

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

ARTHUR ÁLAX DE ARAÚJO ALBUQUERQUE

**IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE BARRA E PLACA PARA A
ANÁLISE DE ESFORÇOS EM TABULEIROS DE PONTES POR MEIO DE
SUPERFÍCIES DE INFLUÊNCIA**

São Carlos
2014

ARTHUR ÁLAX DE ARAÚJO ALBUQUERQUE

IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE BARRA E PLACA PARA A ANÁLISE DE ESFORÇOS EM TABULEIROS DE PONTES POR MEIO DE SUPERFÍCIES DE INFLUÊNCIA

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Vladimir
Guilherme Haach

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

de Araújo Albuquerque, Arthur Álax
IMPLEMENTAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE BARRA E PLACA
DA658i PARA A ANÁLISE DE ESFORÇOS EM TABULEIROS DE PONTES POR
i MEIO DE SUPERFÍCIES DE INFLUÊNCIA / Arthur Álax de
Araújo Albuquerque; orientador Vladimir Guilherme
Haach. São Carlos, 2014.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

1. Pontes. 2. Superfície de influência. 3.
Elementos finitos. 4. Tabelas de Rüsç. 5. Shear
Locking. 6. Reissner-Mindlin. 7. Timoshenko. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ARTHUR ÁLAX DE ARAUJO ALBUQUERQUE**.

Título da dissertação: "Implementação de elementos finitos de barra e placa para a análise de esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência".

Data da defesa: 09/06/2014

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Vladimir Guilherme Haach (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Valério da Silva Almeida**
(Escola Politécnica/EP-USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Roberto Chust Carvalho**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):
Profª. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Aos meus pais Ruberval e Zenilda e
aos meus irmãos Alessandro Alex e
Alanna Allen...

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Ruberval e Zenilda pelo amor incondicional. Pela dedicação e paciência que ambos tiveram durante todas as fases de minha vida. E por serem as duas pessoas nas quais afirmo que sempre estarão torcendo por mim.

Aos meus irmãos Alessandro e Alanna cada um de sua maneira me ajudando a ser uma pessoa melhor. Às minhas avós Lourdes e Lenita.

À Sarah pelas inúmeras horas vividas que me fizeram tornar a pessoa que sou hoje.

À Arnon e Iracy, meus avós de consideração. Duas pessoas simplesmente fantásticas.

À Jésus por ter sido não apenas um professor de francês, mas por mostrar que o aprendizado em línguas deve fazer parte de nossas vidas.

À Ion e família, por me apresentar um modelo de vida no qual desejo copiar e melhorar.

Ao professor orientador Vladimir Guilherme Haach pela paciência por me orientar. Por mostrar que a pesquisa deve ser feita com seriedade. E que sempre devemos estar com a cabeça aberta para adquirirmos novos conhecimentos.

Aos demais professores do departamento de engenharia de estruturas, em especial, Mounir que participou da banca de qualificação e, Paccola pela formação propiciada e pelos conselhos durante a pesquisa.

Aos professores da graduação Joel e Petrus pelas aulas de disciplinas de estruturas ministradas, a Vitória pelo apoio e incentivo na dedicação a pesquisa; a Selma pelos programas de monitoria, bolsa de intercâmbio e disponibilidade para a realização de pesquisas.

Aos amigos do departamento de estruturas (SET): Matheus pela amizade iniciada desde a graduação. Amigo que junto comigo evoluiu os conhecimentos em estruturas. Carlinhos por querer me mostrar que Recife é a capital do mundo. Daniel, Elias, El Dani, Pablo, Camila, Margot, Paulo, Marcel, Ricardo, Cleilson e Nichollas pelos bons momentos vividos em São Carlos. André, Greg, Rafael (El Niño), Ketson e Fernanda por junto comigo formar a banda cigana e propiciar churrascos e finais de semanas animados. Embora as músicas da banda não sejam tão boas, acredito o que vale a pena é a união que tivemos. Sérgio e Fernando pelo aprendizado de se conviver com pessoas de outras culturas fazendo com que eu pudesse crescer como pessoa.

E um agradecimento em especial ao Emerson pela ajuda fornecida durante a fase de programação do desenvolvimento do código utilizado na pesquisa.

À CAPES e CNPQ pela bolsa de estudos concedida.

À todos os amigos que não foram citados mais que de uma forma contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

RESUMO

ALBUQUERQUE, A. A. A. Implementação de elementos finitos de barra e placa para a análise da distribuição de esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Este trabalho consiste em analisar os esforços em tabuleiros de pontes por meio de superfícies de influência. Para isto, o método dos elementos finitos (MEF) é utilizado e os resultados são comparados com os das tabelas de Rüsç. Os elementos finitos de barra, representando longarinas e transversinas, e placa, as lajes do tabuleiro, são implementados no código SIPlacas. Estes elementos finitos são formulados pelas teorias de viga Timoshenko e placa Reissner–Mindlin, respectivamente. Estes apresentam problema de travamento de força cortante (Shear Locking), que é contornado por duas propostas: o artifício matemático da integração reduzida e elementos finitos com campo assumido de deformação de força cortante (CADFC). Verifica-se que os elementos com aproximações quadráticas para os deslocamentos e com CADFC são os que melhor se adequam à proposta de análise da presente pesquisa. Tais elementos apresentam convergência de resultados considerando estruturas com baixa discretização. Os resultados analisados foram o deslocamento, momento fletor e força cortante. Posteriormente realiza-se um estudo de caso de uma ponte em viga. O tabuleiro da ponte é calculado utilizando-se as tabelas de Rüsç e o código SIPlacas. O cálculo dos esforços pelo SIPlacas é realizado de três maneiras. Na primeira consideram-se os painéis de lajes do tabuleiro isolados; na segunda o tabuleiro está sobre apoios não deslocáveis; e na terceira, o tabuleiro apresenta-se com vigas acopladas. Foi concluído que a terceira configuração, cuja representação melhor se aproxima da estrutura real de análise, apresentou os menores esforços internos.

Palavras-chave: Pontes. Superfície de influência. Elementos finitos. Tabelas de Rüsç. Shear Locking. Reissner-Mindlin. Timoshenko.

ABSTRACT

ALBUQUERQUE, A. A. A. Bar and Plate finite elements implementation for the bridge deck effort distribution analysis through influence surfaces. 2014. M. Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

This work aims at the analysis of bridge deck stresses through influence surfaces. The finite element method (FEM) is used and the results are compared with those of Rüsç's tables. The bar and plate finite elements represent stringers, cross beams and slabs bridge deck. These finite elements are implemented in the SIPlacas code and the theories of Timoshenko beam and Reissner – Mindlin plate are used to their formulation. The Shear Locking problem is solved by two proposals: reduced integration and definition of element with transversal shear strain assumed (TSSA). The elements with quadratic approximations for the displacements and TSSA are the best suited to the proposed analysis of this research. Such elements have convergence of results considering structures with low discretization. Displacement, bending moment and shear force were the results analyzed. Subsequently a case study on a beam bridge was carried out. The bridge deck is calculated using Rüsç's tables and SIPlacas code. The calculation of the internal forces by SIPlacas is performed in three ways. The first one considers the slabs isolated panels; the second, the slab deck is on a rigid support; and third, the slab deck is on deformable supports. It was concluded that the third configuration showed the lowest internal forces. This configuration is the optimum representation to the structure analysis.

Keywords: Bridges. Influence surface. Finite elements. Rüsç's Tables. Shear Locking. Reissner-Mindlin. Timoshenko.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Considerações Iniciais	17
1.2	Objetivos	21
1.3	Justificativas	22
1.4	Metodologia.....	23
1.5	Esclarecimentos a respeito do desenvolvimento da pesquisa	24
1.6	Estrutura da dissertação	27
2	PONTES	31
2.1	Modelos de Análise dos Esforços em Tabuleiros de Pontes.....	31
2.2	Ações	35
2.3	Linhas e Superfícies de influência.....	37
2.4	Envoltória de esforços.....	40
2.5	Resumo.....	41
3	TEORIA E ELEMENTO FINITO DE BARRA.....	43
3.1	Formulação Matemática da barra	43
3.2	Formulação do Elemento Finito de Barra.....	46
3.2.1	Matriz de Rigidez e Vetor de Forças.....	50
3.2.2	Cálculo dos Esforços Internos	54
3.3	Resumo.....	54
4	TEORIA E ELEMENTO FINITO DE PLACA	57
4.1	Formulação Matemática da Placa.....	57
4.2	Formulação do Elemento Finito de Placa.....	62
4.2.1	Matriz de Rigidez e Vetor de Forças.....	65
4.2.2	Cálculo dos Esforços Internos	67
4.3	Resumo.....	68

5	ELEMENTOS FINITOS COM CAMPO ASSUMIDO DE DEFORMAÇÃO DE FORÇA CORTANTE (CADFC).....	71
5.1	Travamento por força cortante (Shear Locking)	71
5.2	Modelos com Campos Assumidos de Deformações de Força Cortante (CADFC)	76
5.2.1	Modelos de Barra.....	77
5.2.2	Modelos de Placa.....	86
5.3	Resumo	92
6	ESTUDOS PRELIMINARES DOS ELEMENTOS FINITOS.....	95
6.1	Análise de Barras	95
6.2	Análise de Placas	102
6.2.1	Elemento Finito do DIANA®.....	103
6.2.2	SIPlacas versus Fx+ for DIANA	104
6.2.3	Análise dos elementos de Placa quanto ao efeito do Travamento de força cortante (Shear Locking)	110
6.2.4	Elementos de Placas com Campo Assumido de Deformação: Linear versus Quadrático.....	114
6.3	Resumo	119
7	AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO.....	123
7.1	Campo de Aplicação.....	123
7.2	Organização do Programa.....	124
7.3	Resumo	139
8	ANÁLISE DE UMA PONTE	141
8.1	Apresentação do modelo de análise.....	141
8.2	Cálculo via tabelas de Rüsç.....	143
8.2.1	Carga Permanente	143
8.2.2	Carga Móvel.....	146
8.3	Cálculo automático (Código SIPlacas)	159

8.3.1	Ponte com lajes isoladas	159
8.3.2	Ponte sobre apoios não deslocáveis	187
8.3.3	Ponte com vigas acopladas	209
8.4	Resumo	233
9	CONCLUSÃO	235
9.1	Considerações Finais	235
9.2	Sugestões para trabalhos futuros	243
	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	245

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo busca-se apresentar a importância das pontes para a sociedade e o homem; enfatizar o que será estudado neste trabalho e a sua relevância para a comunidade científica e social. Além disso, expor os objetivos principais e específicos, a justificativa e, por último, a metodologia utilizada para a realização da presente pesquisa.

1.1 Considerações Iniciais

As primeiras pontes realmente projetadas e que levam em consideração o entrave dos apoios com o solo foram construídas pelos romanos a partir do século III a.C. A princípio o seu papel fundamental era apenas transpor obstáculos. Posteriormente, na chamada Idade Média (séculos V ao XV d.C.), as pontes foram construídas com outras finalidades, entre elas destacam-se as pontes residenciais, militares e comerciais.

Na Renascença (séculos XIV ao XVII d.C.) a tecnologia de construção de pontes foi aprimorada pelos franceses, e então, a configuração arquitetônica passou a ter maior importância na fase de elaboração de projeto. Já no período da Revolução industrial, as pontes caracterizavam-se por apresentar grandes vãos e neste contexto surgem as pontes suspensas. Este período, representado por um elevado avanço na tecnologia de materiais, de máquinas e das técnicas de construção, propiciou a elaboração de muitos projetos. Contudo, mesmo diante de todo esse avanço não foi possível impedir danos e colapsos estruturais em pontes.

A partir do caso clássico de colapso ocorrido na ponte de Tacoma Narrow (Figura 1) em 1940, nos Estados Unidos passou-se a considerar a ação do vento na fase de desenvolvimento de projeto estrutural.



Figura 1 - Ponte de Tacoma.

Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/2/2e/Image-Tacoma_Narrows_Bridge1.gif. (Acesso em 15/03/2014)

Nos dias atuais, buscam-se construções de pontes que atendam requisitos de segurança, economia, estética e funcionalidade, com ênfase nestes dois últimos. Com relação à estética, verifica-se que nos casos de pontes cujo aspecto visual no ambiente é importante, o aumento do custo é justificado. E para a funcionalidade, busca-se sempre que as pontes atendam às condições de uso, com o mínimo de manutenção, evitando assim transtornos com a interrupção de tráfegos. (EL DEBS E TAKEYA, 2010).

A Ponte da Mulher (Puente de la Mujer em espanhol), Figura 2, é um exemplo de estrutura de ponte na qual a questão da estética possui papel significativo. Ela foi projetada pelo arquiteto espanhol Santiago Calatrava, e, inaugurada em 2001, na cidade de Buenos Aires, Argentina. A ponte é a representação do desenho de um casal dançando tango. Ritmo de dança característico da cultura Argentina.



Figura 2 – Ponte da Mulher.

Fonte: Adaptado de http://www.cidadesvirtuais.net/artigos/buenos_aires/ponte%20da%20mulher.jpg e <http://static.br.groupon-content.net/00/23/1311806532300.jpg>.

(Acesso em 08/04/2014).

Ressalta-se que a preocupação com a estética das pontes leva a modelos de estruturas com curvas e formas das mais diversas. Isto indica que a análise estrutural passa a ter papel fundamental na determinação adequada dos esforços internos. Atualmente estas análises têm sido realizadas pelos engenheiros estruturais via programas computacionais. Tais programas permitem a modelagem numérica mais adequada das estruturas. Contudo, isto só tem sido possível graças ao aumento da capacidade de processamento dos computadores atuais. Dentre os métodos de resolução numérica de estruturas destaca-se o método dos elementos finitos (MEF).

De maneira geral, pode-se afirmar, portanto, que as pontes surgem no cenário da engenharia com o intuito de transpor obstáculos, tais como vales e rios, a fim de ligar lugares e encurtar distâncias, possibilitando desenvolvimento para cidades e povoados. E por serem capazes de mudar a configuração da paisagem de uma determinada região, as pontes constituem-se em tipos de obras de engenharia símbolo de progresso e superação.

Ao se comparar os processos de desenvolvimento de projeto e de construção entre estruturas usais (edifícios) e pontes, verifica-se que estas últimas apresentam algumas particularidades.

Com relação às ações, pode-se afirmar que o uso da ponte difere do uso dos edifícios. E por isso as cargas consideradas para o cálculo de pontes são distintas

daquelas consideradas para o dimensionamento de edifícios. Nas pontes, em geral, deve-se considerar o efeito dinâmico das cargas, pois as cargas que nelas atuam são móveis. Por isto, torna-se necessário a determinação de envoltória de esforços solicitantes e, por conseguinte, a verificação da possibilidade de fadiga dos materiais.

Quanto aos processos construtivos verifica-se que dependendo da adversidade do local de implantação, as pontes apresentam processos construtivos específicos, fortemente atrelados a elaboração do projeto.

De maneira geral, pode-se definir que as pontes são constituídas pela superestrutura, aparelho de apoio; e infraestrutura, conforme ilustrado a Figura 3.

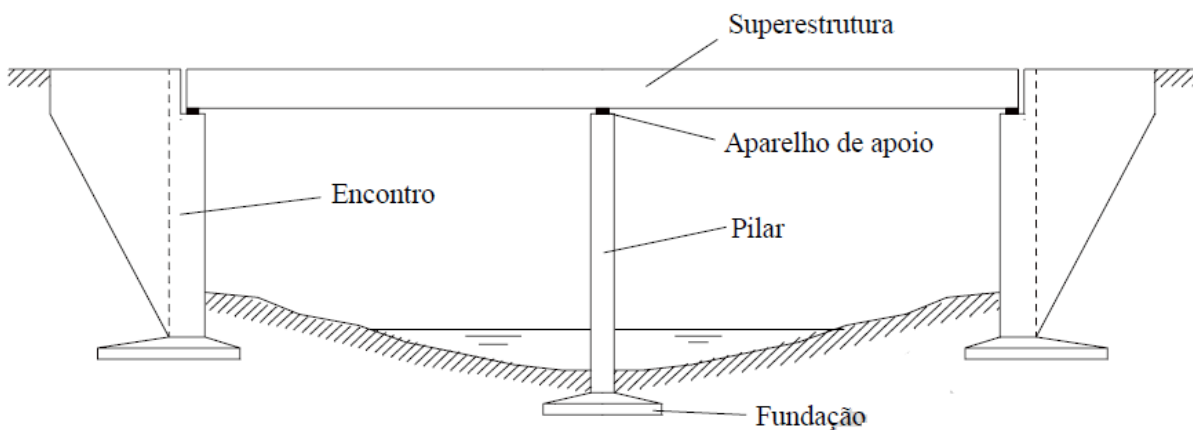


Figura 3 - Esquema ilustrativo da composição das pontes.

Fonte: EL DEBS; TAKEYA, 2010, p. 04.

O enfoque desta pesquisa é avaliar a distribuição dos esforços internos no tabuleiro de pontes, parte integrante da superestrutura. O tabuleiro para as pontes em lajes é composto apenas por lajes, enquanto que para as pontes em viga, é composto por lajes, longarinas e transversinas. As lajes são os primeiros elementos estruturais a serem solicitados pelas forças externas. A sua principal função é distribuir os esforços até as vigas, em caso de pontes em vigas, e/ou para os pilares, em caso de pontes em lajes.

As longarinas são as vigas que possuem o papel de receber os esforços oriundos das lajes e transmiti-los, por sua vez, para os pilares; elas se encontram localizadas

segundo a direção longitudinal da ponte. As transversinas, por sua vez, são vigas que se encontram na direção transversal aos tabuleiros de pontes e conferem um melhor travamento ao tabuleiro como um todo.

1.2 Objetivos

O objetivo principal desta pesquisa consiste em avaliar a distribuição de esforços em tabuleiros de pontes por meio do conceito de superfícies de influência utilizando o método dos elementos finitos (MEF) como ferramenta.

Para isso, as lajes são representadas por elementos finitos de placa e as longarinas e transversinas pelo elemento finito de barra, de graus de liberdade que permitam o acoplamento com aqueles presentes nos nós da placa. O elemento finito de placa escolhido baseia-se na teoria de Reissner Mindlin, ou seja, placa espessa, esta teoria permite que sejam analisadas também lajes com espessuras que o efeito da deformação por força cortante não possa ser negligenciado. Caso que possivelmente possa ocorrer para as pontes em lajes.

Como objetivos específicos, tem-se:

- a) Contribuir no desenvolvimento do código SIPlacas, iniciado pelo professor doutor orientador da presente pesquisa Vladimir Guilherme Haach.
- b) Expor matematicamente e analisar através de exemplos, os efeitos de travamento de força cortante (Shear Locking) que os elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin estão passíveis de apresentar.
- c) Contribuir na implementação de um elemento finito de placa que expõe resultados de maneira mais eficiente. Entende-se que, para a presente pesquisa, o elemento é dito como eficiente à medida que é possível obter resultados satisfatórios da estrutura utilizando a menor discretização possível da malha de elementos finitos.
- d) Contribuir com a implementação de um elemento finito de barra no programa SIPlacas, afim de que o código computacional possa considerar o acoplamento entre este elemento e o elemento finito de placa. Esse

procedimento resultará na possibilidade dos futuros usuários realizarem análises de tabuleiros de pontes que possuam lajes apoiadas em longarinas e transversinas.

- e) Analisar os efeitos das cargas móveis em tabuleiros de pontes.
- f) Confrontar os resultados de esforços internos oriundos de tabuleiros calculados segundo as tabelas de Rüsç e àqueles obtidos a partir da teoria de elementos finitos (código SIPacas).
- g) Contribuir para a comunidade científica na análise das discrepâncias entre os resultados dos modelos de pontes ao se considerar o tabuleiro de ponte calculado considerando: lajes isoladas, lajes apoiadas sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas.
- h) Possibilitar a obtenção dos esforços internos em tabuleiros de pontes através de uma configuração modelada numericamente, segundo a teoria de elementos finitos.

1.3 Justificativas

O ensino, na graduação das universidades brasileiras, com relação ao cálculo de solicitações e análise das distribuições dos esforços em tabuleiros de pontes é realizado considerando as tabelas de Rüsç. De maneira geral, existem dois conjuntos de tabelas que foram idealizadas por Hubert Rüsç (Alemanha) para a análise de lajes. Estas análises se referem aos cálculos de momentos fletores e força cortante.

O primeiro conjunto de tabelas destina-se ao cálculo de lajes retangulares enquanto que o segundo conjunto, elaborado com a colaboração de Hergenröder e Mungan destina-se ao cálculo de lajes esconsas.

Para se calcular os esforços internos do tabuleiro de pontes utilizando as tabelas de Rüsç deve-se, primeiramente considerar as lajes inicialmente isoladas das demais e com condições de contorno adequadas. Em seguida, de acordo com certas relações de características geométricas e das condições de contorno, faz-se necessário que o usuário encontre a laje presente nas tabelas que melhor se

assemelha com a estrutura que se deseja calcular. Desta maneira são calculados, para a respectiva laje isolada, os esforços internos que se almeja. O último procedimento, diz respeito à correção dos esforços internos para as lajes contínuas.

Ao se analisar as tabelas de Rüsç, verifica-se que elas permitem o cálculo simples e rápido dos momentos fletores para as lajes mais frequentes na prática. Por outro lado, as tabelas apresentam apenas alguns casos de configurações de lajes para o cálculo de força cortante.

Neste sentido, esta pesquisa busca melhor representar o comportamento do tabuleiro de pontes. Para isto o método dos elementos finitos (MEF) é utilizado, tendo em vista que ele permite conceber, satisfatoriamente, a simulação do sistema estrutural desejado.

1.4 Metodologia

Para a elaboração da presente pesquisa foi necessário realizar a revisão bibliográfica; em seguida, implementar os elementos finitos de placa e barra no código SIPlacas; e, por último, comparar os resultados das análises do tabuleiro de pontes, obtidos segundo as tabelas de Rüsç e o código SIPlacas.

Os assuntos abordados na revisão bibliográfica são dois. O primeiro diz respeito aos sistemas estruturais que já foram elaborados para se determinar a distribuição de esforços internos dos tabuleiros de pontes. E o segundo, refere-se ao estudo da formulação matemática dos elementos finitos de placa e barra. Quanto a este último, são também discutidos artifícios matemáticos utilizados para contornar o problema de travamento de força cortante (Shear Locking).

Após a implementação dos elementos finitos no código SIPlacas foram realizados estudos preliminares em relação ao comportamento destes elementos. Para isto, consideraram-se exemplos de estruturas submetidas apenas ao carregamento estático.

Uma viga em balanço é analisada, e, os resultados obtidos utilizando os elementos finitos de barra são confrontados com resultados analíticos. Em seguida, verifica-se o problema de travamento de força cortante (Shear locking) que estes elementos apresentam. E, por fim, conclui-se qual dos elementos implementados é o melhor para ser adotado nas futuras análises do código SIPlacas.

Para os elementos finitos de placa implementados, realiza-se, primeiramente, uma comparação entre eles e os elementos de placa do programa Fx+ for DIANA 9.4.4®. Esta comparação é concretizada considerando-se os resultados de esforços internos de uma placa obtidos por ambos os códigos. Em seguida, os resultados dos elementos do código SIPlacas são confrontados com resultados analíticos. Nesta fase, o problema de travamento de força cortante (Shear Locking), para estes elementos, é apresentado e discutido. E, por último explicita-se o elemento que apresenta convergência de malha mais rápida, sendo, portanto o mais interessante a ser utilizado nas futuras análises do código SIPlacas.

Um exemplo de ponte em viga é calculado utilizando as tabelas de Rüsçh e o código SIPlacas. Esta mesma ponte é calculada de três formas pelo SIPlacas. A primeira diz respeito ao cálculo dos esforços internos a partir da consideração de painéis de lajes isoladas; a segunda relaciona-se ao cálculo considerando o tabuleiro sobre apoios rígidos; e a terceira, o tabuleiro encontra-se sobre apoios deformáveis.

1.5 Esclarecimentos a respeito do desenvolvimento da pesquisa

O presente item destina-se em esclarecer pontos importantes à cerca da condução desta pesquisa. Primeiramente, é importante ressaltar que o código SIPlacas já possuía duas opções de elementos finitos de placa implementados pelo professor orientador da presente pesquisa Vladimir Guilherme Haach. Estas opções de elementos finitos possibilitava ao usuário optar qual o elemento que seria utilizado em suas análises. No decorrer da pesquisa os elementos implementados acabaram por ser codificados segundo as siglas $Q4_c$ e $Q4_r$.

Neste sentido, para estes elementos, foi realizada uma análise prévia de um exemplo de placa submetido a carregamento permanente. O objetivo desta análise consistia em comparar os resultados numéricos obtidos com resultados analíticos e com o programa Fx+ for DIANA 9.4.4®. Outro objetivo importante era discutir o comportamento que ambos os elementos finitos apresentavam até se alcançar a convergência do resultado à medida que se aumentava a discretização da estrutura.

Assim, após as análises realizadas com os elementos ($Q4_c$ e $Q4_r$), observou-se que eles conduziam a respostas satisfatórias, apenas quando a malha de elementos finitos da estrutura encontrava-se consideravelmente densa.

Este comportamento pôde ser justificado com base no problema de travamento de força cortante (Shear Locking). Este assunto foi identificado a partir da literatura pesquisada. Desta maneira, verificou-se que este problema encontra-se presente nos elementos de placa cuja formulação se baseia na teoria de Reissner-Mindlin.

Ressalta-se que, os elementos finitos de placas baseados na teoria de Reissner-Mindlin foram implementados por apresentarem uma teoria, segundo a literatura, de ordem superior se comparada com os elementos baseados na teoria de Kircchoff. Esta afirmação decorre do fato da teoria de Reissner-Mindlin possibilitar a análises de placas espessas. Entende-se por placas espessa àquelas cuja influência de deformação devido à força cortante é considerável. Desta maneira, estes elementos, possibilita o código em analisar não apenas pontes em vigas, mas também as pontes em lajes. As pontes em vigas apresentam lajes do tabuleiro mais esbeltas se comparadas àquelas presentes nas pontes em lajes.

No intuito de resolver o problema de travamento foi implementado o elemento finito de placa de grau de aproximação maior. Estes elementos foram codificados no decorrer da pesquisa segundo as siglas $Q8_c$ e $Q8_r$.

Obtiveram-se, para estes elementos, resultados coerentes com as respostas dos elementos lineares para um grau de discretização da estrutura menor. Contudo, os resultados de força cortante apresentaram-se incoerentes com os resultados do

código Fx+ for DIANA 9.4.4®, que também apresenta o elemento finito de placa de aproximação quadrática.

Este fato chamou bastante atenção à medida que a pesquisa estava sendo desenvolvida. Neste sentido, o panorama da pesquisa encontrava-se da maneira a seguir: os elementos finitos de placa do código Fx+ for DIANA 9.4.4® apresentavam convergência de resultados de força cortante, para estruturas com grau de discretização menor, se comparado aos elementos do programa SIPlacas.

Desta maneira, terminou-se por concluir que seria interessante que os elementos finitos implementados no SIPlacas apresentassem o mesmo comportamento do Fx+ for DIANA 9.4.4®.

A busca de um elemento de placa que convirja para valores coerentes ao adotar uma baixa discretização é de interesse para as análises de carga móvel realizadas pelo SIPlacas. Isto acontece, porque o número de nós de certa estrutura determina o tempo de processamento para o cálculo de superfícies de influência e da envoltória de esforços.

Diante desta problemática, foi realizado, concomitantemente a revisão bibliográfica dos elementos finitos de placa, a implementação de alguns elementos finitos mais eficientes no código SIPlacas. E os elementos que apresentaram melhor comportamento foram os elementos finitos com campo assumido de deformação de força cortante (CADFC), codificados como $Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$. E, além disso, observou-se que tais elementos possuíam comportamentos semelhantes aos elementos de placa do Fx+ for DIANA 9.4.4®

Em seguida, foi realizada a comparação entre os elementos finitos lineares e quadráticos com CADFC. E concluiu-se que o elemento $Q8_{CAD}$ é o que melhor se adequa as futuras análises a que se pretende realizar no código SIPlacas. Ou seja, o $Q8_{CAD}$ apresenta resultados coerentes mesmo ao se adotar uma malha pobre.

Os elementos finitos de barra que serão apresentados possuem formulação baseada na teoria de vigas de Timoshenko. Portanto, eles possuem os mesmos

problemas de travamento encontrados nos elementos de placa implementados no SIPlacas. Salienta-se que os elementos de barra foram implementados com o objetivo de eles representarem as longarinas e transversinas dos tabuleiros.

Desta maneira, no código SIPlacas, para as seis (6) opções de elementos finitos de placa que foram analisadas há um elemento de barra correspondente. Seguindo a ideia de codificação adotada para as placas os elementos de barra lineares são: $B2_c$, $B2_r$ e $B2_{CAD}$. Enquanto que para os elementos quadráticos tem-se: $B3_c$, $B3_r$ e $B3_{CAD}$. O elemento finito que apresenta resultados mais satisfatórios é o elemento finito quadrático com CADFC ($B3_{CAD}$) o qual possui compatibilidade com o elemento finito de placa $Q8_{CAD}$.

Concluindo, tem-se que os elementos $Q8_{CAD}$ e $B3_{CAD}$ são àqueles que apresentaram a melhor eficiência na relação reposita satisfatória e discretização da estrutura. A partir disto, foi possível por fim realizar outro objetivo a que a presente pesquisa se propõe. Ou seja, comparar e avaliar os esforços internos provenientes das solicitações de um tabuleiro de ponte considerando as tabelas de Rüsçh e as respostas do código SIPlacas.

Esta etapa da pesquisa foi realizada utilizando apenas os elementos $Q8_{CAD}$ e $B3_{CAD}$. Para isso foi necessário realizar algumas adaptações das rotinas do SIPlacas que geravam as superfícies de influência e as envoltórias de esforços. Isto foi necessário, tendo em vista que no SIPlacas estas rotinas encontravam-se adaptadas para os elementos com aproximação linear. Concluída esta etapa foi possível a realização das comparações e análises.

1.6 Estrutura da dissertação

A dissertação encontra-se estruturada em sequência distinta do desenvolvimento propriamente dito da pesquisa. Esta decisão foi tomada à medida que se buscou discorrer sobre a formulação de elemento finito mais básica para a mais complexa.

O capítulo 2 preocupa-se em expor primeiramente os diferentes modelos de sistemas estruturais já desenvolvidos para a análise de tabuleiros de pontes. E em seguida, trata das considerações que a norma brasileira de pontes (ABNT NBR 7188:2013) adota em relação às cargas móveis e permanentes.

O capítulo 3 apresenta a formulação matemática do elemento de barra implementado, assim como a sua formulação de elementos finitos obtida a partir do funcional de energia.

O capítulo 4 possui objetivo semelhante ao capítulo 3, descrito anteriormente. Contudo, o enfoque deste capítulo é a formulação do elemento finito de placa. Deste modo, é possível acompanhar a determinação do funcional de energia e, por conseguinte a descrição para a montagem da matriz de rigidez do elemento. Por último, são descritas as equações utilizadas na obtenção dos esforços internos.

No capítulo 5 discute-se, efetivamente, o problema que os elementos finitos utilizados apresentam quanto ao efeito de travamento de força cortante (Shear Locking). É descrito, também, dois métodos de tratamento que contornam este problema: sendo um deles a integração reduzida e o outro a adoção de elementos finitos com campo assumido de deformação de força cortante (CADFC). Para estes tratamentos apresentam-se quais as diferenças existentes entre eles, e, por último, expõe-se qual deles é melhor aplicável para se verificar deslocamentos e efeitos de esforços internos.

Em seguida, no Capítulo 6 pretende-se analisar as respostas dos diferentes elementos finitos implementados no SIPlacas. É de interesse também apresentar e discutir os resultados de elementos que possuam o problema de travamento de força cortante. E por último, busca-se ilustrar o comportamento dos elementos quanto à convergência dos resultados em função da discretização da estrutura.

O Capítulo 7 destina-se a apresentação do código SIPlacas. Este capítulo pode ser interpretado como um manual para a utilização do código. Nele, encontra-se a sequência das etapas que precisam ser seguidas no intuito de se obter as diferentes análises a que o programa se propõe a realizar.

No Capítulo 8 encontram-se as comparações e análises realizadas entre um exemplo de ponte calculada utilizando o SIPlacas e as tabelas de Rüsç. Além disso, neste capítulo é comparada a distribuição de esforços na ponte considerando-se as lajes apoiadas sobre apoios rígidos ou sobre as longarinas e transversinas.

E por último, no capítulo 9 são realizadas as conclusões a cerca do que foi estudado no decorrer da pesquisa. Além de apresentar propostas futuras de trabalhos que podem ser desenvolvidos com relação ao tema e utilizando o código SIPLacas.

2 PONTES

Pretende-se expor os modelos de análise dos esforços dos tabuleiros de pontes, as ações características das pontes, a teoria de linha e/ou superfície de influência, assim como o conceito da envoltória de esforços.

2.1 Modelos de Análise dos Esforços em Tabuleiros de Pontes

De acordo com Stanton Apud Gavioli (1998)¹, com o objetivo de melhor representar o comportamento real de pontes, vários modelos de análise de tabuleiros vem sendo formulados pela a análise estrutural; e à medida que os sistemas computacionais vão se desenvolvendo os resultados tem sido satisfatórios para os modelos criados. Neste sentido, é possível dividir as análises em métodos que são listados a seguir:

- a) Método da placa equivalente
- b) Método da grelha
- c) Método dos elementos finitos
- d) Método das faixas finitas
- e) E outros métodos.

O método da placa equivalente considera a modelagem da laje por uma placa ortótropa com propriedades transversais e longitudinais que representam a média das propriedades do modelo. Proposto por Guyon em 1946, na sua formulação despreza-se o efeito da torção e utiliza o efeito dos coeficientes de repartição na

¹ STANTON, J. F.; MATTOCK, A. H. (1986). Load distribution and connection design for precast stemmed multibeambridge superstructures. Transportation Research Board, n. 287.

consideração das cargas. Este método foi posteriormente reformulado por Massonnet em 1950 que introduziu o efeito da torção nos cálculos (El Debs e Takeya, 2010).

Segundo Gavioli (1998), o método da placa equivalente é satisfatoriamente aplicado a tabuleiros com apoios simples, e que não possuem esconsidade, porque a deformação pode ser modelada na direção longitudinal pela série de Fourier, convergindo rapidamente.

O fato de se ter rápida convergência tornou a utilização deste método usual, enquanto não se tinha o computador digital, à medida que para a resolução da série era possível chegar a resultados razoáveis sem grandes considerações, Gavioli, 1998.

Com a evolução dos sistemas computacionais e o advento de microcomputadores o método de grelha passou a ser um dos sistemas mais utilizados e conhecidos entre os engenheiros. De acordo com El Debs e Takeya (2010), dentre os métodos mais conhecidos que consideram o efeito da grelha, como representação do cálculo dos esforços do tabuleiro de pontes, tem-se os processos de Engesser-Courbon e o de Leonhardt.

Engesser-Courbon adota o tabuleiro monolítico transformado numa malha de vigas longitudinais e transversais; despreza o efeito de torção nas vigas e a transversina é suposta como tendo rigidez infinita. Por outro lado Leonhardt considera as mesmas hipóteses, contudo a transversina é considerada flexível.

Stallings e Yoo (1992) confrontaram os resultados de tensões e deslocamentos da análise de tabuleiros de pontes considerando o modelo de grelha na sua representação, com testes realizados em pontes existentes. E concluíram que a discrepância entre os valores medidos in loco em relação aos previstos em cálculo era na ordem de 30%. Complementando, o que já se era de esperar, que a análise de grelhas resulta ser um método conservativo.

Segundo Gavioli (1998), a vantagem deste método é que a esconsidade, chaves de cisalhamento entre os elementos pré-moldado, diafragmas, rigidez da viga de borda podem ser facilmente modelados. Enquanto que a desvantagem é a necessidade do cálculo das características geométricas das barras equivalentes e a exigência de uma malha rica (grande número de barras) em regiões onde se deseja a análise local do tabuleiro sob efeito de um carregamento.

O método dos elementos finitos (MEF) surge com a formulação tal como é utilizada hoje na década de 1950. Como os pesquisadores precursores do método têm-se o Turner e Clough, Martin e Topp, que em 1956 publicaram trabalhos que desmitificavam a sua formulação.

O MEF mostra-se como a ferramenta mais versátil de cálculo para se modelar estruturas. Os tabuleiros de pontes são discretizados por elementos de barras, com os mesmos graus de liberdade da grelha, e elementos de placa e chapa. Contudo, no início de sua utilização observava-se que o método era inaplicável com os computadores da época, por demandar alta capacidade de memória.

O método das faixas finitas (MFF) difere do método dos elementos finitos (MEF) por considerar a discretização unidirecional da estrutura. E embora, a análise pelo MEF possa ser aferida para quaisquer geometrias, condições de borda e materiais, tem-se para o MFF, segundo Puckett (1986), uma análise de modelo consideravelmente simples. Pois ela pode ser realizada através de implementação de rotinas mais simples o que garantem melhor eficiência computacional.

Puckett (1986) colaborou com o estudo do método da composição de faixas finitas, para analisar os tabuleiros de pontes. Nesta análise o tabuleiro da ponte é modelado por uma placa contínua elástica linear. As longarinas e transversinas por elementos de vigas, que consideram a rigidez a flexão e a torção. Os pilares por elementos com rigidez axial. A Figura 4 ilustra um exemplo da discretização de uma ponte considerando o método das faixas finitas.

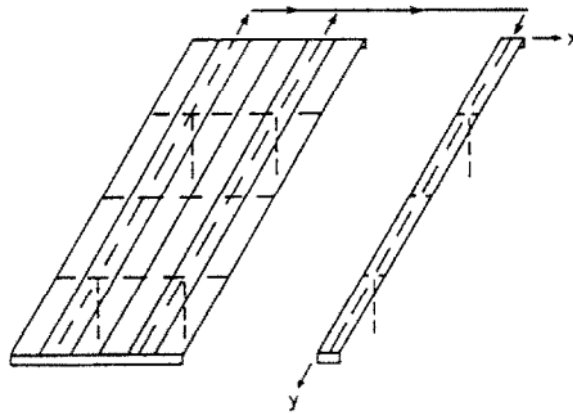


Figura 4 - Método das faixas finitas [Puckett, 1986]

Mais recentemente, no mesmo sentido de propor métodos que demandem menos esforços computacionais, Guo, Harik e Ren (2002) estudaram a formulação de elementos finitos semi-discretos na análise de momentos em placas enrijecidas excêntricas e tabuleiros de pontes submetidos a cargas transversais. O objetivo deste estudo consiste em representar a estrutura da ponte por um método capaz de verificar os esforços com baixo grau de sofisticação.

A teoria de placa utilizada é a de placa delgada com pequena deformação. Os elementos finitos de placa foram utilizados para representar a laje e os enrijecedores foram simulados por elementos de viga. A discretização da laje é adotada sempre na direção longitudinal dos enrijecedores. Os autores concluíram que o método é eficiente, à medida que pode ser usado em estruturas complexas com o potencial de eliminar graus de liberdade.

Xing e Wang (2011) analisaram as deformações e os momentos fletores em um modelo simplificado de ponte suspensa sob a ação de cargas móveis utilizando o método baseado em função singular. Ainda, segundo Xing e Wang (2011) a linha de influência de momento fletor formada a partir da função singular é suavizada por segmentos de função. E o valor dos esforços máximos em uma determinada seção da laje vai depender da intensidade da carga, sua localização e distribuição.

Huang et al. (2007) utilizaram a teoria de placa fina ortotrópica somada a suposição de Huber (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959), para simular lajes de tabuleiros de pontes armadas em duas direções. Este estudo foi comparado com os resultados

do modelo de elementos finitos proposto por Huang (2001). Os autores concluíram que as suposições que Huber adota para a rigidez a flexão e torção resultam em valores próximos a aqueles aplicados no modelo de Huang. Os valores dos deslocamentos e tensões alcançaram diferenças relativas na ordem de 7%.

Wang e Qu (2011) estudaram a ação das cargas móveis de trens em uma ponte de treliça utilizando o método dinâmico da linha de influência. Os autores simularam e compararam os resultados das ações de vagões de trens em uma ponte segundo dois métodos. O primeiro diz respeito ao método tradicional, o qual utiliza equações de movimento baseadas no deslocamento que são funções de formas e da amplitude; e o segundo baseia-se no método dinâmico da linha de influência que é definido como sendo o tempo de história da variação do deslocamento de certa seção quando uma carga unitária se move ao longo da ponte. Os autores concluem que o método dinâmico da linha de influência é eficiente e robusto à medida que considera parâmetros como a velocidade do trem, número de vagões e número de estações de medições. E que a grande vantagem em comparação com o método tradicional é a sua rápida solução.

2.2 Ações

De maneira geral, as pontes estão submetidas a carregamentos oriundos de cargas estáticas e cargas móveis. Como exemplo de carga estática, pode-se citar o peso próprio da estrutura. Em relação a cargas móveis têm-se os veículos que por ela circula.

Diferentemente das estáticas as cargas móveis apresentam-se como sendo uma forma de carregamento específica para as pontes. Em projetos, verifica-se que elas são consideradas de maneira diferente dos carregamentos dinâmicos usualmente estudados. Sucintamente, pode-se afirmar que este carregamento é considerado estático com um fator de majoração.

A norma brasileira (ABNT NBR 7188:2013) dispõe diretrizes para a consideração da carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras

estruturas. De acordo com a NBR 7188:2013 verifica-se que o carregamento móvel pode ser caracterizado por um veículo tipo padrão TB-450kN. O peso do veículo é transferido para a estrutura a partir de seis rodas que acabam por aplicar na pista uma força P de valor igual 75 kN, cada. Ele apresenta, também, três eixos de carga afastados entre si em 1,50 m, com área de ocupação de 18,00 m². Conforme ilustra Figura 5.

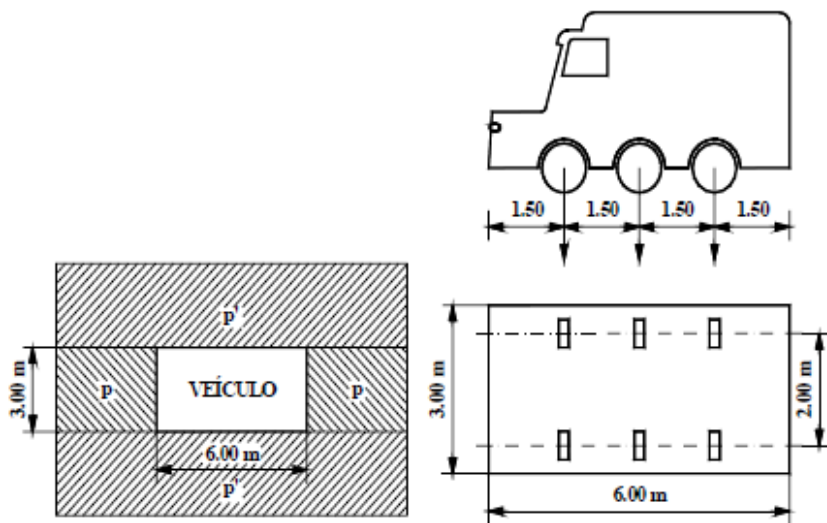


Figura 5 - Disposição do carregamento e características do veículo tipo. [Adaptado da norma ABNT NBR 7188:2003].

Considera-se também, concomitantemente a aplicação da carga do veículo na pista, uma carga uniformemente distribuída constante de valor p' igual a 5 kN/m², na área não recoberta pelo trem tipo.

Enfim, para se determinar a solicitação de projeto em tabuleiro de pontes as cargas P e p , anteriormente apresentadas, devem ser multiplicadas, conforme expressões (2.1) e (2.2), pelos fatores de majoração: CIV, CNF e CIA. A ABNT NBR 7188:2013 apresentam as expressões e considerações para se determinar estes fatores.

$$Q = P.CIV.CNF.CIA \quad (2.1)$$

$$q = p.CIV.CNF.CIA \quad (2.2)$$

Onde,

- CIV corresponde ao coeficiente de impacto vertical;
- CNF é o coeficiente de número de faixas;
- CIA é o coeficiente de impacto adicional.

A combinação das cargas móveis juntamente com as ações permanentes e excepcionais e as demais ações variáveis são as solicitações em que a ponte deve ser projetada. Observa-se que a norma ABNT NBR 7188:2013 prevê apenas a análise de um trem-tipo, ou seja, não é considerada a passagem, no tabuleiro, de dois veículos tipo simultaneamente.

2.3 Linhas e Superfícies de influência

Para se dimensionar uma determinada estrutura, depois de especificar as ações representativas que atuam na sua vida útil, faz-se necessário o cálculo dos esforços internos. Assim, no decorrer do cálculo do projeto deve-se avaliar para cada seção da estrutura a posição e valor da carga que provocará os esforços máximos e mínimos.

As cargas móveis das pontes possuem características distintas das ações permanentes. Isto acontece porque elas variam não apenas com a amplitude da sua intensidade, mas também com a posição em que ela é aplicada. E a depender destas duas informações os efeitos na estrutura podem ser os mais diversos.

Neste sentido, uma maneira de se realizar a análise de pontes submetidas a cargas móveis seria a de considerar várias combinações de ações em todas as posições possíveis da estrutura. E em seguida, calcular os esforços para todas as suas seções.

Contudo, uma forma de desviar este trabalho, que para certos casos poderia se tornar custoso, utiliza-se o conceito de linha ou superfície de influência. A teoria de linhas ou superfícies de Influência (*LS-I*) surge no intuito de descrever a variação de um determinado efeito em uma estrutura a partir da posição de uma carga vertical unitária que passeia sobre ela.

De maneira geral, podem-se construir linhas ou superfícies de influência (LS-I) de duas maneiras. A primeira a partir da própria definição da (LS-I), explicitada anteriormente, e a segunda baseada no princípio de Müller-Breslau.

O princípio Müller-Breslau constrói a linha de influência de um determinado esforço numa seção a partir da consideração da deformada da estrutura, considerando um deslocamento unitário associado ao vínculo que se deseja obter a linha de influência.

Shen (1992) afirma que a construção das linhas de influência de acordo com o princípio de Müller-Breslau é melhor aplicado para estruturas mais discretas, tais como, treliças, vigas e pórticos. Tendo em vista que à medida que a configuração da estrutura se torna mais complexa, a representação da mesma acaba por necessitar de elementos finitos mais sofisticados. Fato que conduz a representações de deformadas da estrutura mais dispendiosas para serem determinadas.

No código SIPlacas as superfícies de influência são construídas a partir de uma rotina que varia a posição de uma carga concentrada unitária ao longo da estrutura. Como será visto no decorrer do trabalho, os pontos em que a carga estará percorrendo serão os nós dos elementos finitos utilizados na discretização da estrutura.

Sabe-se que ao se utilizar a teoria de (LS-I) não é necessária à locação das possíveis combinações de cargas em todas as posições da estrutura, assim como o respectivo cálculo dos esforços internos para todas estas posições. É necessário apenas considerar a carga que se deseja analisar na posição da LS-I que resultaria em um maior esforço na seção e por fim realizar o cálculo dos esforços.

Desta maneira, após a construção da linha ou superfície de influência é possível mensurar uma reação de apoio, uma força cortante ou um momento fletor em uma seção específica.

Huang e Harry (2008) realizaram estudos sobre a determinação de linhas de influência através de investigações experimentais sobre a ponte 1-991-S. Esta ponte cruza a estrada Diamante Negro localizada no norte de Smyrna. A metodologia empregada no desenvolvimento da pesquisa é conhecida como Determinação Experimental dos Deslocamentos Contínuos da Linha de Influência em Pontes que se baseia na teoria básica de vigas e no método dos mínimos quadrados.

Os autores afirmam que a metodologia funciona muito bem no âmbito de testes em campo. Tendo em vista que os valores dos deslocamentos da linha de influência determinados experimentalmente são consistentes e comparáveis com os resultados da teoria de linha de influência.

Assim, a *LS-I* de momento fletor em uma seção é a representação gráfica ou analítica do momento fletor, na seção de estudo, produzida por uma carga concentrada vertical unitária, geralmente de cima para baixo, que percorre a estrutura.

A Figura 6 apresenta a linha de influência de momento fletor numa viga contínua para uma dada seção S . A ordenada M_S , que é função de x e que pode ser escrita como $LIM_S(x)$, representa o momento fletor da seção S produzida por uma carga unitária na posição x .

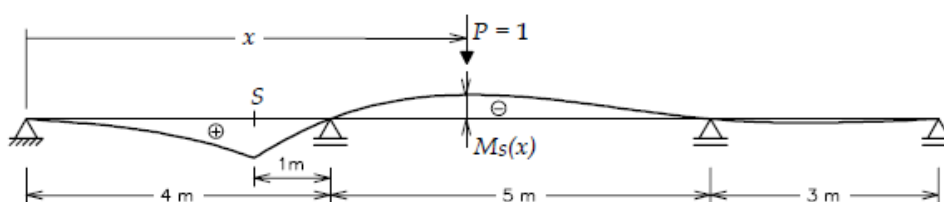


Figura 6 - Linha de Influência de momento fletor numa viga contínua. [MARTHA, 2010].

Nesta pesquisa os esforços serão obtidos unicamente a partir da construção de superfícies de influência. O conceito de superfícies de influência surge ao se trabalhar com elementos bidimensionais com componentes de carga atuando transversalmente a superfície destes elementos. Na Figura 7 encontra-se representada a superfície de influência do momento fletor na direção x , no ponto S,

de uma estrutura composta por duas placas de dimensões 2,50m x 4,50m, conforme Figura 7 (a). As bordas das placas encontram-se simplesmente apoiadas (contorno mais escuro) e uma borda da placa encontra-se engastada. A carga P possui valor unitário e percorre todos os pontos da estrutura discretizada.

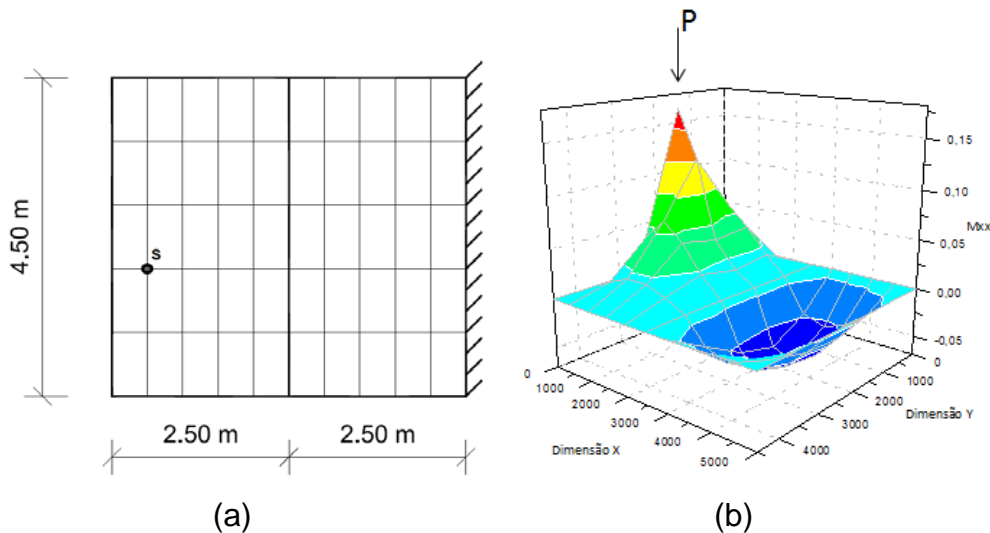


Figura 7 - Representação da Superfície de Influência de momento fletor M_x .

2.4 Envoltória de esforços

Utilizando a linha ou superfície de influência dos pontos que se deseja analisar e da posição das cargas que produzam os valores máximos e mínimos dos esforços internos é possível construir a envoltória de esforços.

A envoltória de esforços é definida como sendo a região que se encontram os possíveis esforços que podem surgir na vida útil da estrutura. Esta região é determinada a partir do domínio entre duas linhas ou superfícies, que marcam os valores de esforços máximos e mínimos em todos os pontos da estrutura.

Como explicitado anteriormente, as cargas móveis são ações específicas que devem ser consideradas para o dimensionamento de pontes. Estas ações provocam esforços internos na estrutura que não dependem apenas da intensidade da carga mas também da posição em que ela é aplicada.

Desta maneira, observa-se que qualquer ponto do tabuleiro da ponte encontra-se submetido a variações de intensidade de esforços. Podendo em alguns casos mudar o sentido de sollicitação do material, como por exemplo, uma seção da laje que se encontra submetida a esforços de tração pode passar a ser sollicitada a compressão.

Neste contexto, no intuito de possibilitar o dimensionamento de pontes é imprescindível a construção de envoltórias de esforços nos tabuleiros.

As expressões 2.3 e 2.4 expõem de maneira simplificada como são determinados os valores de esforços máximo e mínimos de um ponto qualquer no tabuleiro da ponte.

$$(S_S)_{máx} = S_S^g + (S_S^q)_{máx} + (S_S^P)_{máx} \quad 2.3$$

$$(S_S)_{mín} = S_S^g + (S_S^q)_{mín} + (S_S^P)_{mín} \quad 2.4$$

Observa-se que os valores máximos e mínimos são obtidos a partir da composição de todos os carregamentos que atuam na ponte, sejam eles, peso próprio (S_S^g), carga de multidão ($(S_S^q)_{máx}$) e carga do veículo ($(S_S^P)_{máx}$).

No código SIPlacas primeiro determina-se os esforços resultantes da ação do peso próprio, e em seguida determina-se os esforços resultantes da combinação das cargas de multidão e veículo.

2.5 Resumo

Este capítulo apresentou alguns modelos de análise de tabuleiros que já foram adotados com o objetivo de melhor representá-los. Entre os modelos apresentados tem-se: o Método da placa equivalente; o Método da grelha; o Método dos elementos finitos e Método das faixas finitas.

Em seguida, foram discutidas as ações em que as pontes estão sujeitas. Sendo ações de caráter permanente, tais como o peso próprio; e ações de cargas móveis. Para as ações de cargas móveis foi discutido como a atual norma brasileira de pontes (ABNT NBR 7188:2013) determina que elas devam ser consideradas.

Continuando, foi discutido como a teoria de linhas e ou superfícies de influência é utilizada para se determinar os esforços solicitantes pela ação de cargas móveis. E por último o conceito de envoltória de esforços foi explicado. E demonstrou-se como a envoltória é obtida.

3 TEORIA E ELEMENTO FINITO DE BARRA

Apresenta-se a fundamentação de vigas de Timoshenko, em seguida expõe-se a formulação dos elementos finitos de barra.

3.1 Formulação Matemática da barra

Os elementos finitos de barra que serão utilizados nas análises derivam-se da formulação do elemento finito de viga de Timoshenko acrescentando o parâmetro referente à rotação em relação ao eixo longitudinal do elemento. Desta maneira, para os elementos finitos estudados, serão considerados três graus de liberdade por nó, totalizando em seis graus de liberdade para o elemento linear e nove graus de liberdade para o elemento quadrático.

Os possíveis deslocamentos que o elemento poderá apresentar referem-se ao deslocamento transversal ao eixo longitudinal da barra (w), e as rotações segundo os eixos longitudinal (θ_x) e transversal (θ_y). Na Figura 8 encontra-se esquematizado os graus de liberdade do elemento finito linear de barra estudado neste trabalho.

A formulação da viga de Timoshenko, apresentada a seguir, foi extraída de Branco (2002) e Soriano (2003). A diferença entre a viga de Timoshenko e a de Euler-Bernoulli encontra-se basicamente na consideração da deformação por força cortante. Enquanto a viga de Timoshenko considera os efeitos dos esforços cisalhantes a de Euler-Bernoulli admite que a viga tenha efeitos preponderantemente de flexão.

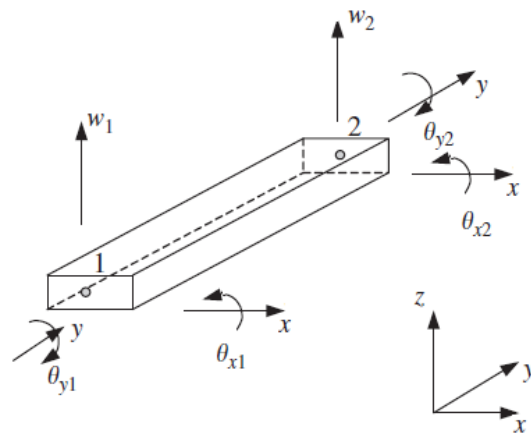


Figura 8 - Graus de liberdade do elemento finito de barra de aproximação linear. [Adaptado de LIU (2003)].

Nas duas formulações define-se que as seções permanecem planas após as deformações, entretanto na viga de Timoshenko a seção plana rotacionada não necessariamente é perpendicular ao eixo deformado (Linha neutra). Pode-se, portanto, afirmar que a distorção é diferente de zero. (Figura 9).

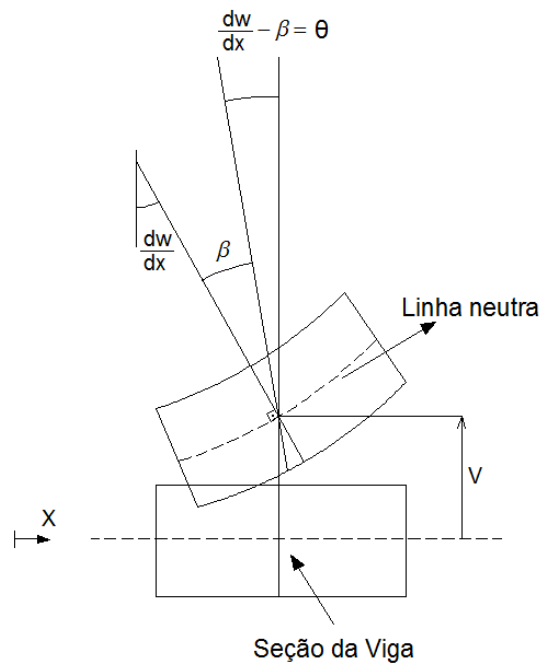


Figura 9 - Deformação em vigas com efeito do cisalhamento. [Adaptada de BRANCO, 2002].

Desta maneira pode-se escrever a expressão deslocamento u em um ponto qualquer (x,z) diretamente em termos de (θ) , conforme expressão (3.1):

$$u(x, z) = -z\theta(x) \quad (3.1)$$

Nota-se que a rotação (θ) é igual ao declive do eixo neutral ($\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$) menos a rotação devido à consideração por deformação quanto ao cisalhamento, expressão (3.2).

$$\theta(x) = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \beta \quad (3.2)$$

Nota-se também que o deslocamento transversal \bar{w} em qualquer ponto (x,z) é dado pelo deslocamento transversal do eixo neutral, relação (3.3).

$$\bar{w}(x, z) = w(x) \quad (3.3)$$

Na teoria de viga de Timoshenko, a relação de tensão e deformação usada é a do estado plano de tensões. Assumindo que a viga encontra-se no plano xz e que o material é isotrópico elástico linear a relação tensão-deformação é definida conforme expressão (3.4).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se σ_z é assumido igual a zero então,

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \quad (3.5)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.6)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (3.7)$$

Ao considerar pequenos deslocamentos o deslocamento ao longo do eixo longitudinal da viga pode ser escrito a partir da equação (3.8):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (3.8)$$

Substituindo a expressão (3.8) em (3.1), tem-se a expressão (3.9):

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.9)$$

De maneira similar tem-se que para a deformação devido ao cisalhamento a relação com o deslocamento é expressa conforme equação (3.10):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (3.10)$$

E substituindo a expressão (3.1) em (3.10), tem-se a relação (3.11):

$$\gamma_{xz} = -\theta + \frac{\partial w}{\partial x} = \beta \quad (3.11)$$

3.2 Formulação do Elemento Finito de Barra

O elemento finito de barra estudado será desenvolvido, como já explicitado anteriormente, considerando a energia de deformação de uma barra submetida à torção somada à energia de deformação da teoria de viga de Timoshenko. Para isso a figura Figura 10 a seguir expõe o elemento de barra com as respectivas direções dos graus de liberdade do elemento linear e quadrático.

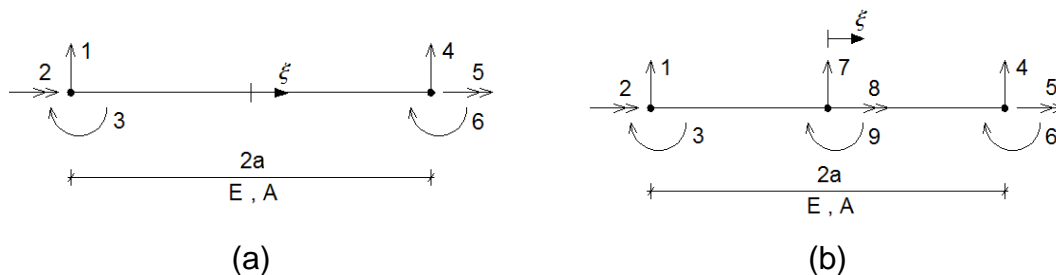


Figura 10 – Elementos Fintos de Barra: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático.

As expressões escritas em (3.12) referem-se à aproximação adotada tanto para o deslocamento vertical quanto para as rotações em x e y .

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \quad (3.12)$$

As funções de forma N são dadas pela expressão a seguir, (3.13) e (3.14):

(a) Para o elemento linear

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.13)$$

(b) Para o elemento quadrático

$$N_1 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \quad N_2 = \frac{1}{2}(\xi^2 + 1) \quad N_3 = (1 - \xi^2) \quad (3.14)$$

Reescrevendo em forma matricial, as relações escritas em (3.12), e respeitando a ordem dos graus de liberdade expostos na Figura 10, tem-se as equações (3.15) e (3.16):

(a) Para o elemento linear

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

(b) Para o elemento quadrático

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

A energia de deformação de uma barra submetida à torção é dada conforme expressão (3.17).

$$U_e^t = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \frac{M_t^2}{GI_x} d\xi \quad (3.17)$$

A relação entre o giro da seção transversal e o momento torsor é dado pela relação (3.18), escrita a seguir:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{\partial \theta_x}{a \partial \xi} = \frac{M_t}{GI_x} \Rightarrow M_t = GI_x \frac{\partial \theta_x}{a \partial \xi} \quad (3.18)$$

Substituindo na expressão da energia de deformação (3.17) a equação (3.18), se obtém a expressão (3.19):

$$U_e^t = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 GI_x \left(\frac{\partial \theta_x}{a \partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (3.19)$$

Para uma viga a expressão de energia de deformação pode ser escrita conforme equação (3.20).

$$U_e^v = \frac{1}{2} \int_v [\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (3.20)$$

Substituindo as expressões (3.6) e (3.7) na equação (3.20), tem-se a equação (3.21):

$$U_e^v = \frac{1}{2} \int_v [\varepsilon_x^T E \varepsilon_x + \gamma_{xz}^T G \gamma_{xz}] dV \quad (3.21)$$

Para o elemento de barra em questão a energia de deformação pode então ser obtida a partir da soma das energias de deformação da barra sob torção e da viga de Timoshenko, conforme equação (3.22).

$$U_e = U_e^t + U_e^v \quad (3.22)$$

Inserindo na expressão (3.21) as relações (3.9) e (3.11) e em seguida substituindo-a junto com a expressão (3.19) na equação (3.22), obtém-se a expressão (3.23).

$$\begin{aligned} U_e = & \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x}^T EI_x \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right] d\xi + \\ & \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \left[\left(-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^T G \bar{A} \left(-\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] d\xi + \\ & \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial x}^T EI_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right] d\xi \end{aligned} \quad (3.23)$$

A expressão (3.23) pode também ser escrita conforme a equação (3.24).

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^t]^T GI_x [B^t] \{d\}^T d\xi \\
& \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^c]^T G\bar{A} [B^c] \{d\}^T d\xi + \\
& \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 \{d\}^T [B^f]^T EI_y [B^f] \{d\}^T d\xi
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Onde \bar{A} é determinado segundo um fator de correção α e obtido pela relação $\bar{A} = A/\alpha$, que depende do tipo da geometria da seção transversal, equações (3.25) e (3.26).

Para seções retangulares:

$$\alpha = (12 + 11\nu)/(10 + 10\nu) \tag{3.25}$$

E para seções transversais circulares:

$$\alpha = (7 + 6\nu)/(6 + 6\nu) \tag{3.26}$$

O parâmetro ν é o coeficiente de Poisson. E segundo Owen e Hinton (1980) o parâmetro α pode ser aproximado, usualmente, por 1,5.

Observa-se que o primeiro termo da equação (3.24) refere-se à energia de deformação da barra submetida à torção. Enquanto que, o segundo e terceiro termos correspondem à energia de deformação ao cisalhamento e a flexão, respectivamente.

3.2.1 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças

A matriz de rigidez é obtida minimizando a energia de deformação, equação (3.24), o que resulta na equação (3.27):

$$\begin{aligned}
\delta U_e = & \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^t]^T G I_x [B^t] \{d\}^T d\xi + \\
& a \int_{-1}^1 [B^c]^T G \bar{A} [B^c] \{d\}^T d\xi + \\
& \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^f]^T E I_y [B^f] \{d\}^T d\xi
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Portanto a matriz de rigidez do elemento é dada conforme expressão (3.28).

$$K_e = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^t]^T G I_x [B^t] d\xi + a \int_{-1}^1 [B^c]^T G \bar{A} [B^c] d\xi + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^f]^T E I_y [B^f] d\xi \tag{3.28}$$

Observa-se que a primeira parcela refere-se à contribuição da energia de torção na barra, a segunda de cisalhamento e a terceira de flexão.

Onde o campo de deformação (B) é dado de acordo com as expressões de (3.29) à (3.40).

(a) Para o elemento linear

Parcela de torção

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Parcela de cisalhamento

$$B^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & -N1 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & -N2 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$B^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & 0 & \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Parcela de Flexão

$$B^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$B^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

(b) Para o elemento quadrático

Parcela de torção

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{2\xi}{a} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Parcela de cisalhamento

$$B^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & -N1 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & -N2 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} & 0 & -N3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$B^c = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & -\xi \left(\frac{\xi - 1}{2} \right) & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & -\xi \left(\frac{\xi + 1}{2} \right) & -\frac{2\xi}{a} & 0 & \xi^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Parcela de Flexão

$$B^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$B^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{2\xi}{a} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

As matrizes de rigidez encontram-se nas relações descritas em (3.41), para o elemento linear, e (3.42), para o elemento quadrático.

(a) Para o elemento linear

$$K = \begin{bmatrix} \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} \\ 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GAa}{3}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) \\ -\frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} \\ 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GAa}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

(b) Para o elemento quadrático

$$K = \begin{bmatrix} \frac{7GA}{6a} & 0 & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{6} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & \frac{2GA}{3} \\ & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ & & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) & \frac{GA}{6} & 0 & \left(\frac{EI_y}{6a} + \frac{GAa}{15}\right) & -\frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{15} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ & & & \frac{7GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{2} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{2GA}{3} \\ & & & & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ & & & & & \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{4GAa}{15}\right) & \frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{15} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ & & & & & & \frac{8GA}{3a} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{8GI_x}{3a} & 0 \\ SIM & & & & & & & & \left(\frac{8EI_y}{3a} + \frac{16GAa}{15}\right) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Determina-se o vetor de forças a partir da expressão da energia externa que é escrita conforme expressão (3.43).

$$U_c = \int_v \{P\} \{d\} dv = |J| \int_{-1}^1 N^T \begin{Bmatrix} f_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \quad (3.43)$$

3.2.2 Cálculo dos Esforços Internos

Os esforços internos são calculados a partir da integral da tensão na área da seção transversal. As expressões (3.44), (3.45) e (3.46) ilustram como são realizados os cálculos dos esforços no código SIPlacas.

$$M_t = GI_x B^t Desl \quad (3.44)$$

$$Q = \int_A \tau_{xy} y dA = \tau_{xy} \bar{A} = G \bar{A} \gamma_{xy} = G \bar{A} B^c Desl \quad (3.45)$$

$$M_f = \int_A \sigma_x y dA = -EI_y \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = -EI_y B^f Desl \quad (3.46)$$

Onde, *Desl* representa o vetor de deslocamentos de um determinado elemento obtido.

3.3 Resumo

Neste capítulo foi visto que a teoria de Timoshenko considera o efeito de força cortante na deformada de vigas. Este fato determina que uma seção rotacionada não necessariamente seja perpendicular ao eixo longitudinal na configuração de deformada da viga. E, portanto, esta é a diferença entre a teoria de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Contudo, é importante ressaltar que nas duas formulações define-se que as seções permanecem planas após as deformações.

Discorrida a formulação matemática da teoria de Timoshenko foram apresentados os elementos finitos de barra que serão utilizados neste trabalho. Estes elementos foram formulados a partir da energia de deformação de uma barra submetida à torção, somada, à energia de deformação da teoria de viga de Timoshenko.

Pôde ser observado que os elementos finitos apresentam formulação que definem que eles possuem desacoplamento cinemático. O que significa dizer que foram adotadas aproximações para os deslocamentos transversais e as rotações. E a partir das considerações das aproximações, dois elementos finitos foram

formulados. O primeiro, com aproximações lineares, e o segundo com aproximações quadráticas.

O elemento finito linear possui aproximações lineares para os parâmetros nodais. Ele apresenta 2 nós por elemento e 6 graus de liberdade, sendo 3 por nó. Enquanto que o elemento finito quadrático, apresenta aproximações quadráticas para os parâmetros nodais e 3 nós por elemento. Possuindo, portanto 9 graus de liberdade, sendo 3 por nó.

A matriz de rigidez foi determinada a partir da minimização da energia de deformação do elemento. E a matriz de rigidez obtida é composta por três parcelas de energia. Sendo, a primeira referente à contribuição da energia de torção na barra, a segunda de cisalhamento e a terceira de flexão.

4 TEORIA E ELEMENTO FINITO DE PLACA

Apresenta-se a fundamentação de Placa Espessa ou Placa de Mindlin, em seguida expõe a formulação do elemento finito de placa utilizado.

4.1 Formulação Matemática da Placa

A formulação matemática que se pretende expor foi descrita a partir dos livros de Soriano (2003), Bathe (1996), Liu (2003) e Zienkiewicz (2000). O objetivo de apresentar a teoria de placas é de fornecer o suporte necessário para compreensão da formulação dos elementos finitos que serão aplicados nas análises da presente pesquisa.

As placas são elementos estruturais, que apresentam espessura h pequena em relação às demais dimensões, e que são submetidas a esforços normais ao plano médio. Dependendo das propriedades que as constituem, elas podem ser ortótropas ou isotrópicas.

No estudo de placas deve-se estar ciente das possíveis representações em que elas podem apresentar. Na literatura, elas são normalmente divididas em: Placas Delgadas e Placas Espessas.

As placas delgadas, ou de Kirchhoff, caracterizam-se por desprezar a parcela de deformação por cisalhamento transversal, ou seja, a deformação da placa é composta apenas pela parcela de deformação por flexão. Em contrapartida, na teoria de placa espessa, ou placa de Reissner-Mindlin, são consideradas as duas

parcelas de deformações, ou seja, a deformação por cisalhamento transversal somada à de flexão.

Assim, dependendo da placa que se deseja analisar, deve-se ter atenção em particular às considerações na qual a sua teoria se baseia. A seguir encontra-se em resumo as hipóteses da teoria de cada placa.

a. Placas delgadas

- ✓ Não há deformação no plano médio da placa
- ✓ Os pontos que se encontram inicialmente normais ao plano médio da placa permanecem normais a ele, mesmo após a flexão da placa.
- ✓ As tensões normais transversais à placa são desprezadas.
- ✓ As tensões cisalhantes são desprezíveis.

b. Placa Espessa

- ✓ Deve-se considerar na deformação o efeito do cisalhamento;
- ✓ Na teoria de placas espessas (Reissner-Mindlin) as seções planas não permanecem planas após as deformações (Figura 11). Por outro lado, com o objetivo de simplificar o tratamento matemático do problema, calculam-se o deslocamento médio w_0 e os giros médios da seção x e y , e supõe-se que, com estes valores, as seções permaneçam planas, mas não normais à superfície média deformada (Figura 11).

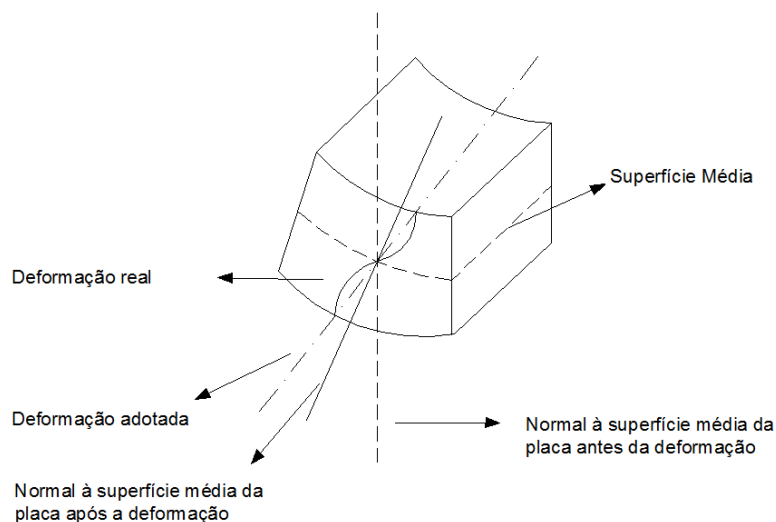


Figura 11 - Deformação de um Elemento Infinitesimal de uma Placa Espessa. (Paiva, 2012).

No presente trabalho a teoria de placa utilizada é a de Reissner-Mindlin. A justificativa para a utilização desta teoria se baseia no fato dela se apresentar como sendo uma teoria de placa mais completa, se comparada com a de Kircchoff. Tendo em vista que, como já comentado anteriormente, ela considera as deformações causadas por deformações transversais somada a parcela de flexão.

Com isso, verifica-se que a implementação destes elementos finitos no código SIPlacas permitirá a avaliação de casos em que as lajes de pontes apresentem deformação por cisalhamento transversal significativa. Como exemplo, tem-se as pontes em lajes, que normalmente se apresentam com alturas mais espessas.

A fim de facilitar a visualização espacial da geometria da placa, na Figura 12 encontra-se o esquema do sistema de coordenadas adotado na formulação do elemento finito de placa do presente trabalho.

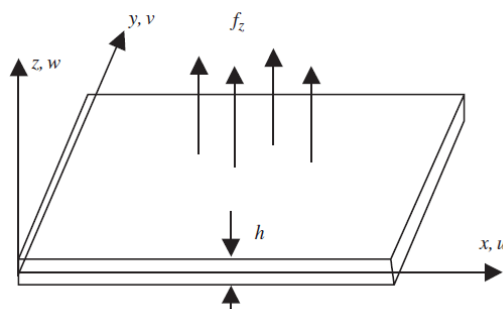


Figura 12 - Sistema de coordenadas. [LIU, 2003]

Pode-se observar que o plano da placa é definido segundo os eixos x e y , e por consequência o eixo z é normal à superfície da placa. Os deslocamentos segundo os eixos x , y e z são representadas pelas letras u , v e w , respectivamente.

A energia de deformação da teoria de Placa compõe-se da soma das parcelas de flexão U_b e de cisalhamento U_s , equação (4.1).

$$U_e = U_b + U_s \quad (4.1)$$

Que pode ser expressa a partir da equação (4.2):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_0^h \varepsilon^T \sigma dAdZ + \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_0^h \tau^T \gamma dAdZ \quad (4.2)$$

Onde:

ε é o vetor de deformações que pode ser escrito conforme equação (4.3):

$$\varepsilon = -z\chi = -zL\theta \quad (4.3)$$

σ é a tensão normal a seção transversal da placa, e pode ser escrita como: $\sigma = c\varepsilon$ (Lei de Hooke);

τ é tensão de cisalhamento, expressa por: $\tau = kc_s\gamma$.

Substituindo os termos, anteriormente citados, na equação (4.2) da energia de deformação da placa, tem-se a expressão (4.4):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_0^h z\chi^T c z\chi dAdZ + \frac{1}{2} \int_{A_e} \int_0^h (kc_s\gamma)^T \gamma dAdZ \quad (4.4)$$

Ou ainda,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \chi^T c \chi dA + \frac{1}{2} \int_{A_e} kh\gamma^T c_s \gamma dA \quad (4.5)$$

Onde,

C é a matriz das constantes dos materiais, que é obtida segundo o estado plano de tensões e definido conforme expressão (4.6):

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

χ é a curvatura expressa segundo a relação (4.7):

$$\chi = L\theta \quad (4.7)$$

L é o operador diferencial, relação (4.8).

$$\chi = L\theta = \left\{ \begin{array}{c} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

θ são as rotações no plano da placa;

κ é uma constante de valor igual a $\pi^2/12$ ou $5/6$. Este parâmetro considera a placa com distribuição uniforme de cisalhamento ao longo da sua espessura;

h é a espessura da placa;

$$c_s \text{ é expresso por: } c_s = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix};$$

$$G \text{ é o módulo de cisalhamento: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

γ deformação por cisalhamento fora do plano, expressão (4.9):

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Substituindo os termos supracitados na equação (4.5) tem-se que a energia de deformação da placa de Reissner-Mindlin pode ser representada a partir da expressão (4.10):

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} (L\theta)^T c L \theta dA + \frac{1}{2} \int_{A_e} \kappa h \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix}^T c_s \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} dA \quad (4.10)$$

A energia interna de deformação da placa pode, também, ser apresentada de forma mais expandida conforme expressão (4.11).

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \left\{ \begin{array}{c} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{array} \right\}^T c \left\{ \begin{array}{c} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{array} \right\} dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_{A_e} \kappa h \left\{ \begin{array}{c} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}^T c_s \left\{ \begin{array}{c} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2 Formulação do Elemento Finito de Placa

Os elementos finitos utilizados tiveram a sua formulação baseada nos deslocamentos e os termos da matriz de rigidez e o vetor de esforços foram obtidos a partir da minimização da energia de deformação.

Os elementos finitos de placas podem apresentar geometrias triangulares, quadrangulares ou retangulares. Segundo Assan (2003), a aplicação dos elementos finitos retangulares em comparação aos triangulares é mais limitada. Isso acontece porque eles podem ser apenas utilizados para discretizar modelos com contorno retangular. Por outro lado, sabe-se que os elementos retangulares têm um comportamento melhor do que os triangulares com funções aproximadoras de mesma ordem. Isto ocorre porque os retangulares têm mais termos ao se considerar funções aproximadoras de mesma ordem.

Os elementos finitos de placa utilizados são quadrilaterais isoparamétricos com consideração do efeito cisalhante, Placa Espessa ou Reissner-Mindlin. Considerando estas características, inicialmente foram implementados dois elementos finitos de placas, sendo o primeiro com aproximações para os campos de deslocamentos lineares (Q4) e o segundo com aproximação para os campos de deslocamentos quadráticos (Q8).

Dessa maneira, na Tabela 1 a seguir encontra-se um resumo das características destes dois elementos finitos.

Tabela 1 - Resumo das características dos elementos finitos de placa.

Elemento Finito Q4	Elemento Finito Q8
Admite-se que o elemento possua espessura constante (h);	
O elemento finito possui geometria retangular (Dimensões $2a \times 2b$);	
4 nós	8 nós
Deslocamentos por nós: Deslocamento vertical w ; Rotação em torno do eixo x , θ_x ; Rotação em torno do eixo y , θ_y ;	
12 Graus de liberdade	24 Graus de Liberdade
Campos de deslocamentos com aproximações independentes	
Aproximação linear nas duas direções, ou seja, elemento bilinear.	Aproximação quadrática nas duas direções, ou seja, elemento biquadrático.

No elemento finito de placa observa-se que os parâmetros nodais a serem determinados são os deslocamentos verticais e as rotações nos nós dos elementos. A Figura 13 expõe o elemento finito de placa de dimensões isoparamétricas, módulo de elasticidade E , espessura h e coeficiente de Poisson ν . Os parâmetros nodais são os deslocamentos w , θ_x e θ_y .

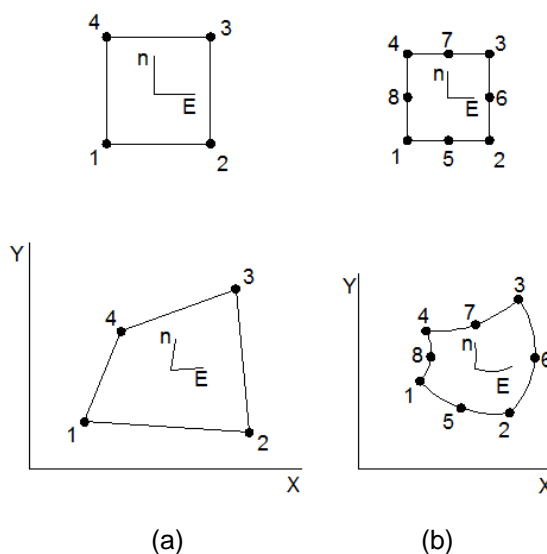


Figura 13 – Elementos finitos isoparamétricos de aproximações: (a) Linear e (b) Quadráticos.

[Adaptado de Soriano (2003)].

No modelo de placa Reissner-Mindlin é importante ressaltar que as rotações, segundo os eixos x e y , assim como o deslocamento w , são tratadas como variáveis independentes. A expressão (4.12) a seguir apresenta as funções aproximadoras para os deslocamentos.

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \quad (4.12)$$

Onde a função de forma N é definida de acordo com as expressões de (4.13) à (4.16).

(a) No caso do elemento bilinear.

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad \text{para } i=1 \text{ a } 4 \quad (4.13)$$

(b) No caso do elemento biquadrático.

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \quad \text{para } i=1,2,3 \text{ e } 4 \quad (4.14)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) \quad \text{para } i=5 \text{ e } 7 \quad (4.15)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2) \quad \text{para } i=6 \text{ e } 8 \quad (4.16)$$

Os parâmetros ξ e η são as coordenadas adimensionais do elemento finito, e elas são conforme as relações apresentadas em (4.17).

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (4.17)$$

Reescrevendo em forma matricial as expressões (4.12) tem-se as equações (4.18) e (4.19).

(a) No caso do elemento bilinear.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

(a) No caso do elemento biquadrático.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & & & & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & . & . & . & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & & & & 0 & 0 & N_7 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ . \\ . \\ . \\ w_3 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

4.2.1 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças

A matriz de rigidez é obtida a partir minimização da energia de deformação da placa definida em (4.11) e reescrita em (4.20).

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2} \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \left\{ \begin{array}{c} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{array} \right\}^T c \left\{ \begin{array}{c} -\partial\theta_y/\partial x \\ \partial\theta_x/\partial y \\ \partial\theta_x/\partial x - \partial\theta_y/\partial y \end{array} \right\} dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_{A_e} \kappa h \left\{ \begin{array}{c} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}^T c_s \left\{ \begin{array}{c} \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} dA
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Portanto a matriz de rigidez do elemento de placa é dada conforme expressão(4.21).

$$K_e = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} [B^f]^T c B^f dA + \int_{A_e} \kappa h [B^c]^T c_s B^c dA \tag{4.21}$$

Observa-se que a primeira parcela da expressão (4.21) representa a contribuição da flexão na matriz de rigidez enquanto que a segunda parcela refere-se ao cisalhamento.

E os campos de deformação (B) são dados de acordo com as expressões de (4.22 à (4.29).

(a) No caso do elemento bilinear.

$$B^f = [B_1^f \quad B_2^f \quad B_3^f \quad B_4^f] \tag{4.22}$$

$$B_j^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_j/\partial x \\ 0 & \partial N_j/\partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j/\partial x & -\partial N_j/\partial y \end{bmatrix} \quad \text{Para } j=1 \text{ a } 4 \tag{4.23}$$

$$B^c = [B_1^c \quad B_2^c \quad B_3^c \quad B_4^c] \tag{4.24}$$

$$B_j^c = \begin{bmatrix} \partial N_j/\partial x & 0 & N_j \\ \partial N_j/\partial y & -N_j & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Para } j=1 \text{ a } 4 \tag{4.25}$$

(a) No caso do elemento biquadrático.

$$B^f = [B_1^f \ B_2^f \ B_3^f \ B_4^f \ B_5^f \ B_6^f \ B_7^f \ B_8^f] \quad (4.26)$$

$$B_j^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_j / \partial x \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial x & -\partial N_j / \partial y \end{bmatrix} \quad \text{Para } j=1 \text{ a } 8 \quad (4.27)$$

$$B^c = [B_1^c \ B_2^c \ B_3^c \ B_4^c \ B_5^c \ B_6^c \ B_7^c \ B_8^c] \quad (4.28)$$

$$B_j^c = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & N_j \\ \partial N_j / \partial y & -N_j & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Para } j=1 \text{ a } 8 \quad (4.29)$$

Determina-se o vetor de forças a partir da expressão da energia externa que é escrita conforme equação (4.30).

$$U_c = \int_v \{P\} \{d\} dv = \int_{A_e} N^T \begin{Bmatrix} f_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dA \quad (4.30)$$

4.2.2 Cálculo dos Esforços Internos

Os esforços internos são calculados a partir da integral da tensão na área da seção que se deseja obter o esforço. As expressões (4.31) e (4.32) a seguir ilustram como são realizados os cálculos dos esforços no código SIPlacas.

$$M_p = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_A \sigma_z dA = -c \left(\int_A z^2 dA \right) Lw = -\frac{h^3}{12} cLw = -\frac{h^3}{12} cB^f Desl \quad (4.31)$$

$$F_p = \begin{Bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \end{Bmatrix} = \int_A \tau dA = \int_A kc_s \gamma A = hkc_s \gamma = hkc_s B^c Desl \quad (4.32)$$

Onde, $Desl$ representa o vetor de deslocamentos de um determinado elemento.

4.3 *Resumo*

Este capítulo apresentou a definição de placas, ou seja, elementos estruturais que apresentam espessura h pequena em relação às demais dimensões, e que são submetidas a esforços normais ao plano médio. Destacou-se que no estudo destes elementos deve-se estar ciente que elas podem ser consideradas delgadas ou espessas.

As placas delgadas, ou de Kirchhoff, caracterizam-se por desconsiderar a parcela de deformação por cisalhamento transversal. Isto significa dizer que a deformação da placa é composta apenas pela parcela de deformação por flexão. Em contrapartida, na teoria de placa espessa, ou placa de Reisser-Mindlin, são consideradas as duas parcelas de deformações.

Foi destacado que no presente trabalho a teoria de placa utilizada é a de Reissner-Mindlin. E que a justificativa para a utilização desta teoria se baseia no fato dela se apresentar como sendo uma teoria de placa mais completa, se comparada com a de Kirchhoff. Isto pode ser afirmado porque ela considera as deformações causadas por deformações transversais somadas à parcela de flexão. E a partir disto, verifica-se que a implementação destes elementos finitos no código SIPlacas permitirá a avaliação de casos em que as lajes de pontes apresentam deformação por cisalhamento transversal significativa.

Posteriormente, apresentou-se a formulação dos elementos finitos de placa que serão estudados nesta pesquisa. Sucintamente, tem-se que os elementos finitos são quadrilaterais isoparamétricos. Um primeiro elemento possui aproximações para os campos de deslocamentos lineares (Q4) e 12 parâmetros nodais sendo 3 por nó; e um segundo elemento tem a aproximação para os campos de deslocamentos quadráticos (Q8) e 24 parâmetros nodais sendo 3 por nó.

Para estes elementos é importante ressaltar que as rotações, segundo os eixos x e y , assim como o deslocamento w , são tratadas como variáveis independentes. Este fato define que o elemento finito apresenta formulação cinemática desacoplada.

Por último, tem-se que a matriz de rigidez foi determinada a partir da minimização da energia de deformação do elemento. E a matriz de rigidez obtida é composta por duas parcelas de energia. Sendo, a primeira referente à contribuição da energia de flexão e a segunda de cisalhamento.

5 ELEMENTOS FINITOS COM CAMPO ASSUMIDO DE DEFORMAÇÃO DE FORÇA CORTANTE (CADFC)

Pretende-se discutir o problema de travamento (Shear Locking) que os elementos finitos de placa e barra, apresentados nos capítulos 3 e 4, possuem. Desta maneira, dois procedimentos matemáticos são discutidos para contornar este problema. O primeiro diz respeito à realização da integração reduzida para se determinar os termos da matriz de rigidez. E o segundo, considera para o elemento finito uma aproximação adequada para o campo de deformação de força cortante (CDFC). Em seguida, a formulação de elemento finito com CADFC é apresentada. E por último, discutem-se as diferenças que existem, nas matrizes de rigidez, entre todos os elementos de barra e placa apresentados neste trabalho.

5.1 Travamento por força cortante (Shear Locking)

As equações a seguir (5.1) e (5.2) descrevem as matrizes de rigidez dos elementos finitos de barra e placa deduzidas nos capítulos 3 e 4.

$$K_e^B = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^t]^T G I_x [B^t] d\xi + a \int_{-1}^1 [B^c]^T G \bar{A} [B^c] d\xi + \frac{1}{a} \int_{-1}^1 [B^f]^T E I_y [B^f] d\xi \quad (5.1)$$

$$K_e^P = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} [B^f]^T c B^f dA + \int_{A_e} \kappa h [B^c]^T c_s B^c dA \quad (5.2)$$

Observando as equações é possível perceber que à medida que se reduz a espessura da placa e/ou a altura da barra, a parcela do cisalhamento deveria diminuir a tal ponto que não contribuísse significativamente na matriz de rigidez.

Contudo o que se observa é que em placas (barras) com espessuras (alturas) pequenas há ainda uma contribuição significativa desta parcela. Assim, placas (barras) de pequena espessura (altura) passam a apresentar uma rigidez que não é real ao problema físico. Este problema é conhecido como travamento por força cortante ou Shear Locking em inglês, Liu (2003).

Esta mesma análise é descrita por Soriano (2003) através do funcional de energia. De maneira geral, tem-se que o funcional de energia de deformação para os elementos finitos em questão pode ser escrito de acordo com a expressão (5.3).

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T (a' [S_F] + b' [S_C]) \{d\} \quad (5.3)$$

Onde,

- $[S_F]$, corresponde às parcelas de flexão e torção do elemento de barra, e/ou a parcela de flexão da placa.
- $[S_C]$, é a parcela da matriz de rigidez dos elementos de barra e placa referente à parcela cisalhante.
- a' , são os termos constantes das integrais das equações (5.1) e/ou (5.2) para as parcelas de flexão e torção. Este parâmetro possui relação cúbica diretamente proporcional à altura da viga ou espessura da placa ($a' \rightarrow h^3$)
- b' , são termos também constantes das integrais das equações (5.1) e/ou (5.2) referentes às parcelas cisalhamento. E possui relação diretamente proporcional com a altura da viga e/ou espessura da placa ($b' \rightarrow h$).
- $\{d\}$, é o vetor de deslocamentos nodais dos nós do elemento finito.

Teoricamente, sabe-se que, para o caso de $h \approx 0$ o funcional de energia, expressão (5.3), deve apresentar energia armazenada essencialmente de flexão. E para que isto ocorra, necessariamente, a parcela de cisalhamento deve ter valor nulo, conforme ilustra a expressão (5.4). Contudo, isto não ocorre, pois para a condição

limite de $h \rightarrow 0$ tem-se uma relação $\frac{b'}{a'} \rightarrow \infty$. Esta relação indica que a parcela de energia de deformação relacionada à flexão possui valor menor do que a parcela de energia referente ao cisalhamento.

$$b' [S_c] \{d\} \cong 0 \quad (5.4)$$

Assim, para estes elementos, ao se considerar relações muito pequenas de “altura/comprimento do elemento”, verifica-se que a energia de deformação recebe uma grande contribuição da parcela de energia relacionada ao cisalhamento. E este aspecto faz com que as estruturas analisadas passem a apresentar valores de deformações menores se comparadas aos valores de deformações reais e, portanto, configurando, problema de travamento.

A fim de resolver ou atenuar este problema em placas, Hughes, Cohen e Haroun (1978), pioneiramente, sugerem utilizar a integração reduzida seletiva na resolução das integrais no processo de resolução da matriz de rigidez. Ou seja, utilizando a quadratura de Gauss na resolução das integrais, a parcela do cisalhamento da matriz de rigidez deve ser obtida utilizando um número menor de pontos de Gauss necessários para obtê-la com exatidão.

Utilizar um menor número de pontos de integração na parcela do esforço cisalhante para a resolução das integrais dos termos da matriz de rigidez equivale a cancelar os termos de ordem superior que aparecem nesta parcela.

Para o elemento de placa isoparamétrico bilinear com nós apenas nos vértices, a integral deveria ser resolvida com dois pontos de integração para a parcela de flexão e para a parcela de deformação de cisalhamento transversal. Porém, levando em consideração a integração reduzida seletiva, observa-se que a parcela da deformação por cisalhamento transversal deve ser obtida por um ponto de Gauss.

Para o elemento de placa isoparamétrico biquadrático com oito nós, a integral deveria ser resolvida com três pontos de Gauss para a parcela de flexão e para a parcela de deformação de cisalhamento transversal. Porém considerando a

integração reduzida seletiva, observa-se que estas duas parcelas é obtida por dois pontos de Gauss.

Por analogia, tem-se que para os elementos de barra lineares a integração é dita completa, quando para as parcelas de flexão e cisalhamento são consideradas para sua resolução dois (2) pontos de integração. E a integração é dita reduzida seletiva, quando se considera dois (2) pontos de integração para a parcela de flexão e um (1) ponto de integração para a parcela cisalhante.

Já para o elemento quadrático tem-se 3 pontos de integração tanto para a parcela a flexão como para a parcela ao cisalhamento, para que a integração seja dita completa. Enquanto a integração é dita reduzida quando as duas parcelas, flexão e cisalhamento, são determinadas considerando 2 pontos de integração.

Ao realizar as integrações reduzidas nos elementos finitos de barra e placas estudados, verificou-se que os resultados de deslocamentos e momentos fletores apresentaram-se satisfatórios. Entende-se por resultados satisfatórios quando o resultado de convergência do elemento tem valor próximo ao analítico para uma malha de elementos finitos considerada pobre.

Por outro lado, para a força cortante a convergência ocorre para estruturas com elevada discretização ou malha bastante densa de elementos finitos. Os resultados que ilustram este comportamento encontram-se melhor discutidos no capítulo 6, item 6.2.

O presente comportamento é explicado ao se analisar as equações que se utilizam para o cálculo dos esforços internos. No item 3.2.2, equações (3.43), (3.44) e (3.45), encontra-se as expressões a o cálculo dos esforços internos para a barra. Enquanto que no item 4.2.2, expressões (4.31) e (4.32), tem-se as expressões para a determinação dos esforços internos das placas.

De maneira geral, observa-se que todas as expressões de cálculo de esforços internos citadas anteriormente são obtidas a partir do produto entre a matriz de campo de deformação B e o vetor de deslocamento do elemento finito $desl$. Como o

vetor *desl* não muda no cálculo dos esforços internos para um mesmo elemento finito, é possível concluir que o campo B é o que influencia no comportamento de convergência do elemento.

Neste sentido, a seguir encontra-se em destaque a forma das matrizes B da placa, tanto para a parcela da flexão como para o cisalhamento, equações (5.5) e (5.6), respectivamente. É importante ressaltar que as mesmas observações que serão apresentadas a seguir, para os campos de deformações das placas, podem ser realizadas, perfeitamente, e de forma mais simples, para os elementos finitos de barra.

$$B_j^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_j / \partial x \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial x & -\partial N_j / \partial y \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$B_j^c = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & N_j \\ \partial N_j / \partial y & -N_j & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Observa-se que todos os termos da matriz B_j^f são obtidos a partir da derivada das funções de forma. Este fato indica que os momentos nas direções x e y , para os elementos bilineares, são constantes em uma direção e linear na direção perpendicular. Enquanto que para os elementos biquadráticos são lineares em uma direção e quadráticos na direção perpendicular.

Por outro lado, observa-se que a matriz B_j^c é constituída por termos obtidos a partir das derivadas das funções de forma e por termos que são as próprias funções de forma. Este fato indica que as forças cortantes nas direções x e y não apresentam distribuições compatíveis. Assim como foi verificada na distribuição dos momentos, explicitadas anteriormente. E, portanto tem-se que este campo é definido como inconsistente, sendo, portanto necessário discretizações muito densas para se alcançar resultados condizentes com o que se espera do comportamento de determinada estrutura.

Neste ponto, observa-se que o artifício matemático de se realizar a integração reduzida não modifica a estrutura do campo de deformação. Pois, como já explicado anteriormente, a integração reduzida é utilizada apenas durante a determinação dos termos da matriz de rigidez. Desta maneira, pode-se concluir que a integração reduzida livra o elemento finito de travamento de força cortante, mas não gera um elemento finito eficiente. Entende-se por elemento finito eficiente, quando o mesmo apresenta resultados satisfatórios ao se considerar estrutura com baixo nível de discretização.

Portanto, a partir desta observação, alguns modelos de elementos finitos foram desenvolvidos com o objetivo de melhorar a acurácia e evitar o travamento. Neste trabalho para os elementos de placa e barra implementados foram adotados os modelos com campos assumidos de deformações de força cortante (CADFC). Estes elementos, segundo Soriano (2003), podem ser vistos como modelos mistos em que se reduz a ordem de campo de deformação tornando-o consistente com o campo de deslocamento adotado.

5.2 Modelos com Campos Assumidos de Deformações de Força Cortante (CADFC)

De acordo com Hughes, Cohen e Haroun (1981) e Soriano (2003), uma das maneiras de tornar os elementos de placa de Reissner-Mindlin e viga de Timoshenko livre de travamento, ou, torná-los menos susceptível a esse fenômeno, é modificar o campo de deformações de força cortante (CDFC). Isto pode ser feito substituindo o CDFC, obtido a partir dos campos de deslocamentos, por CDFC consistentes. Quando isso é realizado diz-se, portanto, que o elemento finito resultante tem campo assumido de deformações de força cortante (CADFC).

Hughes, Cohen e Haroun (1981) e Soriano (2003) apresentam explicitamente a formulação para o elemento de placa isoparamétrico bilinear de quatro nós considerando o CADFC. Contudo, a partir dos procedimentos adotados por ambos para se chegar à formulação deste elemento, é possível também formular o elemento finito de placa de aproximação quadrática com CADFC. Os elementos

finitos de barra com CADFC foram também idealizados a partir das diretrizes expostas por Soriano (2003).

Os presentes elementos passam a ter equações de aproximações não apenas nos campos de deslocamentos, mas também no campo de deformação de força cortante. A seguir encontram-se, resumidamente, os passos adotados para a formulação destes elementos finitos.

1. Define-se a aproximação do campo de deslocamentos da placa.
2. Define-se a aproximação do campo assumido de deformação.
3. Definem-se pontos de amarração.
 - (a) Os pontos de amarração são pontos em que serão compatibilizados os resultados entre: o campo assumido de deformação; e, o campo de deformação, definido pelos campos de deslocamentos.
4. Determinam-se as deformações tangenciais nos pontos de amarração.
5. Realiza a distribuição dos valores das deformações tangenciais obtidos nos pontos de amarração conforme a aproximação adotada no item 2.
6. E por último, o campo assumido de deformação é, portanto, definido.

Os elementos finitos lineares e quadráticos de barra e placa implementados inicialmente no programa SIPlacas foram modificados, e, a formulação de elemento de CADFC foi adotada para todos os elementos. A seguir encontram-se as considerações e o procedimento realizado para a obtenção destes elementos.

5.2.1 Modelos de Barra

A aproximação adotada para os campos de deslocamentos é a mesma para os elementos lineares e quadráticos já apresentados anteriormente na equação (3.12). Este procedimento corresponde ao primeiro passo descrito para a formulação do elemento finito com CADFC, apresentado no item anterior 5.2.

O segundo passo corresponde a adotar a aproximação para o campo de deformação de força cortante. Para os elementos linear e quadrático com CADFC a

aproximação adotada é constante e linear, respectivamente. Conforme se encontra exposto na Figura 14 (a) e (b).

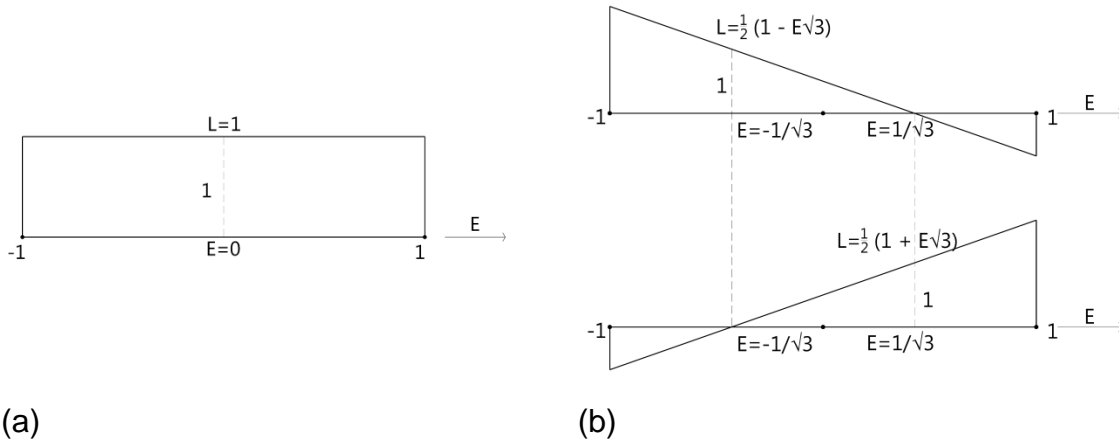


Figura 14 - Funções de interpolação do CADFC do elemento: (a) linear e (b) quadrático.

O terceiro passo, que corresponde à determinação da quantidade de pontos de amarração, é realizado a partir do grau da equação aproximadora adotada para o campo de deformação de força cortante. A expressão (5.7) define a aproximação do campo de deformação de força cortante para o elemento linear.

$$\gamma_{xz} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi \quad (5.7)$$

Constata-se que o campo da componente de deformação γ_{xz} é polinomial de primeira ordem em ξ e, portanto, toma-se apenas um ponto de amarração que é em $\xi = 0$ (que é a coordenada de um ponto de integração). Desta maneira, para o CADFC (γ_{xz}^{as}) considera-se como ponto de amarração o ponto médio do comprimento do elemento, Figura 14.

A expressão (5.8) representa a aproximação adotada do campo de deformação de força cortante adotado para o elemento finito quadrático. E a partir dela, verifica-se que o campo da componente de deformação γ_{xz} é polinomial de segunda ordem em ξ . Portanto, concluem-se que devem ser adotados dois pontos de amarração,

definidos por $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (que são coordenadas de dois pontos de integração),
 Figura 14.

$$\gamma_{xz} = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 \quad (5.8)$$

Em suma, para os elementos de barra lineares considera-se um (1) ponto de amarração que se encontra no ponto médio do comprimento do elemento, enquanto que para os elementos de barra quadráticos consideram-se 2 pontos de ligação. A Figura 14 apresenta estes pontos de amarração de campo assumido de deformações de esforço cortante (CADFC) para ambos os elementos.

Definido as aproximações para os deslocamentos e para o CADFC, assim como os pontos de amarração, o próximo e quarto passo consiste em determinar as deformações tangenciais nos pontos de amarração. Este procedimento consiste em calcular as deformações, a partir do campo de deformação definido pelos campos de deslocamentos, $\left\{ \tilde{\gamma} \right\}^e$, nos pontos de amarração determinados anteriormente.

Em seguida, após a realização dos procedimentos citados, realiza-se a distribuição das deformações obtidas nos pontos de amarração para todo o elemento finito, quinto passo. Isto é feito por meio da aproximação adotada no segundo passo.

Por último, no sexto passo, determina-se o campo assumido de deformação de esforço cortante $\left\{ \tilde{\gamma}^{as} \right\}$.

A relação escrita em forma matricial entre o campo de deformação definido pelos campos de deslocamentos e o CADFC é escrita segundo a equação (5.22):

$$\left\{ \tilde{\gamma}^{as} \right\} = L \left\{ \tilde{\gamma} \right\}^e \quad (5.9)$$

Onde,

(a) Para o caso linear

$$L = [1] \quad (5.10)$$

(b) Para o caso quadrático

$$L = \left[\frac{1}{2} - \frac{\xi\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} + \frac{\xi\sqrt{3}}{2} \right] \quad (5.11)$$

O Quadro 1 e Quadro 2 apresentam os campos de deformação (B) dos elementos de barra lineares e quadráticos, respectivamente.

Quadro 1 - Comparação, dos B dos elementos de barras lineares, entre os elementos com CDFC definido a partir do campo de deslocamentos e o CADFC.

	Campo de Deformação de força cortante definido a partir do campo de deslocamentos	Campo Assumido de Deformação de força cortante
Flexão	$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} \end{bmatrix}$	$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} \end{bmatrix}$
Cisalhamento	$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & -N1 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & -N2 \end{bmatrix}$ $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & 0 & \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2a} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
Torção	$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}$ $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix}$	$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix}$ $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2a} & 0 & 0 & \frac{1}{2a} & 0 \end{bmatrix}$

Quadro 2 - Comparação, dos B dos elementos de barras quadráticos, entre os elementos com CDFC definido a partir do campo de deslocamentos e o CADFC.

<p>Campo de Deformação de esforço cortante definido a partir do campo de deslocamentos e Campo Assumido de Deformação de esforço cortante.</p>	
Flexão	$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{2\xi}{a} \end{bmatrix}$
<p>Campo de Deformação de esforço cortante definido a partir do campo de deslocamentos</p>	
Cisalhamento	$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & -N1 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & -N2 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} & 0 & -N3 \end{bmatrix}$ $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & -\xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} \right) & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & -\xi \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} \right) & -\frac{2\xi}{a} & 0 & \xi^2 - 1 \end{bmatrix}$
<p>Campo Assumido de Deformação de força cortante</p>	
	$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & \frac{\xi}{2} - \frac{1}{6} & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & -\frac{\xi}{2} - \frac{1}{6} & -\frac{2\xi}{a} & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$
<p>Campo de Deformação de esforço cortante definido a partir do campo de deslocamentos e Campo Assumido de Deformação de força cortante.</p>	
Torção	$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \frac{\partial N3}{\partial \xi} \end{bmatrix}$ $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{a} \left(\xi + \frac{1}{2} \right) & 0 & 0 & -\frac{2\xi}{a} \end{bmatrix}$

Em cada tabela encontram-se os (B) tanto dos elementos finitos com CADFC como dos elementos definidos apenas pela aproximação do campo de deslocamento. E os campos de deformações correspondem aos de momento fletor, força cortante e torção.

Como era de se esperar, os campos de deformações de momento fletor e momento de torção não apresentam diferenças. Este fato pode ser observado ao se comparar entre si tanto os campos de deformações dos elementos lineares quanto dos quadráticos. Isto acontece porque os campos de deformações são determinados sempre a partir dos campos de deslocamentos. No entanto, o campo de deformação de força cortante é modificado, se comparado entre os elementos de mesma aproximação polinomial. Como pode ser visto, o CADFC do elemento linear apresenta o terceiro e sexto componentes diferentes do campo de deformação de força cortante obtido a partir dos campos de deslocamentos. Para o elemento quadrático o mesmo fato acontece para o terceiro, sexto e nono componentes.

É importante enfatizar que a modificação apresentada nos campos de deformações de força cortante, tanto para o elemento linear como para o quadrático, corresponde à eliminação do termo do polinômio de maior grau. Ou seja, quando se assume o campo de deformação por uma aproximação adequadamente desejada, o mesmo tende a não apresentar termos com modos espúrios de energia. Neste sentido, para o elemento linear os termos de primeiro grau foram cancelados, e de maneira similar, para o elemento quadrático os termos de segundo grau foram eliminados.

Para os elementos de CADFC, como o B de cisalhamento apresenta-se em forma consistente, a obtenção dos termos da matriz de rigidez destes elementos é obtida utilizando a integração completa de Gauss-Legendre.

A seguir encontram-se as matrizes de rigidez dos elementos lineares e quadráticos com campo de deformação determinado a partir do campo de deslocamentos, considerando integração completa e reduzida, e elementos com CADFC.

a) Matriz de Rigidez com integração completa

Elemento Linear com integração (2x2)

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} \\ 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GAa}{3}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) \\ -\frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} \\ 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{3} - \frac{EI_y}{2a}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{2GAa}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Elemento Quadrático com integração (3x3)

$$K_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{7GA}{6a} & 0 & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{6} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & \frac{2GA}{3} \\ \frac{7GI_x}{6a} & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) & \frac{GA}{6} & 0 & \left(\frac{EI_y}{6a} + \frac{GAa}{15}\right) & -\frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{15} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ \frac{7GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{2} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{2GA}{3} \\ \frac{7GI_x}{6a} & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 & 0 \\ \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{4GAa}{15}\right) & \frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{15} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ \frac{8GA}{3a} & 0 & 0 \\ \frac{8GI_x}{3a} & 0 & 0 \\ \text{SIM} & \left(\frac{8EI_y}{3a} + \frac{16GAa}{15}\right) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

b) Matriz de Rigidez com integração reduzida

Elemento Linear com integração (2x1)

$$K_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} \\ 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{2} - \frac{EI_y}{2a}\right) \\ -\frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} \\ 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{2} - \frac{EI_y}{2a}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Elemento Quadrático com integração (2x2)

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{7GA}{6a} & 0 & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{6} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & \frac{2GA}{3} \\ \frac{7GI_x}{6a} & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{2GAa}{9}\right) & \frac{GA}{6} & 0 & \left(\frac{EI_y}{6a} - \frac{GAa}{9}\right) & -\frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{9} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ \frac{7GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{2} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{2GA}{3} \\ \frac{7GI_x}{6a} & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 & 0 \\ \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{2GAa}{9}\right) & \frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{9} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ \frac{8GA}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8GI_x}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SIM & & & & & & & & \left(\frac{8EI_y}{3a} + \frac{8GAa}{9}\right) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

c) Matriz de Rigidez do elemento quadrático com CADFC.

Elemento Linear

$$K_{CADD} = \begin{bmatrix} \frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} & -\frac{GA}{2a} & 0 & \frac{GA}{2} \\ 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{2} - \frac{EI_y}{2a}\right) \\ -\frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} & \frac{GA}{2a} & 0 & -\frac{GA}{2} \\ 0 & -\frac{GI_x}{2a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{2a} & 0 \\ \frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{GAa}{2} - \frac{EI_y}{2a}\right) & -\frac{GA}{2} & 0 & \left(\frac{EI_y}{2a} + \frac{GAa}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Elemento Quadrático

$$K_{CADD} = \begin{bmatrix} \frac{7GA}{6a} & 0 & \frac{GA}{2} & \frac{GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{6} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & \frac{2GA}{3} \\ & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & \frac{GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ & & \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{2GAa}{9}\right) & \frac{GA}{6} & 0 & \left(\frac{EI_y}{6a} - \frac{GAa}{9}\right) & -\frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{9} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ & & & \frac{7GA}{6a} & 0 & -\frac{GA}{2} & -\frac{4GA}{3a} & 0 & -\frac{2GA}{3} \\ & & & & \frac{7GI_x}{6a} & 0 & 0 & -\frac{4GI_x}{3a} & 0 \\ & & & & & \left(\frac{7EI_y}{6a} + \frac{2GAa}{9}\right) & \frac{2GA}{3} & 0 & \left(\frac{2GAa}{9} - \frac{4EI_y}{3a}\right) \\ & & & & & & \frac{8GA}{3a} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{8GI_x}{3a} & 0 \\ SIM & & & & & & & & \left(\frac{8EI_y}{3a} + \frac{8GAa}{9}\right) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

A seguir relatam-se as diferenças que aparecem nas matrizes de rigidez dos elementos lineares e quadráticos ao se considerar a integração reduzida ou o CADFC.

Verifica-se que ao se realizar a integração reduzida a matriz resultante, expressões (5.14) e (5.15), difere em quatro (4) termos, para os elementos lineares, e em seis (6) termos, para os elementos quadráticos, da matriz de rigidez com integração completa, expressão (5.12) e (5.13).

Em contrapartida, a matriz de rigidez obtida utilizando o CADFC, elemento linear (5.16) e elemento quadrático (5.17), é igual à matriz do elemento considerando a integração reduzida. A partir disto, pode-se concluir que aplicar a integração reduzida para se obter os termos da matriz de rigidez equivale a eliminar o maior grau do polinômio dos termos dos campos de deformações.

Contudo, é importante ressaltar que o elemento com CADFC é mais eficiente se comparado ao elemento com integração reduzida. À medida que a convergência, deste elemento, para os valores de força cortante, acontece para uma baixa discretização da estrutura. Fato que não ocorre para os elementos que utilizam o artifício da integração reduzida.

5.2.2 Modelos de Placa

A aproximação adotada para os campos de deslocamentos é a mesma para os elementos bilineares e biquadráticos já apresentados anteriormente na equação (3.1). Este procedimento corresponde ao primeiro passo descrito para a formulação do elemento finito com CADFC, apresentado no item 5.2.

O segundo passo corresponde a adotar a aproximação para o campo de deformação de força cortante. Para o elemento bilinear a aproximação é linear em uma direção e constante na direção perpendicular (Figura 15 (a)), enquanto que para o elemento biquadrático a aproximação é quadrática em uma direção e linear na direção perpendicular (Figura 15 (b)).

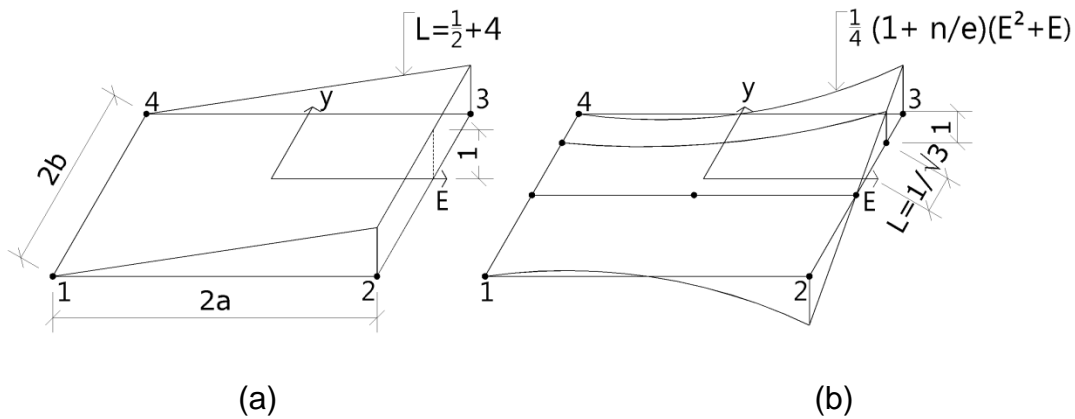


Figura 15 - Funções de interpolação de CADFC do elemento: (a) bilinear e (b) biquadrático.

O terceiro passo, que corresponde à determinação da quantidade de pontos de amarração, é realizado a partir do grau da equação aproximadora adotada para o CDFC. A expressão (5.18) define a aproximação do campo de deformação de força cortante para o elemento bilinear.

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \quad (5.18)$$

Observa-se que em valor constante de η , o campo da componente de deformação $\varepsilon_{\xi\xi}$ é polinomial de primeira ordem em ξ e, portanto, toma-se apenas um ponto de amarração que é em $\xi = 0$ (que é a coordenada de um ponto de integração). Na direção η , tem-se campo linear que é definido por dois pontos. Desta maneira, para o CADFC $\varepsilon_{\xi\xi}^{as}$ consideram-se como pontos de amarração os pontos médios dos lados 1-2 e 3-4, e, para $\varepsilon_{\eta\eta}^{as}$, os pontos médios dos lados 2-3 e 4-1, Figura 16.

Para o elemento biquadrático a aproximação de campo de deformação de força cortante é definida segundo a equação (5.19). Observa-se que em valor constante de η , o campo da componente de deformação $\varepsilon_{\xi\xi}$ é polinomial de segunda ordem em ξ e, portanto, tomam-se dois pontos de amarração que são $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (que são coordenadas de dois pontos de integração). Na direção η , tem-se campo quadrático

que é definido por três pontos, que são $\eta = \pm 1$ e $\eta = 0$. Semelhantemente, para $\varepsilon_{\eta\xi}^{as}$, tem-se os pontos de ligação de coordenadas $\eta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\xi = \pm 1$ e $\xi = 0$, Figura 16.

$$\varepsilon_{\xi\xi} = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta + \alpha_5\xi^2 + \alpha_6\eta^2 + \alpha_7\xi^2\eta + \alpha_8\xi\eta^2 \quad (5.19)$$

Em suma, para os elementos de placas bilineares considera-se quatro (4) pontos de amarração que se encontram localizados nos pontos médios dos lados do elemento. Enquanto que para os elementos de placa biquadráticos considera 12 pontos de ligação, sendo 2 em cada lado do elemento e 4 interno ao elemento. A Figura 16 apresenta estes pontos de restrições de campo assumido de deformações de esforço cortante para ambos os elementos.



Figura 16 - Elementos de Placa com restrições discretas de CADFC. [Adaptado de Soriano (2003)].

Definido as aproximações para os deslocamentos e para o campo de deformação de força cortante, assim como os pontos de amarração, o próximo e quarto passo consiste em determinar as deformações tangencias nos pontos de amarração. Este procedimento consiste em calcular as deformações, a partir do campo de

deformação definido pelos campos de deslocamentos, $\{\tilde{\gamma}\}^e$, nos pontos de amarração determinados anteriormente.

Em seguida, após a realização dos procedimentos citados, realiza-se a distribuição das deformações obtidas nos pontos de amarração para todo o elemento finito, quinto passo. Isto é feito por meio da aproximação adotada no segundo passo.

A relação escrita em forma matricial entre o campo de deformação definido pelos campos de deslocamentos e o CADFC é escrita segundo a equação (5.20):

$$\{\tilde{\gamma}^{as}\} = L\{\tilde{\gamma}\}^e \quad (5.20)$$

Onde,

(c) Para o caso Bilinear

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & L_4 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

(d) Para o caso Biquadrático

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 & 0 & L_5 & L_6 & 0 & 0 & 0 & L_{10} & 0 & L_{12} \\ 0 & 0 & L_3 & L_4 & 0 & 0 & L_7 & L_8 & L_9 & 0 & L_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Na Tabela 2 podem ser visto as parcelas que constituem a matriz L, apresentadas em (5.21) e (5.22).

Tabela 2 – Parcelas da matriz de aproximação do CADFC.

Bilinear	Biquadrático
$L_1 = \frac{1}{2}(1-\eta)$	$L_1 = -\frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta^2$
	$L_2 = -\frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta^2$
$L_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$	$L_3 = \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi^2\eta$
	$L_4 = \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi^2\eta$
$L_3 = \frac{1}{2}(1+\eta)$	$L_5 = \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta^2$
	$L_6 = \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta^2$
$L_4 = \frac{1}{2}(1-\xi)$	$L_7 = -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi^2\eta$
	$L_8 = -\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\xi^2\eta$
-	$L_9 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi^2\eta$
	$L_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi\eta^2$
-	$L_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\eta - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi^2\eta$
	$L_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\xi\eta^2$

Da mesma maneira que foi realizada a comparação entre os campos de deformações dos elementos finitos de barra implementados, a seguir encontram-se as comparações para os campos de deformações dos elementos de placas estudados.

Como as matrizes de campo de deformações para o elemento de placa são extensas e no intuito de melhor demonstrar as diferenças que ocorrem entre elas, considerou-se um elemento finito de placa isoparamétrico. E nas comparações

foram expostos apenas os termos da matriz que correspondem ao primeiro nó. Conforme apresenta o Quadro 3 e Quadro 4.

Quadro 3 - Comparação dos B dos elementos bilineares entre os elementos com CDFC definido a partir do campo de deslocamentos e do CADFC.

Campo de Deformação de Força Cortante do elemento bilinear
<p>Definido a partir do campo de deslocamentos</p> $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{4} - \frac{1}{4} & 0 & -(\eta - 1)\left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} & (\eta - 1)\left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4}\right) & 0 \end{bmatrix}$
<p>Campo Assumido de Deformação de Força Cortante</p> $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\eta}{4} - \frac{1}{4} & 0 & -\left(\frac{\eta}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} & \left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4}\right) & 0 \end{bmatrix}$

Quadro 4 - Comparação dos B dos elementos biquadráticos entre os elementos com CDFC definido a partir do campo de deslocamentos e do CADFC.

Campo de Deformação de Força Cortante do elemento quadrático
<p>Definido a partir do campo de deslocamentos</p> $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{4}\eta^2 & 0 & \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2\right) \\ \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{4}\xi^2 & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi\eta - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2\right) & 0 \end{bmatrix}$
<p>Campo Assumido de Deformação de Força Cortante</p> $B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{4}\eta^2 & 0 & \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{4}\eta^2\xi\right) \\ \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\xi\eta - \frac{1}{4}\xi^2 & \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\xi - \frac{1}{4}\eta\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta\right) & 0 \end{bmatrix}$

Semelhantemente ao que ocorre para o elemento de barra, apenas o campo de deformação de força cortante apresentou modificações, ao se comparar os elementos finitos entre si. Neste sentido, é perceptível que o mesmo deve acontecer com os elementos de placas. Deste modo, as matrizes de campo de deformações apresentados no Quadro 3 e Quadro 4 resumem-se apenas as matrizes de campos de deformações de força cortante.

No Quadro 3 pode ser visto que a diferença que ocorre entre os elementos finitos de CDFC obtido a partir do campo de deslocamentos e o CADFC encontra-se no terceiro termo da primeira linha e segundo termo da segunda linha das matrizes B . Este mesmo comportamento ocorre para o elemento biquadrático,

Para o elemento bilinear estes termos se apresentavam como sendo bilineares. Entretanto, com o campo assumido de deformação, os termos apresentam-se lineares em uma direção (ξ ou η) e constantes na direção perpendicular (η ou ξ).

Fato semelhante ocorre com o elemento biquadrático. Inicialmente, estes termos apresentavam-se como sendo biquadráticos. Contudo, para o elemento com CADFC os termos passaram a apresentar comportamentos quadráticos em uma direção (ξ ou η) e lineares na direção perpendicular (η ou ξ).

5.3 Resumo

No capítulo foi visto que o travamento de força cortante (Shear Locking) é identificado, quando na análise da estrutura, o modelo numérico apresenta deformação não compatível com o modelo físico real. Para os elementos finitos de barra e placa este comportamento foi explicado a partir das expressões que determinam a matriz de rigidez dos elementos.

Com o objetivo de contornar o problema de travamento foi discutido o artifício matemático da integração reduzida. A partir dele, um número menor de pontos de Gauss é adotado para que se determinem, numericamente, os termos da matriz de rigidez. Lembrando que os termos da matriz são definidos a partir de integrais.

Contudo, por meio de exemplos que serão apresentados e discutidos no capítulo 6 concluiu-se que a integração reduzida não origina elementos finitos eficientes. Definiu-se por elemento finito eficiente, quando o mesmo apresenta resultados satisfatórios ao se considerar estrutura com baixo nível de discretização.

Neste sentido, modelos de elementos finitos com campo assumido de deformação de força cortante (CADFC) foram apresentados. Este modelo de elemento foi escolhido porque no cálculo dos esforços internos o campo B^c é o que influencia no comportamento de convergência do elemento. Tendo em vista que ele é constituído por termos obtidos a partir das derivadas das funções de forma e por termos que são as próprias funções de forma. Fato indica que as forças cortantes nas direções x e y não apresentam distribuições compatíveis.

Foram também apresentados os passos necessários para se construir um elemento finito com CADFC. E a partir deles, foi descrita a formulação dos elementos finitos de barra e placa com CADFC. Em seguida, as matrizes de rigidez e os CDFC de todos os elementos finitos desta pesquisa foram comparados. E foi possível concluir que:

- A matriz de rigidez entre os elementos finitos que apresentam artifícios matemáticos para contornar o problema de travamento de força cortante e aqueles elementos que não possui tratamento nenhum são diferentes.
- A modificação apresentada nos CDFC, tanto para o elemento de barra como para o de placa, para os elementos com CADFC corresponde à eliminação dos termos de maior grau.
- O artifício matemático de se realizar a integração reduzida não modifica a estrutura do campo de deformação. Isto acontece porque a integração reduzida é utilizada apenas durante a determinação dos termos da matriz de rigidez. Desta maneira, pode-se concluir que a integração reduzida livra o elemento finito de travamento de força cortante, mas não gera um elemento finito eficiente.

6 ESTUDOS PRELIMINARES DOS ELEMENTOS FINITOS

Pretende-se apresentar e discutir o comportamento de todos os elementos finitos descritos no presente documento e implementados no código SIPlacas. Esta análise preliminar possui o objetivo de definir qual ou quais os elementos são os mais interessantes para ser utilizado pelo usuário durante as suas análises.

6.1 Análise de Barras

No intuito de verificar o comportamento do elemento finito de barra implementado, foi realizada a análise de uma viga em balanço de vão igual a $3,00m$, seção transversal de dimensões de $0,10m$ na base e altura de $0,30m$. O módulo de elasticidade considerado foi de $21GPa$ e coeficiente de Poisson igual a $0,3$. Conforme ilustra a Figura 17. O carregamento da estrutura consiste de uma carga pontual localizada na extremidade livre e de valor P igual a $1N$.

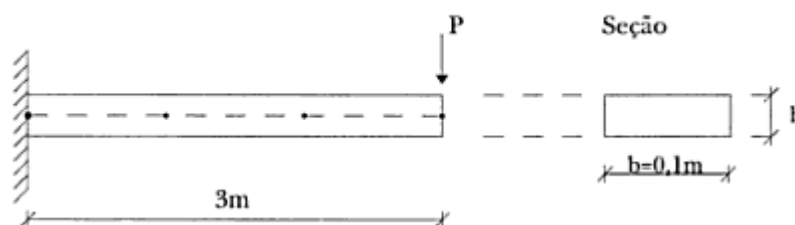


Figura 17 - Exemplo da viga. [Soriano, 2003].

Para a estrutura o deslocamento analítico calculado na extremidade livre pode ser obtido de acordo com a equação (6.1) e resulta em módulo igual a $0,001905\text{ mm}$. O diagrama de momento fletor possui distribuição linear com valor máximo de 3 N.m

na extremidade engastada. Com relação ao diagrama de força cortante a distribuição é constante e valor unitário. Conforme Figura 18.

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (6.1)$$

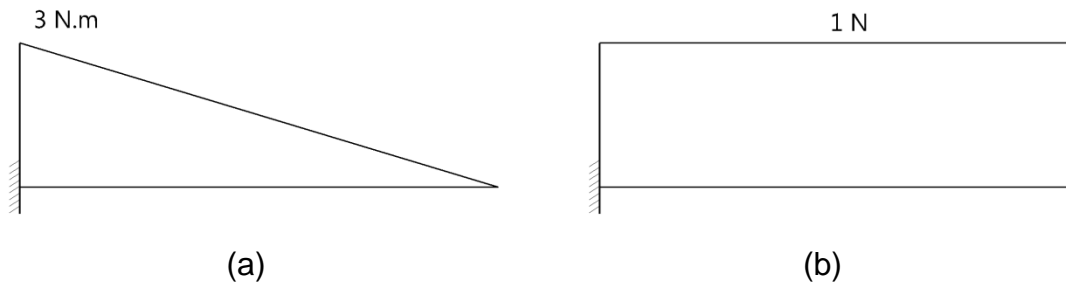


Figura 18 – Diagramas: (a) Momento Fletor e (b) Força Cortante.

Os gráficos apresentados no presente tópico demonstram o comportamento, do deslocamento, momento fletor e força cortante, dos elementos finitos de barra implementados no código SIPlacas. Destaca-se que os gráficos comportam a relação entre: a diferença relativa percentual do valor da análise obtido segundo o método dos elementos finitos e o valor analítico, em função do número de nós de elementos finitos na estrutura.

É importante ressaltar que para os elementos finitos lineares o deslocamento apresenta uma distribuição linear enquanto que, o momento fletor e a força cortante, a variação corresponde a um comportamento constante. Já, em relação aos elementos finitos quadráticos, a aproximação dos deslocamentos é quadrática e dos esforços internos, momento fletor e força cortante, é linear.

A seguir, encontra-se exposto as observações que se pretende realizar ao se analisar os gráficos: Diferença relativa percentual versus Número de nós de elementos finitos.

- (a) Para o deslocamento, as curvas dos gráficos devem ter comportamento que indique que à medida que se aumenta a discretização da estrutura a diferença relativa caminha ao valor nulo. Quando a diferença relativa caminha

ao valor nulo significa dizer que o resultado numérico resulta em valor próximo ao obtido analiticamente. Este comportamento é o esperado pelo fato dos graus de aproximação de deslocamento destes elementos serem abaixo do grau da equação que rege a solução analítica. Outra análise esperada é que os elementos quadráticos tenham convergência mais rápida se comparada com os elementos lineares.

- (b) Para o momento fletor, espera-se que os elementos finitos lineares apresentem curvas que indiquem que à medida que se aumenta a discretização da estrutura a diferença relativa resulte em valores nulos. Mesmo comportamento previsto para o deslocamento. Por outro lado, para o elemento finito quadrático o resultado numérico deve convergir para o analítico independentemente da discretização adotada. À medida que a aproximação do momento fletor para este elemento é a mesma aproximação que descreve o comportamento do momento fletor analiticamente.
- (c) Por último, para a força cortante, espera-se que as curvas apresentem-se como sendo uma linha paralela ao eixo horizontal do gráfico. Pois a convergência entre os resultados numéricos e analíticos devem ocorrer para qualquer discretização.

Neste sentido, a partir da Figura 19 que apresenta resultados de deslocamentos, constata-se que todos os elementos finitos implementados convergem, para os resultados obtidos analiticamente, à medida que se aumenta a discretização da estrutura. E, como esperado, se comparada a convergência dos elementos lineares com as dos quadráticos verifica-se que a do elemento quadrático ocorre mais rapidamente. Contudo pode ser visto que a razão de convergência é diferente para os elementos que possuem a mesma aproximação. Por exemplo, entre os elementos lineares, Figura 19 (a), é notório que o elemento finito $B2_c$ é o último a convergir. Isto indica que ao realizar alguma análise com este elemento é preciso que se utilize uma discretização relativamente maior se comparada com as discretizações utilizadas segundo os outros elementos lineares. O mesmo comportamento ocorre para o elemento quadrático $B3_c$, Figura 19 (b).

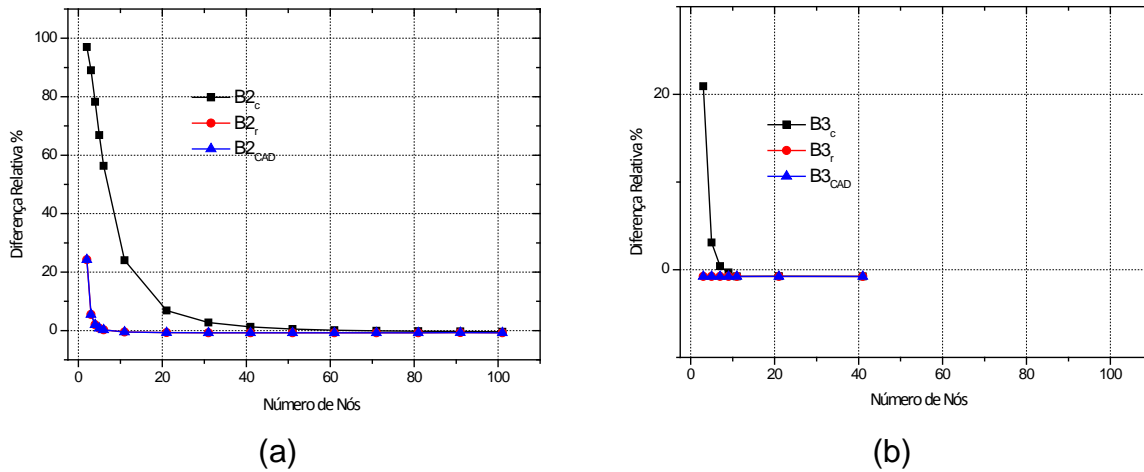


Figura 19 – Deslocamento: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático. (As curvas azuis e vermelhas estão superpostas)

Outro fato interessante das curvas dos gráficos da Figura 19 é que os elementos lineares $B2_r$ e $B2_{CAD}$ e os quadráticos $B3_r$ e $B3_{CAD}$ apresentam exatamente o mesmo comportamento. Este fato comprova que o artifício numérico da integração reduzida equivale a definir uma aproximação adequada para o campo de deformação inconsistente do elemento finito estudado. Ambos os métodos resolvem o problema de travamento de força cortante quando se analisa apenas o resultado de deslocamento. Assunto discutido no item 5.2.1.

A Figura 20 apresenta o comportamento do momento fletor no engaste.

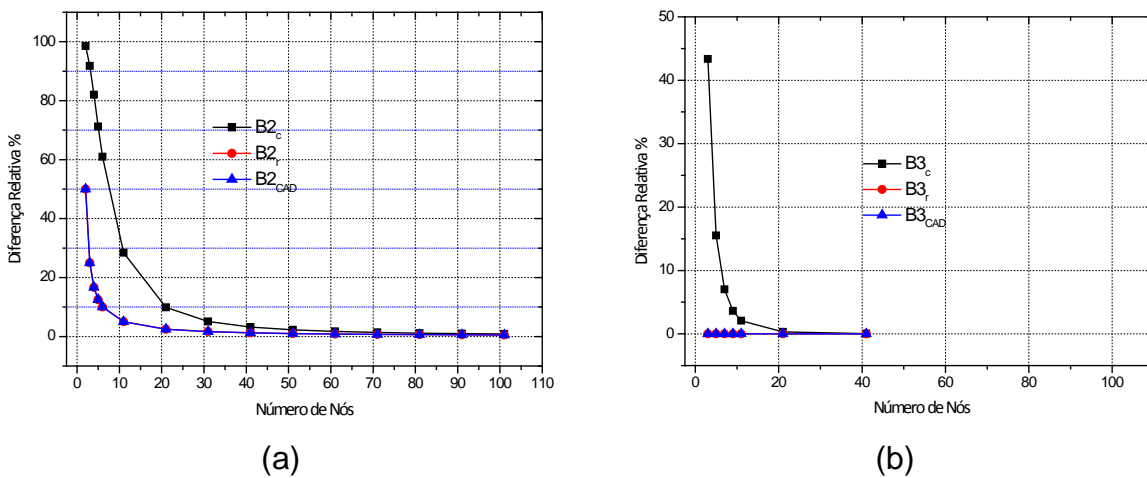


Figura 20 - Momento Fletor no engaste: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático. (As curvas azuis e vermelhas estão superpostas)

Para os gráficos da Figura 20 tem-se que o comportamento das curvas de convergência é igual ao esperado, de acordo com o descrito no item (b) do presente tópico. Contudo o elemento quadrático $B3_c$ encontra-se fora do padrão das curvas dos demais elementos quadráticos. Pois ele deveria convergir para um resultado próximo ao analítico independentemente da discretização utilizada. Porém, este fato acontece porque o elemento quadrático $B3_c$ não possui qualquer tratamento para evitar o problema do travamento.

Os gráficos da Figura 21 e Figura 22 apresentam o comportamento dos elementos estudados em relação à força cortante das extremidades da viga em balanço.

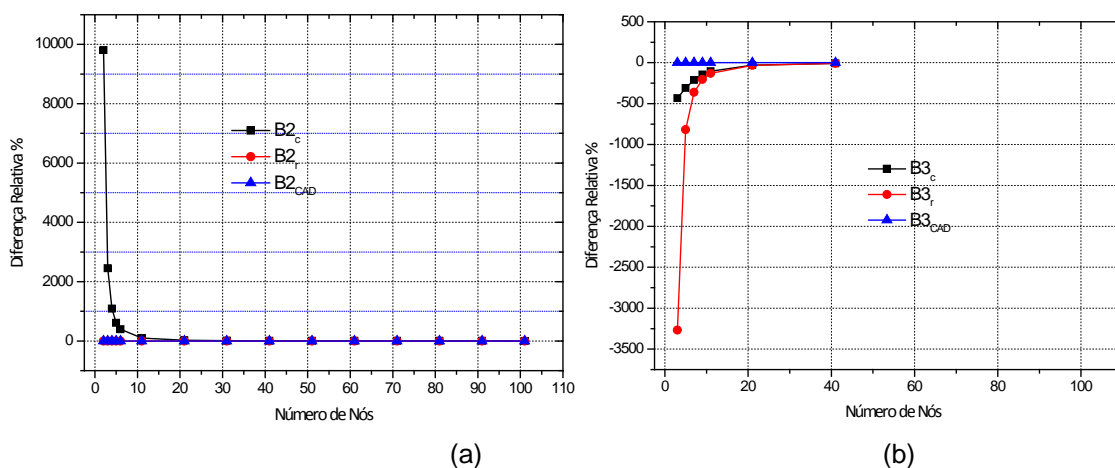


Figura 21 - Força Cortante no engaste: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático.

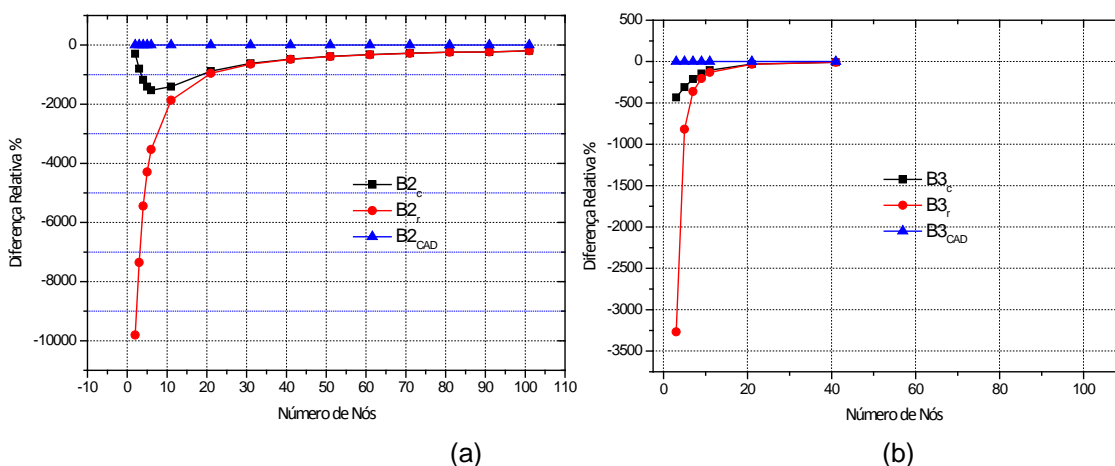


Figura 22 - Força Cortante na extremidade livre: (a) Elemento Linear e (b) Elemento Quadrático.

A partir deles, verifica-se que os elementos finitos com campo assumido de deformação de esforço cortante (CADFC), ($B2_{CAD}$ e $B3_{CAD}$), foram os únicos a

apresentarem o comportamento esperado e citado no item (c). Enquanto que para os demais elementos é preciso que a estrutura tenha relativamente um grau de discretização de elemento finitos maior. Isso acontece inclusive para os elementos linear e quadrático com integração reduzida ($B2_r$ e $B3_r$) que segundo a literatura estaria livre de travamento de força cortante.

Este fato comprova que ao se realizar a integração reduzida na obtenção dos termos da matriz de rigidez o elemento finito apresenta melhoria apenas nos valores quanto aos deslocamentos, como discutido no item 5.2.1. Pois este artifício numérico não é levado em consideração ao calcular os esforços internos. Este problema não apareceu nos gráficos de momento fletor, Figura 20, tendo em vista que o campo de deformação de momento fletor é consistente e por isso não apresenta problema de convergência. Em contra partida o campo de deformação de força cortante apresentado, como exposto no item 5.2.1, é um campo inconsistente, devendo necessariamente torná-lo consistente para que se tenham resultados adequados.

Para se analisar o comportamento dos elementos de barra implementados quanto ao efeito de travamento, variou-se a seção transversal a partir da relação altura e base (h/b). Para isso a base considerada foi mantida constante de valor igual a $0,10m$ enquanto que a altura variou de $0,50m$ à 10^{-7} . Embora não seja fisicamente representativa a relação base e altura de vigas menores que 1, neste tópico foram adotadas relações abaixo disto de modo a verificar o problema quanto ao travamento que o elemento de barra implementado pode apresentar.

A presente análise é uma ampliação do que pode ser observado no livro do Soriano (2003) que apresenta o comportamento de alguns dos elementos estudados neste trabalho, para seções de razões h/b menores que 1. Na presente pesquisa as mesmas análises também foram realizadas para os elementos $B2_{CAD}$ e $B3_{CAD}$ e as razões h/b foram extrapoladas para valores maiores que 1.

Segundo Soriano (2003), à medida que se reduz a razão h/b o deslocamento computado do elemento finito linear com integração completa $B2_c$ é cada vez menor do que o da solução analítica, configurando o travamento de força cortante. Isto

pode ser observado nas Tabela 3 e Tabela 4. Mesmo que aumente a discretização do elemento finito $B2_c$, neste caso de 3 para 10, embora o valor do deslocamento se aproxime mais do valor analítico para uma mesma relação h/b , o elemento continua apresentando valores de deslocamentos cada vez menores do que a solução analítica à medida que se diminui a altura da seção transversal.

(a) Discretização com 3 elementos Finitos

Tabela 3 – Relação: Deslocamento SIPlacas/Deslocamento Analítico.

h/b	Elementos Lineares			Elementos Quadráticos		
	$B2_c$	$B2_r$	$B2_{CAD}$	$B3_c$	$B3_r$	$B3_{CAD}$
5	0,4426	0,9935	0,9935	1,0155	1,0213	1,0213
4	0,3331	0,9858	0,9858	1,0136	1,0136	1,0136
3	0,2176	0,9799	0,9799	0,9960	1,0077	1,0077
2	0,1094	0,9756	0,9756	0,9862	1,0034	1,0034
1	2,97E-02	0,9731	0,9731	0,9768	1,0008	1,0008
0,01	3,06E-06	0,9722	0,9722	0,9722	1,0000	1,0000
0,0001	3,06E-10	0,9722	0,9722	0,9722	1,0000	1,0000
0,000001	3,06E-14	0,9724	0,9724	0,9734	1,0010	1,0010

(b) Discretização com 10 elementos Finitos

Tabela 4 - Relação Deslocamento SIPlacas/Deslocamento Analítico

h/b	Elementos Lineares			Elementos Quadráticos		
	$B2_c$	$B2_r$	$B2_{CAD}$	$B3_c$	$B3_r$	$B3_{CAD}$
5	0,9137	1,0188	1,0188	1,0212	1,0212	1,0212
4	0,8562	1,0111	1,0111	1,0135	1,0136	1,0136
3	0,7595	1,0052	1,0052	1,0075	1,0076	1,0076
2	0,5782	1,0009	1,0009	1,0031	1,0034	1,0034
1	2,54E-01	0,0865	0,0865	0,9999	1,0008	1,0008
0,01	3,40E-05	0,9975	0,9975	0,9975	1,0000	1,0000
0,0001	3,40E-09	0,9975	0,9975	0,9975	1,0000	1,0000
0,000001	3,40E-13	0,9976	0,9976	0,9991	1,0009	1,0009

Para os demais elementos lineares ($B2_r$ e $B2_{CAD}$), que possuem tratamento para contornar o problema de travamento, em relação ao deslocamento, os valores são

satisfatórios. Isto acontece independentemente da relação h/b e melhora à medida que se aumenta a discretização da estrutura.

Para os elementos quadráticos, considerando apenas o deslocamento, os valores obtidos são satisfatórios para todos os elementos. Contudo, como visto anteriormente, na Figura 20 (b) para a viga de relação h/b igual a 3, para discretizações pobres, o elemento pode apresentar resultados incoerentes com o problema físico real.

Em suma, após verificar a influência da relação h/b da viga estudada e do número de elementos finitos necessários para que seja possível obter resultados coerentes. Pode-se concluir que o elemento finito de barra quadrático com CADFC (B3_{CAD}) é aquele que melhor apresenta resultados considerando uma malha de elementos finito mais pobre.

6.2 Análise de Placas

O exemplo gerado com a intenção de verificar se os elementos de finitos de placa do programa SIPlacas estava chegando a resultados coerentes, configura-se de uma placa retangular com dimensões 5,00 m x 4,50 m. Condições de contorno composta por uma borda engastada e as demais apoiadas (com restrições apenas na vertical). O carregamento adotado é uniformemente distribuído de valor igual a 9,30 kN/m². O módulo de elasticidade igual a 26 GPa. O coeficiente de Poisson é igual a 0,3 e a espessura foi variada, de acordo com a análise, entre 0,15 m e 1,50 m. (Figura 23)

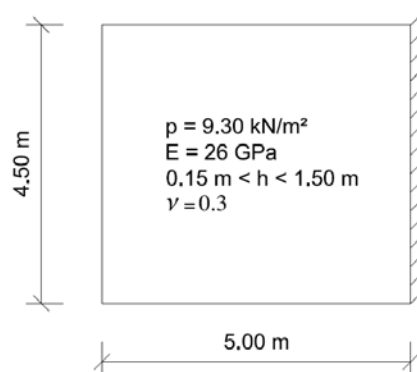


Figura 23 - Exemplo de placa.

Os resultados dos elementos finitos de placa do programa SIPlacas foram confrontados, primeiramente, com os resultados do programa conceituado de elementos finitos Fx+ for DIANA 9.4.4®. Esta etapa foi realizada no intuito de observar se a rotina implementada no SIPlacas encontrava-se coerente. O programa Fx+ for DIANA 9.4.4® foi utilizado por apresentar o elemento finito de placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin.

Em seguida, preocupou-se em expor o problema do travamento de força cortante (Shear Locking) que o elemento finito linear e/ou quadrático com integração completa apresenta. Para discutir tal fenômeno foram consideradas estruturas semelhantes com a do exemplo da Figura 23. As espessuras da placa foram consideradas no intervalo de 0,15 a 1,50 m.

Por último, foram realizadas análises entre os resultados obtidos segundo os elementos finitos com aproximação linear e quadrático. Esta análise possui o objetivo de apresentar a convergência dos elementos para os deslocamentos, momento fletor e força cortante e por fim concluir qual o elemento finito que apresenta resultados mais satisfatórios para estruturas menos discretizadas.

6.2.1 Elemento Finito do DIANA®

Os elementos finitos do programa FX+ for DIANA 9.4.4® utilizados nas análises da placa são intitulados de Q12PL e CQ24P. Eles são elementos finitos isoparamétricos com quatro (4) e oito (8) nós, respectivamente. Apresentam três (3) graus de liberdade por nó (w_i , θ_{xi} e θ_{yi}), o que totaliza em doze (12) graus de liberdade para o elemento Q12PL e vinte e quatro (24) para o elemento CQ24P. (Figura 24)



Figura 24 - Elemento Finito: (a) Q12PL e (b) CQ24P. [Diana User's Manual, Element Library (2005)].

Estes elementos são formulados segundo a teoria de Reissner-Mindlin para placas. O programa possibilita a análise utilizando o elemento linear (Q12PL) e considerando apenas a integração completa na obtenção dos termos da matriz de rigidez dos elementos. Enquanto que para o elemento quadrático (CQ24P) é possível realizar integração completa ou reduzida.

6.2.2 SIPlacas versus Fx+ for DIANA

Inicialmente, o primeiro elemento finito de placa utilizado para analisar a estrutura em questão e a ser comparado com o Fx+ for DIANA 9.4.4® foi o elemento finito linear com integração completa, $Q4_c$. Este procedimento foi adotado, tendo em vista que o programa Fx+ for DIANA 9.4.4®, em seu manual, descreve que o elemento de placa que ele utiliza, realiza integração completa para as análises das estruturas. Contudo o que se observou foi que as respostas obtidas do DIANA comparadas ao do SIPlacas convergem apenas quando se aumenta a malha de elementos finitos na estrutura.

Este fato não era o esperado, pois se acreditava que o elemento finito de placa implementado do DIANA era o mesmo daquele utilizado no SIPlacas. E desta maneira, os resultados de deslocamento, momento fletor e força cortante, deveriam ser satisfatoriamente próximos para quaisquer discretização. O comportamento desta convergência pode ser observado segundo as curvas do elemento $Q4_c$ no gráfico (a) da Figura 25 à Figura 31

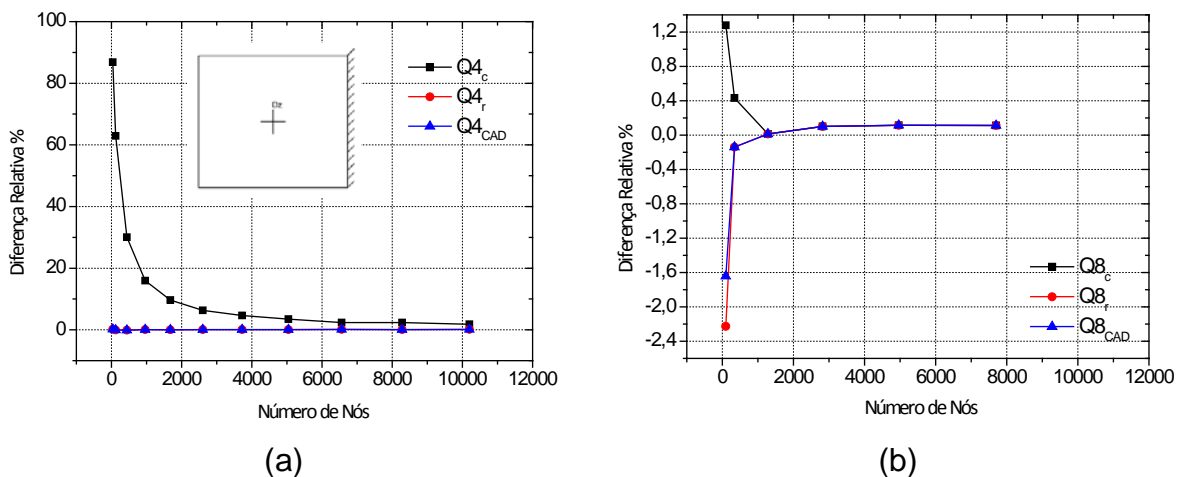
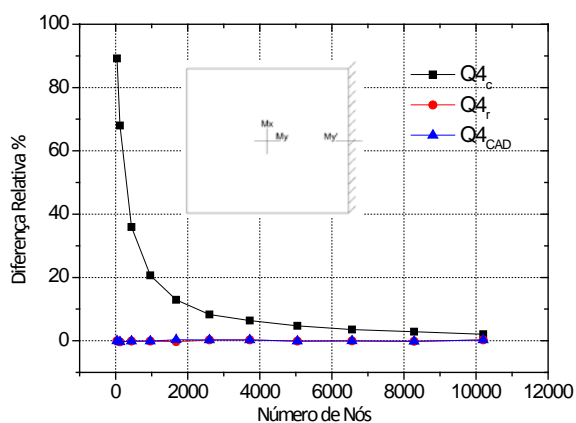
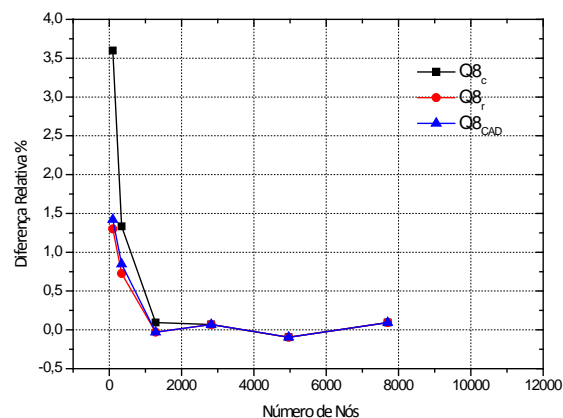


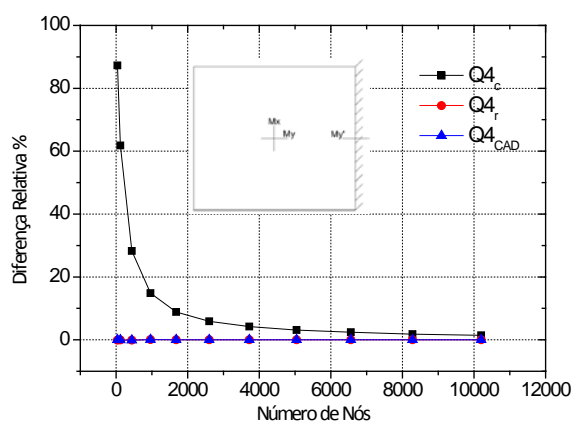
Figura 25 - Deslocamento em z: (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.



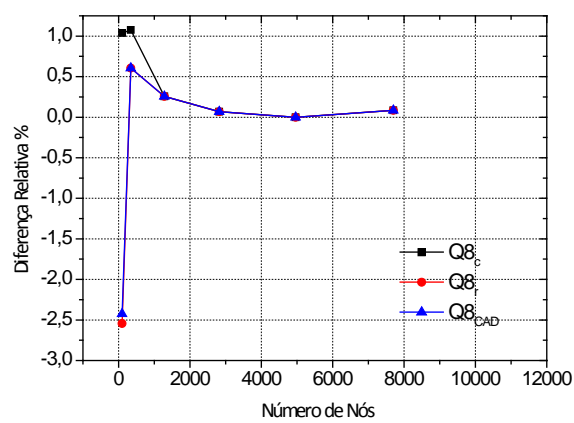
(a)



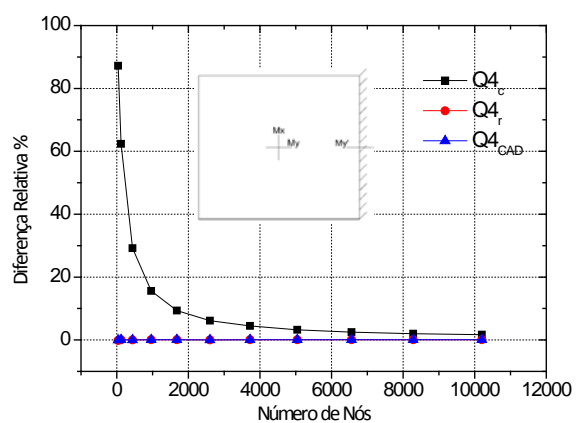
(b)

Figura 26 – M_x : (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.

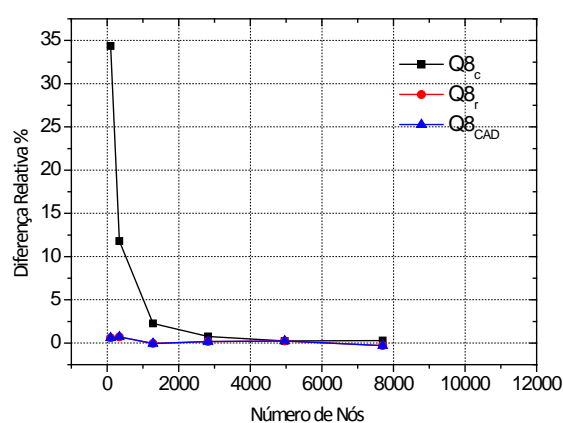
(a)



(b)

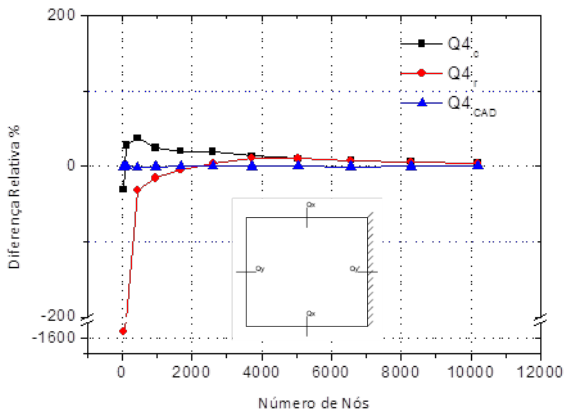
Figura 27 – M_y : (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.

(a)

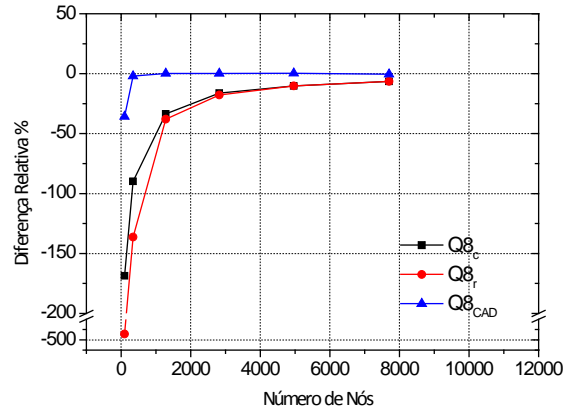


(b)

Figura 28 - M_y' : (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.

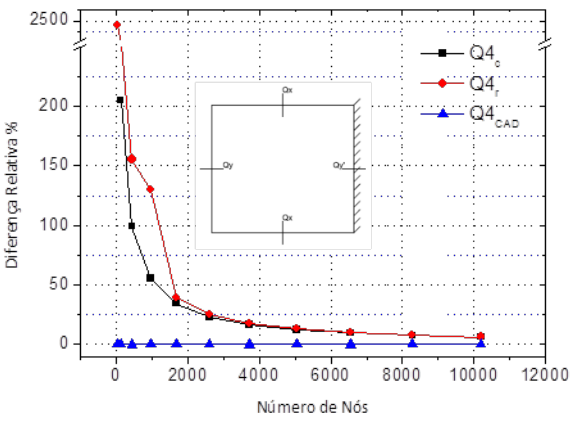


(a)

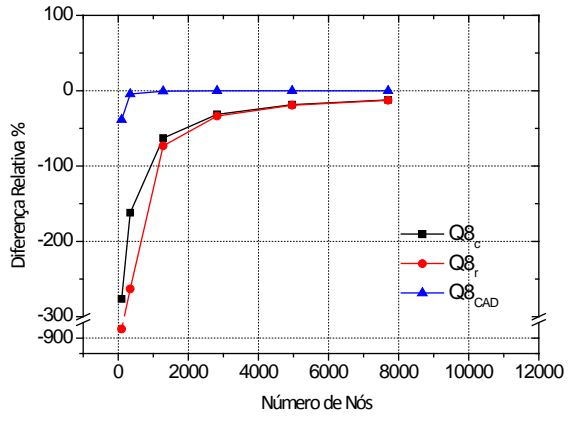


(b)

Figura 29 – Qx: (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.

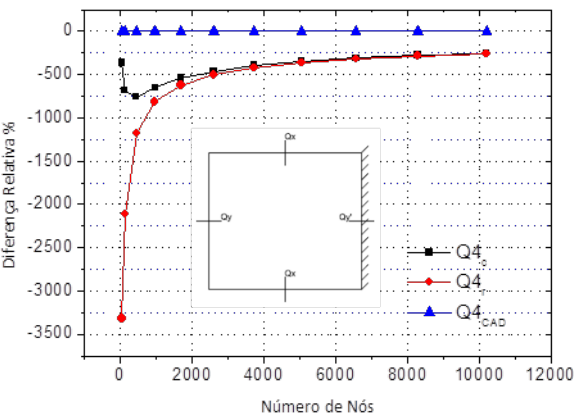


(a)

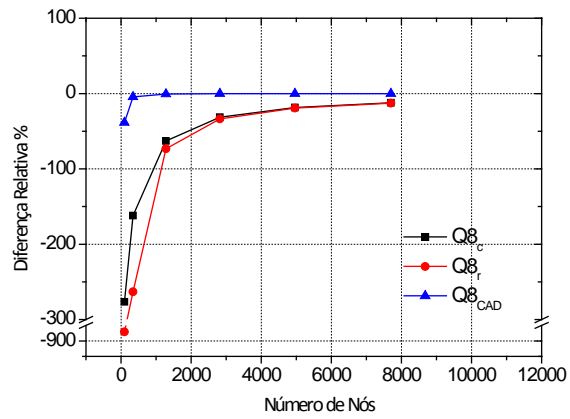


(b)

Figura 30 – Qy: (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.



(a)



(b)

Figura 31 – Qy': (a) Elementos Lineares e (b) Elementos Quadráticos.

Diante desta dificuldade, decidiu-se observar o comportamento do elemento $Q4_r$, que considera a integração reduzida na obtenção dos termos da matriz de rigidez. Neste ponto, verificou-se que as respostas, quanto ao deslocamento e aos momentos fletores do presente elemento resultavam próximas àquelas extraídas do DIANA. Fato que pode ser visto nas curvas do elemento $Q4_r$ ilustradas no gráfico (a) da Figura 25 à Figura 28, que mostra que a diferença relativa é aproximadamente zero para quaisquer discretização. No entanto, pode ser observado que para a força cortante este elemento converge para um valor próximo do DIANA apenas quando a estrutura encontra-se consideravelmente discretizada.

Nas curvas dos gráficos (a) da Figura 29 à Figura 31 pode ser constatado que para as bordas da laje que foram consideradas simplesmente apoiadas o esforço cortante converge para valores consideravelmente próximos à zero. Contudo, isto ocorre, apenas quando a estrutura encontra-se com a discretização próxima a 10.000 nós. E para esta mesma discretização a borda da laje com condição de contorno considerada perfeitamente engastada a diferença relativa encontra-se na faixa dos 250%.

A partir deste fato, passou a ser de profundo interesse encontrar qual o tratamento ou o elemento finito de placa linear que se encontrava implementado no DIANA. À medida que este elemento conduzia a valores já satisfatórios de deslocamento, momento fletor e, sobretudo força cortante, considerando a estrutura relativamente com baixa discretização. Pois, como dito anteriormente, a quantidade de nós de elementos finitos encontra-se ligada ao tempo de processamento que o código SIPlacas leva para calcular certa estrutura na situação de análise de cargas móveis.

Desta maneira a presente pesquisa se direcionou a estudar a literatura de placas e verificar as possíveis modificações que poderiam ser realizadas no elemento finito até o presente momento implementado no código SIPlacas. Assim o elemento finito que se mostrou eficiente foi àquele que considera o campo assumido de deformação de força cortante (CADFC). Para o elemento linear desta pesquisa codificado como $Q4_{CAD}$, o qual a teoria foi explicitada no item 5.2.2.

Nos gráficos (a) da Figura 25 à Figura 31 observa-se que as curvas que descrevem o comportamento do elemento $Q4_{CAD}$ apresentam convergência com o DIANA para qualquer discretização.

Contudo, como será explicitado e melhor discutido mais a diante no item 6.2.4. O elemento linear $Q4_{CAD}$ embora apresente os mesmos resultados que o DIANA, converge para um determinado resultado analítico apenas quando a estrutura encontra-se com uma malha de elementos finitos relativamente rica. Desse modo, tomou-se a decisão de se implementar no código SIPlacas um elemento finito de aproximação quadrática. Este fato conduz a obtenção de resultados satisfatórios ao se adotar na estrutura uma discretização relativamente menor, se comparada com o grau de discretização dos elementos lineares. Semelhante decisão foi tomada para o elemento finito de barra, como pôde ser apresentado e discutido os resultados para o problema do item 5.2.1.

Neste sentido, após a implementação do elemento quadrático, foram construídos para este elemento, e para a estrutura de placa em questão, os mesmos gráficos de convergência produzidos para o elemento linear. No manual do DIANA verifica-se que é possível analisar estruturas com o elemento de placa de aproximação quadrática considerando integração numérica completa ou reduzida. Para o presente elemento considerando a quadratura de Gauss tem-se que para a integração numérica completa são utilizados nove (9) pontos de Gauss, enquanto que para a integração numérica reduzida são considerados (4) pontos de Gauss. Os valores do DIANA foram obtidos considerando integração completa.

Inicialmente, foi comparado o elemento finito quadrático do SIPlacas com integração completa, codificado como $Q8_c$. Da mesma forma que ocorreu com o elemento linear $Q4_c$ este elemento apresenta convergência com os resultados do DIANA à medida que se aumenta a discretização da estrutura. Este comportamento pode ser visto a partir das curvas dos gráficos (b) da Figura 25 à Figura 31.

Em seguida, foram realizadas as análises considerando o elemento finito de placa com integração reduzida, $Q8_r$. Ao adotar a integração reduzida, segundo a literatura, evita-se o problema de travamento de força cortante. Contudo, observou-se,

semelhantemente ao ocorrido entre os elementos $Q4_r$ e o do DIANA, que os resultados eram consideravelmente próximos para discretizações quaisquer, com exceção dos resultados de força cortante.

Por último, por analogia ao elemento finito linear, o elemento finito quadrático com CADFC foi analisado. E verificou-se que os valores oriundos do DIANA comparados com o do SIPlacas apresentam resultados satisfatoriamente próximos. Contudo, para os esforços internos, principalmente, para os resultados de força cortante quando se adotou uma discretização pobre, para este caso uma malha que resulta em 116 nós, os valores entre os elementos finitos dos códigos analisados apresentam valores relativamente não tão próximos.

Uma possível explicação para o presente fato é que no Fx+ for DIANA 9.4.4® os esforços internos são calculados inicialmente nos pontos de Gauss e em seguida realiza-se a interpolação destes valores nestes pontos para os nós dos elementos. Enquanto que no código SIPlacas os esforços internos são calculados diretamente no nós dos elementos. E essa diferença tende a diminuir à medida que se aumenta a discretização da estrutura porque os elementos tendem a se apresentar menores e, portanto a distância dos pontos de Gauss para os nós dos elementos diminuem.

Em suma, após o discutido no presente tópico, verifica-se que comparando os elementos lineares e os quadráticos, os elementos finitos com CADFC, $Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$, são àqueles que apresentam maior coerência com o comportamento dos elementos do código computacional Fx+ for DIANA 9.4.4®. Além de que estes elementos aparentemente convergem mais rapidamente que os demais elementos finitos de placa analisados.

Constatou-se também que os elementos com integração reduzida na formulação da matriz de rigidez, ou seja, o $Q4_r$ e $Q8_r$ apresentam curvas de convergência semelhante em relação aos elementos $Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$, quando se trata de resultados de deslocamentos e momento fletor. Portanto, em análises nas quais a força cortante não é avaliada estes elementos podem ser eficientemente utilizados.

6.2.3 Análise dos elementos de Placa quanto ao efeito do Travamento de força cortante (*Shear Locking*)

Para se analisar o efeito do travamento de força cortante nos elementos finitos de placa, considerou-se a mesma placa da análise do item 6.2.2. No entanto variou-se a sua espessura no intervalo de 0,15 a 1,50 m, conforme ilustra Tabela 5.

Tabela 5 - Relação h/a das placas analisadas.

Espessura (m)	h/a
1,50	0,33
1,35	0,30
1,15	0,26
0,95	0,21
0,75	0,17
0,55	0,12
0,35	0,08
0,15	0,03

Os valores obtidos segundo o código computacional SIPlacas foram confrontados com resultados analíticos segundo a Teoria Clássica de Placa apresentada pelo livro do Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). A expressão, retirada do livro, que determina o deslocamento encontra-se exposta conforme Tabela 6.

Tabela 6 - Deslocamento para uma placa retangular com uma borda engastada e as demais simplesmente apoiadas.

b/a	w
1,1	$0,0043.qa^4/D$

Onde,

- a é a menor dimensão da placa, para o exemplo 4,50 m.
- b é a maior dimensão da placa, para o exemplo 5,00 m.
- q é a carga uniforme distribuída, para o exemplo 9,30 kN/m².

- $$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

- $\nu = 0,3$

Antes mesmo de realizar a análise dos resultados é importante salientar que Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) não caracterizam as placas de acordo com a relação h/a . Neste sentido, os resultados obtidos com a Teoria Clássica de Placa podem não ser coerentes com a resposta do problema físico real dos exemplos propostos. Pois, à medida que se aumenta a espessura da placa o efeito da força cortante passa a influenciar na deformação da mesma e, por conseguinte apresentar uma deformação diferente da teoria Clássica de Placa.

Os gráficos da Figura 32 e Figura 33 expõem a relação entre a diferença relativa percentual (entre os valores dos deslocamentos obtidos no SIPlacas e o valor analítico) em função da discretização da estrutura para os elemento lineares e quadráticos, respectivamente.

Os elementos finitos utilizados nesta análise foram os elementos lineares e quadráticos, com integração numérica completa e reduzida, ($Q4_c$, $Q4_r$, $Q8_c$ e $Q8_r$). Optou-se por não apresentar os resultados dos elementos finitos com campo assumido de deformação definido de força cortante (CADFC), ($Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$), por conveniência na exposição das curvas dos gráficos. Tendo em vista que os valores de deslocamentos destes elementos comparados com a integração reduzida são relativamente os mesmos. E, conforme exposto na revisão bibliográfica do capítulo 5, realizar a integração reduzida para os termos da matriz de rigidez equivale aos termos da matriz de rigidez dos elementos com (CADFC).

A primeira conclusão que pode ser realizada ao se observar os gráficos é que a diferença relativa dos deslocamentos é maior em relação à resposta analítica conforme se aumenta a espessura da placa. Este fato já era esperado, pois como explicitado anteriormente, à teoria analítica a qual se baseou o cálculo dos deslocamentos da presente estrutura refere-se à teoria em que não se considera o efeito da deformação por força cortante.

Desta forma, na Figura 32 para a placa de espessura mais fina ($h = 0,15m$ e $h/a = 0,03$) a diferença relativa é em torno de 5%, enquanto que para a placa de

espessura mais espessa ($h = 1,50m$ e $h/a = 0,33$) o valor de convergência conduz a uma diferença relativa na ordem de 90%. A partir desta análise verifica-se que para esta estrutura, ao se adotar valores de altura cada vez menores que a espessura de $0,15m$, o valor da análise numérica tende a ser cada vez mais próxima do cálculo analítico.

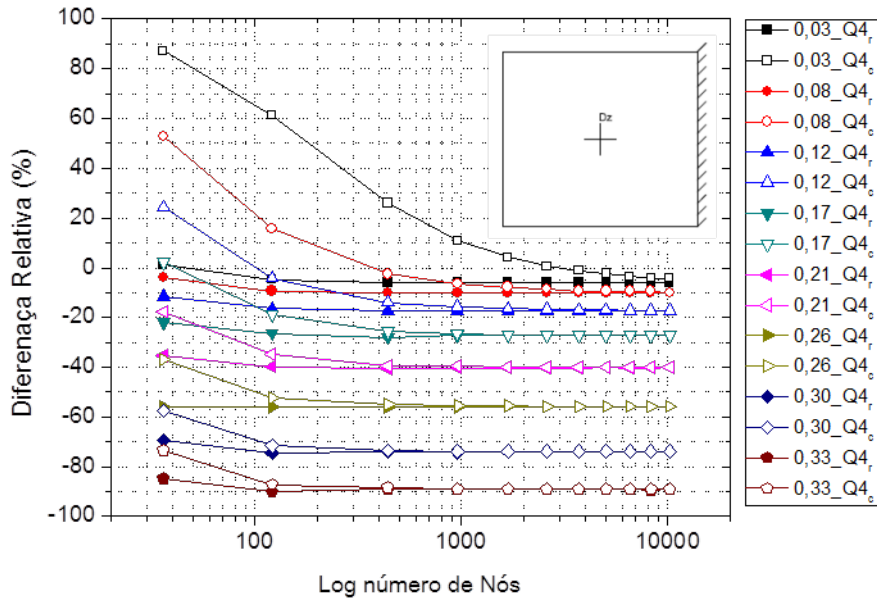


Figura 32 - Diferença relativa entre os elementos lineares com integração completa e reduzida e o cálculo do deslocamento analítico.

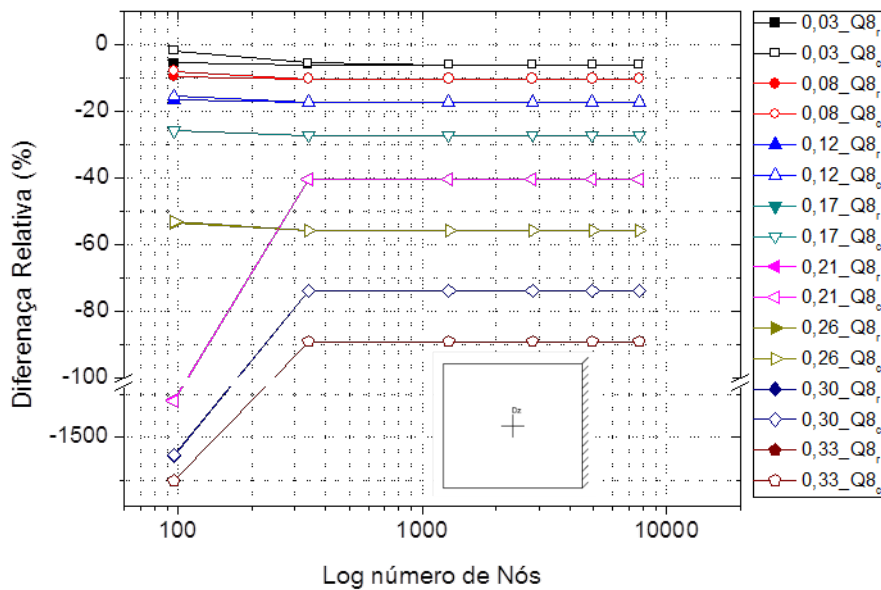


Figura 33 - Diferença relativa entre os elementos quadráticos com integração completa e reduzida e o cálculo do deslocamento analítico.

Na sequência, outra análise que pode ser realizada, a partir dos gráficos da, Figura 32 e Figura 33 é que todos os elementos apresentam convergência para o mesmo valor de deslocamento. E isso vale tanto para os elementos lineares quanto para os quadráticos.

Por exemplo, a placa com relação h/a de 0,21 apresenta convergência para uma diferença relativa na ordem de 40% do valor analítico. Porém, o que diferencia um elemento finito de outro é a razão de convergência. Tendo em vista que para o elemento linear a convergência ocorre para uma estrutura com discretização igual a 961 nós enquanto que para o quadrático a estrutura necessita de 431 nós.

Por fim, a terceira e última observação está relacionada ao travamento por força cortante (Shear Locking). Recapitulando, para os presentes elementos finitos, o problema de travamento de força cortante existe quando se deseja analisar placas na qual a influência da força cortante é desprezível, ou seja, placas esbeltas.

Desta maneira, este comportamento é visto nos gráficos da Figura 32 e Figura 33. A partir deles, tem-se que para as estruturas de espessuras pequenas os valores dos elementos finitos obtidos por integração completa ($Q4_c$ e $Q8_c$), para malha de elementos finitos considerada pobre, tendem a apresentar valores de diferença relativa percentual maior que os elementos com integração reduzida ($Q4_r$ e $Q8_r$). Salienta-se que os elementos ($Q4_r$ e $Q8_r$) não apresentam problema quanto a questão do travamento de força cortante.

Este comportamento é mais bem representado no gráfico dos elementos lineares, Figura 32. A partir dele, para a placa de relação h/a igual a 0,03 e considerando a primeira discretização da estrutura a diferença relativa percentual do elemento $Q4_c$ é na ordem de 90% enquanto que a do elemento $Q4_r$ é 0%. Por outro lado, para a placa de relação h/a igual a 0,33, para a primeira discretização da estrutura verifica-se que praticamente não há diferença entre as respostas dos elementos finitos lineares.

Para o gráfico dos elementos quadráticos, Figura 33, o elemento quadrático com integração completa gera valores razoáveis para todas as placas analisadas. Contudo, o problema de travamento de força cortante (Shear Locking) surge, embora de forma atenuada, para as estruturas com relação h/a iguais a 0,21, 0,12 e 0,03. Pois, ocorre uma leve diferença entre o início das curvas de convergência que representam estas estruturas.

Reforçando que, como discutido no item 5.2.2, praticamente não há diferença em relação aos valores de deslocamentos entre os elementos finitos $Q4_r$ e $Q4_{CAD}$ e os elementos $Q8_r$ e $Q8_{CAD}$. Por esta razão os gráficos plotados na presente análise referiu-se apenas entre os elementos com integração completa e reduzida.

6.2.4 Elementos de Placas com Campo Assumido de Deformação: Linear versus Quadrático

Segundo o que já foi discutido até o presente momento, os elementos finitos com campo assumido de deformação de força cortante (CADFC) não apresentam travamento de força cortante (Shear Locking). E de maneira geral, apresentam convergência mais rápida se comparado com os elementos com integração reduzida para os resultados de deslocamentos, momentos fletores e força cortante. Desta maneira, a seguir pretende-se comparar a razão de convergência entre os elementos lineares e quadráticos com CADFC.

Antes de realizar comparações entre os elementos finitos lineares e quadráticos deve-se ter consciência de que os gráficos estão plotados segundo o número de nós da malha que a estrutura encontra-se discretizada. Desta maneira tem-se que para uma mesma discretização os elementos lineares apresentam uma quantidade de número de nós menor que a do elemento finito quadrático. A relação entre a discretização e o número de nós para a presente estrutura é dada pelas expressões (6.2) e (6.3):

(a) Para o elemento linear:

$$NNos = (Div + 1)^2 \quad (6.2)$$

(b) Para o elemento quadrático:

$$NNos = (2.Div + 1)^2 - (Div)^2 \quad (6.3)$$

Onde,

- $NNos$ é o número de nós da estrutura;
- Div corresponde ao número de divisões de elementos finitos em uma direção.

A Tabela 7 a seguir relaciona o número de nós de elemento finitos para cada discretização considerada na estrutura de acordo com o elemento finito utilizado.

Tabela 7 – Número de nós na estrutura segundo o elemento finito analisado.

Div	NNos_Linear	NNos_Quadrático
5	36	96
10	121	341
20	441	1281
30	961	2821
40	1681	4961
50	2601	7701
60	3721	-
70	5041	-
80	6561	-
90	8281	-
100	10201	-

A relação de valor de convergência para número de nós é importante de ser verificada, pois como já explicitado anteriormente o tempo de processamento das

análises das cargas móveis está diretamente relacionada com o número de nós da estrutura.

O gráfico da Figura 34 apresenta a relação entre os deslocamentos, obtidos para a placa apresentada no item 6.2 considerando a variação de espessura apresentada no item 6.2.3, em função da discretização da estrutura. Constata-se que a convergência dos elementos finitos lineares e quadráticos para cada estrutura considerada ocorre para o mesmo valor. Sendo que, para o elemento linear a convergência ocorre em geral para a terceira discretização da estrutura (441 nós), enquanto que para o elemento finito quadrático ocorre para uma discretização menor (341 nós). A partir disto, pode-se concluir que em termos de deslocamentos o elemento finito quadrático atinge o valor de convergência utilizando menor discretização.

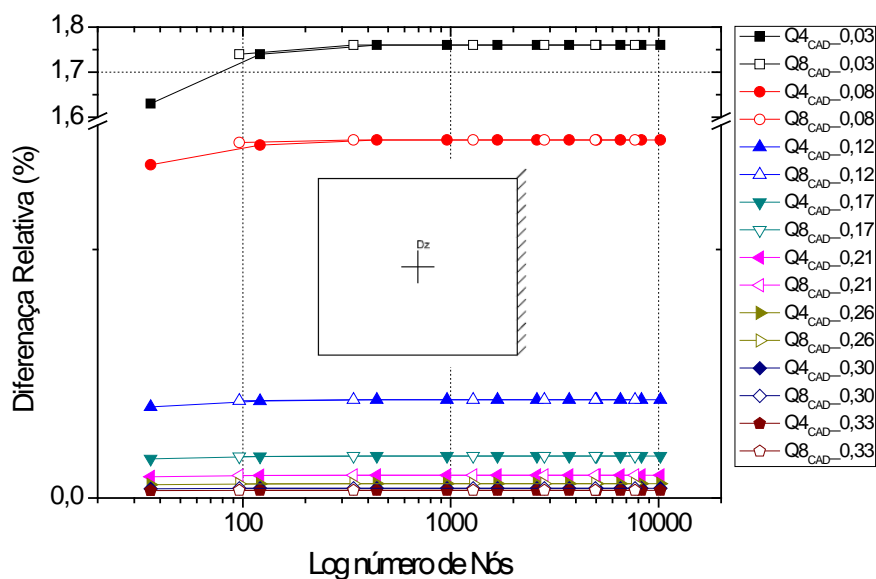


Figura 34 – Deslocamento

Os gráficos da Figura 35, Figura 36 e Figura 37 expõe a relação de convergência em função da discretização da estrutura em diferentes pontos de análise de momento fletor da estrutura. Tem-se que, tal como ocorre para o deslocamento, à mesma tendência do elemento quadrático em apresentar uma razão de convergência maior que se comparada com o elemento finito linear.

Nos gráficos da Figura 35 e Figura 36 para todas as placas a convergência considerando o elemento quadrático ocorre para a segunda discretização (341 nós), enquanto que para o elemento linear isto acontece na terceira discretização (441 nós).

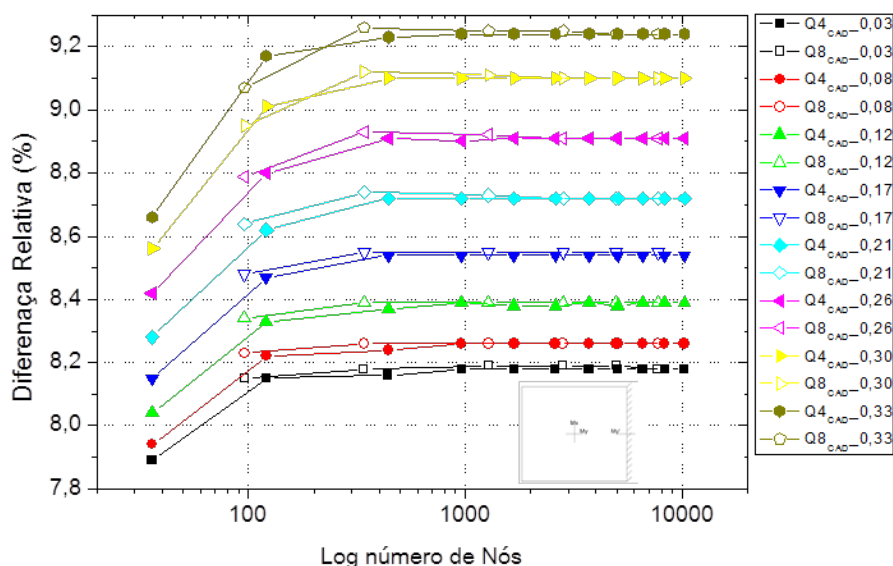


Figura 35 - Momento Fletor M_x

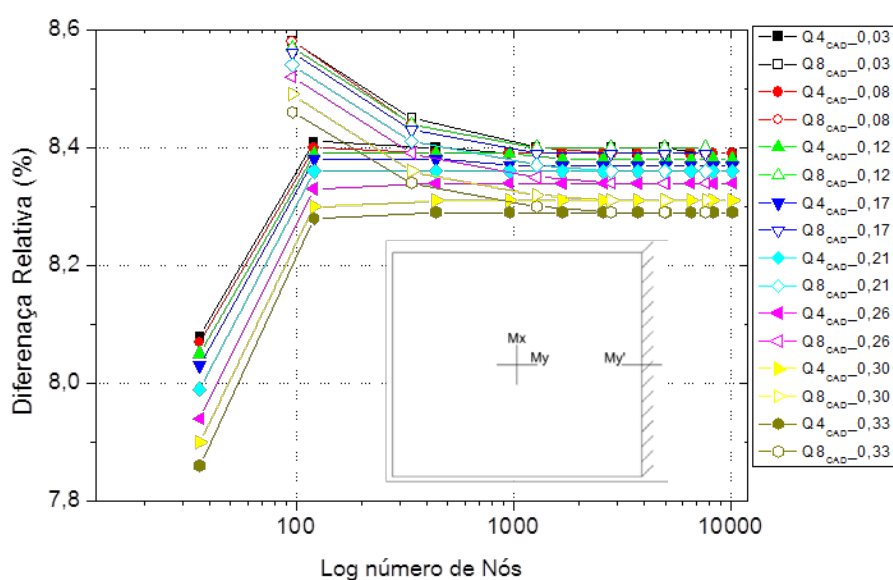


Figura 36 - Momento Fletor M_y

Para o gráfico da Figura 37, que representa o momento fletor no engaste da placa, verifica-se que enquanto para o elemento quadrático a convergência ocorre na terceira discretização (1281 nós), para o elemento finito linear só ocorre na oitava discretização (6561 nós, de acordo com a Tabela 7).

O valor de convergência do momento no engaste para a placa com relação h/a igual a 0,03 considerando o elemento linear é aproximadamente igual a $16,50kN.m$ enquanto que para o elemento quadrático é, aproximadamente, de $17,50kN.m$. Conforme gráfico da Figura 37.

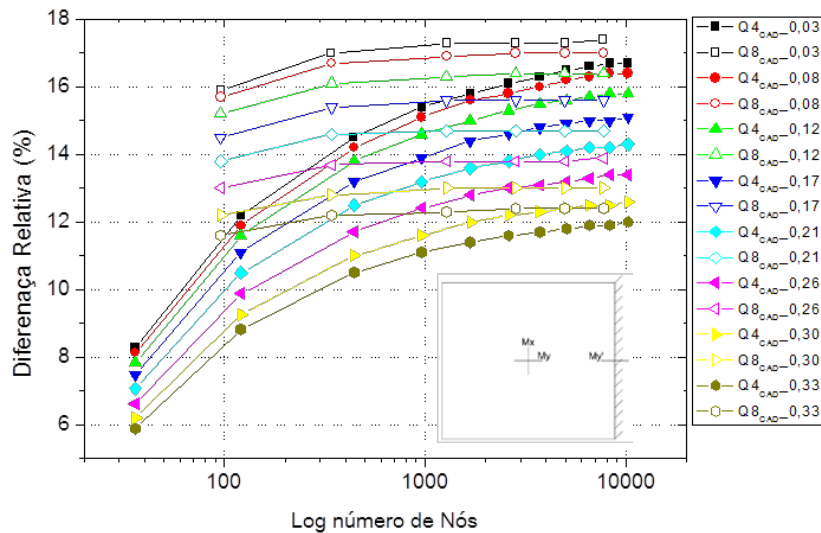


Figura 37 - Momento Fletor M_y'

Nos gráficos da Figura 38, Figura 39 e Figura 40 pode ser visto que o mesmo comportamento para o deslocamento e o momento fletor acontece para a força cortante, ou seja, o elemento quadrático apresenta razão de convergência maior se comparado com o elemento linear. E da mesma forma que aconteceu com o momento fletor no engaste, observa-se que os elementos finitos quadráticos tendem a apresentar um valor de convergência levemente maior que os elementos lineares.

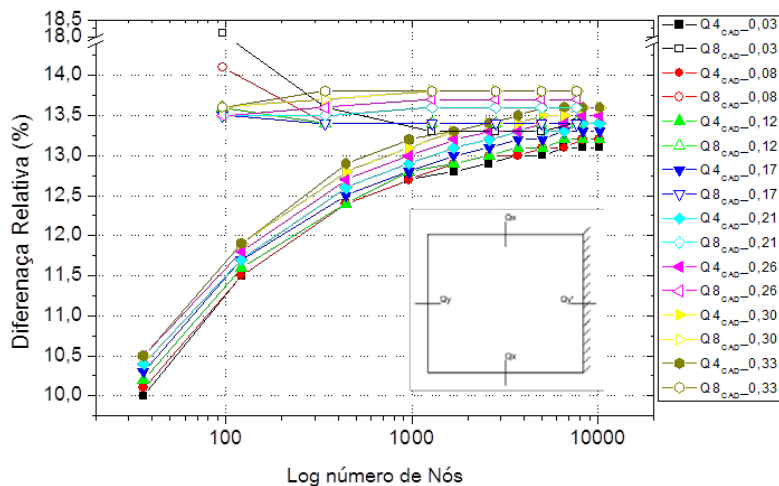
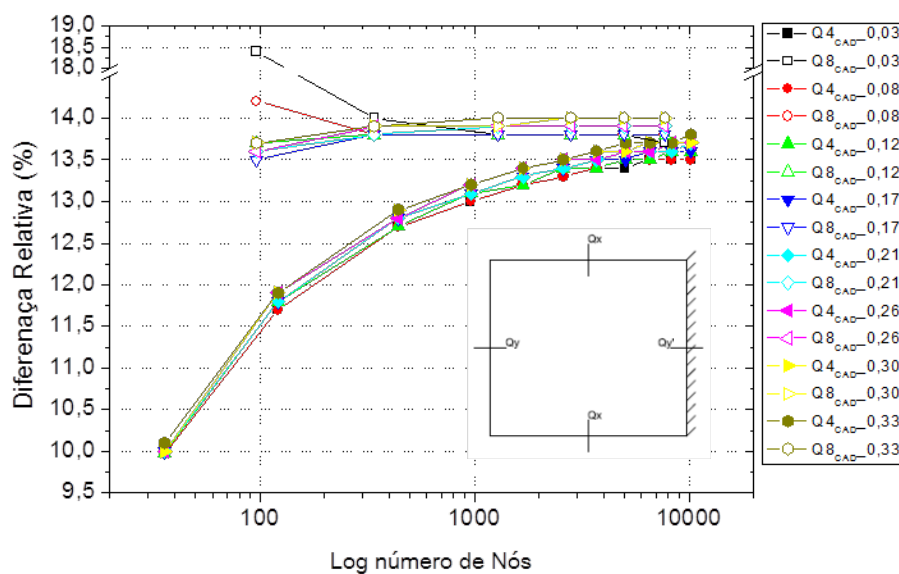
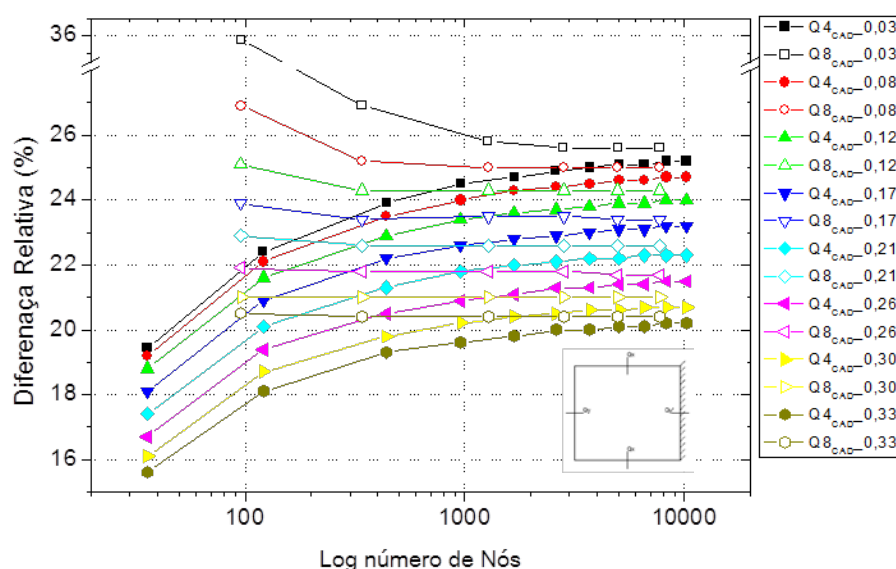


Figura 38 - Força Cortante Q_x

Figura 39 - Força Cortante Q_y Figura 40 - Força Cortante Q_y'

6.3 Resumo

Neste capítulo foram apresentados o comportamento dos elementos finitos de barra e placa discutidos no presente trabalho e implementados no SIPlacas.

Considerando os elementos finitos de barra, foi realizada a análise de uma viga em balanço. Estes elementos foram codificados com as siglas $B2_C$, $B2_r$ e $B2_{CAD}$, para elementos lineares e $B3_C$, $B3_r$ e $B3_{CAD}$, para os elementos quadráticos. Compararam-se os resultados das análises utilizando os elementos finitos com resultados

analíticos. Os resultados analisados foram o deslocamento, momento fletor e força cortante.

De maneira geral foi possível concluir:

- Em relação ao deslocamento, os elementos que apresentaram convergência de resultados mais rápida foram os $B3_r$ e $B3_{CAD}$.
- No que diz respeito à análise de momento fletor, foi mostrado que os elementos $B3_r$ e $B3_{CAD}$ apresentam convergência de resultados mais rápida. E que o elemento $B3_c$ apresenta convergência mais lenta comparada aos demais elementos com aproximações quadráticas.
- Para a força cortante, os elementos $B2_{CAD}$ e $B3_{CAD}$ foram os únicos a apresentarem resultados satisfatórios para qualquer discretização adotada na análise da viga em balanço.

Em seguida foi abordado o problema de travamento de força cortante. E foi possível mostrar que os elementos $B2_r$, $B2_{CAD}$ e $B3_r$ e $B3_{CAD}$ estão livre de travamento.

Ao fim desta análise, foi concluído que o elemento ($B3_{CAD}$) é aquele que possui melhor comportamento, para as análises que se pretendem realizar pelo SIPlacas. Tendo em vista que é aquele que melhor apresenta resultados considerando uma malha de elementos finito mais pobre.

Foram apresentados também análises com relação aos elementos finitos de placa implementados no código SIPlacas. Estes elementos foram codificados com as siglas $Q4_c$, $Q4_r$ e $Q4_{CAD}$, para elementos lineares e $Q8_c$, $Q8_r$ e $Q8_{CAD}$, para os elementos quadráticos. A estrutura idealizada para as análises constituiu-se de uma placa com dimensões de 5,00 e 4,50 m.

Os resultados obtidos pelos elementos do SIPlacas foram confrontados, primeiramente, com os resultados do código Fx+ for DIANA 9.4.4®. Esta etapa foi realizada no intuito de observar se a rotina implementada no SIPlacas encontrava-se coerente. O programa Fx+ for DIANA 9.4.4® foi utilizado por apresentar o elemento finito de placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin.

Em seguida, preocupou-se em expor o problema do travamento de força cortante (Shear Locking) que o elemento finito linear e/ou quadrático com integração completa apresenta. Para discutir tal fenômeno foram consideradas espessuras diversas, para a placa analisada, entre o intervalo de 0,15 a 1,50 m. E os resultados de deslocamento obtidos foram comparados com resultados analíticos segundo a Teoria Clássica de Placa apresentada pelo livro do Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

Por último, foram realizadas análises entre os resultados obtidos segundo os elementos finitos com aproximação linear e quadrático. Esta análise possui o objetivo de apresentar a convergência dos elementos para os deslocamentos, momento fletor e força cortante. E pôde-se concluir que o elemento finito que apresenta resultados mais satisfatórios é o Q8_{CAD}.

7 AUTOMATIZAÇÃO DO MÉTODO

Pretende-se, primeiramente, definir o campo de aplicação do programa SIPlacas. Em seguida, apresenta-se a organização do código computacional a partir da idealização de um fluxograma e exposição de figuras que expõe a interface do mesmo.

7.1 Campo de Aplicação

O código computacional SIPlacas é de autoria do Professor Doutor Vladimir Guilherme Haach com a colaboração do autor da presente pesquisa. O código encontra-se desenvolvido em linguagem Pascal utilizando o ambiente de programação Delphi7.

O código SIPlacas é desenvolvido com o objetivo de avaliar a distribuição de esforços em tabuleiros de pontes. As pontes que podem ser analisadas são as pontes em vigas e pontes em lajes. Podem ser avaliadas também as pontes esconsas.

Para as pontes em vigas, o tabuleiro da ponte pode ser calculado de três maneiras. A primeira consiste em considerar painéis de laje isolados com condições de apoio adequadas. A segunda o tabuleiro pode ser considerado completo com as lajes apoiadas sobre apoios não deslocáveis. E a terceira, e última, o tabuleiro pode ser considerado completo com vigas acopladas as lajes.

As análises de deslocamento, momentos fletores e forças cortantes podem ser realizadas utilizando qualquer dos elementos finitos de barra e placa apresentados

nesta pesquisa. No entanto, é importante salientar, que o usuário deve estar consciente dos problemas de travamento numérico que alguns elementos apresentam. Problemas estes que se encontram discutidos neste trabalho e nos demais documentos presentes nas referências bibliográficas.

7.2 Organização do Programa

O código computacional implementado é composto por três etapas. A primeira etapa corresponde ao pré-processamento que consiste na entrada de dados do problema a ser analisado pelo usuário. A segunda é a etapa de processamento que se define como sendo o processo de cálculo realizado pelas rotinas escritas. E a terceira, e, última, é o pós-processamento responsável pela exposição dos resultados.

A seguir optou-se por apresentar o código SIPlacas em quatro partes que correspondem a quantidade de janelas de interface que o código possui. A primeira parte corresponde às opções do programa. A segunda, a janela responsável pela interface de inserção de dados, pelo usuário, de lajes, e, longarinas e transversinas. A terceira, análise de carga estática. E a quarta, análise de cargas móveis.

(a) Opções

O menu **Opções**, Figura 41, corresponde as configurações de cálculo adotadas pelo usuário para a resolução da estrutura. Nesta janela o usuário define o elemento finito utilizado nas análises. Determina-se a configuração da malha alternativa, usada no cálculo dos valores da superfície de influência. O conceito da malha alternativa é melhor explicado mais adiante, no item (d). O usuário define, também, as unidades de força e comprimento.

Opções de placa

- Aproximação Linear**
 - Placa Grossa (Gauss 2 x 2)
 - Placa Grossa (Gauss 2 x 1)
- Linear Integração Fixa**
- Aproximação Quadrática**
 - Placa Grossa (Gauss 3 x 3)
 - Placa Grossa (Gauss 2 x 2)
- Quadrático Integração Fixa**

Malha Alternativa

Elemento Linear
Percentual da Malha:

Elemento Quadrático

- Carga nos vértices dos elementos

Unidades

Força:

Comprimento:

Tolerância do processo iterativo

Opções Veículo Tipo

- Considera veículo parcialmente fora do tabuleiro.

Figura 41 – Opções.

O item, tolerância do processo iterativo, corresponde à tolerância adotada na resolução do sistema linear que o código resolve para se determinar o campo de deslocamento da estrutura. Vale salientar que esta tolerância diz respeito à resolução do sistema pelo método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento. E, por último, o usuário define se para o cálculo das envoltórias o veículo pode ser considerado parcialmente fora do tabuleiro.

(b) Janela de Inserir dados de laje, e, longarinas e transversinas.

A janela de inserir dados de laje pode-se afirmar que é a principal do código SIPlacas, (Figura 42). Ela permite ao usuário definir as lajes (Placa) que irão compor o tabuleiro da ponte. Os dados de entrada que se deve definir são: geometria (P1, P2, P3 e P4), espessura (h), condições de contorno (C.C.), propriedades dos materiais (E e ν) e por fim definição da malha de elementos finitos (Divisões em P1P2 e Divisões em P2P3).

Nome	P1X	P1Y	P2X	P2Y	P3X	P3Y	P4X	P4Y	Nº X	Nº Y	E	Poisson	h
L1	0	0	5000	0	5000	1250	0	1250	10	4	28071	0.2	215
L2	5000	0	13000	0	13000	1250	5000	1250	10	4	28071	0.2	215
L3	13000	0	21000	0	21000	1250	13000	1250	10	4	28071	0.2	215
L4	21000	0	28000	0	28000	1250	21000	1250	10	4	28071	0.2	215
L5	0	1250	5000	1250	5000	5750	0	5750	10	10	28071	0.2	180
L6	5000	1250	13000	1250	13000	5750	5000	5750	10	10	28071	0.2	180
L7	13000	1250	21000	1250	21000	5750	13000	5750	10	10	28071	0.2	180

Figura 42 - Interface de dados de entrada das lajes.

Depois de se determinar as lajes do tabuleiro o usuário pode inserir as longarinas e transversinas, Figura 43. Este procedimento é adotado configurando-se a seção transversal, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Pode ser visto, também, que elas são inseridas de acordo com os lados das lajes. Neste ponto é importante enfatizar que o código SIPlacas não permite a inserção de longarinas e transversinas sem a definição, prévia, das lajes. Para o coeficiente redutor de torção a NBR 6118/2007 item 14.6.7.2 define que de maneira aproximada, nas grelhas e nos pórticos espaciais, pode-se reduzir a rigidez a torção das vigas por fissuração utilizando-se 15% da rigidez elástica, exceto para os elementos estruturais com protensão limitada ou completa.

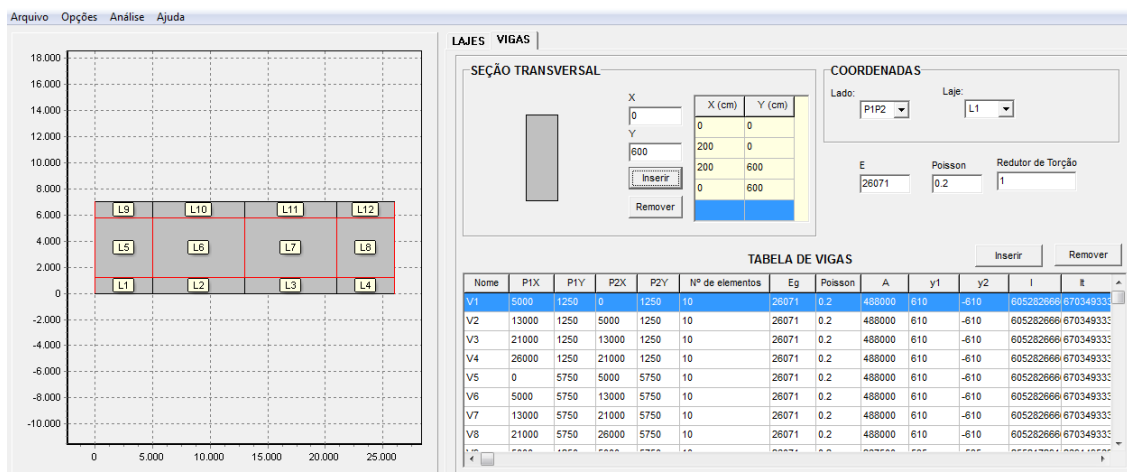


Figura 43 – Interface de dados de entrada das longarinas e transversinas.

(c) Análise carga estática

No menu **Análise** opção **Carga Estática**, Figura 44, calcula-se a estrutura que se deseja analisar considerando apenas as cargas estáticas. De maneira geral, as cargas estáticas podem ser introduzidas considerando-as representadas por carregamentos concentrados, lineares ou distribuídos.

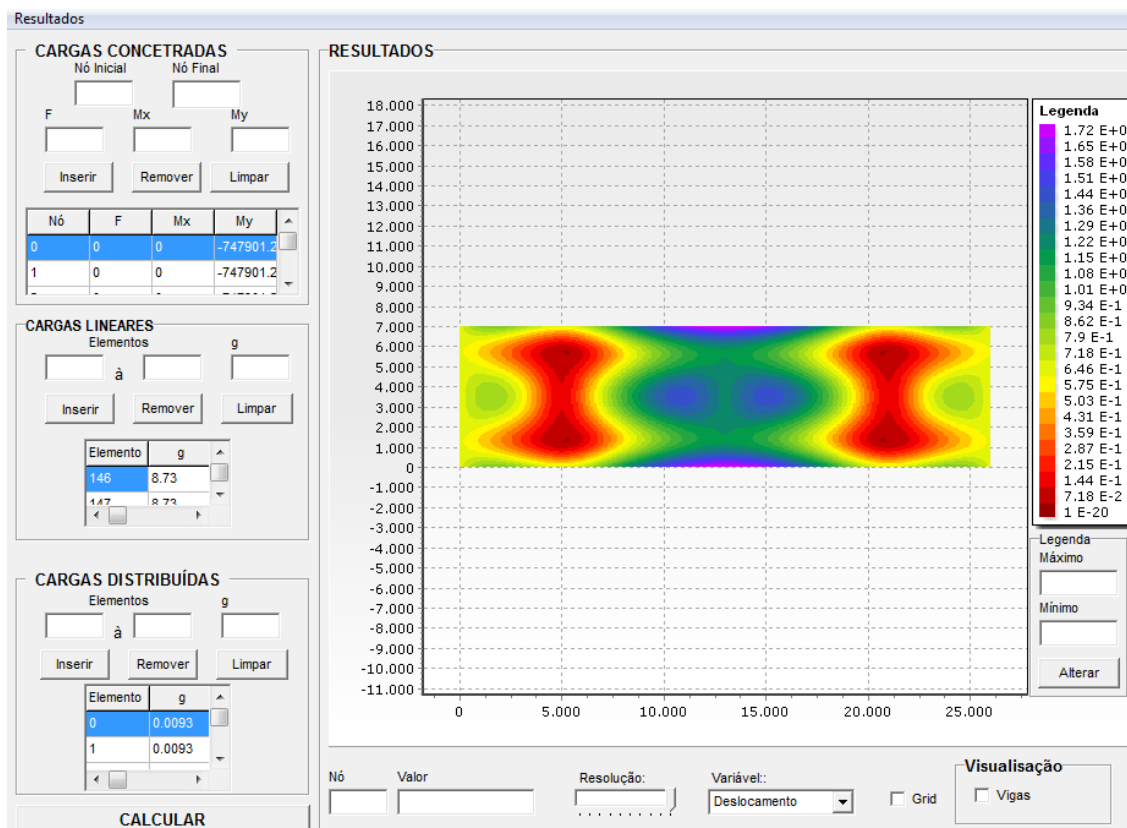


Figura 44 – Janela de análise de Carga Estática.

Nesta mesma janela os resultados das placas que compõem a estrutura podem ser visualizados a partir da representação dos esforços na estrutura por curvas de níveis. As curvas de níveis podem ser de força cortante, momento fletor, deslocamento, distorção, rotação e/ou curvatura, conforme Figura 44.

No canto inferior direito da Figura 44 observa-se que ao se inserir vigas no tabuleiro a opção **Visualização – Vigas** aparece disponível para o usuário acessar. Esta opção corresponde ao campo de análise de resultados das vigas inseridas (Figura 45). Neste campo é possível escolher qual a viga se deseja visualizar assim como o tipo de esforço interno a ser analisado, seja ele, deslocamento, força cortante, momento fletor ou momento de torção.

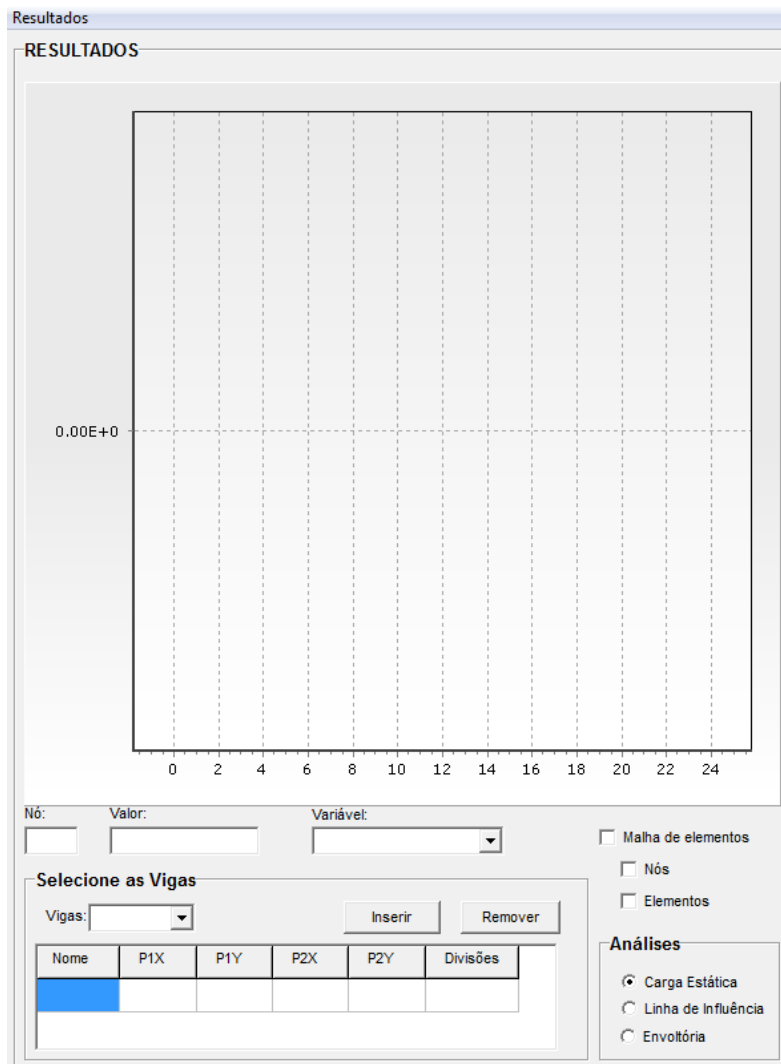


Figura 45 – Janela de ver resultados das vigas.

A resolução para a análise da estrutura considerando o carregamento estático é baseado no método dos elementos finitos. O fluxograma da Figura 46 apresenta, basicamente, o procedimento implementado no SIPlacas, no botão **Calcular** da Figura 44, para se determinar os esforços internos na estrutura fornecida pelo usuário.

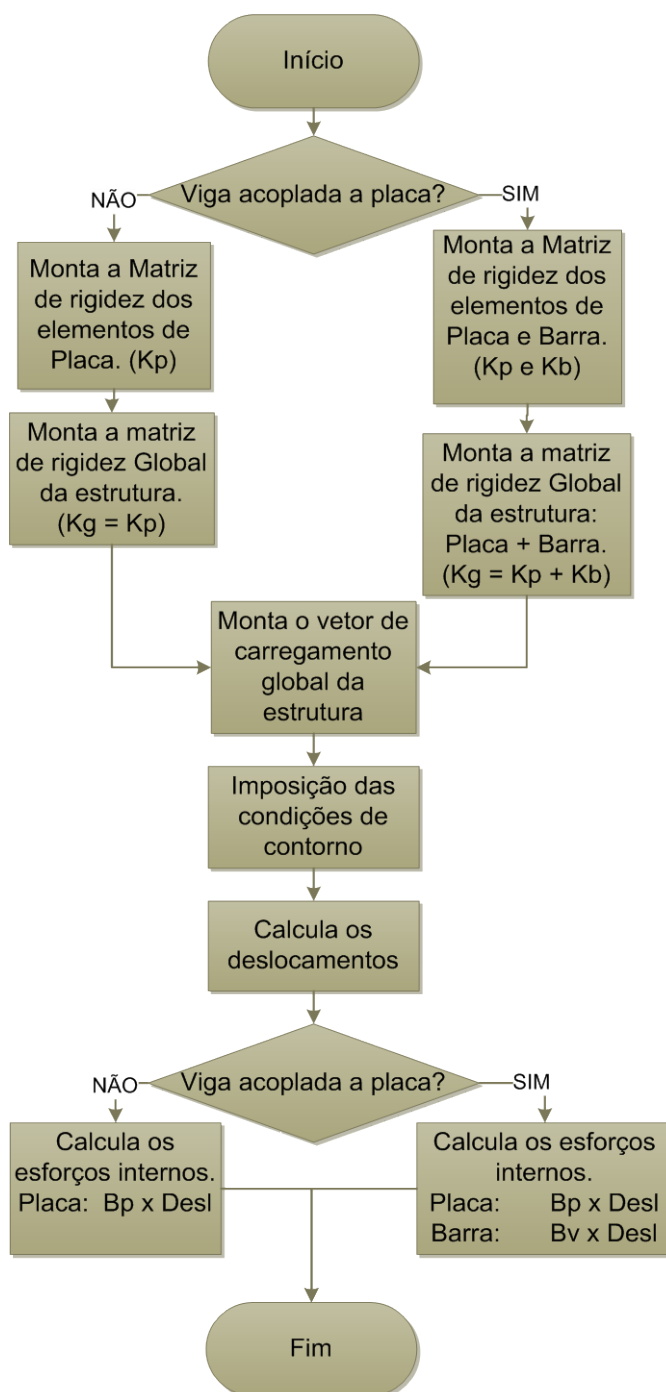


Figura 46 - Fluxograma de resolução de placa utilizando o MEF.

De acordo com o fluxograma da Figura 46, o primeiro procedimento adotado pelo SIPlacas para o cálculo dos esforços internos na estrutura considerando apenas as cargas estáticas, corresponde ao acoplamento da viga na placa.

Caso não exista acoplamento, a estrutura é calculada considerando apenas a rigidez do elemento finito de placa. E para isso, as etapas de procedimento de cálculo correspondem à montagem da matriz de rigidez local dos elementos finitos de placa (K_p), seguida da montagem da matriz de rigidez global da estrutura (K_g). Verifica-se que a matriz K_g é composta apenas pelas matrizes locais da placa (K_p).

Por outro lado, na situação de acoplamento da viga na placa, realiza-se, primeiramente a montagem das matrizes locais da placa (K_p), e, em seguida, a montagem das matrizes de rigidez locais das vigas (K_b). É importante salientar que no código, à medida que se determina a matriz K_b , os seus termos já são somados a matriz de rigidez global da estrutura. Este procedimento é adotado visando otimizar o uso da memória do computador.

Após a montagem da matriz de rigidez global, determina-se o vetor de carregamento global. Em seguida, impõem-se as condições de contorno para a resolução do sistema de equações lineares. Este procedimento tem por objetivo determinar o campo de deslocamentos nodais dos elementos finitos que compõem a estrutura. A resolução do sistema de equações é realizada pelo método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento

Por último, com o campo de deslocamento nodal dos elementos, calculam-se os esforços internos. Nesta etapa o SIPlacas analisa novamente se o cálculo considera acoplamento entre os elemento finitos de placa e barra. Quando estes elementos não se encontram acoplados o código realiza apenas o cálculo dos esforços internos para os elementos de placa. Enquanto que, ao se considerar acoplamento o código determina os esforços internos para ambos os elementos finitos.

(d) Análise carga móvel

No menu **Análise** opção **Carga Móvel**, o usuário tem acesso a janela que possibilita o usuário realizar a análise da estrutura sob carregamento móvel, Figura 47.

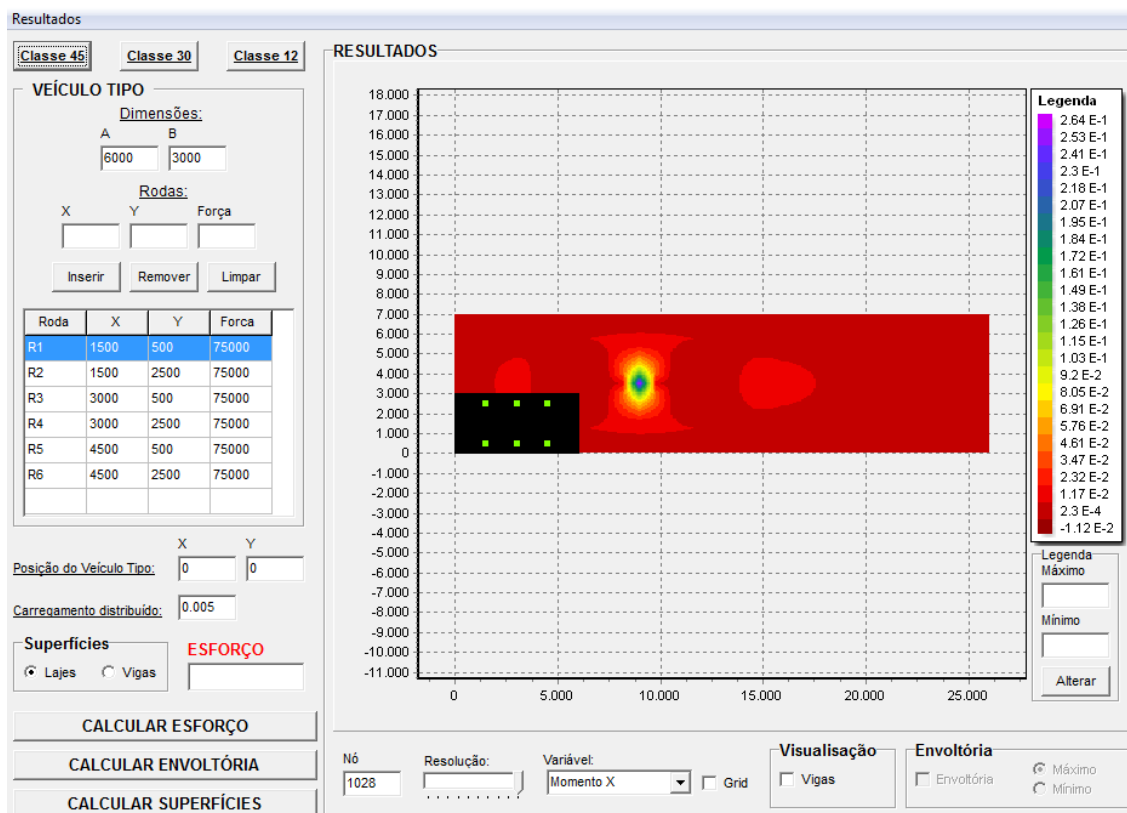


Figura 47 – Janela de análise de Cargas Móveis.

Nesta janela o primeiro dado de entrada que o usuário deve inserir diz respeito à carga móvel. No SIPlacas existem três casos de carga móvel que já se encontram configurados. Estes veículos tipo estão de acordo com a antiga norma brasileira de cargas móveis para pontes (ABNT NBR 7188:2003). É importante salientar que o trem-tipo de Classe 45 corresponde ao trem-tipo, TB-450 kN, que a atual norma brasileira (ABNT NBR 7188:2013) considera para o carregamento de cargas móveis em pontes.

O SIPlacas permite, também, que o usuário especifique o veículo tipo que se deseja trabalhar. Desta maneira o usuário pode determiná-lo a partir das dimensões do veículo (A e B), das posições das rodas, e das forças por elas aplicadas no tabuleiro.

Definido a configuração do tabuleiro da ponte e o veículo tipo, pode-se obter a envoltória de esforços. A envoltória corresponde aos valores dos esforços máximos e mínimos em todos os pontos do tabuleiro. Contudo, para se determinar a envoltória de esforços é necessário, primeiramente o cálculo das superfícies de influência.

O fluxograma da Figura 48 apresenta como é realizado o cálculo das superfícies de influência.

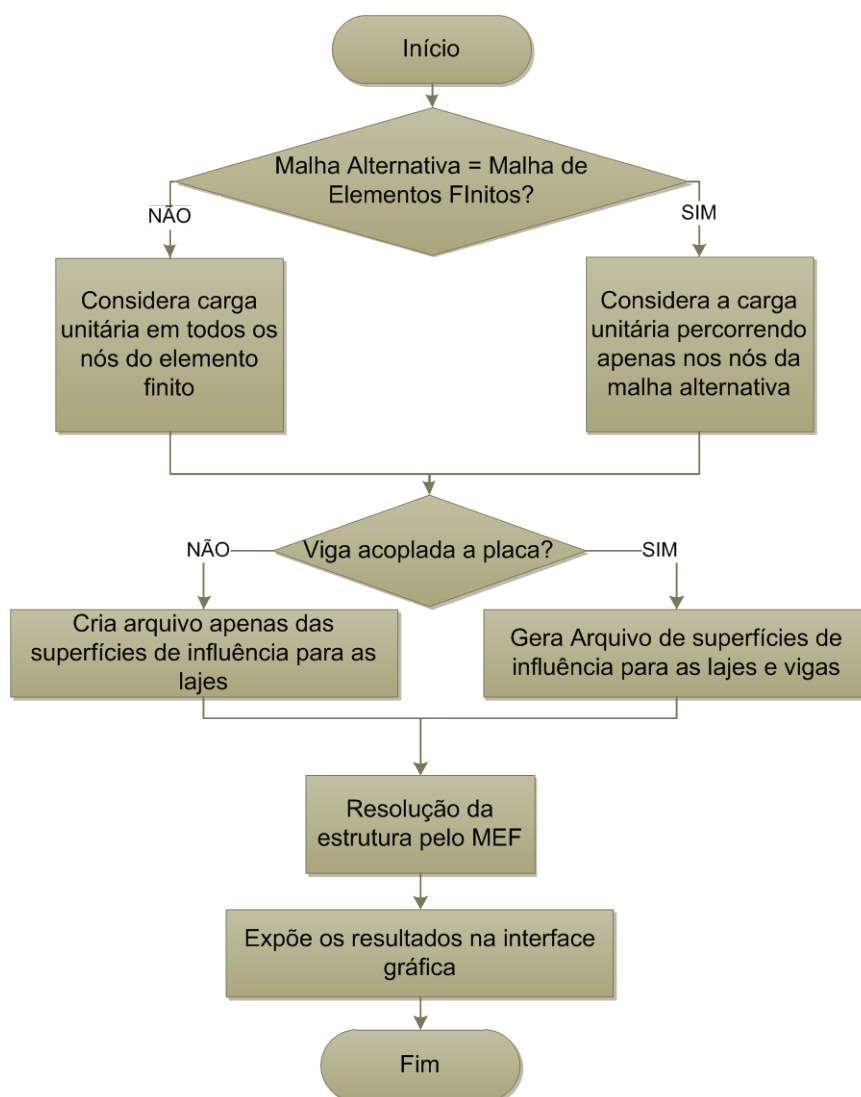


Figura 48 – Procedimento para o cálculo das superfícies de influência.

De acordo com o fluxograma, a primeira verificação que o código SIPlacas realiza diz respeito a consideração da malha alternativa ser igual a malha de discretização de elementos finitos da estrutura. Define-se malha alternativa, como sendo uma

malha fictícia que é utilizada apenas para especificar os pontos de aplicação de carga unitária concentrada considerada no cálculo das superfícies de influência.

Para a situação em que a malha alternativa é igual à malha de elementos finitos, o programa considera a carga unitária atuando na direção do grau de liberdade transversal de cada nó do elemento. Em contrapartida, para a situação em que a malha alternativa não coincide com a malha de elementos finitos, o SIPlacas adota duas maneiras diferentes de determiná-la.

Quando a análise é realizada utilizando os elementos lineares, o usuário define percentualmente o valor da redução da discretização da malha de elementos finitos da estrutura. Por exemplo, o usuário determina que a malha alternativa deva ser considerada com um percentual 50% menor em relação à malha de elementos finitos. Para esta situação, o número de pontos de atuação da carga unitária será reduzido pela metade ao se comparar com a situação das malhas serem iguais.

Para o caso das análises serem realizadas com elementos quadráticos têm-se apenas duas opções de configurações de malha alternativa. A primeira delas diz respeito à malha alternativa ser igual à malha de elementos finitos. Enquanto que na segunda, a malha alternativa assume apenas os nós dos vértices dos elementos quadráticos como pontos de atuação da carga unitária.

Destaca-se que, a quantidade de pontos em que a carga unitária deve atuar na estrutura para se determinar as superfícies, encontra-se diretamente ligado ao número de vezes que o SIPlacas terá que resolver a estrutura. Desta maneira, a idealização da malha alternativa surge com o objetivo de otimizar o tempo de processamento que o código utiliza para calcular as superfícies de influência. Pois, à medida que se reduz o número de pontos de aplicação da carga unitária, menor será o tempo de processamento final da estrutura.

É importante ressaltar que ao se adotar a malha alternativa menor que a malha de elementos finitos, não significa dizer que o resultado de convergência numérica para um determinado esforço em uma estrutura seja comprometido. Pois, embora as superfícies de influência sejam calculadas assumindo uma quantidade menor de

pontos, os resultados das superfícies são obtidos para a discretização de elementos finitos adotada.

Seguindo no fluxograma da Figura 48, o código verifica se é considerado o acoplamento da viga na placa. Para o caso em que há acoplamento, o código prepara dois arquivos de superfícies de influência, um relacionado às lajes e outro com relação às superfícies das vigas. Enquanto que não havendo acoplamento, o SIPlacas cria apenas um arquivo de superfície de influência direcionado as lajes.

A resolução para cada caso de ponto de aplicação da carga unitária na estrutura é realizada utilizando o método dos elementos finitos (MEF). Para cada resolução o código realiza todos os procedimentos descritos, anteriormente, no fluxograma da Figura 46.

Enfim, após o cálculo de todas as superfícies de influência, o SIPlacas expõe os resultados na interface gráfica do programa. Em seguida, o usuário pode determinar a envoltória de esforços clicando no botão **Calcular Envoltória**. A envoltória é calculada a partir da soma dos esforços resultantes das solicitações de carga concentrada e distribuída, expressões (7.1), (7.2) e (7.3).

$$E_S^q = E_S^{Conc} + E_S^{Dist} \quad (7.1)$$

$$E_S^{Conc} = \sum_{i=1}^{n^{\circ}rodas} \eta_i(x, y) \cdot P_i \quad (7.2)$$

$$E_S^{Dist} = \int_A \eta(x, y) \cdot g(x, y) dA \quad (7.3)$$

Onde,

- E_S^q é o esforço calculado em um ponto S da estrutura;
- E_S^{Conc} é o esforço, no ponto S da estrutura, resultante da ação das cargas concentradas;

- E_s^{Dist} é o esforço, no ponto S da estrutura, resultante da ação da carga distribuída;
- $\eta(x,y)$ é a função da superfície de influência;
- P é a carga concentrada;
- $g(x,y)$ é a carga distribuída.

O fluxograma da Figura 49 apresenta a rotina que se encontra implementada no código SIPlacas responsável pela determinação da envoltória de esforços.

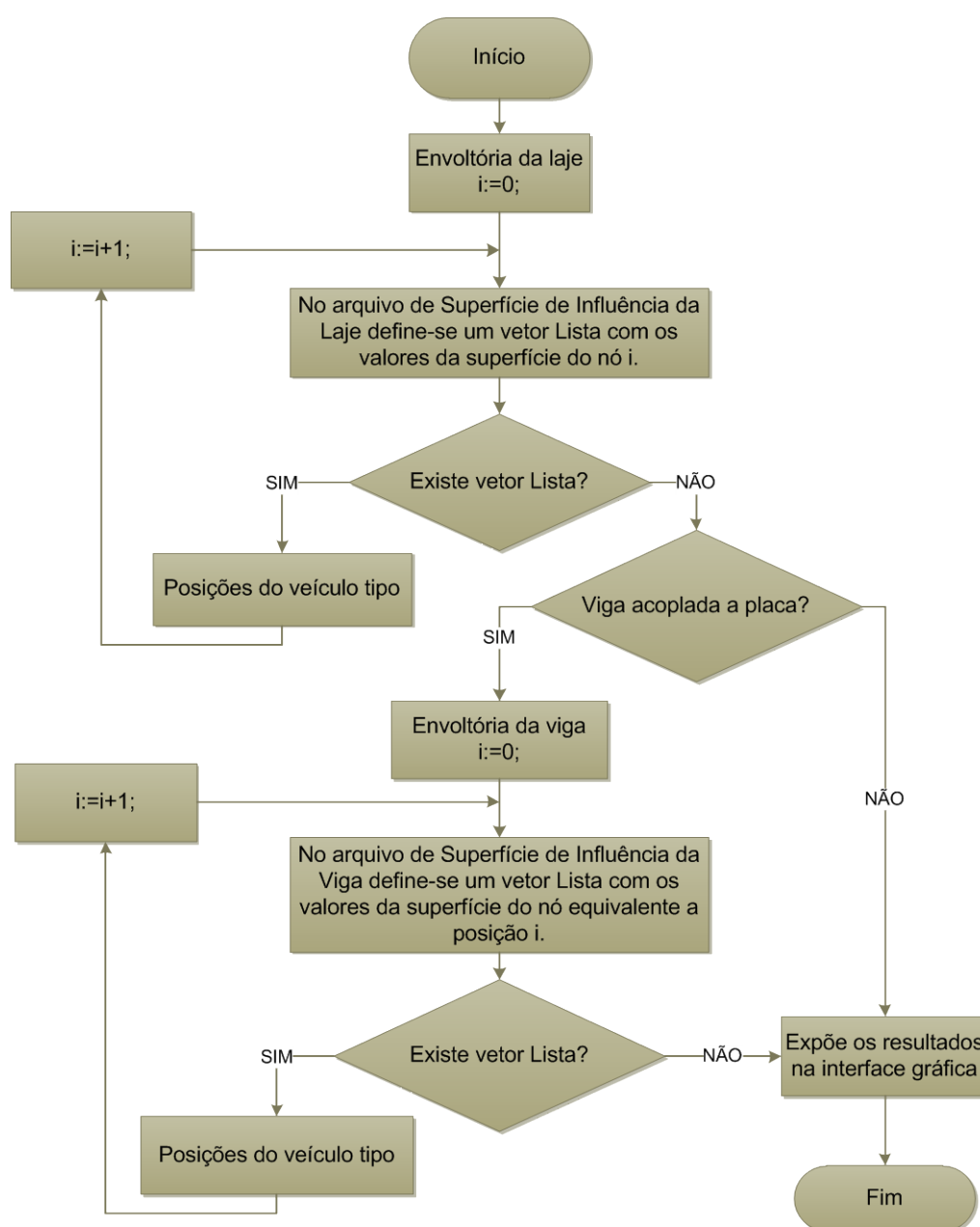


Figura 49 – Sub-rotina de cálculo da envoltória de esforços internos no tabuleiro de pontes.

A sub-rotina da Figura 49 se inicia com o contador i recebendo o valor inteiro zero. Este contador representa a superfície de influência do nó i da numeração nodal global da estrutura discretizada. Em seguida, utilizando os dados do arquivo de superfície de influência da laje armazenam-se no vetor lista os resultados da superfície, por exemplo momentos fletores na direção x .

O código analisa se o vetor lista é criado. A não existência do vetor lista significa dizer que não existe superfície de influência para o nó i . Caso isso ocorra, o código verifica se há acoplamento do elemento finito de barra na placa. Não havendo acoplamento, o código expõe o resultado na interface. Considerando este procedimento para a primeira iteração, verifica-se que não existe envoltória de esforços.

Caso o código verifique que há acoplamento do elemento de barra no de placa, o SIPlacas avaliará a possibilidade de se determinar a superfície de influência da viga. Para isto o código reinicia o contador i para zero. Em seguida, o mesmo procedimento adotado para a superfície de influência da laje é realizado para a viga. Ou seja, utilizando os dados do arquivo de superfície de influência da viga armazenam-se no vetor lista os resultados desta superfície. Na situação em que o vetor lista não é criado o código expõe os resultados do cálculo realizado.

Por outro lado, existindo o vetor lista da superfície de influência do nó i da viga, o SIPlacas analisa os esforços máximos e mínimos considerando o veículo em algumas posições. O Fluxograma da Figura 50 apresenta a posições do veículo tipo e considerações para a determinação dos esforços máximos e mínimos.

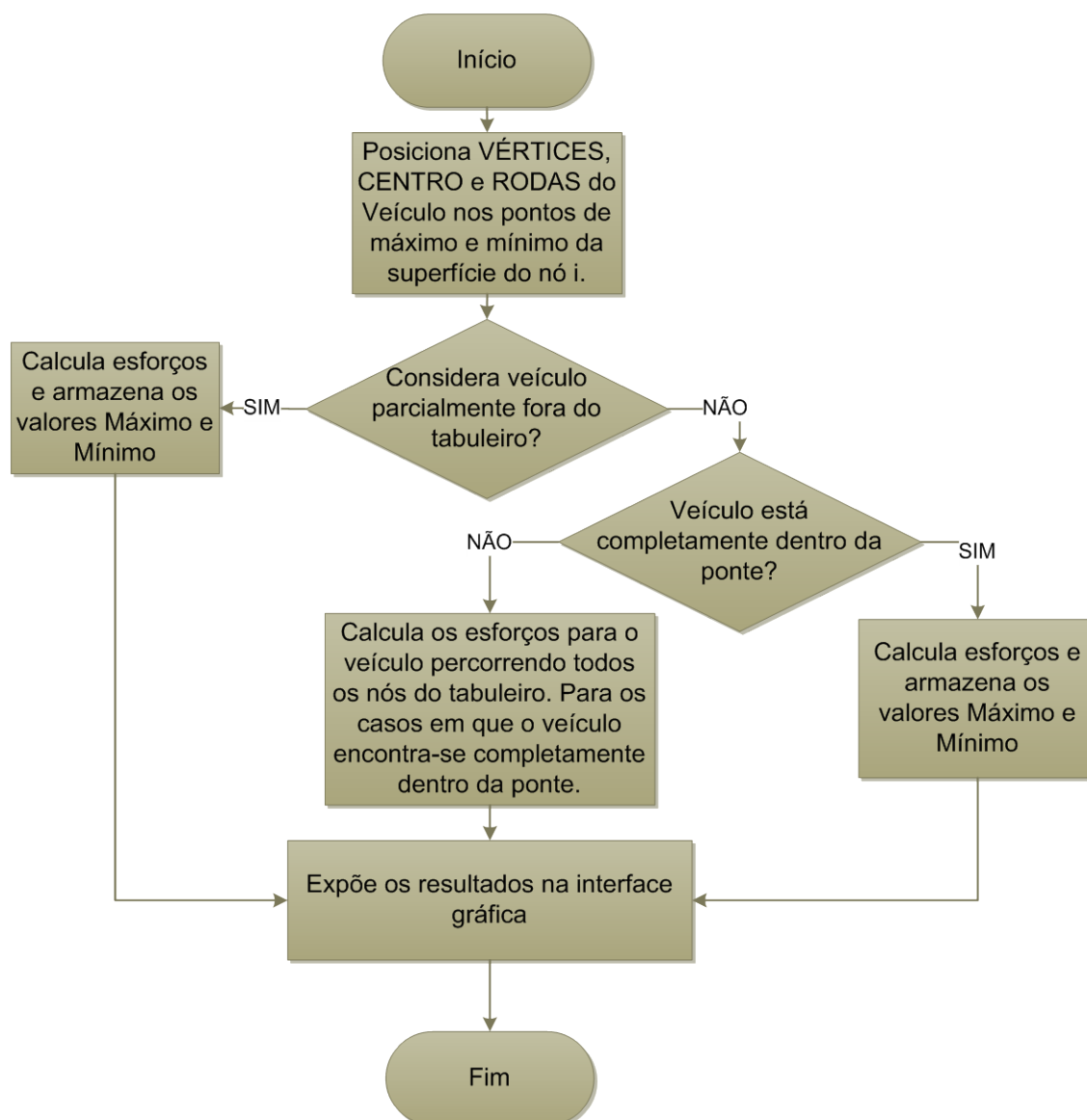


Figura 50 – Sub-rotina responsável pelas análises de posições dos veículos tipo no tabuleiro de pontes.

De maneira geral, o código realiza o cálculo da envoltória de esforços considerando os vértices, centro e rodas do veículo posicionados nos pontos de máximo e mínimo da superfície do nó i . No caso em que o usuário permite considerar o veículo parcialmente fora do tabuleiro são calculados os esforços para todas estas configurações. É importante salientar que quando isso ocorre, o peso do veículo transferido pelas rodas que se encontram fora do tabuleiro não são levados em consideração na determinação do esforço. Ou seja, para este caso é considerado apenas a parte do veículo que se encontra dentro do tabuleiro. E desta maneira, o código armazena o valor máximo e mínimo obtido entre as configurações de posições adotadas.

Por outro lado, a não consideração do veículo parcialmente fora do tabuleiro conduz ao cálculo de esforços apenas para as configurações em que o veículo está completamente dentro da ponte. Para as configurações calculadas adota-se para a envoltória apenas os valores máximos e mínimos encontrados.

No caso do veículo não respeitar, em nenhuma das configurações de posicionamento, a imposição de estar completamente dentro da ponte, o código passeia o vértice do veículo em todos os nós da estrutura em análise. E para as posições em que o veículo encontra-se completamente dentro do tabuleiro calculam-se os esforços e obtêm-se os valores máximos e mínimos.

Ao término desta sub-rotina (fluxograma da Figura 50), verifica-se no fluxograma da Figura 49 que o contador *i* recebe o valor dele mais um. Este passo significa dizer que será avaliada à próxima superfície de influência. Para esta nova superfície, observa-se que o código SIPlacas realiza em seguida os mesmos procedimentos. Ou seja, analisa a existência do vetor *lista*, e, caso exista, realiza as verificações e cálculos discutidos no fluxograma da Figura 53.

Este laço continua até que o código não escreva mais o vetor *lista*. Caso que conduz a exposição dos resultados e, conseqüentemente, o término de cálculo da envoltória de esforços na viga.

Na Figura 49, o cálculo da envoltória de esforços das lajes é realizado utilizando as mesmas considerações do cálculo da envoltória das vigas.

Enfim, para o cálculo da envoltória de esforços considerando um tabuleiro de ponte com lajes apoiadas sobre vigas, o código desenvolvido realiza as seguintes etapas:

- Calcula as superfícies de influência e escreve os resultados em dois arquivos: Superfícies da Laje e Superfícies da Viga. (Fluxograma da Figura 48).
- Calcula-se a envoltória para certo esforço. (Fluxogramas da Figura 49 e Figura 50).

7.3 Resumo

Neste capítulo foi apresentado o código SIPlacas que é de autoria do Professor Doutor Vladimir Guilherme Haach com a colaboração do autor da presente pesquisa. Verificou-se que o código possui etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento.

As etapas de pré-processamento são realizadas pelo usuário a partir das interfaces desenvolvidas e que foram apresentadas. Foi possível observar que a etapa de processamento é basicamente realizada de acordo com a teoria de elementos finitos. E pós-processamento é parte responsável pela visualização de resultados.

De maneira geral, para o usuário utilizar o código o mesmo deve seguir algumas etapas, sendo elas:

- Inserção das características geométricas do tabuleiro;
- Entrada de parâmetros que caracterizam o material;
- Definição de condições de contorno;
- Definição de carregamento para a análise da estrutura sobre a ação das cargas móveis;
- Definição de carga móvel para a obtenção das envoltórias de esforços.

Foi também apresentado que para se determinar as envoltórias de esforços o usuário deve calcular, primeiramente, as superfícies de influência.

8 ANÁLISE DE UMA PONTE

Pretende-se, primeiramente, apresentar o modelo de ponte a ser estudado. Em seguida, os esforços internos resultantes de cargas permanentes e móveis são determinados: através de cálculo utilizando as tabelas de Rüsç, e, também utilizando o código SIPlacas.

O cálculo do tabuleiro processado no código SIPlacas é realizado considerando três formas distintas de configuração. A primeira, diz respeito à configuração de painéis de lajes isoladas, a segunda considera-se o tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis e a terceira, e última, o tabuleiro é considerado com vigas acopladas.

Ao final de cada forma distinta de cálculo processada no código SIPlacas é realizada uma análise comparativa entre o cálculo via tabelas de Rüsç e o respectivo procedimento adotado no código.

Por último, discutem-se os resultados obtidos entre todas as configurações adotadas na análise do tabuleiro.

8.1 Apresentação do modelo de análise

A ponte a ser estudada é em concreto com f_{ck} igual a 30 MPa e módulo de elasticidade E igual a 26,071 GPa. Ela apresenta em sua configuração duas vigas principais e três transversinas. O comprimento total é de 26,00 m; apresentando 16,00 m de vão central e 5,00 m de comprimento dos dois balanços. Possui largura de pista de rolamento igual a 7,00 m e espaçamento entre as vigas principais de

8.2 Cálculo via tabelas de Rüsç

O presente item tem por objetivo expor os resultados, utilizando as tabelas de Rüsç, dos esforços internos das lajes que compõem o tabuleiro de ponte apresentado no item 8.1.

Os esforços internos das lajes são determinados utilizando as tabelas de Rüsç. O uso das tabelas de Rüsç é válido tanto para a atuação de cargas permanentes como também a de cargas móveis. Enfatiza-se que os painéis de lajes são analisados isoladamente, com condições de contorno adequadas. E os esforços obtidos nas extremidades dos painéis devem ser corrigidos nos casos de lajes contínuas. Este procedimento é importante e deve ser aplicado para que os esforços sejam representativos ao se considerar o tabuleiro como um todo.

8.2.1 Carga Permanente

A carga permanente é composta pela ação do peso próprio das vigas principais, laje do tabuleiro, defensas, placas pré-moldadas, pavimentação e recapeamento. Para a obtenção destas ações considerou-se o peso específico do concreto armado igual a 25 kN/m³, pavimentação 24 kN/m³ e recapeamento igual a 2 kN/m².

O momento fletor e a força cortante resultante da carga permanente atuante podem ser determinados utilizando as tabelas de Rüsç, conforme expressões (8.1) e (8.2).

$$M_g = k.g.l_x^2 \quad (8.1)$$

$$V_g = k.g.l_x^2 \quad (8.2)$$

O parâmetro g , das equações (8.1) e (8.2), diz respeito à soma dos pesos próprios dos elementos que compõem o tabuleiro. O l_x corresponde a um dos lados da laje e o k é um coeficiente obtido das tabelas de Rüsç em função da relação $\frac{l_y}{l_x}$, onde l_y é o valor de outro lado da laje.

A escolha das tabelas de Rüsç que devem ser utilizadas para se determinar os esforços internos é realizada de acordo com a determinação de alguns parâmetros extraídos das características do painel de laje do tabuleiro. A Tabela 8 apresenta estes parâmetros assim como as tabelas que foram utilizadas para o cálculo dos esforços internos das respectivas lajes.

Tabela 8 - Parâmetros de entrada e escolha dos números das tabelas de Rüsç

Lajes:	Ly/lx	a (m)	Lx/a	t/a	Número das Tabelas de Rüsç	
					Momento Fletor	Força Cortante
L1	1,11	2,00	2,25	0,328	84 e 85	102
L2	1,78	2,00	2,25	0,328	88 e 89	99 e 102
L5	infinito	2,00	0,625	0,346	98	-

O parâmetro a refere-se à distância entre centros das rodas de cada eixo do veículo, e o valor t representa o lado do quadrado de área igual à do retângulo de contato da roda propagado até a superfície média da laje.

Observa-se que no cálculo de momento fletor das lajes L1 e L2, e, de força cortante da laje L2 são necessários, para o cálculo destes esforços internos, duas tabelas.

Este fato acontece quando a relação $\frac{l_y}{l_x}$ não corresponde ao valor definido nas tabelas de Rüsç, para a mesma configuração de condições de contorno da laje.

Portanto, para estes casos, necessita-se da utilização de tabelas que possuam relações $\frac{l_y}{l_x}$ próximas da relação calculada. E o objetivo é calcular os esforços internos da laje do tabuleiro a partir de aproximações lineares dos esforços internos obtidos a partir da configuração de lajes existentes nas tabelas de Rüsç.

É importante, também, ressaltar que não há correspondência nas tabelas de Rüsç para se determinar a força cortante na laje L_5 , conforme expõe a Tabela 8. Neste sentido, foi adotado para esta pesquisa o cálculo segundo o procedimento da norma brasileira de dimensionamento de estruturas de concreto NBR – 6118 / 1978.

A Figura 53 apresenta os momentos fletores máximos, resultantes da carga permanente, em algumas direções e pontos dos painéis de lajes L_1 , L_2 e L_5 .

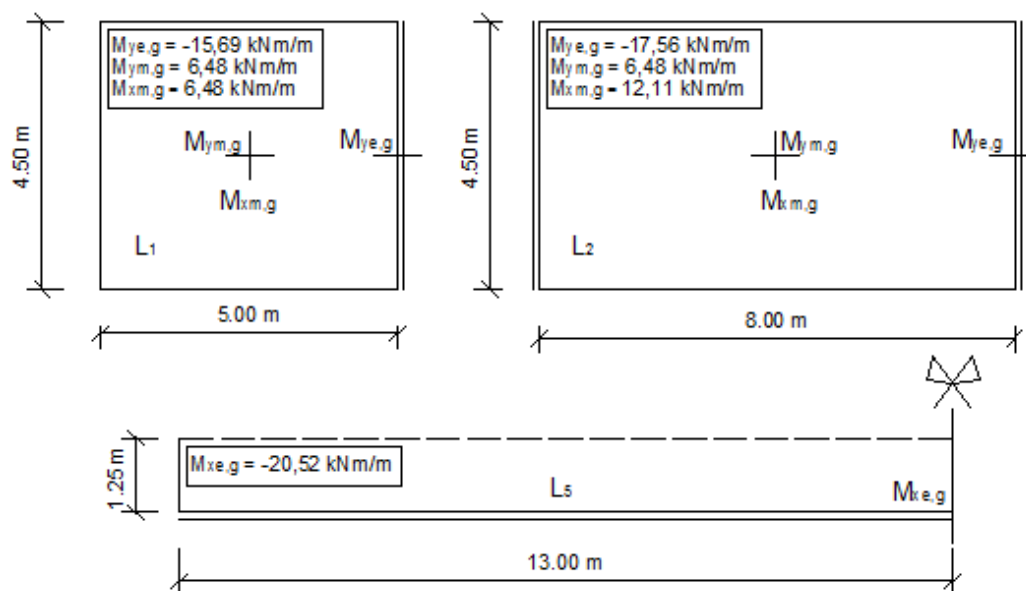


Figura 53 - Momento Fletor resultante da Carga Permanente.

A Figura 54 apresenta as forças cortante, resultante da carga permanente, em algumas direções e pontos nos painéis de lajes L_1 , L_2 e L_5 .

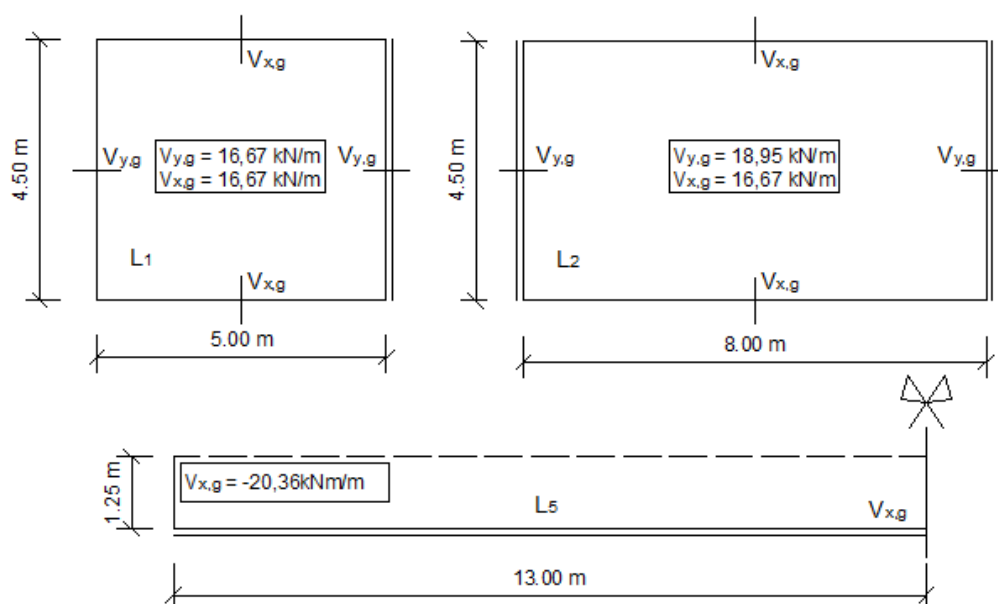


Figura 54 - Força Cortante resultante da Carga Permanente.

8.2.2 Carga Móvel

Para o cálculo da carga móvel considerou-se o trem tipo TB-450 kN da autal norma brasileira de pontes (ABNT NBR 7188:2013), como já comentado anteriormente.

Os momentos fletores resultantes do efeito da carga móvel são determinados de acordo com a expressão (8.3)

$$M_q = [Q(M_{L'} + M_{L'}) + q_1 M_p + q_2 M_{p'}] \quad (8.3)$$

Sabendo que:

- Q é o peso de uma roda do veículo tipo que para o TB-450 é igual a $75kN$.
- q_1 é a carga distribuída na frente e atrás do veículo (na faixa da largura do veículo).
- q_2 é a carga móvel distribuída nas laterais do veículo.
- Para a NBR 7188/2013, tem-se:
 - $q_1 = q_2 = q = 5kN/m^2$
- $M_{L'}$, M_p e $M_{p'}$ são coeficientes fornecidos pelas tabelas em função dos parâmetros l_x/a e t/a .
- O $M_{L'}$ refere-se ao efeito do veículo colocado ao lado do veículo principal. Esse fenômeno é indicado pela norma DIN 1072 no das classes de pontes mais “leves” em que o veículo tem dois eixos.

A força cortante resultante do efeito da carga móvel é determinada de acordo com a expressão (8.4).

$$V_q = [QV_L + q_1 V_p + q_2 V_{p'}] \quad (8.4)$$

Onde,

- V_L , V_p e $V_{p'}$ são coeficientes fornecidos pelas tabelas em função dos parâmetros l_x/a e t/a .

Desta maneira, a seguir encontra-se em resumo o cálculo dos momentos fletores e força cortante dos painéis de lajes que estão sendo analisados.

(a) Laje L1

(a.1) Momento Fletor

Conforme já apresentado, na Tabela 8, as tabelas de Rüsç N° 84 e 85 são utilizadas na determinação do momento fletor da laje L1. Verifica-se que elas não explicitam os valores dos coeficientes M_L , M_p e $M_{p'}$, para as relações l_x/a e t/a da presente laje. Contudo, os valores destes coeficientes podem ser determinados considerando aproximações lineares conforme demonstra a Tabela 9 e Tabela 10.

Tabela 9 - Determinação dos parâmetros M_{Lxm} , M_{Lym} e M_{ye} , para a tabela de Rüsç N° 84.

l_x/a	M_{xm} (Positivo) 11.1			M_{ym} (Positivo) 11.2			M_{ye} (Negativo) 11.3		
	t/a			t/a			t/a		
	0,250	0,328	0,500	0,250	0,328	0,500	0,250	0,328	0,500
2,00	0,310		0,256	0,253		0,197	0,640		0,590
2,25	0,355	0,339	0,303	0,277	0,263	0,234	0,710	0,698	0,670
2,50	0,400		0,350	0,300		0,271	0,780		0,750

Tabela 10 - Determinação dos parâmetros M_{pxm} , M_{pym} , M_{pye} , $M_{p'xm}$, $M_{p'ym}$ e $M_{p'ye}$, para a tabela de Rüsç N° 84.

l_x/a	M_{xm}		M_{ym}		M_{ye}	
	p	p'	p	p'	p	p'
2,00	0,000	0,200	0,000	0,160	0,050	0,450
2,25	0,000	0,220	0,000	0,220	0,075	0,610
2,50	0,000	0,240	0,000	0,280	0,100	0,770

Considerando a Tabela de Rüsç N° 84, obtêm-se os coeficientes M_L , M_p e $M_{p'}$ necessários para o cálculo do momento fletor. (Tabela 9 e Tabela 10).

Os valores destes coeficientes são também apresentados em (8.5).

$$\begin{aligned} M_{Lxm} &= 0,339 & M_{pxm} &= 0,000 & M_{p'xm} &= 0,220 \\ M_{Lym} &= 0,263 & M_{pym} &= 0,000 & M_{p'ym} &= 0,220 \\ M_{Lye} &= 0,698 & M_{pye} &= 0,075 & M_{p'ye} &= 0,770 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Por fim, nas equações (8.6), (8.7) e (8.8) são determinados os valores de momento fletor utilizando a tabela N° 84.

$$M_{xm,q84} = [QM_{Lxm} + q_1M_{pxm} + q_2M_{p'xm}] = 26,525kNm / m \quad (8.6)$$

$$M_{ym,q84} = [QM_{Lym} + q_1M_{pym} + q_2M_{p'ym}] = 20,825kNm / m \quad (8.7)$$

$$M_{ye,q84} = -[QM_{Lye} + q_1M_{pye} + q_2M_{p'ye}] = -56,575kNm / m \quad (8.8)$$

Considerando a tabela de Rüsç N° 85 obtêm-se os valores dos coeficientes necessários para o cálculo dos momentos fletores da laje L1, apresentados em (8.9).

$$\begin{aligned} M_{Lxm} &= 0,252 & M_{pxm} &= 0,000 & M_{p'xm} &= 0,120 \\ M_{Lym} &= 0,240 & M_{pym} &= 0,000 & M_{p'ym} &= 0,205 \\ M_{Lye} &= 0,665 & M_{pye} &= 0,000 & M_{p'ye} &= 0,455 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Nas equações (8.10), (8.11) e (8.12) são determinados os valores de momento fletor utilizando a tabela N° 85.

$$M_{xm,q85} = [QM_{Lxm} + q_1M_{pxm} + q_2M_{p'xm}] = 19,500kNm / m \quad (8.10)$$

$$M_{ym,q85} = [QM_{Lym} + q_1M_{pym} + q_2M_{p'ym}] = 19,025kNm / m \quad (8.11)$$

$$M_{ye,q85} = -[QM_{Lye} + q_1M_{pye} + q_2M_{p'ye}] = -52,150kNm / m \quad (8.12)$$

Em (8.13), (8.14) e (8.15) encontram-se os momentos fletores atuantes na laje L1. Estes resultados foram obtidos a partir da interpolação dos resultados de momento utilizando as tabelas 84 e 85.

$$M_{xm,q} = 23,364kNm / m \quad (8.13)$$

$$M_{ym,q} = 20,015kNm / m \quad (8.14)$$

$$M_{ye,q} = -54,584kNm / m \quad (8.15)$$

(a.2) Força Cortante

Conforme já apresentado, na Tabela 8, a tabela de Rüsç utilizada para se determinar a força cortante para a laje L1 é a tabela de Rüsç N° 102.

Os valores dos coeficientes necessários para se calcular a força cortante encontram-se em (8.16). Estes valores foram obtidos de acordo com o procedimento de interpolação discutido anteriormente.

$$\begin{aligned} V_{Lx} &= 1,517 & V_{px} &= 0,005 & V_{p'x} &= 0,335 \\ V_{Ly} &= 1,503 & V_{py} &= 0,000 & V_{p'y} &= 0,195 \end{aligned} \quad (8.16)$$

A partir dos parâmetros encontrados em (8.16), calcula-se a força cortante para a laje L1 utilizando as equações (8.17) e (8.18).

$$V_{yq} = [qV_{Lx} + q_1V_{px} + q_2V_{p'x}] = 115,475kN / m \quad (8.17)$$

$$V_{xq} = [qV_{Ly} + q_1V_{py} + q_2V_{p'y}] = 113,700kN / m \quad (8.18)$$

(b) Laje L2

(b.1) Momento Fletor

O momento fletor da laje L2 é determinado a partir das tabelas de Rüsç N° 88 e N° 89. Segundo Rüsç, os momentos fletores destas tabelas podem ser calculados utilizando as tabelas N° 01 e N° 58. Mais especificamente tem-se que:

- O momento $M_{xm,q}$ deve ser calculado de acordo com 1.1 da tabela de Rüsç N° 01;
- O momento $M_{ym,q}$ deve ser calculado de acordo com 1.2 da tabela de Rüsç N° 01;
- O momento $M_{ye,q}$ deve ser calculado de acordo com 1.2 da tabela de Rüsç N° 58.

Sendo assim, tem-se em (8.19) os parâmetros necessários para os momentos fletores calculados segundo as tabelas descritas anteriormente.

$$\begin{aligned}
 M_{Lxm} &= 0,531 & M_{pxm} &= 0,415 & M_{p'xm} &= 0,680 \\
 M_{Lym} &= 0,297 & M_{pym} &= 0,070 & M_{p'ym} &= 0,180 \\
 M_{Lye} &= 0,764 & M_{pye} &= 0,295 & M_{p'ye} &= 0,800
 \end{aligned}
 \tag{8.19}$$

Portanto, em (8.20), (8.21) e (8.22) encontram-se os valores dos momentos fletores resultante do efeito da carga móvel e calculado em diferentes regiões de laje.

$$M_{xm,q} = [QM_{Lxm} + q_1M_{pxm} + q_2M_{p'xm}] = 45,3005kNm / m \tag{8.20}$$

$$M_{ym,q} = [QM_{Lym} + q_1M_{pym} + q_2M_{p'ym}] = 23,525kNm / m \tag{8.21}$$

$$M_{ye,q} = -[QM_{Lye} + q_1M_{pye} + q_2M_{p'ye}] = -62,775kNm / m \tag{8.22}$$

(b.2) Força Cortante

O cálculo da força cortante é realizado com o auxílio das tabelas de Rüsç N° 99 e N° 102. Utilizando a tabela N° 99 obtêm-se os valores dos parâmetros descritos em (8.23).

$$V_{Lx} = 1,227 \quad V_{px} = 0,065 \quad V_{p'x} = 0,175 \tag{8.23}$$

E desta maneira, em (8.24) tem-se o valor da força cortante V_{xq} .

$$V_{xq} = [QV_{Lx} + q_1V_{px} + q_2V_{p'x}] = 93,225kN/m \quad (8.24)$$

Por outro lado, assumindo a tabela de Rüsç N° 99 para o cálculo de força cortante V_{yq} , tem-se que os coeficientes retirados da tabela iguais aos representados em (8.25).

$$V_{Ly} = 1,517 \quad V_{py} = 0,005 \quad V_{p'y} = 0,335 \quad (8.25)$$

E conseqüentemente o valor da força cortante é igual ao que encontra-se descrito em (8.26).

$$V_{yq} = [QV_{Ly} + q_1V_{py} + q_2V_{p'y}] = 115,475kN/m \quad (8.26)$$

(c) Laje L5

(c.1) Momento Fletor

O momento fletor na região do engaste da laje L5 é calculado segundo a tabela de Rüsç N° 98, conforme apresentado na Tabela 8.

Os coeficientes descritos em (8.27) referem-se aos parâmetros necessários para o cálculo dos momentos fletores.

$$\begin{aligned} M_{Lxe} &= 0,589 & M_{pxe} &= 0,000 & M_{p'xe} &= 0,000 \\ M_{Lye} &= 0,247 & M_{pye} &= 0,000 & M_{p'ye} &= 0,000 \end{aligned} \quad (8.27)$$

Os resultados das equações (8.28) e (8.29) são os resultados do momento fletor na laje L5.

$$M_{xe,q} = -[QM_{Lxe} + q_1M_{pxe} + q_2M_{p'xe}] = -44,175kNm/m \quad (8.28)$$

$$M_{yr,q} = [QM_{Lye} + q_1M_{pye} + q_2M_{p'ye}] = 18,525kNm/m \quad (8.29)$$

(c.2) Força Cortante

O procedimento de cálculo da força cortante, como já dito anteriormente, para a laje L5 foi realizado conforme o procedimento indicado na ABNT NBR 6118/1978, itens 3.3.2.4 e 3.3.2.5.

A força cortante é determinada dividindo a força de aplicação de uma roda sobre o tabuleiro por b_w . Este procedimento pode ser observado de acordo com as equações (8.30) e (8.31).

$$b_w = b + 0,5.a_1.\left(1 - \frac{b}{l}\right) = 0,575 + 0,5.0,75.\left[1 - \frac{0,575}{(1,25 + 0,38)}\right] = 0,82m \quad (8.30)$$

$$V_q = \frac{Q}{b_w} = 91,719kN/m \quad (8.31)$$

A Figura 55 ilustra os valores das medidas adotadas na equação (8.30) para a determinação do parâmetro b_w . Pode também ser visto a posição da roda do trem tipo sobre a laje e as especificações das dimensões a_1 e b .

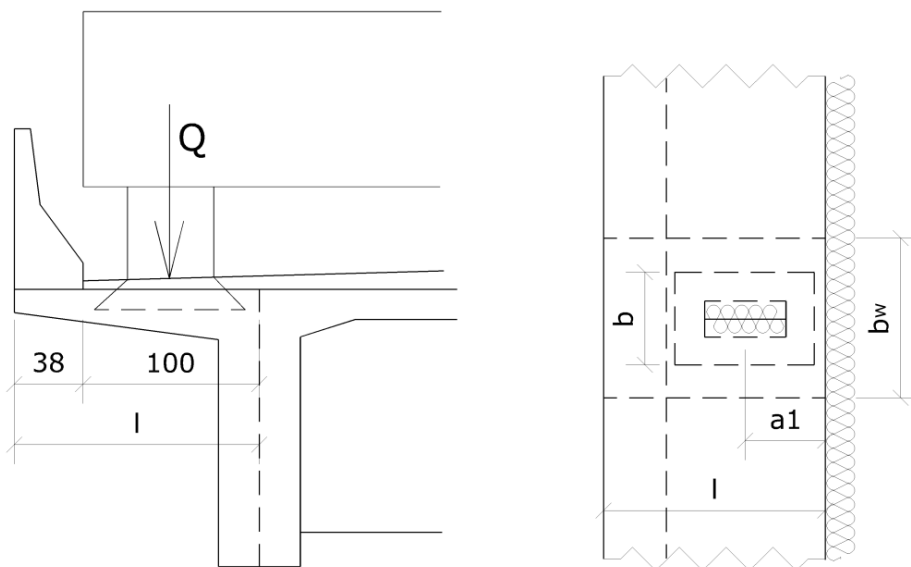


Figura 55 – Configuração de uma roda do trem tipo sobre a laje em balanço. [Adaptado EI EL DEBS; TAKEYA, 2010]. Medidas em cm.

A seguir, Figura 56, encontram-se os valores dos momentos fletores nos painéis de lajes do tabuleiro da ponte em análise.

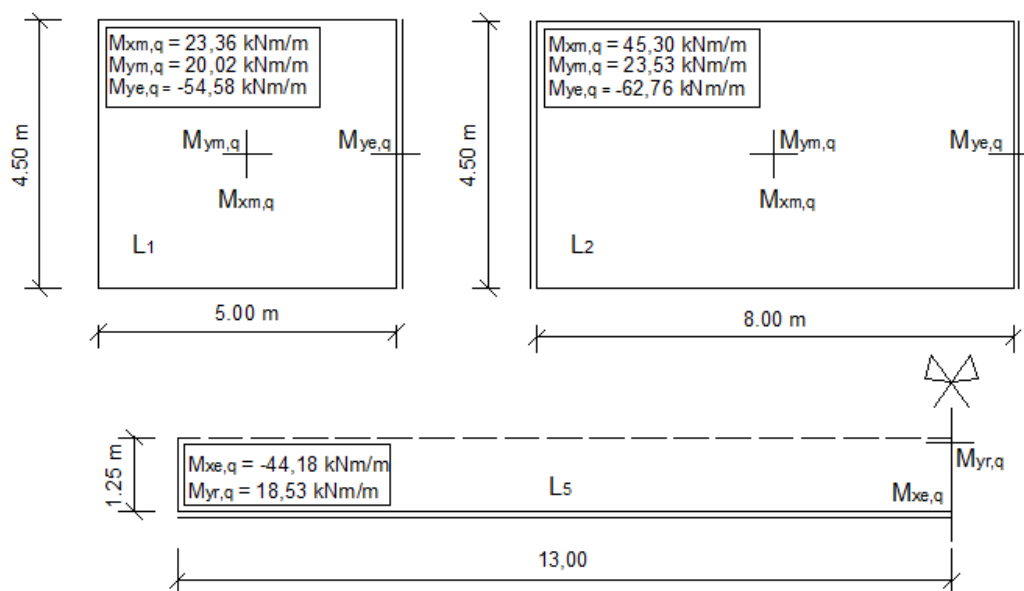


Figura 56 – Momento fletor resultante da carga móvel.

Concomitantemente ao exposto anteriormente (Figura 56), na Figura 57 encontram-se os valores de força cortante nos painéis de lajes do tabuleiro da ponte em análise.

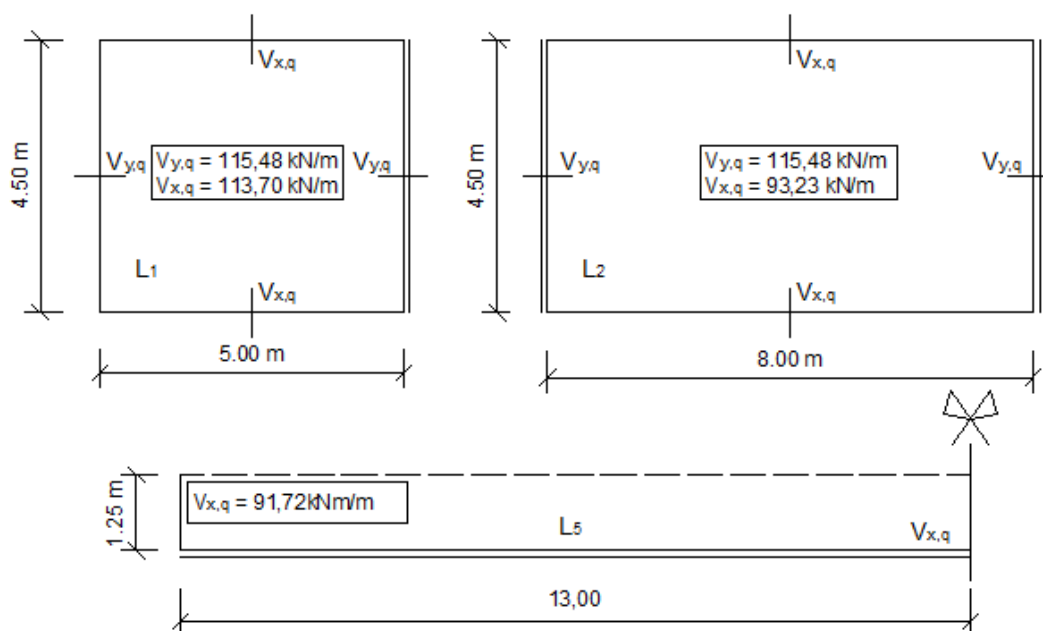


Figura 57 - Força cortante resultante da carga móvel.

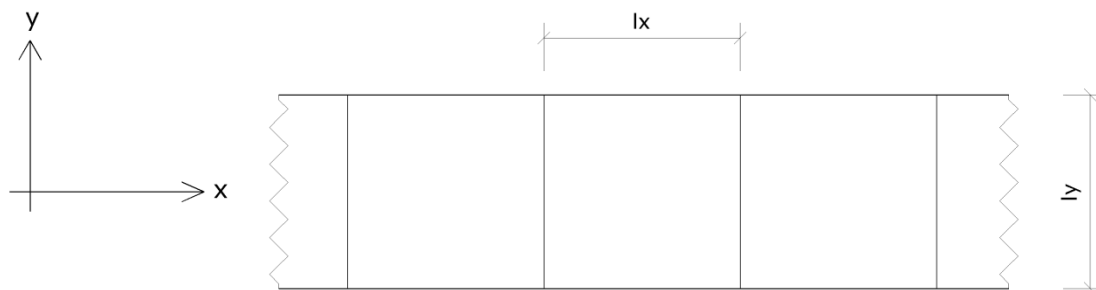
- Correção de Momento Fletor

A correção de momento fletor é feita para as lajes que são contínuas no tabuleiro da ponte. Neste sentido, verifica-se que as lajes que necessitam de correção são: L1 e L2.

De maneira geral, o procedimento adotado para a correção dos momentos fletores consiste em multiplicar o valor do momento fletor calculado na laje por um coeficiente que Rüsç designou por α_0 . Este coeficiente é determinado considerando as condições de contorno do painel de laje assim como a relação l_y/l_x

A Figura 58 apresenta a configuração de placas definidas como contínuas assim como a dimensão que deve ser adotada para os parâmetros l_x e l_y .

PARA CÁLCULO APROXIMADO DE PLACAS CONTÍNUAS



X = direção da continuidade

Figura 58 - Configuração de Placas Contínuas

Ainda segundo Rüsç, para vãos de laje inferiores a 20,00 m, deve-se realizar a correção do coeficiente α_0 segundo a expressão (8.32) É importante ressaltar que o valor de l_x é considerado em metros.

$$\alpha = \frac{1,2}{1 + \frac{l_x}{100}} \alpha_0 \quad (8.32)$$

A Figura 59 ilustra a configuração estrutural das lajes L1 e L2 na direção de continuidade do tabuleiro. Observa-se que estas lajes estão apresentadas considerando-as, primeiramente, isoladas e depois contínuas.

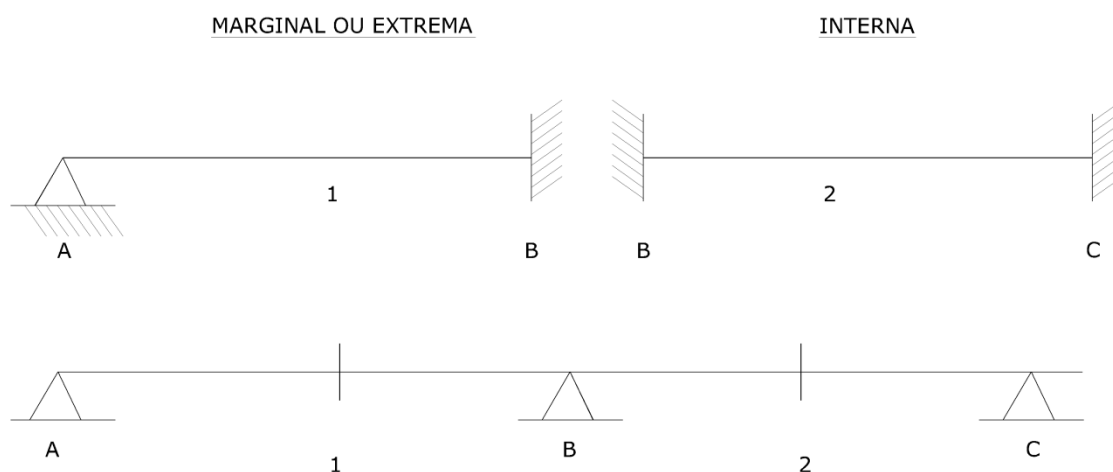


Figura 59 – Configuração estrutural das lajes L1 e L2 considerando-as representadas isoladas e contínuas, respectivamente.

(a) Laje L1

A partir da relação $\frac{l_y}{l_x}$, que para a laje L1 é igual a 0,90, e da configuração estrutural adotada para a presente laje, Figura 59, tem-se em (8.33) os valores dos coeficientes α_0 .

$$\alpha_{01} = 1,025 \quad \text{e} \quad \alpha_{0B} = 0,980 \quad (8.33)$$

Como o vão desta laje é menor que 20,00 m faz-se necessário à correção do coeficiente α_0 , realizada em (8.34) e (8.35).

$$\alpha_1 = \frac{1,2}{1 + \frac{l_{x'}}{100}} \alpha_{01} = \frac{1,2}{1 + \frac{5,00}{100}} 1,025 = 1,171 \quad (8.34)$$

$$\alpha_B = \frac{1,2}{1 + \frac{l_{x'}}{100}} \alpha_{0B} = \frac{1,2}{1 + \frac{5,00}{100}} 0,980 = 1,120 \quad (8.35)$$

Por fim, a partir das expressões (8.36) à (8.43)(8.46) determina-se os valores dos momentos corrigidos para a laje L1.

Carga Permanente

$$M_{xm,g} = 6,480kNm / m \quad (8.36)$$

$$M_{ym,gcorr} = M_{ym,g} \alpha_1 = 6,480 * 1,171 = 7,588kNm / m \quad (8.37)$$

$$M_{ye,gcorr} = M_{ye,g} \alpha_B = -15,690 * 1,120 = -17,573kNm / m \quad (8.38)$$

$$M_{v,gbordo} = \frac{M_{ye,gcorr}}{2} = -8,787kNm / m \quad (8.39)$$

Carga Móvel

$$M_{xm,q} = 23,364kNm / m \quad (8.40)$$

$$M_{ym,qcorr} = M_{ym,q} \alpha_1 = 20,015 * 1,171 = 23,438kNm / m \quad (8.41)$$

$$M_{ye,qcorr} = M_{ye,q} \alpha_B = -54,584 * 1,120 = -61,134kNm / m \quad (8.42)$$

$$M_{v,qbordo} = \frac{M_{ye,qcorr}}{2} = -30,567kNm / m \quad (8.43)$$

Observa-se que os momentos $M_{xm,g}$ e $M_{xm,q}$ não necessita de correção de momento fletor. Isto acontece porque este momento atua na direção perpendicular a direção de continuidade das lajes L1 e L2.

Os esforços $M_{v,gbordo}$ e $M_{v,qbordo}$ são os momentos fletores da placa na região da viga de bordo.

(b) Laje L2

A partir da relação $\frac{l_y}{l_x}$, que para a laje L2 é igual a 0,56, e da configuração estrutural adotada para a presente laje, Figura 59, tem-se em (8.44) os valores dos coeficientes α_0 .

$$\alpha_{02} = 1,050 \quad \text{e} \quad \alpha_{0C} = 1,000 \quad (8.44)$$

Como o vão desta laje é menor que 20,00 m faz-se necessário à correção do coeficiente α_0 , realizada em (8.45) e (8.46).

$$\alpha_1 = \frac{1,2}{1 + \frac{l_x'}{100}} \alpha_{02} = \frac{1,2}{1 + \frac{8,00}{100}} 1,050 = 1,167 \quad (8.45)$$

$$\alpha_B = \frac{1,2}{1 + \frac{l_x'}{100}} \alpha_{0C} = \frac{1,2}{1 + \frac{8,00}{100}} 1,000 = 1,111 \quad (8.46)$$

Por fim, a partir das expressões (8.47) à (8.52) determinam-se os valores dos momentos corrigidos para a laje L2.

Carga Permanente

$$M_{xm,g} = 12,110 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.47)$$

$$M_{ym,gcorr} = M_{ym,q} \alpha_2 = 6,480 * 1,167 = 7,562 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.48)$$

$$M_{ye,gcorr} = M_{ye,q} \alpha_C = -17,56 * 1,111 = -19,509 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.49)$$

Carga Móvel

$$M_{xm,q} = 23,364 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.50)$$

$$M_{ym,qcorr} = M_{ym,q} \alpha_2 = 23,525 * 1,167 = 27,454 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.51)$$

$$M_{ye,qcorr} = M_{ye,q} \alpha_C = -62,775 * 1,111 = -69,743 \text{ kNm} / \text{m} \quad (8.52)$$

Observa-se que os momentos $M_{xm,g}$ e $M_{xm,q}$ não necessita de correção de momento fletor. Isto acontece porque este momento atua na direção perpendicular a direção de continuidade das lajes L1 e L2.

A Figura 60 e Figura 61 apresenta a simetria do tabuleiro da ponte em análise assim como a região e os valores dos momentos fletores calculados após a correção.

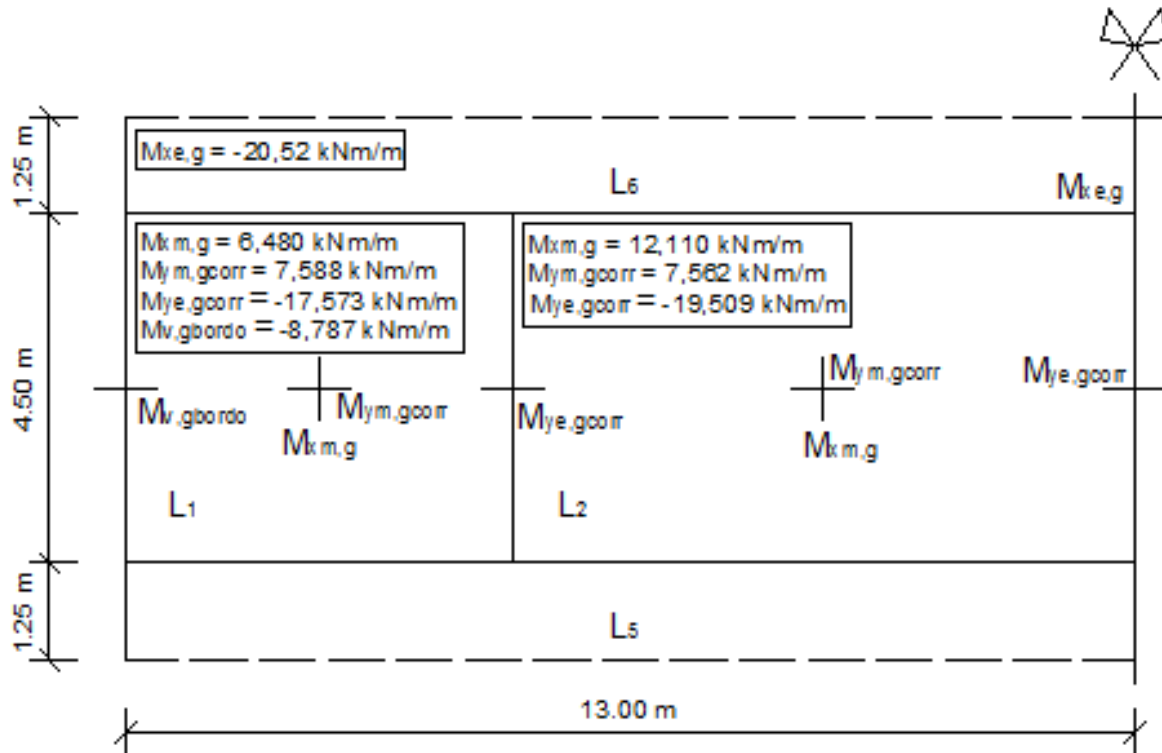


Figura 60 - Momento fletor resultante da carga permanente corrigido.

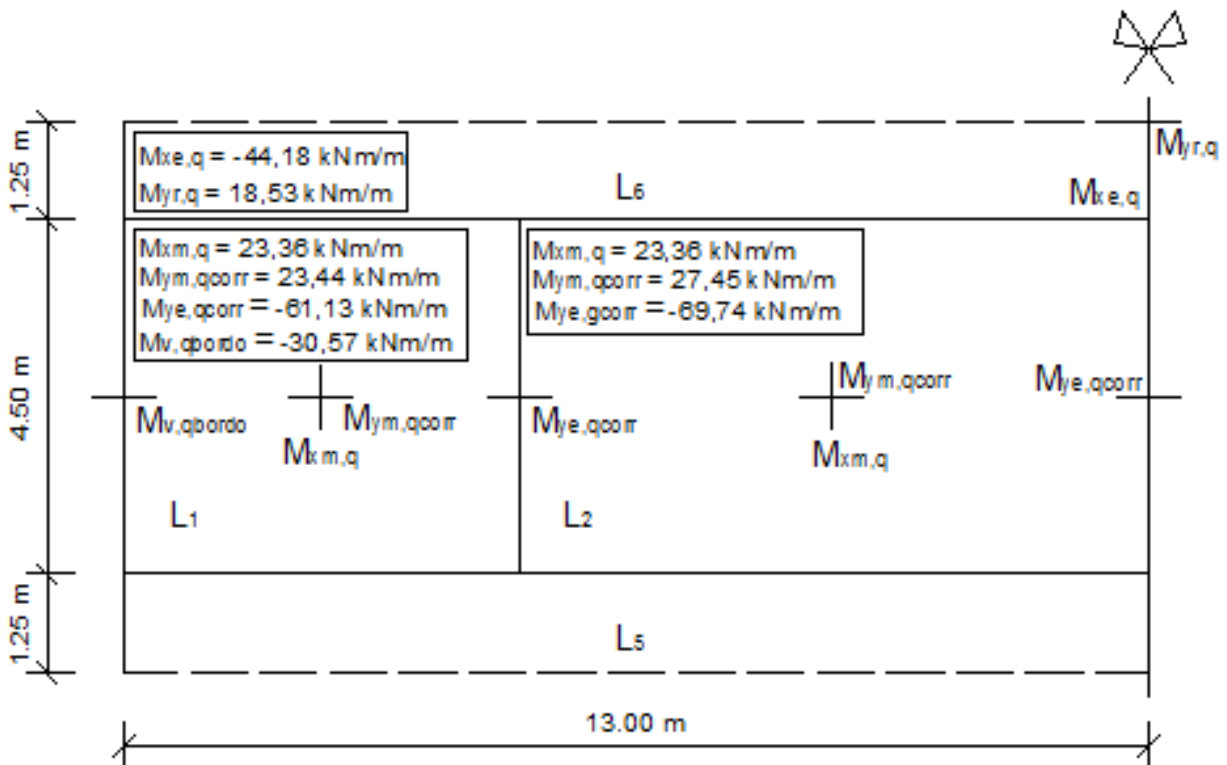


Figura 61 - Momento fletor resultante da carga móvel corrigido.

8.3 Cálculo automático (Código SIPlacas)

8.3.1 Ponte com lajes isoladas

O presente item destina-se em avaliar os esforços nas lajes da ponte considerando-as isoladas durante a aplicação do carregamento. Ou seja, no presente tópico, as lajes são calculadas de maneira equivalente ao realizado no item 8.2.

É importante ressaltar que para esta análise não é considerada a inserção do elemento finito de barra pelo código SIPlacas, tendo em vista que as condições de contorno adotadas elimina esta possibilidade. Neste sentido, a seguir encontram-se apenas os resultados, dos esforços internos das lajes, extraídos do código SIPlacas. Os resultados correspondem primeiramente, à carga permanente, em seguida à carga móvel.

Os resultados obtidos via código SIPlacas é apresentado e, concomitantemente, realiza-se uma discussão destes valores com relação aos calculados manualmente via tabela de Rüsçh.

8.3.1.1 Carga Permanente

(a) Laje L1

Os resultados obtidos pelo SIPlacas para a laje da Figura 62 encontram-se apresentados na Tabela 11.

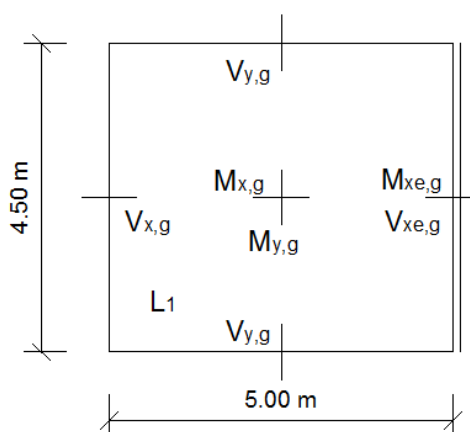


Figura 62 – Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 11 Valores dos esforços internos na laje L1. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Discretização		My,g	Mx,g	Mxe,g	Vx,g	Vxe,g	Vy,g	Vyg
Nº Nós	Nº Div.	Mxm,g	Mym,g	Mye,g	Vx,g	Vxe,g	Vy,g	Vye,g
340	10x10	6,82	7,08	-15,40	12,60	24,00	12,20	12,20
1280	20x20	6,83	7,05	-15,60	12,50	23,20	12,10	12,10
2820	30x30	6,83	7,04	-15,70	12,40	23,20	12,10	12,10
4960	40x40	6,82	7,04	-15,70	12,40	23,10	12,10	12,10
7700	50x50	6,82	7,04	-15,70	12,40	23,10	12,10	12,10
11040	60x60	6,82	7,04	-15,70	12,40	23,10	12,10	12,10
Rüsch		6,48	6,48	-15,69	16,67	16,67	16,67	16,67

De maneira geral, verifica-se que os resultados de momentos fletores obtidos pelo SIPlacas estão próximos dos resultados das tabelas de Rüsch. Este fato ocorre para qualquer discretização adotada. Considerando os valores obtidos pelo SIPlacas para a discretização da estrutura igual a 340 nós, tem-se:

- Para o momento My,g (6,82 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsch (6,48 kN/m) de 0,05%.
- Para o momento Mx,g (7,08 kN/m) obtido pelo SIPlacas a diferença relativa com o valor da tabela de Rüsch (6,48 kN/m) é de 0,09%.
- E por último, para os valores de Mxe,g (-15,40 kN/m e -15,69 kN/m) obtidos pelo SIPlacas e tabelas de Rüsch, respectivamente, uma diferença relativa na ordem de -0,02%.

Por outro lado, os valores de força cortante apresentam uma diferença relativa maior ao se comparar os resultados obtidos pelo SIPlacas e tabelas de Rüsch. E isto acontece independentemente da discretização adotada na análise da estrutura pelo SIPlacas. Em termos de diferença percentual relativa, e adotando os valores do SIPlacas obtidos para uma discretização de 340 nós, tem-se:

- Para a força cortante Vx,g (12,60 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsch (16,67 kN/m) de -24,42 %.

- Para a força cortante $V_{xe,g}$ (24,00 kN/m) obtido pelo SIPlacas a diferença relativa com o valor da tabela de Rüsç (16,67 kN/m) é de 30,54 %.
- E por último, para os valores de $V_{y,g}$ (12,20 kN/m e 16,67 kN/m) obtidos pelo SIPlacas e tabelas de Rüsç, respectivamente, uma diferença relativa na ordem de -26,81 %.

A presente diferença encontrada é justificada de acordo com a configuração de laje que se adota para o cálculo de força cortante desta laje via tabelas de Rüsç. Pois, como já definido anteriormente na Tabela 8, a tabela de Rüsç definida para a L1 no cálculo de força cortante é a de número 102. Esta tabela de Rüsç define que a laje deve ser quadrada com as quatro bordas engastadas, conforme Figura 63. Portanto, configuração de laje diferente daquela adotada pelo SIPlacas no cálculo da força cortante para laje L1.

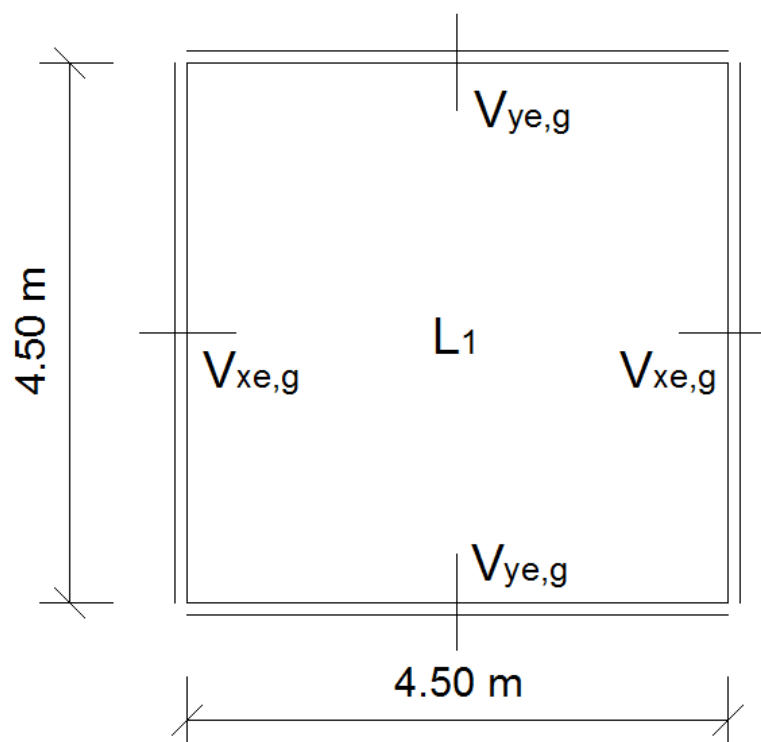


Figura 63 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Neste sentido, adotou-se no SIPlacas a mesma configuração de laje considerada para o cálculo via tabelas de Rüsç apresentada na Figura 63. Os valores de força cortante para esta configuração encontram-se na Tabela 12.

Tabela 12 - Valores dos esforços internos na laje L1, considerando-a com as quatro bordas engastadas. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Discretização		V _x ,g	V _x ,g	V _y ,g	V _y ,g
Nº Nós	Nº Div.	V _x ,g	V _x ,g	V _y ,g	V _y ,g
340	10x10	17,1000	17,1000	17,1000	17,1000
1280	20x20	16,4000	16,4000	16,4000	16,4000
2820	30x30	16,4000	16,4000	16,4000	16,4000
4960	40x40	16,4000	16,4000	16,4000	16,4000
7700	50x50	16,4000	16,4000	16,4000	16,4000
11040	60x60	16,4000	16,4000	16,4000	16,4000
Rüsch		16,6720	16,6720	16,6720	16,6720

Pode ser visto que o valor da força cortante obtida encontra-se mais próximo dos valores calculados utilizando a tabela de Rüsch. De maneira geral, para a discretização da estrutura com 340 nós, tem-se:

- Para a força cortante $V_{x,g}$ e $V_{y,g}$ (17,10 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsch (16,67 kN/m) de -0,03 %.

A partir dos resultados apresentados, verifica-se que o código SIPlacas proporciona resultados satisfatórios com os das tabelas de Rüsch. Isto acontece mesmo para a menor discretização da estrutura, adotada, neste caso, com 340 nós.

Com relação aos valores de força cortante obtidos pelo SIPlacas considerando as duas configurações de lajes apresentadas no presente tópico, verifica-se que:

- A força cortante $V_{x,g}$ com valores de 12,60 kN/m (Tabela 11) e 17,10 kN/m (Tabela 12), apresenta uma diferença relativa na ordem de 26,32 %.
- A força cortante $V_{x,g}$ e $V_{x,g}$ com valores de 24,00 kN/m (Tabela 11) e 17,10 kN/m (Tabela 12), apresenta uma diferença relativa na ordem de -28,75 %.
- E, por último, a força cortante $V_{y,g}$ com valores de 12,20 kN/m (Tabela 11) e 17,10 kN/m (Tabela 12), apresenta uma diferença relativa na ordem de 28,65 %.

Pode-se concluir que, ao se adotar a configuração da Figura 63, o valor obtido para o engaste nesta situação é menor que aquele obtido na configuração da Figura 62. Por outro lado, para as bordas simplesmente apoiadas, Figura 62, observa-se que para a configuração da Figura 63 os valores de força cortante são maiores.

(b) Laje L2

Os resultados obtidos pelo SIPlacas para a laje da Figura 64 encontram-se apresentados na Tabela 13.

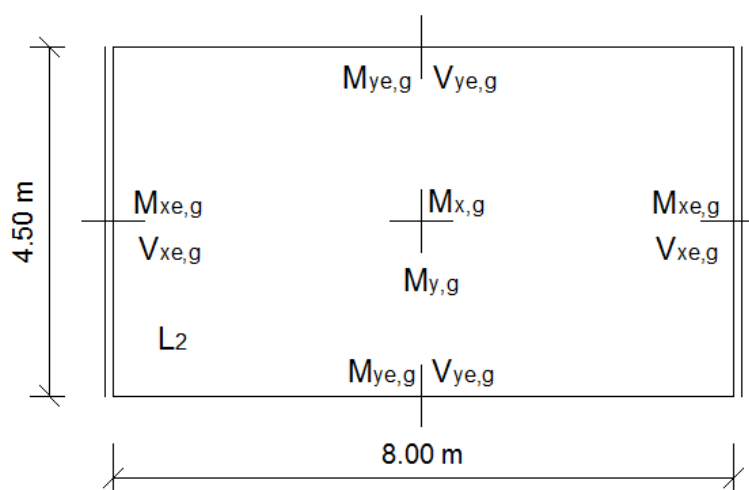


Figura 64 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 13 - Valores dos esforços internos na laje L2. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Discretização		$M_{y,g}$	$M_{x,g}$	$M_{x,e,g}$	$V_{x,e,g}$	$V_{x,g}$	$V_{y,g}$	$V_{y,g}$
Nº Nós	Nº Div.	$M_{x,m,g}$	$M_{y,m,g}$	$M_{y,e,g}$	$V_{x,g}$	$V_{x,g}$	$V_{y,e,g}$	$V_{y,e,g}$
340	10x10	12,50	6,99	-18,50	28,10	28,10	15,70	15,70
1280	20x20	12,50	6,99	-19,20	26,60	26,60	15,40	15,40
2820	30x30	12,50	6,96	-19,30	26,40	26,40	15,40	15,40
4960	40x40	12,50	6,96	-19,40	26,30	26,30	15,40	15,40
7700	50x50	12,50	6,95	-19,40	26,30	26,30	15,40	15,40
11040	60x60	12,40	6,96	-19,40	26,30	26,30	15,30	15,30
Rüsch		12,11	6,48	-17,56	18,95	18,95	16,67	16,67

Pode-se observar que os resultados de momentos fletores obtidos pelo SIPlacas estão próximos dos resultados das tabelas de Rüsç. Este fato ocorre para qualquer discretização adotada. Considerando os valores obtidos pelo SIPlacas para a discretização da estrutura igual a 340 nós, tem-se:

- Para o momento $M_{y,g}$ (12,50 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsç (12,11 kN/m) de 0,03%.
- Para o momento $M_{x,g}$ (6,99 kN/m) obtido pelo SIPlacas a diferença relativa com o valor da tabela de Rüsç (6,48 kN/m) é de 0,08%.
- E por último, para os valores de $M_{xe,g}$ (-15,40 kN/m e -15,69 kN/m) obtidos pelo SIPlacas e tabelas de Rüsç, respectivamente, uma diferença relativa na ordem de 0,05%.

Por outro lado, igualmente ao que ocorreu para a laje L1, a diferença relativa entre os valores de força cortante são maiores. E isto acontece independentemente da discretização adotada na análise da estrutura pelo SIPlacas. Em termos de diferença percentual relativa, e adotando os valores do SIPlacas obtidos para uma discretização de 340 nós, tem-se:

- Para a força cortante $V_{xe,g}$ (28,10 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsç (18,95 kN/m) de -32,56 %.
- Para a força cortante $V_{y,g}$ (15,70 kN/m) obtido pelo SIPlacas a diferença relativa com o valor da tabela de Rüsç (16,67 kN/m) é de -0,058 %.

A justificativa para esta diferença é que para o cálculo de força cortante, da laje L2, utilizando a tabela de Rüsç, são consideradas duas configurações de lajes. A Figura 65 apresenta estas duas configurações de lajes.

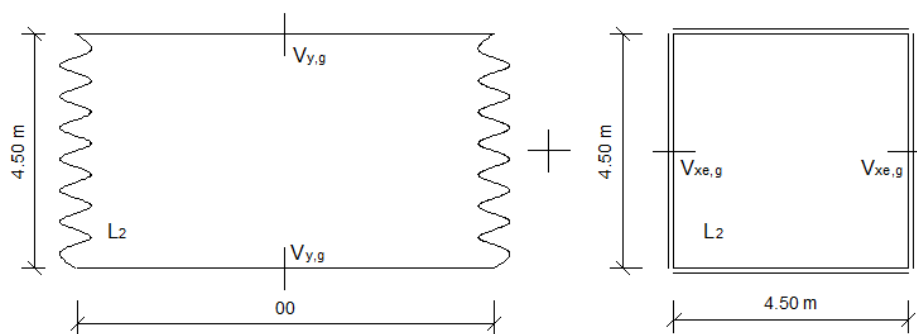


Figura 65 – Configurações de lajes no cálculo da força cortante da laje L2.

No cálculo do esforço $V_{y,g}$ a configuração de laje adotada, para Rüsç, equivale a uma laje com duas bordas opostas apoiadas e de comprimento de vão infinito. Ressalta-se que para Rüsç o comprimento do vão é infinito quando a razão entre os comprimentos dos lados das lajes são grandes. Em contrapartida, para o cálculo do esforço $V_{x,e,g}$ a configuração adotada para a laje equivale a uma laje quadrada com as quatro bordas engastadas.

A Tabela 14 apresenta os valores de força cortante obtidos pelo SIPlacas para a laje na configuração quadrada com as quatro bordas engastadas.

Tabela 14 - Valores dos esforços internos na laje L3. Unidade de força cortante (kN/m).

Discretização		$V_{x,e,g}$	$V_{x,e,g}$
Nº Nós	Nº Div.	V_y	$V_{y,e}$
340	10x10	17,1000	17,1000
1280	20x20	16,4000	16,4000
2820	30x30	16,4000	16,4000
4960	40x40	16,4000	16,4000
7700	50x50	16,4000	16,4000
11040	60x60	16,4000	16,4000
Rüsç		16,67	16,67

De maneira geral, para a discretização da estrutura com 340 nós, tem-se:

- Para a força cortante $V_{x,e,g}$ (17,10 kN/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsç (16,67 kN/m) de -0,03 %.

(c) Laje L5

Os resultados obtidos pelo SIPlacas para a laje da Figura 66 encontram-se apresentados na Tabela 15.

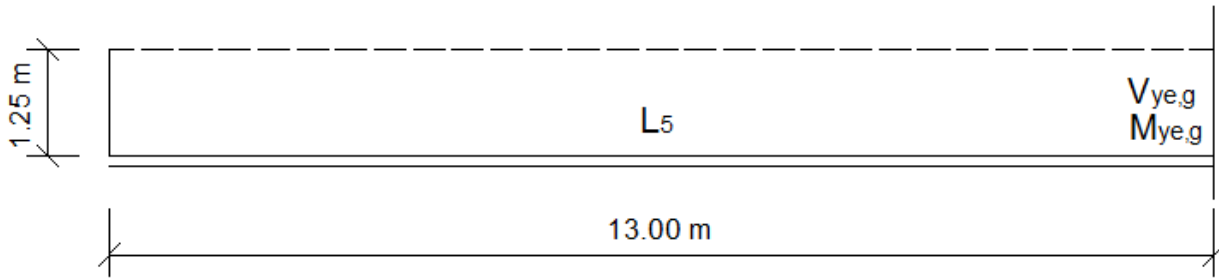


Figura 66 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 15 - Valores dos esforços internos na laje L5. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Discretização		$M_{ye,g}$	$V_{ye,g}$
Nº Nós	Nº Div.	$M_{xe,g}$	$V_{xe,g}$
164	20x2	-20,1100	19,5700
226	20x3	-20,3000	20,4600
288	20x4	-20,3700	20,4900
428	20x5	-20,4000	20,4400
Rüsch		-20,5200	20,3600

Pode ser visto que os valores de momento fletor e de força cortante, obtidos pelo SIPlacas e pelas tabelas de Rüsch, apresentam-se satisfatoriamente próximos. Considerando a estrutura discretizada com 288 nós, tem-se:

- Para o momento fletor obtido pelo SIPlacas M_{xe} (-20,37 kNm/m) uma diferença relativa percentual com o valor obtido pela tabela de Rüsch (-20,52 kN/m) de -0,007 %;
- Para a força cortante $V_{x,g}$ (20,49 kN/m) obtido pelo SIPlacas a diferença relativa com o valor da tabela de Rüsch (20,36 kN/m) é de 0,006 %.

8.3.1.2 Carga móvel

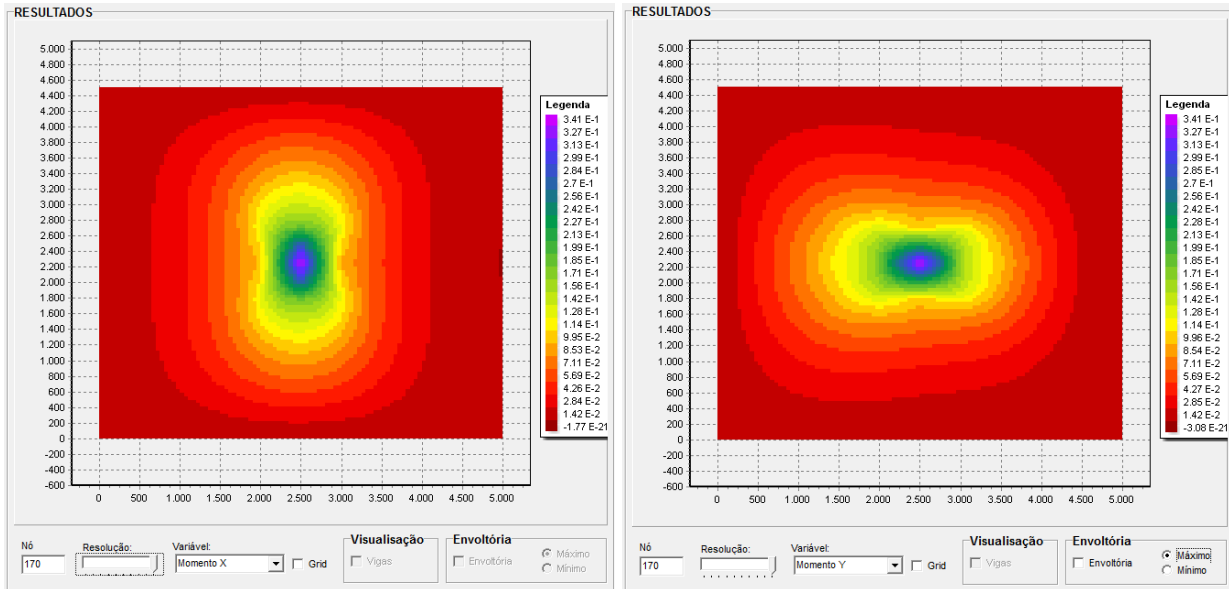
A discretização adotada para as lajes, na análise do carregamento móvel, é determinada a partir dos resultados de esforços obtidos durante a consideração do carregamento permanente. Neste sentido, observando os valores de esforços obtidos pelo SIPlacas e apresentados no item anterior 8.3.1.1, tem-se que para:

- As Lajes L1 e L2 a discretização corresponde aquela em que a estrutura apresenta 340 nós e apresenta-se dividida em 10 elementos finitos em cada direção;
- A Laje L3 a discretização corresponde aquela em que a estrutura apresenta 288 nós e apresenta-se dividida em 20 elementos finitos na direção X e 4 elementos finitos na direção Y;

(a) Laje L1

Como explicado anteriormente para se realizar o cálculo da envoltória de esforços o código SIPlacas realiza primeiramente o cálculo das superfícies de influência. O número de superfícies de influência corresponde ao número de nós que existe na estrutura. Neste sentido, para a laje L1 o código calcula 340 superfícies de influência. A Figura 67 e Figura 68 ilustram em curvas de níveis as formas para as superfícies de influência do nó 170 da estrutura. É importante ressaltar que este nó encontra-se exatamente no meio da placa.

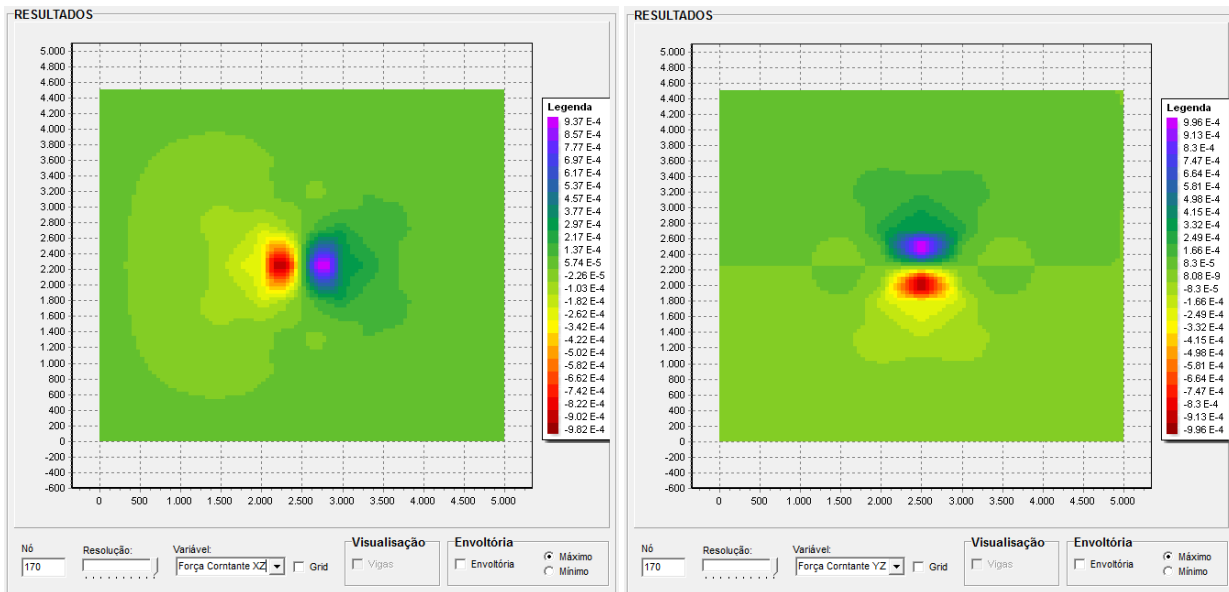
O valor máximo da superfície de influência do nó apresentado na Figura 67 (a) corresponde a 0,341 mm/mm. E, com o auxílio da curva de nível, afirma-se que a região de máximo encontra-se no meio da placa. Em relação à região de valor mínimo é possível constatar que a mesma encontra-se próxima as bordas da laje e equivale a valor zero. O mesmo comportamento ocorre para a superfície de momento fletor na direção Y, Figura 67 (b).



(a)

(b)

Figura 67 - Superfície de influência, representada por curvas de nível, do nó 170 (a) de momento fletor na direção X e (b) de momento fletor na direção Y. Unidade de medida mm/mm.



(a)

(b)

Figura 68 – Superfície de influência, representada por curvas de nível, do nó 170 (a) de força cortante na direção X e (b) de força cortante na direção Y. Unidade de medida 1/mm.

As superfícies de influência de força cortante nas direções X e Y do nó 170, Figura 68 (a) e (b), apresentam descontinuidade próximo ao nó em questão. Este comportamento encontra-se consistente para a construção de linhas de influência utilizando a teoria de Müller-Breslau. Definição descrita no item 2.3.

Com relação a valores, para a superfície de influência na direção X, tem-se que próximo ao nó 170 ocorre uma variação do esforço de $9,37.10^{-4}$ para $-9,82.10^{-4}$ 1/mm. E para a superfície de influência de força cortante na direção Y a descontinuidade é de $9,96.10^{-4}$ para $-9,96.10^{-4}$ 1/mm. É importante ressaltar que na direção Y a laje L1 é simétrica, e, portanto, os valores de força cortante nesta direção são antissimétricos.

Desta maneira, para todas as superfícies calculadas determinam-se a envoltória de esforços da laje L1 de acordo com as rotinas anteriormente explicadas no capítulo 7. Observa-se que as envoltórias são construídas pontualmente, ou seja, os valores máximos e mínimos da envoltória correspondem a valores obtidos nos nós dos elementos finitos.

Salienta-se que as envoltórias foram calculadas permitindo o código analisar os pontos em que o veículo apresenta-se parcialmente fora do tabuleiro. Esta decisão é adotada nesta estrutura, tendo em vista que em qualquer posição, o veículo apresenta dimensões que sempre se configura em situações nas quais o mesmo se encontra parcialmente fora da laje. A Figura 69 e Figura 70 apresentam os valores da envoltória de momento fletor máximo e mínimo nas direções X e Y, respectivamente.

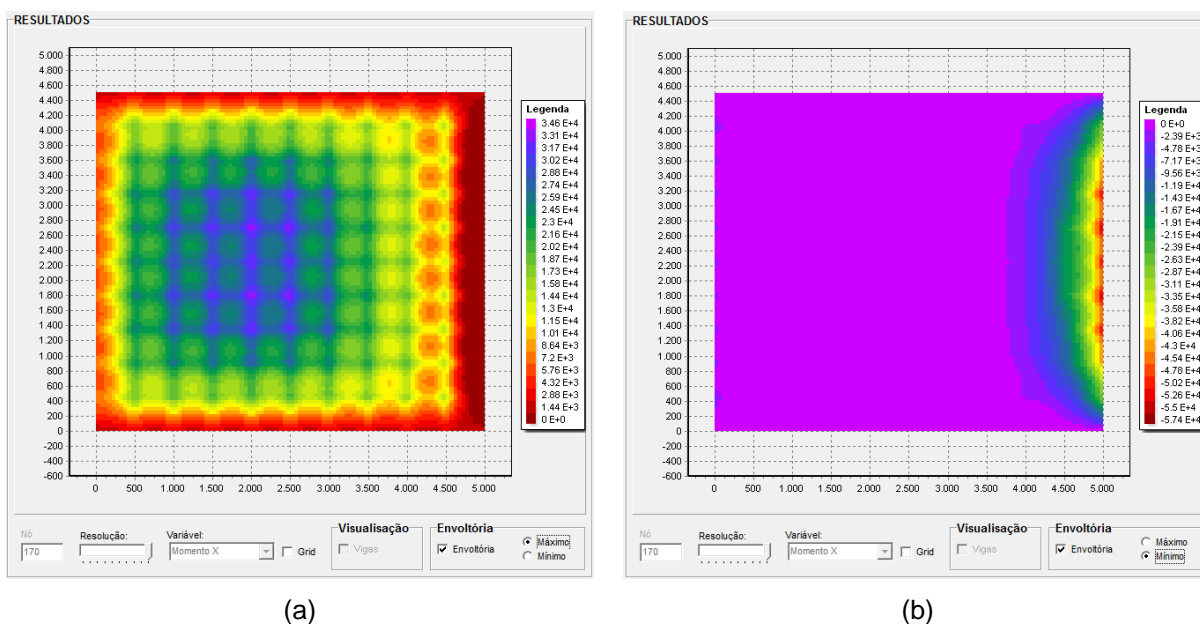
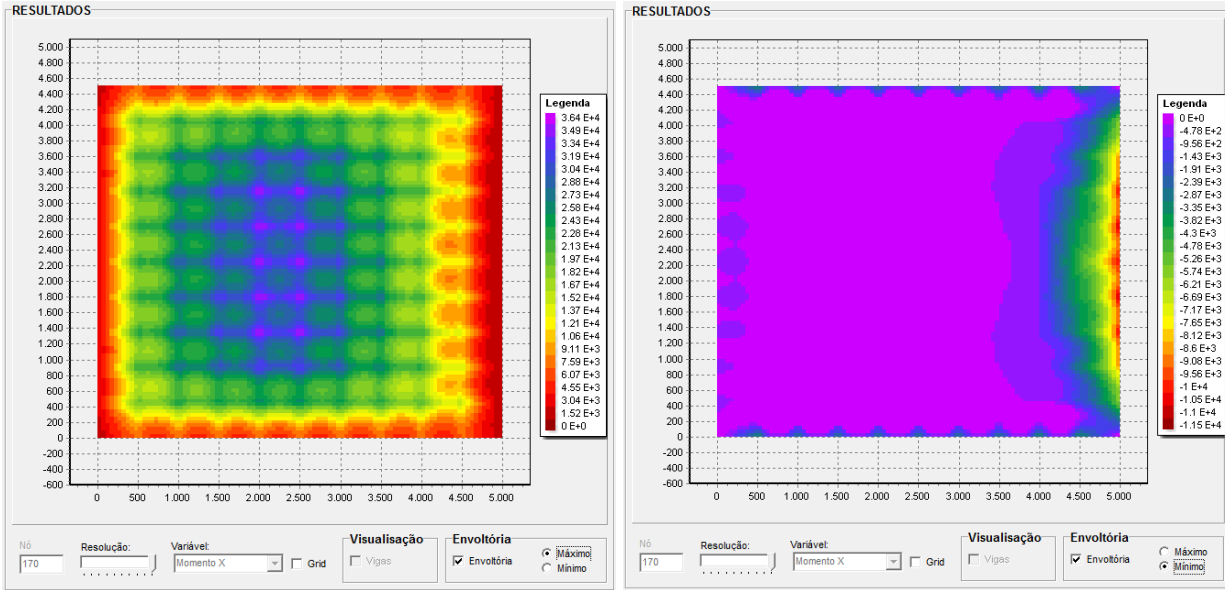


Figura 69 – Envoltórias de momento fletor M_x (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida Nmm/mm.



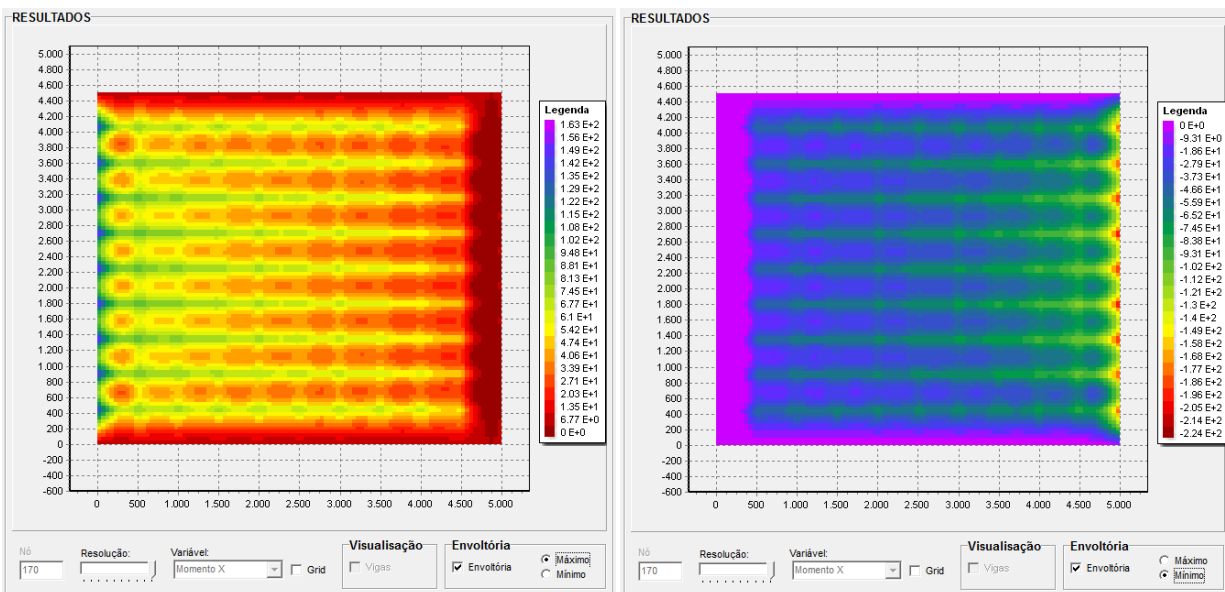
(a)

(b)

Figura 70 - Envoltórias de momento fletor My (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida Nmm/mm.

Verifica-se que os momentos fletores máximos, nas direções X e Y, encontram-se no meio da placa, enquanto que os mínimos estão na borda da laje, considerada perfeitamente engastada.

A Figura 71 e Figura 72 apresentam os valores da envoltória de força cortante máxima e mínima nas direções X e Y, respectivamente.



(a)

(b)

Figura 71 - Envoltórias de força cortante Fx (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida N/mm.

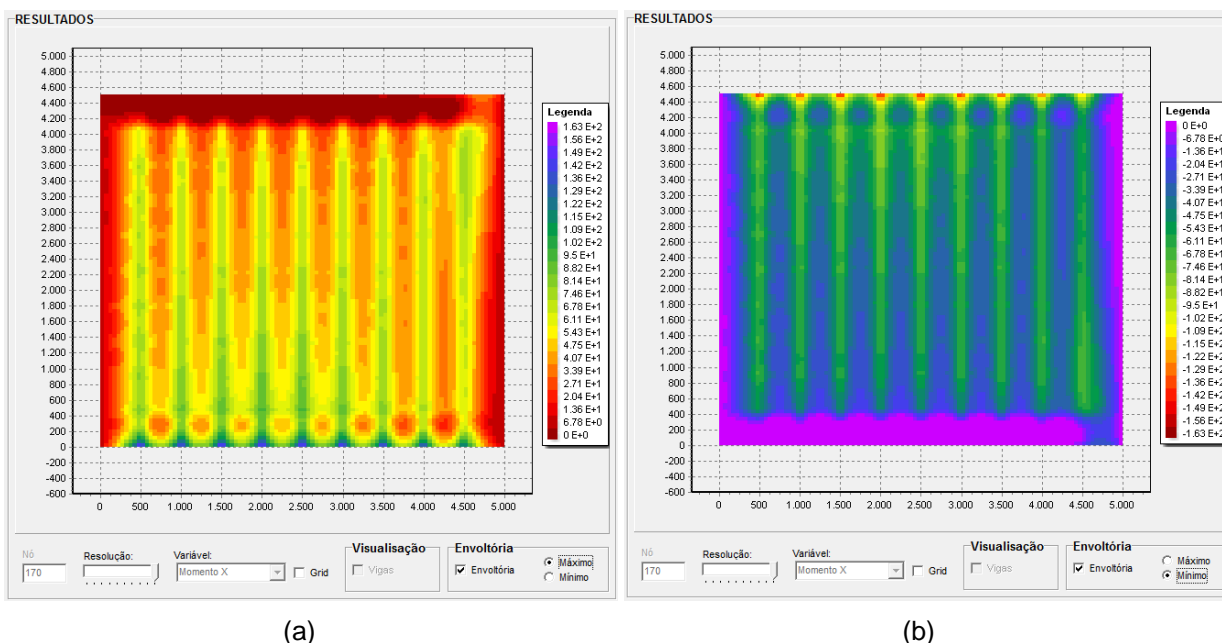


Figura 72 - Envoltórias de força cortante F_y (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida N/mm.

A partir das envoltórias de força cortante, é possível afirmar que os valores máximos e mínimos ocorrem nas bordas da laje. E que por simetria, na direção y , a força cortante encontra-se em distribuição antissimétrica.

Para a laje L1, Figura 73, pode ser observado, na Tabela 16, os valores dos esforços internos obtidos pelo SIPlacas e tabelas de Rüsç. De maneira geral observa-se que os esforços obtidos pelo SIPlacas são maiores que os da tabela de Rüsç.

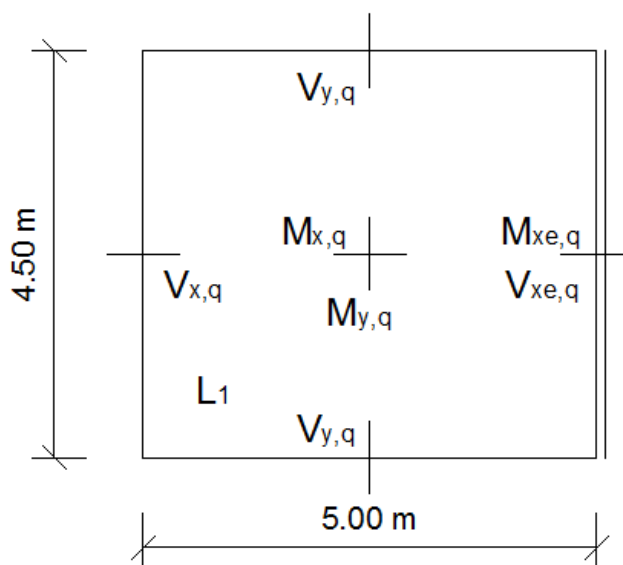


Figura 73 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 16 - Valores dos esforços internos na laje L1. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Esforços	Tabelas de Rüsçh	SIPlacas	Diferença Relativa (%)
$M_{x,q}$	20,20	34,6	41,62
$M_{xe,q}$	54,58	57,40	4,91
$M_{y,q}$	23,36	36,40	35,82
$V_{x,q}$	115,48	163,00	29,15
$V_{xe,q}$	115,48	224,00	48,45
$V_{y,q}$	113,70	163,00	30,25

Assumindo a condição de cálculo adotada para o cálculo da força cortante da laje L1, via tabelas de Rüsçh, Figura 74, tem-se na Tabela 17 os esforços obtidos pelo SIPlacas nesta configuração.

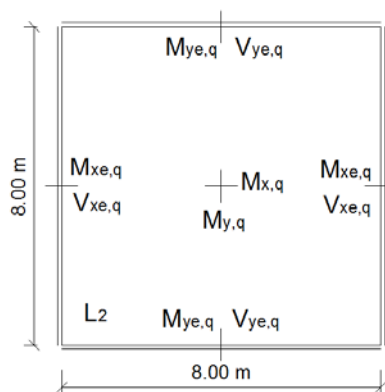
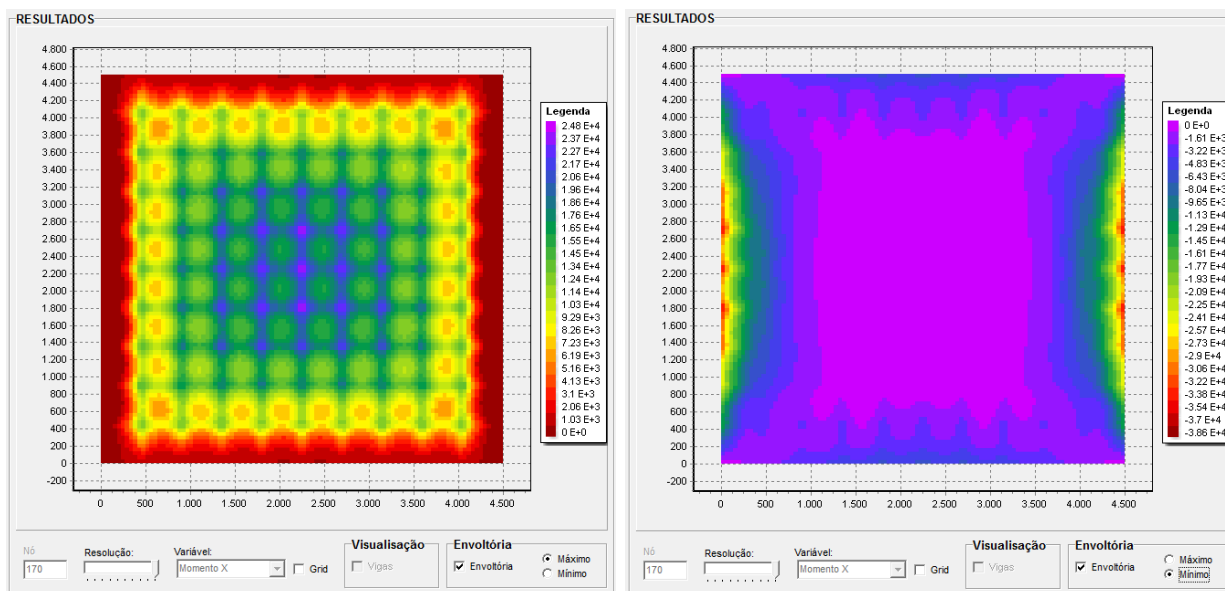


Figura 74 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 17 - Valores dos esforços internos na laje L1. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

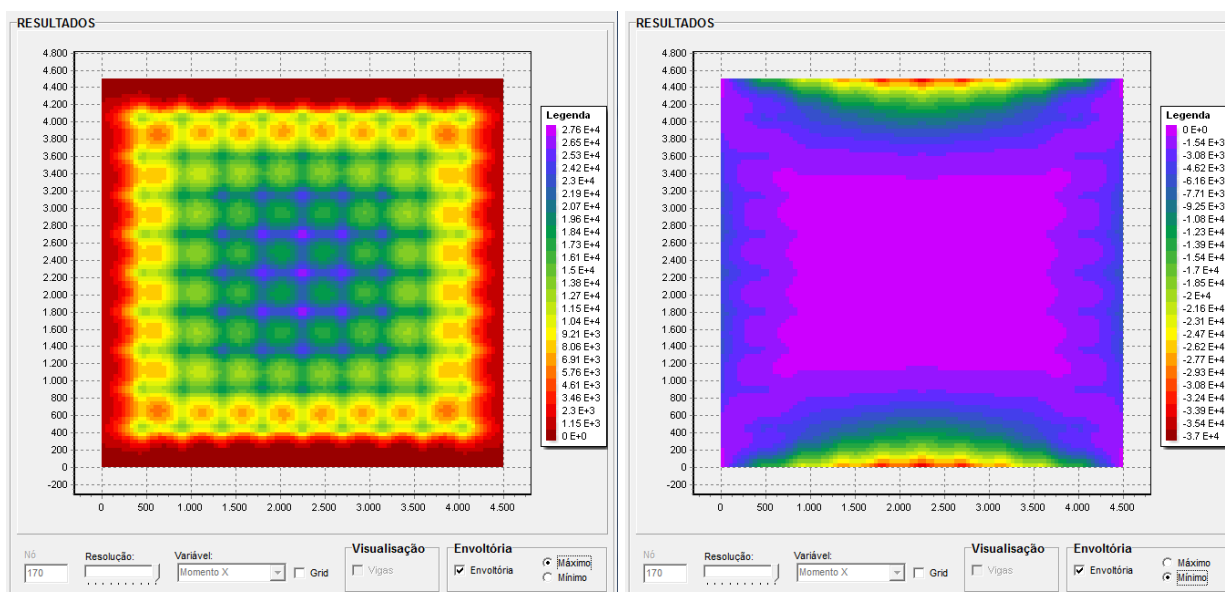
Esforços	Tabelas de Rüsçh	SIPlacas	Diferença Relativa (%)
$M_{xe,q}$	-	38,60	-
$M_{x,q}$	-	24,80	-
$M_{ye,q}$	-	37,00	-
$M_{y,q}$	-	27,60	-
$V_{xe,q}$	115,48	221,00	47,74
$V_{ye,q}$	113,70	214,00	46,87

A Figura 75 apresenta as envoltórias dos esforços internos de momento fletor para a laje com configuração ilustrada na Figura 74.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 75 - Envoltórias de esforços (a) M_x máximo, (b) M_x mínimo (c) M_y máximo (d) M_y mínimo.

Unidade de medida Nmm/mm.

Ao se analisar as envoltórias de momento fletor verifica-se que elas apresentam simetria, comportamento esperado, tendo em vista que a presente laje é simétrica. Em contrapartida observa-se que os valores para o momento na direção x são diferentes se comparados com os valores do momento na direção y. Este

comportamento ocorre tanto para a envoltória de máximo como para a de mínimo. A explicação para isso encontra-se na configuração de posição do veículo tipo, pois ele se encontra posicionado, durante o cálculo dos esforços, sempre com o seu eixo longitudinal paralelo à direção x da estrutura.

A Figura 76 apresenta as envoltórias dos esforços internos de força cortante para a laje com configuração ilustrada na Figura 74.

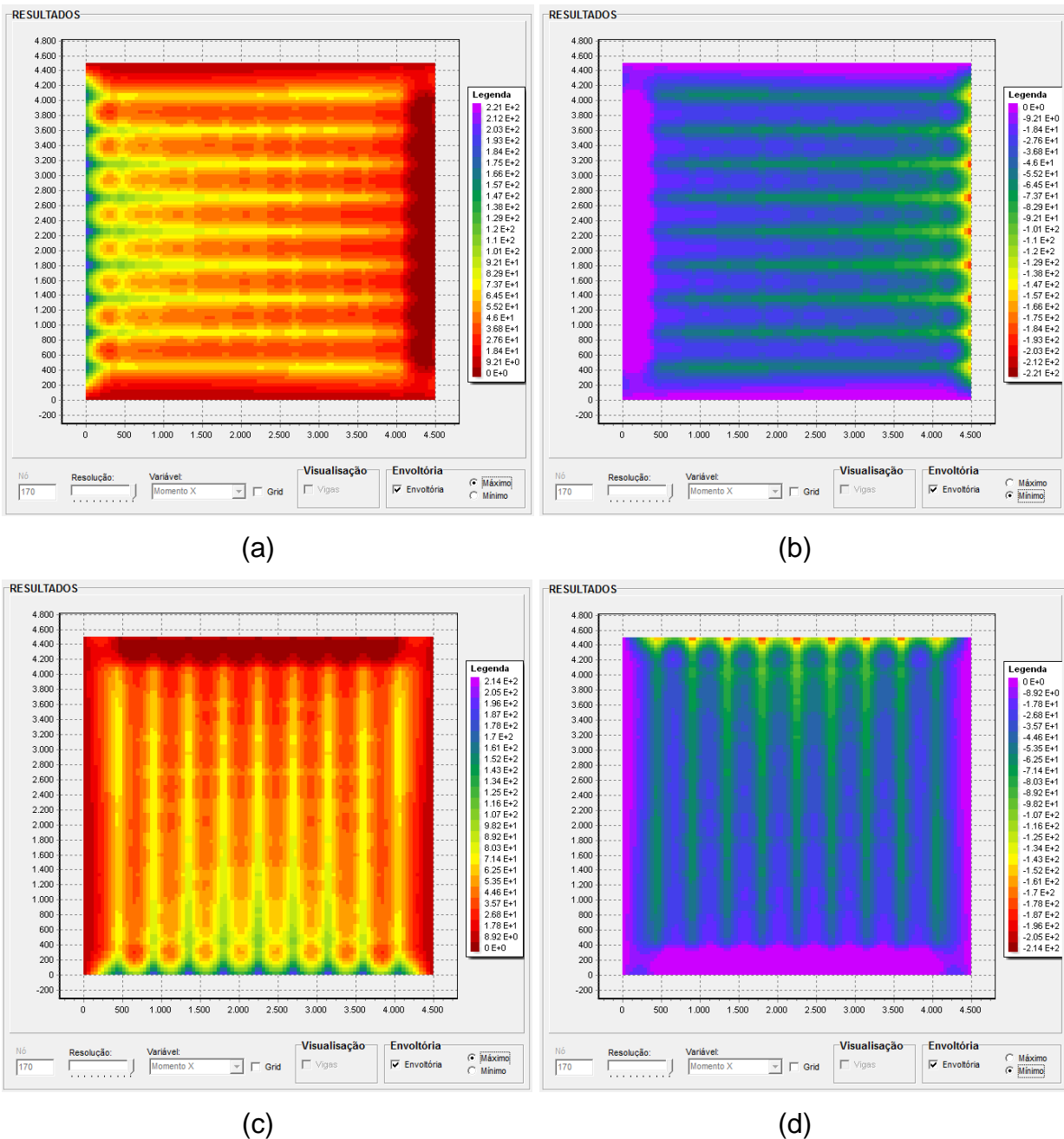


Figura 76 – Envoltórias de esforços (a) F_x _máximo (b) F_x _mínimo (c) F_y _máximo e (d) F_y _mínimo.

Unidade de medida N/mm.

O mesmo comportamento apresentado e discutido para as envoltórias de momento fletor pode ser observado para a de força cortante. Ou seja, embora o comportamento das envoltórias na direção x e y sejam similares, verifica-se que os valores são diferentes.

(b) Laje L2

A Figura 77 apresenta as superfícies de influência do nó 170 do momento fletor nas direções X e Y, respectivamente. O nó 170 encontra-se exatamente no meio da laje.

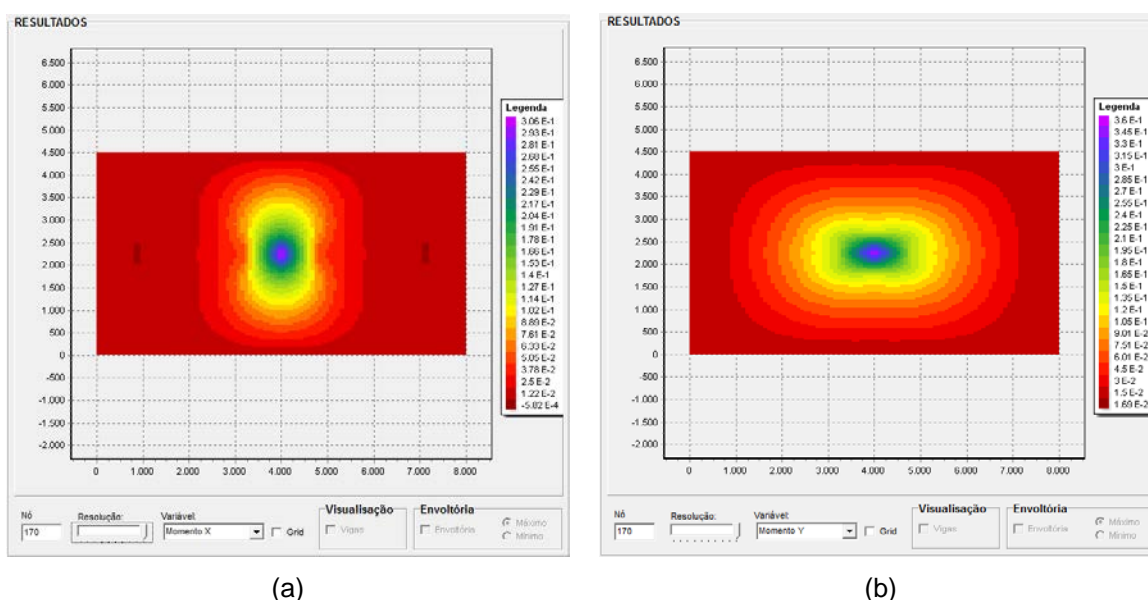


Figura 77 - Superfície de influência do nó 170 (a) de momento fletor na direção X e (b) de momento fletor na direção Y. Unidade de medida mm/mm.

Observa-se que os valores máximos das superfícies de influência dos momentos em x e y, Figura 77 (a) e (b), é $3,06 \cdot 10^{-1}$ e $3,06 \cdot 10^{-1}$ mm/mm, respectivamente. E a região de mínimo corresponde aos pontos mais afastados do centro da placa.

A Figura 78 apresenta os valores e o comportamento da superfície do nó 170 de força cortante nas direções x e y, respectivamente.

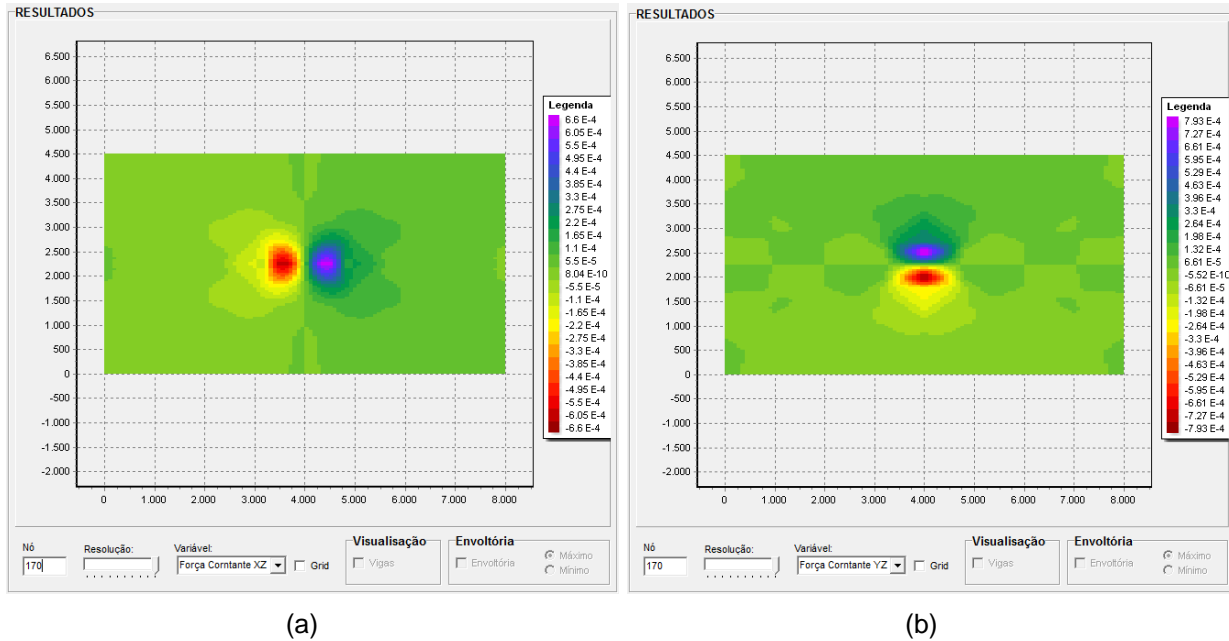


Figura 78 - Superfície de influência do nó 170 (a) de força cortante na direção X e (b) de força cortante na direção Y. Unidade de medida 1/mm.

É possível observar que próximo ao meio da placa às superfícies de influência de força cortante, nas direções x e y, apresenta descontinuidade. E como a estrutura é simétrica os valores do esforço, tanto na direção x como na direção y, são antissimétricos. Para a direção x tem-se a força cortante variando de $6,60 \cdot 10^{-4}$ a $-6,60 \cdot 10^{-4}$ 1/mm, enquanto que na direção y a descontinuidade corresponde $7,93 \cdot 10^{-4}$ a $-7,93 \cdot 10^{-4}$ 1/mm.

A Figura 79 e Figura 80 apresentam as envoltórias de momento fletor nas direções x e y, para a laje L2.

Observa-se que na região central da laje o momento fletor máximo na direção x é igual a $3,09 \cdot 10^{-4}$ N.mm/mm, enquanto que o valor mínimo é nulo. Na região dos apoios engastados o momento na direção x máximo é $5,86 \cdot 10^{-4}$ N.mm/mm e o mínimo é zero.

Com relação ao momento fletor da direção y, o valor máximo na região central da laje é igual a $4,76 \cdot 10^{-4}$ N.mm/mm, e o mínimo é zero. E na região dos apoios engastados há uma variação de $1,17 \cdot 10^{-4}$ N.mm/mm.

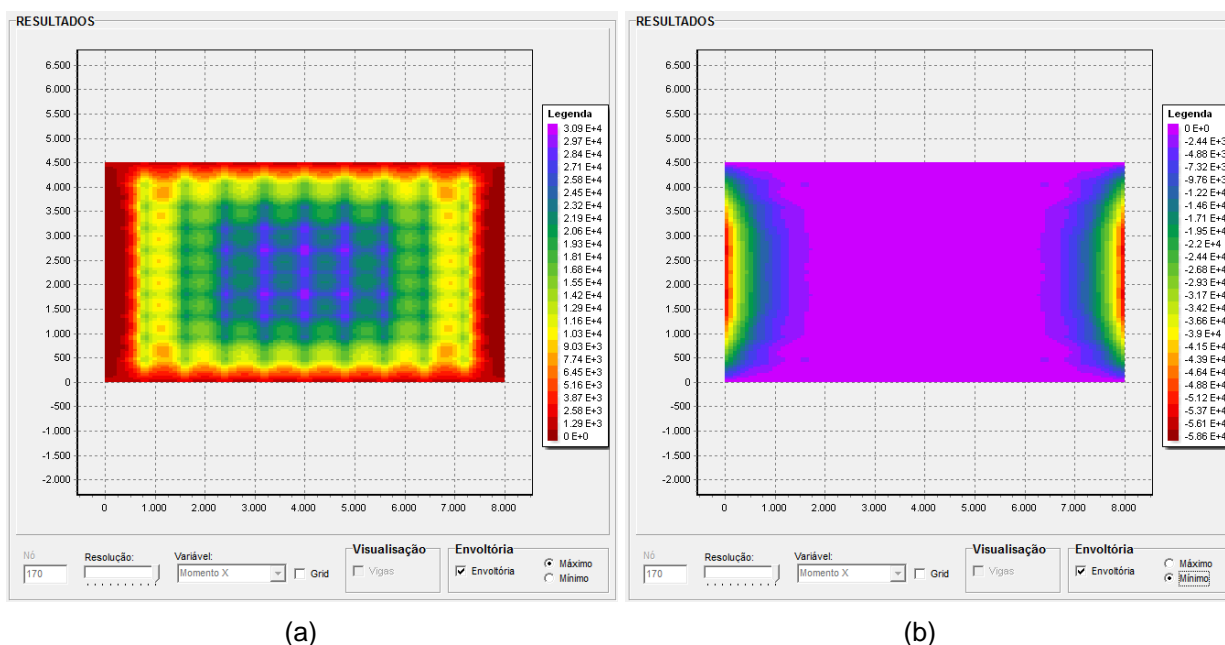


Figura 79 - Envoltórias de momento fletor M_x (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida Nmm/mm.

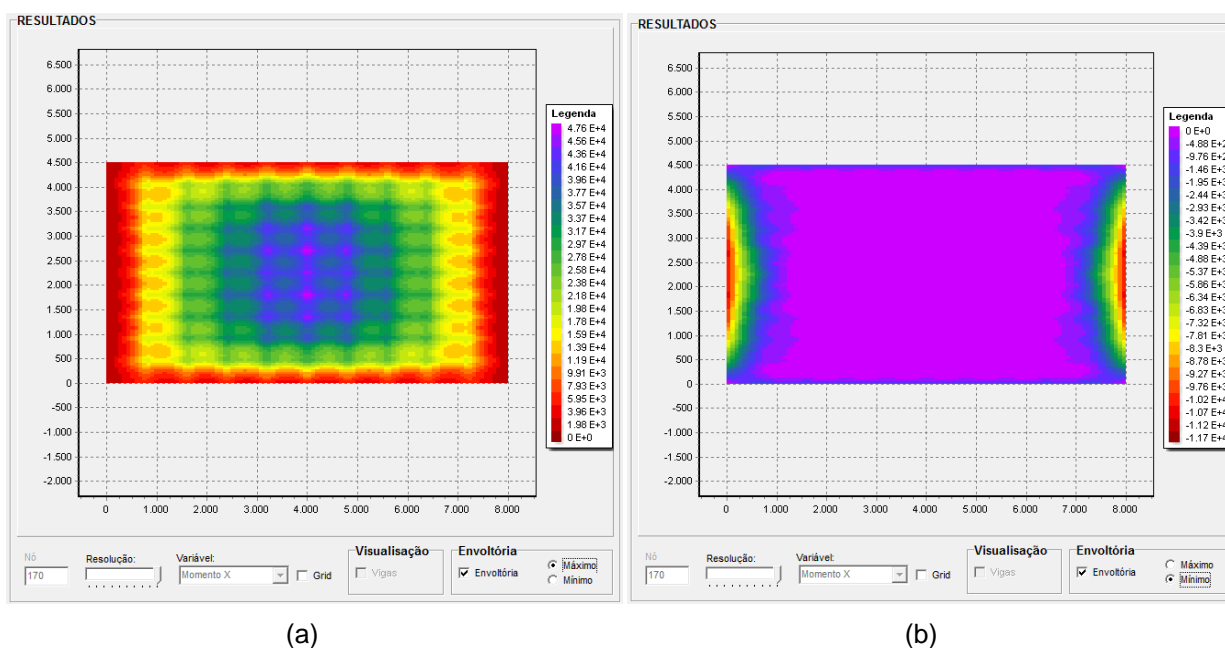


Figura 80 - Envoltórias de momento fletor M_y (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida Nmm/mm.

A Figura 81 e Figura 82 apresentam os resultados de envoltória de força cortante para as direções x e y.

De acordo com a Figura 81 (a) e (b) é possível afirmar que a variação de força cortante na direção x na região dos apoios engastados é de $1,62 \cdot 10^2$ N/mm.

Enquanto que a variação de força cortante na direção y, na região dos apoios simplesmente apoiados, é de $1,29 \cdot 10^2$ N/mm.

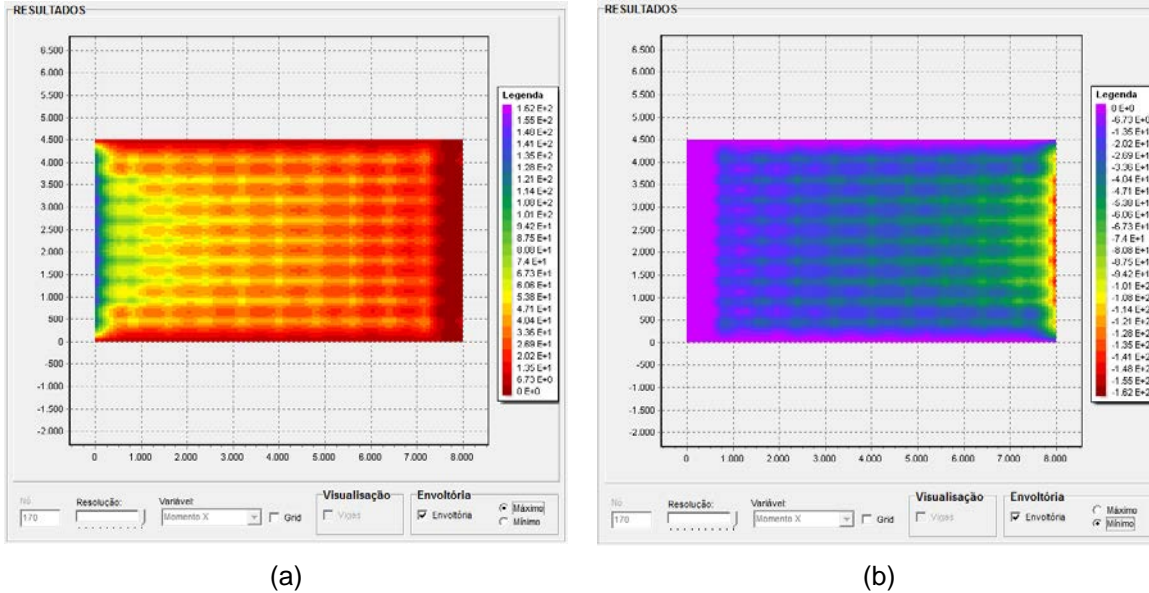


Figura 81 - Envoltórias de força cortante Fx (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida N/mm.

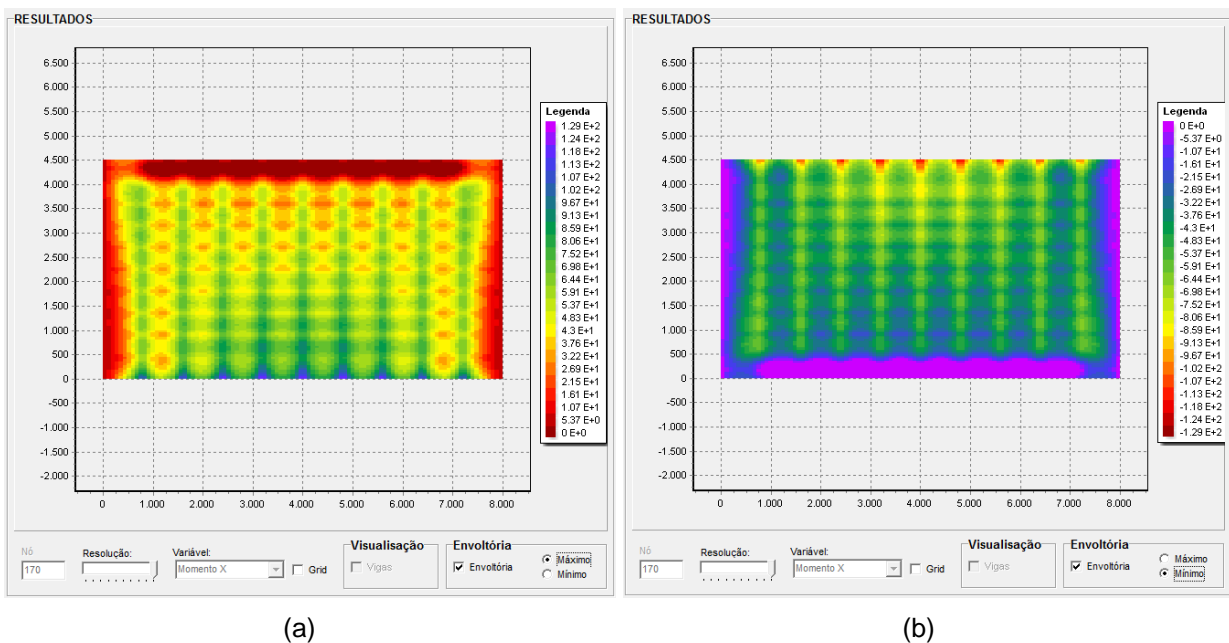


Figura 82 - Envoltórias de força cortante Fy (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida N/mm.

A Figura 83 apresenta os pontos que foram analisados nas envoltórias de momento fletor e força cortante.

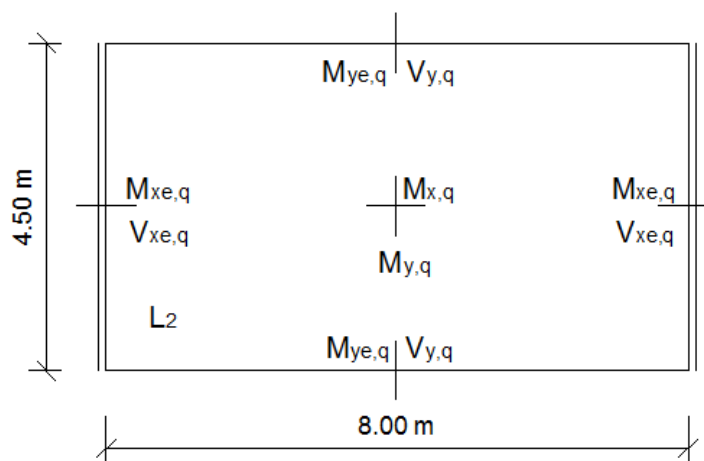


Figura 83 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

A Tabela 18 apresenta os valores máximos de esforços internos obtidos pelo código SIPlacas para a laje L2 e pelas tabelas de Rüsç. Nesta tabela também pode ser visualizada a diferença relativa obtida entre estes dois métodos.

Tabela 18 - Valores dos esforços internos na laje L2. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Esforços	Tabelas de Rüsç	SIPlacas	Diferença Relativa (%)
$M_{x,q}$	23,53	30,90	23,85
$M_{xe,q}$	62,76	58,60	6,63
$M_{y,q}$	45,30	47,60	4,83
$V_{xe,q}$	115,48	162,00	28,72
$V_{y,q}$	113,70	129,00	11,86

Semelhantemente ao ocorrido para a laje L1, verifica-se que os esforços obtidos pelo código SIPlacas são maiores em relação ao resultados da tabela de Rüsç. Este fato só não ocorre para o esforço referente ao momento fletor no engaste ($M_{xe,q}$), o qual o SIPlacas apresenta um resultado menor.

Assumindo no SIPlacas a configuração da laje utilizada nas tabelas de Rüsç para se determinar as forças cortante nos apoios da laje L2, Figura 84, tem-se na Tabela 20 os valores obtidos.

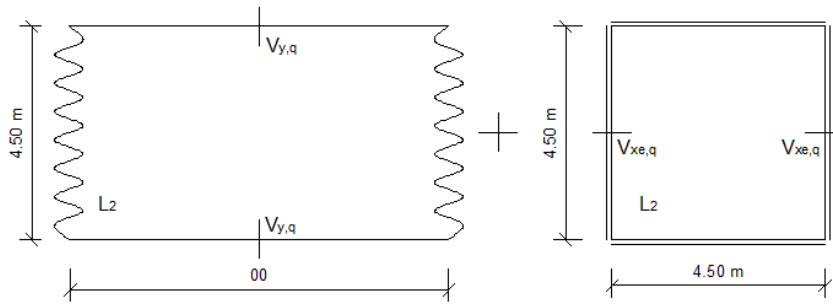


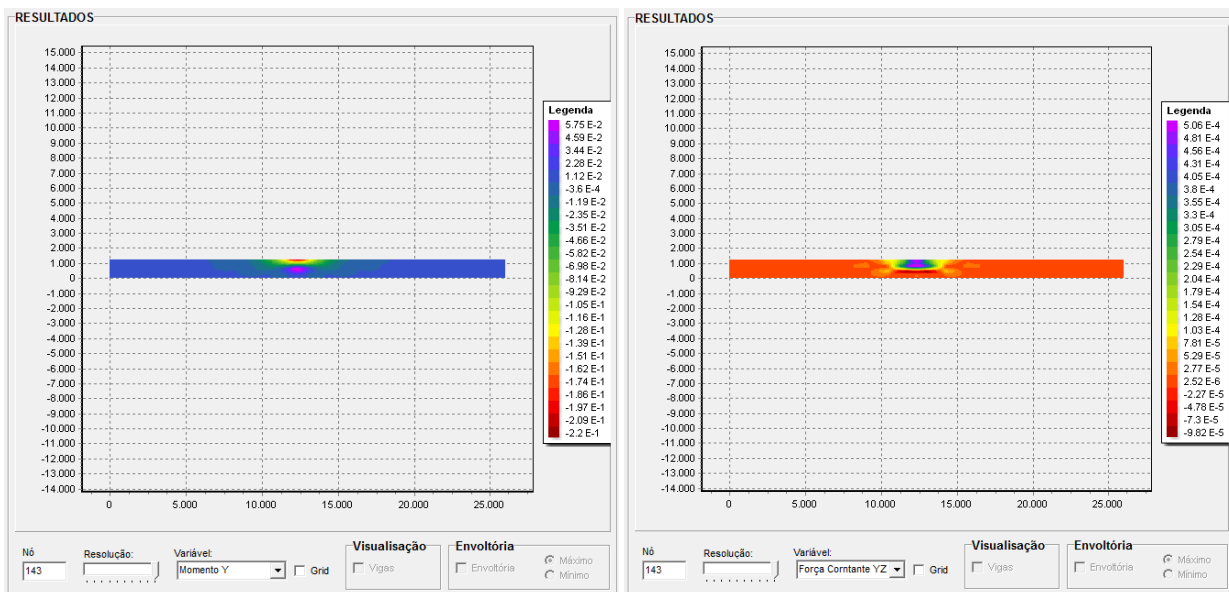
Figura 84 - Configurações de lajes no cálculo da força cortante da laje L2.

Tabela 19 - Valores dos esforços internos na laje L1. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Esforços	Tabelas de Rüsçh	SIPlacas	Diferença Relativa (%)
V _{xe,q}	115,48	162,00	47,74
V _{y,q}	113,70	214,00	11,86

(c) Laje L5

A Figura 85 (a) e (b) apresenta as superfícies de influência do nó 143 de momento fletor e força cortante na direção y, respectivamente. O nó 143 encontra-se exatamente no meio da laje.



(a)

(b)

Figura 85 - Superfície de influência do nó 143 (a) de momento fletor na direção Y e (b) de força cortante na direção Y. Unidade de medida mm/mm.

A superfície de influência de momento fletor, Figura 85 (a), apresenta os maiores valores, em módulo, na região próxima ao nó 143. Fato que se encontra de acordo com o princípio de Müller-Breslau, á medida que na condição de rotação livre, no nó 143, na direção y a estrutura tende a apresentar maiores deformadas nesta região.

Observa-se também, na Figura 85 (b), que a superfície de influência de força cortante apresenta descontinuidade próxima ao nó 143. Nas proximidades do nó o valor decai de $5,06 \cdot 10^{-4}$ mm/mm para algo em torno de $-2,27 \cdot 10^{-5}$ mm/mm.

A Figura 86 (a) e (b) apresenta a envoltória de momento fletor na direção y da laje.

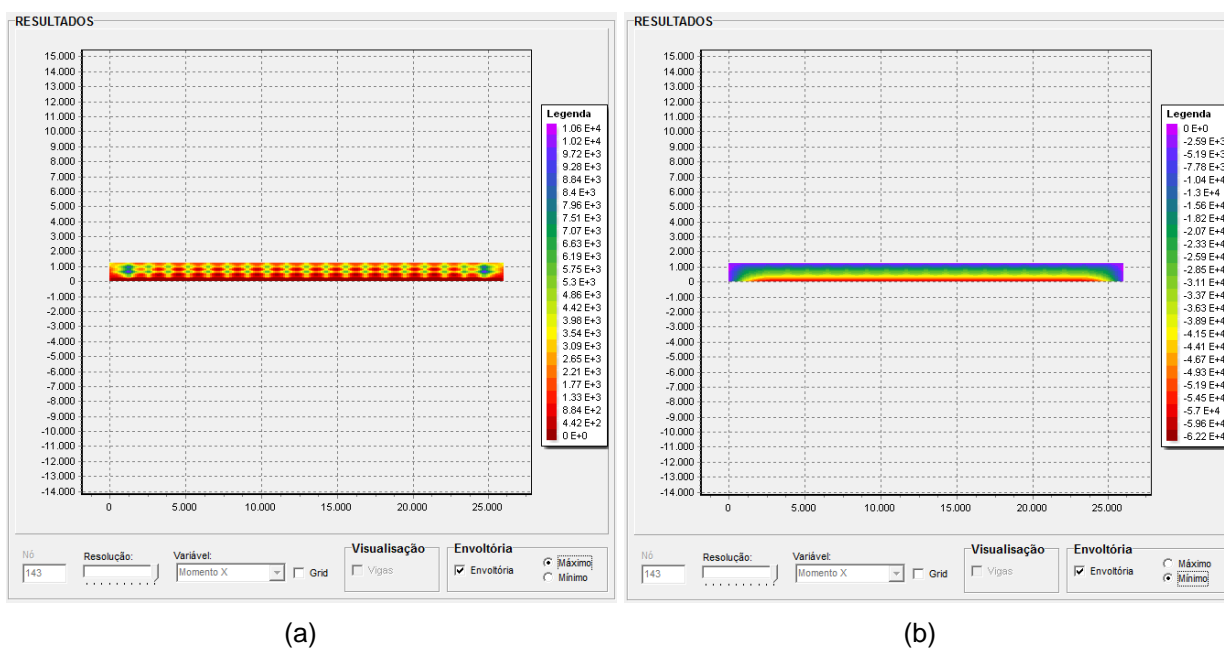
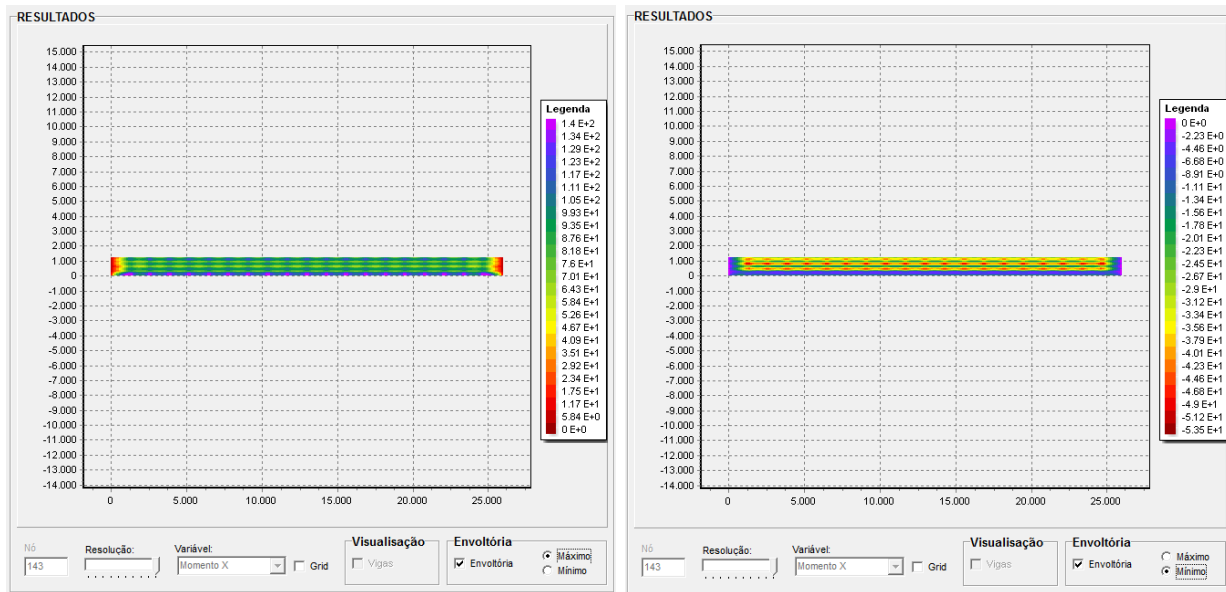


Figura 86 Envoltórias de momento fletor M_y (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida Nmm/mm.

É possível verificar que a variação de momento no engaste é de $6,22 \cdot 10^{-4}$ N.mm/mm, conforme Figura 86 (a). E como esperado o comportamento da envoltória de momento fletor na direção x é simétrica.

Com relação à envoltória de força cortante, observa-se que o valor máximo é igual a $1,40 \cdot 10^{-2}$ N/mm e o mínimo é $-4,46$ N/mm, Figura 86 (b).



(a)

(b)

Figura 87 – Envoltórias de força cortante F_y (a) Máximo e (b) Mínimo. Unidade de medida N/mm.

Os valores máximos de esforços internos, regiões em destaque da Figura 88, obtidos pelas tabelas de Rüsç e o código SIPlacas encontram-se na apresentados na Tabela 20.

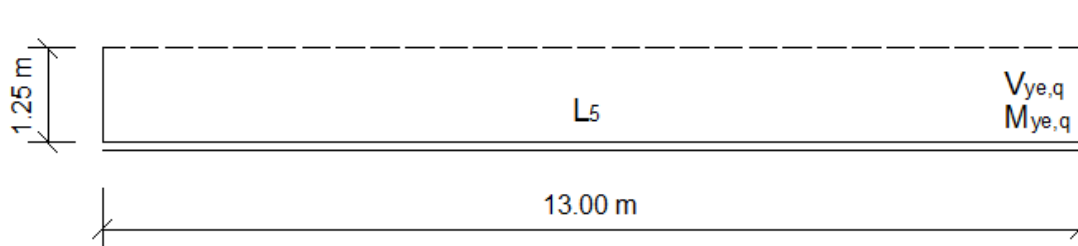


Figura 88 - Simbologia adotada na especificação da direção dos esforços.

Tabela 20 - Valores dos esforços internos na laje L5. Unidade de momento em (kN.m/m) e força cortante (kN/m).

Esforços	Tabelas de Rüsç	SIPlacas	Diferença Relativa (%)
$M_{ye,q}$	-44,18	-62,20	28,97
$V_{ye,q}$	91,72	140,00	34,49

Observa-se novamente que o SIPlacas apresenta valores de esforços internos resultantes da ação de cargas móveis maiores se comparado com os esforços obtidos pelas tabelas de Rüsç.

Conclusões

Como observado na presente análise, os valores dos esforços das cargas permanentes obtidos via cálculo Tabelas de Rüsç e código SIPlacas apresentam valores satisfatoriamente próximos. Em contrapartida, na análise de carregamento móvel, verifica-se que os valores obtidos são consideravelmente diferentes. E uma característica observada é que os valores dos esforços obtidos pelo SIPlacas são sempre maiores se comparados com os valores obtidos pelas tabelas de Rüsç.

Embora as tabelas de Rüsç e o código SIPlacas determinem os esforços a partir do conceito de superfícies de influência, existem algumas diferenças entre os dois métodos que são importantes de ressaltar:

- i. A primeira diz respeito que a resolução da estrutura no código SIPlacas é realizada utilizando o MEF. A Figura 89 apresenta, em três dimensões, a envoltória de esforços máxima de momento fletor na direção x da laje L1.

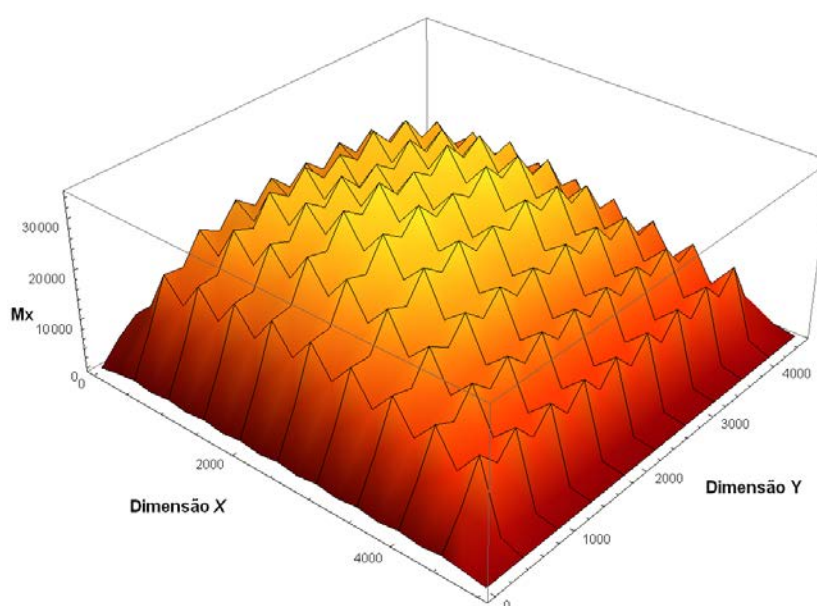


Figura 89 – Envoltória Máxima de Momento Fletor na direção x da laje L1. Unidades: Dimensão X e Y em mm e Mx em Nmm/mm.

O comportamento da envoltória apresentado relaciona-se ao elemento finito utilizado na análise (Q8_{CAD}). Observa-se que os valores mais elevados da envoltória correspondem aos nós locais dos vértices do elemento. Enquanto que os valores dos nós intermediários do elemento apresentam valores relativamente menores. Ressalta-se que os valores que foram utilizados para comparar os esforços resultantes da análise pelo SIPlacas com aqueles das tabelas de Rüsç foram sempre os máximos. Isto indica que o valor sempre se refere ao valor dos nós do vértice. Diante disto, uma aproximação que poderia ser realizada para se determinar o esforço resultante da carga móvel seria a média dos valores do elemento finito que esteja na região de valor máximo. Com isso os valores de esforços seriam relativamente menores do que aqueles que foram assumidos nesta pesquisa. Uma alternativa para que a envoltória apresente uma superfície mais suave, sem variações entre os nós dos vértices e do meio dos lados do elemento, seria considerar uma discretização relativamente mais rica. Contudo, o processo pode-se tornar muito custoso e provavelmente o valor final não apresente muita diferença.

- ii. Em segundo lugar, a literatura, pesquisada no presente estudo, afirma que Rüsç posiciona o trem tipo, para a obtenção de determinado esforço, nas posições mais desfavoráveis da superfície de influência. Observa-se que não é especificado a configuração em que o trem tipo apresenta-se neste ponto mais desfavorável. O SIPlacas analisa os vértices, o centro e as rodas do Trem Tipo nos pontos máximos e mínimos das superfícies de influência;
- iii. Outro ponto importante é que o SIPlacas considera a força da roda aplicada pontualmente, enquanto que Rüsç a propaga para a superfície média da placa com um ângulo de 45°. O procedimento que Rüsç utiliza faz com que o valor da força da roda, agora distribuída, seja multiplicado por um volume da superfície de influência. Enquanto que no código SIPlacas a carga concentrada é multiplicado pela ordenada da superfície de influência;
- iv. Como já apresentado, a superfície de influência em um determinado ponto da laje é determinada a partir do efeito neste ponto produzido por uma força

unitária atuante em outros pontos quaisquer da laje. E como podem ser observadas nas superfícies de influência (ilustradas na Figura 67, Figura 68, Figura 76, Figura 77 e Figura 84), as suas ordenadas crescem indefinidamente, à medida que se aproxima do ponto em que está sendo analisado. Segundo Mason (1977), esta característica é uma consequência do conhecido fato de que as solicitações obtidas pela teoria elástica de placas divergem no ponto de aplicação de cargas concentradas, Figura 90. Estes pontos constituem locais de singularidades das soluções, ou seja, nestes pontos os valores da superfície de influência podem apresentar-se relativamente altos.

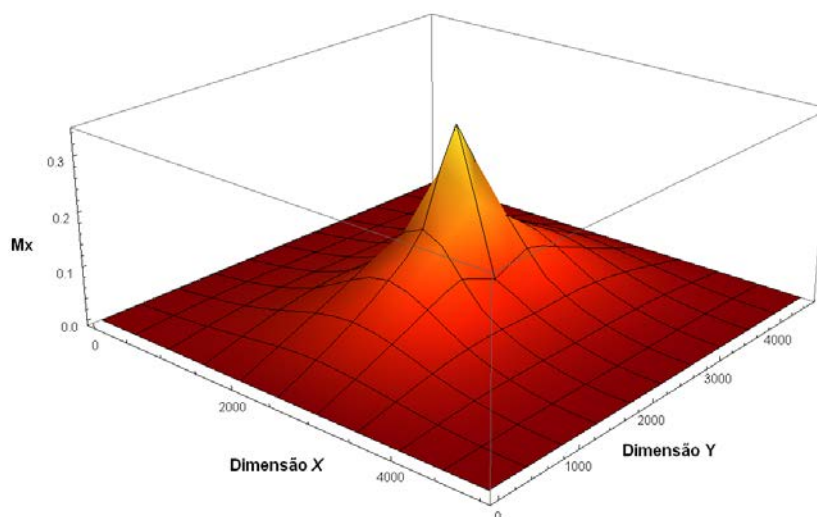


Figura 90 - Superfície de influência. Unidades: Dimensão X e Y e mm e Mx mm/mm.

Ainda segundo Mason (1977), para melhor descrever o comportamento da superfície de influência nas imediações das singularidades, estudos realizados por Pucher² emprega uma expressão resolvente para o deslocamento da placa. E com este artifício, torna-se viável o uso prático das superfícies de influência, podendo-se desprezar a contribuição da parte da superfície acima de certa cota, nas regiões próximas da singularidade.

² A. Pucher, Die Momenteneinflussfelder rechteckiger Platten, Berlin, 1936. Verlag von W. Ernest u. Sohn; Über die Singularitätsmethode an elastischen Platten, Ing. Archiv 12, 76 (1941) etc.

A. Pucher, Einflussfelder Elastischer Platten, Springer Verlag, Wien, 1958.

- v. Portanto, observa-se que: a não consideração pelo código SIPlacas da propagação da força da roda, item iii, e a não realização do tratamento das superfícies de influência citado no item iv, são também fatores que contribuem para a discrepância entre os valores obtidos pelas tabelas de Rüsç e o código SIPlacas. Assim como também, justifica o fato de que os valores de esforços do carregamento móvel no código SIPlacas resultem maiores que os das tabelas de Rüsç.

A Figura 91 e a Figura 92 apresentam os valores de momento fletor da carga permanente e carga móvel, respectivamente, obtidos pelo SIPlacas e corrigidos pelas tabelas de Rüsç.

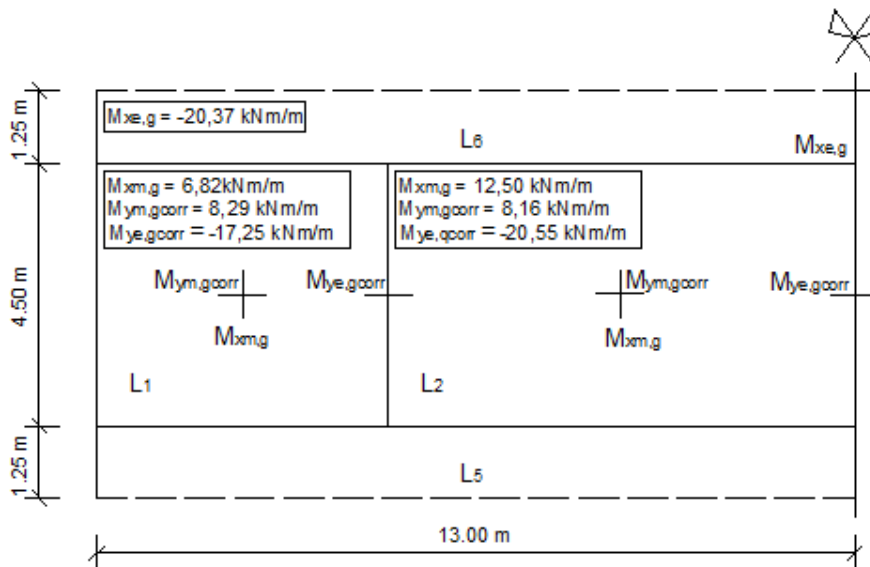


Figura 91 - Momento fletor (SIPlacas) resultante da carga permanente corrigido.

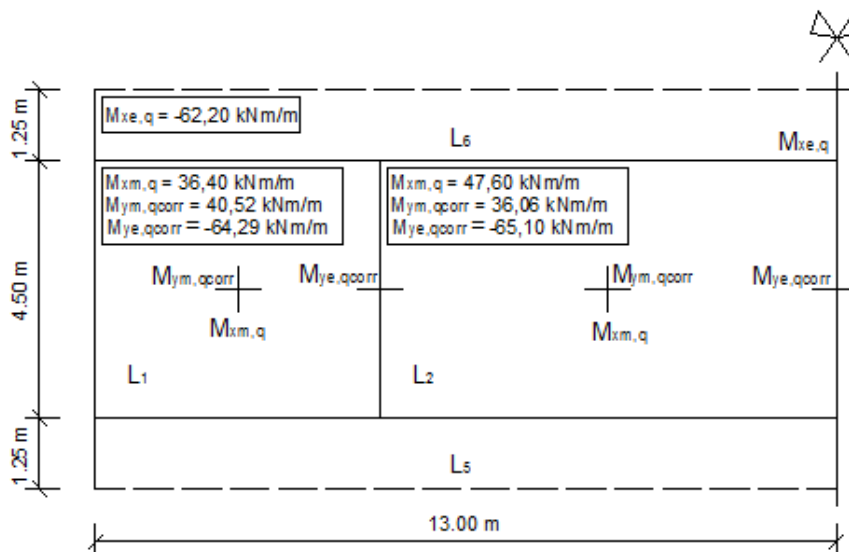


Figura 92 - Momento fletor (SIPlacas) resultante da carga móvel corrigido.

A correção dos momentos fletores obtidos do código SIPlacas, considerando as lajes isoladas, foi realizada para se comparar os valores entre os esforços obtidos pelo código para diferentes configurações de representação do tabuleiro.

8.3.2 Ponte sobre apoios não deslocáveis

Neste momento, o presente item destina-se em avaliar os esforços nas lajes da ponte considerando a configuração do tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis. Os apoios não deslocáveis podem ser entendidos como sendo longarinas e transversinas com rigidez infinita. Desta maneira, os apoios rígidos foram considerados no tabuleiro nas regiões em que ele se encontrava apoiados sobre as vigas.

Ressalta-se, também, que, para esta análise, não é considerada a inserção do elemento finito de barra pelo código SIPlacas, tendo em vista que as condições de contorno adotadas elimina esta possibilidade. Neste sentido, a seguir encontram-se apenas os resultados, dos esforços internos das lajes, extraídos do código SIPlacas. Os resultados correspondem primeiramente, à carga permanente, em seguida à carga móvel.

Os resultados obtidos via código é apresentado e, concomitantemente, realiza-se uma discussão destes valores com relação aos calculados manualmente via tabela de Rüsck. Outra comparação realizada diz respeito com os valores obtidos pelo código SIPlacas considerando os painéis de lajes isolados.

A Figura 93 apresenta a modelagem do tabuleiro da ponte em estudo na interface do código SIPlacas.

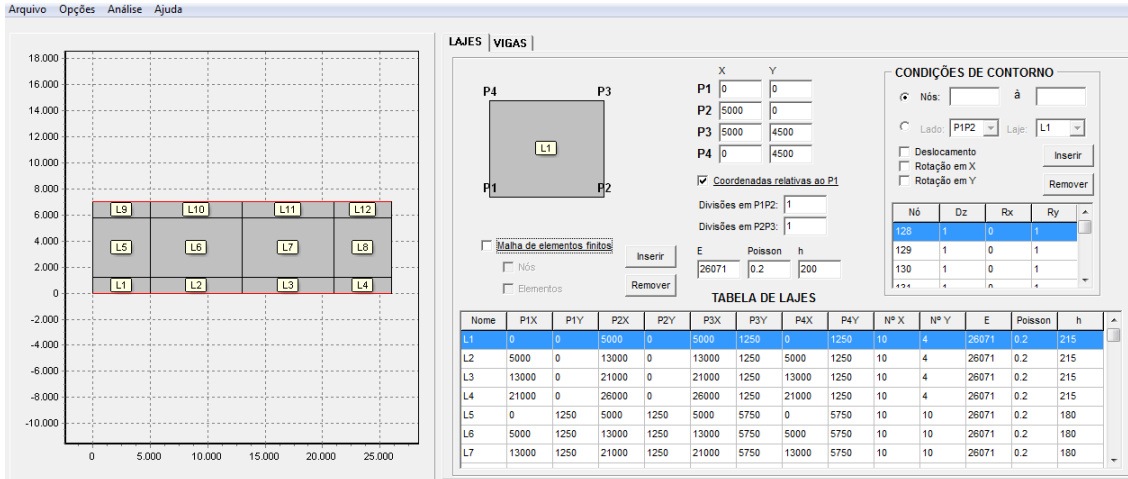


Figura 93 – Ponte modelada no código SIPlacas.

No desenho da ponte observa-se que as linhas vermelhas correspondem a regiões onde se assumiram vigas. Este procedimento foi adotado afim de que fosse possível no código inserir carregamentos lineares, que representam o peso próprio das defensas. Afim de que não houvesse contribuição de rigidez das vigas inseridas no problema adotou-se o valor do módulo de elasticidade igual à zero. Este fato implica que todos os elementos da matriz de rigidez da viga resultem em valor nulo. E, portanto, não ocorre contribuição de viga na matriz de rigidez das placas que compõe o tabuleiro.

A Figura 94 ilustra a modelagem do tabuleiro considerado. Observa-se que as linhas contínuas representam condições de contorno simplesmente apoiadas. Enquanto que as linhas tracejadas configuram-se de trechos livres. As cargas q consistem em cargas lineares. As cargas p são cargas pontuais e as g são as distribuídas na área das lajes. Por último, a carga m representa cargas de momento fletor inseridas nos nós das bordas das lajes livres.

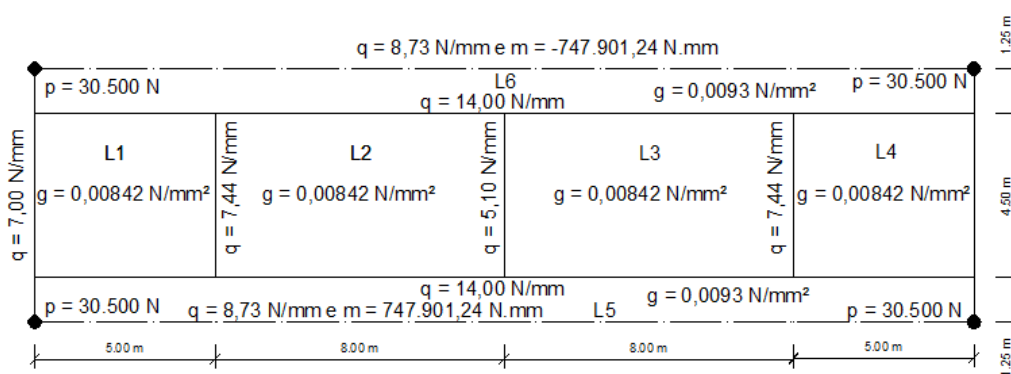


Figura 94 – Geometria e carregamento do tabuleiro.

Ressalta-se que a nomenclatura das lajes obedece à numeração dada na Figura 94.

8.3.2.1 Carga permanente

A Figura 95 apresenta, em curvas de nível, o comportamento do deslocamento do tabuleiro em análise, considerando a ação do carregamento permanente.

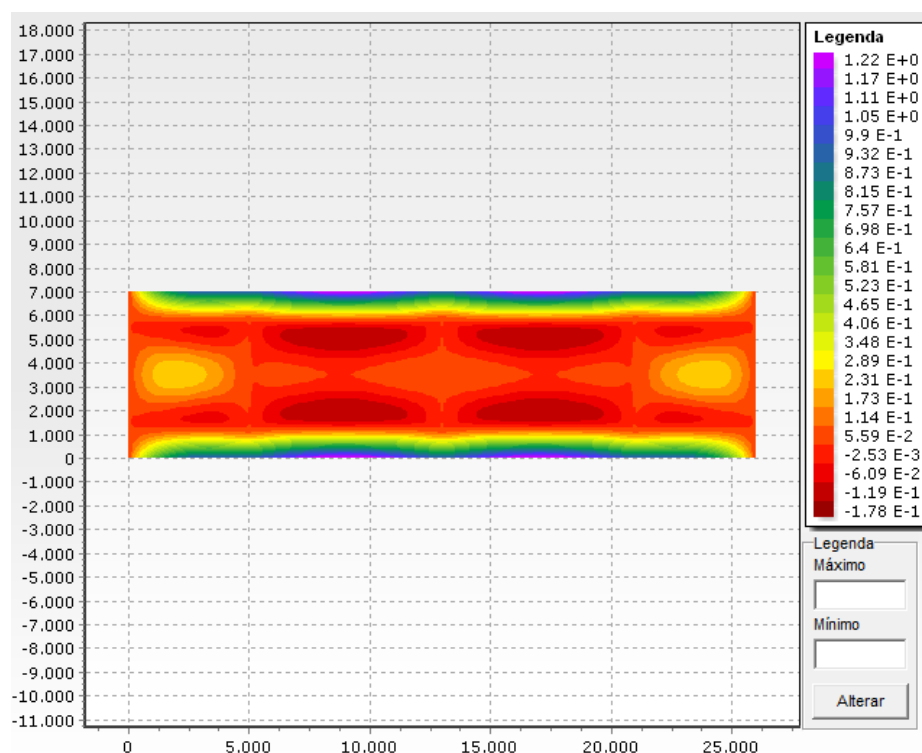


Figura 95 - Deslocamento resultante de carga permanente. Unidade de medida em mm.

Pode ser visto que as lajes L6 e L7 apresentam regiões cuja deslocada possui valor negativo, na ordem de $-0,149$ mm. Este comportamento não acontece nestas lajes ao considerá-las isoladas, mesmo com condições de apoio adequadas. Este efeito ocorre neste caso por causa da influência das deformações das lajes vizinhas. Nesta configuração, em especial, as lajes em balanço. Nas lajes L5 e L8 este efeito também ocorre, embora se apresente de forma mais atenuada.

A Figura 96 apresenta o comportamento de momento fletor na direção x do tabuleiro considerando a ação apenas do carregamento permanente.

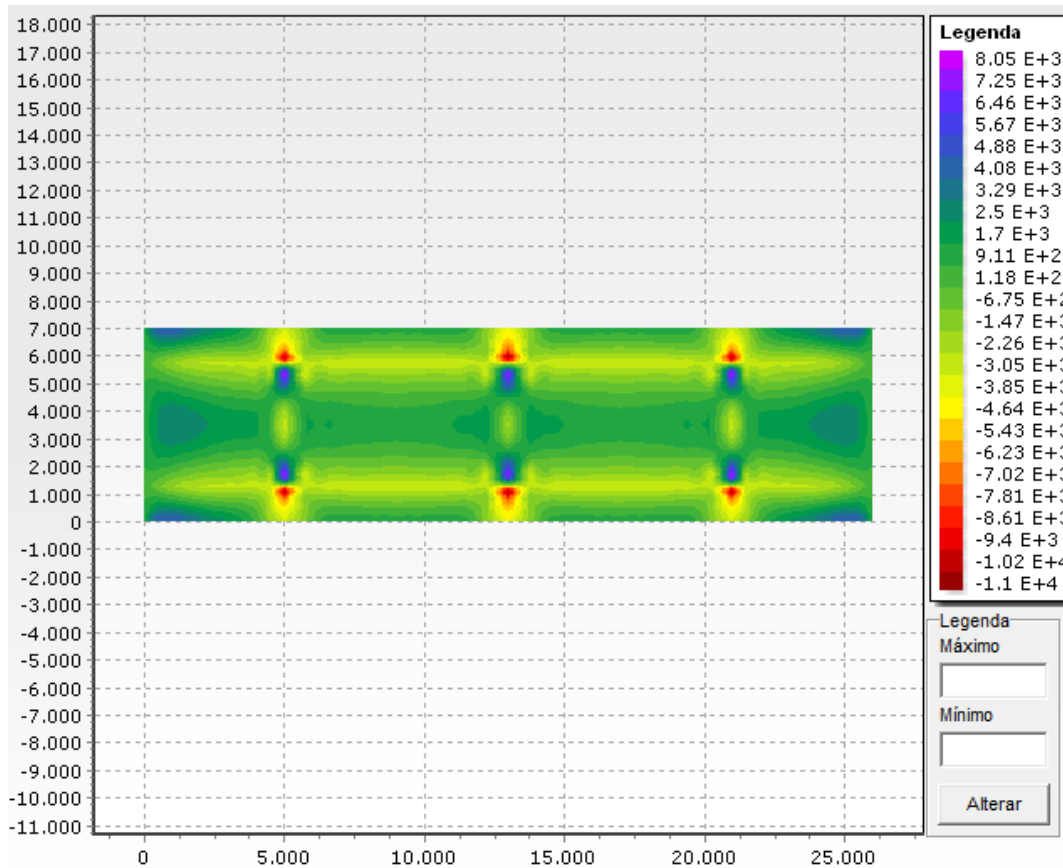


Figura 96 - Momento fletor na direção x resultante de carga permanente. Unidade de medida Nmm/mm.

É possível verificar que ocorrem concentrações de esforços nas regiões de ligações entre os apoios que representam as longarinas e transversinas. Provavelmente, este efeito acontece devido ao aumento de rigidez nestes locais. Nas lajes L6 e L7 verifica-se, com auxílio da escala de cores, que na região central os momentos apresentam valores positivos. Isto indica que a superfície inferior da laje encontra-se tracionada. Contudo, ao se aproximar dos apoios que dividem duas lajes contínuas, é possível verificar que o momento apresenta sinal invertido. O que indica que a laje passa a apresentar a superfície superior tracionada.

Outro ponto importante de se destacar é que para as lajes L5 e L8 os momentos fletores máximos não ocorrem no meio das lajes. Isto acontece devido ao efeito da continuidade destas lajes com as lajes L6 e L7.

A Figura 97 apresenta o comportamento de momento fletor na direção y do tabuleiro considerando a ação apenas do carregamento permanente.

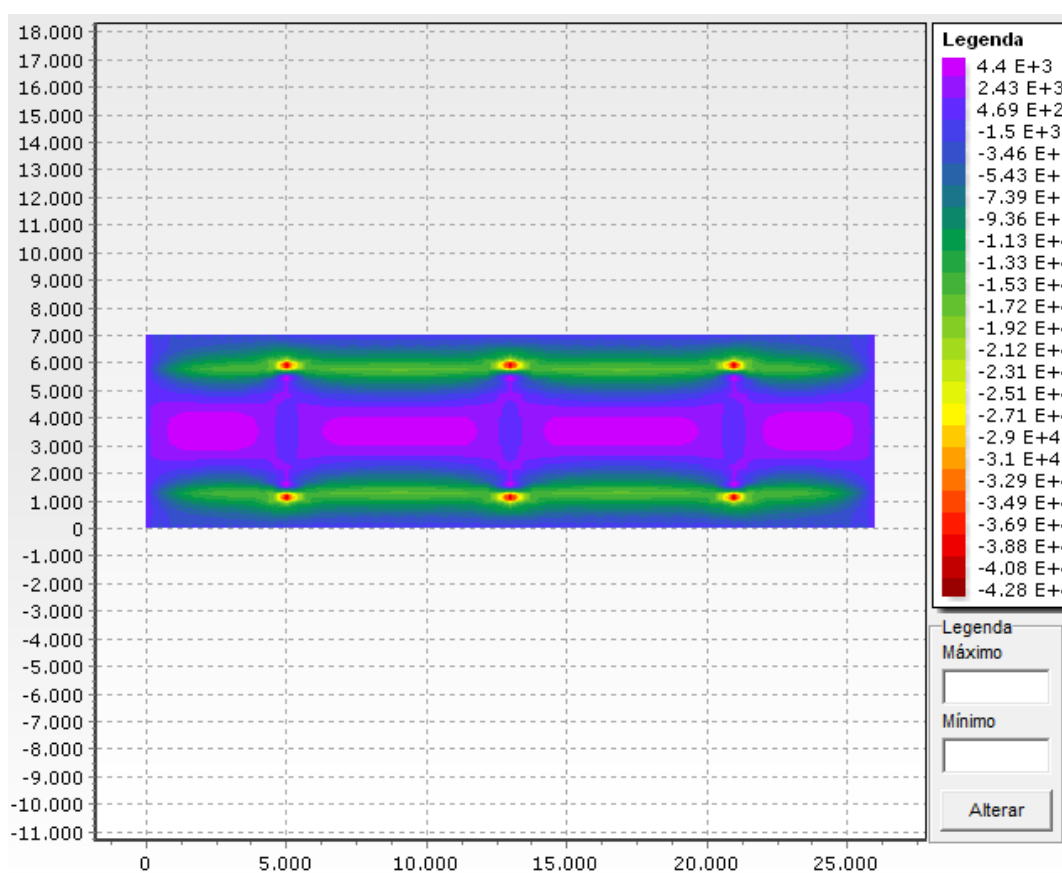


Figura 97 – Momento fletor na direção y e resultante de carga permanente. Unidade de medida Nmm/mm.

Da mesma forma que acontece para o momento em x também ocorre concentração de esforço nas regiões de ligação entre os apoios que representam as transversinas e longarinas. Verifica-se, também, que o centro das lajes contínuas encontra-se com a superfície inferior tracionada, momento fletor positivo. Enquanto que, próxima aos apoios às lajes apresentam momento fletor negativo.

A Figura 98 apresenta o comportamento de força cortante na direção x do tabuleiro considerando a ação apenas do carregamento permanente.

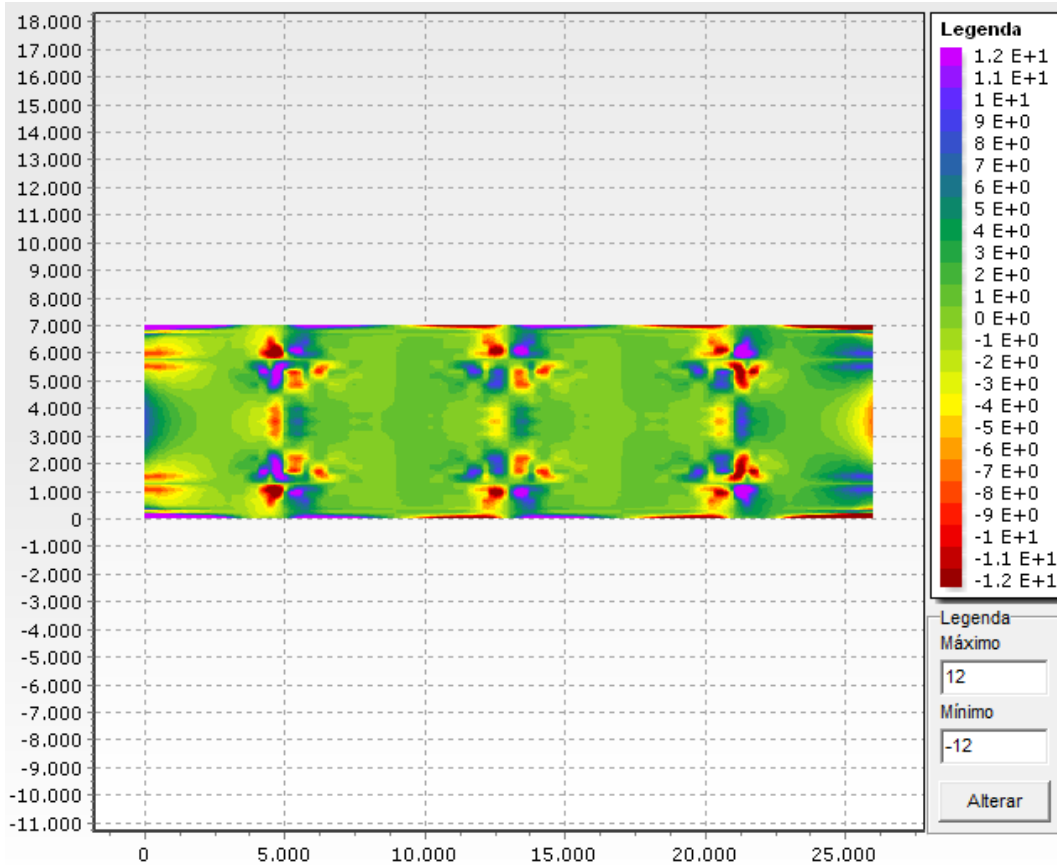


Figura 98 - Força cortante na direção x resultante de carga permanente. Unidade de medida N/mm.

Como a estrutura é simétrica e o esforço analisado é a força cortante em x, pode-se constatar que na direção x o tabuleiro apresenta comportamento antissimétrico. E, na direção y o comportamento da distribuição de esforço cortante F_x é simétrico.

O comportamento inverso ao que foi descrito anteriormente pode ser observado na Figura 99. Ou seja, para a força cortante em y, o tabuleiro apresenta esforços antissimétricos na direção y e simétrico na direção x.

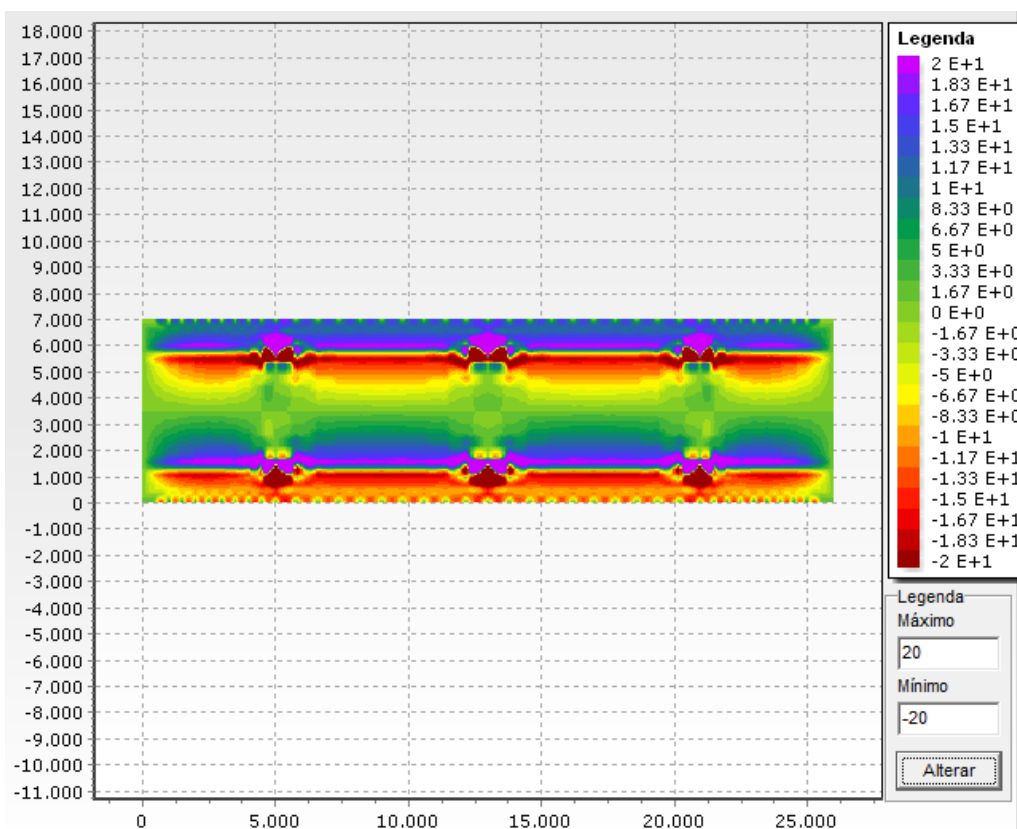


Figura 99 - Força cortante resultante na direção y e resultante de carga permanente. Unidade de medida N/mm.

Seguida da análise qualitativa do comportamento do tabuleiro de ponte estudado, espera-se comparar os valores dos esforços obtidos pelo código SIPlacas com os da tabela de Rüsç. Estas comparações são realizadas na Tabela 21 (momentos fletores) e Tabela 22 (força cortante).

Tabela 21 – Comparação de momento fletor entre as tabelas de Rüsç e o SIPlacas (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (Rüsç)	Tabuleiro sobre apoios rígidos	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	6,48	4,40	32,10
	Mx,gcorr	7,59	2,39	68,52
	Mxe,gcorr	-17,57	-3,61	79,48
L2	My,g	12,11	4,40	63,67
	Mx,gcorr	7,56	0,91	87,96
	Mxe,gcorr	-19,51	-2,56	86,88
L3	Mye,g	-20,52	-18,45	10,09

Tabela 22 – Comparação de força cortante entre as tabelas de Rüsç e o SIPlacas (Unidades de força cortante kN/mm).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (Rüsç)	Tabuleiro sobre apoios rígidos	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	16,67	7,84	52,97
	Vxe,g	16,67	8,98	46,13
	Vy,g	16,67	20,00	-16,65
L2	Vxe,g	18,95	6,14	67,60
	Vy,g	16,67	20,00	-16,65
L3	Vye,g	20,36	20,00	1,77

De maneira geral, ao considerar o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis os valores dos esforços, sejam eles momento fletor e/ou força cortante obtidos pelo SIPlacas são menores em comparação com os da tabela de Rüsç. Conclui-se, portanto, que ao se considerar o tabuleiro completo ocorre uma redistribuição de esforços. Cargas que se encontram nas demais lajes acabam aliviando esforços nas regiões mais solicitadas, caso que não ocorre quando se considera apenas uma laje.

É possível também observar que apenas o momento fletor e a força cortante no engaste da laje em balanço não apresentam valores consideravelmente diferentes. Para o momento fletor há uma diferença relativa na ordem de 10,09 %, enquanto que para a força cortante o valor é 1,77%. Ou seja, considerar para a laje L3 a configuração de laje em balanço com borda engastada é uma boa aproximação para o comportamento real desta laje no tabuleiro.

A seguir comparam-se os valores dos esforços, resultantes de cargas permanente, obtidos pelo código SIPlacas a partir de duas configurações. A primeira com lajes isoladas e os esforços obtidos corrigidos pelas tabelas de Rüsç; e a segunda, considerando o tabuleiro completo sobre não deslocáveis. Estas comparações são realizadas na Tabela 23 (momentos fletores) e Tabela 24 (força cortante).

Tabela 23 - Comparação entre os valores de Momento Fletor do SIPlacas considerando configuração de painéis isolados e tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro sobre apoios rígidos	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	6,82	4,40	35,48
	Mx,gcorr	8,29	2,39	71,18
	Mxe,gcorr	-17,25	-3,61	79,10
L2	My,g	12,5	4,40	64,80
	Mx,gcorr	8,16	0,91	88,85
	Mxe,gcorr	-20,55	-2,56	87,55
L3	Mye,g	-20,37	-18,45	9,43

Tabela 24 - Comparação entre os valores de força cortante do SIPlacas considerando configuração de painéis isolados e tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. (Unidades de força cortante kN.m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro sobre apoios rígidos	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	12,6	7,84	37,78
	Vxe,g	24,00	8,98	62,58
	Vy,g	12,20	20,00	39,00
L2	Vxe,g	28,10	6,14	78,15
	Vy,g	15,70	20,00	21,50
L3	Vye,g	20,49	20,00	2,39

Para este caso, as mesmas conclusões podem ser tomadas a partir das análises entre as tabelas de Rüsçh e o SIPlacas, na configuração do tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis. Pois, como visto anteriormente, a diferença entre os valores de carga permanente entre as tabelas de Rüsçh e o SIPlacas considerando os painéis de lajes isolados são satisfatoriamente próximos.

8.3.2.2 Carga móvel

A seguir realiza-se uma análise qualitativa do comportamento do tabuleiro da ponte estudada no que diz respeito às superfícies de influência e a envoltória de esforços. É importante ressaltar que as envoltórias foram obtidas considerando o veículo tipo

sendo posicionado em configurações que garantam que ele encontrava-se completamente dentro do tabuleiro. Esta consideração se aproxima mais do comportamento real dos tabuleiros de pontes.

Na Figura 100 encontra-se a superfície de influência do tabuleiro para o nó, da malha de elementos finitos, 1038. Este nó está localizado exatamente no centro do tabuleiro.

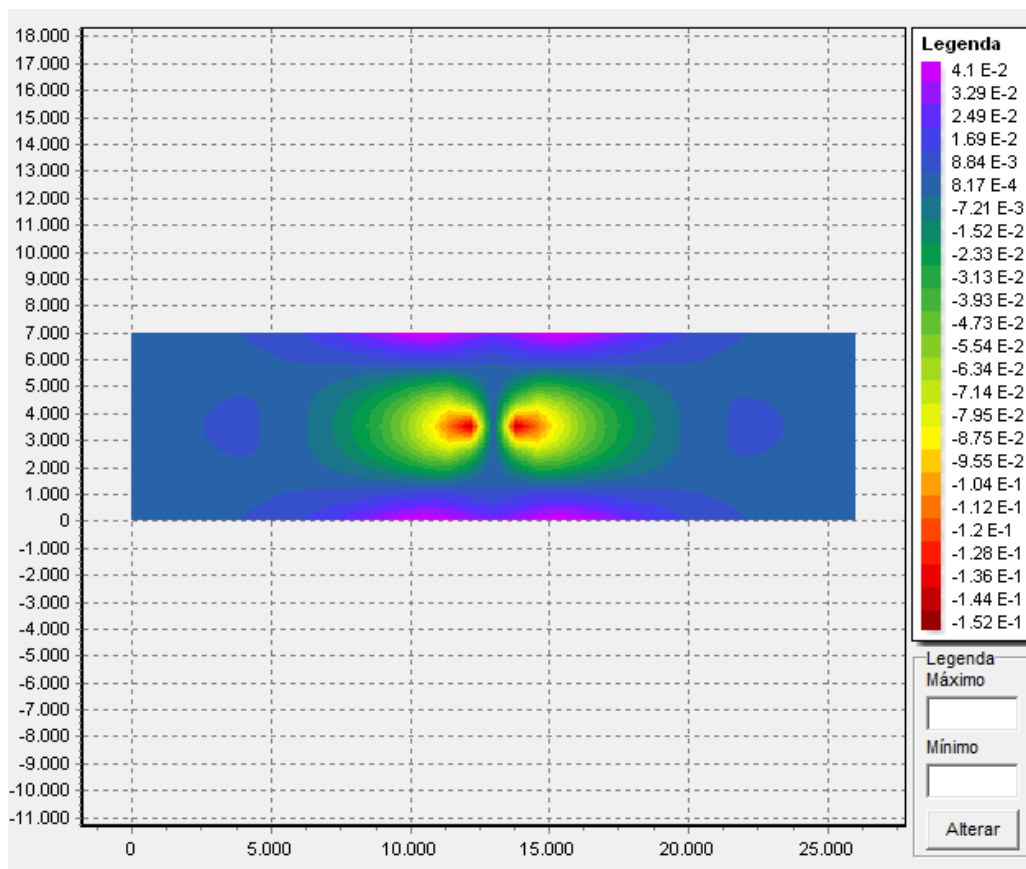


Figura 100 - Superfície de Influência de momento fletor em x do nó 1038. Unidade de medida mm/mm.

Verifica-se que a superfície de influência possui picos de máximo negativo próximo ao nó analisado. Os picos de máximo positivo encontram-se na região em balanço, coloração rosa. Os valores destas duas regiões são $-0,152$ mm/mm e $0,041$ mm/mm, respectivamente.

Baseado no princípio de Müller-Breslau para linhas de influência concluiu-se que a forma da superfície apresentada corresponde ao esperado. Pois ao se imaginar, o

nó em análise, que o vínculo relacionado ao momento fletor na direção x seja liberado, é possível prever que a deformada da estrutura apresentará picos próximos a este nó.

Diante da superfície apresentada, é possível antecipar que os valores dos esforços internos, resultante da ação das cargas móveis, deve apresentar um valor menor que aquele obtido para as lajes isoladas. Isto tende a ocorrer porque ao se posicionar o veículo tipo no ponto máximo/mínimo desta superfície de influência, as forças das rodas podem estar aplicadas em pontos que atenuem a intensidade do esforço neste ponto. Diferentemente do que ocorre nas lajes isoladas, à medida que as rodas situadas fora da laje não são levadas em consideração.

A Figura 101 e Figura 102 apresentam a envoltória de esforços de momento fletor na direção x do tabuleiro.

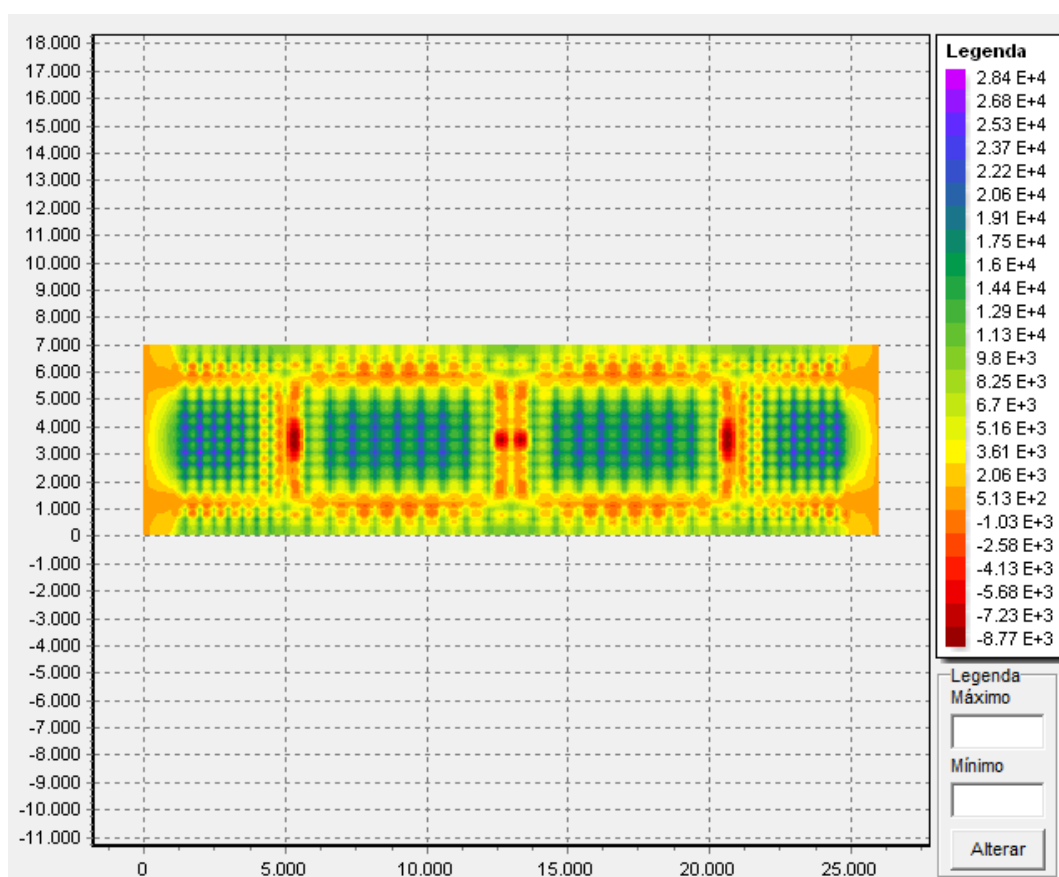


Figura 101 – Envoltória Mx máxima. Unidade de medida Nmm/mm.

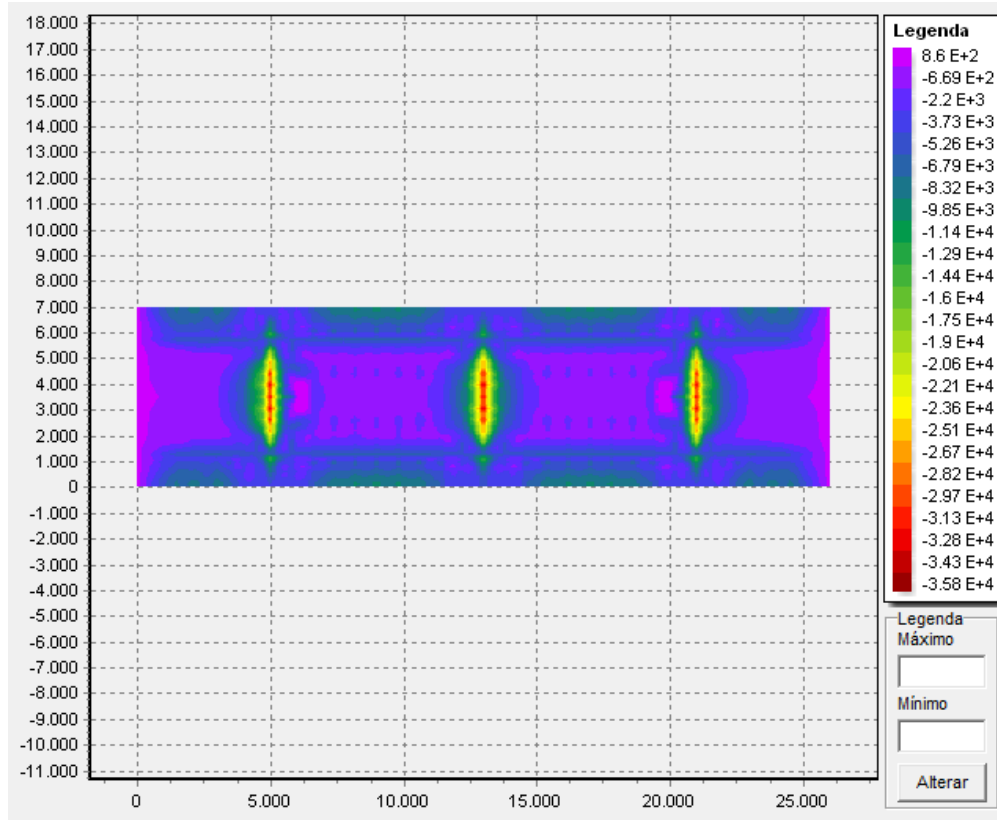


Figura 102 – Envoltória Mx mínima. Unidade de medida Nmm/mm.

De maneira geral, tem-se que as regiões de máximo e mínimo ocorrem no centro das lajes, que compõe o tabuleiro, e nas regiões próximas aos apoios, que representam as transversinas. Sendo no centro das lajes L5 e L6 os valores de momento iguais a 28,40 e 26,80 kN.m/m, respectivamente. E nas transversinas os valores correspondem a -35,80 kN.m/m.

A Figura 103 apresenta a superfície de influência de momento fletor na direção y do nó 1038.

Como discutido para a superfície de momento na direção x é possível antecipar que os valores dos esforços internos, resultante da ação das cargas móveis, devem apresentar um valor menor que aquele obtido para as lajes isoladas. Isto tende a ocorrer porque ao se posicionar o veículo tipo no ponto máximo/mínimo desta superfície de influência, as forças das rodas podem estar aplicadas em pontos que atenuem a intensidade do esforço neste ponto. Diferentemente do que ocorre nas lajes isoladas, à medida que as rodas situadas fora da laje não são levadas em consideração para a determinação do esforço.

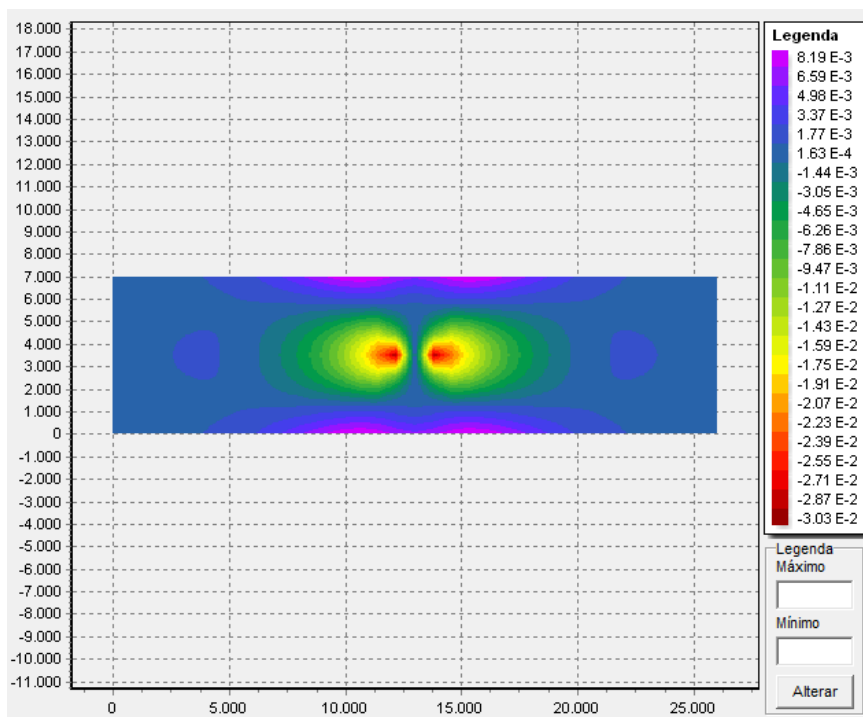


Figura 103 - Superfície de Influência de momento fletor em y do nó 1038. Unidade de medida mm/mm.

Na Figura 104 e Figura 105 encontra-se a envoltória máxima e mínima de momento fletor na direção y.

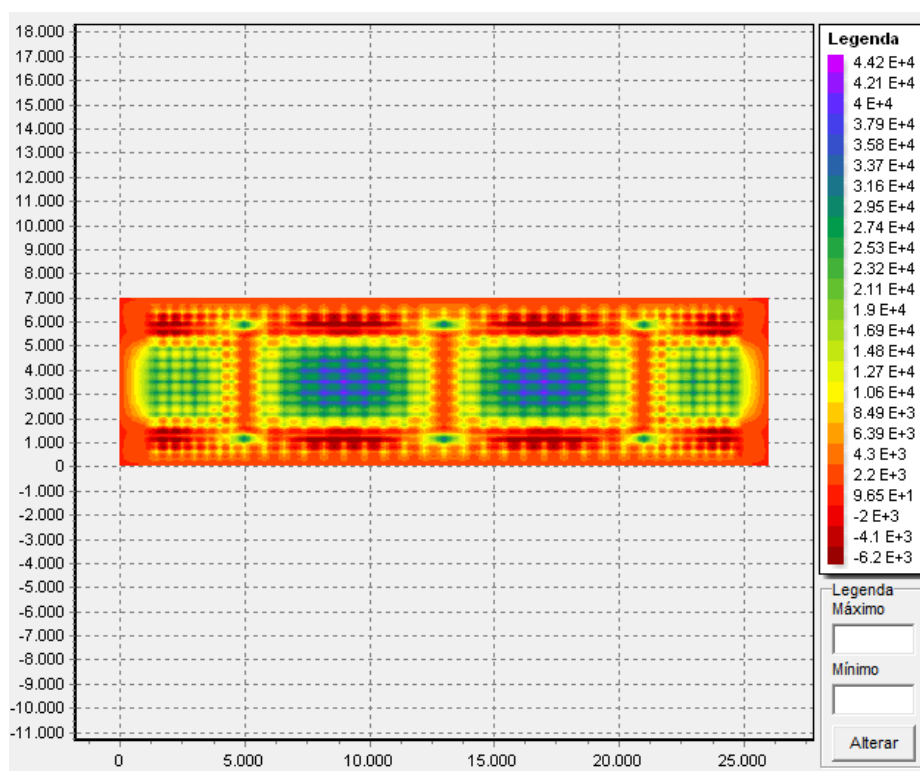


Figura 104 - Envoltória M_y máxima. Unidade de medida Nmm/mm.

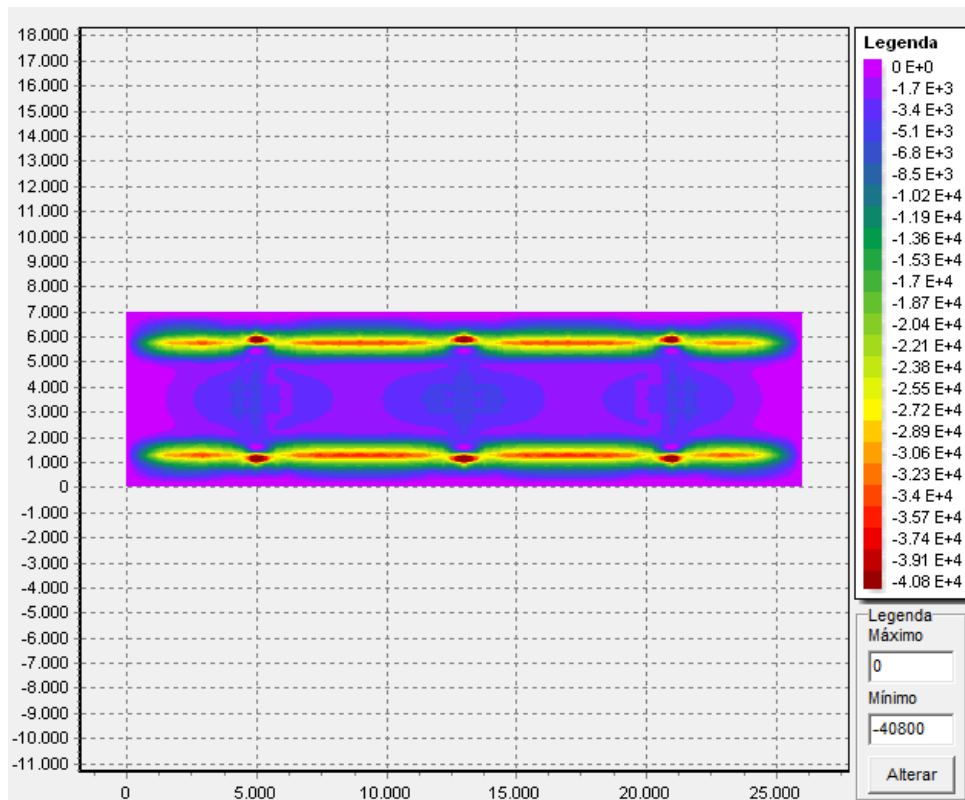


Figura 105 - Envoltória M_y mínima. Unidade de medida Nmm/mm.

Os valores máximos e mínimos encontram-se nas regiões centrais das lajes e nos apoios que representam as longarinas. Neste sentido, para as regiões centrais tem-se valores máximo, para as lajes L5 e L6, de 23,20 e 44,20 kN.m/m. Enquanto que para as regiões de apoios o valor é na ordem de -39,10 kN.m/m.

A Figura 106 apresenta a configuração da superfície de influência de força cortante F_{xz} do nó 1038.

Como a análise refere-se à força cortante na direção x , observa-se que a superfície apresenta comportamento antissimétrico nesta direção. Em contrapartida, o comportamento é simétrico ao se analisar a direção y . Pode ser visto que próximo ao nó, em análise, as curvas de nível ilustram que ocorre uma descontinuidade da superfície. Este comportamento é o esperado de acordo com a teoria de linhas de influência de força cortante descrito pelo princípio de Müller-Breslau.

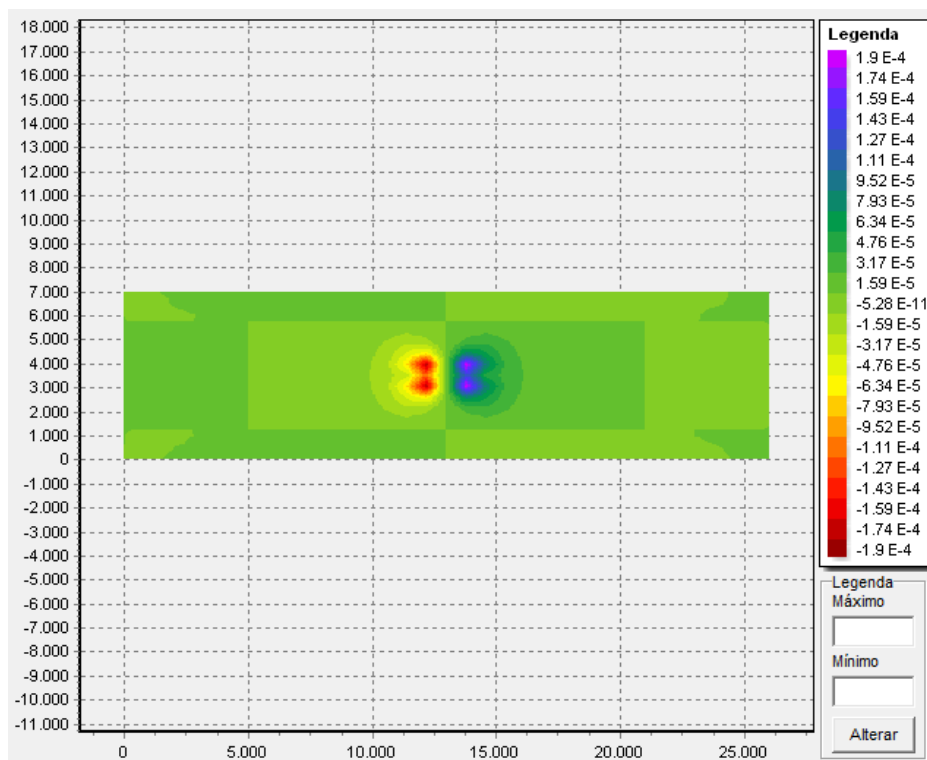


Figura 106 – Superfície de Influência de força cortante em xz do nó 1038. Unidade de medida 1/mm.

A Figura 107 e Figura 108 apresentam o comportamento do tabuleiro no que diz respeito à envoltória de força cortante F_{xz} .

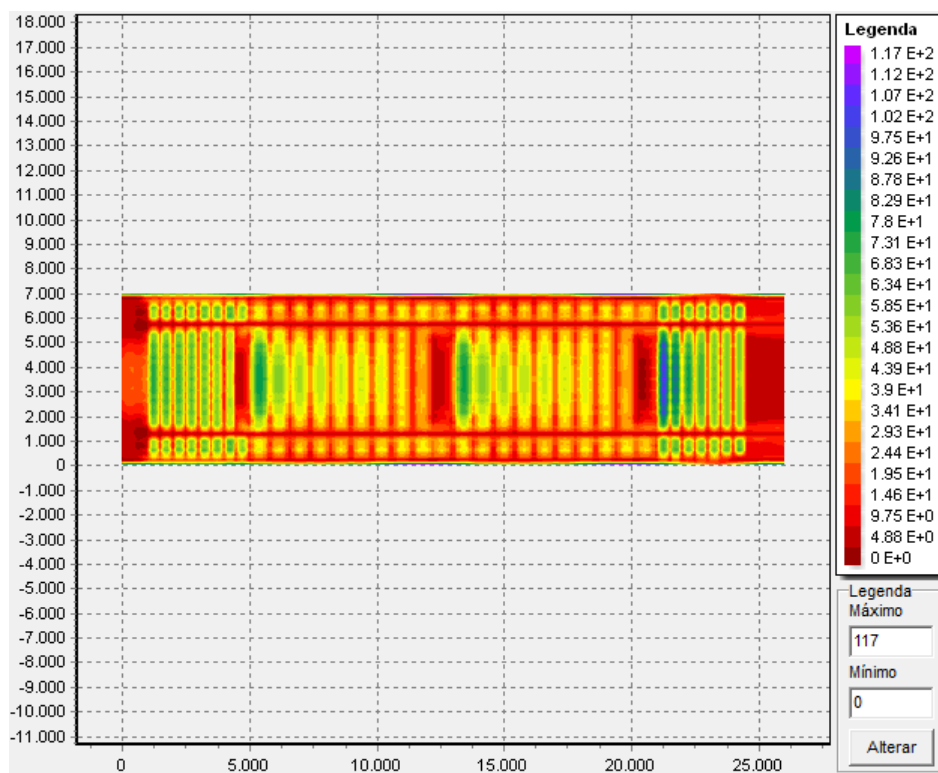


Figura 107 - Envoltória F_{xz} máxima. Unidade de medida N/mm.

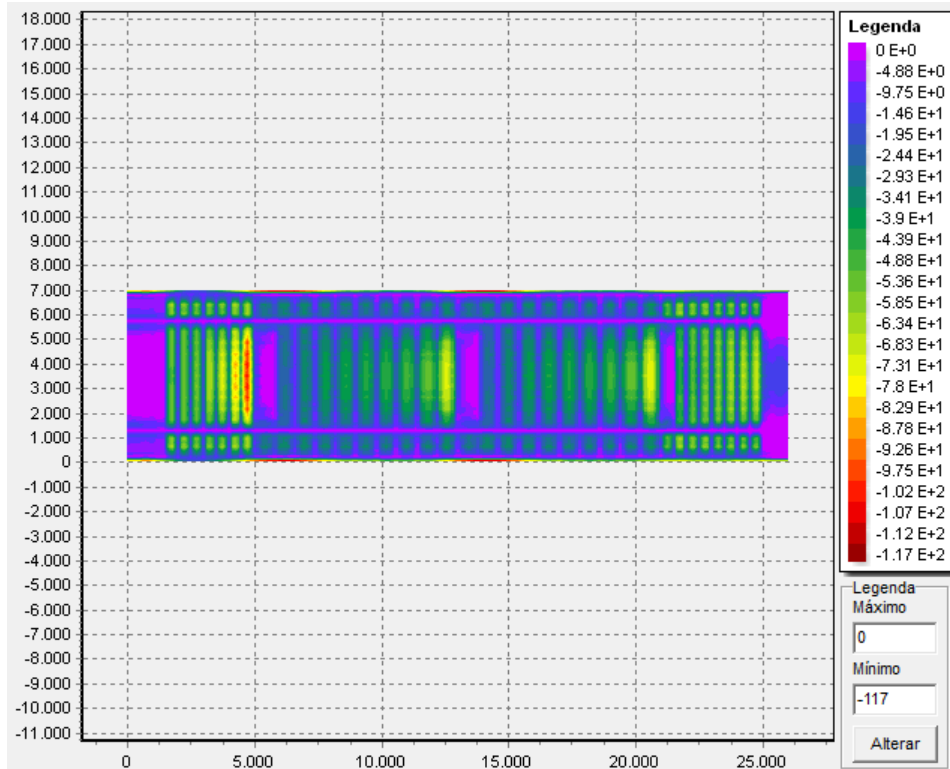


Figura 108 - Envoltória Fxz mínima. Unidade de medida N/mm.

Constata-se que ao se realizar a superposição dos resultados máximos com os mínimos a envoltória resultante possui comportamento antissimétrico, na direção x. Fato que se encontra de acordo com o esperado. Tendo em vista que estruturas simétricas apresentam comportamento de força cortante antissimétrico. Observa-se, também, que os valores resultantes máximos ocorrem nas regiões dos apoios que representam as transversinas.

A Figura 109 e Figura 110 apresentam as os resultados dos esforços resultantes da carga móvel para a força cortante Fyz.

Analogamente ao discutido para a força Fxz, tem-se que ao se realizar a superposição dos resultados máximos com os mínimos a envoltória resultante possui comportamento antissimétrico, na direção y. Fato que se encontra de acordo com o esperado. Tendo em vista que estruturas simétricas apresentam comportamento de força cortante antissimétrico.

Verifica-se, também, que os valores resultantes máximos ocorrem nas regiões dos apoios que representam as longarinas.

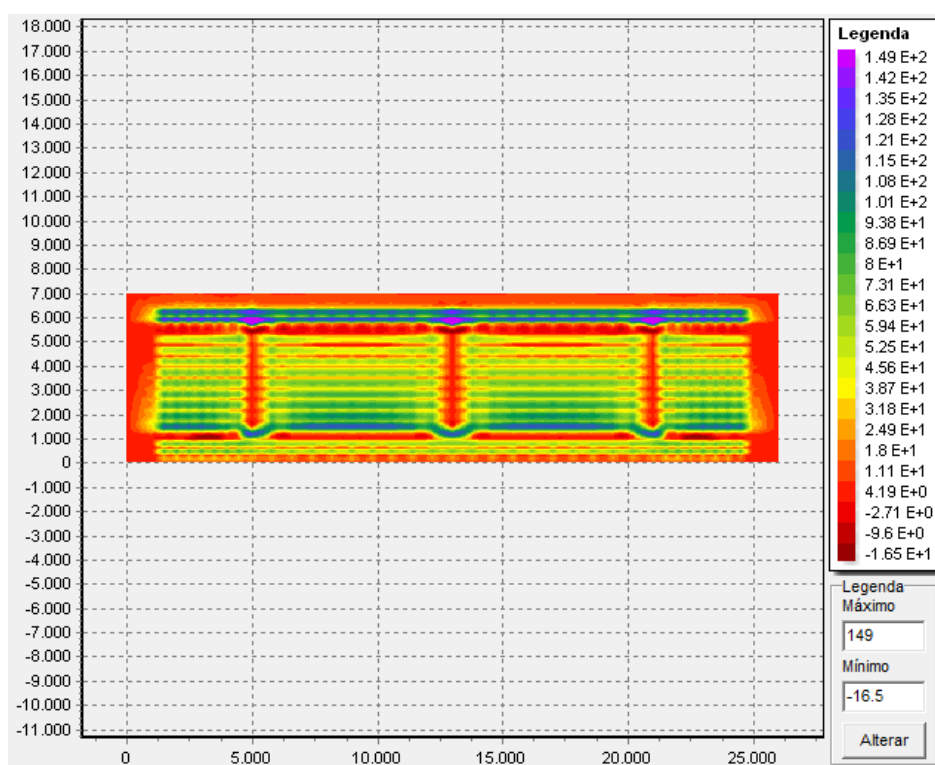


Figura 109 - Envoltória Fyz máxima. Unidade de medida N/mm.

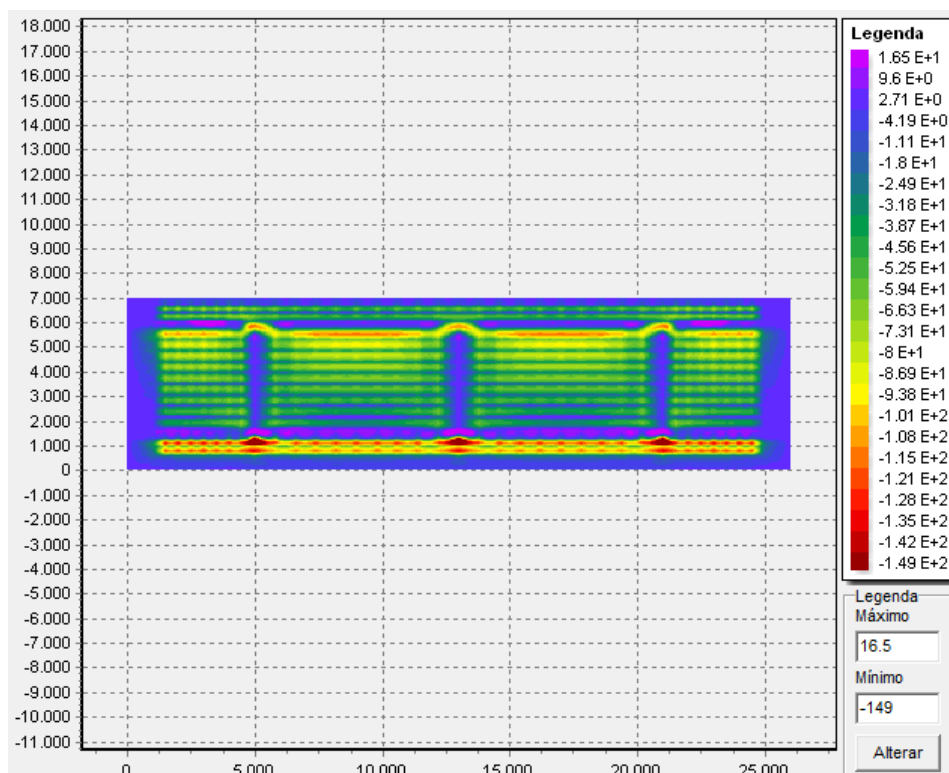


Figura 110 - Envoltória Fyz mínima. Unidade de medida N/mm.

Após a análise qualitativa de comportamento do tabuleiro em relação as superfícies de influência e envoltória de esforços, segue a análise quantitativa. Esta análise é realizada comparando os valores obtidos pelo SIPlacas na configuração de tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis com dois resultados.

- O primeiro, diz respeito aos valores calculados usando as tabelas de Rüsç e com os momentos fletores corrigidos nas regiões de continuidade de lajes.
- O segundo, refere-se aos valores obtidos pelo SIPlacas, na configuração de laje isolada, e com os valores de momento fletor corrigidos nas regiões de continuidade. Ressalta-se que estes valores foram corrigidos utilizando as considerações determinadas por Rüsç.

Tabelas de Rüsç versus código SIPlacas (Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis)

A Tabela 25 e Tabela 26 apresentam os valores de diferença relativa, de momento fletor e força cortante, respectivamente, entre os resultados das tabelas de Rüsç e do código SIPlacas.

Tabela 25 – Comparação de momento fletor entre as tabelas de Rüsç e o SIPlacas (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (Rüsç)	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Diferença Relativa (%)
L1	My,q	23,36	23,2	0,68
	Mx,qcorr	23,44	28,4	-17,46
	Mxe,qcorr	-61,13	-35,8	41,44
L2	My,q	23,36	44,2	-47,15
	Mx,qcorr	27,45	26,8	2,37
	Mxe,qcorr	-69,74	-35,8	48,67
L3	Mye,q	-44,18	-39,1	11,50

Tabela 26 – Comparação de força cortante entre as tabelas de Rüsç e o SIPlacas (Unidades de momento fletor kN/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (Rüsç)	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Diferença Relativa (%)
L1	V _{x,q}	115,48	97,5	15,57
	V _{xe,q}	115,48	117	-1,30
	V _{y,q}	113,7	142	-19,93
L2	V _{xe,q}	115,48	82,9	28,21
	V _{y,q}	113,7	142	-19,93
L3	V _{ye,q}	91,72	142	-35,41

De maneira geral, pode ser visto que não ocorrem tendências de resultados. Ou seja, em alguns pontos os esforços obtidos pelo SIPlacas são maiores, em outros são menores, e ocorre até casos em que os valores se aproximam.

Para justificar o comportamento aleatório das diferenças relativas encontradas é necessário colocar dois pontos em questão.

1. Como dito anteriormente, os valores dos esforços internos, resultante da ação das cargas móveis, para o tabuleiro completo, devem ser menores que aqueles obtidos para as lajes isoladas. Isto tende a ocorrer devido a dois motivos.
 - O primeiro diz respeito que ao posicionar o veículo tipo no ponto máximo/mínimo de uma superfície de influência, no caso de tabuleiro completo, as forças das rodas podem estar aplicadas em pontos que atenuem a intensidade do esforço neste ponto. Por outro lado, quando se está diante de uma laje em que seu tamanho é menor que o trem tipo, pode acontecer que as rodas se encontrem fora da laje. Para estes casos a contribuição dos esforços destas rodas é desconsiderada. E, portanto, para as lajes isoladas podem-se obter valores maiores de esforços.

- O segundo relaciona-se aos próprios valores máximos das superfícies de influência obtidas nas configurações de tabuleiro completo e lajes isoladas. Ao considerar as lajes isoladas os valores máximos das superfícies de influência, em um determinado ponto, são maiores que os valores máximos para o tabuleiro completo. Isto acontece à medida que para as lajes isoladas, os esforços resultante da carga unitária que define a superfície de influência acaba sendo absorvido unicamente pela a laje em análise. Por outro lado, ao considerar a carga unitária passeando em todo o tabuleiro, a estrutura apresentará uma maior distribuição de esforços. E, portanto, os valores das superfícies, para esta situação, serão menores.
2. Ressalta-se que as tabelas de Rüsç foram possivelmente construídas com base em superfícies de influência que apresentam tratamento em relação à questão da singularidade que ocorre nos pontos de máximo. Este tratamento, como visto anteriormente, não é realizado no código SIPlacas. E, portanto, como já apresentado, ao se considerar as lajes isoladas calculadas pelo SIPlacas os resultados obtidos são sempre maiores em relação aos resultados utilizando as tabelas de Rüsç.

Neste sentido, diante do que foi apresentado, em relação à ação de cargas móveis, ao comparar os resultados, do tabuleiro completo no SIPlacas, com as tabelas de Rüsç, é natural que não ocorra tendência de resultados. Pois, embora a configuração de tabuleiro completo resulte em valores menores de esforços, no SIPlacas os resultados vão ser sempre maiores que os das tabelas de Rüsç. Para os casos em que se analisa a mesma configuração de laje. E, portanto, ao considerar simultaneamente os efeitos apresentados, às diferenças entre os resultados dos dois métodos de cálculo analisados não possuem um padrão.

Código SIPlacas (Lajes Isoladas) versus código SIPlacas (Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis)

A Tabela 27 e Tabela 28 apresentam os valores de diferença relativa, de momento fletor e força cortante, respectivamente, entre os resultados do código SIPlacas considerando as lajes isoladas e o tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis.

Tabela 27 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de painéis isolados e tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	36,40	23,2	36,26
	Mx,gcorr	40,52	28,4	29,91
	Mxe,gcorr	-64,29	-35,8	44,31
L2	My,g	47,60	44,2	7,14
	Mx,gcorr	36,06	26,8	25,68
	Mxe,gcorr	-65,10	-35,8	45,01
L3	Mye,g	-62,20	-39,1	37,14

Tabela 28 - Comparação entre os valores de força cortante do SIPlacas considerando configuração de painéis isolados e tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. (Unidades de força cortante kN/m.).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	163,00	97,5	40,18
	Vxe,g	224,00	117	47,77
	Vy,g	163,00	142	-12,88
L2	Vxe,g	162,00	82,9	48,83
	Vy,g	129,00	142	-9,15
L3	Vye,g	140,00	142	1,41

Ao considerar o tabuleiro completo os resultados dos esforços, resultantes de cargas móveis, são menores se comparados com os resultados obtidos ao considerar as lajes isoladas. Este comportamento já foi previsto e discutido anteriormente.

Outro ponto importante é que as diferenças relativas percentuais apresentadas são consideravelmente altas. Ou seja, a configuração estrutural do tabuleiro possui papel fundamental para a determinação de esforços. E em situação de projeto, esta etapa, que corresponde à análise estrutural, deve ser bem avaliada para que seja possível representar de forma adequada o comportamento real da estrutura.

Em relação às diferenças relativas percentuais apresentadas tem-se que:

- Para o momento fletor as diferenças são maiores nas regiões que foram consideradas engastadas nas configurações de lajes isoladas. Em termos de valores observa-se que a diferença encontra-se em torno de 45%;
- Para a força cortante, as maiores diferenças ocorrem para a força cortante na direção x, na ordem de 48%.

Este comportamento já era o esperado à medida que ao considerar estruturas com apoios perfeitamente engastados, verifica-se que a rigidez nesta região é maior. Fato que leva a esforços internos mais elevados. Desta maneira, ao considerar o tabuleiro com condições de contorno simplesmente apoiadas, a região anteriormente considerada engastada, passa a ter uma continuidade, e deste modo à rigidez tende a diminuir. A partir disto, os esforços tendem a ser menores neste caso.

Outra análise pode ser realizada para se explicar o comportamento das diferenças apresentadas serem maiores nas transições entre as lajes. O fato é que nestas regiões as superfícies de influência apresentam-se mais espalhada no tabuleiro, do que nas lajes isoladas, e com valores conseqüentemente menores.

Conclusões

A seguir encontra-se o resumo das análises realizadas neste item. A primeira diz respeito à comparação entre os resultados das tabelas de Rüsçh e do código SIPlacas, considerando o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. E a segunda relaciona-se aos resultados do SIPlacas considerando as configurações de lajes isoladas e tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

Tabelas de Rüsç versus SIPlacas (Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis)

Com relação às cargas permanentes, ao considerar o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis os valores dos esforços obtidos pelo SIPlacas são menores em comparação com os da tabela de Rüsç. Fato que leva a concluir que para o tabuleiro completo tem-se uma redistribuição de esforços. Ou seja, cargas que se encontram nas demais lajes acabam aliviando esforços nas regiões mais solicitadas, caso que não ocorre quando se considera apenas uma laje.

Com relação às cargas móveis, as diferenças obtidas entre os dois métodos de cálculo não apresentaram tendência de comportamento. Fato explicado devido ao antagonismo de dois fatores: O primeiro que diz respeito ao tratamento quanto a singularidade nos pontos de máximo em que as superfícies de influência do código SIPlacas não realiza. E este fato pode ser aquele que conduz sempre a resultados do SIPlacas mais elevados que os da tabela de Rüsç; E segundo relaciona-se ao fato em considerar que o tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis conduz a resultados de esforços menores, se comparados com valores obtidos na configuração de lajes isoladas.

SIPlacas (Lajes isoladas) versus SIPlacas (Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis)

Nesta confrontação de resultados os esforços resultantes de cargas permanentes e móveis apresentam as mesmas tendências. Ou seja, para ambos os casos ao considerar o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis os valores dos esforços obtidos são menores em comparação aos valores calculados considerando as lajes isoladas.

8.3.3 Ponte com vigas acopladas

Neste momento, o presente item destina-se em avaliar os esforços nas lajes da ponte considerando a configuração as deformações das lajes do tabuleiro acopladas com as vigas. As longarinas e transversinas encontram-se, por sua vez, apoiados

sobre os pilares. A configuração adotada nesta análise corresponde a melhor aproximação da ponte em análise apresentada na Figura 51 e Figura 52.

Ressalta-se que testes foram realizados considerando o coeficiente redutor de torção igual a 0,15 e 1,00. Os resultados obtidos nestas duas considerações foram satisfatoriamente próximos, indicando que para esta estrutura este coeficiente não possui grande influência nas análises dos esforços. Desta maneira, os resultados ilustrados neste trabalho foram obtidos com o coeficiente redutor de torção igual a 1,00.

A Figura 111 apresenta o esquema estrutural assim como o carregamento adotado para a análise do tabuleiro em questão.

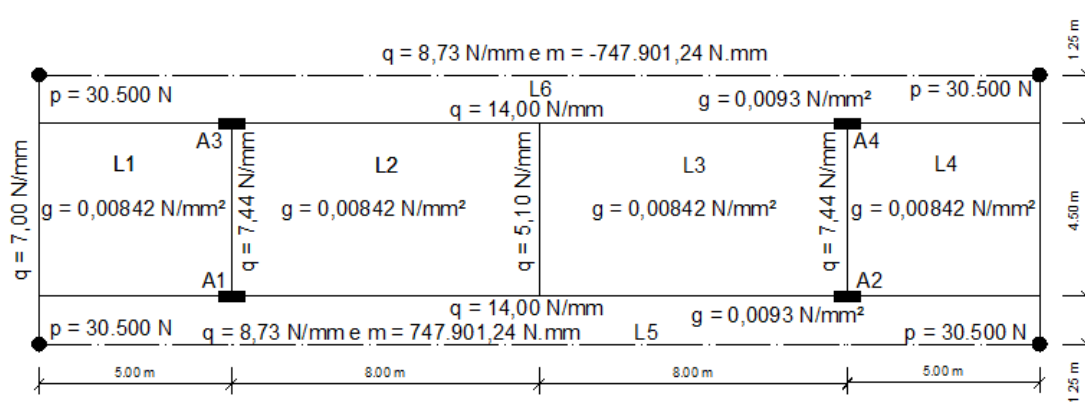


Figura 111 - Geometria e carregamento do tabuleiro.

As linhas contínuas correspondem à região onde foi inserida as longarinas e transversinas. As linhas tracejadas representam bordas livres. O apoio do tabuleiro sobre os pilares encontra-se apresentado na figura pelas siglas A1, A2, A3 e A4. Os nós e o grau de liberdade restringido nestes apoios encontram-se na Tabela 29. A nomenclatura 1 significa dizer que o grau de liberdade está restringido enquanto que o 0 indica que ele está livre.

Tabela 29 – Condições de contorno.

Apoios	Nó	Deslocamento Z	Rotação X	Rotação Y
A1	147	1	0	1
	148	1	0	1
	269	1	0	1
A2	427	1	0	1
	428	1	0	1
	549	1	0	1
A3	887	1	0	1
	888	1	0	1
	1169	1	0	1
A4	1487	1	0	1
	1488	1	0	1
	1769	1	0	1

Os resultados, para as lajes, obtidos via código é apresentado e, concomitantemente, realizam-se três comparações. A primeira diz respeito aos valores obtidos manualmente via tabela de Rüsç. A segunda, os resultados são comparados com os valores do SIPlacas considerando as lajes isoladas. E a terceira, a comparação é realizada com os valores obtidos do código SIPlacas sobre apoios não deslocáveis.

A Figura 112 apresenta a modelagem do tabuleiro da ponte em estudo na interface do código SIPlacas.

No desenho da ponte as linhas vermelhas correspondem a regiões onde se encontram as longarinas e transversinas.

Nas lajes em balanço, nas bordas livres, foi considerada uma viga com módulo de elasticidade igual a zero. Este procedimento foi adotado afim de que fosse possível no código inserir carregamentos lineares, que representam o peso próprio das defensas.

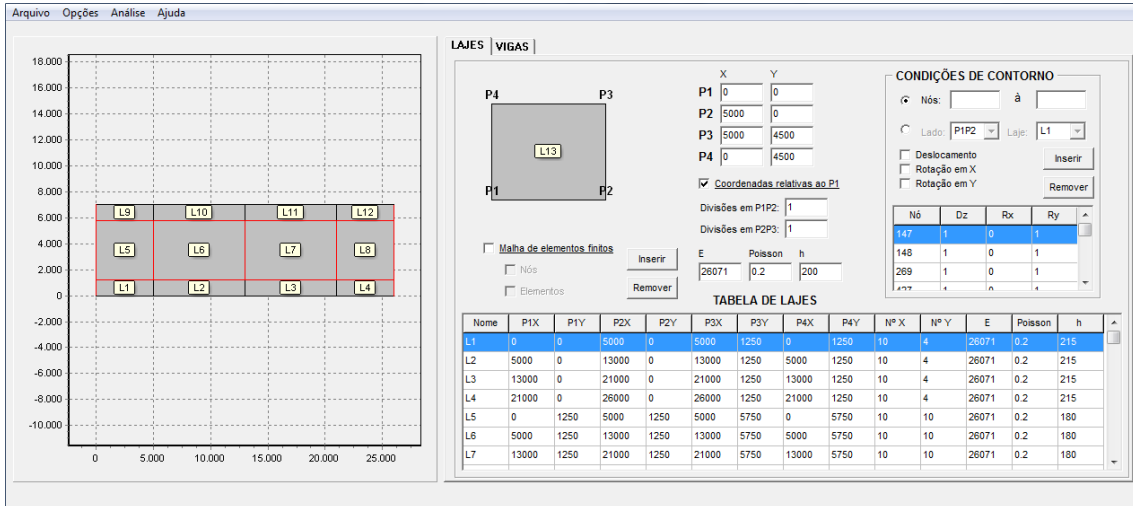


Figura 112 - Ponte modelada no código SIPlacas.

8.3.3.1 Carga permanente

O presente item destina-se a apresentar os resultados obtidos utilizando o código SIPlacas. Neste item os esforços resultantes são obtidos a partir da carga permanente. A Figura 113 apresenta a deformada do tabuleiro resultante da ação da carga permanente.

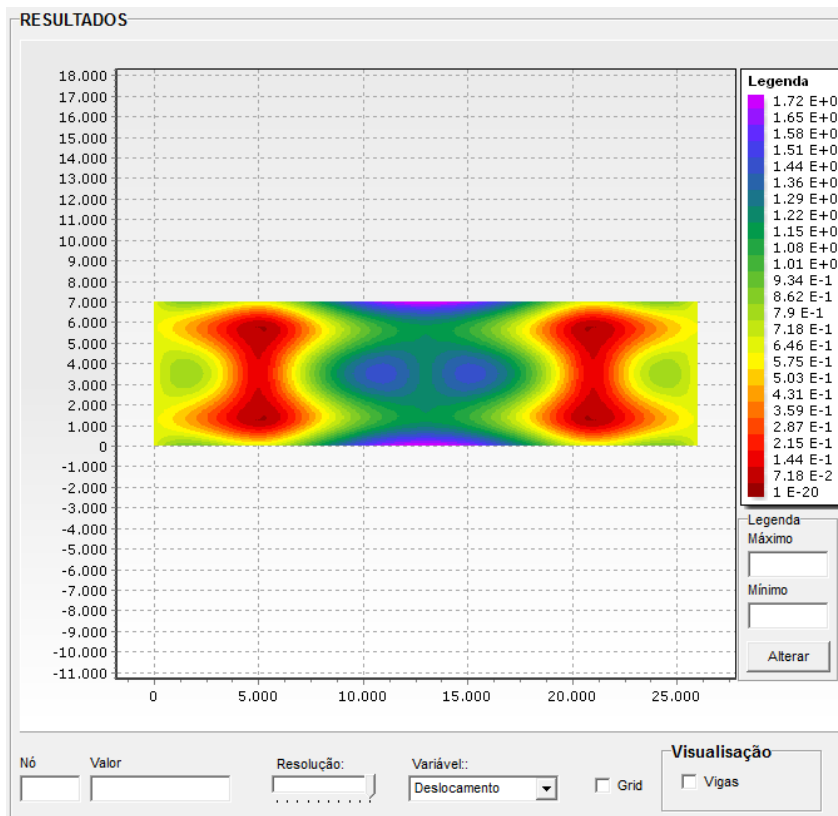


Figura 113 – Deslocamento resultante de carga permanente. Unidade de medida em mm.

De maneira geral, ao comparar a configuração da deformada, do tabuleiro sobre apoios deformáveis (Figura 113), com a do tabuleiro sobre apoios não deslocáveis (Figura 95), tem-se que elas são consideravelmente diferentes. Para o tabuleiro sobre apoios deformáveis, o deslocamento máximo é 1,72 mm. Enquanto que, para o tabuleiro sobre apoios rígidos o valor é de 1,22 mm. Apresentando uma diferença relativa na ordem de 29,07 %. Para ambos os casos o deslocamento máximo ocorre nas bordas livres das lajes em balanço.

O tabuleiro sobre apoios deformáveis apresenta deslocamentos positivos em sua parte central. Este comportamento é o oposto do que acontece para o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. Tendo em vista, que nas lajes centrais os deslocamentos são negativos.

A Figura 114 apresenta, em curvas de nível, a distribuição de momento fletor na direção x, resultante da ação de cargas permanentes.

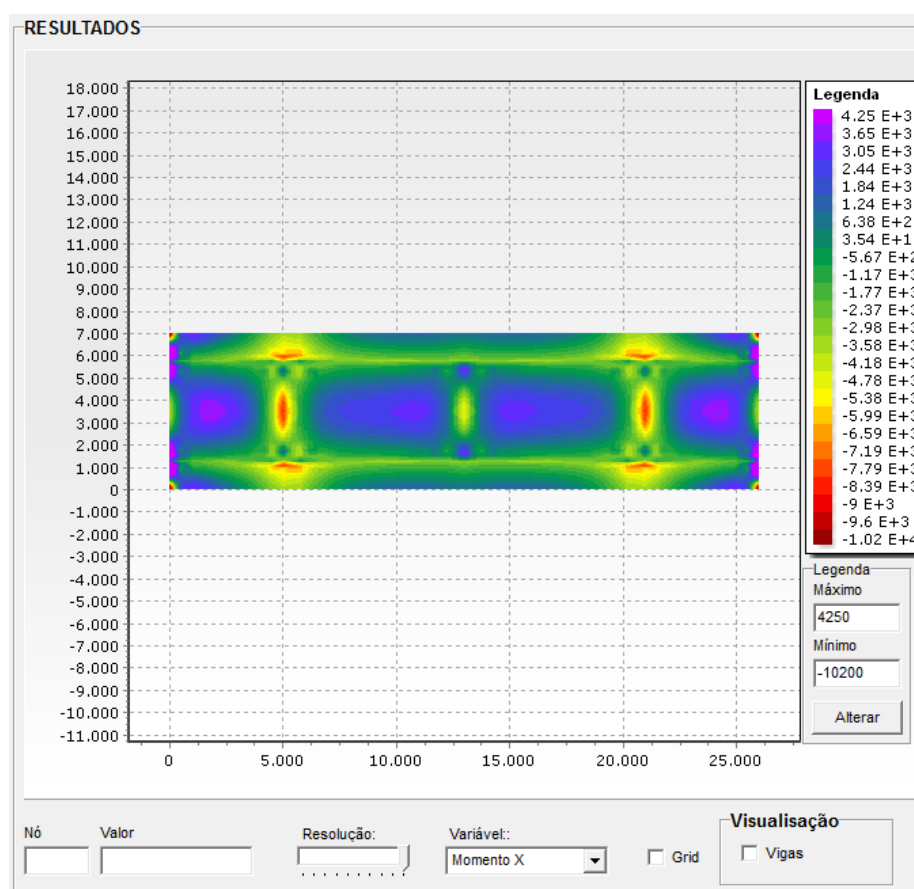


Figura 114 - Momento fletor na direção x resultante de carga permanente. Unidade de medida Nmm/mm.

Embora o deslocamento na região central do tabuleiro apresente valor positivo, o momento fletor na direção x, na região em que laje encontra-se apoiada sobre a transversina intermediária, possui valor negativo. Isto indica que as fibras superiores das lajes encontram-se tracionadas. Igualmente ao que ocorre para estas lajes na configuração do tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. Isto acontece, porque os deslocamentos referentes as regiões, imediatamente vizinhas a região de apoio da placa sobre a transversina, apresentam valores de deslocamentos maiores.

A Figura 115 apresenta a distribuição de momento fletor na direção y, resultante da ação de cargas permanentes.

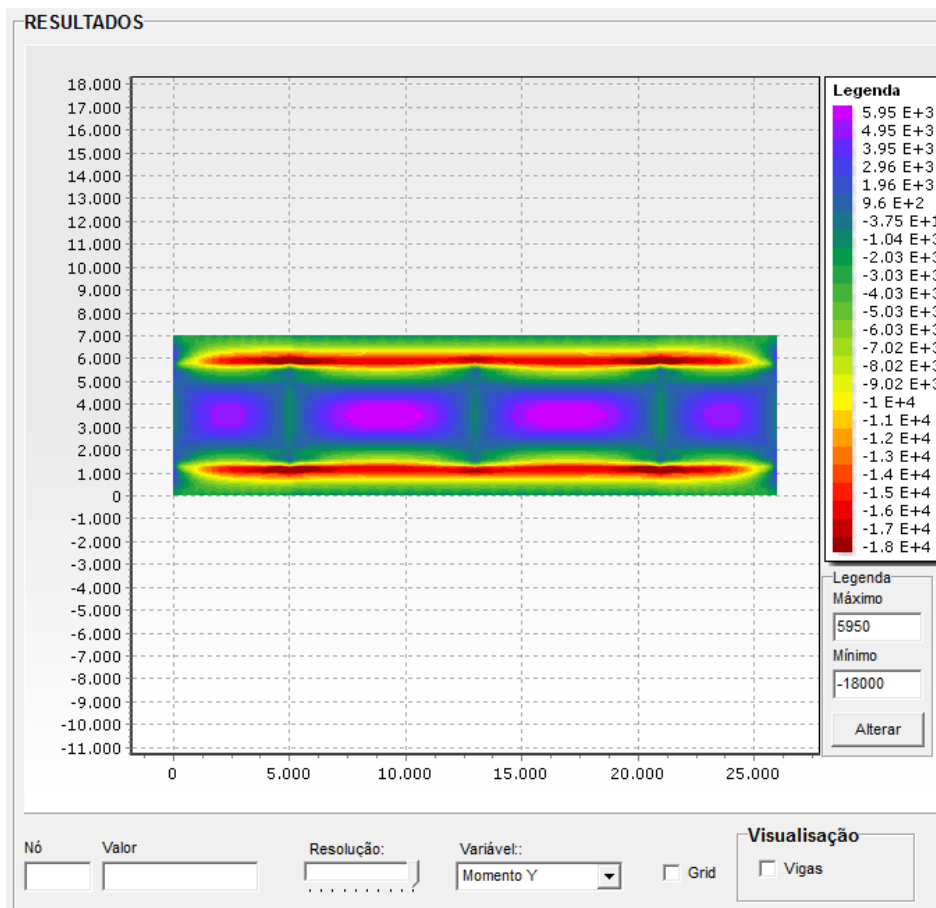


Figura 115 - Momento fletor na direção y resultante de carga permanente. Unidade de medida Nmm/mm.

As regiões de momento fletor máximo negativo ocorrem onde há o encontro da laje com as longarinas, região em vermelho. Enquanto que os valores de momento fletor

máximo positivo acontece nas regiões centrais das placas contínuas. Este comportamento é semelhante ao apresentado para o tabuleiro sobre apoios rígidos.

A Figura 116 apresenta a distribuição de força cortante na direção x, resultante da ação de cargas permanentes.

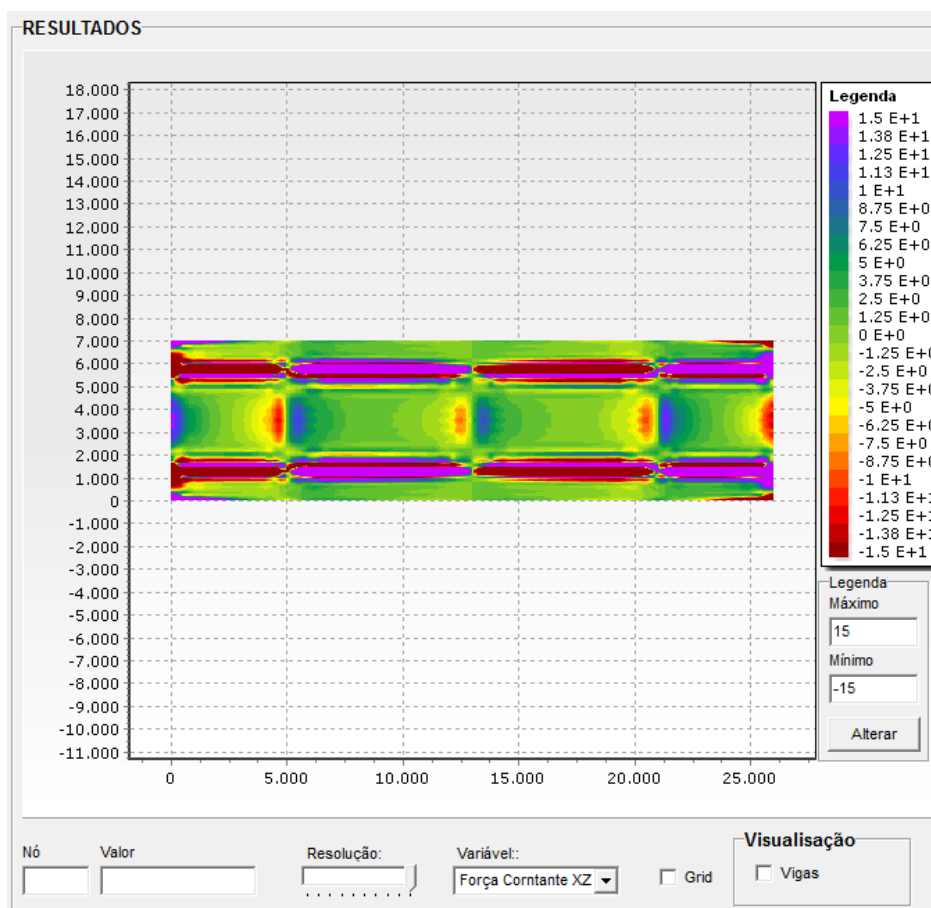


Figura 116 – Foça cortante na direção x resultante de carga permanente. Unidade de medida N/mm.

Considerando que a estrutura é simétrica na direção x, constata-se que a força cortante nesta direção possui comportamento antissimétrico. Esta configuração encontra-se de acordo com o esperado. E este é o mesmo comportamento apresentado para a distribuição de força F_{xz} para o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

A Figura 117 ilustra a configuração de distribuição de força cortante na direção y. Por analogia ao apresentado para a força F_{xz} , tem-se que o comportamento

antissimétrico considerando a força F_{yz} ocorre na direção y . E a simetria da distribuição da força F_{yz} ocorre na direção x .

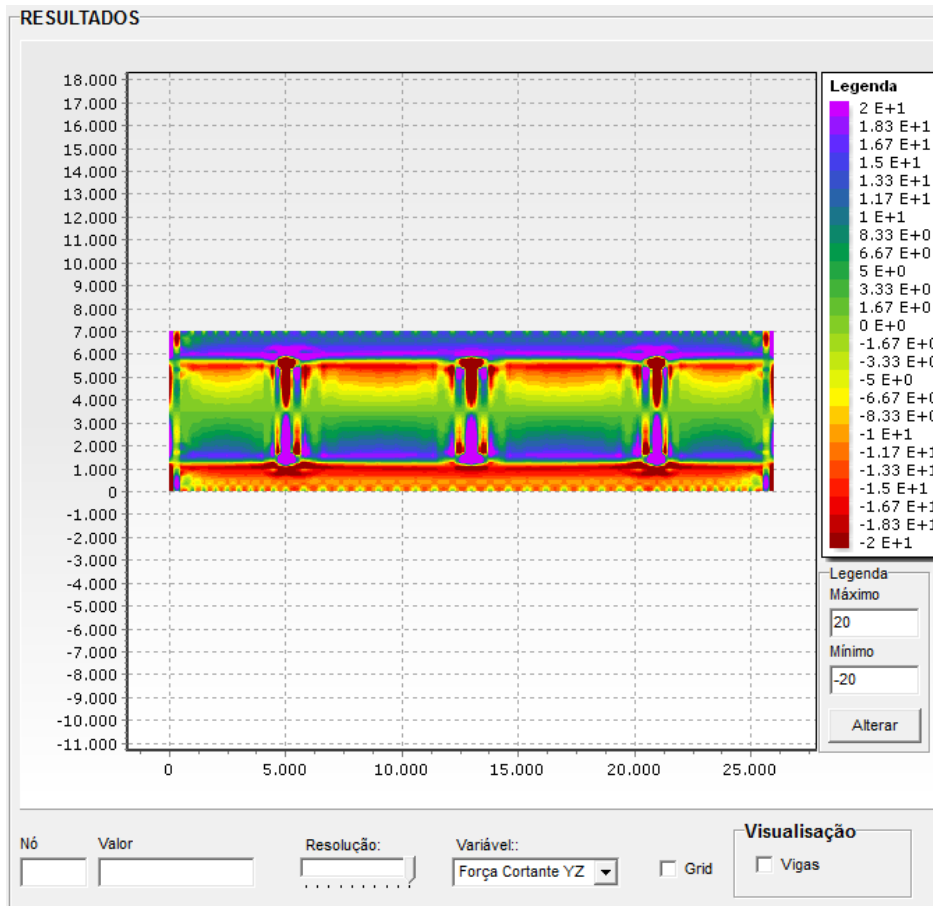


Figura 117 - Foça cortante na direção y resultante de carga permanente. Unidade de medida N/mm.

A seguir encontra-se a análise quantitativa dos esforços obtidos na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, resultante da ação de cargas permanentes. Estes resultados foram comparados, separadamente, com os valores obtidos nas três configurações de cálculo do tabuleiro, que já foram apresentadas, e que se encontram especificadas a seguir.

- Esforços calculados segundo o uso das tabelas de Rüsçh;
- Esforços calculados pelo SIPlacas, considerando painéis de lajes isolados e os momentos obtidos nas regiões de lajes contínuas corrigidos por coeficientes especificados pelas tabelas de Rüsçh;

- Esforços determinados pelo SIPlacas, considerando o tabuleiro da ponte sobre apoios não deslocáveis.

Tabelas de Rüsç versus SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

Os resultados dos esforços do código SIPlacas são menores em relação àqueles determinados com uso das tabelas de Rüsç. Este fato pode ser constatado na Tabela 30 e Tabela 31, que apresentam, para as lajes do tabuleiro, os resultados de momento fletor e força cortante, respectivamente.

Tabela 30 - Comparação entre os valores de momento fletor das tabelas de Rüsç e do SIPlacas considerando tabuleiro vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Tabelas de Rüsç	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	6,48	4,95	23,61
	Mx,g	-8,787-	-4,26	51,52
	Mx,gcorr	7,59	4,25	44,01
	Mxe,gcorr	-17,57	-10,02	42,97
L2	My,g	12,11	5,95	50,87
	Mx,gcorr	7,56	3,65	51,72
	Mxe,gcorr	-19,51	-8,85	54,64
L3	Mye,g	-20,52	-18,00	12,28

Tabela 31 - Comparação entre os valores de força cortante das tabelas de Rüsç e do SIPlacas considerando tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Tabelas de Rüsç	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	16,67	15,00	10,02
	Vxe,g	16,67	15,00	10,02
	Vy,g	16,67	20,20	-17,48
L2	Vxe,g	18,95	15,00	20,84
	Vy,g	16,67	20,20	-17,48
L3	Vye,g	20,36	20,20	0,79

O fato de o código SIPlacas apresentar esforços internos menores em relação as tabelas de Rüsç recai na afirmação de que ao considerar o tabuleiro completo ocorre uma melhor distribuição de esforços na estrutura.

SIPlacas (Lajes Isoladas) versus SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

A Tabela 32 e Tabela 34 apresentam resultados de momento fletor e força cortante, respectivamente, dos valores obtidos pelo SIPlacas. A diferença relativa apresentada refere-se à comparação entre os modelos de cálculo considerando lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas.

Tabela 32 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	6,82	4,95	27,42
	Mx,g	-	-4,26	
	Mx,gcorr	8,29	4,25	48,73
	Mxe,gcorr	-17,25	-10,02	41,91
L2	My,g	12,5	5,95	52,40
	Mx,gcorr	8,16	3,65	55,27
	Mxe,gcorr	-20,55	-8,85	56,93
L3	Mye,g	-20,37	-18,00	11,63

Tabela 33 - Comparação entre os valores de força cortante do SIPlacas considerando configuração de lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	12,6	15,00	-16,00
	Vxe,g	24,00	15,00	37,50
	Vy,g	12,20	20,20	-39,60
L2	Vxe,g	28,10	15,00	46,62
	Vy,g	15,70	20,20	-22,28
L3	Vye,g	20,49	20,20	1,42

O momento fletor obtido na configuração de tabuleiro sobre apoios deformáveis é menor, comparado com o modelo de lajes isoladas. Fato semelhante ao ocorrido na comparação do momento com as tabelas de Rüsçh.

Por outro lado, para a força cortante, o valor da força cortante $V_{x,g}$ da laje L1 é menor na configuração de lajes isoladas. O mesmo ocorre para as forças $V_{y,g}$ das lajes L1 e L2. Isto acontece porque o valor considerado nesta região, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, corresponde ao mesmo esforço $V_{y,e,g}$ da laje L3.

SIPlacas (tabuleiro sobre apoios não deslocáveis) versus SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

A Tabela 34 e Tabela 35 apresentam resultados de momento fletor e força cortante, respectivamente, dos valores obtidos pelo SIPlacas. A diferença relativa apresentada refere-se à comparação entre os modelos de cálculo considerando tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas.

Tabela 34 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	4,40	4,95	-11,11
	Mx,g	-	-4,26	
	Mx,gcorr	2,39	4,25	-43,76
	Mxe,gcorr	-3,61	-10,02	-63,97
L2	My,g	4,40	5,95	-26,05
	Mx,gcorr	0,91	3,65	-75,07
	Mxe,gcorr	-2,56	-8,85	-71,07
L3	Mye,g	-18,45	-18,00	2,44

A maior diferença entre valores de momento fletor obtido nas duas configurações em análise encontra-se no esforço $M_{x,gcorr}$ da laje L2. O valor desta diferença é 75,07 %. Enquanto que a menor diferença (2,44 %) está relacionado ao momento ($M_{y,e,g}$) da laje L3.

Tabela 35 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	$V_{x,g}$	7,84	15,00	-47,73
	$V_{x,e,g}$	8,98	15,00	-40,13
	$V_{y,g}$	20,00	20,20	-0,99
L2	$V_{x,e,g}$	6,14	15,00	-59,07
	$V_{y,g}$	20,00	20,20	-0,99
L3	$V_{y,e,g}$	20,00	20,20	-0,99

Para a força cortante, a maior diferença relativa entre os valores obtidos nas duas configurações em análise, encontra-se no esforço $V_{x,e,g}$ da laje L2, com valor de 59,07%. E a menor refere-se aos esforços $V_{y,g}$ da laje L1 e L2 e o esforço $V_{y,e,g}$ da laje L3, com valor igual a 0,99%.

Em todos os pontos analisados, os valores, de momento fletor e de força cortante, são maiores no tabuleiro sobre apoios deformáveis. Isto ocorre porque nesta configuração a estrutura é mais deformável.

Em suma, de maneira geral, os esforços obtidos, nas duas configurações de tabuleiro em análise, são consideravelmente diferentes. Este fato mostra que a etapa de concepção da análise estrutural é fundamental para a obtenção de esforços compatíveis com aqueles em que a estrutura vai realmente apresentar durante sua vida útil.

8.3.3.2 Carga móvel

Neste item encontra-se os resultados obtidos utilizando o código SIPlacas. Considerando apenas a ação de cargas móveis.

Na Figura 118 encontra-se a superfície de influência de momento fletor em x, do tabuleiro, para o nó, da malha de elementos finitos, 1038. Este nó está localizado exatamente no centro do tabuleiro.

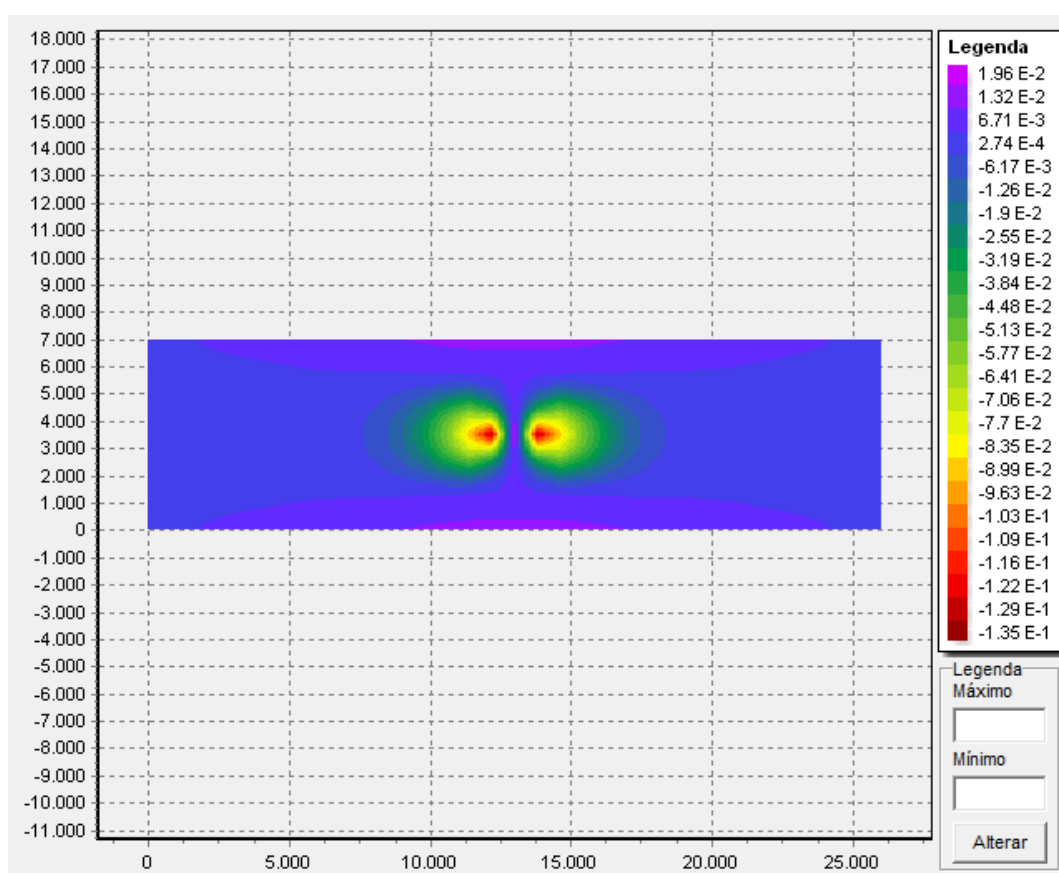


Figura 118 - Superfície de Influência de momento fletor em x do nó 1038. Unidade de medida mm/mm.

O comportamento desta superfície de influência é idêntico ao obtido para o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis, Figura 100. Esta afirmação é baseada no formato das curvas de nível. Contudo, os valores, entre estas superfícies, são distintos. Enquanto que o valor máximo para superfície do tabuleiro sobre apoios não deslocáveis é -0,152 mm/mm, o valor para configuração de tabuleiro com vigas acopladas é -0,135 mm/mm. Percentualmente, esta diferença é igual a 11,18 %.

A Figura 119 e Figura 120 apresentam os valores máximos e mínimos de momento fletor na direção x, resultante do carregamento permanente.

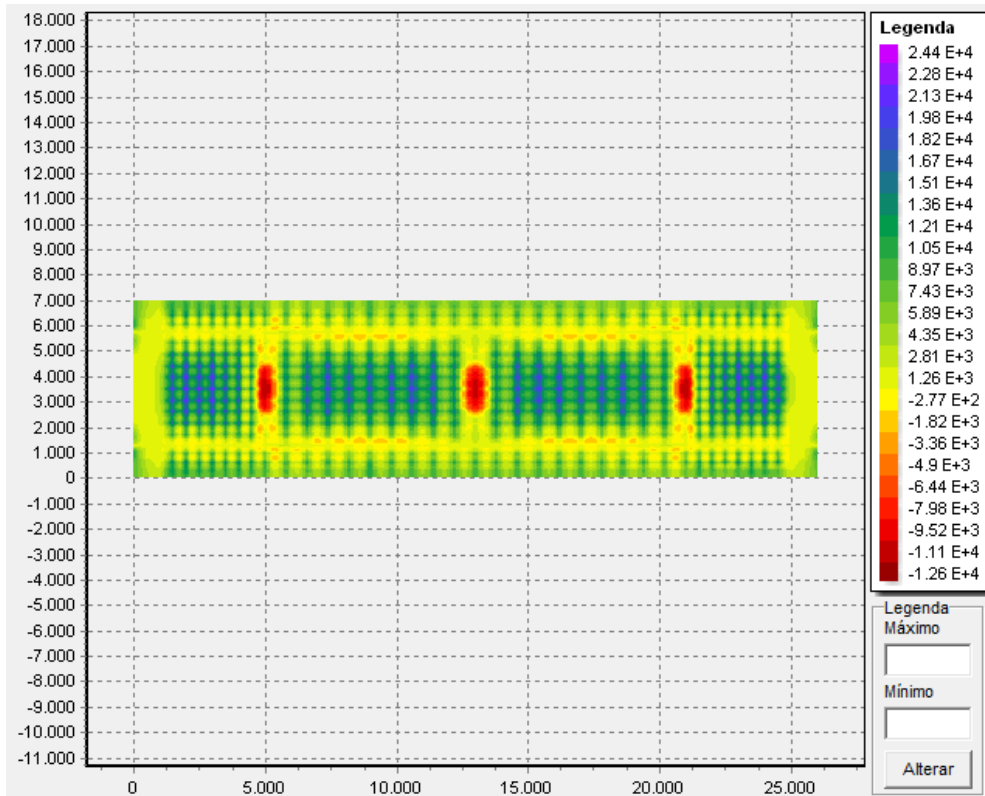


Figura 119 – Envoltória Mx máxima. Unidade de medida Nmm/mm.

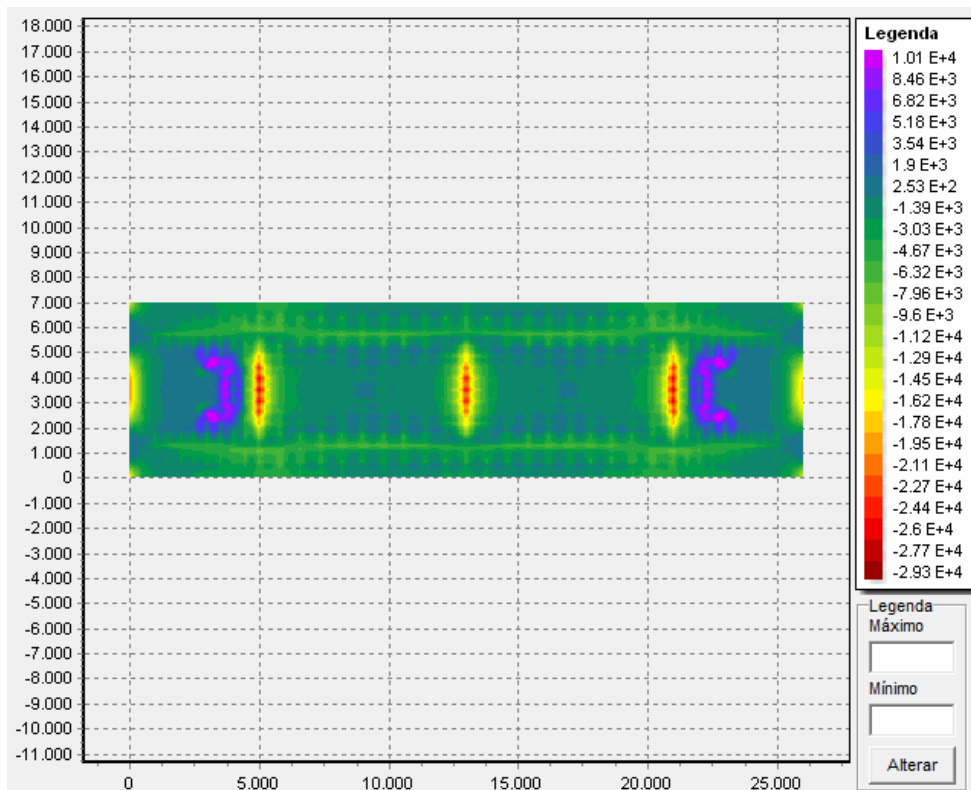


Figura 120 – Envoltória Mx mínima. Unidade de medida Nmm/mm.

Semelhantemente ao ocorrido nas envoltórias de esforço M_x para o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis, os valores máximos ocorrem nas regiões centrais das lajes e sobre as transversinas. Para a laje L1 e L2 o valor do momento na região central é 24,40 e 22,80 kN.m/m, respectivamente. Enquanto que nas regiões das transversinas o momento M_x é igual a -29,30 kN.m/m.

Na Figura 121 Figura 118 é apresentada a superfície de influência de momento fletor em y do tabuleiro, para o nó, da malha de elementos finitos, 1038. Este nó está localizado exatamente no centro do tabuleiro.

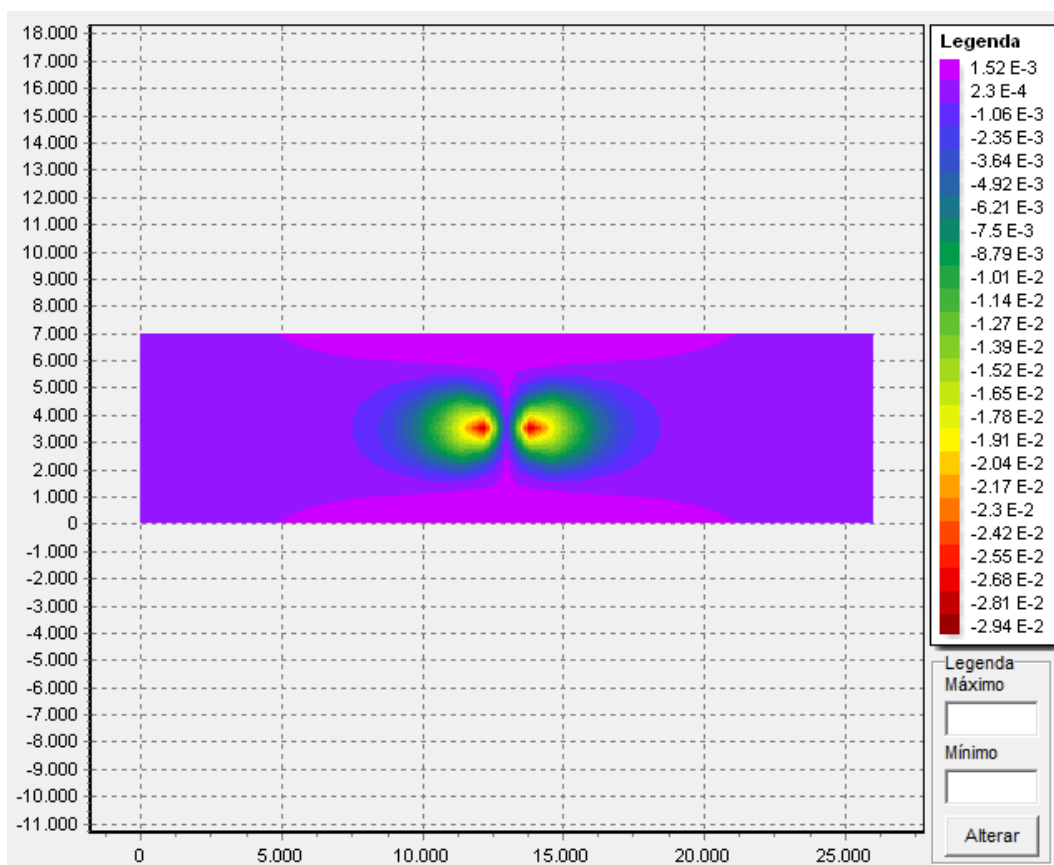


Figura 121 - Superfície de Influência de momento fletor em y do nó 1038. Unidade de medida mm/mm.

O comportamento da superfície de influência é semelhante ao da superfície de momento M_y apresentada para o tabuleiro sobre apoios rígidos, Figura 103. E o valor máximo da superfície sobre apoios não deslocáveis é igual a -0,0303 mm/mm; enquanto que a do tabuleiro com vigas acopladas é -0,0294 mm/mm. Esta diferença percentual é igual a 2,97%.

A Figura 122 e Figura 123 apresentam os valores máximos e mínimos de momento fletor na direção y, resultante da carga móvel.

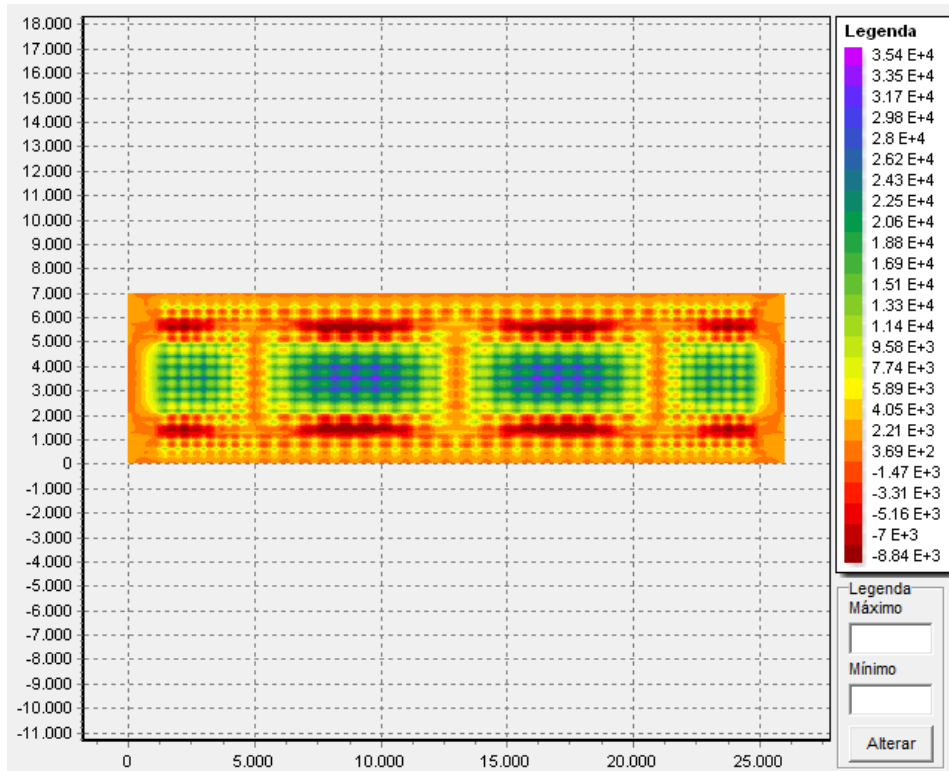


Figura 122 – Envolvória M_y máxima. Unidade de medida Nmm/mm.

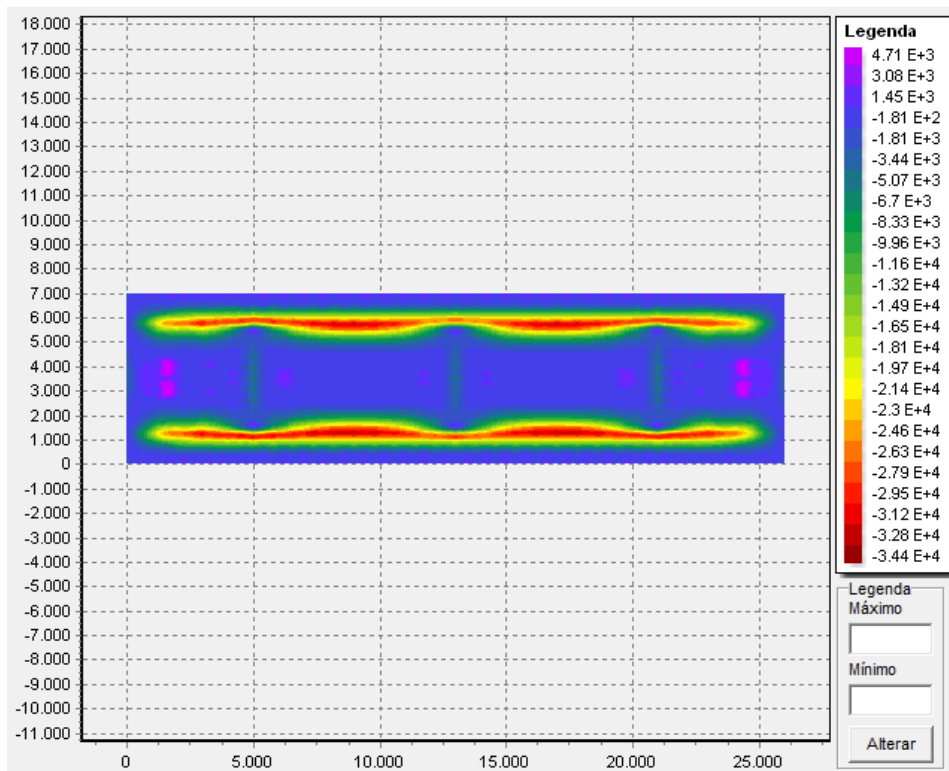


Figura 123 – Envolvória M_y mínima. Unidade de medida Nmm/mm.

As regiões centrais das lajes apresentam os momentos positivos máximos com valores iguais a 35,4 kN.m/m. Enquanto que os momentos máximos negativos estão na região de apoio da laje sobre as longarinas, com valor igual a -34,40 kN.m/m. Este comportamento é análogo ao apresentado para o tabuleiro sobre apoios rígidos, Figura 105.

A Figura 124 e Figura 125 referem-se às superfícies de influência de força cortante na direção x e y do nó 1038, respectivamente.

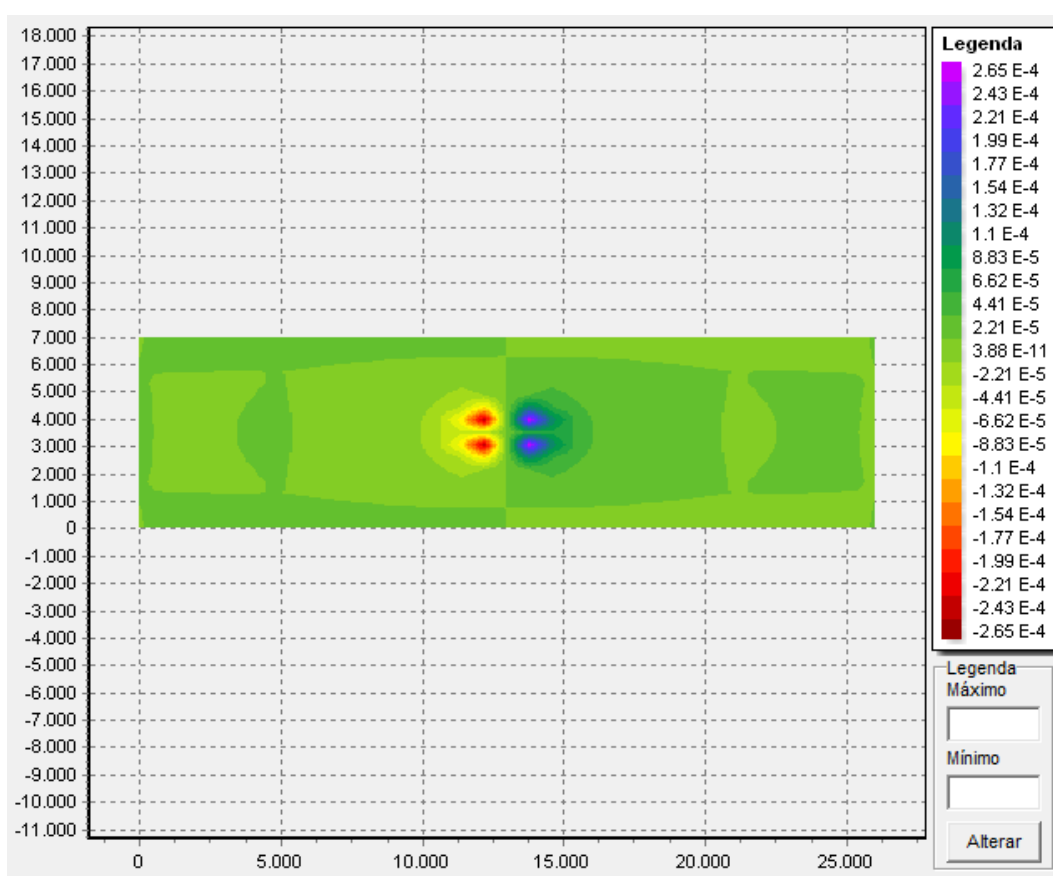


Figura 124 - Superfície de Influência de força cortante em x do nó 1038. Unidade de medida 1/mm.

Ambas as superfícies encontram-se com comportamento coerente. Ou seja, a superfície F_{xz} apresenta resultado antissimétrico na direção x e possui descontinuidade próxima ao nó 1038. De forma análoga, o mesmo comportamento pode ser observado para a superfície F_{yz} , Figura 125.

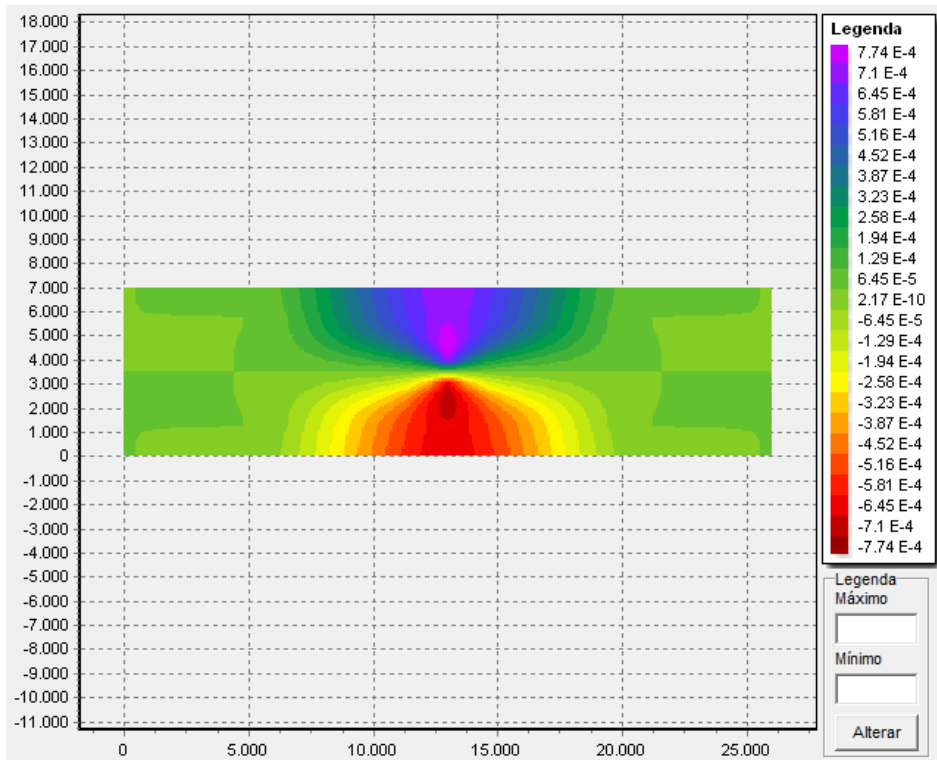


Figura 125 - Superfície de Influência de força cortante em y do nó 1038. Unidade de medida 1/mm.

A Figura 126 e Figura 127 expõem as envoltórias máximas e mínimas de força cortante na direção x.

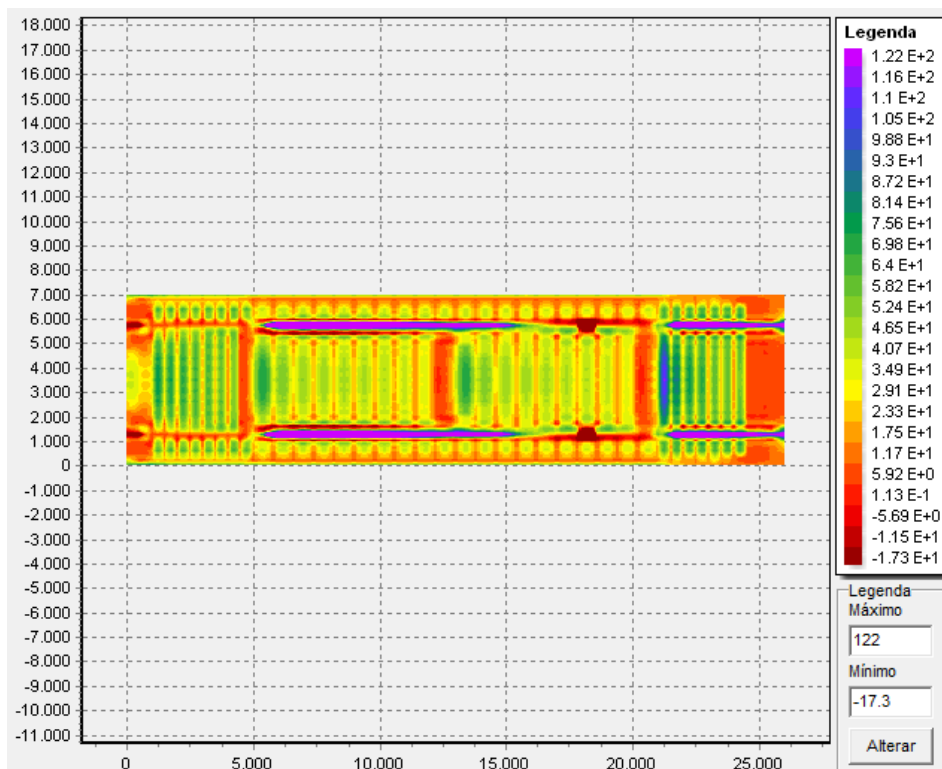


Figura 126 – Envoltória Fx máxima. Unidade de medida N/mm.

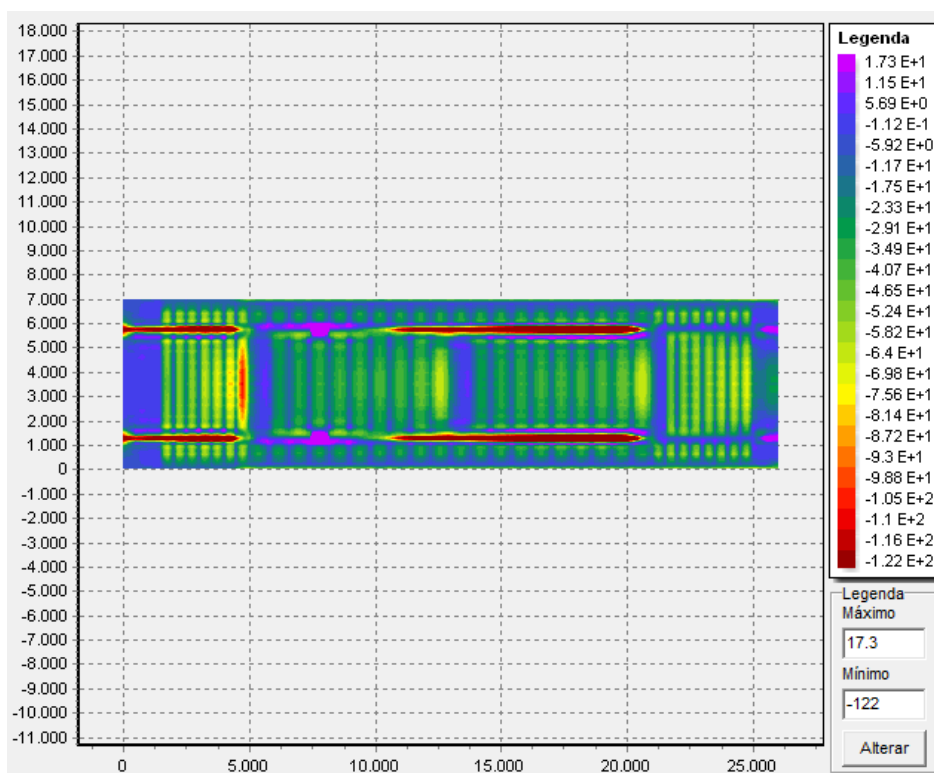


Figura 127 - Envoltória F_{xz} mínima. Unidade de medida N/mm.

De maneira geral, as envoltórias apresentam comportamento semelhante às envoltórias obtidas para a configuração do tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. (Figura 107 e Figura 108). Ou seja, como a estrutura é simétrica na direção x o comportamento da envoltória é antissimétrico para esta direção. Observa-se também que a descontinuidade de força cortante ocorre nas regiões das transversinas e na direção x .

A Figura 128 e Figura 129 ilustram as envoltórias máximas e mínimas de força cortante na direção y .

As envoltórias apresentadas são antissimétricas na direção y . Fato análogo ao ocorrido para a envoltória F_{yz} na configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. As regiões de descontinuidades de força cortante localizam-se próximas as longarinas.

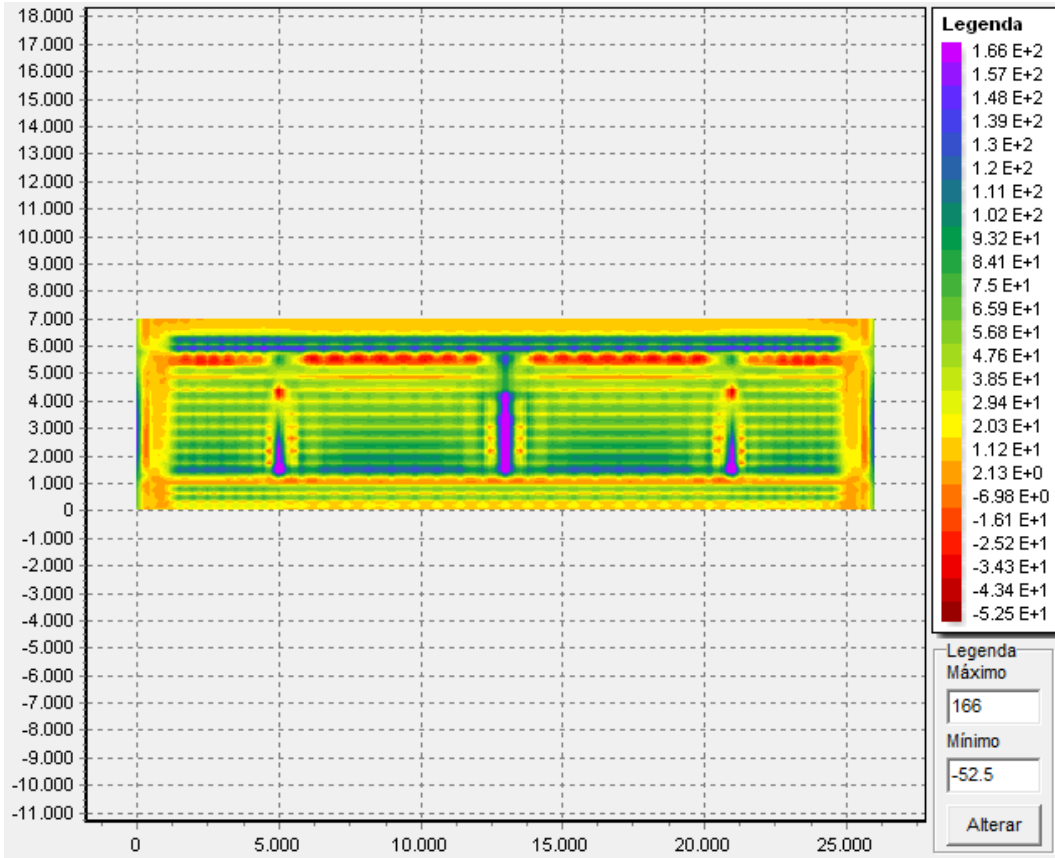


Figura 128 - Envoltória Fyz máxima. Unidade de medida N/mm.

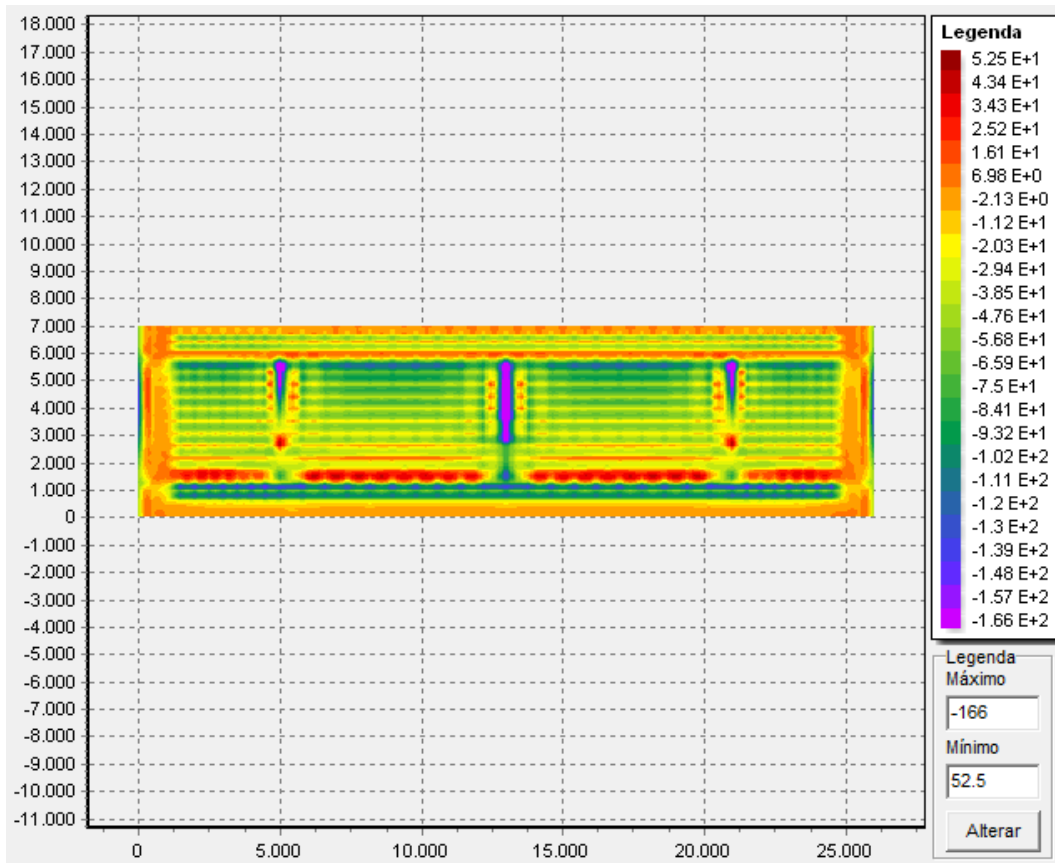


Figura 129 - Envoltória Fyz mínima. Unidade de medida N/mm.

Após a análise qualitativa do comportamento das envoltórias do tabuleiro, pretende-se comparar os valores obtidos na configuração de tabuleiro com vigas acopladas com os esforços obtidos utilizando:

- As tabelas de Rüsçh;
- O código SIPlacas considerando as lajes do tabuleiro isoladas com condições de contorno adequadas e momentos nas regiões contínuas corrigidos por coeficientes da tabela de Rüsçh;
- O código SIPlacas considerando o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

Tabelas de Rüsçh versus SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

A Tabela 36 e Tabela 37 apresenta os resultados de momento fletor e força cortante calculados utilizando as tabelas de Rüsçh e o código SIPlacas com configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

A partir das diferenças relativas apresentadas, tem-se que tanto para o momento fletor, quanto para a força cortante, não ocorrem tendência de resultados.

Tabela 36 - Comparação entre os valores de momento fletor das tabelas de Rüsçh e do SIPlacas considerando o tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Tabelas de Rüsçh	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	23,36	28,4	17,75
	Mx,g	-30,57	-2,77	90,94
	Mx,gcorr	23,44	24,4	3,93
	Mxe,gcorr	-61,13	-29,3	-52,07
L2	My,g	23,36	35,4	34,01
	Mx,gcorr	27,45	22,8	-16,94
	Mxe,gcorr	-69,74	-29,3	-57,99
L3	Mye,g	-44,18	-34,4	-22,14

Tabela 37 - Comparação entre os valores de força cortante das tabelas de Rüsç e do SIPlacas considerando o tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Tabelas de Rüsç	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	115,48	17,3	-85,02
	Vxe,g	115,48	87,2	-24,49
	Vy,g	113,7	157	27,58
L2	Vxe,g	115,48	87,52	-24,21
	Vy,g	113,7	157	27,58
L3	Vye,g	91,72	157	41,58

A não tendência de comportamento das diferenças entre as tabelas de Rüsç e o código SIPlacas, quando neste se analisa o tabuleiro completo, já é comportamento esperado. Este fato foi discutido quando se comparou as tabelas de Rüsç com os resultados do SIPlacas considerando o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

SIPlacas (Lajes Isoladas) versus SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

Os esforços obtidos pelo SIPlacas nas configurações de Lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas encontram-se apresentadas na Tabela 38 e Tabela 39.

Tabela 38 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,g	36,40	28,4	-21,98
	Mx,g	-	-2,77	-
	Mx,gcorr	40,52	24,4	-39,78
	Mxe,gcorr	-64,29	-29,3	-54,42
L2	My,g	47,60	35,4	-25,63
	Mx,gcorr	36,06	22,8	-36,77
	Mxe,gcorr	-65,10	-29,3	-55,00
L3	Mye,g	-62,20	-34,4	-44,69

Tabela 39 - Comparação entre os valores de força cortante do SIPlacas considerando configuração de lajes isoladas e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Lajes Isoladas (SIPlacas)	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,g	163,00	17,3	-89,39
	Vxe,g	224,00	87,2	-61,07
	Vy,g	163,00	157	-3,68
L2	Vxe,g	162,00	87,52	-45,98
	Vy,g	129,00	157	17,83
L3	Vye,g	140,00	157	10,83

A partir das diferenças relativas apresentadas, os valores obtidos pelo SIPlacas, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, são menores em relação aos valores obtidos na condição de lajes isoladas. Este comportamento está de acordo com o que já foi discutido. Ou seja, os valores dos esforços, nas lajes, resultantes de cargas móveis, tendem ser menores ao se considerar o tabuleiro completo. Contudo, esta afirmação não é válida para as forças cortante $V_{y,g}$ e $V_{ye,g}$ das lajes L2 e L3, respectivamente. Para a força cortante da laje L2 o valor 157,00 kN/m refere-se ao máximo valor de F_{yz} presente na região da longarina. Enquanto que o valor de 129,00 kN/m está relacionado ao esforço cortante especificamente da laje L2.

Em relação a força cortante obtida para a laje L3, a diferença relativa é satisfatoriamente pequena. Isto pode ser afirmado tendo em vista que a comparação entre os resultados está sendo realizada com estruturas com configurações bastante distintas. Ou seja, uma é representada por lajes isoladas e a outra considera o efeito nas lajes na simulação de tabuleiro completo. E mesmo para estas configurações distintas tem-se uma diferença relativa no valor de 10,83 %.

SIPlacas: Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis versus Tabuleiro com vigas acopladas

Neste momento, pretende-se comparar os valores de esforços internos obtidos pelo SIPlacas considerando o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas. A Tabela 40 e Tabela 41 apresentam quantitativamente as

diferenças relativas destes esforços obtidos para estas duas configurações. Ressalta-se que a configuração que representa melhor o comportamento real da estrutura é a do tabuleiro com vigas acopladas.

Tabela 40 - Comparação entre os valores de momento fletor do SIPlacas considerando configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de momento fletor kN.m/m).

Lajes	Esforço	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	My,q	23,2	28,4	-18,31
	Mx,q	-	-2,77	-
	Mx,qcorr	28,4	24,4	14,08
	Mxe,qcorr	-35,8	-29,3	18,16
L2	My,q	44,2	35,4	19,91
	Mx,qcorr	26,8	22,8	14,93
	Mxe,qcorr	-35,8	-29,3	18,16
L3	Mye,q	-39,1	-34,4	12,02

Tabela 41 - Comparação entre os valores de força de cortante do SIPlacas considerando configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis e tabuleiro com vigas acopladas. (Unidades de força cortante kN/m).

Lajes	Esforço	Tabuleiro sobre apoios não deslocáveis	Tabuleiro com vigas acopladas	Diferença Relativa (%)
L1	Vx,q	97,5	17,3	82,26
	Vxe,q	117	87,2	25,47
	Vy,q	142	157	-9,55
L2	Vxe,q	82,9	87,52	-5,28
	Vy,q	142	157	-9,55
L3	Vye,q	142	157	-9,55

Com relação ao momento fletor, os resultados dos esforços, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, são menores. Este comportamento só não ocorre

para o $M_{y,q}$ da laje L1. Ou seja, para esta estrutura, ao considerar a viga de borda como sendo um apoio não deslocável, ou seja rigidez infinita, tem-se na região central da laje L1 uma deformada menor se comparada quando a viga de borda possui rigidez menor.

Para os valores obtidos na diferença relativa, o intervalo da diferença encontra-se entre 10 e 20 %. Fato que leva a concluir que adotando as duas configurações em análises, ao se considerar tabuleiro com vigas acopladas tem-se, em média, uma redução em 20% dos esforços relacionados ao momento fletor.

Com o que diz respeito para a força cortante na direção y, na região da longarina o esforço é relativamente próximo para os dois casos. Sendo a diferença relativa presente na ordem de 9,55 %.

Para a força cortante $V_{x,q}$ da laje L1 o esforço obtido, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, é 82,26 % menor que na configuração de tabuleiro sobre apoios não deslocáveis. Isto indica que ao considerar a deformação da transversina de apoio a força cortante nesta região diminui consideravelmente. Fato semelhante ocorre para a força $V_{xe,q}$ da laje L1. Contudo a diferença dos valores obtidos entre os dois modelos é menor e encontra-se na faixa de 25,47 %.

Com relação a força cortante na direção x ($V_{xe,q}$) da laje L2 tem-se um valor de esforço obtido para os dois modelos satisfatoriamente próximo, na ordem de 5,28 %. Podendo-se concluir, que para esta estrutura, ao adotar qualquer das duas configurações de tabuleiro em análise a força cortante obtida para esta região é praticamente a mesma.

8.4 Resumo

O presente capítulo tratou da análise do tabuleiro de uma ponte em viga. Os esforços da laje da ponte foram calculados utilizando as tabelas de Rüsçh e o código SIPlacas. No código SIPlacas foram consideradas três configurações de representação para o cálculo dos esforços das lajes. Os esforços das vigas foram

calculados pelo conceito de linhas de influência e pelo SIPlacas. No código as vigas são calculadas utilizando o conceito de superfícies de influência.

Em todas as comparações realizadas os resultados obtidos são diferentes para cada configuração de tabuleiro adotada no SIPlacas. Fato que levou a concluir que a representação da estrutura na análise estrutural possui papel fundamental em relação aos esforços obtidos.

É importante enfatizar que em todas as comparações realizadas as diferenças encontradas apresentaram tendências de resultados. E para aquele caso no qual não houve padrão na diferença dos resultados este comportamento foi devidamente justificado.

9 CONCLUSÃO

9.1 Considerações Finais

Ao término do trabalho dois assuntos devem ser abordados nas conclusões do presente estudo. O primeiro, diz respeito às análises do comportamento dos elementos finitos implementados; assunto discutido no capítulo 6. Enquanto que o segundo atrela-se as análises realizadas para o tabuleiro de ponte em viga; assunto discorrido no capítulo 8.

Os elementos finitos estudados foram os elementos de barra e placa. Ambos os elementos apresentam três graus de liberdade por nó. Um dos graus de liberdade relaciona-se a translação vertical e os outros dois diz respeito às rotações no plano do elemento.

No decorrer do trabalho pôde ser visto que ambos os elementos possuem problema de travamento de força cortante (Shear Locking). E para contornar este problema foram utilizados dois artifícios matemáticos. Desta maneira, elementos finitos com integração reduzida e campo assumido de deformação de força cortante (CADFC) foram implementados no código SIPlacas.

A fim de verificar o comportamento dos elementos finitos de barra, um exemplo de viga em balanço foi utilizado. A partir deste exemplo foram realizadas duas análises. A primeira relaciona-se a convergência do resultado de cada elemento à medida que se aumenta a discretização de malha na estrutura. E a segunda, diz respeito ao problema de travamento de força cortante.

A seguir encontram-se as observações e conclusões a respeito da primeira análise.

Para o deslocamento, todos os elementos finitos implementados convergem, para os resultados obtidos analiticamente, à medida que se aumenta a discretização da estrutura. Contudo, a convergência dos elementos com aproximações quadráticas ocorre mais rapidamente.

Foi também constatado que a razão de convergência é diferente para os elementos que possuem a mesma aproximação para os deslocamentos. Por exemplo, entre os elementos lineares, o $B2_c$ é o último a convergir. Indicando que ao realizar análises com este elemento é preciso que se utilize uma discretização relativamente maior se comparada com as discretizações utilizadas segundo os outros elementos lineares. Este mesmo comportamento ocorre para o elemento quadrático $B3_c$.

Outro comportamento interessante visto entre os elementos lineares $B2_r$ e $B2_{CAD}$ e os quadráticos $B3_r$ e $B3_{CAD}$, é que eles apresentam exatamente o mesmo comportamento. Este fato comprovou que o artifício numérico da integração reduzida equivale a definir uma aproximação adequada para o campo de deformação inconsistente do elemento finito. Ressaltando que isto só é válido para análise de deslocamento da estrutura.

Para o momento fletor, o elemento quadrático $B3_c$ foi o único a apresentar comportamento fora do padrão das curvas dos demais elementos quadráticos. Pois, como ocorre para os demais elementos, ele deveria convergir para um resultado próximo ao analítico independentemente da discretização utilizada. E foi concluído que isto acontece porque o elemento quadrático $B3_c$ não possui qualquer tratamento para evitar o problema de travamento de força cortante. O que indica que ele necessita de uma discretização de malha maior para se convergir a um resultado satisfatório.

Em relação à força cortante, os elementos finitos com CADFC, ($B2_{CAD}$ e $B3_{CAD}$), foram os únicos a apresentarem convergência com o valor analítico para qualquer discretização da estrutura. Esperava-se que os elementos obtidos com integração reduzida ($B2_r$ e $B3_r$), que segundo a literatura estão livres de travamento,

apresentassem comportamento análogo. Contudo, isto não aconteceu. Fato que comprovou que ao se realizar a integração reduzida, na obtenção dos termos da matriz de rigidez, o elemento finito apresenta melhoria apenas nos valores quanto aos deslocamentos. Pois este artifício numérico não é levado em consideração ao calcular os esforços internos. Este problema não apareceu nos gráficos de momento fletor tendo em vista que o campo de deformação de momento fletor é consistente e por isso não apresenta problema de convergência.

Para se analisar o problema dos elementos finitos com relação ao travamento de força cortante foi considerada a mesma viga em balanço. No entanto, foi adotada uma variação da razão h/b entre os valores de 0,000001 a 5.

A partir das análises foi visto que ao reduzir a razão h/b o deslocamento computado do elemento $B2_c$ é cada vez menor se comparado com da solução analítica. E concluiu-se que este comportamento configura-se o problema de travamento de força cortante.

Para os demais elementos lineares ($B2_r$ e $B2_{CAD}$), em relação ao deslocamento, os valores são satisfatórios. Isto acontece independentemente da relação h/b e melhora à medida que se aumenta a discretização da estrutura.

Com relação aos elementos quadráticos, os valores obtidos são bastante satisfatórios para todos os elementos. Contudo, como visto anteriormente, na análise de momento fletor, para a viga de relação h/b igual a 3, considerando discretizações pobres, o elemento pode apresentar resultados incoerentes com o problema físico real.

Em suma, foi concluído que o elemento finito de barra quadrático com CADFC ($B3_{CAD}$) é aquele que melhor apresenta resultados considerando uma malha de elementos finito mais pobre. E, portanto, sendo ele utilizado para se realizar as análises do tabuleiro de ponte em viga.

O exemplo gerado com a intenção de verificar se os elementos finitos de placa do programa SIPlacas estavam chegando a resultados coerentes, configurou-se de uma placa retangular com dimensões 5,00 m x 4,50 m.

Os resultados dos elementos de placa do programa SIPlacas foram confrontados, primeiramente, com os resultados do programa conceituado de elementos finitos Fx+ for DIANA 9.4.4®. Esta etapa foi realizada no intuito de verificar se a rotina implementada no SIPlacas encontrava-se coerente. A partir dos resultados concluiu-se que os elementos finitos implementados $Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$ têm comportamento semelhante ao do Fx+ for DIANA 9.4.4®.

Em seguida, preocupou-se em expor o problema do travamento de força cortante (Shear Locking) que o elemento finito linear e/ou quadrático com integração completa apresenta. Para isso as espessuras da placa foram consideradas no intervalo de 0,15 a 1,50 m e os resultados analisados diz respeito a valores de deslocamento no meio da placa.

A partir disto, primeiramente, foi visto que todos os elementos de placa apresentam convergência para o mesmo valor de deslocamento. E isso vale tanto para os elementos lineares quanto para os quadráticos. Porém, o que diferenciou um elemento finito de outro foi à razão de convergência. Tendo em vista que para o elemento linear a convergência ocorreu para uma estrutura com discretização menor que a adotada para o quadrático.

Foi também verificado o problema de travamento de força cortante (Shear Locking). Neste sentido, foi mostrado que para as estruturas de espessuras pequenas os valores obtidos pelos elementos $Q4_c$ e $Q8_c$, para malha de elementos finito considerada pobre, tenderam a apresentar valores de diferença relativa percentual maior que os elementos $Q4_r$ e $Q8_r$. Esta comparação pode ser estendida para os elementos $Q4_{CAD}$ e $Q8_{CAD}$. Tendo em vista que, como concluído para os elementos finitos de barra, praticamente não há diferença em relação aos valores de deslocamentos entre os elementos $Q4_r$ e $Q4_{CAD}$ e os $Q8_r$ e $Q8_{CAD}$.

Por último, foram realizadas análises entre os resultados obtidos segundo os elementos finitos com aproximação linear e quadrático. Esta análise possuiu o objetivo de apresentar a convergência dos elementos para os deslocamentos, momento fletor e força cortante e por fim concluir qual o elemento finito que apresenta resultados mais satisfatórios para estruturas menos discretizadas.

Salienta-se que a relação de valor de convergência para número de nós é importante de ser verificada, pois o tempo de processamento das análises das cargas móveis, no SIPlacas, está diretamente relacionada com o número de nós da estrutura.

A partir desta última análise, concluiu-se que o elemento finito de placa, de aproximação quadrática, e com CADFC ($Q8_{CAD}$) é o mais adequado para as análises do tabuleiro de ponte em viga.

O segundo assunto abordado na presente pesquisa atrela-se a comparação entre os resultados de esforço para as lajes e vigas de tabuleiros de pontes por dois métodos diferentes de cálculo.

Para as lajes as comparações foram feitas considerando os resultados obtidos via tabelas de Rüsç e código SIPlacas. No código SIPlacas foram consideradas três configurações no modelo de análise para o tabuleiro. Sendo elas: a representação do tabuleiro por painéis de lajes isolados com condições de contorno adequadas; o tabuleiro considerado completo sobre apoios não deslocáveis; e, o tabuleiro completo com vigas acopladas.

A seguir encontram-se as observações e conclusões obtidas de cada análise realizada e apresentada no capítulo 8.

Tabelas de Rüsç versus Código SIPlacas (Lajes isoladas)

Considerando apenas a ação de cargas permanentes foi concluído, que os valores de momento fletor e de força cortante, obtidos pelo SIPlacas e pelas tabelas de Rüsç, são satisfatoriamente próximos.

Com relação à ação de cargas móveis, o SIPlacas apresentou valores de esforços internos maiores se comparado com os esforços obtidos pelas tabelas de Rüsç. E as possíveis justificativas para este comportamento são:

- O código SIPlacas determina as superfícies através de processo numérico (MEF);
- No código a força da roda aplicada no tabuleiro é representada por uma força concentrada, enquanto que Rüsç a propaga para a superfície média da placa com um ângulo de 45°;
- As superfícies de influência determinadas no SIPlacas não apresentam tratamento para a singularidade que ocorre nas placas nos pontos em que se considera a ação de forças concentradas.

Tabelas de Rüsç versus Código SIPlacas (Tabuleiro sobre apoio não deslocável)

Com relação às cargas permanentes, foi visto que ao considerar o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis os valores dos esforços obtidos pelo SIPlacas são menores em comparação com os da tabela de Rüsç. Concluindo que ao considerar o tabuleiro completo ocorre uma redistribuição de esforços. Ou seja, cargas que se encontram nas demais lajes acabam aliviando esforços nas regiões mais solicitadas, caso que não ocorre quando se considera apenas uma laje.

Com relação às cargas móveis, as diferenças obtidas entre os dois métodos de cálculo não apresentaram tendência de comportamento. Fato explicado devido ao antagonismo de dois fatores: O primeiro que diz respeito ao tratamento quanto a singularidade nos pontos de máximo em que as superfícies de influência do código SIPlacas não realiza. E este fato pode ser aquele que conduz sempre a resultados do SIPlacas mais elevados que os da tabela de Rüsç; E segundo relaciona-se ao fato em considerar que o tabuleiro completo sobre apoios não deslocáveis conduz a

resultados de esforços menores, se comparados com valores obtidos na configuração de lajes isoladas.

Código SIPlacas: Lajes isoladas versus Tabuleiro completo sobre não deslocável

A partir dos resultados analisados, concluiu-se que os esforços resultantes de cargas permanentes e móveis apresentam as mesmas tendências. Ou seja, para ambos os casos ao considerar o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis os valores dos esforços obtidos são menores em comparação aos valores calculados considerando as lajes isoladas.

Reafirmando, portanto, que ao se considerar o tabuleiro completo ocorre uma redistribuição de esforços. Cargas que se encontram nas demais lajes acabam aliviando esforços nas regiões mais solicitadas, caso que não ocorre quando se considera apenas uma laje.

Tabelas de Rüsç versus Código SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas)

Para a carga permanente foi constatado que o código SIPlacas apresenta esforços internos menores em relação as tabelas de Rüsç. Este comportamento recai na afirmação de que ao considerar o tabuleiro completo ocorre uma melhor distribuição de esforços na estrutura.

Com relação aos esforços resultantes da ação de cargas móveis, tanto para o momento fletor, quanto para a força cortante, não ocorrem tendência de resultados. Este comportamento entre os resultados das tabelas de Rüsç e o código SIPlacas, quando neste se analisa o tabuleiro completo, já é comportamento esperado. Este fato foi discutido quando se comparou as tabelas de Rüsç com os resultados do SIPlacas considerando o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

Código SIPlacas: Lajes isoladas versus Tabuleiro com vigas acopladas

Para a ação de cargas permanentes os esforços obtidos, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, são menores, comparado com o modelo de lajes isoladas. Fato semelhante ao ocorrido na comparação entre as tabelas de Rüsç e o SIPlacas (Tabuleiro com vigas acopladas).

Para a ação de cargas móveis os valores obtidos pelo SIPlacas, na configuração de tabuleiro com vigas acopladas, são menores em relação aos valores obtidos na condição de lajes isoladas. Este comportamento está de acordo com o que já foi discutido. Ou seja, os valores dos esforços, nas lajes, resultantes de cargas móveis, tendem ser menores ao se considerar o tabuleiro completo.

Código SIPlacas: Tabuleiro completo sobre apoio rígido versus Tabuleiro com vigas acopladas

Para a ação de carga permanente, em todos os pontos analisados, os valores, de momento fletor e de força cortante, são maiores no tabuleiro sobre apoios deformáveis. E foi concluído que este fato ocorre porque nesta configuração a estrutura é mais deformável. Contudo, foi, também, apresentado que os valores das diferenças encontradas são consideravelmente altas. O que mostra que a etapa de concepção da análise estrutural é fundamental para a obtenção de esforços compatíveis com aqueles em que a estrutura vai realmente apresentar durante sua vida útil.

Para a ação de cargas móveis os resultados dos esforços internos, na configuração de tabuleiro sobre apoios deformáveis, são menores. Com relação ao momento fletor, em média, a redução dos esforços ocorre para diferenças menores que 20%. Para a força cortante não há uma média de redução. Contudo para a transversina de apoio a força cortante na consideração de tabuleiro sobre apoios deformáveis apresenta um valor 82,26 % menor que o tabuleiro sobre apoios não deslocáveis.

É importante ressaltar, que para todas as comparações, foi concluído que não há grande diferença entre os resultados dos esforços das lajes em balanço. Ou seja, adotá-las com uma representação mais simples, significa dizer que é uma boa aproximação para se determinar os esforços máximos que ela pode apresentar.

Diante das análises realizadas na presente pesquisa, fica clara a importância de se conhecer o método que está sendo utilizado na modelagem da estrutura. Como visto, o método dos elementos finitos (MEF) é sem dúvida uma poderosa ferramenta para a análise numérica de estruturas. Contudo é preciso conhecer as suas características. Tais como a de ser um método de resolução aproximativo. Fato que pode conduzir a análises equivocadas.

Outra característica que pode ser explicitada, mais especificamente aos elementos estudados, diz respeito ao problema de travamento de força cortante. De maneira geral, observou-se que isto decorre de um problema numérico da formulação destes elementos.

Com relação às configurações de tabuleiros de pontes observou-se que a análise estrutural possui papel fundamental na obtenção de esforços internos das lajes. Foi possível verificar que a intensidade deles muda consideravelmente ao se representar numericamente uma mesma estrutura de forma diferente. Com isso, o engenheiro projetista deve estar atento ao correto lançamento da estrutura em códigos computacionais. E deve também estar consciente das limitações do modelo numérico adotado.

9.2 Sugestões para trabalhos futuros

A principal sugestão para trabalhos futuros diz respeito à investigação da construção de superfícies de influência. Como comentado, ao construí-la considerando uma carga unitária passando nos pontos da estrutura pode ocorrer singularidade da superfície no ponto de aplicação da carga. Fato que conduz a resultados consideravelmente elevados.

Desta maneira, a construção da superfície pode ser feita a partir de duas maneiras:

- Na primeira, ela pode ser construída da mesma forma em que se encontra no SIPlacas. Contudo, pode-se adotar um tratamento nas mediações do ponto

de singularidade da superfície. Esta é a maneira que Mason (1977) afirma que Pucher constrói as superfícies de influência.

- A outra, as superfícies podem ser construídas a partir do princípio de Müller-Breslau.

Utilizando o código SIPlacas, outras análises poderiam ser realizadas. Uma delas seria a análise de pontes esconsas. Isto é possível, tendo em vista que os elementos finitos implementados são isoparamétricos. Outra análise que pode ser feita é a avaliação de pontes em lajes. Tal avaliação é possível, pois os elementos finitos implementados apresentam formulações que consideram a influência de deformação de força cortante.

Algumas modificações podem ser realizadas no SIPlacas. Uma delas diz respeito às considerações de acoplamento do elemento de barra no de placa. No estágio em que se encontra implementado no SIPlacas a transversina, se considerada, sempre apresenta todos os nós da sua discretização acoplados com os nós dos elementos de placa. Contudo, em algumas pontes, as transversinas estão vinculadas apenas as longarinas. Ou seja, na estrutura real há um espaço entre a transversina e laje. Este comportamento pode ser implementado no código fazendo com o que o usuário escolha os nós da barra que deverão ser acoplados com os da placa.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ASSAN, A. E. Método dos elementos finitos. Campinas/SP: UNICAMP, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto e execução de obras de concreto armado. Rio de Janeiro, 1978.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.

Bathe, K. L. **Finite element procedures**. Prentice-Hall, United States of America, pp 1502, 1996.

Branco, A. L. L. V. (2002). **Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos**. Dissertação (Mestrado), – Escola de Engenharia de São Carlos/EESC. Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

CÔRREA, M. R. S. (1983). **Aplicação dos métodos da faixa finitas na análise de estruturas prismáticas**. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1983.

DIANA (2005). DIANA Finite Element Analysis. User's manual release 9. Element Library. TNO DIANA, Delft, Netherland.

EI DEBS, M. K.; TAKEYA, T. (2010) **Introdução às pontes de concreto. Texto provisório de apoio à disciplina de pontes – SET 412.** (Apostila). São Carlos 2010.

FISH, J. , BELYTSHKO, T. (2009). **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos.** LTC, 2009.

GAVIOLI, E. R. (1998). **Análise de tabuleiros de pontes formados por elementos pré-moldados mediante método da grelha: recomendações de projeto e comparações dos valores teóricos com experimentais.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos. Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

GUO, M. W. , HARIK, I. E. e Ren, W. X. (2002). Semi-discrete finite element analysis of slab-girder bridges. **Computers and Structures** 80 (2002) 1789-1796.

HUANG, J.; SHENTON, H. W. (2008). Experimentally determined continuous displacement influence lines for bridges. **Structures** 2008.

HUANG, H. et all (2007). Application of orthotropic thin plate theory to filled steel grid decks for bridges. **Journal of Engineering.** Vol. 12, 807-810, 2007.

HUGHES, T. J. R; TEZDUYAR, T. E.(1981). Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. **Journal Applied Mechanics**, vol 48, pp. 587-596, 1981.

HUGHES, T. J. R ; COHEN, M.; e HAROUN, M. (1978). Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. **Nuclear Engineering and Design**, 46, pp. 203-222, 1978.

LIU, G. R. , QUEK, S. S. (2003). **The Finite Element Method: A Practical Course.** BH, 2003.

MASON, J. **Pontes em concreto armado e protendido**. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A. Rio de Janeiro, 1977.

MARTHA, L. F. **Métodos básicos da análise de estruturas**. Editora Campus/Elsevier, 2010.

MARTINELLI, D. A. O. , MONTARI, L. e SAVASSI, W. (2003). **Placas Elásticas - Equações Gerais -Placas Retangulares-Conceituação Teórica**, Método das Diferenças Finitas e Elementos Finitos. (Apostila). São Carlos 2003.

OWEN, D. R. J. e HINTON, E. (1980). **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. **Swansea: Pineridge Press Limited**, 1980.

PAIVA, J. B. (2012) **Introdução ao método dos elementos finitos**. SET 0601 (Apostila). São Carlos, 2012.

PUCKETT, J. A. (1986). Application of the compound strip method for the analysis of slab-girder bridges. **Computers & Structures**, vol, 22. No. 6. pp. 979-986.1986.

SANTOS, M. F. (2003). **Contribuição ao estudo do efeito de combinação de veículos de carga sobre pontes rodoviárias de concreto**. Dissertação (Mestrado) Escola de Engenharia de São Carlos. Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

STALLINGS, J. M. e YOO, C. H. (1992). Analysis of slab-on-girder bridges. **Computers e Structures**, vol. 45, No. 5/6, pp. 875-880, 1992

SHEN, W. (1992). The Generalized Müller-Breslau Principle for Higher-Order Elements. **Computers & Structures**. vol, 44. No. 1/2. pp. 207-212.1992.

SORIANO, H. L. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. São Paulo/SP. Editora da Universidade de São Paulo: edusp, 2003.---

THOMAS, D. L., WILSON, J. M. e WILSON, R. R. (1973). Timoshenko Beam Finite Elements. **Journal of Sound and Vibration**, 31(3), 315-330. 1973.

TIMOSHENKO, S. P. e WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). **Theory of Plates and Shells**. 2^o Edição. Singapore:McGraw-Hill. 1959.

WANG, Yi e QU, Wei-Lian (2011). Moving train loads identification on a continuous steel truss girder by using displacement influence line method. **International Journal of Steel Structures**, Vols. 11, No 2, 109-105, 2011.

XING, B. e WANG, X. (2012). The singular function method based on the moving load deformation of suspension bridge. **Advanced Materials Research**, Vols. 403-408 (2012) pp 3059-3062.

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR R. L. **The finite element method**. Vol 2 - Solid mechanics, 5th edition, Butterworth-Heinemann, pp. 476, 2000.