

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

CARLOS AUGUSTO MOREIRA FILHO

Análise estática não linear plana de pontes estaiadas e determinação das
frequências naturais e modos de vibração.

São Carlos

2014

CARLOS AUGUSTO MOREIRA FILHO

Análise estática não linear plana de pontes estaiadas e determinação das frequências naturais e modos de vibração.

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Titular Dr. José Elias Laier

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

M835a Moreira Filho, Carlos Augusto
 Análise estática não linear plana de pontes
 estaiadas e determinação das frequências naturais e
 modos de vibração / Carlos Augusto Moreira Filho;
 orientador José Elias Laier. São Carlos, 2014.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
 em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
 São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

 1. Método dos elementos finitos. 2. Análise
 não-linear geométrica. 3. Análise modal. 4. Método da
 anulação dos deslocamentos. 5. Pontes estaiadas. I.
 Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **CARLOS AUGUSTO MOREIRA FILHO**.

Título da dissertação: "Análise estática não linear plana de pontes estaiadas e determinação das frequências naturais de vibração".

Data da defesa: 27/03/2014

Comissão Julgadora:

Prof. Titular **José Elias Laier (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Walter Libardi**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Resultado:

Aprovado

Aprovado

Aprovado

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

*Aos meus avós Manoel Victor Telles Moreira,
Flora Naslavsky Moreira
Luiz Carlos da Costa Menezes,
e Lúcia Maria Mota de Menezes.*

AGRADECIMENTOS

À minha família, especialmente, meus pais Carlos Augusto Moreira, Ana Lize Menezes Moreira, meu irmão, Mané, e ao irmão do coração, Nando, pelo apoio incondicional.

À minha namorada, Nazinha, pelo amor e compreensão nessa etapa da minha vida, sempre ao meu lado e me incentivando, independentemente da distância, uma verdadeira companheira.

Ao meu orientador, Prof. Titular José Elias Laier, pelas sugestões e paciência durante a realização deste trabalho.

Aos professores Leopoldo Pisanelli, e Walter Libardi, por aceitarem a participação na banca examinadora, e pelas contribuições apresentadas ao trabalho.

Ao meu tio, Ivan, que sempre me incentivou e me guiou com seus sábios conselhos, sempre se preocupado com o andamento da pesquisa.

Aos professores do departamento, em especial aos professores Rodrigo Ribeiro Paccola, por estar sempre disposto a sanar minhas dúvidas, ao professor Edson Denner Leonel, também se mostrando sempre solícito, e ao professor Humberto Breves Coda, pelas sugestões feitas na qualificação.

Aos amigos de infância e os amigos que fiz no Departamento de Estruturas que ajudaram a passar o tempo nesta confraria de doidos. Em ordem alfabética, Andrezão, Arthur, Ayrton, Barretos, Kétson, Carlos Orozco, Cleilson, El Niño, Elias, Emerson, Fernandão, Fernando (Colombiano), Henrique, Hugão, Marcell, Matheus, Nichollas, Pablito, Ricardo, Sérgio (Colombiano), Serjão, e, até mesmo, Greg o “Intruso”.

Aos professores da UFPE que participaram da minha formação, Bernardo Horowitz, Silvana Maria Bastos, Paulo Régis, Tibério Wanderley, Ézio da Rocha, João Recena, e Washington.

Aos meus colegas de trabalho da Engedata e Tecomat, Dr. Patrocínio, Dr. Sérgio Osório, Dr. Antônio Alves, Eldney, Manoela, Verônica, Henrique, Marcela, Silvania, Emília, Adriano, Fernando, Wesley, Jairo, Neto, Gabriela, Dr. Angelo Just.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

RESUMO

MOREIRA FILHO, C. A. **Análise Estática Não Linear Plana de Pontes Estaiadas e Determinação das Frequências Naturais e Modos de Vibração**. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

As pontes estaiadas são exemplos de estruturas esbeltas e flexíveis onde a capacidade de utilização dos materiais tem grande importância. Neste sentido, para garantir a melhor utilização dos materiais envolvidos (aço e concreto, por exemplo), é preciso determinar as forças de protensão aplicadas aos cabos. A melhor distribuição dos momentos fletores no tabuleiro de ponte é aquela obtida com uma viga contínua. Pontes estaiadas fornecem apoios elásticos ao tabuleiro. O presente trabalho emprega o método da anulação dos deslocamentos, MAD, para obter as forças axiais a que os cabos estarão submetidos de modo a aproximar o comportamento do tabuleiro ao de uma viga contínua. O método MAD, proporciona uma estrutura economicamente mais viável. O código computacional desenvolvido realiza análises estática e modal por meio do método dos elementos finitos, MEF. A análise estática utilizada é a não linear geométrica, considerando as não linearidades do efeito de catenária do cabo, e dos elementos submetidos à compressão. O material é assumido no campo do regime elástico linear. A ponte é modelada por elementos de treliça plana com módulo de elasticidade de Dischinger, para simular os cabos, e elementos de pórtico plano para os elementos do tabuleiro e da torre. O carregamento da estrutura considera a atuação apenas do peso-próprio dos elementos estruturais. O código computacional desenvolvido permite, também, a análise modal da estrutura a fim de determinar suas frequências naturais e modos de vibração. A análise modal pode ser realizada com a matriz de massa concentrada, ou consistente. Em relação à matriz de rigidez, a análise modal da estrutura pode utilizar a matriz de rigidez linear, para uma análise de vibrações livres, ou a matriz de rigidez tangente para as análises de vibração sob tensões iniciais. Exemplos encontrados na literatura são resolvidos com o código computacional desenvolvido para verificação e validação.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos. Análise não linear geométrica. Análise modal. Método da anulação dos deslocamentos. Pontes estaiadas.

ABSTRACT

MOREIRA FILHO, C. A. **Nonlinear Static Analysis of Plane Cable-Stayed Bridges and Determination of Natural Frequencies and Vibration Modes.** Master's Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

The cable-stayed bridges are examples of slender and flexible where the usability of the materials is very important structures. In this sense, to ensure the best use of the materials involved (steel and concrete, for example), one must determine the forces applied to the prestressing cables. A better distribution of the bending moments in the bridge deck is obtained with a continuous beam. Cable-stayed bridges provide elastic support to the deck. This work employs the zero displacement method, ZDM, to determine the axial forces that the cables will be subjected to in order to approximate the behavior of the deck to the one as a continuous beam. The ZDM method provides an economically viable structure. The computational code performs static and modal analysis, which are performed by using the finite element method, FEM. The static analysis is a nonlinear geometric analysis which considers the nonlinearities of the cable sag, and the compression effects on the elements. The material is assumed in the field of linear elastic regime. The bridge is modeled by elements of plane truss with Dischinger's elasticity module, to simulate cables and plane frame elements for the deck and the tower elements. The structure is subjected to self-weight of the elements. The computer code developed also performs the modal analysis of the structure to determine their natural frequencies and mode shapes. The modal analysis can be carried out with the concentrated or consistent mass matrix. In relation to the stiffness matrix, modal analysis of the structure may use a linear stiffness matrix for analysis of free vibration analysis or the tangent stiffness matrix for the analysis of vibration under initial stress. Examples in the literature are solved with the computational code developed for verification and validation.

Keywords: Finite element method. Nonlinear geometric analysis. Modal analysis. Zero displacement method. Cable-stayed bridges.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	15
1.2	OBJETIVOS	20
1.3	JUSTIFICATIVA	21
1.4	METODOLOGIA	22
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	ESTADO DA ARTE	25
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	45
3.1	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	46
3.2	FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS	49
3.2.1	MATRIZ DE RIGIDEZ E MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO FINITO	52
3.2.2	VETOR DE CARREGAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO FINITO	59
4	ANÁLISES ENVOLVIDAS E O MÉTODO DA ANULAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS (MAD)	63
4.1	ANÁLISES ENVOLVIDAS	63
4.1.1	ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR	63
4.1.2	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	65
4.1.3	ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA	66
4.1.4	ANÁLISE DE VIBRAÇÕES SOB TENSÕES INICIAIS	67
4.2	A ESCOLHA DO MÉTODO DA ANULAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS – MAD	67
4.3	DESCRIÇÃO DO MÉTODO MAD	70
4.4	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	73
4.5	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	74
4.6	FORMULAÇÃO DO MÉTODO MAD	78
5	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL	83
5.1	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO	84
5.1.1	PORTAL DE VOIGT	84

5.1.1.1	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	85
5.1.1.2	ANÁLISE MODAL	86
5.1.2	PONTE ESTAIADA ASSIMÉTRICA COM DOIS ESTAIS	89
5.1.2.1	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	90
5.1.2.2	ANÁLISE MODAL	98
5.1.3	PONTE ESTAIADA SIMÉTRICA EM CONFIGURAÇÃO DE HARPA	104
5.1.3.1	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	106
5.1.3.2	ANÁLISE MODAL	113
5.1.4	PONTE ESTAIADA SIMÉTRICA EM CONFIGURAÇÃO DE LEQUE	117
5.1.4.1	ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	119
5.1.4.2	ANÁLISE MODAL	129
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	137
6.1	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL	137
6.2	ANÁLISE ESTRUTURAL	138
6.3	PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO	140
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
	APÊNDICE A – MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO	145

1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo tem como finalidade efetuar a apresentação da temática da pesquisa. São expostas considerações iniciais, com o intuito de promover contextualização do tema em estudo. Ainda são apresentados os objetivos do trabalho, justificativa do tema, a metodologia adotada, e a organização do trabalho.

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Com o aprimoramento de técnicas construtivas, e os avanços tecnológicos obtidos nos materiais empregados na construção civil, intensifica-se a busca por estruturas que proporcionem menor consumo de material, e que sejam mais resistentes, e esbeltas, onde o aspecto estético passa a ter grande relevância na concepção de um projeto.

As pontes e viadutos passaram a ter uma importância, além de sua função principal, que é transpor obstáculos, de figurar como modeladores da paisagem de uma cidade, ou país, servindo de marcos arquitetônicos locais. Os modelos estruturais de pontes que estão em destaque na atualidade, tanto pela beleza quanto pela eficiência estrutural, são as pontes com suporte de cabos. Essas pontes são conhecidas por transporem grandes vãos com uso de pouca quantidade de material.

Nesta categoria de pontes, encontram-se as pontes estaiadas e as pontes suspensas, também conhecidas como pênséis. A principal distinção entre as pontes suspensas e as pontes estaiadas, segundo Troitsky (1988), é a forma como os cabos são capazes de promover a sustentação dos elementos estruturais.

Troitsky (1988) afirma que o tabuleiro, nas pontes suspensas, são sustentados por cabos verticais que estão fixados a um cabo principal que está frouxamente pendurado, enquanto que as pontes estaiadas o tabuleiro é sustentado diretamente pelas torres com os

cabos, o que confere às pontes estaiadas uma estrutura mais contraventada que as pontes pênséis. O presente trabalho tem como enfoque as pontes estaiadas, cada vez mais populares entre os projetistas.

Os cabos possuem um comportamento extremamente não linear geométrico proveniente do efeito de catenária. Então, para obter a resposta mecânica da estrutura de forma mais condizente com a realidade, faz-se necessário levar em consideração o comportamento não linear dos estais na modelagem da estrutura.

Com o aumento da complexidade das estruturas, as representações matemáticas dos problemas passam a ter soluções analíticas cada vez mais difíceis de se obter, devido ao alto grau de complexibilidade das equações diferenciais envolvidas, e das condições de contorno a serem obedecidas.

O modelo matemático de representação deve englobar as relações constitutivas dos materiais, as relações de equilíbrio e as relações deslocamentos/deformações. Para se obter as soluções de estruturas complexas, foram desenvolvidos métodos numéricos, que buscam uma solução aproximada com uma boa exatidão e precisão [Figura 1.1], desde que discretizado de forma correta, com elementos de aproximação adequada.

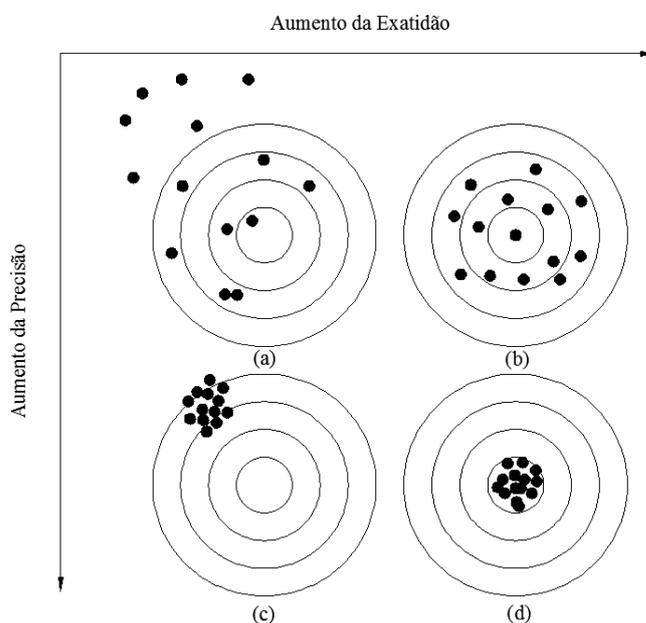


Figura 1.1 - Exemplos de exatidão e precisão. (a) Inacurado e impreciso; (b) acurado e impreciso; (c) inacurado e preciso; (d) acurado e preciso [Chapra e Canale, 2008].

Nesse sentido, um dos métodos numéricos mais difundidos é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Segundo Holland (1974) o método do elemento finito teve sua

primeira aplicação em 1943 com a publicação de um artigo do matemático Richard Courant sobre análise de torção. Holland (1974) cita, também, outro matemático, Synge, que aprofundou o método em 1952, e lançou um livro em 1957.

Mas, de acordo com Assan (2003), foi apenas em 1956, com a publicação dos trabalhos desenvolvidos por Turner, Clough, Martin e Topp, que o método dos elementos finitos teve sua formulação desenvolvida da forma empregada até hoje. Além destes, Holland (1974) cita também Zienkiewicz e Argyris como os principais nomes envolvidos com o desenvolvimento do método dos elementos finitos.

Assan (2003) afirma que Clough deu o nome de método dos elementos finitos para diferenciar do método dos elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial.

O método MEF pode ser empregado tanto na solução de sistemas de equações lineares, bem como não lineares. A resolução dos sistemas não lineares se faz de forma iterativa até se obter uma resposta dentro de uma tolerância especificada (ϵ_s).

As pontes estaiadas são estruturas de grande porte e de alta complexibilidade. É preciso ter cuidados especiais para garantir o bom funcionamento da estrutura. Uma das formas de se monitorar este comportamento é por meio de ensaios dinâmicos.

Os ensaios dinâmicos possuem caráter não destrutivo, isto é, são ensaios que implicam danos imperceptíveis ou nulos à estrutura. Mehta e Monteiro (2008) afirmam que existe um grande interesse em desenvolvimento de ensaios não destrutivos para avaliar estruturas de concreto. Estes ensaios não destrutivos podem ser estendidos para estruturas civis em geral, como estruturas de aço, mistas, e de materiais compósitos.

Os autores observaram que o aperfeiçoamento desses métodos pode gerar grande economia para os cofres públicos tendo em vista que métodos mais eficientes para detecção de danos podem encontrar defeitos no concreto antes que o custo de manutenção se torne alto demais, ou até inviável.

Os ensaios dinâmicos visam obter dados físicos da estrutura *in-loco*, mais comumente a aceleração gerada pela aplicação de uma solicitação dinâmica. Ren, Peng e Lin (2005) citam como principais testes dinâmicos os ensaios de vibração forçada, vibração livre e vibração ambiental. Através dos dados de aceleração, é possível obter o modelo modal experimental da estrutura.

O modelo modal permite descrever as características dinâmicas da estrutura, traduzidas através das frequências naturais, os seus modos de vibrar, e as razões de amortecimento viscoso da estrutura.

A análise do comportamento dinâmico não é tão explorada na engenharia civil brasileira quanto em outros países. Isto ocorre porque o país encontra-se em uma região privilegiada, não havendo grandes problemas relacionados a sismos.

No entanto, o conhecimento do comportamento da estrutura ante os efeitos dinâmicos pode revelar-se de extrema valia ao se monitorar estruturas já existentes, ou em fase construtiva. Isso porque as frequências naturais da estrutura são função da rigidez e da massa da estrutura.

O modelo modal teórico da estrutura pode ser obtido por meio de processos numéricos. É importante obter o modelo modal numérico a fim de se realizar comparações com o modelo experimental obtido *in-loco*. Com os dois modelos, é possível comparar as respostas esperadas (modelo teórico/numérico), com as respostas reais medidas com a estrutura real.

Este trabalho se propõe a modelar pontes estaiadas pelo método MEF, a fim de realizar a análise estática sob ação do peso-próprio da estrutura, e obtenção dos parâmetros modais.

Como a estrutura é dimensionada pra ter uma determinada rigidez e massa, qualquer alteração nestas características produz alteração nos valores das frequências naturais. No caso de um dano na estrutura real, ele pode ser percebido pela diminuição da frequência natural, visto que estruturas mais rígidas possuem frequências naturais mais altas.

Com as características dinâmicas da estrutura, além da detecção de danos, é possível fazer o controle de execução da obra, a fim de garantir que os parâmetros de projeto sejam respeitados durante a etapa construtiva.

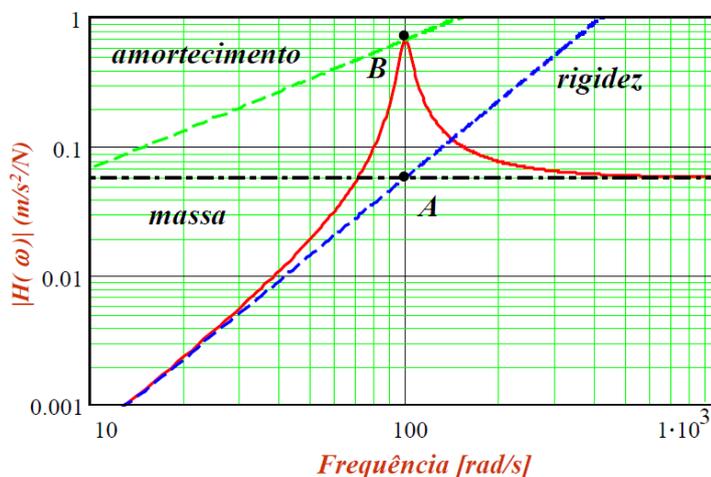


Figura 1.2 – Gráfico da aceleração de um sistema de um grau de liberdade [Varoto, 2011].

Quando uma estrutura é excitada harmonicamente próximo de sua frequência natural ela passa a ter amplitudes de resposta bastante altas, mesmo que estas forças de excitação sejam pequenas, conforme mostra a Figura 1.3. Nela, o fator de amplificação dinâmica da resposta para um sistema de um grau de liberdade, segundo Clough e Penzien (2003) é dado por:

$$D = \frac{x_{\text{máx}}}{x_{\text{estático}}} = [(1 - \beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2]^{-1/2} \quad (1.1)$$

onde D é o fator de amplificação dinâmica, dado pela razão entre o deslocamento máximo da análise dinâmica ($x_{\text{máx}}$) e o deslocamento obtido pela análise estática ($x_{\text{estático}}$), β é a razão entre a frequência de excitação (ω) e a frequência natural (ω_n), e γ é a razão de amortecimento do sistema.

Para sistemas amortecidos, as amplitudes reduzem e tem seu máximo pouco antes que a razão de excitação seja 1. As frequências de ressonância são as frequências onde o sistema possui amplitude máxima. O valor de β para o qual o fator de amplificação dinâmica é máximo, é dado, segundo Clough e Penzien (2003) por:

$$\beta_{\text{ressonância}} = \frac{\omega_{\text{ressonância}}}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\gamma^2} \quad (1.2)$$

Clough e Penzien (2003) afirmam que, na prática, a maior parte das estruturas civis correntes possuem um fator de amortecimento $\gamma \leq 0,20$, o que implica que as frequências ressonantes das estruturas ocorrem praticamente quando se excita a estrutura em suas frequências naturais.

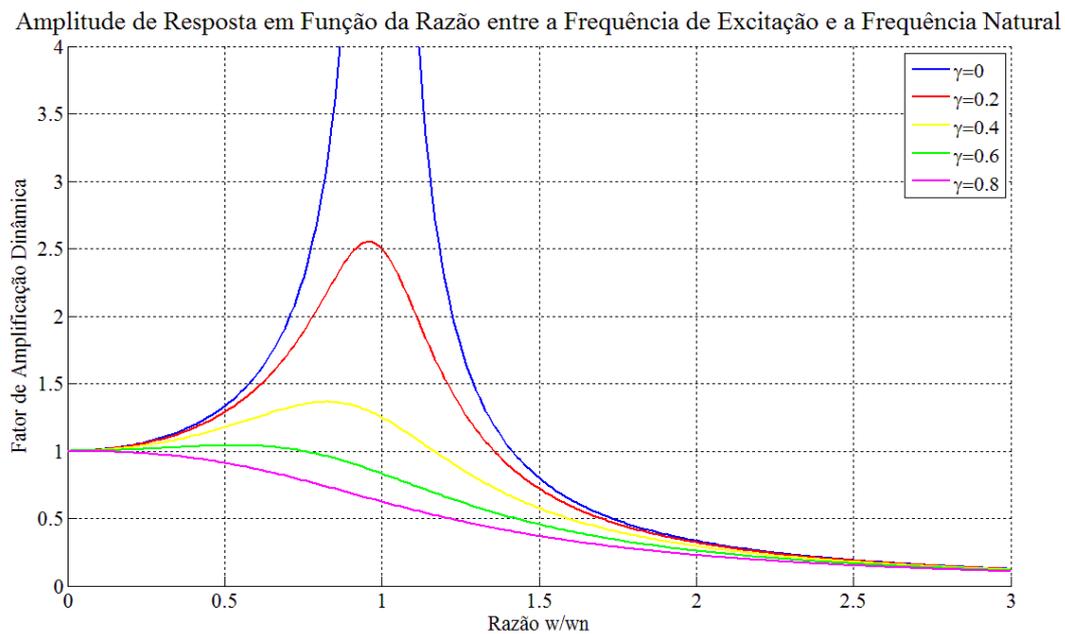


Figura 1.3 - Amplitude de Resposta x Razão entre frequência de excitação e frequência natural [Clough e Penzien, 2003 adaptado].

Com o modelo modal da estrutura é possível conhecer as frequências ressonantes, detecção de danos, e realizar o controle executivo da estrutura.

Assim, esta é a importância de efetuar análise modal, tanto de forma numérica (MEF), quanto de forma experimental. Caso detecte-se alguma anomalia entre os parâmetros aferidos e os esperados, há a possibilidade de realizar a intervenção da estrutura ainda nas primeiras etapas, minimizando custos não planejados.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa é a obtenção dos esforços internos e do modelo modal da estrutura, via método dos elementos finitos, a partir da configuração deslocada inicial da estrutura, obtida por meio de uma análise estática não linear geométrica.

O objetivo específico é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, dotada de uma interface gráfica para entrada de dados, que seja capaz de obter esta caracterização dinâmica da estrutura. Em relação às frequências naturais, tem-se interesse no estudo das frequências de vibração globais da estrutura, onde o modelo adotado é simplificado e não fornece os modos locais de vibração dos cabos. De posse do modelo modal da estrutura, é possível realizar análises com relação às solicitações dinâmicas.

O programa pode ser utilizado, para a detecção de danos, por meio de uma análise comparativa entre as características dinâmicas encontradas experimentalmente, da estrutura real, com os dados obtidos com a análise do modelo numérico.

Para a análise estática não linear, o código desenvolvido emprega o método da anulação dos deslocamentos, MAD, proposto por Wang, Tseng e Yang (1993). O método tem por objetivo eliminar ou tornar suficientemente pequenos os deslocamentos verticais do tabuleiro em pontos de controle escolhidos pelo usuário. Com isso, é possível aproximar o comportamento do tabuleiro da ponte estaiada a um tabuleiro contínuo. O método fornece as forças axiais atuantes nos cabos que são capazes de promover a condição de deslocamento vertical “nulo” em determinados pontos.

Desta forma, é possível utilizar o programa desenvolvido como subsídio ao estudo preliminar de projeto de novas pontes estaiadas, pois este é capaz de fornecer as forças iniciais a que os elementos estão submetidos a fim de determinar as seções transversais dos elementos estruturais da ponte.

1.3 JUSTIFICATIVA

Este projeto promove uma contribuição à temática de linhas de pesquisas já desenvolvidas pelo Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET/EESC), como Método dos Elementos Finitos, Análise Não linear, Dinâmica das Estruturas e Estruturas Especiais.

O trabalho gera uma continuidade de estudos nesta linha de pesquisa de modo a aperfeiçoar o código computacional que será desenvolvido, com posterior implementação de elementos espaciais (3-D) de pórtico e treliça, não linearidade física, análise das características dinâmicas durante as diversas etapas construtivas, com considerações de efeitos dependentes do tempo, bem como ser capaz de realizar análise de carregamentos dinâmicos de origem aleatória, como ventos, veículos etc.

O presente estudo pode trazer benefícios à indústria da construção civil, pois é capaz de proporcionar até estruturas mais leves, com uma concepção estrutural mais racional e otimizada, o que reduz os custos construtivos da obra. Com os dados de frequências naturais, é possível verificar se as condições em campo são capazes de mobilizar estas frequências, e realizar a mitigação necessária.

1.4 METODOLOGIA

A metodologia empregada busca a geração de um código computacional, com auxílio do MATLAB[®], e FORTRAN[®], utilizando a teoria já estabelecida de elementos finitos. Os elementos da ponte serão modelados segundo elementos clássicos de treliça plana, para simular os estais, e elementos de pórtico plano, para a viga e as torres. A análise será feita considerando-se apenas os carregamentos de peso-próprio dos elementos estruturais.

O estai possui um comportamento não linear, não resiste a forças de compressão, e, quanto menor for a catenária do estai, maior será o módulo de elasticidade efetivo do elemento. A modelagem do cabo será realizada por meio de um único elemento finito de treliça plana com módulo de elasticidade equivalente, conhecido também por módulo de elasticidade de Dischinger, para simular o efeito da catenária.

Os sistemas não lineares de equações serão resolvidos de forma incremental-iterativa, utilizando o método de Newton-Raphson. Os resultados obtidos serão validados pela comparação de exemplos de pontes estaiadas modeladas bidimensionalmente (2-D) encontrados na literatura.

As frequências naturais e os modos de vibrar são obtidos pela solução do problema de autovalores e autovetores do sistema estrutural submetido à vibração sob tensões iniciais. Esta etapa de processamento é realizada pelo MATLAB[®].

O programa conta com uma interface gráfica para a entrada de dados, referente à etapa de pré-processamento, desenvolvido em ambiente MATLAB[®], com visualização da estrutura na configuração de referência. O processamento da análise estática (linear e não linear) é realizado pelo FORTRAN[®], enquanto o processamento referente à análise modal é realizado pelo MATLAB[®]. A análise estática não linear da estrutura é responsável por obter a configuração deslocada inicial, e também as tensões iniciais a que os elementos estarão submetidos, e a partir daí obter as características dinâmicas pela análise modal.

O pós-processamento conta com uma saída gráfica, e um arquivo de texto para cada uma das duas análises efetuadas (estática e modal). O pós-processamento gráfico da análise estática mostra os deslocamentos e esforços internos da estrutura, que são salvos na saída de texto. Para a análise modal, a saída de texto apresenta as frequências naturais extraídas em Hertz, ou radianos/segundo, enquanto a saída gráfica mostra o modo de vibrar da estrutura e suas frequências naturais correspondentes em Hertz.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está estruturado em seis capítulos. A sequência dos capítulos é organizada para a melhor assimilação das ideias desenvolvidas. No primeiro capítulo, foram realizadas as considerações iniciais, assim como descritos os objetivos, a justificativa e a metodologia empregada no trabalho.

O capítulo 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica a cerca do estado da arte das pontes estaiadas, no qual é mostrada a importância da análise modal, e a aplicabilidade dos critérios modais para detecção de danos à estrutura. Este capítulo apresenta vários estudos sobre a modelagem de cabos para análise estrutural. Um apanhado sobre as classificações existentes de pontes estaiadas e mostra a evolução deste sistema estrutural.

O capítulo 3 mostra a relevância do método dos elementos finitos na engenharia estrutural e expõe a fundamentação matemática dos elementos finitos clássicos de pórtico, e treliça, que são empregados no código computacional desenvolvido. Estes elementos serão utilizados para discretização das vigas/colunas da ponte, e cabos, respectivamente.

As análises que são desenvolvidas no código computacional são apresentadas no capítulo 4. Este capítulo faz uma abordagem sucinta das análises empregadas, dando ênfase ao método iterativo de Newton-Raphson, e ao método da anulação dos deslocamentos (MAD), que obtém as forças de protensão dos cabos para uma dada configuração de referência. São apresentados os critérios de convergência empregados no código computacional.

Após apresentada a fundamentação teórica para o desenvolvimento do trabalho, o capítulo 5 desenvolve exemplos de validação, que são encontrados na literatura, sendo um pórtico, comparando os resultados obtidos com os apresentados por Connor et al. (1968), Mantilla (1974), e Neves (1990), e três pontes estaiadas apresentadas por Wang, Tseng e Yang (1993), obtendo-se as respostas estáticas e modal para os exemplos.

Finalmente, o capítulo 6 é destinado à conclusão, e propostas para continuação da pesquisa e aperfeiçoamento do código computacional desenvolvido.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma breve revisão do estado da arte com base na revisão bibliográfica realizada. É abordado o histórico das primeiras obras que utilizaram estruturas semelhantes às pontes estaiadas, bem como a evolução das pontes estaiadas. É citado o sinistro da ponte de Tacoma como exemplificação dos problemas que estruturas esbeltas podem estar sujeitas. A importância do conhecimento das características dinâmicas é abordada, bem como a utilização da análise modal numérica x análise modal experimental de estruturas existentes com finalidade de detecção de danos.

São mostradas as classificações existentes dos sistemas estruturais de pontes estaiadas quanto à configuração dos cabos, posição da torre, tipo de suspensão do tabuleiro. São mostrados trabalhos que tratam as diversas formas de modelagem dos estais, bem como as não linearidades presente neste tipo de estrutura e sua relevância para a análise estrutural de pontes estaiadas. Por fim, são apresentados estudos que visam a redução dos esforços no tabuleiro.

2.1 ESTADO DA ARTE

Troitsky (1988) afirma que o uso de cordas e correntes como forma de sustentação de estruturas é uma ideia que vem desde a antiguidade, sendo que os egípcios aplicaram este conceito para a construção de seus barcos à vela [Figura 2.1].

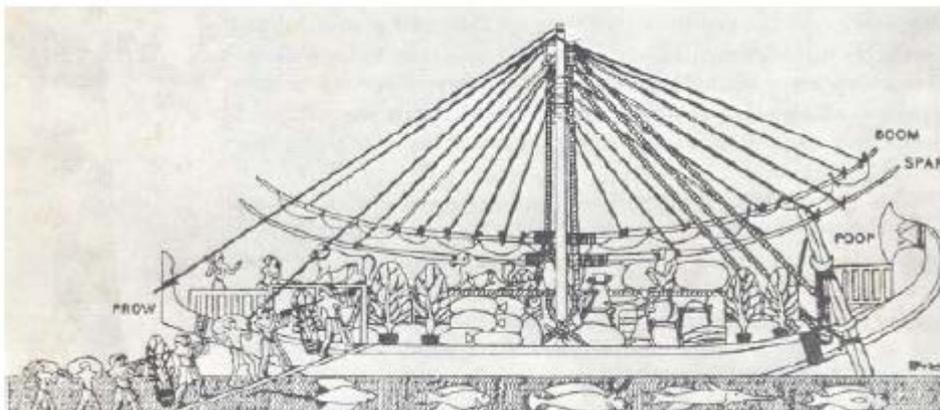


Figura 2.1 - Barco à vela egípcio [Troitsky, 1988] .

O primeiro registro que se tem de pontes estaiadas como uma forma regular de se transpor obstáculos data de 1617, quando, segundo Troitsky (1988), Faustus Verantius propôs uma ponte com tabuleiro de madeira, suportada por barras de aço inclinadas, conforme mostra a Figura 2.2.

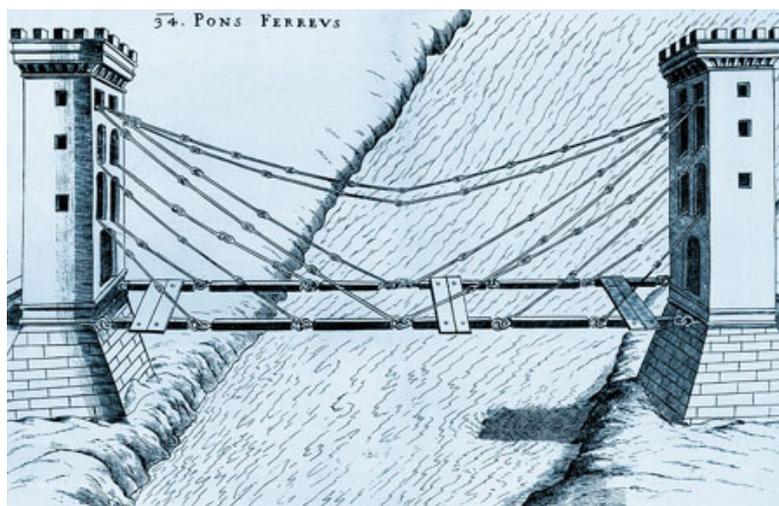


Figura 2.2 - Ponte projetada por Faustus Verantius, Itália, 1617 [Troitsky, 1988].

Virlogeux (1999) afirma que a primeira ponte estaiada moderna em concreto armado foi projetada por Eduardo Torroja, engenheiro espanhol, em 1926 quando construiu o aqueduto de Tempul, em Jerez de la Frontera. Walther et al. (1998) credita a introdução dos aços de alta resistência ao aqueduto de Tempul, situado na Espanha. Mas, segundo o autor, a grande evolução deste sistema estrutural veio com os estudos publicados pelo alemão Franz Dischinger.

Walther et al.(1998) relata a introdução de estais inclinados e protendidos por Dischinger no projeto da ponte suspensa sobre o rio Elba, em 1938. Os autores afirmam que

Dischinger propôs utilizar cabos de aço de alta resistência submetido a altas tensões provocadas por carregamento de peso próprio.

O desenvolvimento, no âmbito internacional, das pontes estaiadas se deu na década de 70, e, a partir da década de 90, passaram a figurar entre os sistemas estruturais capazes de transpor grandes vãos, passando a competir com as pontes suspensas (VIRLOGEUX, 1999). Na Figura 2.3, é possível observar o histórico da evolução dos vãos livres das pontes estaiadas desde 1952 até 2012. A figura original de Virlogeux (1999) mostra a evolução até 1999, as pontes de Sutong e Russky foram adicionadas a fim de atualizar a evolução das pontes estaiadas.

O desenvolvimento de tabuleiros mais esbeltos e flexíveis possibilitaram às pontes estaiadas competir com outros sistemas de pontes, com seus vãos crescendo rapidamente, a ponto de concorrer com as pontes suspensas. No entanto, para conseguir superar os vãos das pontes suspensas será preciso dominar as forças do vento (VIRLOGEUX, 1999).

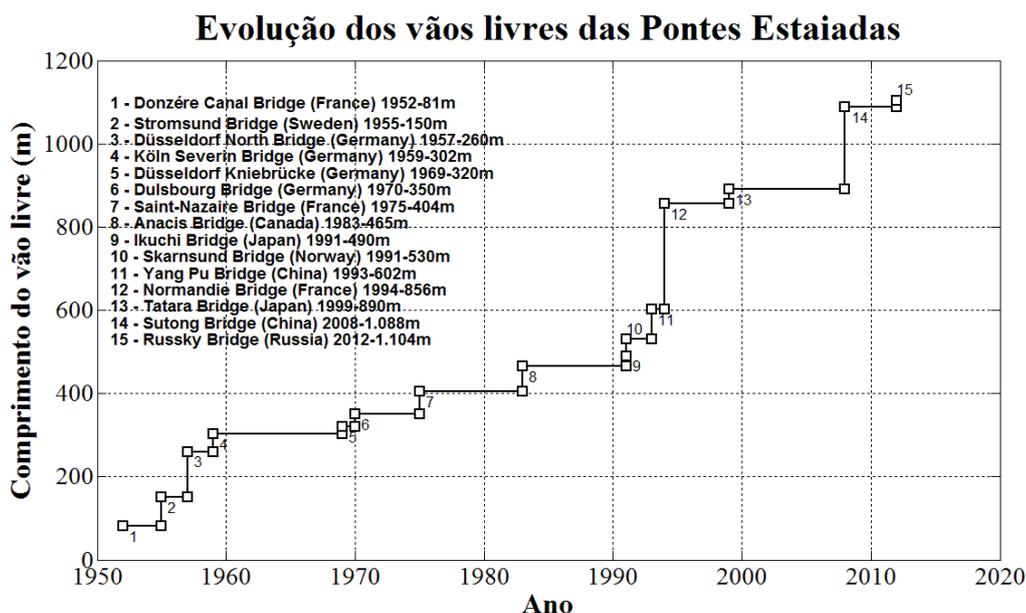


Figura 2.3 - Evolução dos vãos livres das pontes estaiadas – 1952 a 2012 [Virlogeux, 1999 - adaptado].

Um exemplo de acidente ocasionado por ação do vento, como o citado por Virlogeux (1999), é o da ponte suspensa do estreito de Tacoma. Pugsley (1968) a descreve como uma ponte suspensa de aproximadamente 850 metros de extensão, que entrou em colapso devido a oscilações excessivas provocadas por vento transversal à ponte com cerca de 65 quilômetros por hora.

Miyata (2003) atribui o colapso da ponte do estreito de Tacoma a um mecanismo de excitação do modo de vibração torcional da ponte. Segundo Miyata (2003), a excitação foi provocada por um vórtice causado pela interação do vento com a viga principal que gerava regiões alternadas de baixa pressão sincronizadas com o movimento torcional, como se pode observar na Figura 2.4, o que provocou uma auto-excitação da estrutura.

O conhecimento prévio do comportamento aerodinâmico e das frequências naturais da ponte de Tacoma poderia ter evitado o colapso da estrutura. Walther (1998) afirma que, para pontes de pequenas dimensões ou para projeto preliminar, as frequências fundamentais torcionais e flexionais devem distanciar-se de um fator de 2,5. Walther (1998) alega que para uma estrutura real deve-se utilizar o túnel de vento para o estudo detalhado do comportamento aerodinâmico.

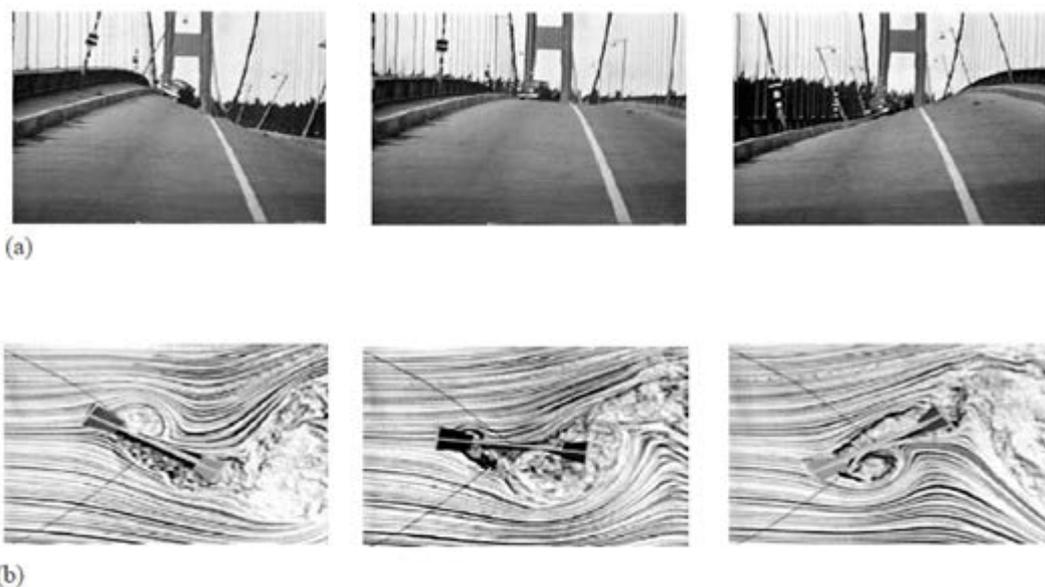


Figura 2.4 - Colapso da ponte do estreito de Tacoma, (a) o modo de vibração torcional levou ao colapso, (b) fluxo de interação do vento com a estrutura criando regiões de baixa pressão [Miyata, 2003 - adaptado].

Outra aplicação do conhecimento das características dinâmicas das estruturas pode ser a detecção de danos. Como Maas et al. (2012) observam, a frequência natural de um dado sistema é uma propriedade constante e invariante, na qual, ao se iniciar a fissuração do material as frequências naturais do sistema são alteradas em decorrência da redução da rigidez. Os autores afirmam que este é um efeito bastante conhecido e utilizado como indicador de dano da estrutura, entretanto só é eficiente após o surgimento das primeiras fissuras.

Zhu, Li e He (2011) abordam os métodos existentes para detecção de danos baseados nos modos de vibração, conhecidos como MAC (*modal assurance criterion*) e COMAC (*coordinate modal assurance criteria*). Os autores citam que o MAC pode indicar a presença de danos, no entanto este é insensível a danos simétricos em estruturas simétricas. Já o COMAC pode ser utilizado para detectar, e localizar a posição do dano, mas a queda no valor do COMAC não indica a magnitude do dano.

Jassim et al. (2013) afirmam que os valores MAC obtidos de uma estrutura indicam a correlação entre dois modos, e seus valores variam entre 0, onde não há correlação entre os modos de vibração analisados, e 1, onde a correlação entre os modos de vibração é perfeita. Segundo os autores, o desvio do valor do MAC do valor de 1 é uma indicação de dano à estrutura, quanto maior a magnitude do dano, maior o distanciamento do valor de correlação perfeita entre os modos de vibração.

A determinação do MAC para dois modos de vibração sejam estes o modelo numérico e o modelo real (danificado ou não), é dado por:

$$\text{MAC} = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \phi_j \phi_j'' \right|^2}{\sum_{j=1}^n \phi_j^2 \sum_{j=1}^n \phi_j''^2} \quad (2.1)$$

onde ϕ é o vetor do modo de vibração obtido com a modelagem numérica da estrutura, ϕ'' é o vetor modal da estrutura real, j varia de 1 a n que é o número de pares de modos de vibrações correspondentes.

Como mencionado por Zhu, Li e He (2011) o MAC é capaz de indicar presença ou não de danos, ou inconstâncias da estrutura, mas não é possível localizar a sua posição. Para determinação da posição do dano, usa-se o COMAC.

Jassim et al. (2013) afirmam que o COMAC detecta variações da rigidez de cada grau de liberdade, onde o menor valor do COMAC em qualquer ponto da estrutura indica a posição mais provável de se detectar o dano, enquanto o MAC é capaz de identificar variações na rigidez da estrutura.

O cálculo do COMAC é realizado para cada grau de liberdade, comparando-se a estrutura real e a estrutura obtida com o modelo numérico segundo a equação a seguir para o grau de liberdade j :

$$\text{COMAC}_j = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \phi_{ji} \phi_{ij}'' \right|^2}{\sum_{j=1}^n \phi_{ji}^2 \sum_{j=1}^n \phi_{ji}''^2} \quad (2.2)$$

onde ϕ é o vetor do modo de vibração obtido com a modelagem numérica da estrutura, ϕ'' é o vetor modal da estrutura real, i é o valor do j -ésimo modo de vibração em um ponto de medição, n é o número de pares de modos de vibrações correspondentes.

Com respeito ao sistema estrutural das pontes estaiadas, este pode ser dividido em quatro componentes principais, a longarina, o sistema de cabos, a torre e o bloco de ancoragem, encontrados na Figura 2.5.

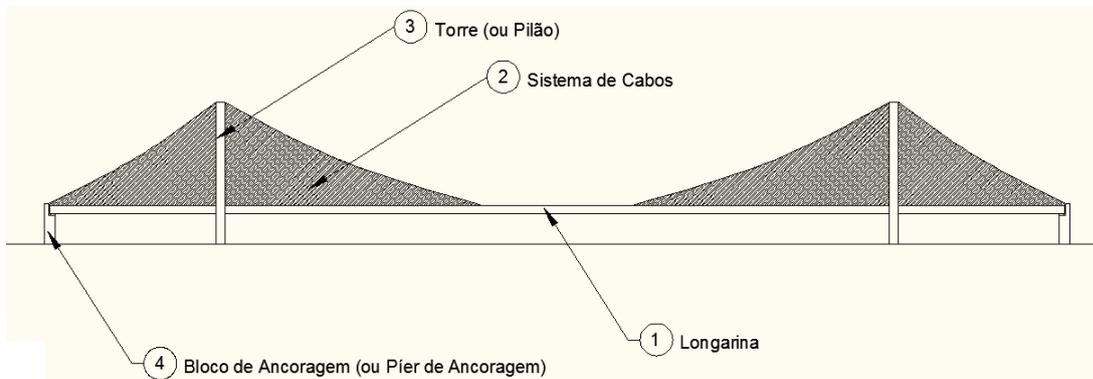


Figura 2.5 – Principais componentes estruturais da ponte estaiada [Gimsing, 1997 - adaptado].

As pontes estaiadas sustentam o tabuleiro por cabos inclinados, chamados estais, presos a uma torre. Tanto as torres quanto o tabuleiro podem ser de concreto, ou aço.

Até o início de 2012, a ponte estaiada em Sutong, na China, possuía o maior vão livre com 1.088 metros. Em julho desse mesmo ano, foi inaugurada a ponte estaiada de maior vão central livre até então, com 1.104 metros. A ponte russa, que liga o continente à ilha de Russky sobre o estreito de Bósforo [Figura 2.7] é a primeira a ultrapassar a marca de 1.100 metros de vão central.

O primeiro projeto de ponte estaiada no Brasil foi a Ponte de Porto Alencastro sobre o rio Paranaíba, que separa os estados de Minas Gerais e Mato Grosso do Sul (Ytza, 2009). Em 2008, foi inaugurada uma das obras que marcam a capital paulistana, a ponte Octávio Frias de Oliveira sustentada por 144 estais [Figura 2.6].



Figura 2.6 - Vista aérea da ponte Octávio Frias de Oliveira. [W.Filho, Adão, Disponível em: <<http://portoimagem.wordpress.com/2012/05/18/porto-alegre-vai-ganhar-dois-viadutos-estaiados-nos-proximos-anos-mas-ja-existe-gente-contra/>>. Acesso em: 02/10/2012]



Figura 2.7 - Ponte Russky sobre o estreito de Bósforo. [Disponível em: <http://www.maurer-soehne.com.br/sistemas_de_protecao_estrutural/>. Acesso em: 28/9/2012]

As pontes estaiadas possuem diversos arranjos estruturais, tanto pelo arranjo dos cabos, quanto pelo arranjo dos mastros. Troitsky (1988) classifica as pontes estaiadas segundo a configuração longitudinal dos cabos como pontes com a configuração em leque, semi-harpa, ou harpa. Já os arranjos dos mastros, podem ser em um plano simples, com o mastro central ou lateral, com os cabos verticais ou inclinados [Figura 2.8].

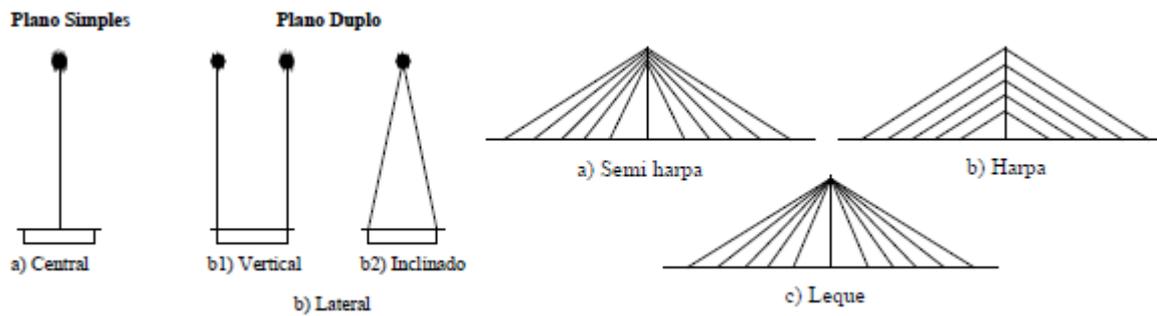


Figura 2.8 - Arranjo transversal e longitudinal dos cabos [Ytza, 2009].

As pontes estaiadas com os cabos se conectando à torre em forma de leque não é a opção estética mais apazível, mas, em termos estruturais, é a mais interessante, pois a configuração permite o uso de ângulos maiores, que produzem componentes de forças horizontais reduzidas no tabuleiro. Esta configuração tem como principal desvantagem a ancoragem dos cabos na torre. A região de fixação fica bastante conturbada pelo grande número de cabos, dificultando a convergência dos cabos, e, também, o grande número de cabos gera tensões bastante elevadas nesta região.

As pontes estaiadas do tipo harpa não são a melhor solução estrutural e econômica, apesar de ser a solução estética mais agradável por conta de sua posição paralela entre os cabos. Este sistema é pouco indicado para pontes de grandes vãos, uma vez que a inclinação dos cabos introduzirá grandes solicitações axiais no tabuleiro, podendo causar a instabilidade da estrutura (TORNERI, 2002).

Um sistema híbrido entre o sistema em leque e harpa é o sistema de semi-harpa, que tenta associar os dois sistemas, agregando as vantagens de cada um, mas sem as suas desvantagens. Os cabos ficam dispostos na parte superior da torre, evitando o problema da convergência dos cabos, como ocorre no sistema em leque, e aumentando a inclinação dos cabos, em relação ao sistema em harpa, para reduzir as forças horizontais no tabuleiro.

As forças de compressão crescem a medida que os vãos aumentam, e isso se torna o principal limitador das pontes estaiadas, devido à perda de estabilidade causada por elevadas solicitações axiais atuando no tabuleiro. Torneri (2002) diz que o emprego de pontes estaiadas fica limitado a 1.500 metros, devido às forças de compressão, além das dificuldades de execução que surgem.

Walther et al. (1998) classificam as pontes estaiadas segundo a configuração transversal em sistemas com suspensão em um plano central, e sistemas com suspensão

lateral. O sistema com suspensão lateral pode ser classificado como reto, ou inclinado, de acordo com a posição do estai em relação ao tabuleiro [Figura 2.8].

Para os sistemas com suspensão central, esteticamente, não existe a sobreposição dos planos dos cabos e, estruturalmente, são sistemas que precisam ter uma rigidez à torção do tabuleiro maior que o sistema com suspensão lateral. Caso o espaçamento entre os cabos seja pequeno, a capacidade à flexão do tabuleiro não é completamente explorada.

O sistema de suspensão central possui a torre no centro da seção transversal da ponte, e isto requer que o tabuleiro seja mais largo em relação ao sistema de suspensão lateral [Figura 2.9]. Para estes sistemas é necessário prever uma carga de impacto devido ao tráfego, ou posicionar barreiras de segurança ao redor da ancoragem dos estais, a fim de manter a integridade da estrutura.

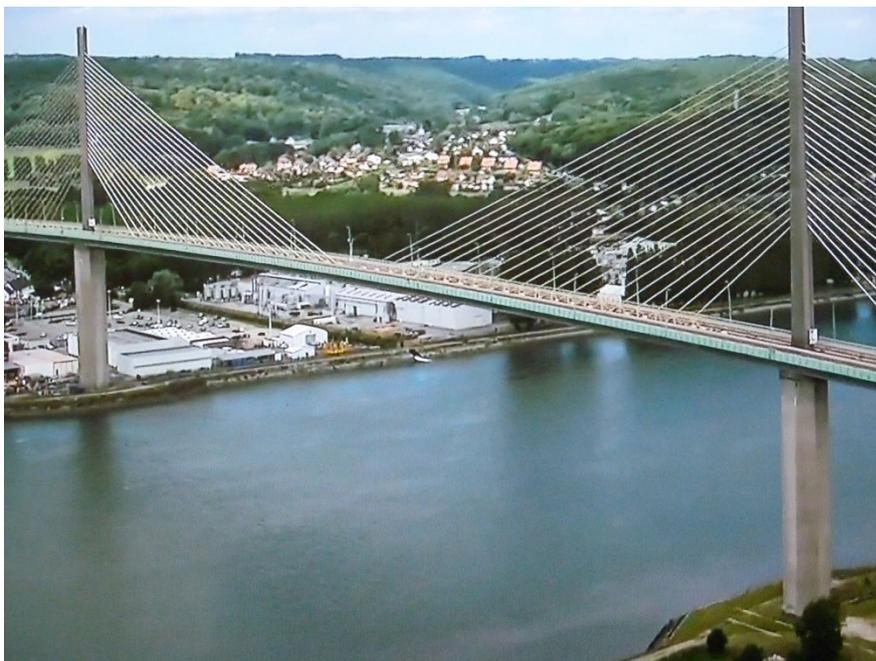


Figura 2.9 - Ponte Brotonne com sistema de suspensão central. [Disponível em: <

http://www.panoramio.com/photo_explorer#view=photo&position=580&with_photo_id=74877029&order=date_desc&user=2279867 > . Acesso em: 03/10/2012]

Segundo Vargas (2007), esse sistema de suspensão causa baixas cargas de fadiga nos cabos, pois um tabuleiro rígido à torção reparte cargas concentradas de forma mais eficiente, mas para grandes vãos, ou tabuleiros muito largos, deve-se adotar o sistema de suspensão lateral.

Para o sistema com dois ou mais planos de suspensão, a grande desvantagem é o grande número de elementos, causando uma confusão visual da estrutura. Entretanto, não há

problemas com o gabarito do tabuleiro, e, estruturalmente, são mais eficientes que o sistema de suspensão central.

Dentro da suspensão lateral, a suspensão vertical possui como principal vantagem a economia na construção das torres. Em termos estruturais, a utilização de torres em forma de “A” com as colunas ligadas ao topo [Figura 2.10] melhoram a rigidez e a estabilidade da estrutura, pois, o tabuleiro, junto com as torres, comporta-se como uma seção fechada rígida (VARGAS, 2007).



Figura 2.10 - Ponte da Normandia com suspensão lateral e torre em forma de "A"[Disponível em: < <http://www.lmc.ep.usp.br/people/hlinde/estruturas/normandia.htm> > . Acesso em: 03/10/2012]

Estruturas de grandes vãos requerem torres de grandes alturas. Para melhorar a estabilidade e rigidez da estrutura é comum unir o topo das torres, a fim de oferecer maior resistência às solicitações laterais do vento, além das forças dos estais.

Segundo Troitsky (1988) os seguintes fatores foram responsáveis pelo sucesso do desenvolvimento do sistema estrutural das pontes estaiadas:

- a) desenvolvimento de métodos de análise de estruturas estaticamente indeterminadas e o uso de computadores.
- b) desenvolvimento de tabuleiros ortotrópicos de aço.

- c) experiência absorvida de antigas pontes contendo elementos básicos das pontes estaiadas.
- d) uso de aços de alta resistência, novos métodos de fabricação e, também, desenvolvimento de novas técnicas construtivas.
- e) capacidade de analisar essas estruturas por meio de estudo de modelos.

O estai é um dos principais agentes de sustentação, e é capaz, assim como as cordas de um violão, de aumentar a rigidez com o aumento da tração aplicada. Quando submetido à compressão, o estai não oferece resistência. Durante a etapa construtiva, os estais vão sendo tracionados aos poucos, isso proporciona ao estai uma característica não linear muito forte.

Para contornar esse problema, Peyrot e Goulois (1979) afirmam ser comum a modelagem do estai como diversos elementos finitos de treliça interligados, simulando uma catenária, utilizando métodos computacionais para resolução de sistemas não lineares.

Outros estudos, como Fleming (1979), Neves (1990), Wang, Tseng e Yang (1993), Wang e Yang (1996), Wang, Lin e Tang (2002), fazem uso do elemento de treliça com módulo de elasticidade equivalente, ou módulo de elasticidade de Dischinger. Este pode ser utilizado quando o incremento da carga é pequeno, de forma a não alterar, significativamente, a rigidez axial do cabo. O módulo de elasticidade de Dischinger é dado por:

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(w \cdot L_h)^2 EA}{12T^3}} \quad (2.3)$$

onde E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente do estai, E é o módulo de elasticidade do aço, w o peso por unidade de comprimento do cabo, L_h é o comprimento do estai em projeção horizontal, A é a área da seção transversal do cabo, e T é a força de tração no cabo.

Walther et al. (1998) analisa a equação (2.3) graficamente conforme a Figura 2.11. As curvas são plotadas para tensões aplicadas nos cabos que variam de $0,05 \sigma$ a $0,50\sigma$, onde σ é a tensão de ruptura do cabo.

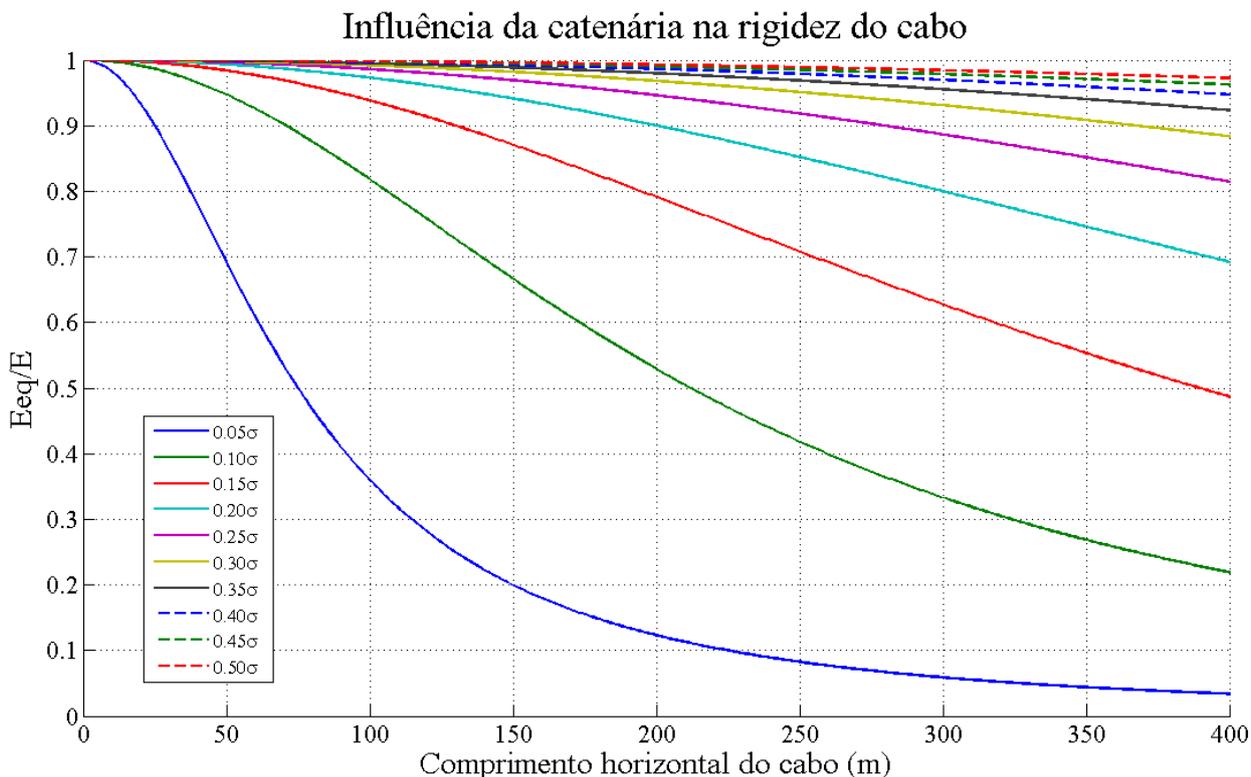


Figura 2.11 - Variação da razão entre módulo de elasticidade equivalente do cabo e o módulo de elasticidade real com relação ao comprimento horizontal do cabo [Walther et al., 1998 - adaptado].

Pela análise gráfica, nota-se que, para um comprimento horizontal do cabo de 400 metros, aproximadamente 80% da rigidez do cabo pode ser obtida aplicando-se $0,25\sigma$. O gráfico é plotado no intervalo até $0,50\sigma$, pois a tensão máxima permitida no cabo deve ser de $0,45\sigma$ e, em casos excepcionais, $0,50\sigma$ como relata Walther et al.(1998).

A Figura 2.12 mostra a posição inicial do cabo, com uma catenária f , e a final, após a aplicação de uma força axial. Nota-se que há um deslocamento do cabo de ΔL . Esse deslocamento aumenta a tensão do cabo, e, conseqüentemente, a sua rigidez como se observa na equação (2.3).

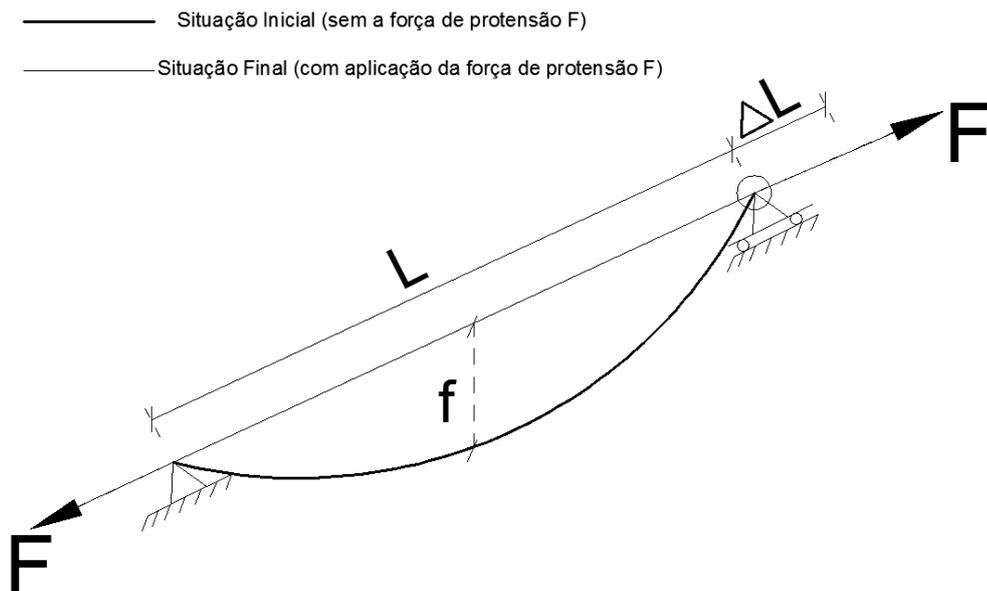


Figura 2.12 - Arranjo do cabo inclinado [Troistky, 1988 - adaptado].

Fleming (1979) e Wang e Yang (1996) utilizam a abordagem de um único elemento reto de treliça com módulo de elasticidade equivalente para simular o comportamento do cabo. Estes autores afirmam que uma análise puramente linear é capaz de determinar a configuração de equilíbrio inicial.

Wang e Yang (1996) obtiveram que as forças nos estais obtidas na análise linear, para os exemplos numéricos estudados (ponte estaiada assimétrica com 2 cabos, ponte estaiada simétrica em forma de harpa com 12 cabos, e ponte estaiada simétrica com 12 cabos em forma de leque), diferem da solução exata entre 2 e 10%. A solução exata dos autores é tida como a análise em que as não linearidades do efeito de catenária, grandes deslocamentos e efeito viga-coluna estão presentes.

Neves (1990) afirma que a intensidade da não linearidade de um sistema estrutural é de fraca a moderada onde o carregamento estático promove tração adicional em todos os cabos, na qual a configuração deformada final não é muito diferente da inicial. Já para sistemas que há afrouxamento dos cabos, a não linearidade é maior.

Em relação aos parâmetros dinâmicos da estrutura, Neves (1990) diz que o estado de tensão inicial do sistema exerce uma influência sobre as características dinâmicas tanto maior quanto maior for a flexibilidade do sistema. O autor afirma que sistemas estruturais estaiados, por serem flexíveis, necessitam que a resposta dinâmica no tempo sejam calculadas a partir dos modos de vibração obtidos com a estrutura sob um estado de tensões iniciais.

Yamaguchi e Jayawardena (1992) propuseram uma forma analítica de estimar o amortecimento histerético, ou amortecimento estrutural, de sistemas com um, ou vários cabos.

Por meio de uma análise não linear em elementos finitos é definida a deformação dinâmica do cabo, e, com ela, obtém-se uma estimativa analítica do amortecimento histerético. Os autores caracterizam a deformação dinâmica como sendo a deformação obtida quando o cabo atinge o deslocamento máximo no processo de vibração.

Wang e Yang (1996) fizeram um estudo paramétrico das não linearidades existentes nas pontes estaiadas. Analisaram a não linearidade causada pela catenária dos cabos, grandes deslocamentos, e pelo efeito viga-coluna. Com o estudo, chegaram à conclusão que a busca pela configuração deslocada inicial era obtida com boa exatidão por todos os modelos [Figura 2.13]. Em relação às forças nos estais, os modelos que levam em consideração o efeito da catenária se aproximam da solução exata, enquanto o modelo sem a consideração do efeito da catenária obteve uma resposta na vizinhança da resposta linear [Figura 2.14].

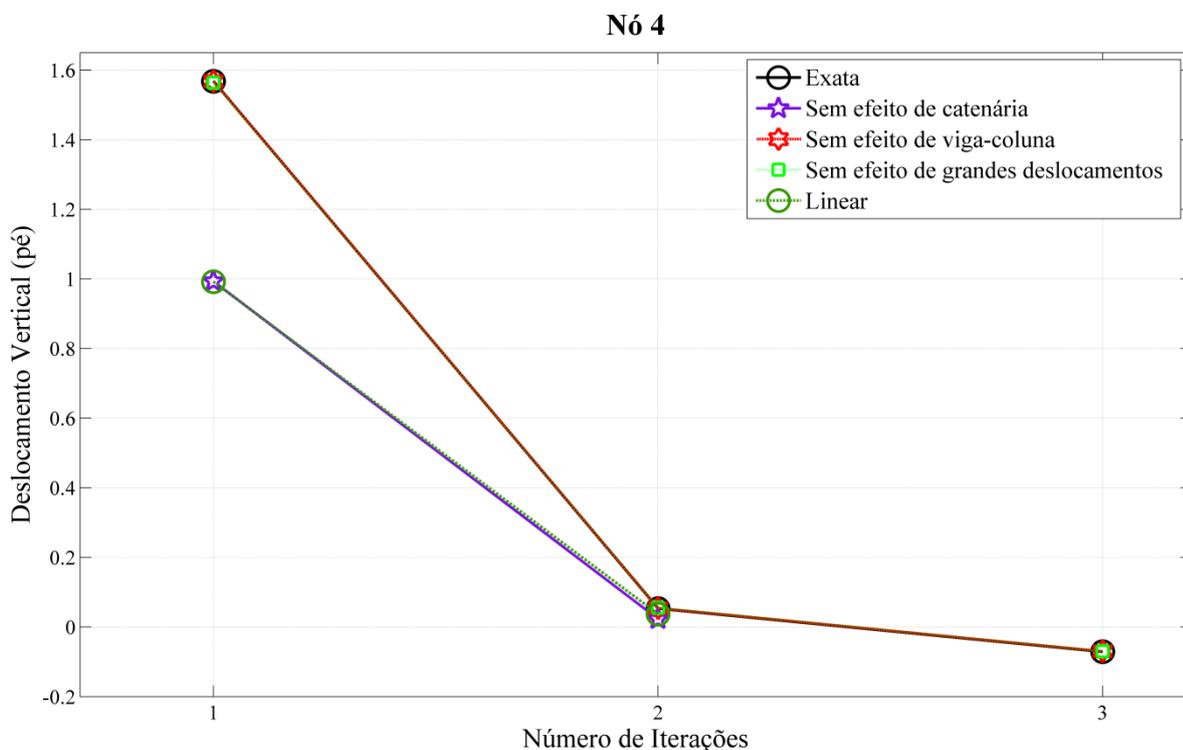


Figura 2.13 - Busca pela configuração inicial de uma ponte estaiada tipo harpa [Wang e Yang, 1996 - adaptado].

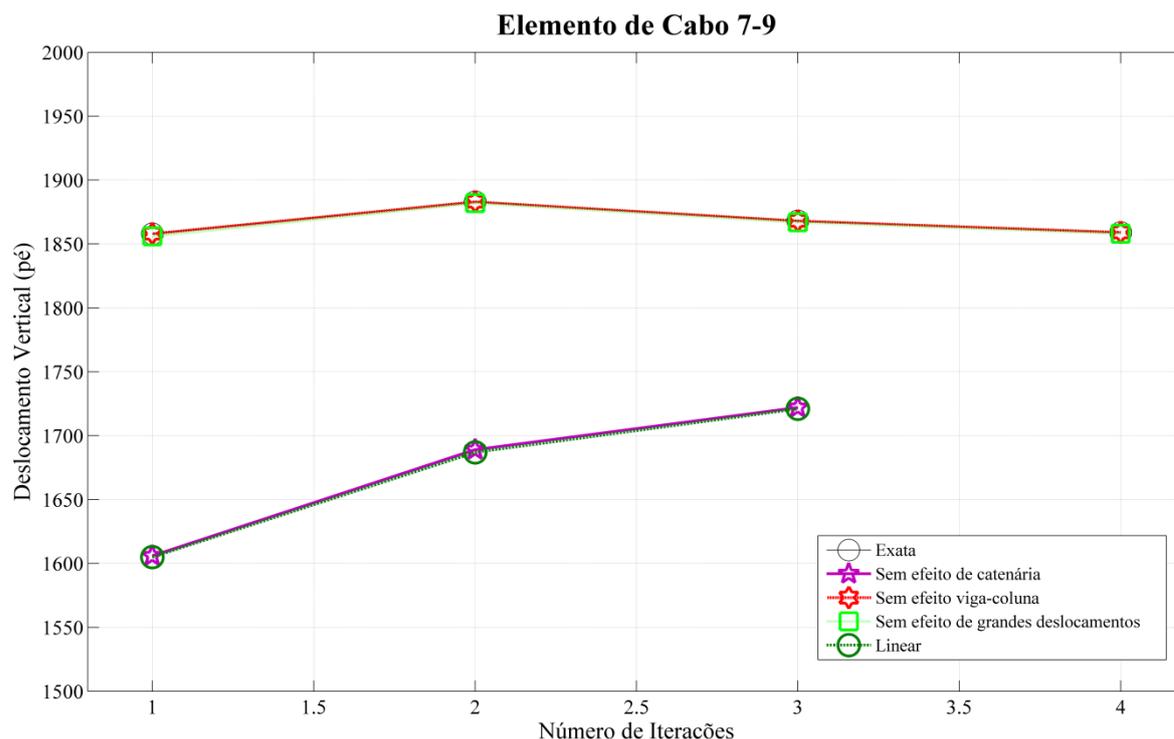


Figura 2.14 - Evolução das forças dos modelos durante as iterações de forma [Wang e Yang, 1996 - adaptado].

Karoumi (1999) apresenta a formulação de um elemento de cabo, que deriva da solução analítica do elemento de cabo com catenária elástica e faz uma comparação entre o elemento de cabo, o elemento de treliça com módulo de elasticidade equivalente, e com a discretização do cabo em 20 elementos de viga com momentos de inércia muito baixos para simular o comportamento do cabo [Figura 2.15].

O exemplo desenvolvido por Karoumi (1999) para obtenção do gráfico apresentado pela Figura 2.15 trata de um único cabo sob a ação do peso-próprio e sujeito a aplicação de força de tração em ambas as extremidades. Os extremos do cabo distam entre si 304,8 metros, e a força aplicada no cabo de 17,794 kN. A catenária no meio do vão, resultante da força aplicada, é de 30,48 metros (10% do vão).

Nota-se, pela análise da Figura 2.15, que o elemento de barra com módulo de elasticidade equivalente é bem mais flexível que as outras abordagens para simular o comportamento do cabo.

Karoumi (1999) atribui esta diferença ao fato que o elemento de barra com módulo de elasticidade equivalente leva em consideração o efeito da catenária. Entretanto, o efeito de enrijecimento, decorrente dos grandes deslocamentos, não é levado em consideração.

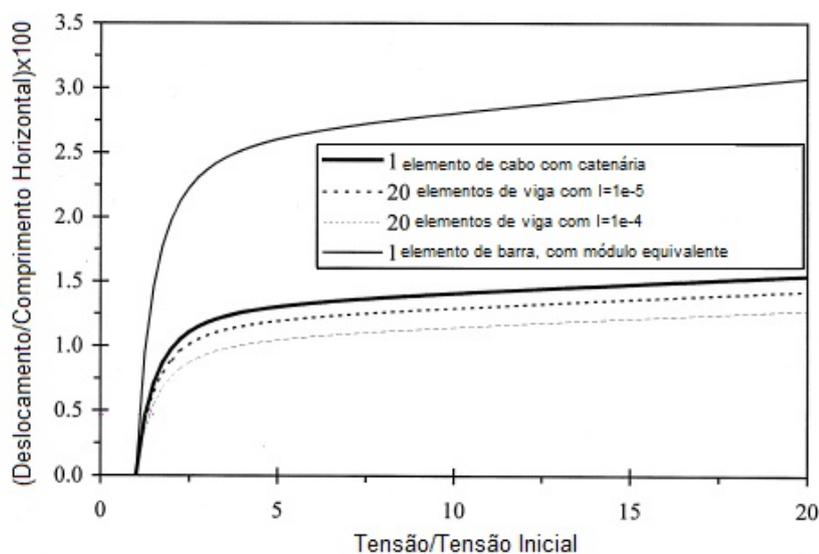


Figura 2.15 – Respostas entre as abordagens do elemento de cabo, treliça com módulo de elasticidade equivalente, e 20 elementos de vigas com momentos de inércia diferentes [Karoumi, 1999 - adaptado].

Kim e Lee (2001) apresentam um elemento finito de cabo, formulado a partir das soluções analíticas do elemento de cabo com catenária elástica. No estudo, a configuração deslocada inicial é comparada com a solução obtida por Wang, Tseng e Yang (1993) para uma ponte estaiada do tipo leque com 12 cabos.

Este elemento apresentou distribuição de momentos fletores mais uniformes no tabuleiro que o modelo de Wang, Tseng e Yang (1993) com o módulo de elasticidade equivalente [Figura 2.16]. A resposta obtida por Kim e Lee (2001) se aproximou bastante da resposta idealizada com apoios indeslocáveis na posição de ancoragem do cabo.

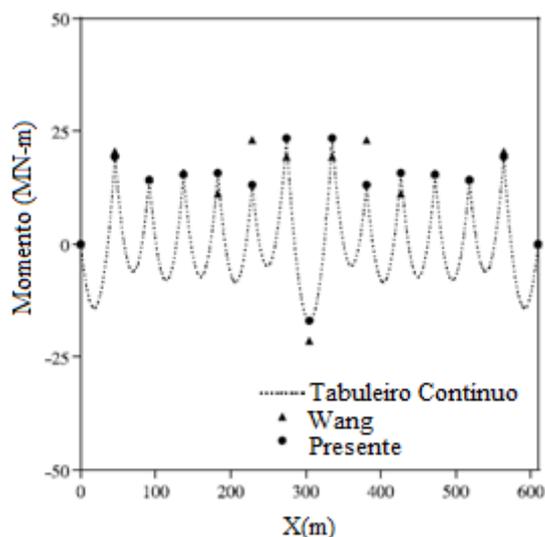


Figura 2.16 - Momento Fletor no tabuleiro [Kim e Lee, 2001 - adaptado].

No estudo de Kim e Lee (2001) foi possível adotar uma tolerância de 10^{-10} , enquanto no estudo proposto por Wang, Tseng e Yang (1993) a tolerância de 10^{-4} foi definida como critério de convergência do estudo. Isso resultou, para o estudo de Kim e Lee (2001), em uma configuração deslocada inicial mais próxima da configuração de referência, como é possível observar na Figura 2.17.

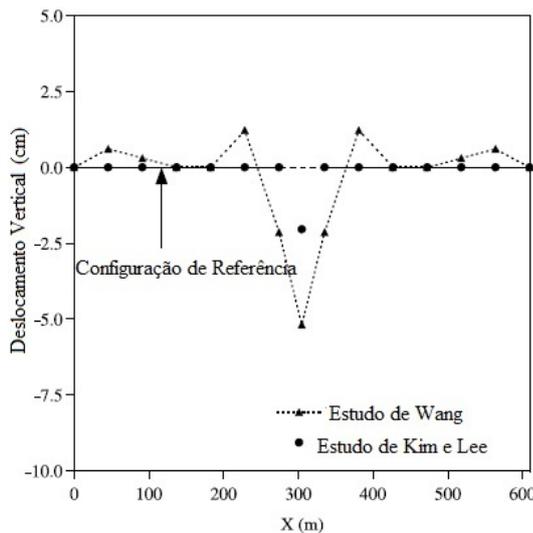


Figura 2.17 - Deslocamentos do tabuleiro [Kim e Lee, 2001 - adaptado].

Como os deslocamentos no tabuleiro obtidos com a análise proposta por Kim e Lee (2001) diferem dos resultados obtidos por Wang, Tseng e Yang (1993), isto reflete forças nos estais, também, diferentes. A Figura 2.18 mostra a geometria da ponte estaiada em leque, com o quadro das forças obtidas nos estais pelos dois estudos.

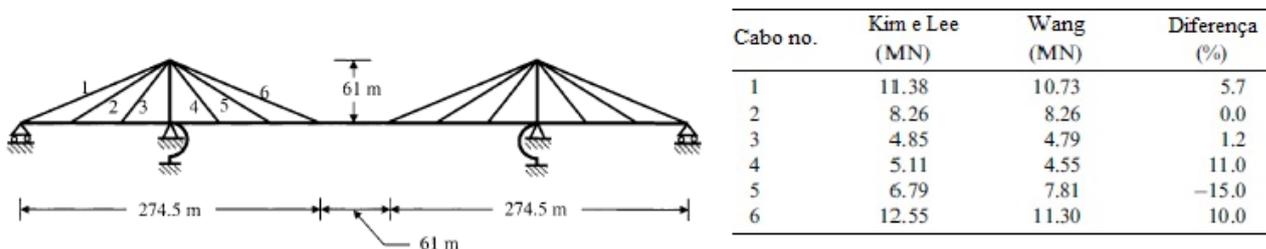


Figura 2.18 - Geometria da ponte estaiada analisada, e as forças obtidas pelos estudos de Kim e Lee (2001) e Wang, Tseng e Yang (1993) [Kim e Lee, 2001 - adaptado].

Torneri (2002) abordou problemas de pré-dimensionamento dos estais como a fadiga dos estais, a determinação das forças de protensão inicial dos cabos, e a elaboração de modelos simplificados de análise preliminar do comportamento, tanto do tabuleiro, como da

torre. Foi feito, também, um estudo com diferentes propostas de concepção estrutural, com o intuito de oferecer subsídios para a tomada de decisões durante a etapa de projeto.

Torneri (2002) considerou, para análise paramétrica, a configuração dos cabos, diferentes dimensões do vão lateral, o espaçamento entre os estais, altura da torre, configurações transversal da torre (torre em pórtico, mastro único e a configuração em diamante, chamada neste trabalho de configuração em “A”), e por fim a configuração transversal do tabuleiro, que vão depender da configuração adotada para a torre.

Wang, Lin e Tang (2002) obtiveram as análises modais de uma mesma estrutura levando em consideração duas análises estáticas diferentes em relação à iteração de forma (por meio do método da anulação dos deslocamentos, MAD), uma linear e outra não linear.

O primeiro procedimento, chamado de linear, os autores aplicam o método MAD de uma forma linear, isto é, o módulo de elasticidade do cabo utilizado é o linear, sem consideração das não linearidades de grandes deslocamentos e do efeito viga-coluna, onde a iteração de forma é realizada sem considerar a iteração de equilíbrio da estrutura, apenas a reaplicação das forças de protensão.

O segundo procedimento, chamado de procedimento não linear, considera todas as não linearidades presentes numa ponte estaiada (efeito viga-coluna, efeito de catenária e grandes deslocamentos). A resolução do equilíbrio do sistema se dá iterativamente pelo método de Newton.

Os autores concluem que, ao analisar pontes estaiadas com um grande número de cabos, existem diferenças significativas entre as frequências naturais encontradas quando se toma como configuração deslocada a estrutura obtida pela análise linear, da deslocada da estrutura obtida pela análise não linear. Por conseguinte, afirmam que a maneira correta de se determinar as frequências fundamentais e modos de vibrar é por meio da configuração deslocada obtida da análise não linear.

Wang, Tang e Zheng (2004) formularam um processo de análise da configuração da estrutura durante a etapa construtiva. A execução da ponte é realizada por balanços sucessivos, e foram efetuadas duas análises, uma seguindo a ordem construtiva, e uma retroanálise, partindo da configuração inicial da ponte, obtida na primeira análise, e executando a retirada dos elementos até se chegar à primeira fase construtiva.

Segundo Ren e Peng (2005) a posição de equilíbrio inicial de pontes estaiadas pode ser obtida por uma análise estática em pequenos deslocamentos.

Para a análise da estrutura, Ren e Peng (2005), citam dois passos para obter o modelo modal da estrutura:

- a) A análise estática é realizada com o peso próprio da estrutura e a pré-tensão dos cabos. O objetivo deste passo é conseguir a configuração de equilíbrio deslocada da ponte na qual os elementos estruturais estão submetidos à tensão inicial;
- b) Em seguida, a análise modal é realizada, sendo iniciada da configuração de equilíbrio deslocada, obtida na análise anterior.

Ren, Peng e Lin (2005) afirmam que as baixas frequências naturais (0-10 Hz) e os modos de vibrar relativamente densos dentro desse domínio são típicos das pontes estaiadas.

Neves (2005) apresenta a criação de um programa computacional para realizar a otimização de pontes estaiadas por meio de programação com funções multi-objetivo.

Vargas (2007) obtém o comportamento dos efeitos de segunda ordem nos elementos estruturais das pontes estaiadas, analisando a não linearidade física da seção de concreto estrutural quando solicitado por flexão oblíqua composta e não linearidade geométrica. No estudo, Vargas (2007) afirma que a não linearidade geométrica do estai pode ser obtida considerando o módulo de elasticidade secante E_f , analisado como elemento de barra.

O módulo de elasticidade secante considera a possibilidade de mais de um nível de tensão atuar no cabo, o que torna o uso deste mais interessante ao se fazer análises com cargas variáveis onde o nível de tensão atuante no cabo varia consideravelmente.

O estudo proposto por Hassan, Nassef e El Damatty (2012) otimiza, por meio de algoritmos genéticos, as forças atuantes nos cabos das pontes estaiadas. No estudo, os autores chegam à conclusão que o parâmetro principal que influi na não linearidade geométrica, e na determinação das forças nos cabos é proveniente do efeito da catenária.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

(MEF)

Na engenharia estrutural, procura-se descrever o comportamento mecânico de um corpo submetido a um determinado carregamento, e a condições de contorno específicas, buscando-se conhecer os campos de deslocamentos, deformação e tensão. Para a maioria dos problemas de engenharia, não existem soluções analíticas fáceis de se obter, e nem explicitáveis na maioria dos casos práticos. Isso ocorre pela complexidade decorrente da modelagem matemática, envolvendo sistemas de equações diferenciais parciais.

Os modelos matemáticos, segundo Reddy (2004), podem ser definidos como um conjunto de relações entre variáveis que expressam as características essenciais de um sistema ou processo físico em termos analíticos. O modelo matemático, no caso em questão, deve conter as relações de equilíbrio, condições de compatibilidade de deslocamentos e o modelo constitutivo.

Com os modelos matemáticos desenvolvidos, foram criados métodos aproximados para sua solução. Tais métodos são de natureza numérica, e são capazes de lidar com um grande número de equações, incluindo não linearidades e geometrias complexas, que ocorrem com frequência na engenharia. Os principais métodos desenvolvidos são o método das diferenças finitas, método dos elementos finitos, e o método dos elementos de contorno.

Os métodos numéricos utilizam relações de aproximação para transformar um sistema de equações diferenciais em equações algébricas. Com a evolução dos computadores, houve a difusão desses métodos, e os computadores passaram a ser ferramentas auxiliares importantes para a solução de diversos problemas da engenharia.

O método dos elementos finitos, MEF, que faz parte de um desses métodos desenvolvidos, passou a ser bastante difundido. Consiste em transformar um domínio,

também chamado de domínio de integração, em diversos subdomínios chamados de elementos finitos.

Reddy (2004) lista três razões para um engenheiro estudar o MEF, são elas:

- a) o MEF é o método numérico mais poderoso já concebido para análise de problemas de engenharia. É capaz de lidar com domínios geometricamente complicados, diversas condições de contorno, não linearidades, e fenômenos acoplados que são comuns nos problemas práticos. Conhecer o funcionamento do método melhora a capacidade de análise e do entendimento do problema a ser resolvido.
- b) pacotes de *softwares* comerciais baseados no MEF são comumente utilizados na indústria, pesquisa e instituições acadêmicas para a solução de uma gama de problemas científicos e de engenharia. O uso inteligente e correto da interpretação dos resultados é frequentemente baseado no conhecimento da teoria por trás do método.
- c) não é incomum encontrar modelos matemáticos em pesquisas pessoais que não podem ser avaliados com a utilização de programas computacionais comerciais. Nesses casos o entendimento do elemento finito e conhecimento de programação podem auxiliar no desenvolvimento de programas para resolver os modelos matemáticos.

Os itens subsequentes ilustrarão os conceitos matemáticos do MEF, e mostrarão a formulação dos elementos finitos utilizados.

3.1 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

O método dos elementos finitos é formado por duas partes sendo que a primeira consiste na metodologia de resolução das equações, e a segunda é a técnica dos elementos finitos. A técnica dos elementos finitos é a técnica de geração de polinômios de aproximação, nos quais os parâmetros dos polinômios são os deslocamentos nodais. A metodologia para resolução aproximada podem ter várias abordagens, dentre elas as principais são pelo princípio dos trabalhos virtuais, P.T.V., e, a metodologia abordada nesta seção, o método da energia.

A formulação aqui apresentada pode ser encontrada em livros clássicos de elementos finitos como Zienkiewicz e Taylor (2000), Assan(2003), Reddy (2004) com a formulação em

campos de deslocamentos que, como Zienkiewicz e Taylor (2000) afirmam, é a abordagem mais popular e de mais fácil entendimento.

O método da energia é aqui empregado no sentido de se formular o método dos elementos finitos. Nesse sentido, formula-se a energia potencial total de um sistema estrutural, qual seja:

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.1)$$

onde Π é a energia potencial total, U é a parcela da energia de deformação da estrutura, e Ω a energia potencial das cargas atuantes.

A energia de deformação é a energia que um corpo absorve para deformar-se sob a atuação de um carregamento. É obtida pelo cálculo do trabalho das forças internas sobre os deslocamentos correspondentes. Os deslocamentos são originados a partir da deformação da estrutura.

A energia de deformação, por sua vez, pode ser expressa por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (3.2)$$

onde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ são as componentes de tensão, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ as componentes de deformação, e V é o volume da estrutura.

A equação da energia potencial das forças externas é dada por:

$$\Omega = -\left(\int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \cdot dV + \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot dS + \sum_{i=1}^N P_i \cdot v_i + \int \frac{P}{2} \cdot v'^2 \cdot dx \right) \quad (3.3)$$

onde \mathbf{b} são as forças de volume, \mathbf{q} o carregamento distribuído na superfície, P as cargas concentradas aplicadas na estrutura, sendo a última parcela a contribuição do efeito não linear.

O elemento finito clássico de pórtico plano dispõe de 3 graus de liberdade por nó, sendo 2 translações e 1 rotação. O elemento de pórtico é obtido pelo acoplamento de um elemento de viga (com as liberdades de translação vertical e rotação), com um elemento de barra (com liberdade de translação horizontal). Por essa razão, é mostrado, no que se segue, a fundamentação matemática do elemento de viga e barra e, posteriormente, o acoplamento em questão.

Adota-se o regime de pequenos deslocamentos e deformações, e o material é considerado elástico-linear. A seção transversal é assumida indeformável em seu plano, e as deformações causadas pelo cisalhamento no plano da seção são desprezadas (as seções planas

permanecem planas e ortogonais ao seu eixo). Os deslocamentos axiais para a viga são desprezados.

Portanto, para um material com comportamento elástico-linear, a equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \cdot \varepsilon_x^2 dV \quad (3.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, e se considera que as demais componentes de tensão e deformação são nulas. Para o caso de barra, tem-se que a componente de deformação ε_x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \quad (3.5)$$

sendo $u(x)$ o movimento axial da barra. Tendo-se em conta que, no caso de viga, a relação $u(x)$ pode ser ilustrada pela Figura 3.1, e escrita como:

$$u(x) = u_0 - v'(x) \cdot y \quad (3.6)$$

onde u_0 é a posição inicial de um ponto P qualquer segundo o eixo da viga, $v'(x)$ é a rotação da seção (derivada do deslocamento transversal), e y a ordenada do ponto em consideração.

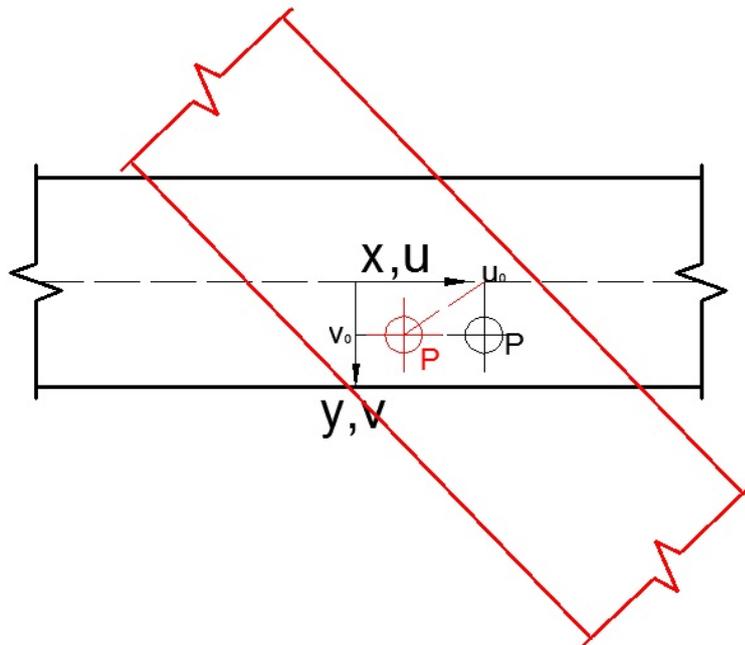


Figura 3.1 - Variação da posição u do ponto P com um giro positivo θ .

Com essas considerações, é possível reescrever a deformação na direção x para o caso de viga como sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right) \cdot y \quad (3.7)$$

assim sendo, após integrar a energia de deformação na área, pode-se escrever a energia de deformação de barra como:

$$U_{\text{barra}} = \frac{1}{2} \int_x E \cdot A \cdot \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^2 dx \quad (3.8)$$

onde A é a área da seção transversal. Para a energia de deformação da viga, tem-se

$$U_{\text{viga}} = \frac{1}{2} \int_x E \cdot I \cdot \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}\right)^2 dx \quad (3.9)$$

sendo I o momento de inércia da seção.

O sistema encontra-se em equilíbrio quando satisfizer o 1º teorema variacional que é demonstrado pelo princípio da estacionaridade, ou minimização da energia potencial total do sistema, dado por:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta\Omega = 0 \quad (3.10)$$

ou seja, a deformação da estrutura por ação das forças externas não altera a energia total do sistema.

3.2 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

Com as energias de deformação da barra, e da viga definidas, é possível adotar aproximações para a formulação dos elementos finitos empregando a técnica dos elementos finitos. A solução exata é definida por $u(x)$ (para o caso de barras), e $v(x)$ (para vigas). As soluções aproximadas são denotadas de $u_{\text{ap}}(x)$ e $v_{\text{ap}}(x)$.

O domínio de integração é dividido em subdomínios menores, os elementos finitos. Esses elementos, no caso deste estudo, possuem 2 nós, um no início do elemento, e um ao final. As soluções aproximadas nos elementos finitos são representadas por:

$$u_{\text{ap}}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot u_i \quad (3.11)$$

para os elementos finitos de barra, e, para os elementos finitos de viga, como sendo:

$$v_{ap}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \cdot v_i \quad (3.12)$$

nos quais $u_{ap}(x)$ é o deslocamento aproximado na direção axial, $v_{ap}(x)$ o deslocamento aproximado na direção transversal, n é o número de elementos finitos, $\phi_i(x)$ são as funções de forma correspondentes a cada uma das aproximações, e u_i e v_i são os deslocamentos nodais reais.

As funções de forma possuem aproximações diferentes para a barra, e a viga. Como observado na equação (3.8), a que se refere a energia de deformação da barra, a solução requer a existência da primeira derivada, e existem 2 incógnitas (deslocamentos nodais no nó inicial, e no nó final). Enquanto para equação (3.9), que representa a energia de deformação da viga, a função tem que ter continuidade até a segunda derivada, e existem 4 incógnitas (1 deslocamento transversal e uma rotação por nó do elemento).

A Figura 3.2 ilustra um elemento finito de barra e os seus graus de liberdade. Para a geração da função aproximadora do campo de deslocamentos do elemento finito de barra é adotado uma função linear, ou seja:

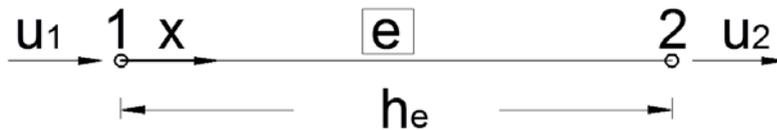


Figura 3.2 - Graus de liberdade do elemento finito de barra e representação da coordenada local x .

$$u^e_{ap}(x) = u^e_1 \cdot \phi^1_e(x) + u^e_2 \cdot \phi^2_e(x) \quad (3.13)$$

onde $u^e_{ap}(x)$ é o função aproximada para o campo de deslocamento axial do elemento finito de barra, u^e_1 e u^e_2 são os deslocamentos das extremidades inicial, e final do elemento, respectivamente, e $\phi^1_e(x)$ e $\phi^2_e(x)$ são as funções de forma, dadas por:

$$\phi^1_e(x) = \frac{x_2 - x}{h_e} \quad (3.14)$$

$$\phi^2_e(x) = \frac{x - x_1}{h_e} \quad (3.15)$$

onde x_1 é a coordenada do nó inicial do elemento, x_2 a coordenada do nó final do elemento, e h_e é o tamanho do elemento finito, dado por:

$$h_e = x_2 - x_1 \quad (3.16)$$

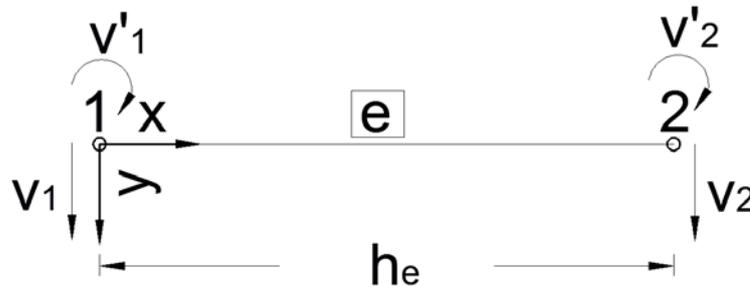


Figura 3.3 - Graus de liberdade do elemento finito de viga e representação das coordenadas locais x e y .

A Figura 3.3 representa um elemento finito de viga e seus graus de liberdade. A função aproximada para os deslocamentos da viga é dado por:

$$v_{ap}^e(x) = v_1^e \cdot \phi_{10}^e(x) + v_1^{e'} \cdot \phi_{11}^e(x) + v_2^e \cdot \phi_{20}^e(x) + v_2^{e'} \cdot \phi_{21}^e(x) \quad (3.17)$$

sendo $v_{ap}^e(x)$ é a função aproximada para o campo de deslocamento transversal do elemento finito de viga, v_1^e e v_2^e são os deslocamentos transversais das extremidades inicial, e final do elemento, respectivamente, $v_1^{e'}$ e $v_2^{e'}$ são as rotações dos nós inicial, e final do elemento, respectivamente, e $\phi_{10}^e(x)$, $\phi_{11}^e(x)$, $\phi_{20}^e(x)$, e $\phi_{21}^e(x)$ são as funções de forma, tal que:

$$\phi_{10}^e(x) = 2 \frac{x^3}{h_e^3} - 3 \frac{x^2}{h_e^2} + 1 \quad (3.18)$$

$$\phi_{11}^e(x) = \frac{x^3}{h_e^2} - 2 \frac{x^2}{h_e} + x \quad (3.19)$$

$$\phi_{20}^e(x) = -2 \frac{x^3}{h_e^3} + 3 \frac{x^2}{h_e^2} \quad (3.20)$$

$$\phi_{21}^e(x) = \frac{x^3}{h_e^2} - \frac{x^2}{h_e} \quad (3.21)$$

As equações (3.13), e (3.17), podem ser escritas matricialmente, de maneira mais compacta, como:

$$\mathbf{u}^e_{ap}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \phi^1_e(\mathbf{x}) \\ \phi^2_e(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e_1 \\ \mathbf{u}^e_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_{barra}(\mathbf{x})^T \{\boldsymbol{\delta}_{barra}\} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{v}^e_{ap}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \phi^{10}_e(\mathbf{x}) \\ \phi^{11}_e(\mathbf{x}) \\ \phi^{20}_e(\mathbf{x}) \\ \phi^{21}_e(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^e_1 \\ \mathbf{v}^e_1 \\ \mathbf{v}^e_2 \\ \mathbf{v}^e_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_{viga}(\mathbf{x})^T \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\} \quad (3.23)$$

Com a definição das aproximações utilizadas para os campos de deslocamentos, é possível montar a equação de energia potencial total [equação (3.1)] de um elemento finito, utilizando as funções aproximadas [equações (3.3), (3.22), e (3.23)], considerando que não há forças de volume atuando no sólido, sendo assim redigida:

$$\Pi^e_{barra} = \frac{1}{2} \int_x \boldsymbol{\varphi}'_{barra}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{barra}\}^T [\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}] \boldsymbol{\varphi}'_{barra}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{barra}\} dx - \left(\int_S \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}^T_{barra}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{barra}\} \cdot dS + \sum_{i=1}^2 P_i \right) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Pi^e_{viga} = & \frac{1}{2} \int_x \boldsymbol{\varphi}''_{viga}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\}^T [\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}] \boldsymbol{\varphi}''_{viga}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\} dx - \left(\int_x \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}^T_{viga}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\} \cdot dx + \sum_{i=1}^2 P_i \right) \cdot \\ & + \int \boldsymbol{\varphi}'_{viga}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\}^T \frac{\mathbf{N}(\mathbf{x})}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}'_{viga}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\delta}_{viga}\} dx \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.2.1 MATRIZ DE RIGIDEZ E MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO FINITO

Para montagem da matriz de rigidez da barra, que simulará o cabo da ponte, será utilizado o módulo de elasticidade de Dischinger [equação (2.3)]. A montagem da matriz de rigidez das barras utilizadas para o elemento de pórtico (viga+barra) utilizará o módulo de elasticidade real dos elementos.

A matriz de rigidez tangente da viga (\mathbf{K}_{T-viga}) será formada de 2 parcelas, a matriz de rigidez linear (\mathbf{K}_{L-viga}) junto com a matriz de rigidez geométrica ($\mathbf{K}_{\sigma-viga}$).

Martins (1997) faz um estudo das não linearidades geométricas e apresenta um comparativo de algumas das diversas matrizes geométricas existentes na literatura, onde formula um quadro resumo de cada uma.

Com base nas características das matrizes geométricas que Martins (1997) apresenta, foi escolhida a matriz geométrica a que o autor atribui a Cook et al. (1989), mostrada na equação (3.29), onde N é força axial atuando no elemento finito.

A matriz de rigidez, no caso de barra, é então dada por:

$$\mathbf{K}_{L\text{-barra}} = \int_0^{h_e} \varphi'_{\text{barra}}(x) [E \cdot A] \varphi'^T_{\text{barra}}(x) dx = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h_e} & -\frac{EA}{h_e} \\ -\frac{EA}{h_e} & \frac{EA}{h_e} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e a matriz de rigidez geométrica por:

$$\mathbf{K}_{\sigma\text{-barra}} = N \int_0^{h_e} \varphi'_{\text{barra}}(x) \varphi'^T_{\text{barra}}(x) dx = \begin{bmatrix} \frac{N}{L} & -\frac{N}{L} \\ -\frac{N}{L} & \frac{N}{L} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

No caso de viga, tem-se a matriz de rigidez expressa por:

$$\mathbf{K}_{L\text{-viga}} = \int_0^{h_e} \varphi''_{\text{viga}}(x) [E \cdot I] \varphi''^T_{\text{viga}}(x) dx = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} & -\frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} \\ \frac{6EI}{h_e^2} & 4EI & -\frac{6EI}{h_e^2} & 2EI \\ -\frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} & \frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} \\ \frac{6EI}{h_e^2} & 2EI & -\frac{6EI}{h_e^2} & 4EI \\ \frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} & -\frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} \\ \frac{6EI}{h_e^2} & 2EI & -\frac{6EI}{h_e^2} & 4EI \\ -\frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} & \frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} \\ \frac{6EI}{h_e^2} & 2EI & -\frac{6EI}{h_e^2} & 4EI \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

e a matriz geométrica é assim redigida:

$$\mathbf{K}_{\sigma\text{-viga}} = N \int_0^{h_e} \varphi'_{\text{viga}}(x) \varphi'^T_{\text{viga}}(x) dx = \begin{bmatrix} \frac{6N}{5h_e} & \frac{N}{10} & -\frac{6N}{5h_e} & \frac{N}{10} \\ \frac{N}{10} & \frac{2Nh_e}{15} & -\frac{N}{10} & -\frac{Nh_e}{30} \\ -\frac{6N}{5h_e} & -\frac{N}{10} & \frac{6N}{5h_e} & -\frac{N}{10} \\ \frac{N}{10} & -\frac{Nh_e}{30} & -\frac{N}{10} & \frac{2Nh_e}{15} \\ \frac{6N}{5h_e} & \frac{N}{10} & -\frac{6N}{5h_e} & \frac{N}{10} \\ \frac{N}{10} & \frac{2Nh_e}{15} & -\frac{N}{10} & -\frac{Nh_e}{30} \\ -\frac{6N}{5h_e} & -\frac{N}{10} & \frac{6N}{5h_e} & -\frac{N}{10} \\ \frac{N}{10} & -\frac{Nh_e}{30} & -\frac{N}{10} & \frac{2Nh_e}{15} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

sendo que se obtém a matriz de rigidez tangente pela soma da matriz de rigidez linear e a geométrica, ou seja:

$$K_{T\text{-barra}} = K_{L\text{-barra}} + K_{\sigma\text{-barra}} \quad (3.30)$$

$$K_{T\text{-viga}} = K_{L\text{-viga}} + K_{\sigma\text{-viga}} \quad (3.31)$$

Como citado anteriormente, pode-se agrupar os elementos de barra e viga a fim de montar o elemento de pórtico, como ilustrado na Figura 3.4.

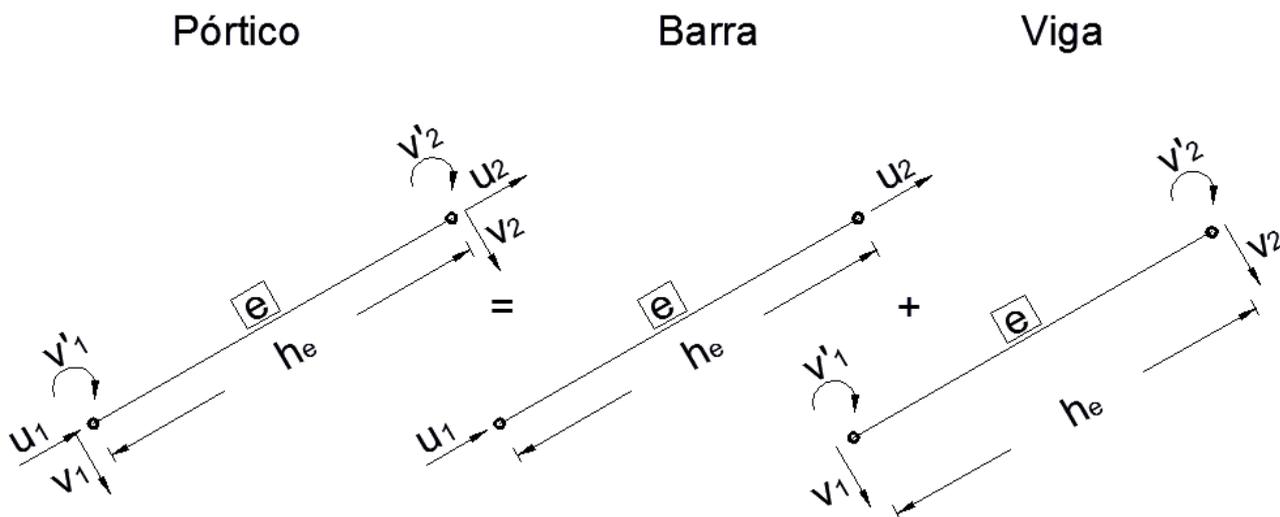


Figura 3.4 - Formação do elemento de pórtico.

Assim sendo, a matriz de rigidez do elemento pórtico, no sistema local de coordenadas do elemento, é, então, dada por:

$$\mathbf{K}_{L\text{-p\acute{o}rtico}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} & 0 & -\frac{12EI}{h_e^3} & \frac{6EI}{h_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{h_e^2} & \frac{4EI}{h_e} & 0 & -\frac{6EI}{h_e^2} & \frac{2EI}{h_e} \\ -\frac{EA}{h_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} & 0 & \frac{12EI}{h_e^3} & -\frac{6EI}{h_e^2} \\ 0 & \frac{6EI}{h_e^2} & \frac{2EI}{h_e} & 0 & -\frac{6EI}{h_e^2} & \frac{4EI}{h_e} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e a matriz geométrica é escrita como:

$$\mathbf{K}_{\sigma\text{-p\acute{o}rtico}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{5h_e} & \frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & 0 & -\frac{6N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{5h_e} & \frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} \\ 0 & \frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & \frac{2N_{\text{p\acute{o}rtico}}h_e}{15} & 0 & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}h_e}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{5h_e} & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & 0 & \frac{6N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{5h_e} & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} \\ 0 & \frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}h_e}{30} & 0 & -\frac{N_{\text{p\acute{o}rtico}}}{10} & \frac{2N_{\text{p\acute{o}rtico}}h_e}{15} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e, no caso da barra, que representa o elemento de treliça, a rigidez passa a ser expressa por:

$$\mathbf{K}_{\text{treliça}} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\text{eq}}A}{h_e} & 0 & 0 & -\frac{E_{\text{eq}}A}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_{\text{eq}}A}{h_e} & 0 & 0 & \frac{E_{\text{eq}}A}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

e a matriz de rigidez geométrica como:

$$K_{\sigma\text{-treliça}} = \begin{bmatrix} \frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 & -\frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 & -\frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 \\ -\frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 & \frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 & 0 & \frac{N_{\text{treliça}}}{h_e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

onde, para a matriz de rigidez do elemento temos que E é o módulo de elasticidade do material, I o momento de inércia da seção, A é a área da seção transversal, E_{eq} é o módulo de elasticidade equivalente devido ao efeito da catenária do cabo, N é a força axial presente no elemento finito, obtida por:

$$N_{\text{pórtico}} = \frac{E \cdot A \cdot (L_i - L_0)}{L_0} \quad (3.36)$$

$$N_{\text{treliça}} = \frac{E_{\text{eq}} \cdot A \cdot (L_i - L_0)}{L_0} \quad (3.37)$$

em que L_i é o comprimento atual do elemento, e L_0 é comprimento inicial do elemento, obtido pela geometria indesejada da estrutura.

Para determinação das características dinâmicas da estrutura é preciso definir a matriz de massa dos elementos de pórtico e treliça. Clough e Penzien (2003) afirmam que a matriz de massa concentrada é a forma mais simples de se determinar as propriedades de massa de uma estrutura, e consiste em supor a massa da estrutura concentrada nos pontos onde há graus de liberdades translacionais [Figura 3.5].

Segundo Clough e Penzien (2003) os termos fora da diagonal principal, denotados por m_{ij} , da matriz desaparecem, pois a aceleração de qualquer massa produz uma força inercial que atua somente no ponto. Uma força inercial no ponto i , devido a uma aceleração unitária do ponto i , é igual à massa concentrada naquele ponto, então a matriz de massa concentrada pode ser dada por:

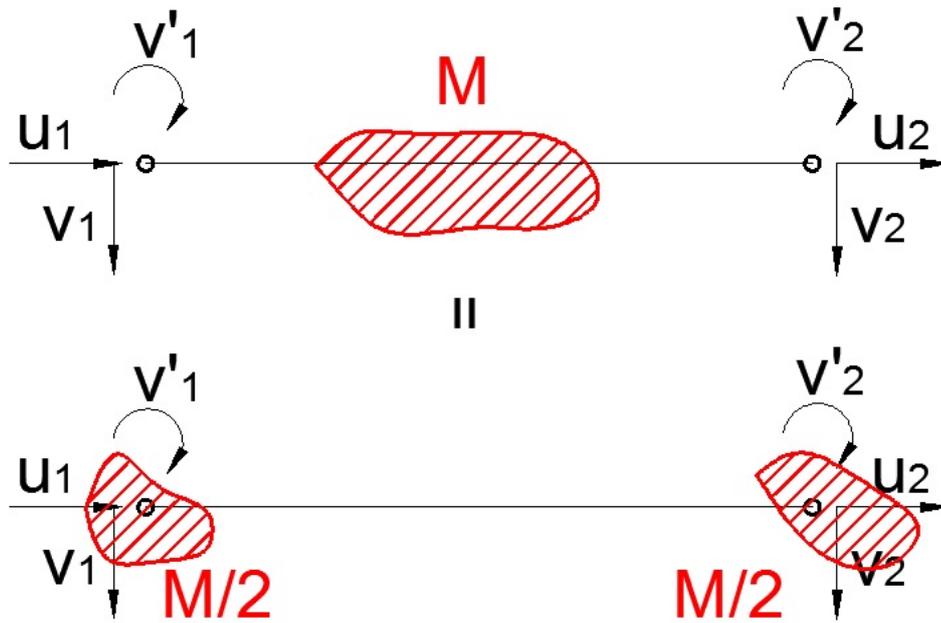


Figura 3.5 - Massa concentrada nos graus de liberdade translacionais.

$$\mathbf{M}_{\text{conc. p\acute{o}rtico}} = \begin{bmatrix} \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

onde $w = \rho \cdot A$, onde ρ é a massa específica do material, A é a área da seção transversal do elemento finito, portanto w é a massa por unidade de comprimento do elemento finito.

Outra formulação possível é a representação da matriz de massa consistente, que recebe este nome porque utiliza as mesmas funções de forma dos polinômios aproximadores utilizados para representar os deslocamentos que ocorrem na estrutura.

O procedimento para obter a matriz de massa consistente é o mesmo utilizado para definir a matriz de rigidez dos elementos finitos, por exemplo, pela equação (3.28), de onde obtém-se a matriz de massa consistente por:

$$\text{Mconsis.}^{\text{p\acute{o}rtico}} = \begin{bmatrix} \frac{w \cdot h_e}{3} & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13w \cdot h_e}{35} & \frac{11w \cdot h_e^2}{210} & 0 & \frac{9w \cdot h_e}{70} & -\frac{13w \cdot h_e^2}{420} \\ 0 & \frac{11w \cdot h_e^2}{210} & \frac{w \cdot h_e^3}{105} & 0 & \frac{13w \cdot h_e^2}{420} & -\frac{w \cdot h_e^3}{140} \\ \frac{w \cdot h_e}{6} & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9w \cdot h_e}{70} & \frac{13w \cdot h_e^2}{420} & 0 & \frac{13w \cdot h_e}{35} & -\frac{11w \cdot h_e^2}{210} \\ 0 & -\frac{13w \cdot h_e^2}{420} & -\frac{w \cdot h_e^3}{140} & 0 & -\frac{11w \cdot h_e^2}{210} & \frac{w \cdot h_e^3}{105} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e, para o caso de barra, tem-se a matriz de massa concentrada escrita como:

$$\text{Mconc.}^{\text{treliça}} = \begin{bmatrix} \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

e a matriz de massa consistente por:

$$\text{Mconsis.}^{\text{treliça}} = \begin{bmatrix} \frac{w \cdot h_e}{3} & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w \cdot h_e}{6} & 0 & 0 & \frac{w \cdot h_e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.2.2 VETOR DE CARREGAMENTOS NODAIS DO ELEMENTO FINITO

O vetor de carregamentos nodais se faz necessário para análise não linear estática, onde se busca a configuração deformada da estrutura sob o carregamento de peso-próprio. A montagem do vetor de carregamentos nodais se dá pelo mesmo procedimento que a montagem da matriz de rigidez, ou seja, introduz-se as funções de forma na equação (3.3), e minimizando a energia potencial das forças externas, posteriormente, em relação aos parâmetros nodais.

Os carregamentos dos elementos finitos do pórtico serão considerados segundo o eixo local do elemento, onde o peso-próprio é constante em todo o elemento. Para o peso-próprio do elemento de treliça, a contribuição será diretamente no vetor de carregamento global do elemento, sendo distribuído metade de seu carregamento total para cada nó do elemento de treliça [Figura 3.6].

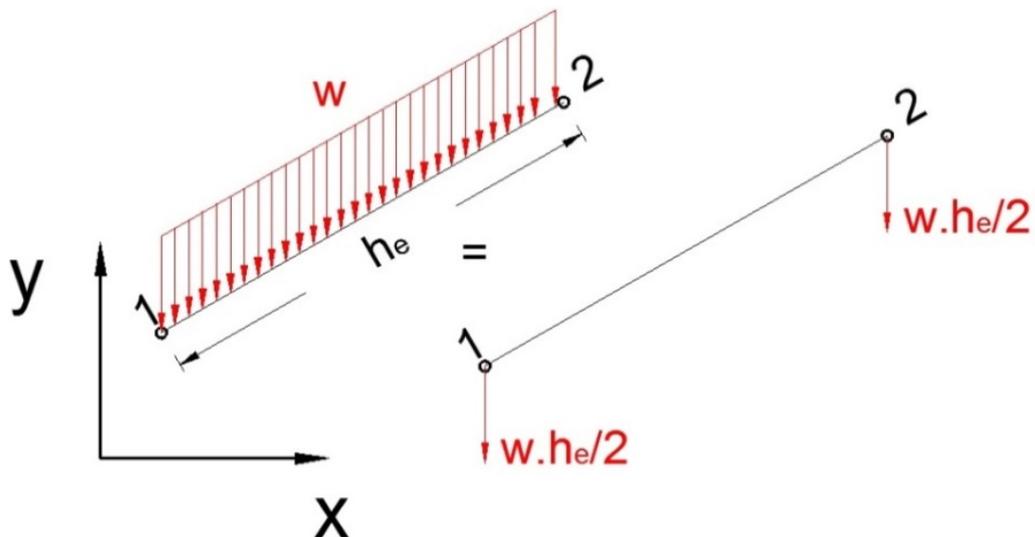


Figura 3.6 - Disposição da força nodal equivalente do elemento de treliça segundo as coordenadas globais.

Para o elemento de pórtico, submetido ao carregamento indicado na [Figura 3.7], a equação (3.3) passa a ser reescrita, desprezando-se as forças de volume, como:

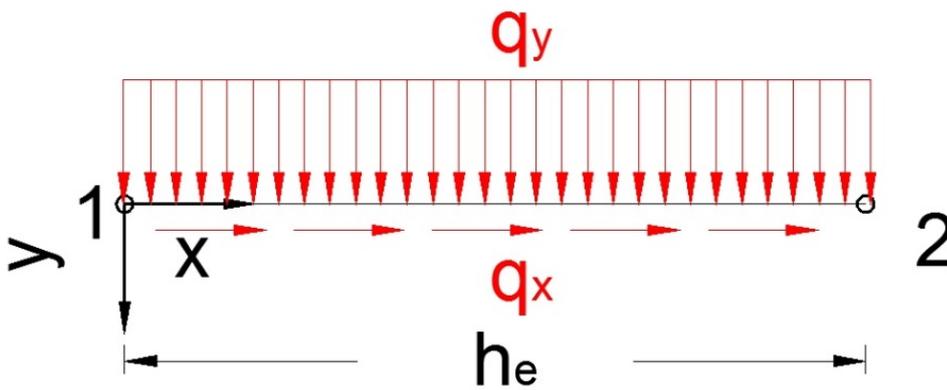


Figura 3.7 - Carregamento no elemento de pórtico.

$$\Omega = -\left(\int_0^{h_e} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)^T \{\boldsymbol{\delta}\} \cdot dx\right) = -\left[\begin{array}{cccccc} u_i & v_i & v'_i & u_j & v_j & v'_j \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{q_x \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_y \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_y \cdot h_e^2}{12} \\ \frac{q_y \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_x \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_y \cdot h_e^2}{12} \end{array} \right\} \quad (3.42)$$

onde, q_x e q_y são os carregamentos uniformemente distribuídos ao longo do elemento finito nas direções dos eixos locais x e y do elemento.

Finalmente, derivando-se a equação (3.42) em relação aos parâmetros nodais (δ), iremos encontrar o vetor de forças nodais (P_e). O vetor de forças nodais é o vetor obtido como resultado da minimização da parcela linear do funcional da equação (3.1), isto é, o termo independente dos parâmetros nodais após a minimização.

$$\{P_e\}^{\text{pórtico}} = \begin{Bmatrix} \frac{q_x \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_y \cdot h_e}{2} \\ \frac{q_y \cdot h_e^2}{12} \\ \frac{12}{q_y \cdot h_e} \\ \frac{2}{q_x \cdot h_e} \\ \frac{2}{q_y \cdot h_e^2} \\ -\frac{12}{12} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

4 ANÁLISES ENVOLVIDAS E O MÉTODO DA ANULAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS (MAD)

Este capítulo aborda as análises presentes no código computacional desenvolvido, fazendo comentários sobre cada uma. Após os breves comentários sobre as análises envolvidas, mostra-se o método da anulação de deslocamentos, que será o algoritmo empregado para determinação da configuração deslocada da estrutura em relação à configuração de referência.

4.1 ANÁLISES ENVOLVIDAS

Existem diversas técnicas de análise de estruturas, entre elas pode-se citar, análise estática linear, estática não linear, análise de vibração livre, análise de vibrações sob tensões iniciais, análise dinâmica linear, dinâmica não linear e outras.

O programa desenvolvido realizará as 4 primeiras análises, onde a de vibração livre estará conjugada a análise linear, e a análise de vibrações sob tensões iniciais será realizada a partir da configuração deslocada obtida por meio do método da anulação dos deslocamentos, MAD

4.1.1 ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR

Na análise estática linear, assume-se haver linearidade entre os conjugados força e deslocamento. Esta análise admite, ainda, que a configuração deslocada da estrutura não deve

diferir da sua posição inicial. Com isto as equações de equilíbrio são formuladas segundo a posição inicial (configuração de referência) do sistema estrutural.

Esta é uma consideração bastante razoável nos casos práticos, e aplicada a grande parte das estruturas correntes. Como a superposição de efeitos é válida quando se considera a análise linear, isto permite realizar uma série de combinações de carregamentos, resolvendo-se cada caso de carregamento, em separado, superpondo-se os resultados ao final para obter as combinações apropriadas.

Na análise linear, tem-se como hipóteses básicas que a estrutura está submetida a pequenos deslocamentos, e pequenas deformações. A hipótese de pequenos deslocamentos exige que os movimentos de translação e rotação da estrutura sejam pequenos em relação às dimensões da estrutura, o que implica em pequenas deformações na estrutura. Mas não se pode afirmar que tendo pequenas deformações, a estrutura não tenha sofrido grandes deslocamentos. Como Neves (1990) afirma, a hipótese de pequenos deslocamentos acaba sendo mais restritiva.

O comportamento do material também deve apresentar leis constitutivas lineares, caso contrário haverá a introdução de não linearidade física no problema. Portanto, o regime linear implica também que o material deve seguir a lei de Hooke.

Troitsky (1988) afirma que a análise linear para pontes estaiadas é de natureza aproximada, podendo-se utilizá-la como análise preliminar para o pré-dimensionamento da estrutura quando os vãos não forem tão significativos. Todavia, para o caso de grandes vãos a consideração de linearidade do comportamento passa a ser contra a segurança.

Essa afirmação de Troitsky (1988) deixa claro que, para grandes vãos, os efeitos não lineares podem conduzir a uma perda de rigidez da estrutura ou instabilidade estrutural, que podem reduzir bastante a margem de segurança da estrutura.

A equação básica a ser satisfeita, no caso da análise estática linear, é dada por:

$$K_L \{\delta\} = \{P\} \quad (4.1)$$

onde, K_L é a matriz de rigidez elástica linear da estrutura, $\{\delta\}$ é o vetor de deslocamentos segundo os graus de liberdade considerados, e $\{P\}$ o vetor das cargas aplicadas segundo tais deslocamentos.

4.1.2 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

O estudo do comportamento não linear da estrutura está sendo bastante desenvolvido uma vez que as estruturas estão ficando cada vez mais esbeltas. Isso obriga a maior dedicação de formulações não lineares para simular da melhor forma possível o comportamento real da estrutura, levando os materiais a sua máxima capacidade de utilização.

O presente estudo abordará a não linearidade geométrica oferecida pelo efeito de aumento de rigidez do cabo de sustentação da ponte, o estai, e esse efeito será representado pelo módulo de elasticidade de Dischinger [equação (2.3)]. O efeito de elementos comprimidos também será considerado, com a utilização da matriz de rigidez geométrica, vide na equação (3.33). A lei de Hooke é assumida para o material (relação linear entre as componentes do estado de tensão e deformação).

A não linearidade geométrica se apresenta quando não há comportamento linear entre carga aplicada e os deslocamentos resultantes da aplicação da carga, como pode ser visto na Figura 4.1. É possível notar que o comportamento da curva b da Figura 4.1 é não linear. No entanto, caso os deslocamentos (δ) sejam pequenos, o comportamento se sobrepõe ao apresentado pelo caso linear (curva a).

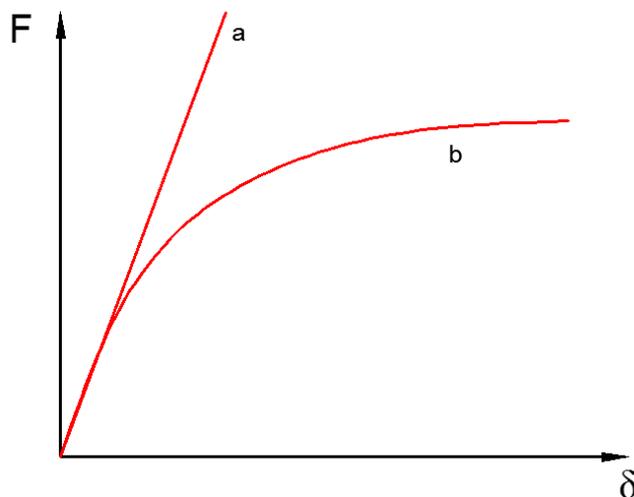


Figura 4.1 - (a) Comportamento linear entre o conjugado força - deslocamento; (b) Comportamento não linear entre o conjugado força - deslocamento.

A solução do sistema não linear é realizado de forma incremental-iterativa, sendo a equação a ser satisfeita (equação incremental de equilíbrio), escrita como segue:

$$K_T \{\Delta\delta\} = \{\Delta R\} \quad (4.2)$$

onde, K_T é a matriz de rigidez tangente da estrutura, $\{\Delta\delta\}$ é o vetor de deslocamentos incrementais, e $\{\Delta R\}$ representa o vetor de desequilíbrio, ou desbalanceamento nodal.

4.1.3 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO LIVRE NÃO AMORTECIDA

As vibrações que ocorrem em estruturas são indesejáveis, pois são fontes de ruídos, movimentos desagradáveis, e que podem levar os materiais da estrutura a ruptura por fadiga devido à variação cíclica de tensão.

A análise dinâmica deve ser sempre conferida em estruturas onde o carregamento dinâmico é imperativo, como ação de ventos, abalos sísmicos, ação de correnteza, entre outros. A análise modal objetiva determinar as características dinâmicas da estrutura.

A equação diferencial de movimento a ser satisfeita é dada por:

$$K_L \{\delta\} + M\{\ddot{\delta}\} = \{0\} \quad (4.3)$$

sendo K_L a matriz de rigidez elástica linear da estrutura, $\{\delta\}$ o vetor de deslocamentos de todos os graus de liberdade da estrutura, $\{\ddot{\delta}\}$ o vetor de aceleração de todos os graus de liberdade da estrutura, e M a matriz de massa da estrutura.

Como mostrado por Clough e Penzien (2003) a suposição de que o movimento pode ser descrito por uma função harmônica simples, como a da equação a seguir:

$$\{\delta\} = \{\hat{\delta}\} \text{sen}(\omega_n t + \theta) \quad (4.4)$$

onde, $\{\hat{\delta}\}$ representa o vetor das amplitudes dos deslocamentos nodais, ω_n é uma frequência naturais angular, e θ é o ângulo de fase.

Com isso, a equação (4.3) pode ser reescrita em função dos deslocamentos e frequências naturais. Tendo-se em vista que o vetor de deslocamentos é um vetor não nulo, temos um problema de autovalores (frequências naturais), e auto-vetores (modos de vibração).

$$(K_L - \omega_n^2 M)\{\hat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.5)$$

onde, o $\{\hat{\delta}\}$ expressa os valores dos modos de vibração para o sistema correspondente.

4.1.4 ANÁLISE DE VIBRAÇÕES SOB TENSÕES INICIAIS

No caso das pontes estaiadas, os elementos encontram-se submetidos a um estado de tensões iniciais. Essas tensões são provenientes do carregamento de peso próprio da estrutura, e também de forças de protensão. Quando as tensões iniciais são muito elevadas, a análise de vibração livre não amortecida pode não ser adequada.

Os cabos das pontes estaiadas estão submetidos à altas tensões. Como os cabos são inclinados, eles transferem componentes horizontais de forças para o tabuleiro, e para a viga. Caso a magnitude dessas forças sejam muito altas, pode haver um efeito não linear geométrico devido a posição deslocada da estrutura e a força de compressão aplicada.

A introdução de forças de compressão no tabuleiro da ponte pode reduzir a rigidez da estrutura. A introdução das tensões iniciais é feita pela utilização da matriz de rigidez geométrica (K_G), que, em decorrência deste fato, pode ser chamada de matriz de rigidez com tensões iniciais. A consideração é que a estrutura encontra-se em regime de pequenos deslocamentos, então a matriz de rigidez tangente (K_T) é a dada pela equação (3.30).

Portanto, a equação que soluciona o problema de vibrações sob tensões iniciais pode ser escrita utilizando a equação (4.5) como base, segundo a equação a seguir.

$$(K_T - \omega_n^2 M) \{\hat{\delta}\} = \{0\} \quad (4.6)$$

A equação (4.6) possibilita encontrar as frequências naturais não amortecidas, e modos de vibração de uma estrutura de comportamento não linear geométrico em torno da configuração deformada inicial, para a qual a rigidez do sistema estrutural é dado pela matriz de rigidez tangente.

Wang, Tseng e Yang (1993) afirmam que a configuração deslocada inicial da estrutura deve ser obtida para que se determinem as forças de protensão existente nos cabos, e a geometria inicial da estrutura.

4.2 A ESCOLHA DO MÉTODO DA ANULAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS – MAD

Diversos métodos foram propostos para obtenção das forças atuantes nos estais da ponte, entre eles pode-se citar os métodos apresentados por Ytza (2009), o Método do Tabuleiro Articulado em todos os estais (M.T.A.), o Método da Anulação dos Deslocamentos

(MAD), o Método da Anulação das Reações em Apoios Fictícios (M.A.R.), e o Método da Anulação dos Deslocamentos ao Longo do Processo Construtivo (MAD evolutivo).

O intuito deste trabalho é implementar o método MAD, que aparece pela primeira vez descrito no trabalho de Wang, Tseng e Yang (1993). O objetivo deste método é determinar as forças nos estais com o objetivo de atender a uma determinada configuração inicial, chamada de configuração de referência, que é, normalmente, a configuração do projeto arquitetônico.

Na Figura 4.3(a) é possível ver a configuração de referência em cinza, quando não se impõe uma protensão aos estais, já na Figura 4.3(b) a configuração deslocada se sobrepõe à configuração do projeto arquitetônico.

A escolha do método MAD sobre os demais métodos se deu devido ao estudo de Ytza (2009), onde a autora conclui que os valores dos momentos no tabuleiro e na torre são melhores para este método, e o método M.A.R. apresenta bons valores para os momentos no tabuleiro, e valores não tão bons para os momentos nas torres [Figura 4.2].

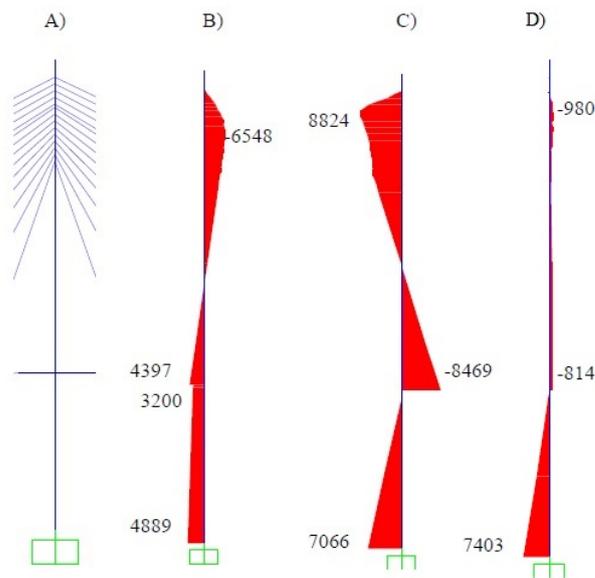


Figura 4.2 - a) Pilar analisado; b) Distribuição de momentos fletores sem protensão dos estais; c) Distribuição dos momentos após aplicação do M.A.R.; d) Distribuição dos momentos após aplicação do MAD (momentos em kNm) [Ytza, 2009 - adaptado].

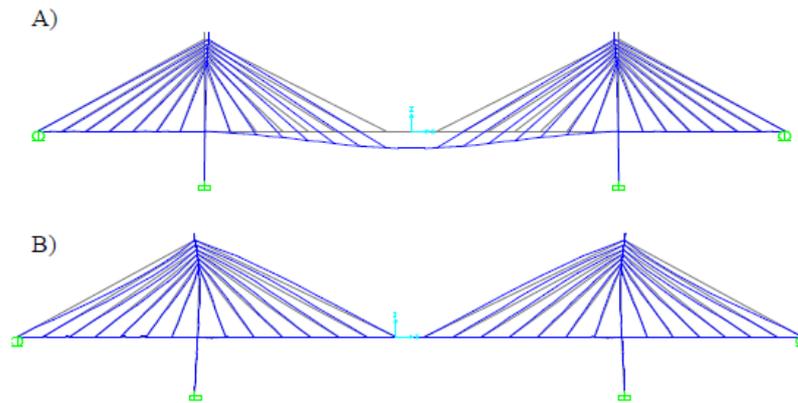


Figura 4.3 - (a) Configuração de referência (cinza), e deslocada sem as forças de protensão (azul); (b) Configuração de referência (cinza), e deslocada com as forças do MAD [Ytza, 2009].

Este método penaliza os estais, no sentido de que as forças atuantes neles são maiores que quando se obtém as forças pela análise não linear pura apenas com o peso-próprio, isto é, sem a busca da configuração de referência. Em contra partida, os momentos fletores atuantes no tabuleiro se aproximam ao de uma viga contínua, e os momentos fletores atuantes nos pilares são bastante reduzidos, como se pode observar na Figura 4.4.

Menores momentos fletores, tanto no tabuleiro, quanto na torre podem reduzir significativamente a quantidade de material (aço e/ou concreto) utilizado na construção, gerando economia significativa ao custo da obra. Entretanto, maiores forças nos estais resultam maiores forças de compressão no tabuleiro e na torre.

Em termos de características dinâmicas da estrutura, o aumento significativo das forças de compressão diminui a rigidez da estrutura. Esse decréscimo de rigidez gera frequências naturais mais baixas que as frequências naturais de uma estrutura onde o efeito das forças de compressão existentes nos elementos não é considerado.

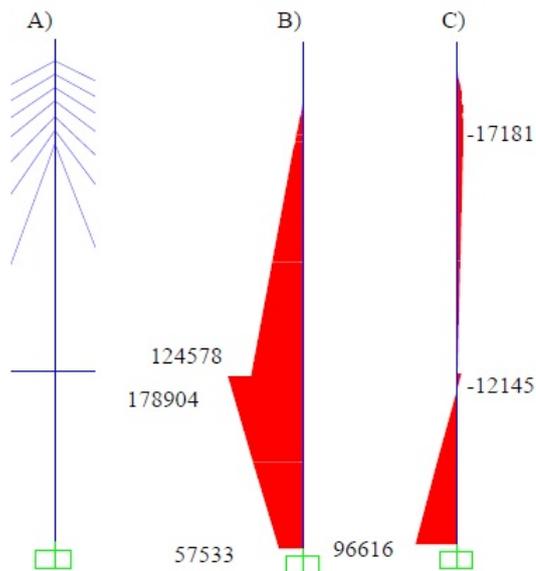


Figura 4.4 - (a) Pilar em forma de semi-harpa;(b) Momento fletor no pilão sem protensão dos estais;(c) Momento fletor no pilão com forças do MAD (unidades em kNm) [Ytza,2009].

Em seguida, será descrito o método, com o algoritmo envolvido, os critérios de convergência adotados, e uma abordagem sobre o método de solução adotado para resolução do sistema não linear, o Método de Newton-Raphson.

4.3 DESCRIÇÃO DO MÉTODO MAD

O método MAD tem como objetivo anular os deslocamentos de determinados pontos da estrutura, chamado pontos de controle. Em geral, os pontos de controle, onde o deslocamento deve ser nulo a fim de coincidir com a configuração de referência, são os pontos de conexão entre os estais e o tabuleiro.

O método determina iterativamente quais as forças atuantes nos estais de modo que o critério de convergência, descrito no item 4.4, seja atendido. O método da anulação dos deslocamentos é um método iterativo que, segundo Wang, Lin e Tang (2002), converge monotonicamente. O objetivo do método é encontrar a menor distribuição de momentos fletores no tabuleiro; aquele que se aproxima ao máximo de uma viga contínua.

No estudo proposto por Wang, Tseng e Yang (1993), os autores analisam 3 modelos de pontes estaiadas, sendo uma assimétrica, uma simétrica com configuração em harpa, e a última com a mesma configuração da ponte em harpa, mas com a configuração dos estais em leque. Estes exemplos são reproduzidos no capítulo 5 para validação do código computacional.

O método possui 2 ciclos iterativos, sendo o primeiro a iteração de equilíbrio da estrutura, seguida da iteração de forma, que verifica se os deslocamentos dos pontos de controle da configuração deslocada da estrutura foram atendidos.

Com o método, os autores foram capazes de encontrar uma distribuição de momentos fletores mais uniformes, o que possibilita uma estrutura economicamente mais viável.

As forças axiais impostas pelos estais mostrou depender consideravelmente da configuração do arranjo dos estais, se em leque, ou em harpa. Após atingir a configuração de referência, a diferença entre os valores de solicitações axiais do tabuleiro, e a configuração de equilíbrio sem as forças nos estais do método MAD, variou muito pouco na configuração em leque, e significativamente na configuração em harpa [Figura 4.5].

Isso era de se esperar, uma vez que a configuração em leque produz a melhor distribuição da contribuição vertical da força do estai. É notável, em ambos os casos de configuração de ponte estaiada, a redução do diagrama de momentos fletores quando se utiliza o MAD

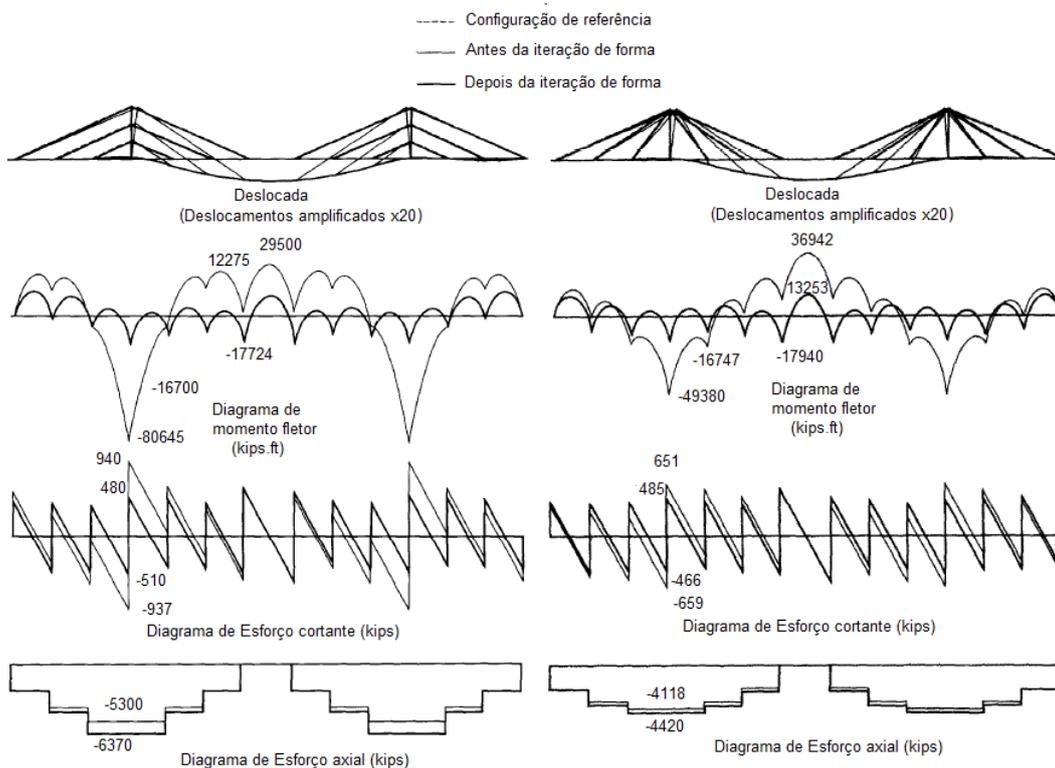


Figura 4.5 - Deslocamentos e esforços internos antes e depois da iteração de forma de uma ponte em harpa (esquerda) e em leque (direita) [Wang, Tseng e Yang, 1993 - adaptado].

A seguir é mostrado um fluxograma que descreve o procedimento empregado pelo método MAD para obter a configuração deslocada inicial da estrutura [Figura 4.6]. Onde o passo “Iteração de forma” é apresentado no item 4.6.

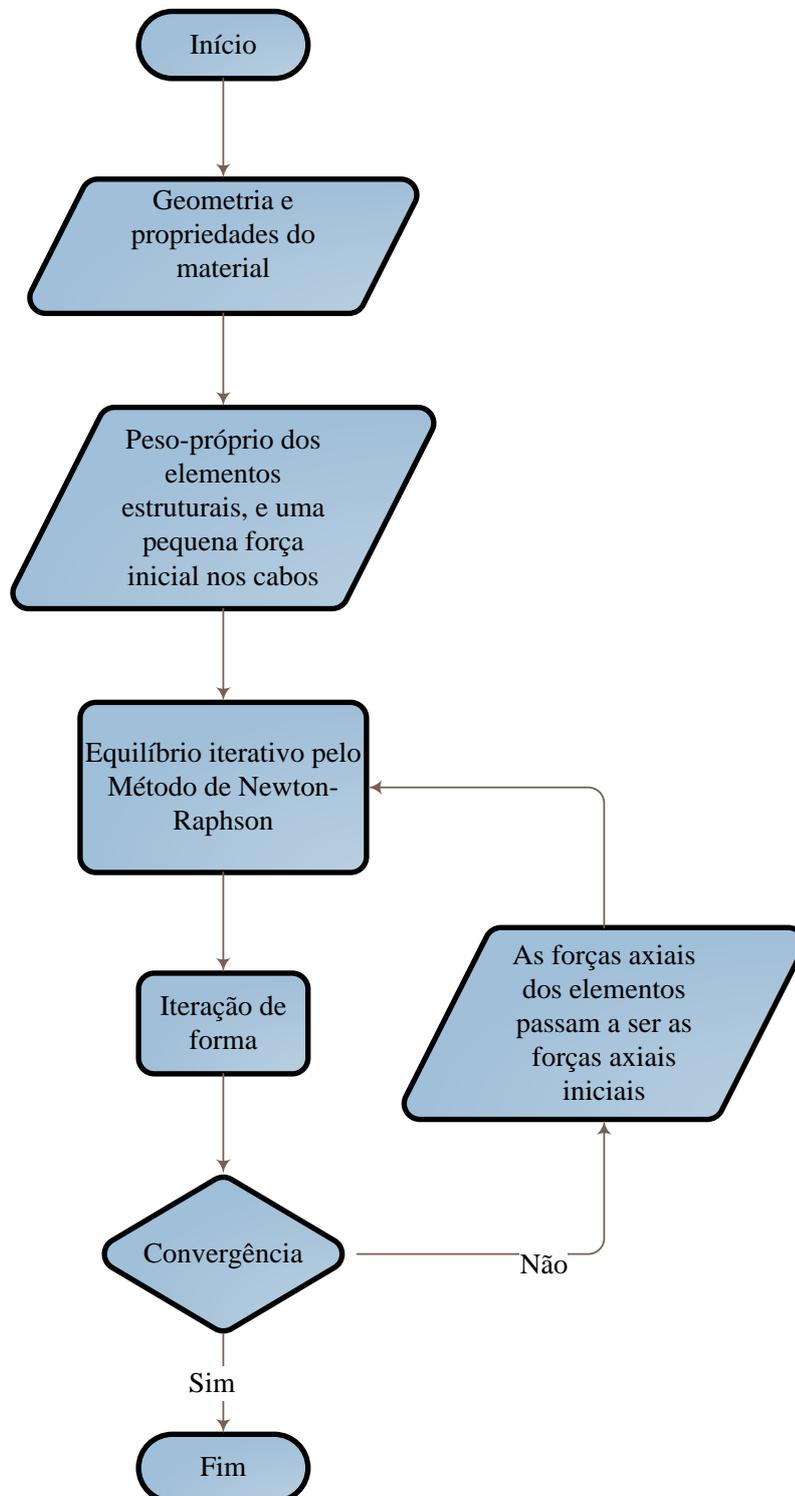


Figura 4.6 - Fluxograma do método MAD

4.4 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Uma etapa importante da resolução de qualquer processo iterativo é a determinação do critério de parada, que está ligado diretamente à precisão da resposta. Como a solução real do problema não é conhecida de antemão, Chapra e Canale (2008) sugerem a utilização de um erro percentual aproximado, chamado de ε_a .

Como critério de parada, é utilizado uma tolerância pré-especificada, um valor baixo, e, neste caso, positivo. Esta tolerância pré-determinada será denotada por ε_s , e o critério de convergência é mostrado a seguir.

$$|\varepsilon_a| \leq \varepsilon_s \quad (4.7)$$

Existem vários critérios de parada encontrados na literatura, desde variação de deslocamentos entre uma iteração e outra, até variação da energia de deformação do corpo entre iterações. As mais comuns, segundo Krenk (2009), são os critérios do vetor de desequilíbrio nodal, e o critério de deslocamentos. Os valores sugeridos por Krenk (2009) para tolerância pré-determinada (ε_s) é entre 10^{-4} e 10^{-6} .

No estudo proposto por Wang, Tseng e Yang (1993), por se tratar de dois processos iterativos, um para obtenção do equilíbrio da estrutura pelo método de Newton-Raphson, e outro para obtenção da configuração de referência. São propostos 2 cálculos de ε_a , denotadas por $\varepsilon_a^{\text{Newton-Raphson}}$, que é a tolerância para convergência do método de Newton-Raphson, e $\varepsilon_a^{\text{Iteração-Forma}}$, que representa a tolerância da configuração de referência, escritas como:

$$\varepsilon_a^{\text{Newton-Raphson}} = \frac{|\Delta R|}{|\Delta F|} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_a^{\text{Iteração-Forma}} = \left| \frac{\text{Deslocamento Vertical no ponto de controle}}{\text{Vão Principal}} \right| \quad (4.9)$$

onde, ΔR é o vetor de desequilíbrio ou desbalanceamento nodal, e ΔF é o vetor de incremento de carregamento.

Como é possível observar das equações (4.8) e (4.9), este trabalho vai abordar dois critérios de convergência diferentes. O primeiro para determinação do equilíbrio da estrutura, baseado no módulo do vetor de desequilíbrio nodal, e o segundo para determinação da

configuração deslocada da estrutura após as iterações de forma, com critério de parada em deslocamentos.

4.5 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson pode ser deduzido com base na série de Taylor, seja, por exemplo, uma função $f(x)$ expandida em série de Taylor, assim escrita:

$$f(x) = f(x^i) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^i} \Delta x + \Theta^2 = 0 \quad (4.10)$$

onde, $f(x)$ é uma função qualquer da variável x , $f(x^i)$ é o valor da função no ponto x^i , sendo i o número da iteração. O termo de ordem superior Θ^2 será desprezado (considerado aproximadamente nulo). Assim sendo, o incremento Δx é dado por:

$$\Delta x = x^{i+1} - x^i \quad (4.11)$$

onde, x^{i+1} é a posição x na iteração $i+1$, e x^i é a posição na iteração i . Com isso, é possível prever o valor de x^{i+1} com base nos valores atuais da iteração i , como:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^i}} \quad (4.12)$$

Esta é a essência do método de Newton-Raphson. Podemos reescrever as equações de forma a solucionar a equação algébrica de um elemento finito, onde a solução inicial ($i=1$) passa a ser a posição deslocada da estrutura. Assim, pode-se escrever a relação de equilíbrio entre as forças externas e as forças internas como:

$$\mathbf{R}_{(\delta)} = \mathbf{K}_{(\delta)} \cdot \delta - \mathbf{F} = 0 \quad (4.13)$$

onde, \mathbf{R} é o vetor de desbalanceamento entre as forças externas aplicadas e as forças internas resistentes, \mathbf{F} é o vetor de forças externas, \mathbf{K} a matriz de rigidez, e δ o vetor de deslocamentos nodais. Assim, analogamente, o vetor de desbalanceamento pode ser escrito como a função $f(x)$ da equação (4.10), então, tem-se que:

$$\mathbf{R}_{(\delta)} = \mathbf{R}_{(\delta^{i-1})} + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \delta} \right|_{\delta^{i-1}} \Delta \delta + \Theta^2 \quad (4.14)$$

Assume-se que o vetor de desbalanceamento entre as forças externas aplicadas e as forças internas deverá ser zero ($\mathbf{R}_{(\delta)}=0$), e com isso a equação (4.14) pode ser reescrita isolando-se a parcela do incremento ($\Delta\delta^i$), como segue:

$$\Delta\delta^i = \frac{-\mathbf{R}_{(\delta^{i-1})}}{\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \delta} \right|_{\delta^{i-1}}} \quad (4.15)$$

na qual, a variação do resíduo em relação ao deslocamento é descrito como a matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_T), escrita a seguir.

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \delta} \right|_{\delta^{i-1}} \quad (4.16)$$

A equação (4.15) pode ser reescrita utilizando a equação (4.13), e a equação (4.16), como mostrado a seguir:

$$\Delta\delta^i = (\mathbf{K}_{T(\delta^{i-1})})^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{K}_{(\delta^{i-1})} \cdot \delta^{i-1}) \quad (4.17)$$

e, com o valor do i-ésimo incremento, $\Delta\delta^i$, calcula-se o valor do i-ésimo deslocamento, dado por:

$$\delta^i = \delta^{i-1} + \Delta\delta^i \quad (4.18)$$

em seguida, submetendo-o aos critérios de convergência das equações (4.7), e (4.8).

O método de Newton-Raphson calcula a matriz de rigidez tangente da estrutura a cada iteração. Isso pode aumentar bastante o custo computacional, e uma alternativa é modificar o método, chamando-o de método de Newton-Raphson modificado.

A principal diferença entre os métodos é que o método Newton-Raphson modificado, como Reddy (2004) cita, a matriz de rigidez é calculada apenas no começo de cada passo de carga fixo, mantendo-se a matriz de rigidez tangente constante, enquanto o vetor de desbalanceamento é atualizado em cada iteração, e fazendo a atualização da matriz de rigidez tangente a cada número fixo de iterações, ou até que a taxa de convergência se torne baixa.

O número de iterações para se atingir a convergência pelo método de Newton-Raphson modificado é maior que o método de Newton-Raphson. É possível obter um ganho, em termos de custo computacional, apesar do maior número de iterações, principalmente em sistemas estruturais com muitos graus de liberdade. Isso porque se calcula uma matriz de

rigidez tangente única para cada passo de carga, em contraposição ao cálculo da matriz de rigidez tangente em cada iteração no método de Newton-Raphson.

Wang e Yang (1996) afirmam que a análise não linear com aplicação plena da carga irá, frequentemente, falhar. Por isso, deve-se realizar um processo incremental-iterativo, onde haverá passos de carga, e as iterações de equilíbrio serão realizadas em cada passo de carga. A Figura 4.7 ajuda a mostrar a diferença entre ambos os métodos.

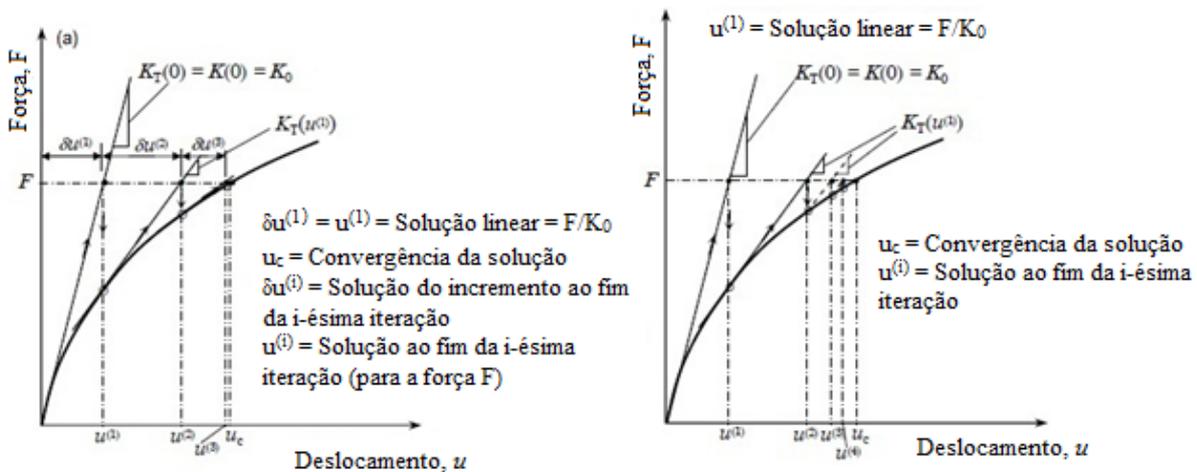


Figura 4.7 - (a) Método de Newton-Raphson; (b) Método de Newton-Raphson Modificado [Reddy, 2004 - adaptado].

O método de Newton-Raphson, embora seja muito eficiente, há casos particulares, ilustrados na Figura 4.8, onde o método não apresenta convergência, ou que sua convergência seja muito lenta. Chapra e Canale (2008) afirmam que sua convergência depende da natureza da função e da aproximação inicial, sendo escolher um valor inicial suficiente próximo da raiz a melhor forma de evitar a não convergência do método.

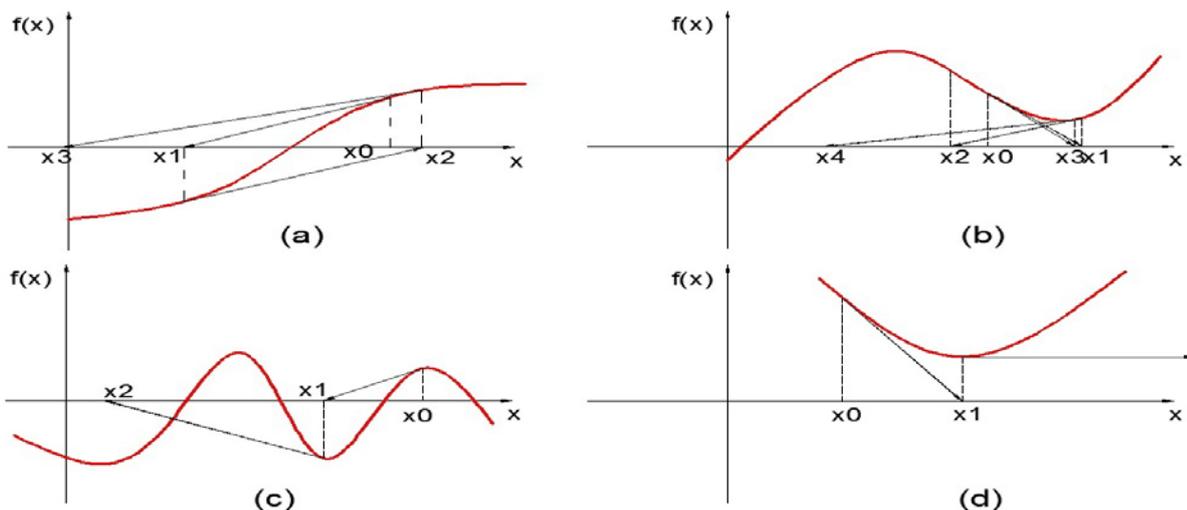


Figura 4.8 - Exemplos de divergência do método de Newton-Raphson [Chapra e Canale, 2008 adaptado].

A aproximação inicial adotada é a indeslocada da estrutura, imagina-se ser um bom ponto inicial, visto que não são esperados grandes deslocamentos da estrutura em comparação com o tamanho do vão principal. A Figura 4.9 mostra o fluxograma do método de Newton-Raphson.

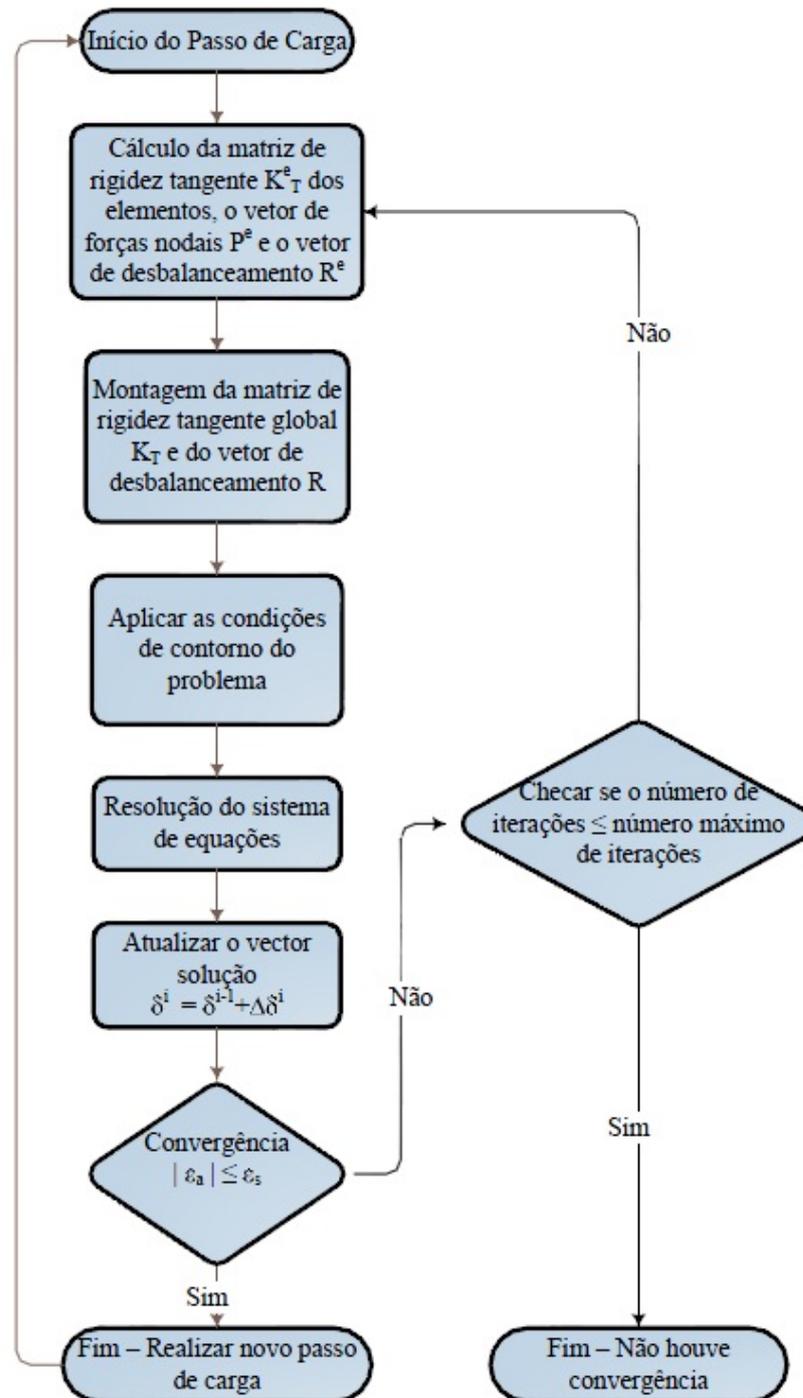


Figura 4.9 - Fluxograma do passo de carga do método de Newton-Raphson.

No método de Newton-Raphson o cálculo da matriz de rigidez tangente aparece dentro de um *loop*, isso significa que a cada iteração uma nova matriz tangente é calculada e montada.

4.6 FORMULAÇÃO DO MÉTODO MAD

Para obter a configuração deslocada inicial o vetor de forças externas será composto apenas de componentes referentes ao peso próprio dos elementos estruturais, onde a não linearidade da catenária do cabo é levada em consideração pelo módulo de elasticidade equivalente, como mostrado pela equação (2.3).

Para pequenas pontes estaiadas a estimativa inicial dos cabos não é relevante, o resultado obtido ao se estimar forças iniciais pequenas ou grandes serão bastante próximos, como mostra Wang, Lin e Tang (2002). Entretanto, a convergência do método pode não ser obtida quando se trabalha com pontes estaiadas de grande escala, e estimativas que estão longe da resposta real.

Por isso, a estimativa inicial é a primeira etapa a ser realizada. Wang, Lin e Tang (2002) sugerem o uso de 2 métodos que se mostraram convergentes para pontes estaiadas de grandes vãos.

O primeiro método é estimar a força atuante em todos os cabos quando a razão entre o E_{eq}/E é de 0,80 escrito como:

$$\frac{E_{eq}}{E} = 0,80 = \frac{1}{1 + \frac{(w.L_h)^2 E.A}{12.T^3}} \quad (4.19)$$

onde L_h é o comprimento do cabo em projeção horizontal, w é o peso do cabo por unidade de comprimento, E o módulo de elasticidade do cabo, A a área do cabo e T é a força de tração. Desenvolvendo-se a equação (4.19), chega-se que a força de tração no cabo para estimativa inicial é dada a seguir.

$$T = \sqrt[3]{\frac{E.A.(w.L_h)^2}{3}} \quad (4.20)$$

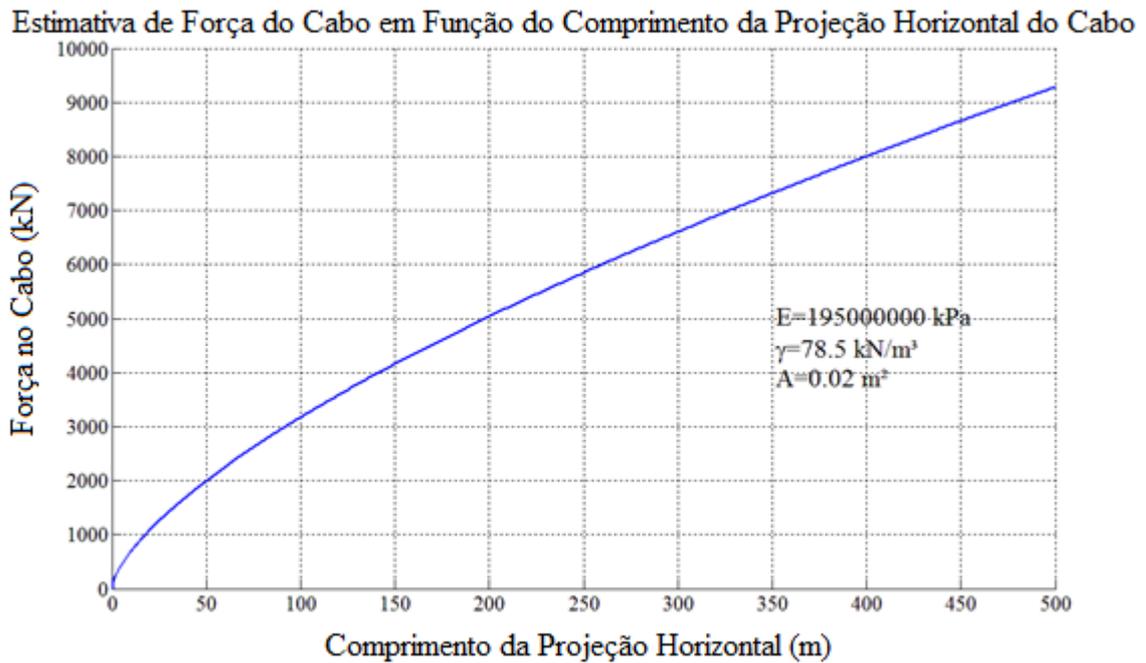


Figura 4.10 - Curva da estimativa inicial da força do cabo em função do comprimento em projeção horizontal do cabo para uma relação E_{eq}/E de 0,80 para o cabo com os dados fornecido no gráfico.

O segundo método proposto por Wang, Lin e Tang (2002) para estimar as forças iniciais nos cabos consiste em utilizar o primeiro método não para todos os cabos, e sim apenas para os cabos do vão principal, enquanto as forças dos cabos nos vãos adjacentes são calculados pelo desbalanceamento das forças horizontais na torre conforme mostra a Figura 4.11.

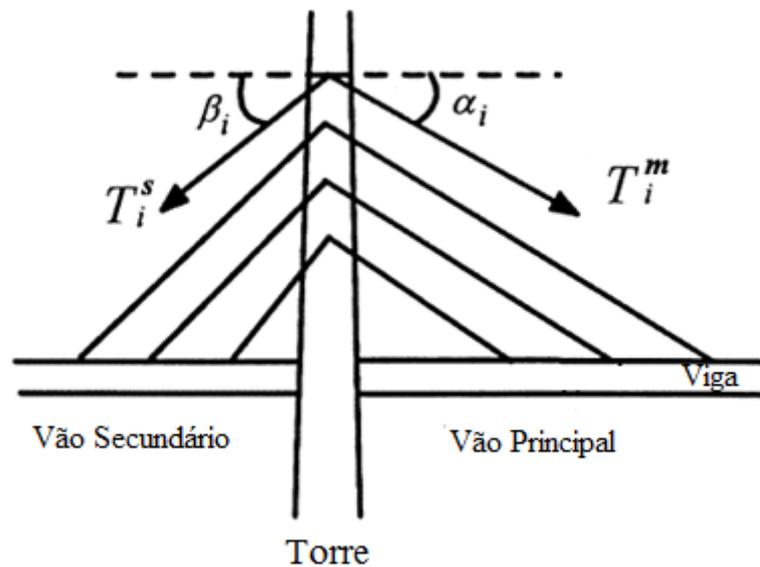


Figura 4.11 - Estimativa das forças nos cabos do vão adjacente baseado no desequilíbrio das forças horizontais [Wang, Lin e Tang, 2002 - adaptado].

Onde as forças nos cabos do vão secundário podem ser dadas por:

$$T_i^s = \frac{T_i^m \cos \alpha_i}{\cos \beta_i} \quad (4.21)$$

onde T_i^s é a estimativa da força no cabo do vão secundário, T_i^m é a estimativa da força do vão principal obtida pelo primeiro método, α_i é o ângulo entre o cabo do vão principal e a horizontal, e β_i é o ângulo entre o cabo do vão secundário e a horizontal.

O código computacional desenvolvido utiliza o primeiro método para obtenção das estimativas iniciais das forças no cabo.

O passo seguinte é resolver as equações de equilíbrio como mostrado no item 4.5. Obtém-se as forças internas dos elementos. Neste ponto, a estrutura encontra-se em equilíbrio, entretanto não atende aos requisitos de convergência da iteração de forma. Então, as forças axiais de todos elementos (cabos e viga/coluna) são as forças de protensão iniciais a que a estrutura está submetida. Com isso, o novo vetor de forças externas nas coordenadas globais é dado por:

$$P^i = F^0 - F_{\text{prot}}^{i-1} \quad (4.22)$$

onde P^i é o vetor de forças externas da i -ésima iteração de forma, F^0 é o vetor de forças externas inicial devido à ação do peso-próprio da estrutura, e F_{prot}^{i-1} é o vetor das forças axiais dos elementos obtido na iteração $i-1$ rotacionado para o sistema de coordenadas globais.

Com o novo vetor de forças externas, F^i , um novo ciclo iterativo de equilíbrio é realizado para obter a nova posição deslocada de equilíbrio da estrutura. Com essa nova posição de equilíbrio, a verificação de convergência é realizada para os pontos de controle escolhidos, de acordo com a tolerância especificada na equação (4.9).

O procedimento de iteração de forma é resumido de acordo com o algoritmo apresentado na Figura 4.12. Onde para o processo de equilíbrio iterativo via o método de Newton-Raphson as matrizes de rigidez dos elementos são obtidas considerando as forças axiais devido à protensão dos cabos obtidas no processo de iteração de forma.

A etapa “ciclo iterativo de equilíbrio via Newton-Raphson” do fluxograma da Figura 4.12, encontra-se representado pela Figura 4.9.

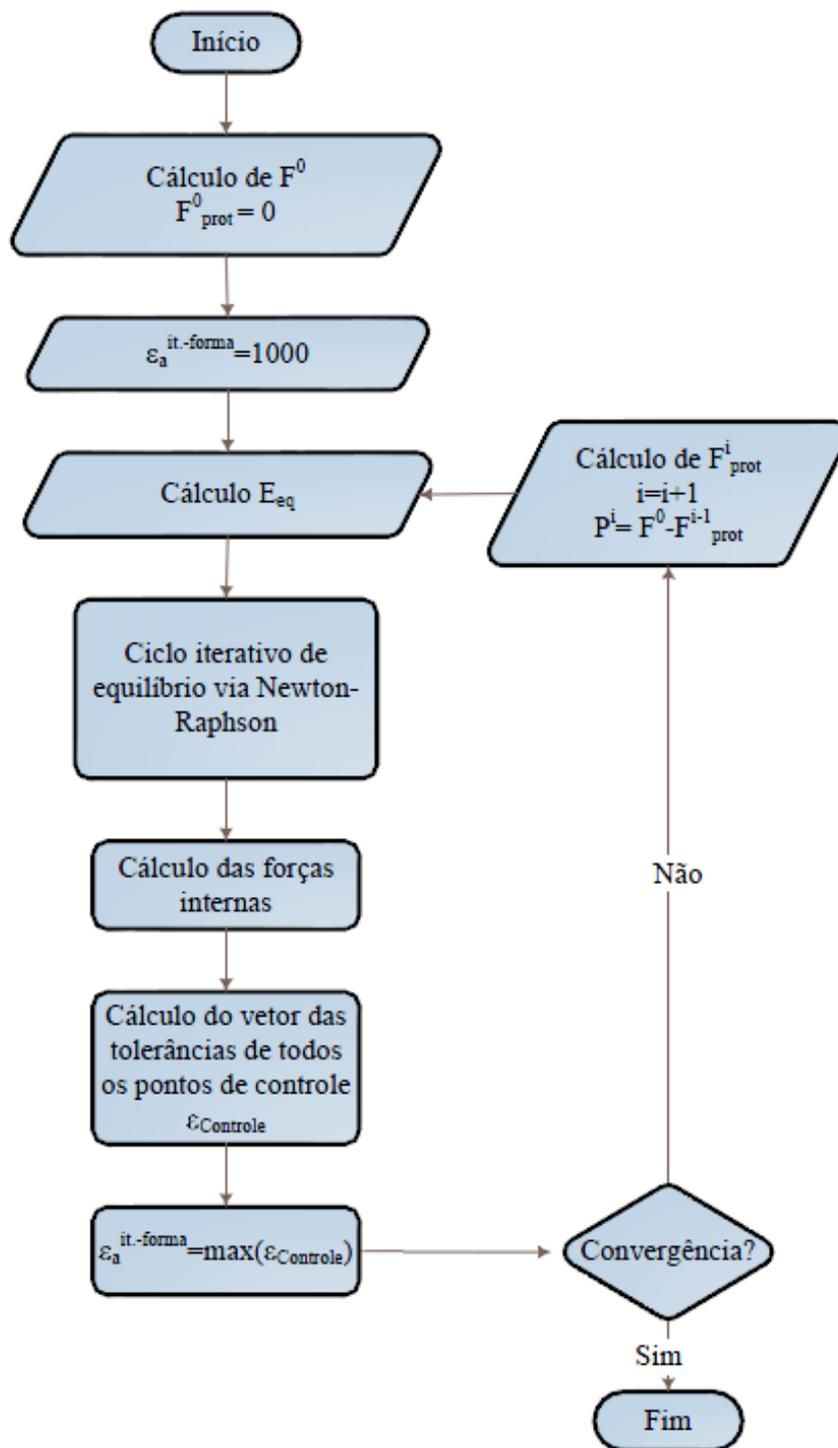


Figura 4.12 - Fluxograma do processo de iteração de forma.

5 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

Este capítulo tem por objetivo validar o código computacional por meio de exemplos obtidos na literatura. Serão desenvolvidos 4 exemplos de validação, onde o exemplo 1 refere-se a um pórtico carregado, a fim de validar o algoritmo não linear implementado, bem como as respostas modais encontradas. Os demais exemplos têm por objetivo validar o método MAD, comparando os resultados obtidos com os publicados por Wang, Tseng e Yang (1993).

A análise modal terá por foco as frequências naturais da estrutura. São realizadas as análises de vibração livre não amortecida (item 4.1.3), e a análise de vibração da estrutura sob tensões iniciais (item 4.1.4).

O primeiro exemplo será o caso de um pórtico plano com cargas concentradas verticais, próximas à carga crítica, e uma perturbação horizontal, denominado Portal de Voigt. Os exemplos seguintes corresponderão a pontes estaiadas planas variando a geometria dos estais, tamanho dos vãos e simetria. O segundo exemplo será o caso de uma ponte estaiada assimétrica com dois estais. O terceiro será o de uma ponte estaiada simétrica com configuração em harpa com um total de doze estais. Por fim, o último exemplo de validação será a mesma geometria do exemplo 3 com a configuração dos estais em leque.

Os exemplos referentes a pontes estaiadas terão 2 etapas. A primeira etapa é a verificação das forças axiais obtidas pelo método implementado no código computacional (capítulo 4), além dos deslocamentos verticais, e momentos fletores no tabuleiro. A segunda etapa refere-se à verificação das frequências naturais obtidas.

5.1 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

5.1.1 PORTAL DE VOIGT

O portal de Voigt é uma estrutura aperticada plana constituída de duas colunas, e uma viga. Os nós de encontro dos elementos verticais com o elemento horizontal são carregados verticalmente até a carga de bifurcação da estrutura, e onde há uma perturbação horizontal, provocada por uma carga muito menor que as cargas verticais [Figura 5.1]. As características da geometria e dos materiais do problema são mostradas na Tabela 5-1.

Tabela 5-1 - Propriedades geométricas e dos materiais.

L (m)	ΔP	E (MPa)	$\rho(t/m^3)$	Área (m ²)	I (cm ⁴)	g (m/s ²)
3,05	P/1000	210000	7,85	$7,59 \times 10^{-3}$	12900	9,807

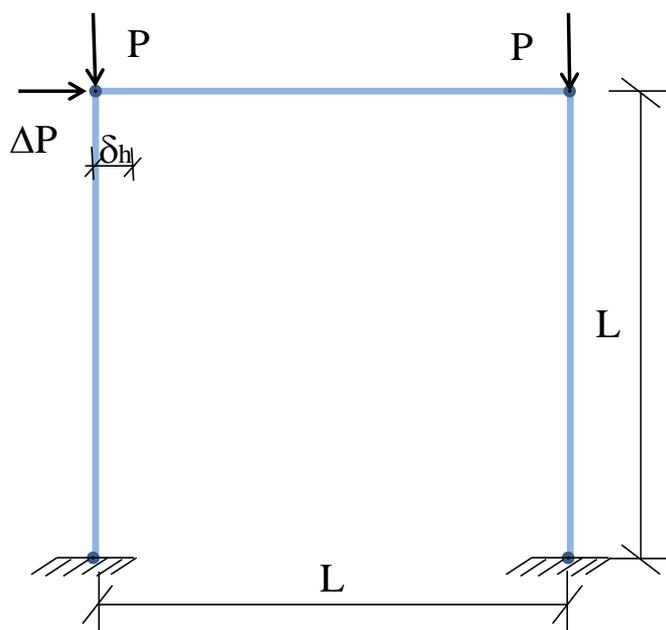


Figura 5.1 - Esquema representativo do portal de Voigt.

5.1.1.1 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

São realizadas análises com aumento gradual das cargas P , até obtenção da instabilidade numérica do problema. Os resultados obtidos são comparados com as respostas obtidas nos trabalhos de Connor et al. (1968), Mantilla (1974), Neves (1990), com o programa AcadFrame[®], desenvolvido no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, e com a resposta linear da estrutura. Este exemplo tem por objetivo verificar a solução obtida da equação (4.2).

O pórtico foi discretizado em 9 elementos finitos de pórtico de mesmo tamanho, onde os nós 1 e 10 possuem vínculos de engaste, o nó 4 possui uma carga vertical e uma carga horizontal, e o nó 7 apenas a carga vertical. O gráfico da resposta força x deslocamento foi obtido com o deslocamento horizontal do nó do topo (δ_h) em função da solicitação vertical (P).

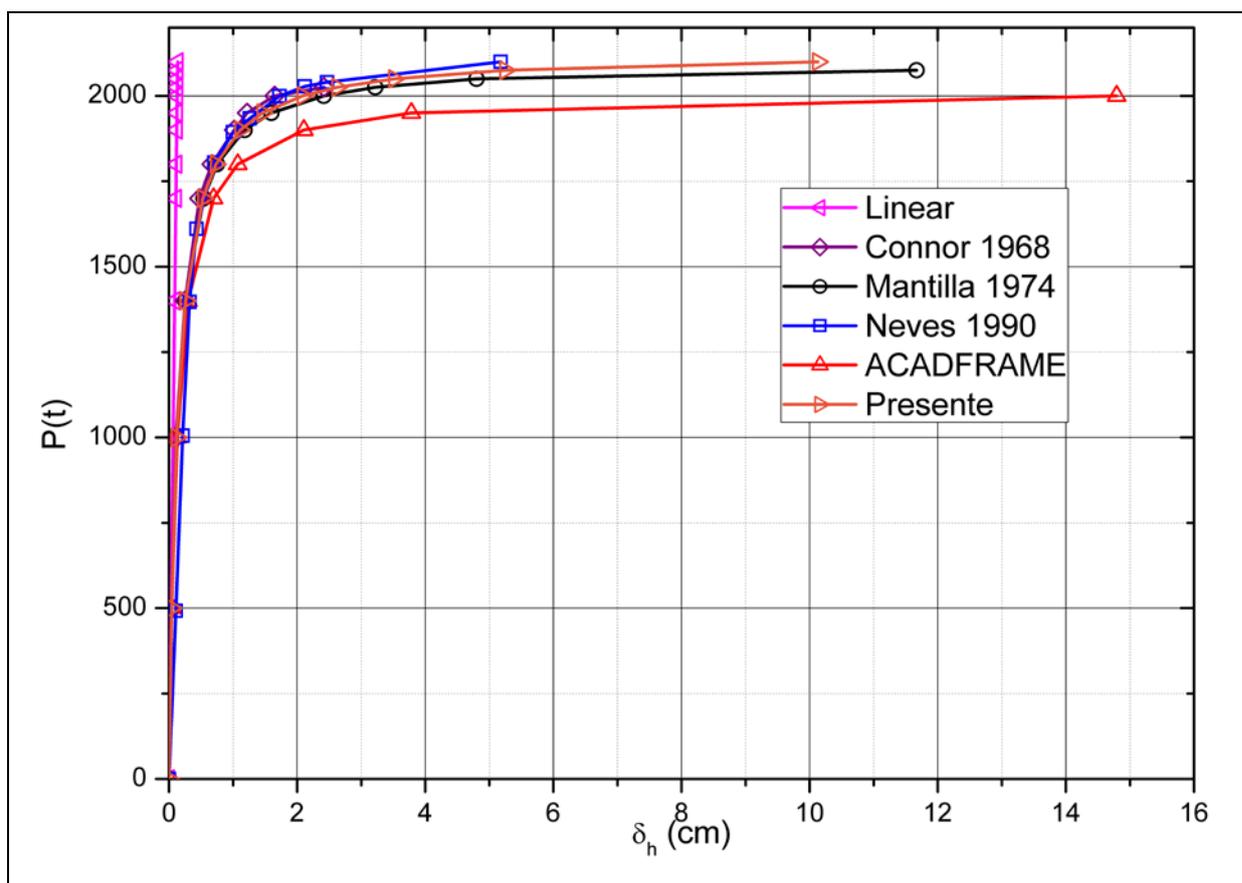


Figura 5.2 - Resposta estática do pórtico plano.

É visível a diferença do emprego da teoria linear, da não linear ao se observar o comportamento de estruturas bastante solicitadas. As análises linear e não linear começam a diferir para um carregamento vertical de 1000 toneladas, cerca de 50% da carga crítica.

O gráfico mostra boa concordância dos resultados do presente trabalho com os trabalhos de Connor et al. (1968), Neves (1990).

Como discutido anteriormente, a teoria não linear empregada foi em pequenos deslocamentos, levando em conta a não linearidade apenas sob o aspecto da solicitação axial dos elementos, como visto na formulação da energia potencial das forças externas da equação (3.3).

Este tipo de consideração da matriz tangente ($K_T = K_L + K_G$), segundo Neves (1990) é dirigida a solução de problemas moderadamente não lineares, que são, geralmente, o caso de estruturas de pórticos estaiados, e que são o objeto de estudo deste trabalho.

Todas as análises, com exceção da linear, apresentam resultados semelhantes até aproximadamente a carga de 1500 toneladas, onde o AcadFrame[®] começa a apresentar uma não linearidade mais acentuada, e os demais modelos permanecem com respostas similares, mas mais rígidos que o AcadFrame[®]. Há nova separação das respostas dos modelos próximo da carga crítica, aproximadamente 2000 toneladas.

Os modelos matemáticos adotados pelo AcadFrame[®] e por Mantilla (1974) são modelos não lineares mais completos que envolvem a consideração da não linearidade provocada por grandes deslocamentos. A resposta obtida pela presente análise foi capaz de captar a não linearidade desenvolvida pela estrutura com o aumento da carga vertical, e apresentou uma boa resposta em relação aos modelos que possuem a mesma formulação em pequenos deslocamentos.

5.1.1.2 ANÁLISE MODAL

Neste item, o pórtico é analisado para obtenção das frequências naturais e modos de vibração sob os aspectos da análise de vibração livre, e a análise de vibração sob tensões iniciais. A análise sob tensões iniciais será realizada com a estrutura submetida a carga vertical de 2100 toneladas. Esta análise foi realizada previamente por Neves (1990) e será utilizada para validação das respostas das equações (4.5) e (4.6).

Cada análise terá duas respostas, pois são verificadas as respostas obtidas com a matriz de massa concentrada e consistente implementadas no código computacional

desenvolvido, e comparadas com os resultados obtidos por Neves (1990), que realizou análise da frequência fundamental com o emprego da matriz de massa consistente.

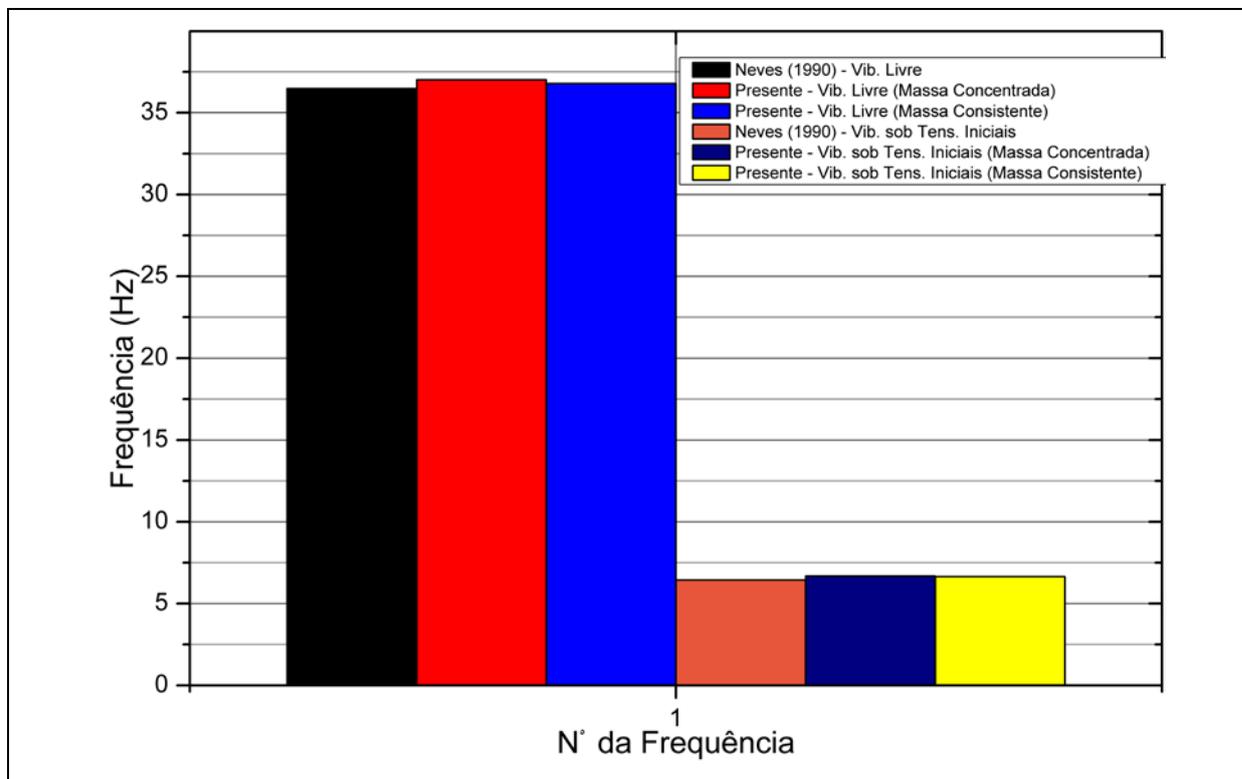


Figura 5.3 - Comparação entre as frequências fundamentais obtidas.

É possível observar, pelo gráfico de barras da Figura 5.3, uma boa correlação das respostas obtidas. As frequências fundamentais tem uma queda bastante acentuada quando comparada com as análises de vibração sob tensões iniciais.

Neves (1990) obteve uma redução das frequências fundamentais de 82,3%. No código computacional implementado a redução foi de 81,9% para as duas análises realizadas (matriz de massa concentrada e consistente).

Este exemplo mostra a importância da análise de vibração sob tensões iniciais, pois o carregamento da estrutura influi na rigidez do conjunto. Forças de compressão tornam as estruturas mais flexíveis, como consequência redução das frequências naturais.

Foi realizada uma análise modal utilizando o ANSYS® para verificação das demais frequências naturais utilizando as matrizes de massa concentrada e consistente, pois o trabalho de Neves (1990) apresenta apenas os resultados da frequência fundamental (primeira frequência natural). Os gráficos das Figura 5.4, e Figura 5.5 mostram os resultados das frequências naturais do pórtico analisado em relação aos resultados obtidos com o ANSYS® separando as análises em função do tipo de matriz de massa utilizada. A modelagem no

ANSYS[®] utiliza elementos finitos BEAM3, que são elementos com 3 graus de liberdade por nó, sendo 2 translações, direções x e y, e uma rotação em torno do eixo z do elemento finito.

A configuração utilizada no ANSYS[®] para extração das frequências naturais e modos de vibração foi por *Block Lanczos*, alterando entre as análises com matriz de massa consistente, e matriz de massa concentrada.

Os gráficos a seguir apresentam os resultados obtidos para análise de vibração livre e vibrações sob tensões iniciais para a matriz de massa consistente [Figura 5.4], e matriz de massa concentrada [Figura 5.5].

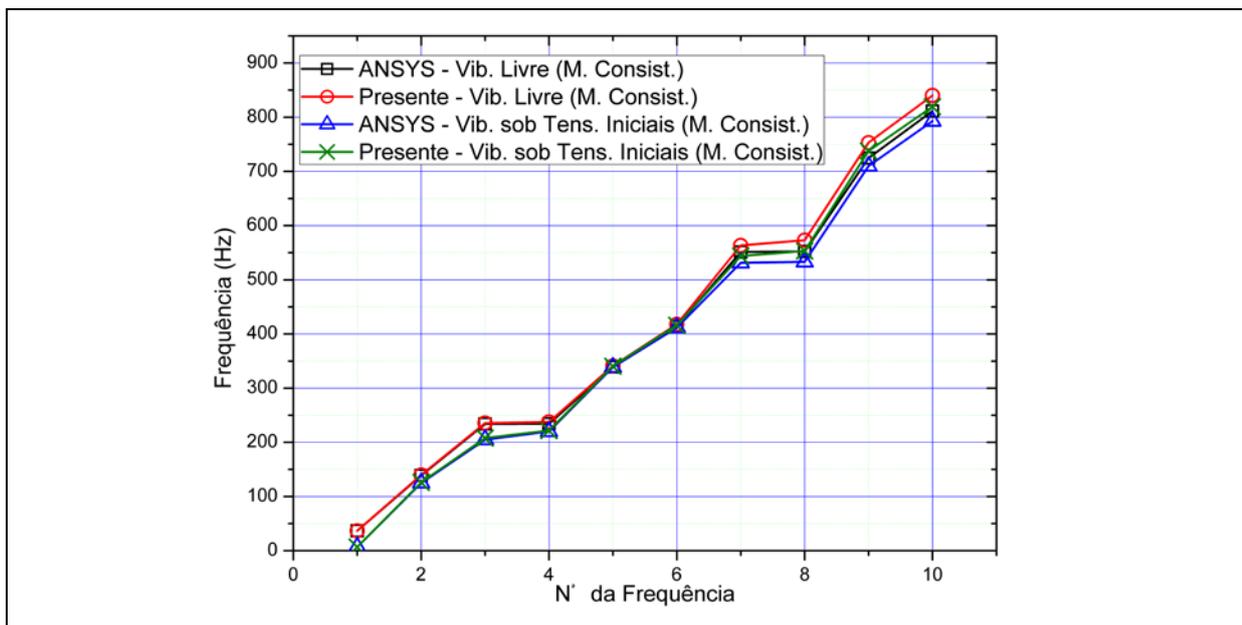


Figura 5.4 - Comparação entre as respostas obtidas com a matriz de massa consistente.

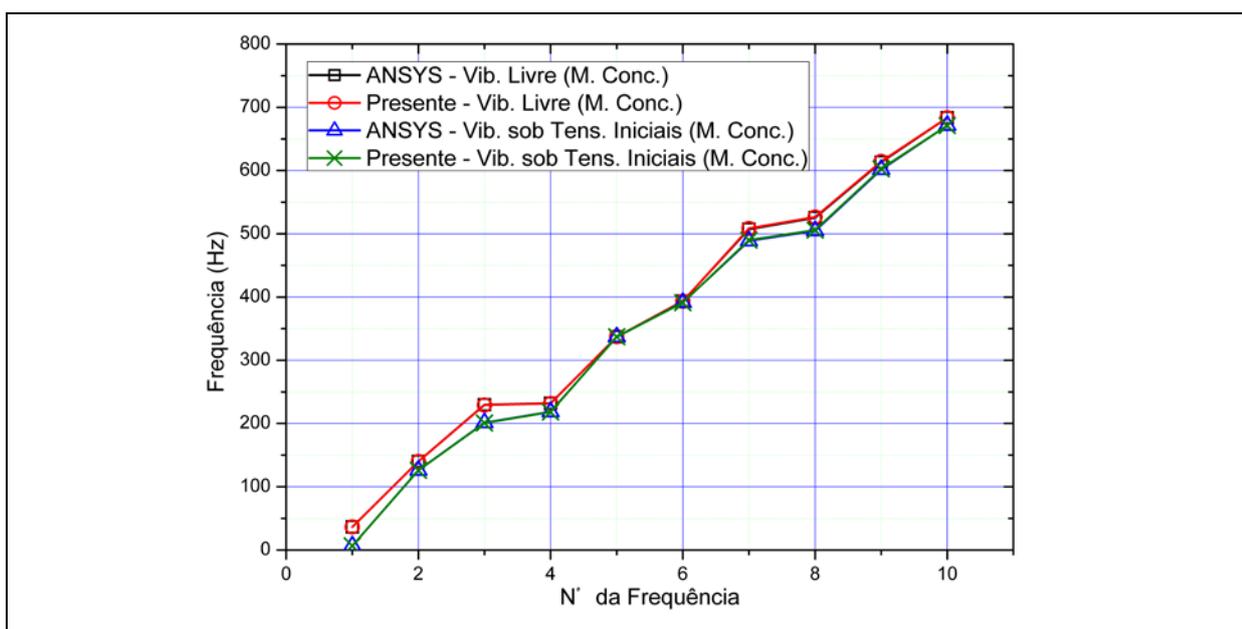


Figura 5.5 - Comparação entre as respostas obtidas com a matriz de massa concentrada.

É possível observar boa concordância entre os resultados obtidos com ambas as matrizes de massa. A partir da 7ª frequência natural extraída, os resultados obtidos com a matriz de massa consistente começam a ter uma pequena dispersão em relação ao ANSYS®, mas esses valores apresentam uma diferença inferior a 4%.

5.1.2 PONTE ESTAIADA ASSIMÉTRICA COM DOIS ESTAIS

Este é o primeiro exemplo de validação de cunho prático do trabalho. Constitui uma ponte estaiada metálica com as características apresentadas na Tabela 5-2. A ponte é representada por doze nós, com onze elementos finitos de viga/coluna e, dois elementos finitos de treliça, simulando o comportamento do cabo. Os dados de massa específica foram obtidos pela conversão do carregamento uniformemente distribuído aplicado no tabuleiro em massa específica dos elementos estruturais.

Os trabalhos de Tang (1972), Neves (1990), Wang, Tseng e Yang (1993), e Wang e Yang (1996) analisaram este exemplo, e representaram os carregamentos distribuídos de peso-próprio para as vigas com 233,502 kN/m (16 kips/ft). Os cabos e a torre tem seus pesos-próprios negligenciados, entretanto, suas massas específicas são consideradas na análise modal, e na consideração do efeito de catenária.

A ponte possui um vão principal de 121,92 metros (400 pés), e dois vãos adjacentes (secundários) de 30,48 metros (100 pés). O pilar possui uma altura total de 26,82 metros (88 pés), dos quais 24,38 metros (80 pés) encontram-se acima do tabuleiro, no qual a ligação entre o tabuleiro e o pilar é considerada rígida. Este pilar principal possui um apoio do segundo gênero na cota -2,44 metros, e os demais apoios são do primeiro gênero [Figura 5.6] na cota 0,00 metros, onde encontra-se o tabuleiro.

Tabela 5-2 - Propriedades geométricas e dos materiais.

Elemento Estrutural	E (MPa)	ρ (t/m ³)	Área (m ²)	I (cm ⁴)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	g (m/s ²)
Viga	191500	32,045	0,743	$3,884 \times 10^7$	-	9,807
Coluna (acima do tabuleiro)	191500	32,045	0,279	$1,726 \times 10^7$	-	9,807
Coluna (abaixo do tabuleiro)	191500	32,045	0,929	$1,726 \times 10^8$	-	9,807
Cabos	191500	4,377	0,102	-	1700	9,807

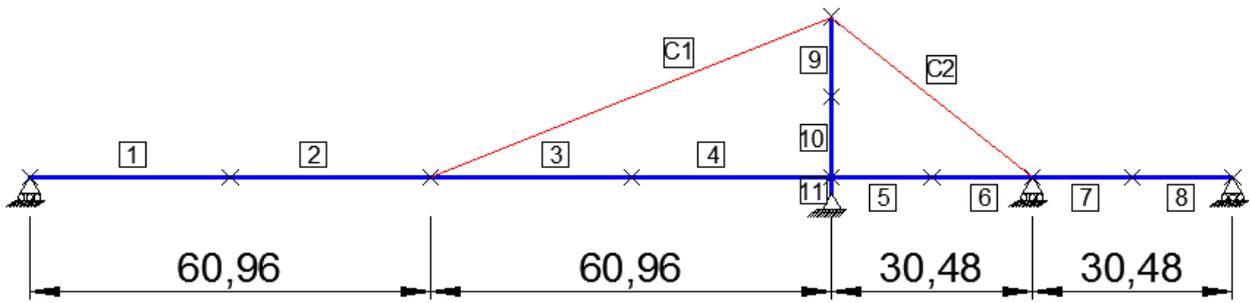


Figura 5.6 - Geometria da ponte assimétrica com a numeração dos elementos finitos.

A geometria da ponte representada na Figura 5.6, foi dividida em 11 elementos finitos de pórtico, e 2 elementos finitos de treliça. O tabuleiro compreende os nós 1 ao 9, e os elementos finitos E1 ao E8. A coluna possui os elementos E9 ao E11, e os nós 5,10, 11, 12, onde o nós 5 é o nó formado pelo encontro do tabuleiro com a coluna.

Os elementos finitos E1 ao E4 possuem um comprimento de 30,48 metros, enquanto os elementos E5 a E8 têm 15,24 metros. Os elementos E9 e E10 da coluna possuem um tamanho de 12,19 metros, e o elemento E11 com 2,44 metros.

5.1.2.1 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

São realizadas duas análises não lineares, na qual a primeira obtém a configuração deslocada da estrutura sob ação do peso-próprio dos elementos estruturais, mas sem aplicação de forças de protensão. A segunda análise utiliza a iteração de forma, por meio do método MAD, a fim de tornar nulo o deslocamento vertical do nó 3 (nó onde os elementos 2, 3 e C1 são concorrentes).

Os dados fornecidos para iteração de forma estão apresentados na Tabela 5-3 a seguir.

Tabela 5-3 – Dados para realização da iteração de forma.

Ponto de Controle	Deslocamento vertical (m)	Tolerância (ϵ_s)	Vão Principal (m)
Nó 3	0,00	10^{-4}	120,00

Serão comparadas as forças nos cabos sem e com aplicação do método M.A.D, bem como a redução obtida nos deslocamentos verticais dos nós do tabuleiro. Neves (1990) apresenta uma análise na qual são aplicadas forças de protensão de 43100 kN no cabo C1, e

51200 kN no cabo C2. Esses valores também são comparados com os obtidos na análise com o método M.A.D, fazendo-se uma comparação entre os esforços normais, e momentos fletores encontrados nos elementos do tabuleiro.

As configurações deslocadas obtidas nas análises estática não linear sem aplicação de força de protensão, e com aplicação da força de protensão pelo método MAD, são apresentados na Figura 5.7,e Figura 5.8, respectivamente, onde o fator de escala que multiplica os deslocamentos é de 10 vezes.

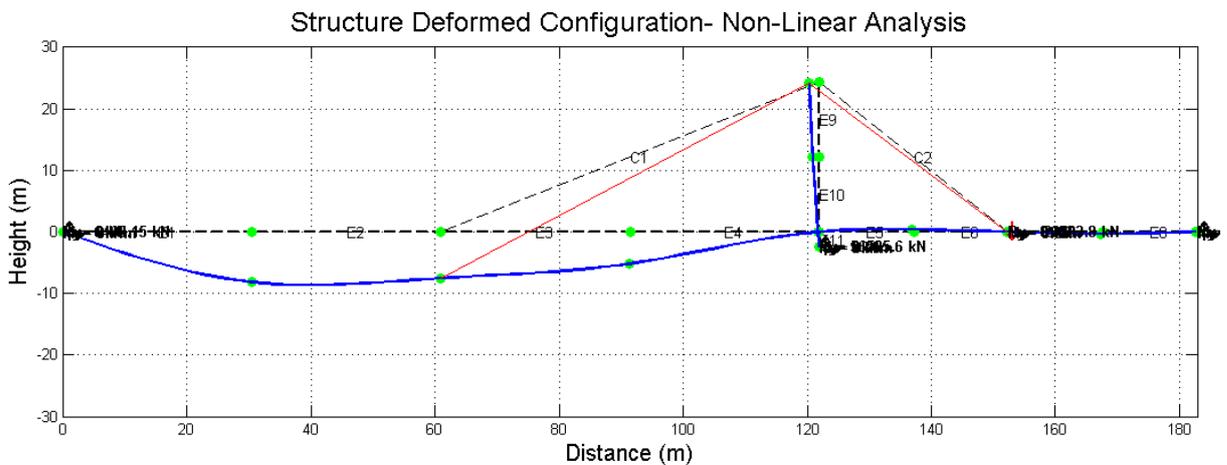


Figura 5.7 - Deslocamentos verticais sem aplicação das forças de protensão (fator de escala de 10 vezes).

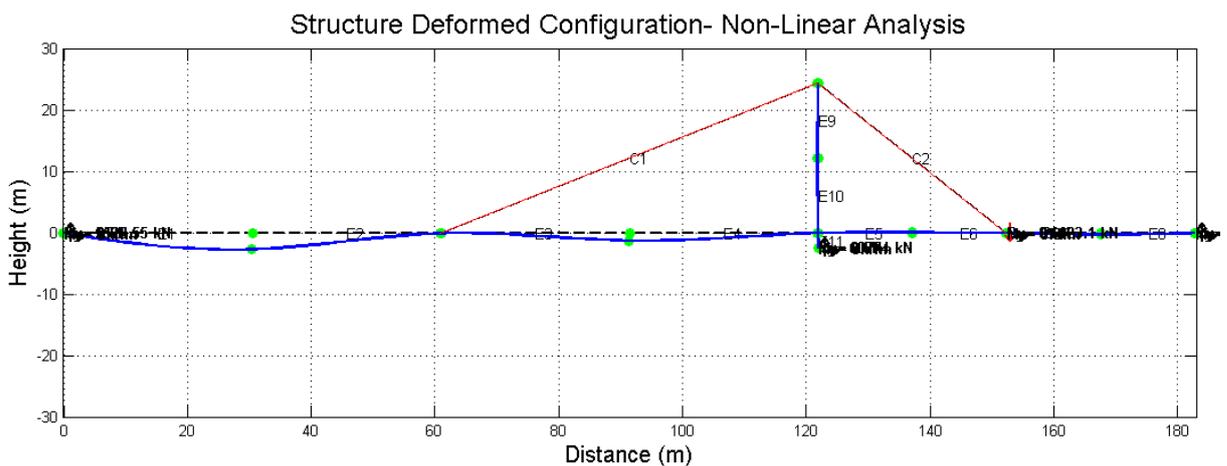


Figura 5.8 - Deslocamentos verticais com aplicação das forças de protensão pelo método MAD – (fator de escala de 10 vezes).

A Figura 5.7 e Figura 5.8 são obtidas no pós-processamento dos deslocamentos gerados pelo código computacional desenvolvido. É notável a diferença entre as configurações deslocadas obtidas ao se realizar uma análise sem aplicação das forças de

protensão [Figura 5.7], em relação à aplicação do método MAD para obtenção da configuração deslocada da estrutura [Figura 5.8].

A Tabela 5-4 apresenta a redução percentual de deslocamentos verticais obtidos para os nós 2, 3 e 4 da estrutura, que são os nós que apresentam maior deslocamento vertical.

Tabela 5-4 – Redução dos deslocamentos pela utilização do método M.A.D no presente trabalho.

Nó	Deslocamento vertical (m) – Sem Protensão	Deslocamento vertical (m) – Com Protensão (MAD)	Redução Percentual Relativa (%)
Nó 2	-0,8187	-0,2639	67,77 %
Nó 3	-0,7548	-0,003052	99,60 %
Nó 4	-0,5179	-0,1205	76,73 %

Os valores dos deslocamentos verticais dos nós 2, 3 e 4 são comparados com os deslocamentos obtidos nos trabalhos de Neves (1990), Wang, Tseng e Yang (1993) e Wang e Yang (1996) no gráfico a seguir.

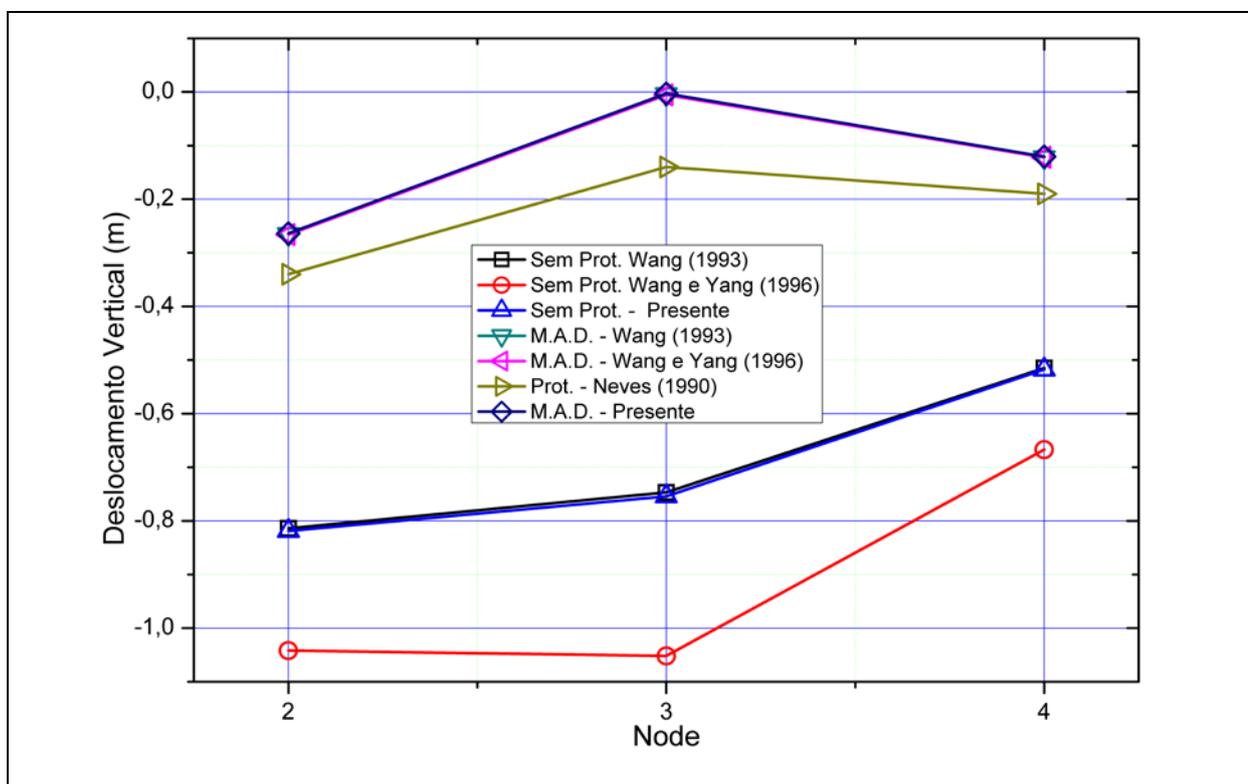


Figura 5.9 - Deslocamentos verticais dos nós das análises realizadas.

É possível ver a diferença dos deslocamentos com a aplicação do método MAD em relação ao exemplo sem utilização de forças prévias de protensão. Os valores de deslocamentos verticais da presente análise com o método MAD coincide com os valores apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993), e Wang e Yang (1996).

Entretanto, existe uma diferença significativa entre os deslocamentos verticais sem força de protensão entre o presente estudo e os resultados apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993) em relação aos valores obtidos por Wang e Yang (1996).

É observável que o deslocamento vertical do nó 3 (nó de ancoragem do cabo com o tabuleiro) na análise realizada por Wang e Yang (1996) é maior que o deslocamento do nó 2. Isto é contra-intuitivo, pois o cabo fornece um apoio elástico ao nó 3, fornecendo uma maior rigidez ao deslocamento vertical neste ponto.

Ao se inserir nos dados de entrada do código computacional desenvolvido um valor de massa específica do cabo 20 vezes superior ao indicado na proposição do problema, os resultados obtidos tornam-se bastante próximos aos apresentados por Wang e Yang (1996) [Figura 5.10].

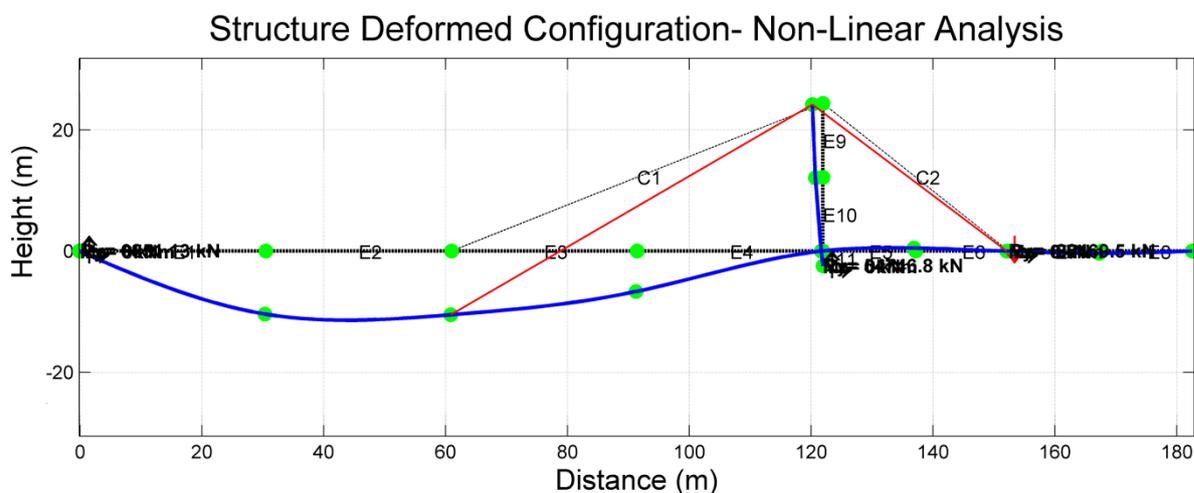


Figura 5.10 - Deslocada da estrutura com um valor de ρ 20 vezes superior.

Esta diferença das deslocadas se deve ao módulo de elasticidade equivalente utilizado inicialmente. Um peso-próprio superior ao fornecido no problema acentua a não linearidade do efeito da catenária do cabo.

Este efeito de catenária, quando não se aplica forças altas de protensão, como é o caso da análise onde se manifestou a discrepância, fornece uma rigidez muito inferior do cabo, aumentando consideravelmente os deslocamentos. É possível ver que o nó 3 apresentou deslocamentos verticais maiores que o nó 2, assim como na análise de Wang e Yang (1996).

A Figura 5.11 apresenta os presentes resultados e os valores de Wang e Yang (1996) obtidos para os deslocamentos verticais sem protensão, e com aplicação do método MAD ao se adotar uma massa específica do cabo 20 vezes superior.

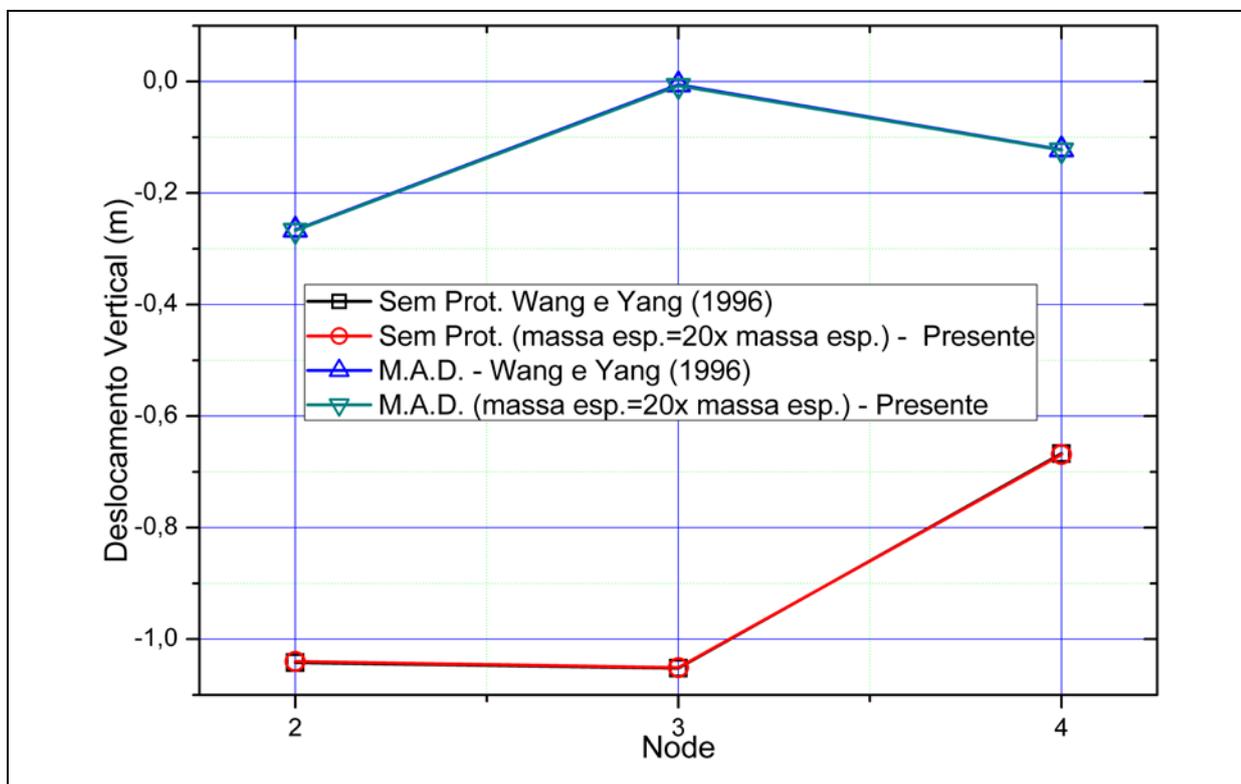


Figura 5.11 - Comparação dos deslocamentos verticais entre Wang (1996) e a presente análise com massa específica do cabo 20 vezes superior.

Ao se aplicar o método MAD, para este exemplo, a deslocada e as forças de protensão nos cabos convergiram para os mesmos valores da presente análise, e dos resultados obtidos por Wang, Tseng e Yang (1993).

Neves (1990) realiza uma análise estática não linear, mas utiliza forças de protensão estabelecidas por Tang (1972). Os resultados apresentados por Neves (1990) são bem melhores que os obtidos com a análise puramente não linear dispensando as forças de protensão. No entanto, com aplicação do método MAD é possível reduzir significativamente o deslocamento vertical do ponto de controle, o que, conseqüentemente, gera menores deslocamentos na estrutura como um todo.

A seguinte análise tem por objetivo mostrar a diferença das forças axiais existentes nos cabos C1 e C2, em função do tipo de análise adotada, conforme a figura a seguir. O gráfico seguinte apresenta os resultados com exceção dos obtidos por Wang e Yang (1996), que são comparados na Figura 5.13.

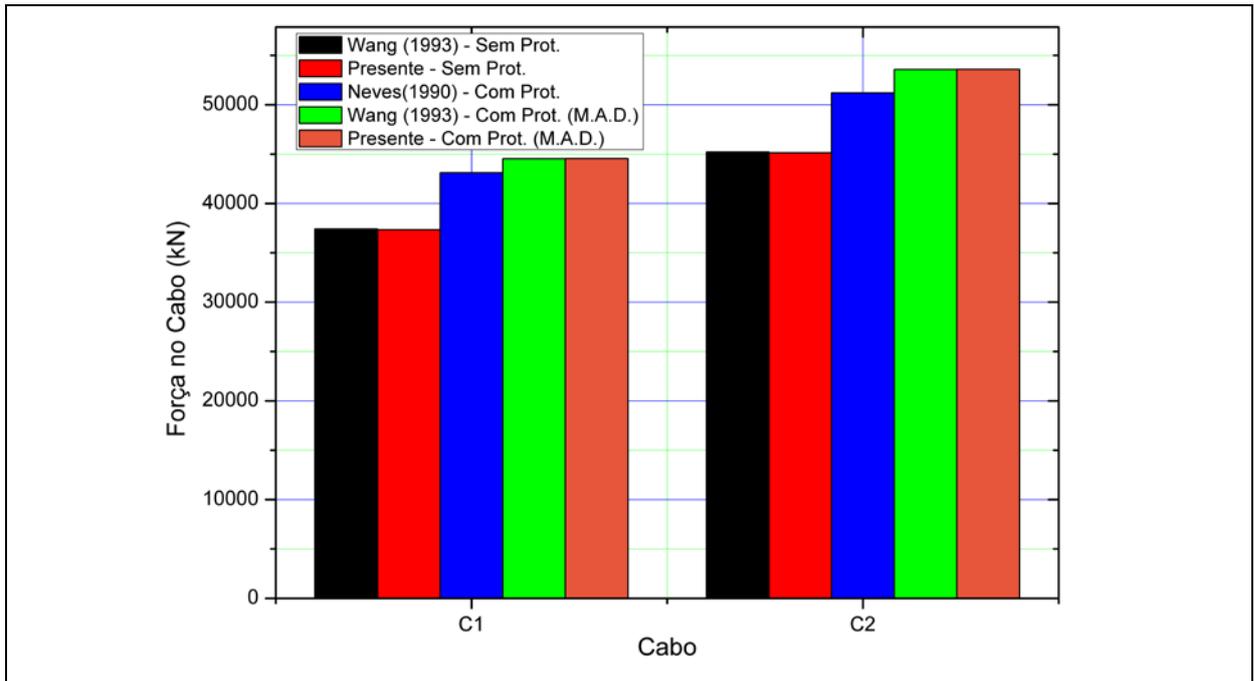


Figura 5.12 - Comparação das forças nos cabos com as diferentes análises.

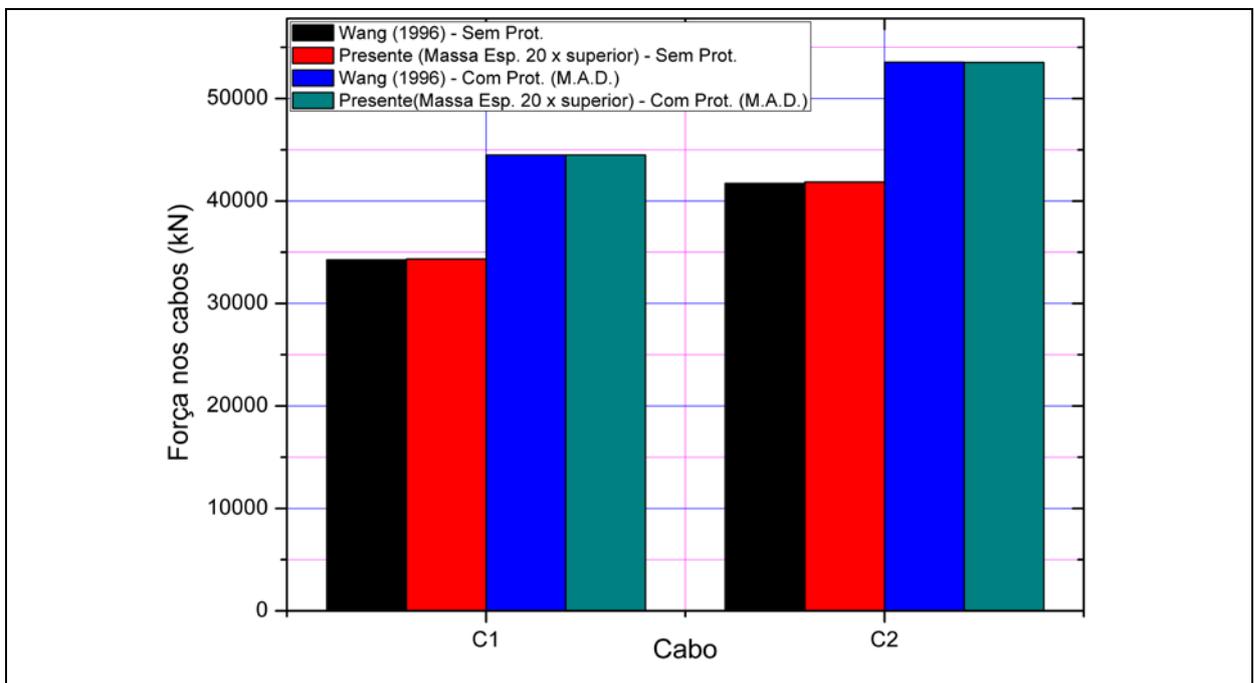


Figura 5.13 - Comparação das forças nos cabos entre Wang (1996) e a presente análise com massa específica 20 vezes superior.

Pela análise dos deslocamentos [Figura 5.9] e das forças nos cabos [Figura 5.12], nota-se que resultados obtidos com emprego do método MAD neste trabalho estão de acordo

com os resultados esperados, obtidos por Wang, Tseng e Yang (1993), e que são respostas que aproximam melhor o comportamento do tabuleiro ao de uma viga contínua.

Os valores apresentados nas Figura 5.10 e Figura 5.13, comparam os deslocamentos verticais e as forças nos cabos, respectivamente, entre a presente análise e os resultados obtidos por Wang e Yang (1996). Vê-se uma boa concordância dos resultados obtidos quando utiliza-se uma massa específica do cabo 20 vezes superior.

Os valores encontrados para a análise sem forças de protensão diferem bastante entre os valores de Wang e Yang (1996) e Wang, Tseng e Yang (1993). Isto leva a crer que os dados de entrada inseridos no estudo de Wang e Yang (1996) possam ter sido equivocados.

O presente trabalho considerou a massa específica do cabo 20 vezes superior ao indicado no problema. Entretanto, resultados semelhantes a Wang e Yang (1996) podem ser obtidos se alterando-se os valores das áreas dos cabos.

Os resultados apresentados a partir deste ponto não levarão em consideração as análises de Wang e Yang (1996), por acreditar que os dados de entrada inseridos na análise do artigo diferem dos valores propostos das características geométricas ou dos materiais do problema proposto.

Tabela 5-5 - Forças de compressão nos elementos do tabuleiro.

Elem	Wang (1993) – Sem Prot. (kN)	Presente – Sem Prot. (kN)	Neves (1990) – Com Prot. (kN)	Wang (1993) – Com Prot. (kN)	Presente – Com Prot. (kN)
E1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
E2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
E3	-34600,00	-34513,089	-39900,00	-41320,00	-41351,838
E4	-34600,00	-34513,089	-39900,00	-41320,00	-41351,838
E5	*	-35308,743	-40300,00	-41830,00	-41842,917
E6	*	-35308,743	-40300,00	-41830,00	-41842,917
E7	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
E8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

*- Informação não fornecida pelo autor.

A Tabela 5-5 mostra os resultados obtidos para os esforços axiais nos elementos do tabuleiro. É observado um acréscimo de, aproximadamente, 20% das forças normais do método MAD em relação à análise sem as forças de protensão nos cabos.

Os resultados apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993) são necessários à comparação da metodologia proposta do método MAD, e a implementada ao código. As respostas obtidas por Neves (1990) são relevantes para demonstrar a importância de uma metodologia automatizada que obtenha as melhores forças de protensão para um determinado sistema estrutural.

A diferença entre os momentos fletores obtidos com auxílio do código desenvolvido e as respostas de Wang, Tseng e Yang (1993) apresentam bons resultados, não sendo a diferença superior a 1,5% (nó 3) na análise sem as forças de protensão [Tabela 5-6]. Com respeito à análise onde há o emprego do método MAD, a diferença torna-se mais tênue, próxima a 1% (nó 6).

Tabela 5-6 – Tabela de momentos fletores nodais dos elementos finitos do tabuleiro.

Nó	Wang (1993) – Sem Prot. (kN.m)	Presente – Sem Prot. (kN.m)	Neves (1990) – Com Prot. (kN.m)	Wang (1993) – Com Prot. (kN.m)	Presente – Com Prot. (kN.m)
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	88450,00	88728,783	71000,00	60150,00	60093,960
3	-39999,00	-39436,377	-82800,00	-96630,00	-96706,022
4	*	41859,391	*	38610,00	38602,850
5	-102900,00	-103409,161	-60000,00	-52920,00	-52822,750
6	*	-21822,767	*	-2299,00	-2275,544
7	*	-3718,927	-13700,00	-16530,00	-16545,542
8	*	25252,275	20100,00	18850,00	18838,972
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

*- Informação não fornecida pelo autor.

Ao se comparar os resultados obtidos da análise pelo método MAD com a análise onde não há aplicação da força de protensão, torna-se evidente a eficácia na redução dos momentos fletores no tabuleiro da ponte pelo método empregado.

A análise sem aplicação de protensão fornece valor máximo de momento fletor nos nós do tabuleiro de 88728 kN.m, e valor mínimo de -103409 kN.m, uma amplitude de 192137 kN.m. Estes valores são reduzidos para um máximo de 60094 kN.m, e mínimo de -96706 kN.m, onde a amplitude dos valores chega a 156799 kN.m, uma redução de 18,39%.

De modo geral, houve redução dos momentos nos nós do tabuleiro, com exceção dos nós 3 e 7, que aumentaram os valores dos momentos fletores em relação à situação inicial sem protensão [Figura 5.14]. Estes nós correspondem aos pontos onde os cabos estão fixados ao tabuleiro.

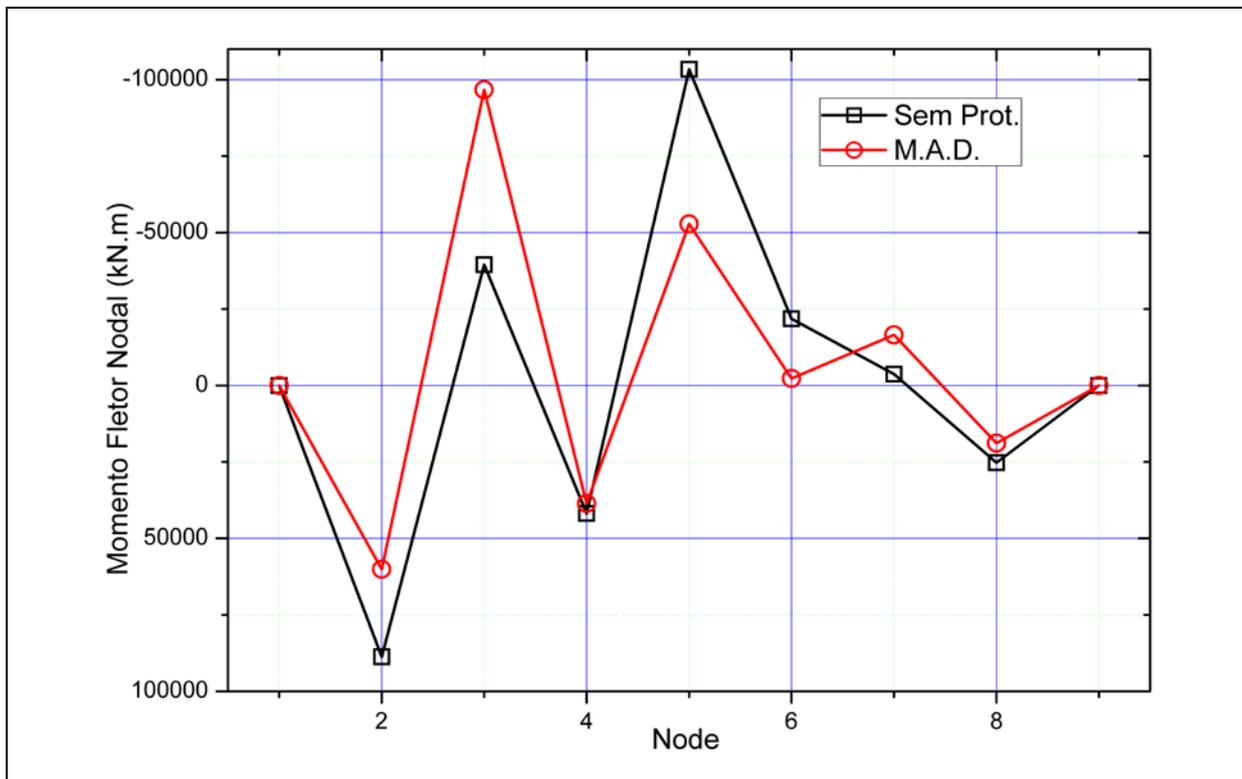


Figura 5.14 – Momentos fletores nodais do tabuleiro da ponte estaiada assimétrica.

5.1.2.2 ANÁLISE MODAL

O presente trabalho realiza 3 possíveis análises modais para obtenção das frequências naturais, e os modos de vibração para cada matriz de massa utilizada [Figura 5.15]. A primeira análise é a de vibração livre. A segunda de vibração sob tensões iniciais com ação do peso-próprio da estrutura. A terceira é a análise de vibração sob tensões iniciais levando em conta o estado de solicitação dos elementos estruturais obtidos pela aplicação do método MAD

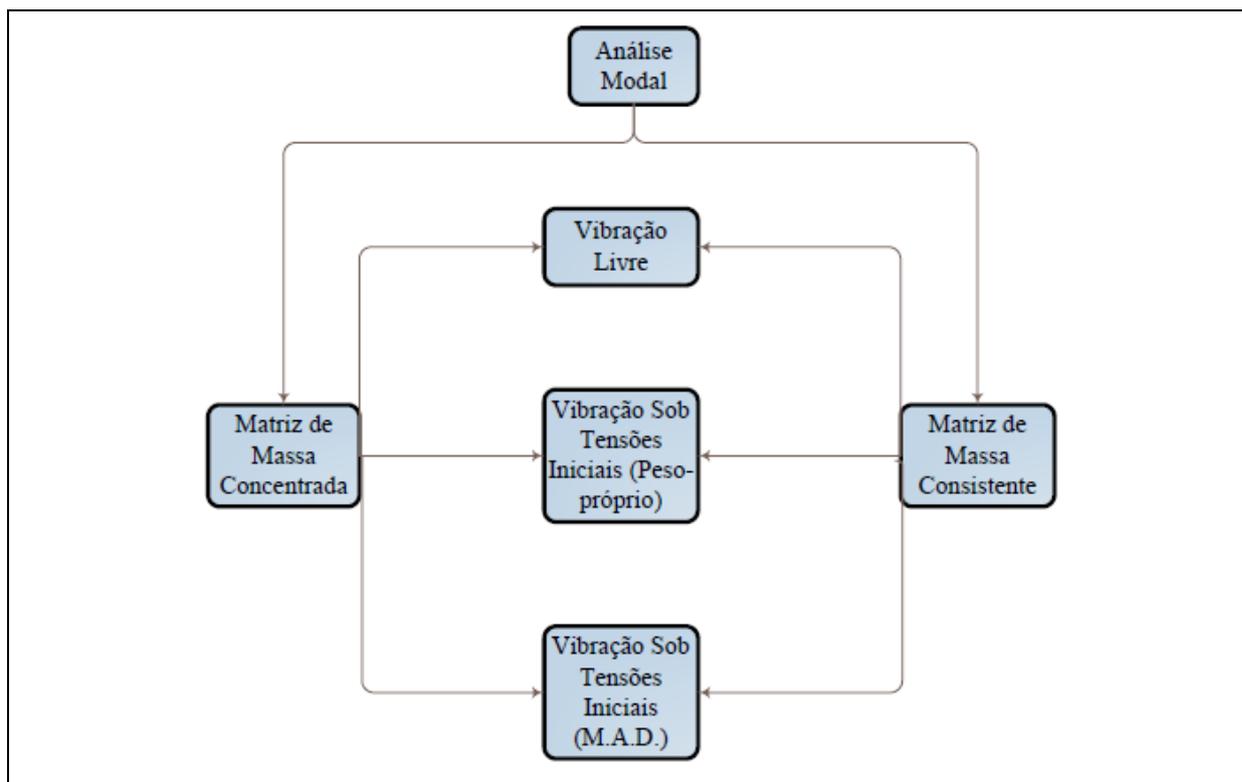


Figura 5.15 - Análises modais envolvidas.

Serão mostradas apenas a análise sob tensões iniciais com aplicação do método MAD na análise estática, pois os resultados apresentados por Wang, Lin e Tang (2002) consideram apenas esta análise. Portanto, são apresentados os resultados desta análise com as duas matrizes de massa existentes no código, a fim de comparar as respostas obtidas com os resultados dos autores.

A Figura 5.16 traz as respostas das frequências naturais obtidas pelas 3 análises propostas. As três análises possuem boa coerência nas 3 primeiras frequências extraídas. Já as respostas entre as frequências obtidas por Wang, Lin e Tang (2002) e as obtidas com a matriz de massa consistente possuem resultados bastante próximos para todas as frequências naturais obtidas.

A análise com a matriz de massa consistente obteve 58 modos de vibração, mas o trabalho apresentado por Wang, Lin e Tang (2002) apresenta apenas os 12 primeiros modos. Para manter uma homogeneidade nos gráficos, são apresentados apenas os 12 primeiros modos obtidos com o código computacional desenvolvido.

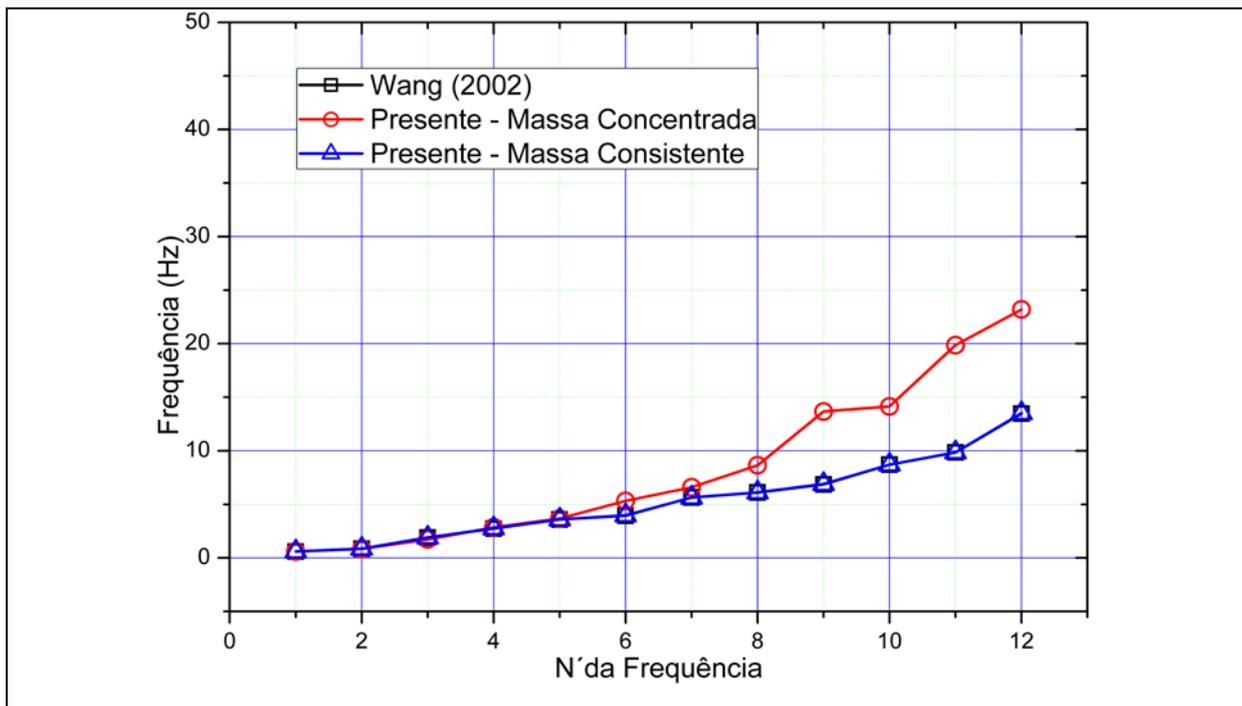


Figura 5.16 - Comparação entre as frequências naturais na análise de vibração sob tensões iniciais com o método MAD

Wang, Lin e Tang (2002) não especificam qual a matriz de massa adotada no trabalho, mas pela boa correlação dos resultados da matriz de massa consistente em todas as frequências extraídas, assume-se que esta foi empregada no trabalho dos autores. O gráfico da Figura 5.17 mostra as diferenças percentuais dos valores obtidos da matriz de massa consistente do código computacional em relação aos obtidos pelos autores.

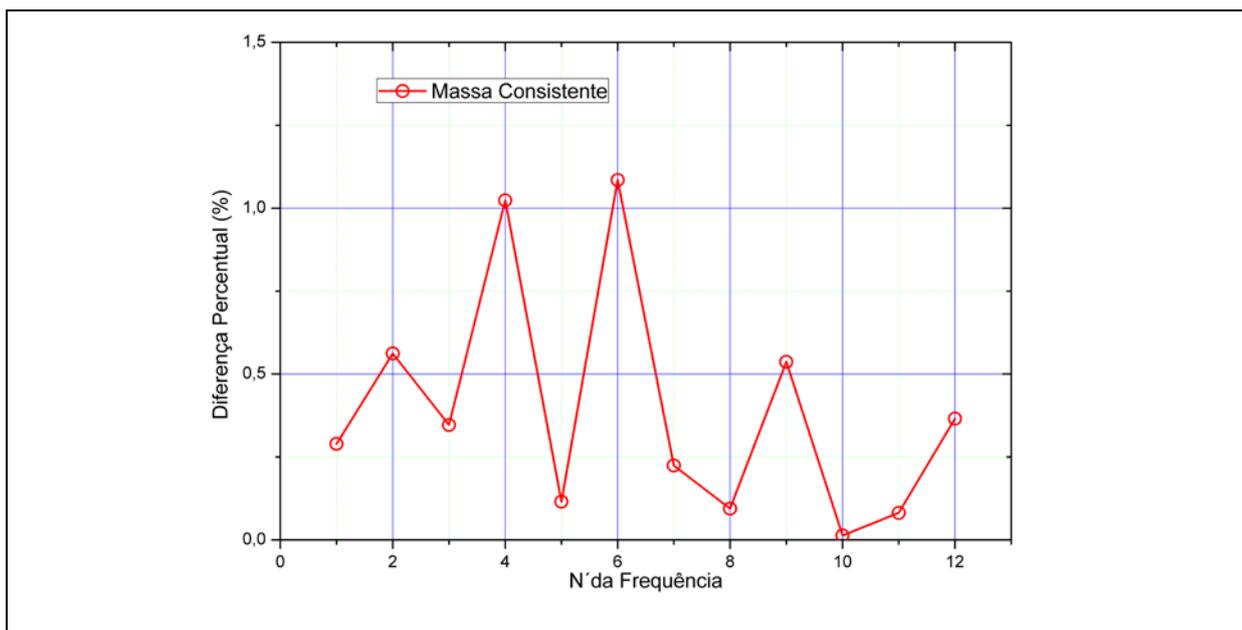


Figura 5.17 - Diferença Percentual entre os resultados obtidos com a matriz de massa consistente e o trabalho de Wang, Lin e Tang (2002).

Analisando-se o gráfico da Figura 5.17, observa-se uma diferença percentual máxima menor que 1,20% nas frequências naturais obtidas. A diferença percentual média das respostas obtidas resultou menor que 0,40%.

A explicação da matriz de massa concentrada apresentar bons valores iniciais, e em seguida apresentar uma dispersão em relação à matriz de massa consistente é que ela não é capaz de captar todos os modos. Portanto, não há equivalência entre o número da frequência extraída e o modo de vibrar. Isto pode ser observado pela comparação do 6º modo de vibração da matriz de massa concentrada, com o 7º modo da matriz de massa consistente [Figura 5.18]. É possível observar no pós-processamento do código desenvolvido que são frequências próximas e modos correspondentes.

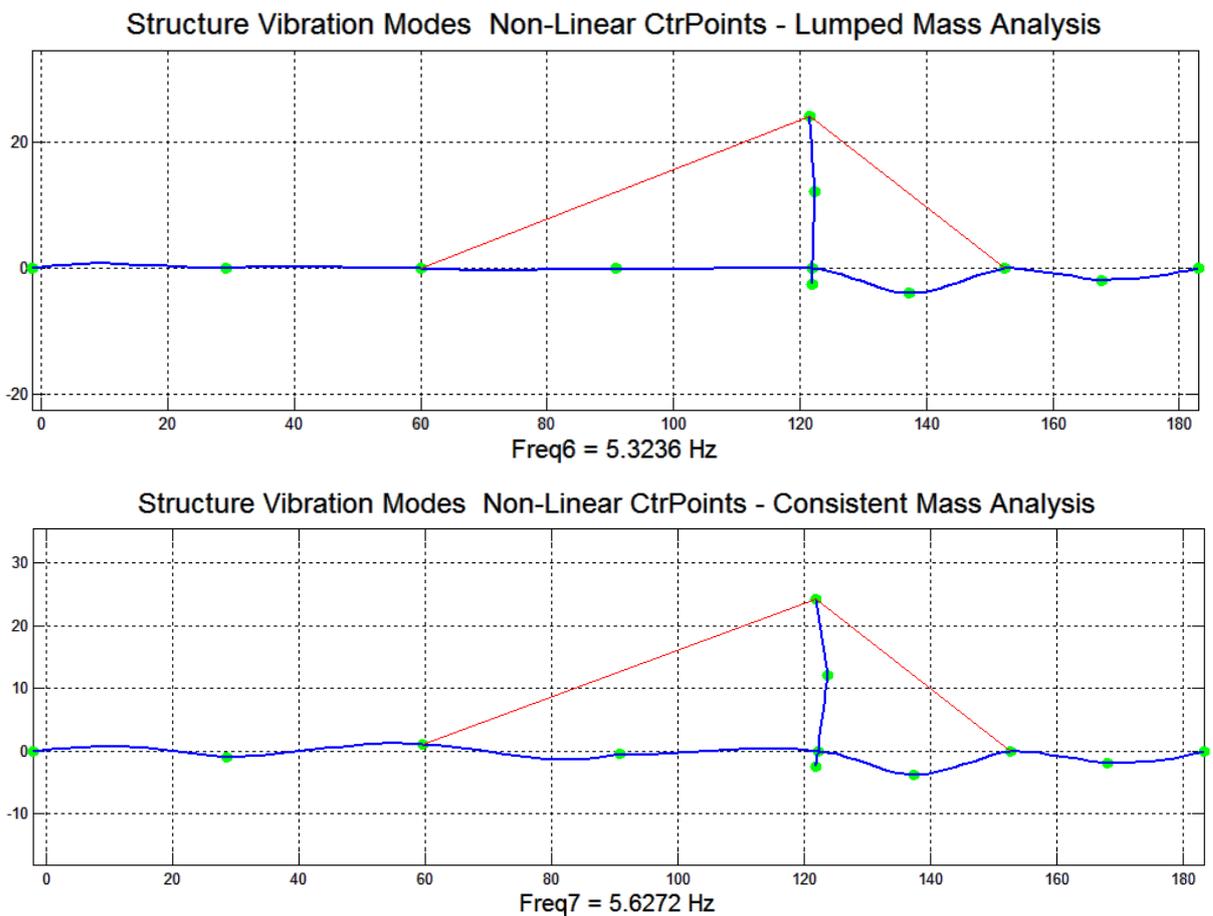


Figura 5.18 - Frequências naturais correspondentes das matrizes de massa concentrada e consistente para a análise de vibração sob tensões iniciais com aplicação do método MAD

É importante fazer uma análise cuidadosa, verificando os valores das frequências naturais, buscando verificar a correspondência entre os modos de vibração.

Os gráficos da Figura 5.19, e Figura 5.20 mostram as variações das frequências naturais obtidas com as diferentes análises propostas pelo código computacional.

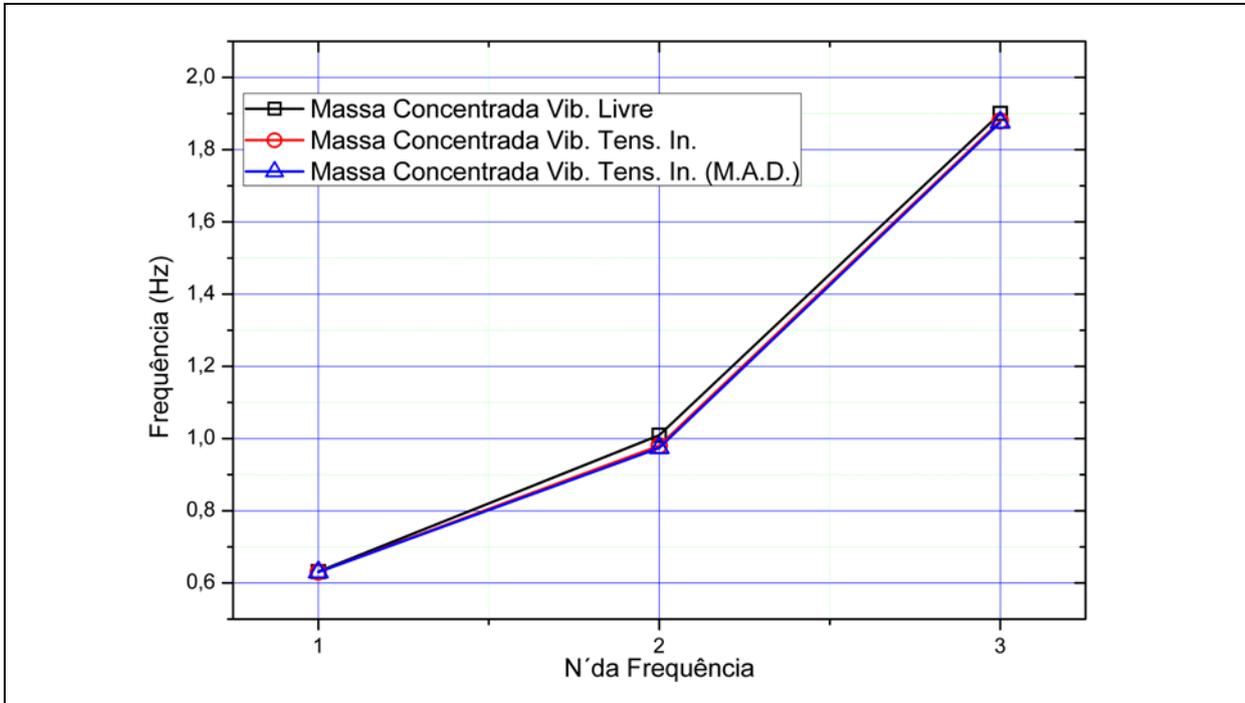


Figura 5.19 - Comparação entre as análises utilizando a matriz de massa concentrada.

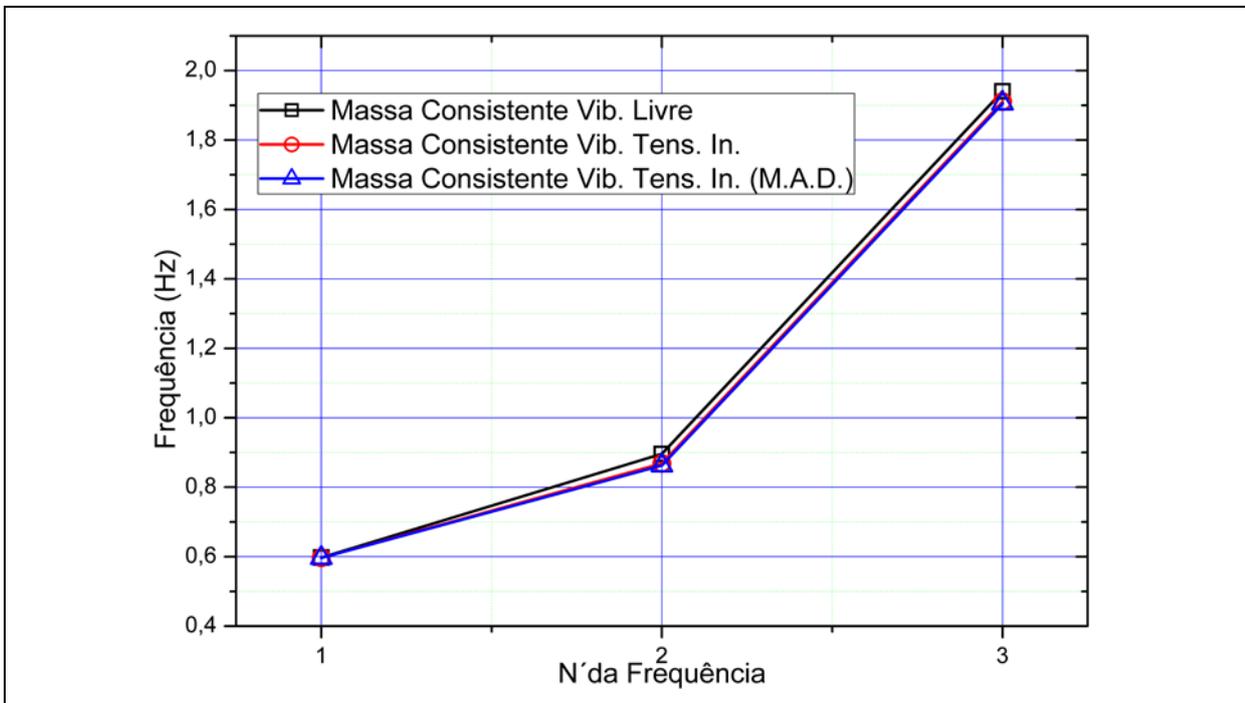


Figura 5.20 - Comparação entre as análises utilizando a matriz de massa consistente.

Existe uma redução das frequências naturais quando se compara uma análise de vibrações livres e a análise de vibração sob tensões iniciais, decorrente da atuação de forças de compressão elevadas que passam a ser consideradas. Mas, caso os elementos sejam tracionados, a análise sob tensões iniciais pode apresentar frequências mais altas que as obtidas pela análise de vibração livre não amortecida da estrutura.

As respostas de vibração sob tensões iniciais não sofreram alterações significativas em relação à aplicação do método MAD, mesmo com aumento das forças de compressão no tabuleiro e na coluna.

Os gráficos da Figura 5.21, e Figura 5.22 mostram a redução percentual das frequências em relação à resposta da análise de vibração livre. As frequências naturais mais afetadas pelo efeito das forças de compressão consistem nas frequências mais baixas, enquanto as frequências mais altas não houve, praticamente, alterações.

Apesar das primeiras frequências terem sido alteradas, os valores percentuais foram menores que 4%, neste caso, uma análise de vibração livre poderia ser indicada a título de obtenção dos valores das frequências com relativa precisão.

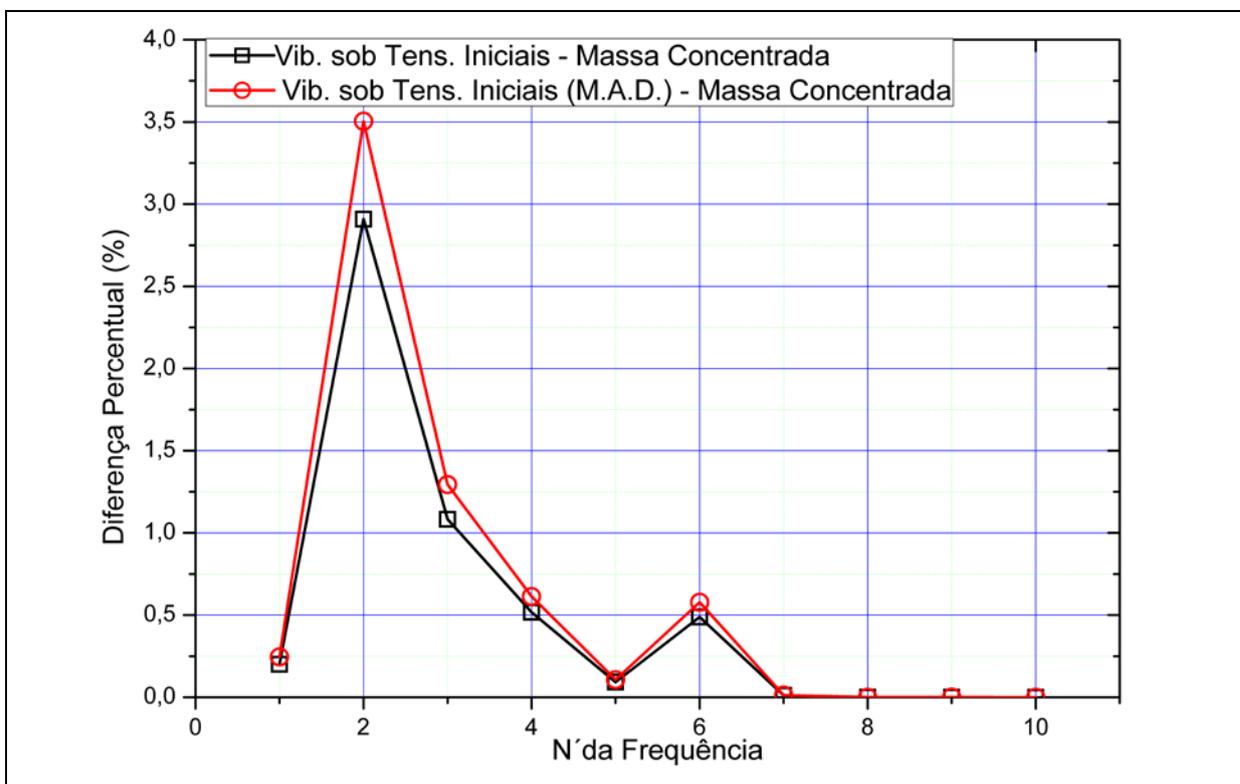


Figura 5.21 - Diferença percentual das análises de vibrações sob tensões iniciais em relação a análise de vibração livre utilizando a matriz de massa concentrada.

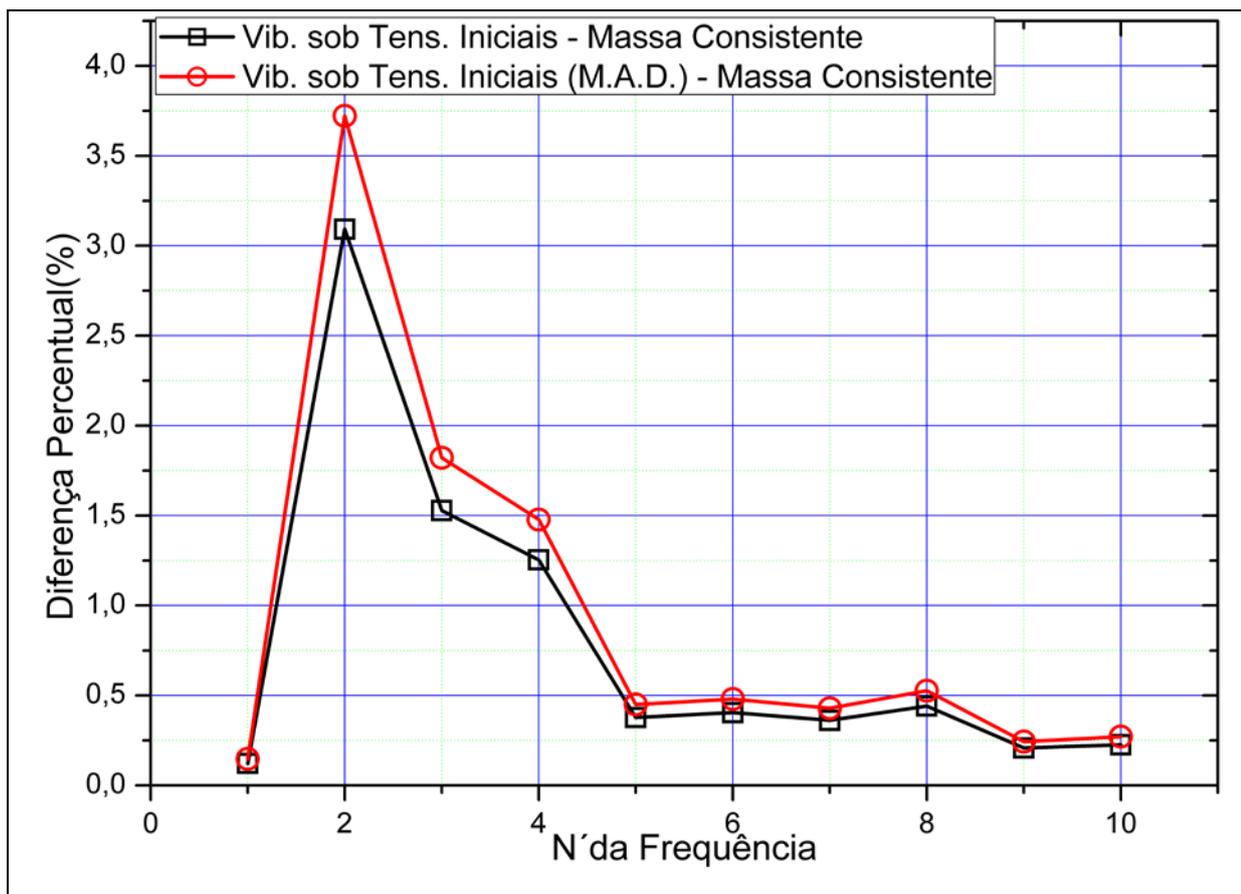


Figura 5.22 - Diferença percentual em relação a análise de vibração livre utilizando a matriz de massa consistente.

5.1.3 PONTE ESTAIADA SIMÉTRICA EM CONFIGURAÇÃO DE HARPA

Este é um exemplo de uma ponte estaiada com extensão total de 609,60 metros, onde o vão principal possui 335,28 metros, e os vãos laterais (secundários) 137,16 metros cada. Cada um dos pilares possui uma altura de 60,96 metros. A ponte foi dividida em 21 nós, e 20 elementos finitos de pórtico plano, e 12 elementos de treliça plana, segundo a representação da Figura 5.23.

As condições de contorno do problema são 4 apoios, sendo 3 do primeiro gênero, e 1 do segundo gênero. Os apoios dos nós 1, 4, e 12 são do primeiro gênero, e o nó 15 possui um apoio do segundo gênero.

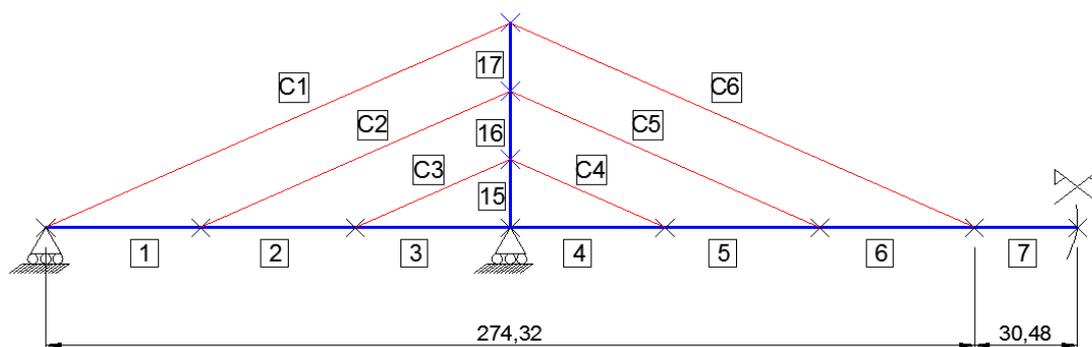


Figura 5.23 - Geometria da ponte estaiada com configuração em harpa com eixo de simetria e a numeração dos elementos finitos.

Como no exemplo anterior, os dados de massa específica apresentados foram obtidos pelo carregamento uniformemente distribuído aplicado nos trabalhos de Wang, Tseng e Yang (1993), e do trabalho de Wang, Lin e Tang (2002). Estes trabalhos servirão como modelo de comparação de resultados para a análise estática não linear, e análise modal, respectivamente.

Os elementos finitos E1 ao E6, e E9 ao E14 do tabuleiro possuem 45,72 metros de comprimento. Os elementos finitos centrais do tabuleiro, E7 e E8, possuem 30,48 metros. Os elementos correspondentes das torres, E15 ao E20, possuem 20,32 metros cada.

O tabuleiro tem um carregamento de peso-próprio correspondente a 87,563 kN/m, e os valores do peso-próprio das torres e dos cabos são negligenciados na análise estática, entretanto as massas específicas são consideradas para as matrizes de massa da análise modal, e para consideração do efeito de catenária. As características dos materiais e das propriedades geométricas das seções são apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 5-7 - Propriedades geométricas e dos materiais.

Elemento Estrutural	E (MPa)	ρ (t/m ³)	Área (m ²)	I (cm ⁴)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	g (m/s ²)
E1 – E14 (tabuleiro)	206800	27,902	0,32	$1,131 \times 10^8$	-	9,807
E15 e E18 (parte inferior das colunas)	206800	27,902	0,269	$4,315 \times 10^7$	-	9,807
E16 e E19 (parte do meio das colunas)	206800	27,902	0,228	$3,452 \times 10^7$	-	9,807
E17 e E20 (topo da coluna)	206800	27,902	0,203	$2,106 \times 10^7$	-	9,807
C1, C6, C7 e C12	206800	7,83	0,042	-	1700	9,807
C2 – C5 e C8 – C11	206800	7,902	0,016	-	1700	9,807

5.1.3.1 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

Devido à simetria do exemplo, são utilizados apenas 3 nós para o procedimento de iteração de forma do método MAD. Os dados fornecidos para iteração de forma estão apresentados na tabela a seguir.

Tabela 5-8 – Dados para realização da iteração de forma.

Ponto de Controle	Deslocamento vertical (m)	Tolerância (ϵ_s)	Vão Principal (m)
Nó 5	0,00	10^{-4}	335,00
Nó 6	0,00	10^{-4}	
Nó 7	0,00	10^{-4}	

As configurações deslocadas das análises estática não linear sem aplicação de força de protensão, e com aplicação da força de protensão pelo método MAD são apresentados a seguir na Figura 5.24, e Figura 5.25, respectivamente, onde o fator de escala que multiplica os deslocamentos é de 10 vezes.

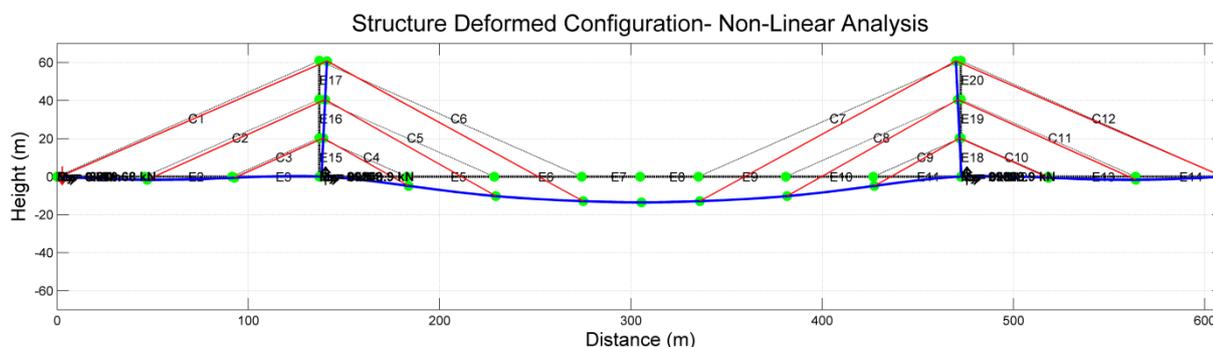


Figura 5.24 - Deslocamentos verticais sem aplicação das forças de protensão (fator de escala de 10 vezes).

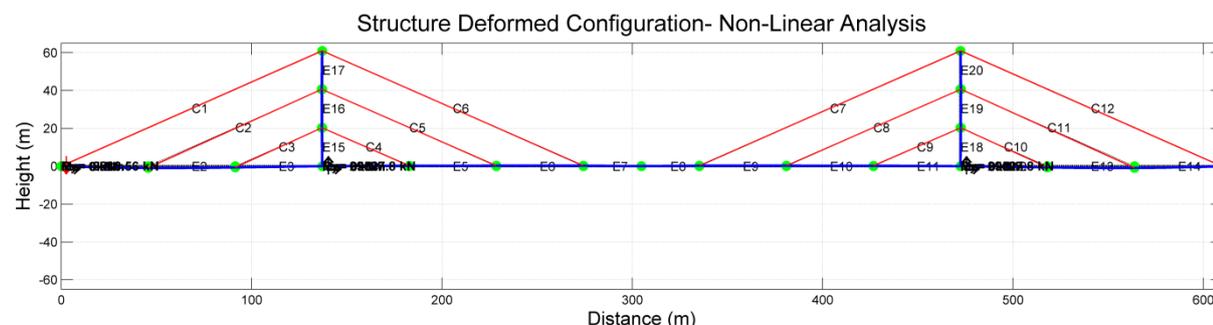


Figura 5.25 - Deslocamentos verticais com aplicação das forças de protensão pelo método MAD (fator de escala de 10 vezes).

Neste exemplo, torna-se mais evidente os benefícios do método MAD, em termos de redução dos deslocamentos. Foi possível tornar os deslocamentos nos pontos de controle pequenos ao ponto de quase “anular” o deslocamento no meio do vão principal (nó 8).

A Tabela 5-9 apresenta a redução percentual de deslocamentos verticais obtidos para os nós 5, 6, 7 e 8 da estrutura, que são os nós que apresentam maior deslocamento vertical.

Tabela 5-9 – Redução dos deslocamentos pela utilização do M.A.D no presente trabalho.

Ponto de Controle	Deslocamento vertical (m) –		Redução Percentual
	Sem Protensão	Com Protensão (MAD)	
Nó 5	-0,5064	0,02402	104,74%
Nó 6	-1,064	0,03075	102,89%
Nó 7	-1,351	0,02958	102,19%
Nó 8	-1,423	0,00829	100,58%

Observa-se que, neste exemplo, os valores da redução percentual encontram-se acima de 100%. Isto porque as forças de protensão aplicadas suspenderam o tabuleiro acima da configuração de referência, ou seja, deslocamentos verticais positivos.

A comparação é realizada tomando os resultados dos nós 5, 6, e 7. O gráfico da Figura 5.26 mostra o resultado obtido com a análise não linear do presente trabalho afim de confrontar as diferenças entre o método MAD implementado, e os resultados obtidos pela referência do trabalho de Wang, Tseng e Yang (1993).

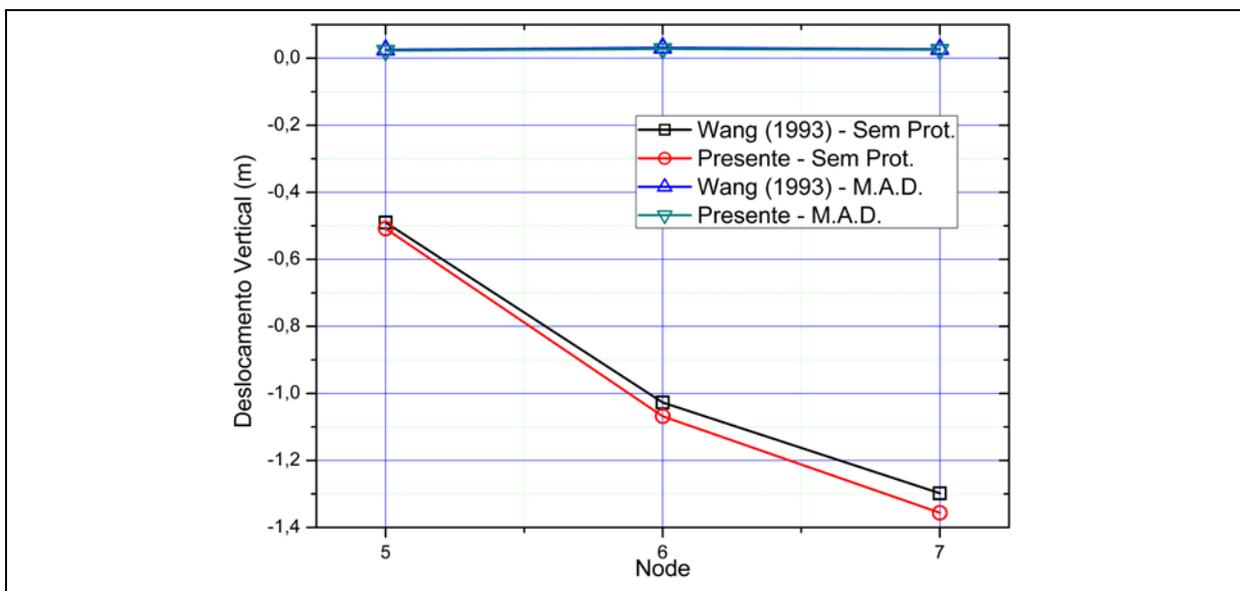


Figura 5.26 - Deslocamentos verticais dos nós das análises realizadas.

É possível ver a diferença dos deslocamentos com a aplicação do método MAD em relação ao exemplo sem utilização de forças prévias de protensão. Com a aplicação do método MAD foi possível nivelar os deslocamentos verticais da estrutura, mantendo-os próximo da configuração de referência.

Observa-se que as respostas são razoavelmente próximas, onde a maior diferença encontra-se na análise sem as forças de protensão, onde o presente trabalho desenvolve maiores deslocamentos vertical no tabuleiro da ponte.

A análise de Wang, Tseng e Yang (1993) se mostrou mais rígida que a presente análise. No entanto, isto não é o esperado, visto que Wang, Tseng e Yang (1993) utilizam as 3 não linearidades existentes na análise, enquanto o presente trabalho considera a catenária, e o efeito viga-coluna, negligenciando a terceira, correspondente a grandes deslocamentos.

Os autores afirmam que o peso-próprio dos cabos é negligenciado ($w=0$), mas o efeito não linear da catenária é considerado. Caso a análise do código computacional desenvolvido não considere o peso-próprio do cabo ($w=0$), isto fornece o módulo de elasticidade linear do cabo.

É realizada esta comparação na Figura 5.27 em relação aos resultados obtidos pelos autores. onde as respostas obtidas pelo código computacional negligenciou o peso-próprio dos cabos ($w=0$) também para o cálculo do efeito da catenária.

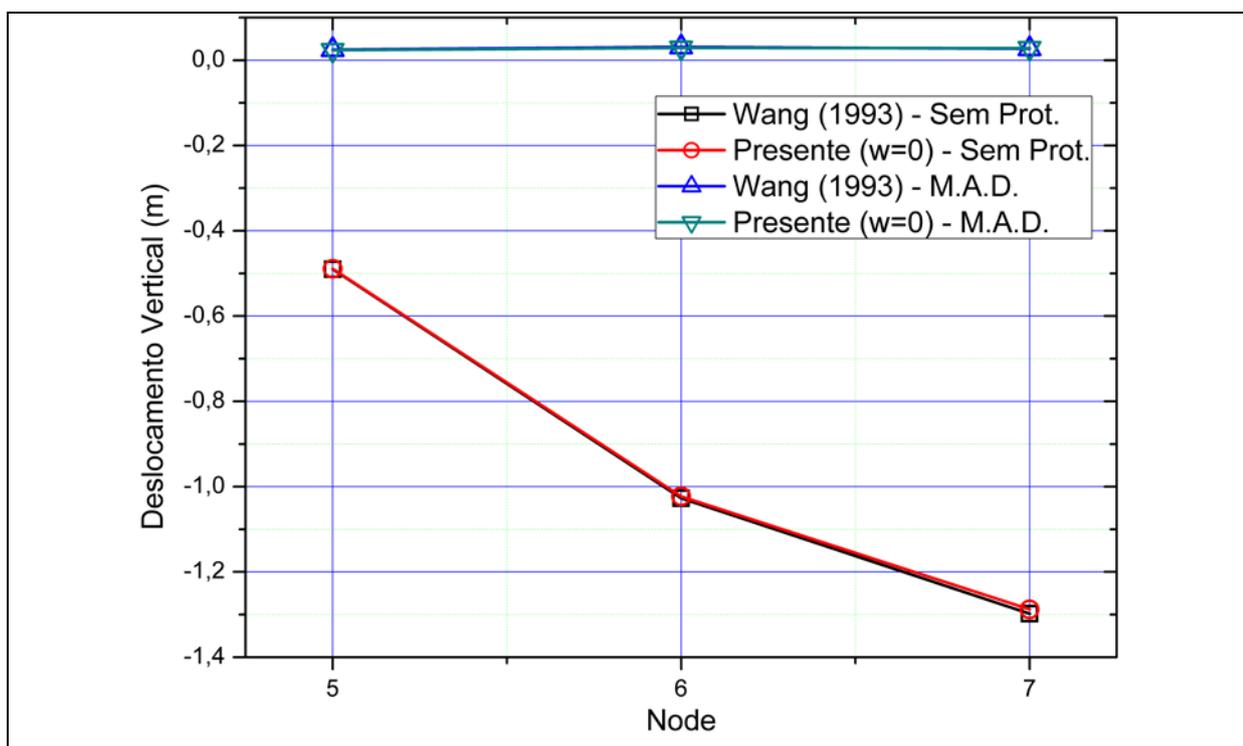


Figura 5.27 – Comparação entre deslocamentos verticais dos nós quando $w=0$.

Os resultados apresentados na Figura 5.27 parecem mais coerentes com os resultados esperados. Ao se negligenciar o peso-próprio também para o efeito de catenária, a estrutura assume um módulo de elasticidade equivalente igual ao módulo de elasticidade linear do material.

Ao comparar os resultados obtidos com os dos autores, observa-se boa correlação dos valores. Em relação à análise com o peso-próprio dos cabos negligenciado para o efeito de catenária, o código computacional desenvolvido se mostra uma estrutura levemente mais rígida que respostas obtidas pelos autores[Figura 5.27], por não apresentar o efeito de grandes deslocamentos.

É possível que os autores tenham negligenciado, inadvertidamente, o peso-próprio dos cabos ($w=0$), também para o cálculo do efeito de catenária. Pois, os resultados dos autores encontram-se mais próximos desta análise segundo os resultados apresentados nas Figura 5.26, e Figura 5.27.

O código computacional desenvolvido permite a visualização do caminho percorrido durante a iteração de forma do método MAD. Dentre as respostas que são possíveis de visualização estão os deslocamentos verticais e horizontais, e as forças internas. A figura a seguir, gerada pelo pós-processador desenvolvido, mostra os deslocamentos verticais dos nós 5, 6, 7 e 8 ao longo do processo iterativo de iteração de forma.

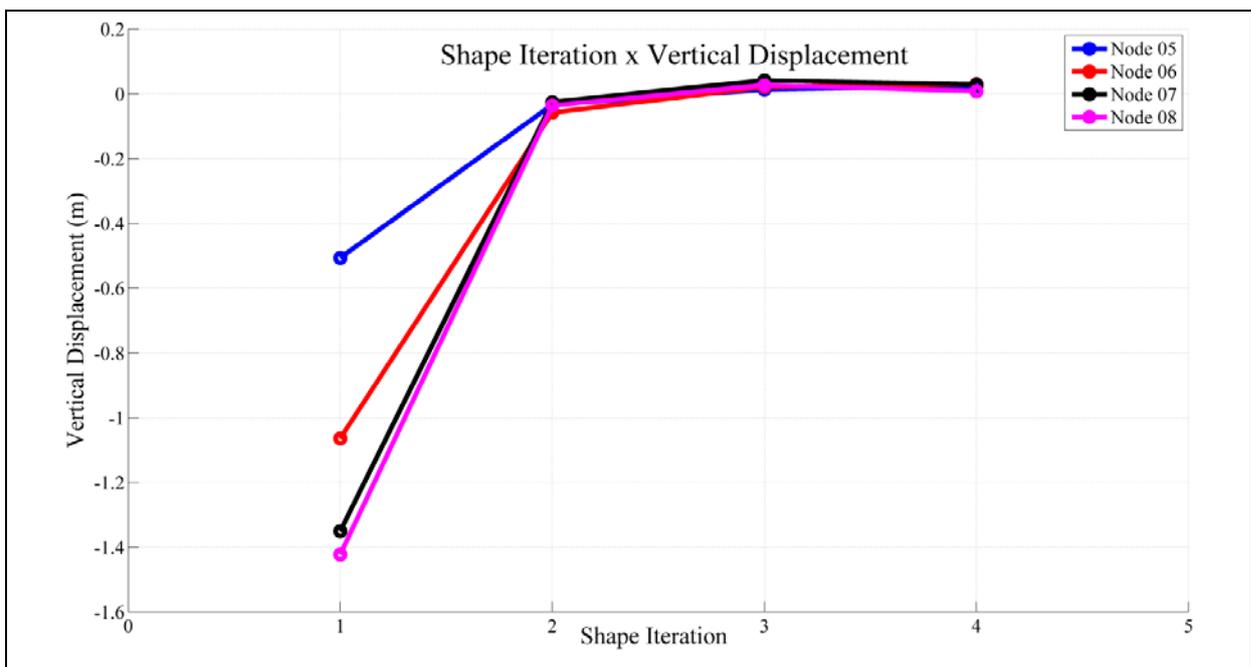


Figura 5.28 - Deslocamentos verticais dos nós ao longo da iteração de forma na etapa de pós-processamento do código computacional desenvolvido.

A seguinte análise tem por objetivo mostrar a diferença das forças de axiais existentes nos cabos C1, C2 e C3, em função do tipo de análise adotada, conforme a figura a seguir.

Observa-se pela Figura 5.29 que os resultados obtidos sem o método MAD obtiveram forças um pouco diferentes, no entanto, as forças com o método MAD são muito semelhantes. Ao se analisar a mesma estrutura considerando o peso-próprio dos cabos como zero ($w=0$), a análise sem o MAD se aproxima bastante dos resultados apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993) [Figura 5.30].

A exemplo da ponte assimétrica, os resultados das forças nos cabos com a aplicação do método MAD forneceu resultados semelhantes entre o presente trabalho e o apresentado por Wang, Tseng e Yang (1993). Entretanto, neste exemplo houve uma pequena diferença entre as forças no cabo C1 na análise sem aplicação de forças de protensão.

Isto parece ocorrer devido ao efeito da catenária deste exemplo se sobrepôr aos demais efeitos não lineares, decorrente do maior número de cabos existentes na ponte. Ao se fixar o peso-próprio dos cabos igual a zero para o efeito de catenária, este é também negligenciado, passando a atuar a rigidez linear do cabo.

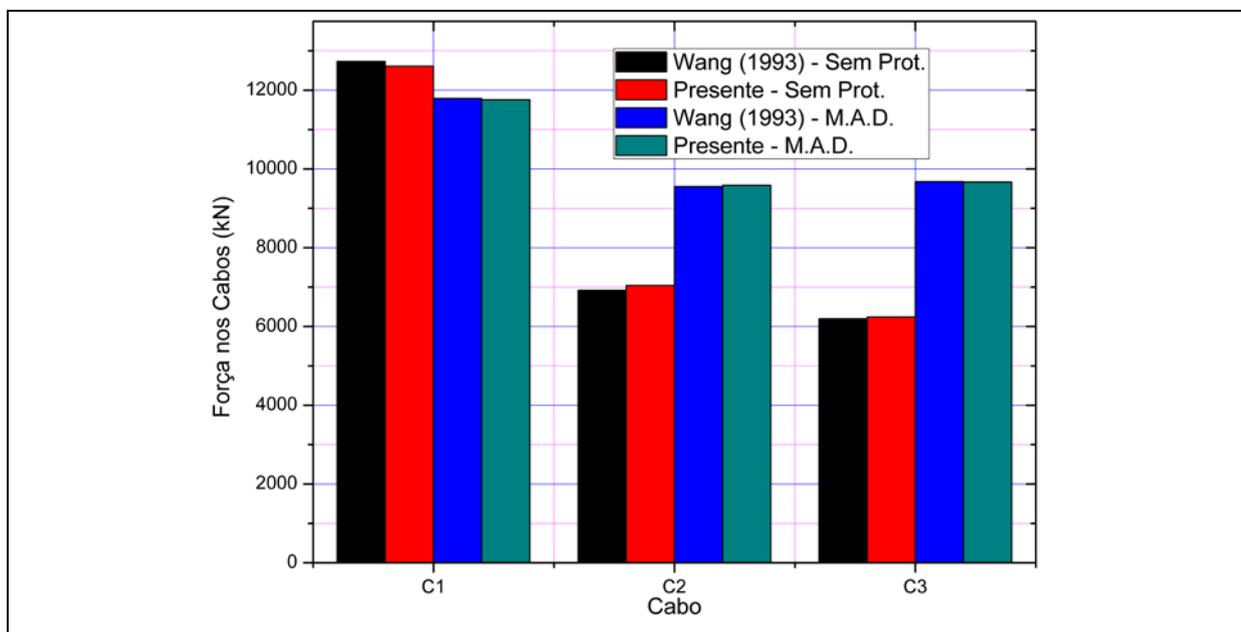


Figura 5.29 – Comparação entre as forças nos cabos entre Wang, Tseng e Yang (1993) e o presente trabalho.

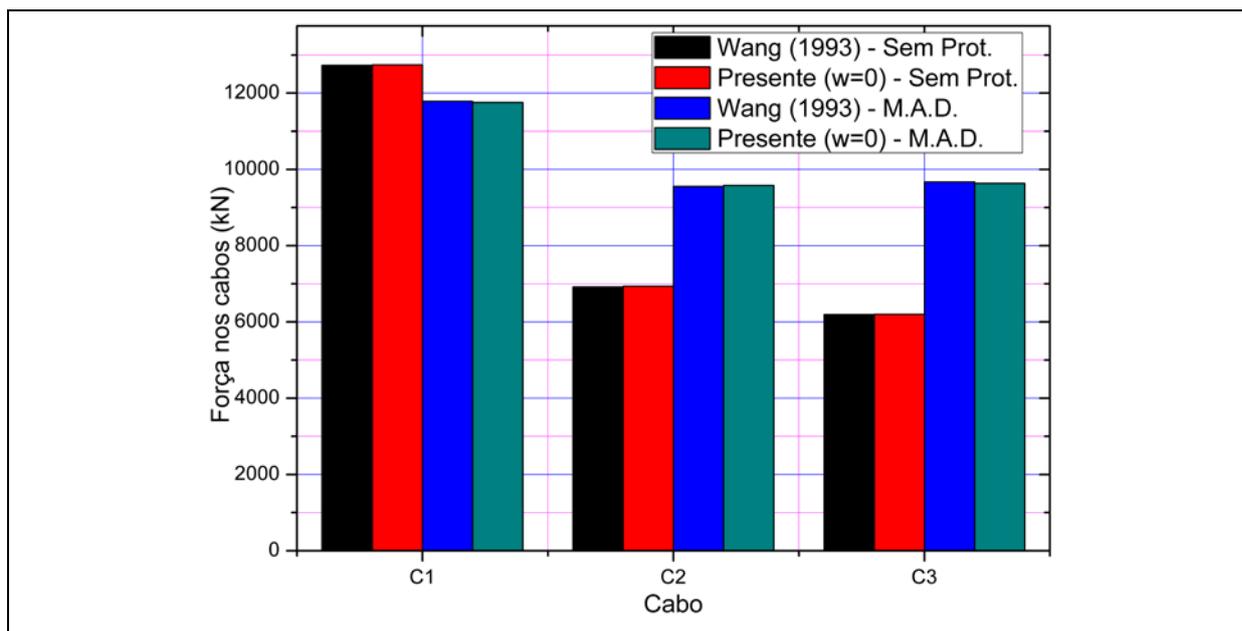


Figura 5.30 - Comparação entre as forças nos cabos com $w=0$ do presente trabalho e Wang, Tseng e Yang (1993).

Pelos resultados apresentados, as respostas obtidas pelo código computacional implementado são mais próximos quando se considera a análise com o peso-próprio dos cabos negligenciados. As pequenas diferenças que aparecem nesta análise ($w=0$) podem ser conferidas à consideração de grandes deslocamentos.

As respostas obtidas, em deslocamentos, com o método MAD foram muito próximas quer o peso-próprio dos cabos fosse ou não negligenciados. As pequenas diferenças obtidas entre essas duas análises podem ser atribuídas às diferentes condições iniciais da aplicação das forças nos cabos, que resultam das diferentes configurações iniciais propostas (obtidas após o primeiro ciclo de equilíbrio de Newton-Raphson).

Isto é, os deslocamentos iniciais desenvolvidos ao se considerar ou não o peso-próprio dos cabos influem nas forças obtidas nos cabos para a primeira iteração de forma. Esta diferença vai sendo propagada durante o processo iterativo.

As seguintes análises serão obtidas com a consideração do peso-próprio ($w \neq 0$) dos cabos para o cálculo do efeito da catenária no código computacional, comparando-se os resultados apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993).

A Tabela 5-10 mostra os resultados obtidos para os esforços axiais nos elementos do tabuleiro. O cabo C1 teve uma redução na força de tração na análise com aplicação do método MAD, isto implica na redução do esforço normal no elemento E1 do tabuleiro. Já os elementos E2, e E3 aumentaram em 8,5% e 20%, aproximadamente.

Tabela 5-10 - Forças de compressão nos elementos do tabuleiro.

Elem.	Wang (1993) – Sem Prot. (kN)	Presente – Sem Prot. (kN)	Wang (1993) – Com Prot. (kN)	Presente – Com Prot. (kN)
E1	*	-11527,052	-10770,00	-10742,772
E2	*	-17963,282	-19500,00	-19498,353
E3	-23580,00	-23665,297	-28330,00	-28325,818

*- Informação não fornecida pelo autor.

A análise dos momentos fletores obtidos com auxílio do código desenvolvido e as respostas de Wang, Tseng e Yang (1993), com o emprego do método MAD, resultou em diferenças percentuais relativas com divergência média inferior a 4%. Os resultados apresentados na Tabela 5-11 são os valores até o nó 8 (ponto médio do vão central) devido à simetria da ponte. A metodologia proposta por Wang, Tseng e Tang (1993) apresenta as não linearidades de efeito de catenária, efeito viga-coluna, e grandes deslocamentos.

A análise sem aplicação de protensão fornece valores máximos de momentos fletores nos nós do tabuleiro de 42944,521 kN.m, e valor mínimo de -109720,012 kN.m, uma amplitude de 152664 kN.m. Estes valores são reduzidos para um máximo de 17497,927 kN.m, e mínimo de -23176,498 kN.m, onde a amplitude dos valores chega a 40674 kN.m ao aplicar o método MAD, isto é, uma redução de 73,36% na amplitude dos momentos fletores.

Tabela 5-11 – Tabela de momentos fletores nodais dos elementos finitos do tabuleiro.

Nó	Wang (1993) – Sem Prot. (kN.m)	Presente – Sem Prot. (kN.m)	Wang (1993) – Com Prot. (kN.m)	Presente – Com Prot. (kN.m)
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	*	22709,260	-1709,00	-2031,073
3	*	-10292,010	-10070,00	-10143,613
4	-109300,00	-109720,012	-22630,00	-22809,482
5	*	-9710,261	-16630,00	-16440,213
6	*	23999,872	-14370,00	-14282,119
7	*	2240,096	-24030,00	-23176,498
8	40000,00	42944,521	16640,00	17497,927

*- Informação não fornecida pelo autor.

Houve uma redução significativa da amplitude dos momentos fletores no tabuleiro, e é possível constatar que os momentos ficaram mais uniformes, isto é, distribuídos dentro de uma faixa menor de amplitude [Figura 5.31]. A Figura 5.31 mostra o comportamento dos momentos fletores nos nós do tabuleiro para as análises sem e com aplicação do método MAD

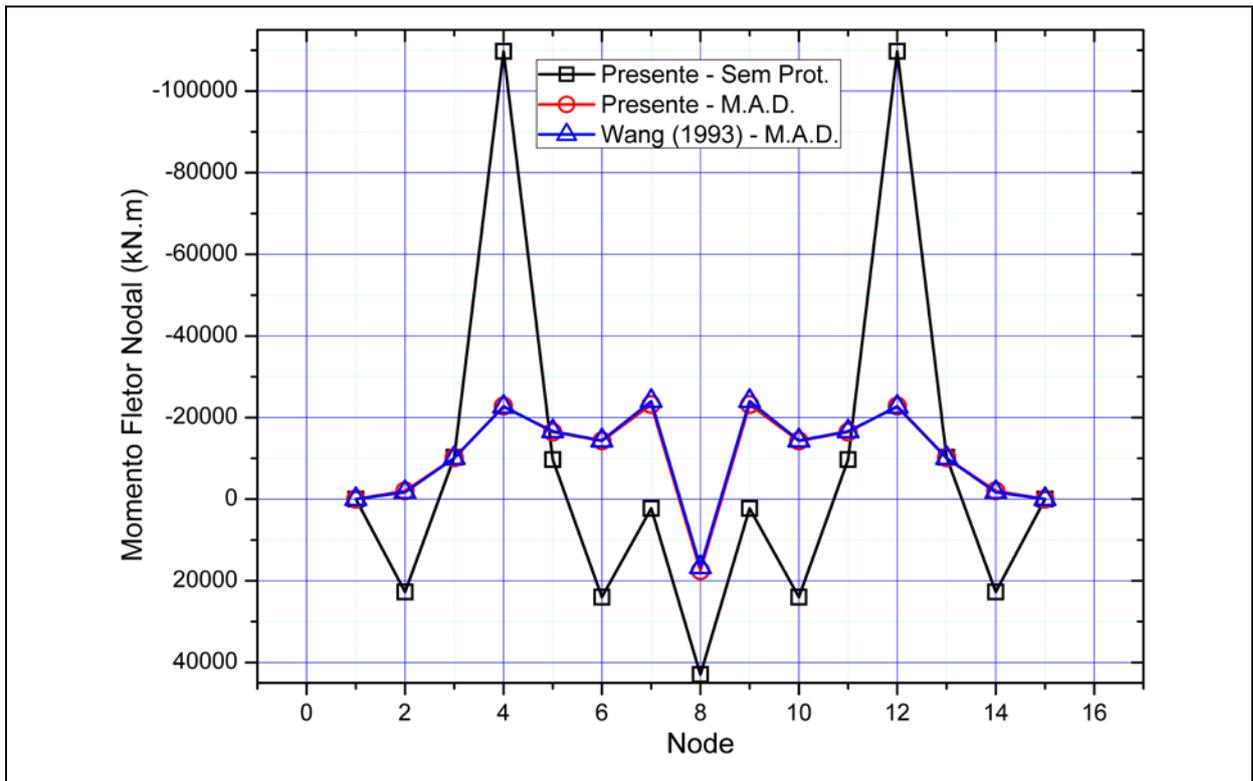


Figura 5.31 – Momentos fletores nodais da ponte em configuração em harpa.

5.1.3.2 ANÁLISE MODAL

Este exemplo foi analisado por Wang, Lin e Tang (2002) com a consideração apenas da análise sob tensões iniciais com a aplicação do método MAD. Como observado no exemplo do item 5.1.2.2, a matriz de massa empregada pelos autores foi a matriz de massa consistente. Portanto, não se faz necessário valer-se de uma análise com a matriz de massa concentrada.

A Figura 5.32 traz as respostas das frequências naturais obtidas pelos dois trabalhos. As análises possuem boa coerência nas frequências extraídas, onde o gráfico das diferenças percentuais relativas das análises encontram-se expostas na Figura 5.33.

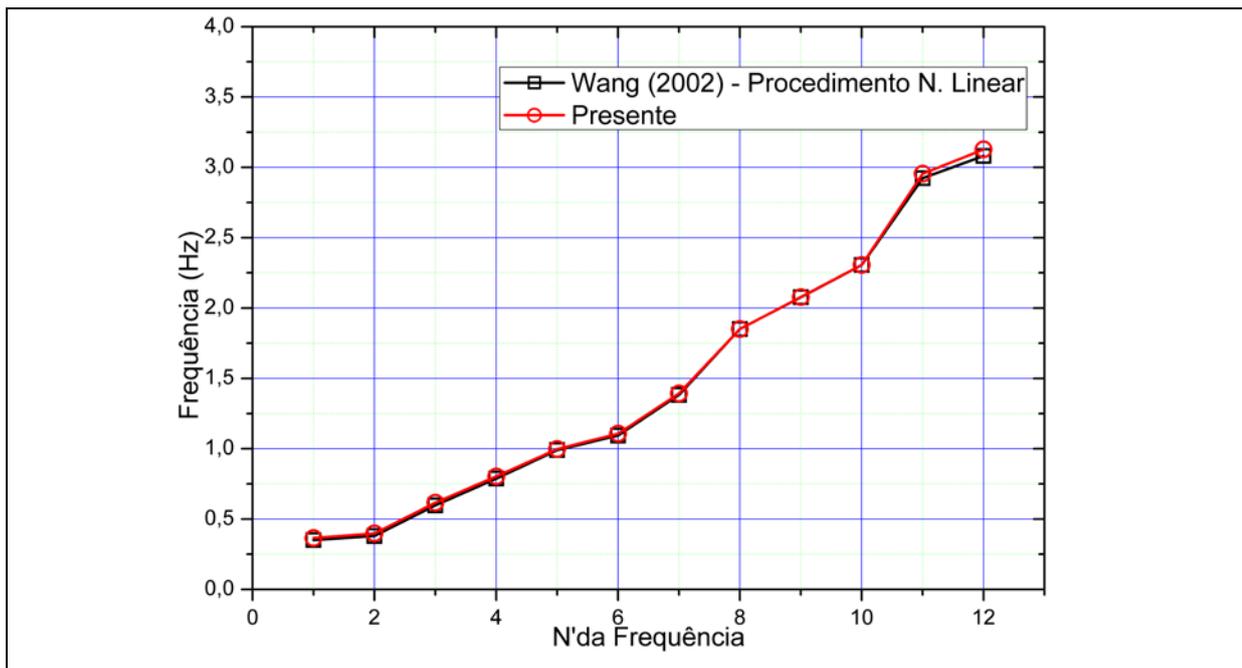


Figura 5.32 - Comparação entre as frequências naturais.

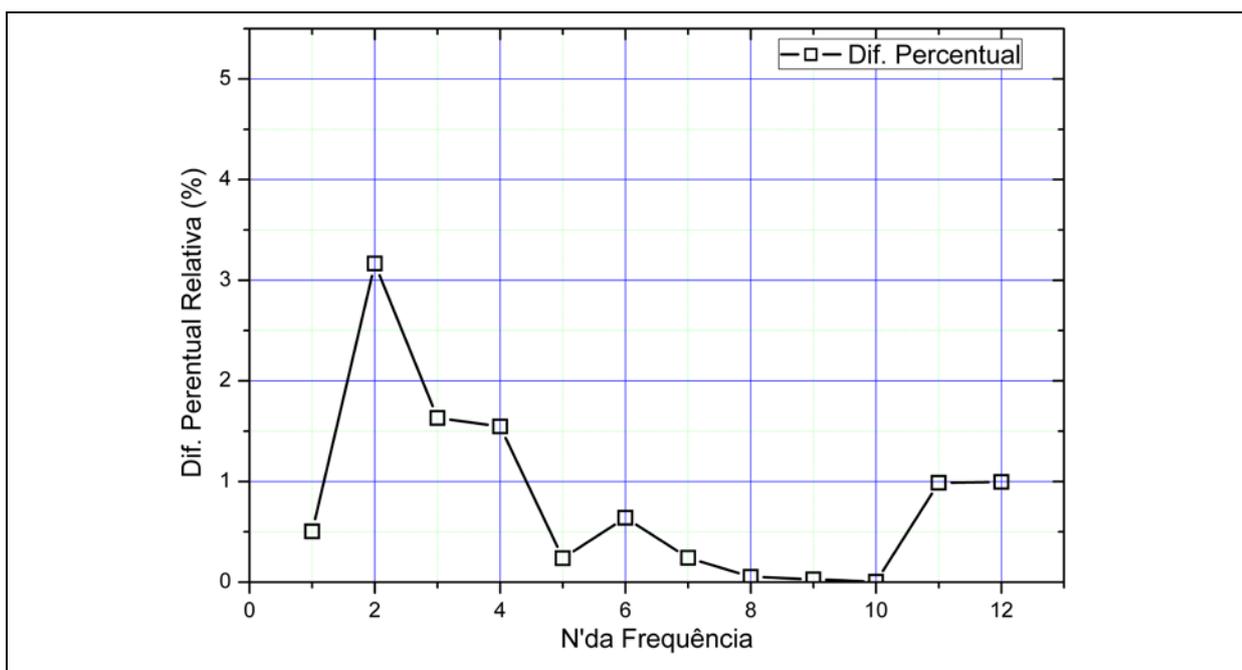


Figura 5.33 - Diferença Percentual Relativa entre os resultados obtidos e o trabalho de Wang, Lin e Tang (2002).

Este exemplo possui uma diferença percentual relativa em relação ao trabalho de Wang, Lin e Tang (2002) menor que 3,5% para as frequências naturais extraídas. A média da diferença ficou em 0,836%. É um valor baixo, mas é preciso notar que as diferenças mais altas encontram-se exatamente nas primeiras frequências [Figura 5.33].

Isto quer dizer que a análise modal é muito sensível a pequenas mudanças na matriz de rigidez e de massa. Os autores Wang, Lin e Tang (2002) realizaram dois procedimentos para extração das frequências naturais, como citado no item 2.1, um linear e outro não linear.

É possível que a diferença entre o presente trabalho e o procedimento não linear dos autores seja decorrente da simplificação adotada de pequenos deslocamentos. Ao examinar as diferenças percentuais relativas dos resultados obtidos, com os resultados apresentados pelos autores das duas análises citadas acima, é notável que os valores encontram-se num intervalo intermediário de frequências naturais [Figura 5.34].

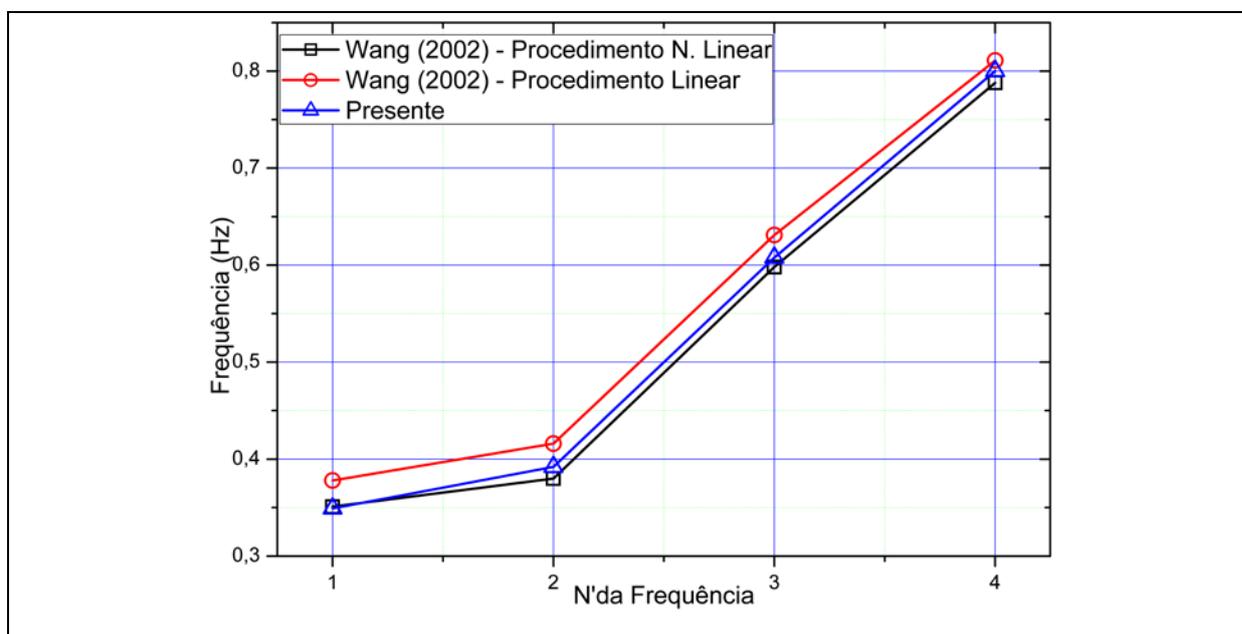


Figura 5.34 - Frequências naturais extraídas na presente análise x Wang (2002) – Procedimento Não linear x Wang (2002) – Procedimento Linear (Vibração sob tensões iniciais aplicando o método MAD).

A análise a seguir mostra a variação das frequências naturais extraídas com o código computacional desenvolvido em relação às análises de vibração livre, vibração sob tensões iniciais, e vibrações sob tensões iniciais aplicando o método MAD [Figura 5.35].

Este exemplo apresenta uma redução maior ao se considerar a matriz de rigidez tangente para obtenção das frequências naturais. Isto porque o número de cabos existentes é maior que o exemplo anterior, e existem mais elementos que têm sua rigidez reduzida pela ação da compressão.

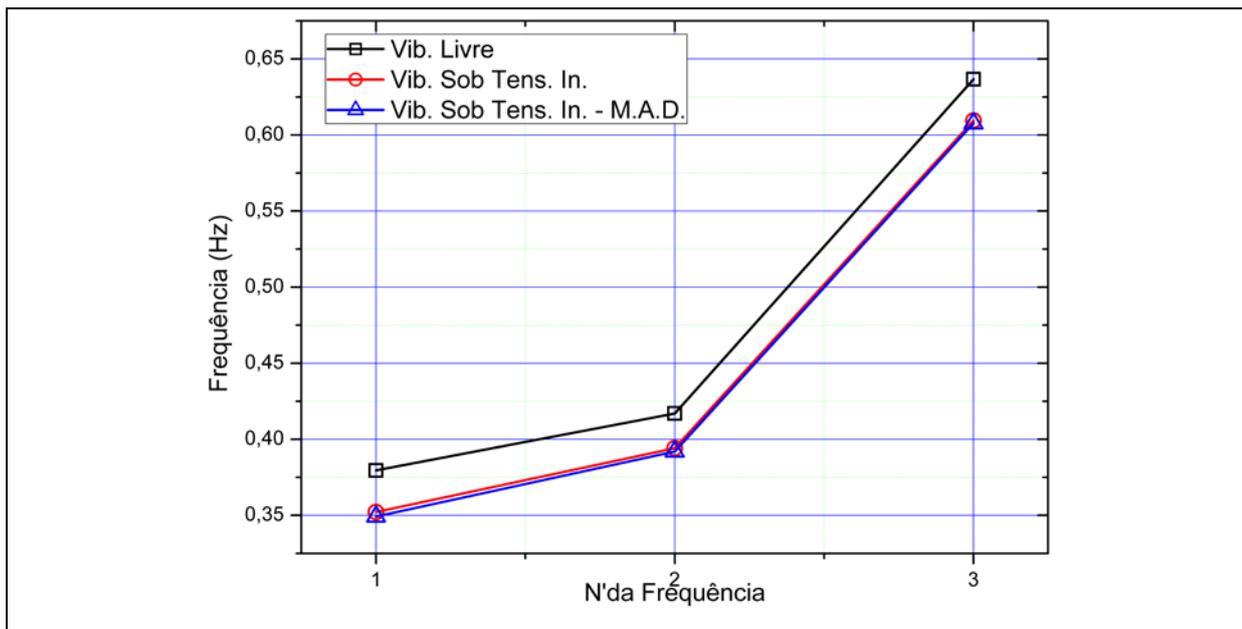


Figura 5.35 - Comparação entre as análises.

A aplicação do método MAD, novamente, reduz os valores das frequências naturais obtidas, mas em comparação a análise de vibrações sob tensões iniciais, a redução demonstra ser pouco representativa.

O gráfico da Figura 5.36 mostra a redução percentual das frequências em relação à resposta da análise de vibração livre. As frequências naturais mais afetadas pelo efeito das forças de compressão consistem nas frequências mais baixas, enquanto as mais altas a diferença percentual relativa encontra-se abaixo de 1%.

Os valores das diferenças percentuais relativas, nas primeiras frequências naturais, chegaram a quase 8% (MAD), e, aproximadamente, de 7,30% sem aplicação do método MAD em relação à vibração livre. Neste caso, houve uma diferença significativa em relação aos valores das primeiras frequências naturais. O exemplo anterior sugere que uma análise de vibração livre seria suficiente para a determinação da frequência natural, mas o mesmo não se aplica a este exemplo.

Este exemplo, por apresentar maior número de elementos comprimidos, e por ser uma estrutura mais flexível, a análise sob tensões iniciais apresentou diferenças significativas para as primeiras frequências naturais.

É possível visualizar pela Figura 5.37 que o valor absoluto da diferença entre a análise de vibração livre mantém uma distância quase que constante (aproximadamente 0,0233 Hz sem aplicação do método MAD, e 0,0241 Hz quando aplica-se o método MAD) em relação às análises de vibração sob tensões iniciais. Isto é, parece que, neste exemplo, as forças de compressão deslocam as frequências naturais por igual.

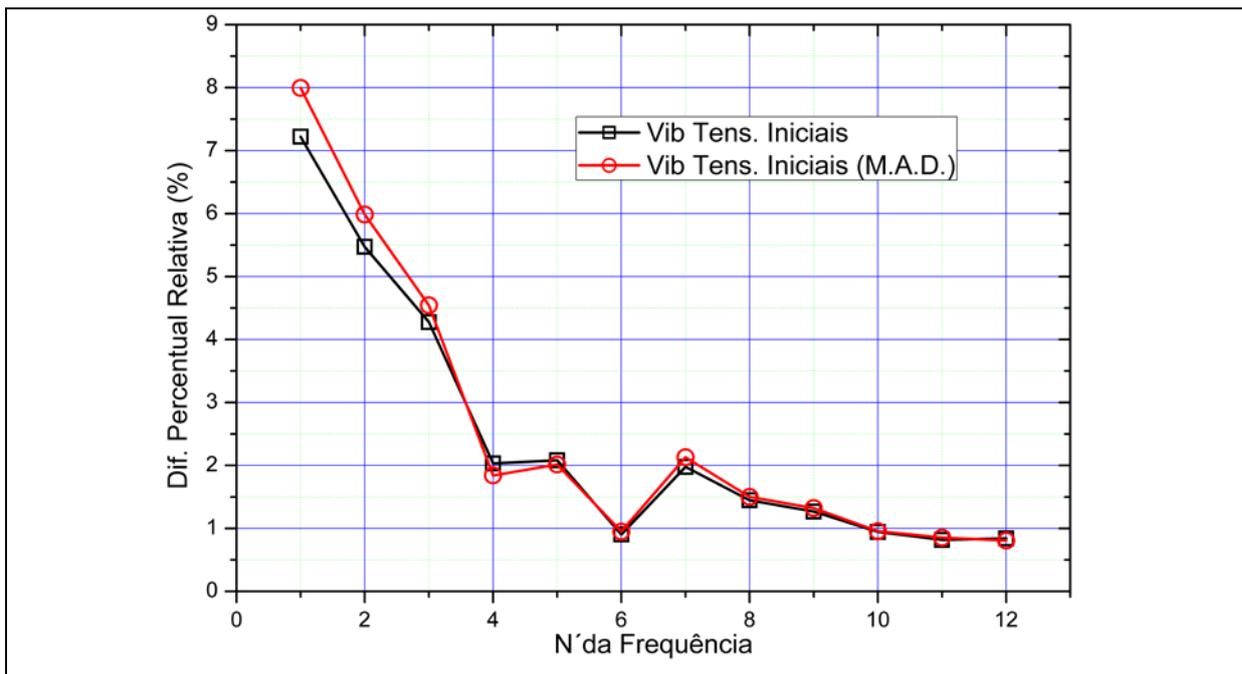


Figura 5.36 - Diferença percentual em relação a análise de vibração livre.

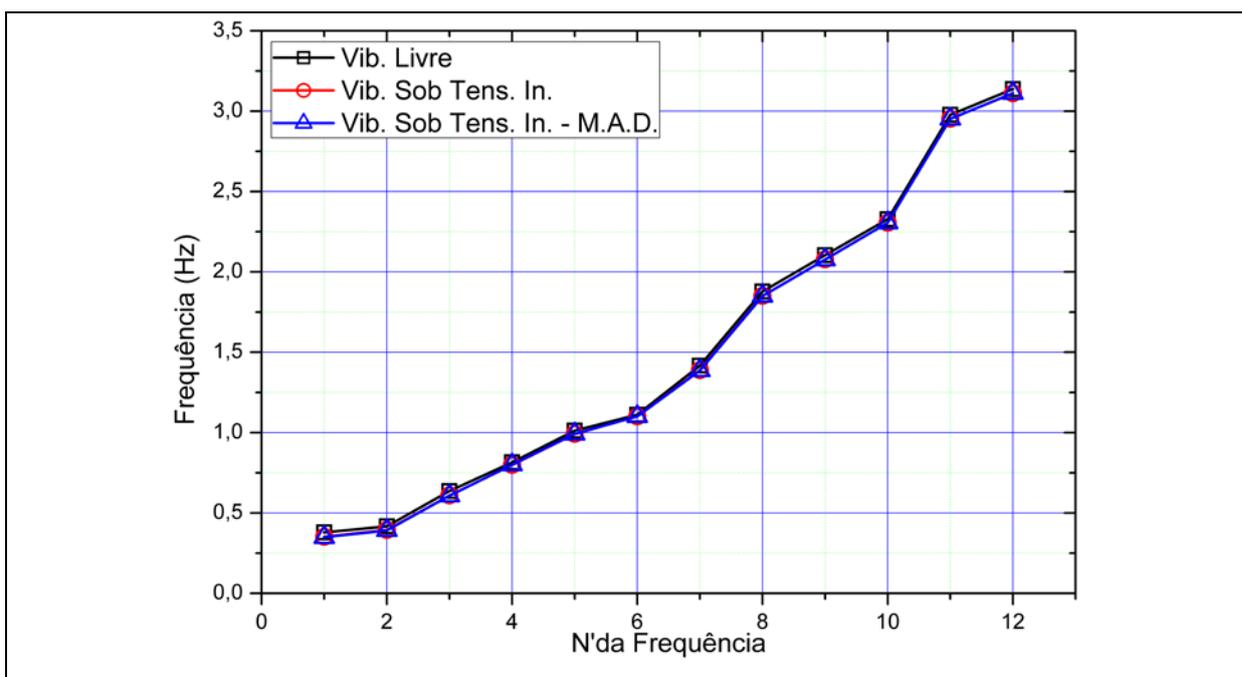


Figura 5.37 - Frequências naturais extraídas com as diferentes análises.

5.1.4 PONTE ESTAIADA SIMÉTRICA EM CONFIGURAÇÃO DE LEQUE

Neste exemplo, a geometria da ponte é mantida igual a do exemplo 5.1.3, mudando-se apenas a configuração dos estais. A análise modal deste exemplo não foi realizada por Wang, Lin e Tang (2002), mas, decorrente dos resultados coerentes observados nos exemplos anteriores, a análise modal será então realizada utilizando o código computacional

desenvolvido. Além das análises realizadas nos exemplos anteriores, serão efetuadas análises entre as diferentes configurações dos cabos (harpa e leque) a título comparativo.

As análises comparativas entre as configurações dos estais terão por objetivo averiguar a diferença dos deslocamentos verticais, os momentos fletores no tabuleiro, e as forças normais nos cabos e tabuleiro obtidas sem e com aplicação das forças de protensão pelo método MAD. A análise modal verificará, também, as diferenças entre as frequências naturais dos dois sistemas estruturais em questão.

Em relação à geometria da ponte, esta possui a mesma extensão total de 609,60 metros do item 5.1.3, com os mesmos 21 nós, 20 elementos finitos de pórtico plano, e 12 elementos de treliça plana, segundo a representação da Figura 5.38.

As condições de contorno do problema são 4 apoios, sendo 3 do primeiro gênero, e 1 do segundo gênero. Os apoios dos nós 1, 4, e 12 são do primeiro gênero, e o nó 15 possui um apoio do segundo gênero.

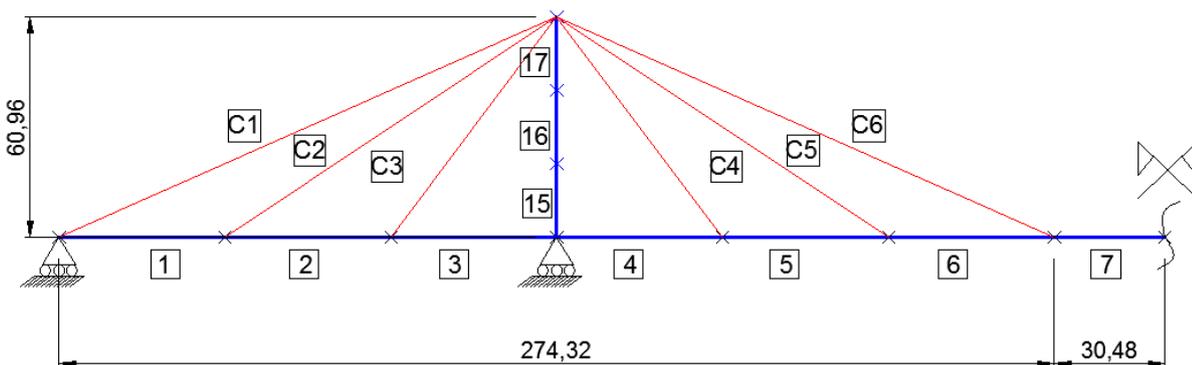


Figura 5.38 - Geometria da ponte estaiada com configuração em leque com eixo de simetria e a numeração dos elementos finitos.

Como nos exemplos anteriores, os dados de massa específica apresentados foram obtidos pelo carregamento uniformemente distribuído aplicado segundo os valores dos trabalhos de Wang, Tseng e Yang (1993). O trabalho destes autores servirá como modelo de comparação dos resultados da análise estática não linear.

Os elementos finitos E1 ao E6, e E9 ao E14 do tabuleiro possuem 45,72 metros de comprimento. Os elementos finitos centrais do tabuleiro, E7 e E8, possuem 30,48 metros. Os elementos correspondentes das torres, E15 ao E20, possuem 20,32 metros cada.

O tabuleiro tem um carregamento de peso-próprio correspondente a 87,563 kN/m, e os valores do peso-próprio das torres e dos cabos são negligenciados na análise estática, entretanto as massas específicas são consideradas para as matrizes de massa da análise modal,

e para consideração do efeito de catenária. As características dos materiais e das propriedades geométricas das seções são apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 5-12 - Propriedades geométricas e dos materiais.

Elemento Estrutural	E (MPa)	ρ (t/m³)	Área (m²)	I (cm⁴)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	g (m/s²)
E1 – E14 (tabuleiro)	206800	27,902	0,32	1,131 x 10 ⁸	-	9,807
E15 e E18 (parte inferior das colunas)	206800	27,902	0,269	4,315 x 10 ⁷	-	9,807
E16 e E19 (parte do meio das colunas)	206800	27,902	0,228	3,452 x 10 ⁷	-	9,807
E17 e E20 (topo da coluna)	206800	27,902	0,203	2,106 x 10 ⁷	-	9,807
C1, C6, C7 e C12	206800	7,83	0,042	-	1700	9,807
C2 – C5 e C8 – C11	206800	7,902	0,016	-	1700	9,807

5.1.4.1 ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

Serão utilizados os mesmos nós e tolerância do item 5.1.3.1 para o critério de parada da iteração de forma. Estes dados são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 5-13 – Dados para realização da iteração de forma.

Ponto de Controle	Deslocamento vertical (m)	Tolerância (ϵ_s)	Vão Principal (m)
Nó 5	0,00	10 ⁻⁴	335,00
Nó 6	0,00	10 ⁻⁴	
Nó 7	0,00	10 ⁻⁴	

As configurações deslocadas das análises estática não linear sem aplicação de força de protensão e com aplicação da força de protensão pelo método MAD, encontram-se, respectivamente, na Figura 5.39, e Figura 5.40, onde o fator de escala que multiplica os deslocamentos é de 10 vezes.

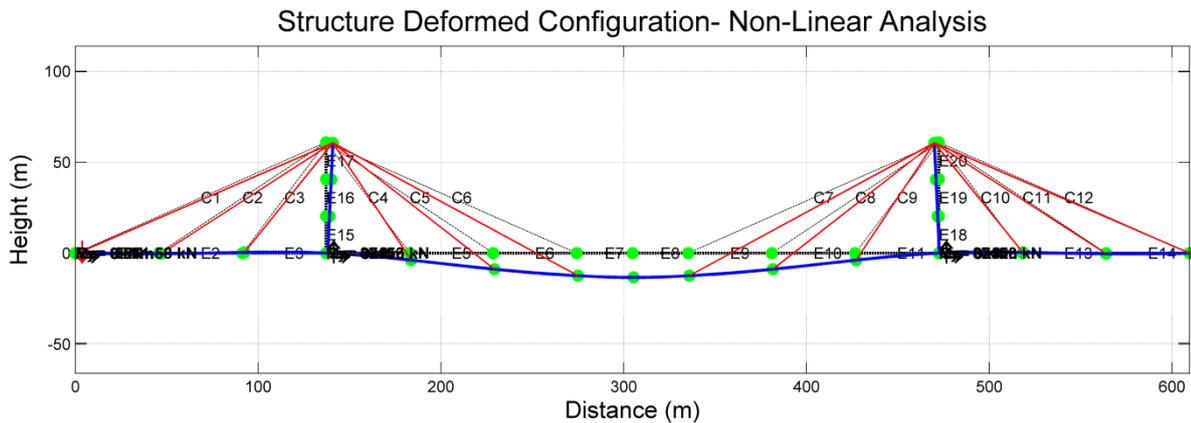


Figura 5.39 - Deslocamentos verticais sem aplicação das forças de protensão (fator de escala de 10 vezes).

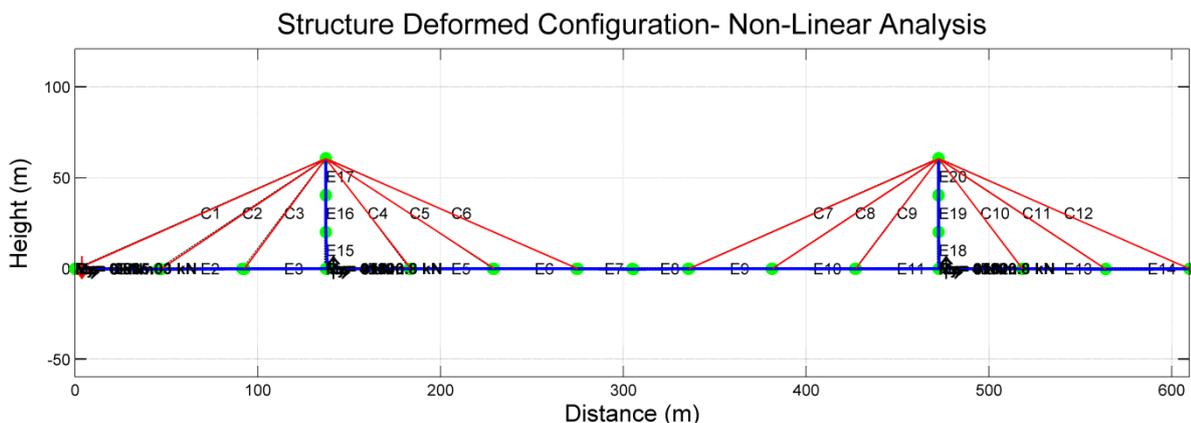


Figura 5.40 - Deslocamentos verticais com aplicação das forças de protensão pelo método MAD (fator de escala de 10 vezes).

A Tabela 5-14 apresenta a redução percentual de deslocamentos verticais obtidos para os nós 5, 6, 7 e 8 da estrutura, que são os nós que apresentam maiores deslocamentos vertical.

Tabela 5-14 – Redução dos deslocamentos pela utilização do M.A.D no presente trabalho.

Ponto de Controle	Deslocamento vertical (m) – Sem Protensão	Deslocamento vertical (m) – Com Protensão (MAD)	Redução Percentual
Nó 5	-0,3664	-0,0001455	99,96%
Nó 6	-0,8355	0,004484	100,53%
Nó 7	-1,160	0,006583	100,57%
Nó 8	-1,247	-0,01378	98,89%

A comparação dos deslocamentos verticais, entre o presente trabalho e o publicado por Wang, Tseng e Yang (1993), é feita apenas para os nós 5, 6, e 7, pois os autores não fornecem o deslocamento vertical do nó 8. O gráfico da [Figura 5.41] mostra o resultado obtido com a análise não linear do presente trabalho afim de confrontar as diferenças entre o MAD implementado, e os resultados obtidos pela referência Wang, Tseng e Yang (1993).

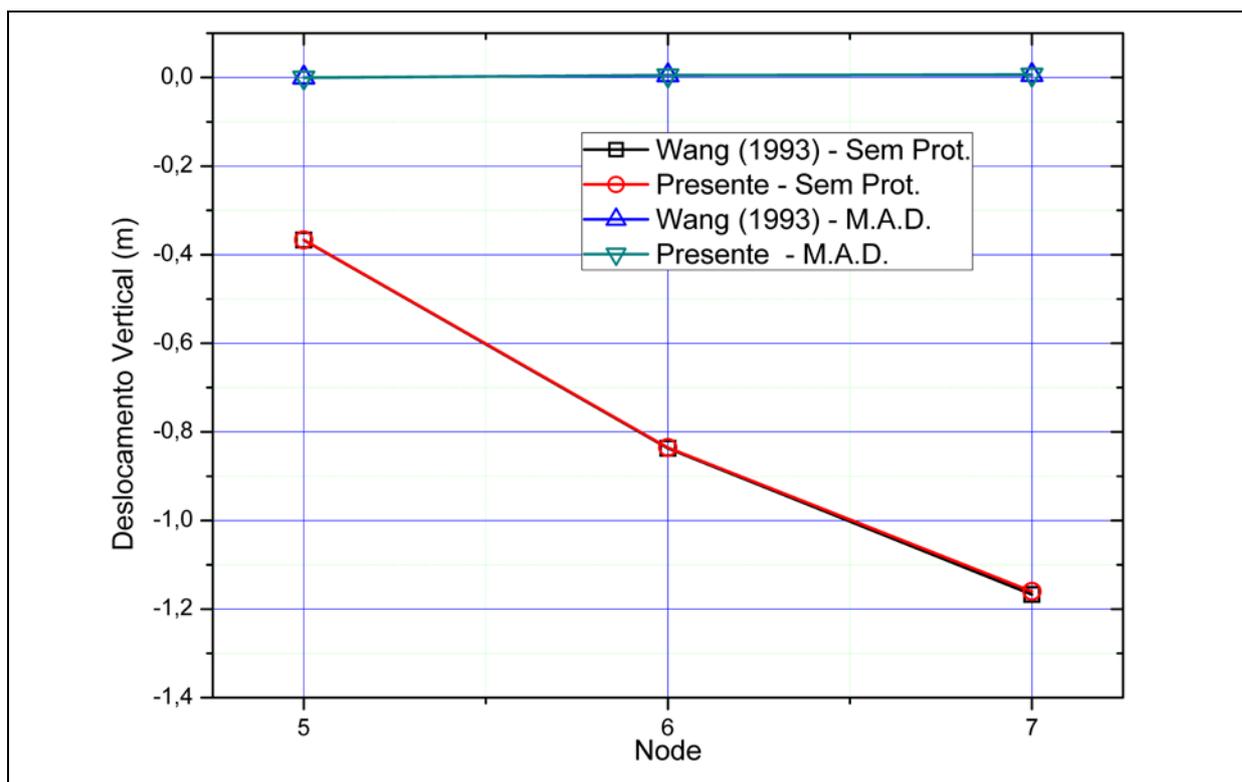


Figura 5.41 - Deslocamentos verticais dos nós das análises realizadas.

Novamente, as respostas obtidas em termos de deslocamentos verticais são próximas às respostas apresentadas pelos autores, tanto sem aplicação do método MAD, como com a aplicação do método.

Observa-se pela Figura 5.42 que os resultados para os cabos C1, C2 e C3, obtidos com e sem o método MAD foram forças próximas. A maior diferença encontra-se no cabo C3 ao se aplicar o método MAD, entretanto, esta diferença é menor que 1%.

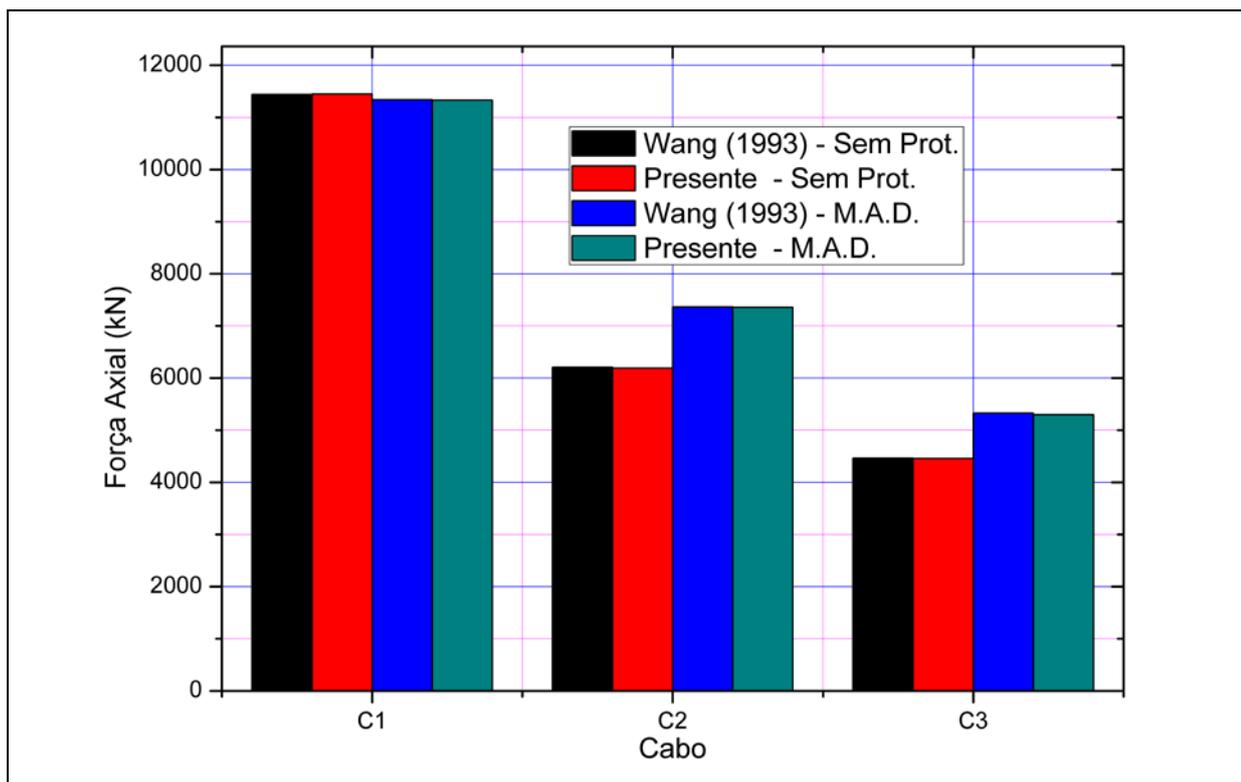


Figura 5.42 – Comparação entre as forças nos cabos entre as análises.

Em relação às forças axiais nos elementos do tabuleiro, a tabela com os valores apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993) e os encontrados no presente trabalho encontra-se representada a seguir.

Tabela 5-15 - Forças de compressão nos elementos do tabuleiro.

Elem.	Wang (1993) – Sem Prot. (kN)	Presente – Sem Prot. (kN)	Wang (1993) – Com Prot. (kN)	Presente – Com Prot. (kN)
E1	*	-10465,153	-10360,00	-10353,096
E2	*	-15619,307	-16490,00	-16472,822
E3	-18320,00	-18306,357	-19670,00	-19649,960

*- Informação não fornecida pelo autor.

A Tabela 5-15 mostra os resultados obtidos para os esforços axiais nos elementos do tabuleiro. O cabo C1 teve uma redução na força de tração na análise com aplicação do método MAD, isto implica na redução do esforço normal no elemento E1 do tabuleiro. Já os elementos E2, e E3 aumentaram em 5,46 % e 7,34 %, aproximadamente.

Os momentos fletores apresentados por Wang, Tseng e Yang (1993) são comparados com os obtidos com o código computacional desenvolvido. As diferenças relativas percentuais entre o presente trabalho e os resultados dos autores divergem em média 2%. Devido à simetria da estrutura, são apresentados os momentos fletores nodais até o nó 8 (ponto médio do vão central). Esses resultados são apresentados na Tabela 5-16

A análise sem aplicação de protensão fornece valores máximos de momentos fletores nos nós do tabuleiro de 50455,271 kN.m, e valor mínimo de -67328,658 kN.m, uma amplitude de 117783,929 kN.m. Estes valores são reduzidos para um máximo nodal de 17034,127 kN.m, e mínimo nodal de -23640,297 kN.m, onde a amplitude dos valores chega a 40674 kN.m ao aplicar o método MAD, mesma amplitude obtida para esta ponte com configuração dos estais em harpa.

Tabela 5-16 – Tabela de momentos fletores nodais dos elementos finitos do tabuleiro.

Nó	Wang (1993) – Sem Prot. (kN.m)	Presente – Sem Prot. (kN.m)	Wang (1993) – Com Prot. (kN.m)	Presente – Com Prot. (kN.m)
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	*	2392,774	-10900,00	-10777,650
3	*	-23116,236	-18510,00	-18558,879
4	-66950,00	-67328,658	-15670,00	-15667,724
5	*	-24196,595	-14600,00	-14746,573
6	*	4725,468	-13900,00	-13698,356
7	*	9780,846	-24570,00	-23640,297
8	50090,00	50455,271	16110,00	17034,127

*- Informação não fornecida pelo autor.

A metodologia proposta por Wang, Tseng e Tang (1993) apresenta as não linearidades de efeito de catenária, efeito viga-coluna, e grandes deslocamentos. Em função disso, os resultados apresentam pequenas diferenças, mas como dito anteriormente, a diferença percentual relativa entre o presente trabalho e os resultados dos autores é, em média, 2% para os valores dos momentos fletores.

Novamente, houve uma redução significativa da amplitude dos momentos fletores no tabuleiro (aproximadamente 65%), o que promove uma distribuição mais uniforme dos momentos fletores. A Figura 5.43 mostra o comportamento dos momentos fletores nos nós do

tabuleiro para as análises sem/com aplicação do método MAD do código computacional desenvolvido.

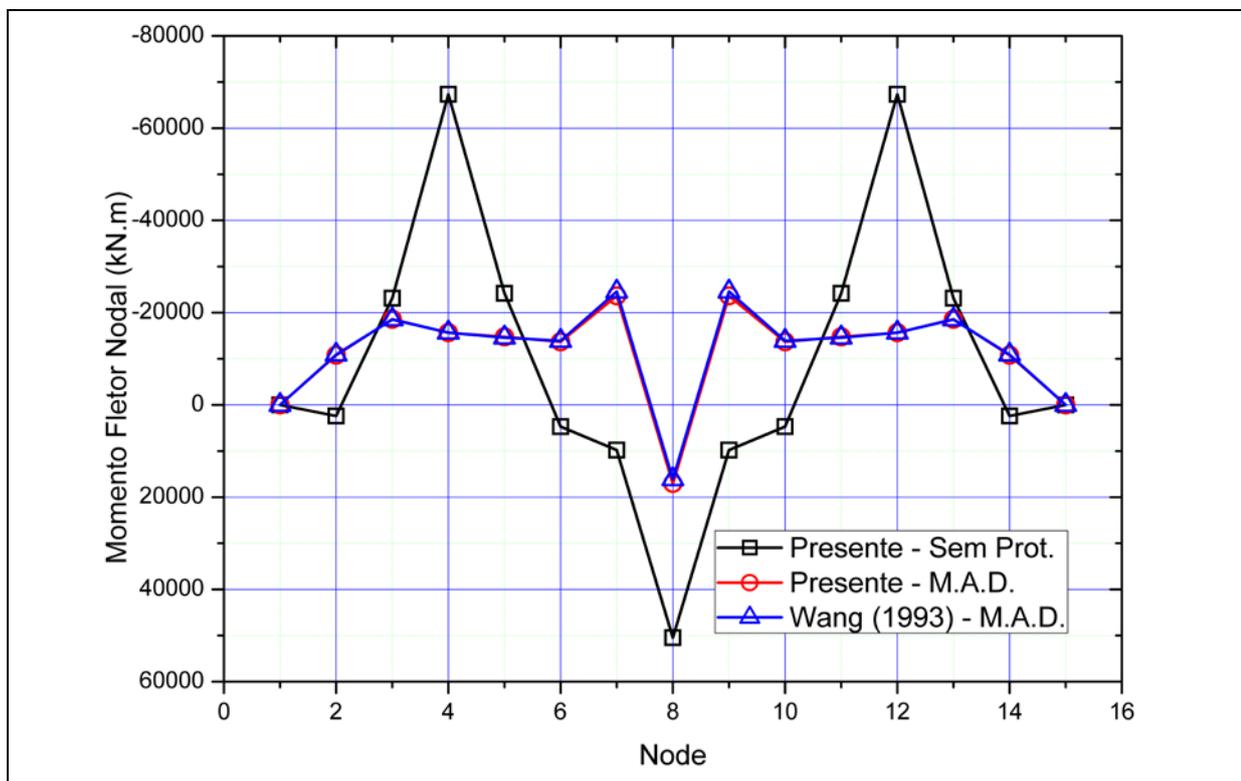


Figura 5.43 – Momentos fletores nodais da ponte em configuração em leque.

As seguintes comparações entre as configurações em harpa e em leque são efetuadas levando em conta as respostas obtidas com o código computacional desenvolvido. São comparados os deslocamentos verticais sem e com a aplicação do método MAD da configuração em harpa e em leque, bem como os esforços axiais nos cabos e nos elementos do tabuleiro, e, por fim, os resultados obtidos dos momentos fletores nodais.

A Figura 5.44 mostra os deslocamentos verticais nodais das duas configurações dos estais (harpa e leque), até o nó 8 de simetria da estrutura. O valor zero do eixo das ordenadas representa a configuração de referência.

Quando se compara os deslocamentos das estruturas sob atuação apenas do peso-próprio, sem aplicação de forças de protensão nos cabos, observa-se uma diferença relativa de 8,50 % maior nos deslocamentos obtidos da configuração em harpa em relação à configuração em leque.

Os deslocamentos verticais resultantes da aplicação do método MAD são mais uniformes para a configuração em leque, principalmente no vão secundário. No vão principal

os deslocamentos verticais das duas configurações dos estais se aproximam bastante [Figura 5.44].

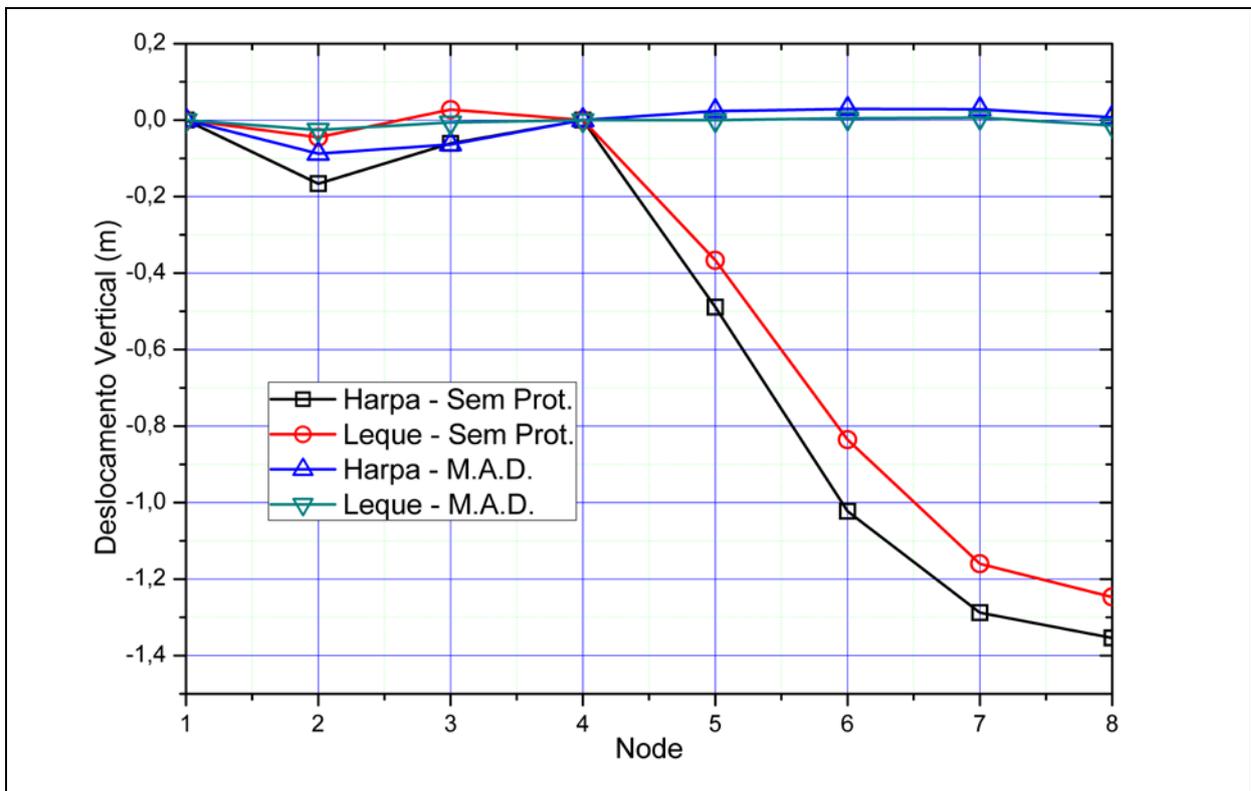


Figura 5.44 – Deslocamentos verticais nodais das pontes com configurações em harpa e em leque.

A respeito dos esforços axiais desenvolvido nos cabos entre as duas configurações dos estais, os valores são apresentados na Figura 5.45. Nota-se que os cabos externos obtiveram uma menor variação nas forças axiais solicitantes.

Para a configuração em harpa em relação à configuração em leque, a variação da redistribuição das forças nos cabos sem e com o método MAD foram muito maiores [Figura 5.45]. Isto ocorre pelo melhor aproveitamento da relação força vertical/força horizontal obtido com a configuração em leque.

Verifica-se que, para, aproximadamente, uma mesma configuração deslocada final com o método MAD, a configuração em harpa pode solicitar os cabos em até, aproximadamente, 2 vezes que a configuração em leque como no caso dos cabos C3, e C4 [Figura 5.45].

Os cabos da extremidade, C1 e C6, por apresentarem a mesma inclinação nas duas configuração dos estais, apresentaram valores próximos das forças nos estais após a aplicação do método MAD [Figura 5.45].

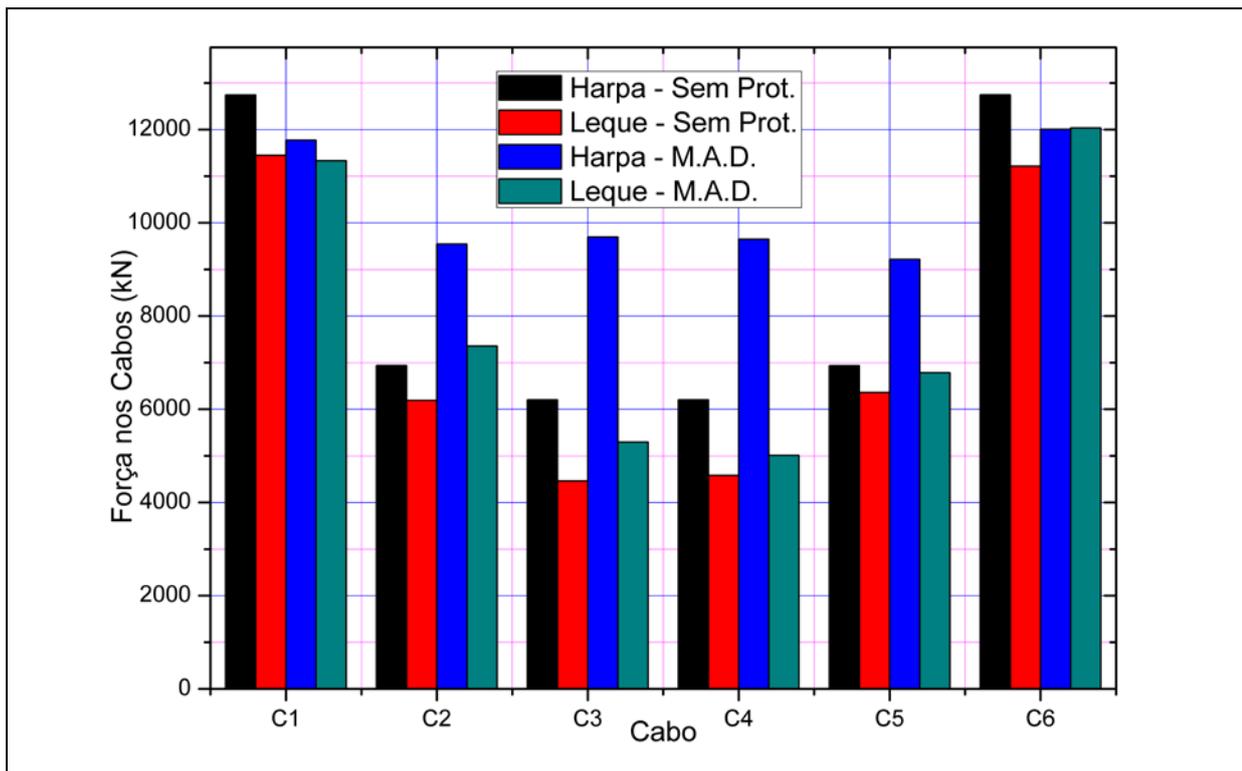


Figura 5.45 – Forças axiais nos cabos das pontes com configurações em harpa e em leque.

As forças nos cabos vão interferir diretamente na compressão solicitante dos elementos do tabuleiro [Figura 5.46].

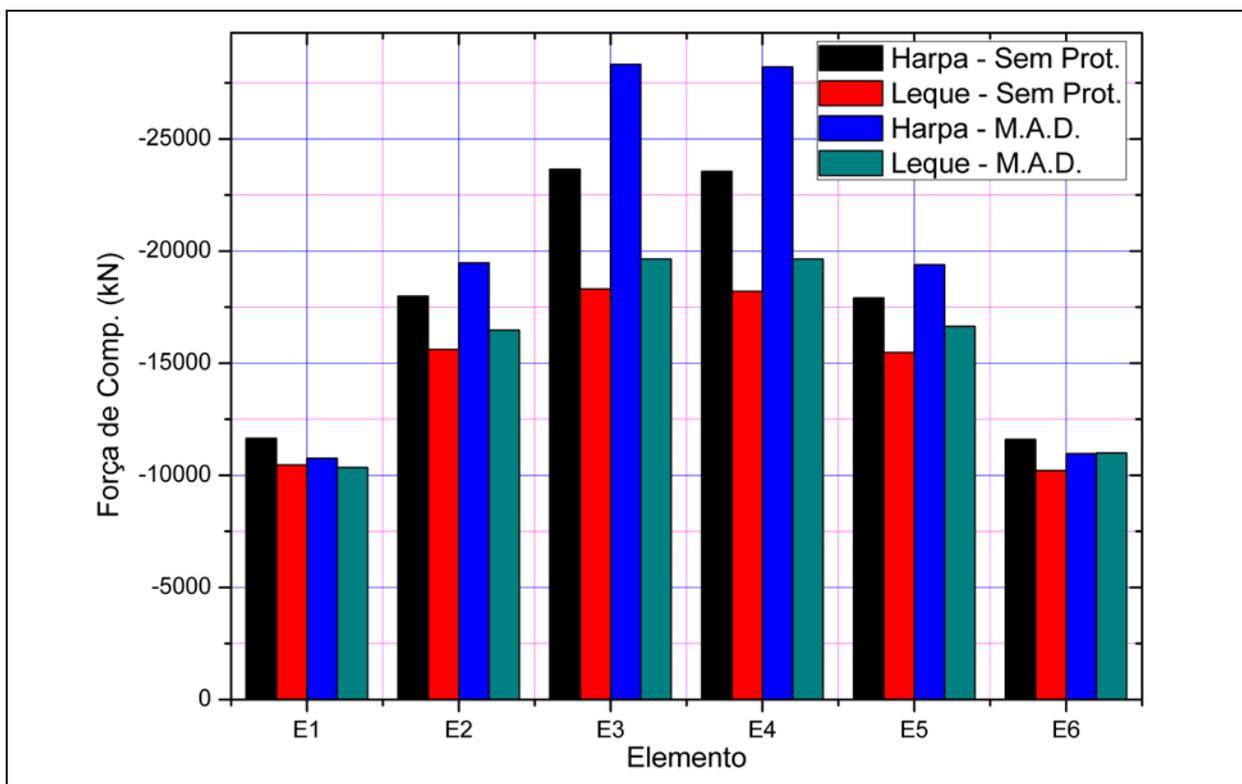


Figura 5.46 – Forças axiais nos elementos do tabuleiro das pontes com configurações em harpa e em leque.

Em se tratando dos momentos fletores obtidos no tabuleiro, apresenta-se na tabela a seguir os valores antes e depois da aplicação do método MAD das configurações dos estais em harpa e em leque.

Tabela 5-17 – Tabela de momentos fletores nodais dos elementos finitos do tabuleiro.

Nó	Harpa – Sem Prot. (kN.m)	Leque – Sem Prot. (kN.m)	Harpa – Com Prot. (kN.m)	Leque – Com Prot. (kN.m)
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	24498,576	2392,774	-1699,437	-10777,650
3	-8813,105	-23116,236	-10276,763	-18558,879
4	-109447,183	-67328,658	-22850,950	-15667,724
5	-8898,458	-24196,595	-16621,410	-14746,573
6	24313,900	4725,468	-13971,735	-13698,356
7	-292,473	9780,846	-23267,033	-23640,297
8	40381,951	50455,271	17407,391	17034,127

A amplitude dos momentos fletores antes da aplicação do método MAD para a configuração em harpa é de 149829 kN.m, enquanto a configuração em leque é mais regular com uma amplitude de 117784 kN.m. Isto significa que foi possível reduzir a amplitude de atuação dos momentos fletores em, aproximadamente, 20% apenas pela mudança da configuração dos estais, para este exemplo.

A amplitude dos momentos fletores no tabuleiro, sem aplicação do método MAD, da configuração em leque se mostra menos dispersa em relação à configuração em harpa. Entretanto, a amplitude final obtida no tabuleiro para as duas configurações dos cabos foram as mesmas, isto é, 40764 kN.m. A diferença encontra-se no vão secundário, onde a distribuição dos momentos fletores da configuração em harpa apresentou-se mais irregular.

No vão secundário a amplitude da configuração em harpa foi de 21151,513 kN.m, enquanto para a configuração em leque esta amplitude foi 7781,219 kN.m, um valor 63% inferior à configuração em harpa.

A Figura 5.47 mostra os valores dos momentos fletores nodais dos tabuleiros das duas pontes estaiadas. É possível notar que a redução da ponte em harpa foi mais significativa que a ponte em leque, no entanto as solicitações nos elementos do tabuleiro e nos cabos mostraram-se significativamente maiores que na configuração em leque [Figura 5.45 e Figura 5.46].

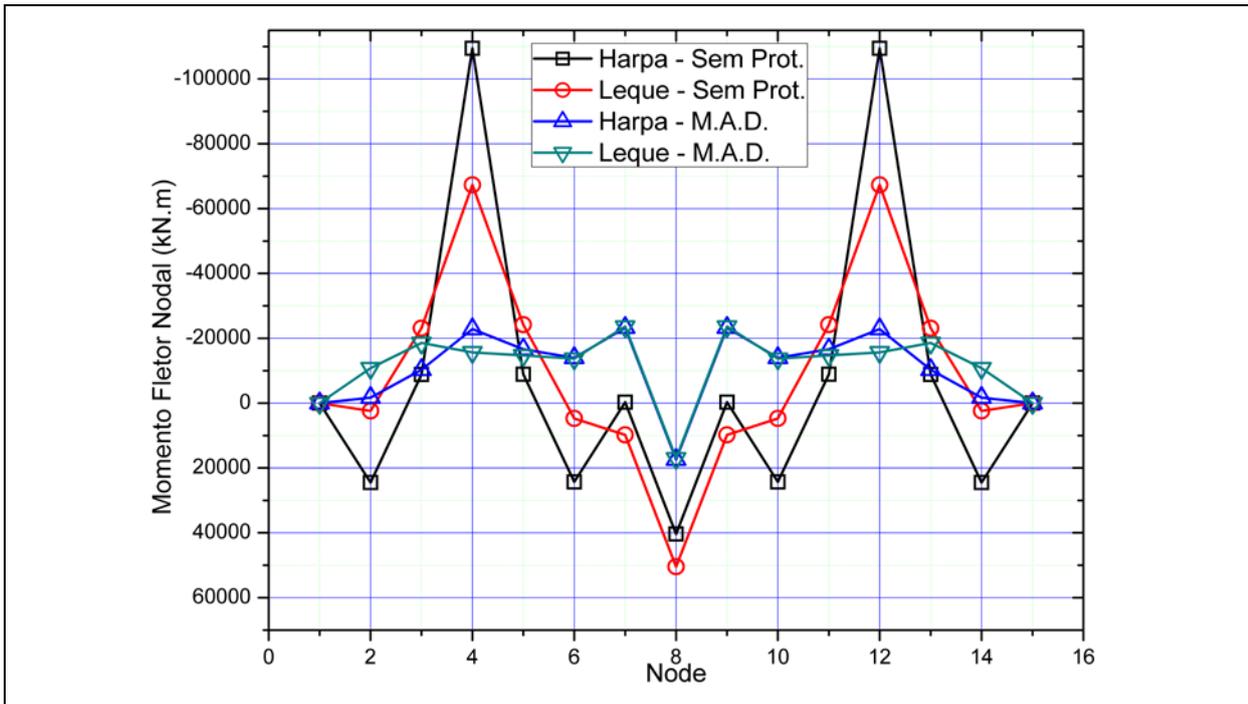


Figura 5.47 – Momentos fletores nodais da ponte em configuração em harpa e configuração em leque.

A Figura 5.48, a seguir, compara os momentos fletores obtidos com o método MAD, com os momentos fletores que seriam obtidos caso o tabuleiro se comportasse como uma viga contínua, isto é, caso os cabos funcionassem como apoios fixos, e não elásticos.

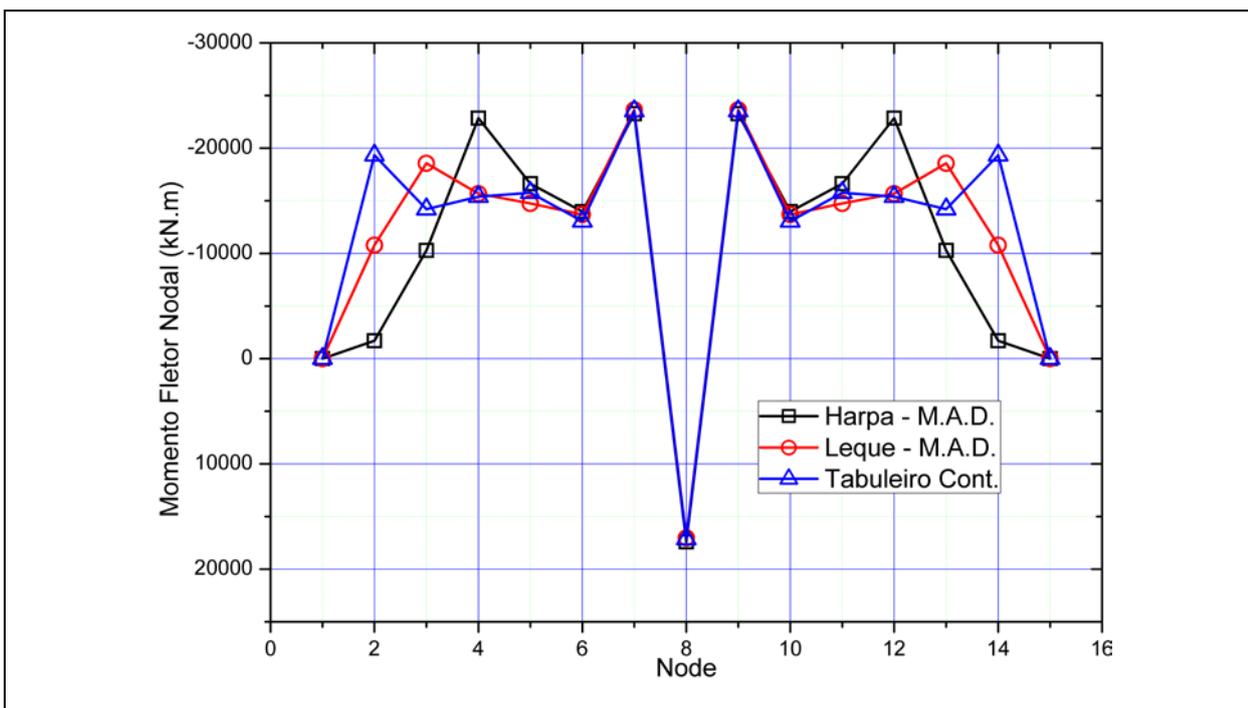


Figura 5.48 – Momentos fletores nodais da ponte em configuração em harpa, configuração em leque e do tabuleiro contínuo.

Os momentos fletores máximos e mínimos encontram-se próximos nas três análises (configuração em harpa, leque e tabuleiro com apoios fixos), assim como os momentos do vão principal (nó 4 ao 12).

A maior diferença dos resultados encontra-se no vão secundário (nós 1 ao 4, ou nós 12 ao 15). Isto porque os nós escolhidos para verificação da convergência do método encontram-se no vão principal, tendo seus deslocamentos verticais muito próximos a zero, condição que ocorre com o apoio fixo do tabuleiro contínuo. Para o vão secundário não há a anulação dos deslocamentos verticais, por isso a maior diferença entre os momentos fletores que ocorrem no vão secundário [Figura 5.44].

5.1.4.2 ANÁLISE MODAL

A ponte com configuração em leque não foi analisada no trabalho publicado por Wang, Lin e Tang (2002), caso citado anteriormente. Por isso, será realizada a análise entre as frequências naturais obtidas com a análise de vibração livre, e vibração sob tensão inicial sem e com aplicação do método MAD utilizando apenas os resultados obtidos com o código computacional desenvolvido. Para as análises, são utilizadas as matrizes de massa consistente.

Em seguida, os resultados obtidos são comparados com a ponte estaiada com configuração em harpa a título comparativo, para verificar a influência da configuração dos cabos frente às frequências naturais extraídas.

As análises modais obtiveram 58 modos de vibração e suas frequências correspondentes, mas serão apresentadas apenas as 12 primeiras para manter um padrão das análises efetuadas (itens 5.1.2.2 e 5.1.3.2).

A análise a seguir mostra a variação das frequências naturais extraídas com o código computacional desenvolvido em relação às análises de vibração livre, vibração sob tensões iniciais, e vibrações sob tensões iniciais aplicando o método MAD [Figura 5.49].

O gráfico da Figura 5.50 mostra a redução percentual das frequências em relação à resposta da análise de vibração livre. Não houve uma variação significativa nas primeiras frequências, se comparado à ponte em configuração em harpa (diferenças percentuais relativas 2 vezes maiores que as obtidas na configuração em leque). Entretanto, nota-se uma maior variação nas frequências a partir de 1,60 Hz que as observadas na configuração em harpa.

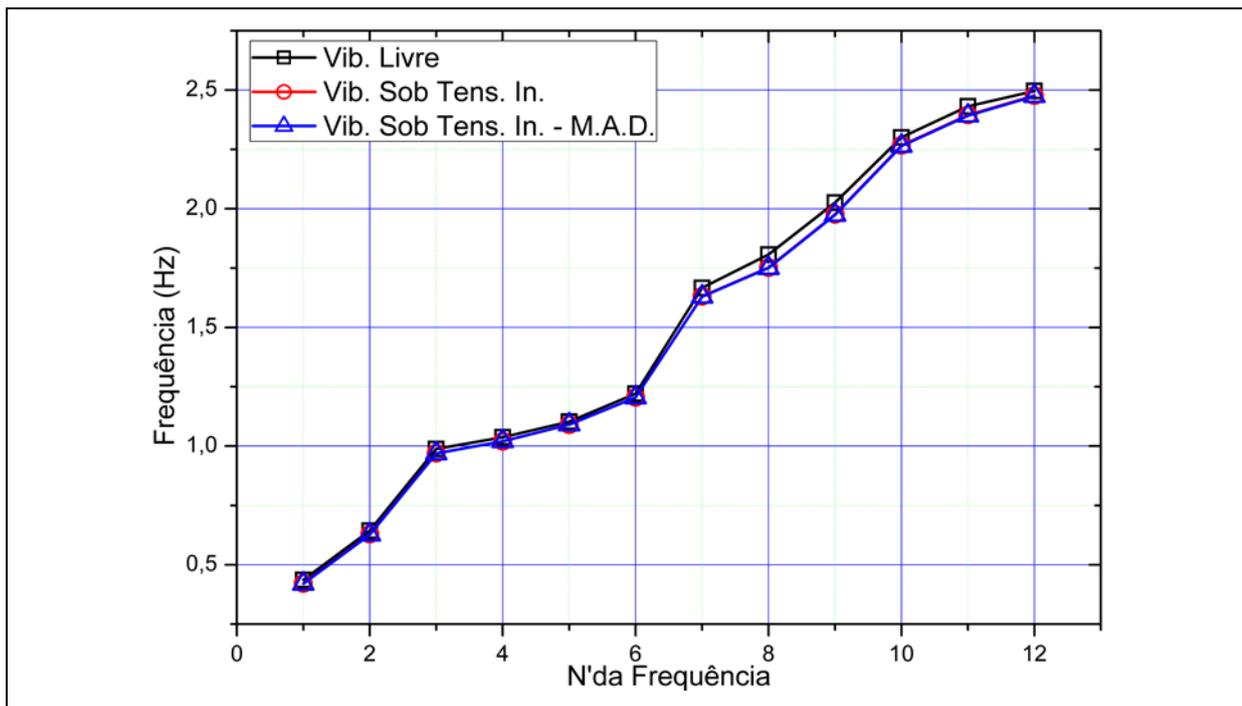


Figura 5.49 - Comparação entre as análises utilizando a matriz de massa consistente da ponte com configuração dos cabos em leque.

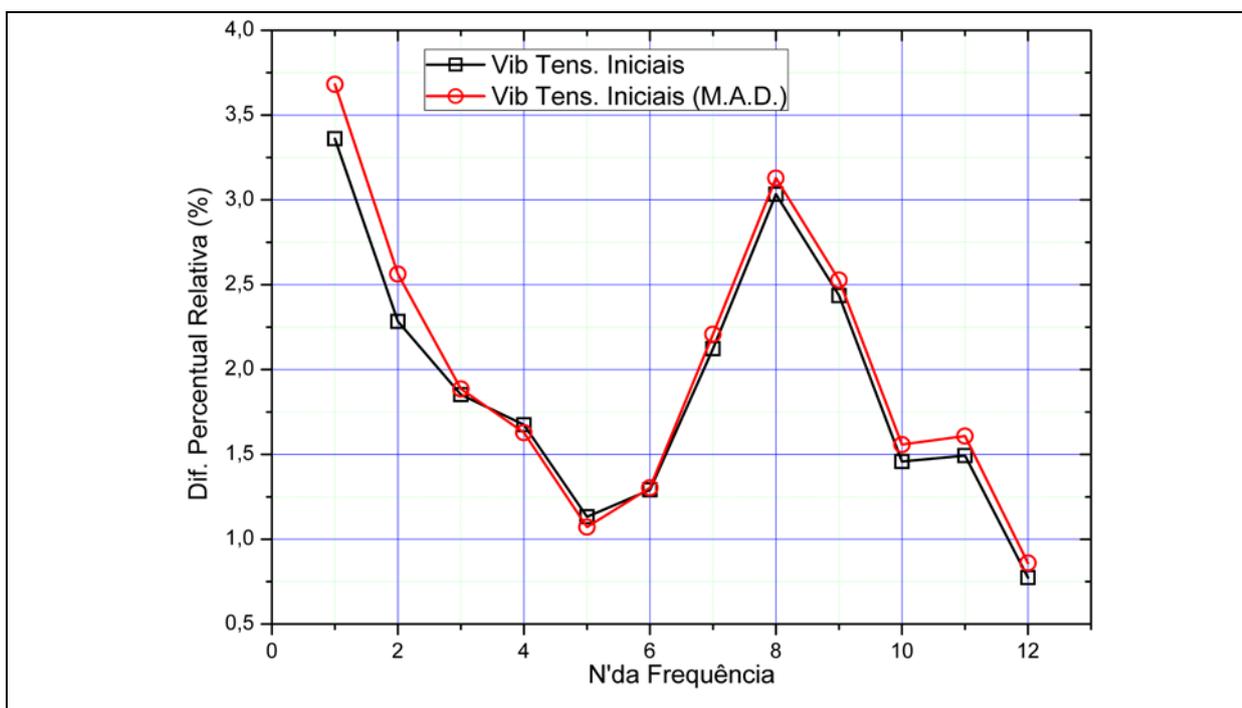


Figura 5.50 - Diferença percentual em relação a análise de vibração livre utilizando a matriz de massa consistente.

Para esta configuração dos cabos, as solicitações axiais nos elementos do tabuleiro são significativamente mais baixas que as obtidas com a configuração em harpa. Isto explica a pouca variação obtida nas frequências mais baixas, pois a variação passa a ser mais

representativa quando a solicitação dos elementos vai se aproximando das cargas críticas do elemento estrutural.

Para as frequências onde há vibração dos pilares, estas sofreram maior redução de sua frequência natural na configuração em leque em comparação à configuração em harpa. Isto porque, para a configuração em leque, todo o pilar encontra-se sob altas solicitações, devido a ancoragem dos cabos em seu topo. Então, o pilar, ao longo de toda sua altura de 60 metros, encontra-se sob alta solicitação, enquanto o tabuleiro encontra-se solicitado axialmente por uma compressão de valores, relativamente, baixos.

A configuração em harpa possui um aumento gradual das solicitações axiais na torre, onde menos elementos encontram-se sob altas valores de forças de compressão em comparação à configuração em leque.

A seguir é realizada comparação entre as análises de vibração livre, análise sob tensões iniciais sem e com aplicação do método MAD entre as configurações em harpa e em leque [Figura 5.51, Figura 5.52, Figura 5.54, Figura 5.55, Figura 5.56, Figura 5.57, e Figura 5.58].

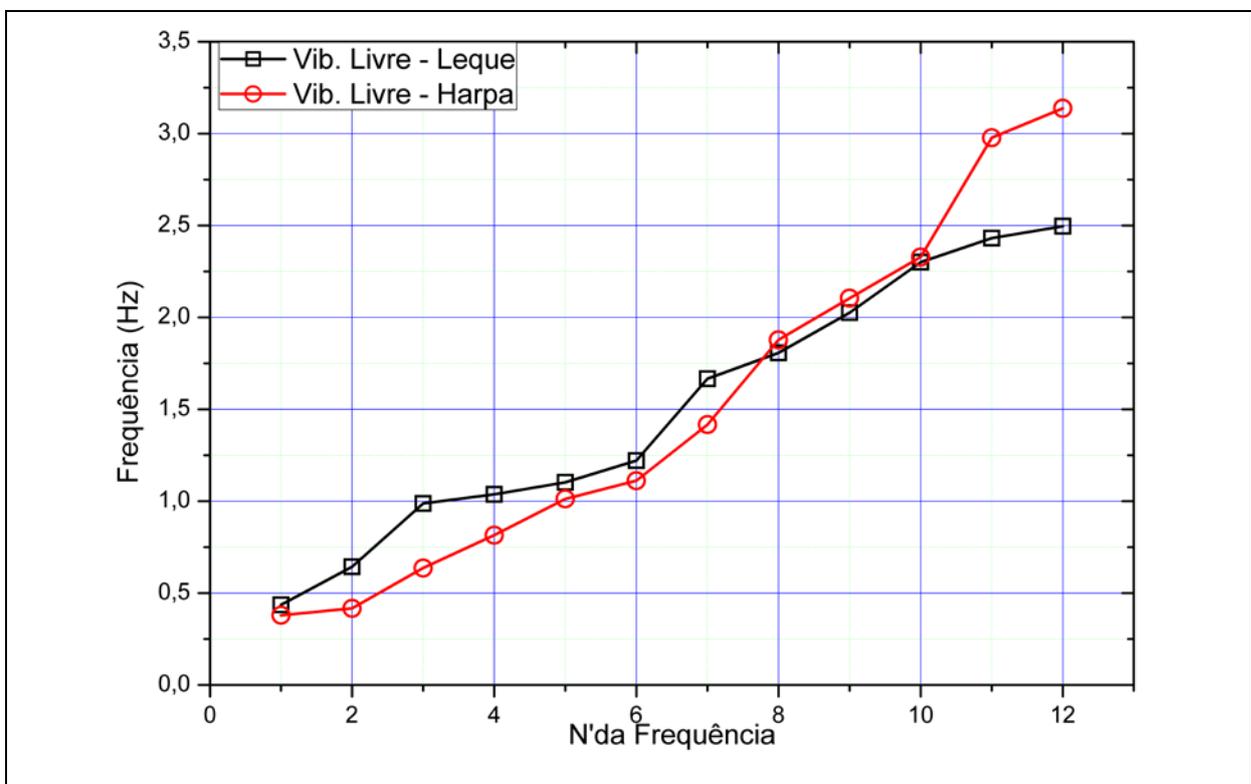


Figura 5.51 - Comparação entre as frequências naturais da análise de vibração livre das configurações em harpa e em leque.

As maiores diferenças percentuais relativas são encontradas nas primeiras frequências naturais, referentes à vibração do tabuleiro [Figura 5.52].

Nota-se que as frequências naturais da configuração em leque são mais altas que as obtidas pela configuração em harpa, entretanto, a partir da 8ª frequência natural essa tendência inverte. A fixação de diversos cabos em um único nó (configuração em leque) parece reduzir a rigidez do pilar, pois possui menos contraventamento ao longo dele em comparação à configuração em harpa, bem como mais elementos submetidos a altas forças de compressão.

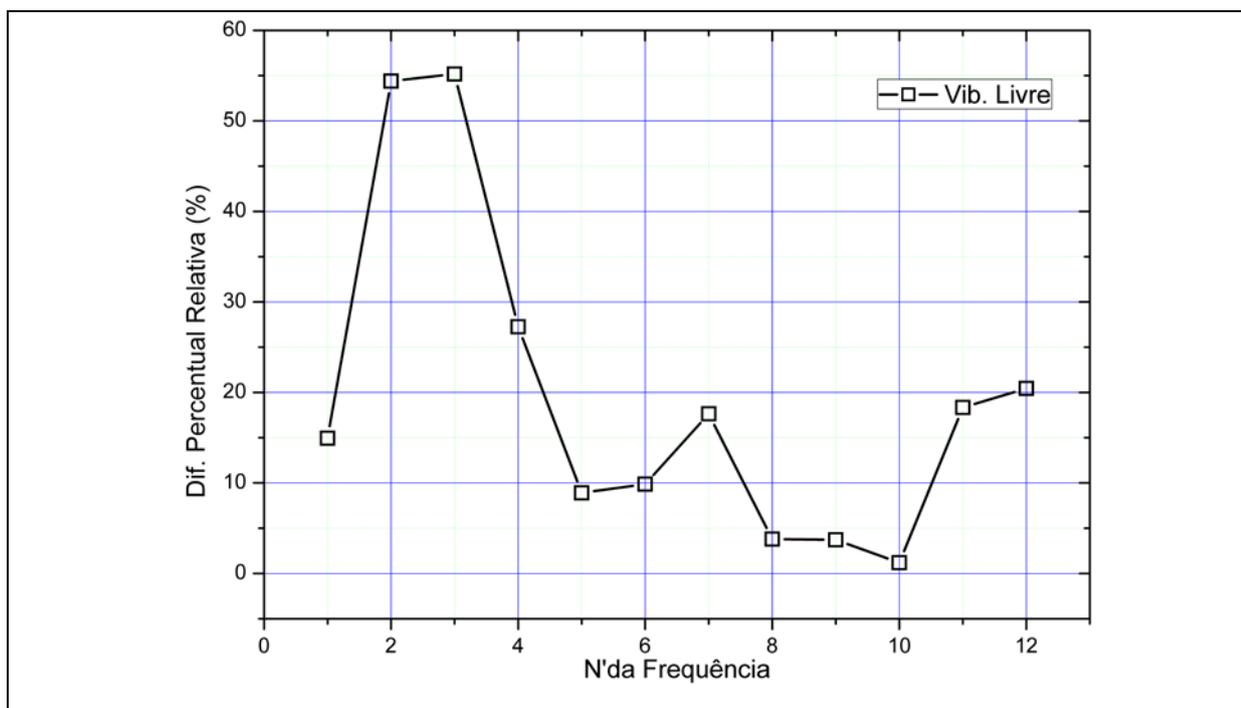


Figura 5.52 - Diferença Percentual Relativa entre os resultados da análise de vibração livre obtidos com configuração em leque em relação à configuração em harpa.

O elemento finito que representa o cabo poder ser substituído por um apoio elástico de rigidez equivalente à do cabo nas coordenadas globais. Este apoio elástico equivalente ao cabo terá uma rigidez vertical maior quanto maior for o ângulo entre o tabuleiro e o cabo.

Já para a torre, além do contraventamento fornecido pelo maior número de apoios elásticos ao longo dela, a ponte com configuração em harpa ainda fornece uma rigidez horizontal maior. Pois, quanto menor o ângulo entre o tabuleiro e o cabo, mais favorecido é a componente horizontal da rigidez do cabo [Figura 5.53].

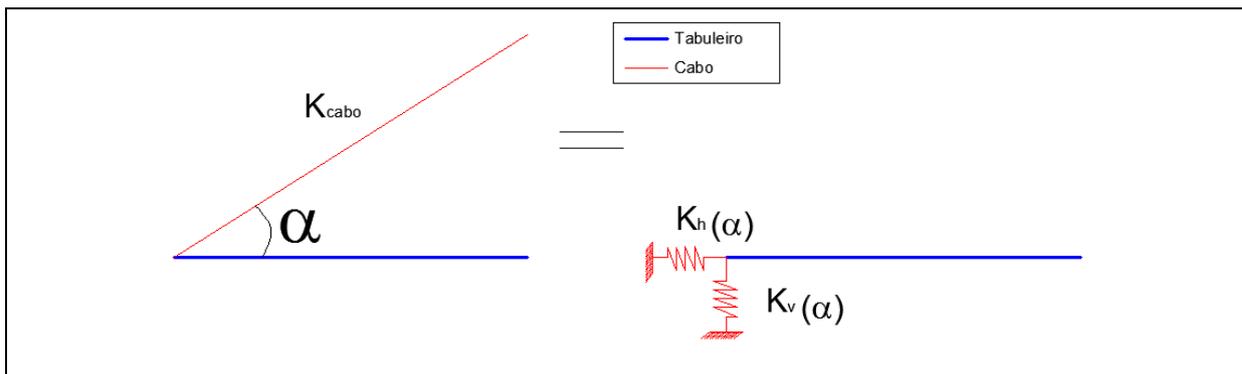


Figura 5.53 - Rigidez do cabo transformadas em rigidez horizontal e vertical.

Para a análise sob tensões iniciais, seguiu a tendência onde a ponte em leque possui frequências mais altas para a vibração do tabuleiro, enquanto a configuração em harpa é mais rígida para vibrações da torre [Figura 5.54].

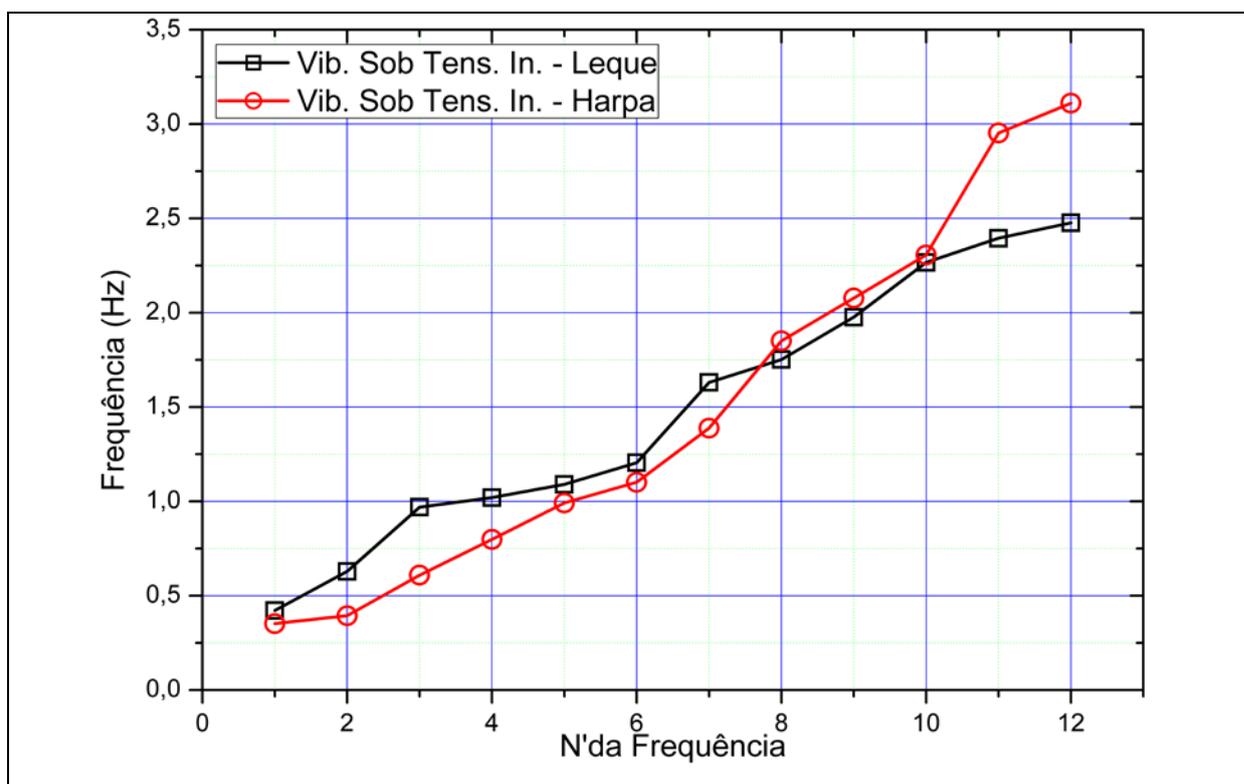


Figura 5.54 - Comparação entre as frequências naturais da análise de vibração sob tensões iniciais das configurações em harpa e em leque.

As diferenças percentuais relativas entre a configuração em leque e em harpa aumentaram para as primeiras frequências para a análise sob tensões iniciais. Houve um aumento da diferença entre as frequências obtidas com as configurações dos cabos de 15% da análise de vibração livre, para 20% para análise vibração sob tensões iniciais da primeira frequência [Figura 5.52 e Figura 5.55].

A segunda frequência tem uma diferença relativa percentual de, aproximadamente, 54% entre os dois arranjos estruturais dos estais, e subiu quase para 60% na análise sob tensões iniciais. A terceira frequência a diferença era em torno de 55% na análise de vibração livre, subindo para, aproximadamente, 59% na análise sob tensões iniciais.

A partir da terceira frequência, as diferenças percentuais relativas entre as configurações permanecem constantes, mesmo com a mudança do tipo de análise considerada. Volta a surgir alguma alteração nas 8ª e 9ª frequência natural, porém menos significativa que as diferenças obtidas nas três primeiras frequências [Figura 5.55].

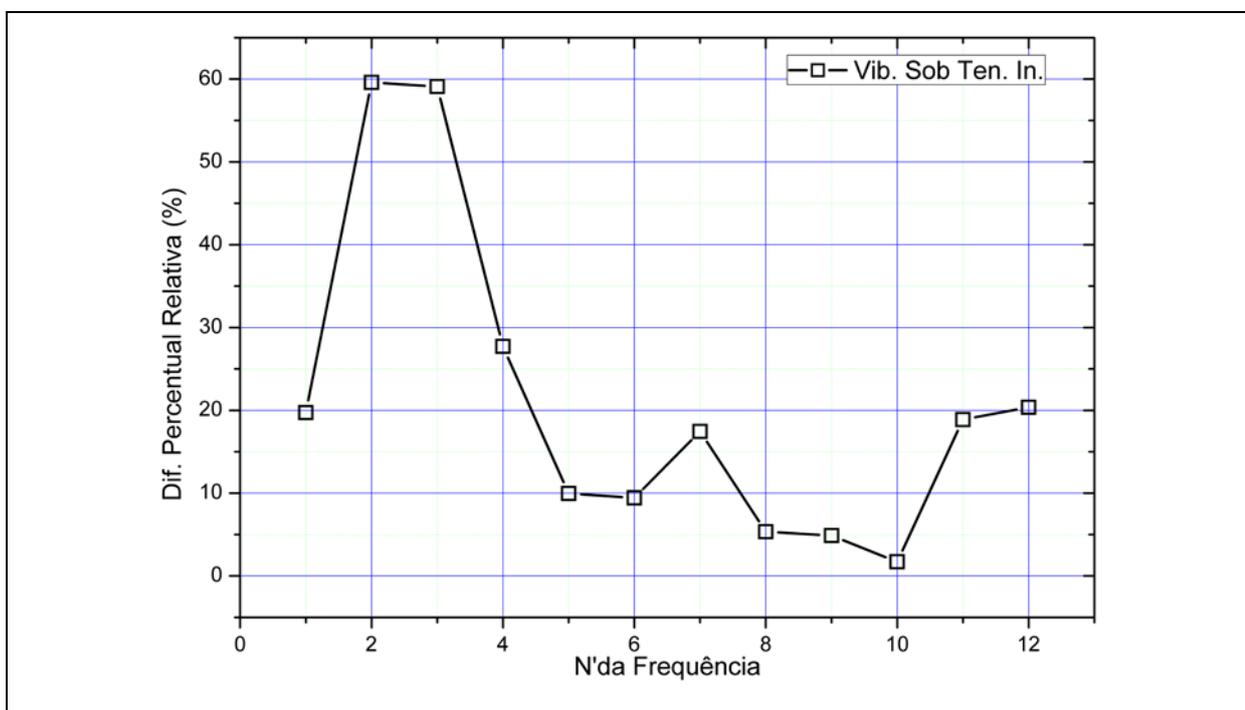


Figura 5.55 - Diferença Percentual Relativa entre os resultados da análise de vibração sob tensões iniciais obtidos com configuração em leque em relação à configuração em harpa.

A mesma tendência é observada nos resultados com aplicação do método MAD [Figura 5.56, e Figura 5.57], não sendo significativa a diferença obtida entre as análises sob tensões iniciais com e sem aplicação do método MAD

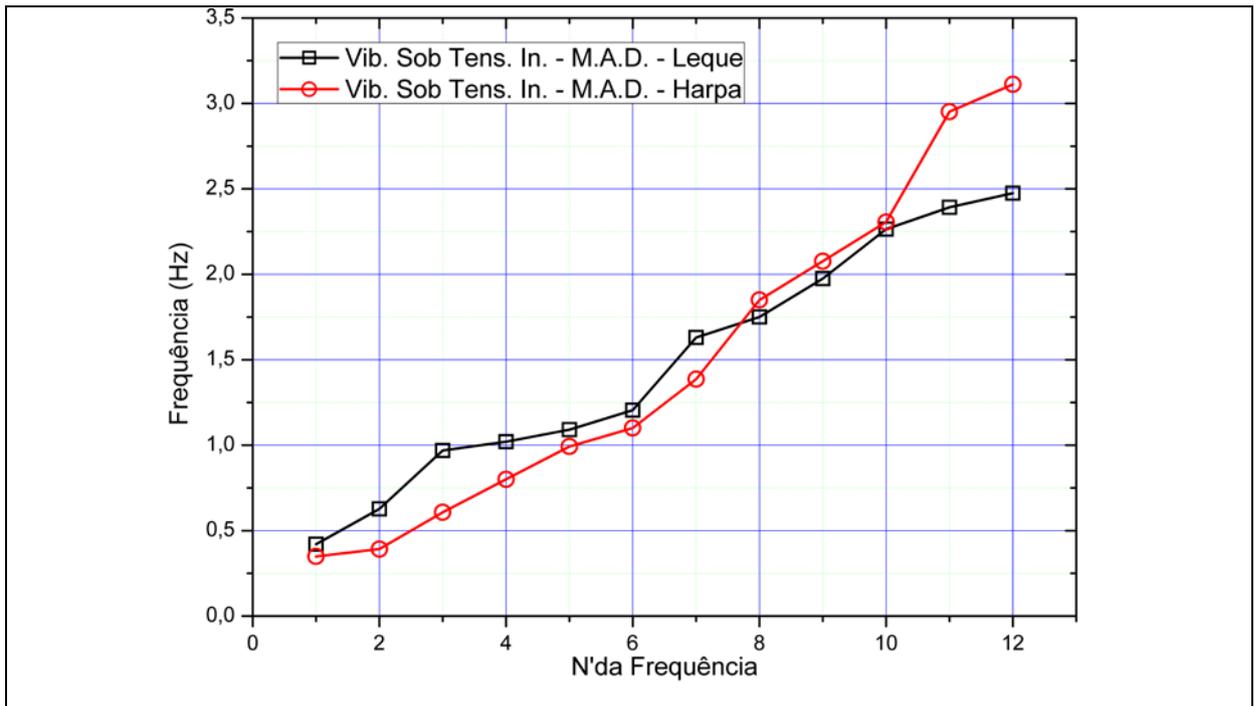


Figura 5.56 - Comparação entre as frequências naturais da análise de vibração sob tensões iniciais com aplicação do método MAD das configurações em harpa e em leque.

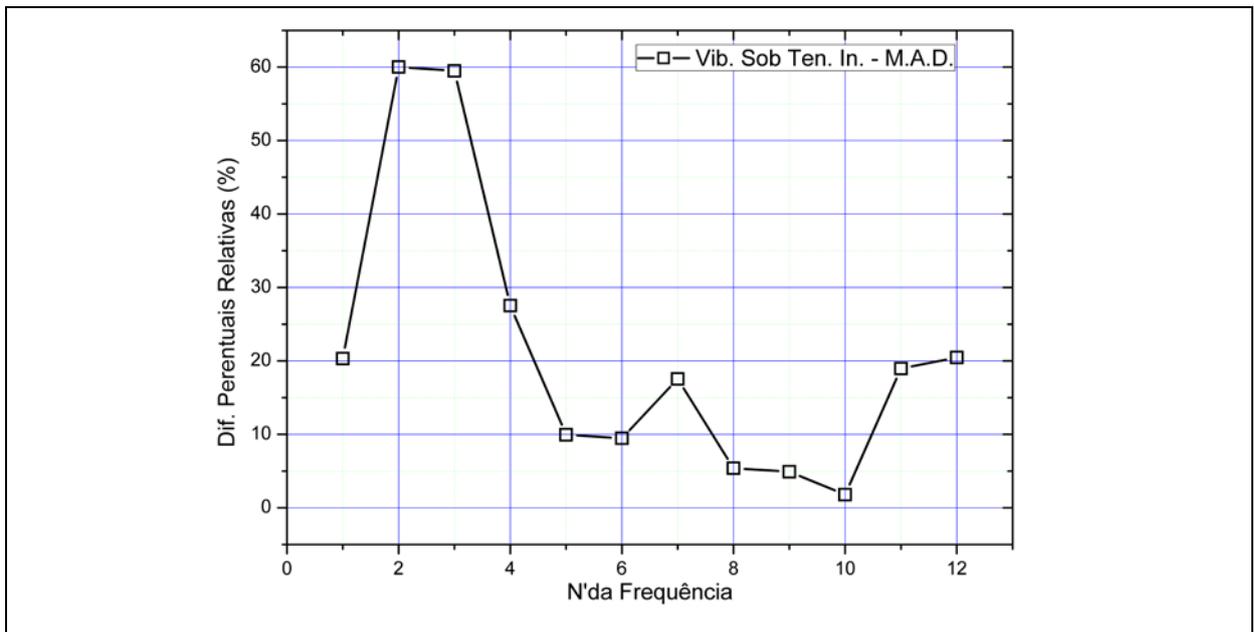


Figura 5.57 - Diferença Percentual Relativa entre os resultados da análise de vibração livre com aplicação do método MAD obtidos com configuração em leque em relação à configuração em harpa.

As três análises podem ser melhor verificadas na Figura 5.58, onde são apresentadas em conjunto. A maior diferença percentual relativa entre as configurações dos cabos são observadas nas primeiras frequências. É, também, nas primeiras frequências onde uma análise levando em conta os esforços axiais nos elementos mostra-se mais relevante.

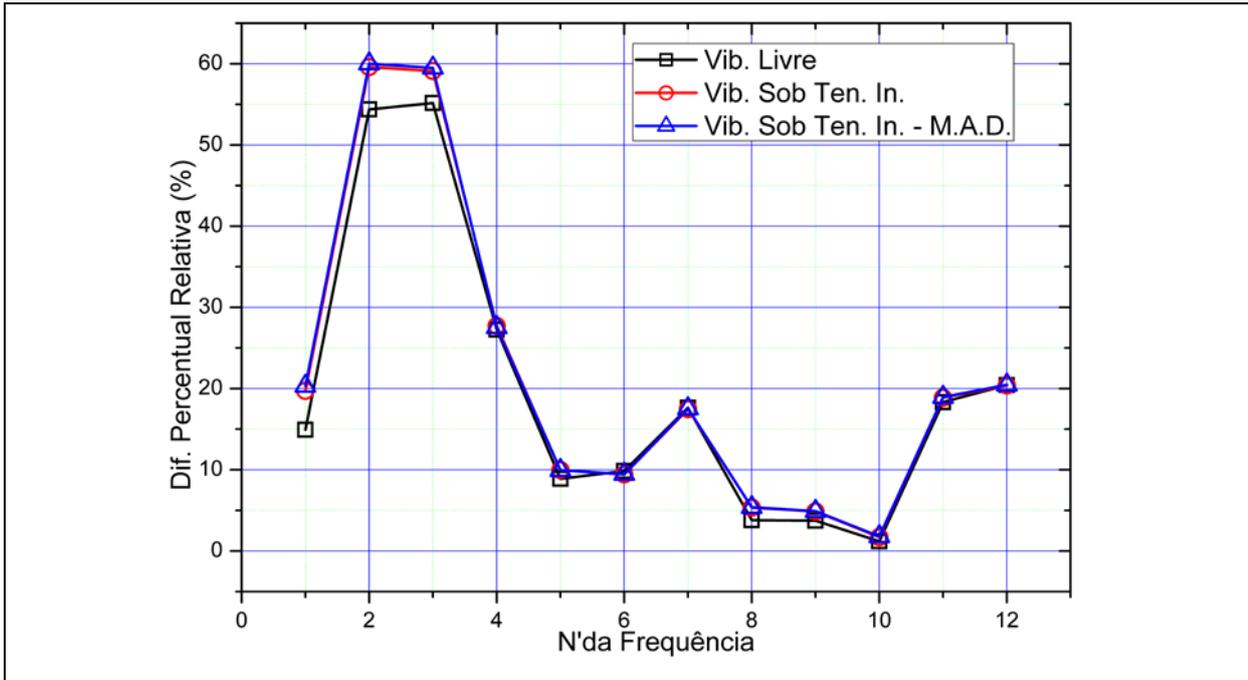


Figura 5.58 - Diferença Percentual Relativa entre todas as análises entre a configuração em leque em relação à configuração em harpa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

O objetivo principal do trabalho foi o desenvolvimento de um código computacional de simples utilização para o usuário, dotado de interface gráfica, que realizasse a análise estática, e a análise modal da estrutura. A análise estática determina as solicitações devido ao peso-próprio da estrutura. A análise estática pode ser realizada por meio de solução direta linear, ou não linear pelo processo incremental-iterativo de Newton-Raphson com consideração das não linearidades do efeito da catenária, e de viga-coluna.

A escolha da opção não linear abre ao usuário do código computacional a possibilidade de escolha entre aplicar, ou não, o método MAD. Como apresentado pelos exemplos de validação, as análises não lineares com e sem aplicação do método MAD obteve resultados coerentes em relação aos exemplos encontrados e descritos da literatura.

Em relação à análise modal, o capítulo 1 descreve várias aplicações do conhecimento das frequências naturais e modos de vibração da estrutura. A análise modal implementada possui as opções de matriz de massa concentrada, e consistente para obter as frequências naturais e modos vibracionais.

6.1 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

Os resultados obtidos do exemplo 1 mostram a validade da teoria não linear empregada, obtendo-se respostas próximas a diversos trabalhos encontrados na literatura. A variação nos valores de carga crítica obtida foram baixos. A maior diferença foi em relação ao programa ACADFRAME[®], que utiliza uma teoria não linear mais ampla, que leva em

consideração as não linearidades de grandes deslocamentos, sendo mais sensível à perturbação horizontal.

Em relação à análise modal, as frequências obtidas com o código computacional desenvolvido, tanto com o emprego da matriz de massa concentrada quanto com a matriz de massa consistente, foram semelhantes às obtidas pelo ANSYS® para as duas análises propostas (vibração livre e vibrações sob tensões iniciais).

O exemplo 1 foi útil para calibração das etapas mais básicas das análises, isto é, a validação da teoria não linear aplicada, e a validação da obtenção das características modais do sistema sob o aspecto das duas teorias apresentadas nos itens 4.1.3, e 4.1.4.

Os exemplos 2, 3 e 4 validaram o método da anulação dos deslocamentos, MAD, implementado ao código por meio de comparação dos resultados com os obtidos pelos autores do método. A diferença entre as respostas obtidas pelo código desenvolvido e o trabalho dos autores pode ser explicada pela não linearidade de grandes deslocamentos que não foi empregada no presente trabalho.

Essas diferenças não foram relevantes para os exemplos apresentados, mas não se pode concluir que a não linearidade de grandes deslocamentos deva ser excluída da análise de pontes estaiadas, pois é possível que, com o aumento dos vãos, a não linearidade de grandes deslocamentos se torne mais significativa.

6.2 ANÁLISE ESTRUTURAL

Foi possível notar as diferenças entre realizar uma análise de vibrações livres, ou uma análise de vibrações sob tensões iniciais. Pontes estaiadas são estruturas que possuem uma alta solicitação axial, mesmo que apenas sob ação do peso-próprio da estrutura, ao mesmo tempo em que são muito flexíveis. Por isso, é preferível que as frequências naturais sejam obtidas por meio da análise utilizando a matriz tangente obtida da etapa estática não linear.

O método MAD é capaz de produzir uma estrutura mais econômica, pois existe a redução dos momentos fletores no tabuleiro, sem que a rigidez global da estrutura seja afetada significativamente. Isto pode ser verificado pela análise sob tensões iniciais, que houve uma variação pequena entre as frequências obtidas sem e com aplicação do método MAD

Ao se analisar os valores obtidos com a análise sob tensões iniciais sem aplicação do método MAD, as respostas de frequências naturais foram muito próximas das obtidas com a

aplicação do método. Assim, a estimativa das frequências naturais com as forças de protensão nos cabos pode ser realizada pela análise sob tensões iniciais sem aplicação do método MAD. Isto por que foi observado pouca variação nos exemplos estudados entre as frequências obtidas sem e com aplicação do método.

Entretanto, para vãos e números de cabos mais significativos, deve-se averiguar a influência das novas forças de protensão obtidas com o método MAD na análise de vibrações sob tensões iniciais.

A respeito da configuração dos estais, foi apresentado os benefícios da configuração em leque em relação à configuração em harpa. A configuração em leque apresentou forças solicitantes menores no cabo, e conseqüentemente no tabuleiro para obter a mesma configuração de referência.

A configuração em leque apresentou melhor distribuição de momentos fletores no vão secundário da ponte. No vão principal da ponte, local onde foi aplicado o critério de parada dos deslocamentos verticais, a distribuição dos momentos fletores da configuração em harpa e em leque foram semelhantes.

A análise modal da configuração em leque obteve reduções nos valores das frequências naturais inferiores ao da ponte estaiada em harpa, principalmente para as primeiras frequências naturais. A ponte em harpa possui frequências naturais mais altas para as vibrações relacionadas ao movimento da torre.

As solicitações axiais interferiram principalmente nas primeiras frequências naturais, não mostrando muita interferência em frequências mais altas. Caso se esteja interessado em alguma frequência mais alta, a análise de vibração livre pode obter os resultados pretendidos.

Concluiu-se que uma configuração em leque pode requerer menor número de cabos, seções mais esbeltas do tabuleiro, devido a sua melhor relação entre força vertical/força horizontal obtida com o maior ângulo de inclinação dos cabos em relação ao tabuleiro da ponte.

No entanto, a configuração em leque possui um ponto fraco que é a execução da ancoragem dos cabos. Na prática, a execução de uma ponte em leque é bastante complicada devido ao grande número de cabos ancorando em um mesmo ponto, e gerando grandes tensões localizadas. Portanto, a configuração em leque deve ser preterida, sendo substituída por uma configuração em semi-harpa.

6.3 PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO

Durante o desenvolvimento do trabalho, houve interesse em adicionar diversas análises ao estudo, não sendo possível devido ao curto período fornecido para conclusão do trabalho. Esta seção tem por objetivo apresentar sugestões de desenvolvimento de novos trabalhos no que tangem a temática abordada a fim de tornar o código desenvolvido mais abrangente.

➤ Implementação da aplicação do método MAD levando em consideração as etapas construtivas de uma ponte estaiada convencional. Para isso, deve-se levar a retração e a fluência dos materiais em questão.

➤ Implementação de modelos constitutivos de materiais para verificar a influência da não linearidade física no comportamento da estrutura.

➤ Análise dinâmica com integrador temporal de Newmark ou diferenças finitas, levando em consideração o movimento de uma ou várias cargas móveis concentradas sem massa e rigidez, para simular o trem-tipo andando sob uma velocidade constante. Posteriormente, implementando-se um comportamento dinâmico não linear com a modelagem do trem-tipo com massa e rigidez definidas influenciando a matriz de rigidez e massa da estrutura a cada instante de tempo Δt .

➤ Estudo do ganho, em termos de custo, da aplicação do método MAD para estruturas estaiadas.

➤ Implementação ao código computacional de métodos de detecção de danos à estrutura, como o MAC, e/ou COMACS, por exemplo.

➤ Implementação de elementos finitos de cabos ao código computacional, e verificação das diferenças obtidas entre as respostas encontradas com o módulo de elasticidade de Dischinger deste presente trabalho.

O desenvolvimento destes novos estudos, de forma gradual, irá aumentar a aplicabilidade do programa, bem como simplificará desenvolvimentos futuros que o código computacional possa vir a ter.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, A.E. (2003). **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2ª.ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, p.298, 2003.

CARVALHO JÚNIOR, S. M.; NEVES, F. A.; BATTISTA, R. C. (2005). Otimização Estrutural com o Auxílio de Computação Gráfica para o Projeto de Pontes Estaiadas. In: XXVI IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2005, Guarapari. **Anais do XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2005.

CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. (2008). **Métodos numéricos para engenharia**. 5.ed. São Paulo: McGraw-Hill, p.809, 2008.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. (2003). **Dynamics of structures**. 3.ed. United States of America: Computers & Structures, Inc, p.738, 2003.

CONNOR, J.J.; LOGCHER, R.D.; CHAN, S.C. (1968). Nonlinear analysis of elastic framed structures. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v.94, n.ST6, p.1525-1547, june, 1968.

FLEMING, J.F. (1979). Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures. **Computers & Structures**, v.10, p.621-635,1979.

GIMSING, N.J. (1997). **Cable supported bridges: concepts and design**. 2.ed. England: John Wiley & Sons, Ltda, p.480, 1997.

HASSAN, M.M.; NASSEF, A.O; EL DAMATTY, A.O. (2012). Determination of optimum post-tensioning cable forces of cable-stayed bridges. **Engineering Structures**, v.44, p.248-259, 2012.

HOLLAND, I. (1974). Fundamentals of the finite element method. **Computers & Structures**, v.4, p.3-15, 1974.

JASSIM, Z.A. et al. (2013). A review on the vibration analysis for damage occurrence of a cantilever beam. **Engineering Failure Analysis**, v.31, p. 442-461.

KAROUMI, R. (1999). Some modeling aspects in nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. **Computers & Structures**, v.71, p.397-412, 1999.

KIM, K.S.; LEE, H.S. (2001). Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges. **Computers & Structures**, v.79, p.2681-2692, 2001.

KRENK, S. (2009). **Non-linear modeling and analysis of solid structures**. United Kingdom: Cambridge University Press, p.349, 2009.

MAAS, S. et al. (2012). Damage assessment of concrete structures through dynamics testing methods. Part 1 – Laboratory tests. **Engineering Structures**, v.34, p.351-362, 2012.

MANTILLA, E.P. (1974). **Um método iterativo para análise da não linearidade geométrica em estruturas reticuladas**. 1974. 80p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro, 1974.

MARTINS, J.J.G. (1997). **Análise não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais**. 1997. 255p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1997.

MEHTA, P. K., MONTEIRO, P. J. M. (2008). **Concreto: Microestrutura, propriedades e materiais**, IBRACON, p.674, 2008.

NEVES, F.A. (1990). **Vibrações de estruturas aperticadas espaciais estaiadas**. 1990. 168p. Tese (Mestrado) – COPPE-UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1990.

MIYATA, T. (2003). Historical view of long-span bridge aerodynamics. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.91, p.1393-1410, 2003.

PEYROT, A.H.; GOULOIS, A.M. (1979). Analysis of cable structures. **Computers & Structures**, v.10, p.805-813,1979.

PUGSLEY, A. (1968). **The theory of suspension bridges**. Edward Arnold Publishers Ltda, p.155, London, 1968.

REDDY, J.N. (2004). **An introduction to nonlinear finite element analysis**. Oxford University Press, p.488, 2004.

REN, W.X; PENG,X.L. (2005). Baseline finite element modeling of a large span cable-stayed bridge through field ambient vibration tests. **Computers & Structures**, v.83, issue-8-9, p.536-550, 2005.

REN, W.X; PENG,X.L; LIN, Y.Q. (2005). Experimental and analytical studies on dynamic characteristics of a large span cable-stayed bridge. **Engineering Structures**, v.27, issue 4, p.535-548, 2005.

TORNERI, P. (2002). **Comportamento estrutural de pontes estaiadas: comparação de alternativas**. 2002. 272p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

TROITSKY, M.S. (1988). **Cable-stayed bridges**. Oxford:BSP Professional Books, p.459, 1988.

VARGAS, L.A.B. (2007). **Comportamento estrutural de pontes estaiadas: efeitos de segunda ordem**. 2007. 153p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

VAROTO, P.S. (2011). **Dinâmica estrutural – Aula #3**, Disciplina SEM0504, 2011. [Disponível em: < http://www.eesc.usp.br/labdin/varoto/sem0504_varoto.htm >. Acesso em: 04/10/2012].

VIRLOGEUX, M. (1999). Recent evolution of cable-stayed bridges. **Engineering Structures**, v.21, p. 737-755.

WALTHER, R. et al. (1998). **Cable stayed bridges**. London: Thomas Telford Publishing, p.225, 1998.

WANG, P.H.; LIN, H.T.; TANG, T.Y. (2002). Study on nonlinear analysis of a highly redundant cable-stayed bridge. **Computers & Structures**, v.80, p.165-182, 2002.

WANG, P.H.; TSENG, T.C.; YANG, C.G. (1993). Initial shape of cable-stayed bridges. **Computers & Structures**, v.47, p.111-123, 1993.

WANG, P.H.; YANG, C.G. (1996). Parametric studies on cable-stayed bridges. **Computers & Structures**, v.60, p.243-260, 1996.

YAMAGUCHI, H.; JAYAWARDENA, L. (1992). Analytical estimation of structural damping in cable structures. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.43, issues 1-3, p.1961-1972, 1992.

YTZA, M.F.Q. (2009). **Métodos construtivos de pontes estaiadas: estudo da distribuição de forças nos estais**. 2009. 151p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

ZHU, H.; LI, L.; HE, X.Q. (2011). Damage detection method for shear buildings using the changes in the first mode shape slopes. **Computers & Structures**, v.89, p.773-743, 2011.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (2000). **The finite element method**, 5ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, Vol I, 2000.

APÊNDICE A – MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO COMPUTACIONAL DESENVOLVIDO

O manual tem por objetivo capacitar o usuário para utilização do código computacional desenvolvido. O código desenvolvido realiza análises estáticas, lineares e não lineares, em pequenos deslocamentos, e, também, a obtenção de parâmetros modais da estrutura por meio de análise modal numérica. São apresentadas as etapas de entrada de dados, processamento, e pós-processamento.

O código foi desenvolvido parte em MATLAB[®], parte em FORTRAN[®]. A interface gráfica (GUI – *Graphical User Interface*), responsável pela interação com o usuário, foi desenvolvida em MATLAB[®]. A interface gráfica é responsável pela aquisição dos dados da estrutura, e de sua visualização tanto no pré, como no pós-processamento.

O processamento é feito em FORTRAN[®] para as análises estáticas (lineares e não lineares), e em MATLAB[®] para obtenção das características modais da estrutura (frequências naturais e modos de vibração).

A estrutura do funcionamento do programa está representada no fluxograma da Figura A.1. A análise modal da estrutura só pode ser realizada após a realização da análise estática da estrutura, pois a matriz de rigidez utilizada para obtenção dos parâmetros modais depende do tipo de análise realizada previamente.

Como a análise modal está associada à análise estática realizada anteriormente, é a análise estática que vai fornecer a matriz de rigidez para solução da análise modal. Isto é, ao se realizar uma análise estática linear, a matriz de rigidez que será fornecida ao código computacional desenvolvido é a matriz K_L . Portanto, a análise modal utiliza a matriz de rigidez linear, realizando uma análise de vibração livre não amortecida da estrutura (item 4.1.3).

As análises não lineares, tanto sem pontos de controle, quanto com pontos de controle (MAD), fornece à análise modal a matriz de rigidez tangente, K_T . Para a matriz de rigidez tangente, a análise modal que se emprega é a análise de vibrações sob tensões iniciais (item 4.1.4).

A solução do sistema de equações não lineares encontra-se detalhado no item 4.5, e, em resumo, no fluxograma da Figura 4.9.

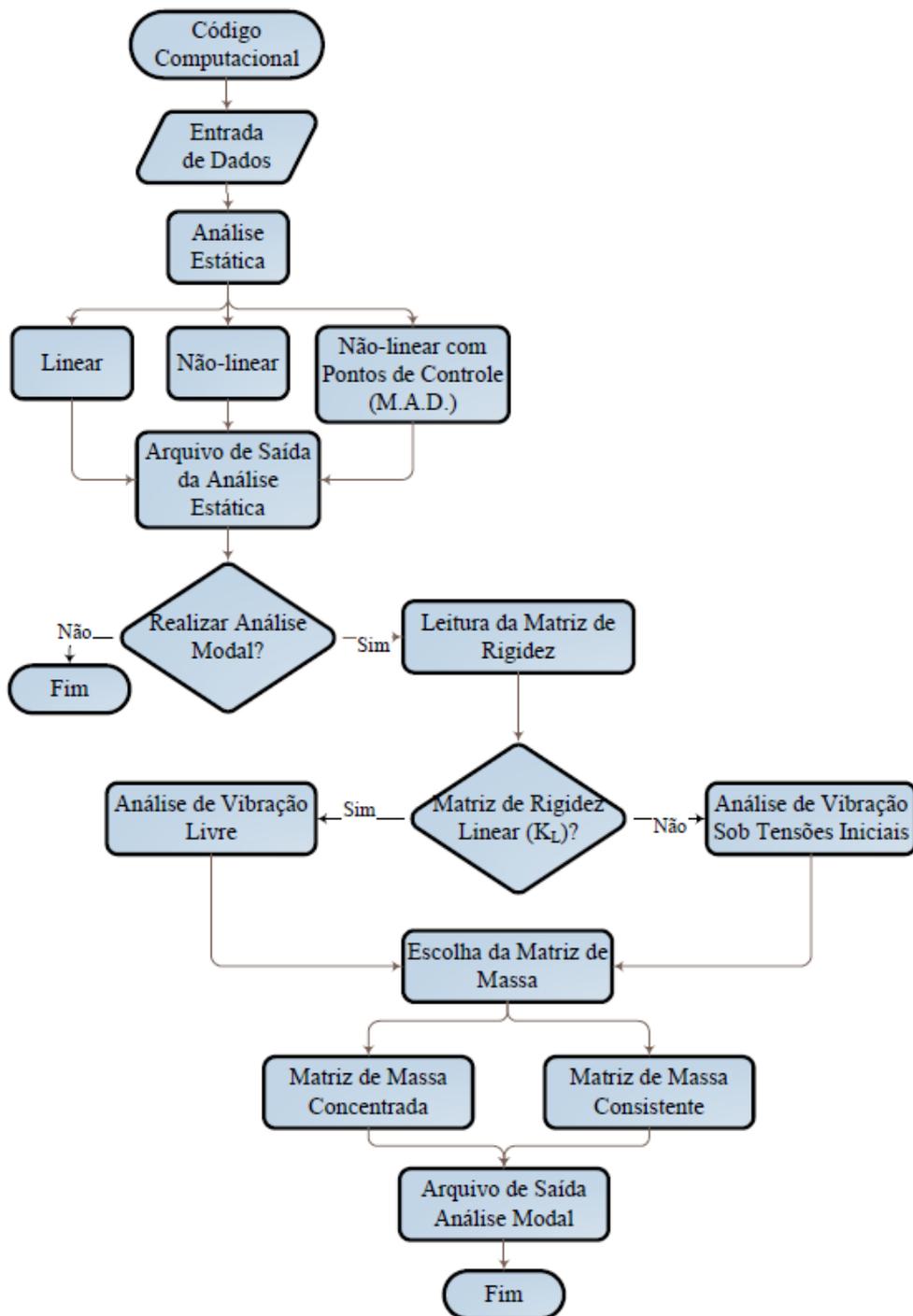


Figura A.1 - Fluxograma do código computacional desenvolvido.

A análise modal, por sua vez, está dividida em relação à matriz de massa que o usuário deseja empregar, seja a matriz de massa concentrada, ou matriz de massa consistente, obtidas no item 3.2.1.

A seguir, as etapas necessárias para utilização do código computacional desenvolvido são apresentadas.

ENTRADA DE DADOS

A interface de entrada de dados é constituída de uma tela principal, onde existem botões superiores relacionados a criação de um novo arquivo de projeto, salvar o arquivo atual, inserir propriedades das seções dos elementos de viga-coluna, propriedades dos elementos de cabo, propriedades dos materiais, análise estática, e análise modal [Figura A.2].



Figura A.2 - Menu superior.

A tela inicial do programa possui caixas de texto para inserir o nome do projeto, os dados de número de nós, números de elementos de cabos e número de elementos de viga-coluna são inseridos.

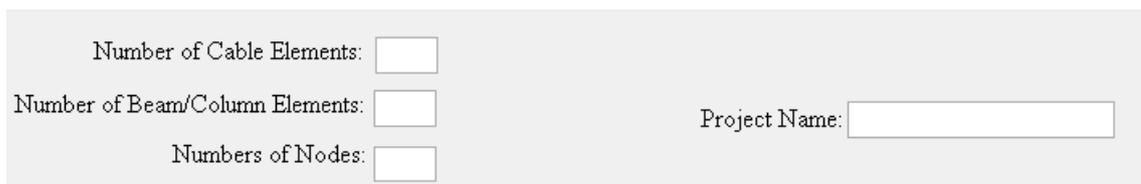
A interface de entrada de dados com caixas de texto editáveis. À esquerda, há três caixas de texto rotuladas: 'Number of Cable Elements:', 'Number of Beam/Column Elements:', e 'Numbers of Nodes:'. À direita, há uma caixa de texto rotulada 'Project Name:'.

Figura A.3 - Caixas de texto editáveis.

Na tela principal existem 3 tabelas dinâmicas que se referem a montagem da geometria da estrutura. A primeira tabela é a entrada das coordenadas cartesianas, em metros, dos nós dos elementos finitos.

A segunda tabela se refere aos elementos finitos de viga-coluna, onde devem ser inseridos os números dos elementos, as conectividades, números da seção, número do material e se a seção representa uma viga, ou coluna.

A terceira tabela se refere aos elementos de cabos. Esta tabela só estará visível se o número de cabos inserido na caixa de texto for diferente de zero. Nesta tabela deverão ser inseridos a conectividade dos cabos, e o número da propriedade associado ao elemento.

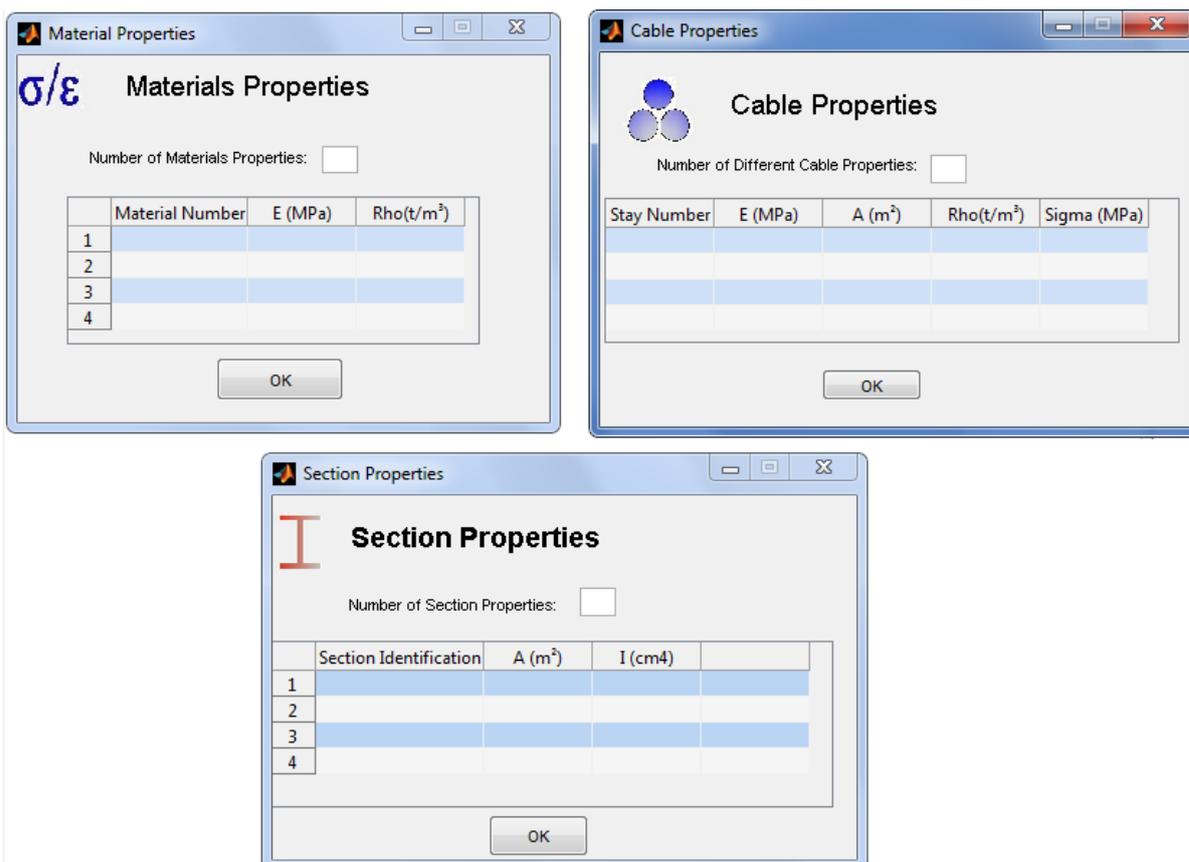


Figura A.5 - Menus das propriedades dos materiais, cabos e seções.

Na tela principal do código desenvolvido há na parte inferior esquerda a entrada de dado das condições de contorno da estrutura. O número de nós restritos será inserido na caixa de texto. Essa caixa de texto está associada à tabela dinâmica adjacente, onde deverá ser preenchido o número dos nós restritos, e preenchendo a tabela com 1 – caso tenha restrição na coordenada indicada, ou 0 – caso a coordenada seja livre [Figura A.6].

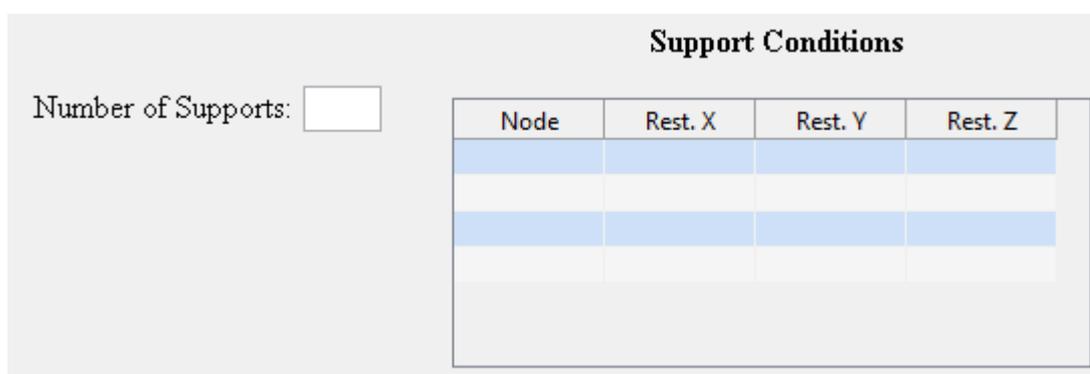
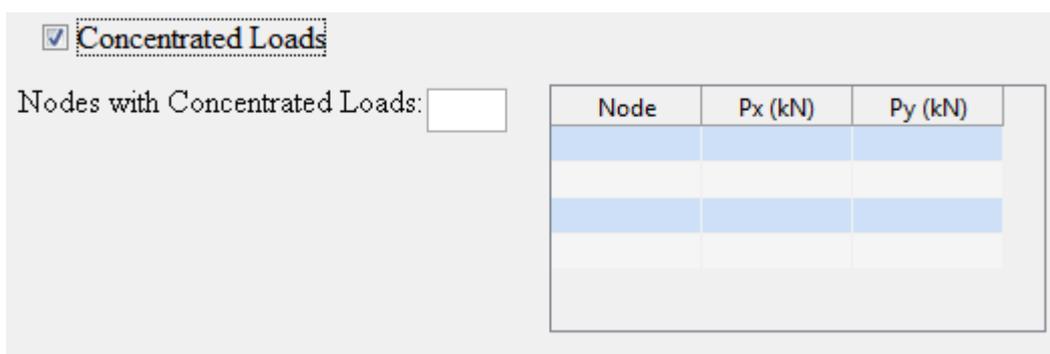


Figura A.6 - Condições de contorno.

O carregamento uniformemente distribuído é calculado automaticamente por meio dos dados inseridos de massa específica e área da seção. Internamente, a aceleração “*default*” da gravidade utilizada pelo é $g=9,807 \text{ m/s}^2$. Caso queira-se adicionar algum carregamento uniforme além do peso-próprio dos elementos estruturais, isto deverá ser feito por meio da alteração da massa específica, devendo-se calcular propriamente a massa específica correspondente ao novo carregamento uniformemente distribuído.

Existe a possibilidade da atuação de cargas concentradas. Para isto, existe um *check-box* que deverá ser ativado. Ao ativar o *check-box* referente à presença de cargas concentradas, uma caixa de texto e uma tabela dinâmica irão aparecer. A caixa de texto deverá ser preenchida com o número de nós com carregas concentradas. A tabela dinâmica possui uma coluna para preencher o número do nó, e os valores dos carregamentos pontuais em kN nas coordenadas x e y globais [Figura A.7].



The image shows a software interface for defining concentrated loads. It features a checked checkbox labeled "Concentrated Loads". Below it is a text input field labeled "Nodes with Concentrated Loads:". To the right of the input field is a table with three columns: "Node", "Px (kN)", and "Py (kN)". The table has four rows, with the first two rows highlighted in light blue.

Node	Px (kN)	Py (kN)

Figura A.7 - Tabela dos carregamentos concentrados existentes.

A aba do menu chamada de “Girder displacement control”, encontra-se, inicialmente, inativa. Caso a análise não linear com os pontos de controle de deslocamento seja pretendida pelo usuário, a possibilidade de controlar deslocamentos em pontos de controle só é possível com existência de elementos de cabo, pois são esses que serão responsáveis por combater os deslocamentos verticais.

Para ativar o menu, o número inserido na caixa de texto referente ao número de elementos de cabo deverá ser diferente de zero. Entrando-se no menu “*Girder Displacement Control*”, mostrado pela Figura A.8, o usuário irá encontrar uma caixa de texto onde deverá ser inserida o número de pontos de controle da viga. Os pontos de controle são, geralmente, pontos onde os cabos se intersectam com a viga.

Em seguida, a tabela dinâmica deverá ser preenchida com o nó que será feito o controle, bem como o deslocamento vertical pretendido para o nó. A tolerância pretendida pela iteração de forma, que já usa como padrão do código a tolerância de 10^{-4} , que pode ser alterado pelo usuário. O tamanho do vão principal deverá ser inserido conforme mostrado pela equação (4.9).

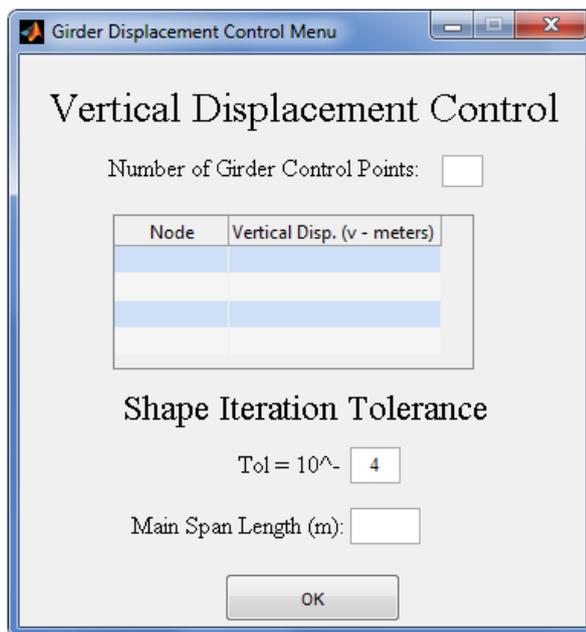


Figura A.8 - Menu para entrada de dados do Método da Anulação dos Deslocamentos.

São criados, para cada etapa citada, um arquivo de informações temporário de extensão “.mat”. São eles coordinates.mat, onde os dados das coordenadas dos nós são armazenados; secoes.mat, com os dados das seções existentes dos elementos de viga-coluna; cables.mat, onde é escrito as propriedades dos cabos; materials.mat, onde as características físicas dos materiais dos elementos de viga-coluna são escritos; cableelement.mat e beamelement.mat, onde os dados inseridos de conectividade, tipo de seção, número dos elementos são escritos; supportconditions.mat, onde os dados de condições de contorno são escritos; controlnodes.mat, caso tenha sido preenchido os dados do menu da Figura A.8; conloads.mat, caso haja cargas concentradas.

Após inseridos todos os dados de geometria e materiais da estrutura, é possível verificar se a geometria entrada está correta, pelo botão posicionado na parte inferior da tela principal do programa (“Visualize Structure”).

SALVAR E ABRIR ARQUIVOS

Ao salvar um arquivo, são criados 2 arquivos “.mat”, um com o nome do projeto inserido pelo usuário, e o segundo com o nome do projeto inserido pelo usuário seguido de “Data”. Por exemplo, ao salvar um projeto intitulado Exemplo, são criados “Exemplo.mat” e “ExemploData.mat”. O arquivo sem a terminação Data salva os dados da tela principal do programa, enquanto os dados dos materiais, que são inseridos via botões do menu superior, são salvos no arquivo de terminação Data.

Para carregar um projeto salvo anteriormente, o usuário deverá clicar na aba “menu”, em seguida “Open Project” [Figura A.9]. Com isso, uma nova caixa de texto será aberta na tela principal do programa, com 2 botões ao lado, um para carregar, e o outro para cancelar [Figura A.10]. O nome do arquivo deverá ser escrito da mesma forma como foi salvo. Não é preciso salvar o arquivo com a extensão, o código gera automaticamente a extensão. Para carregar o arquivo também não é preciso adicionar a extensão.

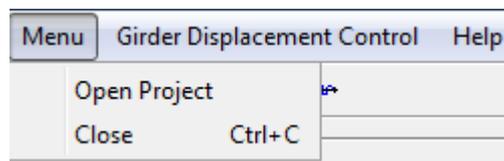


Figura A.9 - Abrir um projeto existente.



Figura A.10 - Abrir um arquivo.

Ao inserir o nome do arquivo desejado, o programa busca dentro da pasta do programa os arquivos correspondentes. Caso seja encontrado, o código lê os dados salvos da estrutura e carrega. Caso não seja encontrado o arquivo com o nome especificado, é dado um aviso de erro ao usuário [Figura A.11].

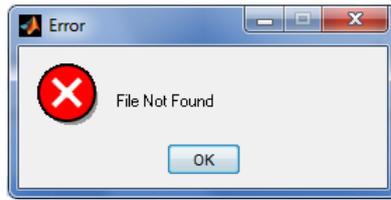


Figura A.11 - Erro de arquivo não encontrado.

PROCESSAMENTO DOS DADOS

A interface conta com dois botões na parte superior da tela principal referente ao processamento da análise estática da estrutura, e da análise modal respectivamente, mostrados na Figura A.12.

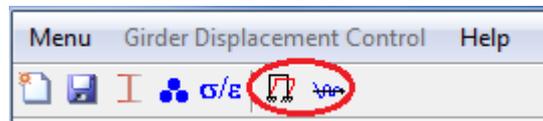


Figura A.12 - Os botões referentes às análises realizadas pelo código computacional.

Ao abrir o menu da análise estática da estrutura, existe uma caixa de texto onde deverá constar o nome desejado para o arquivo de saída. É possível escolher o tipo de análise (linear, não linear, e não linear com os pontos de controle). Caso seja selecionada as análises não linear ou não linear com pontos de controle, a parte inferior do menu deverá ser devidamente preenchida com os valores de número de passos de carga, tolerância de convergência do processo de Newton-Raphson [Figura A.13].

O usuário deve atentar que o critério de convergência é calculado pelo módulo do vetor de desbalanceamento, como mostrado na equação (4.8). Neste menu, ainda é possível determinar o fator de escala dos deslocamentos, e o número de divisões internas para cada elemento finito. Este número de divisões internas não corresponde a um remalhamento dos elementos finitos, apenas um artifício para o cálculo de um maior número de valores de esforços internos.

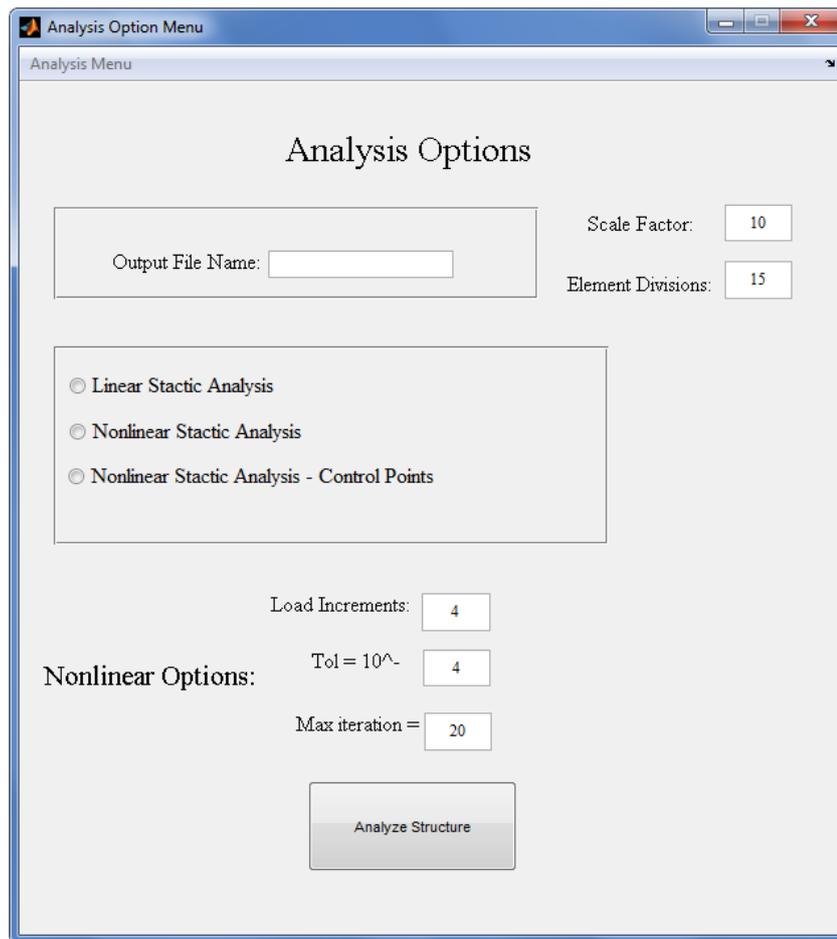


Figura A.13 - Menu para seleção da análise estática pretendida.

Posterior à análise estática, é possível realizar a análise modal da estrutura com base nos elementos finitos. Caso a análise estática realizada tenha sido a linear, o problema de auto-valores e auto-veotres que será resolvido pela análise modal será o problema abordado pelo item 4.1.3. Entretanto, para o caso das análises estáticas não lineares, o problema que será solucionado será o problema do item 4.1.4, com a matriz de rigidez tangente calculada ao final do processo iterativo.

O menu da análise modal [Figura A.14] permite o usuário escolher o número de modos que deseja visualizar. Caso o tamanho da estrutura seja muito grande, a visualização dos modos de vibração pode ser amplificada por meio da caixa de texto referente ao fator de escala.

O menu de análise modal permite ao usuário escolher qual a formulação que deseja adotar para obtenção da matriz de massa, isto é, matriz de massa concentrada, ou matriz de massa consistente, segundo a formulações apresentadas no item 3.2.1.

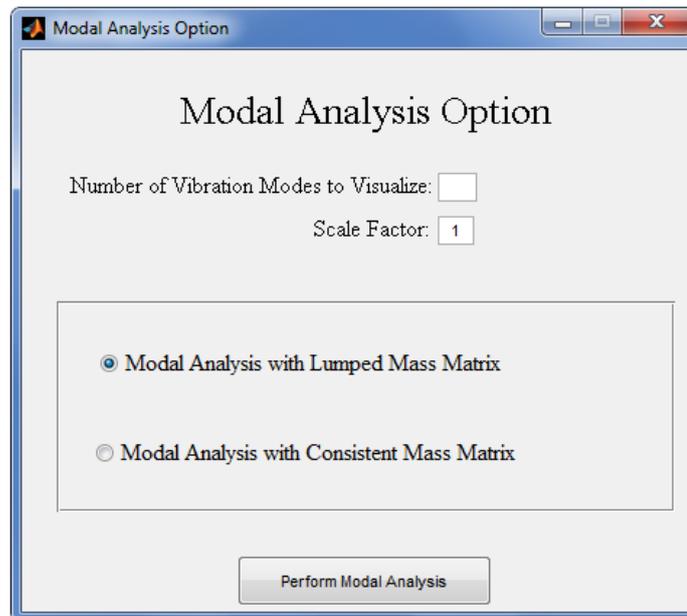


Figura A.14 - Menu de análise modal da estrutura.

PÓS-PROCESSAMENTO

Este item será dividido em dois subitens referentes ao pós-processamento da análise estática, e o segundo para pós-processamento da análise modal. O pós-processamento do código computacional cria arquivos de texto para cada uma das análises, salvando-os em pastas correspondentes à análise.

Os arquivos de saída são salvos dentro de uma pasta chamada *Output*. Dentro da pasta *Output* existe duas pastas de saída de dados onde uma chama-se *Static*, onde os arquivos gerados de análises estáticas de todas as estruturas serão salvos, e a pasta dos arquivos de análise modal serão salvos dentro da pasta *Modal*.

PÓS-PROCESSAMENTO - ANÁLISE ESTÁTICA

A análise estática é realizada por meio do menu da Figura A.13. A visualização das respostas como deslocamentos, e esforços internos gerada após ser clicado o botão “*Analyze Structure*”. O clique neste botão realiza o cálculo da estrutura, e em seguida uma tela com a deslocada da estrutura é mostrada, mas sem valores de deslocamentos, apenas a sua

configuração deslocada [Figura A.15]. A linha preta tracejada representa a configuração indesejada da estrutura, enquanto as linhas cheias é a posição da estrutura após a aplicação dos esforços externos.

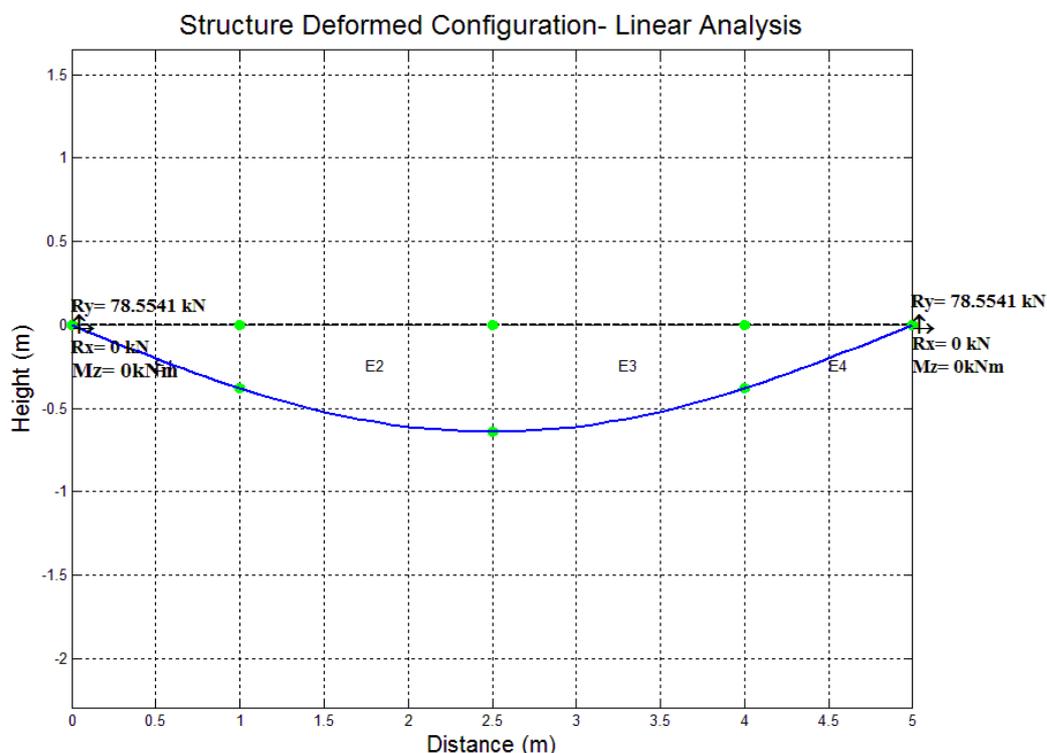


Figura A.15 – Visualização da configuração deslocada (fator de escala = 1000) de uma viga biapoiada.

A aba “*Analysis menu*” se torna ativa, permitindo ao usuário a escolha da visualização de deslocamentos (deslocamento na direção X, deslocamento na direção Y, ou o deslocamento total), forças internas (esforço normal, esforço cortante, ou momento fletor). Caso a análise com pontos de controle tenha sido selecionada, há um submenu “*Shape Iteration*” que se torna ativo.

A visualização dos resultados se dá por barras com gradientes de cores, que representam a resposta selecionada pelo usuário (deslocamentos ou esforços internos) [Figura A.16]. Os resultados dos deslocamentos são exatos nos nós da estrutura. Por isso, os valores dos nós são plotados na imagem do pós-processamento, já a resposta dos deslocamentos internos ao elemento finito são aproximadas de acordo com as equações (3.13) para os deslocamentos axiais, e (3.17) para os deslocamentos transversais.

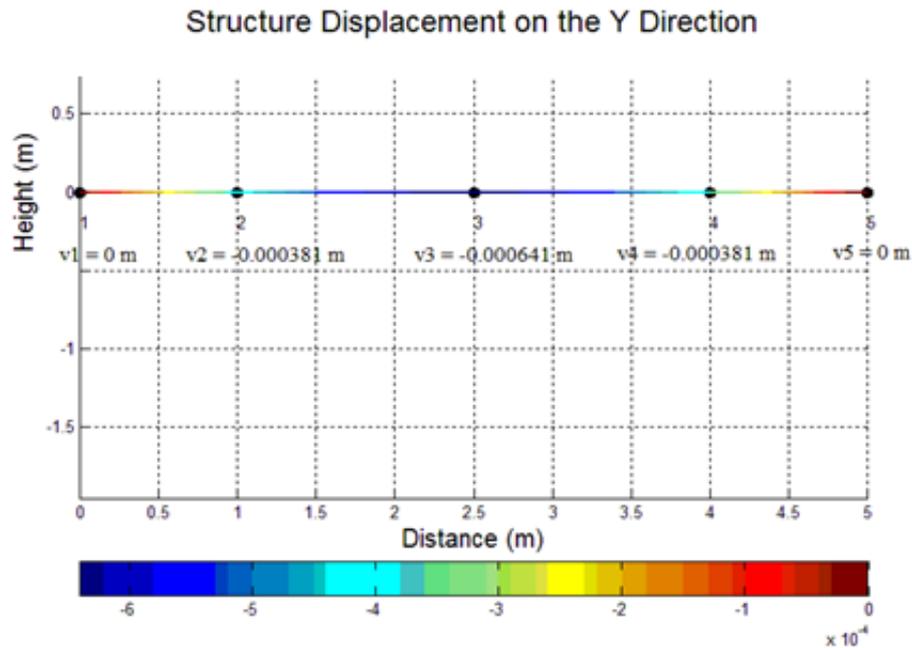


Figura A.16 – Visualização dos deslocamentos verticais nos nós de uma viga biapoiaada.

Para visualização dos esforços internos, são mostrados os valores nodais de cada elemento finito. Para os momentos fletores, além dos momentos fletores nos nós, é visualizado o momento máximo e mínimo de cada elemento finito, bem como a posição local do momento máximo e mínimo do elemento finito [Figura A.17].

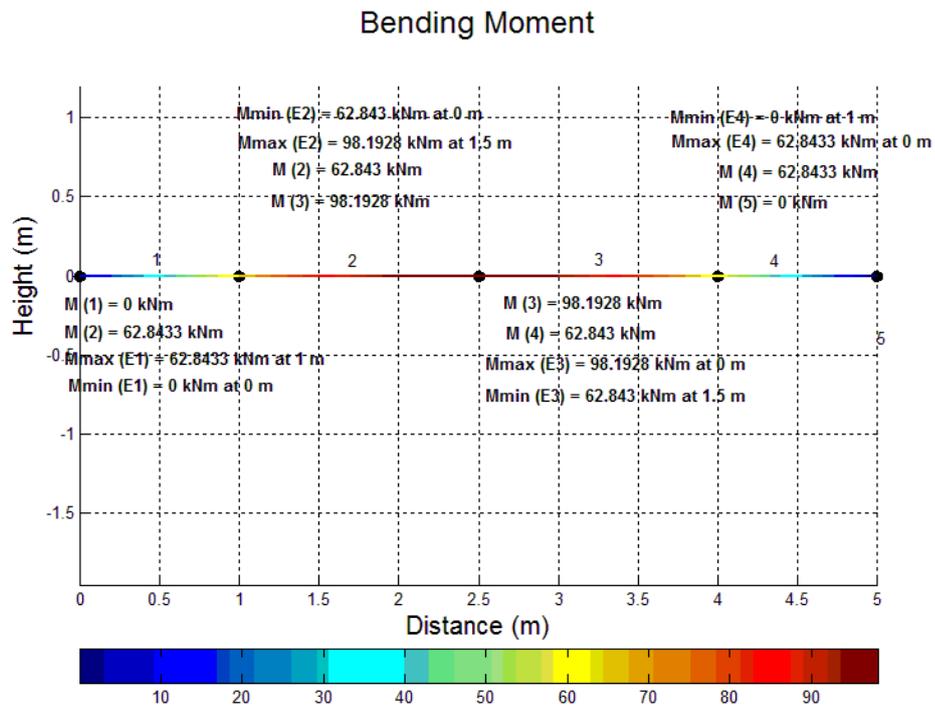


Figura A.17 - Visualização dos momentos fletores de uma viga biapoiaada.

O submenu “*Shape Iteration*” permite obter gráficos de deslocamentos horizontais, verticais, forças axiais, momentos fletores, e esforço cortante, de determinados nós da estrutura ao longo do processo iterativo de obtenção da configuração de referência [Figura A.18].

Este submenu possui um grupo de botões onde o usuário escolhe a resposta que deseja obter o gráfico (deslocamentos, ou forças internas) onde o eixo das abcissas é a iteração de forma, e o eixo das ordenadas é a resposta pretendida pelo usuário [Figura A.19].

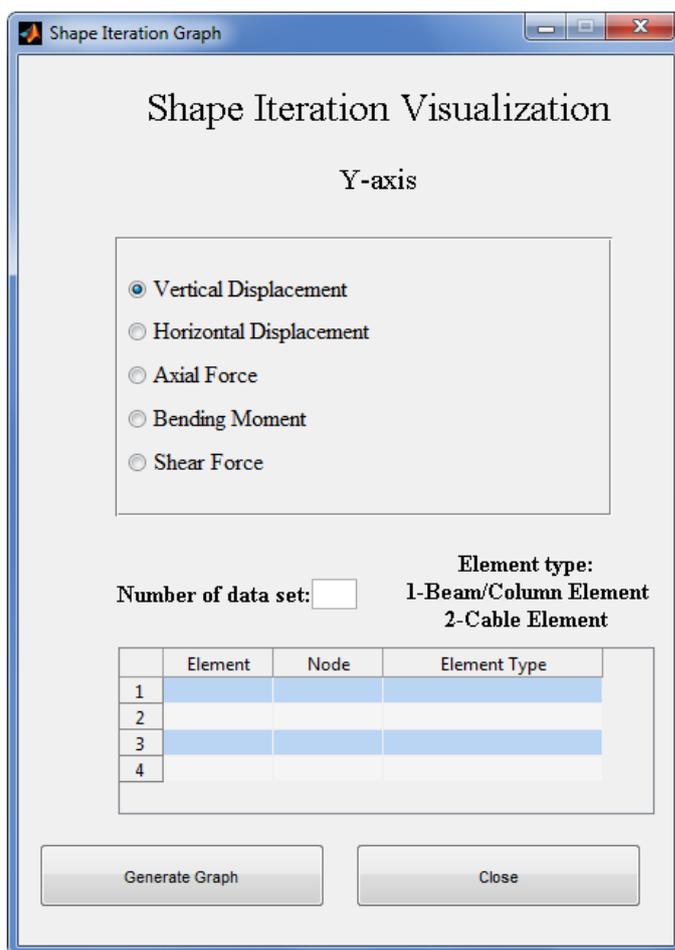


Figura A.18 - Menu de respostas ao longo da iteração de forma .

As respostas de forças internas devem ser associadas a elementos do tipo viga-coluna (1), ou cabo (2), pois o nó pode ser concorrente aos dois tipos de elementos. Já para as respostas em deslocamento, não importa o elemento associado.

A tabela dinâmica deve ser preenchida com o número do elemento finito, o número do nó e o número referente ao tipo de elemento. O número de dados a ser plotados deverá ser

preenchido na caixa de texto acima da tabela dinâmica, num máximo de 21 dados possíveis pela limitação da geração automática da legenda.

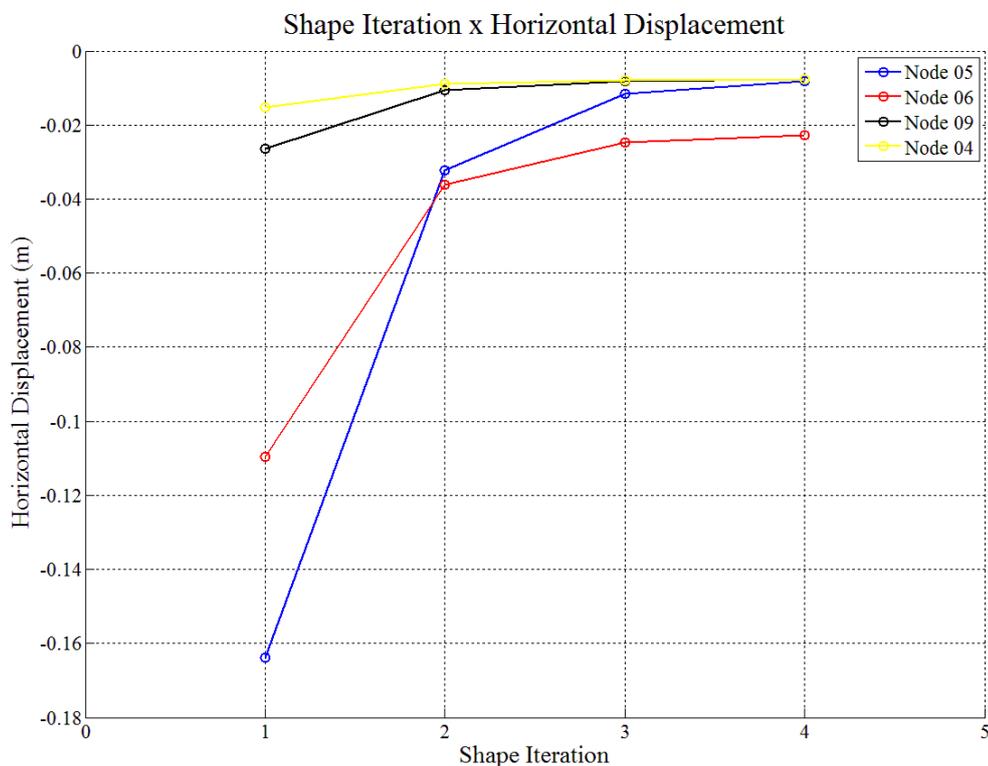


Figura A.19 - Exemplo de visualização dos deslocamentos horizontais dos nós a cada iteração de forma.

É possível visualizar as respostas via arquivo de texto gerado automaticamente. Cada análise estática (linear, não linear, e não linear com os pontos de controle) cria dentro da posta *Static* um arquivo de texto em formato “.txt”.

O nome do arquivo de saída será dado pelo usuário, e pelo tipo de análise realizada. A primeira parte do nome do arquivo é entrado pelo usuário na caixa de texto do menu “*Analysis option*” mostrado na Figura A.13 (sem a extensão de saída). A segunda parte do nome do arquivo é dado pelo tipo de análise escolhida. As terminações são “- Linear.txt”, “- Non-linear.txt”, e “- Non-linear CtrPoints”. As unidades de saída são metro e kN.

O arquivo de saída da análise linear é o mais simples. Nele encontram-se dados gerais, como nome do arquivo, número de elementos de viga-coluna, número de elementos de cabos, e número de graus de liberdade, e as respostas da estrutura obtidas, como deslocamentos, reações, e esforços internos [Figura A.20].

=====

MACS Bridges - Linear Solution

=====

File Name: Viga - Linear.txt

Number of Beam/Column Elements: 3
 Number of Cable Elements: 0
 Number of Degrees of Freedom: 12

Displacements			
Node	Disp.X (m)	Disp.Y (m)	Rot.Z (rad)
1	0.000e+000	0.000e+000	-1.628e-004
2	0.000e+000	-1.989e-004	-7.837e-005
3	0.000e+000	-1.989e-004	7.837e-005
4	0.000e+000	0.000e+000	1.628e-004

Reactions			
Node	Rx (kN)	Ry (kN)	Mz (kNm)
1	0.000	5.627	0.000
4	0.000	5.627	0.000

Beam Internal Forces						
Element	Ni (kN)	Nf (kN)	Vi (kN)	Vf (kN)	Mi (kNm)	Mf (kNm)
1	0.000	0.000	5.627	1.876	0.000	5.627
2	0.000	0.000	1.876	-1.876	5.627	5.627
3	0.000	0.000	-1.876	-5.627	5.627	0.000

Figura A.20 - Arquivo de saída de análise estática linear.

Os deslocamentos e reações são dados com referência nos nós. Já os esforços internos são dados para cada elemento finito, onde os sufixos i, e f denotam nó inicial do elemento, e nó final do elemento.

O arquivo de saída da análise estática não linear possui dados de saída como o tempo gasto pela análise, o número de incrementos de carga solicitado pelo usuário, e a tolerância adotada.

O bloco das respostas é idêntico ao da análise linear, com os deslocamentos obtidos, as reações, e esforços internos. Entretanto, ao final do arquivo existe a saída da análise iterativa, com dados de número de iteração, número de iteração acumulada, e o erro (ϵ_a) ao final do ciclo de equilíbrio de cada passo de carga.

MACS Bridges - Non-Linear Solution						
File Name: Viga - Non-Linear.txt						
Elapsed Time: 0.000 s						
Number of Load Increments: 4						
Tolerance: 1.000e-004						
Number of Beam/Column Elements: 3						
Number of Cable Elements: 0						
Number of Degrees of Freedom: 12						
Displacements						
Node	Disp.X (m)	Disp.Y (m)	Rot.Z (rad)			
1	0.000e+000	0.000e+000	-1.628e-004			
2	0.000e+000	-1.989e-004	-7.837e-005			
3	0.000e+000	-1.989e-004	7.837e-005			
4	0.000e+000	0.000e+000	1.628e-004			
Reactions						
Node	Rx (kN)	Ry (kN)	Mz (kNm)			
1	0.000	5.627	0.000			
4	0.000	5.627	0.000			
Beam Internal Forces						
Element	Ni (kN)	NF (kN)	Vi (kN)	Vf (kN)	Mi (kNm)	Mf (kNm)
1	0.000	0.000	5.627	1.876	-0.000	5.627
2	0.000	0.000	1.876	-1.876	5.627	5.627
3	0.000	0.000	-1.876	-5.627	5.627	0.000
Iteration Data						
Load Increment	Number of Iterations	Cumulative Iterations	Epsilon			
1	2	2	2.258e-015			
2	2	4	4.515e-015			
3	2	6	7.823e-015			
4	2	8	9.031e-015			

Figura A.21 - Arquivo de saída da análise estática não linear.

Por último, o arquivo de saída da análise não linear com pontos de controle (MAD) possui no campo inicial o número de iterações de forma [Figura A.22] realizadas para obter a convergência da análise.

O bloco das respostas da estrutura (deslocamentos e esforços internos) são os valores obtidos ao final do processo de convergência. Portanto a resposta final da estrutura em equilíbrio onde os pontos de controle escolhidos possuem deslocamentos verticais menores que a tolerância estabelecida.

A parte final do arquivo [Figura A.23] encontra-se a convergência dos processos iterativos, mostrando, para cada iteração de forma, os números de iteração obtidos para o equilíbrio da estrutura em cada passo de carga, o número de iterações acumuladas, e o erro aproximado (ϵ_a).

MACS Bridges - Non-Linear Solution

File Name: AAAAA - Non-Linear CtrPoints.txt

Elapsed Time: 0.000 s
 Number of Load Increments: 2
 Tolerance: 1.000e-004
 Number of Shape Iteration Performed: 4

Number of Beam/Column Elements: 11
 Number of Cable Elements: 2
 Number of Degrees of Freedom: 36

Figura A.22 - Campo inicial do arquivo da análise com pontos de controle.

Iteration Data			
Shape Iteration Number: 1			
Load Increment	Number of Iterations	Cumulative Iterations	EpsonA
1	6	6	3.890e-007
2	6	12	9.890e-006

Iteration Data			
Shape Iteration Number: 2			
Load Increment	Number of Iterations	Cumulative Iterations	EpsonA
1	4	16	1.681e-005
2	5	21	1.374e-007

Iteration Data			
Shape Iteration Number: 3			
Load Increment	Number of Iterations	Cumulative Iterations	EpsonA
1	4	25	1.287e-006
2	4	29	1.032e-005

Iteration Data			
Shape Iteration Number: 4			
Load Increment	Number of Iterations	Cumulative Iterations	EpsonA
1	4	33	2.039e-007
2	4	37	1.631e-006

Figura A.23 - Campo final do arquivo contendo as informações referentes à convergência da iteração de forma.

PÓS-PROCESSAMENTO - ANÁLISE MODAL

A saída visual da análise modal é mais simples, visto que só há dois tipos de análise (matriz de massa concentrada ou consistente). No menu da análise modal o usuário deve colocar o número de modos de vibração que interessam ser visualizados. Caso seja inserido um número de modos maior que os extraídos da estrutura, só serão mostrados os modos extraídos.

Ao clicar no botão “*Perform Modal Analysis*”, será mostrado ao usuário as animações do modo de vibração referente à frequência observada [Figura A.24]. É possível o usuário adiantar para animação seguinte do modo de vibração pelo clique do botão do *mouse*, e para retornar para um modo de vibração anterior deve-se clicar em qualquer botão do teclado.

O gráfico criado pela animação mostra os elementos finitos em azul, e os nós como marcadores verdes. O título informa qual a matriz de massa utilizada para a análise, e na parte inferior da animação encontra-se o número da frequência observada e seu valor em Hz.

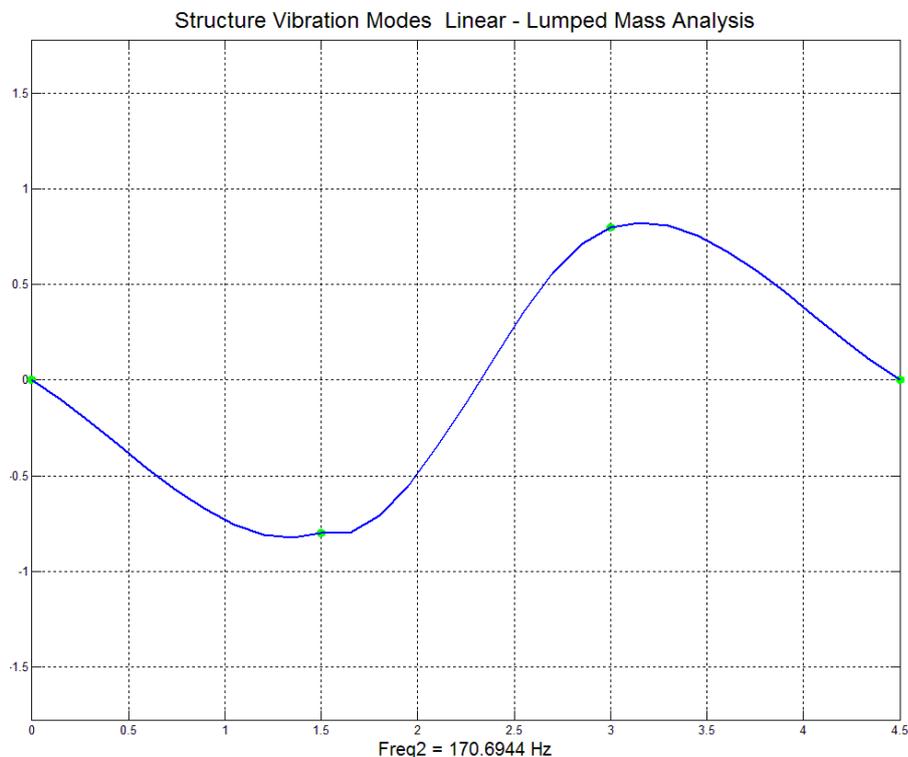


Figura A.24 - Animação do 2º modo de vibração de uma viga biapoada.

A tela de animações será finalizada quando o usuário clicar no *mouse* no último modo vibracional inserido na caixa de texto do menu de análise modal. Isto é, caso o número de modos pretendidos pelo usuário seja 2, ao tentar prosseguir para o modo 3 por meio do clique do *mouse*, as animações são finalizadas.

Caso o usuário esteja visualizando o primeiro modo de vibração e tente retornar para o modo de vibração zero, por meio do teclado, uma mensagem de erro será exibida, informando que não há modos anteriores [Figura A.25].



Figura A.25 - Mensagem de erro ao tentar acessar um modo anterior ao primeiro modo de vibração.

O arquivo de saída será salvo dentro da pasta Modal. O nome do arquivo de saída possui 3 partes. A primeira parte do título arquivo é o nome inserido pelo usuário no menu “*Analysis Option*” [Figura A.13]. A segunda parte se refere a análise estática realizada previamente à análise modal, e a parte final do nome do arquivo refere-se a matriz de massa utilizada para obtenção das frequências naturais.

O arquivo de saída das análises modais (matriz de massa concentrada, ou matriz de massa consistente) são iguais, diferindo apenas no campo “*Modal Analysis*” [Figura A.26]. O arquivo possui na parte superior o nome do arquivo, a análise estática realizada, e a matriz de massa utilizada.

Em seguida, são mostrados o número de elementos viga-coluna, número de elementos de cabo, número de graus de liberdade, e o número de modos de vibração extraídos.

A parte central do arquivo é reservada para mostrar as propriedades (área, momento de inércia, módulo de elasticidade do material, e massa específica) de cada elemento finito, sendo separado em blocos de elementos finitos de viga-coluna e elementos de cabo.

A parte final do arquivo numera as frequências naturais em ordem crescente, onde a primeira coluna refere-se ao número da frequência obtida, a segunda coluna é o valor da

frequência em Hertz, e a terceira coluna corresponde à frequência angular em radianos por segundo.

Modal Analysis - MACS Bridges				
File Name: viga Linear - Lumped Mass Modal Analysis.txt				
Static Analysis Performed: Linear				
Modal Analysis: Lumped Mass Matrix				
Number of Beam/Column Elements: 3				
Number of Cable Elements: 0				
Number of Degrees of Freedom: 12				
Number of Natural Frequencies Extracted: 5				
Beam/Column Elements Properties				
Element	Area(m²)	I(cm⁴)	E(MPa)	Rho(t/m³)
1	0.1000	2.083e+005	2.800e+004	2.550
2	0.1000	2.083e+005	2.800e+004	2.550
3	0.1000	2.083e+005	2.800e+004	2.550
Natural Frequencies				
#	Frequency (Hz)	Angular Frequency (rad/s)		
1	40.82094	256.4855		
2	170.69442	1072.5047		
3	181.99691	1143.5203		
4	497.22482	3124.1557		
5	679.22173	4267.6760		

Figura A.26 - Arquivo de saída da análise modal.