

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**Fabio Carlos da Rocha**

**Formulação do MEC considerando  
efeitos microestruturais e continuidade  
geométrica  $G^1$ : tratamento de  
singularidade e análise de convergência**

São Carlos  
2015



**Fabio Carlos da Rocha**

**Formulação do MEC considerando  
efeitos microestruturais e continuidade  
geométrica  $G^1$ : tratamento de  
singularidade e análise de convergência**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Engenharia de estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Métodos Numéricos

Orientador: Humberto Breves Coda

Coorientador: Wilson Sérgio Venturini

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

672f Rocha, Fabio Carlos da  
Formulação do MEC considerando efeitos  
microestruturais e continuidade geométrica G1:  
tratamento de singularidade e análise de convergência /  
Fabio Carlos da Rocha; orientador Humberto Breves  
Coda; coorientador Wilson Sérgio Venturini. São Carlos,  
2015.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2015.

1. MEC micromecânico. 2. Continuidade geométrica  
G1. 3. Tratamento de singularidade. 4. Série de  
Laurent. 5. Análise de convergência. I. Título.

*Este trabalho é dedicado ao professor*  
***Wilson Sérgio Venturini (in memoriam).***



---

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me proporcionou saúde, sabedoria e todas as condições para que este trabalho pudesse ser realizado, pois se conclui esta tese de doutorado é porque ele permitiu.

Ao saudoso Professor Wilson Sérgio Venturini pela solicitação da bolsa de doutorado junto ao CNPq, pelo auxílio no início deste trabalho, por tornar realidade o período de estágio de pesquisa na École Normale Supérieure de Cachan (LMT - Cachan - França) e pela grande amizade. Em fim, uma pessoa que deixa muita saudade.

Ao Professor Tit. Humberto Breves Coda pela orientação, dedicação e valiosas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho, e acima de tudo, pela sua disponibilidade em substituir o professor Venturini na supervisão desta tese.

Ao Professor Ahmed Benallal pela colaboração para o desenvolvimento deste trabalho e pela oportunidade de poder desenvolver parte desta tese no Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT - Cachan).

Aos professores Sérgio Proença e Osvaldo Manzoli pelas valiosas contribuições dadas no exame de qualificação.

À minha esposa Aline Rocha por seu companheirismo, paciência e compreensão, principalmente, nos momentos em que tive que me ausentar para poder desenvolver este trabalho.

À minha família que me apoiou e em especial ao meu pai João Carlos da Rocha, meu avô João Rocha Mendonça e à minha avó Elvira da Silva Mendonça.

Aos amigos do SET que proporcionaram momentos de alegria e companheirismo em busca do doutoramento, em especial, ao Aref Kalilo Kzam, Rafael Lins, Maria do Socorro Sampaio, Dorival Piedade, Jesus Villalba, Jesus Sanchez, Edmar Prado, Manoel Dênis, Caio Gorla e tantos outros colegas.

Ao CNPq pelo suporte financeiro concedido para o desenvolvimento desta tese.

Agradeço, ainda, a Universidade Federal de Sergipe por me proporcionar condições para que este trabalho pudesse ser desenvolvida, em especial aos colegas, Jorge Lima, Nilma Andrade, Higor Ârgolo.





*“Tudo deve ser feito de forma mais simples o possível,  
mas nunca de uma forma simplista.”  
(Albert Einstein)*



---

## Resumo

Rocha, Fabio Carlos da **Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais e continuidade geométrica  $G^1$ : tratamento de singularidade e análise de convergência**. 320 p. Tese de doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

Neste trabalho, uma abordagem micromecânica com aproximação da geometria dada por funções de Bézier triangulares com continuidade geométrica  $G^1$  é inserida ao Método dos Elementos de Contorno, o qual é aplicado em problemas da elastostática tridimensional. Para consideração do efeito microestrutural, foi utilizado a teoria gradiente elástica simplificada de Aifantis, a qual é uma particularização da teoria geral de Mindlin. Nesta teoria, um argumento variacional é estabelecido para determinar todas as possíveis condições de contorno, clássica e não-clássica, para o problema de valor de contorno geral. A partir deste argumento, a solução fundamental da elasticidade gradiente é explicitada e com o auxílio da identidade integral recíproca é construído a representação integral de contorno. Para tornar o problema de valor de contorno bem-posto, em adição à representação integral de contorno para deslocamento, uma segunda representação integral para derivada normal do deslocamento foi utilizada. Expressões integrais para deslocamento e tensão em pontos internos são apresentadas. Todos os núcleos das equações integrais são explicitamente desenvolvidos. Para a discretização do MEC foram utilizados elementos triangulares curvos, aproximados tanto para a geometria quanto para os parâmetros físicos por funções de Proriol (com características espectrais) e por funções aqui chamadas de Polinomiais, onde esta última é construída a partir de uma base nodal equidistante e pela imposição da partição da unidade. Entretanto estas funções aproximadoras garantem apenas continuidade  $C^0$  entre os elementos triangulares, ou seja, a garantia da continuidade do plano tangente não necessariamente é satisfeita. Com o objetivo de anular o termo de integral de linha presente na formulação microestrutural, a hipótese de superfície suave se faz necessária e assim funções de Bézier com continuidade geométrica  $G^1$ , a qual depende

apenas da posição e das normais dos nós nos vértices da malha triangular é utilizada. Para auxiliar na obtenção das coordenadas e das normais nodais para geometrias complexas foi utilizado o software de computação gráfica Blender<sup>TM</sup> 2.7, o qual foi acoplado ao programa do MEC elastostático gradiente. Na sequência foi verificada, por meio de exemplos, a suavidade na intersecção entre os elementos triangulares  $G^1$  e estes foram comparados com as aproximações de Proriol e Polinomial. Em seguida, as singularidades presentes nas soluções fundamentais foram tratadas através da expansão em série de Laurent aplicada à técnica de subtração de singularidade. Condições necessárias e suficientes para a convergência das expansões em série das soluções fundamentais, estimador do erro para estas expansões, assim como, a correlação matemática entre o tamanho da malha e o parâmetro micromecânico  $g$  foram estabelecidos. Expressões explícitas da série de Laurent dos núcleos das integrais singulares e hipersingulares do MEC clássico e não clássico foram apresentadas. A verificação do tratamento da singularidade aplicado a elementos triangulares curvos foi realizada, tanto na direção radial quanto na direção angular. E pôde ser observado que ocorre uma perda de eficiência no tratamento da singularidade na direção angular, devida a presença do efeito de camada limite para elementos curvos distorcidos. Entretanto, este efeito de quase singularidade pode ser amenizado por meio da abordagem micromecânica, uma vez que foi observado menor presença do efeito da camada limite à medida que o parâmetro  $g$  é diminuído. Por último, foi desenvolvido um programa na linguagem FORTRAN 11.0, o qual contempla as abordagens clássica e micromecânica com continuidade geométrica  $G^1$ . Sua validação foi feita por meio de exemplos considerados Benchmarks.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno (MEC) micromecânico. Continuidade geométrica  $G^1$ . Tratamento de singularidade. Série de Laurent. Análise de convergência..

---

# Abstract

Rocha, Fabio Carlos da **BEM approach considering microstructural effects and geometric continuity  $G^1$ : treatment of singularities and convergence analysis**. 320 p. Ph.D. Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2015.

In this work, a micromechanical approach with approximation of geometry solved by Bézier triangular functions that guaranty continuity  $G^1$  is inserted to the Boundary element Method (BEM). This formulation is applied in three-dimensional elastostatic problems. The simplified elastic gradient theory proposed by Aifantis, which is a particularization of the general theory of Mindlin is used to consider the microstructural effect. In this theory a variational argument is established to determine all possible boundary conditions, classical and non-classical, for the general boundary value problem. From this argument, the fundamental solution of the gradient elasticity is explicated and by the reciprocal integral identity the boundary integral representation is achieved. In addition to the boundary integral representation for displacement, a second integral representation regarding its normal derivative is used to make the well-posed boundary value problem. Integral expressions for displacement and stress on internal points are also presented. All kernels in the integral equations are explicitly developed. Curved triangular elements are used for the discretization of the BEM. The approximation of both the geometry and physical parameters is performed by Proriol functions (with spectral characteristics) and by Polynomial functions. The last is built from an equidistant nodal basis enforcing the partition of unity. However these approximating functions ensure only  $C^0$  continuity between the triangular elements, that is, the tangent plane continuity assurance is not necessarily satisfied. In order to cancel line integral terms in the microstructural approach, the hypothesis of smooth surface is required and thus Bézier function with geometric continuity  $G^1$ , which depends only on the position and the normal of the nodes at the vertices of the triangular mesh is used. In this study the computer graphics software

called Blender<sup>TM</sup> 2.7 is used to assist in obtaining coordinates and normal vectors at nodes when complex geometries are analyzed. Blender<sup>TM</sup> 2.7 is coupled to the gradient elastic BEM program. The smoothness of the resulting mesh using  $G^1$  elements is compared to Proriol and Polynomial approximations by means of examples. The singularities present in the fundamental solutions are treated by employing the expansion in Laurent series and the singularity subtraction technique. Necessary and sufficient conditions for the convergence of expansions in series of fundamental solutions, error estimator for these expansions, as well as the mathematical correlation between the size of the mesh and the micromechanical parameter,  $g$ , are established. Explicit expressions of Laurent series of the classical and micromechanical kernels for the singular and hypersingular BEM integrals are presented. Treatment of singularity, both in the radial direction and in the angular direction, applied to curved triangular elements is verified. It can be observed that there is a loss of efficiency in the treatment of singularity in the angular direction, due to the presence of the boundary layer effect for distorted curved boundary elements. However, this nearly singularity effect could be alleviated by micromechanics approach, since minor boundary layer effect was observed as the parameter  $g$  is decreased. Finally, using FORTRAN 11.0 language, a computational code is developed, which includes the classic and micromechanics approach with geometric continuity  $G^1$ , and its results are validated by means of Benchmark examples.

**Keywords:** Micromechanical BEM. Geometric continuity  $G^1$ . Treatment of singularity. Laurent series. Convergence analysis..

---

## Lista de ilustrações

Figura 3.1	Representação do contínuo unidimensional . . . . .	57
Figura 3.2	Contínuo unidimensional (a) com deslocamento variando quadraticamente e (b) considerando elementos de menor tamanho. . . . .	58
Figura 3.3	Representação de algumas componentes de $\partial_i u_j$ , $\psi_{ij}$ e $\gamma_{ij}$ . . . . .	61
Figura 3.4	Componentes do tensor de tensão conjugado $\tilde{\mu}$ . . . . .	63
Figura 5.1	Mapeamento do triângulo para o quadrado padrão usando a transformação de Duffy . . . . .	95
Figura 5.2	Distribuição dos nós de interpolação no triângulo padrão a partir da distribuição nodal na linha (unidimensional) . . . . .	97
Figura 5.3	Ilustração da distribuição igualmente espaçada dos nós sobre o triângulo. . . . .	99
Figura 5.4	(a) distribuição dos nós de Lobatto para $m = 6$ . (b) a mesma distribuição mapeada no triângulo equilátero. . . . .	101
Figura 5.5	(a) Rearranjo nodal com simetria em relação aos vértices para $m = 6$ no espaço $\xi_1 - \xi_2$ . (b) mapeamento do triângulo padrão no triângulo equilátero com os lados de comprimento unitário. . . . .	102
Figura 5.6	Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Prorior) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função para o triângulo padrão à medida que o grau da aproximação é elevado. . . . .	103
Figura 5.7	Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Prorior) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão. . . . .	104
Figura 5.8	Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Prorior) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão. . . . .	105

Figura 5.9	Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Proriot) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão. . . . .	106
Figura 6.1	Plano tangente $T_{\mathbf{p}}(S)$ . . . . .	112
Figura 6.2	(a) subtriângulos $T_1, T_2, T_3$ formado pelo vértice no ponto $\mathbf{p}$ e pelos lados do triângulo de referência $T$ . (b) sinal das coordenadas baricêntricas exterior ao triângulo de referência $T$ . . . . .	114
Figura 6.3	Diferença entre a continuidade geométrica e a de funções: o $V$ de $VC$ é parametrizado por dois arcos de parábola com iguais derivadas no vértice, entretanto a forma $V$ não é contínua geometricamente; o $C$ de $VC$ é parametrizada por dois arcos de parábola com derivadas diferentes em seu ponto em comum, entretanto, a forma $C$ é contínua geometricamente. . . . .	116
Figura 6.4	À esquerda é mostrado o conjunto de controle de seis pontos (linhas em negrito) formando um trecho da superfície de Bézier. Os dois triângulos no conjunto de controle que incluem os seus pontos extremos define a derivada ao longo do contorno. A superfície definida pelo conjunto de controle não são continuamente tangente como é mostrado os vincos na superfície (os vincos são visíveis nas silhuetas da interseção dos elementos triangulares, figura à direita). . . . .	117
Figura 6.5	Existência de continuidade da tangente na interface entre superfícies triangulares, mesmo que os pares de sub-triângulos na fronteiras entre as superfícies $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ (região colorida) não sejam coplanares. . . . .	118
Figura 6.6	Reparametrização da curva $\mathbf{C}(u)$ pela função $f$ para obter $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{u})$ . . . . .	121
Figura 6.7	Notação para os vértices e suas respectivas normais do triângulo plano de entrada. . . . .	122
Figura 6.8	Curvas de contorno de ordem 3. . . . .	123
Figura 6.9	Plano gerado pelo vetor tangente $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$ e o vetor $\mathbf{H}_k$ . . . . .	125
Figura 6.10	Pontos de controle de Gregory. . . . .	126
Figura 6.11	Fluxograma para a criação de superfícies quártica de Gregory com continuidade $G^1$ . . . . .	128
Figura 6.12	Procedimento para o cálculo dos vetores $\mathbf{V}_{k,j}$ e da curva $\mathbf{C}(t)$ . . . . .	128
Figura 6.13	Procedimento para o cálculo das curvas $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{H}(t)$ . . . . .	129
Figura 6.14	Elevação da ordem da curva $\mathbf{C}_k(t)$ . . . . .	129
Figura 6.15	Procedimento para o cálculo dos parâmetros $\lambda_{k,j}$ e $\mu_{k,j}$ . . . . .	130
Figura 6.16	Procedimento para o cálculo dos pontos de Gregory $\mathbf{G}_{k,j}$ . . . . .	130
Figura 6.17	Procedimento para o cálculo dos pontos interno $\mathbf{P}_{112}, \mathbf{P}_{121}, \mathbf{P}_{211}$ . . . . .	131
Figura 6.18	Procedimento para a montagem do trecho triangular de Bézier, $\mathbf{S}(u, v, w)$ , com continuidade $G^1$ . . . . .	132



Figura 6.19	Continuidade do plano tangente a partir dos vetores normais $N_1$ e $N_2$ obtidos na interface das superfícies adjacentes $S_1$ e $S_2$ , respectivamente.	136
Figura 6.20	Norma $L^2$ do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria esférica aproximada por Proriol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).	142
Figura 6.21	Norma $L^2$ do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria toroide aproximada por Proriol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).	143
Figura 6.22	Norma $L^2$ do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria elipsoide aproximada por Proriol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).	144
Figura 6.23	Norma $L^2$ do cosseno dos ângulos entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria cilíndrica aproximada por Proriol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).	145
Figura 6.24	Norma $L^2$ do cosseno dos ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria na forma de paralelepípedo aproximado por Proriol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).	146
Figura 6.25	Componentes $n_x$ , $n_y$ e $n_z$ obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ para as seguintes geometrias: esfera (a)-(c), toroide (d)-(f), elipsoide (g)-(i), cilindro de bordas arredondadas (j)-(l) e paralelepípedo de bordas arredondadas (m)-(o).	147
Figura 6.26	Valores da componente $n_x$ na interface entre elementos obtido pelas aproximações de Bézier $G^1$ (imagens (a), (e), (i), (m) e (q)), Proriol ou Polinomial de grau 2 (imagens (b), (f), (j), (h) e (r)), Polinomial de grau 4 (imagens (c), (g), (k), (o) e (s)) e Proriol grau 4 (imagens (d), (h), (l), (p) e (t)) para as seguintes geometrias: esfera (a)-(d), toroide (e)-(h), elipsoide (i)-(l), cilindro de bordas arredondadas (m)-(p) e paralelepípedo de bordas arredondadas (q)-(t).	148

Figura 6.27	Valor médio da distância entre a superfície analítica da esfera e a superfície aproximada gerada pelos elementos triangulares de Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier $G^1$ . . . . .	153
Figura 6.28	Valor médio da distância entre a superfície analítica do toroide e a superfície aproximada gerada pelos elementos triangulares de Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier $G^1$ . . . . .	153
Figura 6.29	Custo computacional, na modelagem da superfície esférica e toroidal, para as aproximações Proriol e Polinomial tendo como referência a aproximação de Bézier $G^1$ . Linhas com marcadores retangulares representam valores mínimos e com marcadores esféricos representam valores máximos. . . . .	155
Figura 6.30	Modelagem da geometria de uma taça (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	158
Figura 6.31	Modelagem da geometria de uma Taça (vista superior). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	159
Figura 6.32	Os gráficos (a) e (d) mostram os detalhes da vista superior para a componente X do vetor normal. Os gráficos (b) e (e) mostram os detalhes da vista superior para a componente Y do vetor normal. Os gráficos (c) e (f) mostram os detalhes da vista frontal para a componente Z do vetor normal. Gráficos (a)-(c) utiliza aproximação de Bézier $G^1$ e (d)-(f) utilizam aproximação Polinomial (ou Proriol). . . . .	160
Figura 6.33	Modelagem da geometria de uma colher (vista superior). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto por Proriol. . . . .	161
Figura 6.34	Detalhes na construção da geometria de uma colher. Os gráficos (a)-(c) mostram os detalhes das componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram os detalhes das componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto por Proriol. . . . .	162

Figura 6.35	Modelagem da geometria de uma cabeça (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	163
Figura 6.36	Modelagem da geometria de uma cabeça (vista perfil). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	164
Figura 6.37	Detalhe da modelagem do nariz e olho da cabeça (vista perfil). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	165
Figura 6.38	Modelagem da geometria da perna (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	166
Figura 6.39	Modelagem da geometria do pé. Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	167
Figura 6.40	Detalhe da modelagem da geometria do pé. Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol. . . . .	168
Figura 7.1	Ponto fonte $x$ localizado na superfície e contornado pela semiesfera . . .	173
Figura 7.2	Ponto fonte (a) em um elemento e (b) conectado por vários elementos . . .	178
Figura 7.3	Imagem no plano paramétrico do elemento de contorno e da região subtraída . . . . .	179
Figura 7.4	Plano paramétrico em coordenadas polar . . . . .	179
Figura 7.5	Gráfico da região de validade da solução fundamental de deslocamento expandido em série para os 30 primeiros termos. . . . .	201

Figura 7.6	Variação das somas parciais da expansão em série da Eq.(7.182) à medida que é aumentado a quantidade de parcelas ( $k$ ) da série e variado a razão $r/g$ (com $g = 10^{-3}$ ). . . . .	202
Figura 7.7	Taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) da solução fundamental de deslocamento à medida que é variada a relação $r/g$ (com $g = 10^{-3}$ ). . . . .	202
Figura 7.8	Gráficos (a), (c) e (e) mostram as regiões de validade (convergência) e os gráficos (b), (d) e (f) a taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) das soluções fundamentais $\tilde{Q}^*$ (gráficos a-b), $\tilde{R}^*$ (gráficos c-d) e $\tilde{P}^*$ (gráficos e-f) à medida que é variada a relação $r/g$ (com $g = 10^{-3}$ ). . . . .	205
Figura 7.9	Gráficos (a), (c) e (e) mostram as regiões de validade (convergência) e os gráficos (b), (d) e (f) a taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) da derivada normal das soluções fundamentais $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$ (gráficos a-b), $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$ (gráficos c-d), $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$ (gráficos e-f) e $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ (gráficos g-h) à medida que é variada a relação $r/g$ (com $g = 10^{-3}$ ). . . . .	206
Figura 7.10	Quantidade de termos necessários para que a série $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ (condição mais desfavorável) obtenha erro máximo de $10^{-10}$ à medida que é variado o valor da constante da microestrutura $g$ . . . . .	207
Figura 7.11	Elemento curvo . . . . .	216
Figura 7.12	Integrando singular $\left[ \frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ , os dois primeiros termos da série de Laurent $\left[ \tilde{Y}_{-1}(\theta) \right]_{(i,j)}$ , $\left[ \tilde{Y}_{-2}(\theta) \right]_{(i,j)}$ e o integrando regular; ponto fonte posição 1, $S = 0.2$ , $g = 1$ e $\nu = 0.2$ . (a) $(i, j) = (1, 1)$ , (b) $(i, j) = (1, 2)$ , (c) $(i, j) = (1, 3)$ , (d) $(i, j) = (2, 1)$ , (e) $(i, j) = (2, 2)$ , (f) $(i, j) = (2, 3)$ , (g) $(i, j) = (3, 1)$ , (h) $(i, j) = (3, 2)$ e (i) $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação $G^1$ . . . . .	217
Figura 7.13	Núcleo regular para $\left[ \frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ quando (a) $(i, j) = (1, 1)$ , (b) $(i, j) = (1, 2)$ , (c) $(i, j) = (1, 3)$ , (d) $(i, j) = (2, 1)$ , (e) $(i, j) = (2, 2)$ , (f) $(i, j) = (2, 3)$ , (g) $(i, j) = (3, 1)$ , (h) $(i, j) = (3, 2)$ e (i) $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1, $S = 0.2$ , $g = 1$ e $\nu = 0.2$ . Aproximação $G^1$ . . . . .	218
Figura 7.14	Núcleo regularizado para $\left[ \frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ para os casos (a) $(i, j) = (1, 1)$ , (b) $(i, j) = (1, 2)$ , (c) $(i, j) = (1, 3)$ , (d) $(i, j) = (2, 1)$ , (e) $(i, j) = (2, 2)$ , (f) $(i, j) = (2, 3)$ , (g) $(i, j) = (3, 1)$ , (h) $(i, j) = (3, 2)$ e (i) $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1, $S = 0.2$ , $g = 1$ e $\nu = 0.2$ . Aproximação $G^1$ . . . . .	219

Figura 7.15 Comportamento do integrando regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ , ponto fonte na posição 1,  $\nu = 0.2$  e  $S = 0.2$  para (a-c)  $(i, j) = (1, 1)$ , (d-f)  $(i, j) = (2, 2)$  e para (g-i)  $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação  $G^1$  . . . . . 220

Figura 7.16 Integrando singular  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = \left[\mathbf{Z}^{312}\right]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ , os dois primeiros termos da série de Laurent  $\left[\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)\right]_{(i,j)}$ ,  $\left[\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)\right]_{(i,j)}$  e o integrando regular; ponto fonte posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação  $G^1$  . . . . . 221

Figura 7.17 Núcleo regular para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = \left[\mathbf{Z}^{312}\right]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$  quando (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$  . . . . . 222

Figura 7.18 Núcleo regularizado para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = \left[\mathbf{Z}^{312}\right]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$  para os casos (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$  . . . . . 223

Figura 7.19 Núcleo regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $g = 1$  para a aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ . . . . . 224

Figura 7.20 Núcleo regularizado para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = \left[\mathbf{Z}^{312}\right]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$  para aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ . . . . . 224

Figura 7.21 Núcleo regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $g = 1$  para aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ . . . . . 225

Figura 7.22	Núcleo regularizado para $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = [\mathbf{Z}^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ ; Ponto fonte na posição 1; $S = 1.0$ , $E = 10000$ , $\nu = 0.2$ para aproximação $G^1$ (a) $(i, j) = (1, 1)$ , (b) $(i, j) = (2, 2)$ , (c) $(i, j) = (3, 3)$ e para aproximação de Prorior / Polinomial de grau 2 (d) $(i, j) = (1, 1)$ , (e) $(i, j) = (2, 2)$ , (f) $(i, j) = (3, 3)$ . . . . .	226
Figura 7.23	Núcleo regularizado para $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1; $S = 1.0$ , $E = 10000$ , $\nu = 0.2$ para a aproximação $G^1$ (a) $(i, j) = (1, 1)$ , (b) $(i, j) = (2, 2)$ , (c) $(i, j) = (3, 3)$ e para aproximação de Prorior / Polinomial de grau 2 (d) $(i, j) = (1, 1)$ , (e) $(i, j) = (2, 2)$ , (f) $(i, j) = (3, 3)$ . . . . .	226
Figura 8.1	Geometria do cilindro sólido sob tensão axial. . . . .	229
Figura 8.2	Deslocamento axial $u(y)$ do cilindro sólido versus distância $y$ à medida que é variado o parâmetro micromecânico $g$ . . . . .	229
Figura 8.3	Deformação axial $\varepsilon(y)$ do cilindro sólido versus distância $y$ à medida que é variado o parâmetro micromecânico $g$ . . . . .	230
Figura 8.4	Tensão de Cauchy $\tau_{yy}$ do cilindro sólido versus distância $y$ à medida que é variado o parâmetro micromecânico $g$ . . . . .	230
Figura 8.5	Tensão dual $\mu_{yyy}$ do cilindro sólido versus distância $y$ à medida que é variado o parâmetro micromecânico $g$ . . . . .	231
Figura 8.6	Tensão total $\sigma_{yy}$ do cilindro sólido versus distância $y$ à medida que é variado o parâmetro micromecânico $g$ . . . . .	231
Figura 8.7	Geometria da esfera sólida submetida a um deslocamento radial. . . . .	233
Figura 8.8	Deslocamento radial $u_r$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . . . . .	233
Figura 8.9	Deformação radial $\varepsilon_r$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . . . . .	234
Figura 8.10	Tensão dual $\mu_{rrr}$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . . . . .	234
Figura 8.11	Tensão total $\sigma_{rr}$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . . . . .	235
Figura 8.12	Geometria da esfera sólida submetida a força de superfície radial. . . . .	237
Figura 8.13	Deslocamento radial $u_r$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . Com condição de contorno clássica $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ e não clássica $\mathbf{R}(a) = 0$ . . . . .	237
Figura 8.14	Deformação radial $\varepsilon_{rr}$ em função da distância radial do sólido esférico de raio $a$ à medida que é variado o parâmetro $g$ . Com condição de contorno clássica $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ e não clássica $\mathbf{R}(a) = 0$ . . . . .	238
Figura 8.15	Geometria da cavidade esférica submetida a deslocamento radial. . . . .	239

- Figura 8.16 Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ . . 240
- Figura 8.17 Deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ . . 240
- Figura 8.18 Tensão dual  $\mu_{rrr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ . . 241
- Figura 8.19 Tensão total  $\sigma_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ . . 241
- Figura 8.20 Geometria da cavidade esférica submetida a pressão externa aplicada radialmente. . . . . 243
- Figura 8.21 Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ . . 243
- Figura 8.22 Deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ . . 244
- Figura 8.23 Tensão dual  $\mu_{rrr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ . . 244
- Figura 8.24 Tensão total  $\sigma_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0\hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ . . 245





---

## Lista de tabelas

Tabela 1	Características geométrica, quantidade de elementos e grau da aproximação para a geometria paramétrica obtidas via Gmesh 2.8.5. . . . .	134
Tabela 2	Características geométrica, quantidade de elementos, quantidade de nós e grau da aproximação para as geometrias complexas não paramétrica obtidas via <i>Blender<sup>TM</sup></i> 2.7. . . . .	135
Tabela 3	Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana $L^2$ do cosseno do ângulo entre as normais na interface dos elementos adjacentes com grau 4 tanto para a base de nós equidistante quanto para a base de Lobatto e grau equivalente a 4 para Bézier $G^1$ . . . . .	141
Tabela 4	Comparação dos parâmetros estatísticos para as aproximações Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier $G^1$ . . . . .	149
Tabela 5	Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana $L^2$ da distância entre a superfície esférica analítica e a superfície aproximada obtida pelas funções de Proriol (nós de Lobatto), Polinomial (nós equidistantes) e Bézier $G^1$ . . . . .	151
Tabela 6	Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana $L^2$ da distância entre a superfície toroidal analítica e a superfície aproximada obtida pelas funções de Proriol (nós de Lobatto), Polinomial (nós equidistantes) e Bézier $G^1$ . . . . .	152
Tabela 7	Parâmetros estatísticos para o cosseno do ângulo entre as normais na interface dos elementos adjacentes obtidas pelas aproximações de Proriol (ou Polinomial) de grau 1 e pela aproximação de Bézier $G^1$ para geometrias complexas: taça, colher, cabeça e perna. . . . .	169



---

## Lista de siglas

**AEC** Análise de Elementos de Contorno

**2-D** bidimensional

**3-D** tridimensional

**MEC** Método dos Elementos de Contorno

**MCG** Mecânica do Contínuo Generalizada

**MEF** Método dos elementos Finitos

**NLSA** Near Least Square Acceleration

**PDV** Propriedade de Diminuição da Variação

**PN** Point Normal

**TCP** transformação de coordenadas polar



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>31</b>
1.1	Motivação . . . . .	32
1.2	Inovação . . . . .	33
1.3	Objetivo . . . . .	34
1.3.1	Objetivo Geral . . . . .	34
1.3.2	Objetivos Específicos . . . . .	34
1.4	Metodologia . . . . .	35
1.5	Divisão da tese . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>39</b>
2.1	Mecânica do Contínuo Generalizado . . . . .	39
2.1.1	Algumas generalizações . . . . .	40
2.1.2	Teorias gradiente . . . . .	44
2.2	Geração de superfícies a partir de sistema CAGD . . . . .	48
2.2.1	Revisão histórica do CAGD . . . . .	48
2.2.2	De Casteljau e Bézier na história do CAGD . . . . .	50
2.2.3	Superfície de Bézier aplicada à Equação Integral de Contorno . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Teoria de Mindlin para Elasticidade com Efeito Microestrutural</b>	<b>57</b>
3.1	Introdução . . . . .	57
3.2	Teoria da elasticidade gradiente de deformação . . . . .	59
3.2.1	Cinemática . . . . .	59
3.2.2	Equações de equilíbrio e condições de contorno . . . . .	60
3.2.3	Equações constitutivas . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais</b>	<b>69</b>
4.1	Introdução . . . . .	69
4.2	Equações constitutivas e condições de contorno . . . . .	69

4.3	Soluções fundamentais da elasticidade gradiente bi- e tridimensionais . . . . .	74
4.4	Identidade Integral para elasticidade gradiente . . . . .	77
4.5	Representação integral de contorno para problemas da elasticidade gradiente	79
4.6	Representação integral das deformações e tensões no interior do corpo elástico gradiente . . . . .	82
4.7	Discretização numérica da formulação integral para deslocamento e forças de superfície no contorno . . . . .	85
4.8	Discretização numérica da formulação integral para deslocamento, defor- mação e tensão interna . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Interpolação de ordem qualquer</b>	<b>91</b>
5.1	Introdução . . . . .	91
5.2	Expansão triangular de alta ordem . . . . .	92
5.3	Base polinomial de Proriorl . . . . .	95
5.4	Distribuições nodal de alta ordem e espectral . . . . .	97
5.4.1	A constante de Lebesgue . . . . .	98
5.4.2	Distribuição nodal uniforme no triângulo . . . . .	98
5.4.3	Distribuição nodal de Lobatto no triângulo . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Elementos triangulares com continuidade <math>G^1</math></b>	<b>107</b>
6.1	Introdução . . . . .	107
6.2	Fundamentos teórico . . . . .	108
6.2.1	Curvas de Bézier . . . . .	109
6.2.2	Superfícies de Bézier . . . . .	111
6.2.3	Continuidade geométrica . . . . .	114
6.3	Técnica para a construção de superfícies suaves . . . . .	122
6.4	Procedimento para a geração de superfícies suaves . . . . .	127
6.5	Exemplos de aplicação . . . . .	131
6.5.1	Descrição geométrica . . . . .	132
6.5.2	Análise da continuidade do plano tangente . . . . .	133
6.5.3	Análise da capacidade de representação da geometria . . . . .	140
6.5.4	Custo computacional . . . . .	150
6.5.5	Análise de superfícies suaves não paramétricas e complexas . . . . .	154
<b>7</b>	<b>Tratamento de singularidade e análise numérica de convergência</b>	<b>171</b>
7.1	Introdução . . . . .	171
7.2	Análise limite das equações integrais do MEC . . . . .	172
7.2.1	Formulação clássica . . . . .	173
7.2.2	Formulação microestrutural . . . . .	175
7.3	Tratamento das singularidades nas equações integrais do MEC . . . . .	177

7.4	Expansão em série e análise de convergência da solução fundamental para a formulação do MEC microestrutural tridimensional . . . . .	181
7.4.1	Expansão em série da solução fundamental $\tilde{U}^*(r, \mu, \nu, g)$ . . . . .	182
7.4.2	Expansão em série da solução fundamental $\tilde{Q}^*(r, \mu, \nu, g)$ . . . . .	182
7.4.3	Expansão em série da solução fundamental $\tilde{R}^*(r, \mu, \nu, g)$ . . . . .	183
7.4.4	Expansão em série da solução fundamental $\tilde{P}^*(r, \mu, \nu, g)$ . . . . .	184
7.4.5	Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$ . . . . .	188
7.4.6	Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$ . . . . .	188
7.4.7	Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$ . . . . .	189
7.4.8	Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ . . . . .	191
7.4.9	Análise de convergência das expansões em série das soluções fundamentais . . . . .	199
7.5	Expressões explícitas das séries de Laurent e dos parâmetros $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$ para problemas elastostáticos do MEC tridimensional (3-D) . . . . .	204
7.5.1	Subtração de singularidade aplicada à formulação Clássica do MEC	207
7.5.2	Subtração de singularidade aplicada à formulação micromecânica do MEC . . . . .	208
7.5.3	Expansões em série de Laurent . . . . .	209
7.5.4	Cálculo dos parâmetros $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$ . . . . .	215
7.6	Verificação do tratamento da singularidade . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Exemplos de validação</b>	<b>227</b>
8.1	Exemplo 1 . . . . .	227
8.2	Exemplo 2 . . . . .	228
8.3	Exemplo 3 . . . . .	235
8.4	Exemplo 4 . . . . .	236
8.5	Exemplo 5 . . . . .	239
	<b>Conclusão</b>	<b>247</b>
	<b>Referências</b>	<b>251</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>263</b>
	<b>APÊNDICE A Apêndice A</b>	<b>265</b>
	A.1 Apêndice A.1 . . . . .	265
	A.2 Apêndice A.2 . . . . .	266
	A.3 Apêndice A.3 . . . . .	267
	<b>APÊNDICE B Apêndice B</b>	<b>269</b>

<b>APÊNDICE C</b>	<b>Apêndice C</b>	<b>271</b>
C.1	Apêndice C.1 . . . . .	271
C.2	Apêndice C.2 . . . . .	271
<b>APÊNDICE D</b>	<b>Apêndice D</b>	<b>273</b>
D.1	Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{U}}^*$ . . . . .	273
D.2	Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ . . . . .	273
D.3	Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{R}}^*$ . . . . .	274
D.4	Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{P}}^*$ . . . . .	275
<b>APÊNDICE E</b>	<b>Apêndice E</b>	<b>281</b>
E.1	Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	281
E.2	Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	281
E.3	Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	282
E.4	Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	284
E.4.1	Parcela $\frac{\partial (\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*)^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	284
E.4.2	Parcela $\frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y); \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	285
E.4.3	Parcela $\frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y); \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	288
E.4.4	Parcela $\frac{\partial [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*{}^{2134})]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	289
E.4.5	Parcela $\frac{\partial [(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y); \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	289
E.4.6	Parcela $\frac{\partial [(\nabla_s \mathbf{n}_y); \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$ . . . . .	291
E.5	Termos auxiliares . . . . .	293
<b>APÊNDICE F</b>	<b>Apêndice F</b>	<b>297</b>
<b>APÊNDICE G</b>	<b>Apêndice G</b>	<b>303</b>



---

## Introdução

No capítulo intitulado A Introdução as Teorias da Mecânica de Campos Não-Linear (SYNGE; TRUSDELL; ERICKSEN, 1965), Truesdell e Noll afirmam que "*...É muito difundida, por aqueles que formulam teorias do contínuo, a ideia errada de que a matéria realmente seja contínua, negando a existência de moléculas. Isto não é assim. A Física do contínuo nada presume sobre a estrutura da matéria. Limita-se a relações entre os fenômenos grosseiros, negligenciando a estrutura do material presentes em uma escala menor. Se a abordagem do contínuo é justificado, em algum caso particular, é uma questão, não para a filosofia ou metodologia científica, mas para teste experimental...*". Esta afirmação é motivada devido ao fato que as teorias da mecânica do contínuo usam modelos idealizados que se baseiam na hipótese de uma distribuição contínua da matéria, ao contrário das teorias da mecânica estatística que são baseadas na suposição de uma distribuição discreta da matéria. Atualmente, ainda há controversas entre aqueles que acreditam que as quantidades, as quais são consideradas na descrição do contínuo, devam ser vistas como *médias* de propriedades microscópica subjacentes do material, e os que não aceitam este ponto de vista (EXADAKTYLOS; VARDOULAKIS, 2001). No âmbito da teoria do contínuo, quantidades, tais como tensão e deformação, representam valores estatísticos médios tomados em um intervalo de volume muito pequeno. Conseqüentemente, as teorias do contínuo não podem fornecer previsões satisfatórias para o comportamento do material dentro deste intervalo muito pequeno, caso ocorra gradientes elevados de tensão e deformação. Dentro do campo da resistência dos materiais a restrição ocasionada pela presença de altos valores de gradientes, tais como a ocorrência de concentração de tensão em superfícies curvas (furos, entalhes e fratura), faz com que a teoria clássica da elasticidade informe valores médios para os altos valores de tensão e deformação.

A teoria clássica da elasticidade requer que as forças entre os átomos satisfaçam uma condição muito forte, a de que o alcance destas forças atômicas têm que ser suficientemente pequena, de modo que a tensão (deformação) medida no ponto dependa apenas da aproximação da tensão (deformação) no elemento de volume em torno deste ponto. No entanto, caso as forças interatômica alcancem maior distância do que a entre átomos, a

interferência do gradiente da micro-deformação estará presente, e, portanto, surge a dúvida em se saber o quão grande é o efeito da dependência deste gradiente aos resultados da elasticidade clássica.

É diante da ideia básica de considerar não só a primeira ordem, mas também, outras ordens de gradientes de deformação na expressão da função de energia de deformação que esta tese está inserida. No que segue, é apresentada a motivação, a(s) contribuição(ões) inovadora(s) e a metodologia para alcançar o(s) objetivo(s) deste trabalho.

## 1.1 Motivação

A teoria da mecânica dos sólidos do meio contínuo clássica, tal como elasticidade linear, não-linear, dano e plasticidade, tem sido amplamente utilizada em aplicações nas Engenharias Civil, Química, Elétrica, Mecânica e também em diversos outros campos da Física e Ciências da Vida. Essa teoria foi inicialmente desenvolvida para descrever fenômenos de deformação e processos que podem ser observados a olho nu, ou seja, problemas em escalas que vão de milímetro a metro, no entanto, no século passado essa foi utilizada para descrever fenômenos que envolviam desde escalas atômicas até escalas terrestres (falhas e terremotos). Mais recentemente, observações em ótica avançada e em microscopia eletrônica têm sido interpretados através da teoria da mecânica do contínuo clássica, e nos últimos anos, esta teoria tem sido utilizada para descrever deformações na nano-escala (ASKES; AIFANTIS, 2011).

É nesse regime de micro e nano-escala que as dimensões da estrutura tornam-se comparáveis ao tamanho da microestrutura do material e os efeitos microestruturais e do tamanho não podem ser desprezados. Situação idêntica ocorre quando em problemas de propagação de ondas, o comprimento da onda fica do tamanho do reticulado do meio. Diversas são as aplicações em que o efeito do tamanho da escala afeta a análise, dentre estas, podem-se citar as análises em películas e placas finas, em micro-vigas, em dispositivos microeletrônicos e micromecânicos, assim como em fenômeno de propagação de ondas em materiais, tais como, policristais, polímeros, ossos e compósitos reforçados por fibras ou por partículas (POLYZOS; FOTIADIS, 2012).

Devido à falta de parâmetros de comprimento de escala interno, a teoria clássica da elasticidade linear falha na tentativa de descrever tais comportamentos dos materiais nessas escalas. No entanto, é possível contornar esta deficiência da teoria clássica da elasticidade com o uso de teorias elásticas melhoradas, em que os parâmetros intrínsecos que correlacionam a micro-estrutura com a macroestrutura estão envolvidas nas equações constitutivas assim como na equação do movimento do contínuo elástico considerado. Tais teorias melhoradas são conhecidas na literatura como teoria geral elástica de Cosserat (COSSERAT; COSSERAT, 1902), teoria de Cosserat com rotações restringidas ou teoria de tensão conjugada (MINDLIN; TIERSTEN, 1962; KOITER, 1964), teoria elástica

multipolar (GREEN; RIVLIN, 1964), teoria gradiente de deformação (TOUPIN, 1964), teoria elástica gradiente de deformação de alta ordem (MINDLIN, 1964; MINDLIN, 1965b; MINDLIN, 1965a), teorias elásticas micropolar, microestiramento e micromórfica (ERINGEN, 1999) e, por fim, teoria da elasticidade não local (ERINGEN, 1992).

Motivado pela deficiência que a teoria clássica da elasticidade possui em analisar problemas quando sua dimensão é compatível com a escala microestrutural, este trabalho objetiva contribuir para o avanço na modelagem numérica, via Método dos Elementos de Contorno, utilizando a teorias da elasticidade melhorada, a qual contempla parâmetro microestrutural.

## 1.2 Inovação

A presente tese está inserida no campo da mecânica do contínuo generalizado, mais especificamente, nas teorias da elasticidade gradiente de deformação de alta ordem. No âmbito do Departamento de Estruturas (SET) da EESC-USP esta é a primeira vez em que se aplica a teoria da elasticidade considerando efeitos microestruturais ao MEC. Alguns trabalhos anteriores fizeram uso da teoria não local aplicada à modelos de Dano e Elastoplasticos, entretanto, ainda considerando a teoria clássica da elasticidade, sem contemplar parâmetros micromecânicos, ou seja, sem inserção de comprimento característico à formulação. Dentre estes trabalhos podem ser citados Fudoli (1999), Botta (2003), Driemeier (1999) e Balbo (1998). No âmbito internacional, a primeira implementação da teoria da elasticidade considerando a microestrutura ao MEC foi realizada por Tsepoura et al. (2003). Na formulação realizada por Tsepoura et al. (2003), somente uma constante gradiente elástica foi utilizada para representar o comprimento característico que correlaciona a micro com a macroestrutura. Após essa primeira implementação, vieram os estudos de Tsepoura e Polyzos (2003), Polyzos et al. (2003a), Polyzos, Tsepoura e Beskos (2005), Karlis et al. (2007) e Karlis et al. (2008) que objetivaram descrever problemas da mecânica da fratura 2D e 3D utilizando a teoria gradiente elástica, sempre usando elementos triangulares e/ou quadrangulares de continuidade  $C^0$  e de baixa ordem.

Como Propostas inovadoras para a presente tese podem ser citadas:

- a) aplicação de elementos triangulares de continuidade geométrica  $G^1$  ao Método dos elementos de Contorno clássico e microestrutural tridimensional;
- b) acoplamento do software de computação gráfica Blender<sup>TM</sup> ao MEC  $G^1$ ;
- c) aplicação de elementos triangulares de alta ordem com continuidade  $C^0$ , interpolação de Proriol e Polinomial, ao MEC tridimensional;
- d) estudo comparativo entre as funções aproximadoras  $G^1$  e  $C^0$  quanto à capacidade de representar superfícies suaves quando considerada geometrias paramétrica e não paramétricas (complexas);

- e) desenvolvimento de expressões explícitas para o tratamento de singularidade tanto para formulação clássica quanto microestrutural do MEC;
- f) análise de convergência das expansões em série para os núcleos integrando do MEC;
- g) correlação matemática entre o parâmetro microestrutural,  $g$ , e o tamanho do elemento para que seja garantido a convergência;
- h) implementação numérica da teoria do contínuo com considerações microestruturais via MEC e considerando elementos com continuidade  $C^0$  e  $G^1$ .

## 1.3 Objetivo

### 1.3.1 Objetivo Geral

Desenvolver e implementar computacionalmente a formulação do Método dos elementos de Contorno considerando efeitos microestruturais e continuidade entre os planos tangentes na interface dos elementos quando aplicado a problemas elastostático tridimensional.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Analisar desempenho quanto à representação da geometria por meio das aproximações obtidas por polinômio ortogonal e por polinômio completo não ortogonal, quando a estas duas aproximações é imposta a partição da unidade. Neste trabalho, essas duas aproximações são chamadas de Proriol e Polinomial quando é adotado o polinômio ortogonal ou não, respectivamente.

Analisar o desempenho das funções de Bézier para domínios de validade triangulares que possuem continuidade dos planos tangentes. Para tanto, realizar a distinção entre continuidades  $C^0$  e  $G^1$  e em seguida desenvolver procedimento de criação de elementos  $G^1$ , os quais dependem apenas das posições e das suas normais nos vértices dos triângulos planos da malha.

Realizar um estudo comparativo entre as funções de Proriol, Polinomial e  $G^1$  quanto ao desempenho na representação tanto da geometria quanto da sua suavidade, sendo esta última característica avaliada por meio da unicidade da normal na interface entre elementos.

Realizar as expansões em série de potência para as soluções fundamentais e analisar as condições de convergência para que possa determinar a correlação entre o tamanho do elemento e o parâmetro microestrutural utilizado,  $g$ . Ainda na análise de convergência, tem-se o objetivo de determinar um estimador para o erro das expansões em séries adotadas.

Realizar o tratamento da singularidade, por meio da técnica de subtração de singularidade. Para tanto se faz necessário explicitar os núcleos (hiper)singulares em série de Laurent, os quais são escritos em coordenadas polares. Desta forma, objetiva-se determinar as expressões explícitas das séries de Laurent para o tratamento de singularidade de problemas elastostáticos tridimensional clássico e com consideração da microestrutura.

Realizar a verificação do tratamento da singularidade dos núcleos das integrais do MEC obtidos pela formulação clássica e microestrutural. Analisar a influência da abordagem microestrutural na subtração de singularidade.

Fazer a validação por meio de exemplos Benchmark, presentes na literatura, da implementação computacional do MEC clássico e microestrutural considerando funções aproximadoras de Proriol, Polinomial e de Bézier  $G^1$  aplicados a problemas elastostáticos tridimensionais.

## 1.4 Metodologia

Para obter precisão, em domínios triangulares, à medida que o grau da interpolação é elevado, optou-se por utilizar elementos espectrais. Esta terminologia *spectral* significa que o erro numérico diminui mais rápida do que qualquer potência  $1/p$ , onde  $p$  é a ordem da expansão polinomial. Para tanto, o desenvolvimento teórico é alicerçado na teoria da interpolação de funções polinomiais ortogonais. A partir destes polinômios, é gerada a base de pontos nodais, os quais são os zeros dos polinômios ortogonais e em seguida é utilizado um polinômio como interpolante. Para o polinômio ortogonal gerador da base nodal, neste trabalho, optou-se pelo polinômio de Lobatto e como interpolante foi escolhido o polinômio de Proriol, uma vez que, este conjunto Lobatto-Proriol proporcionam melhor condicionamento à matriz de Vandermond (POZRIKIDIS, 2005). Para comparativo de eficiência, foi utilizado a aproximação mais comumente utilizada, que são constituída pela base nodal equidistante, e não por zeros de polinômios ortogonais, e como interpolante é imposto a partição da unidade em polinômio completo. Este procedimento de geração de aproximações com base nodal equidistante é chamando, neste trabalho, de aproximação Polinomial.

Para inserir os efeitos microestruturais à elasticidade, foi utilizado a teoria de Mindlin (MINDLIN, 1964) na sua forma simplificada, uma vez que sua teoria geral proporciona uma quantidade grande de parâmetros que necessitam de validação experimental. Assim, para contornar esse problema, foi utilizado uma teoria simplificada de Aifantis (1992a) onde apenas um único parâmetro microestrutural é associado à macroestrutura, o que torna a teoria aplicável. Em seguida é empregado o Método dos Elementos de Contorno à teoria de Mindlin simplificada, para tanto é tomado como referência o trabalho de Polyzos et al. (2003a). Com o intuito de simular superfícies suaves, e assim, não calcular a integral de linha presente no trabalho de Polyzos et al. (2003a), esta tese referenciou-se ao trabalho

de Walton e Meek (1996) para a construção de funções que proporcionam continuidade dos planos tangentes entre elementos triangulares adjacentes (continuidade  $G^1$ ), ou seja, proporcionam normais únicas na linha de interface entre os elementos. Cabe ressaltar que o trabalho de Walton e Meek (1996), por estar inserido na área da computação gráfica, e objetivando em representar superfícies aparentemente suaves, ou seja, superfícies que por efeito de jogo de luz (ferramenta gráfica) proporcione suavidade, não possui finalidade de aplicação aos métodos numéricos. No entanto, verificou-se que o trabalho de Walton e Meek (1996) possui potencial para aplicação na análise numérica e garantia de unicidade dos planos tangente na interface dos elementos triangulares.

Após aplicado o MEC à teoria micromecânica, segue o tratamento de singularidades tanto para a formulação clássica quanto para a formulação microestrutural tomando como base a técnica de subtração de singularidade proposta por Guiggiani et al. (1992). Cuidados adicionais foram tomados uma vez que as funções de Bézier, utilizadas neste trabalho, não são analíticas nos vértices do domínio triangular. Para iniciar o tratamento da singularidade, optou-se por expandir em séries de potência as soluções fundamentais e assim tornando claro o grau de singularidade e proporcionando maior eficiência numérica para o seu cálculo. Em seguida é realizada a expansão em série de Laurent, em coordenadas polares, para os núcleos integrandos (hiper)singulares. Entretanto, não é para todo domínio que é válido a representação em série de potências das soluções fundamentais, assim neste trabalho é analisado a região de convergência destas séries, que acabam pondo restrições matemáticas ao parâmetro micromecânico,  $g$ . Em seguida é realizada a validação da subtração de singularidade, tanto na direção radial quanto na direção angular para elemento triangular curvo.

Por fim, é realizado a implementação do MEC considerando efeitos microestruturais, ou não, com funções aproximadoras  $C^0$  e  $G^1$ . E seus resultados, aplicados a problemas elastostáticos tridimensional, são validados por benchmark fornecidos no trabalho de Tsepoura et al. (2003).

## 1.5 Divisão da tese

A tese é constituída por 8 capítulos e está dividida da forma que segue.

No Capítulo 2 é realizado uma revisão bibliográfica, no qual é contemplado uma discussão sobre a Mecânica do Contínuo Generalizada (MCG), uma revisão história da teoria gradiente e a aplicação do Métodos dos elementos de Contorno considerando efeitos microestruturais em problemas da elastostática tridimensional.

No Capítulo 3 são abordados os conceitos da teoria da elasticidade de Mindlin, a qual considera efeitos microestruturais. Neste capítulo são mostradas a cinemática, as equações de equilíbrio, as condições de contorno e as equações constitutivas desenvolvidas por Mindlin.

O Capítulo 4 apresenta a forma direta do Método dos elementos de Contorno aplicados à problemas elastostáticos tridimensionais pela teoria gradiente de deformação, a qual constitui uma combinação das teorias de Mindlin e Aifantis. Ainda neste capítulo é apresentada a discretização utilizada na análise numérica. No Capítulo 5 são apresentadas as interpolações de Proriol, base nodal de Lobatto, e Polinomial, base nodal equidistante, utilizadas para aproximar a geometria e as incógnitas físicas presentes na formulação do MEC.

Com objetivo de anular o termo da integral de linha presente na formulação do MEC com efeito microestrutural (Capítulo 4), a hipótese de superfície suave faz necessário. Para impor suavidade na formulação do MEC, no Capítulo 6 é utilizado elementos com continuidade geométrica  $G^1$ , os quais dependem das coordenadas geométricas dos nós e de suas normais. Para auxiliar na obtenção das posições e das normais nos vértices dos triângulos da malha para geometrias complexas, é utilizado o software de computação gráfica *Blender<sup>TM</sup>* 2.7 acoplado ao programa do MEC elastostático gradiente. Por fim, ainda no Capítulo 6, é verificado, por meio de exemplos, a suavidade na intersecção entre os elementos triangulares  $G^1$  e estes são comparados com os elementos obtidos pela expansão Polinomial e Espectral apresentados no Capítulo 5.

No Capítulo 7 é apresentada a técnica de subtração de singularidade que foi aplicada às soluções fundamentais do MEC clássico e, também, para a formulação não-clássica (micromecânica). Neste capítulo são desenvolvidas expressões explícitas em série de Laurent para os núcleos das integrais singulares e hipersingulares do MEC clássica e não-clássica. E por último é analisado as condições de convergência para os termos da série e verificado a precisão da técnica de tratamento de singularidade em elementos curvos regulares e distorcidos.

No Capítulo 8 são apresentados os resultados da implementação computacional do MEC com efeito micromecânico e clássico, considerando superfícies suaves, e comparados aos resultados, considerados Benchmark, de Tsepoura et al. (2003). E por fim, são relatados os principais resultados desta tese e as propostas para trabalhos futuros.





---

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Mecânica do Contínuo Generalizado

Em recente colóquio, ocorrido em 2009, foi apresentado uma visão histórica do desenvolvimento da chamada Mecânica do Contínuo Generalizado (MCG). A tese apresentada foi de que a generalização ocorre quando são abandonadas, sucessivamente, as hipóteses básicas da mecânica do contínuo clássica de Cauchy, como por exemplo, quando é realizada a introdução de tensões conjugadas e de rotações rígidas da microestrutural (contínuo de Cosserat), ou quando faz-se a introdução de deformação da microestrutura (corpos micromorficos) ou, ainda, quando são inseridos os conceitos de hiper-tensão e comprimentos característicos (teorias gradientes), fazendo, assim, com que a noção de tensão de Cauchy seja perdida.

A evolução para se chegar ao consensos do que é MCG foi marcada por diversos artigos e reuniões científicas importantes, das quais podem ser citadas as reuniões de Freudenstadt (1967), de Udine (1970), a de Warsaw (1977) e por último o colóquio em Paris no ano de 2009, sendo este último organizado por Maugin e Metrikine (MAUGIN, 2010). Esta breve revisão será substanciada em trabalhos, discussões e conclusões obtidas no colóquio Paris 2009. Dentre as diversas conclusões desse evento, tem-se a consideração da publicação dos irmãos Cosserat em 1909 (COSSERAT; COSSERAT, 1902) como o marco inicial da chamada mecânica do contínuo generalizado, assim, esta revisão se deterá aos trabalhos realizados a partir desta publicação.

Para melhor entendimento da MCG, é definido como clássico padrão o modelo básico, considerado por Engenheiros, da mecânica dos sólidos e da teoria das estruturas. Esta é essencialmente a teoria do contínuo estabelecido por A. L. Cauchy no início do século XIX para sólidos elásticos homogêneos e isotrópicos em pequenas deformações. A teoria do contínuo clássico é fundamentada nos axiomas de Cauchy e nas hipóteses de trabalho:

- a) **postulado de Cauchy**: as forças de superfície  $\mathbf{T}^d$  que atuam em um ponto material  $P$  de um meio contínuo segundo um plano de normal unitária  $n$ , depende unicamente do ponto  $P$  e da norma  $n$  a este. Assim, pode ser escrito as forças de

superfície em função do tensor tensões e da normal, ou seja,

$$T_i^d = n_j \sigma_{ji}. \quad (2.1)$$

Com  $\sigma$  sendo o tensor de tensão do ponto  $P$ ;

b) Entendendo-se que tanto o espaço físico (de Newton) quanto a variedade material (o conjunto de partículas materiais que constituem o corpo) são Euclidianas e conectadas, a noção de deslocamento  $\mathbf{u} = \{u_i\}$  fica bem definida;

c) **Hipóteses de trabalho**

- Não existem conjugados aplicados tanto no volume quanto na superfície;
- Não existe descrição da microestrutura por graus de liberdade interno adicionais;

De acordo com os dois últimos itens e devido à aplicação do balanço do momento angular, o tensor de tensão de Cauchy é simétrico, isto é,

$$\sigma = \sigma^T. \quad (2.2)$$

Desta forma, as mais variadas generalizações da mecânica do contínuo consistem em relaxar um dos itens acima.

## 2.1.1 Algumas generalizações

As principais generalizações da mecânica do contínuo ocorre em duas situações principais. A primeira é quando o tensor de tensão de Cauchy torna não simétrico e a outra é quando se perde a validade do postulado de Cauchy. A seguir são apresentadas algumas condições em que o tensor de tensão da elasticidade clássica perde a simetria (ALTENBACH; EROFEEV, 2011).

### 2.1.1.1 Razões para a não-simetria do tensor de tensão de Cauchy

A não-simetria pode ser devida:

- a) a existência de conjugados de corpo (*body couples*), por exemplo, tal como em eletromagnetismo

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (2.3)$$

Em que  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  denotam a magnetização de volume e campo magnético, respectivamente;

- b) a existência de conjugados de superfícies (introdução de um novo tipo de força interna chamada de tensão conjugada); o meio possui graus de liberdades internos que modificam o balanço do momento angular;

- c) a existência de graus de liberdade interno (de natureza não-mecânica, por exemplo, inércia de polarização em ferroelétricos e rotação interna em ferromagnetismos (MAUGIN, 1988));
- d) a existência de graus de liberdade interno, de natureza mecânica; podendo neste item ser inserido o modelo de Cosserat.

Na classe das microestruturas rígidas, em que outros três graus de liberdade correspondente a rotação adicional em cada ponto material (independente da vorticidade) são considerados na MCG, podem ser destacado os trabalhos de McCullagh (1839) e Lord Kelvin (WHITTAKER, 1953). Também, pode ser citado o trabalho Duhem (1893) que propôs a introdução da tríade de diretores (vetores unitários) para representar essas rotação rígidas. Outra forma de inserir essas rotações é por meio dos conceitos modernos da Física que abrange os ângulos de Euler, quaternions e espinores (ALTENBACH; EROFEEV, 2011). Mas, é com a teoria de Cosserat que realmente foram introduzidos graus de liberdade do tipo rotacional (este é o contínuo micropolar no sentido de Eringen (1999), Eringen (2001)) e o conceito dual de tensão conjugada, *couple stress*.

Um moderno conhecimento deste campo (MCG) apenas ocorreu após os trabalhos realizados, na França, pelos cristalógrafos Corre (1956), Laval (1957a), Laval (1957b), Laval (1957c), na Rússia, por Aero e Kuvshinskii (1961), Palmov (1964), na Alemanha por Schaefer (1967), Günther (1958), Neuber (1964) e na Itália por Grioli (1960) e Capriz (1989). Embora sejam observados alguns sucessos da representação da microestrutura por *diretores*, como por exemplo, nos estudos de cristais líquidos (ERICKSEN, 1960; LESLIE, 1968; STOKES, 1984) e na cinemática de deformação para corpos delgados (GREEN; NAGHDI, 1967), as melhores formulações da MCG foram obtidas considerando campo de transformações ortogonais (rotações) e não via diretores, podendo citar os trabalhos de Eringen (1968a), Kafadar e Eringen (1971), Nowacki (1986).

Contudo, em meados dos anos de 1960, o ressurgimento da mecânica generalizada do contínuo ganhou força e diversas formulações considerando efeitos microestruturais, com linhas de pensamentos semelhantes as de Cosserat, foram desenvolvidas. Podendo citar como referência os trabalhos de Mindlin (1964), Mindlin e Tiersten (1962), Mindlin e Eshel (1968), Green e Rivlin (1964), Green e Naghdi (1967), Toupin (1962), Toupin (1964), Truesdell e Toupin (1960), Truesdell e Noll (1965), Eringen e Suhubi (1964a), Eringen e Suhubi (1964b).

Em seguida serão ilustradas as principais, ou pelo menos as mais difundidas, generalizações. Será dada, nestas ilustrações, maior relevância para a forma das equações constitutivas de cada teoria.

#### a) **Elasticidade de Cosserat (micropolar)**

A teoria de Cosserat da elasticidade (COSSERAT; COSSERAT, 1909) incorpora a rotação local dos pontos, as translações, estas quais já são consideradas pela elasticidade clássica, a tensão conjugada (torque por unidade de área) e as tensões de

forças (força por unidade de área). A tensão de força é referida simplesmente como tensão na elasticidade clássica, na qual não existe nenhum outro tipo de tensão. A ideia de tensão conjugada pode ser acompanhada durante o período de formação da teoria da elasticidade (VOIGT, 1887a; VOIGT, 1894). Eringen (ERINGEN, 1968b) incorporou micro-inércia e renomeou a elasticidade de Cosserat de elasticidade *micropolar*. No sólido de Cosserat isotrópico existem seis constantes elásticas, em contraste à elasticidade clássica dos sólidos em que existem apenas duas (constantes de Lamé). As equações constitutivas para sólidos elástico isotrópico de Cosserat são, em notação de Eringen (1968b):

$$\sigma_{kl} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + (2\mu + \kappa) \varepsilon_{kl} + \kappa \varepsilon_{klm} (r_m - \phi_m), \quad (2.4)$$

$$m_{kl} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{kl} + \beta \phi_{k,l} + \gamma \phi_{l,k}. \quad (2.5)$$

A convenção de soma para índices repetidos e a convenção de vírgula para representar diferenciação com respeito às coordenadas são utilizadas.  $\sigma_{kl}$  é a tensão de força, o qual é um tensor simétrico na formulação clássica da elasticidade e anti-simétrico na Eq.(2.4).  $m_{kl}$  é a tensão conjugada, couple stress,  $\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$  é o tensor para pequenas deformações,  $u_k$  é o deslocamento e  $\varepsilon_{klm}$  é o símbolo de permutação. A micro-rotação  $\phi_k$  na elasticidade de Cosserat é cinematicamente distinta da macro-rotação,  $r_k = (\varepsilon_{klm} u_{m,l})/2$ , obtida do gradiente do deslocamento.

Em três dimensões, o sólido elástico isotrópico de Cosserat necessita de seis constantes ( $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$  e  $\kappa$ ) para sua descrição. Algumas comparações entre símbolos usadas por diversos autores foram apresentadas por Cowin (1970b), no entanto, em termos de percepção física, as seguintes relações entre as constantes são mais interessantes (ERINGEN, 1968a; GAUTHIER; JAHSMAN, 1976):

$$\text{Módulo de Young } E = (2\mu + \kappa) (3\lambda + 2\mu + \kappa) / (2\lambda + 2\mu + \kappa),$$

$$\text{Módulo de cisalhamento } G = (2\mu + \kappa) / 2,$$

$$\text{Coeficiente de Poisson } \nu = \lambda / (2\lambda + 2\mu + \kappa),$$

$$\text{Comprimento característico para torção } l_t = [(\beta + \gamma)/(2\mu + \kappa)]^{1/2},$$

$$\text{Comprimento característico para flexão } l_b = [\gamma/2(2\mu + \kappa)]^{1/2},$$

$$\text{Número de acoplamento } N = [\kappa/2(\mu + \kappa)]^{1/2},$$

$$\text{Coeficiente polar } \Psi = (\beta + \gamma)/(\alpha + \beta + \gamma).$$

A abordagem clássica para sólidos é recuperada quando  $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$  desaparecem. O caso  $N = 1$  é conhecido como teoria das tensões conjugadas, couple stress theory, (MINDLIN; TIERSTEN, 1962; COWIN, 1970a).

b) **Elasticidade de dilatação (Elasticidade com vazios)**

A teoria dos materiais elásticos com dilatação (ou com vazios) (COWIN; NUNZIATO, 1983) incorpora a mudança de volume, ao invés de rotação, como uma variável cinemática adicional. As equações constitutivas para o caso elástico (sem dependência de taxas) são as seguintes:

$$\sigma_{kl} = \lambda \varepsilon_{rr} \delta_{kl} + 2\mu \varepsilon_{kl} + \beta \phi \delta_{kl}, \quad (2.6)$$

$$h_k = \alpha \phi_{,k}, \quad (2.7)$$

$$g = -\xi \phi - \beta \varepsilon_{rr}, \quad (2.8)$$

com  $\sigma$  sendo a tensão,  $h$  como o vetor tensão equilibrado,  $\lambda$  e  $\mu$  como as constantes elásticas clássicas de Lamé,  $g$  como a força de corpo intrínseca equilibrada,  $\phi$  como a mudança de volume e  $\phi_{,k}$  como o gradiente da mudança de volume. A mudança de volume pode ser interpretada como uma dilatação dos pontos do contínuo.

c) **Elasticidade Não-local**

Em um sólido não-local isotrópico, os pontos podem somente sofrer movimentos de translações assim como no caso clássico, mas a tensão no ponto depende da deformação em uma região próxima a este (KRÖNER, 1967; ERINGEN, 1972). A equação constitutiva para tensão  $\sigma_{ij}$ , em termos do vetor posição  $\mathbf{x}$  dos pontos no sólido, é escrita da seguinte forma

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \lambda(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2\mu(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'). \quad (2.9)$$

Uma representação alternativa mais simples é (ERINGEN, 1992):

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) [\lambda \varepsilon_{rr}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}')] dV(\mathbf{x}'), \quad (2.10)$$

com o núcleo não-local  $\alpha(|\mathbf{x}|)$  sujeito à

$$\int_V \alpha(|\mathbf{x}|) dV = 1, \quad (2.11)$$

mostrando que o núcleo necessita ser um membro da sequência do delta de Dirac. Assim, no limite, quando a distância não local de influência ou comprimento característico,  $a$ , torna-se cada vez menor é recuperada a lei de Hooke (equação constitutiva do contínuo elástico clássico). Alguns exemplos para o núcleo  $\alpha(|\mathbf{x}|)$  são mostrados (LAKES, 1995):

Para  $\alpha(|\mathbf{x}|)$  de alcance finito

$$\alpha(|\mathbf{x}|) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|}{a}\right), & \text{para } |\mathbf{x}| < a, \\ 0 & \text{para } |\mathbf{x}| > a \end{cases}, \quad (2.12)$$

para núcleo infinito

$$\alpha(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{2a} e^{-|\mathbf{x}|/a}, \quad (2.13)$$

e para um núcleo finito simples

$$\alpha(|\mathbf{x}|) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{para } |\mathbf{x}| < a, \\ 0 & \text{para } |\mathbf{x}| > a. \end{cases} \quad (2.14)$$

Os comprimentos característicos podem ser definidos, na elasticidade não-local, em termo do alcance efetivo associado com o núcleo.

#### d) Elasticidade microestrutural (micromórfico)

Na elasticidade microestrutural (MINDLIN, 1965c) ou micromórfico (ERINGEN, 1968a), os pontos no contínuo dos sólidos podem deformar microscopicamente, assim como, podem transladar e rotacionar. Nesta abordagem da elasticidade, existem 18 constantes elásticas no caso isotrópico. As equações constitutivas para elasticidade microestrutural isotrópica são:

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_2 (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}), \quad (2.15)$$

$$\sigma_{pq} = g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_2 \gamma_{pq} + b_3 \gamma_{qp}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mu_{pqr} = & a_1 (\xi_{iip} \delta_{qr} + \xi_{rii} \delta_{pq}) + a_2 (\xi_{iiq} \delta_{pr} + \xi_{iri} \delta_{pq}) + a_3 \xi_{iir} \delta_{pq} + a_4 \xi_{pii} \delta_{qr} + \\ & a_5 (\xi_{qii} \delta_{pr} + \xi_{ipi} \delta_{qr}) + a_8 \xi_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} \xi_{pqr} + a_{11} (\xi_{rpq} + \xi_{qrp}) + a_{13} \xi_{prq} + \\ & a_{14} \xi_{qpr} + a_{15} \xi_{rqp}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Onde  $\tau_{pq}$  é o tensor de tensão simétrico de Cauchy,  $\sigma_{pq}$  é o tensor de tensão relativo assimétrico e  $\mu_{pqr}$  é o tensor de tensão dual. Os termos  $g$ 's,  $b$ 's,  $a$ 's assim como  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes elásticas. A parte anti-simétrica (com respeito aos dois últimos índices) da tensão dual representa a tensão conjugada, *couple stress*, da elasticidade de Cosserat.  $\varepsilon$  é o tensor de deformação,  $\gamma$  é a macro-deformação menos a micro-deformação e  $\xi$  é o micro-gradiente da micro-deformação, cuja parte anti-simétrica corresponde ao gradiente da rotação na elasticidade de Cosserat.

Elasticidade microestrutural inclui a elasticidade de Cosserat e a teoria de dilatação (vazios) como caso especial. Elasticidade clássica é um caso especial da elasticidade de Cosserat e da teoria de dilatação (vazios).

### 2.1.2 Teorias gradiente

Atualmente é constatado que as teorias gradiente são abundantes na Física e que começaram praticamente juntas com todas as teorias do contínuo, no século XIX. Desta forma, eletromagnetismo de Maxwell é uma teoria de gradiente de ordem um (gradientes

dos potenciais eletromagnéticos), a teoria de Korteweg para fluidos (KORTEWEG, 1901) é uma teoria constituído pelo primeiro gradiente da densidade, a teoria de Einstein da gravitação (EINSTEIN, 1916; EINSTEIN, 1956) é uma teoria se segundo gradiente da métrica do espaço-tempo curvado e Roux (1911) publica, o que seria a primeira exposição, da teoria de gradiente ordem 2 para o deslocamento da elasticidade em pequenas deformações (formulação variacional). Diante de diversas formulações existentes, teorias baseando-se no princípio da energia virtual foi utilizada para deduzir, de forma elegante e inequívoca, entretanto algumas vezes tediosas, as condições de contorno e introduzir a noção, clara, de forças internas de ordem superior (GERMAIN, 1973a; GERMAIN, 1973b; MAUGIN, 1980). Teorias fenomenológicas envolvendo gradientes de outros campos físicos, além de deslocamento ou densidade, foram estudado por Maugin (1971), em sua tese de doutorado na universidade de Princeton, para materiais ferro-eletromagnético. Neste trabalho, Maugin (1971) realizou uma abordagem microscópica, ou seja, o contínuo foi aproximado por uma rede cristalina com considerações das interações de médio alcance, além de considerar giros magnéticos distribuídos ou dipolos magnéticos permanentes. No que segue, exemplos de teorias que envolvem gradientes são apresentados pela dependência da energia potencial  $W$  por unidade de volume para pequenas deformações:

- a) Le Roux (ROUX, 1911; ROUX, 1913) apresenta a energia potencial

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(u_{i,j}, u_{i,jk}, \dots), \quad (2.18)$$

onde  $u_{i,j}$  denota o gradiente de ordem 1 do deslocamento e  $u_{i,jk}$  o gradiente de ordem 2 do deslocamento.

- b) Forma moderna da energia potencial (TOUPIN, 1962; MINDLIN; TIERSTEN, 1962; TOUPIN, 1964; MINDLIN, 1964; SEDOV, 1966; MINDLIN; ESHEL, 1968):

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, \dots), \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon$  é o tensor de deformação.

Algumas características interessantes destes modelos, com inserção de gradiente, são (MAUGIN, 2010):

- a) Introdução dos comprimentos característicos;
- b) aparecimento dos chamados efeitos de capilaridade (tração superficial) devido à intervenção explícita da curvatura da superfície;
- c) correlativos efeitos da camada limite;

Para maiores detalhes, das características acima relatadas, sugere consultar os trabalhos de Germain (1973a), Tiersten (1969), Fleck e Hutchinson (1993), Fleck, Muller e Hutchinson (1994) e Lazar e Maugin (2004).

### 2.1.2.1 Breve revisão da teoria gradiente

Alguns esforços esporádicos com a intenção de enriquecer as equações da elasticidade clássica do contínuo tiveram início no século XIX. Neste período derivadas de alta ordem foram adicionadas às equações na tentativa de captar o efeito da microestrutura. Já em 1850, Cauchy sugeriu o uso de derivadas de alta ordem nas equações do contínuo, além de inserir parâmetros constitutivos adicionais ao tamanho do volume elementar, com o objetivo de modelar, com maior precisão, comportamento discreto de estruturas cristalinas (CAUCHY, 1850a; CAUCHY, 1850b; CAUCHY, 1851). Pouco mais tarde, Voigt desenvolveu uma descrição abrangente para cinemática, leis de balanço e relações constitutivas de modelos de redes discretas para cristais. Neste modelo Voigt incluiu tanto a rotação e deslocamento molecular quanto forças conjugadas (VOIGT, 1887a). Entretanto, as equações diferenciais resultantes desta formulação de Voigt eram bastante complicadas e as soluções dos problemas de valor de contorno eram apenas obtidas após assumir diversas hipóteses (VOIGT, 1887b; VOIGT, 1887c). No início do século XX, esta área de pesquisa foi ampliada através do trabalho dos irmãos Cosserat. Neste trabalho, os Cosserat inseriram na cinemática, do contínuo tridimensional, três componentes de deslocamentos, três micro-rotações e incluindo, ainda, o conceito de tensão conjugada (COSSERAT; COSSERAT, 1909).

Apesar de algumas atividades isoladas ocorrerem na primeira metade do século XX, foi a partir da década de 1960 que o renascimento das pesquisas na MCG ocorreram. Este renascimento ocorreu, aproximadamente ao mesmo tempo, tanto no lado oeste quanto no lado leste europeu. Do lado leste europeu pode ser citado como artigos marco da escola soviéticas, os trabalhos de Aero e Kuvshinskii (1961), Palmov (1964), Kunin (1966), Vdovin e Kunin (1966) e um pouco mais tarde vindo o trabalho de Levin (1971). Da escola do oeste europeu, os artigos mais renomados são os de Toupin (1962), Toupin (1964), Mindlin e Tiersten (1962), Mindlin (1964), Mindlin (1965b), Mindlin (1965a), Mindlin e Eshel (1968), Kröner (1967) e Green e Rivlin (1964).

Inicialmente, o foco desses estudos era desenvolver extensões da teoria de Cosserat, assim como, extensões das teorias de tensão conjugada (TOUPIN, 1962; MINDLIN; TIERS-TEN, 1962; TOUPIN, 1964), no entanto, estas extensões tomaram determinadas proporções até serem estendidas em elaboradas teorias gradiente (GREEN; RIVLIN, 1964; MINDLIN, 1964; MINDLIN, 1965b; MINDLIN; ESHEL, 1968). Muito desses últimos estudos possuem uma teoria bastante complicada e que objetivam a geração e inclusão de um conjunto matemático amplo de gradientes de alta ordem, ao invés de ser concentrado em conjuntos mais limitados de gradientes que objetivem descrever os fenômenos físicos de interesse.

Um segundo ressurgimento ocorreu a partir da década de 1980, com o trabalho de Eringen, o qual desenvolveu uma simples teoria de tensão-gradiente por meio de sua teoria integral não-local (ERINGEN, 1983), no entanto, permaneceu inativo, até o final da década de 1990, o interesse neste trabalho. Por outro lado, inspirado por estudos anteriores em



plasticidade (AIFANTIS, 1984; AIFANTIS, 1987), Aifantis e co-autores formularam teorias da elasticidade gradiente para deformações finita (TRIANTAFYLLIDIS; AIFANTIS, 1986) e deformações infinitesimais (AIFANTIS, 1992a; ALTAN; AIFANTIS, 1992b; RU; AIFANTIS, 1993). Subsequentemente, essas teorias foram estendidas a partir da inserção de termos adicionais que consideraram o efeito de superfície (VARDOULAKIS; EXAKAKTYLOS; AIFANTIS, 1996; EXAKAKTYLOS; VARDOULAKIS; AIFANTIS, 1996). Comparando com as teorias mais elaboradas da década de 1960, essas últimas formulações são muito mais simples e contém menos termos gradiente de alta ordem, a qual é manifestada pelo menor número de constantes constitutivas que necessitam validação experimental. Na verdade, o foco principal na formulação dessas últimas teorias tem sido incluir somente os termos gradientes da ordem necessária para descrever o fenômeno físico em estudo.

Com o aumento do uso dos métodos computacionais para simulação, a implementação da elasticidade gradiente tornou-se o foco de alguns estudos, especialmente, na aplicação do Método dos elementos Finitos à elasticidade gradiente que tendem a ser não-trivial devido à maior complexidade das equações diferenciais parciais que governam o problema. Enquanto alguns pesquisadores têm focado na implementação de teorias mais completas (e mais complicadas) da década de 1960 (SHU; KING; FLECK, 1999; AMANATIDOU; ARAVAS, 2002; ZERVOS, 2008; PAPANICOLOPULOS; ZERVOS; VARDOULAKIS, 2009), outros têm explorado a simplicidade oferecida pela teoria de Aifantis, a qual tem conduzido a mais simples implementação em elementos finitos (TENEK; AIFANTIS, 2002; ASKES; MORATA; AIFANTIS, 2008; ASKES; GITMAN, 2009).

Um outro método numérico bastante utilizado para resolver vários tipos de problemas de Engenharia tem sido o Método dos elementos de Contorno (MEC). Este método possui a vantagem, em comparação a outros métodos numéricos, de possui a capacidade de redução da dimensionalidade do problema por um. Assim, problemas tridimensionais são precisamente resolvidos por apenas discretizando a superfície bidimensional que limita o domínio de interesse. Em casos onde o problema é caracterizado por uma geometria assimétrica, o MEC reduz mais ainda a dimensionalidade do problema, necessitando apenas a discretização ao longo da linha mediana do corpo. Essas vantagens, em conjunto com a ausência da necessidade de continuidade  $C^1$ , torna o MEC ideal para análise de problemas gradiente elástico (BESKOS, 1987; BESKOS, 1997). Tsepoura et al. (2002) foi o primeiro a usar o MEC para resolver problemas elastostáticos dentro da estrutura da elasticidade gradiente de Mindlin. Em sequência ao trabalho de Tsepoura, foram publicados alguns outros artigos utilizando o MEC, tais como os estudos de Tsepoura et al. (2003), Polyzos et al. (2003a), Polyzos, Tsepoura e Beskos (2005), Polyzos (2005), Karlis et al. (2007), Karlis et al. (2008), os quais abordam soluções via MEC para problemas bi e tridimensional elastostático, dinâmicos e da mecânica da fratura usando a teoria gradiente elástico. Em Karlis, Charalambopoulos e Polyzos (2010), o MEC foi utilizado, como ferramenta numérica, para modelar materiais com consideração do efeito microestrutural

e no contexto da teoria elástica gradiente de Mindlin na Forma-II. Neste trabalho, Karlis (KARLIS; CHARALAMBOPOULOS; POLYZOS, 2010) desenvolve a solução fundamental da equação diferencial de equilíbrio e em seguida são escritas as duas equações integrais, uma para deslocamento e outra para a derivada normal do deslocamento. O contorno global do domínio analisado é discretizado em elementos quadrilateral e por linhas quadráticas para problemas 3D e 2D, respectivamente. Além de Karlis (KARLIS; CHARALAMBOPOULOS; POLYZOS, 2010) considerar, em sua formulações, contornos não suaves, este também traz como diferencial a aplicação da teoria elasto-gradiente mais geral, uma vez que os efeitos da dilatação e deformações cisalhantes são consideradas de forma distinta. Por outro lado, aparece nesta formulação uma forma mais complexa para a tensão conjugada, o que torna os núcleos integrandos presentes na representação integral mais complicadas do que as que foram adotadas nos trabalhos de Polyzos et al. (2003b) e Tsepoura et al. (2003).

## 2.2 Geração de superfícies a partir de sistema CAGD

Nesta seção é realizada uma breve revisão histórica, assim, como as contribuições realizadas para a integração da Análise dos Elementos de Contorno com sistema CAGD (Projeto geométrico auxiliado por computador).

### 2.2.1 Revisão histórica do CAGD

O primeiro uso, registrado, de curvas no ambiente de produção, no caso específico na construção naval, aparece desde os tempos Romanos. O primeiro avanço na criação de navios, os quais eram feitos de madeira, foi a produção de novas embarcações com base em modelos reutilizáveis. Desta forma, a geometria básica de navios podiam ser armazenados, sem ter a necessidade de serem recriados a cada vez. Na sequência, os venezianos do século XIII ao século XVI aperfeiçoaram a técnica de produção de navios baseados em modelos, contribuindo na construção das costelas das embarcações definidas em termos dos arcos circulares contínuos tangentes - NURBS em linguagem moderna (FARIN, 1990). Já para a geometria do casco dos navios, estas eram obtidas para diferentes formas das costelas, sendo considerada uma manifestação precoce da definições de superfícies por produto de tensores dos dias atuais. Até então não existiam desenhos para definir os cascos dos navios, apenas no século XVII foram desenvolvidos e popularizado os projetos para cascos. A primeira menção à spline na sua forma clássica, que era uma viga de madeira usada para desenhar curvas suaves, aparece a partir de 1752 (MONCEAU, 1752). Já no século XX, desenvolvimentos mais modernos que ligam as técnicas de construção naval ao sistema CAGD podem ser encontrados nos trabalhos de Berger et al. (1966), Mehlum e Sorenson (1971), Rogers e Satterfield (1980) e Theilheimer e Starkweather (1961).

Após os primeiros desenvolvimentos dos projetos das geometrias para embarcações, foi a vez da área aeronáutica contribuir para o avanço do que viria a ser CAGD. Um dos grandes colaborador para este avanço foi R. Liming com a publicação, em 1944, do livro intitulado *Geometria Analítica com Aplicações a Aeronaves* (LIMING, 1944), e dos escritos realizados, por este, para a empresa de aviação norte-americana NAA (North American Aviation), fabricante do legendário Mustang durante a segunda guerra mundial. Neste livro, métodos de desenhos clássicos foram combinados, pela primeira vez, com técnicas computacionais. Tradicionalmente, as construções tanto de aeronaves quanto de navios encontraram o seu avanço nas mesas de trabalhos dos desenhistas, na forma de projetos (blueprints) que serviram como definição básica do produto. Desta forma, Liming percebeu que era uma alternativa mais eficiente armazenar um projeto em termos de números ao invés de serem armazenadas curvas traçadas manualmente, motivando assim, a tradução dos desenhos clássicos das construções em algoritmos numéricos. A grande vantagem dos algoritmos numéricos era a de poder armazenar tabelas inequívocas e não deixar margem à interpretação individual dos desenhistas. Com estas contribuições, Liming tornou-se muito influente na década de 1950, e sendo o seu armazenamento numérico de desenhos amplamente adotado por empresas de aviões norte-americanas. De forma paralela, o professor S. Coons também dedicava suas pesquisas, desenvolvidas no MIT e que mais tarde ganhariam fama, para a realização da transição dos desenhos de aeronaves para o armazenamento numérico (COONS, 1947). Outra influência para a criação do CAGD, foi o advento em 1950 dos primeiros computadores capazes de gerarem instruções numéricas para controlar máquinas de usinagens na produção de moldes e estampas para peças de chapas metálica, o que foi chamado de controle numérico. Com o surgimento do controle numérico, veio a criação de linguagens de programação, e para finalidade das máquinas de usinagens, veio a linguagem APT desenvolvida no MIT. Entretanto um problema se manteve: toda a informação que era armazenada na forma de blueprints não se sabia, ou não se era claro, como poderia realizar a comunicação entre essas informações e os computadores que controlavam as máquina de fresagem. Algumas tentativas neste sentidos não foram bem sucedidas, tais como, o ajuste de curvas aos pontos obtidos diretamente das blueprints usando técnicas, já conhecidas, como interpolação de Lagrange. Assim surgia uma grande necessidade de novos conceitos que fossem capazes de realizar a transferência das blueprints para computadores. Avanços significativos, neste sentido, ocorreram na França, com os trabalhos De Casteljaeu e Bézier que permitiram que os projetistas abandonassem todos os processos manuais de desenhos (FARIN, 1983).

Em outras partes do mundo, avanços no controle numérico ocorreram. Nos Estados unidos, além dos trabalhos do pesquisador S. Coons do MIT, pode ser citado os desenvolvimentos de J. Ferguson na empresa americana Boeing e o desenvolvimento do primeiro sistema CAD/CAM, pela General Motors (GM), chamado DAC-I (Projeto Aumentado por Computador), o qual contemplava técnicas fundamentais de curvas e superfícies, fruto

do trabalho dos pesquisadores C. Boor e W. Gordon (FARIN, 1990). No Reino Unido, os trabalhos iniciais em curvas e superfícies foi devido a A. R. Forrest, que em sua tese de PhD (Cambridge) desenvolveu o trabalho de classificação das formas cúbicas, cúbicas racionais e as generalizações dos patches de Coons (FORREST, 1968). Ainda no Reino Unido, trabalhando para uma empresa de aeronaves britânica (British Aircraft Corporation), M. Sabin desenvolveu o sistema CAD chamado *Numerical Master Geometry*. Neste trabalho, Sabin desenvolveu diversos algoritmos, os quais seriam mais tarde "*reinventados*", tais como o algoritmo de offsets (SABIN, 1968b), continuidade geométrica (SABIN, 1968a) e Spline em tensão (SABIN, 1970).

Praticamente todas essas abordagens ocorreram na década de 1960. Por algum tempo, estes estudos, por diversas partes do mundo, existiram em isolamento até os anos setenta, quando, a partir de então, começou a ocorrer uma confluência de diferentes métodos de investigações que culminou na criação de uma nova disciplina chamada de CAGD (Projeto Geométrico Auxiliado por Computadores). Sem o advento dos computadores a disciplina CAGD não teria surgido, nem tanto devido ao cálculo de formas complexas, pois este não era o objetivo inicial dos computadores, mas simplesmente por produzir informações necessárias para controlar máquinas de fresagem. Essas informações eram tipicamente obtida via fita perfurada, feitas por computador, e em seguida eram transferidas para a unidade de controle das máquinas de fresagem.

Entretanto, o principal interesse dos designers não era tanto a máquina de fresagem e sim, preferencialmente, uma plotagem que pudesse rapidamente graficar os conceitos dos projetistas. Na época, os plotters existentes eram do tamanho de uma mesa de bilhar, ou maior, no entanto, esse tamanho era natural uma vez que a maioria dos desenhos das peças automotivas eram produzidos em escala. A partir destas necessidades, seja de armazenamento de desenhos ou seja na geração de formas gráficas que pudesse automatizar a produção de projetos, o surgimento dos computadores foi um marco no desenvolvimento e criação do CAGD.

Ainda na contextualização histórica, faz-se necessário destacar, o que não foi feito ainda com devido mérito neste trabalho, os desenvolvimentos, em CAGD, devido a De Casteljaou e Pierre Bézier. Desta forma a seção subsequente suprirá esta lacuna e dará o destaque que estes dois pesquisadores merecem.

## 2.2.2 De Casteljaou e Bézier na história do CAGD

Em 1959, a empresa de automóveis francesa Cintrën havia contratado um jovem matemático, chamado Paul de Faget De Casteljaou que tinha acabado de concluir seu doutorado, para resolver alguns problemas teóricos que surgiram a partir do desafio da migração dos projetos manuais (blueprints) para os computadores. De Casteljaou começou a desenvolver um sistema que visava principalmente os projetos de curvas e superfícies ao invés de se concentrar na reprodução de modelos (blueprints) existentes. Desde o início dos seus

trabalho, De Casteljaou usou os polinômios de Bernstein para definir suas curvas e superfícies, em conjunto com o que é hoje conhecido como algoritmo De Casteljaou (CASTELJAU, 1963).

A característica inovadora de De Casteljaou foi devido ao uso de polígonos de controle (Courbes à pôles), uma técnica que nunca havia sido usado. Em vez de definir uma curva (ou superfície) através de pontos sobre ela, um polígono de controle que utiliza pontos próximos às curvas é utilizado. Assim, ao invés de mudar a curva (ou superfícies) diretamente por seus pontos, modifica-se o polígono de controle e, como consequência, a curva (superfície) é alterada. Conceitos semelhante para polígonos de controle já haviam sido desenvolvidos desde 1923 (BLACHKE, 1953) na área da geometria diferencial, no entanto, nenhum impacto havia ocorrido quanto a possibilidade de aplicações.

Como sempre ocorre no ambiente industrial, o trabalho de De Casteljaou foi mantido em segredo pela Cintroën por um longo tempo. A primeira menção pública do algoritmo de geração de curvas e superfícies (embora não incluindo a citação do inventor) foi a publicação de Krautter e Parizot (1971). Entretanto, foi no final dos anos setenta que W. Boehm descobriu este algoritmo, a partir dos relatórios técnicos de De Casteljaou, o que fez criar o termo algoritmo de De Casteljaou. Proporcionando desta forma o devido reconhecimento à De Casteljaou perante à comunidade científica. A partir de 1989 Casteljaou deixou a Cintroën e se dedicou às publicações científicas.

Ainda em paris, outra empresa automobilística contribuiu para o avanço do CAGD, desta vez, foram os trabalho originados na Renault. Durante o início da década de 1960, Pierre de Bézier, que chefiava o departamento de projetos da Renault, percebeu a necessidade de representações, via computador, das peças mecânicas. Os esforços de Bézier foram influenciados pelo conhecimento desenvolvido por sua concorrente Cintroën, mas ele continuou de forma independente seus estudos. A ideia inicial de Bézier era representar curvas básicas a partir da intersecção de dois cilindros elípticos, os quais eram definidos dentro de um paralelepípedo. Mais tarde, a partir dos conceitos iniciais de transformação afim para curvas, Bézier migrou seus estudos para formulações polinomiais e dedicando seus esforços para análise de polinômios de graus mais elevados. O resultado acabou por ser idêntico aos das curvas de De Casteljaou, apenas a matemática envolvida era diferente.

Devido a ampla publicação dos trabalhos de Bézier (BÉZIER, 1977; BÉZIER, 1967; BÉZIER, 1968; BÉZIER, 1974; VERNET, 1971), os seus estudos acabaram chamando a atenção do meio científico, e em particular, a de A. R. Forrest. Forrest começou a analisar os trabalhos de Bézier e percebeu que as curvas geradas por ele poderiam ser expressas em termos dos polinômios de Bernstein, ou seja, na forma em que De Casteljaou tinha desenvolvido desde o final dos anos cinquenta. O artigo de Forrest sobre curvas de Bézier (FORREST, 1972) foi muito influente e ajudou a popularizar tais geometrias. Tão grande foi o desenvolvimento que as curvas de Bézier tornou-se base do sistema CAD/CAM da

Rénault, chamado de UNISURF. Na sequência foram influenciadas outras áreas industriais, desta vez a aeronáutica, e como representante, tem-se a empresa francesa Dassault, a qual havia desenvolvido seu próprio sistema chamado EVE. Este sistema seria mais tarde evoluído para o CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application), o qual é até hoje utilizado no setor aeronáutico do mundo inteiro. Outra contribuição de Bézier foi o desenvolvimento de um método capaz de deformar conjuntos inteiros de superfícies, as quais são incorporadas a um cubo e, em seguida, é deformado a partir de tri-váriáveis, ficando assim chamado de cubos de Bézier (BÉZIER, 1967; BÉZIER, 1978).

### 2.2.3 Superfície de Bézier aplicada à Equação Integral de Contorno

Tradicionalmente, projetos geométricos e Análise de Elementos de Contorno (AEC) são tratados como módulos separados, exigindo diferentes métodos e representações, que incluem modelos paramétricos contínuos e modelos discretos. NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) (PIEGL; TILLER, 1997), as quais são modelos paramétricos contínuos, são muitas vezes utilizados para o projeto geométrico em sistemas CAD, enquanto que malhas, modelos discretos, são utilizados na análise de elementos de contorno. Devido a incompatibilidade entre diferentes modelos e representações envolvidas, o pós-processamento no projeto geométrico ou o pré-processamento na análise de elementos de contorno é essencial. Portanto, a conversão e remodelação são necessárias para as iterações entre o projeto geométrico e o MEC. Os erros são inevitavelmente introduzidos durante a conversão e remodelação. Tornando assim a integração entre o projeto geométrico e o MEC cada vez mais importante.

Uma das maneiras de realizar a integração entre os componentes CAD e CAE é usando diretamente o modelo CAD para posterior aplicação do CAE. Portanto, modelos CAD diretamente utilizáveis e precisos são altamente desejáveis para o ciclo de projeto geométrico e AEC. No entanto, os ambientes CAD/CAE são geralmente heterogêneos devido aos componentes de atividades altamente dependentes com os correspondentes modelos matemáticos. Os requisitos para as propriedades dos objetos e dos modelos matemáticos são diferentes a depender da área de aplicação, como por exemplos, na área de geração de grid se diferem das exigências da AEC (ANDREY; THOMAS, 1999). Além disso, os modelos CAD com representação do contorno podem conter erros, tais como lacunas, topologia incorreta e curvas cortadas. Na maioria dos casos, os problemas desses erros do CAD não afetam a eficiência das aplicações gráficas porque esses erros são demasiadamente pequenos para serem observados visualmente. No entanto, os principais problemas são encontrados na criação dos modelos matemáticos do CAE tais como em malhas de elementos finitos/elementos de contorno, as quais requerem a continuidade global do contorno do objeto. Portanto, um modelo matemático CAD do objeto deve ser pré-processado para

atender às exigências específicas na posterior análise por elementos de contorno.

Diante da necessidade de atenção entre o acoplamento dos modelos CAD, com foco nas superfícies de Bézier, e o MEC, abaixo são apresentados os poucos trabalhos que se dedicam, seja na integração quanto na aplicação dos modelos geométricos na análise por elementos de contorno.

Schlemmer, Rucker e Richter (1994) apresenta um método para calcular problemas estacionários e dependentes do tempo usando elementos de contorno de Bézier com continuidade  $C^1$ . Neste trabalho é discutido a aproximação da solução e o elemento de Bézier quadrilateral, com 16 pontos de controle. O método é validado por meio de um problema biomédico, cujos resultados são comparados com soluções analíticas de um modelo esférico do tórax humano excitado por um único dipolo dentro do coração. Investigações adicionais foram realizadas sobre a dispersão de ondas eletromagnética transitória para corpos de formas simples usando representação isoparamétrica de Bézier Spline tanto para geometria quanto para a solução. No caso de equação integral de segunda ordem, os autores mostram que a suavidade da solução é melhorada devido à continuidade  $C^1$  da função de forma. Além do que as equações integrais de primeira ordem são passíveis, segundo os autores, de aplicação direta do MEC com derivação do núcleo dentro da integral e no ponto de colocação

Em Meihe e Zesheng (1996), um Método dos Elementos de Contorno é aplicado para animações em tempo real de objetos deformáveis. Para tanto, os autores fazem uso das superfícies B-Spline, com incorporação dos seus pontos de controle na equação dinâmica do MEC, para representar a superfície exterior visível do objeto no processo de deformação. Por fim, Meihe e Zesheng (1996) aplica o método desenvolvido, considerando B-Spline, à simulação anatômica. Um modelo pituitário (pequeno corpo oval, na fossa da esfenóide) do cérebro humano, que é reconstruído a partir do conjunto de seções anatômicas, é selecionado como exemplo de objeto deformável quando submetido à ação de ferramentas virtuais, tais como bisturi ou sondas. O modelo proposto, segundo os autores, produz bom realismo gráfico e alta velocidade de desempenho. Os resultados apresentados neste artigo mostram que o MEC não só tem menor tempo computacional quando comparado ao método dos elementos finitos, como também é um método conveniente para combinar com reconstrução 3D para modelagem de superfícies, uma vez que este permite a redução da dimensionalidade do problema por um.

Nowak, Nowak e Wrobel (2002) discute em seu artigo a identificação da frente de mudança de fase na modelagem contínua. O problema é formulado a partir da abordagem da geometria inversa e resolvido por uma série de soluções diretas, que gradualmente aborda com precisão a posição frontal. A superfície entre as fases sólida e líquida é modelada por dois segmentos de spline de Bézier. A grande vantagem, apresentada pelos autores, é o pequeno número de variáveis de projeto (e, em consequência necessárias medições) no problema de geometria inversa. O artigo deixa claro a importância da utilização do

MEC na modelagem do problema, uma vez que, devido a mudança de geometria no procedimento iterativo, torna-se mais fácil a utilização de um método numérico que construa malhas apenas ao longo da fronteira do corpo. Além disso, a dependência dos resultados finais quanto ao número, localização e posição das medições foram investigadas. Para obter as medições, os autores, utilizaram termopares e/ou câmeras de infra-vermelha, cujos resultados obtidos por estes dois métodos foram comparados.

Em Wang (2009) é realizado a integração do CAD com a análise dos elementos de contorno através dos métodos de subdivisão. Neste estudo, Wang estende conceito da computação gráfica, tais como método de subdivisão de superfícies, à aplicações para desenhos mecânicos e à análise por elementos de Contorno (AEC), fazendo com que ocorra uma perfeita integração entre CAD e AEC, seja no modelo quanto na representação. Tradicionalmente, projetos geométricos e AEC são tratados como módulos separados, necessitando de diferentes representações e modelos. A transição do projeto geométrico para a AEC exige um esforço substancial e erros são inevitavelmente introduzido durante a transição. Neste trabalho de Wang (2009), a integração do CAD para o AEC é apresentado via método de subdivisão, chamando atenção por ser esta a primeira vez em que este problema é tratado por este método. Ainda no trabalho de Wang (2009) é criado um modelo comum ou uma representação unificada para o projeto geométrico e para a análise de elementos de contorno, além do mais, geração de malhas automática para projeto geométrico e AEC foram desenvolvidas via método de subdivisão.

Em Boltuc e Zieniuk (2011) é apresentado uma forma de resolver problemas de contorno modeladas pela equação de Navier–Lame com forças de corpo. Para resolver numericamente o problemas, os autores, utilizaram a versão modificada das equações integrais de contorno, as quais foram chamadas de sistema de equação integral paramétrica (ZIENIUK, 2001). Nesta versão modificada foram incluídas, analiticamente, a geometria do contorno por meio de curvas apropriadas. Neste estudo os autores consideraram domínios de formas complexas, especialmente com lados curvos, aproximadas por superfícies quadrangular de Bézier, as quais são bem conhecidas da computação gráfica. Devido à complexidade geométrica, teve-se a necessidade de utilizar patches de Bézier de grau maiores que um para modelar áreas, além do mais, fez-se necessário utilizar quadratura de alta ordem para integrar neste domínio. Os autores compararam os seus resultados com a solução analítica e/ou com os resultados obtidos pelo MEC e chegaram a conclusão que a abordagem proposta é confiável e eficaz para uma variedade de problemas práticos.

Tomografia de capacitância elétrica é uma técnica de visualização promissora para a imagem da distribuição da permissividade interna usando medições de capacitância de contorno. Devido às suas vantagens de não ser invasiva, não instrutiva, sem radiação e de baixo custo, esta técnica de visualização tem sido aplicada com sucesso em muitos processos industriais. Segundo Ren et al. (2013), os algoritmos atuais mais comum na utilização em tomografia de capacitância elétrica são baseados em pixel/volume com parametrização



da permissividade. No entanto, quando a permissividade é constante por partes, torna-se difícil o aumento da resolução espacial (REN et al., 2013). Com base nestas informações, Ren et al. (2013) apresenta um algoritmo baseado na forma para a reconstrução direta da configuração geométrica da interface suave entre suas camadas de materiais. Para tornar suave a interface entre os materiais, Ren et al. (2013) utiliza a superfície de Bézier e para determinar a forma incógnita da geometria é utilizado, de forma iterativa, o método de Levenberg-Marquadt. Para melhorar a eficiência computacional, o problema externo é resolvido usando uma equação integral de contorno e um método de cálculo rápido do Jacobiano é desenvolvido usando o teorema da reciprocidade, além, de algumas técnicas de transformação integral. Ren et al. (2013) demonstra que o método apresentado, usando superfícies de Bézier, tem capacidade de reconstruir as interfaces tridimensionais suaves e contínuas com boa precisão e elevada convergência.

Em Zieniuk e Szerszen (2013) a representação da superfície para problemas de contorno 3D é obtida por meio das superfícies de Bézier triangulares. Neste caso, os autores afirmam que o contorno pode ser descrito por uma quantidade relativamente pequena de pontos de controle necessários para a criação da superfície de Bézier. Análogo ao problema 2D analisado em Zieniuk (2001), a proposta de não utilizar elementos para representar a forma e, sim, inserir a representação do contorno dentro do formalismo das PIES (sistema de equações integrais paramétricas), a qual tem sido usada para resolver problema de valor de contorno em 3D foi utilizada. Os autores focaram em analisar problemas potencial 3D modelado por equações diferenciais parcial de Laplace. Estas equações diferenciais foram escritas na forma alternativa, com a ajuda das PIES e os autores concluíram, entre outras coisas, que as superfícies triangulares de Bézier parecem ser uma ferramenta eficiente para modelagem do contorno 3D e em conexão com PIES fornecem uma maneira fácil de resolver problemas de valor de contorno tridimensionais.



## Teoria de Mindlin para Elasticidade com Efeito Microestrutural

### 3.1 Introdução

Da elasticidade clássica, sabe-se que todas as quantidades fundamentais (constantes dos materiais, deslocamentos, tensor de tensão e deformação) são valores médios obtidos ao redor de um ponto qualquer  $x$  de um pequeno volume elementar, entretanto, este volume elementar deve ser suficientemente grande quando comparado com a escala da microestrutura do material. Para ilustrar a hipótese de localidade e a necessidade de enriquecer a teoria clássica, Exadaktylos e Vardoulakis (2001) apresentam um exemplo do contínuo unidimensional, no qual é considerado um pequeno volume elementar,  $l$ , centrado no ponto  $x$  (ver Figura 3.1) e cujos valores médios do deslocamento é dado por:

$$\langle u \rangle_{x;l} = \frac{1}{l} \int_{-1/2}^{1/2} u(\mathbf{X} + \xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Realizando a expansão em série de Taylor para  $u(x + \xi)$  em torno do ponto  $\mathbf{X}$  e truncando a série no termo constante, é possível obter com o auxílio da Eq.(3.1):

$$\langle u \rangle_{x;l} = u(\mathbf{X}). \quad (3.2)$$

A partir da Eq.(3.2), fica evidente que o valor *local*  $u(\mathbf{X})$  e o valor *não local*  $\langle u \rangle_{x;l}$  coincidem. Na teoria de campos, e neste caso específico o de deslocamento, os valores

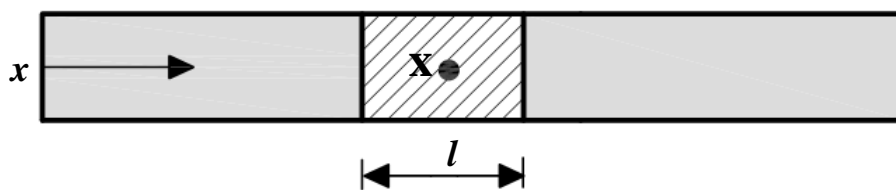


Figura 3.1 – Representação do contínuo unidimensional

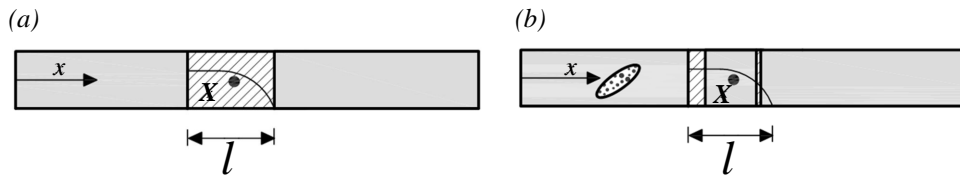


Figura 3.2 – Contínuo unidimensional (a) com deslocamento variando quadraticamente e (b) considerando elementos de menor tamanho.

locais identificados pela média dada na Eq.(3.2) são chamados de teoria simples ou teoria local. O mesmo caráter local acontece quando o termo linear da expansão de Taylor é considerado, isto é,

$$u(\mathbf{X} + \xi) = u(\mathbf{X}) + \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{X}} \xi \Rightarrow \langle u \rangle|_{l;x} = u(\mathbf{X}). \quad (3.3)$$

Quando é considerado o campo de deslocamento variar quadraticamente (Figura 3.2), a expansão em série de Taylor ao redor do ponto  $\mathbf{X}$  deve ser considerada, no mínimo, até o segundo termo, ou seja,

$$u(\mathbf{X} + \xi) = u(\mathbf{X}) + \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=\mathbf{X}} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right|_{x=\mathbf{X}} \xi^2. \quad (3.4)$$

Aplicando a Eq.(3.4) na Eq.(3.1) chega-se:

$$\langle u \rangle|_{l;x} = u(\mathbf{X}) + \frac{l^2}{24} \left. \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \right|_{x=\mathbf{X}}. \quad (3.5)$$

A partir da Eq.(3.5), observa-se que a regra definida pela Eq.(3.1) incorporou o gradiente de segunda ordem ou regra 2-grade, que contempla, neste caso, o efeito da curvatura. Teorias de campo que são fundamentadas em regras de média que incluem parcelas gradiente de alta ordem são chamadas teorias *não local* ou *gradientes de alta ordem*. A generalização da Eq.(3.5) para duas e três dimensões é obtida pela substituição da derivada de segunda ordem pelo operador Laplaciano.

Observações importantes podem ser realizadas com referência à Eq.(3.5) (KARLIS, 2009):

- a) o valor médio do campo de deslocamento não é igual ao valor do deslocamento no ponto  $\mathbf{X}$ . Entretanto, para ser considerado os valor médio e local do ponto  $\mathbf{X}$  iguais, faz-se necessário considerar campos de deslocamentos lineares (como visto pelas Eq.3.3 e Eq.3.4), o que pode ser aproximado se for considerado elementos,  $l$ , cada vez menores como mostrado na Figura 3.2b. Mas à medida que é diminuído o tamanho do elemento, este torna-se comparável com o tamanho da microestrutura e a hipótese de que *o tamanho de  $l$  deve ser suficientemente grande em comparação com a microestrutura do material* é violada;

- b) o termo adicional  $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\mathbf{X}}$  da Eq.(3.5) revela que a localidade da elasticidade clássica não é capaz de satisfazer a exigência não local representada por este termo;
- c) o termo  $\frac{l^2}{24} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=\mathbf{X}}$  indica que a discrepância entre a localidade e a não localidade pode ser resolvida se gradientes de deformações de alta ordem forem considerados na expressão da densidade de energia potencial elástica;
- d) finalmente, a observação mais interessante é a presença do parâmetro  $l$  na Eq.(3.5). Na verdade,  $l$  é um parâmetro de escala para o comprimento interno, o qual fornece uma comparação entre a micro e a macroestrutura.

Diante do exposto, a descrição de problemas da elasticidade clássica, em que ocorrem mudanças abruptas da intensidade dos campos de deslocamentos, deformações e tensões, necessita ser enriquecida por termos gradientes de alta ordem e por parâmetros de escala de comprimento interno. Na tentativa de contornar este problema, neste capítulo é apresentado a teoria da elasticidade generalizada considerando efeito microestrutural proposta por Mindlin, a qual será o alicerce para o desenvolvimento deste trabalho.

## 3.2 Teoria da elasticidade gradiente de deformação

### 3.2.1 Cinemática

Em 1964, R. D. Mindlin (MINDLIN, 1964) desenvolveu a teoria elástica do meio contínuo que leva em consideração a propriedade de rede cristalina por meio da incorporação de célula unitária, a qual pode ser interpretada como uma molécula de um polímero, ou como de um cristalite ou, ainda, como de um grão dos materiais granulares.

Em seu trabalho, Mindlin considerou um macro-volume  $\mathbf{V}$ , limitado por uma superfície  $\mathbf{S}$ , e um micro-volume  $\mathbf{V}' \in \mathbf{V}$ . A partir destas considerações, foram definidos os macro e micro-deslocamentos, respectivamente, por:

$$u_i = x_i - X_i. \quad (3.6)$$

$$u'_i = x'_i - X'_i. \quad (3.7)$$

Com  $i = 1, 2, 3$ ,  $X_i$  e  $x_i$  sendo as componentes dos vetores posição material e espacial, respectivamente, de uma partícula material com respeito a uma origem fixa. Já as componentes,  $x'_i$  e  $X'_i$  representam a posição material e espacial, respectivamente, com relação ao sistema de coordenadas retangulares que tem sua origem fixada na partícula.

Definido os macro e micro-deslocamentos, Mindlin considerou que os gradientes dos deslocamentos fossem pequenos em comparação com a unidade ( $|\partial u_i / \partial X_i| \ll 1$  e também  $|\partial u'_i / \partial X'_i| \ll 1$ ), o que resultou em

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_i} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_i} := \partial_i u_i, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial X'_i} \approx \frac{\partial u'_i}{\partial x'_i} := \partial'_i u'_i. \quad (3.9)$$

Assumindo a expressão dos micro-deslocamentos como uma soma dos produtos de  $x'_i$  com outra função,  $\psi$ , dependente da posição  $x_i$  e  $t$  (tempo), é possível escrever o micro-deslocamento da forma:

$$u'_j = x'_k \psi_{kj}. \quad (3.10)$$

Onde a função  $\psi_{kj}$  representa a micro-configuração. Derivando a Eq.(3.10) com relação à posição, obtêm-se o gradiente do deslocamento dado pela Eq.(3.11):

$$\partial'_i u'_j = \psi_{ij} \quad (3.11)$$

onde a micro-configuração é considerada homogênea no micro-volume e não homogênea no macro-volume.

O tensor  $\tilde{\psi}$ , cujas componentes são  $\psi_{ij}$ , pode ser separado nas partes simétricas e antissimétrica, definido assim a micro-deformação  $\psi_{(kj)}$  e a micro-rotação  $\psi_{[kj]}$ , respectivamente. Além disso, os tensores macro-deformação ( $\tilde{\varepsilon}$ ) e macro-rotação ( $\tilde{\omega}$ ) são definidos conforme a elasticidade clássica,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (3.12)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i). \quad (3.13)$$

A partir dos tensores micro-configuração e o tensor gradiente do macro-deslocamento, define-se as componentes do tensor configuração relativa ( $\tilde{\gamma}$ ) por

$$\gamma_{ij} = \partial_i u_j - \psi_{ij}. \quad (3.14)$$

Por último, o gradiente da micro-configuração ( $\tilde{\kappa}$ ) foi definido por Mindlin como o macro-gradiente da micro-configuração, cuja representação matemática é:

$$\kappa_{ijk} = \partial_i \psi_{jk}. \quad (3.15)$$

Observando as Eq.(3.12-3.15) é possível verificar que os três tensores  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\kappa}$  são independentes das micro-coordenadas  $x'_i$ .

A Figura 3.3 ilustra a atuação dos tensores definidos acima, associando um macro-elemento referenciado a sistema de macro-coordenadas  $x_1 - x_2$  ao micro-elemento no sistema de micro-coordenadas  $x'_1 - x'_2$ .

### 3.2.2 Equações de equilíbrio e condições de contorno

Para representar o micro-meio, considere um paralelepípedo com volume  $V'$  e com lados de comprimento  $2d_i$ , cujos cossenos diretores com relação aos eixos  $x'_i$  são  $\varphi_{ij}$ . Seja,

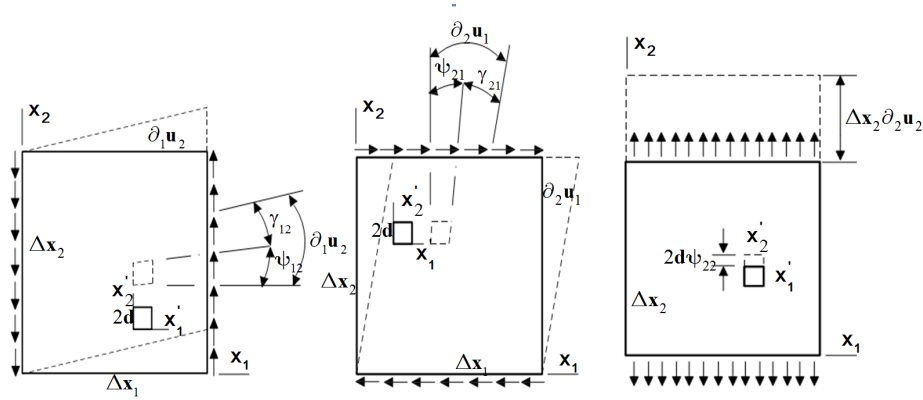


Figura 3.3 – Representação de algumas componentes de  $\partial_i u_j$ ,  $\psi_{ij}$  e  $\gamma_{ij}$

Fonte: Mindlin (1964)

ainda,  $x_i''$  as coordenadas cartesianas oblíquas paralelas aos lados  $d_i$  (com  $i = 1, 2, 3$ ), respectivamente. Assim, (JEFFREYS, 1950)

$$x_i' = \varphi_{ij} x_i'', \quad (3.16)$$

$$V' = 8\sqrt{[\varphi_{ij}\varphi_{ik}]}d_1d_2d_3, \quad (3.17)$$

$$dV' = 8\sqrt{[\varphi_{ij}\varphi_{ik}]}dx_1''dx_2''dx_3''. \quad (3.18)$$

Nota:  $[\circ]$  representa o determinante de  $\circ$ .

Seja  $\rho_M$  a massa do macro material por unidade do macro volume e considere  $\rho'$  para representar a massa do micro material por unidade do macro volume. Fazendo uso de  $\rho_M$  e  $\rho'$ , define-se a densidade de energia cinética (energia por unidade do macro volume):

$$T = \frac{1}{2}\rho_M \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{V'} \int \frac{1}{2}\rho' (\dot{u}_j + \dot{u}'_j)(\dot{u}_j + \dot{u}'_j) dV', \quad (3.19)$$

onde  $\dot{\circ}$  representa a derivada de  $\circ$  com relação à variável tempo. Substituindo a Eq.(3.10) e as Eq<sup>s</sup>.(3.16-3.18) na Eq.(3.19) e realizando a integração, tem-se

$$T = \frac{1}{2}\rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6}\rho' d_{kl}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{lj}, \quad (3.20)$$

onde

$$\rho = \rho_M + \rho', \quad (3.21)$$

$$d_{kl}^2 = d_p d_q (\delta_{p1}\delta_{q1}\varphi_{k1}\varphi_{l1} + \delta_{p2}\delta_{q2}\varphi_{k2}\varphi_{l2} + \delta_{p3}\delta_{q3}\varphi_{k3}\varphi_{l3}) = d_{lk}^2. \quad (3.22)$$

E  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker. No caso particular de um cubo com os lados de comprimento  $2d$  e paralelos aos eixos  $x_i'$ ,

$$\varphi_{ij} = \delta_{ij}, \quad d_1 = d_2 = d_3 = d. \quad (3.23)$$

Com as simplificações da Eq.(3.23), o segundo termo do lado direito reduz-se a  $\frac{1}{6}\rho' d^2\dot{\psi}_{ij}\dot{\psi}_{ij}$ . Se o material é composto inteiramente por células unitárias,  $\rho_M = 0$  e portanto  $\rho' = \rho$ .

Para a densidade da energia potencial (energia potencial por unidade de macro volume -  $\mathbf{W}$ ), tem-se uma função dependente de  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  e  $\kappa_{ijk}$ :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}). \quad (3.24)$$

As Eq<sup>s</sup>.(3.10), (3.19) e (3.24) são os pressupostos mínimos necessários para a formulação da teoria de Mindlin. O desenvolvimento das equações que seguem, foram adotadas células unitárias em forma de paralelepípedo para representar as células unitárias da rede cristalina. No entanto, nada impediria a utilização de outra forma geométrica para as células unitárias, apenas alteraria o tensor  $d_{kl}^2$ .

Para desenvolver a equação variacional de movimento é utilizado o princípio de Hamilton (MINDLIN, 1964) para variações independentes de  $\delta u_i$  e  $\delta\psi_{ij}$  entre os limites fixos  $u_i$  e  $\psi_{ij}$  no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{S} - \mathfrak{N}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathfrak{N}_1 dt = 0, \quad (3.25)$$

onde  $\delta \mathfrak{N}_1$  é a variação do trabalho realizado por forças externas,  $\mathfrak{S}$  é a energia cinética e  $\mathfrak{N}$  é potencial total, tal que

$$\mathfrak{S} \equiv \int_V T dV, \quad \mathfrak{N} \equiv \int_V W dV. \quad (3.26)$$

Fazendo uso da Eq.(3.20) e Eq.(3.26) é obtido

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{S} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V \left( \rho \ddot{u}_i \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d_{ji}^2 \ddot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk} \right) dV \right] dt. \quad (3.27)$$

Em Mindlin (1964) é definido as seguintes quantidades

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji}, \quad (3.28)$$

$$s_{ij} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \gamma_{ij}}, \quad (3.29)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \kappa_{ijk}}, \quad (3.30)$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}, \quad (3.31)$$

o qual corresponde a tensão de Cauchy, tensão relativa, tensão conjugada e tensão total, respectivamente. O primeiro índice do subscrito  $\mu_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}}$  designa a normal à superfície a qual as componentes atuam, enquanto o segundo subscrito representa a orientação do braço entre as forças e o terceiro subscrito fornece a orientação da força. O comportamento da tensão conjugada pode ser explicitada pela Figura 3.4.



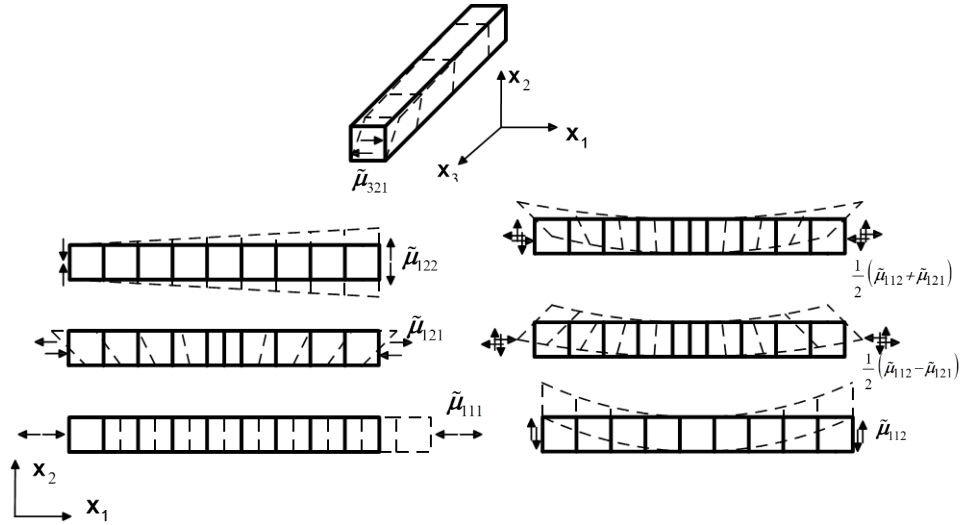


Figura 3.4 – Componentes do tensor de tensão conjugado  $\tilde{\mu}$

Fonte: Mindlin (1964)

A variação da função de densidade de energia potencial  $\mathbf{W}$  é escrita por

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + s_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk} = \tau_{ij} \partial_i \delta u_j + s_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) + \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk} \\ &= \partial_i [(\tau_{ij} + s_{ij}) \delta u_j] - \partial_i (\tau_{ij} + s_{ij}) \delta u_j - s_{ij} \delta \psi_{ij} + \partial_i (\mu_{ijk} \delta \psi_{jk}) - \partial_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aplicando o teorema da divergência, a energia potencial total pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{N} &= \int_V \delta W dV = - \int_V \partial_i (\tau_{ij} + s_{ij}) \delta u_j dV - \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + s_{ij}) \delta \psi_{jk} dV + \\ &\quad \int_S n_i (\tau_{ij} + s_{ij}) \delta u_j dS + \int_S n_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} dS. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Onde  $n$  é o vetor unitário normal à superfícies  $S$ .

A forma da Eq.(3.33) é a motivação para a adoção da equação variacional do trabalho realizado por forças externas, dada por:

$$\delta \mathfrak{N}_1 = \int_V F_j \delta u_j dV + \int_V \phi_{jk} \delta \psi_{jk} dV + \int_S t_j \delta u_j dS + \int_S T_{jk} \delta \psi_{jk} dS, \quad (3.34)$$

onde  $F_j$  é a força de corpo por unidade de volume,  $t_j$  é a força de superfície por unidade de área (vetor tensão ou *traction*), as componentes  $\phi_{jk}$  são interpretadas como força conjugada por unidade de volume (LOVE, 1927) e  $T_{jk}$  são as componentes da força conjugada por unidade de área. Os termos da diagonal de  $\phi_{jk}$  e  $T_{jk}$  são forças conjugadas sem momento e os termos fora da diagonal são forças conjugadas com momento. Em ambos  $\phi_{jk}$  e  $T_{jk}$ , o primeiro subscrito representa a orientação do braço entre as forças e o segundo subscrito fornece a orientação das forças.

Substituindo as Eq<sup>s</sup>.(3.27, 3.33, 3.34) na Eq.(3.25) é possível escrever a equação variacional do movimento:

$$\int_V (\partial_i \tau_{ij} + \partial_i s_{ij} + F_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV + \int_V \left( \partial_i \mu_{ijk} + s_{jk} + \phi_{jk} - \frac{1}{3} \rho' d_{jl}^2 \ddot{\psi}_{lk} \right) \delta \psi_{jk} dV + \int_S [t_j - n_i (\tau_{ij} + s_{ij})] \delta u_j dS + \int_S (T_{jk} - n_i \mu_{ijk}) \delta \psi_{jk} dS = 0 \quad (3.35)$$

A partir da Eq.(3.35), segue imediatamente as doze equações do tensor de tensão do movimento:

$$\partial_i (\tau_{ij} + s_{ij}) + F_j = \rho \ddot{u}_j, \quad (3.36)$$

$$\partial_i \mu_{ijk} + s_{jk} + \phi_{jk} = \frac{1}{3} \rho' d_{jl}^2 \ddot{\psi}_{lk}. \quad (3.37)$$

E as doze condições de contorno das forças por unidade de área:

$$t_j = n_i (\tau_{ij} + s_{ij}), \quad (3.38)$$

$$T_{jk} = n_i \mu_{ijk}. \quad (3.39)$$

### 3.2.3 Equações constitutivas

A fim de obter as equações constitutivas, Mindlin (1964) considerou para a função densidade da energia potencial a seguinte expressão:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + \frac{1}{2} d_{ijklm} \gamma_{ij} \kappa_{klm} + \frac{1}{2} f_{ijklm} \kappa_{ijk} \varepsilon_{lm} + \frac{1}{2} g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (3.40)$$

A partir de uma análise da Eq.(3.40), obtêm-se a quantidade de  $\frac{1}{2} \cdot 42 \cdot 43 = 903$  termos independentes de um total de  $42 \cdot 42 = 1764$  termos, que são obtidos pelas relações:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl} : 9 \cdot 9 - 60 = 21, \\ b_{ijkl} &= b_{klij} : 9 \cdot 9 - 36 = 45, \\ a_{ijklmn} &= a_{lmnij k} : 27 \cdot 27 - 351 = 378, \\ d_{ijklm} &: 9 \cdot 27 = 243, \\ f_{ijklm} &= f_{ijkml} : 9 \cdot 27 - 81 = 162, \\ g_{ijkl} &= g_{ijlk} : 9 \cdot 9 - 27 = 54, \\ total &= 903 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Fazendo uso da Eq.(3.40) e Eq.(3.28-3.30), as seguintes expressões são obtidas:

$$\tau_{pq} = c_{pqij} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk}, \quad (3.42)$$

$$s_{pq} = g_{pqij}\varepsilon_{ij} + b_{ijpq}\gamma_{ij} + d_{pqijk}\kappa_{ijk}, \quad (3.43)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqrij}\varepsilon_{ij} + d_{ijpqr}\gamma_{ij} + a_{pqrijk}\kappa_{ijk}, \quad (3.44)$$

No caso de material isotrópico, os tensores de ordem ímpar, tais como os coeficientes  $d_{ijklm}$  e  $f_{ijklm}$ , desaparecem. Os demais coeficientes devem ser considerados homogêneos e funções lineares de produtos de delta de Kronecker. Desta forma, têm-se (MINDLIN, 1964):

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \eta_1\delta_{ik}\delta_{jl} + \eta_2\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.45)$$

$$b_{ijkl} = b_1\delta_{ij}\delta_{kl} + b_2\delta_{ik}\delta_{jl} + b_3\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.46)$$

$$g_{ijkl} = g_1\delta_{ij}\delta_{kl} + g_2\delta_{ik}\delta_{jl} + g_3\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} a_{ijklmn} = & a_1\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + a_2\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + a_3\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \\ & a_4\delta_{jk}\delta_{il}\delta_{mn} + a_5\delta_{jk}\delta_{im}\delta_{nl} + a_6\delta_{jk}\delta_{in}\delta_{lm} + \\ & a_7\delta_{ki}\delta_{jl}\delta_{mn} + a_8\delta_{ki}\delta_{jm}\delta_{nl} + a_9\delta_{ki}\delta_{jn}\delta_{lm} + \\ & a_{10}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + a_{11}\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in} + a_{12}\delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn} + \\ & a_{13}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + a_{14}\delta_{jl}\delta_{kn}\delta_{im} + a_{15}\delta_{kl}\delta_{in}\delta_{jm}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

E finalmente, as condições da Eq.(3.41) necessitam das seis relações abaixo (MINDLIN, 1964):

$$\eta_1 = \eta_2 \equiv \mu, \quad g_2 = g_3, \quad a_1 = a_6, \quad a_2 = a_9, \quad a_5 = a_7, \quad a_{11} = a_{12}.$$

Assim, a densidade da energia potencial fica reduzida para dezoito coeficientes independentes

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}b_1\gamma_{ii}\gamma_{jj} + \frac{1}{2}b_2\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}b_3\gamma_{ij}\gamma_{ji} + \\ & g_1\gamma_{ii}\varepsilon_{jj} + g_2(\gamma_{ij} + \gamma_{ji})\varepsilon_{ij} + a_1\kappa_{iik}\kappa_{kjj} + a_2\kappa_{iik}\kappa_{jkj} + \frac{1}{2}a_3\kappa_{iik}\kappa_{jjk} + \\ & \frac{1}{2}a_4\kappa_{ijj}\kappa_{ikk} + a_5\kappa_{ijj}\kappa_{kik} + \frac{1}{2}a_8\kappa_{iji}\kappa_{kjk} + \frac{1}{2}a_{10}\kappa_{ijk}\kappa_{ijk} + a_{11}\kappa_{ijk}\kappa_{jki} + \\ & \frac{1}{2}a_{13}\kappa_{ijk}\kappa_{ikj} + \frac{1}{2}a_{14}\kappa_{ijk}\kappa_{jik} + \frac{1}{2}a_{15}\kappa_{ijk}\kappa_{kji}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

e as equações constitutivas tornam-se

$$\tau_{pq} = \lambda\delta_{pq}\varepsilon_{ii} + 2\mu\varepsilon_{pq} + g_1\varepsilon_{pq}\gamma_{ij} + g_2(\gamma_{pq} + \gamma_{qp}), \quad (3.50)$$

$$s_{pq} = g_1\delta_{pq}\varepsilon_{ii} + 2g_2\varepsilon_{pq} + b_1\delta_{pq}\gamma_{ii} + b_2\gamma_{pq} + b_3\gamma_{qp}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mu_{pqr} = & a_1 (\kappa_{iip} \delta_{qr} + \kappa_{rii} \delta_{pq}) + a_2 (\kappa_{iiq} \delta_{pr} + \kappa_{iri} \delta_{pq}) + a_3 \kappa_{iir} \delta_{pq} + a_4 \kappa_{pii} \delta_{rq} + \\ & a_5 (\kappa_{qii} \delta_{pr} + \kappa_{ipi} \delta_{qr}) + a_8 \kappa_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} \kappa_{pqr} + a_{11} (\kappa_{rpq} + \kappa_{qrp}) + \\ & a_{13} \kappa_{prq} + a_{14} \kappa_{qpr} + a_{15} \kappa_{rqp}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A teoria de Mindlin não se limita a materiais homogêneos, uma vez que se poderia considerar, por exemplo, os coeficientes elásticos e a funções de densidades como periódicas de período  $2d$ , medida que é igual ao comprimento do lado da célula unitária, a qual descreve a estrutura cristalina. No entanto, este procedimento aumentaria a complexidade do modelo e o tornaria de difícil tratamento. Para contornar este problema Mindlin (1964) considerou o macro material homogêneo, levando em consideração que para comprimento de onda maiores que as dimensões das células unitárias esta seria uma aproximação suficientemente boa para demonstrar as principais características de sua teoria.

A partir da consideração da isotropia do macro material e substituindo a Eq.(3.12), Eq.(3.14) e Eq.(3.15) nas equações constitutivas e, em seguida, inserindo nas equações Eq.(3.36) e Eq.(3.37), é possível escrever as equações de equilíbrio em termo dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} (\mu + 2g_2 + b_2) \partial_j \partial_j u_i + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) \partial_i \partial_j u_j - (g_1 + b_1) \partial_i \psi_{jj} - \\ (g_2 + b_2) \partial_j \psi_{ji} - (g_2 + b_3) \partial_j \psi_{ij} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_5) (\partial_k \partial_l \psi_{kl} \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi_{kk}) + (a_2 + a_{11}) (\partial_j \partial_k \psi_{ki} + \partial_i \partial_k \psi_{jk}) + \\ (a_3 + a_{14}) \partial_i \partial_k \psi_{kj} + a_4 \partial_k \partial_k \psi_{ll} \delta_{ij} + (a_8 + a_{15}) \partial_j \partial_k \psi_{ik} + a_{10} \partial_k \partial_k \psi_{ij} + \\ a_{13} \partial_k \partial_k \psi_{ji} + g_1 \partial_k u_k \delta_{ij} + g_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + b_1 (\partial_k u_k - \psi_{kk}) \delta_{ij} + \\ b_2 (\partial_i u_j - \psi_{ij}) + b_3 (\partial_j u_i - \psi_{ji}) + \phi_{ij} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

A base teórica, integridade e riqueza da teoria da elasticidade de Mindlin com microestrutura não pode ser subestimada. Entretanto, ela também deve ser reconhecido que para fins práticos o uso da Eq.(3.49) é limitada, uma vez que necessita a quantificação, seja experimentalmente ou de alguma outra forma, os 16 coeficientes adicionais. Com o objetivo de contornar este complicador, Mindlin também formulou versões mais simples de sua teoria geral da elasticidade com microestrutura. Nestas versões mais simples algumas hipóteses são feitas para permitir expressar a densidade de energia de deformação somente em termos dos deslocamentos macroscópicos, fazendo com que as equações Eq.(3.20), Eq.(3.40) e Eq.(3.49) percam o caráter multi-escalar. Estas hipóteses foram denotadas por *Forma I, II e III*, e estas se diferem de acordo com a relação assumida entre o gradiente da configuração microscópica  $\kappa_{ijk}$  e o deslocamento macroscópico  $u_i$  (ASKES; AIFANTIS, 2011):

- a) *forma I*: o gradiente da configuração microscópica é definida como o segundo gradiente do deslocamento macroscópico, isto é  $\kappa_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k$ ;

- b) *forma II*: o gradiente da configuração microscópica é assumido ser o primeiro gradiente de deformação macroscópico, isto é  $\kappa_{ijk} = \partial_i \varepsilon_{jk}$  ou  $\kappa_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j)$ ;
- c) *forma III*: a última forma é um pouco diferente na medida em que divide os efeitos da configuração microscópica em duas partes. Uma parte é a devido ao gradiente da rotação macroscópica  $\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jlm} \partial_i \partial_l u_m$  (onde  $\epsilon_{jlm}$  é o tensor permutação de Levi-Civita) e a outra parte é devido à parte simétrica do segundo gradiente do deslocamento macroscópico,  $\kappa_{ijk} = \frac{1}{3} (\partial_j \partial_k u_i + \partial_i \partial_k u_j + \partial_i \partial_j u_k)$ .

Apesar das diferenças teóricas entre as três formas acima apresentadas, as equações de movimento destas são idênticas tanto em termos de deslocamentos (MINDLIN, 1964) quanto em termos de tensões (MINDLIN; ESHEL, 1968).



---

# Formulação do MEC considerando efeitos microestruturais

## 4.1 Introdução

Nesta seção é apresentada a forma direta do MEC para resolver problemas elásticos pela teoria da elasticidade gradiente de deformação, a qual constitui uma combinação das teorias de Mindlin (MINDLIN, 1964; MINDLIN, 1965b; MINDLIN; ESHEL, 1968) e Aifantis (ALTAN; AIFANTIS, 1992b; RU; AIFANTIS, 1993), sendo esta última uma particularização da primeira. São apresentadas, neste capítulo, as formulações explícitas para deslocamento, deformação e tensão tanto para pontos internos quanto para o contorno na análise de problemas bidimensional e tridimensional. Em sequência é apresentada as equações constitutivas, condições de contorno, solução fundamental e identidade integral para elasticidade gradiente seja para pontos internos ou não.

## 4.2 Equações constitutivas e condições de contorno

Nesta seção é apresentado os detalhes da equação de equilíbrio e as correspondentes condições de contorno da teoria da elasticidade gradiente de Aifantis (ALTAN; AIFANTIS, 1992b; RU; AIFANTIS, 1993), a qual deve ser satisfeita por qualquer material linear considerando o efeito microestrutural. Uma vez que a teoria de Aifantis é um caso especial da teoria gradiente de deformação de Mindlin (GUTKIN, 2000), o desenvolvimento tanto da equação de equilíbrio quanto das condições de contorno é realizado por meio da primeira variação da energia de deformação proposta por Mindlin (MINDLIN, 1964; MINDLIN, 1965b; MINDLIN; ESHEL, 1968) e em seguida é feito uso da equação constitutiva proposta por Aifantis (ALTAN; AIFANTIS, 1992b; RU; AIFANTIS, 1993).

Seja um corpo elástico linear de volume  $V$  limitado pela superfície  $S$ . A geometria deste corpo, em um sistema de coordenada cartesiana com origem localizada no interior de

$V$ , é descrita com a ajuda do vetor normal unitário  $\hat{n}$  em  $S$ . De acordo com a Eq.(3.32) e considerando o tensor de deformação macroscópico igual ao da micro configuração, a energia de deformação armazenada torna dependente do tensor de deformação e do seu gradiente,

$$\aleph = \int_V (\tau_{ij}\varepsilon_{ij} + \mu_{ijk}\partial_i\varepsilon_{jk}) dV = \int_V \left( \tilde{\tau} : \tilde{\varepsilon} + (\tilde{\mu})^{321} : \nabla \tilde{\varepsilon} \right) dV. \quad (4.1)$$

Onde  $\tilde{\tau}$  é o tensor simétrico de tensão,  $\tilde{\varepsilon}$  é o tensor de deformação,  $\nabla$  é o operador gradiente e  $\tilde{\mu}$  é o tensor de tensão conjugada com 27 componentes  $\mu_{ijk}$ , os quais já foram explicados no capítulo anterior. Finalmente, a operação com dois e três pontos na Eq.(4.1) representam o produto interno chamados de contração dupla e tripla, respectivamente, de acordo com a regra

$$\begin{aligned} (a \otimes b) : (c \otimes d) &= (b \cdot c) (a \cdot d), \\ (a \otimes b \otimes m) \dot{:} (I \otimes c \otimes d) &= (m \cdot I) (b \cdot c) (a \cdot d), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $a, b, c, d, m, I$  são vetores no espaço tri-dimensional e  $\otimes$  representa o produto tensorial. O símbolo  $(\circ)^{321}$  é definido como

$$(a \otimes b \otimes c)^{321} = (c \otimes b \otimes a). \quad (4.3)$$

A partir do tensor de deformação  $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla)$ , tomando a variação da energia de deformação pode ser escrita em termos do vetor deslocamento

$$\aleph = \int_V \left( \tilde{\tau} : \nabla \delta \bar{u} + (\tilde{\mu})^{321} : \nabla \nabla \delta \bar{u} \right) dV. \quad (4.4)$$

Fazendo uso das identidade (BRAND, 1996):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\tilde{\mu})^{132} : \nabla \bar{u}] &= (\nabla \cdot \tilde{\mu})^T : \nabla \bar{u} + (\tilde{\mu})^{132} : \nabla \nabla \bar{u}, \\ \nabla \cdot [(\nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \bar{u}] &= [\nabla \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \bar{u} + (\nabla \cdot \tilde{\mu})^T : \nabla \bar{u}, \\ \nabla \cdot (\tilde{\tau} \cdot \bar{u}) &= (\nabla \cdot \tilde{\tau}) \cdot \bar{u} + \tilde{\tau} : \nabla \bar{u}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

com  $(\circ)^T$  representando a transposta de  $(\circ)$ , e usando a relação de simetria do tensor de tensão conjugado

$$\mu_{ijk} = \mu_{ikj} \text{ ou } (\tilde{\mu})^{132} = \tilde{\mu}, \quad (4.6)$$



a Eq.(4.4) torna

$$\begin{aligned}
\delta\aleph &= \int_V \left( \tilde{\tau} : \nabla \bar{u} + \tilde{\mu}^{321} : \nabla \nabla \delta \bar{u} \right) dV, \\
\delta\aleph &= \int_V \left( \nabla \cdot (\tilde{\tau} \cdot \delta \bar{u}) - (\nabla \cdot \tilde{\tau}) \cdot \delta \bar{u} + \nabla \cdot [(\tilde{\mu})^{132} : \nabla \delta \bar{u}] - \right. \\
&\quad \left. \nabla \cdot [(\nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u}] + [\nabla \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \delta \bar{u} \right) dV, \\
\delta\aleph &= \int_V \left( \nabla \cdot (\tilde{\tau} \cdot \delta \bar{u}) - (\nabla \cdot \tilde{\tau}) \cdot \delta \bar{u} + \nabla \cdot [\tilde{\mu} : \nabla \delta \bar{u}] - \right. \\
&\quad \left. \nabla \cdot [(\nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u}] + [\nabla \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \delta \bar{u} \right) dV, \\
\delta\aleph &= \int_V \left\{ \nabla \cdot [(\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u}] - \nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u} +, \right. \\
&\quad \left. \nabla \cdot (\tilde{\mu} : \nabla \delta \bar{u}) \right\} dV, \\
\delta\aleph &= \int_V \left\{ \partial_j [(\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta \bar{u}_k] - \partial_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta \bar{u}_k + \right. \\
&\quad \left. \partial_i (\mu_{ijk} \partial_k \delta \bar{u}_j) \right\} dV. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência (BRAND, 1996) na Eq.(4.7), tem-se

$$\begin{aligned}
\delta\aleph &= - \int_V \left\{ \nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u} \right\} dV + \int_S [\hat{n} \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta \bar{u}] dS + \\
&\quad \int_S \hat{n} \cdot (\tilde{\mu} : \nabla \delta \bar{u}) dS, \\
\delta\aleph &= - \int_V \partial_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta \bar{u}_k dV + \int_S \hat{n}_j (\tau_{jk} - \partial_i \mu_{ijk}) \delta \bar{u}_k dS + \\
&\quad \int_S \hat{n}_j (\mu_{ijk} \partial_k \delta \bar{u}_j) dS. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Como já observado no trabalho de Mindlin (MINDLIN, 1964), os termos  $\nabla(\delta \bar{u})$  e  $\delta \bar{u}$  são dependentes em  $S$ , entretanto, já os termos  $\hat{n} \cdot \nabla(\delta \bar{u})$  e  $\delta \bar{u}$  são independentes na superfície  $S$ . Desta forma, o operador gradiente do último termo do integrando da Eq.(4.8) é decomposto na parte tangencial e normal à superfície  $S$  na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \nabla(\delta \bar{u}) &= \hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \left( \nabla_S + \hat{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \delta \bar{u}, \\
\hat{n}_i \mu_{ijk} \partial_k \delta \bar{u}_j &= \hat{n}_i \mu_{ijk} D_k \delta \bar{u}_j + \hat{n}_i \mu_{ijk} \hat{n}_k D \delta \bar{u}_j, \tag{4.9}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\nabla_S &\equiv (\tilde{I} - \hat{n} \otimes \hat{n}) \cdot \nabla, \\
D_j &\equiv (\delta_{jl} - \hat{n}_j \hat{n}_l) \partial_l, \\
D &\equiv n_l \partial_l \tag{4.10}
\end{aligned}$$

e  $\tilde{I}$  representa o tensor identidade. Fazendo uso da Eq.(4.10) é possível reescrever o último termo integral da Eq.(4.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int_S [\hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \nabla(\delta \bar{u})] dS &= \int_S [\hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \left( \nabla_S + \hat{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \delta \bar{u}] dS, \\
\int_S [\hat{n}_i \mu_{ijk} \partial_k (\delta \bar{u}_j)] dS &= \int_S [\hat{n}_i \mu_{ijk} D_k \delta \bar{u}_j + \hat{n}_i \mu_{ijk} \hat{n}_k D \delta \bar{u}_j] dS, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int_S [\hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \nabla(\delta\bar{u})] dS &= \int_S (\hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \hat{n}) \cdot [\hat{n} \cdot \nabla(\delta\bar{u})] dS + \int_S (\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) : \nabla_S(\delta\bar{u}) dS, \\ \int_S [\hat{n}_i \mu_{ijk} \partial_k(\delta\bar{u}_j)] dS &= \int_S (\hat{n}_i \mu_{ijk} \hat{n}_k D \delta\bar{u}_j + \hat{n}_i \mu_{ijk} D_k \delta\bar{u}_j) dS. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A Eq.(4.12) pode ser, ainda, melhor trabalhada utilizando as identidades (BRAND, 1996)

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot [(\hat{n} \cdot \tilde{\mu})^T \cdot \delta\bar{u}] &= [\nabla_S \cdot (\hat{n} \cdot \tilde{\mu})^T] \cdot \delta\bar{u} + (\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) : \nabla_S(\delta\bar{u}), \\ \nabla_S \cdot (\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) &= (\nabla_S \hat{n}) : \tilde{\mu} + \hat{n} \cdot [\nabla_S \cdot (\tilde{\mu})^{213}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

e a relação de simetria da Eq.(4.6), a última integral da Eq.(4.12) torna

$$\begin{aligned} \int_S [\hat{n} \cdot \tilde{\mu} : \nabla(\delta\bar{u})] dS &= \int_S \{ \nabla_S \cdot [(\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta\bar{u}] - [(\nabla_S \hat{n}) : \tilde{\mu} + \hat{n} \cdot (\nabla_S \cdot (\tilde{\mu})^{213})] \cdot \delta\bar{u} \} dS, \\ \int_S \hat{n}_i \mu_{ijk} D_j \delta\bar{u}_k dS &= \int_S \{ D_j (\hat{n}_i \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k) - [(D_j \hat{n}_i) \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k + \hat{n}_i D_j \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k] \} dS \end{aligned} \quad (4.14)$$

Contudo, como é provado no Apêndice A, o primeiro termo do integrando do lado direito da Eq.(4.14) pode ser expresso na forma

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot [(\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta\bar{u}] &= [(\nabla_S \cdot \hat{n})(\hat{n} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu}] \cdot \delta\bar{u} + \hat{n} \cdot \{ \nabla_S \times [\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \delta\bar{u})] \}, \\ D_j \hat{n}_i \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k &= (D_l \hat{n}_l) \hat{n}_j \hat{n}_i \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k + \hat{n}_q \epsilon_{qpm} \partial_p (\epsilon_{mlj} \hat{n}_l \hat{n}_i \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainda no Apêndice A é provado que a integral  $\int_S \hat{n} \cdot \{ \nabla_S \times [\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \delta\bar{u})] \} dS$  desaparece quando a superfície  $S$  é suave, enquanto que para contornos não suaves tem-se

$$\begin{aligned} \int_S \hat{n} \cdot \{ \nabla_S \times [\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \delta\bar{u})] \} dS &= \sum_{C_a} \oint_{C_a} \{ \|(\hat{m} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu}\| \cdot \delta\bar{u} \} dC, \\ \int_S \hat{n}_q \epsilon_{qpm} \partial_p (\epsilon_{mlj} \hat{n}_l \hat{n}_i \mu_{ijk} \delta\bar{u}_k) dS &= \sum_{C_a} \oint_{C_a} \{ \|\hat{n}_i \hat{n}_j \mu_{ijk}\| \delta\bar{u}_k \} dC. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Onde  $C_a$  são as linhas da borda formada pela intersecção de duas porções de superfícies  $S_1$  e  $S_2$  de  $S$ , já o vetor unitário  $\hat{m}$  é definido por  $\hat{m} := \hat{s} \times \hat{n}$  com  $\hat{s}$  sendo o vetor unitário tangente a  $C_a$ . O símbolo  $\|\circ\|$  indica a diferença dos valores das quantidade interna,  $\circ$ , calculadas na interface das superfícies  $S_1$  e  $S_2$ . Para problemas 2D a integral da Eq.(4.16) é sempre igual a zero (APÊNDICE A).

Inserindo a Eq.(4.15) e Eq.(4.16) na Eq.(4.14), e em seguida, fazendo a substituição desta inserção na Eq.(4.12), pode-se reescrever a Eq.(4.8) da variação da energia de deformação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta\aleph &= - \int_V [\nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \delta\bar{u}] dV + \int_S (\hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \hat{n}) [\hat{n} \cdot \nabla(\delta\bar{u})] dS + \\ &\int_S \{ \hat{n} \cdot \tilde{\tau} - (\hat{n} \otimes \hat{n}) : \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial n} - \hat{n} \cdot (\nabla_S \cdot \tilde{\mu}) - \hat{n} \cdot [\nabla_S \cdot (\tilde{\mu})^{213}] \} \cdot \delta\bar{u} dS + \\ &\int_S [(\nabla_S \cdot \hat{n})(\hat{n} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu} - (\nabla_S \hat{n}) : \tilde{\mu}] \cdot \delta\bar{u} dS + \sum_{C_a} \oint_{C_a} \{ \|(\hat{m} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu}\| \cdot \delta\bar{u} \} dC, \end{aligned} \quad (4.17)$$

ou

$$\begin{aligned} \delta\aleph = & - \int_V [\partial_j(\tau_{jk} - \partial_i\mu_{ijk})\delta\bar{u}_k]dV + \int_S \hat{n}_i\hat{n}_j\mu_{ijk}D\delta\bar{u}_kdS + \\ & \int_S [\hat{n}_j\tau_{jk} - \hat{n}_i\hat{n}_jD\mu_{ijk} - \hat{n}_jD_i\mu_{ijk} - \hat{n}_iD_j\mu_{ijk} + (\hat{n}_i\hat{n}_jD_l\hat{n}_l - D_j\hat{n}_i)\mu_{ijk}]\delta\bar{u}_kdS + \\ & \sum_{C_a} \oint_{C_a} \{ \|\hat{m}_j\hat{n}_i\mu_{ijk}\| \delta\bar{u}_k \} dC. \end{aligned} \quad (4.18)$$

A variação do trabalho realizado por forças externas em  $V$  é devido à força de corpo  $\mathbf{f}$ , às forças de superfície externa (*tractions*)  $\mathbf{P}$ , à tensão conjugada de superfície  $\mathbf{R}$  e à tensão ressalto de superfície  $\mathbf{E}$ . Assim, a Eq.(3.34) pode ser escrita como (MINDLIN, 1964)

$$\begin{aligned} \delta\aleph_1 = & \int_V \mathbf{f} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}dV + \int_S \mathbf{R} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\delta\bar{\mathbf{u}})]dS + \int_S \mathbf{P} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}}dS + \sum_{C_a} \oint_{C_a} (\mathbf{E} \cdot \delta\bar{\mathbf{u}})dC, \\ \delta\aleph_1 = & \int_V \mathbf{f}_k \cdot \delta\bar{u}_kdV + \int_S \mathbf{R}_k D\delta\bar{u}_kdS + \int_S \mathbf{P}_k \delta\bar{u}_kdS + \sum_{C_a} \oint_{C_a} (\mathbf{E}_k \delta\bar{u}_k)dC \end{aligned} \quad (4.19)$$

A partir do fato que  $\delta\aleph = \delta\aleph_1$  e relacionando a Eq.(4.18) com Eq.(4.19), o equilíbrio para corpos elásticos gradiente,  $2D$  e  $3D$ , pode ser descrita pela equação:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{f} &= 0, \\ \partial_j(\tau_{jk} - \partial_i\mu_{ijk}) + f_k &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Juntamente com as condições de contorno para força de superfície e deslocamento, presentes na formulação clássica da elasticidade mas com a incorporação da microestrutura, são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} - (\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) : \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla_S \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}) - \hat{\mathbf{n}} \cdot [\nabla_S \cdot (\tilde{\boldsymbol{\mu}})^{213}] + \\ (\nabla_S \cdot \hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}} - (\nabla_S \hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \\ P_k = \hat{n}_j\tau_{jk} - \hat{n}_i\hat{n}_jD\mu_{ijk} - 2\hat{n}_jD_i\mu_{ijk} + \hat{n}_i\hat{n}_jD_l\hat{n}_l - D_j\hat{n}_i)\mu_{ijk}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0, \quad (4.22)$$

e as condições de contorno ausentes na formulação clássica (tensão conjugada de superfície e tensão ressalto de superfície) e presente na formulação da elasticidade gradiente com efeito microestrutural (formulação *não clássica*) são escritas por

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R}_0 \quad (R_k = \hat{n}_i\hat{n}_j\mu_{ijk} = R_k^0), \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\delta\bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \delta\bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{q}_0 \quad (D(\delta\bar{\mathbf{u}}) = \hat{n}_l\partial_l(\delta\bar{\mathbf{u}}) = q_k^0), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{E} = \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}\| = \mathbf{E}_0 \quad (E_k = \|\hat{n}_i\hat{m}_j\mu_{ijk}\| = E_k^0). \quad (4.24)$$

Onde  $\mathbf{P}_0$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_0$ ,  $\mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{q}_0$  e  $\mathbf{E}_0$  representam valores prescritos.

Fazendo uso das considerações para material isotrópico adotadas por Mindlin (1964), o tensor deformação macroscópico coincidente com o tensor micro configuração, as Eq.(3.50-3.52) podem ser expressas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &= \tilde{\tau} + \tilde{s} \quad (\sigma_{ij} = \tau_{ij} + s_{ij}), \\
\tilde{\tau} &= 2\mu\tilde{\varepsilon} + \lambda(\nabla \cdot \bar{u})\tilde{I} \quad (\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda(\partial_l \bar{u}_l)\delta_{ij}), \\
\tilde{\varepsilon} &= \frac{(\nabla \bar{u} + \bar{u}\nabla)}{2} \quad (\varepsilon_{ij} = \frac{(\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i)}{2}), \\
\tilde{s} &= -[2\mu c_3 \nabla^2 \tilde{\varepsilon} + \lambda c_1 \tilde{I} \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) + \lambda c_2 \nabla \nabla (\nabla \cdot \bar{u})], \\
s_{ij} &= -[2\mu c_3 \partial_l \partial_l \varepsilon_{ij} + \lambda c_1 \delta_{ij} \partial_l \partial_l (\partial_k \bar{u}_k) + \lambda c_2 \partial_i \partial_j (\partial_k \bar{u}_k)].
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Onde  $\nabla^2$  é o Laplaciano,  $\tilde{\varepsilon}$  é o tensor deformação,  $\tilde{\sigma}$  é o tensor de tensão total,  $\tilde{\tau}$  e  $\tilde{s}$  são chamados tensor de tensão de Cauchy e tensor de tensão relativo, respectivamente. O tensor tensão total está correlacionado com o tensor de deformação e ao gradiente do tensor deformação através de cinco constantes material independentes ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ ) sendo os dois primeiros conhecidos como constante de Lamé (MINDLIN, 1964).

A equação constitutiva mais simples e matematicamente mais fácil de manipulação é proposta por Aifantis e co-autores (AIFANTIS, 1992a; ALTAN; AIFANTIS, 1992b; RU; AIFANTIS, 1993), em que eles correlacionam o tensor de tensão conjugado,  $\tilde{\mu}$ , com o tensor de tensão relativa,  $\tilde{s}$ , de acordo com as relações

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &= g^2 \nabla \tilde{\tau}, \quad \mu_{ijk} = g^2 \partial_i \tau_{jk}, \\
\tilde{s} &= -\nabla \cdot \tilde{\mu} = -g^2 \nabla \cdot \nabla \tilde{\tau} = -g^2 \nabla^2 \tilde{\tau}, \\
s_{ij} &= -g^2 \partial_l \partial_l \tau_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Onde  $g^2$  é o coeficiente de energia do gradiente de deformação volumétrica, a única constante que relaciona a microestrutura com a macroestrutura. Pode-se ver (GUTKIN, 2000) que esta teoria simples é obtida da teoria geral de Mindlin, para tanto, é necessário considerar  $c_1 = c_3 = g^2$  e  $c_2 = 0$  na Eq.(4.25).

Adotando as simplificações da teoria de Aifantis e inserindo a Eq.(4.26) na Eq.(4.20), obtêm-se a equação de movimento para elasticidade gradiente do meio contínuo em termos do campo de deslocamento  $\bar{u}$ :

$$\begin{aligned}
\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} - g^2 \nabla^2 [\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u}] + f &= 0, \\
\mu \partial_j \partial_j \bar{u}_i + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_k \bar{u}_k - g^2 \partial_i \partial_t [\mu \partial_j \partial_j \bar{u}_i + (\lambda + \mu) \partial_i \partial_k \bar{u}_k] + f_i &= 0.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

### 4.3 Soluções fundamentais da elasticidade gradiente bi- e tridimensionais

Nesta seção são apresentadas as soluções fundamentais bidimensional (2-D) e 3-D para problemas elastostático gradiente. Estas soluções fundamentais são definidas como

solução, particulares, das equação diferencial parcial

$$L\tilde{u}^*(r) = -\Delta(y-x)\tilde{I}. \quad (4.28)$$

Onde  $\Delta$  é a função delta de Dirac,  $y$  é o ponto campo de deslocamento,  $L\tilde{u}^*(r) = -\Delta(y-x)\tilde{I}$ , devido à força unitária aplicada no ponto  $x$ ,  $r$  é a distância entre o ponto campo e o ponto fonte ( $r = |y-x|$ ) e  $L$  é o operador linear

$$\mu\nabla^2 + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot - g^2\nabla^2[\mu\nabla^2 + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot]. \quad (4.29)$$

De acordo com a decomposição de Helmholtz aplicada a campos tensoriais (DASSIOS; LINDELL, 2001), a solução fundamental  $L\tilde{u}^*(r) = -\Delta(y-x)\tilde{I}$  pode ser decomposta nas partes não rotacional e solenoidal, ficando

$$\tilde{u}^*(r) = \nabla\nabla\vartheta(r) + \nabla\nabla \times \mathbf{A}(r) + \nabla \times \nabla \times \tilde{G}(r), \quad (4.30)$$

onde  $\vartheta(r)$  é uma função escalar,  $\mathbf{A}(r)$  é uma função vetorial e  $\tilde{G}(r)$  uma função tensorial.

Substituindo a Eq.(4.30) na Eq.(4.28), considerando a relação

$$\nabla^2(v(r)) = -\Delta(r), \quad (4.31)$$

e a identidade

$$\nabla^2 = \nabla\nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times, \quad (4.32)$$

a Eq.(4.28) torna-se

$$\begin{aligned} &\nabla\nabla\{(\lambda + 2\mu)[\nabla^2\vartheta(r) - g^2\nabla^4\vartheta(r)]\} + \nabla\nabla \times \{(\lambda + 2\mu)[\nabla^2\mathbf{A}(r) - g^2\nabla^4\mathbf{A}(r)]\} + \\ &\nabla \times \nabla \times \{\mu[\nabla^2\tilde{G}(r) - g^2\nabla^4\tilde{G}(r)]\} = \nabla\nabla v(r) - \nabla \times \nabla \times (v(r)\tilde{I}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$v(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r} & \text{para } 2D, \\ \frac{1}{4\pi r} & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (4.34)$$

Levando em consideração a natureza irrotacional e solenoidal de  $\vartheta(r)$  e  $\tilde{G}(r)$ , respectivamente, e também o fato que  $\mathbf{A}(r)$  é um vetor dependente de  $r$ , sem maiores dificuldades, é possível ver que a Eq.(4.33) é identicamente satisfeita se  $\mathbf{A}(r) = 0$  e  $\vartheta(r)$ ,  $\tilde{G}(r)$  são soluções das equações

$$(\lambda + 2\mu)[\nabla^2\vartheta(r) - g^2\nabla^4\vartheta(r)] = v(r), \quad (4.35)$$

$$\mu[\nabla^2\tilde{G}(r) - g^2\nabla^4\tilde{G}(r)] = -v(r)\tilde{I}. \quad (4.36)$$

Para problemas 3-D, as funções escalares  $\vartheta(r)$  e tensorial  $\tilde{G}(r)$ , que satisfaz à Eq.(4.35) e à Eq.(4.36), respectivamente, tem a forma (APÊNDICE B)

$$\vartheta(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{r}{2} + \frac{g^2}{r} + \frac{g^2}{r} e^{-r/g} \right) + \frac{C_1}{r}, \quad (4.37)$$

$$\tilde{G}(r) = -\frac{1}{4\pi r} \left( \frac{r}{2} + \frac{g^2}{r} + \frac{g^2}{r} e^{-r/g} \right) \tilde{I} - \frac{C_2}{r} \tilde{I}, \quad (4.38)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes nulas. Uma observação interessante é feita quando é substituída as Eq.(4.37-4.38) na Eq.(4.30), e fazendo  $g^2 = 0$  é recuperada a solução fundamental da teoria da elasticidade clássica.

Para o problema 2-D, a função escalar  $\vartheta(r)$  e tensorial  $\tilde{G}(r)$  têm a forma

$$\vartheta(r) = -\frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{r^2}{2}(\ln r - 1) + g^2 \ln r + g^2 K_0 \left( \frac{r}{g} \right) \right], \quad (4.39)$$

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi r} \left[ \frac{r^2}{2}(\ln r - 1) + g^2 \ln r + g^2 K_0 \left( \frac{r}{g} \right) \right] \tilde{I}, \quad (4.40)$$

em que  $K_0(\circ)$  é função de Bessel modificada do segundo tipo com ordem zero.

Inserindo as equações Eq.(4.37-4.40) na Eq.(4.30) e adotando  $\mathbf{A}(r) = 0$ , obtêm-se a solução fundamental da Eq.(4.28):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(r, \mu, \nu, g) &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [\Upsilon(r, \nu, g) \tilde{I} - \chi(r, g) \hat{r} \otimes \hat{r}], \\ u_{ij}^* &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [\Upsilon(r, \nu, g) \delta_{ij} - \chi(r, g) \hat{r}_i \hat{r}_j]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Na Eq.(4.41),  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\hat{r}$  é o vetor unitário do raio  $\mathbf{r}$  e, por fim,  $\Upsilon$  e  $\chi$  são funções escalares dado por:

$$\begin{aligned} \Upsilon(r, \nu, g) &= (3 - 4\nu) \frac{1}{r} + 2(1 - 2\nu) \left[ -\frac{g^2}{r^3} + \left( \frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} \right) e^{-r/g} \right] + \\ &4(1 - \nu) \left[ -\frac{g^2}{r^3} + \left( \frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{-r/g} \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\chi(r, g) = -\frac{1}{r} + \frac{6g^2}{r^3} - \left( \frac{6g^2}{r^3} + \frac{6g}{r^2} + \frac{2}{r} \right) e^{-r/g}, \quad (4.43)$$

para problemas 3-D e

$$\Upsilon(r, \nu, g) = -2(3 - 4\nu) \ln r + \frac{4g^2}{r^2} - 2(3 - 4\nu) K_0 \left( \frac{r}{g} \right) - 2K_2 \left( \frac{r}{g} \right), \quad (4.44)$$

$$\chi(r, g) = -2 + \frac{8g^2}{r^2} - 4K_2 \left( \frac{r}{g} \right), \quad (4.45)$$

para problemas 2-D. Na Eq.(4.44) e Eq.(4.45),  $K_0(\circ)$  e  $K_2(\circ)$  são as funções de Bessel de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Quando é considerado o coeficiente gradiente  $g$  sendo nulo, pode-se provar que

$$\Upsilon(r, \nu) = \begin{cases} -2(3 - 4\nu) \ln r & \text{para } 2D, \\ (3 - 4\nu) \frac{1}{r} & \text{para } 3D, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\chi(r) = \begin{cases} -2 & \text{para } 2D, \\ -\frac{1}{r} & \text{para } 3D. \end{cases} \quad (4.47)$$

Estas duas últimas equações expressão a solução fundamental da elastostática clássica (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Utilizando as expansões

$$e^{-r/g} = 1 - \frac{r}{g} + \frac{r^2}{2!g^2} - \frac{r^3}{3!g^3} + \frac{r^4}{4!g^4} - \dots, \\ K_n \left( \frac{r}{g} \right) = \frac{\pi}{2\text{sen}(n\pi)} r^{-n} \left[ \frac{2^n (1/g)^{-n}}{\Gamma[1-n]} + \frac{2^{-2+n} (1/g)^{2-n} r^2}{\Gamma[2-n]} + \dots \right] + \\ \frac{\pi}{2\text{sen}(n\pi)} r^n \left[ -\frac{2^{-n} (1/g)^n}{\Gamma[1+n]} - \frac{2^{-2-n} (1/g)^{2+n} r^2}{\Gamma[2+n]} - \dots \right], \quad (4.48)$$

com  $\Gamma$  sendo a função gama, pode-se ver que, fazendo o limite quando  $\mathbf{r} \rightarrow 0$ , as funções  $\Upsilon$  e  $\chi$  dada pelas Eq.(4.42-4.45) são regulares de acordo com as relações assintóticas

$$\Upsilon(r, \nu) = O(1), \quad \chi(r) = O(\ln r) \text{ para } 2D, \\ \Upsilon(r, \nu) = O(1), \quad \chi(r) = O(r) \text{ para } 3D. \quad (4.49)$$

## 4.4 Identidade Integral para elasticidade gradiente

Para proceder o desenvolvimento da representação integral para problemas da elasticidade gradiente, a identidade integral recíproca deve ser desenvolvida, análoga à identidade recíproca de Betti para a elasticidade clássica (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). O objetivo neste item é mostrar o desenvolvimento analítico de uma identidade recíproca válida para o presente caso da elasticidade gradiente obtida em Polyzos et al. (2003a).

Considere o vetor

$$\bar{w} = \tilde{\sigma} \cdot \bar{u}^* - \tilde{\sigma}^* \cdot \bar{u}, \quad (4.50)$$

onde  $\tilde{\sigma}$  e  $\bar{u}$  é o tensor de tensão total e o vetor deslocamento do corpo elástico gradiente de volume  $V$  e superfície  $S$ , respectivamente. Os pares  $(\tilde{\sigma}, \bar{u})$  e  $(\tilde{\sigma}^*, \bar{u}^*)$  são dois estados de deformação e tensão do mesmo corpo. Fazendo uso das Eq.(4.25) e Eq.(4.26), o divergente de  $\bar{w}$  pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot \bar{w} = \nabla \cdot [\tilde{\sigma} \cdot \bar{u}^*] - \nabla \cdot [\tilde{\sigma}^* \cdot \bar{u}], \\ \nabla \cdot \bar{w} = \nabla \cdot [(\tilde{\tau} + \tilde{s}) \cdot \bar{u}^*] - \nabla \cdot [(\tilde{\tau}^* + \tilde{s}^*) \cdot \bar{u}], \\ \nabla \cdot \bar{w} = \nabla \cdot [(\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) \cdot \bar{u}^*] - \nabla \cdot [(\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*) \cdot \bar{u}]. \quad (4.51)$$

Fazendo uso da equação  $\nabla \cdot (\tilde{\tau} \cdot \bar{u}) = (\nabla \cdot \tilde{\tau}) \cdot \bar{u} + \tilde{\tau} : \nabla \bar{u}$ , a Eq.(4.51) pode ser re-escrita:

$$\nabla \cdot \bar{w} = [\nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \bar{u}^* - [\nabla \cdot (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*)] \cdot \bar{u} + \\ (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}) : \nabla \bar{u}^* - (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*) : \nabla \bar{u}. \quad (4.52)$$

Prova-se no Apêndice C que

$$\tilde{\tau} : \nabla \bar{u}^* - \tilde{\tau}^* : \nabla \bar{u} = 0, \quad (4.53)$$

assim a Eq.(4.53) torna-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{w} &= [\nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \bar{u}^* - [\nabla \cdot (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*)] \cdot \bar{u} - \\ &\quad \nabla \cdot \tilde{\mu} : \nabla \bar{u}^* + \nabla \cdot \tilde{\mu}^* : \nabla \bar{u}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss para  $\bar{w}$  em um volume  $V$ , e utilizando a Eq.(4.50) e Eq.(4.54), pode-se escrever

$$\begin{aligned} &\int_V \{[\nabla \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \bar{u}^* - [\nabla \cdot (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*)] \cdot \bar{u}\} dV + \\ &\quad \int_V \{\nabla \cdot \tilde{\mu}^* : \nabla \bar{u} - \nabla \cdot \tilde{\mu} : \nabla \bar{u}^*\} dV \\ &= \int_S \{[\hat{n} \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu})] \cdot \bar{u}^* - [\hat{n} \cdot (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*)] \cdot \bar{u}\} dS. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Uma vez que ambos os campos  $(\tilde{\sigma}, \bar{u})$  e  $(\tilde{\sigma}^*, \bar{u}^*)$  satisfazem à equação de equilíbrio Eq.(4.20) com forças de corpo  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{f}^*$ , respectivamente, a Eq.(4.55) torna-se

$$\begin{aligned} &\int_V \{f^* \cdot \bar{u} - f \cdot \bar{u}^*\} dV + \int_V \{(\nabla \cdot \tilde{\mu}^*) : \nabla \bar{u} - (\nabla \cdot \tilde{\mu}) : \nabla \bar{u}^*\} dV \\ &= \int_S \{t \cdot \bar{u}^* - t^* \cdot \bar{u}\} dS, \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde  $t = \hat{n} \cdot (\tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu})$ ,  $t^* = \hat{n} \cdot (\tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*)$  são os vetores força de superfície (*tractions*) correspondente ao tensor de tensão total ( $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau} - \nabla \cdot \tilde{\mu}$  e  $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\tau}^* - \nabla \cdot \tilde{\mu}^*$ ) atuando no contorno  $S$  do corpo  $V$ .

Usando a Eq.(4.26), a equação acima pode ser reescrita (APÊNDICE C)

$$\begin{aligned} &\int_V \{f^* \cdot \bar{u} - f \cdot \bar{u}^*\} dV + \int_S \{(\hat{n} \cdot \tilde{\mu}^*) : \nabla \bar{u} - (\hat{n} \cdot \tilde{\mu}) : \nabla \bar{u}^*\} dS \\ &= \int_S \{t \cdot \bar{u}^* - t^* \cdot \bar{u}\} dS. \end{aligned} \quad (4.57)$$

A expressão anterior pode ser ainda modificada a partir do uso das equações Eq.(4.12-4.17), e lembrando do fato que o tensor  $\nabla \bar{u}$  não é independente de  $\bar{u}$  em  $S$ , mas sua componente normal  $\hat{n} \cdot \nabla \bar{u}$  é independente de  $\bar{u}$ . Assim, temos a equação integral final:

$$\begin{aligned} &\int_V \{f^* \cdot \bar{u} - f \cdot \bar{u}^*\} dV + \int_S \{P^* \cdot \bar{u} - P \cdot \bar{u}^*\} dS \\ &= \int_S \left\{ R \cdot \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial n} - R^* \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\} dS, \\ &\int_V \{f_i^* \cdot \bar{u}_i - f_i \cdot \bar{u}_i^*\} dV + \int_S \{P_i^* \cdot \bar{u} - P_i \cdot \bar{u}_i^*\} dS \\ &= \int_S \{R_i \hat{n}_j (\partial_j \bar{u}_i^*) - R_i^* \hat{n}_j (\partial_j \bar{u}_i)\} dS, \end{aligned} \quad (4.58)$$



para contorno  $S$  suave, e

$$\begin{aligned}
& \int_V \{f^* \cdot \bar{u} - f \cdot \bar{u}^*\} dV + \int_S \{P^* \cdot \bar{u} - P \cdot \bar{u}^*\} dS \\
&= \int_S \left\{ \mathbf{R} \cdot \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial n} - \mathbf{R}^* \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right\} dS + \sum_{C_a} \oint_{C_a} (\mathbf{E} \cdot \bar{u}^* - \mathbf{E}^* \cdot \bar{u}) dC, \\
& \int_V \{f_i^* \cdot \bar{u}_i - f_i \cdot \bar{u}_i^*\} dV + \int_S \{P_i^* \cdot \bar{u} - P_i \cdot \bar{u}_i^*\} dS \\
&= \int_S \{R_i \hat{n}_j (\partial_j \bar{u}_i^*) - R_i^* \hat{n}_j (\partial_j \bar{u}_i)\} dS + \sum_{C_a} \oint_{C_a} (E_i \bar{u}_i^* - E_i^* \bar{u}_i) dC, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

para contorno  $S$  não suave e as forças de superfície  $\mathbf{P}, \mathbf{R}$  e  $\mathbf{E}$  tem a forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \hat{n} \cdot \tilde{\tau} - (\hat{n} \otimes \hat{n}) : \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial n} - \hat{n} \cdot (\nabla_S \cdot \tilde{\mu}) - \hat{n} \cdot \left[ \nabla_S \cdot (\tilde{\mu})^{213} \right] + \\
& \quad (\nabla_S \cdot \hat{n})(\hat{n} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu} - (\nabla_S \hat{n}) : \tilde{\mu}, \\
P_i &= \hat{n}_j \tau_{ji} - \hat{n}_k \hat{n}_j D \mu_{kji} - \hat{n}_j D_k \mu_{kji} - \hat{n}_k D_j \mu_{kji} + (\hat{n}_k \hat{n}_j D_l \hat{n}_l - D_j \hat{n}_k) \mu_{kji}, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \hat{n},$$

$$R_i = \hat{n}_k \hat{n}_j \mu_{kji}, \tag{4.61}$$

$$\mathbf{E} = \|(\hat{n} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu}\|,$$

$$E_i = \|\hat{n}_k \hat{n}_j \mu_{kji}\|. \tag{4.62}$$

Das Eq.<sup>s</sup>(4.26, 4.58-4.60), torna-se evidente que para  $g^2 = 0$  a Eq.(4.58) e Eq.(4.59) são reduzidas à identidade recíproca de Betti

$$\begin{aligned}
& \int_V \{f^* \cdot \bar{u} - f \cdot \bar{u}^*\} dV + \int_S \{t^* \cdot \bar{u} - t \cdot \bar{u}^*\} dS = 0, \\
& \int_V \{f_i^* \cdot \bar{u}_i - f_i \cdot \bar{u}_i^*\} dV + \int_S \{t_i^* \cdot \bar{u}_i - t_i \cdot \bar{u}_i^*\} dS = 0, \tag{4.63}
\end{aligned}$$

com  $t$  sendo o vetor da força de superfície (*traction*) definido por  $t = \hat{n} \cdot \tilde{\tau}$ .

## 4.5 Representação integral de contorno para problemas da elasticidade gradiente

Neste tópico é desenvolvida a representação integral em função do contorno para problemas da elasticidade gradiente a partir da identidade recíproca (Eq. 4.59) desenvolvida no item anterior.

Considere um corpo 3-D de volume  $V$  e limitado pela superfície  $S$ , por simplicidade, será assumida duas superfícies suaves e cuja intersecção seja formada pela linha  $C$ . Assume ainda que o campo de deslocamento  $\bar{u}^*$ , que aparece na Eq.(4.59), seja resultado de uma excitação ocasionada no segundo estado de deformação ( $\bar{u}^*, \tilde{\sigma}^*$ ) na forma

$$f^* = \Delta(y - x)\hat{e}, \tag{4.64}$$

com  $\Delta$  sendo a função delta de Dirac e  $\hat{e}$  é a direção da força unitária atuando no ponto  $x$ . O campo de deslocamento  $\bar{u}^*$  pode ser representado pelo tensor deslocamento fundamental  $\tilde{u}^*(x, y)$  dado pela Eq.(3.41), de acordo com a relação

$$\bar{u}^*(y) = \tilde{u}^*(x, y) \cdot \hat{e}. \quad (4.65)$$

De forma análoga, pode-se escrever as relações

$$\begin{aligned} P^*(y) &= \tilde{P}^*(x, y) \cdot \hat{e}, \\ R^*(y) &= \tilde{R}^*(x, y) \cdot \hat{e}, \\ E^*(y) &= \tilde{E}^*(x, y) \cdot \hat{e}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Inserindo a Eq.(4.65) e Eq.(4.66) na Eq.(4.59), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_V \{ [\Delta(y-x)\hat{e}] \cdot \bar{u}(y) - f(y) \cdot [\tilde{u}^*(x, y) \cdot \hat{e}] \} dV + \\ & \int_S \{ [\tilde{P}^*(x, y) \cdot \hat{e}] \cdot \bar{u}(y_b) - P(y_b) \cdot [\tilde{u}^*(x, y_b) \cdot \hat{e}] \} dS_{y_b} \\ = & \int_S \left\{ R(y_b) \cdot \frac{\partial [\tilde{u}^*(x, y_b) \cdot \hat{e}]}{\partial n_{y_b}} - [\tilde{R}^*(x, y_b) \cdot \hat{e}] \cdot \frac{\partial \bar{u}(y_b)}{\partial n_{y_b}} \right\} dS_{y_b} + \\ & \sum_{C_a} \oint_{C_a} (E(y_b) \cdot [\tilde{u}^*(x, y_b) \cdot \hat{e}] - E^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b)) dC_{y_b}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

ou, de forma mais simplificada,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V \{ \Delta(y-x)\bar{u}(y) - f(y) \cdot \tilde{u}^*(x, y) \} dV \right\} \cdot \hat{e} + \\ & \left\{ \int_S \left\{ [\tilde{P}^*(x, y_b)]^T \cdot \bar{u}(y_b) - P(y_b) \cdot \tilde{u}^*(x, y_b) \right\} dS_{y_b} \right\} \cdot \hat{e} \\ = & \left\{ \int_S \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}^*(x, y_b)}{\partial n_{y_b}} \right)^T \cdot R(y_b) - (\tilde{R}^*(x, y_b))^T \cdot \frac{\partial \bar{u}(y_b)}{\partial n_{y_b}} \right] dS_{y_b} \right\} \cdot \hat{e} + \\ & \left\{ \sum_{C_a} \oint_{C_a} (E(y_b) \cdot \tilde{u}^*(x, y_b) - (E^*(x, y_b))^T \cdot \bar{u}(y_b)) dC_{y_b} \right\} \cdot \hat{e}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Considerando que a Eq.(4.68) é válida para qualquer direção  $\hat{e}$  e devido à simetria da solução fundamental  $\tilde{u}^*$ , é obtida a equação integral de contorno

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(x) \cdot \bar{u}(x) + \int_S \left\{ [\tilde{P}^*(x, y_b)]^T \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{u}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ = & \int_S \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}^*(x, y_b)}{\partial n_{y_b}} \right)^T \cdot R(y_b) - (\tilde{R}^*(x, y_b))^T \cdot \frac{\partial \bar{u}(y_b)}{\partial n_{y_b}} \right] dS_{y_b} + \\ & \sum_{C_a} \oint_{C_a} (\tilde{u}^*(x, y_b) \cdot E(y_b) - (E^*(x, y_b))^T \cdot \bar{u}(y_b)) dC_{y_b} + \\ & \int_V [\tilde{u}^*(x, y) \cdot f(y)] dV \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $y_b$  representam o ponto fonte, ponto campo e o ponto campo no contorno do corpo, respectivamente. O tensor ressalto  $\tilde{c}(x)$  é o mesmo usado no caso da elasticidade

clássica (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992):

$$\begin{aligned}\tilde{c}(x) &= 0, \text{ se } x \in (R^3 - V), \\ \tilde{c}(x) &= \tilde{I}, \text{ se } x \in V, \\ \tilde{c}(x) &= \frac{1}{2}\tilde{I}, \text{ se } x \in S.\end{aligned}\tag{4.70}$$

Usando os símbolos  $q$ ,  $\tilde{U}^*$ ,  $\tilde{Q}^*$ ,  $\tilde{R}^*$  e  $\tilde{E}^*$  ao invés de  $\partial\bar{u}(y_b)/\partial n_{y_b}$ ,  $\tilde{u}^*$ ,  $(\tilde{P}^*)^T$ ,  $(\partial\tilde{u}^*/\partial n_{y_b})^T$ ,  $(\tilde{R}^*)^T$  e  $(\tilde{E}^*)^T$ , respectivamente, a Eq.(4.69) torna-se:

$$\begin{aligned}\tilde{c}(x) \cdot \bar{u}(x) &+ \int_S \left\{ \tilde{P}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{U}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ &= \int_S \left[ \tilde{Q}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) - \tilde{R}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) \right] dS_{y_b} + \\ &\sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \tilde{U}^*(x, y_b) \cdot E(y_b) - \tilde{E}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b} + \\ &\int_V \left[ \tilde{U}^*(x, y) \cdot f(y) \right] dV,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}c_{ij}\bar{u}_j + \int_S \left\{ \bar{P}_{ij}^*\bar{u}_j - U_{ij}^*P_j \right\} dS_{y_b} &= \int_S \left[ \bar{Q}_{ij}^*R_j - \bar{R}_{ij}^*q_j \right] dS_{y_b} + \\ \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( U_{ij}^*E_j - \bar{E}_{ij}^*\bar{u}_j \right) dC_{y_b} &+ \int_V U_{ij}^*f_j dV.\end{aligned}\tag{4.71}$$

No caso de contorno,  $S$ , suave ou de domínio bidimensional, além de considerar ponto fonte no contorno e a ausência de força de corpo, a Eq.(4.71) reduz para:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tilde{I} \cdot \bar{u}(x) + \int_S \left\{ \tilde{P}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{U}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ = \int_S \left[ \tilde{Q}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) - \tilde{R}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) \right] dS_{y_b},\end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2}\delta_{ij}\bar{u}_j + \int_S \left\{ \bar{P}_{ij}^*\bar{u}_j - U_{ij}^*P_j \right\} dS_{y_b} = \int_S \left[ \bar{Q}_{ij}^*R_j - \bar{R}_{ij}^*q_j \right] dS_{y_b}.\tag{4.72}$$

Todos os núcleos kernels) que aparecem nas Eq.(4.71) e Eq.(4.72) são apresentados no Apêndice D.

A Eq.(4.71) possui cinco incógnitas de campo (considerando ausência de força de corpo), isto é,  $\bar{u}(y_b)$ ,  $P(y_b)$ ,  $q(y_b)$ ,  $R(y_b)$  e  $E(y_b)$ . Tem-se ainda, três condições de contorno e a necessidade de uma equação integral adicional a ser incorporada para encontrar todas as incógnitas de campo. Esta equação adicional é obtida aplicando o operador diferencial

$\partial/\partial n_x$  à Eq.(4.71) e desconsiderando a força de corpo,

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(x) \cdot \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial n_x} + \int_S \left\{ \frac{\partial \tilde{P}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) - \frac{\partial \tilde{U}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ & = \int_S \left[ \frac{\partial \tilde{Q}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot R(y_b) - \frac{\partial \tilde{R}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot q(y_b) \right] dS_{y_b} + \\ & \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \frac{\partial \tilde{U}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot E(y_b) - \frac{\partial \tilde{E}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & c_{ij} D\bar{u}_j + \int_S \left\{ (D\bar{P}_{ij}^*) \bar{u}_j - (DU_{ij}^*) P_j \right\} dS_{y_b} \\ & = \int_S \left[ (D\bar{Q}_{ij}^*) R_j - (D\bar{R}_{ij}^*) q_j \right] dS_{y_b} + \\ & \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( (DU_{ij}^*) E_j - (D\bar{E}_{ij}^*) \bar{u}_j \right) dC_{y_b}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Para contorno  $S$  suave e  $x \in S$ , a Eq.(4.73) é torna-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \tilde{I} \cdot \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial n_x} + \int_{S_{y_b}} \left\{ \frac{\partial \tilde{P}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) - \frac{\partial \tilde{U}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ & = \int_{S_{y_b}} \left[ \frac{\partial \tilde{Q}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot R(y_b) - \frac{\partial \tilde{R}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot q(y_b) \right] dS_{y_b}, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} D\bar{u}_j + \int_S \left\{ (D\bar{P}_{ij}^*) \bar{u}_j - (DU_{ij}^*) P_j \right\} dS_{y_b} = \int_S \left[ (D\bar{Q}_{ij}^*) R_j - (D\bar{R}_{ij}^*) q_j \right] dS_{y_b}. \quad (4.74)$$

Os núcleos  $\partial \bar{u}(x)/\partial n_x$ ,  $\partial \tilde{Q}^*(x, y_b)/\partial n_x$ ,  $\partial \tilde{P}^*(x, y_b)/\partial n_x$ ,  $\partial \tilde{R}^*(x, y_b)/\partial n_x$  e  $\partial \tilde{E}^*(x, y_b)/\partial n_x$  que aparecem nas Eq.(4.71) e Eq.(4.74) são fornecidos no Apêndice E.

Considerando a ausência de força de corpo nas Eq.(4.71) e Eq.(4.73), juntamente com as condições de contorno clássica ( $\bar{u}$  ou  $P$  prescrita) e as condições de contorno não clássica ( $q$  ou  $R$  e  $E$  prescrito) formam a representação integral do problema de valor de contorno da elasticidade gradiente.

## 4.6 Representação integral das deformações e tensões no interior do corpo elástico gradiente

De acordo com a Eq.(4.25) e Eq.(4.26) e com o auxílio do campo de deslocamento dada pela Eq.(4.71), o desenvolvimento das equações integrais para os tensores de deformação, de tensão de Cauchy, de tensão conjugada e de tensão total, são escritas, respectivamente,

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(x) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[ \nabla_x \bar{u}(x) + (\nabla_x \bar{u}(x))^{21} \right] \right\} = \tilde{c}(x) \cdot \tilde{\varepsilon} \\ & = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \tilde{P}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{U}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad \int_S \left\{ \tilde{Q}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) - \tilde{R}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \tilde{U}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot E(y_b) - \tilde{E}_{\nabla_x}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & c_{kj} \left\{ \frac{1}{2} [\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j] \right\} = c_{kj} \varepsilon_{ji} = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \left( \tilde{P}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} \bar{u}_j - \left( \tilde{U}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} P_j \right\} dS_{y_b} + \\ & \int_S \left\{ \left( \tilde{Q}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} R_j - \left( \tilde{R}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} q_j \right\} dS_{y_b} + \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \left( \tilde{U}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} E_j - \left( \tilde{E}_{\nabla_x}^* \right)_{kij} \bar{u}_j \right) dC_{y_b}, \quad (4.75) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(x) \cdot \left\{ \mu \left[ \nabla_x \bar{u}(x) + (\nabla_x \bar{u}(x))^{21} \right] + \lambda \left[ \nabla_x \cdot \bar{u}(x) \right] \tilde{I} \right\} = \tilde{c}(x) \cdot \tilde{\tau} \\ & = -\int_S \left\{ \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad \int_S \left\{ \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) \cdot R(y_b) - \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) \cdot q(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot E(y_b) - \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & c_{kj} \left\{ \mu [\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j] + \lambda (\partial_t \bar{u}_t) \delta_{ji} \right\} = c_{kj} \tau_{ji} = -\int_S \left\{ T_{kij}^{(P^*)} \bar{u}_j - T_{kij}^{(U^*)} P_j \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad \int_S \left\{ T_{kij}^{(Q^*)} R_j - T_{kij}^{(R^*)} q_j \right\} dS_{y_b} + \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( T_{kij}^{(U^*)} E_j - T_{kij}^{(E^*)} \bar{u}_j \right) dC_{y_b} \quad (4.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{c}(x) \cdot \left\{ g^2 \nabla_x \left[ \mu \left( \nabla_x \bar{u}(x) + (\nabla_x \bar{u}(x))^{21} \right) + \lambda \left( \nabla_x \cdot \bar{u}(x) \right) \tilde{I} \right] \right\} = \tilde{c}(x) \cdot \tilde{\mu} \\ & = -g^2 \int_S \left\{ \nabla_x \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \nabla_x \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad g^2 \int_S \left\{ \nabla_x \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) \cdot R(y_b) - \nabla_x \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) \cdot q(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad g^2 \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \nabla_x \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot E(y_b) - \nabla_x \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & c_{kj} g^2 \left\{ \mu [\partial_j \partial_i \bar{u}_m + \partial_j \partial_m \bar{u}_i] + \lambda (\partial_j \partial_i \bar{u}_t) \delta_{im} \right\} = c_{kj} \mu_{jim}, \\ & = -g^2 \int_S \left\{ \partial_k T_{imj}^{(P^*)} \bar{u}_j - \partial_k T_{imj}^{(U^*)} P_j \right\} dS_{y_b} + g^2 \int_S \left\{ \partial_k T_{imj}^{(Q^*)} R_j - \partial_k T_{imj}^{(R^*)} q_j \right\} dS_{y_b} + \\ & \quad g^2 \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \partial_k T_{imj}^{(U^*)} E_j - \partial_k T_{imj}^{(E^*)} \bar{u}_j \right) dC_{y_b}, \quad (4.77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}(x) \cdot \tilde{s} = -\tilde{c}(x) \cdot (\nabla_x \cdot \tilde{\mu}) \\
& = g^2 \int_S \left\{ \nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\
& \quad - g^2 \int_S \left\{ \nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) \cdot R(y_b) - \nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) \cdot q(y_b) \right\} dS_{y_b} + \\
& \quad - g^2 \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \cdot E(y_b) - \nabla_x^2 \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) \right) dC_{y_b}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
c_{km} s_{mi} = -c_{km} \partial_j \mu_{jmi} = g^2 \int_S \left\{ \partial_j \partial_j T_{kim}^{(P^*)} \bar{u}_m - \partial_j \partial_j T_{kim}^{(U^*)} P_m \right\} dS_{y_b} - \\
- g^2 \int_S \left\{ \partial_j \partial_j T_{kim}^{(Q^*)} R_m - \partial_j \partial_j T_{kim}^{(R^*)} q_m \right\} dS_{y_b} - \\
g^2 \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \partial_j \partial_j T_{kim}^{(U^*)} E_m - \partial_j \partial_j T_{kim}^{(E^*)} \bar{u}_m \right) dC_{y_b} \quad (4.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}(x) \cdot \tilde{\sigma} = \tilde{c}(x) \cdot (\tilde{\tau} + \tilde{s}) \\
& = - \int_S \left[ \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) \right] \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} + \\
& \quad \int_S \left[ \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \right] \cdot P(y_b) dS_{y_b} + \\
& \quad \int_S \left[ \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) \right] \cdot R(y_b) dS_{y_b} - \\
& \quad \int_S \left[ \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) \right] \cdot q(y_b) dS_{y_b} + \\
& \quad \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left[ \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) \right] \cdot E(y_b) dC_{y_b} - \\
& \quad \sum_{C_a} \oint_{C_a} \left[ \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) \right] \cdot \bar{u}(y_b) dC_{y_b},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
c_{km} \sigma_{mi} = c_{km} (\tau_{mi} + s_{mi}) \\
= - \int_S \left\{ \left[ T_{kim}^{(P^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(P^*)} \right] \bar{u}_m - \left[ T_{kim}^{(U^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(U^*)} \right] P_m \right\} dS_{y_b} + \\
\int_S \left\{ \left[ T_{kim}^{(Q^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(Q^*)} \right] R_m - \left[ T_{kim}^{(R^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(R^*)} \right] q_m \right\} dS_{y_b} + \\
\sum_{C_a} \oint_{C_a} \left( \left[ T_{kim}^{(U^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(U^*)} \right] E_m - \left[ T_{kim}^{(E^*)} - g^2 \partial_j \partial_j T_{kim}^{(E^*)} \right] \bar{u}_m \right) dC_{y_b}. \quad (4.79)
\end{aligned}$$

onde os núcleos são

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{P}}_{\nabla_x}^*(x, y_b) &= \left[ \nabla_x \tilde{\tilde{P}}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{\tilde{P}}^*(x, y_b) \right)^{213} \right], \\
\tilde{\tilde{U}}_{\nabla_x}^*(x, y_b) &= \left[ \nabla_x \tilde{\tilde{U}}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{\tilde{U}}^*(x, y_b) \right)^{213} \right], \\
\tilde{\tilde{Q}}_{\nabla_x}^*(x, y_b) &= \left[ \nabla_x \tilde{\tilde{Q}}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{\tilde{Q}}^*(x, y_b) \right)^{213} \right], \\
\tilde{\tilde{R}}_{\nabla_x}^*(x, y_b) &= \left[ \nabla_x \tilde{\tilde{R}}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{\tilde{R}}^*(x, y_b) \right)^{213} \right], \\
\tilde{\tilde{E}}_{\nabla_x}^*(x, y_b) &= \left[ \nabla_x \tilde{\tilde{E}}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{\tilde{E}}^*(x, y_b) \right)^{213} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^{(P^*)}(x, y_b) &= \mu \left[ \nabla_x \tilde{P}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{P}^*(x, y_b) \right)^{213} \right] + \lambda \left( \nabla_x \cdot \tilde{P}^*(x, y_b) \right) \tilde{I}, \\
 \tilde{T}^{(U^*)}(x, y_b) &= \mu \left[ \nabla_x \tilde{U}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{U}^*(x, y_b) \right)^{213} \right] + \lambda \left( \nabla_x \cdot \tilde{U}^*(x, y_b) \right) \tilde{I}, \\
 \tilde{T}^{(Q^*)}(x, y_b) &= \mu \left[ \nabla_x \tilde{Q}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{Q}^*(x, y_b) \right)^{213} \right] + \lambda \left( \nabla_x \cdot \tilde{Q}^*(x, y_b) \right) \tilde{I}, \\
 \tilde{T}^{(R^*)}(x, y_b) &= \mu \left[ \nabla_x \tilde{R}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{R}^*(x, y_b) \right)^{213} \right] + \lambda \left( \nabla_x \cdot \tilde{R}^*(x, y_b) \right) \tilde{I}, \\
 \tilde{T}^{(E^*)}(x, y_b) &= \mu \left[ \nabla_x \tilde{E}^*(x, y_b) + \left( \nabla_x \tilde{E}^*(x, y_b) \right)^{213} \right] + \lambda \left( \nabla_x \cdot \tilde{E}^*(x, y_b) \right) \tilde{I}, \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

e  $\lambda = 2\mu\nu/(1 - 2\nu)$ . Os núcleos acima são explicitados no Apêndice F.

## 4.7 Discretização numérica da formulação integral para deslocamento e forças de superfície no contorno

Nesta seção é apresentada, em detalhes, a formulação do elemento de contorno, assim como, o procedimento de solução para problemas elastostático gradiente tridimensional descrito pela Eq.(4.71) e Eq.(4.74).

Neste trabalho, o objetivo da metodologia do MEC é resolver numericamente o problema de valor de contorno bem-posto constituído pelo sistema de equações integrais fornecido pela Eq.(4.71) e Eq.(4.73) juntamente com as condições de contorno presente nas Eq<sup>s</sup>.(4.21 - 4.24). Para esta finalidade, a superfície suave  $S$  é discretizada em  $E$  elementos de contorno triangulares de ordem qualquer. Para um ponto nodal  $k$ , a Eq.(4.71) e Eq.(4.74) têm a forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \bar{u}(x^k) &+ \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{P}^*(x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot \bar{u}_a^e + \\
 &\sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{R}^*(x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot q_a^e \\
 &= \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{U}^*(x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot P_a^e + \\
 &\sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{Q}^*(x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot R_a^e. \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}q(x^k) + \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{P}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot \bar{u}_a^e + \\
& \quad \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{R}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot q_a^e \\
& = \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{U}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot P_a^e + \\
& \quad \sum_{e=1}^E \sum_{a=1}^{A(e)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{Q}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cdot R_a^e. \quad (4.82)
\end{aligned}$$

Com  $q(x^k) = \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial n_x}$ ,  $A(e)$  o número de nós do elemento corrente  $e$ ,  $N^a$  são as funções de forma de um elemento triangular,  $J$  o Jacobiano da transformação do sistema de coordenada global  $(X_1, X_2, X_3)$  para local adimensional  $(\xi_1, \xi_2)$  e, por fim,  $\bar{u}_a^e$ ,  $q_a^e$ ,  $P_a^e$ ,  $R_a^e$  são os valores nodais das correspondentes funções de campo. Por simplicidade, será utilizada a numeração global para os nós, ou seja, cada par  $(e, a)$  será associado a um número  $\beta$ . Desta forma a Eq.(4.81) e Eq.(4.82) são re-escritas da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\bar{u}^k + \sum_{\beta=1}^L H_{\beta}^k \cdot u^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L K_{\beta}^k \cdot q^{\beta} = \sum_{\beta=1}^L G_{\beta}^k \cdot P^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L L_{\beta}^k \cdot R^{\beta}, \quad (4.83)$$

$$\frac{1}{2}q^k + \sum_{\beta=1}^L S_{\beta}^k \cdot u^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L T_{\beta}^k \cdot q^{\beta} = \sum_{\beta=1}^L V_{\beta}^k \cdot P^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L W_{\beta}^k \cdot R^{\beta}, \quad (4.84)$$

onde  $L$  é o número total de nós e

$$H_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{P}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.85)$$

$$K_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{R}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.86)$$

$$G_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{U}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.87)$$

$$L_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{Q}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.88)$$

$$S_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{P}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.89)$$

$$T_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{R}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.90)$$

$$V_{\beta}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{U}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.91)$$



$$W_{\beta}^k = \frac{\partial \tilde{Q}^* (x^k, y(\xi_1, \xi_2))}{\partial n_x} N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.92)$$

Realizando a substituição, dos  $L$  pontos de colocação, na Eq.(4.83) e na Eq.(4.84) é possível obter o seguinte sistema linear de equações algébricas

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{I} + \tilde{H} & \tilde{K} \\ \tilde{S} & \frac{1}{2}\tilde{I} + \tilde{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{L} \\ \tilde{V} & \tilde{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ R \end{Bmatrix}, \quad (4.93)$$

onde as submatrizes  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{V}$  e  $\tilde{W}$  contêm a consulta aos pontos de colocação para as expressões nas Eq.s.(4.85 - 4.92), respectivamente. Em seguida, aplicando as condições de contorno Eq.(4.21 - 4.24) e rearranjando a Eq.(4.93) é possível escrever o sistema linear final da seguinte forma

$$\tilde{A} X = \tilde{B}, \quad (4.94)$$

onde os vetores  $X$  e  $B$  contêm todas as incógnitas e valores prescritos das componentes nodais do campo do contorno, respectivamente.

## 4.8 Discretização numérica da formulação integral para deslocamento, deformação e tensão interna

A partir do procedimento descrito na seção anterior, são calculados os valores dos deslocamentos  $u$ , das forças de superfície (*traction*)  $P$ , do gradiente normal do deslocamento  $q$  e das forças de superfície conjugada  $R$ , todas no contorno do problema definido. Em seguida, faz-se necessário conhecer estes valores ( $u$ ,  $P$ ,  $q$  e  $R$ ) dentro do domínio a ser analisado. Assim, fazendo uso da Eq.(4.73) e com  $c(x) = 1$  é possível calcular os deslocamentos internos da seguinte forma

$$\bar{u}^i = \sum_{\beta=1}^L G_{\beta}^i \cdot P^{\beta} - \sum_{\beta=1}^L H_{\beta}^i \cdot u^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L L_{\beta}^i \cdot R^{\beta} - \sum_{\beta=1}^L K_{\beta}^i \cdot q^{\beta}. \quad (4.95)$$

Para o cálculo das deformações interna, nos pontos  $x^i$ , é utilizada a Eq.(4.75) (com  $c(x) = 1$ ), a qual pode ser reescrita como:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\beta=1}^L \left[ \nabla_x G_{\beta}^i + (\nabla_x G_{\beta}^i)^{213} \right] \cdot P^{\beta} - \sum_{\beta=1}^L \left[ \nabla_x H_{\beta}^i + (\nabla_x H_{\beta}^i)^{213} \right] \cdot u^{\beta} + \sum_{\beta=1}^L \left[ \nabla_x L_{\beta}^i + (\nabla_x L_{\beta}^i)^{213} \right] \cdot R^{\beta} - \sum_{\beta=1}^L \left[ \nabla_x K_{\beta}^i + (\nabla_x K_{\beta}^i)^{213} \right] \cdot q^{\beta} \right\}, \quad (4.96)$$

onde

$$\nabla_x H_{\beta}^i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{P}^* (x^i, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.97)$$

$$\nabla_x K_\beta^i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{R}^* (x^i, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.98)$$

$$\nabla_x G_\beta^i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{U}^* (x^i, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.99)$$

$$\nabla_x L_\beta^i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{Q}^* (x^i, y(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.100)$$

Por fim, os tensores de tensão de Cauchy  $\tilde{\tau}$ , o de tensão conjugada  $\tilde{\mu}$ , o de tensão relativa  $\tilde{s}$  e o de tensão total  $\tilde{\sigma}$  calculados no ponto interno  $x^i$  são obtidos a partir das equações integrais  $Eqs.$  (4.76 - 4.79), respectivamente, para  $c(x) = 1$ , como segue:

$$\tilde{\tau}^i = \sum_{\beta=1}^L \tilde{T} (G_\beta^i) \cdot P^\beta - \sum_{\beta=1}^L \tilde{T} (H_\beta^i) \cdot u^\beta + \sum_{\beta=1}^L \tilde{T} (L_\beta^i) \cdot R^\beta - \sum_{\beta=1}^L \tilde{T} (K_\beta^i) \cdot q^\beta, \quad (4.101)$$

$$\tilde{\mu}^i = g^2 \left\{ \sum_{\beta=1}^L \nabla_x \tilde{T} (G_\beta^i) \cdot P^\beta - \sum_{\beta=1}^L \nabla_x \tilde{T} (H_\beta^i) \cdot u^\beta + \sum_{\beta=1}^L \nabla_x \tilde{T} (L_\beta^i) \cdot R^\beta - \sum_{\beta=1}^L \nabla_x \tilde{T} (K_\beta^i) \cdot q^\beta \right\}, \quad (4.102)$$

$$\tilde{s}^i = g^2 \left\{ \sum_{\beta=1}^L \nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)} (H_\beta^i) \cdot u^\beta - \sum_{\beta=1}^L \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)} (G_\beta^i) \cdot P^\beta + \sum_{\beta=1}^L \nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)} (K_\beta^i) \cdot q^\beta - \sum_{\beta=1}^L \nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)} (L_\beta^i) \cdot R^\beta \right\}, \quad (4.103)$$

$$\tilde{\sigma}^i = (\tilde{\tau}^i + \tilde{s}^i) = \left\{ \sum_{\beta=1}^L [\tilde{T} (G_\beta^i) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)} (G_\beta^i)] \cdot P^\beta - \sum_{\beta=1}^L [\tilde{T} (H_\beta^i) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)} (H_\beta^i)] \cdot u^\beta + \sum_{\beta=1}^L [\tilde{T} (L_\beta^i) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)} (L_\beta^i)] \cdot R^\beta - \sum_{\beta=1}^L [\tilde{T} (K_\beta^i) - g^2 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)} (K_\beta^i)] \cdot q^\beta \right\}, \quad (4.104)$$

onde

$$\tilde{T} (G_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}^{(U^*)} (x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.105)$$

$$\tilde{T} (H_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}^{(P^*)} (x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.106)$$

$$\tilde{T}(L_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}^{(Q^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.107)$$

$$\tilde{T}(K_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{T}^{(R^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.108)$$

$$\nabla_x \tilde{T}(G_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{T}^{(U^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.109)$$

$$\nabla_x \tilde{T}(H_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{T}^{(P^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.110)$$

$$\nabla_x \tilde{T}(L_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{T}^{(Q^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.111)$$

$$\nabla_x \tilde{T}(K_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x \tilde{T}^{(R^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.112)$$

$$\nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)}(H_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(P^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.113)$$

$$\nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(G_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(U^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.114)$$

$$\nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)}(K_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(R^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.115)$$

$$\nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)}(L_\beta^i) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla_x^2 \tilde{T}^{(Q^*)}(x^i, y^b(\xi_1, \xi_2)) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.116)$$

Os núcleos integrando das Eq<sup>s</sup>.(4.105 - 4.116) são obtido com auxílio da Eq.(4.80).



---

## Interpolação de ordem qualquer

*No desenvolvimento da formulação do MEC para problemas elastostáticos gradiente, realizado no Capítulo 4, foram utilizadas funções, as quais foram chamadas de funções de forma, para aproximar tanto à geometria do problema quanto para aproximar às funções de campo. Entretanto, nenhum comentário adicional foi feito quanto às características destas tais funções. Assim, este capítulo se deterá a apresentar as funções de forma espectral e as funções aqui chamadas de Polinomiais, as quais são utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.*

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada e analisada determinadas sequências de pontos de interpolação para elemento triangular. Com o intuito de alcançar convergência uniforme e permitir alta precisão na interpolação, as sequências destes pontos são refinadas à medida que a ordem da aproximação é elevada. Há duas principais estratégias de aumentar a precisão: a primeira é chamada de refinamento  $h$ , onde é diminuindo o tamanho do elemento triangular,  $h$ , enquanto mantém a ordem da interpolação polinomial fixa; a segunda é chamada de refinamento  $p$ , onde é aumentada a ordem da aproximação polinomial e mantido fixo o número de elementos da discretização. A combinação destas duas estratégias de refinamento produz o chamado refinamento- $hp$ . Nesta seção será dado ênfase ao refinamento- $p$ , pois este está associado à convergência *espectral*, ou seja, o erro numérico da aproximação é diminuído mais rapidamente do que qualquer potência  $1/p$ , onde  $p$  é a ordem da expansão polinomial (POZRIKIDIS, 2005).

Na prática, o objetivo é usar expansões polinomiais de baixa ordem em regiões onde a solução é esperada variar suavemente e usar expansões de alta ordem nas outras regiões, onde a solução é esperada variar rapidamente. Além do mais, objetiva-se alcançar a melhor precisão possível para o mesmo número de nós de interpolação, ou seja, tentar buscar melhores distribuições de pontos de interpolação que minimizem o erro da aproximação.

Da teoria do erro da interpolação polinomial, mostra-se que, dado o número de nós de interpolação a ser distribuído ao longo do elemento, a maior precisão da interpolação é

obtido quando os nós interiores são colocados nas posições correspondentes aos zeros de certas famílias de polinômios ortogonais (POZRIKIDIS, 2005). Quando é assim distribuído os nós de interpolação, obtêm-se uma expansão espectral para o elemento e associa-se, assim, ao método do elemento espectral.

Diante do exposto, será apresentado na seção 5.2 a expansão triangular de alta ordem, na seção 5.3 é apresentada a base polinomial de Proriot e em seguida, na seção 5.4, é apresentada a distribuição nodal de alta ordem e espectral para elementos triangulares. São estudadas duas distribuições nodais: a distribuição uniforme (seção 5.4.2) e a de Lobatto (seção 5.4.3).

## 5.2 Expansão triangular de alta ordem

Tomada a decisão de aproximar a solução,  $f(\xi_1, \xi_2)$ , sobre o elemento  $l$  por um polinômio de grau  $m$ , faz-se necessário realizar uma expansão polinomial completo de ordem  $m$  sobre a área de um triângulo padrão no plano paramétrico  $\xi_1 - \xi_2$  mostrado na Eq.(5.1):

$$\begin{aligned}
 f(\xi_1, \xi_2) = & a_{00} + \\
 & a_{10}\xi_1 + a_{01}\xi_2 + \\
 & a_{20}\xi_1^2 + a_{11}\xi_1\xi_2 + a_{02}\xi_2^2 + \\
 & a_{30}\xi_1^3 + a_{21}\xi_1^2\xi_2 + a_{12}\xi_1\xi_2^2 + a_{03}\xi_2^3 + \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_{m0}\xi_1^m + a_{(m-1)1}\xi_1^{(m-1)}\xi_2 + \dots + a_{1(m-1)}\xi_1\xi_2^{(m-1)} + a_{0m}\xi_2^m.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pode-se observar que a soma dos índices  $i + j$  dos coeficientes  $a_{ij}$  é constante em cada linha da Eq.(5.1) e o número de nós necessários fica determinado pelo número total de coeficientes a serem determinados, os quais são:

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + m + (m + 1) = \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}. \tag{5.2}$$

Uma das vantagens importantes da expansão completa de ordem  $m$  em comparação com a expansão incompleta, onde alguns termos da Eq.(5.1) estão ausentes, é que a função,  $f$ , é um polinômio completo de ordem  $m$  ao longo das bordas do triângulo (em  $\xi_1$  ou em  $\xi_2$ ), por conseguinte, é garantida a continuidade  $C^0$  entre as bordas dos elementos triangulares pela presença dos  $m + 1$  nós dos elementos compartilhados, incluindo os nós dos vértices e das arestas (POZRIKIDIS, 2005).

Para formalizar a expansão de ordem  $m$ , é denotado os produtos monomiais da Eq.(5.1) por

$$M_{ij}(\xi_1, \xi_2) \equiv \xi_1^i \xi_2^j, \tag{5.3}$$

e assim a expansão polinomial pode ser escrita da seguinte forma

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij} M_{ij}(\xi_1, \xi_2) \right]. \tag{5.4}$$

Para implementar o método dos elementos de contorno foi selecionado o polinômio de ordem  $m$ , o que introduz  $N$  nós de interpolação (Eq.5.2) sobre a área e ao longo dos lados do triângulo. Por definição, a função de interpolação cardinal para o nó  $i$ ,  $\psi_i(\xi_1, \xi_2)$ , é um polinômio completo de ordem  $m$  nas variáveis  $\xi_1$  e  $\xi_2$  que satisfazem as  $N$  condições de interpolação

$$\psi_i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

com  $j = 1, 2, \dots, N$  e  $\delta_{ij}$  sendo o delta de Kronecker. Assim, a expansão nodal sobre o triângulo paramétrico pode ser escrito,

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^N f(\xi_1^j, \xi_2^j) \psi_i(\xi_1^j, \xi_2^j). \quad (5.6)$$

envolvendo os valores nodais especificados ou a priori incógnitos,  $f(\xi_1^j, \xi_2^j)$ .

A função de interpolação cardinal correspondente a um nó pode ser expresso na forma polinomial mostrada na Eq.(5.4) e os  $N$  coeficientes,  $a_{ij}$ , podem ser calculados resolvendo um sistema de equações lineares proveniente da condição de interpolação cardinal dada pela Eq.(5.5).

Em abordagem mais geral, as funções de interpolação são apresentadas como combinações lineares de um conjunto de  $N$  polinômios independentes,  $\phi_j(\xi_1, \xi_2)$ , que formam uma base completa da expansão de ordem  $m$  no plano  $\xi_1 - \xi_2$ , para  $j = 1, 2, \dots, N$  da seguinte forma:

$$\psi_i(\xi_1, \xi_2) = c_N \phi_1(\xi_1, \xi_2) + c_{N-1} \phi_2(\xi_1, \xi_2) + \dots + c_2 \phi_{N-1}(\xi_1, \xi_2) + c_1 \phi_N(\xi_1, \xi_2). \quad (5.7)$$

Onde  $c_j$  corresponde um conjunto de  $N$  coeficientes da expansão para o nó  $i$ . Por exemplo, identificado a função de base como os produtos monomiais mostrados na Eq.(5.3), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \phi_1 &= M_{00} = 1, \quad \phi_2 = M_{10} = \xi_1, \quad \phi_3 = M_{01} = \xi_2, \\ &\dots \\ \phi_{N-1} &= M_{1(m-1)} = \xi_1 \xi_2^{m-1}, \quad \phi_N = M_{1m} = \xi_2^m. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diversas são as escolhas possíveis para a base polinomial,  $\phi_j$ , melhores escolhas são fornecidas pelas famílias de polinômios semi-ortogonal e ortogonal de Appel e Proriol, respectivamente (POZRIKIDIS, 2005). Neste trabalho será apresentado e utilizado o polinômio de Proriol, pois estudos realizados por Blyth e Pozrikidis (2005) mostram melhores resultados deste polinômio quando comparado com o polinômio de Appel.

Independente da escolha da função base, impõe-se a condição de interpolação cardinal para obter o sistema linear

$$\mathbf{V}_\phi^T \cdot \mathbf{c} = \mathbf{e}_i, \quad (5.9)$$

onde o superescrito  $T$  denota a matriz transposta,

$$V_\phi = \begin{pmatrix} \phi_1(\xi_1^1, \xi_2^1) & \phi_1(\xi_1^2, \xi_2^2) & \cdots & \phi_1(\xi_1^N, \xi_2^N) \\ \phi_2(\xi_1^1, \xi_2^1) & \phi_2(\xi_1^2, \xi_2^2) & \cdots & \phi_2(\xi_1^N, \xi_2^N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_N(\xi_1^1, \xi_2^1) & \phi_N(\xi_1^2, \xi_2^2) & \cdots & \phi_N(\xi_1^N, \xi_2^N) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

é a matriz de *Vandermonde* generalizada  $N \times N$  com componentes  $V_{\phi_i} = \phi_i(\xi_1^j, \xi_2^j)$ ,

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_N \\ \vdots \\ c_2 \\ c_1 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

é o vetor contendo os coeficientes da expansão e

$$e_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

é o vetor unitário do espaço de  $N$  dimensões associado com o nó  $i$ . Por conseguinte,  $c = [V_\phi^T]^{-1} \cdot e_i$  e a  $i$ -ésima função de interpolação nodal é dada por

$$\psi_i = \phi(\xi_1, \xi_2) \cdot [V_\phi^T]^{-1} \cdot e_i, \quad (5.13)$$

onde  $\phi(\xi_1, \xi_2)$  é o vetor das funções de base. Aplicado a Eq.(5.13) para todos os nós, obtém-se a função nodal do vetor de interpolação

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = [V_\phi]^{-1} \cdot \phi(\xi_1, \xi_2), \quad (5.14)$$

o qual pode ser rearranjado no sistema linear

$$V_\phi \cdot \psi(\xi_1, \xi_2) = \phi(\xi_1, \xi_2); \quad (5.15)$$

Para polinômios de alta ordem, a solução do sistema linear para as funções de interpolação nodal é encontrada por métodos numéricos, no entanto, para assegurar que os coeficientes da matriz sejam bem-condicionada, é importante empregar funções de base que são parcialmente ou inteiramente ortogonais, tais como as fornecidas pelos polinômios de Appel e Proriol (BLYTH; POZRIKIDIS, 2005), sendo este último discutido na próxima seção.



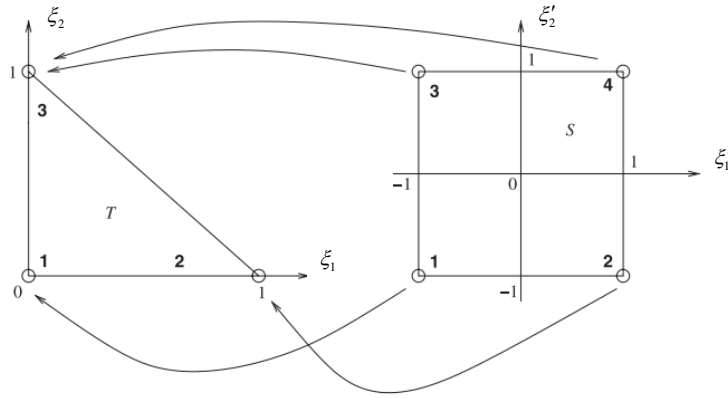


Figura 5.1 – Mapeamento do triângulo para o quadrado padrão usando a transformação de Duffy

### 5.3 Base polinomial de Proriol

A base mais desejável é constituída pelo polinômio de Proriol, o qual é totalmente ortogonal sobre a área do triângulo (PRORIOL, 1957). Para introduzir este polinômio, inicialmente é mapeado o triângulo padrão a partir do plano  $\xi_1 - \xi_2$  para o quadrado padrão  $-1 \leq \xi'_1 \leq 1$ ,  $-1 \leq \xi'_2 \leq 1$  (Figura 5.1), usando a transformação de Duffy

$$\xi_1 = \frac{(1 + \xi'_1)(1 - \xi'_2)}{4}, \quad \xi_2 = \frac{(1 + \xi'_2)}{2}, \quad (5.16)$$

e sua inversa

$$\xi'_1 = \frac{2\xi_1}{1 - \xi_2} - 1, \quad \xi'_2 = 2\xi_2 - 1. \quad (5.17)$$

O polinômio de Proriol é dado por

$$\begin{aligned} PR_{kl} &= L_k(\xi'_1) \left( \frac{1 - \xi'_2}{2} \right)^k J_l^{(2k+1,0)}(\xi'_2) \\ &= L_k(\xi'_1) (1 - \xi_2)^k J_l^{(2k+1,0)}(\xi'_2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde  $L_k$  é o polinômio de Legendre e  $J_l^{(2k+1,0)}$  é o polinômio de Jacobi (PRORIOL, 1957).

Pode ser observado na Eq.(5.18) que o fator  $(1 - \xi_2)^k$  cancela o denominador de  $L_k(\xi'_1)$  resultante da fração do lado direito da regra de transformação para  $\xi'_1$  mostrada na Eq.(5.17). Assim, o polinômio de Proriol,  $PR_{kl}$ , envolve monômios da forma  $\xi_1^p \xi_2^{(k-p+q)}$  com ordem  $k + q$  combinada e com  $p = 1, 2, \dots, k$  e  $q = 1, 2, \dots, l$ .

Substituindo as expressões dos polinômios de Legendre e de Jacobi na Eq.(5.18), pode-se reescrever o polinômio de Proriol:

$$\begin{aligned} PR_{kl} &= \left[ \sum_{i=0}^k \binom{l}{i} \binom{k}{k-i} \left( \frac{\xi'_1 - 1}{2} \right)^{k-i} \left( \frac{\xi'_1 + 1}{2} \right)^i \right] \cdot \left( \frac{1 - \xi_2}{2} \right)^k \\ &\quad \left[ \sum_{j=0}^k \binom{l + 2k + 1}{j} \binom{l}{l-j} \left( \frac{\xi_2 - 1}{2} \right)^{l-j} \left( \frac{\xi_2 + 1}{2} \right)^j \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

A forma explícita para os primeiros termos do polinômio de Prorior são:

$$\begin{aligned}
PR_{00} &= 1, \\
PR_{10} &= 2\xi_1 + \xi_2 - 1, \\
PR_{01} &= 3\xi_2 - 1, \\
PR_{20} &= 6\xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 - 6\xi_1 - 2\xi_2 + 1, \\
PR_{11} &= (2\xi_1 + \xi_2 - 1)(5\xi_2 - 1), \\
PR_{02} &= 10\xi_2^2 - 8\xi_2 + 1.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Pela Eq.(5.20) é possível observar que  $PR_{00}, PR_{01}, PR_{02}, \dots$  são polinômios apenas na variável  $\xi_2$ , enquanto que  $PR_{10}, PR_{20}, PR_{30}, \dots$  são polinômios nas variáveis  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . As propriedades dos polinômios de Jacobi garantem que os polinômios de Prorior satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\iint_T PR_{ij} PR_{kl} d\xi_1 d\xi_2 = 0, \tag{5.21}$$

para  $i \neq k$  e  $j \neq l$ . Assim como para o cálculo dos coeficientes de Fourier, os coeficientes da expansão ortogonal de Prorior pode ser calculado por projeção. A auto-projeção é dada por (POZRIKIDIS, 2005):

$$\iota_{ij} \equiv \iint_T PR_{ij} PR_{ij} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{2(2i+1)(j+i+1)}. \tag{5.22}$$

Seja uma função qualquer  $f(\xi_1, \xi_2)$  definida sobre o triângulo padrão no plano  $\xi_1 - \xi_2$ , esta função pode ser aproximada por um polinômio completo em  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , de grau  $m$ , de acordo com a Eq.(5.4):

$$f(\xi_1, \xi_2) \approx \sum_{j=0}^m \left[ \sum_{i=0}^{m-j} a_{ji} PR_{jl}(\xi_1, \xi_2) \right]. \tag{5.23}$$

Multiplicando a Eq.(5.23) por  $PR_{ij}$ , integrando sobre a superfície do triângulo e usando a propriedade da ortogonalidade, encontra-se que os coeficientes da expansão podem ser dados por:

$$a_{ij} = \frac{1}{\iota_{ij}} \iint_T f(\xi_1, \xi_2) PR_{ij}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \tag{5.24}$$

onde  $\iota_{ij}$  é definida pela Eq.(5.22).

Para converter uma serie de produto monomiais para a serie de Prorior equivalente,

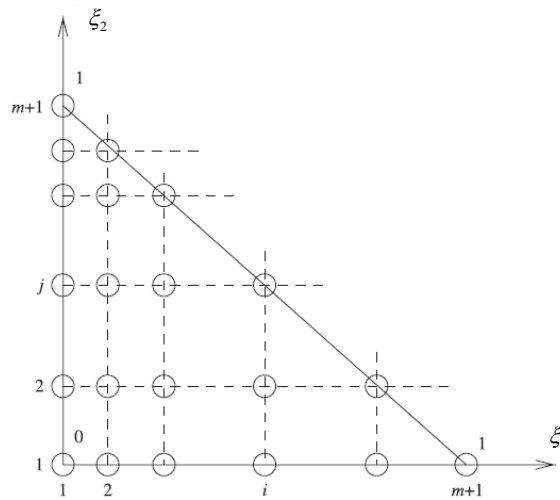


Figura 5.2 – Distribuição dos nós de interpolação no triângulo padrão a partir da distribuição nodal na linha (unidimensional)

faz-se uso das expressões:

$$\begin{aligned}
 1 &= PR_{00}, \\
 \xi_1 &= \frac{1}{6} (3PR_{10} - PR_{01} + 2), \\
 \xi_2 &= \frac{1}{3} (PR_{01} + 1), \\
 \xi_1^2 &= \frac{1}{30} (5PR_{20} - 3PR_{11} + 3PR_{02} - 4PR_{01} + 12PR_{10} + 5), \\
 \xi_1 \xi_2 &= \frac{1}{60} (-3PR_{02} + 6PR_{11} + 6PR_{10} + 2PR_{01} + 5), \\
 \xi_2^2 &= \frac{1}{30} (3PR_{02} + 8PR_{01} + 5).
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

## 5.4 Distribuições nodal de alta ordem e espectral

Na seções anteriores, discutiu-se como calcular as funções de interpolação nodal no elemento triangular, mas nada foi dito sobre como pode ser distribuído os nós na área triangular do espaço físico  $x - y$  ou paramétrico  $\xi_1 - \xi_2$ . Assim, esta seção objetiva tornar a Eq.(5.10) bem-condicionada e o erro de interpolação o mínimo possível a partir de distribuição ótima dos nós nos elementos triangulares.

Para garantir que o número de nós de interpolação seja igual ao número de coeficientes a ser determinados na expansão completa de ordem- $m$ , pode-se distribuir os nós como mostrado na Figura 5.2. Pontos nos eixos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são colocados nos nós da distribuição unidimensional definida pelo conjunto de  $m + 1$  pontos,  $v_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, m + 1$  e estão submetidos às condições  $v_1 = 0$  e  $v_{m+1} = 1$ . Assim, as linhas de nós vertical e

horizontal são descritas por

$$\xi_1^i = v_i, \quad \xi_2^j = 1 - v_{m+2-j}, \quad (5.26)$$

para  $i, j = 1, \dots, m + 1$ . Os nós ao longo da hipotenusa do triângulo estão localizados pelo movimento vertical para cima a partir dos nós no eixo  $\xi_1$ , ou horizontalmente para a direita a partir dos nós no eixo  $\xi_2$ . Os nós interiores são colocados na intersecção das linhas vertical e horizontal, produzindo os pares  $(\xi_1^i, \xi_2^i)$ , onde  $i = 1, \dots, m + 1$  e  $j = 1, \dots, m + 2 - i$ . Neste trabalho é apresentado a métrica adotada para quantificar o erro da interpolação, assim como, é discutido a duas opções de distribuição para os nós de interpolação.

### 5.4.1 A constante de Lebesgue

Um conjunto nodal completo é composto por  $N$  nós de interpolação, onde  $N$  está relacionado à ordem do polinômio,  $m$ , através da Eq.(5.2). Para avaliar o quanto melhor um conjunto nodal completo é em relação a outro, necessita-se de uma medida, dada por uma função objetiva, que quantifique este grau de superioridade entre os conjuntos nodais. Uma generalização heurística da teoria da interpolação unidimensional conduz a função de Lebesgue em duas dimensões como tal função objetiva (POZRIKIDIS, 2005),

$$L_N(\xi_1, \xi_2) \equiv \sum_{i=1}^N |\psi_i(\xi_1, \xi_2)|, \quad (5.27)$$

e a sua constante associada chamada de constante de Lebesgue é dada por

$$\Lambda_N \equiv \text{Max}[L_N(\xi_1, \xi_2)], \quad (5.28)$$

onde  $\text{Max}[\circ]$  significa o máximo da função objetiva sobre a área do triângulo e, da teoria de interpolação, tem-se que quanto menor o valor de  $\Lambda_N$  melhor é a distribuição nodal ois proporciona menor erro da interpolação.

### 5.4.2 Distribuição nodal uniforme no triângulo

Com o objetivo de obter nós distribuídos igualmente espaçados, como mostrado na Figura 5.3, os pontos adimensionais  $v_i$  têm os valores

$$v_i = \frac{(i-1)}{m}, \quad (5.29)$$

com  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ . As linhas das diagonais correspondem a valores constantes da coordenada baricêntrica  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ , variando de  $\xi_3 = 0$  à  $\xi_3 = 1$  dentro da área do triângulo. Cada linha diagonal é identificada pelo índice

$$k = m + 3 - i - j, \quad (5.30)$$

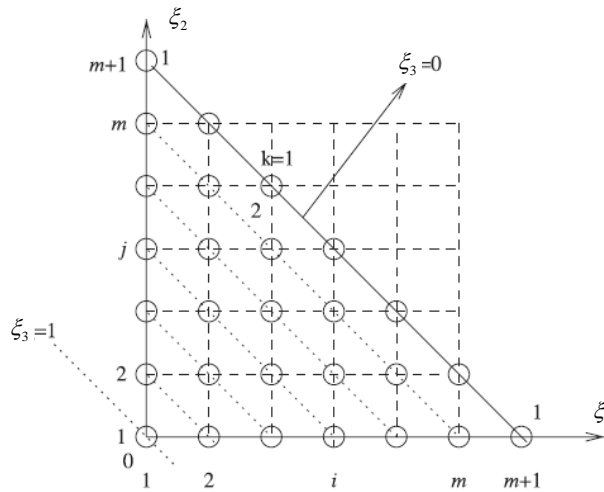


Figura 5.3 – Ilustração da distribuição igualmente espaçada dos nós sobre o triângulo.

o qual decresce a partir do valor 1, ao longo da hipotenusa, até o valor de  $m + 1$  na origem.

Para cada nó  $(i, j)$  formado pela intersecção entre as linhas,  $i$ , verticais e as horizontais,  $j$ , como pode ser visto na Figura 5.3, a expressão da função de interpolação pode ser escrita como o produto de três funções,

$$\psi_{ij}(\xi_1, \xi_2) = \Xi_i^{(i-1)}(\xi_1) \cdot H_j^{(j-1)}(\xi_2) \cdot Z_k^{(k-1)}(\xi_3), \quad (5.31)$$

onde:

$\Xi_i^{(i-1)}(\xi_1)$  é um polinômio de grau  $(i - 1)$  definido por

$$\begin{aligned} \Xi_1^0(\xi_1) &= 1, \\ \Xi_i^{(i-1)}(\xi_1) &= \frac{(\xi_1 - v_1)(\xi_1 - v_2) \cdots (\xi_1 - v_{i-2})(\xi_1 - v_{i-1})}{(v_i - v_1)(v_i - v_2) \cdots (v_i - v_{i-2})(v_i - v_{i-1})}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

para  $i = 2, 3, \dots, m + 1$ .

$H_j^{(j-1)}(\xi_2)$  é um polinômio de grau  $(j - 1)$  definido por

$$\begin{aligned} H_1^0(\xi_2) &= 1, \\ H_j^{(j-1)}(\xi_2) &= \frac{(\xi_2 - v_1)(\xi_2 - v_2) \cdots (\xi_2 - v_{j-2})(\xi_2 - v_{j-1})}{(v_j - v_1)(v_j - v_2) \cdots (v_j - v_{j-2})(v_j - v_{j-1})}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

para  $j = 2, 3, \dots, m + 1$ .

$Z_k^{(k-1)}(\xi_3)$  é um polinômio de grau  $(k - 1)$  definido por

$$\begin{aligned} Z_1^0(\xi_3) &= 1, \\ Z_j^{(j-1)}(\xi_3) &= \frac{(\xi_3 - v_1)(\xi_3 - v_2) \cdots (\xi_3 - v_{j-2})(\xi_3 - v_{j-1})}{(v_k - v_1)(v_k - v_2) \cdots (v_k - v_{k-2})(v_k - v_{k-1})}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

com  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$  e para  $k = 2, 3, \dots, m + 1$ .

A partir das Eq.<sup>s</sup>(5.32 - 5.34), pode ser verificado que  $\psi_{ij}(\xi_1, \xi_2)$  é um polinômio de grau

$$(i - 1) + (j - 1) + (k - 1) = i + j + k - 3 = m \quad (5.35)$$

com respeito a  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , como exigido pela Eq.(5.30), e todas as condições da interpolação cardinal são satisfeitas.

Para ilustrar a utilização Eq.(5.31), considere um triângulo de seis nós correspondendo a  $m = 2$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 1/2$  e  $v_3 = 1$ . A função de interpolação do primeiro nó no vértice corresponde a  $i = 1$ ,  $j = 1$  e  $k = 3$  é

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_1^{(0)}(\xi_1) \cdot H_1^{(0)}(\xi_2) \cdot Z_3^{(2)}(\xi_3) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{(\xi_3 - v_1)(\xi_3 - v_2)}{(v_3 - v_1)(v_3 - v_2)} = \xi_3(2\xi_3 - 1). \end{aligned} \quad (5.36)$$

De forma semelhante com o nó no meio do lado,  $i = 2$ ,  $j = 1$  e  $k = 2$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} \psi_{21}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_2^{(1)}(\xi_1) \cdot H_1^{(0)}(\xi_2) \cdot Z_2^{(1)}(\xi_3) \\ &= \frac{(\xi_1 - v_1)}{(v_2 - v_1)} \cdot 1 \cdot \frac{(\xi_3 - v_1)}{(v_2 - v_1)} = 4\xi_1\xi_3. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Repetindo o procedimento acima, pode-se obter as funções de interpolação para os demais nós do referido elemento triangular:

$$\begin{aligned} \psi_{13}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_1^{(0)}(\xi_1) \cdot H_3^{(2)}(\xi_2) \cdot Z_1^{(0)}(\xi_3) \\ &= 1 \cdot \frac{(\xi_2 - v_1)(\xi_2 - v_2)}{(v_3 - v_1)(v_3 - v_2)} \cdot 1 = \xi_2(2\xi_2 - 1), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \psi_{12}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_1^{(0)}(\xi_1) \cdot H_2^{(1)}(\xi_2) \cdot Z_2^{(1)}(\xi_3) \\ &= 1 \cdot \frac{(\xi_2 - v_1)}{(v_2 - v_1)} \cdot \frac{(\xi_3 - v_1)}{(v_2 - v_1)} = 4\xi_2\xi_3, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \psi_{31}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_3^{(2)}(\xi_1) \cdot H_1^{(0)}(\xi_2) \cdot Z_1^{(0)}(\xi_3) \\ &= \frac{(\xi_1 - v_1)(\xi_1 - v_2)}{(v_3 - v_1)(v_3 - v_2)} \cdot 1 \cdot 1 = \xi_1(2\xi_1 - 1), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \psi_{22}(\xi_1, \xi_2) &= \Xi_2^{(1)}(\xi_1) \cdot H_2^{(1)}(\xi_2) \cdot Z_1^{(0)}(\xi_3) \\ &= \frac{(\xi_1 - v_1)}{(v_2 - v_1)} \cdot \frac{(\xi_2 - v_1)}{(v_2 - v_1)} \cdot 1 = 4\xi_1\xi_2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Infelizmente, à medida que a ordem  $m$  da expansão é elevada, a precisão da interpolação não melhora uniformemente, necessariamente, devido à versão bidimensional do efeito Runge (POZRIKIDIS, 2005) manifestado pelo crescimento das oscilações próximo às bordas do triângulo. Na análise numérica, este efeito mostra que a constante de Lebesgue cresce rapidamente à medida que a ordem polinomial,  $m$ , ou o conjunto nodal,  $N$ , cresce. Assim, a distribuição uniforme dos nós é recomendada somente para expansão polinomial de baixa ordem, geralmente  $m \leq 3$ .

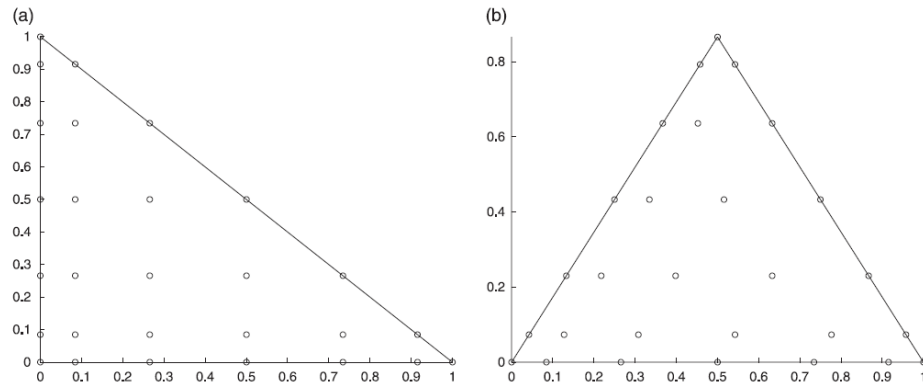


Figura 5.4 – (a) distribuição dos nós de Lobatto para  $m = 6$ . (b) a mesma distribuição mapeada no triângulo equilátero.

### 5.4.3 Distribuição nodal de Lobatto no triângulo

Sabe-se que a distribuição nodal de Lobatto é ótima para interpolação unidimensional, com a restrição de que um nó de interpolação é colocado em cada extremidade do elemento (FEJÉR, 1932; POZRIKIDIS, 2005). Motivado por este resultado, emprega-se a distribuição nodal unidimensional com  $v_1 = 0$ ,  $v_{m+1} = 1$  e os nós no interior  $v_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ , posicionados nos zeros escalados do polinômio de Lobatto de grau  $m - 1$ . Assim, a distribuição nodal de Lobatto é definido por:

$$v_1 = 0, \quad v_i = \frac{1}{2}(1 - t_{i-1}) \quad e \quad v_{m+1} = 1, \quad (5.42)$$

onde  $t_i$ , para  $i = 2, 3, \dots, m$ , são os zeros do polinômio de Lobatto de grau  $m - 1$  distribuído no intervalo  $(-1, 1)$ . O  $i$ -ésimo termo do polinômio de Lobatto é definido como  $L_{o_i}(t) \equiv L'_{i+2}(t)$ , onde  $L'_{i+2}(t)$  é a primeira derivada do polinômio de Legendre. Para ilustrar, um exemplo para  $m = 6$  é mostrado na figura 5.4(a). Os nós no contorno e no interior são identificados pelas coordenadas  $(\xi_1, \xi_2) = (v_i, v_j)$ , onde  $i = 1, \dots, m + 1$  e  $j = 1, \dots, m + 2 - i$ .

A figura 5.4(b) mostra a mesma distribuição nodal ( $m = 6$ ) mapeada no triângulo equilátero com os lados de comprimento unitário no plano  $\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2$ . O mapeamento é realizado por meio das funções

$$\hat{\xi}_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2, \quad \hat{\xi}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2, \quad (5.43)$$

$$\xi_1 = \hat{\xi}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\xi}_2, \quad \xi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\xi}_2. \quad (5.44)$$

Pode ser observado na figura 5.4(b) a assimetria da distribuição nodal em relação aos três vértices, esta disposição dos nós é uma deficiência que pode ser contornada através

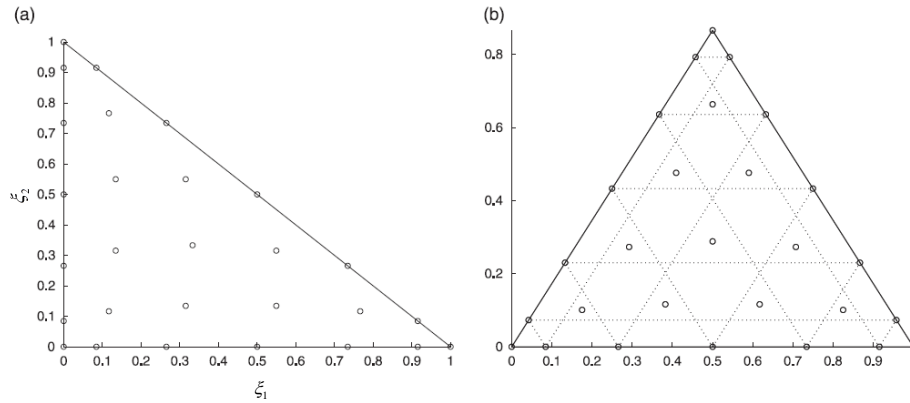


Figura 5.5 – (a) Rearranjo nodal com simetria em relação aos vértices para  $m = 6$  no espaço  $\xi_1 - \xi_2$ . (b) mapeamento do triângulo padrão no triângulo equilátero com os lados de comprimento unitário.

Fonte: Blyth e Pozrikidis (2005)

da redistribuição dos nós por meio do mapeamento (BLYTH; POZRIKIDIS, 2005)

$$\xi_1^i = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k), \quad \xi_2^j = \frac{1}{3}(1 + 2v_j - v_i - v_k), \quad (5.45)$$

com  $i = 1, 2, \dots, m + 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m + 2 - i$  e  $k = m + 3 - i - j$ .

A distribuição nodal dada pela Eq.(5.45) e para  $m = 6$  é ilustrada na figura 5.5(a), onde pode ser notado que os nós na borda do triângulo permanecem nas posições originais dos zeros do polinômio de Lobatto. Para os nós interno ao triângulo, sua posição está situada no centroide dos triângulos internos menores, que são construídos a partir da ligação dos nós dos lados do triângulo equilátero por meio de linhas pontilhadas como consta na figura 5.5(b).

Para ilustrar a eficiência da interpolação espectral de Lobatto para elemento triangular será apresentado um exemplo mostrando o efeito Runge. Os resultados obtidos com a distribuição dos nós de Lobatto e interpolando com o polinômio de Proriol foram comparados com a distribuição nodal uniforme e interpolado pela expansão polinomial da Eq.(5.4). A função de interesse é definida por

$$f(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2) = \frac{1}{1 + 25(\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_1^c)^2} \frac{1}{1 + 25(\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_2^c)^2}. \quad (5.46)$$

Esta função tem o domínio de validade sobre o triângulo equilátero de lados unitários e  $(\hat{\xi}_1^c, \hat{\xi}_2^c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$  é o centroide do triângulo. O mapeamento ao triângulo padrão no espaço  $\xi_1 - \xi_2$  é realizada pela Eq.(5.44). Nesta análise bidimensional é possível observar pela Figura 5.6 o desempenho ruim na aproximação da Eq.(5.46) quando aumenta a ordem da aproximação utilizando distribuição nodal uniforme. Sendo que este desempenho ruim está localizado nas regiões próximas às bordas do triângulo padrão, como pode ser visto nas figuras 5.7, 5.8 e 5.9.



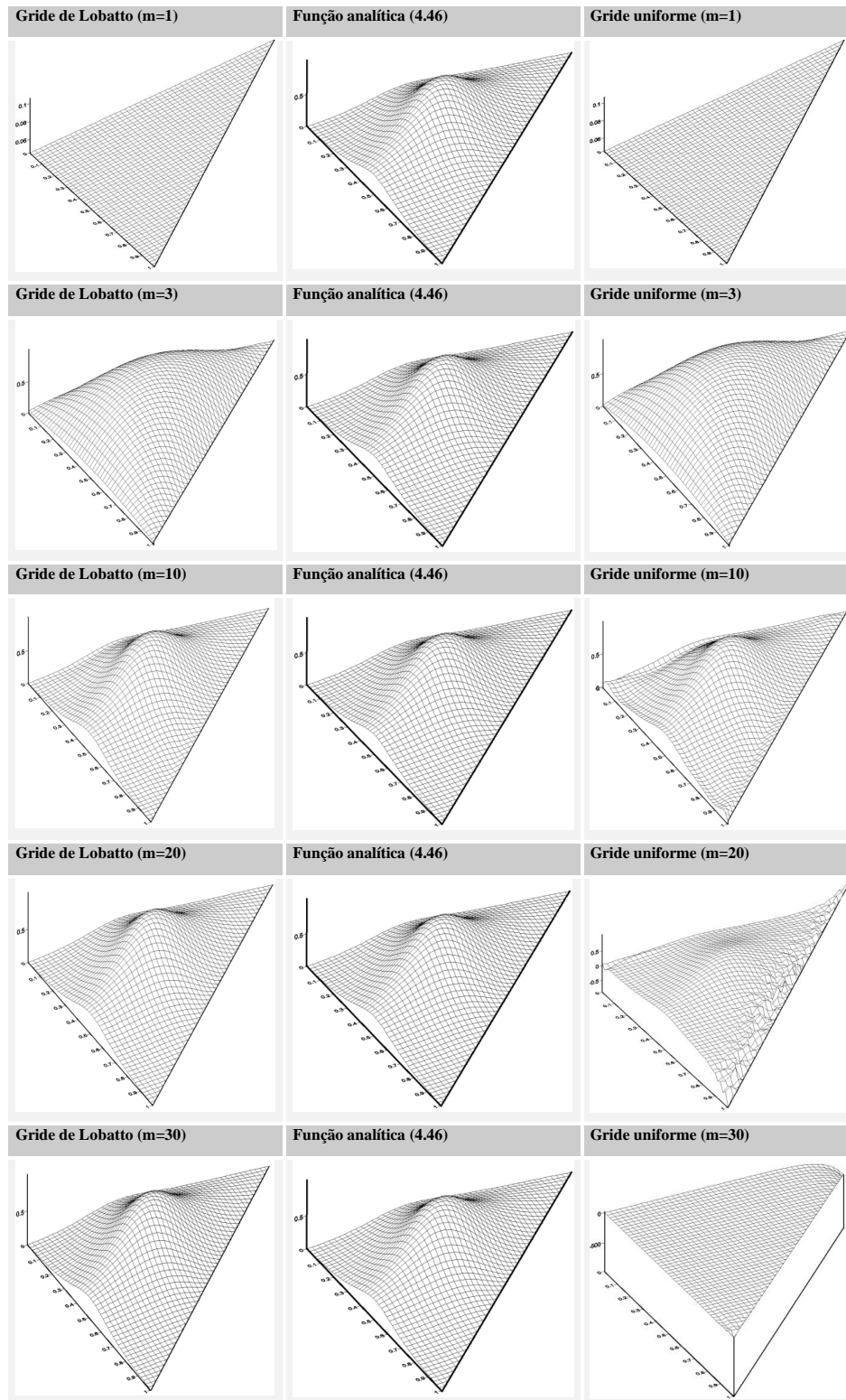


Figura 5.6 – Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Proriot) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função para o triângulo padrão à medida que o grau da aproximação é elevado.

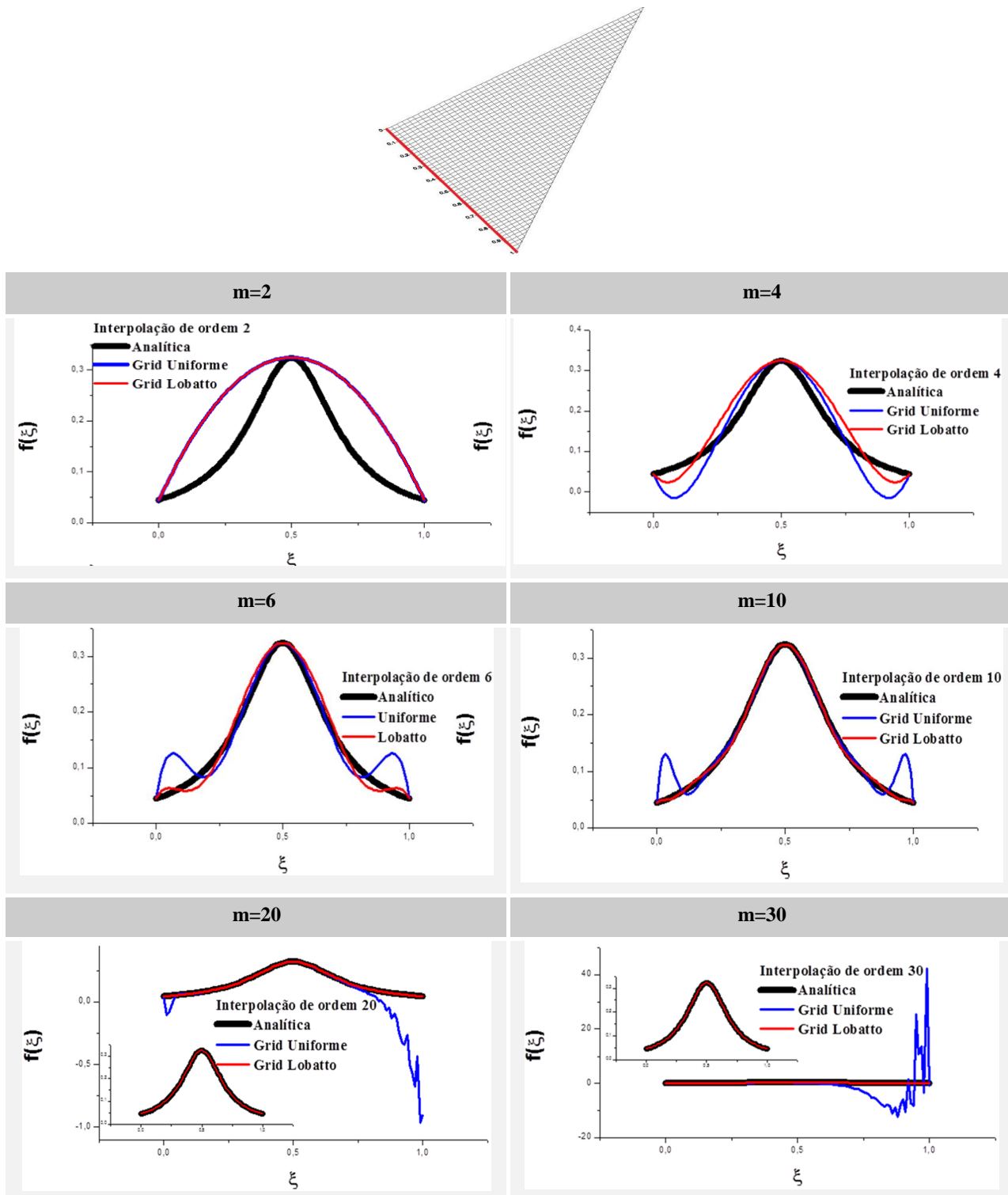


Figura 5.7 – Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Prorior) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão.

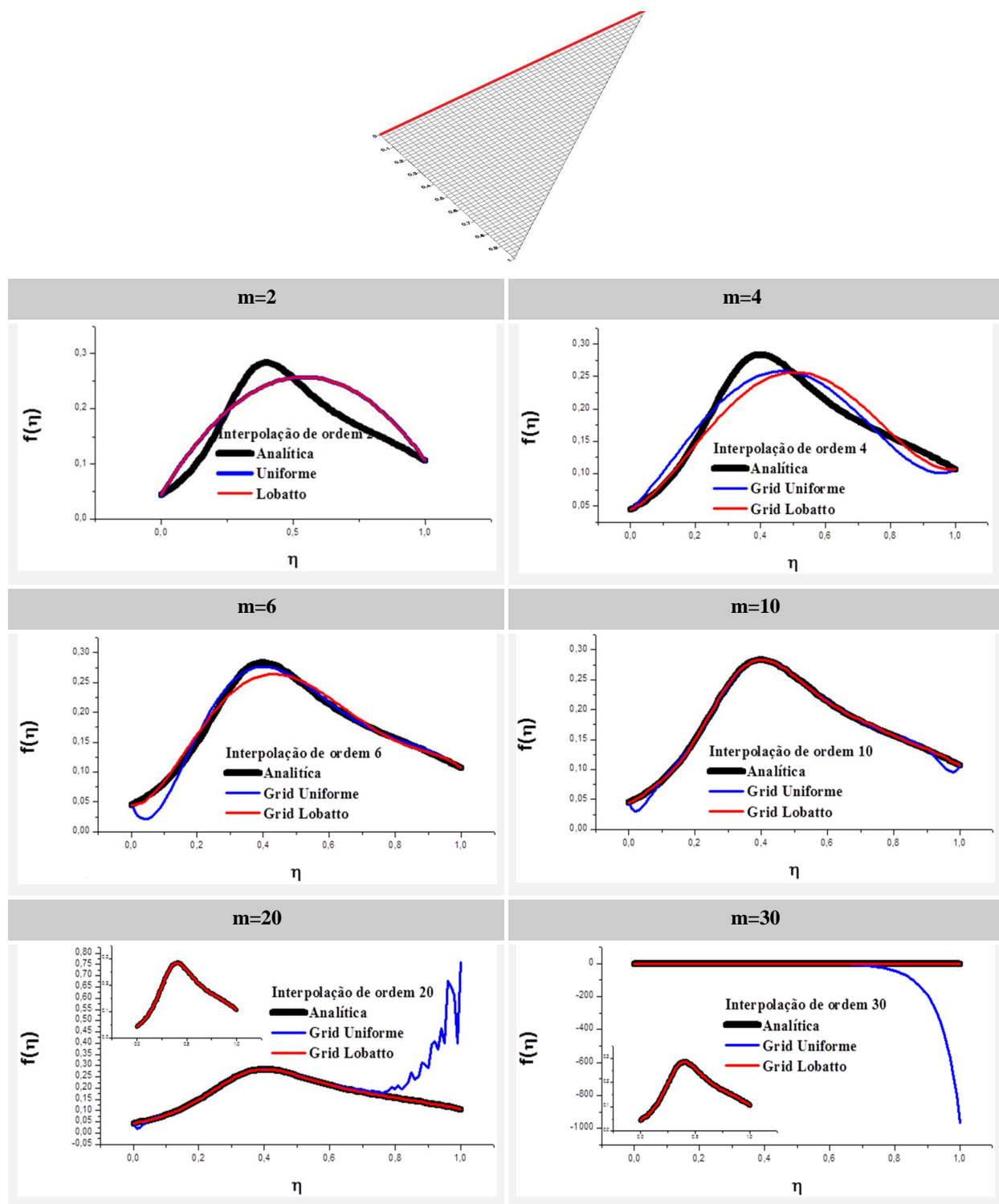


Figura 5.8 – Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Proriot) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão.

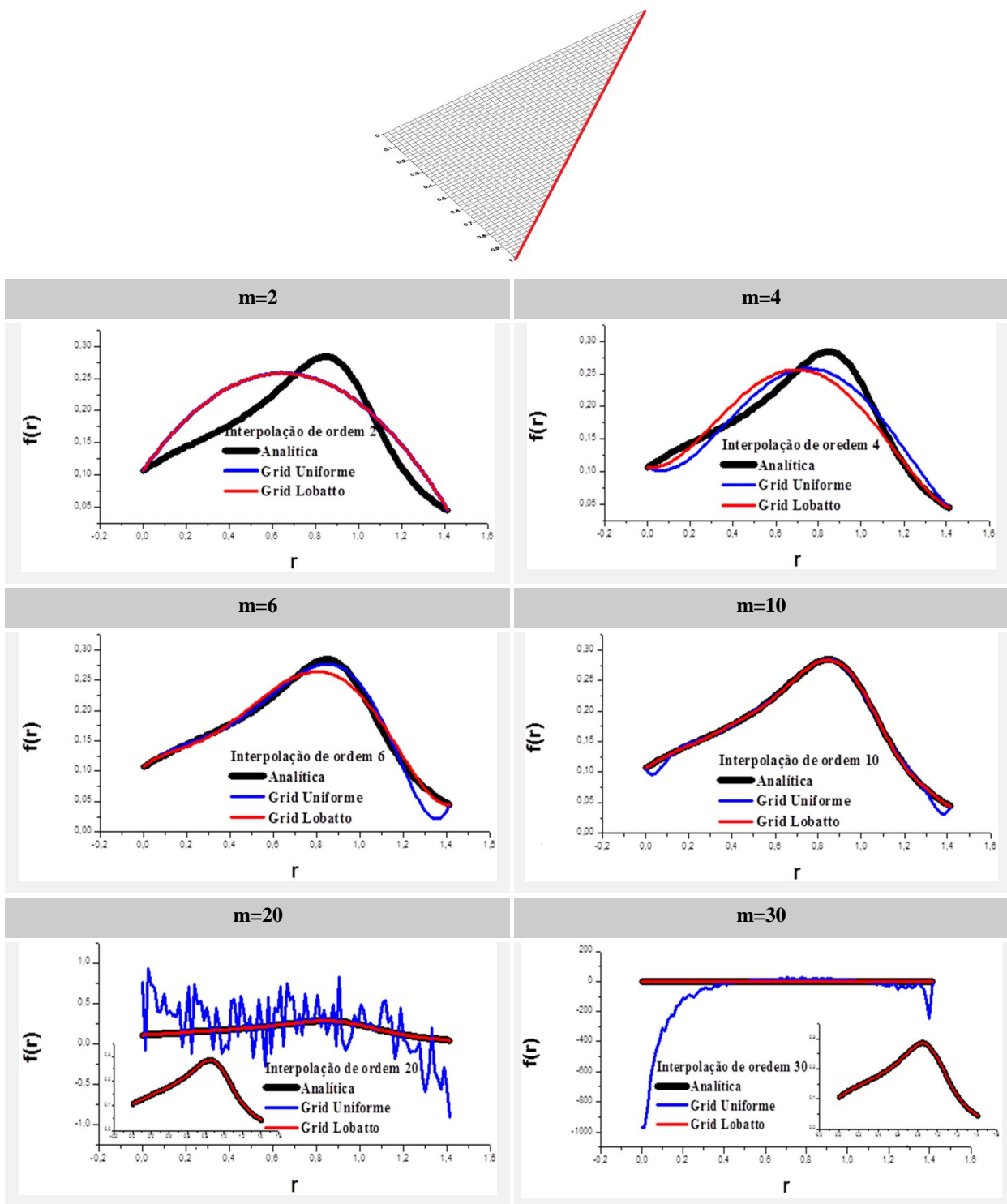


Figura 5.9 – Comparação entre a distribuição dos nós de Lobatto (interpolação de Prorior) e distribuição uniforme (expansão polinomial) com o comportamento analítico da função na borda do triângulo padrão.

## Elementos triangulares com continuidade $G^1$

No capítulo anterior, Capítulo 5, foram apresentadas as funções de forma espectrais de alta ordem à serem aplicadas na formulação do MEC para problemas elastostáticos gradiente, entretanto, estas funções de forma garantem apenas a continuidade  $C^0$  entre os elementos triangulares, ou seja, a garantia da continuidade do plano tangente não necessariamente são satisfeitas. Com o objetivo de anular o termo  $\mathbf{E} = \|(\hat{m} \otimes \hat{n}) : \tilde{\mu}\|$  e assim não calcular a integral de linha da Eq.(4.69), a hipótese de superfície suave faz necessário. Para impor suavidade na formulação do MEC, e assim alcançar o objetivo deste trabalho, é utilizado elementos de continuidade geométrica  $G^1$ , os quais dependem das coordenadas geométricas dos nós e de suas normais. Para auxiliar na obtenção das coordenadas e das normais nodais para geometrias complexas é utilizado o software de computação gráfica Blender<sup>TM</sup> 2.7, o qual é acoplado ao programa do MEC elastostático gradiente. Por fim, é verificado, por meio de exemplos, a suavidade na intersecção entre os elementos triangulares  $G^1$  e estes são comparados com os elementos obtidos pela expansão polinomial e espectral apresentados no capítulo anterior.

### 6.1 Introdução

A construção de superfícies suaves é um dos requisitos fundamentais nas criações e/ou recriações de geometrias tridimensionais realizadas em diversas áreas, como por exemplo, em animação computacional, na modelagem de superfícies de sólidos e imagens médicas. Nestes e em outros diversos campos de aplicações, a criação de superfícies de continuidade geométrica  $G^1$  é fundamental para a geração de modelos com superfícies suaves. No presente capítulo, é apresentado a técnica de construção das geometrias suaves a partir das curvas do contorno. Nesta construção é necessário o conhecimento dos pontos geométricos dos vértices da malha triangular da superfície, assim como das normais nestes referidos pontos. Diante do fato que estes dados de entrada não são de obtenção imediata,

neste trabalho é utilizado o software de computação gráfica *Blender*<sup>TM</sup> 2.70 para gerar tais informações necessárias. Desta forma, o algoritmo para a criação dos elementos triangulares com continuidade  $G^1$  é explicitado e a eficiência da suavização da superfície é verificada avaliando-se, na modelagem de geometrias de complexidade variada, a unicidade do vetor normal na interface entre cada elemento triangular.

Neste Capítulo segue a seguinte subdivisão: seção 6.2 é realizada a fundamentação teórica necessária para o entendimento e desenvolvimento dos referidos elementos triangulares  $G^1$ . Em seguida, seção 6.3, é apresentada a técnica de criação de superfície de continuidade geométrica  $G^1$  adotada neste trabalho (WALTON; MEEK, 1996). Dando continuidade, na seção 6.4 é apresentado o procedimento para a geração de superfícies suaves e na seção 6.5 é realizada a verificação da continuidade do plano tangente, do tempo de processamento e da capacidade de reconstrução de superfícies de geometrias paramétricas e não paramétricas (complexas).

## 6.2 Fundamentos teórico

Nesta seção é apresentada a base teórica para o desenvolvimento das superfícies suaves a ser utilizada nas seções subsequentes. Neste item é apresentada a notação, definições e teoremas necessários para os entendimentos futuros, entretanto, para maiores detalhes sugere que o leitor faça uso das referências bibliográficas indicadas à medida que for exigido aprofundamento no assunto.

Na teoria de curvas existem três representações para estas, as quais são chamadas de : paramétricas, explícitas não paramétricas e implícitas. Maior atenção é dado para as curvas paramétricas, uma vez que estas serão utilizadas na maioria das vezes neste trabalho.

Curvas paramétricas são caracterizadas pelas coordenadas dos pontos expressas em função de uma variável ou parâmetro  $t$ , além do mais, as curvas possuem, no plano e no espaço, as formas  $\mathbf{C}(t) = (x(t), y(t))$  e  $\mathbf{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , respectivamente. Com as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  chamadas de funções coordenadas. Uma vez que as formas das curvas são funções, a imagem de  $\mathbf{C}(t)$  é chamado de traço de  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{C}(t)$  é chamada de parametrização de  $\mathbf{C}$ . Um subconjunto de uma curva  $\mathbf{C}$ , o qual também é uma curva, é chamado de segmento de curva. Curvas paramétricas definidas por funções coordenadas polinomiais são chamadas de curvas polinomiais. O grau de uma curva polinomial é definido pela potência mais elevada da variável que ocorre nas funções coordenadas. A função  $p(t)/q(t)$  é chamada de racional se  $p(t)$  e  $q(t)$  são polinômios. Uma curva paramétrica definida por funções racionais é dita ser uma curva racional e o seu grau é caracterizada pela potência mais elevada da variável que ocorre no numerador ou no denominador de qualquer função coordenada.

### 6.2.1 Curvas de Bézier

Curvas de Bézier são curvas polinomiais que possuem particularidades em sua representação matemática. A popularidade das curvas de Bézier se deve ao fato de possuírem algumas propriedades matemáticas que facilitam sua manipulação e análise, e ainda, devido ao fato de que nenhum conhecimento avançado em matemática é necessário para fazer uso destas curvas. A curva de Bézier de grau  $n$  é determinada por uma sequência de  $n + 1$  pontos, os quais são chamados de pontos de controle. O polígono obtido pela união dos pontos de controle, por meio de segmentos retos, é chamado de polígono de controle.

Dados  $n + 1$  pontos de controle,  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ , a curva de Bézier de grau  $n$  é definida por:

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i \mathbf{B}_{i,n}(t), \quad (6.1)$$

onde

$$\mathbf{B}_{i,n}(t) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^i, & \text{se } 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.2)$$

são chamados de polinômios de Bernstein ou funções base de Bernstein de grau  $n$ .

Os polinômios de Bernstein possuem diversas propriedades importantes, as quais são listadas abaixo.

- a) partição da unidade: os polinômios de Bernstein de grau  $n$  têm soma unitária, isto é,

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{B}_{i,n}(t) = 1, \quad t \in [0, 1]; \quad (6.3)$$

- b) positividade: os polinômios de Bernstein são não-negativos no intervalo  $[0, 1]$ ,

$$\mathbf{B}_{i,n}(t) \geq 0, \quad t \in [0, 1]; \quad (6.4)$$

- c) simetria:

$$\mathbf{B}_{n-i,n}(t) = \mathbf{B}_{i,n}(1-t), \quad \text{para } i = 0, \dots, n; \quad (6.5)$$

- d) recursão: o polinômio de Bernstein de grau  $n$  são expressados em termos dos polinômios de grau  $n - 1$

$$\mathbf{B}_{i,n}(t) = (1-t)\mathbf{B}_{i,n-1}(t) + t\mathbf{B}_{i-1,n-1}(t), \quad (6.6)$$

com  $i = 0, \dots, n$ ,  $\mathbf{B}_{-1,n-1}(t) = 0$  e  $\mathbf{B}_{n,n-1}(t) = 0$ . As propriedades de partição da unidade e positividade fornecem duas importantes características das curvas de Bézier, as quais são a invariância quando submetida à transformação e a convexidade;

- e) convexidade: Dado um conjunto de pontos  $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , define-se o convexo de  $\mathbf{X}$ , chamado por  $CH\{\mathbf{X}\}$ , como o conjunto dos pontos  $CH\{\mathbf{X}\} = \{a_0x_0 + \dots + a_nx_n \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0\}$ ;

A partir das características dos polinômios de Bernstein, anunciadas anteriormente, é apresentado um teorema que ilustra as propriedades das curvas de Bézier (MARSH, 2005):

**Teorema 1:** *Uma curva de Bézier  $\mathbf{C}(t)$  de grau  $n$  com os pontos de controle  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n$  satisfazem as seguintes propriedades*

- *interpolação nos pontos extremos:  $\mathbf{C}(0) = \mathbf{V}_0$  e  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{V}_n$ ;*
- *tangente nos pontos extremos:  $\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$  e  $\frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial t} \Big|_{t=1} = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$ ;*
- *convexidade: para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{C}(t) \in CH\{\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n\}$ . Assim, cada ponto da curva de Bézier está dentro do convexo formado por seus pontos de controle;*
- *invariância à transformações Afins: seja  $T$  uma transformação Afim (por exemplo, rotação, reflexão, translação, etc.), então  $T\left(\sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i \mathbf{B}_{i,n}(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(\mathbf{V}_i) \mathbf{B}_{i,n}(t)$ ;*
- *Propriedade de Diminuição da Variação (PDV): para uma curva plana de Bézier  $\mathbf{C}(t)$ , a PDV afirma que o número de intersecções de uma reta com  $\mathbf{C}(t)$  é menor ou igual ao número de intersecções que a reta faz com o polígono de controle.*

### 6.2.1.1 Derivada das curvas de Bézier

As derivadas das curvas de Bézier seguem diretamente das derivadas dos polinômios de Bernstein (Equação 6.2)

$$\frac{d}{dt} B_{i,n}(t) = n [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)], \quad (6.7)$$

tornando

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) = n \sum_{i=0}^n [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] \mathbf{V}_i. \quad (6.8)$$

Uma vez que  $B_{i,n}(t) \equiv 0$  para  $i \notin \{0, \dots, n\}$ , a Eq.(6.8) simplifica para

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) B_{i,n-1}(t). \quad (6.9)$$

Como pode ser visto na equação anterior, a derivada da curva de Bézier de grau  $n$  é uma outra curva de Bézier de grau  $n - 1$ . Na literatura (FARIN, 1990) é comum introduzir o *operador diferenciação*  $\Delta$

$$\Delta \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i$$

para simplificar a notação na Eq.(6.9), a qual é reescrita

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{V}_i B_{i,n-1}(t). \quad (6.10)$$

Derivada de alta ordem das curvas de Bézier segue a partir da generalização do operador diferenciação, o qual é chamado de operador diferença iterado  $\Delta^r$

$$\Delta^r \mathbf{V}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{V}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{V}_i,$$



ficando o termo geral para derivada dada por

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{C}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{V}_i B_{i,n-r}(t). \quad (6.11)$$

A Eq.(6.11) pode ser ainda simplificado no caso em que é calculado a  $r$ -ésima derivada nos pontos extremos da curva de Bézier, esta simplificação é dividida à propriedade interpolante nos seus pontos extremos. Assim, em  $t = 0$  e  $t = 1$  a derivada da curva de grau  $n$  converte para

$$\frac{d^r}{dt^r} C(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r V_0, \quad (6.12)$$

$$\frac{d^r}{dt^r} C(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r V_{n-r}, \quad (6.13)$$

o qual afirma que nos pontos extremos de um intervalo a derivada de ordem  $r$  somente depende dos pontos de controle na vizinhança de  $r$  e o próprio ponto extremo. Este fato foi apresentado no *teorema 1* por meio da propriedade das tangentes nos pontos extremos.

## 6.2.2 Superfícies de Bézier

Definida as curvas, agora, faz-se necessário conhecer as superfícies de Bézier. Antes, são feitas algumas definições.

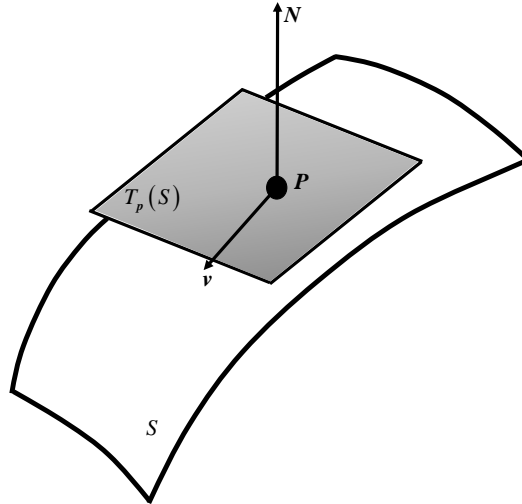
Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Uma *superfície paramétrica* é um mapeamento  $\mathbf{S} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Um mapeamento  $\mathbf{S} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido em um subconjunto fechado  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  é dito ser uma superfície paramétrica sempre que existe um subconjunto aberto  $U$  contendo  $V$ , e uma superfície paramétrica  $\mathbf{S}_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\mathbf{S}(s, t) = \mathbf{S}_1(s, t)$  para todo  $(s, t) \in V$ .  $\mathbf{S}_1$  é dito ser o  $\mathbf{S}$  estendido. O subconjunto  $S = \mathbf{S}(U)$  ou  $S = \mathbf{S}(V)$  de  $\mathbb{R}^3$  referido à superfície  $S$  é chamado de traço de  $\mathbf{S}$ , e  $\mathbf{S}$  é dito ser  $S$  parametrizado.

As coordenadas de um ponto qualquer na superfície paramétrica  $S$  é escrita em função de duas variáveis, por exemplo,

$$\mathbf{S}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)). \quad (6.14)$$

As curvas  $\mathbf{C}_{t_0}(S) = \mathbf{S}(s, t_0)$  e  $\mathbf{C}_{s_0}(S) = \mathbf{S}(s_0, t)$ , obtidas por fixando um dos valores das variáveis, são chamadas de curvas *s-parâmetro* e *t-parâmetro*, respectivamente.

A superfície paramétrica  $\mathbf{S} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita ser  $C^k$ -contínua (ou somente  $C^k$ ) sempre que as funções coordenadas  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$  e  $z(s, t)$  são  $C^k$ -contínua em  $U$ . No ponto  $\mathbf{p} = \mathbf{S}(s, t)$ ,  $\mathbf{S}_s(s, t)$  e  $\mathbf{S}_t(s, t)$  são vetores tangentes às curvas *s*- e *t*-paramétrica. Se o módulo do produto vetorial entre  $\mathbf{S}_s(s, t)$  e  $\mathbf{S}_t(s, t)$  é não nulo, ou seja,  $|\mathbf{S}_s(s, t) \times \mathbf{S}_t(s, t)| \neq 0$ , então a superfície é dita ser *regular* em  $\mathbf{S}(s, t)$ , e  $\mathbf{S}(s, t)$  é dito ser um *ponto regular*. Se  $\mathbf{S}(s, t)$  é regular para todo  $(s, t) \in U$ , então a superfície é dita ser *regular*. Se

Figura 6.1 – Plano tangente  $T_{\mathbf{p}}(S)$ 

$|\mathbf{S}_s(s, t) \times \mathbf{S}_t(s, t)| = 0$ , então  $\mathbf{S}$  é dita ser *singular* em  $\mathbf{S}(s, t)$ , e  $\mathbf{S}(s, t)$  é dito ser um *ponto singular*.

A superfície paramétrica  $\mathbf{S}$  definida no conjunto fechado  $V$  é dito ser  $C^k$  sempre que existe um conjunto aberto  $U$  contendo  $V$ , e uma superfície paramétrica  $\mathbf{S}_1$  com continuidade  $C^k$  definido em  $U$ , tal que  $\mathbf{S}(s, t) = \mathbf{S}_1(s, t)$  para todo  $(s, t) \in V$ . As derivadas parciais de  $\mathbf{S}(s, t)$  nos pontos do contorno de  $V$  são obtidas tomando as derivadas do mapeamento estendido. Então  $\mathbf{S}(s, t)$  é um ponto regular/singular se ele é um ponto regular/singular de  $\mathbf{S}_1(s, t)$ . Se  $\mathbf{p} = \mathbf{S}(s, t)$  é um ponto regular da superfície então  $|\mathbf{S}_s(s, t) \times \mathbf{S}_t(s, t)| \neq 0$ . Daí  $\mathbf{S}_s(s, t)$  e  $\mathbf{S}_t(s, t)$  são vetores não paralelos e o vetor perpendicular a eles é o *vetor unitário normal* à superfície dado por

$$\mathbf{N}(s, t) = \frac{\mathbf{S}_s(s, t) \times \mathbf{S}_t(s, t)}{|\mathbf{S}_s(s, t) \times \mathbf{S}_t(s, t)|}, \quad (6.15)$$

como mostrado na Figura 6.1. Qualquer vetor  $\mathbf{v}$  perpendicular a  $\mathbf{N}$  é chamado de *vetor tangente* a  $S$  em  $\mathbf{p}$ . O subespaço vetorial de  $\mathfrak{R}^3$  que consiste de todos os vetores tangente a  $S$  em  $\mathbf{p}$  é chamado de *plano tangente* em  $\mathbf{p}$  e denotado por  $T_{\mathbf{p}}(S)$ . Intuitivamente,  $T_{\mathbf{p}}(S)$  pode ser visualizado como o plano em que é tangente à superfície em  $\mathbf{p}$  (isto é, perpendicular a  $\mathbf{N}$ ), como mostra a Figura 6.1.

### 6.2.2.1 Elemento triangular de Bézier-Bernstein

A extensão em várias variáveis da base de Bernstein (Eq.(6.2)) por meio do esquema *produto-tensor* é importante para muitas aplicações. Neste esquema, a função base em diversas variáveis é definida a partir do produto das funções bases em uma variável, assim, por exemplo, a superfície gerada pelo produto-tensor definida, no domínio paramétrico  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , pela matriz de pontos de controle  $\mathbf{p}_{i,j}$  para  $0 \leq i \leq m$  e  $0 \leq j \leq n$  é

escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_{ij} B_{i,n}(s) B_{j,m}(t). \quad (6.16)$$

A abordagem mais elegante e matematicamente mais natural é fazer uso das coordenadas baricêntricas. Na função base de uma única variável (Equação 6.2), as quantidade  $u = 1 - t$  e  $v = t$  são as coordenadas baricêntricas no intervalo  $[0, 1]$  unidimensional. Estas quantidades possuem valores não-negativos, soma unitária e as funções base surgem a partir da expansão binomial de  $1 = (u + v)^n$ . Para definir as bases em duas variáveis, é escolhido um *triângulo de referência*  $T$  como o domínio padrão bidimensional. Se  $T$  tem vértices  $\mathbf{p}_k = (x_k, y_k)$  não colineares para  $k = 1, 2, 3$ , o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

é não nulo e  $T$  possui área  $A = \frac{1}{2}\Delta$  (positivo ou negativo de acordo com a numeração dos vértices anti-horário ou horário).

Dado um ponto qualquer  $\mathbf{p} = (x, y)$  no plano, considere os triângulos  $T_1, T_2, T_3$  formado pelo vértice no ponto  $\mathbf{p}$  e pelos lados do triângulo de referência (ver Figura 6.2), com áreas dada por  $A_1 = \frac{1}{2}\Delta_1, A_2 = \frac{1}{2}\Delta_2, A_3 = \frac{1}{2}\Delta_3$ , onde  $\Delta_k$  é o determinante definido pela substituição do ponto  $(x_k, y_k)$  por  $(x, y)$ . As coordenadas baricêntricas  $(u, v, w)$  do ponto  $\mathbf{p} = (x, y)$  com respeito ao triângulo de referência  $T$  são então definidas pela razão entre as áreas

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad w = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (6.18)$$

de modo que  $\mathbf{p} = u\mathbf{p}_1 + v\mathbf{p}_2 + w\mathbf{p}_3$ , onde  $u + v + w = 1$ . Os valores das coordenadas baricêntricas definida pela Eq.(6.18) são não-negativas quando  $\mathbf{p}$  está dentro de  $T$  (para  $\mathbf{p}$  fora de  $T$ , seus sinais são mostrados na Figura 6.2).

Uma vez que o sistema baricêntrico não possui origem, pontos não podem ser tratados como vetores, isto é, não pode ser adicionado dois pontos  $(u_1, v_1, w_1)$  e  $(u_2, v_2, w_2)$  para obter um novo ponto (isto violaria  $u + v + w = 1$ ). No entanto, definindo vetores baricêntricos pela tríplice  $(\lambda, \mu, \nu)$  que satisfaz  $\lambda + \mu + \nu = 0$ , pode ser adicionado um vetor a um ponto para obter um novo ponto, ou dois vetores para obter um novo vetor.

A partir da expansão de  $1 = (u + v + w)^n$  é obtido a base de Bernstein de grau  $n$ , em duas variáveis definido para  $0 \leq i, j, k \leq n$  com  $i + j + k = n$ , por

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k. \quad (6.19)$$

Existem  $\binom{n+2}{n} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$  funções base linearmente independente. Associando a cada função base um coeficiente  $c_{ijk}$ , qualquer polinômio de grau  $n$ , em duas variáveis,

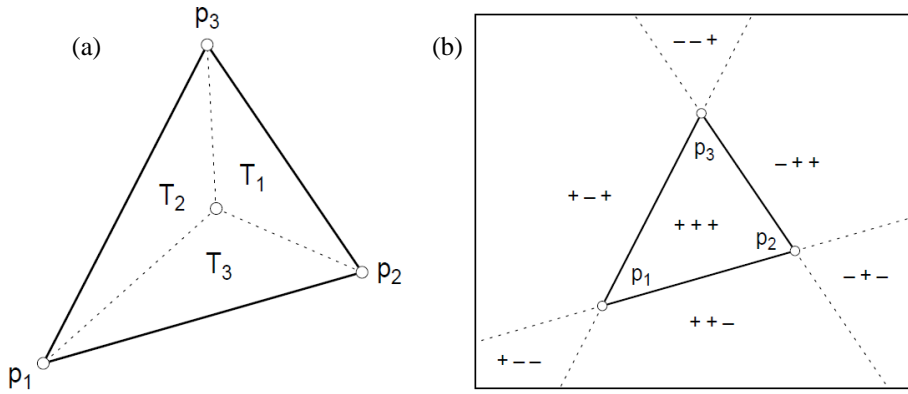


Figura 6.2 – (a) subtriângulos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  formado pelo vértice no ponto  $\mathbf{p}$  e pelos lados do triângulo de referência  $T$ . (b) sinal das coordenadas baricêntricas exterior ao triângulo de referência  $T$ .

pode ser definido sobre o triângulo de referência  $T$  pela expressão

$$f(u, v, w) = \sum_{|\mathbf{i}|} c_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w) \quad 0 \leq i, j, k \leq n, \quad (6.20)$$

com  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$ . Se o valor escalar  $c_{ijk}$  são substituídos pelos pontos de controle  $\mathbf{p}_{ijk}$ , obtêm-se um mapeamento do vetor a partir do domínio paramétrico  $T$  para  $\mathbb{R}^3$ , isto é, obtêm-se uma porção (*patch*) de superfície triangular (BÉZIER, 1993),

$$\mathbf{S}(u, v, w) = \sum_{|\mathbf{i}|} \mathbf{p}_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w) \quad 0 \leq i, j, k \leq n, \quad (6.21)$$

com  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$ . O conjunto de controle para esta região triangular é determinada por conectando cada ponto  $\mathbf{p}_{ijk}$  com os seus vizinhos  $\mathbf{p}_{i-1,j+1,k}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j-1,k}$ ,  $\mathbf{p}_{i,j-1,k+1}$ ,  $\mathbf{p}_{i,j+1,k-1}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j,k-1}$ ,  $\mathbf{p}_{i-1,j,k+1}$  (onde o subscrito fica entre 0 e  $n$ ) para definir uma superfície poliédrica com facetas triangulares. A região triangular (*patch*) sempre está contida no convexo formado por seu conjunto de controle. Outra propriedade da Eq.(6.21) é que esta interpola nos pontos dos vértices  $\mathbf{p}_{n00}$ ,  $\mathbf{p}_{0n0}$ ,  $\mathbf{p}_{00n}$  e os planos tangentes nestes pontos são definidos por  $(\mathbf{p}_{n00}, \mathbf{p}_{n-1,1,0}, \mathbf{p}_{n-1,0,1})$ ,  $(\mathbf{p}_{0n0}, \mathbf{p}_{0,n-1,1}, \mathbf{p}_{1,n-1,0})$ ,  $(\mathbf{p}_{00n}, \mathbf{p}_{1,0,n-1}, \mathbf{p}_{0,1,n-1})$ . Além do mais, os pontos de controle periféricos que definem o contorno da região triangular geram, para cada borda, as curvas de Bézier de grau  $n$ .

### 6.2.3 Continuidade geométrica

Uma vez apresentada as curvas e superfícies de Bézier como funções definida em cada trecho ou domínio, cuidados devem ser tomados para unir suavemente os segmentos, ou pedaços, vizinhos.

A questão do que exatamente se entende por *suave* é sutil e leva à distinção entre continuidade paramétrica (ou continuidade de funções) e continuidade geométrica. Diante desta sutileza, esta seção destaca a diferença entre continuidade geométrica e paramétrica

de curvas e superfícies, para tanto conceito de continuidade geométrica é abordado. Para um estudo mais aprofundado é aconselhado consultar as referências Barsky e DeRose (1984), DeRose e Barsky (1985) e Peters (2002).

Duas funções por partes com continuidade  $C^k$  são unidas para gerar uma função com continuidade  $C^k$  se suas derivadas de ordem até  $k$  são coincidentes em todos os pontos em comum, ou seja, duas superfícies regulares  $\mathbf{S}_1(s, t)$  e  $\mathbf{S}_2(s, t)$  se interceptam com continuidade  $C^k$  (ou paramétrica) no ponto  $\mathbf{P} = \mathbf{S}_1(s_0, t_0) = \mathbf{S}_2(u_0, v_0)$  sempre que

$$\left. \frac{\partial^{i+j} S_1(s, t)}{\partial^i s \partial^j t} \right|_{\substack{s=s_0 \\ t=t_0}} = \left. \frac{\partial^{i+j} S_2(u, v)}{\partial^i u \partial^j v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \quad (6.22)$$

para  $0 \leq i + j \leq k$ . Uma vez que as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  das curvas e superfícies são funções paramétricas, poder-se-ia declarar, erroneamente, que trechos de curvas ou de superfícies são unidas suavemente se e somente se as derivadas das funções componentes são coincidentes. Entretanto, como será ilustrado a seguir, este critério não é nem suficiente e nem necessário para caracterizar curvas ou superfícies suaves e, portanto, uma definição mais rigorosa faz necessário.

O exemplo a seguir mostra a inadequação da noção de suavidade de funções para representar curvas, em particular para as curvas de Bézier. Na Figura 6.3, o  $V$  de  $VC$  é parametrizado por duas curvas quadráticas por partes,  $u, v \in [0, 1]$ ,

$$\mathbf{C}_1(u) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (1-u)^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} 2(1-u)u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^2, \quad (6.23)$$

e

$$\mathbf{C}_2(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1-v)^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} 2(1-v)v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v^2. \quad (6.24)$$

Evidentemente, no ponto em comum tem-se que  $\mathbf{C}_1(1) = \mathbf{C}_2(0)$  e as derivadas são coincidentes, ou seja,

$$\left. \frac{d\mathbf{C}_1(u)}{du} \right|_{u=1} = \left. \frac{d\mathbf{C}_2(v)}{dv} \right|_{v=0}. \quad (6.25)$$

Entretanto, fica evidenciado que mesmo tendo derivada única no ponto de encontro das duas funções, esta unicidade nem sempre indica suavidade da função pois como pode ser visto na Figura 6.3 existe a formação de cantos (pontiagudos) na interseção das duas curvas. Outro questionamento que surge naturalmente é a condição inversa, ou seja, se a curva é suave implica em derivadas coincidentes? a resposta é não. Para ilustrar esta situação, o  $C$  de  $VC$ , da Figura 6.3, é parametrizado por dois trechos quadráticos de Bézier,  $u, v \in [0, 1]$ , dado por

$$\mathbf{C}_3(u) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} (1-u)^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} 2(1-u)u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u^2, \quad (6.26)$$

e por

$$\mathbf{C}_4(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1-v)^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} 2(1-v)v + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} v^2. \quad (6.27)$$

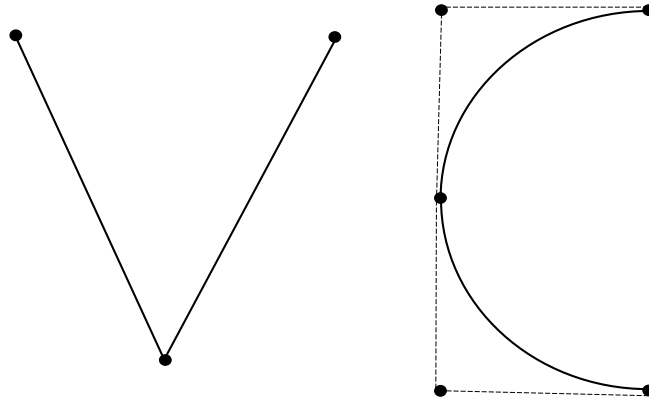


Figura 6.3 – Diferença entre a continuidade geométrica e a de funções: o  $V$  de  $VC$  é parametrizado por dois arcos de parábola com iguais derivadas no vértice, entretanto a forma  $V$  não é contínua geometricamente; o  $C$  de  $VC$  é parametrizada por dois arcos de parábola com derivadas diferentes em seu ponto em comum, entretanto, a forma  $C$  é contínua geometricamente.

A geometria  $C$  da Figura 6.3 é visivelmente suave uma vez que os dois trechos têm a mesma tangente vertical no ponto em comum  $\mathbf{C}_3(1) = \mathbf{C}_4(0)$ , mas as derivadas neste ponto não são coincidentes:

$$\left. \frac{d\mathbf{C}_3(u)}{du} \right|_{u=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \left. \frac{d\mathbf{C}_4(v)}{dv} \right|_{v=0}. \quad (6.28)$$

Em duas variáveis, a comparação entre os critérios de suavidade para superfícies e o de funções são mais sutis. Esta comparação é realizada por meio de dois exemplos envolvendo trechos polinomiais de Bézier. Um critério geométrico necessário e suficiente para dois trechos polinomiais,  $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se interceptarem com continuidade  $C^1$  é a condição de coplanaridade (HANSFORD, 2002), ilustrada na Figura 6.4 à esquerda. As funções  $p_1$  e  $p_2$  são unidas com continuidade  $C^1$  se todos os subtriângulos, do conjunto de controle que se encontram em um ponto do contorno, são coplanares. Uma vez que a coplanaridade de triângulos de lados adjacentes, da rede de controle, é um critério geométrico, torna-se tentador usá-lo como definição de suavidade para superfícies constituídas de trechos triangulares, entretanto, este critério não é nem suficiente e nem necessário para caracterizar suavidade.

Para verificar que a coplanaridade de triângulos (da rede de controle) de lados adjacentes não implica em continuidade da tangente na superfície (condição suficiente), é considerado oito trechos (ou pedaços) triangulares com aproximação polinomial de grau 2, cuja rede de controle é obtida cortando os cantos (oito) do cubo a partir dos pontos médio de cada aresta. Estes pontos médios dos lados e os centros das faces do cubo servem como ponto de controle para os elementos triangulares (oito) quadrático de Bézier. Por exemplo, a rede de controle no octante positivo, marcada com linhas de contorno em

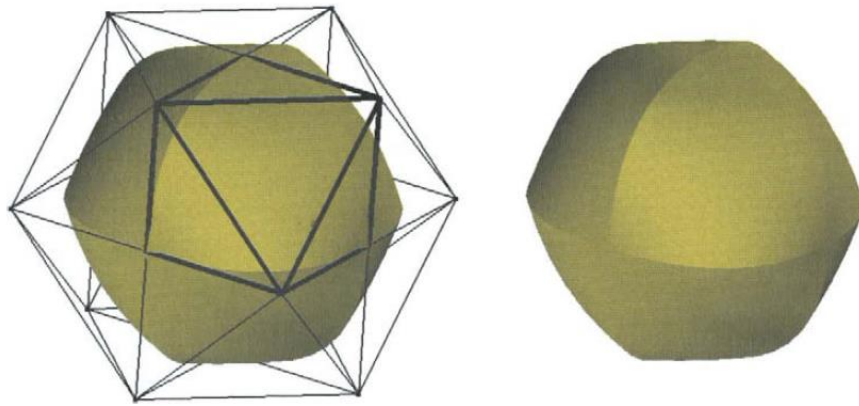


Figura 6.4 – À esquerda é mostrado o conjunto de controle de seis pontos (linhas em negrito) formando um trecho da superfície de Bézier. Os dois triângulos no conjunto de controle que incluem os seus pontos extremos define a derivada ao longo do contorno. A superfície definida pelo conjunto de controle não são continuamente tangente como é mostrado os vincos na superfície (os vincos são visíveis nas silhuetas da interseção dos elementos triangulares, figura à direita).

Fonte: Peters (2002)

negrito na Figura 6.4 à esquerda têm os coeficientes

$$\begin{array}{cccc}
 & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \\
 & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & & \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .
 \end{array} \tag{6.29}$$

Na Figura 6.4 (à direita) mostra que a rede de controle triangular se unem formando um vinco acentuado na interseção das bordas parabólicas da superfície formada. Na verdade, a normal no ponto médio,

$$\begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

da borda equatorial do trecho da superfície triangular no octante positivo é

$$\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} .$$

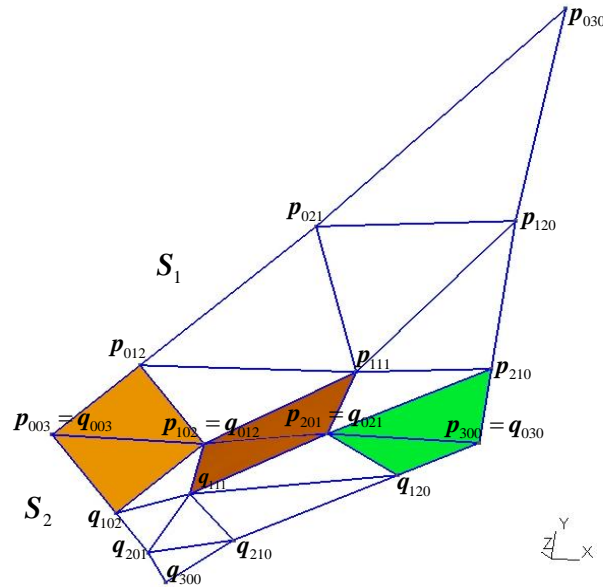


Figura 6.5 – Existência de continuidade da tangente na interface entre superfícies triangulares, mesmo que os pares de sub-triângulos na fronteiras entre as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  (região colorida) não sejam coplanares.

Entretanto para coincidir o triângulo do octante positivo com o seu simétrico, no hemisfério abaixo, a componente  $z$  deveria ser nula. Assim o hemisfério superior e inferior, a qual é referenciado, não se interceptam com um normal contínua (ou única).

Por outro lado, o critério de coplanaridade não é condição necessária para uma união suave entre elementos. Considere dois trechos cúbicos  $S_1$  e  $S_2$  com coeficientes (ver Figura 6.5)

$$\mathbf{S}_1 : \begin{bmatrix} 72 \\ 72 \\ 6 \\ 36 \\ 36 \\ 0 \\ 12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 72 \\ 36 \\ 12 \\ 46 \\ 13 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 72 \\ 12 \\ 12 \\ 48 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{S}_2 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ -12 \\ 0 \\ 18 \\ -18 \\ 0 \\ 24 \\ -24 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 28 \\ -11 \\ 12 \\ 36 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 48 \\ 0 \\ 12 \\ 60 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

A partir dos pontos de controle da Eq.(6.30) e da equação da superfícies Bázier (Equa-



ção 6.21), é possível descrever a superfícies  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  por

$$\mathbf{S}_1(u, v) = \mathbf{p}_{300}u^3 + \mathbf{p}_{030}v^3 + \mathbf{p}_{003}w^3 + \mathbf{p}_{210}(3u^2v) + \mathbf{p}_{120}(3uv^2) + \mathbf{p}_{021}(3v^2w) + \mathbf{p}_{012}(3vw^2) + \mathbf{p}_{102}(3uw^2) + \mathbf{p}_{201}(3u^2w) + \mathbf{p}_{111}(6uvw), \quad (6.31)$$

$$\mathbf{S}_2(u, v) = \mathbf{q}_{300}u^3 + \mathbf{q}_{030}v^3 + \mathbf{q}_{003}w^3 + \mathbf{q}_{210}(3u^2v) + \mathbf{q}_{120}(3uv^2) + \mathbf{q}_{021}(3v^2w) + \mathbf{q}_{012}(3vw^2) + \mathbf{q}_{102}(3uw^2) + \mathbf{q}_{201}(3u^2w) + \mathbf{q}_{111}(6uvw). \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Onde: } \mathbf{p}_{003} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{300} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{030} = \begin{bmatrix} 72 \\ 72 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{102} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{201} = \begin{bmatrix} 48 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{210} = \begin{bmatrix} 72 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}_{120} &= \begin{bmatrix} 72 \\ 36 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{021} = \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{012} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_{111} = \begin{bmatrix} 46 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{003} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{030} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q}_{012} &= \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{021} = \begin{bmatrix} 48 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{300} = \begin{bmatrix} 24 \\ -24 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{102} = \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{201} = \begin{bmatrix} 18 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_{210} = \begin{bmatrix} 36 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q}_{120} &= \begin{bmatrix} 60 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{q}_{111} = \begin{bmatrix} 28 \\ -11 \\ 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E suas derivadas na interseção entre as duas superfícies são

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}_1(u, v)}{\partial u} \right|_{(t,0)} &= \left. \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v} \right|_{(0,t)} = (-3\mathbf{p}_{003} + 3\mathbf{p}_{102})(1-t)^2 + \\ &(-3\mathbf{p}_{102} + 3\mathbf{p}_{201})2(1-t) + (3\mathbf{p}_{300} - 3\mathbf{p}_{201})t^2 = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \\ &\begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t^2, \quad (6.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}_1(u, v)}{\partial v} \right|_{(t,0)} &= (-3\mathbf{p}_{003} + 3\mathbf{p}_{012})(1-t)^2 + (-3\mathbf{p}_{102} + 3\mathbf{p}_{111})2(1-t)t + \\ &(3\mathbf{p}_{210} - 3\mathbf{p}_{201})t^2 = \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \begin{bmatrix} 66 \\ 39 \\ 0 \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 27 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix} t^2, \quad (6.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} \right|_{(0,t)} &= (-3\mathbf{q}_{003} + 3\mathbf{q}_{102})(1-t)^2 + (3\mathbf{q}_{111} - 3\mathbf{q}_{012})2(1-t)t + \\ &(3\mathbf{q}_{120} - 3\mathbf{q}_{021})t^2 = \begin{bmatrix} 36 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \begin{bmatrix} 12 \\ -33 \\ 36 \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 36 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix} t^2. \quad (6.35) \end{aligned}$$

Com o auxílio do software *Wolfram Mathematica 6.0*, pode-se verificar que as derivadas parciais são coplanares nos pontos da interface entre as duas superfícies  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$ , isto é,

$$\text{Det} \left( \left. \frac{\partial S_1(u, v)}{\partial u} \right|_{\substack{u=t \\ v=0}}, \left. \frac{\partial S_1(u, v)}{\partial v} \right|_{\substack{u=t \\ v=0}}, \left. \frac{\partial S_2(u, v)}{\partial u} \right|_{\substack{u=0 \\ v=t}} \right) = 0.$$

Uma vez que as superfícies não formam cúspides e nem tem derivadas nulas ao longo da borda de interseção, a direção normal varia continuamente, ou seja, a normal na interseção das duas superfícies triangulares é única. Por outro lado, as diferenças entre os pontos de controle dos pares de subtriângulos médio, marcado pela cor marrom na Figura 6.5, possui determinante não nulo, ou seja,

$$\text{Det} \left( \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 66 \\ 39 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -33 \\ 36 \end{bmatrix} \right) = 5832 \neq 0.$$

Isto mostra que, em contraste com a correspondência  $C^1$  entre duas funções, pares de subtriângulos com lados adjacentes não necessitam ser coplanares para obterem superfície com tangentes contínuas.

Como pode ser visto no exemplo, tanto para curva quanto para superfície, a condição de continuidade, assim como a de coplanaridade no caso de superfícies, não implicam em continuidade geométrica. Desta forma, faz-se necessário obter condições necessárias e suficientes que definam esta continuidade.

Para poder alcançar a definição de continuidade geométrica, faz-se necessário utilizar os conceitos de parametrização equivalente. Seja  $\mathbf{C}(u)$ , com  $u \in [a, b]$ , e  $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{u})$ , com  $\tilde{u} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ , duas parametrizações regulares  $C^\infty$  (uma parametrização é regular se sua primeira derivadas nunca desaparece). Essas parametrizações são ditas ser equivalentes, isto é, estas descrevem a mesma curva orientada, se existe uma função  $C^\infty f : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$  tal que

- a)  $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{u}) = \mathbf{C}(f(\tilde{u}))$ ;
- b)  $f(\tilde{a}) = a$ ;
- c)  $f(\tilde{b}) = b$ ;
- d)  $\frac{df(\tilde{u})}{d\tilde{u}} > 0$ .

Intuitivamente,  $\mathbf{C}$  e  $\tilde{\mathbf{C}}$  traça o mesmo conjunto de pontos, na mesma ordem. Diz-se também que  $\mathbf{C}$  foi reparametrizado para obter  $\tilde{\mathbf{C}}$  e  $f$  é chamada de variável de mudança com preservação da orientação (ver Figura 6.6). Para ilustra o conceito de parametrização equivalente, faz-se uso da parametrização definida pela Eq.(6.27) e por sua nova parametrização dada por

$$\tilde{\mathbf{C}}_4(\tilde{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1 - 2\tilde{v})^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} 4(1 - 2\tilde{v})\tilde{v} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} 4\tilde{v}^2, \quad \tilde{v} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (6.36)$$

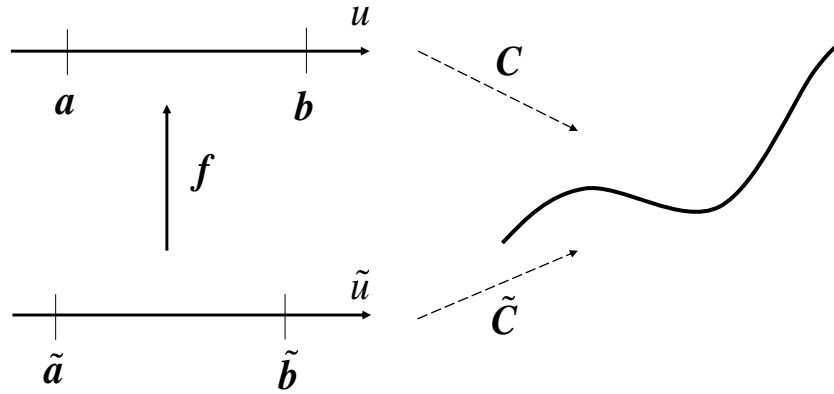


Figura 6.6 – Reparametrização da curva  $\mathbf{C}(u)$  pela função  $f$  para obter  $\tilde{\mathbf{C}}(\tilde{u})$ .

Para mostrar que  $\mathbf{C}_4(v)$  e  $\tilde{\mathbf{C}}_4(\tilde{v})$  possuem parametrização equivalente, pode ser observado a partir da Eq.(6.27) e Eq.(6.36) que

$$\tilde{\mathbf{C}}_4(\tilde{u}) = \mathbf{C}_4(2\tilde{u}) \quad \forall \tilde{u} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (6.37)$$

Conforme à Eq.(6.37) tem-se encontrado o mapeamento  $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$  definido por  $f(\tilde{u}) = 2\tilde{u}$  que satisfaz à propriedade (a) acima. A verificação das outras três propriedades, acima, é imediata. Assim conclui-se que  $\mathbf{C}_4$  e  $\tilde{\mathbf{C}}_4$  descrevem a mesma curva orientada de  $(0, 0)$  para  $(3, -1)$ .

Definição de parametrização equivalente para superfícies pode ser obtida de forma semelhante à de curvas, apenas acrescentando um novo parâmetro  $\tilde{v}$  e considerando a variável de mudança  $f$  tendo como domínio dois parâmetros.

A partir do conceito de parametrização equivalente, define-se a continuidade geométrica: *duas superfícies regulares  $\mathbf{S}_1(s, t)$  e  $\mathbf{S}_2(u, v)$  são ditas interceptarem com continuidade  $G^k$  no ponto  $\mathbf{P} = \mathbf{S}_1(s_0, t_0) = \mathbf{S}_2(u_0, v_0)$  sempre que existe um mapeamento invertível (chamado de reparametrização)  $f : [\tilde{u}, \tilde{v}] \rightarrow [u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})]$  tal que  $\mathbf{S}_1(s, t)$  e  $\mathbf{S}_2(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))$  se interceptam com continuidade  $C^k$  no ponto  $\mathbf{P}$ . Duas superfícies são ditas se interceptarem com continuidade  $G^k$  ao longo de uma curva se elas se interceptam com continuidade  $G^k$  em cada ponto da curva.*

Suponha que  $\mathbf{S}_1(s, t)$  e  $\mathbf{S}_2(u, v)$  de interceptem com continuidade  $G^1$  em  $\mathbf{P} = \mathbf{S}_1(s_0, t_0) = \mathbf{S}_2(u_0, v_0)$ . Então existe uma reparametrização  $u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})$  e aplicando a regra da cadeia chega-se à

$$\frac{\partial \mathbf{S}_1(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{S}_2(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v}, \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_1(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{S}_2(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v}))}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v}. \quad (6.39)$$

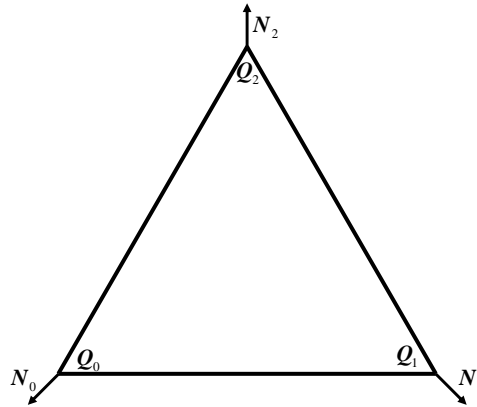


Figura 6.7 – Notação para os vértices e suas respectivas normais do triângulo plano de entrada.

E para o produto vetorial, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{S}_1(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{S}_1(s, t)}{\partial t} \\
 &= \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v} \right) \times \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}_2(u, v)}{\partial v} \right). \tag{6.40}
 \end{aligned}$$

Portanto, da Eq.(6.40), quando duas superfícies se interceptam com continuidade  $G^1$  no ponto  $\mathbf{P}$  então neste ponto as superfícies apresentam a mesma normal e daí o mesmo plano tangente. O inverso também é verdadeiro, se duas superfícies se interceptam no ponto  $\mathbf{P}$  e tem mesmas normais à superfície neste ponto, então a superfície se interceptam com continuidade  $G^1$  (MARSH, 2005).

### 6.3 Técnica para a construção de superfícies suaves

Nesta seção é apresentado a técnica de interpolação normal usando contornos curvados (WALTON; MEEK, 1995) e em seguida é criado o algoritmo de construção de elementos triangulares com continuidade  $G^1$  baseado no trabalho de Walton e Meeke (1996).

A ideia chave por trás do algoritmo aqui apresentado é transformar uma malha inicialmente constituída por triângulos planos em malhas formada por triângulos curvos, ou seja, o vetor de posição (ou coordenadas geométricas) e o vetor normal nos vértices dos triângulos planos são interpolados pela superfície paramétrica triangular de Bézier dada pela Eq.(6.21). Portanto, o conjunto de controle do elemento é construído utilizando apenas as informações da posição,  $\mathbf{Q}_i$ , e da normal,  $\mathbf{N}_i$  com  $i = 0, 1, 2$ , nos vértices da malha de entrada como ilustrado na Figura 6.7.

A partir da Eq.(6.1) e da Eq.(6.9) é possível escrever a curva de Bézier de ordem 3,

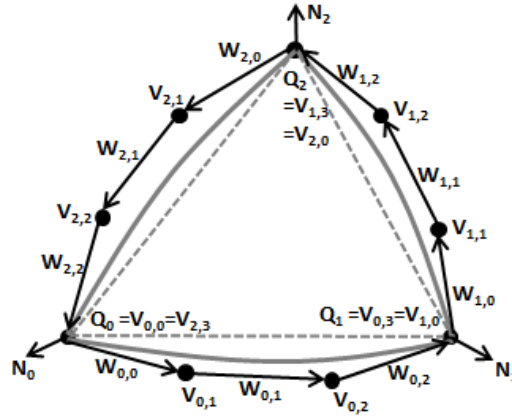


Figura 6.8 – Curvas de contorno de ordem 3.

assim como seu vetor tangente, respectivamente, da seguinte forma

$$\mathbf{C}_k(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_{k,i} B_{i,3}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad (6.41)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}_k(t) = 3 \sum_{i=0}^2 \mathbf{W}_{k,i} B_{i,2}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad (6.42)$$

onde  $\mathbf{V}_{k,0} = \mathbf{Q}_i$ ,  $\mathbf{V}_{k,3} = \mathbf{Q}_{i+1}$  e com os demais vértices de controle  $\mathbf{V}_{k,i}$ ,  $k = 1, 2$  sendo determinado mais adiante pelo *teorema 2*. Já o termo  $\mathbf{W}_{k,i}$  da Eq.(6.42) é dado por  $\mathbf{W}_{k,i} = \Delta \mathbf{V}_{k,i} = \mathbf{V}_{k,i+1} - \mathbf{V}_{k,i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , já mencionado anteriormente. Tanto os vértices de controle  $\mathbf{V}_{k,i}$  quanto os vetores  $\mathbf{W}_{k,i}$  são ilustrados na Figura 6.8.

Diante do objetivo de criar superfícies triangulares de Bézier com continuidade geométrica  $G^1$  a partir das curvas de contorno, foi utilizado curvas cúbicas e gerado superfícies quártica. A utilização de curvas de ordem 3 é motivado pelo fato de que esta ordem é o menor valor a ser considerado para a construção de curvas polinomiais não coplanares (WALTON; MEEK, 1996). Já a criação de superfícies quártica é justificado pelo fato desta ordem ser o menor grau para criação de superfícies triangulares de Bézier (ou de Gregory) com continuidade  $G^1$  (PIPER, 1987). Assim, de acordo com a Eq.(6.21), pode ser escrita a superfície de interesse, em coordenadas baricêntricas, da seguinte forma

$$\mathbf{S}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=4} \mathbf{p}_{ijk} \frac{4!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad (6.43)$$

$$u, v, w \geq 0; \quad u + v + w = 1; \quad i, j, k \geq 0$$

onde

$$\mathbf{p}_{004} = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{p}_{040} = \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{p}_{400} = \mathbf{Q}_2.$$

Ao contrário das curvas de DeBoor, Höllig e Sabin (1987), ou das curvas de ordem quártica proposta por Hansford, Barnhill e Farin (1994), as curvas utilizadas neste trabalho, assim como desenvolvida em Walton e Meeck (1996), não são restritas às planares.

A estratégia para a construção dos trechos triangulares  $G^1$  é ajustar, inicialmente, curvas de Bézier cúbicas entre os pares de pontos amostrados, em seguida, elevando o grau dessas curvas para quártica e então usar a informação dessas curvas para desenvolver uma superfície composta por trechos de Gregory de ordem quatro (WALTON; MEEK, 1996).

As relações entre os vértices de controle de Bézier com a interpolação dos pontos normais são dadas pelo teorema que segue. Este teorema foi provado por Walton e Yeung (1993) e é utilizado para determinar os termos  $\mathbf{V}_{k,i}$ ,  $i = 1, 2$ , presentes na Eq.(6.41)

**Teorema 2:** *Seja a curva de contorno cúbica dada por  $\mathbf{C}_k(t)$ . Considere, ainda, por definição os seguintes parâmetros  $\mathbf{d}_k = \|\mathbf{V}_{k,3} - \mathbf{V}_{k,0}\|$ ,  $\Gamma_k = \|\mathbf{V}_{k,3} - \mathbf{V}_{k,0}\|/\mathbf{d}_i$ ,  $a_k = \mathbf{N}_k \cdot \mathbf{N}_{k+1}$ ,  $a_{k,0} = \mathbf{N}_k \cdot \Gamma_k$  e  $a_{k,1} = \mathbf{N}_{k+1} \cdot \Gamma_k$ . Assume que se  $a_{k,0} = 0$  e  $a_{k,1} \neq 0$  (ou se  $a_{k,0} \neq 0$  e  $a_{k,1} = 0$ ) então  $a_k > 0$ , desta forma, a curva cúbica de Bézier (Equação 6.41) com*

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{k,0} &= \mathbf{Q}_k, \\ \mathbf{V}_{k,3} &= \mathbf{Q}_{k+1}, \\ \mathbf{V}_{k,1} &= \mathbf{V}_{k,0} + \mathbf{d}_k (6\Gamma_k - 2\varsigma_k \mathbf{N}_k + \vartheta_k \mathbf{N}_{k+1})/18, \\ \mathbf{V}_{k,2} &= \mathbf{V}_{k,3} - \mathbf{d}_k (6\Gamma_k + \varsigma_k \mathbf{N}_k - 2\vartheta_k \mathbf{N}_{k+1})/18,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\varsigma_k &= 6(2a_{k,0} + a_k a_{k,1}) / (4 - a_k^2), \\ \vartheta_k &= 6(2a_{k,1} + a_k a_{k,0}) / (4 - a_k^2),\end{aligned}$$

une  $\mathbf{Q}_k$  a  $\mathbf{Q}_{k+1}$  e as direções de suas normais principais são paralelas a  $\mathbf{N}_k$  em  $t = 0$  e paralela a  $\mathbf{N}_{k+1}$  em  $t = 1$ .

Como já mencionado anteriormente, quaisquer duas regiões adjacentes da superfície que são unidas com continuidade  $G^1$  devem ter tanto um plano tangente como uma curva de contorno em comum. Uma abordagem utilizada por diversos autores (FARIN, 1983; PIPER, 1987; SHIRMAN; SÉQUIN, 1987; CHIYOKURA, 1986; MANN et al., 1992; LOOP, 1994) para a composição de superfícies  $G^1$  é idealizar faixas tangentes ao longo de cada curva de contorno e então construir um pedaço da superfície (elemento) de tal forma que as derivadas que cruzam as curvas de contorno nas direções  $(1, -1/2, -1/2)$ ,  $(-1/2, -1/2, 1)$  e  $(-1/2, 1, -1/2)$ , em coordenadas baricêntricas, dada por

$$\mathbf{F}_k(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{D}_{k,i} B_{i,3}(t), \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (6.44)$$

com

$$\mathbf{D}_{0,i} = \mathbf{P}_{1,i,3-i} - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{0,i+1,3-i} - \mathbf{P}_{0,i,4-i}), \quad (6.45)$$

$$\mathbf{D}_{1,i} = \mathbf{P}_{i,3-i,1} - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{i+1,3-i,0} - \mathbf{P}_{i,4-i,0}), \quad (6.46)$$

$$\mathbf{D}_{2,i} = \mathbf{P}_{3-i,1,i} - \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{3-i,0,i+1} - \mathbf{P}_{4-i,0,i}), \quad (6.47)$$

estejam nesta faixa tangente.

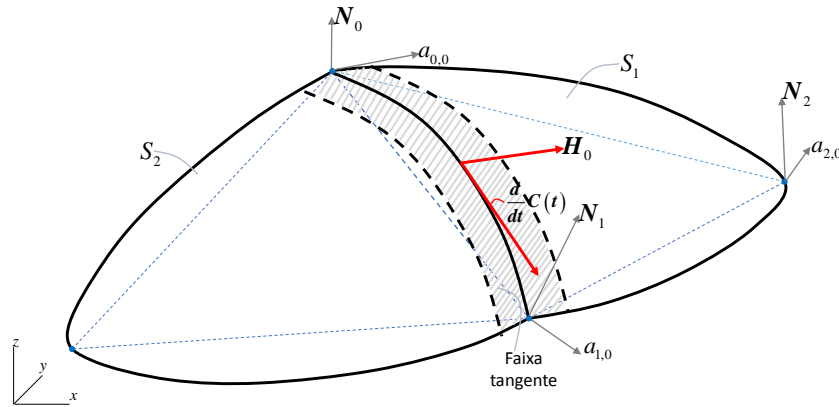


Figura 6.9 – Plano gerado pelo vetor tangente  $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$  e o vetor  $\mathbf{H}_k$ .

A mesma ideia da faixas tangentes foi usada por Walton e Meek (1996), entretanto, ao invés de utilizar os vetores tangente e binormal da estrutura de Frenet para gerar tais faixa, foram usados os vetores tangente (Equação 6.42) e o vetor (WALTON; MEEK, 1996)

$$\mathbf{H}_k(t) = \sum_{j=0}^2 A_{k,j} B_{j,2}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k = 0, 1, 2 \quad (6.48)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{k,0} &= N_k \times \frac{W_{k,0}}{\|W_{k,0}\|}, \\ A_{k,2} &= N_{k+1} \times \frac{W_{k,2}}{\|W_{k,2}\|}, \\ A_{k,1} &= \frac{A_{k,0} + A_{k,2}}{\|A_{k,0} + A_{k,2}\|}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

A Figura 6.9 mostra um exemplo de construção das faixas tangentes a partir dos vetores tangente,  $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$ , e do vetor  $\mathbf{H}_k$  definido por Walton e Meek (1996).

A partir de agora é possível construir trecho triangular, que mais adiante será denominado elemento triangular, fazendo uso das superfícies de Gregory (CHIYOKURA, 1986). Os pontos de controle das curvas de contorno quártica  $\mathbf{C}(t)$  (grau elevada a partir da cúbica) são usados como pontos das bordas do trecho triangular. Para o trecho de Bézier, os pontos de controle internos adjacente ao contorno, por exemplo  $\mathbf{P}_{1,1,2}$  e  $\mathbf{P}_{1,2,1}$  (ver Figura 6.10) com respeito ao contorno entre  $\mathbf{Q}_0$  e  $\mathbf{Q}_1$ , podem ser obtidos por impondo a restrição de continuidade tangente através de suas bordas. Isto implica que cada ponto de controle interno é determinado duas vezes, uma vez para cada contorno com o qual está associado e estes valores para os pontos internos geralmente fornecem posições de valores distintos (ver Figura 6.10). Chiyokura (1986) resolve esta situação, conforme Gregory (GREGORY, 1974), usando uma mistura das duas posições de tal forma que assegure continuidade do plano tangente na interface entre as regiões triangulares de Bézier. Fazendo uso dos pontos de controle de Gregory é possível escrever os pontos internos de forma única e satisfazendo a continuidade desejada por meio das relações

$$\mathbf{P}_{1,1,2} = \frac{1}{u+v} (u\mathbf{G}_{2,2} + v\mathbf{G}_{0,1}), \quad (6.50)$$

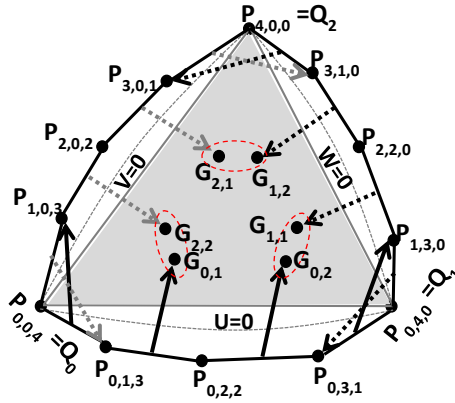


Figura 6.10 – Pontos de controle de Gregory.

$$\mathbf{P}_{1,2,1} = \frac{1}{w+u} (w\mathbf{G}_{0,2} + u\mathbf{G}_{1,1}), \quad (6.51)$$

$$\mathbf{P}_{2,1,1} = \frac{1}{v+w} (v\mathbf{G}_{1,2} + w\mathbf{G}_{2,1}). \quad (6.52)$$

Os pontos  $\mathbf{G}_{k,1}$  e  $\mathbf{G}_{k,2}$ ,  $k = 0, 1, 2$  mostrados na Figura 6.10 são determinados por meio da necessidade de que as derivadas direcionais que cruzam cada contorno estejam na faixa tangente (Figura 6.9) construída para cada contorno correspondente, isto é,

$$\mathbf{F}_k(t) = \frac{1}{3}\alpha_k(t) \frac{d}{dt}\mathbf{C}(t) + \beta_k(t) \mathbf{H}_k(t), \quad k = 0, 1, 2 \quad (6.53)$$

onde  $\alpha_k(t)$  e  $\beta_k(t)$  são polinômios em  $t$ ,  $\mathbf{F}_k(t)$  é como definido pela Eq.(6.44) com os valores dos  $\mathbf{P}_{ijk}$  das Eq.s.(6.45 - 6.47) substituídos pelos valores apropriados das Eq.s.(6.50 - 6.52), e os vetores  $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$  e  $\mathbf{H}_k$  são dados pela Eq.(6.42) e Eq.(6.48), respectivamente. Uma vez que  $\mathbf{F}_k(t)$  é cúbica (ver Equação 6.44),  $\frac{d}{dt}\mathbf{C}_k(t)$  e  $\mathbf{H}_k(t)$  são quadrática (ver Equação 6.42 e Equação 6.48, respectivamente) então faz necessário compatibilizar a ordem das funções escrita na Eq.(6.53), e esta compatibilização é feita adotando ordem um (linear) para  $\alpha_k(t)$  e  $\beta_k(t)$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \lambda_{k,0}B_{0,1}(t) + \lambda_{k,1}B_{1,1}(t), \\ \beta_k(t) &= \mu_{k,0}B_{0,1}(t) + \mu_{k,1}B_{1,1}(t), \end{aligned} \quad (6.54)$$

com  $0 \leq t \leq 1$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Decorre da Eq.(6.42), Eq.(6.43), Eq.(6.48) e Eq.(6.54) que a Eq.(6.53) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \mathbf{D}_{k,j}B_{j,3}(t) &= \sum_{j=0}^1 \lambda_{1,j}B_{j,3}(t) \sum_{j=0}^2 \mathbf{W}_{k,j}B_{j,2}(t) + \\ &\quad \sum_{j=0}^1 \mu_{k,j}B_{j,1}(t) \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{k,j}B_{j,2}(t) \end{aligned} \quad (6.55)$$



ou, usando a relação (FARIN, 1990)

$$B_{i,m}(t) B_{j,n}(t) = \frac{\binom{m}{i} \binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j,m+n}(t), \quad (6.56)$$

a Eq.(6.55) pode ser reescrita

$$\sum_{j=0}^3 \mathbf{D}_{k,j} B_{j,3}(t) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^2 \frac{\binom{1}{j} \binom{2}{i}}{\binom{3}{j+i}} (\lambda_{k,j} \mathbf{W}_{k,i} + \mu_{k,j} \mathbf{A}_{k,i}) B_{j+i,3}(t). \quad (6.57)$$

Comparando os coeficientes de  $B_{j,3}(t)$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , na Eq.(6.57), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{k,0} &= \lambda_{k,0} \mathbf{W}_{k,0} + \mu_{k,0} \mathbf{A}_{k,0}, \\ \mathbf{D}_{k,1} &= \frac{2}{3} \lambda_{k,0} \mathbf{W}_{k,1} + \frac{1}{3} \lambda_{k,1} \mathbf{W}_{k,0} + \\ &\quad \frac{2}{3} \mu_{k,0} \mathbf{A}_{k,1} + \frac{1}{3} \mu_{k,1} \mathbf{A}_{k,0}, \\ \mathbf{D}_{k,2} &= \frac{1}{3} \lambda_{k,0} \mathbf{W}_{k,2} + \frac{2}{3} \lambda_{k,1} \mathbf{W}_{k,1} + \\ &\quad \frac{1}{3} \mu_{k,0} \mathbf{A}_{k,2} + \frac{2}{3} \mu_{k,1} \mathbf{A}_{k,1}, \\ \mathbf{D}_{k,3} &= \lambda_{k,1} \mathbf{W}_{k,2} + \mu_{k,1} \mathbf{W}_{k,2}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Os vetores  $\mathbf{D}_{k,0}$   $\mathbf{D}_{k,3}$ ,  $k = 0, 1, 2$  são conhecidos e pertencem aos planos normais a  $\mathbf{N}_k$  e  $\mathbf{N}_{k+1}$ , respectivamente. A determinação de  $\lambda_{k,0}$ ,  $\mu_{k,0}$ ,  $\lambda_{k,1}$  e  $\mu_{k,1}$  são feitas de forma imediata a partir da primeira e última expressão da Eq.(6.58). Já os vetores  $G_{k,1}$  e  $G_{k,2}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , são obtidos a partir da segunda e terceira expressão da Eq.(6.58), além da derivadas nas direções cruzadas entre as bordas dos trechos triangulares, tais como nas Eq<sup>s</sup>.(6.45 - 6.47).

## 6.4 Procedimento para a geração de superfícies suaves

Nesta seção é apresentado o fluxograma (ver Figura 6.11) para a criação de superfícies suaves, as quais são constituídas por união de trechos triangulares (elementos). O fluxograma, aqui apresentado, resume o procedimento para a construção de um trecho quártico  $G^1$  de Gregory no domínio triangular.

### a) Dados de entrada;

- Seja fornecida as coordenadas ( $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{Q}_3$ ) e as normais ( $\mathbf{N}_1$ ,  $\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{N}_3$ ) nos vértices do triângulo como na Fig.(6.7);

### b) Cálculo dos vetores $\mathbf{V}_{k,j}$ e da curva $\mathbf{C}(t)$ ;

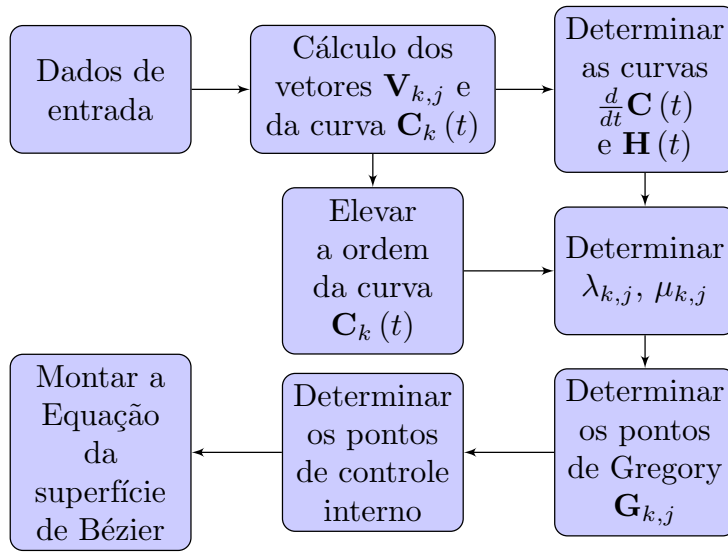


Figura 6.11 – Fluxograma para a criação de superfícies quártica de Gregory com continuidade  $G^1$ .

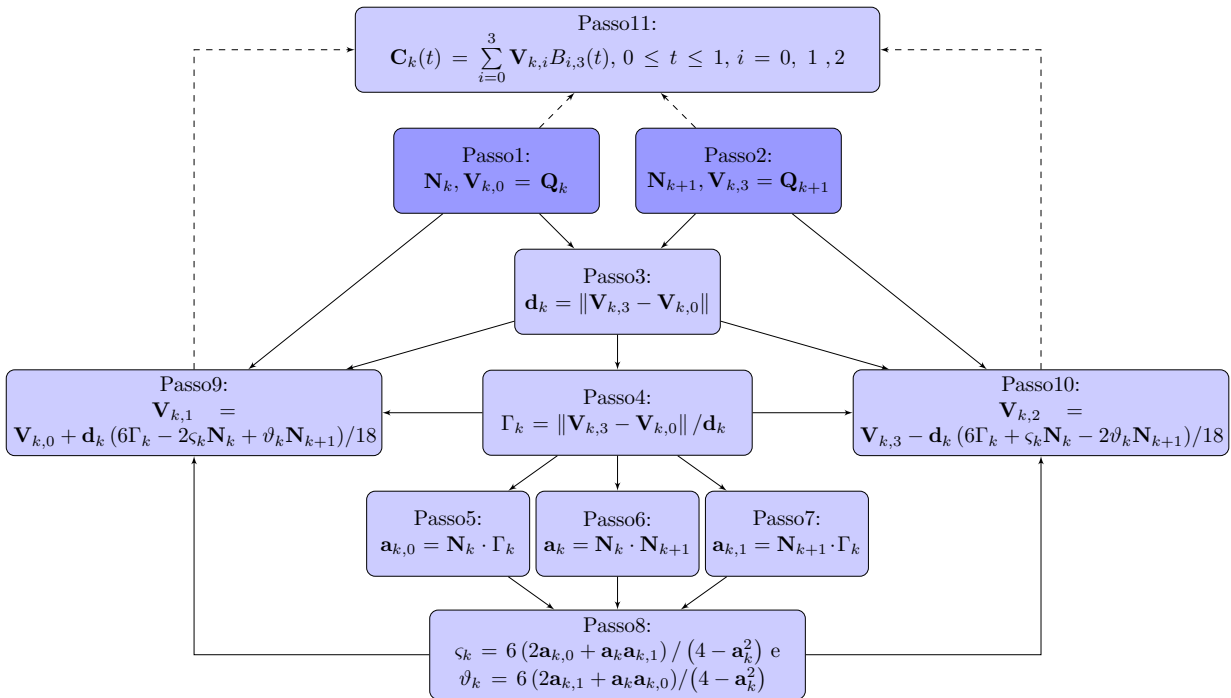


Figura 6.12 – Procedimento para o cálculo dos vetores  $\mathbf{V}_{k,j}$  e da curva  $\mathbf{C}(t)$ .

- Usar o teorema 2 para ajustar as curvas de Bézier aos pares de pontos  $(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1)$ ,  $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$  e  $(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_0)$  e determinar os vetores  $\mathbf{V}_{k,j}$  e  $\mathbf{C}_k(t)$ ,  $k, j = 0, 1, 2$  conforme o fluxograma da Fig.(6.12).
- c) **Determinar as curvas  $\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t)$  e  $\mathbf{H}(t)$ ;**
  - Usar a Eq.(6.42) para calcular  $\frac{d}{dt} \mathbf{C}(t)$  e as Eqs.(6.48 - 6.49) para determinar a curva  $\mathbf{H}(t)$ . O fluxograma para a determinação das referidas curvas encontra

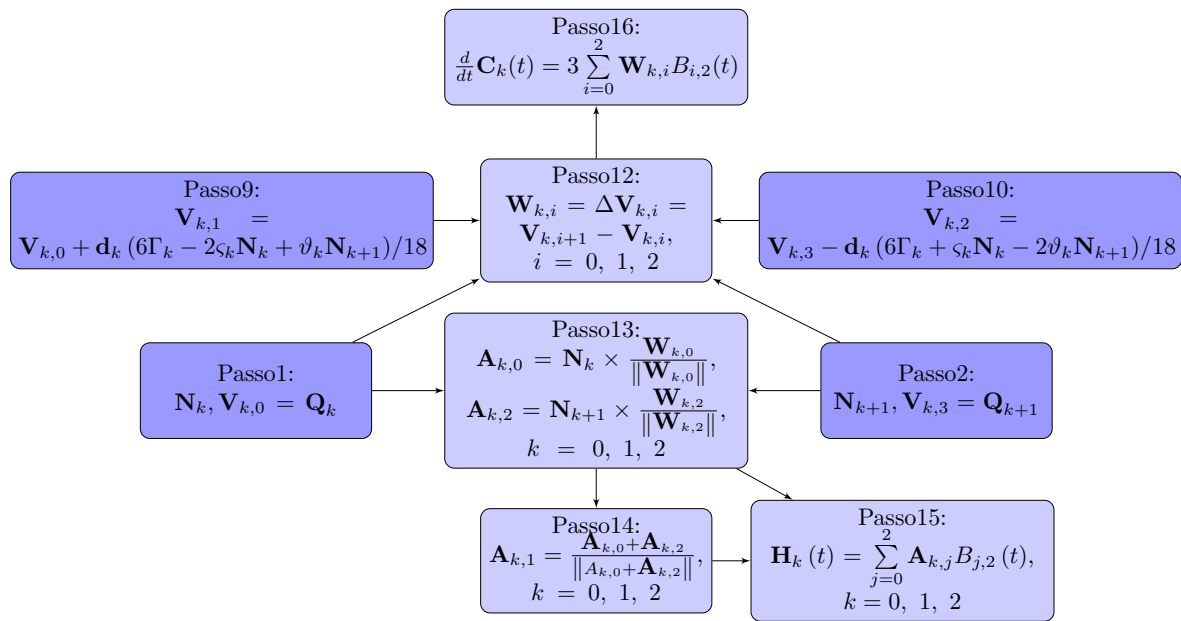


Figura 6.13 – Procedimento para o cálculo das curvas  $\frac{d}{dt}\mathbf{C}(t)$  e  $\mathbf{H}(t)$ .

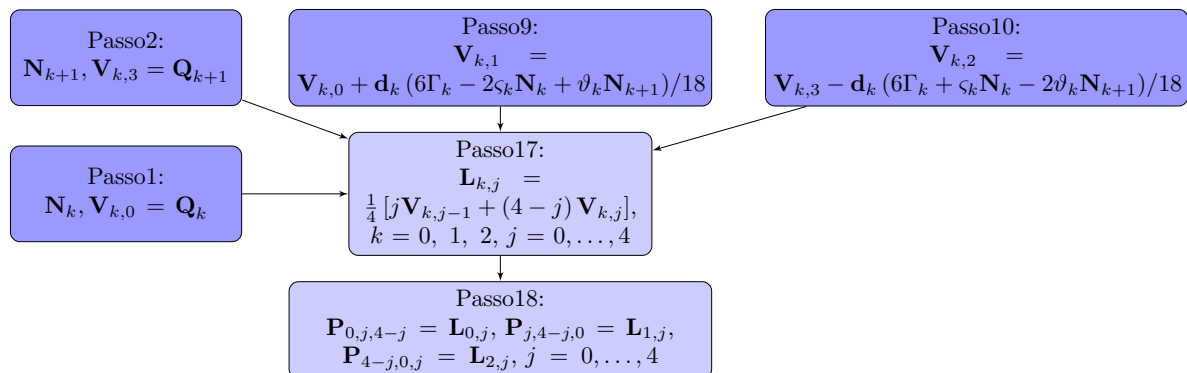


Figura 6.14 – Elevação da ordem da curva  $\mathbf{C}_k(t)$ .

na Fig.(6.13).

d) **Elevar a ordem da curva  $\mathbf{C}_k(t)$ ;**

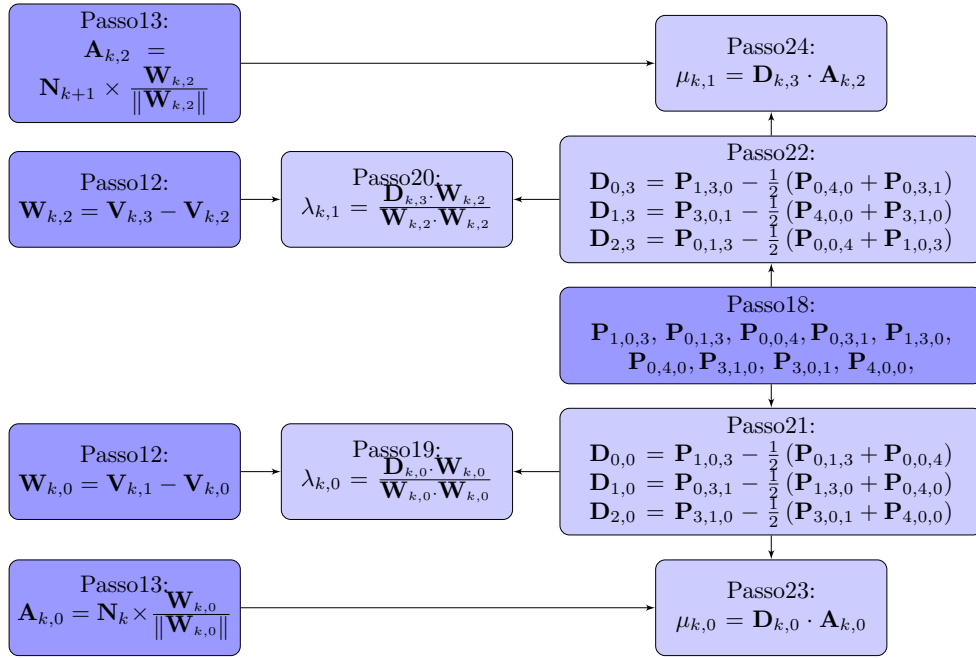
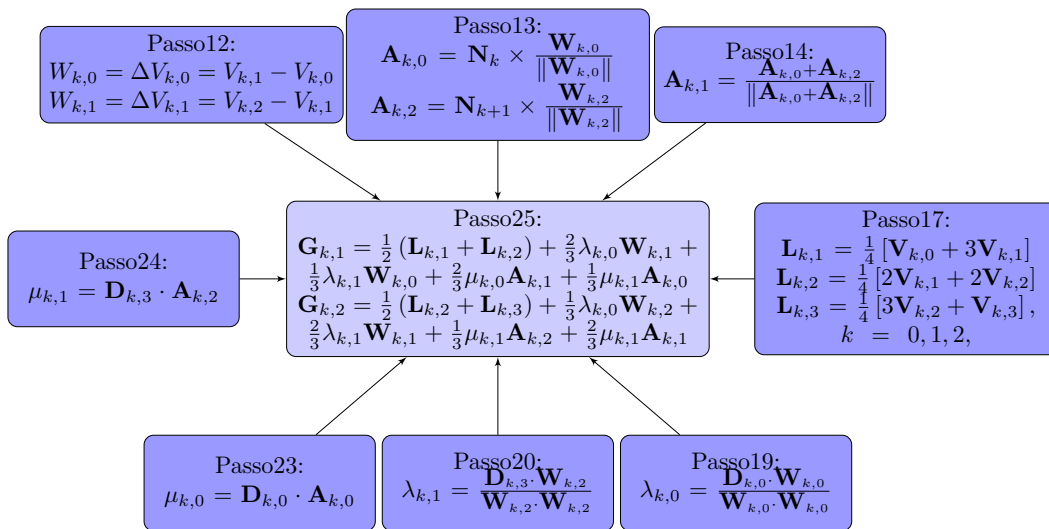
- O procedimento para elevar o grau da curva de contorno  $\mathbf{C}_k(t)$  para curvas de Bézier quártica é mostrado no fluxograma da Fig.(6.14).

e) **Determinar os parâmetros  $\lambda_{k,j}$  e  $\mu_{k,j}$ , com  $k = 0, 1, 2; j = 0, 1$ ;**

- A obtenção dos parâmetros  $\lambda_{k,j}$  e  $\mu_{k,j}$  a partir da Eq.(6.58). Na Fig.(6.15) é mostrado o procedimento de cálculo dos referidos parâmetros;

f) **Determinar os pontos de Gregory  $\mathbf{G}_{k,j}$ ;**

- Usar as Eq<sup>s</sup>.(6.45 - 6.47) e a Eq.(6.58) para obter  $\mathbf{G}_{k,j}, k = 0, 1, 2, j = 1, 2$  de acordo com o procedimento descrito na Fig.(6.16);

Figura 6.15 – Procedimento para o cálculo dos parâmetros  $\lambda_{k,j}$  e  $\mu_{k,j}$ .Figura 6.16 – Procedimento para o cálculo dos pontos de Gregory  $\mathbf{G}_{k,j}$ .

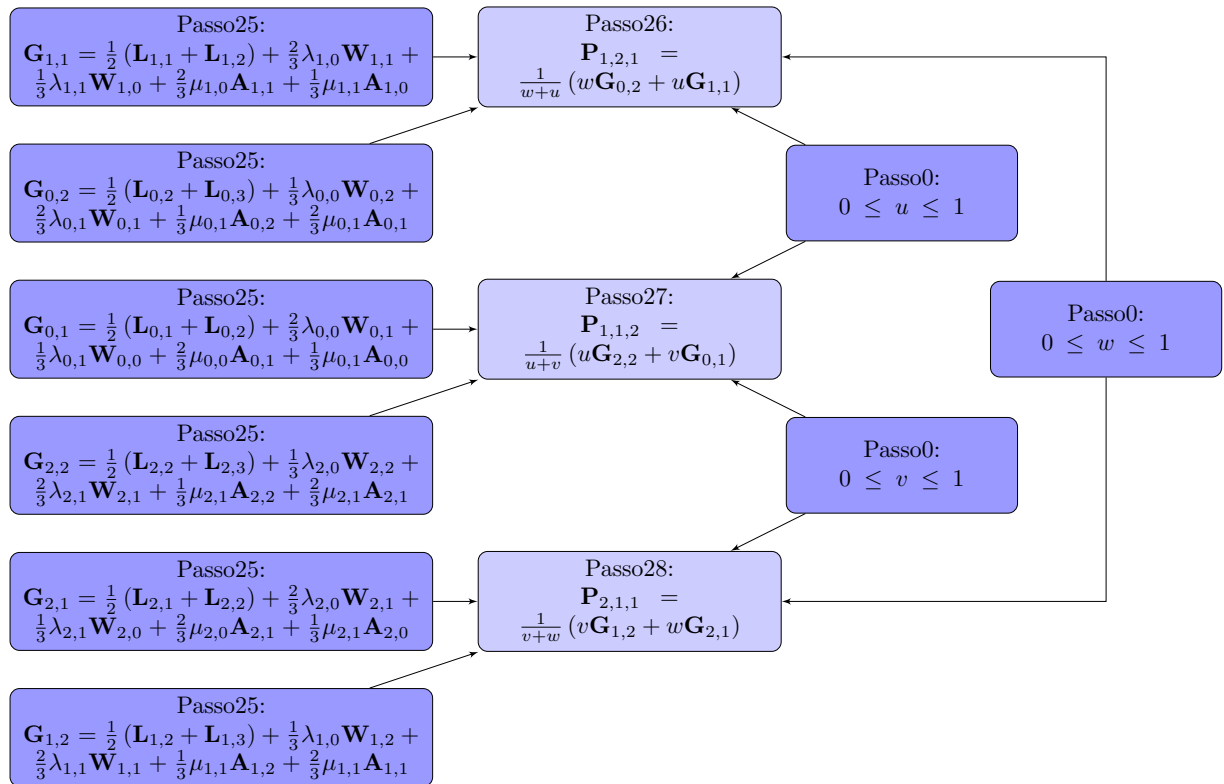


Figura 6.17 – Procedimento para o cálculo dos pontos interno  $\mathbf{P}_{112}$ ,  $\mathbf{P}_{121}$ ,  $\mathbf{P}_{211}$ .

g) **Determinar os pontos de controle interno;**

- Usar as Eq.<sup>s</sup>.(6.50 - 6.52) para obter os pontos de controle interno de Bézier. A Fig.(6.17) mostra o fluxo de cálculo para a obtenção dos pontos  $\mathbf{P}_{112}$ ,  $\mathbf{P}_{121}$ ,  $\mathbf{P}_{211}$ ;

h) **Montar a equação da superfície de Bézier;**

- Usar a Eq.(6.43) para construir a superfície de Bézier,  $\mathbf{S}(u, v, w)$ , por trechos triangulares segundo o procedimento descrito na Fig.(6.18);

## 6.5 Exemplos de aplicação

Como aplicação, as três funções aproximadoras - interpolação de Proriot (base nodal de lobatto), interpolação polinomial (base nodal equidistante) e Bézier triangular  $G^1$  - foram analisadas quanto a sua capacidade de representar a geometria, a continuidade do plano tangente entre elementos e, por fim, analisado quanto ao custo computacional aplicadas a cinco geometrias paramétricas (esfera, toroide, elipsoide, cilindro e paralelepípedo). Em seguida, os resultados obtidos para a esfera e para o toroide foram comparados com as aproximações triangulares Point Normal (PN) (VLACHOS et al., 2001), Phong tessellation (BOUBEKEUR; ALEXA, 2008), Nagata (NAGATA, 2005) e Near Least Square

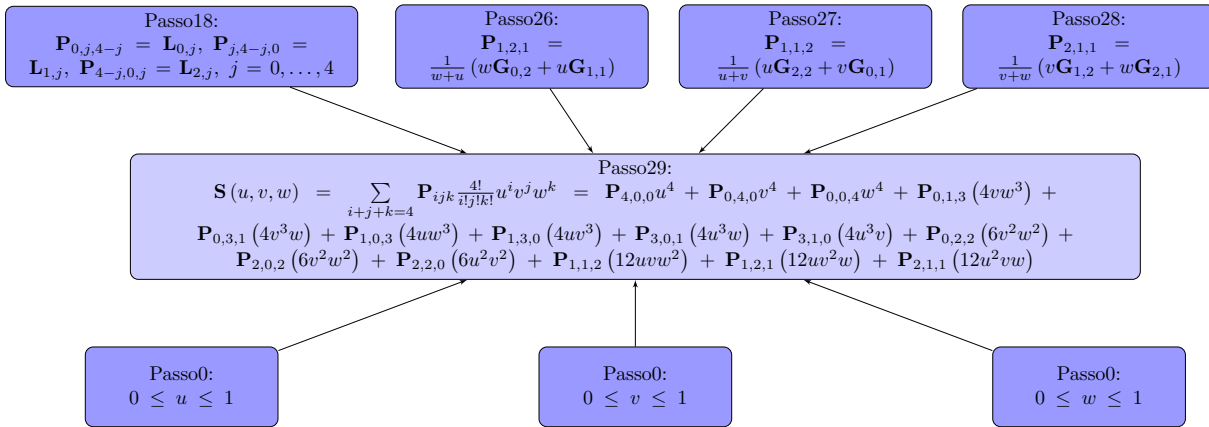


Figura 6.18 – Procedimento para a montagem do trecho triangular de Bézier,  $\mathbf{S}(u, v, w)$ , com continuidade  $G^1$ .

Acceleration (NLSA) (BARRERA; HAST; BENGTTSSON, 2002) apresentadas no trabalho de Boschioli et al. (2011). Dando continuidade à análise, os critérios de avaliação aplicadas para a geometria paramétricas foram estendidas para as não paramétricas com alta complexidade.

Para auxiliar a construção da malha foram utilizados dois softwares livre: Gmesh versão 2.8.5 e o *Blender<sup>TM</sup>* 2.7. O software Gmesh é um gerador de malha de elementos finitos tridimensional, destinado para a representação de geometrias paramétricas. Já o *Blender<sup>TM</sup>* é um software destinado a computação gráfica, sem objetivo para a análise numérica, entretanto este software mostra-se muito robusto para a construção de geometrias não paramétricas de alta complexidade. A utilização do software Gmesh foi motivada devido a possibilidade de geração de malhas com aproximação de alta ordem, assim, tornando possível realizar o estudo comparativo entre a interpolação de Proriol, a interpolação polinomial (de base nodal equidistante) e a aproximação de Bézier  $G^1$  à medida que o grau da aproximação é variado. Para o estudo de geometrias complexas (não paramétricas) foi utilizado o *Blender<sup>TM</sup>*, pois este possui facilidades na construção destas geometrias o que não é possível com o Gmesh. Entretanto o *Blender<sup>TM</sup>*, assim como qualquer outros software destinado à indústria de animação de filmes e jogos, para a construção da malha do objeto são gerados apenas coordenadas nodais dos vértices dos triângulos, o que torna a utilização das funções interpoladoras (Proriol e polinomial) limitadas ao grau um, mas para a utilização das aproximações de Bézier  $G^1$  é ideal, uma vez que é possível capturar deste software, além das coordenadas dos vértices, também as normais nestes nós.

### 6.5.1 Descrição geométrica

Nesta seção são apresentadas as geometrias paramétricas e não paramétricas utilizada para a análise da continuidade do plano tangente entre elementos, da capacidade de repre-

sentação da geometria e do custo computacional quando são aproximadas pelas funções interpoladoras de Proriol, polinomial e Bézier  $G^1$ .

A Tabela 1 apresenta as características geométricas para as superfícies paramétricas obtidas através do software Gmesh 2.8.5. Cabe chamar a atenção para a geometria cilíndrica com bordas arredondadas pois as suas características geométricas são às mesmas utilizadas no trabalho de Tsepoura et al. (2003). Para o estudo das geometrias paramétricas (Tabela 1) foi variado o grau da aproximação, assim como, a quantidade de elementos. Para a esfera e elipsoide foi variado de 32 à 8192 elementos triangulares. Já para o toroide e cilindro a quantidade de elementos triangulares variaram de 128 à 8192. Por último, para o paralelepípedo de bordas arredondadas, foram utilizados 152 elementos à 9728 elementos triangulares. Em cada variação de malha foi, também, variado o grau da aproximação de 1 a 10 (Tabela 1).

Realizada a apresentação das geometrias paramétricas, as quais são limitadas quando se deseja representar formas presentes na natureza, segue a apresentação das geometrias não paramétrica complexas. Neste seção, foram realizada as modelagens no *Blender<sup>TM</sup>* 2.7, para as geometrias de uma taça, colher, cabeça e perna como mostrado na Tabela 2. Pode-se perceber nas imagens destas geometrias a complexidade na representação das curvaturas acentuadas e suaves, tornando um grande desafio na modelagem numérica, principalmente pelo Método dos Elementos de contorno. Para representar a geometria da taça, colher, cabeça e perna foram utilizados 3680, 7110, 12352 e 15552 elementos triangulares respectivamente. Uma vez que o *Blender<sup>TM</sup>* 2.7 fornece apenas informações nos vértices dos triangulos da malha, tem-se a aproximação de grau 1 tanto para a interpolação polinomial quanto para a de Proriol, o que motivou a utilização de malhas com uma quantidade grande de elementos e assim poder comparar com a aproximação de Bézier  $G^1$  com grau equivalente a 4.

### 6.5.2 Análise da continuidade do plano tangente

Nesta seção é analisado a capacidade que as funções aproximadoras, tais como, polinomial (base nodal equidistante), de Proriol (base nodal de Lobatto) e Bézier  $G^1$  possuem em representar continuidade dos planos tangentes nas interfaces dos elementos triangulares adjacentes, ou seja, a capacidade que cada função aproximadora tem para gerar normal única na interface entre os elementos. Objetivando realizar esta análise, foi calculado o vetor normal, por meio da Eq.(6.15), para pontos localizados na fronteira entre os elementos, tais como mostrado na Fig.(6.19). Nesta figura foram calculados os vetores normais à superfície genérica,  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$ , chamados, respectivamente, de  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  pertencente a um mesmo ponto na interface destas duas superfícies. Em seguida é calculado o cosseno do ângulo formado pelos vetores  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  por meio da Eq.(6.59). Este procedimento é realizado para diversos pontos nas interfaces dos elementos pertencentes à malha que modela a geometria do problema a ser analisado. O que proporciona, assim, diversos valores para

Tabela 1 – Características geométrica, quantidade de elementos e grau da aproximação para a geometria paramétrica obtidas via Gmesh 2.8.5.

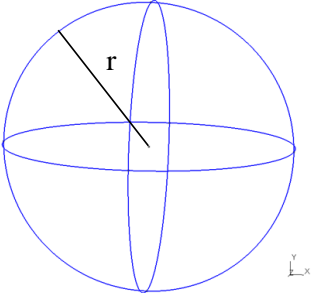
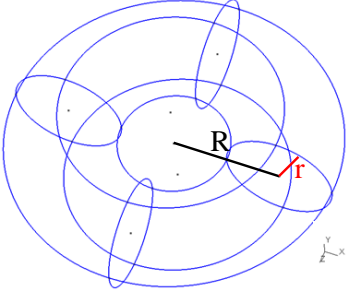
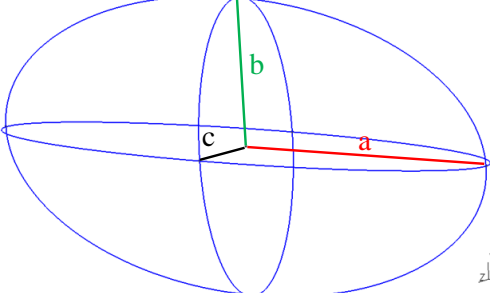
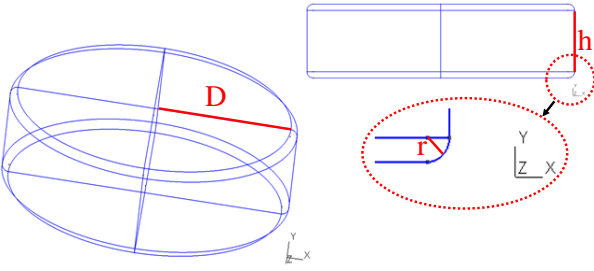
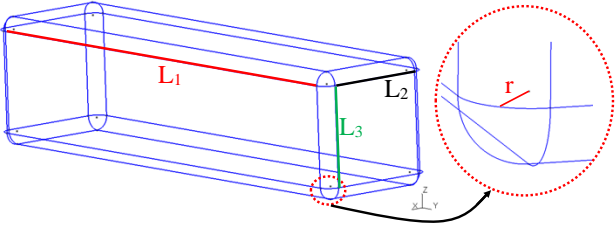


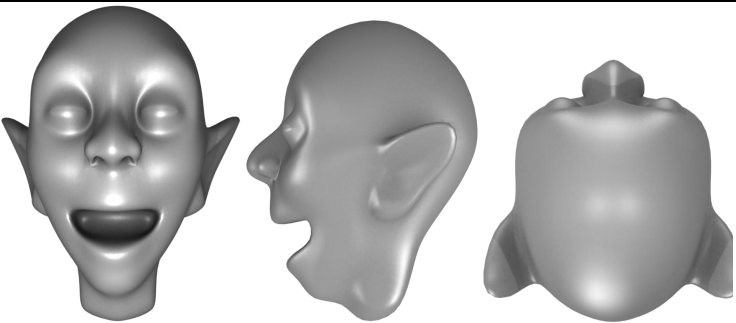
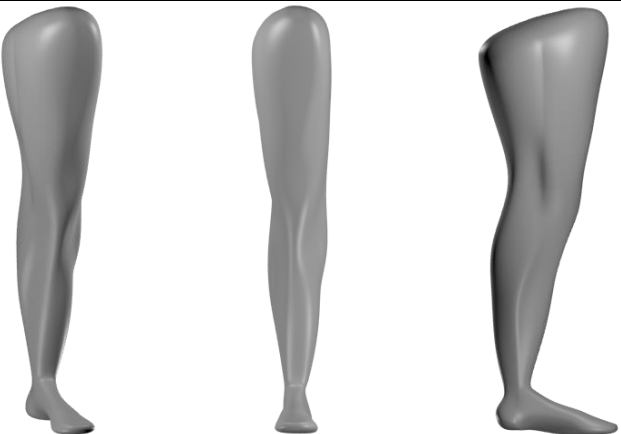
	Geometria	Parâmetros	Elementos	Aproximação	
				Tipo	Grau
ESFERA		$r=1,0$	32	Polinomial / Proriol	1
			128		2
			512		3
			2048		4
			8192		5
					6
	10	Bézier $G^1$	4*		
TOROIDE		$R=1,0$ $r=0,5$	128	Polinomial / Proriol	1
			512		2
			2048		3
			8192		4
					5
					6
	10	Bézier $G^1$	4*		
ELIPSOIDE		$a=1,0$ $b=0,5$ $c=0,25$	32	Polinomial / Proriol	1
			128		2
			512		3
			2048		4
			8192		5
					6
	10	Bézier $G^1$	4*		
CILINDRO		$r=0,1$ $D=2,0$ $H=1,0$	128	Polinomial / Proriol	1
			512		2
			2048		3
			8192		4
					5
					6
	10	Bézier $G^1$	4*		
PARALELEPÍPEDO		$r=0,1$ $L_1=4,0$ $L_2=1,0$ $L_3=1,0$	152	Polinomial / Proriol	1
			608		2
			2432		3
			9728		4
					5
					6
	10	Bézier $G^1$	4*		



Tabela 2 – Características geométrica, quantidade de elementos, quantidade de nós e grau da aproximação para as geometrias complexas não paramétrica obtidas via *Blender<sup>TM</sup> 2.7*.

	Geometria	Elementos / Nós	Aproximação	
			Tipo	Grau
TAÇA		3680 / 1842	Polinomial	1
			Proriol	1
			Bézier G <sup>1</sup>	4*
COLHER		7110 / 3557	Polinomial	1
			Proriol	1
			Bézier G <sup>1</sup>	4*
CABEÇA		12352 / 6178	Polinomial	1
			Proriol	1
			Bézier G <sup>1</sup>	4*
PERNA		15552 / 7778	Polinomial	1
			Proriol	1
			Bézier G <sup>1</sup>	4*

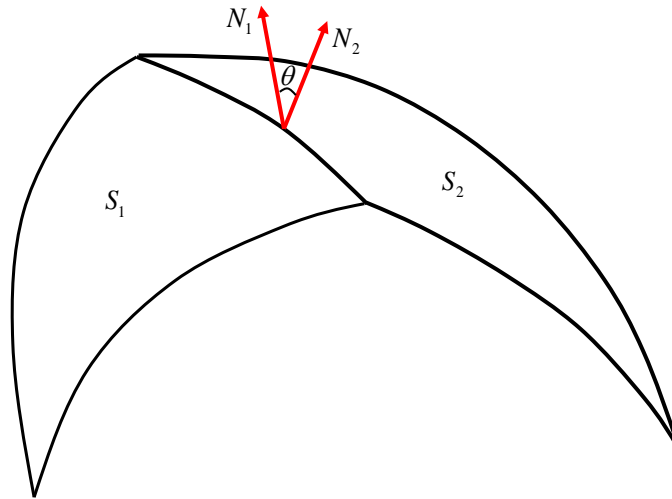


Figura 6.19 – Continuidade do plano tangente a partir dos vetores normais  $N_1$  e  $N_2$  obtidos na interface das superfícies adjacentes  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente.

o cosseno do ângulo formado pelas normais das superfícies adjacentes, motivando, desta forma, o uso de parâmetros estatísticos, tais como, valor médio (Equação 6.60), desvio padrão (Equação 6.61) e norma Euclidiana ou norma  $L^2$  (Equação 6.62) para analisar o desempenho das funções aproximadoras em representar superfícies suaves.

$$\cos \theta = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2, \quad (6.59)$$

$$m\u00e9dia = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}{n}, \quad (6.60)$$

$$DesvioPadr\u00e3o = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i - m\u00e9dia)^2}}{n - 1}, \quad (6.61)$$

$$NormaL^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i - 1)^2}. \quad (6.62)$$

A Tabela 3 apresenta o valor m\u00ednimo, m\u00e1ximo, m\u00e9dio e o desvio padr\u00e3o, al\u00e9m da norma  $L^2$  para as geometrias param\u00e9tricas apresentadas na Tabela 1. Todos os valores estat\u00edsticos mostrados na Tabela 3 foram obtidos para aproxima\u00e7\u00e3o de quarto grau tanto para a interpola\u00e7\u00e3o polinomial (base nodal equidistante) quanto para a interpola\u00e7\u00e3o de Proriot (base nodal de Lobatto) e comparados aos par\u00e2metros estat\u00edsticos obtidos pela aproxima\u00e7\u00e3o de B\u00e9zier  $G^1$ , a qual possui grau equivalente a quatro. \u00c9 importante ressaltar que o valor unit\u00e1rio (positivo) para o cosseno do \u00e2ngulo formado pelas normais nas interfaces dos elementos \u00e9 condi\u00e7\u00e3o necess\u00e1ria e suficiente para proporcionar continuidade ao plano tangente. Assim, como pode ser visto na Tabela 3, tanto a base nodal de Lobatto

quanto a base nodal equidistante são significativamente inferior à aproximação de Bézier  $G^1$  quando analisado as geometrias em questão. Era esperado que as funções de Bézier  $G^1$  fossem melhor que as aproximações de Prorior e polinomial, mas não se tinha noção de quanto que estas duas últimas funções são deficientes em representar geometrias suaves. Pode-se, ainda, perceber (ver Tabela 3) que as interpolações de Prorior e Polinomial melhor representa a suavidade para a geometria esférica, pois devido ao fato de possuir curvatura constante, o aumento na quantidade de elementos da malha proporciona uma melhora na representatividade da continuidade do plano tangente.

Outras duas observações de grande importância na análise dessas geometrias (esfera, toroide, elipsoide, cilindro e paralelepípedo) serão realizadas. A primeira é referente ao fato de que a quantidade de elementos nem sempre proporciona melhoras significativas na qualidade da representação do plano tangente quando se faz uso das interpolações de Prorior e Polinomial, como pode ser notado, principalmente, para o caso do toroide e do cilindro. Já para as funções de Bézier  $G^1$ , a capacidade em representar superfícies suaves é conseguida mesmo para uma quantidade muito baixa de elementos, uma vez que para uma quantidade de 128 elementos é obtido a média unitária (positiva) e com um desvio padrão com ordem de grandeza  $10^{-16}$ , além de possuir um erro (em relação ao valor unitário) para os valores mínimo e máximo a partir da 14 casa decimal, nas geometrias mais desfavoráveis (ver Tabela 3), ou seja, a função de Bézier  $G^1$  representa exatamente, exceto devido à imprecisão de ponto flutuante do computador, a suavidade para as geometrias analisadas. A segunda observação é referente à geometria cilíndrica aqui apresentada, pois este cilindro possui as mesmas características geométricas apresentadas no artigo de Tsepoura et al. (2003), e neste artigo é afirmado que a representação de superfícies suaves é realizada. Ainda no artigo de Tsepoura et al. (2003), os autores consideraram elementos de aproximação quadrática e com 268 elementos para modelar um quarto do cilindro, o que totaliza 1072 elementos para o cilindro completo. Então, diante da afirmação apresentada por Tsepoura et al. (2003), surgiu a dúvida se estas condições criadas pelos autores realmente representam geometrias suaves. A partir desta indagação e dos estudos realizados na presente tese, verifica-se pela Tabela 3, que para uma quantidade, não igual a 1072, mas igual a 2048 foi obtido um valor médio de 0,995376 (precisão de 2 casas decimais), com um desvio padrão na ordem de grandeza  $10^{-2}$  e norma  $L^2$  superior a 14. Uma vez que quanto menor o valor do desvio padrão, maior é a quantidade de valores próximos ao valor médio, e quanto menor o valor da norma  $L^2$  mais próximo à exatidão (ou ao valor de referência) estará o conjunto de pontos, e observando que o cosseno do ângulo possuem valor mínimo de  $-0,97107$  (indicando normais na interface de elementos com sentidos opostos) e máximo unitário (positivo), tendo assim uma amplitude da variação de valores de  $1,97107$ , pode-se concluir que não é possível afirmar que a função Polinomial de grau 4 (e de forma semelhante para funções de Prorior) com 2048 elementos triangulares representam a continuidade do plano tangente e nem à medida em

que é aumentada a quantidade de elementos, como pode ser visto para o caso de 8192 elementos (ver Tabela 3).

A partir da análise realizada no parágrafo anterior, pôde-se concluir que há descontinuidade, significativas, no valor das normais calculados nas interfaces entre elementos para interpolação Polinomial de grau 4 (de forma semelhante para interpolação de Proriol). A partir do gráfico (e) e (f) da Fig.(6.23), os quais mostram, respectivamente, para aproximação de grau 2, o valor para a norma  $L^2$  igual a aproximadamente 0,4 e  $\log(L^2) = -0,9$ , e possuindo desvio padrão com ordem de grandeza de  $10^{-3}$  e média igual a 1 para uma quantidade de 2048 elementos triangulares (estas duas últimas informações não são apresentadas no gráfico Figura 6.23), percebe-se que o valor da norma  $L^2$  torna-se melhor para a aproximação com grau 2 do que com a com grau 4, entretanto, mesmo assim com deficiência em representar superfícies suaves. Desta forma pode-se afirmar que o cilindro apresentado no artigo de Tsepoura et al. (2003) e aproximado por funções interpoladoras de grau 2 não representam continuidade do plano tangente, assim não podendo ser desconsiderada a descontinuidade dos vetores normais na interface, o que proporciona a não representatividade de geometrias suaves por estas duas funções interpoladoras.

A Fig.(6.20), para esfera, Fig.(6.21), para toroide, Fig.(6.22), para elipsoide, Fig.(6.23), para cilindro de bordas arredondadas (TSEPOURA et al., 2003) e Fig.(6.24), para paralelepípedo de bordas arredondadas, mostram, por meio da norma  $L^2$ , a capacidade de representação do plano tangente para a função de Bézier  $G^1$  e para as interpolações de Proriol e Polinomial à medida que é variado a quantidade de elemento e grau da aproximação. Em cada uma das fig.(6.20)-(6.24) são apresentados oito gráficos, sendo os quatro primeiro (a)-(d) apresentam os valores da Norma  $L^2$  à medida que o grau da aproximação é variado e para quatro tipo de discretizações. Nos quatros últimos gráficos (e)-(f) são apresentados os valores da norma  $L^2$ , quando é fixado o grau da aproximação em 2 e 4, e variado a quantidade de elementos. Mesmo sendo as funções de Bézier equivalente ao grau 4, esta foi comparada com as funções interpoladoras de grau 2, devido ao fato deste último grau de aproximação ser amplamente utilizada nas análises numéricas. Pode ser observado em todos os gráficos (e)-(f) que as funções interpoladoras, Polinomial e Proriol, de grau 2 coincidem, o que já era de se esperar segundo a teoria do Capítulo 5. Em todas as *Fig.s.*(6.20)-(6.24) os gráficos (a)-(d), mostram que à medida que aumenta o grau da aproximação é, também, aumentado o valor da norma  $L^2$ , o que significa que as funções aproximadoras (Proriol e Polinomial) estão deteriorando sua capacidade de representar geometrias suaves. Fato este que não ocorre com as funções de Bézier  $G^1$  que representam com exatidão (dentro do limite de ponto flutuante do computador) a suavidades da geometria, mesmo para malhas com baixa quantidade de elementos. Para ilustra a precisão das funções de Bézier em representar geometrias suaves, a fig.(6.25) apresenta o comportamento das componentes do vetor normal ( $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ ) obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$  para modelar superfícies, tais como, esfera, gráficos (a)-(c), toroide,

gráficos (d)-(f), elipsoide, gráficos (g)-(i), cilindro de bordas arredondadas, gráficos (j)-(l) e paralelepípedo de bordas arredondadas, gráficos (m)-(o). Na reconstrução destas superfícies, foram utilizados 608 elementos triangulares para modelar o paralelepípedo de bordas arredondadas e 512 elementos triangulares para representar as demais geometrias paramétricas utilizadas neste trabalho (ver Tabela 1).

Na fig.(6.25) são marcadas regiões, as quais tem-se interesse para a análise na modelagem das superfícies paramétricas, aqui estudadas, obtidas pelas funções aproximadoras, e todos os detalhes (a)-(e), destas regiões, são apresentados, em escala ampliada, na fig.(6.26). Esta fig.(6.26) apresenta 20 imagens que mostram o comportamento da componente normal  $n_x$  (semelhante para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ ) na interface entre os elementos quando é utilizado as aproximações de Bézier  $G^1$  (imagens (a), (e), (i), (m), (q)), Prorior ou Polinomial de grau 2 (imagens (b), (f), (j), (h), (r)), Polinomial de grau 4 (imagens (c), (g), (k), (o), (s)) e Prorior de grau 4 (imagens (d), (h), (l), (p), (t)) para a geometria esférica (a)-(d), toroide (e)-(h), elipsoide (i)-(l), cilindro de bordas arredondadas (m)-(p) e paralelepípedo de bordas arredondadas (q)-(t).

Analisando as imagens para a geometria esférica (a)-(d), pode ser observado que a imagem (a) apresenta uma única tonalidade de cor em ambos os lados da linha de interface, ou seja, mostrando uma unicidade do vetor normal na borda do elemento. Já para as imagens (b)-(d) é observado uma região em que há uma variação de tonalidade, ou seja, com referencia à linha de interface (linha na cor preta) pode ser observado que existe uma região onde, de um lado, tem a cor azul escuro enquanto do outro lado, na mesma região de interface, tem a cor azul claro, isto apresenta uma descontinuidade do plano tangente, ou uma não unicidade do vetor normal na interface dos elementos. Resultado semelhante são obtidos para as demais imagens, em que para as imagens (e), (i), (m) e (q) tem-se uma unicidade do vetor normal na linha de interface, representada por uma única tonalidade de cor para ambos os lados dos elementos. Já para as imagens (f)-(h), (j)-(l), (n)-(p) e (r)-(t) pode ser observado uma região em que há uma mudança na tonalidade da cor na linha de interface, o que mostra a descontinuidade do plano tangente e a presença de mais de um normal para um mesmo ponto da linha do contorno do elemento.

Até o presente momento, foram comparadas as funções de Bézier  $G^1$  com as interpolações de Prorior e Polinomial, entretanto estas interpolações apenas são capazes de formar elementos curvos se for elevado o grau da aproximação. Por outro lado, como já explicitado na seção 6.4, as funções triangulares de Bézier  $G^1$ , fazem uso apenas das coordenadas e das normais nos vértices dos triângulos, assim a malha de entrada são formadas por triângulos planos os quais são substituídos, via Bézier, para triângulos curvados. Diante desta vantagem das superfícies de Bézier  $G^1$ , este trabalho realizar uma comparação com outras funções que possuem essa capacidade de tornar malhas de entrada planas em curvas apenas com as informações das coordenadas e das normais dos vértices dos triângulos (planos) da malha de entrada. Assim, nesta análise é feito uso das funções

aproximadoras de Nagata (NAGATA, 2005), NLSA (BARRERA; HAST; BENGTTSSON, 2002), PN (VLACHOS et al., 2001) e Phong tessellation (BOUBEKEUR; ALEXA, 2008), todas para elementos triangulares e são comparadas com as funções de Bézier quanto a continuidade do plano tangente.

Na realização do estudo comparativo, os valores do cosseno do ângulo formado entre as normais, para os quatro tipos de triângulos acima mencionados, foram obtidos do artigo de Boschioli et al. (2011). Este artigo apresenta os valores, do cosseno do ângulo formado entre as normais, para a geometria esférica e toroidal com discretização de 320 e 200 elementos, respectivamente. Na Tabela 4, são apresentados os parâmetros estatísticos para o cosseno do ângulo entre as normais, e podendo ser notado a superioridade, significativa, da função de Bézier  $G^1$  frente as demais 4 outras funções aproximadoras. Dentre estas funções, tem-se os triângulos de Nagata e PN com representatividade da continuidade do plano tangente superior aos triângulos Phong e NLSA. Devido a aplicação crescente dos triângulos de Nagata para a análise numérica (NETO et al., 2013; NETO; OLIVEIRA; MENEZES, 2010; HAMA et al., 2008), é chamada a atenção para a superioridade, referente à continuidade do plano tangente, da função de Bézier  $G^1$  perante a esta.

Comparando os resultados das Tabela 3 e Tabela 4, é possível observar a superioridade da aproximação de Nagata diante das interpolações Polinomial e Proriol quando é analisado a geometria do toroide, entretanto, quando é analisado a geometria esférica, percebe-se que existe uma paridade na representatividade (do plano tangente) entre as funções Nagata, Polinomial e Proriol. O que torna importante não é apenas o fato da função de Bézier  $G^1$  ser superior às Phong, Nagata, NLSA e PN, mas devido o quão melhor Bézier  $G^1$  é perante àquelas. Uma vez que para geometria esférica tem-se uma precisão, na média, de 5 casas decimais para a aproximação de Nagata, na aproximação de Bézier  $G^1$  tem-se uma precisão 14 casa decimais, na média. Já para o toroide esta diferença torna-se mais significativa, Nagata possuindo precisão média de 2 casas decimais, enquanto que Bézier  $G^1$  possuindo uma precisão de 10 casas decimais nos seus valores médios dos cossenos dos ângulos formados entre as normais.

### 6.5.3 Análise da capacidade de representação da geometria

Nesta seção é analisada a capacidade que as funções aproximadoras possuem em representar geometrias parametrizadas. Aqui, são apresentados alguns resultados para a geometria esférica e toroidal, as demais geometrias apresentadas na Tabela 1 seguem comportamentos semelhantes. Nesta análise é realizado um estudo comparativo entre as funções interpoladoras (Proriol e Polinomial) e a função aproximadora de Bézier  $G^1$ . Em seguida é realizado a comparação da função de Bézier  $G^1$  com as demais funções que dependem das normais em seus vértices, tais são, Phong, Nagata, NLSA e PN, cujos os resultados apresentados destas últimas 4 funções foram obtidas do trabalho de Boschioli et al. (2011).

Tabela 3 – Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana  $L^2$  do cosseno do ângulo entre as normais na interface dos elementos adjacentes com grau 4 tanto para a base de nós equidistante quanto para a base de Lobatto e grau equivalente a 4 para Bézier  $G^1$ .

Nº de Elemento		Ângulo entre normais de elementos adjacentes						
		Mínimo	Máximo	Médio	Desvio Padrão	Norma $L^2$		
ESFERA	32	Nós Equidistante	0,998574	1,000000	0,999711	$3,927500 (10^{-4})$	$1,040600 (10^{-2})$	
		Nós de Lobatto	0,996420	1,000000	0,998873	$1,173720 (10^{-3})$	$3,472900 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,290750 (10^{-16})$	$9,37333 (10^{-15})$	
	128	Nós Equidistante	0,999898	1,000000	0,999990	$1,528000 (10^{-5})$	$7,870000 (10^{-4})$	
		Nós de Lobatto	0,999387	1,000000	0,999765	$1,757000 (10^{-4})$	$1,275800 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,86052 (10^{-17})$	$2,121978 (10^{-14})$	
	512	Nós Equidistante	0,999993	1,000000	1,000000	$4,100000 (10^{-7})$	$4,000000 (10^{-5})$	
		Nós de Lobatto	0,999789	1,000000	0,999932	$3,831000 (10^{-5})$	$6,796000 (10^{-3})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,027755 (10^{-16})$	$4,348532 (10^{-14})$	
	2048	Nós Equidistante	1,000000	1,000000	1,000000	$1,900000 (10^{-7})$	$3,000000 (10^{-6})$	
		Nós de Lobatto	0,999936	1,000000	0,999982	$9,880000 (10^{-6})$	$3,563000 (10^{-3})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,024717 (10^{-16})$	$8,667166 (10^{-14})$	
	8192	Nós Equidistante	1,000000	1,000000	1,000000	$8,000000 (10^{-9})$	$3,300000 (10^{-8})$	
		Nós de Lobatto	0,999983	1,000000	0,999995	$2,510000 (10^{-6})$	$1,809120 (10^{-3})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,026693 (10^{-16})$	$1,733865 (10^{-13})$	
TOROIDE	128	Nós Equidistante	0,902354	1,000000	0,994350	$1,686557 (10^{-2})$	$9,295320 (10^{-1})$	
		Nós de Lobatto	0,901014	1,000000	0,993041	$1,923070 (10^{-2})$	$1,068785$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,68695 (10^{-17})$	$2,249870 (10^{-14})$	
	512	Nós Equidistante	0,925535	1,000000	0,997546	$1,035898 (10^{-2})$	$1,106077$	
		Nós de Lobatto	0,921827	1,000000	0,997305	$1,062758 (10^{-2})$	$1,139153$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$9,50718 (10^{-17})$	$4,89506 (10^{-14})$	
	2048	Nós Equidistante	0,932385	1,000000	0,998823	$7,138070 (10^{-3})$	$1,501055$	
		Nós de Lobatto	0,927743	1,000000	0,998767	$7,145390 (10^{-3})$	$1,504491$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,019731 (10^{-16})$	$1,000698 (10^{-13})$	
	8192	Nós Equidistante	0,932525	1,000000	0,999367	$5,242480 (10^{-3})$	$1,851398$	
		Nós de Lobatto	0,930276	1,000000	0,999349	$5,265150 (10^{-3})$	$1,860020$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,020978 (10^{-16})$	$1,721179 (10^{-13})$	
	ELIPSOIDE	32	Nós Equidistante	0,809200	1,000000	0,993482	$2,890305 (10^{-2})$	$6,320380 (10^{-1})$
			Nós de Lobatto	0,475238	1,000000	0,979145	$7,694180 (10^{-2})$	$1,700573$
			Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$9,597190 (10^{-17})$	$1,13487 (10^{-14})$
128		Nós Equidistante	0,984275	1,000000	0,999805	$1,287240 (10^{-3})$	$5,667500 (10^{-2})$	
		Nós de Lobatto	0,836132	1,000000	0,998273	$1,152398 (10^{-2})$	$5,072630 (10^{-1})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,024607 (10^{-16})$	$0,211962 (10^{-13})$	
512		Nós Equidistante	0,996196	1,000000	0,999992	$1,053600 (10^{-4})$	$9,244000 (10^{-3})$	
		Nós de Lobatto	0,968201	1,000000	0,999810	$1,135730 (10^{-3})$	$1,007560 (10^{-1})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,013795 (10^{-16})$	$4,370290 (10^{-14})$	
2048		Nós Equidistante	0,999064	1,000000	0,999999	$1,134000 (10^{-5})$	$1,988000 (10^{-3})$	
		Nós de Lobatto	0,995236	1,000000	0,999958	$1,379100 (10^{-4})$	$2,524600 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,014081 (10^{-16})$	$8,651600 (10^{-14})$	
8192		Nós Equidistante	0,999966	1,000000	1,000000	$3,800000 (10^{-7})$	$1,320000 (10^{-4})$	
		Nós de Lobatto	0,998812	1,000000	0,999989	$3,457000 (10^{-5})$	$1,270400 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$1,019687 (10^{-16})$	$1,718335 (10^{-13})$	
CILINDRO	128	Nós Equidistante	-0,08185	1,000000	0,985664	$9,067254 (10^{-2})$	$4,071383$	
		Nós de Lobatto	0,622714	1,000000	0,992535	$2,993936 (10^{-2})$	$1,368511$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$7,22488 (10^{-17})$	$1,71327 (10^{-14})$	
	512	Nós Equidistante	-0,99677	1,000000	0,993847	$9,346720 (10^{-2})$	$8,233869$	
		Nós de Lobatto	-0,99796	1,000000	0,995003	$7,937376 (10^{-2})$	$6,991035$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,05555 (10^{-17})$	$3,21767 (10^{-14})$	
	2048	Nós Equidistante	-0,97107	1,000000	0,995376	$8,358213 (10^{-2})$	$1,468317 (10^1)$	
		Nós de Lobatto	-0,26317	1,000000	0,998538	$2,623957 (10^{-2})$	$4,609696$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,827290 (10^{-17})$	$7,278410 (10^{-14})$	
	8192	Nós Equidistante	-1,00000	1,000000	0,990824	$1,305915 (10^{-1})$	$4,589949 (10^1)$	
		Nós de Lobatto	-1,00000	1,000000	0,993603	$1,082616 (10^{-1})$	$3,802373 (10^1)$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$0,915363 (10^{-16})$	$1,464979 (10^{-13})$	
	PARALELEPÍPEDO	152	Nós Equidistante	0,985092	1,000000	0,999792	$9,666864 (10^{-4})$	$4,739671 (10^{-2})$
			Nós de Lobatto	0,994965	1,000000	0,999491	$8,007257 (10^{-4})$	$4,548179 (10^{-2})$
			Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$7,48317 (10^{-17})$	$1,402445 (10^{-14})$
608		Nós Equidistante	0,999727	1,000000	0,999996	$2,056021 (10^{-5})$	$2,007300 (10^{-3})$	
		Nós de Lobatto	0,997361	1,000000	0,999887	$1,933572 (10^{-4})$	$2,138263 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$7,963903 (10^{-17})$	$3,395813 (10^{-14})$	
2432		Nós Equidistante	0,999991	1,000000	1,000000	$4,074356 (10^{-7})$	$7,947000 (10^{-5})$	
		Nós de Lobatto	0,998945	1,000000	0,999965	$6,570338 (10^{-5})$	$1,417965 (10^{-2})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,718280 (10^{-17})$	$7,447230 (10^{-14})$	
9728		Nós Equidistante	0,999998	1,000000	1,000000	$2,464930 (10^{-8})$	$9,470000 (10^{-6})$	
		Nós de Lobatto	0,999730	1,000000	0,999991	$1,833780 (10^{-6})$	$7,866640 (10^{-3})$	
		Bézier $G^1$	1,000000	1,000000	1,000000	$8,954170 (10^{-17})$	$1,528548 (10^{-13})$	

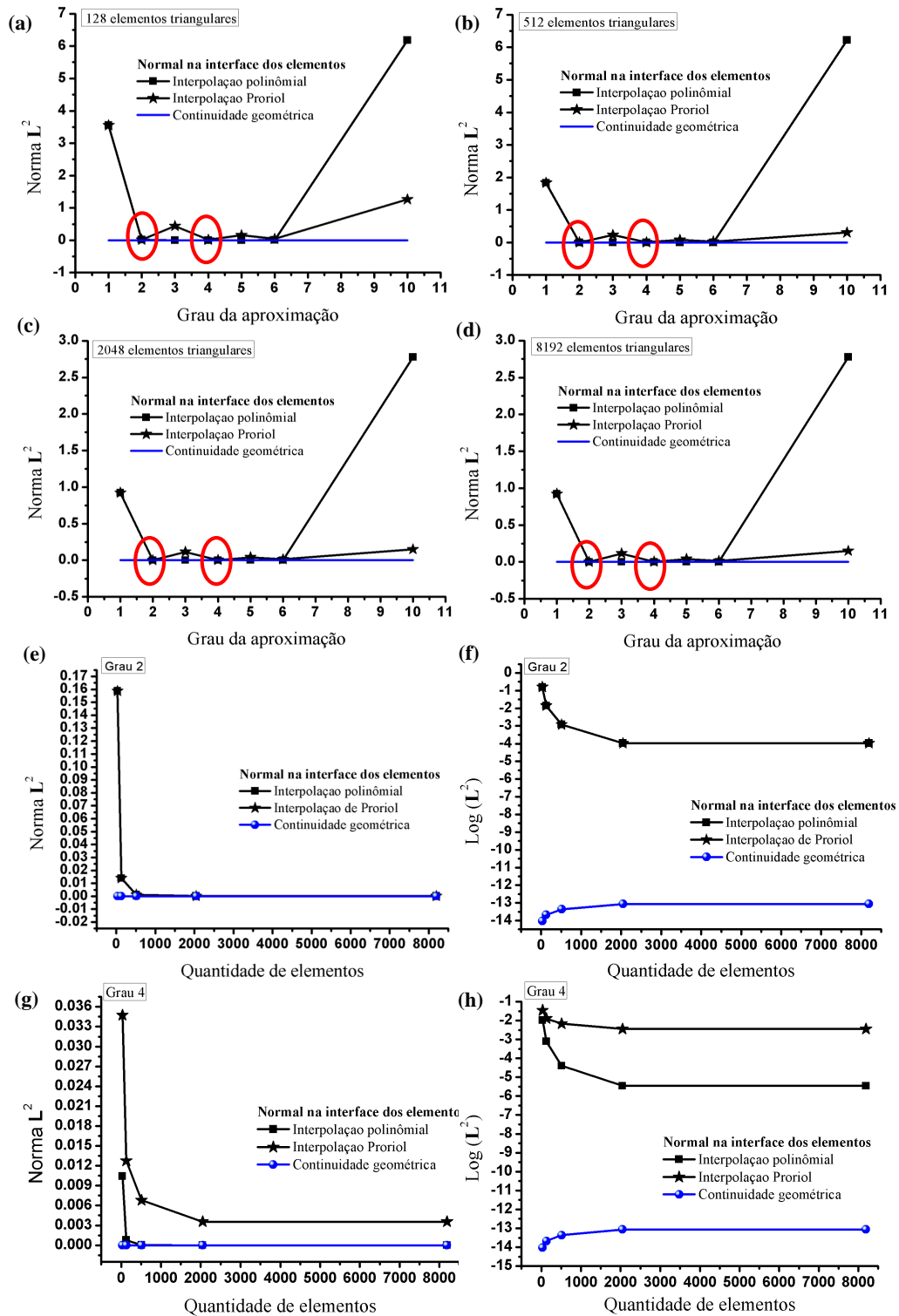


Figura 6.20 – Norma  $L^2$  do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria esférica aproximada por Prorior, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier  $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).



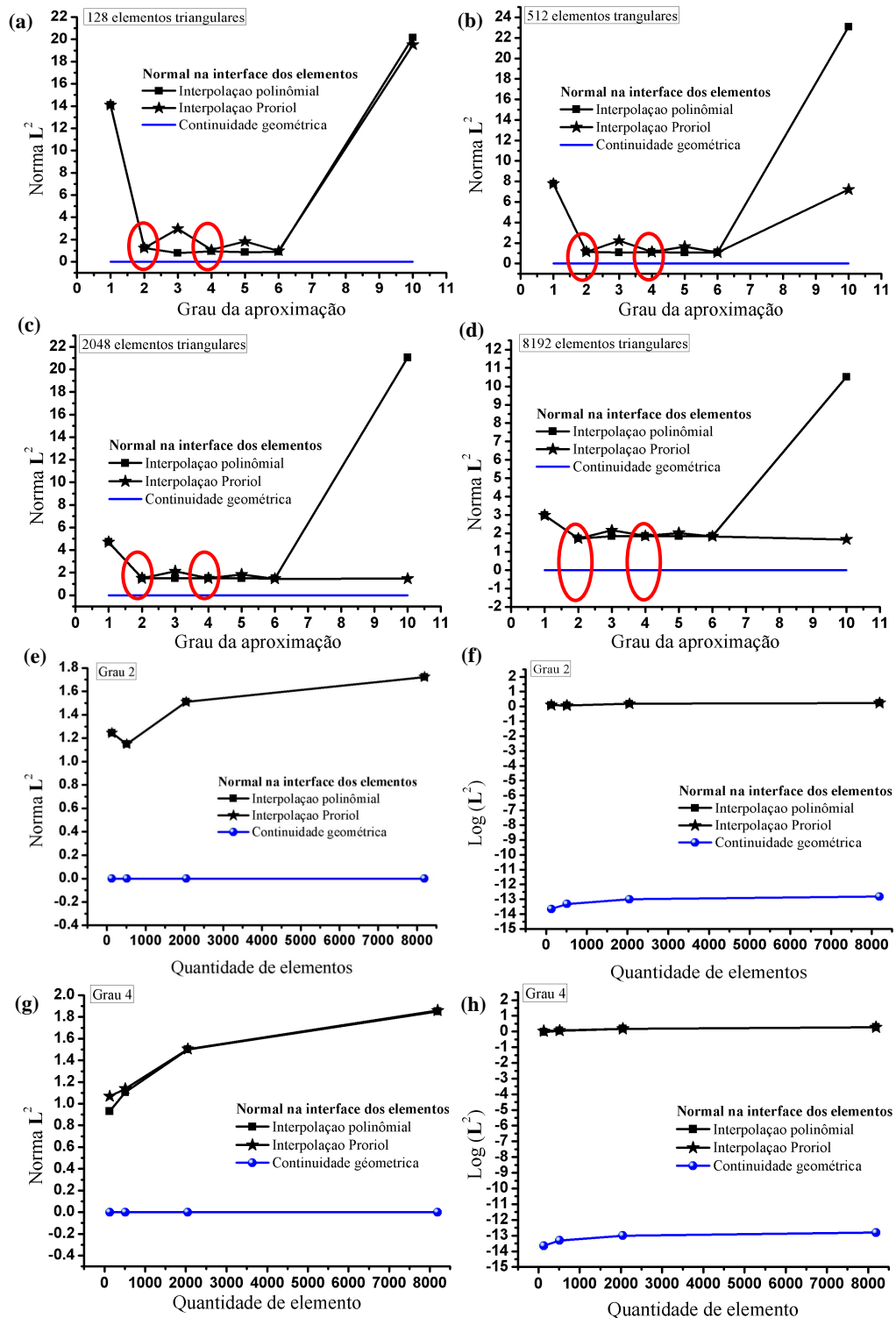


Figura 6.21 – Norma  $L^2$  do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria toroide aproximada por Prorior, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier  $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).

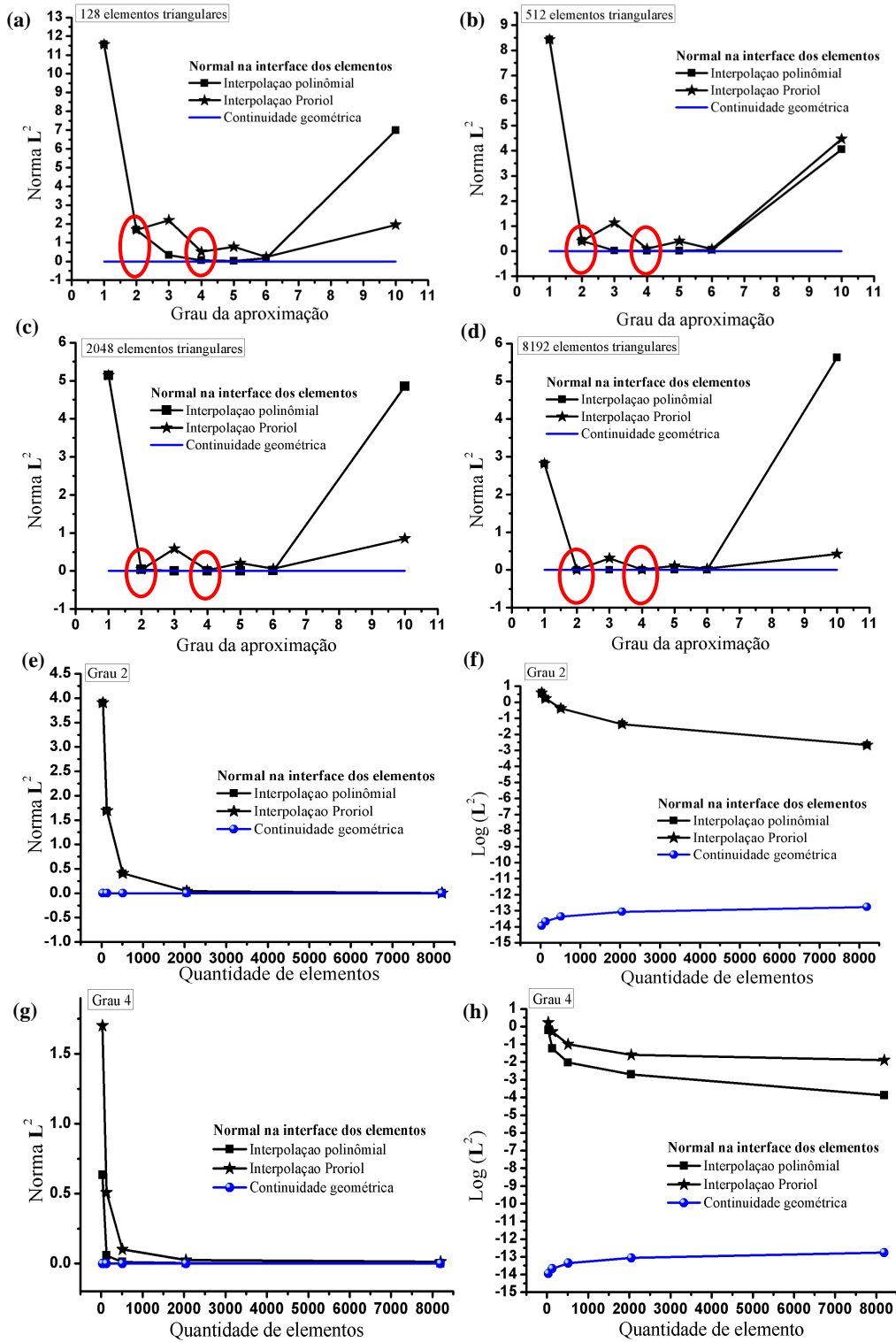


Figura 6.22 – Norma  $L^2$  do cosseno do ângulo entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria elipsoide aproximada por Prorior, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier  $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).

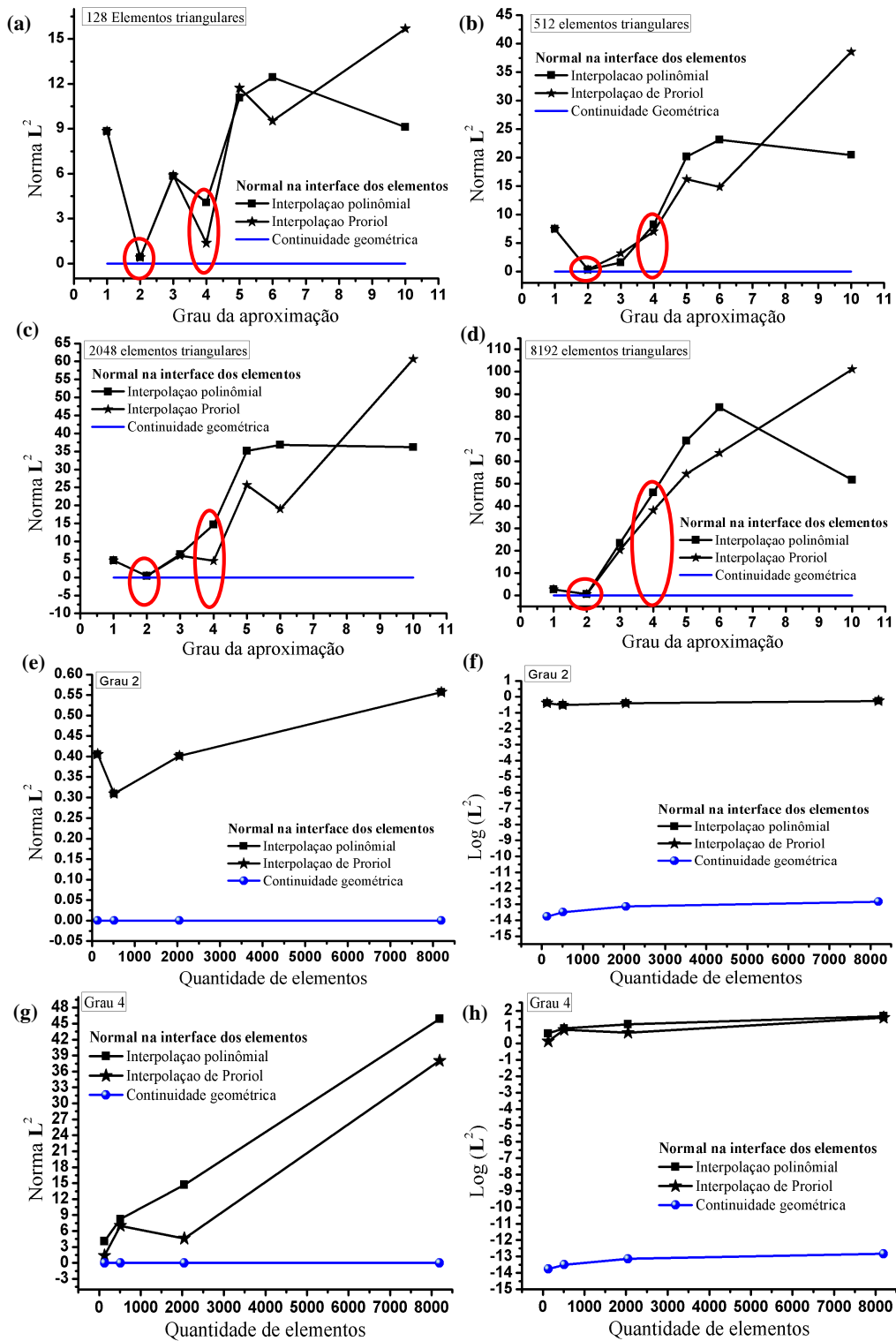


Figura 6.23 – Norma  $L^2$  do cosseno dos ângulos entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria cilíndrica aproximada por Prorior, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier  $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).

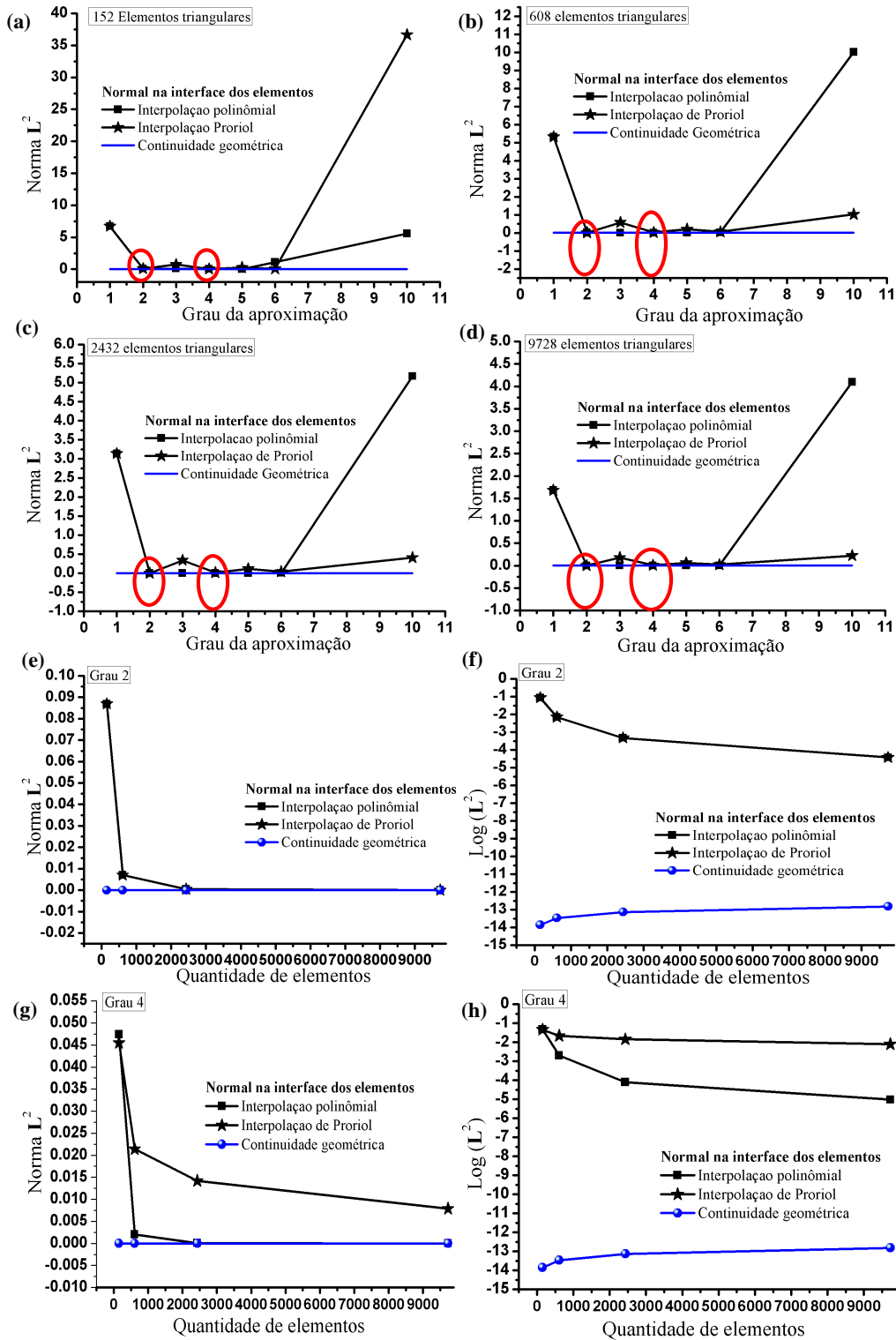


Figura 6.24 – Norma  $L^2$  do cosseno dos ângulos entre normais na interface dos elementos triangulares adjacentes para geometria na forma de paralelepípedo aproximado por Prorol, Polinômial e por continuidade geométrica (Bézier  $G^1$ ) à medida que é variado o grau da aproximação, gráficos (a)-(d), e a quantidade de elementos para o grau 2 e 4, gráficos (e)-(h).

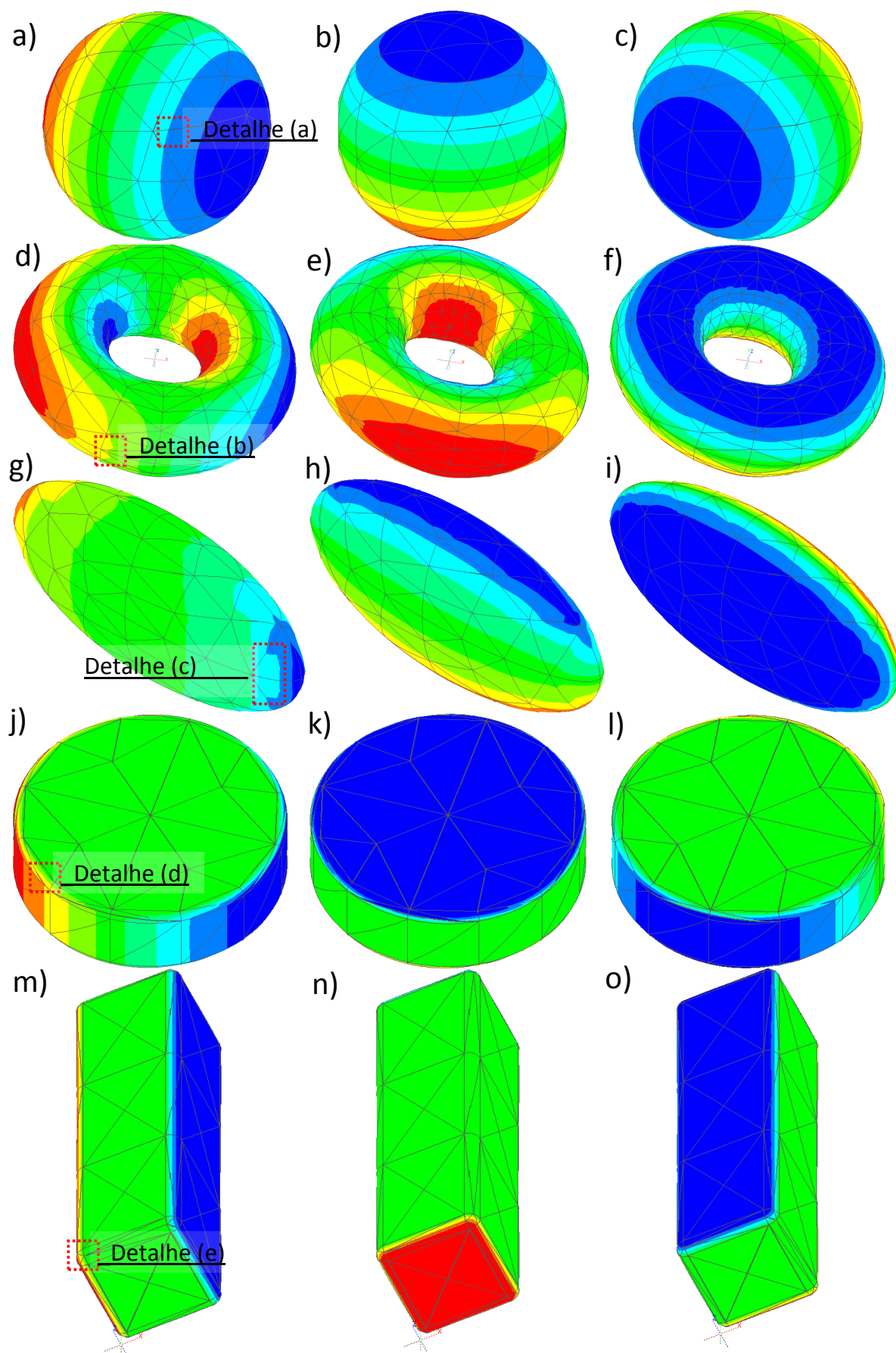


Figura 6.25 – Componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$  para as seguintes geometrias: esfera (a)-(c), toroide (d)-(f), elipsoide (g)-(i), cilindro de bordas arredondadas (j)-(l) e paralelepípedo de bordas arredondadas (m)-(o).

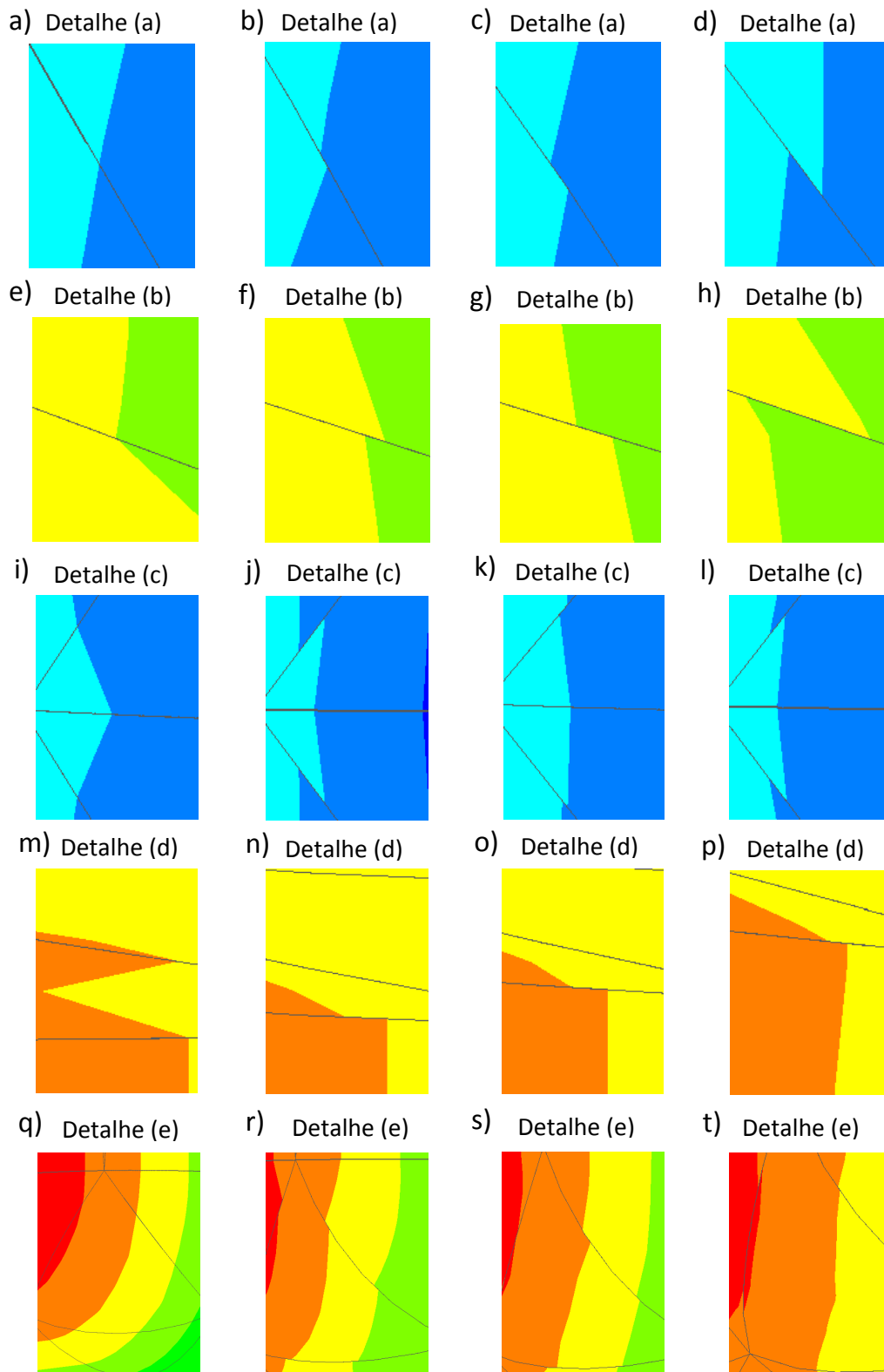


Figura 6.26 – Valores da componente  $n_x$  na interface entre elementos obtido pelas aproximações de Bézier  $G^1$  (imagens (a), (e), (i), (m) e (q)), Prorior ou Polinomial de grau 2 (imagens (b), (f), (j), (h) e (r)), Polinomial de grau 4 (imagens (c), (g), (k), (o) e (s)) e Prorior grau 4 (imagens (d), (h), (l), (p) e (t)) para as seguintes geometrias: esfera (a)-(d), toroide (e)-(h), elipsoide (i)-(l), cilindro de bordas arredondadas (m)-(p) e paralelepípedo de bordas arredondadas (q)-(t).

Tabela 4 – Comparação dos parâmetros estatísticos para as aproximações Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier  $G^1$ .

Nº de Elemento	Ângulo entre normais de elementos adjacentes				
	Aproximação	Mínimo	Máximo	Médio	Desvio Padrão
<b>ESFERA</b> 320	<b>Phong</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,995723	0,998740	0,997072	7,657330 ( $10^{-4}$ )
	<b>Nagata</b> $\varepsilon=0$ (Boshiroli et al, 2011)	0,999988	1,000000	0,999996	3,276020 ( $10^{-6}$ )
	<b>NLSA</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,999958	1,000000	0,999979	9,690380 ( $10^{-6}$ )
	<b>PN</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,999975	1,000000	0,999991	6,656300 ( $10^{-6}$ )
	<b>Bézier <math>G^1</math></b> (Presente trabalho)	0,999999	1,000000	1,000000	1,927585 ( $10^{-16}$ )
<b>TOROIDE</b> 200	<b>Phong</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,915295	0,999999	0,987918	1,578150 ( $10^{-2}$ )
	<b>Nagata</b> $\varepsilon=0$ (Boshiroli et al, 2011)	0,938828	1,000000	0,997556	8,603600 ( $10^{-3}$ )
	<b>NLSA</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,969450	1,000000	0,994738	6,790900 ( $10^{-3}$ )
	<b>PN</b> (Boshiroli et al, 2011)	0,989164	1,000000	0,998873	1,846800 ( $10^{-3}$ )
	<b>Bézier <math>G^1</math></b> (Presente trabalho)	0,999999	1,000000	0,999999	1,710914 ( $10^{-10}$ )

Neste estudo comparativo foram utilizados parâmetros estatísticos (valor mínimo, máximo, médio e desvio padrão) e a norma  $L^2$  como indicadores para a precisão na aproximação da geometria. Chamando a atenção ao fato que todos os indicadores acima possuem informações que se complementam, ou seja, o desvio padrão informará o quanto os pontos estão dispersos do valor médio e com isso podendo verificar se o valor mínimo e máximo são apenas pontos isolados distantes da média ou não, podendo, ainda, informar se a média realmente pode ser utilizado como valor representativo dos dados analisados. Já a norma  $L^2$  informará o quão distante os pontos coordenados estão da superfície analítica. Diante do exposto, esta seção fará uso das seguintes equações:

$$D_i = \mathbf{S}_{analítica}(s_i, t_i) - \mathbf{S}_{aproximada}(s_i, t_i), \quad (6.63)$$

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \quad (6.64)$$

$$\sigma(D) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}}{n - 1}, \quad (6.65)$$

$$\mathbf{L}^2 \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (D_i)^2}, \quad (6.66)$$

onde  $D_i$ ,  $\bar{D}$ ,  $\sigma(D)$  e  $\mathbf{L}^2$  representam a distância entre a superfície analítica e a aproximada, a distância média, desvio padrão da distância e norma  $L^2$  para o vetor distância  $\mathbf{D}$ , respectivamente.

A Tabela 5 e Tabela 6 apresentam para a geometria esférica e toroidal, respectivamente, os valores dos parâmetros estatísticos (valor máximo, mínimo, médio e desvio padrão) e a norma  $L^2$  para os dados  $D_i$  calculados a partir da distância entre a superfície exata e a aproximada. Ainda nestas duas tabelas são apresentados os resultados da análise da variação tanto da quantidade de elementos quanto do grau da aproximação para as funções Polinomial (nós equidistantes), Proriorl (nós de Lobatto) e a de Bézier  $G^1$ .

Tanto pela Tabela 5 quanto pela Tabela 6, percebe-se que para baixa discretização da geometria e baixo grau da aproximação, a função de Bézier  $G^1$  proporciona melhores resultados aos parâmetros estatísticos e para norma  $L^2$  em comparação às outras duas aproximações presentes nestas tabelas. Entretanto, observa-se que à medida que eleva o grau da aproximação e mantendo constante a discretização, as funções de Proriol e polinomial tornam ligeiramente superior à de Bézier  $G^1$ . Continuando a análise, à medida que a discretização é aumentada, tem-se melhoras significativas na representatividade da geometria para as três aproximações analisadas, sendo a função de Bézier e Polinomial superior à de Proriol.

A fig.(6.27) mostra o comportamento das aproximações Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier  $G^1$ , referente ao valor médio da distância, à medida que é variada a quantidade de elementos na construção da esfera de raio unitário. Para uma quantidade de 32 a 1300 elementos, os triângulos de Nagata e os triângulos de Bézier  $G^1$  apresentam melhores resultados, enquanto a aproximação Phong apresentam os piores resultados para o valor da distância média em comparação às demais aproximações, como pode ser visto em detalhes na fig.6.27-(b).

A fig.(6.28) mostra o comportamento das aproximações (Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier  $G^1$ ), com referência ao valor médio da distância à medida que é variada a quantidade de elementos para a construção da geometria do toroide de raio interno 0,5 e externo 1,0 (Tabela 1). Para uma quantidade de 50 a 720 elementos triangulares, pode-se verificar, em detalhes na fig.(6.28)-(b), que os triângulos de Nagata e de Bézier apresentam melhores resultados, enquanto que a aproximação Phong os piores resultados para o valor da distância média.

Diante do exposto, pode-se concluir que a função de Bézier  $G^1$ , cuja sua principal finalidade é construir superfícies suaves, possui a mesma capacidade em representar a geometria esférica e toroidal que as funções interpoladoras de Proriol, Polinomial e Nagata. Para as demais superfícies da Tabela 1, as funções de Proriol, Polinomial, Nagata e Bézier possuem comportamento semelhantes (dados não apresentados), podendo assim ser estendidos as conclusões da esfera e toroide para as demais geometrias analisadas neste trabalho.

#### 6.5.4 Custo computacional

Para complementar o estudo da eficiência entre as funções aproximadoras, foi medido o tempo computacional para construir as superfícies parametrizadas apresentadas na Tabela 1. Nesta etapa da análise não foram comparadas as funções Phong, Nagata, NLSA e PN quanto ao desempenho no tempo de processamento, pois os resultados apresentados no trabalho de Boschioli et al. (2011) foram obtidos em condições diferentes das aqui analisadas. Cabe ressaltar que o custo computacional apresentado na fig.6.29 foi medido



Tabela 5 – Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana  $L^2$  da distância entre a superfície esférica analítica e a superfície aproximada obtida pelas funções de Proriol (nós de Lobatto), Polinomial (nós equidistantes) e Bézier  $G^1$ .

Nº de Elemento	Distância entre a superfície analítica e a superfície aproximada					
	Mínimo	Máximo	Médio	Desvio Padrão	Norma $L^2$	
<b>ESFERA (Grau 1)</b>						
32	Nós Equidistante	0,000000	3,333333 ( $10^{-1}$ )	1,651861 ( $10^{-1}$ )	8,309451 ( $10^{-2}$ )	5,534289
	Nós de Lobatto	0,000000	3,333333 ( $10^{-1}$ )	1,651861 ( $10^{-1}$ )	8,309451 ( $10^{-2}$ )	5,534289
	Bézier $G^1$	0,000000	1,614998 ( $10^{-2}$ )	4,181915 ( $10^{-3}$ )	3,445715 ( $10^{-3}$ )	0,162160
128	Nós Equidistante	0,000000	8,494418 ( $10^{-2}$ )	4,708565 ( $10^{-2}$ )	2,267943 ( $10^{-2}$ )	3,128718
	Nós de Lobatto	0,000000	8,494418 ( $10^{-2}$ )	4,708565 ( $10^{-2}$ )	2,267943 ( $10^{-2}$ )	3,128718
	Bézier $G^1$	0,000000	6,856826 ( $10^{-4}$ )	2,445221 ( $10^{-4}$ )	1,710554 ( $10^{-4}$ )	0,017864
512	Nós Equidistante	0,000000	2,106081 ( $10^{-2}$ )	1,216801 ( $10^{-2}$ )	5,775020 ( $10^{-3}$ )	1,612662
	Nós de Lobatto	0,000000	2,106081 ( $10^{-2}$ )	1,216801 ( $10^{-2}$ )	5,775020 ( $10^{-3}$ )	1,612662
	Bézier $G^1$	0,000000	3,815662 ( $10^{-5}$ )	1,497350 ( $10^{-5}$ )	1,008283 ( $10^{-5}$ )	0,002161
2048	Nós Equidistante	0,000000	5,193957 ( $10^{-3}$ )	3,067355 ( $10^{-3}$ )	1,450096 ( $10^{-3}$ )	0,812472
	Nós de Lobatto	0,000000	5,193957 ( $10^{-3}$ )	3,067355 ( $10^{-3}$ )	1,450096 ( $10^{-3}$ )	0,812472
	Bézier $G^1$	0,000000	2,265716 ( $10^{-6}$ )	9,308435 ( $10^{-7}$ )	6,209062 ( $10^{-7}$ )	0,000268
8192	Nós Equidistante	0,000000	1,288844 ( $10^{-3}$ )	7,684322 ( $10^{-4}$ )	3,629166 ( $10^{-4}$ )	0,407007
	Nós de Lobatto	0,000000	1,288844 ( $10^{-3}$ )	7,684322 ( $10^{-4}$ )	3,629166 ( $10^{-4}$ )	0,407007
	Bézier $G^1$	0,000000	1,386945 ( $10^{-7}$ )	5,809895 ( $10^{-8}$ )	3,866266 ( $10^{-8}$ )	0,000033
<b>ESFERA (Grau 2)</b>						
32	Nós Equidistante	-2,220014 ( $10^{-2}$ )	2,544107 ( $10^{-2}$ )	4,903464 ( $10^{-3}$ )	9,826034 ( $10^{-3}$ )	0,328567
	Nós de Lobatto	-2,220014 ( $10^{-2}$ )	2,544107 ( $10^{-2}$ )	4,903464 ( $10^{-3}$ )	9,826034 ( $10^{-3}$ )	0,328567
	Bézier $G^1$	0,000000	1,614998 ( $10^{-2}$ )	4,181915 ( $10^{-3}$ )	3,445715 ( $10^{-3}$ )	0,162160
128	Nós Equidistante	-2,954754 ( $10^{-3}$ )	3,189431 ( $10^{-3}$ )	3,278318 ( $10^{-4}$ )	1,294186 ( $10^{-3}$ )	0,079915
	Nós de Lobatto	-2,954754 ( $10^{-3}$ )	3,189431 ( $10^{-3}$ )	3,278318 ( $10^{-4}$ )	1,294186 ( $10^{-3}$ )	0,079915
	Bézier $G^1$	0,000000	6,856826 ( $10^{-4}$ )	2,445221 ( $10^{-4}$ )	1,710554 ( $10^{-4}$ )	0,017864
512	Nós Equidistante	-3,829769 ( $10^{-4}$ )	3,989101 ( $10^{-4}$ )	2,083629 ( $10^{-5}$ )	1,641935 ( $10^{-4}$ )	0,019816
	Nós de Lobatto	-3,829769 ( $10^{-4}$ )	3,989101 ( $10^{-4}$ )	2,083629 ( $10^{-5}$ )	1,641935 ( $10^{-4}$ )	0,019816
	Bézier $G^1$	0,000000	3,815662 ( $10^{-5}$ )	1,497350 ( $10^{-5}$ )	1,008283 ( $10^{-5}$ )	0,002161
2048	Nós Equidistante	-2,442802 ( $10^{-5}$ )	2,495338 ( $10^{-5}$ )	6,539223 ( $10^{-7}$ )	1,030165 ( $10^{-5}$ )	0,002472
	Nós de Lobatto	-2,442802 ( $10^{-5}$ )	2,495338 ( $10^{-5}$ )	6,539223 ( $10^{-7}$ )	1,030165 ( $10^{-5}$ )	0,002472
	Bézier $G^1$	0,000000	2,265716 ( $10^{-6}$ )	9,308435 ( $10^{-7}$ )	6,209062 ( $10^{-7}$ )	0,000268
8192	Nós Equidistante	-6,174907 ( $10^{-6}$ )	6,242420 ( $10^{-6}$ )	8,181948 ( $10^{-8}$ )	2,577909 ( $10^{-6}$ )	0,001235
	Nós de Lobatto	-6,174907 ( $10^{-6}$ )	6,242420 ( $10^{-6}$ )	8,181948 ( $10^{-8}$ )	2,577909 ( $10^{-6}$ )	0,001235
	Bézier $G^1$	0,000000	1,386945 ( $10^{-7}$ )	5,809895 ( $10^{-8}$ )	3,866266 ( $10^{-8}$ )	0,000033
<b>ESFERA (Grau 4)</b>						
32	Nós Equidistante	-1,492719 ( $10^{-3}$ )	2,551554 ( $10^{-3}$ )	1,784254 ( $10^{-4}$ )	6,082426 ( $10^{-4}$ )	0,018964
	Nós de Lobatto	-5,491714 ( $10^{-3}$ )	7,920929 ( $10^{-3}$ )	-1,47262 ( $10^{-4}$ )	1,508550 ( $10^{-3}$ )	0,045345
	Bézier $G^1$	0,000000	1,614998 ( $10^{-2}$ )	4,181915 ( $10^{-3}$ )	3,445715 ( $10^{-3}$ )	0,162160
128	Nós Equidistante	-2,278907 ( $10^{-4}$ )	3,749574 ( $10^{-4}$ )	1,490559 ( $10^{-5}$ )	5,671942 ( $10^{-5}$ )	0,003510
	Nós de Lobatto	-1,431321 ( $10^{-3}$ )	1,942013 ( $10^{-3}$ )	-4,44005 ( $10^{-5}$ )	4,288727 ( $10^{-4}$ )	0,025809
	Bézier $G^1$	0,000000	6,856826 ( $10^{-4}$ )	2,445221 ( $10^{-4}$ )	1,710554 ( $10^{-4}$ )	0,017864
512	Nós Equidistante	-4,081984 ( $10^{-5}$ )	3,352040 ( $10^{-5}$ )	9,701003 ( $10^{-7}$ )	4,765013 ( $10^{-6}$ )	0,000582
	Nós de Lobatto	-3,450392 ( $10^{-4}$ )	4,427132 ( $10^{-4}$ )	-1,16328 ( $10^{-5}$ )	1,131895 ( $10^{-4}$ )	0,013623
	Bézier $G^1$	0,000000	3,815662 ( $10^{-5}$ )	1,497350 ( $10^{-5}$ )	1,008283 ( $10^{-5}$ )	0,002161
2048	Nós Equidistante	-4,734761 ( $10^{-6}$ )	5,251668 ( $10^{-6}$ )	6,198646 ( $10^{-8}$ )	5,106515 ( $10^{-7}$ )	0,000123
	Nós de Lobatto	-8,074994 ( $10^{-5}$ )	1,007803 ( $10^{-4}$ )	-2,94179 ( $10^{-6}$ )	2,870450 ( $10^{-5}$ )	0,006910
	Bézier $G^1$	0,000000	2,265716 ( $10^{-6}$ )	9,308435 ( $10^{-7}$ )	6,209062 ( $10^{-7}$ )	0,000268
8192	Nós Equidistante	-7,315664 ( $10^{-7}$ )	7,574456 ( $10^{-7}$ )	3,729121 ( $10^{-9}$ )	6,053078 ( $10^{-8}$ )	0,000029
	Nós de Lobatto	-1,986912 ( $10^{-5}$ )	2,403863 ( $10^{-5}$ )	-7,37589 ( $10^{-7}$ )	7,204405 ( $10^{-6}$ )	0,003468
	Bézier $G^1$	0,000000	1,386945 ( $10^{-7}$ )	5,809895 ( $10^{-8}$ )	3,866266 ( $10^{-8}$ )	0,000033
<b>ESFERA (Grau 10)</b>						
32	Nós Equidistante	-2,423016 ( $10^{-3}$ )	4,277646 ( $10^{-3}$ )	3,086416 ( $10^{-5}$ )	6,067632 ( $10^{-4}$ )	0,018176
	Nós de Lobatto	-5,997203 ( $10^{-4}$ )	4,330791 ( $10^{-3}$ )	1,400237 ( $10^{-4}$ )	4,163240 ( $10^{-4}$ )	0,013141
	Bézier $G^1$	0,000000	1,614998 ( $10^{-2}$ )	4,181915 ( $10^{-3}$ )	3,445715 ( $10^{-3}$ )	0,162160
128	Nós Equidistante	-5,042393 ( $10^{-4}$ )	7,938002 ( $10^{-4}$ )	2,320407 ( $10^{-6}$ )	7,998986 ( $10^{-5}$ )	0,004790
	Nós de Lobatto	-1,822273 ( $10^{-4}$ )	7,746971 ( $10^{-4}$ )	3,794367 ( $10^{-5}$ )	1,071845 ( $10^{-4}$ )	0,006806
	Bézier $G^1$	0,000000	6,856826 ( $10^{-4}$ )	2,445221 ( $10^{-4}$ )	1,710554 ( $10^{-4}$ )	0,017864
512	Nós Equidistante	-9,632230 ( $10^{-5}$ )	9,035999 ( $10^{-5}$ )	2,003316 ( $10^{-7}$ )	8,883309 ( $10^{-6}$ )	0,001064
	Nós de Lobatto	-3,640640 ( $10^{-5}$ )	1,681797 ( $10^{-4}$ )	9,762721 ( $10^{-6}$ )	2,729057 ( $10^{-5}$ )	0,00347
	Bézier $G^1$	0,000000	3,815662 ( $10^{-5}$ )	1,497350 ( $10^{-5}$ )	1,008283 ( $10^{-5}$ )	0,002161
2048	Nós Equidistante	-1,155132 ( $10^{-5}$ )	1,070784 ( $10^{-5}$ )	-3,48959 ( $10^{-9}$ )	8,323597 ( $10^{-7}$ )	0,000199
	Nós de Lobatto	-8,342671 ( $10^{-6}$ )	3,595975 ( $10^{-5}$ )	2,457231 ( $10^{-6}$ )	6,861774 ( $10^{-6}$ )	0,001745
	Bézier $G^1$	0,000000	2,265716 ( $10^{-6}$ )	9,308435 ( $10^{-7}$ )	6,209062 ( $10^{-7}$ )	0,000268
8192	Nós Equidistante	-1,561532 ( $10^{-6}$ )	1,721329 ( $10^{-6}$ )	-3,8650 ( $10^{-10}$ )	8,887421 ( $10^{-8}$ )	0,000042
	Nós de Lobatto	-1,982128 ( $10^{-6}$ )	8,883602 ( $10^{-6}$ )	6,158195 ( $10^{-7}$ )	1,720942 ( $10^{-6}$ )	0,000875
	Bézier $G^1$	0,000000	1,386945 ( $10^{-7}$ )	5,809895 ( $10^{-8}$ )	3,866266 ( $10^{-8}$ )	0,000033

Tabela 6 – Parâmetros estatísticos e norma Euclidiana  $L^2$  da distância entre a superfície toroidal analítica e a superfície aproximada obtida pelas funções de Proriorl (nós de Lobatto), Polinomial (nós equidistantes) e Bézier  $G^1$ .

Nº de Elemento		Distância entre a superfície analítica e a superfície aproximada					
		Mínimo	Máximo	Médio	Desvio Padrão	Norma $L^2$	
TOROIDE (Grau 1)	128	Nós Equidistante	-3,950882 ( $10^{-2}$ )	1,357350 ( $10^{-1}$ )	2,506988 ( $10^{-2}$ )	3,831157 ( $10^{-2}$ )	2,005837
		Nós de Lobatto	-3,950882 ( $10^{-2}$ )	1,357350 ( $10^{-1}$ )	2,506988 ( $10^{-2}$ )	3,831157 ( $10^{-2}$ )	2,005837
		Bézier $G^1$	-5,794326 ( $10^{-3}$ )	1,367188 ( $10^{-2}$ )	1,069672 ( $10^{-3}$ )	3,045165 ( $10^{-3}$ )	0,141392
	512	Nós Equidistante	-9,699661 ( $10^{-3}$ )	3,607436 ( $10^{-2}$ )	7,69550 ( $10^{-3}$ )	1,008612 ( $10^{-2}$ )	1,518975
		Nós de Lobatto	-9,699661 ( $10^{-3}$ )	3,607436 ( $10^{-2}$ )	7,69550 ( $10^{-3}$ )	1,008612 ( $10^{-2}$ )	1,518975
		Bézier $G^1$	-6,761117 ( $10^{-4}$ )	4,445330 ( $10^{-4}$ )	4,44203 ( $10^{-7}$ )	1,657912 ( $10^{-4}$ )	0,019850
	2048	Nós Equidistante	-2,413433 ( $10^{-3}$ )	9,480539 ( $10^{-3}$ )	9,480539 ( $10^{-3}$ )	2,547057 ( $10^{-3}$ )	0,782699
		Nós de Lobatto	-2,413433 ( $10^{-3}$ )	9,480539 ( $10^{-3}$ )	9,480539 ( $10^{-3}$ )	2,547057 ( $10^{-3}$ )	0,782699
		Bézier $G^1$	-7,030172 ( $10^{-5}$ )	4,370668 ( $10^{-5}$ )	-2,19882 ( $10^{-7}$ )	1,493050 ( $10^{-5}$ )	0,003686
	8192	Nós Equidistante	-6,026347 ( $10^{-4}$ )	2,399668 ( $10^{-3}$ )	4,240925 ( $10^{-4}$ )	6,356667 ( $10^{-4}$ )	0,276111
		Nós de Lobatto	-6,026347 ( $10^{-4}$ )	2,399668 ( $10^{-3}$ )	4,240925 ( $10^{-4}$ )	6,356667 ( $10^{-4}$ )	0,276111
		Bézier $G^1$	-5,834155 ( $10^{-6}$ )	4,916346 ( $10^{-6}$ )	-2,29328 ( $10^{-8}$ )	1,354642 ( $10^{-6}$ )	0,000490
TOROIDE (Grau 2)	128	Nós Equidistante	-7,968171 ( $10^{-4}$ )	4,021239 ( $10^{-3}$ )	4,058914 ( $10^{-4}$ )	9,998996 ( $10^{-4}$ )	0,047275
		Nós de Lobatto	-7,968171 ( $10^{-4}$ )	4,021239 ( $10^{-3}$ )	4,058914 ( $10^{-4}$ )	9,998996 ( $10^{-4}$ )	0,047275
		Bézier $G^1$	-5,794326 ( $10^{-3}$ )	1,367188 ( $10^{-2}$ )	1,069672 ( $10^{-3}$ )	3,045165 ( $10^{-3}$ )	0,141392
	512	Nós Equidistante	-2,579027 ( $10^{-4}$ )	4,581450 ( $10^{-4}$ )	2,71417 ( $10^{-5}$ )	1,111816 ( $10^{-4}$ )	0,013703
		Nós de Lobatto	-2,579027 ( $10^{-4}$ )	4,581450 ( $10^{-4}$ )	2,71417 ( $10^{-5}$ )	1,111816 ( $10^{-4}$ )	0,013703
		Bézier $G^1$	-6,761117 ( $10^{-4}$ )	4,445330 ( $10^{-4}$ )	4,44203 ( $10^{-7}$ )	1,657912 ( $10^{-4}$ )	0,019850
	2048	Nós Equidistante	-3,867020 ( $10^{-5}$ )	5,146504 ( $10^{-5}$ )	1,566837 ( $10^{-6}$ )	1,304025 ( $10^{-5}$ )	0,003249
		Nós de Lobatto	-3,867020 ( $10^{-5}$ )	5,146504 ( $10^{-5}$ )	1,566837 ( $10^{-6}$ )	1,304025 ( $10^{-5}$ )	0,003249
		Bézier $G^1$	-7,030172 ( $10^{-5}$ )	4,370668 ( $10^{-5}$ )	-2,19882 ( $10^{-7}$ )	1,493050 ( $10^{-5}$ )	0,003686
	8192	Nós Equidistante	-5,310401 ( $10^{-6}$ )	5,919815 ( $10^{-6}$ )	7,538849 ( $10^{-6}$ )	1,569466 ( $10^{-6}$ )	0,000568
		Nós de Lobatto	-5,310401 ( $10^{-6}$ )	5,919815 ( $10^{-6}$ )	7,538849 ( $10^{-6}$ )	1,569466 ( $10^{-6}$ )	0,000568
		Bézier $G^1$	-5,834155 ( $10^{-6}$ )	4,916346 ( $10^{-6}$ )	-2,29328 ( $10^{-8}$ )	1,354642 ( $10^{-6}$ )	0,000490
TOROIDE (Grau 4)	128	Nós Equidistante	-6,27908 ( $10^{-3}$ )	5,73826 ( $10^{-4}$ )	-3,9293 ( $10^{-5}$ )	2,66169 ( $10^{-4}$ )	0,011800
		Nós de Lobatto	-1,308333 ( $10^{-3}$ )	9,935307 ( $10^{-4}$ )	-8,05936 ( $10^{-5}$ )	3,388598 ( $10^{-4}$ )	0,015259
		Bézier $G^1$	-5,794326 ( $10^{-3}$ )	1,367188 ( $10^{-2}$ )	1,069672 ( $10^{-3}$ )	3,045165 ( $10^{-3}$ )	0,141392
	512	Nós Equidistante	-9,198725 ( $10^{-5}$ )	1,721971 ( $10^{-4}$ )	2,29083 ( $10^{-6}$ )	1,540100 ( $10^{-5}$ )	0,001864
		Nós de Lobatto	-6,092729 ( $10^{-4}$ )	5,921158 ( $10^{-4}$ )	-7,36853 ( $10^{-6}$ )	1,323000 ( $10^{-4}$ )	0,015865
		Bézier $G^1$	-6,761117 ( $10^{-4}$ )	4,445330 ( $10^{-4}$ )	4,44203 ( $10^{-7}$ )	1,657912 ( $10^{-4}$ )	0,019850
	2048	Nós Equidistante	-9,602937 ( $10^{-6}$ )	1,824316 ( $10^{-5}$ )	1,118587 ( $10^{-7}$ )	1,202704 ( $10^{-6}$ )	0,000337
		Nós de Lobatto	-1,552975 ( $10^{-4}$ )	1,513814 ( $10^{-4}$ )	-1,76993 ( $10^{-6}$ )	3,281935 ( $10^{-5}$ )	0,008163
		Bézier $G^1$	-7,030172 ( $10^{-5}$ )	4,370668 ( $10^{-5}$ )	-2,19882 ( $10^{-7}$ )	1,493050 ( $10^{-5}$ )	0,003686
	8192	Nós Equidistante	-7,57692 ( $10^{-11}$ )	7,671658 ( $10^{-11}$ )	-2,7616 ( $10^{-12}$ )	2,81091 ( $10^{-11}$ )	1,02 ( $10^{-8}$ )
		Nós de Lobatto	-1,398440 ( $10^{-5}$ )	1,893284 ( $10^{-5}$ )	-3,49648 ( $10^{-7}$ )	4,705982 ( $10^{-6}$ )	1,70 ( $10^{-3}$ )
		Bézier $G^1$	-5,834155 ( $10^{-6}$ )	4,916346 ( $10^{-6}$ )	-2,29328 ( $10^{-8}$ )	1,354642 ( $10^{-6}$ )	4,90 ( $10^{-4}$ )
TOROIDE (Grau 10)	128	Nós Equidistante	-1,889250 ( $10^{-3}$ )	1,103761 ( $10^{-3}$ )	-1,43554 ( $10^{-6}$ )	1,451566 ( $10^{-4}$ )	0,006359
		Nós de Lobatto	-1,428832 ( $10^{-3}$ )	3,907084 ( $10^{-4}$ )	-6,79857 ( $10^{-5}$ )	1,829909 ( $10^{-4}$ )	0,008552
		Bézier $G^1$	-5,794326 ( $10^{-3}$ )	1,367188 ( $10^{-2}$ )	1,069672 ( $10^{-3}$ )	3,045165 ( $10^{-3}$ )	0,141392
	512	Nós Equidistante	-1,886237 ( $10^{-4}$ )	1,507620 ( $10^{-4}$ )	6,84152 ( $10^{-8}$ )	7,814720 ( $10^{-6}$ )	0,000936
		Nós de Lobatto	-6,481934 ( $10^{-5}$ )	2,447733 ( $10^{-4}$ )	6,39829 ( $10^{-6}$ )	2,909650 ( $10^{-5}$ )	0,003567
		Bézier $G^1$	-6,761117 ( $10^{-4}$ )	4,445330 ( $10^{-4}$ )	4,44203 ( $10^{-7}$ )	1,657912 ( $10^{-4}$ )	0,019850
	2048	Nós Equidistante	-8,231782 ( $10^{-6}$ )	7,294332 ( $10^{-6}$ )	-5,17637 ( $10^{-7}$ )	2,943996 ( $10^{-6}$ )	0,000734
		Nós de Lobatto	-5,175370 ( $10^{-5}$ )	2,528343 ( $10^{-5}$ )	-1,10777 ( $10^{-7}$ )	7,865364 ( $10^{-6}$ )	0,001968
		Bézier $G^1$	-7,030172 ( $10^{-5}$ )	4,370668 ( $10^{-5}$ )	-2,19882 ( $10^{-7}$ )	1,493050 ( $10^{-5}$ )	0,003686
	8192	Nós Equidistante	-4,465230 ( $10^{-6}$ )	2,753153 ( $10^{-6}$ )	-2,2126 ( $10^{-10}$ )	4,756882 ( $10^{-8}$ )	0,000017
		Nós de Lobatto	-1,446967 ( $10^{-5}$ )	2,063871 ( $10^{-6}$ )	-1,15489 ( $10^{-6}$ )	2,893344 ( $10^{-6}$ )	0,001126
		Bézier $G^1$	-5,834155 ( $10^{-6}$ )	4,916346 ( $10^{-6}$ )	-2,29328 ( $10^{-8}$ )	1,354642 ( $10^{-6}$ )	0,000490

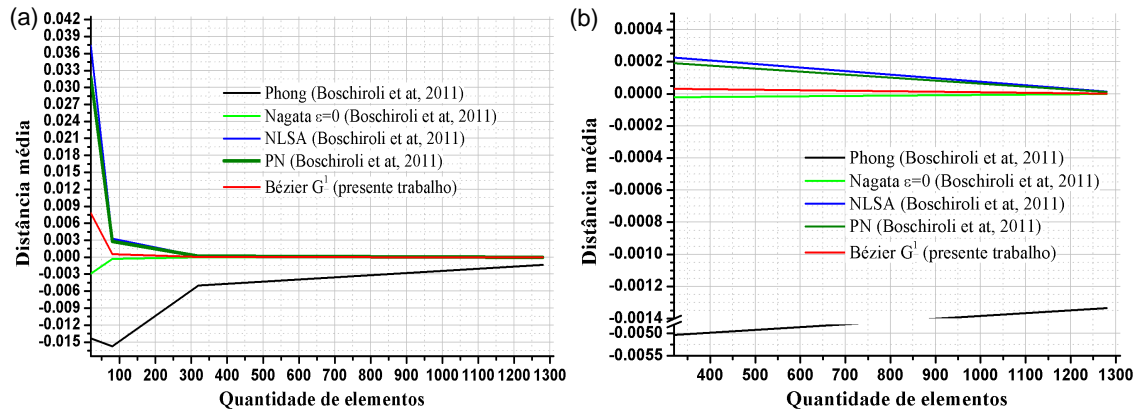


Figura 6.27 – Valor médio da distância entre a superfície analítica da esfera e a superfície aproximada gerada pelos elementos triangulares de Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier  $G^1$ .

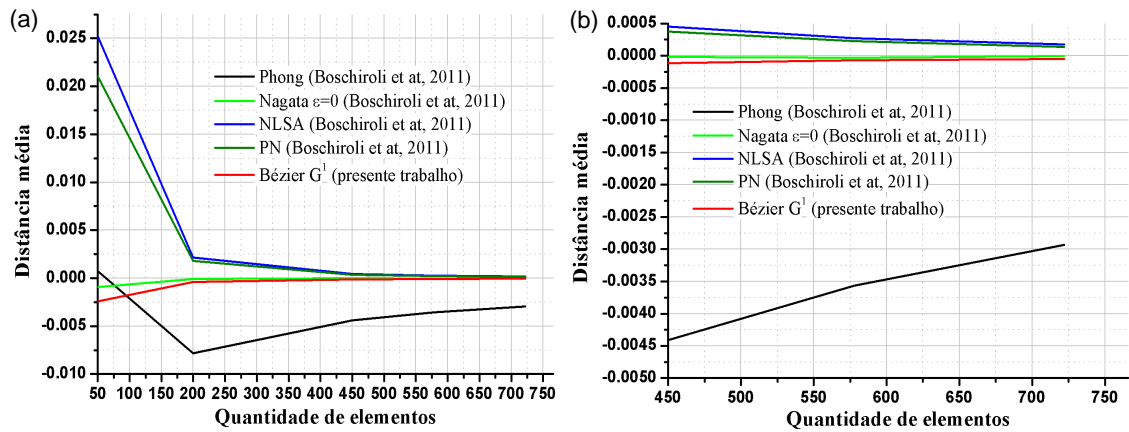


Figura 6.28 – Valor médio da distância entre a superfície analítica do toroide e a superfície aproximada gerada pelos elementos triangulares de Phong, Nagata, NLSA, PN e Bézier  $G^1$ .

por meio de um computador Vostro Dell, core i7, CPU 2,20GHz, memória RAM 8,00 GB, 64 bits, quadcore.

Diante das condições apresentadas, é feito o estudo comparativo, quanto ao tempo de processamento, entre as funções Polinomial, Proriol e Bézier  $G^1$ . Para realizar este estudo foi calculado o erro normalizado das interpolações de Proriol e Polinomial com relação à função de Bézier, por meio das equação:

$$erro(\%) = \frac{t_{Polinomial} - t_{Bézier}}{t_{Bézier}} \times 100, \quad (6.67)$$

$$erro(\%) = \frac{t_{Proriol} - t_{Bézier}}{t_{Bézier}} \times 100, \quad (6.68)$$

onde  $t_{Polinomial}$ ,  $t_{Proriol}$  e  $t_{Bézier}$  representam o tempo computacional (em segundos) para as construções geométricas parametrizadas analisadas neste estudo.

Na fig.6.29 é apresentado os valores das  $Eq^s$ .6.67 e 6.68 para uma variação tanto do grau da aproximação quanto da quantidade de elementos utilizados na discretização das

superfícies geométricas. As linhas com marcadores quadrados apresentam a variação do erro(%) normalizado à medida que é variado o grau da aproximação, para a discretização mais pobre. As linhas com marcadores esféricos apresentam a variação do erro(%) normalizado à medida que é variado o grau da aproximação para discretização mais refinada. Diante do explanado, os gráficos (a) e (b) da fig.6.29 apresentam os resultados para a geometria toroidal, e nestes gráficos é possível observar que para baixo grau da aproximação e a discretização variando de 128 a 8192 elementos, pode-se obter uma redução no custo computacional, em relação à Bézier, de aproximadamente 20% a 0% e de 10% a 0% para aproximações Polinomial e Proriol, respectivamente. Quando o grau da aproximação é elevado (grau 10), obtêm-se um aumento no custo computacional, em relação à Bézier, de aproximadamente 20%, para interpolação Polinomial, e de aproximadamente de 30%, para interpolação de Proriol, quando é utilizado a malha mais pobre (128 elementos) enquanto que para uma malha mais refinada (8192 elementos) o aumento computacional, em relação à Bézier, é mais significativo e passa a ser de aproximadamente 240% e 375% para as funções Polinomial e Proriol, respectivamente. Comportamentos semelhantes são obtidos para as demais geometrias paramétricas analisadas, como pode ser visto nos gráficos (c)-(j) da fig.6.29.

### 6.5.5 Análise de superfícies suaves não paramétricas e complexas

Nesta seção são aplicadas as aproximações de Proriol, Polinomial e Bézier  $G^1$  para reconstrução de geometrias complexas. Este tipo de aplicação difere das geometrias paramétricas por não possuírem uma representação analítica que descreva a geometria. Diante deste fato, o presente trabalho se deterá à análise da representação da continuidade do plano tangente na interface entre elementos para quatro geometrias, as quais são: a geometria de uma taça suave, de uma colher, da superfície de uma cabeça e, por último, a geometria de uma perna.

Neste trabalho, as construções das malhas para geometrias complexas foram obtidas por meio do software de computação gráfica *Blender<sup>Tm</sup>*, o qual gera elementos triangulares de três nós. A partir do *Blender<sup>Tm</sup>* são obtidas as conectividades entre os elementos, as coordenadas dos vértices e das normais nestes pontos, o que é de grande importância para aproximação de Bézier, entretanto para a utilização das aproximações de Proriol (ou Polinomial) fica limitada ao grau 1. Para tentar amenizar este empecilho do baixo grau da aproximação de Proriol (assim como Polinomial) as geometrias foram discretizadas com uma quantidade elevada de elementos, pois segundo Demkowicz et al. (2009), acredita-se que no limite a conformidade  $G^1$  é recuperada. Tendo como verdade a afirmativa de Demkowicz et al. (2009), para a taça foram utilizados 3680 elementos, para a colher 7110 elementos, para a cabeça 12352 elementos e para a superfície da perna foram utilizados

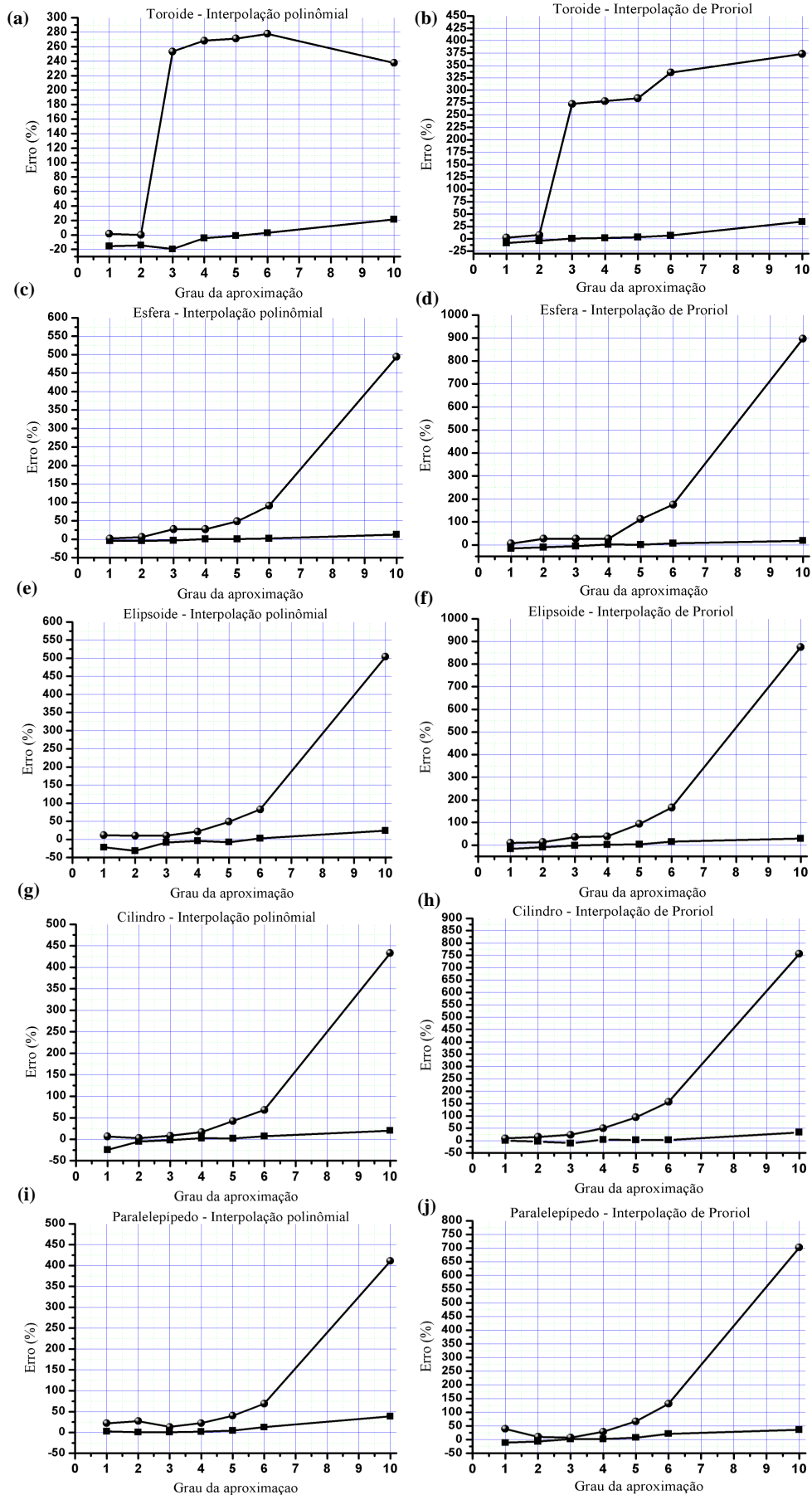


Figura 6.29 – Custo computacional, na modelagem da superfície esférica e toroidal, para as aproximações Prorior e Polinomial tendo como referência a aproximação de Bézier  $G^1$ . Linhas com marcadores retangulares representam valores mínimos e com marcadores esféricos representam valores máximos.

15552 elementos triangulares de três nós como é apresentado na Tabela 7. Diante desta elevada quantidade de elementos, cabe ressaltar que para as aproximações de Bézier seriam necessários aproximadamente 20% da quantidade de elementos utilizados, mas pelo motivo já explicado acima optou-se por uma malha refinada.

A Tabela 7 apresenta os parâmetros estatísticos valor mínimo, valor máximo, médio e o desvio padrão para as quatro geometrias analisadas nesta seção com suas respectivas discretizações. Para a superfície da taça, observa-se que para a aproximação de Proriot (ou Polinomial) de grau 1 apresentou valor mínimo negativo e mais próximo de zero do que de um, o que mostra a proximidade da ortogonalidade entre estes vetores na interface, já o valor máximo apresentou quantidade unitário positivo e a média com valor mais próximo de um (0,96617), entretanto, com um desvio padrão de valor significativo (0,13035), o que mostra a dispersão significativa dos valores em relação ao valor médio. Analisando a mesma geometria (taça) por meio da aproximação de Bézier  $G^1$ , observa-se o quão bom é sua representatividade da continuidade do plano tangente, apresentando valor mínimo com a grandeza, do erro em relação ao valor unitário, da ordem de  $10^{-8}$  e valor médio unitário e desvio padrão na ordem de  $10^{-10}$ , mostrando assim a excelente aproximação e a baixa dispersão dos valores com relação à média unitária. Análise semelhante é observada para as demais geometrias (colher, cabeça, perna), cabendo apenas ressaltar que tanto para a reconstrução da geometria da perna quanto para a reconstrução da geometria da cabeça foram utilizadas uma quantidade maior de elementos devido à riqueza de detalhe e curvaturas acentuadas que estas geometrias possuem, entretanto, cabe enfatizar, mais uma vez, que para a aproximação de Bézier  $G^1$  seriam necessários aproximadamente 20% da quantidade de elementos utilizado nestas análises.

A fig.6.30 apresenta, em vista fronta e a fig.6.31, em vista superior, a variação das componentes normais ( $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ) obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$  (gráficos (a)-(c)) e pela aproximação de Proriot, ou Polinomial, de grau 1 (gráficos (d)-(f)). A partir das *figs*.6.30 - 6.31, e com maior riqueza na fig.6.32, observa-se a mudança de coloração exatamente na interface entre elementos para a aproximação de Proriot (ou Polinomial) enquanto que para aproximação de Bézier  $G^1$  a coloração torna-se constante em todas as linhas da interface dos elementos, isto mostra que não há uma continuidade do vetor normal quando calculado, por meio da aproximação de Proriot (ou Polinomial), na interface entre os elementos e que quando o vetor normal é calculado na interface entre os elementos por meio da aproximação de Bézier observa-se a perfeita continuidade do vetor normal, apresentando valor único (dentro da precisão de ponto flutuante) do vetor normal na interface.

Continuando a análise, a fig.6.33 apresenta, em vista superior, a variação das componentes do vetor normal ( $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ ) na superfície da geometria de uma colher. Os gráficos (a)-(c) mostram, respectivamente, as componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  para a aproximação de Bézier  $G^1$  e os gráficos (d)-(f) apresentam, respectivamente, as componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  para

a aproximação de Prorior (ou Polinomial) de grau 1. Pode ser observado na fig.6.33, e em detalhes na fig.6.34, a excelente representação da suavidade pela função de Bézier, fato justificado pela coloração constante na interface entre elementos, no entanto, resultado oposto é obtido para a aproximação de Prorior (ou Polinomial), uma vez que ocorre uma mudança de coloração na interface entre elementos e, assim, não podendo representar superfícies suaves. Análises semelhantes as realizadas para geometria da superfície da taça e colher podem ser feitas para a superfície da geometria da cabeça (fig.6.35, fig.6.36, fig.6.37) e da perna (fig.6.38, fig.6.39, fig.6.40).

Na fig.6.35, apresenta em vista frontal, na fig.6.36 em vista lateral e na fig.6.37 em detalhes (nariz e olho) a variação das componentes no vetor normal para a superfície geométrica de uma cabeça. Nestas figuras, os gráficos (a)-(c) mostram, respectivamente, a variação das componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  para aproximação de Bézier. Já os gráficos (d)-(f) apresentam, respectivamente, as componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  para a aproximação de Prorior (ou Polinomial) de grau 1. Nos gráficos (a)-(c) é observado na interface entre elementos (linhas pretas) a presença de uma única tonalidade de cor na região em que os elementos são interceptados, ou seja, obtêm-se uma única normal (na interface) tanto calculado pelo elemento da esquerda quanto pelo elemento da direita, o que não é observado nos gráficos (d)-(f).

Na fig.6.38, apresenta em vista frontal da superfície da perna, na fig.6.39 mostra a região do pé e na fig.6.40 são mostrados detalhes do pé quanto à variação do vetor normal na região de interface dos elementos. Os gráficos (a)-(c), destas figuras, apresentam, respectivamente, a variação das componentes  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  para a função de Bézier  $G^1$  e os gráficos (d)-(f) mostram as mesmas variações para a aproximação de Prorior (ou Polinomial) de grau 1. Diante das *figs*.6.38-6.40 pode-se observar a enorme superioridade na aproximação de superfície suave pelas funções de Bézier  $G^1$  quando comparada às aproximações de Prorior (ou Polinomial), sabendo-se que existe limitações na elevação do grau desta última aproximação quando utilizado o software Blender, fez-se uso da afirmativa de conformidade  $G^1$  quando se eleva a discretização, ao limite (DEMKOWICZ et al., 2009), para optar em utilizar uma malha refinada, objetivando assim tentar amenizar problemas da aproximação. Mas, observou-se que não ocorreu melhoras na representatividade das superfícies suaves, principalmente, quando as superfícies possuem curvaturas não constantes e acentuadas. Além do mais, por meio de estudos das seções anteriores para superfícies paramétricas, observou que a elevação do grau da aproximação não proporciona melhoras significativas na representação da continuidade do plano tangente. Diante deste fatos, pôde-se constatar que tanto a quantidade de elementos quanto o grau da aproximação não são parâmetros primordiais para proporcionar continuidade  $G^1$ , ou seja, apenas em condições extremas e em situações com quantidade de elementos surreais que poderia ter a constatação da afirmativa de Demkowicz et al. (2009), e mesmo assim sem garantias de que nesta situação venha ocorrer continuidade de planos tangentes.

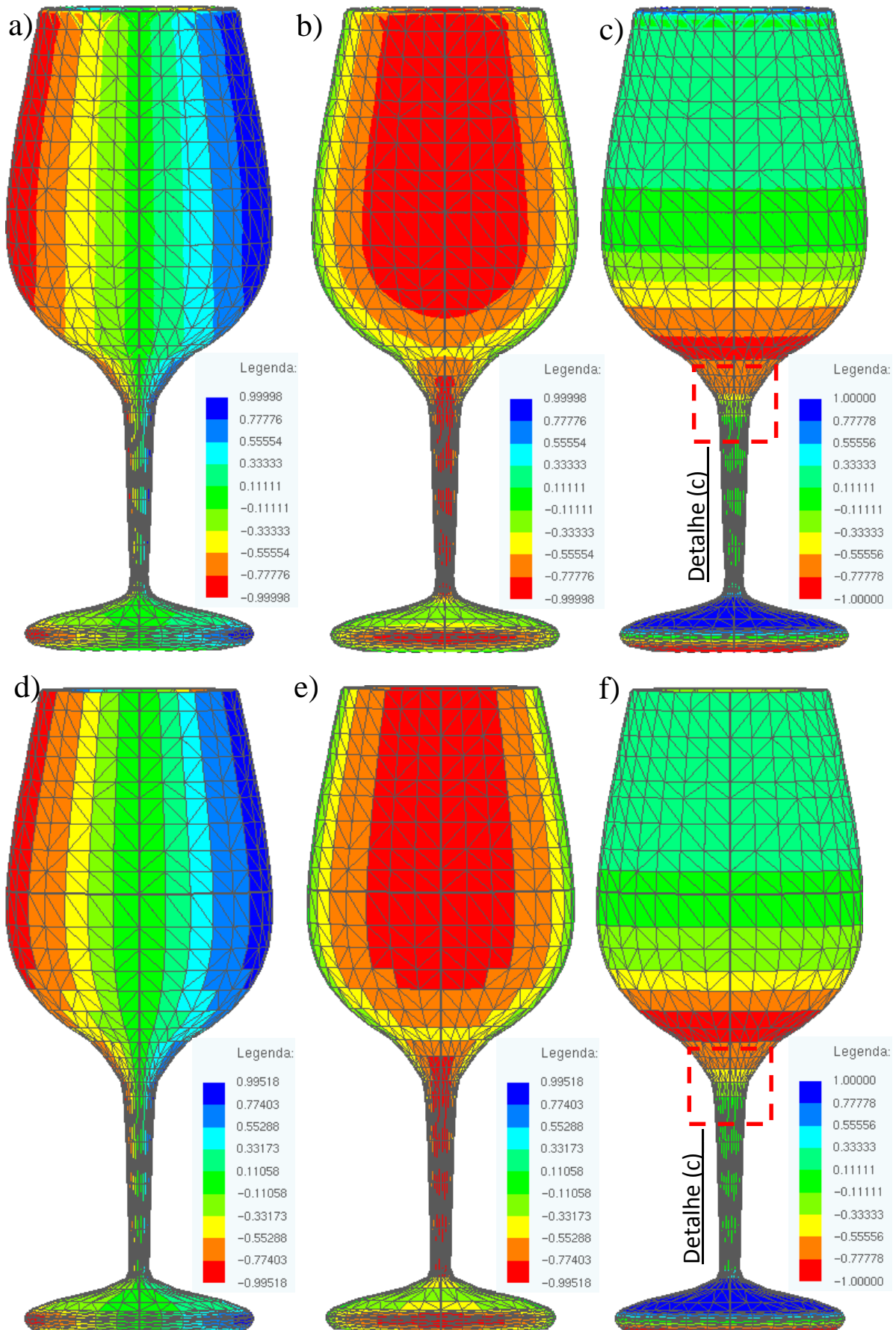


Figura 6.30 – Modelagem da geometria de uma taça (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.



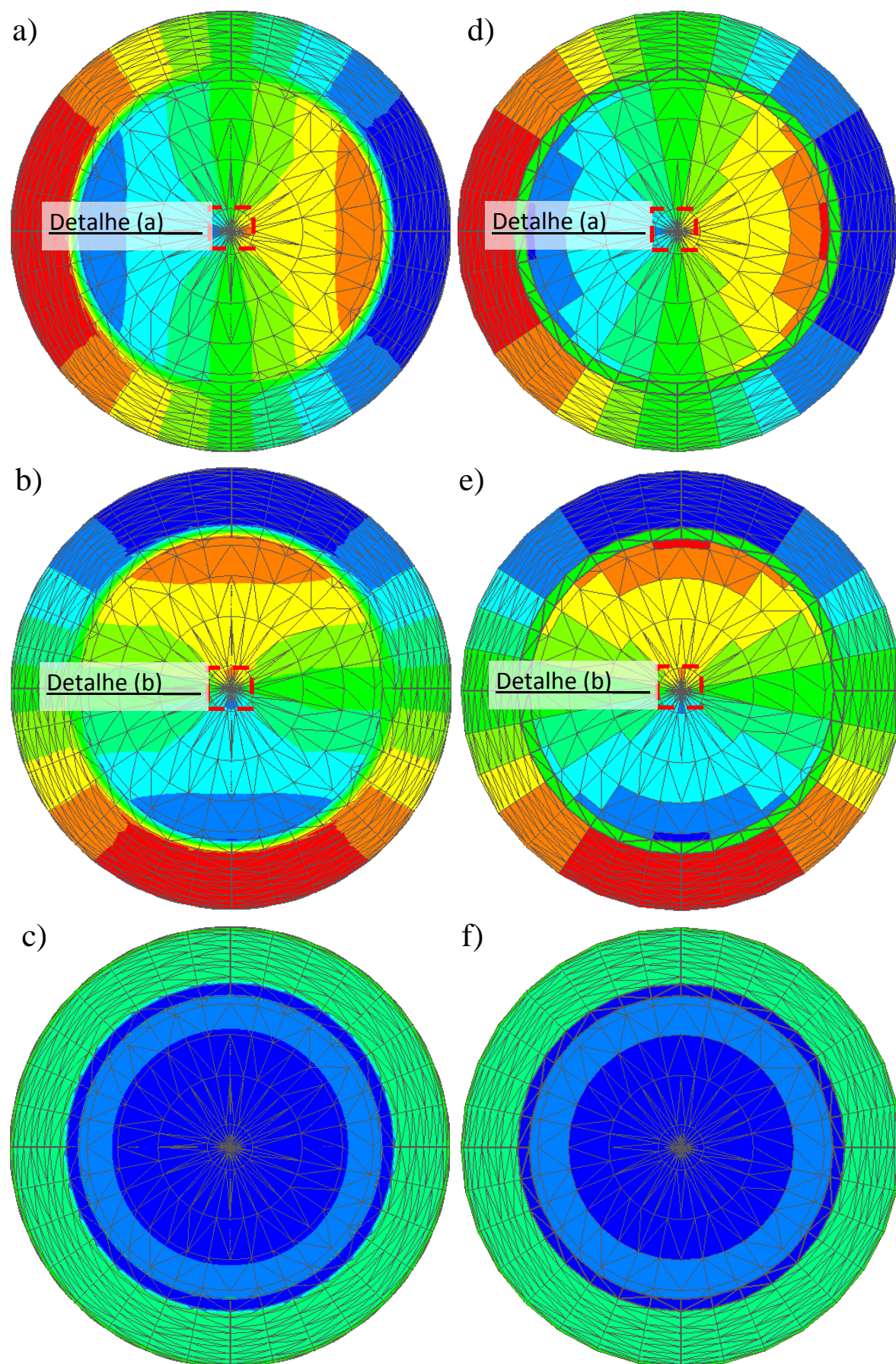
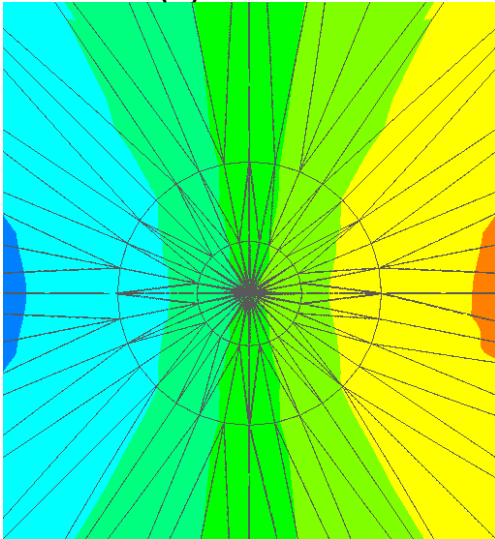
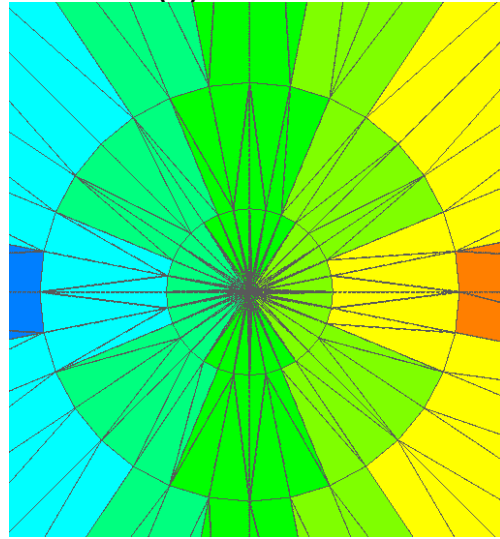


Figura 6.31 – Modelagem da geometria de uma Taça (vista superior). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.

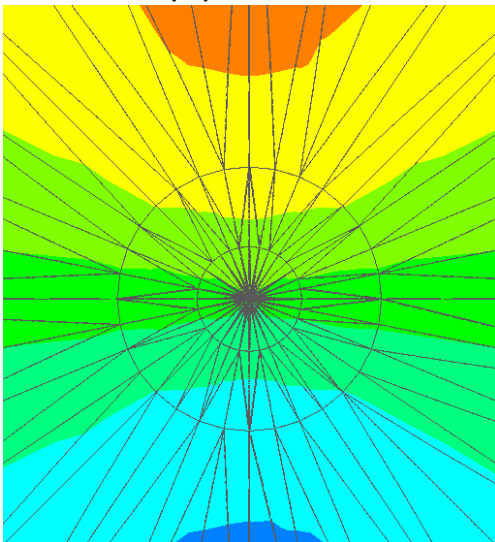
a) Detalhe (a)



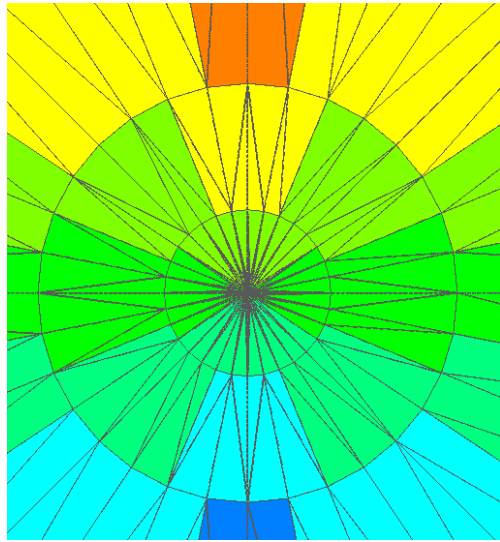
d) Detalhe (a)



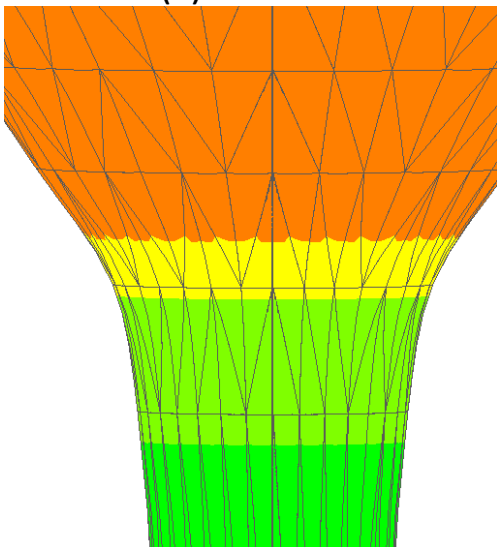
b) Detalhe (b)



e) Detalhe (b)



c) Detalhe (c)



f) Detalhe (c)

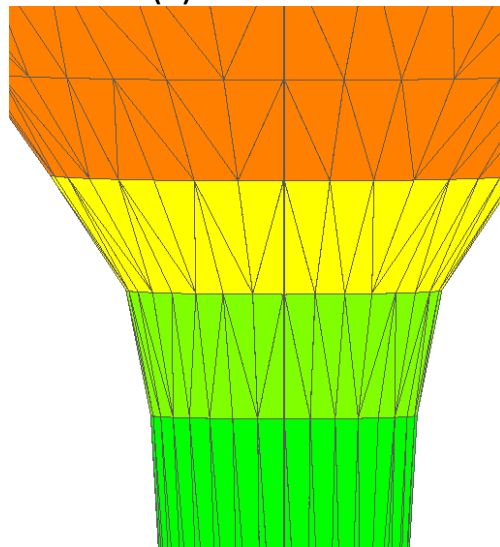


Figura 6.32 – Os gráficos (a) e (d) mostram os detalhes da vista superior para a componente X do vetor normal. Os gráficos (b) e (e) mostram os detalhes da vista superior para a componente Y do vetor normal. Os gráficos (c) e (f) mostram os detalhes da vista frontal para a componente Z do vetor normal. Gráficos (a)-(c) utiliza aproximação de Bézier  $G^1$  e (d)-(f) utilizam aproximação Polinomial (ou Proriol).

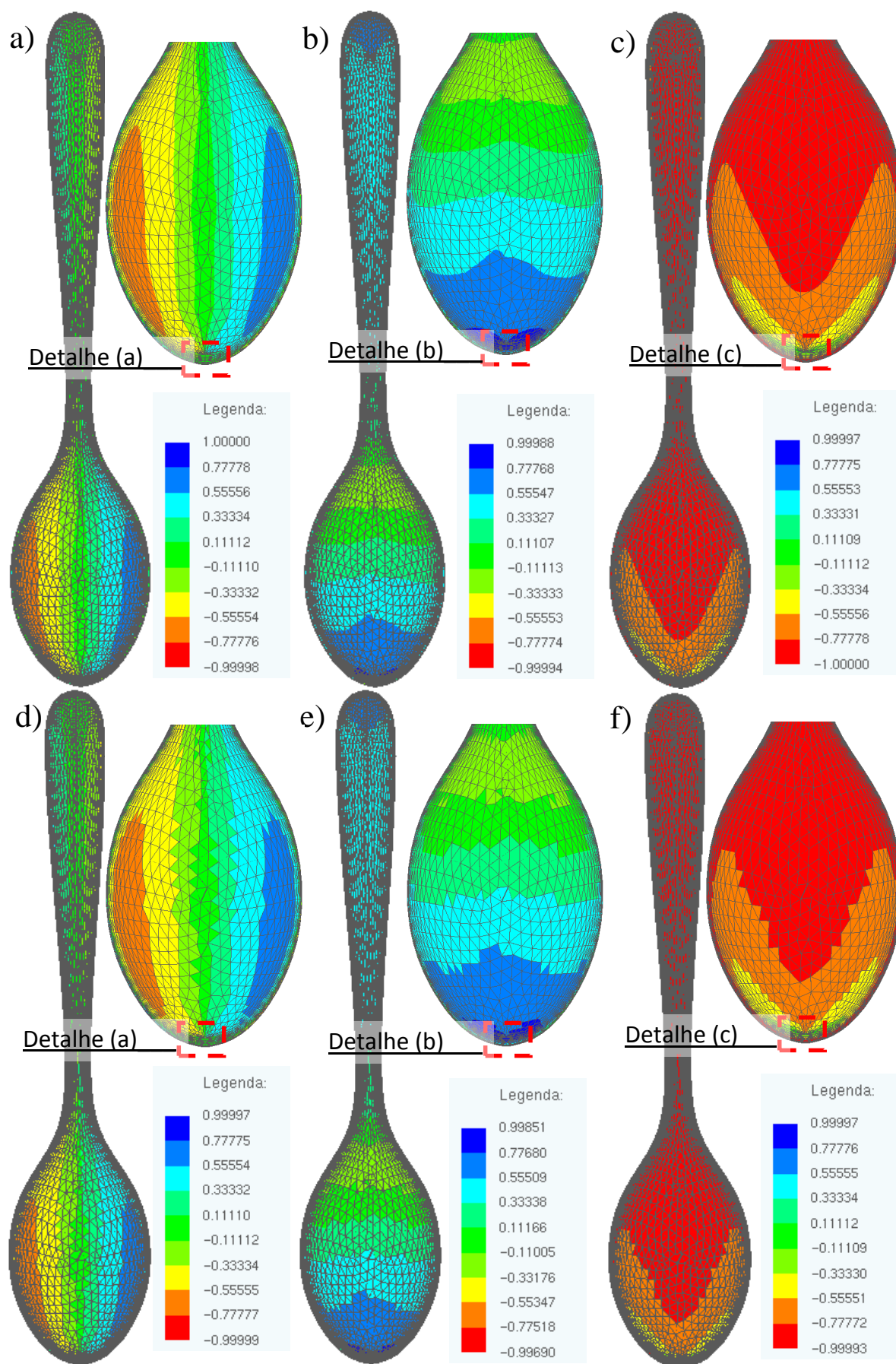
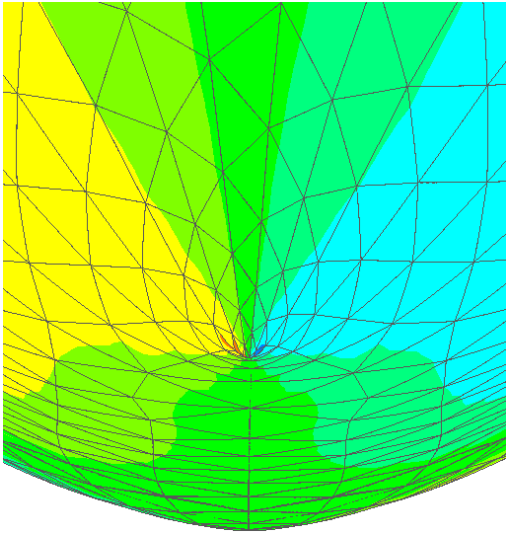
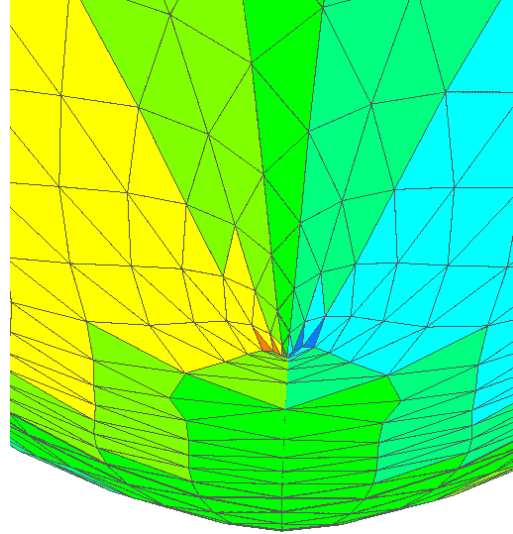


Figura 6.33 – Modelagem da geometria de uma colher (vista superior). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto por Proriol.

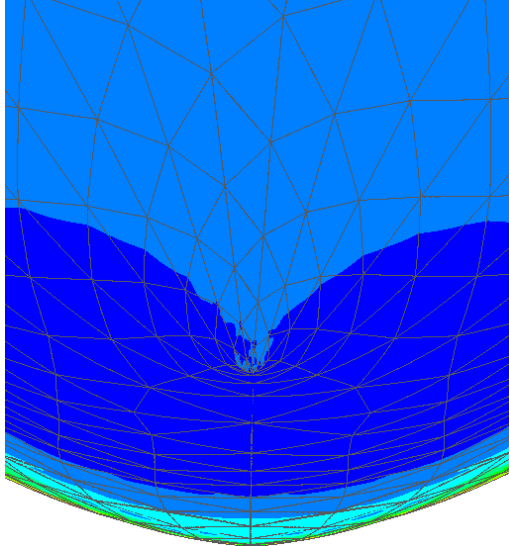
a) Detalhe (a)



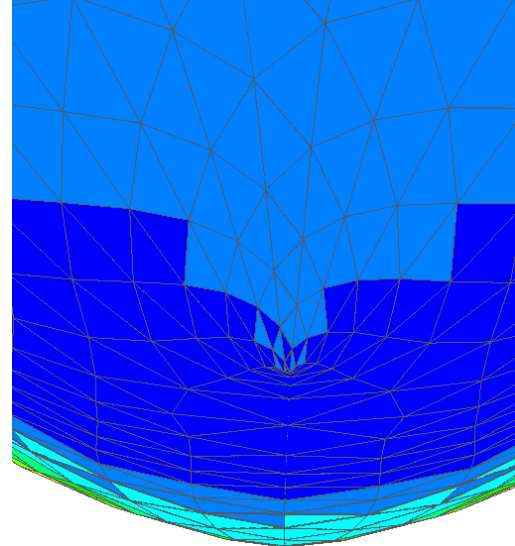
d) Detalhe (a)



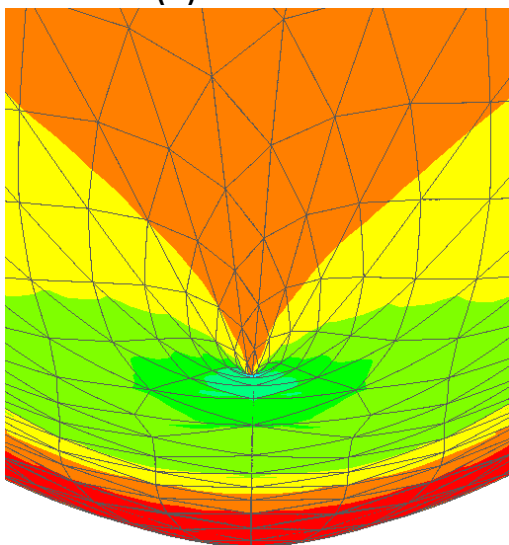
b) Detalhe (b)



e) Detalhe (b)



c) Detalhe (c)



f) Detalhe (c)

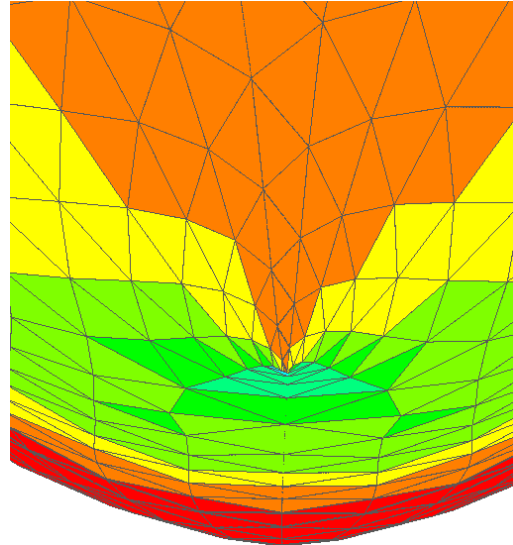


Figura 6.34 – Detalhes na construção da geometria de uma colier. Os gráficos (a)-(c) mostram os detalhes das componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram os detalhes das componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto por Proriel.

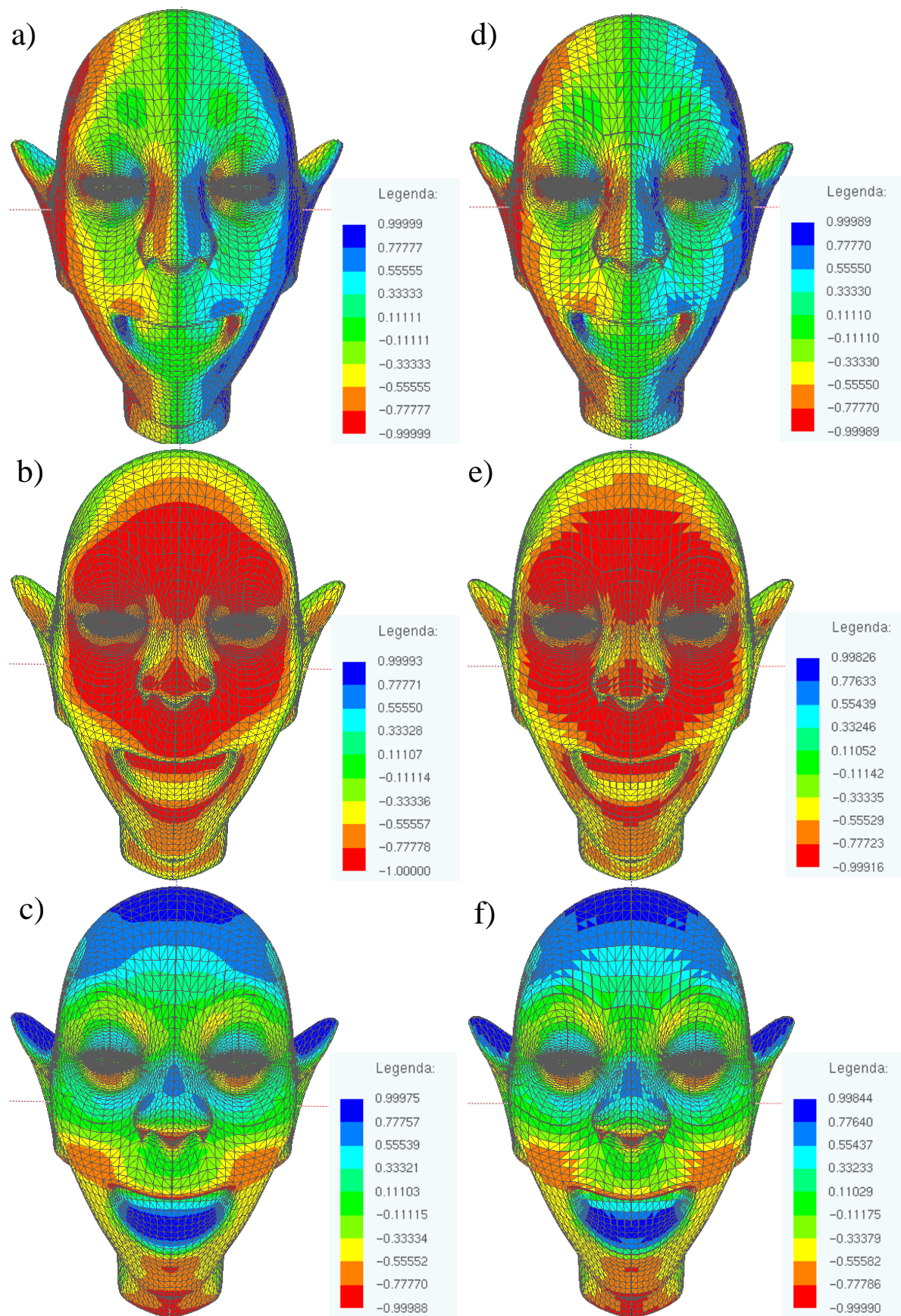


Figura 6.35 – Modelagem da geometria de uma cabeça (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.

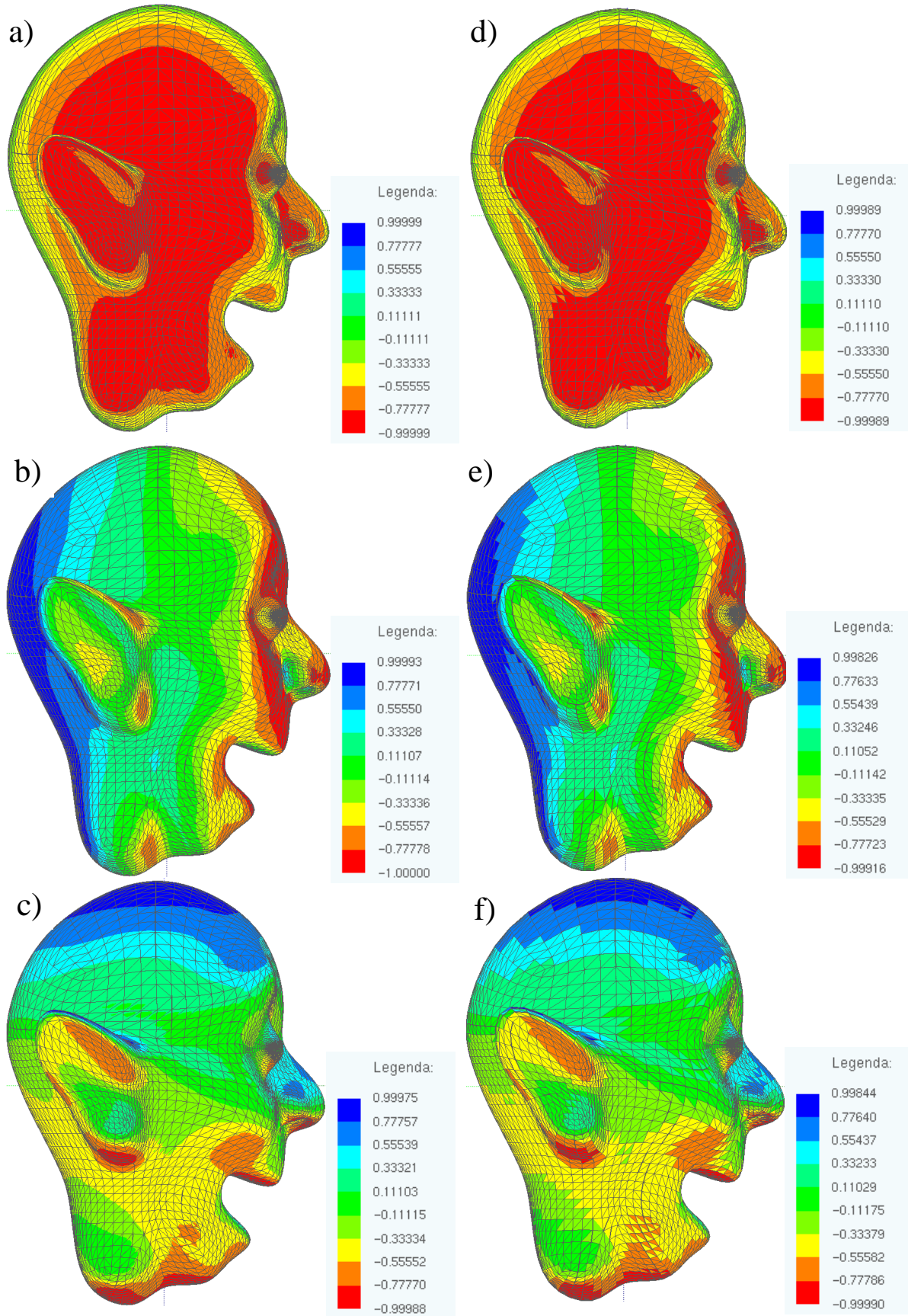


Figura 6.36 – Modelagem da geometria de uma cabeça (vista perfil). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriot.

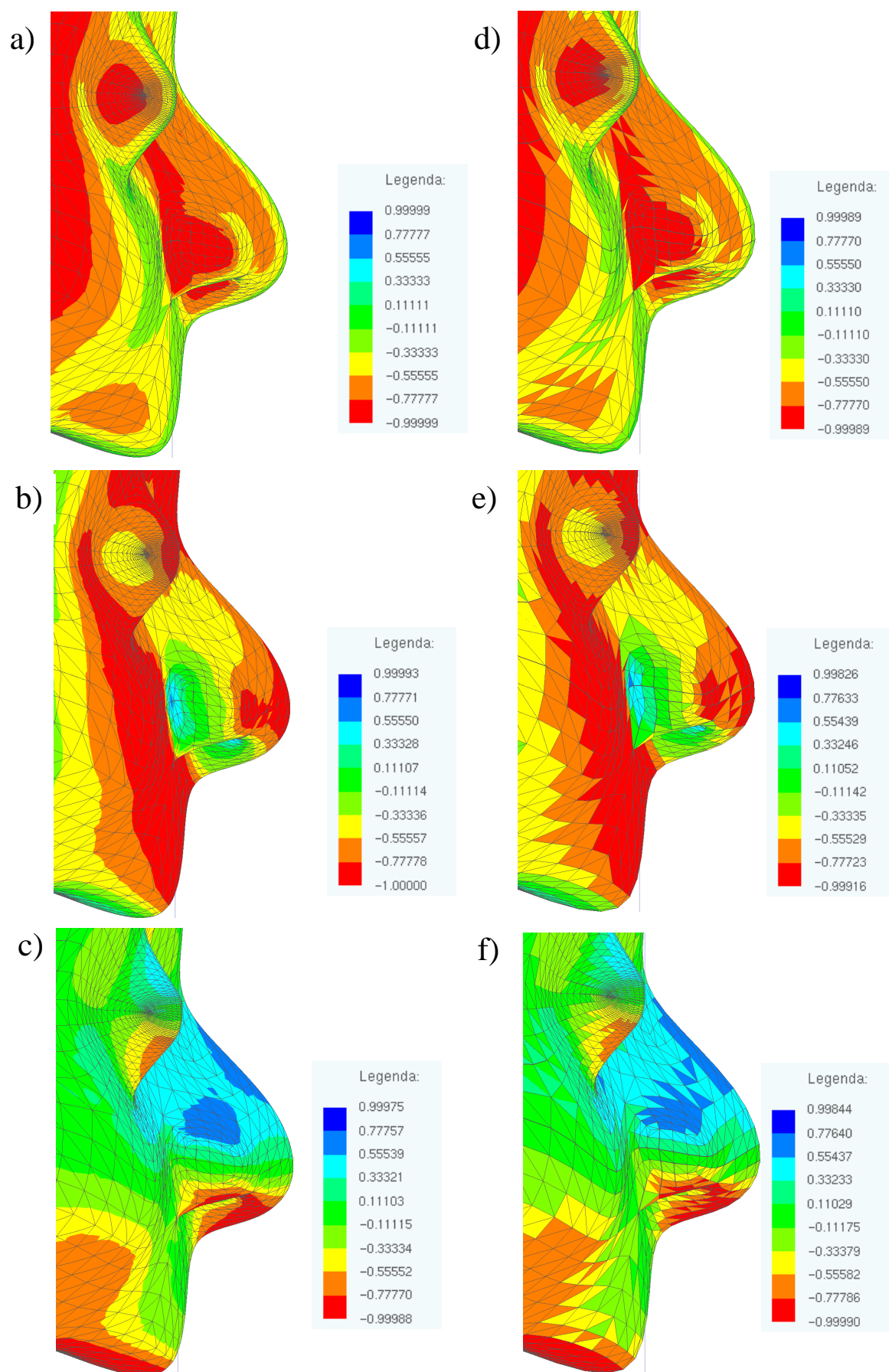


Figura 6.37 – Detalhe da modelagem do nariz e olho da cabeça (vista perfil). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.

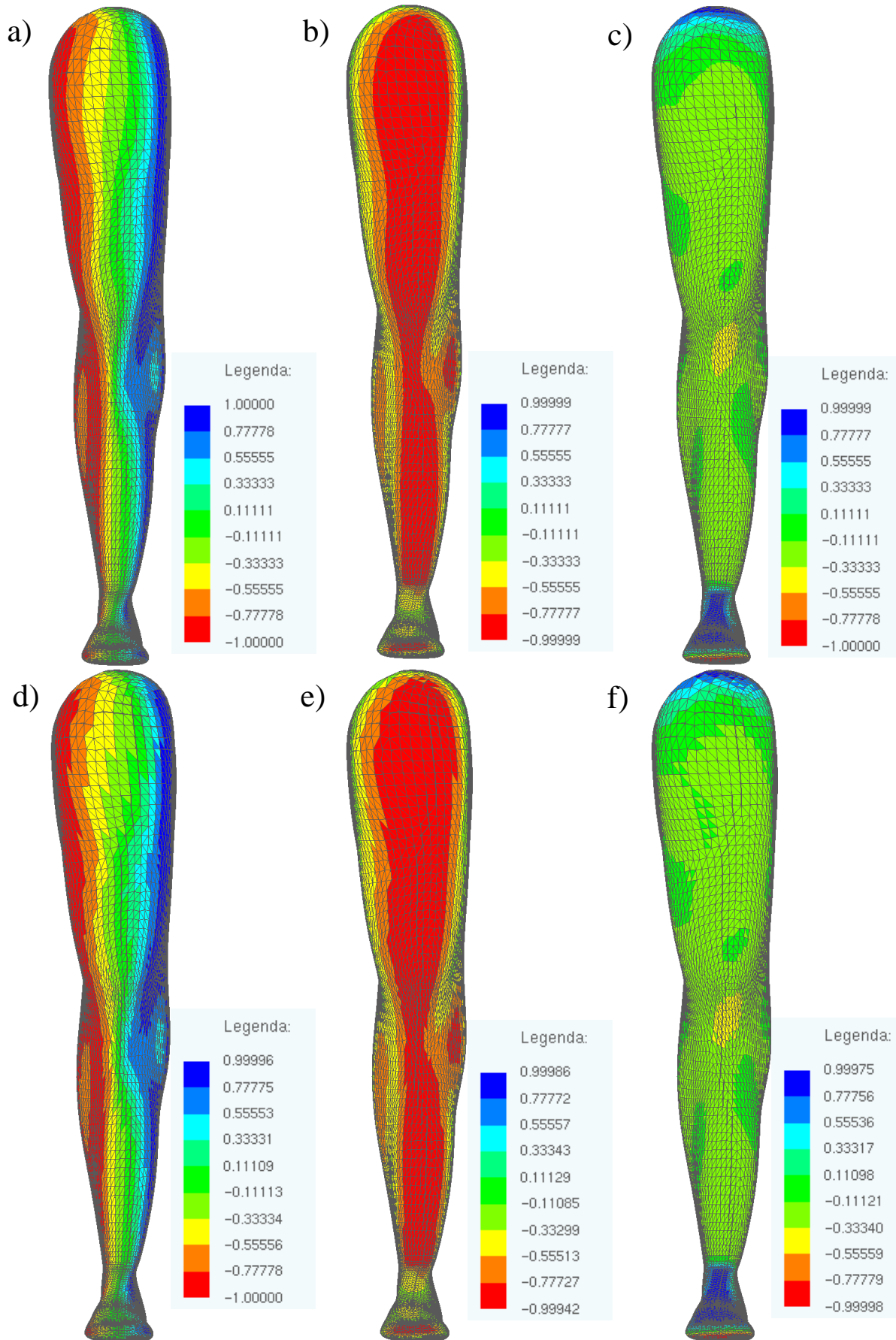


Figura 6.38 – Modelagem da geometria da perna (vista frontal). Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Prorol.



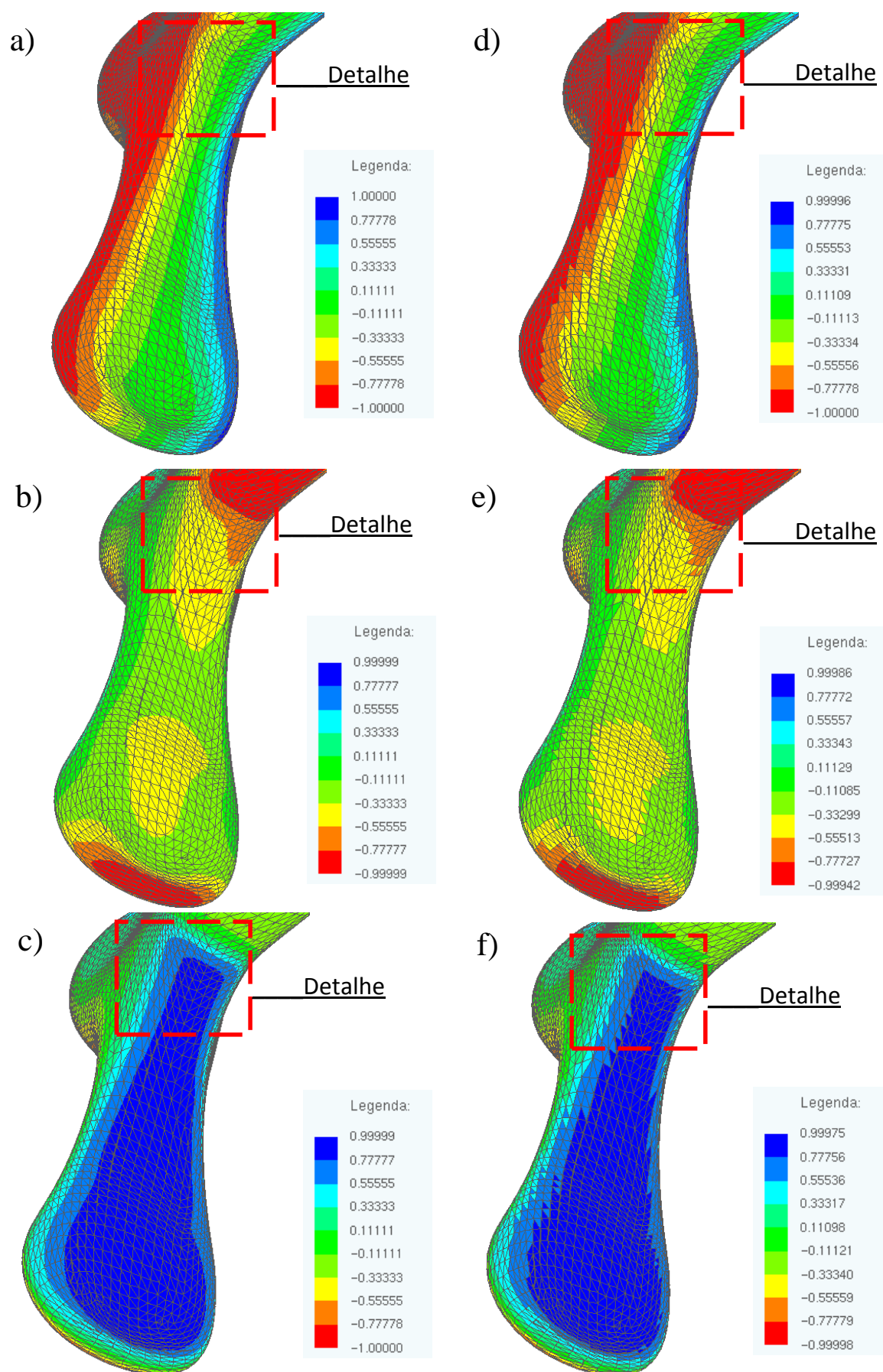


Figura 6.39 – Modelagem da geometria do pé. Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.

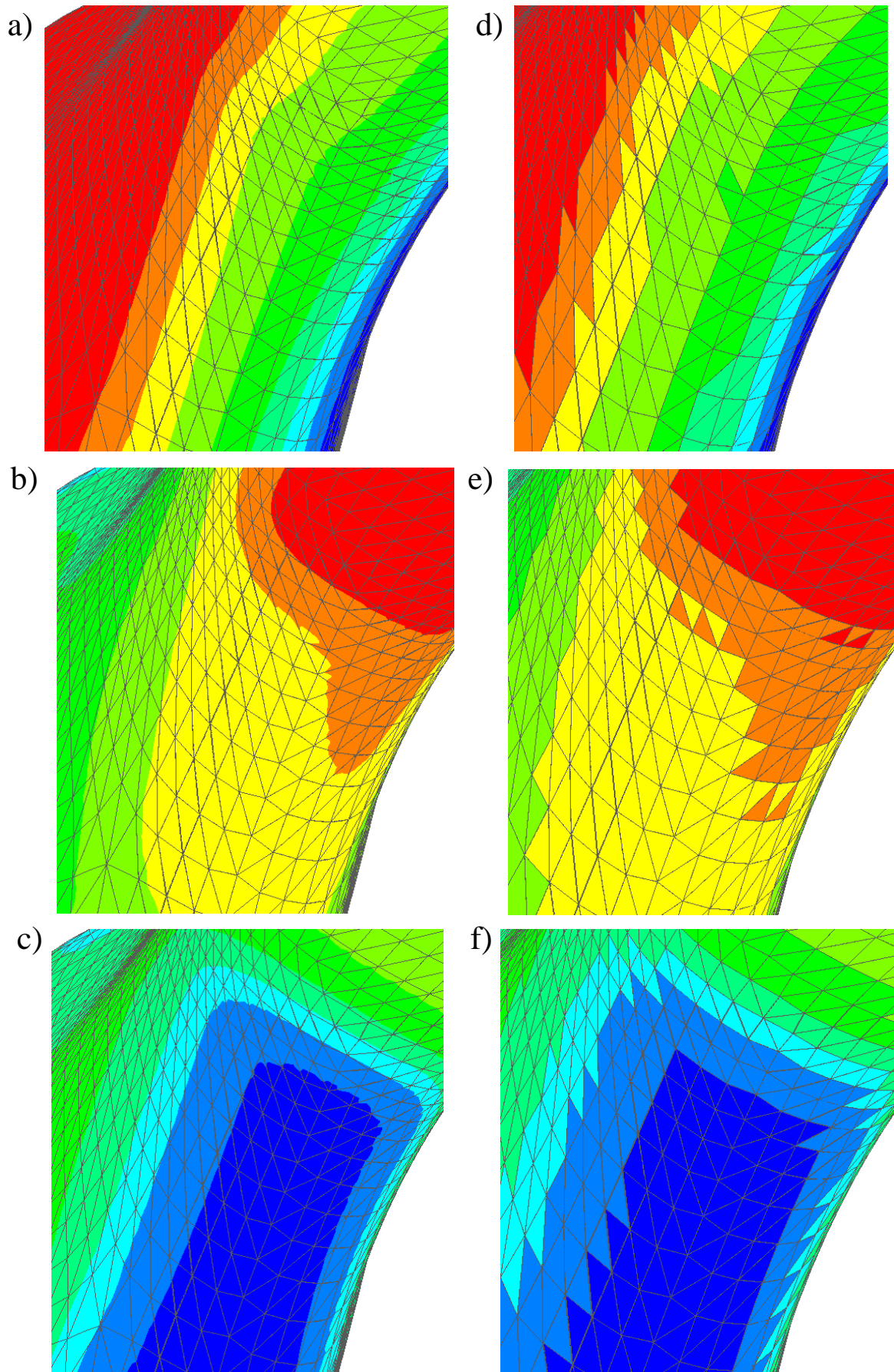


Figura 6.40 – Detalhe da modelagem da geometria do pé. Os gráficos (a)-(c) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas pela aproximação de Bézier  $G^1$ . Os gráficos (d)-(f) mostram as componentes X, Y e Z do vetor normal, respectivamente, obtidas tanto pela aproximação Polinomial quanto de Proriol.

Tabela 7 – Parâmetros estatísticos para o cosseno do ângulo entre as normais na interface dos elementos adjacentes obtidas pelas aproximações de Proriot (ou Polinomial) de grau 1 e pela aproximação de Bézier  $G^1$  para geometrias complexas: taça, colher, cabeça e perna.

Nº de Elemento	Ângulo entre normais de elementos adjacentes				
	Mínimo	Máximo	Médio	Desvio Padrão	
<b>TAÇA</b> 3680	<b>Proriot ou Polinomial</b> (Grau 1)	-0,1479621468	1,0000000000	0,9661788174	0,1303518410
	<b>Bézier <math>G^1</math></b>	0,9999999881	1,0000000000	0,9999999999	6,709128 ( $10^{-10}$ )
<b>COLHER</b> 7110	<b>Proriot ou Polinomial</b> (Grau 1)	-0,8199338785	0,9999999999	0,9877021372	5,292899 ( $10^{-2}$ )
	<b>Bézier <math>G^1</math></b>	0,9999999165	1,0000000000	0,9999999999	8,054794 ( $10^{-10}$ )
<b>CABEÇA</b> 12352	<b>Proriot ou Polinomial</b> (Grau 1)	0,0051921329	0,9999999999	0,9806132945	4,956943 ( $10^{-2}$ )
	<b>Bézier <math>G^1</math></b>	0,9999982713	1,0000000000	0,9999999999	6,425165 ( $10^{-9}$ )
<b>PERNA</b> 15552	<b>Proriot ou Polinomial</b> (Grau 1)	0,7420326199	0,9999999999	0,9943571583	1,023089 ( $10^{-2}$ )
	<b>Bézier <math>G^1</math></b>	0,9999999987	1,0000000000	1,0000000000	1,811079 ( $10^{-11}$ )



---

# Tratamento de singularidade e análise numérica de convergência

*Após apresentar a formulação do Método dos Elementos de Contorno com consideração da microestrutura (Capítulo 4) e de ter apresentado as aproximações de Proriorol, Polinomial (Capítulo 5) e por último as funções de Bézier com continuidade geométrica  $G^1$  (Capítulo 6), este capítulo apresenta a técnica de tratamento de singularidade para as soluções fundamentais do MEC clássico e, também, para a formulação não-clássica (micromecânica). São desenvolvidas as expressões explícita em série de Laurent dos núcleos das integrais singulares e hipersingulares do MEC clássico e não-clássico. E por último são analisadas as condições de convergência para os termos da série e verificado a precisão da técnica de tratamento de singularidade em elementos curvos regulares e distorcidos para as aproximações da geometria utilizado nos capítulos anteriores.*

## 7.1 Introdução

Historicamente, o método dos elementos de contorno tem utilizado discretizações de baixa ordem, geralmente de grau um, para modelar a geometria e as variáveis físicas de superfície. Recentemente, entretanto, tem-se aumentado o interesse na utilização de métodos de alta ordem, a fim de se obter melhor precisão aos resultados com menor aumento do esforço computacional. Diversas são as áreas de aplicações dos elementos de alta ordem tais como em acústica (CANINO; OTTUSH; STALZER, 1998), eletromagnetismo (RJASANOW; WEGGLER, 2013) e elasticidade (GAO; DAVIES, 2002). Uma das principais dificuldades na utilização do MEC de alta ordem é a falta de métodos eficazes para o desenvolvimento preciso das diversas integrais singulares sobre elementos curvos.

Uma fórmula unificada para o tratamento de integrais, calculadas em elementos curvos, com qualquer ordem de singularidade é proposto por Guiggiani et al. (1992), a qual é chamada de método de Guiggiani. Este método é embasado na técnica de subtração de singularidade que tem sido amplamente utilizada no MEC. Neste procedimento as

partes singulares são extraídas do integrando e tratadas analiticamente. As partes restantes são regulares e assim as regras de quadraturas Gaussianas convencionais podem ser empregadas ou, ainda, ser empregada outra quadratura especial que proporcione a redução no número de pontos necessários para alcançar a precisão desejada na integração numérica. Mais recentemente, Bremer e Gimbutas (2012) propõe um método em que a precisão no cálculo da integração numérica é da mesma ordem de grandeza da precisão do computador. O problema com esta quadratura especial proposta por Bremer e Gimbutas (2012) é que sua construção é complicada e demorada. Método de transformação de variáveis, também conhecido como cancelação de singularidade, elimina a singularidade do integrando pelo Jacobiano nulo no ponto campo através de uma modificação adequada de variáveis. Embora simples de implementar, é geralmente difícil de ser usado no tratamento de integrais hipersingulares.

Neste trabalho é utilizado como teoria base para o tratamento da singularidade o método de Guigiani (GUIGGIANI et al., 1992). Este tratamento de singularidade, assim como diversos outros tratamentos, tem sempre a transformação de coordenadas polar (TCP) como base comum (CARLEY, 2007; JOHNSTON; JOHNSTON, 2003; GAO, 2010). Esta transformação conserva a integral de superfície, entretanto as variáveis de integração estão presentes nas direções radial e angular.

Este capítulo está organizado como segue. Seção 7.2 apresenta a análise limite das equações integrais do MEC tanto na abordagem clássica quanto microestrutural, na seção 7.3 é realizado o tratamento das singularidades nas equações integrais (clássica e micromecânica), na seção 7.4 é realizado a expansão em série e a análise de convergência da solução fundamental para a formulação do MEC microestrutural tridimensional, em seguida, na seção 7.5 são explicitadas as expressões das série de Laurent e dos parâmetros  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$  para problemas elastostáticos para o MEC 3D e, por último, na seção 7.6 é realizada a verificação da eficiência do tratamento da singularidade aplicado a elemento curvos.

## 7.2 Análise limite das equações integrais do MEC

Nesta seção é apresentada, de forma sucinta, a análise limite para as equações integrais dos problemas elastostáticos 3D tanto pela abordagem clássica do MEC quanto pela abordagem considerando efeitos microestruturais.

O ponto de partida de qualquer análise do MEC é a equação integral, que para o caso de interesse deste trabalho são as equações integrais para problemas elastostáticos com abordagem da micromecânica e clássica. As equações do MEC clássico e da micromecânica, as quais são inicialmente válidas para quaisquer pontos dentro do domínio  $V$ , são analisadas quando os pontos estão no contorno. Para tanto é necessário considerar o limite quando  $x \rightarrow y_b \in S$ , ou seja, quando o ponto fonte,  $x \in V$ , tende ao contorno do

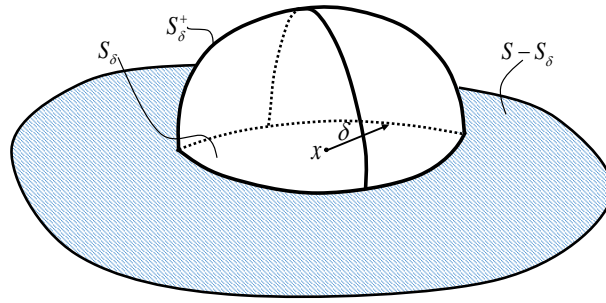


Figura 7.1 – Ponto fonte  $x$  localizado na superfície e contornado pela semiesfera

problemas.

Como corriqueiro, para fazer o ponto fonte tender ao contorno,  $S$ , o domínio do problema é aumentado no entorno do ponto fonte por uma região semiesférica, com contorno  $S_\delta^+$ , raio  $\delta$ , como ilustrado na Figura 7.1. O contorno do problema é agora representado por

$$S^A = (S - S_\delta) + S_\delta^+ \quad (7.1)$$

onde  $S_\delta$  é a porção do contorno original que foi removido. O comportamento das singularidades podem ser estudadas fazendo o limite quando  $\delta \rightarrow 0$  e portanto  $S^A \rightarrow S$ .

### 7.2.1 Formulação clássica

Diversas são as formas para obter as formulações do MEC clássico, tais como pelo teorema da reciprocidade, pelos conceitos dos resíduos ponderados ou pela abordagem variacional. A formulação do MEC clássico para problemas elastostáticos 3D com ponto fonte pertencente ao domínio  $V$  é dada por (ALIABADI, 2002):

$$u(x) = \int_S \mathbf{U}(x, y_b) \cdot t(y_b) dS_{y_b} - \int_S \mathbf{T}(x, y_b) \cdot u(y_b) dS_{y_b}, \quad (7.2)$$

$$\sigma(x) = \int_S \mathbf{D}^{312}(x, y_b) \cdot t(y_b) dS_{y_b} - \int_S \mathbf{S}^{312}(x, y_b) \cdot u(y_b) dS_{y_b}, \quad (7.3)$$

onde  $u$  e  $t$  são os deslocamentos e as forças de superfícies, respectivamente. Os pontos  $x$  e  $y_b$  representam os pontos fonte no domínio e os pontos campo no contorno, respectivamente. A Eq.(7.2) representa a equação integral para o ponto fonte pertencente ao domínio  $V$ , já a Eq.(7.3) é a identidade integral para tensão também calculada para ponto fonte no domínio.

As soluções fundamentais  $\mathbf{U}(x, y_b)$ ,  $\mathbf{T}(x, y_b)$ ,  $\mathbf{D}(x, y_b)$  e  $\mathbf{S}(x, y_b)$  são, respectivamente:

$$\mathbf{U}(x, y_b) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}], \quad (7.4)$$

$$\mathbf{T}(x, y_b) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{r}) [(1-2\nu)\mathbf{I} + 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}] + (1-2\nu)(\mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n})\}, \quad (7.5)$$

$$\mathbf{D}^{312}(x, y_b) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} - (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})] + 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}\}, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{312}(x, y_b) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^3} \{3(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}) [(1-2\nu)\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \nu[(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{213} + (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{312}] \\ & - 5\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}] + 3\nu(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}) + (1-2\nu)[3\mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \\ & + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n})^{213} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n})\mathbf{n}^{312}] - (1-4\nu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{I}\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Uma vez que as equações integrais de contorno para deslocamento (Equação 7.2) e para tensão (Equação 7.3) são válidas para qualquer ponto fonte dentro do domínio  $V$ , o processo limite é realizado por meio da consideração da região semiesférica no entorno do ponto fonte  $x$ . Portanto quando  $\delta \rightarrow 0$  (ou  $S^A \rightarrow S$ ) as Eq.(7.2) e Eq.(7.3) tornam, respectivamente (ALIABADI, 2002):

$$\mathbf{C}(x) \cdot \mathbf{u}(x) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\delta} [\mathbf{T}(x, y_b) \cdot \mathbf{u}(y_b) - \mathbf{U}(x, y_b) \cdot \mathbf{t}(y_b)] dS \right\} = 0, \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}(x) : \sigma(x) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\delta} [\mathbf{S}^{312}(x, y_b) \cdot u(y_b) - \mathbf{D}^{312}(x, y_b) \cdot t(y_b)] dS + \right. \\ \left. u(x) \cdot \frac{\mathbf{B}^{312}(x)}{\delta} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Onde os tensores  $\mathbf{C}(x)$ ,  $\bar{\mathbf{C}}(x)$  e  $\mathbf{B}^{312}(x)$  possuem componentes (limitadas) que dependem somente da geometria local de  $S$  em  $x$ . Se  $x$  é um ponto do contorno suave e  $S_\delta$  tem a forma esférica, o termo livre  $\mathbf{C}(x)$  e  $\bar{\mathbf{C}}(x)$  na Eq.(7.8) e Eq.(7.9) são, respectivamente, reduzidos a  $0, 5\mathbf{I}$  e  $0, 5\bar{\mathbf{I}} (= 0, 5\delta_{ij}\delta_{th})$ .

O nível de singularidade dos núcleos das equações integrais de contorno pode ser definido como (GAO, 2010)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta \leq 0, & \text{regular} \\ 0 < \beta \leq D-1 & \text{fracamentesingular} \\ \beta = D-1 & \text{Fortementesingular} \\ \beta = D & \text{hypersingular} \\ \beta > D & \text{supersingular} \end{array} \right. \quad (7.10)$$

onde  $D$  é a dimensão cartesiana (neste trabalho  $D = 3$ ) e  $\beta$  é o expoente que acompanha a distância entre o ponto campo e o ponto fonte,  $(f(y, x)/r^\beta)$ . Assim, de acordo com a Eq.(7.10), a Eq.(7.4) é classificada como fracamente singular, as Eq.(7.5) e Eq.(7.6) são fortemente singular e a Eq.(7.7) hypersingular.



## 7.2.2 Formulação microestrutural

Ni item anterior foram apresentadas as equações integrais, tanto de deslocamento quanto de tensão, para a análise limite, ou seja, quando o ponto fonte (pertencente ao domínio) tende à superfície (ou contorno) do problema elastostático 3D clássico. Nesta seção é apresentada as equações integrais para a formulação do MEC considerando efeito microestrutural quando a análise limite é realizada.

A análise limite é inicialmente feita para cada termo da Eq.(4.71) com consideração de superfícies suaves e ausência da força de corpo, tornando assim a análise limitada à equação:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(x) \cdot \bar{u}(x) + \int_S \left\{ \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) - \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ = \int_S \left[ \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) - \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) \right] dS_{y_b}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

No limite, quando  $\delta \rightarrow 0$ , as integrais são calculadas da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_S \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) dS_{y_b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_\delta} \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) dS_{y_b} + \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) dS_{y_b}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \int_S \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_\delta} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} + \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Já as equações

$$\int_S \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) dS_{y_b}$$

e

$$\int_S \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) dS_{y_b}$$

são regulares e não há necessidade de serem calculadas suprimindo porções da superfície  $S$ .

A partir da expansão em série de potência para as soluções fundamentais (ver seção 7.4) é possível constatar que os núcleos  $\tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)$  e  $\tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)$  possuem singularidade de ordem  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$ , respectivamente, ou seja, segundo a Eq.(7.10) o núcleo  $\tilde{R}^*$  é fracamente singular, já o núcleo  $\tilde{P}^*$  é fortemente singular.

Para o cálculo da última equação integral, tanto da Eq.(7.12) quanto da Eq.(7.13), é feito uso da representação em coordenadas esféricas, segundo Figura 7.1, para os seguintes parâmetros pertencentes aos núcleos  $\tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)$  e  $\tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)$

$$\mathbf{r} = \varepsilon \cdot \cos \phi \cdot \text{sen} \theta \cdot \hat{i} + \varepsilon \cdot \text{sen} \phi \cdot \text{sen} \theta \cdot \hat{j} + \varepsilon \cdot \cos \theta \cdot \hat{k}, \quad (7.14)$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}} = \cos \phi \cdot \text{sen} \theta \cdot \hat{i} + \text{sen} \phi \cdot \text{sen} \theta \cdot \hat{j} + \cos \theta \cdot \hat{k}, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1, \quad (7.16)$$

$$dS_{y_b} = \varepsilon^2 \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi. \quad (7.17)$$

Assim, tem-se

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) dS_{y_b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{F}}^*(\theta, \phi) \cdot q(y_b) d\theta d\phi = 0$$

e com o auxílio do primeiro termo da expansão em serie de Taylor do deslocamento e da continuidade de Hölder ( $|u(y_b) - u(x)| \leq Cr^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ ) chega-se a

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot [\bar{u}(y_b) - \bar{u}(x)] dS_{y_b} + \\ &\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) dS_{y_b} \bar{u}(x) \end{aligned} \quad (7.18)$$

com

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot [\bar{u}(y_b) - \bar{u}(x)] dS_{y_b} = 0, \quad (7.19)$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) dS_{y_b} \bar{u}(x) = \alpha(x) \cdot \bar{u}(x). \quad (7.20)$$

Com o auxílio das Eq<sup>s</sup>.(7.12), (7.13) e Eq<sup>s</sup>.(7.18-7.20), a Eq.(7.11) se torna

$$\begin{aligned} \tilde{c}(x) \cdot \bar{u}(x) + \int_{S-S_\delta} \left\{ \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b) \cdot \bar{u}(y_b) + \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b) \cdot q(y_b) \right\} dS_{y_b} \\ = \int_S \left\{ \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y_b) \cdot P(y_b) + \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b) \cdot R(y_b) \right\} dS_{y_b}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Como será mostrado na seção 7.4, os núcleos  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y_b)}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b)}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)}{\partial n_x}$  e  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial n_x}$  possuem singularidade de ordem  $O(1)$ ,  $O(r^{-1})$ ,  $O(r^{-2})$  e  $O(r^{-3})$ , respectivamente. Fazendo uso das Eq<sup>s</sup>.(7.14-7.17), da expansão em série de Taylor dos termos  $\bar{u}(y_b)$ ,  $q(y_b)$ ,  $R(y_b)$  e da continuidade de Hölder (MUSKHELISHVILI, 2008), tem-se os valores das integrais

$$\int_S \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot R(y_b) dS_{y_b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_\delta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot R(y_b) dS_{y_b}, \quad (7.22)$$

$$\int_S \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot q(y_b) dS_{y_b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_\delta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot q(y_b) dS_{y_b} + \tilde{\gamma} \cdot q(x), \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\delta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} + u(x) \cdot \frac{\tilde{b}}{\delta} \right] + \\ &\tilde{B} \cdot q(x). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Com

$$\tilde{\gamma} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} dS_{y_b},$$

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial x} (y_b - x) dS_{y_b}, \\ \tilde{b} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta^+} \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} dS_{y_b}.\end{aligned}$$

Fazendo uso das Eq.<sup>s</sup>.(7.22-7.24), a Eq.(4.73) fica

$$\begin{aligned}\tilde{c}(x) \cdot \frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial n_x} &= \int_S \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot P(y_b) dS_{y_b} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S-S_\delta} \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot R(y_b) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot q(y_b) \right] - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_\delta} \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y_b)}{\partial n_x} \cdot \bar{u}(y_b) dS_{y_b} - u(x) \cdot \frac{\tilde{b}}{\delta} \right], \quad (7.25)\end{aligned}$$

onde  $\tilde{c}(x) = \tilde{I} + \tilde{B} + \tilde{\gamma} = \frac{1}{2}\tilde{I}$  para ponto fonte sobre o contorno suave.

### 7.3 Tratamento das singularidades nas equações integrais do MEC

Neste item é mostrado, em termos gerais, o algoritmo geral proposto por Guiggiani et al. (1992) para o tratamento de singularidades. Como aplicação deste algoritmo geral, nesta seção este é aplicado às singularidades presentes nas Eqs.(7.8) e (7.9), para formulação clássica, e nas Eqs.(7.21) e Eq.(7.25) para formulação microestrutural. No entanto, por generalidade, é realizada a análise da equação hipersingular, pois as demais são obtidas como caso particular desta. Sendo assim, tem-se como objetivo a evolução da quantidade limitada, presente na Eq.(7.9) (ou de forma similar Eq.(7.25)),

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\delta} \left[ \mathbf{S}^{312}(x, y_b) \cdot \mathbf{u}(y_b) - \mathbf{D}^{312}(x, y_b) \cdot \mathbf{t}(y_b) \right] dS + \mathbf{u}(x) \cdot \frac{\mathbf{B}^{312}(x)}{\delta} \right\}, \quad (7.26)$$

onde  $\mathbf{S}^{312} = O(r^{-3})$  e  $\mathbf{D}^{312} = O(r^{-2})$  e, consistentemente com o cálculo de  $B^{312}(x)$  e  $\tilde{C}(x)$ , a região  $S_\delta$  ao redor de  $x$  em  $S$  é dada por

$$S_\delta = \{y_b \in S \mid |y_b - x| \leq \delta\}, \quad (7.27)$$

O cálculo da equação integral (7.26) pode ser dividida das equações

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ - \int_{S-S_\delta} \mathbf{D}^{312}(x, y_b) \cdot \mathbf{t}(y_b) dS \right\}. \quad (7.28)$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\delta} \mathbf{S}^{312}(x, y_b) \cdot \mathbf{u}(y_b) dS + \mathbf{u}(x) \cdot \frac{\mathbf{B}^{312}(x)}{\delta} \right\}. \quad (7.29)$$

A Eq.(7.28) é fortemente singular e o seu cálculo pode ser obtido como particularização da evolução da integral da Eq.(7.29). Desta forma, nesta seção é apresentado o algoritmo geral para as equações integrais hipersingulares (formulação clássica) e generalizada para os demais tipos de singularidades e para a formulação microestrutural.

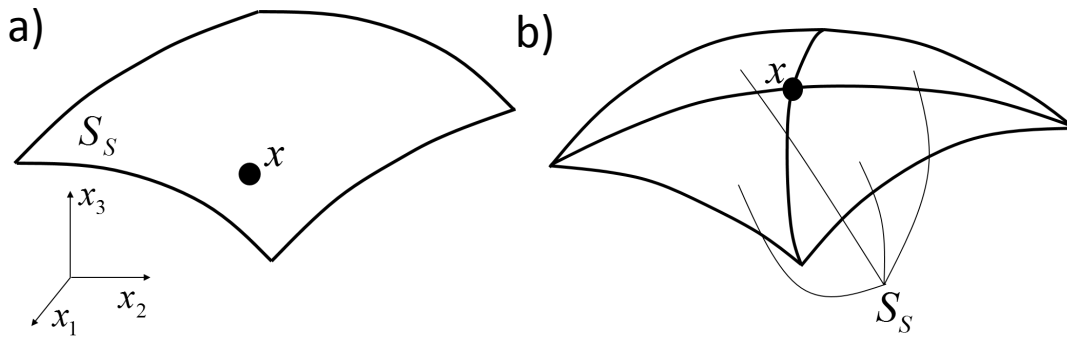


Figura 7.2 – Ponto fonte (a) em um elemento e (b) conectado por vários elementos

Como usual, em cada elemento do contorno, a variável de campo é representada pela função de forma  $N^a(\xi_1, \xi_2)$  de coordenadas local  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , assim, por exemplo,  $\mathbf{u} = \sum_{a=1}^{A(e)} N^a[\xi(y)] u_e^a$ , com  $A(e)$  sendo a quantidade de nós por cada elemento. Portanto, a integral da Eq.(7.29) pode ser reescrita

$$II = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_S - S_\delta} \mathbf{S}^{312}(x, y_b) N^a(\xi_1, \xi_2) dS + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\}, \quad (7.30)$$

onde  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  é a imagem no plano paramétrico do ponto de colocação  $x$  e  $S_S$  é a região, ou elemento, que possui o ponto fonte como mostra a Figura 7.2.

Por meio da representação usual para a geometria em termos das funções de formas e coordenadas nodais o elemento de contorno  $S_S$  é mapeado em uma região  $R_S$  de forma padrão no plano paramétrico (geralmente, um quadrado, ou um triângulo). Por conseguinte, a vizinhança  $S_\delta$  de  $x$  no espaço tridimensional é mapeado na vizinhança  $\sigma_\delta$  de  $\eta$  no plano paramétrico (Figura 7.3). É importante observar que, em geral,  $\sigma_\delta$  de  $\eta$  não é necessariamente um círculo. No plano paramétrico de coordenadas intrínseca (adimensional), a expressão da Eq.(7.30) torna

$$II = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_S - \sigma_\delta} \mathbf{S}^{312}(x, y_b) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{\mathbf{B}^{312}(x)}{\delta} \right\}, \quad (7.31)$$

onde  $dS = J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$ .

Seguindo a prática comum do MEC, no plano paramétrico, são definidas as coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  centrada em  $(\eta_1, \eta_2)$  que é a imagem de  $x$  (Figura 7.4)

$$\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \rho \cos \theta \\ \xi_2 = \eta_2 + \rho \sin \theta \end{cases}, \quad (7.32)$$

assim  $d\xi_1 d\xi_2 = \rho d\rho d\theta$ . Desta forma, a partir da Eq.(7.31) e Eq.(7.32) tem-se

$$II = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\}, \quad (7.33)$$

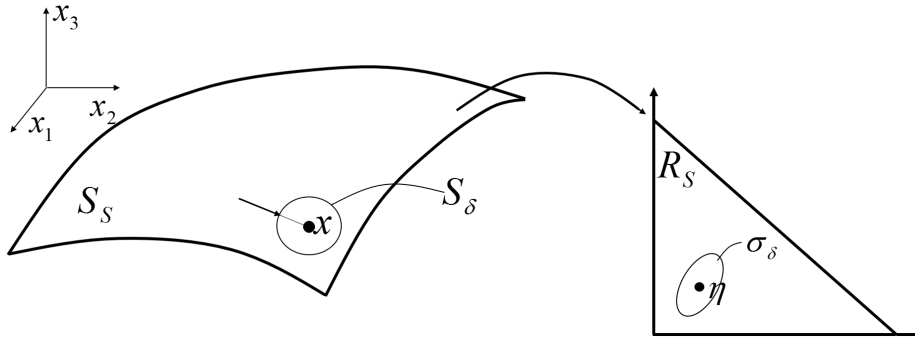


Figura 7.3 – Imagem no plano paramétrico do elemento de contorno e da região subtraída

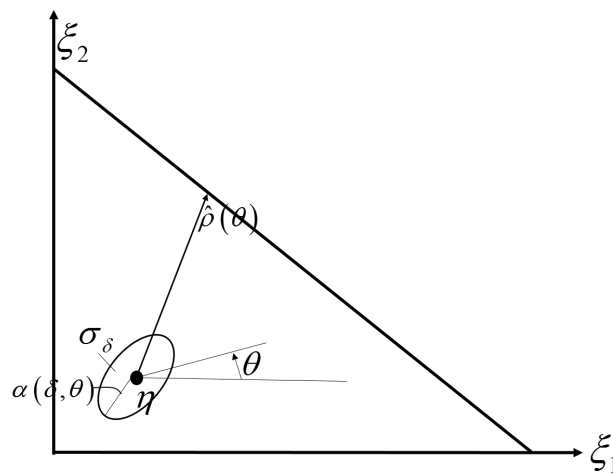


Figura 7.4 – Plano paramétrico em coordenadas polar

onde  $F(\rho, \theta) = S^{312}(x, y_b) N^a(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) \rho = O(\rho^{-2})$  é o integrando hipersingular,  $\rho = \alpha(\delta, \theta)$  é a equação em coordenada polar de  $\sigma_\delta$  (ver Figura 7.4), e  $\rho = \hat{\rho}(\theta)$  é a equação em coordenadas polar do contorno externo do domínio paramétrico  $R_S$  (ver Figura 7.4).

Fazendo a análise da função singular  $F(\rho, \theta)$ , a qual possui singularidade de ordem  $O(\rho^{-2})$ , pode esta função ser expandida em série de Laurent com respeito a  $\rho$  na forma

$$F(\rho, \theta) = \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} + O(1). \quad (7.34)$$

Observa-se na Eq.(7.34) que tanto  $F_{-1}$  quanto  $F_{-2}$  são apenas funções reais de  $\theta$ . A dependência em  $\theta$  é crucial para a expansão na Eq.(7.34) representar o comportamento assintótico de  $F(\rho, \theta)$ , quando  $\rho \rightarrow 0$ . Além da expansão (7.34) ser um dos ingredientes da análise de Guiggiani et al. (1992), também é de grande relevância a expansão em série de Taylor para  $\alpha(\delta, \theta)$ , com respeito a  $\delta$

$$\rho = \alpha(\delta, \theta) = \delta\beta(\theta) + \delta^2\gamma(\theta) + O(\delta^3). \quad (7.35)$$

Nota-se que, em geral,  $\rho = \delta\beta(\theta)$  é a equação de uma elipse (ver Figura 7.4).

Uma forma sistemática de obter as expressões explícitas de  $F_{-2}(\theta)$ ,  $F_{-1}(\theta)$ ,  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$ , tanto para formulação clássica quanto microestrutural do MEC, é apresentada na próxima seção.

Para realizar o tratamento de singularidade da Eq.(7.33) é adicionado e subtraído os dois primeiros termos da expansão em série Eq.(7.34), obtendo assim

$$\begin{aligned} II &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ F(\rho, \theta) - \left( \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \right. \\ &\left. \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\} \\ &= II_0 + II_{-1} + II_{-2}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Cada termo  $II_0$ ,  $II_{-1}$  e  $II_{-2}$  na Eq.(7.36) é agora analisado separadamente.

De acordo com a Eq.(7.34), o integrando do termo  $II_0$  é regular. Portanto, o limite é direto e torna-se

$$II_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ F(\rho, \theta) - \left( \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta. \quad (7.37)$$

Esta integral dupla pode ser desenvolvida pela regra de quadratura padrão.

Analisando a integral  $II_{-1}$  têm-se

$$\begin{aligned} II_{-1} &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} d\rho d\theta \\ &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) [\ln |\hat{\rho}(\theta)| - \ln |\alpha(\delta, \theta)|] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln |\hat{\rho}(\theta)| d\theta - \lim_{\delta \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln |\delta \beta(\theta)| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta - \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[ (\ln \delta) \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) d\theta \right] \\ &= \int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta. \end{aligned} \quad (7.38)$$

A Eq.(7.38) mostra que  $II_{-1}$  é equivalente a uma simples integral unidimensional regular. Para o cálculo da integral acima (Eq.(7.38)) foi utilizado a propriedade  $\int_0^{2\pi} F_{-1}(\theta) d\theta = 0$ , a qual é válida quando  $F_{-1}(\theta) = -F_{-1}(\theta + \pi)$ . Contudo, o fato que a integral acima deva desaparecer não necessariamente precisa ser explicitado para cada caso. Na verdade, se a integral de 0 a  $2\pi$  para  $F_{-1}(\theta)$  não for nula, o último limite na Eq.(7.38) seria ilimitado, o que conduz a uma contradição, uma vez que  $II$  tem sido mostrado ser limitado (decorre da validade da segunda identidade de Green em  $\Omega_\delta$ , em que tudo aqui

é desenvolvido). Um tratamento semelhante é aplicado a  $II_{-2}$ , tal que,

$$\begin{aligned}
 II_{-2} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\delta, \theta)}^{\hat{\rho}(\theta)} \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} d\rho d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right] \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[ -\frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} + \frac{1}{\alpha(\delta, \theta)} \right] d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\delta \beta(\theta)} \left( 1 - \delta \frac{\gamma(\theta)}{\beta(\theta)} \right) d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\} - \\
 &\quad \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\hat{\rho}(\theta)} d\theta \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\delta} \right) \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{F_{-2}(\theta)}{\beta(\theta)} d\theta + N^a(\eta_1, \eta_2) \frac{B^{312}(x)}{\delta} \right\} - \\
 &\quad \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} F_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] d\theta. \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

Portanto,  $II_{-2}$  é também equivalente a apenas uma integral regular unidimensional.

De acordo com as  $Eq^s$ .(7.37-7.39), a seguinte formula final para integrais de superfície hipersingular pode ser escrita

$$\begin{aligned}
 II &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ F(\rho, \theta) - \left( \frac{F_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \\
 &\quad \int_0^{2\pi} \left\{ F_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - F_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] \right\} d\theta, \tag{7.40}
 \end{aligned}$$

e se o ponto singular está na interface de mais que um elemento como mostrado na Figura 7.2-(b), a fórmula da Eq.(7.40) torna

$$\begin{aligned}
 II &= \sum_{m=1}^N \left\{ \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \int_0^{\hat{\rho}^m(\theta)} \left[ F^m(\rho, \theta) - \left( \frac{F_{-2}^m(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}^m(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \right. \\
 &\quad \left. \int_{\theta_1^m}^{\theta_2^m} \left[ F_{-1}^m(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}^m(\theta)}{\beta^m(\theta)} \right| - F_{-2}^m(\theta) \left( \frac{\gamma^m(\theta)}{[\beta^m(\theta)]^2} + \frac{1}{\hat{\rho}^m(\theta)} \right) \right] d\theta \right\}, \tag{7.41}
 \end{aligned}$$

onde o índice  $m$  refere-se a um elemento em torno do ponto de colocação de cada vez, e  $\theta_1^m \leq \theta \leq \theta_2^m$  no  $m$ -ésimo elemento.

## 7.4 Expansão em série e análise de convergência da solução fundamental para a formulação do MEC microestrutural tridimensional

Nesta seção são realizadas as expansões em série das soluções fundamentais apresentadas nos Apêndice D e Apêndice E, e em seguida é analisado a região de validade destas

expansões. Neste trabalho, objetivando a análise limite das soluções fundamentais, tais como, a análise da ordem de singularidade e tratamento da região de camada limite (região de variação rápida) das soluções fundamentais da micromecânica, as quais não são tão óbvias quantas às da formulação clássica, é realizada a expansão em série do termo exponencial

$$e^{-r/g} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{r^n}{n!g^n},$$

o qual é em seguida substituído nas soluções fundamentais. Esta forma expandida é útil tanto para a obtenção das expressões explícitas presentes na técnica de subtração de singularidade (Equação 7.40 ou Equação 7.41) quanto para a precisão computacional no cálculo das soluções fundamentais e por consequência no cálculo das integrais do MEC microestrutural.

Desta forma, torna-se de grande importância a obtenção das expansões em série das soluções fundamentais, uma vez que são estas expansões (dentro do seu domínio de validade) os termos a serem implementados computacionalmente e que auxiliarão no tratamento das singularidades. Com isto, seguem as expansões em série finais dos termos desejados e a ordem de singularidade quando a análise limite em uma região esférica é realizada.

#### 7.4.1 Expansão em série da solução fundamental $\tilde{U}^*(r, \mu, \nu, g)$

Realizando a análise limite da Eq.(7.42), observa-se que esta equação não possui singularidade à medida que os pontos fonte e campo se aproximam, ou seja, diferentemente da formulação clássica do MEC, a solução fundamental em deslocamento da formulação microestrutural é regular.

$$\begin{aligned} \tilde{U}^*(r, \mu, \nu, g) = & \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{2(5-6\nu)}{3} \frac{1}{g} I + \right. \\ & \left. \left( \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k+1) - 4(1-\nu)(k+2)(k+1)}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^k} \right) I - \right. \\ & \left. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k+1)(1-k)}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^k} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \end{aligned} \quad (7.42)$$

#### 7.4.2 Expansão em série da solução fundamental $\tilde{Q}^*(r, \mu, \nu, g)$

Assim como na solução fundamental em deslocamento (Equação 7.42), quando é realizada a análise limite para a Eq.(7.43), observa-se com auxílio das Eq.(7.44 - 7.46), que a solução fundamental  $\tilde{Q}^*$  é regular, ou seja, é finito o valor limite quando o ponto campo tende ao ponto fonte.

$$\tilde{Q}^*(r, \mu, \nu, g) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \tilde{A}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \tilde{B}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - \tilde{C}(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) \right], \quad (7.43)$$



com

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(4-k^2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.44)$$

$$\tilde{B} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(2+k)(5+2k)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k}{(k+1)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.45)$$

$$\tilde{C} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(2+k)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}. \quad (7.46)$$

### 7.4.3 Expansão em série da solução fundamental $\tilde{R}^*(r, \mu, \nu, g)$

Com auxílio das Eq.(7.48 - 7.54), a análise limite da Eq.(7.47) apresenta singularidade fraca, ou seja, singularidade de ordem  $r^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{R}^*(r, \mu, \nu, g) = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [ & A(n_y \cdot \hat{r}) n_y \otimes \hat{r} + B n_y \otimes n_y + \\ & (C_1(n_y \cdot \hat{r})^2 + C_2) I + (D_1(n_y \cdot \hat{r})^2 + D_2) \hat{r} \otimes \hat{r} + \\ & E(n_y \cdot \hat{r}) \hat{r} \otimes n_y], \end{aligned} \quad (7.47)$$

com

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2g^2r} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4(n+3)(n+2)(-n+1)(n+1)}{(n+4)!} \frac{r^{n-1}}{g^{n+2}} + \\ 4\nu \left( -\frac{1}{2g^2r} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1+n^2}{(n+2)!} \frac{r^{n-1}}{g^{n+2}} \right), \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$B = \left( -\frac{1}{g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+3)(k+2)(k+1)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{(3-4\nu)}{2g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+3)(k+3)(k+1)(k-1)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + \\ \nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+1)(k-1)}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} C_2 = \frac{(-3+4\nu)}{2g^2r} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+3)(k+3)(k+1)}{(k+4)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + \\ 4\nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$D_1 = \left( \frac{3}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+3)(k+1)(k-1)(k-3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.52)$$

$$D2 = -\frac{1}{2g^2r} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+3)(-k+1)(k+1)r^{k-1}}{(k+4)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \quad (7.53)$$

$$E = -\frac{1}{g^2r} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+3)(-k+1)(k+1)r^{k-1}}{(k+4)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + \frac{2\nu}{g^2r} - 4\nu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)(n+1)r^{n-1}}{(n+2)!} \frac{r^{n-1}}{g^{n+2}}, \quad (7.54)$$

#### 7.4.4 Expansão em série da solução fundamental $\tilde{P}^*(r, \mu, \nu, g)$

Com auxílio das Eq.(7.56 - 7.86), a análise limite da Eq.(7.55) apresenta singularidade forte, ou seja, singularidade de ordem  $r^{-2}$  à medida que o ponto campo se aproxima do ponto fonte.

$$\begin{aligned} \tilde{P}^*(r, \mu, \nu, g) = & \left[ \mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^* + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*) - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134}) \right. \\ & \left. (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* - (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T \end{aligned} \quad (7.55)$$

com

$$(\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^*)^T = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left[ \bar{A}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \bar{B}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + \bar{B}(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \bar{C} \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \right], \quad (7.56)$$

com

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+2)(-k+2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.57)$$

$$\bar{B} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2 r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+1}} - \nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{(k+1)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.58)$$

$$\bar{C} = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+1}} + 4\nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.59)$$

$$\left[ (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right]^T = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} (G_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + G_2 \mathbf{I} + G_3 \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + G_4 \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + G_5 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y), \quad (7.60)$$

com

$$\begin{aligned} G_1 = g^2 \left[ \left( -\frac{15}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(64 - 20k^2 + k^4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + \right. \\ \left. \left( \frac{9}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(-2+k)(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned}
 G_2 = g^2 & \left[ \left( -\frac{9}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+4)^2(k^2-4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \nu \left( -\frac{6}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + \right. \\
 & \left( \frac{9}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4)^2r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} - \right. \\
 & \left. \left. - \nu \left( \frac{6}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right) (n_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (7.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_3 = g^2 & \left\{ \left( \frac{9}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k-2)(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. 4\nu \left( \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \right. \\
 & \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} + \\
 & \left. \left. 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right\}, \quad (7.63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_4 = g^2 & \left\{ \left( -\frac{3}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k-2)(k+2)^2(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \nu \left( \frac{6}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right) (n_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \right. \\
 & \frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} - \\
 & \left. \left. \nu \left( \frac{2}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} \right) \right\}, \quad (7.64)
 \end{aligned}$$

$$G_5 = 2g^2 \left( \frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!g^{k+3}} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}). \quad (7.65)$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*)]^T = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} & \{ H_1 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + H_2 [(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}] + \\
 & H_3 \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \}, \quad (7.66)
 \end{aligned}$$

com

$$H_1 = \frac{6}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}}, \quad (7.67)$$

$$\begin{aligned}
 H_2 = & \left[ \frac{2}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2r^{k-1}}{(k+3)!g^{k+3}} - \right. \\
 & \left. \nu \left( \frac{4}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{(k+1)!g^{k+3}} \right) \right], \quad (7.68)
 \end{aligned}$$

$$H_3 = \left[ -\frac{2}{g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+3}} + \nu \left( \frac{4}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{(k+1)! g^{k+3}} r^{k-1} \right) \right]. \quad (7.69)$$

$$\left[ \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134}) \right]^T = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ L_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + L_2(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + L_3(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) \}, \quad (7.70)$$

com

$$L_1 = \left( \frac{4}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k}{(k+1)! g^{k+3}} r^{k-1} \right) (1-\nu), \quad (7.71)$$

$$L_2 = 0, \quad (7.72)$$

$$L_3 = 0. \quad (7.73)$$

$$\left[ (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T = \frac{g^2 (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)}{16\pi(1-\nu)} \{ M_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + M_2 \mathbf{I} + M_3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + M_4(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + M_5 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \}, \quad (7.74)$$

com

$$M_1 = \left( \frac{3}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(9-10k^2+k^4)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{1}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(-1+k)(1+k)(3+k)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}}, \quad (7.75)$$

$$M_2 = \left( \frac{3}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+3)^2(1-k^2)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} - \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right) \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{3}{2g^2 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)(k+3)^2 r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} + \nu \left[ \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right], \quad (7.76)$$

$$M_3 = \frac{1}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k)(k+1)(k+2)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} - \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right), \quad (7.77)$$

$$M_4 = -\frac{1}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8(k-1)(k+1)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} + \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right), \quad (7.78)$$

$$M_5 = -\frac{1}{g^2 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)(k+2)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}}. \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} [(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^*]^T &= \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ N_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + N_2 \mathbf{I} + N_3 [(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) + \\ &\quad \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}}] + N_4 (\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + N_5 \hat{\mathbf{r}} \otimes (\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot \hat{\mathbf{r}} + \\ &\quad N_6 (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + N_7 (\nabla_s \mathbf{n}_y) \} \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \left( \frac{3}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(9-10k^2+k^4)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} \right) (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) - \\ &\quad \left( \frac{1}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k)(1+k)(3+k)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} \right) (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y), \end{aligned} \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \left[ \frac{3}{2g^2 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+3)^2(-1+k^2)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} - \right. \\ &\quad \left. \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right) \right] (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) - \\ &\quad \left[ \frac{3}{2g^2 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1+k)(3+k)^2 r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} + \right. \\ &\quad \left. \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1+k)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right) \right] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y), \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$N_3 = -\frac{1}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-1)(k+1)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}}, \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned} N_4 &= \frac{3}{2g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+3)^2(1-k^2)r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+2}} - \\ &\quad \nu \left( \frac{2}{g^2 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2)r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+2}} \right) \end{aligned} \quad (7.84)$$

$$N_5 = -\frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-1)(k+1)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-k^2}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.85)$$

$$N_6 = \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right). \quad (7.86)$$

#### 7.4.5 Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$

De acordo com as Eq.(7.88 - 7.90), a Eq.(7.87) não apresenta singularidade quando a análise limite é realizada, ou seja, a derivada normal, em relação ao ponto fonte, da solução fundamental em deslocamento é regular.

$$\frac{\partial \tilde{U}^*(x, y)}{\partial n_x} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [AA(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})I + BB(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + CC(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)], \quad (7.87)$$

com

$$AA = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(2+k)(5+2k)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}} + \nu \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k}{(k+1)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.88)$$

$$BB = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(-4+k^2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}, \quad (7.89)$$

$$CC = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(2+k)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+1}}. \quad (7.90)$$

#### 7.4.6 Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$

De acordo com as Eq.(7.92 - 7.96), a Eq.(7.91) apresenta singularidade fraca, ordem  $r^{-1}$ , quando a análise limite é realizada.

$$\frac{\partial \tilde{Q}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n_x} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [-Q_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - Q_2(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - Q_2(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - Q_3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - Q_4(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - Q_2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + Q_5\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - Q_2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + Q_5\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y], \quad (7.91)$$

com

$$Q_1 = \frac{3}{4g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(9 - 10k^2 + k^4)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \quad (7.92)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{4g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k-1)(k+1)(k+3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \quad (7.93)$$

$$Q_3 = \frac{7}{4g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k-1)(k+1)(k+3)(2k+7)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1-k^2}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.94)$$

$$Q_4 = -\frac{7}{4g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k+1)(k+3)(2k+7)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k+1}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.95)$$

$$Q_5 = -\frac{1}{4g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2(k+1)(k+3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}. \quad (7.96)$$

#### 7.4.7 Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$

De acordo com as Eq.(7.98 - 7.110), a Eq.(7.97) apresenta singularidade forte, ordem  $r^{-2}$ , quando a análise limite é realizada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}(x, y) = & \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left[ -R_1(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_2(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \right. \\ & R_3(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) - R_4(\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_5(\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) - \\ & R_6(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \tilde{\mathbf{I}} - R_7(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x) \tilde{\mathbf{I}} - R_8(\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \tilde{\mathbf{I}} - \\ & R_9(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_{10}(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_{10}(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{n}}_x - \\ & R_{11}(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - R_{12}(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - R_{12}(\hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - \\ & \left. R_{13}(\hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{n}}_y \right] \quad (7.97) \end{aligned}$$

com

$$R_1 = -\frac{15}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(64 - 20k^2 + k^4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}}, \quad (7.98)$$

$$R_2 = \frac{3}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{8(k-2)k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}}, \quad (7.99)$$

$$R_3 = \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k-2)k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}}, \quad (7.100)$$

$$R_4 = \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k-2)k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}}, \quad (7.101)$$

$$R_5 = -\frac{1}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}}, \quad (7.102)$$

$$R_6 = -\frac{9}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+4)^2(k^2-4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left[ \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k^2-4)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right], \quad (7.103)$$

$$R_7 = 3\frac{1}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{8k(k+2)(k+4)^2}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{1}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{2k(k+2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.104)$$

$$R_8 = \frac{3}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+2)(k+4)^2}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k+2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.105)$$

$$R_9 = -\frac{3}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k-2)k(k+2)(k+3)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{3}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k^2-4)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.106)$$

$$R_{10} = \frac{1}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+2)(k+3)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{1}{2g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k+2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.107)$$

$$R_{11} = 3\frac{1}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{8(k-2)k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( -3\frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k^2-4)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.108)$$

$$R_{12} = -\frac{1}{g^2r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{8k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k(k+2)}{(k+3)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.109)$$

$$R_{13} = \left( \frac{1}{g^2r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4k(k+2)(k+3)(k+4)}{(k+5)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+3}} \right). \quad (7.110)$$



### 7.4.8 Expansão em série da solução fundamental $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$

De acordo com as Eq.(7.112 - 7.178), a Eq.(7.111) apresenta singularidade muito forte, ordem  $r^{-3}$ , ou seja, são hipersingulares quando a análise limite é realizada.

$$\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}(r, \mu, \nu, g) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \left[ \mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^* + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*) - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* - (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T, \quad (7.111)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^*)^T}{\partial n_x} = & \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [-P_{11}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{12}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{12}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{13}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - P_{14}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - \\ & P_{13}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{14}\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{15}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{16}\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y], \end{aligned} \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial n_x} = & \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [-P_{21}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{22}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{23}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ & P_{24}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{25}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{25}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{26}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - \\ & P_{27}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - P_{28}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - P_{29}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - \\ & P_{210}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{211}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - \\ & P_{212}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y - P_{213}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{214}(\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y) - \\ & P_{215}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{216}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{217}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{218}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{219}\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - \\ & P_{220}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y - P_{221}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y], \end{aligned} \quad (7.113)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x} = & \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [-P_{31}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{32}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{32}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ & P_{33}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - P_{34}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - P_{33}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{34}\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{35}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{36}\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y], \end{aligned} \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[ \mathbf{n}_y \cdot \left( \nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134} \right) \right]^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left[ -P_{41}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \right. \\ & P_{42}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{42}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ & P_{43}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - P_{44}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - \\ & \left. P_{45}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) - P_{46}(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y) \right], \end{aligned} \quad (7.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[ (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{g^2(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)}{16\pi(1-\nu)} \left[ -P_{51}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \right. \\ & P_{52}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{53}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ & P_{54}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{55}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{56}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - \\ & P_{57}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - P_{58}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - P_{59}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & P_{510}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{510}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - \\ & P_{511}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{512}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - \\ & \left. P_{512}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y - P_{513}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \right] \end{aligned} \quad (7.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[ (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ [P_{61}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \right. \\ & P_{62}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) : (\nabla_s \mathbf{n}_y) + P_{63}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)] \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & [P_{64}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + P_{65}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) : (\nabla_s \mathbf{n}_y) + \\ & P_{66}(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)] \mathbf{I} + [P_{62}(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & P_{67}(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)](\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) + P_{63}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})[(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla_s \mathbf{n}_y + \\ & \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}}] + P_{67}[\mathbf{n}_x \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \mathbf{n}_x + \\ & (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)] + P_{64}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \\ & P_{65}(\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) + P_{68}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + \\ & P_{69}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + P_{610}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + \\ & \left. P_{66}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) \right]. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Os coeficientes das Eqs.(7.112-7.117) expandidos em série são apresentados:

$$P_{11} = \frac{3}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(9-10k^2+k^4)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \quad (7.118)$$

$$P_{12} = -\frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k-1)(k+1)(k+3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}}, \quad (7.119)$$

$$P_{13} = \frac{3}{2g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+3)^2(k^2-1)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( -\frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k^2-1}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.120)$$

$$P_{14} = -\frac{3}{2g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+1)(k+3)^2}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{(k+1)}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.121)$$

$$P_{15} = -\frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k-1)(k+1)(k+3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1-k^2}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.122)$$

$$P_{16} = \frac{1}{2g^2r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{4(k+1)(k+3)}{(k+4)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} + 4\nu \left( -\frac{1}{2g^2r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{k+1}{(k+2)!} \right) \frac{r^{k-1}}{g^{k+2}} \right), \quad (7.123)$$

$$P_{21} = \frac{105}{2g^2r^3} - \frac{5}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(64-20k^2+k^4)(-k+6)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}}, \quad (7.124)$$

$$P_{22} = -\frac{45}{2g^2r^3} + \frac{3}{4g^4r} - 3 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(64-20k^2+k^4)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}}, \quad (7.125)$$

$$P_{23} = -\frac{15}{2g^2r^3} + \frac{1}{4g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(64-20k^2+k^4)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}}, \quad (7.126)$$

$$P_{24} = -\frac{45}{2g^2r^3} + \frac{3}{4g^4r} + 12 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-2)k(k+2)(k+4)(-k+4)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}}, \quad (7.127)$$

$$P_{25} = \frac{9}{2g^2r^3} - \frac{1}{4g^4r} - 12 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{(k-2)k(k+2)(k+4)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}}, \quad (7.128)$$

$$P_{26} = \frac{45}{2g^2r^3} - \frac{5}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+4)^2(k^2-4)(k-4)}{(k+5)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{15}{2g^2r^3} + \frac{3}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)(-k+4)}{(k+3)!} \frac{r^{k-2}}{g^{k+3}} \right), \quad (7.129)$$

$$P_{27} = -\frac{27}{2g^2r^3} + \frac{5}{4g^4r} + 3 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+4)^2 (k^2-4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{9}{2g^2r^3} - \frac{3}{8g^4r} - 3 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.130)$$

$$P_{28} = -\frac{45}{2g^2r^3} + \frac{15}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4)^2 (k-4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{15}{2g^2r^3} - \frac{9}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k(k+2)(-k+4) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.131)$$

$$P_{29} = \frac{9}{2g^2r^3} - \frac{5}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4)^2 r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{3}{8g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k(k+2) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.132)$$

$$P_{210} = -\frac{45}{2g^2r^3} + \frac{3}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12(k-2)k(k+2)(k+4)(-k+4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{15}{2g^2r^3} - \frac{3}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)(k-4) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.133)$$

$$P_{211} = \frac{9}{g^2r^3} - \frac{1}{2g^4r} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{12(k-2)k(k+2)(k+4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{6}{2g^2r^3} + \frac{1}{4g^4r} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.134)$$

$$P_{212} = \frac{9}{2g^2r^3} - \frac{1}{4g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12(k-2)k(k+2)(k+4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{1}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.135)$$

$$P_{213} = \frac{9}{2g^2r^3} - \frac{1}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4)(-k+2) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{1}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)(k-2) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.136)$$

$$P_{214} = -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{1}{4g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{12k(k+2)(k+4) r^{k-2}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2r^3} - \frac{1}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2) r^{k-2}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.137)$$

$$P_{215} = \frac{15}{2g^2r^3} - \frac{3}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)^2(k+4)(k-4)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{15}{2g^2r^3} + \frac{3}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)(4-k)r^{k-2}}{(k+3)!g^{k+3}} \right), \quad (7.138)$$

$$P_{216} = -\frac{6}{2g^2r^3} + \frac{1}{2g^4r} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)^2(k+4)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{6}{2g^2r^3} - \frac{1}{4g^4r} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-2}}{(k+3)!g^{k+3}} \right), \quad (7.139)$$

$$P_{217} = -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{1}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)^2(k+4)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{3}{2g^2r^3} - \frac{1}{8g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-2}}{(k+3)!g^{k+3}} \right), \quad (7.140)$$

$$P_{218} = -\frac{3}{2g^2r^3} + \frac{1}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2(k+4)(k-2)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{3}{2g^2r^3} - \frac{1}{8g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)(-k+2)r^{k-2}}{(k+3)!g^{k+3}} \right), \quad (7.141)$$

$$P_{219} = \frac{1}{2g^2r^3} - \frac{1}{4g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)^2(k+4)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{1}{2g^2r^3} + \frac{1}{8g^4r} - \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-2}}{(k+3)!g^{k+3}} \right), \quad (7.142)$$

$$P_{220} = -\frac{3}{g^2r^3} + \frac{1}{2g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{8k(k+2)^2(k+4)(k-2)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}}, \quad (7.143)$$

$$P_{221} = \frac{1}{g^2r^3} - \frac{1}{2g^4r} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{8k(k+2)^2(k+4)r^{k-2}}{(k+5)!g^{k+3}}, \quad (7.144)$$

$$P_{31} = -30\frac{1}{g^2r^3} + 3\frac{1}{2g^4r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(9-10k^2+k^4)r^{k-1}}{(k+4)!g^{k+4}}, \quad (7.145)$$

$$P_{32} = \left( 6\frac{1}{g^2r^3} - \frac{1}{2g^4r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-1)(k+1)(k+3)r^{k-1}}{(k+4)!g^{k+4}} \right), \quad (7.146)$$

$$P_{33} = -\frac{6}{g^2r^3} + \frac{3}{2g^4r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+3)^2(k^2-1)r^{k-1}}{(k+4)!g^{k+4}} + 4\nu \left( 3\frac{1}{g^2r^3} - \frac{1}{2g^4r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k^2-1)r^{k-1}}{(k+2)!g^{k+4}} \right), \quad (7.147)$$

$$P_{34} = \left( 2 \frac{1}{g^2 r^3} - 3 \frac{1}{2g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)(k+3)^2 r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+4}} \right) - 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\binom{k+1}{k+2} r^{k-1}}{g^{k+4}} \right), \quad (7.148)$$

$$P_{35} = \frac{6}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-1)(k+1)(k+3) r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+4}} - 4\nu \left( \frac{3}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 - 1}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+4}} \right), \quad (7.149)$$

$$P_{36} = -\frac{2}{g^2 r^3} + \frac{1}{2g^4 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1)(k+3) r^{k-1}}{(k+4)! g^{k+4}} + 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+4}} \right), \quad (7.150)$$

$$P_{41} = 0, \quad (7.151)$$

$$P_{42} = 0, \quad (7.152)$$

$$P_{43} = \left( -12 \frac{1}{g^2 r^3} + 2 \frac{1}{g^4 r} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(1-k^2) r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+4}} \right) + 4\nu \left( \frac{3}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-k^2}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+4}} \right), \quad (7.153)$$

$$P_{44} = \left( 4 \frac{1}{g^2 r^3} - \frac{2}{g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k+1) r^{k-1}}{(k+2)! g^{k+4}} \right) - 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^3} - \frac{1}{2g^4 r} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{(k+2)!} \frac{r^{k-1}}{g^{k+4}} \right), \quad (7.154)$$

$$P_{45} = 0, \quad (7.155)$$

$$P_{46} = 0, \quad (7.156)$$

$$P_{51} = -\frac{15}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(64 - 20k^2 + k^4) r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}}, \quad (7.157)$$

$$P_{52} = \frac{3}{g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8(k-2)k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}}, \quad (7.158)$$

$$P_{53} = \frac{3}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}}, \quad (7.159)$$

$$P_{54} = \frac{3}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}}, \quad (7.160)$$

$$P_{55} = -\frac{1}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}}, \quad (7.161)$$

$$P_{56} = -\frac{9}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+4)^2(k^2-4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{3}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.162)$$

$$P_{57} = \frac{3}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8k(k+2)(k+4)^2 r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} - 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.163)$$

$$P_{58} = \frac{3}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+4)^2 r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.164)$$

$$P_{59} = -\frac{3}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)(k+3)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{3}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.165)$$

$$P_{510} = \frac{1}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+3)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.166)$$

$$P_{511} = \frac{3}{g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8(k-2)k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)!} \frac{1}{g^{k+3}} + 4\nu \left( -\frac{3}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)!} \frac{1}{g^{k+3}} \right), \quad (7.167)$$

$$P_{512} = -\frac{1}{g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{8k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.168)$$

$$P_{513} = \frac{1}{g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+3)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}}, \quad (7.169)$$

$$P_{61} = P_{51}, \quad (7.170)$$

$$P_{62} = P_{53}, \quad (7.171)$$

$$P_{63} = P_{54}, \quad (7.172)$$

$$P_{64} = P_{56}, \quad (7.173)$$

$$P_{65} = \frac{3}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+4)^2 r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}} - 4\nu \left( \frac{1}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+3}} \right), \quad (7.174)$$

$$P_{66} = R_8, \quad (7.175)$$

$$P_{67} = P_{55}, \quad (7.176)$$

$$P_{68} = \frac{3}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4(k-2)k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left[ -\frac{3}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k^2-4)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+3}} \right], \quad (7.177)$$

$$P_{69} = P_{610} = -\frac{1}{2g^2 r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k(k+2)(k+4)r^{k-1}}{(k+5)! g^{k+3}} + 4\nu \left( \frac{1}{2g^2 r^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(k+2)r^{k-1}}{(k+3)! g^{k+3}} \right). \quad (7.178)$$



### 7.4.9 Análise de convergência das expansões em série das soluções fundamentais

Nesta etapa do trabalho, objetiva-se analisar em quais condições as expansões em séries das soluções fundamentais são válidas, ou seja, determinar a região para que estas expansões sejam convergentes. Para tanto tem-se que fazer uso de definições e teoremas, cujas demonstrações podem ser encontrada em Lima (2012), que auxiliará para impor condições de convergência, e assim, impor restrições para a razão  $r/g$ .

**Definição 1:** Uma série  $\sum a_n$  diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

No caso de convergência, chama-se soma da série ao valor  $S$  do limite, isto é

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

**Teorema 3:** Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  séries convergente de somas  $A$  e  $B$ , respectivamente, e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então

□ A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ , a que se chama série soma, também é convergente e a sua soma é  $A + B$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

□ A série  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$  é convergente e a sua soma é  $\lambda A$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Definição 2:** Uma série diz-se alternada se os seus termos são alternadamente positivos e negativos. Supondo que o primeiro termo da série seja positivo pode-se escrever na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 4 (teorema de Leibnitz):** A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \dots$$

convergir se todas as três condições a seguir forem satisfeitas

- todos os  $a_n$  termos forem positivos,
- $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n > P$  para algum  $P$  inteiro,

$$\square \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

A partir da *definição 2*, observa-se que todas as Eq.(7.41 - 7.178) são séries alternadas e para que estas equações convirja é adotado o *teorema 4 (teorema de Leibnitz)* para indicar qual restrição deva possuir a relação  $r/g$ . Assim, para aplicar o *teorema 4* à Eq.(7.42) faz-se necessário rearranjar a equação na forma

$$\begin{aligned} \tilde{U}^*(r, \mu, \nu, g) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{2(5-6\nu)}{3} \frac{1}{g} \mathbf{I} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(k+2)}{(k+3)!} \frac{r^k}{g^{k+1}} + \right. \right. \\ \left. \left. 4(1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+3)(k+2)}{(k+3)!} \frac{r^k}{g^{k+1}} \right) \mathbf{I} + \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{2(k+2)k}{(k+3)!} \right) \frac{r^k}{g^{k+1}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right\}. \quad (7.179) \end{aligned}$$

Analisando isoladamente os três termos da série da Eq.(7.179) é possível facilmente verificar que cada um destes termos satisfazem a primeira e terceira condição do teorema de Leibnitz, entretanto para satisfazerem a segunda condição faz-se necessário que as relações  $r/g$  sejam restringidas para as respectivas séries

$$(Termo 1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2(k+2)}{(k+3)!} \frac{r^k}{g^{k+1}} \Rightarrow \frac{r}{g} \leq \frac{(k+2)(k+4)}{k+3}, \quad (7.180)$$

$$(Termo 2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+3)(k+2)}{(k+3)!} \frac{r^k}{g^{k+1}} \Rightarrow \frac{r}{g} \leq k+2, \quad (7.181)$$

$$(Termo 3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{2(k+2)k}{(k+3)!} \right) \frac{r^k}{g^{k+1}} \Rightarrow \frac{r}{g} \leq \frac{k(k+2)(k+4)}{(k+3)(k+1)}. \quad (7.182)$$

A partir das Eq<sup>s</sup>.(7.180 - 7.182), observa-se que a desigualdade  $\frac{r}{g} \leq \frac{k(k+2)(k+4)}{(k+3)(k+1)}$  torna-se mais desfavorável em comparação as desigualdades das outras duas equações (Eq.7.180 - 7.181), como pode ser verificado através da Figura 7.5, a qual mostra a região de restrição da razão  $r/g$  em função do número de termos da série. Desta forma, de acordo com o *teorema 4* os termos em série das três equações acima são convergente e por meio do *teorema 3* tem-se que a Eq.(7.179) é convergente. Por meio da Figura 7.6 é possível observar o quão bem comportada torna-se a soma para os 30 primeiros termos da série formada pela Eq<sup>s</sup>.(7.182) (situação mais desfavorável) à medida que é variada a razão  $r/g$ . Percebe-se que quanto menor é o valor da relação  $r/g$  menor oscilações ocorrem para o espectro de termos analisados. Cabe ressaltar que para o caso da Eq.(7.182), assim como para as Eq<sup>s</sup>.(7.180 - 7.181), esta irá sempre convergir entretanto maior quantidade de termos da serie faz-se necessário para alcançar tal objetivo. Este fato pode ser ilustrado por meio da Figura 7.6 comparando os gráficos para as relações  $r/g = 0,1$  e  $r/g = 20$ , em que para a primeira relação observa-se que a soma torna quase constantes a partir do 6 termo da série. No entanto, para a segunda relação ( $r/g = 20$ ), tem-se que para a soma dos trinta primeiros termos uma variação na ordem de grandeza de  $10^8$  em relação

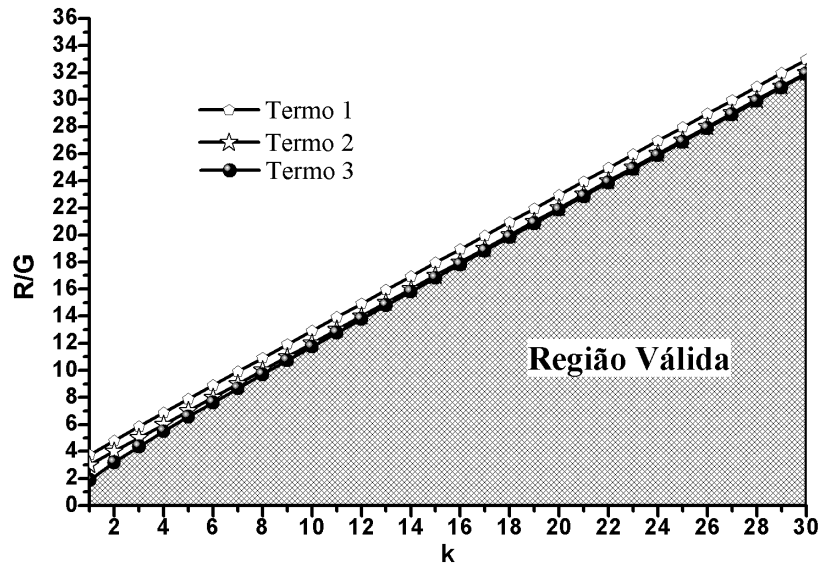


Figura 7.5 – Gráfico da região de validade da solução fundamental de deslocamento expandido em série para os 30 primeiros termos.

ao termo anterior  $S_{29}$ . Desta forma, fixada a quantidade de termos da série adotada para o cálculo da solução fundamental, torna-se de suma importância determinar a restrição à razão  $r/g$  para que a série torne tão próxima quanto se queira do valor exato, dentro de uma tolerância desejada.

Determinada a condição para que a série seja convergente, é ainda possível estimar o erro (ou tolerância) das séries alternada por meio do corolário abaixo, o qual afirma que o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma de uma série alternada alguma soma parcial é, em valor absoluto, inferior ao valor absoluto dos termos desprezados.

**Corolário 1:** *Sejam  $a_n$  uma sucessão decrescente de termos positivos tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  e  $S$  a soma da série  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_n$ . Então*

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in N.$$

De acordo com o corolário 1 é possível determinar o erro superior (ou máximo) quando se trunca a série alternada, para o caso em análise, truncamento no trigésimo termo. A Figura 7.7 mostra a taxa de convergência da expansão em série da Eq.(7.182) (situação mais desfavorável) à medida que é variada a relação  $r/g$ . Pode ser observado nesta figura (Figura 7.7) que para a razão  $r/g = 0,1$  tem uma taxa de convergência 20 vezes maior que a da relação  $r/g = 20$  e obtendo para a série com 30 termos um erro na ordem de grandeza de  $10^{-59}$ , para  $r/g = 0,1$ , e  $10^8$  para  $r/g = 20$ .

Repetindo a análise para cada termo expandido em série da Eq.(7.43), Eq.(7.47), Eq.(7.55), Eq.(7.87), Eq.(7.91), Eq.(7.97) e Eq.(7.111), assim como realizada para a solução fundamental em deslocamento (Equação 7.42), é possível, com auxílio dos teoremas

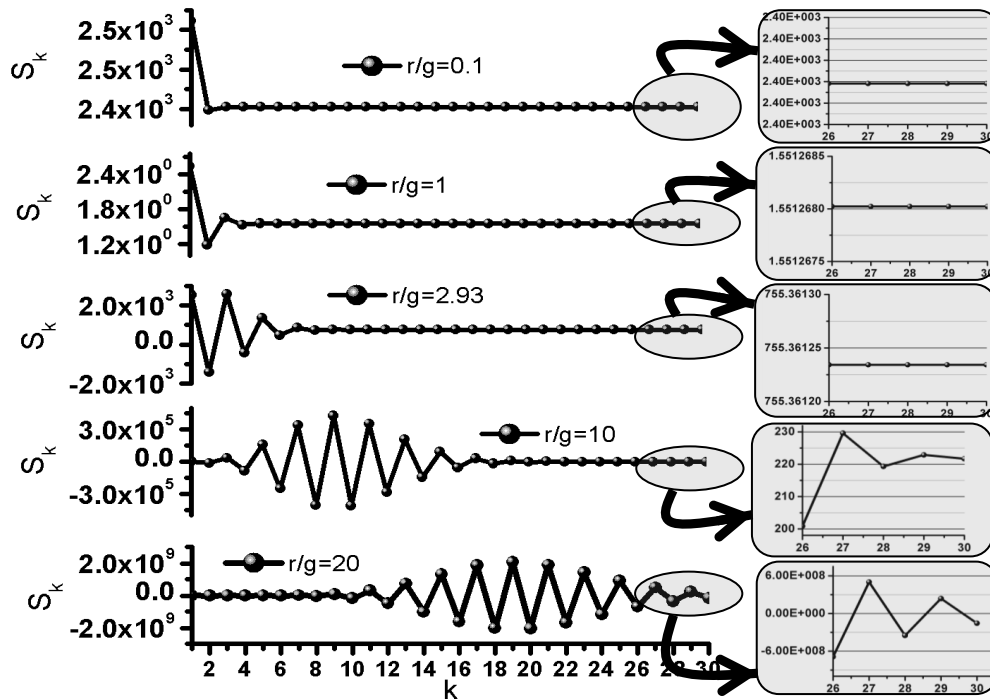


Figura 7.6 – Variação das somas parciais da expansão em série da Eq.(7.182) à medida que é aumentado a quantidade de parcelas ( $k$ ) da série e variado a razão  $r/g$  (com  $g = 10^{-3}$ ).

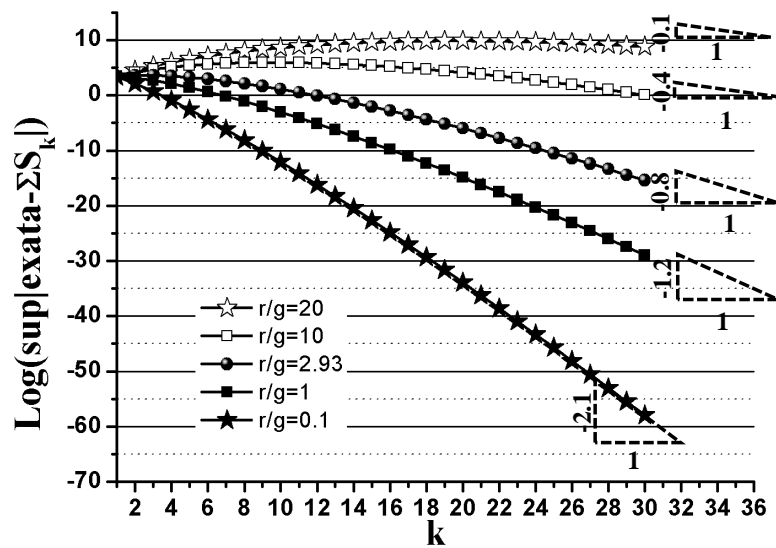


Figura 7.7 – Taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) da solução fundamental de deslocamento à medida que é variada a relação  $r/g$  (com  $g = 10^{-3}$ ).

3 e 4, encontrar a região de validade (ou de convergência) em função da razão  $r/g$  e do número de termos das séries. Na Figura 7.8 (gráficos (a), (c) e (e)) apresenta a região de convergência para as soluções fundamentais  $\tilde{Q}^*$ ,  $\tilde{R}^*$  e  $\tilde{P}^*$ , cujas equações que limitam essa região são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{r}{g} \leq \frac{k(k^2 - 4)(k + 4)}{(k + 1)[(k + 1)^2 - 4]}, \quad (7.183)$$

$$\frac{r}{g} \leq \frac{(k + 3)(k + 1)(k - 1)(k - 3)(k + 5)}{(k + 4)(k + 2)k(k - 2)}, \quad (7.184)$$

$$\frac{r}{g} \leq \frac{k(k + 6)(64 - 20k^2 + k^4)}{(k + 1)[(64 - 20(k + 1)^2 + (k + 1)^4)]}. \quad (7.185)$$

Na Figura 7.9 (gráficos (a), (c), (e) e (g)) apresenta a região de convergência para a derivada normal das soluções fundamentais,  $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$  e  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ , cujas equações que limitam essa região são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{r}{g} \leq \frac{k(k^2 - 4)(k + 4)}{(k + 1)[(k + 1)^2 - 4]}, \quad (7.186)$$

$$\frac{r}{g} \leq \frac{(9 - 10k^2 + k^4)(k + 3)}{9 - 10(k + 1)^2 + (k + 1)^4}, \quad (7.187)$$

$$\frac{r}{g} \leq \frac{k(64 - 20k^2 + k^4)(k + 6)}{(k + 1)[64 - 20(k + 1)^2 + (k + 1)^4]}, \quad (7.188)$$

$$\frac{r}{g} \leq \frac{(k + 1)(-k + 5)(64 - 20(k + 1)^2 + (k + 1)^4)(k + 7)}{(k + 2)(-k + 4)[64 - 20(k + 2)^2 + (k + 2)^4]}. \quad (7.189)$$

Realizando a análise entre as Eqs.(7.183 - 7.189), tem-se que a Eq.(7.189) proporciona menor região de convergência, o que a torna a equação mais desfavorável. Ou seja, pode-se adotar, de forma bastante conservadora, a Eq.(7.189) como a restrição a ser imposta à relação  $r/g$  para que as séries (de todas as soluções fundamentais) sejam convergentes.

Apresentada a região de convergência, faz-se necessário realizar o estudo do erro das expansões, indicando o quão é o erro e o quão rápido é a convergência das séries para a representação exata. Para responder estes dois questionamentos, foi calculado o erro a partir do estimador fornecido pelo *Corolário 1* para séries alternadas à medida que é variado a quantidade de termos da série e a razão  $r/g$ , entretanto, mantendo constante o parâmetro micromecânico  $g$  (com  $g = 10^{-3}$ ). Como resultado desta análise são apresentados os gráficos (b), (d), (f), presentes na Figura 7.8, para as soluções fundamentais  $\tilde{Q}^*$ ,  $\tilde{R}^*$  e  $\tilde{P}^*$ , respectivamente. Complementando os resultados, a Figura 7.9 apresenta os gráficos (b), (d), (f), (h) para a derivada normal das soluções fundamentais,  $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$ ,  $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$  e  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ , respectivamente. Diante dos resultados apresentados na Figura 7.8 e Figura 7.9, observa-se que para mesma relação  $r/g$ , tem-se igual taxa de convergência, entretanto

com diferentes valores de erro, para as expansões em série das soluções fundamentais. Ainda, diante destas figuras, observa-se que a razão  $r/g$  é inversamente proporcional à taxa de convergência, ou seja, à medida que é diminuída a razão  $r/g$ , a taxa de convergência é aumentada, e vice-versa. Faz-se importante, ainda, notar que o gráfico (h) (Figura 7.9), o qual faz referência a expansão em série de  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$ , apresenta maiores valores para o erro quando comparado com as expansões em série das demais soluções fundamentais. Tornando, assim, o estimar do erro da solução fundamental  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$  (Equação 7.190) um estimador global, mesmo que conservador, para as demais expansões em série.

$$|exata - S_k| \leq \frac{4k(k+4)^2(k^2-4)(k-4)}{(k+5)!}. \quad (7.190)$$

Uma vez que, em condição mais desfavorável, as expansões em séries da Eq.(7.111) são as que controlam tanto a região de convergência quanto ao estimador do erro das expansões, e sendo estas expansões proporcionais à razão  $\frac{r^{k-2}}{g^{k+1}}$ , tem-se que o estimador do erro é inversamente proporcional à  $g^3$ , ou seja, à medida em que é diminuído o valor do parâmetro microestrutural,  $g$ , pior torna, mesmo para a razão  $r/g$  contante, a capacidade da expansão em série representar as soluções fundamentais. Desta forma, a Figura 7.10 ilustra a quantidade de termos da série necessário, para manter um erro constante de  $10^{-10}$ , à medida em que o valor de  $g$  decresce. Assim, de acordo com a Figura 7.10, se há interesse em diminuir o valor do parâmetro microestrutural  $g$ , faz-se necessário diminuir o valor de  $r$  para que a razão  $r/g$  esteja dentro da região de convergência, no entanto, maior quantidade de termo da expansão em serie faz-se necessário (Figura 7.10) para que a convergência seja alcançada com um erro desejado (neste caso  $10^{-10}$ ). Como consequência direta, tem-se que à medida em que o parâmetro microestrutural é diminuído mais refinada deve ser a malha e maior deve ser a quantidade de termos da série para manter constante o erro.

## 7.5 Expressões explícitas das séries de Laurent e dos parâmetros $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$ para problemas elastostáticos do MEC 3-D

Antes de explicitar os termos da série de Laurent para os núcleos integrando, faz-se necessário apresentar os tais integrando de interesse. Para tanto é aplicada a fórmula da Eq.(7.41) às equações, tanto, da formulação clássica (Equação 7.8), quanto, microestrutural (Equação 7.25) do MEC, considerando, na ausência da força de corpo, o ponto fonte  $x$  na superfície  $S_s$  suave. Desta forma nesta seção são apresentadas as expressões explícitas da série de Laurent para formulação clássica e micromecânica do MEC.

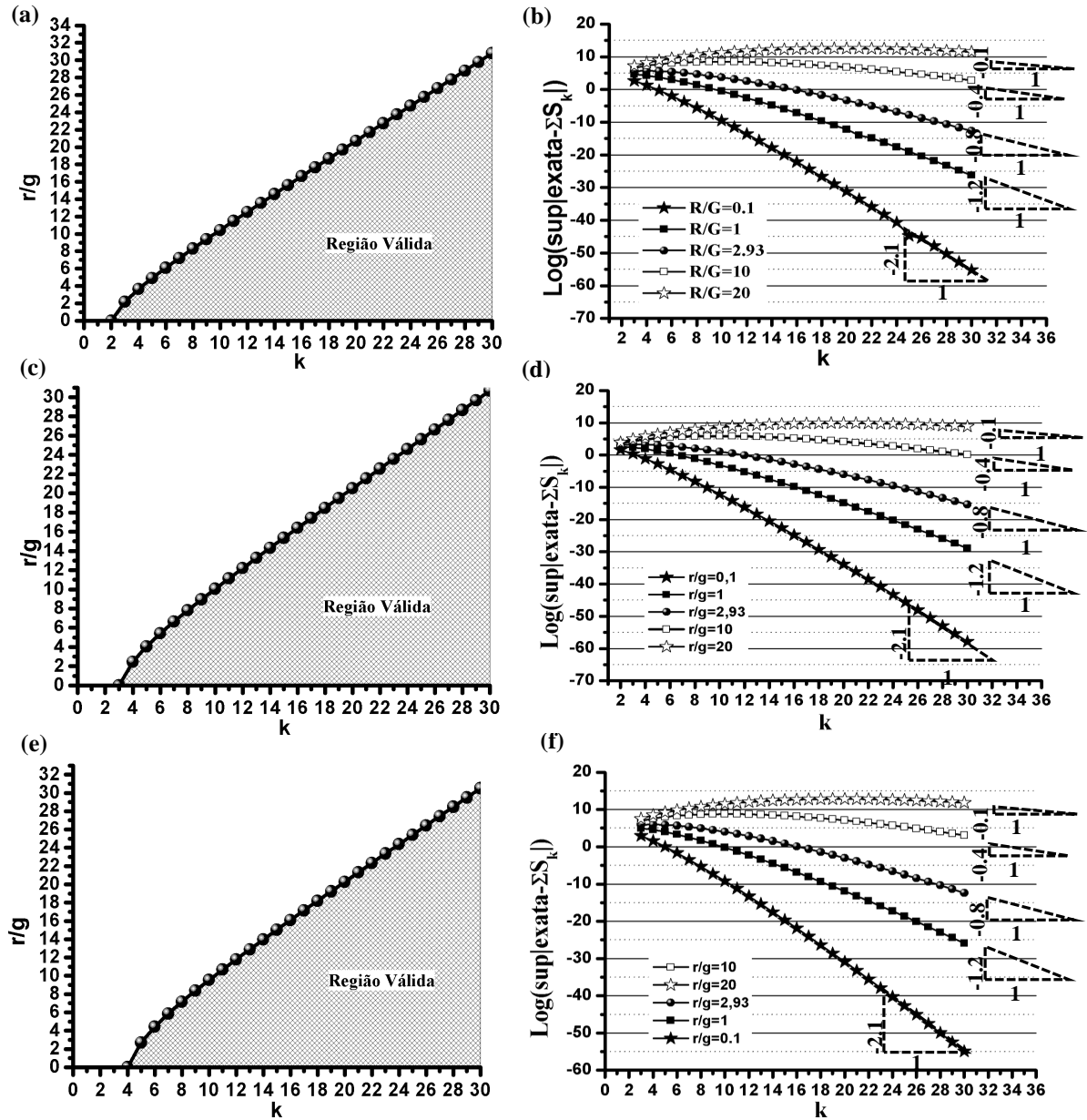


Figura 7.8 – Gráficos (a), (c) e (e) mostram as regiões de validade (convergência) e os gráficos (b), (d) e (f) a taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) das soluções fundamentais  $\tilde{Q}^*$  (gráficos a-b),  $\tilde{R}^*$  (gráficos c-d) e  $\tilde{P}^*$  (gráficos e-f) à medida que é variada a relação  $r/g$  (com  $g = 10^{-3}$ ).

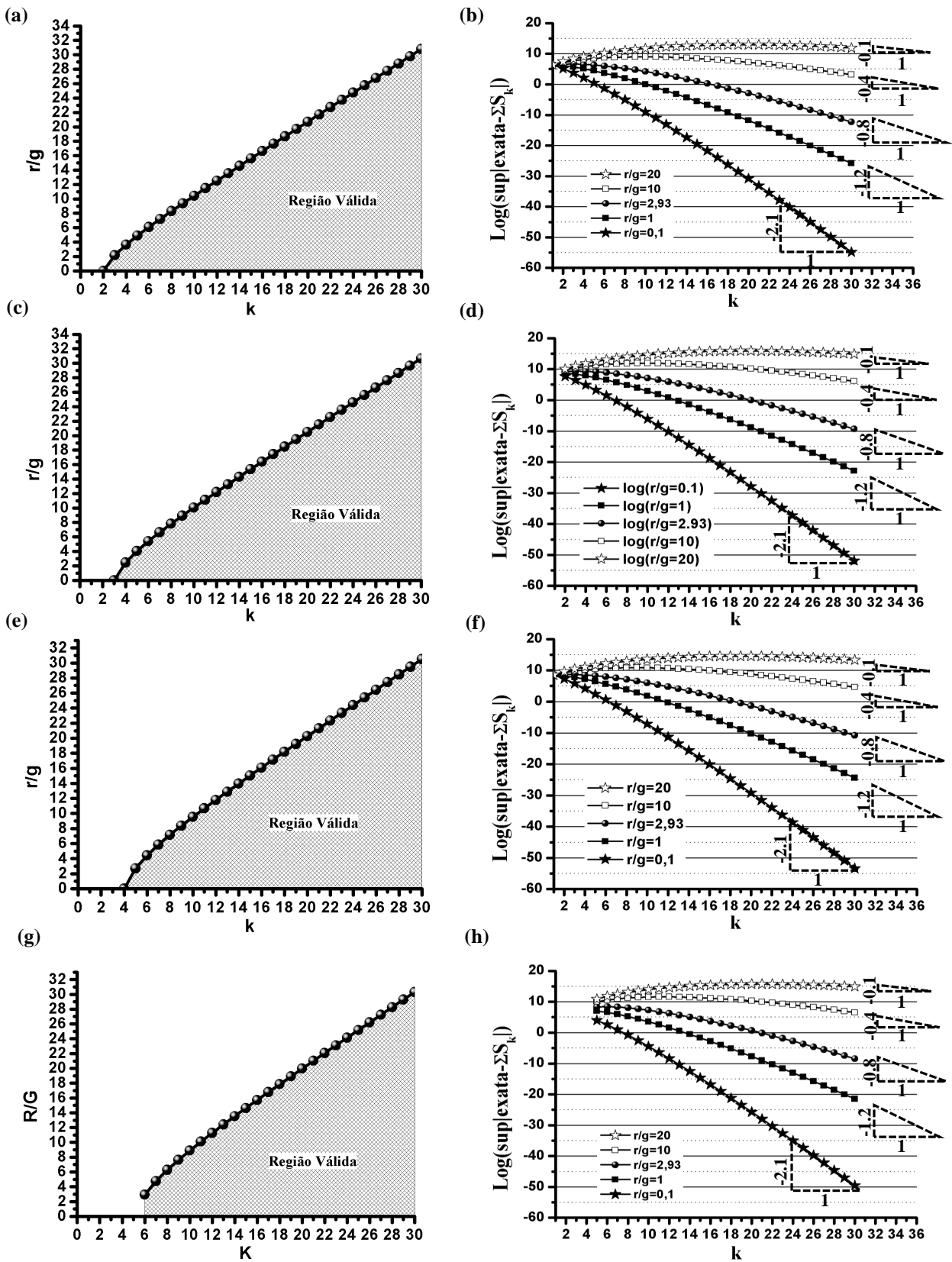


Figura 7.9 – Gráficos (a), (c) e (e) mostram as regiões de validade (convergência) e os gráficos (b), (d) e (f) a taxa de convergência da expansão em série (primeiros 30 termos) da derivada normal das soluções fundamentais  $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$  (gráficos a-b),  $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$  (gráficos c-d),  $\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial n_x}$  (gráficos e-f) e  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$  (gráficos g-h) à medida que é variada a relação  $r/g$  (com  $g = 10^{-3}$ ).



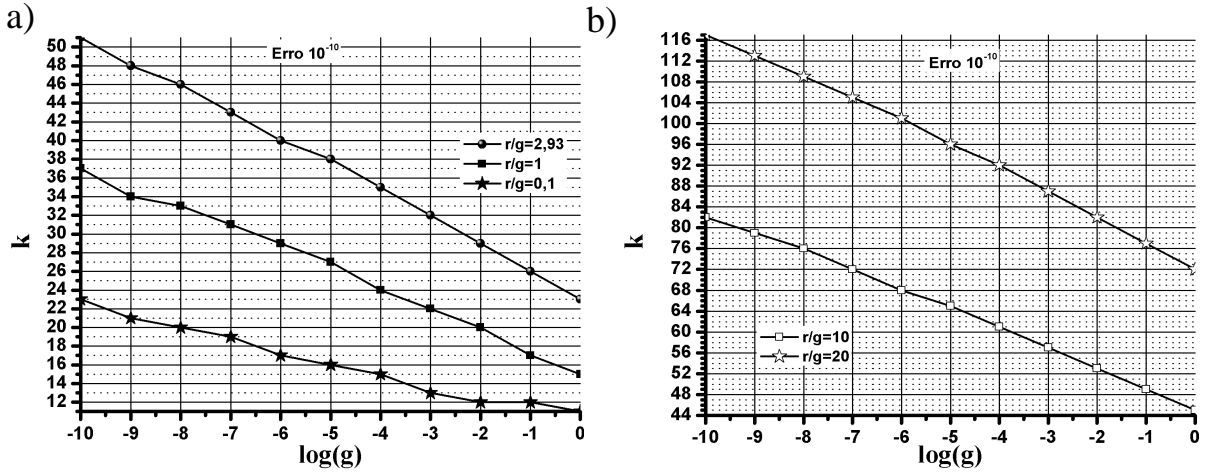


Figura 7.10 – Quantidade de termos necessários para que a série  $\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}$  (condição mais desfavorável) obtenha erro máximo de  $10^{-10}$  à medida que é variado o valor da constante da microestrutura  $g$ .

### 7.5.1 Subtração de singularidade aplicada à formulação Clássica do MEC

Para subtrair as instabilidades numéricas ocasionada pela presença do ponto fonte sobre o elemento de integração são apresentadas as equações integrais clássicas do MEC, assim como os núcleos regularizados aplicando a Eq.(7.41)

$$\frac{1}{2} \bar{u}^k + \sum_{\beta=1}^L \tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^k \cdot u^{\beta} = \sum_{\beta=1}^L \tilde{\mathbf{G}}_{\beta}^k \cdot P^{\beta}, \quad (7.191)$$

$$\frac{1}{2} \sigma^k + \sum_{\beta=1}^L \tilde{\mathbf{S}}_{\beta}^k \cdot u^{\beta} = \sum_{\beta=1}^L \tilde{\mathbf{V}}_{\beta}^k \cdot P^{\beta}, \quad (7.192)$$

com

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{K}}(\rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (7.193)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{W}}(\rho, \theta) - \frac{\tilde{\mathbf{W}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{\mathbf{W}}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta, \quad (7.194)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{D}}(\rho, \theta) - \frac{\tilde{\mathbf{D}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{\mathbf{D}}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta, \quad (7.195)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_{\beta}^k = & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \\ & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - \tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (7.196)$$

onde  $\tilde{\mathbf{K}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{W}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}(\rho, \theta)$  e  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta)$  são apresentados em coordenadas polar e constituído por:

$$\tilde{\mathbf{K}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{U}}(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.197)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{P}}(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.198)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(\rho, \theta) = \mathbf{D}^{312}(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.199)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = \mathbf{Z}^{312}(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.200)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{D}^{312}$  e  $\mathbf{Z}^{312}$  soluções fundamentais do MEC clássico escritas como

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}], \quad (7.201)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(x, y) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{(\mathbf{n} \cdot \nabla r) [(1-2\nu)\mathbf{I} + 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}] + (1-2\nu)(\mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n})\}, \quad (7.202)$$

$$\mathbf{D}^{312}(x, y) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} - (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})] + 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}\}, \quad (7.203)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{312}(x, y) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^3} \{3(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}) [(1-2\nu)\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \nu[(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{213} + (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{312}] - \\ & 5\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + 3\nu(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}) + (1-2\nu)[3\mathbf{n} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n})^{213} + \\ & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n})\mathbf{n}^{312}] - (1-4\nu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{I}\} \end{aligned} \quad (7.204)$$

## 7.5.2 Subtração de singularidade aplicada à formulação micromecânica do MEC

Analogamente à subtração de singularidade realizada nas equações integrais do MEC clássico, nesta seção é aplicado a Eq.(7.41) na formulação micromecânica do MEC. A partir das Eqs(7.83-7.92), e considerado a ausência da força de corpo, é possível escrever as seguintes integrais regularizadas em coordenadas polar

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{T}}(\rho, \theta) - \frac{\tilde{\mathbf{T}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{T}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta, \quad (7.205)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{N}}(\rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (7.206)$$

$$\mathbf{G}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{M}}(\rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (7.207)$$

$$\mathbf{L}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{X}}(\rho, \theta) d\rho d\theta, \quad (7.208)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{\beta}^k &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho d\theta + \\ &\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| - \tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta) \left[ \frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)} \right] \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (7.209)$$

$$\mathbf{T}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\rho, \theta) - \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right] d\rho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{\mathbf{E}}_{-1}(\theta) \ln \left| \frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)} \right| d\theta, \quad (7.210)$$

$$\mathbf{V}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{C}}(\rho, \theta) d\rho d\theta. \quad (7.211)$$

$$\mathbf{W}_{\beta}^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\mathbf{F}}(\rho, \theta) d\rho d\theta. \quad (7.212)$$

Com  $\tilde{\mathbf{T}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{N}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{X}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}(\rho, \theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}(\rho, \theta)$  e  $\tilde{\mathbf{F}}(\rho, \theta)$  representado por

$$\tilde{\mathbf{T}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{P}}^*(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.213)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{R}}^*(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.214)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{U}}^*(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.215)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(\rho, \theta) = \tilde{\mathbf{Q}}^*(x^k, y(\rho, \theta)) N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.216)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*(x^k, y(\rho, \theta))}{\partial n_x} N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.217)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\rho, \theta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*(x^k, y(\rho, \theta))}{\partial n_x} N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.218)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}(\rho, \theta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*(x^k, y(\rho, \theta))}{\partial n_x} N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta), \quad (7.219)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\rho, \theta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*(x^k, y(\rho, \theta))}{\partial n_x} N^a(\rho, \theta) J(\rho, \theta). \quad (7.220)$$

### 7.5.3 Expansões em série de Laurent

Obtida as equações regularizadas (Equações 7.193-7.196 e Equações 7.205-7.212), faz-se necessário explicitar os termos da série de Laurent,  $\tilde{\mathbf{W}}_{-1}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_{-1}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{T}}_{-1}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_{-1}(\theta)$ ,  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$ . As expressões finais são mostradas abaixo,

$$\tilde{\mathbf{W}}_{-1}(\theta) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)A^2(\theta)} (1-2\nu) \left[ (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 - (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right] \mathbf{N}_0^a J_0, \quad (7.221)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{-1}(\theta) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)A^2} \left\{ (1-2\nu) \left[ [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}]_0 + [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}]_0^{132} - [\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}]_0 \right] + \right. \\ \left. 3[\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}]_0 \right\} \mathbf{N}_0^a J_0, \quad (7.222)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)A^3(\theta)} \left[ 3\nu \left[ (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right] + \right. \\ \left. (1-2\nu) \left[ 3(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{213} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{312} \right] - \right. \\ \left. (1-4\nu) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})_0 \right] \mathbf{N}_0^a J_0, \quad (7.223)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)A^3(\theta)} \left\{ (N_0^a J_1(\theta) + N_1^a(\theta) J_0) \left[ 3\nu \left( (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right) + (1-2\nu) \left( 3(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{213} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{312} \right) - \right. \\ \left. - (1-4\nu) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})_0 \right] + N_0^a J_0 \left[ 3\nu \left( (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_1 \right) + \right. \\ \left. 3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 \left( (1-2\nu) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})_0 + \nu \left[ [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}]_0^{213} + [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}}]_0^{312} \right] - 5(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right) + \right. \\ \left. (1-2\nu) \left[ 3(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_1^{213} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_1^{312} \right] - (1-4\nu) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})_1 - \right. \\ \left. 3 \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} \left[ 3\nu \left( (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right) + (1-2\nu) \left[ 3(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{213} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)_0^{312} \right] - (1-4\nu) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})_0 \right] \right\}, \quad (7.224)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{-1}(\theta) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)A^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - 2\nu \right) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \mathbf{N}_0^a(\eta) J_0(\eta) - \right. \\ \left. \left( \frac{3}{2} - 2\nu \right) (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \mathbf{N}_0^a(\eta) J_0(\eta) \right\}, \quad (7.225)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta) = DP_{-2}(\theta) \mathbf{N}_0^a(\eta) J_0(\eta), \quad (7.226)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta) = DP_{-2}(\theta) [\mathbf{N}_0^a(\eta) J_1(\theta) + \mathbf{N}_1^a(\theta) J_0(\eta)] + DP_{-1}(\theta) \mathbf{N}_0^a(\eta) J_0(\eta), \quad (7.227)$$

com  $DP_{-2}$  e  $DP_{-1}$  tendo as, respectivas, expressões abaixo

$$DP_{-2} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)A^3} \left[ \frac{3}{2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \frac{(3-4\nu)}{2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 \mathbf{I} + \right. \\ \left. \frac{(3-12\nu)}{2} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 - \frac{(1-4\nu)}{2} (\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)_0 - \right. \\ \left. \frac{(9-12\nu)}{2} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \frac{(3-4\nu)}{2} (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x)_0 - \right. \\ \left. (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right], \quad (7.228)$$

$$\begin{aligned}
 DP_{-1} = & \left\{ \left[ -\frac{3}{2} \left[ 5(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 + A(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) \right] (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 - \frac{9(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{2A^2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 - \right. \right. \\
 & \frac{15A}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] + \frac{3A}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \right. \\
 & \left. (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \right] : (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + \frac{3A}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y)_0 \right] \left. \right] (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \\
 & \frac{3}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_1 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] + \frac{1}{2} \left[ 3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 + \right. \\
 & \left. A(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) - A(\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y)_0 + 3A(\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \right. \\
 & \left. (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \right] + \frac{A(3-4\nu)}{2} (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \cdot \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \right] - \\
 & \frac{A(1-4\nu)}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \right] \cdot \left[ (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \right]^T + \\
 & \left[ -\frac{3A(3-4\nu)}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] + \right. \\
 & \left. \frac{A(3-4\nu)}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \right] : (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + \frac{A(3-4\nu)}{2} \left[ (\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y)_0 \right] + \right. \\
 & \left. \frac{(3-4\nu)}{2} \left[ 3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 - A(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) \right] (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 - \frac{(3-4\nu)}{2} \left[ \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 - \right. \right. \\
 & \left. \left. (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_1 \right] \right] \mathbf{I} - 3(3-4\nu) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 - \\
 & \frac{(3-12\nu)}{2} \left[ \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 - (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_1 - \right. \\
 & \left. (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right] + \frac{(-1+4\nu)}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)_1 - \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right] + \\
 & 3(1-4\nu) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 - \frac{(9-12\nu)}{2} \left[ (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + \right. \\
 & \left. (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 - \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] - \\
 & \frac{(3-4\nu)}{2} \left[ \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x)_0 - (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x)_1 \right] + \left[ 3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 - \right. \\
 & \left. A(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) \right] (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \frac{3(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{A^2} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 - \\
 & (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_1 - (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_1 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 - \\
 & A(1-2\nu) (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 \left[ (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 - (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 \right] + \\
 & \frac{3A}{2} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 \left[ (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \right. \\
 & \left. (1-4\nu) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \cdot \left[ (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \right]^T - \frac{(1-4\nu)}{3} \left[ (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \right]^T + \frac{(3-4\nu)}{3} (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 - \right. \\
 & \left. (3-4\nu) (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \cdot (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \right] - \frac{A}{2} \left[ \mathbf{n}_x \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \otimes \mathbf{n}_x + \right. \\
 & \left. (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \right] \left. \right\}. \quad (7.229)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{-1} = & \frac{1}{32\pi(1-\nu)A^2} \mathbf{N}_0^a(\eta) J_0(\eta) \{ -3(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \\ & (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)_0 - (3-4\nu)(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 \tilde{\mathbf{I}} - 2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \\ & (2-4\nu)(\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 [(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 - (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0] \}. \end{aligned} \quad (7.230)$$

Os parâmetros necessários para descrever as  $Eq^s$ . (7.221-7.230), em coordenadas polares, são escritos abaixo. Primeiro é escrito a diferença entre ponto campo,  $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)$ , e ponto fonte,  $\mathbf{x}(\eta_1, \eta_2)$

$$\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) - \mathbf{x}(\eta_1, \eta_2) = \rho \mathbf{A}(\theta) + \rho^2 \mathbf{B}(\theta) + O(\rho^3), \quad (7.231)$$

a partir da qual são definidas a Eq.(7.232) e Eq.(7.233)

$$A = A(\theta) = |\mathbf{A}(\theta)| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 [A_k(\theta)]^2} > 0, \quad (7.232)$$

$$B = B(\theta) = |\mathbf{B}(\theta)| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 [B_k(\theta)]^2} \geq 0. \quad (7.233)$$

Em seguida são apresentadas, de forma geral, as demais expansões em série utilizadas. Entretanto, para a obtenção dos termos das expansões, abaixo, para as aproximações de Proriol, Polinomial e as de continuidade  $G^1$  são apresentadas no Apêndice G.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = & \frac{\mathbf{A}(\theta)}{A(\theta)} + \rho \left[ \frac{\mathbf{B}(\theta)}{A(\theta)} - \mathbf{A}(\theta) \frac{\mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{B}(\theta)}{A^3(\theta)} \right] + O(\rho^2) \\ = & \mathbf{d}_0(\theta) + \rho \mathbf{d}_1(\theta) + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.234)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^a(\xi) = \mathbf{N}^a(\eta) + \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} \cos \theta + \frac{\partial \mathbf{N}^a}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} \text{sen} \theta \right] + O(\rho^2) \\ = \mathbf{N}_0^a + \rho \mathbf{N}_1^a(\theta) + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.235)$$

$$\mathbf{J}(\xi) = \mathbf{J}_0 + \rho \mathbf{J}_1(\theta) + O(\rho^2), \quad (7.236)$$

$$J = |\mathbf{J}| = \left\{ \sum_{k=1}^3 J_k^2 \right\}^{1/2} = |\mathbf{J}_0| + \rho \frac{(\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_1)}{|\mathbf{J}_0|} + O(\rho^2) \quad (7.237)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y = \frac{\mathbf{J}}{J} = \frac{\mathbf{J}_0}{J_0} + \rho \left[ \frac{\mathbf{J}_1(\theta)}{J_0} - \mathbf{J}_1(\theta) \frac{J_1(\theta)}{J_0^2} \right] + O(\rho^2) \\ = \mathbf{n}_y^0 + \rho \mathbf{n}_y^1(\theta) + O(\rho^2) \end{aligned} \quad (7.238)$$

Obtida as expansões em série para os parâmetros básicos apresentados logo acima, faz-se necessário que algumas operações da álgebra tensorial, as quais são integrantes das Eq.(7.221-7.230), sejam expandidas em série. Tais expressões são

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [\mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_1(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.239)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [\mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_1(\theta) + \mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.240)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 + \rho [\mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta) + \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0] + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.241)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_1(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.242)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} &= [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_0(\theta)]^{132} + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_1(\theta)]^{132} + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0^{132} + \rho(\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1^{132} + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.243)$$

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}) &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{I} + \rho (\mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{I}) + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.244)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho \{ \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_1(\theta) + \\ &\quad \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \} + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.245)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho \{ \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_1(\theta) + \\ &\quad \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \} + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.246)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y &= \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 + \rho \{ \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta) + \\ &\quad \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 + \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0 \} + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \rho(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.247)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho \{ \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_1(\theta) + \\ &\quad \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{d}_1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \otimes \mathbf{d}_0(\theta) \} + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2),\end{aligned}\quad (7.248)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)^{213} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y^0)^{213} + \rho (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta))^{213} + O(\rho^2) \\ &= [\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y]_0^{213} + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y]_1^{213} + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.249)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y)^{312} &= (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y^0)^{312} + \rho (\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta))^{312} + O(\rho^2) \\ &= [\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y]_0^{312} + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y]_1^{312} + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.250)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I}) &= (\mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{I}) + \rho (\mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{I}) + O(\rho^2) \\ &= [\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I}]_0 + \rho [\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I}]_1 + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.251)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{213} &= [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_0(\theta)]^{213} + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_1(\theta)]^{213} + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0^{213} + \rho (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1^{213} + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.252)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{312} &= [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_0(\theta)]^{312} + \rho [\mathbf{I} \otimes \mathbf{d}_1(\theta)]^{312} + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_0^{312} + \rho (\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}})_1^{312} + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.253)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y &= \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{n}_y^0 + \rho [\mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta) + \mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{n}_y^0] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \rho (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y)_1 + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.254)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y &= \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y^0 + \rho [\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y^1(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)_0 + \rho (\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)_1 + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.255)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x &= \mathbf{n}_y^0 \otimes \mathbf{n}_x + \rho [\mathbf{n}_y^1(\theta) \otimes \mathbf{n}_x] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x)_0 + \rho (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x)_1 + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.256)$$

$$(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{n}_y^0 \cdot \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [\mathbf{n}_y^0 \cdot \mathbf{d}_1(\theta) + \mathbf{n}_y^1 \cdot \mathbf{d}_0(\theta)] + O(\rho^2). \quad (7.257)$$

Pode ser facilmente verificado que o termos  $\mathbf{n}_y^0 \cdot \mathbf{d}_0(\theta)$  é nulo e desta forma a Eq.(7.257) é reescrita abaixo

$$(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) = \rho [\mathbf{n}_y^0 \cdot \mathbf{d}_1(\theta) + \mathbf{n}_y^1 \cdot \mathbf{d}_0(\theta)] + O(\rho^2) = \rho (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2). \quad (7.258)$$

Continuando as expressões, têm-se:

$$\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y = \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y^0 + \rho \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y^1(\theta) + O(\rho^2) = (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_0 + \rho (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)_1 + O(\rho^2), \quad (7.259)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{d}_1(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.260)$$



$$\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y = \nabla_S \cdot \mathbf{n}_y^0 + \rho \nabla_S \cdot \mathbf{n}_y^1(\theta) + O(\rho^2) = (\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y)_0 + \rho [\nabla_S \cdot \mathbf{n}_y]_1 + O(\rho^2), \quad (7.261)$$

$$\nabla_S \mathbf{n}_y = \nabla_S \mathbf{n}_y^0 + \rho \nabla_S \mathbf{n}_y^1(\theta) + O(\rho^2) = (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + \rho [\nabla_S \mathbf{n}_y]_1 + O(\rho), \quad (7.262)$$

$$\begin{aligned} \nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} &= (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \otimes \mathbf{d}_0(\theta) + \rho [(\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \otimes \mathbf{d}_1(\theta) + \\ &\quad (\nabla_S \mathbf{n}_y)_1 \otimes \mathbf{d}_0(\theta)] + O(\rho^2) \\ &= (\nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_0 + \rho (\nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})_1 + O(\rho^2) \end{aligned} \quad (7.263)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \mathbf{n}_y) \otimes \mathbf{n}_x &= d_0(\theta) \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \otimes \mathbf{n}_x + \rho \left\{ \mathbf{d}_0(\theta) \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)_0 + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{d}_0(\theta) \cdot [\nabla_S \mathbf{n}_y]_1 \right\} \otimes \mathbf{n}_x + O(\rho^2) \\ &= (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \mathbf{n}_y)_0 \otimes \mathbf{n}_x + \rho (\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \mathbf{n}_y)_1 \otimes \mathbf{n}_x + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (7.264)$$

#### 7.5.4 Cálculo dos parâmetros $\beta(\theta)$ e $\gamma(\theta)$

Para concluir o tratamento das singularidades, tanto na formulação clássica quanto microestrutural do MEC, são apresentadas as expressões para os parâmetros  $\beta(\theta)$  e  $\gamma(\theta)$ , os quais são utilizados na Eq.(7.194-7.196), Eq.(7.205), Eq.(7.209) e Eq.(7.210).

De acordo com a Eq.(7.27), tem-se a vizinhança do ponto fonte,  $x$ , uma região circular (problemas 2D) ou esférica (problemas 3D) de raio  $\delta$  (módulo), ou seja,

$$\delta = r. \quad (7.265)$$

No plano paramétrico, em coordenadas polar, a potência do modulo do vetor raio pode ser escrito da seguinte forma

$$r^n = |\mathbf{r}|^n = \rho^n [A(\theta)]^n \left[ 1 + n\rho \frac{\mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{B}(\theta)}{[A(\theta)]^2} \right] + O(\rho^{n+2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.266)$$

Fazendo  $n = 1$  na Eq.(7.266), a Eq.(7.265) pode ser escrita

$$\delta = \rho [A(\theta)] \left[ 1 + \rho \frac{A(\theta) \cdot B(\theta)}{[A(\theta)]^2} \right] + O(\rho^{n+2}). \quad (7.267)$$

A partir da Eq.(7.267) é construída a série reversa (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965), ou seja, é realizada a expansão em série de potências de  $\delta$  para a equação em coordenada polar do contorno  $\sigma_\delta$  (imagem de  $S_\delta$ ),

$$\rho = \alpha(\delta, \theta) = \frac{\delta}{A(\theta)} - \delta^2 \frac{\mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{B}(\theta)}{A^4(\theta)} + O(\delta^3). \quad (7.268)$$

Comparando a Eq.(7.268) com a Eq.(7.35) conclui-se que

$$\beta(\theta) = \frac{1}{A(\theta)}, \quad \gamma(\theta) = \frac{\mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{B}(\theta)}{[A(\theta)]^4}. \quad (7.269)$$

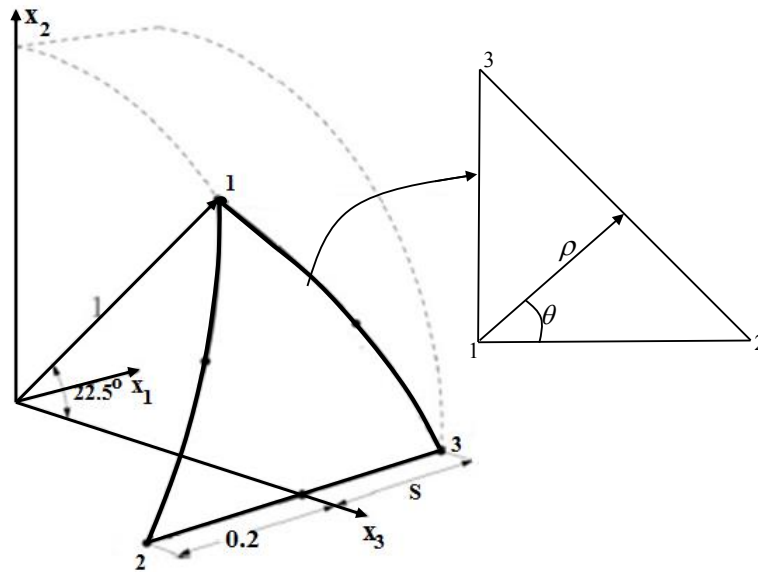


Figura 7.11 – Elemento curvo

## 7.6 Verificação do tratamento da singularidade

Para verificar a subtração de singularidade, por meio da série de Laurent Eqs.(7.221-7.230), é analisado a regularização do núcleos singulares considerado um elemento curvo como apresentado na Figura 7.11. Para poder verificar o comportamento da regularização em elementos distorcidos, a Figura 7.11 apresenta um elemento triangular em função do parâmetro  $s$ , o qual pode ser alterado para criar elementos irregulares. Nesta verificação tenta-se responder à algumas indagações quanto à eficiência da subtração de singularidade nas direções  $\rho$  e  $\theta$  e a influência da abordagem micromecânica frente à abordagem clássica do MEC, tanto para elemento regular quanto para distorcido.

Neste trabalho é apresentado e analisado a capacidade de subtrair singularidade da Eq.(7.196) e Eq.(7.209), as quais são hipersingulares e descrevem situações mais desfavoráveis quanto a eficiência do tratamento da singularidade. Para os demais tipos de singularidade, presentes neste trabalho, estudos semelhantes foram feitos, entretanto, não apresentados aqui, uma vez que, mostraram ou comportamento semelhantes aos hipersingulares ou comportamento mais eficiente quanto ao tratamento da singularidade. Em todas as análises, apresentadas, foram considerados os seguintes parâmetros:  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$  e ponto fonte na posição 1 (ver Figura 7.11).

A Figura 7.12 mostra, para  $\theta = 0.0009 \text{ rad}$ , o comportamento das componentes do tensor (hiper)singular,  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x} N^1 J$ , o comportamento da série de Laurent truncada nos dois primeiros termos  $\left(\frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2}\right)$  e  $\left(\frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho}\right)$  e o comportamento do integrando regularizado,  $\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) - \left(\frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho}\right)$ , para elemento regular ( $s = 0.2$ ) e parâmetro micromecânico  $g = 1.0$  quando considerado função com continuidade  $G^1$  (utilizada neste trabalho) como aproximadora para a geometria. A partir da Figura 7.12 observa-se a excelente

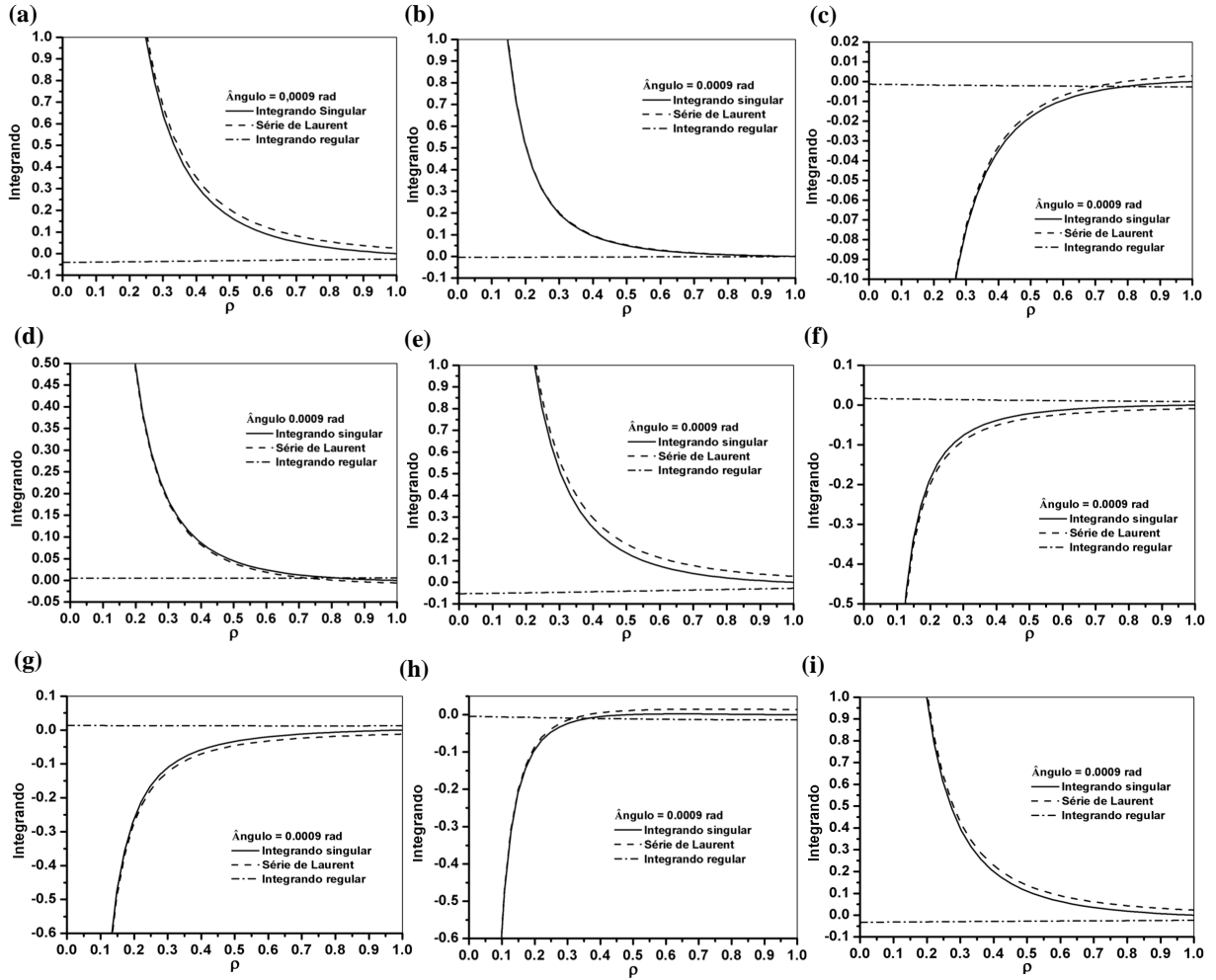


Figura 7.12 – Integrando singular  $\left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ , os dois primeiros termos da série de Laurent  $[\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)]_{(i,j)}$ ,  $[\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)]_{(i,j)}$  e o integrando regular; ponto fonte posição 1,  $S = 0.2$ ,  $g = 1$  e  $\nu = 0.2$ . (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação  $G^1$

representação da série de Laurent (truncada nos dois primeiros termos) para o núcleo singular, e assim resultando, em um integrando aparentemente regular ilustrado pela linha pontilhada (quase horizontal).

O termo aparentemente regular utilizado acima é devido ao fato de que apenas com as informações da Figura 7.12 não são suficientes para afirmar que foi subtraída a singularidade, pois o efeito de escala dos gráficos, uma vez que os termos (hiper)singulares possuem valores muito maiores que os do integrando regularizado, pode-se-ia ter uma camuflagem dos resultados. Entretanto, na tentativa de sanar essa dúvida, foram realizados os gráficos apenas dos termos regularizados  $\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$  na direção de  $\rho$  para diversos valores fixos de  $\theta$  como mostrado na Figura 7.13 e pode ser verificado que realmente a subtração de singularidade ocorreu, uma vez que o comportamento do termo  $\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$  são regulares, sem abrupta mudança de valores.

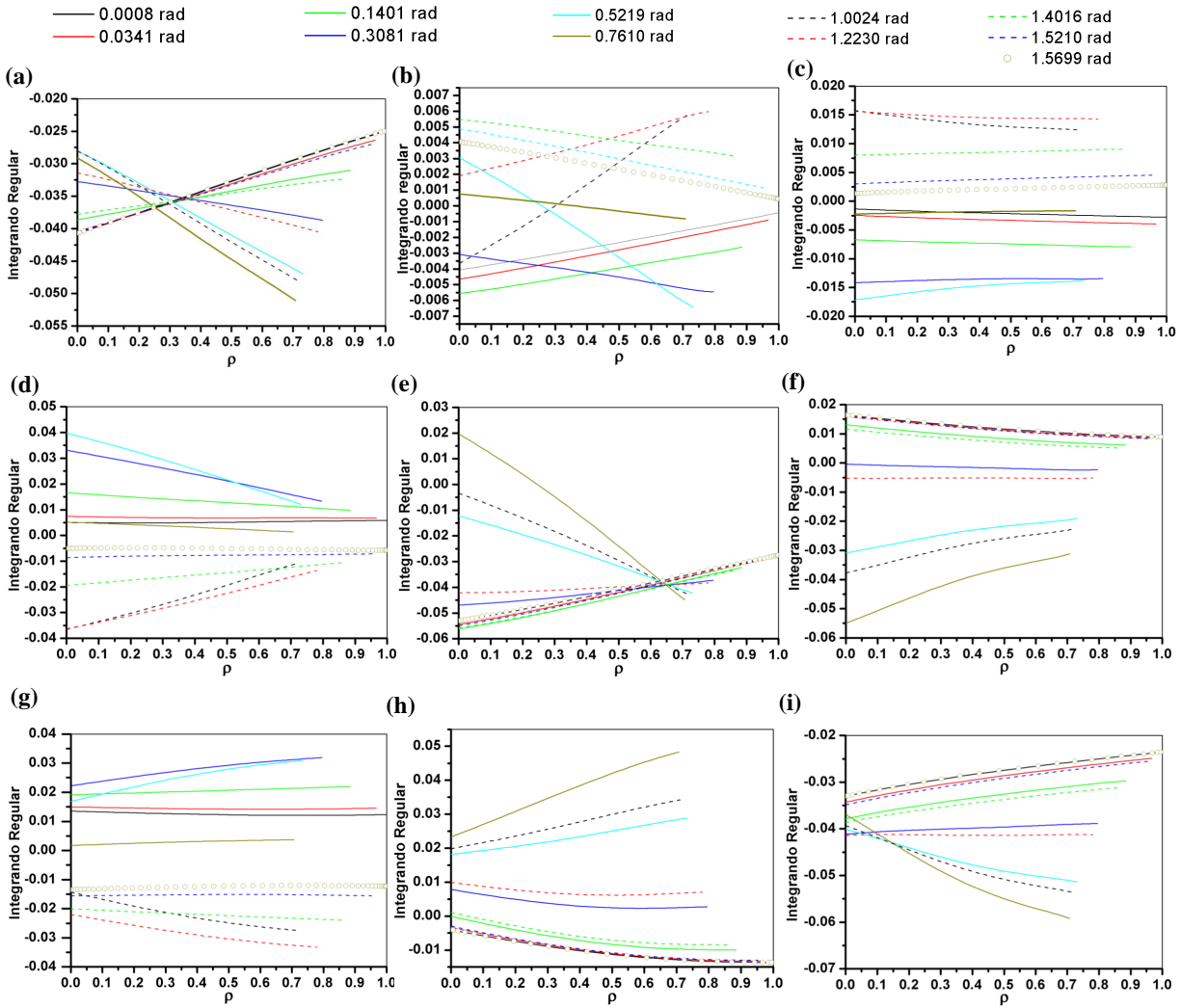


Figura 7.13 – Núcleo regular para  $\left[ \frac{\partial \vec{F}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$  quando (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $g = 1$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$

Verificada a subtração de singularidade na direção de  $\rho$ , para  $s = 0.2$  e  $g = 1.0$ , cabe realizar a verificação desta subtração na direção de  $\theta$ . A Figura 7.14 mostra o comportamento das componentes do tensor do núcleo regularizado, quando a geometria é aproximada pela função  $G^1$ , e quando é mantido fixo o valor de  $\rho$  e variado o parâmetro  $\theta$ . Para esta análise foram adotados diversos valores para  $\rho$ , no entanto, apresentados apenas os resultados mais significativos para o estudo, que foram para  $\rho = 0.6440$ ,  $\rho = 0.6917$ ,  $\rho = 0.7067$  e quando ponto fonte está na posição 1. Observa-se, a partir da Figura 7.14, que a técnica de subtração de singularidade não se comportou tão eficiente na direção  $\theta$  quanto para a direção  $\rho$ , principalmente para as componentes  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  e  $(3, 3)$ . Entretanto, observa-se que a subtração de singularidade ocorreu para todas as componentes do tensor quando  $s = 0.2$ , porém, sendo necessário uma quantidade maior, mesmo que discreta para esta situação, de pontos de integração para atingir a mesma

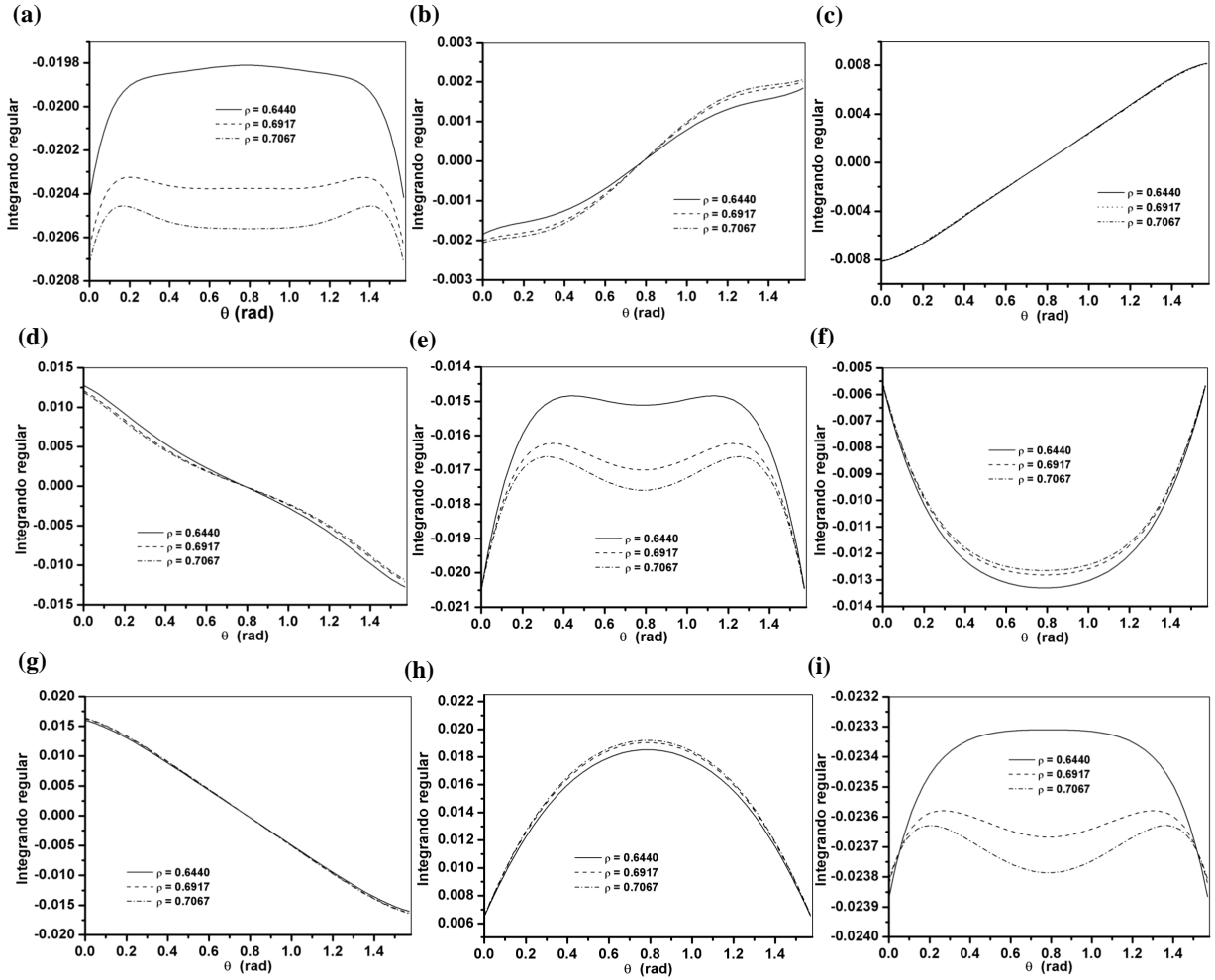


Figura 7.14 – Núcleo regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$  para os casos (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $g = 1$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$

precisão da integração na direção de  $\rho$ .

Observado as componentes do tensor regularizado que possuem menor eficiência, na direção de  $\theta$ , quando é realizada a subtração de singularidade, estudos adicionais foram realizados para compreender a influência do parâmetro microestrutural  $g$  para a remoção da singularidade na direção angular. Desta forma, a Figura 7.15 apresenta o comportamento, na direção de  $\theta$ , do integrando regular, para  $\rho = 0.7067$  e variando o parâmetro microestrutural  $g$ . Com o objetivo de alcançar rápida convergência e com poucos termos da expansão em série, foi adotado a relação  $\frac{r}{g} \leq 2.5$  e assim o parâmetro  $g$  ficando limitado ao valor 0.2, entretanto, cabe ressaltar aqui, que caso queira diminuir o valor do parâmetro  $g$  mantendo a mesma relação  $\frac{r}{g}$ , faz-se necessário diminuir o tamanho do elemento ou caso tenha maiores valores para essa relação, maior quantidade de termos da expansão das Eqs.(7.118-7.178) faz necessário. Assim, para esta análise foram adotados os valores  $g = 1.0$ ,  $g = 0.6$  e  $g = 0.2$ . A partir da Figura 7.15, observa-se que à medida

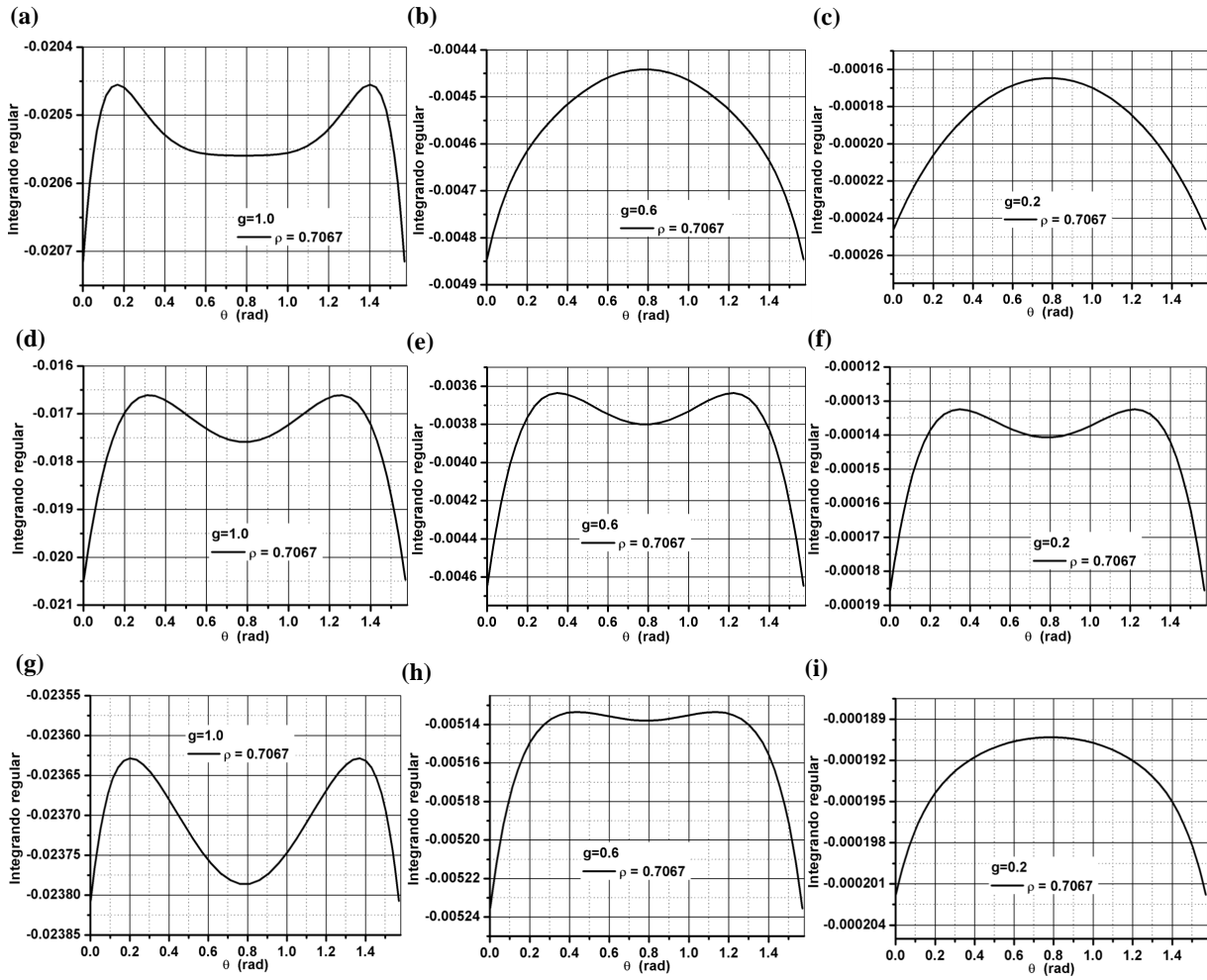


Figura 7.15 – Comportamento do integrando regularizado para  $\left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ , ponto fonte na posição 1,  $\nu = 0.2$  e  $S = 0.2$  para (a-c)  $(i, j) = (1, 1)$ , (d-f)  $(i, j) = (2, 2)$  e para (g-i)  $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação  $G^1$

que o parâmetro  $g$  é diminuído, maior regularização é imposta ao integrando regular e por consequência menor quantidade de pontos de integração tornam necessários.

Da mesma forma que foi realizada a análise para o integrando  $\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x} N^1 J$  é feita para o núcleo (hiper)singular  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta)$ . A Figura 7.16 apresenta o desempenho da representação em série de Laurent dada por  $\left( \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$ , a qual foi truncada no segundo termo. Sendo as expressões para  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)$  e  $\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)$  dada pela Eq.(7.224) e Eq.(7.223), respectivamente. Na análise da Figura 7.16 foi considerado  $\theta = 0.0009 \text{ rad}$ ,  $s = 0.2$  e ponto fonte na posição 1. De maneira semelhante à da Figura 7.12, a Figura 7.16 demonstra excelente representatividade, na direção de  $\rho$ , do núcleo singular por meio da expansão em série de Laurent, assim como, o termo  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$  aparenta ser regular. Já na Figura 7.17 é confirmado, para  $\rho$  variável e  $\theta$  fixo, a regularização do núcleo hiper(singular) obtida por meio da série de Laurent.

Na Figura 7.18 é apresentado o comportamento do integrando regularizado,  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) -$

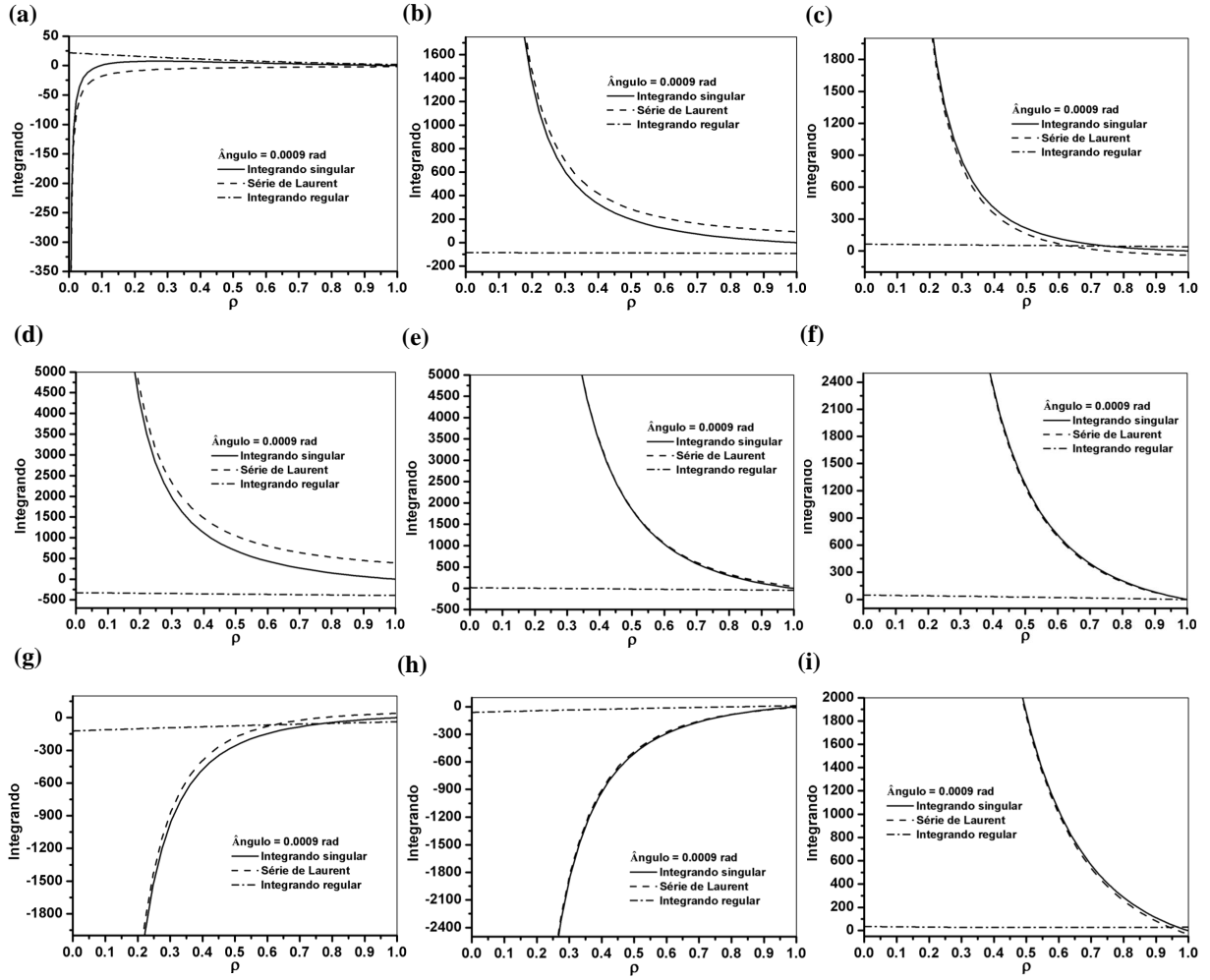


Figura 7.16 – Integrando singular  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = [\mathbf{Z}^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ , os dois primeiros termos da série de Laurent  $[\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)]_{(i,j)}$ ,  $[\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)]_{(i,j)}$  e o integrando regular; ponto fonte posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ . Aproximação  $G^1$

$\left(\frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)}{\rho}\right)$ , na direção angular, ou seja, é feito variar  $\theta$  para  $\rho$  fixo. Pode-se observar que, de forma semelhante a análise feita na abordagem micromecânica, a abordagem clássica apresenta uma regularização na direção  $\theta$  menos eficiente que na direção de  $\rho$  e com a desvantagem da ausência do parâmetro micromecânico que auxilia na melhora da eficiência da regularização.

Até o momento, apenas foi analisado o comportamento da aproximação  $G^1$  na subtração de singularidade, não sendo feito nenhum comentário quanto às aproximações de Proriot (base nodal de Lobatto) e Polinomial (base nodal equidistante) para a eficiência da subtração de singularidade. Constatado que, quando ponto fonte está na posição 1, as componentes (1, 1), (2, 2) e (3, 3) do núcleo integrando (hiper)singular, seja na abordagem micromecânica  $\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial n_x} N^1 J\right)$  ou seja na abordagem clássica  $(\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta))$ , proporcionam as condições mais desfavoráveis na subtração de singularidade, portanto, as análises que

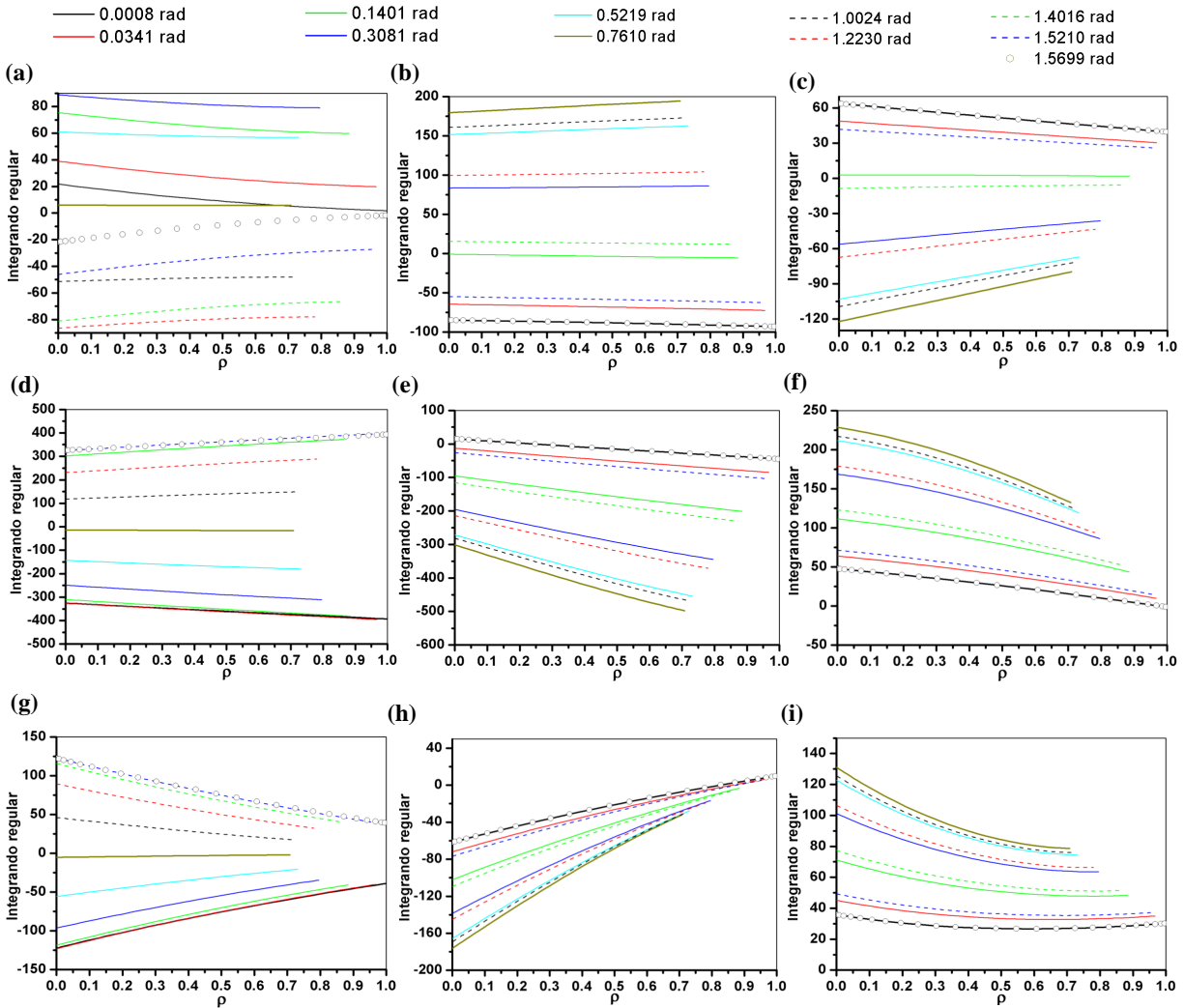


Figura 7.17 – Núcleo regular para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = [\mathbf{Z}^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$  quando (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$

seguem, para elemento curvo distorcido  $s = 1.0$ , serão referenciadas à estas componentes.

Na Figura 7.19 são apresentados os comportamentos do núcleo (hiper)singular presente na formulação micromecânica, para elemento distorcido ( $s = 1$ ). Os gráficos (a-c), que faz referência à aproximação  $G^1$ , e os gráficos (d-f) que referenciam à função de Proriol de grau 2 (ou Polinomial de grau 2), apresentam comportamentos semelhantes na direção angular quanto à subtração de singularidade, ou seja, é perdida mais significativamente a eficiência da regularização, com deterioração maior quando utilizado a aproximação de Proriol de grau 2 (ou Polinomial de grau 2). Análise semelhante é obtida para o núcleo (hiper)singular clássico apresentado na Figura 7.20, na qual pode ser visto que tanto a aproximação  $G^1$  (gráficos a - c) quanto a de Proriol (gráficos f - f) apresentam semelhantes deterioração na regularização, embora com intensidade diferentes.

A Figura 7.21 apresenta, para elemento curvo distorcido ( $s = 1.0$ ), o comportamento



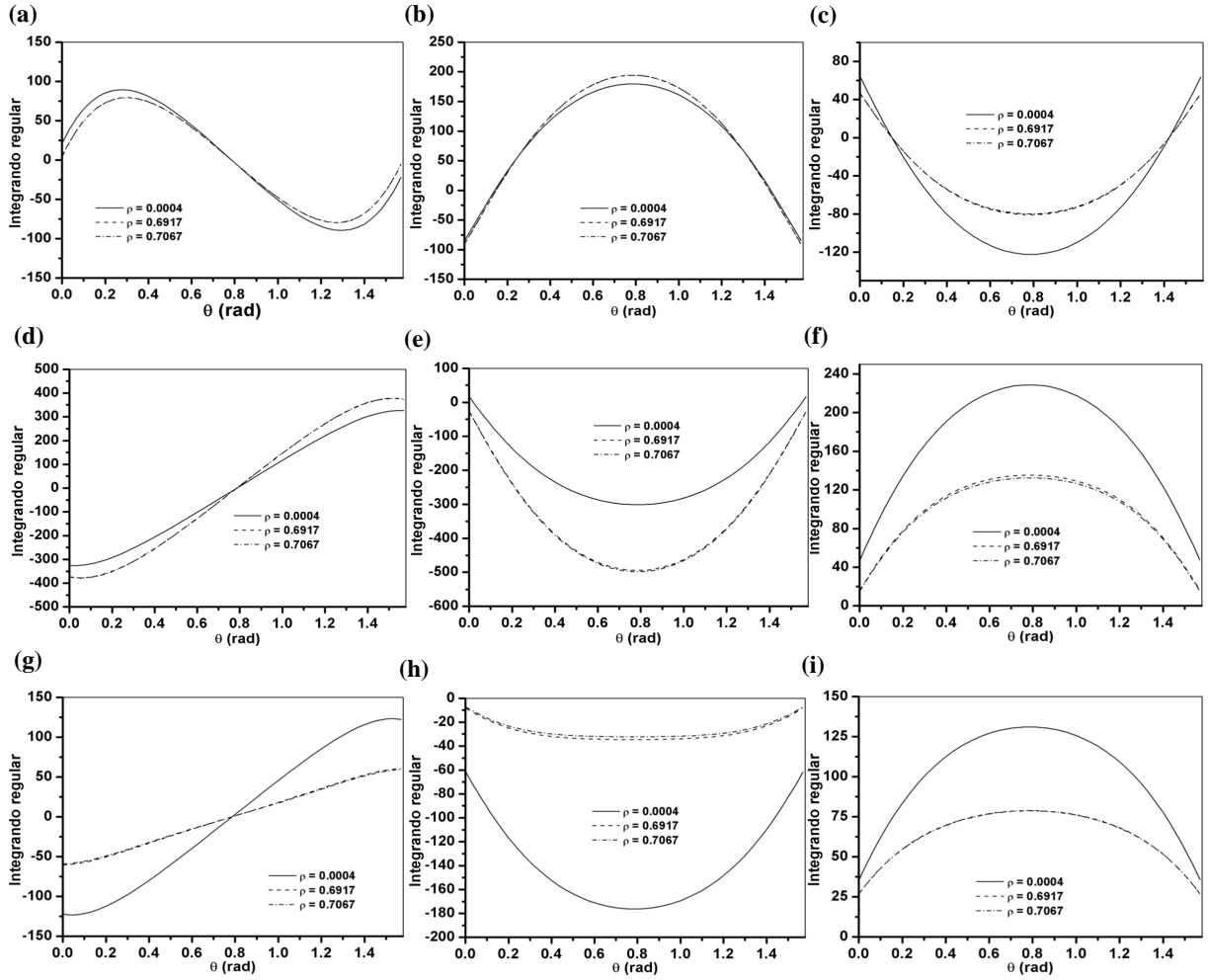


Figura 7.18 – Núcleo regularizado para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = [\mathbf{Z}^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$  para os casos (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (1, 2)$ , (c)  $(i, j) = (1, 3)$ , (d)  $(i, j) = (2, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (2, 3)$ , (g)  $(i, j) = (3, 1)$ , (h)  $(i, j) = (3, 2)$  e (i)  $(i, j) = (3, 3)$ ; Ponto fonte na posição 1,  $S = 0.2$ ,  $E = 10000$  e  $\nu = 0.2$ . Aproximação  $G^1$

do integrando regular  $\tilde{\mathbf{Y}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Y}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$  na direção radial, para o ponto fonte na posição 1. Já a Figura 7.22 mostra a variação do integrando regular  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) - \left( \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_{-1}(\theta)}{\rho} \right)$  na direção de  $\rho$  e com ponto fonte, também, na posição 1. Tanto na Figura 7.21 quanto na Figura 7.22 são apresentados os gráficos (a-c) para a aproximação da geometria por meio da função  $G^1$  e os gráficos (d-f) para aproximação por meio da função de Proriol de grau 2 (ou Polinomial de grau 2). Pode ser observado, seja pela Figura 7.21 ou seja pela Figura 7.22, que a tratamento da singularidade na direção radial é bastante eficiente, também, para elementos curvos distorcidos.

Sabendo que o tratamento da singularidade torna menos eficiente na direção angular (Figura 7.19 e Figura 7.20), quando o elemento curvo é distorcido e sabendo, ainda, que o parâmetro micromecânico influencia na subtração da singularidade quando o elemento curvo é regular (Figura 7.19), a Figura 7.23 mostra o comportamento do integrando regular na direção angular à medida que o parâmetro microestrutural é alterado. A partir

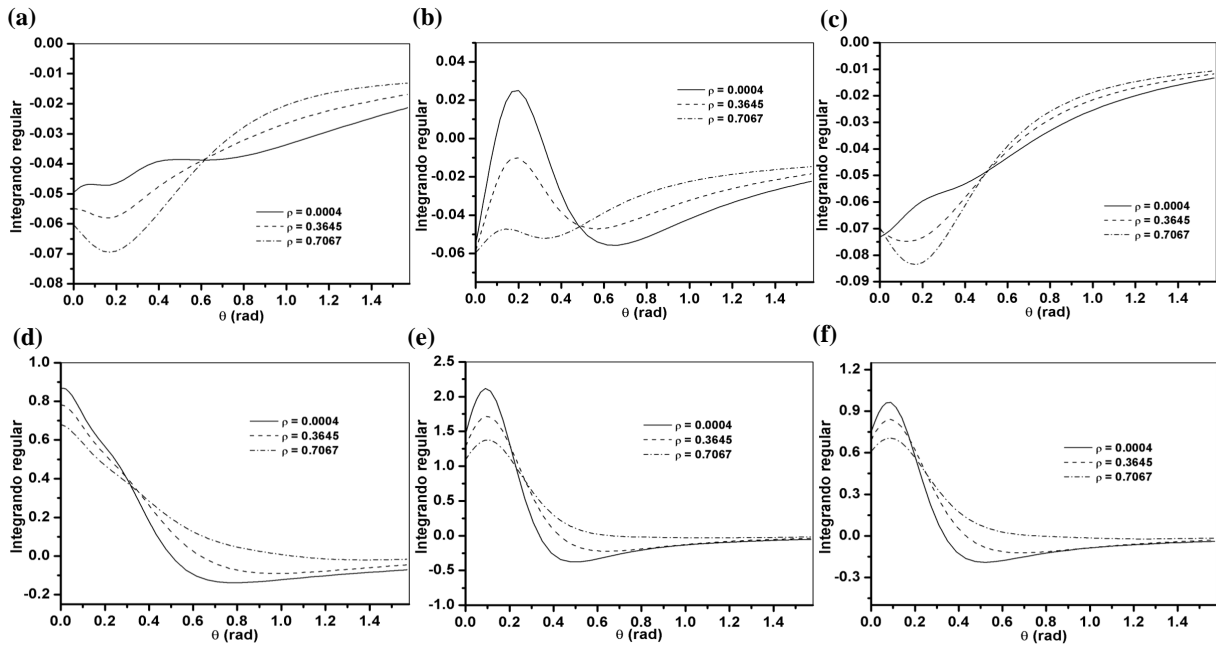


Figura 7.19 – Núcleo regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $g = 1$  para a aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ .

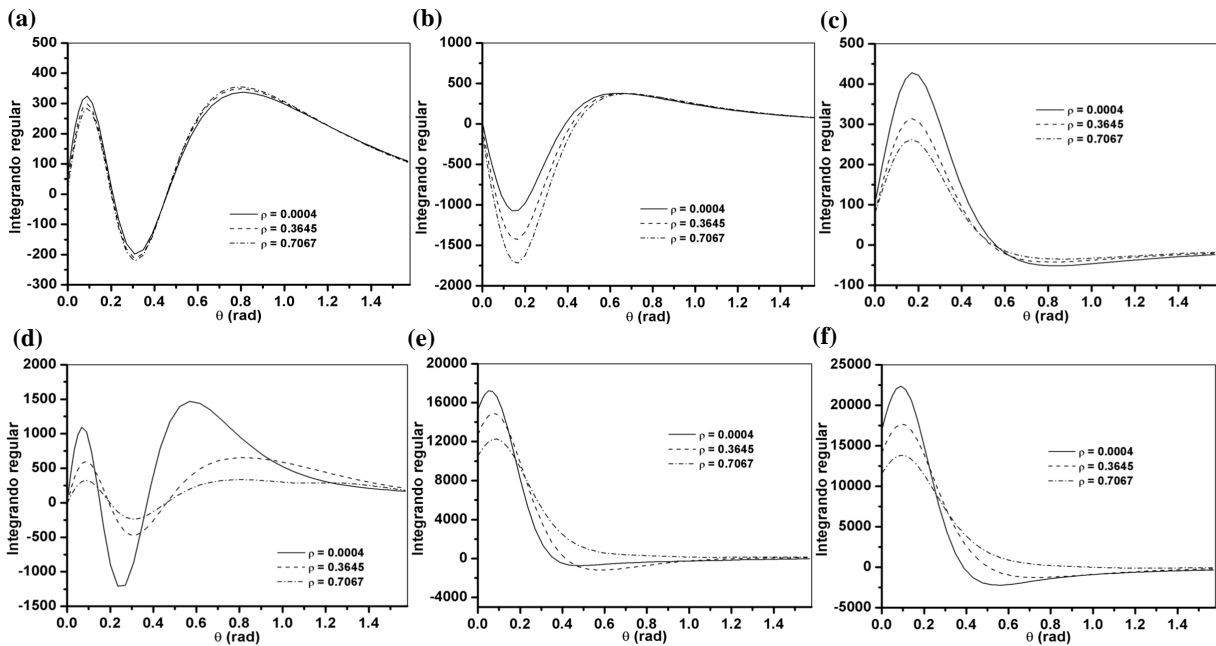


Figura 7.20 – Núcleo regularizado para  $\tilde{\mathbf{Z}}(\rho, \theta) = [\mathbf{Z}^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$  para aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ .

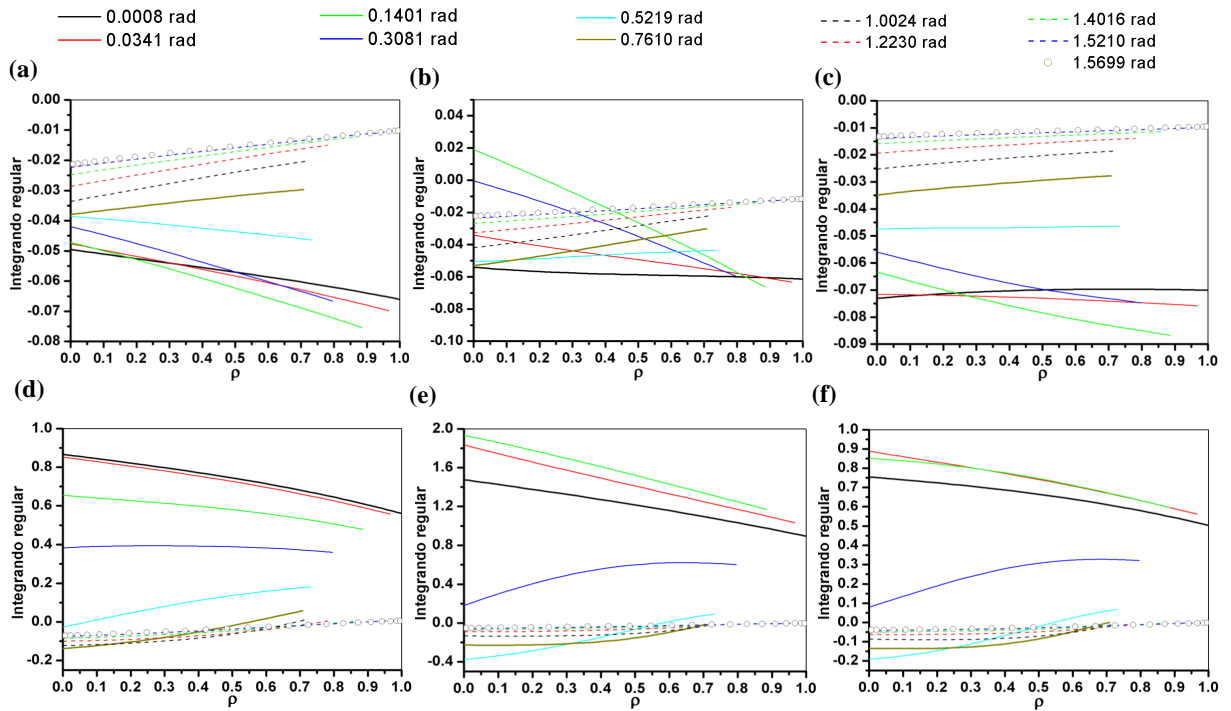


Figura 7.21 – Núcleo regularizado para  $\left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x} \right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $g = 1$  para aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ .

da Figura 7.23 pode ser observado que à medida que o parâmetro  $g$  é diminuído melhor torna a eficiência da subtração de singularidade seja para aproximação  $G^1$  (gráficos a-c), seja para a aproximação de Proriol de grau 2 (gráficos d-f).

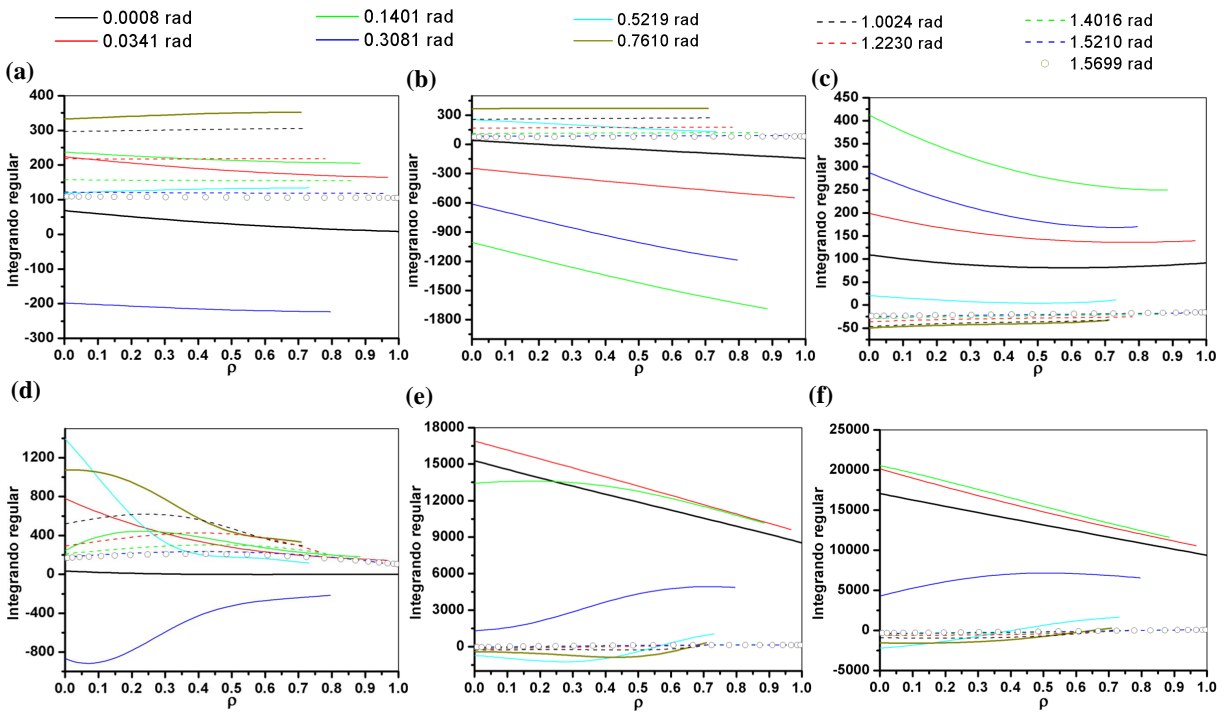


Figura 7.22 – Núcleo regularizado para  $\tilde{Z}(\rho, \theta) = [Z^{312}]_{(i,j)} N^1(\rho, \theta) J(\rho, \theta)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$  para aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ .

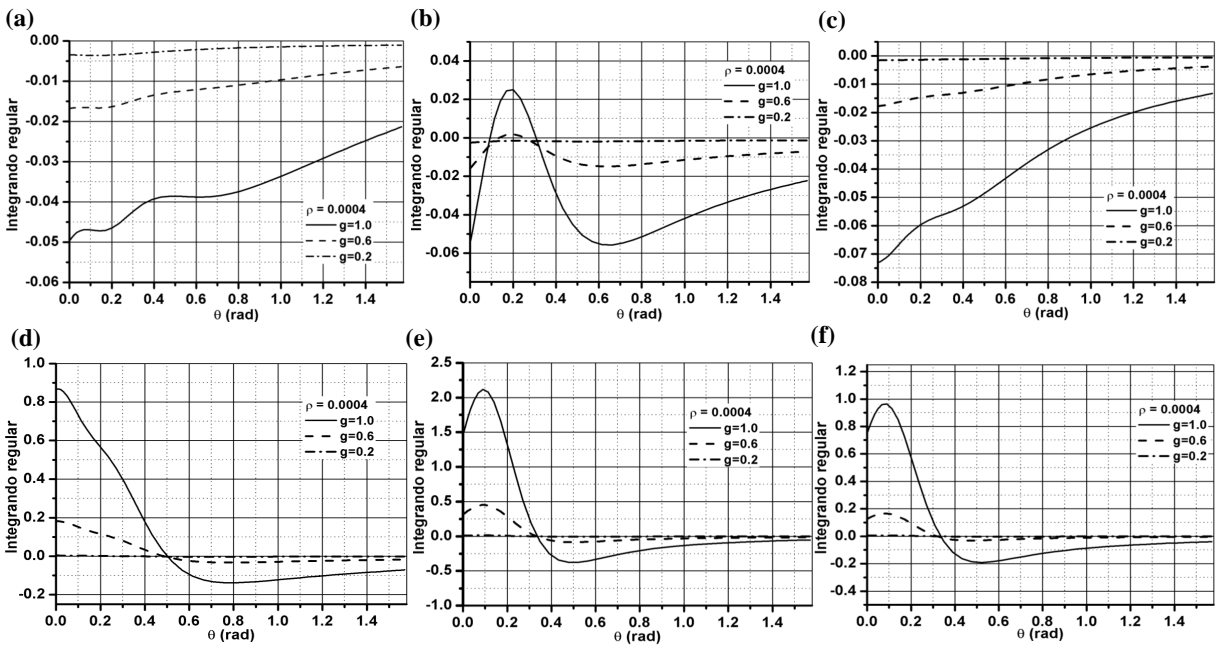


Figura 7.23 – Núcleo regularizado para  $\left[\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial n_x}\right]_{(i,j)} N^1(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2)$ ; Ponto fonte na posição 1;  $S = 1.0$ ,  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.2$  para a aproximação  $G^1$  (a)  $(i, j) = (1, 1)$ , (b)  $(i, j) = (2, 2)$ , (c)  $(i, j) = (3, 3)$  e para aproximação de Proriol / Polinomial de grau 2 (d)  $(i, j) = (1, 1)$ , (e)  $(i, j) = (2, 2)$ , (f)  $(i, j) = (3, 3)$ .

## Exemplos de validação

Nesta seção são apresentados 5 exemplos de validação. O Primeiro exemplo é referente a um cilindro sob tensão axial com bordas arredondadas. O segundo e terceiro exemplos são referentes, respectivamente, a uma esfera sólida submetida a um deslocamento prescrito  $e$ , no outro exemplo, a uma força aplicada em todo o contorno. Nos dois últimos exemplos são referentes a uma cavidade esférica imersa em um domínio infinito quando, no quarto exemplo, é prescrito o deslocamento no seu contorno  $e$ , no quinto exemplo, quando é prescrito forças. Todos os exemplos consideraram sólidos elástico gradiente tridimensional e os resultados foram comparados com a solução analítica e/ou com a solução numérica obtida no trabalho de Tsepoura et al. (2003)

### 8.1 Exemplo 1

O Primeiro exemplo numérico é referente a uma barra elástico gradiente de comprimento  $L = H/2$  submetida a uma tensão de tração axial constante. Neste exemplo são consideradas como condições de contorno não-clássica as deformações nulas nas duas extremidades da barra. Desta forma, a condição de contorno não-clássica aplicada na face superior e inferior da barra é  $(q_x, q_y, q_z) = (0, 0, 0)$ , enquanto que para todas as faces a tensão ressalto de superfície é nula, ou seja,  $(E_x, E_y, E_z) = (0, 0, 0)$ . A superfície lateral da barra é deixada livre de força de superfície por imposição de  $(P_x, P_y, P_z) = (0, 0, 0)$  e  $(R_x, R_y, R_z) = (0, 0, 0)$ . Além do mais, na face superior e inferior é imposta a condição de contorno de tensão de superfície  $(P_x, P_y, P_z) = (0, T_0, 0)$  (ver Figura 8.1). A solução analítica unidimensional deste problema, em deslocamento, é (TSEPOURA et al., 2002)

$$u(y) = \frac{T_0}{E} |y| + \frac{T_0 g}{2E \cosh(L/g)} \left( e^{-|y|/g} - e^{|y|/g} \right) \quad |y| \leq L, \quad (8.1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade ou de Young.

A partir das Eqs.(4.25), (4.26) e (8.1) podem ser escritas as soluções analíticas para a deformação, tensão dual e tensão total, respectivamente:

$$\varepsilon(y) = -\frac{T_0}{2E \cosh\left(\frac{L}{g}\right)} \left[ e^{-|y|/g} + e^{|y|/g} \right] + \frac{T_0}{E}, \quad (8.2)$$

$$\mu(y) = \frac{gT_0}{2 \cosh\left(\frac{L}{g}\right)} \left[ e^{-|y|/g} - e^{|y|/g} \right], \quad (8.3)$$

$$\sigma = T_0. \quad (8.4)$$

A fim de demonstrar a precisão do MEC com continuidade  $G^1$ , o problema unidimensional descrito acima foi resolvido utilizando um modelo 3D. Neste modelo 3D, a barra submetida à tensão axial é modelada por um cilindro sólido espesso de altura  $H = 2L = 2,4a$  e diâmetro  $D = 8,4a$ , como mostrado na Fig.(8.1). Os lados do cilindro foram arredondados com uma curvatura  $R = 0,2a$  devido a implementação numérica estar limitada para corpos elástico-gradiente com superfícies suaves. O problema foi resolvido para  $a = 0,5$ ,  $T_0 = 1$  e  $E = 1$ . Além do mais, o modelo foi discretizado por 2048 elementos de contorno triangulares ou equivalente a 512 elementos triangulares em um quarto do cilindro devido a sua simetria quando utilizado a aproximação de Prorior de grau 2 (ou equivalente Polinomial de grau 2) e  $G^1$  de grau equivalente a 4. Os resultados deste trabalho foram comparados com a solução analítica e também com os resultados numéricos obtidos no trabalho de Tsepoura et al. (2003). Em seu trabalho, Tsepoura et al. (2003) discretizou o problema em 1072 elementos de contorno quadrilateral de grau 2, ou equivalentemente, por 268 elementos quadrático quadrilateral restringido a um quarto do cilindro. As Figs.(8.2)-(8.6) apresentam, em função da distância  $y$  e para três valores de comprimento característico do material  $g$ , os resultados do cálculo dos deslocamentos  $u(y)$ , deformação  $\varepsilon(y)$ , tensão de Cauchy  $\tau(y)$ , Tensão dual  $\mu(y)$  e tensão total  $\sigma(y)$ , respectivamente. Como pode ser visto nestes gráficos a excelente concordância entre os valores do MEC  $G^1$  e a solução analítica. Entretanto, observa-se que os resultados de Tsepoura et al. (2003), assim como os resultados do MEC Prorior (ou equivalente Polinomial), não apresentam bom ajuste em relação a solução analítica. Esta diferença é devido a não representação da geometria suave por função  $C^1$ , como pode ser visto na Tabela 3 do Capítulo 6, e assim a hipótese de ser nula a integral de linha da formulação do MEC micromecânica não é satisfeita.

## 8.2 Exemplo 2

Neste exemplo um sólido esférico de raio  $a$  é submetido a um deslocamento radial  $u_0$  (condição de contorno clássico), enquanto que o gradiente normal do deslocamento é nulo no contorno (condição de contorno não clássica), ou seja,

$$\mathbf{u}(r)|_{r=a} = u\hat{\mathbf{r}}, \quad (8.5)$$

$$\mathbf{q}_r(r)|_{r=a} = \frac{\partial \mathbf{u}_r(r)}{\partial n} \Big|_{r=a} = 0, \quad (8.6)$$

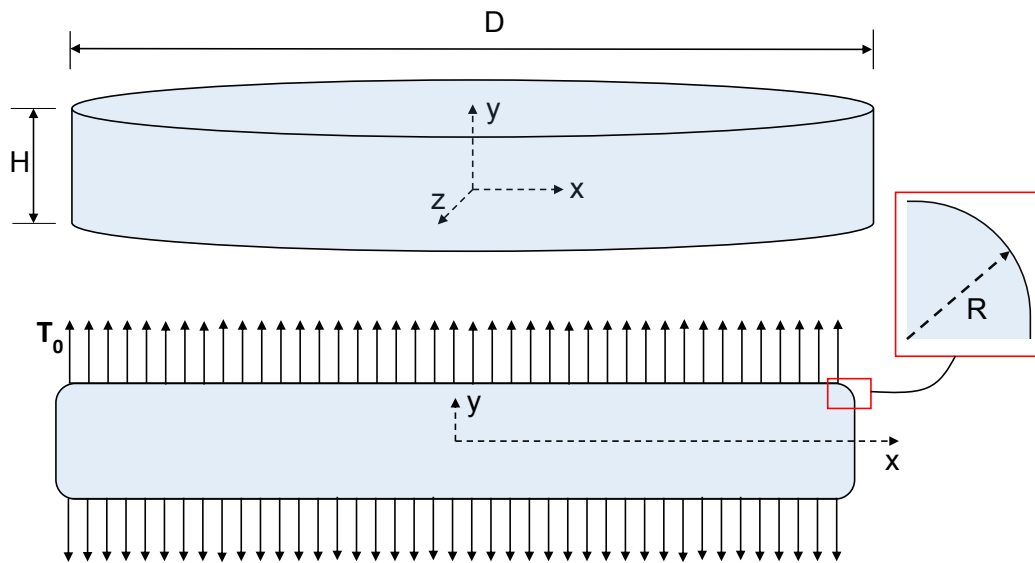


Figura 8.1 – Geometria do cilindro sólido sob tensão axial.

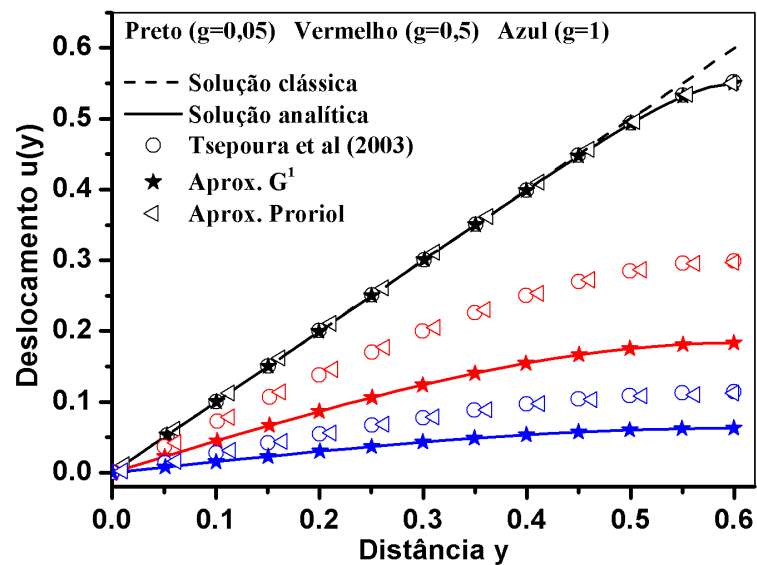


Figura 8.2 – Deslocamento axial  $u(y)$  do cilindro sólido versus distância  $y$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ .

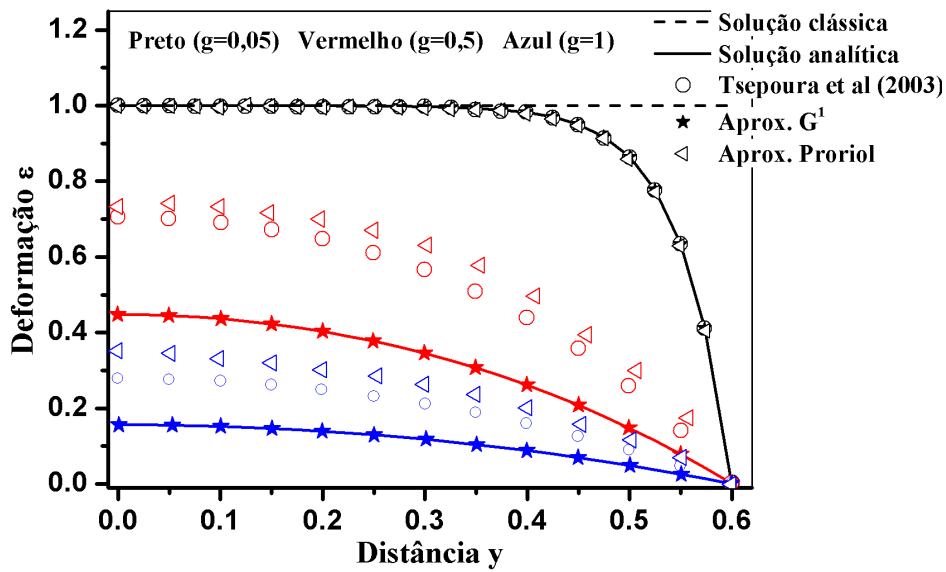


Figura 8.3 – Deformação axial  $\varepsilon(y)$  do cilindro sólido versus distância  $y$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ .

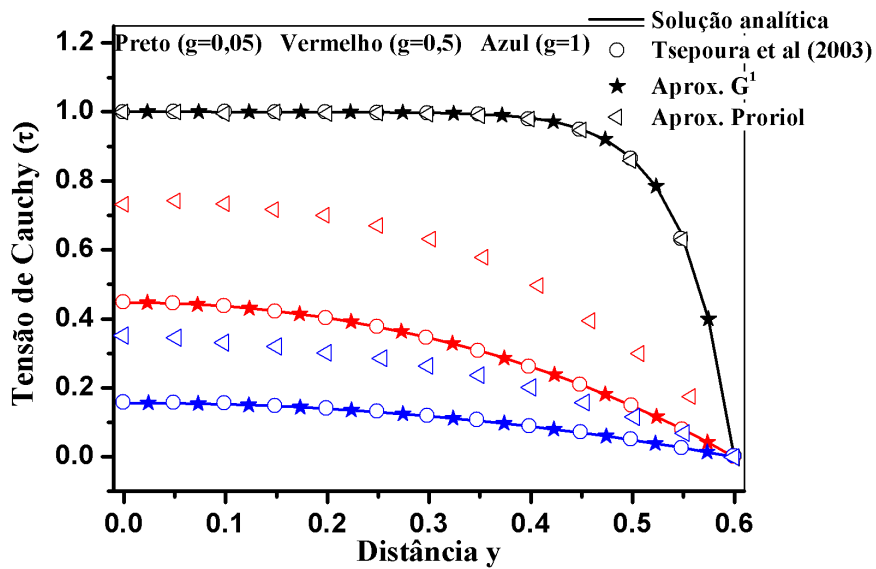


Figura 8.4 – Tensão de Cauchy  $\tau_{yy}$  do cilindro sólido versus distância  $y$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ .



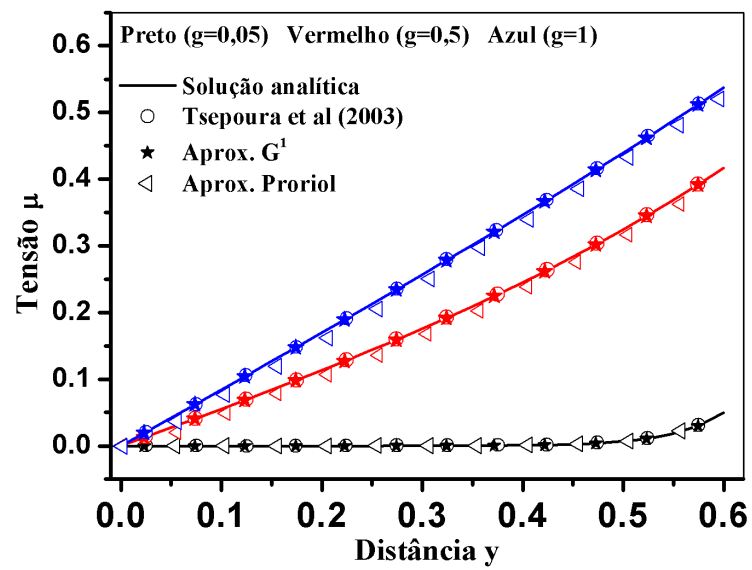


Figura 8.5 – Tensão dual  $\mu_{yyy}$  do cilindro sólido versus distância  $y$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ .

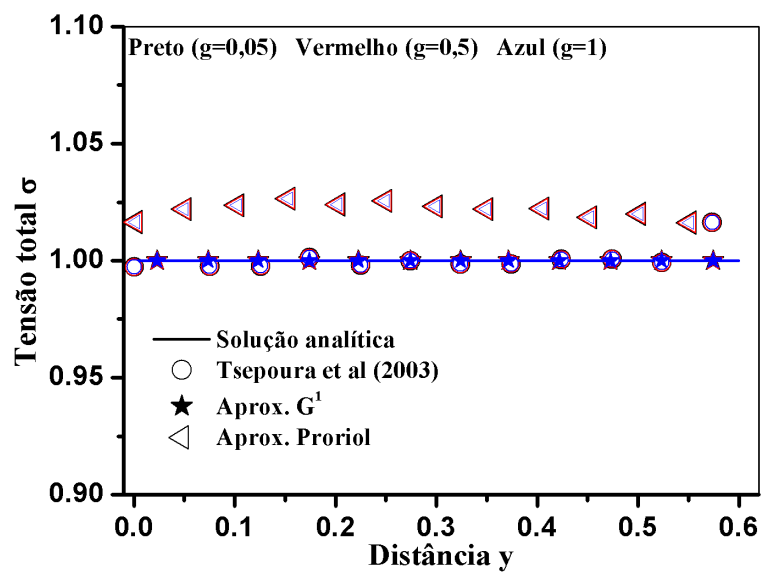


Figura 8.6 – Tensão total  $\sigma_{yy}$  do cilindro sólido versus distância  $y$  à medida que é variado o parâmetro micromecânico  $g$ .

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  é o deslocamento radial e  $r$  a distância com origem no centro da esfera. A solução analítica, em deslocamento, para este problema é (TSEPOURA et al., 2003)

$$\mathbf{u} = \left[ Ar + c \left( -g^2 \frac{\text{Senh}(r/g)}{r^2} + g \frac{\text{Cosh}(r/g)}{r} \right) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.7)$$

onde

$$A = -\frac{2gu_0a\text{Cosh}(a/g) - 2g^2u_0\text{Senh}(a/g) - u_0a^2\text{Senh}(a/g)}{a(-3ga\text{Cosh}(a/g) + 3g^2\text{Senh}(a/g) + a^2\text{Senh}(a/g))}, \quad (8.8)$$

$$C = -\frac{u_0a^2}{-3ga\text{Cosh}(a/g) + 3g^2\text{Senh}(a/g) + a^2\text{Senh}(a/g)}. \quad (8.9)$$

A partir das Eqs.(4.25), (4.26), (8.7), (8.8) e (8.9) podem ser escritas as soluções analíticas para a deformação, tensão dual e tensão total, respectivamente:

$$\varepsilon_r = \left[ A + C \left( -\frac{2g\text{Cosh}(r/g)}{r^2} + (2g^2 + r^2) \frac{\text{Senh}(r/g)}{r^3} \right) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.10)$$

$$\mu_{rrr} = gEC \left[ \frac{r(6g^2 + r^2)\text{Cosh}(r/g) - 3g^2(2g^2 + r^2)\text{Senh}(r/g)}{r^4} \right], \quad (8.11)$$

$$\sigma_{rr} = E \left[ A + 2Cg \left( \frac{r(12g^2 + r^2)\text{Cosh}(r/g) - g(12g^2 + 5r^2)\text{Senh}(r/g)}{r^5} \right) \right]. \quad (8.12)$$

O problema acima é resolvido numericamente pela formulação do MEC micromecânico com continuidade  $G^1$ , apresentado nesta tese, e comparado com a mesma formulação do MEC considerando a aproximação de Proriol de grau 2 (ou equivalente Polinomial de grau 2) e com os resultados numéricos obtido por Tsepoura et al. (2003). Para realizar esta comparação foram adotados, como mostrado na Fig.(8.7) os seguintes valores:  $u_0 = 1$ ,  $a = 1$  e  $\nu = 0$ . Para a abordagem via MEC  $G^1$  e Proriol grau 2, o problema foi discretizado por 512 elementos de contorno triangulares e Tsepoura et al. (2003) utilizou 304 elementos quadrático quadrilateral. As Figs.(8.8)-(8.11) mostram, respectivamente, os valores do deslocamento radial  $u_r$ , deformação  $\varepsilon_r$ , tensão dual  $\mu_{rrr}$  e tensão total  $\sigma_{rr}$  à medida que é variado o valor do comprimento característico  $g$ . A partir das Figs.(8.8)-(8.11) é possível observar o bom ajuste do MEC com aproximação  $G^1$ , com aproximação de Proriol de grau 2 e dos resultados de Tsepoura et al. (2003) quando comparado com a solução analítica. Este é um caso particular cujas aproximações  $C^0$  se aproximam muito bem da aproximação  $G^1$  no referente a continuidade do plano tangente (ver Tabela 3 no Capítulo 6), ou seja, a parcela referente à integral de linha da formulação influência muito pouco aos resultados. Cabe ressaltar ainda que os resultados, quando utilizando elementos  $G^1$ , obtêm erros inferiores a 0,5% enquanto que, quando utilizando elementos  $C^0$  (nesta análise foi comparado com a aproximação de Proriol de grau 2), são obtidos erros inferiores a 1,5%. Na Fig.(8.11) são apresentados apenas os resultados da formulação do MEC utilizando aproximação  $G^1$  e aproximação  $C^0$  (Proriol), uma vez que Tsepoura et al. (2003) não apresentou resultados para a tensão total.

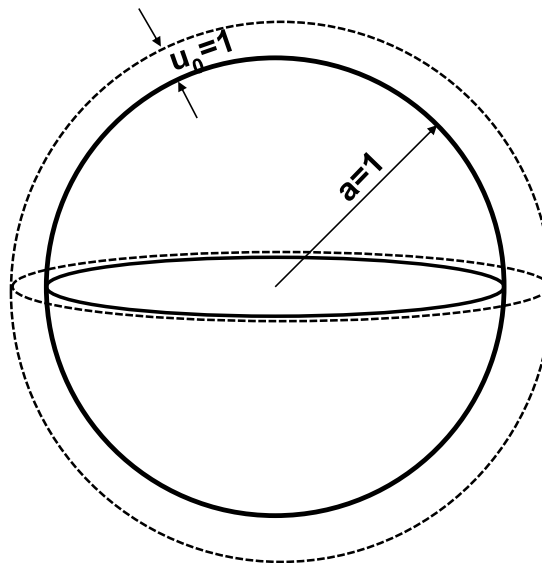


Figura 8.7 – Geometria da esfera sólida submetida a um deslocamento radial.

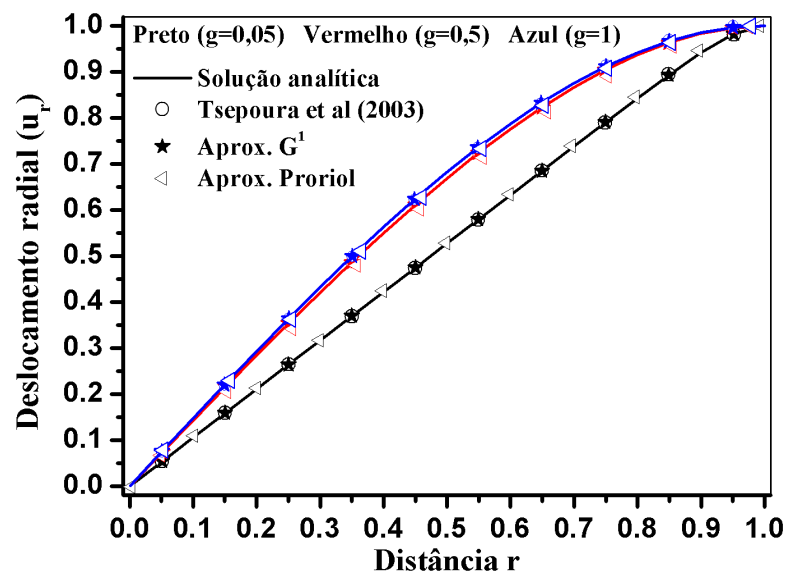


Figura 8.8 – Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ .

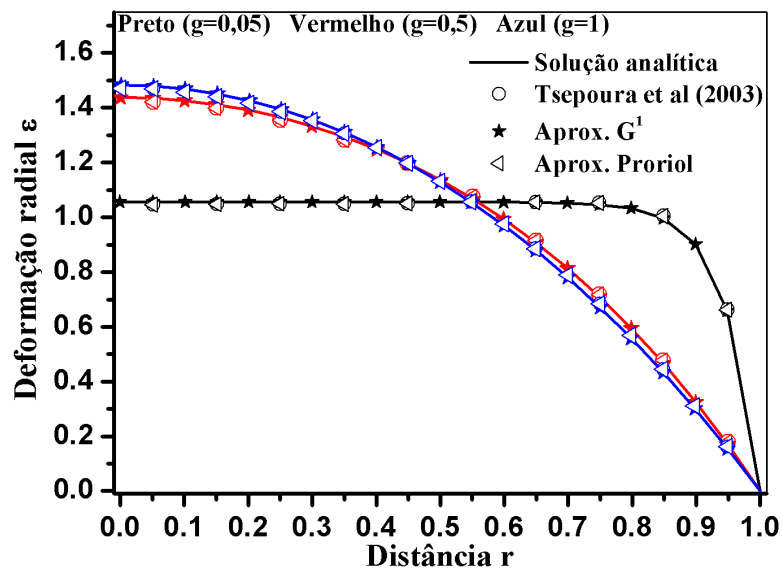


Figura 8.9 – Deformação radial  $\varepsilon_r$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ .

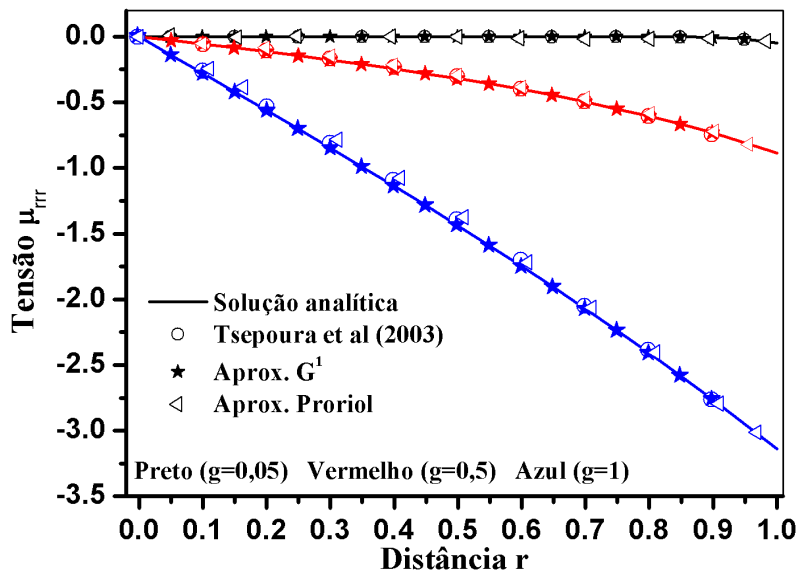


Figura 8.10 – Tensão dual  $\mu_{rrr}$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ .

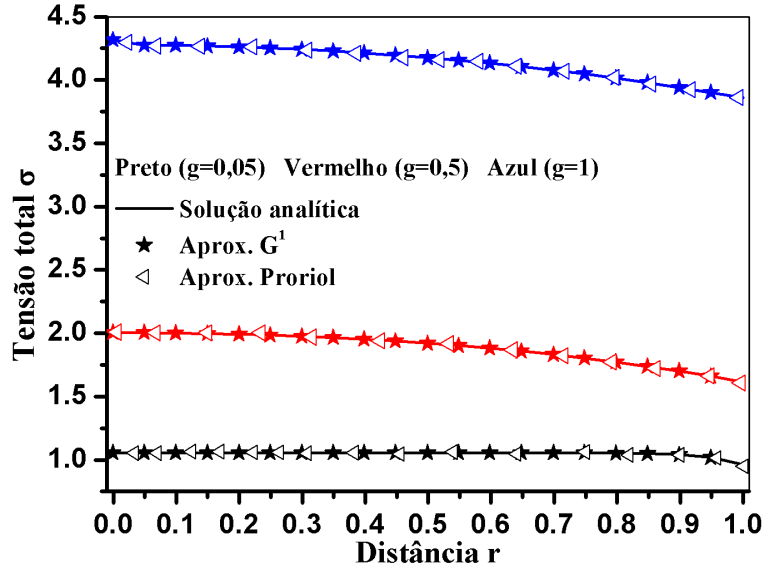


Figura 8.11 – Tensão total  $\sigma_{rr}$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ .

### 8.3 Exemplo 3

A mesma esfera do problema anterior agora é submetida a uma pressão externa radial  $P_0$  (ver Figura 8.12), enquanto que a tensão conjugada de superfície  $\mathbf{R}$  é nula no contorno, isto é,

$$\mathbf{P}(r)|_{r=a} = P_0 \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.13)$$

$$\mathbf{R}(r)|_{r=a} = 0. \quad (8.14)$$

Este problema possui a solução analítica da forma (TSEPOURA et al., 2003)

$$\mathbf{u} = \left[ Ar + C \left( -g^2 \frac{\text{Senh}(r/g)}{r^2} + g \frac{\text{Cosh}(r/g)}{r} \right) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.15)$$

com

$$A = -\frac{P_0(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1+\nu)}, \quad (8.16)$$

$$C = 0. \quad (8.17)$$

A partir das Eqs.(4.25), (4.26), (8.15) - (8.17) podem ser escritas as soluções analíticas para a deformação, tensão dual e tensão total, respectivamente:

$$\varepsilon_{rr} = A, \quad (8.18)$$

$$\mu_{rrr} = 0, \quad (8.19)$$

$$\sigma = \tau = E\varepsilon_{rr}, \quad (8.20)$$

Para estas condições de contorno (Equação 8.13 e Equação 8.14), tem-se que a solução analítica da esfera elástica gradiente, Eq.(8.15), apresenta um comportamento elástico clássico, independente do comprimento característico do material. Assumindo  $a = 1$ ,  $P_0 = 1$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0$ , o problema é discretizado por 512 elementos de contorno triangulares quadrático para a aproximação de Proriol e linear para  $G^1$ . Para a análise de Tsepoura et al. (2003) foram utilizados 304 elementos quadrangulares quadrático. A Fig.(8.13) mostra o valor do deslocamento radial calculado pelo MEC  $G^1$  e MEC Proriol grau 2 e em seguida são comparados com os resultados de Tsepoura et al. (2003) e com a solução analítica, a qual é independente do parâmetro  $g$ . De forma análoga, a Fig.(8.14) mostra o resultado da deformação radial à medida que é variado o valor do parâmetro  $g$  para a aproximação  $G^1$  e Proriol de grau 2. Tanto a Fig.(8.13) quanto a Fig.(8.14) mostram o bom ajuste das funções aproximadoras à solução analítica. Entretanto, observa-se um melhor ajuste para o MEC  $G^1$  à solução analítica, com erro máximo de 0.1%, enquanto que o MEC aproximado pela função de Proriol grau 2 (ou Polinômial de grau2) apresenta um ajuste com erro máximo de 1.1%, e para os resultados de Tsepoura et al. (2003) podem ser visto, por meio destas figuras, que apresenta um ajuste semelhante à inferior ao apresentado pela aproximação de Proriol. Mesmo com essas diferenças entre os erros proporcionada pelas funções aproximadoras, pode-se concluir que todas abordagens se ajustaram adequadamente à solução analítica, e isto foi ocasionado pela boa representação do plano tangente quando usado as funções de continuidade  $C^0$  (ver Tabela 3 no Capítulo 6), o que proporciona uma baixa influência da integral de linha, presente na formulação, aos resultados.

## 8.4 Exemplo 4

Neste exemplo uma cavidade esférica de raio  $a$ , submetida a um deslocamento radial  $u_0$ , está imersa em um espaço (3D) elástico gradiente infinito (ver Figura 8.15). As condições de contorno clássica deste problema são

$$\mathbf{u}(r)|_{r=a} = u_0 \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.21)$$

$$\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (8.22)$$

e é adotada a seguinte condição de contorno não clássica

$$\mathbf{q}_r(r)|_{r=a} = \frac{\partial \mathbf{u}_r(r)}{\partial n} \Big|_{r=a} = 0. \quad (8.23)$$

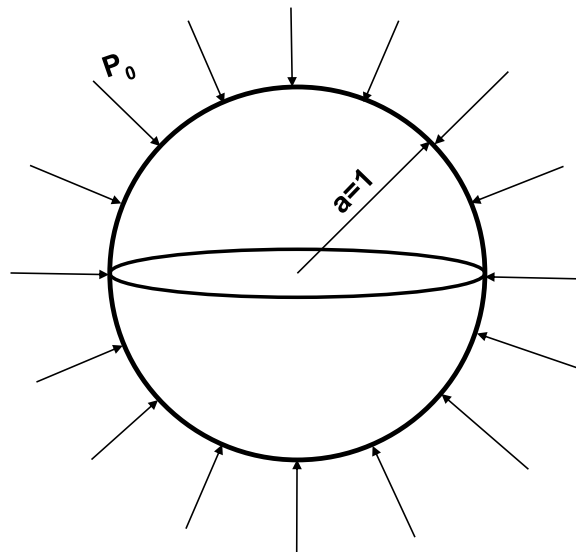


Figura 8.12 – Geometria da esfera sólida submetida a força de superfície radial.

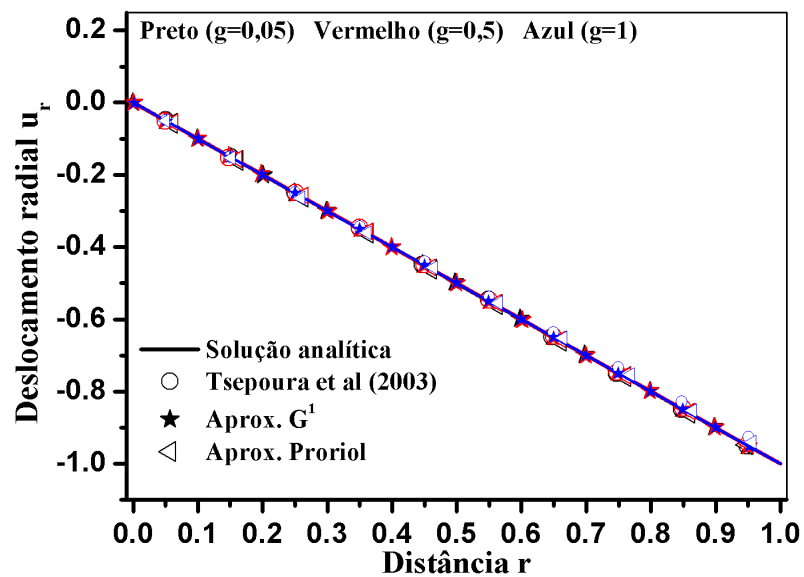


Figura 8.13 – Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .

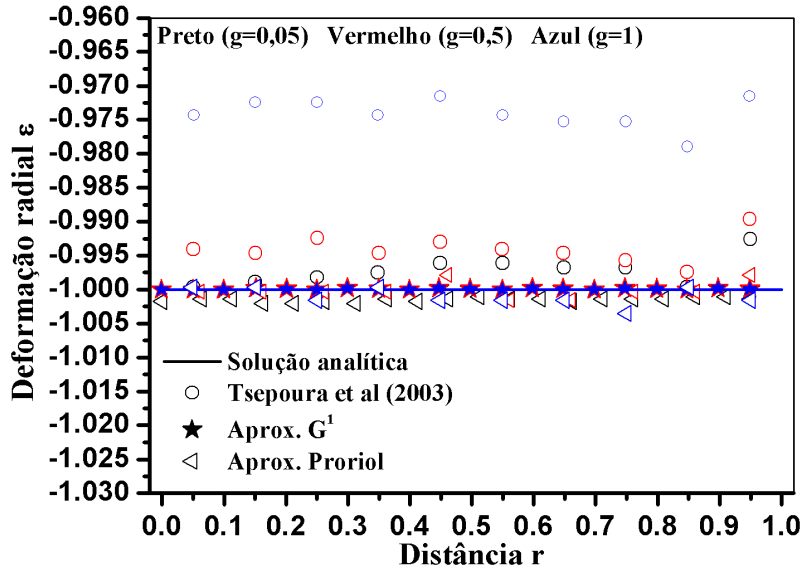


Figura 8.14 – Deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  em função da distância radial do sólido esférico de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .

A solução analítica, em deslocamento, para o presente problema tem a forma (TSEPOURA et al., 2003)

$$\mathbf{u} = \left[ \frac{B}{r^2} + DG(r) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.24)$$

com

$$G(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2(r/g)}} K_{3/2}(r/g), \quad (8.25)$$

$$B = \frac{u_0 a^3 \frac{\partial G(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}}{2G(r) \Big|_{r=a} + a \frac{\partial G(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}} = 1 + 2g(1+g), \quad (8.26)$$

$$D = \frac{2u_0}{2G(r) \Big|_{r=a} + a \frac{\partial G(r)}{\partial r} \Big|_{r=a}} = -\frac{4e^{1/g}}{\pi}, \quad (8.27)$$

e  $K_{3/2}(\circ)$  sendo a função modificada de Bessel do segundo tipo, tal que,

$$K_{3/2}(r/g) = \frac{e^{-r/g} g \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r}{g}} (g+r)}{r^2}. \quad (8.28)$$

A partir das Eqs.(4.25), (4.26), (8.24) - (8.28), podem ser escritas as soluções analíticas para a deformação, tensão dual e tensão total, respectivamente:

$$\varepsilon_r = -\frac{2B}{r^3} - \frac{e^{-r/g}}{2r^3} D\pi (2g^2 + 2gr + r^2), \quad (8.29)$$

$$\mu_{rrr} = \frac{6Bg^2 E}{r^4} + \frac{e^{-r/g} D\pi g E (6g^3 + 6g^2 r + 3gr^2 + r^3)}{2r^4}, \quad (8.30)$$

$$\sigma = \frac{e^{-r/g} E}{r^5} \left[ 2Be^{r/g} (12g^2 - r^2) + Dg\pi (2g+r) (6g^2 + 3gr + r^2) \right]. \quad (8.31)$$



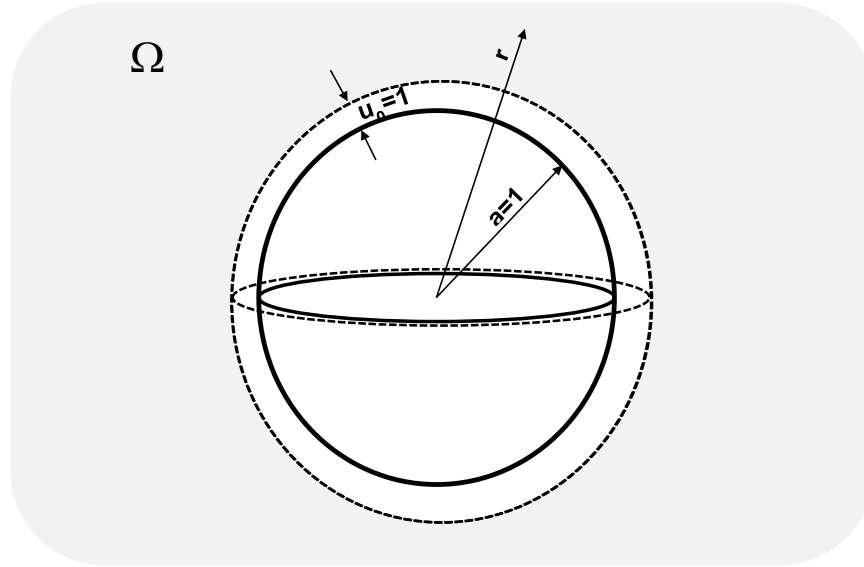


Figura 8.15 – Geometria da cavidade esférica submetida a deslocamento radial.

Para a verificação da formulação do MEC microestrutural, neste exemplo foi considerado  $a = 1$ ,  $P_0 = 1$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0$  e discretizando por 512 elementos de contorno triangulares quadrático para a aproximação de Proriol e linear para  $G^1$ . Para este problema Tsepoura et al. (2003) utilizou 304 elementos quadrangulares quadrático. A Fig.(8.16) mostra o valor do deslocamento radial calculado pelo MEC  $G^1$  e MEC Proriol grau 2 comparados com os resultados de Tsepoura et al. (2003) e da solução analítica. De forma análoga, a Fig.(8.17), Fig.(8.18) e Fig.(8.19) mostra, respectivamente, o resultado da deformação radial, tensão dual e tensão total à medida que é variado o valor do parâmetro  $g$  para a aproximação  $G^1$  e Proriol de grau 2. A partir destes resultados, pode-se verificar a excelente concordância entre os resultados numéricos e a solução analítica. Na Fig.(8.19) os resultados foram comparados apenas com a solução analítica, uma vez que, Tsepoura et al. (2003) não apresentou resultado para a tensão total.

## 8.5 Exemplo 5

Neste exemplo uma cavidade esférica, de raio  $a$  e imersa em um domínio elasto-gradiente tridimensional infinito, é analisada quando está submetida a uma pressão radial externa  $P_0$  e a tensão conjugada nula no contorno da cavidade (ver Figura 8.20). As condições de contorno clássica deste problema são

$$\mathbf{P}(r)|_{r=a} = P_0 \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.32)$$

$$\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (8.33)$$

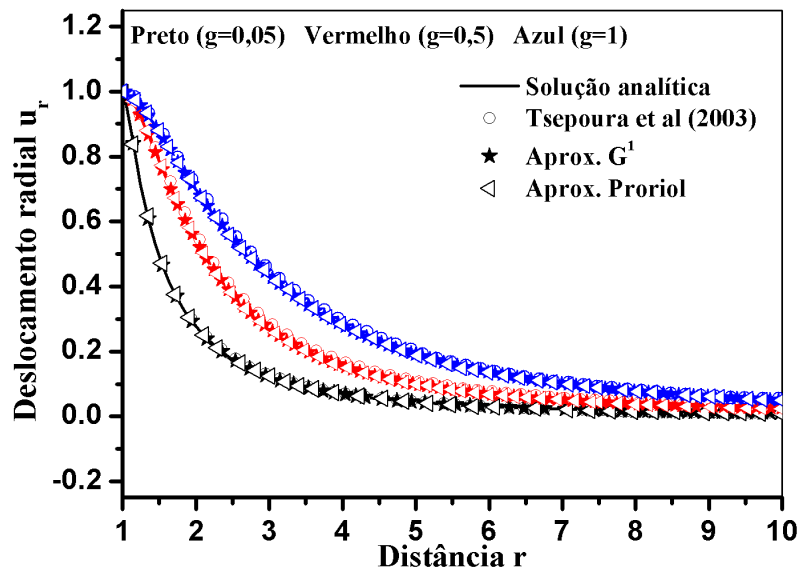


Figura 8.16 – Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0 \hat{r}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ .

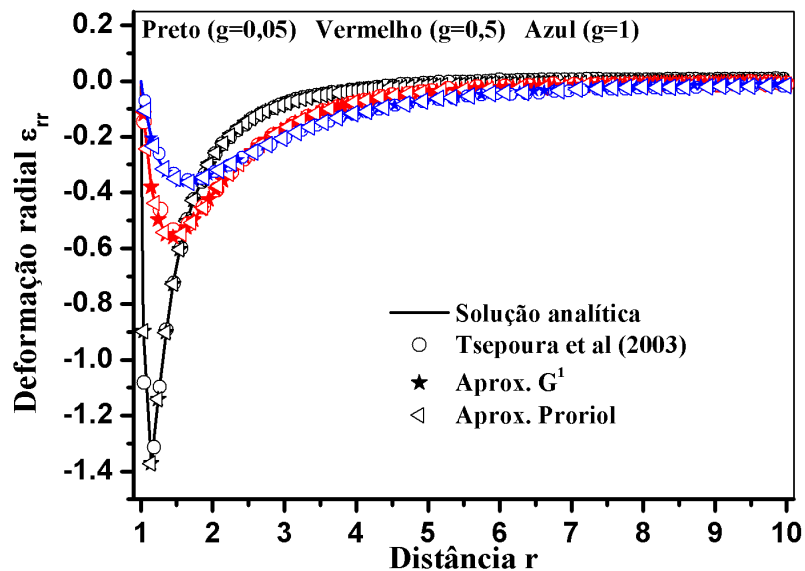


Figura 8.17 – Deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0 \hat{r}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ .

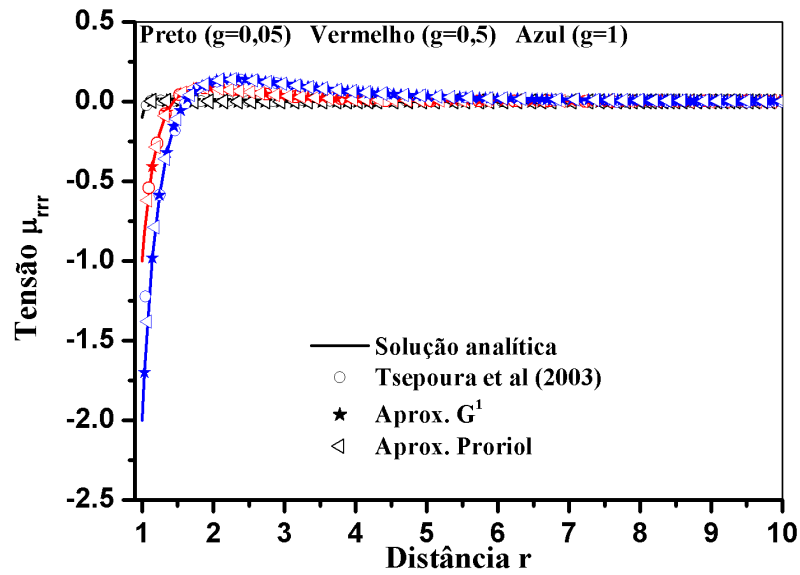


Figura 8.18 – Tensão dual  $\mu_{rrr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0 \hat{r}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ .

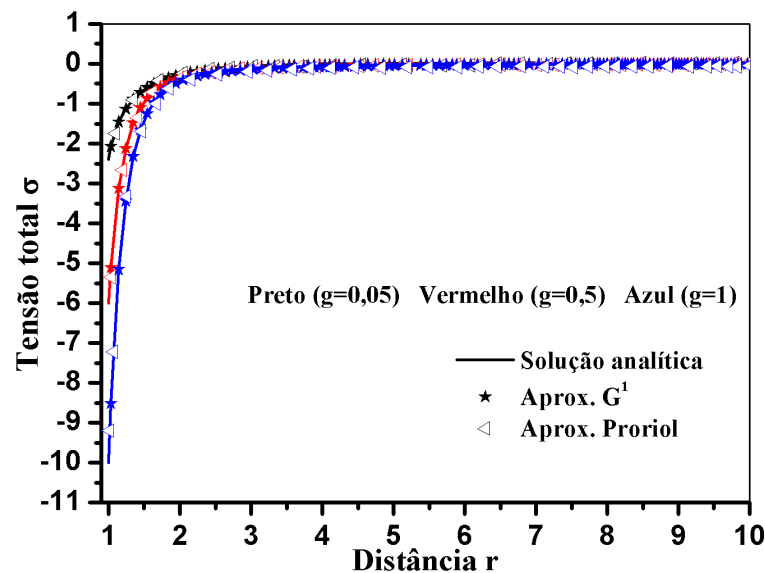


Figura 8.19 – Tensão total  $\sigma_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{u}(a) = u_0 \hat{r}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{q}(a) = 0$ .

e é adotada a seguinte condição de contorno não clássica

$$\mathbf{R}_r(r)|_{r=a} = 0. \quad (8.34)$$

A solução analítica, em deslocamento, é apresentada por Tsepoura et al. (2003) na forma:

$$\mathbf{u} = \left[ \frac{B}{r^2} + DG(r) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (8.35)$$

com

$$G(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2(r/g)}} K_{3/2}(r/g), \quad (8.36)$$

$$B = \frac{-P_0(1-2\nu)(1+\nu)a^3(6g^3+6g^2a+3ga^2+a^3)}{2E[3g^3(-3+4\nu)+3g^2(-3+4\nu)a+3g(-1+2\nu)a^2+(-1+2\nu)a^3]}, \quad (8.37)$$

$$D = -\frac{6e^{a/g}P_0(-1+2\nu)(1+\nu)\sqrt{g/r}a^4}{E\pi\sqrt{r/g}[3g^3(-3+4\nu)+3g^2(-3+4\nu)a+3g(-1+2\nu)a^2+(-1+2\nu)a^3]}, \quad (8.38)$$

e  $K_{3/2}(\cdot)$  sendo a função modificada de Bessel do segundo tipo, tal que,

$$K_{3/2}(r/g) = \frac{e^{-r/g}g\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{r}{g}}(g+r)}{r^2}. \quad (8.39)$$

A partir das Eqs.(4.25), (4.26), (8.35) - (8.39), podem ser escritas as soluções analíticas para a deformação, tensão dual e tensão total, respectivamente:

$$\varepsilon_r = \frac{e^{-r/g}}{2r^3} \left[ -4Be^{r/g} - D\pi(2g^2+2gr+r^2) \right], \quad (8.40)$$

$$\mu_{rrr} = \frac{e^{-r/g}Eg}{2r^4} \left[ 12Be^{r/g}g + D\pi(6g^3+6g^2r+3gr^2+r^3) \right], \quad (8.41)$$

$$\sigma = \frac{e^{-r/g}E}{r^5} \left[ 2Be^{r/g}(12g^2-r^2) + Dg\pi(2g+r)(6g^2+3gr+r^2) \right]. \quad (8.42)$$

Assim como no exemplo anterior, neste é considerado  $a = 1$ ,  $P_0 = 1$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0$  e discretizando o problema por 512 elementos de contorno triangulares quadrático para a aproximação de Prorior e "linear"(com equivalência à ordem 4) para  $G^1$ . A Fig.(8.21) apresenta o valor do deslocamento radial calculado pelo MEC  $G^1$ , MEC Prorior grau 2, e estes valores são comparados com os resultados de Tsepoura et al. (2003) e com a solução analítica (Equação 8.35). De forma análoga, a Fig.(8.22), Fig.(8.23) e Fig.(8.24) mostra, respectivamente, o resultado da deformação radial, tensão dual e tensão total à medida que é variado o valor do parâmetro micromecânico  $g$ , tanto para aproximação  $G^1$  quanto para a aproximação de Prorio grau 2 e para a aproximação de grau 2 adotada em Tsepoura et al. (2003). De acordo com os resultados apresentados nas Figs.(8.21) -

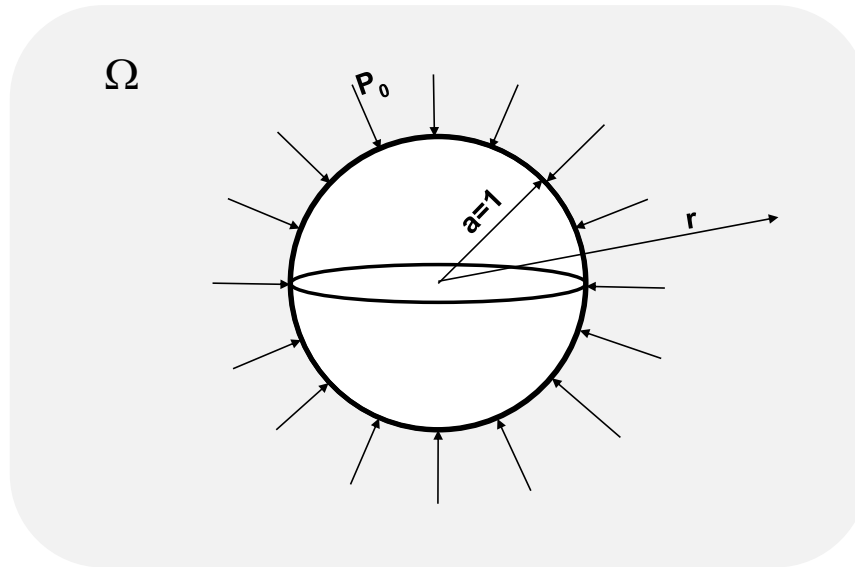


Figura 8.20 – Geometria da cavidade esférica submetida a pressão externa aplicada radialmente.

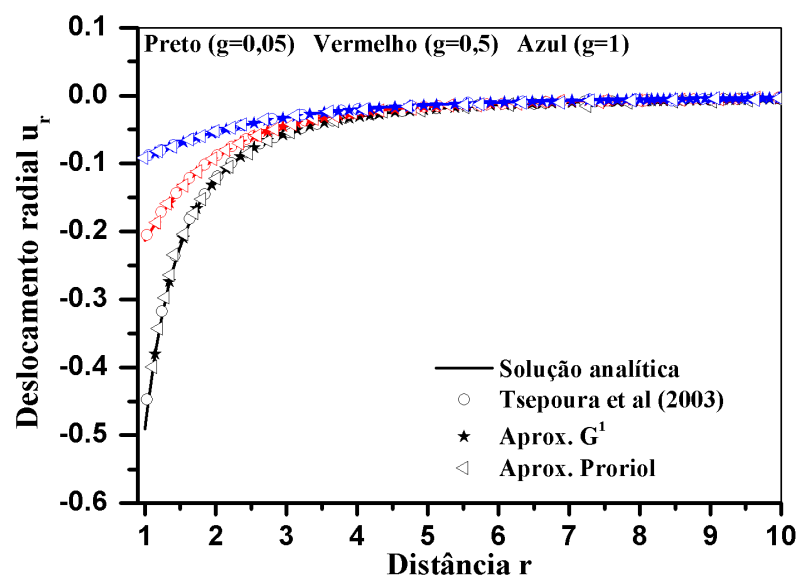


Figura 8.21 – Deslocamento radial  $u_r$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .

(8.24), pode-se verificar a excelente concordância dos resultados numéricos com a solução analítica. Cabe observar que na Fig.(8.24) os resultados foram comparados apenas com a solução analítica, uma vez que, Tsepoura et al. (2003) não apresentou o comportamento da tensão total.

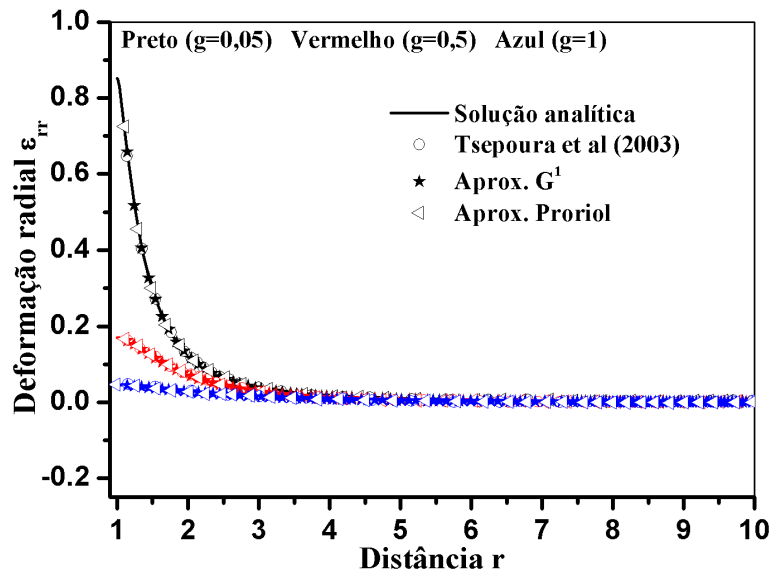


Figura 8.22 – Deformação radial  $\varepsilon_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .

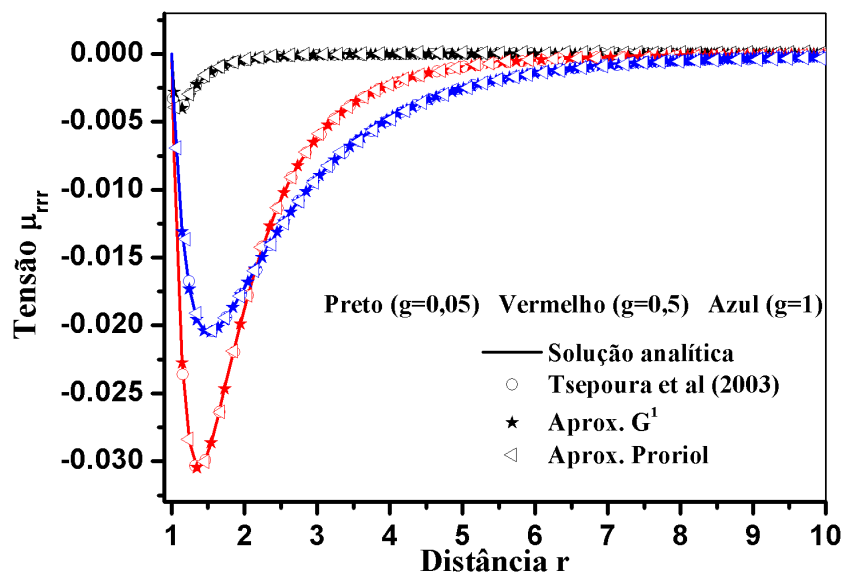


Figura 8.23 – Tensão dual  $\mu_{rrr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .

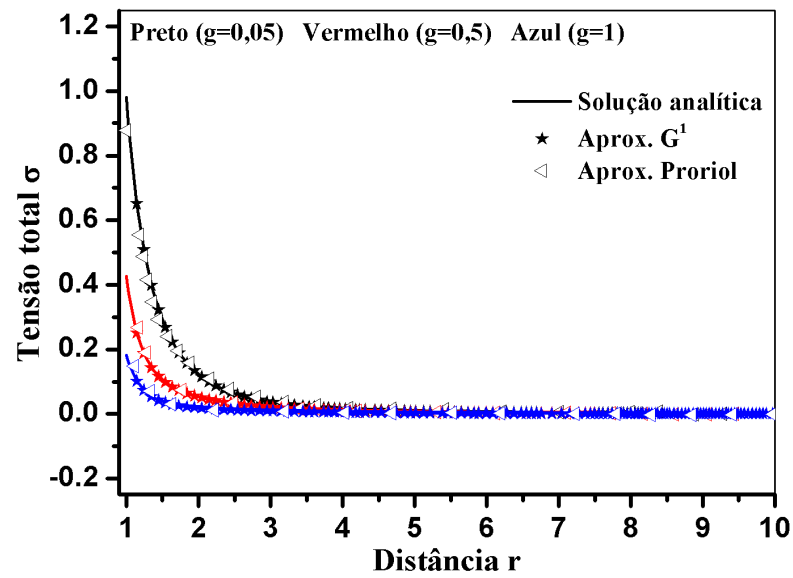


Figura 8.24 – Tensão total  $\sigma_{rr}$  em função da distância radial da cavidade esférica de raio  $a$  à medida que é variado o parâmetro  $g$ . Com condição de contorno clássica  $\mathbf{P}(a) = P_0 \hat{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{u}(r)|_{r \rightarrow \infty} = 0$  e não clássica  $\mathbf{R}(a) = 0$ .





---

## Conclusões e Sugestões para Trabalho Futuro

Nesta tese, o desenvolvimento e implementação da formulação do Método dos Elementos de Contorno considerando efeitos microestruturais e continuidade entre os planos tangentes na interface dos elementos foi aplicada com sucesso à problemas elastostáticos tridimensionais. Para a consideração do efeito microestrutural foi utilizado a teoria gradiente elástica simplificada de Aifantis, a qual é uma particularização da teoria geral de Mindlin.

Para a discretização do Método dos Elementos de Contorno foram utilizados elementos triangulares curvos aproximados, tanto para a geometria quanto para os parâmetros físicos, por funções de continuidade  $C^0$ , tais como aproximações de Proriol e Polinomial. Nestas aproximações foram utilizadas as bases constituídas pelos zeros do polinômio ortogonal de Lobatto e, também, utilizado a base equidistante. Na aproximação espectral foi utilizado como interpolante a função de Proriol, por proporcionar melhor condicionamento à matriz de Vandermond, e como base nodal o zeros de Lobatto. Já na interpolação chamada Polinomial foi utilizado como interpolante polinômios completos não ortogonais e como base os nós equidistantes. A partir desta combinação, foi realizado um estudo comparativo à medida que é elevado a ordem da aproximação, tanto de Proriol quanto polinomial, e pôde ser observado que a interpolação com base equidistante provoca perturbações na borda do elemento triangular, enquanto que a interpolação com base de Lobatto nenhuma perturbação é apresentada, ou seja, a abordagem Proriol-Lobatto é mais estável e apresenta maior precisão quando aproximações de alta ordem são usadas para representar a geometria do problema.

Com o objetivo de simular superfícies suaves e assim anular a integral de linha presente na formulação do MEC microestrutural, foi utilizado elementos triangulares com continuidade geométrica  $G^1$ , ou seja, elementos que possuem normal única em suas interfaces. Esta característica única da normal é de grande importância para o MEC pois evita a necessidade de colocação de nós duplos, o que facilita no pré e pós processamento. Para

a criação dos elementos  $G^1$ , presentes neste trabalho, foram necessários apenas as coordenadas geométricas e as normais dos nós nos vértices da malha triangular. A vantagem na utilização do elemento  $G^1$  é devido a necessidade, apenas, de criar a malha formada por elementos planos, pois a função de Bézier  $G^1$  transforma estes elementos triangulares planos em curvos. Por outro lado é desafiador a obtenção do vetor normal nos vértices, assim para auxiliar a obtenção destes dados foi utilizado o software de computação gráfica Blender<sup>Tm</sup> 2.70.

O software Blender<sup>Tm</sup> 2.70 é bastante robusto e tem como objetivo, de origem, a criação e animação de jogos e filmes, ou seja, sem finalidade em análise numérica. O presente trabalho se propôs a acoplar o software de computação gráfica ao programa do MEC clássico e microestrutural, proporcionando assim a possibilidade de criação de superfícies de alta complexidade. Para ilustrar esta potencialidade e o sucesso na representação da continuidade do plano tangente e da geometria, foram analisadas cinco geometrias paramétricas (esfera, toroide, elipsoide, cilindro e paralelepípedo de bordas arredondadas) e quatro geometrias não-paramétrica de alta complexidade (taça, colher, cabeça, perna). A partir desta análise pôde-se verificar a deficiência, exceto em algumas geometrias (tais como esfera), em representar continuidade do plano tangente por parte das funções de Prorior e Polinomial, mesmo quando é elevado a discretização e a ordem da aproximação. Por outro lado, pôde ainda ser observado a eficiência das funções de Bézier  $G^1$  (usada no presente trabalho) em representar geometria suaves independente de sua complexidade. Quanto à análise da capacidade de representar a geometria do problema, ou seja, o erro cometido na aproximação da geometria pelas funções Prorior, Polinomial e  $G^1$ , verificou-se que todas estas funções possuem erros de aproximações com ordem de grandeza semelhantes.

Chama, aqui, a atenção para o cilindro de bordas arredondadas utilizado neste trabalho, uma vez que esta geometria foi reproduzido com as mesmas dimensões das propostas por Tsepoura et al. (2003) e verificou que quando utilizado as funções  $C^0$  de grau 2, idêntica a utilizada por Tsepoura, a continuidade do plano tangente não é alcançada. Desta forma, a reconstrução de geometria suaves, como afirmado ter realizado em Tsepoura et al. (2003), não é obtida. Por consequência, a integral de linha presente na formulação microestrutural torna significativa e não pode ser desprezada na análise, o que se opõe ao realizado por Tsepoura e colaboradores.

Em seguida foi realizado o tratamento de singularidade das equações integrais do MEC clássico e microestrutural, tanto para funções aproximadoras  $C^0$  quanto para  $G^1$ . A técnica de subtração de singularidade proposta por Guiggiani et al. (1992), a qual faz uso das séries de Laurent em coordenadas polar, foi utilizada para a regularização dos núcleos integrando. As soluções fundamentais da abordagem micromecânica foram expandidas em série de potência para a obtenção da ordem de singularidade e da correlação entre o tamanho do elemento e do parâmetro micromecânico. Neste estudo, na condição mais

desfavorável, foi obtida a Eq.(7.189) como a condição limite que correlacionam a distância  $r$ , comprimento característico  $g$  e a quantidade de termos da série para que garanta convergência das expansões. Ainda continuando o estudo de convergência, é obtido um estimador para o erro global das expansões em série representado pela Eq.(7.190). Após realizada as expansões em série e verificada a condição de convergência, foram desenvolvidas e explicitadas expressões em série de Laurent fundamentais para a subtração de singularidade. Na sequência, a qualidade do tratamento de singularidade foi verificada para a aplicação em elementos curvos regulares e também para elementos irregulares (distorcidos). Analisando os resultados da verificação da subtração de singularidade, observou que em elementos curvos regulares é eficiente a regularização, entretanto, à medida que o elemento é distorcido esta eficiência é deteriorada, tanto para a formulação clássica quanto para a formulação micromecânica. No entanto, na abordagem microestrutural o parâmetro  $g$  auxilia na melhoria da eficiência da regularização dos núcleos integrando, ou seja, observou que à medida que o parâmetro  $g$  é diminuído mais eficiente torna o tratamento da singularidade para elementos distorcidos.

Após desenvolvida toda ferramenta necessária para a aplicação do MEC à formulação micromecânica, foi realizada a implementação numérica na linguagem Fortran 11.0 aplicada a problemas tridimensionais elastostático gradiente e validado por meio de cinco exemplos *benchmark* presente na literatura. Uma grande precisão da formulação do MEC  $G^1$  e  $C^0$ , este último apenas para geometrias com curvatura suave, foi obtida quando comparado com a solução analítica e com outros resultados numéricos presente em Tsepoura et al. (2003).

Uma vez realizado o tratamento de singularidade e a análise de convergência do MEC micromecânico e do MEC clássico, construiu-se de forma sólida e robusta a implementação da formulação microestrutural aplicada para problemas gradiente elástico 3D, a qual pode ainda ser melhorada e expandida para diversas novas aplicações. Alguns avanços foram alcançados com este trabalho, porém, ainda há muito a ser compreendido e ampliada as aplicações da presente formulação. Dentre os avanços futuros podem ser citados:

- a) ampliar os exemplos de validação da presente formulação para problemas não paramétricos, com geometria mais complexas, e propor assim novos benchmark;
- b) elevar o grau das aproximações  $C^0$  das variáveis físicas quando é utilizado a aproximação  $G^1$  na representação da geometria do problema;
- c) realizar a inserção das funções NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline) à formulação e em seguida compara-la com as funções de Bézier  $G^1$  utilizada neste trabalho;
- d) propor novos avanços ao entendimento físico das condições de contorno não-clássico da formulação micromecânica. Este entendimento ainda é um problema em aberto;
- e) propor método de quantificação do parâmetro micromecânico,  $g$ , dos materiais,

- aliando experimento com análise numérica;
- f) desenvolver modelo em elementos finitos para simular fibras (e/ ou enrijecedores) imersas em domínios tridimensionais modelados pelo MEC microestrutural. Além do mais, realizar formulações de acoplamento entre o MEC e o Método dos elementos Finitos (MEF) que simulem tanto a aderência perfeita quanto a perda de aderência semelhante a formulação desenvolvida para o MEC clássico 2D apresentado em Rocha, Coda e Venturini (2014);
  - g) aplicar a presente formulação microestrutural à problemas não-lineares físico, tais como dano e plasticidade, principalmente em regiões de localização dessas não-linearidades. Pois nestas regiões a formulação do contínuo local torna mal-posta e numericamente é verificada a dependência da malha, tornando assim o problema não convergente.

---

## Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with formules: with formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. [S.l.]: Dover edition, 1965.
- AERO, E. L.; KUVSHINSKII, E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. **Engl. Transl. Soviet Phys. Solid State** **2**, 1961. p. 1272–1281, 1961.
- AIFANTIS, E. The physics of plastic deformation. **Int. J. Plast.**, 1987. v. 3, p. 211–247, 1987.
- AIFANTIS, E. C. On the microstructural origin of certain inelastic models. **ASME J. Eng. Mater. Technol.**, 1984. v. 106, p. 326–330, 1984.
- \_\_\_\_\_. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture. **International journal of Engineering Science**, 1992a. v. 30, p. 1279–1299, 1992a.
- ALIABADI, M. H. **The boundary Element Method: applications in solid and structure**. [S.l.]: Wiley, 2002.
- ALTAN, S.; AIFANTIS, E. On the structure of the mode iii crack-tip in gradient elasticity. **Scripta Metall. Mater.**, 1992b. v. 26, p. 319–324, 1992b.
- ALTENBACH, H.; EROFEEV, G. A. G. A. M. **Mechanics of generalized Continua**. Berlin: Springer-Verlag, 2011.
- AMANATIDOU, E.; ARAVAS, N. Mixed finite element formulation of strain gradient elasticity problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 2002. v. 191, p. 1723–1751, 2002.
- ANDREY, A. M.; THOMAS, W. Methods and algorithms of automated cad repair for incremental surface meshing. In: **eighth international meshing roundtable**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 299–309.
- ASKES, H.; AIFANTIS, E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. **International Journal of Solids and Structures**, 2011. v. 48, p. 1962–1990, 2011.

- ASKES, H.; GITMAN, I. Non-singular stress in gradient elasticity at bi-material interface with transverse crack. **Int. J. Fract.**, 2009. v. 156, p. 217–222, 2009.
- ASKES, H.; MORATA, I.; AIFANTIS, E. Finite element analysis with staggered gradient elasticity. **Comput. Struct.**, 2008. v. 86, p. 1266–1279, 2008.
- BALBO, A. R. **Contribuição à formulação matemática de modelos constitutivos para materiais com dano contínuo**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 1998.
- BARRERA, T.; HAST, A.; BENGTSSON, E. Surface construction with near least square acceleration based on vertex normal on triangular meshes. In: **SIGRAD 2002**. [S.l.: s.n.], 2002. p. 17–22.
- BARSKY, B. A.; DEROSE, T. D. **Geometric continuity for parametric curves**. California, October 1984.
- BERGER, S. et al. Mathematical ship lofting. **J. Ship Research**, 1966. v. 10, p. 203–222, 1966.
- BESKOS, D. E. Boundary element methods in dynamic analysis. **Appl. Mech. Rev. ASME**, 1987. v. 40, p. 1–23, 1987.
- \_\_\_\_\_. Boundary element methods in dynamic analysis. part ii. **Appl. Mech. Rev. ASME**, 1997. v. 50, p. 149–197, 1997.
- BLACHKE, W. **Differential Geometric**. Chelsea: [s.n.], 1953. Reimpressão da edição original de 1923.
- BLYTH, M. G.; POZRIKIDIS, C. A lobatto interpolation grid over the triangle. **IMA Journal of Applied Mathematics**, 2005. v. 71, p. 153–169, 2005.
- BOLTUC, A.; ZIENIUK, E. Modeling domain using bézier surface in plane boundary problems defined by the navier-lame equation with body forces. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2011. v. 35, p. 1116–1122, 2011.
- BOSCHIROLI, M. et al. A comparison of local parametric  $c_0$  bézier interpolants for triangular meshes. **Computers & Graphics**, 2011. 2011.
- BOTTA, A. S. **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformação**. Tese (Doutorado) — Escola de engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 2003.
- BOUBEKEUR, T.; ALEXA, M. Phong tessellation. In: **SIGGRAPH Asia 08**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1 – 5.
- BRAND, L. **Vector and Tensor Analysis**. New York: J. Wiley, 1996.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Element Method: An introductory course**. London: WIT press, 1992.
- BREMER, J.; GIMBUTAS, Z. A nyström method for weakly singular integral operators on surfaces. **Journal of Computational Physics**, 2012. v. 231, p. 4885–4903, 2012.

BÉZIER, P. Définition numérique des courbes et surfaces ii. **Automatisme**, 1967. XII, p. 17–21, 1967.

\_\_\_\_\_. Procédé de définition numérique des courbes et surfâces non mathématiques. **Automatisme**, 1968. XIII, p. 189–196, 1968.

\_\_\_\_\_. Mathematical and practical possibilities of unisurf. In: BARNHILL, R.; RIESENFELD, R. (Ed.). **Computer Aided Geometric Design**. [S.l.]: Academic Press, 1974. p. 127–152.

BÉZIER, P. **Essay de définition nyumérique des courbes et des surfaces expérimentales**. Tese (Doutorado) — University of Paris VI, 1977.

\_\_\_\_\_. General distortion of an ensemble of biparametric patches. **Computer aided Design**, 1978. v. 10, n. 2, p. 116–120, 1978.

BÉZIER, P. E. Fundamental developments of computer-aided geometric modeling. In: \_\_\_\_\_. London: Academic Press, 1993. cap. The first years of CAD/CAM and the UNISURF CAD system, p. 13–26.

CANINO, L. F.; OTTUSH, J. J.; STALZER, M. A. Numerical solution of the helmhotz equation in 2d and 3d using a high-order nyström discretization. **Journal of computational physics**, 1998. v. 144, p. 627–633, 1998.

CAPRIZ, G. **Continua with Microstructure**. New York: Springer-verlag, 1989.

CARLEY, M. Numerical quadrature for singular and hypersingular iintegral in boundary element methods. **SIAM Journal on Scientific Computing**, 2007. v. 29, p. 1207–1216, 2007.

CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

CASTELJAU, P. D. **Courbes et surfaces à pôles**. Paris, 1963.

CAUCHY, A. Oeuvres completes 1re serie - tome ii. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1850. cap. Memoire sur les systemes isotropes de points materials, p. 351–386.

\_\_\_\_\_. Oeuvres completes 1re serie - tome ii. In: \_\_\_\_\_. Paris: Gauthier-Villars, 1850. cap. Memoire sur les vibrations d'un double systeme de molecules et de l'ether continu dans un corps cristallise, p. 338–350.

\_\_\_\_\_. Oeuvres completes 1re serie - tome xi. In: \_\_\_\_\_. Paris: Gauthier-Villars, 1851. cap. Note sur l'equilibre et les mouvements vibratoires des corps solides, p. 341–346.

CHEN, C.; XU, G. Construction of geometric pparti differential equations for level sets. **Journal of Computational Mathematics**, 2010. v. 28, n. 1, p. 105–121, 2010.

CHIYOKURA, H. Advanced computer graphics. In: \_\_\_\_\_. Tokyo: Springer- Verlag, 1986. cap. Localized surface interpolation method for irregular meshes, p. 3 – 19.

COONS, S. Graphical and analytical methods as applied to aircraft design. **J. of Eng. Education**, 1947. v. 37, 1947.

- CORRE, Y. L. La dissymétrie du tensor des efforts et ses conséquences. **J. Phys. Radium**, 1956. v. 17, n. 11, p. 934–939, 1956.
- COSSERAT, E.; COSSERAT, F. **Theorie des Corps Deformables**. [S.l.]: Cornell University Library, 1902.
- \_\_\_\_\_. **Théorie des corps déformables**. Paris: A. Hermann & Fils, 1909.
- COWIN, S. C. An incorrect inequality in micropolar elasticity theory. **J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)**, 1970. v. 21, p. 494–497, 1970.
- \_\_\_\_\_. Stress function for cosserat elasticity. **Int. J. Solids Structures**, 1970. v. 6, p. 389–398, 1970.
- COWIN, S. C.; NUNZIATO, J. W. Linear elastic materials with voids. **J. Elasticity**, 1983. v. 13, p. 125, 1983.
- DASSIOS, G.; LINDELL, I. V. On the helmholtz decomposition for polyadics. **Quart. Appl. Math. LIX 4**, 2001. p. 787–796, 2001.
- DEBOOR, C.; HÖLLIG; SABIN, M. Highaccrues geometric hermite interpolation. **Computer-Aided Design**, 1987. v. 4, n. 4, p. 269–278, 1987.
- DEMKOWICZ, L. et al. G1 - interpolation and geometry reconstruction for higher order finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and engineering**, 2009. v. 198, p. 1198–1212, 2009.
- DEROSE, T. D.; BARSKY, B. A. An intuitive approach to geometric continuity for parametric curves and surfaces. In: **Proceedings of Graphics Interface**. Montreal, Quebec: [s.n.], 1985. p. 343–351.
- DRIEMEIER, L. **Contribuição ao estudo da localização de deformação com modelos constitutivos de dano e plasticidade**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 1999.
- DUHEM, P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. **Ann. Ecol. Nom.**, 1893. v. 10, p. 187–230, 1893.
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitäts theorie. **Ann. der Phy.**, 1916. v. 49, p. 769–822, 1916.
- \_\_\_\_\_. **The Meaning of relativity**. Princeton: Princeton University Press, 1956.
- ERICKSEN, J. L. Anisotropic fluids. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1960. v. 4, p. 231–237, 1960.
- ERINGEN, A. On duifferential equations of nonlocal elasticity and ssolution of screw dislocation and surface waves. **J. Appl. Phys.**, 1983. v. 54, p. 4703–4710, 1983.
- ERINGEN, A. C. Fracture: A treatise. In: \_\_\_\_\_. New York: Academic Press, 1968. II, cap. Theory of micropolar elasticity, p. 624–729.
- \_\_\_\_\_. Mechanics of micromorphic continua. In: KRÖNER, E. (Ed.). **Mechanics of Generalized Continua**. [S.l.]: Springer Verlag, 1968. p. 18–33.



\_\_\_\_\_. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. **Int. J. Engng. Sci.**, 1972. v. 10, p. 425–435, 1972.

\_\_\_\_\_. Vistas of nonlocal continuum physics. **Int. J. Eng. Sci.**, 1992. v. 30, p. 1551–1565, 1992.

\_\_\_\_\_. **Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids**. New York: Springer-Verlag, 1999.

\_\_\_\_\_. **Microcontinuum field theories: II- Fluent media**. New York: Springer, 2001.

ERINGEN, A. C.; SUHUBI, E. S. Nonlinear theory of simple microelastic solids i. **Int. J. Engng. Sci.**, 1964. v. 2, n. 2, p. 189–203, 1964.

\_\_\_\_\_. Nonlinear theory of simple microelastic solids ii. **Int. J. Eng. Sci.**, 1964. v. 2, n. 4, p. 389–404, 1964.

EXADAKTYLOS, G. E.; VARDOULAKIS, I. Microstructure in linear elasticity and scale effects: a reconsideration of basic rock mechanics and rock fracture mechanics. **Tectonophysics**, 2001. v. 335, p. 81–109, 2001.

EXAKAKTYLOS, G.; VARDOULAKIS, I.; AIFANTIS, E. Cracks in gradient elastic bodies with surface energy. **Int. J. Fract.**, 1996. v. 79, p. 107–119, 1996.

FARIN, G. Surfaces in computer aided geometric design. In: \_\_\_\_\_. New York: North-Holland, 1983. cap. Smooth interpolation to scattered 3D data, p. 43 – 63.

\_\_\_\_\_. **Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design**. segunda. [S.l.]: Academic Press, 1990.

FEJÉR, L. Lagrangesche interpolation und die zugehörigen konjugierten punkte. **Math. Ann.**, 1932. v. 106, p. 1–55, 1932.

FLECK, N. A.; HUTCHINSON, J. W. A phenomenological theory of strain-gradient effects in plasticity. **J. Mech. Phys. Solids**, 1993. v. 41, p. 1825–1857, 1993.

FLECK, N. A.; MULLER, M. F. A. G. M.; HUTCHINSON, J. W. Strain gradient plasticity: theory and experiment. **Acta Metall. Mater.**, 1994. v. 42, p. 475–487, 1994.

FORREST, A. R. **Curves and surfaces for computer-aided design**. Tese (Doutorado) — Cambridge, 1968.

FORREST, A. R. Interactive interpolation and approximation by bézier polynomials. **The Computer J**, 1972. v. 15, n. 1, p. 71–79, 1972. Re-impresso em CAD 22(9):527-537, 1990.

FUDOLI, C. A. **Formulação do método dos element de contorno e plasticidade com gradiente**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos (USP), São Carlos, 1999.

GAO, X. W. An effect method for numerical evaluation of general 2d and 3d high order singular boundary integrals. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2010. v. 199, p. 2856–2864, 2010.

- GAO, X. W.; DAVIES, T. G. **Boundary Element Programming in Mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- GAUTHIER, R. D.; JAHSMAN, W. E. Bending of a curved bar of micropolar elastic material. **J. Applied Mech.**, 1976. v. 43, p. 502–503, 1976.
- GERMAIN, P. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des mmilieu ccontinuu, première parti: théorie du second gradient. **J. de Mécanique**, 1973. v. 12, p. 235–274, 1973.
- \_\_\_\_\_. The method of virtual power in continuum mechanics - ii: Microstructure. **SIAM J. Appl. Math.**, 1973. v. 25, p. 556–575, 1973.
- GÜNTHER, W. **Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums**. [S.l.]: Abh. Braunschweig, 1958.
- GREEN, A. E.; RIVLIN, R. S. Multipolar continuum mechanics. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, 1964. v. 17, p. 113–147, 1964.
- GREEN, E. A.; NAGHDI, P. M. Micropolar and director theories of plates. **Quart. J. Mech. Appl. Math.**, 1967. v. 20, p. 183–199, 1967.
- GREGORY, J. A. Computer aided geometric design. In: \_\_\_\_\_. New York: Academic Press, 1974. cap. Smooth interpolation without twist constraints, p. 71 – 87.
- GRIOLI, G. Elasticità asimmetrica. **Ann. Mat. Pura ed Applicata**, 1960. v. 50, p. 389–417, 1960.
- GUIGGIANI, M. et al. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. **ASME Journal of Applied Mechanichcs**, 1992. v. 59, p. 604–614, 1992.
- GUTKIN, M. Nanoscopies of dislocations and disclinations in gradient elasticity. **Reviews on Advanced Materials Science**, 2000. v. 1, p. 27–60, 2000.
- HAMA, T. et al. Finite-element simulation of springback in sheet metal forming using local interpolation for tool surfaces. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2008. v. 50, p. 175–192, 2008.
- HANSFORD, D. Handbook of computer aided geometric design. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Elsevier, 2002. cap. Bézier Techniques, p. 75–109.
- HANSFORD, D.; BARNHILL, R. E.; FARIN, G. Curves with quadric boundary precision. **Computer-Aided Design**, 1994. v. 11, p. 519–531, 1994.
- JEFFREYS, H. **Methods of mathematical physics**. Second. Cambridge: University Press, 1950.
- JOHNSTON, B. M.; JOHNSTON, P. R. A comparison of transformation methods for evaluation two-dimensional weakly singular integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2003. v. 56, p. 589–607, 2003.
- KAFADAR, C. B.; ERINGEN, A. C. Micropolar media i - the classical theory. **Int. J. Engng. Sci.**, 1971. v. 9, n. 3, p. 271–308, 1971.

KARLIS, G. F. **BEM solution for linear elastic and fracture mechanics problems with microstructural effects**. Tese (Doctoral Thesis) — University of Patras, 2009. P. 175.

KARLIS, G. F.; CHARALAMBOPOULOS, A.; POLYZOS, D. An advanced boundary element method for solving 2d and 3d static problems in mindlin's strain-gradient theory of elasticity. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 2010. v. 83, p. 1407–1427, 2010.

KARLIS, G. F. et al. Boundary element analysis of mode i and mixed mode (i and ii) crack problems of 2-d gradient elasticity. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 2007. v. 196, p. 5092–5103, 2007.

\_\_\_\_\_. 2d and 3d boundary element analysis of mode-i crack in gradient elasticity. **CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences**, 2008. v. 26, p. 189–207, 2008.

KOITER, W. T. Couple stress in the theory of elasticity i-ii. In: **Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. B.** [S.l.: s.n.], 1964. v. 67, p. 17–44.

KORTEWEG, D. J. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais continues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation de la densité. **Arch. Néer. Sci. Exactes et Nat.**, 1901. v. 6, p. 1–24, 1901. Série II.

KRAUTTER, J.; PARIZOT, S. Système d'aide à la définition et à l'usinage des surfaces de carrosserie. **Journal de la SIA**, 1971. v. 44, p. 581–586, 1971.

KRÖNER, E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. **Int. J. Solids and Structures**, 1967. v. 3, p. 731–742, 1967.

KUNIN, A. I. Model of elastic medium with simple structure and space dispersion. **Prikl. Mat. Mekh.**, 1966. v. 30, p. 542–550, 1966.

LAKES, R. Continuum models for materials with micro-structure. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: J. Wiley, 1995. cap. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua, p. 1–22.

LAVAL, J. L'élasticité du milieu cristallin - i. **J. Phys. Radium**, 1957. v. 18, n. 4, p. 247–259, 1957.

\_\_\_\_\_. L'élasticité du milieu cristallin - ii. **J. Phys. Radium**, 1957. v. 18, n. 5, p. 289–296, 1957.

\_\_\_\_\_. L'élasticité du milieu cristallin - iii. **J. Phys. Radium**, 1957. v. 18, n. 6, p. 369–379, 1957.

LAZAR, M.; MAUGIN, G. A. Defects in gradient micropolar elasticity i: Screw dislocation. **J. Mech. Phys. Solids**, 2004. v. 52, p. 2263–2284, 2004.

LESLIE, F. M. Constitutive equations for liquid crystals. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1968. v. 28, p. 265–283, 1968.

LEVIN, V. The relation between mathematical expectations of stress and strain tensor in elastic microheterogeneous media. **J. Appl. Math. Mech.**, 1971. v. 25, p. 694–701, 1971.

- LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma variável**. [S.l.]: IMPA, 2012.
- LIMING, R. **Practical analytical geometry with applications to aircraft**. [S.l.]: Practical analytical geometry with applications to aircraft, 1944.
- LOOP, C. A g1 triangular surface of arbitrary topological type. **Computer Aided Geometric Design**, 1994. v. 11, p. 303 – 330, 1994.
- LOVE, A. E. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. Cambridge: University Press, 1927.
- MANN, S. et al. Curve and surface design. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: SIAM, 1992. cap. A survey of parametric scattered data fitting using triangular interpolants, p. 145 – 172.
- MARSH, D. **Applied geometry for computer graphics and CAD**. Second. United States of America: Springer, 2005.
- MAUGIN, G. A. **Micromagnetism and polar media**. Tese (Doutorado) — Princeton University, 1971.
- MAUGIN, G. A. Method of virtual power in continuum-mechanics: Application to couple fields. **Acta Mechanica**, 1980. v. 35, p. 1–70, 1980.
- \_\_\_\_\_. **Continuum mechanics of electromagnetic solids**. Amsterdam: North - Holland: [s.n.], 1988.
- \_\_\_\_\_. **Mechanics of Generalized Continua: One hundred years after the Cosserat**. New York: Springer, 2010.
- MCCULLAGH, A. G. An essay towards a dydynamic theory of crystalline reflexion and refraction. **Trans. Roy. Irish Acad. Sci.**, 1839. v. 21, p. 17–50, 1839.
- MEHLUM, E.; SORENSON, P. Example of an existing sustem in the shipbuilship industry: the autokon system. In: **Proc. Roy. Soc. London A**. [S.l.: s.n.], 1971. v. 321, p. 219–233.
- MEIHE, X.; ZESHENG, T. A boundary element method for simulation of deformable objects. **J. of Comput. Sci. & Technol.**, 1996. v. 11, n. 5, p. 497–506, 1996.
- MINDLIN, R. D. Micro-structure in linear elasticity. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1964. v. 16, p. 51–78, 1964.
- \_\_\_\_\_. on the equations of elastic material with surface-tension in linear elasticity. **Int. J. Solids Struct.**, 1965. v. 1, p. 417–438, 1965.
- \_\_\_\_\_. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. **International Journal of Solid and Structures**, 1965. v. 1, p. 417–438, 1965.
- \_\_\_\_\_. Stress function for a cosserat continuum. **Int. J. Solids and Structures**, 1965. v. 1, p. 265–271, 1965.
- MINDLIN, R. D.; ESHEL, N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, 1968. v. 4, p. 109–124, 1968.

- MINDLIN, R. D.; TIERSTEN, H. F. Effects of couple stress in linear elasticity. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1962. v. 11, p. 415–448, 1962.
- MONCEAU, H. L. D. du. **Eléments de l'Architecture Navale ou Traité Pratique de la Construction des Vaissaux**. Paris: [s.n.], 1752.
- MUSKHELISHVILI, N. I. **Singular Integral Equations: Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics**. [S.l.]: Dover edition, 2008.
- NAGATA, T. Simple local interpolation of surfaces using normal vector. **Computer Aided Geometric Design**, 2005. v. 22, n. 4, p. 327–47, 2005.
- NETO, D. M.; OLIVEIRA, M. C.; MENEZES, L. F. **Nagata patch interpolation algorithms: strategies towards sheet metal forming tool description in CAE**. [S.l.]: Saarbrücken: VDM Verlag, 2010.
- NETO, D. M. et al. Improving nagata patch interpolation applied for tool surface description in sheet metal forming simulation. **Computer-Aided Design**, 2013. v. 45, p. 639–656, 2013.
- NEUBER, H. On the general solution of linear elast problems in isotropic and anisotropic cosserat continua. In: GÖRTLER, H. (Ed.). **11th International Conference of Applied Mechancis**. München: Springer-verlag, 1964. p. 153–158.
- NOWACKI, W. **Theory of asymmetric elasticity**. Oxford: Pergamon Press, 1986.
- NOWAK, I.; NOWAK, A. J.; WROBEL, L. C. Identification of phase change fronts by bezier splines and bem. **Int. J. Therm. Sci.**, 2002. v. 41, p. 492–499, 2002.
- PALMOV, A. Fundamental equation of the theory of asymmetric elasticity. **Prikl. Mat. Mekh.**, 1964. v. 28, p. 401–408, 1964.
- PAPANICOLOPULOS, S.; ZERVOS, A.; VARDOULAKIS, I. A three-dimensional c1 finite element for gradient elasticity. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 2009. v. 77, p. 1396–1415, 2009.
- PETERS, J. Handbook of computer aided geometric design. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Elsevier, 2002. cap. Geometric Continuity, p. 193–227.
- PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. segunda. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- PIPER, B. Geometric modelling: Algorithms and news trends. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: SIAM, 1987. cap. Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches, p. 221–233.
- POLYZOS, D. 3d frequency domain bem for solving dipolar gradient elastic problems. **Comput. Mech.**, 2005. v. 35, p. 292–304, 2005.
- POLYZOS, D.; FOTIADIS, D. I. Derivation od mindlin's first and second strain gradient elastic theory via simple lattice and continuum models. **International Journal of Solid and Structures**, 2012. n. 49, p. 470–480, 2012.
- POLYZOS, D.; TSEPOURA, K. G.; BESKOS, D. E. Transient dynamic analysis of 3-d gradient elastic solids by bem. **Comput. Struct.**, 2005. v. 83, p. 783–792, 2005.

POLYZOS, D. et al. A boundary element method for solving 2-d and 3-d static gradient elastic problems: Part i: Integral formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2003. p. 2845–2873, 2003.

\_\_\_\_\_. A boundary element method for solving 2d and 3-d static gradient elastic problems. part i: integral formulação. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2003. v. 192, p. 2845–2873, 2003.

POZRIKIDIS, C. **Introduction to Finite and Spectral Element Methods using MATLAB**. United States of America: Chapman and Hall/CRC, 2005.

PRORIOL, J. Sur une famille de polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle. **C. R. Acad. Sci.**, 1957. p. 2459–2461, 1957.

REN, S. et al. Reconstructing the geometric configuration of three dimensional interface using electrical capacitance tomography. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, 2013. v. 96, p. 628–644, 2013.

RJASANOW, S.; WEGGLER, L. Accelerated high order bem for maxwell problems. **Computational mechanics**, 2013. v. 51, p. 431–441, 2013.

ROCHA, F. C. da; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Sliding frame-solid interaction using bem/fem coupling. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 2014. v. 11, n. 8, p. 1376–1400, 2014.

ROGERS, D.; SATTERFIELD, S. B-spline surfaces for ship hull design. In: **Singgraph 80**. [S.l.: s.n.], 1980. v. 14, p. 211–217.

ROUX j. L. Etude géométrique de la torsion et de la flexion, dans les déformations infinitésimales d'un milieu continu. **Ann. Ecol. Nom. Sup.**, 1911. v. 28, p. 523–579, 1911.

ROUX, J. L. Recherches sur la géométrie des déformations finies. **Ann. Ecol. Nom. Sup.**, 1913. v. 30, p. 193–245, 1913.

RU, C.; AIFANTIS, E. C. A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity. **Acta Mechanica**, 1993. v. 101, p. 59–68, 1993.

SABIN, M. **Condition for Continuity of surface normal between adjacent parametric surfaces**. [S.l.], 1968.

\_\_\_\_\_. **Offset parametric surfaces**. [S.l.], 1968.

\_\_\_\_\_. **Parametric splines in tension**. [S.l.], 1970.

SCHAEFER, H. Das cosserat-kontinuum. **Z. Angew. Math. Mech.**, 1967. v. 47, p. 34, 1967.

SCHLEMMER, E.; RUCKER, W. M.; RICHTER, K. R. Boundary element computations of 3d stationary and time-dependent problems using bézier-spline elements. **IEEE Transactions on Magnetics**, 1994. v. 30, n. 5, p. 2901–2904, 1994.

SEDOV, L. I. Some problems of design new models of continuum mechanics. In: GÖRTLER, H. (Ed.). **11th International Congress of Applied Mechanics**. Berlin: Springer, 1966. p. 23–41.

- SHIRMAN, L. A.; SÉQUIN, C. H. Local surface interpolation with bézier patches. **Computer Aided Geometric Design**, 1987. v. 4, n. 4, p. 279 – 295, 1987.
- SHU, J.; KING, W.; FLECK, N. Finite elements for materials with strain gradient effects. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 1999. v. 44, p. 373–391, 1999.
- STOKES, V. K. **Theories of fluids with Microstructure**. Berlin: Springer-verlag, 1984.
- SYNGE, J. L.; TRUSDELL, C.; ERICKSEN, J. L. **Encyclopedia of Physics: Principles of classical mechanical and field theory**. [S.l.]: Springer-verlag, 1965.
- TENEK, L.; AIFANTIS, E. A two-dimensional finite element implementation of a special form of gradient elasticity. **Comput. Model. Eng. Sci.**, 2002. v. 3, p. 731–741, 2002.
- THEILHEIMER, F.; STARKWEATHER, W. The fairing of ship lines on a high speed computer. **Numerical Tables Aids Computation**, 1961. v. 15, p. 338–355, 1961.
- TIERSTEN, H. F. Surface couplings in magnetoelastic insulators. In: **Surface Mechanics**. New York: ASME, 1969. p. 126–143.
- TOUPIN, R. A. Elastic materials with couple stress. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1962. v. 11, p. 395–414, 1962.
- \_\_\_\_\_. Theories of elasticity with couple-stress. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, 1964. v. 17, p. 85–112, 1964.
- TRIANTAFYLIDIS, N.; AIFANTIS, E. A gradient approach to localization of deformation, in-hyperelastic materials. **J. Elasticity**, 1986. v. 16, p. 225–237, 1986.
- TRUESDELL, C. A.; NOLL, W. Handbuch der physik bd. iii/3. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Springer-verlag, 1965. cap. Nonlinear field theories of mechanics.
- TRUESDELL, C. A.; TOUPIN, R. A. **The Classical theory of fields**. Berlin: Springer-verlag, 1960.
- TSEPOURA, K. G. et al. static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension. **Arch. Appl. Mech.**, 2002. v. 72, p. 483–497, 2002.
- TSEPOURA, K. G.; POLYZOS, D. Static and harmonic bem solution of gradient elasticity problems with axisymmetry. **Comput. Mech.**, 2003. v. 32, p. 89–103, 2003.
- TSEPOURA, K. G. et al. A boundary element method for solving 2-d and 3-d static gradient elastic problems part ii: Numerical implementation. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, 2003. v. 192, p. 2875 – 2907, 2003.
- VARDOULAKIS, I.; EXAKAKTYLOS, G.; AIFANTIS, E. Gradient elasticity with surface energy: mode iii crack problem. **Int. J. Solids Struct.**, 1996. v. 33, p. 4531–4559, 1996.
- VDOVIN, V.; KUNIN, I. A theory of elasticity with spatial distribution of matter: Three-dimensional complex structure. **J. Appl. Math. Mech.**, 1966. v. 30, p. 1272–1281, 1966.

- VERNET, D. Expression mathématique des forme. **Ingenieurs de l'Automobile**, 1971. v. 10, p. 509–520, 1971.
- VLACHOS, A. et al. Curve pn triangles. In: **Symposium on interactive 3D graphics**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 159 – 166.
- VOIGT, W. **Theoretische studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle**. Gottingen: Abh. Ges. Wiss., 1887.
- \_\_\_\_\_. Untersuchung des elastischen verhaltens eeine cylinders aus krystallinscher substanz, auf dessen mantelflache keine krafte wirken, wenn die in seinem innern wirkenden spannungen langs der cylinderaxe constant sind. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Abh. Ges. Wiss., 1887. cap. Theoretische studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle II, p. 53–79.
- \_\_\_\_\_. Untersuchung des elastischen verhaltens eeine cylinders aus krystallinscher substanz, auf dessen mantelflache keine krafte wirken, wenn die in seinem innern wirkenden spannungen langs der cylinderaxe constant sind. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Abh. Ges. Wiss., 1887. cap. Theoretische studien uber die Elasticitatsverhaltnisse der Krystalle III, p. 80–100.
- \_\_\_\_\_. Uber medien ohne innere krafte und eine durch sie gelieferte mechanische deutung der maxwell-hertzchen gleichungen. **Gott. Abh.**, 1894. p. 72–79, 1894.
- WALTON, D. J.; MEEK, D. S. Point normal interpolation for stereolithography modelling. **Computers & Graphics**, 1995. v. 19, n. 3, p. 345–353, 1995.
- \_\_\_\_\_. A triangular g1 patch from boundary curves. **Computer-Aided Design**, 1996. v. 28, n. 2, p. 113–123, 1996.
- WALTON, D. J.; YEUNG, M. New advances in cad & computer graphics. In: \_\_\_\_\_. Beijing, China: International Academic Publishers, 1993. cap. Geometry modelling from CT scans for stereolithography appartus, p. 417 – 422.
- WANG, L. Integration of cad and boundary element analysis through subdivision methods. **Computer & Industrial Engineering**, 2009. v. 57, p. 691–698, 2009.
- WHITTAKER, E. T. **A history of the theories of aether and elasticity**. New York: Dover, 1953.
- ZERVOS, A. Finite elements for elasticity with microstructure and gradient elasticity. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 2008. v. 73, p. 564–595, 2008.
- ZIENIUK, E. Potential problems with polygonal boundaries by a bem with parametric linear functions. **Engineering Analysis wit Boundary Elements**, 2001. v. 25, p. 185–190, 2001.
- ZIENIUK, E.; SZERSZEN, K. Triangular bézier surface patches in modeling shape of boundary geometry for potential problems in 3d. **Engineering with Computers**, 2013. v. 29, p. 517–527, 2013.



# Apêndices



**Apêndice A****A.1 Apêndice A.1**

Prova que

$$\nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}] = \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] + [(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}] \cdot \delta \mathbf{u}. \quad (\text{A.1})$$

**Prova.** O vetor  $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}$  pode também ser escrito na forma

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})]. \quad (\text{A.2})$$

Assim, utilizando a identidade:

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot [f \cdot \delta \mathbf{u}] &= [(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla] \cdot [f \cdot \delta \mathbf{u}] \\ &= [(\delta_{ij} - n_i n_j) (e_i \otimes e_j) \cdot \partial_t e_t] \cdot [f_k e_k \cdot \delta u_{rs} (e_r \otimes e_s)] \\ &= (\delta_{ij} - n_i n_j) \partial_j (f_r \delta u_{ri}) \\ &= (\delta_{ij} - n_i n_j) [(\partial_j f_r) \delta u_{ri} + f_r \partial_j (\delta u_{ri})] \\ &= [(\delta_{ij} - n_i n_j) (\partial_j f_r) \delta u_{ri} + f_r (\delta_{ij} - n_i n_j) \partial_j (\delta u_{ri})] \\ &= \nabla_S f : \mathbf{u} + f \cdot [\nabla_S \cdot (\mathbf{u})^T]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Com  $T$  denotando a transposição e  $f$ ,  $u$  significando vetor e tensor, respectivamente. Desta forma é possível escrever

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}] &= \nabla_S \cdot \{\mathbf{n} \cdot [\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})]\} \\ &= \{(\delta_{ij} - n_i n_j) (e_i \otimes e_j) \cdot \partial_t e_t\} \cdot \{n_r e_r \cdot [n_s n_u \mu_{umk} \delta u_k (e_s \otimes e_m)]\} \\ &= (\delta_{ij} - n_i n_j) \partial_j (n_s n_s n_u \mu_{uik} \delta u_k) \\ &= (\delta_{ij} - n_i n_j) [(\partial_j n_s) n_s n_u \mu_{uik} \delta u_k + n_s \partial_j (n_s n_u \mu_{uik} \delta u_k)] \\ &= [(\nabla_S \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot \{\nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) \otimes \mathbf{n}]\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Contudo, devido a natureza do gradiente de superfície  $\nabla_S$ , tem-se que

$$\begin{aligned} (\nabla_S \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= [(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e a Eq.(A.4) é reduzida a

$$\nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}] = \mathbf{n} \cdot \{ \nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) \otimes \mathbf{n}] \}. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando a notação indicial do gradiente de superfície,  $D_r = [(\delta_{rj} - n_i n_j) \partial_j] e_r$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla_S \times (f \times g) &= \epsilon_{irs} \epsilon_{uvs} D_r (f_u g_v) \\ &= (\delta_{iu} \delta_{rv} - \delta_{iv} \delta_{ru}) D_r (f_u g_v) \\ &= D_v (f_i g_v) - D_u (f_u g_i) \\ &= \nabla_S \cdot (g \otimes f) - \nabla_S \cdot (f \otimes g). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Com  $f$  e  $g$  representando vetores. A relação (A.6) toma a forma:

$$\nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}] = \mathbf{n} \cdot \{ \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] + \nabla_S \cdot [\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] \}. \quad (\text{A.8})$$

A partir da identidade

$$\nabla_S \cdot (f \otimes g) = (\nabla_S \cdot f) g + f \cdot (\nabla_S g), \quad (\text{A.9})$$

o segundo termo do lado direito da Eq.(C.8) pode ser escrita

$$\nabla_S \cdot [\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] = (\nabla_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot [\nabla_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})]. \quad (\text{A.10})$$

Fazendo uso da natureza tangencial de  $\nabla_S$ , tem-se

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] = 0. \quad (\text{A.11})$$

Inserindo a Eq.(A.11) na Eq.(A.10) e em seguida utilizando a Eq.(C.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) \cdot \delta \mathbf{u}] &= \mathbf{n} \cdot \{ \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] + (\nabla_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) \} \\ &= \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] + \mathbf{n} \cdot (\nabla_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] + [(\nabla_S \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}] \cdot \delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

E assim conclui-se a prova. C.Q.D.

## A.2 Apêndice A.2

Prove que

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS = \sum_{C_a} \oint_{C_a} \{ \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}\| \cdot \delta \mathbf{u} \} dC. \quad (\text{A.13})$$

**Prova.** A partir do teorema de Stokes para superfícies,  $S$ , aberta e circundada por uma linha fechada,  $C$ , pode ser escrita

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times f dS = \oint_C \hat{\mathbf{s}} \cdot f dC, \quad (\text{A.14})$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície  $S$ ,  $\hat{\mathbf{s}}$  é o vetor unitário tangente à linha  $C$ , e  $f$  é um vetor.

Considere uma superfície fechada  $S$  formada por duas superfícies adjacentes  $S_1$  e  $S_2$ , cuja intersecção é a linha  $C$ . Assim, aplicando o teorema de Stokes (Equação A.14) para o vetor  $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS &= \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS + \\ &\quad \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS \\ &= \oint_{C(S_1)} \hat{\mathbf{s}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dC - \oint_{C(S_2)} \hat{\mathbf{s}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dC \\ &= \oint_C \|\hat{\mathbf{s}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})]\| dC, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

onde o símbolo  $\|\circ\|$  indica a diferença entre os valores das duas superfícies adjacentes  $S_1$  e  $S_2$ .

Explorando a propriedade vetorial

$$u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w, \quad (\text{A.16})$$

e definindo o vetor  $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{n}$ , o segundo lado da Eq.(A.15) é escrito como segue:

$$\begin{aligned} \oint_C \|\hat{\mathbf{s}} \cdot [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})]\| dC &= \oint_C \|(\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})\| dC \\ &= \oint_C \|\hat{\mathbf{m}} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})\| dC = \oint_C \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}\| dC. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Considerando a hipótese de que o vetor  $\delta \mathbf{u}$  seja contínuo em  $S$ , tem-se:

$$\|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}\| = \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}\| \cdot \delta u, \quad (\text{A.18})$$

e finalmente inserindo a Eq.(A.18) na Eq.(A.17) e, na sequência, na Eq.(A.15), chega-se a:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS = \oint_C \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}\| \cdot \delta u dC. \quad (\text{A.19})$$

Quando há mais de uma linha  $C$ , isto é,  $C_a$  ( $a = 1, 2, \dots$ ) linhas, a Eq.(A.19) é reescrita na forma

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS = \sum_{C_a} \oint_{C_a} \|(\hat{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{n}) : \boldsymbol{\mu}\| \cdot \delta u dC. \quad (\text{A.20})$$

Como se queria demonstrar.

### A.3 Apêndice A.3

Provar que para quaisquer corpo bidimensional com contorno  $S$ , têm-se:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS = 0. \quad (\text{A.21})$$

**Prova.** Os vetores  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u}$  pertencem ao plano onde o corpo estudado é considerado. Assim,

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \delta \mathbf{u})] dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla_S \times [f \mathbf{e}_k] dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla_S f) \times \mathbf{e}_k dS. \quad (\text{A.22})$$

Onde  $\mathbf{e}_k$  é o vetor perpendicular ao plano do corpo.

De acordo com a definição do gradiente de superfície,  $\nabla_S = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \nabla$ , chega-se à expressão:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla_S f) \times \mathbf{e}_k dS &= \int_S \mathbf{n} \cdot \left( \nabla f - \mathbf{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) \times \mathbf{e}_k dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla f \times \mathbf{e}_k) dS \\ &= \int_V \nabla \cdot (\nabla f \times \mathbf{e}_k) dV = \int_V \mathbf{e}_k \cdot \nabla \times \nabla f dV = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Como se queria demonstrar.

**Apêndice B**

Prove que a função escalar

$$\vartheta(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{r}{2} + \frac{g^2}{r} - g^2 \frac{e^{-r/g}}{r} \right) + \frac{C_1}{r}, \quad (\text{B.1})$$

é a solução da equação diferencial

$$(\lambda + 2\mu) \left[ \nabla^2 \vartheta(r) - g^2 \nabla^4 \vartheta(r) \right] = \frac{1}{4\pi r}. \quad (\text{B.2})$$

**Prova.** Reescrevendo a Eq.(B.2) na forma

$$\nabla^2 \left[ 1 - g^2 \nabla^2 \right] \vartheta(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.3})$$

e considerando duas funções radiais  $\vartheta_1(r)$  e  $\vartheta_2(r)$ , as quais satisfazem, respectivamente, as seguinte equações diferenciais

$$\nabla^2 \vartheta_1(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\left[ 1 - g^2 \nabla^2 \right] \vartheta_2(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.5})$$

é possível obter as seguintes restrições às duas funções radiais

$$\left[ 1 - g^2 \nabla^2 \right] \vartheta(r) = \vartheta_1(r), \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla^2 \vartheta(r) = \vartheta_2(r). \quad (\text{B.7})$$

Multiplicando a Eq.(B.7) por  $g^2$  e adicionando com a Eq.(B.6) é possível escrever a solução da Eq.(B.3) em função de  $\vartheta_1(r)$  e  $\vartheta_2(r)$ , isto é,

$$\vartheta(r) = \vartheta_1(r) + g^2 \vartheta_2(r). \quad (\text{B.8})$$

Tanto a função  $\vartheta_1(r)$  quanto a função  $\vartheta_2(r)$  dependem unicamente de  $r$ , podendo desta forma reescrever as Eqs.(B.4) e (B.5) em coordenadas cilíndricas

$$\frac{d^2\vartheta_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\vartheta_1(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.9})$$

$$\vartheta_2(r) - g^2 \frac{d^2\vartheta_2(r)}{dr^2} - \frac{2g^2}{r} \frac{d\vartheta_2(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{r}. \quad (\text{B.10})$$

Pode ser diretamente verificado que as funções que satisfazem as Eqs.(B.9) (B.10) possuem a forma

$$\vartheta_1(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{r}{2} \quad (\text{B.11})$$

e

$$\vartheta_2(r) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{r} + \frac{e^{-r/g}}{r} \right), \quad (\text{B.12})$$

onde  $C_1$  é uma constante.

Por fim, inserindo as Eqs.(B.11) e (B.12) em (B.8), tem-se a solução na forma

$$\vartheta(r) = \frac{C_1}{r} + \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{r}{2} + \frac{g^2}{r} - g^2 \frac{e^{-r/g}}{r} \right). \quad (\text{B.13})$$

Como se queria demonstrar.



**Apêndice C****C.1 Apêndice C.1**

Prove que

$$\tau : \nabla \mathbf{u}^* - \tau^* : \nabla \mathbf{u} = 0. \quad (\text{C.1})$$

**Prova.** Fazendo uso das relações

$$\tau = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr}\varepsilon)\mathbf{I}, \quad (\text{C.2})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (\text{C.3})$$

$$\text{tr}\varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{C.4})$$

observa-se que

$$\begin{aligned} \tau : \nabla \mathbf{u}^* &= [2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr}\varepsilon)\mathbf{I}] : \nabla \mathbf{u}^* = [2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr}\varepsilon)\mathbf{I}] : \varepsilon^* \\ &= 2\mu\varepsilon : \varepsilon^* + \lambda(\varepsilon : \mathbf{I})(\mathbf{I} : \varepsilon^*) = \varepsilon : 2\mu\varepsilon^* + \varepsilon : \lambda\mathbf{I}(\mathbf{I} : \varepsilon^*) \\ &= \varepsilon : [2\mu\varepsilon + \lambda(\mathbf{I} : \varepsilon^*)\mathbf{I}] = \varepsilon : \tau^* = \tau^* : \varepsilon = \tau^* : \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Como queria demonstrar.

**C.2 Apêndice C.2**

Se  $\mu = g^2 \nabla \tau$  demonstrar que

$$\int_V \{(\nabla \cdot \mu^*) : \nabla \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mu) : \nabla \mathbf{u}^*\} dV = \int_S \{(\mathbf{n} \cdot \mu^*) : \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \mu) : \nabla \mathbf{u}^*\} dS. \quad (\text{C.6})$$

**Prova.** Substituindo  $\mu = g^2 \nabla \tau$  no lado direito da Eq.(C.6), tem-se:

$$\int_V \{(\nabla \cdot \mu^*) : \nabla \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mu) : \nabla \mathbf{u}^*\} dV = \int_V \{g^2 \nabla^2 \tau^* : \nabla \mathbf{u} - g^2 \nabla^2 \tau : \nabla \mathbf{u}^*\} dV. \quad (\text{C.7})$$

Utilizando a segunda identidade integral de Green, o lado direito da Eq.(C.7) é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \int_V \{g^2 \nabla^2 \tau^* : \nabla \mathbf{u} - g^2 \nabla^2 \tau : \nabla \mathbf{u}^*\} dV &= \int_S \left\{ g^2 \frac{\partial \tau^*}{\partial \mathbf{n}} : \nabla \mathbf{u} - g^2 \frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{n}} : \nabla \mathbf{u}^* \right\} dS \\
 &= \int_S \{ \mathbf{n} \cdot g^2 \nabla \tau^* - \mathbf{n} \cdot g^2 \nabla \tau : \nabla \mathbf{u}^* \} dS \\
 &= \int_S \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}^*) : \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) : \nabla \mathbf{u}^* \} dS. \quad (\text{C.8})
 \end{aligned}$$

Como queria demonstrar.

**Apêndice D**

Neste apêndice, as expressões das soluções fundamentais que aparecem nas equações integrais (4.71) e (4.72) são fornecidas como se segue. Notação:  $\partial_r \circ = \frac{\partial \circ}{\partial r}$ .

**D.1 Solução Fundamental  $\tilde{\mathbf{U}}^*$** 

$$\tilde{\mathbf{U}}^*(r, \mu, \nu, g) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [\Upsilon(r, \nu, g) \mathbf{I} - \chi(r, g) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}], \quad (\text{D.1})$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon(r, \nu, g) = (3 - 4\nu) \frac{1}{r} + 2(1 - 2\nu) \left[ -\frac{g^2}{r^3} + \left( \frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} \right) e^{-r/g} \right] + \\ 4(1 - \nu) \left[ \frac{g^2}{r^3} - \left( \frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r} \right) e^{-r/g} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

e

$$\chi(r, g) = -\frac{1}{r} + \frac{6g^2}{r^3} - \left( \frac{6g^2}{r^3} + \frac{6g}{r^2} + \frac{2}{r} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{D.3})$$

**D.2 Solução Fundamental  $\tilde{\mathbf{Q}}^*$** 

$$\tilde{\mathbf{Q}}^*(r, \mu, \nu, g) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y)], \quad (\text{D.4})$$

com

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \frac{2\chi(r, g)}{r} - \partial_r \chi(r, g) \right) = -\frac{3}{r^2} + \frac{30g^2}{r^4} - \left( \frac{30g^2}{r^4} + \frac{30g}{r^3} + \frac{12}{r^2} + \frac{2}{gr} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} = \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) = -(3 - 4\nu) \frac{1}{r^2} - \left[ \frac{6g^2}{r^4} - \left( \frac{6g^2}{r^4} + \frac{6g}{r^3} + \frac{6}{r^2} + \frac{4}{gr} \right) e^{-r/g} \right] - \\ 4\nu \left[ \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{gr} \right) e^{-r/g} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\tilde{C} = \frac{\chi(r, g)}{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{6g^2}{r^4} - \left( \frac{6g^2}{r^4} + \frac{6g}{r^3} + \frac{2}{r^2} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{D.7})$$

### D.3 Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{R}}^*$

$$\tilde{\mathbf{R}}^* = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left[ A(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + B\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y + (C_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + C_2) \mathbf{I} + (D_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + D_2) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + E(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \right], \quad (\text{D.8})$$

com

$$\begin{aligned} A &= \partial_r \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) - \frac{3\partial_r \chi(r, g)}{r} - \frac{\partial_r \Upsilon(r, \nu, g)}{r} + \frac{6\chi(r, g)}{r^2} \\ &= \frac{120g^2}{r^5} - \left( \frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{60}{r^3} + \frac{20}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{(-r/g)} - \\ &\quad \frac{12\nu}{r^3} + 4\nu \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{(-r/g)}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial_r \Upsilon(r, \nu, g)}{r} - \frac{\chi(r, g)}{r^2} - \frac{2\chi(r, g)}{r^2} + \\ &\quad \frac{2\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial_r \Upsilon(r, \nu, g)}{r} - \frac{\partial_r \chi(r, g)}{r} - \frac{2\chi(r, g)}{r^2} \right) \\ &= -\frac{24g^2}{r^5} + \left( \frac{24g^2}{r^5} + \frac{24g}{r^4} + \frac{12}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{(-r/g)}, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \partial_r \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) - \frac{\partial_r \chi(r, g)}{r} - \frac{\partial_r \Upsilon(r, \nu, g)}{r} + \frac{2\chi(r, g)}{r^2} \\ &= \frac{60g^2}{r^5} + \frac{6}{r^3} (1-2\nu) - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{4}{g^2r} + \frac{16}{gr^2} + \frac{36}{r^3} \right) e^{(-r/g)} + \\ &\quad \nu \left( \frac{4}{g^2r} + \frac{12}{gr^2} + \frac{12}{r^3} \right) e^{(-r/g)}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\partial_r \Upsilon(r, \nu, g)}{r} - \frac{\chi(r, g)}{r^2} = -\frac{12g^2}{r^5} - \frac{2}{r^3} (1-2\nu) + \\ &\quad \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{(-r/g)} - \nu \left( \frac{4}{gr^2} + \frac{4}{r^3} \right) e^{(-r/g)}, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{10\partial_r \chi(r, g)}{r} - \frac{16\chi(r, g)}{r^2} - 2\partial_r \partial_r \chi(r, g) = -\frac{420g^2}{r^5} + \frac{30}{r^3} + \\ &\quad \left( \frac{420g^2}{r^5} + \frac{420g}{r^4} + \frac{180}{r^3} + \frac{40}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{(-r/g)}, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$D_2 = -\frac{2\partial_r\chi(r, g)}{r} + \frac{4\chi(r, g)}{r^2} = \frac{60g^2}{r^5} - \frac{6}{r^3} - \left(\frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2}\right) e^{(-r/g)}, \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} E &= -\frac{4\partial_r\chi(r, g)}{r} + \frac{8\chi(r, g)}{r^2} + \frac{2\nu}{(1-2\nu)} (\partial_r\partial_r\Upsilon(r, \nu, g) - \\ &\quad \partial_r\partial_r\chi(r, g) - \frac{\partial_r\chi(r, g)}{r} - \frac{\partial_r\Upsilon(r, \nu, g)}{r} + \frac{4\chi(r, g)}{r^2}) \\ &= \frac{120g^2}{r^5} - \frac{12}{r^3} - \left(\frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{48}{r^3} + \frac{8}{gr^2}\right) e^{(-r/g)} + \\ &\quad \nu \left[ \frac{12}{r^3} - \left(\frac{12}{r^3} + \frac{12}{gr^2} + \frac{4}{g^2r}\right) e^{(-r/g)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

## D.4 Solução Fundamental $\tilde{\mathbf{P}}^*$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^*(r, \mu, \nu, g) &= \left[ \mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*}{\partial \mathbf{n}_y} - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*2134}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* - (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* \right]^T, \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

com

$$(\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*)^T = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left[ \bar{A}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \bar{B}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + \bar{B}(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \bar{C} \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \right], \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 2 \left( \frac{2\chi(r, g)}{r} - \partial_r\chi(r, g) \right) = -\frac{6}{r^2} + \frac{60g^2}{r^4} - \\ &\quad \left( \frac{60g^2}{r^4} + \frac{60g}{r^3} + \frac{24}{r^2} + \frac{4}{gr} \right) e^{-r/g}, \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \partial_r\Upsilon(r, \nu, g) - \frac{\chi(r, g)}{r} = -\frac{2}{r^2} - \frac{12g^2}{r^4} + \left( \frac{12g^2}{r^4} + \frac{12g}{r^3} + \frac{8}{r^2} + \frac{4}{gr} \right) e^{-r/g} - \\ &\quad \nu \left[ -\frac{4}{r^2} + \left( \frac{4}{r^2} + \frac{4}{gr} \right) e^{-r/g} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \frac{2\nu}{1-2\nu} \left( \partial_r\Upsilon(r, \nu, g) - \partial_r\chi(r, g) - \frac{2\chi(r, g)}{r} \right) - \frac{2\chi(r, g)}{r} \\ &= \frac{2}{r^2} - \frac{12g^2}{r^4} + \left( \frac{12g^2}{r^4} + \frac{12g}{r^3} + \frac{4}{r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{1}{r^2} + \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{gr} \right) e^{-r/g} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$\left[ (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right]^T = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} (G_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + G_2 \mathbf{I} + G_3 \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + G_4 \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + G_5 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y), \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= g^2 \left[ \left( \partial_r \partial_r \bar{A} - \frac{7\partial_r \bar{A}}{r} + \frac{15\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + 3 \left( \frac{\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{3\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \\
&= g^2 \left[ \left( -\frac{210}{r^4} + \frac{3780g^2}{r^6} - \left( \frac{3780g^2}{r^6} + \frac{3780g}{r^5} + \frac{1680}{r^4} + \frac{420}{gr^3} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{60}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + \left( \frac{90}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1260g}{r^5} + \frac{540}{r^4} + \frac{120}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (\text{D.22})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= g^2 \left[ \left( \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + 3 \left( \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \\
&= g^2 \left\{ \left( -\frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{240}{r^4} + \frac{100}{gr^3} + \frac{28}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} - \right. \right. \\
&\quad \left. \nu \left[ -\frac{60}{r^4} + \left( \frac{60}{r^4} + \frac{60}{gr^3} + \frac{24}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right] \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + \left( \frac{18}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \right. \\
&\quad \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{108}{r^4} + \frac{48}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left[ \frac{36}{r^4} - \right. \\
&\quad \left. \left. \left( \frac{36}{r^4} + \frac{36}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right] \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \left. \right\}, \quad (\text{D.23})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_3 &= g^2 \left[ \left( \partial_r \partial_r \bar{C} - \frac{3\partial_r \bar{C}}{r} + \frac{3\bar{C}}{r^2} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{6\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} \right] \\
&= g^2 \left\{ \left[ \frac{90}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \frac{1260g}{r^5} + \frac{540}{r^4} + \frac{120}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + \right. \right. \\
&\quad \left. 4\nu \left( -\frac{15}{r^4} + \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right) \right] (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{18}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \\
&\quad \left. \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{72}{r^4} + \frac{12}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right] \right\}, \quad (\text{D.24})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_4 &= g^2 \left[ \left( \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{6\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} \right] \\
&= g^2 \left\{ \left[ \frac{30}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \frac{1260g}{r^5} + \frac{600}{r^4} + \frac{180}{gr^3} + \frac{36}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + \right. \right. \\
&\quad \left. \nu \left( \frac{60}{r^4} - \left( \frac{60}{r^4} + \frac{60}{gr^3} + \frac{24}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right) \right] (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{6}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \\
&\quad \left. \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{84}{r^4} + \frac{24}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left[ \frac{12}{r^4} - \left( \frac{12}{r^4} + \frac{12}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right] \right\} \quad (\text{D.25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_5 &= 2g^2 \left( \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \\
&= 2g^2 \left( -\frac{6}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{84}{r^4} + \frac{24}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{D.26})
\end{aligned}$$

$$\left[ \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*) \right]^T = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ H_1 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + H_2 [(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}] + H_3 \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \}, \quad (\text{D.27})$$

$$H_1 = \left[ \partial_r \partial_r \bar{A} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{12\bar{A}}{r^2} \right] = \frac{60}{r^4} - \left( \frac{60}{r^4} + \frac{60}{gr^3} + \frac{24}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.28})$$

$$H_2 = \partial_r \partial_r \bar{B} + \frac{2\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{2\bar{B}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2} = -\frac{12}{r^4} - \nu \left( \frac{4}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g} + \left( \frac{12}{r^4} + \frac{12}{gr^3} + \frac{8}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.29})$$

$$H_3 = \partial_r \partial_r \bar{C} + \frac{2\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{2\bar{C}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2} = -\frac{12}{r^4} + \left( \frac{12}{r^4} + \frac{12}{gr^3} + \frac{4}{g^2 r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^2} + \frac{1}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.30})$$

$$\left[ \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134}) \right]^T = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ L_1 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + L_2 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + L_3 (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) \}, \quad (\text{D.31})$$

$$L_1 = \partial_r \partial_r \bar{B} + \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} = \left( \frac{4}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g} (1-\nu), \quad (\text{D.32})$$

$$L_2 = \partial_r \partial_r \bar{A} - \frac{6\bar{A}}{r^2} + \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} + \partial_r \partial_r \bar{C} - \frac{3\partial_r \bar{C}}{r} + \frac{3\bar{C}}{r^2} = 0, \quad (\text{D.33})$$

$$L_3 = \frac{\partial_r \bar{A}}{r} + \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} = 0, \quad (\text{D.34})$$

$$\left[ (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T = \frac{g^2 (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)}{16\pi(1-\nu)} \{ M_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + M_2 \mathbf{I} + M_3 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + M_4 (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + M_5 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \}, \quad (\text{D.35})$$

$$M_1 = \left( \partial_r \bar{A} - \frac{3\bar{A}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{\bar{A}}{r} = \left[ \left( \frac{30}{r^3} - \frac{420g^2}{r^5} + \left( \frac{420g^2}{r^5} + \frac{420g}{r^4} + \frac{180}{r^3} + \frac{40}{gr^2} + \frac{4}{g^2 r} \right) e^{-r/g} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \left[ \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right] \right], \quad (\text{D.36})$$

$$M_2 = \left( \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{\bar{B}}{r} = \left[ \left( \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{36}{r^3} + \frac{16}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} - \nu \left( \frac{12}{r^3} - \left( \frac{12}{r^3} + \frac{12}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right) \right] (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left( -\frac{4}{r^3} + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right), \quad (\text{D.37})$$

$$M_3 = \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} + \frac{\bar{A}}{r} = \frac{120g^2}{r^5} - \nu \left[ \frac{12}{r^3} - \left( \frac{12}{r^3} + \frac{12}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right] - \left( \frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{60}{r^3} + \frac{20}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.38})$$

$$M_4 = \partial_r \bar{C} - \frac{\bar{C}}{r} + \frac{\bar{A}}{r} = -\frac{12}{r^3} + \frac{120g^2}{r^5} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^3} - \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right] - \left( \frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{48}{r^3} + \frac{8}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.39})$$

$$M_5 = \frac{\bar{B} + \bar{C}}{r} = -\frac{24g^2}{r^5} + \left( \frac{24g^2}{r^5} + \frac{24g}{r^4} + \frac{12}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.40})$$

$$\left[ (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right]^T = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ N_1 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + N_2 \mathbf{I} + N_4 (\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + N_3 [(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}}] + N_5 \hat{\mathbf{r}} \otimes (\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot \hat{\mathbf{r}} + N_6 (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + N_7 (\nabla_s \mathbf{n}_y) \right\}, \quad (\text{D.41})$$

$$N_1 = \left( \partial_r \bar{A} - \frac{3\bar{A}}{r} \right) (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \frac{\bar{A}}{r} (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) = \left[ -\frac{420g^2}{r^5} + \frac{30}{r^3} + \left( \frac{420g^2}{r^5} + \frac{420g}{r^4} + \frac{180}{r^3} + \frac{40}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right] (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \left( -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right) (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y), \quad (\text{D.42})$$

$$N_2 = \left( \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} \right) (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \frac{\bar{B}}{r} (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) = \left\{ \left[ \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{36}{r^3} + \frac{16}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} - \nu \left( \frac{12}{r^3} - \left( \frac{12}{r^3} + \frac{12}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right) \right] (\nabla_s \mathbf{n}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) - \left[ \frac{2}{r^3} + \frac{12g^2}{r^5} - \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} + \nu \left( -\frac{4}{r^3} + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right) \right] (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) \right\}, \quad (\text{D.43})$$



$$N_3 = \frac{\bar{A}}{r} = -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{D.44})$$

$$N_4 = \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} = \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{36}{r^3} + \frac{16}{gr^2} + \frac{4}{g^2 r} \right) e^{-r/g} - \nu \left( \frac{12}{r^3} - \left( \frac{12}{r^3} + \frac{12}{gr^2} + \frac{4}{g^2 r} \right) e^{-r/g} \right), \quad (\text{D.45})$$

$$N_5 = \partial_r \bar{C} - \frac{\bar{C}}{r} = -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^3} - \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2 r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{D.46})$$

$$N_6 = \frac{\bar{C}}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{4}{r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left( -\frac{1}{r^3} + \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right) \quad (\text{D.47})$$

$$N_7 = \frac{\bar{B}}{r} = -\frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left( -\frac{4}{r^3} + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right), \quad (\text{D.48})$$



## Apêndice E

Neste apêndice, as expressões explícitas da derivada normal das soluções fundamentais que aparecem nas equações integrais (4.71) e (4.74) são apresentada a seguir. Notação:

$$\partial_{r^{\circ}} = \frac{\partial}{\partial r}$$

### E.1 Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial n_x}$

$$\frac{\partial \tilde{U}^*(x, y)}{\partial n_x} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [AA(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} + BB(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + CC(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x)], \quad (\text{E.1})$$

com

$$AA = -\partial_r \Upsilon(r, \nu, g) = (3 - 4\nu) \frac{1}{r^2} + 4\nu \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{gr} \right) e^{-r/g} + \frac{6g^2}{r^4} - \left( \frac{6g^2}{r^4} + \frac{6g}{r^3} + \frac{6}{r^2} + \frac{4}{gr} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.2})$$

$$BB = \partial_r \chi(r, g) - \frac{2\chi(r, g)}{r} = \frac{3}{r^2} - \frac{30g^2}{r^4} + \left( \frac{30g^2}{r^4} + \frac{30g}{r^3} + \frac{12}{r^2} + \frac{2}{gr} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.3})$$

$$CC = \frac{\chi(r, g)}{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{6g^2}{r^4} - \left( \frac{6g^2}{r^4} + \frac{6g}{r^3} + \frac{2}{r^2} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.4})$$

### E.2 Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial n_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{Q}^*(y, x)}{\partial n_x} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \{ & -Q_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - Q_2(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & Q_2(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - Q_3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - Q_4(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - \\ & Q_2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + Q_5 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - Q_2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + Q_5 \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y \}, \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

$$Q_1 = \frac{5}{r} \partial_r \chi(r, g) - \frac{8\chi(r, g)}{r^2} - \partial_r \partial_r \chi(r, g) = \frac{15}{r^3} - \frac{210g^2}{r^5} + \left( \frac{210g^2}{r^5} + \frac{210g}{r^4} + \frac{90}{r^3} + \frac{20}{gr^2} + \frac{2}{g^2 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.6})$$

$$Q_2 = \frac{2\chi(r, g)}{r^2} - \frac{1}{r} \partial_r \chi(r, g) = -\frac{3}{r^3} + \frac{30g^2}{r^5} - \left( \frac{30g^2}{r^5} + \frac{30g}{r^4} + \frac{12}{r^3} + \frac{2}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.7})$$

$$Q_3 = \partial_r \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) - \frac{1}{r} \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) = \frac{9}{r^3} + 30 \frac{g^2}{r^5} - \left( 30 \frac{g^2}{r^5} + 30 \frac{g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{14}{gr^2} + \frac{4}{g^2 r} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{3}{r^3} - \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2 r} \right) e^{-r/g} \right), \quad (\text{E.8})$$

$$Q_4 = \frac{1}{r} \partial_r \Upsilon(r, \nu, g) = -(3 - 4\nu) \frac{1}{r^3} - 4\nu \left[ \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right] - \left[ \frac{6g^2}{r^5} - \left( \frac{6g^2}{r^5} + \frac{6g}{r^4} + \frac{6}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.9})$$

$$Q_5 = \frac{\chi(r, g)}{r^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{6g^2}{r^5} - \left( \frac{6g^2}{r^5} + \frac{6g}{r^4} + \frac{2}{r^3} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.10})$$

### E.3 Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*}{\partial n_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*}{\partial n_x}(x, y) = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ & -R_1(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_2(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ & R_3(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) - R_4(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_5(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ & R_6(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - R_7(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - R_8(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - \\ & R_9(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_{10}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - R_{10}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - \\ & R_{11}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - R_{12}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - R_{12}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y - \\ & R_{13}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \} \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

com

$$R_1 = \partial_r A_1 - \frac{4A_1}{r} = -\frac{210}{r^4} + \frac{3780g^2}{r^6} - \left( \frac{3780g^2}{r^6} + \frac{3780g}{r^5} + \frac{1680}{r^4} + \frac{420}{gr^3} + \frac{60}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.12})$$

$$R_2 = \frac{2A_1}{r} = \frac{60}{r^4} - \frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{360}{r^4} + \frac{80}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.13})$$

$$R_3 = \frac{A_1}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.14})$$

$$R_4 = \partial_r A_6 - \frac{2A_6}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.15})$$

$$R_5 = \frac{A_6}{r} = -\frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{24}{r^4} + \frac{4}{gr^3} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.16})$$

$$R_6 = \partial_r A_2 - \frac{2A_2}{r} = -\frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{240}{r^4} + \frac{100}{gr^3} + \frac{28}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.17})$$

$$R_7 = \frac{2A_2}{r} = \frac{12}{r^4} + \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{72}{r^4} + \frac{32}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{6}{r^4} + \left( \frac{6}{r^4} + \frac{6}{gr^3} + \frac{2}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.18})$$

$$R_8 = \partial_r A_7 = \frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{36}{r^4} + \frac{16}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.19})$$

$$R_9 = \partial_r A_3 - \frac{2A_3}{r} = -\frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{420}{r^4} + \frac{140}{gr^3} + \frac{32}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.20})$$

$$R_{10} = \frac{A_3}{r} = \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{60}{r^4} + \frac{20}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^4} + \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.21})$$

$$R_{11} = \partial_r A_4 - \frac{2A_4}{r} = \frac{60}{r^4} - \frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{360}{r^4} + \frac{80}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{15}{r^4} + \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.22})$$

$$R_{12} = \frac{A_4}{r} = -\frac{12}{r^4} + \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{48}{r^4} + \frac{8}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.23})$$

$$R_{13} = \partial_r A_5 = \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{60}{r^4} + \frac{20}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.24})$$

## E.4 Solução Fundamental $\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n_x}(r, \mu, \nu, g) = \frac{\partial}{\partial n_x} \left[ \mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*}{\partial \hat{\mathbf{n}}_y} - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*) - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*2134}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* - (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* \right]^T, \quad (\text{E.25})$$

### E.4.1 Parcela $\frac{\partial (\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*)^T}{\partial n_x}$

$$\frac{\partial (\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*)^T}{\partial n_x} = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [-P_{11} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{12} (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{12} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{13} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - P_{14} (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - P_{13} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{14} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{15} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{16} \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y], \quad (\text{E.26})$$

com

$$P_{11} = \partial_r \bar{A} - \frac{3\bar{A}}{r} = \frac{30}{r^3} - \frac{420g^2}{r^5} + \left( \frac{420g^2}{r^5} + \frac{420g}{r^4} + \frac{180}{r^3} + \frac{40}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.27})$$

$$P_{12} = \frac{\bar{A}}{r} = -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.28})$$

$$P_{13} = \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} = \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{36}{r^3} + \frac{16}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^3} + \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.29})$$

$$P_{14} = \frac{\bar{B}}{r} = -\frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left[ -\frac{4}{r^3} + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.30})$$

$$P_{15} = \partial_r \bar{C} - \frac{\bar{C}}{r} = -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^3} - \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.31})$$

$$P_{16} = \frac{\bar{C}}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{4}{r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{1}{r^3} + \left( \frac{1}{r^3} + \frac{1}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.32})$$

## E.4.2 Parcela $\frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ -P_{21}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \right. \\ &P_{22}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{23}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ &P_{24}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{25}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ &P_{25}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{26}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - \\ &P_{27}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - P_{28}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - P_{29}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - \\ &P_{210}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{211}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_y - \\ &P_{212}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y - P_{213}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{214}(\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y) - \\ &P_{215}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{216}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ &P_{217}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{218}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{219} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - \\ &P_{220}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y - P_{221}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \left. \right\}, \quad (\text{E.33}) \end{aligned}$$

com

$$P_{21} = \partial_r B_1 - \frac{5B_1}{r} = \frac{1890}{r^5} - \frac{41580g^2}{r^7} + \left( \frac{41580g^2}{r^7} + \frac{41580g}{r^6} + \frac{18900}{r^5} + \frac{5040}{gr^4} + \frac{840}{g^2r^3} + \frac{84}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.34})$$

$$P_{22} = \frac{3B_1}{r} = -\frac{630}{r^5} + \frac{11340g^2}{r^7} - \left( \frac{11340g^2}{r^7} + \frac{11340g}{r^6} + \frac{5040}{r^5} + \frac{1260}{gr^4} + \frac{180}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.35})$$

$$P_{23} = \frac{B_1}{r} = -\frac{210}{r^5} + \frac{3780g^2}{r^7} - \left( \frac{3780g^2}{r^7} + \frac{3780g}{r^6} + \frac{1680}{r^5} + \frac{420}{gr^4} + \frac{60}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.36})$$

$$P_{24} = \partial_r B_2 - \frac{3B_2}{r} = -\frac{630}{r^5} + \frac{11340g^2}{r^7} - \left( \frac{11340g^2}{r^7} + \frac{11340g}{r^6} + \frac{5040}{r^5} + \frac{1260}{gr^4} + \frac{180}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.37})$$

$$P_{25} = \frac{B_2}{r} = \frac{90}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{540}{r^5} + \frac{120}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.38})$$

$$P_{26} = \partial_r B_3 - \frac{3B_3}{r} = \left[ \frac{210}{r^5} + \frac{3780g^2}{r^7} - \left( \frac{3780g^2}{r^7} + \frac{3780g}{r^6} + \frac{2100}{r^5} + \frac{840}{gr^4} + \frac{240}{g^2r^3} + \frac{44}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{105}{r^5} - \left( \frac{105}{r^5} + \frac{105}{gr^4} + \frac{45}{g^2r^3} + \frac{10}{g^3r^2} + \frac{1}{g^4r} \right) e^{-r/g} \right) \right], \quad (\text{E.39})$$

$$P_{27} = \frac{3B_3}{r} = -\frac{90}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{720}{r^5} + \frac{300}{gr^4} + \frac{84}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{45}{r^5} - \left( \frac{45}{r^5} + \frac{45}{gr^4} + \frac{18}{g^2r^3} + \frac{3}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.40})$$

$$P_{28} = \partial_r B_4 - \frac{3B_4}{r} = -\frac{126}{r^5} - \frac{1620g^2}{r^7} + \left( \frac{1620g^2}{r^7} + \frac{1620g}{r^6} + \frac{936}{r^5} + \frac{396}{gr^4} + \frac{108}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{63}{r^5} - \left( \frac{63}{r^5} + \frac{63}{gr^4} + \frac{24}{g^2r^3} + \frac{3}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.41})$$

$$P_{29} = \frac{B_4}{r} = \frac{18}{r^5} + \frac{180g^2}{r^7} - \left( \frac{180g^2}{r^7} + \frac{180g}{r^6} + \frac{108}{r^5} + \frac{48}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{9}{r^5} + \left( \frac{9}{r^5} + \frac{9}{gr^4} + \frac{3}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.42})$$

$$P_{210} = \partial_r B_5 - \frac{3B_5}{r} = -\frac{630}{r^5} + \frac{11340g^2}{r^7} - \left( \frac{11340g^2}{r^7} + \frac{11340g}{r^6} + \frac{5040}{r^5} + \frac{1260}{gr^4} + \frac{180}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{105}{r^5} - \left( \frac{105}{r^5} + \frac{105}{gr^4} + \frac{45}{g^2r^3} + \frac{10}{g^3r^2} + \frac{1}{g^4r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.43})$$



$$P_{211} = \frac{2B_5}{r} = \frac{180}{r^5} - \frac{2520g^2}{r^7} + \left( \frac{2520g^2}{r^7} + \frac{2520g}{r^6} + \frac{1080}{r^5} + \frac{240}{gr^4} + \frac{24}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{30}{r^5} + \left( \frac{30}{r^5} + \frac{30}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} + \frac{2}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.44})$$

$$P_{212} = \frac{B_5}{r} = \frac{90}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{540}{r^5} + \frac{120}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{15}{r^5} + \left( \frac{15}{r^5} + \frac{15}{gr^4} + \frac{6}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.45})$$

$$P_{213} = \partial_r B_6 - \frac{B_6}{r} = \frac{90}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{540}{r^5} + \frac{120}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{15}{r^5} + \left( \frac{15}{r^5} + \frac{15}{gr^4} + \frac{6}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.46})$$

$$P_{214} = \frac{B_6}{r} = -\frac{18}{r^5} + \frac{180g^2}{r^7} - \left( \frac{180g^2}{r^7} + \frac{180g}{r^6} + \frac{72}{r^5} + \frac{12}{gr^4} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^5} - \left( \frac{3}{r^5} + \frac{3}{gr^4} + \frac{1}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.47})$$

$$P_{215} = \partial_r B_7 - \frac{3B_7}{r} = -\frac{210}{r^5} + \frac{11340g^2}{r^7} - \left( \frac{11340g^2}{r^7} + \frac{11340g}{r^6} + \frac{5460}{r^5} + \frac{1680}{gr^4} + \frac{360}{g^2r^3} + \frac{52}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{105}{r^5} + \left( \frac{105}{r^5} + \frac{105}{gr^4} + \frac{45}{g^2r^3} + \frac{10}{g^3r^2} + \frac{1}{g^4r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.48})$$

$$P_{216} = \frac{2B_7}{r} = \frac{60}{r^5} - \frac{2520g^2}{r^7} + \left( \frac{2520g^2}{r^7} + \frac{2520g}{r^6} + \frac{1200}{r^5} + \frac{360}{gr^4} + \frac{72}{g^2r^3} + \frac{8}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{30}{r^5} - \left( \frac{30}{r^5} + \frac{30}{gr^4} + \frac{12}{g^2r^3} + \frac{2}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.49})$$

$$P_{217} = \frac{B_7}{r} = \frac{30}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{600}{r^5} + \frac{180}{gr^4} + \frac{36}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^5} - \left( \frac{15}{r^5} + \frac{15}{gr^4} + \frac{6}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.50})$$

$$P_{218} = \partial_r B_8 - \frac{B_8}{r} = \frac{30}{r^5} - \frac{1260g^2}{r^7} + \left( \frac{1260g^2}{r^7} + \frac{1260g}{r^6} + \frac{600}{r^5} + \frac{180}{gr^4} + \frac{36}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^5} - \left( \frac{15}{r^5} + \frac{15}{gr^4} + \frac{6}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.51})$$

$$P_{219} = \frac{B_8}{r} = -\frac{6}{r^5} + \frac{180g^2}{r^7} - \left( \frac{180g^2}{r^7} + \frac{180g}{r^6} + \frac{84}{r^5} + \frac{24}{gr^4} + \frac{4}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^5} + \left( \frac{3}{r^5} + \frac{3}{gr^4} + \frac{1}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.52})$$

$$P_{220} = \partial_r B_9 - \frac{B_9}{r} = \frac{60}{r^5} - \frac{2520g^2}{r^7} + \left( \frac{2520g^2}{r^7} + \frac{2520g}{r^6} + \frac{1200}{r^5} + \frac{360}{gr^4} + \frac{72}{g^2r^3} + \frac{8}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.53})$$

$$P_{221} = \frac{B_9}{r} = -\frac{12}{r^5} + \frac{360g^2}{r^7} - \left( \frac{360g^2}{r^7} + \frac{360g}{r^6} + \frac{168}{r^5} + \frac{48}{gr^4} + \frac{8}{g^2r^3} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.54})$$

**E.4.3 Parcela**  $\frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x}$

$$\frac{\partial \left( (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right)^T}{\partial \mathbf{n}_x} = \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left[ -P_{31} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{32} (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{32} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{33} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} - P_{34} (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x) \mathbf{I} - P_{33} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{34} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{35} (\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{36} \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y \right], \quad (\text{E.55})$$

com

$$P_{31} = \partial_r F_1 - \frac{3F_1}{r} = -\frac{420}{r^5} + \left( \frac{420}{r^5} + \frac{420}{gr^4} + \frac{180}{g^2r^3} + \frac{40}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.56})$$

$$P_{32} = \frac{F_1}{r} = \frac{60}{r^5} - \left( \frac{60}{r^5} + \frac{60}{gr^4} + \frac{24}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.57})$$

$$P_{33} = \partial_r F_2 - \frac{F_2}{r} = \frac{60}{r^5} - \left( \frac{60}{r^5} + \frac{60}{gr^4} + \frac{36}{g^2r^3} + \frac{16}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left( \frac{3}{g^2r^3} + \frac{3}{g^3r^2} + \frac{1}{g^4r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.58})$$

$$P_{34} = \frac{F_2}{r} = -\frac{12}{r^5} + \left( \frac{12}{r^5} + \frac{12}{gr^4} + \frac{8}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{1}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.59})$$

$$P_{35} = \partial_r F_3 - \frac{F_3}{r} = \frac{60}{r^5} - \left( \frac{60}{r^5} + \frac{60}{gr^4} + \frac{24}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{3}{g^2r^3} + \frac{3}{g^3r^2} + \frac{1}{g^4r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.60})$$

$$P_{36} = \frac{F_3}{r} = -\frac{12}{r^5} + \left( \frac{12}{r^5} + \frac{12}{gr^4} + \frac{4}{g^2r^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left( \frac{1}{g^2r^3} + \frac{1}{g^3r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.61})$$

#### E.4.4 Parcela $\frac{\partial [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*2134})]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*2134})]^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} [-P_{41}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ &P_{42}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{42}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ &P_{43}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - P_{44}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - \\ &P_{45}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) - P_{46}(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x + \mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y)], \end{aligned} \quad (\text{E.62})$$

com

$$P_{41} = \partial_r D_1 - \frac{3D_1}{r} = 0, \quad (\text{E.63})$$

$$P_{42} = \frac{D_1}{r} = 0, \quad (\text{E.64})$$

$$\begin{aligned} P_{43} = \partial_r D_2 - \frac{D_2}{r} &= - \left( \frac{12}{g^2r^3} + \frac{12}{g^3r^2} + \frac{4}{g^4r} \right) e^{-r/g} + \\ &4\nu \left( \frac{1}{g^4r} + \frac{3}{g^3r^2} + \frac{3}{g^2r^3} \right) e^{-r/g}, \end{aligned} \quad (\text{E.65})$$

$$P_{44} = \frac{D_2}{r} = \left( \frac{4}{g^2r^3} + \frac{4}{g^3r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{1}{g^3r^2} + \frac{1}{g^2r^3} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.66})$$

$$P_{45} = \partial_r D_3 - \frac{D_3}{r} = 0, \quad (\text{E.67})$$

$$P_{46} = \frac{D_3}{r} = 0. \quad (\text{E.68})$$

#### E.4.5 Parcela $\frac{\partial [(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)(\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x} &= \frac{g^2(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)}{16\pi(1-\nu)} \left\{ -P_{51}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \right. \\ &P_{52}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{53}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - \\ &P_{54}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{55}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) - P_{56}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - \\ &P_{57}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{I} - P_{58}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{I} - P_{59}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - \\ &P_{510}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} - P_{510}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_x - P_{511}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - \\ &P_{512}(\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_x)\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y - P_{512}(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_x \otimes \mathbf{n}_y - P_{513}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \left. \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.69})$$

com

$$P_{51} = \partial_r A_1 - \frac{4A_1}{r} = -\frac{210}{r^4} + \frac{3780g^2}{r^6} - \left( \frac{3780g^2}{r^6} + \frac{3780g}{r^5} + \frac{1680}{r^4} + \frac{420}{gr^3} + \frac{60}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.70})$$

$$P_{52} = \frac{2A_1}{r} = \frac{60}{r^4} - \frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{360}{r^4} + \frac{80}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.71})$$

$$P_{53} = \frac{A_1}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.72})$$

$$P_{54} = \partial_r A_6 - \frac{2A_6}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.73})$$

$$P_{55} = \frac{A_6}{r} = -\frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{24}{r^4} + \frac{4}{gr^3} \right) e^{-r/g} \quad (\text{E.74})$$

$$P_{56} = \partial_r A_2 - \frac{2A_2}{r} = -\frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{240}{r^4} + \frac{100}{gr^3} + \frac{28}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.75})$$

$$P_{57} = \frac{2A_2}{r} = \frac{12}{r^4} + \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{72}{r^4} + \frac{32}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{6}{r^4} + \left( \frac{6}{r^4} + \frac{6}{gr^3} + \frac{2}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.76})$$

$$P_{58} = \partial_r A_7 = \frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{36}{r^4} + \frac{16}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.77})$$

$$P_{59} = \partial_r A_3 - \frac{2A_3}{r} = -\frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{420}{r^4} + \frac{140}{gr^3} + \frac{32}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.78})$$

$$P_{510} = \frac{A_3}{r} = \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{60}{r^4} + \frac{20}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^4} + \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.79})$$

$$P_{511} = \partial_r A_4 - \frac{2A_4}{r} = \frac{60}{r^4} - \frac{840g^2}{r^6} + \left( \frac{840g^2}{r^6} + \frac{840g}{r^5} + \frac{360}{r^4} + \frac{80}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{15}{r^4} + \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.80})$$

$$P_{512} = \frac{A_4}{r} = -\frac{12}{r^4} + \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{48}{r^4} + \frac{8}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.81})$$

$$P_{513} = \partial_r A_5 = \frac{120g^2}{r^6} - \left( \frac{120g^2}{r^6} + \frac{120g}{r^5} + \frac{60}{r^4} + \frac{20}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.82})$$

#### E.4.6 Parcela $\frac{\partial [(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*]^T}{\partial \mathbf{n}_x} = & -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ [P_{61}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & P_{62}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) : (\nabla_s \mathbf{n}_y) + P_{63}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)] \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & [P_{64}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + P_{65}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) : (\nabla_s \mathbf{n}_y) + \\ & P_{66}(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)] \mathbf{I} + [P_{67}(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) + \\ & P_{62}(\nabla_s \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}](\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) + \mathbf{P}_{63}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})[(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla_s \mathbf{n}_y + \\ & \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}}] + P_{67}[\mathbf{n}_x \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y) \otimes \mathbf{n}_x + \\ & (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)] + P_{64}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \\ & P_{65}(\nabla_s \mathbf{n}_y) \cdot (\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) + P_{68}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + \\ & P_{69}(\mathbf{n}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_x) \cdot (\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + P_{610}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y)^T + \\ & P_{66}(\mathbf{n}_x \cdot \hat{\mathbf{r}})(\nabla_s \mathbf{n}_y) \}, \quad (\text{E.83}) \end{aligned}$$

com

$$P_{61} = P_{51} = \partial_r A_1 - \frac{4A_1}{r} = -\frac{210}{r^4} + \frac{3780g^2}{r^6} - \left( \frac{3780g^2}{r^6} + \frac{3780g}{r^5} + \frac{1680}{r^4} + \frac{420}{gr^3} + \frac{60}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.84})$$

$$P_{62} = P_{53} = \frac{A_1}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.85})$$

$$P_{63} = P_{54} = \partial_r A_6 - \frac{2A_6}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.86})$$

$$P_{64} = P_{56} = \partial_r A_2 - \frac{2A_2}{r} = -\frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{240}{r^4} + \frac{100}{gr^3} + \frac{28}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.87})$$

$$P_{65} = \frac{A_2}{r} = \frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{36}{r^4} + \frac{16}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^4} + \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.88})$$

$$P_{66} = \partial_r A_7 = \frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{36}{r^4} + \frac{16}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.89})$$

$$P_{67} = P_{55} = \frac{A_6}{r} = -\frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{24}{r^4} + \frac{4}{gr^3} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.90})$$

$$P_{68} = \partial_r A_9 - \frac{2A_9}{r} = \frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{180}{r^4} + \frac{40}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{15}{r^4} + \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.91})$$

$$P_{69} = \frac{A_9}{r} = -\frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{24}{r^4} + \frac{4}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.92})$$

$$P_{610} = \partial_r A_8 = -\frac{6}{r^4} + \frac{60g^2}{r^6} - \left( \frac{60g^2}{r^6} + \frac{60g}{r^5} + \frac{24}{r^4} + \frac{4}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right]. \quad (\text{E.93})$$

## E.5 Termos auxiliares

Nesta etapa são apresentadas as expressões auxiliares utilizada em todo este Apêndice. Para alcançar tal objetivo foram utilizadas as Eqs.(D.18)-(D.20) do Apêndice D.

$$A_1 = \partial_r \bar{A} - \frac{3\bar{A}}{r} = \frac{30}{r^3} - \frac{420g^2}{r^5} + \left( \frac{420g^2}{r^5} + \frac{420g}{r^4} + \frac{180}{r^3} + \frac{40}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.94})$$

$$A_2 = \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} = \frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{36}{r^3} + \frac{16}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^3} + \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.95})$$

$$A_3 = \partial_r \bar{B} - \frac{\bar{B}}{r} + \frac{\bar{A}}{r} = \frac{120g^2}{r^5} - \left( \frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{60}{r^3} + \frac{20}{gr^2} + \frac{4}{g^2r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^3} + \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.96})$$

$$A_4 = \partial_r \bar{C} - \frac{\bar{C}}{r} + \frac{\bar{A}}{r} = -\frac{12}{r^3} + \frac{120g^2}{r^5} - \left( \frac{120g^2}{r^5} + \frac{120g}{r^4} + \frac{48}{r^3} + \frac{8}{gr^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^3} - \left( \frac{3}{r^3} + \frac{3}{gr^2} + \frac{1}{g^2r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.97})$$

$$A_5 = \frac{\bar{B} + \bar{C}}{r} = -\frac{24g^2}{r^5} + \left( \frac{24g^2}{r^5} + \frac{24g}{r^4} + \frac{12}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.98})$$

$$A_6 = \frac{\bar{A}}{r} = -\frac{6}{r^3} + \frac{60g^2}{r^5} - \left( \frac{60g^2}{r^5} + \frac{60g}{r^4} + \frac{24}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.99})$$

$$A_7 = \frac{\bar{B}}{r} = -\frac{2}{r^3} - \frac{12g^2}{r^5} + \left( \frac{12g^2}{r^5} + \frac{12g}{r^4} + \frac{8}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} - \nu \left[ -\frac{4}{r^3} + \left( \frac{4}{r^3} + \frac{4}{gr^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.100})$$

$$B_1 = \partial_r \partial_r \bar{A} - \frac{7}{r} \partial_r \bar{A} + \frac{15\bar{A}}{r^2} = -\frac{210}{r^4} + \frac{3780g^2}{r^6} - \left( \frac{3780g^2}{r^6} + \frac{3780g}{r^5} + \frac{1680}{r^4} + \frac{420}{gr^3} + \frac{60}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.101})$$

$$B_2 = \frac{3\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{9\bar{A}}{r^2} = \frac{90}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \frac{1260g}{r^5} + \frac{540}{r^4} + \frac{120}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.102})$$

$$B_3 = \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} = -\frac{30}{r^4} - \frac{420g^2}{r^6} + \left( \frac{420g^2}{r^6} + \frac{420g}{r^5} + \frac{240}{r^4} + \frac{100}{gr^3} + \frac{28}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.103})$$

$$B_4 = \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{3\bar{B}}{r^2} = \frac{18}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{108}{r^4} + \frac{48}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{9}{r^4} + \left( \frac{9}{r^4} + \frac{9}{gr^3} + \frac{3}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.104})$$

$$B_5 = \partial_r \partial_r \bar{C} - \frac{3\partial_r \bar{C}}{r} + \frac{3\bar{C}}{r^2} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{6\bar{A}}{r^2} = \frac{90}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \frac{1260g}{r^5} + \frac{540}{r^4} + \frac{120}{gr^3} + \frac{12}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.105})$$

$$B_6 = \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} = -\frac{18}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{72}{r^4} + \frac{12}{gr^3} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{3}{r^4} - \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.106})$$

$$B_7 = \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{6\bar{A}}{r^2} = \frac{30}{r^4} - \frac{1260g^2}{r^6} + \left( \frac{1260g^2}{r^6} + \frac{1260g}{r^5} + \frac{600}{r^4} + \frac{180}{gr^3} + \frac{36}{g^2r^2} + \frac{4}{g^3r} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ \frac{15}{r^4} - \left( \frac{15}{r^4} + \frac{15}{gr^3} + \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.107})$$

$$\left. \frac{6}{g^2r^2} + \frac{1}{g^3r} \right) e^{-r/g} \Big], \quad (\text{E.108})$$

$$B_8 = \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} = -\frac{6}{r^4} + \frac{180g^2}{r^6} - \left( \frac{180g^2}{r^6} + \frac{180g}{r^5} + \frac{84}{r^4} + \frac{24}{gr^3} + \frac{4}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left[ -\frac{3}{r^4} + \left( \frac{3}{r^4} + \frac{3}{gr^3} + \frac{1}{g^2r^2} \right) e^{-r/g} \right], \quad (\text{E.109})$$

$$B_9 = \frac{2\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{2\bar{B}}{r^2} + \frac{2\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{2\bar{C}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2} = -\frac{12}{r^4} + \frac{360g^2}{r^6} - \left( \frac{360g^2}{r^6} + \frac{360g}{r^5} + \frac{168}{r^4} + \frac{48}{gr^3} + \frac{8}{g^2r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.110})$$

$$D_1 = \partial_r \partial_r \bar{A} - \frac{6\bar{A}}{r^2} + \partial_r \partial_r \bar{B} - \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} + \frac{3\bar{B}}{r^2} + \partial_r \partial_r \bar{C} - \frac{3\partial_r \bar{C}}{r} + \frac{3\bar{C}}{r^2} = 0, \quad (\text{E.111})$$



$$D_2 = \partial_r \partial_r \bar{B} + \frac{3\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} = \left( \frac{4}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{1}{g^3 r} + \frac{1}{g^2 r^2} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.112})$$

$$D_3 = \frac{\partial_r \bar{A}}{r} + \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{\bar{B}}{r^2} + \frac{\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{\bar{C}}{r^2} = 0, \quad (\text{E.113})$$

$$F_1 = \partial_r \partial_r \bar{A} + \frac{2\partial_r \bar{A}}{r} - \frac{12\bar{A}}{r^2} = \frac{60}{r^4} - \left( \frac{60}{r^4} + \frac{60}{gr^3} + \frac{24}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.114})$$

$$F_2 = \partial_r \partial_r \bar{B} + \frac{2\partial_r \bar{B}}{r} - \frac{2\bar{B}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2} = -\frac{12}{r^4} + \left( \frac{12}{r^4} + \frac{12}{gr^3} + \frac{8}{g^2 r^2} + \frac{4}{g^3 r} \right) e^{-r/g} - 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^2} + \frac{1}{g^3 r} \right) e^{-r/g}, \quad (\text{E.115})$$

$$F_3 = \partial_r \partial_r \bar{C} + \frac{2\partial_r \bar{C}}{r} - \frac{2\bar{C}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2} = -\frac{12}{r^4} + \left( +\frac{12}{r^4} + \frac{12}{gr^3} + \frac{4}{g^2 r^2} \right) e^{-r/g} + 4\nu \left( \frac{1}{g^2 r^2} + \frac{1}{g^3 r} \right) e^{-r/g}. \quad (\text{E.116})$$



## Apêndice F

Neste apêndice é explicitado os núcleos presentes na Eq.(4.80). Para tanto, é utilizado as Eqs(D.2), (D.3), (D.5)-(D.7) além das novas equações apresentadas no final desta seção para obter. Na sequência são apresentadas as expressões de interesse.

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y) = -\nabla \tilde{\mathbf{U}}^*(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \left( \frac{d\chi(r, g)}{dr} - \frac{2\chi(r, g)}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{\chi(r, g)}{r} \mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{\chi(r, g)}{r} (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213} - \frac{d\Upsilon(r, \nu, g)}{dr} \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y) = -\nabla \tilde{\mathbf{Q}}^*(x, y) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \left( \frac{d^2\chi(r, g)}{dr^2} - \frac{5}{r} \frac{d\chi(r, g)}{dr} + \frac{8\chi(r, g)}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{1}{r} \frac{d\chi(r, g)}{dr} - \frac{2\chi(r, g)}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] - \left( \frac{d^2\Upsilon(r, \nu, g)}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Upsilon(r, \nu, g)}{dr} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \left( \frac{1}{r} \frac{d\chi(r, g)}{dr} - \frac{2\chi(r, g)}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) + \frac{\chi(r, g)}{r^2} [\mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213}] - \frac{1}{r} \frac{d\Upsilon(r, \nu, g)}{dr} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y) = -\nabla \tilde{\mathbf{R}}^*(x, y) = -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ K(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + F(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + G(\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I}) + \left[ F(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{\bar{A}}{r^2} \right] [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] - L(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + 2G(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} + \left( G + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( H + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y + 2F (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (L + F) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \\ & \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + (M + F) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \left( G + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & \left. \left( H + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + (G + H) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \tilde{\mathbf{P}}^*(x, y) = \nabla_x \left\{ \mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^* + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} - \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*) - \right. \\ \left. \mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134}) + (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* - (\nabla_s \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^* \right\}^T, \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

com

$$\begin{aligned} \nabla_x [\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^*]^T = -\nabla [\mathbf{n}_y \cdot \tilde{\tau}^*]^T = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)} \left\{ F (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \right. \\ \frac{\bar{A}}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + G (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \frac{\bar{A}}{r} \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ (Gr) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}) + (Hr) (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y) + \frac{\bar{B}}{r} [\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213}] + \\ \left. \frac{\bar{C}}{r} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} & \nabla_x \left[ (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right] = -\nabla \left[ (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \frac{\partial \tilde{\mu}^*}{\partial \mathbf{n}_y} \right] \\ & = -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ \left( \frac{dK}{dr} - \frac{5K}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + 3 \left( \frac{dF}{dr} - \frac{3F}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{r}} \otimes \right. \\ & \quad \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{K}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + \frac{3F}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & \quad (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + \left[ \left( \frac{dL}{dr} - \frac{3L}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 + 3 \left( \frac{dG}{dr} - \frac{G}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \\ & \left[ \frac{3L}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{3G}{r} \right] \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left[ \frac{(M+2F)}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \left( \frac{H}{r} + \frac{2\bar{A}}{r^3} \right) \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y + \\ & \left[ \frac{(L+2F)}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \left( \frac{H}{r} + \frac{2\bar{A}}{r^3} \right) \right] (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213} + \left[ \frac{3K}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{3F}{r} \right] \mathbf{n}_y \otimes \\ & \quad \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left[ \left( \frac{d(M+2F)}{dr} - \frac{3(M+2F)}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \left( \frac{d(H+2\bar{A}/r^2)}{dr} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \frac{H+2\bar{A}/r^2}{r} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \left[ \left( \frac{d(L+2F)}{dr} - \frac{3(L+2F)}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \right. \\ & \left. \left( \frac{d(G+2\bar{A}/r^2)}{dr} - \frac{(G+2\bar{A}/r^2)}{r} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{2(M+2F)}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \frac{2(L+2F)}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + 2 \left( \frac{d(G+H+\bar{A}/r^2)}{dr} - \frac{(G+H+\bar{A}/r^2)}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y + 2 \frac{d(G+H+\bar{A}/r^2)}{dr} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \Big\}, \quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*)]^T &= -\nabla [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^*)]^T = -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ \left( \frac{d\bar{A}}{dr} - \frac{3\bar{A}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{\bar{A}}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + \left( \frac{d\bar{B}}{dr} - \frac{\bar{B}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \frac{\bar{A}}{r} \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{d\bar{B}}{dr} - \frac{\bar{B}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{d\bar{C}}{dr} + \frac{\bar{C}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \frac{\bar{B}}{r} [\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213}] + \frac{\bar{C}}{r} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

$$\begin{aligned} \nabla_x [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134})]^T &= -\nabla [\mathbf{n}_y \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mu}^{*2134})]^T = -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \left\{ \left( \frac{d\bar{F}}{dr} - \frac{3\bar{F}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{\bar{F}}{r} (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + \left( \frac{d\bar{G}}{dr} - \frac{\bar{G}}{r} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + \frac{\bar{F}}{r} \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{d\bar{H}}{dr} - \frac{\bar{H}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{d\bar{H}}{dr} - \frac{\bar{H}}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \frac{\bar{G}}{r} \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} + \frac{\bar{H}}{r} (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213} + \frac{\bar{H}}{r} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned} &\nabla_x [(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^*]^T = -\nabla [(\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^*]^T \\ &= -\frac{g^2 (\nabla_s \cdot \mathbf{n}_y)}{16\pi(1-\nu)} \left\{ [K(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + F] \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left[ F(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + \frac{\bar{A}}{r^2} \right] [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + [L(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + G] \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + 2F(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (L+F)(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + (M+F)(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + \left( G + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left( H + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y + (G+H) \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{n}_y + 2G(\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I} + \left( G + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\mathbf{n}_y \otimes \mathbf{I})^{213} + \left( H + \frac{\bar{A}}{r^2} \right) (\mathbf{n}_y \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_y \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

$$\begin{aligned}
\nabla_x [(\nabla_S \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^*]^T &= -\nabla [(\nabla_S \mathbf{n}_y) : \tilde{\mu}^*]^T = -\frac{g^2}{16\pi(1-\nu)} \{ [K (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \\
&\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + F (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \mathbf{I}] \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + [F (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\
&\frac{\bar{A}}{r^2} (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \mathbf{I}] [\mathbf{I} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I})^{213}] + [L (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\
G (\nabla_S \mathbf{n}_y) : \mathbf{I}] \hat{\mathbf{r}} \otimes \mathbf{I} + F [(\nabla_S \mathbf{n}_y) \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + (\nabla_S \mathbf{n}_y)^T \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\
&\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)] + M [\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)^T] + F [\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \\
&(\nabla_S \mathbf{n}_y)^T]^{132} + F [\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)]^{132} + \frac{\bar{A}}{r^2} [(\nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} + \\
\nabla_S \mathbf{n}_y \otimes \hat{\mathbf{r}}] + G [(\nabla_S \mathbf{n}_y)^T \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y)] + H [\hat{\mathbf{r}} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y)^T + \\
&((\nabla_S \mathbf{n}_y)^T \otimes \hat{\mathbf{r}})^{321}] + H [\mathbf{I} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y) \cdot \hat{\mathbf{r}}] + G [\mathbf{I} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y)]^{1324} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \\
G [\hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y) \otimes \mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \mathbf{n}_y)^T \otimes \mathbf{I}] + \frac{\bar{A}}{r^2} [\mathbf{I} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y)^T \cdot \hat{\mathbf{r}}] + \\
&\frac{\bar{A}}{r^2} [\mathbf{I} \otimes (\nabla_S \mathbf{n}_y)]^{1423} \cdot \hat{\mathbf{r}} \}. \quad (\text{F.10})
\end{aligned}$$

Os termos adicionais utilizados nas Eqs.(F.3)-(F.10) são:

$$K = \frac{d^2 \bar{A}}{dr^2} - \frac{7 d\bar{A}}{r dr} + \frac{15\bar{A}}{r^2}, \quad (\text{F.11})$$

$$F = \frac{3 d\bar{A}}{r dr} - \frac{3\bar{A}}{r^2}, \quad (\text{F.12})$$

$$L = \frac{d^2 \bar{B}}{dr^2} - \frac{3 d\bar{B}}{r dr} + \frac{3\bar{B}}{r^2}, \quad (\text{F.13})$$

$$G = \frac{1 d\bar{B}}{r dr} - \frac{\bar{B}}{r^2}, \quad (\text{F.14})$$

$$M = \frac{d^2 \bar{C}}{dr^2} - \frac{3 d\bar{C}}{r dr} + \frac{3\bar{C}}{r^2}, \quad (\text{F.15})$$

$$H = \frac{1 d\bar{C}}{r dr} - \frac{\bar{C}}{r^2}, \quad (\text{F.16})$$

$$\bar{\bar{A}} = \frac{d^2 \bar{A}}{dr^2} + \frac{2 d\bar{A}}{r dr} - \frac{12\bar{A}}{r^2}, \quad (\text{F.17})$$

$$\bar{\bar{B}} = \frac{d^2 \bar{B}}{dr^2} + \frac{2 d\bar{B}}{r dr} - \frac{2\bar{B}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2}, \quad (\text{F.18})$$

$$\bar{\bar{C}} = \frac{d^2 \bar{C}}{dr^2} + \frac{2 d\bar{C}}{r dr} - \frac{2\bar{C}}{r^2} + \frac{2\bar{A}}{r^2}, \quad (\text{F.19})$$

---

$$\bar{F} = \frac{d^2 \bar{A}}{dr^2} - \frac{6\bar{A}}{r^2} + \frac{d^2 \bar{B}}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d\bar{B}}{dr} + \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{d^2 \bar{C}}{dr^2} - \frac{3}{r} \frac{d\bar{C}}{dr} + \frac{3\bar{C}}{r^2}, \quad (\text{F.20})$$

$$\bar{G} = \frac{d^2 \bar{B}}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\bar{B}}{dr} - \frac{3\bar{B}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{C}}{dr} - \frac{\bar{C}}{r^2}, \quad (\text{F.21})$$

$$\bar{H} = \frac{1}{r} \frac{d\bar{A}}{dr} + \frac{2\bar{A}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{B}}{dr} - \frac{\bar{B}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{C}}{dr} - \frac{\bar{C}}{r^2}. \quad (\text{F.22})$$





## Apêndice G

Neste Apêndice são apresentadas as expansões fundamentais para a obtenção da série de Laurent mostradas nas  $Eqs. (7.221-7.230)$ . Essas séries fundamentais são formadas pelas expansões de  $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) - \mathbf{x}(\eta_1, \eta_2)$  e  $\nabla_S \mathbf{n}_y$ .

Para a expansão de  $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) - \mathbf{x}(\eta_1, \eta_2)$  é necessário determinar os termos  $A(\theta)$  e  $B(\theta)$ , os quais são apresentados para as funções aproximadoras regulares (Proriol e Polinomiais, sendo este último designada quando a base nodal é equidistante e tendo como interpolador polinômios completos) e para funções aproximadoras racionais (funções de continuidade geométrica proposta por Walton e Meek (1995)), em que estas funções não são válidas nos vértices e então cuidados adicionais devem ser realizados. Quando são consideradas funções interpoladoras regulares, pode-se empregar a expansão em série de Taylor no entorno do ponto fonte e assim podendo ser escrita em coordenada polares

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) - \mathbf{y}(\eta_1, \eta_2) = \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} (\cos \theta) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\text{sen} \theta) \right] + \\ \rho^2 \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\cos \theta)^2}{2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\cos \theta) (\text{sen} \theta) + \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\text{sen} \theta)^2}{2} \right] + O(\rho^3), \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

assim

$$\mathbf{A}(\theta) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi=\eta} (\cos \theta) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\text{sen} \theta), \quad (\text{G.2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\theta) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_1^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\cos \theta)^2}{2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Big|_{\xi=\eta} (\cos \theta) (\text{sen} \theta) + \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \xi_2^2} \Big|_{\xi=\eta} \frac{(\text{sen} \theta)^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

onde as funções  $x$  são representadas parametricamente por

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^k N^a(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^a. \quad (\text{G.4})$$

E para a função  $G^1$  utilizada neste trabalho, tem-se os termos  $\mathbf{A}(\theta)$  e  $\mathbf{B}(\theta)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\theta) = & 4 \left[ -\frac{3\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)^2(\mathbf{G}_{01}\eta_1+\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{(\eta_1+\eta_2)^2} + \right. \\
& \frac{6\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)(\mathbf{G}_{01}\eta_1+\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} + \\
& \frac{3\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)^2(2\mathbf{G}_{01}\eta_1+\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} - \\
& \frac{3(\eta_1)^2\eta_2(-\mathbf{G}_{11}\eta_2+\mathbf{G}_{02}(-1+\eta_1+\eta_2))}{-1+\eta_1} - \\
& \frac{3\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)(2\mathbf{G}_{02}(-1+\eta_1)^2+(\mathbf{G}_{02}-\mathbf{G}_{11})(-2+\eta_1)\eta_2)}{(-1+\eta_1)^2} - \\
& \frac{3(\eta_2)^2(\mathbf{G}_{12}\eta_1(2-3\eta_1-2\eta_2)+\mathbf{G}_{21}(-1+\eta_1+\eta_2)(-1+3\eta_1+\eta_2))}{-1+\eta_2} + \\
& (-1+\eta_1+\eta_2)^3\mathbf{P}_{004} - (-1+\eta_1+\eta_2)^2(-1+4\eta_1+\eta_2)\mathbf{P}_{013} + \\
& 3\eta_1(-1+\eta_1+\eta_2)(-1+2\eta_1+\eta_2)\mathbf{P}_{022} + 3(\eta_1)^2\mathbf{P}_{031} - 4(\eta_1)^3\mathbf{P}_{031} - \\
& 3(\eta_1)^2\eta_2\mathbf{P}_{031} + (\eta_1)^3\mathbf{P}_{040} - 3\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)^2\mathbf{P}_{103} + \\
& 3(\eta_1)^2\eta_2\mathbf{P}_{130} + 3(\eta_2)^2(-1+\eta_1+\eta_2)\mathbf{P}_{202} + 3\eta_1(\eta_2)^2\mathbf{P}_{220} \\
& \left. - (\eta_2)^3\mathbf{P}_{301} + (\eta_2)^3\mathbf{P}_{310} \right] \text{Cos}(\theta) + \\
& 4 \left[ -\frac{3\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)^2(\mathbf{G}_{01}\eta_1+\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{(\eta_1+\eta_2)^2} + \right. \\
& \frac{6\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)(\mathbf{G}_{01}\eta_1+\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} + \\
& \frac{3\eta_1(-1+\eta_1+\eta_2)^2(\mathbf{G}_{01}\eta_1+2\mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} - \\
& \frac{3(\eta_1)^2(\eta_2)(-\mathbf{G}_{11}\eta_2+\mathbf{G}_{02}(-1+\eta_1+\eta_2))}{-1+\eta_1} - \\
& \frac{3(\eta_1)^2(-1+\eta_1+\eta_2)(-2\mathbf{G}_{11}\eta_2+\mathbf{G}_{02}(-1+\eta_1+2\eta_2))}{-1+\eta_1} - \\
& \frac{3\eta_1\eta_2(-2\mathbf{G}_{12}\eta_1-\mathbf{G}_{12}\eta_1(-2+\eta_2)(\eta_1+2\eta_2))}{(-1+\eta_2)^2} + \\
& \frac{3\eta_1\eta_2(\mathbf{G}_{21}(-1+\eta_1+\eta_2)(2+\eta_1(-2+\eta_2)+\eta_2(-5+3\eta_2)))}{(-1+\eta_2)^2} + \\
& (-1+\eta_1+\eta_2)^3\mathbf{P}_{004} - 3\eta_1(-1+\eta_1+\eta_2)^2\mathbf{P}_{013} + \\
& 3(\eta_1)^2(-1+\eta_1+\eta_2)\mathbf{P}_{022} - (\eta_1)^3\mathbf{P}_{031} - \\
& (-1+\eta_1+\eta_2)^2(-1+\eta_1+4\eta_2)\mathbf{P}_{103} + (\eta_1)^3\mathbf{P}_{130} + \\
& 3\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)(-1+\eta_1+2\eta_2)\mathbf{P}_{202} + 3(\eta_1)^2\eta_2\mathbf{P}_{220} + 3(\eta_2)^2\mathbf{P}_{301} - \\
& \left. 3\eta_1(\eta_2)^2\mathbf{P}_{301} - 4(\eta_2)^3\mathbf{P}_{301} + 3\eta_1(\eta_2)^2\mathbf{P}_{310} + (\eta_2)^3\mathbf{P}_{400} \right] \text{Sen}(\theta) \tag{G.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\theta) = & 6 \left[ \frac{2\eta_1\eta_2(-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 (\mathbf{G}_{01}\eta_1 + \mathbf{G}_{22}\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} + \frac{2\eta_1\eta_2 (\mathbf{G}_{01}\eta_1 + \mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1 + \eta_2} + \right. \\
& \left. (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} \right] + \\
& 6 \left[ \frac{2\mathbf{G}_{12}(\eta_2)^2 (-1 + 3\eta_1 + \eta_2)}{-1 + \eta_2} - \frac{2\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 (-2 + 3\eta_1 + 2\eta_2)}{-1 + \eta_2} + \right. \\
& \left. 2\mathbf{G}_{11}(\eta_2)^2 \left( 1 + \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + \right. \\
& \left. \frac{2\mathbf{G}_{01}\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (\eta_1 + (\eta_1)^2 + 4\eta_1\eta_2 + (-1 + \eta_2)\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + \right. \\
& \left. \frac{2\mathbf{G}_{22}(\eta_2)^2 (-(-1 + \eta_1)^2 + (\eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + 2\mathbf{G}_{02}\eta_2 (1 - 3\eta_1 + \eta_2 (-2 - \right. \\
& \left. \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3}) \right) - 2(-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + \\
& 5\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{022} + 2\eta_1 \mathbf{P}_{031} - 4(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{031} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{040} + 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} - \\
& 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{130} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{220} \Big] [\text{Cos}(\theta)]^2 + \\
& 12 \left[ \mathbf{G}_{12}\eta_1 \left( \eta_1 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) + 4\eta_2 \right) + \right. \\
& \left. \frac{\mathbf{G}_{11}\eta_1\eta_2 (2(-1 + \eta_1)\eta_1 + (-2 + \eta_1)\eta_2)}{(-1 + \eta_1)^2} + \right. \\
& \left. \mathbf{G}_{21} \left( (\eta_1)^2 \left( -3 + \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) - 8\eta_1\eta_2 + (2 - 3\eta_2)\eta_2 \right) + \right. \\
& \left. \frac{\mathbf{G}_{22}\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (2\eta_1 (1 + \eta_1) + \eta_2 - \eta_1\eta_2 + (\eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} - \right. \\
& \left. \frac{\mathbf{G}_{02}\eta_1 ((-1 + \eta_1)^2\eta_1 + 2(1 + \eta_1(-3 + 2\eta_1))\eta_2 + (-2 + \eta_1)(\eta_2)^2)}{(-1 + \eta_1)^2} + \right. \\
& \left. \frac{\mathbf{G}_{01}\eta_1 ((\eta_1)^3 + 2\eta_2(-1 + (\eta_2)^2) + \eta_1(-1 + \eta_2(4 + \eta_2)))}{(\eta_1 + \eta_2)^2} - \right. \\
& \left. (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + 3\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103} + 4\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} - \right. \\
& \left. (\eta_1)^2 (-2\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103}) - 2\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 2(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1 ((-1 + \eta_2) \mathbf{P}_{022} + \right. \\
& \left. \mathbf{P}_{103} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} + \eta_2 \mathbf{P}_{202}) - (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} \Big] \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) + \\
& 6 \left[ 2\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^2 \left( 1 + \frac{\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) + 2\mathbf{G}_{21}\eta_1 \left( 1 + \eta_1 \left( -2 - \frac{\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) - 3\eta_2 \right) + \right. \\
& \left. \frac{2\mathbf{G}_{01}(\eta_1)^2 ((\eta_1)^2 - (-1 + \eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + \frac{2\mathbf{G}_{11}(\eta_1)^2 (-1 + \eta_1 + 3\eta_2)}{-1 + \eta_1} - \right. \\
& \left. \frac{2\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2 (-2 + 2\eta_1 + 3\eta_2)}{-1 + \eta_1} - 2(1 + \eta_2(-3 + 2\eta_2)) \mathbf{P}_{103} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mathbf{G}_{22}\eta_1(-1+\eta_1+\eta_2)\left((-1+\eta_1)\eta_1+\eta_2+4\eta_1\eta_2+(\eta_2)^2\right)}{(\eta_1+\eta_2)^2} + \mathbf{P}_{202} - \\
& 6\eta_2\mathbf{P}_{202} + 5(\eta_2)^2\mathbf{P}_{202} + (\eta_1)^2(-2\mathbf{P}_{013} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) + 2\eta_2\mathbf{P}_{301} - \\
& 4(\eta_2)^2\mathbf{P}_{301} - 2\eta_1\left((-1+\eta_2)\mathbf{P}_{013} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \right. \\
& \left. \eta_2(3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310})\right) + (\eta_2)^2\mathbf{P}_{400} \left[Sen(\theta)\right]^2 + \\
& 6 \left[ \frac{2\eta_1\eta_2(-1+\eta_1+\eta_2)^2(\mathbf{G}_{01}\eta_1 + \mathbf{G}_{22}\eta_2)}{(\eta_1+\eta_2)^3} + \frac{2\eta_1\eta_2(\mathbf{G}_{01}\eta_1 + \mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} + \right. \\
& \left. \frac{2(-1+\eta_1+\eta_2)^2(\mathbf{G}_{01}\eta_1 + \mathbf{G}_{22}\eta_2)}{\eta_1+\eta_2} + (-1+\eta_1+\eta_2)^2\mathbf{P}_{004} - \right. \\
& \left. \frac{2\eta_1(-1+\eta_1+\eta_2)\left(\mathbf{G}_{02}(-1+\eta_1)^2 + (\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(-2+\eta_1)\eta_2\right)}{(-1+\eta_1)^2} + \right. \\
& \left. (\eta_1)^2\mathbf{P}_{022} + (\eta_1)^2\mathbf{P}_{130} + (\eta_2)^2\mathbf{P}_{202} + 2\eta_1\eta_2\mathbf{P}_{220} + (\eta_2)^2\mathbf{P}_{310} \right] Sen(2\theta). \quad (\text{G.6})
\end{aligned}$$

Para o caso em que  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_2 = 0$ , os termos  $\mathbf{A}(\theta)$  e  $\mathbf{B}(\theta)$  são escritos da forma

$$\mathbf{A}(\theta) = 4(-\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{013}) \text{Cos}(\theta) + 4(-\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(\theta), \quad (\text{G.7})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\theta) = & 6 \left( (2\mathbf{G}_{01} - 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right. \\
& (\mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + \frac{2(-\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{22}) [\text{Cos}(\theta)]^3}{\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)} + \\
& \left. (\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(2\theta) \right). \quad (\text{G.8})
\end{aligned}$$

Para o caso em que  $\eta_1 = 1$  e  $\eta_2 = 0$ , tem-se

$$\mathbf{A}(\theta) = 4(-\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) \text{Cos}(\theta) + 4(-\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(\theta) \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\theta) = & 6 \left[ (\mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right. \\
& (-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(2\theta) + \\
& \left. [\text{Sen}(\theta)]^2 (-4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{220} + \right. \\
& \left. 2(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) \text{Tg}(\theta) \right]. \quad (\text{G.10})
\end{aligned}$$

E para o caso em que  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_2 = 1$ , tem-se

$$\mathbf{A}(\theta) = 4(-\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(\theta) + 4(-\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400}) \text{Sen}(\theta), \quad (\text{G.11})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\theta) = & 6 \left[ [\text{Cos}(\theta)]^2 (2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} + \right. \\
& 2(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21}) \text{Cotg}(\theta)) + (\mathbf{P}_{202} - 2\mathbf{P}_{301} + \\
& \left. \mathbf{P}_{400}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + (-\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \right. \\
& \left. \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(2\theta) \right]. \quad (\text{G.12})
\end{aligned}$$

O cálculo do gradiente de superfície do vetor normal,  $\nabla_S \mathbf{n}_y$ , foi realizado utilizando conceitos da geometria diferencial (CARMO, 2010) e resultados publicados por Chen e Xu (2010), os quais fornecem a seguinte expressão

$$\nabla_S \mathbf{n}_y = - [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] [g^{\alpha\beta}] S[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]^T, \quad (\text{G.13})$$

onde

$$[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] := \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.14})$$

$$[g^{\alpha\beta}] = \frac{1}{\det [g_{\alpha\beta}]} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

$$g_{11} := \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle = \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial u}, \quad (\text{G.16})$$

$$g_{12} = g_{21} := \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v}, \quad (\text{G.17})$$

$$g_{22} := \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial v} \frac{\partial x_3}{\partial v}, \quad (\text{G.18})$$

e a matriz dos coeficientes da transformada de Weingarten,  $S$ , é dada por

$$\begin{aligned} S &= [b_{\alpha\beta}] [g^{\alpha\beta}] \\ &= \frac{1}{\det [g_{\alpha\beta}]} \begin{bmatrix} \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial u} \right\rangle & \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \right\rangle \\ \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v \partial u} \right\rangle & \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v \partial v} \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle & -\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right\rangle \\ -\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right\rangle \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

com

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle = n_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + n_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} + n_3 \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2}, \quad (\text{G.20})$$

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \right\rangle = \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v \partial u} \right\rangle = n_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + n_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} + n_3 \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v}, \quad (\text{G.21})$$

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\rangle = n_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} + n_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} + n_3 \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}. \quad (\text{G.22})$$

O operador da Eq.(G.13) é intrínseco geometricamente (CHEN; XU, 2010), ou seja, embora o operador seja definido usando a parametrização local da superfície ( $u$  e  $v$ ), este operador é válidos independente da escolha concreta da parametrização. Na Eq.(G.13), o operador diferencial é aplicado ao vetor normal, o qual depende do ponto na superfície simbolizado pelo vetor  $\mathbf{x}$ , o qual pode ser aproximado pela função de Prorior, ou Polinomial, ou pelas funções de continuidade  $G^1$  utilizada nesta tese.

A partir das Eq.s.(G.14-G.22), observa-se que estas expressões dependem das derivadas das funções aproximadoras da geometria, as quais podem ser obtidas, para funções de

Proriol e Polinomial, derivando a Eq.(G.4). Para a função de continuidade  $G^1$  utilizada nesta tese são apresentadas as séries em coordenadas polares

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} = (\mathbf{D}_u \mathbf{S}_A) + (\mathbf{D}_u \mathbf{S}_B)(\theta) \rho + (\mathbf{D}_u \mathbf{S}_C)(\theta) \rho^2 + O(\rho^3), \quad (\text{G.23})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} = (\mathbf{D}_v \mathbf{S}_A) + (\mathbf{D}_v \mathbf{S}_B)(\theta) \rho + (\mathbf{D}_v \mathbf{S}_C)(\theta) \rho^2 + O(\rho^3), \quad (\text{G.24})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2} = (\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_A) + (\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_B)(\theta) \rho + (\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_C)(\theta) \rho^2 + O(\rho^3), \quad (\text{G.25})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} = (\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_A) + (\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_B)(\theta) \rho + (\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_C)(\theta) \rho^2 + O(\rho^3), \quad (\text{G.26})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v \partial u} = (\mathbf{D}_{uv}^2 \mathbf{S}_A) + (\mathbf{D}_{uv}^2 \mathbf{S}_B)(\theta) \rho + (\mathbf{D}_{uv}^2 \mathbf{S}_C)(\theta) \rho^2 + O(\rho^3). \quad (\text{G.27})$$

Com,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u \mathbf{S}_A = 4 & \left[ -\frac{3\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + \eta_1 + 3\eta_2)}{(-1 + \eta_1)} + \right. \\ & \frac{3\mathbf{G}_{22}\eta_1\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (2(-1 + \eta_1)\eta_1 + (-1 + 5\eta_1)\eta_2 + 3(\eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + \\ & 3\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^2 \left( \eta_1 - \frac{\eta_1}{(-1 + \eta_2)^2} + 2\eta_2 \right) + \frac{3\mathbf{G}_{11}(\eta_1)^2 \eta_2 (-2 + 2\eta_1 + 3\eta_2)}{(-1 + \eta_1)} - \\ & \frac{3\mathbf{G}_{21}\eta_1\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (2 + \eta_1(-2 + \eta_2) + \eta_2(-5 + 3\eta_2))}{(-1 + \eta_2)^2} + \\ & 3\mathbf{G}_{01}(\eta_1)^2 \left( -2 + \eta_1 + 2\eta_2 + \frac{\eta_1}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2)^3 \mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{103} - \\ & 6\eta_2 \mathbf{P}_{103} + 9(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} - 4(\eta_2)^3 \mathbf{P}_{103} - (\eta_1)^3 (3\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} + \\ & \mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{130}) + 3\eta_2 \mathbf{P}_{202} - 9(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 6(\eta_2)^3 \mathbf{P}_{202} + \\ & 3(\eta_1)^2 (-2(-1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{103} + \eta_2 (\mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220})) + \\ & 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} - 4(\eta_2)^3 \mathbf{P}_{301} - 3\eta_1 ((-1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{103} + \\ & \left. \eta_2 ((-4 + 3\eta_2) \mathbf{P}_{103} + 2\mathbf{P}_{202} + \eta_2 (-3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310})) \right) + (\eta_2)^3 \mathbf{P}_{400} \Big] \quad (\text{G.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u \mathbf{S}_B = 12 & \left[ 3(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^2 + \frac{3(-\mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^2} + \right. \\ & 2(\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{12}\eta_1 - 4\mathbf{G}_{21}\eta_1)\eta_2 - 3\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 + \eta_1(\mathbf{G}_{02}(2 - 3\eta_1) + \\ & 4(-2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11})\eta_2 - \frac{3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(-2 + \eta_1)(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^2}) + \\ & \left. \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 4(-1 + \eta_1) + 3\eta_2 + \frac{\eta_2(3\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \mathbf{G}_{01}\eta_1 (4(-1 + \eta_2) + \right. \\ & \left. \eta_1 \left( 3 + \frac{\eta_1 + 3\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + 3\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - 2\eta_1 \mathbf{P}_{022} + 3(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} + \\
& 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{022} - (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + \eta_1 + 3\eta_2) \mathbf{P}_{103} + \\
& (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{130} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{220} - \\
& \quad (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{310}] \text{Cos}(\theta) + \\
& 12 \left[ \frac{2(\eta_1)^2 ((-2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) (-1 + \eta_1) + 3(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) \eta_2)}{-1 + \eta_1} + \right. \\
& 2\eta_1 \left( \mathbf{G}_{21} + \mathbf{G}_{12}\eta_1 - 2\mathbf{G}_{21}\eta_1 + \frac{(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^3} - 3\mathbf{G}_{21}\eta_2 \right) + \\
& 2\eta_1 \left( \mathbf{G}_{22}(-2 + \eta_1) + \mathbf{G}_{01}\eta_1 + 3\mathbf{G}_{22}\eta_2 + \frac{(-\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{22})(\eta_1)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \\
& (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} - 2\eta_1 (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} - \\
& 2(-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + \eta_1 + 2\eta_2) \mathbf{P}_{103} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{202} + \\
& 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + \eta_1 + 3\eta_2) \mathbf{P}_{202} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{220} + \\
& \left. 2\eta_2 \mathbf{P}_{301} - 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{301} - 4(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} + 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{310} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{400} \right] \text{Sen}(\theta), \quad (\text{G.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_u \mathbf{S}_- \mathbf{C} = & \left\{ (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + \left[ \mathbf{G}_{21} \left( 3\eta_1 \left( -1 + \frac{1}{(-1 + \eta_2)^2} \right) - 4\eta_2 \right) + \right. \right. \\
& \mathbf{G}_{12} \left( \eta_1 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) + 2\eta_2 \right) + \mathbf{G}_{11}\eta_2 \left( 2 + \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + \\
& \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 2 - \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \mathbf{G}_{01} \left( -2 + 3\eta_1 + 2\eta_2 + \frac{3\eta_1(\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \\
& \left. \mathbf{G}_{02} \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -4 - \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) + (2 - 3\eta_1 - 2\eta_2) \mathbf{P}_{013} - \right. \\
& \left. \mathbf{P}_{022} + 3\eta_1 \mathbf{P}_{022} + \eta_2 \mathbf{P}_{022} - \eta_1 \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103} - \eta_1 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} + \right. \\
& \left. \eta_1 \mathbf{P}_{130} + \eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_2 \mathbf{P}_{220} \right] [\text{Cos}(\theta)]^2 + \\
& \left[ 3\mathbf{G}_{22}\eta_1 - \frac{3\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2}{-1 + \eta_1} + \frac{3\mathbf{G}_{11}(\eta_1)^2}{-1 + \eta_1} + 3\mathbf{G}_{21}\eta_1 \left( -1 + \frac{(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} \right) - \frac{3\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^3}{(-1 + \eta_2)^4} + \right. \\
& \frac{3\mathbf{G}_{01}(\eta_1)^3}{(\eta_1 + \eta_2)^4} - \frac{3\mathbf{G}_{22}(\eta_1)^3}{(\eta_1 + \eta_2)^4} + (3 - 4\eta_2) \mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + 6\eta_2 \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - 4\eta_2 \mathbf{P}_{301} - \\
& \left. \eta_1 (\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) + \eta_2 \mathbf{P}_{400} \right] [\text{Sen}(\theta)]^2 - \\
& \frac{1}{(-1 + \eta_1)^2} \left[ \mathbf{G}_{11}\eta_1 (-2(-1 + \eta_1)^2 - 3(-2 + \eta_1)\eta_2) + \mathbf{G}_{02}\eta_1 (4(-1 + \eta_1)^2 + \right. \\
& \left. 3(-2 + \eta_1)\eta_2) + (-1 + \eta_1)^2 ((-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + (-2 + 2\eta_1 + 3\eta_2) \mathbf{P}_{103} + \right. \\
& \left. \mathbf{P}_{202} - (\eta_1 + 2\eta_2) \mathbf{P}_{202} + \eta_2 \mathbf{P}_{301}) \right] \text{Sen}(2\theta) + \\
& \left[ \mathbf{G}_{21} \left( 1 + \eta_1 \left( -4 - \frac{3\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) - 3\eta_2 \right) + \frac{1}{(-1 + \eta_2)^3 (\eta_1 + \eta_2)^4} (\mathbf{G}_{01}\eta_1 \right. \\
& \left. (-1 + \eta_2)^3 (2(\eta_1)^4 + 8(\eta_1)^3 \eta_2 + 12(\eta_1)^2 (\eta_2)^2 + 2(\eta_2)^4 + \eta_1 \eta_2 (-3 + 8(\eta_2)^2)) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_{22}(-1 + \eta_2)^3 \left( 2(\eta_1)^5 + (\eta_2)^4 (-2 + 3\eta_2) + 8(\eta_1)^3 \eta_2 (-1 + 3\eta_2) + \right. \\ & 2\eta_1(\eta_2)^3 (-4 + 7\eta_2) + (\eta_1)^4 (-2 + 11\eta_2) + (\eta_1)^2 \eta_2 (3 + 2\eta_2 (-6 + 13\eta_2)) \left. \right) + \\ & (\eta_1 + \eta_2)^4 \left( \mathbf{G}_{12} \eta_1 (3\eta_1 + 2(-1 + \eta_2)^3) + (-1 + \eta_2)^3 ((-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + \right. \\ & \left. \eta_1 (\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{220}) + \eta_2 (\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{310})) \right) ] Sen(2\theta) \}, \quad (\text{G.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v \mathbf{S}_A = 4 \left\{ & -\frac{3\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2)}{(-1 + \eta_1)} + \frac{3\mathbf{G}_{01} \eta_1 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2}{\eta_1 + \eta_2} - \right. \\ & \frac{3\eta_1 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 (\mathbf{G}_{01} \eta_1 + \mathbf{G}_{22} \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^2} + \frac{6\eta_1 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (\mathbf{G}_{01} \eta_1 + \mathbf{G}_{22} \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)} + \\ & \frac{3\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 (\mathbf{G}_{01} \eta_1 + \mathbf{G}_{22} \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)} + \frac{3(\eta_1)^2 \eta_2 (\mathbf{G}_{11} \eta_2 - \mathbf{G}_{02} (-1 + \eta_1 + \eta_2))}{-1 + \eta_1} - \\ & \frac{6\eta_1 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-\mathbf{G}_{11} \eta_2 + \mathbf{G}_{02} (-1 + \eta_1 + \eta_2))}{-1 + \eta_1} + (-1 + \eta_1 + \eta_2)^3 \mathbf{P}_{004} + \\ & \frac{3(\eta_1)^2 \eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-\mathbf{G}_{11} \eta_2 + \mathbf{G}_{02} (-1 + \eta_1 + \eta_2))}{(-1 + \eta_1)^2} - \\ & \frac{3(\eta_2)^2 (\mathbf{G}_{12} \eta_1 (2 - 3\eta_1 - 2\eta_2) + \mathbf{G}_{21} (-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + 3\eta_1 + \eta_2))}{-1 + \eta_2} - \\ & 3\eta_1 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{013} - (-1 + \eta_1 + \eta_2)^3 \mathbf{P}_{013} - 3(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} + 3(\eta_1)^3 \mathbf{P}_{022} + \\ & 3(\eta_1)^2 \eta_2 \mathbf{P}_{022} + 3\eta_1 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{022} + 3(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - 4(\eta_1)^3 \mathbf{P}_{031} - \\ & 3(\eta_1)^2 \eta_2 \mathbf{P}_{031} + (\eta_1)^3 \mathbf{P}_{040} - 3\eta_2 (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + 3(\eta_1)^2 \eta_2 \mathbf{P}_{130} - \\ & 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 3\eta_1 (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 3(\eta_2)^3 \mathbf{P}_{202} + 3\eta_1 (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{220} - (\eta_2)^3 \mathbf{P}_{301} + \\ & \left. (\eta_2)^3 \mathbf{P}_{310} \right\} (\text{G.31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v \mathbf{S}_B = 12 \left[ & \frac{2\mathbf{G}_{12}(\eta_2)^2 (-1 + 3\eta_1 + \eta_2)}{-1 + \eta_2} - \frac{2\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 (-2 + 3\eta_1 + 2\eta_2)}{-1 + \eta_2} + \right. \\ & 2\mathbf{G}_{11}(\eta_2)^2 \left( 1 + \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + 2\mathbf{G}_{01} \eta_2 \left( -2 + 3\eta_1 + \eta_2 + \frac{(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \\ & \frac{2\mathbf{G}_{22}(\eta_2)^2 (-\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^3)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} + 2\mathbf{G}_{02} \eta_2 \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -2 - \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) + \\ & (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} - 2(-1 + \eta_1 + \eta_2) (-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 6\eta_1 \mathbf{P}_{022} + \\ & 6(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{022} + 6\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{022} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{022} + 2\eta_1 \mathbf{P}_{031} - 4(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - \\ & 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{031} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{040} + 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{130} + \\ & \left. (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{220} \right] Cos(\theta) + \\ & 12 \left[ 3(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21}) (\eta_1)^2 + \frac{3(-\mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{21}) (\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^2} + 2(\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{12} \eta_1 - 4\mathbf{G}_{21} \eta_1) \eta_2 - \right. \\ & \left. 3\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 + \eta_1 (\mathbf{G}_{02} (2 - 3\eta_1) + 4(-2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) \eta_2 - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(-2 + \eta_1)(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^2} \Big) + \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 4(-1 + \eta_1) + 3\eta_2 + \frac{\eta_2(3\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \\
& \mathbf{G}_{01}\eta_1 \left( 4(-1 + \eta_2) + \eta_1 \left( 3 + \frac{(\eta_1 + 3\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} - \\
& 2\eta_1(-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{013} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} + \\
& 2\eta_1(-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{022} - (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - (-1 + \eta_1 + \eta_2)(-1 + \eta_1 + 3\eta_2) \mathbf{P}_{103} + \\
& (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{130} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{220} - (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} + \\
& (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{310} \Big] \text{Sen}(\theta), \quad (\text{G.32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_v \mathbf{S}_C = 12 \Big\{ & (-1 + \eta_1 + \eta_2)(\mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013}) + \left( \frac{3\mathbf{G}_{12}(\eta_2)^2}{-1 + \eta_2} - \frac{3\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2}{-1 + \eta_2} - \right. \\
& \frac{3\mathbf{G}_{11}(\eta_2)^3}{(-1 + \eta_1)^4} + \frac{3\mathbf{G}_{22}(\eta_2)^3}{(\eta_1 + \eta_2)^4} + 3\mathbf{G}_{02}\eta_2 \left( -1 + \frac{(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^4} \right) + \\
& \frac{3\mathbf{G}_{01}\eta_2(-\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^2)(\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^4} + (2 - 3\eta_1 - 2\eta_2) \mathbf{P}_{013} + \\
& 3(-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - 4\eta_1 \mathbf{P}_{031} - \eta_2 \mathbf{P}_{031} + \eta_1 \mathbf{P}_{040} - \\
& \left. \eta_2 \mathbf{P}_{103} + \eta_2 \mathbf{P}_{130} \right) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \\
& \left( \mathbf{G}_{12}\eta_1 \left( 2 + \frac{3\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) + \mathbf{G}_{21} \left( 1 + \eta_1 \left( -4 - \frac{3\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) - 3\eta_2 \right) + \right. \\
& \mathbf{G}_{02}\eta_1 \left( -4 - \frac{3(-2 + \eta_1)\eta_2}{(-1 + \eta_1)^2} \right) + \mathbf{G}_{11}\eta_1 \left( 2 + \frac{3(-2 + \eta_1)\eta_2}{(-1 + \eta_1)^2} \right) + \\
& \mathbf{G}_{01}\eta_1 \left( 2 - \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \mathbf{G}_{22} \left( -2 + 3\eta_2 + \eta_1 \left( 2 + \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) \right) + 2\mathbf{P}_{103} - \\
& 3\eta_2 \mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} + 3\eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_1(-\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) - \\
& \left. \eta_2 \mathbf{P}_{301} + \eta_2 \mathbf{P}_{310} \right) [\text{Sen}(\theta)]^2 \\
& - ((-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - (-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{022} + \eta_1 \mathbf{P}_{031} + \\
& (-1 + \eta_1 + 2\eta_2) \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(2\theta) + \left( \mathbf{G}_{21} \left( 3\eta_1 \left( -1 + \frac{1}{(-1 + \eta_2)^2} \right) - 4\eta_2 \right) + \right. \\
& \mathbf{G}_{12} \left( \eta_1 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) + 2\eta_2 \right) + \mathbf{G}_{11}\eta_2 \left( 2 + \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + \\
& \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 2 - \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \mathbf{G}_{01} \left( -2 + 3\eta_1 + 2\eta_2 + \frac{3\eta_1(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \\
& \mathbf{G}_{02} \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -4 - \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} - \\
& \left. (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + \eta_1 \mathbf{P}_{022} + \eta_1 \mathbf{P}_{130} + \eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_2 \mathbf{P}_{220} \right) \text{Sen}(2\theta) \Big\}, \quad (\text{G.33})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_A = 12 \left\{ \frac{2\mathbf{G}_{11}(\eta_1)^2(-1 + 3\eta_2 + \eta_1)}{-1 + \eta_1} - \frac{2\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2(-2 + 3\eta_2 + 2\eta_1)}{-1 + \eta_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& 2\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^2 \left(1 + \frac{\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3}\right) + 2\mathbf{G}_{22}\eta_1 \left(-2 + 3\eta_2 + \eta_1 + \frac{(\eta_1)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^3}\right) + \\
& \frac{2\mathbf{G}_{01}(\eta_1)^2 \left(-\eta_1 + (\eta_2 + \eta_1)^3\right)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} + (-1 + \eta_2 + \eta_1)^2 \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{103} + 6\eta_2 \mathbf{P}_{103} + \\
& 2\mathbf{G}_{21}\eta_1 \left(1 - 3\eta_2 + \eta_1 \left(-2 - \frac{\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3}\right)\right) - 4(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} - 6\eta_2 \mathbf{P}_{202} + \\
& 6(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + (\eta_1)^2 (-2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) - \\
& 2\eta_1 ((-1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \eta_2 (3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310})) + \\
& 2\eta_2 \mathbf{P}_{301} - 4(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{400}, \quad (\text{G.34})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = & 24 \left\{ \left[ \mathbf{G}_{02} \left( 3\eta_2 \left( -1 + \frac{1}{(-1 + \eta_1)^2} \right) - 4\eta_1 \right) + \right. \right. \\
& \mathbf{G}_{11} \left( \eta_2 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_1)^2} \right) + 2\eta_1 \right) + \mathbf{G}_{12}\eta_1 \left( 2 + \frac{3\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) + \\
& \mathbf{G}_{01}\eta_1 \left( 2 - \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \mathbf{G}_{22} \left( -2 + 3\eta_2 + 2\eta_1 + \frac{3\eta_2(\eta_1)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \\
& \left. \mathbf{G}_{21} \left( 1 - 3\eta_2 + \eta_1 \left( -4 - \frac{3\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} \right) \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} - \right. \\
& (-1 + \eta_2 + 2\eta_1) \mathbf{P}_{013} + \eta_1 \mathbf{P}_{022} + 2\mathbf{P}_{103} - 3\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_1 \mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} + \\
& \left. 3\eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_1 \mathbf{P}_{202} + \eta_1 \mathbf{P}_{220} - \eta_2 \mathbf{P}_{301} + \eta_2 \mathbf{P}_{310} \right] \text{Cos}(\theta) + \\
& \left[ -\frac{3\mathbf{G}_{02}(\eta_1)^2}{-1 + \eta_1} + \frac{3\mathbf{G}_{11}(\eta_1)^2}{-1 + \eta_1} - \frac{3\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^3}{(-1 + \eta_2)^4} + \frac{3\mathbf{G}_{01}(\eta_1)^3}{(\eta_1 + \eta_1)^4} + \right. \\
& 3\mathbf{G}_{21}\eta_1 \left( -1 + \frac{(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + 3\mathbf{P}_{103} - 4\eta_2 \mathbf{P}_{103} \\
& \left. \frac{3\mathbf{G}_{22}\eta_1 \left( -\eta_1 + (\eta_1 + \eta_2)^2 \right) (\eta_1 + (\eta_1 + \eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^4} - 3\mathbf{P}_{202} + 6\eta_2 \mathbf{P}_{202} + \right. \\
& \left. \mathbf{P}_{301} - 4\eta_2 \mathbf{P}_{301} - \eta_1 (\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) + \right. \\
& \left. \left. \eta_2 \mathbf{P}_{400} \right] \text{Sen}(\theta) \right\}, \quad (\text{G.35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = & 12 \left\{ \left[ -4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \frac{6(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11})\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} + \right. \right. \\
& \frac{6(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} + \frac{6\mathbf{G}_{22}\eta_2(\eta_2 - \eta_1)\eta_1}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{G}_{01} \left( 2 + \frac{6\eta_2\eta_1(-\eta_2 + \eta_1)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) + \\
& \left. \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} \right] [\text{Cos}(\theta)]^2 + \\
& 2 \left[ 3\mathbf{G}_{11} + 3\mathbf{G}_{22} - \frac{9\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} + \frac{3(\mathbf{G}_{01} - \mathbf{G}_{22})(3\eta_2 - \eta_1)(\eta_1)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^5} - \right. \\
& \left. \frac{3(\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{02}(-2 + \eta_1)\eta_1)}{(-1 + \eta_1)^2} + \mathbf{G}_{21} \left( -3 + \frac{9(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} \right) - \mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{103} + \right. \\
& \left. \left. 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} \right] \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(-1 + \eta_2)^5 (\eta_1 + \eta_2)^5} \left[ \left( -12\mathbf{G}_{01}(-1 + \eta_2)^5 (\eta_1)^3 + 12\mathbf{G}_{22}(-1 + \eta_2)^5 (\eta_1)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. (\eta_1 + \eta_2)^5 \left( 12(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^3 + (-1 + \eta_1)^5 (\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{103} + 6\mathbf{P}_{202} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 4\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400}) \right) \right) [\text{Sen}(\theta)]^2 + \right. \\ \left. (-1 + \eta_2)^5 (\eta_1 + \eta_2)^5 (\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(2\theta) \right], \quad (\text{G.36})$$

$$\mathbf{D}_{\check{\nu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = 12 \left\{ \frac{2\mathbf{G}_{12}(\eta_2)^2 (-1 + 3\eta_1 + \eta_2)}{-1 + \eta_2} - \frac{2\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 (-2 + 3\eta_1 + 2\eta_2)}{-1 + \eta_2} + \right. \\ \left. 2\mathbf{G}_{11}(\eta_2)^2 \left( 1 + \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + 2\mathbf{G}_{01}\eta_2 \left( -2 + 3\eta_1 + \eta_2 + \frac{(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \right. \\ \left. \frac{2\mathbf{G}_{22}(\eta_2)^2 (-\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^3)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} + 2\mathbf{G}_{02}\eta_2 \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -2 - \frac{\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) + \right. \\ \left. (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} - 2(-1 + \eta_1 + \eta_2)(-1 + 2\eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - \right. \\ \left. 6\eta_1 \mathbf{P}_{022} + 6(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{022} + 6\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{022} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{022} + 2\eta_1 \mathbf{P}_{031} - \right. \\ \left. 4(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} - 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{031} + (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{040} + 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{103} - \right. \\ \left. 2(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + 2\eta_1 \eta_2 \mathbf{P}_{130} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{220} \right\}, \quad (\text{G.37})$$

$$\mathbf{D}_{\check{\nu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 24 \left\{ \left[ \frac{3\mathbf{G}_{12}(\eta_2)^2}{-1 + \eta_2} - \frac{3\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2}{-1 + \eta_2} - \frac{3\mathbf{G}_{11}(\eta_2)^3}{(-1 + \eta_1)^4} + \frac{3\mathbf{G}_{22}(\eta_2)^3}{(\eta_1 + \eta_2)^4} + \right. \right. \\ \left. \left. 3\mathbf{G}_{02}\eta_2 \left( -1 + \frac{(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^4} \right) + \frac{3\mathbf{G}_{01}\eta_2 (-\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^2) (\eta_2 + (\eta_1 + \eta_2)^2)}{(\eta_1 + \eta_2)^4} + \right. \right. \\ \left. \left. (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + (3 - 4\eta_1 - 3\eta_2) \mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + 6\eta_1 \mathbf{P}_{022} + 3\eta_2 \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - \right. \right. \\ \left. \left. 4\eta_1 \mathbf{P}_{031} - \eta_2 \mathbf{P}_{031} + \eta_1 \mathbf{P}_{040} - \eta_2 \mathbf{P}_{103} + \eta_2 \mathbf{P}_{130} \right] \text{Cos}(\theta) + \right. \\ \left. \left[ \mathbf{G}_{21} \left( 3\eta_1 \left( -1 + \frac{1}{(-1 + \eta_2)^2} \right) - 4\eta_2 \right) + \mathbf{G}_{12} \left( \eta_1 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) + 2\eta_2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{G}_{11}\eta_2 \left( 2 + \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 2 - \frac{3\eta_1 \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{G}_{01} \left( -2 + 3\eta_1 + 2\eta_2 + \frac{3\eta_1 (\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{G}_{02} \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -4 - \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. (2 - 3\eta_1 - 2\eta_2) \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + 3\eta_1 \mathbf{P}_{022} + \eta_2 \mathbf{P}_{022} - \eta_1 \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103} - \eta_1 \mathbf{P}_{103} - \right. \right. \\ \left. \left. 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} + \eta_1 \mathbf{P}_{130} + \eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_2 \mathbf{P}_{220} \right] \text{Sen}(\theta) \right\}, \quad (\text{G.38})$$

$$\mathbf{D}_{\check{\nu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = 12 \left\{ \left[ 12(\eta_2)^3 \left( \frac{-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}}{(-1 + \eta_1)^5} + \frac{\mathbf{G}_{01} - \mathbf{G}_{22}}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) + \mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{013} + \right. \right. \\ \left. \left. 6\mathbf{P}_{022} - 4\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040} \right] [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \frac{6(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} + \right. \\
& \frac{6(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11})\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} + \frac{6\mathbf{G}_{22}\eta_1\eta_2(-\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{G}_{01} \left( 2 + \frac{6\eta_1(\eta_1 - \eta_2)\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) + \\
& \quad \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} ] [\text{Sen}(\theta)]^2 + \\
& \left[ -3\mathbf{G}_{02} + \frac{3(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(-2 + \eta_2)\eta_2}{(-1 + \eta_2)^2} + \frac{9(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^4} + \right. \\
& \left. 3 \left( \frac{\mathbf{G}_{22}(3\eta_1 - \eta_2)(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{G}_{01} \left( 1 + \frac{(\eta_2)^2(-3\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) \right) + \mathbf{P}_{004} - 3\mathbf{P}_{013} + \right. \\
& \quad \left. 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130} ] \text{Sen}(2\theta) \}, \quad (\text{G.39})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\text{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = 12 & \left\{ 3(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^2 + \frac{3(-\mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{21})(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^2} + \right. \\
& 2(\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{12}\eta_1 - 4\mathbf{G}_{21}\eta_1)\eta_2 - 3\mathbf{G}_{21}(\eta_2)^2 + \eta_1(\mathbf{G}_{02}(2 - 3\eta_1) + \\
& \quad \left. 4(-2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11})\eta_2 - \frac{3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(-2 + \eta_1)(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^2} \right) + \\
& \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 4(-1 + \eta_1) + 3\eta_2 + \frac{\eta_2(3\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) + \mathbf{G}_{01}\eta_1(4(-1 + \eta_2) + \\
& \eta_1 \left( 3 + \frac{\eta_1 + 3\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^3} \right) \left. \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{004} + 2\eta_1 \mathbf{P}_{013} - 2(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{013} - \\
& 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{013} - (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{013} - 2\eta_1 \mathbf{P}_{022} + 3(\eta_1)^2 \mathbf{P}_{022} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{022} - \\
& (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{031} + 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{103} - 2(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} - (-1 + \eta_1 + \eta_2)^2 \mathbf{P}_{103} + \\
& (\eta_1)^2 \mathbf{P}_{130} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{202} + 3(\eta_2)^2 \mathbf{P}_{202} + 2\eta_1\eta_2 \mathbf{P}_{220} - \\
& \quad \left. (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{301} + (\eta_2)^2 \mathbf{P}_{310} \right\} \quad (\text{G.40})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\text{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 24 & \left\{ \left[ \mathbf{G}_{21} \left( 3\eta_1 \left( -1 + \frac{1}{(-1 + \eta_2)^2} \right) - 4\eta_2 \right) + \right. \right. \\
& \mathbf{G}_{12} \left( \eta_1 \left( 3 - \frac{3}{(-1 + \eta_2)^2} \right) + 2\eta_2 \right) + \mathbf{G}_{11}\eta_2 \left( 2 + \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) + \\
& \mathbf{G}_{22}\eta_2 \left( 2 - \frac{3\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \mathbf{G}_{01} \left( -2 + 3\eta_1 + 2\eta_2 + \frac{3\eta_1(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^4} \right) + \\
& \mathbf{G}_{02} \left( 1 - 3\eta_1 + \eta_2 \left( -4 - \frac{3\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} \right) \right) \left. \right) + (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + \\
& (2 - 3\eta_1 - 2\eta_2) \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + 3\eta_1 \mathbf{P}_{022} + \eta_2 \mathbf{P}_{022} - \eta_1 \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103} - \\
& \quad \eta_1 \mathbf{P}_{103} - 2\eta_2 \mathbf{P}_{103} + \eta_1 \mathbf{P}_{130} + \eta_2 \mathbf{P}_{202} + \eta_2 \mathbf{P}_{220} ] \text{Cos}(\theta) + \\
& \left[ \mathbf{G}_{02}\eta_1 \left( -4 - \frac{3(-2 + \eta_1)\eta_2}{(-1 + \eta_1)^2} \right) + (-\mathbf{G}_{21}(-1 + \eta_1)^2(\eta_1 + \eta_2)^4(3(\eta_1)^2 + \right. \\
& \quad \left. 4\eta_1(-1 + \eta_2)^3 + (-1 + \eta_2)^3(-1 + 3\eta_2)) + \right. \\
& \quad \left. \mathbf{G}_{01}(-1 + \eta_1)^2\eta_1(-1 + \eta_2)^3(2(\eta_1)^4 + (\eta_1)^3\eta_2 + 12(\eta_1)^2(\eta_2)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\eta_2)^4 + 8\eta_1\eta_2 \left( -3 + 8(\eta_2)^2 \right) + \mathbf{G}_{22}(-1 + \eta_1)^2(-1 + \eta_2)^3 \left( 2(\eta_1)^5 + \right. \\
& \quad (\eta_2)^4 (-2 + 3\eta_2) + 8(\eta_1)^3\eta_2(-1 + 3\eta_2) + 2\eta_1(\eta_2)^3(-4 + 7\eta_2) + \\
& \quad \left. (\eta_1)^4(-2 + 11\eta_2) + (\eta_1)^2\eta_2(3 + 2\eta_2(-6 + 13\eta_2)) \right) + \\
& \quad (\eta_1 + \eta_2)^4 \left( \mathbf{G}_{11}\eta_1(-1 + \eta_2)^3 \left( 2(-1 + \eta_1)^2 + 3(-2 + \eta_1)\eta_2 \right) + \right. \\
& \quad \left. (-1 + \eta_1)^2 \left( \mathbf{G}_{12}\eta_1 \left( 3\eta_1 + 2(-1 + \eta_2)^3 \right) + (-1 + \eta_2)^3 \left( (-1 + \eta_1 + \eta_2) \mathbf{P}_{004} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} + \eta_1(-2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \eta_2(\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) \right) \right) \right) / \\
& \quad \left. \left( (-1 + \eta_1)^2(-1 + \eta_2)^3(\eta_1 + \eta_2)^4 \right) \right] \text{Sen}(\theta) \} \quad (\text{G.41})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = 12 \left\{ \left[ -3\mathbf{G}_{02} + \frac{3(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})(-2 + \eta_2)\eta_2}{(-1 + \eta_2)^2} + \frac{9(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(\eta_2)^2}{(-1 + \eta_1)^4} + \right. \right. \\
\left. \left. 3 \left( \frac{\mathbf{G}_{22}(3\eta_1 - \eta_2)(\eta_2)^2}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{G}_{01} \left( 1 + \frac{(\eta_2)^2(-3\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) \right) + \mathbf{P}_{004} - 3\mathbf{P}_{013} + \right. \right. \\
\left. \left. 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130} \right] [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right. \\
\left[ 3\mathbf{G}_{22} - \frac{3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11})(-2 + \eta_1)\eta_1}{(-1 + \eta_1)^2} + \mathbf{G}_{21} \left( -3 + \frac{9(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} \right) - \right. \\
\left. \frac{9\mathbf{G}_{12}(\eta_1)^2}{(-1 + \eta_2)^4} - \frac{3(\mathbf{G}_{01} - \mathbf{G}_{22})(\eta_1)^2(\eta_1 - 3\eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{103} + \right. \\
\left. \left. 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310} \right] [\text{Sen}(\theta)]^2 + \right. \\
\left[ -4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \frac{6(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21})\eta_1}{(-1 + \eta_2)^3} + \right. \\
\left. \frac{6(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11})\eta_2}{(-1 + \eta_1)^3} + \frac{6\mathbf{G}_{22}\eta_1\eta_2(-\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)^5} + \mathbf{G}_{01} \left( 2 + \frac{6\eta_1(\eta_1 - \eta_2)\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^5} \right) + \right. \\
\left. \left. \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} \right] \text{Sen}(2\theta) \right\}. \quad (\text{G.42})
\end{aligned}$$

Cuidado deve ser tomado quando os pontos  $\eta_1$  e  $\eta_2$  estão nos vértices do triângulo (espaço adimensional), assim três condições são explicitadas os termos

a) Caso  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_2 = 0$ , tem-se as expressões

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = -4\mathbf{P}_{004} + 4\mathbf{P}_{103}, \quad (\text{G.43})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 12 \left\{ \left[ \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103} \right] \text{Cos}(\theta) + \right. \\
\left. \left[ \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} \right] \text{Sen}(\theta) + \right. \\
\left. \frac{\text{Cos}(\theta) \left( \mathbf{G}_{01} [\text{Cos}(\theta)]^2 + \mathbf{G}_{22} \left[ [\text{Sen}(\theta)]^2 + \text{Sen}(2\theta) \right] \right)}{[\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)]^2} \right\}, \quad (\text{G.44})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = 12 \left\{ \left( -2\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{004} + 2\mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{103} \right) (\text{Cos}(\theta))^2 \right. \\
\left. + \left( -\mathbf{P}_{004} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} \right) (\text{Sen}(\theta))^2 + \left( \mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{004} + \right. \right. \\
\left. \left. \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} \right) \text{Sen}(2\theta) \right\}, \quad (\text{G.45})
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_v \mathbf{S}_A = -4\mathbf{P}_{004} + 4\mathbf{P}_{013} \quad (\text{G.46})$$

$$\mathbf{D}_v \mathbf{S}_B = 12 \left\{ [\mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022}] \text{Cos}(\theta) + \right. \\ \left. [\mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103}] \text{Sen}(\theta) + \right. \\ \left. \frac{\text{Sen}(\theta) [\mathbf{G}_{22} [\text{Sen}(\theta)]^2 + \mathbf{G}_{01} ([\text{Cos}(\theta)]^2 + \text{Sen}(2\theta))]}{[\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)]^2} \right\}, \quad (\text{G.47})$$

$$\mathbf{D}_v \mathbf{S}_C = 12 \left\{ (-\mathbf{P}_{004} + 3\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right. \\ (\mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + \\ \left. (-2\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{004} + 2\mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(2\theta) \right\}, \quad (\text{G.48})$$

$$\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_A = 12 \left\{ \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \frac{2(-\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{22}) [\text{Cos}(\theta)]^3}{[\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)]^3} \right\}, \quad (\text{G.49})$$

$$\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_B = 24 \left\{ (\mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202}) \text{Cos}(\theta) + \right. \\ \left. (-\mathbf{P}_{004} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301}) \text{Sen}(\theta) \right\}, \quad (\text{G.50})$$

$$\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_C = 12 \left\{ (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \right. \\ 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + (\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{103} + 6\mathbf{P}_{202} - \\ 4\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + (-3\mathbf{G}_{21} + 3\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{103} + \\ \left. 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(2\theta) \right\} \quad (\text{G.51})$$

$$\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_A = 12 \left[ \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} + \frac{2(-\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{22}) [\text{Sen}(\theta)]^3}{[\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta)]^3} \right], \quad (\text{G.52})$$

$$\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_B = -24 \left\{ (\mathbf{P}_{004} - 3\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031}) \text{Cos}(\theta) + \right. \\ \left. (2\mathbf{G}_{01} - \mathbf{G}_{02} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(\theta) \right\}, \quad (\text{G.53})$$

$$\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_C = 12 \left\{ (\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{013} + 6\mathbf{P}_{022} - 4\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \right. \\ \text{Sen}(\theta) [(6\mathbf{G}_{01} - 2(3\mathbf{G}_{02} + 3\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103})) \text{Cos}(\theta) + \\ (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - \\ \left. 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta)] + (\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(2\theta) \right\}, \quad (\text{G.54})$$

$$\mathbf{D}_{vu}^2 \mathbf{S}_A = 12 \left\{ \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103} + \frac{\mathbf{G}_{01} [\text{Cos}(\theta)]^3 + \mathbf{G}_{22} [\text{Sen}(\theta)]^3}{(\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta))^3} + \right. \\ \left. \frac{3\mathbf{G}_{01} [\text{Cos}(\theta)]^2 \text{Sen}(\theta) + 3\mathbf{G}_{22} \text{Cos}(\theta) [\text{Sen}(\theta)]^2}{(\text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta))^3} \right\}, \quad (\text{G.55})$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 24 \{(-2\mathbf{G}_{01} + \mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{004} + 2\mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{103}) \text{Cos}(\theta) + (\mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202}) \text{Sen}(\theta)\}, \quad (\text{G.56})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 12 \{ & (3\mathbf{G}_{01} - 3\mathbf{G}_{02} + \mathbf{P}_{004} - 3\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{103} + \\ & \mathbf{P}_{130}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + (-3\mathbf{G}_{21} + 3\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{103} + 3\mathbf{P}_{202} - \\ & \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + 2(\mathbf{G}_{01} - 2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} - 2\mathbf{G}_{21} + \\ & \mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{103}) \text{Sen}(2\theta) + (\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta)\}, \quad (\text{G.57}) \end{aligned}$$

b) Caso  $\eta_1 = 1$  e  $\eta_2 = 0$ , tem-se as expressões

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = -4\mathbf{P}_{031} + 4\mathbf{P}_{130}, \quad (\text{G.58})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = -12 \{ & (\mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{130}) \text{Cos}(\theta) + \text{Sen}(\theta) [4\mathbf{G}_{02} - \\ & 2\mathbf{G}_{11} - \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{220} + 3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11}) \text{tg}(\theta)]\}, \quad (\text{G.59}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = 6 \{ & 4\mathbf{G}_{01} - 8\mathbf{G}_{02} + 6\mathbf{G}_{11} - 3\mathbf{G}_{12} - 2\mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \\ & \mathbf{P}_{130} + \mathbf{P}_{310} - (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 6\mathbf{G}_{11} - 3\mathbf{G}_{12} - 2\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - \\ & \mathbf{P}_{130} + \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(2\theta) + 2(2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12} - \mathbf{P}_{013} + \\ & \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta)\}, \quad (\text{G.60}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = -4\mathbf{P}_{031} + 4\mathbf{P}_{040}, \quad (\text{G.61})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 12 \{ & (\mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) \text{Cos}(\theta) + \\ & (-2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11} + \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(\theta) + \\ & (\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11}) \text{Sec}(\theta) \text{tg}(\theta)\}, \quad (\text{G.62}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = -12 \{ & (-\mathbf{G}_{01} + 2\mathbf{G}_{02} + \mathbf{P}_{013} - 2\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(2\theta) + \\ & (-2\mathbf{G}_{01} + 4\mathbf{G}_{02} - 2\mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} + \mathbf{P}_{013} - \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{220}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + \\ & (\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + 3\mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{040}) [\text{Cos}(\theta)]^2\}, \quad (\text{G.63}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = 12 \{-4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{220} + 6(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) \text{tg}(\theta)\}, \quad (\text{G.64})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = 24 \{ & (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12} - \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} + \\ & \mathbf{P}_{220}) \text{Cos}(\theta) + (3\mathbf{G}_{01} - 6\mathbf{G}_{02} + 6\mathbf{G}_{11} - 3\mathbf{G}_{12} - \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(\theta)\}, \quad (\text{G.65}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = & 6 \{-10\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - 16\mathbf{G}_{12} + 14\mathbf{G}_{21} + 14\mathbf{G}_{22} + \\ & 2\mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 6\mathbf{P}_{103} + 7\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} - 4\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400} + (14\mathbf{G}_{01} - \\ & 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} + 8\mathbf{G}_{12} - 10\mathbf{G}_{21} - 10\mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} + 2\mathbf{P}_{103} - 5\mathbf{P}_{202} + \\ & \mathbf{P}_{220} + 4\mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{400}) \text{Cos} (2\theta) - 2 (3\mathbf{G}_{01} + 3\mathbf{G}_{02} - 3\mathbf{G}_{11} + 9\mathbf{G}_{12} - \\ & 6\mathbf{G}_{21} - 6\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) \text{Sen} (2\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{G.66})$$

$$D_{\mathbf{v}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = 12 \{\mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040} + 2(-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{G}_{11}) [\text{tg}(\theta)]^3\}, \quad (\text{G.67})$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = & 24 \{(-\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - 3\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) \text{Cos}(\theta) + \\ & (\mathbf{G}_{01} - 2\mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{G.68})$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = & 12 \{(\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{013} + 6\mathbf{P}_{022} - 4\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + \\ & \text{Sen}(\theta) [(6\mathbf{G}_{01} - 2(3\mathbf{G}_{02} + 3\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{103})) \text{Cos}(\theta) + \\ & (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - 4\mathbf{G}_{12} + 2\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - \\ & 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta)] + (\mathbf{P}_{004} + \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(2\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{G.69})$$

$$D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = 12 \{-\mathbf{G}_{02} + \mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130} + 3(\mathbf{G}_{02} - \mathbf{G}_{11}) [\text{tg}(\theta)]^2\}, \quad (\text{G.70})$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = & 24 \{(\mathbf{G}_{01} - 2\mathbf{G}_{02} - \mathbf{P}_{013} + 2\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{130}) \text{Cos}(\theta) + \\ & (2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - \mathbf{G}_{12} - \mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{G.71})$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S}_{\mathbf{C}} = & -6 \{6\mathbf{G}_{02} - 3\mathbf{G}_{11} + 9\mathbf{G}_{12} - 6\mathbf{G}_{21} - 6\mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{P}_{004} + \\ & 4\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} + 4\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{130} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310} + (-6\mathbf{G}_{01} + \\ & 3\mathbf{G}_{11} - 9\mathbf{G}_{12} + 6\mathbf{G}_{21} + 6\mathbf{G}_{22} + 2\mathbf{P}_{013} - 3\mathbf{P}_{022} + \mathbf{P}_{031} - 2\mathbf{P}_{103} - \\ & \mathbf{P}_{130} + 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(2\theta) - 2(2\mathbf{G}_{01} - 4\mathbf{G}_{02} + 2\mathbf{G}_{11} - \\ & 4\mathbf{G}_{12} + 2\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \\ & \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(2\theta)\}. \end{aligned} \quad (\text{G.72})$$

c) Caso  $\eta_1 = 0$  e  $\eta_2 = 1$ , tem-se as expressões

$$D_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{A}} = -4\mathbf{P}_{301} + 4\mathbf{P}_{400} \quad (\text{G.73})$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} \mathbf{S}_{\mathbf{B}} = & 6 \{2(\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(\theta) - [\mathbf{G}_{12} + (\mathbf{G}_{12} - \\ & 2\mathbf{G}_{21}) \text{Cos}(\theta)] \text{Cotg}(\theta) \text{Cos} \sec(\theta) + 2(\mathbf{P}_{202} - 2\mathbf{P}_{301} + \\ & \mathbf{P}_{400}) \text{Sen}(\theta)\}, \end{aligned} \quad (\text{G.74})$$



$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u \mathbf{S}_C = & -12 \{ (\mathbf{G}_{11} - 2\mathbf{G}_{12} + 4\mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} - \\ & \mathbf{P}_{220}) [\text{Cos}(\theta)]^2 - \text{Sen}(\theta) [2(-2\mathbf{G}_{21} + \mathbf{G}_{22} + 2\mathbf{P}_{202} + \\ & \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(\theta) + (-\mathbf{P}_{103} + 3\mathbf{P}_{202} - 3\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400}) \text{Sen}(\theta)] + \\ & (\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{301}) \text{Sen}(2\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.75})$$

$$\mathbf{D}_v \mathbf{S}_A = -4\mathbf{P}_{301} + 4\mathbf{P}_{310}, \quad (\text{G.76})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v \mathbf{S}_B = & 12 \{ \text{Cos}(\theta) (2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} + 3(\mathbf{G}_{12} - \\ & \mathbf{G}_{21}) \text{Cotg}(\theta)) + (-\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.77})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v \mathbf{S}_C = & 6 \{ -3\mathbf{G}_{11} + 6\mathbf{G}_{12} - 8\mathbf{G}_{21} + 4\mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130} + 2\mathbf{P}_{202} - \\ & \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310} + (-3\mathbf{G}_{11} + 6\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{130} - 2\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \\ & \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(2\theta) + 2(-\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \\ & \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(2\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.78})$$

$$\mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_A = 12 \{ \mathbf{P}_{202} - 2\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400} + 2(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21}) [\text{Cotg}(\theta)]^3 \}, \quad (\text{G.79})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_B = & -24 \{ (2\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{103} - 2\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(\theta) + \\ & (\mathbf{P}_{103} - 3\mathbf{P}_{202} + 3\mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{400}) \text{Sen}(\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.80})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_u^2 \mathbf{S}_C = & 12 \{ (2\mathbf{G}_{01} + 2\mathbf{G}_{02} - 4\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \\ & 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) [\text{Cos}(\theta)]^2 + (\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{103} + \\ & 6\mathbf{P}_{202} - 4\mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{400}) [\text{Sen}(\theta)]^2 + (-3\mathbf{G}_{21} + 3\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - \mathbf{P}_{013} - \\ & 3\mathbf{P}_{103} + 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(2\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.81})$$

$$\mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_A = 12 \{ 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} + 6(\mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21}) \text{Cotg}(\theta) \} \quad (\text{G.82})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_B = & 24 \{ (-3\mathbf{G}_{11} + 6\mathbf{G}_{12} - 6\mathbf{G}_{21} + 3\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130}) \text{Cos}(\theta) + \\ & (-\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} - \mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.83})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_v^2 \mathbf{S}_C = & 6 \{ 14\mathbf{G}_{01} + 14\mathbf{G}_{02} - 16\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} - 10\mathbf{G}_{22} + \\ & 2\mathbf{P}_{004} - 6\mathbf{P}_{013} + 7\mathbf{P}_{022} - 4\mathbf{P}_{031} + \mathbf{P}_{040} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220} + (10\mathbf{G}_{01} + \\ & 10\mathbf{G}_{02} - 8\mathbf{G}_{11} - 2\mathbf{G}_{12} + 4\mathbf{G}_{21} - 14\mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{P}_{013} + 5\mathbf{P}_{022} - 4\mathbf{P}_{031} + \\ & \mathbf{P}_{040} + 2\mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{220}) \text{Cos}(2\theta) + 2(6\mathbf{G}_{01} + 6\mathbf{G}_{02} - 9\mathbf{G}_{11} + \\ & 3\mathbf{G}_{12} - 3\mathbf{G}_{21} - 3\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 3\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} - \mathbf{P}_{103} + \\ & \mathbf{P}_{130}) \text{Sen}(2\theta) \}, \end{aligned} \quad (\text{G.84})$$

$$D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S\_A} = 12 \{ -\mathbf{G}_{21} + \mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310} + 3(-\mathbf{G}_{12} + \mathbf{G}_{21}) [\text{Cotg}(\theta)]^2 \}, \quad (\text{G.85})$$

$$D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S\_B} = -24 \{ (\mathbf{G}_{11} - 2\mathbf{G}_{12} + 4\mathbf{G}_{21} - 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{103} - \mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{220}) \text{Cos}(\theta) + (2\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{103} - 2\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) \text{Sen}(\theta) \}, \quad (\text{G.86})$$

$$D_{\mathbf{vu}}^2 \mathbf{S\_C} = 6 \{ 6\mathbf{G}_{01} + 6\mathbf{G}_{02} - 9\mathbf{G}_{11} + 3\mathbf{G}_{12} - 6\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{P}_{004} - 4\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} - 4\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130} + 3\mathbf{P}_{202} - \mathbf{P}_{301} + \mathbf{P}_{310} + (6\mathbf{G}_{01} + 6\mathbf{G}_{02} - 9\mathbf{G}_{11} + 3\mathbf{G}_{12} - 6\mathbf{G}_{22} - 2\mathbf{P}_{013} + 3\mathbf{P}_{022} - \mathbf{P}_{031} + 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{130} - 3\mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{301} - \mathbf{P}_{310}) \text{Cos}(2\theta) + 2(2\mathbf{G}_{01} + 2\mathbf{G}_{02} - 4\mathbf{G}_{11} + 2\mathbf{G}_{12} - 4\mathbf{G}_{21} + 2\mathbf{G}_{22} + \mathbf{P}_{004} - 2\mathbf{P}_{013} + \mathbf{P}_{022} - 2\mathbf{P}_{103} + \mathbf{P}_{202} + \mathbf{P}_{220}) \text{Sen}(2\theta) \}. \quad (\text{G.87})$$