

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

PABLO AUGUSTO KRAHL

**Instabilidade Lateral de Vigas Pré-Moldadas
em Situações Transitórias**

São Carlos, 2014

PABLO AUGUSTO KRAHL

Instabilidade Lateral de Vigas Pré-Moldadas em Situações Transitórias

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências, Programa de Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Titular Mounir Khalil El Debs

São Carlos, 2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

K89i Krahl, Pablo Augusto
Instabilidade Lateral de Vigas Pré-Moldadas em
Situações Transitórias / Pablo Augusto Krahl;
orientador Mounir Khalil El Debs. São Carlos, 2014.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

1. concreto pré-moldado . 2. momento crítico de
instabilidade. 3. carregamento crítico. 4. fases
transitórias. 5. limites de esbeltez. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PABLO AUGUSTO KRAHL**.

Título da dissertação: "Instabilidade lateral de vigas pré-moldadas em situações transitórias".

Data da defesa: 30/04/2014

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Mounir Khalil El Debs (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Profa. Dra. **Marla Cristina Vidigal de Lima**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

Aprovado

Prof. Dr. **Pedro Wellington Gonçalves do Nascimento Teixeira**
(Escola Politécnica/EP)

Aprovado

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas);
Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

AGRADECIMENTOS

À Deus pelas possibilidades e aprendizados que a vida apresenta, pela força e equilíbrio pra enfrentar os desafios, pelo amor e esperança que sempre me revigoraram.

Aos meus pais que com amor e apoio incondicionais sempre estiveram presentes nos momentos de alegria e nas dificuldades.

Aos meus irmãos que amo e admiro tanto.

Ao meu orientador, Prof. Mounir Khalil El Debs, por compartilhar sua sabedoria, pelos conselhos e contribuições, pela amizade.

À todos os amigos que fiz durante o mestrado.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas que me auxiliaram ao longo desta jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

*"Embora ninguém possa voltar atrás
e fazer um novo começo, qualquer um
pode começar agora e fazer um novo
fim."*

Francisco de Paula Cândido Xavier

RESUMO

KRAHL, P. A. (2014). *Instabilidade Lateral de Vigas Pré-Moldadas em Situações Transitórias*. 209p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

O objetivo desta pesquisa é apresentar procedimentos de verificação da estabilidade lateral de vigas de concreto em situações transitórias e com eles realizar análises paramétricas. As fases transitórias estudadas são içamento, transporte e pré-serviço com e sem contraventamento nos apoios. As formulações apresentadas contém cálculo de carga crítica de instabilidade lateral, momento crítico e fator de segurança. São apresentados exemplos numéricos e a partir deles realizadas análises paramétricas com intuito de determinar limites de segurança. Os parâmetros variados foram f_{ck} , imperfeições geométricas, vão, largura da mesa comprimida e espessura da alma fazendo uma comparação entre vigas I e retangular. Com os resultados, foram obtidas esbeltezes geométricas limite para fases transitórias, relações entre carga crítica e carga devido ao peso próprio e uma relação entre momento crítico elástico e momento último de flexão para a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, especificamente. Na comparação entre vigas I e retangular, constatou-se que os dois tipos de seção apresentam limites de segurança distintos. As análises mostraram que os limites de esbeltez geométrica recomendados, como lh/b_f^2 , geram elementos, de seção transversal I, muito esbeltos. Este parâmetro apresentou uma variação significativa na tentativa de determinar limites nas análises paramétricas. Portanto, pode ser conservador adotar como limite a menor esbeltez obtida nas análises. Conclui-se que a verificação da segurança por esbeltezes geométricas nem sempre é adequada, pois não são considerados parâmetros como imperfeições geométricas e f_{ck} que mostraram serem importantes nas análises paramétricas. A esbeltez representada pela razão entre momento último e momento crítico de instabilidade elástico é mais abrangente e a busca por um valor limite deste parâmetro apresentou resultados com pouca variação para as vigas I. Com relação ao limite clássico de segurança que recomenda uma carga crítica maior que quatro vezes a carga de peso próprio, os resultados mostraram que esta recomendação é conservadora. As análises paramétricas mostraram que para vigas I esta razão igual a dois e meio atende a segurança destes elementos.

Palavras-chave: concreto pré-moldado, momento crítico de instabilidade, carregamento crítico, fases transitórias, limites de esbeltez.

ABSTRACT

KRAHL, P. A. (2014). *Lateral stability of precast concrete beams during transient situations*. 209p. Thesis (Masters Degree) – Scholl of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2014.

The objective of this research is to present a contribution to the verification of lateral stability of concrete beams in transient situations through parametric analyzes. The transient phases studied are lifting, transportation and prior to execution of the deck with braced and unbraced supports. Formulations presented contain calculation of buckling load, buckling moment and factor of safety. Numerical examples are presented and parametric analyzes are performed from these aiming to determine safety limits. The varied parameters were f_{ck} , geometric imperfections, span, compression flange width and web width by making a comparison between I-beams and rectangular beams. With the results, slenderness limits were obtained for transient phases, relationships between critical load and load due to self-weight and a relationship between elastic critical moment and ultimate moment to the transient situation before the execution of the deck with braced supports, specifically. In the comparison between I-beams and rectangular beams, it was found that the two types of section present different safety limits. Analyzes showed that the geometric slenderness limits recommended, as $\ell h/b_f^2$, generate slender elements of I cross section. This parameter showed a significant variation in an attempt to determine limits on parametric analyzes. Therefore adopt the lower slenderness limit obtained in analyzes may be conservative. It is concluded that the safety verification by geometric slenderness is not always adequate, because they do not consider parameters such as geometric imperfections and f_{ck} that showed to be important in the parametric analyzes. The slenderness ratio represented by the ultimate moment and elastic critical moment of instability is more comprehensive and the search for a limiting value of this parameter presented results with little variation for the I-beams. With respect to the classical limit of safety which recommends that the critical load is greater than four times the self-weight load, the results showed that this recommendation is conservative. Parametric analyzes showed that for I-beams this ratio equal to two and a half addresses the safety of these elements.

Keywords: precast concrete. buckling moment. buckling load. transient situations. slenderness limits.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 - Viga de ponte com 65 m de vão e 2,8 m de altura em Calgary, Canadá.....	27
Figura 1-2 - Vigas de cobertura do hangar do aeroporto de Londres com 33,5 m de vão e 1,83 m de altura.....	28
Figura 1-3 – Acidentes com vigas em fases transitórias	33
Figura 2-1 – Modelo de viga com elementos finitos de casca	39
Figura 2-2 – Primeiro modo de instabilidade.....	39
Figura 2-3 – Terceiro modo de instabilidade	39
Figura 2-4 - Representação de uma seção transversal de viga tombada para verificação da segurança à instabilidade lateral	40
Figura 2-5 – Instabilidade por flexo-torção.....	42
Figura 2-6 – Instabilidade por tombamento	42
Figura 2-7 – Vigas estocadas na fábrica.....	43
Figura 2-8 – Viga posicionada para transporte	43
Figura 2-9 – Braço de alavanca da resultante do peso da viga em relação ao eixo de giro	46
Figura 2-10 – Esquema de equilíbrio estático de viga sobre um caminhão (apoio elástico)	48
Figura 2-11 – Diagrama da função $g(\alpha)$ relacionado à α_{crit}	51
Figura 2-12 - Equilíbrio da viga durante a suspensão	52
Figura 2-13 – Relação entre inércia efetiva e giro da seção.....	55
Figura 2-14 – Razão máxima c_r/c_a para fator de segurança da PCI BT-72	56
Figura 2-15 – Carga crítica adimensional de vigas içadas por cabos verticais em função do comprimento do balanço	58
Figura 2-16 - Carga crítica adimensional para cabos posicionados próximos às extremidades, zoom da Figura 2-15.....	58
Figura 2-17 – Aparelho de apoio elastomérico cintado	60
Figura 2-18 - Viga com eixo rotacionado em relação ao eixo do apoio.....	61
Figura 2-19 – Representação da inclinação entre o aparelho de apoio e a viga.....	62
Figura 2-20 – Distribuição de tensão em aparelho de apoio em ponte reta ortogonal e esconsa	63

Figura 2-21 – Viga PCI BT-54 ensaiada em situação transitória	64
Figura 2-22 – Diagrama força-giro por torção sem ajuste com epóxi e com ajuste da base	65
Figura 2-23 - Diagrama força-giro por torção para a viga BT-54 sobre aparelhos de apoio.....	65
Figura 2-24 – Previsão da carga de tombamento pelo método de Mast (1993)	66
Figura 2-25 – Diagrama força-deslocamento axial para aparelho apoio cintado	68
Figura 2-26 – Configuração da fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios	69
Figura 2-27 - Posição do carregamento transversal acima do centro de cisalhamento	71
Figura 2-28 – Proposta de fator de redução de momento $\eta = \mu M_{res}$ com a razão de esbeltez λ	77
Figura 2-29 - Instabilidade lateral de vigas perfeitas e imperfeitas.....	84
Figura 2-30 – Deslocamentos laterais e giros da seção	84
Figura 2-31 – Dimensões para a verificação da estabilidade lateral	87
Figura 2-32 – Excentricidade entre o aparelho de apoio e a viga.....	89
Figura 2-33 – Tolerância de não planicidade do apoio.....	90
Figura 2-34 - Comportamento do concreto à compressão representado pelo diagrama parabólico	92
Figura 2-35 – Comportamento do concreto à tração representado pelo diagrama bilinear	94
Figura 2-36 – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal da viga	97
Figura 2-37 – Diagrama momento-curvatura $M-1/r$ e rigidez EI_{sec}	100
Figura 2-38 – Viga TB1 ensaiada por Mattock (1971).....	101
Figura 2-39 – Divisão do domínio da viga para aplicação do método de Simpson	101
Figura 2-40 – Diagrama $M-1/r$ da viga TB1.....	102
Figura 2-41 – Resposta força-deslocamento da viga TB1	102
Figura 2-42 - Diagrama torção-rotação típico de elementos de concreto.....	103
Figura 2-43 – Treliça espacial idealizada por Rausch.....	106
Figura 2-44 – Propriedades da seção transversal.....	109
Figura 3-1 – Dimensões da seção transversal da viga PCI BT-72. Unidade [cm]	111
Figura 3-2 – Esquema estático da viga PCI BT-72	111
Figura 3-3 – Representação dos cabos de protensão da viga PCI BT-72	112

Figura 3-4 – Conversão de áreas para determinação da inércia à torção	114
Figura 3-5 – Modelo do caminhão considerado e dimensões para a verificação da estabilidade	123
Figura 3-6 – Protensão temporária da mesa superior para melhorar a segurança à instabilidade lateral em transporte.....	124
Figura 3-7 – Dimensões do aparelho de apoio cintado. Unidade [mm].....	130
Figura 3-8 – Sistema de forças devido à protensão sobre a viga de concreto biapoiada PCI BT-72 ...	135
Figura 3-9 – Gradiente de temperatura para cálculo da curvatura da viga PCI BT-72	136
Figura 3-10 – Modelo para o cálculo do giro no apoio devido à gradiente térmico	137
Figura 3-11 – Viga C2A ensaiada por Hurff (2010)	141
Figura 3-12 – Esquema estático da viga C2A	141
Figura 3-13 – Viga com travamentos laterais	142
Figura 3-14 – Adaptação da seção para o cálculo da rigidez à torção. Unidade [cm]	151
Figura 3-15 – Diagrama momento-curvatura da C2A.....	152
Figura 4-1 – Diagrama M-1/r para a viga PCI BT-72.....	158
Figura 4-2 – Relação entre momentos e f_{ck} para a PCI BT-72.....	161
Figura 4-3 - Relação entre momentos e f_{ck} para a viga com 35 m de vão.....	162
Figura 4-4 - Relação carga crítica x f_{ck} das vigas em içamento	163
Figura 4-5 - Relação carga crítica x f_{ck} das vigas em transporte.....	163
Figura 4-6 – Variação do F.S. em função do f_{ck} para a viga PCI BT-72 em içamento	165
Figura 4-7 - Variação do F.S. em função do f_{ck} para a viga PCI BT-72 em transporte.....	165
Figura 4-8 - Relação entre momento fletor e imperfeição de deslocamento lateral para a viga PCI BT-72.....	167
Figura 4-9 - Relação entre momento fletor e imperfeição de rotação por torção para a viga PCI BT-72	167
Figura 4-10 - Relação entre momento fletor e imperfeição de deslocamento lateral para a viga de 35 m	168
Figura 4-11 - Relação entre momento fletor e imperfeição de giro para a viga de 35 m.....	168
Figura 4-12 - Relação carga crítica – deslocamento lateral para viga em içamento	171
Figura 4-13 - Relação carga crítica – deslocamento lateral para viga em transporte.....	171

Figura 4-14 – F.S. em içamento	173
Figura 4-15 – F.S. em transporte	173
Figura 4-16 – Relação entre momentos e esbeltez do BS:8110 (2007).....	174
Figura 4-17 - Relação entre momentos e esbeltez do EUROCODE 2 (2004).....	174
Figura 4-18 – Relação carga crítica - esbeltez do BS:8110 das vigas em içamento.....	177
Figura 4-19 - Relação carga crítica - esbeltez do EUROCODE 2 das vigas em içamento.....	177
Figura 4-20 - Relação carga crítica-esbeltez do BS:8110 das vigas em transporte	178
Figura 4-21 - Relação carga crítica -esbeltez do EUROCODE 2 das vigas em transporte	178
Figura 4-22 – F.S. para a viga em içamento	179
Figura 4-23 – F.S. para a viga em transporte.....	179
Figura 4-24 – Relação entre λ e $v_{ão}$	180
Figura 4-25 - Relação entre momentos e esbeltez do BS:8110 (2007)	183
Figura 4-26 - Relação entre momentos e esbeltez do EUROCODE 2 (2004).....	183
Figura 4-27 – Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no içamento (esbeltez BS:8110).....	184
Figura 4-28 - Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no içamento (esbeltez EUROCODE 2).....	184
Figura 4-29 – Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no transporte (esbeltez BS:8110).....	185
Figura 4-30 - Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no transporte (esbeltez EUROCODE 2).....	185
Figura 4-31 – F.S. para a fase de içamento	186
Figura 4-32 – F.S. para a fase transporte.....	186
Figura 4-33 – Viga I. Unidade [cm]	188
Figura 4-34 - Viga retangular analisada por Lima (1995). Unidade [cm].....	188
Figura 4-35 – Momentos solicitantes para viga I	190
Figura 4-36 – Momentos solicitantes para viga retangular	190
Figura 4-37 – Relação entre esbeltez do BS:8110 e carga crítica da viga I em transporte.....	191
Figura 4-38 - Relação entre esbeltez do EUROCODE 2 e carga crítica da viga I em transporte.....	191

Figura 4-39 – F.S. içamento em relação à esbeltez do BS:8110	192
Figura 4-40 - F.S. içamento em relação à esbeltez do EUROCODE 2	192
Figura 4-41 – F.S. transporte em relação à esbeltez do BS:8110	193
Figura 4-42 - F.S. transporte em relação à esbeltez do EUROCODE 2	193
Figura 4-43 – F.S. içamento em relação à esbeltez do BS:8110	195
Figura 4-44 - F.S. içamento em relação à esbeltez do EUROCODE 2	195
Figura 4-45 – Carga crítica em içamento em relação à esbeltez do BS:8110	195
Figura 4-46 - Carga crítica em içamento em relação à esbeltez do EUROCODE 2	195
Figura 4-47 – Carga crítica em função do comprimento do balanço	197
Figura 4-48 – F.S. no içamento em função do balanço	197

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de α_{crit}	51
Tabela 2 - Valores de β_n	88
Tabela 3 – Coeficiente de St. Venant (β) para seções retangulares (fonte: Hsu 1984)	104
Tabela 4 - Propriedades geométricas da viga protendida PCI BT-72	112
Tabela 5 - Propriedades físicas do concreto da viga PCI BT-72.....	113
Tabela 6 - Propriedades do aparelho de apoio elastomérico cintado	130
Tabela 7 – Propriedades da seção transversal	136
Tabela 8 – Quadro resumo de carga crítica da viga PCI BT-72 [kN/m].....	139
Tabela 9 – Quadro resumo de fatores de segurança.....	139
Tabela 10 - Propriedades geométricas da viga C2A	140
Tabela 11 – Propriedades dos materiais da viga C2A.....	140
Tabela 12 – Especificações das armaduras e força de protensão da viga C2A.....	141
Tabela 13 - Resumo dos resultados experimentais (Hurff 2010).....	149
Tabela 14 - Quadro resumo da viga protendida C2A de Hurff (2010)	156
Tabela 15 – Momento crítico para situações transitórias da viga PCI BT-72 [kN.m]	157
Tabela 16 – Momento crítico da viga PCI BT-72 com restrição à torção [kN.m]	157
Tabela 17 - Momentos solicitantes com a variação do f_{ck} da viga PCI BT-72 [kN.m]	160
Tabela 18 - Momentos solicitantes com a variação do f_{ck} da viga de 35 m [kN.m].....	161
Tabela 19 - Carga crítica nas fases transitórias da PCI BT-72 com a variação do f_{ck} [kN/m]	163
Tabela 20 - Fatores de segurança para içamento e transporte da PCI BT-72 com variação do f_{ck}	164
Tabela 21 - Momentos solicitantes com a variação do δ_0 e θ_0 [kN.m].....	166
Tabela 22 - Momentos solicitantes (kN.m) com a variação do δ_0 e θ_0	168
Tabela 23 – Cargas críticas para içamento e transporte variando as imperfeições geométricas [kN/m]	170
Tabela 24 – Fatores de segurança para a variação do deslocamento lateral em transporte e içamento	172
Tabela 25 – Momentos solicitantes com a variação do vão [kN.m]	174

Tabela 26 – Comparação da esbeltez das vigas com os limites de normas técnicas	175
Tabela 27 – Carga crítica nas fases transitórias com a variação do vão [kN/m]	176
Tabela 28 – Fatores de segurança para içamento e transporte com variação do vão.....	178
Tabela 29 – Esbeltez para variação do vão para f_{ck} de 40, 60 e 90 MPa	180
Tabela 30 – Esbeltez em função do M_{crit} elástico	181
Tabela 31 – Momentos solicitantes com variação da largura da mesa comprimida.....	182
Tabela 32 – Carga crítica nas fases transitórias da viga PCI BT-63 com a variação da mesa comprimida [kN/m]	184
Tabela 33 – Fatores de segurança variando a largura da mesa, para vigas PCI BT-63 de 32 m	186
Tabela 34 - Fatores de segurança variando a largura da mesa, para vigas de 40 m	187
Tabela 35 – Momentos solicitantes com variação da largura da alma na viga I [kN.m].....	189
Tabela 36 - Momentos solicitantes com variação da largura da viga retangular [kN.m]	189
Tabela 37 – Carga crítica na fase de transporte da viga I com a variação da alma [kN/m].....	191
Tabela 38 – Fatores de segurança para viga I.....	192
Tabela 39 – Fatores de segurança e carga crítica [kN/m] para viga retangular em içamento	194
Tabela 40 – Carga crítica [kN/m] e F.S. de viga em içamento com a variação dos balanços	196
Tabela 41 – Limites de esbeltez para situações transitórias	198
Tabela 42 – Relação entre carga crítica e peso próprio das análises paramétricas.....	199
Tabela 43 – Momentos referentes aos limites estimados nas análises paramétricas [kN.m]	199
Tabela 44 – Relações entre momentos	200

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	27
1.1	Considerações Iniciais	27
1.2	Objetivos.....	30
1.3	Justificativa	30
1.4	Apresentação do trabalho	34
2	FUNDAMENTAÇÃO.....	35
2.1	Instabilidade lateral.....	35
2.1.1	Considerações iniciais.....	35
2.1.2	Instabilidade lateral por deformação.....	36
2.1.3	Instabilidade lateral por tombamento.....	41
2.2	Instabilidade lateral nas situações transitórias.....	42
2.2.1	Considerações iniciais.....	42
2.2.2	Instabilidade lateral na fase de transporte	43
2.2.3	Instabilidade lateral na fase de içamento	50
2.2.4	Instabilidade lateral na fase transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios	59
2.2.5	Instabilidade lateral na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios.....	68
2.3	Normalização e a estabilidade lateral de vigas de concreto.....	86
2.3.1	Considerações iniciais.....	86
2.3.2	ABNT NBR 9062:2006	86
2.3.3	ABNT NBR 6118:2007	87
2.3.4	ACI 318.....	88
2.3.5	PCI - Bridge Design Manual.....	88

2.3.6	BS:8110	90
2.3.7	EUROCODE 2	91
2.4	Rigidez à flexão em elementos de concreto.....	92
2.4.1	Considerações iniciais	92
2.4.2	Diagrama momento-curvatura.....	92
2.4.3	Validação do Diagrama Momento-curvatura	100
2.5	Rigidez à torção em concreto	102
2.5.1	Considerações iniciais	102
2.5.2	Rigidez à torção	102
2.5.3	Torção em Concreto Protendido.....	109
3	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	111
3.1	Considerações iniciais.....	111
3.2	Análise da viga PCI BT-72	111
3.2.1	Içamento	113
3.2.2	Transporte.....	121
3.2.3	Fase transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios	128
3.3	Análise da viga C2A ensaiada por Hurff (2010)	139
3.3.1	Fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios	141
4	SIMULAÇÕES E ANÁLISE PARAMÉTRICA.....	157
4.1	Considerações iniciais.....	157
4.2	Momento crítico de instabilidade da viga PCI BT-72	157
4.3	Análises paramétricas.....	158
4.3.1	Considerações iniciais	158

4.3.2	Varição da resistência à compressão do concreto	159
4.3.3	Varição das imperfeições geométricas	165
4.3.4	Varição do comprimento do vão	173
4.3.5	Varição da largura da mesa comprimida.....	181
4.3.6	Varição da espessura da alma da viga: seção I e retangular.....	187
4.3.7	Considerações finais e quadros resumo	197
5	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	202
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	206

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Dentre os sistemas estruturais que utilizam vigas pré-moldadas ganham destaque no alcance de grandes vãos as coberturas e as superestruturas de pontes em viga. Em muitos países já é prática a utilização de vãos acima de 60 m em vigas protendidas de ponte. A Figura 1-1 apresenta uma viga de 65 m de vão e 2,8 m de altura executada no Canadá.



Figura 1-1 - Viga de ponte com 65 m de vão e 2,8 m de altura em Calgary, Canadá

Fonte: Tadros et al (2009)

Os hangares de aeroportos normalmente exigem coberturas com vãos longos. A Figura 1-2 ilustra a construção do hangar do aeroporto de Londres com vigas T pré-moldadas em canteiro, sendo a protensão com aderência posterior. A espessura da alma e da mesa é de 10,2 cm, considerada bastante fina para elementos de concreto.

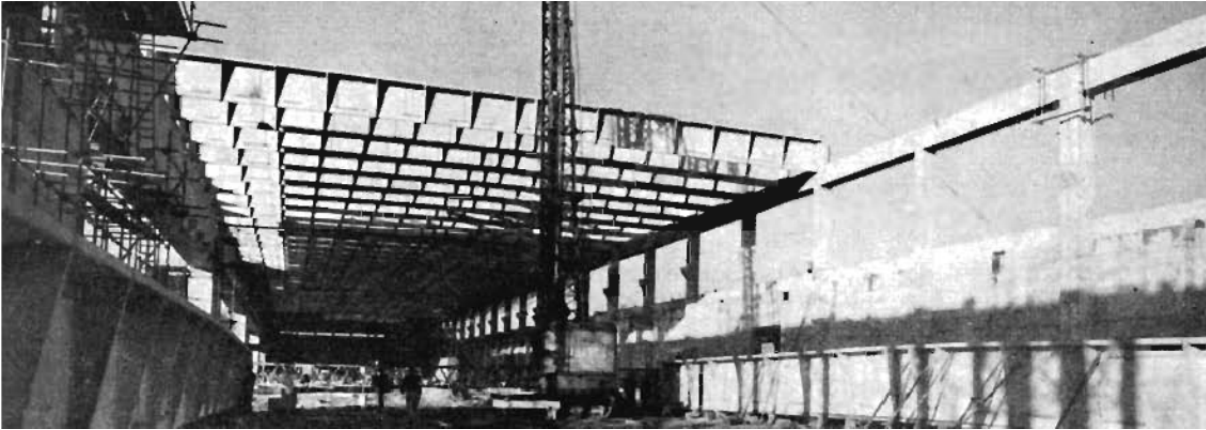


Figura 1-2 - Vigas de cobertura do hangar do aeroporto de Londres com 33,5 m de vão e 1,83 m de altura

Fonte: Harris (1952)

O aumento do comprimento dos vãos foi possível devido ao avanço tecnológico dos materiais do concreto, dos processos de fabricação e dos equipamentos de transporte e içamento.

Há casos de obras de ponte cujas fundações são parcela considerável do custo. Então a utilização de longos vãos pode ser economicamente vantajosa pela possível diminuição na quantidade de elementos que compõe a infraestrutura.

Segundo **Hill et al (2009)** as longas vigas pré-moldadas protendidas são econômicas quando comparadas às vigas metálicas utilizadas para o mesmo fim, além de tipicamente exigirem menos manutenção.

A produção de vigas pré-moldadas em fábrica, segundo **El Debs (2000)**, permite maior controle de qualidade e, conseqüentemente, a execução de elementos mais esbeltos com vãos maiores.

No Brasil, a produção destes elementos para pontes normalmente é realizada em canteiro com a utilização de protensão com aderência posterior. Segundo **El Debs (2000)**, isto acontece por razões culturais e econômicas, pois a produção em canteiro elimina a necessidade de transporte e, conseqüentemente, impostos devido à produção industrial e circulação de mercadorias.

No entanto, com a evolução da tecnologia dos materiais e a necessidade de vãos maiores, respaldada na boa prática da engenharia estrutural, a tendência natural é a produção de vigas pré-moldadas em fábrica.

A rigidez de giro à torção dos apoios é um parâmetro fundamental para estabilidade lateral de vigas. Nas formulações clássicas, este movimento é adotado como restrito para obtenção de carga crítica de instabilidade.

Instabilidade em vigas de concreto moldado no local dificilmente será crítica no dimensionamento, pois normalmente os projetistas as proporcionam com elevada rigidez à torção. Além disso, os apoios apresentam restrições adequadas e o elemento é ligado às lajes que impedem deslocamentos laterais.

As vigas pré-moldadas estão inseridas em um contexto diferente. Além da fase de serviço, estes elementos estão sujeitos às fases transitórias que são inerentes ao processo de pré-moldagem.

Nestas situações, as ligações são provisórias e não estabelecem restrição adequada à rotação por torção, sendo necessário admitir algum grau de rotação elástica nestes pontos para estimar a carga crítica de instabilidade. Portanto, as vigas pré-moldadas despendem atenção quanto à estabilidade lateral.

Apesar de serem muito mais robustas que as vigas metálicas, a utilização de longos vãos torna as vigas pré-moldadas suscetíveis à instabilidade lateral, devido ao grande comprimento e altura e significava redução na largura.

No Brasil este assunto foi estudado de maneira aprofundada por **Lima (1995 e 2002)** e **El Debs (2000)** que serão citados ao longo desta dissertação.

As fases transitórias estudadas no presente trabalho são: transporte, içamento e apoio sobre aparelhos de neoprene cintados com e sem travamentos.

O assunto torna-se mais preocupante devido ao grande número de acidentes registrados com a ruptura de vigas por instabilidade lateral, como ocorrido no Brasil em 2009, com a queda de três vigas de 85 toneladas e cerca de 45 m de comprimento, na obra de um viaduto que passa sobre a Rodovia Régis Bittencourt em São Paulo.

1.2 Objetivos

A realização desta pesquisa é uma tentativa da determinação de limites de segurança contra instabilidade lateral de vigas de concreto em fases transitórias. Para isso, são utilizados procedimentos de análise e verificação de estabilidade destes elementos.

Dentre os objetivos específicos do trabalho, constam:

- Apresentar o fenômeno da instabilidade lateral em vigas de concreto em fase transitória, destacando as principais diferenças entre as fases estudadas;
- Apresentar detalhadamente os procedimentos de estimativa de carga crítica de instabilidade, momento crítico e verificação por fator de segurança nas fases abordadas. Alguns resultados analíticos são comparados a resultados de ensaios de pesquisas da literatura;
- Realizar análises paramétricas, utilizando os procedimentos apresentados, variando parâmetros que são considerados importantes para instabilidade. Como resultado, são apresentados alguns limites de segurança, na tentativa de auxiliar os projetistas destes elementos na verificação da instabilidade lateral de longas vigas.

1.3 Justificativa

Nas fases transitórias as ligações que formam os apoios dão liberdade ao elemento de se deslocar lateralmente e girar em torno do seu eixo longitudinal. Então, garantir a segurança das vigas depende principalmente da conformidade da execução das ligações com as tolerâncias estipuladas em projeto. Este tópico envolve muitas incertezas o que torna a análise extremamente complexa.

A seguir são apresentados casos de colapso de vigas em fases transitórias e as principais causas de maneira sucinta. Estes fatos são apresentados com intuito de justificar a pesquisa. As fotos seguem na Figura 1-3 e a descrição nos itens de (1) a (9).

a) Pennsylvania, Estados Unidos, colapso de vigas de 45,7 m em 2007. Segundo **Hurff e Kahn (2010)** atribuiu-se o tombamento ao deslocamento lateral provocado por gradiente térmico somado às imperfeições geométricas iniciais e desvios de montagem. As vigas estavam sobre aparelhos de apoio. Como se vê na Figura 1-3 (1), as vigas do outro vão estão

contraventadas por escoras de madeira ligadas às mesas que segundo os autores não impedem deslocamentos laterais.

b) Arizona, Estados Unidos, colapso de nove vigas de 35m durante a construção da ponte Red Mountain Freeway em 2007. O lauda do acidente, feito por **Oesterle et al (2007)**, apresenta duas possíveis causas: tombamento ou escorregamento. Contribuíram para isso os possíveis desvios no posicionamento das vigas sobre aparelhos de apoio, o tempo excessivo em que as vigas ficaram sem os travamentos laterais definitivos. A possibilidade de deslizamento foi abordada porque foram utilizados aparelhos de apoio com a face superior revestida por teflon que tem baixo coeficiente de atrito para permitir deslocamentos horizontais. Segundo **Oesterle et al (2007)** vibrações podem reduzir o coeficiente de atrito em 75%.

c) Oregon, Estados Unidos, viga de 51 m tombou durante a travessia de um trecho em curva com superelevação do viaduto Marquam em 2013¹. As causas não foram levantadas. No entanto, o deslocamento lateral e giro provocados pela situação descrita, somados às imperfeições iniciais e possíveis desvios no posicionamento do elemento sobre o caminhão, podem ter provocado um momento de tombamento suficiente para tombar o caminhão.

d) Nebraska, Estados Unidos².

e) São Paulo, Brasil, vigas de 45 m de vão tombaram após ficarem quatro dias sobre os aparelhos de apoio sem travamentos adequados em 2009. Segundo reportagem sobre o relatório do IPT³ as possíveis causas: desnível nos apoios, baixo coeficiente de atrito entre a viga e o aparelho de apoio e falta de travamentos. Há registros que a quinta viga deste viaduto não foi posicionada devido a problemas com transporte.

f) Hawaii, Estados Unidos, quatro vigas de 37 m tombaram após estarem sete dias posicionadas sobre aparelhos de apoio em 1996⁴. A equipe de consultoria Exponent averiguou o acidente e concluíram que a principal causa foi a restrição ao alongamento da viga por efeito térmico (configuração da ponte) que provocou instabilidade lateral de uma das vigas e, conseqüentemente, o colapso das vigas adjacentes.

¹ [disponível em <http://www.katu.com/news/local/Truck-catches-fire-on-Marquam-Bridge-I-5-closed-204369351.html>. Acesso em 22 de março 2014.

² [disponível em <ftp://ftp.wsdot.wa.gov/public/Bridge/WBES2009/B/6B3/6B3.pdf>. Acesso em 22 março 2014]

³[disponível em <https://groups.google.com/forum/#!topic/ClubedosEngenheirosCivis/ppzkZSrkJTw4>. Acesso em 24 março 2014]

⁴ [disponível em http://www.exponent.com/bridge_girder_failure_during_construction/. Acesso em 22 março 2014]

g) Carolina do Norte, Estados Unidos, uma viga de 110 toneladas tombou logo após seu posicionamento sobre os apoios em 2008. A equipe de Consultoria Rimkus⁵ concluiu que o acidente ocorreu devido à soldagem inadequada dos tirantes que compunham os travamentos temporários da viga. O incidente foi registrado em vídeo.

h) Acidente apresentado por **Catania e Cocchi (1976) apud Lima (2002)** que mostra um caso de viga de cobertura que tombou lateralmente devido à precariedade das ligações em fase transitória.

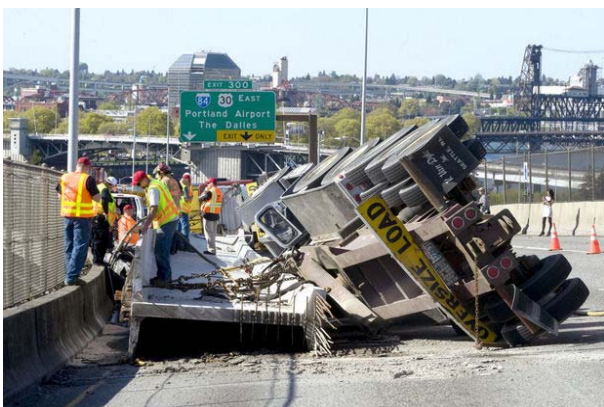
i) O cuidado com esta etapa é justificado devido aos registros de acidentes com vigas sendo transportadas. Na Figura 1-3, **Imper e Laszlo (1987)** apresentam um acidente nesta fase transitória e propõem recomendações para verificação de segurança.



(a)



(b)



(c)



(d)

⁵ [disponível em <http://www.starnewsonline.com/article/20081205/ARTICLES/812050284>. Acesso em 22 março 2014]



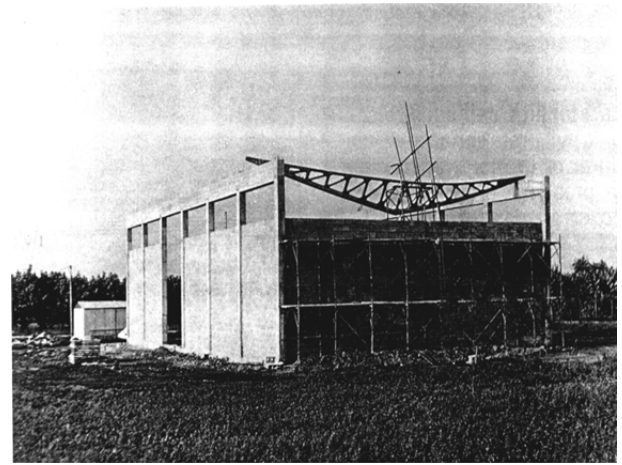
(e)



(f)



(g)



(h)



(i)

Figura 1-3 – Acidentes com vigas em fases transitórias

A apresentação dos acidentes ilustrados na Figura 1-3 tem o objetivo de destacar a importância do tema e o quanto ele ainda deve ser estudado. Nestas fases a carga atuante é o peso próprio. Por serem elementos extremamente pesados, as imperfeições geométricas, os desvios de montagem, os travamentos inadequados, dentre outros fatores passam a ter fundamental influência na sua estabilidade.

1.4 Apresentação do trabalho

No *item 2* é apresentada a revisão bibliográfica, sendo tratados os fatores que influenciam na estabilidade lateral de vigas em situações temporárias e as diferenças entre instabilidade por flexo-torção e por tombamento. Sendo feita a revisão sobre como determinar as rigidezes à torção de apoios elásticos. Também serão apresentados tópicos para a determinação de rigidez à flexão lateral e à torção de elementos de concreto utilizados para o cálculo do momento crítico em situação transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios.

Os procedimentos para verificação de estabilidade lateral de forma detalhada são delineados no *item 3*. Os exemplos apresentados são: cálculo de carga crítica em fases transitórias, cálculo de momento crítico na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios e determinação de fator de segurança para situações transitórias.

A partir dos exemplos numéricos será avaliada a resposta à instabilidade das vigas com a variação de parâmetros geométricos no *item 4*. Por exemplo, a viga PCI BT-72 será analisada reduzindo-se gradualmente a largura de sua mesa comprimida.

No *item 5* e *item 6* são apresentadas as conclusões e referência bibliográficas, respectivamente.

2 FUNDAMENTAÇÃO

2.1 Instabilidade lateral

2.1.1 Considerações iniciais

A esbeltez de elementos estruturais sempre gera preocupação quanto à instabilidade. Em vigas carregadas transversalmente o fenômeno se caracteriza por deslocamento lateral, acompanhado de giro da seção. Quando o elemento é muito esbelto a ruptura por instabilidade ou giro de corpo rígido ocorre antes da resistência à flexão ser alcançada, para a qual a peça foi dimensionada.

A princípio, a solução dos projetistas era dimensionar elementos mais robustos, para atender aos limites de esbeltez e prevenir instabilidade. Portanto a preocupação se focava na flexibilidade nas ligações dos apoios em situações transitórias. Com o avanço tecnológico dos materiais e a sofisticação nas análises, as vigas ficam cada vez mais longas, altas e pesadas, retomando a preocupação com a esbeltez.

São apresentados a seguir os tipos de instabilidade à que uma viga de concreto pré-moldado pode estar sujeita em situações temporárias:

- por deformação, com apoios restringindo o giro e deslocamento lateral. Esta situação é típica de obras de ponte quando já foram concretadas as transversinas de apoio;
- por deformação, com apoios flexíveis. Esta ruptura pode ocorrer no içamento, no transporte e em situação transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios;
- tombamento, com ruptura do apoio. Típico de transporte e em situação transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios.

Na situação de içamento, segundo **Mast (1993)**, as propriedades elásticas que compõe a rigidez à flexão lateral da viga são os parâmetros que governam a instabilidade. Portanto, apesar da flexibilidade da ligação, nesta fase a ruptura ocorre no elemento por deformação por flexão lateral, pois devido ao giro do elemento nos apoios, não ocorrem deformações por torção significativas e a ligação não rompe.

Nos casos de viga em transporte e sobre aparelhos de apoio, para **Mast (1993)** a instabilidade mais provável de ocorrer é o tombamento, pois as ligações apresentam um limite de rotação que quando superado a viga tomba. Então nestas fases é importante conhecer o comportamento do apoio elástico.

No entanto, segundo **George (1992) apud Stratford et al (1999)** os veículos articulados em movimento são normalmente submetidos à 80 % da aceleração G necessária para tombá-los. Segundo **Stratford et al (1999)** espera-se que caminhões transportando longas vigas alcancem no máximo 32 % da aceleração máxima, devido ao grande peso da carga. Portanto, é pouco provável que ocorra o tombamento, então **Stratford et al (1999)** recomendam a avaliação de instabilidade no transporte por deformação, considerando as parcelas de torção e flexão lateral.

Na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios aplica-se a análise clássica, considerando os apoios rígidos à torção e a deslocamentos laterais. São calculados nos exemplos numéricos os momentos críticos de instabilidade de vigas protendidas de ponte nesta situação.

2.1.2 Instabilidade lateral por deformação

As ligações formadas entre apoios temporários ou não e as vigas pré-moldadas podem ser rígidas à torção ou flexíveis (liberdade de giro). Na maioria das formulações a flexibilidade dos apoios é considerada por ajustes das soluções clássicas através de coeficientes.

Na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios podem ser utilizadas as soluções clássicas, adaptando somente as rigidezes à torção e a flexão lateral, para considerar a não-linearidade física do concreto. Mas como mencionado, **Stratford et al (1999)** consideram a solução clássica para transporte.

Algumas formulações para carga crítica de instabilidade na fase de içamento desconsideram a parcela de rigidez à torção. Esta hipótese se baseia no fato de que a seção no meio do vão ao girar tenta provocar deformações de torção, mas devido à grande rigidez do elemento e à falta de rigidez da ligação com os cabos, a seção no apoio gira também. Portanto as deformações por torção podem ser desprezadas, sendo considerada somente a parcela de

deformação por flexão lateral. As principais formulações que utilizam esta hipótese são as de **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**.

Um dos primeiros autores a considerar a flexibilidade das ligações à torção nas fases transitórias foi **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964)**. As formulações consideram as rigidezes fundamentais da instabilidade por flexo-torção, sendo a flexibilidade fornecida por coeficientes.

Se em alguma das fases transitórias a viga pré-moldada for submetida a tensões que superem o limite de fissuração, as rigidezes à torção e flexão lateral podem ser ajustadas para o cálculo da carga crítica de instabilidade. No entanto, **Mast (1993)** afirma que é indesejável que as vigas sofram fissuração em fases transitórias e que devido à sua robustez é pouco provável que isso ocorra. Portanto nas fases em que os apoios são flexíveis são utilizadas rigidezes elásticas e para a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios será considerada a fissuração.

É interessante conhecer as soluções clássicas, pois a forma com que a viga se deforma segue os modos de instabilidade obtidos através destas soluções.

Por exemplo, **Timoshenko e Gere (1988)** apresentam a solução geral das equações diferenciais para uma viga biapoiada com momentos aplicados nos apoios (flexão pura), sendo ϕ o giro unitário. Esta solução já considera as condições de contorno essenciais e consiste na forma que a viga sofrerá flambagem, Equação (1).

$$\phi = A_1 \text{sen}(mz) \quad (1)$$

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{c}{2C_1} \quad \beta = \frac{M_0^2}{BC_1} \quad (3)$$

em que

z : coordenada do eixo longitudinal;

A_1 : constante de integração;

C : rigidez à torção de St. Venant;

C_1 : rigidez ao empenamento;

M_o : momento aplicado;

B : rigidez à flexão lateral EI .

Portanto a viga adquire a forma de uma senóide quando sofre instabilidade. Na aplicação das condições de contorno surge a seguinte expressão que deve ser verificada, Equação (4).

$$\text{sen } m\ell = 0 \quad (4)$$

Sendo ℓ o vão da viga, o menor valor de m para que a Equação (4) seja verificada é π/ℓ que nada mais é que o autovalor ou raiz da equação. Então, substituindo as Equações (2) e (3) na Equação (5), obtém-se a Equação (6) que é a solução de momento crítico de instabilidade lateral para vigas submetidas à flexão pura.

$$m = \frac{\pi}{\ell} \quad (5)$$

$$(M_o)_{\text{crit}} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{BC \left(1 + \frac{C_1 \pi^2}{C \ell^2} \right)} \quad (6)$$

Se a intenção fosse avaliar a mesma viga com um apoio intermediário no meio do vão seria necessário obter um autovetor maior ou múltiplo da Equação (5), que neste caso seria $3\pi/\ell$. O que significa que a senóide teria mais pontos de inflexão.

Para ilustrar o que foi dito, serão apresentados resultados de uma simulação numérica bastante simples, através do programa DIANA 9.4.4, para mostrar os modos de instabilidade.

A viga é extremamente esbelta, restrita a deslocamento lateral e giro nos apoios e com carregamento aplicado no meio do vão, Figura 2-1. A peça foi modelada com um elemento finito de casca que permite a análise de instabilidade lateral.

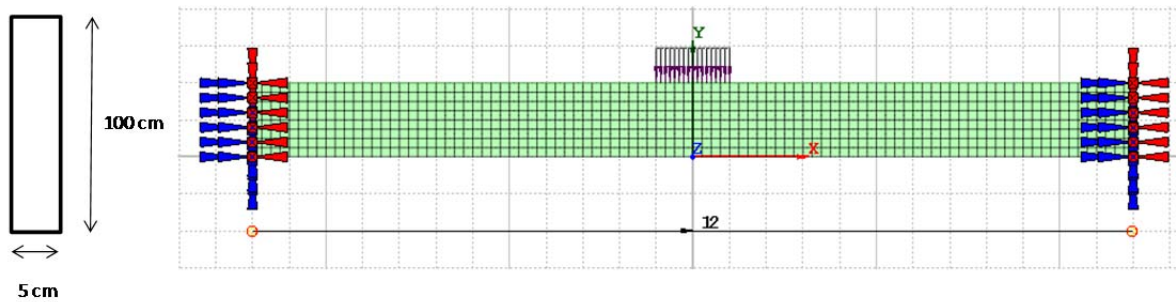


Figura 2-1 – Modelo de viga com elementos finitos de casca

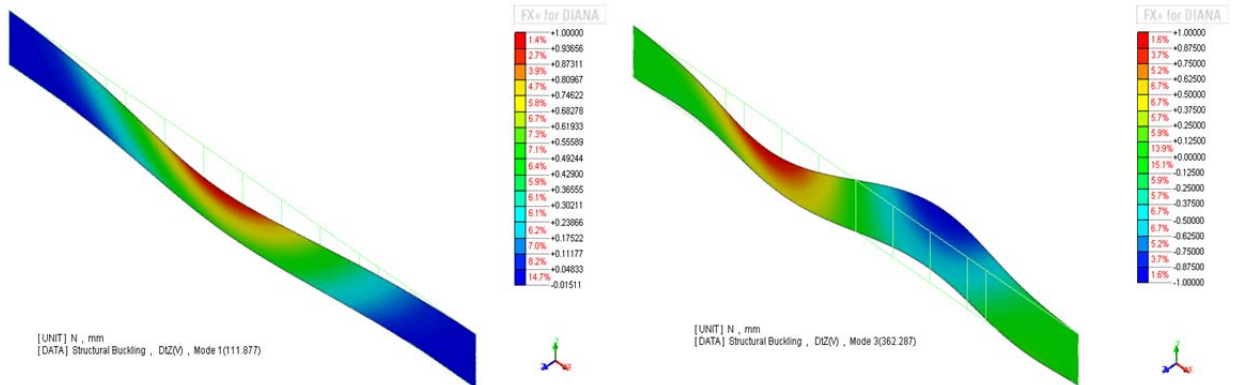


Figura 2-2 – Primeiro modo de instabilidade

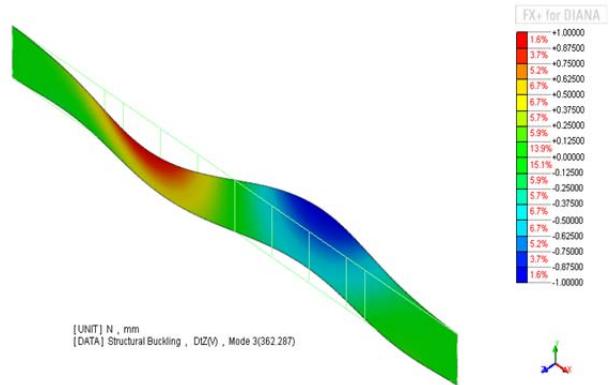


Figura 2-3 – Terceiro modo de instabilidade

Na Figura 2-2 e Figura 2-3, seguem o primeiro e o terceiro modo de instabilidade que tem forma de senóide como apresentado na solução de **Timoshenko e Gere (1988)**. A utilização do terceiro modo implica em uma carga crítica mais alta, ou seja, a viga terá maior capacidade antes de sofrer instabilidade.

Por isso, que em algumas normas é recomendado o espaçamento máximo entre apoios laterais, como o **ACI 318 (2008)** que recomenda que o espaçamento deve ser menor que 50 vezes a largura da face mais comprimida da viga.

Anderson (1971) presenciou a instabilidade de uma viga de aproximadamente 45m, suspensa por cabos que não ruiu porque interromperam o processo de içamento colocando-a de volta ao chão. A partir deste incidente, **Anderson (1971)** desenvolveu uma verificação simplificada para situações transitórias.

A hipótese adotada pelo autor é que a instabilidade pode ser avaliada através da flexão lateral sobre o eixo de menor inércia do elemento. Por alguns anos, a verificação de **Anderson (1971)** foi recomendada pela norma brasileira de pré-moldado **ANBT NBR 9062:2001** e pelo **PCI Bridge Design Manual (2003)**. no entanto, na última edição, foi retirada de ambas.

A verificação da segurança contra a instabilidade lateral para a etapa de suspensão por cabos recomendada por **Anderson (1971)** é o fator de segurança apresentado na Equação (7). Sendo adotado no mínimo igual a 2.

$$\gamma = \frac{y_{rot}}{\Delta_x} \quad (7)$$

onde,

y_{rot} : distância do ponto de fixação dos cabos ao centróide da seção;

Δ_x : deslocamento lateral no meio do vão da viga com incidência do peso próprio g .

O problema consiste em submeter a viga a seu peso próprio g considerando a flexão lateral, como mostrado na Figura 2-4 e, então, calcular sua flecha (Δ_x).

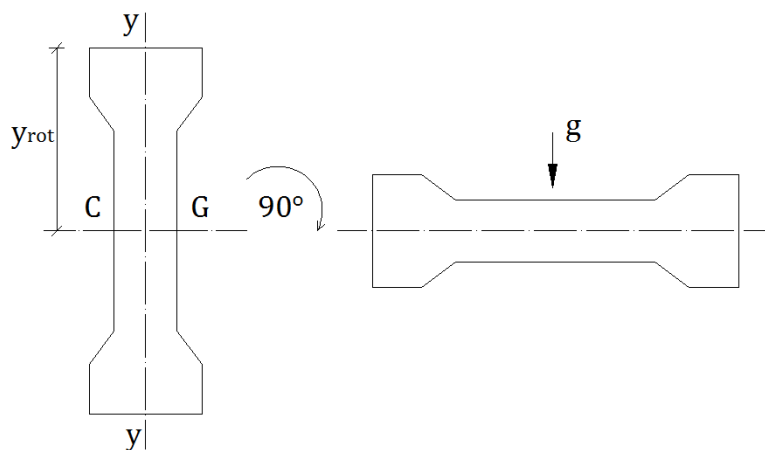


Figura 2-4 - Representação de uma seção transversal de viga tombada para verificação da segurança à instabilidade lateral

Fonte: Anderson (1971)

As formulações de **Mast (1989)** foram baseadas na ideia de **Anderson (1971)**. No entanto, apresentam uma análise mais ampla, em que são considerados os principais fatores envolvidos nas fases transitórias de longas vigas protendidas (item 2.2).

Os artigos publicados por **Mast (1989 e 1993)** se tornaram referência na verificação da estabilidade lateral de vigas pré-moldadas protendidas devido à simplicidade na abordagem do problema. O capítulo 8 do código americano **PCI Bridge Design Manual (2003)** é basicamente uma revisão destes trabalhos.

A ideia de **Mast (1989)** foi avaliar o problema através do equilíbrio da viga deformada à flexão lateral e considerando o comportamento elástico do material. Esta hipótese apresentou resultados semelhantes aos do ensaio realizado com a viga BT-72 em 1993 com 45,4 m de vão. Mais recentemente, **Hurff (2010)** também comprovou as hipóteses, pelo ensaio da viga BT-54 com 30,5 m de vão.

As formulações de **Mast (1993)** são utilizadas neste trabalho para o cálculo de fator de segurança e carga crítica de instabilidade.

2.1.3 Instabilidade lateral por tombamento

As fases transitórias de viga em transporte e sobre aparelhos de apoio apresentam diferenças importantes quando comparada à instabilidade em içamento e para **Mast (1993)** são fases muito mais complexas de se avaliar. Se atentarmos ao item 1.3 os acidentes que aconteceram recentemente se concentram nestas duas fases.

A principal diferença é a possibilidade de ruptura do apoio que pode acontecer antes de a viga ultrapassar o regime elástico. No item 2.2 são apresentadas maneiras de se determinar as constantes de mola de rotação do apoio para transporte e aparelho de apoio.

Na instabilidade clássica de vigas a ruptura é provocada pelo giro relativo entre o apoio e o meio do vão que no caso de elementos de concreto, quando ultrapassado o limite da resistência à tração, é acompanhado de fissuração, que reduz significativamente as rigidezes à flexão lateral e torção, como mostrado na Figura 2-5.

Mast (1993) afirma que as vigas normalmente utilizadas em pontes suportam grandes ângulos de rotação sem romper, devido à sua alta resistência à flexão lateral. No entanto, a rotação admissível dos apoios pode ser inferior à capacidade da viga, sendo o parâmetro limitante, Figura 2-6.

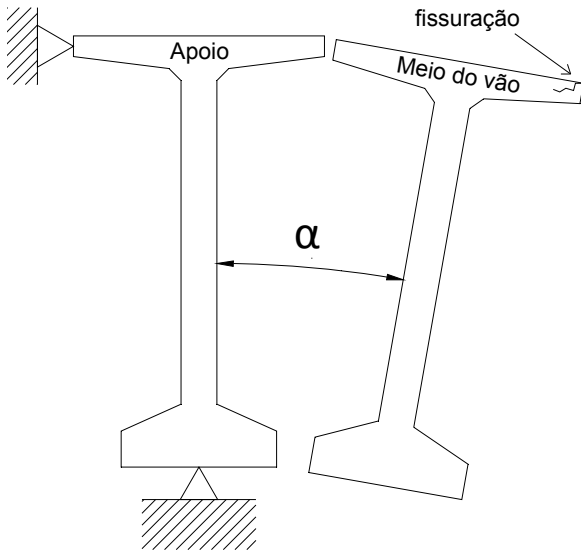


Figura 2-5 – Instabilidade por flexo-torção

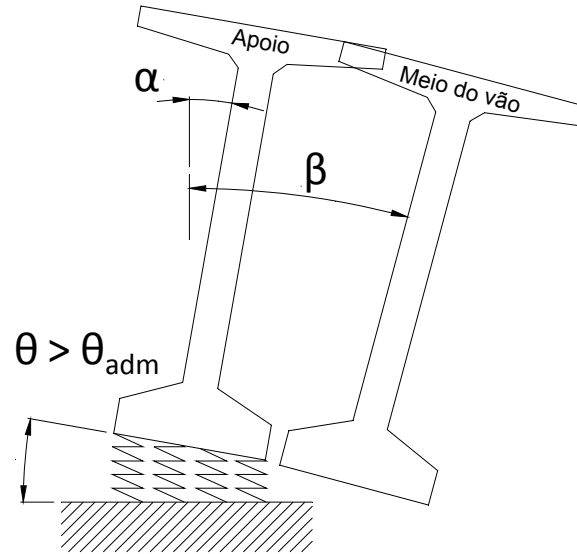


Figura 2-6 – Instabilidade por tombamento

Segundo **Mast (1993)** as vigas I de concreto tem a rigidez à torção 100 a 1000 vezes maior que as vigas I metálicas, então é pouco provável que os elementos de concreto sofram instabilidade por deformação nestas fases transitórias. **Mast (1993)** afirma que vigas como a PCI BT-72 podem suportar grandes ângulos de giro, inclusive maiores que os admissíveis para os apoios elásticos. Portanto na fase transitória de transporte a preocupação com a estabilidade da viga se volta à rigidez da suspensão do caminhão.

Para vigas sobre aparelhos de apoio existem algumas verificações de giro máximo admissível que podem ser determinados a partir das reações de apoio da fase de serviço. No entanto, existem poucas recomendações sobre estes dispositivos nas fases transitórias e sabe-se que sua rigidez a níveis baixos de força axial, comparados à situação de serviço, é muito baixa.

Para a análise destas duas fases são utilizadas as formulações de **Lebelle (1959)** e **Mast (1993)** para a estimativa da carga crítica de tombamento.

2.2 Instabilidade lateral nas situações transitórias

2.2.1 Considerações iniciais

Em situação de serviço as vigas pré-moldadas apresentam restrições suficientes nos apoios e ao longo do vão quando ligados às lajes ou tabuleiros de pontes, para garantir sua segurança. Então o foco das análises se volta às fases transitórias, pois são mais críticas para

instabilidade de vigas. Os itens a seguir são destinados a apresentar as formulações para verificação da estabilidade nestas fases.

2.2.2 Instabilidade lateral na fase de transporte

A prática da produção de longas vigas pré-moldadas em fábrica é bastante comum em obras de pontes e viadutos nos Estados Unidos, Canadá e no continente europeu. Nestes casos o transporte da fábrica à obra faz parte do processo, sendo necessária a análise da estabilidade lateral nesta situação transitória.

No Brasil já existem obras que estão utilizando esse procedimento em vista do maior controle da produção. Na Figura 2-7 e Figura 2-8⁶ são apresentadas as vigas utilizadas na obra do monotrilho de São Paulo.



Figura 2-7 – Vigas estocadas na fábrica



Figura 2-8 – Viga posicionada para transporte

⁶ [disponível em <http://www.ibracon.org.br/eventos/55CBC/PDFS/14H20RUIOYAMADA.pdf>. Acesso em 02 de maio 2014.

Nesta fase transitória o elemento é suscetível a tombar, pois além das suas imperfeições geométricas e desvios de posicionamento, a superelevação das vias tem grande influência na estabilidade.

Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964) apresenta um procedimento para obtenção da carga crítica de instabilidade p_{crit} de vigas sobre apoios deformáveis à torção. Esta deformabilidade é inserida ao problema através das condições de contorno. Com isso serão permitidos, de acordo com o coeficiente de mola K_θ , deslocamentos laterais e rotação nos apoios. Segue a solução na Equação (8).

$$p_{crit} = k \frac{16}{\ell^3} \sqrt{\alpha_{crit}} \sqrt{EI_y GI_t} \quad (8)$$

sendo,

k : constante que depende da rigidez das mesas no caso de vigas de seção I (coeficiente β) e do ponto de aplicação das cargas em relação ao centro de giro da sessão (coeficiente δ), segue a constante na Equação (9);

$$k = \sqrt{1 + 2,47\beta + 0,52\delta^2 - 0,72\delta} \quad (9)$$

onde,

β : coeficiente que leva em conta a rigidez lateral das mesas, Equação (10);

$$\beta = \frac{EI_{y,mesas}}{GI_t} \frac{2z}{\ell^2} \quad (10)$$

$I_{y,mesas}$: média ponderada das inércias da mesas das viga;

z : distância entre os centróides das mesas, no caso de seção retangular $z = 0$;

δ : coeficiente que leva em conta a posição do ponto de aplicação do carregamento, Equação (11);

$$\delta = \frac{2y_{\text{rot}}}{\ell} \sqrt{\frac{E_c I_y}{G_c I_t}} \quad (11)$$

y_{rot} : distância entre o ponto de aplicação de carga e o eixo de giro para vigas suspensas que coincide com a distância entre o ponto de fixação dos cabos e o centróide;

ℓ : vão total da viga;

E_c : módulo de elasticidade longitudinal do concreto;

I_y : momento de inércia em relação ao eixo vertical;

G_c : módulo de elasticidade transversal do concreto;

I_t : momento de inércia à torção;

α_{crit} : coeficiente que estima o efeito da deformabilidade nos apoios.

A partir das condições de contorno, considerando apoios deformáveis, **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964)** apresenta uma função que, para dado valor de K_θ , permite estimar α_{crit} e, conseqüentemente, a carga crítica, Equação (12).

$$\frac{K_\theta \ell}{2G I_t} = f(\alpha) = \frac{\frac{8}{15} \alpha - \frac{356}{10395} \alpha^2}{1 - \frac{11}{30} \alpha + \frac{6617}{415800} \alpha^2} \quad (12)$$

Mast (1993) apresenta um estudo amplo de vigas sobre apoios flexíveis. Dentre as possibilidades está inserido o caso de transporte de vigas. O autor destaca que a suspensão dos veículos é o principal agente para garantir a estabilidade ao tombamento do elemento, sendo esta resistência função da flexibilidade do apoio, representado por uma constante de mola K_θ .

Na Figura 2-9 é apresentado o esquema estático do momento de tombamento para uma viga sobre apoios elásticos e o momento resistente fornecido pelo apoio.

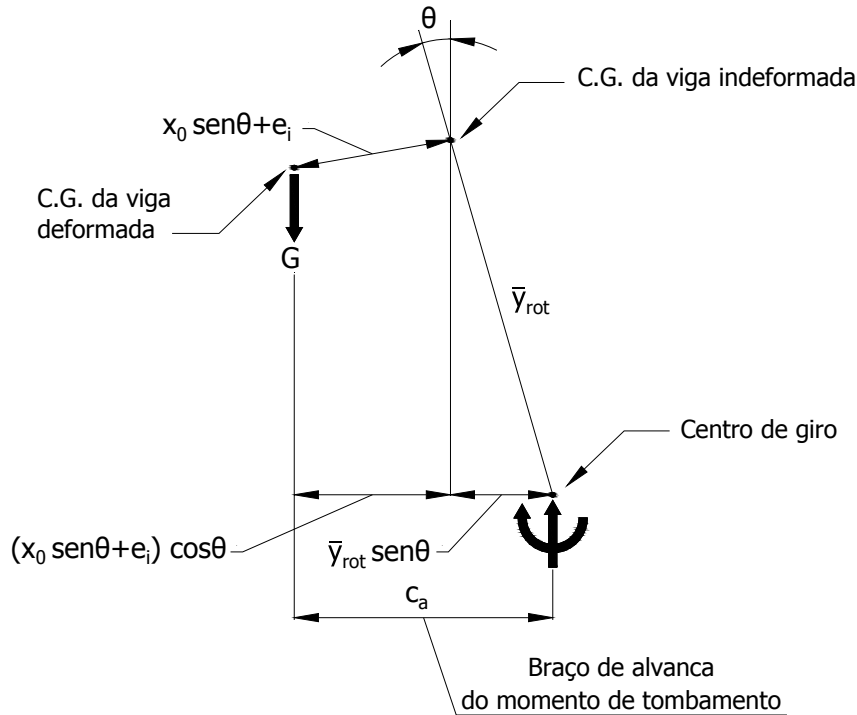


Figura 2-9 – Braço de alavanca da resultante do peso da viga em relação ao eixo de giro

Fonte: adaptado Mast (1993)

Nesta análise são estabelecidos fatores de segurança contra fissuração e ruptura de vigas posicionadas sobre um caminhão e seu reboque. A estabilidade é verificada quando o momento resistente é maior que o de tombamento. Toda a formulação apresentada a seguir é encontrada em **El Debs (2000)**.

Quando o veículo percorre uma superelevação na via, ocorre um giro do elemento constituído das parcelas da superelevação, da flexibilidade do sistema de suspensão e deformações elásticas por torção e flexão. Nesta configuração deve ser avaliada a tensão de compressão máxima para verificação da resistência do concreto necessária para a fase de transporte.

Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo de giro (Figura 2-9) e tomando os ângulos como pequenos, obtêm-se a Equação (13) que representa o ângulo de equilíbrio estático para o qual as tensões de compressão devem ser verificadas.

$$\theta = \frac{\alpha r + e_i}{r - \bar{y}_{rot} - x_0} \quad (13)$$

em que,

- α : ângulo de superelevação da via, Figura 2-10;
- r : raio de estabilidade, razão entre o coeficiente de mola a rotação no eixo longitudinal do caminhão e o peso da viga, $r = K_\theta/G$;
- e_i : excentricidade inicial da viga;
- \bar{y}_{rot} : distância entre o CG da seção indeformada e o eixo de giro (sistema hidráulico do caminhão e reboque);
- x_0 : deslocamento lateral fictício devido à atuação peso próprio lateralmente.

Como critério de verificação da estabilidade, **Mast (1993)** estabelece um fator de segurança contra a fissuração γ_r através da razão entre os braços de alavanca dos momentos resistente e de tombamento, respectivamente, em relação ao eixo de giro. Para o tombamento o braço de alavanca é c_a e para o momento resistente c_r . Sendo o limite de rotação do elemento o ângulo de fissuração θ_r .

$$\gamma_r = \frac{c_r}{c_a} = \frac{r(\theta_r - \alpha)}{x_0\theta_r + e_i + \bar{y}_{rot}\theta_r} \quad (14)$$

O ângulo de no qual em que algum ponto da seção da viga a resistência à tração do concreto seja superada é denominado θ_r . Normalmente este ponto é localizado na extremidade lateral da mesa superior. **Mast (1993)** determina θ_r pela razão entre o momento lateral e o momento devido ao peso próprio. Para isto, é determinada a variação de tensão necessária para alcançar a resistência à tração, quando a viga está submetida ao peso próprio. Então determina o momento aplicado lateralmente necessário para que esta tensão seja atingida.

Mast (1993) destaca as diferenças resultantes da avaliação da estabilidade de vigas em transporte e içamento. No primeiro caso, a maior distância entre o centro de gravidade da seção na posição indeformada e eixo de giro (Figura 2-10) é o que rege o problema, pois torna os braços de alavanca maiores. Já no caso de vigas içadas o deslocamento lateral fictício x_0 é preponderante sobre o fator de segurança.

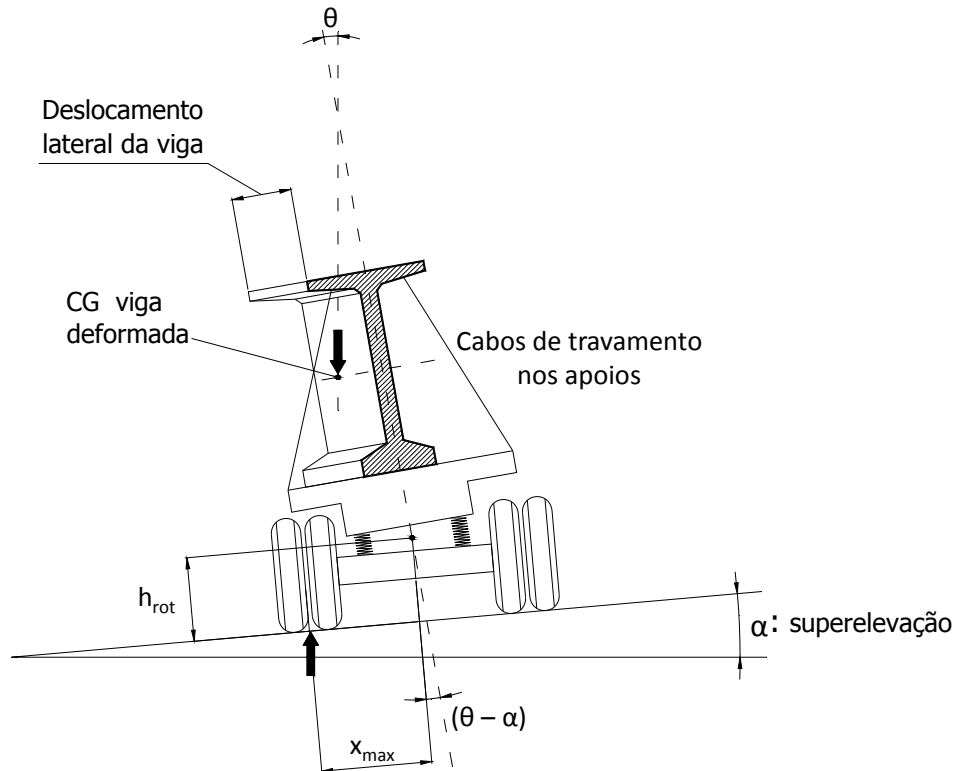


Figura 2-10 – Esquema de equilíbrio estático de viga sobre um caminhão (apoio elástico)

Fonte: adaptado de Mast (1993)

O fator de segurança contra ruptura é baseado nas dimensões do equipamento de transporte em que a viga é posicionada, Figura 2-10, sendo h_{rot} a distância entre o eixo de giro e a superfície de rolamento e x_{max} entre eixo de giro e o ponto médio da largura dos pneus à direita ou esquerda. **Mast (1993)** recomenda 60 cm e 91,5 cm para estas dimensões, respectivamente.

O ângulo máximo de giro para ruptura θ_{rup} é determinado igualando-se o braço de alavanca referente ao apoio elástico c_r ao braço resultante da reação do equipamento de transporte (utilizando as dimensões citadas) e isolando o ângulo θ_{rup} , Equação (15).

$$\theta_{rup} = \frac{x_{max} - h_{rot}\alpha}{r} + \alpha \quad (15)$$

Se for substituído na Equação (14) o valor de θ_{rup} obtido pela Equação (15) e x_0 por $x_{0,max}$, correspondente ao deslocamento lateral fictício de ruptura, o fator de segurança referente à ruptura é γ_{rup} . Os valores de $x_{0,max}$ e γ_{rup} são obtidos pelas Eqs. (16) e (17), respectivamente.

$$x_{0,\max} = x_0(1 + 2,5\theta_{\text{rup}}) \quad (16)$$

$$\gamma_{\text{rup}} = \frac{r(\theta_{\text{rup}} - \alpha)}{x_{0,\max}\theta_{\text{rup}} + e_i + \bar{y}_{\text{rot}}\theta_{\text{rup}}} \quad (17)$$

Segundo **Mast (1993)** os valores indicados para fator de segurança contra fissuração e ruptura são 1,0 e 1,5, respectivamente. No entanto, a experiência com fases transitórias pode resultar em alterações.

Para a situação transitória de transporte, **Stratford e Burgoyne (1999)** recomendam para obtenção da carga crítica de instabilidade a Equação (18).

$$p_{\text{crit}} = 16,9 \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{\ell^3} \quad (18)$$

Segundo **Stratford et al (1999)** a dependência da rigidez à torção indica que o problema é de instabilidade lateral por flexo-torção. Por isso, para considerar as imperfeições geométricas será utilizado o conceito de **Southwell (1932) apud Stratford et al (1999)** que relaciona o deslocamento lateral no instante da instabilidade δ_t ao deslocamento lateral inicial δ_o , com a razão ao quadrado entre a carga limite de instabilidade p_{lim} e a carga crítica p_{crit} , Equação (19).

$$\delta_t = \frac{\delta_o}{1 - \left(\frac{p_{\text{lim}}}{p_{\text{crit}}}\right)^2} \quad (19)$$

Como a rigidez à torção é considerada, a relação entre o ângulo limite de instabilidade θ_{lim} e deslocamento correspondente δ_t , segundo **Stratford et al (1999)**, pode ser determinada pela Equação (20).

$$\frac{\theta_{lim}}{\delta_t} = \frac{1,68}{0,36\ell \sqrt{\frac{GI_t}{EI_y} + \bar{y}_{rot}}} \quad (20)$$

Portanto têm-se duas equações (Eqs (19) e (20)) e três incógnitas que são θ_{lim} , δ_t e p_{lim} . Alguns autores adotam um ângulo limite de instabilidade, possibilitando a determinação da carga limite.

Considerando que as curvas em rodovias têm em média 8% de superelevação ou 4,57 graus, será adotado, conservadoramente, o θ_{lim} com 6 graus ou 0,105 rad.

2.2.3 Instabilidade lateral na fase de içamento

No estudo de vigas pré-moldadas protendidas, **Leonhardt (1964)** afirma que a maior preocupação com a estabilidade destes elementos deve concentrar-se nas fases transitórias, especialmente quando suspensas por cabos.

Leonhardt (1964) relata o acontecimento de acidentes envolvendo instabilidade lateral de vigas quando suspensas por cabos. O problema é atribuído à flexão oblíqua resultante de uma leve rotação do elemento em torno de seu eixo longitudinal. Portanto a alta pré-compressão atuante sobre a face inferior, devido à protensão, que era contrabalaneada pelas tensões de tração provocadas pelo peso próprio (decomposto pela flexão oblíqua), passa a ser preponderante, podendo ocorrer tensões críticas na face inferior da seção.

Para vigas suspensas por cabos retos fixos em dois pontos, formando ou não balanços, com carregamento uniformemente distribuído, **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964)** recomenda a Equação (8) para o cálculo da carga crítica de instabilidade e destaca que, quando a carga devido ao peso próprio é menor que $\frac{1}{4} p_{crit}$, a viga não terá problemas com instabilidade.

Pode-se obter o α_{crit} através da Tabela 1 ou da Figura 2-11 que, segundo **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964)**, é relacionado à função $g(\alpha)$, expressa pela Equação (21). Assim calcula-se $g(\alpha)$ e, com a relação $\rho = a/\ell$, obtém-se o α_{crit} .

$$g(\alpha) = \frac{4y_{rot}}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_t}} \tag{21}$$

Tabela 1 – Valores de α_{crit}

$g(\alpha)$	$\varrho = a/\ell$					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,02	2,55	2,40	0,133	0,0180	0,0043	0,0014
0,04	10,1	9,23	0,523	0,0716	0,0171	0,0056
0,08	40,0	31,8	1,95	0,278	0,0672	0,0222
0,16	150,1	83,5	6,28	1,00	0,253	0,0854
0,32	485,3	148,4	14,8	2,93	0,830	0,297
0,60	1079,5	193,1	23,8	5,76	1,89	0,751
1,20	1833,0	222,4	31,7	8,90	3,34	1,48
2,5	2396,5	238,4	36,7	11,2	4,57	2,19
5,0	2678,2	245,9	39,3	12,5	5,29	2,63
10,0	2817,1	249,7	40,7	13,2	5,68	2,88
20,0	2885,3	251,6	41,4	13,5	5,89	3,02
40,0	2919,7	252,5	41,7	13,7	6,00	3,09
∞	2944,4	253,5	42,0	13,9	6,07	3,16

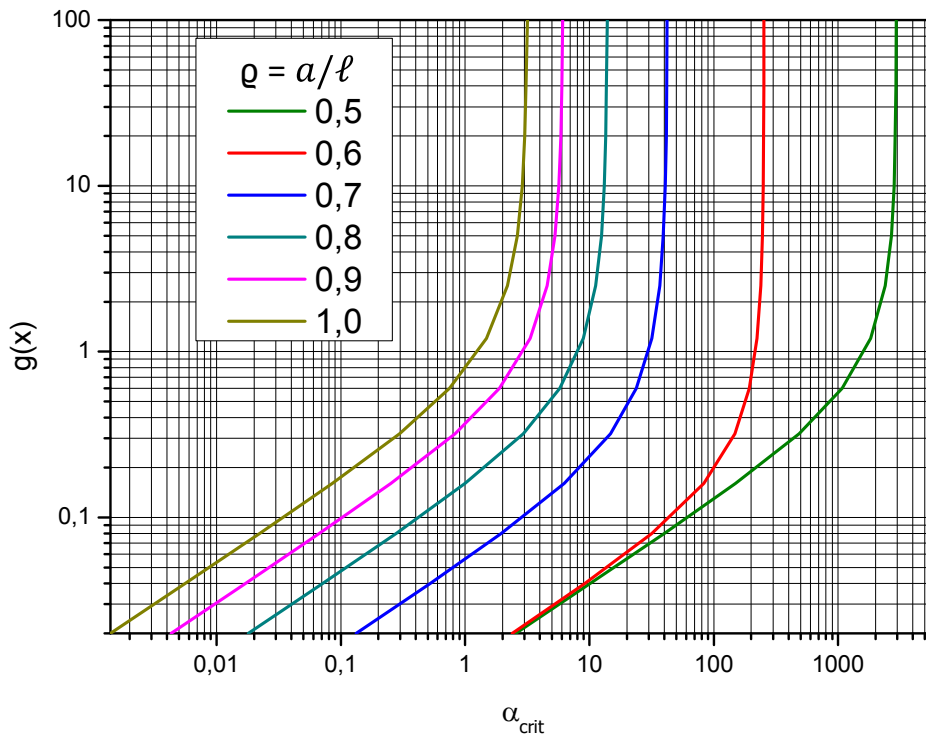


Figura 2-11 – Diagrama da função $g(\alpha)$ relacionado à α_{crit}

a : distância entre os pontos de suspensão;

ϱ : relação entre o vão total da viga e a distância entre os pontos de suspensão ($\varrho = a/\ell$).

Imper e Laszlo (1987) avaliaram o comportamento de vigas de pontes em fase transitória (transporte e içamento) e constataram a influência do posicionamento dos cabos sobre a estabilidade do elemento, mostrando que a carga crítica de instabilidade é maior quando são utilizados balanços.

Pesquisaram também o efeito da fluência em fases de transporte e suspensão de vigas e concluíram que este fenômeno não traz grandes preocupações devido às fases serem temporariamente curtas.

Através de suas experiências de campo e fabricação de pré-moldados, **Imper e Laszlo (1987)** propuseram fatores de segurança: $\gamma > 1,5$ para manuseio em fábrica e $\gamma > 1,75$ para manuseio das peças em campo.

A instabilidade de vigas içadas acontece através do giro em torno de um eixo longitudinal que passa pelos pontos de içamento, como mostrado na Figura 2-12. **Mast (1989)** estabelece o fator de segurança realizando o equilíbrio do elemento. O giro adotado é função da distância em corte entre o CG da seção no apoio e o centro de massa da viga. Esta distância depende do deslocamento lateral inicial e_i e do deslocamento lateral fictício x_0 pela atuação do peso próprio da viga na direção do eixo de menor inércia.

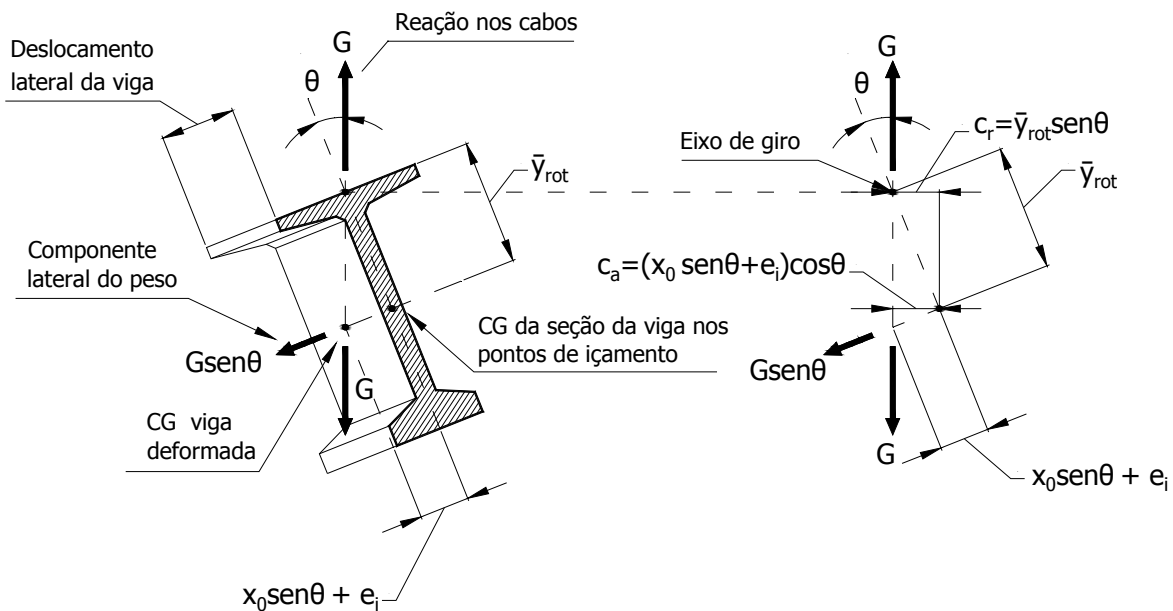


Figura 2-12 - Equilíbrio da viga durante a suspensão

Fonte: adaptado de Mast (1993)

Para uma viga içada de comprimento ℓ e balanços de comprimento a , o deslocamento lateral fictício é calculado pela Equação (22)

$$x_0 = \frac{g_{pp}}{12E_{ci}I_y\ell} \left(\frac{1}{10} \ell_1^5 - a^2 \ell_1^3 + 3a^4 \ell_1 + \frac{6}{5} a^5 \right) \quad (22)$$

sendo

ℓ_1 : diferença entre ℓ e $2a$;

E_{ci} : módulo de elasticidade inicial do concreto;

I_y : momento de inércia de segunda ordem sobre o eixo vertical;

g_{pp} : carga distribuída devido ao peso próprio.

Portanto, o fator de segurança contra a fissuração γ_r é obtido pela razão entre os momentos aplicado e resistente em torno do CG da seção, Equação (23). **Mast (1989)** opta pela razão entre os braços de alavanca resistente c_r e aplicado c_a , representados na Figura 2-12. Assim, o peso da viga tenta tombá-la e a reação nos cabos sustentá-la.

$$\gamma_r = \frac{c_r}{c_a} = \frac{\bar{y}_{rot}\theta}{x_0\theta + e_i} \quad (23)$$

sendo

\bar{y}_{rot} : distância entre o ponto de içamento e o CG da seção;

θ : ângulo de giro da viga.

Considerando que a viga apresenta imperfeições geométricas, sendo e_i o deslocamento lateral inicial, o giro inicial θ_i da viga é obtido pela Equação (24).

$$\theta_i = \frac{e_i}{\bar{y}_{rot}} \quad (24)$$

Substituindo e_i da Equação (24) na Equação (23) e considerando o ângulo de fissuração θ_r , obtém-se o fator de segurança contra a fissuração de vigas em fase transitória de içamento, Equação (25).

$$\gamma_r = \frac{1}{\frac{x_0}{\bar{y}_{rot}} + \frac{\theta_i}{\theta_r}} \quad (25)$$

A rigidez à flexão lateral efetiva é um dos parâmetros mais complexos de se estimar na análise da instabilidade lateral de longas vigas protendidas. **Mast (1993)** apresenta uma solução simplificada para a inércia lateral efetiva I_{ef} . A simplificação se baseou no ensaio da PCI BT-72 realizado e na simulação numérica de 9 vigas que resultaram em aparente similaridade no comportamento da variação da rigidez com o giro da seção. A Equação (26) estima a inércia efetiva.

$$I_{ef,y} = \frac{I_y}{1 + 2,5\theta} \quad (26)$$

em que

I_y : momento de inércia lateral de segunda ordem da seção bruta;

θ : ângulo da seção para o qual se deseja conhecer a inércia lateral efetiva. Esta equação só tem sentido para ângulos maiores que o ângulo de fissuração e menores que o ângulo máximo de 0,4 rad (23 graus), adotado segundo a análise de **Mast (1993)** apresentada na Figura 2-13.

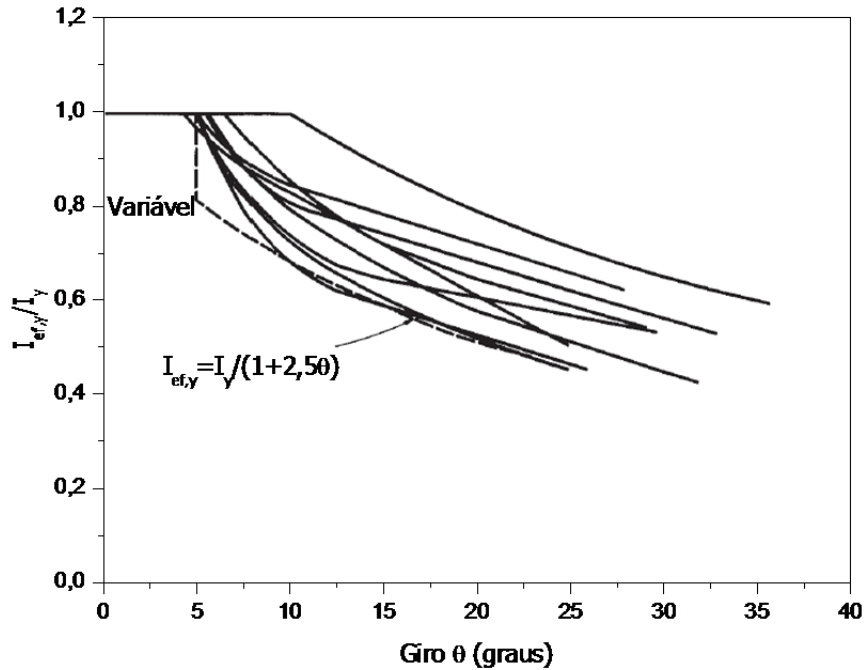


Figura 2-13 – Relação entre inércia efetiva e giro da seção

Fonte: adaptado Mast (1993)

Para rotações maiores que θ_r , **Mast (1993)** recomenda considerar o momento de inércia efetivo no cálculo dos deslocamentos laterais. O autor apresenta a Equação (27) que relaciona o deslocamento lateral efetivo x'_0 ao deslocamento lateral elástico x_0 .

$$x'_0 = x_0(1 + 2,5\theta) \tag{27}$$

Mast (1993) determina o fator de segurança contra a ruptura γ_{rup} , considerando o momento de inércia efetivo I_{ef} para o cálculo dos deslocamentos. Inicialmente, o autor traçou um diagrama relacionando braço de alavanca ao giro da seção, Figura 2-14. Os braços c_a e c_r foram determinados pelas Equações (28) e (29), respectivamente.

$$c_a = (x_0 \text{sen}\theta + e_i) \text{cos}\theta \tag{28}$$

$$c_r = \bar{y}_{rot} \text{sen}\theta \tag{29}$$

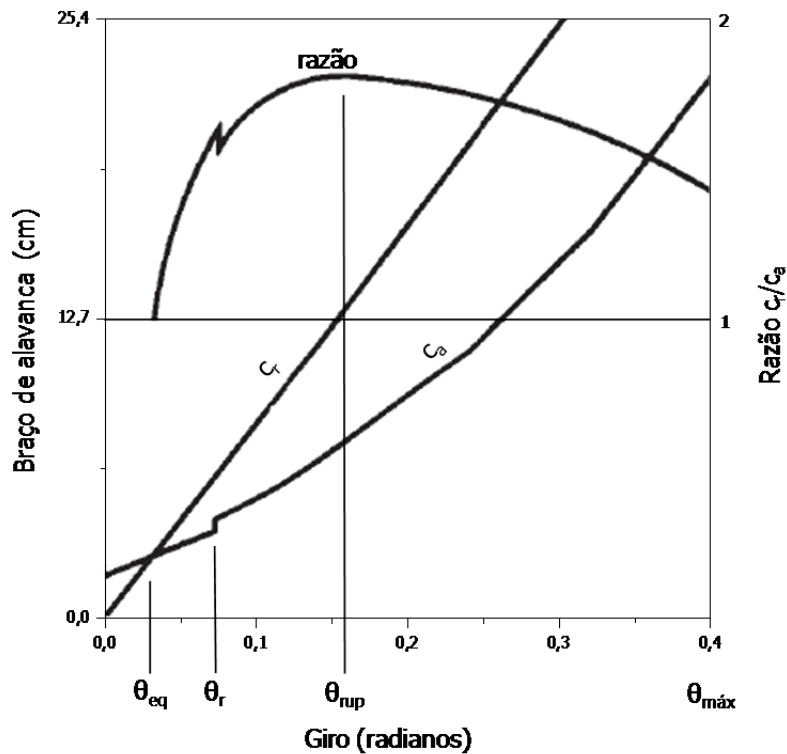


Figura 2-14 – Razão máxima c_r/c_a para fator de segurança da PCI BT-72

Fonte: adaptado de Mast (1993)

Para cada incremento de θ , **Mast (1993)** determina a razão entre c_r e c_a , Figura 2-14, sendo a escala da relação entre os braços de alavanca representada à direita do gráfico. O valor máximo obtido para razão foi 1,8 com um ângulo de 0,16 rad. Esta razão representa o fator de segurança máximo contra ruptura.

Com base nesta análise, **Mast (1993)** propôs o fator de segurança contra a ruptura. Primeiramente, substituindo a Equação (27) na Equação (23). Em seguida derivando-a para obter o ângulo cuja razão entre c_r e c_a seja máxima. O resultado é o ângulo de ruptura θ_{rup} que pode ser obtido pela Equação (30).

$$\theta_{rup} = \sqrt{\frac{e_i}{2,5x_0}} \quad (30)$$

Retomando a Equação (23) e inserindo x_0' e θ_{rup} , obtém-se a Equação (31).

$$\gamma_{rup} = \frac{\bar{y}_{rot}\theta_{rup}}{x'_0\theta_{rup} + e_i} \quad (31)$$

O **PCI Bridge Design Manual (2003)** não apresenta esse fator de segurança por considerar que a ruptura ocorre quase que instantaneamente após o início da fissuração, devido à drástica queda da rigidez do elemento. Portanto, recomenda que os fatores de segurança contra fissuração e ruptura sejam tomados como iguais.

No içamento de vigas **Stratford et al (1999)** confirmaram, através de simulação numérica com o método dos elementos finitos, que a carga crítica de instabilidade pode ser considerada independente da rigidez à torção. Isto confirma a hipótese de **Mast (1993)**. Por isso, para analisar a viga em içamento **Stratford et al (1999)** consideram que a rotação relativa entre o apoio (cabos) e o meio do vão é nula.

Quando a viga começa a rotacionar os cabos não impedem a rotação nos pontos onde são fixos, então a viga não se deforma por torção, por isso o giro relativo é desprezível. Portanto, a instabilidade ocorre somente por deformação à flexão lateral.

Stratford et al (1999) apresentam diagramas que relacionam a carga crítica de instabilidade adimensional e o comprimento dos balanços a , para cabos verticais. As curvas foram obtidas por simulação numérica.

Na Figura 2-15 e Figura 2-16 seguem os digramas, sendo que cada curva representa uma relação \bar{y}_{rot}/ℓ , em que \bar{y}_{rot} é a distância entre o centro de gravidade da seção e o ponto de fixação dos cabos e ℓ é o vão. Os autores destacam que para vigas protendidas normalmente os cabos de içamento são posicionados próximos às extremidades da viga, então na Figura 2-16 é apresentado o trecho da relação a/ℓ entre 0 e 0,1 em escala aumentada.

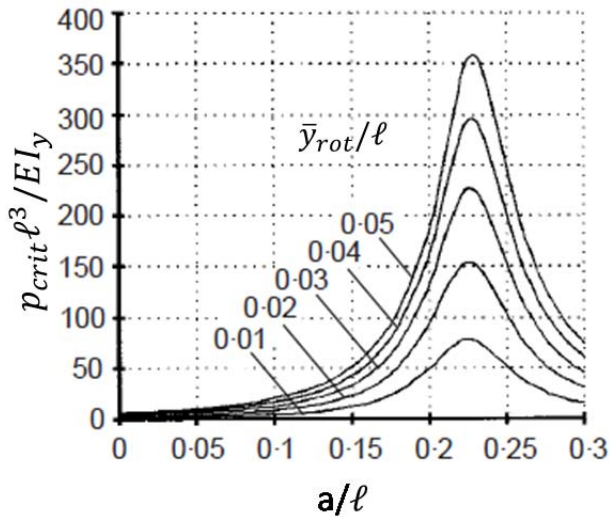


Figura 2-15 – Carga crítica adimensional de vigas içadas por cabos verticais em função do comprimento do balanço
fonte: Stratford et al (1999)

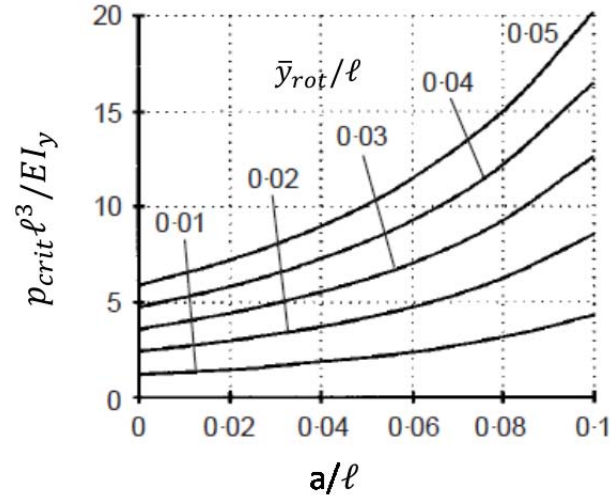


Figura 2-16 - Carga crítica adimensional para cabos posicionados próximos às extremidades, zoom da Figura 2-15
fonte: Stratford et al (1999)

Para o caso de cabos de içamento verticais, **Stratford et al (1999)** recomendam a Equação (32) para estimar a carga crítica de uma viga perfeita.

$$P_{crit} = \frac{12E_c I_y \bar{y}_{rot}}{\frac{\ell^4}{10} - a\ell^3 + 3a^2\ell^2 - 2a^3\ell - a^4} \quad (32)$$

em que $E_c I_y$ é a rigidez à flexão lateral elástica.

Para considerar as imperfeições geométricas, **Stratford et al (1999)** sugerem a utilização da hipótese de **Southwell (1932) apud Stratford et al (1999)**. Como a rigidez à torção não é considerada na análise, a Equação (33) é utilizada para relacionar o deslocamento lateral no instante da instabilidade δ_t ao deslocamento lateral inicial δ_o . Segundo **Stratford et al (1999)** a deformação inicial de uma viga içada pode ser tomada com a forma de uma senóide.

$$\delta_t = \frac{\delta_o \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right]}{1 - \frac{P_{lim}}{P_{crit}}} \quad (33)$$

sendo p_{lim} a carga limite de instabilidade que leva em conta as imperfeições geométricas da viga.

Considerando a relação entre os deslocamentos inicial e final e o giro da seção, no estágio limite uma componente da carga p_{lim} estará atuando lateralmente. Então o deslocamento provocado será $(\delta_t - \delta_o)$. Usando a Equação (33) e na expressão apresentada por **Stratford et al (1999)** que relaciona deslocamento à rotação limite, obtém-se a Equação (34), considerando a aproximação de pequenos deslocamentos.

$$p_{lim} = p_{crit} - \frac{\delta_o \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right]}{\frac{g_{pp} \text{sen} \theta_{lim}}{384 E_c I_y} (5\ell^2 - 20a\ell - 4a^2) \left(\frac{6}{5} a^5 - \ell \right)^2 + \delta_o \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right]} \quad (34)$$

em que θ_{lim} é a rotação no momento que p_{lim} é alcançado.

Portanto, a Equação (34) tem duas incógnitas, como pode ser visto no item 2.2.5. **Kalkan (2014)** adota um ângulo de 0,75 graus, baseado em resultados experimentais. No entanto, para içamento este ângulo é maior, pois há rotação no apoio. **Mast (1993)** realizou o ensaio com a viga PCI BT-72 e estabeleceu um ângulo limite de 23 graus.

2.2.4 Instabilidade lateral na fase transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios

Quando a viga é colocada sobre aparelhos de apoio, espera-se que o elemento seja auto-portante com atuação do peso próprio e devido à largura da mesa inferior sobre os aparelhos. No entanto, a excentricidade do peso ao centro geométrico gera um momento de tombamento que somado à flexibilidade e desnível na ligação pode superar o giro máximo do aparelho de apoio e a viga tomba. Neste item são apresentados procedimentos para verificação desta situação transitória.

Segundo **El Debs (2000)**, os aparelhos de apoio elastoméricos permitem movimentos de translação e rotação do elemento apoiado, além de estabelecer uma distribuição mais uniforme das tensões de contato entre viga e os apoios.

Em obras de ponte que utilizam vigas de grandes vãos, **El Debs (2000)** recomenda a utilização de aparelhos de apoio cintados, com chapas de aço intercaladas com elastômero, devido à grande intensidade das reações de apoio. Como já frisado, estas vigas tem maior suscetibilidade à instabilidade lateral.

Segundo **Consolazio et al (2007)** as chapas de aço têm o papel de aumentar a resistência à compressão do aparelho de apoio, devido à restrição que impõem ao abaulamento nas laterais das camadas de elastômero. Contudo, não inibem as deformações por cisalhamento da almofada que acomodam as deformações horizontais da superestrutura da ponte. Na Figura 2-17 é ilustrado o aparelho de apoio elastomérico cintado.

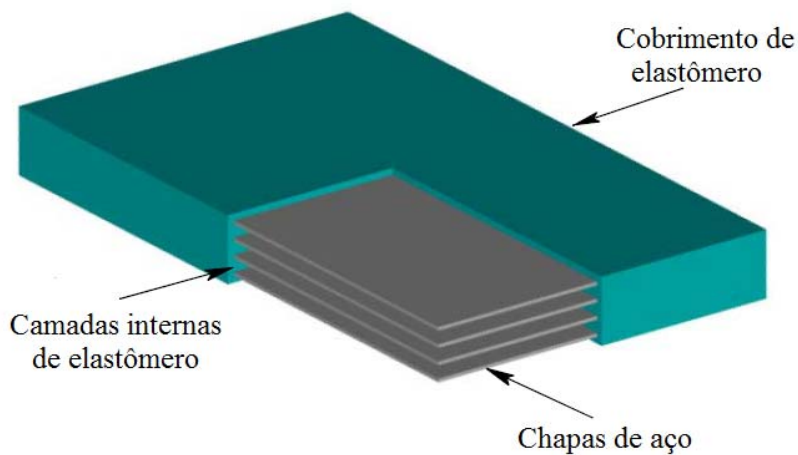


Figura 2-17 – Aparelho de apoio elastomérico cintado

Fonte: adaptado de Consolazio e Hamilton (2007)

Mast (1993) apresenta procedimentos para verificação da estabilidade lateral de vigas sobre apoios elásticos, que estão dispostos na seção 2.2.2, abrangendo assim o estágio em que a viga está posicionada sobre aparelhos de apoio. O equacionamento a ser utilizado é equivalente à situação em que estes elementos estão sendo transportados. A diferença está na determinação do coeficiente de mola K_{θ} do apoio.

Nesta fase transitória a constante de mola K_{θ} depende das dimensões e das propriedades do material do aparelho de apoio e pode ser definida experimentalmente pela divisão do momento aplicado no aparelho pelo ângulo de rotação da mesa inferior da viga.

Mast (1993) destaca que o comportamento do coeficiente de mola K_{θ} é influenciado pela posição da reação da viga sobre o aparelho de apoio. Caso esta força incida fora do núcleo central de inércia do aparelho a constante passa a ter um comportamento, dito por

Mast (1993), altamente não-linear. Nestes casos, recomenda-se calcular o fator de forma, considerando apenas a área comprimida do aparelho.

Consolazio et al (2007) investigaram suscetibilidade à instabilidade lateral das vigas de ponte típicas do estado da Flórida sobre aparelhos de apoio cintados. No estudo, foi avaliada a configuração de ponte reta esconsa, apresentada na Figura 2-18. No caso avaliado, a viga também está rotacionada em relação ao aparelho de apoio.

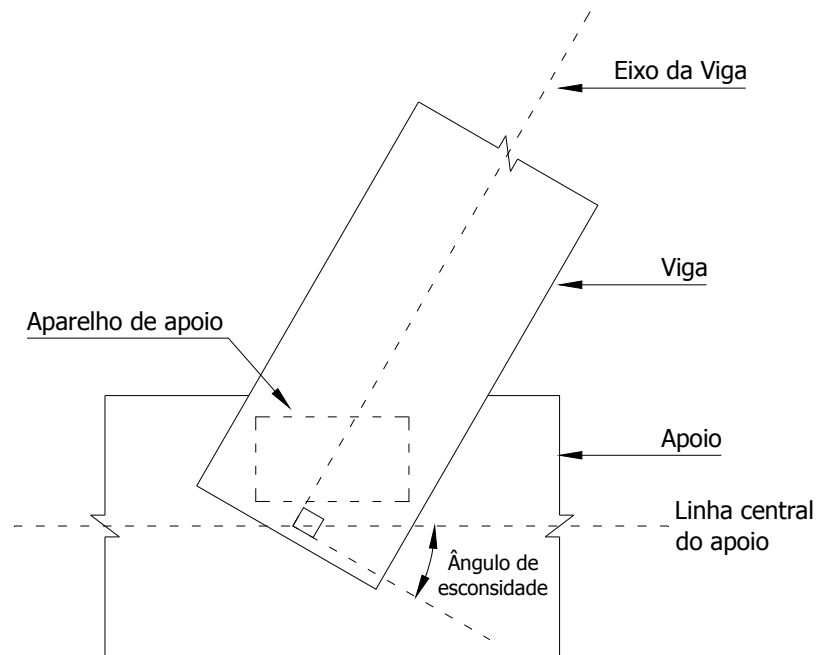


Figura 2-18 - Viga com eixo rotacionado em relação ao eixo do apoio

Fonte: adaptado de Consolazio et al (2007)

Vigas de ponte protendidas sofrem contraflecha no ato da protensão que é balanceada à medida que as cargas permanentes são aplicadas, como por exemplo, o peso próprio do tabuleiro de ponte. No entanto, enquanto submetidas somente ao peso próprio o efeito é uma grande rotação nos apoios.

Este giro pode provocar perda parcial de contato entre a face inferior da viga e o aparelho de apoio, como mostrado na Figura 2-19.

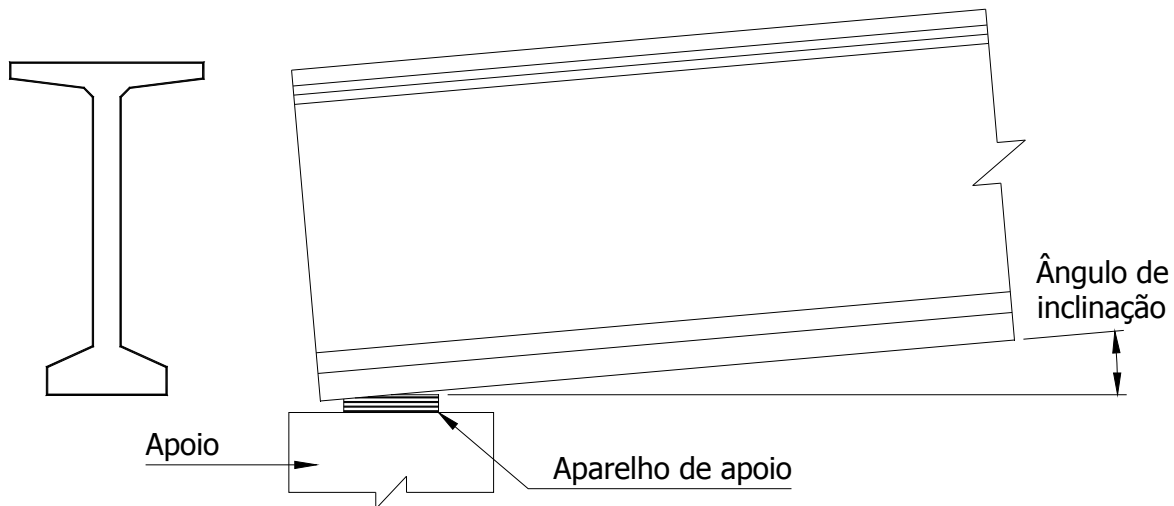


Figura 2-19 – Representação da inclinação entre o aparelho de apoio e a viga

Fonte: adaptado de Consolazio et al (2007)

Para as simulações de instabilidade, **Consolazio et al (2007)** adotaram como rotação máxima dos apoios a soma de três parcelas, considerando assim o efeito combinado. As três rotações são referentes à contraflecha devido à protensão, inclinação da via e tolerância de construção.

Baseados nas análises realizadas em projetos de ponte consideraram a rotação de 0,0175 rad para o efeito da protensão. A inclinação adotada para a via foi de 2% (0,02 rad), considerada como limite pelo Departamento de Transportes da Flórida que recomenda a utilização de placas de apoio chanfradas para inclinações superiores. Foi assumida a tolerância de construção de 0,005 rad em acordo com a **AASHTO (2004)**. Sendo a rotação resultante 0,0425 rad que foi utilizada para a análise paramétrica de **Consolazio et al (2007)**.

Em pontes esconsas e curvas pode ocorrer do eixo da viga ser rotacionado em relação ao eixo do aparelho de apoio. Nestas situações ocorre a combinação entre contraflecha e eixo rotacionado, quando as vigas são protendidas. Segundo **Consolazio et al (2007)**, neste caso a distribuição de tensões é assimétrica e se concentra em um único vértice do aparelho de apoio. Por isso, a rigidez à rotação K_{θ} será significativamente reduzida. Na Figura 2-20 segue o que foi mencionado, sendo a região hachurada a de maior pressão devido à contraflecha.

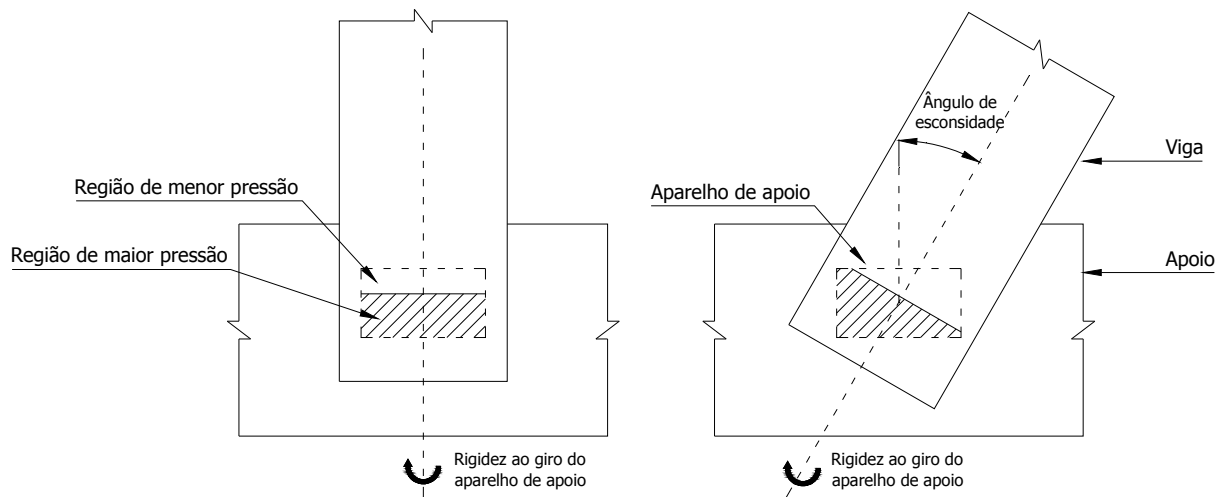


Figura 2-20 – Distribuição de tensão em aparelho de apoio em ponte reta ortogonal e esconsa

Fonte: adaptado de Consolazio et al (2007)

A segurança à instabilidade é bastante reduzida quando o aparelho de apoio é rotacionado em relação ao eixo da viga. **Consolazio et al (2007)** salientam que a combinação de escondidade e contraflecha de protensão, quando a viga é submetida ao peso próprio, é o caso mais crítico para instabilidade.

Hurff (2010) realizou o ensaio da viga pré-moldada protendida PCI BT-54 com 30,5 m de vão, posicionada sobre aparelhos de apoio elastoméricos cintados, sendo o carregamento aplicado uma carga concentrada no meio do vão.

Seu objetivo era avaliar o comportamento do elemento até que ocorresse a instabilidade por tombamento. A viga não foi provida de qualquer restrição a deslocamento lateral e rotação, simulando uma situação real, Figura 2-21.



Figura 2-21 – Viga PCI BT-54 ensaiada em situação transitória

Fonte: Hurff (2010)

A viga apresentou inicialmente rotação excessiva em um apoio, com uma carga de 129 kN, devido à falta de planicidade da superfície da mesa inferior da viga em contato com o aparelho elastomérico. O valor medido de rotação foi seis vezes menor que o esperado. **Hurff (2010)** também constatou o efeito da contraflecha no contato entre viga e aparelho de apoio.

Foram realizados ajustes com epóxi, a fim de estabelecer superfícies planas nas interfaces para prosseguir o ensaio. Para a mesma rotação medida nos apoios, comparando as situações de superfície irregular e plana, as cargas atingidas foram 129 kN e 445 kN, respectivamente, Figura 2-22. Portanto, garantir a planicidade da interface entre a viga e o aparelho é fundamental para a estabilidade ao tombamento.

Hurff (2010) também avaliou se o elemento sofreu giro relativo por torção entre o meio do vão e a seção no apoio, ou seja, deformações por torção. Destacando que mais da metade da rotação no centro também ocorreu na extremidade, sendo esta parcela caracterizada como rotação de corpo rígido e o restante referente à deformação elástica por torção. Estas conclusões provêm dos resultados apresentados na Figura 2-23.

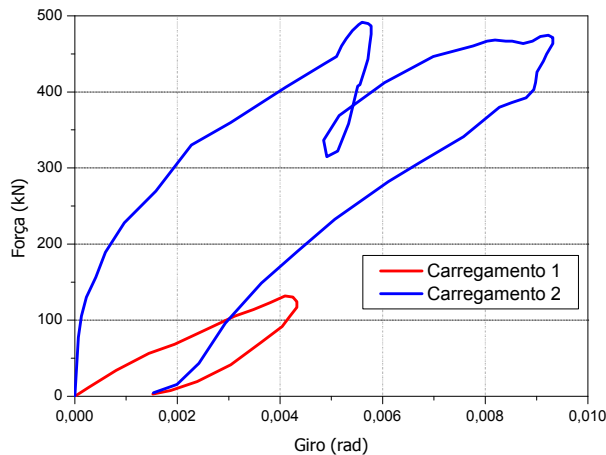


Figura 2-22 – Diagrama força-giro por torção sem ajuste com epóxi e com ajuste da base

Fonte: adaptado de Hurff (2012)

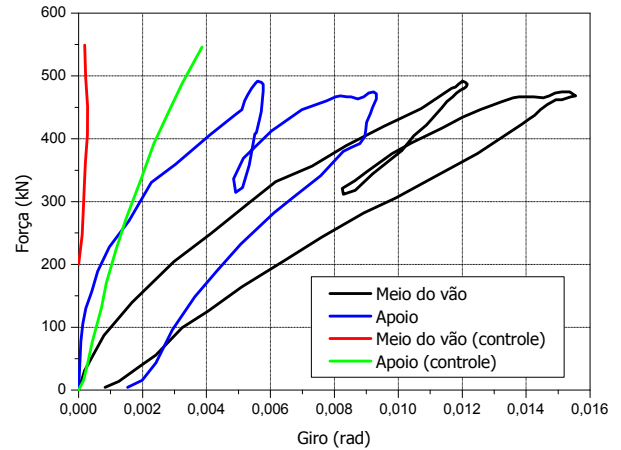


Figura 2-23 - Diagrama força-giro por torção para a viga BT-54 sobre aparelhos de apoio

Fonte: adaptado de Hurff (2012)

A Figura 2-23 também apresenta a influência da inclinação dos apoios sobre a estabilidade ao tombamento da viga ensaiada. Esta comparação foi feita entre as situações de apoios nivelados (curvas em vermelho e verde) e inclinados (curvas em azul e preto). Destaca-se que para a viga em condições ideais a carga suportada foi 18% maior e a rotação no meio do vão por torção elástica foi 50% menor.

A partir deste ensaio e comparando-o à análise numérica não-linear física e geométrica, **Hurff e Kahn (2012)** fizeram uma análise excluindo a rotação de corpo rígido dos resultados. Verificaram que a viga não teria comportamento instável por deformações como no caso da instabilidade por flexo-torção, pois atingira somente níveis elásticos de deformação. Portanto a instabilidade do elemento provém da flexibilidade da ligação com o apoio.

Para a verificação da instabilidade por tombamento de vigas sobre apoios elásticos, **Hurff e Kahn (2012)** recomendam a utilização do fator de segurança por **Mast (1993)**, expressos pelas Eqs. (14) e (17).

A carga que provocou tombamento no ensaio experimental da viga PCI BT-54 foi 463 kN e a carga prevista pela metodologia de **Mast (1993)** foi 497 kN, Figura 2-24. Portanto o procedimento apresentado por **Mast (1993)** prevê bem a carga de tombamento, Figura 2-24. Para obtê-la aumenta-se o carregamento, a partir do peso próprio, até alcançar o fator de segurança igual a 1.

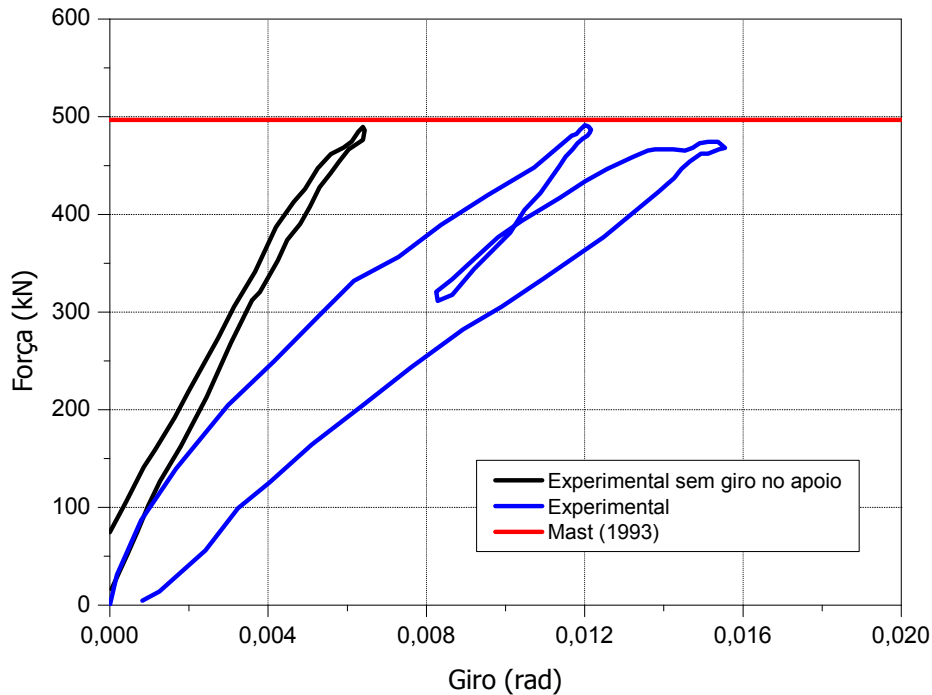


Figura 2-24 – Previsão da carga de tombamento pelo método de Mast (1993)

Fonte: adaptado de Hurff (2012)

Hurff (2010) fez um estudo experimental e numérico sobre deformações térmicas da viga PCI BT-54. Para o comprimento do vão de 30,5 m o deslocamento lateral foi de 13 mm, então generalizou como recomendação $\pm 1,3$ mm para 3 m de comprimento para considerar imperfeições geométricas devido a efeito térmico.

Será apresentado a seguir um procedimento para determinação do coeficiente de mola para aparelhos de apoio elastoméricos cintados. Este parâmetro é necessário para calcular a carga crítica pelos métodos de **Mast (1993)** e **Lebelle (1959)** e para determinar o fator de segurança.

A determinação do coeficiente de mola rotacional, denominado por K_{θ} , é feita a partir do módulo de elasticidade referente à rigidez axial do aparelho de apoio cintado. Segundo Yazdani et al (2000), K_{θ} é determinado pela Equação (35).

$$K_{\theta} = \frac{E_{bp} I_{y,aa}}{h} \quad (35)$$

sendo

E_{aa} : módulo de elasticidade do aparelho de apoio;

$I_{y,aa}$: momento de inércia com eixo correspondente ao eixo longitudinal da viga;

h : altura total do aparelho de apoio, excluindo as placas rígidas.

Segundo **Yazdani et al (2000)** a relação tensão-deformação na compressão de aparelho de apoio elastoméricos tem as características controladas pelo módulo de elasticidade transversal e fator de forma. O módulo de elasticidade efetivo à compressão E_{aa} pode ser determinado pela Equação (36), sendo considerada a presença das chapas de aço.

$$E_{aa} = 6G_{aa}S_g^2 \quad (36)$$

em que

G_{aa} : módulo de elasticidade transversal;

S_g : fator de forma global do apoio elastomérico cintado;

No caso específico de aparelhos de apoio cintados retangulares, o fator de forma S_i para cada camada de elastômero é determinado pela Equação (37), segundo a **AASHTO (2007)**.

$$S_i = \frac{ab}{2h_i(a + b)} \quad (37)$$

onde

a : dimensão do aparelho de apoio paralela ao eixo longitudinal da viga;

b : dimensão transversal ao eixo da viga;

h_i : espessura de uma cada de elastômero.

Para determinar o fator de forma de todo o aparelho de apoio, **Yazdani et al (2000)** recomenda o cálculo da média ponderada entre os fatores de forma de cada camada, pois as espessuras das camadas de cobertura normalmente são diferentes.

O valor do módulo de elasticidade transversal G_{aa} pode ser determinado experimentalmente ou estimado. O método experimental consiste em determinar a rigidez axial a partir diagrama força-deslocamento obtido do ensaio de compressão axial (Figura 2-25).

A norma de especificações para projeto de pontes **AASHTO (2007)** recomenda que em situação de serviço, à temperatura de 23°C, o aparelho de apoio deve ter G entre 0,665 e

1,379 MPa. No entanto, para situações transitórias seu valor pode ser menor, dependendo do peso da viga.

Hurff e Kahn (2012) recomendam a utilização do coeficiente de mola vertical, obtido em ensaio, para o nível de sollicitação da fase transitória. A sollicitação para esta etapa corresponde à metade do peso próprio da viga sobre o aparelho de apoio.

Esta recomendação é feita devido ao comportamento não-linear dos apoios elastoméricos cintados. Como mostrado na Figura 2-25, sua rigidez axial é muito menor em baixos níveis de carga quando comparada à fase de serviço.

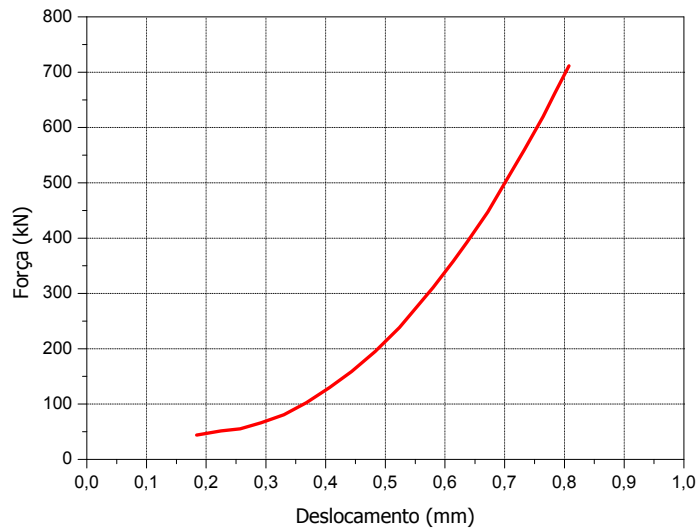


Figura 2-25 – Diagrama força-deslocamento axial para aparelho apoio cintado

Fonte: adaptado de Hurff (2012)

Hurff e Kahn (2012) avaliaram o desempenho ao tombamento da viga diminuindo a largura do aparelho de apoio cintado na direção transversal ao eixo do elemento. Concluíram que é significativa a influência dessa redução que no caso foi de 61 para 46 cm, resultando em fator de segurança para tombamento 39% menor.

2.2.5 Instabilidade lateral na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios

Existem diversos procedimentos de montagem de longas vigas de ponte, será descrito aqui um já constatado no Brasil.

Após o içamento e o posicionamento das vigas sobre os aparelhos de apoio, são fixos cabos de aço ligando sua mesa superior à travessa de apoio que neste caso são consolos, como mostra a Figura 2-26 (a).



Figura 2-26 – Configuração da fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios ⁷

Esse travamento é provisório e logo após o posicionamento de todas as vigas do vão são concretadas transversinas de apoio que caracterizam a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, Figura 2-26 (b). Portanto, faltam somente as transversinas intermediárias e o tabuleiro.

Como descrito no item 2.1, para esta fase transitória é utilizada a solução clássica para momento crítico de instabilidade lateral. Esta fase é caracterizada como transitória, mas diferentemente da fase de viga sobre aparelhos de apoio, as vigas já possuem travamentos laterais consolidados.

Segundo **Park e Paulay (1975)**, tratar o problema analiticamente torna-se muito complexo quando se leva em conta o comportamento real do concreto. Neste item são apresentadas soluções aproximadas para rigidezes à flexão lateral e torção e análises iterativas para tentativa de uma solução mais exata, usando o diagrama momento-curvatura.

⁷ [disponível em <https://groups.google.com/forum/#!topic/ClubedosEngenheirosCivis/ppzkZSrKTw4>. Acesso em 24 março 2014]

A não-linearidade física do material tem grande influência quando se pretende avaliar o momento crítico de instabilidade, pois a fissuração varia ao longo do vão. **Park e Paulay (1975)** recomendam que o momento de inércia relativo à direção da flexão lateral seja baseado apenas na região comprimida de concreto e o módulo de elasticidade reduzido para levar em conta o comportamento não-linear do material à compressão.

Para o cálculo momento crítico de instabilidade será apresentada a solução clássica de Michell elaborada em 1899, apresentada por **Park e Paulay (1975)**. Considerando que a razão entre os momentos de inércia lateral e vertical é muito pequena, a partir da solução clássica tem-se a Equação (38).

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{\ell} A \sqrt{BC} \quad (38)$$

Onde C_1 é um coeficiente que depende da configuração do carregamento e tem os valores:

- π para flexão pura;
- 3,53 para carregamento uniformemente distribuído;
- 4,23 para carga aplicada no centro do vão;
- $1,09 \pi$ para cargas concentradas, aplicadas nos terços médios do vão.

sendo

C : rigidez à torção;

B : rigidez à flexão lateral;

A : parâmetro que leva em conta a altura que a carga é aplicada em relação ao CG;

$$A = 1 - 1,74 \frac{\bar{a}}{\ell} \sqrt{\frac{B_{\text{ef}}}{C_{\text{ef}}}} \quad (39)$$

\bar{a} : ponto de aplicação da carga acima do centróide da seção, Figura 2-27.

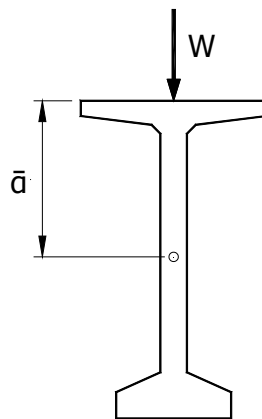


Figura 2-27 - Posição do carregamento transversal acima do centro de cisalhamento

Park e Paulay (1975) ressaltam que a condição para que ocorra a ruptura por instabilidade é de que o momento resistente à flexão M_u deve ser maior que o momento crítico de instabilidade M_{crit} . Da inequação apresentada na Equação (40) obtém-se a relação que pode ser considerada como o limite de esbeltez para vigas de concreto. Estes parâmetros são a base da verificação da segurança contra instabilidade da maioria das normas, como será visto no item 2.3.

$$M_u < M_{crit} \rightarrow \frac{\ell d}{b^2} < \lambda \quad (40)$$

Sendo λ o limite de esbeltez. Durante muito tempo só foi considerada a relação ℓ/b como esbeltez, tradicionalmente utilizada nas verificações de vigas de concreto. No entanto, muitos autores comprovaram que ela não estabelece adequadamente o critério de estabilidade.

As normas atuais apresentam seus limites de esbeltez, por exemplo, a **ABNT NBR 9062:2001** apresenta o limite de λ igual 500 (a **ABNT NBR 9062:2006** não apresenta nenhuma verificação), significando que para valores de esbeltez acima deste a viga rompe por instabilidade.

Revathi e Menon (2006) frisam a necessidade de novas prescrições normativas para a estabilidade de vigas de concreto que abranjam a previsão do momento crítico e estipulem novos limites de esbeltez para estes elementos.

Os limites de esbeltez são relacionados basicamente às dimensões das vigas e, segundo as normas como **EUROCODE 2 (2004)**, quando verificados a ruptura por flexão é garantida. No entanto, **Revathi e Menon (2006)** apresentam resultados experimentais que mostram que os limites de esbeltez regulamentados não são totalmente confiáveis e que a ruptura por instabilidade lateral pode ocorrer em vigas projetadas de acordo com as normas.

A partir dos estudos teórico e experimental, os autores recomendam a Equação (41) para determinação do momento crítico de instabilidade lateral para vigas de concreto armado. As constantes representam as condições de contorno dos ensaios realizados.

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{C_2 \ell} \sqrt{B_{\text{ef}} C_{\text{ef}}} \quad (41)$$

Onde C_1 pode ter os valores apontados para a Equação (38), C_2 também conhecido como comprimento efetivo do elemento é igual a 1 para vigas biapoiadas e 0,5 para biengastadas, B_{ef} representa a rigidez à flexão efetiva e C_{ef} a rigidez à torção efetiva (apresentada no item 2.5.2), sendo ℓ o vão da viga.

Vale destacar que a não homogeneidade do concreto, presença de armaduras, a fissuração e as resistências do concreto e do aço são fatores fundamentais para a determinação destas rigidezes.

Para determinar a rigidez à flexão lateral B_{ef} , **Revathi e Menon (2006)** propuseram uma adaptação da solução clássica de Branson para rigidez efetiva de vigas de concreto.

Segundo **Revathi e Menon (2006)** no caso de vigas subarmadas, a contribuição da armadura longitudinal para a rigidez à flexão lateral pode ser desprezada. A inércia da seção fissurada I_{cr} pode ser tomada como $xb^3/12$, sendo x a profundidade da linha neutra e b a largura da seção.

O momento utilizado por **Revathi e Menon (2006)**, para adaptar a fórmula de Branson, corresponde a 80% da solicitação última da viga. Esta escolha foi baseada em evidências experimentais. A Equação (42) representa a rigidez efetiva à flexão lateral para o cálculo do momento crítico.

$$B_{ef} = E_c \left\{ \left[\frac{M_r}{0,8M_u} \right]^3 \left(\frac{b^3 h}{12} \right) + \left[1 - \left(\frac{M_r}{0,8M_u} \right)^3 \right] \left(\left(\frac{b^3 x}{12} \right) + \psi \left(\frac{E_s}{E_c} \sum I_{sy} \right) \right) \right\} \quad (42)$$

onde

h : altura da seção;

M_u : momento último da seção;

ψ : fator utilizado para considerar a parcela de contribuição das armaduras no caso de vigas superarmadas, sendo 1 neste caso e 0 para subarmadas.

M_r : momento de fissuração, segundo a **ABNT NBR 6118:2007** é obtido pela Equação (43). Quando houver protensão basta fazer a análise elástica das tensões para determinar o momento de fissuração, considerando o aumento na deformação da armadura de protensão por compatibilidade;

$$M_r = \frac{\alpha f_{ctm} I_x}{h/2} \quad (43)$$

f_{ctm} : resistência média do concreto à tração;

α : fator que relaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, sendo 1,2 para seções T ou duplo T e 1,5 para seções retangulares;

I_x : momento de inércia em torno do eixo horizontal da seção bruta;

h : altura da seção.

Os resultados experimentais apresentaram boa correlação com os valores de M_{crit} obtidos pela Equação (41) e **Revathi e Menon (2006)** acreditam que ela seja igualmente aplicável a vigas superarmadas.

Revathi e Menon (2007) estudaram os efeitos da esbeltez sobre o momento crítico de instabilidade em vigas de concreto armado e através dos resultados, subdividiram-nas em grupos de acordo com seu limite de esbeltez e consequente comportamento na ruptura. Então, estabeleceram um limite de esbeltez, Equação (44), a partir do qual a viga rompe por instabilidade.

$$\lambda = \frac{\ell d}{b^2} \leq \frac{C_1 E_c}{10C_2 R} \sqrt{\alpha\beta} \quad (44)$$

sendo

C_1 : constante que depende da natureza do carregamento aplicado, os valores são os mesmos utilizados na Equação (38);

C_2 : constante que leva em conta as condições de apoio. Para vigas biapoiadas é 1 e 0,5 para vigas biengastadas;

E_c : módulo de elasticidade do concreto;

R : fator de resistência à flexão;

$$R = \frac{M_u}{bd^2} \quad (45)$$

M_u : momento resistente último de flexão;

b : largura da seção;

d : altura útil da seção;

α : coeficiente que representa a rigidez à flexão lateral efetiva. Pode ser considerada a Equação (49);

β : coeficiente que representa a rigidez à torção efetiva, Equação (50).

Revathi e Menon (2007) ensaiaram oito vigas de esbeltez próximas ao limite entre a ruptura por flexão e instabilidade e esperavam que em todos os casos ocorresse ruptura por flexão. No entanto, a partir de um determinado valor de λ , menor que 1, os elementos não tiveram ruptura típica à flexão, pois apresentaram deslocamento lateral. A consequência foi que os momentos de ruptura alcançados foram menores que os valores estimados para o momento último, o que representa um comportamento contra segurança.

Girija e Menon (2011) afirmam que a análise que leva a melhores resultados na previsão do momento crítico é a utilização do diagrama momento-curvatura para rigidez à flexão e a rigidez à torção pós-fissuração.

A não-linearidade física do concreto será considerada aplicando-se o método proposto por **Bazant e Oh (1984)**, apresentado no item 2.4. A rigidez efetiva à flexão $B_{ef,x}$ será obtida através de um processo iterativo utilizando o diagrama momento-curvatura.

Com o módulo de elasticidade secante e a rigidez efetiva $B_{ef,x}$, determina-se o momento de inércia efetivo $I_{ef,x}$. Mantendo-se a largura da seção b , obtém-se a altura útil da seção fissurada d_{eqv} e, conseqüentemente, o momento de inércia relativo ao eixo vertical $I_{ef,y}$. Segue na Equação (46), a rigidez efetiva à flexão lateral.

$$B_{ef} = E_{sec} I_{ef,y} = E_{cs} \frac{d_{eqv} b^3}{12} \quad (46)$$

Para a rigidez efetiva à torção C_{ef} , **Girija e Menon (2011)** recomendam a fórmula de **Tavio e Teng (2004)** apresentada na Equação (115).

Para comprovar suas hipóteses, **Girija e Menon (2011)** ensaiaram mais 15 modelos de vigas retangulares subarmadas. Concluíram que há necessidade de melhorar as formulações teóricas existentes e propuseram algumas simplificações para a estimativa das rigidezes efetivas à flexão B_{ef} e torção C_{ef} .

Estes parâmetros podem ser obtidos de forma aproximada através das Equações (47) e (48).

$$B_{ef} = \alpha E_c \frac{b^3 h}{12} \quad (47)$$

$$C_{ef} = \beta G_c \frac{b^3 h}{3} \quad (48)$$

sendo

α : coeficiente de rigidez efetiva à flexão;

$$\alpha = [0,8 - 0,003 f_{ck}] \cdot \rho_t^{0,25} \quad (49)$$

β : coeficiente de rigidez à torção, baseado na solução apresentada por **Tavio e Teng (2004)**;

$$\beta = \frac{12\mu E_s A_o^2}{p_o^2 b^2 G_c \left(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_{tr}} \right)} \quad (50)$$

E_c : módulo de elasticidade do concreto;

E_s : módulo de elasticidade do aço;

G_c : módulo de elasticidade transversal do concreto;

f_{ck} : resistência característica do concreto à compressão;

ρ_t : porcentagem de armadura tracionada;

μ : multiplicador de rigidez, **Tavio e Teng (2004)** recomendam o valor de 1,5;

A_o e p_o : propriedades da seção transversal, como mostrado na Figura 2-44;

ρ_l : taxa de armadura longitudinal;

ρ_{tr} : taxa de armadura transversal;

b : largura da seção;

h : altura da seção.

Apesar da Equação (47) considerar a seção bruta o coeficiente α leva em conta a fissuração. Além disso, este coeficiente depende principalmente da porcentagem de armadura tracionada ρ_t e da resistência característica à compressão f_{ck} , como representado na Equação (49).

Girija e Menon (2011) consideram que uma medida de esbeltez mais adequada do que simplesmente a relação entre as dimensões do elemento é a apresentada na Equação (51). Esta relação se baseia nas normas técnicas internacionais para estruturas metálicas, sendo a diferença que em concreto utiliza-se momento último de flexão e em aço momento de plastificação.

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}}} \quad (51)$$

sendo

M_u : momento último de flexão;

M_{crit} : momento crítico de instabilidade lateral, determinado pela Equação (38).

Girija e Menon (2011) reuniram 72 resultados de experimentos publicados nos principais artigos acerca da instabilidade lateral de vigas de concreto, sendo 15 referentes ao seu estudo atual.

Para cada viga foi calculado seu índice de esbeltez $\bar{\lambda}$. Observaram que para índices próximos à unidade há uma redução na capacidade à flexão, lembrando que para $\bar{\lambda} \geq 1$ a ruptura ocorre por instabilidade e $\bar{\lambda} < 1$ ruptura por flexão. Observaram ruptura típica de flexão, sem deslocamentos laterais, somente para $\bar{\lambda} < 0,5$. Entre 0,5 e 1 os elementos romperam por flexão, porém com um momento último menor que o esperado, indicando uma interação entre os modos de ruptura. E para $\bar{\lambda} > 1,27$ os elementos romperam por instabilidade. Esta análise pode ser visualizada na Figura 2-28.

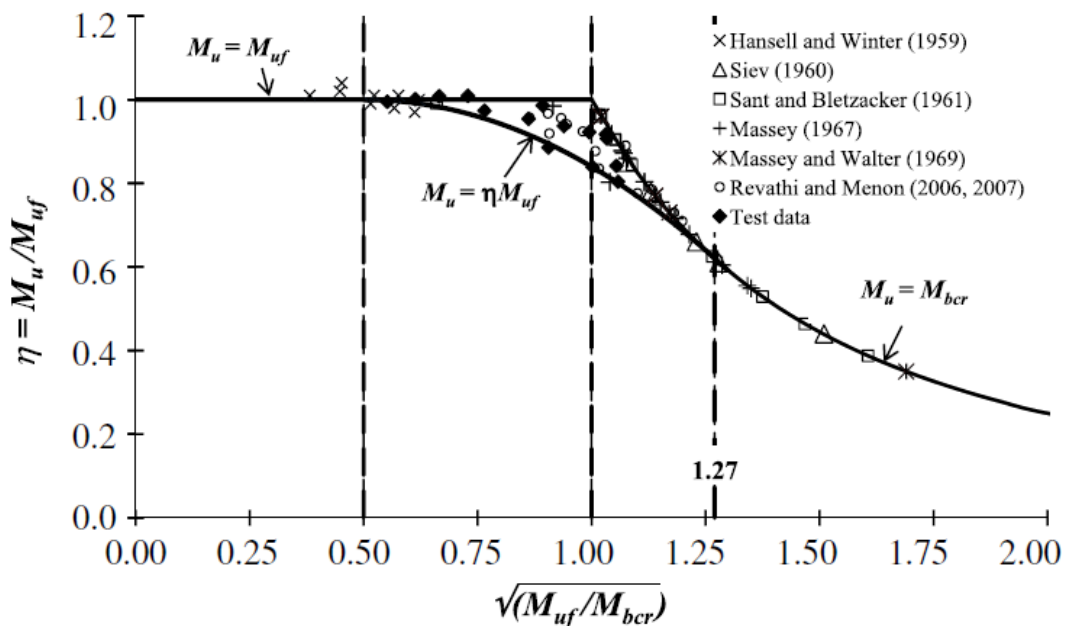


Figura 2-28 – Proposta de fator de redução de momento $\eta = \frac{M_u}{M_{res}}$ com a razão de esbeltez $\bar{\lambda}$

Fonte: Girija e Menon (2011)

Em vista dos resultados apresentados na Figura 2-28, **Girija e Menon (2011)** adotam uma curva para abrangê-los de maneira conservadora e da qual é possível retirar um coeficiente η , que multiplicado pelo momento último de flexão, prevê a carga de ruptura.

Girija e Menon (2011) destacam que para estruturas de concreto é conveniente adotar um limite de esbeltez mais conservador, evitando ruptura brusca por instabilidade, sendo este limite $\bar{\lambda} < 1$. Então, estabelecendo a ruptura por flexão como critério de segurança, a Equação (52) é sugerida para limitar a esbeltez de vigas.

$$\frac{\ell d}{b^2} = \frac{C_1 A E_c \sqrt{\alpha \beta}}{8,64 C_2 R} \quad (52)$$

sendo

α e β : determinados pelas equações mencionadas anteriormente, Equações (49) e (50);

E_c : módulo de elasticidade do concreto;

C_1 e C_2 : constantes para estabelecer as condições de contorno da viga (valores expressos na Equação (44));

A : parâmetro que leva em conta a altura que a carga é aplicada em relação ao CG, Equação (39).

R : fator de resistência à flexão, Equação (45);

ℓ, d e b : vão livre entre os apoios, altura útil da seção da viga e largura da seção, respectivamente.

A partir da obtenção da esbeltez $\bar{\lambda}$ é possível determinar o fator de redução de momentos η , conforme a Equação (53) e, se for o caso pra $\bar{\lambda} > 0,5$, estimar o momento de ruptura.

$$\eta = \frac{M_u}{M_{res}} = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda} \leq 0,5 \\ 0,84 + 0,64\bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda}) & 0,5 \leq \bar{\lambda} \leq 1,27 \\ \frac{1}{\bar{\lambda}^2} & \bar{\lambda} \geq 1,27 \end{cases} \quad (53)$$

Hurff e Kahn (2012) destacam a necessidade de considerar imperfeições iniciais em vigas de concreto para análise da estabilidade lateral, baseados em resultados experimentais realizados. Apesar disso, não existe normalização que apresente uma metodologia para

avaliação da instabilidade de vigas que leve em conta as imperfeições geométricas na determinação da carga crítica.

Existem poucos dados experimentais relacionados ao estudo da instabilidade lateral em vigas protendidas, esbeltas e retangulares. Com base nisso, **Hurff e Kahn (2012)** realizaram ensaios neste tipo de elemento, para comparar os resultados às formulações até então propostas e, em contrapartida, apresentar novas recomendações que levem em conta imperfeições geométricas.

Foram ensaiadas seis vigas retangulares de concreto protendido, com elevada esbelteza para que falhassem por instabilidade lateral. Como o objetivo era avaliar a carga crítica, então os apoios foram configurados de acordo com a teoria clássica de instabilidade lateral, ou seja, liberdade de rotação sobre o eixo de maior inércia, sem restrição ao empenamento e com restrição a deslocamentos laterais e à torção (giro da seção).

Os resultados de carga crítica obtidos experimentalmente mostraram a importância das imperfeições iniciais. Segundo **Hurff e Kahn (2012)**, as vigas que possuíam deslocamento lateral oposto ao sentido da rotação inicial deslocavam-se no sentido da rotação quando instáveis. Nos casos em que a rotação e deslocamento ocorrerão na mesma direção, a carga crítica é ainda menor. Os autores então concluíram que a rotação inicial tem maior influência sobre a carga crítica que o deslocamento lateral inicial.

A partir destes resultados e uma análise numérica não-linear, **Hurff e Kahn (2012)** propuseram parâmetros para reduzir a carga crítica de instabilidade levando em conta as imperfeições geométricas.

Com sua aplicação a análise não-linear geométrica é simplificada, pois a solução clássica pode ser utilizada para estimar a carga crítica e os coeficientes penalizam o resultado para considerar as imperfeições.

As evidências experimentais e numéricas permitiram relacionar carga crítica com rotação inicial e deslocamento lateral inicial, obtendo-se destas os coeficientes redutores. Os parâmetros seguem nas Equações (54) e (55).

$$\Theta_r = e^{-26,5\theta_0} \quad (54)$$

$$\Delta_r = 1 - \left(\frac{\delta_0}{\ell}\right)^{0,31} \quad (55)$$

onde

θ_r e Δ_r : parâmetros de redução para rotação inicial e deslocamento, respectivamente;

θ_0 : rotação inicial;

δ_0 : deslocamento inicial.

O limite de deslocamento lateral para que os parâmetros de redução tenham validade é de 7,94 mm para 3,05 m de vão. A rotação inicial é limitada a $\frac{\theta_i}{h} < 0,8$.

Para simplificar a não-linearidade física do material, **Hurff e Kahn (2012)** basearam-se nas propostas anteriores de outros autores como **Revathi e Menon (2006)**.

O módulo de elasticidade secante é utilizado para o concreto na obtenção da rigidez à flexão lateral B_{ef} . O momento de inércia efetivo para o eixo vertical $I_{ef,y}$ é baseado na relação entre o momento aplicado e momento de fissuração, semelhante à metodologia de Branson. Segue a Equação (56).

$$I_{ef,y} = \frac{\frac{\ell}{2} \left(\frac{M_r}{M_a} \right) M_r I_{c,y} + \left(\frac{\ell}{2} M_a - \frac{\ell}{2} \left(\frac{M_r}{M_a} \right) M_r \right) I_{r,y}}{\frac{\ell}{2} M_a} \quad (56)$$

em que

M_a : momento fletor aplicado, obtido a partir do equilíbrio da seção, pois a análise é iterativa;

M_r : momento de fissuração;

$I_{c,y}$: momento de inércia da seção bruta em torno do eixo vertical;

$I_{r,y}$: momento de inércia da seção fissurada em torno do eixo vertical;

Para a rigidez à torção é utilizada uma inércia a torção efetiva $I_{t,ef}$ baseada na condição de restrição à torção nos apoios. Assim, o maior torque ocorre nas extremidades da viga, correspondente a uma região possivelmente não fissurada por flexão. Portanto, a seção íntegra predominará na rigidez à torção. Segue a Equação (57) para a inércia a torção.

$$I_{t,ef} = \left[\left(\frac{M_a}{M_r} \right)^3 - 3 \left(\frac{M_a}{M_r} \right)^2 + 3 \left(\frac{M_a}{M_r} \right) \right] (I_t - I_{t,r}) + I_{t,r} \quad (57)$$

onde

I_t : momento de inércia à torção da seção bruta;

$I_{t,r}$: momento de inércia à torção da seção desconsiderando a região fissurada.

As vigas protendidas ensaiadas por **Hurff e Kahn (2012)** não apresentaram fissuração por torção antes de sofrer instabilidade. Os autores consideram conservadora a utilização da rigidez à torção pós-fissuração recomendada por **Revathi e Menon (2006)** para vigas protendidas.

Portanto, para calcular o momento crítico de instabilidade para uma viga protendida biapoiada considerando suas imperfeições iniciais, **Hurff e Kahn (2012)** apresentam a seguinte Equação (58).

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{C_2 \ell} A \sqrt{B_r C_{\text{ef}}} \Delta_r \Theta_r \quad (58)$$

em que

A : parâmetro que leva em conta a altura a que a carga é aplicada em relação ao CG, Equação (39);

C_{ef} : rigidez efetiva à torção;

B_r : rigidez à flexão reduzida devido à inclinação da linha neutra, Equação (59).

Quando a viga é submetida à flexão oblíqua sua linha neutra é inclinada, antes de flambar. A partir disso e embasados em análises numéricas e experimentais, **Hurff e Kahn (2012)** reduzem a rigidez efetiva B_{ef} para levar em conta o efeito desfavorável da zona comprimida não ser retangular. A Equação (59) realiza essa redução.

$$B_r = B_{\text{ef}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\arctg \left(\frac{I_{c,x}}{I_{c,y}} \theta_0 \right)}{\frac{\pi}{2}} \right] \right\} \quad (59)$$

sendo

B_{ef} : rigidez efetiva à flexão;

$I_{c,x}$: momento de inércia da seção bruta em torno do eixo vertical.

Como visto nas Eqs. (56) e (57) existe a variável de momento aplicado M_a . Este valor refere-se a uma análise interativa que primeiro adota uma curvatura da seção para obter o momento interno. Com a profundidade da linha neutra são calculadas as propriedades da seção fissurada e, conseqüentemente, o valor do momento crítico, pela Equação (58). Caso os momentos sejam equivalentes, o valor da sollicitação crítica está determinado.

Kalkan (2014) ensaiou 9 vigas esbeltas de concreto armado e propôs uma formulação para estimar a carga crítica de instabilidade. A solução analítica leva em conta imperfeições geométricas e o comportamento não-linear do concreto.

Todos os modelos ensaiados romperam por instabilidade elástica e não foi registrada fissuração diagonal antes do elemento flambar. A hipótese de **Kalkan (2014)** é que a viga sofre apenas deformações devido à flexão reta e quando a carga de instabilidade acontece surgem deformações de flexão lateral que provocam o deslocamento lateral.

Segundo **Kalkan (2014)** o lado tracionado pela flexão lateral pode ter a rigidez estimada pelo módulo de elasticidade elástico E_c . No entanto, a parte em que ocorre sobreposição de compressão pela flexão principal somada à flexão lateral deve ser obtida pelo módulo de elasticidade secante E_{sec} , devido à variação de deformação. Este módulo corresponde à máxima deformação de compressão da seção.

Baseado em um modelo de molas representando a viga, **Kalkan (2014)** apresenta a Equação (60) para a rigidez à flexão lateral para uma seção retangular, sem considerar as rigidezes das armaduras e a Equação (61) para vigas com seção qualquer e considerando a rigidez das armaduras.

$$B_{ef} = \left[\frac{b^3 x}{12} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega M_r}{M_{lim}} \right)^2 \left(\frac{x}{h} - 1 \right)} \right] E_o \quad (60)$$

$$B_{ef} = \frac{1}{\left(\frac{\omega M_r}{M_{lim}} \right)^2 \frac{1}{E_s \sum I_{sy} + E_o (I_{ucl} + I_{ucu})} + \left[1 - \left(\frac{\omega M_r}{M_{lim}} \right)^2 \right] \frac{1}{E_s \sum I_{sy} + E_o (I_{cl} + I_{cu})}} \quad (61)$$

sendo

M_f : momento de fissuração;

M_{lim} : momento limite de instabilidade;

ΣI_{sy} : momento de inércia das armaduras em torno do eixo vertical;

ω : constante que diminui o momento de fissuração para levar em conta fissuração por retração. **Kalkan (2014)** propõe o valor para a constante de 2 e relata que outros autores recomendam 1 para ausência destas fissuras e 2/3 se ocorrerem;

E_o : metade da soma entre E_{sec} e E_c ;

I_{ucl} : inércia da região não fissurada que sofreu carregamento com a instabilidade, ocorrendo sobreposição de compressão;

I_{ucu} : inércia da região não fissurada que sofreu descarregamento com a instabilidade;

I_{cl} : inércia da região fissurada que sofreu carregamento com a instabilidade;

I_{cu} : inércia da região fissurada que sofreu descarregamento com a instabilidade.

Para rigidez à torção **Kalkan (2014)** recomenda uma solução baseada em torção de St. Venant, pois a viga não apresenta fissuração diagonal por torção, Equação (62). Para seções quaisquer a constante de torção de St. Venant resultará do somatório das constantes de cada parte da seção, que simplifiadamente podem ser retângulos.

$$C_{ef} = \left[\frac{E_{sec} + E_c}{4(1 + \nu)} \right] \Sigma I_t \quad (62)$$

em que ΣI_t é o somatório da inércia de torção de cada parte da seção.

As imperfeições geométricas diminuem a capacidade das vigas em relação à carga crítica de instabilidade. Portanto não ocorre bifurcação de equilíbrio, como mostrado na Figura 2-29.

Para considerar este efeito, **Kalkan (2014)** adota a hipótese de **Southwell (1932) apud Kalkan (2014)** estabelecendo que o deslocamento lateral δ_t do centróide da seção na direção do eixo $x''x''$, devido à carga limite, está relacionado ao deslocamento lateral inicial δ_{t0} na

direção do eixo $x'x'$, considerando pequenos deslocamentos $\delta_{t0} \approx \delta_o$, a Equação (63) apresenta a hipótese. A representação dos deslocamentos, giros e eixos da seção seguem na Figura 2-30.

$$\delta_t = \frac{\delta_o}{1 - \frac{P}{P_{crit}}} \quad (63)$$

A componente da carga P que se decompõe e atua lateralmente provocando o deslocamento lateral adicional $\delta_t - \delta_{t0}$, expresso pela Equação (64).

$$\delta_t - \delta_o = \frac{P \operatorname{sen}\theta \ell^3}{48E_c I_y} \quad (64)$$

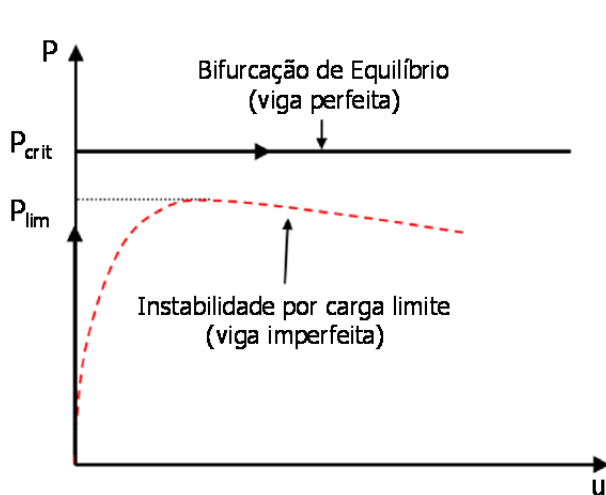


Figura 2-29 - Instabilidade lateral de vigas perfeitas e imperfeitas

Fonte: adaptado de Kalkan (2014)

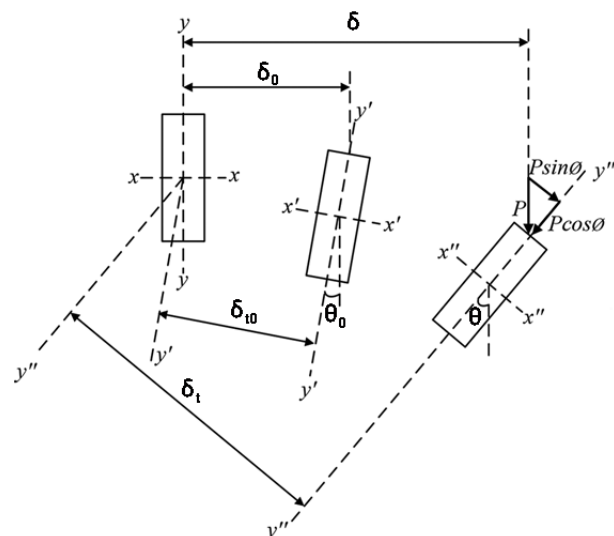


Figura 2-30 – Deslocamentos laterais e giros da seção

Fonte: adaptado de Kalkan (2014)

Segundo **Kalkan (2014)** a Equação (64) pode ser derivada para obtenção da carga limite de instabilidade distribuída ou momento limite de instabilidade.

A partir das formulações de **Stratford et al (2001)** que consideram imperfeições na forma de deslocamentos laterais e rotação, **Kalkan (2014)** apresenta a Equação (65) para a carga limite de instabilidade p_{lim} que é uma combinação das Equações (63) e (64). Considerando pequenos deslocamentos, o ângulo correspondente à carga limite fica $\operatorname{sen}\theta \approx$

θ_{lim} . No entanto para se obter p_{lim} é preciso conhecer o ângulo θ_{lim} . **Kalkan (2014)** registrou em ensaios uma faixa de θ_{lim} entre 0,45 e 1,66 graus, equivalente a 0,008 a 0,029 rad para instabilidade por flexo-torção e adotou para sua formulação 0,013 rad.

$$p_{lim} = p_{crit} - \frac{(384E_c I_y) \left(\delta_0 + \theta_0 \frac{h}{2} \right)}{5\theta_{lim} \ell^4} \quad (65)$$

em que

p_{crit} : carga crítica de instabilidade lateral distribuída;

I_y : momento de inércia em torno do eixo vertical;

ℓ : vão;

θ_0 : giro inicial da seção.

Esta formulação pode ser utilizada para diferentes condições de contorno, principalmente para abordar as fases transitórias. **Kalkan (2014)** destaca os incidentes ocorridos nos Estados Unidos com vigas de pontes em fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios e a importância das imperfeições geométricas na instabilidade lateral.

O problema apresentado por **Kalkan (2014)** constitui em instabilidade por flexo-torção. Os travamentos laterais nas extremidades das vigas restringem o giro nos apoios, provocando o giro relativo com o meio do vão e, conseqüentemente, deformações por torção. Isto caracteriza o problema clássico de instabilidade.

Segundo **Stratford et al (1999)** nesta situação o deslocamento limite de instabilidade está relacionado à razão $\left(\frac{p}{p_{crit}} \right)^2$, como expresso pela Equação (19), porque ocorrem deformações por torção. Considerando dessa maneira a hipótese de Southwell e uma viga com carregamento distribuído a carga limite é obtida segundo a Equação (66).

$$p_{lim}^2 + \delta_s p_{lim} - p_{crit}^2 = 0 \quad (66)$$

A única incógnita é p_{lim} que é a raiz positiva da equação. A constante δ_s é obtida pela Equação (67).

$$\delta_s = \frac{384 E_c I_y \left(\delta_0 + \theta_0 \frac{h}{2} \right)}{5 \theta_{lim} \ell^4} \quad (67)$$

2.3 Normalização e a estabilidade lateral de vigas de concreto

2.3.1 Considerações iniciais

Neste item serão apresentados os tópicos de algumas das principais normas técnicas que fazem menção à verificação da estabilidade lateral de vigas de concreto. Na seção 4 são feitas comparações entre os modelos estudados e as recomendações apresentadas à seguir.

2.3.2 ABNT NBR 9062:2006

A atual **ABNT NBR 9062:2006** não apresenta nenhuma recomendação sobre instabilidade lateral para vigas pré-moldadas.

A versão anterior da norma de projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado **ABNT NBR 9062:2001** no item 6.1.1.1 recomendava que o espaçamento de escoramentos laterais, posicionados entre os apoios da viga, deveria atender a Equação (68).

$$\frac{L}{b_f} \leq 50 \quad (68)$$

onde L é a distância entre escoramentos laterais que garantem o contraventamento e b_f é a largura da mesa comprimida.

Para prevenir a ruptura por instabilidade lateral de vigas biapoiadas a **ABNT NBR 9062:2001** recomendava a seguinte verificação, no item 6.1.1.2, Equação (69).

$$\frac{\ell h}{b_f^2} \leq 500 \quad (69)$$

Onde h é a altura total da viga.

Nas situações transitórias a **ABNT NBR 9062:2001** recomendava a verificação do item 6.1.1.5 através da Equação (70) de acordo com as dimensões apresentadas na Figura 2-31, que é equivalente à recomendação de **Anderson (1971)**, apresentada na Equação (7).

$$\frac{h_m}{a} \geq 2 \quad (70)$$

sendo h_m a menor dimensão entre h_s e h_i .

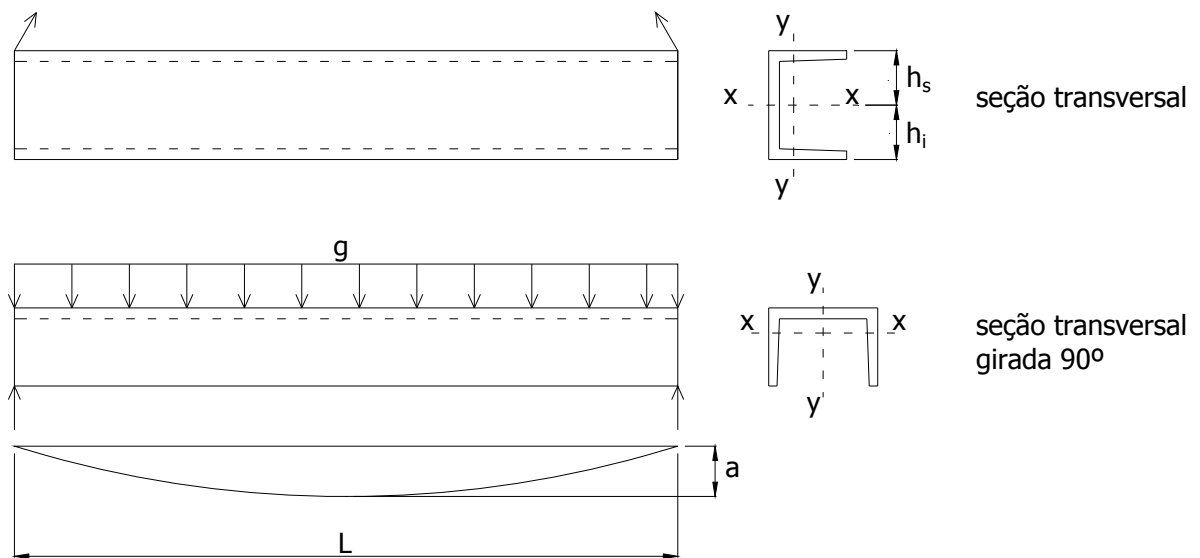


Figura 2-31 – Dimensões para a verificação da estabilidade lateral

2.3.3 ABNT NBR 6118:2007

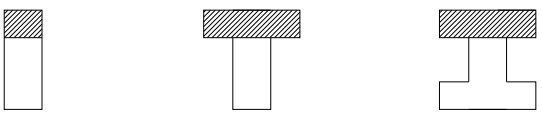
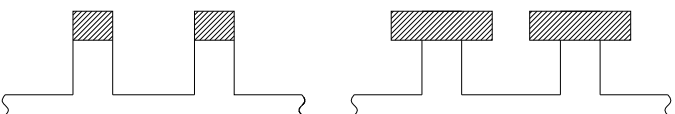
A norma brasileira de projeto de estruturas de concreto **ABNT NBR 6118:2007**, em seu item 15.10, faz menção a um procedimento aproximado para verificação da estabilidade lateral de vigas de concreto armado ou protendido, recomendado na ausência de uma verificação mais apropriada.

Um dos limites apresentados pela **ABNT NBR 6118:2007** equivale à Equação (68) da **ABNT NBR 9062:2001** e o segundo segue na Equação (71) .

$$b_f \geq \beta_{fl} h \quad (71)$$

Sendo β_{fl} um coeficiente que depende da forma da viga, obtido através da Tabela 2.

Tabela 2 - Valores de β_{fl}

Tipologia da viga	Valores de β_{fl}
	0,40
	0,20

Fonte: ABNT NBR 6118:2007

2.3.4 ACI 318

No item 10.4 o **ACI 318 (2008)** limita o espaçamento entre apoios laterais a no máximo 50 vezes a menor largura da face comprimida.

Além disso, estabelece que “efeitos de excentricidade lateral da carga devem ser considerados na determinação dos espaçamentos de apoios laterais.” No entanto **Hurff e Kahn (2012)** afirmam que não existe norma técnica que apresente uma metodologia para levar em conta a excentricidade lateral da carga.

A norma americana destaca, no item 16.9, que nas fases transitórias as solicitações não devem provocar tensões permanentes, deformações, fissuração e deslocamentos que ultrapassem suas recomendações.

2.3.5 PCI - Bridge Design Manual

As investigações sobre estabilidade de vigas protendidas em situações transitórias realizadas por **Mast (1993)**, se tornaram a base do código americano **PCI Bridge Design**

Manual (2003) para verificação da estabilidade lateral de viga. As formulações já apresentadas no item 2.2, para verificação de vigas sendo içadas e sobre apoios elásticos, estão no capítulo 8 da norma de pontes.

A norma recomenda como fatores de segurança mínimos para fissuração igual a 1 e para ruptura igual a 1,5. Estes fatores valem para içamento e apoios elásticos, podendo ser adaptados de acordo com a experiência.

Na fase de içamento o **PCI Bridge Design Manual (2003)** recomenda que os fatores de segurança contra fissuração e ruptura sejam tomados como iguais. Esta observação é feita, pois após o início da fissuração a rigidez a flexão lateral cai drasticamente, portanto a ruptura pode ocorrer rapidamente.

Para vigas sendo içadas, recomenda-se utilizar como excentricidade inicial e_i metade da tolerância a deslocamentos laterais, estabelecida pelo **PCI Tolerance Manual (2000)**, mais a tolerância no posicionamento dos dispositivos de içamento. Assim, e_i total fica ± 3 mm para cada 3 m de comprimento mais 6,4 mm de tolerância no posicionamento dos cabos.

No caso de apoios elásticos, a imperfeição inicial adotada e_i deve ser maior. Então é recomendado utilizar as tolerâncias do **PCI Tolerance Manual (2000)** de deslocamento lateral mais a tolerância de excentricidade no posicionamento da viga sobre o apoio, ou seja, ± 3 mm para cada 3 m de comprimento mais 25,4 mm. Esta última segue representada na Figura 2-32.

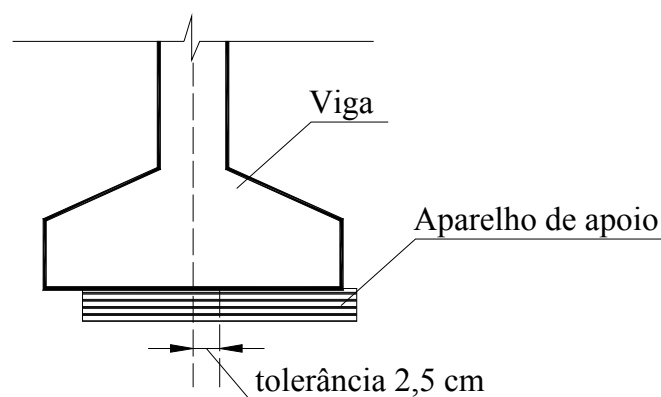


Figura 2-32 – Excentricidade entre o aparelho de apoio e a viga

Existe também a recomendação sobre a planicidade do apoio recomendada pelo **PCI Tolerance Manual (2000)**. Como mostrado na Figura 2-33, o limite é 1,6 mm.

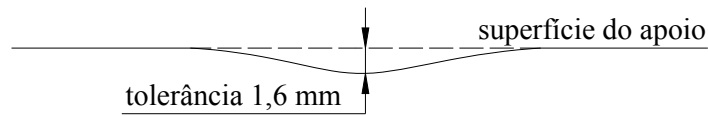


Figura 2-33 – Tolerância de não planicidade do apoio

A planicidade de qualquer superfície de uma viga deve estar dentro da tolerância de 6 mm para 3 m de superfície. Esta recomendação é utilizada para estimar a rotação inicial da seção no meio do vão considerando neste caso a verticalidade do elemento.

2.3.6 BS:8110

O código de práticas para uso estrutural do concreto **BS:8110 (2007)** aborda o tema da estabilidade lateral de vigas através da relação entre limite de esbeltez e distância entre restrições laterais L no seu item 3.4.1.6. A recomendação para vigas biapoiadas do código segue na Equação (72).

$$L \leq \begin{cases} 60b_f \\ \frac{250b_f^2}{d} \end{cases} \quad (72)$$

sendo d a altura efetiva da seção.

No item 4.3.2 referente a vigas esbeltas protendidas, a **BS:8110 (2007)** chama atenção para as fases transitórias e lista quatro tópicos relevantes que devem ser avaliados para garantir a segurança destes elementos. Os tópicos são:

- Dimensões e tipo da seção transversal, relações entre vão/altura/largura;
- Localização dos pontos de içamento;
- Método de içamento e dispositivos de içamento;
- Tolerâncias.

A **BS:8110 (2007)** destaca também a necessidade de se verificar as tensões nas fases transitórias, considerando os efeitos do peso da viga na forma de flexão biaxial e a protensão.

Esta análise deve ser feita para avaliar a possibilidade de fissuração. Caso se confirme a fissuração a posição dos apoios nas situações transitórias deve ser reavaliada.

As recomendações dos códigos australiano e indiano (AS:3600 e IS:456, respectivamente) são as mesmas apresentadas pelo código **BS:8110 (2007)**. Por isso, não são aqui apresentadas.

2.3.7 EUROCODE 2

As verificações de estabilidade lateral da norma europeia, em seu item 5.9, são diferentes para situações definitivas e transitórias, apresentando valores limites maiores para as etapas temporárias como transporte e içamento.

O **EUROCODE 2 (2004)** estabelece que efeitos de segunda ordem em vigas, relacionados à instabilidade, podem ser desprezados:

- situação definitiva:

$$\frac{\ell}{b_f} \leq \frac{50}{(h/b_f)^{1/3}} \quad \text{e} \quad \frac{h}{b_f} \leq 2,5 \quad (73)$$

- situação transitória:

$$\frac{\ell}{b_f} \leq \frac{70}{(h/b_f)^{1/3}} \quad \text{e} \quad \frac{h}{b_f} \leq 3,5 \quad (74)$$

Para análises de viga sem travamentos laterais a norma recomenda que uma imperfeição geométrica na forma de deslocamento lateral inicial o valor $\ell/300$ seja adotada, sendo ℓ o vão total.

2.4 Rigidez à flexão em elementos de concreto

2.4.1 Considerações iniciais

Neste capítulo é realizado o estudo do comportamento à flexão de elementos de concreto para obtenção da rigidez à flexão efetiva EI_{ef} . Para isso são utilizadas as leis constitutivas dos materiais e algumas hipóteses básicas que possibilitaram o traçado do diagrama momento curvatura $M-1/r$.

2.4.2 Diagrama momento-curvatura

Segundo **Lin e Burns (1981)** o diagrama $M-1/r$ é uma ferramenta que apresenta o comportamento de uma seção de concreto em todos os estágios de solicitação. Sendo a obtenção dos pontos do diagrama baseada nas leis constitutivas dos materiais e nas hipóteses básicas adotadas para o comportamento da seção.

Os parâmetros mais importantes apresentados no diagrama $M-1/r$ são o momento de fissuração, momento último e a rigidez à flexão em qualquer nível de solicitação.

Realizando-se um procedimento com aplicação de deformação incremental é possível avaliar o comportamento pré e pós-fissuração do concreto, até atingir a ruptura. Para isso, é preciso entender como o material se comporta com a variação da curvatura da seção.

Para descrever a relação entre tensão σ_c e deformação ε_c do concreto à compressão será utilizada a curva descrita pela Equação (75) recomendada pelo **EUROCODE 2 (2004)**, Figura 2-34.

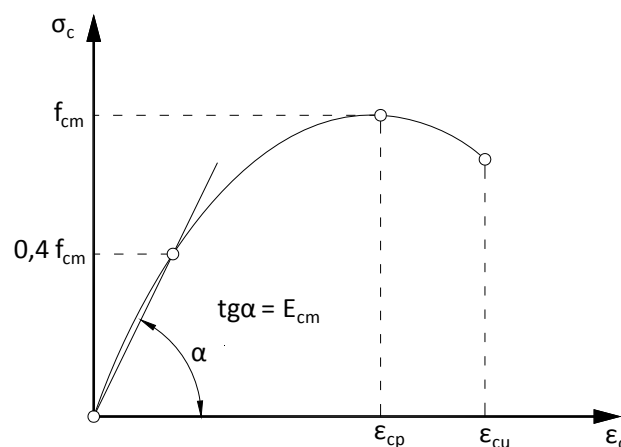


Figura 2-34 - Comportamento do concreto à compressão representado pelo diagrama parabólico

Fonte: adaptado de EUROCODE 2 (2004)

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (75)$$

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \quad (76)$$

$$k = \frac{1,05E_{cm}\varepsilon_{cp}}{f_{cm}} \quad (77)$$

sendo

ε_c : deformação de compressão no concreto;

ε_{cp} : deformação de compressão de pico no concreto;

f_{cm} : resistência média do concreto à compressão que segundo o **EUROCODE 2 (2004)** é determinada através da Equação (78);

$$f_{cm} = f_{ck} + 8(\text{MPa}) \quad (78)$$

E_{cm} : módulo de elasticidade do concreto, Equação (79);

$$E_{cm} = 22 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (79)$$

Para obter a rigidez à flexão de um elemento a qualquer estágio de carregamento será apresentado o equacionamento proposto por **Bažant e Oh (1984)**, para vigas de seção retangular, cujo modelo considera o efeito do amolecimento por deformação (*strain softening*) e permite a obtenção dos momentos internos resistentes com respectivas curvaturas da seção.

Bažant e Oh (1984) relatam que ensaios realizados avaliando as tensões de tração mostraram que o concreto realmente apresenta um declínio gradual destas tensões. Para representar esse comportamento à tração, adotaram o diagrama tensão-deformação bilinear (Figura 2-35), representado pelas Equações (80), (81) e (82).

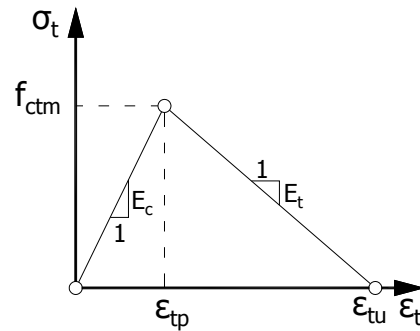


Figura 2-35 – Comportamento do concreto à tração representado pelo diagrama bilinear

Fonte: adaptado de Bažant e Oh (1984)

Para $\varepsilon_t \leq \varepsilon_{tp}$;

$$\sigma_t = E_c \varepsilon_t \quad (80)$$

Para $\varepsilon_{tp} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tu}$;

$$\sigma_t = f_{ctm} - (\varepsilon_t - \varepsilon_{tp})(-E_t) \quad (81)$$

Para $\varepsilon_t \geq \varepsilon_{tu}$;

$$\sigma_t = 0 \quad (82)$$

sendo,

σ_t : tensão de tração uniaxial no concreto;

f_{ctm} : resistência média à tração do concreto, que segundo recomendação do **EUROCODE 2 (2004)**, deve ser determinada através das Equações (83) e (84);

Para $f_{ck} \leq 50MPa$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (83)$$

Para $f_{ck} \geq 50MPa$

$$f_{ctm} = 2,12 \ln \left(1 + \frac{f_{cm}}{10} \right) \quad (84)$$

onde,

f_{cm} : resistência média do concreto à compressão que segundo o **EUROCODE 2 (2004)** é determinada através da Equação (78);

ε_t : deformação de tração uniaxial no concreto;

ε_{tp} : deformação de tração de pico, determinada pela Equação (85);

$$\varepsilon_{tp} = \frac{f_{ctm}}{E_c} \quad (85)$$

ε_{tu} : deformação última à tração, a partir da qual a tensão se torna nula no ponto, sendo determinada através da Equação (86) que representa a equação da reta decrescente da Figura 2-35 quando a tensão de tração $\sigma_t = 0$;

$$\varepsilon_{tu} = -\frac{f_{ctm}}{E_t} + \varepsilon_{tp} \quad (86)$$

E_c : módulo de elasticidade longitudinal;

E_t : módulo de elasticidade tangente que representa o strain-softening, sendo seu valor negativo que segundo **Bažant e Oh (1984)** pode ser determinado pela Equação (87).

$$E_t = \frac{-70 E_c}{57 + 145f_{ctm}} \quad (87)$$

O comportamento do aço comum é adotado como elástico-perfeitamente plástico, sendo sua tensão de escoamento denotada por f_y . O valor da tensão estará de acordo com o elemento estudado. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é representado por E_s e seu valor é 210 GPa.

Para a armadura de protensão a relação entre tensão e deformação é linear antes atingir a tensão de escoamento f_{pyk} , Equação (88).

$$\text{Para } \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{py}} \leq 1$$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \quad (88)$$

Quando é superado o limite de proporcionalidade é adotada a relação entre tensão e deformação não-linear através da equação de Ramberg-Osgood, Equação (89).

Para $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{py}} > 1$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \left[1 + \left(\frac{E_p \varepsilon_p}{f_{ptu}} \right)^R \right]^{-\frac{1}{R}} \quad (89)$$

em que

- f_{ptu} : tensão de ruptura na armadura protendida;
- R : coeficiente do material, sendo para o aço de protensão 4,38;
- ε_{py} : deformação correspondente à tensão de escoamento f_{pyk} ;
- E_p : módulo de elasticidade da armadura de protensão.

Para fazer a análise da flexão levando em conta os comportamentos do concreto e do aço mencionados anteriormente, somam-se algumas hipóteses clássicas:

- a) Hipótese de Bernoulli-Navier de que as seções são planas e permanecem planas até a ruptura, conseqüentemente, a distribuição de deformações é linear em toda a seção;
- b) Hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto. A deformação média no aço é igual a deformação média no concreto adjacente;
- c) Os fios e as bainhas possuem aderência perfeita ao concreto, ou seja, há compatibilidade de deformações entre os dois materiais;
- d) Devido à protensão, a seção terá uma deformação inicial com curvatura negativa. Portanto no ato da protensão, ocorrerá uma deformação de compressão no concreto ε_{ce} que causa uma leve perda da força nos cabos. A força inicialmente efetiva sobre o cabo será a força aplicada reduzida desta deformação do concreto;
- e) Assumindo que a viga apresenta resistência ao cisalhamento, prevenindo este tipo de falha, espera-se ruptura à flexão. Para garantir que a resistência à flexão última seja alcançada, são assumidas aderência e ancoragem adequadas dos cabos evitando rupturas localizadas.

A Figura 2-36 apresenta as variáveis geométricas, a distribuição de tensões e deformações na seção para a determinação do diagrama M-1/r.

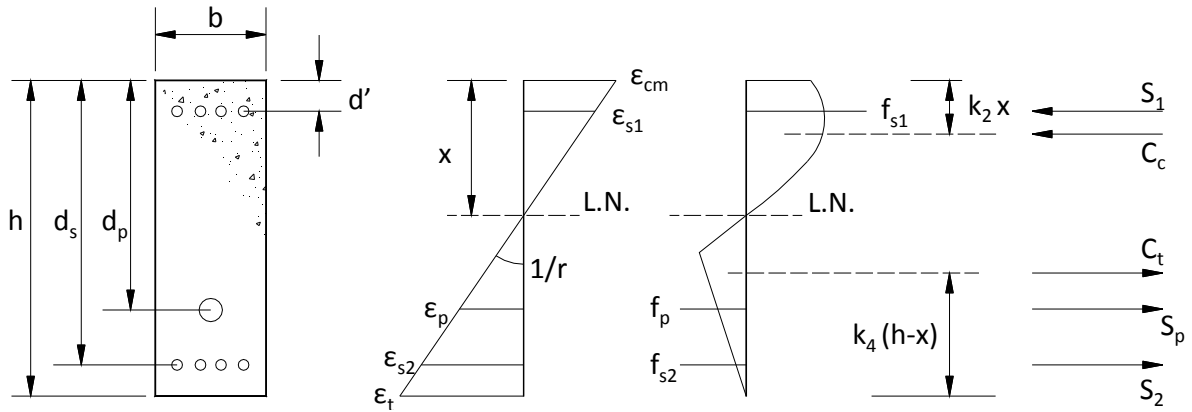


Figura 2-36 – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal da viga

Como mostrado na Figura 2-36, a distribuição de deformações é linear. O procedimento incremental consistirá da adoção de uma deformação na fibra mais comprimida ϵ_{cm} e da profundidade da linha neutra x . Portanto, a solicitação será feita através de deformação e a determinação da linha neutra será interativa.

A partir da hipótese de seções planas, pode-se determinar a deformação em qualquer ponto da seção. Para as armaduras a deformação ϵ_{sj} ($j = 1,2$) pode ser representada pela Equação (90).

$$\epsilon_{sj} = \epsilon_{cm} \frac{x - (d \text{ ou } d')}{x} \quad (90)$$

onde

- ϵ_{cm} : deformação adotada;
- x : profundidade da linha neutra;
- d : altura útil da armadura tracionada, para $j = 2$;
- d' : altura útil da armadura comprimida, para $j = 1$.

Conhecidas as deformações nas armaduras, obtêm-se as tensões através do módulo de elasticidade longitudinal do aço E_s e, em seguida, as resultantes de tração e de compressão ($S_j = \sigma_{sj} A_{sj}$) nas barras com as áreas de seção transversal como representado na Figura 2-36.

A resultante da distribuição de tensões de compressão no concreto é determinada pela Equação (91) que consiste na integração da Equação (75) através do parâmetro k_1 .

$$C_c = k_1 f_{cm} b x \quad (91)$$

sendo,

b : largura da seção;

k_1 : parâmetro que define a tensão de compressão média, Equação (92).

$$k_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d \varepsilon_c}{f_{cm} \varepsilon_{cm}} \quad (92)$$

Como visto na Figura 2-36, a resultante de compressão C_c atua a uma distância $k_2 x$ da fibra mais comprimida da seção. O parâmetro k_2 é obtido da Equação (93).

$$k_2 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c \sigma_c d \varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d \varepsilon_c} \quad (93)$$

Para a resultante de tensões de tração, considerando o amolecimento por deformação, representada por C_t , é dada pela Equação (94).

$$C_t = k_3 f_{ctm} b (h - x) \quad (94)$$

sendo

k_3 : parâmetro que define a tensão de tração média, determinado pela Equação (95) abaixo.

$$k_3 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_t d \varepsilon_t}{f_{ctm} \varepsilon_{tm}} \quad (95)$$

onde

ε_{tm} : deformação de tração na fibra mais tracionada da seção (Figura 2-36).

No entanto, σ_t pode ter três domínios diferentes e, pra cada um deles, uma equação. O parâmetro k_3 terá três equações para os intervalos apresentados na Figura 2-35.

A resultante de tração atua a uma distância da borda mais tracionada que será denominada z_1 , Equação (96), sendo a região de tensões de tração delimitada pelo comprimento $(h - x)$. Portanto, a distância z_1 é então proporcionada pela constante k_4 que segue na Equação (97):

$$z_1 = k_4(h - x) \tag{96}$$

$$k_4 = 1 - \frac{\int_0^{\epsilon_{tm}} \epsilon_t \sigma_t d \epsilon_t}{\epsilon_{tm} \int_0^{\epsilon_{tm}} \sigma_t d \epsilon_t} \tag{97}$$

Da mesma forma que k_3 , k_4 será obtido para os três domínios da resistência à tração do concreto.

O processo é iterativo porque adota-se uma linha neutra que servirá para a compatibilidade de deformações. Assim, realiza-se o equilíbrio de forças normais na seção que resultem uma nova posição da linha neutra. O objetivo é que a linha neutra calculada seja próxima à adotada, atendendo a um critério de aceitação. A Equação (98) representa o equilíbrio de forças normais na seção.

$$N = k_1 f_{cm} b x + \sum_{j=1}^2 \sigma_j A_{sj} - k_3 f_{ctm} b (h - x) \tag{98}$$

Para obter o diagrama M-1/r é necessário realizar várias vezes este procedimento, mudando a deformação ϵ_{cm} em pequenos incrementos. Para cada deformação que se obtém a linha neutra corresponde a um ponto do diagrama. O momento é calculado pelo equilíbrio de momentos em torno da linha neutra e sua respectiva curvatura 1/r. Seguem as Equações (99) e (100) para o equilíbrio de momentos e cálculo da curvatura.

$$M = k_1 f_{cm} b x (x - k_2 x) + \sum_{j=1}^2 \sigma_j A_{sj} (x - d_j) - k_3 f_{ctm} b (h - x) [(h - x) - k_4 (h - x)] \tag{99}$$

$$1/r = \frac{\varepsilon_{cm}}{x} \quad (100)$$

O objetivo de entender o comportamento de uma viga à flexão é a obtenção de sua rigidez secante EI_{sec} a qualquer nível de sollicitação, pois assim não é necessário adotar hipoteticamente uma rigidez que corresponda ao momento crítico de instabilidade.

A rigidez é obtida traçando-se uma reta secante à curva do diagrama $M-1/r$, cruzando a origem dos eixos e o momento sollicitante, como mostrado na Figura 2-37. A obtenção da inclinação desta reta traçada através da tangente do ângulo corresponde à rigidez à flexão do elemento sob o nível de sollicitação considerado.

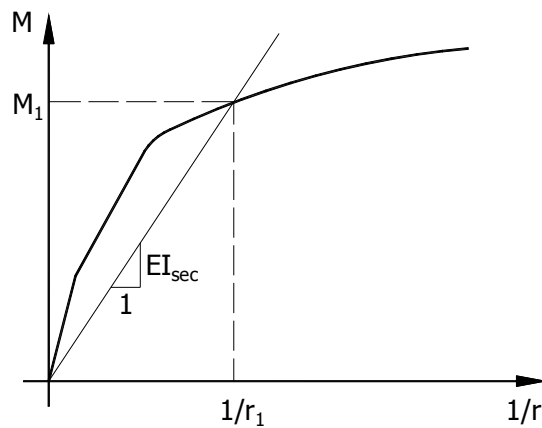


Figura 2-37 – Diagrama momento-curvatura $M-1/r$ e rigidez EI_{sec}

2.4.3 Validação do Diagrama Momento-curvatura

Com intuito de verificar a representatividade da combinação de todas as hipóteses apresentadas no item 2.4, é determinado o diagrama momento curvatura da viga protendida ensaiada por **Mattock et al (1971)** cujas especificações estão na Figura 2-38.

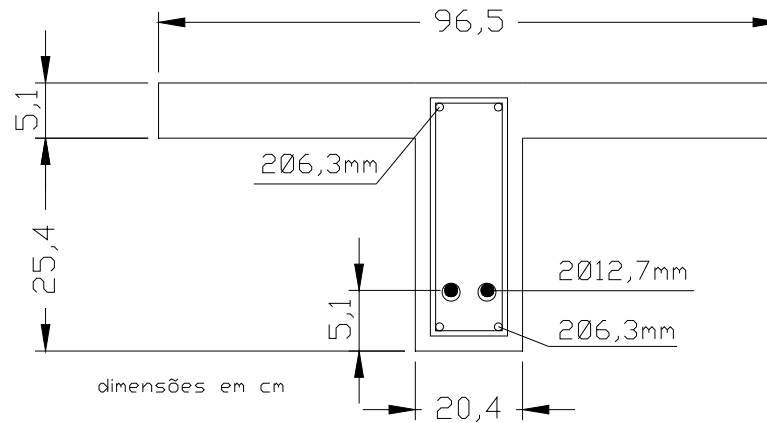


Figura 2-38 – Viga TB1 ensaiada por Mattock (1971)

Mattock (1971) fornece como resultado do ensaio o diagrama força deslocamento. Assim, é traçado este diagrama a partir do diagrama momento curvatura, utilizando para isso o método de integração de Simpson.

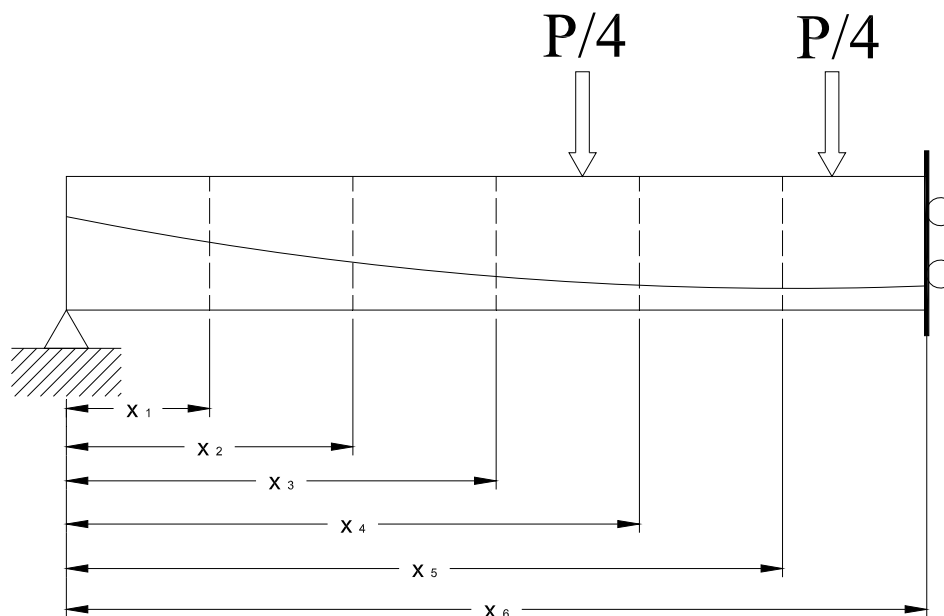


Figura 2-39 – Divisão do domínio da viga para aplicação do método de Simpson

Dividindo o domínio em 6 trechos e considerando a simetria do modelo o método, de Simpson resulta na Equação (101). Então para uma dada carga P resulta em uma distribuição de momentos fletores, conhecendo-se o diagrama momento-curvatura de cada seção obtêm-se o deslocamento δ no meio do vão.

$$\delta = \frac{\ell^2}{108} [\kappa(x_1) + \kappa(x_2) + 3\kappa(x_3) + 2\kappa(x_4) + 10\kappa(x_5) + 3\kappa(x_6)] \quad (101)$$

em que

$\kappa(x_i)$: é a curvatura da seção para o momento solicitante;

ℓ : vão da viga.

Para a viga de **Mattock (1971)** o diagrama momento curvatura segue na Figura 2-40e a comparação entre os resultados numérico e experimental seguem na Figura 2-41.

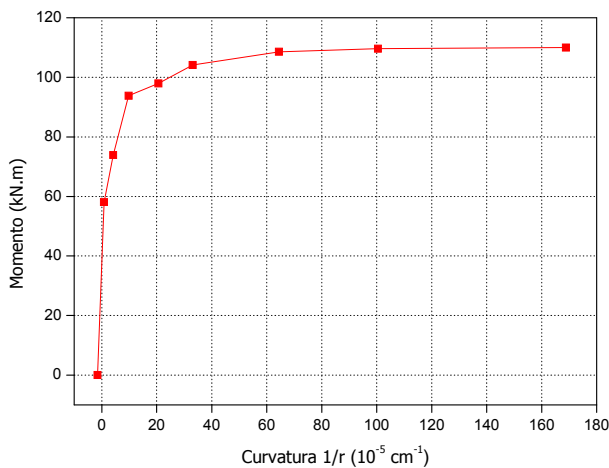


Figura 2-40 – Diagrama M-1/r da viga TB1

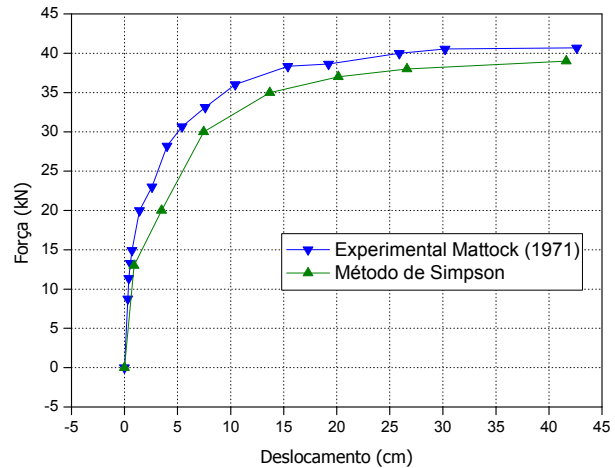


Figura 2-41 – Resposta força-deslocamento da viga TB1

2.5 Rigidez à torção em concreto

2.5.1 Considerações iniciais

Este capítulo é introduzido com intuito de determinar a rigidez à torção C de elementos de concreto no estágio de torção de pós-fissuração. Essa rigidez é utilizada no cálculo do momento crítico de instabilidade lateral de vigas de concreto.

2.5.2 Rigidez à torção

A Figura 2-42 abaixo representa um diagrama torção-rotação típico de elementos de concreto armado.

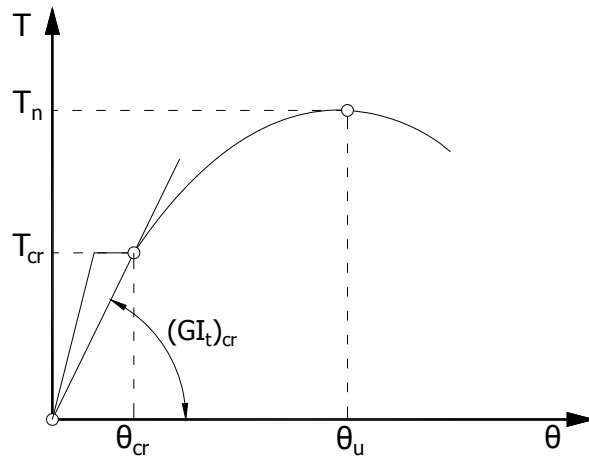


Figura 2-42 - Diagrama torção-rotação típico de elementos de concreto

No primeiro trecho linear é representada a rigidez à torção em regime elástico que pode ser calculada pela teoria de St. Venant, correspondente ao estágio de carga anterior à fissuração. Nesta fase, a contribuição das armaduras longitudinal e transversal à rigidez à torção é insignificante e pode ser desprezada. Segue a Equação (102) para obtenção da rigidez.

$$G_c I_t = \frac{T}{\theta} \quad (102)$$

onde,

T : momento de torção;

θ : giro da seção;

G_c : módulo de elasticidade transversal do concreto;

I_t : constante de torção de St. Venant para seções retangulares, Equação (103);

$$I_t = \beta x^3 y \quad (103)$$

β : coeficiente de St. Venant dado pela Tabela 3.

Tabela 3 – Coeficiente de St. Venant (β) para seções retangulares (fonte: Hsu 1984)

y/x	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	4	5	10	100	∞
β	0,141	0,166	0,187	0,204	0,217	0,229	0,249	0,264	0,281	0,291	0,312	0,331	0,333

Para seções I, T e L o cálculo da rigidez à torção é baseado em duas hipóteses aproximadoras segundo **Bach (1911) apud Hsu (1984)**:

- A largura de cada componente retangular é muito menor quando comparada às outras dimensões;
- A forma da seção transversal permanece inalterada após a rotação, ou seja, o giro de cada componente da seção é o mesmo.

Com a primeira hipótese a constante β é tomada com o valor de 1/3 e a segunda hipótese implica que a constante de torção de St. Venant pode ser obtida pelo somatório da constante de cada componente da seção. Segue a Equação (104).

$$I_t = \sum \frac{1}{3} x^3 y \quad (104)$$

Após fissurar, a curva inicia um trecho linear e à medida que o momento de torção se aproxima da resistência última o comportamento é não-linear.

A rigidez à torção no estágio pós-fissuração de um elemento de concreto armado tem uma redução importante quando comparada ao estágio não fissurado, o que permite o aumento da rotação da peça em torno do seu eixo.

Essa rigidez pode ser determinada ao analisar a peça como um tubo de parede fina, considerando sua seção vazada com espessura t_d constante, que limita a zona de fluxo de cisalhamento, para avaliar as tensões cisalhantes.

Segundo **Hsu (1990)** a determinação de t_d exige a utilização da compatibilidade de deformações, equilíbrio de esforços e lei constitutiva do material para a hipótese de treliça espacial. A partir destas condições, a espessura da zona de fluxo de cisalhamento pode ser expressa, de maneira simplificada pela Equação (105).

$$t_d = \frac{4T_n}{A_c f_{ck}} \quad (105)$$

sendo,

A_c : área total da seção transversal;

T_n : momento de torção resistente.

A equação da resistência nominal à torção foi desenvolvida a partir de resultados de experimentos realizados por **Hsu (1984)**. Nesta equação existem duas parcelas de resistência, uma fornecida pelo concreto e a outra pelas armaduras, sendo a Equação (106) do momento de torção resistente.

$$T_n = T_c + T_s \quad (106)$$

onde,

T_c : parcela de resistência do concreto, Equação (107);

$$T_c = \frac{\sum x^2 y}{3} 0,2 \sqrt{f_{ck}} \quad (107)$$

x e y : menor e maior dimensões de cada componente da seção transversal decomposta (vigas I, T e L), respectivamente;

T_s : parcela de resistência da armadura transversal, Equação (108);

$$T_s = \sum \alpha_t \frac{A_t f_y x_1 y_1}{s} \quad (108)$$

x_1 e y_1 : menor e maior dimensões da área delimitada pela linha central da zona de fluxo de cisalhamento de cada componente da seção transversal decomposta, respectivamente;

A_t : área da seção transversal de uma perna do estribo de dois ramos;

s : espaçamento entre estribos;

α_t : coeficiente empírico correspondente à inclinação da reta do diagrama momento de torção último x taxa de armaduras, determinado para as vigas ensaiadas por **Hsu (1984)**, Equação (109).

$$\alpha_t = 0,66 + 0,33 \frac{y_1}{x_1} \quad (109)$$

A Figura 2-43 representa a treliça para uma seção arbitrária, onde D, X e Y representam a diagonal comprimida, a armadura longitudinal e armadura transversal, respectivamente.

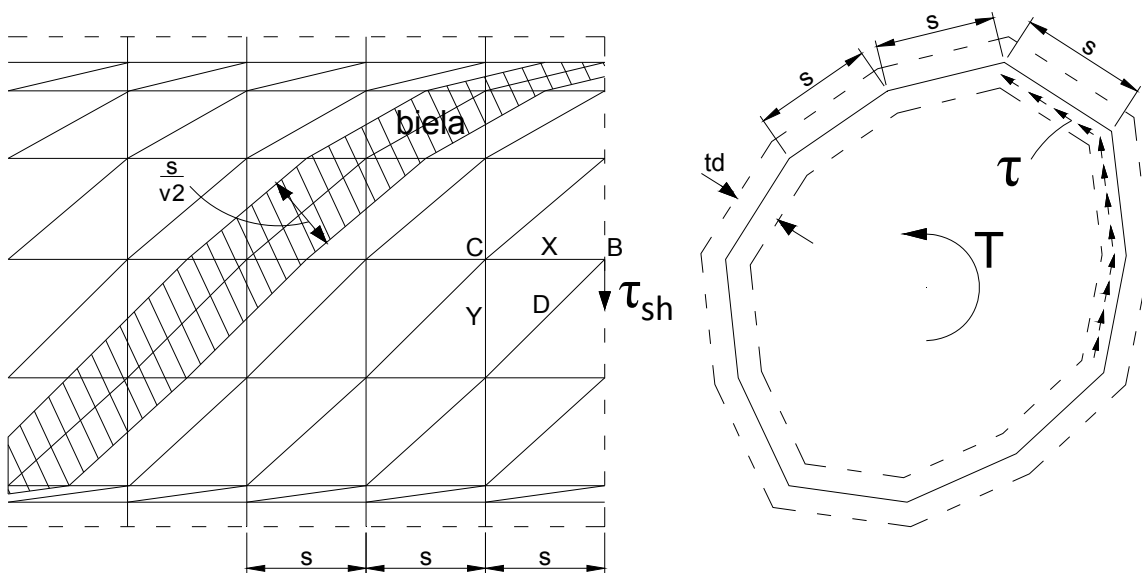


Figura 2-43 – Treliça espacial idealizada por Rausch.

Fonte: adaptado de Hsu (1984)

Com esta hipótese e considerando uma célula básica da treliça espacial que consiste de uma biela de concreto comprimida e as armaduras do seu entorno, formando um quadrilátero como ilustrado na Figura 2-43, realiza-se a compatibilidade entre deformações e deslocamentos para obtenção da rigidez à torção pós-fissuração ($G_{cr}I_{tcr}$). Segue as Equações (110), sendo a primeira apresentada por **Hsu (1984)** e a segunda por **Tavio e Teng (2004)**.

$$C_{ef} = \frac{4E_s A_1^2 A_c}{u^2 \left(\frac{4nA_c}{ut_d} + \frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_{tr}} \right)} \quad (110)$$

onde

t_d : espessura efetiva do tubo de parede fina de Bredt, Equação (105);

ρ_l : taxa de armadura longitudinal, Equação (111);

$$\rho_l = \frac{A_l}{A_c} \quad (111)$$

A_l : área das armaduras longitudinais;

ρ_{tr} : taxa de armadura transversal, Equação (112);

$$\rho_{tr} = \frac{A_{tr} p_l}{A_c s} \quad (112)$$

A_{tr} : área de uma perna do estribo com dois ramos;

p_l : perímetro da linha central do estribo;

A_0 : área de braço de alavanca que pode ser expressa como função de t_d , Equação (113);

$$A_0 = A_c - \frac{t_d}{2} p_c + \xi t_d^2 \quad (113)$$

p_0 : perímetro da linha central da zona de fluxo, expresso em função de t_d , Equação (114);

$$p_0 = p_c - 4\xi t_d \quad (114)$$

A_c : área da seção transversal total;

- p_c : perímetro da seção transversal total;
- ξ : coeficiente igual a $\pi/4$ para seção circular e 1 para as demais seções;
- n : relação entre os módulos de elasticidade do aço e concreto.

Os três termos entre parênteses na Equação (110) representam as contribuições à rigidez à torção das bielas comprimidas, armaduras longitudinal e transversal, respectivamente.

Após a fissuração, os elementos de concreto tem uma redução da rigidez à torção maior que a redução de sua rigidez à flexão. A níveis elevados de sollicitação por torção, a rigidez à torção constitui uma parcela muito pequena da rigidez pré-fissuração.

A torção em elementos de concreto é uma questão bastante delicada, pois a ocorrência da fissuração no material reduz drasticamente sua rigidez. Sabendo-se que as fissuras se estabelecem a baixos níveis de sollicitação, **Revathi e Menon (2006)** adotaram a hipótese de que o momento crítico de instabilidade lateral ocorre com a peça já fissurada.

Com essa premissa, **Revathi e Menon (2006)** utilizam a equação desenvolvida por **Hsu (1984)** e adaptada por **Tavio e Teng (2004)**. Esta expressão, Equação (115), estabelece a rigidez à torção pós-fissuração de uma viga de concreto.

$$C_{ef} = \frac{4\mu E_s A_0^2 A_c}{p_0^2 \left(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_{tr}} \right)} \quad (115)$$

onde

- μ : multiplicador de rigidez, sugerido um valor de 1,5;
- ρ_l : taxa de armadura longitudinal;
- ρ_{tr} : taxa de armadura transversal;

A_0 , A_c e p_0 : são propriedades da seção transversal, como mostrado na Figura 2-44.

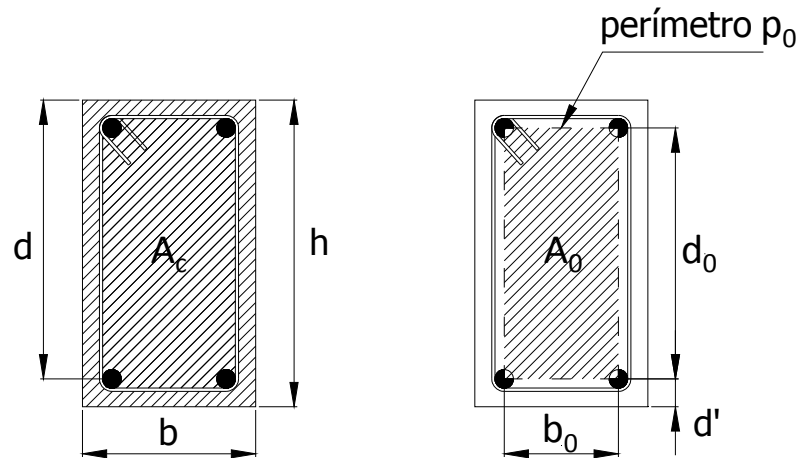


Figura 2-44 – Propriedades da seção transversal

2.5.3 Torção em Concreto Protendido

O principal propósito em aplicar protensão em elementos de concreto é melhorar seu comportamento à fissuração, através da aplicação de tensões de compressão prévias à seção que melhoram seu desempenho estrutural.

Segundo **Gilbert e Mickleborough (1990)**, a protensão aumenta a rigidez à torção do elemento, retardando o início da fissuração. No entanto, não afeta a resistência última da peça. Em vigas de concreto protendido, o momento de torção de fissuração é significativamente maior do que em vigas de concreto armado, devido à intensificação da contribuição do concreto, pois a contribuição das armaduras pode ser considerada desprezível antes do elemento fissurar.

Sob o efeito de pré-compressão, o concreto passa a contribuir significativamente na resistência às tensões de cisalhamento, ou seja, deve-se levar em conta a parcela de contribuição referente ao concreto na resistência à torção. Destaca-se que o modelo de treliça espacial idealizado por Rausch apresenta aplicação limitada por desprezar a resistência ao cisalhamento das fissuras entre as bielas comprimidas de concreto.

Hsu (1984) realizou uma série de ensaios com vigas armadas e protendidas com intuito de avaliar as diferenças de comportamento quando submetidos à torção pura. Em um diagrama momento de torção último por taxa de armadura transversal, percebeu que a diferença entre os momentos de torção, à medida que varia-se a taxa de armadura, era constante mesmo quando a taxa fosse nula ou menor que a mínima. Atribui-se a diferença de

resistência entre vigas de concreto armado e protendido à amplificação da contribuição do concreto.

Para determinar o momento de torção resistente de vigas protendidas, **Hsu (1984)** propõe que a contribuição do concreto seja a mesma que para vigas de concreto armado, sendo multiplicado por um fator de protensão γ_1 que pode ser determinado pela Equação (116).

$$\gamma_1 = 2,5 \sqrt{1 + 10 \frac{\sigma}{f_{ck}}} - 1,5 \quad (116)$$

onde σ é tensão de protensão média na seção.

A resistência à torção de uma viga é importante para a determinação da espessura da zona de fluxo de cisalhamento e, conseqüentemente, a rigidez à torção. Para determinar o momento de torção último de vigas de concreto protendido é apresentada a Equação (117).

$$T_n = \gamma_1 T_c + T_s \quad (117)$$

O aumento da parcela de resistência do concreto devido à protensão na rigidez à torção está embutido no valor da espessura da zona de fluxo de cisalhamento, cuja determinação depende da amplitude do momento de torção resistente.

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

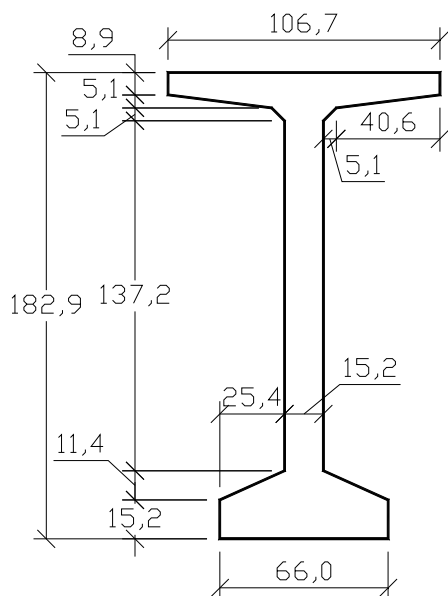
3.1 Considerações iniciais

Nos exemplos numéricos são analisadas duas vigas. A viga PCI BT-72 é avaliada nas fases de içamento, transporte e fase transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios, sendo a estabilidade avaliada por carga crítica e fator de segurança.

A fase transitória de obras de ponte em que a viga se encontra sobre aparelhos de apoio e travadas por transversinas de apoio é avaliada pelo cálculo de momento crítico de instabilidade. A viga protendida C2A ensaiada por **Hurff (2010)** servirá de exemplo.

3.2 Análise da viga PCI BT-72

Este exemplo apresenta a verificação da estabilidade lateral da viga catalogada no manual de pontes do **PCI Bridge Design Manual**, denominada PCI BT-72 cuja altura é 1,83 m (72 polegadas). A viga é biapoiada (Figura 3-2) e seu sistema de protensão é a pré-tensão, a seção e a configuração dos cabos estão representadas na Figura 3-1 e Figura 3-3, respectivamente.



unidades em cm

Figura 3-1 – Dimensões da seção transversal da viga PCI BT-72. Unidade [cm]

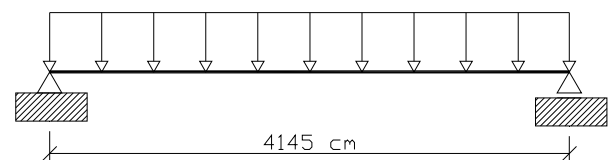


Figura 3-2 – Esquema estático da viga PCI BT-

72

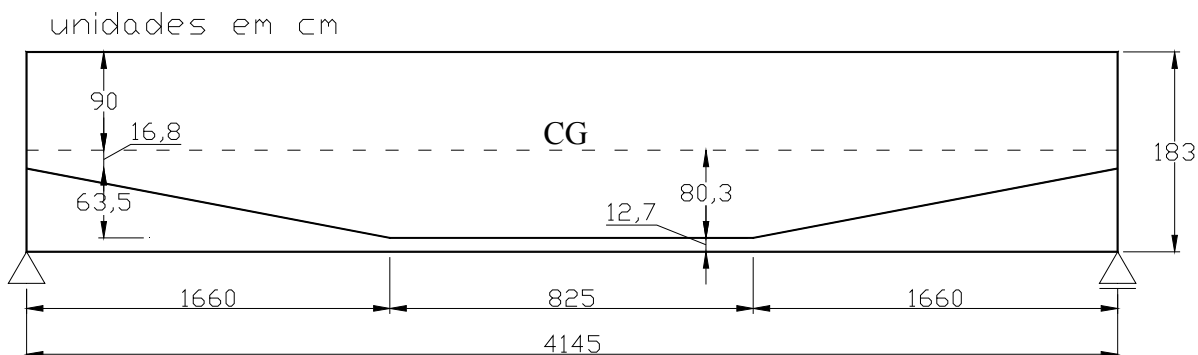


Figura 3-3 – Representação dos cabos de protensão da viga PCI BT-72

No Brasil não é comum a utilização de cabos de protensão com mudanças bruscas de direção como na Figura 3-3. No entanto, para utilização de longos vãos é vantajosa essa solução, principalmente para o controle das tensões de tração na face superior da viga nas fases transitórias.

São apresentadas na Tabela 4 e Tabela 5 as propriedades físicas e geométricas dos materiais da viga PCI BT-72, respectivamente, utilizadas em ambas as verificações mencionadas.

Tabela 4 - Propriedades geométricas da viga protendida PCI BT-72

h , altura da seção (cm)	182,9
A_c , área bruta da seção (cm ²)	4950
ℓ , vão da viga (m)	41,45
a , comprimento dos balanços (m)	2,5
b , ponto de inflexão dos cabos* (m)	16,58
I_x , inércia em torno do eixo horizontal (cm ⁴)	22721800
I_y , inércia em torno do eixo vertical (cm ⁴)	1566400
y_{cg} , distância entre o centróide e a face inferior da seção (cm)	93
W_i , módulo de resistência elástico em relação à face inferior (cm ³)	244320
W_s , módulo de resistência elástico em relação à face superior (cm ³)	252745

* distância a partir de cada extremidade da viga

Tabela 5 - Propriedades físicas do concreto da viga PCI BT-72

f_{ci} , resistência à compressão no içamento (MPa)	31
f_{ck} , resistência característica à compressão (MPa)	38
ρ_c , massa específica (kN/m ³)	25
E_{ci} , módulo de elasticidade longitudinal* (MPa)	31179
G_c , módulo de elasticidade transversal** (MPa)	12472

* calculado segundo a norma NBR-6118, $5600 \sqrt{f_{ck}}$

** $0,4E_c$

A força de protensão após as perdas iniciais P_i vale 5480 kN, sendo os cabos posicionados à 12,7 cm da face inferior da viga. A excentricidade da protensão em relação ao CG é de 80,3 cm.

3.2.1 Içamento

Serão realizadas análises baseadas nas formulações apresentadas por **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964), Mast (1989 e 1993) e Stratford et al (1999)**. Como mencionado por **Hurff (2010)**, o método de **Mast (1993)** estima com boa precisão os valores de carga crítica nas fases transitórias. Assim nas análises segundo formulação de **Mast (1993)** serão calculados fatores de segurança e carga crítica.

3.2.1.1 Içamento segundo Lebelle (1959)

A formulação de **Lebelle (1959)** recorre à verificação da carga crítica de instabilidade lateral de vigas protendidas em içamento. Esta solicitação é comparada ao carregamento devido ao peso próprio g_{pp} , sendo recomendado que esta última seja menor que $\frac{1}{4} p_{crit}$.

A expressão para determinação da carga crítica é representada na Equação (8). Como mencionado os parâmetros das rigidezes são considerados em regime elástico, sendo esta hipótese plausível, segundo os ensaios de Hurff (2010). A rigidez à torção consiste do módulo de elasticidade transversal G_c , apresentado na Tabela 5, multiplicado pelo momento de inércia à torção I_t .

O método utilizado para calcular o momento de inércia a torção é o recomendado pelo **ACI 318-02**. O método consiste em considerar um polígono irregular, por exemplo, as mesas

inferior e superior da BT-72, como um retângulo com mesma largura e área equivalente. A conversão é mostrada na Figura 3-4.

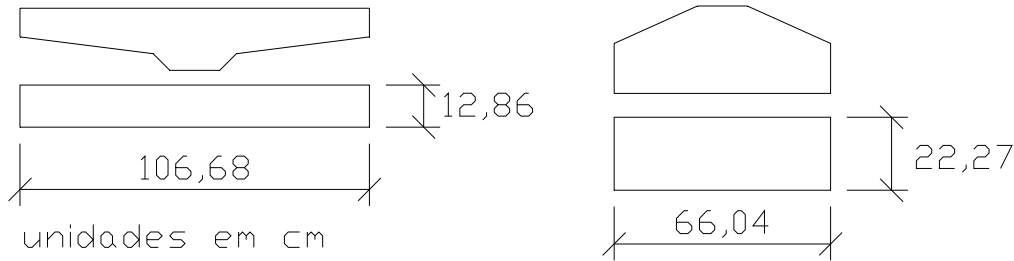


Figura 3-4 – Conversão de áreas para determinação da inércia à torção

Para calcular a inércia à torção total é utilizado o conceito desenvolvido por **Bach (1911) apud Hsu (1984)** apresentado na Equação (104), sem considerar o coeficiente de St. Venant.

$$I_t = \left(1 - 0,63 \frac{x_1}{y_1}\right) \frac{x_1^3 y_1}{3} + \left(1 - 0,63 \frac{x_2}{y_2}\right) \frac{x_2^3 y_2}{3} + \left(1 - 0,63 \frac{x_3}{y_3}\right) \frac{x_3^3 y_3}{3}$$

$$I_t = \left(1 - 0,63 * \frac{12,86}{106,68}\right) \frac{12,86^3 * 106,68}{3} + \left(1 - 0,63 * \frac{15,24}{137,16}\right) \frac{15,24^3 * 137,16}{3} \\ + \left(1 - 0,63 * \frac{22,27}{66,04}\right) \frac{22,27^3 * 66,04}{3}$$

$$I_t = 411868 \text{ cm}^4$$

Os componentes da rigidez à flexão lateral $E_c I_y$, já estão determinados. **Leonhardt (1964)** recomenda que sejam calculados os coeficientes β e δ para levar em conta a rigidez lateral das mesas e a posição do ponto de aplicação da carga. Para o cálculo do coeficiente β (Equação (10)) é determinado o momento de inércia equivalente das mesas. O momento de inércia lateral das mesas superior e inferior da PCI BT-72 são 1057146 cm^4 e 454691 cm^4 , respectivamente.

$$I_{y, \text{mesas}} = \frac{2I_{y,1}I_{y,2}}{I_{y,1} + I_{y,2}}$$

$$I_{y, \text{mesas}} = \frac{2 * 1057146 * 454691}{1057146 + 454691} = 635881 \text{ cm}^4$$

Então, calcula-se o coeficiente β , sendo z igual a 164,5 cm.

$$\beta = \frac{EI_{y,mesas}}{GI_t} \frac{2z}{\ell^2}$$

$$\beta = \frac{31179 * 635881}{12472 * 411868} * \frac{2 * 164,5}{41,45^2} = 0,0103$$

O coeficiente δ é determinado pela Equação (11), para y_{rot} igual a 89,9 cm.

$$\delta = \frac{2y_{rot}}{\ell} \sqrt{\frac{E_c I_y}{G_c I_t}}$$

$$\delta = \frac{2 * 89,9}{41,45} \sqrt{\frac{31179 * 1566400}{12472 * 411868}} = 0,123$$

Finalmente, o parâmetro k pode ser determinado pela Equação (9):

$$k = \sqrt{1 + 2,47\beta + 0,52\delta^2} - 0,72\delta$$

$$k = \sqrt{1 + 2,47 * 0,0103 + 0,52 * 0,123^2} - 0,72 * 0,123 = 0,928$$

A flexibilidade da ligação entre os cabos e a viga é considerada através do coeficiente α_{crit} , introduzido por **Lebelle (1959) apud Leonhardt (1964)**. Para determiná-lo, utiliza-se o gráfico apresentado na Figura 2-11, que relaciona o comprimento dos balanços a e a função $g(x)$ ao coeficiente α_{crit} . Primeiramente, calcula-se o valor da função pela Equação (21) e para os balanços adotados $\rho = \ell_1/\ell = 0,88$, obtêm-se α_{crit} .

$$g(\alpha) = \frac{4y_{rot}}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_t}}$$

$$g(\alpha) = \frac{4 * 89,9}{41,45} \sqrt{\frac{31179 * 1566400}{12472 * 411868}} = 0,246$$

Portanto, graficamente α_{crit} vale 0,8. Utilizando a Equação (8), a carga crítica para a viga PCI BT-72 é:

$$p_{\text{crit}} = k \frac{16}{l^3} \sqrt{\alpha_{\text{crit}}} \sqrt{EI_y GI_t}$$

$$p_{\text{crit}} = 0,928 * \frac{16}{4145^3} \sqrt{0,8} \sqrt{31179 * 1566400 * 12472 * 411868} = 0,294 \text{ kN/cm ou } 29,4 \text{ kN/m}$$

Sabendo que g_{pp} vale 12,29 kN/m. A recomendação clássica não é verificada.

$$g_{pp} \geq \frac{p_{\text{crit}}}{4} = \frac{29,4}{4} = 7,4 \text{ kN/m}$$

3.2.1.2 Içamento segundo Mast (1993)

Outra forma de verificar o problema consiste em calcular os coeficientes de segurança contra a fissuração e ruptura. O procedimento adotado pelo **PCI Bridge Design Manual** é o apresentado por **Mast (1989 e 1993)** que está delineado a seguir.

A Figura 3-3 mostra a configuração dos cabos da viga analisada, sendo os pontos de inflexão posicionados a 16,58 m de cada extremidade. A verificação está apresentada em tópicos como no Apêndice B de **Mast (1993)**.

a) Verificação das tensões máximas nos pontos de inflexão dos cabos e a resistência necessária para o concreto

Para o peso específico do concreto de 25 kN/m³, o peso próprio distribuído g_{pp} é 12,30 kN/m e o peso total da viga G é 509,5kN. Então, o momento fletor nos pontos de inflexão M_{pi} é:

$$M_{pi} = -g_{pp} \frac{b^2}{2} + \frac{G}{2}(b - a)$$

$$M_{pi} = -12,30 * \frac{16,58^2}{2} + \frac{509,5}{2} * (16,58 - 2,50) = 1897,21 \text{ kN.m}$$

As tensões máximas nas mesas superior σ_{Sup} e inferior σ_{Inf} são,

$$\sigma_{Sup} = -\frac{5480}{4950} + \frac{5480 * 80,3}{252745} - \frac{189721}{252745} = -0,117 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{Inf} = -\frac{5480}{4950} - \frac{5480 * 80,3}{244320} + \frac{189721}{244320} = -2,097 \text{ kN/cm}^2$$

Segundo o **ACI 318 (2002)** a resistência necessária do concreto à compressão deve ser 66% maior que a tensão calculada, ou seja, $\frac{20,97}{0,6} \approx 35 \text{ MPa}$.

b) Módulo de elasticidade inicial efetivo do concreto

Utilizando a fórmula da **ABNT NBR 6118:2007** para o módulo de elasticidade inicial, tem-se:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{35} = 33130 \text{ MPa}$$

c) Estimativa das imperfeições geométricas iniciais

Mast (1993) recomenda, no caso de vigas içadas, utilizar metade do deslocamento lateral inicial e_s tolerado (3 mm para cada 3 m) pelo **PCI Tolerance Manual**, acrescido de 6 mm para desvio no posicionamento dos cabos e_c . A excentricidade e_s deve ser multiplicada por um fator que delimita a distância entre o eixo de giro e o centro de massa da viga. Este fator parte do princípio que a viga deslocada tem a forma de uma parábola.

$$e_i = e_s \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] + e_c = \frac{3}{2} \cdot 41,45 \left[\left(\frac{36,45}{41,45} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] + 6 = 15,12 \text{ mm}$$

d) Determinação da contraflecha devido à protensão e distância entre o eixo de giro e o CG

Segundo **Lin e Burns (1981)** a contraflecha de vigas protendidas com a configuração de cabos apresentada na Figura 3-1 (b) pode ser determinada por:

$$\Delta = \frac{\ell^2}{8E_{ci}I_x} \left[M_2 + M_1 - \frac{M_1}{3} \left(\frac{2b}{\ell} \right)^2 - M_g \right]$$

$$\Delta = \frac{4145^2}{8 * 3313 * 22721800} \left[92064 + 347980 - \frac{347980}{3} \left(\frac{2 * 16,58}{4145} \right)^2 - 2003 \right] = 6,84 \text{ mm}$$

Os momentos M_1 e M_2 são determinados multiplicando-se a força de protensão pelos braços de alavanca y_1 e y_2 , respectivamente. O momento M_g corresponde ao momento devido ao peso próprio no meio do vão.

Com o valor da contra flecha, ajusta-se a distância y_{rot} entre o eixo de giro e o CG da seção. O mesmo fator de ajuste imposto sobre o deslocamento lateral é aplicado à contraflecha.

$$y_{\text{rot}} = h - y_{\text{cg}} - \Delta \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 183 - 93 - 0,684 \left[\left(\frac{36,45}{41,45} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 89,70 \text{ cm}$$

Percebe-se que o valor da contra flecha tem pouca influência sobre o comprimento y_{rot} .

Mast (1993) considera suficiente utilizar uma contraflecha de 5 mm.

e) Cálculo do deslocamento lateral fictício x_0

$$x_0 = \frac{g_{\text{pp}}}{12E_{\text{ci}}I_y \ell} \left(\frac{1}{10} \ell_1^5 - a^2 \ell_1^3 + 3a^4 \ell_1 + \frac{6}{5} a^5 \right)$$

$$x_0 = \frac{0,123}{12 * 3313 * 1566400 * 4145} \left(\frac{1}{10} * 3645^5 - 250^2 * 3645^3 + 3 * 250^4 * 3645 + \frac{6}{5} * 250^5 \right)$$

$$x_0 = 29,24 \text{ cm}$$

f) Cálculo do giro inicial da viga θ_i

$$\theta_i = \frac{e_i}{y_{\text{rot}}} = \frac{1,51}{89,70} = 0,0168 \text{ rad ou } 1^\circ$$

g) Cálculo do ângulo de fissuração θ_r

O giro necessário para que algum ponto da seção atinja uma tensão equivalente à resistência à tração corresponde ao ângulo de fissuração θ_r . Normalmente, o ponto onde ocorre esta tensão fica na extremidade lateral da mesa superior. À medida que a viga rotaciona o momento devido ao peso próprio se decompõe em duas parcelas, sendo uma delas lateral. A tensão de tração devido à protensão na mesa superior atua com maior intensidade e soma-se à tensão de tração provocada pelo momento lateral. Este processo se intensifica à medida que a viga gira.

Para calcular o giro θ_r é necessário calcular a resistência à tração f_t . É utilizada a equação recomendada pelo **ACI-318 (2002)**.

$$f_t = 0,623 \sqrt{f_{\text{ci}}} = 0,623 \sqrt{35} = 3,68 \text{ MPa}$$

Na sequência, determina-se a intensidade do momento lateral M_{lat} necessário para atingir a resistência à tração.

$$M_{\text{lat}} = (|\sigma_{\text{Sup}}| + f_t) * \frac{I_y}{53,34} = (0,117 + 0,368) * \frac{1566400}{53,34} = 14243 \text{ kN.cm}$$

O ângulo de fissuração é determinado pela razão entre o momento lateral e o momento no ponto de inflexão dos cabos M_{pi} .

$$\theta_r = \frac{M_{\text{lat}}}{M_{pi}} = \frac{142,43}{1897,21} = 0,0711 \text{ rad ou } 4,1^\circ$$

h) Calcular o fator de segurança contra a fissuração

Para viga durante o içamento a verificação da segurança contra fissuração é feita pela Equação (23).

$$\gamma_r = \frac{1}{\frac{x_0}{y_{\text{rot}}} + \frac{\theta_i}{\theta_r}} = \frac{1}{\frac{29,24}{86,90} + \frac{0,0174}{0,0711}} = 1,74$$

Mast (1993) recomenda um fator de segurança igual a 1 para verificar a segurança contra fissuração, portanto a viga analisa atende à recomendação.

Imper e Laszlo (1987) apresentam dois valores para fator de segurança, com base em sua experiência, um para manuseio em fábrica $\gamma > 1,5$ e para manuseio em obra $\gamma > 1,75$. Portanto, a recomendação é considerada como verificada.

i) Determinar o fator de segurança contra a ruptura

Para determinar o fator de segurança, é necessário calcular o ângulo correspondente à ruptura θ_{rup} .

$$\theta_{rup} = \sqrt{\frac{e_i}{2,5 x_0}} = \sqrt{\frac{1,51}{2,5 * 29,23}} = 0,144 \text{ rad ou } 8,25^\circ$$

O deslocamento lateral fictício para ruptura, segundo **Mast (1993)**, pode ser calculado por:

$$x_{0,\text{max}} = x_0(1 + 2,5\theta_{rup}) = 29,24 * (1 + 2,5 * 0,144) = 39,75 \text{ cm}$$

Assim, o fator de segurança contra a ruptura vale:

$$\gamma_{rup} = \frac{y_{rot}\theta_{rup}}{x_{0,max}\theta_{rup} + e_i} = \frac{86,90 * 0,144}{39,75 * 0,144 + 1,51} = 1,73$$

A viga PCI BT-72 com 41,45 m de vão está segura contra fissuração e ruptura. **Mast (1993)** afirma que quando o γ_{rup} é muito próximo ou menor que γ_r , a ruptura ocorre logo depois do início da fissuração, caracterizando uma ruptura brusca. O autor recomenda $\gamma_{rup} > 1,5$.

Lima (1995) determinou os fatores de segurança γ_r e γ_{rup} para a PCI BT-72 com cabos de protensão retos e balanços de 2,5m para içamento. Os valores obtidos foram 1,75 para fissuração e 1,58 para ruptura.

A formulação de **Mast (1993)** pode ser utilizada para calcular a carga crítica. Adotando valores de carga aplicada, em vez de utilizar o peso próprio g_{pp} , até alcançar um coeficiente de segurança contra ruptura γ_{rup} igual a 1, obtêm-se a carga crítica de instabilidade.

No entanto neste caso, à medida que a carga aumenta o coeficiente contra fissuração γ_r torna-se maior que o de ruptura, nestas situações **Mast (1993)** recomenda que γ_r seja levado em conta. Portanto para γ_r igual a 1 a carga distribuída crítica é de 29 kN/m. A diferença entre os valores obtidos pela formulação de **Mast (1993)** e **Lebelle (1959)** é de 1,4 %.

3.2.1.3 Içamento segundo Stratford et al (1999)

A formulação para içamento de **Stratford et al (1999)** considera que o elemento gira livremente em torno do ponto de fixação dos cabos. Portanto as deformações por torção podem ser desprezadas. Esta hipótese provoca duas alterações na análise, a carga crítica não depende da rigidez à torção e a consideração das imperfeições geométricas é relacionada à razão $\frac{P}{P_{crit}}$ pela hipótese de **Southwell (1932)**, ao contrário de quando a rigidez à torção é fundamental ao problema, utilizando $\left(\frac{P}{P_{crit}}\right)^2$.

Inicialmente é utilizada a Equação (32) para calcular a carga crítica.

$$P_{crit} = \frac{12E_c I_y \bar{y}_{rot}}{\frac{\ell^4}{10} - a\ell^3 + 3a^2\ell^2 - 2a^3\ell - a^4}$$

$$p_{\text{crit}} = 100 * \frac{12 * \frac{33130}{10} * 1566400 * 86,9}{\frac{4145^4}{10} - 250 * 4145^3 + 3 * 250^2 * 4145^2 - 2 * 250^3 * 4145 - 250^4} = 36,56 \text{ kN/m}$$

Esta é a carga crítica de uma viga perfeita. No entanto, são consideradas imperfeições geométricas. O deslocamento lateral inicial δ_0 recomendado pelo **PCI tolerance manual (2000)** é de 3 mm para cada 3 m de vão, sendo então 41,45 mm. O erro de posicionamento dos dispositivos de içamento e_c assumido é de 6 mm.

A Equação (34) reduz a carga crítica pela consideração das imperfeições geométricas. Vale lembrar que **Stratford et al (1999)** consideram o modo de instabilidade na forma de uma senóide. O ângulo limite adotado para a análise é o recomendado por **Mast (1993)** que é de 23° ou 0,4 rad.

$$p_{\text{lim}} = p_{\text{crit}} - \frac{\delta_0 \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right] + e_c}{\frac{g_{pp} \text{sen} \theta_{\text{lim}}}{384 E_c I_y} (5\ell^2 - 20a\ell - 4a^2) \left(\frac{6}{5} a^5 - \ell \right)^2 + \delta_0 \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right]}$$

$$p_{\text{lim}} = 36,56 - \frac{4,145 \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi * 250}{4145} \right) \right] + 0,6}{\frac{12,29 * \text{sen} 0,4}{384 * \frac{33130}{10} * 1566400} (5 * 4145^2 - 20 * 250 * 4145 - 4 * 250^2) \left(\frac{6}{5} 250^5 - 4145 \right)^2 + 4,145 \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi * 250}{4145} \right) \right] + 0,6}$$

$$p_{\text{lim}} = 0,3071 \text{ kN/cm ou } 30,71 \text{ kN/m}$$

A carga crítica obtida com a formulação de **Lebelle (1959)** foi 29,4 kN/m e de **Mast (1993)** foi 29 kN/m. As diferenças entre estas e o valor da carga limite p_{lim} , obtido pela formulação de **Stratford et al (1999)**, são 4,3 % e 5,6 %, respectivamente.

3.2.2 Transporte

Neste tópico são apresentados os procedimentos para estimativa de carga crítica, segundo as formulações de **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. A formulação de **Mast (1993)** também é utilizada para determinar os fatores de segurança.

3.2.2.1 Transporte segundo Lebelle (1959)

A Equação (8) é utilizada para determinação da carga crítica de instabilidade da viga PCI BT-72, sendo as propriedades do concreto e propriedades geométricas as mesmas apresentadas no item 3.2.1.1.

Utilizando a constante de mola K_θ do caminhão que vale 4581 kN.m/rad, recomendada por **Mast (1993)**, pode-se obter o valor de $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \frac{K_\theta \ell}{2GI_t} = \frac{100 * 4581 * 4145}{2 * 1247 * 411868} = 1,85$$

$$f(\alpha) = 1,85 = \frac{\frac{8}{15}\alpha - \frac{356}{10395}\alpha^2}{1 - \frac{11}{30}\alpha + \frac{6617}{415800}\alpha^2}$$

$$\alpha_{crit} = 1,54$$

Portanto a carga crítica, segundo **Lima (1995)**, pode ser calculada. Sabendo que k vale 0,923, calculado no item 3.2.1.1, considerando a contribuição das mesas combinada com o efeito da carga aplicada afastada do centróide da seção.

$$p_{crit} = k \frac{16}{\ell^3} \sqrt{\alpha_{crit}} \sqrt{EI_y GI_t} = 0,923 * \frac{16}{4145^3} * \sqrt{1,54} * \sqrt{31179 * 1566400 * 12472 * 411868}$$

$$p_{crit} = 40,77 \text{ kN/m}$$

Seguido a recomendação clássica de que $p_{crit} \geq 4g_{pp}$, sabendo que a carga devido ao peso próprio g_{pp} é 12,29 kN/m, portanto, a viga não está segura para o transporte.

$$\frac{p_{crit}}{4} = 10,19 \text{ kN/m} < g_{pp}$$

3.2.2.2 Transporte segundo Mast (1993)

A viga PCI BT-72 é novamente estudada, dando continuidade ao exemplo do item 3.2.1. Os procedimentos de **Mast (1993)** são utilizados afim de determinar os fatores de segurança contra fissuração e colapso por tombamento.

a) Estimar a mola K_θ e determinar o raio de estabilidade r

Supondo que a viga será transportada em um caminhão cujo modelo segue na Figura 3-5, sendo os balanços os mesmos para a viga em fase de içamento. Este modelo é o mesmo utilizado no exemplo apresentado por **Mast (1993)**.

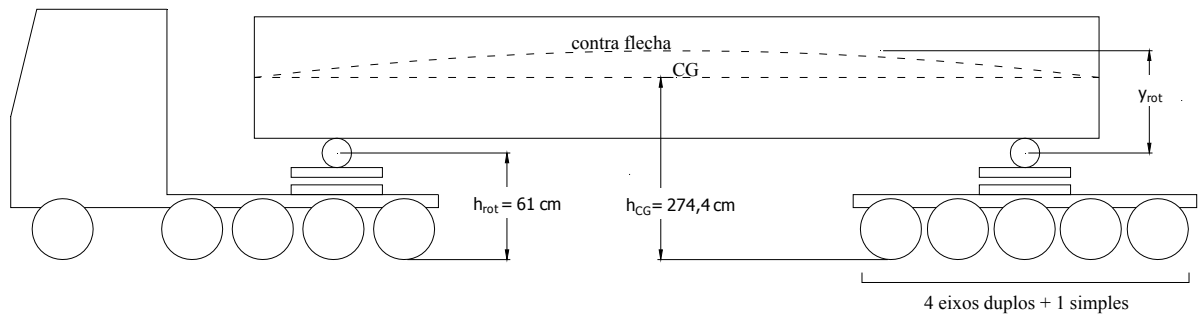


Figura 3-5 – Modelo do caminhão considerado e dimensões para a verificação da estabilidade

Mast (1993) recomenda para cada eixo duplo uma mola K_{θ} de 509 kN.m/rad. Sabendo que o reboque tem 4 eixos duplos e 1 simples e que pode-se assumir a mesma rigidez para o cavalo mecânico.

$$K_{\theta} = 2 * 4,5 * 509 = 4581 \text{ kN.m/rad}$$

Sabendo que o peso da viga G é 509,5 kN, calcula-se o raio de estabilidade.

$$r = \frac{K_{\theta}}{G} = \frac{4581}{509,5} = 8,99 \text{ m/rad}$$

b) Determinar o ângulo de equilíbrio

Nesta fase é necessária a utilização de protensão temporária na mesa superior (Figura 3-6) para aumentar a segurança da viga em transporte, como recomendado por **Imper e Laszlo (1987)**, no caso de vigas com vão maior que 40 m. Esta medida é tomada devido à influência da superelevação da via sobre o fator de segurança contra a fissuração, o que significa que com um pequeno giro da seção a viga pode fissurar.



Figura 3-6 – Protensão temporária da mesa superior para melhorar a segurança à instabilidade lateral em transporte⁸

Supondo que a força de protensão dos cabos principais tenha uma redução de 3% até a fase de transporte, então tem-se $5480 * \frac{3}{100} = 5316$ kN. Somando uma força de protensão na mesa superior de 251 kN, aplicada a 5 cm da face superior, resulta uma força total de 5567 kN. A excentricidade resultante é de 72,6 cm.

Para obter o ângulo de equilíbrio θ_{eq} é necessário determinar a distância entre o eixo de giro e o CG da viga y_{rot} , o deslocamento lateral fictício $x_{0,t}$ e a excentricidade lateral inicial e_i . Adotando a resistência à compressão do concreto de 40 MPa. Portanto, y_{rot} é calculado de acordo com a Figura 3-5, sendo a mesma contraflecha do item 3.2.1 de 6,84 mm, pois a diferença é pequena.

$$y_{rot} = h_{cg} - h_{rot} + \Delta \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 274,4 - 61,0 + 0,684 \left[\left(\frac{36,45}{41,45} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 213,7 \text{ cm}$$

Para o deslocamento lateral fictício no transporte $x_{0,t}$, faz-se um ajuste multiplicando-se o valor x_0 da fase de içamento pela raiz da razão entre as resistências no içamento e no transporte.

$$x_{0,t} = x_0 \sqrt{\frac{f_{ci}}{40}} = 29,24 * \sqrt{\frac{35}{40}} = 27,34 \text{ cm}$$

⁸ [disponível em <ftp://ftp.wsdot.wa.gov/public/Bridge/WBES2009/B/6B3/6B3.pdf>. Acesso em 22 de março 2014]

A excentricidade lateral e_i é determinada considerando 2,5 cm de erro no posicionamento da viga sobre o caminhão, segundo recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)**, somada à excentricidade devido à curvatura lateral e_s de 3mm para 3m.

$$e_i = e_s \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] + e_c = \frac{3 * 41,45}{3} \left[\left(\frac{36,45}{41,45} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] + 25,4 = 43,64 \text{ mm}$$

Nas estradas brasileiras a superelevação máxima é 10% ou 0,1 rad para rodovias de alto padrão. No entanto, admite-se 6% para obter o ângulo de equilíbrio.

$$\theta_{eq} = \frac{\alpha r + e_i}{r - \bar{y}_{rot} - x_{0,t}} = \frac{0,06 * 899 + 4,4}{899 - 213,7 - 27,34} = 0,0887 \text{ rad ou } 5^\circ$$

Caso fosse utilizada a superelevação de 8% o ângulo de equilíbrio seria 6,7°.

c) Determinação do f_c necessário na fase de transporte

Considerando a viga rotacionada θ_{eq} em equilíbrio, tem-se um momento lateral como parcela do momento fletor principal no ponto de inflexão dos cabos M_{pi} .

$$M_{lat} = M_{pi} \theta_{eq} = 1898,23 * 0,0887 = 168,37 \text{ kN.m}$$

Combinando as tensões de compressão na mesa inferior devido à flexão oblíqua e utilizando a recomendação do **ACI-318 (2002)** para a resistência requerida, obtêm-se o f_c necessário. As tensões são recalculadas como segue.

$$\sigma_{sup} = -\frac{5567}{4950} + \frac{5567 * 72,6}{252745} - \frac{189823}{252745} = -0,276 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{inf} = -\frac{5567}{4950} - \frac{5567 * 72,6}{244320} + \frac{189823}{244320} = -1,973 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_c = \frac{\sigma_{inf} + \frac{M_{lat}}{I_y} * 33,03}{0,6} = \frac{19,73 + 10 * \frac{16837}{1566400} * 33,03}{0,6} = 38,80 \text{ MPa}$$

Então a resistência atual atende à recomendação do **ACI-318 (2002)**.

d) Calcular o ângulo de fissuração θ_r .

Para determinar o ângulo de fissuração é necessário calcular a resistência à tração do concreto que é obtida segundo recomendação do **ACI-318 (2002)**.

$$f_t = 0,623\sqrt{f_{ci}} = 0,623\sqrt{40} = 3,98 \text{ MPa}$$

Em seguida, calcula-se o momento lateral necessário para atingir a resistência à tração $M_{lat,r}$ que se combinará com o momento principal M_{pi} .

$$M_{lat,r} = (|\sigma_{sup}| + f_t) * \frac{I_y}{53,34} = (|-2,76| + 3,98) * \frac{1566400}{53,34} = 195,13 \text{ kN.m}$$

O ângulo formado entre os vetores de momento θ_r é:

$$\theta_r = \frac{M_{lat,r}}{M_{pi}} = \frac{195,13}{1898,23} = 0,1028 \text{ rad ou } 5,9^\circ$$

Caso não se utilizasse a protensão na mesa superior o ângulo de fissuração seria menor que o ângulo de equilíbrio, portanto não havendo segurança contra fissuração. O mesmo ocorreria se a superelevação de 8% fosse considerada.

e) Fator de segurança contra a fissuração γ_r

$$\gamma_r = \frac{r(\theta_r - \alpha)}{x_{0,t}\theta_r + e_i + \bar{y}_{rot}\theta_r} = \frac{899 * (0,1028 - 0,06)}{27,34 * 0,1028 + 4,36 + 213,7 * 0,1028} = 1,32$$

Assim, está verificada a segurança contra fissuração. No entanto, para superelevação de 8% resultaria em fator de segurança de 0,73. Portanto, novas medidas para melhorar a segurança seriam necessárias.

f) Calcular ângulo de ruptura θ_{rup}

Para fase transitória de transporte, o ângulo correspondente à ruptura θ_{rup} é relacionado à dimensão x_{max} que está representada na Figura 2-10, este comprimento é 91,5cm.

$$\theta_{rup} = \frac{x_{max} - h_{rot}\alpha}{r} + \alpha = \frac{91,5 - 61 * 0,06}{899} + 0,06 = 0,1577 \text{ rad ou } 9^\circ$$

g) Fator de segurança contra ruptura γ_{rup}

O cálculo do coeficiente de segurança contra ruptura depende do deslocamento lateral fictício neste estágio $x_{0,max}$, obtido através da Equação (16).

$$x_{0,\max} = x_{0,t}(1 + 2,5\theta_{\text{rup}}) = 27,34 * (1 + 2,5 * 0,1577) = 38,12 \text{ cm}$$

$$\gamma_{\text{rup}} = \frac{r(\theta_{\text{rup}} - \alpha)}{x_{0,\max}\theta_{\text{rup}} + e_i + \bar{y}_{\text{rot}}\theta_{\text{rup}}} = \frac{899 * (0,1577 - 0,06)}{38,12 * 0,1577 + 4,36 + 216,27 * 0,1577} = 1,97$$

Como o fator de segurança contra ruptura é relativamente maior que o fator de fissuração, espera-se que a ruptura não ocorra rapidamente após o início da fissuração. Realizando-se a análise de carga crítica pelo procedimento apresentado, obtêm-se o valor de 25 kN/m.

Caso não fosse utilizado o recurso de protensão temporária na mesa superior os fatores de segurança contra fissuração e ruptura seriam 0,98 e 1,94 respectivamente.

Como mencionado, no Brasil a superelevação máxima que pode ser projetada em rodovias de alto padrão é 10%. Para este valor os coeficientes de segurança contra fissuração e ruptura são 0,2 e 1,6, respectivamente. Portanto, a viga em questão teria grandes chances de fissurar sendo transportada em vias com esta superelevação e sobre este veículo de transporte.

3.2.2.3 Transporte segundo Stratford et al (1999)

Para a fase de transporte, a hipótese adotada por **Stratford et al (1999)** é a de que o problema depende da rigidez à torção, apesar da flexibilidade do reboque e do cavalo mecânico. Nestes termos, as imperfeições são relacionadas à $\left(\frac{P}{P_{\text{crit}}}\right)^2$. A Equação (18) é recomendada para o cálculo da carga crítica. É considerado o f_{ck} inicial de 31 MPa para o cálculo dos parâmetros de elasticidade do concreto.

$$p_{\text{crit}} = 16,9 \frac{\sqrt{EI_y GI_t}}{l^3} = 100 * 16,9 \frac{\sqrt{311179 * 1566459 * 12472 * 376352}}{4145^3} = 35,93 \text{ kN/m}$$

A consideração das imperfeições geométricas da viga é feita pela hipótese de Southwell. Para o deslocamento lateral inicial é adotada a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)**, sendo então igual a 41,45 mm. O erro de posicionamento da viga sobre o veículo e_c assumido é de 25 mm.

Como θ_{lim} depende da rigidez da suspensão do veículo seu valor é bem menor que o recomendado para vigas içadas, pois a ligação rompe antes do elemento romper. Esta ruptura

é denominada tombamento. Para considerar as imperfeições é considerado conservadoramente um θ_{lim} de 6 graus ou 0,105 rad.

A obtenção da carga limite p_{lim} depende das Equações (19) e (20). Primeiramente é calculado o deslocamento limite pela Equação (20).

$$\bar{y}_{rot} = h_{cg} - h_{rot} + \Delta \left[\left(\frac{\ell_1}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 274,4 - 61,0 + 0,684 \left[\left(\frac{36,45}{41,45} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] = 213,70 \text{ cm}$$

$$\delta_t = \frac{\theta_{lim} \left(0,36\ell \sqrt{\frac{GI_t}{EI_y}} + \bar{y}_{rot} \right)}{1,68} = \frac{0,105 * \left(0,36 * 4145 \sqrt{\frac{12472 * 376352}{31179 * 1566459}} + 213,70 \right)}{1,68} = 42,27 \text{ cm}$$

$$p_{lim} = p_{crit} \sqrt{1 - \frac{\delta_o \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi a}{\ell} \right) \right] + e_c}{\delta_t}}$$

$$p_{lim} = 35,93 * \sqrt{1 - \frac{4,15 * \left[1 - \text{sen} \left(\frac{\pi * 250}{4145} \right) \right] + 2,54}{42,27}} = 33,32 \text{ kN/m}$$

A carga limite obtida pela formulação de **Stratford et al (1999)** é 24,7 % maior que a carga de **Mast (1993)** e 18,27 % menor que a carga obtida por **Lebelle (1959)**.

3.2.3 Fase transitória anterior à execução do tabuleiro sem contraventamento nos apoios

Na situação transitória em que a viga está sobre aparelhos de apoio, a flexibilidade à torção da ligação é o parâmetro fundamental para a análise, expressa pela constante de mola K_θ . O modelo estrutural da viga nesta fase é biapoiada sem balanços. A fase será denominada por simplificação de pré-serviço sem contraventamentos.

3.2.3.1 Fase de pré-serviço sem contraventamentos segundo Mast (1993)

A verificação da viga PCI BT-72 é feita através das propostas de **Mast (1993)** em paralelo às recomendações da **AASHTO LRFD (2007)** sobre aparelhos de apoio. Em seguida, é feita a verificação do levantamento da viga em relação ao apoio elastomérico

cintado, segundo a **AASHTO LRFD (2007)**. As propriedades geométricas da viga e do concreto (utilizando agora o f_{ck}) são as mesmas do item 3.2.1.

a) Verificação das tensões máximas nos pontos de inflexão dos cabos e a resistência necessária para o concreto

O momento no ponto de inflexão dos cabos M_{pi} é:

$$M_{pi} = -g_{pp} \frac{b^2}{2} + \frac{G}{2} b = -12,30 \frac{16,58^2}{2} + \frac{509,5}{2} 16,58 = 2534,03 \text{ kN.m}$$

As tensões máximas nas mesas superior σ_{Sup} e inferior σ_{Inf} são,

$$\sigma_{Sup} = -\frac{5480}{4950} + \frac{5480 * 80,3}{252745} - \frac{253403}{252745} = -0,371 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{Inf} = -\frac{5480}{4950} - \frac{5480 * 80,3}{244320} + \frac{253403}{244320} = -1,843 \text{ kN/cm}^2$$

Dando continuidade ao exemplo do item 3.2.1, a resistência à compressão do concreto é de 40 MPa, maior que a recomendada pelo **ACI 318 (2002)** no valor de $\frac{18,43}{0,6} \approx 31 \text{ MPa}$.

b) Módulo de elasticidade inicial efetivo do concreto

Utilizando a fórmula da **ABNT NBR 6118:2007** para o módulo de elasticidade inicial, tem-se:

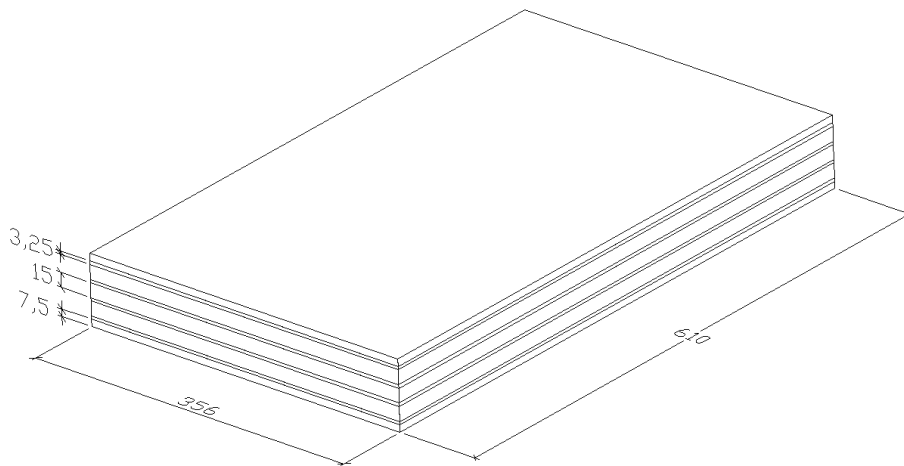
$$E_{ci} = 5600\sqrt{40} = 35417 \text{ MPa}$$

c) Cálculo do coeficiente de mola K_{θ} para o aparelho de apoio cintado

Na Tabela 6 são apresentadas as propriedades geométricas do aparelho e sua representação na Figura 3-7.

Tabela 6 - Propriedades do aparelho de apoio elastomérico cintado

W, dimensão transversal ao eixo da viga (cm)	61,0
L, dimensão paralela ao eixo da viga (cm)	35,6
A, área do aparelho de apoio, igual a W*L (cm ²)	2171,6
I _{y, aa} , momento de inércia em torno do eixo y (cm ⁴)	673376
h _e , espessura da camada externa de neoprene (cm)	7,5
h _i , espessura da camada interna de neoprene (cm)	15,0
n _e , número de camada externas de neoprene	2
n _i , número de camada internas de neoprene	3
H, altura total das camadas neoprene (mm)	60,0

**Figura 3-7 – Dimensões do aparelho de apoio cintado. Unidade [mm]**

Com as propriedades geométricas é possível determinar o fator de forma global S_g do aparelho de apoio. Para as camadas internas e externas os fatores de forma S_i e S_e , respectivamente, ficam:

$$S_i = \frac{LW}{2h_i(L+W)} = \frac{35,6 * 61,0}{2 * 15,0 * (35,6 + 61,0)} = 7,5$$

$$S_e = \frac{LW}{2h_e(L+W)} = \frac{35,6 * 61,0}{2 * 7,5 * (35,6 + 61,0)} = 15$$

Segundo **Yazdani et al (2000)**, o fator de forma global é obtido calculando-se a média ponderada entre os fatores externo e interno.

$$S_g = \frac{n_i h_i S_i + n_e h_e S_e}{n_i h_i + n_e h_e} = \frac{3 * 15 * 7,5 + 2 * 7,5 * 15}{3 * 15 + 2 * 7,5} = 9,4$$

O módulo de elasticidade do aparelho cintado é calculado por duas recomendações. Uma refere-se à norma **AASHTO LRFD (2007)** que recomenda um módulo de elasticidade transversal G_{aa} entre 0,665 e 1,379 MPa na fase de serviço. Não há recomendação para fase transitória. Adotando o menor valor, calcula-se o módulo de elasticidade à compressão $E_{aa,1}$. O índice numérico serve para diferenciar as duas recomendações.

$$E_{aa,1} = 6G_{aa}S_g^2 = 6 * 0,665 * 9,4^2 = 350 \text{ MPa}$$

A segunda forma utilizada para estimar $E_{aa,2}$ é recomendada por **Mast (1993)** e independe de G_{aa} . No entanto, ambas dependem do fator de forma ao quadrado.

$$E_{aa,2} = 2,52 * (1 + 0,5S_g^2) = 2,52 * (1 + 0,5 * 9,4^2) = 113 \text{ MPa}$$

Os resultados serão apresentados aos pares, sempre diferenciados pelo índice numérico. Segundo **Yazdani et al (2000)**, a constante de mola K_θ pode ser estimada conhecendo-se o módulo de elasticidade à compressão E_{aa} do aparelho de apoio.

$$K_{\theta,1} = \frac{E_{aa,1} I_{y,aa}}{H} = \frac{350 * 673376}{60} = 39288 \text{ kN.m/rad}$$

$$K_{\theta,2} = \frac{E_{aa,2} I_{y,aa}}{H} = \frac{113 * 673376}{60} = 12689 \text{ kN.m/rad}$$

d) Estimativa das imperfeições geométricas iniciais

Para deslocamento lateral e_s é utilizada a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)** de 3 mm para cada 3m, resultando em 41,45 mm. Para imprecisão no posicionamento da viga sobre os apoios e_a será admitido um erro 25,40 mm. **Hurff (2010)** recomenda considerar uma excentricidade adicional de 1,3 mm para 3 m para efeito térmico e_{T° , o que resulta em 18,38 mm. Então a excentricidade inicial e_i , considerando que a forma deslocada da viga é parabólica, será:

$$e_i = (e_s + e_{T^\circ}) \frac{2}{3} + e_a = (41,45 + 18,38) * \frac{2}{3} + 25,40 = 71,41 \text{ mm}$$

e) Determinação da contraflecha devido à protensão e da distância entre o eixo de giro e o CG

A contraflecha Δ estimada no item 3.2.1 foi 6,84 mm. Com este valor, ajusta-se a distância y_{rot} entre o eixo de giro e o CG da seção. O mesmo fator de ajuste imposto sobre o deslocamento lateral é aplicado à contraflecha e H_t corresponde à espessura total do aparelho de apoio. Lembrando que o eixo de giro é o centro do aparelho de apoio.

$$y_{rot} = y_{cg} + \Delta * \frac{2}{3} + \frac{H_t}{2} = 93 + 0,684 * \frac{2}{3} + \frac{7,3}{2} = 101,21 \text{ cm}$$

f) Cálculo do deslocamento lateral fictício x_0

Para uma viga biapoiada é calculado o deslocamento elástico, lembrando que a inércia lateral I_y deve ser utilizada.

$$x_0 = \frac{5}{384} \frac{g\ell^4}{E_{ci}I_y} = \frac{5}{384} * \frac{0,123 * 4145^4}{3542 * 1566400} = 85,23 \text{ cm}$$

g) Cálculo do raio de estabilidade r

Sabendo que o peso total G da viga é 509,5kN, calculam-se os raios de estabilidade r_1 e r_2 .

$$r_1 = \frac{K_{\theta,1}}{G} = \frac{39288}{509,5} = 77,1 \text{ m/rad}$$

$$r_2 = \frac{K_{\theta,2}}{G} = \frac{12689}{509,5} = 24,9 \text{ m/rad}$$

h) Cálculo do ângulo de equilíbrio θ_{eq}

Quando a viga é posicionada sobre os apoios, existe uma inclinação α correspondente a imperfeições construtivas. Será adotado 0,05 rad de giro nos apoios. Então os ângulos de equilíbrio $\theta_{eq,1}$ e $\theta_{eq,2}$ são:

$$\theta_{eq,1} = \frac{\alpha r_1 + e_i}{r_1 - y_{rot} - x_0} = \frac{0,05 * 7710 + 7,14}{7710 - 86,90 - 85,23} = 0,0522 \text{ rad ou } 3^\circ$$

$$\theta_{eq,2} = \frac{\alpha r_2 + e_i}{r_2 - y_{rot} - x_0} = \frac{0,05 * 2490 + 7,14}{2490 - 86,90 - 85,23} = 0,0572 \text{ rad ou } 3,3^\circ$$

i) Determinação da resistência à compressão necessária

Quando a viga gira θ_{eq} parte do peso próprio passa a atuar lateralmente e a tensão provocada por este momento é:

$$M_{lat,1} = M_{pi} * \theta_{eq,1} = 2534,03 * 0,0522 = 132,24 \text{ kN.m}$$

$$M_{lat,2} = M_{pi} * \theta_{eq,2} = 2534,03 * 0,0572 = 144,80 \text{ kN.m}$$

A resistência à compressão necessária, segundo recomendação do **ACI 318 (2002)** para a combinação de tensões devido aos momentos nas duas direções, é calculada por:

$$f_{c,1} = \frac{\sigma_{inf} + \frac{M_{lat,1}}{I_y} * 33,03}{0,6} = \frac{1,843 + \frac{13224}{1566400} * 33,03}{0,6} = 3,54 \text{ kN/cm}^2 \text{ ou } 35,4 \text{ MPa}$$

$$f_{c,2} = \frac{\sigma_{inf} + \frac{M_{lat,2}}{I_y} * 33,03}{0,6} = \frac{1,843 + \frac{14480}{1566400} * 33,03}{0,6} = 3,60 \text{ kN/cm}^2 \text{ ou } 36,0 \text{ MPa}$$

j) Cálculo do ângulo de fissuração θ_r

O procedimento é o mesmo do tópico 7 do item 3.2.1. Para a resistência à tração segue a recomendação do **ACI 318 (2002)**. Sendo que no item anterior nenhuma das resistências requeridas ultrapassou o f_{ck} .

$$f_t = 0,623\sqrt{f_{ck}} = 0,623\sqrt{40} = 3,94 \text{ MPa}$$

$$M_{lat} = (|\sigma_{sup}| + f_t) * \frac{I_y}{53,34} = \frac{(-3,71) + 3,94}{10} * \frac{1566400}{53,34} = 22396 \text{ kN.cm}$$

$$\theta_r = \frac{M_{lat}}{M_{pi}} = \frac{223,96}{2534,03} = 0,0884 \text{ rad ou } 5^\circ$$

k) Cálculo do fator de segurança contra a fissuração

Serão calculados os fatores de segurança $\gamma_{r,1}$ e $\gamma_{r,2}$, correspondentes às constantes de mola $K_{\theta,1}$ e $K_{\theta,2}$, respectivamente.

$$\gamma_{r,1} = \frac{r_1(\theta_r - \alpha)}{x_0\theta_r + e_i + y_{rot}\theta_r} = \frac{7710 * (0,0884 - 0,05)}{91,03 * 0,0872 + 7,14 + 101,21 * 0,0884} = 12,53$$

$$Y_{r,2} = \frac{r_2(\theta_r - \alpha)}{x_0\theta_r + e_i + y_{rot}\theta_r} = \frac{2490 * (0,0872 - 0,05)}{91,03 * 0,0872 + 7,14 + 101,21 * 0,0872} = 4,05$$

Nos dois casos a segurança foi verificada. No entanto, vale salientar a importância da constante de mola K_θ e a necessidade de mais estudos sobre este parâmetro em fase transitória. As recomendações da **AASHTO LRFD (2007)** referem-se à fase de serviço. Porém a rigidez axial dos aparelhos de apoio cintados é bem menor em situação transitória, como mostra a Figura 2-25 apresentada por **Hurff (2010)**.

O fator de forma é um parâmetro muito importante na determinação da constante K_θ . Como já dito, **Mast (1993)** faz menção ao caso da perda parcial de contato entre o aparelho de apoio e a viga. A redução da área de contato reduziria significativamente o valor da constante de mola e, conseqüentemente, o fator de segurança seria menor. É apresentada a seguir a verificação do levantamento da borda menos comprimida do aparelho de apoio.

O procedimento apresentado segue as recomendações de **Barker e Puckett (1997)** embasados na norma **AASHTO LRFD (2007)**.

Para o aparelho de apoio utilizado na viga PCI BT-72, a verificação em situação transitória tem apenas a parcela de reação devido ao peso próprio R_g que vale 254,8 kN. Então, a tensão devido à força normal sobre o aparelho de apoio cintado é determinada.

$$\sigma_s = \frac{R_g}{LW} = \frac{245,8}{35,6 * 61} = 1,13 \text{ MPa}$$

Segundo recomendação da **AASHTO LRFD (2007)** os aparelhos de apoio devem ser projetados de forma a evitar a perda de contato entre qualquer ponto do aparelho e a viga. Isto pode acontecer na situação em que a viga e o aparelho de apoio tem contato sem intermédio de placas metálicas, sendo este efeito denominado em inglês como “lift-off”.

Para verificar a perda de contato, deve ser determinada a rotação da viga no apoio, iniciando-se pela rotação devido ao peso próprio.

$$\theta_g = \frac{g\ell^3}{24E_{ci}I_x} = \frac{0,123 * 4145^3}{24 * 3313 * 22721800} = 0,0048 \text{ rad}$$

A rotação devido à protensão é obtida seguindo a distribuição de esforços apresentada na Figura 3-8, através de análise elástica, como recomendado por **Lin e Burns (1981)**. Considerando válida a superposição de efeitos, a rotação será formada pelas parcelas θ_{p1} e θ_{p2} ,

referentes à força de protensão excêntrica ao CG nos apoios e às forças nos pontos de inflexão dos cabos $P_i\beta$, respectivamente. Sendo $\beta = \frac{63,5}{1660} = 0,0383$ rad.

$$\theta_{p1} = -\frac{P_i e_{p,apoio} \ell}{2E_{ci} I_x} = -\frac{5480 * (80,3 - 63,5) * 4145}{2 * 3313 * 22721800} = -0,0025 \text{ rad}$$

$$\theta_{p2} = -\frac{P_i \beta b (\ell - b)}{2E_{ci} I_x} = -\frac{5480 * 0,0383 * 1660 * (4145 - 1660)}{2 * 3313 * 22721800} = -0,0055 \text{ rad}$$

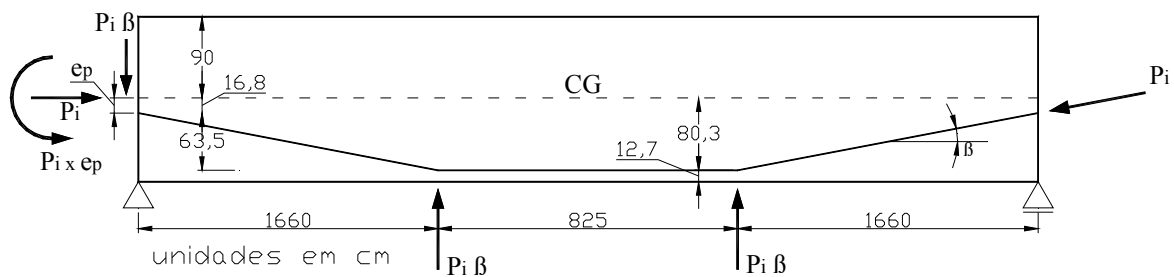


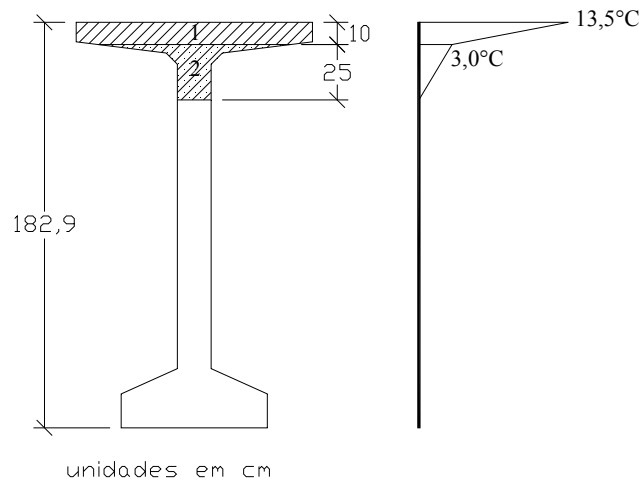
Figura 3-8 – Sistema de forças devido à protensão sobre a viga de concreto biapoiada PCI BT-72

Na fase transitória em questão, as vigas ficam expostas diretamente a radiação solar. Para determinar a rotação do apoio, a incidência da luz é considerada na face superior da viga. A parcela da distribuição de temperatura que provoca a curvatura da viga é o gradiente térmico.

Para determinar a curvatura é adotada a distribuição de temperatura recomendada pela **ABNT NBR 7187:2003**, para seções maiores que 80 cm, sendo o coeficiente de dilatação térmica do concreto α de $10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}$. A Figura 3-9 apresenta a distribuição na viga PCI BT-72. Utilizando a expressão na forma discreta recomendada por **Ghali et al (1989)**, determina-se a curvatura. Segue na Tabela 7 as propriedades das seções indicadas na Figura 3-9.

Tabela 7 – Propriedades da seção transversal

Propriedades	Seção 1	Seção 2	Seção total
A_i (cm ²)	1054,3	563,1	4950
\bar{y}_i (cm)	85,1	70,9	-
\bar{I}_i (cm ⁴)	8625	33950	22721800
d_i (cm)	10	25	-
T_{mi} (°C)	8,3	1,5	-
ΔT_i (°C)	10,5	3	-

**Figura 3-9 – Gradiente de temperatura para cálculo da curvatura da viga PCI BT-72**

$$\kappa = \frac{\alpha}{I_x} \sum \left[T_{mi} \bar{y}_i A_i + \frac{\Delta T_i}{d_i} \bar{I}_i \right]$$

$$\kappa = \frac{10^{-5}}{22721800} \left[8,3 * 85,1 * 1054,3 + \frac{10,5}{10} * 8625 + 1,5 * 70,9 * 563,1 + \frac{3,0}{25} * 33950 \right]$$

$$\kappa = 3,6 * 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$$

O momento resultante é constante em toda a viga

$$M_0 = E_c I_x \kappa = 3360 * 22721800 * 3,6 * 10^{-7} = 224747 \text{ kN.cm}$$

O giro nos apoios pode ser determinado seguindo o modelo da Figura 3-10.

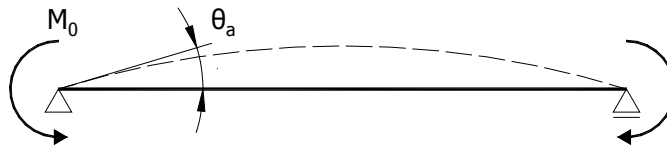


Figura 3-10 – Modelo para o cálculo do giro no apoio devido à gradiente térmico

$$\theta_a = -\frac{M_0 \ell}{2E_c I_x} = -\frac{224747 * 4145}{2 * 3360 * 22721800} = -0,0075 \text{ rad}$$

Não foi considerado um gradiente na face inferior, pois **Barker e Puckett (1997)** recomendam que o gradiente seja nulo caso não exista uma aferição em campo da temperatura nesta face, pois a curvatura teria efeito favorável nesta análise, deslocando a viga para baixo.

Considerando uma rotação devido às imperfeições construtivas θ_i de $\pm 0,005$ rad, então a rotação resultante para situação transitória θ_{st} vale:

$$\theta_{st} = \theta_i + \theta_T + \theta_g + \theta_{p1} + \theta_{p2}$$

$$\theta_{st} = -0,005 - 0,0075 + 0,0048 - 0,0025 - 0,0055 = -0,0157 \text{ rad}$$

Se a rotação devido às imperfeições geométricas fosse tomada como positiva, θ_{st} resultaria $-0,0057$ rad. No entanto, a combinação crítica deve ser considerada na análise, sendo o resultado de $-0,0157$ rad.

Normalmente a rotação na fase transitória é mais crítica que na fase de serviço, pois em serviço a rotação negativa devido à protensão é contrabalanceada com o peso do tabuleiro e o peso próprio da viga, tornando-se positiva, quando acrescida dos carregamentos acidentais.

A verificação de “lift-off” é feita garantindo que a tensão atuante no apoio σ_s seja maior que a tensão de elevação mínima σ_{min} , que pode ser determinada pela equação:

$$\sigma_{min} = G_{aa} S_i \left(\frac{\theta_{st}}{n_i} \right) \left(\frac{L}{h_i} \right)^2 = 0,665 * 7,5 * \left(\frac{0,0157}{3} \right) \left(\frac{356}{15} \right)^2 = 14,70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} > \sigma_s = 1,13 \text{ MPa}$$

Finalmente, observa-se que haverá perda de contato entre a superfície da viga e o aparelho de apoio, sendo pertinente calcular o fator de forma global S_g com área reduzida. Quando isso acontece, a segurança à instabilidade lateral diminui significativamente.

3.2.3.2 Fase de pré-serviço sem contraventamentos segundo Lebel (1959)

A equação (8) será utilizada para determinação da carga crítica de instabilidade da viga PCI BT-72. Sendo as propriedades do concreto e propriedades geométricas as mesmas apresentadas no item 3.2.1.1.

Utilizando a constante de mola K_θ calculada pela recomendação de Mast no item 3.2.3.1 que vale 12689 kN.m/rad, pode-se obter o valor de $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \frac{K_\theta \ell}{2GI_t} = \frac{100 * 12689 * 4145}{2 * 1247 * 411868} = 5,12$$

$$f(\alpha) = 5,12 = \frac{\frac{8}{15}\alpha - \frac{356}{10395}\alpha^2}{1 - \frac{11}{30}\alpha + \frac{6617}{415800}\alpha^2}$$

$$\alpha_{\text{crit}} = 2,04$$

Portanto a carga crítica, segundo **Lima (1995)**, pode ser calculada sabendo que k vale 0,923, calculado no item 3.2.1.1, considerando a contribuição das mesas combinada com o efeito da carga aplicada afastada do centróide da seção.

$$p_{\text{crit}} = k \frac{16}{\rho^3} \sqrt{\alpha_{\text{crit}}} \sqrt{EI_y GI_t} = 0,923 * \frac{16}{4145^3} * \sqrt{2,04} * \sqrt{31179 * 635881 * 12472 * 411868}$$

$$p_{\text{crit}} = 46,92 \text{ kN/m}$$

Seguido a recomendação de **Leonhardt (1964)**, sabendo que a carga devido ao peso próprio g_{pp} é 12,29 kN/m, tem-se que:

$$\frac{p_{\text{crit}}}{4} = 11,73 \text{ kN/m} < g_{pp}$$

O critério de segurança não é atendido. Realizando a análise por meio das propostas de **Mast (1993)** considerando que o tombamento ocorre quando o coeficiente de segurança contra fissuração γ_r é igual a 1, a carga crítica resultante é de 37 kN/m.

A análise realizada pra obtenção desta carga é a mesma do item 3.2.3.1. Porém, em vez de utilizar a carga distribuída relativa ao peso próprio, são adotados valores pra essa variável até que seja alcançado γ_r igual a 1.

3.2.3.3 Quadro resumo do item 3.2

Os resultados de carga crítica e fator de segurança das situações de içamento, transporte e pré-serviço sem contraventamentos nos apoios, obtidos no item 3.2 são dispostos nas Tabela 8 e Tabela 9, respectivamente.

Tabela 8 – Quadro resumo de carga crítica da viga PCI BT-72 [kN/m]

Valores de p_{crit}	Içamento	Transporte	Pré-serviço*
Lebelle (1959)	29,4	40,77	46,92
Mast (1993)	29	25	37
Stratford et al (1999)	30,7	33,3	-

**sem contraventamentos nos apoios*

Tabela 9 – Quadro resumo de fatores de segurança

Fatores de segurança	Içamento	Transporte	Pré-serviço*	
			$\gamma_{r,1}$ AASHTO	$\gamma_{r,2}$ Mast (1993)
γ_r	1,72	1,31	12,53	4,05
γ_{rup}	1,73	1,97	-	

**sem contraventamentos nos apoios*

3.3 Análise da viga C2A ensaiada por Hurff (2010)

A viga C2A é estudada para avaliar a situação transitória de viga sobre aparelho de apoio com travamentos laterais fornecidos por transversinas de apoio, configuração típica de obras de ponte.

A estimativa do momento crítico de instabilidade lateral é feita pelas metodologias apresentadas no Capítulo 2. A primeira metodologia utilizada é a de **Hurff (2010)**. A diferença está nas leis constitutivas adotadas para análise e algumas recomendações retiradas das normas **ABNT NBR 6118:2007** e **EUROCODE 2 (2004)**.

Na Tabela 10 e Tabela 11 seguem as propriedades geométricas e físicas dos materiais (aço de protensão, aço de armadura passiva e concreto) da viga C2A, respectivamente.

Tabela 10 - Propriedades geométricas da viga C2A

h, altura (cm)	102,0
b, largura (cm)	10,2
ℓ , vão (cm)	975,0
d ₁ , altura útil da seção (cm)	87,3
d ₂ , distância entre armadura comprimida e fibra superior (cm)	5,1
d ₃ , distância entre armadura ativa e fibra superior (cm)	51,0

Tabela 11 – Propriedades dos materiais da viga C2A

f_{ck} , resistência à compressão característica do concreto (MPa)	77,8
f_{cm} , resistência média do concreto à compressão* (MPa)	85,8
f_{ctm} , resistência à tração média do concreto** (MPa)	4,8
E_{cm} , módulo de elasticidade elástico inicial do concreto (MPa)	41925
γ_c , peso específico do concreto (kN/m ³)	25
ν_c , coeficiente de Poisson	0,2
f_y , tensão de escoamento característica do aço (MPa)	484
E_s , módulo de elasticidade longitudinal do aço (GPa)	210
f_{pyk} , tensão de escoamento característica do aço de protensão (MPa)	1700
f_{ptk} , resistência característica do aço de protensão (MPa)	1900
E_p , módulo de elasticidade do aço de protensão (GPa)	196

*segundo Eurocode 2, $f_{cm}=f_{ck}+8$

**para $f_{ck} > 50\text{MPa}$, $f_{ctm}=2,12 \ln (1+f_{cm}/10)$

A viga estudada é de concreto pré-moldado protendido (pré-tração aderente) biapoiada (vão 9,75m) com carga concentrada no meio do vão, cuja sessão transversal, áreas das armaduras e força de protensão seguem representadas na Tabela 12.

Tabela 12 – Especificações das armaduras e força de protensão da viga C2A

A_{s2} , área da armadura passiva principal (cm^2)	19,6
A_{s1} , área da armadura passiva (cm^2)	4,9
A_t , área da seção de uma perna do estribo (cm^2)	0,8
s, espaçamento (cm)	38,1
A_{s3} , área de armadura ativa	2,12
P_i , força de protensão (kN)	231,4

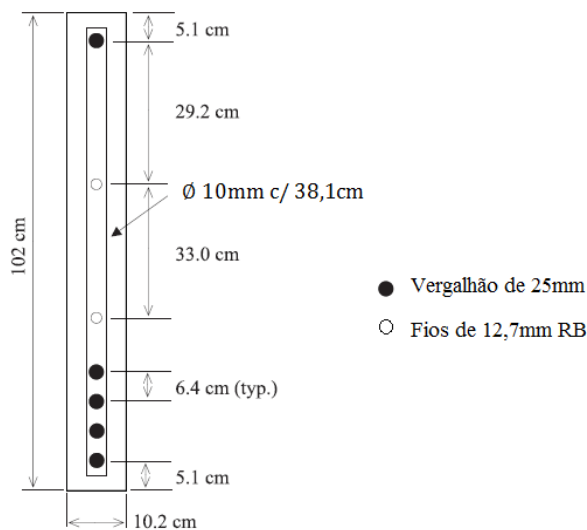


Figura 3-11 – Viga C2A ensaiada por Hurff (2010)

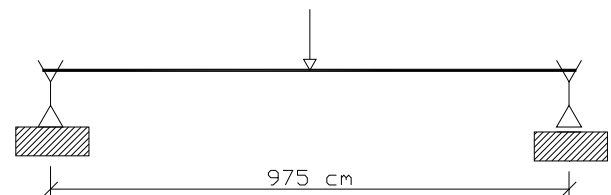


Figura 3-12 – Esquema estático da viga C2A

3.3.1 Fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios

Esta fase também é caracterizada como transitória e é particular de obras de ponte. A solução de momento crítico é obtida por análise clássica, pois a viga apresenta travamentos laterais que restringem o giro de torção nos apoios, como apresentado na Figura 3-13.

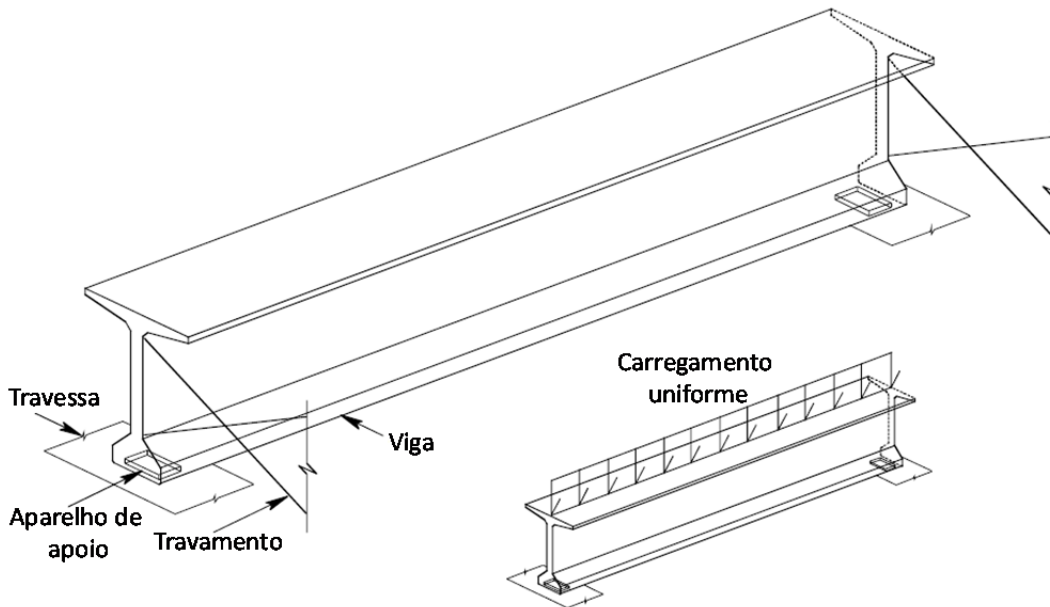


Figura 3-13 – Viga com travamentos laterais

Fonte: adaptado de Consolazio et al (2007)

As análises realizadas têm como foco mostrar os procedimentos de determinação do momento crítico de instabilidade lateral M_{crit} , e na análise paramétrica, obter a relações entre este e o momento de ruptura por flexão M_u , momento devido ao peso próprio M_{pp} e momento de fissuração M_r , que possam ajudar na verificação desta situação transitória.

3.3.1.1 Cálculo do momento crítico segundo Hurff (2010)

O procedimento de **Hurff (2010)** consiste de uma análise iterativa que busca, através das leis constitutivas dos materiais, obter um momento fletor aplicado que se iguale ao momento crítico de instabilidade pelas formulações apresentadas.

Então, primeiramente, é adotada uma deformação na fibra superior da seção e, em seguida, determina-se a profundidade da linha neutra, de tal forma que as tensões normais geradas pela curvatura imposta estejam em equilíbrio. São apresentados somente os valores finais das iterações.

Conhecendo-se o valor da força de protensão, determina-se a deformação na armadura pré-tracionada que é somada à deformação de compatibilização da seção. Para isso, é necessário determinar duas parcelas de deformação. A primeira refere-se à deformação direta do aço devido à protensão.

$$\varepsilon_p = \frac{P_i}{A_{s3}E_p} = \frac{231,4}{2,12 * 19600} = 5,569 * 10^{-3}$$

A segunda parcela refere-se à deformação elástica do concreto na altura da armadura de protensão. Em regime elástico, faz-se a homogeneização da seção através dos coeficientes de proporcionalidade α e α_p , que valem 5 para aço comum e 4,7 para o aço de protensão em relação ao concreto utilizado, respectivamente. A área da seção homogeneizada fica:

$$A_{ch} = bh + (\alpha_p - 1)A_{s3} + (\alpha - 1)A_{s2} + (\alpha - 1)A_{s1}$$

$$A_{ch} = 10,2 * 102 + (4,7 - 1) * 2,12 + (5 - 1) * 19,6 + (5 - 1) * 4,9 = 1146,4 \text{ cm}^2$$

Apesar do CG da seção mudar com a homogeneização, a diferença é muito pequena. Então, considerando a protensão centrada, a deformação elástica do concreto pode ser calculada.

$$\varepsilon_{ce} = \frac{P_i}{A_{ch}E_{cm}} = \frac{231,4}{1146,4 * 4192,5} = 4,815 * 10^{-5}$$

A deformação total no aço protendido utilizada nos estágios após a descompressão é a soma destas parcelas mais a deformação de compatibilidade.

A determinação do momento aplicado começa pela adoção de uma deformação de compressão na fibra superior da seção, sendo esta a própria solução.

$$\varepsilon_{cm} = -0,602 * 10^{-3}$$

A deformação de pico na compressão, segundo o **EUROCODE 2 (2004)**, e a tensão na fibra superior, segundo a Equação (75), podem ser determinadas:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{0,7 f_{cm}^{0,31}}{10^3} = \frac{0,7 * 85,8^{0,31}}{10^3} = 2,783 * 10^{-3}$$

$$k = 1,05E_{cm} \frac{\varepsilon_{cp}}{f_{cm}} = 1,05 * 41925 * \frac{2,783 * 10^{-3}}{85,8} = 1,428$$

$$\sigma(|\varepsilon_{cm}|) = f_{cm} \frac{k \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cp}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cp}} \right)^2}{1 + (k - 2) \left(\frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cp}} \right)} = 85,8 * \frac{1,428 * \left(\frac{0,602}{2,783} \right) - \left(\frac{0,602}{2,783} \right)^2}{1 + (1,428 - 2) \left(\frac{0,602}{2,783} \right)} = 25,66 \text{ MPa}$$

Como a tensão de compressão não ultrapassa $0,4f_{cm}$, considera-se que o concreto comprimido ainda se encontra em regime elástico. Portanto, o módulo de elasticidade secante se confunde com o módulo de elasticidade inicial E_{cm} .

No item 2.4 são apresentadas as equações para determinação dos parâmetros k_1 e k_2 . Como mencionado, o primeiro pondera as tensões de forma a obter uma média e, o segundo, determina a posição da resultante em relação à fibra mais comprimida.

$$k_1 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d\varepsilon_c}{f_{cm} \varepsilon_{cm}} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \left(f_{cm} \frac{k \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)^2}{1 + (k-2) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)} \right) d\varepsilon_c}{f_{cm} \varepsilon_{cm}} = 0,1512$$

$$k_2 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c \sigma_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \sigma_c d\varepsilon_c} = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c \left(f_{cm} \frac{k \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)^2}{1 + (k-2) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)} \right) d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} \left(f_{cm} \frac{k \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)^2}{1 + (k-2) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cp}} \right)} \right) d\varepsilon_c} = 0,3352$$

A cada lei constitutiva adotada existe uma solução para k_1 e k_2 . Para concreto de alta resistência deve-se adotar uma lei compatível.

Tendo as constantes, pode-se calcular a posição da resultante de compressão que é $k_2 x$ e seu valor. Como a análise é iterativa, a linha neutra é obtida somente quando há equilíbrio da seção. A posição da linha neutra x da seção em equilíbrio é igual a 45,55 cm.

$$C_c = k_1 * f_{cm} * b * x = 0,1512 * 8,58 * 10,2 * 45,55 = -603,06 \text{ kN}$$

É determinada a resultante de tração e sua posição, considerando a redução gradual das tensões de tração (efeito de *strain softening*) quando a fibra mais tracionada atinge a tensão de fissuração. Os parâmetros são k_3 e k_4 . No entanto, como o comportamento do concreto à tração é representado por uma combinação de funções, o parâmetro k_3 pode ter até três domínios de integração, dependendo do nível das tensões de tração.

A deformação na fibra mais tracionada ε_{tm} , a deformação de pico ε_{tp} e a deformação última ε_{f} de tração são determinadas, sendo ε_{tm} determinada por compatibilidade de deformações. As outras deformações dependem da resistência à tração, como apresentado no

item 2.4. Sabendo que a curvatura da seção pode ser determinada pela razão entre a deformação na fibra superior e a posição da linha neutra, resulta:

$$\kappa = \frac{|\varepsilon_{cm}|}{x} = \frac{|-0,602 * 10^{-3}|}{45,55} = 1,322 * 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

$$\varepsilon_{tm} = \varepsilon_{cm} + \kappa h = -0,602 * 10^{-3} + 1,322 * 10^{-5} * 102 = 7,464 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{tp} = \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} = \frac{4,79}{41925} = 1,143 * 10^{-4}$$

A deformação última depende do módulo de elasticidade tangente E_t da curva decrescente da resistência à tração.

$$E_t = \frac{-70 E_{cm}}{57 + 145 f_{ctm}} = -\frac{70 * 41925}{57 + 145 * 4,79} = -3904,9 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{tf} = \frac{E_t \varepsilon_{tp} - f_{ctm}}{E_t} = \frac{(-3904,9) * 1,143 * 10^{-4} - 4,79}{-3904,9} = 1,112 * 10^{-3}$$

Portanto, a integração das tensões de tração têm dois domínios representados pelas Equações (80) e (81), os domínios são:

- $0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tp}$
- $\varepsilon_{tp} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tm}$

A fibra inferior ainda absorve tensões de tração. As constantes k_3 e k_4 podem ser calculadas, como segue:

$$k_3 = \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_t d \varepsilon_t}{f_{ctm} \varepsilon_{tm}} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{tp}} (E_c \varepsilon_t) d \varepsilon_t + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}} [f_{ctm} - (\varepsilon_t - \varepsilon_{tp})(-E_t)] d \varepsilon_t}{f_{ctm} \varepsilon_{tm}} = 0,705$$

$$k_4 = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_c \sigma_t d \varepsilon_t}{\varepsilon_{tm} \int_0^{\varepsilon_{tm}} \sigma_t d \varepsilon_t} = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_t (E_c \varepsilon_t) d \varepsilon_t + \int_0^{\varepsilon_{tm}} \varepsilon_t [f_{ctm} - (\varepsilon_t - \varepsilon_{tp})(-E_t)] d \varepsilon_t}{\varepsilon_{tm} \left\{ \int_0^{\varepsilon_{tp}} (E_c \varepsilon_t) d \varepsilon_t + \int_{\varepsilon_{tp}}^{\varepsilon_{tm}} [f_{ctm} - (\varepsilon_t - \varepsilon_{tp})(-E_t)] d \varepsilon_t \right\}} = 0,519$$

Portanto, a resultante de tração C_t e sua distância à fibra mais tracionada z_1 , valem:

$$C_t = k_3 f_{ctm} b(h - x) = 0,705 * 0,479 * 10,2 * (102 - 45,55) = 194,44 \text{ kN}$$

$$z_1 = k_4 (h - x) = 0,519 * (102 - 45,55) = 29,30 \text{ cm}$$

Por compatibilidade de deformações, utilizando a curvatura, as deformações nas armaduras são calculadas, sendo as deformações ε_{s1} , ε_{s2} e ε_{s3} referentes a armaduras superior, inferior e de protensão, respectivamente.

$$\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{cm} + \kappa d_{s1} = -0,602 * 10^{-3} + 1,322 * 10^{-5} * 5,1 = -5,346 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{cm} + \kappa d_{s2} = -0,602 * 10^{-3} + 1,322 * 10^{-5} * 87,3 = 5,521 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{s3} = \varepsilon_{cm} + \kappa d_{s3} = -0,602 * 10^{-3} + 1,322 * 10^{-5} * 51,0 = 7,222 * 10^{-5}$$

Pode-se obter, finalmente, as tensões nas armaduras e as forças resultantes, em função das deformações ε_{s1} e ε_{s2} e ε_{s3} , lembrando-se de adicionar à deformação na armadura de protensão, as duas parcelas de deformação já calculadas ε_p e ε_{ce} .

$$\sigma_{s1} = \varepsilon_{s1} E_s = -5,346 * 10^{-4} * 210000 = -112,27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s2} = \varepsilon_{s2} E_s = 5,521 * 10^{-4} * 210000 = 115,94 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{s3} = (\varepsilon_{s3} + \varepsilon_p + \varepsilon_{ce}) E_p$$

$$\sigma_{s3} = (7,222 * 10^{-5} + 5,569 * 10^{-3} + 4,815 * 10^{-5}) * 196000 = 1115,12 \text{ MPa}$$

Observa-se que nenhuma das armaduras escoou até este nível de sollicitação. Do equilíbrio de esforços normais na seção, resulta:

$$N = C_c + C_t + \sum_{j=1}^3 \sigma_j A_{sj}$$

$$N = -603,06 + 194,44 + (-11,22) * 4,9 + 11,59 * 19,6 + 111,51 * 2,12 = 0,01 \text{ kN}$$

O critério de parada utilizado para obtenção da resultante de esforços na seção foi $\pm 0,05 \text{ kN}$, para o qual a seção é considerada equilibrada. O equilíbrio de momentos em relação à fibra superior que fornece o valor de momento aplicado M_a para análise da carga crítica de instabilidade lateral.

$$M_a = C_c k_2 x + C_t [h - z_1] + \sum_{j=1}^3 \sigma_j A_{sj} d_j$$

$$M_a = -603,06 * 0,3352 * 45,55 + 194,44 * 72,7 - 55,0 * 5,1 + 227,16 * 87,3 + 236,40 * 51,0$$

$$M_a = 36535 \text{ kN. cm ou } 365,35 \text{ kN. m}$$

Como o processo é iterativo, o momento aplicado e o momento crítico são calculados simultaneamente. No entanto, os cálculos são apresentados passo a passo na estrutura que a rotina foi elaborada.

Para o cálculo da carga crítica são necessárias as rigidezes efetivas à flexão B_{ef} e à torção C_{ef} . As duas rigidezes, segundo **Hurff (2010)**, dependem do momento de fissuração M_r . Assim, para a determinação de M_r em vigas protendidas inicialmente precisa-se saber quanto de tensão deve ser acrescida à fibra inferior da seção, para atingir a resistência à tração.

$$\sigma_{nec} = \frac{P_i}{A_c} + f_{ctm} = \frac{231,4}{1040,4} + 0,48 = 0,70 \text{ kN/cm}^2$$

O momento necessário aplicado à seção para que a tensão atinja f_{ctm} vale:

$$M_{nec} = \frac{\sigma_{nec} I_x}{h/2} = \frac{902026,78 * 0,7}{102/2} = 124,07 \text{ kN. m}$$

Fazendo a sobreposição da protensão e do M_{nec} , obtém-se as deformações nas fibras superior $\varepsilon_{r,t}$ e inferior $\varepsilon_{r,b}$, tais como:

$$\varepsilon_{r,t} = \frac{-\frac{P_i}{A_c} - \frac{M_{nec}}{W_x}}{E_{cm}} = \frac{-0,22 - \frac{124,07}{17686,8}}{4192,5} = -2,204 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{r,b} = \frac{-\frac{P_i}{A_c} + \frac{M_{nec}}{W_x}}{E_{cm}} = 1,143 * 10^{-4}$$

A curvatura da seção κ_r para esta distribuição de deformações e, conseqüentemente, a deformação na armadura de protensão por compatibilidade de deformações $\varepsilon_{p,comp}$ são dadas por:

$$\kappa_r = \frac{|\varepsilon_{r,t}| + \varepsilon_{r,b}}{h} = 3,281 * 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$$

$$\varepsilon_{p,comp} = \varepsilon_{r,t} + \kappa_r d_3 = -2,204 * 10^{-4} + 3,281 * 10^{-6} * 51,0 = -5,305 * 10^{-5}$$

A deformação total na armadura de protensão, a tensão e a força de protensão na fissuração são:

$$\varepsilon_{p,r} = \varepsilon_{ce} + \varepsilon_p + \varepsilon_{p,comp} = -5,305 * 10^{-5} + 5,569 * 10^{-3} - 5,305 * 10^{-5} = 5,463 * 10^{-3}$$

$$\sigma_{p,r} = \varepsilon_{p,r} E_p = 5,463 * 10^{-3} * 196000 = 1070,73 \text{ MPa}$$

$$P_r = \sigma_{p,r} A_{s3} = 107,07 * 2,12 = 226,99 \text{ kN}$$

O momento de fissuração pode ser obtido por:

$$M_r = W_x \left(\frac{P_r}{A_c} + f_{ctm} \right) = 17686,8 \left(\frac{226,99}{1040,4} + 0,48 \right) = 12331,7 \text{ kN. cm}$$

$$B_{ef} = E_{sec} \left\{ \left(\frac{hb^3}{12} \right) \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^2 + \left(\frac{xb^3}{12} \right) \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^2 \right] \right\}$$

$$B_{ef} = \frac{4192,5}{10^4} * \left\{ \left(\frac{102 * 10,2^3}{12} \right) \left(\frac{123,32}{365,35} \right)^2 + \left(\frac{45,55 * 10,2^3}{12} \right) \left[1 - \left(\frac{123,32}{365,35} \right)^2 \right] \right\}$$

$$B_{ef} = 1927 \text{ kN. m}^2$$

A rigidez à torção depende do módulo de elasticidade transversal e da inércia à torção

I_t . Conforme recomendação do **ACI 318-02**.

$$I_t = \left\{ \left[\left(\frac{hb^3}{12} \right) \left(1 - \frac{0,35b}{h} \right)^2 - \left(\frac{xb^3}{3} \right) \left(1 - \frac{0,35b}{x} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 - 3 \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^2 + 3 \left(\frac{M_r}{M_a} \right) \right] + \left(\frac{xb^3}{3} \right) \left(1 - \frac{0,35b}{x} \right)^2 \right\}$$

$$I_t = \left\{ \left[\left(\frac{102 \cdot 10,2^3}{12} \right) \left(1 - \frac{0,35 \cdot 10,2}{102} \right)^2 - \left(\frac{45,55 \cdot 10,2^3}{3} \right) \left(1 - \frac{0,35 \cdot 10,2}{45,55} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{123,32}{365,35} \right)^3 - 3 \left(\frac{123,32}{365,35} \right)^2 + 3 \left(\frac{123,32}{365,35} \right) \right] + \left(\frac{45,55 \cdot 10,2^3}{3} \right) \left(1 - \frac{0,35 \cdot 10,2}{45,55} \right)^2 \right\}$$

$$I_t = 9254 \text{ cm}^4$$

$$C_{ef} = \frac{E_{sec}}{2(1+\nu)} I_t = \frac{4192,5}{2(1+0,2)} * 9254 = 1736 \text{ kN. m}^2$$

No ensaio realizado por **Hurff (2010)**, a carga central foi aplicada na face superior da seção, então para levar em conta o efeito da distância de aplicação da carga ao CG é calculado o parâmetro A , como segue:

$$A = 1 - 1,74 \frac{\bar{a}}{\ell} \sqrt{\frac{B_{ef}}{C_{ef}}} = 1 - 1,74 * \frac{51}{975} * \sqrt{\frac{1927}{1736}} = 0,904$$

Na Tabela 13 são apresentados os resultados experimentais da viga C2A. As imperfeições geométricas iniciais u_i e θ_i são utilizadas no cálculo do momento crítico. No entanto, na prática, as imperfeições devem ser adotadas de acordo com normas técnicas pertinentes.

Tabela 13 - Resumo dos resultados experimentais (Hurff 2010)

Identificação	Imperfeições iniciais		M_{crit} (kN.m)
	δ_0 (mm)	θ_i (rad)	
Viga C2A	7,95	0,01652	364,89

Para considerar o efeito das imperfeições iniciais são utilizados os parâmetros redutores Θ_r e Δ_r , correspondentes ao giro inicial da viga e deslocamento lateral, respectivamente.

$$\Theta_r = e^{-26,5\theta_0} = e^{-26,5*0,01652} = 0,6455$$

$$\Delta_r = 1 - \left(\frac{\delta_0}{\ell}\right)^{0,31} = 1 - \left(\frac{0,795}{975}\right)^{0,31} = 0,8897$$

A inclinação da linha neutra da viga quando submetida à flexão oblíqua também reduz a sollicitação que provoca instabilidade. Para levar em conta esse fator, **Hurff (2010)** recomenda o ajuste da rigidez à flexão pela Equação (59).

$$B_r = B_{ef} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\text{tg}^{-1} \left(\frac{I_{c,x}}{I_{c,y}} \theta_0 \right)}{\frac{\pi}{2}} \right] \right\} = 1927 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left[\frac{\text{tg}^{-1} \left(\frac{902027}{9020} * 0,01652 \right)}{\frac{\pi}{2}} \right] \right\} = 1507 \text{ kN. m}^2$$

Assim, o momento crítico pode ser determinado. Como a viga é biapoiada, com carga concentrada no meio do vão, as constantes C_1 e C_2 valem 4,3 e 1, respectivamente.

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{C_2 \ell} A \sqrt{B_{\text{ef}} C_{\text{ef}}} \Delta_r \theta_r = \frac{4,23}{1 * 9,75} * 0,904 \sqrt{1507 * 1736} * 0,8897 * 0,6455 = 364,38 \text{ kN.m}$$

Nota-se que a diferença entre momento aplicado M_a e momento crítico de instabilidade M_{cr} é muito pequena, o resultado será considerado a média entre os dois que é 364,92 kN.m.

A Tabela 13 mostra que o momento crítico de ensaio foi 364,89 kN.m. A diferença entre os valores analítico e experimental é praticamente zero.

3.3.1.2 Cálculo do momento crítico segundo Revathi e Menon (2006)

Para calcular o momento crítico de instabilidade **Revathi e Menon (2006)** adotam duas hipóteses.

- A intensidade do momento crítico está entre o momento de fissuração M_r e 80% do momento último de flexão M_u . Portanto a rigidez à flexão efetiva B_{ef} é a média ponderada entre as rigidezes nestes estágios;
- A rigidez à torção no estágio de pós-fissuração é adotada para rigidez efetiva C_{ef} .

Os autores fixaram o comportamento na ruptura por instabilidade, portanto, a análise é simplificada, sem necessidade de iterações. O procedimento necessário para determinar o momento aplicado M_a , apresentado no item 3.3.1.1, é o mesmo para determinar o momento último da seção. Portanto, só são apresentados os resultados.

O momento último da viga C2A foi obtido considerando uma deformação limite de 2,8‰, segundo para o concreto comprimido, sendo sua resistência à tração de 77,8 MPa. O valor de M_u é 917,43 kN.m e a profundidade da linha neutra é 20,74 cm. Calcula-se, assim, a rigidez à flexão B_{ef} pela Equação (42). O momento de fissuração M_r é 166,43 kN.m e o módulo de elasticidade elástico do concreto é 41925 MPa.

$$B_{\text{ef}} = E_{\text{cm}} \left\{ \left[\frac{M_r}{0,8M_u} \right]^3 \left(\frac{b^3 h}{12} \right) + \left[1 - \left(\frac{M_r}{0,8M_u} \right)^3 \right] \left(\frac{b^3 x}{12} \right) \right\}$$

$$B_{\text{ef}} = 41925,5 \left\{ \left[\frac{16643}{0,8 * 91743} \right]^3 * \left(\frac{10,2^3 * 102}{12} \right) + \left[1 - \left(\frac{16643}{0,8 * 91743} \right)^3 \right] * \left(\frac{10,2^3 * 20,74}{12} \right) \right\}$$

$$B_{\text{ef}} = 8041884 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 804 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez à torção é obtida através da Equação (115) proposta por **Tavio e Teng (2004)**. Contudo, a solução apresenta simplificações para as propriedades geométricas que a viga C2A não atende, como, por exemplo, a área A_0 da Figura 2-44. A seção da viga ensaiada é convertida em uma seção equivalente com metade da altura original e mesma área bruta, Figura 3-14.

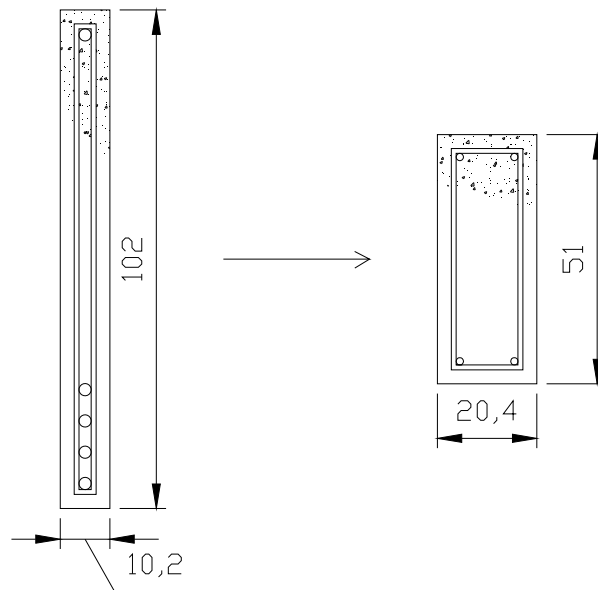


Figura 3-14 – Adaptação da seção para o cálculo da rigidez à torção. Unidade [cm]

A rigidez à torção, segundo as dimensões da Figura 3-14 e propriedades da seção da Figura 2-44, é obtida por:

$$C_{ef} = \frac{4\mu E_s A_0^2 A_c}{p_0^2 \left(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_{tr}} \right)} = \frac{4 * 1,5 * 21000 * 481,5^2 * 1040,4}{107^2 \left(\frac{1}{0,0208} + \frac{1}{0,0039} \right)} = 8745413,3 \text{ kN. cm}^2 \text{ ou } 875 \text{ kN. m}^2$$

Com as rigidezes à torção e à flexão lateral determinadas, segundo **Revathi e Menon (2006)**, obtêm-se o momento crítico de instabilidade lateral.

$$M_{crit} = \frac{C_1}{C_2 \ell} \sqrt{B_{ef} C_{ef}} = \frac{4,23}{1 * 9,75} \sqrt{804 * 875} = 363,84 \text{ kN. m}$$

A Tabela 13 apresenta o momento obtido experimentalmente por **Hurff (2010)** que foi 364,89 kN.m. A diferença para a resposta analítica utilizando as recomendações de **Revathi e Menon (2006)** foi de 0,3%.

3.3.1.3 Cálculo do momento crítico segundo Girija e Menon (2011)

Este procedimento não fixa a rigidez à flexão lateral como no item anterior. Para determiná-la é utilizado o diagrama momento-curvatura ($M-I/r$) da seção apresentada na Figura 3-11. O diagrama segue na Figura 3-15, determinado segundo o item 2.4, com a consideração da resistência à tração levando-se em conta o amolecimento por deformação.

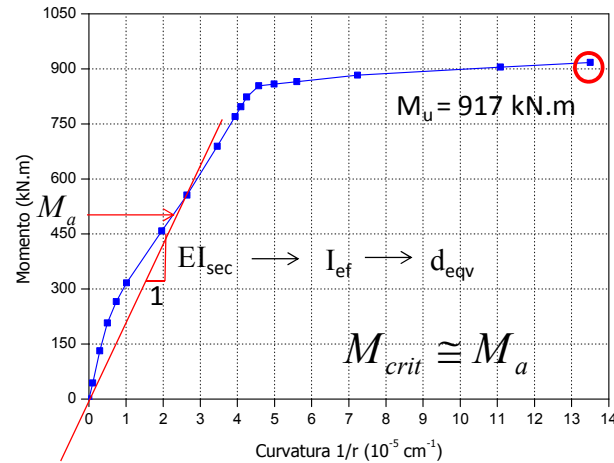


Figura 3-15 – Diagrama momento-curvatura da C2A

A rigidez à flexão efetiva da seção é obtida adotando-se um momento aplicado à seção M_a . Através do diagrama $M-I/r$, obtêm-se a rigidez a flexão secante EI_{sec} , como mostrado na Figura 3-15. Por exemplo, para um momento M_a de 587,11 kN.m e curvatura da seção de $2,838 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$, a rigidez secante é 206878,03 kN.m².

A partir do conhecimento da lei constitutiva para o concreto em compressão é possível obter o módulo de elasticidade secante E_{sec} , para o nível de solitação M_a , que é de 41273 MPa. Com isso pode-se calcular o momento de inércia de segunda ordem efetivo I_{ef} e a altura da seção íntegra considerando a fissuração progressiva d_{eqv} , seu valor é 83,86 cm.

A rigidez a flexão lateral efetiva B_{ef} utilizando o diagrama $M-I/r$ vale:

$$B_{ef} = E_{sec} \frac{d_{eqv} b^3}{12} = 41273 * \frac{83,86 * 10,2^3}{12} = 30607560 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 3061 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez à torção recomendada por **Girija e Menon (2011)** é a mesma de **Revathi e Menon (2006)** e vale 875 kN.m². Assim, o momento crítico pode ser calculado, sendo que os autores recomendam a utilização do parâmetro A , que leva em conta a posição da aplicação da carga e vale 0,896, como calculado no item 3.3.1.1.

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{C_2 \ell} A \sqrt{B_{\text{ef}} C_{\text{ef}}} = \frac{4,23}{1 * 9,75} * 0,896 \sqrt{3061 * 875} = 588,95 \text{ kN.m}$$

O critério de convergência foi atendido. No entanto a diferença entre a solução numérica e experimental foi de 38%. Caso fosse considerado o efeito das imperfeições iniciais o momento de instabilidade seria reduzido, podendo a solução se aproximar do resultado experimental.

3.3.1.4 Cálculo do momento crítico segundo Girija e Menon (2011) simplificado

Girija e Menon (2011) propuseram uma expressão simplificada para o cálculo do momento crítico, afim de eliminar a análise iterativa, obtendo-se as rigidezes através de coeficientes. Para a viga C2A a rigidez efetiva à flexão B_{ef} é determinada a partir do coeficiente α , sabendo que o f_{ck} vale 77,8 MPa. (47)

$$\rho_t = \frac{A_{s2} + A_{s3}}{A_c} = \frac{19,6 + 2,12}{1040,4} = 0,0209$$

$$\alpha = [0,8 - 0,003f_{\text{ck}}] \cdot \rho_t^{0,25} = [0,8 - 0,003 * 77,8] \cdot 0,0209^{0,25} = 0,2154$$

$$B_{\text{ef}} = \alpha E_{\text{cm}} \frac{b^3 D}{12} = 0,2154 * 4192,5 \frac{10,2^3 * 102}{12} = 8144787 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 815 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez efetiva à torção C_{ef} está relacionada ao coeficiente β .

$$G_c = \frac{E_{\text{cm}}}{2(1 + 0,15)} = 18228 \text{ MPa}$$

$$\beta = \frac{12 \mu E_s A_o^2}{p_o^2 b^2 G_c \left(\frac{1}{\rho_l} + \frac{1}{\rho_{\text{tr}}} \right)} = \frac{12 * 1,5 * 21000 * 481,5^2}{107^2 * 10,2^2 * 18228 \left(\frac{1}{0,0208} + \frac{1}{0,0039} \right)} = 0,1330$$

$$C_{\text{ef}} = \beta G_c \frac{b^3 D}{3} = 0,1330 * 18228 * \frac{10,2^3 * 102}{3} = 8745413 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 875 \text{ kN.m}^2$$

Portanto, o momento crítico de instabilidade pode ser calculado.

$$M_{\text{crit}} = \frac{C_1}{C_2 \ell} A \sqrt{B_{\text{ef}} C_{\text{ef}}} = \frac{4,23}{1 * 9,75} * 0,884 \sqrt{815 * 875} = 323,87 \text{ kN.m}$$

A diferença para a solução experimental é de 11,2 %. No entanto, como o momento crítico estimado é menor que o momento experimental, o resultado é a favor da segurança.

3.3.1.5 Cálculo do momento crítico segundo Kalkan (2014)

O procedimento apresentado por **Kalkan (2014)** considera as imperfeições geométricas pela hipótese de **Southwell (1932)** para determinação do momento limite M_{lim} que é uma redução do momento crítico M_{cr} . Existem dois pontos que devem ser destacados. **Kalkan (2014)** recomenda um ângulo limite de 0,013 rad, no entanto, a imperfeição inicial da viga C2A é 0,01652 rad. Então será adotado o máximo θ_{lim} verificado por **Kalkan (2014)** que é de 0,029 rad.

Stratford et al (1999) recomendam que nos casos em que as vigas apresentam restrição à torção nos apoios, como a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, que o termo $\left(\frac{P}{P_{crit}}\right)^2$ deva ser utilizado na hipótese de Southwell. No entanto **Kalkan (2014)** recomenda o termo sem elevá-lo ao quadrado.

O cálculo do M_{lim} de **Kalkan (2014)** é feito por uma análise iterativa e é apresentada somente a iteração correspondente à solução na análise da viga C2A de Hurff. O procedimento para determinar o momento aplicado M_a é o mesmo utilizado no item 3.3.1.1, sem considerar o amolecimento na tração. Portanto, são apresentadas somente a deformação aplicada à fibra mais comprimida ε_{cm} , a profundidade da linha neutra x e o momento aplicado resultante.

$$\varepsilon_{cm} = -1,58 * 10^{-3}$$

$$x = 32,53 \text{ cm}$$

$$M_a = 838,8 \text{ kN.m}$$

Para calcular o momento crítico são determinadas as rigidezes à flexão lateral e à torção. A determinação da rigidez à flexão lateral é feita pela Equação (60). A constante ω é considerada igual a 2, como recomendado por **Kalkan (2014)**.

$$B_{ef} = \left[\frac{b^3 x}{12} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega M_r}{M_{lim}} \right)^2 \left(\frac{x}{h} - 1 \right)} \right] \left(\frac{E_{cm} + E_{sec}}{2} \right)$$

$$B_{ef} = \left[\frac{10,2^3 * 32,53}{12} \frac{1}{1 + \left(\frac{123,7}{838,8} \right)^2 \left(\frac{32,53}{102} - 1 \right)} \right] \left(\frac{4192 + 3928}{2} \right) = 12413768 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 1241 \text{ kN.m}^2$$

A rigidez à torção recomendada por **Kalkan (2014)** considera toda a seção transversal, tendo uma redução apenas pela utilização do E_{sec} . A inércia e a rigidez à torção podem ser obtidas por:

$$I_{tg} = \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right) \frac{hb^3}{3} = \left(1 - 0,63 * \frac{10,2}{102} \right) \frac{102 * 10,2^3}{3} = 33807,9 \text{ cm}^4$$

$$C_{ef} = \left[\frac{E_{sec} + E_c}{4(1 + \nu)} \right] I_{tg} = \left[\frac{3927,6 + 4192,4}{4(1 + 2)} \right] 33807,9 = 57192434 \text{ kN.cm}^2 \text{ ou } 5719 \text{ kN.m}^2$$

Com as rigidezes é possível calcular o momento crítico e em seguida o momento limite. A carga é aplicada à viga no meio do vão na face superior. Para levar em conta a posição do carregamento é considerada a constante A .

$$A = 1 - 1,74 \frac{\bar{a}}{\ell} \sqrt{\frac{B_{ef}}{C_{ef}}} = 1 - 1,74 * \frac{51}{975} * \sqrt{\frac{1241}{5719}} = 0,958$$

$$P_{crit} = \frac{4C_1}{C_2 \ell^2} A \sqrt{B_{ef} C_{ef}} = \frac{4 * 4,23}{1 * 9,75^2} * 0,958 \sqrt{1241 * 5719} = 454,68 \text{ kN}$$

Como dito, para considerar as imperfeições geométricas será considerada a hipótese de Southwell. Para a configuração do ensaio, a equação para o cálculo da carga limite é a apresentada a seguir. Para o ângulo limite θ_{lim} é adotado 0,029 rad que é o maior valor registrado por **Kalkan (2014)** na instabilidade por flexo-torção.

$$P_{lim} = P_{crit} - \frac{\left(u_i + \theta_i \frac{h}{2} \right) 48 E_{cm} I_y}{\theta_{lim} \ell^3}$$

$$P_{lim} = 454,68 - \frac{\left(0,795 + 0,0165 \frac{102}{2} \right) 48 * 4192,5 * 9020,3}{0,029 * 975^3} = 344,10 \text{ kN}$$

$$M_{lim} = \frac{P_{lim} \ell}{4} = \frac{344,10 * 9,75}{4} = 838,73 \text{ kN.m}$$

A diferença entre o momento limite e o registrado no ensaio foi de 56,5 %. Se fosse considerada a rigidez à torção recomendada por **Hurff (2010)**, que pondera a rigidez da seção bruta e a rigidez da seção fissurada, o momento limite seria 346,19 kN.m, sendo a diferença de 5,1 %.

Na Tabela 14 são apresentados os resultados das análises do item 3.3.

Tabela 14 - Quadro resumo da viga protendida C2A de Hurff (2010)

Viga C2A	M_{crit} (kN.m)	diferença %
Ensaio	364,89	-
Hurff (2010)	364,92	0,0
Revathi e Menon (2006)	363,84	0,3
Girija e Menon (2011)	588,95	38,0
Girija e Menon (2011) simplificado	323,87	11,2
Kalkan (2014)	838,73	56,5

Nas análises paramétricas são utilizadas as formulações de **Hurff (2014)** e **Kalkan (2014)** para fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios. Esta escolha tem por base a maior simplicidade no cálculo da rigidez à torção, pois muitos casos são analisados no próximo capítulo.

4 SIMULAÇÕES E ANÁLISE PARAMÉTRICA

4.1 Considerações iniciais

Com base nos resultados obtidos no item 3 são apresentadas as análises de momento crítico para a viga PCI BT-72, seu diagrama momento-curvatura e análises paramétricas com algumas seções típicas de vigas pré-moldadas .

4.2 Momento crítico de instabilidade da viga PCI BT-72

Na Tabela 15 são comparados os momentos calculados a partir das cargas críticas obtidas segundo **Mast (1993)** e **Lebelle (1959)**. Estes momentos correspondem às solicitações críticas que provocariam instabilidade nas fases transitórias.

Tabela 15 – Momento crítico para situações transitórias da viga PCI BT-72 [kN.m]

Situação	Lebelle (1959)	Mast (1993)
Içamento	4790	4400
Transporte	6643	4073
Aparelho de apoio	10077	7946

A Tabela 15 apresenta resultados da viga PCI BT-72 considerando a flexibilidade das ligações que formam os apoios. Na Tabela 16 são apresentados momentos críticos para a situação de pré-serviço com contraventamento nos apoios. Neste caso a viga apresenta restrição à torção e deslocamentos laterais apenas nos apoios. É considerado um f_{ck} de 40 MPa e os demais parâmetros apresentados no item 3.2.

Tabela 16 – Momento crítico da viga PCI BT-72 com restrição à torção [kN.m]

	Revathi e Menon (2006)	Hurff (2010)	Girija e Menon (2011)*	Kalkan (2014)
M_{crit}	8353	10380	12971	9210

As diferenças são de 19,5 % entre os resultados das formulações de **Revathi e Menon (2006)** e **Hurff (2010)**, 20% entre **Hurff (2010)** e **Girija e Menon (2011)** simplificado e 11,3 % entre **Hurff (2010)** e **Kalkan (2014)**.

Destaca-se que o momento de fissuração M_r e o momento último M_u da viga são 8035 e 12784 kN.m, respectivamente. Para ilustrar a ordem de grandeza dos momentos apresentados, na Figura 4-1 é mostrado o diagrama momento-curvatura, para flexão reta, da viga PCI BT-72 com os valores de **Mast (1993)** e **Hurff (2010)**.

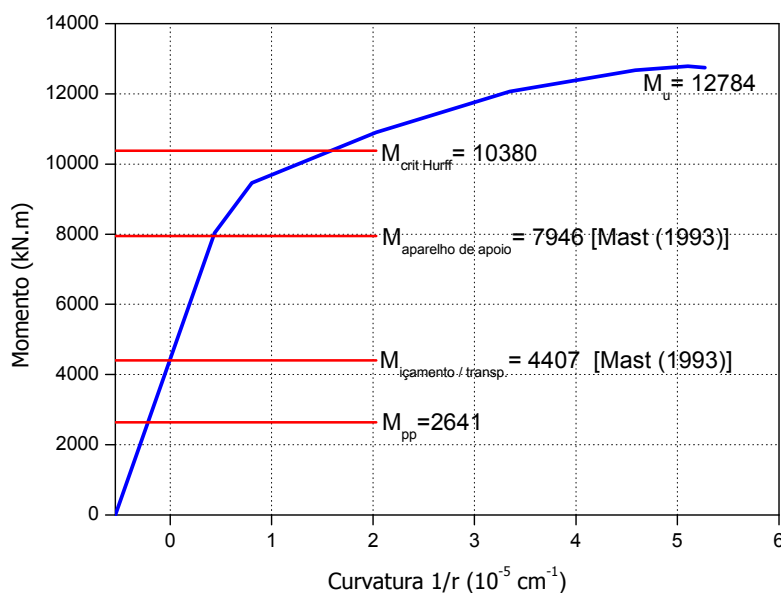


Figura 4-1 – Diagrama M-1/r para a viga PCI BT-72

4.3 Análises paramétricas

4.3.1 Considerações iniciais

A realização das análises paramétricas requer o dimensionamento das vigas estudadas. Como este não é o objetivo principal do trabalho, mas são necessários os parâmetros das vigas dimensionadas, utilizou-se o programa computacional PGSuper⁹, desenvolvido para projetar vigas de ponte pré-moldadas protendidas em acordo com a **AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (2007)**.

⁹ [disponível em http://www.wsdot.wa.gov/eesc/bridge/software/index.cfm?fuseaction=download&software_id=47. Acesso em 24 março 2014]

O PGSuper analisa todas as fases críticas para o dimensionamento como içamento, transporte, fase de serviço e ruptura do elemento. Na sua biblioteca de vigas constam as seções do **PCI Bridge Design Manual (2003)**, como a PCI BT-72. Os resultados de interesse são f_{ck} e força de protensão necessários para cada estágio, propriedades geométricas da seção e distribuição dos cabos.

Com os resultados do PGSuper, foram feitas algumas verificações recomendadas pela **ABNT NBR 6118:2007**, tais como: limitação da tensão nas armaduras pré-tracionadas no ato da protensão ($0,77 f_{ptk}$ e $0,85 f_{pyk}$, para aços da classe de relaxação baixa) e a verificação simplificada de Estado Limite Último no ato da protensão (item 17.2.4.3.2).

4.3.2 Variação da resistência à compressão do concreto

Neste item é avaliada a influência da resistência característica à compressão do concreto f_{ck} sobre a estabilidade da viga PCI BT-72, com 41,45 m de vão nas fases transitórias.

O f_{ck} adotado para a primeira análise é o de projeto, obtida pela verificação dos seguintes itens:

- tensão nas armaduras de protensão no ato da protensão;
- tensão no concreto no ato da protensão;
- resistência necessária para fases transitórias;

Para estas verificações o f_{ck} de 40 MPa foi suficiente e para resistência inicial para a fase de içamento com f_{ci} de 35 MPa. O parâmetro a ser variado é o f_{ck} , portanto, as análises procederão a partir deste valor aumentando até 90 MPa.

Os parâmetros geométricos são fixos, sendo a esbelteza da viga $\ell h/b_f^2$ igual a 66,6. Na Tabela 17 é apresentado o histórico de solicitação da seção no meio do vão para cada f_{ck} adotado, sendo utilizada a formulação de **Hurff (2010)** no cálculo do momento crítico. A configuração da viga é biapoiada com restrições a giro e deslocamento nos apoios, o que caracteriza a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios.

O momento devido ao peso próprio é 2632 kN.m. Como a fase é transitória apenas o peso próprio atuará. O carregamento é considerado no centro de gravidade da seção, sendo a constante A igual a 1.

Tabela 17 - Momentos solicitantes com a variação do f_{ck} da viga PCI BT-72 [kN.m]

f_{ck} (MPa)	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
40	6884	9254	8152	11429
50	7033	10114	8635	12339
60	7107	10692	9031	12659
70	7173	11326	9389	12749
80	7232	11886	9712	12794
90	7285	12435	9990	12828

A Tabela 17 é representada na Figura 4-2. Com a variação da resistência à compressão de 40 para 90 MPa, obteve-se um acréscimo de 5,5 % no momento de fissuração, no momento crítico de instabilidade aumentos de 25,6 % e 18,4 %, segundo as formulações de **Hurff (2010)** e **Kalkan (2014)**, respectivamente, e de 10,9 % no momento último de flexão. Portanto, o aumento da resistência, dependendo da situação, pode ser uma medida útil para melhorar o comportamento à instabilidade lateral.

A diferença média entre os resultados de momento crítico para as duas formulações foi 15 %, aproximadamente. O $M_{\text{crit-Hurff}}$ calculado para 90 MPa resultou em uma diferença de 3% para o M_u , então esta situação pode ser considerada como um limite de segurança.

Como mencionado por **Revathi e Menon (2006)**, a razão $\sqrt{M_u/M_{\text{crit}}}$ representa melhor a esbeltez de vigas. No caso de f_{ck} igual a 90 MPa, essa razão vale aproximadamente 1. Se forem consideradas as rigidezes elásticas para o cálculo do $M_{\text{crit-Hurff}}$, a razão é $\sqrt{\frac{M_u}{M_{\text{crit}}^*}} =$

$$\sqrt{\frac{12828}{15206}} = 0,92.$$

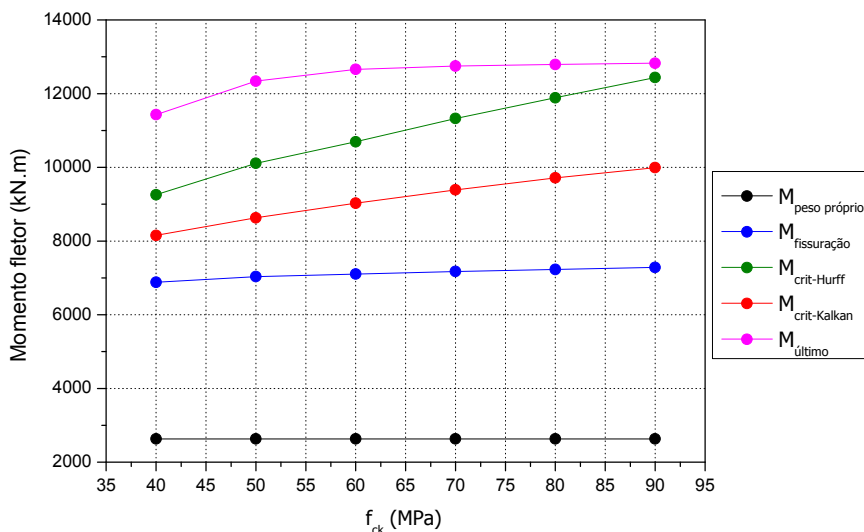


Figura 4-2 – Relação entre momentos e f_{ck} para a PCI BT-72

Como visto na Figura 4-2, em nenhum caso a viga PCI BT-72 tem M_{crit} maior ou igual ao M_u , ou seja, não atende ao critério básico de segurança. No entanto, esta viga já foi executada com 40 MPa sem problemas de instabilidade, pois a carga solicitante principal é o peso próprio que resulta em momentos bem menores que o momento crítico. Portanto, mesmo que $M_u > M_{crit}$, ainda há uma folga com relação ao M_{pp} .

Como o momento de crítico de instabilidade não alcançou o momento último, nada se pode afirmar sobre um limite de segurança. A fim de determinar um limite, são apresentados os resultados de uma viga de 35 m de vão e altura 175 cm (relação ℓ/h de 20), Tabela 18 e Figura 4-3. O momento devido ao peso próprio é 1848 kN.m.

Tabela 18 - Momentos solicitantes com a variação do f_{ck} da viga de 35 m [kN.m]

f_{ck} (MPa)	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
40	5168	8521	7848	8737
50	5311	8763	8400	8792
60	5378	8819	8734	8826
70	5430	8852	8827	8853
80	5491	9718	9570	8873
90	5539	10581	10460	8891

Para f_{ck} maior que 70 MPa os momentos críticos são maiores que os últimos, portanto a ruptura seria por flexão. Como o M_{crit} é obtido por análise iterativa, admite-se que não

ocorrendo a igualdade entre este e o M_u para uma deformação de 3 %, toma-se a linha neutra resultante para cálculo do M_{crit} .

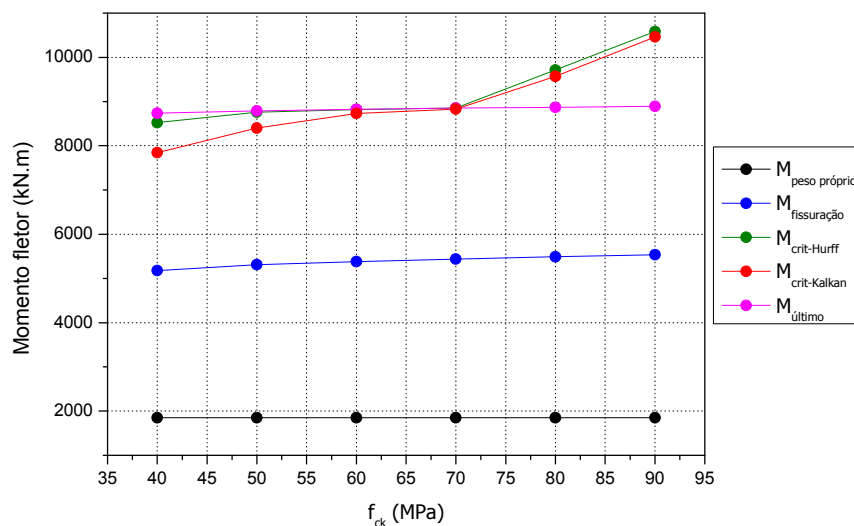


Figura 4-3 - Relação entre momentos e f_{ck} para a viga com 35 m de vão

Quando o f_{ck} é 50 MPa o momento crítico da formulação de **Hurff (2010)** tem aproximadamente o valor do momento último. Portanto a razão $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ é igual a 1. Para a formulação de **Kalkan (2014)** a diferença é de 4,5 %. Este será considerado o limite de segurança.

Se for calculado o M_{crit}^* em função do comportamento elástico do material pela formulação de **Hurff (2010)**, levando-se em conta as imperfeições iniciais, obtém-se o valor de 15184 kN.m. A esbeltez resulta em $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} = \sqrt{\frac{8792}{15184}} = 0,76$, sendo mais fácil de ser obtida e pode ser considerado um limite de segurança, como será novamente abordado no item 4.3.4.

São realizadas as análises de carga crítica e fator de segurança para fases transitórias com a variação do f_{ck} . Na Tabela 19 são apresentadas as cargas críticas nas situações de içamento e transporte, segundo **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. Lembrando que a carga devido ao peso próprio é 12,4 kN/m.

Tabela 19 - Carga crítica nas fases transitórias da PCI BT-72 com a variação do f_{ck} [kN/m]

$f_{ci} - f_{ck}$ (MPa)	Perit içamento			Perit transporte		
	Mast	Lebelle	Stratford	Mast	Lebelle	Stratford
35-40	25,0	27	31,0	26,0	44,6	35,7
45-50	29,0	31	34,7	27,0	49,0	40,4
55-60	32,0	34	37,7	27,0	52,5	44,7
65-70	35,0	37	40,4	28,0	55,9	48,6
75-80	38,0	39	42,8	29,0	58,8	52,2
85-90	40,0	42	45,0	29,0	61,4	55,6

Na Figura 4-4 segue os resultados de carga crítica em içamento da Tabela 19. Apesar do aumento da carga ter sido maior que 35 %, o limite de quatro vezes os peso próprio não foi alcançado para o f_{ck} de 90 MPa. No entanto, pode ser considerado importante o aumento que em outras situações poderia garantir a segurança.

Para a viga em transporte, a formulação de **Mast (1993)** não apresentou mudança significativa na carga crítica, Figura 4-5. No entanto, a formulação de **Lebelle (1959)** teve uma variação de 27 %, sendo que para valores de f_{ck} maiores que 50 MPa a segurança é garantida. A formulação de **Stratford et al (1999)** teve variação de 36 % e a segurança é verificada para f_{ck} maiores que 70 MPa.

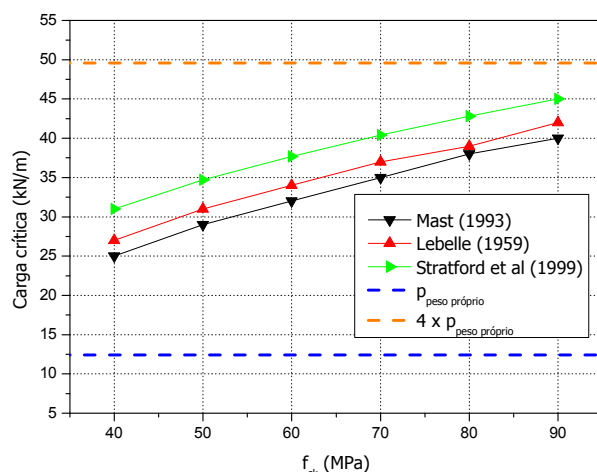


Figura 4-4 - Relação carga crítica x f_{ck} das vigas em içamento

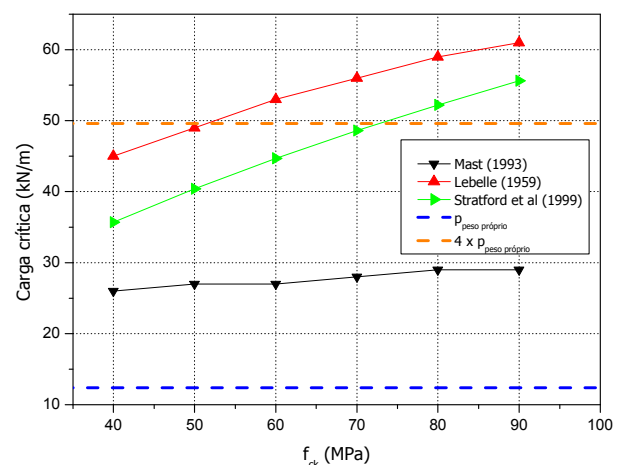


Figura 4-5 - Relação carga crítica x f_{ck} das vigas em transporte

Percebe-se a diferença entre os resultados das formulações da Figura 4-5. Isto acontece principalmente pelas diferenças nas abordagens. A formulação de **Lebelle (1959)** considera a flexibilidade do caminhão multiplicando a carga crítica de instabilidade clássica por um coeficiente α_{crit} que depende da rigidez de mola K_{θ} . Na solução de **Mast (1993)**, K_{θ} é considerado no equilíbrio da viga deformada e as imperfeições geométricas também são consideradas. **Stratford et al (1999)** não consideram a flexibilidade da ligação e as imperfeições são consideradas através da hipótese de **Southwell (1932) apud Stratford et al (1999)** apresentada no item 2.2.2.

A Tabela 20 apresenta os fatores de segurança contra fissuração e ruptura da viga PCI BT-72 em içamento e transporte, segundo a variação do f_{ck} .

Tabela 20 - Fatores de segurança para içamento e transporte da PCI BT-72 com variação do f_{ck}

$f_{ci} - f_{ck}$ (MPa)	F.S. Içamento		F.S. Transporte	
	γ_r	γ_{rup}	γ_r	γ_{rup}
35-40	1,8	1,7	1,0	1,9
45-50	2,0	1,9	1,2	2,0
55-60	2,2	2,0	1,3	2,0
65-70	2,3	2,2	1,4	2,0
75-80	2,5	2,3	1,5	2,0
85-90	2,6	2,4	1,6	2,0

A situação de içamento foi verificada quanto à fissuração γ_r e ruptura γ_{rup} para o f_{ck} mínimo (40 MPa), Figura 4-6. Além disso, percebe-se a semelhança no aumento dos dois fatores de segurança com o aumento do f_{ck} .

A Figura 4-7 apresenta diferenças. Apesar de em todos os casos a viga estar segura em transporte, com balanços de 2,5 m, somente o γ_r aumentou para a variação do f_{ck} . Portanto, aumentar o f_{ck} não aumenta a carga crítica em transporte. Se o problema for fissuração no transporte, o aumento do f_{ck} pode ajudar a melhorar a segurança.

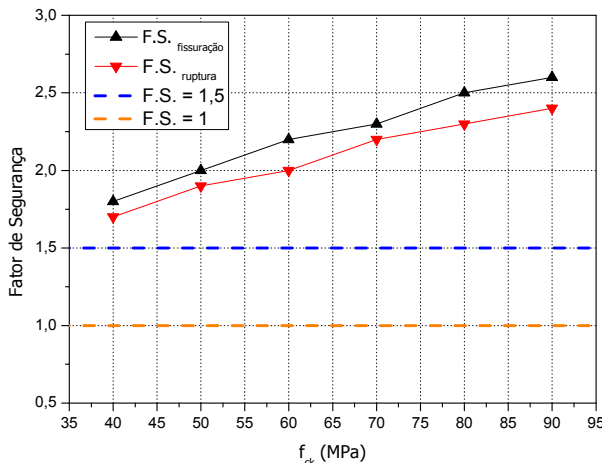


Figura 4-6 – Variação do F.S. em função do f_{ck} para a viga PCI BT-72 em içamento

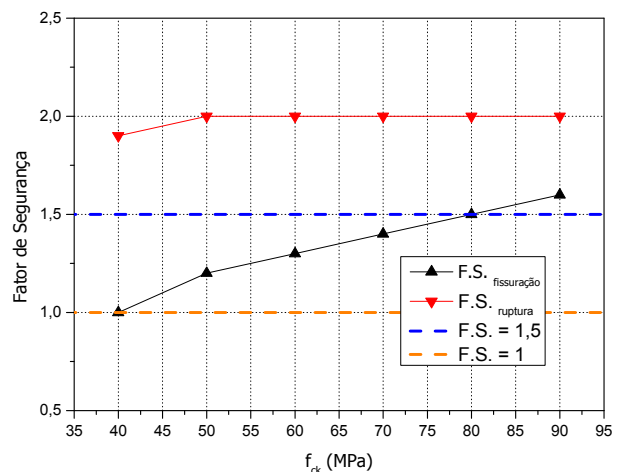


Figura 4-7 - Variação do F.S. em função do f_{ck} para a viga PCI BT-72 em transporte

Vale destacar as diferenças nos resultados das verificações de carga crítica e fatores de segurança. Para f_{ck} maior ou igual que 40 MPa todos os casos de fator de segurança foram verificados. No entanto, para carga crítica em içamento, nenhum caso teve valor superior a quatro vezes o peso próprio.

Devido a essa diferença e tomando 40 MPa como um limite e a formulação de **Mast (1993)** para obtenção da carga crítica, pode-se dizer que as melhores relações entre peso próprio e carga crítica de içamento e transporte, para estas condições, são $\frac{p_{crit}}{p_{pp}} = \frac{25}{12,42} = 2$ e

$$\frac{p_{crit}}{p_{pp}} = \frac{26}{12,4} = 2,1, \text{ respectivamente.}$$

4.3.3 Variação das imperfeições geométricas

Neste item será feita a variação das imperfeições geométricas δ_0 e θ_0 da viga PCI BT-72, com 41,45 m de vão nas fases transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, içamento e transporte, sendo f_{ci} e f_{ck} iguais a 35 e 40 MPa. A formulação de **Hurff (2010)** e **Kalkan (2014)** são utilizadas para o cálculo do momento crítico na fase transitória anterior à execução do tabuleiro, com contraventamento nos apoios e as formulações de **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)** são utilizadas para calcular as cargas críticas nas fases de içamento, transporte e pré-serviço sem contraventamentos nos apoios.

Na Tabela 21 seguem os momentos críticos sobre a seção no meio do vão, considerando as configurações da fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios. O deslocamento lateral δ_0 será variado e a rotação inicial θ_0 será mantida em 0,004 rad, na formulação de **Hurff (2010)**.

O **EUROCODE 2 (2004)** recomenda que uma imperfeição geométrica na forma de deslocamento lateral de valor $\ell/300$ seja adotada, sendo ℓ o vão total para análises de viga sem travamentos laterais. O **PCI Tolerance Manual (2000)** recomenda 3 mm para 3 m de vão de deslocamento lateral. Estes deslocamentos são multiplicados por 2/3 para considerar a distância do eixo de giro ao centro de massa da viga deslocada.

O travamento imposto pelo tabuleiro e/ou transversinas não é considerado. A imperfeição devido a efeito térmico é somada ao deslocamento lateral. Contudo, quando o deslocamento correspondente à imperfeição é igual a zero, o efeito da temperatura é considerado no segundo caso, para δ_0 igual a 12,3 mm. **Hurff (2010)** recomenda 1,33 mm para 3 m de vão.

A variação da imperfeição geométrica na forma de giro no meio do vão, será considerada através da recomendação sobre a verticalidade de qualquer superfície de uma viga recomendado **PCI Tolerance Manual (2000)**. A tolerância é de 6 mm para 3 m de superfície. Para a viga de 1,83 m, a rotação estimada é 0,002 rad. A variação é considerada por múltiplos deste valor, como mostrado na Tabela 21. O deslocamento lateral obtido pela recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)** é utilizado, sendo f_{ck} de 40 MPa, M_u 11429 kN.m, M_r de 6884 kN.m e M_{pp} de 2632 kN.m

Tabela 21 - Momentos solicitantes com a variação do δ_0 e θ_0 [kN.m]

δ_0 (mm)	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	θ_0 (rad)	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$
0	9854	9217	0,002	9525	8194
12,3	9446	8842	0,004	9254	8152
21,5 (EUROCODE)	9365	8590	0,008	8711	8077
40,0 (PCI)	9254	8152	0,016	7644	7932
58,3	9175	7795	0,024	6626	7796

Considerando que as imperfeições iniciais não alteram o momento último e de fissuração, a Figura 4-8 mostra a influência da variação da imperfeição através do

deslocamento lateral sobre o momento crítico de instabilidade e a Figura 4-9 a influência da imperfeição de giro.

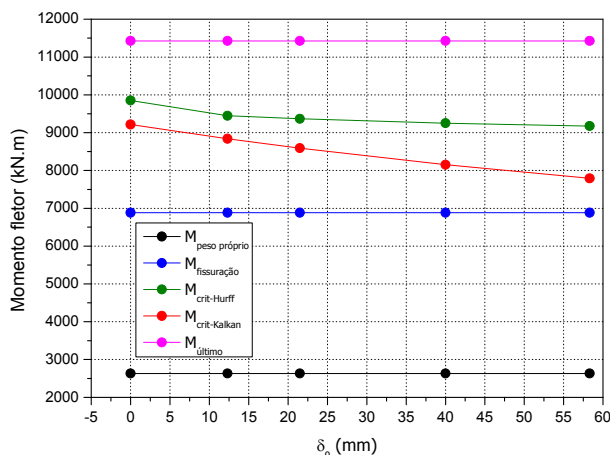


Figura 4-8 - Relação entre momento fletor e imperfeição de deslocamento lateral para a viga PCI BT-72

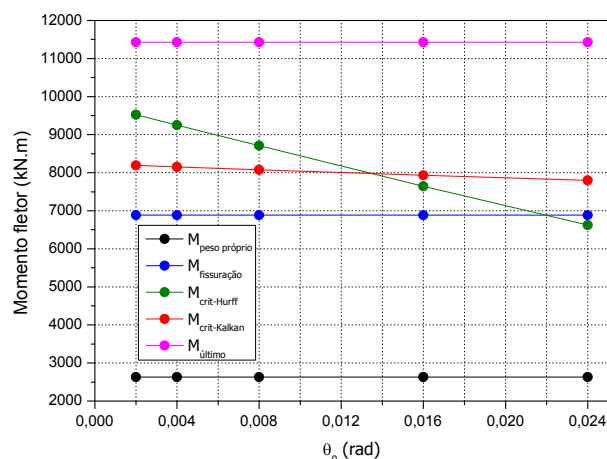


Figura 4-9 - Relação entre momento fletor e imperfeição de rotação por torção para a viga PCI BT-72

A diferença no momento crítico para os deslocamentos máximo e mínimo para a formulação de **Hurff (2010)**, na Figura 4-8, é de 6,9 %. Para a formulação de **Kalkan (2014)** essa diferença foi 15,4 %. Já a diferença entre o momento crítico obtido pela recomendação do **EUROCODE 2 (2004)** e **PCI Tolerance Manual (2000)** de **Hurff (2010)** é 1,2 % e **Kalkan (2014)** é 5%. Portanto, sendo a diferença dos resultados muito pequena para as recomendações, qualquer uma pode ser utilizada para análises. Percebe-se que a formulação de **Kalkan (2014)** é mais sensível a deslocamentos laterais.

A Figura 4-9 mostra a importância do parâmetro θ_0 na formulação de **Hurff (2010)** através do coeficiente θ_r , cujo desenvolvimento foi baseado em indícios experimentais. Devido à aleatoriedade das imperfeições, o controle na fabricação de vigas tem importância fundamental no comportamento à instabilidade, pois o momento crítico aumentou 30,4 % para a variação no θ_0 de 0,002 ou 0,11° para 0,024 rad ou 1,4°.

É importante frisar que a formulação de **Hurff (2010)** não relaciona deslocamento lateral com rotação da seção, ao contrário da formulação de **Kalkan (2014)**. Este último considerou a hipótese de Southwell para considerar as imperfeições. Para a variação do giro a diferença no M_{crit} entre o giro máximo e mínimo é de 4,9 %. Portanto, a formulação de **Hurff (2010)** se mostrou mais sensível à variação do giro.

Na análise com variação do giro central apresentada na Figura 4-9, em todos os casos a ruptura seria por instabilidade. Para as rotações acima de 0,022 rad a instabilidade é elástica, sendo que, para rotações menores, a fissuração inicia-se antes da instabilidade.

Para a viga PCI BT-72 o momento crítico foi menor que o momento último em todos os casos avaliados. Com intuito de encontrar uma situação em que ocorra a igualdade entre estas duas grandezas, uma viga com 35 m de vão e 175 cm de altura foi estudada, para avaliar a influência das imperfeições geométricas, sendo f_{ck} de 70 MPa, M_u 8854 kN.m, M_r de 5431 kN.m e M_{pp} de 1848 kN.m. Os resultados seguem na Tabela 21 e figuras Figura 4-10 e Figura 4-11.

Tabela 22 - Momentos solicitantes (kN.m) com a variação do δ_0 e θ_0

δ_0 (mm)	$M_{crit-Hurff}$	$M_{crit-Kalkan}$	θ_0 (rad)	$M_{crit-Hurff}$	$M_{crit-Kalkan}$
0	9782	11079	0	9663	8849
18,2 (EUROCODE)	8853	8854	0,004	8852	8827
33,7 (PCI)	8852	8827	0,016	8790	8763
49,2	8852	8681	0,024	8086	8635
88,1	8851	7562	-	-	-

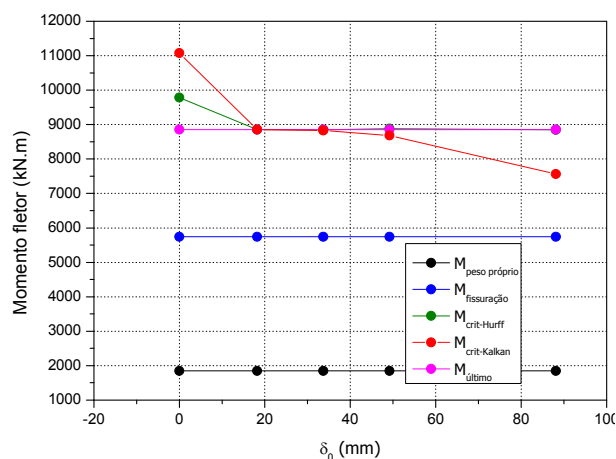


Figura 4-10 - Relação entre momento fletor e imperfeição de deslocamento lateral para a viga de 35 m

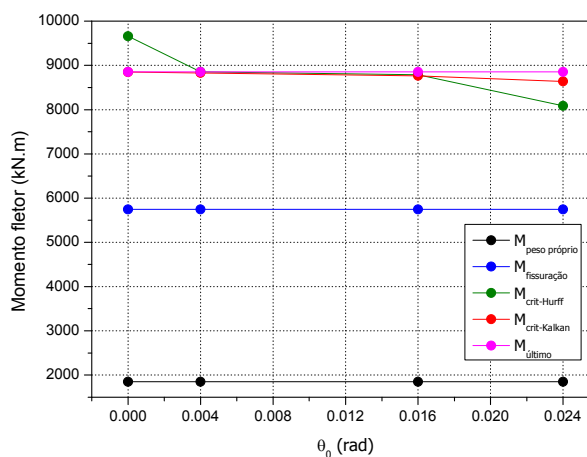


Figura 4-11 - Relação entre momento fletor e imperfeição de giro para a viga de 35 m

A variação no momento crítico na Figura 4-10 é muito pequena. As diferenças entre M_u e M_{crit} para as recomendações do EUROCODE 2 e do PCI são menores que 1%, portanto

a esbeltez $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ é para todos os casos igual a 1. Ao considerar um deslocamento inicial de 8,8 cm, a diferença entre $M_{crit-Kalkan}$ e M_u é 14,6 % e para $M_{crit-Hurff}$ a diferença é insignificante. Se for considerado o deslocamento de 49,2 mm com um limite, a esbeltez em função do $M_{crit-Hurff}$ com rigidezes elásticas resulta em $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} = \sqrt{\frac{8854}{16323}} = 0,74$.

Na variação do giro inicial da seção, o $M_{crit-Hurff}$ variou 8,7% entre os giros de 0,004 rad e 0,024 rad. Para $M_{crit-Kalkan}$ a variação foi de 2,4 %. Na situação em que o giro admitido foi 0,016 rad, a diferença entre o $M_{crit-Hurff}$ e o M_u foi de 0,7 %. Para giros maiores, essa diferença irá aumentar, podendo-se considerar que esta é uma situação limite. Para o momento crítico elástico, a esbeltez vale $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}}} = \sqrt{\frac{8854}{12075}} = 0,86$.

É adotado como esbeltez limite o menor entre os resultados de variação de giro e variação de deslocamento lateral inicial. No caso, o menor valor refere-se à variação do deslocamento, sendo o valor de 0,74.

Para avaliar as fases transitórias de içamento e transporte da viga PCI BT-72 é analisada com a formulação de **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. O primeiro considera apenas o deslocamento lateral como imperfeição geométrica. O segundo relaciona o deslocamento lateral ao giro. Nestas situações não é considerada imperfeição por efeito térmico.

As formulações adotam modos de instabilidade diferentes, **Mast (1993)** considera que a viga tem a forma de uma parábola quando deslocada e **Stratford et al (1999)** consideram uma senóide. Os resultados seguem na Tabela 23, além do f_{ck} de 40 MPa, também são calculadas cargas críticas para f_{ck} de 90 MPa.

O **PCI Bridge Design Manual (2003)** recomenda para içamento utilizar metade da recomendação apresentada no **PCI Tolerance Manual (2000)** para imperfeição lateral inicial, 1,5 mm para 3 m de vão. O posicionamento dos dispositivos de içamento têm tolerância de 6 mm e os balanços tem 2,5 m.

Na fase de transporte, o **PCI Bridge Design Manual (2003)** estabelece como deslocamento lateral a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)** mais 25,4 mm para possíveis desvios no posicionamento da viga sobre o caminhão.

Tabela 23 – Cargas críticas para içamento e transporte variando as imperfeições geométricas
[kN/m]

δ_0 (mm)	P_{crit} içamento				δ_0	P_{crit} transporte			
	Mast	90MPa	Stratford	90MPa		Mast	90MPa	Stratford	90MPa
6,0	30,0	47,0	35,8	55,5	25,4	27,0	29,0	36,7	57,3
15,1*	25,0	-	34,4	-	28,4	26,0	-	36,6	-
24,2**	23,0	36,0	33,3	49,3	31,5	26,0	-	36,4	-
36,4	20,0	-	31,5	-	34,5	26,0	-	36,2	-
48,6	18,0	-	30,0	-	43,6*	26,0	29,0	35,7	55,6
60,7	17,0	27,0	28,7	40,2	61,9	25,0	29,0	34,6	53,9

*metade da recomendação do *PCI Tolerance Manual (2000)*

**recomendação do *PCI Tolerance Manual (2000)*

A variação da imperfeição geométrica, na forma de deslocamento lateral, de 6 mm para 60,7 mm, segundo a formulação de **Mast (1993)**, resultou em uma diminuição de 43,3 % para carga crítica em içamento. A formulação de **Stratford et al (1999)** resultou em uma variação de 19,8 %. Em todos os casos a recomendação de segurança não foi atendida (quatro vezes o peso próprio).

A diferença entre carga crítica em içamento utilizando metade do deslocamento recomendado **PCI Tolerance Manual (2000)** e somente a tolerância do posicionamento dos cabos foi de 16,7 % para a formulação de **Mast (1993)**. Portanto a consideração de imperfeição na forma de deslocamento é significativa, sendo interessante formar uma base de dados deste tipo de imperfeição aferida em campo para concluir que valor deve-se adotar. Na formulação de **Stratford et al (1999)** a diferença foi de 3,9 %.

No transporte, a variação entre a maior e menor carga crítica, segundo a formulação de **Mast (1993)**, foi de 7 % para o intervalo de deslocamentos adotado, apresentado na Tabela 23. A formulação de **Stratford et al (1999)** resultou 12,1 %.

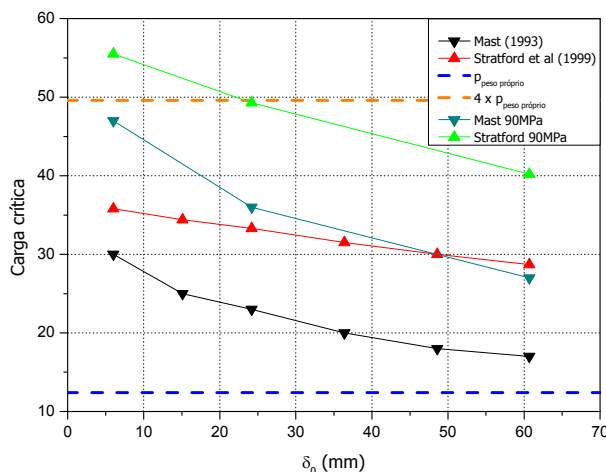


Figura 4-12 - Relação carga crítica – deslocamento lateral para viga em içamento

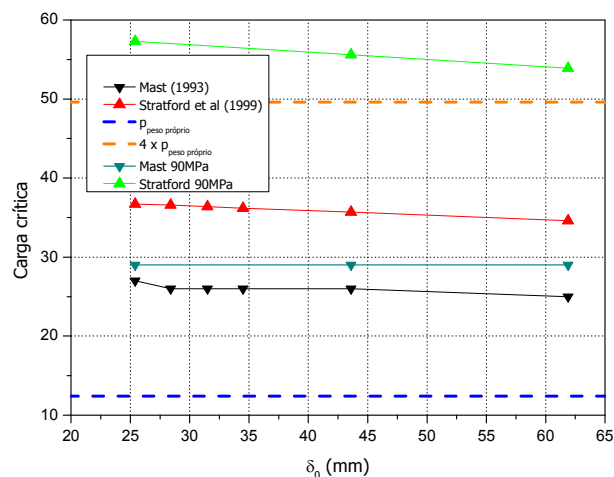


Figura 4-13 - Relação carga crítica – deslocamento lateral para viga em transporte

A Figura 4-12 e Figura 4-13 também apresentam as curvas de carga crítica para f_{ck} igual a 90 MPa, para avaliar a sensibilidade de cada formulação.

Em transporte e içamento, as formulações de **Stratford et al (1999)** tiveram um aumento significativo na carga crítica. Em içamento a curva atingiu o limite de segurança (quatro vezes o peso próprio). Para imperfeições menores que a do **PCI Tolerance Manual (2000)** a viga estaria segura. O aumento médio da carga crítica foi de 32 %. Assim a segurança pode ser alcançada sem alterar a esbelteza geométrica.

Em transporte, todos os casos de imperfeição passaram acima do limite de segurança, sendo o aumento médio de 36 %.

Com o aumento do f_{ck} , a formulação para içamento de **Mast (1993)** apresentou aumentos significativos nas cargas críticas, com a variação da imperfeição lateral, sendo o aumento médio de 36 %. No entanto, este aumento não tornou as cargas críticas maiores que o limite de segurança. Em transporte, o aumento médio foi de 10 %.

Na Tabela 24 são apresentados os fatores de segurança contra fissuração e ruptura da viga PCI BT-72 em içamento e transporte, considerando a variação do deslocamento lateral na forma de imperfeição geométrica.

Tabela 24 – Fatores de segurança para a variação do deslocamento lateral em transporte e içamento

δ_0 (mm)	F.S. Içamento		δ_0 (mm)	F.S. Transporte	
	γ_r	γ_{rup}		γ_r	γ_{rup}
6,0	2,3	2,0	25,4	1,1	2,0
15,1 (1/2 PCI)	1,8	1,7	28,4	1,0	2,0
24,2 (PCI)	1,4	1,5	31,5	1,0	2,0
36,4	1,2	1,4	34,5 (1/2 PCI)	1,0	2,0
48,6	1,0	1,3	43,6 (PCI)	1,0	1,9
60,7	0,8	1,2	61,9 (2 PCI)	0,9	1,8

No cálculo da carga crítica de içamento a diferença é de 8 % entre adotar metade ou na íntegra a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)**. Para os fatores de segurança contra fissuração e ruptura no içamento, Tabela 24 e Figura 2-10, as diferenças são de 22,2 % e 11,8 %, respectivamente, que podem ser significativas quando estes estiverem próximos aos limites de segurança. Os limites recomendados pelo **PCI Bridge Design Manual (2003)** são 1,0 e 1,5, respectivamente.

Neste ponto, pode-se fazer a transposição de verificação do fator de segurança para a carga crítica, pois a formulação de **Mast (1993)** é a mesma para os dois casos. Como se vê na Tabela 24 e Figura 2-10, o caso em que é aplicada a imperfeição recomendada pelo **PCI Tolerance Manual (2000)** atinge os limites de fator de segurança em içamento. Portanto, se para estes valores a viga está segura, em termos de carga crítica, equivaleria a aproximadamente duas vezes o peso próprio e não quatro vezes. Já em transporte, o limite seria 2,1 vezes o peso próprio.

As recomendações normalmente se baseiam em experiências de campo e uma série de análises, pois em cada país os materiais para a fabricação dos elementos são diferentes. Portanto, é difícil afirmar que esta recomendação pode ser aplicada em outro local. Porém, pode-se afirmar que as imperfeições devem ser levadas em conta por influenciarem de maneira importante o valor da carga crítica.

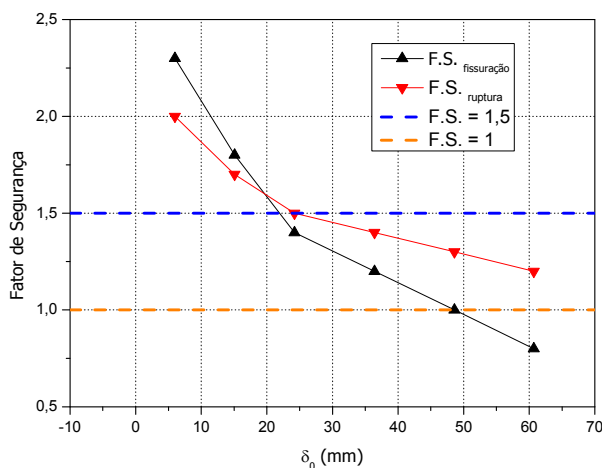


Figura 4-14 – F.S. em içamento

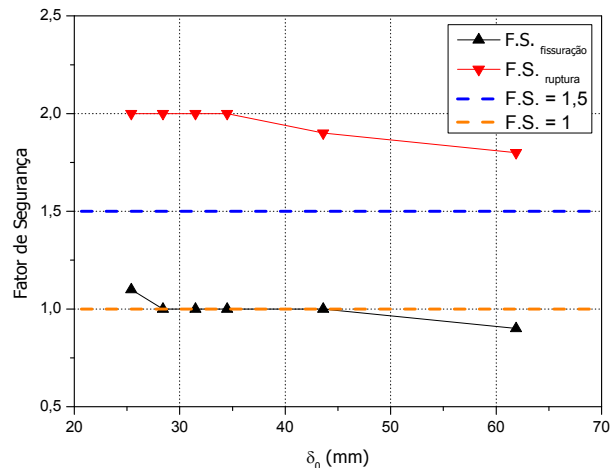


Figura 4-15 – F.S. em transporte

Na Figura 4-15 o fator de segurança atende o limite de segurança quando somente se considera o desvio no posicionamento do elemento e não atende quando a este é somado um deslocamento equivalente a duas vezes a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)**. Portanto, apesar da pequena variação no fator de segurança, dependendo da recomendação pode ser importante considerar a imperfeição geométrica.

Para a fase de transporte da viga PCI BT-72, praticamente não houve diferença entre adotar metade ou inteira a recomendação do **PCI Tolerance Manual (2000)**.

4.3.4 Variação do comprimento do vão

Considerando a viga PCI BT-72 estudada com 41,45 m de vão, são tomados vãos 35, 30, 25 e 20 m e calculados os respectivos momentos críticos e cargas críticas nas situações transitórias. Para o vão de 41,45 a relação ℓ/h é 22,7, para os outros será mantida a relação ℓ/h de 20. O momento crítico de instabilidade na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios da PCI BT-72 é 9815 kN.m, como apresentado no item 4.2.

A altura da viga será variada à medida que o vão é alterado para manter a relação ℓ/h , mas as outras propriedades geométricas da seção são mantidas constantes.

Primeiro, são apresentados os resultados de momentos solicitantes nas vigas devido ao peso próprio, fissuração, crítico de instabilidade e momento último na Tabela 25, sendo f_{ci} e f_{ck} iguais a 35 e 40 MPa, respectivamente. Os momentos críticos são calculados pelas formulações de **Hurff (2010)** e **Kalkan (2014)**.

Tabela 25 – Momentos solicitantes com a variação do vão [kN.m]

Vão (m)	$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	$M_{\text{peso próprio}}$	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
41,45	66,6	46,5	2631	7505	9254	8152	11429
35	53,8	38,7	1826	5168	8521	7846	8737
30	39,5	31,5	1232	3846	6411	6411	6411
25	27,5	24,7	779	2696	6286	7237	4421
20	17,6	18,3	449	1742	7109	9293	2807

Expressando graficamente a Tabela 25 na Figura 4-16, pode-se ter uma visão geral do comportamento das vigas à medida que o vão varia, sendo importante avaliar a posição do momento crítico de instabilidade em relação aos demais.

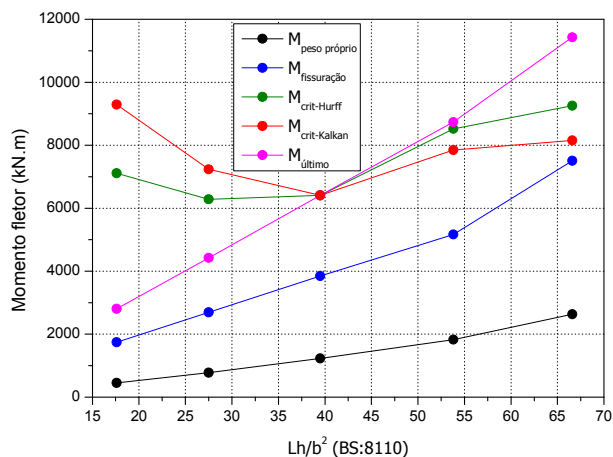


Figura 4-16 – Relação entre momentos e esbeltez do BS:8110 (2007)

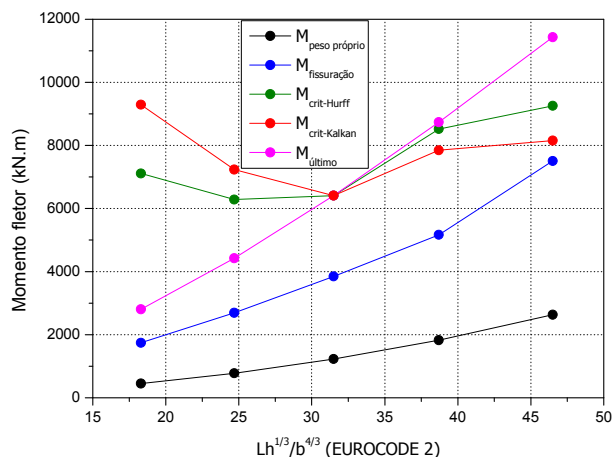


Figura 4-17 - Relação entre momentos e esbeltez do EUROCODE 2 (2004)

Avaliando a Figura 4-16, para esbeltez do código britânico maior que 53,8 a diferença entre M_u e M_{crit} é maior que 10 % para as duas formulações utilizadas. Na Figura 4-17 está representada a esbeltez do EUROCODE 2, a esbeltez correspondente é 38,7.

Para o vão de 41,45 m, o momento crítico resultou 18,9 % maior que o momento de fissuração, para a formulação de **Hurff (2010)**, e 7,9 % maior, para **Kalkan (2014)**. Esta viga na fase definitiva teria grande segurança à instabilidade, no entanto, na situação transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, a ocorrência exagerada de imperfeições geométricas poderia potencializar a possibilidade de um acidente.

Na Tabela 26 estão representadas as esbeltezes das vigas de acordo com as normas apresentadas no item 2.3.

Tabela 26 – Comparação da esbeltez das vigas com os limites de normas técnicas

Vão (m)	ABNT NBR 9062:2001		ABNT NBR 6118:2004	EUROCODE 2 (2004)	
	$\frac{\ell h}{b_f^2} \leq 500$	$\frac{\ell}{b_f} \leq 50$	$b_f \leq 0,4h$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}} \leq 50$	$\frac{h}{b_f} \leq 2,5$
41,45	66,6	38,8	73,16	46,5	1,7
35	53,8	32,8	70	38,7	1,6
30	39,5	28,1	60	31,5	1,4
25	27,5	23,4	50	24,7	1,2
20	17,6	18,7	40	18,3	0,9

As antigas recomendações da **ABNT NBR 9062:2001** foram atendidas, para todos os vãos analisados. Lembrando que a norma britânica **BS:8110 (2007)** recomenda as mesmas inequações para esbeltez com os limites de 250 e 60 para a primeira e segunda colunas, respectivamente.

A recomendação da **ABNT NBR 6118:2004** limita a largura da mesa comprimida. A viga PCI BT-72 tem largura de 106,7 cm, portanto, para a variação do vão, em todos os casos esta verificação é garantida.

Para a fase de serviço, o **EUROCODE 2 (2004)** apresenta os limites mostrados na Tabela 26 que foram atendidos.

Apesar da relação entre vão e altura ℓ/h ter sido mantida, percebe-se a importância da relação entre vão e largura da mesa comprimida ℓ/b_f que variou. Como b_f foi mantido para a variação do vão, a esbeltez aumentou com o crescimento do vão. Isto teve grande influência no momento crítico de instabilidade, pois nos vãos acima de 30 m a ruptura por instabilidade é esperada na fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, apesar de a diferença ser pequena entre os momentos crítico e último para o vão de 35.

Todas as normas técnicas analisadas tiveram seus limites de esbeltez verificados. Essa condição deveria garantir que a ruptura por flexão acontecesse, mas para fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios, o resultado foi ruptura por instabilidade para esbeltezes maiores que 39,5 (referente ao código britânico). Mas como já

dito, devido à pequena diferença entre M_u e M_{crit} para esbeltez de 53,8, este limite pode ser estabelecido.

Considerando as propriedades elásticas do concreto para o cálculo do M_{crit}^* , obtêm-se para a esbeltez 53,8 o valor de 14346 kN.m, então a esbeltez resulta $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} = \sqrt{\frac{8737}{14346}} = 0,78$.

Na Tabela 27 são apresentados resultados de carga crítica de instabilidade para a vigas em fases transitórias de içamento e transporte. São utilizadas as formulações de **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. A viga tem balanços de 2,5 m a partir de cada extremidade e não é considerado o recurso de protensão temporária em transporte como foi utilizado no item 3.2.2.2.

Tabela 27 – Carga crítica nas fases transitórias com a variação do vão [kN/m]

$\frac{\ell h}{b_f^2}$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}} \leq 70$	g_{pp} (kN/m)	P_{crit} içamento			P_{crit} transporte		
			Mast	Lebelle	Stratford	Mast	Lebelle	Stratford
66,6	46,5	12,4	25	31,4	31,1	26	43,2	35,7
53,8	38,7	12,1	60	68	60,3	36	68	58,2
39,5	31,5	11,2	170	121	91,1	47	101	87,7
27,5	24,7	10,2	1000	250	134,8	62	161	142,7
17,6	18,3	9,3	-	778	189,9	85	287	259,5

As curvas na Figura 4-18 e Figura 4-19 expressam a influência da variação do vão em relação à carga crítica de instabilidade lateral obtida pelas formulações mencionadas para vigas sendo içadas, sendo a esbeltez da primeira referente às normas **ABNT NBR 9062:2001** e **BS:8110 (2007)**.

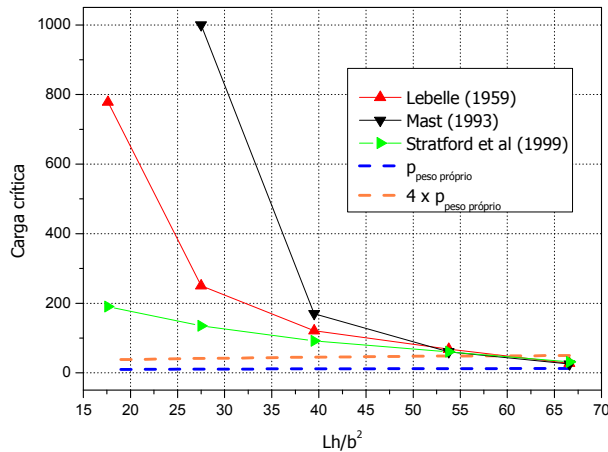


Figura 4-18 – Relação carga crítica - esbelteza do BS:8110 das vigas em içamento

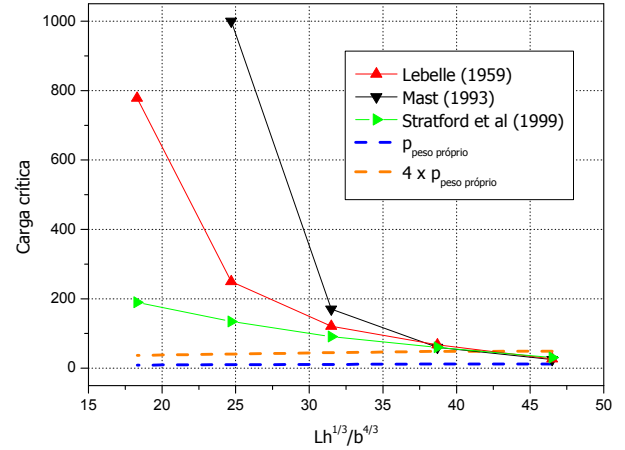


Figura 4-19 - Relação carga crítica - esbelteza do EUROCODE 2 das vigas em içamento

A curva tracejada laranja remete ao critério de segurança em que a carga devido ao peso próprio deve ser menor que $\frac{1}{4} p_{\text{crít}}$. Para este limite as vigas da Figura 4-18 e Figura 4-19 estão seguras para esbelteza menores que 60 e 42,5, respectivamente.

Percebe-se a grande diferença nos resultados para os vãos menores e a proximidade dos resultados para os vãos mais longos. A diferença máxima entre os resultados das formulações, no trecho em que as curvas encontram o limite de segurança (curva laranja) é menor que 10 %.

Na Figura 4-20 o limite da relação entre peso e carga crítica é atendido para esbelteza 40 com a formulação de **Mast (1993)**, esbelteza menor que 65 para a formulação de **Lebelle (1959)** e esbelteza menor que 60 para **Stratford et al (1999)**. Para a esbelteza do **EUROCODE 2 (2004)**, na Figura 4-21, o limites são 32,5, 45 e 42, respectivamente.

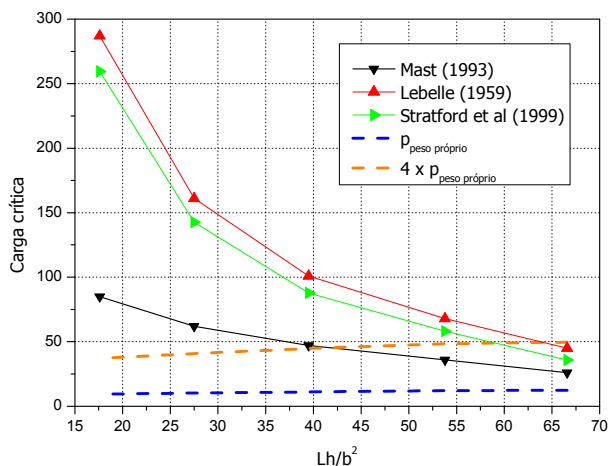


Figura 4-20 - Relação carga crítica-esbelteza do BS:8110 das vigas em transporte

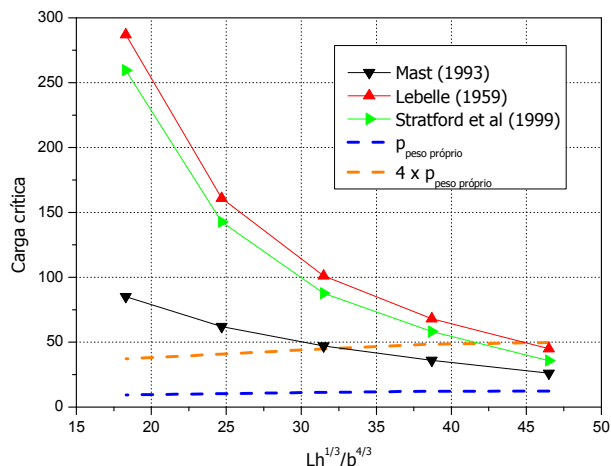


Figura 4-21 - Relação carga crítica -esbelteza do EUROCODE 2 das vigas em transporte

As formulações de **Mast (1993)** utilizadas para os cálculos de carga crítica de instabilidade são as mesmas utilizadas para obtenção de fatores de segurança, neste caso aplicando-se apenas o peso próprio. Para a variação do comprimento do vão, os fatores de segurança contra a fissuração e ruptura em içamento e transporte seguem na Tabela 28, considerando a mesma esbelteza para as vigas içadas e transportadas, apresentadas na Tabela 25

Tabela 28 – Fatores de segurança para içamento e transporte com variação do vão

Vão (m)	$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}}$	F.S. Içamento		F.S. Transporte	
			γ_r	γ_{rup}	γ_r	γ_{rup}
41,45	66,6	46,5	1,8	1,7	1,0	1,9
35	53,8	38,7	3,1	3,3	1,6	2,4
30	39,5	31,5	4,9	5,5	3,0	2,8
25	27,5	24,7	8,2	9,9	5,3	3,2
20	17,6	18,3	14,6	20,5	8,9	3,7

Os resultados da Tabela 28 são representados graficamente na Figura 4-22 e Figura 4-23.

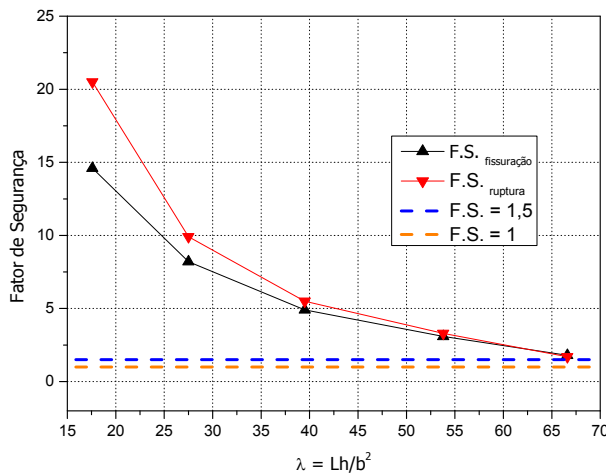


Figura 4-22 – F.S. para a viga em içamento

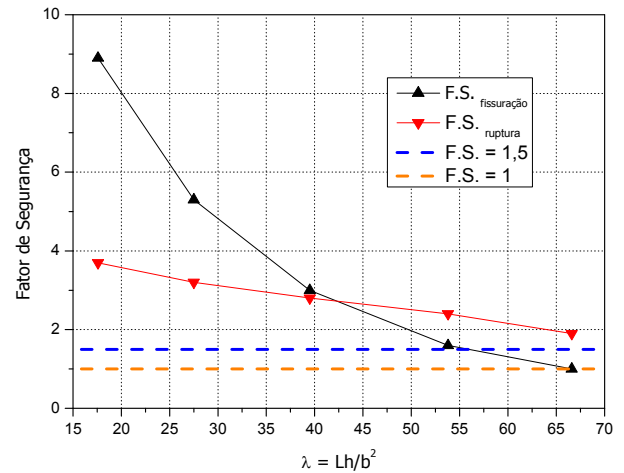


Figura 4-23 – F.S. para a viga em transporte

Tomando os limites de fator de segurança estipulados pelo **PCI Bridge Design Manual (2003)**, com base nas formulações de **Mast (1993)**, no içamento com balanços de 2,5 m, a segurança das vigas protendidas foi verificada em todos os casos.

A viga de esbeltez de 66,6 teve o fator de segurança contra a ruptura de 1,7 que é próximo ao valor limite de 1,5. Este resultado mostra que para valores de esbeltez (BS:8110) menores que 66,6 as vigas nestas configurações estão seguras. A esbeltez correspondente do EUROCODE 2 é 46,5.

Para a situação de transporte vale a mesma recomendação de esbeltez utilizada para içamento. Na Figura 4-23 o fator de segurança contra a fissuração, para a viga de esbeltez 66,6, atingiu o valor limite igual a 1.

A esbeltez da viga PCI BT-72 com 41,45 m de vão é considerada limite para os fatores de segurança de içamento e transporte. Ao transportar a análise para carga crítica, o limite para içamento equivaleria a aproximadamente duas vezes o peso próprio e não quatro vezes. Para transporte o limite seria 2,1.

Como visto no item 4.3.2 a resistência à compressão tem influência sobre a segurança à instabilidade lateral. Portanto, a recomendação de um índice de esbeltez baseado só em parâmetros geométricos pode ser equivocada, pois para uma mesma esbeltez geométrica duas vigas com f_{ck} diferentes têm cargas críticas diferentes para as mesmas condições de contorno.

Com base nisso, os gráficos apresentados anteriormente são traçados em função da esbeltez $\sqrt{M_u/M_{crit}}$, para levar em conta a dependência do f_{ck} . Os dois momentos são dependentes desse parâmetro e o momento crítico é obtido pela formulação de **Hurff (2010)**.

Para todo vão foi feita a análise variando-se o f_{ck} nas resistências de 40, 60 e 90 MPa. Os resultados seguem na Tabela 29. Nas situações em que o M_{crit} foi maior que M_u , a análise iterativa foi feita assumindo-se a deformação última de 3 ‰ e para a linha neutra resultante, foi calculado o M_{crit} . Por exemplo, para a viga com 20 m de vão o M_u é 2857 kN.m e o M_{crit} é 15066 kN.m, isto significa que na iteração em que foi utilizada a última deformação possível o M_{crit} não se igualou ao M_u , então esta viga tem alta segurança à instabilidade.

Tabela 29 – Esbeltez para variação do vão para f_{ck} de 40, 60 e 90 MPa

f_{ck} Vão (m)	40 MPa			60 MPa			90 MPa		
	M_{crit}	M_u	$\sqrt{M_u/M_{cr}}$	M_{crit}	M_u	$\sqrt{M_u/M_{cr}}$	M_{crit}	M_u	$\sqrt{M_u/M_{cr}}$
41,45	9254	11429	1,11	10625	12659	1,09	12437	12828	1,02
35	8521	8737	1,01	8820	8826	1,00	10580	8891	0,92
30	6411	6411	1,00	9247	6478	0,84	12821	6524	0,71
25	6286	4421	0,84	9038	4468	0,70	12938	4501	0,59
20	7109	2807	0,63	10383	2837	0,52	15066	2858	0,44

Momentos em kN.m

Sabe-se que a esbeltez $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ limite é 1. Na Figura 4-24 é mostrado o limite de esbeltez para os dados da Tabela 29.

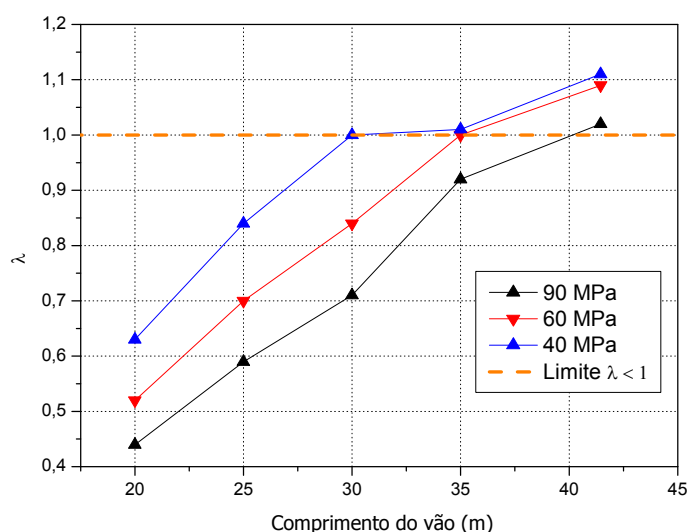


Figura 4-24 – Relação entre λ e vão

Todos os pontos abaixo da linha tracejada laranja correspondem aos vãos seguros quanto à instabilidade. Se calcularmos os M_{crit} com as respectivas rigidezes elásticas, a razão $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ para os casos em que resultou igual a 1 são apresentadas na Tabela 30.

Tabela 30 – Esbeltez em função do M_{crit} elástico

Vão (m)	f_{ck} (MPa)	M_{crit} * (kN.m)	$\sqrt{M_u/M_{crit}}$ *
30	40	16015	0,63
35	40	14346	0,78
35	60	15926	0,74
41,45	90	15206	0,90

*momento crítico elástico

Nos casos em que o f_{ck} é 40 MPa a esbeltez de 0,63 está contida no limite de 0,78, ou seja, a viga com esbeltez 0,78 é segura, bem como a viga com 0,63. Portanto, os limites para os f_{ck} diferentes são 0,78, 0,74 e 0,90. O menor entre eles é 0,74, portanto, é o limite.

Vale destacar que a recomendação é válida para a condição em que as restrições laterais só existem nos apoios, ou seja, a fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios.

4.3.5 Variação da largura da mesa comprimida

Neste item a viga PCI BT-63 é analisada com vão de 32 m, sendo a relação ℓ/h de 20. A largura da mesa superior é variada para registrar a influência desta mudança sobre a estabilidade do elemento. O último caso a ser avaliado ocorre quando restar somente a largura da alma com 15,2 cm, ou seja, uma seção T invertida. A mesa inicialmente tem largura de 106,7 cm.

Segue na Tabela 31 os resultados de momentos solicitantes à seção central das vigas. O f_{ck} admitido foi de 45 MPa. As duas primeiras colunas correspondem às esbeltezes geométricas das vigas segundo **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)**, respectivamente.

Tabela 31 – Momentos solicitantes com variação da largura da mesa comprimida

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	$M_{\text{peso próprio}}$	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
44,9	34,3	1452	4253	7100	7091	7106
72,9	47,4	1369	4102	6819	6952	7019
138,0	72,5	1287	3915	5868	6030	6614
354,5	136,0	1204	3676	5151	2795	5849
2216,0	461,3	1106	3284	4488	-	4924

O código britânico **BS:8110 (2007)** recomenda que a esbeltez seja menor que 250, assim os casos de esbeltezes 44,9, 72,9 e 138 estariam na faixa de segurança. No entanto, os resultados analíticos mostram que apenas os dois primeiros casos podem ser considerados seguros.

Para a esbeltez do **EUROCODE 2 (2004)** valores menores que 70 são considerados seguros em situações transitórias, sendo então os dois primeiros casos da Tabela 31. Esta verificação coincide com os resultados analíticos.

Nota-se a divergência nas verificações das normas, pois para a norma britânica três casos estariam seguros e o EUROCODE 2 dois casos. Outro parâmetro importante é o f_{ck} que, nos itens anteriores, mostrou ter influência considerável sobre a estabilidade do elemento.

É notável a falta de informação sobre as hipóteses consideradas para obtenção dos limites de esbeltez das normas. Como λ é obtido a partir da inequação $M_u \leq M_{crit}$, é fundamental, para o cálculo do momento crítico, saber se há ou não restrições laterais ao longo do vão.

Nas fases transitórias, inclusive a fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios, não existem restrições ao longo do vão. No entanto, algumas normas não especificam recomendações para fases transitórias, então os projetistas de vigas pré-moldadas não possuem recursos para verificação simplificada destas situações.

Os resultados da Tabela 31 são expressos na Figura 4-25, Figura 4-26, relacionando os momentos fletores à esbeltez obtida da variação da mesa comprimida.

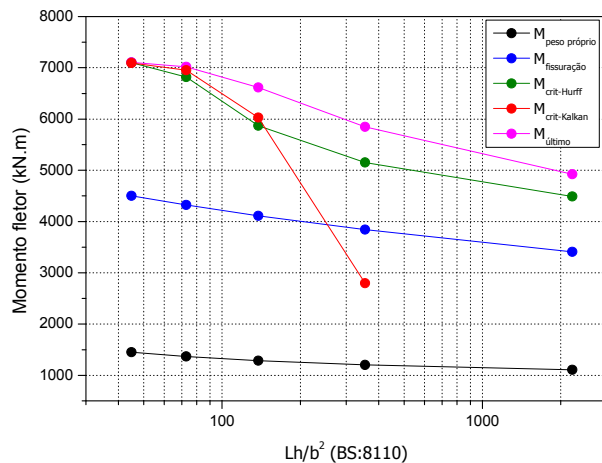


Figura 4-25 - Relação entre momentos e esbeltez do BS:8110 (2007)

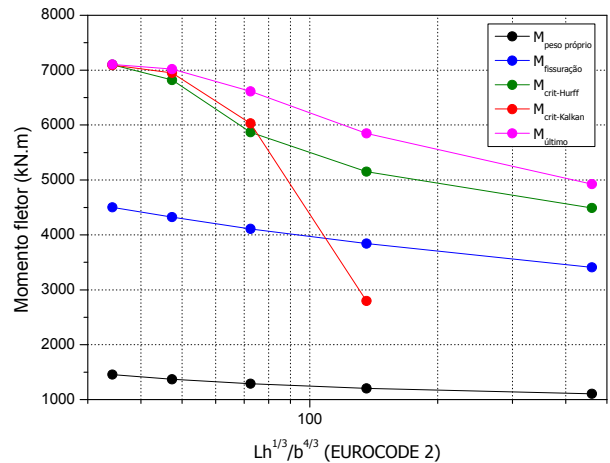


Figura 4-26 - Relação entre momentos e esbeltez do EUROCODE 2 (2004)

Na Figura 4-25 e Figura 4-26 a segurança é verificada para as esbeltezes $\ell h/b_f^2$ e $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ menores que 72,9 e 47,4, respectivamente.

Para estas esbeltezes geométricas limite, a esbeltez $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ resulta igual 1. Se para estes valores for calculada a esbeltez com o $M_{crit-Hurff}$ em função das rigidezes elásticas, a razão resulta em $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}}} = \sqrt{\frac{7019}{12499}} = 0,75$.

A discrepância entre os limites obtidos pelas análises e os estabelecidos nas normas remetem principalmente à consideração de travamentos laterais. Pois uma viga em situação transitória atende facilmente ao limite de esbeltez do código britânico de 250.

Este parâmetro deveria ser um critério estabelecido pelo projetista, por exemplo, quantos travamentos laterais ao longo do vão seriam utilizados e a norma deveria apresentar a equação correspondente para a verificação. No caso de travamentos contínuos através de tabuleiro ou laje, não há possibilidade de instabilidade lateral, segundo Kirby e Nethercot (1979).

As análises de carga crítica e fator de segurança são realizadas como no item 4.3.4. Na Tabela 32 são apresentados os resultados de carga crítica em função da variação da largura da mesa. As formulações utilizadas são de Lebel (1959), Mast (1993) e Stratford et al (1999).

Tabela 32 – Carga crítica nas fases transitórias da viga PCI BT-63 com a variação da mesa comprimida [kN/m]

$\lambda = \frac{\ell h}{b_f^2}$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}} \leq 70$	g_{pp}	p_{crit} içamento			p_{crit} transporte		
			Lebelle	Mast	Stratford	Mast	Lebelle	Stratford
44,9	34,3	11,6	98,0	92,0	80,6	43,0	89,4	78,9
72,9	47,4	10,9	64,4	62,0	62,3	39,0	72,7	63,6
138,0	72,5	10,3	48,3	45,0	49,0	36,0	60,0	52,4
354,5	136,0	9,6	41,9	37,0	42,4	34,0	52,6	45,8
2216,0	461,3	8,8	38,9	38,0	41,5	33,0	49,2	42,8

Os resultados de carga crítica nas fases transitórias de içamento e transporte da Tabela 32 seguem representados graficamente na Figura 4-27, Figura 4-29, Figura 4-29 e Figura 4-30.

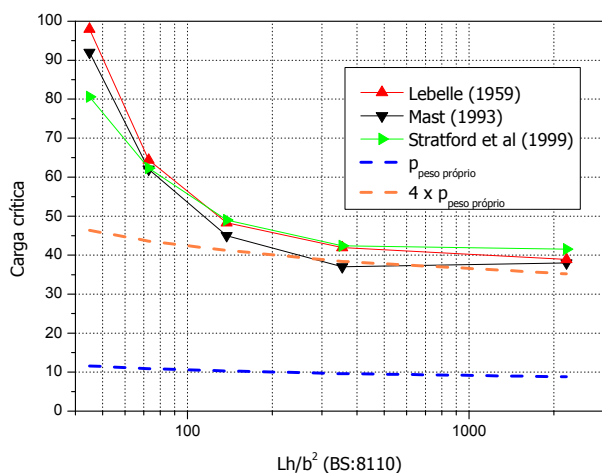


Figura 4-27 – Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no içamento (esbeltez BS:8110)

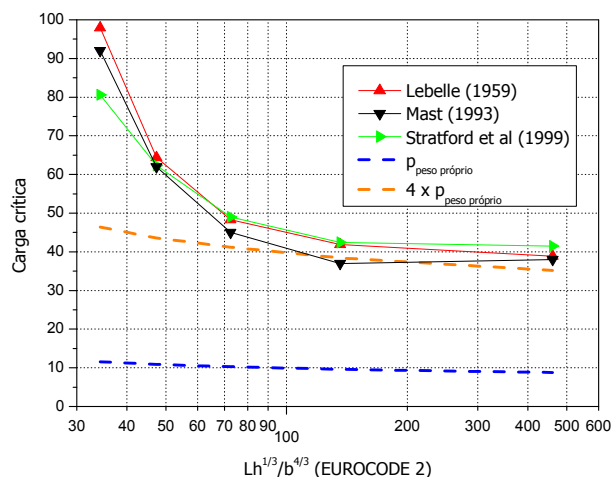


Figura 4-28 - Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no içamento (esbeltez EUROCODE 2)

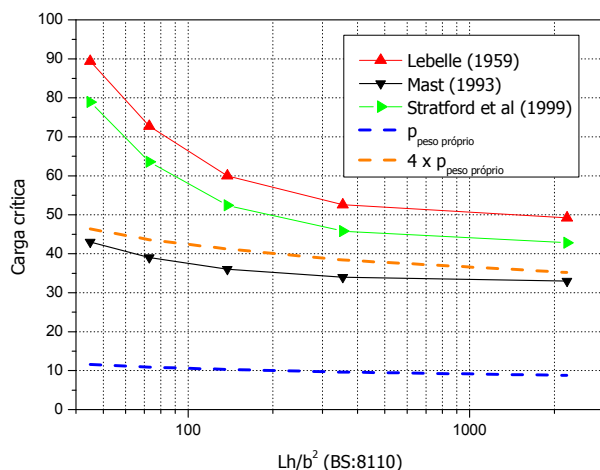


Figura 4-29 – Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no transporte (esbeltez BS:8110)

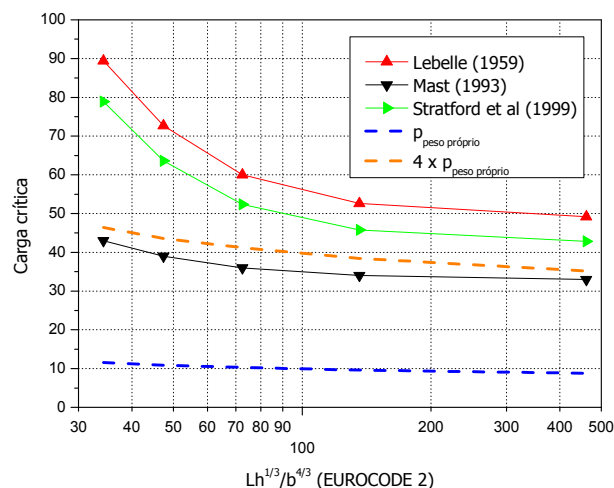


Figura 4-30 - Relação entre largura da mesa comprimida e carga crítica de instabilidade no transporte (esbeltez EUROCODE 2)

Na situação de içamento as formulações de **Lebelle (1959)** e **Stratford et al (1999)** atenderam, para todas as esbeltezes apresentadas, o critério de que a carga crítica deve ser menor que quatro vezes o peso próprio, Figura 4-27 e Figura 4-28. Já a formulação de **Mast (1993)**, a partir de esbeltezes maiores que 260 (BS:8110) e 120 (EUROCODE 2), não atendeu a esse critério. Mas um aumento no f_{ck} poderia garantir a segurança. Talvez um limite de segurança mais adequado possa ser estabelecido variando-se o f_{ck} e relacionando a largura da mesa com a esbeltez $\sqrt{p_u/p_{crit}}$.

Para transporte, na Figura 4-29 e Figura 4-30, a variação do f_{ck} pela formulação de **Mast (1993)** poderia fazer com que todos os casos apresentassem segurança. Os resultados ficaram muito próximos do limite estabelecido. As formulações de **Lebelle (1959)** e **Stratford et al (1999)** resultaram em segurança para todos os casos.

Os fatores de segurança também foram calculados para avaliar a influência que a variação da largura da mesa comprimida tem sobre o comportamento à instabilidade. Os resultados seguem na Tabela 33.

Tabela 33 – Fatores de segurança variando a largura da mesa, para vigas PCI BT-63 de 32 m

$\lambda = \frac{\ell h}{b_f^2}$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}}$	F.S. Içamento		F.S. Transporte	
		γ_r	γ_{rup}	γ_r	γ_{rup}
44,9	34,3	4,9	4,6	3,1	2,6
72,9	47,4	4,0	3,7	3,0	2,7
138,0	72,5	3,5	3,1	2,9	2,7
354,5	136,0	3,1	2,9	2,5	2,7
2216,0	461,3	3,3	3,1	2,6	2,8

Os fatores de segurança da Tabela 33 são as curvas em vermelho e preto, apresentados na Figura 4-31 e Figura 4-32. Como visto, as vigas apresentaram segurança em todos os casos. Os resultados tiveram folga quanto aos limites de 1 e 1,5, portanto é provável que o limite de carga crítica seja menor que quatro vezes o peso próprio. No entanto, como nenhum limite foi atingido não dá para apontar uma relação entre carga crítica e peso próprio para o vão de 32 m.

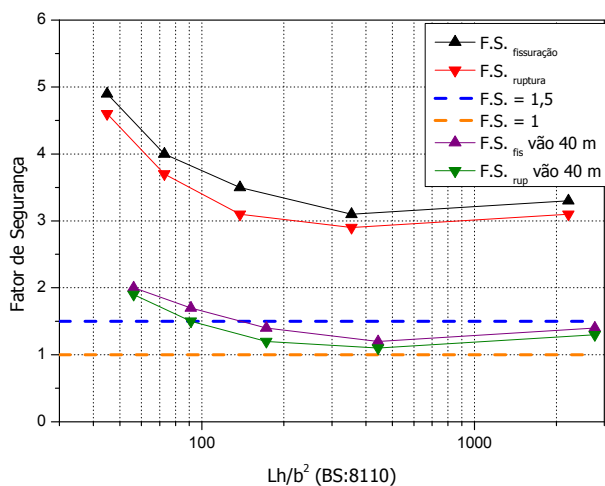


Figura 4-31 – F.S. para a fase de içamento

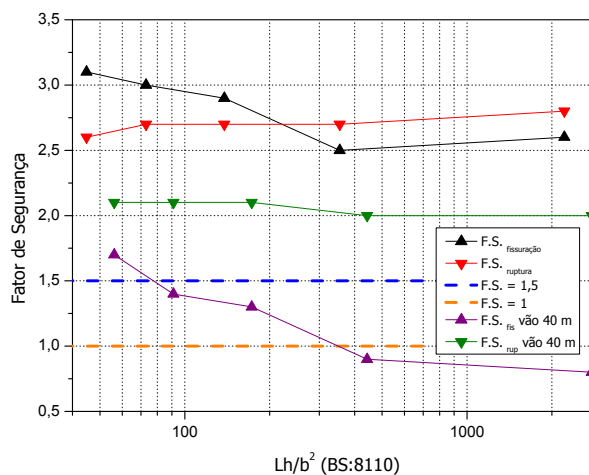


Figura 4-32 – F.S. para a fase transporte

Com o intuito de alcançar os limites de fator de segurança, a mesma análise foi feita para vãos de 40 m, sendo a relação ℓ/h de 25 (considerado limite de flexão). Os fatores de segurança pra transporte e içamento seguem na Tabela 34 e as curvas verde e roxa na Figura 4-31 e Figura 4-32.

Tabela 34 - Fatores de segurança variando a largura da mesa, para vigas de 40 m

$\lambda = \frac{\ell h}{b_f^2}$	$\frac{\ell h^{1/3}}{b_f^{4/3}}$	F.S. Içamento		F.S. Transporte	
		γ_r	γ_{rup}	γ_r	γ_{rup}
56,2	42,9	2,0	1,9	1,7	2,1
91,1	56,2	1,7	1,5	1,4	2,1
172,6	90,6	1,4	1,2	1,3	2,1
443,2	170,0	1,2	1,1	0,9	2,0
2770,0	576,7	1,4	1,3	0,8	2,0

Nas análises de fator de segurança em içamento a viga de 40 m com esbeltez do BS:8110 de 91,1 atingiu o limite de 1,5 para ruptura. Então, para valores de esbeltez menores, a vigas estão seguras. A esbeltez correspondente do EUROCODE 2 é 56,2.

Para transporte o limite de fissuração foi ultrapassado, sendo a esbeltez do BS:8110 de 375 e do EUROCODE 2 de 150.

Apesar destes limites apresentados, para o vão de 32 m a esbeltez do BS:8110 de 2216 atende aos critérios tanto em transporte como içamento. Como será visto no item a seguir, a limitação de esbeltezes para vigas I e retangular não coincidem, pois os limites embasados nas vigas I caso sejam utilizados para vigas retangulares, exigem elementos extremamente robustos. Por exemplo, se o limite de 91,1 for utilizado para uma viga retangular de 20 m de vão e altura de 160 cm, a largura necessária seria 60 cm.

Comparando a carga devido ao peso próprio desta viga retangular que é de 24 kN/m à da viga BT-72 que é de 12,4 kN/m, tem-se quase o dobro em diferença. Portanto, a viga é muito robusta e tem peso elevado.

Conclui-se que as vigas retangulares não apresentam bons resultados para esbeltezes limite obtidas a partir de vigas I.

4.3.6 Variação da espessura da alma da viga: seção I e retangular

Este item tem por objetivo comparar os comportamentos de vigas I com vigas de seção retangular de mesma largura de alma e altura. A princípio será avaliado um caso com 20 m de vão. Quando for necessário, para determinar algum limite de esbeltez, o vão será aumentado.

As vigas tem altura de 165 cm, sendo a relação ℓ/h de 12, aproximadamente. Esta altura foi escolhida para comparar os resultados de carga crítica em função dos balanços para içamento, com a viga retangular analisada por **Lima (1995)**. A viga I e a viga retangular são apresentadas na Figura 4-33 e Figura 4-34.

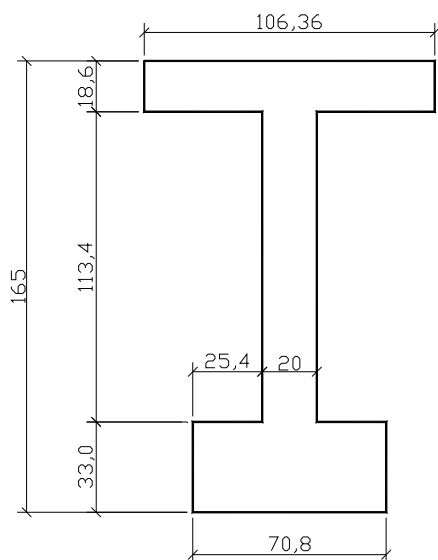


Figura 4-33 – Viga I. Unidade [cm]

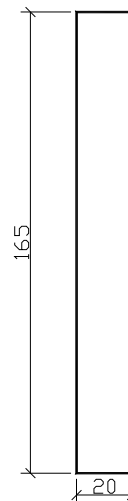


Figura 4-34 - Viga retangular analisada por Lima (1995). Unidade [cm]

Além destas comparações, é variada a espessura da alma para avaliar a influência deste parâmetro no comportamento à instabilidade lateral da viga. As espessuras de alma são de 10, 20, 25 e 30 cm.

As vigas retangulares são verificadas quanto às tensões nas armaduras e concreto no ato da protensão. Seguem os resultados da viga I na Tabela 35 e para a viga retangular na Tabela 36. Na Tabela 35 foram adicionados os casos de esbeltez de 51,0, 58,3 e 65,2 que correspondem à viga com 20 cm de alma, no entanto, os vãos são 35, 40 e 45 m, respectivamente.

Tabela 35 – Momentos solicitantes com variação da largura da alma na viga I [kN.m]

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	$M_{\text{peso próprio}}$	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
65,2	49,0	4200	8905	14029	13902	14706
58,3	43,5	3318	6978	12061	12237	12259
51,0	38,1	2520	5774	9700	13088	9704
35,5	24,8	620	3107	10994	15205	4218
29,2	21,8	827	3180	16000	21059	4245
26,6	20,5	931	3526	19657	27353	4822
24,4	19,3	1035	3577	24450	32954	4827

Tabela 36 - Momentos solicitantes com variação da largura da viga retangular [kN.m]

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	$M_{\text{peso próprio}}$	$M_{\text{fissuração}}$	$M_{\text{crit-Hurff}}$	$M_{\text{crit-Kalkan}}$	$M_{\text{último}}$
3300	509	211	1356	1020	1233	2709
1467	297	309	1650	2252	2480	2911
825	202	413	1800	2966	3135	3031
528	150	516	2015	4408	5743	3255
367	118	619	2151	6509	9432	3545

A viga retangular com 10 cm de largura resultou em um momento crítico, segundo a formulação de **Hurff (2010)**, de 1020 kN.m que é menor que o momento de fissuração. Isto caracteriza instabilidade elástica.

Os resultados para a viga I mostram que somente para vãos maiores que 45 m esta seção terá problemas com instabilidade na fase pré-serviço com contraventamento nos apoios. Nesta situação os momentos críticos $M_{\text{crit-Hurff}}$ e $M_{\text{crit-Kalkan}}$ são 4,6 e 5,5 % menores que o M_u , respectivamente. Se este vão for considerado como limite e for calculada a esbeltez em função

do $M_{\text{crit-Hurff}}$ elástico, obtém-se $\sqrt{\frac{M_u}{M_{\text{crit}}}} = \sqrt{\frac{14706}{25339}} = 0,76$.

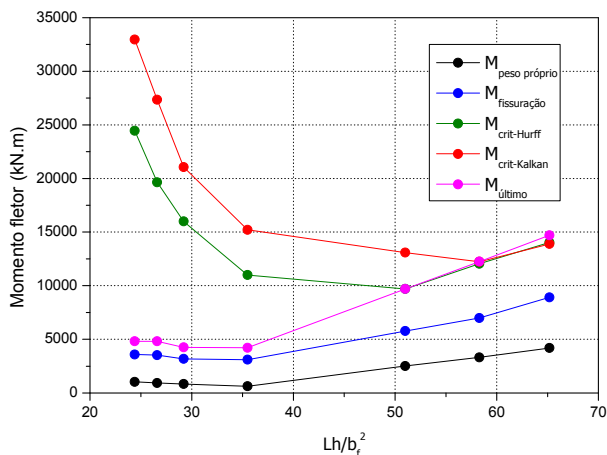
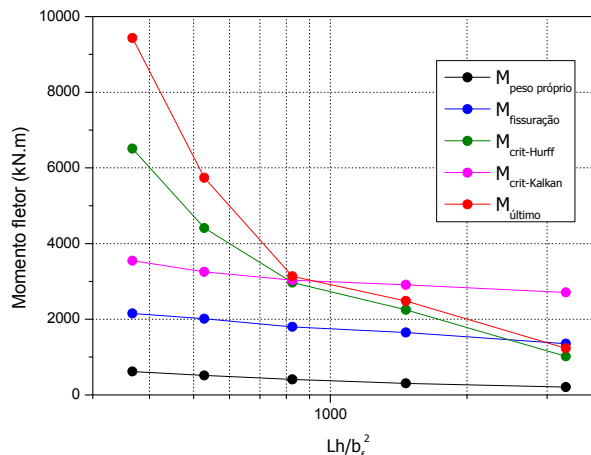


Figura 4-35 – Momentos solicitantes para viga

I

Figura 4-36 – Momentos solicitantes para viga
retangular

O limite estabelecido pelo **EUROCODE 2 (2004)** para a razão entre altura e largura da mesa comprimida é 2,5 para situações definitivas. A largura mínima da viga retangular resultaria em 66 cm. No entanto, a Figura 4-36 mostra que para larguras maiores que 20 cm a viga rompe por flexão em situação de pré-serviço com contraventamento nos apoios, ou seja, para esbeltezes do BS:8110 menores que 825 ou 202 para o EUROCODE 2. Em serviço, larguras menores atenderiam a segurança.

A viga retangular com 20 cm de largura resultou em um M_{crit} igual ao M_u , portanto $\sqrt{M_u/M_{crit}} = 1$. Este corresponde ao limite de esbeltez ou limite de segurança. Calculando essa esbeltez considerando as propriedades elásticas do concreto, para calcular o M_{crit} pela Equação (58) de **Hurff (2010)**, obtêm-se $\sqrt{\frac{3031}{7139}} = 0,65$. Assim, para esbeltezes menores que 0,65, espera-se que as vigas retangulares sejam seguras.

As recomendações de esbeltez segundo as normas consideradas são verificadas em todos os casos avaliados da viga I. O código britânico impõe o limite de 250 para sua esbeltez que apresenta uma folga muito grande para o limite encontrado de 65,2. Já o EUROCODE 2 recomenda um limite de 70 para sua esbeltez sendo o limite encontrado de 49.

A viga I apresenta carga crítica elevada para içamento, então os resultados para esta situação transitória não são apresentados. Para este elemento é avaliada a fase de transporte e, para a viga retangular, o içamento.

A Tabela 37 apresenta as cargas críticas da viga I segundo **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. As esbeltezes de 43,8 e 51,0 foram adicionadas com a

intenção de ultrapassar os limites de segurança. Nestes casos, os vãos são de 30 e 35 m para a viga I com 20 cm de alma.

Tabela 37 – Carga crítica na fase de transporte da viga I com a variação da alma [kN/m]

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	$p_{\text{peso próprio}}$	$p_{\text{crit transporte}}$		
			Mast	Lebelle	Stratford et al
51,0	38,1	16,9	39,0	99,6	115,4
43,8	32,7	16,9	50,0	147,1	182,7
35,5	24,8	12,3	85,0	326,0	403,1
29,2	21,8	16,9	88,0	414,5	610,8
26,6	20,5	19,0	90,0	464,0	764,8
24,4	19,3	21,1	91,0	511,0	958,7

São apresentados na Figura 4-37 e Figura 4-38 os resultados da Tabela 37 relacionados às esbeltezes do **BS:8110 (2007)** e do **EUROCODE 2 (2004)**.

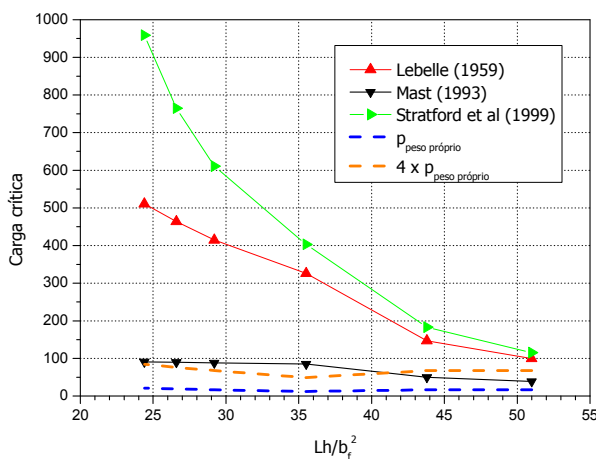


Figura 4-37 – Relação entre esbelteza do BS:8110 e carga crítica da viga I em transporte

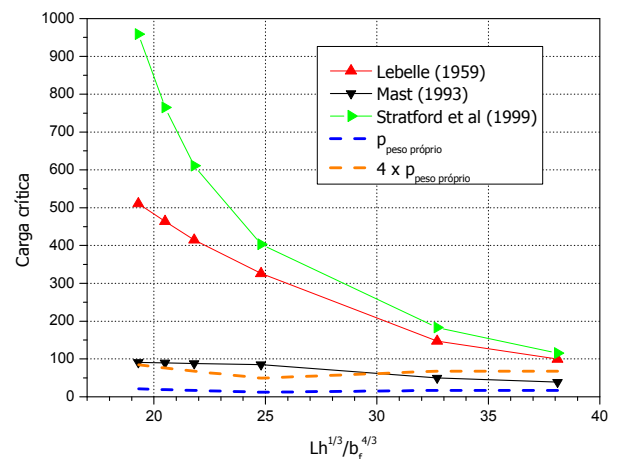


Figura 4-38 - Relação entre esbelteza do EUROCODE 2 e carga crítica da viga I em transporte

Os limites encontrados para as esbeltezas das normas **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)** foram aproximadamente 40 e 30, respectivamente, correspondentes às formulações de **Mast (1993)**.

Como já mencionado a carga crítica de içamento para a viga I é bastante elevada quando comparada com a carga devido ao peso próprio. Apesar disso, os fatores de segurança

para içamento, com balanços de 2,5 m, são apresentados na Tabela 38, juntamente com os F.S. pra transporte. Dois casos são adicionados para determinar um limite de esbeltez, sendo a largura da alma de 20 cm, da mesa comprimida 106,7 e vãos 35 e 40 m, resultando nas esbeltezes de 51 e 58,3, respectivamente.

Tabela 38 – Fatores de segurança para viga I

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	F.S. Içamento		F.S. Transporte	
		γ_r	γ_{rup}	γ_r	γ_{rup}
58,3	43,5	2,3	2,0	1,4	1,7
51,0	38,1	4,0	3,2	2,1	2,0
35,5	24,8	7,7	28,7	4,5	3,4
29,2	21,8	22,6	30,9	5,0	3,0
26,6	20,5	22,6	32,3	4,4	2,8
24,4	19,3	25,3	34,0	4,1	2,6

Os elevados F.S. pra içamento mostram que a viga I tem elevada segurança nesta fase. No entanto, o posicionamento dos dispositivos de içamento devem atender à tolerância utilizada na verificação que é de 6 mm. As figuras Figura 4-39 e Figura 4-40 ilustram a fase de içamento da Tabela 38.

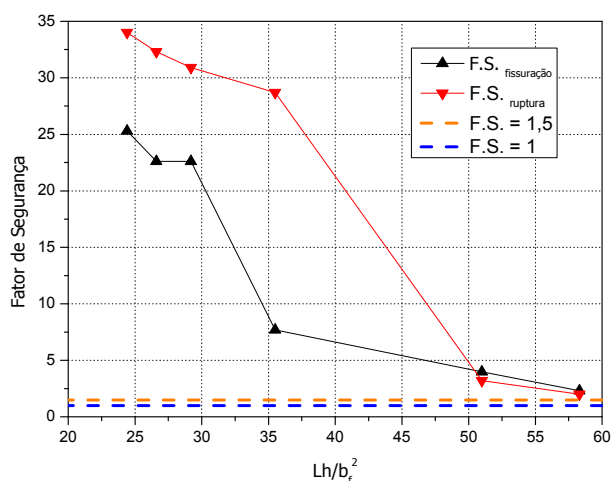


Figura 4-39 – F.S. içamento em relação à esbeltez do BS:8110

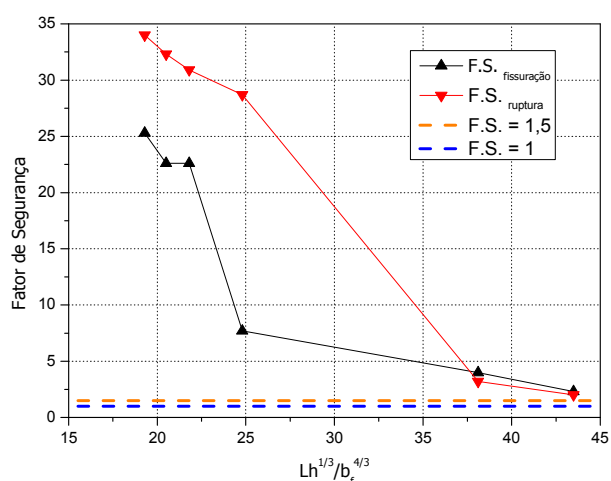


Figura 4-40 - F.S. içamento em relação à esbeltez do EUROCODE 2

Os fatores de segurança na Figura 4-39 foram atendidos em todos os casos. No entanto, para esbeltezes maiores que 58,3 as vigas teriam problemas com a flexão, pois a razão ℓ/h ultrapassaria 25. Então esta esbelteza pode ser considerada um limite.

Na Figura 4-40 a esbelteza limite seria 43, sendo bem distante do recomendado pelo do **EUROCODE 2 (2004)** para situações transitórias que é 70. Para a seção transversal da Figura 4-4 seria necessário um vão de 65 m para alcançar a esbelteza de 70, o que seria inviável em termos de resistência à flexão.

O limite de esbelteza para situações definitivas do **EUROCODE 2 (2004)** é 50. Esta diferença para a situação transitória a princípio parece inadequada, pois nas fases definitivas existem mais travamentos laterais. Portanto, a situação é mais segura. No entanto, ela é correta, devido à diferença na intensidade do carregamento entre as duas fases, sendo que na fase transitória atua apenas ao peso próprio. Conclui-se que o limite de esbelteza nas fases transitórias deve ser maior.

A viga I, para a fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios, apresentou uma esbelteza limite de 51 para que a momento crítico fosse menor que o último. Para a fase de içamento este limite foi de 58,3, considerando o comprimento total do elemento.

A Figura 4-41 e Figura 4-42 ilustram a fase de transporte da Tabela 38. No trecho crescente das curvas a segurança aumenta com a diminuição da alma, isto se deve à redução do peso próprio, apesar da perda em rigidez devido à diminuição da área da seção.

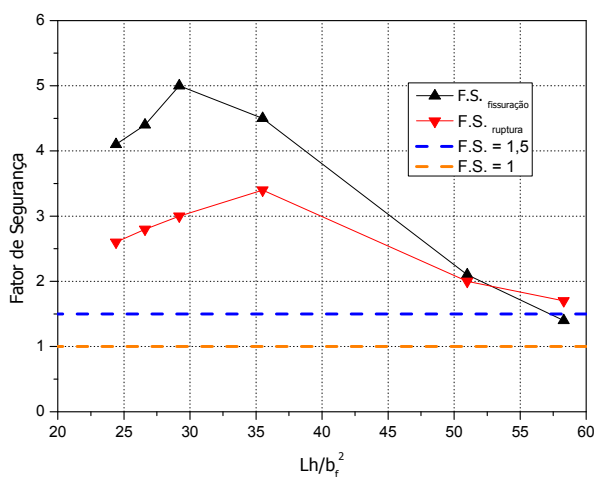


Figura 4-41 – F.S. transporte em relação à esbelteza do BS:8110

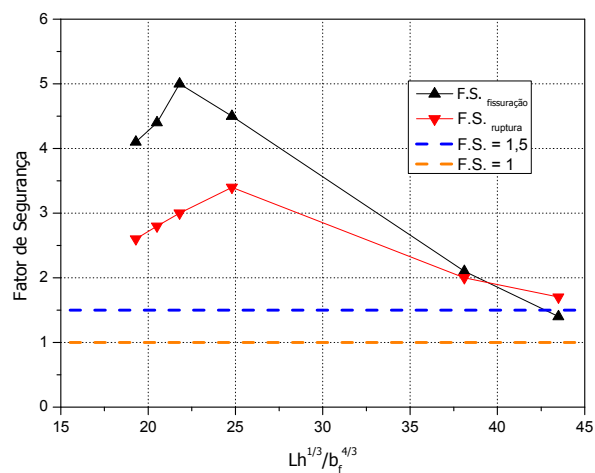


Figura 4-42 - F.S. transporte em relação à esbelteza do EUROCODE 2

Se for estabelecido um limite para flexão ℓ/h de 25, no caso da fase de transporte a viga protendida atenderia a segurança pra instabilidade com balanços de 2,5 m. Pelos limites de fator de segurança é possível aumentar o vão, porém a flexão é limitante. Portanto, os limites são os mesmos da viga em içamento.

Os limites encontrados através de fatores de segurança podem ser estabelecidos em carga crítica de instabilidade. Para esbeltez de 58,3 as cargas críticas correspondentes a içamento e transporte, obtida pela formulação de **Mast (1993)**, são 42 e 31, respectivamente. Então as relações entre carga crítica e peso próprio ficam $\frac{42}{17} = 2,5$ e $\frac{31}{17} = 1,8$.

Para a viga retangular foram calculados fatores de segurança e carga crítica de instabilidade no içamento com balanço de 2,5 m. Para obter a carga crítica foram utilizadas as formulações de **Lebelle (1959)**, **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**. Os resultados são apresentados na Tabela 39.

Tabela 39 – Fatores de segurança e carga crítica [kN/m] para viga retangular em içamento

$\lambda = \ell h / b_f^2$	$\ell h^{1/3} / b_f^{4/3}$	F.S. Içamento		P _{peso próprio}	P _{crit içamento}		
		γ_r	γ_{rup}		Mast	Lebelle	Stratford
3300	509	1,1	2,7	4,2	14,0	18,2	17,0
825	202	5,7	6,3	8,5	110,0	110,5	88,2
528	150	9,7	8,7	10,6	400,0	213,4	151,2
367	118	15,3	11,2	12,7	1200,0	364,7	227,5

A inércia à torção e à flexão lateral são proporcionais à menor dimensão da seção elevada ao cubo, portanto aumentar a largura da alma aumenta estas rigidezes. Destaca-se que as formulações de **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)** consideram que a fase de içamento depende somente da rigidez à flexão lateral. Nota-se o grande aumento da carga crítica para seções mais robustas, figuras Figura 4-45 e Figura 4-46.

O fator de segurança contra fissuração atingiu seu limite para as esbeltezes de 3300 e 509, como mostrado na Figura 4-43 e Figura 4-44. Considerando estes valores limites, a relação entre carga crítica e peso próprio seria 3,3, sendo 17,5 % menor que o valor recomendado que é 4.

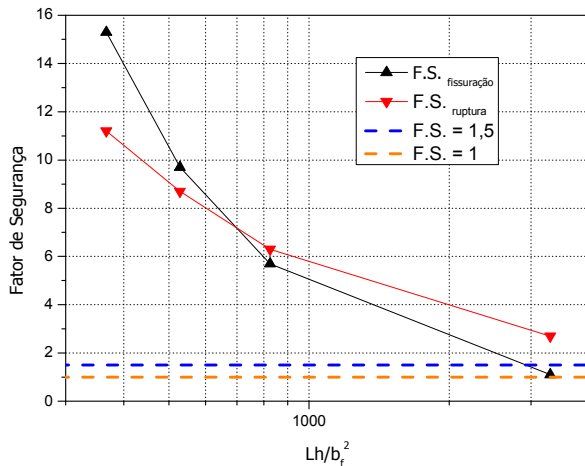


Figura 4-43 – F.S. içamento em relação à esbelteza do BS:8110

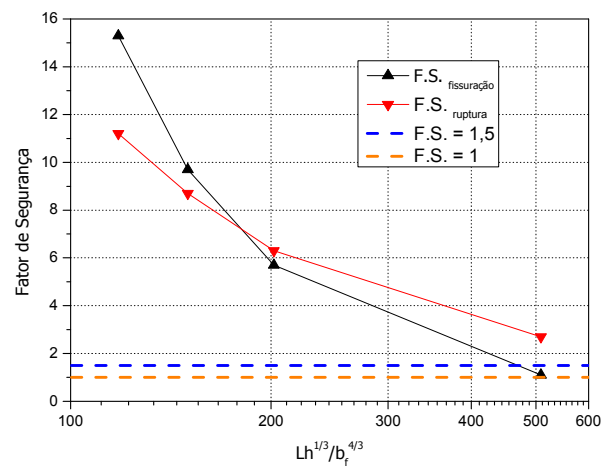


Figura 4-44 - F.S. içamento em relação à esbelteza do EUROCODE 2

As vigas retangulares avaliadas têm relação ℓ/h de 12, aproximadamente. As figuras Figura 4-45 e Figura 4-46 mostram que para esta proporção, em situação transitória de içamento, as vigas com esbelteza maior que 3000 e 500 das normas **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)**, respectivamente, não atendem ao critério $p_{crit} > 4 g_{pp}$. Portanto estes valores podem ser considerados limites de esbelteza.

A esbelteza limite $\ell h/b_f^2$ recomendada para a viga retangular em situação transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios foi de 520, sendo bem menor que para situação transitória que foi 3000. Além disso, é nítida a diferença nos limites de esbelteza entre vigas I e retangulares, normalmente sendo para a primeira o limite imposto pela resistência à flexão e para a segunda a instabilidade lateral.

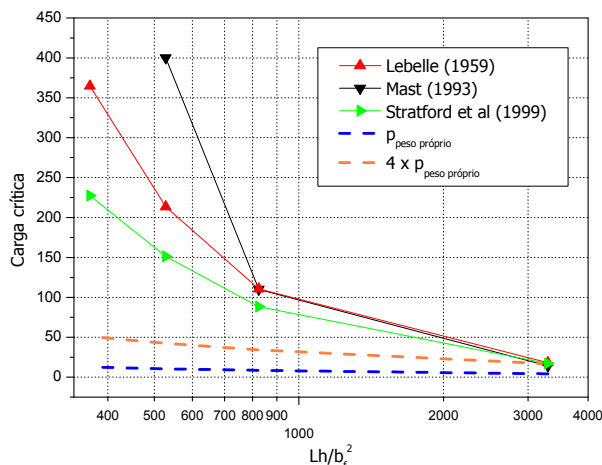


Figura 4-45 – Carga crítica em içamento em relação à esbelteza do BS:8110

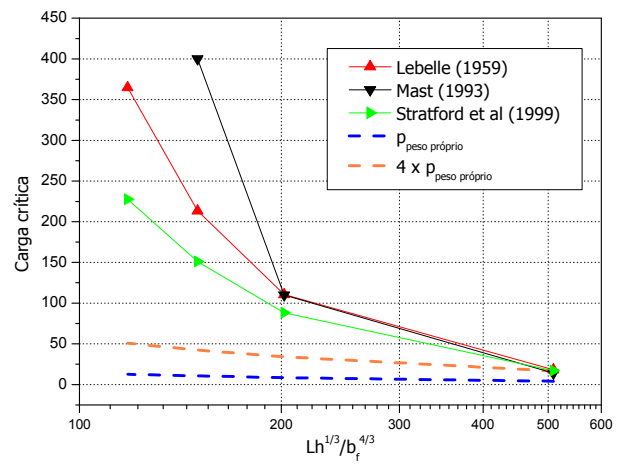


Figura 4-46 - Carga crítica em içamento em relação à esbelteza do EUROCODE 2

Os resultados de esbeltez limite encontrados para vigas retangulares resultam em elementos bastante esbeltos, apesar de serem considerados seguros. Por exemplo, uma viga com 15 m de vão e altura de 1,3 m, pela recomendação resultaria em $\sqrt{\frac{1500 \cdot 130}{3000}} = 8$ cm. No entanto, a fase transitória anterior à execução do tabuleiro com contraventamento nos apoios exige uma esbeltez menor que 825 que também deve ser verificada, $\sqrt{\frac{1500 \cdot 130}{825}} = 15,4$ cm.

Lima (1995) apresenta resultados de carga crítica em função do comprimento dos balanços para a viga retangular com 20 cm de largura da seção. Estes resultados são baseados na formulação de **Catania e Cocchi (1985) apud Lima (1995)** e são comparados com os obtidos pela formulação de **Mast (1993)** e **Stratford et al (1999)**, sendo ρ a razão da distância entre os cabos pelo comprimento do vão. Os resultados seguem na Tabela 40.

Tabela 40 – Carga crítica [kN/m] e F.S. de viga em içamento com a variação dos balanços

$\rho = \ell_1/\ell$	a (m)	P_{crit} içamento			F.S. içamento	
		Lima (1995)	Mast (1993)	Stratford et al (1999)	γ_r	γ_{rup}
1,0	0,0	23,2	14,0	18,2	1,8	1,5
0,8	2,0	81,2	55,0	59,1	4,5	4,4
0,6	4,0	934,6	1900,0	404,5	7,6	27,0
0,55	4,5	1568,5	1100,0	301,7	0,5	37,0
0,5	5,0	965,4	1000,0	0	-	27,4
0,3	7,0	139,5	190,0	-	-	8,2
0,0	10,0	62,3	90,0	-	-	4,8

A Tabela 40 dá uma ideia do balanço ideal para a viga retangular nestas configurações com base na carga de ruptura. Nas análises pelas formulações de **Mast (1993)** e **Lima (1995)** o comprimento máximo ficou entre 4 e 5 m, apesar das diferenças nos resultados.

Os resultados segundo a formulação de **Stratford et al (1999)** apresentaram um limite para os balanços de 4,7 m, quando consideradas imperfeições geométricas. Se analisarmos a Equação (34) para carga limite, quando o comprimento do balanço se aproxima de $1/4 \ell$, o deslocamento δ_t aproxima-se do deslocamento inicial δ_0 . Isto significa que a carga limite para a igualdade destes deslocamentos é zero segundo a hipótese de **Southwell (1932) apud Stratford et al (1999)**.

As análises de fator de segurança pela formulação de **Mast (1993)** mostram que para comprimentos de balanço maiores que 4,3 m a viga estaria sujeita à fissuração na fase transitória. Esta situação é indesejável.

O fator de segurança é interessante para estimar o balanço ótimo tendo em vista não permitir a fissuração à medida que se varia o comprimento do balanço. Esta análise considera apenas a carga devido ao peso próprio. A Figura 4-47 e Figura 4-48 representam a análise de carga crítica e fator de segurança, respectivamente.

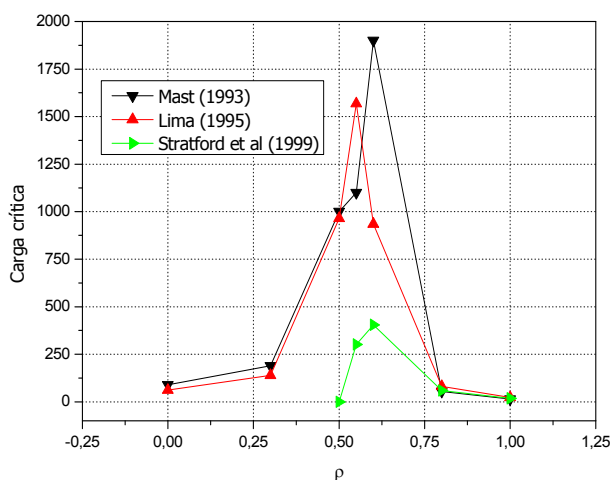


Figura 4-47 – Carga crítica em função do comprimento do balanço

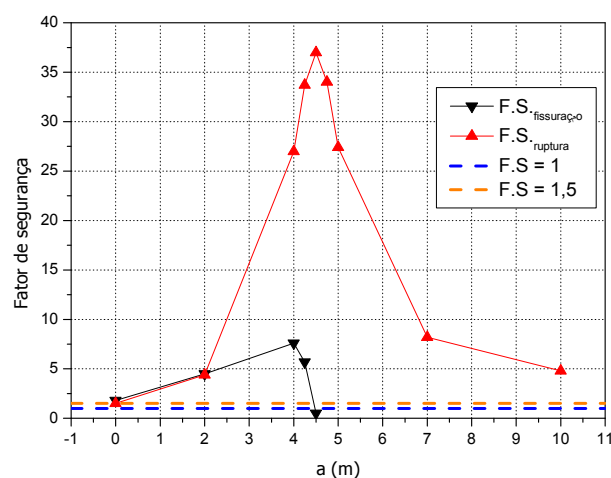


Figura 4-48 – F.S. no içamento em função do balanço

Para balanços maiores que 4,3 m o ângulo inicial de giro da viga θ_i , devido às imperfeições geométricas, supera o ângulo de fissuração segundo as formulações de **Mast (1993)**. Com isso é provável que a viga sofra fissuração quando submetida ao peso próprio. Portanto, o posicionamento dos cabos entre 0 e 4,3 m garante a segurança no içamento.

4.3.7 Considerações finais e quadros resumo

Em cada análise realizada foram obtidos limites de esbeltez para as situações transitórias estudadas. Aqui é apresentado o resumo dos resultados de limites de esbeltez com base nas normas **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)**, limites de carga crítica estabelecidos à partir de limites de fator de segurança e limites de esbeltez $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ ou relações com M_r e M_{pp} .

Na Tabela 41 são apresentados os limites de esbeltez obtidos para as análises paramétricas que tiveram variação da esbeltez. Os resultados entre parênteses correspondem às formulações utilizadas que deram respostas diferentes, os outros casos ou os resultados foram aproximadamente iguais ou apenas uma formulação atingiu o limite estabelecido.

Tabela 41 – Limites de esbeltez para situações transitórias

Parâmetro variado	Esbeltez λ BS:8110 / EUROCODE 2			
	pós-montagem c/ contraventamento	Içamento	Transporte	
Vão	53,8 / 38,7	p_{crit} F.S.	60 / 42,5 66,6 / 46,5	(65/40/60) / (45/32,5/42)* 66,6 / 46,5
Largura da mesa	72,9 / 47,4	p_{crit} F.S.	260 / 120 91,1 / 56,2	- 375 / 150
Alma de viga I	65,2 / 49,0	p_{crit} F.S.	- 58,3 / 43	40 / 30 58,3 / 43
Largura de viga retangular	825 / 202	p_{crit} F.S.	3000/500 3300/509	- -

**resultados com grande diferença entre as formulações*

Nas análises de fator de segurança, quando foram atingidos os limites recomendados pelo **PCI Bridge Design Manual (2007)** ou a razão ℓ/h de 25, as esbeltezes foram consideradas limite.

Na formulação de **Mast (1993)**, ao atingir o fator de segurança de ruptura igual a 1, a carga aplicada é considerada crítica. Portanto, para cada análise paramétrica, foram obtidas razões p_{crit}/p_{pp} que são apresentadas na Tabela 42.

Tabela 42 – Relação entre carga crítica e peso próprio das análises paramétricas

Parâmetro variado	P_{crit}/P_{pp}	
	Içamento	Transporte
f_{ck}	2,0	2,1
Imperfeições geométricas	2,0	2,1
Vão	2,0	2,1
Largura da mesa	2,4	2,4
Alma de viga I	2,5	1,8
Largura de viga retangular	3,3	-

Foi constatado nas análises que o f_{ck} e as imperfeições geométricas têm influência sobre a carga crítica. No entanto, como se vê na Tabela 41, não tem a análise referente à variação destes parâmetros, pois variá-los não muda a esbeltez do elemento. Então na Tabela 44 seguem esbeltezes limites com base nas razões $\sqrt{M_u/M_{crit}}$ ou $\sqrt{M_{crit}/M_{pp}}$ e $\sqrt{M_{crit}/M_r}$, como uma tentativa de encontrar algum padrão nestas razões que possam de alguma forma ajudar os projetistas em verificações de vigas na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios.

Na Tabela 43 seguem os momentos referentes às situações que foram consideradas limites nas análises paramétricas e que serão utilizados para obter as relações mencionadas.

Tabela 43 – Momentos referentes aos limites estimados nas análises paramétricas [kN.m]

	M_{crit}	M_{crit}^*	M_u	M_r	M_{pp}
f_{ck}	8763	16595	8792	5168	1848
Imperfeições	8852	16323	8854	5431	1848
Vão	8820	15926	8826	5371	1848
Mesa	6819	12499	7019	4102	1369
Viga I	14029	25339	14700	8905	4200
Viga retang.	2966	7139	3031	1800	413

No entanto, a fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios necessita de análise iterativa para obtenção do M_{crit} , considerando a não-linearidade física do concreto.

Como para recomendações normativas normalmente a análise deve ser simplificada são apresentadas relações em função do momento crítico elástico M_{crit}^* .

Tabela 44 – Relações entre momentos

Parâmetro variado	$\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}}$	$\sqrt{\frac{M_{crit}}{M_{pp}}}$	$\sqrt{\frac{M_{crit}^*}{M_{pp}}}$	$\sqrt{\frac{M_{crit}}{M_r}}$	$\sqrt{\frac{M_{crit}^*}{M_r}}$
f_{ck}	0,76	2,18	3,00	1,30	1,79
Imperfeições	0,74	2,19	2,97	1,28	1,73
Vão	0,74	2,18	2,94	1,28	1,72
Largura da mesa	0,75	2,23	3,02	1,29	1,75
Alma de viga I	0,76	1,83	2,46	1,26	1,69
Largura de viga retangular	0,65	2,68	4,16	1,28	1,99

**momento crítico elástico*

A primeira relação $\sqrt{M_u/M_{crit}^*}$ teve resultados bem próximos quando trataram de vigas I. No entanto, a viga retangular é mais suscetível à instabilidade do que as seções I, como foi visto no item 4.3.6, portanto é concordante esta razão ser menor.

Por exemplo, tomando um caso em que espera-se que a viga tenha ruptura por instabilidade na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios, como a viga PCI BT-72 com f_{ck} de 60 MPa. Seu M_{crit}^* é 13627 kN.m e seu M_u é 12659 kN.m, então a relação $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} = \sqrt{\frac{12659}{13627}} = 0,96$. Como o limite estabelece que a razão deve ser menor que 0,74 a viga teoricamente não é segura para a fase em questão. Esta razão pode ser calculada de maneira rápida e prática.

A relação $\sqrt{M_{crit}/M_r}$ foi aproximadamente a mesma para todos os casos limite determinados, inclusive para vigas retangulares. Para este parâmetro os valores que resultarem maiores que 1,3 estão seguros, pois quanto mais próximo o M_{crit} for do momento de fissuração M_r , mais esbelta é a viga. Por exemplo, no caso em que $\sqrt{\frac{M_{crit}}{M_r}} = 1$, a instabilidade é elástica, pois ocorre antes do elemento fissurar.

Tomando o caso da viga PCI BT-72 com imperfeições geométricas δ_0 e θ_0 iguais a 4 cm e 0,016 rad, respectivamente, e f_{ck} de 40 MPa. Espera-se que esta viga sofra instabilidade

antes da ruptura por flexão, pois $M_{crit} < M_u$. O M_{crit} é 7644 kN.m e o M_r é 6884 kN.m, portanto a razão $\sqrt{\frac{M_{crit}}{M_r}} = \sqrt{\frac{7644}{6884}} = 1,05$, sendo menor que 1,3.

5 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa é uma contribuição à verificação da segurança de vigas contra instabilidade lateral em situações transitórias.

Das normas apresentadas apenas o **EUROCODE 2 (2004)** tem recomendação de limite de esbeltez para situações transitórias ($\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$).

Na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios a esbeltez $\ell h/b_f^2$ mínima encontrada para vigas I foi de 53,8. O código **BS:8110 (2007)** recomenda que esta esbeltez seja menor que 250, ou seja, segundo a norma o elemento poderia ser muito mais esbelto. Portanto, neste caso a recomendação da norma está contra a segurança.

Considerando a esbeltez $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ do **EUROCODE 2 (2004)**, o valor mínimo encontrado foi de 38,7. O limite desta norma para fase transitória é 70. Este limite também é considerado contra segurança.

No caso de vigas retangulares, os limites obtidos das esbeltezes $\ell h/b_f^2$ e $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ foram 825 e 202, respectivamente, sendo bastante superior a 250 e 70, recomendados pelo **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)**. No entanto, o objetivo das normas é verificar estes limites para dispensa de uma análise mais criteriosa do problema de instabilidade.

A análise paramétrica de variação do vão de vigas I na fase transitória de içamento com balanços, o limite de esbeltez $\ell h/b_f^2$ encontrado foi 58,3 e $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ de 43. Ao avaliar a variação da largura da mesa comprimida, foram encontrados valores de 260 e 120, respectivamente, que resultaram altos devido à pequena largura da mesa, sendo as diferenças de 77 % e 64 %, para a mesma situação transitória.

Para vigas retangulares em içamento com balanços foi determinada uma esbeltez limite $\ell h/b_f^2$ de 3000 e $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ de 500 cuja segurança é verificada. No entanto, estes limites resultam em vigas esbeltas. A análise paramétrica de vigas retangulares na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios foi encontrado um limite de 825. Portanto, este prevalece sobre o limite obtido para içamento.

No caso da fase transitória de transporte a análise paramétrica que resultou nos menores limites foi a de variação da largura da alma, $\ell h/b_f^2$ de 40 e $\ell h^{1/3}/b_f^{4/3}$ de 30. Mas caso fosse utilizado o recurso de protensão temporária da mesa superior, para esta situação transitória, a esbeltez poderia ser maior.

Segundo os resultados das análises paramétricas, os limites das normas atuais são conservadores na verificação de vigas retangulares e normalmente contra a segurança nos casos de vigas I.

Os códigos necessitam de novos limites de esbeltez para se atualizarem quanto a realidade dos materiais utilizados na fabricação de vigas. Estes limites devem levar em conta, além das propriedades dos materiais, os parâmetros de imperfeição geométrica.

Destaca-se a diferença entre os limites encontrados de seções retangulares e seções I e conclui-se a necessidade de recomendações diferentes para os dois tipos de seção.

Foram obtidos limites para a relação $\frac{p_{crit}}{p_{pp}}$ a partir das análises paramétricas nas fases de içamento e transporte. Em vigas I o valor máximo determinado foi de 2,5, 37,5 % menor que o limite clássico $\frac{p_{crit}}{p_{pp}} > 4$. As vigas retangulares tiveram um limite de 3,3, com diferença de 17,5 %.

Segundo as análises pela formulação de **Mast (1993)**, a recomendação clássica $\frac{p_{crit}}{p_{pp}} > 4$ é conservadora. No entanto, ao ser verificada pode-se desprezar efeitos da esbeltez do elemento.

Se novas relações $\frac{p_{crit}}{p_{pp}}$ fossem efetivamente determinadas, novos e maiores limites de esbeltez poderiam ser obtidos. Consequentemente, resultaria em elementos mais esbeltos e mais leves.

Por ser uma recomendação bastante antiga são necessárias novas avaliações, pois os materiais e as técnicas evoluíram bastante, além da crescente industrialização da construção.

Na análise da viga PCI BT-72 na fase de pré-serviço com contraventamento nos apoios, segundo variação do f_{ck} entre 40 e 90 MPa, resultou em um aumento do momento crítico de instabilidade de 25,6 %, para a formulação de **Hurff (2010)**. Esta variação pode ser considerada significativa quando o M_{crit} estiver próximo ao M_u .

Nesta mesma fase, sendo o foco as imperfeições, a formulação de **Kalkan (2014)** que considera a hipótese de **Southwell (1932)** para as imperfeições, mostrou-se mais sensível à variação dos deslocamentos laterais. Para o intervalo adotado a variação do M_{crit} foi de 15,4 %. Já a formulação de **Hurff (2010)**, baseada em resultados experimentais, é mais sensível às rotações iniciais. No intervalo adotado a variação do M_{crit} foi de 30,4 %. Conclui-se que as imperfeições geométricas são importantes segundo estas formulações.

As vigas I apresentaram certo padrão nos resultados de esbeltez $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}}$ considerando o momento crítico elástico M_{crit}^* que é de fácil obtenção. A esbeltez ficou contida em um intervalo bem restrito $0,74 \leq \sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} \leq 0,76$. Para vigas retangulares o limite obtido foi $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}} \leq 0,65$.

Foram determinadas para a relação limite $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}}} < 1$, as relações do M_{crit} com o momento de fissuração M_r e o momento devido ao peso próprio M_{pp} . A primeira razão ficou contida no intervalo $1,26 \leq \sqrt{\frac{M_{crit}}{M_r}} \leq 1,30$, para todos os casos avaliados. Nesta situação o limite de segurança a se adotar seria $\sqrt{\frac{M_{crit}}{M_r}} \geq 1,30$.

Quando são considerados os parâmetros elásticos para o M_{crit}^* a relação tem uma variação maior $1,69 \leq \sqrt{\frac{M_{crit}^*}{M_r}} \leq 1,79$, para vigas I. As vigas retangulares apresentaram uma relação de 1,99.

As relações com o M_{pp} resultaram nos intervalos $1,83 \leq \sqrt{\frac{M_{crit}}{M_{pp}}} \leq 2,68$ e $2,46 \leq \sqrt{\frac{M_{crit}^*}{M_{pp}}} \leq 4,16$. Portanto, pode ser conservador recomendar o maior valor encontrado.

Na análise paramétrica levando-se em conta a variação de deslocamento lateral, constatou-se que a diferença na carga crítica é pequena entre a utilização da imperfeição geométrica do **BS:8110 (2007)** e **EUROCODE 2 (2004)**, podendo qualquer uma ser utilizada. As diferenças foram para a formulação de **Hurff (2010)** no valor de 1,2 % e **Kalkan (2014)** de 5%.

A verificação utilizando as recomendações das normas pode ser arriscada, por simplesmente não considerar parâmetros como imperfeições geométricas e f_{ck} . Uma alternativa mais abrangente é a verificação da instabilidade por relações que considerem o momento crítico de instabilidade lateral M_{crit} ou carga crítica p_{crit} .

Novas especificações de imperfeição inicial, em deslocamento e giro, devem ser determinadas a partir de amostragem em campo, por exemplo, para as normas brasileiras **ABNT NBR 6118:2007** e **ABNT NBR 9062:2006**.

Como esperado o limite obtido para vigas retangulares é mais baixo para relações como $\sqrt{\frac{M_u}{M_{crit}^*}}$, devido à maior suscetibilidade desta seção ao fenômeno da instabilidade. Mas seria interessante fazer as mesmas análises feitas para as vigas I, por exemplo, variando f_{ck} e imperfeições geométricas.

As fases transitórias são extremamente complexas e o que acontece no campo é de difícil previsão. Portanto mais estudos devem ser realizados através de simulações numéricas, análise experimental de situações que representem as situações transitórias e medições de imperfeições geométricas em campo para que as normas possam apresentar recomendações mais confiáveis.

A rigidez da suspensão dos caminhões de transporte de vigas e dos aparelhos de apoios são pouco conhecidos no Brasil. Portanto, necessitam ser mais bem estudados, inclusive a realização de ensaios para que a recomendação seja aplicável a cada país.

Nos exemplos realizados foi constatada a perda de contato entre o aparelho de apoio e a face inferior da viga. Mas como esse campo ainda foi pouco explorado no Brasil, não foi realizada análise paramétrica da fase de pré-serviço sem contraventamento nos apoios.

As imperfeições geométricas iniciais a serem adotadas nas verificações também precisam ser mais pesquisadas. Os giros iniciais das seções mostraram ter grande influência nos resultados de carga crítica e momento crítico. No entanto, não existe norma que leve em conta a consideração deste tipo de imperfeição geométrica.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AASHTO LRFD Bridge Design Specifications (2007), 4th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC.

ACI COMMITTEE 318, “Building Code Requirements for Structural Concrete (**ACI 318-02**) and Commentary (318R-02),” American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 2002, 443 pp.

ANDERSON, A. R. (1971). Lateral stability of long prestressed concrete beams. **PCI Journal**, 16(3), 7-9. Discussion by R. A. Swann, *PCI Journal*, 16(6), 85-86. Closure, *PCI Journal*, 16(6), 86-87.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2001). **NBR 9062** - Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). **NBR 7187** - Projeto e execução de pontes de concreto armado e protendido - Procedimento. Rio de Janeiro, ABNT.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2007). **NBR 6118** – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, ABNT.

BARKER, R. M.; PUCKETT, J. A. (1997). **Design of Highway Bridges: An LRFD Approach**. John Wiley and Sons, New York, 528p.

BAŽANT, Z.P.; OH, B.-H. (1984). Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, 81 (3), 268–278.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION, **BS 8110**. Code of practice for structural use of concrete. London; 1997.

CONSOLAZIO, G. R.; HAMILTON, H. R. (2007). Lateral Bracing of Long-Span Florida Bulb-Tee Girders. **Structures Research Report**, University of Florida, July 2007.

EL DEBS, M. K. (2000). **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. São Carlos, EESC-USP - Projeto Reenge.

EUROPEAN COMMITTEE OF STANDARDIZATION (2004). **EUROCODE 2** - Design of Concrete Structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, Brussels, 160 pp.

GEORGE R. M (1992). Behaviour of articulated vehicles on curves. **Third International Symposium on Heavy Vehicle Weights and Dimensions** (eds D. Cebon and C. G. B. Mitchell). Thomas Telford, London.

GHALI, A.; NEVILLE, A. (1989). **Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach**. 3^a ed., Chapman & Hall, New York, 896p.

GILBERT, R.I.; MICKLEBOROUGH, N.C. (1990). **Design of prestressed concrete**, Unwin Hyman, London, 504pp.

GIRIJA, K.; MENON, D. (2011). Reduction in flexural strength in rectangular RC beams due to slenderness. **Engineering Structures**, 33(8), 2398-2406.

HARRIS A. J. Hangars at London Airport, design o large span prestressed concrete beams. **The Structural Engineer**, 1952, 30, 226±235.

HILL, C. D.; DICK, J. S.; TADROS, M. K. (2009). PCI Advisory on I-Girder Stability during Handling and Construction. Safety and Serviceability, **Aspire Magazine**, Winter 2009 Issue, pp 38-40.

HSU, T. T. C. (1984). **Torsion of Reinforced Concrete**. Van Nostrand Reinhold Co. Inc., New York, 544 pp.

HURFF, J. B. (2010). **Stability of Precast Prestressed Concrete Bridge Girders Considering Imperfections and Thermal Effects**. Ph.D. diss., School of Civil and Environmental Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA.

HURFF, J.; KAHN, L. (2010). Lateral-Torsional Buckling Experiments on Rectangular Prestressed Concrete Beams. In: THIRD INTERNATIONAL FIB CONGRESS INCORPORATING THE PCI ANNUAL CONVENTION AND BRIDGE CONFERENCE. 4., 2010, Washington. **Proceedings...** Washington: 2010. p. 2916-2927.

IMPER, R. R.; LASZLO, G. (1987). Handling and shipping of long span bridge beams. **PCI Journal**, p.86-101, Nov.-Dec.

KALKAN, I. (2014) Lateral Torsional Buckling of Rectangular Reinforced Concrete Beams. **ACI Structural Journal**, V. 111 (1), January/February, 71-82.

KIRBY, P.A.; NETHERCOT, D.A. (1979). **Design for structural stability**. London: Granada

LEBELLE, P. (1959). Stabilité élastique des poutres en béton précontraint a l'égard de déversement latéral. **Ann. Batiment et des Travaux Publics**, 141, 780±830.

LEONHARDT, F. (1964). **Prestressed Concrete Design and Construction**, 2nd edition, Wilhem Ernst & Sonh, Germany. 677p.

LIMA, M. C. V. (1995). **Instabilidade lateral das vigas pré-moldadas em serviço e durante a fase transitória**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos - USP. 146p.

LIMA, M. C. V. (2002). **Contribuição ao estudo da instabilidade lateral de vigas pré-moldadas**. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

LIN, T. Y.; BURNS, N. H. (1981). **Design of Prestressed Concrete Structures**. 3^a ed. John Wiley & Sons, New York, 646p.

MAST, R. F. (1989). Lateral stability of long prestressed concrete beams, Part 1. **PCI Journal**, p.34-53, Jan.-Feb.

MAST, R. F. (1993). Lateral stability of long prestressed concrete beams, Part 2. **PCI Journal**, p.70-88, Jan.-Feb.

MATTOCK, A. H.; YAMAZAKI, J.; KATTULA, B. T.. Comparative Study of Prestressed Concrete Beams, with and without Bond, **ACI Structural Journal**, Proceedings V. 68, No. 3, Feb., pp. 116-125, 1971.

OESTERLE, R. G., M. J. SHEEHAN, H. R. LOTFI, W. G. CORLEY, AND J. J. ROLLER. (2007). **Investigation of Red Mountain Freeway Bridge Girder Collapse**. Final report, CTLGroup project no. 262291. Skokie, IL: CTLGroup.

PARK, R.; PAULAY, T. (1975). **Reinforced concrete structures**. Ed. John Wiley & Sons. EUA. 769p.

PCI Bridge Design Manual (2003), 2nd ed., Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL.

PCI Tolerance Manual for Precast and Prestressed Concrete Construction (2000), 1st ed., Prestressed Concrete Institute, Chicago, IL. Publishing.

REVATHI, P., MENON, D. (2006) Estimation of Critical Buckling Moments in Reinforced Concrete Slender Beams. **ACI Structural Journal**, V. 103 (2), March/April, 296-303.

REVATHI, P., MENON, D. (2007) Slenderness Effects in Reinforced Concrete Beams. **ACI Structural Journal**, V. 104 (4), July/August, 412-419.

SOUTHWELL, R. V. (1932). On the analysis of experimental observations in problems of elastic stability. **Proceedings of the Royal Society**, Series A.

STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J. (1999). Lateral stability of long precast concrete beams. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Structures and Bridges**, v.134, p.169-180.

STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J. (2000). The toppling of hanging beams. **International Journal of Solids and Structures**, v.37, p.3569-3589.

STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J. (2001). Lateral Instability of Long-Span Prestressed Concrete Beams on Flexible Bearings. **Structural Engineer** 79 (6): 23–26.

STRATFORD, T. J.; BURGOYNE, C. J.; TAYLOR, H. P. J. (1999). Stability design of long precast concrete beams. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Structures and Bridges**, v.134, p.159-168.

TAVIO; TENG, S. (2004). Effective torsional rigidity of reinforced concrete members. **ACI Structural Journal**, 101(2):252–60.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. (1988). **Theory of Elastic Stability**. McGraw Hill. New York.

YAZDINI, N.; EDDY, S.; CAI, C. S. (2000). Effect of Bearing Pads on Precast Prestressed Concrete Bridges. **ASCE Journal of Bridge Engineering**, V. 5, No. 3, Aug., pp. 224-232.