessa dissertação.

Já no Capítulo 2 são abordados alguns importantes fundamentos da teoria da elasticidade linear. Retoma-se tópicos como as equações de equilíbrio, relações deslocamento-deformação, leis constitutivas elásticas lineares de materiais desde o caso mais geral de anisotropia até o caso de corpos isotrópicos. Além disso, também são brevemente apresentadas as simplificações de problemas tridimensionais para os Estados Planos os quais serão considerados para as aplicações nos capítulos finais.

Nos Capítulos 3 e 4 são introduzidas as formulações singular e hiper singular do Método dos Elementos de Contorno aplicados à análise mecânica de meios bidimensionais isotrópicos e anisotrópicos, respectivamente. Considerando meios isotrópicos, no Capítulo 3, as formulações procedem a partir da solução fundamental de Kelvin obtendo-se às equações integrais de contorno em deslocamentos e forças de superfície a partir de um processo limite. Apresentam-se as discretizações adotadas no contorno a partir das quais chegasse ao sistema de equações lineares que soluciona os Problemas de valor de contorno via MEC. No Capítulo 4, as mesmas ideias são retomadas, porém considerando como ponto de partida a solução fundamental de Cruse & Swedlow para meios anisotrópicos. Conforme será discutido mais adiante, tal solução não é aplicável a meios perfeitamente isotrópicos justificando assim o desenvolvimento de ambas as formulações isotrópicas e anisotrópicas. As integrações singulares inerentes ao método são regularizadas através do Método de Subtração de Singularidade possibilitando a utilização de elementos de contorno polinomiais com aproximações de alta ordem. Também é apresentada a técnica de multi-regiões para modelagem de estruturas compostas constituídas por distintos materiais. Por fim, demonstra-se como as grandezas internas, tensão e deslocamento, podem ser obtidas a partir das equações integrais.

O Capítulo 5 é dedicado a uma revisão sobre a mecânica da Fratura. São primeiramente apresentadas as ideias que iniciaram o desenvolvimento de tal área da ciência,

passando por tópicos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). Entre os tópicos destacam-se o tratamento analítico via funções de tensão complexas, Os fatores de intensidade de tensão, critérios energéticos para propagação de fissuras e os modos básicos de fraturamento. Também é apresentada uma breve revisão sobre a Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL) sendo abordados conceitos como as curvas de resistência à fratura, a integral- J e também modelos para representar a fratura em materiais dúcteis e quase frágeis. Especificamente em relação aos materiais quase frágeis, o modelo coesivo de fratura, ou modelo de fissuras fictícias, foi descrito mais detalhadamente uma vez que o mesmo foi incorporado à formulação do MEC no presente trabalho para tratar fraturas em peças de concreto e madeira.

O último capítulo teórico, Capítulo 6, trata do acoplamento do modelo coesivo às interfaces de estruturas discretizadas via técnica de multi-regiões. O fenômeno da fratura não linear descrito pelo modelo coesivo representa uma não linearidade física localizada ao longo do caminho de fissuração. Como na formulação apresentada no capítulo a fratura ocorre nas interfaces das multi-regiões, uma não linearidade de interface é verificada nas análises de fratura procedidas no trabalho. Dois distintos algoritmos de resolução iterativa são implementados para obter a solução não linear dos problemas. A primeira abordagem trata do procedimento clássico denominado no trabalho como OC. Já a segunda abordagem é o esquema OT o qual resulta em uma mais rápida convergência da solução. Por fim, vale destacar que o comportamento coesivo das interfaces é regido por alguma lei coesiva que relacione as tensões às aberturas de suas faces. Em alguns casos, tal lei pode ser considerada como uma propriedade do material em questão a qual deve ser determinada através de ensaios de fratura.

Os Capítulos 7 e 8 são, respectivamente, referentes a aplicações das formulações desenvolvidas para analisar estruturas compostas em regime elástico e ensaios de fratura em peças estruturais. Nas aplicações elásticas, as estruturas compostas são constituídas por regiões isotrópicas e/ou anisotrópicas. Já nas aplicações de fratura, ensaios experimentais e numéricos de peças estruturais de concreto e madeira foram reproduzidos com as formulações não lineares de fratura do MEC. Nos capítulos os resultados são avaliados em relação aos campos de deslocamento, campos de tensões, resposta não linear das estruturas fraturadas e tensões coesivas nas faces das interfaces coesivas. Taís resultados são comparados com respostas analíticas, numéricas e experimentais a fim de validar o código desenvolvido nessa dissertação. Em uma última aplicação é apresentada a falha por descolamento de uma

estrutura composta teórica proposta no presente trabalho. Por fim são avaliados os ganhos de desempenho nas análises de fratura obtidos com a adoção do OT em comparação ao clássico OC.

O último capítulo da dissertação, Capítulo 10, trata das considerações finais a respeito do estudo desenvolvido ao longo da dissertação. São apresentados comentários gerais sobre os resultados obtidos e limitações da formulação desenvolvida. Também são apresentadas propostas para pesquisas futuras e novas aplicações visando abranger uma maior gama de problemas estruturais.

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

A teoria da elasticidade tem por objetivo descrever o comportamento mecânico dos materiais quando solicitados em regime elástico. Essa se baseia na teoria clássica do contínuo a qual assume que o domínio de um sólido esteja homogeneamente preenchido por material. Ou seja, a matéria está continuamente distribuída e interações mútuas agem em todos os pontos internos como resultado de forças de massa e forças de superfície. Apesar de existirem situações em que a análise além do regime elástico é necessária, os conceitos da Teoria da Elasticidade ainda são muito importantes, pois fornecem subsídio a teorias mais abrangentes que envolvem mudança de rigidez material. Como exemplos de tais teorias podem ser citadas a teoria da plasticidade, a mecânica do dano e a mecânica da fratura a qual é um dos focos do presente estudo. Para a compreensão da formulação do problema elástico, algumas importantes relações serão apresentadas na sequência desse capítulo. Essas relações também são importantes para entender como a formulação do problema elástico é abordada via Método dos Elementos de Contorno. No entanto, maiores detalhes em relação à Teoria da Elasticidade podem ser encontrados em obras clássicas como TIMOSHENKO & GOODIER (1980), Mecânica do Contínuo em MALVERN (1969), enquanto que seu contexto histórico pode ser consultado nos primeiros capítulos de LOVE (1944) e em TIMOSHENKO (1953).

2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considerando um corpo em equilíbrio, o estado de tensão em um dado ponto do mesmo pode ser ilustrado de acordo com a Figura 2.1 onde o ponto é representado por um cubo de dimensões infinitesimais.

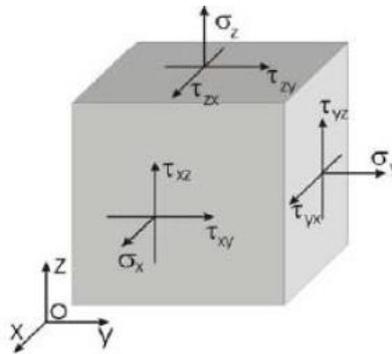


Figura 2.1 Estado de tensão em um ponto representado em coordenadas cartesianas (LEONEL 2011)

As nove componentes do estado de tensão foram representadas considerando o sistema cartesiano de coordenadas x, y, z . Na ausência de torques pontuais no domínio do corpo, o equilíbrio estático de momentos no elemento infinitesimal representativo de um ponto qualquer resulta na seguinte relação entre as componentes do tensor de tensões:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.1)$$

Sendo os índices $i, j = x, y, z$. Considerando os eixos cartesianos, a expressão indicial acima representa três equações de equilíbrio. Considerando tais equações é possível obter o estado de tensão em um dado ponto conhecendo apenas seis das nove componentes do tensor. Outras três equações de equilíbrio podem ser obtidas do equilíbrio de forças do elemento infinitesimal nas três direções. Essas últimas equações podem ser apresentadas de forma indicial conforme a expressão abaixo:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.2)$$

Sendo $\sigma_{ij,j}$ a derivada da componente ij do tensor de tensões em relação à direção j , ou ainda o divergente do tensor de tensões, e b_i a componente i da força de volume no ponto em análise.

Além dessas seis equações, o equilíbrio também deve ser satisfeito no contorno do corpo. Dessa maneira o estado de tensão adjacente às superfícies, ao ser decomposto na direção normal ao contorno, deve se igualar às forças de superfícies atuantes no corpo.

$$P_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.3)$$

Sendo P_i a componente i do vetor de forças de superfície em um ponto do contorno cujo cosseno diretor da direção j é apresentado como n_j .

2.2 RELAÇÃO DESLOCAMENTO DEFORMAÇÃO

Em um sólido em estado de equilíbrio os campos de deformação e deslocamento estão relacionados entre si. Visando apresentar essa relação, considere um ponto em um domínio bidimensional livre de tensões. Considere também que o mesmo pode ser representado por um elemento quadrado de dimensões infinitesimais com arestas denominadas AB, AC, BD e CD conforme apresentado na Figura 2.2. Após a deformação devido a uma solicitação, o mesmo ponto encontra-se em outra posição para um dado referencial cartesiano. Além disso, suas arestas na posição deformada são distorcidas e denominadas A'B', A'C', B'D' e C'D'.

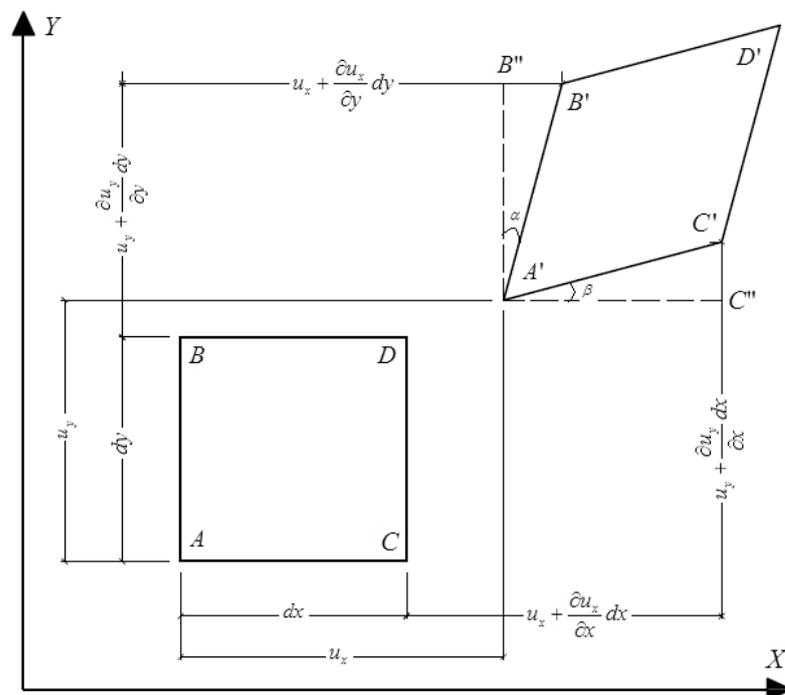


Figura 2.2 Representação das deformações para o caso bidimensional

A partir da representação da figura e do conceito de deformação de engenharia, os alongamentos nas direções x e y podem ser apresentados como:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'C''} - \overline{AC}}{AC} = \frac{\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{A'B''} - \overline{AB}}{AB} = \frac{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy - u_y\right) - dy}{dy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.5)$$

Considerando a hipótese de pequenas deformações e deslocamentos as deformações angulares podem ser definidas a partir da rotação da borda AB e AC:

$$\text{Tg}(\alpha) = \frac{\overline{B'B''}}{\overline{A'B''}} = \frac{\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy\right) - u_x}{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + dy\right) - u_y} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{\frac{\partial u_y}{\partial y} + 1} \quad (2.6)$$

$$\text{Tg}(\beta) = \frac{\overline{C'C''}}{\overline{A'C''}} = \frac{\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) - u_y}{\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx\right) - u_x} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} + 1} \quad (2.7)$$

Novamente adotando a hipótese de pequenas deformações temos:

$$\alpha \approx \text{Tg}(\alpha) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{\frac{\partial u_y}{\partial y} + 1} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\beta \approx \text{Tg}(\beta) = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{\frac{\partial u_x}{\partial x} + 1} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.9)$$

Desconsiderando as aproximações, a deformação angular de engenharia pode então ser definida como:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.10)$$

Como por definição $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$ temos então que:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.11)$$

Um procedimento semelhante pode ser apresentado para o caso tridimensional e de maneira geral, para pequenos deslocamentos e deformações, a relação entre esses dois campos pode ser apresentada de forma indicial como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.12)$$

Para regime de grandes deformações deve-se considerar o conceito de deformações finitas e a relação entre os campos pode ser expressa por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,j}u_{j,i}) \quad (2.13)$$

No entanto, a relação deslocamento-deformação passa então a ser não mais linear.

2.3 LEIS CONSTITUTIVAS ELÁSTICAS LINEARES DOS MATERIAIS

As equações até então apresentadas nos tópicos anteriores ainda não são suficientes para resolver os problemas de equilíbrio em corpos elásticos. Para tal, faz-se ainda necessário apresentar uma relação entre as componentes de tensão e de deformação do sólido. Em se tratando de elasticidade linear, a lei que relaciona essas componentes é denominada Lei Generalizada de Hooke em homenagem ao cientista experimental Robert Hooke (CHEN & SALEEB, 1982). De acordo com a lei, as componentes de deformação são combinações lineares das componentes de tensão. Por definição, um corpo é chamado de isotrópico quando suas propriedades elásticas são idênticas em todas as direções e de anisotrópico quando essas propriedades são diferentes para diferentes direções. Já em relação à homogeneidade, um corpo é chamado de homogêneo quando suas propriedades elásticas são idênticas em todas as direções paralelas passando por qualquer ponto no domínio do sólido (LEKHNITSKII *et al.*, 1968).

No caso de um corpo com anisotropia geral, considerando arbitrárias coordenadas ortogonais x, y, z é possível apresentar a Lei Generalizada de Hooke em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.15)$$

O tensor D_{ijkl} é denominado tensor de constantes de elasticidade ou ainda, em forma matricial, matriz de rigidez. Admitindo-se naturalmente que $|D_{ijkl}| \neq 0$, é possível ainda apresentar a Lei Generalizada de Hooke de maneira inversa:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (2.16)$$

Em que o tensor C_{ijkl} é denominado tensor de compliância ou ainda matriz de flexibilidade. Formalmente, os tensores D_{ijkl} e C_{ijkl} são constituídos de 81 constantes elásticas uma vez que i, j, k, l variam de 1 a 3 (direções x, y e z respectivamente). O tensor D_{ijkl} relaciona através de uma combinação linear cada uma das nove componentes do tensor de deformação a cada uma das nove componentes do tensor de tensão. Já o tensor C_{ijkl} faz a relação inversa. Como o tensor de constantes elásticas para um sólido equilibrado é baseado no conceito de valor estacionário da energia de deformação U_0 em relação ao tensor de deformações, é possível apresentar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{kl} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = D_{ijkl} \\ \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Das relações 2.17 pode-se concluir que $D_{ijkl} = D_{klij}$. Além disso, considerando a simetria do tensor de tensões, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, temos que $D_{ijkl} = D_{jikl}$ e considerando também a simetria do tensor de deformações, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$, temos por fim que $D_{ijkl} = D_{ijlk}$. A partir dessas relações de simetria do tensor de constantes de elasticidade tem-se que de suas 81 componentes, apenas 21 são constantes independentes. As mesmas condições de simetria também são válidas para o tensor de compliância (VANALLI, 2004).

Dessa maneira, as nove expressões que caracterizam a lei constitutiva linear podem ser condensadas em apenas seis equações com seis termos cada. Assim, a Lei Generalizada de Hooke e sua inversa, apresentadas nas Equações 2.15 e 2.16, podem também ser escritas em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xxxx} & D_{xxyy} & D_{xxzz} & D_{xxyz} & D_{xxxz} & D_{xxxy} \\ & D_{yyyy} & D_{yyzz} & D_{yyyz} & D_{yyxz} & D_{yyxy} \\ & & D_{zzzz} & D_{zzyz} & D_{zzxz} & D_{zzxy} \\ & & & D_{yzyz} & D_{yzxz} & D_{yzxy} \\ & & & & D_{xzxz} & D_{xzxy} \\ & & & & & D_{xyxy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxzz} & 2C_{xxyz} & 2C_{xxxz} & 2C_{xxxy} \\ & C_{yyyy} & C_{yyzz} & 2C_{yyyz} & 2C_{yyxz} & 2C_{yyxy} \\ & & C_{zzzz} & 2C_{zzyz} & 2C_{zzxz} & 2C_{zzxy} \\ & & & 4C_{yzyz} & 4C_{yzxz} & 4C_{yzxy} \\ & & & & 4C_{xzxz} & 4C_{xzxy} \\ & & & & & 4C_{xyxy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Sendo que $2\varepsilon_{yz}$, $2\varepsilon_{xz}$ e $2\varepsilon_{xy}$ podem também ser substituídos por γ_{yz} , γ_{xz} e γ_{xy} . Pode-se ainda introduzir uma notação reduzida apresentada por TING (1996):

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = \sigma_1 & \varepsilon_x = \varepsilon_1 \\ \sigma_y = \sigma_2 & \varepsilon_y = \varepsilon_2 \\ \sigma_z = \sigma_3 & \varepsilon_z = \varepsilon_3 \\ \tau_{yz} = \sigma_4 & e \quad 2\varepsilon_{yz} = \varepsilon_4 \\ \tau_{xz} = \sigma_5 & 2\varepsilon_{xz} = \varepsilon_5 \\ \tau_{xy} = \sigma_6 & 2\varepsilon_{xy} = \varepsilon_6 \end{array} \quad (2.20)$$

Com essa notação, as leis constitutivas podem ser apresentadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\alpha &= C_{\alpha\beta} \sigma_\beta \end{aligned} \quad (2.21)$$

Onde a transformação do Tensor de constantes elásticas D_{ijkl} para a Matriz de rigidez $D_{\alpha\beta}$ pode ser procedida substituindo os índices ij ou kl por α ou β de acordo com a seguinte regra:

ij ou kl	α ou β
xx	1
yy	2
zz	3
yz ou zy	4
xz ou zx	5
xy ou yx	6

Figura 2.3 Regra de índice na transformação de D_{ijkl} para $D_{\alpha\beta}$ (TING, 1996)

Já a transformação do Tensor de compliância C_{ijkl} para a Matriz de flexibilidade $C_{\alpha\beta}$ segue também essa regra de índices, porém considerando ainda que:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{\alpha\beta} & \text{se } \alpha \text{ e } \beta \leq 3; \\ 2C_{ijkl} &= C_{\alpha\beta} & \text{se } \alpha \text{ ou } \beta \leq 3; \\ 4C_{ijkl} &= C_{\alpha\beta} & \text{se } \alpha \text{ e } \beta > 3. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Com essa notação simplificada, podemos escrever a lei constitutiva direta e inversa da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & & & & D_{55} & D_{56} \\ SIM. & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ SIM. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

As constantes elásticas das matrizes de rigidez e flexibilidade variam de acordo com os diversos tipos de materiais. A estrutura interna dos materiais pode apresentar planos de simetria elástica. Essa simetria expressa o fato de que em cada ponto do sólido existem direções simétricas equivalentes com respeito às propriedades elásticas. Quando existem planos de simetria elástica na estrutura interna do material, a lei constitutiva pode ser simplificada conforme apresentado a seguir. Portanto, serão apresentados nos próximos tópicos alguns exemplos de materiais com simetrias elásticas e suas classificações.

2.3.1 Materiais com anisotropia geral

Em teoria, o caso mais geral de anisotropia se verifica quando a estrutura interna do material não apresenta nenhum plano de simetria elástica. Nesse caso, nenhuma das 21 constantes elásticas da lei constitutiva é nula. Dessa maneira, todos os componentes da Matriz de flexibilidade podem ser escritos em função de constantes de engenharia e a lei constitutiva, Equação 2.24, pode ser apresentada como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\eta_{yz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xz,x}}{E_x} & \frac{\eta_{xy,x}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{\eta_{yz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xz,y}}{E_y} & \frac{\eta_{xy,y}}{E_y} \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_z} & \frac{-\nu_{yz}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & \frac{\eta_{yz,z}}{E_z} & \frac{\eta_{xz,z}}{E_z} & \frac{\eta_{xy,z}}{E_z} \\ \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}} & \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\rho_{xz,yz}}{G_{yz}} & \frac{\rho_{xy,yz}}{G_{yz}} \\ \frac{\eta_{x,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{y,xz}}{G_{xz}} & \frac{\eta_{z,xz}}{G_{xz}} & \frac{\rho_{yz,xz}}{G_{xz}} & \frac{1}{G_{xz}} & \frac{\rho_{xy,xz}}{G_{xz}} \\ \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}} & \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}} & \frac{\rho_{yz,xy}}{G_{xy}} & \frac{\rho_{xz,xy}}{G_{xy}} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Em que E_i são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, em tração-compressão nas direções $i = x, y, z$; G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de cisalhamento, para os planos paralelos aos planos coordenados e ν_{ij} são os coeficientes de Poisson. As outras constantes que aparecem em 2.25 são nulas para corpos isotrópicos ou ortotrópicos, porém, em se tratando de anisotropias gerais, as mesmas são importantes uma vez que quantificam as influências de tensões normais em deformações tangenciais, de tensões tangenciais em deformações normais e de tensões tangenciais em deformações tangenciais (MASCIA, 1991; VANALLI, 2001). As constantes $\eta_{ij,k}$ são chamadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie. Esses caracterizam as extensões nas direções dos eixos coordenados " k " produzidas por tensões tangenciais agindo em planos coordenados " ij ". Já as constantes $\eta_{i,jk}$ são denominadas coeficientes de influência mútua de segunda espécie e expressam as deformações tangenciais nos planos coordenados " jk " causadas pelas tensões normais atuantes nos eixos coordenados " i ". Por fim, as constantes $\rho_{ij,jk}$ são chamadas de coeficientes de Chentsov e caracterizam as distorções em planos paralelos aos planos coordenados produzidas por tensões tangenciais atuando em planos paralelos aos outros planos coordenados (LEKHNITSKII, 1963).

2.3.2 Materiais com simetria elástica em um plano

Quando um sólido possui simetria em sua estrutura interna, isso se reflete nos valores das constantes de elasticidade. Assim, no caso de materiais com simetria elástica em um plano, em quaisquer duas direções simétricas em relação ao plano, as propriedades elásticas serão equivalentes. Em corpos homogêneos, todos os planos de simetria que passam por diferentes pontos são paralelos. Se considerarmos o eixo coordenado z como sendo perpendicular ao plano de simetria, a Lei generalizada de Hooke, Equação 2.24, pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ [SIM. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Nessa situação tem-se que os coeficientes de influência mútua $\eta_{yz,x}, \eta_{yz,y}, \eta_{yz,z}, \eta_{xz,x}, \eta_{xz,y}, \eta_{xz,z}, \eta_{x,yz}, \eta_{y,yz}, \eta_{z,yz}, \eta_{x,xz}, \eta_{y,xz}, \eta_{z,xz}$ e os coeficientes de Chentsov $\rho_{xy,yz}, \rho_{xy,xz}, \rho_{yz,xy}, \rho_{xz,xy}$ são nulos. Assim, o número de constantes elásticas independentes decai para 13. Cristais de simetria monoclinica como, por exemplo, “feldspar” e “orthoclase” possuem esse tipo de simetria elástica (LEKHNITSKII *et al*, 1968).

2.3.3 Materiais com simetria elástica em três planos (ortotrópico)

Um corpo homogêneo referido em relação a eixos coordenados x, y, z é considerado como ortotrópico quando por qualquer um de seus pontos passam três planos de simetria elástica mutualmente perpendiculares entre si e com eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados. Nesse caso, a Lei generalizada de Hooke pode apresentada conforme a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ [SIM. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Nessa situação tem-se que todos os coeficientes de influência mútua e todos os coeficientes de Chentsov são nulos. Dessa maneira, o número de constantes elásticas independentes cai para 9. Esse tipo de simetria é considerada a mais importante uma vez que

é a mais encontrada na prática. (LEKHNITSKII *et al.*, 1968). De acordo com MELESH (1963), relações tensão-deformação ortotrópicas fornecem suficiente generalidade para descrever a maioria dos materiais estruturais.

2.3.4 Materiais transversalmente isotrópicos

Quando por todos os pontos de um corpo passa um plano no qual todas as direções são equivalentes em termos de constantes elásticas, o material do sólido é classificado como transversalmente isotrópico (LYAV, 1935). Arbitrando o eixo coordenado z como sendo normal a tal plano de isotropia, a Lei generalizada de Hooke pode ser apresentada em termos de constantes de engenharia como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E' & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G' & 0 & 0 \\ & & & & 1/G' & 0 \\ SIM. & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Onde E, E' são os módulos longitudinais no plano de isotropia e na direção normal à ele respectivamente. Da mesma maneira, ν, ν' e G, G' são os coeficientes de Poisson e módulos transversais no plano de isotropia e na direção normal ao mesmo respectivamente. Além disso, nessa situação temos a seguinte relação entre as constantes da matriz de flexibilidade $C_{\alpha\beta}$:

$$2(C_{11} - C_{12}) = C_{66} \leftrightarrow G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.29)$$

Dessa maneira, apenas 5 constantes elásticas são independentes sendo que a dependência do módulo transversal G em relação às constantes E e ν indica a isotropia no plano.

2.3.5 Materiais isotrópicos

Em um corpo isotrópico, todos os infinitos planos que passam por seus pontos são planos de simetria elástica. Nesse caso, a Lei generalizada de Hooke expressa em termos de constantes de engenharia pode ser apresentada como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G & 0 & 0 \\ & & & & 1/G & 0 \\ SIM. & & & & & 1/G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Sendo E o módulo longitudinal, ν o coeficiente de Poisson e G o módulo transversal, todos válidos para quaisquer direções ortogonais arbitrárias dos eixos coordenados x, y, z . Visto que existe a dependência do módulo transversal em relação às outras duas constantes de engenharia, $G = E/2(1 + \nu)$, apenas duas constantes elásticas são independentes para problemas isotrópicos.

De acordo com MUSKHELISHVILI (1963), não existe na natureza corpos idealmente isotrópicos, no entanto, muitos materiais podem ser considerados como suficientemente isotrópicos. Entre esses podem-se citados por exemplo metais, os quais são constituídos de microscópicos cristais anisotrópicos distribuídos aleatoriamente no material conferindo dessa forma a isotropia à macro estrutura do material.

Por fim, é valido apresentar também a Lei Generalizada de Hooke isotrópica em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.30)$$

Ou ainda, a relação inversa:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.31)$$

Sendo δ_{ij} o delta de Kronecker e $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ a constante de Lamé.

2.4 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA ELÁSTICO

O problema mecânico elastostático é definido quando um sólido em estado de equilíbrio possui seu contorno submetido a um conjunto de condições de forças de superfície e/ou deslocamentos prescritos. As incógnitas do problema são os campos de deslocamento, tensão e deformação que juntos compõem um total de 15 incógnitas: 3 deslocamentos, 6

tensões e 6 deformações. Para solucionar os problemas utiliza-se as 3 Equações de equilíbrio definidas na Expressão indicial 2.2, as 6 Equações definidas na Relação deformação-deslocamento (2.12) e as 6 Equações definidas pela Lei Generalizada de Hooke. Assim, com um total de 15 equações e 15 incógnitas o problema elástico, ou problema de valor de contorno, pode ser solucionado desde que as condições no contorno do sólido sejam impostas.

2.5 ESTADOS PLANOS

A depender da geometria do corpo em análise, muitas vezes os problemas elásticos tridimensionais podem ser simplificados para situações bidimensionais. As análises bidimensionais de sólidos são denominadas problemas planos sendo que os mesmos podem ser classificados como plano de deformações (Estado Plano de Deformação (EPD)) ou ainda plano de tensões (Estado Plano de Tensão (EPT)).

Um problema pode ser tratado como plano em deformações quando uma de suas dimensões for muito maior que as outras duas como é o caso de barragens e tubulação. Nesses problemas, os deslocamentos dos pontos pertencentes a uma dada seção transversal do corpo são vetores paralelos entre si. Assim, todos os pontos que antes da deformação situavam-se sobre o plano, após a deformação continuaram pertencendo ao mesmo. Nesse caso, considerando o plano xy como o plano de corte de uma seção, as deformações em relação ao eixo axial, ou eixo z , são nulas uma vez que muitas seções do corpo se equilibram individualmente não havendo cisalhamento entre seções vizinhas.

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0 \quad (2.32)$$

Dessa maneira, as tensões cisalhantes $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ e $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ também são nulas e a tensão normal à direção axial, σ_z , fica sendo uma função de σ_x e σ_y . Portanto os tensores de deformações e tensões pode ser definido por apenas 3 componentes independentes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ e $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ respectivamente. Nesse caso, a Lei generalizada de Hooke para materiais anisotrópicos pode ser reduzida para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{26} \\ SIM. & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

E σ_z pode ser expressa em função de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ como:

$$\sigma_z = \frac{\begin{bmatrix} \sigma_x(D_{13}C_{11} + D_{36}C_{16} + D_{32}C_{12}) \\ +\sigma_y(D_{13}C_{12} + D_{36}C_{26} + D_{32}C_{22}) \\ +\tau_{xy}(D_{13}C_{16} + D_{36}C_{66} + D_{32}C_{26}) \end{bmatrix}}{(1 - D_{13}C_{13} - D_{36}C_{36} - D_{32}C_{23})} \quad (2.34)$$

Caso o corpo em EPD possa ser considerado como isotrópico, a Lei de Hooke pode ser novamente expressa pela Equação 2.30 ou 2.31 sendo que nesse caso, a dependência de σ_z em relação às outras tensões normais pode ser apresentada como:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.35)$$

Já em corpos onde uma das dimensões é muito menor do que as outras duas, o problema elástico pode ser simplificado para um problema plano de tensão. A análise em EPT é muito comum para elementos estruturais como vigas-paredes e chapas. Considera-se nesses casos que a distribuição de tensão no corpo é essencialmente plana e paralela ao longo da espessura. O carregamento é considerado composto por cargas paralelas ao plano formado pelas duas maiores dimensões. Nesse caso, não há tensões cisalhantes e nem normais em relação à direção z .

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = \sigma_z = 0 \quad (2.36)$$

Dessa maneira, no EPT as deformações $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ e $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$ também são nulas e o alongamento ε_z se torna uma função dos alongamentos nas direções x e y . Vale ainda ressaltar que assim como no EPD os tensores de tensão e deformação também são definidos apenas pelas 3 componentes independentes não nulas. Portanto, no caso de EPT, a Lei Generalizada de Hooke para materiais anisotrópicos pode ser reduzida para:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{26} \\ SIM. & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Sendo que:

$$\varepsilon_z = \left[\begin{array}{l} \varepsilon_x(C_{13}D_{11} + C_{36}D_{16} + C_{32}D_{12}) \\ +\varepsilon_y(C_{13}D_{12} + C_{36}D_{26} + C_{32}D_{22}) \\ +2\varepsilon_{xy}(C_{13}D_{16} + C_{36}D_{66} + C_{32}D_{26}) \end{array} \right] / (1 - C_{13}D_{13} - C_{36}D_{36} - C_{32}D_{23}) \quad (2.38)$$

Em se tratando de um sólido isotrópico em EPT a Lei de Hooke pode ser novamente expressa pela Equação 2.30. No entanto, a relação inversa, Equação 2.31, assume a seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij} + \bar{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.39)$$

Verifica-se que a Equação 2.39 é praticamente igual à 2.31 com exceção da constante $\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)}$ ser diferente da constante de Lamé $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Isso se deve ao fato do EPT ser um estado aproximado uma vez que para o mesmo a equação de compatibilidade de deformações não é verificada. Quanto maior for a espessura do problema em relação às outras duas dimensões, mais grosseira será a aproximação do EPT. Por fim, pode-se apresentar a dependência de ε_z em relação aos outros alongamentos normais para o caso de um corpo isotrópico em EPT:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.40)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MEIOS ISOTRÓPICOS

O MEC é um método numérico para a resolução de equações integrais de contorno. Portanto, o mesmo é aplicável em vários campos da física e da engenharia como na acústica, na elasticidade linear, na plasticidade, na viscoplasticidade, na mecânica dos fluidos, na mecânica da fratura, no eletromagnetismo entre outros (OLIVEIRA, 2013). Nesse trabalho, o MEC é utilizado no contexto da elasticidade linear visando resolver os ditos PVC's cuja formulação foi apresentada no capítulo anterior. O equacionamento desse tipo de problema é baseado em um conjunto de equações diferenciais. Tais equações podem ser solucionadas numericamente com a utilização de um método de domínio como é o caso do MEF ou MDF. Ou ainda, por meio do teorema da divergência de Gauss (caso tridimensional) ou teorema de Green (caso bidimensional), as equações diferenciais que governam os PVC's podem ser transformadas em equações integrais de contorno desde que seja conhecida uma solução analítica para um específico problema elástico. Essa solução é denominada solução fundamental e é determinada para um problema com as mesmas propriedades materiais do problema de interesse a ser analisado. Portanto a solução fundamental depende do tipo de material envolvido. Com as equações integrais oriundas da formulação dos PVC's, os problemas elastostáticos podem então ser resolvidos numericamente através do MEC. No presente trabalho, baseado nas soluções fundamentais para materiais elásticos isotrópicos e elásticos anisotrópicos, as formulações do MEC são apresentadas e aplicadas em estruturas compostas.

Nos próximos tópicos desse capítulo pretende-se apresentar primeiramente formulações do MEC aplicada a problemas isotrópicos nos quais a solução fundamental é denominada de solução fundamental de Kelvin. A partir dessa, as formulações integrais de contorno singular e hiper singular serão deduzidas para analisar problemas planos da elasticidade linear.

3.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA ELÁSTICO ISOTRÓPICO

Para introduzir a formulação do MEC em meios elásticos isotrópicos é necessário primeiramente conhecer a solução fundamental para esses tipos de problema. A solução fundamental é obtida considerando um domínio infinito constituído mesmo tipo de material dos problemas que se deseja resolver submetido a uma solitação concentrada e unitária aplicada em um ponto qualquer em uma arbitrária direção.

Considerando o caso de problemas elastostáticos, essa solução é uma expressão que fornece o deslocamento de qualquer ponto do domínio devido à atuação de uma força unitária concentrada aplicada em um ponto qualquer de um sólido homogêneo com dimensões infinitas. Para o caso isotrópico, tal solução foi primeiramente apresentada por Sir Willian Thomson e ficou posteriormente conhecida como solução fundamental de Kelvin. (LOVE, 1944). A solução fundamental de Kelvin pode ser obtida utilizando a técnica do vetor de Galerkin conforme apresentado por BREBBIA & DOMINGUEZ (1989). No entanto, existem ainda outras maneiras de se obter tal solução como, por exemplo, a que é apresentada em LOVE (1944). A dedução dessa solução fundamental por meio do vetor de Galerkin será brevemente apresentada a seguir.

A partir das Equações 2.2, 2.12 e 2.31 apresentadas no segundo capítulo pode-se obter a equação de Navier. Essa representa o equilíbrio do corpo escrito em termos de deslocamentos englobando também a relação deslocamento-deformação e Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos em uma única expressão apresentada a seguir.

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{\kappa}b_l = 0 \quad (3.1)$$

Sendo:

$$\kappa = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.2)$$

Como a solução fundamental é obtida para uma carga concentrada unitária aplicada em um ponto qualquer (i) na direção do versor e_l , essa pode ser representada como:

$$b_l = \Delta^{(i)} e_l \quad (3.3)$$

Sendo $\Delta^{(i)}$ a função Delta de Dirac a qual é singular no ponto (i) e assume valor nulo em qualquer outro ponto.

De acordo com a técnica do vetor de Galerkin, o vetor de deslocamentos procurado é originado de um vetor G_l da seguinte maneira:

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (3.4)$$

Substituindo as Equações 3.3 e 3.4 na equação de Navier obtém-se:

$$G_{l,mmjj} + \frac{1}{k} \Delta^{(i)} e_l = 0 \quad (3.5)$$

Ou ainda

$$\nabla^2(\nabla^2 G_l) + \frac{1}{k} \Delta^{(i)} e_l = 0 \quad (3.6)$$

Visando facilitar o desenvolvimento da equação bi harmônica acima, denomina-se uma variável auxiliar $F_l = \nabla^2 G_l$. Assim, a equação diferencial a ser resolvida é:

$$\nabla^2(F_l) + \frac{1}{k} \Delta^{(i)} e_l = 0 \quad (3.7)$$

Para problemas bidimensionais, a solução da Equação 3.7 é:

$$F_l = \frac{1}{2\pi\kappa} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad (3.8)$$

Sendo r a distância cartesiana entre o ponto da fonte concentrada e o ponto campo em análise. A partir da Equação 3.8 é então possível obter o vetor de Galerkin para o caso de problemas planos:

$$G_l = \frac{1}{8\pi\kappa} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad (3.9)$$

É assumido que os deslocamentos ocorridos em um determinado ponto devido à aplicação de uma carga unitária aplicada em uma direção podem ser superpostos aos deslocamentos ocorridos no mesmo ponto devido à aplicação de outra carga unitária aplicada em outra direção. Dessa maneira, cada carregamento unitário é tomado como independente um do outro e, portanto a superposição de efeitos é válida. Nesses casos o vetor de Galerkin pode ser apresentado novamente como:

$$G_{lk} = \frac{1}{8\pi\kappa} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} \quad (3.10)$$

Sendo G_{lk} a componente k do vetor de Galerkin em qualquer ponto quando uma carga unitária é aplicada no ponto (i) na direção l .

A partir do vetor de Galerkin é possível, com a Equação 3.4, escrever:

$$u_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km} \quad (3.11)$$

Substituindo a Equação 3.10 em 3.11 a solução fundamental de deslocamentos pode então ser obtida como:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\kappa(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (3.12)$$

Sendo que novamente os índices indicam que u_{lk}^* é o deslocamento na direção K em qualquer ponto quando uma carga unitária é aplicada no ponto (i) na direção l . Ou ainda, pode-se escrever da seguinte maneira:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad (3.13)$$

A partir da solução fundamental de deslocamentos é possível proceder a derivada direcional da expressão em relação à direção normal ao contorno do sólido. Considerando também a relação deslocamento-deformação, a Lei de Hooke isotrópica e a equação de equilíbrio de superfície apresentadas nas Equações 2.12, 2.31 e 2.3 é possível obter a solução fundamental para as forças de superfície do contorno.

$$p_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] + (1-2\nu)(\eta_l r_{,k} - \eta_k r_{,l}) \right\} \quad (3.14)$$

Ou ainda:

$$p_k^* = p_{lk}^* e_l \quad (3.15)$$

As soluções fundamentais 3.12 e 3.14 são válidas para problemas planos de deformação (EPD). Para o caso de EPT as soluções podem ser obtidas através das mesmas expressões com apenas simples modificações nos valores das constantes elásticas E e ν conforme será apresentado mais a diante.

3.2 FORMULAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO SINGULAR E HIPER SINGULAR

O Segundo BREBBIA & DOMINGUEZ (1989) a equação integral de contorno que governa os problemas elastostáticos pode ser obtida a partir do conjunto de equações diferenciais do PVC partindo-se do Método dos Resíduos ponderados (MRP). O MRP é uma técnica clássica de resolução de problemas da engenharia sendo o mesmo a base da formulação de outros diferentes métodos numéricos como o MEF e MDF.

Para introduzir a formulação, considere um sólido contínuo em estado de equilíbrio com domínio Ω e contornos complementares Γ_1 e Γ_2 sujeito as seguintes condições de contorno:

- a) – Condições de contorno essenciais ou de Dirichlet: $u_i = \bar{u}_i$ em Γ_1
- b) – Condições de contorno naturais ou de Neumann: $p_i = \sigma_{ij}\eta_j = \bar{p}_i$ em Γ_2

A equação de equilíbrio representa a forma forte do PVC e deve ser satisfeita para atender ao estado de equilíbrio do sólido:

$$\sigma_{jk,k} + b_j = 0 \quad em \ \Omega \quad (3.16)$$

Considerando uma aproximação numérica, a equação acima passa a não ser atendida em todos os pontos e, portanto restará um resíduo ao se proceder o somatório dos valores resultantes da equação em todos os pontos. Sendo assim, o MRP propõe que tal resíduo deve ser minimizado sendo para isso necessário ortogonalizar o produto escalar entre a função a ser aproximada e a função ponderadora. Utilizando então o MRP e tomando a solução fundamental u_j^* como função ponderadora obtém-se:

$$\langle \sigma_{jk,k} + b_j, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} (\sigma_{jk,k} + b_j) u_j^* d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

Ou ainda:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_j^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Procedendo a integração por partes do primeiro termo do membro esquerdo da equação é possível obter:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jk} \eta_k u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{j,k}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

Utilizando a relação deslocamento deformação e o equilíbrio de forças de superfície a Equação 3.19 pode ser reescrita como:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk} d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (3.20)$$

Considerando o teorema de reciprocidade de Betti, $\sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* = \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^*$, e integrando por partes o primeiro termo a esquerda da Equação 3.20 resulta:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,k}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma \quad (3.21)$$

Note que os termos a direita da equação acima correspondem a integrais de contorno. Considere ainda a subdivisão do contorno em Γ_1 e Γ_2 . Dessa maneira, é possível reescrever a equação como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk,k}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega \\ = -\int_{\Gamma_1} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_j^* \bar{u}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_j^* u_j d\Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na Equação 3.22, as barras em cima de p_j e u_j representam valores conhecidos da solução. No intuito de retornar da Expressão 3.22 para a 3.17 integra-se por partes duas vezes o primeiro termo da equação anterior. No entanto, como as condições de contorno foram impostas, a equação resulta em:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,k} + b_j) u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma \quad (3.23)$$

A Expressão 3.23 corresponde a uma forma em resíduos ponderados generalizada, utilizada como ponto de partida para formulação integral. Em termos gerais, pode-se observar que a solução aproximada deve ser tal que o resíduo por ela gerado no domínio, ponderada por uma função peso, deve ser igual ao resíduo por ela gerado no contorno, também ponderado pela mesma função peso. Desta maneira considera-se, por exemplo, que a função peso não necessariamente seja homogênea nas condições de contorno.

Definido o ponto de partida agora retornemos à Expressão 3.22. Observe que devido ao equilíbrio, o integrante do primeiro termo da equação pode ser apresentado como:

$$\sigma_{jk,k}^* = -\Delta^{(i)} e_j \quad (3.24)$$

Sendo que as soluções fundamentais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{lj}^* e_l \\ p_j^* &= p_{lj}^* e_l \end{aligned} \quad (3.25)$$

u_{lj}^* e p_{lj}^* são o deslocamento e a forças de superfície na direção j em qualquer ponto do problema devido a uma carga unitária aplicada na direção l em um ponto (i) . Considerando o ponto (i) localizado no interior do domínio, levando-se em conta as propriedades do Delta de Dirac e substituindo a Equação 3.24 na primeira integral da Equação 3.22 obtêm-se para uma particular direção:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,k}^* u_j d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^{(i)} e_j u_j d\Omega = -u_j^{(i)} e_j \quad (3.26)$$

Assim, a Equação 3.22, pode agora ser escrita em termo de componentes independentes de deslocamento no ponto i :

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma_1} p_{jk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u_{jk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{jk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{jk}^* d\Omega \quad (3.17)$$

Onde $u_j^{(i)}$ representa a componente j do deslocamento no ponto i devido a uma carga unitária aplicada na direção k .

Pode-se observar que quando uma carga unitária é aplicada numa direção específica j , os deslocamentos e forças de superfície têm componentes nas duas (ou três) direções enquanto que os termos do tipo $\sigma_{jk,k}$ são diferentes de zero apenas ao longo da direção j . (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989). A Expressão 3.27 pode ser escrita de uma maneira mais compacta como:

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_k d\Omega \quad (3.28)$$

A Equação 3.28 é denominada identidade Somigliana em homenagem ao matemático Carlo Somigliana ou ainda equação integral singular. Essa permite calcular os deslocamentos em qualquer ponto do domínio desde que sejam conhecidos os deslocamentos e forças de superfície dos pontos de contorno, as forças de domínio atuantes e a solução fundamental.

Na ausência de forças de volume a identidade Somigliana pode ser apresentada como:

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma \quad (3.29)$$

Vale lembrar que essa equação é denominada singular devido à ordem de singularidade $1/r$ da solução fundamental p_{jk}^* . A partir da Equação 3.28, é possível resolver os PVC's utilizando a então chamada formulação singular do MEC conforme será apresentado no tópico seguinte.

No entanto, além da representação integral 3.28 dos problemas elastostáticos, é possível a partir da identidade Somigliana obter outra equação integral denominada de equação hiper singular com a qual também é possível solucionar os PVC's da teoria da elasticidade. Visando obter tal equação é válido lembrar que a Expressão 3.29 é diferenciável uma vez que os termos p_{jk}^* e u_{jk}^* dependem unicamente da distância r entre o ponto fonte e o ponto de interesse na análise denominado ponto campo. Portanto, procedendo a derivações obtém-se:

$$u_{j,l}^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk,l}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk,l}^* p_k d\Gamma \quad (3.30)$$

Em 3.30, a diferenciação das soluções fundamentais é referente à distância r , tomando como referência o ponto fonte. Introduzindo a relação deslocamento deformação e lei constitutiva isotrópica, Equações 2.12 e 2.31, é possível então escrever a identidade Somigliana em termos de tensões conforme apresentado a seguir.

$$\sigma_{jk}^{(i)} + \int_{\Gamma} S_{jkl} u_l d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jkl} p_l d\Gamma \quad (3.31)$$

Onde os termos S_{jkl} e D_{jkl} contêm as derivadas das soluções fundamentais p_{jk}^* e u_{jk}^* em relação à direção l respectivamente. Admitindo que as soluções fundamentais obtidas para problemas em EPD os termos S_{jkl} e D_{jkl} podem ser apresentados como:

$$S_{jkl} = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)r^2} \{2r_{,l} \eta [(1-2\nu)r_{,l} \delta_{jk} + \nu(r_{,k} \delta_{jl} + r_{,j} \delta_{kl}) - 4r_{,j} r_{,k} r_{,l}] \quad (3.32)$$

$$+ 2\nu(\eta_{,j} r_{,k} r_{,l} + \eta_{,k} r_{,j} r_{,l}) + (1-2\nu)(2\eta_{,l} r_{,j} r_{,k} + \eta_{,k} \delta_{jl} + \eta_{,j} \delta_{kl}) - (1-4\nu)\eta_{,l} \delta_{jk}\}$$

$$D_{jkl} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_{,l} \delta_{jk} + r_{,k} \delta_{lj} - r_{,j} \delta_{kl}) + 2r_{,j} r_{,k} r_{,l}\} \quad (3.33)$$

A Equação 3.31 é então denominada equação integral hiper singular. Isso devido a maior ordem de singularidade da expressão, $1/r^2$, a qual é encontrada no termo S_{jkl} .

No caso de EPT, As soluções fundamentais p_{jk}^* e u_{jk}^* e os núcleos S_{jkl} e D_{jkl} permanecem iguais aos apresentados nas Equações 3.12, 3.14, 3.32, 3.33, porém, as constantes elásticas do material isotrópico devem ser alteradas da seguinte maneira:

$$E^* = E(1 + 2\nu)/(1 + \nu)^2 \quad (3.34)$$

$$\nu^* = \nu(1 + \nu) \quad (3.35)$$

$$\kappa^* = k = E/2(1 + \nu) \quad (3.36)$$

As equações integrais singular e hiper singular apresentadas nas Equações 3.29 e 3.31 são válidas para pontos localizados no interior do domínio. Com elas é possível calcular os deslocamentos e tensões em qualquer ponto interno desde que conhecidos os valores de u e p no contorno. Portanto, antes de buscar a solução interna o problema precisa primeiramente ser resolvido no contorno. Para isso, o MEC propõe avaliar essas equações também para pontos fonte localizadas sobre o contorno. Portanto, nos próximos tópicos, ambas as equações serão avaliadas considerando os pontos fonte no contorno por meio de um processo limite.

3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL SINGULAR ESCRITAS PARA PONTOS NO CONTORNO

Para proceder as integrações necessárias, no caso dos pontos fonte estarem localizados no contorno, as singularidades dos termos nas equações integrais devem ser tratadas a singularidade visto que nesse caso os pontos fonte encontram-se sobre o caminho de integração, ou seja, r pode tender a zero. Para a equação singular essa singularidade vem dos termos u_{jk}^* e p_{jk}^* e é de ordem $\ln(1/r)$ e $1/r$ respectivamente. O tratamento é na realidade efetuar um processo limite para transportar o ponto fonte para o contorno. Assim, para o caso bidimensional pode-se envolver o ponto fonte i em uma região de domínio circular de raio ε com o ponto fonte localizado em seu centro para então avaliar o que acontece com a identidade Somigliana quando esse raio tende a zero. A Figura 3.1 ilustra a situação.

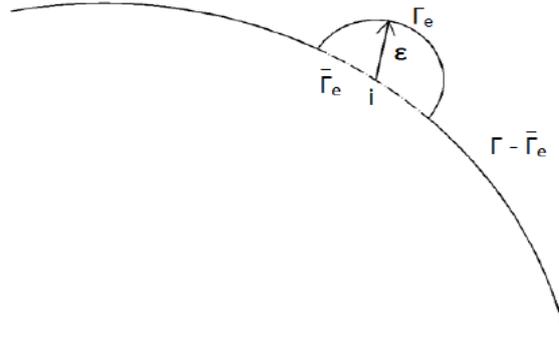


Figura 3.1 Ponto fonte localizado sobre o contorno: caso bidimensional (Oliveira, 2013(Adaptado))

Considerando os novos contornos apresentados na Figura 3.1 e denominando o incremento de domínio como Ω_e é possível realizar o tratamento limite da equação integral singular ou identidade Somigliana:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u_j^{(i)} + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega + \Omega_e} u_{jk}^* b_k d\Omega \right) \quad (3.37)$$

O tratamento limite procede analisando termo a termo as integrais da identidade. Considere primeiramente o primeiro termo do membro direito da equação:

$$\int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* p_k d\Gamma \quad (3.38)$$

No limite temos que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma \quad (3.39)$$

Onde o traço na primeira integral do segundo membro simboliza a presença de um núcleo singular o qual deve ser tratado segundo o senso de Valor Principal de Cauchy (VPC). Além disso, o seguinte limite remanescente também deve ser avaliado:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* p_k d\Gamma = p_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* d\Gamma \quad (3.40)$$

Como a singularidade de u_{jk}^* é de $\ln(1/\varepsilon)$ e o contorno de integração circular produz o termo ε temos que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0 \quad (3.41)$$

Como o limite tende a zero temos que:

$$p_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* d\Gamma = 0 \quad (3.42)$$

Portanto o termo em análise da equação singular não se altera no processo limite sendo apenas necessário considerar a integração no sentido de VPC. Agora considerando a análise do primeiro termo à esquerda da identidade temos:

$$\int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma \quad (3.43)$$

Novamente, no limite a primeira integral se torna uma integral ao longo do contorno Γ a qual deve ser procedida no sentido de VPC. Já a segunda deve ser avaliada uma vez que existe uma singularidade da ordem $1/\varepsilon$ em p_{jk}^* a qual multiplicada pelo ε oriundo do contorno de integração resulta em um limite não nulo. Assim, ao considerarmos que o ponto fonte encontra-se em um contorno suave, o limite da segunda integral resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = -\frac{1}{2} \delta_{jk} u_k = -\frac{1}{2} u_j \quad (3.44)$$

Portanto, depois de realizado o processo limite, a Equação 3.43 resulta:

$$\int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \oint_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_j \quad (3.45)$$

Sendo a integral do segundo membro definida em termos de VPC.

Por fim, vale ressaltar que o processo limite não altera a integral de domínio da identidade, pois no limite, $\Omega + \Omega_e = \Omega$. Portanto, após o processo limite a identidade Somigliana, agora escrita para pontos no contorno, pode ser apresentada como:

$$c_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} + \oint_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_k d\Omega \quad (3.46)$$

Onde para o caso de pontos fonte i pertencentes a contornos suaves o termo livre $c_{jk}^{(i)}$ resulta $\delta_{jk}/2$ ao se considerar o resultado da equação 3.45 somado ao termo $u_j^{(i)}$ original da identidade. Caso o contorno não seja suave no ponto fonte, o valor do Limite 3.44 será um resultado diferente compreendido entre zero e menos um a depender da geometria do contorno. Além disso, tal resultado é de difícil generalização quando se trata de problemas tridimensionais (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1989). Para problemas bidimensionais com pontos fonte localizados em contornos descontínuos, a expressão do termo livre c_{jk} pode ser encontrada em VENTURINI (1988).

3.4 EQUAÇÃO INTEGRAL HIPER SINGULAR ESCRITAS PARA PONTOS NO CONTORNO

Assim como realizado com a equação singular, o tratamento limite também pode ser procedido para a equação hiper singular. Para isso considere novamente o contorno apresentados na Figura 3.1. Assim, é possível proceder com a Equação 3.31 da seguinte maneira.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sigma_{jk}^{(i)} + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} S_{jkl} u_l d\Gamma = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} D_{jkl} p_l d\Gamma \right) \quad (3.47)$$

Portanto, semelhantemente à avaliação da equação integral singular, o processo limite será procedido termo a termo. Tomando-se primeiramente o termo D_{jkl} para a análise é possível perceber que o mesmo possui uma singularidade da ordem $1/r$. Para proceder então o limite inicialmente considere que o termo possa ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} D_{jkl} p_l d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} D_{jkl} p_l d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} p_l d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} p_l^{(i)} d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} p_l^{(i)} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.48)$$

Onde $p_l^{(i)}$ e p_l são as forças de superfície no ponto fonte e no ponto campo respectivamente sendo que ambas agora estão localizadas ao longo do caminho de integração, ou seja, no contorno. Rearranjando a equação 3.48 pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} D_{jkl} p_l d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} [p_l - p_l^{(i)}] d\Gamma \\ &+ p_l^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} D_{jkl} p_l d\Gamma \end{aligned} \quad (3.49)$$

Assumindo válida a hipótese de continuidade de Holder para o campo de forças de superfície verifica-se que o primeiro termo do lado direito da Equação 3.49 é nulo. Já o segundo termo desse mesmo lado é integrável e resulta em um fator independente após a realização da operação limite. Tal fator é apenas função das propriedades elásticas do material e da geometria do contorno sendo o mesmo apresentado a seguir como:

$$p_l^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} D_{jkl} d\Gamma = p_l^{(i)} A_{jkl} \quad (3.50)$$

Por fim o ultimo termo do segundo membro da Equação 3.49 resulta uma integral impropria que deve ser avaliada ao longo do contorno no sentido de Valor Principal de Cauchy sendo representado como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} D_{jkl} p_l d\Gamma = \oint_{\Gamma} D_{jkl} p_l d\Gamma \quad (3.51)$$

Retomando a Equação 3.47, o segundo termo do primeiro membro pode agora ser analisado. Nesse, verifica-se a presença de uma hiper singularidade oriunda do termo S_{jkl} de ordem $1/r^2$. Portanto, para proceder a análise do termo deve-se primeiramente efetuar a expansão dos deslocamentos, em torno do ponto fonte, em série de Taylor. Nessa expansão apenas os dois primeiros termos da série são considerados, pois os demais termos se anulam durante a execução do processo limite. Dessa maneira, é possível reescrever o limite do termo S_{jkl} como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} S_{jkl} u_l d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} S_{jkl} u_l d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} u_l d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} u_{l,m}^{(i)} (x_m - x_m^{(i)}) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} u_{l,m}^{(i)} (x_m - x_m^{(i)}) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} u_l^{(i)} d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} u_l^{(i)} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.52)$$

Reorganizando os termos obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} S_{jkl} u_l d\Gamma \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} [u_l^{(i)} - u_l - u_{l,m}(x_m - x_m^{(i)})] d\Gamma \\
&+ u_l^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} d\Gamma \\
&+ u_{l,m}^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} (x_m - x_m^{(i)}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} S_{jkl} u_l d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Assumindo agora que a derivada do campo de deslocamentos possui continuidade de Holder verifica-se que o primeiro termo do segundo membro da Equação 3.53 é nulo. Já em relação ao segundo e o quarto termo da expressão, esses devem ser analisados conjuntamente. Isso porque mesmo após o procedimento de integração, esses ainda resultam fatores singulares. No entanto, as singularidades resultantes para o segundo e o quarto membro são de mesma ordem e sinais opostos e, portanto se anulam (PORTELA, 1992). Assim, a expressão resultante da soma dos dois termos considerados deve ser tomada no sentido de Parte Finita de Hadamard (PFH) conforme apresentado a seguir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_l^{(i)} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} d\Gamma + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} S_{jkl} u_l d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} S_{jkl} u_l d\Gamma \tag{3.54}$$

Na equação, os dois traços na integral do membro direito indicam que a integração deve ser procedida tomando-se somente a Parte Finita de Hadamard. Por fim, o terceiro termo do segundo membro da Expressão 3.53 é integrável e resulta outro termo independente após a execução do processo limite:

$$u_{l,m}^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} S_{jkl} (x_m - x_m^{(i)}) d\Gamma = u_{l,m}^{(i)} B_{jklm} \tag{3.55}$$

Ainda segundo PORTELA (1992), os termos independentes provenientes da análise de D_{jkl} e S_{jkl} podem ser adicionados de maneira a formar um único termo independente:

$$p_l^{(i)} A_{jkl} - u_{l,m}^{(i)} B_{jklm} = \frac{1}{2} \sigma_{jk}^{(i)} \tag{3.56}$$

O fator 1/2 resulta da consideração de contornos suaves no posicionamento do ponto fonte.

A partir das considerações apresentadas a equação integral para representação das tensões pode ser escrita para pontos no contorno como:

$$\frac{1}{2}\sigma_{jk}^{(i)} + \oint_{\Gamma} S_{jkl}u_l = \oint_{\Gamma} D_{jkl}p_l d\Gamma \quad (3.57)$$

Utilizando a relação de equilíbrio de superfície apresentada no segundo capítulo, Equação 2.3, é possível escrever a equação integral hiper singular para a representação de forças de superfície dos pontos no contorno conforme apresentado:

$$\frac{1}{2}p_j^{(i)} + \eta_k^{(i)} \oint_{\Gamma} S_{jkl}u_l = \eta_k^{(i)} \oint_{\Gamma} D_{jkl}p_l d\Gamma \quad (3.58)$$

A partir das equações integrais de deslocamentos e forças de superfície escritas para o contorno, Equações 3.46 e 3.58, é possível então apresentar nos seguintes tópicos como as formulações singular e hiper singular do MEC propõem a introdução do contorno discretizado em elementos e pôr fim a construção do sistema de equações algébricas característico.

Vale ressaltar que como a equação hiper singular se origina da diferenciação da equação singular, no equacionamento da mesma foram impostas condições de continuidade sobre os campos de deslocamento e forças do contorno. Assim, Em se tratando da formulação hiper singular do MEC, para assegurar tal continuidade é necessário a utilização de elementos de contorno especiais os quais serão brevemente apresentados a seguir no tópico 3.8

3.5 FORMULAÇÃO SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Conforme apresentado no Tópico 3.3, a equação integral singular pode ser escrita para pontos localizados no contorno através de um processo limite. Assim, o MEC propõe que a resolução dessa equação integral deve ser procedida numericamente através de uma discretização do contorno em uma quantidade finita de elementos. Cada elemento possui uma determinada quantidade de nós por onde os campos dos deslocamentos e forças de superfície

do contorno serão interpolados. Para isso, utilizam-se funções de forma polinomiais que interpolam essas grandezas a partir dos valores nodais nos elementos. Dessa maneira, considerando os nós do contorno como pontos fonte e aplicando a Equação 3.46 para cada um desses nós, é possível obter um sistema de equações lineares algébricas. Uma vez aplicada as condições de contorno nesse sistema, pode ser encontrada uma resposta única que contém os valores incógnitos dos deslocamentos e das forças de superfície nodais os quais são usados para construir a solução aproximada no contorno.

Adotando-se uma notação matricial é apresentada a seguir a interpolação de deslocamentos e forças de superfície em um elemento j com contorno Γ_j .

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}} &= \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{u}}^j \\ \underline{\underline{p}} &= \underline{\underline{\phi}} \underline{\underline{p}}^j \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sendo $\underline{\underline{u}}$ e $\underline{\underline{p}}$ os deslocamentos e forças de superfície em qualquer ponto do contorno Γ_j e $\underline{\underline{u}}^j$ e $\underline{\underline{p}}^j$ são vetores que contém os deslocamentos e forças de superfície nodais do elemento j nas direções x, y (caso bidimensional). Já $\underline{\underline{\phi}}$ é a matriz de funções de forma do elemento j o qual é composto por n nós:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Da mesma maneira as soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfícies anteriormente apresentadas em notação indicial nas Equações 3.12 e 3.14 podem ser agrupadas em forma matricial conforme a equação a seguir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{u}}^* &= \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{p}}^* &= \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Nessas matrizes, os coeficientes u_{lk}^* e p_{lk}^* são respectivamente os deslocamentos e forças de superfície na direção k devido a uma força unitária aplicada no ponto (i) na direção l .

Assim como os deslocamentos e forças de superfície na Equação 3.59, as forças de domínio em qualquer ponto de Ω também podem ser expressas de forma vetorial como:

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3.62)$$

A partir das definições apresentadas em notação matricial a Equação integral singular 3.46 pode ser reescrita como:

$$\underline{c}^{(i)} \underline{u}^{(i)} + \int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{u}^* \underline{b} d\Omega \quad (3.63)$$

Sendo que para contornos suaves

$$\underline{c}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Na Equação 3.63, (i) é o ponto fonte de aplicação da carga unitária. Levando em consideração a discretização do contorno proposta pelo MEC a Equação integral 3.63 pode ser reescrita como:

$$\underline{c}^{(i)} \underline{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \phi d\Gamma \right\} \underline{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \phi d\Gamma \right\} \underline{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \underline{u}^* \underline{b} d\Omega \right\} \quad (3.65)$$

O somatório de $j = 1$ até NE indica que a integral ao longo de todo o contorno fechado é igual à soma das integrais nos Γ_j de todos os NE elementos de contorno. O tratamento da integral de domínio em 3.65 pode ser procedido por subdivisão do domínio em M células e então a integral pode ser calculada como o somatório das integrais em cada uma dessas unidades. No caso de forças de volume com comportamento constante ou linear é possível ainda transformar a integral de domínio em uma integral de contorno através do Método da reciprocidade dual.

As integrais da Equação 3.65 são geralmente calculadas numericamente devido às dificuldades de solução analítica. Uma das técnicas de integração numérica que pode ser utilizada nesse caso é a Quadratura de Gauss.

Para proceder a integração numérica no contorno dos elementos por Quadratura de Gauss é necessário primeiramente correlacionar as coordenadas globais x, y dos pontos pertencentes aos contornos Γ_j com a coordenada adimensionais de Gauss ξ cujo intervalo varia de -1 à 1 . A Figura 3.2 ilustra a parametrização das coordenadas cartesianas.

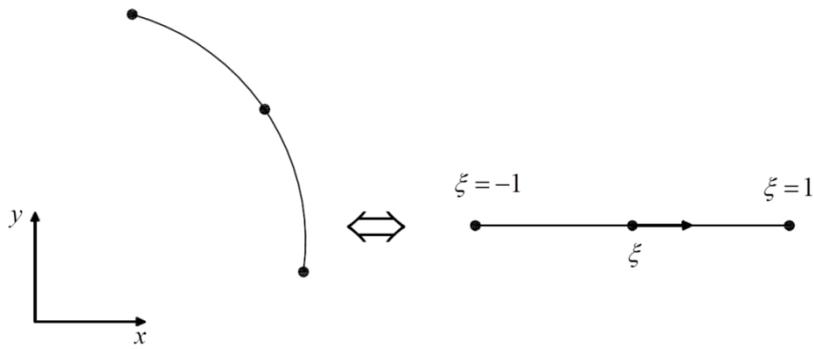


Figura 3.2 Mapeamento das coordenadas globais por coordenada adimensional de Gauss

A correlação entre coordenadas pode ser feita usando as mesmas funções de forma que interpolam os campos de deslocamento e forças de superfície no contorno do problema. As coordenadas globais de qualquer ponto em um dado elemento podem então ser expressas em função das coordenadas nodais como.

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \phi_i(\xi)\bar{x}_i \\ y(\xi) &= \phi_i(\xi)\bar{y}_i \end{aligned} \quad (3.66)$$

Com a parametrização das coordenadas, as integrais podem então ser procedidas considerando o espaço adimensional. No entanto, é necessário levar em conta a transformação dos valores adimensionais para às dimensões do espaço real do problema. Isso é feito a partir do Jacobiano cuja representação geométrica é apresentada na Figura 3.3.

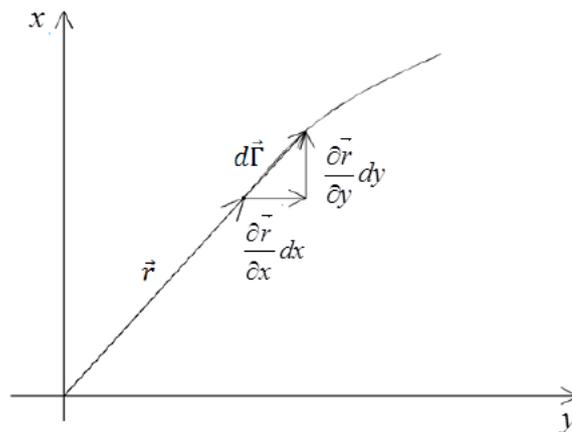


Figura 3.3 Interpretação geométrica do jacobiano (BREBBIA, TELLES, WROBEL, 1984 (Adaptado))

Considerando a figura é possível calcular o Jacobiano $|J(\xi)|$ como:

$$d\Gamma^2(\xi) = \left[\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi^2 \quad (3.67)$$

$$\frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = |J(\xi)|$$

$$d\Gamma(\xi) = |J(\xi)|d\xi$$

Para calcular as derivadas de x e y em relação à ξ basta utilizar a interpolação da Equação 3.66 e proceder a derivação:

$$\frac{dx}{d\xi} = \left[\frac{d}{d\xi} \phi_i(\xi) \right] \bar{x}_i$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \left[\frac{d}{d\xi} \phi_i(\xi) \right] \bar{y}_i \quad (3.68)$$

Portanto, a Equação integral 3.65 pode ser reescrita em função de coordenadas adimensionais ξ, η como:

$$\underline{c}^{(i)} \underline{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{\phi} |J| d\xi \right\} \underline{u}^j$$

$$= \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{\phi} |J| d\xi \right\} \underline{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \underline{u}^* \underline{b} |L| d\xi d\eta \right\} \quad (3.69)$$

Onde $|L|$ representa outro jacobiano a ser definido no domínio.

Com os limites de integração adimensionais de cada elemento definidos de -1 à 1, agora é possível avaliar a integração dos elementos Γ_j numericamente utilizando a Quadratura de Gauss.

$$\underline{c}^{(i)} \underline{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{p}^* \underline{\phi} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{u}^j$$

$$= \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{u}^* \underline{\phi} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{p=1}^r \left(\underline{u}^* \underline{b} |L| \right)_p \omega_p \right\} \quad (3.70)$$

Onde NP é o número de pontos de integração no contorno de um elemento, ω_k são os pesos de Gauss nesses respectivos pontos, r é o número de pontos de integração nas células e ω_p são os respectivos pesos e as funções $\underline{p}^* \underline{\phi}$, $\underline{u}^* \underline{\phi}$ e $\underline{u}^* \underline{b}$ devem ser avaliadas nos pontos de integração.

Uma vez procedida a integração numérica, a Equação 3.70 resulta em:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{u}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{H}}^{ij} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{G}}^{ij} \underline{\underline{p}}^j + \sum_{S=1}^M \underline{\underline{B}}^{is} \quad (3.71)$$

As matrizes $\underline{\underline{H}}^{ij}$ e $\underline{\underline{G}}^{ij}$, calculadas para um ponto fonte i e um elemento j , são conhecidas como matrizes de influência dos elementos de contorno e para o caso bidimensional são de ordem $2 \times 2N$, sendo N o número de nós pertencentes ao contorno do elemento j . Tai matrizes podem ser calculadas como:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}^{ij} &= \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{p}}^* \underline{\underline{\phi}} d\Gamma = \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{p}}^* \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \\ \underline{\underline{G}}^{ij} &= \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{\phi}} d\Gamma = \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \end{aligned} \quad (3.72)$$

Considerando agora a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}^{ij} &= \underline{\underline{H}}^{ij} & \text{Se } i \neq j \\ \underline{\underline{H}}^{ij} &= \underline{\underline{H}}^{ij} + \underline{\underline{c}}^{(i)} & \text{Se } i = j \end{aligned} \quad (3.73)$$

a Equação 3.71 pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{H}}^{ij} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{G}}^{ij} \underline{\underline{p}}^j + \sum_{S=1}^M \underline{\underline{B}}^{is} \quad (3.74)$$

Essa equação representa a contribuição de um ponto fonte i ao longo de todos os elementos de contorno da estrutura. Adotando-se por vez cada nó do contorno como ponto fonte e somando a contribuição de todos os pontos fontes, o sistema de equações algébricas global da estrutura pode ser apresentado em forma matricial conforme a seguir.

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{B}} \quad (3.75)$$

Onde os vetores $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$ representam os vetores de deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno e $\underline{\underline{B}}$ é um vetor oriundo das forças de volume. Aplicando as condições de deslocamento e forças prescritas no contorno do problema é possível reorganizar o sistema procedendo convenientes trocas de colunas de modo que todos os valores incógnitos do contorno sejam agrupados em um vetor $\underline{\underline{X}}$. Assim, o sistema final do MEC pode ser apresentado como:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{B}} \quad (3.76)$$

3.6 FORMULAÇÃO HIPER SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

De maneira análoga ao procedido com a equação integral singular, o MEC propõe que a resolução numérica da equação integral hiper singular, Equação 3.58, deve ser realizada numericamente por intermédio de uma discretização do contorno. Assim o sistema final de equações é novamente obtido somando-se as contribuições de todos os pontos fontes do contorno porém calculados considerando os núcleos hiper singulares $\eta_k D_{jkl}$ e $\eta_k S_{jkl}$. Para melhor apresentar o equacionamento, considere a notação matricial para os termos D_{jkl} , S_{jkl} e também para o cosseno diretor do ponto fonte i , $\eta_k^{(i)}$, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \begin{bmatrix} D_{111} & D_{112} \\ D_{121} & D_{122} \\ D_{211} & D_{212} \\ D_{221} & D_{222} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{S}} &= \begin{bmatrix} S_{111} & S_{112} \\ S_{121} & S_{122} \\ S_{211} & S_{212} \\ S_{221} & S_{222} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\eta}}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \eta_1^{(i)} & 0 & \eta_2^{(i)} & 0 \\ 0 & \eta_1^{(i)} & 0 & \eta_2^{(i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Considerando também a notação matricial dos outros termos apresentada no tópico anterior é possível reescrever a Equação 3.58 após a discretização do contorno em NE elementos como:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{p}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \underline{\underline{\eta}}^{(i)} \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{S}} \phi d\Gamma \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \underline{\underline{\eta}}^{(i)} \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{D}} \phi d\Gamma \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (3.78)$$

Procedendo numericamente a integração no contorno Γ_j por quadratura de Gauss obtém-se:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{p}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \underline{\underline{\eta}}^{(i)} \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \underline{\underline{\eta}}^{(i)} \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (3.79)$$

A partir de 3.79 é possível proceder as integrações numéricas e reescrever a Equação como:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{p}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{H}}^{ij} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{\hat{G}}}^{ij} \underline{\underline{p}}^j \quad (3.80)$$

Onde $\underline{\underline{H}}^{ij}$ e $\underline{\underline{\hat{G}}}^{ij}$ São as matrizes de influência dos elementos em relação ao ponto fonte i obtidas com a formulação hiper singular. Incorporando ainda o termo livre $\underline{\underline{c}}^{(i)}$ na matriz $\underline{\underline{\hat{G}}}^{ij}$ temos:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}^{ij} &= \underline{\underline{\hat{G}}}^{ij} & \text{Se } i \neq j \\ \underline{\underline{G}}^{ij} &= \underline{\underline{\hat{G}}}^{ij} - \underline{\underline{c}}^{(i)} & \text{Se } i = j \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dessa maneira a Equação 3.80 pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{H}}^{ij} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \underline{\underline{G}}^{ij} \underline{\underline{p}}^j \quad (3.82)$$

Com a contribuição de todos os pontos fontes da estrutura o sistema de equações global obtido via formulação hiper singular pode ser apresentado em forma matricial como:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (3.83)$$

Com o sistema montado, novamente basta impor as condições de contorno do problema e encontrar a solução única para os valores incógnitos de deslocamentos e forças do contorno.

3.7 MÉTODO DE SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

Nos tópicos anteriores as formulações singular e hiper singular do MEC foram abordadas introduzindo o conceito de integração numérica por quadratura de Gauss. No entanto, os núcleos integrais das formulações apresentam distintos tipos de singularidades localizadas no ponto fonte. Considerando as Equações 3.69 e 3.78 é possível perceber que com a discretização do contorno em NE elementos o ponto fonte estará localizado no contorno Γ_j de algum dos elementos. Portanto, a integração numérica apresentada nos tópicos anteriores não é válida para o contorno do elemento que contém o ponto fonte. Nesses casos, como $r \rightarrow 0$, os núcleos integrais da formulação se tornam singulares no ponto fonte e a integral de contorno no sentido de Riemann deixa de ser válida. Conforme comentado anteriormente nos Tópicos 3.3 e 3.4, a integração nesses elementos deve ser procedida no

sentido de Valor Principal de Cauchy ou ainda Parte Finita de Hadamard a depender do tipo de singularidade apresentada. A seguir o procedimento para a integração dos elementos que contém o ponto fonte será descrito mais detalhadamente. Primeiramente será abordado o procedimento para os núcleos da formulação singular e posteriormente para os núcleos da formulação hiper singular.

Segundo ALIABADI (2002), uma maneira de tratar núcleos de integração singulares consiste em subtrair o ponto de singularidade dando origem a um novo núcleo regular e uma nova integral singular a qual pode ser integrada analiticamente de uma forma mais simples.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\text{Singular}} & & \boxed{\text{Regular}} & & \boxed{\text{Singular}} \\
 \\
 \int_{-1}^1 F(x)dx & = & \int_{-1}^1 [F(x) - F^*(x)]dx & + & \int_{-1}^1 F^*(x)dx & \quad (3.84)
 \end{array}$$

Sendo que $F(x)$ e $F^*(x)$ são funções com a mesma ordem de singularidade, $[F(x) - F^*(x)]$ é, portanto, um núcleo regular e o último termo é uma integral singular remanescente o qual é menos complexa e pode ser resolvida analiticamente. A essa técnica dá-se o nome de Método de Subtração de Singularidade (MSS).

Baseado nesse conceito, KZAM (2009) realiza a subtração das singularidades presentes nos núcleos das formulações elastostáticas do MEC com ordens de singularidade $\ln(r)$, $1/r$ e $1/r^2$. Nesse caso, a nova integral que é somada e subtraída segundo o conceito do MSS corresponde à integral dos núcleos do MEC sobre o contorno de um elemento auxiliar de geometria linear o qual tangencia o elemento curvo em análise no ponto fonte. Tal procedimento foi adotado no trabalho para tratar as integrações singulares em elementos de alta ordem curvos e será apresentado em mais detalhes a seguir.

Para isso, considere um elemento curvo de contorno Γ de ordem qualquer contendo um ponto fonte. Considere também que esse ponto de singularidade será designado pela sua coordenada adimensional ξ_0 .

As coordenadas cartesianas no elemento curvo podem ser escritas a partir da parametrização apresentada na equação 3.66. Já no caso das coordenadas no elemento auxiliar, essas podem ser obtidas através de uma expansão em série de Taylor nas vizinhanças do ponto fonte conforme apresentado a seguir.

$$\begin{aligned} x^*(\xi) &= x(\xi_0) + x_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n) \\ y^*(\xi) &= y(\xi_0) + y_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Onde $\varepsilon = \xi - \xi_0$ representa o raio da expansão e $o(\varepsilon^n)$ os termos de ordem superior da série. Desconsiderando os termos de ordem superior as coordenadas cartesianas no elemento reto podem ser calculadas como:

$$\begin{aligned} x^*(\xi) &= x(\xi_0) + x_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon \\ y^*(\xi) &= y(\xi_0) + y_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.86)$$

De acordo com os conceitos da geometria analítica, a Equação 3.86 representa uma reta tangente ao elemento curvo no ponto fonte. Considerando o intervalo de variação da coordenada adimensional $[-1, +1]$ pode-se representar o elemento auxiliar reto de dimensões finitas conforme apresentado na Figura 3.4.

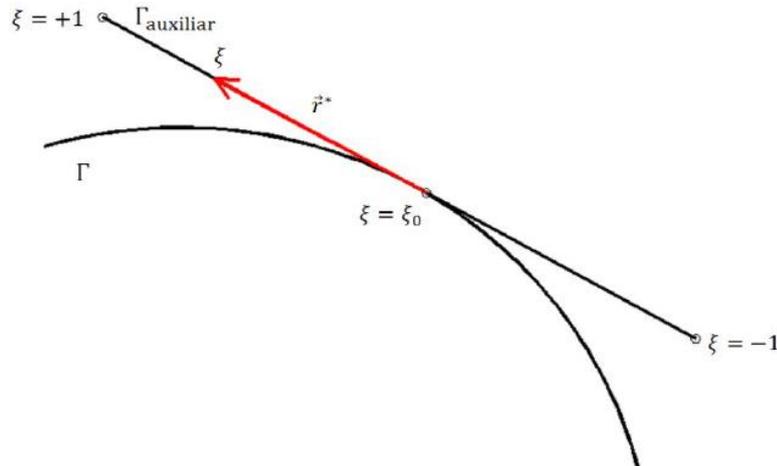


Figura 3.4 Elemento auxiliar de geometria reta (OLIVEIRA, 2013)

A distância r medida entre um ponto qualquer de um elemento curvo singular e o ponto fonte pode ser calculada como $r = \sqrt{(x(\xi) - x(\xi_0))^2 + (y(\xi) - y(\xi_0))^2}$ onde $x(\xi)$ e $y(\xi)$ podem ser obtidos de 3.66. Já no caso do elemento auxiliar, define-se como r^* a distancia entre um ponto qualquer desse elemento reto e o ponto fonte. No intuito de obter uma expressão para r^* , é possível escrever a seguinte relação a partir da Equação 3.86 e utilizando também 3.66.

$$\begin{aligned} x^*(\xi) - x(\xi_0) &= x_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon = \phi_{i,\xi}(\xi_0)x_i\varepsilon \\ y^*(\xi) - y(\xi_0) &= y_{,\xi}(\xi_0)\varepsilon = \phi_{i,\xi}(\xi_0)y_i\varepsilon \end{aligned} \quad (3.87)$$

Assim, a distância r^* pode ser definida ao longo do elemento auxiliar como:

$$\begin{aligned}
r^* &= \sqrt{(x^*(\xi) - x(\xi_0))^2 + (y^*(\xi) - y(\xi_0))^2} \\
&= \sqrt{(\phi_{i,\xi}(\xi_0)x_i\varepsilon)^2 + (\phi_{i,\xi}(\xi_0)y_i\varepsilon)^2} \\
&= \sqrt{((\phi_{i,\xi}(\xi_0)x_i)^2 + (\phi_{i,\xi}(\xi_0)y_i)^2)\varepsilon^2} = J(\xi_0)|\varepsilon|
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Onde $J(\xi_0)$ representa o jacobiano anteriormente apresentado na Equação 3.67 avaliado no ponto singular. A definição dessa nova distância é de fundamental importância para a subtração de singularidade, uma vez que nas proximidades do ponto fonte temos que $r^* \rightarrow r \rightarrow 0$. Portanto, no limite os termos singulares calculados sobre o elemento curvo se confundem com aqueles calculados sobre o elemento reto e logo, quando subtraídos, resultam zero.

Introduzindo esses conceitos é possível então proceder o método da subtração de singularidade para as integrais das formulações singular e hiper singular do MEC. Primeiramente, considerando a equação integral singular, na ausência das forças de domínio, a mesma pode ser expressa como:

$$c_{jk}^{(i)}u_k^{(i)} + \oint_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma \tag{3.89}$$

Nessa equação as singularidades encontradas nas integrais dos núcleos p_{jk}^* e u_{jk}^* são de ordem $1/r$ e $\ln(r)$ respectivamente. Para proceder a subtração da singularidade analisa-se somente a porção de contorno Γ_j do elemento j que contém o ponto singular. Para avaliar primeiramente o termo com integrando u_{jk}^* , considere a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas adimensionais e a aproximação das forças no contorno:

$$\oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \left[\int_{-1}^{+1} u_{jk}^*(\xi_0, \xi) \phi_l(\xi) J_m(\xi) d\xi \right] p_k^{lm} \tag{3.90}$$

Substituindo então u_{jk}^* , a expressão resulta:

$$\oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} d\xi \\ + \int_{-1}^{+1} u_2 \phi_l(\xi) r_{,j} r_{,k} J_m(\xi) d\xi \end{array} \right\} p_k^{lm} \quad (3.91)$$

Sendo que $u_1 = -(3 - 4\nu)/[8\pi\kappa(1 - \nu)]$ e $u_2 = 1/[8\pi\kappa(1 - \nu)]$ são constantes definidas visando a facilitar a notação. O termo integral contendo u_2 é regular e, portanto pode ser integrado numericamente por quadratura de Gauss. Já o termo que contém u_1 possui singularidade logarítmica e, Assim, no mesmo o MSS deve ser aplicado resultando em:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} d\xi \\ = \int_{-1}^{+1} \{u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} \\ - u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l^*(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk}\} d\xi \\ + \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l^*(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} d\xi \end{aligned} \quad (3.92)$$

Em que $\phi_l^*(\xi) = \phi_l(\xi_0) + \phi_{l,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n)$ é a expansão em forma de série de Taylor das funções de forma. Tal expansão representa portanto as funções de forma escritas sobre o elemento auxiliar. Para as singularidades de ordem $\ln(r)$ e $1/r$ é necessário considerar apenas o termo constante da expansão para garantir a subtração da singularidade. Incluindo a expansão, a Expressão 3.92 resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} d\xi \\ = \int_{-1}^{+1} \{u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \delta_{jk} \\ - u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \delta_{jk}\} d\xi \\ + \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \delta_{jk} d\xi \end{aligned} \quad (3.93)$$

Verifica-se que a primeira integral do segundo membro é agora regular uma vez que as singularidades encontradas no limite $\xi \rightarrow \xi_0$ ($r \rightarrow r^* \rightarrow 0$) se anulam. Por fim, a ultima integral pode ser procedida analiticamente no sentido de Valor Principal de Cauchy conforme apresentado a seguir:

$$\oint_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \delta_{jk} d\xi = u_1 \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \delta_{jk} VPC^{(\ln r^*)} \quad (3.94)$$

Em que:

$$\begin{aligned} VPC^{(\ln r^*)} &= \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left\{ \int_{-1}^{-(\xi - \xi_0)} \ln[r^*(\xi_0, \xi)] d\xi + \int_{(\xi - \xi_0)}^{+1} \ln[r^*(\xi_0, \xi)] d\xi \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1 - \xi_0}^{-\varepsilon} \ln[r^*(\xi_0, \varepsilon)] d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1 + \xi_0} \ln[r^*(\xi_0, \varepsilon)] d\varepsilon \right\} \\ &= (1 + \xi_0) \ln[(1 + \xi_0) J_m(\xi_0)] + (1 - \xi_0) \ln[(1 - \xi_0) J_m(\xi_0)] \\ &\quad - (1 + \xi_0) + (1 - \xi_0) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Relembrando que $\varepsilon = \xi - \xi_0$ é o raio adimensional da expansão de r^* . Na Equação 3.95 ouve uma mudança de variável de ξ para ε antes de proceder a integração e o processo limite na obtenção do $VPC^{(\ln r^*)}$. Portanto, a expressão final que pode ser implementada computacionalmente para o cálculo da integral 3.90 sobre o contorno do elemento que contém o ponto singular é dada por:

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \\ &\left\{ \int_{-1}^{+1} u_1 \{ \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) - \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \} \delta_{jk} d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^{+1} u_2 \phi_i(\xi) r_{,j} r_{,k} J_m(\xi) d\xi + u_1 \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \delta_{jk} VPC^{(\ln r^*)} \right\} p_k^{lm} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Nessa expressão as integrais podem ser então procedidas numericamente por quadratura de Gauss, pois agora todos os integrandos são regulares. Já no caso da integral do termo p_{jk}^* da Equação 3.89 sobre o contorno Γ_j do elemento singular j , procedendo de maneira semelhante a mesma pode ser implementada computacionalmente fazendo-se uso da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} p_{jk}^* u_k d\Gamma &= \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{p}_{jk}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_l(\xi) J_m(\xi) - \frac{\bar{p}_{jk}(\xi_0)}{(\xi - \xi_0)} \phi_l(\xi_0) \right] d\xi \right. \\ &\quad \left. + \phi_l(\xi_0) \bar{p}_{jk}(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \right\} u_k^{lm} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} VPC^{(1/\varepsilon)} &= \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left\{ \int_{-1}^{-(\xi-\xi_0)} \frac{1}{(\xi-\xi_0)} d\xi + \int_{(\xi-\xi_0)}^{+1} \frac{1}{(\xi-\xi_0)} d\xi \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1+\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\} = \ln(1-\xi_0) - \ln(1+\xi_0) \end{aligned} \quad (3.98)$$

e os termos $\bar{p}_{jk}(\xi_0, \xi) = -[(1-2\nu)(r_n \delta_{jk} + r_j \eta_k - r_k \eta_j) + 2r_{,n} r_{,j} r_{,k}] / 4\pi(1-\nu)$ e $\bar{p}_{jk}(\xi_0) = -\{(1-2\nu)[r_{,j}(\xi_0) \eta_k(\xi_0) - r_{,k}(\xi_0) \eta_j(\xi_0)]\} / 4\pi(1-\nu)$.

Portanto, para resolver os problemas elastostáticos via formulação singular, as expressões 3.96 e 3.97 devem ser adotadas para calcular as integrais dos elementos que contenham as singularidades.

No intuito de utilizar também a formulação hiper singular para resolver os problemas de elasticidade, os núcleos da equação integral hiper singular devem ser regularizados para a integração do elemento que contém o ponto fonte. Assim, as singularidades de ordem $1/r$ e $1/r^2$ presentes nos núcleos D_{jkl} e S_{jkl} podem também ser tratadas via MSS. Para isso, considere novamente a equação hiper singular do MEC.

$$\frac{1}{2} p_j^{(i)} + \eta_k^{(i)} \int_{\Gamma} S_{jkl} u_l = \eta_k^{(i)} \int_{\Gamma} D_{jkl} p_l d\Gamma \quad (3.99)$$

Assim como no caso da equação singular, a subtração de singularidade será procedida termo a termo. Considere primeiramente o termo integral D_{jkl} apresentado de acordo com a seguinte notação:

$$D_{jkl}(\xi_0, \xi) = \frac{D_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \quad e \quad D_{jkl}^*(\xi_0) = \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} \quad (3.100)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} D_{jkl}^1(\xi_0, \xi) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left(\delta_{jk} r_{,l}(\xi_0, \xi) + \delta_{lj} r_{,k}(\xi_0, \xi) - \delta_{kl} r_{,j}(\xi_0, \xi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2r_{,j}(\xi_0, \xi) r_{,k}(\xi_0, \xi) r_{,l}(\xi_0, \xi) \right\} \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} D_{jkl}^2(\xi_0) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left(\delta_{jk} r_{,l}^*(\xi_0) + \delta_{lj} r_{,k}^*(\xi_0) - \delta_{kl} r_{,j}^*(\xi_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2r_{,j}^*(\xi_0) r_{,k}^*(\xi_0) r_{,l}^*(\xi_0) \right\} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Com essa notação, a integral do elemento que contém o ponto singular pode ser escrita da seguinte maneira seguindo as premissas do MSS.

$$\begin{aligned}
\eta_k(\xi_0) \int_{-1}^{+1} D_{jkl}(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) J_n(\xi) p_l^{mn} d\xi \\
= \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{D_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) J_n(\xi) \right. \right. \\
\left. \left. - \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) \right] d\xi \right. \\
\left. + \int_{-1}^{+1} \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) d\xi \right\} p_l^{mn}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Novamente as funções de forma são expandidas em série de Taylor onde apenas o termo constante da expansão foi considerado. Percebe-se também que o primeiro termo entre chaves no segundo membro da Equação 3.103 é agora regular. Já o último termo precisa ser integrado analiticamente no sentido de VPC. Considerando a expansão das funções de forma, a mudança de variável na integral (de ξ para ε) e a definição de r^* apresentada na Equação 3.88 temos que a integração analítica pode ser procedida no sentido de VPC da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\eta_k(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) d\xi \\
= \eta_k(\xi_0) \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{J_n(\xi_0)} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{1+\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \\
= \eta_k(\xi_0) D_{jkl}^2(\xi_0) \phi_m^*(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Portanto, a integral do termo contendo o núcleo D_{jkl} na Equação 3.99 ao longo do contorno Γ_j do elemento singular pode ser implementada computacionalmente fazendo uso da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\eta_k^{(i)} \int_{\Gamma_j} D_{jkl} p_l d\Gamma \\
= \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{D_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) J_n(\xi) - \frac{D_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) \right] d\xi \right. \\
\left. + \eta_k(\xi_0) D_{jkl}^2(\xi_0) \phi_m^*(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Por fim, o MSS também deve ser aplicado à integral do termo S_{jkl} na Equação 3.99. Para isso considere um procedimento semelhante ao anterior onde se denomina:

$$S_{jkl}(\xi_0, \xi) = \frac{S_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)^2} \quad e \quad S_{jkl}^*(\xi_0) = \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \quad (3.106)$$

Sendo que os termos S_{jkl}^1 e S_{jkl}^2 podem ser obtidos a partir da Equação 3.32 considerando as expressões de r e r^* respectivamente. Vale ressaltar que o termo $r_{,n}$, ou ainda $\partial r / \partial \eta$, é nulo para o núcleo S_{jkl}^* , pois o mesmo é escrito sobre o elemento auxiliar de geometria reta, ou seja, η é constante ao longo do elemento. Assim, a integral do elemento que contém o ponto de singularidade pode ser tratada com o MSS da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \eta_k(\xi_0) \int_{-1}^{+1} S_{jkl}(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) J_n(\xi) u_l^{mn} d\xi \\ = \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{S_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi) J_n(\xi) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) \right] d\xi \right. \\ \left. + \int_{-1}^{+1} \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m^*(\xi_0) J_n(\xi_0) d\xi \right\} u_l^{mn} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Porém dessa vez, para proceder a subtração de singularidade de um núcleo hiper singular $1/r^2$ é necessário considerar na expansão em série de Taylor das funções de forma os dois primeiros termos:

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) + \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon \quad (3.108)$$

Portanto, a Expressão 3.107 resulta:

$$\begin{aligned} \eta_k(\xi_0) \int_{-1}^{+1} S_{jkl}(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) J_n(\xi) u_l^{mn} d\xi \\ = \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{S_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi) J_n(\xi) - \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi_0) J_n(\xi_0) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon J_n(\xi_0) \right] d\xi \right. \\ \left. + \int_{-1}^{+1} \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi_0) J_n(\xi_0) d\xi \right. \\ \left. + \int_{-1}^{+1} \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon J_n(\xi_0) d\xi \right\} u_l^{mn} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Na Expressão 3.109, a primeira integral entre chaves não é mais singular uma vez que a hiper singularidade foi subtraída. Já a segunda e a terceira integral devem ser procedidas analiticamente no sentido de PFH e VPC uma vez que possuem singularidades de ordens $1/r^2$ e $1/r$ respectivamente. Tomando a primeira dessas duas últimas parcelas podemos proceder da seguinte maneira.

$$\eta_k(\xi_0) \oint_{-1}^{+1} \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi_0) J_n(\xi_0) d\xi = \eta_k(\xi_0) \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{J_n(\xi_0)} \phi_m(\xi_0) PFH^{(1/\varepsilon^2)} \quad (3.110)$$

Sendo

$$\begin{aligned} PFH^{(1/\varepsilon^2)} &= \text{Parte Finita} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1+\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \right] \right\} \\ &= \text{Parte Finita} \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0} \right] \right\} = -\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0} \end{aligned} \quad (3.111)$$

Ao proceder as integrações de todos elementos de contorno singulares para a construção do sistema algébrico do MEC, a soma das partes singulares desprezadas no limite da equação 3.111 se anulam desde que o contorno dos problemas seja fechados.

Já em relação à última integral da Equação 3.109, essa pode ser resolvida analiticamente no sentido de VPC como:

$$\eta_k(\xi_0) \oint_{-1}^{+1} \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon J_n(\xi_0) d\xi = \eta_k(\xi_0) \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{J_n(\xi_0)} \phi_{m,\xi}(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \quad (3.112)$$

Portanto, a integral do termo contendo o núcleo S_{jkl} na Equação 3.99 para no contorno Γ_j do elemento singular pode ser finalmente implementada computacionalmente fazendo uso da seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\eta_k^{(i)} \oint_{\Gamma} S_{jkl} u_l = \eta_k(\xi_0) & \left\{ \left[\frac{S_{jkl}^1(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi) J_n(\xi) - \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_m(\xi_0) J_n(\xi_0) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon J_n(\xi_0) \right] d\xi \right. \\
& + \eta_k(\xi_0) \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{J_n(\xi_0)} \phi_m(\xi_0) PFH^{(1/\varepsilon^2)} \\
& \left. + \eta_k(\xi_0) \frac{S_{jkl}^2(\xi_0)}{J_n(\xi_0)} \phi_{m,\xi}(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \right\} u_l^{mn}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

A Expressão 3.113 esclarece o porquê é necessária a utilização de elementos especiais (elementos descontínuos) em se tratando de utilizar da formulação hiper singular do MEC para solucionar os problemas. No caso de elementos contínuos, em que $\xi_0 = \pm 1$, a expressão 3.113 se tornaria singular inviabilizando assim a determinação da integral do termo S_{jkl} . Portanto a formulação hiper singular não pode ser avaliada através de elementos contínuos convencionais.

Para a formulação singular do MEC os elementos contínuos podem até ser utilizados desde que alguns cuidados sejam tomados para que as Expressões 3.96 e 3.97 possam ser implementadas computacionalmente.

Por fim vale comentar que as Expressões 3.96, 3.97, 3.105 e 3.113 permitem o uso de quadraturas desde que se tenha a precaução de escolher um número de pontos de integração tal que nenhum desses coincida com o ponto fonte, pois nesse caso ter-se-ia uma situação onde $\xi = \xi_0 \neq \pm 1$, o que anularia os raios r e r^* gerando um mau condicionamento do sistema de equações algébricas.

3.8 ELEMENTOS DESCONTÍNUOS

Para viabilizar a utilização da formulação hiper singular foram adotados na discretização dos contornos elementos descontínuos. Nesses elementos, os nós de extremidade $\xi = \pm 1$ são levemente deslocados para o interior do elemento. Dessa maneira é possível aplicar condições de forças prescritas distintas em elementos adjacentes sem que haja uma descontinuidade no campo de tal grandeza ao longo do contorno. A Figura 3.5 alustra o procedimento.

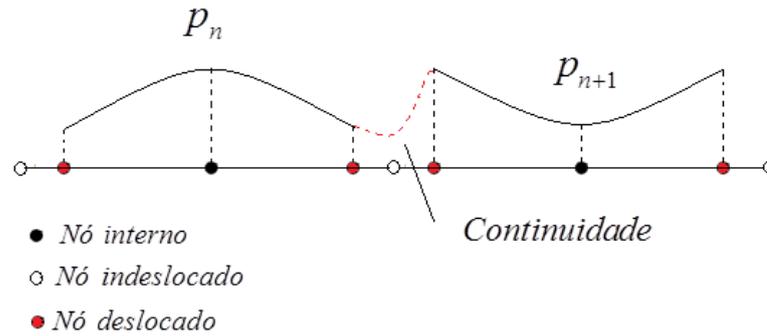


Figura 3.5 Continuidade de forças ao longo dos elementos descontínuos

Além disso, quando elementos adjacentes formam cantos angulosos, o contorno deixa de ser suave no ponto de interseção dos elementos. Nessa situação a utilização de elementos descontínuos também é interessante pois, os nós da interseção são afastados do ponto descontínuo do contorno evitando assim a necessidade de calcular um termo livre c_{jk} que seja diferente de $\delta_{jk}/2$. A Figura 3.6 apresenta o esquema para tratar os cantos angulosos com elementos descontínuos.

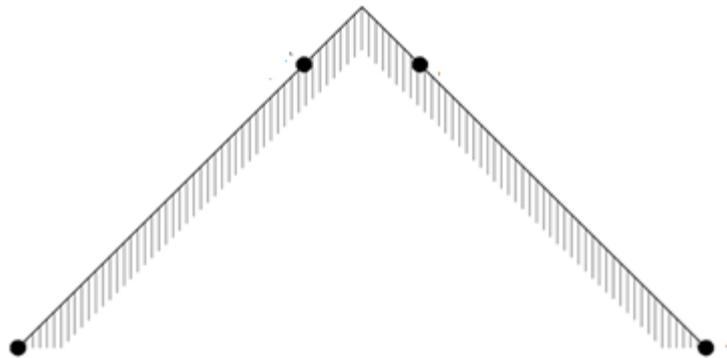


Figura 3.6 Esquema para pontos de cantos em elementos descontínuos (BREBBIA, TELLES, WROBEL, 1984).

Quando existem singularidades nos problemas como no caso da mecânica da fratura por exemplo, a utilização dos elementos descontínuos pode proporcionar boa convergência para os resultados. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989). Devido às tais vantagens, no presente trabalho optou-se por discretizar o contorno dos problemas utilizando apenas elementos descontínuos.

3.9 TÉCNICA DE MULTI-REGIÕES

Através da técnica de multi-regiões é possível analisar estruturas compostas constituídas por distintos materiais. Essa técnica foi inicialmente proposta por RIZZO & SHIPPY (1968). A Figura 3.7 a seguir ilustra a discretização de um domínio composto pela abordagem de multi-regiões:

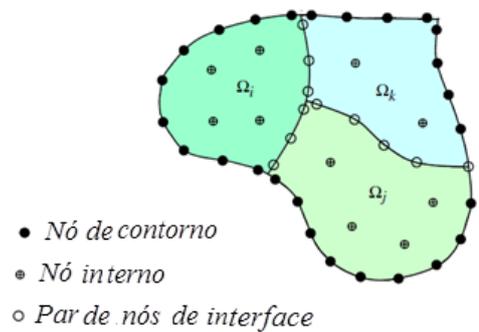


Figura 3.7 Discretização de um domínio composto através da técnica de multi-regiões (GAO, GUO e ZHANG, 2007 (Adaptado))

Para cada elemento que discretiza uma porção de interface existe outro na mesma posição geométrica com coordenadas nodais são equivalentes, porém sua orientação contrária. Cada um desses elementos coincidentes representa uma das faces das duas regiões interligadas pela interface. Vale destacar que os elementos do contorno das sub-regiões devem ser orientados no sentido anti-horário de maneira que o versor normal à superfície aponte para fora em cada região. A Figura 3.8 ilustra os elementos coincidentes de interface por onde as grandezas de deslocamento e tensões de superfície são interpoladas.

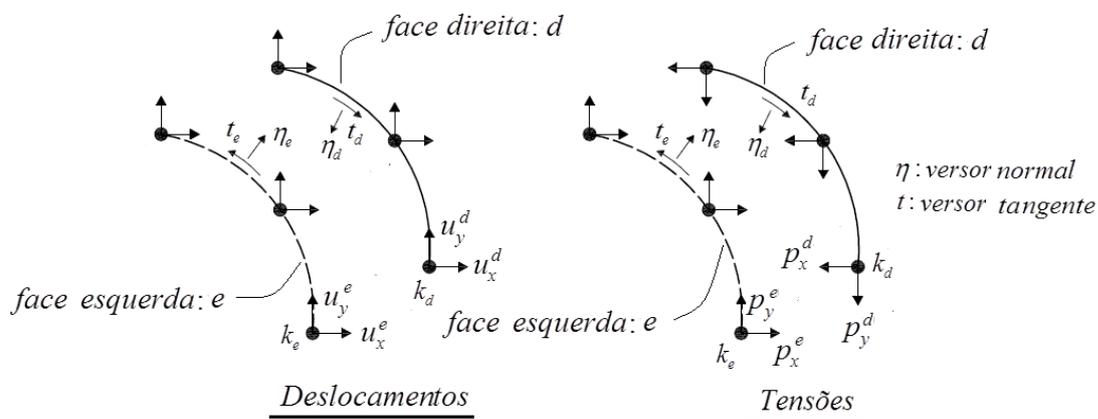


Figura 3.8 Elementos de interface

Através da discretização da estrutura em múltiplas regiões é então possível utilizar a equação singular ou hiper singular e obter os núcleos H_i, G_i para cada região $i = 1 \dots N_{sr}$ sendo N_{sr} o número total de regiões em que a estrutura composta foi dividida. Com esses núcleos é possível arranjar um sistema global de equações algébricas conforme apresentado a seguir:

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{N_{sr}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_{sr}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{N_{sr}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{N_{sr}} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \quad (3.114)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{sr}} H_{ii} u_i = \sum_{i=1}^{N_{sr}} G_{ii} p_i$$

Onde os vetores u_i e p_i contêm os deslocamentos e as tensões de superfície dos nós do cada sub-região i . Considerando a localização dos pontos de colocação, Contorno (c) e interface (i) (face esquerda (e) e face direita (d)), a Equação 3.114 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{NN_c} H_i u_i + \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^j/2} H_k^e u_k^e + \sum_{k=1}^{NN_I^j/2} H_k^d u_k^d \right) = \\ \sum_{i=1}^{NN_c} G_i p_i + \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^j/2} G_k^e p_k^e + \sum_{k=1}^{NN_I^j/2} G_k^d p_k^d \right) \end{aligned} \quad (3.115)$$

Sendo NN_c o número de nós do contorno, NI o número de interfaces e NN_I^j o número de nós da interface j . u_k^e e p_k^e são os vetores de deslocamentos e tensões dos nós da face esquerda da interface e u_k^d e p_k^d os deslocamentos e tensões dos nós da face direita da interface conforme ilustrado na Figura 3.8. Impondo as condições de contorno para os NN_c pontos de colocação do contorno obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^j/2} H_k^e u_k^e + \sum_{k=1}^{NN_I^j/2} H_k^d u_k^d \right) \\ = F + \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^j/2} G_k^e p_k^e + \sum_{k=1}^{NN_I^j/2} G_k^d p_k^d \right) \end{aligned} \quad (3.116)$$

Onde A_i é uma matriz composta pelas colunas de H_i e G_i referentes às variáveis incógnitas do contorno as quais foram coletados no vetor X_i . O vetor F é obtido multiplicando às colunas de H_i e G_i referentes às variáveis prescritas no contorno pelo vetor contendo tais

variáveis. No entanto, não é possível resolver o sistema impondo apenas as condições de contorno uma vez que nos nós pertencentes à interface não são conhecidos os valores nem de deslocamentos e nem de tensões de superfície. Para ser então possível resolver o sistema é necessário levar em consideração as seguintes condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio das tensões nos nós de interface:

$$\begin{aligned} u^e &= u^d \\ p^e + p^d &= 0 \end{aligned} \quad (3.117)$$

Impondo as condições 3.117 no Sistema 3.116 e reorganizando chega-se a:

$$\sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \left[\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_k^e + H_k^d) u_k^e \right] - \sum_{j=1}^{NI} \left[\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_k^e - G_k^d) p_k^e \right] = F \quad (3.118)$$

Após todas as condições serem impostas, o Sistema 3.118 pode ser resolvido juntando os valores incógnitos do contorno com os de interface obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} X \\ u^e \\ p^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{NN_c} A_i, & \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_k^e + H_k^d) \right) \\ - \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_k^e - G_k^d) \right) \end{bmatrix}^{-1} \{F\} \quad (3.119)$$

Assim, todos os valores de deslocamento e forças/tensões de superfície do contorno e das interfaces podem ser encontrados e o problema composto pode ser resolvido.

3.10 GRANDEZAS INTERNAS

Depois de conhecidos os valores dos deslocamentos e das forças de superfície no contorno, grandezas de interesse podem ser determinadas no interior do domínio. Os deslocamentos e tensões nos pontos internos, por exemplo, podem ser obtidos empregando-se as equações integrais singular de deslocamentos e hiper singular de tensões para a construção de novos núcleos H e G obtidos considerando os pontos internos como sendo pontos fontes. Adotando a discretização do contorno em elementos e escrevendo as equações integrais na

forma matricial para pontos internos essas podem ser apresentadas, desconsiderando as forças de domínio, como:

$$\underline{u}^{(pti)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{\phi} d\Gamma \right\} \underline{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{\phi} d\Gamma \right\} \underline{p}^j \quad (3.121)$$

$$\underline{\sigma}^{(pti)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{S} \underline{\phi} d\Gamma \right\} \underline{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{D} \underline{\phi} d\Gamma \right\} \underline{p}^j \quad (3.122)$$

Onde os termos livres $\underline{c}^{(pti)}$ são iguais à matriz identidade uma vez que o ponto fonte é interno ao domínio e os termos $\underline{u}^{(pti)}$ e $\underline{\sigma}^{(pti)}$ representam os deslocamentos e o tensor de tensões escrito vetorialmente no ponto interno pti .

$$\underline{u}^{(pti)} = \begin{Bmatrix} u_x^{(pti)} \\ u_y^{(pti)} \end{Bmatrix} \quad e \quad \underline{\sigma}^{(pti)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(pti)} \\ \sigma_{xy}^{(pti)} \\ \sigma_{yx}^{(pti)} \\ \sigma_y^{(pti)} \end{Bmatrix} \quad (3.123)$$

\underline{u}^j e \underline{p}^j são vetores com os deslocamentos e forças dos contornos Γ_j os quais devem ser previamente conhecidos para a determinação das grandezas internas.

Vale ressaltar que como o ponto fonte não está mais localizado no contorno, não existe mais nenhum elemento que possua singularidade. Dessa maneira as integrações em todos os contornos Γ_j podem proceder numericamente por quadratura de Gauss sem a necessidade de utilizar o MSS. Integrando numericamente os contornos dos elementos é possível obter:

$$\underline{u}^{(pti)} = \sum_{j=1}^{NE} \underline{G}^{pti,j} \underline{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \underline{H}^{pti,j} \underline{u}^j \quad (3.124)$$

$$\underline{\sigma}^{(pti)} = \sum_{j=1}^{NE} \underline{D}^{pti,j} \underline{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \underline{S}^{pti,j} \underline{u}^j \quad (3.125)$$

Onde as matrizes $\underline{H}^{pti,j}$, $\underline{G}^{pti,j}$, $\underline{S}^{pti,j}$ e $\underline{D}^{pti,j}$ são obtidas da integração numérica dos núcleos \underline{u}^* , \underline{p}^* , \underline{S} e \underline{D} respectivamente sendo o ponto fonte considerado como o respectivo ponto interno no qual se deseja conhecer as tensões e deslocamentos.

A partir das tensões, deformações nos pontos internos também podem ser obtidas aplicando a Lei Generalizada de Hooke.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A MEIOS ANISOTRÓPICOS

Conforme apresentado no capítulo anterior, formulações do MEC podem ser desenvolvidas desde que se conheça uma solução fundamental para o tipo de material desejado na análise. Nesse sentido, pretende-se apresentar nesse capítulo formulações do MEC aplicada a problemas anisotrópicos deduzidas a partir da solução fundamental apresentada por CRUSE & SWEDLOW (1971). A partir dessa solução fundamental, as formulações integrais de contorno singular e hiper singular serão apresentadas nos próximos tópicos desse capítulo para analisar problemas elastostáticos anisotrópicos. Além disso, através da técnica de sub-regiões possível analisar estruturas compostas constituídas por diferentes materiais os quais possuem desde anisotropias gerais até isotrópicas ideais.

4.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA ELÁSTICO ANISOTRÓPICO

A solução fundamental anisotrópica, apresentada primeiramente por Cruse & Swedlow, foi desenvolvida fazendo-se uso do formalismo de LEKHNITSKII (1963) e da teoria das funções complexas. A seguir pretende-se brevemente detalhar o desenvolvimento dessa solução fundamental. Para isso, considere o tensor de tensões escrito em termos da função de tensão de Airy, $F(x, y)$, conforme a seguir:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= F_{,yy} + \nu \\ \sigma_y &= F_{,xx} + \nu \\ \tau_{xy} &= -F_{,xy}\end{aligned}\quad (4.1)$$

Sendo ν uma função potencial primitiva das forças de volume a qual pode ser considerada nula para análises de problemas estáticos na ausência de forças volumétricas. Para solucionar os problemas, as Equações 4.1 devem satisfazer as equações de equilíbrio conforme a seguir:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} &= 0 \\ \tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} &= 0\end{aligned}\quad (4.2)$$

Considere ainda que a equação de compatibilidade de deformações para problemas planos, Equação 2.14, também deve ser satisfeita para garantir a existência e unicidade de um campo de deslocamentos compatível com as deformações:

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (4.3)$$

A partir da Lei Generalizada de Hooke para problemas em EPT, Equação 2.37, e das Relações 4.1 com $\nu = 0$, é possível escrever as componentes do tensor de deformação em termos da função de Airy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{11}F_{,yy} + C_{12}F_{,xx} - C_{16}F_{,xy} \\ \varepsilon_y &= C_{12}F_{,yy} + C_{22}F_{,xx} - C_{26}F_{,xy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= C_{16}F_{,yy} + C_{26}F_{,xx} - C_{66}F_{,xy} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Com as Relações 4.4 e a Equação 4.3 de compatibilidade em deformações é possível apresentar a equação diferencial que rege os problemas anisotrópicos em termos da função de tensão de Airy $F(x, y)$ (LEKHNITSKII, 1963).

$$C_{11}F_{,yyyy} - 2C_{16}F_{,xyyy} + (2C_{12} + C_{66})F_{,xxyy} - 2C_{26}F_{,xxyy} + C_{22}F_{,xxxx} = 0 \quad (4.5)$$

Ou ainda:

$$C_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2C_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + (2C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2C_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + C_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (4.6)$$

A fim de solucionar essa equação diferencial a seguinte notação é introduzida:

$$F(x, y) = F(z), \quad z = x + \mu y \quad (4.7)$$

Sendo $\mu = a + ib$ um número complexo em que a e b são constantes reais e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. Substituindo a Notação 4.7 na equação diferencial e utilizando a regra da cadeia, é possível reescrever 4.6 considerando as derivadas em relação à z :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^4} [C_{11}\mu^4 - 2C_{16}\mu^3 + (2C_{12} + C_{66})\mu^2 - 2C_{26}\mu + C_{22}] = 0 \quad (4.8)$$

Buscando uma solução não trivial para 4.8, ou seja $\frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \neq 0$, é necessário que a seguinte equação característica seja satisfeita:

$$C_{11}\mu^4 - 2C_{16}\mu^3 + (2C_{12} + C_{66})\mu^2 - 2C_{26}\mu + C_{22} = 0 \quad (4.9)$$

De acordo com LEKHNITSKII *et al.* (1968), as quatro raízes da Equação 4.9 são sempre complexas ou imaginárias puras, não resultando em raízes reais para qualquer caso de materiais reais nos quais temos sempre os termos C_{11} , $(2C_{12} + C_{66})$ e C_{22} como sendo constantes reais finitas e diferentes de zero. As raízes dessa equação são designadas como $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ sendo $\bar{\mu}_i$ a raiz complexa conjugada de μ_i com $i = 1, 2$. Nessas circunstâncias, dois casos de combinações de raízes são possíveis a depender dos valores das constantes elásticas:

Caso 1: quatro raízes distintas:

$$\mu_1 = \alpha + \beta \cdot i, \quad \mu_2 = \gamma + \delta \cdot i, \quad \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta \cdot i, \quad \bar{\mu}_2 = \gamma - \delta \cdot i \quad (4.10)$$

Caso 2: As raízes são pares conjugados

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta \cdot i \quad e \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \alpha - \beta \cdot i \quad (4.11)$$

Onde α, β, γ e δ são constantes reais. LEKHNITSKII *et al.* (1968) ainda demonstra que devido às considerações termodinâmicas $\beta > 0$ e $\delta > 0$. As raízes μ_1 e μ_2 são conhecidas por parâmetros complexos os quais podem ser considerados como números que caracterizam o grau de anisotropia em problemas planos. Portanto, a partir de seus valores, é possível avaliar o quanto um dado corpo anisotrópico difere de um isotrópico para o qual se tem $\mu_1 = \mu_2 = i$ e, portanto $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$.

Para obter a solução $F(x, y)$ ou ainda $F(z)$, é necessário então proceder a mudança da orientação cartesiana x, y no plano real do domínio Ω para orientações Imaginárias-Reais Im, Re em planos complexos conjugados conforme ilustrado na Figura 4.1:

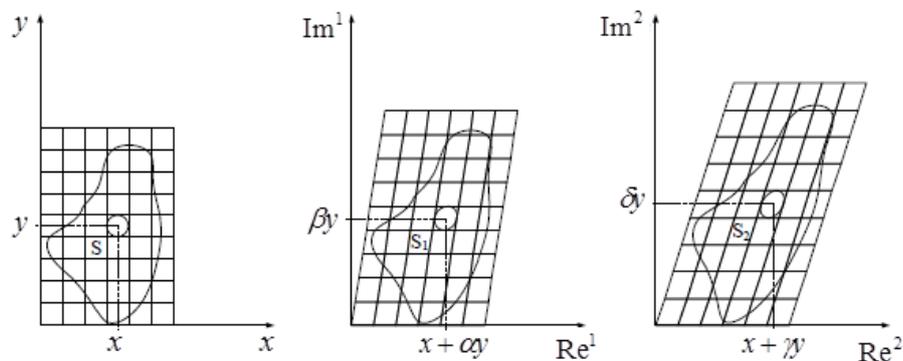


Figura 4.1 Mudança da orientação cartesiana para os planos complexos (FERNÁNDEZ, 2012)

Diferentemente da representação no plano real, onde os pontos geométricos são mapeados pelos pares coordenados x e y , nos planos complexos conjugados Im^1, Re^1 e Im^2, Re^2 a posição dos pontos do problema é mapeada pelas coordenadas z_1 e z_2 respectivamente, sendo:

$$z_1 = x + \mu_1 y \quad e \quad z_2 = x + \mu_2 y \quad (4.12)$$

Considerando as coordenadas complexas é possível reescrever a forma geral das funções de tensão $F(x, y)$ para problemas anisotrópicos como uma combinação linear de funções de tensão complexas:

$$F(x, y) = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (4.13)$$

Onde Re é a designação para a parte real de qualquer expressão complexa. A partir da função de tensão, é possível determinar as componentes de tensão com as Relações 4.1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \partial^2 F / \partial y^2 \\ \sigma_y &= \partial^2 F / \partial x^2 \\ \tau_{xy} &= -\partial^2 F / \partial x \partial y \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para diferenciar 4.13 em relação a x e y , é necessário considerar novamente a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{dF_1}{dz_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{dF_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dx} = \frac{dF_1}{dz_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{dF_2}{dz_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{dF_2}{dz_2} \frac{dz_2}{dx} = \frac{dF_2}{dz_2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{dF_1}{dz_1} \frac{dz_1}{dy} + \frac{dF_1}{dz_2} \frac{dz_2}{dy} = \mu_1 \frac{dF_1}{dz_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{dF_2}{dz_1} \frac{dz_1}{dy} + \frac{dF_2}{dz_2} \frac{dz_2}{dy} = \mu_2 \frac{dF_2}{dz_2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, as componentes de tensões podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re \left[\mu_1^2 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \mu_2^2 \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \\ \sigma_y &= 2Re \left[\frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \\ \tau_{xy} &= -2Re \left[\mu_1 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

A partir da Equação 4.14, da Lei de Hooke anisotrópica, Equação 2.37, e da relação deslocamento-deformação, Equação 2.12, é possível obter uma equação diferencial escrita para os campos de deslocamento $u_x(x, y)$ e $u_y(x, y)$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2Re \left[(C_{11}\mu_1^2 + C_{12} - C_{16}\mu_1) \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + (C_{11}\mu_2^2 + C_{12} - C_{16}\mu_2) \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 2Re \left[(C_{12}\mu_1^2 + C_{22} - C_{26}\mu_1) \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + (C_{12}\mu_2^2 + C_{22} - C_{26}\mu_2) \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \quad (4.18)$$

Integrando-se as Expressões 4.17 e 4.18 e desprezando-se as parcelas de corpo rígido obtêm-se os deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_x &= 2Re \left[q_{11} \frac{dF_1}{dz_1} + q_{12} \frac{dF_2}{dz_2} \right] \\ u_y &= 2Re \left[q_{21} \frac{dF_1}{dz_1} + q_{22} \frac{dF_2}{dz_2} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em que:

$$q_{km} = \begin{bmatrix} C_{11}\mu_k^2 + C_{12} - C_{16}\mu_k \\ C_{12}\mu_k + C_{22}/\mu_k - C_{26} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

é uma matriz de parâmetros complexos.

As Equações 4.16 e 4.19, em conjunto com condições de contorno constituem o problema matemático a ser resolvido para determinar a solução de qualquer sólido elástico linear anisotrópico submetido a sollicitações mecânicas em seu contorno.

Considerando o problema fundamental, onde uma força concentrada na direção j é aplicada em um ponto fonte i de um domínio infinito, as equações de equilíbrio podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sigma_{jx,x} + \tau_{jxy,y} &= -\delta_{jx}\Delta^{(i)} \\ \tau_{jyx,x} + \sigma_{jy,y} &= -\delta_{jy}\Delta^{(i)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sendo δ_{jk} o Delta de Kronecker e $\Delta^{(i)}$ a função Delta de Dirac centrada no ponto i . Integrando as Expressões 4.21 em um domínio real Ω que contenha o ponto fonte i é possível a partir das propriedades da função Delta de Dirac escrever:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\sigma_{jx,x} + \tau_{jxy,y}) d\Omega &= -\delta_{jx} = \int_{\Gamma} (\sigma_{jx}\eta_1 + \tau_{jxy}\eta_2) d\Gamma = -\delta_{jx} \\ \int_{\Omega} (\tau_{jyx,x} + \sigma_{jy,y}) d\Omega &= -\delta_{jy} = \int_{\Gamma} (\tau_{jyx}\eta_1 + \sigma_{jy}\eta_2) d\Gamma = -\delta_{jy}\end{aligned}\quad (4.22)$$

As Equações 4.22 podem ser escritas de uma maneira incompleta visando descobrir suas primitivas (WYLIE & BARRET, 1995):

$$\begin{aligned}\int_L \sigma_{jx} dy - \int_L \tau_{jxy} dx &= -\delta_{jx} \\ \int_L \tau_{jyx} dy - \int_L \sigma_{jy} dx &= -\delta_{jy}\end{aligned}\quad (4.23)$$

onde L é um limite hipotético. Considerando as expressões das componentes de tensão, Equação 4.16, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\int_L 2Re \left[\mu_1^2 \frac{d^2 F_{j1}}{dz_1^2} + \mu_2^2 \frac{d^2 F_{j2}}{dz_2^2} \right] dy \\ + \int_L 2Re \left[\mu_1 \frac{d^2 F_{j1}}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2 F_{j2}}{dz_2^2} \right] dx &= -\delta_{jx}\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}- \int_L 2Re \left[\mu_1 \frac{d^2 F_{j1}}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2 F_{j2}}{dz_2^2} \right] dy \\ - \int_L 2Re \left[\frac{d^2 F_{j1}}{dz_1^2} + \frac{d^2 F_{j2}}{dz_2^2} \right] dx &= -\delta_{jy}\end{aligned}\quad (4.25)$$

Com as diferenciações apresentadas em 4.15 é possível escrever as primitivas das integrais 4.24 e 4.25 como:

$$2Re \left[\mu_1 \frac{dF_{j1}}{dz_1} + \mu_2 \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] + 2Re \left[\mu_1 \frac{dF_{j1}}{dz_1} + \mu_2 \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] = -\delta_{jx}\quad (4.26)$$

$$2Re \left[\frac{dF_{j1}}{dz_1} + \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] + 2Re \left[\frac{dF_{j1}}{dz_1} + \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] = \delta_{jy}\quad (4.27)$$

Segundo ALBUQUERQUE (2001), como nas expressões acima o limite de integração não está bem definido, uma melhor representação pode ser apresentada da seguinte maneira:

$$2\text{Re} \left[\left[\mu_1 \frac{dF_{j1}}{dz_1} + \mu_2 \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] \right] = -\delta_{jx} \quad (4.28)$$

$$2\text{Re} \left[\left[\frac{dF_{j1}}{dz_1} + \frac{dF_{j2}}{dz_2} \right] \right] = \delta_{jy} \quad (4.29)$$

Em que o duplo colchete indica que o valor primitivo está sendo avaliado no contorno fechado da integração. Nos planos complexos conjugados, a posição do ponto fonte $i = (x_0, y_0)$ é denominada z^0 e pode ser calculada como:

$$z^0 = \begin{Bmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 + \mu_1 y_0 \\ x_0 + \mu_2 y_0 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

Portanto, a solução das Equações 4.28 e 4.29 tem a seguinte forma:

$$\frac{dF_{j1}}{dz_1} = A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) \quad (4.31)$$

$$\frac{dF_{j2}}{dz_2} = A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0) \quad (4.32)$$

Em que A_{jm} são constantes complexas a serem determinadas.

Adotando o ponto fonte como sendo a origem do problema, $\underline{z}^0 = 0$, chega-se a:

$$\frac{dF_{j1}}{dz_1} = A_{j1} \ln(z_1) \quad (4.33)$$

$$\frac{dF_{j2}}{dz_2} = A_{j2} \ln(z_2) \quad (4.34)$$

Ao substituírmos as Equações 4.33 e 4.34 em 4.28 e 4.29 obtêm-se:

$$\left[\left[2\text{Re} \left[\mu_1 A_{j1} \ln(z_1) + \mu_2 A_{j2} \ln(z_2) \right] \right] \right] = -\delta_{jx} \quad (4.35)$$

$$\left[\left[2\text{Re} \left[A_{j1} \ln(z_1) + A_{j2} \ln(z_2) \right] \right] \right] = \delta_{jy} \quad (4.36)$$

A avaliação fechada de $\ln(z)$ é dada por WYLIE & BARRET (1995) como:

$$\left[\left[\ln(z) \right] \right] = \oint_L \frac{1}{z_j} dz_j = 2\pi \cdot i \quad (4.37)$$

A partir de 4.37, as Expressões 4.35 e 4.36 podem ser reescritas como:

$$2\operatorname{Re}(2\pi i\mu_1 A_{j1} + 2\pi i\mu_2 A_{j2}) = -\delta_{jx} \quad (4.38)$$

$$2\operatorname{Re}(2\pi i A_{j1} + 2\pi i A_{j2}) = \delta_{jy} \quad (4.39)$$

Fazendo-se uso da seguinte propriedade das funções complexas:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad (4.40)$$

Sendo z e \bar{z} funções complexas conjugadas, é então possível reescrever as Equações 4.38 e 4.39 da seguinte maneira:

$$\mu_1 A_{j1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{j1} + \mu_2 A_{j2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{j2} = \frac{-\delta_{jx}}{2\pi i} \quad (4.41)$$

$$A_{j1} - \bar{A}_{j1} + A_{j2} - \bar{A}_{j2} = \frac{\delta_{jy}}{2\pi i} \quad (4.42)$$

Considerando o sistema composto pelas Expressões 4.41 e 4.42, têm-se duas equações e quatro constantes incógnitas $A_{j1}, A_{j2}, \bar{A}_{j1}$ e \bar{A}_{j2} . Portanto, para que seja possível resolve-lo é necessário ainda obter mais duas equações. Essas podem ser encontradas a partir da equação de unicidade de deslocamentos (ALBUQUERQUE, 2001).

$$\oint_{\Gamma} u_k d\Gamma = 0 \quad (4.43)$$

Os deslocamentos do problema fundamental, u_{jk}^* , podem ser expressos substituindo as Expressões 4.31 e 4.32 nas Equações 4.19 e 4.20:

$$u_{j1}^*(z^0, z) = 2\operatorname{Re}[q_{11}A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) + q_{12}A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0)] \quad (4.44)$$

$$u_{j2}^*(z^0, z) = 2\operatorname{Re}[q_{21}A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) + q_{22}A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0)] \quad (4.45)$$

Considerando novamente o ponto fonte como a origem, $z^0 = 0$, e substituindo 4.44 e 4.45 na Equação 4.43 de unicidade de deslocamentos é possível escrever:

$$2\operatorname{Re}[[q_{11}A_{j1} \ln(z_1) + q_{12}A_{j2} \ln(z_2)]] = 0 \quad (4.46)$$

$$2\operatorname{Re}[[q_{21}A_{j1} \ln(z_1) + q_{22}A_{j2} \ln(z_2)]] = 0 \quad (4.47)$$

Fazendo uso novamente das propriedades de funções complexas apresentadas nas Equações 4.37 e 4.40, as Equações 4.46 e 4.47 ser reescritas como:

$$q_{11}A_{j1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{j1} + q_{12}A_{j2} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{j2} = 0 \quad (4.48)$$

$$q_{21}A_{j1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{j1} + q_{22}A_{j2} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{j2} = 0 \quad (4.49)$$

Finalmente, com as Equações 4.48, 4.49, 4.41 e 4.42 é possível compor o Sistema complexo 4.50 apresentado a seguir por meio do qual é possível determinar os valores de A_{jm} :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & \bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{jx} \\ \bar{A}_{jx} \\ A_{jy} \\ \bar{A}_{jy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{jy}/2\pi i \\ -\delta_{jx}/2\pi i \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Vale destacar que o Sistema 4.50 se torna singular para o caso de materiais isotrópicos, nos quais se tem $\mu_1 = \mu_2 = i$ (CRUSE & SWEDLOW, 1971). Portanto, Problemas elastostáticos de corpos isotrópicos devem ser tratados com as formulações do MEC apresentadas no capítulo anterior.

Determinados os valores de A_{jm} a partir do Sistema 4.50, as Expressões 4.33 e 4.34 se tornam soluções de equilíbrio e compatibilidade geométrica do problema anisotrópico plano escritas em funções de tensão. Por fim, a solução fundamental de deslocamentos u_{jk}^* pode ser apresentada como:

$$u_{jk}^*(z^0, z) = 2Re[q_{k1}A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) + q_{k2}A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0)] \quad (4.51)$$

Substituindo as Expressões 4.33 e 4.34 nas Expressões 4.16 das tensões e aplicando o equilíbrio de superfície de Cauchy é possível também determinar a expressão da solução fundamental de forças de superfície p_{jk}^* :

$$p_{jk}^*(z^0, z) = 2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z_1^0)} g_{k1}(\mu_1\eta_1 - \eta_2)A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z_2^0)} g_{k2}(\mu_2\eta_1 - \eta_2)A_{j2} \right] \quad (4.52)$$

Em que η_p são as componentes do versor normal ao exterior do corpo e:

$$g_{km} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

4.2 FORMULAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO SINGULAR E HIPER SINGULAR

A partir da solução fundamental anisotrópica de Cruse & Swedlow, é possível obter a identidade Somigliana para problemas elastostáticos anisotrópicos. Para isso, parte-se da equação de equilíbrio em tensões ponderada agora pela nova solução fundamental e por meio do MRP e de relações da teoria da elasticidade determina-se a identidade através de manipulações matemáticas convenientes. Tal procedimento já foi apresentado no Item 3.2 do capítulo anterior, porém considerando a solução fundamental de Kelvin dos problemas isotrópicos como função ponderadora. Para problemas anisotrópicos a identidade Somigliana pode ser escrita como:

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma \quad (4.54)$$

Sendo i o ponto fonte de aplicação da carga unitária e u_{jk}^* e p_{jk}^* as soluções fundamentais de Cruse & Swedlow para deslocamentos e forças de superfície apresentadas nas Equações 4.51 e 4.52 respectivamente. Novamente a identidade Somigliana é denominada equação integral singular devido agora à singularidade $1/z$ observada no termo p_{jk}^* . Por meio da mesma é possível calcular os deslocamentos de qualquer ponto interno a um domínio anisotrópico desde que sejam conhecidos os deslocamentos e forças de superfície no contorno.

A partir da equação integral singular de deslocamentos é possível obter a equação hiper singular com a qual determinam-se as tensões em qualquer ponto no interior de um domínio anisotrópico. Para isso, a Equação 4.54 deve ser diferenciada em relação à z^0 resultando em:

$$u_{j,l}^{(i)} - \int_{\Gamma} p_{jk,l}^* u_k d\Gamma = - \int_{\Gamma} u_{jk,l}^* p_k d\Gamma \quad (4.55)$$

Note que como a diferenciação foi procedida em relação à z^0 , ao invés de z , os termos integrais da equação inverteram os sinais (CRUSE & SWEDLOW, 1971). Além disso, os mesmos autores ainda apresentam as derivadas das soluções fundamentais como:

$$p_{jk,l}^* = -2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z_1^0)^2} R_{l1} g_{k1} (\mu_1 \eta_1 - \eta_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z_2^0)^2} R_{l2} g_{k2} (\mu_2 \eta_1 - \eta_2) A_{j2} \right] \quad (4.56)$$

$$u_{jk,l}^* = 2Re \left[\frac{1}{(z_1 - z_1^0)} R_{l1} q_{k1} A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z_2^0)} R_{l2} q_{k2} A_{j2} \right] \quad (4.57)$$

sendo:

$$R_{lm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Considerando que para pequenos deslocamentos e deformações temos $2\varepsilon_{jl}^{(i)} = (u_{j,l}^{(i)} + u_{l,j}^{(i)})$ e utilizando também a Expressão 4.55 pode-se escrever as componentes de deformação:

$$2\varepsilon_{jl}^{(i)} = \int_{\Gamma} (p_{jk,l}^* + p_{lk,j}^*) u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_{jk,l}^* + u_{lk,j}^*) p_k d\Gamma \quad (4.59)$$

Considerando os problemas planos de tensão, a Lei de Hooke anisotrópica, Equação 2.23, pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_{11}}{2} & D_{16} & \frac{D_{12}}{2} \\ \frac{D_{16}}{2} & D_{66} & \frac{D_{62}}{2} \\ \frac{D_{12}}{2} & D_{26} & \frac{D_{22}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_x \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

em que $D_{\alpha\beta}$ é a matriz de rigidez do material anisotrópico. A partir das Expressões 4.59 e 4.60 é possível então escrever as componentes de tensão em qualquer ponto interno a partir de integrais de contorno:

$$\sigma_{11}^{(i)} = \int_{\Gamma} [D_{11}(p_{1k,1}^*) + D_{16}(p_{1k,2}^* + p_{2k,1}^*) + D_{12}(p_{2k,2}^*)] u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} [D_{11}(u_{1k,1}^*) + D_{16}(u_{1k,2}^* + u_{2k,1}^*) + D_{12}(u_{2k,2}^*)] p_k d\Gamma \quad (4.61)$$

$$\sigma_{12}^{(i)} = \int_{\Gamma} [D_{16}(p_{1k,1}^*) + D_{66}(p_{1k,2}^* + p_{2k,1}^*) + D_{26}(p_{2k,2}^*)] u_k d\Gamma - \int_{\Gamma} [D_{16}(u_{1k,1}^*) + D_{66}(u_{1k,2}^* + u_{2k,1}^*) + D_{26}(u_{2k,2}^*)] p_k d\Gamma \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{(i)} = & \int_{\Gamma} [D_{12}(p_{1k,1}^*) + D_{26}(p_{1k,2}^* + p_{2k,1}^*) + D_{22}(p_{2k,2}^*)] u_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} [D_{12}(u_{1k,1}^*) + D_{26}(u_{1k,2}^* + u_{2k,1}^*) + D_{22}(u_{2k,2}^*)] p_k d\Gamma \end{aligned} \quad (4.63)$$

Em notação indicial, as Equações 4.61 4.62 e 4.63 podem ser resumidas em:

$$\sigma_{jk}^{(i)} + \int_{\Gamma} S_{jkl} u_l d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jkl} p_l d\Gamma \quad (4.64)$$

Sendo que os termos S_{jkl} e D_{jkl} , os quais contêm as Derivadas das soluções fundamentais anisotrópicas 4.56 e 4.57, podem ser apresentados como:

$$\begin{aligned} S_{11l} &= -[D_{11}(p_{1l,1}^*) + D_{16}(p_{1l,2}^* + p_{2l,1}^*) + D_{12}(p_{2l,2}^*)] \\ S_{12l} = S_{21l} &= -[D_{16}(p_{1l,1}^*) + D_{66}(p_{1l,2}^* + p_{2l,1}^*) + D_{26}(p_{2l,2}^*)] \\ S_{22l} &= -[D_{12}(p_{1l,1}^*) + D_{26}(p_{1l,2}^* + p_{2l,1}^*) + D_{22}(p_{2l,2}^*)] \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} D_{11l} &= -[D_{11}(u_{1l,1}^*) + D_{16}(u_{1l,2}^* + u_{2l,1}^*) + D_{12}(u_{2l,2}^*)] \\ D_{12l} = D_{21l} &= -[D_{16}(u_{1l,1}^*) + D_{66}(u_{1l,2}^* + u_{2l,1}^*) + D_{26}(u_{2l,2}^*)] \\ D_{22l} &= -[D_{12}(u_{1l,1}^*) + D_{26}(u_{1l,2}^* + u_{2l,1}^*) + D_{22}(u_{2l,2}^*)] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Buscando-se evitar confusão de notação, é valido lembrar que nas equações acima, o termo D_{jkl} é um tensor de terceira ordem o qual está presente em um dos integrandos da equação hiper singular. Já o termo $D_{\alpha\beta}$ é o pseudo tensor denominado Matriz de Rigidez oriundo do tensor de quarta ordem das constantes de elasticidade D_{ijkl} .

As soluções fundamentais e suas derivadas apresentadas nas Equações 4.51, 4.52, 4.56 e 4.57 foram obtidas considerando problemas em EPT. Segundo LEKHNITSKII (1968), a Lei Generalizada de Hooke apresentada na Equação 2.37 para problemas planos de tensão pode ser reescrita para o caso de EPD da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{16}^* \\ & C_{22}^* & C_{26}^* \\ SIM. & & C_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

Sendo $C_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta} - C_{\alpha 3} C_{\beta 3} / C_{33}$, com $\alpha, \beta = 1, 2, 6$, os coeficientes da Matriz de flexibilidade corrigidos. Portanto, as soluções fundamentais e suas derivadas podem ser calculadas para problemas planos de deformação pelas mesmas expressões apresentadas anteriormente, porém considerando agora parâmetros matérias complexos obtidos a partir da equação característica corrigida, Equação 4.9 com coeficientes $C_{\alpha\beta}$ trocados por $C_{\alpha\beta}^*$.

4.3 EQUAÇÃO INTEGRAL SINGULAR ESCRITA PARA PONTOS NO CONTORNO

A equação integral singular apresentada em 4.54 é válida para quando o ponto fonte encontra-se no interior do domínio. Caso o ponto se encontre sobre contorno do problema, a singularidade $z \rightarrow z_0$ é verificada, pois o ponto singular se encontrará sobre o caminho de integração (no contorno). Para a equação singular essa singularidade vem dos termos u_{jk}^* e p_{jk}^* e é de ordem $\ln(z)$ e $1/z$ respectivamente. Tal singularidade deve ser tratada a partir de um processo limite onde o ponto fonte, (i) ou z_0 , é levado para o contorno. Para isso o mesmo é envolvido por uma região de domínio adicional com contorno circular cujo raio ε tende a zero no processo limite. A Figura 4.1 ilustra o procedimento para um ponto fonte localizado sobre um contorno suave.

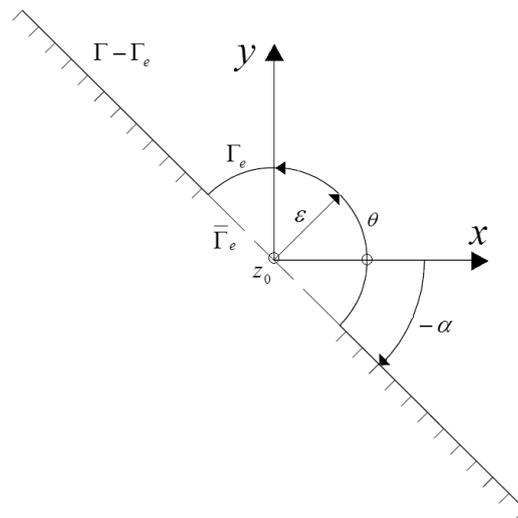


Figura 4.1 Processo limite para levar o ponto fonte z_0 para o contorno

Para obter a equação integral singular escrita para pontos fonte no contorno, o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ deve ser avaliado de maneira semelhante ao procedido no Capítulo 3.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\delta_{jk} u_k^{(i)} + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u_{jk}^* p_k d\Gamma \right) \quad (4.68)$$

O tratamento limite é então procedido analisando termo a termo as integrais da Expressão 4.68. Considere primeiramente o termo:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma \\ &= \oint_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (4.69)$$

O resultado de 4.69 indica que a integração do núcleo p_{jk}^* ao longo do contorno deve ser procedida no sentido de VPC devido à singularidade $1/z$ verificada no mesmo. Além disso, deve ser avaliado também o limite da integral ao longo do contorno circular adicional Γ_e de onde resulta um termo livre. Baseado na Figura 4.1, considere a mudança de coordenada cartesiana de x, y para coordenadas cilíndricas ε, θ . No caso do contorno circular Γ_e , tem-se que $d\Gamma = \varepsilon d\theta$. Além disso, como z_0 é adotado como a origem, é possível escrever:

$$\begin{aligned} (\mu_m \eta_1 - \eta_2) &= (\mu_m \cos(\theta) + \sin(\theta)) \\ z_m = x + \mu_m y &= \varepsilon (\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Dessa maneira, a solução fundamental anisotrópica de forças p_{jk}^* pode ser apresentada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = 2Re \left[g_{k1} A_{j1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\mu_m \eta_1 - \eta_2)}{z_m} \varepsilon d\theta \right] u_k \quad (4.71)$$

Considerando 4.70, a expressão pode ser reescrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = 2Re \left[g_{k1} A_{j1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\mu_m \cos(\theta) + \sin(\theta))}{(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))} d\theta \right] u_k \quad (4.72)$$

Como a integral do segundo membro de 4.72 não depende de ε , a expressão resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = 2Re \left[g_{k1} A_{j1} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\mu_m \cos(\theta) + \sin(\theta))}{(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))} d\theta \right] u_k \quad (4.73)$$

A integral em relação à $d\theta$ contida em 4.73 pode ser rearranjada e procedida conforme apresentado em CRUSE & SWEDLOW (1971):

$$\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\mu_m \cos(\theta) + \sin(\theta))}{(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))} d\theta = i \left[\tan^{-1} \left(\frac{\beta_m \sin(\theta)}{\cos(\theta) - \alpha_m \sin(\theta)} \right) \right]_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \quad (4.74)$$

Substituindo os limites de integração, a Expressão 4.74 resulta:

$$\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(\mu_m \cos(\theta) + \sin(\theta))}{(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))} d\theta = i\pi \quad (4.75)$$

Portanto 4.73 pode ser reescrita novamente como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = 2\text{Re}[g_{k1} A_{j1}(i\pi)] u_k \quad (4.76)$$

A partir da definição de g_{km} , Equação 4.53, é possível escrever 4.76 em forma matricial:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma \\ &= \begin{bmatrix} 2\text{Re}[\mu_1 A_{11}(i\pi) + \mu_2 A_{12}(i\pi)] & 2\text{Re}[A_{11}(-i\pi) + A_{12}(-i\pi)] \\ 2\text{Re}[\mu_1 A_{21}(i\pi) + \mu_2 A_{22}(i\pi)] & 2\text{Re}[A_{21}(-i\pi) + A_{22}(-i\pi)] \end{bmatrix} u_k \end{aligned} \quad (4.77)$$

Sendo $\bar{A}_{j1}, \bar{A}_{j2}$ e $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ os conjugados complexos de A_{j1}, A_{j2} e μ_1, μ_2 . Como se tratam de valores complexos conjugados, as seguintes relações são válidas:

$$2\text{Re}[\mu_1 A_{j1}(i\pi) + \mu_2 A_{j2}(i\pi)] = \text{Re}[(i\pi)(\mu_1 A_{j1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{j1} + \mu_2 A_{j2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{j2})] \quad (4.78)$$

$$2\text{Re}[A_{j1}(-i\pi) + A_{j2}(-i\pi)] = \text{Re}[(-i\pi)(A_{j1} - \bar{A}_{j1} + A_{j2} - \bar{A}_{j2})] \quad (4.79)$$

Aplicado as Propriedades 4.41 e 4.42 de A_{jm} nas Equações 4.78 e 4.79 as mesmas resultam:

$$2\text{Re}[\mu_1 A_{j1}(i\pi) + \mu_2 A_{j2}(i\pi)] = \text{Re} \left[\frac{-\delta_{j1}}{2} \right] \quad (4.80)$$

$$2\text{Re}[A_{j1}(-i\pi) + A_{j2}(-i\pi)] = \text{Re} \left[\frac{-\delta_{j2}}{2} \right] \quad (4.81)$$

Por fim, baseado em 4.80 e 4.81, retorna-se ao limite 4.77 que agora pode ser escrito como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} u_k = \frac{-\delta_{jk}}{2} u_k \quad (4.82)$$

Já em relação ao termo u_{jk}^* presente na equação singular, O processo limite pode ser conduzido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e + \Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma \\
&= \oint_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Novamente, na integração no contorno circular Γ_e , tem-se $d\Gamma = \varepsilon d\theta$. Considerando a solução fundamental de deslocamento, Equação 4.51, essa integração pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma &= 2Re \left[q_{km} A_{m1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \ln(z_m) \varepsilon d\theta \right] u_k \\
&= 2Re \left[q_{km} A_{m1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \ln(\varepsilon(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))) \varepsilon d\theta \right] \\
&= 2Re \left[q_{km} A_{m1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} (\ln \varepsilon + \ln(\mu_m \sin(\theta) - \cos(\theta))) \varepsilon d\theta \right]
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Reorganizando 4.84 tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma &= 2Re \left\{ q_{km} A_{m1} \left[\varepsilon \ln \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} d\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \ln(\cos(\theta) + \mu_m \sin(\theta)) d\theta \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Procedendo o limite na Expressão 4.85 antes mesmo de proceder as integrais chega-se a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} u_{jk}^* p_k d\Gamma = 0 \tag{4.86}$$

Portanto, considerando-se 4.69, 4.82, 4.83 e 4.86, é possível então escrever a identidade Somigliana para pontos fontes localizados sobre o contorno:

$$c_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} + \oint_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma \tag{4.87}$$

Em que o termo livre, $c_{jk} = \delta_{jk}/2$, é obtido para contornos suaves somando-se o resultado de 4.82 ao termo $\delta_{jk}u_k^{(i)}$ original da identidade.

4.4 EQUAÇÃO INTEGRAL HIPER SINGULAR ESCRITA PARA PONTOS NO CONTORNO

Para avaliar as contribuições dos pontos fontes no contorno via equação integral hiper singular (Equação 4.64) é necessário proceder novamente o processo limite ilustrado na Figura 4.1 uma vez que singularidades são verificadas nos termos da equação para o ponto $z \rightarrow z_0$ sobre o caminho de integração. As singularidades nesse caso são oriundas dos termos S_{jkl} e D_{jkl} e são de ordem $1/z^2$ e $1/z$ respectivamente. Por simplicidade o processo limite não será abordado detalhadamente nesse tópico. No entanto, segundo SOLLERO & ALIABADI (1995) a equação hiper singular após o processo limite resulta em:

$$C_{jk}\sigma_{jk}^{(i)} + \oint_{\Gamma} S_{jkl}u_l = \oint_{\Gamma} D_{jkl}p_l d\Gamma \quad (4.88)$$

Sendo que os traços duplos e simples nas integrais de 4.88 indicam integração no sentido de Parte Finita de Hadamard e Valor Principal de Cauchy respectivamente. Ao contrário da formulação singular onde o termo livre C_{jk} resultava somente da avaliação do termo com singularidade $1/z$, nesse caso, o mesmo resulta da avaliação de ambos os termos S_{jkl} e D_{jkl} . Novamente segundo SOLLERO & ALIABADI (1995), para contornos suaves o termo livre resulta $C_{jk} = \delta_{jk}/2$. Aplicando o equilíbrio de tensões na superfície, a Equação 4.88 pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}p_j^{(i)} + \eta_k^{(i)} \oint_{\Gamma} S_{jkl}u_l = \eta_k^{(i)} \oint_{\Gamma} D_{jkl}p_l d\Gamma \quad (4.89)$$

A Equação 4.89 é a equação integral hiper singular escrita em termos de forças de superfície e será utilizada no presente trabalho para tratar os problemas elastostáticos.

4.5 FORMULAÇÕES SINGULAR E HIPER SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

De modo semelhante ao apresentado nos Tópicos 3.5 e 3.6, é possível proceder a segmentação do contorno dos problemas em elementos e reescrever as equações integrais singular e hiper singular em forma discretizada considerando também as aproximações adotadas para os campos do contorno:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{u}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{p}}^* \underline{\underline{\phi}} |J| d\xi \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{\phi}} |J| d\xi \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (4.90)$$

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{p}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \eta^{(i)} \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{s}} \underline{\underline{\phi}} d\Gamma \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \eta^{(i)} \int_{\Gamma_j} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\phi}} d\Gamma \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (4.91)$$

Integrando os contornos Γ_j dos elementos por quadratura de Gauss, obtêm-se:

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{u}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{p}}^* \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{u}}^* \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (4.92)$$

$$\underline{\underline{c}}^{(i)} \underline{\underline{p}}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \eta^{(i)} \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{s}} \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{u}}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \eta^{(i)} \sum_{k=1}^{NP} \left(\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\phi}} \right)_k |J| \omega_k \right\} \underline{\underline{p}}^j \quad (4.93)$$

Procedendo as integrações numéricas, encontra-se a contribuição do ponto i para o sistema global da estrutura. Considerando a contribuição de todos os pontos fonte do contorno e incluindo os termos livres $\underline{\underline{c}}^{(i)}$ no sistema matricial é possível chegar então ao já conhecido sistema de equações algébricas final do MEC:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (4.94)$$

Após determinado os valores de deslocamentos e forças de superfície do contorno é possível determinar também os deslocamentos e tensões de pontos internos. Para isso procede-se de maneira análoga ao apresentado no Tópico 3.11 do capítulo anterior, porém utilizando os núcleos oriundos da solução fundamental anisotrópica de Cruse & Swedlow.

4.6 MÉTODO DE SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

Assim, como as soluções fundamentais de kelvin, as soluções fundamentais anisotrópicas também apresentam singulares. Portanto, para integrar um elemento de contorno Γ_j que contenha o ponto singular, a quadratura de Gauss não resulta na correta solução. Portanto, alguma técnica de regularização como o MSS, por exemplo, deve ser adotada para proceder a integração dos elementos singulares. No caso dos termos integrais das equações singular e hiper singular anisotrópicas, as singularidades verificadas quando $z \rightarrow z_0$ são de ordem $\ln(z - z_0)$, $1/(z - z_0)$ e $1/(z - z_0)^2$. Para determinar as expansões em série das coordenadas complexas z_1 e z_2 que serão utilizadas pelo MSS considere primeiramente que tais coordenadas podem ser escritas em função da coordenada adimensional ξ :

$$\begin{aligned} z_1(\xi) &= x(\xi) + \mu_1 y(\xi) \\ z_2(\xi) &= x(\xi) + \mu_2 y(\xi) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Considerando o elemento auxiliar reto que tangencia o elemento singular no ponto fonte é possível, através da expansão em série de Taylor das coordenadas $x(\xi)$ e $y(\xi)$ apresentadas em 3.86, escrever coordenadas complexas $z_n^*(\xi)$, com $n = 1, 2$, para o elemento auxiliar:

$$\begin{aligned} z_n^*(\xi) &= x(\xi_0) + \mu_n y(\xi_0) + (\xi - \xi_0) \left(x_{,\xi}(\xi_0) + \mu_n y_{,\xi}(\xi_0) \right) = \\ &= z_n(\xi_0) + (\xi - \xi_0) J(\xi_0) (t_1(\xi_0) + \mu_n t_2(\xi_0)) = \\ &= z_n(\xi_0) + (\xi - \xi_0) J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0)) \end{aligned} \quad (4.96)$$

sendo ξ_0 a coordenada adimensional do ponto fonte, $J(\xi_0)$ o Jacobiano da transformação de dimensões reais para adimensionais e $t_1(\xi_0)$, $t_2(\xi_0)$, $\eta_1(\xi_0)$, $\eta_2(\xi_0)$ as componentes dos versores tangente e normal ao contorno no ponto fonte. Portanto é possível escrever as distâncias entre o ponto fonte e os pontos no elemento auxiliar reto para os planos complexos conjugados como:

$$\begin{aligned} z_1^*(\xi) - z_1(\xi_0) &= (\xi - \xi_0) J(\xi_0) (\mu_1 \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0)) \\ z_2^*(\xi) - z_2(\xi_0) &= (\xi - \xi_0) J(\xi_0) (\mu_2 \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0)) \end{aligned} \quad (4.97)$$

A partir de 4.97 é então possível proceder a subtração de singularidade para as integrais singulares das equações integrais que regem os problemas elastostáticos

anisotrópicos. Considerando primeiramente o termo u_{jk}^* da formulação singular integrado ao longo do contorno Γ_j do elemento singular, temos:

$$\oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \left[\oint_{-1}^{+1} u_{jk}^*(\xi_0, \xi) \phi_l(\xi) J_n(\xi) d\xi \right] p_k^{ln} \quad (4.98)$$

Em 4.98, o campo p_k é novamente aproximado através das funções de forma $\phi_l(\xi)$ e a transformação de coordenadas adimensionais para coordenadas reais é feita através do Jacobiano $J_m(\xi)$. Considerando a solução fundamental u_{jk}^* apresentada em 4.51 e aplicando o MSS em 4.98, é possível obter:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma = & \left\{ \int_{-1}^{+1} \left(\begin{array}{l} 2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n - z_n^0)] \phi_l(\xi) J_m(\xi) \\ -2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n^* - z_n^0)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) \end{array} \right) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{-1}^{+1} 2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n^* - z_n^0)] \phi_l(\xi_0) J_m(\xi_0) d\xi \right\} p_k^{lm} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para o caso da singularidade de ordem $\ln(z)$, foi necessário considerar apenas o termo constante na expansão das funções de forma, ou seja, $\phi_l^*(\xi) = \phi_l(\xi_0)$. A primeira integral do membro esquerdo da Expressão 4.99 é agora regular e pode ser integrado numericamente por quadratura de Gauss. Já a segunda integral deve ser avaliada analiticamente de acordo com o limite do VPC. Considerando 4.97, é possível escrever a integral irregular da Expressão 4.99 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} 2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n^* - z_n^0)] \phi_l(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \\ & = \phi_l(\xi_0) J(\xi_0) \int_{-1}^{+1} 2Re \left[q_{kn} A_{jn} \ln \left((\xi - \xi_0) J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \eta_2(\xi_0)) \right) \right] d\xi \end{aligned} \quad (4.100)$$

Adotando a mudança de variável de ξ para $\varepsilon = \xi - \xi_0$ e considerando que q_{kn} e A_{jn} são constantes materiais independentes de ε temos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} 2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J(\xi_0)d\xi \\ = \phi_l(\xi_0)J(\xi_0)2Re \left\{ q_{kn}A_{jn} \int_{-1}^{+1} \ln[\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] d\varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (4.101)$$

A integral na expressão complexa 4.101 pode ser avaliada no sentido de VPC resultando em:

$$q_{kn}A_{jn} \int_{-1}^{+1} \ln[\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] d\varepsilon = q_{kn}A_{jn}VPC^{(\ln(z_n^*))} \quad (4.102)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} VPC^{(\ln(z_n^*))} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln[\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \ln[\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] d\varepsilon \right\} = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} &\left\{ \varepsilon \ln(\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))) - \varepsilon \right\}_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \\ &\quad + \left\{ \varepsilon \ln(\varepsilon J(\xi_0)(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))) - \varepsilon \right\}_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Substituindo os intervalos de integração e procedendo o limite em 4.103, a integral irregular da Equação 4.99 resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} 2Re[q_{kn}A_{jn} \ln(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) d\xi \\ = 2Re[q_{k1}A_{j1}VPC^{(\ln(z_1^*))} + q_{k2}A_{j2}VPC^{(\ln(z_2^*))}] \phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Em que $VPC^{(\ln(z_1^*))}$ e $VPC^{(\ln(z_2^*))}$ são valores principais de Cauchy complexos calculados como:

$$\begin{aligned} VPC^{(\ln(z_1^*))} &= (1 + \xi_0) \ln[J(\xi_0)(-1 - \xi_0)(\mu_1\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] \\ &\quad + (1 - \xi_0) \ln[J(\xi_0)(1 - \xi_0)(\mu_1\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] - 2 \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} VPC^{(\ln(z_2^*))} &= (1 + \xi_0) \ln[J(\xi_0)(-1 - \xi_0)(\mu_2\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] \\ &\quad + (1 - \xi_0) \ln[J(\xi_0)(1 - \xi_0)(\mu_2\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))] - 2 \end{aligned} \quad (4.106)$$

Vale ressaltar que a função $\ln z$, sendo z uma variável complexa qualquer, é definida para todo z , tal que $z \neq 0$, incluindo também os valores negativos (MAOR, 2003). Portanto, não é necessário considerar valores em módulo ao substituir os limites de integração da Equação 4.103.

Assim, a integração do núcleo contendo o termo u_{jk}^* ao longo do contorno Γ_j do elemento singular pode ser implementada computacionalmente fazendo uso da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_j} u_{jk}^* p_k d\Gamma \\ &= \left\{ \int_{-1}^{+1} \left(\begin{aligned} & 2\text{Re}[q_{k1}A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) + q_{k2}A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0)]\phi_l(\xi)J_m(\xi) \\ & -2\text{Re}[q_{k1}A_{j1} \ln(z_1^* - z_1^0) + q_{k2}A_{j2} \ln(z_2^* - z_2^0)]\phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) \end{aligned} \right) d\xi \right. \\ & \left. + 2\text{Re}[q_{k1}A_{j1}VPC^{(\ln(z_1^*))} + q_{k2}A_{j2}VPC^{(\ln(z_2^*))}] \phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) \right\} p_k^{lm} \end{aligned} \quad (4.107)$$

Em relação à integração do núcleo contendo o termo p_{jk}^* (apresentado na Equação 4.52) ao longo do elemento singular Γ_j , aplicando o MSS é possível obter:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma_j} p_{jk}^* u_k d\Gamma \\ &= \left\{ \int_{-1}^{+1} \left(\begin{aligned} & 2\text{Re}[g_{kn}(\mu_n\eta_1 - \eta_2)A_{jn}/(z_n - z_n^0)]\phi_l(\xi)J_m(\xi) \\ & -2\text{Re}[g_{kn}(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{jn}/(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) \end{aligned} \right) d\xi \right. \\ & \left. + \int_{-1}^{+1} 2\text{Re}[g_{kn}(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{jn}/(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) d\xi \right\} u_k^{lm} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Para subtrair a singularidade $1/z$ contida em p_{jk}^* , novamente foi considerado apenas o termo constante da expansão das funções de forma. Regularizada a primeira integral do membro esquerdo em 4.108, agora faz-se ainda necessário proceder a integral irregular remanescente no sentido de VPC. Considerando a expressão de z_n^* é possível apresentar tal integral como:

$$\begin{aligned}
& \oint_{-1}^{+1} 2Re[g_{kn}(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{jn}/(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J(\xi_0) d\xi \\
& = \phi_l(\xi_0) \oint_{-1}^{+1} 2Re[g_{kn}A_{jn}/(\xi - \xi_0)]d\xi
\end{aligned} \tag{4.109}$$

A partir de 4.109, adotando novamente a mudança de variável $\varepsilon = \xi - \xi_0$ e procedendo analiticamente a integração chegasse a:

$$\begin{aligned}
& \oint_{-1}^{+1} 2Re[g_{kn}(\mu_n\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{jn}/(z_n^* - z_n^0)]\phi_l(\xi_0)J(\xi_0) d\xi \\
& = \phi_l(\xi_0)2Re \left\{ g_{kn}A_{jn} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right] \right\} \\
& = \phi_l(\xi_0)2Re[g_{kn}A_{jn}VPC^{(1/\varepsilon)}]
\end{aligned} \tag{4.110}$$

Em que $VPC^{(1/\varepsilon)}$ corresponde ao mesmo valor já apresentado anteriormente na Equação 3.98 do capítulo anterior. Portanto, a expressão que pode ser implementada computacionalmente para o cálculo da integral do termo p_{jk}^* ao longo do contorno singular Γ_j é apresentada a partir de 4.108 e 4.110 como:

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma_j} p_{jk}^* u_k d\Gamma \\
& = \left\{ \int_{-1}^{+1} \left(\begin{array}{l} 2Re \left[\begin{array}{l} g_{k1}(\mu_1\eta_1 - \eta_2)A_{j1}/(z_1 - z_1^0) + \\ g_{k2}(\mu_2\eta_1 - \eta_2)A_{j2}/(z_2 - z_2^0) \end{array} \right] \phi_l(\xi)J_m(\xi) \\ -2Re \left[\begin{array}{l} g_{k1}(\mu_1\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{j1}/(z_1^* - z_1^0) + \\ g_{k2}(\mu_2\eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))A_{j2}/(z_2^* - z_2^0) \end{array} \right] \phi_l(\xi_0)J_m(\xi_0) \end{array} \right) d\xi \right. \\
& \left. + \phi_l(\xi_0)2Re[g_{k1}A_{j1}VPC^{(1/\varepsilon)} + g_{k2}A_{j2}VPC^{(1/\varepsilon)}] \right\} u_k^{lm}
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Com as expressões 4.107 e 4.11 é possível calcular as integrais singulares necessárias para construir o sistema algébrico do MEC a partir da equação integral singular.

Considerando agora a equação hiper singular, o MSS pode ser aplicado também para os núcleos integrais D_{jkl} e S_{jkl} os quais apresentam singularidades dos tipos $1/z$ e $1/z^2$

respectivamente. A integração do primeiro desses núcleos ao longo do elemento singular pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned} \eta_k(\xi_0) \int_{\Gamma_j} D_{jkl} p_l d\Gamma &= \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi)}{(z_n - z_n^0)} \phi_m(\xi) J_p(\xi) - \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) \right] d\xi \right. \\ &\left. + \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) d\xi \right\} p_l^{mp} \end{aligned} \quad (4.112)$$

Em que: $\bar{D}_{jkl}^n = D_{jkl}^n(z_n - z_n^0)$ é a parte não singular do núcleo. Depois de regularizada a primeira integral do lado esquerdo em 4.112, a segunda integral deve ser avaliada analiticamente no sentido de VPC uma vez que a mesma permanece irregular:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) d\xi &= \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{\varepsilon(\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))} \phi_m(\xi_0) d\varepsilon \\ &= \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))} \phi_m(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Assim, a integral do termo D_{jkl} no elemento singular pode ser implementada computacionalmente fazendo-se uso da Expressão 4.114 a seguir.

$$\begin{aligned} \eta_k(\xi_0) \int_{\Gamma_j} D_{jkl} p_l d\Gamma &= \\ \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi)}{(z_n - z_n^0)} \phi_m(\xi) J_p(\xi) - \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) \right] d\xi \right. \\ &\left. + \frac{\bar{D}_{jkl}^n(\xi_0)}{(\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))} \phi_m(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \right\} p_l^{mp} \end{aligned} \quad (4.114)$$

Por fim, a última integral singular que precisa ser avaliada é a integral do núcleo S_{jkl} . Devido à hiper singularidade $1/z^2$ encontrada nesse núcleo, é necessário considerar a expansão das funções de forma até o termo linear para que a singularidade possa ser subtraída. Dessa maneira a aplicação do MSS para esse núcleo resulta em:

$$\begin{aligned}
& \eta_k(\xi_0) \oint_{\Gamma_j} S_{jkl} u_l d\Gamma \\
&= \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi)}{(z_n - z_n^0)^2} \phi_m(\xi) J_p(\xi) - \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) (\xi - \xi_0) J_p(\xi_0) \right] d\xi \right. \\
&\quad \left. + \oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) d\xi \right. \\
&\quad \left. + \oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) (\xi - \xi_0) J_p(\xi_0) d\xi \right\} u_l^{mp}
\end{aligned} \tag{4.115}$$

Sendo $\bar{S}_{jkl}^n = S_{jkl}^n (z_n - z_n^0)^2$ a parcela não singular do núcleo. Considerando a expansão das funções truncadas no termo linear é então possível subtrair a singularidade da primeira integral à esquerda na Equação 4.115. Porém, ainda é necessário integrar analiticamente as duas últimas integrais as quais ainda permanecem irregulares conforme indicam os traços nas mesmas. Devido às singularidades $1/z$ e $1/z^2$ apresentadas nessa últimas integrais, as integrações do segundo e do terceiro núcleo devem ser procedidas analiticamente no sentido de VPC e de PFH respectivamente. Tomando-se primeiramente a integral a ser analisada via VPC, procedendo-a analiticamente obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& \oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) (\xi - \xi_0) J(\xi_0) d\xi \\
&= \oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{\varepsilon J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) d\xi \\
&= \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Já a integral hiper singular a ser procedida como PFH pode ser calculada como:

$$\begin{aligned}
\oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_m(\xi_0) J(\xi_0) d\xi &= \oint_{-1}^{+1} \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{\varepsilon^2 J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_m(\xi_0) d\xi \\
&= \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_m(\xi_0) PFH^{(1/\varepsilon^2)}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Sendo que a expressão para a $PFH^{(1/\varepsilon^2)}$ também já foi apresentada no Capítulo 3 na Equação 3.111. Portanto, para implementar a integração do termo S_{jkl} da equação hiper singular ao longo do elemento singular utilizou-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\eta_k(\xi_0) \oint_{\Gamma_j} S_{jkl} u_l d\Gamma &= \eta_k(\xi_0) \left\{ \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi)}{(z_n - z_n^0)^2} \phi_m(\xi) J_p(\xi) \right. \right. \\
&\quad - \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_m(\xi_0) J_p(\xi_0) \\
&\quad \left. \left. - \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{(z_n^* - z_n^0)^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) (\xi - \xi_0) J_p(\xi_0) \right] d\xi \right. \\
&\quad + \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_m(\xi_0) PFH^{(1/\varepsilon^2)} \\
&\quad \left. + \frac{\bar{S}_{jkl}^n(\xi_0)}{J(\xi_0) (\mu_n \eta_1(\xi_0) - \eta_2(\xi_0))^2} \phi_{m,\xi}(\xi_0) VPC^{(1/\varepsilon)} \right\} u_l^{mp}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

A subtração de singularidade procedida para os núcleos integrais das equações singular e hiper singular do MEC aplicadas a meios isotrópicos e anisotrópicos foram apresentadas nos Tópicos 3.7 e 4.6. Com a regularização foi possível analisar as integrais singulares em elementos de aproximação polinomial curvos, ou seja, de alta ordem. Além disso, devido ao fato da formulação hiper singular não ser definida para campos de força de superfície descontínuos, nas análises procedidas nesse trabalho foram adotados apenas elementos descontínuos os quais forma apresentados no Tópico 3.8 do capítulo anterior.

5 MECÂNICA DA FRATURA

A mecânica da fratura é uma ciência que estuda as falhas das estruturas por fraturamento induzidas por propagação de fissuras. As fissuras podem se propagar em um sólido de infinitas maneiras. No entanto, toda propagação pode ser descrita como uma combinação de três modos básicos. Considerando um corpo inscrito em um sistema de coordenadas cartesianas, os modos básicos de fraturamento podem ser apresentados conforme ilustra a Figura 5.1.

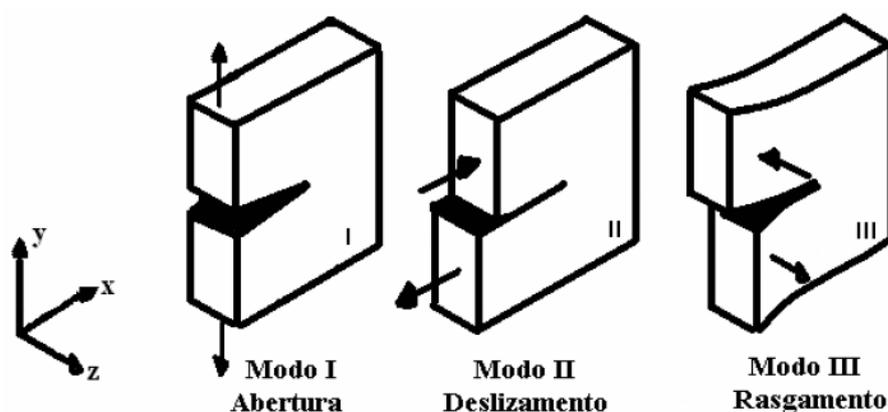


Figura 5.1 Modos de fratura (BROEK, 1986)

Quando as solicitações na estrutura forçam uma abertura normal das faces da fissura no plano tem-se a propagação em modo I de fratura (“modo de abertura” ou “opening mode”). O modo II (“modo de cisalhamento” ou “shear mode”) é caracterizado pela propagação no plano devido ao deslizamento entre as faces da fissura na direção de seu comprimento. Por fim, o modo III (“modo de rasgamento” ou “tearing mode”) pode ser apresentado como a propagação devido ao deslizamento entre as faces da fissura no espaço, ou seja, na direção normal ao comprimento da fissura. Em problemas planos, como é o caso dos problemas analisados no presente estudo, somente os modos I e II podem ocorrer.

O modo I é o principal responsável pela propagação de fissuras em estruturas reais. Isso se deve ao fato de que os outros dois modos raramente ocorrem isoladamente sendo que em geral, os modos II e III ocorrem em combinação com o modo I. (SOUZA, 2001). Além disso, segundo BROEK (1986), se no carregamento, os modos estiverem combinados em fase, as fissuras rapidamente escolherão crescer na direção de propagação do modo I, pois

nesse modo a energia potencial do corpo é dissipada mais rapidamente. Dessa maneira muitos dos casos combinados podem ser naturalmente reduzidos ao primeiro modo de fraturamento.

Os modos de fratura descrevem as possibilidades geométricas para a propagação de fissuras. No entanto, para compreender o fenômeno é necessário entender como uma fissura em um meio contínuo pode alterar a distribuição tensões no mesmo. Ainda mais importante do que as tensões é determinar critérios que permitam avaliar quando as falhas por fraturamento irão ocorrer em estruturas fissuradas devido às solicitações mecânicas. As falhas estruturais dependem fortemente das propriedades dos materiais que as constituem. Baseado na resposta tensão-deformação, a maioria dos materiais usados na engenharia podem ser classificados quanto ao fraturamento como: Frágeis, Dúcteis e Quase Frágeis.

Visando entender melhor como ocorre a falha por fraturamento em cada um desses tipos de materiais, considere uma chapa infinita submetida a uma tensão de tração, contendo uma falha inicial representada por um furo elíptico de raios a_1 e a_2 conforme apresentado na Figura 5.2. A presença do furo altera a distribuição de tensões de uma maneira que a máxima tensão, $\sigma_{m\acute{a}x}$, é maior do que a tensão σ aplicada no contorno distante da chapa.

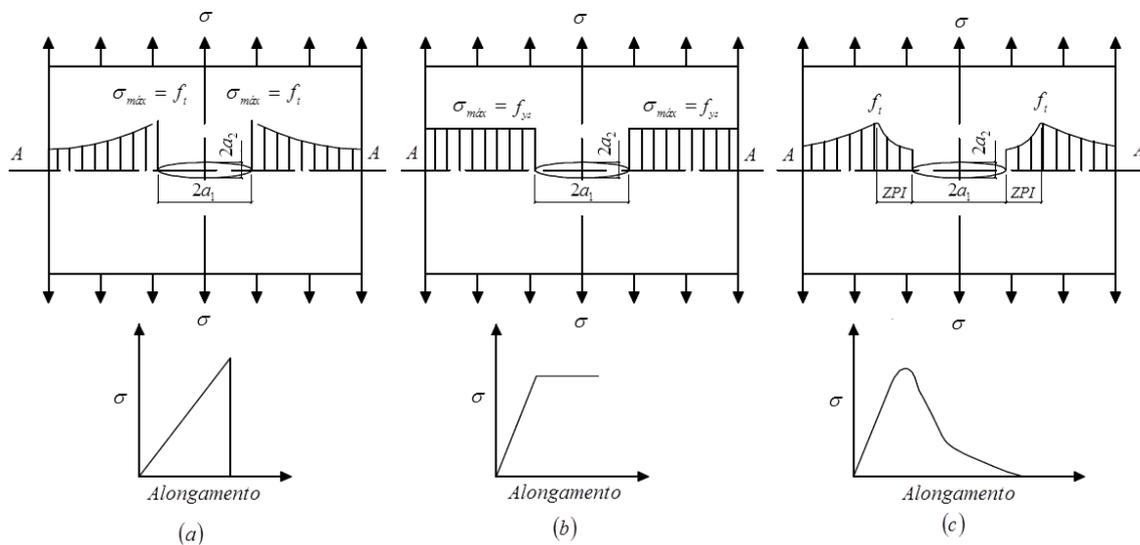


Figura 5.2 Falhas estruturais em diferentes tipos de materiais: (a) Falha frágil, (b) Falha plástica, e (c) Falha quase frágil (Adaptado de Surendra, Swartz e Ouyang (1995))

Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995), No caso de materiais perfeitamente frágeis, caso (a), a máxima tensão pode ser obtida como: $\sigma_{m\acute{a}x} = (1 + 2a_1/a_2)\sigma$. Para esse tipo de material, a falha da chapa ocorre catastroficamente quando o valor de $\sigma_{m\acute{a}x}$ atinge a resistência à tração f_t . Por outro lado, caso a chapa seja constituída de material elastoplástico perfeito com tensão de escoamento f_{ys} , o carregamento aplicado pode

continuamente crescer depois de $\sigma_{m\acute{a}x} = f_{ys}$ devido à redistribuição de tensões plásticas. Nesse caso, a falha ocorre quando a tensão normal em toda a seção A-A da chapa atingir a tensão de escoamento. Por fim, no caso da chapa ser constituída de material quase frágil, uma ZPI se desenvolve na porção material onde as tensões elásticas teoricamente superariam a resistência à tração f_t . Nessa região o material sofre uma gradativa degradação mecânica e a falha ocorre quando a resistência coesiva das partículas a frete da fissura for esgotada. O desenvolvimento da ZPI geralmente resulta em um amolecimento pós-pico na resposta carregamento-deformação conforme observado na Figura 5.2 (c).

Nos próximos itens desse capítulo, serão apresentados alguns conceitos da mecânica da fratura desenvolvidos para tentar descrever o fenômeno do fraturamento nos materiais. As primeiras teorias da MFEL serão introduzidas para a previsão de falhas em matérias frágeis. Posteriormente, serão apresentadas teorias da MFNL para lidar com as regiões não lineares observadas durante a propagação de fissuras em materiais dúcteis e quase frágeis.

5.1 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

Os primeiros conceitos da MF começaram a ser desenvolvidos analisando o fenômeno de fraturamento em materiais frágeis. Considerando um material perfeitamente frágil, a partir da Figura 5.2 (a) percebe-se que para uma trinca real, onde geometricamente temos $a_2 \rightarrow 0$, o estado de tensão na ponta da mesma tende a ser singular, $\sigma_{m\acute{a}x} \rightarrow \infty$. Como nenhum material pode resistir a uma sollicitação infinita, nenhum material real é perfeitamente frágil e, portanto sempre existe uma ZPI na frente de trincas. Porém, no caso de muitos materiais como vidros e alguns metais, por exemplo, a ZPI é suficientemente pequena para que os efeitos dessa região possam ser desprezados na análise. Assim, para esses tipos de materiais, o fraturamento pode ser aproximado pelos conceitos da MFEL. No entanto, nesse caso os critérios de falha escritos em tensões se tornam mal postulados uma vez que qualquer sollicitação gera esforços singulares.

Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG. (1995), as primeiras análises sobre a fratura de estruturas contendo trincas foram provavelmente desenvolvidas por GRIFFITH (1921) baseada em considerações energéticas. O conceito generalizado das ideias de GRIFFITH (1921) pode ser apresentado a partir do potencial energético total de um sistema

composto por um corpo contendo uma fissura de comprimento a , sujeito a carregamentos externos que provocam a propagação da trinca. Tal potencial pode ser escrito como:

$$\Pi = U + O + W - F - Q \quad (5.1)$$

Sendo Π o total energético, U a energia potencial de deformação, O a energia cinética do corpo, W a energia dissipada na formação da fissura, F o trabalho realizado pelas forças de um carregamento mecânico e Q o trabalho realizado por carregamentos térmicos. Segundo a 1ª lei da termodinâmica a variação do potencial energético em relação ao tempo, $\dot{\Pi}$, deve ser nula. Em muitos problemas de engenharia, a propagação de fissuras em corpos pode ser considerada de forma quase estática. Nesses casos a variação da energia cinética, \dot{O} , pode ser considerada como desprezível na análise. Além disso, como carregamentos térmicos não são o foco do presente estudo, a propagação da trinca pode ser considerada como ocorrendo em condições adiabáticas. Assim, a variação do trabalho térmico, \dot{Q} , pode ser também desconsiderada. Como a variação do potencial energético ao longo do tempo, $\dot{\Pi}$, para a análise de fratura é causada por variações no comprimento da fissura (a), a 1ª lei da termodinâmica pode ser apresentada como:

$$\dot{\Pi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial a} \rightarrow G = G_c \quad (5.2)$$

Na Equação 5.2, o termo $\partial W / \partial a$ representa a energia necessária para a formação de novas superfícies de fissura. Em se tratando de materiais frágeis à fratura, o valor desse termo pode ser considerado como uma propriedade material independente, a qual é constante ao longo do fraturamento (SURENDRA, SWARTZ e OUYANG, 1995). Esse termo também é denominado na literatura como resistência à fratura do material ($\partial W / \partial a = G_c$), uma vez que a fissura não cresce caso a energia disponível na estrutura seja menor do que a energia crítica de fratura G_c . Já o termo G à esquerda de 5.2 representa a energia disponível na estrutura para propagar a fissura sendo a mesma função do carregamento, da geometria da estrutura e das condições de contorno. A energia disponível para o fraturamento é composta pela variação de energia $\partial F / \partial a$ decorrente do crescimento da fissura devido ao carregamento externo menos a perda de energia potencial da estrutura $\partial U / \partial a$ oriunda também da variação no comprimento da fissura. Dessa maneira, a Equação 5.2 representa uma condição necessária para o estado de equilíbrio da estrutura durante a propagação de uma fissura.

De acordo com o critério energético de Griffith, para um material perfeitamente frágil o fraturamento irá ocorrer de maneira instável caso a energia disponível para o fraturamento na estrutura atinja o valor da energia necessária à fratura do material G_c . Portanto, para determinar se a propagação irá ocorrer ou não é necessário calcular a energia G a qual é um parâmetro global da estrutura. A depender das condições de contorno, essa energia pode ser calculada de diferentes maneiras. Para o caso do fraturamento ocorrer devido q um carregamento externo aplicado em forma de deslocamento prescrito u , tem-se:

$$G = - \left[\frac{\partial U(a, u)}{\partial a} \right]_u \quad (5.3)$$

Já no caso do fraturamento ocorrer com um carregamento externo aplicado em forma de força constante p , obtêm-se:

$$G = \left\{ \frac{\partial}{\partial a} [F(p) - U(a, p)] \right\}_p = \left[\frac{\partial U^*(a, p)}{\partial a} \right]_p \quad (5.4)$$

Sendo que os subscritos u e p indicam que as derivadas devem ser calculadas considerando hora u ou hora p como constantes. Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995), a energia de deformação $U(a, u)$ e a energia complementar de deformação $U^*(a, p)$ podem ser calculadas como:

$$U = \int_V U_d(a, \varepsilon) dV \quad U^* = \int_V U_d^*(a, \sigma) dV \quad (5.5)$$

Sendo V o volume do corpo e $U_d(a, \varepsilon)$ e $U_d^*(a, \sigma)$ as densidades de energia de deformação e de energia complementar de deformação, respectivamente. De acordo com a Figura 5.3, tais densidades podem ser obtidas a partir da curva tensão-deformação do material conforme o ilustrado:

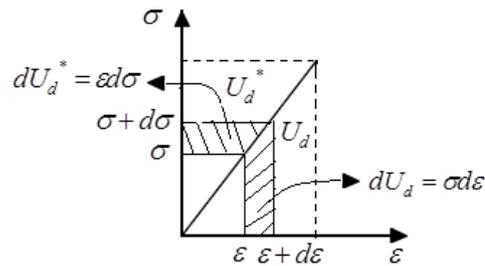


Figura 5.3 Densidades de energia de deformação e energia de deformação complementar para um material perfeitamente frágil

$$U_d(a, \varepsilon) = \int \sigma(a, \varepsilon) d\varepsilon \quad U_d^*(a, \sigma) = \int \varepsilon(a, \sigma) d\sigma \quad (3.6)$$

Vale ainda mencionar que para materiais frágeis, $U_d(a, \varepsilon) = U_d^*(a, \sigma)$ conforme observado na Figura 5.3.

Apesar da eficácia do balanço energético de Griffith na determinação da propagação de fissuras, verifica-se que a sua obtenção é uma árdua tarefa. Isso porque o termo G reflete um estado energético global da estrutura envolvendo assim uma integração ao longo de todo o volume da mesma.

Em relação à distribuição de tensões em corpos fraturados, WESTERGAARD (1939) e posteriormente MUSKHELISHVILI (1953) propuseram uma solução para o campo de tensão próximo à ponta de fissuras para alguns problemas específicos denominados problemas fundamentais de Griffith. Os problemas fundamentais de Griffith tratam de uma chapa homogênea isotrópica de dimensões infinitas contendo uma trinca de comprimento $2a$ submetida puramente a cada um dos três modos básicos de fraturamento conforme apresenta a Figura 5.4.

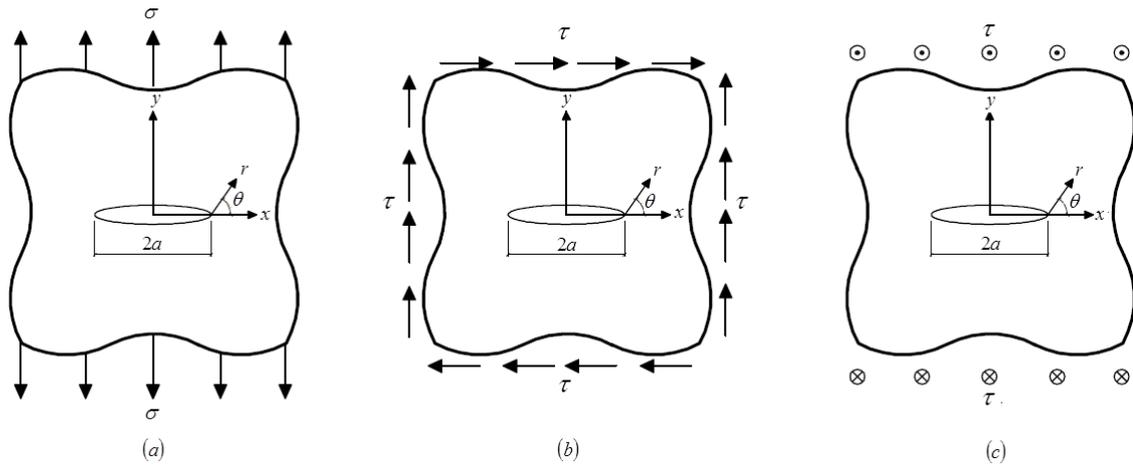


Figura 5.4 Problemas fundamentais de Griffith para os modos de fratura: (a) modo I, (b) modo II, (c) modo III

WESTERGAARD (1939) empregou funções de tensão de origem complexa para a determinação do campo de tensão nas proximidades da fissura. A dedução das expressões para as componentes de tensão pode ser encontradas em livros de mecânica da fratura como PAPADOPOULOS (1993). A seguir, as Equações 5.7, 5.8 e 5.9 apresentam essas soluções em coordenadas cilíndricas, r e θ , centradas na ponta das trincas conforme indicado na Figura 5.4.

Modo I:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-\tau\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{\tau\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (5.8)$$

Modo III:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{-\tau\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{-\tau\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{cos} \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (5.9)$$

Percebe-se que as expressões das componentes do estado de tensão nas proximidades da fissura são singulares de ordem $r^{-1/2}$ conforme previsto pelos conceitos iniciais da MFEL. Com o estado de tensão singular os critérios de falha escritos em tensões se tornam inconsistentes. Nesses, casos o balanço energético de Griffith pode ser utilizando para prever a propagação. No entanto, como esse balanço requer uma análise global da estrutura, o processo se torna ineficaz e custoso uma vez que as fissuras são de fato um fenômeno local.

Visando simplificar as análises de fratura, IRWIN (1957) propôs uma nova grandeza denominada fator de intensidade de tensão K . A partir de K pode-se avaliar localmente de maneira correta o campo de tensões a frente da extremidade da fissura. Assim, o estado de tensão na frente de uma trinca submetida a um modo de fratura pode ser escrito de maneira indicial como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta) \quad (3.10)$$

Sendo $F_{ij}(\theta)$ uma função apenas da coordenada cilíndrica θ , a qual depende da geometria da estrutura e das condições de contorno, e K o fator de intensidade de tensão do modo de fratura em que a trinca foi solicitada. K além de depender da geometria e condições de contorno depende também do comprimento da trinca. Observando as Expressões 5.7, 5.8 e 5.9 dos problemas fundamentais de Griffith, é possível afirmar que para chapas de dimensões infinitas, os fatores de intensidade de tensão dos três modos básicos de fratura são:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \quad \text{e} \quad K_{III} = \tau\sqrt{\pi a} \quad (5.11)$$

O Fator de Intensidade de Tensão pode ser entendido como um fator que associa o campo de tensões à frente da fissura com a singularidade das tensões. Por meio desse, é possível anunciar um critério de propagação de fissuras mais eficiente o qual envolve apenas uma análise local nas proximidades da fissura. Segundo o critério, a fissura irá se propagar quando o Fator de Intensidade de Tensão atingir um valor crítico K_c que corresponde a uma propriedade material denominada tenacidade à fratura. Em problemas planos solicitados aos

modos básicos de fratura, os valores das propriedades materiais K_{Ic} e K_{IIc} são as respectivas tenacidades à fratura do material em modo I e modo II.

Existem diversas maneiras de determinar os Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de fratura. Dentre essas, destacam-se: Via métodos teóricos como os de Westergaard e métodos energéticos; via métodos numéricos como o MEF e o MEC ou via métodos experimentais como foto-elasticidade, métodos óticos e extensométricos (LEONEL, 2009). O valor do fator de intensidade de tensão para diversos problemas com geometrias e carregamentos específicos pode ser obtido em “handbooks”, como MURAKAMI (1987), ou mesmo em livros dedicados ao estudo de mecânica da fratura como BROEK (1986) e SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995).

Tomando-se, por exemplo, o problema de uma chapa solicitada puramente a modo I, é possível verificar que $\sigma_f = K_{Ic}/\sqrt{\pi a}$, sendo σ_f a tensão de fraturamento, ou seja, a tensão aplicada na chapa necessária para a mesma falhar catastroficamente por fratura. Na Figura 5.5 é apresentada a curva da tensão de fratura versus o comprimento de trinca:

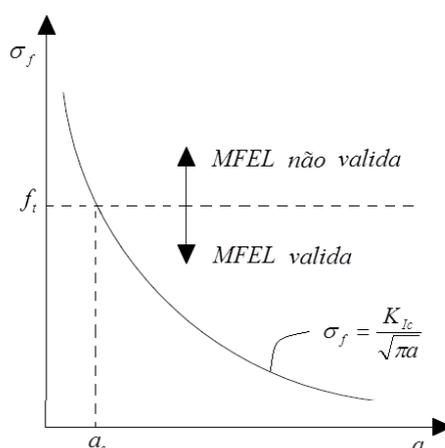


Figura 5.5 Tensão de fratura versus dimensão de trinca em solitação modo I

Analisando a curva pode-se observar que quando a tensão de fratura σ_f da chapa supera a resistência à tração f_t da mesma para pequenos comprimentos de trinca, $a < a_c$, os conceitos da MFEL deixam de ser válidos sendo necessário considerar efeitos não lineares nas análises de fratura.

Como tanto a taxa de liberação de energia G e o fator de intensidade de tensão K podem ser usados para previsão do fraturamento, uma relação entre os mesmos deve existir. Assim, IRWIN (1957) ainda demonstrou que se uma fissura tem seu comprimento aumentado

de uma extensão infinitesimal da , o trabalho realizado pelo campo de tensões local na extremidade da fissura durante seu crescimento é equivalente à mudança na energia de deformação $G \cdot da$. Dessa maneira, é possível relacionar os fatores de intensidade de tensão às taxas de liberação de energia para os três modos básicos de fratura:

$$G_I = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \quad G_{II} = \frac{K_{IIc}^2}{E'} \quad G_{III} = \frac{K_{IIIc}^2}{(1 - \nu)E'} \quad (5.12)$$

Em que $E' = E$ para problemas planos de tensão e $E' = E/(1 - \nu^2)$ para problemas planos de deformação. Apesar da relação entre os valores críticos, o critério de propagação baseado nos fatores de intensidade de tensão leva vantagem em relação ao balanço energético de Griffith uma vez na obtenção desses é necessária apenas uma análise local do campo de tensões a frente das fissuras e não um balanço de energia global como no caso da energia disponível para a fratura G .

Em problemas envolvendo modos mistos de fratura é válida a superposição dos campos de tensão nas proximidades da ponta de uma fissura, ou seja, para um modo misto I e II, por exemplo, a seguinte relação é válida:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (5.13)$$

No entanto, a superposição de efeitos não é válida para os fatores de intensidades de tensão de diferentes modos de fratura. Tipicamente, cada modo de fratura possui seu próprio e independente valor crítico de fator de intensidade de tensão, K_{Ic} , K_{IIc} e K_{IIIc} , e a fissura se propaga quando qualquer um desses valores críticos forem alcançados (SMITH, LANDIS e GONG, 2003). Já a taxa de liberação de energia pode ser superposta no caso de modos mistos de fratura, ou seja, $G = G_I + G_{II} + G_{III}$. Por fim, vale ressaltar que a superposição de fatores de intensidade de tensão só é válida para quando os problemas a serem superpostos tratarem do mesmo modo puro de fratura.

5.2 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR ANISOTRÓPICA

Em relação à MFEL aplicada a materiais anisotrópicos SIH et al. (1965) apresentaram uma solução analítica para o campo de tensão próximo à ponta da trinca nos problemas fundamentais de Griffith dos modos I e II de fratura considerando a anisotropia do material. Para isso, novamente foram utilizadas funções de tensão complexas que satisfazem as condições de descontinuidades impostas pela trinca. As expressões analíticas das componentes de tensão deduzidas por SIH et al. (1965) são a seguir apresentadas em função

dos parâmetros complexos de anisotropia μ_1 e μ_2 , dos fatores de intensidade de tensão K_I e K_{II} e das coordenadas cilíndricas r e θ :

Modo I:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.14)$$

Modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \operatorname{sen} \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \operatorname{sen} \theta}} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.15)$$

Vale lembrar que problemas de modos mistos de fratura podem ser avaliados com a superposição dos campos de tensão. No entanto, os fatores de intensidade de tensão podem ser determinados analiticamente apenas para alguns casos de geometrias e carregamentos específicos. Assim, uma maior gama de problemas de fratura pode ser alcançada via métodos numéricos. Em materiais isotrópicos, a propagação ocorre sempre na direção que maximiza a taxa de liberação de energia G uma vez que a resistência à fratura R é igual para todas as direções. No entanto, em materiais anisotrópicos, a direção de propagação é governada não somente pela direção que maximiza G como também pelos planos naturais de fraqueza material onde a resistência à fratura R é minimizada.

5.3 MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR

No caso de estruturas constituídas de materiais não lineares, as dimensões da porção de material degradado na frente de uma fissura não são geralmente desprezíveis em relação às dimensões da estrutura. Em se tratando de MFEL, é assumido que toda a energia de

deformação da estrutura disponível é utilizada para a propagação da fissura. No entanto, em muitos materiais existem inúmeros outros mecanismos de degradação mecânica que são capazes de dissipar a energia potencial. Portanto, a energia disponível não é utilizada apenas na propagação da fissura, mas também é utilizada na degradação mecânica do material nas proximidades da ponta da fissura. Tais mecanismos, em geral, dificultam a propagação da fissura e por isso podem ser chamados de mecanismos de resistência à fratura. Entre os mecanismos mais comuns estão a deformação plástica nas proximidades das pontas de fissuras em materiais dúcteis, microfissuras e fricção em concretos e rochas ou ainda “fibre bridging” em madeiras e alguns compósitos.

Em materiais elásticos lineares frágeis, qualquer propagação de fissura representa uma falha catastrófica por fraturamento. No entanto, para materiais não lineares, devido aos mecanismos resistentes uma fissura pode propagar estavelmente até a trinca atingir um dado comprimento crítico que leva ao fraturamento instável. Os mesmos conceitos introduzidos por Griffith de taxa de liberação de energia G podem também ser utilizados para descrever a propagação de trincas em materiais não lineares como é o caso dos materiais dúcteis, quase frágeis e elásticos não lineares. Novamente a condição de equilíbrio para a propagação de uma fissura em uma chapa é de que a derivada do potencial energético Π com respeito ao comprimento da fissura a deve ser igual a zero. Portanto é possível escrever essa condição de equilíbrio como $G = G_c$ ou ainda $G = R$ em que a energia necessária ao fraturamento G_c também pode ser entendida como uma resistência à fratura R . Para materiais elásticos lineares, essa resistência pode ser considerada uma propriedade do material que depende apenas da geometria e permanece constante no decorrer do crescimento da fissura. Já em materiais não lineares, quando os mecanismos resistentes são mobilizados os mesmos fazem com que a resistência à fratura R aumente com o aumento do comprimento da fissura a . Dessa maneira, podem ser traçadas curvas de resistência versus o comprimento da fissura ao longo do processo de fraturamento as quais são denominadas na literatura de curvas-R. Também pode ser traçada a energia potencial disponível para o fraturamento G como uma função do comprimento da fissura. Assim, as curvas resistentes, ou curvas-R, podem ser consideradas como envoltória para as curvas solicitantes de energia disponível G . Um exemplo desse tipo de envoltória é ilustrado na Figura 5.6 para avaliar o processo de fraturamento em materiais a partir de uma fissura inicial de comprimento a_0 .

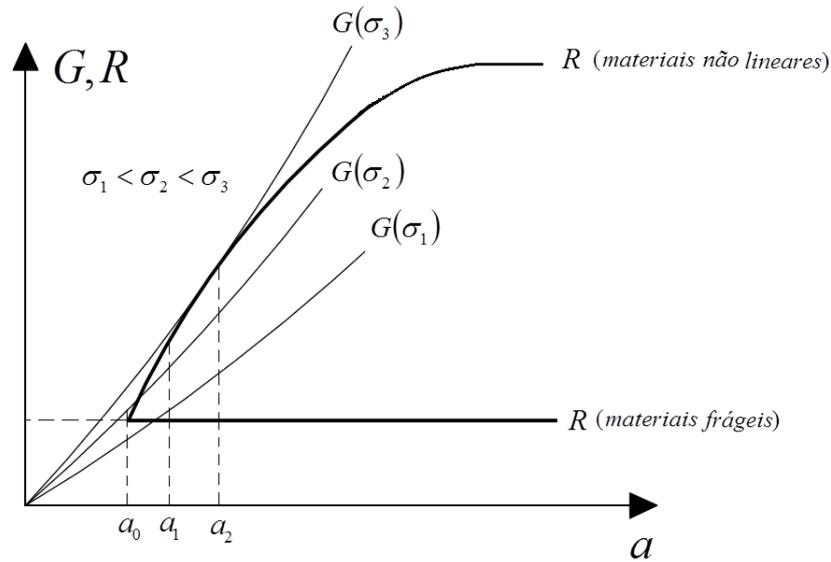


Figura 5.6 Curvas-R e curvas de energia disponível G ao longo do fraturamento dos materiais

No caso de materiais frágeis, como os efeitos dos mecanismos resistentes são praticamente desprezíveis, o trecho não linear da curva resistente é muito pequeno em comparação ao comprimento da fissura. Portanto a curva-R permanece constante. Já nos materiais não lineares, os mecanismos resistentes fazem com que a resistência à fratura aumente ao longo do fraturamento. No entanto, caso as fissuras apresentem dimensões muito grandes, mesmo em materiais não lineares a curva resistente também tenderá a ser constante podendo os conceitos de MFEL serem novamente aplicados. Em relação às curvas de energia disponível para o fraturamento, essas dependem da geometria da estrutura, do carregamento σ e também são funções crescentes com o aumento do comprimento da fissura. Conforme apresentado anteriormente, a condição para a fissura crescer é $G = R$. No entanto, como existe a possibilidade da curva-R não ser mais constante, esse critério se torna um pouco mais complicado. Em materiais não lineares, quando uma fissura cresce a propagação pode ocorrer estável ou instavelmente a depender das variações das curvas G e R em relação às variações no comprimento da fissura. Dessa maneira, pode ser apresentado um critério mais abrangente para prever a estabilidade da propagação ao derivar-se novamente o potencial energético em relação a a :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2} = \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial a} > \frac{\partial G}{\partial a} & \text{Propagação estável} \\ \frac{\partial R}{\partial a} < \frac{\partial G}{\partial a} & \text{Propagação instável} \\ \frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial G}{\partial a} & \text{Propagação estacionária} \end{cases} \quad (5.16)$$

Baseado no processo de fraturamento dos materiais ilustrado na Figura 5.6, é possível perceber que uma dada sollicitação σ_1 não é o suficiente para propagar a fissura uma vez que $G < R$. Já a sollicitação σ_2 gera uma propagação a qual é instável para o caso de materiais frágeis porém, é estável para o caso de materiais não lineares. Nessa segunda hipótese, caso o carregamento permaneça constante, a fissura irá se propagar somente até atingir um determinado comprimento (por exemplo a_1) em que $G < R$ novamente. Nessa circunstância a fissura não irá se propagar a menos que haja um aumento da tensão sollicitante. Por fim, caso a tensão aumente para σ_3 a fratura se propagará até um comprimento crítico a_2 . Nessa situação temos novamente a condição $G = R$ e $\partial G/\partial a = \partial R/\partial a$. A partir desse ponto, qualquer aumento na fissura pode ocasionar na propagação instável onde a fissura crescerá mesmo que a tensão sollicitante permaneça constante ou mesmo diminua.

A determinação da taxa de liberação de energia G ao longo do fraturamento é uma árdua tarefa uma vez que envolve o balanço global de energia da estrutura. Além disso, o problema pode complicar mais ainda quando se trata de materiais não lineares. Uma alternativa para a determinação de G foi proposta por RICE (1968) e envolve apenas uma análise local próxima à ponta da fissura. O autor propôs que, para materiais elásticos, a taxa de liberação de energia é igual a integral-J. J é uma integral ao longo de um contorno Γ arbitrário, girando no sentido anti-horário, e circundante à ponta da fissura localizada no interior de um sólido submetido à tensões. A Equação 5.17 e a Figura 5.7 apresentam a definição dessa integral cujo valor independe do caminho Γ de integração interno ao sólido.

$$J = \int_{\Gamma} \left[U_d(a, \varepsilon) dy - \vec{p} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right] \quad (5.17)$$

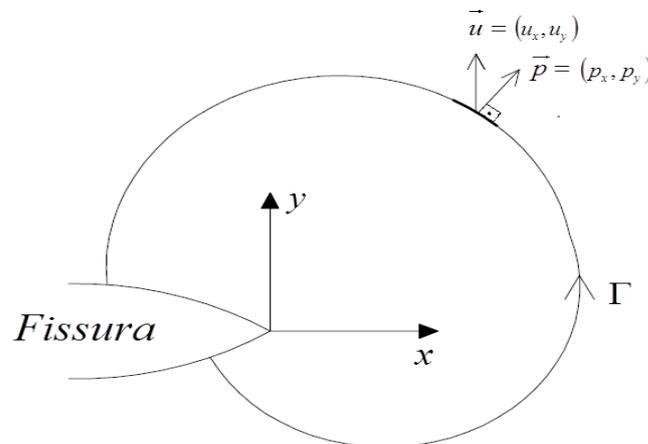


Figura 5.7 Contorno ao redor da fissura para a integral-J.

Apesar de ser muito utilizada, a integral-J também possui suas limitações. A igualdade $G = J$ só é válida para materiais elásticos os quais podem ser lineares ou não lineares. Portanto, a independência do caminho Γ para o valor de J só é válida caso a curva tensão-deformação do material durante o carregamento seja igual à curva tensão-deformação no descarregamento. Nessas circunstâncias, a integral coincide com o valor de G .

Para grande parte dos materiais reais a independência do caminho na integral-J não é atendida e, portanto $G \neq J$. Entre esses materiais incluem-se os dúcteis e quase frágeis nos quais uma vez mobilizados os mecanismos não lineares, danos irreversíveis na micro estrutura são verificados. Portanto, a taxa de liberação de energia só pode ser aproximada pela integral-J em materiais onde a ZPI é pequena em comparação à região interna ao contorno de integração Γ .

Como a integral-J possui muitas limitações e a análise das curvas G e curvas- R requerem uma árdua análise global, outros modelos foram propostos para descrever o fraturamento dos materiais dúcteis e quase frágeis. Para isso, estudiosos propuseram diferentes maneiras para modelar macroscopicamente os mecanismos resistentes microscópicos que ocorrem na ZPI de tais tipos materiais. Em geral, sabe-se que uma representação coerente da ZPI leva a uma coerente representação global do material. Nesse sentido, é conveniente agora diferenciar a fratura não linear em materiais dúcteis da fratura não linear em materiais quase frágeis. Até então, ambas vinham sendo tratadas como fraturas em materiais não lineares. No entanto, os processos inelásticos que ocorrem na ZPI dessas duas classes são muito diferentes e influenciam crucialmente no fenômeno do fraturamento. Interiormente à ZPI existe uma região de alta concentração de tensões o que leva o material a perder sua forma íntegra. Essa região é denominada zona de processo de fraturamento. Em materiais dúcteis como metais, tal região é pequena em comparação com a dimensão total da ZPI. Assim, nesses materiais o mecanismo não linear de plastificação se manifesta primeiramente em relação à propagação de fissuras sendo o principal responsável pelo colapso do material. Já em materiais quase frágeis, a zona de processos de fraturamento ocupa quase totalmente a ZPI. Isso faz com que esse tipo de material manifeste a propagação das fissuras em detrimento a outros mecanismos não lineares de dissipação de energia (KARIHALOO, 1995). A seguir, a Figura 5.8 ilustra esquematicamente a ZPI englobando a zona de fraturamento para o caso de materiais frágeis, dúcteis e quase frágeis.

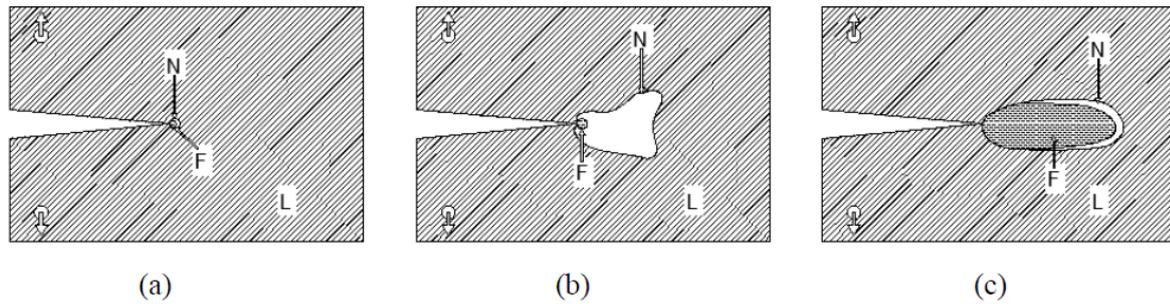


Figura 5.8 Características da zona de fraturamento F em relação à zona de processos não lineares N e a região linear L para diferentes materiais: (a) Frágeis, (b) Dúcteis, (c) Quase frágeis. (KARIHALOO, 1995)

As ideias pioneiras em relação à representação da ZPI surgiram aplicadas a materiais dúcteis. Nesses materiais, quase toda a ZPI corresponde à uma zona de deformações plásticas. Basicamente, existem quatro principais abordagens para a representação da zona plástica em metais: A abordagem de Irwin por meio da qual é assumida uma forma pré-concebida para a zona plástica, o modelo coesivo proposto por DUGDALE (1960) e BARENBLATT (1962) e a abordagem baseada em critérios de resistência via análise por métodos numéricos.

Apesar dos trabalhos desses autores tratarem da fratura em materiais dúcteis, suas ideias inspiraram outros estudiosos a desenvolverem modelos que representassem a zona de fraturamento em materiais quase frágeis. No modelo proposto, a fissura e a respectiva zona plástica desenvolvida em sua ponta durante o fraturamento são tratadas como uma fissura fictícia efetiva de comprimento maior com tensões em suas faces no sentido de fechá-las. A Figura 5.9 a seguir ilustra o modelo coesivo de DUGDALE (1960) para uma chapa infinita solicitada a modo I de fratura.

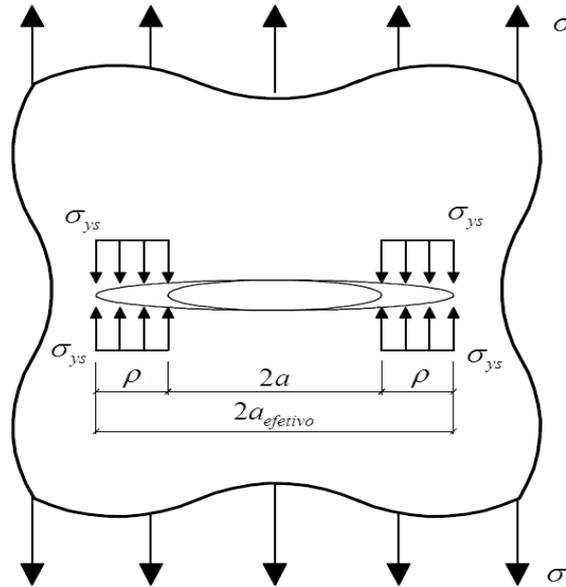


Figura 5.9 Comprimento efetivo de fissura para representar deformações plásticas na ponta de trincas.

Conforme ilustrado, a dimensão ρ da zona plástica é considerada como a diferença entre o comprimento $a_{efetivo}$ da fissura fictícia menos o comprimento a da fissura real. Além disso, a tensão atuante nas pontas da fissura fictícia, ou tensão coesiva, é constante e igual à tensão de escoamento σ_{ys} do material. Para impor o comprimento da fissura fictícia e consecutivamente determinar o comprimento da zona plástica ρ , DUGDALE (1960) propôs que esse comprimento deve ser tal que faça com que o Fator de Intensidade de Tensão do modo I de fratura valha zero na ponta da fissura fictícia.

O fator de intensidade de tensão para o problema da Figura 5.9 pode ser obtido superpondo dois problemas mais básicos: O de uma fissura livre de tensões com comprimento igual a $a_{efetivo}$ solicitada por uma tensão remota σ e outro onde a fissura é solicitada em suas faces nas regiões próximas às pontas por uma tensão constante σ_{ys} . Os fatores de intensidade de tensão para ambos os casos são, respectivamente, $K_I^\sigma = \sigma\sqrt{\pi(a + \rho)}$ e $K_I^{\sigma_{ys}} = 2\sigma_{ys}\cos^{-1}(a/a + \rho)\sqrt{a + \rho/\pi}$. Portanto, ρ é determinado a partir da seguinte condição:

$$K_I^\sigma + K_I^{\sigma_{ys}} = 0 \rightarrow \rho = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_{ys}^2} = \frac{\pi K_I}{8\sigma_{ys}^2} \quad (5.18)$$

É válido mencionar que na Equação 5.18, o termo $\cos^{-1}(a/a + \rho)$ foi expandido em série e os termos de ordem superior foram desprezados para obter uma expressão direta de ρ .

Baseado nessas ideias, HILLERBORG et al. (1976) desenvolveram um modelo de fissura fictícia similar ao de DUGDALE (1960) e BARENBLATT (1962) para representar a

zona de fraturamento em materiais quase frágeis como o concreto e a madeira. Nas próximas seções desse capítulo esse modelo será melhor apresentado para tratar da fratura em tais materiais uma vez que o mesmo foi incorporado na formulação de multi regiões do MEC para simular ensaios de fraturamento em peças de concreto e madeira.

5.4 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO

Os primeiros estudos em relação à fratura de materiais quase frágeis foram voltados para a análise de concretos. O concreto é um material heterogêneo o qual pode ser considerado macroscopicamente como composto por três fases: Pasta cimentícia, agregados e zona de transição entre a pasta e os agregados. A zona de transição constitui a fase mais fraca do material. Devido principalmente à elevada concentração de água, nessa zona podem ser encontradas diversas micro falhas materiais antes mesmo de qualquer carregamento mecânico atuar sobre a estrutura. O comportamento mecânico do concreto estrutural submetido a diferentes carregamentos é governado principalmente pela propagação dessas micro falhas. Vale destacar que, apesar da heterogeneidade do concreto, devido à distribuição aleatória de suas três fases, o mesmo pode ser muitas vezes considerado, em uma abordagem macroscópica, como um material aproximadamente homogêneo e isotrópico.

A falha do concreto quando submetido à tração ocorre em níveis de tensão muito inferiores aos encontrados na falha por compressão. Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995), a resistência à tração do concreto é cerca de 8 à 15% do valor da resistência à compressão. Para um concreto submetido a esforços de tração, as fissuras se propagam de forma geral na direção perpendicular à tensão de tração. Já no caso de um corpo de concreto submetido a uma compressão axial pura, as fissuras se propagam principalmente na direção paralela ao carregamento aplicado. No caso de um carregamento misto geral, em peças não armadas de concreto, a falha por tração é muito mais comum do que a falha por compressão uma vez que a mesma ocorre em níveis de tensão muito inferiores.

Em um ensaio de tração uniaxial é possível dividir a resposta tensão-deslocamento do corpo de concreto em quatro fases. A Figura 5.10 a seguir ilustra o ensaio padrão e as diferentes fases observadas:

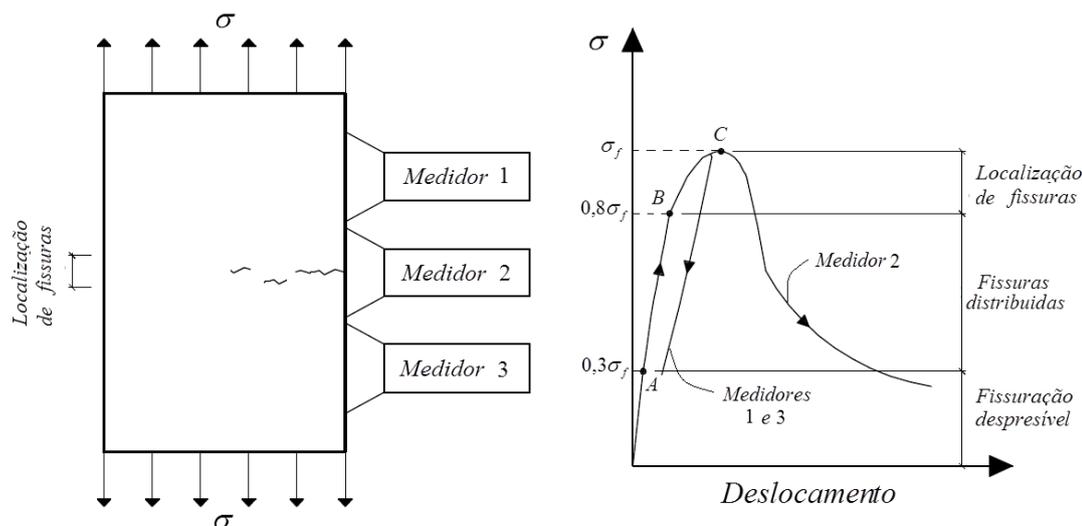


Figura 5.10 Relação tensão-deslocamento em diferentes estágios de fissuração.

Na primeira fase a resposta do concreto é aproximadamente elástica linear conforme observado no trecho inicial da curva até o ponto A. Portanto, os três medidores que detectam os deslocamentos registram os mesmos valores. Esse ponto geralmente corresponde a cerca de 30% da carga de ruptura σ_f sendo que até tal nível de tensão, a propagação das micro falhas do material podem ser consideradas como desprezíveis. A segunda fase corresponde ao trecho do ponto A ao ponto B no qual geralmente se tem uma tensão da ordem de 80% de σ_f . Nessa fase as fissuras começam a se propagar estavelmente a partir das micro falhas. Até o ponto B, as fissuras estão distribuídas de maneira mais ou menos aleatórias no concreto. Depois desse ponto, uma banda estreita de fissuras começa a se concentrar entre as tomadas de medidas do medidor 2. Tal fenômeno é conhecido na literatura por “localização de deformações”. Na terceira fase, com o aumento da carga, o comprimento dessa banda de fissuras concentradas começa a aumentar de maneira estável até a carga de ruptura σ_f . Nessa carga de pico, a banda de fissuração atingiu seu comprimento crítico e a partir desse momento começa a última fase da curva denominada amolecimento ou “Softening”. Nessa fase, os deslocamentos dos medidores 1 e 3 começam a diminuir caracterizando um descarregamento composto por parcelas de deslocamento elásticas e irreversíveis. Já o deslocamento do medidor 2 aumenta rapidamente devido à fratura que ocorre na banda de fissuração. Para a caracterização da última fase é necessário que os deslocamentos sejam controlados durante o ensaio em função das aberturas do medidor 2. Dessa forma é possível capturar o descarregamento do corpo ao

longo de seu fraturamento. Caso o ensaio não seja procedido de tal forma, após a carga de pico, a banda de fissuração se propaga instavelmente inviabilizando as medições.

No contexto da MFNL, a banda de fissuração pode ser representada por uma macro fissura discreta seguida pela zona de fraturamento a sua frente onde os mecanismos resistentes atuam no sentido de impedir o crescimento instável da fissura. Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995), diversos pesquisadores estudaram a zona de fraturamento em concretos via scanners de microscópios elétricos. Em geral, pode-se dizer que os mecanismos resistentes que dissipam a energia potencial nessa região são mais complexos do que as deformações plásticas em metais. Os principais mecanismos são a seguir ilustrados na Figura 5.11.

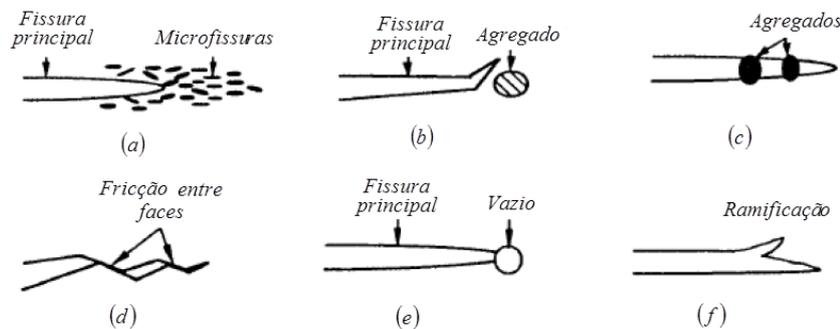


Figura 5.11 mecanismos resistentes na zona de fraturamento em concretos (SURENDRA et al., 1995 (Adaptado))

Devido às elevadas tensões nas proximidades das pontas de uma fissura, essas regiões apresentam microfissuras distribuídas randomicamente em relação à orientação da trinca principal, Figura 5.11 (a). Tais micro falhas dissipam uma boa parte da energia externa causada pelo carregamento aplicado. Além disso, a presença de agregados rígidos pode fazer com que ocorra a deflexão da fissura principal buscando um caminho menos resistente conforme ilustra a Figura 5.11 (b). Um dos mais importantes mecanismos é ilustrado na Figura 5.11 (c). Trata-se da interconexão de grãos os quais conectam as faces da fissura transmitindo esforços. Além desses, outros mecanismos que interferem na propagação da fissura são a fricção entre faces, Figura 5.11 (d), a suavização da ponta da trinca devido aos vazios, Figura 5.11 (e), e a ramificação da fissura principal, Figura 5.11 (f). Vale destacar que a fricção é um dos fenômenos governantes na fase de amolecimento da curva tensão-deslocamento do concreto.

Para a representação da zona de fraturamento em concretos, duas são as principais abordagens encontradas na literatura: O Modelo de fissura fictícia introduzido por Hillerborg e o Modelo de fissura elástica equivalente introduzido por JENQ & SHAH (1985). Segundo PLANAS & ELICES (1990), desde que os parâmetros materiais de fratura sejam obtidos experimentalmente com precisão, ambos os modelos são capazes de produzir boas aproximações para a resposta experimental de peças fraturadas de concreto. No presente trabalho adotou-se o modelo de fissura fictícia, ou modelo coesivo, para analisar a fratura em concretos e outros materiais quase frágeis.

HILLERBORG et al. (1976) comprovou através de simulações em Elementos Finitos e ensaios experimentais que seu modelo de fissura fictícia resulta em uma boa aproximação para a influência da zona de fraturamento no processo de fratura dos concretos. Em seu trabalho, a zona de fraturamento é representada por uma fissura fictícia cujo comprimento engloba a fissura real e a região micro fissurada a frente. Além disso, foi proposto que os mecanismos resistentes dessa região degradada (zona de fraturamento) podem ser representados por uma tensão coesiva atuando no sentido de fechar a ponta da fissura fictícia. No entanto, ao contrário do modelo de Dugdale para metais, a distribuição da tensão coesiva não é constante ao longo da zona de fratura. A Figura 5.12 a seguir ilustra o modelo Hillerborg, também conhecido por modelo coesivo de fratura.

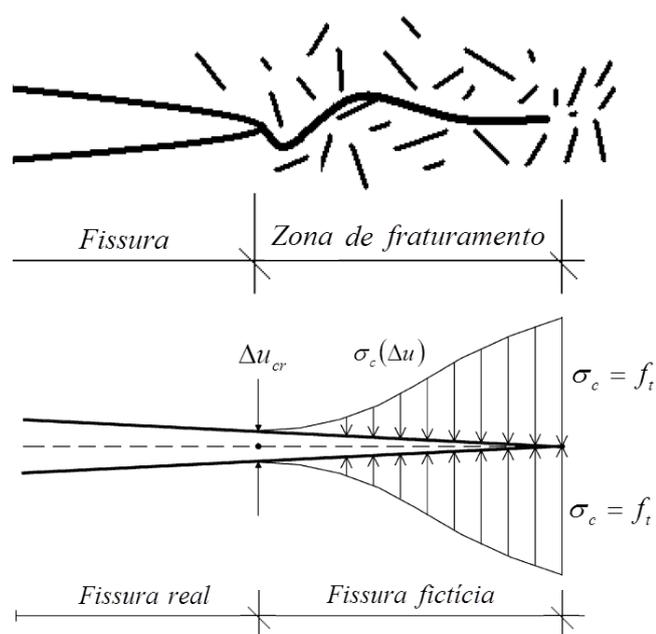


Figura 5.12 Modelo coesivo de fratura (PANZECA, ZITO e TERRAVECCHIA, 2009 (Adaptado))

A região onde atua a tensão coesiva σ_c é o comprimento ao longo do qual os mecanismos resistentes da zona de fraturamento ainda são capazes de transmitir esforços. Sabe-se que o máximo esforço que o material íntegro consegue transmitir é igual a sua resistência à tração f_t , a qual pode ser obtida no ensaio de tração uniaxial (Figura 5.10) onde $\sigma_f = f_t$. Em seu modelo, HILLERBORG et al. (1976) propôs que a tensão coesiva fosse uma função da abertura da fissura fictícia, ou seja, $\sigma_c = \sigma_c(\Delta u)$. Assim, quando essa abertura atinge um valor crítico Δu_{cr} , não há mais transmissão de esforços entre as faces da fissura e, portanto a tensão coesiva cai a zero.

A distribuição de tensão coesiva ao longo da zona de fraturamento pode ser nominalmente mensurada a partir do ensaio de tração uniaxial apresentado na Figura 5.10. Simulando a banda de localização de fissuras por uma fissura fictícia, a tensão σ aplicada pode ser relacionada com as tensões coesivas σ_c . Subtraindo as deformações elásticas da medida de deslocamentos do medidor 2 é possível obter uma curva da tensão coesiva σ_c em função do alongamento da seção fraturada (abertura Δu da fratura). A Figura 5.13 ilustra o comportamento geral das curvas coesivas obtidas em laboratório para corpos de concreto.

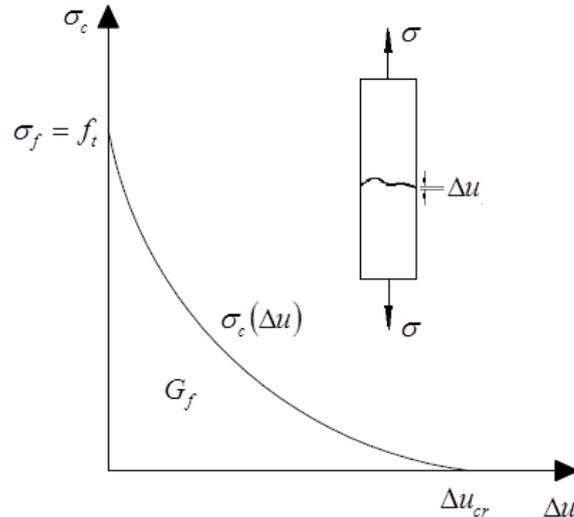


Figura 5.13 Curva tensão coesiva σ_c versus alongamento da seção fraturada, ou, Δu , para concretos.

A energia necessária à fratura em modo I (G_f) pode ser determinada para espécies de concreto através do ensaio de tração calculando-se a área abaixo da curva conforme apresentado na Figura 5.13. Portanto, temos que:

$$G_f = \int_0^{\Delta u_{cr}} \sigma(\Delta u) d\Delta u \quad (5.18)$$

É assumido para o modelo coesivo que G_f é um parâmetro material do concreto. No entanto, BAZANT e PLANAS (1998) demonstraram experimentalmente que tal parâmetro depende do tamanho da espécie ensaiada. Como os mecanismos resistentes na zona de fratura tem uma maior influência em peças pequenas, esses tendem a acarretar em uma maior resistência à fratura em relação ao caso de peças grandes.

A curva coesiva da Figura 5.13 pode ser considerada, para uma dada faixa de dimensões estruturais, como uma lei constitutiva que rege o comportamento das tensões no concreto após o início da degradação mecânica. Entre as várias curvas de tensão coesiva disponíveis na literatura para representar o comportamento à fratura do concreto, no presente trabalho escolheram-se três por serem as mais frequentemente utilizadas: lei linear, lei bilinear e lei exponencial (OLIVEIRA, 2013).

A lei constitutiva linear é apresentada na Figura 5.14 e expressa as tensões na zona de fraturamento em função da abertura da fissura fictícia por meio de uma relação linear apresentada abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon & \text{se } \sigma > f_t \\ \sigma(\Delta u) &= f_t(1 - \Delta u/\Delta u_{cr}) & \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \\ \sigma(\Delta u) &= 0 & \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr} \end{aligned} \quad (5.19)$$

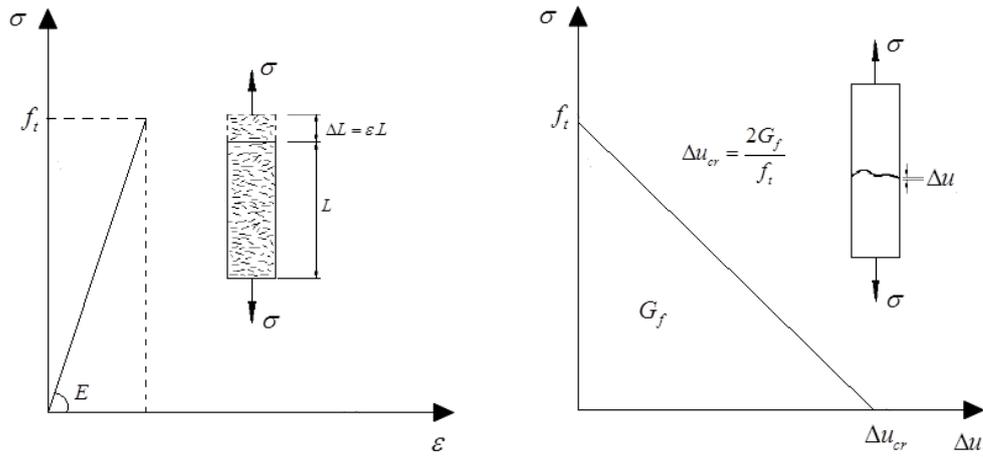


Figura 5.14 Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva linear.

Considerando a lei constitutiva bilinear (Figura 5.15), as tensões no concreto podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
 \sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon && \text{se } \sigma > f_t \\
 \sigma(\Delta u) &= f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{\Delta u''} \right) \cdot \Delta u && \text{se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u'' \\
 \sigma(\Delta u) &= \frac{f_t''(\Delta u + 2\Delta u'' - \Delta u_{cr})}{\Delta u'' - \Delta u_{cr}} && \text{se } \Delta u'' \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} \\
 \sigma(\Delta u) &= 0 && \text{se } \Delta u > \Delta u_{cr}
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

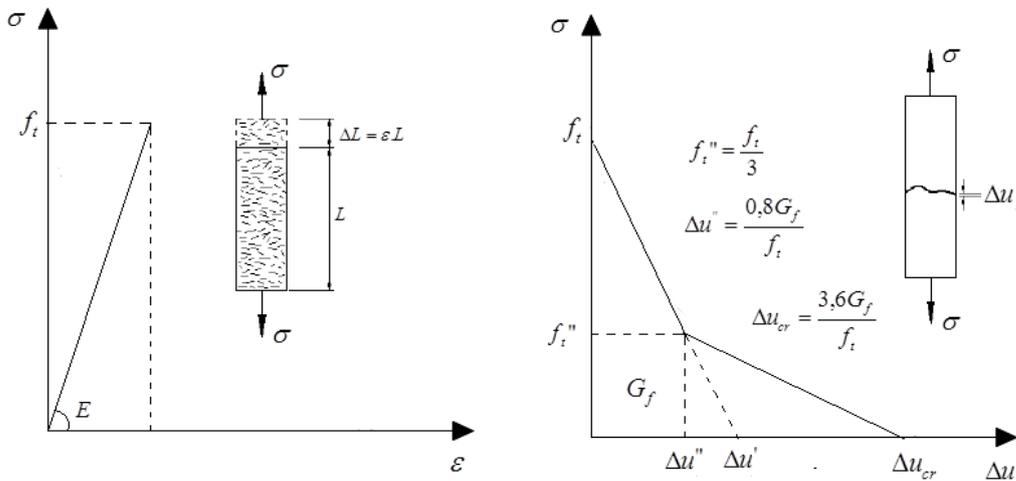


Figura 5.15 Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva bilinear.

Por fim, a lei constitutiva exponencial a ser considerada é apresentada na Figura 5.16. As relações das tensões elásticas com as deformações e das tensões coesivas com as aberturas Δu são apresentadas para a lei na Equação 5.21 a seguir.

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= E\varepsilon && \text{se } \sigma > f_t \\ \sigma(\Delta u) &= f_t \cdot e^{\frac{-f_t}{G_f} \Delta u} && \text{se } \Delta u \geq 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

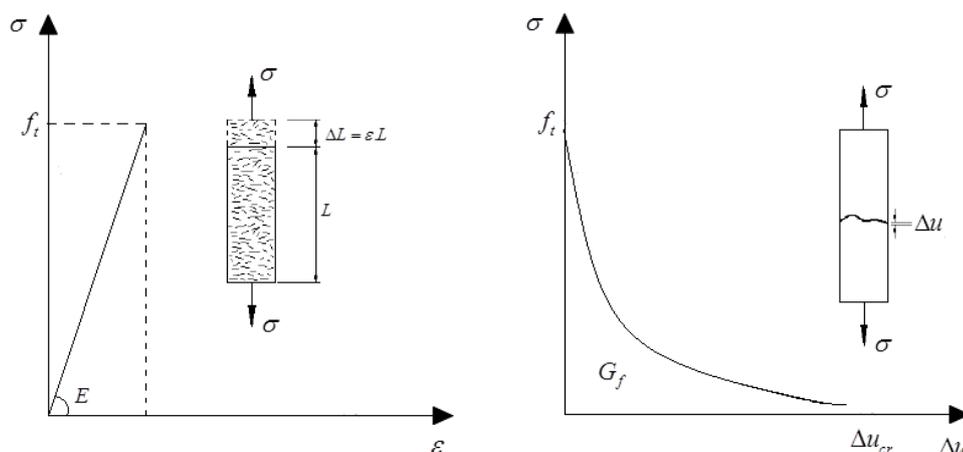


Figura 5.16 Lei constitutiva do concreto considerando curva coesiva exponencial.

O modelo coesivo desenvolvido por HILLERBORG et al. (1976) foi proposto para avaliar a fratura do concreto em modo I onde as tensões no plano de fraturamento são predominantemente de tração. Ao se tratar de modos mistos, deve-se avaliar também a influência das tensões cisalhantes no plano de fraturamento. Para prever a direção de propagação em modos mistos, alguns critérios de interação podem ser utilizados como o caso da máxima tensão circunferencial, mínima densidade de energia de deformação e máxima deformação circunferencial. No presente trabalho, como as fissuras se propagaram ao longo das sub-regiões, o caminho de propagação deve ser previamente estabelecido para as análises. Dessa maneira, os critérios de interação não são utilizados nas análises do presente trabalho. Segundo SURENDRA, SWARTZ e OUYANG (1995) existe um consenso entre a comunidade de pesquisadores do concreto que em casos de estado plano de tensão, modos mistos de fratura (modos I e II) podem ser modelados utilizando apenas parâmetros materiais

de resistência à fratura em modo I uma vez que os mesmos são consideravelmente maiores que os obtidos para o modo II.

Apesar do modelo de fissuras fictícias ter sido introduzido para a análise de espécies de concreto, o mesmo também é aplicável a outros materiais quase frágeis como é o caso de cerâmicas, rochas, madeiras e materiais compósitos. Para que o modelo coesivo possa gerar uma boa aproximação para a fratura desses materiais é necessário que a curva coesiva teórica adotada seja condizente com as curvas de tensões resistentes na zona de fratura obtidas experimentalmente.

5.5 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA À MADEIRA

A madeira é um material não homogêneo que naturalmente apresenta em sua estrutura defeitos de continuidade e rigidez em diversas escalas: macro, meso, micro e até nano escala. Isso faz da homogeneização do domínio uma árdua tarefa para o caso de peças de madeira. Além disso, devido ao desenvolvimento natural do material durante o crescimento do tronco das arvores, fibras longitudinais ao longo do eixo do tronco podem ser observadas. Entre os principais defeitos e heterogeneidades verificados na madeira destacam-se os nós, as microfissuras, os poros e as ligações entre as paredes das fibras longitudinais.

As fibras longitudinais, assim como outros fatores na morfologia do material, influenciam substancialmente o comportamento mecânico e os modos de falha da madeira. Isso porque a interface dessas fibras é considerada fraca em relação à resistência de suas paredes celulares. Devido a essa fragilidade e também a outros defeitos do material o fraturamento é o principal modo de falha verificado nas estruturas de madeira. Isso faz com que, entre as teorias de falhas aplicadas à madeira, a Mecânica da Fratura seja a que melhor se enquadre às análises uma vez que a mesma é capaz de relacionar explicitamente defeitos materiais à rigidez estrutural (SMITH, LANDIS e GONG, 2003).

No entanto, as teorias da MF foram desenvolvidas primeiramente para lidar com materiais homogêneos ou, pelo menos, materiais heterogêneos cuja aproximação por um contínuo homogêneo fosse ainda uma boa representação. Bons exemplos desses casos são os metais e o concreto cujos principais defeitos que governam as falhas mecânicas são verificados em uma não tão abrangente variação de escalas dimensionais quanto à verificada nas madeiras.

Devido à evolução material da madeira ao longo do crescimento das árvores, as propriedades de elasticidade e também de fratura são dramaticamente diferentes a depender da orientação das peças estruturais e das solicitações. Segundo BODIG & JAYNE (1982) e BOSTRON (1992), de maneira geral a madeira pode ser considerada como um material não homogêneo de estrutura complexa, geralmente ortotrópico e cujo comportamento à fratura pode ser muitas vezes classificado como quase frágil. Assim, dado o contexto do presente trabalho, a ideia de aplicar a formulação desenvolvida para a análise de fratura em peças de madeira surgiu naturalmente. Em relação ao plano de propagação de uma fissura, seis diferentes orientações de fratura podem ser definidas em relação aos eixos de crescimento da madeira: Longitudinal (L), Radial (R) e Tangencial (T). A Figura 5.17 ilustra as seis orientações:

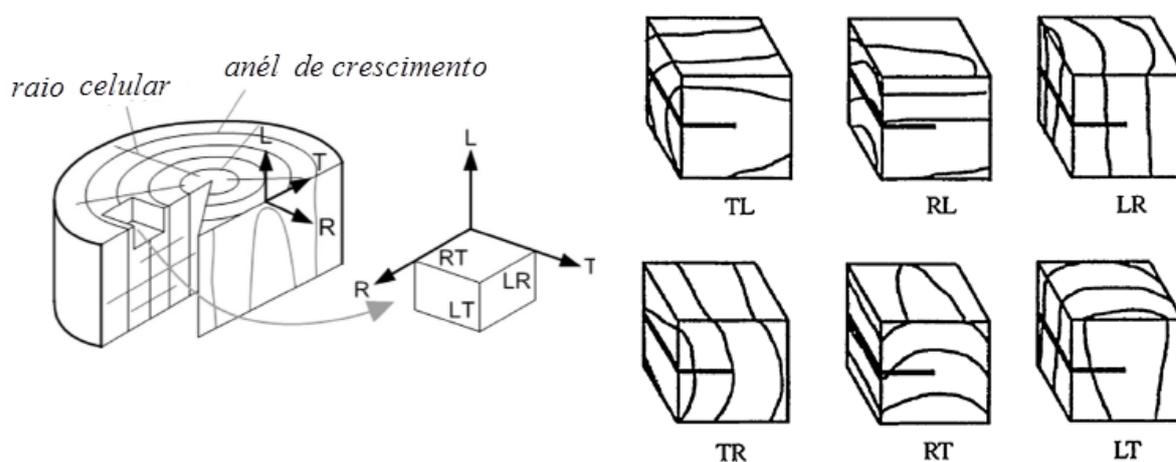


Figura 5.17 Orientações de fratura em relação ao eixo de crescimento da madeira (BENABOU & SUN, 2014 (Adaptado))

De acordo com o esquema, nas orientações LR, LT, RL, RT, TL e TR a primeira letra indica a direção perpendicular ao plano de fratura e a segunda indica a direção da extensão da fratura. Para cada uma dessas orientações, parâmetros de resistência à fratura, como f_t e G_f por exemplo, podem ser significativamente diferentes. Grandes variações dessas propriedades também são verificadas para diferentes espécies de madeiras. Além disso, Como em teoria cada uma dessas orientações pode estar submetida a diferentes modos de fratura (modos I, II, III e mistos), existe um grande número de casos diferentes de fratura em estruturas de madeira.

Como a madeira é um material natural, variações de propriedades também podem ser verificadas em peças oriundas de uma mesma espécie. No entanto, tais variações tendem a ser mais irrelevantes estatisticamente. Tendo em vista todas essas incertezas, à complexidade da

estrutura da madeira e a grande quantidade de casos de fratura, aplicações da MF para casos gerais de falhas por fraturamento em estruturas de madeira ainda são muito limitadas. Assim, o desenvolvimento de estudos relacionados à área é de muito interesse para a comunidade científica.

Na prática, a propagação em modo I de fratura nas orientações RL e TL são geralmente os primeiros focos de estudo. Isso porque a propagação na direção longitudinal (L), ou propagação com tensão paralela às fibras, é o caso mais propício a ocorrer em madeiras. O fenômeno se deve ao fato de que, nessas orientações, a indução do modo I proporciona uma situação em que o plano de fraqueza do material, ou seja, plano de menor resistência à fratura R , coincide com o plano de máxima taxa de liberação de energia G . Portanto, em testes de fratura em modo I com propagação induzida na direção paralela às fibras não há dúvidas em relação ao caminho de crescimento da fissura.

A madeira muitas vezes é considerada como um material compósito sendo a ligação entre suas fibras longitudinais entendida como uma interface fraca. Ao analisar a propagação de fissuras na direção perpendicular às fibras (Orientações LR e LT), verifica-se uma resistência à fratura significativamente mais elevada do que as observadas nas direções RL e TL. Esse fenômeno pode ser explicado pela fragilidade das interfaces entre as fibras longitudinais. Além disso, na propagação paralela às fibras, um fenômeno mecânico conhecido como mecanismo de Cook-Gordon explica a elevada resistência à fratura observada na propagação perpendicular às fibras (SMITH, LANDIS e GONG, 2003).

O efeito Cook-Gordon é verificado em materiais compósitos quando existe uma interface perpendicular ao caminho de crescimento da fissura. O estado de tensão a certa distância na frente da ponta de uma fissura que se propaga em modo I é geralmente de tração em ambas as direções, paralela e perpendicular ao plano de fratura. No caso de interfaces fracas, as tensões de tração fazem com que a interface falhe antes mesmo da fissura cruzá-la. Essa degradação da interface dissipa energia potencial a qual poderia estar sendo utilizada na propagação da trinca principal. Além disso, a interface descolada também suaviza a ponta da fissura quando a mesma intercepta a interface. Todos esses fatores fazem portanto com que a resistência à fratura aumente para orientações de fratura perpendiculares a interfaces fracas. Já ao contrário, no caso de interfaces fortes, a fissura atravessa a mesma sem que haja considerável dissipação de energia (SMITH, LANDIS e GONG, 2003). Ainda segundo os

autores, a resistência à tração perpendicular às direções R e T em madeiras é geralmente de 10 a 30% da resistência à tração perpendicular à direção L.

O mecanismo de Cook-Gordon é comumente verificado em peças de madeira fletidas conforme ilustrado na Figura 5.18.

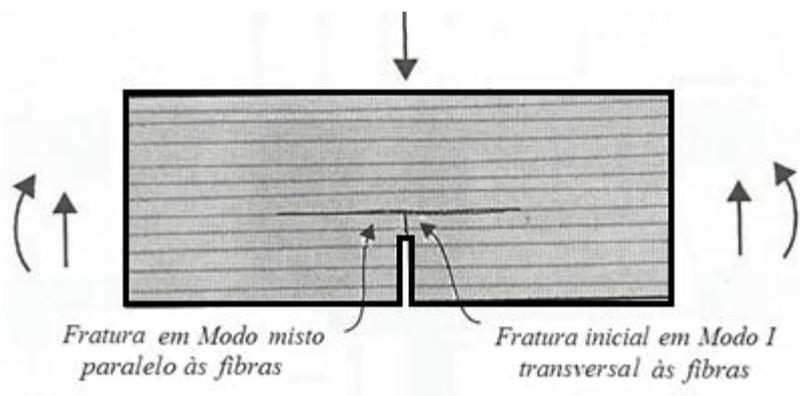


Figura 5.18 Cook-Gordon mecanismo em peças fletidas de madeira (SMITH, LANDIS e GONG, 2003).

A ocorrência frequente desse fenômeno nas estruturas de madeira se deve principalmente ao fato dos engenheiros projetarem peças fletidas com orientações das fibras paralelas às máximas tensões de tração evitando assim a situação mais crítica para o fraturamento que é a de tração perpendicular às fibras. Vale ainda comentar que o mecanismo Cook-Gordon atrapalha testes experimentais que visam a obtenção das propriedades à fratura em modo I nas orientações LR e LT. Tal mecanismo dificulta propagações puras de modo I gerando muitas vezes modos mistos de fratura conforme ilustrado na Figura 5.18.

Os primeiros trabalhos a tratarem falhas em madeiras via MF começaram a aparecer por volta dos anos 60 e utilizavam conceitos de fratura elástica linear (SMITH, LANDIS e GONG, 2003). Apesar de existirem indícios da presença de significativos mecanismos não lineares durante os testes de fratura em madeiras, a ausência de teorias sobre o assunto fez com que os conceitos da MFEL fossem adotados nos primeiros estudos.

Nesses trabalhos, foram realizados ensaios no intuito de obter parâmetros de resistência à fratura como a tenacidade à fratura K_c e a taxa de liberação de energia crítica G_c via integral J. De acordo com a MFEL, esses valores deveriam ser propriedades materiais independentes das dimensões das peças ensaiadas desde que a espécie de madeira ensaiada fosse a mesma. Apesar de algumas variações serem estatisticamente aceitáveis tendo em vista o caráter natural do desenvolvimento da madeira, as variações significativas observadas nos laboratórios apontavam para uma dependência geométrica. Em outras palavras, para uma

mesma espécie de madeira, diferentes geometrias de peças ensaiadas resultavam em diferentes propriedades de fratura mesmo que ambos os ensaios solicitassem o mesmo modo de fratura na mesma orientação de eixos naturais da madeira. Essas discrepâncias em parte estavam relacionadas ao fato de ser experimentalmente difícil obter modos puros de fratura em peças de madeira. Porém, a principal razão para essas dependências dimensionais eram os indícios da presença de uma zona de processos não lineares cujas dimensões podem ser consideráveis a depender da geometria dos copos ensaiados.

Tais indícios levaram a um consenso que hoje é generalizadamente aceitado, a fratura em madeiras de dimensões laboratoriais é um fenômeno não linear. As estimativas de propriedades de resistência à fratura da madeira eram obtidas considerando os resultados de ensaios até a carga de pico das curvas de força versus deslocamento conforme prediz os conceitos de MFEL. No entanto, nessas estimativas subestimavam a real resistência da fratura uma vez que desprezavam os mecanismos de dissipação de energia mobilizados após o pico da curva.

Os ensaios para estimar a resistência à fratura focavam alguns casos específicos de interesse: modos I e II com fibras orientadas na direção de propagação, modo I com fibras perpendiculares à direção de propagação e fratura em ângulos arbitrários em relação à orientação das fibras. Nesses últimos casos, mesmo que o carregamento solicite uma fratura em modo I, como a orientação das fibras é inclinada em relação a direção que se deseja induzir o crescimento da fissura, a fratura tenderá a propagar na orientação das fibras. A Figura 5.19 ilustra a situação onde é possível verificar que a fissura prefere se propagar em modo misto seguindo a orientação das fibras. Porém, com potencialidade de pular entre os caminhos paralelos de fraqueza material no intuito de aliviar a energia de deformação acumulada.

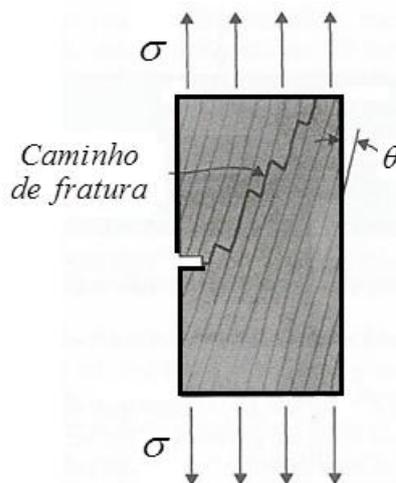


Figura 5.19 Modo misto de fratura (SMITH, LANDIS e GONG, 2003)

Apesar das limitações da MFEL, em ensaios de peças com dimensões consideravelmente grandes, os conceitos de fratura linear podem ser aplicados para obter boas aproximações para a resistência à fratura em madeiras. Além disso, nesses casos os campos de tensão nas proximidades da fissura oriundos de diferentes modos puros podem ser superpostos para compor o campo de tensões em problemas de modos mistos. No entanto, em termos de critérios de propagação, MALL, MURPHY e SHOTTAFER (1983) concluíram através de ensaios experimentais que os modos puros não são independentes. Dessa maneira, critérios de propagação devem ser baseados na interação entre os modos de fratura. Ainda segundo os mesmos autores, um critério razoável para prever a propagação em modo misto nas madeiras é o critério de Wu o qual é citado frequentemente como sendo um critério geral de propagação de fratura para compósitos anisotrópicos. Esse critério pode ser apresentado em termos de fatores de intensidade de tensão como:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}} \right)^2 = 1 \quad (5.22)$$

Devido aos indícios de não linearidade no fenômeno do fraturamento, no final dos anos 80 os conceitos de MFNL começaram a ser aplicados para as análises de peças de madeira (SMITH, LANDIS e GONG, 2013).

De maneira semelhante a outros materiais quase frágeis, foi verificado em ensaios de fratura das madeiras que existe uma parte não linear de encruamento na curva de força versus deslocamento gerada pelo fenômeno de localização de dano. Além disso, após a carga de pico, é verificado um amolecimento na curva o qual é resultante da mobilização de alguns mecanismos resistentes. Porém, para obter as curvas de amolecimento é primeiramente

necessário proceder testes que levem à propagação estável da fissura. A Figura 5.20 apresenta os principais ensaios de fratura modo I propostos na literatura para as madeiras com os quais é possível obter propagações paralelas às fibras estáveis produzindo assim as curvas completas de amolecimento (força versus deslocamento).

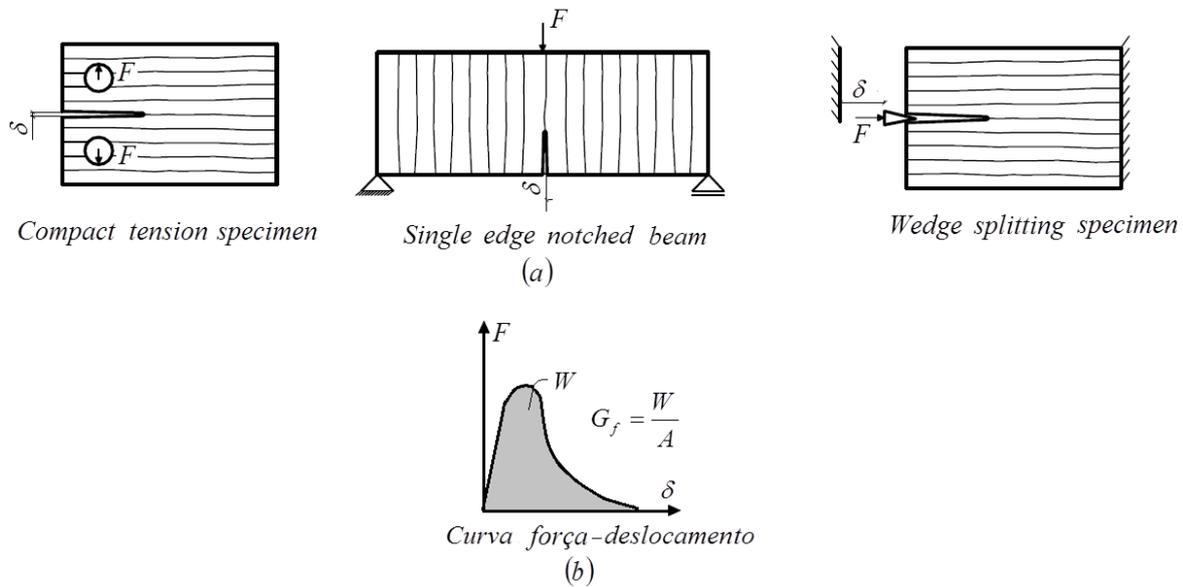


Figura 5.20 Ensaios para a obtenção da energia de fratura G_f em modo I com propagação paralela às fibras

A partir desses ensaios, a energia de fratura G_f pode ser calculada como a área w sobre a curva de força-deslocamento sobre a nova área A de faces de fissura criada durante o fraturamento. Para materiais frágeis, onde a influência dos mecanismos resistentes é desprezível, o valor de G_f é equivalente à taxa de dissipação de energia crítica G_c . Porém, considerando os ensaios experimentais da Figura 5.20, foi verificado que a depender das dimensões da peças de madeira, consideráveis discrepâncias entre os valores de G_f e G_c podem ocorrer. A diferença entre esses valores pode indicar o quanto o comportamento à fratura do material varia em relação aos conceitos de fratura elástica linear.

STANZL-TSCHEGG, TAN e TSCHEGG (1995) acharam valores de G_f entre 10 e 100% maiores do que os valores de G_c para a espécie de madeira “Spruce” na orientação de fratura RL submetida a um ensaio “Wedge-splitting”. No entanto, na orientação TL, as diferenças entre G_f e G_c encontrada pelos autores foi desprezível. Já no trabalho de VASIC, SMITH e LANDIS (2002), analisando a mesma espécie de madeira também submetida ao ensaio de Wedge-splitting, os autores encontraram valores de G_f aproximadamente 2 vezes maiores do que os valores de G_c para ambas as orientações RL e TL. A discrepância dos

resultados deve-se ao fato de que apesar de se tratar do mesmo tipo de ensaio, os tamanhos das espécies utilizadas foram diferentes. No trabalho de STANZL-TSCHEGG, TAN e TSCHEGG (1995) as espécimes eram cerca de 5 vezes maiores do que as espécimes ensaiadas por VASIC, SMITH e LANDIS (2002). Assim, os resultados apontam para uma ZPI maior na direção RL do que na direção TL sendo que a depender das dimensões da peça ensaiada os efeitos dessa zona, principalmente na direção TL, podem se tornar desprezíveis.

Apesar de diversos trabalhos apresentarem resultados de G_f para diferentes espécies de madeira e diferentes orientações de fratura, ainda não existe um teste padrão para obter tais propriedades das madeiras. Nesse sentido, mesmo com todos os cuidados que podem ser tomados durante os ensaios, variações de umidade, taxa de carregamento e dependência geométrica podem afetar os resultados. Portanto, a obtenção das propriedades de fratura de espécies de madeira deve ser procedida com cautela comparando-se resultados obtidos em diferentes laboratórios.

STANZL-TSCHEGG, TAN e TSCHEGG (1995) ainda fizeram análises paramétricas variando à espessura e a dimensão disponível para a fratura crescer (comprimento à frente do entalhe até o final da chapa) nas peças ensaiadas. O autor verificou em seus ensaios que para a independência de dimensões no resultado de G_f foi necessária uma espessura superior à 30 mm e um comprimento disponível para a fratura de pelo menos 70 mm. Aumentando-se as dimensões das peças verifica-se tanto a dimensão da ZPI quanto o valor de G_f tendem a ficar constantes. Portanto, para grandes dimensões a influência da ZPI no processo de fratura começa a se tornar desprezível e os valores de G_f e G_c começam a se aproximar.

Além da geometria das peças, orientações das fibras, modos de solitação e diferentes espécies de madeira, ainda existem outros fatores cuja influência nas propriedades de fratura é ainda mais significativa. Dentre esses fatores estão o teor de umidade da madeira, a história de secagem, a densidade e a temperatura. Tais parâmetros afetam não somente às propriedades de fratura, mas também outras propriedades mecânicas como, por exemplo, as constantes elásticas da matriz de flexibilidade. Assim como em muitos materiais, na madeira também verifica-se que quanto maior a rigidez da mesma maior é sua fragilidade à fratura. Geralmente tal regra é válida desde que o teor de umidade da madeira esteja abaixo de 18%. Em relação a temperatura, o que é verificado é que geralmente o aumento da temperatura faz com que a resistência à fratura diminua.

O modelo de fratura não linear mais comumente empregado para a análise de madeiras é modelo coesivo de fratura proposto por HILLERBORG et al. (1976). Conforme apresentado no tópico anterior, o modelo introduz a ZPI nas proximidades da ponta da fissura através de uma fissura fictícia com tensões coesivas em suas faces. Assim, para se propagar, uma fissura deve não somente superar a resistência à fratura do material, mas também às tensões atuantes na zona coesiva. Semelhantemente à fratura do concreto, para as madeiras o modelo propõe que o fraturamento pode ser caracterizado considerando que a deformação ou alongamento de um corpo uniaxialmente tracionado deve ser decomposta em duas parcelas: deformação elástica e abertura da fissura (Crack Opening Displacement) Δu conforme ilustra o esquema na Figura 5.21.

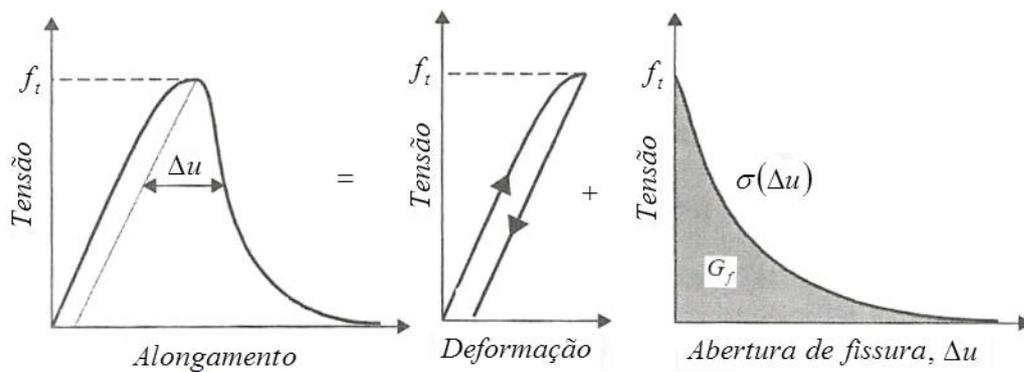


Figura 5.21 Alongamento total: deformação elástica e abertura de fissura (SMITH, LANDIS e GONG, 2003)

Antes do pico da curva, a deformação é composta praticamente por sua parcela elástica. Já no pós pico, a deformação elástica desaparece e a deformação total ocorre principalmente devido às aberturas Δu . No modelo, a função $\sigma(\Delta u)$ é considerada como sendo uma propriedade material constante assim como a energia de fratura G_f .

As simulações computacionais de fratura em madeira até então procedidas focaram a utilização do modelo coesivo acoplado a softwares de Elementos Finitos para avaliar fraturas induzidas em modo I principalmente. Nesse ponto, vale destacar que na revisão da literatura não foram encontrados trabalhos que utilizavam o MEC para avaliar a fratura em peças de madeira.

Aparentemente, BOSTROM (1992) foi a primeira pessoa a aplicar o modelo de Hillerborg para peças de madeira. O autor propôs que os efeitos dos mecanismos resistentes à fratura na madeira atuavam de maneira semelhante ao verificado em outros materiais quase frágeis proporcionando assim a característica curva de amolecimento. Portanto, a partir de

testes controlados de tração e cisalhamento, o mesmo determinou parâmetros de amolecimento e a energia de fratura para a espécie de madeira Scots Pine (*Pinus Sylvestris*) submetidas a modo I de fratura com propagação paralela às fibras. No entanto, o trabalho aponta as dificuldades experimentais envolvidas na determinação de tais parâmetros.

Devido às dificuldades experimentais, STANZL-TSCHEGG, TAN e TSCHEGG (1995) propuseram o protocolo “wedge-splitting test” o qual descreve como esse tipo de ensaio (apresentado na Figura 5.20) deve ser procedido para se obter uma propagação estável em modo I. Em ambos os trabalhos de BOSTROM (1992) e STANZL-TSCHEGG, TAN e TSCHEGG (1995) foi assumido um amolecimento bilinear para as tensões coesivas em função da abertura Δu conforme ilustrado na Figura 5.22. Além disso, foi proposto também que a energia de fratura é dissipada principalmente por dois mecanismos resistentes: as microfissuras verificadas na frente da ponta da trinca principal e a conexão de fibras secundárias transversais à propagação as quais se encontram pouco atrás da ponta da fissura.

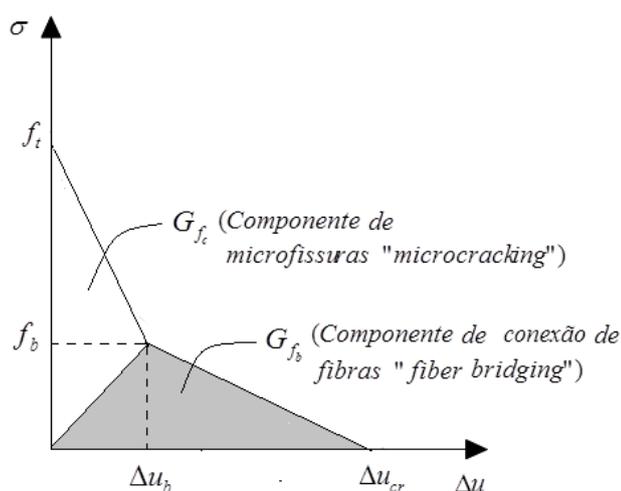


Figura 5.22 Lei bilinear $\sigma(\Delta u)$ para madeiras e influência de seus mecanismos resistentes

Nos estudos, os parâmetros da lei bilinear são calibrados para a espécie de madeira de interesse através de uma comparação iterativa entre análises envolvendo modelos de elementos finitos e respostas experimentais de carga versus deformação. É interessante ressaltar que, para a orientação de fratura RL, os mecanismos de “conexão de fibras” tem uma influência muito maior na energia de fratura total G_f em comparação ao observado para a orientação TL. Segundo SMITH, LANDIS e GONG, (2003), isso reflete a presença das células radiais da madeira cujas fibras são normais ao plano de propagação da fissura no caso da orientação RL.

Considerados os conceitos básicos sobre o modelo coesivo e sua aplicabilidade para materiais como a madeira e o concreto, no próximo capítulo pretende-se apresentar uma formulação de fratura não linear do MEC baseada no acoplamento desse modelo à técnica de multi-regiões.

6 FRATURA COESIVA NA INTERFACE DE MULTI-REGIÕES

Nesse capítulo serão apresentadas soluções para acoplamento do modelo coesivo de fratura, ou modelo de fissuras fictícias de Hillerborg, às interfaces de problemas de multi-regiões. Conforme visto no capítulo anterior, uma das alternativas para tratar o fenômeno do fraturamento em materiais quase frágeis, como o concreto e a madeira, é via o modelo coesivo. Com o acoplamento das técnicas, é então possível avaliar fraturas nas interfaces de estruturas compostas. A Figura 6.1 ilustra a incorporação desse modelo de fratura na interface dos domínios compostos.

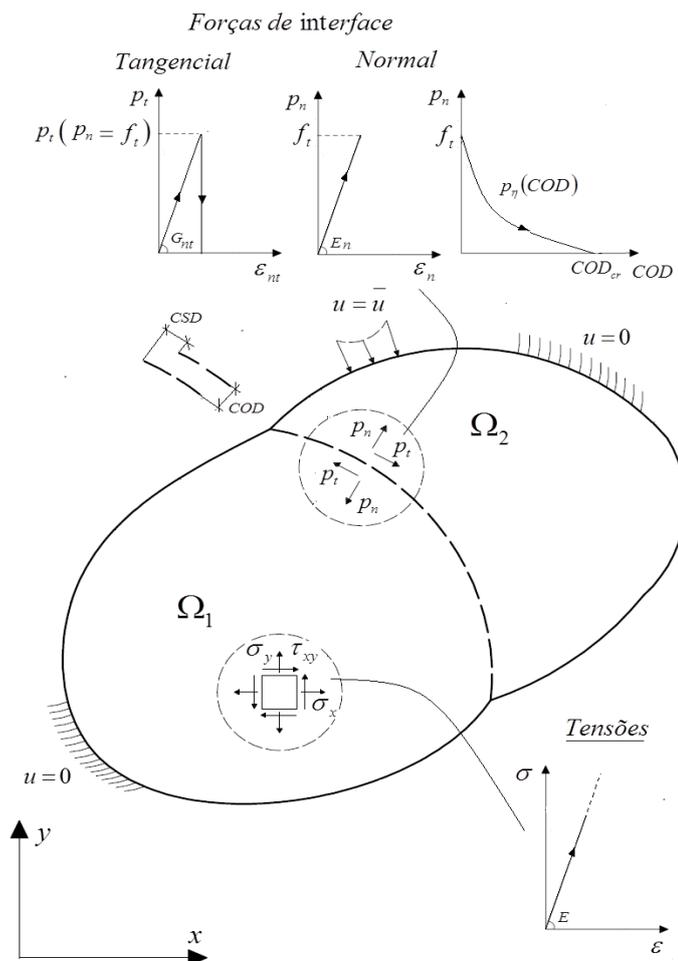


Figura 6.1 Modelo coesivo incorporado a interfaces de domínios compostos

Na figura, p_n e p_t são, respectivamente, as tensões normal e tangencial à interface, σ é o estado de tensão em um ponto do corpo, cujas componentes independentes são σ_x , σ_y e τ_{xy} , COD é a abertura normal das faces de interface (Crack Opening Displacement) e CSD o deslizamento relativo entre essas faces (Crack Sliding Displacement).

No trabalho serão realizadas análises de fratura impondo condições de contorno de deslocamento prescrito, $u = \bar{u}$, e forças nulas, $p = 0$. As solicitações são impostas dessa maneira para que a propagação da fratura ocorra de forma estável, permitindo a obtenção do trecho de amolecimento nas curvas de forças versus deslocamento.

Nas análises, as componentes de tensão nos pontos internos ao domínio e nos pontos do contorno são governadas, até o limite elástico $p_n = f_t$, pela Lei Generalizada de Hooke, a qual pode ser isotrópica ou anisotrópica. Já em relação aos pontos nas interfaces, as tensões normais e cisalhantes são governadas pelas leis coesivas apresentadas no capítulo anterior. Aqui vale destacar que a condição $p_n = f_t$ é um caso específico de envoltória resistente para quando se tem $p_t = 0$. Para o concreto, um critério mais geral foi utilizado por GÁLVEZ et al. (2002) no qual a envoltória pode ser anunciada como:

$$F(p_n, p_t) = p_t^2 - 2c \tan \phi_f (f_t - p_n) - \tan^2 \phi_f (p_n^2 - f_t^2) \quad (6.1)$$

Sendo $F(p_n, p_t) = 0$ o critério que define o limite elástico, c a coesão, f_t a resistência à tração e ϕ_f o ângulo de atrito entre as faces da fissura. Apesar do critério de Gálvez et al. (2002) ser mais geral, para fraturas ocorrendo em modo I, temos na interface $p_t \ll p_n$ e, portanto o critério simplificado pode ser adotado. Além disso, o concreto possui um comportamento consideravelmente mais frágil ao cisalhamento em comparação à fratura por tração. Sendo assim, mesmo em fraturas em modo misto, temos que o critério simplificado, $F(p_n, p_t) = 0 = p_n - f_t$, é capaz de reproduzir bons resultados para o comportamento de peças de concreto (LEONEL, 2009). No presente trabalho apenas o critério simplificado de fratura foi implementado.

Após atingido o limite elástico em pelo menos um nó da interface, passam a ser observadas descontinuidades de deslocamento nas proximidades do mesmo. Essas descontinuidades podem ser decompostas em aberturas normais COD e deslizamentos relativos CSD conforme ilustra a Figura 6.1. Devido à adoção do critério simplificado de resistência, assume-se que uma vez excedido o limite elástico, as faces da fissura estão livres para deslizar umas sobre as outras sem qualquer resistência de fricção, ou seja, $p_t = 0$. Em

outras palavras, o comportamento das tensões cisalhantes na interface é considerado como perfeitamente frágil.

Já em relação às tensões normais p_n , após o limite $p_n = f_t$ ser alcançado, as tensões passam a ser governadas por uma lei coesiva, a qual relaciona as mesmas às aberturas normais COD. Como as tensões resistentes não são mais capazes de manter o material íntegro, uma abertura COD é observada. As tensões normais nas porções degradadas de interface são governadas pela lei coesiva e dependem das aberturas COD. Por sua vez, tais aberturas também dependem da resposta da estrutura em relação às condições de contorno impostas. Tal resposta é obtida via MEC por aproximação do equacionamento da teoria da elasticidade. Portanto, caso alguma região de interface seja degradada, o equacionamento do problema passa a ser não linear devido às interdependências mencionadas.

Para solucionar o problema não linear, dois algoritmos de resolução iterativa foram incorporados na formulação do presente trabalho. No primeiro desses, as correções do vetor de tensões não equilibradas são impostas sempre considerando a rigidez elástica da estrutura, e portanto, o mesmo é denominado Operador Constante (OC). Já o segundo, propõe a atualização da rigidez da estrutura na direção tangente para que a convergência do vetor de tensões não equilibradas seja alcançada com menos iterações. Esse segundo é portanto denominado Operador Tangente (OT). Ambos os algoritmos serão mais detalhadamente apresentados a seguir. Porém, antes de introduzi-los, serão abordados alguns detalhes sobre a modelagem das interfaces coesivas.

6.1 MODELAGEM DAS INTERFACES COESIVAS

O comportamento das interfaces na fase elástica é avaliado através da técnica de multi-regiões do MEC. Assim, em todas as interfaces existem elementos coincidentes com orientações contrárias. Os pares de elementos coincidentes modelam o contorno das sub-regiões que compõem a respectiva interface. No caso de análises elásticas, condições de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de tensões podem ser impostas no sistema de equações algébricas, conforme apresentado no Item 3.9. Já no caso de comportamento coesivo, quando o limite $p_n = f_t$ é alcançado, a compatibilidade de deslocamento $u^e = u^d$ não é mais atendida em todos os nós de interfaces, impossibilitando a resolução do sistema. Para solucionar o problema deve-se recorrer a uma lei coesiva.

normal também cai a zero. Portanto, nessa condição, a interface encontra-se totalmente desconectada, ou ainda fraturada, com suas faces livres de tensões.

Durante as análises, as regiões de interface nas quais não existem descontinuidades de deslocamento são denominadas de Interfaces Elásticas (IE). Já as regiões cujo comportamento das tensões normais é governado pela lei coesiva são denominadas de Zonas Coesivas (ZC) ou ainda fissura fictícia. Por fim, as regiões de interface livres de tensões são denominadas Interfaces Livres (IL) ou ainda fissura real. A Figura 6.3 apresenta uma ilustração onde os três comportamentos podem ser verificados em uma estrutura composta fraturada.

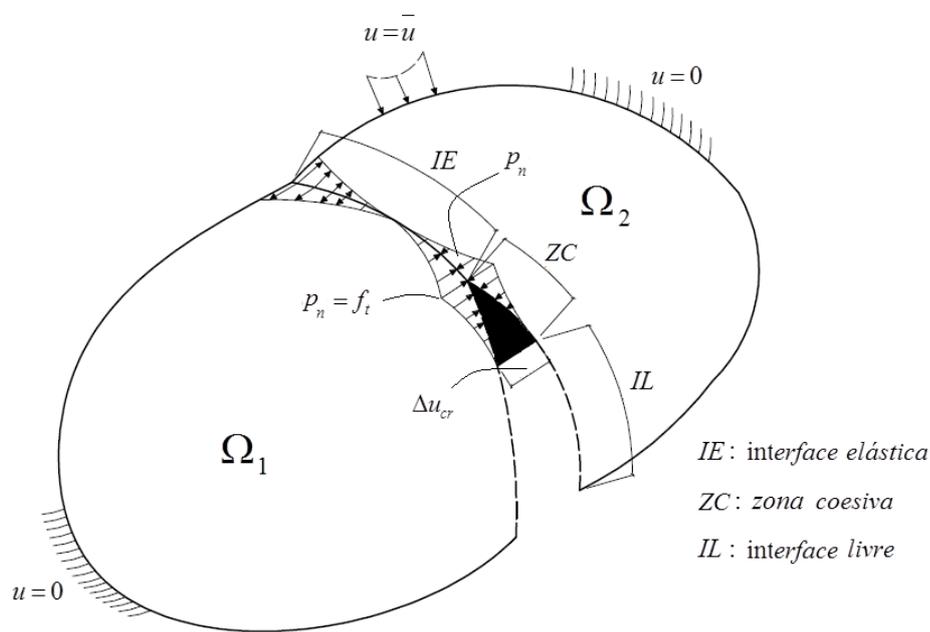


Figura 6.3 Classificação da interface em relação ao comportamento mecânico

Para capturar o comportamento não linear ao longo do fraturamento, foi proposto que as condições de contorno $u = \bar{u}$ em Γ_u e $p = 0$ em Γ_p fossem impostas incrementalmente em N etapas no intuito de reduzir os erros de aproximação numérica:

$$\bar{u} = N\Delta\bar{u} \quad e \quad \bar{p} = N\Delta\bar{p} = 0 \quad (6.3)$$

A solução final do problema é obtida acumulando-se as soluções incrementais $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ das $n = 1 \dots N$ etapas da análise.

$$\begin{aligned} u &= \Delta u^{(1)} + \Delta u^{(2)} + \dots + \Delta u^{(N)} \\ p &= \Delta p^{(1)} + \Delta p^{(2)} + \dots + \Delta p^{(N)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Com as análises incrementais é possível obter soluções intermediárias entre a configuração inicial da estrutura e a configuração final fraturada. No entanto, as soluções

incrementais $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ devem ser obtidas de um sistema de equações algébricas que pode ser linear ou não linear a depender da intensidade das tensões normais p_n na interface e da resistência à tração f_t . A Equação 3.116 do terceiro capítulo apresenta um sistema que pode ser montado para problemas de múltiplas regiões impondo-se apenas as condições de contorno. Denominando p_η^e, p_t^e e u_η^e, u_t^e as tensões e deslocamentos normais e tangenciais nas faces esquerdas (e) e p_η^d, p_t^d e u_η^d, u_t^d as tensões e deslocamentos normais e tangenciais nas faces direitas (d) das interfaces, é possível reescrever 3.116 como:

$$\sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \left(\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{NNI_j/2} H_{\eta k}^e u_{\eta k}^e + \sum_{k=1}^{NNI_j/2} H_{tk}^e u_{tk}^e + \\ \sum_{k=1}^{NNI_j/2} H_{\eta k}^d u_{\eta k}^d + \sum_{k=1}^{NNI_j/2} H_{tk}^d u_{tk}^d \end{array} \right) = F + \sum_{j=1}^{NI} \left(\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{NNI_j/2} G_{\eta k}^e p_{\eta k}^e + \sum_{k=1}^{NNI_j/2} G_{tk}^e p_{tk}^e + \\ \sum_{k=1}^{NNI_j/2} G_{\eta k}^d p_{\eta k}^d + \sum_{k=1}^{NNI_j/2} G_{tk}^d p_{tk}^d \end{array} \right) \quad (6.5)$$

As condições de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio na interface, apresentadas nas Equações 3.117, podem ser reescritas para as componentes normais e tangenciais como:

$$\begin{aligned} u_\eta^e &= -u_\eta^d \\ u_t^e &= -u_t^d \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} p_\eta^e - p_\eta^d &= 0 \\ p_t^e - p_t^d &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Percebe-se que em relação à 3.117, houve uma mudança nos sinais das Condições 6.6 e 6.7. Isso se deve ao fato da rotação das grandezas nas faces de uma interface ser procedida considerando os versores η e t em ambos os lados direito (d) e esquerdo (e), os quais naturalmente são opostos.

Para um dado passo incremental n , Caso em nenhum dos nós k localizados nas interfaces as tensões normais excedam a resistência à tração, ou seja, $p_\eta^e = p_\eta^d \leq f_t$, as Condições 6.6 e 6.7 podem ser impostas no problema. Nessa situação, o sistema 6.5 se torna

linear e as soluções incrementais de deslocamento e tensões $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \Delta X^{(n)} \\ \Delta u_{\eta}^{e(n)} \\ \Delta u_t^{e(n)} \\ \Delta p_{\eta}^{e(n)} \\ \Delta p_t^{e(n)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{NN_c} A_i, \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) \right), \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) \right), \\ - \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) \right), - \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{tk}^e + G_{tk}^d) \right) \end{bmatrix}^{-1} \{\Delta F\} \quad (6.8)$$

Sendo ΔF o vetor obtido multiplicando as contribuições referentes às variáveis prescritas no contorno por um vetor contendo os valores incrementais das mesmas. Já no caso da tensão normal acumulada exceder a resistência à tração f_t , a condição 6.6 não é mais válida para todos os pontos de interface. Assim, nos nós em que o limite foi excedido, a seguinte condição pode ser adotada.

$$\begin{aligned} -u_{\eta}^e - u_{\eta}^d &= COD \\ u_t^e + u_t^d &= CSD \end{aligned} \quad (6.9)$$

A partir de 6.9, são introduzidas as aberturas COD e CSD no sistema substituindo os deslocamentos $u_{\eta}^d = -u_{\eta}^e - COD$ e $u_t^d = CSD - u_t^e$. Além disso, impondo a dependência das tensões normais em função das aberturas COD, tem-se: $p_{\eta}^e = p_{\eta}^d = p_n(COD)$. Por fim, impondo também o comportamento frágil das tensões tangenciais, $p_t^e = p_t^d = 0$, é possível apresentar o sistema de equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \left[\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) u_{\eta k}^e - \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d COD_k \\ & + \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) u_{tk}^e + \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d CSD_k \end{aligned} \right] \\
& = F + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) p_n(COD_k)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Reescrevendo 6.10 para uma etapa incremental n e isolando os valores incógnitos obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \Delta X^{(n)} \\ \Delta u_{\eta}^{e(n)} \\ \Delta COD^{(n)} \\ \Delta u_t^{e(n)} \\ \Delta CSD^{(n)} \\ \Delta p_n^{(n)}(\Delta COD^{(n)}) \end{array} \right\} \\
& = \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{NN_c} A_i, \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) \right), - \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d, \\ + \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) \right), \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d, \\ \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{tk}^e + G_{tk}^d) \right) \end{array} \right]^{-1} \{ \Delta F \}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

É possível observar em 6.11 a interdependência entre as incógnitas $\Delta COD^{(n)}$ e $\Delta p_n^{(n)}(\Delta COD^{(n)})$ ocasionando a não linearidade do sistema e tornando inviável a resolução direta do mesmo. Para solucionar os problemas não lineares utilizou-se os algoritmos de resolução iterativa OC e OT.

Resolvendo o Sistema linear 6.8 é possível encontrar um incremento de solução $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ para uma etapa n linear em que a tensão normal não excedeu a resistência em nenhum nó de interface. Já a resolução do Sistema não linear 6.11 via os algoritmos Newton Raphson permite determinar um incremento de solução para uma etapa não linear n na qual todos os nós da interface estão em regime coesivo. Em uma etapa intermediária onde nem todos os nós

de uma interface j superaram o limite elástico, os nós que estão em regime coesivo devem satisfazer as condições do Sistema 6.11, enquanto que os nós em regime elástico devem satisfazer o Sistema 6.8. Mesmo que nem todas as regiões de interface estejam em regime coesivo, a imposição feita em 6.11 para os nós que superaram o limite elástico altera a resposta de todos os outros pontos da estrutura.

6.2 ALGORITMO NÃO-LINEAR COM OPERADOR CONSTANTE

O algoritmo de resolução iterativa Operador Constante (OC) propõe que a solução não linear $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ do Sistema 6.11 para uma etapa incremental não linear n seja encontrada iterativamente através de uma previsão inicial somada a uma etapa de correções. As correções são impostas reaplicando o vetor de tensões não equilibradas na estrutura de modo a encontrar uma configuração equilibrada onde as tensões na interface respeitem as condições impostas pela lei coesiva do material.

A previsão inicial sempre considera que a solução incremental pode ser obtida resolvendo o Sistema linear 6.8. Ao acumular essa previsão inicial elástica, pode ocorrer das tensões normais acumuladas violarem o critério $p_n \leq f_t$ em alguns nós de interface. Nessa situação, a condição $COD = CSD = 0$ não é mais válida. Portanto, a resposta incremental obtida de 6.8 não é a solução do problema e deve ser corrigida através de um procedimento iterativo. Com o procedimento é possível fazer com que as tensões normais à interface converjam para um ponto de equilíbrio na curva coesiva do material. A previsão inicial somada às correções iterativas resulta uma resposta incremental que satisfaz as condições do Sistema 6.11 dentro de uma dada tolerância. Em uma etapa não linear $n + 1$ são realizadas I_i iterações para a obtenção da solução incremental $\Delta u^{(n+1)}$ e $\Delta p^{(n+1)}$ do sistema 6.11. Em cada iteração i , o vetor de tensões normais não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$ deve ser reaplicado nos nós coesivos da estrutura para que a resposta acumulada se aproxime da solução não linear do Sistema 6.11. Tal vetor é obtido para a iteração i como a diferença entre as resistências coesivas $p_n^c(COD^{(i)})$ previstas para as aberturas acumuladas $COD^{(i)}$ e as tensões normais acumuladas $p_n^{(i)}$ nos nós de interface em regime coesivo.

$$\Delta p_\eta^{ne(i)} = p_n^c(COD^{(i)}) - p_n^{(i)} \quad (6.12)$$

No caso da etapa incremental $n + 1$ ser a primeira etapa não linear, a solução acumulada da etapa anterior não apresenta nenhuma abertura ou deslizamento nos nós de interface. Dessa maneira, na primeira iteração (Previsão inicial) da primeira etapa não linear,

temos que as resistências coesivas de toda a interface ainda são iguais à resistência à tração do material intacto, ou seja, $p_n^c(COD = 0) = f_t$. A Figura 6.4 ilustra como a configuração equilibrada da etapa incremental $n + 1$ é alcançada acumulando-se as correções iterativas.

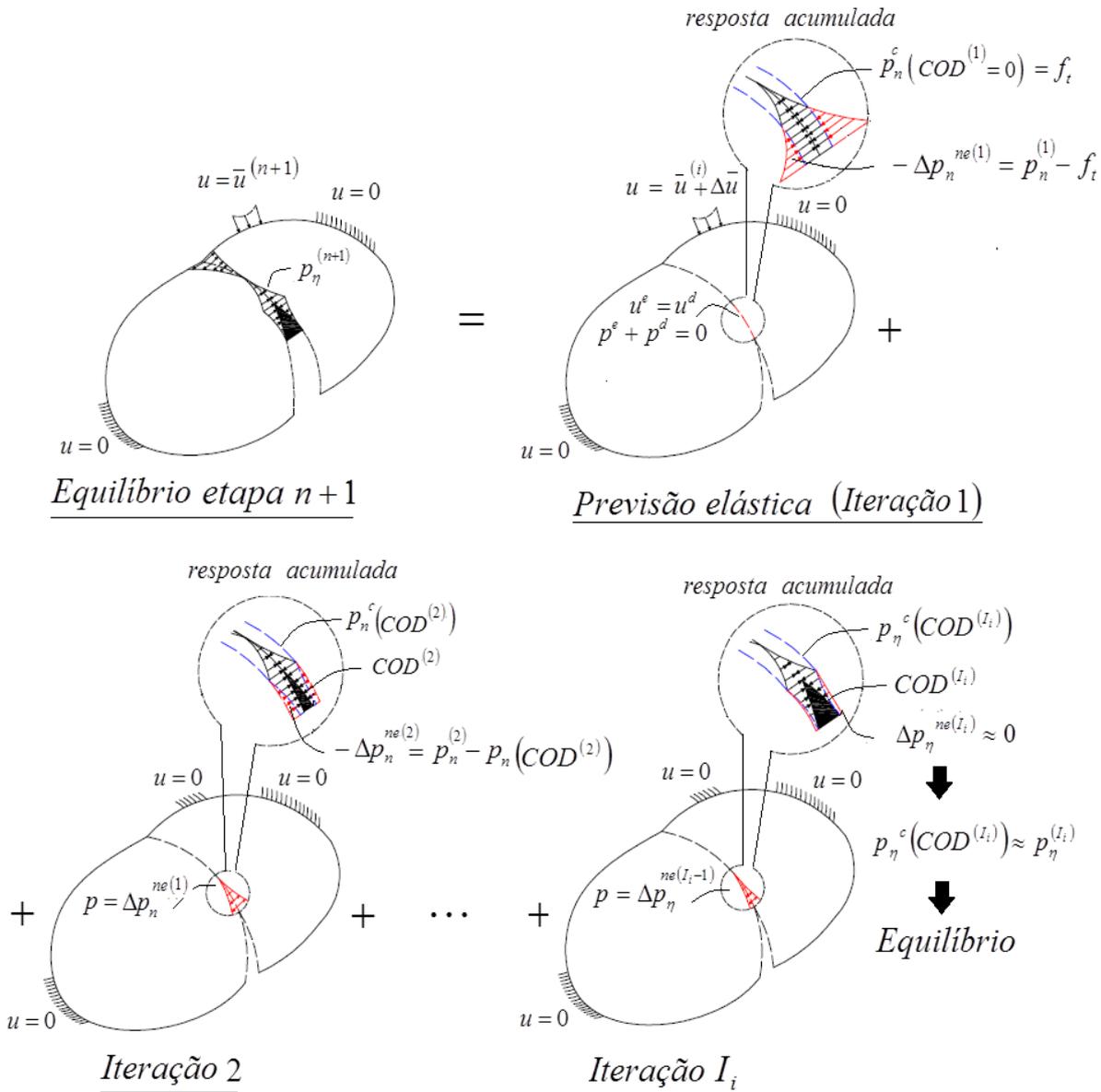


Figura 6.4 Correções iterativas via reaplicação dos vetores de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$.

Conforme ilustrado, em uma iteração $i + 1$, a reaplicação do vetor de tensões normais não equilibradas da iteração anterior, $\Delta p_\eta^{ne(i)}$, faz com que as aberturas normais acumuladas aumentem de $COD^{(i)}$ para $COD^{(i+1)}$, e as tensões normais acumuladas diminuam de $p_\eta^{(i)}$ para $p_\eta^{(i+1)}$. Com as novas aberturas, é possível determinar os novos valores de resistência coesiva $p_n^c(COD^{(i+1)})$ através de alguma lei coesiva. O novo vetor de tensões não equilibradas pode ser então calculado como a diferença entre a nova resistência coesiva e as

tensões acumuladas na interface: $\Delta p_\eta^{ne(i+1)} = p_n^c(COD^{(i+1)}) - p_\eta^{(i+1)}$. A partir desse vetor parte-se para uma nova iteração $i + 2$. O procedimento continua até a iteração I_i para a qual tem-se $\Delta p_\eta^{ne(n_i)} \approx 0$ e portanto, as tensões normais acumuladas se encontram em um ponto de equilíbrio na curva coesiva, ou seja, $p_\eta^{(i+1)} \approx p_n^c(COD^{(i+1)})$. A resistência coesiva $p_n^c(COD^{(i+1)})$ foi calculada nos exemplos considerando a expressão analítica de uma das três leis coesivas apresentadas para o concreto, no item 5.4, ou ainda através de uma lei bilinear qualquer que represente a curva coesiva de alguma espécie de madeira.

Para reaplicar os vetores de tensões não equilibradas nas regiões que violaram o critério de resistência coesiva, não são mais impostas condições de compatibilidade de deslocamento, mas sim condições de forças prescritas. Em uma iteração i , o vetor de tensões excedentes não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$ é reaplicado na interface da estrutura como forças prescritas cujas contribuições são arranjadas no vetor $\Delta F^{(i)}$ do sistema. Caso a iteração i não seja a previsão inicial, as condições de deslocamentos prescritos no contorno são assumidas todas iguais à zero, $\bar{u} = 0$, pois o incremento de deslocamento dessas regiões do contorno já foi considerado na previsão inicial. As incógnitas determinadas na iteração com a resolução do sistema são as variações de aberturas $\Delta COD^{(i+1)}$, as quais devem ser acumuladas em COD para serem utilizadas no cálculo do vetor de tensões não equilibradas da iteração seguinte, $\Delta p_\eta^{ne(i+1)}$.

Como o algoritmo OC não altera a rigidez da estrutura no sistema de equações algébricas, a reaplicação do vetor não equilibrado resulta em aberturas $COD^{(n+1)}$ constantes em relação à curva coesiva. A Figura 6.5 apresenta uma interpretação geométrica do OC ilustrando como as correções iterativas determinam a posição de equilíbrio na curva coesiva.

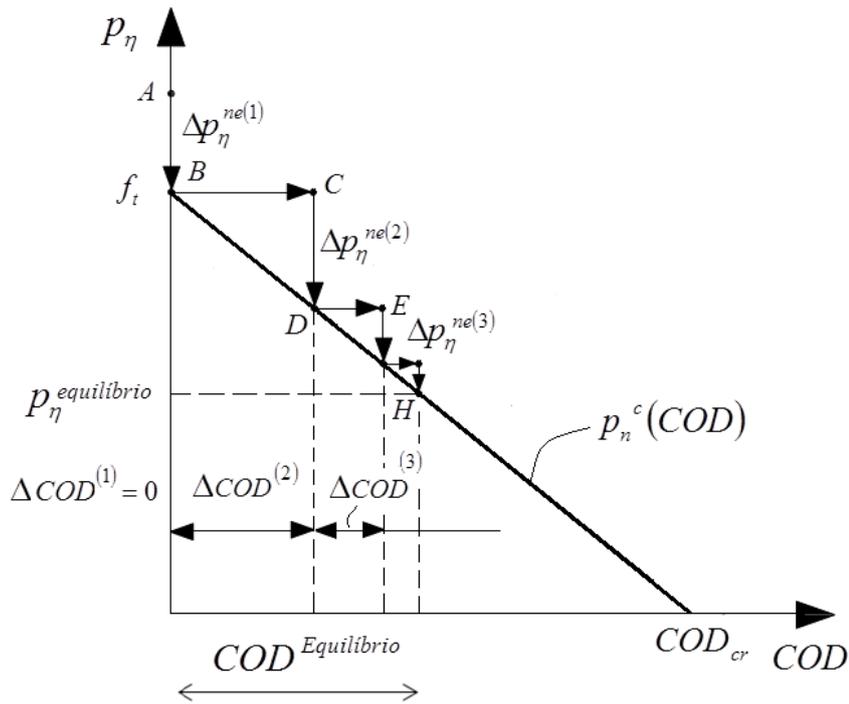


Figura 6.5 Interpretação geométrica das correções iterativas via OC

De acordo com a Figura 6.5, quando a tensão normal p_η supera a resistência coesiva inicial $p_n^c(COD^{(1)} = 0) = f_t$ (Ponto A), o primeiro vetor não equilibrado $\Delta p_\eta^{ne(1)}$ é calculado e reaplicado na estrutura no sentido de provocar uma variação de abertura normal na interface (Linha BC). Assim, essa variação $\Delta COD^{(2)}$, com inclinação constante em relação à curva coesiva, pode ser obtida e acumulada na solução $COD^{(2)}$. O novo valor da resistência coesiva $p_n^c(COD^{(2)})$ é então calculado (Linha CD). Após essa primeira iteração, é calculado o novo vetor de tensões desequilibradas $\Delta p_\eta^{ne(2)}$ o qual deve ser também reaplicado na estrutura (Linha DE). Como resultado, uma nova variação de abertura $\Delta COD^{(3)}$ com inclinação constante é obtida e acumulada em $COD^{(3)}$ para calcular a nova resistência coesiva $p_n^c(COD^{(3)})$ (Linha EF). Esse procedimento iterativo continua até que o vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(I_i)}$ na iteração I_i seja suficientemente pequeno para que possa ser considerado desprezível de acordo com o critério de convergência adotado.

6.3 ALGORITMO NÃO-LINEAR COM OPERADOR TANGENTE

Assim como no caso do OC, a solução não linear $\Delta u^{(n)}$ e $\Delta p^{(n)}$ de uma etapa incremental é determinada iterativamente através de uma previsão inicial somada a correções iterativas. Porém, essas etapas são procedidas considerando uma rigidez tangente da estrutura.

Para isso, aproveita-se o fato da expressão analítica da curva coesiva ser conhecida (linear, bilinear ou exponencial) e, por meio da diferenciação do Sistema 6.10, a resposta não linear de 6.11 pode ser obtida levando em conta informações provenientes da primeira derivada da curva coesiva. Assim, em uma iteração i , ao reaplicar o vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$ na estrutura, as aberturas $COD^{(i+1)}$ são determinadas considerando a inclinação tangente da curva coesiva no ponto de equilíbrio anterior $p_n^c = p_n^c(COD^{(i)})$. A interpretação geométrica de como as correções iterativas via OT determinam a posição de equilíbrio na curva coesiva é ilustrada a seguir na Figura 6.6.

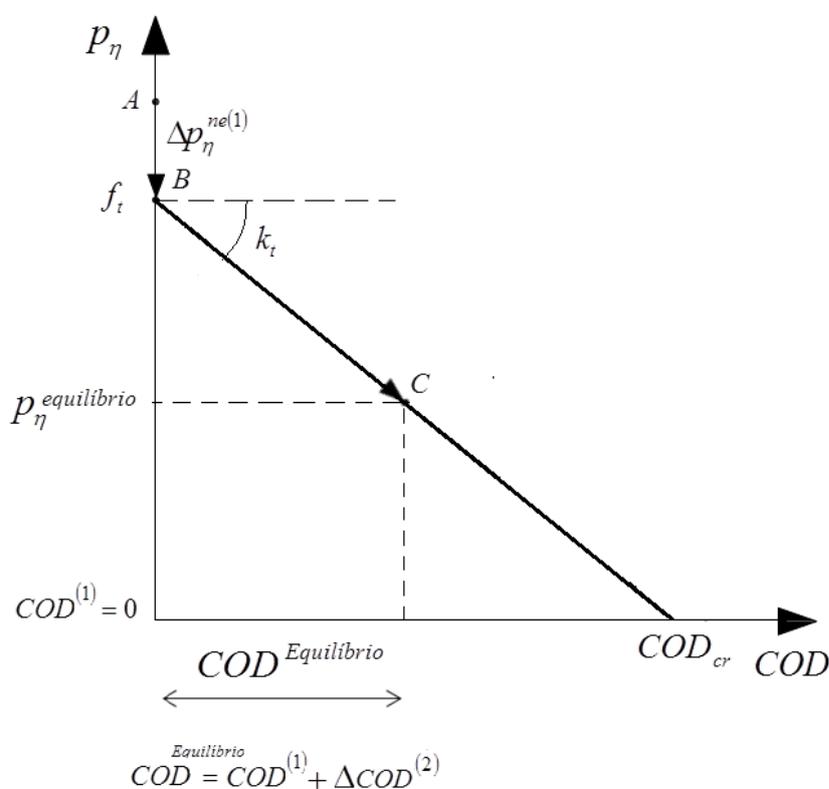


Figura 6.6 Interpretação geométrica das correções iterativas via OT

Como o sistema de equações via OT incorpora às informações tangentes da curva coesiva, ao reaplicar o vetor de tensões não equilibradas a solução é determinada na direção K_t tangente à curva coesiva e, portanto o ponto de equilíbrio é determinado com menos iterações. No caso de lei coesiva linear, como K_t é constante, a reaplicação apenas do primeiro vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(1)}$ já é o suficiente para determinar a abertura de equilíbrio, $COD^{equilíbrio}$, conforme apresentado na Figura 6.6.

Para determinar as aberturas tangentes, considere novamente o Sistema não linear 6.10. Como a solução não linear a princípio não é conhecida, esse sistema pode ser reescrito em forma de um funcional Y do erro:

$$\begin{aligned}
Y(X, u_\eta^e, COD, u_t^e, CSD, F) &= \sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) u_{\eta k}^e \\
&- \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d COD_k + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) u_{tk}^e \\
&+ \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d CSD_k \\
&- \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) \{p_n^c(COD_k) + \Delta p_\eta^{ne}\} - F
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Em 6.13, as tensões normais $p_n(COD_k)$ do Sistema 6.10 são consideradas como a soma das tensões coesivas $p_n^c(COD_k)$ mais o vetor de tensões não equilibradas Δp_η^{ne} , o qual pode ser prescrito na interface coesiva na forma de forças de interface. A contribuição do vetor de forças prescritas, $\sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) \Delta p_\eta^{ne}$, pode ser contabilizada no vetor F de condições prescritas e assim 6.13 é reescrito como:

$$\begin{aligned}
Y(X, u_\eta^e, COD, u_t^e, CSD, F) &= \sum_{i=1}^{NN_c} A_i X_i + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) u_{\eta k}^e \\
&- \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d COD_k + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) u_{tk}^e \\
&+ \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d CSD_k - \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) p_n^c(COD_k) - F \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Considerando hipóteses de continuidade sobre o funcional de erro, o sistema algébrico do OT pode ser obtido por uma expansão em série de Taylor considerando apenas o termo linear.

$$\begin{aligned}
Y(var + \Delta var) &= Y(var) + \frac{\partial Y(X, u_{\eta}^e, COD, u_t^e, CSD, F)}{\partial var} \Delta var \\
&= Y + \frac{\partial Y(X, \dots)}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial Y(\dots, u_{\eta}^e, \dots)}{\partial u_{\eta}^e} \Delta u_{\eta}^e \\
&\quad + \frac{\partial Y(\dots, COD, \dots)}{\partial COD} \Delta COD + \frac{\partial Y(\dots, u_t^e, \dots)}{\partial u_t^e} \Delta u_t^e \\
&\quad + \frac{\partial Y(\dots, CSD)}{\partial CSD} \Delta CSD + \frac{\partial Y(\dots, F)}{\partial F} \Delta F = 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Na expansão 6.15, o erro Y é diferenciado em relação às suas variáveis. Visto que os termos H e G são constantes e as variáveis, com exceção de $p_{\eta}^C(COD)$, são independentes, o sistema algébrico pode então ser apresentado como.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{NN_c} A_i \Delta X_i + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) \Delta u_{\eta k}^e - \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d \Delta COD_k \\
+ \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) \Delta u_{tk}^e + \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d \Delta CSD_k \\
- \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) \left(\frac{\partial p_n^C}{\partial COD_k} \right) \Delta COD_k = \Delta F
\end{aligned} \tag{6.16}$$

O Sistema 6.16 pode então ser resolvido como:

$$\begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta u_{\eta}^e \\ \Delta COD \\ \Delta u_t^e \\ \Delta CSD \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{NN_c} A_i, \\ \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{\eta k}^e - H_{\eta k}^d) \right), \\ \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{\eta k}^d + (G_{\eta k}^e + G_{\eta k}^d) \left(\frac{\partial p_n^C}{\partial COD_k} \right) \right), \\ \sum_{j=1}^{NI} \left(\sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} (H_{tk}^e - H_{tk}^d) \right), \\ \sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_I^{j/2}} H_{tk}^d \end{bmatrix}^{-1} \{ \Delta F \} \tag{6.17}$$

Para uma etapa incremental n , a solução não linear de 6.11 é obtida via OT resolvendo iterativamente o Sistema 6.17. Para isso, a cada iteração i , a contribuição do vetor de tensões

não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$ dos nós coesivos deve ser considerada no vetor ΔF . Além disso, a rigidez da estrutura deve ser atualizada na direção tangente da curva coesiva pelos termos $\partial p_n^c / \partial COD^{(i)}$.

Antes de iniciar o processo iterativo de um novo passo de carga, é necessário estimar quais os nós de interface que entraram no regime coesivo. Para isso, foi proposto que em cada novo passo de carga, o sistema 6.8 fosse resolvido antes do processo iterativo do OT e sua solução fosse acumulada na resposta da estrutura para determinar em quais nós de interface $p_n \geq f_t$. Assim, é possível obter uma estimativa inicial para o comprimento da região coesiva. Determinada a estimativa, a solução de 6.8 é subtraída da resposta acumulada do problema e inicia-se então o processo iterativo via OT do respectivo passo de carga.

No caso de leis coesivas lineares, a tangente $\partial p_n^c / \partial COD$ é constante e, portanto o Sistema 6.17 se torna linear. Nessa situação, a solução incremental que satisfaz o sistema 6.11 é obtida com apenas uma iteração do sistema do OT.

Caso a lei coesiva não possua inclinação constante, podem ser necessárias mais iterações para que a resposta convirja para a solução do problema. Dentro de cada interação i é necessário computar a contribuição do vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i)}$ no vetor $\{\Delta F^{(i)}\}$ e considerar as tangentes $\partial p_n^c / \partial COD^{(i)}$ para aberturas $COD^{(i)}$ dos nós coesivos de interface na referida interação i . Com isso, a solução de 6.17 resulta então nos valores incógnitos de contorno $\Delta X^{(i+1)}$ e nos deslocamentos e aberturas incrementais da interface $\Delta u_\eta^{e(i+1)}, \Delta u_t^{e(i+1)}, \Delta COD^{(i+1)}$ para a interação seguinte $i + 1$. Tais valores devem ser acumulados na resposta da estrutura antes de continuar com a próxima interação.

Entretanto, as tensões incrementais na interface não são obtidas diretamente de 6.17. Para isso, é necessário novamente recorrer ao sistema clássico do MEC $H\Delta u = G\Delta p$, escrito agora para valores incrementais de deslocamentos e tensões de superfície apenas de pontos localizados na interface. Entrando no sistema com todos os deslocamentos de interface $\Delta u^{(i+1)}$ previamente determinados, é possível obter as tensões de interface $\Delta p_\eta^{(i+1)}$. Acumulando na resposta da estrutura também as tensões $\Delta p_\eta^{(i+1)}$ é possível obter os valores de $p_\eta^{(i+1)}$. Com todas as grandezas acumuladas na interação $(i + 1)$, o novo vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_\eta^{ne(i+1)}$ pode ser calculado usando 6.12 e assim dar continuidade ao procedimento iterativo. As iterações terminam quando o vetor não equilibrado $\Delta p_\eta^{ne(i)}$, em

uma dada iteração I_i , for pequeno o suficiente para ser considerado desprezível de acordo com um critério de convergência.

Em se tratando de leis coesivas descontínuas, como é o caso da lei bilinear, nos pontos de inflexão deve-se tomar o cuidado de atualizar o termo tangente $\partial p_n^c / \partial COD$ do Sistema 6.17 considerando a nova inclinação da curva coesiva. Para isso, as aberturas COD são monitoradas a cada iteração de um passo de carga. Caso a abertura supere o valor do ponto de inflexão da curva, a resposta que foi acumulada na iteração é subtraída, retrocedendo assim a solução. O Sistema 6.17 é então resolvido novamente, porém agora considerando a nova tangente nos nós cuja abertura superou o ponto de inflexão. A Figura 6.7 apresenta o esquema adotado para lidar com os pontos de inflexão.

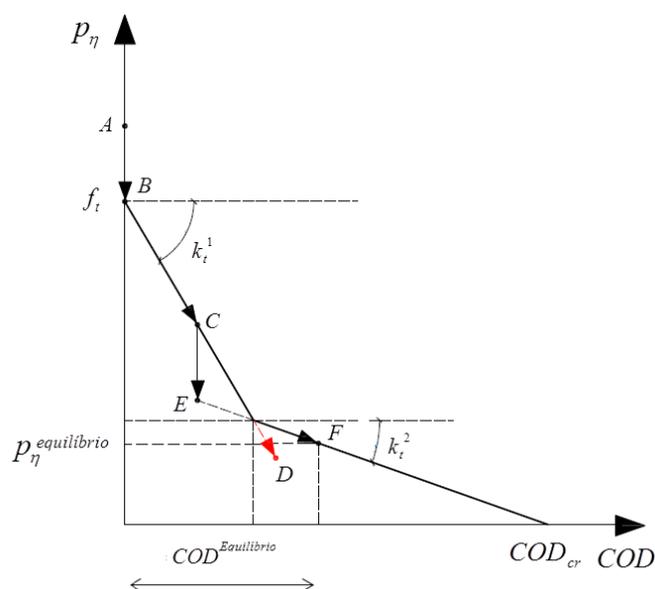


Figura 6.7 Detecção de pontos de inflexão e atualização do OT

Conforme o esquema, após o limite elástico ser superado, o excedente é reaplicado na direção tangente e o passo converge no ponto C. Após mais um passo incremental o algoritmo OT segue novamente a inclinação tangente $\partial p_n^c / \partial COD = k_t^1$ chegando ao ponto D. No entanto, como as aberturas são monitoradas, verifica-se que em D o valor de COD já superou a abertura da inflexão. Nesse caso, essa iteração é subtraída da resposta acumulada da estrutura, retornando-se ao ponto C. Para determinar o novo incremento, o Sistema 6.17 é solucionado novamente considerando agora, para o ponto em questão, a nova tangente $\partial p_n^c / \partial COD = k_t^2$ e também o excedente de tensão CE relativo à projeção da nova tangente no ponto de equilíbrio anterior. Dessa maneira, ao acumular a nova solução de 6.17, chega-se ao novo ponto de equilíbrio F.

6.4 CRITÉRIO DE CONVERGENCIA DOS ALGORITIMOS

Em ambos os algoritmos apresentados anteriormente, a resposta do sistema não linear da estrutura é obtida através da resolução iterativa de característicos sistemas lineares. O critério que define em qual iteração a solução acumulada convergiu para a solução não linear do problema se baseia na norma do vetor de tensões não equilibradas $\Delta p_{\eta}^{ne(i)}$. Quando em uma iteração $i = I_i$ a norma do vetor for menor do que uma tolerância estipulada, as tensões não equilibradas não precisam mais ser reaplicadas na estrutura uma vez que as mesmas são suficientemente pequenas.

Para calcular o escalar de norma do vetor $\{\Delta p_{\eta}^{ne(i)}\}$ é necessário somar o quadrado de cada uma de suas componentes, ou seja, somar o quadrado das tensões normais não equilibradas em todos os nós em regime coesivo. O escalar de norma em uma dada iteração i é calculado como:

$$|\{\Delta p_{\eta}^{ne(i)}\}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{NI} \sum_{k=1}^{NN_{zc}^j} (\Delta p_{\eta_k}^{ne(i)})^2} \quad (6.17)$$

Sendo NI o número total de interface, NN_{zc}^j o número de nós pertencentes à zona coesiva da interface j e $\Delta p_{\eta_k}^{ne(i)}$ o termo k do vetor de tensões normais não equilibradas $\{\Delta p_{\eta}^{ne(i)}\}$.

Por fim, é importante ainda mencionar que após as iterações necessárias para a convergência das tensões na zona coesiva, ainda é necessário monitorar os valores de tensões normais nos nós de interface que supostamente estão em regime elástico. Nesses últimos, é possível que ao final das correções iterativas, algum deles apresente uma tensão superior à resistência f_t . Quando isso ocorre, o passo de carga ainda não convergiu, pois o tamanho da zona coesiva deve ser maior do que o estimado inicialmente incluindo também os novos nós que violaram o critério elástico. O excedente de tensão nesses nós é reaplicado na estrutura dando continuidade ao processo iterativo de busca da solução equilibrada.

7 APLICAÇÕES EM REGIME ELÁSTICO

Nesse capítulo são apresentadas 5 aplicações de estruturas compostas e/ou anisotrópicas em regime elástico linear, analisadas via as formulações singular (MEC S) e hiper singular (MEC HP) dos elementos de contorno. Em todas as aplicações foram considerados elementos de contorno descontínuos, garantindo assim as hipóteses de continuidade da formulação MEC HP. Nas quatro primeiras aplicações foram considerados os dois estados planos, EPT e EPD, sendo as respostas obtidas com o MEC comparadas com respostas de elementos finitos via o software Ansys. Já na última aplicação, o problema foi tratado em EPT e as respostas foram comparadas com referência da literatura. Todas as estruturas planas foram consideradas com espessuras unitárias. A primeira aplicação é referente a uma chapa fletida composta por regiões isotrópicas. A segunda aplicação traz um anel anisotrópico sob flexão, discretizado com elementos de contorno curvos. O terceiro exemplo se refere a uma viga composta constituída de uma região isotrópica e outra anisotrópica. Já o quarto exemplo traz uma chapa anisotrópica com inclusões isotrópicas rígidas. Nos exemplos 3 e 4 avaliam-se estruturas cujos sistemas algébricos foram obtidos via MEC com distintas soluções fundamentais. Por fim, o quinto exemplo elástico se refere à determinação do fator de intensidade de tensão em uma chapa ortotrópica com trinca central solicitada a modo I de fratura. Os resultados dessa última aplicação foram comparados com respostas numéricas obtidas em outros trabalhos da literatura. Antes de analisar os exemplos do presente capítulo, três problemas homogêneos anisotrópicos foram avaliados no intuito de validar as formulações do MEC baseadas na solução fundamental de Cruse & Swedlow. Para tais exemplos, a solução analítica é conhecida e, portanto, foi possível confrontar os resultados numéricos com os analíticos para a validação do código. Esses três exemplos encontram-se no Anexo do presente trabalho após as referências bibliográficas.

7.1 CHAPA NÃO HOMOGENA

No primeiro exemplo, considere uma chapa retangular cujo domínio é composto por três diferentes materiais isotrópicos. Considere ainda que na chapa são impostas condições de

contorno de deslocamento nulo em uma de suas faces, e condições de contorno de forças prescritas em outras duas faces. A Figura 7.1 ilustra o problema apresentando sua geometria, as propriedades elásticas dos três materiais e também as condições de contorno.

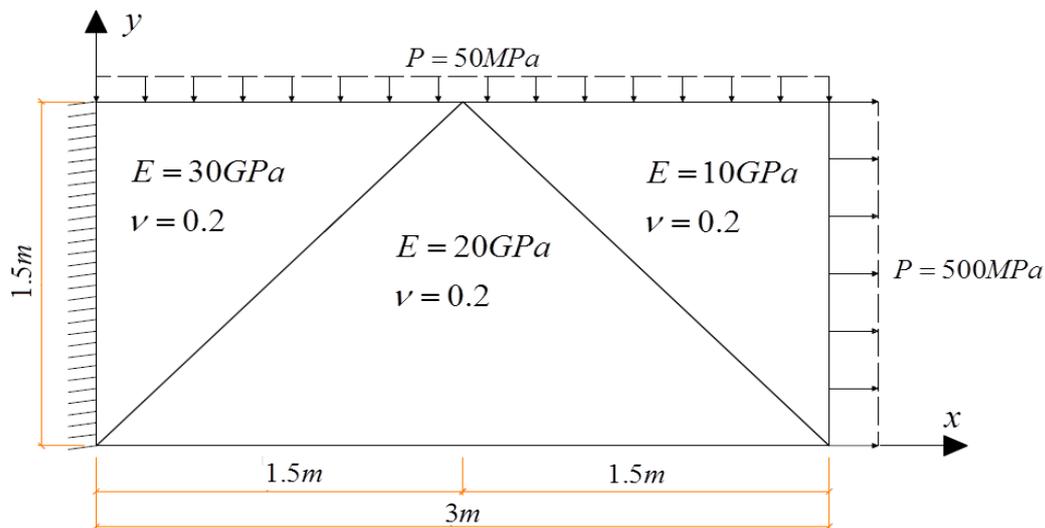


Figura 7.1 Chapa não homogênea engastada

Para solucionar o problema com a técnica multi-regiões, o contorno e as interfaces materiais do chapa foram discretizados com uma malha de 40 nós e 10 elementos de contorno de aproximação cúbica conforme apresentado na Figura 7.2.

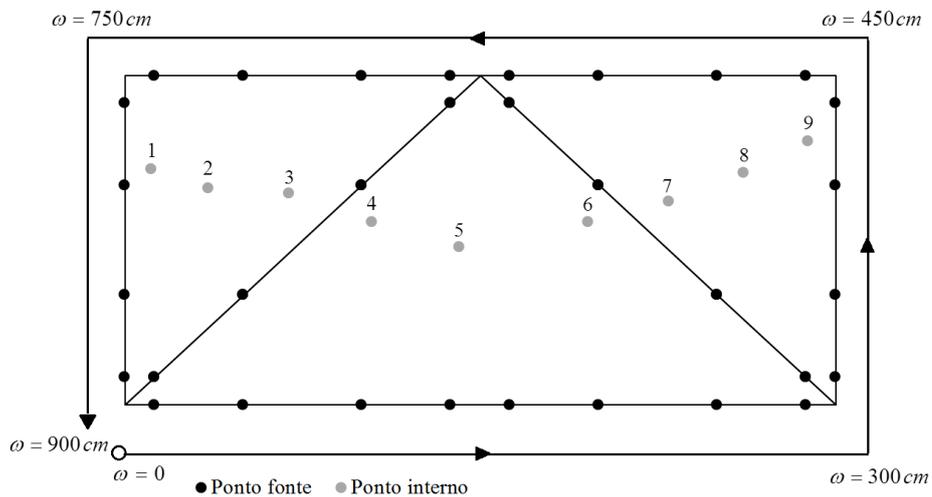


Figura 7.2 Malha com elementos de contorno cúbicos

O exemplo foi processado tanto com a formulação MEC S quanto com a MEC HP para posterior comparação dos resultados com a análise em elementos finitos. A estrutura foi avaliada em Estado Plano de Tensão (EPT) e em Estado Plano de Deformação (EPD). Já a discretização em elementos finitos adotada no Ansys é composta por 1001 nós e 464

elementos do tipo “PLANE 183” triangulares de aproximação quadrática. Além disso, a discretização foi planejada de tal forma que alguns dos nós pertencentes ao contorno coincidam em coordenadas com os pontos fontes da malha do MEC facilitando assim a comparação de resultado. A Figura 7.3 abaixo ilustra a discretização adotada no Ansys.

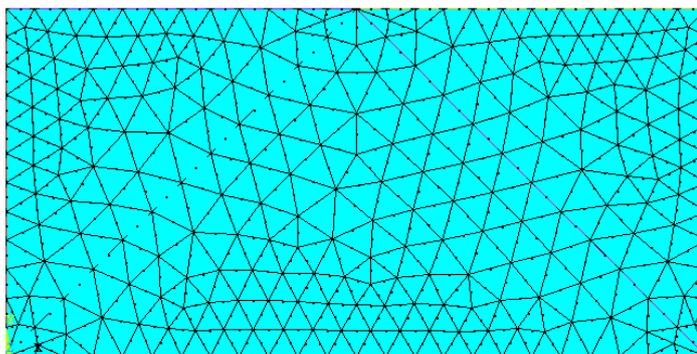


Figura 7.3 Discretização em elementos finitos triangulares de aproximação quadrática

Para comparar os resultados do MEF, MEC S e MEC HP foram primeiramente analisados os valores de deslocamentos nos 24 pontos fonte da malha de contorno. Para a comparação foi adotada uma coordenada ω a qual contorna a chapa com origem no canto inferior esquerdo, $\omega = 0$, e fim no mesmo ponto, $\omega = 900\text{cm}$. A Figura 7.2 esquematiza essa coordenada. Com os resultados foram apresentados nos gráficos da Figura 7.4 para comparar os campos de deslocamento no contorno.

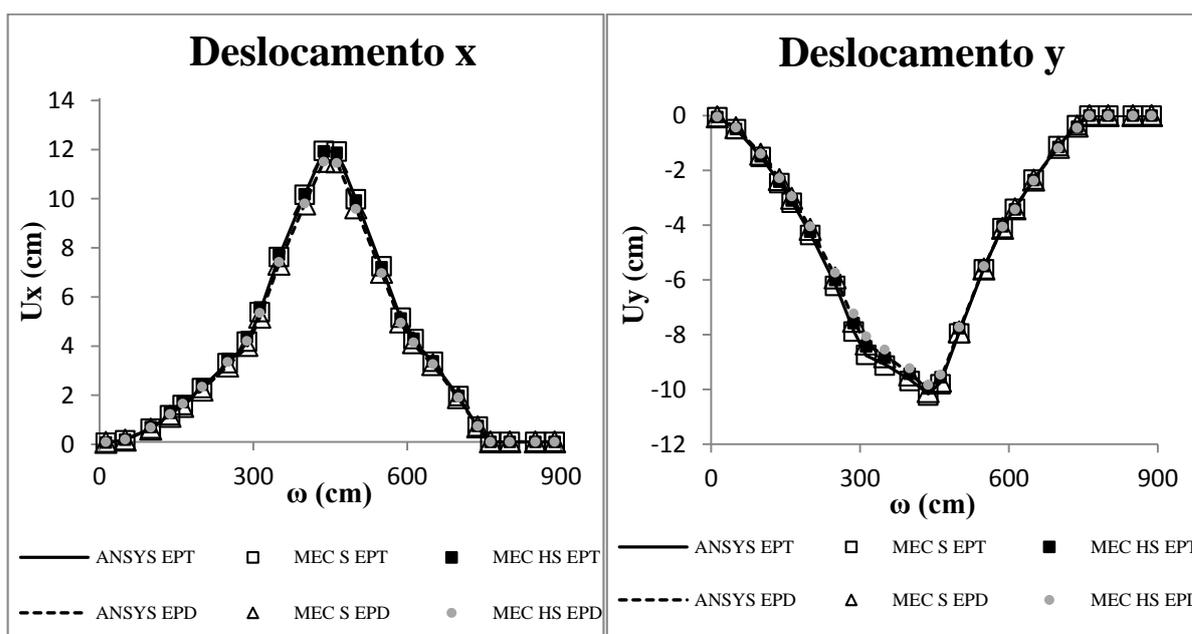


Figura 7.4 Resposta de deslocamento no contorno: MEC versus Ansys

É possível verificar as semelhanças do campo de deslocamentos obtido com ambas as técnicas numéricas. Porém, para melhor assegurar a validade dos resultados, foram também avaliadas as tensões σ_x , σ_y , σ_z e τ_{xy} em 9 pontos internos da estrutura. Os pontos internos foram numerados conforme ilustrado na Figura 7.2 sendo que cada sub-região contém 3 desses pontos. A resposta em tensões é ilustrada nas Figuras 7.5 e 7.6.

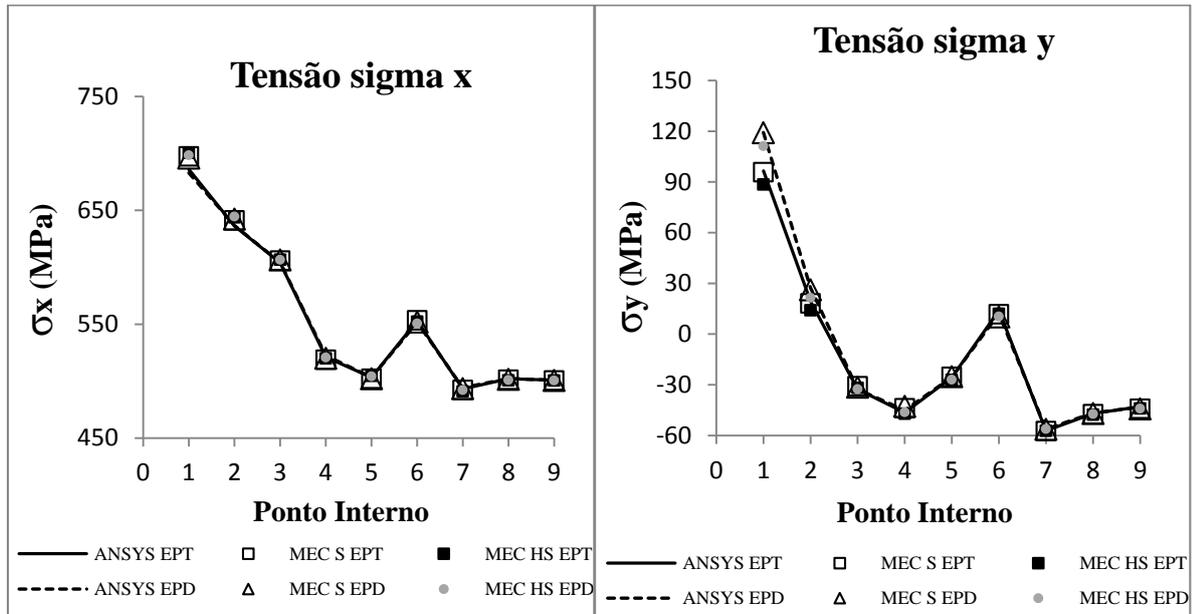


Figura 7.5 Resposta de tensões normais independentes: MEC versus Ansys

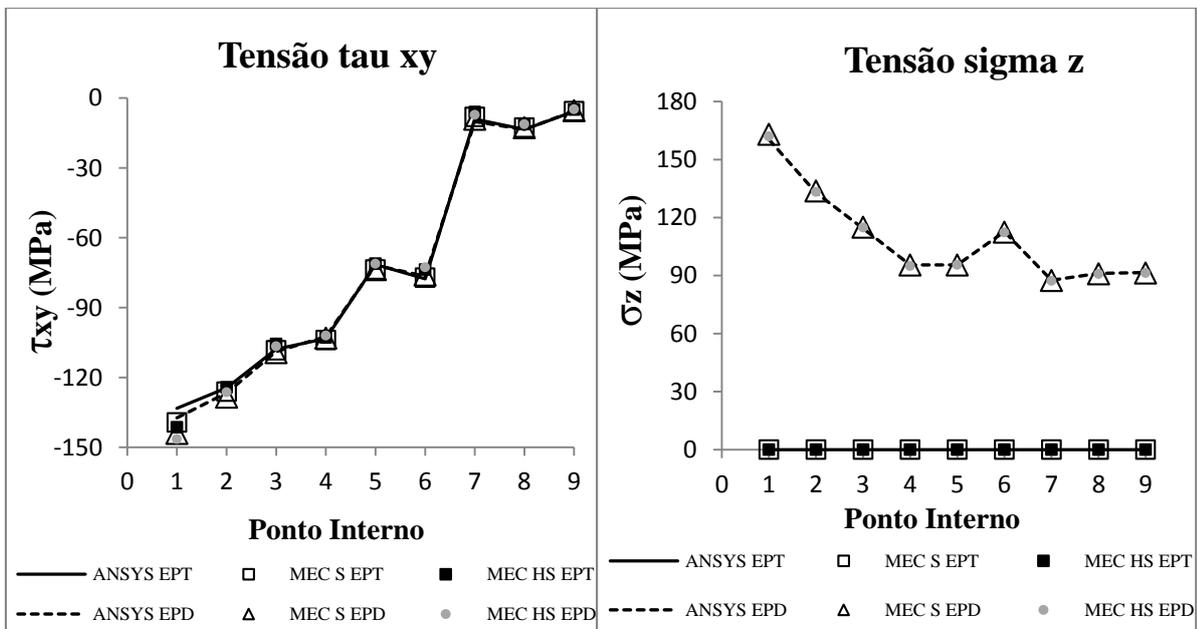


Figura 7.6 Resposta de tensão cisalhante e tensão σ_z : MEC versus Ansys

Assim como para o campo de deslocamentos, um comportamento semelhante entre os campos de tensões encontrados via Ansys e via MEC é também verificado. Portanto, é

possível concluir que as formulações MEC S e MEC HP resultaram soluções satisfatórias para o respectivo problema mecânico.

7.2 ANEL ANISOTRÓPICO

Para o segundo exemplo considere um anel com comprimento de arco de 90 graus, onde uma de suas extremidades encontra-se engastada e a outra tracionada. O domínio do problema é composto por um material anisotrópico cujas constantes elásticas foram apresentadas por FERNÁNDEZ (2012) como sendo: $E_x = 124,04GPa$, $E_y = 10,09GPa$, $G_{xy} = 6,03GPa$, $\nu_{yx} = 0,344$, $\eta_{xy,x} = 1,255$ e $\eta_{xy,y} = -0,031$. A análise foi procedida considerando os dois estados planos, EPT e EPD. No caso de EPD, foram ainda consideradas as constantes elásticas na direção z : $\nu_{zy} = 0,25$, $\nu_{zx} = 0,40$ e $\eta_{xy,z} = 0,50$. A figura 7.7 ilustra a geometria do problema apresentando também as condições de contorno impostas.

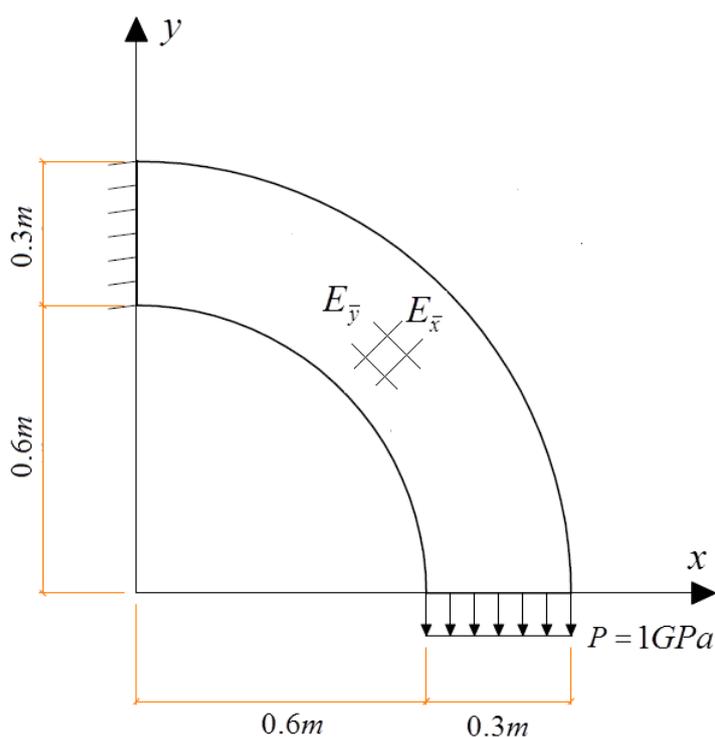


Figura 7.7 Anel anisotrópico submetido à flexão.

O exemplo foi discretizado com uma malha de contorno composta por 24 elementos curvos de aproximação quadrática, totalizando 72 nós. Na análise dos resultados, novamente foi adotada a coordenada de contorno aberto ω conforme o esquema da Figura 7.8 o qual também traz a malha de contorno da estrutura.

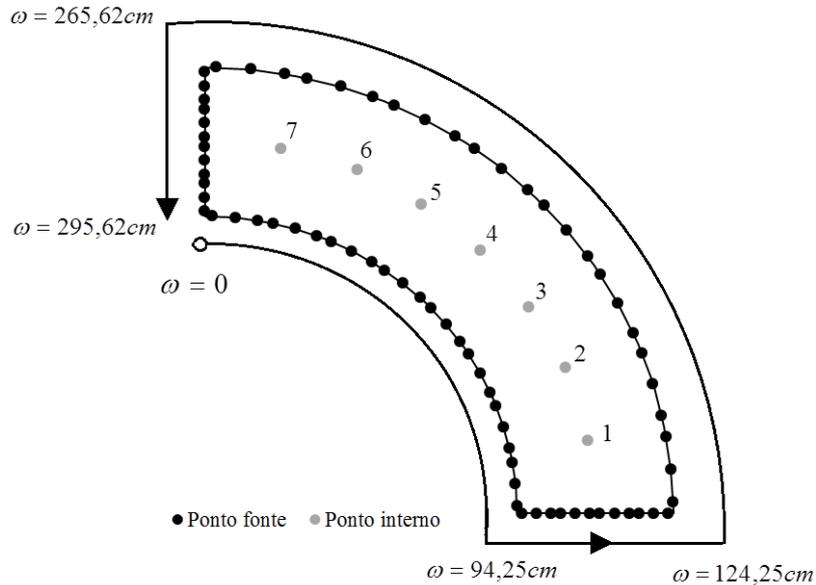


Figura 7.8 Malha de elementos de contorno e coordenadas de contorno aberto

O problema foi então processado considerando as formulações MEC S e MEC HP. A discretização adotada para análise via Ansys é composta por 1357 nós e 630 elementos do tipo “PLANE 183” triangulares de aproximação quadrática. Além disso, assim como no primeiro exemplo, a discretização foi planejada de tal forma que as coordenadas de alguns dos nós do contorno coincidam com os pontos fontes da malha do MEC. A Figura 7.9 abaixo apresenta a discretização adotada no Ansys.

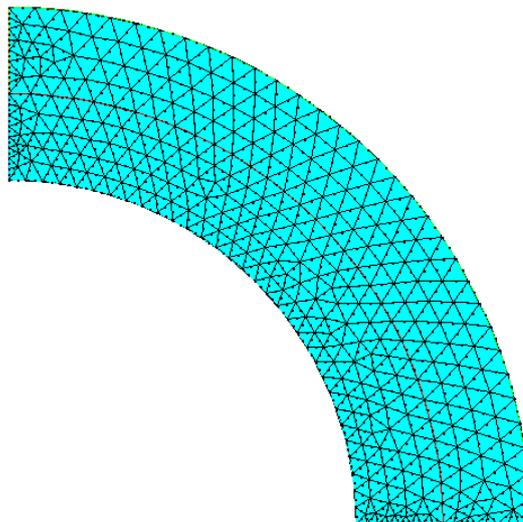


Figura 7.9 Discretização em elementos finitos triangulares de aproximação quadrática

Com as análises foi então possível comparar as soluções do MEF com as do MEC. Primeiramente foram comparados os resultados de deslocamentos nos 72 pontos fonte pertencentes ao contorno do problema através dos gráficos ilustrados na Figura 7.10.

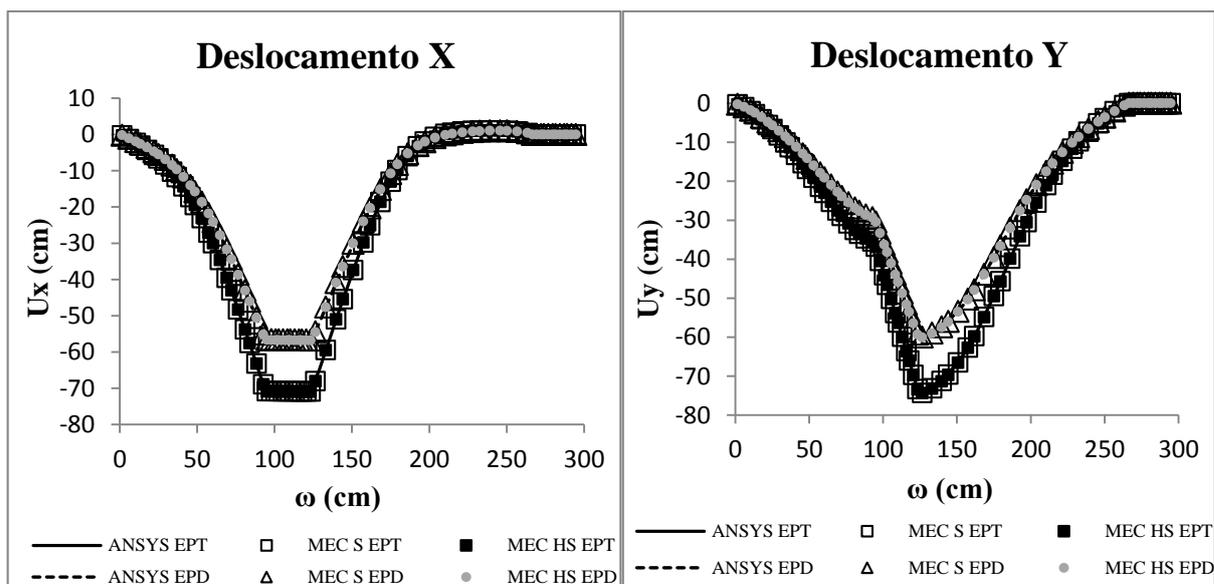


Figura 7.10 Resposta de deslocamentos no contorno: MEC versus Ansys

Observando os resultados é possível perceber que ambas as formulações do MEC, para ambos os estados planos, foram capazes de reproduzir com boa precisão o mesmo campo de deslocamentos encontrado via Ansys. Para melhor assegurar a validade dos resultados foram ainda avaliadas as tensões σ_x , σ_y , σ_z e τ_{xy} em 7 pontos internos da estrutura. Os pontos internos foram numerados de 1 a 7 conforme ilustrado na Figura 7.8. Os gráficos com as respostas em tensões são apresentados a seguir nas Figuras 7.11 e 7.12.

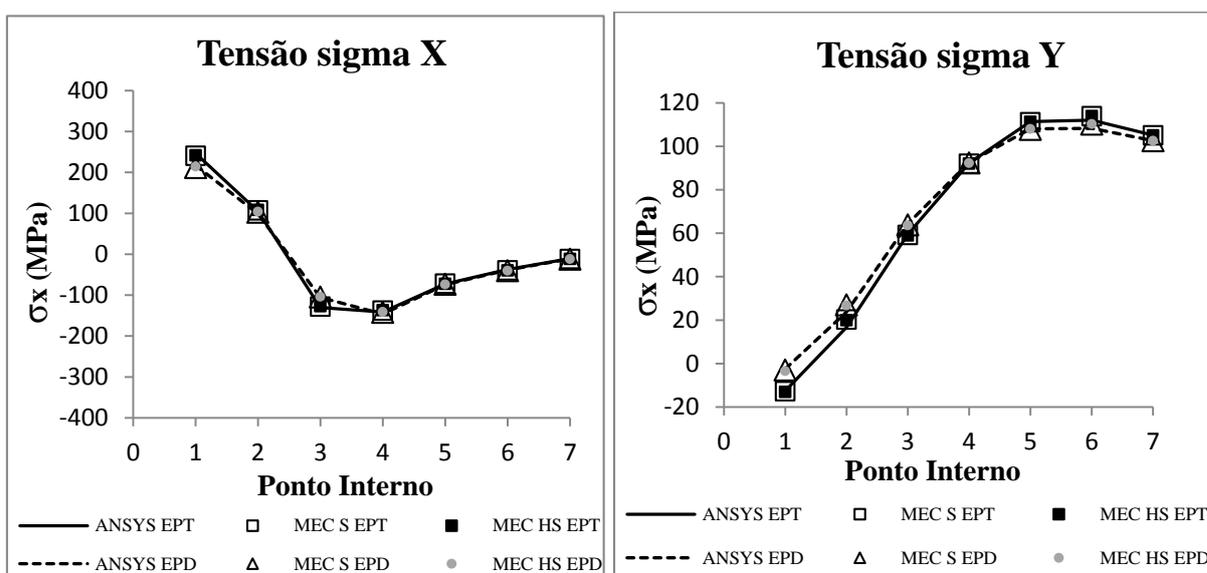


Figura 7.11 Resposta de tensões normais independentes: MEC versus Ansys

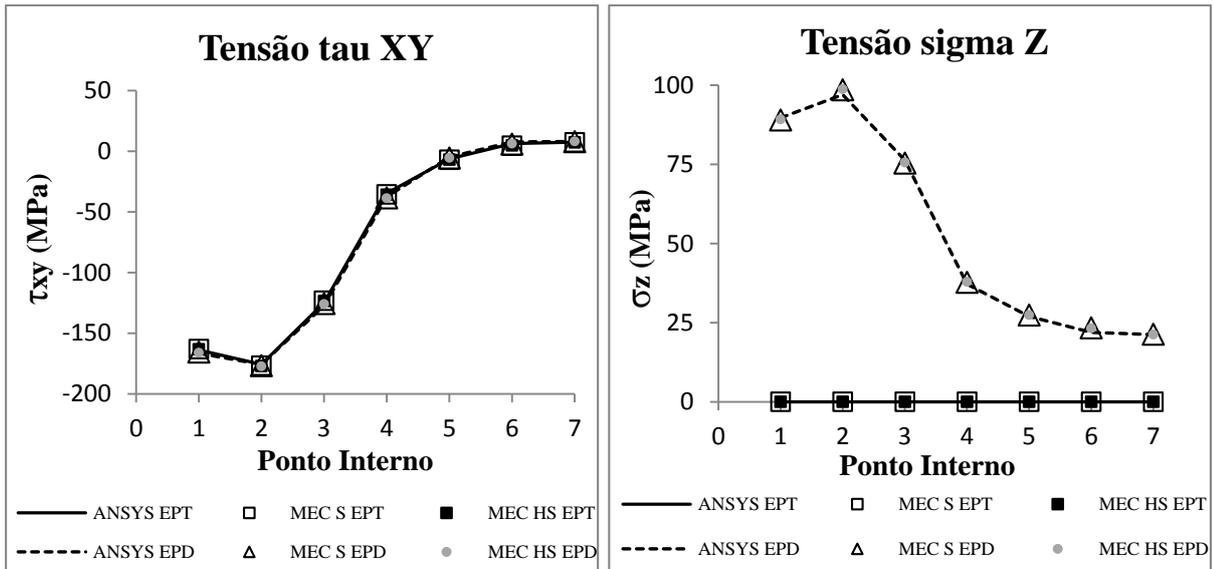


Figura 7.12 Resposta de tensão cisalhante e tensão σ_z : MEC versus Ansys

Novamente verificam-se bons resultados demonstrando a acurácia de ambas as formulações do MEC para a análise de problemas anisotrópicos em regime elástico. A malha de contorno deformada obtida para os dois estados planos é apresentada na Figura 7.13 com deslocamentos em escala um para um.

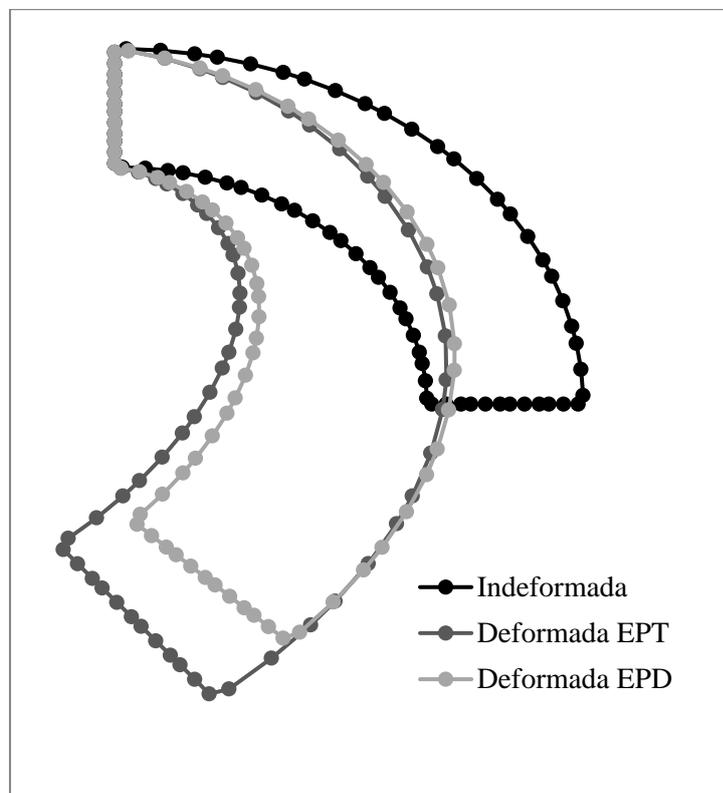


Figura 7.13 Configuração indeformada e malha deformada: EPT e EPD

7.3 VIGA NÃO HOMOGENEA ANISOTRÓPICA

No terceiro, o comportamento elástico linear de uma viga composta por sub-regiões isotrópica e anisotrópica é simulado através das formulações MEC S e MEC HP. Para isso, o contorno da região superior foi avaliado a partir da solução fundamental de Kelvin, e o contorno da região inferior a partir da solução fundamental de Cruse & Swedlow. A compatibilidade de deslocamentos imposta pela técnica de multi-regiões garante a continuidade dos deslocamentos na interface dos materiais. O problema foi avaliado considerando os estados planos EPT e EPD. A Figura 7.14 apresenta a geometria e a solicitação da viga composta bem como as propriedades elásticas da região superior isotrópica. A região inferior foi considerada constituída por um material laminado apresentado por VANALLI (2004) cujas lâminas são assumidas homogêneas ortotrópicas e estão dispostas inclinadas de 30 graus no sentido anti-horário em relação ao eixo x . Nessas condições, a região inferior da viga apresenta uma anisotropia geral com as seguintes constantes elásticas: $E_x = 19,681GPa$, $E_y = E_z = 11,248GPa$, $G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = 7,933GPa$, $\nu_{yx} = 0,529$, $\eta_{xy,x} = -1,224$ e $\eta_{xy,y} = -0,042$. No caso de EPD, foram ainda consideradas as constantes elásticas na direção z : $\nu_{zy} = 0,30$, $\nu_{zx} = 0,15$ e $\eta_{xy,z} = 0,75$.

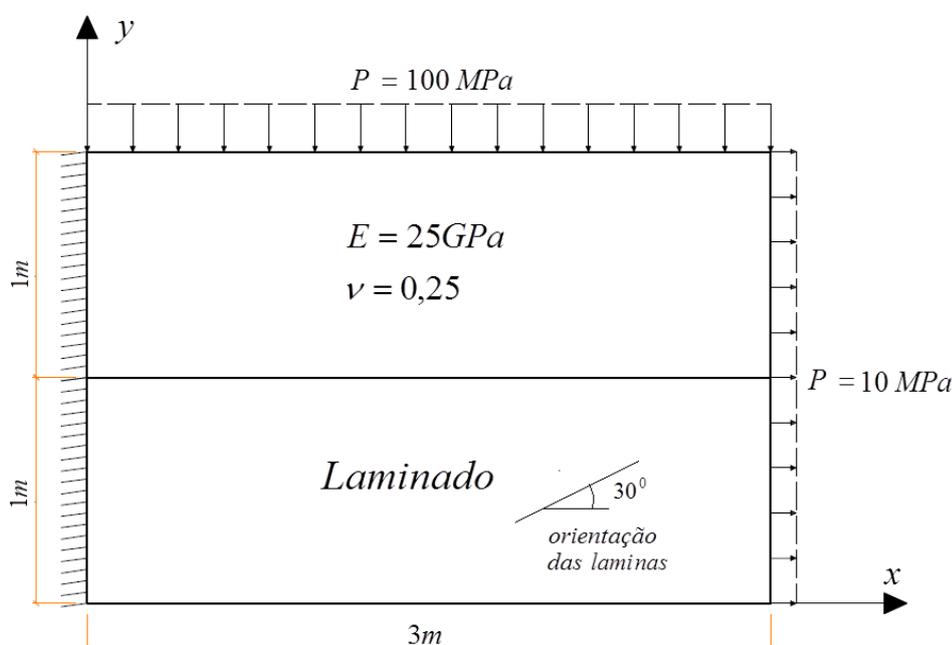


Figura 7.14 Viga composta submetida à flexão.

Cada uma das duas sub-regiões foi discretizada com uma malha de contorno composta por 12 elementos de aproximação quadrática. Portanto, a discretização de todo o contorno e também da interface do problema totalizou 72 nós. A Figura 7.15 traz a malha adotada

apresentando o esquema de coordenada de contorno aberto e também 10 pontos internos ao longo da altura da seção onde serão avaliados os campos de tensões.

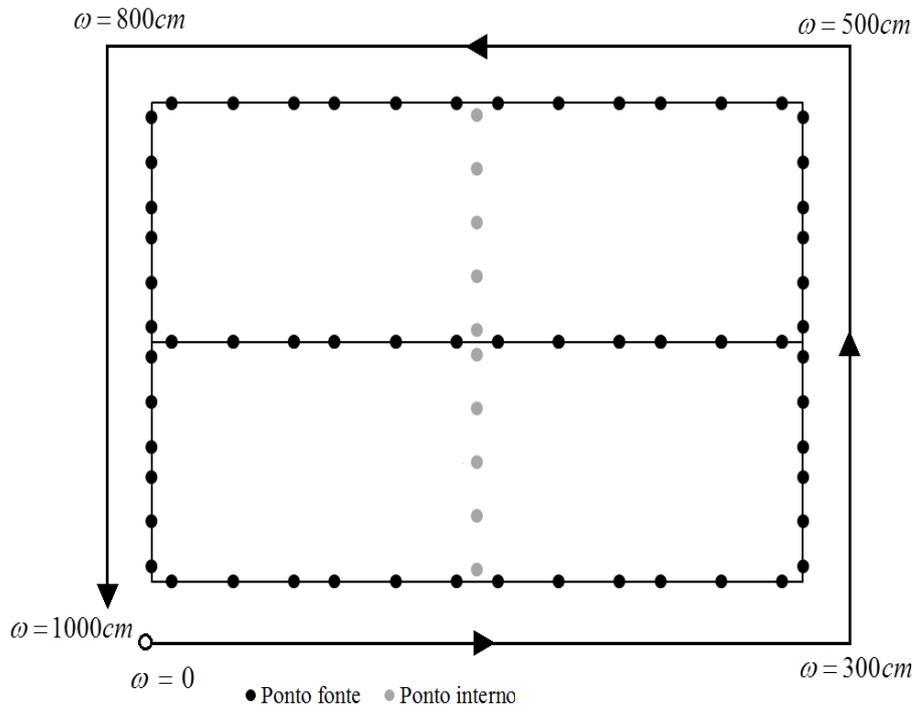


Figura 7.15 Malha de elementos de contorno e coordenadas de contorno aberto

O problema foi modelado em elementos finitos utilizando o Ansys para ser possível uma comparação de resultados. A discretização do Ansys, apresentada na Figura 7.16, adota 19521 nós e 6400 elementos do tipo “PLANE 183” triangulares de aproximação quadrática. Mais uma vez a discretização foi planejada de tal forma que as coordenadas de alguns dos nós do contorno coincidiram com os pontos fontes da malha do MEC.

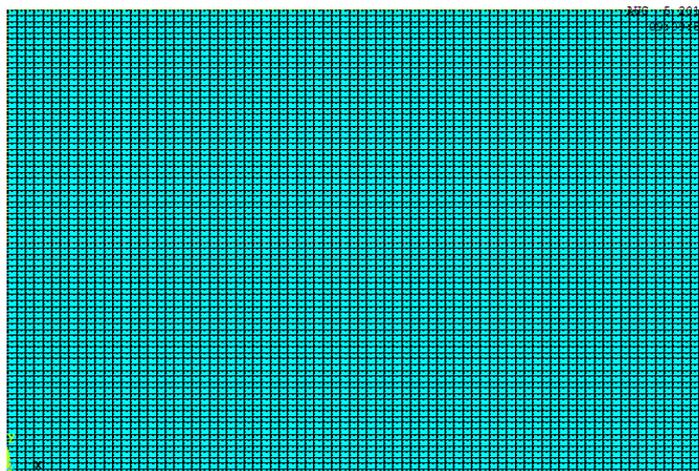


Figura 7.16 Discretização em elementos finitos triangulares de aproximação quadrática

As soluções de deslocamento no contorno e tensões ao longo da altura y e nos pontos internos são apresentadas nas Figuras 7.17, 7.18 e 7.19. As respostas obtidas com o Ansys e com as formulações do MEC foram então comparadas para a validação dos resultados.

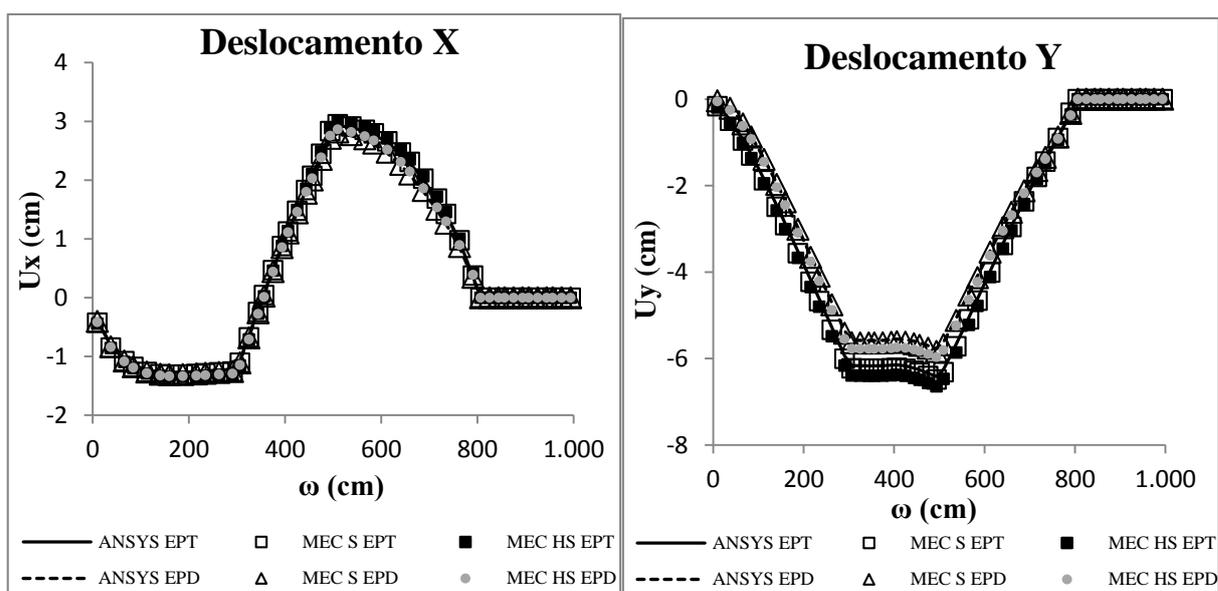


Figura 7.17 Resposta de deslocamentos no contorno: MEC versus Ansys

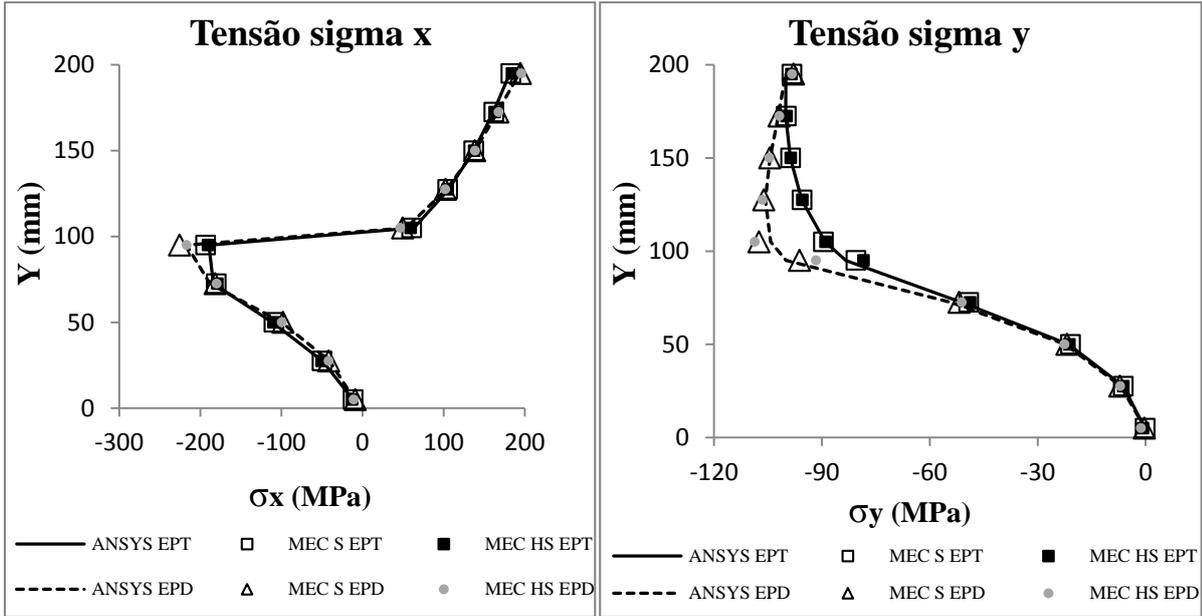


Figura 7.18 Resposta de tensões normais independentes: MEC versus Ansys

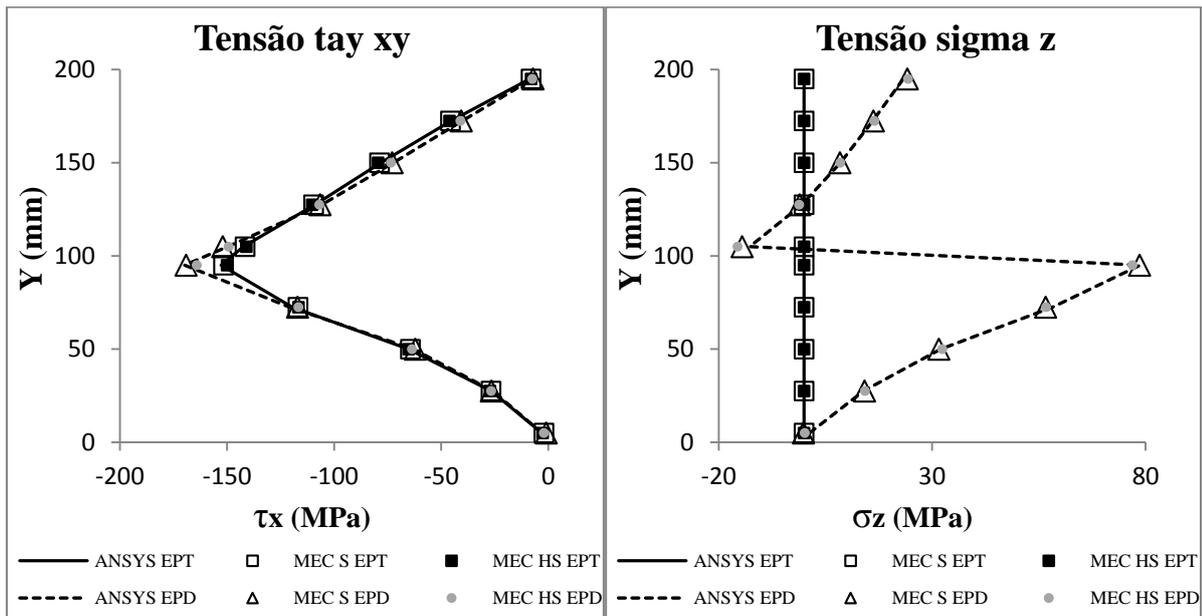


Figura 7.19 Resposta de tensão cisalhante e tensão σ_z : MEC versus Ansys

Com os gráficos, percebe-se a precisão do MEC e da técnica de multi-regiões para tratar problemas elásticos compostos. Mesmo com uma malha de contorno pouco refinada, a descontinuidade das tensões ao longo da altura foi precisamente capturada, conforme apresentado nos resultados acima. Além disso, verifica-se que ambas as formulações MEC S e MEC HP foram capazes de reproduzir os campos obtidos via Ansys para os deslocamentos do contorno e as tensões nos pontos internos em ambos os estados planos EPT e EPD. Na

Figura 7.20 as configurações indeformada, deformada em EPT e deformada em EPD da viga composta são apresentadas considerando os deslocamentos 10 vezes ampliados.

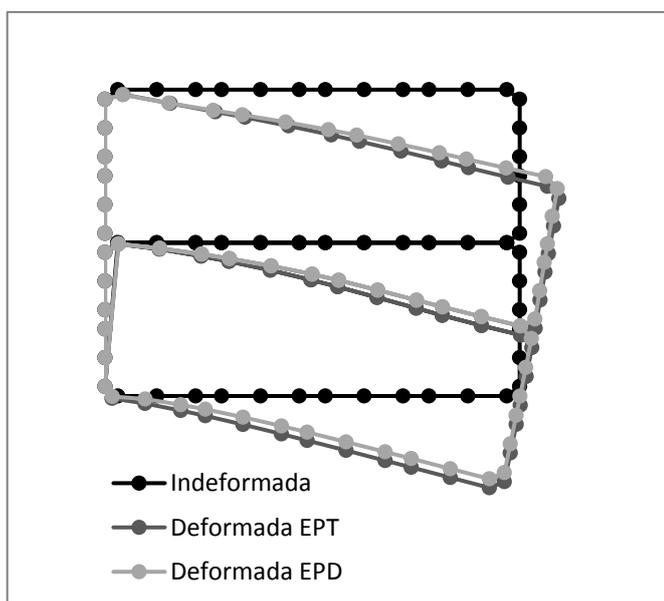


Figura 7.20 Configuração indeformada e malha 10 vezes deformada: EPT e EPD

7.4 CHAPA ANISOTRÓPICA COM INCLUSÕES RÍGIDAS

Na quarta aplicação a precisão do MEC é avaliada quanto à obtenção de campos de tensão com elevados gradientes oriundos de bruscas mudanças de rigidez material. Para isso, uma chapa contendo nove inclusões rígidas isotrópicas foi avaliada. A chapa é constituída pelo mesmo material anisotrópico adotado na segunda aplicação desse capítulo. As inclusões consideradas possuem geometrias circulares de raio igual a 2 cm e estão localizadas no eixo da estrutura espaçadas de 8 em 8 cm. As constantes materiais adotadas para as inclusões foram $E = 300GPa$ e $\nu = 0,2$. Portanto, tais inclusões são quase três vezes mais rígidas do que a maior rigidez da chapa que se dá na direção x , $E_x = 124,04GPa$. A estrutura composta encontra-se engastada em uma extremidade e tracionada na outra conforme apresenta a Figura 7.21 a qual também traz mais dados geométricos do problema.

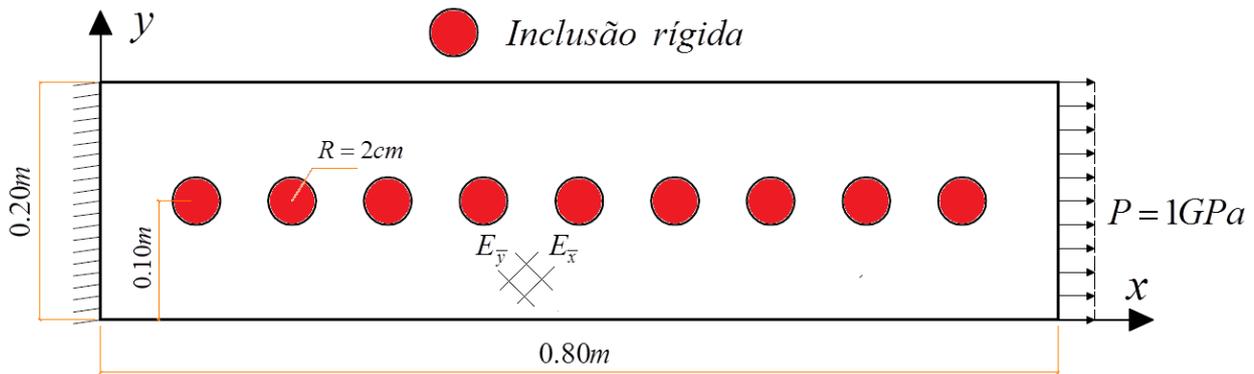


Figura 7.21 Chapa anisotrópica com inclusões rígidas.

Na discretização do contorno da chapa adotou-se 28 elementos de aproximação quadrática. Já no caso das inclusões, cada uma foi discretizada com 8 elementos de contorno curvos também de aproximação quadrática. Para a inserção das inclusões foi necessário ainda discretizar o contorno de furos na chapa. Assim os deslocamentos do contorno desses furos podem ser compatibilizados com os do contorno das inclusões por meio da técnica de multi-regiões. Cada furo também foi discretizado com 8 elementos de contorno quadráticos iguais aos do contorno da inclusão correspondente, porém com orientação contrária, ou seja, no sentido horário. Com a orientação contrária, o vetor normal ao contorno dos furos aponta para o centro dos mesmos, indicando que naquela região não existiria material caso não houvesse a inclusão.

Vale destacar que a formulação do MEC capita naturalmente furos ao adotar-se orientação contrária para os elementos uma vez que, com isso, as contribuições dos furos são de sinais contrários aos de inclusões. Portanto, a rigidez dos domínios de furos é subtraída das matrizes H e G do sistema algébrico.

Considerando os elementos adotados no contorno da chapa, nos nove furos e nas nove correspondentes inclusões, a malha totaliza 172 elementos e 516 nós. Já na discretização do domínio por elementos finitos, via Ansys, foi adotada uma malha com 8673 nós e 4236 elementos do tipo “PLANE 183” triangulares de aproximação quadrática. Tal refinamento foi necessário uma vez que, utilizando uma malha com aproximadamente metade da quantidade de nós, o resultado das tensões não foi tão próximo do resultado do MEC quanto o esperado. Portanto, fica evidente a vantagem em termos de custo computacional do MEC em relação ao MEF para problemas elásticos contendo inclusões, geometrias complexas ou ainda trincas. A Figura 7.22 apresenta as malhas de domínio e de contorno e também 19 pontos no eixo do problema onde os campos de tensões serão avaliados.

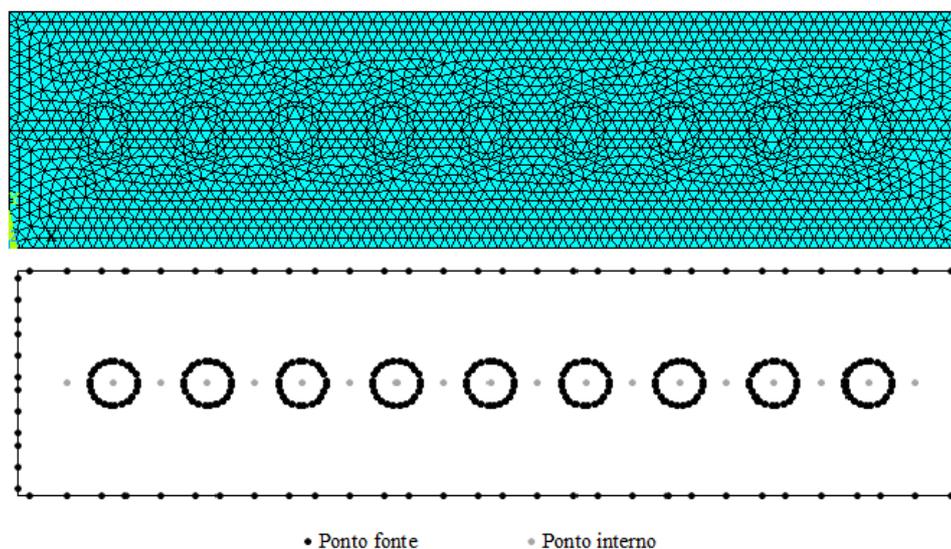


Figura 7.22 Comparação entre as discretizações de contorno e de domínio

As análises foram procedidas considerando novamente os dois estados planos EPT e EPD e as duas formulações MEC S e MEC HP. As soluções de tensões, ao longo dos 19 pontos internos do eixo da peça, obtidas com as formulações desenvolvidas são apresentadas nas Figuras 7.23 e 7.24 onde as mesmas são comparadas com a resposta numérica do Ansys. Observando os resultados verifica-se que mesmo com as consideráveis oscilações de tensão ao longo do eixo da chapa, novamente a resposta do MEC foi tão precisa quando a do Ansys, porém com muito menos graus de liberdade a serem analisados. Sendo assim, em problemas onde a precisão dos campos de tensão é necessária para regiões específicas de uma estrutura, como é o caso das regiões próximas de trinca, o MEC pode ser uma alternativa muito valiosa.

Apesar da propagação de fissura no presente trabalho ser procedida ao longo de interfaces pré-estabelecidas, vale destacar que a precisão do MEC para capturar a resposta de tensões é de extrema valia em análises onde o caminho de fissuração não é conhecido. Isso porque, com a precisão do campo de tensões é possível determinar boas aproximações para os Fatores de Intensidade de Tensão, por meio dos quais muitos critérios de propagação são formulados.

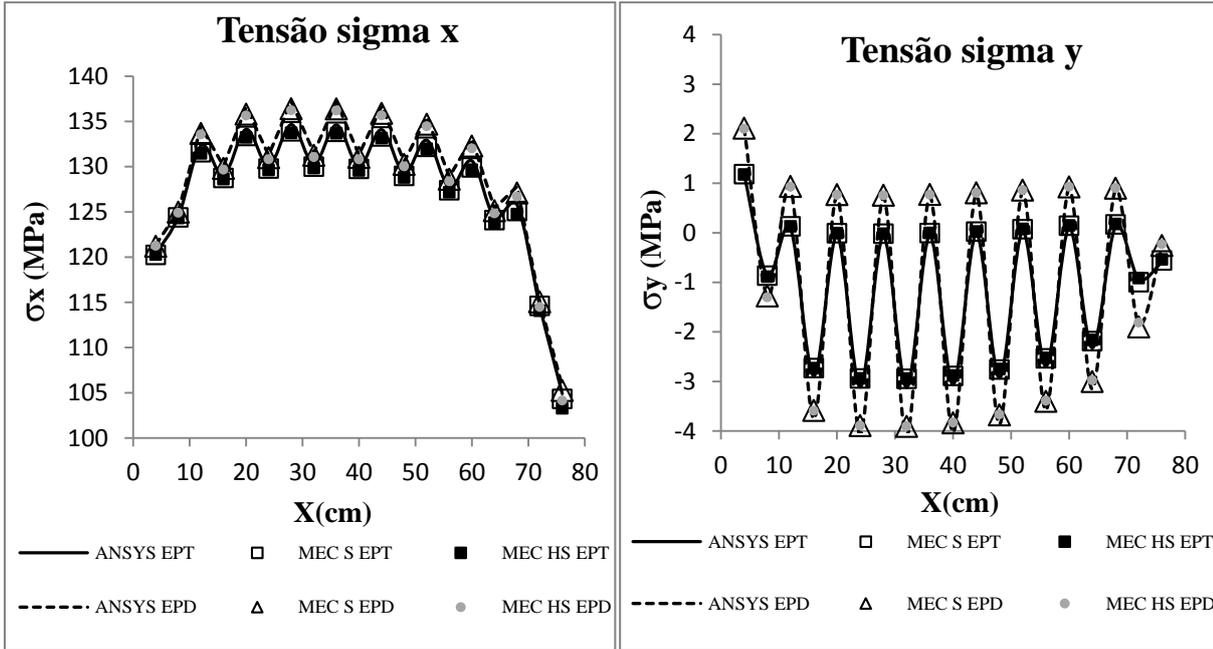


Figura 7.23 Resposta de tensões normais independentes: MEC versus Ansys

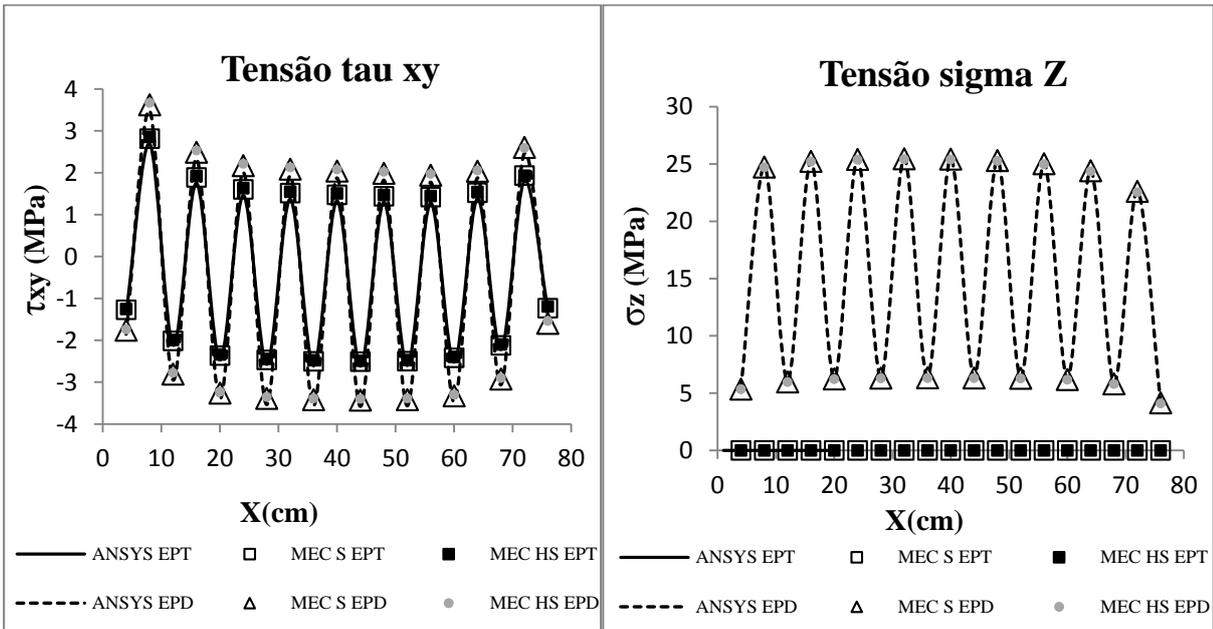


Figura 7.24 Resposta de tensão cisalhante e tensão σ_z : MEC versus Ansys

Além dos valores das tensões no eixo da chapa, os campos dessas grandezas ao longo de todo o domínio também foram avaliados via MEC. Para isso, determinaram-se as tensões em 1804 pontos internos distribuídos na chapa. Visando comparar a resposta dos campos de tensão obtidos com MEC e com Ansys, foram montados gráficos em escala de cores para a resposta de tensões do MEC com o auxílio do software AcadView. Para montar a escala de cores foi necessário conectar os pontos internos formando 1701 elementos de domínio

quadrilaterais de aproximação linear, utilizados pelo AcadView para interpolar os 1804 valores de tensões σ_x , σ_y , σ_z e τ_{xy} . Vale mencionar que, ao contrário do MEF, com o MEC a precisão da resposta das grandezas internas depende apenas do refinamento da malha de contorno não importando a quantidade de pontos internos da análise. A comparação entre os campos das tensões obtidos com ambos os métodos numéricos é apresentada a seguir nas Figuras 7.25, 7.26 e 7.27.

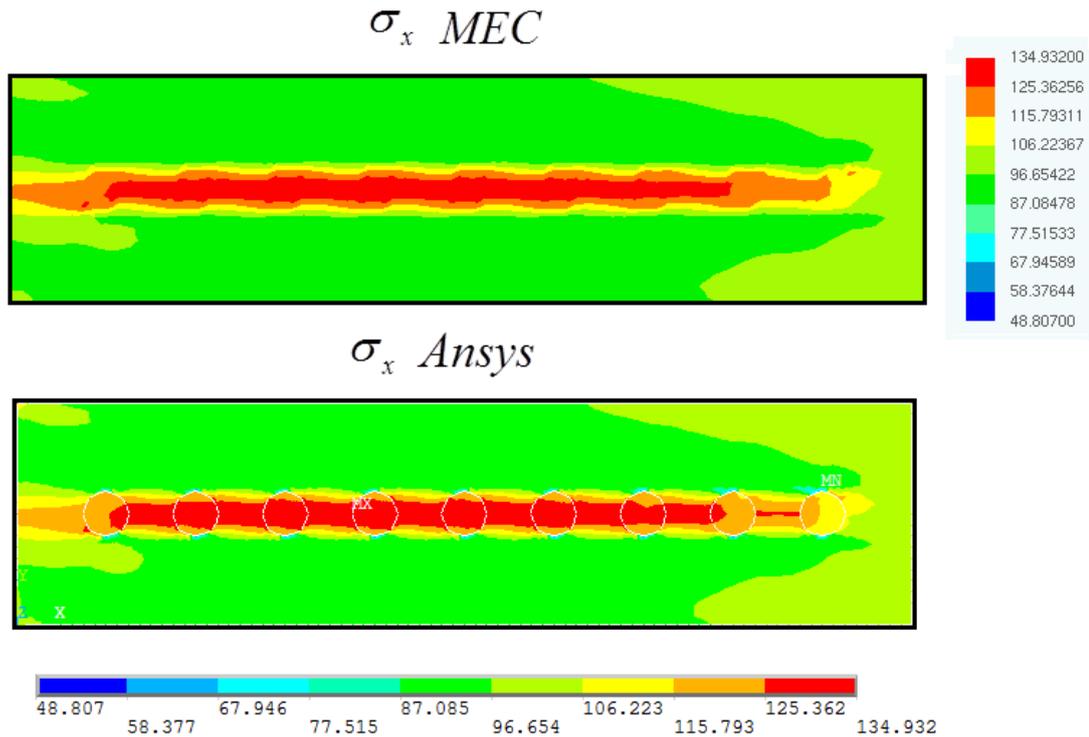


Figura 7.25 Campo de tensão σ_x : MEC versus Ansys

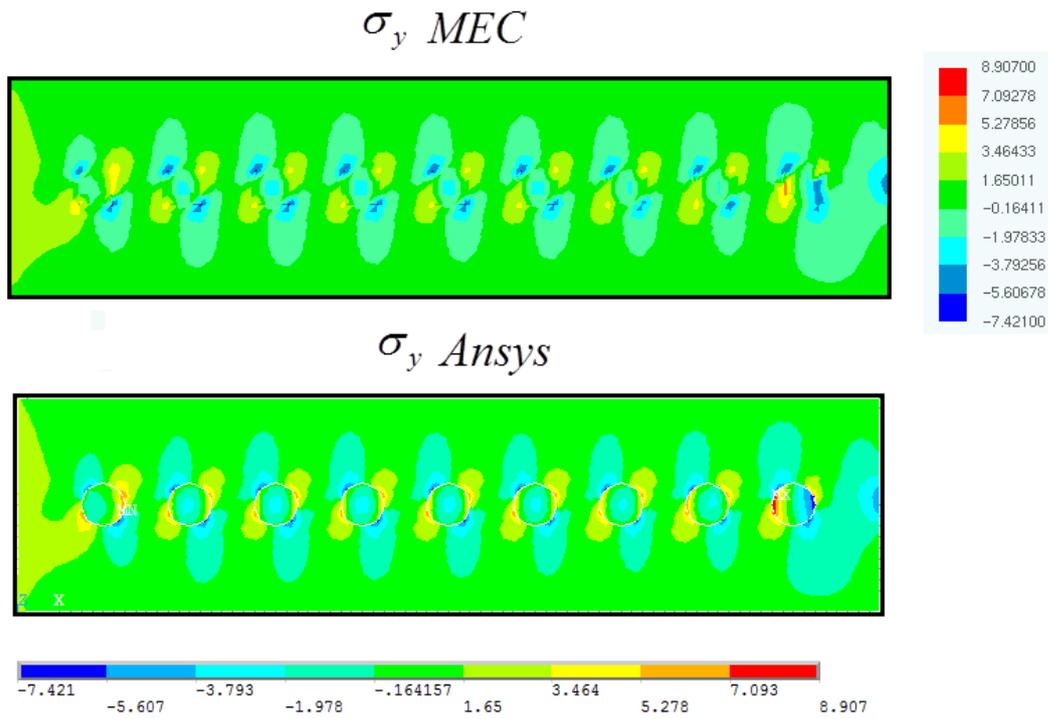


Figura 7.26 Campo de tensão σ_y : MEC versus Ansys

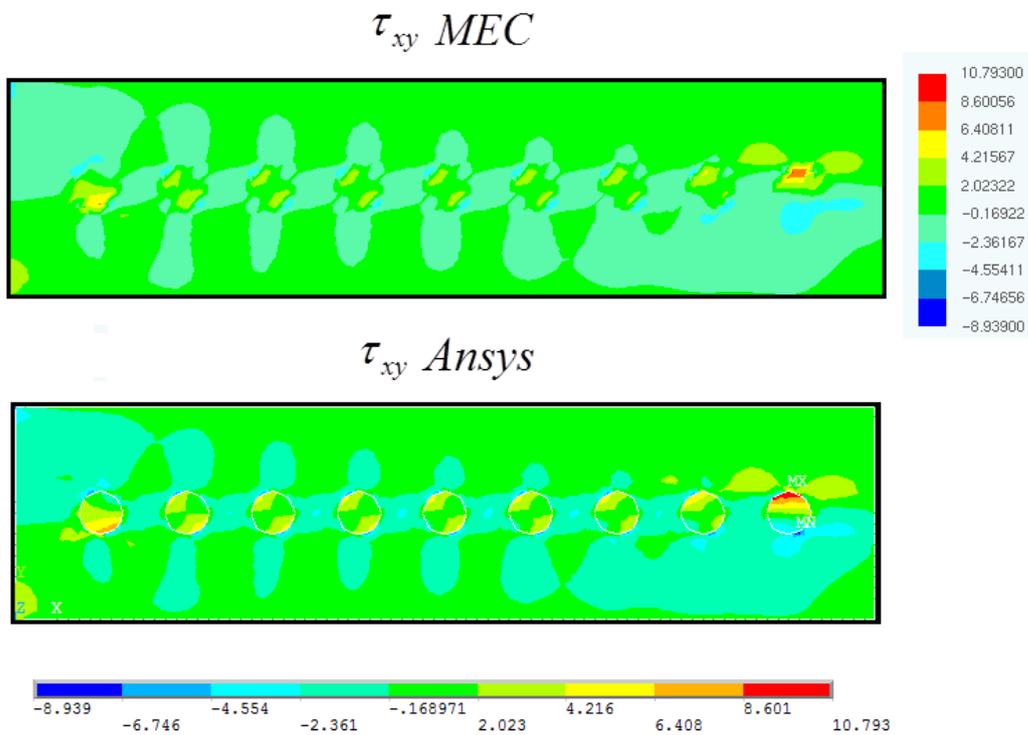


Figura 7.27 Campo de tensão τ_{xy} : MEC versus Ansys

A semelhança dos campos de tensão do MEC e do Ansys é mostrada pela comparação das figuras 5.25, 5.26 e 5.27. As pequenas diferenças provavelmente se devem ao fato da resposta do Ansys ter sido interpolada em 8673 nós enquanto que a do MEC foi interpolada

em apenas 1804 pontos internos. Por fim, as configurações indeformada, deformada em EPT e deformada em EPD do contorno da chapa são apresentadas na Figura 7.29 considerando os deslocamentos ampliados em escala 10 vezes maior.

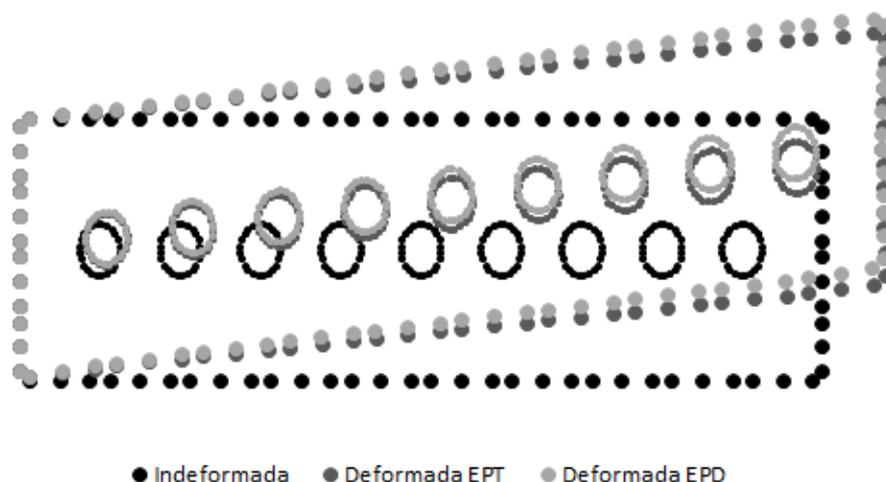


Figura 7.25 Configuração indeformada e malha 10 vezes deformada: EPT e EPD

7.5 OBTENÇÃO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM MODO I

No último exemplo desse capítulo, a resposta do MEC para problemas com elevado gradiente de tensão é avaliada pela determinação do fator de intensidade de tensão em uma chapa ortotrópica tracionada com uma trinca interna central. Para domínios anisotrópicos, SNYDER & CRUSE (1975) foram os primeiros a abordarem a determinação de fatores de intensidade de tensão. Os autores utilizaram uma solução fundamental também baseada na solução de Cruse & Swedlow, porém já considerando a influência de uma fissura com faces livres de tensões em um domínio infinito anisotrópico. VANALLI (2004) por sua vez também analisou uma das chapas estudadas por SNYDER & CRUSE (1975) através da mesma solução fundamental anisotrópica implementada no presente trabalho. Nessa aplicação, a chapa foi analisada em EPT visando a determinação do fator de intensidade de tensão K_I para modo I de fratura. A chapa é constituída por um material laminado, reforçado com fibras de grafite epóxi distribuídas em uma orientação de 90 graus. Para essa distribuição, as constantes elásticas são apresentadas por SNYDER & CRUSE (1975) como sendo $E_x = 11,95GPa$, $E_y = 147,57GPa$, $G_{xy} = 9,84GPa$, $\nu_{xy} = 0,21$. A Figura 7.29 ilustra o problema.

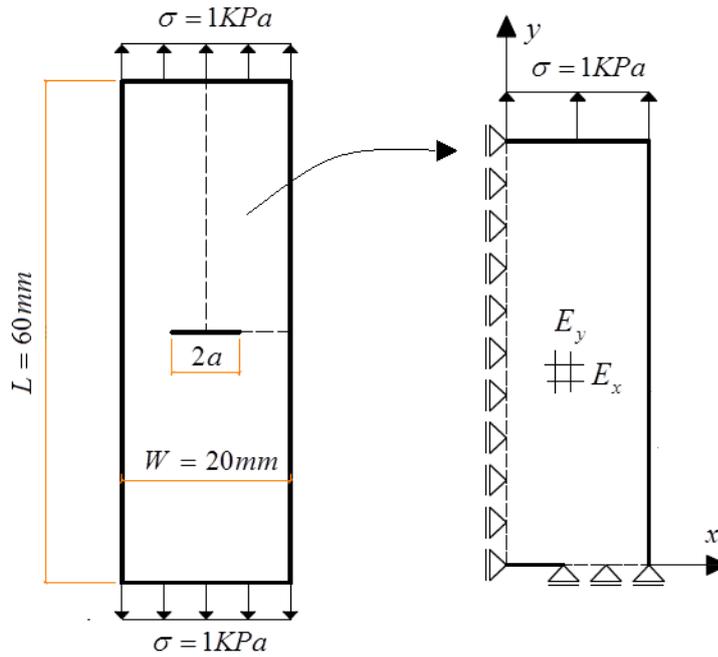


Figura 7.29 Chapa ortotrópica com trinca central

Devido à simetria geométrica, apenas 1/4 da chapa foi discretizado. Para isso, as condições de contorno foram impostas conforme apresentado em 7.29. A estratégia empregada nesse exemplo para a extração de K_I é simples e foi a mesma adotada por VANALLI (2004), o qual se baseou nos trabalhos de MACIEL (2003) e PARIS & CANÃS (1997). O esquema consiste em obter as tensões em três pontos afastados a certas distâncias da ponta da trinca. Para o caso anisotrópico, os pontos adotados foram $r = a/30, a/40$ e $a/50$ conforme ilustrado na Figura 7.30.

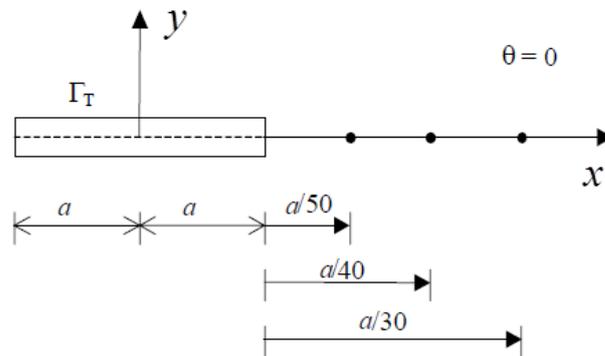


Figura 7.30 Pontos de extração para a análise anisotrópica (VANALLI, 2004)

Com a tensão σ_y nesses pontos, extrai-se um valor de K_I em cada ponto através da Equação 5.14 para o caso $\theta = 0$, ou seja, $K_I = \sigma_y \sqrt{2\pi r}$. O valor final do fator de intensidade

de tensão modo I é calculado como a média aritmética dos valores obtidos nos pontos de extração. Como a discretização do problema foi procedida considerando apenas 1/4 da chapa, esses pontos acabaram caindo no contorno do problema. No caso específico desse exemplo, para os pontos de contorno a frente da fissura, tem-se que $\sigma_y = -p_y$. Porém, vale mencionar que o estado de tensão completo nos pontos do contorno pode ser obtido a partir das forças e deslocamentos dos elementos de contorno. Para isso, deve-se ainda recorrer à derivada do campo de deslocamento ao longo dos elementos, à relação deslocamento deformação e à lei constitutiva (MESQUITA, 2002). Assim como nos trabalhos dos outros autores, três comprimentos de fissura foram avaliados, $a = 4mm$, $6mm$ e $8mm$. As malhas adotadas para cada um dos casos foram compostas de 54, 59 e 63 elementos de aproximação quadrática. Na face da fissura foram empregados elementos de $0,5mm$. Já nas proximidades da ponta, tomou-se o cuidado de fazer coincidir os pontos de extração de K_I com os pontos intermediários dos elementos quadráticos descontínuos. Na Figura 7.31 são apresentadas as configurações deformada e indeformada das malhas com deslocamentos ampliados em 10^4 .

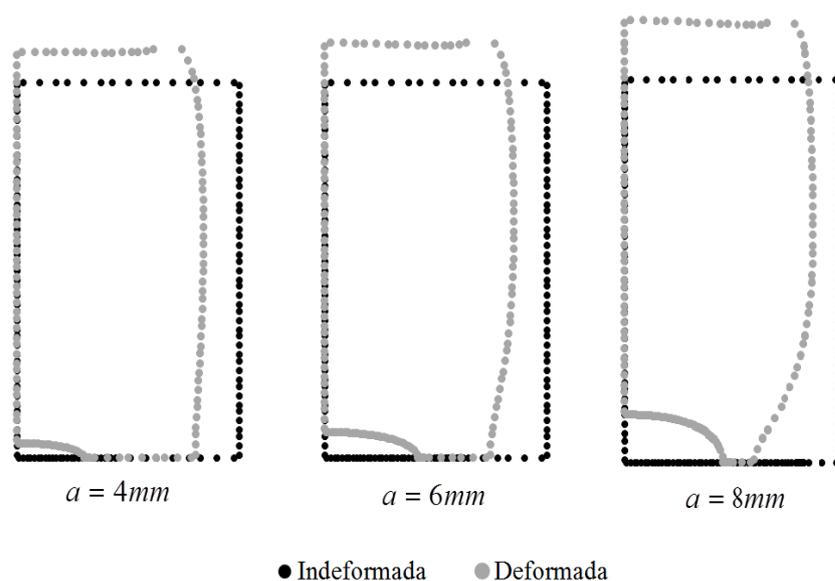


Figura 7.31 Configurações indeformada e deformada das malhas

Em Mecânica da Fratura Elástica Linear, o Fator de Intensidade K_I para uma fissura solicitada em modo I pode ser obtido como:

$$K_I = Y\sigma_y\sqrt{a} \quad (7.1)$$

Sendo Y um fator de correção o qual, segundo SNYDER & CRUSE (1975), para o caso de chapas isotrópicas pode ser calculado com como:

$$Y = \sqrt{\pi} + 0,227(2a/W) - 0,51(2a/W)^2 + 0,27(2a/W)^3 \quad (7.2)$$

É interessante mencionar que para o caso de chapas infinitas, onde $2a/W \rightarrow 0$, o valor de Y independe da anisotropia do material e tende a ser igual a $\sqrt{\pi}$. Portanto nesse caso, a partir de 7.1, verifica-se que $K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a}$ conforme prevê a teoria clássica da MFEL apresentada no Capítulo 5. Os resultados de K_I obtidos com as análises são apresentados na Tabela 7.1 para os casos $2a/W = 0,4$, $2a/W = 0,6$ e $2a/W = 0,8$. Nessa tabela, também é apresentada uma comparação entre os fatores de correção, $Y = K_I/\sigma_y \sqrt{a}$, obtidos com a presente formulação e os encontrados nos trabalhos da literatura.

Tabela 7.1 Comparação entre resultados de Fator de Intensidade de Tensão K_I

$2a/w$	K_I (MEC S)	Y (MEC S)	Y (Vanalli [2004])	Y (Snyder & Cruse [1975])	Erro (%)
0,4	3,892	1,946	1,911	1,971	1,83
0,6	5,681	2,319	2,244	2,288	3,34
0,8	9,141	3,232	3,076	3,111	5,07

A Figura 7.32 traz um gráfico para comparar os resultados da tabela 7.1 com a curva analítica 7.2.

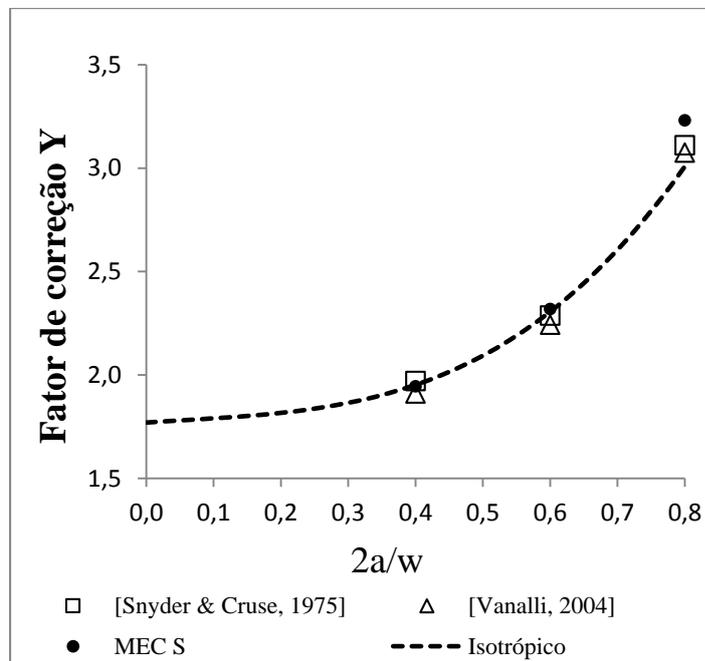


Figura 7.32 Comparação do fator de correção Y

Com os resultados conclui-se que mesmo sem a utilização de elementos de contorno especiais para a análise de fissuras, ou procedimentos de integração como a integral J , a técnica adotada produziu boas aproximações para os valores de K_I .

8 TESTES DE FRATURA COESIVA

Nesse capítulo oito aplicações de fratura coesiva são apresentadas sendo nas sete primeiras, os problemas foram tratados como planos de tensão e na última como plano em deformações. Nos dois primeiros exemplos, as leis coesivas aplicáveis ao concreto são adotadas para tratar a fratura de chapas teóricas tracionadas onde a solução analítica é conhecida. No primeiro, a chapa é considerada homogênea, já no segundo, a chapa é composta por dois materiais isotrópicos com distintas propriedades mecânicas.

A terceira aplicação trata de uma viga de concreto com um entalhe inicial sob flexão em três pontos (modo I de fratura) onde resultados experimentais e numéricos são fornecidos na literatura. O quarto e quinto exemplo são vigas de concreto submetidas a ensaios de cisalhamento (modo misto de fratura) contendo um e dois entalhes, respectivamente. Para tais vigas, resultados experimentais e numéricos também são fornecidos na literatura.

Os dois exemplos seguintes são referentes à fratura em modo I de peças de madeira cujo comportamento de amolecimento foi representado por leis coesivas bilineares propostas em trabalhos experimentais da literatura. A ortotropia do material foi abordada considerando propriedades elásticas para as espécies de madeira em questão, as quais estão disponíveis em trabalhos anteriores. A partir das análises, novamente as soluções numéricas puderam ser confrontadas com as respostas experimentais da literatura no intuito de validar a formulação de fratura. Nos ensaios experimentais encontrados na literatura, os deslocamentos prescritos na estrutura foram controlados em função de aberturas $CMOD$ dos entalhes iniciais das peças, por intermédio de clip gages instalados nessas regiões. O último exemplo trata-se de um problema teórico, proposto no presente trabalho para ilustrar a aplicabilidade da formulação para tratar do descolamento de peças estruturais. No mesmo é apresentado o descolamento de placas constituídas por distintos materiais unidas por um adesivo coesivo. Por fim, vale destacar que em todos os exemplos do capítulo foram adotados apenas elementos de contorno descontínuos. Além disso, efeitos de não linearidade geométrica foram desprezados nas análises.

8.1 CHAPA HOMOGÊNEA TRACIONADA

No primeiro exemplo, considere uma chapa isotrópica homogênea de espessura unitária em EPT dividida em duas regiões por uma interface coesiva. Em uma de suas faces a chapa encontra-se engastada enquanto que na face oposta uma tração é aplicada em forma de deslocamento prescrito na direção x . A resistência à tração da interface f_t e a energia necessária à fratura G_f são apresentadas na Figura 8.1 junto com as propriedades elásticas e dados geométricos da chapa.

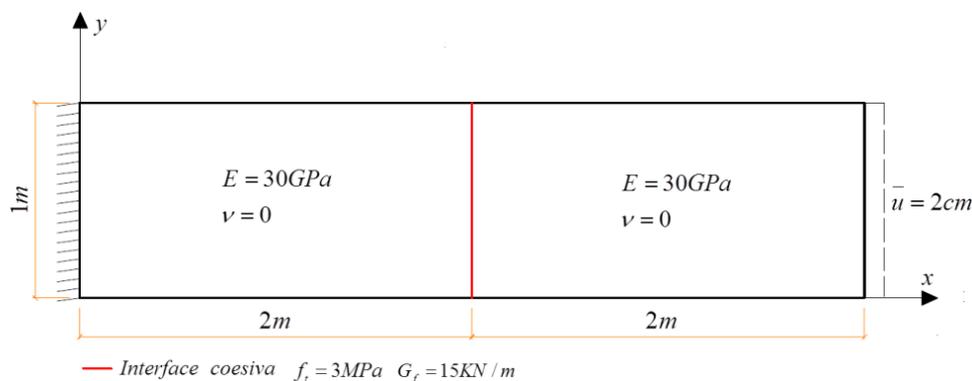


Figura 8.1 Chapa homogênea tracionada

A análise coesiva foi procedida uma tolerância de $10^{-4}MPa$ e um número de passos incrementais igual a 25. O domínio do problema foi composto de duas maneiras: por duas e por quatro sub-regiões sendo cada uma dessas discretizada por quatro elementos de contorno lineares conforme apresentado na Figura 8.2.

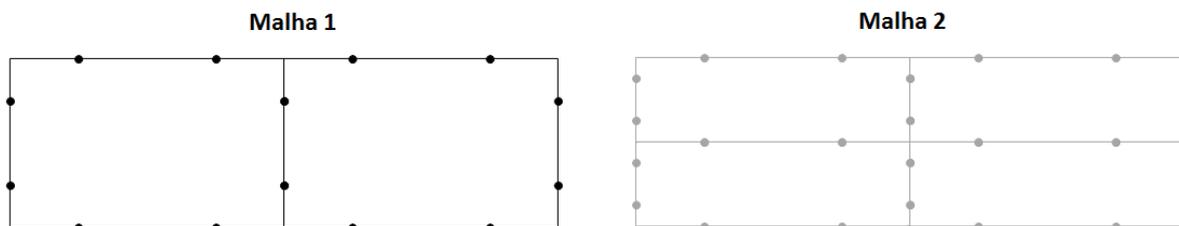


Figura 8.2 Composição e discretização do domínio da chapa

As leis coesivas linear, bilinear e exponencial, apresentadas no Capítulo 5 para peças de concreto, foram consideradas para representar a degradação das interfaces. O sistema não linear de equações foi resolvido considerando os algoritmos Operador Constante (OC) e Operador Tangente (OT). O esperado ganho de eficiência com a adoção do OT foi mensurado através número de iterações procedidas durante a análise. Tal comparação é apresentada na

Tabela 8.1 a seguir. Além disso, as duas formulações MEC S e MEC HP foram testadas sendo que com ambas o resultado foi praticamente o mesmo. Dada a simetria do problema, a degradação mecânica é homogênea ao longo de toda a interface vertical. Já a interface horizontal, no caso da composição com quatro sub-regiões, não é degradada pela solicitação uma vez que essa não está sendo tracionada. Assim, o gráfico ilustrado na Figura 8.3 apresenta a resposta de tensões na interface vertical em função da abertura normal relativa de suas faces (COD) considerando as três leis coesivas. Além dos resultados numéricos, as curvas analíticas das leis também foram plotadas.

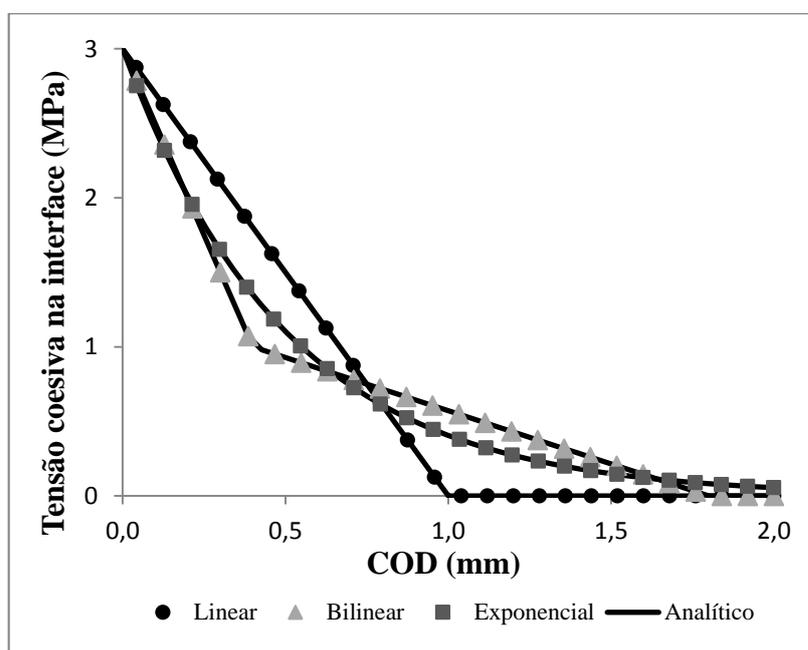


Figura 8.3 Resposta de tensões coesivas na interface vertical

A partir dos resultados verifica-se que ambos os algoritmos OC e OT e ambas as formulações do MEC foram capazes de reproduzir o comportamento coesivo das tensões na interface vertical.

Tabela 8.1 Comparação de iterações: Exemplo 1

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Linear	62	26	~58%
Bilinear	79	27	~66%
Exponencial	79	57	~28%

Com a Tabela 8.1 é possível afirmar que, em relação ao número de iterações durante a análise, o OT demonstrou ser consideravelmente mais eficiente que o OC, principalmente quando a lei coesiva adotada é composta por trechos lineares. Isso porque nesses casos, a tangente da curva coesiva, com exceção dos pontos de inflexão, é constante permitindo que o algoritmo tangente determine a resposta do passo incremental com apenas uma iteração.

8.2 CHAPA NÃO HOMOGÊNEA TRACIONADA

O segundo exemplo desse capítulo trata de uma chapa composta por dois distintos materiais isotrópicos divididos por uma interface coesiva. A chapa foi tratada em EPT considerando uma espessura novamente unitária. A geometria do problema e as condições de contorno são as mesmas do exemplo anterior. No entanto, o material da região com extremidade engastada foi adotado como sendo 30 vezes mais rígido que o material da outra região. A Figura 8.4 apresenta a geometria do problema junto com as propriedades materiais e os parâmetros coesivos da interface.

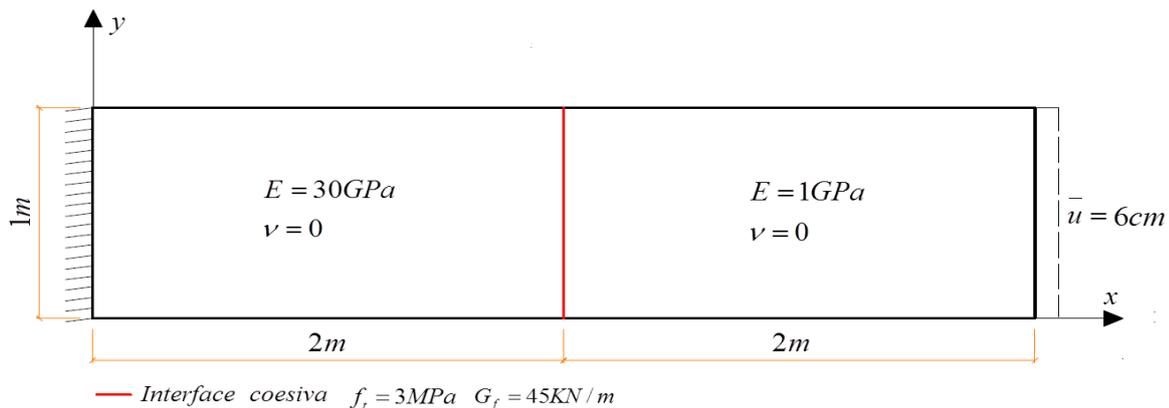


Figura 8.4 Chapa não homogênea tracionada

Para o comportamento das tensões na interface, foram consideradas novamente as três leis coesivas aplicáveis ao concreto. A análise foi procedida com 15 incrementos sendo a tolerância adotada para o processo iterativo igual a $10^{-4}MPa$. Foi assumida a mesma discretização do exemplo anterior para o caso de duas sub-regiões. A Figura 8.5 apresenta a malha indeformada e a evolução da deformada em escala ampliada para os incrementos 2, 4 e 6 considerando a lei coesiva bilinear do concreto.

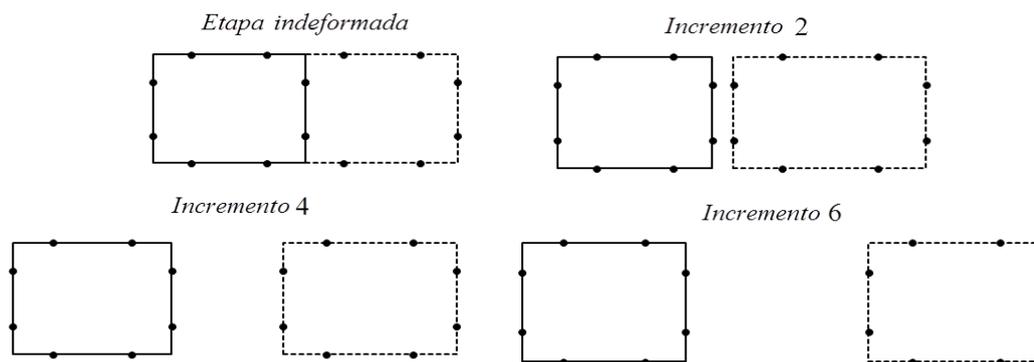


Figura 8.5 Evolução da deformação da estrutura em escala ampliada ao longo da análise incremental

Observando as deformações da estrutura é possível perceber a maior flexibilidade da região à direita. Porém, ao final da análise incremental, como a interface encontra-se muito degradada, ambas as regiões retornam à configuração inicial. Nesse caso, dada a completa separação do corpo, a região onde foi imposta a tração apresenta movimento de corpo rígido enquanto a região engastada retorna a posição inicial. Os resultados encontrados para a resposta das tensões coesivas na interface são apresentados na Figura 8.6 juntamente com as correspondentes curvas analíticas.

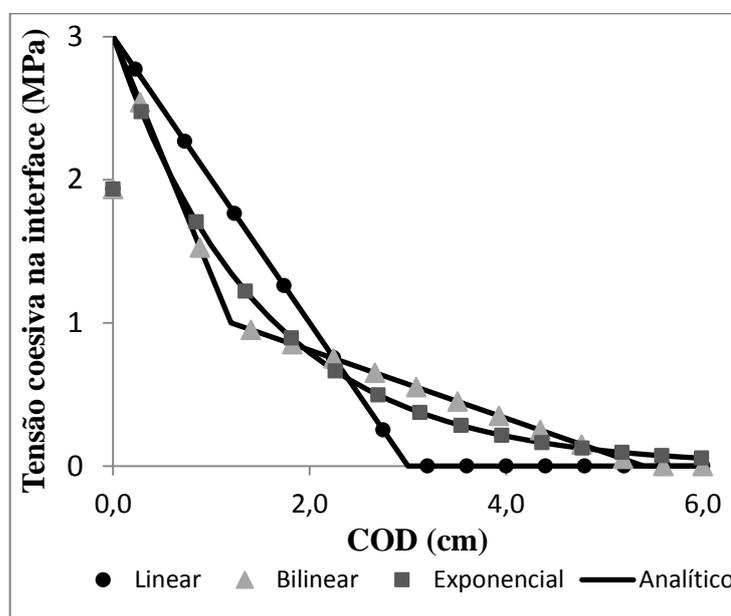


Figura 8.6 Resposta de tensões coesivas na interface

Vale notar que as diferentes rigidezes materiais podem alterar a tensão elástica na interface, no então, a partir do momento em que o limite elástico é atingido, o comportamento das tensões de interface passa a depender apenas dos parâmetros coesivos. Assim como no

exemplo 1, uma comparação de eficiência no número de iterações entre o OC e o OT é apresentada na Tabela 8.2 a baixo.

Tabela 8.2 Comparação de iterações: Exemplo 2

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Linear	51	16	~69%
Bilinear	63	17	~73%
Exponencial	64	45	~30%

Novamente significativos ganhos de eficiência no número de iterações são verificados com a adoção do OT em detrimento ao OC.

8.3 VIGA DE CONCRETO SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

O terceiro exemplo trata-se da fratura coesiva de uma viga de concreto com entalhe inicial, submetida a um ensaio de flexão em três pontos realizado experimentalmente por SALEH (1997). A mesma viga foi simulada numericamente por OLIVEIRA (2014) com uma formulação alternativa do MEC. Nesse exemplo, como a fratura ocorre em modo I, a fissura cresce verticalmente ao longo do ensaio. Dessa forma, para simular a propagação, foi adotada uma interface coesiva acima do entalhe inicial por onde a fissura poderá crescer. A Figura 8.7 ilustra o exemplo apresentando os dados geométricos, as propriedades mecânicas do material e os parâmetros coesivos da interface.

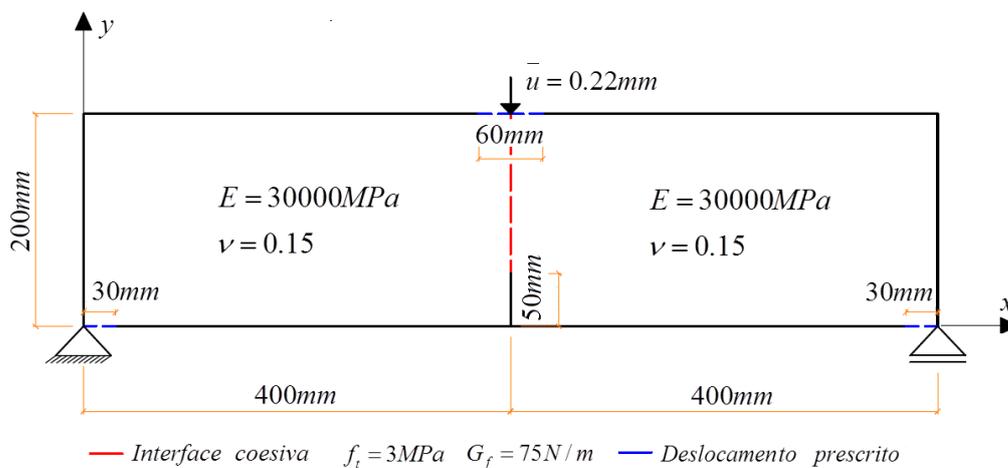


Figura 8.7 Viga de concreto sob flexão em três pontos

Para a análise do problema foram adotadas três diferentes discretizações do contorno. Essas discretizações foram denominadas de malhas 1, 2 e 3 em ordem crescente de refinamento. Assim, foi possível verificar a convergência da solução com a evolução do refinamento da discretização. Em todas as malhas, o lado esquerdo do entalhe foi modelado com um elemento cúbico de 3 cm e um quadrático de 2cm, já o lado direito foi modelado com dois elementos quadráticos de 2,5cm. Dessa maneira, os pontos fonte nos dois lados do entalhe não estão na mesma posição geométrica e, portanto, o código implementado não impõe nem a técnica de múltiplas regiões nem o modelo coesivo sobre os mesmos. Esses pontos são então considerados como pertencendo a contornos do problema com forças de superfície nulas.

Na malha menos refinada (Malha 1), cada lado da interface foi modelado com 15 elementos quadráticos de 1cm. O mesmo tipo de elemento foi adotado para as regiões próximas aos contornos com deslocamento prescrito. O restante do contorno foi modelado com elementos lineares de maiores comprimentos. No total, a malha é composta por 30 elementos quadráticos para representar a interface, 20 elementos quadráticos para regiões próximas a contornos com deslocamentos prescritos, 1 elemento cúbico mais 3 quadráticos para o entalhe e mais 16 elementos lineares para o contorno remanescente totalizando 195 nós para a malha.

Já na Malha 2, os lados da interface foram modelados com 15 elementos cúbicos de 1cm os quais também foram utilizados na discretização dos contornos de regiões com deslocamentos prescritos. Já o contorno remanescente foi modelado com elementos quadráticos. A malha é então composta por 30 elementos cúbicos para a interface, 24 elementos cúbicos nas regiões de deslocamento prescrito, os mesmos quatro elementos da malha anterior para discretizar o entalhe e 26 elementos quadráticos na discretização do contorno remanescente totalizando 307 nós.

Por fim a discretização adotada na Malha 3 é praticamente igual a da Malha 2 com exceção de que os lados da interface não foram mais modelados com 15 mais sim 40 elementos cúbicos. Dessa forma, a malha 3 é composta no total por 507 nós. A Figura 8.8 ilustra as três malhas na situação indeformada.

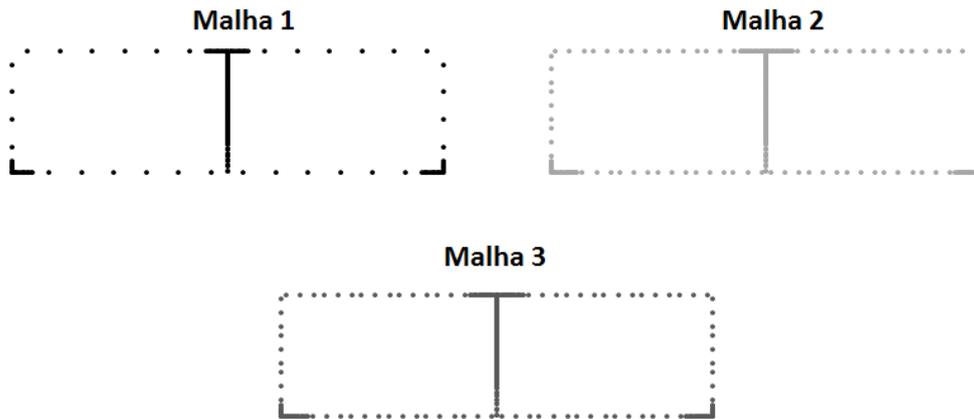


Figura 8.8 Malhas adotadas para a discretização da viga

O deslocamento foi imposto em 100 etapas incrementais e a tolerância para o processo iterativo foi de $10^{-6} MPa$. No exemplo foram consideradas novamente as três leis coesivas aplicáveis ao concreto e também os algoritmos não lineares OC e OT. Em relação às equações integrais do MEC, o problema foi analisado de duas distintas maneiras. A primeira decorre da adoção da equação singular para todos os pontos fonte do problema sendo, portanto, denominada de formulação MEC S. Já a segunda maneira adota a equação hiper singular para os pontos fonte da interface e singular para os pontos restantes. A essa última abordagem se dá o nome de formulação MEC S-H.

Foram então avaliados os resultados de força equivalente na face superior da viga versus deslocamento vertical na face inferior, sendo os mesmos comparados com os resultados numéricos e experimental dos trabalhos citados anteriormente. A força equivalente foi calculada para cada passo de carga por integração numérica das forças de superfície resultantes nos elementos da face superior da viga. Já para o deslocamento vertical, adotou-se a média entre os deslocamentos dos nós mais inferiores do entalhe em ambos os lados. O gráfico da resposta não linear da estrutura é apresentado na Figura 8.9 para uma espessura unitária de viga considerando cada uma das três leis coesivas.

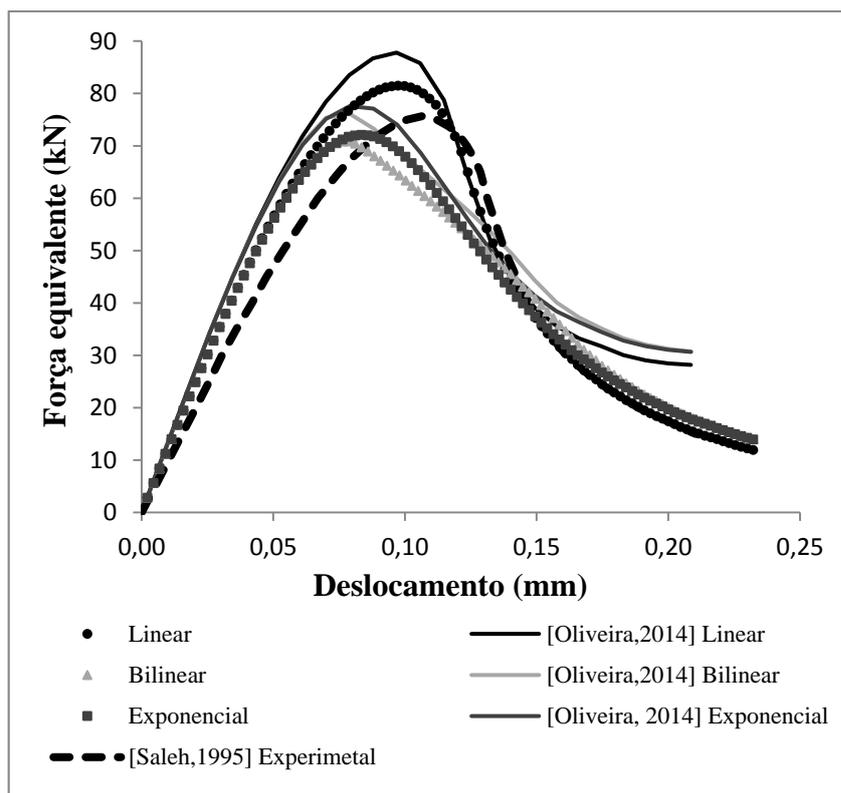


Figura 8.9 Resposta não linear da estrutura

A partir do gráfico foi possível perceber que a formulação coesiva de multi-regiões foi capaz de simular o comportamento não linear da estrutura. Assim como na formulação apresentada por Oliveira, os resultados numéricos apresentaram um valor de carga última próximo ao experimental. Vale também mencionar que no início das curvas, os modelos numéricos apresentaram comportamento mais rígido que o experimental.

A análise de convergência por refinamento de malha demonstrou que, a partir do refinamento da malha 2, a resposta não linear da estrutura praticamente não se altera reproduzindo assim as curvas apresentadas no gráfico 8.9. Em relação às formulações, tanto a MEC S quanto o MEC S-H foram capazes de reproduzir novamente as curvas observadas do gráfico de resposta não linear.

Além da resposta não linear, também é apresentada, na Figura 8.10, a forma deformada final da estrutura. As malhas deformadas são apresentadas considerando as coordenadas dos pontos fonte e os deslocamentos 100 vezes ampliados.

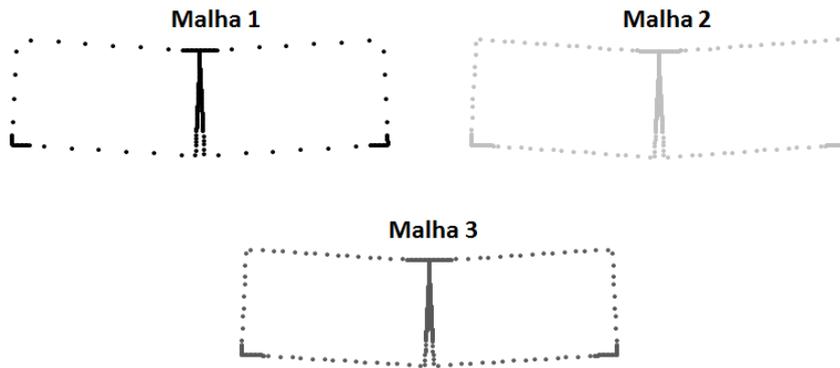


Figura 8.10 Configuração deformada com deslocamentos 100 vezes ampliados

Assim como os deslocamentos do contorno, deslocamentos internos também foram avaliados em 1722 pontos. Tal resultado foi apresentado na Figura 8.11 em escala de cores com o auxílio do software AcadView. Para criar tal escala foi necessário conectar os pontos internos formando 1620 elementos de domínio quadrilaterais de aproximação linear.

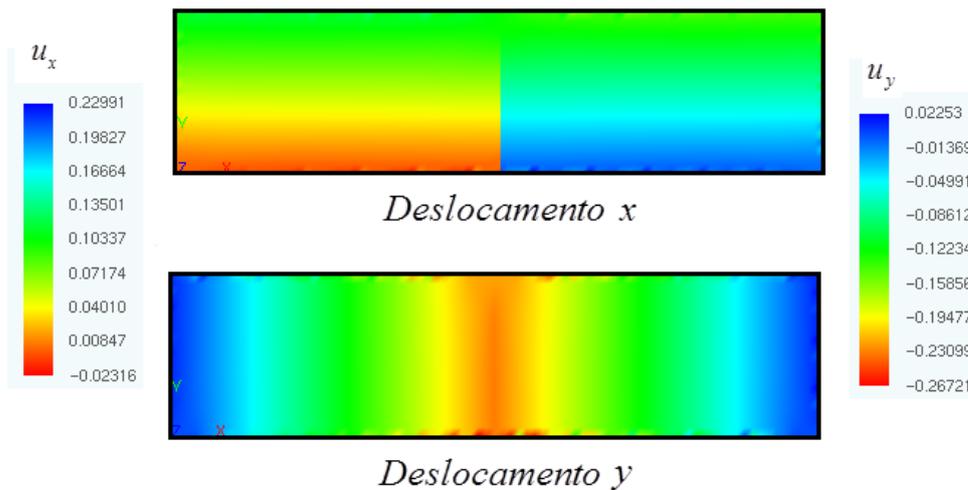


Figura 8.11 Campos de deslocamento dos pontos internos

É possível observar claramente em 8.11 a descontinuidade do campo de deslocamento x na região de fraturamento da peça. A resposta coesiva também foi avaliada para o primeiro ponto fonte pertencente à interface da Malha 2. Os resultados de tensão coesiva versus COD para o ponto são então apresentados na Figura 8.12.

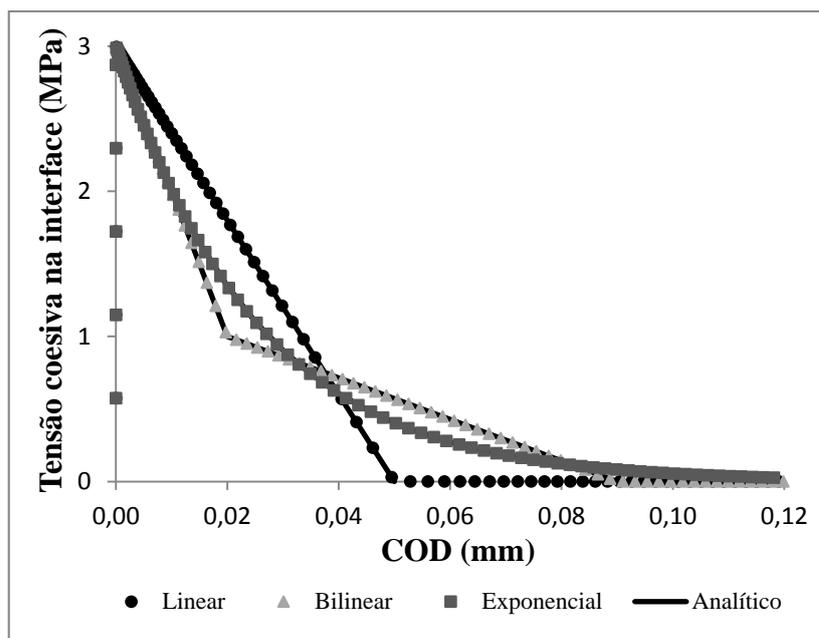


Figura 8.12 Resposta de tensões coesivas na interface

Foi também realizada uma comparação de eficiência entre o OC e o OT. Ambos os operadores não lineares foram capazes de reproduzir os mesmos resultados. No entanto, com o OT foram necessários menos iterações ao longo da análise em comparação com o OC. A Tabela 8.3 a seguir traz a comparação de eficiência desses operadores apresentando a economia relativa no número de iterações.

Tabela 8.3 Comparação de iterações: Exemplo 3

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Linear	2150	180	~92%
Bilinear	2157	199	~91%
Exponencial	2067	468	~77%

A partir da Tabela 8.3, novamente percebe-se o ganho de eficiência obtido com o OT em relação ao número de iterações. Porém, nesse exemplo, a economia no número de iterações foi consideravelmente mais significativa do que nos exemplos anteriores chegando até a 92% para o caso da lei coesiva linear. A menor economia relativa é novamente verificada para o caso de lei exponencial, porém mesmo nesse caso ainda alcançou um valor de 77%.

Outro parâmetro importante monitorado ao longo da análise foi o número de condição da matriz A para cada passo incremental convergido. O Número de Condição (NC) de uma matriz é definido como sendo o produto da norma da mesma pela norma de sua inversa, ou seja, $NC(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Tal parâmetro permite avaliar o quão estável é o sistema de equações a ser resolvido numericamente pelo computador. A Figura 8.13 apresenta gráficos do NC versus o deslocamento vertical da estrutura considerando os algoritmos OC e OT.

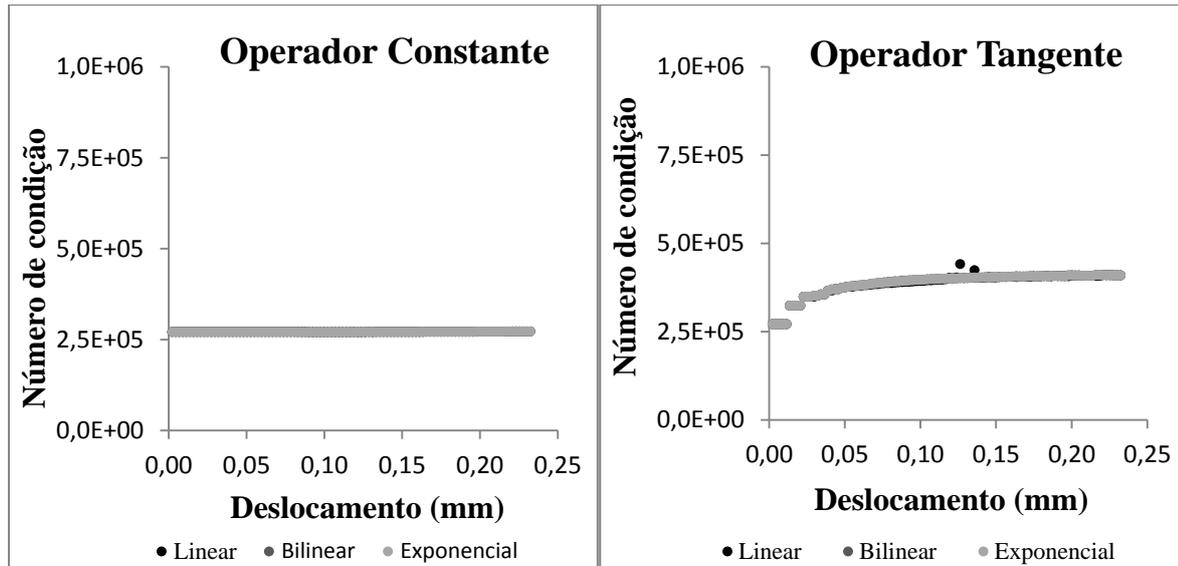


Figura 8.13 Avaliação do número de condição da matriz A ao longo da análise: Exemplo 2

Percebe-se que em ambos os casos OC e OT, não houve significativa alteração na ordem de grandeza do NC ao longo da análise. Portanto, pode-se dizer que a condição dos sistemas de equações se manteve aproximadamente constante ao longo da análise. No entanto, é possível perceber que com o OT, a inclusão das informações tangentes na matriz A fez com que houvesse uma maior sensibilidade nas variações no NC. Já no Caso do OC, como nenhuma informação das leis coesivas é incorporada diretamente no sistema de equações, os resultados para as três leis foram praticamente os mesmos.

Para entender melhor como os algorítmicos OC e OT buscam a solução não linear através de previsões iniciais e correções, a resposta não linear é mais uma vez apresentada, porém agora apenas para os resultados de 10 em 10 passos incrementais. Além disso, foram também monitorados os resultados de força versus deslocamento não apenas para os passos convergidos, mas sim para todas as iterações das análises. Esse resultado é apresentado a seguir na Figura 8.14 para ambos os operadores não lineares.

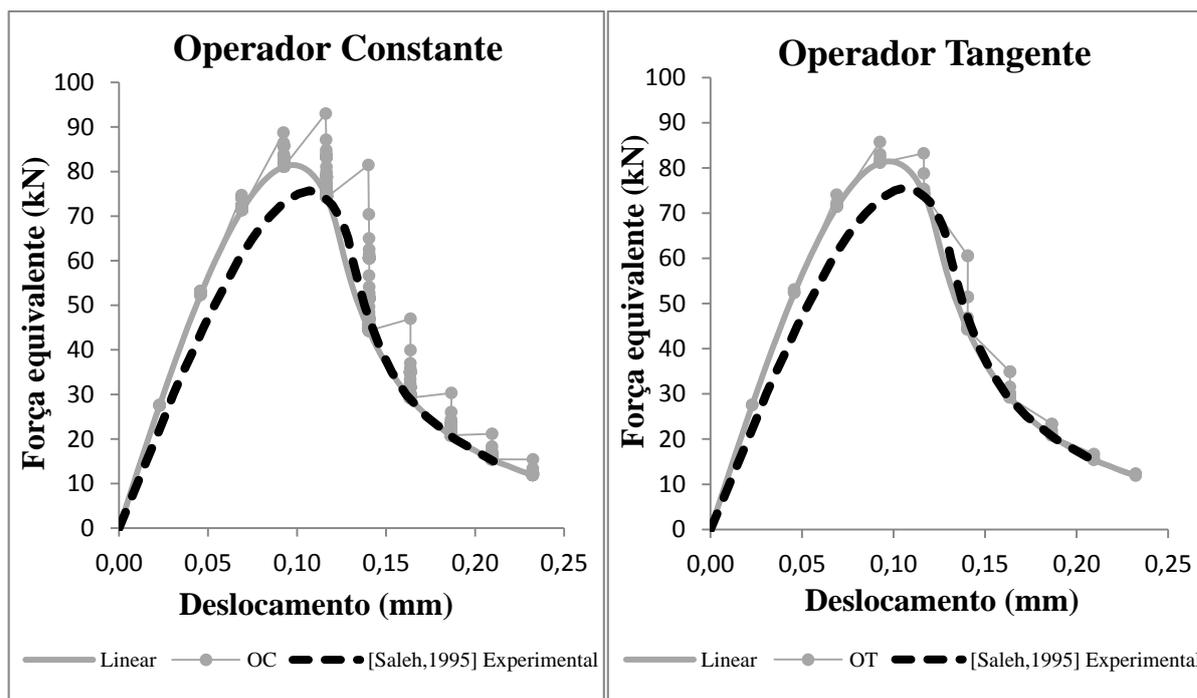


Figura 8.14 Modelos de busca da solução não linear: OC e OT

Na busca pela solução não linear, o algoritmo OC a cada novo passo incremental recorre a uma previsão elástica. Isso é de fato verificado ao observarmos o primeiro gráfico da Figura 8.14. Para o OC, a inclinação da previsão só começa a se diferenciar da tangente elástica-linear original quando a fissura real começa a crescer e consecutivamente um maior entalhe é considerado. Já no caso do OT, a incorporação direta das informações tangentes da curva coesiva no sistema de equações faz com que a tangente da previsão inicial seja diferente da elástica-linear. Portanto, a busca a cada passo incremental é baseada na tangente do passo convergido anterior.

8.4 VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A ENSAIO DE CISALHAMENTO: ENTALHE ÚNICO

No quarto exemplo, a fratura em modo misto de uma viga de concreto com um entalhe central submetida a um ensaio de cisalhamento é analisada. Os resultados e dados experimentais podem ser encontrados no trabalho de GÁLVEZ et al. (1998). Tal viga também foi simulada numericamente por OLIVEIRA (2014) no qual a propagação da fissura foi procedida de acordo com o critério de evolução da máxima tensão principal. Já utilizando a formulação de múltiplas regiões, o caminho por onde a fissura irá se propagar deve ser conhecido. Baseado na fratura experimental foi então proposta uma interface linear inclinada

por onde a fissura deverá se propagar. O início da interface coincide com o final do entalhe inicial da peça e o ponto final da mesma foi adotado de acordo com o caminho experimental da fissura. A Figura 8.15 ilustra o exemplo apresentando os dados geométricos, as propriedades mecânicas do material e os parâmetros coesivos da interface.

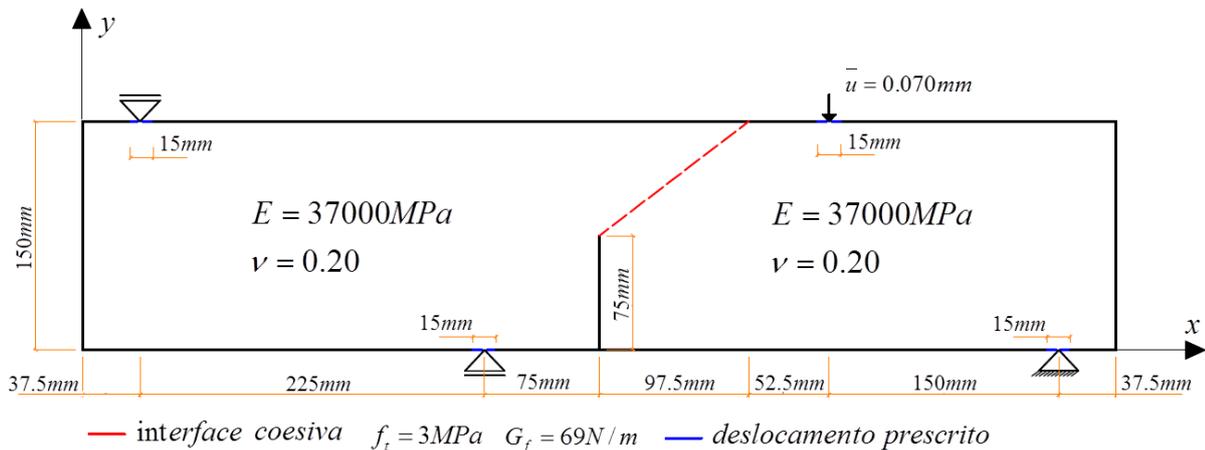


Figura 8.15 Viga de concreto com um entalhe submetida a modo misto de fratura (I e II)

De acordo com o modelo de fratura proposto, a lei coesiva rege somente o comportamento das tensões normais à interface, desconsiderando assim a resistência ao cisalhamento após o limite elástico. No entanto, como o concreto é um material que possui comportamento frágil ao cisalhamento, um resultado semelhante ao experimental é esperado para a análise numérica.

Dois diferentes composições de multi-regiões foram adotadas para a análise mecânica da estrutura. Em ambas as composições o entalhe inicial foi discretizado da mesma maneira que no exemplo de flexão em três pontos. A primeira delas divide o domínio inteiro em 2 regiões divididas pela interface que está posicionada ao longo do caminho de fissuração. Essa composição foi discretizada com 52 elementos cúbicos nos contornos com deslocamentos prescritos, 10 elementos cúbicos para cada lado da interface e 20 elementos quadráticos para o contorno complementar. Já a segunda composição divide o domínio em 13 regiões conectadas por 18 interfaces as quais foram discretizadas por 194 elementos cúbicos. Nas regiões do contorno com deslocamento prescrito, adotou-se 16 elementos cúbicos e no contorno complementar da estrutura foram adotados com 18 elementos quadráticos. Somando os quatro elementos que compõe o entalhe nas composições 1 e 2, as malhas totalizam 361 e 907 nós respectivamente. A Figura 8.16 apresenta as duas composições consideradas na análise.

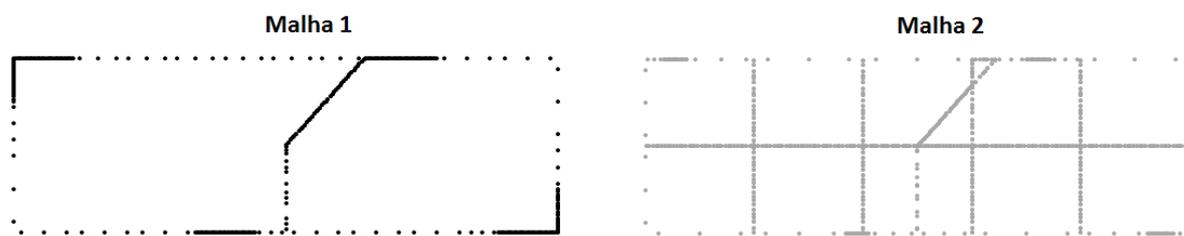


Figura 8.16 Malhas adotadas para a discretização da viga

O deslocamento vertical prescrito no topo da viga foi aplicado em 100 incrementos e a tolerância para convergência do processo iterativo foi de $10^{-6} MPa$. As análises foram procedidas considerando novamente as três leis coesivas do concreto, as duas formulações MEC S e MEC S-H apresentadas e também considerando os dois algoritmos não lineares OC e OT. A Figura 8.17 apresenta a configuração deformada de ambas as composições com deslocamentos ampliados 100 vezes.



Figura 8.17 Configuração das composições deformadas com deslocamentos 100 vezes ampliados

Observando as configurações deformadas é possível perceber que, para a Malha 2, uma nova fissura de menor proporção se formou no canto inferior direito da estrutura. Isso é um indicativo de que no ensaio experimental pode ter ocorrido a degradação mecânica de uma porção de material próximo a essa região onde micro fissuras podem também ter se propagado.

Novamente os deslocamentos internos foram avaliados com o auxílio do AcadView. Dessa vez 416 pontos foram adotados no interior do domínio da malha 2. Para plotar o gráfico em escala de cores, tais pontos foram conectados formando uma malha de domínio com 375 elementos quadrilaterais de aproximação linear. A Figura 8.18 apresenta os campos de deslocamento em escala de cores a partir da resposta do MEC para os pontos internos.

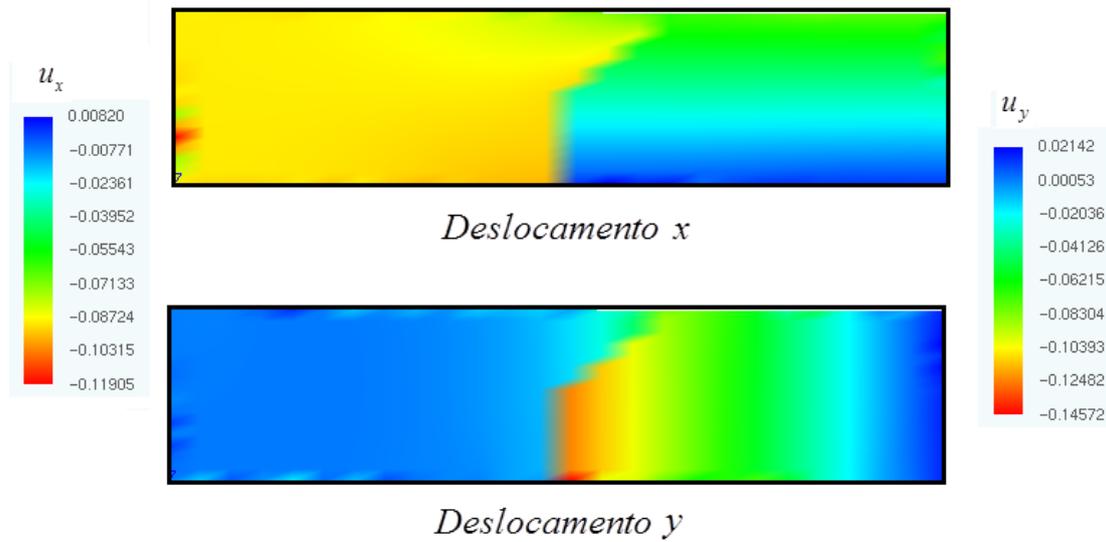


Figura 8.18 Campos de deslocamento dos pontos internos

Novamente é possível observar claramente a descontinuidade dos deslocamentos na região de fratura que ocorre, nesse caso, para ambos os deslocamentos x e y .

Os resultados de força equivalente versus deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga foram comparados com os dados experimentais e numéricos dos trabalhos previamente citados. Esses resultados são apresentados a seguir no gráfico da Figura 8.19 levando em conta a espessura da viga que é de 50mm .

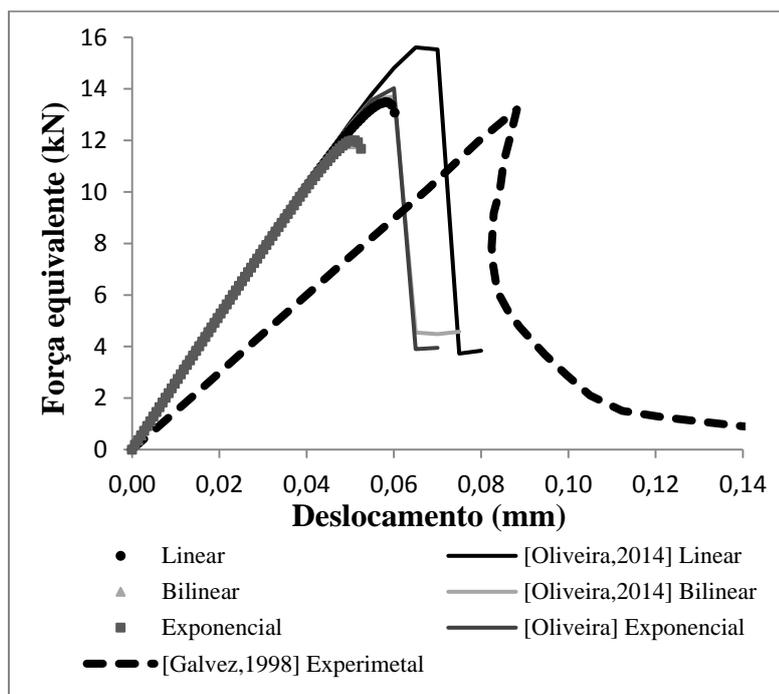


Figura 8.19 Resposta não linear da estrutura

No gráfico, as curvas de resposta não linear foram plotadas somente até o passo incremental onde os algoritmos OC e OT ainda convergiam para as mesmas respostas. No caso da lei linear, bilinear e exponencial esses passos foram 86, 72 e 75, respectivamente. Os resultados a partir desses passos incrementais serão mais adiante discutidos levando-se ainda em consideração a evolução do NC ao longo das análises. Em relação à comparação das formulações MEC S e MEC S-H, ambas apresentaram a mesma resposta até o final da análise.

A partir do gráfico 8.19 é possível perceber que todos os modelos numéricos se comportam de maneira mais rígida em relação ao real. Tal fato pode ser explicado uma vez que se tenta reproduzir infinitos graus de liberdades por meio de um número discreto de pontos sobre o contorno. Além disso, ainda é possível que na estrutura real, onde as possibilidades de caminhos para a fissuração são infinitas, a região próxima à nova fissura apresentada na Figura 8.17 pode ter sido degradada mecanicamente justificando o comportamento menos rígido da estrutura no laboratório. Pode-se dizer que em termos gerais o comportamento não linear foi capturado pela formulação do presente trabalho e o valor da carga de ruptura para as três leis coesivas foi próximo ao experimental.

Em relação à comparação de eficiência OC e o OT, como os dois algoritmos não convergiram para a mesma resposta até o final da análise, a Tabela 8.4 apresenta o número de iterações até o passo em que ambos os operadores ainda convergiam para a mesma resposta.

Tabela 8.4 Comparação de iterações: Exemplo 4

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Linear	966	107	~89%
Bilinear	847	87	~90%
Exponencial	1081	226	~79%

Novamente houve uma considerável redução no número de iteração com a utilização do OT a qual ficou entre cerca de 80 à 90% a depender a lei coesiva adotada.

Visando ainda analisar os resultados a partir dos passos de divergência dos dois algoritmos não lineares, apresenta-se a Figura 8.20 a qual traz o gráfico de resposta não linear da estrutura até o final da análise para os operadores OC e OT e as três leis coesivas.

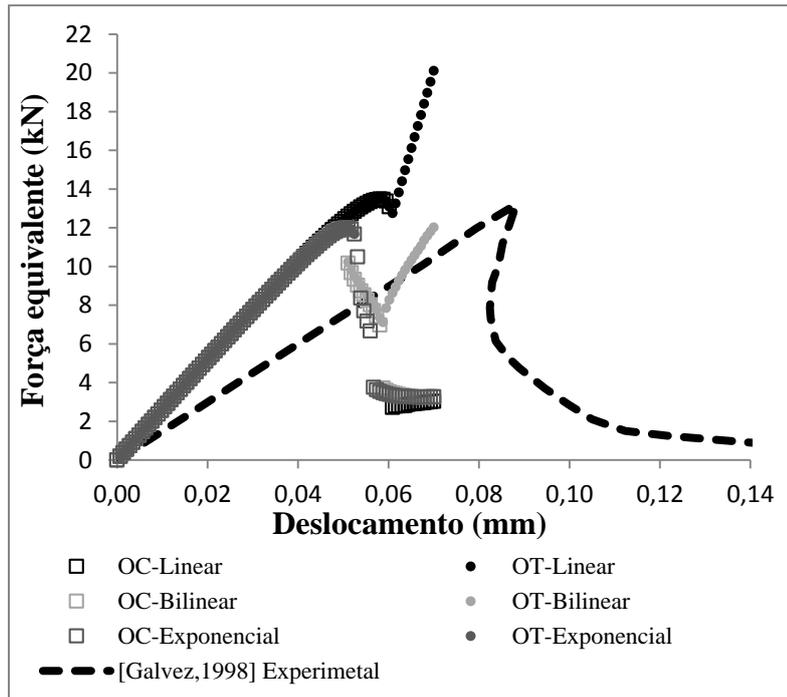


Figura 8.20 Resposta não linear da estrutura: OC versus OT

Conforme observado no gráfico, a curva experimental da estrutura apresenta uma instabilidade conhecida como *snap back instability*. Tal fenômeno é caracterizado por uma perda de rigidez tão catastrófica que faz com que haja uma regressão dos deslocamentos na curva após a carga de pico. Essa instabilidade só consegue ser capturada experimentalmente devido ao fato dos deslocamentos prescritos na estrutura terem sido controlados em função da velocidade de abertura do entalhe da peça. Os algoritmos não lineares OC e OT implementados no presente trabalho são algoritmos baseados no método de Newton-Raphson. Devido ao modelo de busca da solução não linear adotado nesses algoritmos, não é possível reproduzir esse tipo de instabilidade com os mesmos. Uma alternativa para resolver tal problema poderia ser o desenvolvimento de um algoritmo complementar baseado no método de *arc length*, semelhante aos casos conhecidos da Teoria da Plasticidade. Outra possível maneira, indicada por VENTURINI (1995), é o rearranjo das equações do sistema não linear de modo que se possa ter outra variável guia que não seja o deslocamento, como a abertura de fissura, por exemplo.

Em relação às diferenças nas soluções dos operadores OC e OT, acredita-se que essa perda de rigidez catastrófica seja o principal motivo que levou a tal discrepância dos resultados. É claramente observada na curva do OT da Figura 8.20 uma perda de estabilidade

numérica após a carga de pico. Novamente monitorando o NC da matriz A ao longo da análise é possível avaliar algum tipo de mal condicionamento do sistema de equações que tenha levado a essa perda de estabilidade do algoritmo. A seguir a Figura 8.21 traz os gráficos do NC versus o deslocamento vertical da estrutura para ambos os operadores não lineares.

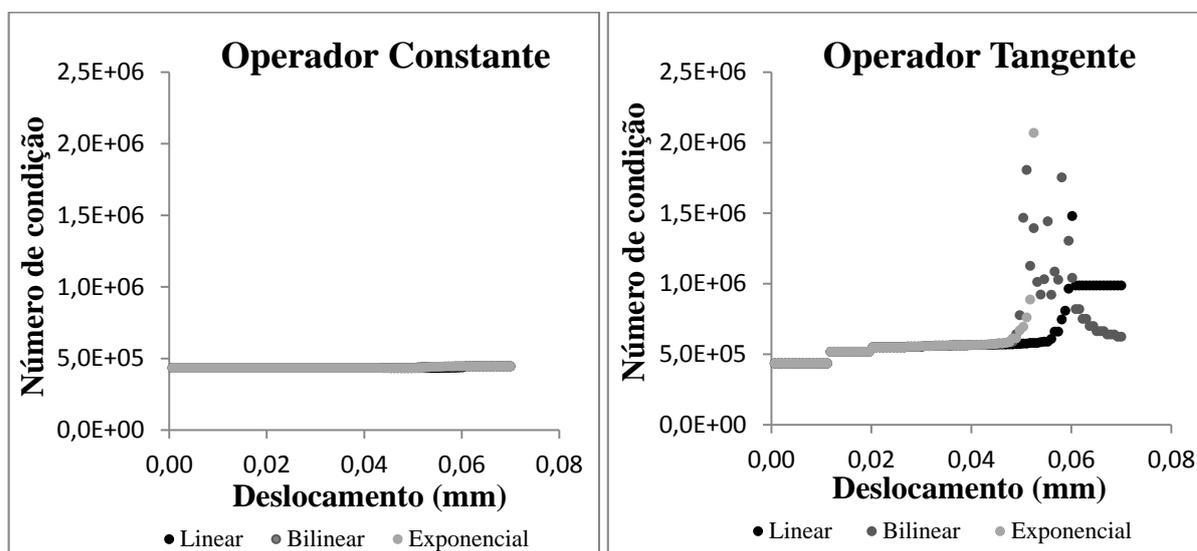


Figura 8.21 Avaliação do número de condição da matriz A ao longo da análise: Exemplo 3

É possível perceber que no caso do OT, o NC começa a apresentar um aumento exponencial na mesma etapa da análise em que a curva de resposta não linear começa a perder a estabilidade. Dessa maneira, pode ser concluído que ao tentar acoplar as informações tangentes na matriz A, por se tratar de uma situação de perda de rigidez catastrófica, o sistema de equações passa a apresentar de alguma forma um mal condicionamento. Já no caso do OC tal problema não ocorre visto que, não são incorporadas diretamente na matriz A as informações tangentes das leis coesivas. Mesmo assim, a resposta experimental após a carga de pico não poderia de qualquer maneira ser obtida com o OC devido ao efeito *snap back*.

Por fim, foi ainda avaliada a resposta de tensão coesiva do nó de interface que primeiro entrou no regime coesivo. Esse resultado é apresentado a seguir na Figura 8.22.

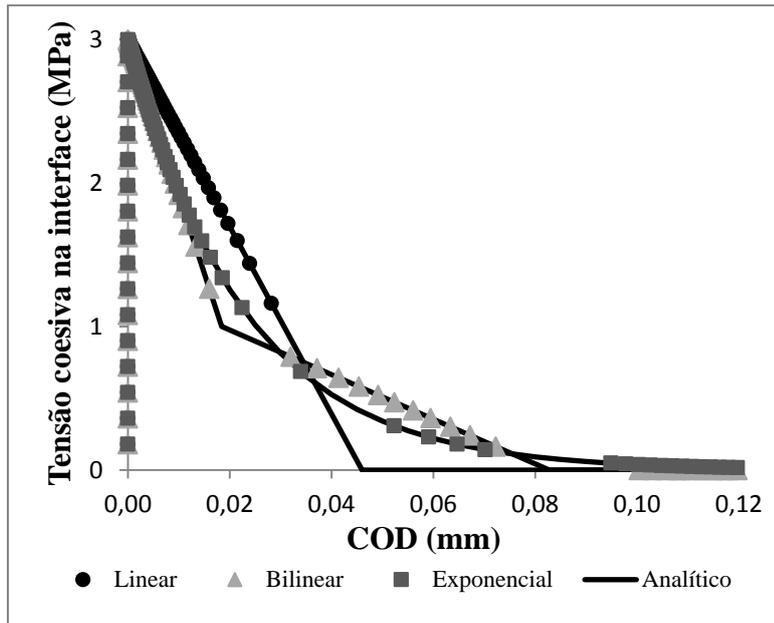


Figura 8.22 Resposta de tensões coesivas na interface

Com o resultado é possível identificar nas curvas da Figura 8.22 que os longos trechos sem pontos de respostas numéricas correspondem aos passos da análise logo após a carga de pico quando a estrutura apresenta a perda catastrófica de rigidez. Tal fato complementa a ideia de que o algoritmo OC baseado no deslocamento como variável guia não é capaz de lidar com esse tipo de instabilidade.

8.5 VIGA DE CONCRETO SUBMETIDA A ENSAIO DE CISALHAMENTO: ENTALHE DUPLO

O último exemplo de fratura em peças de concreto trata da propagação de fissuras em modo misto em uma viga com dois entalhes iniciais, a qual é submetida ao ensaio de cisalhamento. Para essa viga não se tem resultados experimentais, no entanto a mesma foi simulada por CARPINTERI (1994) com uma formulação para análise de fratura coesiva baseada no MEF. Além disso, o exemplo também foi simulado numericamente por SALEH & ALIABADI (1995) com a formulação do MECD estendida para a análise da fratura não linear no concreto.

Ao contrário do exemplo passado, nesse caso a fratura se dá em modo misto ao longo de todo o ensaio. No exemplo anterior a fissura só alterava sua direção no começo da análise quando ainda estava próxima ao entalhe. Depois disso, uma direção preferencial de fratura foi observada e a fissura continuou a se propagar, porém em modo I. Nesse exemplo, a direção de fissuração se altera durante toda análise. Portanto, para simular a viga com a formulação de

multi-regiões foi necessário adotar interfaces curvas com elementos de alta ordem seguindo o mesmo caminho de fissuração verificado na simulação de SALEH & ALIABADI (1995). A Figura 8.23 apresenta o problema trazendo os dados geométricos, as propriedades mecânicas do material e os parâmetros coesivos da interface.

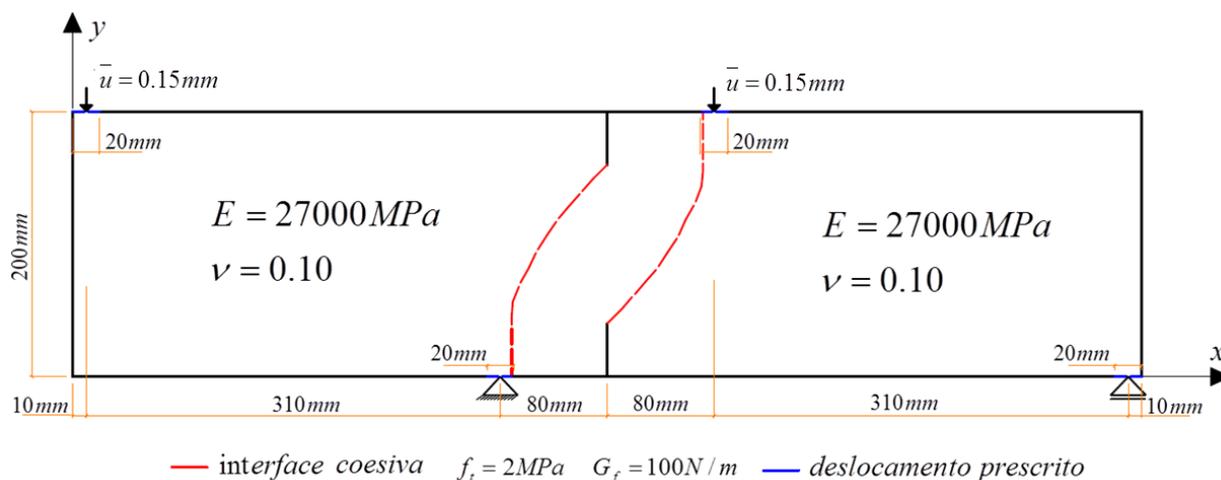


Figura 8.23 Viga de concreto com dois entalhe submetida a modo misto de fratura (I e II)

O modelo numérico foi analisado considerando uma malha refinada o suficiente para que a resposta do problema convergisse. Nessa malha, o domínio da viga foi dividido em 3 regiões. Para os contornos com deslocamentos prescritos adotou-se 16 elementos cúbicos. Já nas interfaces, adotaram-se 56 elementos cúbicos sendo 28 para cada interface e 14 para cada lado das mesmas. Cada um dos dois entalhes foi discretizado com dois elementos quadráticos de 20 mm de um lado e um elemento quadrático de 40 mm do outro lado. O contorno remanescente foi então discretizado com mais 24 elementos quadráticos. Na malha foram então utilizados 72 elementos cúbicos e 30 elementos quadráticos, totalizando assim 378 nós. A Figura 8.24 apresenta a malha na configuração indeformada e também a malha deformada com os deslocamentos 500 vezes ampliados.

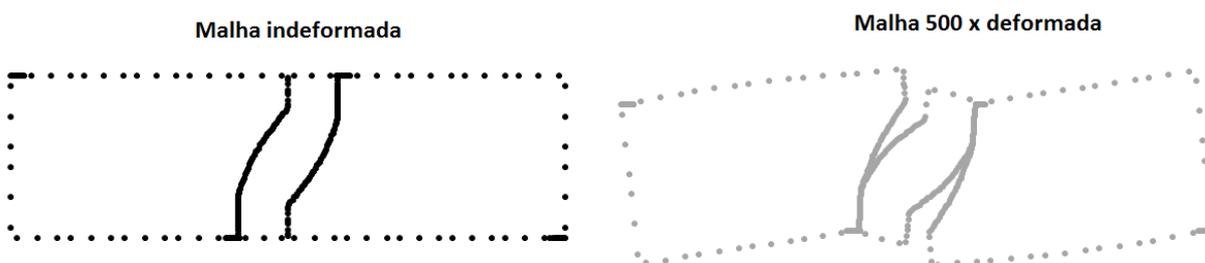


Figura 8.24 Malha indeformada e malha deformada com deslocamentos 500 vezes ampliados

Gráficos em escala de cores obtidos com o AcadView foram mais uma vez utilizados para representar os campos de deslocamento dos pontos internos. Dado que as dimensões da viga são as mesmas do exemplo 8.3, os mesmos 1722 pontos internos foram adotados aproveitando também a mesma malha com os 1620 elementos quadriláteros lineares. A Figura 8.25 traz mais uma vez os campos de deslocamento em escala de cores a partir da resposta dos pontos internos obtida com MEC. Assim como nos exemplos anteriores, percebem-se claramente as descontinuidades de deslocamento devido à fratura da viga.

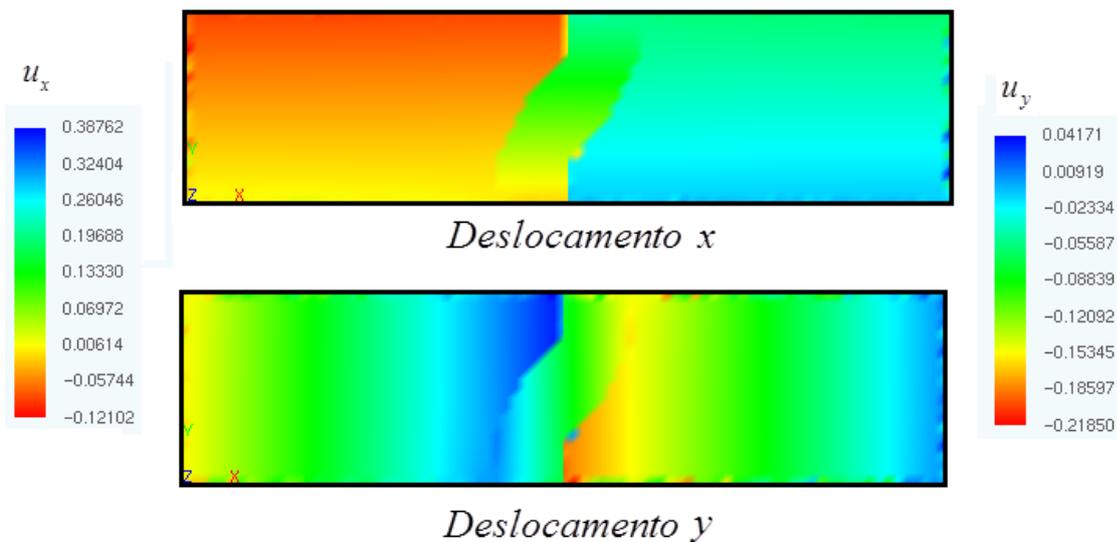


Figura 8.25 Campos de deslocamento dos pontos internos

O deslocamento prescrito foi imposto em 100 etapas incrementais e a tolerância adotada para o processo iterativo foi de $10^{-6} MPa$. Apesar de nos trabalhos de CARPINTERI (1994) e SALEH & ALIABADI (1995) o problema ter sido analisado considerando apenas a lei coesiva linear, nesse exemplo os resultados foram obtidos para as três leis coesivas do concreto. As duas formulações MEC S e MEC S-H e os dois algoritmos não lineares OC e OT também foram considerados na análise.

Para ser possível comparar os resultados obtidos com os outros trabalhos, a resposta não linear da estrutura foi avaliada em termos de força e deflexão adimensionalizadas. Denominando o ponto de aplicação de deslocamento do canto esquerdo de Ponto 1 e o outro ponto de aplicação de deslocamento de Ponto 2, a força adimensionalizada pode ser calculada como $F_{adm} = (P_1 + P_2)/(f_t \cdot d \cdot t)$. Onde P_1 e P_2 são as forças equivalentes nos pontos 1 e 2, $f_t = 2MPa$ é a resistência à tração, $d = 200mm$ é a altura da viga e $t = 1mm$ é a espessura unitária. Já a deflexão adimensional foi calculada como $D_{adm} = (5\delta_1 + \delta_2) \cdot 10^4 / (6d)$ sendo

δ_1 e δ_2 os deslocamentos dos pontos 1 e 2. O gráfico da figura 8.26 apresenta os resultados obtidos com as três leis coesivas e também os resultados numéricos dos outros dois autores.

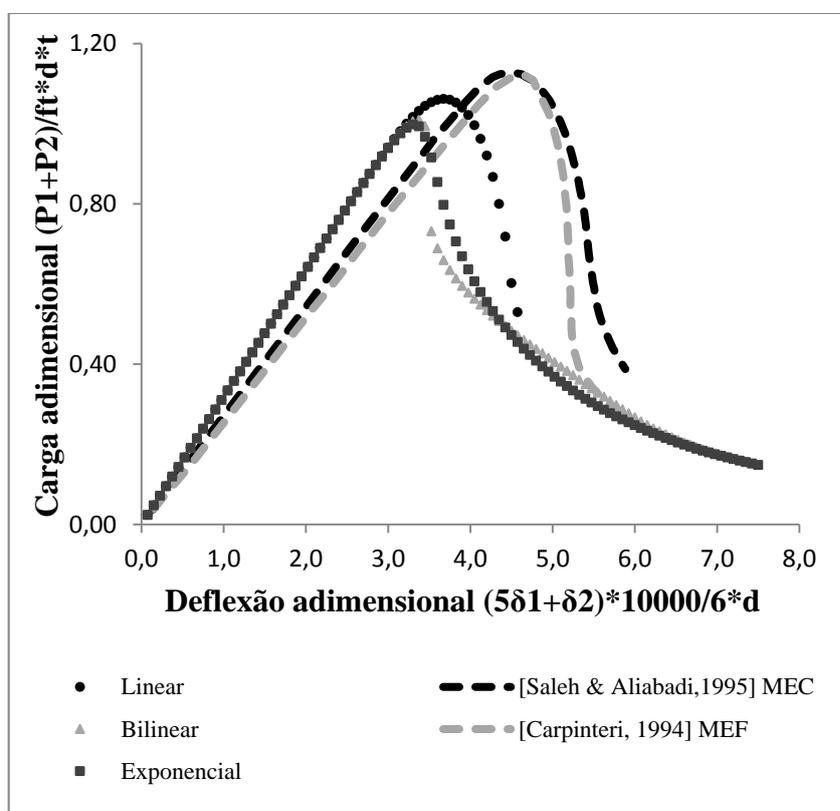


Figura 8.26 Resposta não linear da estrutura

Com as curvas, percebe-se que a resposta obtida com a lei linear foi a que apresentou o comportamento mais semelhante às curvas numéricas dos outros autores. Isso porque os mesmo também utilizaram esse tipo de lei. Ambas as formulações do MEC e ambos os operadores não lineares foram capazes de reproduzir estavelmente as mesmas curvas plotadas na figura a cima. A carga de pico foi um pouco menor em comparação aos valores obtidos pelos outros autores.

Assim como nos exemplos anteriores, a resposta de tensão versus abertura COD do primeiro par de pontos de interface que entrou no regime coesivo foi monitorada e apresentada na Figura 8.27.

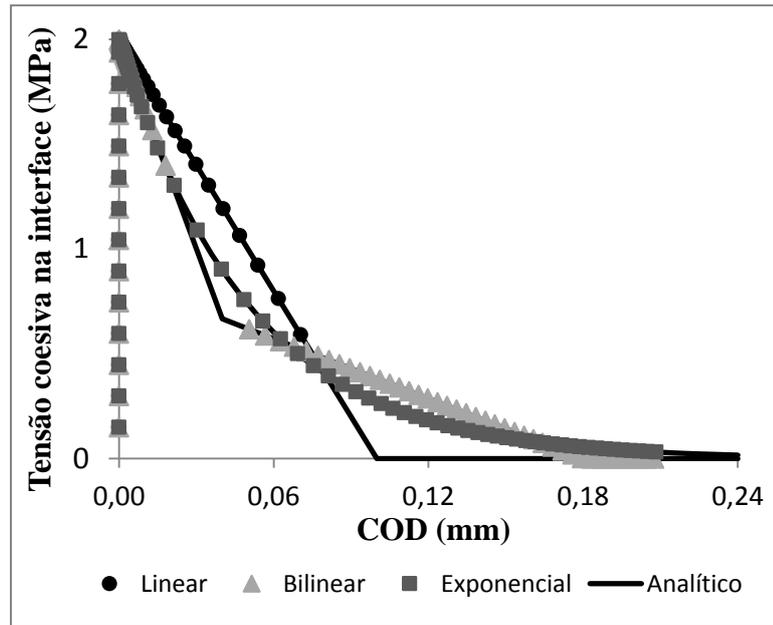


Figura 8.27 Resposta de tensões coesivas na interface

A comparação de eficiência entre o OC e o OT desse exemplo é apresentada na tabela 8.5 a seguir visando verificar a economia no número de iterações.

Tabela 8.5 Comparação de iterações: Exemplo 5

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Linear	1281	100	~92%
Bilinear	3346	220	~93%
Exponencial	3527	579	~84%

Novamente é observada uma grande redução no número de iterações chegando até a ser, para o caso da lei bilinear, 93% menor do que o número de iterações necessários para a análise convergir com o OC.

Ao contrário do exemplo anterior, não houve perda de estabilidade da solução durante a análise com os operadores não lineares. Como os dois últimos exemplos tratam de fratura em modo misto, tal fato demonstra que a formulação desenvolvida é capaz de avaliar fraturas em modo misto desde que não haja perdas catastróficas de rigidez da peça. A análise da estabilidade da solução foi verificada através do gráfico de NC versus deflexão adimensional apresentado na Figura 8.28 a seguir.

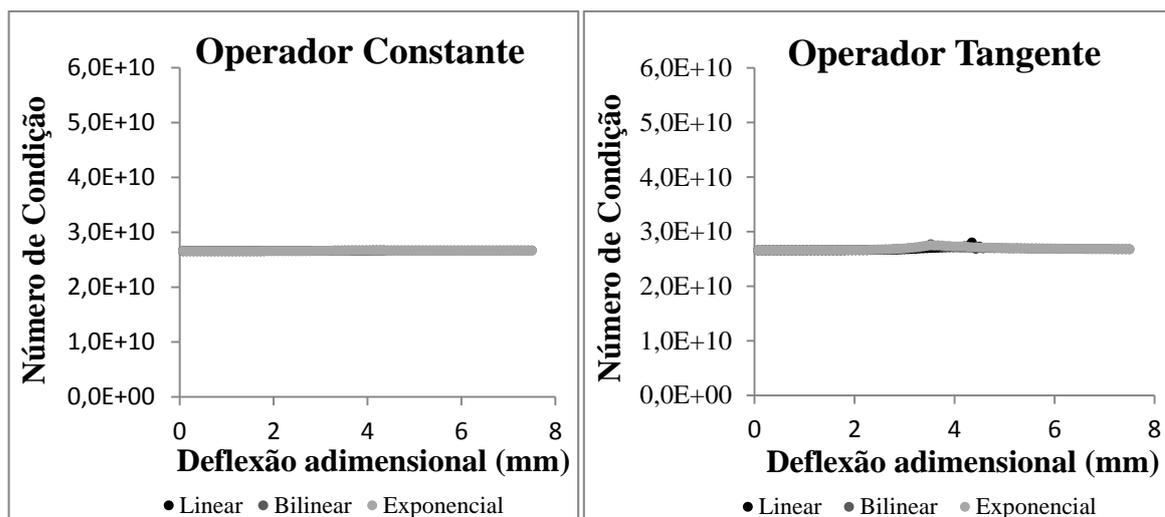


Figura 8.28 Avaliação do número de condição da matriz A ao longo da análise: Exemplo 4

Conforme o esperado, não houve significativa alteração na ordem de grandeza do número de condição durante as análises com ambos os operadores OC e OT. Assim é possível concluir que os sistemas numéricos novamente não apresentaram perdas de estabilidade.

8.6 COMPACT TENSION TEST EM CHAPA DE MADEIRA (PINUS SILVESTRIS)

O sexto exemplo do capítulo retoma uma chapa de madeira que foi submetida ao Compact Tension test por BOSTRON (1992). Em seu doutorado, o autor foi o primeiro a aplicar o modelo coesivo de fratura para tentar simular o amolecimento de espécimes de madeira ao longo do processo de fratura. Portanto, o presente exemplo trata-se de um “benchmark”. No teste, foi apenas considerada a orientação de fratura RL onde a fissura se propaga em modo I na direção das fibras longitudinais (direção preferencial de fratura). A espécie de madeira analisada foi o Pinus Silvestris cujas propriedades elásticas e parâmetros de fratura foram aferidos pelo autor a partir de resultados experimentais de trabalhos anteriores. A Figura 8.29 apresenta a geometria de um dos corpos ensaiados por BOSTRON (1992) trazendo também as propriedades elásticas da espécie Pinus Silvestris e também os parâmetros coesivos de fratura considerando uma lei bilinear.

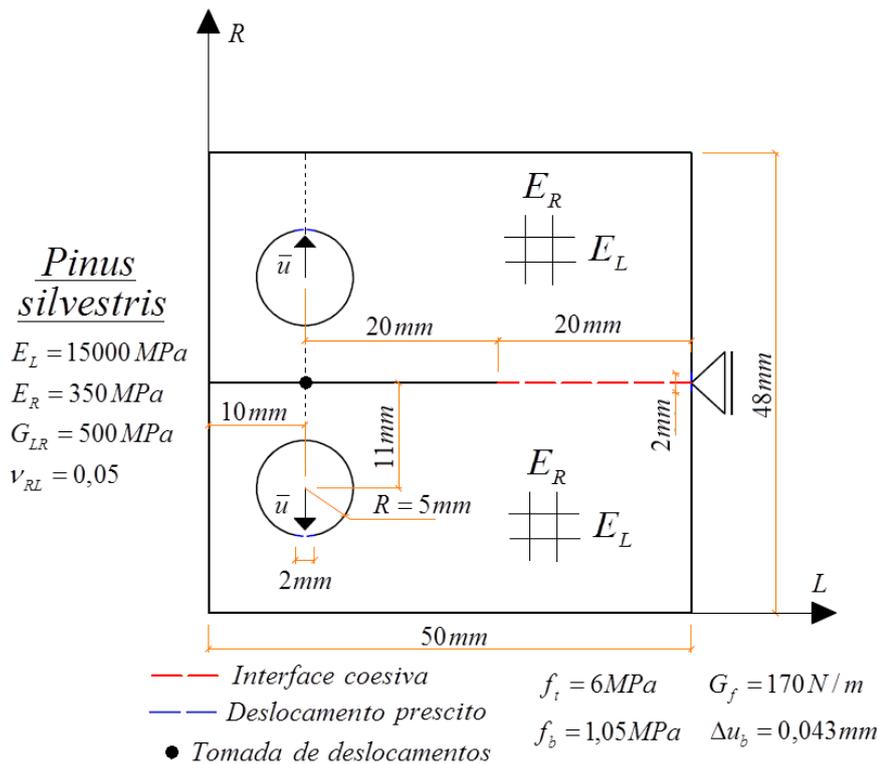


Figura 8.29 Compact Tension Test para a chapa de madeira Pinus Silvestris

Outros parâmetros importantes que influenciam as propriedades de fratura da madeira também foram majorados pelo autor, como é o caso do teor de umidade da peça $u = 13\%$, da densidade $\rho_{0,13} = 410 \text{ Kg/m}^3$ e da taxa de aplicação do carregamento, $0,06 \text{ mm/minuto}$. Além dos resultados experimentais de resposta não linear da estrutura, Bostron (1992) fez ainda uso dos parâmetros materiais do Pinus Silvestris para fazer uma simulação numérica do problema. Para isso, o mesmo utilizou uma formulação de Elementos Finitos a qual incorporava o modelo coesivo de fratura. A resposta de força versus deslocamento foi avaliada considerando a força equivalente atuante no furo superior da chapa e a abertura das faces do entalhe no ponto de tomada de deslocamentos (Figura 8.29).

No caso das análises com o MEC, novamente ambos os operadores não lineares OC e OT foram utilizados para a obtenção da resposta não linear. Além disso, as formulações MEC S e MEC S-H também foram levadas em consideração. A malha adotada na discretização da chapa foi composta por 82 elementos quadráticos totalizando 246 nós. Desses 82 elementos, 40 foram utilizados para discretizar a interface (20 de cada lado), 3 para cada lado do entalhe, 10 para cada um dos furos da chapa, sendo os deslocamentos impostos em 2 desses 10 elementos, 2 elementos para a região do apoio de restrição de deslocamento horizontal e por fim, 14 elementos para o contorno remanescente. A Figura 8.30 apresenta a malha na

configuração indeformada e também a malha deformada com os deslocamentos 10 vezes ampliados.

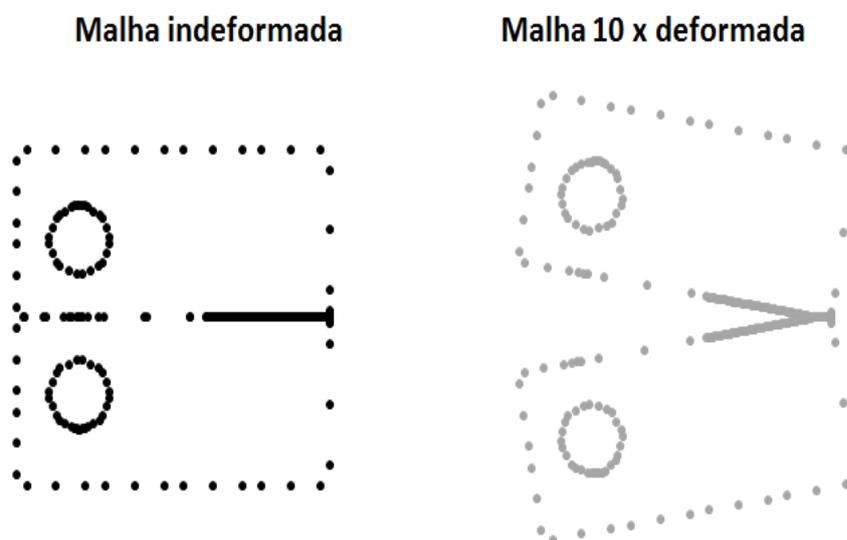


Figura 8.30 Configuração indeformada e malha 10 vezes deformada

Assim como nos exemplos de fratura no concreto, os deslocamentos internos foram avaliados com o auxílio do AcadView. Para isso, foram adotados 514 pontos no interior do domínio do problema. A Figura 8.31 traz os campos de deslocamento dos pontos internos plotado em escala de cores com o auxílio de uma malha de domínio que conecta tais pontos formando 459 elementos quadrilaterais de aproximação linear.

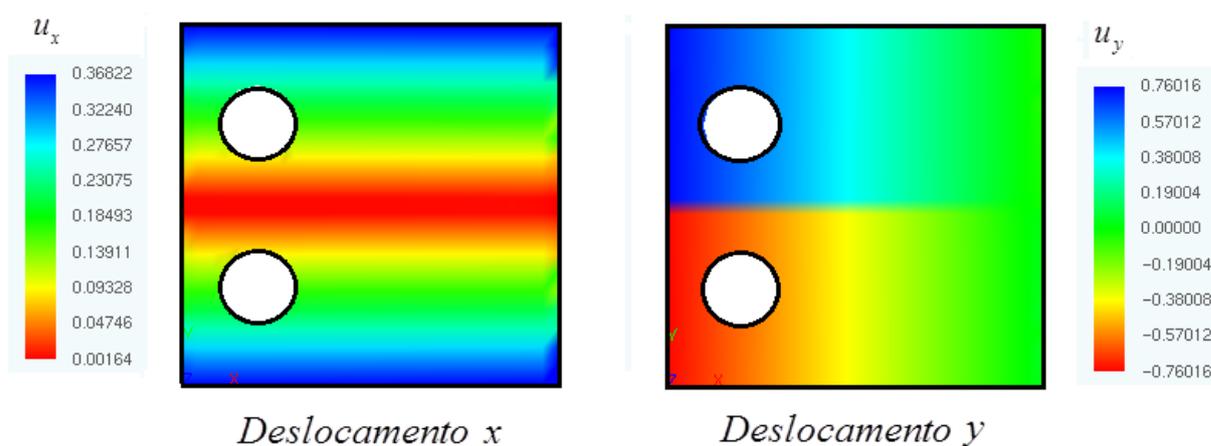


Figura 8.31 Campos de deslocamento dos pontos internos

Mais uma vez é possível observar claramente a descontinuidade do campo de deslocamento na região do fraturamento a qual nesse exemplo ocorre para os deslocamentos em y .

Os deslocamentos foram impostos dessa vez em 80 etapas incrementais e a tolerância para o processo iterativo foi de $10^{-6} MPa$. As respostas de força versus abertura de entalhe obtidas com as formulações MEC S e MEC S-H não apresentaram discrepância. Já em relação aos operadores OC e OT, para o caso de 80 etapas incrementais ambos convergiram para a mesma resposta. Essa é apresentada a seguir na Figura 8.32 junto com os resultados experimentais e numéricos de BOSTRON (1992) levando se em conta que a espessura da chapa é de 20mm.

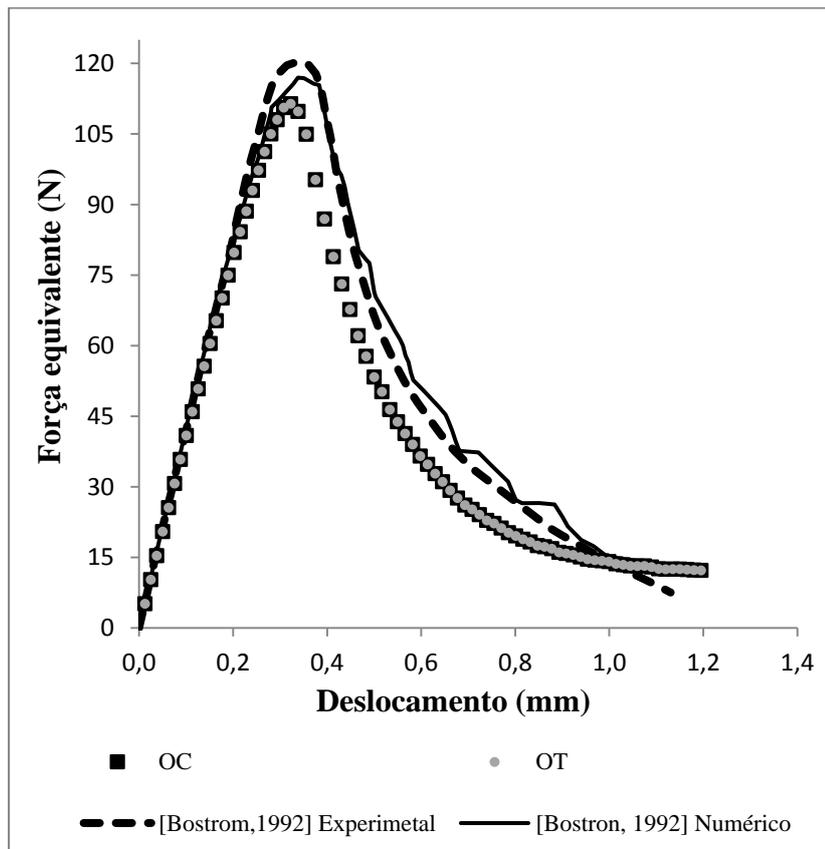


Figura 8.32 Resposta não linear da estrutura

A partir das curvas, percebe-se que a resposta obtida com a formulação de multi-regiões foi de maneira geral capaz de reproduzir os resultados de resposta não linear obtidos numericamente e experimentalmente pelo autor. A carga de pico foi um pouco menor em comparação com os valores obtidos por BOSTRON (1992) e na região de amolecimento, os resultados com o MEC mostraram-se um pouco menos rígidos. Mesmo assim, pode ser concluído que para esse exemplo os resultados foram satisfatórios e o MEC foi capaz de simular a fratura coesiva na madeira.

Assim como nos exemplos de fratura anteriores, a resposta de tensão versus abertura COD do primeiro par de pontos de interface que entrou no regime coesivo foi monitorada e apresentada na Figura 8.33.

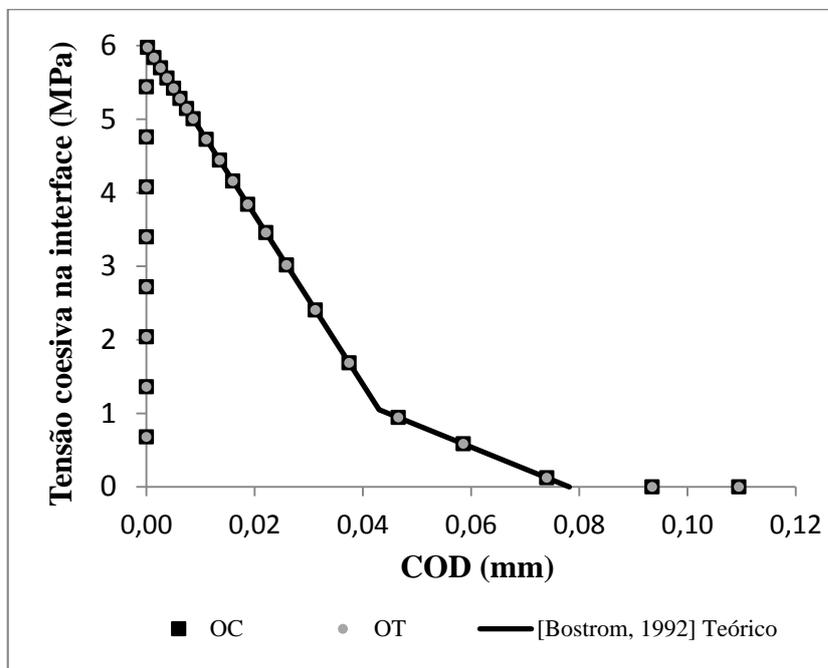


Figura 8.33 Resposta de tensões coesivas na interface

A comparação de eficiência entre o OC e o OT do exemplo é apresentada a seguir na tabela 8.6 para verificar a economia no número de iterações.

Tabela 8.6 Comparação de iterações: Exemplo 6

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Pinus Silvestris	6269	217	~97%

Novamente é observada uma grande redução no número de iterações. Nesse exemplo foi verificado o maior ganho de eficiência em relação às outras aplicações de fratura, chegando até à faixa dos 97%.

Para a análise com 80 etapas incrementais, não houve perda de estabilidade da solução com ambos os operadores não lineares. A análise da estabilidade da solução foi mais uma vez avaliada através do gráfico de NC versus deslocamento da resposta não linear conforme apresentado na Figura 8.34.

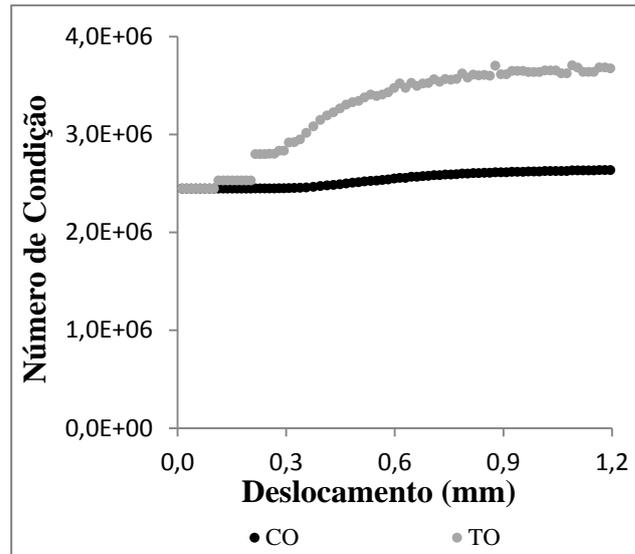


Figura 8.34 Avaliação do número de condição da matriz A ao longo da análise: Exemplo 6

Apesar de no caso do OT o número de condição ter aumentado ao longo da análise, não houve uma evolução exponencial como no exemplo 8.4. Portanto, não houve significativa alteração na ordem de grandeza do número de condição garantindo assim que ambos os operadores obtivessem a mesma resposta até o fim das 80 etapas.

Apesar do resultado estável, vale destacar nesse exemplo a sensibilidade em relação ao tamanho do incremento. Apesar de com 80 etapas o resultado de ambos os operadores OC e OT terem convergido para a mesma resposta, a depender do número de passos incrementais, o algoritmo OT pode perder a estabilidade após a carga de pico. Alguns testes foram feitos com 10, 30, 80 e 130 etapas incrementais. Ambos os algoritmos convergiram para a mesma resposta nos casos de 30 e 80 etapas. Para os casos de 10 e 130 etapas, apenas o OC foi capaz de reproduzir a resposta esperada até o final da análise. Nesses casos, o OT conseguiu bons resultados até pouco depois da carga última. Após isso, houve uma perda de estabilidade semelhante à aquela verificada no quarto exemplo desse capítulo.

8.7 VIGA COMPOSTA DE PEÇAS DE MADEIRA (NORWAY SPRUCE) SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS

O penúltimo exemplo do trabalho trata da fratura em modo I de uma viga de madeira com entalhe central fletida sob três pontos, a qual foi ensaiada experimentalmente por DOURADO et al. (2008). Os autores analisaram duas espécies comumente usadas em estruturas de madeira, Maritime Pine e Norway Spruce. Porém, nesse exemplo, apenas os

resultados para Norway Spruce foram analisados. Isso porque para a outra espécie, DOURADO et al. (2008) não capturou todo o trecho de amolecimento da resposta experimental de força versus deslocamento. Nas análises experimentais, o teor de umidade foi mantido em peça 12%. A densidade da madeira Norway Spruce foi caracterizada para esse teor de umidade como sendo $\rho_{0,12} = 420 \text{Kg/m}^3$. A madeira foi cortada longe o suficiente da medula do tronco para consentir com as orientações anatômicas R, L, T. Para montar as vigas ensaiadas, as partes cortadas da madeira foram coladas com adesivo epóxi de acordo com a disposição de eixos anatômicos e dimensões apresentadas na Figura 8.35.

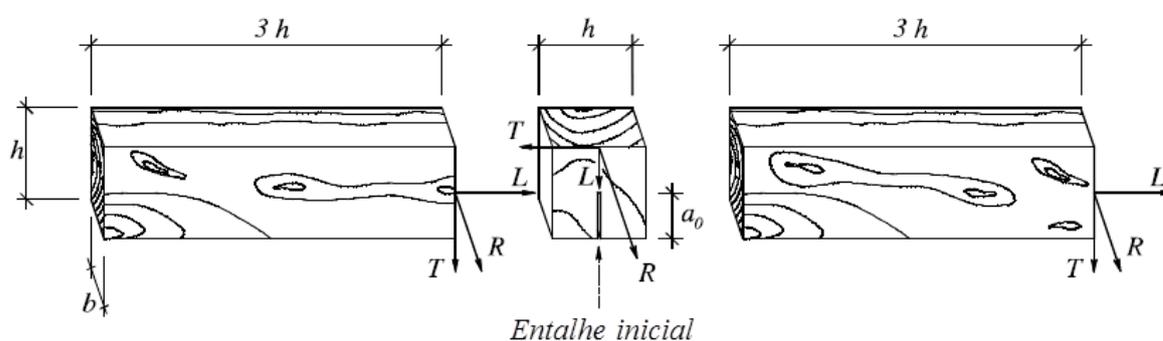


Figura 8.35 Cortes e colagem das partes da viga apresentando à orientação dos eixos anatômicos e as dimensões $h = 70 \text{mm}$, $b = 40 \text{mm}$ e $a_0 = h/2$ (DOURADO et al., 2008).

Essa configuração de colagem e o corte do entalhe inicial foram baseados, segundo o autor, em trabalhos da literatura no intuito de conduzir à fratura em modo I na orientação TL. O ensaio foi realizado em 12 vigas de cada uma das duas espécies de madeira onde as condições de teor de umidade, velocidade de carregamento e geometria foram mantidas constantes. A velocidade de carregamento foi tal que atingia a carga última em $3 \pm 1 \text{ min}$ evitando assim, a influência de efeitos viscosos na madeira. A Figura 8.36 ilustra o ensaio realizado por DOURADO et al. (2008).

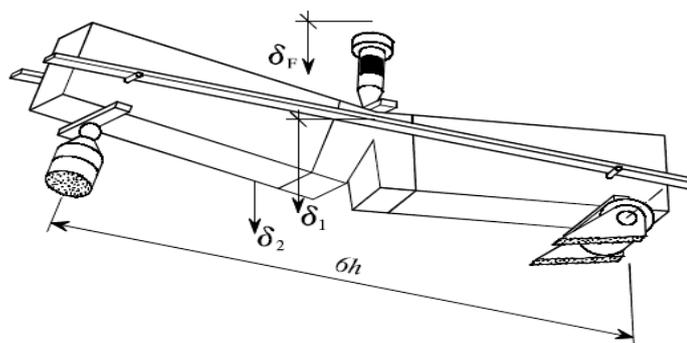


Figura 8.36 Ensaio experimental realizado com as peças de madeira (DOURADO et al., 2008)

As curvas experimentais de força versus deslocamento monitoraram o deslocamento do próprio ponto de aplicação de carga utilizando barras metálicas rígidas como referência, para evitar erros devido à rotação da peça. Assim, os deslocamentos plotados na resposta foram obtidos como: $\delta = \delta_F - (\delta_1 + \delta_2)/2$. Além dos ensaios experimentais, o autor também simula numericamente as vigas de madeira. Para isso, o mesmo faz uso de uma sub-rotina do software Abaqus para uma formulação de elementos finitos de interface onde a rigidez os elementos é controlada de acordo com a lei coesiva. O autor então considera uma lei coesiva bilinear cujos parâmetros são aferidos através de uma análise inversa baseada nos resultados experimentais. Já em relação às propriedades elásticas, essas foram obtidas em outros trabalhos da literatura que utilizaram as mesmas espécies de madeira.

Para simular tal ensaio com a formulação de multi-regiões, foi necessário discretizar o problema em quatro regiões com orientações $x, y = L, T$ e $x, y = T, L$ conforme apresentado na Figura 8.37. Um entalhe inicial foi modelado abaixo da interface entre as duas sub-regiões centrais. A interface foi adotada como vertical por onde a fratura pode se propagar em modo I. Nas interfaces com adesivo epóxi foi considerada uma resistência f_t suficientemente grande para que não ocorresse fratura. As propriedades elásticas ortotrópicas da madeira em questão e os parâmetros coesivos da lei bilinear são também apresentados na Figura 8.37. Mais uma vez ambos os operadores não lineares OC e OT foram utilizados para a obtenção da resposta não linear, assim como também ambas as formulações MEC S e MEC S-H.

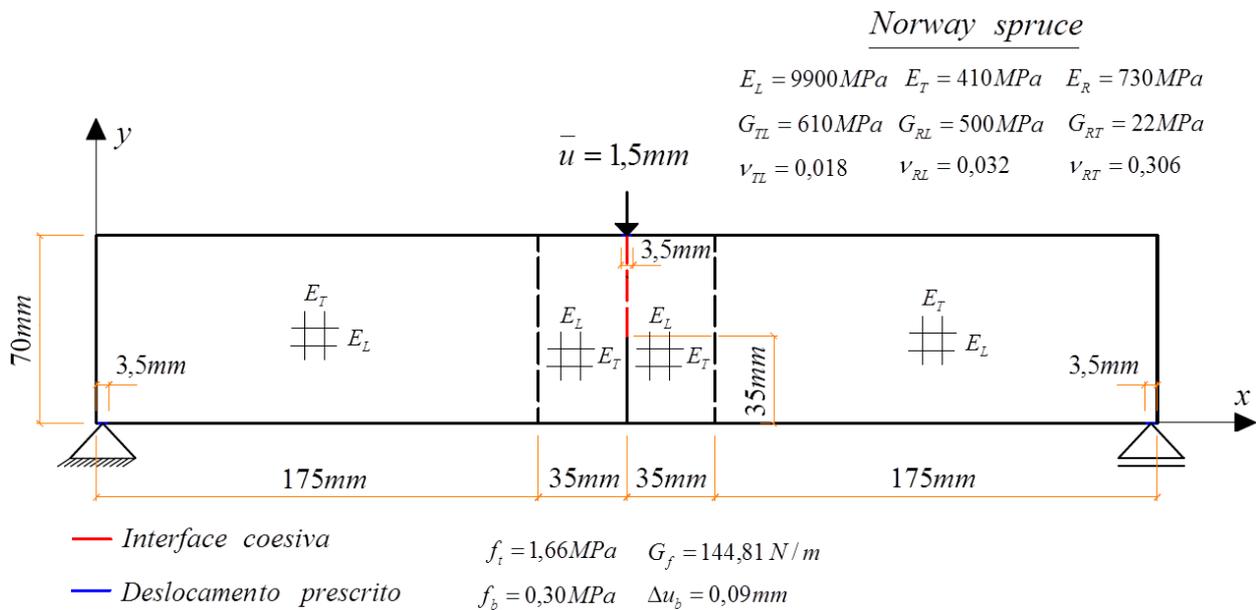


Figura 8.37 Viga de madeira colada com entalhe central submetida à flexão em 3 pontos.

A malha de contorno adotada é composta por 124 elementos de aproximação quadrática totalizando 372 nós. Desses elementos, 6 foram utilizados em contornos com deslocamento prescrito, 35 foram utilizados para cada lado da interface coesiva, 2 para cada lado do entalhe e os 44 restantes para discretizar o contorno remanescente e as interfaces de adesivo epóxi. A configuração indeformada e também a malha deformada são apresentadas na Figura 8.38 considerando deslocamentos 30 vezes ampliados.

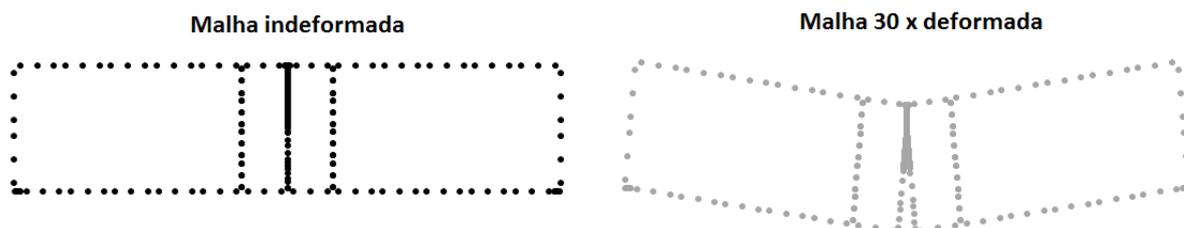


Figura 8.38 Configuração indeformada e malha 30 vezes deformada

Os campos de deslocamentos internos do problema foram avaliados em 390 pontos no interior do domínio via MEC. Esses campos são apresentados em escala de cores na Figura 8.39 plotados com o auxílio do AcadView através de uma malha de domínio a qual conecta os pontos internos formando 350 elementos quadrilaterais de aproximação linear.

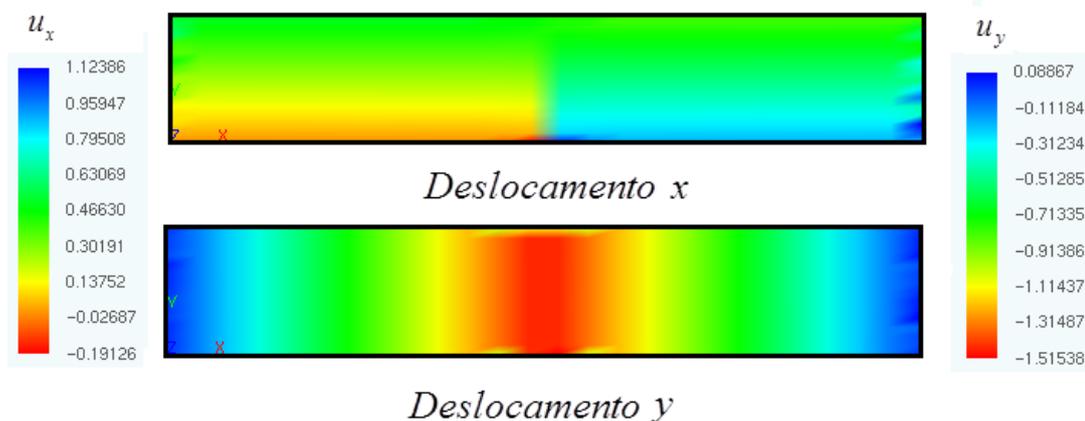


Figura 8.39 Campos de deslocamento dos pontos internos

Novamente a descontinuidade de deslocamentos é verificada na região do fraturamento, nesse caso especificamente para o campo de deslocamentos na direção x . Além disso, é observado que não houve a fratura das interfaces com adesivo epóxi uma vez que os campos de deslocamentos são contínuos nessa região.

O deslocamento prescrito no topo da viga foi imposto em 100 etapas e a tolerância para o processo iterativo foi de $10^{-6} MPa$. As respostas de força versus abertura de entalhe obtidas com as duas formulações do MEC e com os dois operadores OC e OT praticamente não apresentaram discrepância. A resposta do MEC e também as respostas experimental e numérica do referido autor são apresentadas a seguir na Figura 8.40.

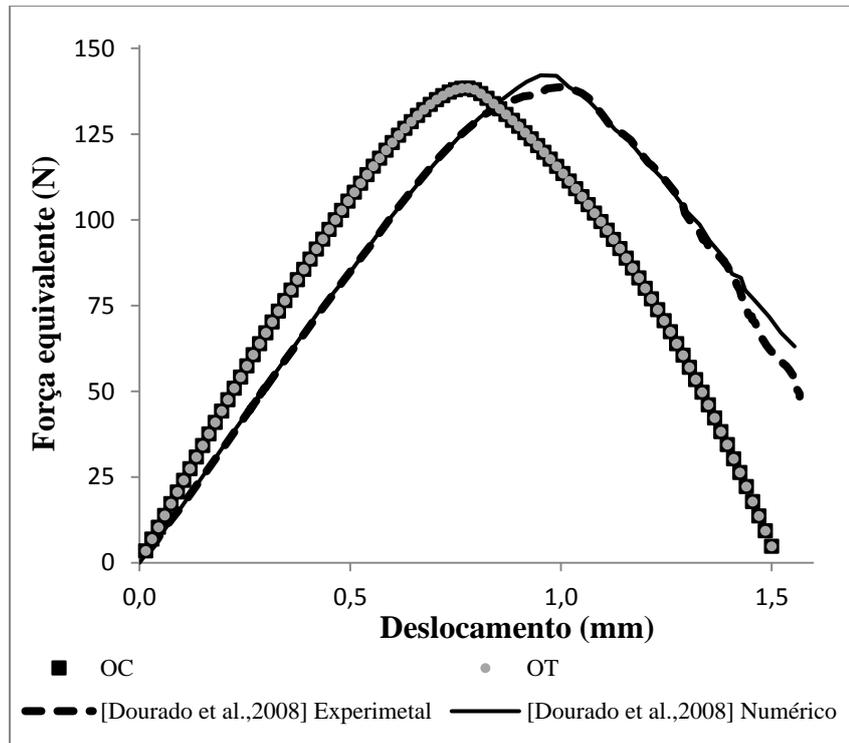


Figura 8.40 Resposta não linear da estrutura

As curvas obtidas com a formulação do presente trabalho foram de maneira geral capazes de reproduzir bons resultados para a resposta não linear da estrutura obtida numericamente e experimentalmente por DOURADO et al. (2008). Em relação à carga de pico, essa foi praticamente a mesma em todas as análises. Os valores obtidos com a formulação de multi-regiões, com os ensaios experimentais e com a simulação via elementos finitos foram 138,38; 138,71 e 142,14 respectivamente. Assim como nos outros exemplos de fratura, no trecho ascendente da curva, a resposta obtida no presente trabalho foi um pouco mais rígida em relação à experimental. Na região de amolecimento, as curvas obtidas com o MEC se mostraram menos rígidas em comparação às experimentais. Portanto, de maneira geral, pode ser concluído que os resultados foram satisfatórios e a formulação desenvolvida foi capaz de simular a fratura coesiva na madeira.

Na Figura 8.41 é apresentada a resposta de tensão versus abertura COD do primeiro par de pontos de interface que entrou no regime coesivo na análise.

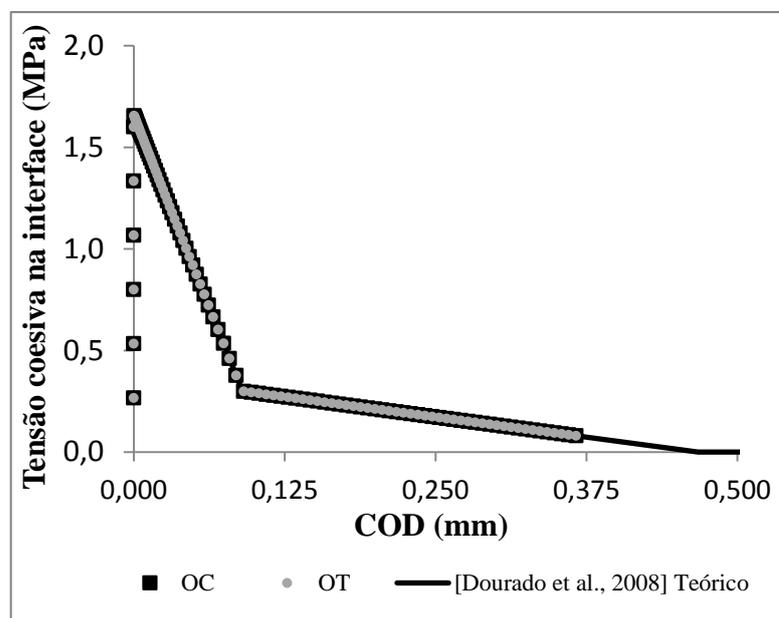


Figura 8.41 Resposta de tensões coesivas na interface

A resposta coesiva reproduziu a curva teórica proposta por DOURADO et al. (2008) conforme o esperado. Além disso, assim como nos outros exemplos onde não ocorreu perda catastrófica de rigidez, não houve grandes espaçamentos entre os pontos de equilíbrios apresentados na curva da Figura 8.41.

Em relação à comparação de eficiência OC e o OT, a Tabela 8.7 a seguir traz os dados de número de iterações processada até o final de ambas as análises.

Tabela 8.7 Comparação de iterações: Exemplo 7

Lei Coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia no número de iterações (%)
Pinus Silvestris	4999	224	~96%

Uma considerável redução de 96% no número de iterações com o OT em relação ao OC é novamente verificada.

A avaliação da estabilidade do sistema de equações no decorrer da análise foi novamente avaliada através do gráfico de NC versus deslocamento da resposta não linear conforme apresentado na Figura 8.42.

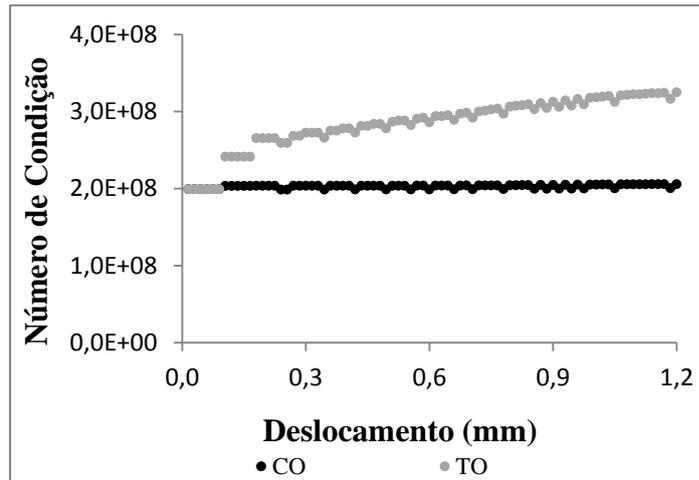


Figura 8.42 Avaliação do número de condição da matriz A ao longo da análise: Exemplo 7

Novamente no caso do OT ouve um certo aumento do número de condição no decorrer da análise. Apesar disso, não houve uma evolução exponencial como a verificada no quarto exemplo. Portanto, é possível afirmar que a análise foi estável até o final. Nesse exemplo, um fato que deve ser destacado é em relação à sensibilidade da resposta não linear da estrutura a depender das dimensões dos três pontos de apoio. Os resultados apresentados na Figura 8.40 foram obtidos considerando um comprimento de apoio de 3,5mm. Para ilustrar essa sensibilidade, a Figura 8.43 a seguir traz as respostas não lineares obtidas considerando os apoios com dimensões de 3,0mm, 3,5mm e 4,0mm. Portanto, considerando as dimensões da viga que são 420 mm e 70 mm, pode-se dizer que pequenas alterações no comprimento de vinculação podem levar a consideráveis diferenças na resposta não linear do problema.

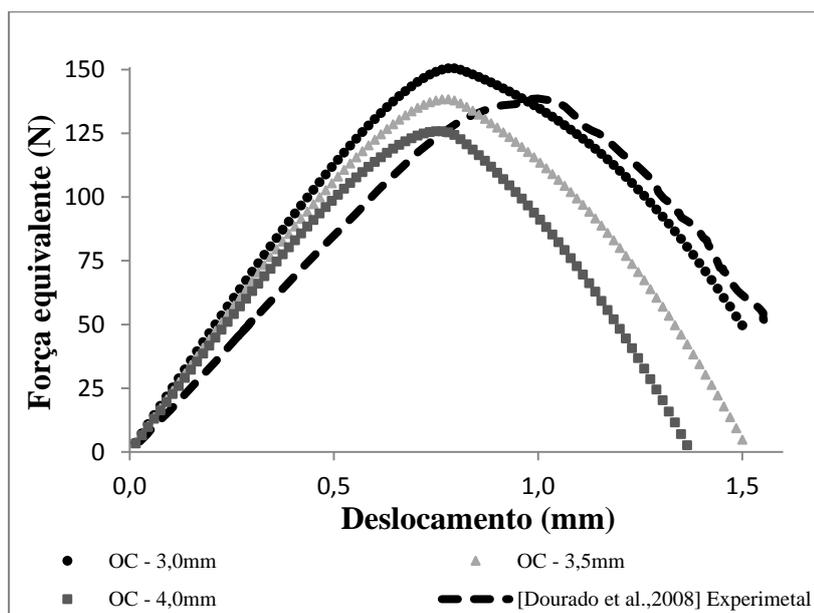


Figura 8.43 Influência da dimensão dos apoios na resposta não linear

8.8 DESCOLAMENTO DE PLACAS ESTRUTURAIS

A última aplicação apresentada trata-se de um problema teórico de descolamento em uma estrutura composta. Ligações estruturais de distintos materiais através de adesivos epóxi, por exemplo, são corriqueiramente utilizadas em problemas reais de engenharia como é o caso das interfaces “skin-stiffener” na indústria aeronáutica. Apesar desse exemplo não abordar especificamente nenhum ensaio de componentes estruturais reais, a partir do mesmo é possível sugerir a aplicabilidade da presente formulação para a análise de descolamento de peças em estruturas compostas. Para ilustrar o problema, considere duas placas, constituídas de diferentes materiais, coladas por meio de um adesivo epóxi cujas propriedades coesivas são $f_t = 3MPa$ e $G_f = 70N/m$. Foi proposto por tanto uma lei linear para representar a perda de capacidade de colagem do adesivo. Considere ainda que as placas possuem grandes comprimentos em relação às dimensões de sua seção transversal de tal forma que o problema possa ser tratado em EPD. O material da placa inferior é composto pelo mesmo material laminado do exemplo 7.3. Já a placa superior é constituída por um material isotrópico cujas constantes elásticas são apresentadas na Figura 8.44 a qual ilustra a seção transversal do problema.

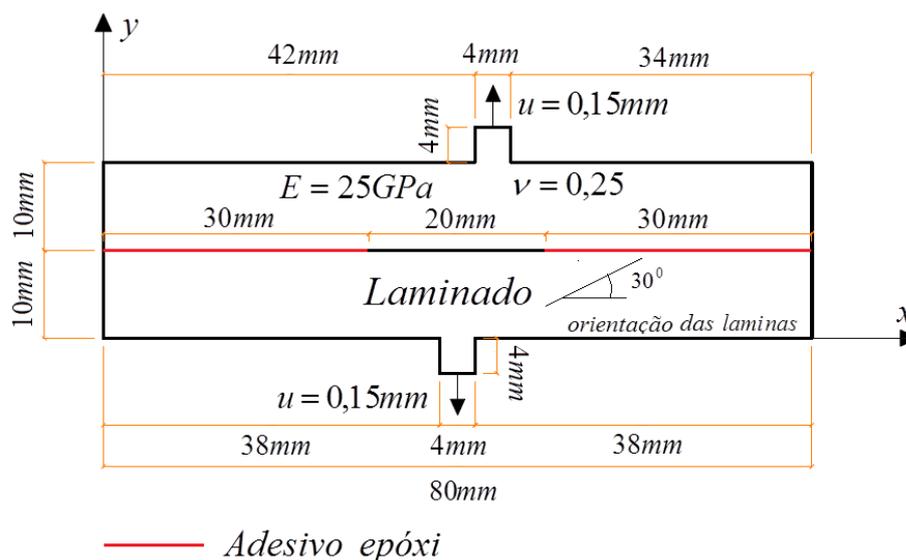


Figura 8.44 Seção composta por placas coladas

Conforme apresentado, o adesivo epóxi encontra-se uni às seções das distintas placas apenas nos 30 primeiros milímetros das extremidades. As placas encontram-se então tracionadas no sentido de romper a ligação adesiva. Nas análises o deslocamento prescrito foi imposto em 50 etapas incrementais e a tolerância adotada para o processo iterativo foi de $10^{-5}MPa$. Para a solucionar o problema não linear novamente ambos os operadores não

lineares OC e OT foram utilizados. A malha adotada para o problema é composta por 101 elementos de contorno de aproximação quadrática totalizando 303 nós. Desses elementos, 2 foram utilizados em contornos com deslocamento prescrito, 15 foram utilizados para cada uma das 4 faces com adesivo epóxi e os 39 elementos restantes foram utilizados no contorno remanescente. A configuração indeformada e também a malha deformada para os incrementos 34 e 50 são apresentadas na Figura 8.45 considerando deslocamentos 50 vezes ampliados.

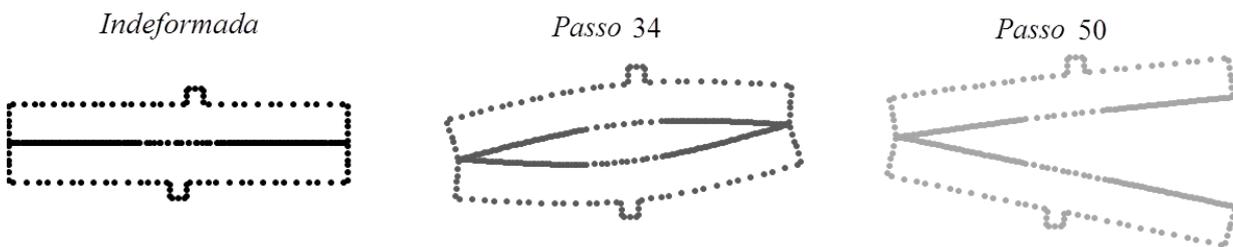


Figura 8.45 Malhas indeformada e deformada nos incrementos 34 e 50

Na figura, a deformada no passo incremental 34 foi apresentada uma vez tal passo foi o último antes do descolamento total da ponta direita do problema. O descolamento da ponta à direita é consistente com o problema proposto devido à excentricidade das saliências tracionadas na estrutura ilustrada em 8.44. A resposta não linear da estrutura é apresentada em forma de um gráfico de força versus deslocamento do ponto de aplicação de carga na região superior da seção. A figura 8.46 a seguir traz essa resposta obtida numericamente com os dois algoritmos de resolução OC e OT.

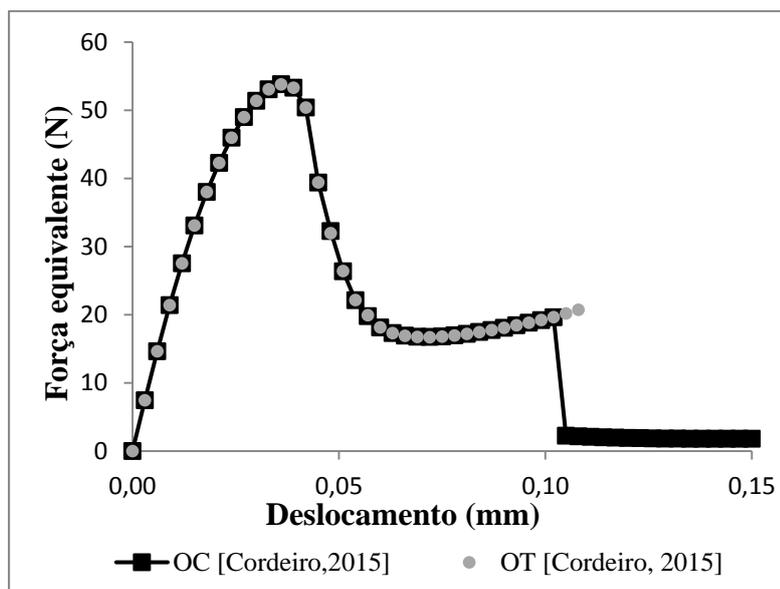


Figura 8.46 Resposta não linear da estrutura

O resultado apresentado na figura acima ilustra uma típica curva de fratura coesiva com um trecho ascendente não linear, uma carga de pico e um trecho de amolecimento. No entanto, ao final da análise houve uma brusca perda de rigidez da estrutura a qual foi capturada pela resposta via OC. Tal fenômeno ocorre justamente entre os passos incrementais 34 e 35 quando é verificado o descolamento total das faces com adesivo epóxi à direita da estrutura. Portanto, o resultado numérico do problema apresenta-se consistente uma vez que a brusca perda de rigidez ocorre devido ao descolamento estrutural conforme o esperado intuitivamente para o problema. Vale ainda destacar que o OT foi eficaz na captura da curva não linear até o momento em que o fenômeno do descolamento total foi observado. Nesse ponto da análise, o algoritmo apresenta perda de estabilidade semelhantemente ao ocorrido em outros exemplos onde bruscas perdas de rigidez são observadas. Além da resposta de força versus deslocamento, também é apresentada a resposta de tensões coesivas em um ponto intermediário da face com adesivo à esquerda da seção. A Figura 8.47 apresenta esse resultado numérico junto com a curva analítica linear de amolecimento proposta para o adesivo.

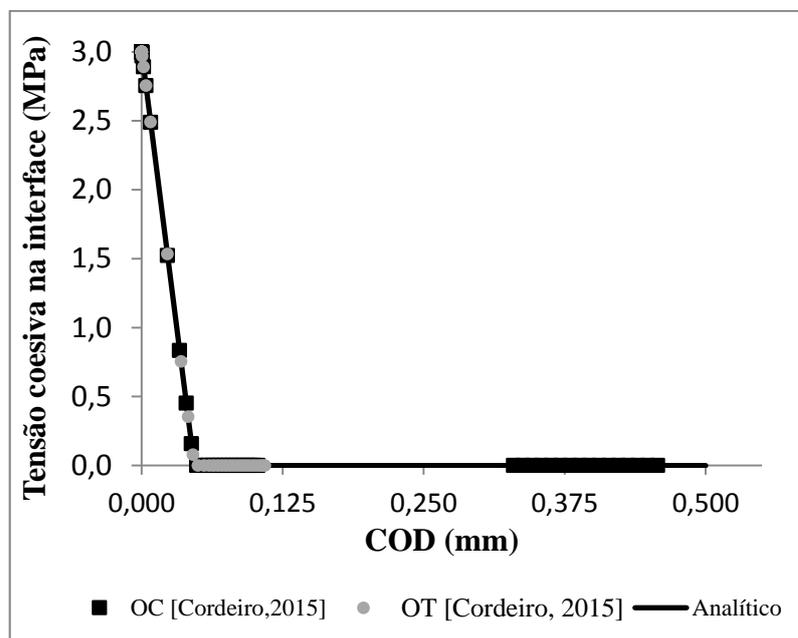


Figura 8.47 Resposta de tensões coesivas no adesivo epóxi

A partir do gráfico é novamente possível perceber o fenômeno do descolamento total a partir do longo trecho linear sobre o eixo das abcissas com ausência de resultados numéricos. Além disso, ainda é possível observar que o algoritmo OT não foi capaz de avaliar a resposta do problema até o final da análise devido à sua perda de estabilidade.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo são apresentadas as conclusões e também algumas discussões pertinentes às aplicações. Essencialmente, o estudo abordou o desenvolvimento de formulações do MEC para a análise mecânica de sólidos planos em regime elástico ou sujeitos a testes de fraturamento. Nas aplicações, materiais isotrópicos e anisotrópicos foram adotados para compor estruturas homogêneas e compostas. Para as aplicações de fratura não linear, embora existissem outras abordagens, o modelo coesivo adotado demonstrou ser adequado para representar a fratura quase frágil dos materiais e reproduzir o comportamento global não linear de estruturas ao longo do fraturamento.

Os tópicos a seguir estão relacionados a discussões sobre as aplicações em regime elástico e os testes de fraturamento. São também feitas sugestões para a continuação da pesquisa visando demonstrar que uma maior gama de problemas pode ser abrangida com o contínuo desenvolvimento da formulação.

9.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS APLICAÇÕES ELÁSTICAS

Em relação às aplicações elásticas, foi possível observar que, de maneira geral, o comportamento mecânico de estruturas compostas foi capturado satisfatoriamente pelas formulações singular e hiper singular dos elementos de contorno. Para assegurar a validação, os campos de deslocamento no contorno e tensões internas, obtidos com o MEC em análises planas EPT e EPD, foram comparados com respostas numéricas obtidas em elementos finitos via o software Ansys. Além disso, a técnica de multi-regiões se mostrou satisfatória para descrever domínios compostos. Nesses problemas, as bruscas variações das tensões devido à mudança de rigidez material foram precisamente capturadas pelo MEC conforme apresentado nos exemplos 7.3 e 7.4.

Com as aplicações, foi ainda possível perceber o quanto a redução da dimensionalidade da malha simplifica a discretização de estruturas compostas em comparação às discretizações de domínio do MEF. Apesar da simplicidade das malhas de contorno, a precisão da resposta numérica para as grandezas internas pode ser tão boa quanto às de uma malha muito refinada de elementos finitos.

Por fim, com o exemplo 7.5, destaca-se a facilidade de se obter os Fatores de Intensidade de Tensão em problemas de trincas utilizando o MEC. Mesmo sem a adoção de nenhuma técnica sofisticada, os valores de Fator de Intensidade de Tensão modo I foram obtidos com relativa boa precisão.

9.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS TESTES DE FRATURA

Considerando agora as aplicações envolvendo fratura, pode-se concluir que as formulações não lineares do MEC conseguem satisfatoriamente impor o comportamento coesivo para as tensões na interface. Dessa forma, as estruturas apresentam um comportamento mecânico altamente não linear o qual foi ilustrado no trabalho com as curvas de força versus deslocamento em pontos específicos dessas mesmas.

Em se tratando de fratura em peças de concreto, com o Exemplo 8.3 foi possível perceber que a formulação de multi-regiões é capaz de reproduzir satisfatoriamente problemas envolvendo fratura em modo I. Já o Exemplo 8.5 demonstra que a formulação também pode ser utilizada para simular a fratura em modo misto no concreto desde que o caminho de propagação seja conhecido. No entanto, é importante atentar-se para o fato de que os operadores adotados, OC e OT, não são capazes de reproduzir instabilidades como o efeito *snap back* em que perdas catastróficas de rigidez são observadas como no Exemplo 8.4.

Com relação à fratura em peças de madeira, as aplicações são mais limitadas. Portanto, apenas exemplos de propagação nas orientações de fratura RL e TL foram apresentados. Nesses casos, a fratura ocorre ao longo da direção longitudinal em um plano de fraqueza do material. Para tais aplicações, os Exemplos 8.6 e 8.7 apresentaram resultados novamente satisfatórios com boa aproximação do comportamento não linear e da carga última da estrutura. Deve-se ainda salientar sobre a sensibilidade da resposta estrutural em relação a pequenas mudanças nas condições de contorno em problemas anisotrópicos. Através do Exemplo 8.7 foi possível perceber essa sensibilidade uma vez que a resposta não linear do problema é fortemente influenciada pelas dimensões dos apoios.

Em relação às comparações de eficiência dos operadores não lineares, pode-se notar uma grande economia no número de iterações com a adoção do OT em detrimento ao OC. Nos exemplos, o número de iterações com o OT chegou a ser até 97% menor do que com o

operador clássico sendo que a resposta obtida com ambos foi praticamente a mesma. Ressalta-se como exceção o Exemplo 8.4 onde problemas de instabilidade foram verificados.

Por fim, no exemplo teórico de descolamento, apesar de não ser possível a comparação com referências de literatura, a consistência dos resultados demonstra a aplicabilidade da formulação desenvolvida para tratar falhas devido a descolamentos em peças estruturais compostas.

9.3 SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

As formulações tratadas no presente trabalho foram capazes de reproduzir bons resultados para algumas interessantes aplicações mecânicas sugeridas nos Capítulos 7 e 8. No entanto, muito ainda pode ser aprimorado no intuito de torná-las mais robustas para a análise de problemas de fratura em estruturas compostas. Nesse sentido, a seguir são apresentadas algumas sugestões para futuras pesquisas.

Uma vez que ambas as formulações singular e hiper singular foram propostas no presente trabalho, é possível desenvolver a formulação dual do MEC para lidar com fissuras internas em meios isotrópicos e anisotrópicos.

Além disso, é possível ainda aprimorar o código para lidar com a propagação de fissuras sem a necessidade de adotar caminhos preestabelecidos como é o caso da fratura nas interfaces. Para isso, critérios de evolução aplicáveis aos materiais de interesse: Concreto, Rochas, Madeiras, Metais e Compósitos, por exemplo, devem ser incorporados na formulação.

Outro tema interessante de investigação é a avaliação de propagação de fissuras internas em domínios compostos transpassando ou não as interfaces entre distintos materiais.

Pode também ser proposta a análise de sólidos compostos anisotrópicos com propagação de múltiplas fissuras tendo em vista os processos de coalescência e bifurcação. O estudo de domínios reforçados com fibras utilizando o acoplamento MEC-MEF sujeitos a processos de fraturamento pode também ser outro foco de estudo para pesquisas futuras.

A abordagem dinâmica dos problemas mecânicos considerando a possibilidade de falha por fraturamento também pode ser alvo de trabalhos pesquisas. Para tanto, acredita-se que com algumas modificações nas formulações do MEC, acrescentando termos inerciais, é possível chegar às expressões algébricas necessárias para tais análises.

No âmbito de efeitos dependentes do tempo, formulações do MEC considerando modelos mecânicos viscosos podem ser implementadas para avaliar propagação de fissuras ao longo do tempo em materiais que estejam suscetíveis a deformações por fluência.

Em relação à resolução dos sistemas de equações não lineares, um recurso de valia que pode ser investigado é o uso do *arc length* como algoritmo complementar. Com o mesmo, espera-se que em problemas onde ocorram perdas catastróficas de rigidez e instabilidades como o *snap back* venham a ocorrer, as respostas não lineares sejam obtidas com precisão e não ocorram perdas de estabilidade do algoritmo.

Por fim, visto que a aproximação por estados planos muitas vezes não é possível para problemas reais de engenharia, formulações tridimensionais do MEC podem ser desenvolvidas para tratar a fratura em estruturas e peças mecânicas com geometria mais complexas por exemplo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS¹

ABEL, N. H. **Ouvres Completes Norvegien Christiania**, v.1, 1823.

ALBUQUERQUE, E. L. **Análise de Problemas dinâmicos em Materiais Anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno**. 2001. 120p. Tese (Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

ALIABADI, M. H. **The boundary element method. Applications in solids and structures**. v. 2, New York: J. Wiley, 2002.

ALIABADI, M. H.; SALEH, A. L. Fracture Mechanics Analysis of Cracking in Plain and Reinforced Concrete using the Boundary Element Method. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 267-280, 2002.

ALLEN, R. J.; BOOTH, G. S.; JUTLA, T. A review of fatigue crack growth characterization by linear elastic fracture mechanics (LEFM). Part 1- Principles and methods of data generation. **In Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.11, n.1, p. 45-69, 1988.

AZEVEDO, C. A. C. **Formulação alternativa para a análise de domínios não-homogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC**. 2007. 168p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

BARENBLATT, G. I. Mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **In Advances in Applied Mechanics**, v.7, p. 55-129, 1962.

BARPI, F.; VALENTE, S. Size-effects induced Bifurcation Phenomena during Multiple Cohesive Crack Propagation. **In International Journal of Solids and Structures**, v.35, p. 1851-1861, 1998.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

BAZANT, S. P.; PLANAS, J. **Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials**. Boca Raton and London: CRC Press, 1998.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic Crack Growth in Finite Elements with minimal Remeshing. **In International Journal of Fracture Mechanics**, v.45, p. 601-620, 1999.

BENABOU, L.; SUN, Z. Numerical study of anisotropic failure in wood under large deformation. **In Materials and Structures**, v.47, 2014.

BENEDETTI, I.; ALIABADI, M.H. A Cohesive Boundary Element Approach to Material Degradation in Three-dimensional Polycrystalline Aggregates. **In: Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIV**, p. 51-55, 2013.

BLANDFORD, G.E.; INGRAFFEA, A.R.; LIGGET, J.A. Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, p. 387-404, 1981.

BODIG, J.; JAYNE, B.A. **Mechanics of wood and wood composites**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

BOSTROM, L. **Method for Determination of the Softening Behavior of Wood and the Applicability of a Nonlinear Fracture Mechanics Model**. 1992. 148p. Ph. D. Thesis—Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1992.

BREBBIA, C. A. Weighted residual classification of approximate methods. **In Applied Mathematical Modelling**, v.2, n.3, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**, Southampton: McGraw Hill, 1989.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986.

CARPINTERI, A. Cracking of strain-softening materials. **In: Aliabadi M.H.; Brebbia C.A.; Parton, V.Z. (eds.) Static and Dynamic Fracture Mechanics**, Southampton: Computational Mechanics Publications, p. 311-365, 1994.

CARPINTERI, A.; CORNETT, P.; BARPI, F.; VALENTE, S. Cohesive Crack Model Description of Ductile to Brittle Size-scale Transition: Dimensional Analysis vs. Renormalization Group Theory. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1809-1839, 2003.

CEN, Z.; MAIER, G. Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-softening structures: A boundary element analysis. **In Fatigue and Fracture of Engineering Materials**, v.15, p. 911-928, 1992.

CERVENKA, J.; KISHEN, J.M.C.; SAOUMA, V.E. Mixed Mode Fracture of Cementitious Bimaterial Interfaces; Part II: Numerical Simulation. **In Engineering Fracture Mechanics**, V.60, p. 95-107, 1997.

CHEN, T.; WANG, B.; CEN, Z.; WU, Z. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.63, p. 591-609, jul. 1999.

CHEN, W.F.; MEI, C.C. Oscillations and Wave Forces in a Man-made Harbour. **In Naval Hydro Symposium**, 10th, Dept. of Civil Eng. MIT., Cambridge, USA, 1974.

CHEN, W. F.; SALEEB, A. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Elasticity and Modeling**. New York: John Wiley and sons, 1982.

CODA, H. B. **Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno**. 1990. 135p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

CRAVO, A. G. S. **Análise de Problemas de Anisotropia 3D com Sub Regiões Utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2008. 164p. Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

CRUSE, T. A. Numerical Evaluation of Elastic Stress Intensity Factor by the Boundary-integral Equation Method. **In: Swedlow, J.L., (ed.) The surface crack: Physical Problems and computational solutions**, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1972.

CRUSE, T. A., SWEDLOW, J.L. **Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites**. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1971. 300 p. Technical Report, Carnegie-Mellon University, Report AFLM-TR-71-268.

CRUSE, T. A.; VANBURE, W. Three Dimensional Elastic Stress Analysis of Fracture Specimen with an edge Crack. **Int. Journal Mech.**, v. 7, p. 7-15, 1971.

DAMASCENO, L. G. **Resistência do Policarbonato ao Environmental Stress Cracking (ESC) Sob a Influência de Concentradores de Tensão em Contato com o Álcool Isopropílico e Metanol**. 2010. 114p. Dissertação (Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologia Industrial) – Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC, Salvador, 2010.

DOLBOW, J.E. **An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics**. 1999. PhD. Thesis– Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, 1999.

DOURADO, N.; MOREL, S.; DE MOURA, M.F.S.F.; VALENTIN, G.; MORAIS, J. Comparison of Fracture Properties of Two Wood Species through Cohesive Crack Simulations. **In Composites: Part A: science and manufacturing**, v.39, p. 415-427, 2008.

DOURADO, N.; de MOURA, M.F.S.F.; MORAIS, J. A numerical study on the SEN-TPB test applied to mode I wood fracture characterization. **In International Journal of Solids and Structures**, v.48, p. 234-242, 2011.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **In Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.8, p. 100-104, 1960.

ELICES, M.; GUINEA, G.V.; PLANAS, J.; GOMEZ, J. The Cohesive Zone Model: Advantages, Limitations and Challenges. **In Engineering of Fracture Mechanics**, v.69, p. 137-163, 2002.

FERNÁNDEZ, L. H S. **Formulação Dual do Método dos Elementos de Contorno Anisotrópico**. 2012. 117p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

FERREIRA, M. D. C.; VENTURINI, W. S.; HILD, F. On the analysis of notched concrete beams: From measurement with digital image correlation to identification with boundary element method. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.78, p. 71-84, oct. 2010.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équation fonctionnelles. **Acta Math**, v.27, n.3, p. 365-390, 1903.

GALVEZ, J.C.; ELICES, M.; GUINEA, G.V.; PLANAS, J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. **In International Journal of Fracture**, v.94, p. 267-284, 1998.

GÁLVEZ, J.C.; ČERVENKA, J.; CEDÓN, D.A.; SAOUMA, V. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. **In Cement and Concrete Research**, v. 32, p. 1567-1585, 2002.

GÁLVEZ, J.C.; PLANAS, J.; SANCHO, J.M.; REYES, E.; CENDÓN, D.A.; CASATI, M.J. An Embedded Cohesive Crack Model for Finite Element Analysis of Quasi-brittle Materials. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.109, p. 369-386, 2013.

GAO, X.W.; GUO, L.; ZHANG, Ch. Three-step multi-domain BEM solver for nonhomogeneous material problems. **In Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.31, p. 965-973, 2007.

GRAY, L.J.; MARTHA, L.F.; INGRAFFEA, A.R. Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.29, p. 1135-1158, 1990.

GRIFFITH, A. A. The phenomenon of Rupture and flow in solids integral. **In Philosophical Transactions of the Royal Society, London**, v.221, p. 163-198, 1921.

GUINEA, G.V.; HUSSEIN, G.; ELICES, M.; PLANAS, J. Micromechanical Modeling of Brick-masonry Fracture. **In Cement and Concrete Research**, v.30, p. 731-737, 2000.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **In Cement and Concrete Research**, v.6, p. 773-782, 1976.

HILLERBORG, A. Application of the Fictitious Crack Model to Different types of Materials. **In International Journal of Fracture**, v.51, p. 95-102, 1991.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **In Transaction of the Royal Institution of Naval Architects**, Series A, v.221, pp. 163-198. Mar. 1913.

INTERNET. **In: Cracking Dams**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. http://www.simsience.org/cracks/advanced/malpasset_current.html

INTERNET. **In: Inspeção de Equipamentos: Estudo de Casos**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. <http://inspecaoequipto.blogspot.com.br/2013/11/caso-050-fratura-fragil-dos-navios.html>

INTERNET. **In: International Business Times**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. <http://www.ibtimes.co.uk/fukushima-nuclear-crisis-japan-faces-power-shortages-175089>

INTERNET. **In: Super Abril**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. <http://super.abril.com.br/tecnologia/barragem-st-francis-686408.shtml>

INTERNET. **In: Wikipedia**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. http://pt.wikipedia.org/wiki/acidente_nuclear_de_Fukushima_I

INTERNET. **In: Wikipedia**. Capturado em 10 de dez. 2014. Online. Disponível na internet. pt.wikipedia.org/wiki/Inundação_de_Jonhstown

IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **In Journal of Applied Mechanics**, v.24, p. 361-364, 1957.

JENQ, Y.S.; SHAH, S.P. A Two Parameter Fracture Model for Concrete. **In Journal of Engineering Mechanics**, V.11, n.4, p. 1227-1241, 1985.

JIANG, Y.S.; VENTURINI, W.S. Limit analysis of slope stability with boundary element methods. **In The IV word congress on comp. mechanics**, Buenos Aires, Argentina, 1998.

KALLIVOKAS, L. F.; JUNEJA, T.; BIELAK, J. A symmetric Galerkin BEM variational framework for multi-domain interface problems. **In Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 3607-3636, 2005.

KARIHALOO, L. B., **Fracture Mechanics & Structural Concrete**. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1995.

KELLOG, O. D. **Foundations of Potencial Theory**. Germany: Springer Verlag, 1929.

KOMATSU, J.S. **Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos**. 1995. 218p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

KUPRADZE, V. D. **Potencial methods in the theory of elasticity**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.

KZAM, A. K. L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. 2009. 200p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

LACHAT, J. C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. 1975. Ph. D. Thesis – University of Southampton, 1975.

LEHMANN, L.; ANTES, H. Dynamic structure-soil-structure interaction applying the symmetric Galerkin boundary element method (SGBEM). In **Mechanics Research Communications**, v. 28, n. 3, p. 297-304, 2001.

LEKHNITSKII, S. G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. Moscow: Mir Publishers, 1963.

LEKHNITSKII, S.G.; TSAI, S.W.; CHERONT, T. **Anisotropic Plates**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

LEONEL, E. D. **Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise de Sólidos Multifraturados**. 2006. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LEONEL, E. D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga**. 2009. 406p. Tese (Doutorado em

Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E. D. **Introdução à Mecânica da Fratura**. São Carlos: Universidade de São Paulo/Departamento de Engenharia de Estruturas, 2011. 157 p. Notas de aula.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. **In Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.34, n. 12, p. 1092-1099, 2010a.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. **In Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.34, n.2, p. 122-129, 2010b.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.78, n.6, p. 1077-1090, 2011.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S.; CHATEAUNEUF, A. A BEM model applied to failure analysis of multi-fractured structures. **In Engineering Failure Analysis**, v.18, p. 1538-1549, 2011.

LI, S.; MEAR, M. E.; XIAO, L. Symmetric weak form integral equation method for three-dimensional fracture analysis. **In Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v.151, p. 435-459, 1998.

LISJAK, A.; GRASSELLI, G.; VIETOR, T. Continuum-discontinuum Analysis of Failure Mechanisms around Unsupported Circular Excavations in Anisotropic Clay Shales. **In International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, v.65, p. 96-115, 2014.

LOPES JR, M.C.; VENTURINI, W.S. Cohesive crack analysis by the boundary element method. **In: Complas, V., (ed.) Oñate, E. & Owen, D.R.J.**, Swansea: Pineridge Press, 1997.

LOUKAS, F. K., TANJEET, J. JACOBO, B. A symmetric Galerkin BEM variational framework for multi-domain interface problems. **In Advances in Boundary Element Techniques**, v. 194, p. 3606-3636, 2005.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**, 4 ed., New York, Dover Publications, 1944.

LYAV, A. **Mathematical theory of elasticity**. Moscow: ONTI, 1935

MACIEL, D. N. **Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais**. 2003. 139p.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

MAI, Y.W. Cohesive Zone and Crack-Resistance (R)-Curve of Cementitious Materials and Their Fibre-Reinforced Composites. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 219-234, 2002.

MALL, S.; MURPHY, J.F.; SHOTTAFER, J.E. Criterion for mixed mode fracture in wood. **In Journal of Engineering Mechanics**, v.109, p. 680-690, 1983.

MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of continuous medium**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969.

MAOR, E. **e: A História de um Número**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.

MARIANI, S.; PEREGO, U. Extended Finite Element Method for Quasi-Brittle Fracture. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.58, p. 103-126, 2003.

MASCIA, N.T. **Considerações a respeito da Anisotropia na Madeira**. 1991. 309p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

MELLINGS, S.C.; ALIABADI, M.H. Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis. **In: Brebbia C.A, (ed.) Boundary elements methods 16th**, p. 149-156, 1994.

MELESH, R. J. Structural analysis of solids. **In Journal of the Structural Division**, v.89, n. ST4, 1963.

MESQUITA, A.D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo**. 2002. 312p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **In Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.10, p. 161-171, 1992.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM. **In Computers & Structures**, v.52, p. 871-878, 1994.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **In Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.11, p. 167-177, 1995.

MIKHLIN, S. G. **Integral equations**. London: Pergamon Press (International series of monographs in pure and applied mathematics), 1957.

MOES, N.; DOLBOW, J; BELYTCHKO, T. A Finite Element Method for Crack growth without Remeshing. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.46, p. 131-150, 1999.

MOHAMADI, S. **EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD for fracture analysis of structures**. Oxford: Blackwell Publishing Ltd, 2008.

MURAKAMI, Y. **Stress Intensity Factors Handbook**. New York: Pergamon Press, 1987.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Groningen, Holand: Noordhoff, 1953.

OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. 132p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

OLIVEIRA, H.L; LEONEL, E.D. Nonlinear BEM Formulation based on Tangent Operator Applied to Cohesive Crack Growth Modelling. **In: Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIV**, p. 171-177, 2013.

PAIVA, J.B. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Interação Solo Estrutura**. 1993. Tese de Livre Docência – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

PANZECA, T.; ZITO, L.; TERRAVECCHIA, S. Internal Springs distribution for quasi brittle fracture via Symmetric Boundary Element Method. **In European Journal of Mechanics A/Solids**, v.28, p. 354-367, jul. 2008.

PAPADOPOULOS, G.A. **Fracture mechanics: the experimental method of caustics and the det.-criterion of fracture**. London: Springer-Verlag, 1993.

PARÍS, F.; CAÑAS, J. **Boundary Element Method fundamentals and applications**. New York: Oxford University Press, 1997.

PÉREZ, G. J. J.; ALIABADI, M. H. A symmetric Galerkin BEM for multi-connected bodies: a new approach. **In Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.25, p. 633-638, 2001.

PLANAS, J.; ELICES, M. Fracture Criteria for concrete: Mathematical approximations and experimental validation. **In Engineering Fracture Mechanics**, V.35, n. 1,2,3, 1990.

PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G.V.; GÓMES, F.J.; CENDÓN, D.A.; ARBILLA, L. Generalizations and Specializations of Cohesive Crack Models. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1759-1776, 2003.

PORTELA, A. **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**. 1992. Ph. D. Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth Southampton, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, p. 1269-1287, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. Dual boundary element method incremental analysis of crack propagation. **In Computers & Structures**, v.46, p. 237-247, 1993.

REYES, E.; GÁLVEZ, J.C.; CASATI, M.J.; CENDÓN, D.A.; SANCHO, J.M.; PLANAS, J. An Embedded Cohesive Crack Model for Finite Element Analysis of Brickwork Masonry Fracture. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.76, p. 1930-1944, 2009.

RICARDELA, P.C. **An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity**. Pittsburg: Dept. Mech. Eng, Carnegie Institute of Technology, Carnegie-Mellon University, 1973.

RICE, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. **In Journal of Applied Mechanics**, v. 35, p. 379-386, 1968.

RIZZO, F. J. An integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. **In Quarterly of Applied Mathematics**, v.25, n.1, p. 83-95, 1967.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. F. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **In International Journal of Solids and Structures**, v.4, n.11, p. 1161-1179, 1968.

RODRÍGUEZ, J. C. G. **Sobre o emprego do Método dos Elementos de Contorno em problemas elásticos bidimensionais**. 1986. 140p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1986.

SANCHES, N. B. **Avaliação dos Parâmetros que Influenciam na Resistência de Poli(Tereftalato de Etileno) a fissuras provocadas por Tensão sob Ação de Agentes Químicos**. 2006. 203p. Tese (Doutorado em Ciência e Tecnologia de Polímeros) – Instituto de Macromoléculas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

SALEH, A. L. **Crack growth in concrete using boundary elements (Topics in Engineering)**. Southampton: WIT Press/ Computational Mechanics publisher, 1997.

SALEH, A.L.; ALIABADI, M.H. Crack Growth Analysis in Concrete Using Boundary Element Method. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.51, p. 533-545, 1995.

SANFORD, R. J. **Principles of fracture mechanics**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.

SIH, C.G.; PARIS, P.C.; IRWIN, G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. **In International Journal of Fracture Mechanics**, v.3, p. 189-203, 1965.

SMIRNOV, V. J. Integral equations and partial differential equations. **In A course in higher mathematics**. London, Addison-Wesley, 1964.

SMITH, I.; LANDIS, E.; GONG, M. **Fracture and Fatigue in Wood**. Chichester: John Wiley & Sons, 2003.

SNYDER, M.D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **In International Journal of Fracture**, v.11, p. 315-328, 1975.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. **In International Journal of Fracture**, v.64, p. 269-284, 1993.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H. Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composites laminates using the boundary element. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.49, p. 213-224, 1994.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M.H. Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method. **In Composite Structures**, v.31, p. 229-233, 1995.

SOUZA, R. A. **Análise de Fraturamento em Estruturas de Concreto Utilizando Programas de Análise**. 2001. 273p. Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

STANZ-TCHEGG, S.E.; TAN, D.M.; TSCHEGG, E.K. New splitting method for wood fracture characterization. **In Wood Science and Technology**, v.29, p. 31-50, 1995.

SURENDRA, P. S., SWARTZ, S. E., OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock, and other quasi-brittle materials**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials**. New York: Dover Publications, 1953.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TING, T.C.T. **Anisotropic Elasticity**, Oxford: Oxford University Press, 1996.

TVERGAARD, V. Cohesive Zone Representations of Failure Between Elastic or Rigid Solids and Ductile Solids. **In Engineering Fracture Mechanics**, v.70, p. 1859-1868, 2003.

VASIC, S.; SMITH, I.; LANDIS, E. Fracture zone characterization – micro mechanical study. **In Wood and Fibers Science**, v.34, p. 42-56, 2002.

VENTURINI, W.S. **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia.** 1988. Tese de Livre Docência – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

VENTURINI, W.S. A new boundary element formulation for crack analysis. **In: Brebbia, C.A., (ed.) Boundary element method XVI.**, Southampton/Boston: Computational Methods Publishers, p. 405-412, 1994.

VENTURINI, W.S. Análise de problemas de fratura coesiva usando o método dos elementos de contorno. **In XVI CILAMCE**, UFpr, Curitiba, Brasil, 1995.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF Aplicados à Análise de Problemas Viscoplasticos em Meios Anisotrópicos e Compostos.** 2004. 193p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

WATSON, J.O. Hermitian cubic end singular element for plane strain. **In: Banerjee P.K.; Watson J.O. (ed.) Developments in boundary element methods 4**, Elsevier Applied Science Publishers, p. 1-28, 1986.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. **In Journal Applied Mechanics**, v.6, pp. A49-A53, 1939.

WRIGHT, D. C. **Environmental Stress Cracking of Plastic**, United Kingdom: Rapra Technology Limited, 1996.

WILSON, R.B.; CRUSE, T.A. Efficient Implementation of Anisotropic Three-dimensional Boundary Integral Equation Stress Analysis. **In International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.12, p. 1383-1397, 1978.

WYLIE, C. R.; BARRETT, L. C. **Advanced engineering mathematics.** New York: McGraw-Hill, 1995.

ANEXO

CHAPA ANISOTRÓPICA SOB TRAÇÃO UNIFORME

O primeiro exemplo do anexo trata de uma chapa sob tração uniforme em EPT constituída pelo mesmo material anisotrópico do segundo exemplo do Capítulo 7. A Figura A.1 ilustra o problema apresentando as dimensões e carregamentos.

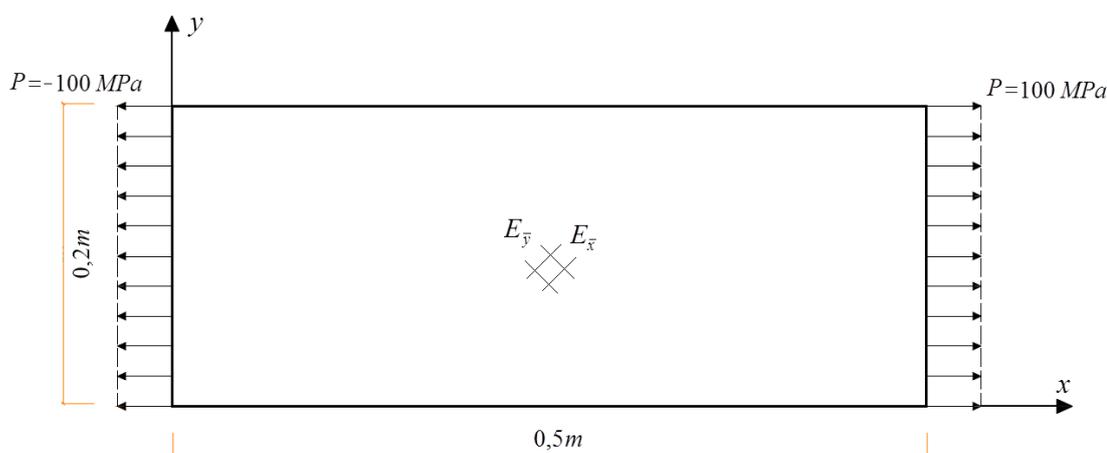


Figura A.1 Chapa anisotrópica sujeita à tração uniforme.

A solução analítica geral para esse problema foi apresentada por LEKHNITSKII (1968) em termos de deslocamentos como sendo:

$$\begin{aligned} u_x &= C_{11} \cdot p \cdot x + C_{16} \cdot p \cdot y \\ u_y &= C_{12} \cdot p \cdot y \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Em termos de deformações e tensões, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{11} \cdot p, & \varepsilon_y &= C_{12} \cdot p, & 2\varepsilon_{xy} &= C_{16} \cdot p \\ \sigma_x &= p, & \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sendo C_{11} , C_{12} e C_{16} constantes elásticas da matriz de flexibilidade do material. Na discretização do problema foram adotados dois elementos quadráticos para cada uma das faces horizontais e um elemento quadrático para cada uma das faces verticais. Nesses últimos, a tração uniforme foi imposta através de deslocamentos prescritos para evitar a singularidade

oriunda dos problemas puros de Neumann. A Figura A.2 traz a malha adotada no problema e também as coordenadas de contorno aberto que serão utilizadas na apresentação dos resultados.

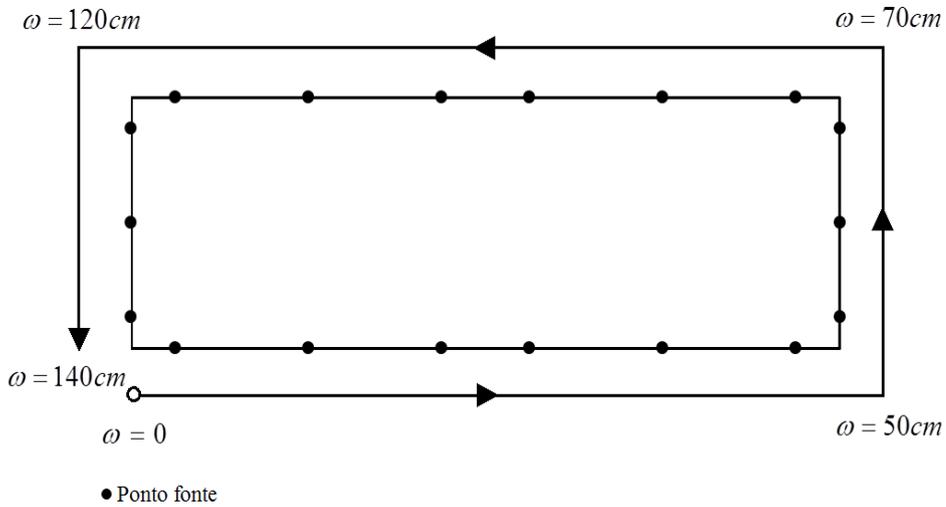


Figura A.2 Malha de elementos de contorno e coordenadas de contorno aberto

O exemplo foi procedido considerando a solução fundamental anisotrópica para as equações integrais singular (MEC S) e hiper singular (MEC HP). Os resultados numéricos de deslocamento e forças ao longo do contorno aberto foram então comparados com a solução analítica nas Figuras A.3 e A.4.

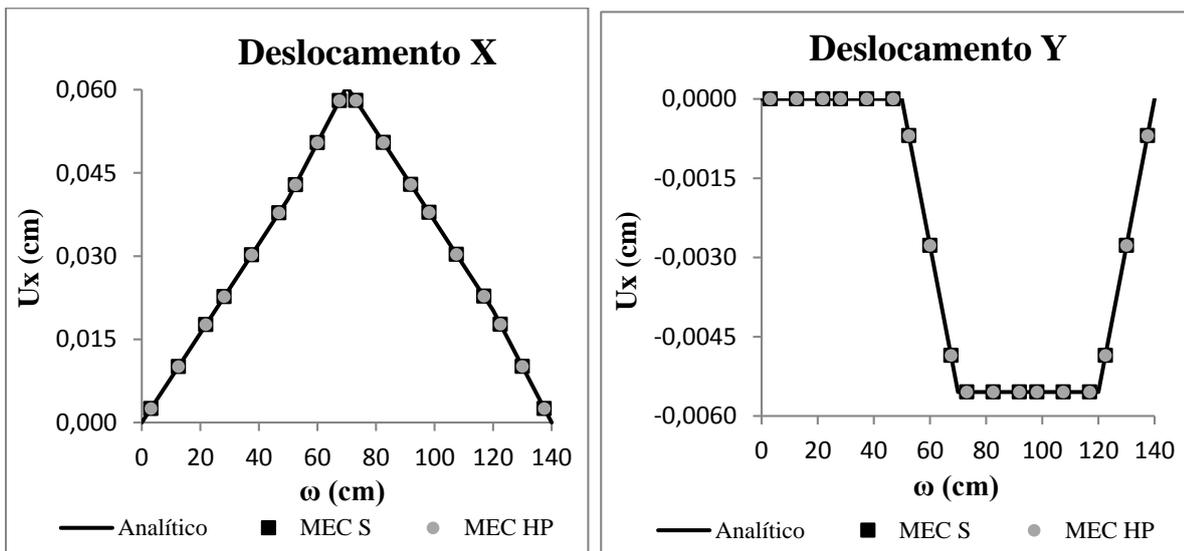


Figura A.3 Resposta de deslocamentos no contorno: MEC versus analítico

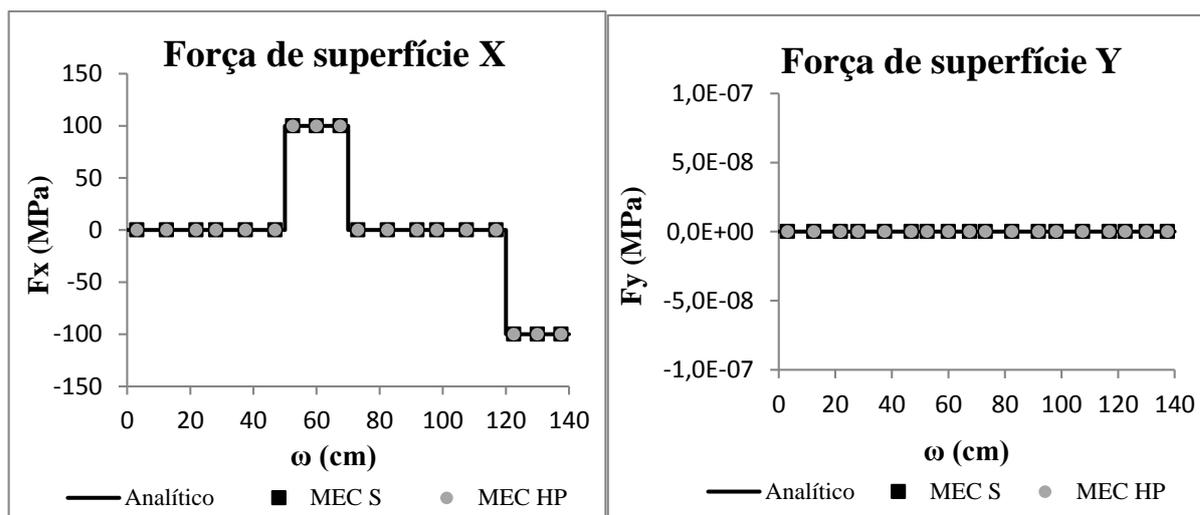


Figura A.4 Resposta de forças de superfície no contorno: MEC versus analítico.

Os resultados mostram que houve uma boa concordância entre as soluções numéricas e analíticas do problema. A Figura A.5 a seguir traz também a configuração deformada da chapa com deslocamentos 100 vezes ampliados. É interessante verificar que devido à anisotropia do material, uma tração uniforme pode gerar uma distorção conforme observado na deformada da estrutura.

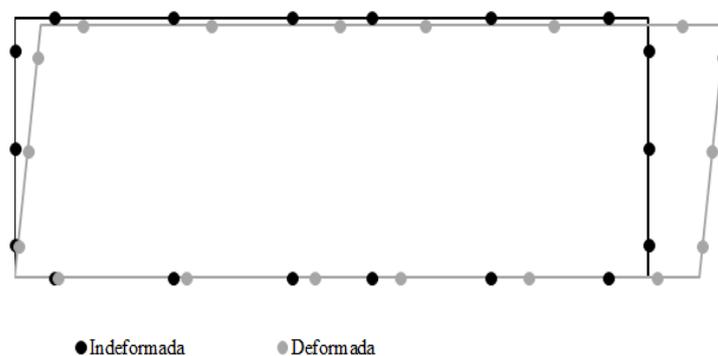


Figura A.5 Configuração indeformada e malha 100 vezes deformada

CHAPA ANISOTRÓPICA SOB CISALHAMENTO PURO

O segundo exemplo trata exatamente da mesma chapa da aplicação passada também em EPT, porém agora submetida ao cisalhamento puro conforme ilustra a Figura A.6.

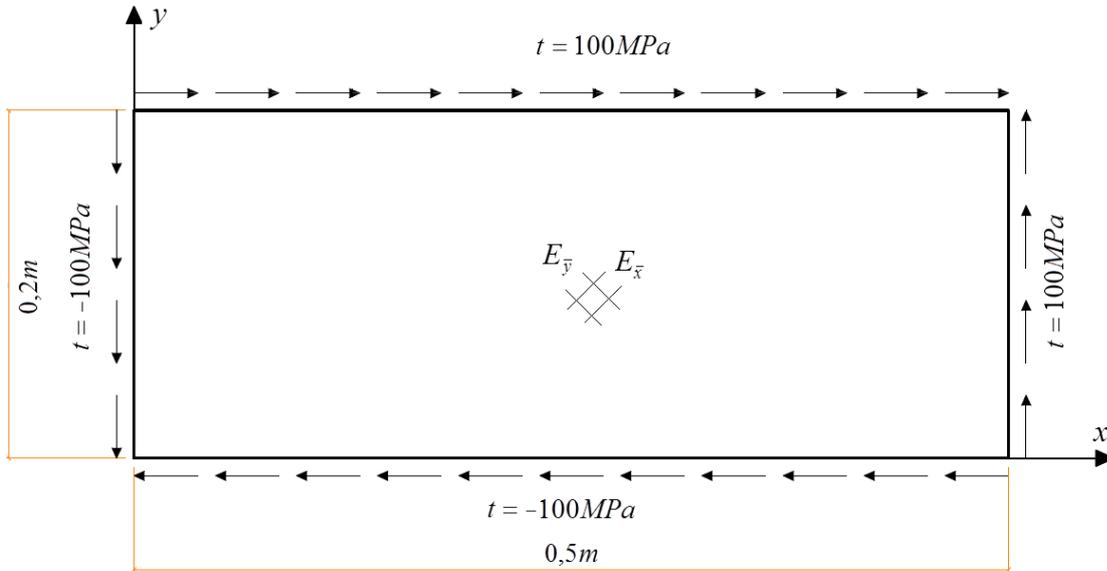


Figura A.6 Chapa anisotrópica sujeita ao cisalhamento puro

Assim como no exemplo anterior, a solução analítica desse problema também existe e foi também apresentada por LEKHNITSKII (1968). Em termos de deslocamentos, a solução pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} u_x &= C_{16} \cdot t \cdot x + C_{66} \cdot t \cdot y \\ u_y &= C_{26} \cdot t \cdot y \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Em termos de deformações e tensões, a solução fica:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{16} \cdot t, & \varepsilon_y &= C_{26} \cdot t, & 2\varepsilon_{xy} &= C_{26} \cdot t \\ \tau_{xy} &= t, & \sigma_x &= \sigma_y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Visando evitar a singularidade característica dos problemas puros de Neumann, novamente foram impostos nas faces verticais deslocamentos prescritos respeitando a solução analítica. Foi adotada a mesma discretização do exemplo anterior para o contorno do problema. A simulação foi procedida novamente com o MEC S e MEC HP e os resultados numéricos de deslocamento e forças ao longo do contorno aberto foram comparados com a solução analítica nas Figuras A.7 e A.8 a seguir.

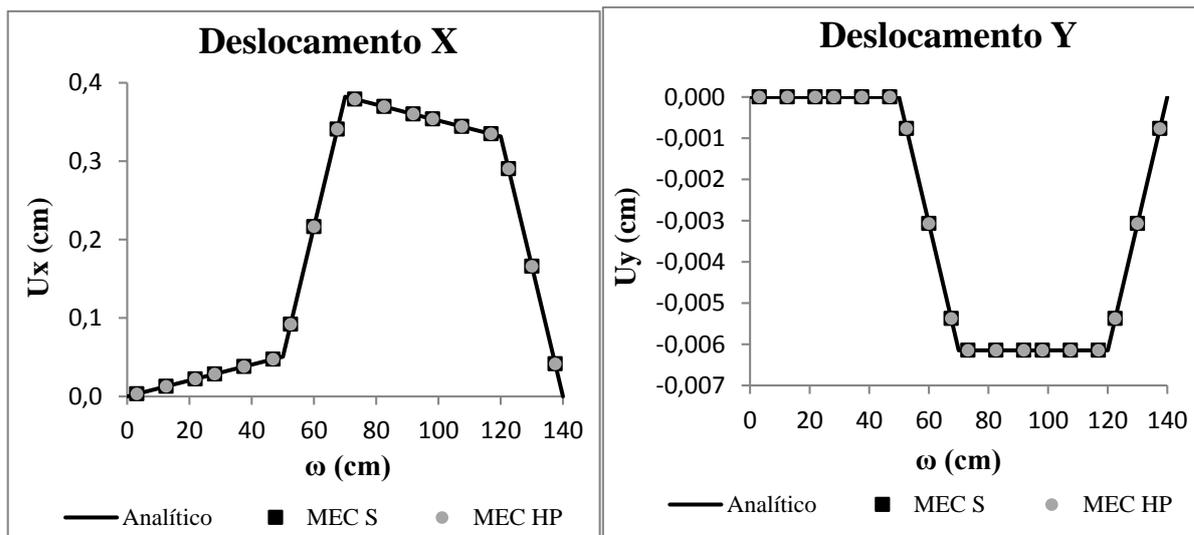


Figura A.7 Resposta de deslocamentos no contorno: MEC versus analítico

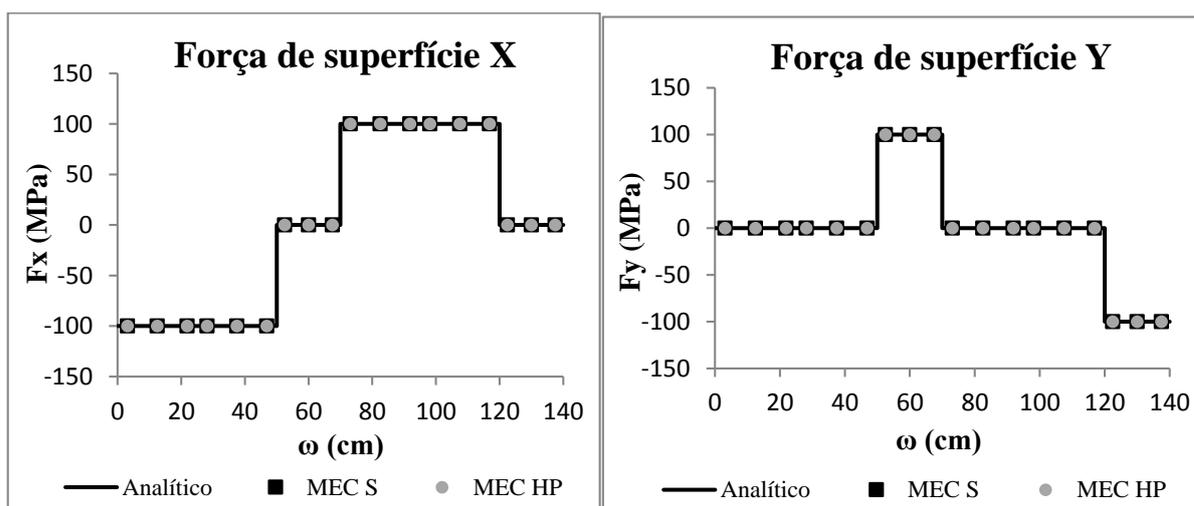


Figura A.8 Resposta de forças de superfície no contorno: MEC versus analítico

Novamente, ambas as formulações do MEC obtiveram boas aproximações para a solução analítica do problema. A configuração deformada da estrutura é apresentada na Figura A.9 com deslocamentos 100 vezes ampliados.

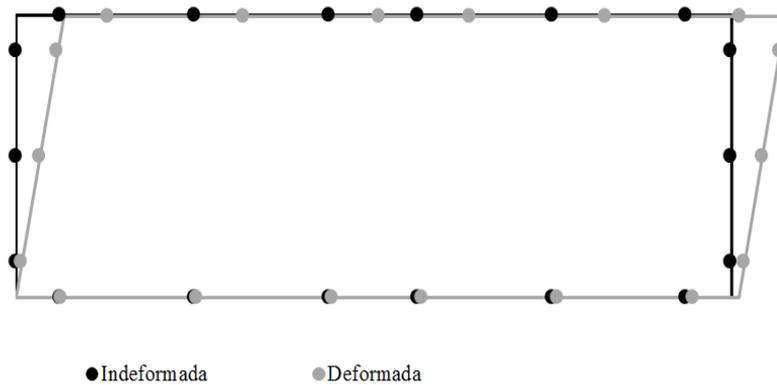


Figura A.9 Configuração indeformada e malha 100 vezes deformada

VIGA ORTOTRÓPICA SOB FLEXÃO PURA

O último exemplo do anexo trata de uma viga de madeira em EPT sob flexão pura. Segundo FERNÁNDEZ (2012), a madeira em questão pode ser considerada um material ortotrópico cujas constantes elásticas dessa madeira são: $E_x = 9,81GPa$, $E_y = 0,41GPa$, $G_{xy} = 0,74GPa$, $\nu_{yx} = -0,01$. O autor não informa qual a espécie de madeira. A Figura A.10 ilustra o problema apresentando as dimensões da viga e também os carregamentos de flexão.

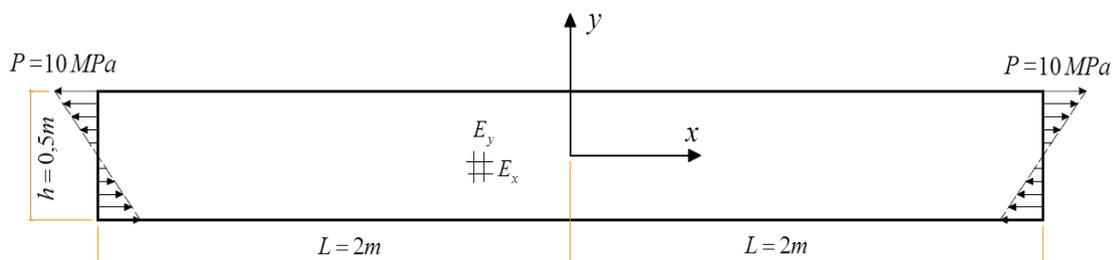


Figura A.10 Viga ortotrópica de madeira sujeita a flexão pura

Novamente em LEKHNITSKII (1968) é possível encontrar a solução analítica para o exemplo em questão. A solução analítica de deslocamentos nesse caso é:

$$\begin{aligned} u_x &= (2 \cdot p/h)C_{11} \cdot x \cdot y \\ u_y &= (p/h)(C_{12} \cdot y^2 - C_{11} \cdot x^2 + C_{11} \cdot L^2) \end{aligned} \quad (A.5)$$

Já em termos de deformações e tensões, a solução pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (2 \cdot p/h)C_{11} \cdot y, & \varepsilon_y &= (2 \cdot p/h)C_{12} \cdot y, & 2\varepsilon_{xy} &= (2 \cdot p/h)C_{16} \cdot y \\ \sigma_x &= (2 \cdot p/h) \cdot y, & \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (A.6)$$

Sendo h e L as dimensões ilustradas na Figura 7.16 e $p = 10\text{MPa}$ a máxima força de superfície nas faces verticais onde foi imposta a flexão. Para evitar singularidades, foram impostos deslocamentos prescritos nas faces verticais da viga baseados na solução analítica do problema. A malha adotada é composta por dois elementos quadráticos para cada uma das faces superior e inferior e um elemento quadrático para cada uma das faces verticais onde foi imposta a flexão. A Figura A.11 apresenta essa malha e também as coordenadas de contorno aberto.

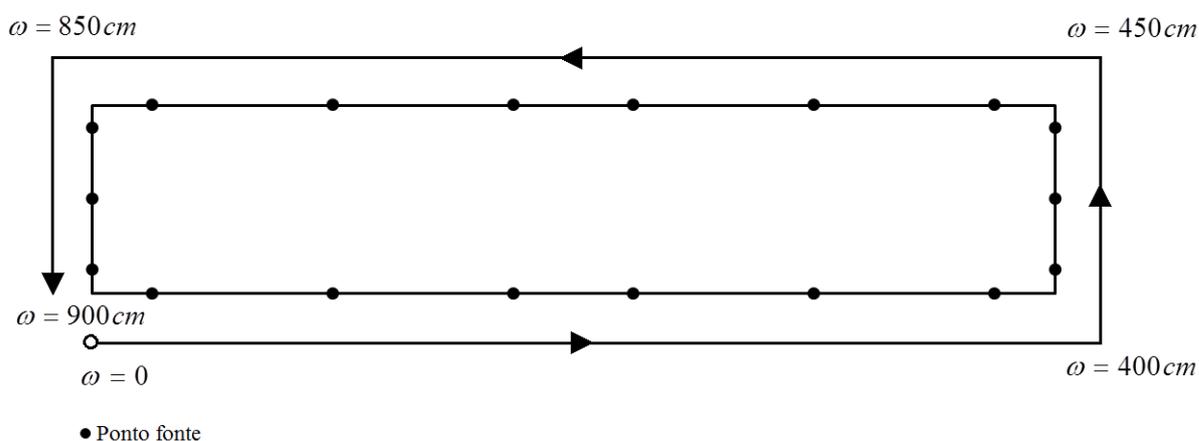


Figura A.11 Malha de elementos de contorno e coordenadas de contorno aberto

Para analisar o problema as duas formulações anisotrópicas MEC S e MEC HP foram adotadas. As Figuras A.12 e A.13 trazem uma comparação entre respostas numéricas de deslocamentos e forças no contorno com a solução analítica de Lekhnitskii.

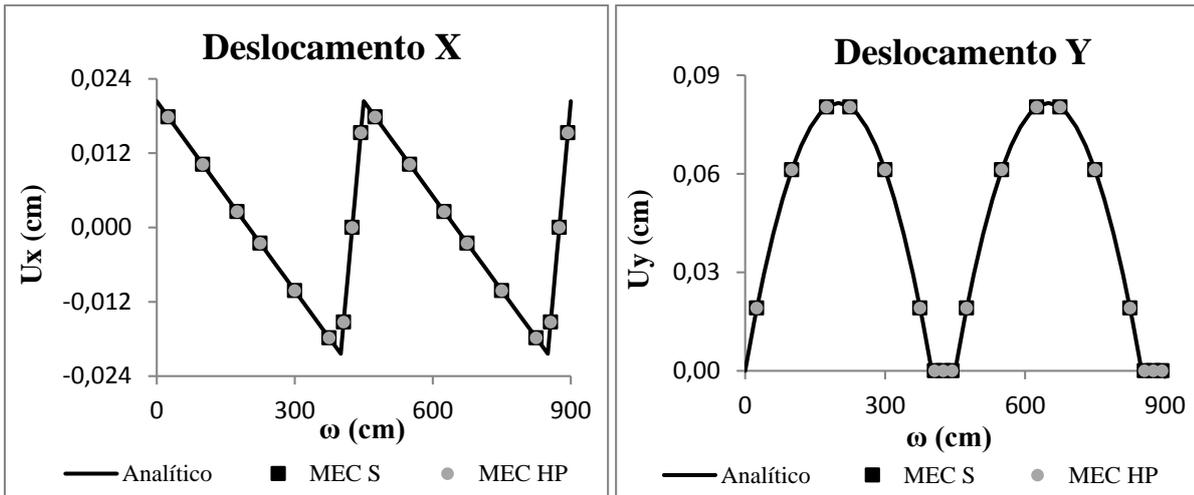


Figura A.12 Resposta de deslocamentos no contorno: MEC versus analítico

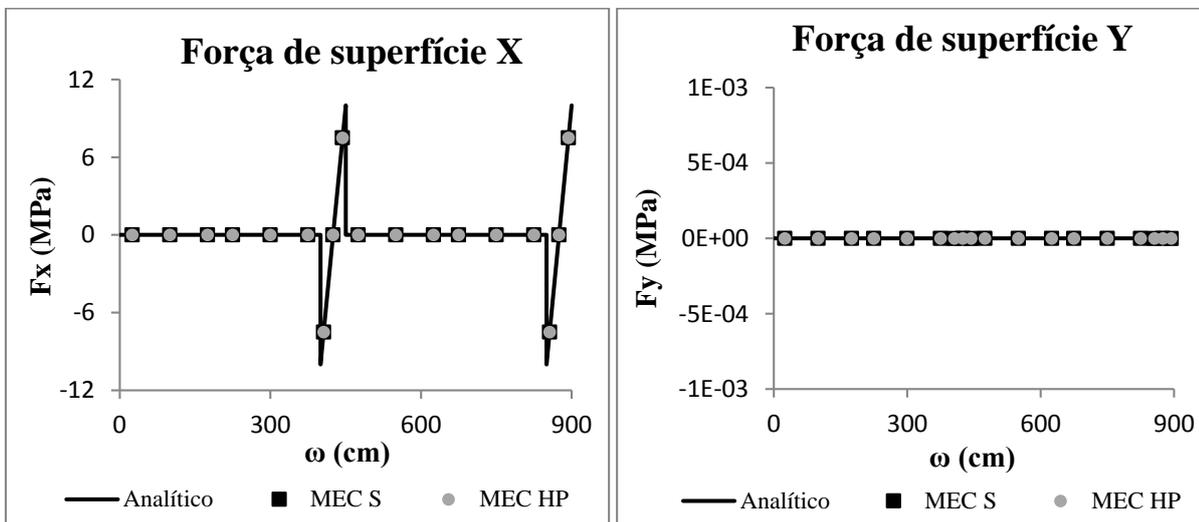


Figura A.13 Resposta de forças de superfície no contorno: MEC versus analítico

A partir dos gráficos percebe-se que as formulações foram capazes de obter boas aproximações para a solução no contorno do problema. Na Figura A.14, a configuração deformada da estrutura é apresentada considerando os deslocamentos 500 vezes ampliados.

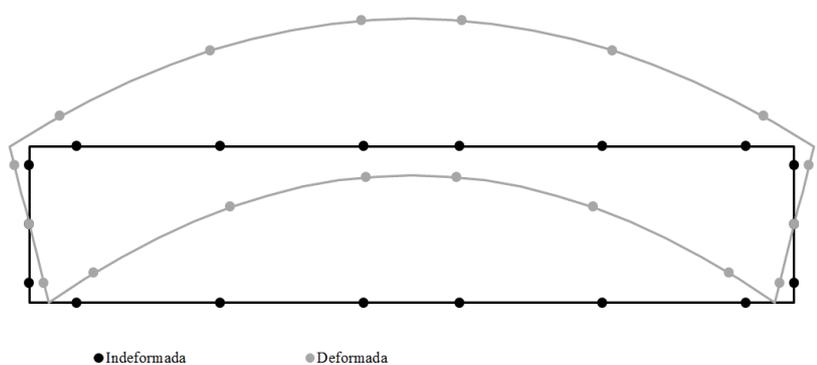


Figura A.14 Configuração indeformada e malha 500 vezes deformada