

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

WAGNER QUEIROZ SILVA

Sobre análise não linear geométrica de edifícios  
considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a  
interação solo-estrutura

São Carlos

2014



WAGNER QUEIROZ SILVA

Sobre análise não linear geométrica de edifícios  
considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a  
interação solo-estrutura

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada a Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo como parte  
dos requisitos necessários à obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Titular Humberto Breves Coda

São Carlos

2014

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S586s Silva, Wagner Queiroz  
Sobre análise não linear geométrica de edifícios  
considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a  
interação solo-estrutura / Wagner Queiroz Silva;  
orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2014.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2014.

1. Edifícios altos. 2. Núcleos estruturais. 3.  
Análise não linear de estruturas. 4. Interação  
solo-estrutura. 5. Método dos elementos finitos. 6.  
Método dos elementos de contorno. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **WAGNER QUEIROZ SILVA**.

Título da tese: "Sobre análise não linear geométrica de edifícios considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a interação solo-estrutura".

Data da defesa: 18/12/2014

### Comissão Julgadora:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Associado **Márcio Roberto Silva Corrêa**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Eduardo de Moraes Barreto Campello**  
(Escola Politécnica/EP-USP)

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

### Resultado:

Aprovado

Aprovado

Aprovado

Aprovado

Aprovado

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**



## DEDICATÓRIA

Ao meu pai,  
Eucides Batista da Silva.





## AGRADECIMENTOS

A minha família pelo apoio e incentivo, em especial ao meu pai Eucides Batista da Silva e a minha mãe Vera Márcia Fonseca de Queiroz Silva.

Ao Prof. Titular Humberto Breves Coda, não somente pelas orientações e ensinamentos, mas principalmente pela amizade e incentivos, tanto durante o mestrado quanto no doutorado.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, em especial ao Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola e à Sr.<sup>a</sup> Maria Nadir Minatel pelos auxílios durante o desenvolvimento deste trabalho.

A Universidade Federal do Amazonas por ter me concedido o afastamento de minhas atividades como docente para a conclusão desta tese, em especial ao Departamento de Engenharia Civil e a Faculdade de Tecnologia pelo apoio.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP – pela bolsa de estudos concedida durante os anos de 2010 a 2011 e pelo apoio financeiro ao projeto temático no qual este trabalho encontra-se inserido.

Aos meus amigos Andreilton de Paula Santos, Dorival Piedade Neto, Guilherme Toda, Jesús Antonio Garcia Sánchez e Wellison José de Santana Gomes pela valiosa ajuda e importantes contribuições com os trabalhos de programação, além da amizade.

Aos amigos Erica Kimura, Marcela Filizola, Manoel Denis, Jesus Daniel, Higor Argolo, André Ramos, Hidelbrando Diógenes, Francisco Quim, Carlos Marek, Cátia Silva, Saulo Almeida e Diôgo Oliveira, entre tantos outros que fiz no programa de pós-graduação e na cidade de São Carlos. Agradeço pela amizade e pelos momentos de descontração e desejo muitas felicidades e sucesso a todos.

Agradecimentos especiais à Ellen Kellen Bellucio, pelo carinho, amizade, por todo o apoio e por estar sempre ao meu lado.



## RESUMO

SILVA, W. Q. **Sobre análise não linear geométrica de edifícios considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a interação solo-estrutura.** 2014. 186p. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2014.

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para análise tridimensional não linear geométrica de edifícios considerando a influência de todas as partes componentes do sistema estrutural, incluindo a ligação núcleo-laje e o solo de fundação. Pilares e vigas são modelados com elementos finitos de barra com seção transversal de forma qualquer, enquanto as lajes são modeladas por elementos finitos de casca. Ambos consideram o comportamento não linear geométrico e adotam como graus de liberdade posições nodais e vetores generalizados ao invés de deslocamentos e rotações, sendo também considerado para o elemento de barra o grau de liberdade de empenamento da seção. Apresenta-se uma estratégia cinemática para o acoplamento de topo entre os elementos de casca e a seção dos elementos de barra, gerando assim um elemento de núcleo com diafragma. O acoplamento se dá através de uma matriz de incidência cinemática responsável por inserir na Hessiana e no vetor de forças internas do elemento de barra que discretiza o núcleo as contribuições de elementos de casca a ele conectadas. Admite-se para os materiais do edifício a lei constitutiva elástico-linear de Saint Venant-Kirchhoff e a não linearidade geométrica é considerada através de uma formulação Lagrangiana total com cinemática exata. A flexibilidade dos apoios é considerada através de uma matriz de rigidez do sistema solo-fundação. Esta matriz é calculada em outro programa de acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos por meio de uma estratégia numérica baseada, por sua vez, no Teorema de Betti-Maxwell. A estratégia consiste na determinação de coeficientes de flexibilidade de pontos sobre uma malha discreta do sistema solo-fundação, sendo o solo modelado via Método dos Elementos de Contorno com uso da solução fundamental de Mindlin e os elementos estruturais de fundação, que podem incluir placas, sapatas, blocos e estacas, são modeladas com elementos finitos convencionais de barra e de casca. O programa permite a análise de edifícios completos, considerando a influência do empenamento dos núcleos nos pavimentos e também os efeitos da interação solo-estrutura. Exemplos numéricos são apresentados para confirmar a eficiência e demonstrar o potencial de aplicação da formulação proposta.

**Palavras-chave:** Edifícios altos. Núcleos estruturais. Análise não linear de estruturas. Interação solo-estrutura. Método dos Elementos Finitos. Método dos Elementos de Contorno.



## ABSTRACT

SILVA, W. Q. **On geometric nonlinear analysis of tall buildings structures considering the warping of the structural cores and the soil-structure interaction.** 2014. 186p. Doctoral Thesis, School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, 2014.

In this thesis a numerical model for geometric nonlinear analysis of three-dimensional structures of tall buildings was developed, considering the influence of all structural components, including the core-slab connection and the foundation system. Columns and beams are modeled by a frame finite element which can have a cross section of any shape, while the slabs are modeled by shell finite elements. Both consider the nonlinear geometric behavior and adopt nodal positions and generalized vectors as degrees of freedom instead of displacements and rotations. For the frame finite element it is also considered the cross sectional warping as a degree of freedom. A numerical strategy is presented for the coupling between the shell elements and the frame's cross section, thus forming a structural-core element with diaphragm. The coupling is done through a kinematic array which is responsible for inserting the contributions of shell elements, connected to the core walls, into the Hessian matrix and also into the internal force vector of the frame element used to discretize the core. The linear-elastic constitutive relation of Saint Venant-Kirchhoff is adopted for the building materials and the geometric nonlinearity is considered via a Lagrangian formulation with exact kinematics. The foundation's flexibility is considered through a stiffness matrix for the soil-foundation system. This matrix is computed in another program based on the numerical coupling between the Boundary Element Method and the Finite Element Method, using a numerical strategy based on the Maxwell-Betti's Theorem. This strategy consists in determining the flexibility coefficient of points on a discrete mesh of the soil-foundation system. The soil is modeled by the Boundary Element Method using the fundamental solution of Mindlin. The structural foundation elements, including shallow foundation, footings, blocks and piles, are modeled using conventional frame and shell finite elements. The program is applied to the analysis of complete structural systems of tall buildings, considering the influence of the core warping on the mechanical behaviour of the slabs and also the soil-structure interaction effects. Numerical examples are presented to confirm the efficiency and to demonstrate the potential application of the proposed formulation.

**Key-words:** *Tall buildings. Structural cores. Nonlinear analysis of structures. Soil-structure interaction. Finite Element Method. Boundary Element Method.*



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Categorias de sistemas estruturais de edifícios de concreto.....	21
Figura 1.2 – Alguns tipos de sistemas estruturais (SMITH; COULL, 1991).....	22
Figura 1.3 – Exemplo de edifício com núcleos estruturais .....	23
Figura 1.4 – Interação núcleo-pavimento (TARANATH, 1988) .....	25
Figura 2.1 – Sistema estrutural para o modelo do edifício.....	45
Figura 2.2 – Mudança de forma da estrutura.....	51
Figura 2.3 – Mapeamento (a) inicial e (b) corrente de um elemento de barra .....	57
Figura 2.4 – Seção transversal quadrada .....	59
Figura 2.5 – Seção transversal tipo "U" .....	59
Figura 2.6 – Mapeamento de um elemento de barra com seção "U" .....	63
Figura 2.7 – Mapeamento inicial de um elemento de casca.....	66
Figura 2.8 – Vetor generalizado da casca.....	66
Figura 2.9 – Mapeamento do elemento de casca.....	69
Figura 2.10 – Vinculação entre vetores generalizados de elementos não colineares .....	72
Figura 2.11 – Excentricidade da ligação viga-pilar.....	74
Figura 2.12 – Excentricidade da ligação laje-viga .....	74
Figura 2.13 – Representação de um elemento finito de núcleo.....	77
Figura 2.14 – Tipos de vinculação entre as cascas e a seção do núcleo.....	81
Figura 3.1 – Estado de tensões no solo.....	87
Figura 3.2 – Problema fundamental para a elasticidade (PACCOLA, 2004).....	89
Figura 3.3 – Posições do ponto fonte .....	90
Figura 3.4 – Problema fundamental de Mindlin (BARBIRATO, 1991).....	94
Figura 3.5 – Elemento de contorno de superfície.....	98
Figura 3.6 – Transformação do sistema de coordenadas.....	100
Figura 3.7 – Elemento de linha de carga .....	101
Figura 3.8 – Plano da seção transversal da linha de carga .....	102
Figura 3.9 – Forças concentradas no MEF.....	104
Figura 3.10 – Elemento finito de barra convencional .....	105
Figura 3.11 – Elemento finito de casca convencional.....	108
Figura 3.12 – Acoplamento entre diferentes domínios .....	110
Figura 3.13 – Sobreposição de elementos discretos.....	112
Figura 3.14 – Relação entre molas de flexão e vetores generalizados da barra .....	119
Figura 3.15 – Relação entre molas de flexão e o vetor generalizado da casca.....	120

Figura 3.16 – Relação entre molas de torção e os vetores generalizados .....	121
Figura 4.1 – Exemplo 1: Grelha isostática.....	125
Figura 4.2 – Exemplo 1: Deslocamentos verticais.....	127
Figura 4.3 – Exemplo 2: Perfil com chapa de topo.....	128
Figura 4.4 – Exemplo 2: Malhas discretas para a chapa de topo .....	129
Figura 4.5 – Exemplo 2: Deslocamentos verticais.....	129
Figura 4.6 – Exemplo 2: Deslocamentos longitudinais .....	131
Figura 4.7 – Exemplo 2: Deslocamentos longitudinais obtidos no ANSYS .....	131
Figura 4.8 – Exemplo 2: Deslocamentos $U_2$ para diferentes posições da linha de eixo .....	132
Figura 4.9 – Exemplo 2: Empenamento para várias espessuras de chapa .....	133
Figura 4.10 – Exemplo 4: Edifício sobre placa estaqueada .....	135
Figura 4.11 – Exemplo 4: Deslocamentos verticais na última laje.....	136
Figura 4.12 – Exemplo 4: Deslocamentos horizontais .....	137
Figura 4.13 – Exemplo 5: Núcleo rígido parcialmente fechado por lajes.....	138
Figura 4.14 – Exemplo 5: Deslocamentos horizontais .....	139
Figura 4.15 – Exemplo 5: Aspecto da deformada do edifício .....	140
Figura 4.16 – Exemplo 5: Tensões na base do núcleo .....	140
Figura 4.17 – Exemplo 5: Resultados para diferentes espessuras de laje.....	141
Figura 4.18 – Exemplo 5: Empenamento do núcleo para diferentes espessuras de laje.....	141
Figura 4.19 – Exemplo 5: Malha discreta para análise das fundações .....	142
Figura 4.20 – Exemplo 5: Deslocamentos horizontais com ISE.....	144
Figura 4.21 – Exemplo 5: Momentos fletores no núcleo com ISE.....	144
Figura 4.22 – Exemplo 5: Empenamento do núcleo com ISE .....	145
Figura 4.23 – Exemplo 5: Rotações em torno do eixo vertical com ISE.....	145
Figura 4.24 – Exemplo 5: Momento de torção no núcleo com ISE.....	146
Figura 4.25 – Exemplo 6: Edifício com um núcleo estrutural .....	148
Figura 4.26 – Exemplo 6: Deslocamentos horizontais .....	149
Figura 4.27 – Exemplo 6: Rotações em torno do eixo vertical.....	150
Figura 4.28 – Exemplo 6: Deslocamentos do edifício .....	151
Figura 4.29 – Exemplo 6: Lajes deformadas .....	151
Figura 4.30 – Exemplo 6: Tensões na base do núcleo .....	152
Figura 4.31 – Exemplo 6: Deslocamentos para diferentes espessuras de laje .....	152
Figura 4.32 – Exemplo 6: Comportamento do núcleo rígido .....	153
Figura 4.33 – Exemplo 6: Fundação .....	154
Figura 4.34 – Exemplo 6: Deslocamentos horizontais com ISE.....	154



Figura 4.35 – Exemplo 6: Comportamento do núcleo rígido com ISE .....	155
Figura 4.36 – Exemplo 6: Esforços internos no núcleo com ISE.....	155
Figura 4.37 – Exemplo 6: Esforços internos em pilares com ISE.....	156
Figura 4.38 – Exemplo 7: Planta do pavimento tipo .....	157
Figura 4.39 – Exemplo 7: Fundações .....	158
Figura 4.40 – Exemplo 7: Deslocamentos horizontais .....	159
Figura 4.41 – Exemplo 7: Força normal no pilar P1 .....	160
Figura 4.42 – Exemplo 7: Momento fletor no núcleo N1 .....	161
Figura 4.43 – Exemplo 7: Momento fletor no pilar P8 .....	161
Figura 4.44 – Exemplo 8: Arranha-céu .....	162
Figura 4.45 – Exemplo 8: Planta dos pavimentos tipo.....	164
Figura 4.46 – Exemplo 8: Cortes da arquitetura.....	165
Figura 4.47 – Exemplo 8: Resultados ao longo do pilar P5 .....	166
Figura 4.48 – Exemplo 8: Deslocamentos horizontais do edifício.....	166
Figura 4.49 – Exemplo 8: Tensões normais na base do núcleo.....	167
Figura 4.50 – Exemplo 8: Diagramas de esforços seccionais do núcleo.....	167
Figura A.1 – Problema de torção livre .....	181



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados do exemplo 1 .....	126
Tabela 2 – Resultados para diferentes posições da linha de eixo do exemplo 2 .....	132
Tabela 3 – Deslocamentos verticais da seção de topo do núcleo do exemplo 5 .....	139
Tabela 4 – Resultados para diferentes espessuras de lajes do exemplo 6 .....	152
Tabela 5 – Força horizontal em cada pavimento do exemplo 7 .....	159
Tabela 6 – Dimensões dos elementos estruturais do exemplo 8 .....	163
Tabela 7 – Forças horizontais em cada pavimento do exemplo 8 .....	165



## LISTA DE SÍMBOLOS E SIGLAS

$\Pi$	Funcional de energia potencial total
$U_e$	Energia de deformação
$u_e$	Energia de deformação por unidade de volume
$P$	Energia potencial das forças externas
$\Gamma$	Contorno
$\Omega$	Domínio
$J$	Jacobiano
$f, \bar{f}^0, \bar{f}^1$	Funções de mapeamento
$A, A^0, A^1$	Gradientes das funções de mapeamento
$x_i, X_i$	Posição inicial
$y_i, Y_i$	Posição atual ou corrente
$u, U$	Deslocamentos
$\theta$	Rotações
$W, w$	Empenamento
$\bar{w}$	Módulo de empenamento unitário
$\tilde{\Lambda}, \tilde{Y}, \Lambda^\ell, Y^\ell$	Deformações transversais do elemento de barra NLG
$\tilde{T}, T^\ell$	Deformação transversal ao longo da espessura da casca
$F$	Força concentrada
$p$	Força de superfície
$b$	Força volumétrica
$S$	Tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie
$\sigma$	Tensor de tensões de Cauchy
$\varepsilon$	Tensor de deformação de Green-Lagrange
$C$	Tensor de estiramento de Cauchy-Green
$D$	Tensor elástico constitutivo
$E, G$	Módulo de elasticidade longitudinal e transversal
$A$	Área
$V^0, V^1$	Volumes
$\xi, \eta$	Coordenadas adimensionais
$\vec{V}^{1\ell}, \vec{V}^{2\ell}, \vec{G}^{1\ell}, \vec{G}^{2\ell}$	Vetores generalizados do elemento de barra NLG
$\vec{N}^\ell, \vec{g}^\ell$	Vetores generalizados do elemento de casca NLG
$\phi, \vartheta, \varphi, \psi, \Phi, \Psi$	Funções de forma
$K$	Matriz de rigidez
$B$	Matriz de incidência cinemática do elemento de núcleo
$tol$	Tolerância numérica
$H, G$	Matrizes do Método dos Elementos de Contorno
$L$	Comprimento
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
NLG	Não linearidade geométrica
ISE	Interação solo-estrutura



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
1.1 Considerações gerais sobre as estruturas de edifícios.....	21
1.2 Sistemas de edifícios com núcleos estruturais .....	22
1.3 Objetivos .....	26
1.3.1 Objetivos Específicos .....	26
1.4 Justificativa .....	27
1.5 Metodologia .....	29
1.6 Estado da Arte.....	30
1.7 Considerações do presente trabalho e organização da tese.....	42
<b>2. MODELAGEM DA ESTRUTURA DO EDIFÍCIO.....</b>	<b>45</b>
2.1 Equilíbrio mecânico não linear do edifício .....	46
2.2 Montagem do sistema de equações.....	50
2.2.1 Mapeamento do Pórtico: Elemento Finito NLG de Barra.....	56
2.2.1.1 Obtenção dos esforços seccionais .....	64
2.2.2 Mapeamento das Lajes: Elemento Finito NLG de Casca .....	65
2.2.3 Vinculação entre elementos não colineares .....	71
2.2.4 Excentricidades das ligações .....	73
2.2.5 Acoplamento Casca-Barra: O Elemento Finito de Núcleo .....	75
<b>3. MODELAGEM DO SISTEMA SOLO-FUNDAÇÃO .....</b>	<b>85</b>
3.1 O MEC para elasticidade .....	86
3.1.1 Solução fundamental de Mindlin .....	93
3.1.2 Modelagem da superfície do solo: Elemento de Contorno Plano .....	98
3.1.3 Modelagem da superfície das estacas: Elemento de Linha de Carga.....	100
3.2 O MEF para análise da fundação .....	103
3.2.1 Modelagem das estacas: Elemento Finito de Barra (convencional) .....	105
3.2.2 Modelagem das fundações: Elemento Finito de Casca (convencional).....	107
3.3 Acoplamento entre o MEC e o MEF .....	110
3.4 Montagem da matriz de rigidez do sistema solo-fundação.....	112
3.5 Inclusão da rigidez das fundações no modelo do edifício NLG .....	117
3.5.1 Flexibilidade do solo na base dos núcleos .....	122

<b>4. EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>125</b>
4.1 Exemplo 1: Grelha isostática.....	125
4.2 Exemplo 2: Perfil com chapa de topo .....	127
4.3 Exemplo 3: Matriz de rigidez de uma sapata rígida.....	133
4.4 Exemplo 4: ISE em edifício sobre placa estaqueada.....	135
4.5 Exemplo 5: Núcleo rígido parcialmente fechado por lajes .....	137
4.6 Exemplo 6: Edifício reforçado por um núcleo estrutural .....	148
4.7 Exemplo 7: Edifício com núcleos parcialmente fechados por lintéis .....	156
4.8 Exemplo 8: Análise de um Arranha-céu .....	162
<b>5. CONCLUSÕES .....</b>	<b>169</b>
<b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>173</b>
<b>APÊNDICE A – O MODO DE EMPENAMENTO UNITÁRIO .....</b>	<b>181</b>



# 1.INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações gerais sobre as estruturas de edifícios

As edificações de múltiplos pavimentos trazem grandes desafios à engenharia civil, pois geralmente exigem condições singulares de projeto, de construção e de uso. Do ponto de vista da análise estrutural, à medida que cresce a altura de uma edificação aumentam também os efeitos das ações horizontais, tais como a força do vento, de maneira que estas ações passam a ser tão importantes quanto às ações verticais dos pavimentos. Além disso, terão maiores intensidades os efeitos da não linearidade geométrica, o que significa que os deslocamentos do edifício interferem significativamente no equilíbrio mecânico e as aproximações da teoria linear não são suficientes para avaliar adequadamente o seu comportamento estrutural.

Existem diferentes maneiras de se estruturar edifícios de múltiplos pavimentos. Dentre os sistemas mais usuais citam-se os pórticos (formados por pilares e vigas), sistemas de núcleos rígidos, pilares-paredes, pilares perimetrais (formando um tubo) e também sistemas associados. Cada categoria tem suas vantagens e desvantagens devendo ser escolhida aquela que oferecer melhor eficiência em termos de segurança e economia para cada caso específico. A Figura 1.1 exibe um levantamento das faixas de altura (aproximadas) aplicáveis para diferentes tipos de sistemas estruturais de edifícios de concreto armado (TARANATH, 2010). Destaca-se o sistema de núcleo, que é objeto de estudo deste trabalho.

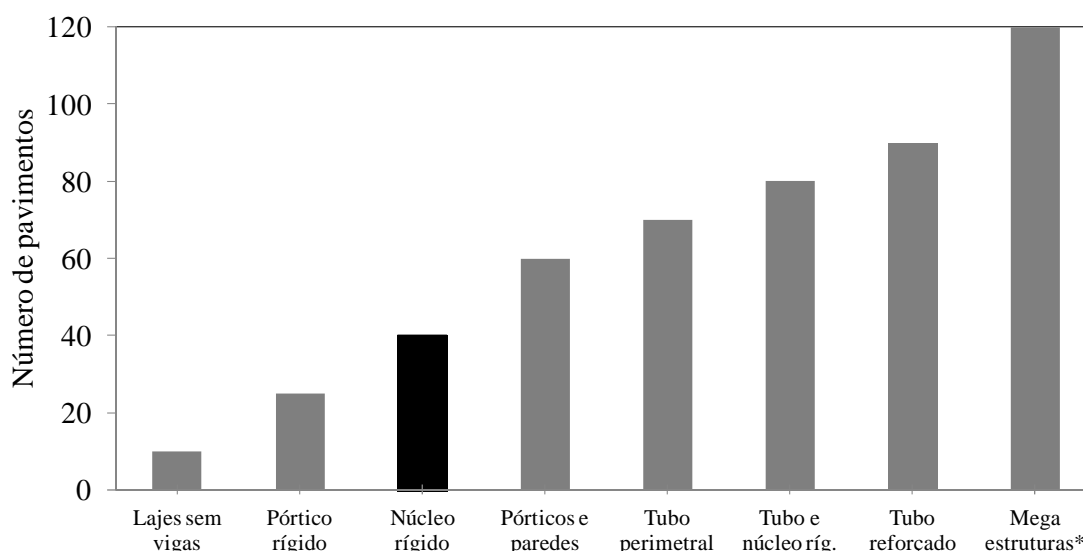


Figura 1.1 – Categorias de sistemas estruturais de edifícios de concreto

\*Mega estruturas são sistemas híbridos, como sistemas tubulares em módulos com treliças e/ou paredes altamente reforçadas, cuja faixa de altura pode ser até mesmo superior a 120 pavimentos.

A Figura 1.2 ilustra alguns dos sistemas estruturais citados, incluindo exemplos de sistemas associados a núcleo(s) rígido(s).

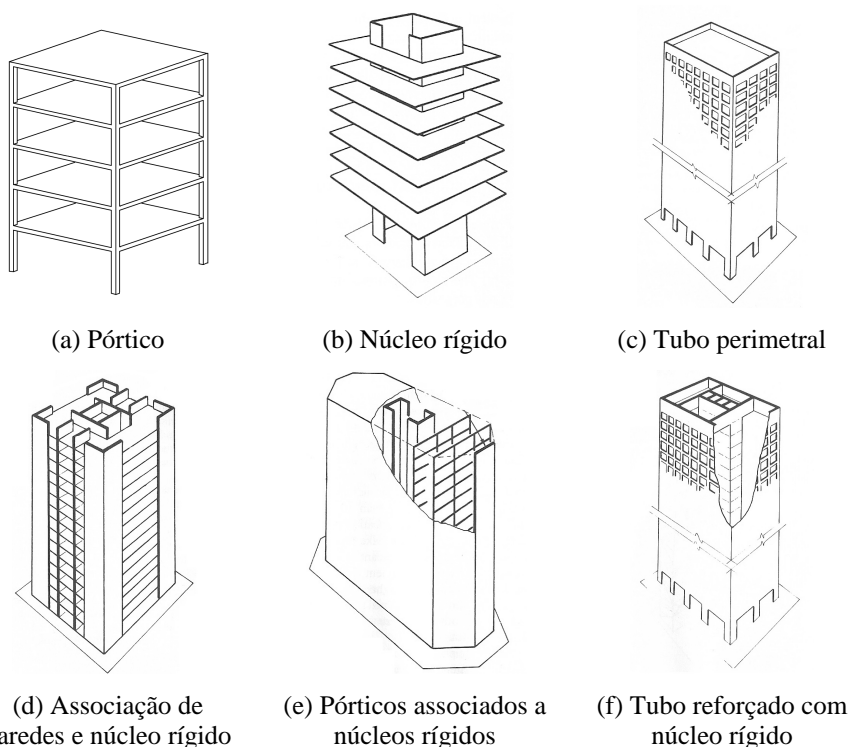


Figura 1.2 – Alguns tipos de sistemas estruturais (SMITH; COULL, 1991)

Quanto aos materiais, além do concreto armado, também é bastante utilizado o aço e as estruturas mistas aço-concreto, existindo ainda casos de edifícios em alvenaria estrutural. No Brasil ainda prepondera o uso do concreto armado na execução de edifícios de múltiplos pavimentos (CTBUH, 2014), apesar de se observar o crescimento da aplicação de outros materiais. Por este motivo é dada maior ênfase neste trabalho a aplicações para edifícios de concreto, apesar de não se pretender limitar o modelo no que diz respeito ao tipo de material.

## 1.2 Sistemas de edifícios com núcleos estruturais

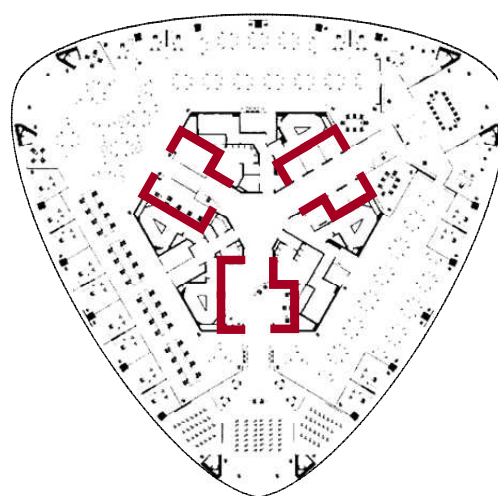
Um dos sistemas estruturais mais eficazes para edifícios são os pórticos aliados a núcleos enrijecedores, pois estes últimos atribuem elevada rigidez às ações horizontais devido a sua forma geométrica. É comum a utilização dos espaços internos do(s) núcleo(s) para abrigar escadas, poço de elevadores e para a passagem de tubulações e dutos das instalações prediais. Outros benefícios podem ser alcançados na combinação do núcleo com outro sistema estrutural, como na associação destes com pilares perimetrais formando uma estrutura tubular rígida que permite grandes espaços internos nos pavimentos sem a necessidade de pilares

intermediários. Estas vantagens fazem com que os núcleos sejam bastante utilizados para sistemas estruturais de edifícios em praticamente todo o mundo.

Como exemplo de aplicação deste sistema estrutural no Brasil cita-se o edifício *Tower Bridge Corporate* (Torre IV) do Centro Empresarial Nações Unidas - CENU, localizado na cidade de São Paulo. Trata-se de um edifício de uso comercial com 30 pavimentos concluído em 2012 (CTBUH, 2014). Sua estrutura é composta de pilares periféricos e um conjunto rígido central formado por vários núcleos que estão destacados na Figura 1.3(b). Todos os núcleos se apoiam em um grande bloco de fundação do tipo radier com 3,0 metros de altura e volume de 2700 m<sup>3</sup> em formato hexagonal (TAMAKI, 2012), conforme a Figura 1.3(c).



(a) Edifício *Tower Bridge Corporate*  
(SPCORPORATE, 2012)



(b) Pavimento tipo

Figura adaptada de SPCorporate (2012)



(c) Fundação dos núcleos estruturais (TAMAKI, 2012)

Figura 1.3 – Exemplo de edifício com núcleos estruturais

Outros exemplos de edifícios com núcleo estrutural localizados no Brasil e no mundo podem ser encontrados em Bennets et al. (1995), Pereira (1997) e CTBUH (2014).

As dimensões típicas dos núcleos em edifícios usuais permitem classificar estes elementos estruturais como barras de seção aberta com paredes finas. Peças desta classe ao serem submetidas à torção empenam, ou seja, as seções transversais sofrem deslocamentos

longitudinais de tal modo que não é possível considerar a hipótese de manutenção da seção plana. Além disso, sabe-se que a aplicação das hipóteses de torção livre da teoria clássica de Saint-Venant limita-se a casos em que o empenamento é livre, e na prática, as regiões de apoio e as ligações entre os elementos estruturais causam restrição ao empenamento. Por estes motivos a análise estrutural dos núcleos se torna complexa, sendo necessário o conhecimento de teorias específicas como a teoria da flexo torção (VLASOV, 1961). Alguns trabalhos na tentativa de contornar esta situação estudam alternativas simplificadas nas quais os núcleos são divididos em pilares-paredes ou em sistemas de pórticos equivalentes (PEREIRA, 1997).

Outra complexidade é o comportamento não linear geométrico (NLG), ou efeitos de grandes deslocamentos, que podem ter forte influência no dimensionamento, a depender da esbeltez da estrutura. Os códigos normativos apresentam metodologias para a consideração (ou dispensa) desse tipo de análise e para a estimativa de seus efeitos. Porém, muitas vezes utilizam-se técnicas simplificadas que limitam suas aplicações. É preciso ter cautela na aplicação de metodologias simplificadas para análise de edifícios de múltiplos pavimentos, principalmente em casos de esbeltez elevada e em algumas situações particulares, como quando o edifício é submetido à torção. Os efeitos não lineares podem atingir intensidades relevantes que interferem no comportamento mecânico da estrutura e algumas metodologias podem não aferir estes efeitos com precisão adequada.

Em relação ao processo de análise estrutural, devido às limitações das ferramentas de cálculo durante quase todo o século XX, tornou-se usual a divisão da estrutura em subsistemas, ou subestruturas, analisadas separadamente. Convencionou-se, por exemplo, a divisão de subsistemas horizontais e verticais, sendo o primeiro relativo à estrutura do pavimento e o segundo responsável pela resistência às ações laterais. Muitos admitem que as lajes funcionam como diafragmas infinitamente rígidos em seus planos, o que resulta em expressiva redução da quantidade de parâmetros visto que é dispensada a sua modelagem, sendo somente feita a compatibilização dos deslocamentos horizontais entre os diversos painéis de contraventamento através do chamado nó "mestre". É possível, inclusive, simplificar a análise para a utilização de modelos bidimensionais.

Este tipo de simplificação esbarra, no entanto, na representatividade da interação entre as partes componentes da estrutura tridimensional. No caso dos edifícios de concreto armado, por exemplo, a ligação monolítica entre lajes, vigas, pilares e o núcleo rígido faz com que as transmissões de esforços entre estes elementos estruturais sejam mais complexas do que os vínculos usualmente idealizados (apoios simples ou engastes). O comportamento estrutural dos edifícios depende de como se dão as interações entre os diversos elementos estruturais,

sendo a idealização destas ligações um fator relevante para a elaboração dos modelos numéricos.

Um exemplo que ganha destaque no presente trabalho é a interação entre as lajes e as paredes dos núcleos rígidos em edifícios solicitados à torção. O comportamento da estrutura do pavimento pode ser influenciado pela rigidez do núcleo estrutural empenado (TARANATH, 1988), conforme ilustrado na Figura 1.4. Esta situação causa alterações na distribuição dos esforços internos nestes elementos, e só pode ser avaliada por modelos que consideram o empenamento do núcleo.

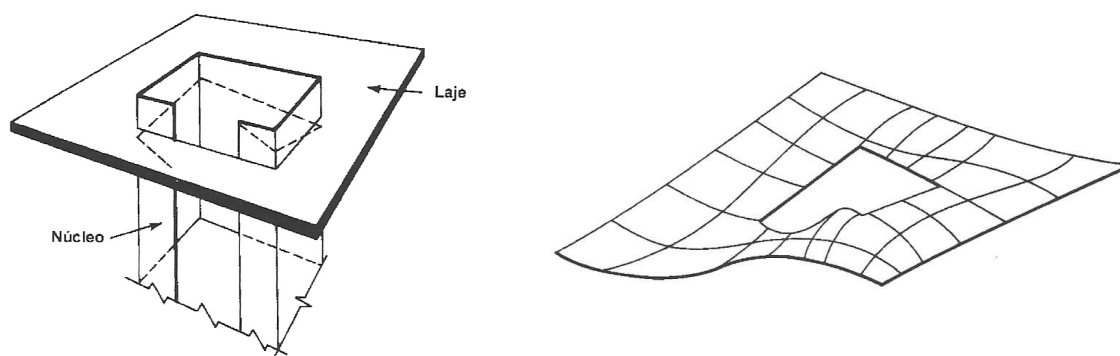


Figura 1.4 – Interação núcleo-pavimento (TARANATH, 1988)

Outro aspecto relevante diz respeito ao sistema de fundação dos edifícios. O solo, por ser um material deformável, pode ter significativa participação no comportamento da estrutura, principalmente quando as solicitações nele depositadas alcançarem valores altos. A consideração do solo como indeformável pode não ser a mais adequada, mesmo para solos com boa capacidade de carga. Se houver falha na previsão dos efeitos decorrentes da interação solo-estrutura (ISE), podem ocorrer problemas como recalques excessivos, recalques diferenciais ou até mesmo rupturas no solo. Estas situações têm influência direta no equilíbrio estrutural, podendo comprometer a estrutura por meio de solicitações inesperadas, o que pode causar, por exemplo, fissuras no prédio, dentre outros problemas estruturais.

Metodologias simplificadas têm sido largamente utilizadas para a avaliação da ISE, sendo muitas destas baseadas em formulações que desconsideram a continuidade do solo e a influência mútua entre elementos estruturais de fundações vizinhos, o que não condiz com a realidade geotécnica.

Com base nestas informações gerais, definem-se a seguir os objetivos deste trabalho dentro dos temas de análise não linear de edifícios e de ISE.

## 1.3 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo principal desenvolver um programa que permita realizar análise não linear geométrica de edifícios de múltiplos pavimentos com sistema composto por núcleos rígidos, considerando a interação entre o núcleo empenado com a estrutura das lajes nos pavimentos e também considerando a interação solo-estrutura. A partir desse objetivo geral são listados abaixo os objetivos específicos do trabalho.

### 1.3.1 Objetivos Específicos

- 1) Organizar e aperfeiçoar códigos computacionais existentes em formato capaz de permitir a análise não linear geométrica de estruturas de edifícios de múltiplos pavimentos formados por pórticos, lajes e núcleo(s) de rigidez utilizando elementos finitos de barra e de casca com formulação não linear geométrica que foram desenvolvidos em trabalhos anteriores a serem citados;
- 2) Desenvolver uma estratégia cinemática que garanta a interação completa (incluindo o empenamento) do elemento finito de barra tridimensional com seção transversal qualquer e o elemento finito de casca, considerando a não linearidade geométrica;
- 3) Estudar o fenômeno da interação entre o núcleo rígido e as lajes em edifícios de múltiplos pavimentos com uso do programa desenvolvido;
- 4) Estudar o fenômeno da interação solo-estrutura através da organização e otimização de um programa computacional existente baseado no acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, e apresentar proposta de modelo para a determinação de valores numéricos dos coeficientes de flexibilidade do solo;
- 5) Estudar os efeitos da consideração da interação entre todos os elementos estruturais e também da interação solo-estrutura na modelagem de edifícios de múltiplos pavimentos, apresentando propostas para a melhoria contínua dos métodos usuais de análise dessas estruturas.

## 1.4 Justificativa

A verticalização das cidades é um fenômeno urbanístico presente em praticamente todo o mundo no qual se observa o aumento da demanda por edifícios de múltiplos pavimentos como solução para a falta de espaço físico e para o custo elevado de terrenos nos grandes centros urbanos modernos. No Brasil isto é uma realidade em todas as regiões do país, sendo observadas fortes alterações na estrutura urbanística das cidades em decorrência do grande número de obras de edifícios que surgem a cada ano (CARVALHO; HERDY, 2013).

O aumento da demanda por edifícios de múltiplos pavimentos traz à tona a necessidade da melhoria dos modelos de análise estrutural, buscando oferecer aos profissionais da área condições para realizarem projetos mais seguros e econômicos com maior rapidez e eficiência. Afinal, acredita-se que a evolução das técnicas de análise estrutural deve acompanhar os avanços tecnológicos nas diversas áreas correlatas, como a ciência dos materiais e as técnicas construtivas. Cada vez mais novas tecnologias surgem nestes setores, oferecendo materiais de alta resistência, mais flexíveis e duradouros, técnicas avançadas para execução de obras e outros recursos que permitem que estruturas cada vez mais leves e flexíveis sejam construídas, e de maneira cada vez mais rápida. Com o aumento da esbeltez, estas estruturas passam a ser mais suscetíveis aos efeitos não lineares e a problemas de estabilidade, e técnicas mais sofisticadas de análise estrutural podem garantir melhor precisão e maior confiabilidade aos projetos estruturais.

Em relação à consideração da não linearidade geométrica, Corrêa (1991, p.178) afirma que:

[...] A assimilação de conceitos relativos à NLG é imperiosa por parte dos projetistas de estruturas, sendo necessário romper com a ideia de que a análise linear é capaz de produzir sempre os resultados suficientes para a realização do projeto do edifício. [...] com a tendência de verticalização das cidades de médio e grande porte o risco de se ter níveis de NLG altos é grande, estando o projetista compelido a rever seus modelos e instrumentação básica para a elaboração do projeto estrutural.

Aliado a isso, acredita-se que:

[...] nos atuais níveis de desenvolvimento científico e tecnológico os analistas estruturais devem estar aptos e munidos de ferramentas adequadas para realizar uma análise geometricamente exata das estruturas projetadas, [...] avaliando com segurança a capacidade portante e os níveis de deslocabilidade da mesma. [...]. (CODA, 2008, p. 2).

Deslocamentos excessivos, recalques diferenciais e redistribuição inesperada de tensões são alguns exemplos de situações indesejadas para as edificações. A rigidez estrutural deve conferir, por exemplo, níveis de deslocamentos máximos dentro de limites aceitáveis que são normalmente estabelecidos pelos códigos normativos. A falha na previsão desses deslocamentos poderá comprometer economicamente o projeto, prejudicar o uso da edificação ou até mesmo causar defeitos perigosos do ponto de vista da integridade estrutural. Avaliações errôneas quanto ao fenômeno da ISE também podem comprometer o uso da edificação e inclusive interferir em construções vizinhas.

Paralelamente, a tecnologia atual dos computadores e processadores de alto desempenho fornecem as condições para a adoção de modelos mais representativos dos problemas reais, tornando possível a utilização de modelos matemáticos refinados e processamentos que, no passado, eram considerados complexos e dispendiosos. Com o avanço dos recursos tecnológicos disponíveis, abrem-se novas possibilidades para a melhoria do cálculo estrutural e dos modelos de análise em geral.

Conclui-se que é necessário e de extrema importância que se realizem pesquisas com objetivo de estudar e propor novas formulações e avanços para os processos de análises estruturais, buscando aperfeiçoar cada vez mais os modelos numéricos existentes para análise de edificações no sentido de torna-los mais eficientes e precisos e, conseqüentemente, oferecendo ferramentas que propiciem projetos mais seguros e econômicos. O presente trabalho visa contribuir com este objetivo.

Cita-se também como justificativa para a elaboração deste trabalho a tradição do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos em pesquisas relacionadas à análise de edifícios de múltiplos pavimentos com núcleos rígidos e em análise não linear de edifícios. Deve-se destacar que vários docentes que tradicionalmente trabalhavam nessas linhas de pesquisa já se aposentaram, e os trabalhos deixados por estes docentes revelam um alto grau de qualidade. Porém, a maioria dos trabalhos desenvolvidos é baseada em técnicas relacionadas à análise matricial de estruturas, nas quais a solução particular de um elemento estrutural, em coordenada local, é manipulada algebricamente para criar o sistema de equações (matriz de rigidez) e assim solucionar a estrutura como um todo. Além disso, dentre estes trabalhos, aqueles que consideram os efeitos da não linearidade geométrica o fazem por métodos simplificados baseados na chamada teoria de segunda ordem. Muitos também consideram as fundações como apoios rígidos. Alguns trabalhos consideram a flexibilidade do solo, porém utilizam-se metodologias simplificadas, geralmente associadas a sistemas de molas que desconsideram a continuidade do meio solo. Estes



trabalhos e outros serão devidamente citados na apresentação do estado da arte, no item 1.6 desta tese.

O presente trabalho visa contribuir com o desenvolvimento relativo às áreas de análise de núcleos estruturais, análise NLG de estruturas e no estudo da ISE. A seguir, será descrita a metodologia utilizada para alcançar os objetivos.

## 1.5 Metodologia

O trabalho consiste basicamente no desenvolvimento de dois programas computacionais, tendo sido utilizado o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno. Ambos os programas foram desenvolvidos tendo como base códigos computacionais existentes que foram originalmente propostos em trabalhos de referência a serem citados. Alguns trechos destes códigos foram aproveitados, otimizados e adaptados, além da inclusão de novas sub-rotinas para enfim compor novos programas referentes aos desenvolvimentos que serão apresentadas nesta tese.

Novas implementações computacionais foram desenvolvidas especificamente para o acoplamento de topo entre a seção transversal de um elemento finito de barra tridimensional não linear geométrico e um elemento de casca não linear geométrico. Desenvolveram-se também sub-rotinas de pré e pós-processamento para a geração da malha do edifício e para o cálculo e visualização de resultados como, por exemplo, esforços seccionais do pórtico. Foram ainda produzidas implementações para a consideração da solução fundamental de Mindlin no Método dos Elementos de Contorno aplicado à modelagem do solo, além de uma estratégia para a determinação de coeficientes de rigidez do sistema de fundações.

Todos os códigos foram implementados em linguagem Fortran utilizando compilador Intel<sup>®</sup> Visual Fortran (versão 11.1) em ambiente Windows<sup>®</sup> de 64 bits. A análise de resultados contou com a utilização do programa de visualização Acadview (PACCOLA; CODA, 2005).

Foi realizado um levantamento bibliográfico de trabalhos dentro das linhas de pesquisa de análise de edifícios com núcleos rígidos, estruturas de paredes finas, não linearidade geométrica de estruturas, interação solo-estrutura, Método dos Elementos Finitos e Método dos Elementos de Contorno. A seguir, é apresentado este levantamento com breves descrições dos trabalhos encontrados e considerados relevantes, dentre dissertações, teses e artigos, tanto internacionais quanto nacionais, incluindo trabalhos que foram desenvolvidos na Escola de Engenharia de São Carlos da USP.

## 1.6 Estado da Arte

Muitos trabalhos datados da segunda metade do século XX tratam a análise estrutural de edifícios através da chamada Técnica do Meio Contínuo. Nesta técnica o sistema discreto dos andares é substituído por meios contínuos equivalentes com rigidez uniforme distribuída ao longo da altura do prédio. Isso permite a descrição do comportamento macroscópico, em termos de esforços e deslocamentos, de estruturas com características elásticas e geométricas constantes (ou com poucas variações) ao longo da altura, fato comum em edifícios. A descrição se dá através de uma equação (ou de um sistema de equações) que envolve um número reduzido de parâmetros, o que era vantajoso em uma época na qual os recursos computacionais eram escassos. Citam-se, dentre outros, os trabalhos de Stamato (1972), Rutenberg & Tso (1975), Carvalho (1980) e Rocha (1985).

Os trabalhos citados têm em comum o foco na análise da interação entre painéis de contraventamento, sendo geralmente o núcleo rígido tratado como uma "mola de torção" para o edifício. Estes trabalhos deixaram valiosas contribuições para a compreensão do comportamento mecânico dessas estruturas. Destaca-se o trabalho de Bottura (1991) no qual se avaliou o efeito da deformabilidade das lajes na distribuição de esforços horizontais em edifícios através de modelos contínuos. O autor observou que, dependendo da geometria em planta do edifício, há diferenças significativas entre modelos que consideram as lajes como diafragmas rígidos e modelos com laje deformável, principalmente nos pavimentos mais próximos à base. Citam-se também os trabalhos mais recentes de Llerena (2009) e Pinto (2011), que usam modelos contínuos para análise sísmica de edifícios com núcleos.

A aplicação da Técnica do Meio Contínuo é limitada a edifícios sem ou com pouca variação de propriedades entre pavimentos. Historicamente, com o avanço dos computadores a técnica começou a ser preterida em relação aos métodos discretos, que consistem basicamente em dividir a estrutura em várias partes interligadas entre si e conduzem a soluções mais gerais, porém com maior número de equações. Os primeiros trabalhos com aplicação de métodos discretos eram baseados na técnica de análise matricial de estruturas.

Dentre os estudos voltados para análise de núcleos estruturais com uso de métodos discretos citam-se, entre outros, os trabalhos de Taranath (1968), Heidebrecht & Swift (1971) e Smith & Taranath (1972). Em todos estes trabalhos é proposto o uso de um elemento linear baseado na teoria de Vlasov (1961) para a modelagem de núcleos rígidos. A matriz de rigidez do elemento inclui, além das incógnitas de translação e rotação, o grau de liberdade referente

ao empenamento da seção transversal, totalizando sete graus de liberdade por nó. O empenamento é calculado como a primeira derivada do deslocamento angular de torção. Nos trabalhos de Taranath (1968, 1975) são realizados estudos sobre a influência que a rigidez das lajes exerce na rigidez do núcleo com uso deste elemento. O autor realizou análise linear e observou que a interação núcleo-laje impede parcialmente o empenamento do núcleo, o que pode alterar significativamente o comportamento mecânico da estrutura, recomendando maiores cuidados na análise dos efeitos produzidos pelo empenamento dos núcleos em estruturas de edifícios.

No trabalho de Yagui (1971) é proposto um modelo discreto para análise de paredes estruturais utilizando elementos reticulados. A parede é substituída por um conjunto de vigas horizontais de rigidez infinita com extremidades em balanço ligadas por uma coluna central. Este modelo foi aperfeiçoado em Yagui (1978) para análise de instabilidade de estruturas formadas por núcleos estruturais. A vantagem é a possibilidade de analisar os núcleos com o uso de um programa de estruturas reticuladas, o que levou diversos trabalhos posteriores a fazer uso deste modelo.

Um dos trabalhos que utilizou o modelo de Yagui foi Costa (1982) em que se estudam núcleos rígidos sobre fundações flexíveis. O autor comparou os seus resultados a outro modelo baseado na Técnica do Meio Contínuo, tendo obtido boa concordância entre ambos. Observou que a flexibilidade das fundações causa o aumento das rotações das seções do núcleo próximas à base do edifício com conseqüente redução das intensidades de esforços nas paredes, sendo que para seções mais próximas ao topo não há alteração significativa.

Silva (1989) fez uso de um modelo de associação de paredes planas semelhante ao modelo de Yagui para análise de estruturas tridimensionais de edifícios com núcleos rígidos em regime NLG, sendo a não linearidade tratada via processo simplificado no qual são considerados esforços adicionais equivalentes a um efeito "P- $\Delta$ ".

No trabalho de Smith & Girgis (1984) são apresentados dois modelos discretos alternativos nos quais paredes estruturais são modeladas por elementos reticulados, sendo possível formar pórticos equivalentes aos núcleos rígidos. Os modelos são formados por vigas extremamente rígidas conectadas por barras verticais e diagonais rotuladas, oferecendo a mesma vantagem do modelo de Yagui.

Mori (1992) estudou a interação entre pórticos e núcleos rígidos em estruturas tridimensionais de edifícios através de análise matricial considerando o comportamento NLG. Para a modelagem de cada tramo do núcleo utilizou um elemento discreto com formulação baseada na teoria de flexo torção, considerando o empenamento da seção transversal com

distribuição não uniforme. Chama a atenção para a importância da consideração do comportamento não linear em edifícios com altura elevada e afirma que o processo aproximado "P- $\Delta$ " conduz a bons resultados no caso de edifícios com estrutura rígida, formados por pórticos associados a núcleos rígidos ou pilares-parede.

No trabalho de Serra (1994) são feitas contribuições ao modelo de Yagui com o intuito de analisar a influência dos lintéis, que são vigas de topo dispostas entre paredes fechando parcialmente a seção do núcleo. Avalia efeitos da não linearidade geométrica através de métodos simplificados e afirma que estes efeitos não alteram substancialmente os resultados na maioria das vezes para núcleos parcialmente fechados por lintéis. Seu modelo considera ainda a possibilidade de fundações elásticas com uso de molas.

No trabalho de Matias Junior (1997) é realizada análise matricial não linear de modelos tridimensionais de edifícios com núcleo rígido considerando fundações flexíveis. A não linearidade geométrica é considerada através da teoria de segunda ordem alterando a matriz de rigidez, e a flexibilidade do solo é simulada por método simplificado através de molas discretas, sendo que para o núcleo são previstos vínculos contínuos ou situados em pontos ao longo da linha de esqueleto. As lajes são consideradas diafragmas infinitamente rígidos em seus planos e sem resistência à flexão. O autor realiza também um estudo sobre a influência de trechos rígidos e de excentricidades de eixos nas ligações.

Pereira (1997) demonstrou as vantagens práticas da aplicação do modelo de Yagui ao compará-lo com o elemento discreto proposto por Taranath (1968), e observou erros e algumas inconveniências na utilização de modelos que aplicam elementos de barra convencional (seis graus de liberdade nodais) na modelagem dos núcleos rígidos.

Pereira (2000) comparou a aplicação de diferentes métodos discretos para avaliar a influência da modelagem de núcleos na análise de contraventamento dos edifícios. Gomes (1999) também realizou estudo comparativo entre quatro processos de cálculo para análise de núcleos, porém utilizou somente métodos baseados na Técnica do Meio Contínuo. Ambos recomendam que não sejam utilizados modelos que não consideram a teoria da flexo torção na análise de edifícios que possam apresentar rotações significativas, uma vez que estes modelos não conseguem representar adequadamente o empenamento dos núcleos.

Com o passar do tempo observou-se o aumento da popularidade de um método discreto em particular: o Método dos Elementos Finitos (MEF). A inesgotável quantidade de trabalhos acadêmicos, técnicos e científicos baseados no MEF demonstram o quão difuso se tornou este método numérico, sendo atualmente, sem dúvida, o mais utilizado para modelagem computacional em engenharia de maneira geral (SORIANO, 2003).

No caso do uso do MEF para análise de núcleos rígidos cita-se, dentre tantos outros, o trabalho de Smith & Coull (1991) no qual elementos finitos de membrana com estado plano de tensões são utilizados em associação com elementos finitos de barra para a modelagem das paredes de núcleos. A aplicação de elementos finitos de membrana para o núcleo já havia sido também estudada por Zienkiewics, Parekh & Teply (1971).

A interação solo-estrutura em núcleos rígidos via MEF é estudada no trabalho de Badie, Salmon & Beshara (1997), e tanto o núcleo rígido quanto o solo são modelados por elementos finitos planos. Os autores constataam que, quando o núcleo estrutural é calculado sem a consideração da ISE, os esforços internos ficam subestimados.

Prado (1999) utilizou o MEF para análise de edifícios considerando ações de construção. Apesar de não incluir o núcleo, este trabalho teve importante contribuição ao chamar a atenção para o equívoco em se considerar todas as ações no edifício de uma só vez, sendo mais coerente admitir a aplicação gradual do carregamento para simular o desenvolvimento da obra. Recomenda, assim, a análise sequencial para estas estruturas.

Torres (1999) realizou uma análise linear de edifícios formados por núcleos rígidos via MEF considerando a deformação por esforço cortante nas paredes através das hipóteses de viga de Timoshenko. O autor verifica que a consideração da deformação por esforço cortante causa uma redistribuição de esforços nos pilares, principalmente nos pavimentos inferiores.

Uma análise NLG tridimensional de edifícios de múltiplos pavimentos considerando a influência da rigidez transversal das lajes foi realizada no trabalho de Martins (2001). As lajes são modeladas com elementos finitos de placa DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) e DST (*Discrete Shear Theory*) e o comportamento NLG é considerado através de matrizes de rigidez deduzidas a partir da teoria de segunda ordem. O autor observou significativa influência das lajes no comportamento do edifício, principalmente quando a não linearidade geométrica é considerada. O autor também avaliou os parâmetros de estabilidade  $\alpha$  e  $\gamma_z$ , recomendados pela norma brasileira de estruturas de concreto NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) e sugere que sejam feitos mais estudos sobre estes parâmetros para aprimora-los, pois no cálculo destes coeficientes não é computada a influência das lajes, o que (segundo o mesmo) pode levar a resultados imprecisos.

Destaca-se o trabalho de Souza Junior (2001) que realizou o estudo da interação entre núcleos rígidos e lajes de edifícios de múltiplos pavimentos em regime linear. O autor utiliza elementos convencionais de pórtico, elementos de placa DKT para as lajes e um elemento especial de núcleo rígido que possui um sétimo grau de liberdade relativo ao empenamento. O acoplamento entre a laje e o núcleo se dá via condensação estática com utilização da técnica

matricial de decomposição de Cholesky. O autor constata significativa influência da rigidez das lajes no comportamento dos edifícios, além de vantagens do uso do elemento de núcleo em relação a modelos que discretizam as paredes do núcleo em cascas.

No trabalho de Santos (2008) é proposto um aprimoramento para formulações de barras tridimensionais via MEF considerando a cinemática de empenamento da seção. É desenvolvida uma metodologia para resolver o problema da torção livre de Saint-Venant de uma barra com comprimento unitário e determinar assim um modo de empenamento unitário. As seções transversais são descritas por subdomínios planos, permitindo a consideração de seções com geometria qualquer. A origem do sistema de coordenadas pode ser qualquer, incluindo o centro de gravidade e o centro de torção, cujas posições são determinadas a partir da malha discreta. O modo de empenamento unitário foi incorporado ao programa desenvolvido por Paccola (2004), como enriquecimento da cinemática de um elemento finito de barra, com o intuito de evitar erros no que se refere ao desempenho da barra para torção.

Recentemente, no trabalho de Corelhano & Corrêa (2010) é realizada análise não linear física e geométrica de edifícios com núcleo rígido, sendo os núcleos idealizados com o modelo de Yagui. O comportamento NLG é considerado através de um método de iteração direta com uso das matrizes de rigidez secantes, enquanto a não linearidade física se dá através de um método de fatias com aplicação de modelos constitutivos independentes para cada material que compõe a seção transversal. O autor constata diferenças significativas entre resultados obtidos para análise não linear quando comparados à aplicação de métodos simplificados, principalmente nos pavimentos inferiores.

Cita-se ainda o trabalho de Nunes (2011) que analisou a viabilidade de aplicação de um modelo similar ao de Yagui para a análise elástico-linear de edifícios com sistema estrutural formado por paredes de concreto armado moldadas *in loco*.

Uma metodologia para análise de estruturas de barras com paredes finas que merece destaque é a chamada Teoria Generalizada de Vigas (*Generalized Beam Theory*) também conhecida pela sigla GBT. Basicamente são considerados graus de liberdade adicionais na forma de modos de deformação da seção transversal. Citam-se os trabalhos de Schardt (1989) e Davies & Leach (1994) nos quais se considera o modo de deformação baseado na teoria de Vlassov para o empenamento de barras com seção aberta, e o trabalho de Schulz & Filippou (1998) com a mesma consideração para seções gerais. Trabalhos mais recentes apresentam aplicações da GBT para análise NLG, porém, a maioria destes utiliza métodos simplificados no tratamento da não linearidade. Citam-se, entre outros, os trabalhos de Silvestre & Camotim (2002) e Basaglia, Camotim & Silvestre (2011).

No que diz respeito à idealização do comportamento mecânico não linear da estrutura, é importante observar que os edifícios de múltiplos pavimentos ao possuírem estruturas muito esbeltas podem sofrer efeitos de grandes deslocamentos, o que traz a necessidade de um tratamento não linear associado à cinemática da estrutura. A não linearidade física é outra consideração importante, principalmente em edifícios de concreto, por conta da fissuração inerente a este material. O desenvolvimento de modelos com consideração da não linearidade física é tema de outros trabalhos realizados pelo grupo de pesquisa no qual o presente trabalho está vinculado (grupo de pesquisa em Mecânica Computacional e Métodos Numéricos do SET/EESC/USP) como, por exemplo, o trabalho de Pascon & Coda (2013) no qual se estudam modelos constitutivos não lineares para problemas com grandes deformações. Cita-se também o trabalho de Rigobello, Coda & Munaiar Neto (2014) no qual é feita análise plástica de estruturas em situação de incêndio. Embora alguns dos desenvolvimentos necessários para a consideração de leis constitutivas plásticas estejam evoluídos dentro do grupo, por questão de factibilidade, a não linearidade física não será abordada no presente trabalho. Além disso, há de se considerar a razoabilidade da adoção de leis constitutivas elástico-lineares para análise estática de edifícios, visto que na prática os projetos visam conferir a estas estruturas rigidez suficiente para que as mesmas trabalhem ainda dentro do campo das pequenas deformações. Por estes motivos, e por não ser a análise estrutural o principal foco do trabalho (mas sim a ferramenta numérica) optou-se por considerar apenas a não linearidade geométrica, sendo adotado comportamento linear físico para todos os materiais envolvidos.

Observa-se uma grande quantidade de trabalhos relacionados à análise NLG de edifícios nos quais são adotadas metodologias simplificadas baseadas na chamada teoria de segunda ordem, que recorre a descrições aproximadas que incluem termos até segunda ordem. A principal justificativa encontra-se na complexidade relacionada às formulações não lineares e as limitações quanto aos recursos computacionais disponíveis na época da realização destes trabalhos. Citam-se como exemplo, entre outros, os trabalhos de Yagui (1978), Silva (1989), Mori (1992), Matias Junior (1997), Martins (2001) e Silvestre & Camotim (2002), todos já comentados anteriormente.

Uma metodologia simplificada para análise NLG de edifícios que merece comentário é a aplicação do coeficiente  $\gamma_z$ . Este coeficiente foi proposto por Franco & Vasconcelos (1991) e se tornou usual em projeto de edifícios por ser bastante prático, tendo sido inclusive adotado pela norma brasileira de estruturas de concreto NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). No entanto, sua dedução considera regularidades na distribuição da rigidez e das propriedades geométricas e elásticas ao longo da altura do

edifício, além de outras particularidades que limitam sua aplicação e deixam dúvidas quanto à sua validade para casos mais gerais, como em edifícios com plantas assimétricas, casos de transição de pilares, edifícios submetidos à torção e na ocorrência de recalques não uniformes das fundações (VASCONCELOS, 2000).

De maneira geral, a aplicação de processos simplificados é limitada devido às hipóteses assumidas em seus desenvolvimentos. Corrêa (1991) já havia chamado a atenção para o cuidado com uso de processos aproximados na análise NLG de edifícios. Carmo (1995) comparou resultados obtidos com o uso de diferentes metodologias para análise não linear de edifícios e concluiu que processos simplificados são satisfatórios apenas dentro de certos limites. Alguns pesquisadores se esforçam para estabelecer de maneira mais adequada estes limites, como nos trabalhos de Pinto, Corrêa & Ramalho (2005) e Moncayo (2011). Apesar de que, na prática, as estruturas de edificações devam ser dimensionadas de maneira que estejam dentro destes limites (o que é uma imposição normativa), verifica-se que o uso de metodologias simplificadas deve ser realizado com cautela, principalmente no que diz respeito ao aspecto quantitativo, isto é, na aplicação destas para a mensuração dos efeitos não lineares, já que podem não oferecer resultados suficientemente precisos em alguns casos. Foi o que constatou Martins (2001), por exemplo, ao considerar a influência das lajes, conforme comentado anteriormente.

Formulações não lineares mais rigorosas e precisas são, de maneira geral, bastante complexas, principalmente quando há ocorrência de rotações no espaço tridimensional. A complexidade em se analisar a cinemática não linear das rotações no espaço tridimensional se deve ao fato de que, para estas entidades, não se aplicam algumas das leis do cálculo vetorial. Considerando-se, por exemplo, duas rotações consecutivas em torno de eixos ortogonais, a ordem de aplicação destas rotações altera o resultado final, ou seja, não vale a propriedade da comutatividade.

Na tentativa de simplificar este problema, surge uma formulação chamada de técnica corotacional, na qual se utiliza a linearização dos giros finitos pela fórmula de Euler-Rodrigues e um sistema de coordenadas locais de elementos finitos como referência para a consideração dos efeitos não lineares. Citam-se como exemplo os trabalhos de Crisfield (1990), Lavall (1996) e Gruttmann, Sauer & Wagner (2000), entre outros. Nestes trabalhos é adotada a cinemática de Euler-Bernoulli, na qual se considera que a seção transversal permanece plana e ortogonal ao eixo da barra após a deformação por flexão. Esta hipótese simplifica o modelo ao negligenciar os efeitos das tensões de cisalhamento.



Segundo Ibrahimbegovic & Taylor (2002), os trabalhos de Reissner (1972) e Antman (1976) foram os primeiros a apresentar formulações nas quais não se consideram simplificações da cinemática para a análise não linear de problemas bidimensionais que envolvem grandes deslocamentos. Algum tempo depois, estas formulações foram estendidas para problemas tridimensionais de barras em Simo (1985), tendo sido posteriormente aplicada em Simo & Vu-Quoc (1986) e Simo (1992). Em todos estes trabalhos os autores demonstram que é possível obter soluções não lineares consistentes e que fornecem resultados precisos considerando os graus de liberdade de rotação como variáveis independentes do deslocamento, isto é, não se admitindo hipóteses simplificadoras e não restringindo a cinemática. Por este motivo, diversos pesquisadores consideram estes trabalhos os pioneiros no que se convencionou chamar de formulação não linear geometricamente exata. Entretanto, a linearização dos giros finitos pela fórmula de Euler-Rodrigues continua a ser utilizada para resolver a não comutatividade de giros.

A partir de então começam a surgir diversos trabalhos baseados em formulações semelhantes que, ao longo do tempo, contribuíram para o atual estágio de conhecimentos no que se refere à análise não linear de estruturas. Citam-se, entre outros, os trabalhos de Buechter & Ramm (1992), Crisfield & Jelenic (1999) e Ibrahimbegovic & Taylor (2002). Formulações cinematicamente exatas também são encontradas em diversos trabalhos nacionais. Citam-se os trabalhos de Pimenta (1993) e Pimenta (1996) para análise de barras e Campello, Pimenta & Wriggers (2003) e Pimenta, Campello & Wriggers (2004) para análise de cascas, dentre outros. Cita-se ainda o trabalho de Pimenta & Yoyo (1993) e o recente trabalho de Campello & Lago (2014), nos quais é considerado o empenamento de barras de paredes finas devido à torção.

Observa-se que o desenvolvimento de formulações não lineares é usualmente realizado através do uso de métodos numéricos, sendo principalmente utilizado o MEF. Todos os trabalhos relacionados ao MEF que foram citados até aqui utilizam como parâmetros nodais campos de deslocamentos do sólido, o que configura a formulação dita convencional, também chamada de MEF com modelo da rigidez (ASSAN, 2003).

Nos trabalhos de Coda (2003) e Coda & Greco (2004) é apresentada uma formulação do MEF para análise NLG de pórticos bidimensionais na qual se utiliza como parâmetros nodais posições, ao invés de deslocamentos. Nestes trabalhos é considerada a cinemática de Euler-Bernoulli e adota-se um espaço adimensional auxiliar a partir do qual se desenvolve uma formulação Lagrangiana. Processo semelhante havia sido utilizado por Bonet et al. (2000) para análise de membranas. Esta formulação, a qual recebeu a denominação de

formulação posicional do MEF, foi aplicada posteriormente para análise NLG de treliças tridimensionais em Greco et al. (2006) e para análise dinâmica de sistemas de barras flexíveis em Greco & Coda (2006). Maciel & Coda (2005) fizeram uso da mesma formulação não linear adotando a cinemática de Reissner para consideração dos efeitos do cisalhamento na flexão em pórticos bidimensionais.

Coda & Paccola (2007) também fizeram uso da formulação posicional do MEF para análise NLG de cascas adotando como parâmetros posições da superfície média da casca e componentes de um vetor generalizado, resultando em um elemento com seis graus de liberdade nodais. Posteriormente, no trabalho de Coda & Paccola (2008), este elemento de casca foi adaptado para consideração da lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff, o que simplificou a linguagem da formulação não linear. A adaptação contou com a adição de um sétimo grau de liberdade nodal para a casca referente à deformação transversal ao longo da espessura com objetivo de resolver o travamento (enrijecimento errôneo) decorrente da lei constitutiva tridimensional. Esta nova formulação foi também empregada para análise dinâmica NLG de cascas em Coda & Paccola (2009).

Logo em seguida, destacam-se os trabalhos de Coda (2009) e Coda & Paccola (2010) que apresentam um elemento finito NLG de barra tridimensional com formulação desenvolvida via MEF posicional e com lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff. A cinemática deste elemento inclui, além das posições no espaço, dois vetores generalizados independentes que definem o plano da seção transversal e, por serem livres para mudar de tamanho e de direção, permitem considerar as hipóteses de Reissner para a flexão. A cinemática deste elemento inclui ainda dois enriquecimentos com o intuito de evitar problemas de travamentos decorrentes da lei constitutiva tridimensional. O primeiro enriquecimento se refere à deformação transversal para cada direção da seção e o segundo enriquecimento considera um modo de empenamento análogo ao proposto em Santos (2008), porém agora aplicado para análise NLG. O elemento finito de barra possui doze graus de liberdade por nó e a formulação não linear cinematicamente exata se mostra bastante simples e eficiente para análise de barras com seções gerais. Este mesmo elemento foi utilizado no trabalho de Coda & Paccola (2011) para análise dinâmica NLG de pórticos tridimensionais.

Diversos outros trabalhos realizados no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP têm feito uso da formulação posicional do MEF para análise não linear de estruturas em geral, sendo sua eficiência comprovada em todos estes. Cita-se o trabalho de Sampaio, Paccola & Coda (2013) que aplicou esta formulação para análise NLG de cascas

laminadas reforçadas com fibras. Cita-se também o recente trabalho de Reis & Coda (2014) que realizou análise bidimensional não linear de pórticos com ligações semirrígidas.

Em se tratando do fenômeno da ISE, existem muitos trabalhos nos quais a flexibilidade do solo é considerada através do modelo proposto por Winkler (1867). Este modelo propõe que o meio contínuo pode ser substituído por um sistema discreto de molas equivalentes, o que torna bastante simples sua implementação computacional. Citam-se, entre outros, os trabalhos de Scarlat (1993), Matias Junior (1997) e Ganainy & Naggar (2009). Cita-se ainda o recente trabalho de Sanchez (2013) que fez uso do MEF posicional e de molas tipo Winkler para análise da ISE de tubos extremamente esbeltos usados na indústria *off-shore* (*risers*) em contato com o leito do mar.

A representatividade do modelo de Winkler é alvo de críticas por parte de engenheiros e geotécnicos por não contemplar a continuidade do solo. Além disso, encontram-se dificuldades na determinação de valores para os módulos de reação das molas devido às inúmeras possibilidades de combinações entre diferentes tipos de solo, sistemas de fundações e tipos de carregamentos, sendo geralmente adotados valores estimados por correlações empíricas cuja precisão é incerta e questionável.

Na tentativa de propor metodologias que considerem o solo como meio contínuo, diversos pesquisadores fizeram uso das hipóteses advindas da Teoria da Elasticidade. Apesar do solo não ser um material elástico, estes trabalhos têm demonstrado a validade da aplicação da Teoria da Elasticidade para sua análise, desde que as propriedades elásticas, como por exemplo, o valor do módulo de Young (que neste caso pode ser chamado de módulo de deformabilidade) e o coeficiente de Poisson sejam convenientemente escolhidos em função de propriedades mecânicas do solo (BARATA, 1986). Estas propriedades, que dependem apenas do material, podem ser obtidas em laboratórios de mecânica dos solos.

Dentre trabalhos baseados na Teoria da Elasticidade cita-se o trabalho de Mindlin (1936), no qual é apresentada uma solução para o problema de forças concentradas atuando no interior de um meio semi-infinito formado por material elástico, isótropo e homogêneo. Esta solução foi posteriormente utilizada por diversos pesquisadores, como por exemplo, em Poulos & Davies (1968), Poulos (1971), Aoki & Lopes (1975) e Aoki (1987), que por sua vez serviram de base para vários outros trabalhos (IWAMOTO, 2000). A solução de Mindlin também foi utilizada no trabalho de Colares (2006) para análise da ISE de fundações rasas.

Uma maneira de se modelar o solo considerando a sua continuidade é através do uso de métodos numéricos como o MEF e/ou o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Trabalhos como o de Badie, Salmon & Beshara (1997), Medeiros et al. (2009) e Almeida et al. (2010) fazem uso do MEF para modelagem tanto da superestrutura quanto do solo. Observa-se, neste caso, a necessidade de se estabelecer uma região finita fictícia para o domínio do solo, limitando-o por superfícies a partir das quais seja possível considerar que as deformações são desprezíveis e não interferem nos resultados. Por ser necessário afastar estas superfícies limites da superestrutura a fim de garantir maior representatividade do solo, a dimensão do sistema de equações do MEF cresce, o que onera computacionalmente os modelos.

Nesse sentido, o MEC oferece maiores vantagens, pois, por ser um método de fronteira, possui formulações próprias para domínios infinitos e semi-infinitos reduzindo assim o número de equações e a quantidade de parâmetros envolvidos, principalmente no caso da análise tridimensional do solo. Dentre os trabalhos que utilizam o MEC, cita-se, dentre tantos outros, o trabalho de Barbirato (1991) no qual foi desenvolvida uma formulação do MEC para análise tridimensional elástico-linear de sólidos semi-infinitos usando como solução fundamental a solução de Mindlin. O autor demonstra que, apesar desta solução exigir a manipulação de expressões longas e sua implementação numérica ser mais trabalhosa do que a solução de Kelvin (usualmente utilizada), a quantidade de dados envolvidos é reduzida, pois a solução exige apenas a discretização das superfícies carregadas. Ao final, o autor sugere a combinação do MEC com outros métodos numéricos para análises mais eficientes de problemas de engenharia que envolvam mais de um domínio com características distintas.

De fato não se observam vantagens para a aplicação do MEC à análise de estruturas reticuladas e/ou estruturas de cascas se comparado ao MEF, por exemplo. Percebe-se que o uso da combinação entre o MEC e o MEF se mostra como uma opção mais eficiente para análise da ISE, permitindo o proveito dos benefícios de ambos os métodos numéricos onde cada um destes melhor se aplica.

Nesta linha de pesquisa cita-se o trabalho de Ramalho (1990) no qual é desenvolvido um programa para análise elástico-linear de estruturas que permite o uso de vários tipos de elementos discretos, incluindo um elemento de sapata rígida desenvolvido a partir do acoplamento MEC-MEF. É apresentado o cálculo de uma matriz de rigidez da sapata que é simetrizada para ser inserida no sistema de equações do MEF e possibilitar assim a consideração da flexibilidade de fundações do tipo direta. A simetrização se dá com a simples média dos valores dos termos opostos em relação a diagonal principal da matriz, sendo o uso de tal processo justificado pelo autor pelo fato dos termos fora da diagonal possuírem ordem

de grandeza muito inferior àqueles localizados na diagonal principal, além dos limitados recursos computacionais disponíveis na época que dificultavam o desenvolvimento de metodologias mais rigorosas.

Destaca-se o trabalho de Coda (1993), que realiza análise estática e dinâmica transiente de estruturas tridimensionais via acoplamento MEC-MEF. A formulação envolve elementos finitos de barra tridimensional e de casca, além de elementos de contorno de superfície. O acoplamento numérico é realizado com a técnica clássica de sub-regiões. Para o MEC utiliza-se a solução fundamental de Kelvin (no caso estático) e a solução fundamental de Stokes (no caso dinâmico), além de uma técnica de integração particular para elementos singulares que é utilizada no cálculo do termo livre da equação integral. O desenvolvimento desta formulação teve continuidade no trabalho de Coda (2000) com a inclusão de linhas de carga no MEC para a consideração de barras imersas no meio contínuo, como no caso de estacas cravadas no solo.

Ferro (1999) apresentou uma formulação baseada no acoplamento MEC-MEF para a análise tridimensional da interação entre estacas e o solo. O solo foi modelado via MEC com solução fundamental de Mindlin e as estacas via MEF com elementos de barra. Foi desenvolvido também um modelo para consideração do comportamento plástico do solo na interface com a estaca.

Paccola (2004) apresenta um estudo de estruturas formadas por elementos finitos de barras e cascas com material heterogêneo e anisotrópico adotando cinemática de Reissner e comportamento não linear físico, e considera a possibilidade destas estruturas estarem acopladas a meios contínuos tridimensionais modelados via MEC. Neste caso o autor adota as soluções fundamentais de Kelvin e de Mindlin e considera o comportamento viscoso do material.

Ribeiro (2009) desenvolve um programa computacional para análise linear tridimensional estática de estruturas acopladas ao solo. A superestrutura é modelada pelo MEF com uso de elementos finitos de barra e de casca, além de um elemento de estaca vertical. O solo, por sua vez é modelado com uso do MEC, utilizando uma formulação de sub-regiões para consideração de camadas com diferentes propriedades.

Nos trabalhos de Silva (2010) e Silva & Coda (2012) é realizado um estudo bidimensional da ISE com análise NLG de pórticos planos ligados a meios contínuos heterogêneos. A estrutura reticulada é modelada pelo MEF com formulação posicional, enquanto o solo é modelado via MEC adotando a solução fundamental de Kelvin. Uma técnica alternativa proposta originalmente no trabalho de Venturini (1992) para eliminação

das variáveis de força no contato entre diferentes sub-regiões é adotada com objetivo de considerar múltiplos domínios no solo. Consideram-se também linhas de carga no MEC para simulação de estacas em qualquer direção e que podem atravessar diferentes camadas do solo.

Mais recentemente, Testoni (2013) deu continuidade ao trabalho de Nunes (2001) considerando a flexibilidade do solo na análise tridimensional de edifícios com sistema estrutural formado por paredes de concreto armado moldadas *in loco*. A ISE é analisada através do método iterativo proposto por Aoki (1987).

Para maiores informações sobre alguns dos trabalhos citados e outros relacionados ao fenômeno da ISE, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Iwamoto (2000) e Ribeiro (2009), que descrevem diversas metodologias relacionadas ao tema através de seus levantamentos bibliográficos.

Dentre os diversos trabalhos até aqui citados encontram-se muitas contribuições relativas ora à proposição de modelos numéricos para análise de estruturas ora para a melhoria da compreensão do comportamento mecânico de estruturas de edifícios de múltiplos pavimentos. Nesse sentido, o presente trabalho busca reunir algumas destas contribuições para confecção de um novo modelo, sendo a seguir brevemente descritas as principais considerações, bem como a organização desta tese.

## **1.7 Considerações do presente trabalho e organização da tese**

No presente trabalho é proposto um modelo para análise tridimensional de edifícios de múltiplos pavimentos em regime NLG que considera a influência de todas as partes componentes da estrutura interagindo entre si, incluindo vigas, pilares, lajes, núcleo(s) rígido(s), peças de fundações e o solo. Não se considera a não linearidade física dos materiais.

O modelo da superestrutura do edifício é modelado via MEF com formulação posicional utilizando elementos de barra e de casca, ambos com comportamento NLG, segundo formulação proposta por Coda (2009) e Coda & Paccola (2008). A principal contribuição do presente trabalho é o desenvolvimento do acoplamento entre estes elementos discretos de maneira a permitir a avaliação da interação entre elementos estruturais com seção de paredes finas abertas (ou fechadas) empenadas e estruturas de superfície atuando como diafragmas. Os detalhes sobre essa formulação bem como todos os fundamentos teóricos relacionados à modelagem da superestrutura do edifício são apresentados no Capítulo 2.

O trabalho também propõe uma estratégia para a montagem de uma matriz de rigidez de fundação, sendo esta matriz calculada por meio de um programa baseado no acoplamento numérico entre o MEF e o MEC. Adota-se como base o programa desenvolvido em Coda (2000), tendo sido este adaptado para uso da solução fundamental de Mindlin, além dos desenvolvimentos de sub-rotinas para a montagem da matriz de flexibilidade do solo. Considera-se que as formulações do MEF e do MEC (com exceção da solução fundamental) adotadas no código base são suficiente para permitir ao presente trabalho o alcance do objetivo de se contemplar o fenômeno de ISE no modelo do edifício. Todos os desenvolvimentos relacionados ao cálculo da matriz de rigidez da fundação e à análise da ISE são descritos no Capítulo 3.

O Capítulo 4 é inteiramente dedicado aos exemplos numéricos analisados. São apresentados exemplos de validação comparando os resultados obtidos com referências citadas no item 1.6 e também com programas comerciais consagrados. Apresentam-se também alguns exemplos gerais visando demonstrar as potenciais aplicações do trabalho.

Por último, as conclusões e comentários finais são reunidos no Capítulo 5.





## 2. MODELAGEM DA ESTRUTURA DO EDIFÍCIO

Este capítulo é dedicado à apresentação dos desenvolvimentos para a modelagem da estrutura do edifício. É utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) com formulação posicional, cuja principal característica é o uso de posições e vetores generalizados como parâmetros nodais, ao invés de deslocamentos e rotações. Considera-se o comportamento não linear geométrico (NLG) de todos os elementos componentes da superestrutura através de uma formulação Lagrangiana total adotando-se como referência fixa o volume inicial não deslocado do edifício. A formulação não linear é cinematicamente exata, ou seja, não se consideram simplificações relacionadas à magnitude dos deslocamentos e rotações. Admite-se que todos os materiais envolvidos têm comportamento elástico linear.

O sistema estrutural adotado é o de núcleos rígidos associados ou não a pórticos tridimensionais (pilares e vigas) e com pavimentos estruturados por lajes maciças de superfície lisa, conforme esquematizado na Figura 2.1. Adota-se um sistema de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$ , sendo a altura do edifício medida na direção do eixo  $x_3$ .

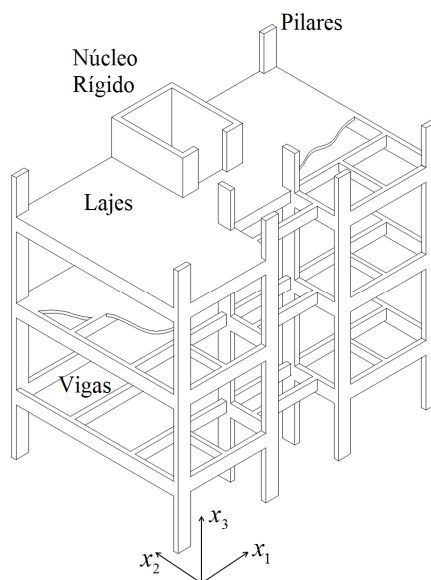


Figura 2.1 – Sistema estrutural para o modelo do edifício

Para a modelagem de pilares e vigas é utilizado o elemento finito NLG de barra tridimensional com seção qualquer proposto por Coda (2009). Este elemento finito pode ser também aplicado para a modelagem de outras eventuais peças reticuladas, como barras de treliças e diagonais de contraventamento.

As lajes são modeladas com o uso de elementos finitos de casca NLG originalmente proposto por Coda & Paccola (2008). O uso de elementos de casca ao invés de placa permite a consideração da rigidez axial e transversal para as lajes, além de permitir a melhor avaliação do acoplamento entre a estrutura do pavimento e o núcleo rígido, que é um dos objetivos deste trabalho. Elementos de casca podem ser também utilizados para modelagem de paredes estruturais, sendo que no caso dos núcleos esta aplicação servirá aqui apenas para a confecção de modelos de referência.

Os núcleos estruturais por sua vez também são modelados com o elemento de barra tridimensional, uma vez que este elemento pode assumir qualquer forma de seção transversal. Porém, é dado a este componente um tratamento especial para a consideração de diafragmas rígidos, resultando em um novo tipo de elemento finito aqui chamado de elemento de núcleo. A ideia do elemento finito para o núcleo foi inspirada no trabalho de Souza Junior (2001) e consiste basicamente em um aperfeiçoamento do elemento finito de barra considerando o acoplamento de topo entre os graus de liberdade dos nós da seção transversal com nós de casca. Neste sentido, o elemento de núcleo se diferencia do elemento de barra por considerar o acréscimo de rigidez promovido pela presença de diafragmas, que no caso dos edifícios são as lajes.

O modelo numérico contempla, portanto, todo o sistema estrutural da edificação trabalhando em conjunto, permitindo assim a análise da estrutura com contribuições da rigidez dos pilares, das vigas, do(s) núcleo(s) rígido(s) e das lajes.

No próximo item é descrito o problema do equilíbrio mecânico NLG de estruturas, que é a base para o presente desenvolvimento. Em seguida, descrevem-se os procedimentos para a montagem do sistema de equações via MEF posicional, incluindo os desenvolvimentos dos elementos finitos de barra e de casca. Posteriormente são discutidos alguns aspectos relacionados às vinculações diretas entre elementos, comentando sobre o tratamento de excentricidades e da ligação de elementos estruturais não colineares. Por último é descrita a metodologia para o acoplamento entre a casca e a seção transversal da barra, o que resulta no elemento de núcleo proposto.

## **2.1 Equilíbrio mecânico não linear do edifício**

Considerando a estrutura do edifício como um sistema estático e adiabático, pode se escrever a energia potencial total do sistema mecânico  $\Pi$  como sendo a soma da energia de

deformação  $U_e$  armazenada em todo o volume do corpo sólido deformado com a energia potencial  $P$  de todas as forças externas. Assim, o funcional da energia potencial total da estrutura formada por lajes, vigas, pilares e núcleo(s) é dado por:

$$\Pi = U_e + P \quad (2.1)$$

A energia potencial das forças externas é dada, em se tratando da formulação posicional do MEF, diretamente a partir das forças de superfície ( $p_k$ ) e/ou volumétricas ( $b_k$ ) ao longo das respectivas posições  $Y_k$  de cada ponto  $k$  como:

$$P = -\int_S p_k Y_k dS - \int_V b_k Y_k dV = -F_k Y_k \quad (2.2)$$

Os carregamentos distribuídos em áreas, linhas ou volumes foram transformados em forças concentradas  $F_k$  equivalentes nos nós da malha discreta.

Admite-se como referência o volume inicial  $V_0$  da estrutura, caracterizando assim a formulação não linear como Lagrangiana. Logo, a energia de deformação pode ser calculada a partir da energia específica de deformação  $u_e$ , também chamada de energia de deformação por unidade de volume, realizando-se uma integral no volume inicial como segue:

$$U_e = \int_{V_0} u_e(Y) dV_0 \quad (2.3)$$

A fim de encontrar a situação de equilíbrio estável do sistema mecânico aplica-se o princípio da mínima energia potencial total ao funcional de energia  $\Pi$ :

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.4)$$

Neste caso, os parâmetros de referência são as posições de cada ponto da estrutura. Obtém-se assim uma equação de equilíbrio estático da estrutura, que tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial Y_k} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_k} - F_k = 0 \quad (2.5)$$

A derivada da energia de deformação  $U_e$  em relação à posição  $Y_k$  da estrutura é igual ao seu conjugado energético, que neste caso é a força interna:

$$\frac{\partial U_e}{\partial Y} = F_{\text{int}} \quad (2.6)$$

Observando-se ainda que  $F_k$  são as forças externamente aplicadas à estrutura, pode-se reescrever a equação de equilíbrio (2.5) em uma forma simples:

$$F_{\text{int}} - F_{\text{ext}} = 0 \quad (2.7)$$

Para se calcular as forças internas  $F_{\text{int}}$  é necessário conhecer as posições nodais da estrutura em sua configuração deformada. Como estas posições são as incógnitas do

problema, percebe-se que a equação (2.7) é uma equação não linear, sendo necessária a aplicação de um método iterativo para sua solução. Neste trabalho utiliza-se o processo de solução de sistemas não lineares de Newton-Raphson.

Rescreve-se a equação de equilíbrio (2.7) como sendo igual a um vetor resíduo  $r(Y')$  função de posições tentativa  $Y'$ . Se a posição tentativa for igual à solução do problema o valor do resíduo será nulo. Fisicamente isso significa que o equilíbrio de forças foi atingido e a estrutura está estável. Porém, enquanto  $r$  não tiver valor nulo, este resíduo indicará um fator de correção que deve ser aplicado à posição  $Y'$  para uma nova tentativa em um ciclo de sucessivas iterações. Neste caso, o vetor  $r$  pode ser entendido como um vetor de desbalanceamento de forças do sistema mecânico. Do que foi descrito escreve-se que:

$$r(Y') = F_{\text{int}}(Y') - F_{\text{ext}} \quad (2.8)$$

Para encontrar um fator de correção  $\Delta Y$  a ser aplicado na posição  $Y'$  para uma nova tentativa realiza-se uma expansão em série de Taylor para  $r(Y')$  em torno de  $Y'$  da seguinte maneira:

$$r_j(Y_l') = r_j(Y_l^{t0}) + \left. \frac{\partial r_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^{t0})} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (2.9)$$

Desconsiderando-se os termos de ordem superior  $O_j^2$  e admitindo-se a situação de equilíbrio (na qual o resíduo é nulo) a seguinte relação é obtida:

$$\Delta Y_k = - \left( \left. \frac{\partial r_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^{t0})} \right)^{-1} r_j(Y_l^{t0}) \quad (2.10)$$

É importante observar que a desconsideração dos termos de ordem superior da equação (2.9) não implica em simplificação relacionada ao equilíbrio mecânico, tendo influência apenas na convergência do método de solução.

Observando-se as equações (2.8) e (2.6) verifica-se que a derivada de  $r$ , ou do vetor de desbalanceamento de forças, em relação às posições nodais é igual à derivada segunda da energia de deformação  $U_e$ . A matriz resultante do arranjo entre estas derivadas de segunda ordem é a Hessiana da energia potencial total do sistema mecânico, e neste caso, representa a matriz de rigidez tangente  $K$  da estrutura:

$$\left. \frac{\partial r_j}{\partial Y_k} \right|_{(Y_l^{t0})} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{(Y_l^{t0})} = K_{kj} \quad (2.11)$$

Assim, é possível aplicar a técnica de solução de Newton-Raphson, da seguinte maneira: primeiramente é escolhida uma posição tentativa inicial  $Y^{t(i=0)}$  para a estrutura, o que permite o cálculo da energia de deformação e, conseqüentemente das forças internas; determina-se o vetor de desbalanceamento (ou o valor do resíduo) pela equação (2.8); calcula-se em seguida a Hessiana da energia potencial pela equação (2.11) e com ela é determinado o fator de correção com a equação (2.10); este fator de correção deve ser somado à tentativa inicial para uma nova iteração  $i+1$ , isto é:

$$Y^{t(i+1)} = Y^{t(i)} + \Delta Y \quad (2.12)$$

Neste trabalho, adota-se como primeira solução tentativa a posição indeformada da estrutura no primeiro passo de carga, ou a última posição de equilíbrio do passo de carga anterior.

Com o novo vetor de posições "corrigido"  $Y^{t(i+1)}$  o procedimento é repetido sucessivas vezes, até que uma das seguintes condições se verifique:

$$\frac{|\Delta Y|}{|Y^t|} < tol \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{|r|}{|F_{\text{ext}}|} < tol \quad (2.14)$$

sendo  $tol$  o valor de uma tolerância numérica pré-definida para estabelecer uma precisão satisfatória de acordo com o tipo de problema. Em trabalhos já desenvolvidos pelo grupo de pesquisa do qual o presente trabalho faz parte observou-se que o controle em deslocamentos (neste caso em mudança de posições) segundo a condição (2.13) tem se mostrado suficiente para atingir resultados satisfatórios com uma tolerância da ordem de  $10^{-7}$ , mesmo em problemas com alto grau de não linearidade. Isto pode ser comprovado nos trabalhos citados como referência e será novamente discutido na apresentação dos exemplos numéricos processados neste trabalho.

Ao final do processo iterativo tem-se então a posição referente à configuração de equilíbrio da estrutura no passo de carga estudado. Os deslocamentos são calculados em uma rotina de pós-processamento para cada ponto pela diferença entre a posição final de equilíbrio e a posição inicial.

A aplicação do carregamento pode se dar de maneira incremental através de passos de carga. A variação do incremento é definida através de parâmetros dados no arquivo de entrada para funções do tipo salto, linear, quadrática, trigonométrica ou exponencial. Este recurso

também pode ser útil quando se deseja coletar informações que permitam traçar a trajetória de equilíbrio de estruturas altamente não lineares para identificar pontos críticos de instabilidade, como pontos de bifurcação do equilíbrio ou pontos limites de problemas sujeitos a ocorrência do efeito *snap-through* (CRISFIEL, 1991).

A formulação permite ainda fácil adaptação para análises sequenciais de problemas que envolvem mudanças nas condições de contorno. Para isto, basta que seja realizado um *loop* da metodologia descrita, devendo ser lido em um arquivo de entrada os dados referentes aos carregamentos e as restrições dos vínculos no início de cada fase, que podem ser diferentes. A posição de equilíbrio encontrada para uma fase de carregamento será a posição tentativa inicial da fase seguinte. Este recurso possibilita, por exemplo, a aplicação do programa à análise de estruturas submetidas à ações de construção (PRADO, 1999). Apesar dos objetivos do presente trabalho não contemplarem esses tipos de análise, o programa possui recursos para a consideração de incrementos de carga e de fases de carregamentos.

Conforme pode se observar nas equações (2.6) e (2.11) o procedimento numérico compreende o cálculo da primeira e da segunda derivada da energia de deformação, que resultam, respectivamente, no vetor de forças internas e na matriz de rigidez tangente (ou Hessiana) da estrutura. A seguir serão apresentados os desenvolvimentos para o cálculo destas derivadas, completando assim a descrição da solução numérica.

## 2.2 Montagem do sistema de equações

A montagem do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente é realizada através do MEF, compondo assim o sistema de equações descrito no item anterior. O desenvolvimento desta etapa parte da análise da mudança de forma da estrutura por uma ação externa qualquer.

A mudança de forma do edifício (ou de qualquer corpo sólido) pode ser descrita por uma função mudança de configuração  $\vec{f}$  com seu respectivo gradiente  $A$ . Com o objetivo de simplificar a formulação não linear adota-se um espaço adimensional auxiliar ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ), de maneira que podem ser definidas funções  $\vec{f}^0$  e  $\vec{f}^1$  que fazem a transformação (ou o mapeamento) do sólido do sistema adimensional auxiliar para, respectivamente a configuração inicial  $V^0$  e atual (ou corrente)  $V^1$ . Este espaço auxiliar pode ser utilizado como "caminho" alternativo para descrever a mudança de forma do sólido, conforme esquematizado na Figura 2.2.

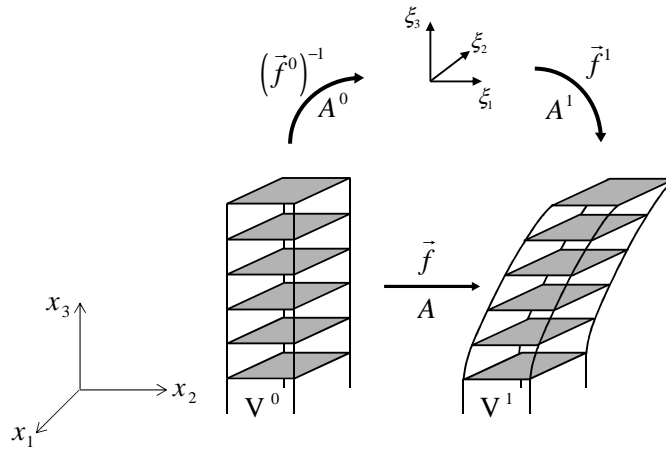


Figura 2.2 – Mudança de forma da estrutura

A ideia é válida também para cada elemento finito que compõe a estrutura discreta, e funções de mapeamento locais  $\bar{f}^0$  e  $\bar{f}^1$  são determinadas de acordo com a geometria e a cinemática adotada para cada tipo de elemento. A obtenção das funções de mapeamento para os elementos aqui utilizados é o tema dos próximos itens deste capítulo.

Independente da maneira como foram obtidas, para cada uma destas funções é possível calcular os seus respectivos gradientes da seguinte maneira:

$$A^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_3^0}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_3^0}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_3^0}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_3^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_3^1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_3^1}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Estes gradientes são valores conhecidos, uma vez que o primeiro refere-se à configuração não deformada da estrutura e o segundo fica definido a partir de uma posição tentativa para uma iteração do processo de solução não linear, conforme descrito no item anterior.

Aplicando-se a ideia da descrição indireta da mudança de forma da estrutura (Figura 2.2), é possível determinar o gradiente  $A$  a partir dos gradientes  $A^0$  e  $A^1$  com o uso da seguinte relação (CODA; PACCOLA, 2008):

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.17)$$

e assim o tensor de estiramento de Cauchy-Green pode ser então calculado, uma vez que o mesmo é dado por (BONET; WOOD, 2009):

$$C = A^T \cdot A = (A^0)^{-T} \cdot (A^1)^T \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.18)$$

Conhecido o tensor de estiramento de Cauchy-Green é possível calcular o tensor de deformações de Green-Lagrange, que será denotado aqui pela letra grega  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.19)$$

Em (2.19),  $I$  é a matriz identidade.

A deformação de Green-Lagrange é uma medida de deformação que melhor se aplica à análise NLG de sólidos (CRISFIELD, 1991). É importante comentar que, para problemas que envolvem pequenas deformações, mesmo que ocorram grandes deslocamentos, esta medida se confunde com a deformação convencional de engenharia, sendo esta última a definição clássica análoga à medida por extensômetro.

Optou-se por adotar neste trabalho como lei constitutiva do material o modelo linear de Saint Venant-Kirchhoff, no qual a deformação de Green-Lagrange se relaciona linearmente com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $S$  (BONET; WOOD, 2009). Essa lei constitutiva é análoga à lei de Hooke, sendo possível escrever que:

$$S = D : \varepsilon \quad (2.20)$$

onde  $D$  é o tensor elástico constitutivo, que para materiais elástico-lineares isotrópicos e homogêneos é dado (em notação de índice) por:

$$D_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.21)$$

sendo  $E$  e  $\nu$ , respectivamente, o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) e o coeficiente de Poisson do material e  $\delta$  o Delta de Kronecker. Na equação (2.20), o símbolo ":" significa contração dupla dos tensores.

A energia específica de deformação pode ser definida a partir da deformação de Green-Lagrange na seguinte forma:



$$u_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.22)$$

Relembrando das equações (2.3) e (2.6), sabe-se que a força interna atuante na estrutura é função de  $u_e$  na seguinte forma:

$$F = \frac{\partial U_e}{\partial Y} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y} dV_0 \quad (2.23)$$

Deve-se observar que  $u_e$  é função de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pela equação (2.22), que por sua vez é função de  $C$ , conforme a equação (2.19), e que esta última depende das incógnitas nodais, que são as posições  $Y$ . Assim, é possível escrever a derivada de  $u_e$  em relação às posições na seguinte forma compacta:

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y} = \frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial C} : \frac{\partial C}{\partial Y} \quad (2.24)$$

A derivada da energia específica de deformação em relação a deformação de Green resulta na tensão de Piola-Kirchhoff, que é o seu conjugado energético, isto é:

$$\frac{\partial u_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = S \quad (2.25)$$

Além disso, a derivada de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  em relação ao tensor de estiramento de Cauchy vale 1/2. Logo, a equação (2.24) pode ser simplificada obtendo-se como resultado:

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y} = \frac{1}{2} S : \frac{\partial C}{\partial Y} \quad (2.26)$$

O tensor das tensões de Piola-Kirchhoff é conhecido, já que depende apenas do tensor elástico e da deformação de Green, dadas respectivamente por (2.21) e (2.19). Resta, portanto, calcular a derivada de  $C$  em relação às posições nodais da estrutura na configuração atual. Observando-se a relação dada em (2.18), chega-se a conclusão que:

$$\frac{\partial C}{\partial Y} = (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^I)^T}{\partial Y} \cdot A^I \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \cdot (A^I)^T \cdot \frac{\partial A^I}{\partial Y} \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.27)$$

É importante lembrar que ambos os gradientes  $A^0$  e  $A^I$  são funções das posições nodais da estrutura, neste caso, para cada nó de cada elemento finito da estrutura discreta.

Definida a equação (2.26), é possível implementar numericamente a (2.23) convertendo-se a integral no volume em uma integral tripla no sistema de referência auxiliar, o que resulta na seguinte expressão que permite o cálculo do vetor das forças internas  $F_i^k$ :

$$F_i^k = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^k} dV_0 = \int \int \int \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \det(A^0) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.28)$$

sendo que o índice inferior  $i$  indica a direção da força e o índice superior  $k$  refere-se ao nó. Observa-se que, neste caso, o determinante da matriz  $A^0$  é o Jacobiano de transformação.

Para montar a matriz de rigidez tangente (ou a Hessiana) é preciso calcular a segunda derivada de  $U_e$  em relação às posições nodais, conforme a equação (2.11) a seguir reescrita:

$$K_{ij}^{kl} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} dV_0 \quad (2.29)$$

onde os índices  $j$  e  $l$  são análogos à  $i$  e  $k$ . É necessário, portanto, derivar novamente a equação (2.26), o que resulta em:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} = \frac{\partial}{\partial Y_j^l} \left( \frac{1}{2} S : \frac{\partial C}{\partial Y_i^k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial Y_j^l} : \frac{\partial C}{\partial Y_i^k} + S : \frac{\partial^2 C}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} \right) \quad (2.30)$$

O primeiro termo da (2.30) consiste na derivada do tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, ou seja:

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = D : \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} = \frac{1}{2} D : \frac{\partial C}{\partial Y} \quad (2.31)$$

A primeira derivada do tensor de deformações de Cauchy já foi calculada, sendo dada em (2.27). Utiliza-se esta mesma equação para calcular a segunda derivada, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} &= (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial^2 (A^1)^T}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^1)^T}{\partial Y_i^k} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_j^l} \cdot (A^0)^{-1} + \\ &(A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^1)^T}{\partial Y_j^l} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_i^k} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \cdot (A^1)^T \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} \cdot (A^0)^{-1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da mesma forma que o vetor de forças internas, torna-se possível implementar numericamente a equação (2.29) através de uma integral tripla no sistema de referência auxiliar:

$$K_{ij}^{kl} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} dV_0 = \int \int \int \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l} (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \det(A^0) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.33)$$

As equações (2.28) e (2.33) podem ser convertidas em integrais numéricas utilizando-se uma malha de elementos finitos para gerar, respectivamente, o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente da estrutura. Para a integral numérica dos elementos finitos de barra é adotada a quadratura de Gauss-Legendre no comprimento e de Hammer nas aproximações da seção transversal, conforme será visto no próximo item. Já para os elementos de casca utilizam-se pontos e pesos de Hammer para aproximar a superfície e a quadratura Gaussiana é aplicada ao longo da espessura. Dessa maneira, as integrais triplas são

convertidas em dois somatórios, resultando aquelas equações nas seguintes integrais numéricas:

$$F_i^k = \sum_{m_g=1}^{n_g} \sum_{m_h=1}^{n_h} \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \omega_{m_g} \omega_{m_h} \det(A^0) \quad (2.34)$$

$$K_{ij}^{kl} = \sum_{m_g=1}^{n_g} \sum_{m_h=1}^{n_h} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_i^k \partial Y_j^l}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \omega_{m_g} \omega_{m_h} \det(A^0) \quad (2.35)$$

onde  $n_g$  e  $n_h$  são, respectivamente, o número de pontos de Gauss e o número de pontos de Hammer adotados e  $\omega$  são os pesos de cada quadratura. Maiores informações sobre estas quadraturas podem ser encontradas, por exemplo, em Assan (2003).

A seguir, apresenta-se um resumo dos procedimentos até aqui descritos que sintetizam o algoritmo para a montagem do sistema de equações do MEF:

1. Primeiramente calculam-se os gradientes  $A^0$  e  $A^1$  pelas equações (2.15) e (2.16);
2. Determina-se o tensor de estiramento de Cauchy com a (2.18);
3. Calcula-se o tensor das deformações de Green-Lagrange e o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff respectivamente pelas expressões (2.19) e (2.20);
4. Calcula-se  $\partial A^1 / \partial Y$  para em seguida calcular a primeira derivada do tensor que estiramento de Cauchy em relação às posições, conforme a (2.27);
5. Torna-se possível calcular a derivada de  $u_e$  pela (2.26) e com isso monta-se o vetor de forças internas com uso da integral numérica dada em (2.34);
6. Calculam-se as segundas derivadas do gradiente  $A^1$  e do tensor de estiramento de Cauchy, conforme a (2.32);
7. Determina-se a derivada do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff com a (2.31);
8. É possível calcular então a segunda derivada de  $u_e$  através da (2.30) para em seguida realizar a integração numérica dada em (2.35), obtendo-se assim a matriz Hessiana.

Estes procedimentos em conjunto com aqueles descritos no item 2.1 formam o algoritmo principal do programa de análise NLG. A metodologia é válida para toda a estrutura, bem como para cada parte constituinte desta. Assim, para a montagem de uma matriz de rigidez tangente e de um vetor de forças internas da estrutura como um todo são utilizados elementos finitos calculando-se primeiramente matrizes e vetores locais que, a partir das incidências dos nós, irão compor um sistema algébrico global. Nos itens que

seguem serão descritos os desenvolvimentos para a obtenção das funções de mapeamento locais  $\vec{f}^0$  e  $\vec{f}^1$  para os elementos finitos de barra e de casca.

Antes de apresentar o desenvolvimento de cada elemento, comenta-se sobre o cálculo da tensão de Cauchy como complementação da descrição do método numérico. Afinal, a tensão de Piola-kirchhoff foi calculada tendo como referência o volume inicial não deformado da estrutura, e carece de uma interpretação física. A tensão de Cauchy  $\sigma$ , ou tensão verdadeira, pode ser calculada ao final do processo a partir da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie com a seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^T \quad (2.36)$$

sendo  $J$  o determinante do gradiente  $A$ . É possível também calcular o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie  $P$  dado pela relação  $P = A \cdot S$ .

## 2.2.1 Mapeamento do Pórtico: Elemento Finito NLG de Barra

O elemento finito de barra tridimensional adotado foi apresentado originalmente em Coda (2009) como sendo um elemento "tipo-sólido" por definir pontos no espaço por meio da discretização tanto da linha longitudinal quanto das seções transversais da barra.

Os elementos de barra se caracterizam por possuir uma de suas dimensões no espaço muito maior do que as demais dimensões, neste caso, o comprimento. Nesse sentido, um primeiro mapeamento de pontos pertencentes ao elemento finito de barra é feito ao longo de uma linha de referência longitudinal que define um eixo no seu comprimento.

Adotando um espaço adimensional auxiliar ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) como referência, sendo  $\xi_1$  medida na direção longitudinal da barra, a posição inicial  $x$  de um ponto qualquer sobre a linha de referência pode ser aproximada por funções de forma polinomiais da seguinte maneira:

$$x_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot X_i^\ell \quad (2.37)$$

sendo o índice  $\ell$  referente ao nó do elemento finito,  $\phi_\ell$  a função de forma correspondente aquele nó e  $X_i^\ell$  o valor da posição do nó na direção  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

A equação (2.37) fornece um mapeamento apenas sobre a linha de referência. A fim de mapear pontos do corpo sólido que estejam fora desta linha são adotados vetores generalizados  $\vec{V}^{1\ell}$  e  $\vec{V}^{2\ell}$  para cada nó  $\ell$  da barra com origem no nó. A Figura 2.3(a) ilustra

um exemplo do mapeamento com estes vetores para um elemento de barra com dois nós, seção retangular e linha de referência passando pelo centro de gravidade da seção transversal.

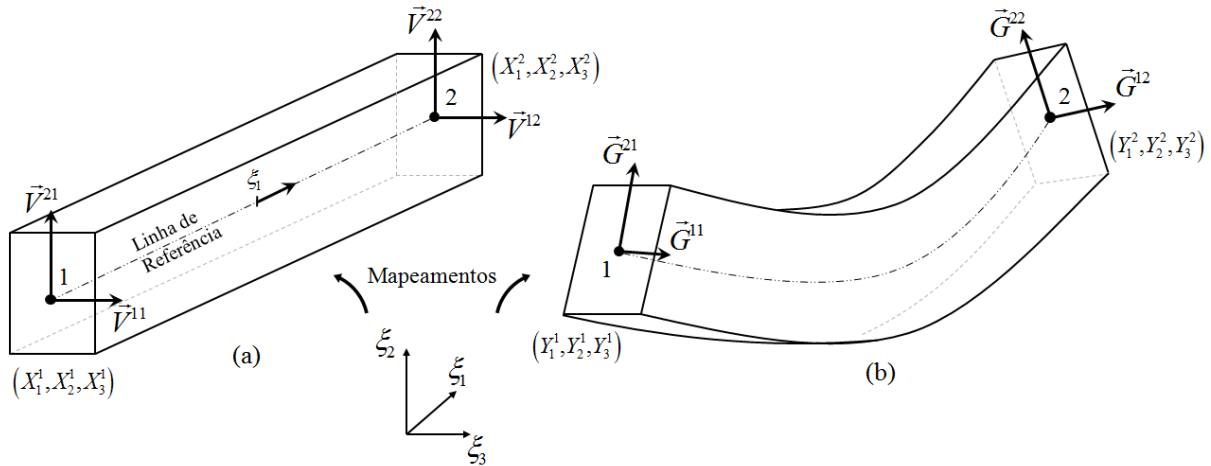


Figura 2.3 – Mapeamento (a) inicial e (b) corrente de um elemento de barra

Os vetores  $\vec{V}^{1\ell}$  e  $\vec{V}^{2\ell}$  definem o plano da seção transversal em cada nó e podem ser compreendidos como parâmetros relacionados à inclinação (ou ao giro) da seção. Porém, nesta formulação não há necessidade de impor limitações a estes vetores, não sendo os mesmos obrigatoriamente ortogonais à linha de referência. Este recurso provê maior generalidade da formulação permitindo a consideração da cinemática de flexão de Reissner-Timoshenko, na qual a seção permanece plana, mas não necessariamente ortogonal à linha média. Desta maneira, consideram-se os efeitos das tensões de cisalhamento na flexão.

Com uso destes vetores, o mapeamento para qualquer ponto do elemento de barra tridimensional na sua configuração inicial passa a ser descrito na seguinte forma:

$$x_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot X_i^\ell + \frac{b_1^0}{2} \xi_2 \phi_\ell(\xi_1) \cdot V_i^{1\ell} + \frac{b_2^0}{2} \xi_3 \phi_\ell(\xi_1) \cdot V_i^{2\ell} \quad (2.38)$$

sendo  $b_1^0$  e  $b_2^0$  as respectivas dimensões da seção transversal (nas direções de  $\vec{V}^{1\ell}$  e  $\vec{V}^{2\ell}$ ) para o caso de barras com seção retangular.

Por conveniência, é assumido para a configuração inicial (ou não deformada) da barra que os vetores  $\vec{V}^{1\ell}$  e  $\vec{V}^{2\ell}$  são unitários e ortogonais ao eixo longitudinal. Para a configuração deformada (ou corrente durante o processo de análise NLG) são tomados outros dois vetores generalizados  $\vec{G}^{1\ell}$  e  $\vec{G}^{2\ell}$  análogos aos vetores da configuração inicial. Estes novos vetores são livres para mudar (ou não) de tamanho e de direção sendo, portanto, incógnitos. Dessa maneira, considera-se a possibilidade do elemento de barra sofrer mudanças nas dimensões da seção transversal bem como girar livremente em relação ao ponto por onde passa a linha de

referência longitudinal. Na Figura 2.3(b) ilustra-se um caso hipotético da configuração deformada (ou corrente) da viga de seção retangular.

Assim, de forma análoga ao mapeamento inicial, o mapeamento de posições  $y$  de um ponto qualquer da barra para a sua configuração deformada (ou corrente) fica definido por:

$$y_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot Y_i^\ell + \frac{b_1^0}{2} \xi_2 \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell} + \frac{b_2^0}{2} \xi_3 \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell} \quad (2.39)$$

onde  $Y_i^\ell$  é o valor da posição atualizada do nó.

Apesar das equações (2.38) e (2.39) terem sido apresentadas para uma barra de seção retangular, esta formulação pode ser estendida para barras com seções transversais de formas geométricas quaisquer, permitindo assim aplicações mais gerais. Nesse sentido, são utilizados elementos finitos planos para formar uma malha discreta da seção transversal, seguindo o trabalho de Coda & Paccola (2009) para materiais formados por lâminas. Considera-se que a seção de cada elemento é constante ao longo do comprimento.

O plano da seção transversal inicial é gerado pelos vetores generalizados com origem na linha de referência e dados em qualquer posição ao longo da barra em função dos seus valores nodais como:

$$\bar{v}^1(\xi_1) = \phi_\ell(\xi_1) \bar{V}^{1\ell} \quad (2.40)$$

$$\bar{v}^2(\xi_1) = \phi_\ell(\xi_1) \bar{V}^{2\ell} \quad (2.41)$$

Na Figura 2.4(a) pode-se ver uma seção transversal hipotética originalmente quadrada sobre um ponto nodal da barra. Uma malha aproximadora para o campo de posições sobre a superfície da seção é constituída a partir de pontos  $(a^\gamma, b^\gamma)$  gerados em pré-processador de elementos triangulares planos, no caso, de ordem cúbica. Assim, a posição de um ponto qualquer sobre a seção na configuração inicial é obtida substituindo-se a expressão (2.38) por:

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_\ell(\xi_1) \cdot X_i^\ell + \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma \cdot \bar{v}^1(\xi_1) + \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma \cdot \bar{v}^2(\xi_1) \quad (2.42)$$

onde  $\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3)$  é o conjunto de funções de forma do elemento de aproximação cúbica.

Expressão análoga é gerada para a configuração atual, ou seja:

$$y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_\ell(\xi_1) \cdot Y_i^\ell + \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma \cdot \bar{g}^1(\xi_1) + \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma \cdot \bar{g}^2(\xi_1) \quad (2.43)$$

onde as coordenadas  $(a^\gamma, b^\gamma)$  são mantidas, pois não são variáveis do problema, e a mudança de posição dos pontos da seção transversal se faz pelo mapeamento dos vetores generalizados incógnitos nos nós  $\bar{G}^{1\ell}$  e  $\bar{G}^{2\ell}$ , conforme a Figura 2.4(b). Estes vetores constituem os vetores generalizados  $\bar{g}^1$  e  $\bar{g}^2$  em qualquer posição ao longo da barra por aproximação análoga às

equações (2.40) e (2.41). Desta maneira o programa permite a consideração de seções gerais com qualquer forma geométrica. Na Figura 2.5 ilustra-se situação análoga para uma seção tipo "U".

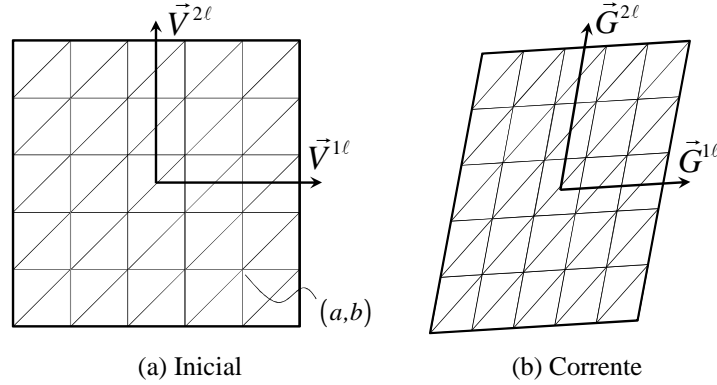


Figura 2.4 – Seção transversal quadrada

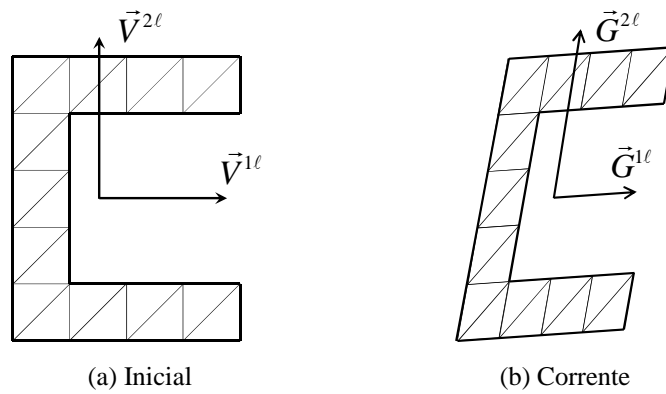


Figura 2.5 – Seção transversal tipo "U"

Colocando-se todas as aproximações consideradas em uma mesma expressão, resultam os mapeamentos do elemento de barra NLG na seguinte forma:

$$x_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot X_i^\ell + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot V_i^{1\ell}] + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot V_i^{2\ell}] \quad (2.44)$$

$$y_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot Y_i^\ell + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell}] + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell}] \quad (2.45)$$

A linha de referência pode passar por qualquer ponto da seção transversal, sendo este ponto a origem dos vetores generalizados, conforme os exemplos apresentados nas Figuras 2.4 e 2.5. A escolha da posição desta origem local é livre. No entanto, os efeitos de forças aplicadas diretamente sobre um nó do elemento finito de barra dependem da posição da linha de eixo, uma vez que todas as integrais da solução numérica são realizadas tendo como referência o ponto escolhido para a origem dos vetores. Para casos de seções transversais cuja origem escolhida não passe pelo centro de cisalhamento, por exemplo, qualquer força

transversal aplicada irá gerar torção na barra. Para forças normais à seção, se a linha de referência passar pelo centro de gravidade, estas forças irão gerar distribuição uniforme de tensões normais, caso contrário, as mesmas irão produzir flexão-composta. Logo, a escolha da posição da origem na seção transversal deve ser feita conforme o problema mecânico que se deseja analisar.

Neste trabalho adota-se a seguinte metodologia: a geração da malha da seção transversal pode ser feita a partir de uma origem qualquer do sistema de coordenadas local gerado pelos vetores iniciais (configuração indeformada); ainda na fase de pré-processamento, o programa oferece a opção de manter a origem inicial ou alterá-la para o centro de gravidade, o centro de cisalhamento (ou centro de torção) ou ainda para um ponto qualquer definido pelo próprio usuário via arquivo de entrada. As coordenadas do centro de gravidade e do centro de cisalhamento são calculadas de maneira aproximada com uso da malha discreta. No caso do centro de cisalhamento, os procedimentos estão descritos no APÊNDICE A desta tese.

Maiores detalhes sobre este recurso serão discutidos ainda neste capítulo para demonstrar possíveis tratamentos de excentricidades entre ligações de peças da estrutura tridimensional do edifício.

Até o momento, a formulação do elemento finito de barra NLG inclui em um total de nove graus de liberdade por nó, dentre as posições  $Y_i$  e as componentes dos vetores  $\vec{G}^{1\ell}$  e  $\vec{G}^{2\ell}$ . Entretanto, sabe-se que para leis constitutivas tridimensionais de sólidos a cinemática de Reissner pode apresentar problemas de travamento (BISCHOFF; RAMM, 2000). Este travamento se manifesta na forma de um enrijecimento errôneo da estrutura e é causado pelo efeito de Poisson e por um "desequilíbrio" entre as aproximações das deformações normais e das deformações transversais (CODA, 2009). Como o elemento de barra adotado tem características que o assemelham a um sólido, a cinemática dada pela expressão (2.45) ainda pode resultar em erros, principalmente no caso de torção.

Para resolver esse problema devem ser considerados enriquecimentos cinemáticos que incluam as deformações transversais e o empenamento da seção, dando assim as mobilidades necessárias para captar adequadamente a mudança de forma do elemento. O uso de uma malha discreta sobre a seção transversal facilita a implementação de novos parâmetros para considerar tais enriquecimentos.

O primeiro enriquecimento adicionado à cinemática da barra leva em conta a possibilidade de que ao longo de cada uma das dimensões da seção transversal podem ocorrer deformações transversais com intensidade variável. Considera-se que fibras mais próximas à



linha de referência possam sofrer deformações no plano da seção diferentes das fibras mais afastadas dessa linha, permitindo ao material sua deformação transversal com uma variação linear para cada direção da seção. Deve-se observar que essas novas variáveis são consideradas somente na configuração corrente e não mudam as dimensões da seção transversal.

Adotam-se então novas variáveis  $\tilde{\Lambda}$  e  $\tilde{\Upsilon}$  que representam às intensidades de deformações transversais da seção, sendo estas aproximadas em termos de elementos finitos ao longo da linha de eixo na seguinte forma:

$$\tilde{\Lambda}(\xi_1) = \phi_\ell(\xi_1) \Lambda^\ell \quad (2.46)$$

$$\tilde{\Upsilon}(\xi_1) = \phi_\ell(\xi_1) \Upsilon^\ell \quad (2.47)$$

Neste caso são considerados dois novos vetores de parâmetros nodais  $\Lambda^\ell$  e  $\Upsilon^\ell$  que contêm as taxas de variação da deformação transversal respectivamente para cada direção do plano da seção. Estes novos parâmetros são inseridos na equação (2.45) enriquecendo, assim, a cinemática da configuração deformada, o que resulta em:

$$y_i = \phi_\ell(\xi_1) \cdot Y_i^\ell + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell}] + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell}] + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma]^2 \cdot [\phi_\alpha(\xi_1) \cdot \Lambda^\alpha] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell}] + [\vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma]^2 \cdot [\phi_\alpha(\xi_1) \cdot \Upsilon^\alpha] \cdot [\phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell}] \quad (2.48)$$

Ainda é necessário considerar, na cinemática do elemento de barra, deslocamentos da seção fora de seu plano de maneira a permitir a consideração do empenamento e, conseqüentemente, eliminando o problema de travamento devido à torção. Adota-se a metodologia proposta originalmente no trabalho de Santos (2008), na qual é considerada a teoria de Saint-Venant para resolver o problema da torção livre de barras prismáticas e determinar, assim, um modo de empenamento unitário. Os procedimentos para a determinação deste modo de empenamento estão descrito no APÊNDICE A.

A fim de incluir a cinemática de empenamento da seção para o elemento de barra, um novo termo será acrescentado à expressão (2.48) referente ao empenamento por unidade de comprimento. Para isso, escreve-se uma aproximação do empenamento  $\tilde{w}$  de um ponto qualquer sobre a seção transversal da barra em termos de elementos finitos planos da malha discreta da seção:

$$\tilde{w}(\xi_2, \xi_3) = \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \bar{w}^\gamma \quad (2.49)$$

Na equação (2.49) o vetor  $\bar{w}^\gamma$  é o modo de empenamento unitário e reúne os deslocamentos na direção longitudinal da seção para um giro unitário de torção em cada nó da discretização transversal.

Para determinar a direção  $n$  de empenamento, que é ortogonal ao plano da seção, realiza-se o produto vetorial entre os vetores generalizados  $\vec{G}^1$  e  $\vec{G}^2$  da configuração corrente:

$$n(\xi_1) = \vec{G}^1(\xi_1) \times \vec{G}^2(\xi_1) \quad (2.50)$$

ou ainda, em notação de índice:

$$n_i(\xi_1) = \left\{ \left[ \phi_\alpha(\xi_1) \cdot G_k^{1\alpha} \right] \cdot \left[ \phi_\beta(\xi_1) \cdot G_j^{2\beta} \right] \right\} \cdot \zeta_{ijk} \quad (2.51)$$

onde  $\zeta_{ijk}$  é o tensor cíclico de Levi-Cevita.

Escreve-se então uma aproximação para o empenamento  $w$  da seção transversal considerando uma nova variável nodal  $W^\ell$  referente à intensidade de empenamento ao longo do comprimento da barra, incluindo ainda a sua direção dada em (2.51), ou seja:

$$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \bar{w}^\gamma \right] \left[ \phi_\ell(\xi_1) W^\ell \right] n(\xi_1) \quad (2.52)$$

É importante observar que o modo de empenamento unitário calculado serve aqui como função enriquecedora. Dessa forma, os valores calculados são multiplicados por  $W(\xi_1)$  resultando assim no empenamento final da seção com não linearidade geométrica.

Inserindo-se a (2.52) na (2.48) obtém-se o mapeamento geral da configuração corrente para a barra tridimensional com seção qualquer  $\vec{f}^{1b}$ , incluindo os enriquecimentos referentes à variação linear da deformação ao longo de cada direção da seção além da cinemática de empenamento:

$$\begin{aligned} f_i^{1b} = y_i = & \phi_\ell(\xi_1) \cdot Y_i^\ell + \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma \right] \left[ \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell} \right] + \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma \right] \left[ \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell} \right] + \\ & \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot a^\gamma \right]^2 \left[ \phi_\alpha(\xi_1) \cdot \Lambda^\alpha \right] \left[ \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{1\ell} \right] + \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot b^\gamma \right]^2 \left[ \phi_\alpha(\xi_1) \cdot \Upsilon^\alpha \right] \left[ \phi_\ell(\xi_1) \cdot G_i^{2\ell} \right] + \\ & \left[ \vartheta_\gamma(\xi_2, \xi_3) \cdot w^\gamma \right] \left\{ \left[ \phi_\alpha(\xi_1) \cdot G_k^{1\alpha} \right] \left[ \phi_\beta(\xi_1) \cdot G_j^{2\beta} \right] \right\} \cdot \zeta_{ijk} \cdot \left[ \phi_\ell(\xi_1) \cdot W^\ell \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como estes enriquecimentos não são considerados para a barra na situação inicial não deslocada, o mapeamento inicial é dado pela equação (2.44) sendo  $f_i^{0b} = x_i$ .

Os elementos de barra possuem, portanto, doze graus de liberdade por nó, sendo estes: três posições no espaço; três componentes do vetor generalizado  $\vec{G}^1$ ; três componentes do vetor generalizado  $\vec{G}^2$ ; duas taxas de variação da deformação transversal para cada direção da seção e o valor de intensidade de empenamento  $W$ .

No presente trabalho adotam-se somente elementos de barra com aproximação cúbica. Assim, todos os elementos de barra utilizados possuem quatro nós, perfazendo um total de quarenta e oito graus de liberdade por elemento.

A Figura 2.6 ilustra um exemplo do mapeamento para um elemento de barra hipotético com seção transversal tipo "U" e linha de referência passando pelo centro de gravidade. As funções de mapeamento  $\vec{f}^{0b}$  e  $\vec{f}^{1b}$  levam a descrição do elemento de barra no sistema adimensional auxiliar para, respectivamente, a situação inicial e corrente.

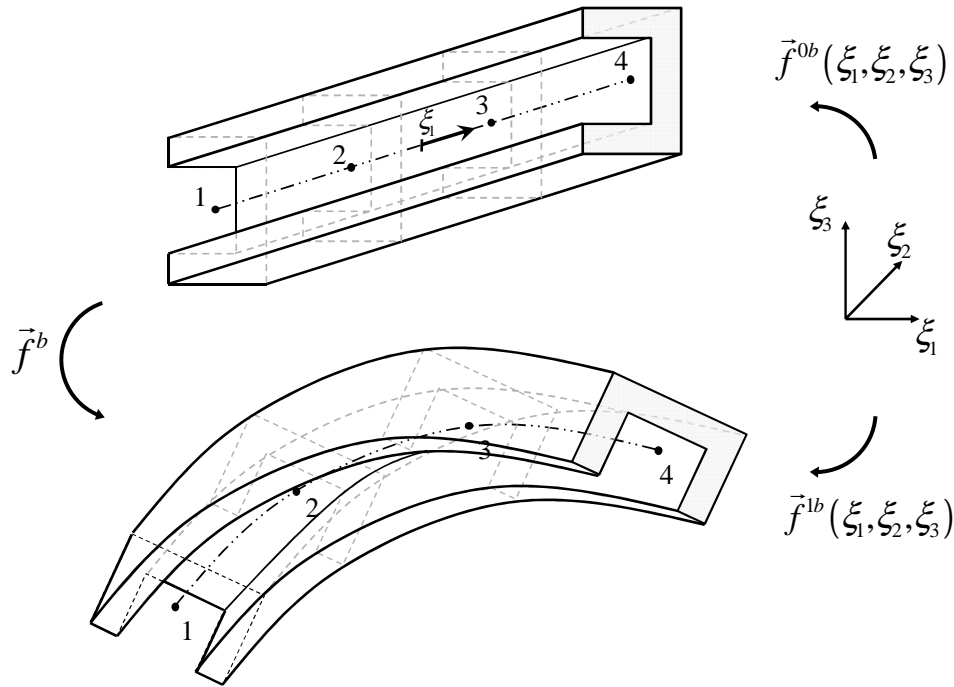


Figura 2.6 – Mapeamento de um elemento de barra com seção "U"

Com relação às funções de forma da linha longitudinal, é possível adotar elementos com qualquer ordem de aproximação utilizando os polinômios de Lagrange para o cálculo destas funções (BREBBIA; FERRANTE, 1975). Neste caso, os polinômios de ordem  $(n-1)$  para um elemento com  $n$  nós são expressos, de maneira geral, pelo seguinte produtório, já considerando a variável  $\xi_1$ :

$$\phi_\ell(\xi_1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \left( \frac{\xi_1 - \xi_1^j}{\xi_1^\ell - \xi_1^j} \right) \tag{2.54}$$

sendo os índices superiores  $\ell$  e  $j$  referentes ao nó do elemento.

Apresenta-se ainda a primeira derivada destas funções que são utilizadas, por exemplo, no cálculo dos gradientes  $A^0$  e  $A^1$ , conforme pode ser observado na (2.15) e (2.16).

$$\frac{d}{d\xi_1} \{\phi_\ell(\xi_1)\} = \phi_\ell(\xi_1) \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{1}{(\xi_1 - \xi_1^j)} \right] \tag{2.55}$$

Quanto às aproximações da seção transversal, as funções de forma adotadas são as mesmas utilizadas para aproximar o elemento de casca, sendo estas funções descritas mais a frente.

Para a aplicação dos procedimentos descritos nos itens 2.1 e 2.2, bem como das integrais numéricas dadas em (2.34) e (2.35), as correspondências entre os graus de liberdade de barra para cada nó  $\ell$  são definidas da seguinte maneira:  $Y_1^\ell = Y_1^\ell$ ,  $Y_2^\ell = Y_2^\ell$ ,  $Y_3^\ell = Y_3^\ell$ ,  $Y_4^\ell = \Lambda^\ell$ ,  $Y_5^\ell = G_1^{1\ell}$ ,  $Y_6^\ell = G_2^{1\ell}$ ,  $Y_7^\ell = G_3^{1\ell}$ ,  $Y_8^\ell = Y^\ell$ ,  $Y_9^\ell = G_1^{2\ell}$ ,  $Y_{10}^\ell = G_2^{2\ell}$ ,  $Y_{11}^\ell = G_3^{2\ell}$  e  $Y_{12}^\ell = W^\ell$ .

### 2.2.1.1 Obtenção dos esforços seccionais

Comenta-se neste item sobre os procedimentos para o cálculo dos esforços seccionais em elementos de barra. Tratam-se dos esforços simples de força normal, esforços cortantes, momentos fletores e momentos de torção, usuais em projetos de engenharia.

Afinal, apesar da formulação fornecer os resultados de tensões na seção transversal da barra conforme a equação (2.36), na prática de projetos de edificações é comum o uso de metodologias que se baseiam nas distribuições dos esforços seccionais para o dimensionamento. Logo, é interessante que o programa forneça também estes resultados permitindo aos engenheiros e projetistas uma avaliação estrutural segundo as técnicas usualmente empregadas em escritórios de projeto.

Para a obtenção dos esforços seccionais realizam-se as integrais das tensões sobre a área de cada seção transversal da barra, o que resulta em valores de esforços para cada nó na linha longitudinal. Considerando um sistema de coordenadas locais, no qual  $\tilde{x}_1$  (coordenada local) acompanha o eixo longitudinal da barra,  $\tilde{x}_2$  acompanha o vetor  $\vec{V}^{1\ell}$  e  $\tilde{x}_3$  acompanha o vetor  $\vec{V}^{2\ell}$ , observa-se que o esforço normal na seção é dado pela integral da componente de tensão normal na direção 1, isto é:

$$N = \int_A \sigma_{11} dA \quad (2.56)$$

sendo  $A$  a área da seção.

Nestes termos, os esforços cortantes  $V_2$  e  $V_3$  em cada direção do plano da seção transversal são dados pelas seguintes integrais das componentes de tensões cisalhantes:

$$V_2 = \int_A \sigma_{12} dA \quad (2.57)$$

$$\mathbf{V}_3 = \int_A \sigma_{13} dA \quad (2.58)$$

Os momentos fletores  $M_2$  e  $M_3$ , por sua vez, são dados por:

$$M_2 = \int_A \sigma_{11} \tilde{x}_3 dA \quad (2.59)$$

$$M_3 = \int_A \sigma_{11} \tilde{x}_2 dA \quad (2.60)$$

enquanto o momento de torção  $M_1$  é calculado como segue:

$$M_T = M_1 = \int_A (\sigma_{13} \tilde{x}_2 - \sigma_{12} \tilde{x}_3) dA \quad (2.61)$$

### 2.2.2 Mapeamento das Lajes: Elemento Finito NLG de Casca

Elementos finitos de casca são utilizados para a modelagem das lajes na estrutura do pavimento. A casca permite considerar tanto a rigidez transversal quanto a rigidez axial da laje no contraventamento do edifício. Os elementos de casca podem também ser utilizados na modelagem das paredes do núcleo e paredes estruturais, no entanto, no caso dos núcleos, isso pode ser desvantajoso uma vez que um número maior de variáveis estaria sendo considerado.

No caso deste trabalho, será proposta uma estratégia cinematicamente exata para compatibilizar os graus de liberdade da laje com a seção transversal da barra (que pode empenar). O uso de elementos de casca possibilita a análise NLG da interação núcleo-pavimento de maneira adequada.

Adota-se o elemento finito de casca NLG com cinemática de Reissner originalmente proposto por Coda & Paccola (2008). Para este elemento, o mapeamento de pontos pertencentes ao corpo sólido é feito primeiramente pela sua superfície média. Considera-se um sistema de referência auxiliar  $(\xi_1, \xi_2)$  sendo qualquer ponto  $m$  sobre a superfície média da casca definido pelas seguintes expressões aproximadas, respectivamente para configuração inicial e corrente da estrutura:

$$x_i^m(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) X_i^\ell \quad (2.62)$$

$$y_i^m(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_i^\ell \quad (2.63)$$

sendo  $\varphi_\ell$  as funções de forma relacionadas a cada nó  $\ell$  da casca,  $X_i^\ell$  e  $Y_i^\ell$  os vetores com as posições nodais, respectivamente para a configuração inicial e corrente em cada direção  $i$ .

A fim de mapear pontos que estão fora da superfície média da casca, adota-se um vetor  $\vec{v}$  conforme esquematizado na Figura 2.7 para um elemento de casca hipotético.

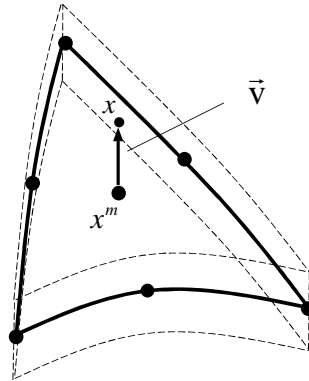


Figura 2.7 – Mapeamento inicial de um elemento de casca

Este vetor independe da inclinação da superfície média da casca, o que permite considerar que as rotações são variáveis independentes do deslocamento e, assim, considerar os efeitos do cisalhamento na flexão.

É conveniente considerar para a situação inicial (não deformada) da estrutura que este vetor tem valor  $\vec{v}^0$  e é ortogonal à superfície média. Assim, considerando-se outro vetor  $\vec{v}^1$  para a configuração corrente da casca, de maneira que este tenha liberdade para mudar (ou não) de tamanho e direção, é possível mensurar a mudança de forma da casca conforme ilustra a Figura 2.8.

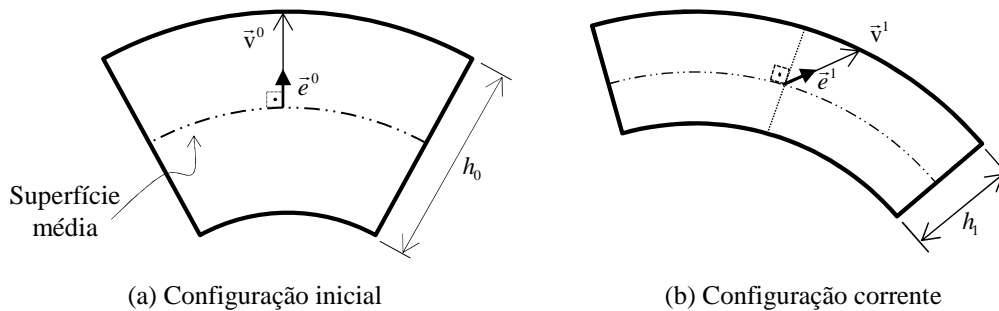


Figura 2.8 – Vetor generalizado da casca

A espessura da casca é inicialmente constante ao longo de toda a sua superfície, pois tem valor  $h_0$  para todos os nós. Já na configuração corrente, com a possibilidade de mudança do tamanho do vetor  $\vec{v}^1$ , essa espessura passa a ser variável de valor  $h_1^\ell$  em cada nó, podendo aumentar ou diminuir.

Qualquer ponto no domínio da casca pode ser então definido somando-se as componentes do vetor de mapeamento em cada direção às posições  $x_i^m$  e  $y_i^m$ , respectivamente na configuração inicial e corrente:

$$x_i = x_i^m + v_i^0 \quad (2.64)$$

$$y_i = y_i^m + v_i^1 \quad (2.65)$$

Se a deformação ao longo da espessura da casca for constante, os vetores  $\vec{v}^0$  e  $\vec{v}^1$  podem ser descritos em função de variáveis adimensionais na seguinte forma:

$$v_i^0 = \frac{h_0}{2} \xi_3 \cdot e_i^0(\xi_1, \xi_2) \quad (2.66)$$

$$v_i^1 = \frac{h_1(\xi_1, \xi_2)}{2} \xi_3 \cdot e_i^1(\xi_1, \xi_2) \quad (2.67)$$

Nestas expressões,  $e_i^0$  são as componentes do vetor unitário  $\vec{e}^0$  normal à superfície inicial, enquanto  $e_i^1$  são as componentes do vetor  $\vec{e}^1$  da configuração corrente, conforme a Figura 2.8. Este último vetor é também unitário, porém não necessariamente ortogonal à superfície da casca.

Coda & Paccola (2008) admitem as seguintes aproximações considerando um vetor normal unitário  $\vec{N}^\ell$  para a configuração inicial e um vetor generalizado  $\vec{g}^\ell$  para a configuração corrente da casca:

$$e_i^0(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) N_i^\ell \quad (2.68)$$

$$h_i^\ell(\xi_1, \xi_2) e_i^1(\xi_1, \xi_2) = h_0 g_i^\ell(\xi_1, \xi_2) \quad (2.69)$$

Neste caso, o vetor generalizado  $\vec{g}^\ell$  é livre podendo ser não unitário e não ortogonal à superfície média da casca.

A partir da (2.69), a variação da espessura da casca ao longo do elemento pode ser escrita como:

$$h_i^\ell(\xi_1, \xi_2) = h_0 \sqrt{g_i^\ell(\xi_1, \xi_2) g_i^\ell(\xi_1, \xi_2)} \quad (2.70)$$

sendo as componentes do vetor unitário  $\vec{e}^1$  definidas da seguinte maneira:

$$e_i^1(\xi_1, \xi_2) = \frac{g_i^\ell(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{g_i^\ell(\xi_1, \xi_2) g_i^\ell(\xi_1, \xi_2)}} \quad (2.71)$$

Considera-se na cinemática da casca deformada uma variação linear da deformação ao longo da espessura, similar as variáveis  $\Lambda^\ell$  e  $Y^\ell$  do elemento de barra. Para isso, admite-se uma nova variável  $\tilde{T}$  referente à intensidade da deformação transversal ao longo da espessura que altera apenas o vetor  $\vec{g}$ , isto é, considera-se esta nova incógnita somente para a configuração corrente da estrutura. Desta forma, evita-se o problema de travamento volumétrico que se manifesta na forma de um enrijecimento errôneo da estrutura, de maneira análoga ao que foi descrito para a barra.

O vetor generalizado fica então definido por uma expressão similar a (2.67), adicionando desta vez a nova incógnita:

$$g_i = \frac{h_1^\ell(\xi_1, \xi_2)}{2} \left[ \xi_3 + \tilde{T}(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2 \right] e_i^1(\xi_1, \xi_2) \quad (2.72)$$

O novo parâmetro pode ser aproximado, em termos de elementos finitos de casca, da seguinte maneira:

$$\tilde{T}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) T^\ell \quad (2.73)$$

sendo  $T^\ell$  o vetor das incógnitas de taxa de variação da deformação transversal ao longo da espessura da casca.

Reunindo-se as expressões (2.66) e (2.64) e em seguida substituindo-se nestas as aproximações dadas em (2.62) e (2.68) obtém-se a função  $f^{0c}$  que faz o mapeamento da configuração inicial do elemento de casca NLG:

$$f_i^{0c} = x_i = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) X_i^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_3 \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) N_i^\ell \quad (2.74)$$

Substituindo-se na expressão (2.65) o vetor  $\vec{v}^1$  pelo vetor generalizado  $\vec{g}$ , dado conforme a (2.72), em seguida substituindo-se as aproximações consideradas em (2.63), (2.69) e (2.73) obtém-se a função de mapeamento para a configuração corrente da casca:

$$f_i^{1c} = y_i = \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_i^\ell + \frac{h_0}{2} \left[ \xi_3 + T(\xi_1, \xi_2) \xi_3^2 \right] \varphi_\ell(\xi_1, \xi_2) g_i^\ell \quad (2.75)$$

Observa-se que a formulação do elemento de casca compreende sete incógnitas nodais, sendo estas: três translações no espaço, três componentes do vetor generalizado  $\vec{g}$  e a taxa de variação da deformação ao longo da espessura.

Adota-se neste trabalho aproximação cúbica para o elemento, perfazendo um total de dez nós e setenta graus de liberdade por elemento. A Figura 2.9 ilustra o mapeamento completo para o elemento de casca que será utilizado neste trabalho.



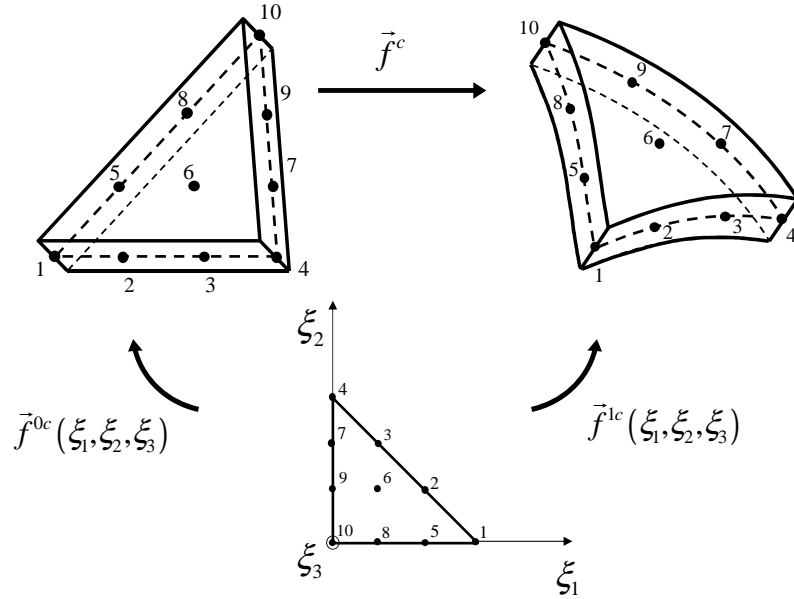


Figura 2.9 – Mapeamento do elemento de casca

Neste caso, as funções de forma ficam definidas da seguinte maneira:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \quad (2.76)$$

$$\varphi_2 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) \quad (2.77)$$

$$\varphi_3 = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (2.78)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \quad (2.79)$$

$$\varphi_5 = \frac{9}{2} \xi_1 (1 - \xi_1 - \xi_2)(3\xi_1 - 1) \quad (2.80)$$

$$\varphi_6 = 27 \xi_1 \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2) \quad (2.81)$$

$$\varphi_7 = \frac{9}{2} \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2)(3\xi_2 - 1) \quad (2.82)$$

$$\varphi_8 = \frac{9}{2} \xi_1 (1 - \xi_1 - \xi_2) [3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1] \quad (2.83)$$

$$\varphi_9 = \frac{9}{2} \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2) [3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1] \quad (2.84)$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2) [3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1] [3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 2] \quad (2.85)$$

A seguir, apresentam-se as primeiras derivadas destas funções de forma que são necessárias para o cálculo dos gradientes  $A^0$  e  $A^1$ , conforme as expressões (2.15) e (2.16):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} = \frac{27}{2} \xi_1^2 - 9\xi_1 + 1 \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} = 27\xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2 \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} = \frac{9}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1) \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} = 27\xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} = \frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} = 0 \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} = \frac{27}{2} \xi_2^2 - 9\xi_2 + 1 \quad (2.93)$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi_1} = -\frac{81}{2} \xi_1^2 - 27\xi_1 \xi_2 + 36\xi_1 + \frac{9}{2} \xi_2 - \frac{9}{2} \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \xi_2} = -\frac{9}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1) \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi_1} = 27\xi_2 - 54\xi_1 \xi_2 - 27\xi_2^2 \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi_2} = 27\xi_1 - 54\xi_1 \xi_2 - 27\xi_1^2 \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_1} = -\frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_2} = -\frac{81}{2} \xi_2^2 - 27\xi_1 \xi_2 + \frac{9}{2} \xi_1 + 36\xi_2 - \frac{9}{2} \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi_1} = -45\xi_1 + \frac{81}{2} \xi_1^2 + 54\xi_1 \xi_2 - \frac{45}{2} \xi_2 + \frac{27}{2} \xi_2^2 + 9 \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial \varphi_8}{\partial \xi_2} = -\frac{45}{2} \xi_1 + 27\xi_1^2 + 27\xi_1 \xi_2 \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial \varphi_9}{\partial \xi_1} = -\frac{45}{2} \xi_2 + 27\xi_2^2 + 27\xi_1 \xi_2 \quad (2.102)$$

$$\frac{\partial \varphi_9}{\partial \xi_2} = -45\xi_2 + \frac{81}{2}\xi_2^2 + 54\xi_1 \xi_2 - \frac{45}{2}\xi_2 + \frac{27}{2}\xi_1^2 + 9 \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \xi_2} = 18\xi_1 + 18\xi_2 - \frac{27}{2}\xi_1^2 - 27\xi_1 \xi_2 - \frac{27}{2}\xi_2^2 - \frac{11}{2} \quad (2.104)$$

É importante comentar ainda que estas funções de forma são as mesmas utilizadas nas aproximações da seção transversal do elemento de barra via elementos cúbicos triangulares planos, de maneira que  $v_k^j = \varphi_k$ .

Para a montagem da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas do elemento de casca segundo as equações (2.34) e (2.35) e também para aplicação dos procedimentos da resolução numérica, a correspondência entre os graus de liberdade de cada nó  $\ell$  da casca é definida da seguinte forma:  $Y_1^\ell = Y_1^\ell$ ,  $Y_2^\ell = Y_2^\ell$ ,  $Y_3^\ell = Y_3^\ell$ ,  $Y_4^\ell = T^\ell$ ,  $Y_5^\ell = g_1^\ell$ ,  $Y_6^\ell = g_2^\ell$  e  $Y_7^\ell = g_3^\ell$ .

Os itens que seguem tratam das vinculações entre os elementos que compõem o modelo do edifício tridimensional.

### 2.2.3 Vinculação entre elementos não colineares

Conforme visto nos itens anteriores a formulação posicional do MEF adota vetores generalizados nos nós dos elementos de barra e de casca como graus de liberdade ao invés de rotações. Estes vetores, por serem independentes da translação, garantem a flexibilidade de giro necessária para o modelo cinemático considerado, no caso, Reissner.

Quando duas barras colineares se encontram em um mesmo nó os vetores de cada elemento irão coincidir naquele nó e, assim, os graus de liberdade estarão naturalmente vinculados garantindo a ligação rígida entre estes. Porém, no encontro entre elementos não colineares os vetores não serão coincidentes, sendo necessária a aplicação de uma estratégia numérica que permita vincular estes graus de liberdade.

Uma possível solução para este problema consiste em utilizar um elemento de barra curvo muito pequeno na ligação de maneira a garantir a compatibilidade natural entre os graus de liberdade e evitar a necessidade de distorcer seções conflitantes (CODA, 2009). Outra solução possível e que será apresentada originalmente nesta tese consiste em vincular as extremidades dos vetores generalizados de cada elemento através de uma barra auxiliar fictícia que serve de restrição por penalização, dando, assim, um tratamento mais geral e automatizado ao problema.

Tomam-se como exemplo dois elementos finitos não colineares (aqui representados pelos índices  $j$  e  $j+1$ ) que concorrem em um mesmo nó  $\ell$  e possuem, respectivamente, os vetores generalizados  $\vec{V}^j$  e  $\vec{V}^{j+1}$  para a configuração inicial da estrutura, sendo estes dois vetores, a título de ilustração, ortogonais entre si conforme a Figura 2.10(a).

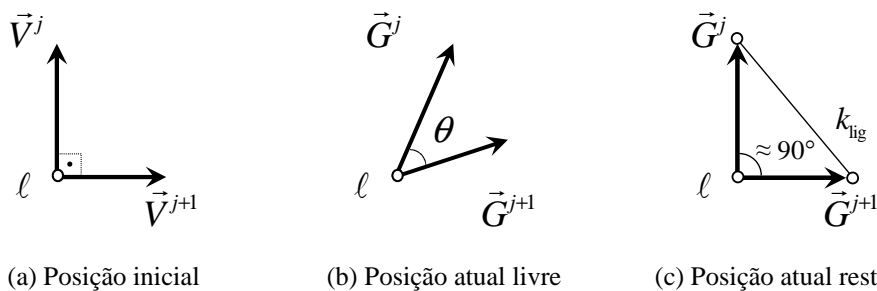


Figura 2.10 – Vinculação entre vetores generalizados de elementos não colineares

Para a configuração corrente da estrutura admitem-se vetores  $\vec{G}^j$  e  $\vec{G}^{j+1}$  que são independentes e podem mudar de direção e tamanho livremente quando a estrutura se deforma. Essa situação possibilita a ocorrência de um giro relativo entre estes vetores, conforme a Figura 2.10(b). Para vincular o giro entre estes elementos considera-se uma barra de treliça fictícia ligando as extremidades dos dois vetores (penalizador), conforme a Figura 2.10(c). Adotando-se um valor de rigidez suficientemente elevado para esta barra fictícia garante-se uma vinculação rígida entre os vetores e, conseqüentemente, evita-se o giro relativo.

A estratégia é, portanto, uma técnica de penalização para as rotações relativas, sendo o valor da rigidez  $k_{\text{lig}}$  adotado para a barra fictícia um fator de penalização. Quando se deseja considerar ligações semirrígidas seu valor numérico pode ser determinado através de ensaios experimentais em laboratório ou estimado a partir de características geométricas e elásticas dos elementos conectados. No presente trabalho o objetivo é garantir a vinculação rígida entre os elementos estruturais do edifício tridimensional, cabendo à adoção de um valor arbitrário com elevada ordem de grandeza para esta rigidez. Como sugestão, o valor de  $k_{\text{lig}}$  pode ser estimado fazendo-se  $k_{\text{lig}} = EI \times 10^9$ , sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material e  $I$  o maior momento de inércia à flexão dentre os elementos estruturais que concorrem na ligação.

A inclusão da penalização no sistema algébrico se dá na forma de um elemento de mola de ligação para o qual devem ser calculados vetores e matrizes locais. Para isso, escreve-se primeiramente a energia de deformação armazenada na barra de treliça auxiliar, que, usando o conceito de deformação de Green-Lagrange, é dada por:

$$U_e = \frac{k_{\text{lig}}}{2} \cdot \left( \frac{L^2 - L_0^2}{2} \right)^2 \quad (2.105)$$

sendo os comprimentos  $L_0$  e  $L$  calculados a partir das componentes dos vetores generalizados envolvidos na ligação da seguinte maneira:

$$L_0 = \sqrt{(V_1^{j+1} - V_1^j)^2 + (V_2^{j+1} - V_2^j)^2 + (V_3^{j+1} - V_3^j)^2} \quad (2.106)$$

$$L = \sqrt{(G_1^{j+1} - G_1^j)^2 + (G_2^{j+1} - G_2^j)^2 + (G_3^{j+1} - G_3^j)^2} \quad (2.107)$$

Lembrando que as forças internas podem ser calculadas pela primeira derivada da energia de deformação e a Hessiana, ou rigidez tangente, é dada pela segunda derivada, têm-se para um elemento de mola de ligação o vetor de forças internas local e a matriz Hessiana local dados, respectivamente, por:

$$F_\alpha^b = \frac{\partial U_e}{\partial G_\alpha^\beta} = \frac{k_{\text{lig}}}{4} (L^2 - L_0^2) \cdot \frac{\partial L^2}{\partial G_\alpha^\beta} = \frac{k_{\text{lig}}}{2} (L^2 - L_0^2) \cdot (G_\alpha^2 - G_\alpha^1) \cdot (-1)^\beta \quad (2.108)$$

$$H_{\alpha\gamma}^{\beta\xi} = \frac{k_{\text{lig}}}{2} \left\{ 2(G_\alpha^2 - G_\alpha^1)(G_\gamma^2 - G_\gamma^1) + (L^2 - L_0^2) \delta_{\alpha\gamma} \right\} (-1)^\xi (-1)^\beta \quad (2.109)$$

Estes novos termos podem ser somados ao vetor de forças internas global e à matriz de rigidez tangente global da estrutura por meio da regra das incidências dos graus de liberdade correspondentes.

Observa-se que, para a consideração de uma ligação rotulada, nenhuma restrição deve ser aplicada aos vetores concorrentes, o que equivale à adoção de uma rigidez com valor nulo. Deve-se destacar ainda que este procedimento é válido para ligações nas quais se desenvolvem pequenas rotações, que é o caso da maioria das estruturas de edifícios usuais. Para o caso de ligações semirrígidas entre barras com ocorrência de grandes rotações uma técnica similar pode ser adotada através da consideração de um ângulo relativo calculado a partir do produto interno dos vetores generalizados.

## 2.2.4 Excentricidades das ligações

Uma questão importante referente à modelagem de estruturas de edifícios que será discutida neste item é a possibilidade de se considerar excentricidades nas ligações entre os elementos finitos. Afinal, é comum a ocorrência dessas excentricidades devido a maneira como os elementos estruturais que compõe a estrutura tridimensional se ligam uns aos outros.

Este recurso é naturalmente promovido com a definição da origem para os vetores generalizados na seção transversal da barra, uma vez que esta origem define a projeção da seção no espaço tridimensional e a forma como o carregamento atua sobre o elemento.

A Figura 2.11(a) ilustra um exemplo desta situação para uma ligação viga-pilar com excentricidade. Neste caso, se a posição da linha de referência (e conseqüentemente a origem dos vetores generalizados na seção) do elemento que discretiza o pilar permanecer no ponto médio de sua seção, a ligação no modelo numérico corresponde a uma ligação do tipo centrada, conforme a Figura 2.11(b). Se, por outro lado, for adotada uma malha discreta para a seção transversal do pilar com linha de referência passando por um ponto como o que está indicado na Figura 2.11(c) e dispendo-se da orientação deste elemento de maneira adequada, a excentricidade da ligação será considerada.

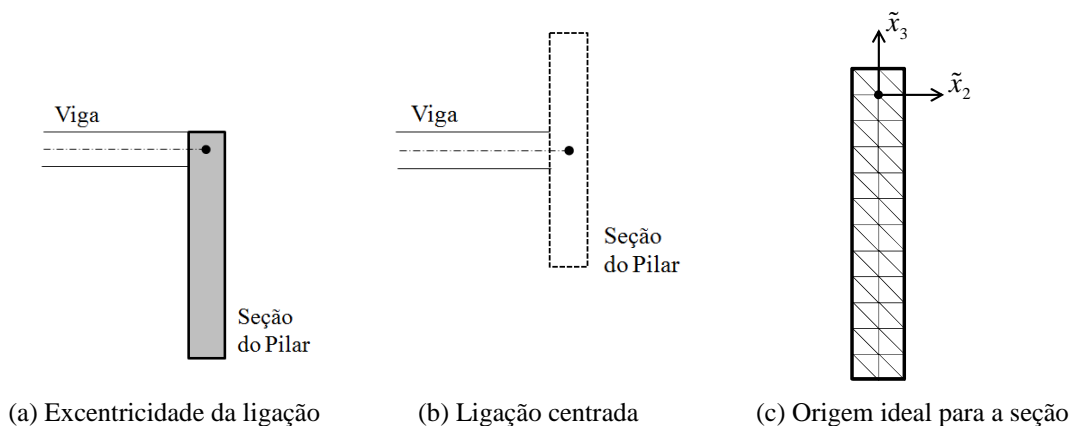


Figura 2.11 – Excentricidade da ligação viga-pilar

Situação semelhante acontece para as vigas nos pavimentos, como mostra a Figura 2.12(a). Neste caso, é possível considerar o nivelamento da face superior da viga com a superfície da laje dispendo-se, por exemplo, de uma malha discreta para a seção transversal do elemento de barra que discretiza a viga tendo como origem o ponto indicado na Figura 2.12(b).

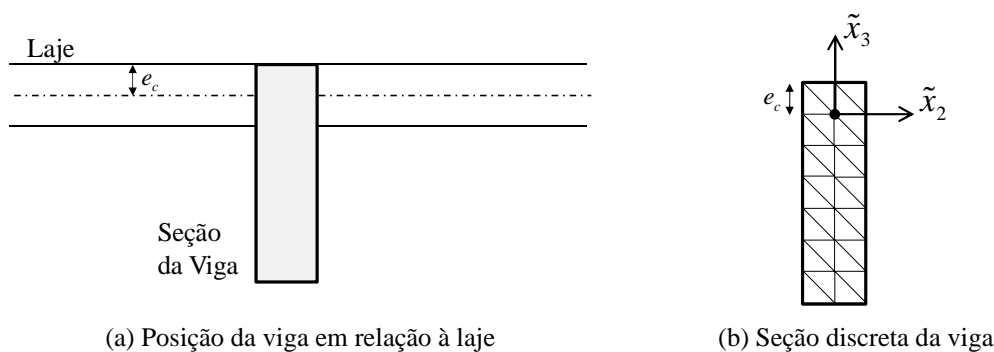


Figura 2.12 – Excentricidade da ligação laje-viga

No caso da ligação laje-viga mostrada na Figura 2.12, os elementos de casca da laje também podem possuir excentricidade em relação à superfície média do elemento para que se considere o nivelamento das faces. Para isso, é feita uma pequena alteração da referência no mapeamento da casca somando-se na posição de cada nó do elemento de casca a excentricidade  $e_c$  considerada (sempre na direção da variável  $\zeta_3$ ), sendo essa a única mudança em relação à cinemática das cascas descrita no item 2.2.2.

Apesar de não ser objetivo do presente trabalho avaliar as influências destas excentricidades no comportamento do edifício, a formulação contempla este recurso de uma maneira natural, enriquecendo o modelo numérico. Maiores comentários deverão ser feitos na apresentação dos exemplos numéricos.

Outra questão importante relacionada a ligação entre elementos estruturais de edifícios são os chamados nós de dimensões finitas ou trechos rígidos (CORRÊA; VENTURINI, 2010). Neste trabalho não serão considerados trechos rígidos nas ligações do edifício, apesar de não haver qualquer restrição da formulação para esse tipo de consideração. Ressalta-se que o objetivo maior é o desenvolvimento da ferramenta numérica.

A seguir, descrevem-se os procedimentos para a consideração do acoplamento entre os elementos de casca e a seção transversal do elemento de barra, gerando assim o elemento de núcleo proposto.

### 2.2.5 Acoplamento Casca-Barra: O Elemento Finito de Núcleo

Neste item será descrita a estratégia numérica utilizada para o acoplamento de topo entre os graus de liberdade dos elementos finitos de casca com a seção transversal do elemento finito de barra, gerando assim um elemento reticulado enrijecido por diafragma o qual será aqui denominado de núcleo, com consideração do comportamento NLG. O elemento de núcleo é, portanto, obtido a partir de um aprimoramento do elemento de barra tridimensional (descrito no item 2.2.1) considerando a rigidez das cascas que estão ligadas às paredes de sua seção transversal.

Por ser um elemento finito de barra, o núcleo é representado por uma única linha que pode passar por qualquer ponto da seção. Conforme comentado anteriormente, a posição desta linha define a origem dos vetores generalizados e também os efeitos de forças que estejam diretamente aplicadas aos nós do elemento de barra. Dois pontos de interesse específico para aplicações práticas são o centro de cisalhamento e o centro de gravidade, que, neste caso, são determinados através de uma rotina de pré-processamento.

Neste trabalho a posição da linha longitudinal de referência do elemento de núcleo para a geração da malha do edifício pode ser qualquer. O usuário pode escolher a posição da linha longitudinal que lhe for mais conveniente para gerar a malha do edifício, sendo esta posição alterada automaticamente pelo programa. O modo de empenamento unitário é sempre calculado tendo como origem o centro de cisalhamento (ver APÊNDICE A). Após a determinação do modo de empenamento, a posição da linha de referência para a análise do problema deve ser definida pelo usuário através do arquivo de entrada, tendo como possibilidades o centro de cisalhamento, o centro de gravidade, a origem inicialmente adotada para a geração da malha ou um ponto qualquer com coordenadas definidas pelo próprio usuário. Dessa maneira, não há necessidade do usuário conhecer a posição do centro de cisalhamento para a geração da malha, o que é um inconveniente em alguns modelos discretos propostos em trabalhos anteriores para análise de núcleos estruturais. Vale ressaltar ainda que a seção do núcleo pode ter qualquer forma geométrica.

Mesmo sendo representado por uma única linha, o elemento de barra forma uma rede de pontos nodais no espaço tridimensional através da projeção de sua seção transversal discreta, e cada coordenada dos nós da seção no espaço pode ser calculada a partir do mapeamento inicial dado pela equação (2.44). Assim, é possível identificar nós da malha dos elementos de casca que tenham a mesma coordenada dos nós da seção transversal do núcleo e são, portanto, responsáveis pela ligação laje-núcleo.

Na Figura 2.13 ilustra-se um elemento de núcleo hipotético com seção "U", estando destacadas (com hachura preta) as seções transversais nas quais poderão estar conectados nós de elementos de casca da malha das lajes em cada pavimento.



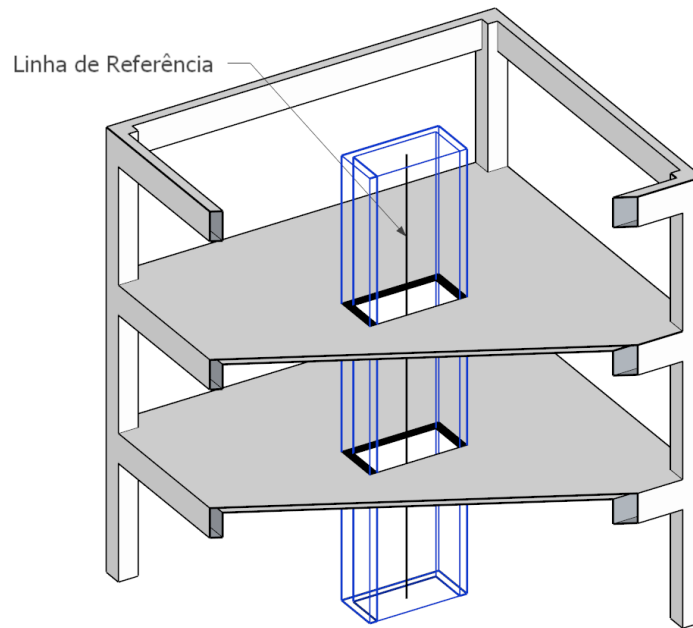


Figura 2.13 – Representação de um elemento finito de núcleo

A estratégia adotada para o acoplamento casca-barra consiste basicamente em inserir na rigidez do elemento de barra que discretiza o núcleo a contribuição de todos os nós de casca que estejam acoplados a ele naquela seção transversal, compatibilizando-se os graus de liberdade nodais. Com isso, os graus de liberdade referentes aos elementos de casca deixam de ser incógnitas do problema e passam a ser função dos parâmetros nodais do elemento de barra, agora denominado de elemento de núcleo.

Para realizar o acoplamento, considera-se um sistema formado por uma barra acoplada a uma quantidade de elementos de casca qualquer em uma de suas seções transversais. Sabe-se que, neste caso, a energia de deformação do conjunto (formado pelo núcleo e o diafragma) será a soma da energia de deformação do elemento de barra isolado com a energia de deformação de todos os elementos de casca a ele conectados. Nas expressões a seguir identificam-se os termos relativos ao elemento de barra isolado pelo índice  $b$ , termos dos elementos de casca que estão conectados pelo índice  $c$  e termos referentes ao conjunto casca-barra (ou núcleo) pelo símbolo " $\hat{\phantom{U}}$ ". Assim, escreve-se a energia de deformação  $\hat{U}_e$  para o elemento de núcleo, na seguinte forma:

$$\hat{U}_e = U_e^b + \sum U_e^c \quad (2.110)$$

Conforme visto na equação (2.6), a força interna pode ser calculada como a primeira derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais. Neste caso, os

parâmetros de interesse são os graus de liberdade de posições da barra, ficando, portanto a força interna do núcleo definida como:

$$\hat{F} = \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial Y^b} \quad (2.111)$$

Substituindo-se a (2.111) em (2.110) verifica-se que a força interna do conjunto acoplado é dada pela soma de duas parcelas:

$$\hat{F} = \frac{\partial U_e^b}{\partial Y^b} + \sum \frac{\partial U_e^c}{\partial Y^b} \quad (2.112)$$

Na equação (2.112) a primeira parcela correspondente à força interna do elemento de barra isolado  $F^b$ . Já a segunda parcela é dada pela soma das derivadas da energia de deformação de cada elemento de casca acoplado em relação aos parâmetros da barra. Para simplificar este último termo, faz-se uso da regra da cadeia, obtendo-se dentro do somatório um produto entre a força interna  $F^c$  de cada elemento de casca acoplado com a derivada  $\partial Y^c / \partial Y^b$ , isto é:

$$\hat{F}_\alpha = F_\alpha^b + \sum \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_\beta^c} \frac{\partial Y_\beta^c}{\partial Y_\alpha^b} = F_\alpha^b + \sum F_\beta^c \frac{\partial Y_\beta^c}{\partial Y_\alpha^b} \quad (2.113)$$

com  $\alpha$  variando de 1 a 12 (graus de liberdade da barra) e  $\beta$  variando de 1 a 7 (graus de liberdade da casca).

As forças internas dos elementos isolados  $F^b$  e  $F^c$  são conhecidas, conforme foi descrito anteriormente. Resta, portanto, ser determinado o último termo dentro do somatório da equação (2.113).

Este termo deve ser calculado derivando-se os parâmetros da casca em relação a cada um dos parâmetros da barra. Para isso, reescreve-se o mapeamento dos nós de casca acoplados, agora como função dos graus de liberdade da barra, no mesmo formato da equação (2.53) observando-se que as funções de forma no ponto têm valor unitário:

$$Y_i^c = Y_i^b + a^c \cdot [Y_{i+4}^b] + b^c \cdot [Y_{i+8}^b] + [a^c]^2 \cdot [Y_4^b] \cdot [Y_{i+4}^b] + [b^c]^2 \cdot [Y_8^b] \cdot [Y_{i+8}^b] + [w^c] \cdot \left\{ [Y_{k+4}^b] \cdot [Y_{j+8}^b] \right\} \cdot \zeta_{ijk} \cdot [Y_{12}^b] \quad (2.114)$$

Na expressão (2.114) foi utilizada notação de índice com uso das correspondências entre graus de liberdade citadas na página 64.

As derivadas da expressão (2.114) em relação aos parâmetros nodais da barra podem ser organizadas na forma de um tensor de ordem dois, o qual será aqui denominando pela letra  $\mathbf{B}$ , sendo este tensor dado, em notação de índice, por:

$$\mathbf{B}_{\alpha\beta} = \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_{\alpha}^b} \quad (2.115)$$

Logo, substituindo-se a (2.115) na (2.113) tem-se a força interna do elemento de núcleo dada, em notação matricial, por:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^b + \sum \mathbf{F}^c \cdot \mathbf{B}^T \quad (2.116)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez tangente (Hessiana) do elemento de núcleo deve ser calculada a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais da barra, conforme visto na (2.11). Assim, essa matriz será dada por:

$$\hat{\mathbf{K}}_{jk} = \frac{\partial^2 \hat{U}_e}{\partial Y_j^b \partial Y_k^b} = \frac{\partial}{\partial Y_k^b} \left( \frac{\partial \hat{U}_e}{\partial Y_j^b} \right) \quad (2.117)$$

Observando-se as equações (2.112) e (2.113), chega-se a conclusão que:

$$\hat{\mathbf{K}}_{jk} = \frac{\partial^2 U_e^b}{\partial Y_j^b \partial Y_k^b} + \sum \frac{\partial}{\partial Y_k^b} \left( \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} \right) = \mathbf{K}_{jk}^b + \sum \frac{\partial}{\partial Y_k^b} \left( \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} \right) \quad (2.118)$$

A equação (2.118) indica que a matriz Hessiana do elemento de núcleo é formada por um somatório de dois termos, sendo que o primeiro termo corresponde a Hessiana do elemento de barra isolado. O segundo termo é um somatório referente às parcelas de contribuição das cascas acopladas, de maneira análoga ao cálculo da força interna em (2.116). Porém, se faz necessário simplificar este segundo termo para facilitar a sua implementação computacional, o que pode ser feito aplicando-se a derivada do produto. Logo, o termo dentro do somatório resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial Y_k^b} \left( \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} \right) = \frac{\partial^2 U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c \partial Y_k^b} \cdot \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} + \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \cdot \frac{\partial^2 Y_{\beta}^c}{\partial Y_k^b \partial Y_j^b} \quad (2.119)$$

Para simplificar ainda mais este termo faz-se uso da regra da cadeia, obtendo-se assim o seguinte resultado:

$$\frac{\partial}{\partial Y_k^b} \left( \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} \right) = \frac{\partial^2 U_e^c}{\partial Y_j^c \partial Y_k^c} \cdot \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_k^b} \cdot \frac{\partial Y_{\beta}^c}{\partial Y_j^b} + \frac{\partial U_e^c}{\partial Y_{\beta}^c} \cdot \frac{\partial^2 Y_{\beta}^c}{\partial Y_k^b \partial Y_j^b} \quad (2.120)$$

No primeiro termo da expressão (2.120) aparece um produto que envolve a matriz Hessiana do elemento de casca isolado e o tensor B calculado em (2.115), logo esta parcela é conhecida. No segundo termo aparece um tensor de terceira ordem que considera a influência das forças internas da casca na matriz Hessiana do conjunto acoplado.

É importante lembrar que a matriz Hessiana é utilizada para calcular o fator de correção  $\Delta Y$  do método de Newton-Raphson, conforme a expressão (2.11). Logo, essa matriz apenas define a taxa de convergência do método iterativo e o seu valor não interfere na precisão numérica para o equilíbrio mecânico. Por este motivo, optou-se neste trabalho por desconsiderar o segundo termo da expressão (2.120), o que implica em um processo de análise não linear semelhante ao método de Newton-Raphson modificado. Afinal, a implementação numérica do tensor de terceira ordem implicaria em processos de cálculos mais onerosos e, provavelmente, sem maiores vantagens para sua consideração, o que deverá ser verificado no desenvolvimento dos exemplos numéricos. Deve-se comentar ainda que a maioria dos termos deste tensor têm valor nulo.

Portanto, a matriz Hessiana do elemento finito NLG de núcleo passa a ser dada pela seguinte expressão final em formato matricial:

$$\hat{K} = K^b + \sum (B \cdot K^c \cdot B^T) \quad (2.121)$$

Para calcular o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de núcleo é necessário definir, portanto, o tensor B para que o mesmo possa ser aplicado às equações (2.116) e (2.121). A determinação deste tensor se dá através da expressão (2.115) derivando-se a (2.114) em relação aos graus de liberdade acoplados.

Antes de definir este tensor é importante observar que existem, a priori, duas possíveis condições de vinculação entre a casca e a seção do núcleo, podendo a casca estar simplesmente apoiada na parede ou engastada na mesma.

No caso de uma vinculação do tipo apoio simples, apenas os graus de liberdade de translação deverão ser acoplados, ficando os vetores generalizados livres e, conseqüentemente, não havendo qualquer restrição para as rotações. Já para considerar a laje engastada no núcleo devem ser incluídos no tensor B termos calculados a partir da relação entre os vetores generalizados de maneira a restringir o giro relativo. Neste último caso, o vetor generalizado da casca passa a ser função dos vetores da barra. Considerando-se que o diafragma é ortogonal ao eixo da barra, o vetor  $\vec{g}$  do elemento de casca pode ser definido

como função do produto vetorial entre os vetores  $\vec{G}^1$  e  $\vec{G}^2$  em cada ponto da seção transversal do elemento de núcleo, isto é:

$$\vec{g} = \vec{G}^1 \times \vec{G}^2 \quad (2.122)$$

No entanto, da forma como se propõe a formulação da barra, os vetores generalizados são constantes em cada seção. Como a seção transversal pode empenar, para escrever o vetor do nó de casca acoplado pela relação (2.122) seria necessário determinar primeiramente a direção dos vetores  $\vec{G}^1$  e  $\vec{G}^2$  em cada ponto da seção transversal, o que pode onerar o código computacional a depender do refinamento das malhas da seção do núcleo e das lajes.

Por este motivo, optou-se por considerar neste trabalho somente a compatibilização das translações nodais, sem considerar o acoplamento dos vetores generalizados entre a casca e a seção da barra. Desta maneira, calculam-se as derivadas em (2.114) apenas para as posições  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$  dos nós da casca, isto é, admitindo-se que  $\beta$  varia de 1 a 3, o que resulta em um tensor  $B$  com dimensões  $(12 \times 3)$  para cada nó acoplado.

Mesmo com tal simplificação, ainda é possível considerar o caso de lajes engastadas no núcleo através de uma simples estratégia na qual a malha de elementos finitos de casca é sobreposta à seção transversal da barra. Uma vez que os diversos nós que compõe a seção da barra estão ligados a nós de casca vizinhos, o giro relativo entre estes nós ficará restrito e, desta maneira, é garantida uma vinculação rígida do tipo engaste sem a necessidade de calcular a direção dos vetores em cada ponto da seção transversal.

A Figura 2.14 exhibe as possíveis condições de vinculação para os elementos de casca em relação à seção da barra com uso da estratégia adotada.

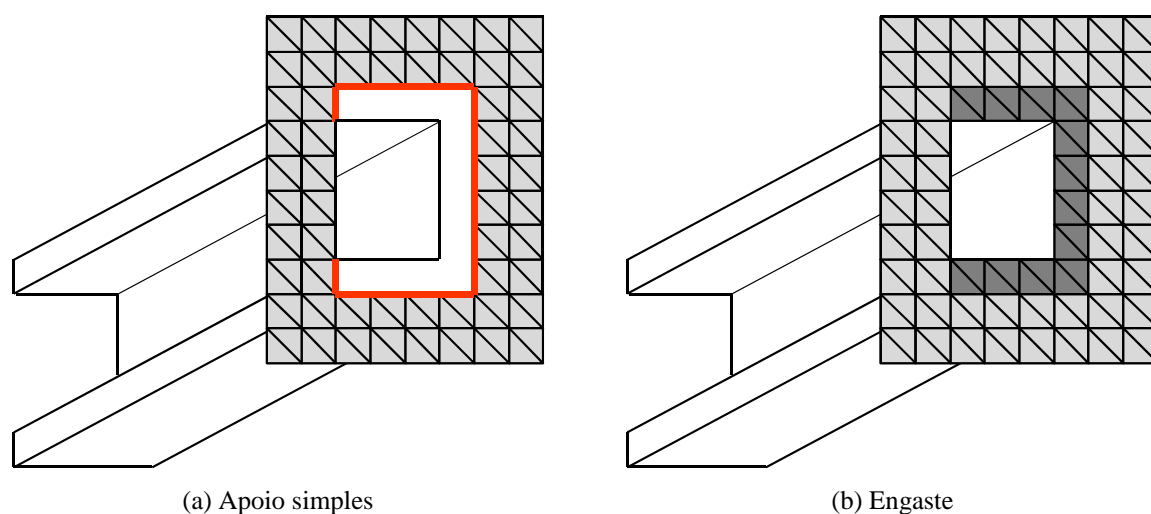


Figura 2.14 – Tipos de vinculação entre as cascas e a seção do núcleo

Observa-se que, para considerar apoio simples, basta limitar a malha discreta da laje na linha de interface com a seção do núcleo (destacada em vermelho) conforme mostra a Figura 2.14(a). Para a situação de lajes engastadas no núcleo devem ser considerados elementos de casca sobre a região da seção transversal, fazendo coincidir todos os nós da seção da barra. Na Figura 2.14(b) são ilustrados os elementos sobrepostos na seção em cor escura. Em ambos os casos os nós acoplados são reconhecidos automaticamente através das coordenadas no sistema de referência global, sendo, por este motivo, necessário compatibilizar as malhas da laje com a malha discreta da seção transversal do núcleo.

Pode-se dizer que o tensor B (que depende da posição atual) atua como uma matriz de incidência cinemática entre os graus de liberdade da casca e da seção da barra. Nesse sentido, além de permitir o cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente, este tensor pode ser aplicado para transferir forças aplicadas nos nós de casca para o nó no elemento de núcleo. Afinal, os graus de liberdade de translação do nó de casca acoplado deixam de fazer parte do sistema de equações, e caso haja alguma força atuando naquele nó, esta deve ser multiplicada pelo tensor B para poder ser considerada no sistema de equações. Este procedimento deve ser realizado sempre que se considerarem, por exemplo, forças distribuídas na laje, uma vez que, neste caso, os elementos adjacentes às paredes irão possuir nós acoplados com carregamento atuante.

Para completar a descrição, a seguir são apresentados os termos da matriz B obtidos a partir da derivada  $\partial Y_\beta^c / \partial Y_\alpha^b$  aplicada à expressão (2.114). Utiliza-se a mesma notação daquela expressão:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_1^b} &= 1; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_2^b} &= 0; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_3^b} &= 0; \\
 \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_4^b} &= (a^c)^2 Y_5^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_5^b} &= a^c + (a^c)^2 Y_4^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_6^b} &= w^c Y_{12}^b Y_{11}^b; \\
 \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_7^b} &= -w^c Y_{12}^b Y_{10}^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_8^b} &= (b^c)^2 Y_9^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_9^b} &= b^c + (b^c)^2 Y_8^b; \\
 \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_{10}^b} &= -w^c Y_{12}^b Y_7^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_{11}^b} &= w^c Y_{12}^b Y_6^b; & \frac{\partial Y_1^c}{\partial Y_{12}^b} &= w^c (Y_6^b Y_{11}^b - Y_{10}^b Y_7^b)
 \end{aligned}
 \tag{2.123}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_1^b} = 0; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_2^b} = 1; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_3^b} = 0; \\
 \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_4^b} = (a^c)^2 Y_6^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_5^b} = -w^c Y_{12}^b Y_{11}^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_6^b} = a^c + (a^c)^2 Y_4^b; \\
 \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_7^b} = w^c Y_{12}^b Y_9^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_8^b} = (b^c)^2 Y_{10}^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_9^b} = w^c Y_{12}^b Y_7^b; \\
 \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_{10}^b} = b^c + (b^c)^2 Y_8^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_{11}^b} = -w^c Y_{12}^b Y_5^b; & \frac{\partial Y_2^c}{\partial Y_{12}^b} = w^c (Y_9^b Y_7^b - Y_5^b Y_{11}^b)
 \end{array}
 \tag{2.124}$$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_1^b} = 0; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_2^b} = 0; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_3^b} = 1; \\
 \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_4^b} = (a^c)^2 Y_7^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_5^b} = w^c Y_{12}^b Y_{10}^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_6^b} = -w^c Y_{12}^b Y_9^b; \\
 \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_7^b} = a^c + (a^c)^2 Y_4^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_8^b} = (b^c)^2 Y_{11}^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_9^b} = -w^c Y_{12}^b Y_6^b; \\
 \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_{10}^b} = w^c Y_{12}^b Y_5^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_{11}^b} = b^c + (b^c)^2 Y_8^b; & \frac{\partial Y_3^c}{\partial Y_{12}^b} = w^c (Y_5^b Y_{10}^b - Y_9^b Y_6^b)
 \end{array}
 \tag{2.125}$$





### **3. MODELAGEM DO SISTEMA SOLO-FUNDAÇÃO**

---

O presente capítulo trata dos desenvolvimentos para a modelagem do sistema solo-fundação do edifício com o objetivo de incorporar ao modelo o fenômeno de interação solo-estrutura (ISE). É utilizado o programa de análise de sólidos tridimensionais desenvolvido no trabalho de Coda (2000) que é baseado no acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Foram realizadas alterações deste código computacional para possibilitar o cálculo de uma matriz de rigidez do sistema solo-fundação a ser inserida na rigidez do edifício não linear geométrico (NLG) e considerar assim a flexibilidade do solo. As alterações incluem adaptações da formulação do MEC para permitir que a malha discreta do solo possa ser considerada somente para as regiões carregadas, o que é vantajoso para o modelo numérico por reduzir a quantidade de variáveis do problema.

É importante esclarecer que o programa de análise das fundações a ser descrito é totalmente independente do programa de análise não linear geométrica descrito no capítulo anterior, e nenhum dos elementos citados anteriormente são utilizados nesta etapa. Adota-se o comportamento linear físico e geométrico de todos os meios pertencentes à infraestrutura. Deve-se ressaltar a razoabilidade em se considerar o sistema solo-fundação com comportamento elástico linear, afinal, para as estruturas de edifícios os sistemas de fundações são concebidos de maneira a garantir o mínimo possível de recalques, pois estes são extremamente perigosos para os edifícios podendo causar sérios problemas estruturais. Nesse sentido, o sistema solo-fundação deve obrigatoriamente trabalhar no campo dos pequenos deslocamentos e das pequenas deformações.

O solo é modelado via MEC sendo utilizados elementos de contorno planos para a superfície e elementos de linha de carga inseridos no domínio para a consideração de estacas. Foram realizadas adaptações para a utilização da solução fundamental de Mindlin na montagem do sistema de equações e para a aplicação da propriedade de movimento de corpo rígido no cálculo das integrais singulares. Os elementos estruturais da infraestrutura de fundação, por sua vez, são modelados via MEF, sendo aqui utilizados elementos finitos de casca para as fundações do tipo direta e elementos finitos de barra para as estacas. Optou-se por manter a formulação original do MEF presente no código computacional base, sendo ambos os elementos finitos baseados em parâmetros incógnitos de deslocamentos e rotações

nodais. O acoplamento numérico da estrutura de fundação com o solo se dá através da técnica clássica de sub-regiões para posterior determinação da rigidez do conjunto a ser agregada ao código de análise não linear geométrica do edifício.

A partir do próximo item são apresentadas breves descrições dos métodos numéricos, comentando-se os desenvolvimentos dos elementos de contorno e dos elementos finitos utilizados, incluindo a apresentação das expressões da solução fundamental de Mindlin que foram incorporadas ao código base. Descreve-se em seguida a técnica de sub-regiões utilizada no acoplamento MEC-MEF. Por último, é apresentada a estratégia numérica proposta para o cálculo da matriz de rigidez do sistema solo-fundação com comentários em relação à sua implementação computacional e as adaptações necessárias para inseri-la no modelo não linear do edifício. Os exemplos numéricos são deixados para o próximo capítulo.

### 3.1 O MEC para elasticidade

Apesar do MEC ser um método numérico menos difundido do que o MEF, observa-se nas últimas décadas o aumento de sua popularidade, principalmente para análise de problemas que envolvem domínios infinitos ou semi-infinitos, como no caso do solo. Afinal, por se tratar de um método de fronteira, muitos pesquisadores consideram o MEC como melhor alternativa do que o MEF para a modelagem desse tipo de problema, permitindo menores quantidades de parâmetros para geração de malhas e para a solução numérica (CHENG; CHENG, 2005).

A seguir será descrita a formulação do MEC para análise de sólidos tridimensionais formados por materiais homogêneos, elásticos e isótropos que é utilizada no programa base. A apresentação é feita de forma bastante resumida tendo em vista a quantidade de trabalhos desenvolvidos na EESC/USP nos quais formulações semelhantes são apresentadas.

Toma-se como referência o estado de tensões de um ponto pertencente ao meio contínuo do solo quando este está submetido à ação externas, conforme esquematizado na Figura 3.1. O equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal fornece um sistema de três equações diferenciais de equilíbrio, que podem ser escritas na seguinte forma geral fazendo uso da notação de índice:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad , \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad (3.1)$$

sendo  $\sigma_{ij}$  a componente de tensão na direção  $i$  que atua no plano ortogonal à direção  $j$  e  $b_i$  representa as forças de volume. Observa-se que na equação (3.1) os índices  $i$  e  $j$  foram

permutados, pois verifica-se que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  utilizando-se as três equações de equilíbrio em momentos (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

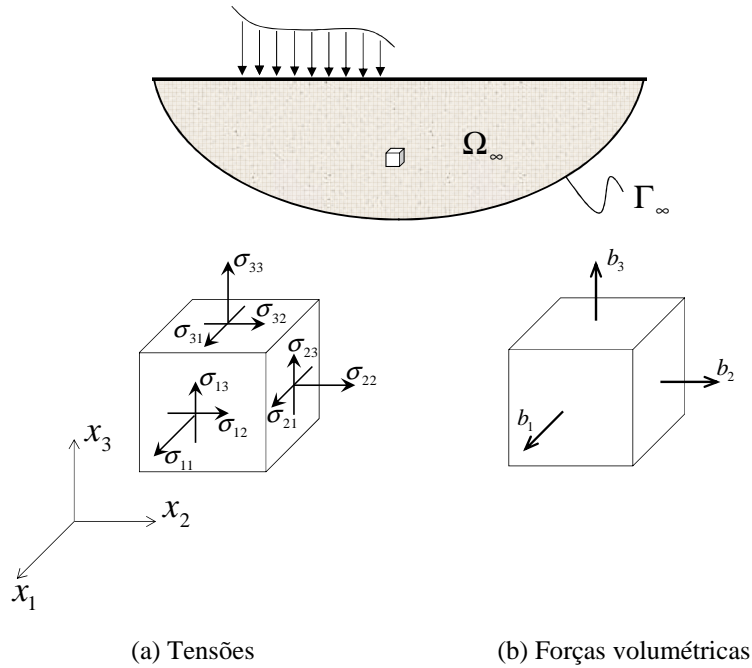


Figura 3.1 – Estado de tensões no solo

Aplica-se o método dos resíduos ponderados à equação de equilíbrio (3.1) utilizando-se uma função ponderadora  $w_i^*$ , por ora qualquer:

$$(\sigma_{ij,j} + b_i) \cdot w_i^* = 0 \tag{3.2}$$

Realiza-se a integral em todo o domínio  $\Omega$  do solo para a equação ponderada:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} w_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = 0 \tag{3.3}$$

Em seguida, aplica-se o Teorema de Gauss (ou Teorema da Divergência) no primeiro termo da equação (3.3), o que resulta em:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j w_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = 0 \tag{3.4}$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno do meio contínuo solo e  $n$  é o vetor normal à esta superfície.

Com uso do Teorema da Reciprocidade de Betti, da lei de Hooke e das relações entre deslocamentos e deformações é possível demonstrar que  $\sigma_{ij} w_{i,j}^* = \sigma_{ij}^* w_{i,j}$ . Aplicando-se então esta relação na (3.4) e realizando-se a integração por partes do segundo termo da equação resultante, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j w_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* w_i n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* w_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

Sabe-se que o produto entre a tensão  $\sigma$  com o vetor normal  $n$  é igual à força de superfície  $p$  na região considerada. Fazendo-se esta substituição, reorganizando os termos e observando-se a relação entre  $\sigma_{ij,j}^*$  e  $b_i^*$ , dada pela equação (3.1), chega-se a uma equação integral ponderada do problema elástico que tem a seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} p_i w_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* w_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \cdot w_i d\Omega \quad (3.6)$$

Para o MEC a função ponderadora  $w_i^*$  deve ser substituída por soluções fundamentais, que representam soluções particulares da equação diferencial de equilíbrio para uma força unitária concentrada em um ponto de um domínio cujas propriedades são idênticas às do meio contínuo em estudo. A Figura 3.2 ilustra o esquema do problema fundamental do qual pode ser obtida uma solução fundamental. De maneira geral, aplica-se uma força unitária em um ponto fonte  $s$  de um meio infinito (ou semi-infinito, dependendo da solução fundamental desejada) e avaliam-se os efeitos desta força em outro ponto  $q$  (ponto campo) de interesse. A solução deste problema é dada pelas respostas para os deslocamentos  $u_{ik}^*$  e forças de superfície  $p_{ik}^*$ , sendo o primeiro índice destes termos relativo à direção de aplicação da força e o segundo a direção do efeito mensurado. A solução fundamental do problema elástico é, portanto, um campo de deslocamentos e de forças de superfície para um meio contínuo elástico linear análogo ao sólido em análise.

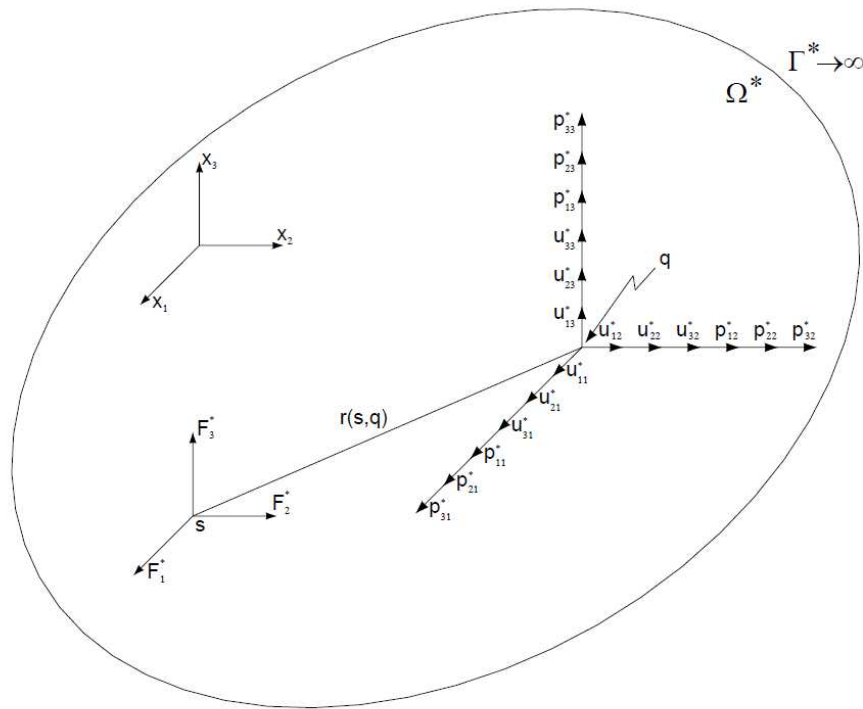


Figura 3.2 – Problema fundamental para a elasticidade (PACCOLA, 2004)

No presente trabalho optou-se por adotar a solução fundamental proposta por Mindlin (1936). Maiores detalhes sobre esta solução serão apresentados ainda neste capítulo.

Substituindo-se a função ponderadora pela solução fundamental em (3.6) obtém-se a seguinte equação integral:

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot u_{ik}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_{ik}^* \cdot u_i d\Omega \quad (3.7)$$

Para converter a equação (3.7) em um formato que permita a sua implementação numérica é necessário avaliar as possíveis situações de carregamento do problema fundamental. Estas situações são representadas, em notação de índice, por:

$$\sigma_{ijk,j}^* + b_{ik}^* = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

sendo

$$b_{ik}^* = \delta_{ik} \cdot \delta(s, q) \quad (3.9)$$

onde  $\delta_{ik}$  é o Delta de Kronecker,  $\delta(s, q)$  é a distribuição Delta de Dirac,  $s$  é o ponto fonte onde se aplicam as forças unitárias,  $q$  é o ponto de campo no qual avaliam-se seus efeitos e o índice  $k$  é relativo à direção de aplicação do carregamento.

Observando-se a equação (3.9) percebe-se que o último termo da equação (3.7) é uma integral conhecida, sendo que seu resultado depende da posição do ponto fonte em relação ao

domínio do sólido. A Figura 3.3 exibe três situações possíveis para a posição do ponto fonte em relação a um corpo de domínio  $\Omega$  qualquer limitado por um contorno  $\Gamma$ .

Em uma primeira situação, considera-se o ponto fonte  $s_1$  que está situado fora do domínio do sólido, ou seja,  $s_1 \notin (\Omega + \Gamma)$ . Aplicando-se as propriedades da distribuição Delta de Dirac chega-se a conclusão que, para este caso, a integral de  $b_{ik}^*$  resulta em valor nulo:

$$\int_{\Omega} b_{ik}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(s_1, q) u_i \, d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

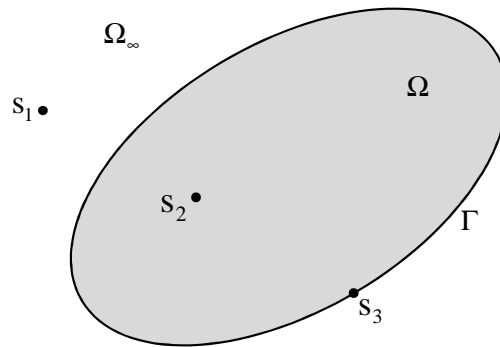


Figura 3.3 – Posições do ponto fonte

Um segundo caso refere-se a um ponto fonte  $s_2$  que está inteiramente inserido no domínio do sólido, isto é,  $s_2 \in (\Omega - \Gamma)$ . Nesta situação o resultado da integral de  $b_{ik}^*$  será:

$$\int_{\Omega} b_{ik}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(s_2, q) u_i \, d\Omega = u_k(s_2) \quad (3.11)$$

A terceira situação possível é a de um ponto fonte  $s_3$  que se encontra exatamente sobre a fronteira do sólido, ou seja,  $s_3 \in \Gamma$ . Para este caso, demonstra-se que:

$$\int_{\Omega} b_{ik}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ik} \delta(s_3, q) u_i \, d\Omega = c_{ik} u_i(s_3) \quad (3.12)$$

onde o coeficiente  $c_{ik}$  pode ser calculado analítica ou numericamente. Sabe-se que para superfícies de contorno suave este termo vale  $\frac{1}{2} \delta_{ik}$  (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Observando-se as equações (3.10), (3.11) e (3.12) percebe-se que é possível reescrever a equação (3.7) em um formato geral em que o valor do termo  $c_{ik}$  depende da posição do ponto fonte. Além disso, a fim de simplificar sua implementação numérica, ignora-se a parcela referente às forças volumétricas, uma vez que tais forças podem ser substituídas por um conjunto de forças equivalentes externamente aplicadas. Assim, define-se a seguinte equação integral para o equilíbrio:

$$c_{ik}u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s,q)u_i(q) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i(q)u_{ik}^*(s,q)d\Gamma \quad (3.13)$$

sendo que, nesta expressão, o coeficiente  $c_{ik}$  possui os seguintes valores:

$$c_{ik}(s) = 0 \quad \forall s \notin (\Omega + \Gamma) \quad (3.14)$$

$$c_{ik}(s) = \delta_{ik} \quad \forall s \in (\Omega - \Gamma) \quad (3.15)$$

$$c_{ik}(s) = \frac{1}{2}\delta_{ik} \quad \forall s \in \Gamma \text{ (válido para contorno suave)} \quad (3.16)$$

A análise da equação (3.13) permite chegar às seguintes conclusões: para pontos fora do domínio não há necessidade de calcular o termo livre, o que simplifica a equação; para pontos internos ao domínio a equação fornece resultados de deslocamentos internos diretamente, no entanto, é necessário conhecer previamente as respostas no contorno; para pontos fonte sobre o contorno se faz necessário o cálculo do termo livre. Neste último caso, se a superfície do contorno não é suave, o cálculo de  $c_{ik}$  se torna complexo (HARTMANN, 1980). A fim de evitar maiores complexidades adota-se neste trabalho a técnica baseada no princípio de movimento de corpo rígido que é usualmente utilizada por ser de fácil implementação numérica (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992).

Antes de se apresentar os procedimentos para aplicação desta técnica é necessário transformar a equação (3.13) em um sistema algébrico, o que permitirá o cálculo aproximado de deslocamentos e forças na superfície no contorno do solo. Para isso, admitem-se pontos (ou nós) sobre essa superfície construindo-se uma malha discreta na fronteira do sólido através de elementos de contorno que estão ligados por nós de contorno, o que resulta na chamada formulação direta do MEC, uma vez que a equação integral passa a ser escrita como função de variáveis do contorno do sólido e estas possuem significado físico imediato.

Escrevem-se então aproximações dos deslocamentos  $u_i$  e das forças de superfície  $p_i$  para cada direção  $i$  com uso de funções de forma polinomiais  $\Phi$  da seguinte maneira:

$$u_i = \Phi_{\ell} \cdot U_i^{\ell} \quad (3.17)$$

$$p_i = \Phi_{\ell} \cdot P_i^{\ell} \quad (3.18)$$

onde  $U_i^{\ell}$  e  $P_i^{\ell}$  são vetores que contêm, respectivamente, os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície para cada nó  $\ell$  do contorno.

Estas aproximações são inseridas em (3.13), o que resulta em:

$$c_{ik}u_i(s) + U_i^{\ell} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s,q)\Phi_{\ell} d\Gamma = P_i^{\ell} \int_{\Gamma} \Phi_{\ell} \cdot u_{ik}^*(s,q) d\Gamma \quad (3.19)$$

As integrais sobre o contorno  $\Gamma$  em (3.19) podem ser substituídas por somatórios de integrais sobre superfícies  $\Gamma_e$  dos  $e$  elementos de contorno, o que resulta em matrizes  $\tilde{H}$  e  $G$  na seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma = \sum_{m=1}^e \left[ \int_{\Gamma_e} p_{ik}^*(s, q) \cdot \Phi_{\ell} \cdot d\Gamma_e \right] \cdot U_i^{\ell_e} = \tilde{H} \cdot U \quad (3.20)$$

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma = \sum_{m=1}^e \left[ \int_{\Gamma_e} u_{ik}^*(s, q) \cdot \Phi_{\ell} \cdot d\Gamma_e \right] \cdot P_i^{\ell_e} = G \cdot P \quad (3.21)$$

A matriz resultante da integral dada em (3.20) é somada a uma matriz diagonal  $\tilde{C}$  que reúne os termos livres  $c_{ik}$ , concluindo assim a matriz  $H$  do MEC:

$$H = \tilde{C} + \tilde{H} \quad (3.22)$$

Logo, reescreve-se a equação (3.19) na forma de um sistema de equações algébricas:

$$H \cdot U = G \cdot P \quad (3.23)$$

No presente trabalho o cálculo explícito da matriz  $\tilde{C}$  é dispensado, sendo os termos da diagonal da matriz  $H$  determinados com a aplicação do princípio do movimento de corpo rígido, conforme comentado anteriormente. Segundo este princípio, para um corpo sólido desprovido de ações externas e de deslocamentos relativos entre partículas, isto é, sem a ocorrência de deformações ou distorções no material, deve ser respeitada a seguinte igualdade:

$$H \cdot \bar{I} = 0 \quad (3.24)$$

sendo  $\bar{I}$  um vetor de deslocamentos unitários para cada direção no espaço. Para satisfazer esta igualdade, a soma dos termos correspondentes ao movimento de corpo rígido imposto em cada linha da matriz  $H$  deve ser nula e, assim, é possível se escrever a seguinte expressão:

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n H_{ij} \quad (3.25)$$

Estas expressões são válidas para domínios fechados. No caso de meios infinitos (ou semi-infinitos) como o solo a aplicação de um movimento de corpo rígido fornece a seguinte condição para o "contorno"  $\Gamma_{\infty}$  no infinito (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992):

$$\int_{\Gamma_{\infty}} p^* d\Gamma = -I \quad (3.26)$$



onde  $I$  é a matriz identidade. Neste caso, os termos da diagonal da matriz  $H$  passam a ser dados por:

$$H_{ii} = I - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n H_{ij} \quad (3.27)$$

A relação (3.27) permite a determinação dos termos singulares da matriz  $H$  sem a necessidade de aplicação de técnicas analíticas ou de subtração de singularidades. Assim, é dispensada a técnica de integração semianalítica proposta no programa original.

Após a montagem do sistema algébrico é necessário se aplicar as condições de contorno do problema tornando assim o sistema possível de ser resolvido. Para aplicação das condições de contorno essenciais (cinemáticas) e/ou naturais (de forças) trocam-se as colunas das matrizes em (3.23) correspondentes aos nós nos quais estas condições são conhecidas, o que resulta em novas matrizes  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  e em um novo sistema com a seguinte forma:

$$\bar{H} \cdot X = \bar{G} \cdot \bar{P} \quad (3.28)$$

sendo  $\bar{P}$  um vetor que reúne apenas valores conhecidos e  $X$  o vetor das incógnitas do problema. Assim, este sistema algébrico linear pode ser resolvido.

Maiores detalhes sobre esta formulação podem ser encontrados em Brebbia & Dominguez (1992).

### 3.1.1 Solução fundamental de Mindlin

A solução fundamental, conforme descrito no item anterior, é uma solução particular da equação diferencial do problema físico e sua aplicação é necessária para a resolução numérica do MEC. Neste trabalho optou-se por utilizar a solução fundamental de Mindlin (1936) que resolveu o problema ilustrado na Figura 3.4 no qual forças unitárias atuam em um ponto  $s$  de um domínio sólido tridimensional elástico, isotrópico e homogêneo  $\Omega^*$  no semiespaço infinito. Admite-se que o plano definido em  $x_3 = 0$  é livre de forças de superfície e é considerado como superfície de contorno.

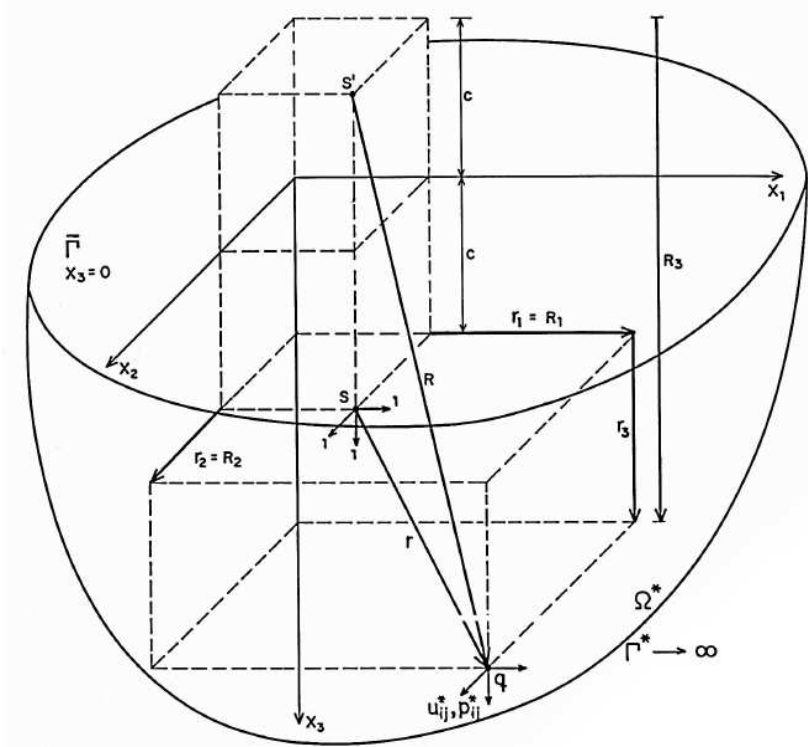


Figura 3.4 – Problema fundamental de Mindlin (BARBIRATO, 1991)

As expressões da solução fundamental obtidas por Mindlin em termos de deslocamentos para cada direção cartesiana são exibidas a seguir. Estas expressões são apresentadas no mesmo formato utilizado por Barbirato (1991).

$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4C_1 C_2}{R + R^3} \left( 1 - \frac{r_1^2}{R(R + R^3)} \right) \right\} \quad (3.29)$$

$$u_{12}^* = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{C_3}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R + R^3)^2} \right\} \quad (3.30)$$

$$u_{13}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} - \frac{6cz R_3}{R^5} + \frac{4C_1 C_2}{R(R + R^3)} \right\} \quad (3.31)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (3.32)$$

$$u_{22}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4C_1 C_2}{R + R^3} \left( 1 - \frac{r_2^2}{R(R + R^3)} \right) \right\} \quad (3.33)$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \quad (3.34)$$

$$u_{31}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R^3)} \right\} \quad (3.35)$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \quad (3.36)$$

$$u_{33}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{8C_1^2 - C_3}{R} + \frac{C_3 R_3^2 - 2cz}{R^3} + \frac{6czR_3^2}{R^5} \right\} \quad (3.37)$$

Os termos utilizados nas expressões acima são dados a seguir, sendo que  $i = 1, 2, 3$ :

$$r = \sqrt{r_i r_i} = |s - q| \quad (3.38)$$

$$R = \sqrt{R_i R_i} = |s' - q| \quad (3.39)$$

$$r_i = X_i(q) - X_i(s) \quad (3.40)$$

$$R_i = X_i(q) - X_i(s') \quad (3.41)$$

$$c = X_3(s) \geq 0 \quad (3.42)$$

$$z = X_3(q) \geq 0 \quad (3.43)$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \quad (3.44)$$

$$C_1 = 1 - \nu \quad (3.45)$$

$$C_2 = 1 - 2\nu \quad (3.46)$$

$$C_3 = 3 - 4\nu \quad (3.47)$$

Para a obtenção das expressões de forças de superfície  $p_{ik}^*$  da solução fundamental utiliza-se o tensor de terceira ordem das tensões do problema fundamental e o vetor normal à superfície no ponto q, sendo aplicada a seguinte relação:

$$p_{ik}^* = \sigma_{ij}^{*k} n_j \quad (3.48)$$

lembrando-se que o índice  $k$  é a direção da força.

A seguir são apresentadas as componentes de tensão do problema fundamental que permitem a aplicação da relação (3.48):

$$\sigma_{11}^{*1} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - C_4 R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.49)$$

$$\sigma_{12}^{*1} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[ 1 - \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.50)$$

$$\sigma_{13}^{*1} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5} \left[ zR_3 - C_2 r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \quad (3.51)$$

$$\sigma_{21}^{*1} = \sigma_{12}^{*1} \quad (3.52)$$

$$\sigma_{22}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_5}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - C_2 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.53)$$

$$\sigma_{23}^{*1} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[ C_2 + \frac{5z R_3}{R^2} \right] \right\} \quad (3.54)$$

$$\sigma_{31}^{*1} = \sigma_{13}^{*1} \quad (3.55)$$

$$\sigma_{32}^{*1} = \sigma_{23}^{*1} \quad (3.56)$$

$$\sigma_{33}^{*1} = K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - C_2 R_3 + \frac{5z R_3^2}{R^2} \right] \right\} \quad (3.57)$$

$$\sigma_{11}^{*2} = K_s r_2 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_5}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_1^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - C_2 R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.58)$$

$$\sigma_{12}^{*2} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[ 1 - \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\} \quad (3.59)$$

$$\sigma_{13}^{*2} = \sigma_{23}^{*1} \quad (3.60)$$

$$\sigma_{21}^{*2} = \sigma_{12}^{*2} \quad (3.61)$$

$$\sigma_{22}^{*2} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_5}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 3 - \frac{r_2^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - C_4 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.62)$$

$$\sigma_{23}^{*2} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 R_3}{R^5} - \frac{6c}{R^5} \left[ zR_3 - C_2 r_2^2 - \frac{5r_2^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \quad (3.63)$$

$$\sigma_{31}^{*2} = \sigma_{23}^{*1} \quad (3.64)$$

$$\sigma_{32}^{*2} = \sigma_{23}^{*2} \quad (3.65)$$

$$\sigma_{33}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1} \quad (3.66)$$

$$\sigma_{11}^{*3} = K_s \left\{ \frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 (3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 r_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_1^2 (3R+R_3)}{R^2 (R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[ C_2 z - 2\nu c - \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.67)$$

$$\sigma_{12}^{*3} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4C_1 C_2}{R^2 (R+R_3)} \left[ \frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\} \quad (3.68)$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (3.69)$$

$$\sigma_{21}^{*3} = \sigma_{12}^{*3} \quad (3.70)$$

$$\sigma_{22}^{*3} = K_s \left\{ \frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 (3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 r_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[ C_2 z - 2\nu c - \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (3.71)$$

$$\sigma_{23}^{*3} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (3.72)$$

$$\sigma_{31}^{*3} = \sigma_{13}^{*3} \quad (3.73)$$

$$\sigma_{32}^{*3} = \sigma_{23}^{*3} \quad (3.74)$$

$$\sigma_{33}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3^2}{R^5} + \frac{3cR_3(5z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\} \quad (3.75)$$

Os termos utilizados nas expressões acima são dados a seguir:

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (3.76)$$

$$C_4 = 3 - 2\nu \quad (3.77)$$

$$C_5 = 5 - 4\nu \quad (3.78)$$

além daqueles já apresentados nas expressões de (3.38) a (3.47).

A solução fundamental de Mindlin foi implementada no código computacional base substituindo-se os termos  $u_{ik}^*$  e  $p_{ik}^*$  nas equações (3.20) e (3.21) pelas componentes das soluções fundamentais de deslocamentos e de forças de superfície para cada direção.

Apesar de envolver expressões longas e de não possuir uma expressão geral, como no caso da solução fundamental de Kelvin (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992) a solução de Mindlin oferece a vantagem de necessitar apenas da discretização sobre as superfícies de

contorno que estão carregadas, o que reduz a dimensão da malha discreta necessária para a modelagem do solo e, conseqüentemente a dimensão do sistema algébrico a ser resolvido.

Dando seqüência ao desenvolvimento da formulação do MEC comenta-se a seguir sobre os elementos de contorno utilizados.

### 3.1.2 Modelagem da superfície do solo: Elemento de Contorno Plano

Para modelar a superfície do solo é utilizado um elemento de contorno de superfície do tipo quadrático com oito nós (família *Serendipity*) dispostos conforme a Figura 3.5(a). O grau de aproximação permite que o elemento descreva superfícies curvas, uma vez que os nós não precisam estar necessariamente no mesmo plano (CODA, 2000).

Adota-se um sistema de coordenadas adimensionais  $(\eta_1, \eta_2)$  com origem no centro do elemento. Assim, as coordenadas cartesianas  $x$  em cada direção  $i$  dos nós de um ponto qualquer sobre o contorno do solo podem ser aproximadas por polinômios na seguinte forma:

$$x_i = \varphi_\ell(\eta_1, \eta_2) X_i^\ell \quad (3.79)$$

onde  $\varphi_\ell(\eta_1, \eta_2)$  são as funções de forma para o nó  $\ell$  do elemento discreto e  $X_i^\ell$  o vetor que guarda os valores das coordenadas de cada nó do elemento.

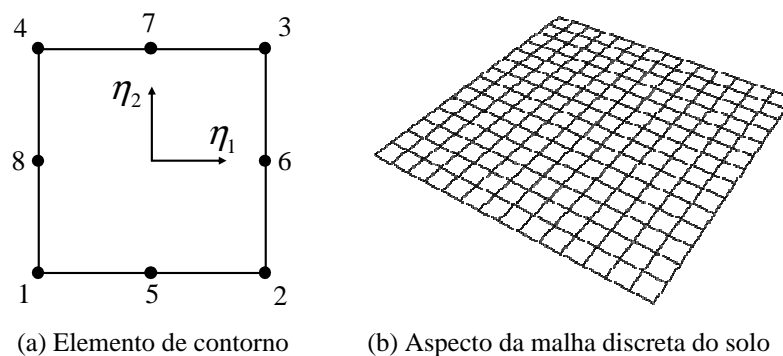


Figura 3.5 – Elemento de contorno de superfície

A seguir apresentam-se as funções de forma de ordem cúbica deste elemento:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(-\eta_1 - \eta_2 - 1) \quad (3.80)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)(\eta_1 - \eta_2 - 1) \quad (3.81)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(\eta_1 + \eta_2 - 1) \quad (3.82)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)(-\eta_1 + \eta_2 - 1) \quad (3.83)$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2}(1 - \eta_1^2)(1 - \eta_2) \quad (3.84)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{2}(1 + \eta_1)(1 - \eta_2^2) \quad (3.85)$$

$$\varphi_7 = \frac{1}{2}(1 - \eta_1^2)(1 + \eta_2) \quad (3.86)$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{2}(1 - \eta_1)(1 - \eta_2^2) \quad (3.87)$$

De maneira análoga às coordenadas é possível escrever os deslocamentos e as forças de superfície no contorno de maneira aproximada:

$$u_i = \varphi_\ell(\eta_1, \eta_2) U_i^\ell \quad (3.88)$$

$$p_i = \varphi_\ell(\eta_1, \eta_2) P_i^\ell \quad (3.89)$$

sendo  $U_i^\ell$  e  $P_i^\ell$  os vetores que guardam valores de, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície nodais.

As aproximações das variáveis são utilizadas juntamente com a solução fundamental para calcular matrizes locais do elemento de contorno realizando as integrais sobre o contorno  $\Gamma_e$  destes elementos, conforme as equações (3.20) e (3.21). As matrizes locais são transferidas para uma matriz global através da regra de incidência dos nós de contorno.

Para converter as integrais sobre os elementos discretos em integrais numéricas resta apenas conhecer o Jacobiano ( $J$ ) que transforma o diferencial de contorno do elemento para os diferenciais de coordenadas do sistema adimensional auxiliar, ou seja:

$$d\Gamma_e = J(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \quad (3.90)$$

Este Jacobiano pode ser calculado a partir de um vetor  $\bar{n}$  normal à superfície do elemento de contorno que, por sua vez, pode ser determinado através de dois vetores tangentes  $\bar{t}^1$  e  $\bar{t}^2$ , conforme esquematizado na Figura 3.6.

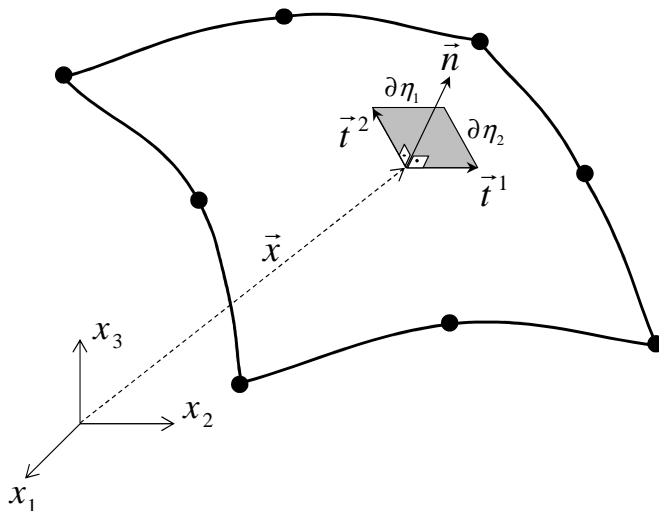


Figura 3.6 – Transformação do sistema de coordenadas

Os vetores tangentes são calculados a partir da primeira derivada parcial do vetor  $\vec{x}$ , que define a posição de um ponto no elemento. O vetor normal fica então definido pelo produto vetorial entre  $\vec{t}^1$  e  $\vec{t}^2$  dado, em notação de índice, por:

$$n_i = \frac{\partial x_j}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_k}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_j}{\partial \eta_2} \quad (3.91)$$

com a permutação cíclica dos índices  $i, j$  e  $k$  variando de 1 a 3. Observa-se que as coordenadas podem ser substituídas por suas aproximações, conforme (3.79), o que resulta em:

$$n_i = \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \eta_1} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \eta_2} x_j^\ell x_k^\gamma - \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial \eta_1} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \eta_2} x_k^\ell x_j^\gamma \quad (3.92)$$

sendo nesta expressão os índices  $\ell$  e  $\gamma$  referentes aos nós do elemento de contorno.

Finalmente, escreve-se o Jacobiano em função das componentes do vetor normal:

$$J = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (3.93)$$

### 3.1.3 Modelagem da superfície das estacas: Elemento de Linha de Carga

Em problemas que envolvem a análise de estacas imersas no solo é necessário o uso de um elemento de contorno especial que permita o acoplamento com elementos lineares de barras do MEF para a transmissão de forças de contato na interface entre a estaca e o solo. Estes elementos especiais são chamados de linhas de carga uma vez que, por serem internos ao domínio, sua formulação envolve apenas termos integrais referentes à força de superfície gerando assim somente termos da matriz  $G$  do MEC.



O elemento de contorno de linha de carga tridimensional adotado neste trabalho é um elemento linear de dois nós com superfície cilíndrica de raio  $r$ , conforme a Figura 3.7.

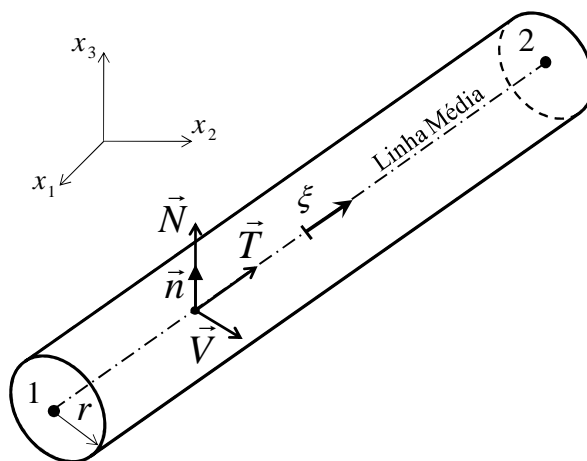


Figura 3.7 – Elemento de linha de carga

Para definir a geometria do elemento são tomadas inicialmente coordenadas  $x_i$  sobre a linha longitudinal média, sendo que estas podem ser aproximadas por funções polinomiais na seguinte forma:

$$x_i = \phi_\ell(\xi) X_i^\ell \quad (3.94)$$

onde  $\phi_\ell$  são as funções de forma unidimensionais,  $\xi$  é a coordenada adimensional medida na linha de referência,  $X_i^\ell$  é o vetor das coordenadas de cada nó  $\ell$  e o índice  $i$  refere-se ao eixo cartesiano. As funções de forma lineares são dadas a seguir:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.95)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.96)$$

Para mapear a superfície da linha de carga é preciso calcular um versor  $\vec{n}$  associado a um vetor normal  $\vec{N}$  que, por sua vez é ortogonal à linha média. O vetor normal pode ser calculado como o produto vetorial entre a tangente  $\vec{T}$  na linha e outro vetor  $\vec{V}$  qualquer, definido aleatoriamente, porém com a condição de que o mesmo seja independente de  $\vec{T}$ . O vetor  $\vec{V}$  é determinado a partir de um ponto auxiliar localizado fora da linha média e definido no arquivo de entrada do programa.

Considera-se ainda outro vetor  $\vec{\rho}$  que pode ser calculado a partir do produto vetorial entre aos vetores  $\vec{N}$  e  $\vec{T}$ , de maneira que este novo vetor é ortogonal à  $\vec{n}$ . Logo, os vetores  $\vec{n}$  e  $\vec{\rho}$  formam uma base para um plano  $\pi$  a partir de um ponto contido na linha média, sendo que este plano contém a superfície do cilindro e é ortogonal a linha, conforme a Figura 3.8.

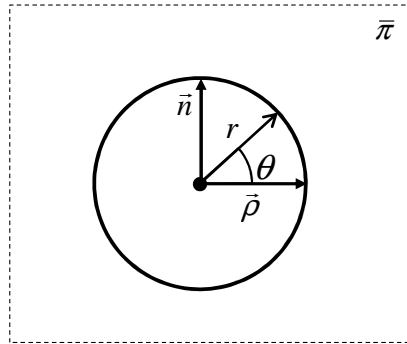


Figura 3.8 – Plano da seção transversal da linha de carga

Analisando a Figura 3.8 percebe-se que é possível determinar a coordenada de um ponto qualquer sobre a superfície cilíndrica da estaca com a seguinte expressão:

$$x_i = \phi_\ell(\xi) X_i^\ell + r(\xi) [\cos \theta \rho_i(\xi) + \text{sen} \theta n_i(\xi)] \quad (3.97)$$

sendo o ângulo  $\theta$  dado por:

$$\theta = \pi(1 + \eta) \quad (3.98)$$

com  $\eta$  variando de  $-1$  a  $+1$ .

Considera-se que as forças de contato entre a estaca e o solo variam linearmente ao longo do comprimento do elemento e não variam em  $\theta$ . Nesse sentido, as forças de superfície  $p_i$  podem ser aproximadas de maneira análoga às coordenadas da linha de referência, na seguinte forma:

$$p_i = \phi_\ell(\xi) P_i^\ell \quad (3.99)$$

onde  $P_i^\ell$  guarda os valores de forças de superfície para cada nó. É importante observar também que os nós da linha de carga são internos ao domínio do solo e, por este motivo, nenhuma aproximação é utilizada para os deslocamentos destes pontos.

O Jacobiano de transformação da superfície cilíndrica é calculado a partir da expressão (3.97), e resulta no seguinte valor para um elemento de eixo reto e raio constante:

$$J = \frac{\pi r L}{2} \quad (3.100)$$

### 3.2 O MEF para análise da fundação

O MEF é utilizado nesta etapa do trabalho para a modelagem dos elementos estruturais da infraestrutura de fundação, incluindo sapatas, placas, blocos e estacas. Deve-se comentar que não se está preocupado com a distribuição de tensões no interior dos elementos de sapata e blocos. Assim, elementos de casca são usados para sua modelagem. Diferente da superestrutura do edifício é adotada para esta etapa a formulação convencional do MEF, utilizada no desenvolvimento do código original base (CODA, 2000), não havendo nenhuma relação com a formulação apresentada no Capítulo 2 desta tese. Deve-se ressaltar que os recursos da versão original (no que se refere aos elementos finitos para a modelagem da infraestrutura) são suficientes para alcançar o objetivo de calcular coeficientes de flexibilidade do solo, uma vez que nenhum efeito não linear é considerado para o sistema solo-fundação.

A descrição do MEF bem como a apresentação dos elementos utilizados será sucinta, tendo em vista a quantidade de trabalhos e livros nos quais a mesma formulação pode ser encontrada, além da disponibilidade do trabalho que gerou o código base (CODA, 2000). Todos os elementos da infraestrutura de fundação são considerados meios homogêneos com comportamento elástico-linear e trabalhando no campo das pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

A partir destas considerações verifica-se que a equação de equilíbrio infinitesimal das tensões dada em (3.1) também é válida para o domínio dos elementos estruturais da infraestrutura. Assim, o desenvolvimento da formulação do MEF pode se dar a partir da aplicação da técnica dos resíduos ponderados e do Teorema da Divergência à equação de equilíbrio, seguindo os mesmos procedimentos realizados anteriormente no desenvolvimento do MEC, até a obtenção da equação (3.4). Os desenvolvimentos a seguir descritos se dão com base nesta última equação.

Adota-se como função ponderadora um campo de deslocamentos virtuais  $u_i^*$ . Substituindo-se esta função em (3.4) e aplicando-se a relação  $p = \sigma \cdot n$ , obtém-se como resultado a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma \quad (3.101)$$

É pertinente considerar a possibilidade de atuação de forças concentradas no domínio  $\Omega$  em estudo. Consideram-se forças  $\hat{p}$  de valor  $F_i^c$  atuando em pontos  $s$  sobre o contorno  $\Gamma$ ,

e também forças  $\hat{b}$  de valor  $F_i^d$  atuando em pontos interno S, sendo que ambas podem ser representadas pela distribuição Delta de Dirac, na seguinte forma:

$$\hat{p}_i = F_i^c \delta(s, q) \quad (3.102)$$

$$\hat{b}_i = F_i^d \delta(S, Q) \quad (3.103)$$

Incluindo estas forças na equação (3.101) e observando-se que  $\sigma_{ij} u_{i,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ , tem-se que:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma} F_i^c \delta(s, q) u_i^*(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} F_i^d \delta(S, Q) u_i^*(Q) d\Gamma \quad (3.104)$$

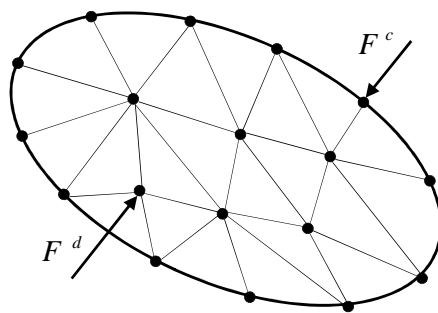


Figura 3.9 – Forças concentradas no MEF

Considerando-se as propriedades da distribuição Delta de Dirac e desprezando-se a parcela referente às forças volumétricas, que podem ser substituídas por forças concentradas equivalentes, reescreve-se a equação (3.104) como segue:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + F_i^c u_i^*(s) + F_i^d u_i^*(S) \quad (3.105)$$

ou ainda em um formato mais simples:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + F_i u_i^* \quad (3.106)$$

A equação (3.106) é conhecida como Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para o problema estático. É possível converter esta equação em um somatório de integrais numéricas sobre uma malha de elementos finitos montando, assim, um sistema de equações algébricas que tem a seguinte forma:

$$K \cdot U = QP + F \quad (3.107)$$

onde a matriz  $K$  é chamada de matriz de rigidez,  $U$  é o vetor dos deslocamentos nodais,  $Q$  é uma matriz consistente que tem a função de transformar forças de superfície em forças

concentradas nodais,  $P$  é o vetor de forças de superfície e  $F$  o vetor das forças concentradas diretamente aplicadas nos nós.

O sistema de equações (3.107) é montado através da malha de elementos finitos, sendo primeiramente gerados vetores e matrizes locais para em seguida aloca-los no sistema global por meio de uma regra de incidências nodais.

Destaca-se a matriz  $Q$  que facilita o acoplamento numérico dos elementos finitos com elementos de contorno. O cálculo de matrizes locais  $Q_e$  é feito com a integração das funções de forma ao longo do contorno de cada elemento finito da seguinte maneira:

$$Q_e = \int_{\Gamma_e} \bar{\Phi}_m \bar{\Psi}_l d\Gamma_e \tag{3.108}$$

sendo  $\bar{\Phi}_m$  as funções de forma utilizadas para aproximar o domínio,  $\bar{\Psi}_l$  funções de forma que aproximam as forças de superfície no contorno do sólido e os índices  $m$  e  $l$  referem-se aos nós do elemento finito em questão.

### 3.2.1 Modelagem das estacas: Elemento Finito de Barra (convencional)

Elementos finitos de barra tridimensional com formulação convencional são aqui utilizados para discretizar as estacas de fundação. Podem ser também aplicados para modelagem de vigas de fundação. Considera-se para este elemento a cinemática de Euler-Bernoulli, na qual as seções planas permanecem planas e ortogonais a linha de eixo. A seção transversal é constante e os valores das propriedades geométricas (área e momentos de inércia) são fornecidos no arquivo de entrada.

O elemento possui dois nós e seis graus de liberdade por nó, sendo três translações e três giros em relação a um sistema de coordenadas cartesianas no espaço tridimensional. Os graus de liberdade do elemento são organizados, em sistema de coordenadas locais, conforme a Figura 3.10.

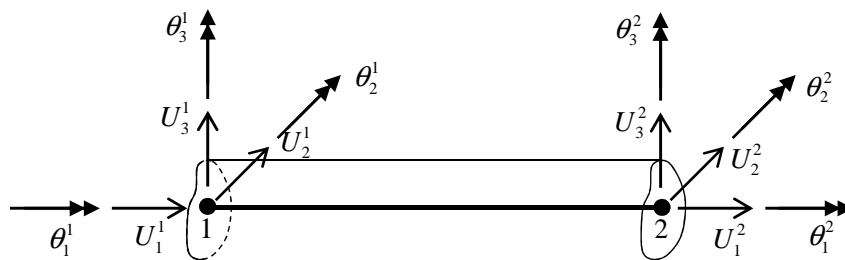


Figura 3.10 – Elemento finito de barra convencional

Os deslocamentos transversais são aproximados por função de ordem cúbica, enquanto que os deslocamentos longitudinais e o giro em torno do eixo longitudinal são aproximados por funções lineares. A matriz de rigidez deste elemento é vastamente difundida, sendo possível encontrar a sua dedução em diversos livros de elementos finitos. A matriz de rigidez é apresentada a seguir para um sistema local de referência, devendo ser transformada por uma matriz de rotação para o sistema de referência global antes de ser somada à matriz de rigidez da estrutura.

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} & \frac{12EI_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{L^3} & 0 & \frac{6EI_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_2}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{2EI_2}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_2}{L^2} & 0 & \frac{4EI_2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_3}{L} & -\frac{6EI_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Na (3.109) adota-se a seguinte simbologia:  $A$  é área da seção transversal da barra,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $I_i$  o momento de inércia referente ao eixo  $i$  e  $L$  o comprimento do elemento.

Há de se ressaltar que não há qualquer restrição quando à direção dos elementos finitos de barra e das linhas de carga do MEC no domínio do solo. Isso torna possível a consideração de estacas inclinadas, o que é uma vantagem desta formulação quando comparada a outros modelos numéricos de estacas baseados no acoplamento MEC-MEF (RAMOS, 2013).

Para possibilitar o acoplamento com as linhas de carga do MEC, apresenta-se a matriz local  $Q_e$  que transforma forças distribuídas (neste caso, ao longo do comprimento) em forças concentradas, sendo  $r$  o raio da estaca. Esta matriz foi calculada com uso da expressão (3.108), considerando-se que as forças distribuídas transversais e longitudinais são

aproximadas por funções lineares ao longo do comprimento do elemento. Observa-se que nesta matriz não se incluem termos relativos a momento de torção, pois o grau de liberdade de giro em torno do eixo longitudinal da estaca não é considerado no elemento de contorno, o que inviabiliza tal consideração.

$$Q_e = 2\pi r \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} \\ 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & \frac{3L}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{20} & 0 & \frac{-L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{20} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} \\ \frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} \\ 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & \frac{7L}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{20} & 0 & \frac{L^2}{20} & 0 \\ 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 & 0 & \frac{-L^2}{20} & 0 & 0 & \frac{-L^2}{20} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

### 3.2.2 Modelagem das fundações: Elemento Finito de Casca (convencional)

Para a modelagem das placas de fundação (tipo radier) e das sapatas flexíveis são utilizados elementos finitos de casca com formulação convencional do MEF. Estes elementos podem ser também aplicados na modelagem de blocos rígidos de fundação, desde que, neste caso, seja adequadamente definida a rigidez dos elementos discretos e que não se esteja interessado na análise de tensões no interior destes elementos.

Assim como para o elemento de barra, todo desenvolvimento original do código base referente à casca foi aqui aproveitado. O elemento é obtido da composição do elemento de chapa CST (*Constant Strain Triangle*) com o elemento de placa HCT (*Hsieh-Clough-Tocher*), de maneira a se obter um elemento finito que considera os efeitos de membrana e de flexão. É um elemento triangular com três nós, um em cada vértice, sendo que cada nó  $\ell$  possui cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos  $U_1^\ell$ ,  $U_2^\ell$  e  $U_3^\ell$  e duas rotações  $\theta_1^\ell$  e  $\theta_2^\ell$  no plano do elemento. O grau de liberdade referente ao giro em torno de um eixo ortogonal ao plano do elemento não é considerado. A Figura 3.11(a) exhibe a ordenação dos graus de liberdade

citados no sistema de coordenadas local, estando os deslocamentos  $U_3^\ell$  ortogonais ao plano da figura.

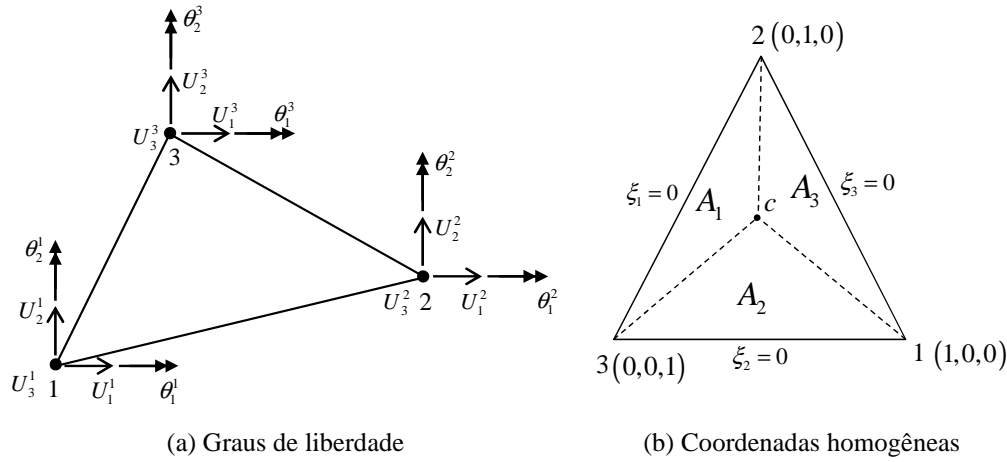


Figura 3.11 – Elemento finito de casca convencional

Adota-se um sistema de coordenadas homogêneas conforme a Figura 3.11(b) para aproximar a geometria e as variáveis, dividindo-se a área do elemento triangular em três partes de maneira que se tem a seguinte relação:

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} \tag{3.111}$$

sendo que  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ .

Definem-se as aproximações para os deslocamentos e rotações considerando-se os graus de liberdade relacionados ao comportamento de chapa separados dos graus de liberdade referentes à placa. No caso dos deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente nas direções locais 1 e 2, ou seja, no plano do elemento, adota-se grau de aproximação linear resultando suas aproximações em:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi U \tag{3.112}$$

Estes graus de liberdade referem-se apenas ao comportamento de membrana. Para as variáveis referentes ao comportamento de flexão, sendo estas o deslocamento  $u_3$  e as rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , consideram-se aproximações por funções  $\Psi$  de ordem cúbica na seguinte forma geral:

$$\hat{u} = \Psi_\ell(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \hat{U}^\ell \tag{3.113}$$

onde as variáveis  $\hat{u}$  e o vetor das incógnitas nodais  $\hat{U}$  neste caso são dados como segue:



$$\hat{u}^T = \{u_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2\} \quad (3.114)$$

$$\hat{U}^T = \{U_3^1 \quad \theta_1^1 \quad \theta_2^1 \quad U_3^2 \quad \theta_1^2 \quad \theta_2^2 \quad U_3^3 \quad \theta_1^3 \quad \theta_2^3\} \quad (3.115)$$

Deve-se comentar que o elemento HCT utilizado para compor este elemento finito de casca é originado de um elemento triangular com doze graus de liberdade sendo restritas três rotações em nós localizados no ponto médio de cada lado do triângulo, reduzindo, assim, o número de graus de liberdade relativos ao comportamento de flexão para nove. As funções de forma de ordem cúbica  $\Psi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  são deduzidas para três subelementos que compõe o elemento finito de origem com doze graus de liberdade. A fim de não sobrecarregar ainda mais o texto desta tese, omitem-se as expressões de  $\Psi$ , sendo possível encontrá-las no trabalho de Coda (2000).

A obtenção da matriz de forças distribuídas  $Q_e$  é realizada separadamente para os efeitos de membrana e de flexão. Tanto as forças distribuídas coplanares quanto transversais são admitidas com variação linear ao longo do elemento. Mesmo assim, o cálculo da matriz  $Q_e$  é diferente para cada tipo de carregamento, uma vez que as funções de forma escolhidas para aproximar as variáveis no domínio são diferentes.

As forças de contato coplanares ao elemento (efeito de chapa) são aproximadas pela mesma função linear  $\Phi$  utilizada para aproximar os deslocamentos, de forma análoga à expressão (3.112). Assim, calcula-se uma matriz  $Q_e^1$  para as forças coplanares cujo resultado é apresentado a seguir:

$$Q_e^1 = \int_A \Phi^T \Phi dA = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

onde  $A$  é a área do elemento triangular.

No caso das forças de contato transversais  $p_3$  (relativas ao comportamento de flexão) a variação linear sobre o elemento é dada na seguinte forma aproximada:

$$p_3 = \{\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3\} \begin{Bmatrix} p_3^1 \\ p_3^2 \\ p_3^3 \end{Bmatrix} = \psi P \quad (3.117)$$

Neste caso uma matriz  $Q_e^2$  para a placa é calculada a partir da soma de três submatrizes  $Q_e^{2j}$  obtidas, por sua vez, para cada subelemento  $j$  que compõe o elemento de

placa de origem (com doze graus de liberdade), sendo estas submatrizes calculadas da seguinte forma:

$$Q_e^{2j} = \int_{A_j} \Phi_m^j \psi dA_j \quad (3.118)$$

onde  $A_j$  é a área de cada subelemento.

Os procedimentos necessários para a obtenção das matrizes em (3.118), bem como outras informações relacionadas ao desenvolvimento deste elemento finito estão disponíveis nos trabalhos de Coda (1993) e Coda (2000). Maiores informações sobre o MEF também podem ser encontradas em Bathe (1996), Zienkiewicz & Taylor (2000) e Soriano (2003).

### 3.3 Acoplamento entre o MEC e o MEF

Nos itens anteriores foram apresentadas as formulações de cada método numérico separado. Para analisar o comportamento conjunto do sistema solo-fundação é necessário o acoplamento numérico entre as malhas do MEC e do MEF. Observa-se que os desenvolvimentos foram feitos visando este acoplamento, que se dá através da técnica clássica de sub-regiões, bastante difundida na bibliografia (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). Esta técnica trata cada domínio envolvido no problema como parte integrante de um sistema algébrico global através de manipulações matriciais. A descrição é feita a partir de um exemplo bidimensional sem perda de generalidade.

Considera-se um domínio qualquer  $\Omega_i$  modelado por elementos de contorno que está acoplado a outro domínio  $\Omega_j$ , por sua vez, modelado com elementos finitos, sendo comum a ambos uma região de interface  $\Gamma_{ij}$ , conforme a Figura 3.12.

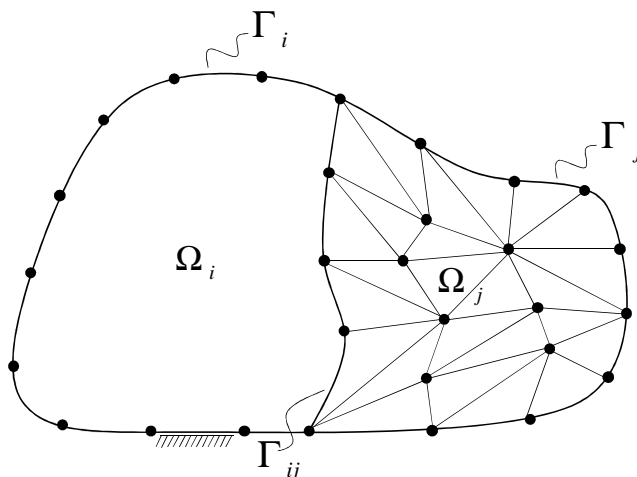


Figura 3.12 – Acoplamento entre diferentes domínios

Para os procedimentos a seguir os termos são indexados conforme a Figura 3.12, isto é, o índice  $i$  refere-se a termos que pertencem exclusivamente a malha do MEC, o índice  $j$  é referente a termos exclusivos da malha do MEF e o índice  $ij$  (ou  $ji$ ) indica os termos pertencentes à região de interface.

Para a malha de elementos de contorno monta-se um sistema algébrico na forma da equação (3.23):

$$H^{(i)}U^{(i)} = G^{(i)}P^{(i)} \quad (3.119)$$

enquanto que para os elementos finitos é montado o sistema conforme a equação (3.107):

$$K^{(j)}U^{(j)} = Q^{(j)}P^{(j)} + F^{(j)} \quad (3.120)$$

Reescrevem-se ambas as equações acima em uma forma expandida na qual se distinguem termos relativos às regiões independentes de cada malha ( $i$  ou  $j$ ) dos termos referentes à interface:

$$H^{(i)}U^{(i)} + H^{(ij)}U^{(ij)} = G^{(i)}P^{(i)} + G^{(ij)}P^{(ij)} \quad (3.121)$$

$$K^{(j)}U^{(j)} + K^{(ji)}U^{(ji)} = Q^{(j)}P^{(j)} + Q^{(ji)}P^{(ji)} + F^{(j)} \quad (3.122)$$

Estas manipulações são realizadas somente após a aplicação das condições de contorno, o que resulta na geração de novas matrizes  $\bar{H}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{K}$  e  $\bar{Q}$ . Logo, os vetores  $P^{(i)}$ ,  $P^{(j)}$  e  $F^{(j)}$  passam a armazenar apenas valores conhecidos dentre deslocamentos e forças de cada domínio, sendo então possível calcular numericamente os seguintes termos:

$$\bar{G}^{(i)}P^{(i)} = \bar{F}^{(i)} \quad (3.123)$$

$$\bar{Q}^{(j)}P^{(j)} + F^{(j)} = \bar{F}^{(j)} \quad (3.124)$$

É possível então reescrever os sistemas de equações de cada domínio na seguinte forma:

$$\bar{H}^{(i)}X^{(i)} + H^{(ij)}U^{(ij)} - G^{(ij)}P^{(ij)} = \bar{F}^{(i)} \quad (3.125)$$

$$\bar{K}^{(j)}X^{(j)} + K^{(ji)}U^{(ji)} - Q^{(ji)}P^{(ji)} = \bar{F}^{(j)} \quad (3.126)$$

onde  $X^{(i)}$  e  $X^{(j)}$  são os vetores das incógnitas não acopladas para cada malha.

Considera-se que o acoplamento entre os domínios é perfeito, sem que haja qualquer efeito não linear de contato. Nestes termos, pode ser aplicada a compatibilização cinemática e o equilíbrio de forças de contato na interface, o que se traduz com as seguintes expressões:

$$U^{(ij)} = U^{(ji)} \quad (3.127)$$

$$P^{(ij)} + P^{(ji)} = 0 \quad (3.128)$$

Observando-se as equações (3.125) e (3.126) juntamente com as relações dadas em (3.127) e (3.128) é possível escrever um sistema algébrico que engloba ambos os domínios fazendo coincidir as colunas das matrizes para estabelecer as relações entre os termos correspondentes, resultando assim o sistema algébrico final na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}^{(i)} & 0 & H^{(ij)} & -G^{(ij)} \\ 0 & \bar{K}^{(j)} & K^{(ij)} & Q^{(ij)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^{(i)} \\ X^{(j)} \\ U^{(ij)} \\ P^{(ij)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}^{(i)} \\ \bar{F}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (3.129)$$

A técnica pode ser estendida para três ou mais sub-regiões com procedimentos análogos. No entanto, para o presente trabalho não se consideram estratificações do solo, de maneira que todos os exemplos processados envolvem apenas dois domínios: o solo homogêneo e os elementos estruturais da infraestrutura de fundação.

Com relação à compatibilização das malhas discretas, observa-se que cada elemento finito de barra pode ser acoplado a um elemento de contorno de linha de carga, uma vez que ambos possuem dois nós. Já para o acoplamento das cascas com a superfície do solo é preciso adaptar as malhas discretas, sendo recomendado o uso de seis elementos finitos triangulares dispostos conforme a Figura 3.13(b) para cada elemento de contorno acoplado, garantindo assim a correspondência entre todos os nós no elemento.

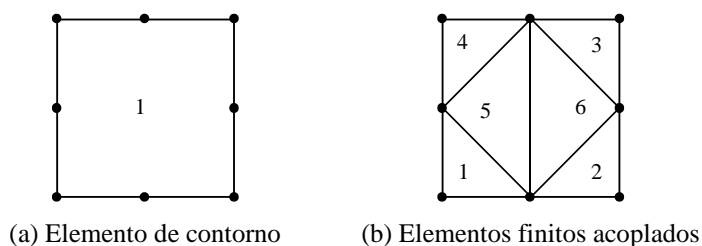


Figura 3.13 – Sobreposição de elementos discretos

O acoplamento numérico MEC-MEF completa a descrição do programa para análise de sólidos elásticos acoplados a meios contínuos semi-infinitos.

### 3.4 Montagem da matriz de rigidez do sistema solo-fundação

Apresenta-se neste item a estratégia numérica proposta no presente trabalho para a determinação de uma matriz de rigidez do sistema solo-fundação do edifício. Para isso foram

implementadas algumas adaptações no programa de análise de sólidos elásticos acoplados a meios contínuos semi-infinitos, incluindo novas sub-rotinas criadas para automatizar o cálculo de coeficientes de flexibilidade do sistema solo-fundação. Estes coeficientes são utilizados para a montagem de uma matriz de rigidez em formato que pode ser aplicado diretamente a qualquer outro programa de análise de estruturas baseado no MEF.

A metodologia aqui proposta teve inspiração no Teorema da Reciprocidade de Betti-Maxwell. O procedimento consiste basicamente na aplicação de forças unitárias em pontos pré-estabelecidos da estrutura de fundação acoplada ao solo para os quais se determinam os valores de coeficientes de flexibilidade (deslocamentos em todos os nós e direções do sistema mecânico) em cada direção de carregamento. Estes coeficientes permitem calcular valores de rigidezes referentes aos graus de liberdade de um elemento finito qualquer que esteja apoiado sobre aquele ponto.

Para o desenvolvimento da estratégia numérica considera-se um meio elástico linear submetido a um conjunto de  $n$  forças concentradas ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ) no qual surgem deslocamentos conjugados ( $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ) nos respectivos pontos de aplicação das forças. A energia de deformação deste sistema pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{1}{2} (F_1 \Delta_1 + F_2 \Delta_2 + \dots + F_n \Delta_n) \quad (3.130)$$

É importante lembrar que a não linearidade geométrica não é considerada para o sistema solo-fundação, somente para o edifício. Em se tratando de pequenos deslocamentos, vale o princípio da superposição de efeitos, e cada deslocamento  $\Delta_i$  na direção  $i$  pode então ser escrito como um somatório de parcelas de deslocamentos  $\Delta_{ij}$  causadas pela força  $F_j$  (aplicada na direção  $j$ ), isto é:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \quad (3.131)$$

Cada parcela do deslocamento se relaciona com a respectiva força através de um coeficiente de flexibilidade  $\lambda$ , sendo esta relação dada por:

$$\Delta_{ij} = \lambda_{ij} F_j \quad (3.132)$$

Organizando-se matricialmente os termos da equação (3.132), o seguinte sistema é escrito:

$$[\Delta] = [\lambda] \{F\} \quad (3.133)$$

onde  $[\lambda]$  é a chamada de matriz de flexibilidade (PRZEMIENIECKI, 1985). Se todas as forças aplicadas forem unitárias, a matriz  $[\Delta]$  será a própria matriz de flexibilidade. Além

disso, sabe-se que a sua inversa é igual à matriz de rigidez do sistema elástico, desde que não haja movimento de corpo rígido, o que é garantido pelo meio infinito modelado pelo MEC:

$$[\lambda] = [k]^{-1} \quad (3.134)$$

Conhecendo então a matriz de flexibilidade para diversos pontos de aplicação de forças unitárias, é possível determinar a matriz de rigidez deste sistema.

Com base neste conceito desenvolveram-se adaptações ao programa de acoplamento MEC-MEF para que o mesmo seja executado sucessivas vezes de maneira a calcular coeficientes de flexibilidade de pontos pré-estabelecidos do sistema solo-fundação. Os pontos escolhidos são nós da malha discreta da infraestrutura de fundação para os quais se deseja calcular a rigidez associada aos graus de liberdade de translação e rotação, como por exemplo, o topo de uma estaca ou um ponto de uma sapata ou de um radier que serve de base para um pilar do edifício. O programa executa então um *loop* aplicando forças unitárias (forças e momentos concentrados) em cada direção do sistema de coordenadas global, calculando os deslocamentos produzidos por estas forças em todos os pontos pré-definidos no arquivo de entrada. A sequência inclui a aplicação de forças unitárias horizontais no sentido positivo dos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , força unitária vertical no sentido positivo do eixo  $x_3$  e momentos unitários em torno dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (ou vetorialmente no sentido positivo de cada eixo). Dessa maneira são obtidos coeficientes de flexibilidade para, respectivamente, translações na direção de cada eixo cartesiano e rotações em torno destes eixos.

Ao final de cada *loop* é montada uma linha da matriz de flexibilidade com os valores dos deslocamentos nó a nó. Concluído o processo para todos os nós desejados, a matriz obtida é invertida resultando, assim, na matriz de rigidez do sistema solo-fundação. Esta matriz contém, portanto, coeficientes de rigidez que são equivalentes a um sistema de molas para cada direção de carregamento. É importante observar que estas molas são calculadas levando-se em consideração a continuidade do meio e a rigidez relativa entre elementos estruturais vizinhos na infraestrutura de fundação e o solo. O modelo resultante é, portanto, mais consistente se comparado a modelos que utilizam molas discretas tipo Winkler.

Segundo o Teorema de Betti-Maxwell, a seguinte relação pode ser escrita:

$$F_i \Delta_{ij} = F_j \Delta_{ji} \quad (3.135)$$

o que implica que tanto a matriz de flexibilidade quanto a matriz de rigidez são simétricas. Esta propriedade é vantajosa, pois permite a aplicação direta da matriz obtida em sistemas de equações baseados no MEF. A consideração do comportamento elástico linear de todos os meios envolvidos garante a validade da relação (3.135) para a formulação proposta.

No entanto, testes iniciais revelaram que as matrizes calculadas com aplicação desta metodologia para problemas diversos não eram perfeitamente simétricas, tendo sido observadas pequenas diferenças numéricas entre alguns termos localizados fora da diagonal principal da matriz, possivelmente causadas por problemas numéricos. Além de erros de precisão, inerentes aos métodos numéricos, um fator que majoritariamente pode ser o responsável por estes pequenos desvios está relacionado à ocorrência de oscilações espúrias de forças de contato que surgem em modelos de acoplamento MEC-MEF, geralmente devido às diferenças de rigidezes entre os domínios conectados (WUTZOW; PAIVA, 2008). Nos testes foi observado também que os termos fora da diagonal principal possuem, de maneira geral, ordem de grandeza muito inferior àqueles localizados na diagonal principal, o que vai ao encontro das observações constatadas no trabalho de Ramalho (1990).

Por este motivo e dadas as considerações do modelo, optou-se por adotar no presente trabalho um procedimento para simetrizar a matriz de rigidez das fundações e regularizar, assim, as imprecisões numéricas. Uma vez que os coeficientes de rigidez da diagonal principal se mostraram (em valores absolutos) bastante preponderantes em relação aos coeficientes fora desta diagonal, considera-se que o procedimento simplificado utilizado no trabalho de Ramalho (1990) para simetrizar matrizes resultantes do acoplamento MEC-MEF é suficiente e razoavelmente aceitável para o tipo de aplicação a que se propõe. O procedimento consiste em substituir os valores dos termos fora da diagonal principal pela média aritmética entre os mesmos e os seus termos opostos em relação à diagonal, ou seja:

$$k_{ij} = \frac{1}{2}(k_{ij} + k_{ji}) \tag{3.136}$$

Maiores detalhes deverão ser discutidos na apresentação dos exemplos numéricos que serão utilizados para avaliar a aplicação da formulação.

Sendo o comportamento do solo e dos elementos estruturais de fundação elástico-linear, pode-se escrever o seguinte sistema de equações para um ponto qualquer sobre a estrutura de fundação:

$$\{F\} = [k]\{u\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} & k_{41} & k_{51} & k_{61} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} & k_{42} & k_{52} & k_{62} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{43} & k_{53} & k_{63} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{54} & k_{64} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{65} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{3.137}$$

Na equação (3.137) está apresentada a correspondência entre cada termo da matriz de rigidez  $[k]$  com os respectivos graus de liberdade de elementos finitos, lembrando-se que o sistema de coordenadas global  $(x_1, x_2, x_3)$  foi utilizado como referência para a aplicação das forças unitárias na determinação dos coeficientes de flexibilidade. Logo, os termos referentes a cada deslocamento  $u_i$  correspondem a um sistema de "molas de translação" (na direção  $i$ ), enquanto os termos relacionados aos giros  $\theta_i$  correspondem às "molas de rotação" em torno de cada eixo.

Neste trabalho a altura do edifício ( $e$ , por consequência, o comprimento dos pilares) é sempre disposta na direção do eixo vertical  $x_3$ , conforme mencionado no capítulo anterior. Dessa maneira, será adotada a seguinte nomenclatura para as chamadas molas de rotação: os termos correspondentes às rotações em torno dos eixos horizontais  $x_1$  e  $x_2$  serão denominados de "molas de flexão", visto que estas molas são solicitadas quando da ocorrência de momentos fletores na base dos pilares; os termos correspondentes ao giro em torno do eixo  $x_3$ , por sua vez, serão aqui denominados de "molas de torção", pois, neste caso, serão solicitados quando da ocorrência de momentos de torção nos pilares.

A matriz de rigidez (após aplicação da técnica de simetrização) pode ser diretamente aplicada a outros programas de análise de estruturas baseados no MEF somando-se a mesma na matriz de rigidez da superestrutura, e fazendo-se coincidir os graus de liberdade associados aos nós que se deseja acoplar. Após a conclusão do processo de análise do edifício, os resultados de deslocamentos e reações de apoio podem ser aplicados à malha discreta da infraestrutura caso se pretenda avaliar os efeitos da ISE nos elementos estruturais de fundação e/ou no solo. Dessa maneira é possível, por exemplo, determinar bulbos de tensões no terreno provocados pela edificação.

No caso deste trabalho, a matriz de rigidez do sistema solo-fundação deve ser somada na matriz de rigidez tangente (ou Hessiana) do edifício NLG. Como existem diferenças significativas entre as formulações utilizadas na modelagem da infraestrutura e da superestrutura do edifício, algumas adaptações são necessárias. Para finalizar a descrição da metodologia proposta e permitir a consideração do fenômeno de ISE, comentam-se a seguir sobre estas adaptações incluindo a compatibilização entre os graus de liberdade das diferentes formulações.



### 3.5 Inclusão da rigidez das fundações no modelo do edifício NLG

A matriz de rigidez calculada para as fundações é armazenada em um arquivo de dados (com extensão ".dat") de maneira a não haver perda de informações quanto à precisão numérica. Neste mesmo arquivo armazenam-se as coordenadas dos pontos para os quais a matriz foi obtida. Nesse sentido, adota-se um sistema de coordenadas globais único para o edifício e para a infraestrutura, devendo o usuário ter o cuidado de compatibilizar as malhas discretas nos diferentes programas. Assim, a identificação do interrelacionamento entre as molas do solo e os nós acoplados no edifício se dá automaticamente pela correspondência entre coordenadas. Uma vez identificado o índice do nó na malha do edifício para o qual existe "um sistema de molas" proveniente da rigidez das fundações, definem-se as posições de linhas e colunas das matrizes que deverão ser somadas para a adição da flexibilidade do solo no modelo.

Como o sistema solo-fundação é considerado um meio elástico linear a sua matriz de rigidez não se altera durante o processo iterativo de resolução do edifício NLG. Assim, essa matriz é calculada uma única vez (antes do processamento do edifício) e aplicada ao modelo não linear a cada iteração do processo de Newton-Raphson.

Deve-se atentar apenas para a necessidade de "corrigir" o vetor de forças internas do modelo NLG do edifício em cada iteração, somando-se neste vetor os valores de forças nodais oriundos da reação do sistema solo-fundação sobre a superestrutura. Estas reações podem ser calculadas com o simples produto da matriz de rigidez das fundações por um vetor que reúne todos os deslocamentos calculados para os nós de interface no modelo do edifício em cada iteração. É importante lembrar que os deslocamentos do edifício são calculados pela diferença entre a posição corrente e a posição inicial em cada nó.

A adaptação mais importante diz respeito à compatibilização entre os diferentes graus de liberdade do sistema solo-fundação e da superestrutura, sendo necessário definir as correspondências entre as molas e os graus de liberdade. Afinal, conforme descrito no capítulo anterior, o modelo do edifício considera como graus de liberdade posições nodais e vetores generalizados, enquanto para as fundações foram adotados parâmetros de deslocamentos e rotações, havendo assim a necessidade de se estabelecer as relações entre estes graus de liberdade para que os mesmos possam ser consolidados.

No caso das molas de translações a relação com as posições nodais é direta, sendo necessário apenas definir a direção correspondente para encontrar as respectivas linhas e

colunas da matriz Hessiana nas quais os valores destas rigidezes serão somados. Como foi adotado um sistema de referência único para infra e superestrutura, as molas de translação em cada direção  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) correspondem à mudança de posição para cada direção respectiva. Já para os graus de liberdade de rotação a compatibilização entre as molas de rotação e os vetores generalizados requer maior atenção.

No caso dos elementos finitos com formulação posicional os vetores generalizados são livres e podem assumir qualquer direção no espaço tridimensional. Porém, na configuração inicial (indeformada) da estrutura estes vetores são dispostos conforme a orientação inicial do elemento, sendo, portanto, conhecidas as suas direções e sentidos iniciais.

No caso dos elementos de barra a orientação dos vetores generalizados define o plano da seção transversal. Consideram-se neste trabalho casos usuais em que as estruturas dos edifícios de múltiplos pavimentos são constituídas por pilares verticais que estão ligados à infraestrutura em suas bases. Nesse sentido, observa-se que para qualquer nó de barra da malha discreta do edifício NLG que esteja ligado ao sistema solo-fundação, a seção transversal encontra-se inicialmente contida no plano horizontal formado pelos eixos cartesianos  $x_1$  e  $x_2$ , enquanto que o comprimento dos pilares se desenvolve na direção do eixo  $x_3$ . Dessa maneira, as molas de flexão (termos referentes aos giros  $\theta_1$  e  $\theta_2$  da matriz de rigidez das fundações) estarão relacionadas com a atuação de momentos fletores na base dos pilares e com o movimento de giro da seção da barra em torno de um eixo pertencente ao plano horizontal e que passe pelo nó do elemento. A análise desta situação permite relacionar as molas de flexão e os vetores generalizados da barra, uma vez que a mudança de direção destes vetores é vinculada ao giro da seção. A fim de simplificar a análise a seguir, considera-se que os vetores generalizados estão contidos em um dos eixos horizontais de referência.

A Figura 3.14 ilustra uma vista lateral de um elemento de barra inicialmente disposto na vertical e que está ligado às fundações em um nó  $\ell$ . Na configuração indeformada da estrutura a seção transversal desta barra é perpendicular ao eixo  $x_3$  e ambos os vetores generalizados  $\vec{V}^{k\ell}$  (sendo  $k = 1, 2$ ) estão dispostos no plano horizontal da base do edifício (onde  $x_3 = 0$ ). Assim, a figura apresentada retrata uma face lateral qualquer do pilar sendo indicada a seção da base (nó  $\ell$ ) que, neste caso, é ortogonal ao plano mostrado na figura. A fim de se estabelecer a relação entre o giro de flexão e os vetores generalizados, supõe-se a atuação de momentos fletores que causam a flexão em torno do eixo perpendicular ao plano da folha, ou seja, o momento fletor atua vetorialmente na direção ortogonal ao plano mostrado.

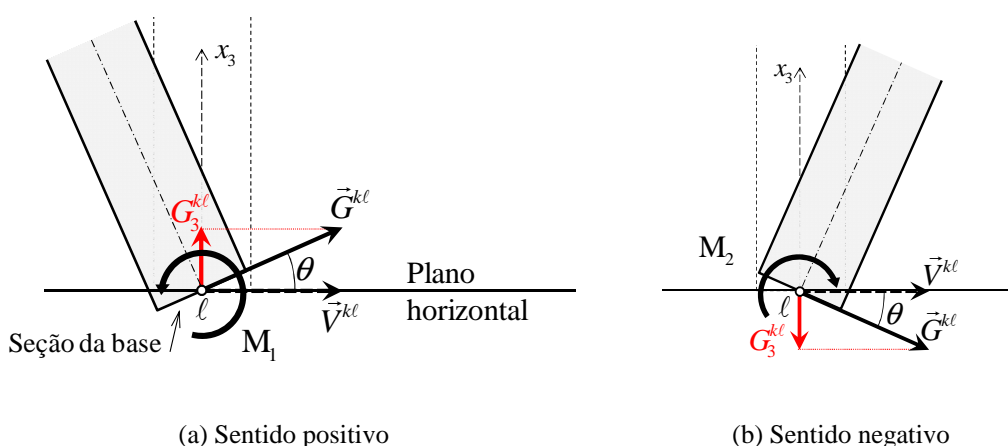


Figura 3.14 – Relação entre molas de flexão e vetores generalizados da barra

Observa-se na Figura 3.14(a) que a atuação de um momento fletor  $M_1$  no sentido anti-horário da figura provoca o giro  $\theta$  da seção transversal no mesmo sentido do momento em torno do eixo que passa pelo nó  $\ell$ , e este giro é acompanhado da mudança de direção do vetor  $\vec{G}^{kl}$ . Verifica-se que para pequenas rotações (assumidas na fundação) a mudança de direção do vetor generalizado se dá através do crescimento da sua terceira componente ( $G_3^{kl}$ ), neste caso, no sentido positivo do eixo  $x_3$ .

Para um momento fletor  $M_2$  que atua no sentido horário verifica-se que o comportamento é análogo, sendo que a componente  $G_3^{kl}$ , neste caso, cresce no sentido negativo do eixo  $x_3$ , conforme ilustra a Figura 3.14(b). É importante notar que, se a orientação do elemento fosse invertida em ambos os casos, o vetor generalizado  $\vec{V}^{kl}$  estaria inicialmente no sentido oposto ao apresentado nas figuras e, dessa maneira, o sentido de variação da terceira componente do vetor generalizado  $\vec{G}^{kl}$  também seria invertido para cada caso. Logo, é possível perceber que, para elementos de barras dispostos na vertical, as molas de flexão das fundações estão diretamente associadas a terceira componente do vetor generalizado na seção acoplada, e serão somadas na posição correspondente à este grau de liberdade. Com relação ao sinal (que define o sentido de variação desta componente) observa-se que o mesmo depende da orientação do elemento de barra e da direção do momento.

Para o caso dos elementos de casca do edifício NLG que estejam ligados às fundações a ideia é semelhante. Consideram-se casos de elementos de casca cuja superfície encontra-se inicialmente disposta paralelamente ao plano horizontal na base do edifício, visto que esta situação permite a consideração de fundações do tipo direta. Se a incidência dos nós do elemento de casca for definida segundo a ordem de numeração apresentada na Figura 2.9 (ver

página 69), qualquer nó  $\ell$  de casca conectado à infraestrutura possui um vetor generalizado  $\vec{N}^\ell$  (na configuração inicial) que está orientado na direção positiva do eixo  $x_3$ .

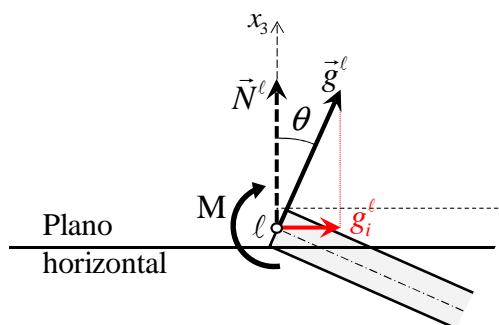


Figura 3.15 – Relação entre molas de flexão e o vetor generalizado da casca

A atuação de um momento fletor  $M$  em  $\ell$  provoca a mudança de direção do vetor generalizado  $\vec{g}^\ell$  da configuração corrente, conforme ilustra a Figura 3.15. Observa-se que, nesta situação, o giro do vetor é proporcional ao crescimento de uma de suas componentes horizontais  $g_i^\ell$ , sendo a direção  $i$  perpendicular à direção do eixo em torno do qual se desenvolve o giro (pequena rotação na fundação). Caso a incidência dos nós no elemento seja invertida, inverte-se também o sentido do vetor  $\vec{g}^\ell$ . Nota-se que o sentido de crescimento da componente  $g_i^\ell$  depende, portanto do sentido de aplicação do momento fletor e da orientação do elemento de casca.

No caso de molas de torção (referente ao giro  $\theta_3$  da matriz de rigidez das fundações) também é possível se estabelecer uma relação entre estas molas e os vetores generalizados na seção de base dos elementos de barra do modelo do edifício. Admitindo-se o caso de elementos de barra verticais, observa-se que a aplicação de um momento de torção  $M_T$  provoca uma tendência de giro da seção transversal em torno do eixo longitudinal. O giro de torção se manifesta com a mudança de direção simultânea dos vetores  $\vec{G}^{1\ell}$  e  $\vec{G}^{2\ell}$ , conforme esquematizado na Figura 3.16(a). Logo, as molas de torção se relacionam com as componentes  $G_1^{k\ell}$  e  $G_2^{k\ell}$  ( $k = 1, 2$ ) dos vetores generalizados, fazendo com que estas componentes cresçam no sentido positivo ou negativo, a depender da orientação do elemento e do sentido de aplicação de  $M_T$ .

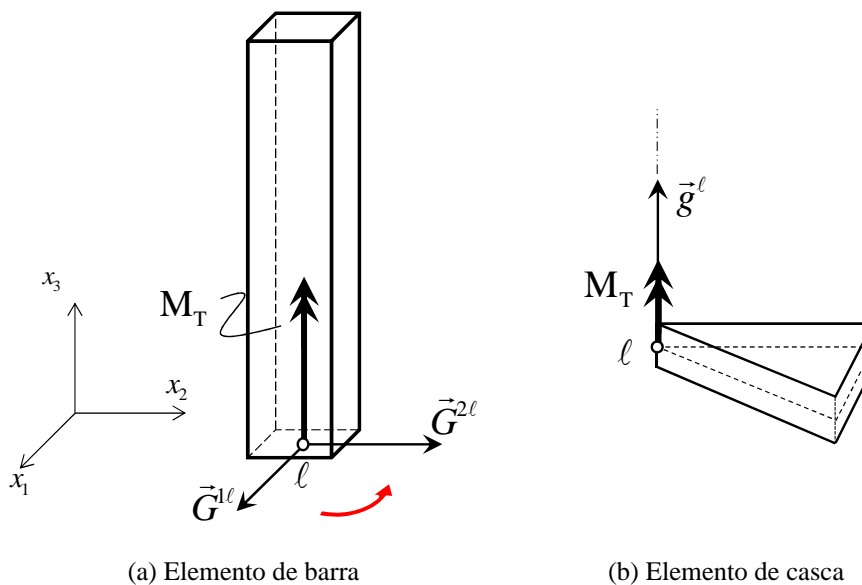


Figura 3.16 – Relação entre molas de torção e os vetores generalizados

No caso dos elementos de casca NLG, como estes elementos são dispostos paralelamente ao plano horizontal na base do edifício para que possam ser acoplado à eventuais fundações diretas, como sapatas ou placas, verifica-se a impossibilidade de aplicação de molas de torção aos nós destes elementos. Isso se deve ao fato de que, na situação considerada, o vetor generalizado das cascas encontra-se na direção vertical, e, neste caso, não há grau de liberdade que possa ser associado a um movimento de giro em torno do eixo vertical no nó, conforme pode ser observado na Figura 3.16(b). Além disso, é importante lembrar que não foi considerado grau de liberdade de rotação em torno de um eixo ortogonal ao plano dos elementos finitos convencionais de cascas utilizados na malha das fundações. Dessa maneira, a formulação fornece sempre valores nulos de mola de torção para pontos pertencentes exclusivamente à elementos de casca na malha discreta das fundações.

Mesmo não sendo possível inserir molas de torção nos nós da casca (da forma como se propõe esta formulação) observa-se que não há limitações para aplicação desta metodologia à análise de edifícios com sistema de fundação do tipo direta, uma vez que possíveis deslocamentos de corpo livre da estrutura serão restritos pela interação tridimensional dos elementos estruturais.

Ainda com relação às molas de torção obtidas no programa de análise das fundações, observa-se que, para casos de estacas verticais isoladas, a rigidez ao giro em torno do eixo vertical  $x_3$  também resulta sempre em valor nulo, visto que não foi considerado o grau de liberdade de giro em torno do eixo longitudinal para as linhas de carga do MEC. Apesar desta carência, a metodologia não possui limitações para análise de edifícios de múltiplos

pavimentos, pois, de maneira análoga ao que foi comentado para o caso das fundações diretas, o intertravamento entre elementos estruturais componentes do sistema tridimensional das fundações pode garantir que o grau de liberdade em questão não esteja totalmente livre. Como exemplo cita-se o caso de duas estacas verticais vizinhas em que um momento unitário em torno do eixo  $x_3$  aplicado sobre a cabeça de qualquer uma destas estacas poderá conduzir a um valor de rigidez à torção diferente de zero se houver, por exemplo, uma viga de fundação ligando o topo destas estacas. Particularmente em relação ao elemento de estaca, é interessante notar também que, da maneira com se propõe a presente metodologia, uma estaca isolada pode vir a oferecer mola de rigidez de torção para o edifício (isto é, rigidez ao giro em torno do eixo vertical) desde que a mesma esteja inclinada no domínio do solo. Neste caso, o valor da mola é influenciado apenas pela restrição tridimensional ao giro citado.

Como pode ser observado, tanto para as molas de flexão quanto para as molas de torção (caso não sejam nulas) o sentido de variação das componentes dos vetores generalizados que sofrem suas influências depende da orientação dos elementos de barra e de casca e do sentido de aplicação dos momentos. Como os coeficientes de rigidez das fundações foram calculados para forças unitárias aplicadas sempre no mesmo sentido (positivo), essa compatibilização de sinais passa a depender apenas da orientação dos elementos da superestrutura. Desenvolveu-se então uma sub-rotina que identifica quais elementos da malha discreta do edifício encontram-se conectados às fundações e qual é o sentido de orientação destes elementos, sendo consideradas malhas discretas nas quais os vetores generalizados das seções de base dos elementos que discretizam os pilares de apoio encontram-se sempre dispostos na direção de um dos eixos cartesianos horizontais do sistema de referência global, o que simplifica a compatibilização.

### **3.5.1 Flexibilidade do solo na base dos núcleos**

O programa de análise das fundações determina coeficientes de rigidez para graus de liberdade de translação e de rotação nodais. Nesse sentido, se for considerado um único ponto de apoio nas fundações de um elemento reticulado NLG de núcleo, a flexibilidade das fundações terá influência somente nas incógnitas de posição e dos vetores generalizados, sendo, nesta situação, desconsiderada a influência da rigidez do solo para o empenamento, que estará livre. No entanto, é importante observar que, a depender da rigidez do sistema de fundação, o mesmo pode restringir total ou parcialmente o empenamento do núcleo.

Da forma como se propõe a estratégia de flexibilização dos apoios no presente trabalho, a consideração do empenamento de núcleos sobre base flexível requer o cálculo de coeficientes de rigidez para pontos que estejam localizados na região de apoio das paredes do núcleo. Porém, no modelo do edifício NLG estes pontos não são considerados incógnitas do problema, havendo na região da base do núcleo apenas o nó do elemento reticulado pertencente à linha de eixo. Por este motivo, para que coeficientes de rigidez das fundações possam ser aplicados na seção do núcleo é necessário multiplicar a matriz obtida na análise das fundações pela matriz de incidência cinemática  $B$  (descrita no capítulo 2) transferindo-se, assim, os termos de rigidez para a Hessiana do núcleo.

Neste trabalho a inclusão da matriz de rigidez das fundações na matriz Hessiana global do edifício se dá de maneira análoga às matrizes locais dos elementos de barra e de casca, o que permite dizer que o sistema solo-fundação é tratado como um elemento discreto de fundação. Quanto maior for a quantidade de pontos (ou nós) do elemento, maior será a dimensão da sua matriz local, lembrando-se que para cada ponto escolhido, são determinados seis valores de coeficientes de flexibilidade para seis direções de carregamento.

No caso dos edifícios de múltiplos pavimentos a aplicação da metodologia aqui proposta requer o cálculo de coeficientes de flexibilidade para os diversos pontos de apoio da superestrutura, incluindo bases de núcleos e pilares de apoio. Neste sentido, o procedimento de multiplicação da matriz de rigidez do elemento de fundação com a matriz  $B$  do núcleo torna-se complexo e pode resultar em um procedimento computacionalmente oneroso a depender da dimensão da matriz, isto é, do número de pontos de apoio definidos na fundação.

Uma alternativa para considerar a flexibilidade do empenamento nas fundações do núcleo sem a necessidade de um tratamento algébrico da matriz de rigidez das fundações consiste em se adotar uma malha discreta com elementos de casca NLG (descritos no capítulo 2) com pequena espessura acoplada à seção transversal do núcleo na base do edifício. Dessa maneira, podem ser calculadas molas de fundação para pontos vizinhos às regiões de apoio das paredes do núcleo que não estejam acoplados à sua seção transversal. Assim, a rigidez das fundações é transmitida de maneira indireta para o elemento de núcleo por meio do acoplamento casca-barra na seção da base do núcleo. Este modelo alternativo será avaliado no desenvolvimento dos exemplos numéricos.

Apesar disso, a consideração da flexibilidade para o empenamento na base de núcleos rígidos em edifícios usuais é questionável devido à elevada rigidez dos sistemas de fundações usualmente empregados e também à maneira como estes elementos estruturais são ligados à fundação, o que pode restringir totalmente este tipo de movimentação. Para casos de núcleos

estruturais apoiados em fundação cuja rigidez impede a ocorrência do empenamento torna-se razoável a aplicação direta de coeficientes de rigidez ao nó pertencente à linha de referência do elemento de núcleo, desde que seja imposto, neste caso, que o grau de liberdade de empenamento do nó em questão está impedido. Modelos com aplicação direta da flexibilidade das fundações ao nó do núcleo pertencente à linha de referência serão também avaliados e comparados ao modelo anterior.

Maiores detalhes a respeito da metodologia aqui apresentada para a consideração da ISE serão discutidos na apresentação dos exemplos numéricos no próximo capítulo.



## 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados os exemplos numéricos processados durante o desenvolvimento deste trabalho. Os quatro primeiros exemplos têm como finalidade comprovar o adequado funcionamento da formulação proposta, principalmente em relação ao acoplamento não linear geométrico (NLG) casca-barra para geração do elemento de núcleo e ao modelo para análise da interação solo-estrutura (ISE) através da estratégia de obtenção da matriz de rigidez das fundações, uma vez que estas são as principais contribuições desta tese. Os demais exemplos visam demonstrar o potencial do programa desenvolvido para análise de edifícios de múltiplos pavimentos em geral, sendo alguns resultados comparados com outros modelos propostos em trabalhos de referência. É importante esclarecer que os exemplos apresentados são casos fictícios e que os valores adotados para dimensões e carregamentos foram extraídos das referências, não havendo neste trabalho preocupações em relação a aspectos normativos para as estruturas analisadas.

### 4.1 Exemplo 1: Grelha isostática

O objetivo deste primeiro exemplo é validar o acoplamento de topo entre a seção transversal do elemento finito NLG de barra com o elemento finito NLG de casca. Trata-se de uma estrutura de grelha isostática conforme a Figura 4.1(a) que possui uma de suas extremidades engastada e uma força vertical concentrada de 100 kN aplicada na outra extremidade, de maneira que as barras que compõe a estrutura estão sujeitas à esforços de flexão e de torção.

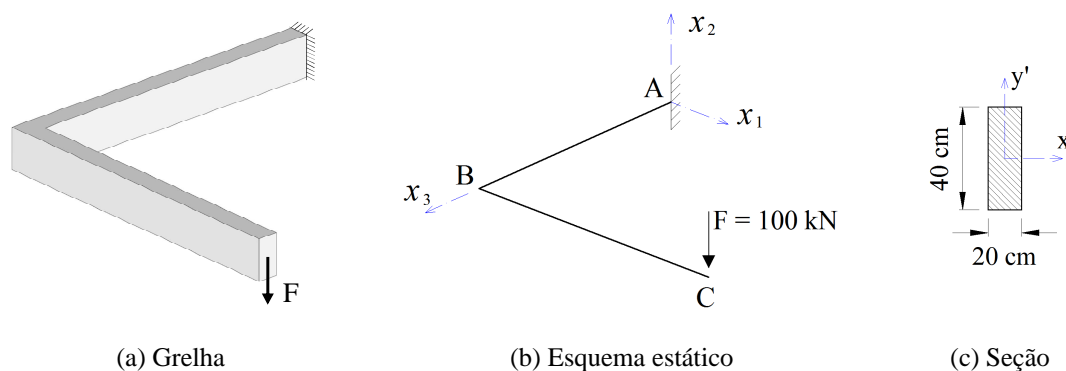


Figura 4.1 – Exemplo 1: Grelha isostática

Cada trecho da grelha tem comprimento de 3,0 metros e a seção transversal é retangular com dimensões 20 cm x 40 cm, estando disposta de tal maneira que a flexão ocorre em torno do eixo de maior inércia. As propriedades do material são  $E = 200$  GPa e  $\nu = 0$ .

A fim de validar a estratégia de acoplamento casca-barra, o trecho  $\overline{AB}$  da estrutura é modelado com elementos finitos de barra (descritos no item 2.2.1) enquanto que para o trecho  $\overline{BC}$  são utilizados elementos finitos de casca (descritos no item 2.2.2). A malha utilizada inclui 3 elementos de barra e 4 elementos de casca e para a discretização da seção transversal da barra utilizam-se 2 elementos triangulares. Para garantir a vinculação rígida entre a casca e a barra, 2 dos elementos discretos de casca encontram-se sobrepostos à projeção da seção da barra, compatibilizando assim as coordenadas entre todos os nós destas malhas no ponto B.

Os resultados foram comparados com um modelo no qual toda a grelha é discretizada com elementos de barra. Neste caso a vinculação rígida é garantida pela penalização descrita no item 2.2.3. Comparam-se também resultados obtidos com uma análise NLG através do programa ANSYS<sup>®</sup>, utilizando-se um modelo construído com elementos finitos de barras do tipo BEAM188. Para maiores informações sobre este elemento finito e sobre o programa de referência em questão recomenda-se a leitura de ANSYS (2010). Apresentam-se também resultados para análise linear com aplicação do Teorema de Castigliano, pois, neste caso, como se trata de um problema com pequenos deslocamentos, a solução NLG se aproxima da solução linear. Os resultados são apresentados na Tabela 1 e indicam o bom desempenho do acoplamento casca-barra.

Tabela 1 – Resultados do exemplo 1

Modelo considerado	Deslocamento vertical $U_2$ no ponto C [cm]	Momento de Torção $M_T$ no ponto A [kN.m]	Momento fletor $M_x$ no ponto A [kN.m]
Casca acoplada à barra NLG	- 4.29	311.75	299.99
Somente elementos de barras NLG	- 4.34	311.98	299.99
ANSYS <sup>®</sup> (BEAM188) NLG	- 4.44	299.97	294.99
Teoria clássica elástico-linear	- 4.35	300.00	300.00

Observa-se que o uso de apenas dois elementos discretos na seção transversal da barra conduziu à resultados satisfatórios com diferenças numéricas inferiores à 4%, tendo sido observada a redução destas diferenças quando a malha da seção transversal é refinada.

A Figura 4.2 apresenta os resultados de deslocamentos verticais para o modelo de casca acoplada à barra e o modelo formado somente por elementos de barra, sendo possível perceber a diferença entre as malhas discretas.

Os resultados confirmam o adequado funcionamento da estratégia de acoplamento, visto que estes resultados só poderiam ser obtidos com a total interação entre os graus de liberdade acoplados. Verifica-se ainda o adequado funcionamento da vinculação rígida entre elementos de barra não colineares via penalização, presente apenas no modelo formado exclusivamente por elementos de barras. Para este problema a ordem de grandeza da rigidez adotada como fator de penalização se mostrou suficiente.

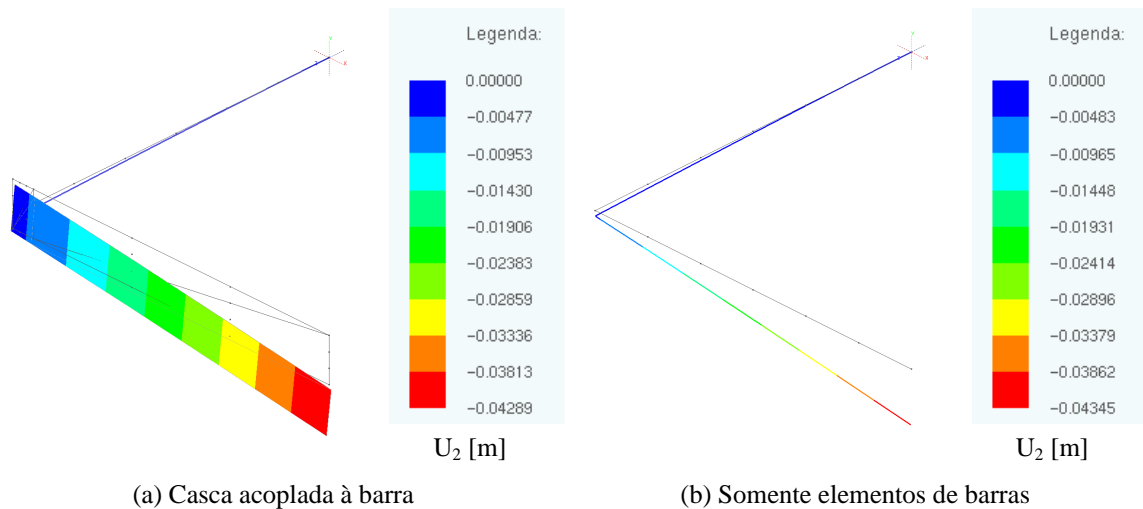


Figura 4.2 – Exemplo 1: Deslocamentos verticais

Com relação à convergência do método iterativo de solução não linear, os resultados foram obtidos com quatro iterações para ambos os modelos (casca-barra e somente barra), tendo sido observado que valores significativos para a posição de equilíbrio final são alcançados já na primeira iteração. Isso indica que, para este caso, a desconsideração do tensor de terceira ordem no cálculo da matriz Hessiana do acoplamento casca-barra (ver página 80) não influenciou na convergência da solução numérica, o que justifica a sua desconsideração.

## 4.2 Exemplo 2: Perfil com chapa de topo

Este segundo exemplo visa não somente validar a formulação do elemento finito NLG de núcleo, mas também demonstrar sua aplicação para a análise de perfis de paredes finas. Trata-se de uma barra em balanço construída com perfil metálico que suporta uma força vertical de 10 kN em sua extremidade livre e é enrijecida por uma chapa de topo, conforme a Figura 4.3.

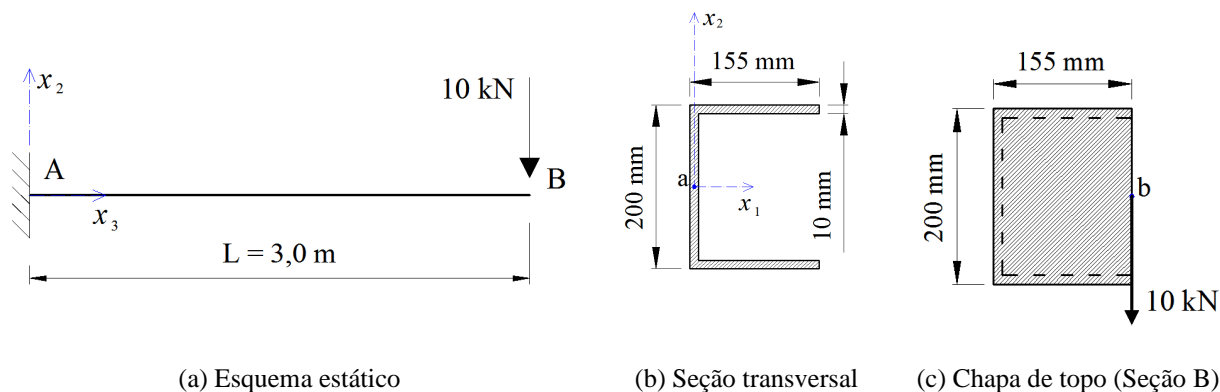


Figura 4.3 – Exemplo 2: Perfil com chapa de topo

A espessura do perfil metálico é constante de valor igual a 10 mm. As demais dimensões do perfil são apresentadas na Figura 4.3(b), sendo por simplicidade desconsiderada a curvatura entre as paredes, assumindo-se que todos os ângulos são de  $90^\circ$  e ocorrem abruptamente. A seção B possui uma chapa de topo soldada com 10 mm de espessura que enrijece o perfil à torção pela restrição do empenamento. A força é aplicada no ponto "b" desta chapa, conforme a Figura 4.3(c), de tal maneira que a barra está submetida à flexo torção.

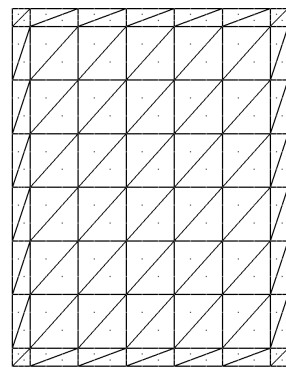
A análise numérica deste problema requer o uso de modelos que sejam capazes de captar os efeitos da interação tridimensional entre o perfil empenado e a chapa, o que pode ser realizado, por exemplo, através de elementos finitos sólidos ou elementos de casca. O presente trabalho oferece como alternativa a aplicação de um elemento reticulado de núcleo, que neste caso demanda menor quantidade de variáveis.

Assim, o perfil foi discretizado em elementos finitos de barra NLG enquanto que a chapa de topo é discretizada em elementos de casca NLG. Considera-se para a geração da malha que a linha de referência longitudinal da barra está contida no eixo  $x_3$  e passa pelo ponto "a", indicado na Figura 4.3(b) e localizado no ponto médio da alma do perfil. Este ponto é adotado como origem para geração da malha discreta da seção transversal inicial. Para o material admitem-se as seguintes constantes elásticas:  $E = 200$  GPa e  $G = 100$  GPa.

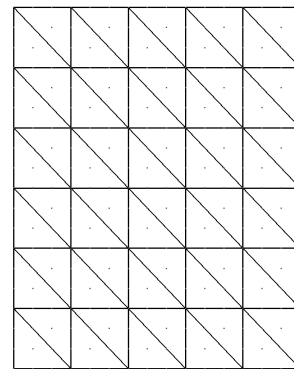
Os resultados são comparados com outro modelo no qual a estrutura é inteiramente modelada com elementos finitos de casca NLG, ou seja, as paredes do perfil também são discretizadas. Utilizou-se também como referência resultados obtidos no programa ANSYS<sup>®</sup>, neste caso usando elementos de casca do tipo SHELL63 (ANSYS, 2010). Após uma análise de convergência definiram-se as seguintes malhas discretas: para o modelo com aplicação do elemento de núcleo adotam-se 20 elementos de barra ao longo do perfil e 112 elementos de

casca para a chapa de topo; o modelo de referência no qual as paredes do perfil também são discretizadas em elementos de casca NLG utiliza 700 elementos, sendo 60 destes aplicados para a discretização da chapa de topo; para o modelo de cascas processado no ANSYS® são considerados 9 elementos de casca com aproximação linear para cada elemento de aproximação cúbica do modelo anterior, a fim de manter a mesma quantidade de nós, perfazendo assim um total de 6300 elementos do tipo SHELL63.

A Figura 4.4 exibe as distribuições dos elementos para as malhas discretas da chapa de topo. No caso do modelo com elemento de núcleo, Figura 4.4(a), são incluídos elementos de casca sobre a área na qual se desenvolve a espessura do perfil para que haja coincidência entre coordenadas nodais da seção da barra e, dessa maneira, garantir a vinculação de engaste da chapa no perfil.



(a) Modelo com elemento de núcleo



(b) Modelo em cascas

Figura 4.4 – Exemplo 2: Malhas discretas para a chapa de topo

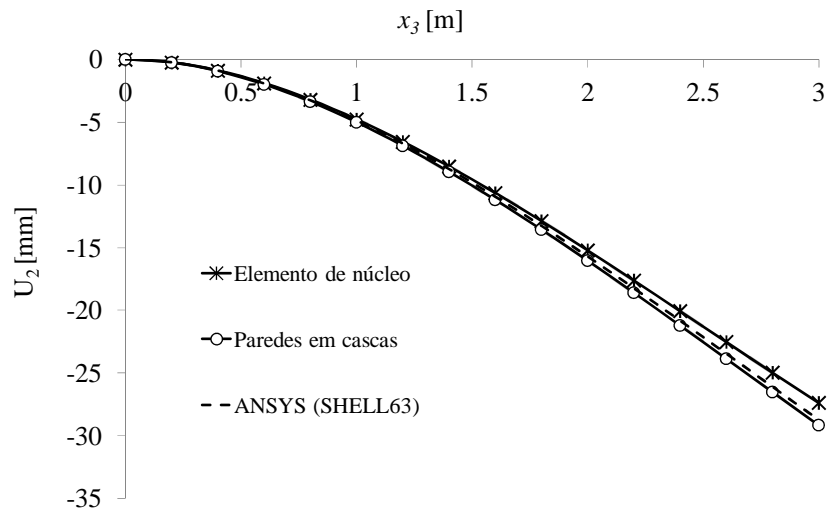


Figura 4.5 – Exemplo 2: Deslocamentos verticais

Os resultados de deslocamentos verticais (medidos no ponto "a") e longitudinais são apresentados respectivamente nas Figuras 4.5 e 4.6 e indicam o adequado funcionamento do

elemento de núcleo proposto. A Figura 4.7 exibe os resultados de deslocamentos longitudinais do ANSYS®.

Observa-se que o modelo com uso do elemento de núcleo é ligeiramente mais rígido do que os modelos de casca. Isso pode ser explicado pelo fato de que o elemento proposto não considera modos de deformação associados à mudança de forma da seção transversal, não sendo captados, por exemplo, efeitos devido a uma possível abertura (ou fechamento) entre as paredes, por menor que sejam estes efeitos. No entanto, para o tipo de aplicação proposto os resultados podem ser considerados satisfatórios.

Na Figura 4.6 é possível observar as diferenças entre as malhas discretas de cada modelo, sendo que no modelo com elemento de núcleo apenas a linha de referência do perfil é exibida. O elemento reticulado oferece como benefício a redução da quantidade de parâmetros envolvidos na análise, diminuindo assim a dimensão do sistema algébrico a ser resolvido. Neste exemplo foi observado que os resultados do modelo com elemento de núcleo convergiram para uma malha que possui quase 20% menos graus de liberdade do que o modelo de cascas. É importante ressaltar que os resultados de deslocamentos e tensões para pontos fora da linha de referência do perfil podem ser calculados em rotinas de pós-processamento usando as equações de mapeamento dos nós da seção da barra, conforme descrito no Capítulo 2.

A convergência dos resultados foi alcançada com oito iterações para o modelo com elemento de núcleo e sete iterações para o modelo de referência, o que novamente indica que a desconsideração do tensor de terceira ordem no cálculo da matriz Hessiana do elemento de núcleo não interferiu na resolução do problema de maneira relevante.

Outra observação constatada neste exemplo é que os resultados do problema independem da posição da linha de referência do perfil, o que era esperado uma vez que a força é aplicada em um nó que não pertence a esta linha e o modo de empenamento unitário da barra é calculado para o centro de cisalhamento da seção. Na Tabela 2 e na Figura 4.8 são apresentados resultados de deslocamentos verticais para quatro casos distintos de posição da linha de eixo do perfil, não tendo sido observadas diferenças significativas nos resultados e no comportamento mecânico da estrutura.

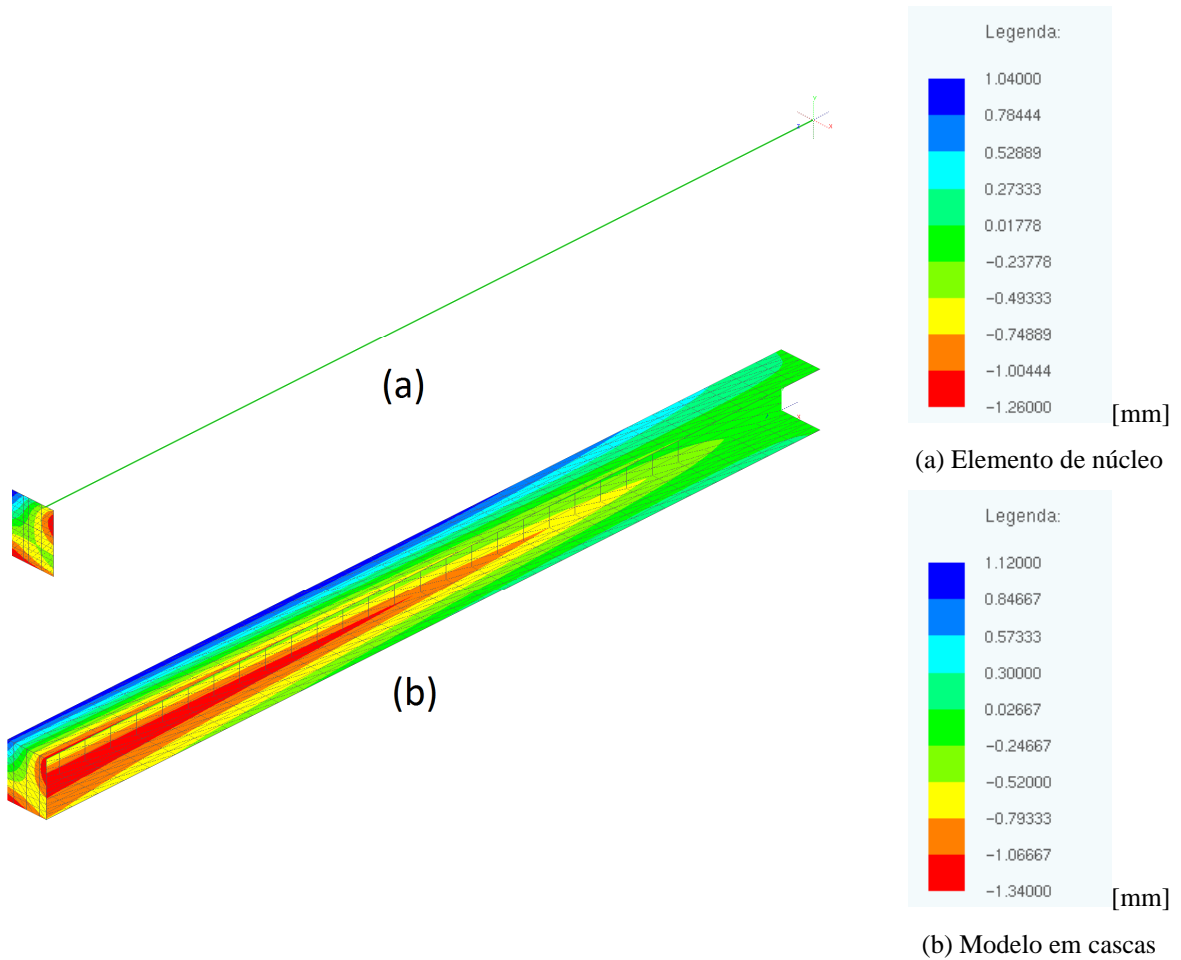


Figura 4.6 – Exemplo 2: Deslocamentos longitudinais

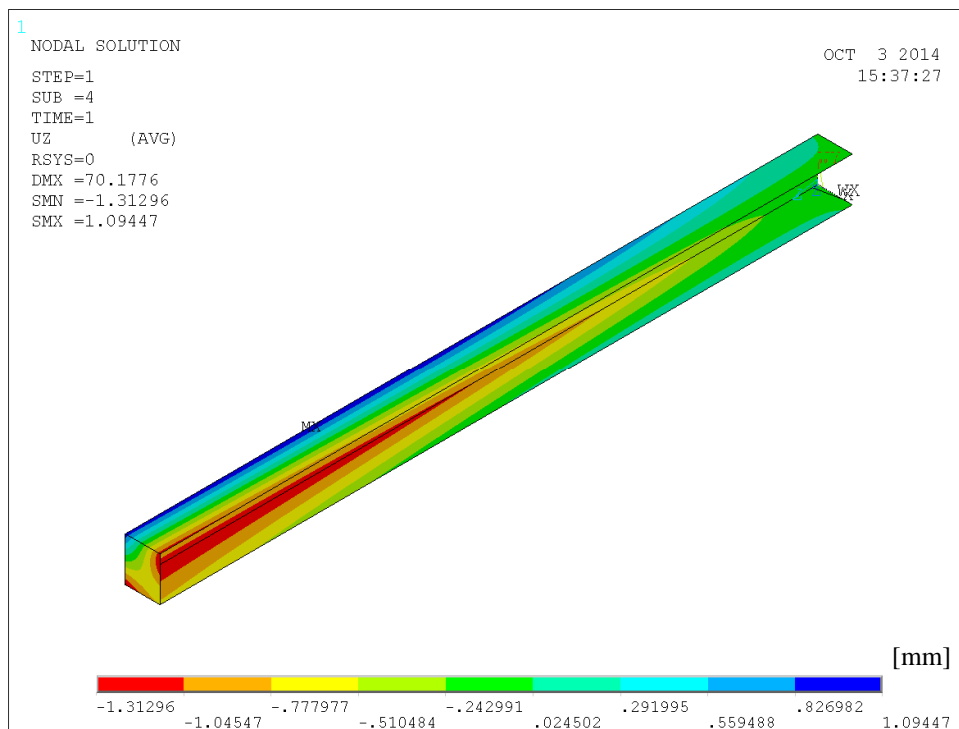
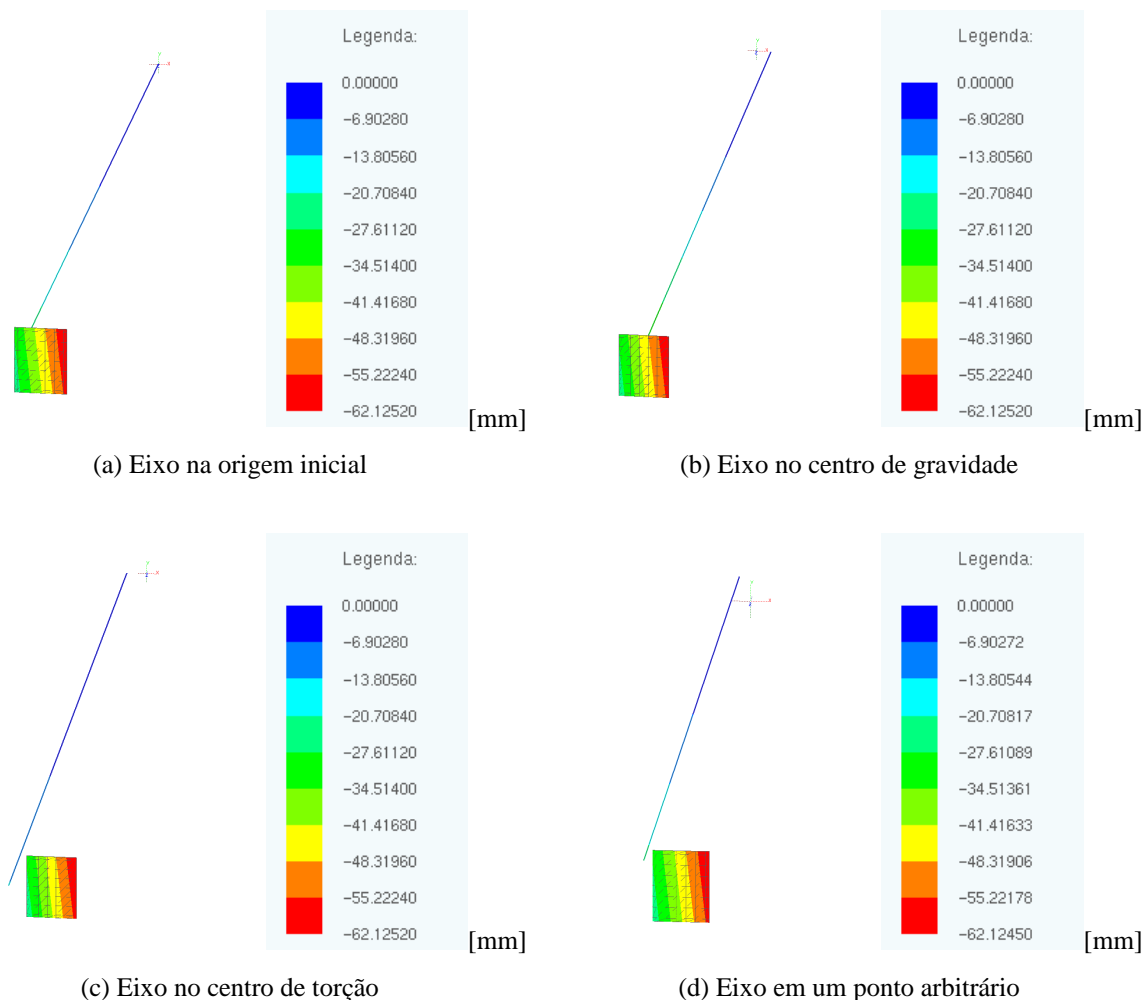


Figura 4.7 – Exemplo 2: Deslocamentos longitudinais obtidos no ANSYS

Tabela 2 – Resultados para diferentes posições da linha de eixo do exemplo 2

Posição da linha de eixo	Deslocamento $U_2$ no ponto b [mm]
Origem inicial	- 59,78
Centro de gravidade	- 59,78
Centro de torção	- 59,78
Ponto arbitrário	- 59,77

Na Figura 4.8 verificam-se valores de deslocamentos diferentes apenas para nós ao longo da linha longitudinal, o que também era esperado já que estes resultados se referem ao alinhamento no contínuo. A opção de manter o eixo passando pelo ponto "a" (ver Figura 4.3) na análise anterior possibilitou comparar resultados ao longo do comprimento com o modelo em cascas, já que o centro de gravidade e o centro de torção estão fora da seção e o modelo de referência não é capaz de fornecer resultados para estes pontos. Ressalta-se que a mudança de posição da linha de eixo é realizada sempre na fase de pré-processamento, alterando a origem dos vetores generalizados antes da resolução numérica.

Figura 4.8 – Exemplo 2: Deslocamentos  $U_2$  para diferentes posições da linha de eixo



A chapa de topo funciona como um diafragma que, a depender da sua rigidez, pode enrijecer o perfil à torção através da restrição do empenamento. Nesse sentido, foi realizada uma análise da variação do empenamento do perfil metálico para diferentes espessuras da chapa de topo. Os resultados estão apresentados na Figura 4.9 e, conforme esperado, o aumento da espessura da chapa promove maior enrijecimento à torção com consequente redução do empenamento do perfil na seção B, até a situação na qual a chapa é tão rígida que praticamente anula o empenamento.

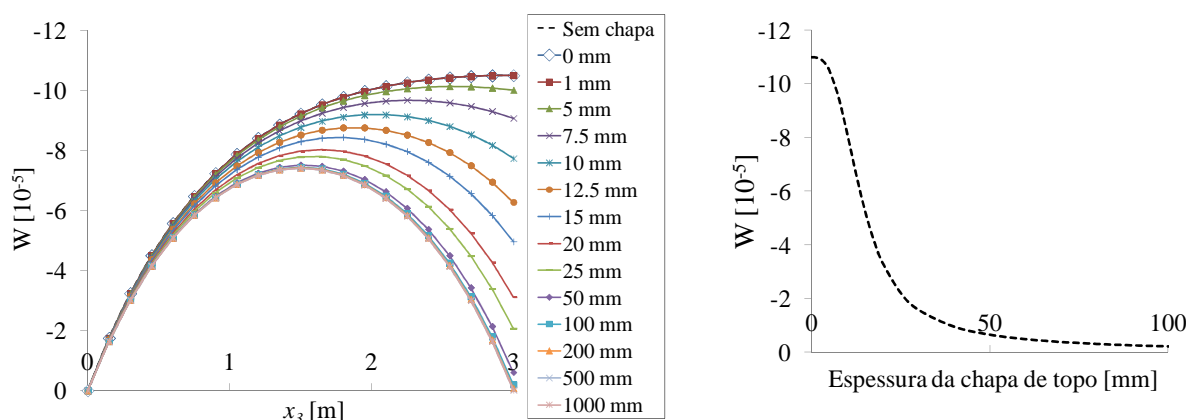


Figura 4.9 – Exemplo 2: Empenamento para várias espessuras de chapa

Como neste exemplo a força foi aplicada em um nó de casca não acoplado, os resultados apresentados somente puderam ser obtidos com a total interação entre os graus de liberdade da casca com a seção da barra, não havendo necessidade de quaisquer condições de contorno adicionais. Assim, considera-se que estes resultados validam o acoplamento de topo entre cascas e barra e demonstram um desempenho preciso do elemento de núcleo proposto.

### 4.3 Exemplo 3: Matriz de rigidez de uma sapata rígida

Pretende-se com este exemplo verificar o funcionamento da estratégia proposta para obtenção de uma matriz de rigidez de sistemas de fundações. É montada a matriz de rigidez de uma sapata rígida quadrada com lados de 1,0 metro que se imagina servir de base para um pilar que se apoia em seu ponto central. Este problema foi estudado por Ramalho (1990) com uso de um elemento de sapata rígida baseado no acoplamento MEC-MEF, sendo seus resultados aqui utilizados como referência. No presente trabalho foram utilizados elementos de contorno planos para a modelagem da superfície do solo e elementos finitos de casca com formulação convencional (descritos no item 3.2.2) para modelagem da sapata.

O módulo de elasticidade do solo tem valor  $E_s = 4000 \text{ kN/m}^2$  e o coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,35$ . Para que a comparação com o elemento de sapata rígida seja coerente consideram-se as seguintes propriedades para as cascas: espessura de 1,0 metro,  $E = 10 \times E_s$  e  $\nu = 0$ . Foi utilizada uma malha com 21 nós de contorno. A matriz de rigidez calculada para o ponto central da malha discreta com uso da formulação aqui proposta é apresentada a seguir:

$$[k]_{\text{presente trabalho}} = \begin{bmatrix} 7285 & -288 & 0 & 73 & -374 & 0 \\ -288 & 7285 & 0 & 374 & -73 & 0 \\ 0 & 0 & 8212 & 0 & 0 & 0 \\ 73 & 374 & 0 & 2473 & -125 & 0 \\ -374 & -73 & 0 & -125 & 2473 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A matriz de rigidez obtida por Ramalho (1990) possui os seguintes valores:

$$[k]_{\text{Ramalho(1990)}} = \begin{bmatrix} 6729 & 0 & 0 & 0 & -244 & 0 \\ 0 & 6729 & 0 & 244 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8096 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 244 & 0 & 2620 & 0 & 0 \\ -244 & 0 & 0 & 0 & 2620 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4151 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Observa-se que quase todos os termos da matriz de rigidez obtida no presente trabalho possuem ordem de grandeza muito semelhante à referência, especialmente na diagonal principal. Há disparidade apenas para o termo referente à torção da sapata ( $k_{66}$ ), que para o presente trabalho é nulo. Porém, isso já era esperado uma vez que a formulação adotada não considera grau de liberdade associado ao giro em torno do eixo ortogonal à superfície da casca na malha das fundações. A falta deste termo não prejudica a aplicação da metodologia à análise de sistemas de fundação de edifícios, visto que estas estruturas não possuem ponto de apoio único, como acontece no exemplo atual, e as ligações da estrutura tridimensional deverão garantir a restrição ao giro de um pilar que venha a se apoiar nesta sapata. Observa-se ainda que as diferenças relativas entre os demais termos em cada matriz são também semelhantes. Levando-se em conta as diferenças dos modelos, considera-se que este resultado é satisfatório e indica coerência da estratégia aqui proposta.

#### 4.4 Exemplo 4: ISE em edifício sobre placa estaqueada

Para avaliar o desempenho da aplicação da estratégia baseada no cálculo de uma matriz de rigidez do sistema solo-fundação para consideração da flexibilidade dos apoios em estruturas de edifícios apresenta-se um exemplo estudado no trabalho de Ribeiro (2009) no qual foi analisado um edifício de 4 pavimentos considerando a ISE.

Todos os pavimentos são iguais, com pé-direito de 3,0 metros, laje de 30 cm de espessura e quatro vigas que se apoiam em quatro pilares dispostos conforme a Figura 4.10(a). Todas as vigas e pilares possuem seção quadrada com lados de 1,0 metro. A fundação é formada por uma placa tipo radier reforçada por 9 estacas verticais distribuídas conforme a figura 4.10(b). O radier é quadrado de lados iguais a 20 metros e possui 50 cm de espessura, e as estacas possuem cada uma 50 cm de diâmetro e 10 metros de comprimento. Um corte transversal das fundações é apresentado na Figura 4.10(c).

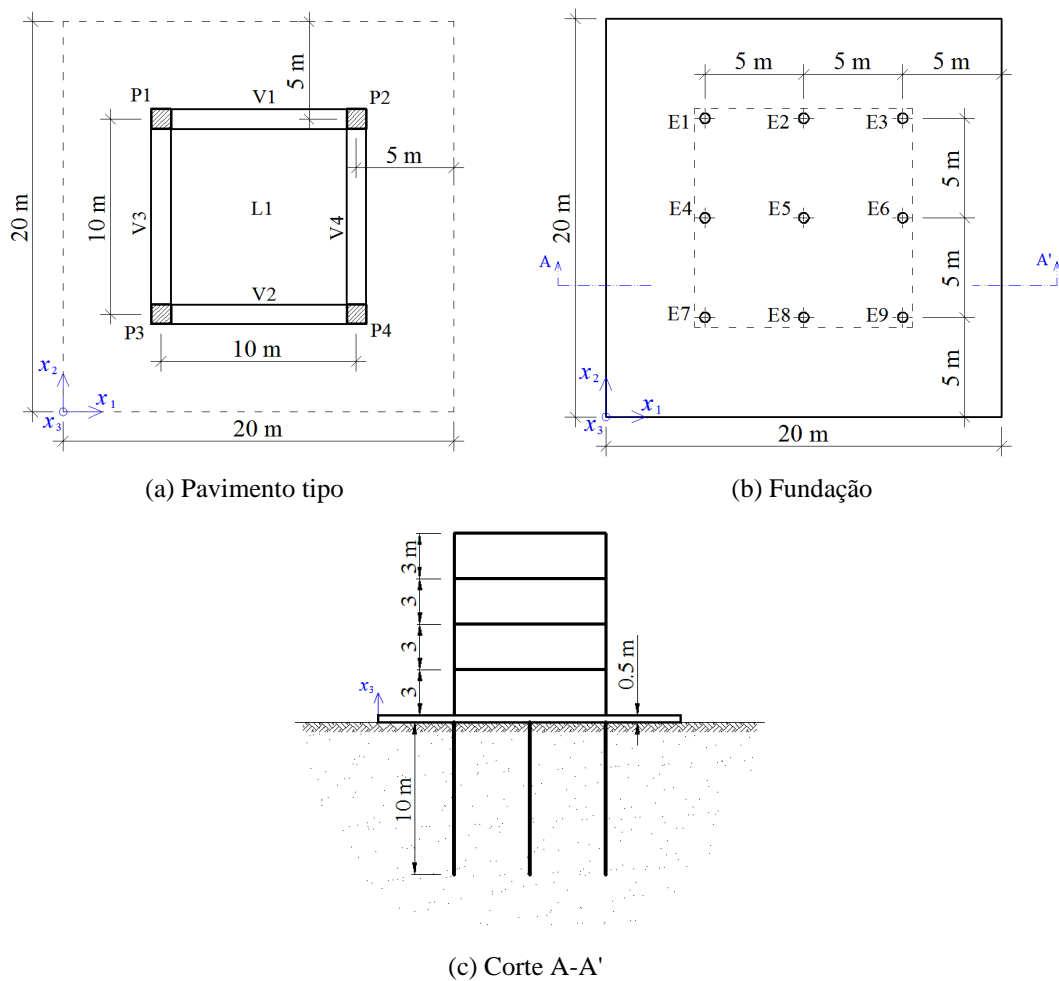


Figura 4.10 – Exemplo 4: Edifício sobre placa estaqueada

No trabalho de referência o solo é considerado heterogêneo, havendo três camadas com propriedades e espessuras distintas. No presente trabalho não se considera a estratificação do solo, sendo adotadas as propriedades da camada mais superficial na qual estão imersas as estacas. As propriedades do solo adotadas são  $E_s = 60 \text{ MPa}$  e  $\nu_s = 0$ . Já para os materiais dos elementos estruturais da edificação (incluindo estacas, radier, pilares, vigas e lajes) admite-se  $E = 15 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,2$ .

Outra diferença é que o modelo de Ribeiro (2009) não considera os efeitos da não linearidade geométrica do edifício. Apesar disso, o autor estudou casos de carregamentos que causam pequenos deslocamentos e pequenas rotações, e, neste caso, os resultados do modelo não linear tendem a se aproximar do modelo linear, viabilizando assim a comparação.

Considera-se uma primeira situação de carregamentos verticais distribuídos sobre todas as lajes com valor uniforme de  $40 \text{ kN/m}^2$ , tendo sido avaliado o deslocamento vertical ao longo de uma linha diagonal na laje de topo. A Figura 4.11 exhibe os resultados obtidos no presente trabalho e os resultados da referência.

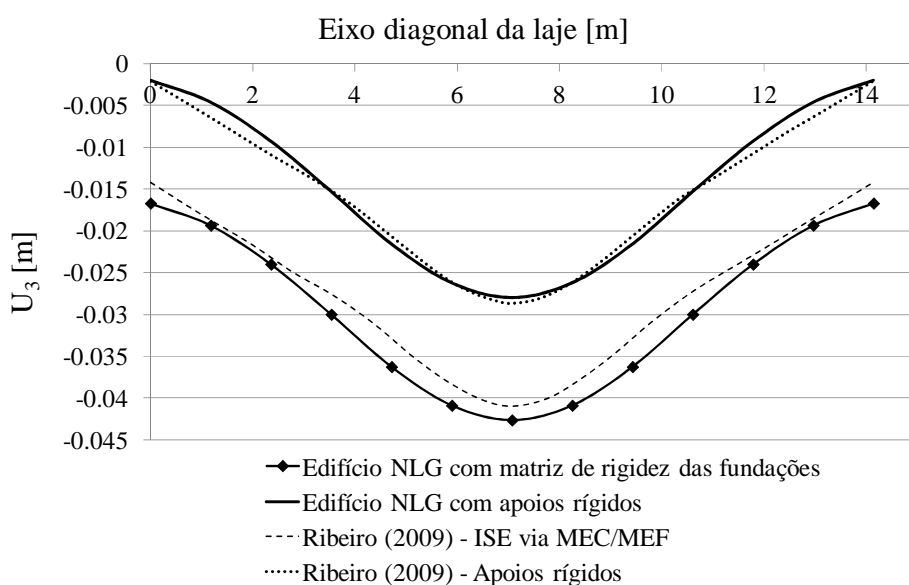


Figura 4.11 – Exemplo 4: Deslocamentos verticais na última laje

Observa-se uma boa concordância entre os resultados, sendo verificada a ocorrência de um recalque uniforme da edificação em ambos os modelos. Os deslocamentos para o modelo com solo flexível no presente trabalho foram ligeiramente maiores do que a referência, o que pode ter sido causado pela não consideração da estratificação do solo.

Uma segunda situação de carregamento estudada no trabalho de referência substitui o carregamento das lajes pela ação de duas forças horizontais concentradas de  $400 \text{ kN}$  na direção  $x_1$  aplicadas no ponto mais alto dos pilares P1 e P3, causando assim a flexão do

edifício. Os resultados para esta segunda situação são apresentados na Figura 4.12, onde se observa que o comportamento da estrutura quando considerada a flexibilidade do solo é semelhante ao modelo de referência.

Estes resultados confirmam o adequado funcionamento da estratégia aqui proposta e baseada na aplicação de uma matriz de rigidez das fundações para a consideração do fenômeno da ISE em edifícios.

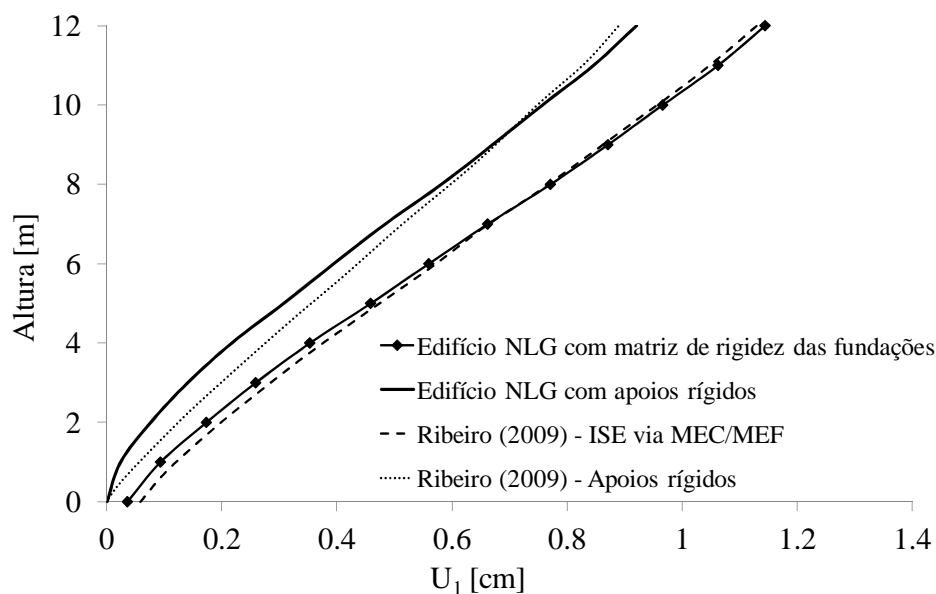


Figura 4.12 – Exemplo 4: Deslocamentos horizontais

#### 4.5 Exemplo 5: Núcleo rígido parcialmente fechado por lajes

Será analisado um edifício de concreto armado cujo sistema estrutural é formado por um núcleo rígido com lajes engastadas em suas paredes, conforme a Figura 4.13. A edificação possui 20 andares, cada um com pé-direito de 3,0 metros. Todas as lajes e paredes do núcleo possuem espessura constante de 15 cm. As demais dimensões do núcleo (em relação à linha do esqueleto) e do pavimento tipo são apresentadas na Figura 4.13(a).

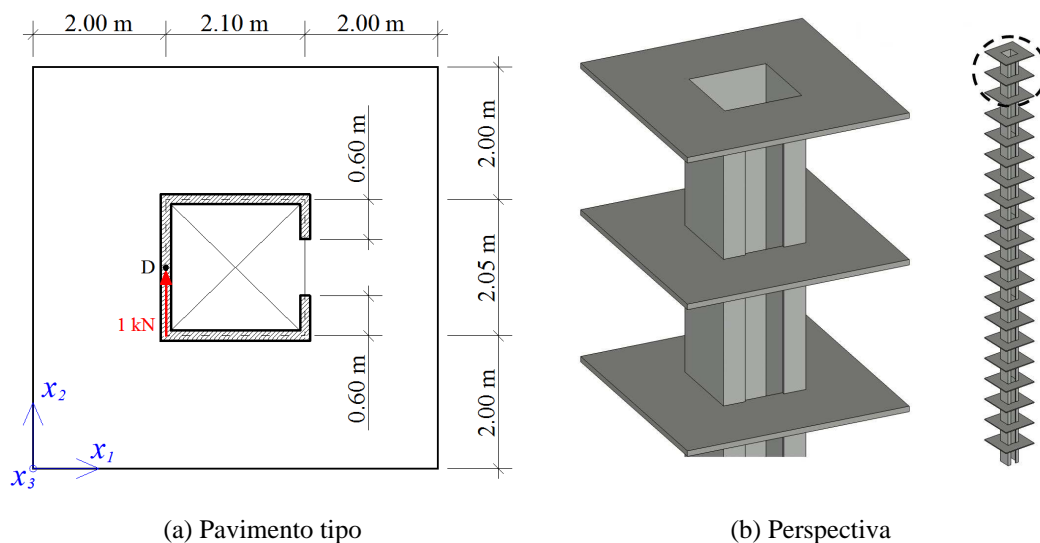


Figura 4.13 – Exemplo 5: Núcleo rígido parcialmente fechado por lajes

O carregamento considerado inclui 20 forças horizontais unitárias (1 kN) na direção  $x_2$  aplicadas no ponto D (ponto médio da parede de fundo do núcleo) na altura da laje em cada pavimento. Assim, o carregamento causa a flexo torção do edifício sendo que, neste caso, o empenamento do núcleo é parcialmente impedido pela presença das lajes. Consideram-se as seguintes constantes elásticas para todos os materiais do edifício:  $E = 20 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,25$ .

Para este exemplo a seguinte malha foi adotada após uma análise de convergência: utilizam-se 5680 elementos finitos de casca NLG com aproximação cúbica para as lajes (sendo 284 por pavimento) e 40 elementos de núcleo (2 em cada tramo). Apresentam-se como referência os resultados obtidos para dois modelos que discretizam todo o edifício em elementos de casca: o primeiro modelo de referência foi processado no próprio programa aqui desenvolvido e utiliza 16800 elementos de casca NLG com aproximação cúbica para lajes e paredes, enquanto a segunda referência é um modelo processado no programa ANSYS® com 40289 elementos de casca SHELL63 cuja ordem de aproximação é linear (ANSYS, 2010).

Inicialmente considera-se que o núcleo é engastado na base, desconsiderando-se a flexibilidade do solo. A Figura 4.14 exhibe os resultados de deslocamentos horizontais na direção da força ao longo da altura, medidos no ponto D da seção do núcleo.

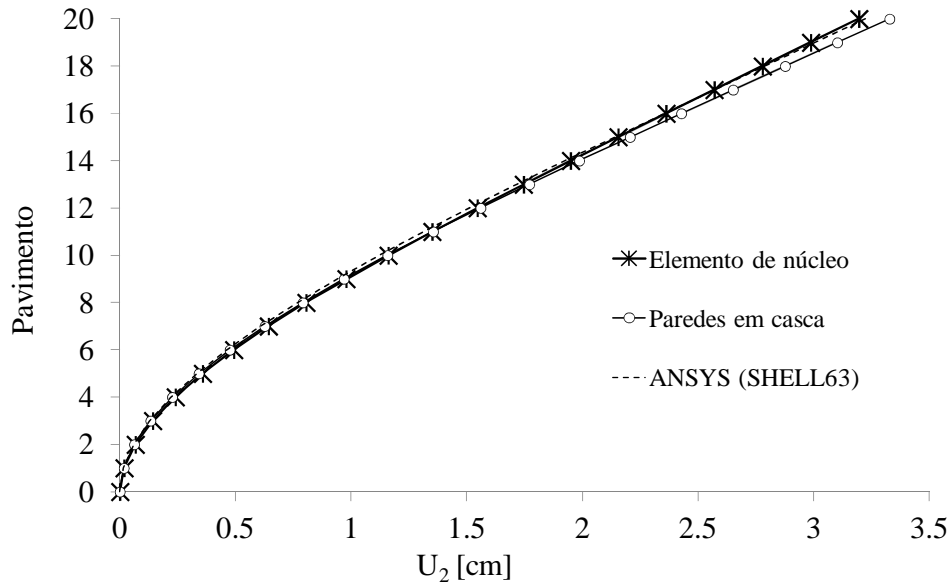


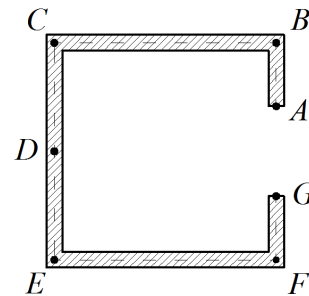
Figura 4.14 – Exemplo 5: Deslocamentos horizontais

A Tabela 3 apresenta resultados de deslocamentos verticais (ou longitudinais, neste caso) para sete diferentes pontos da seção transversal do núcleo localizada no topo do edifício, isto é, em  $x_3 = 60,0$  m.

Tabela 3 – Deslocamentos verticais da seção de topo do núcleo do exemplo 5

$U_3$  [mm]

Ponto	Elemento de núcleo	Paredes em casca	ANSYS® (SHELL63)
A	-0,29	-0,33	-0,31
B	-0,77	-0,79	-0,76
C	-0,78	-0,80	-0,76
D	-0,01	-0,01	-0,01
E	0,76	0,77	0,74
F	0,74	0,76	0,73
G	0,27	0,30	0,29



Os resultados são considerados satisfatórios e confirmam a eficiência da formulação aqui proposta. A Figura 4.15 ilustra o aspecto da configuração deformada do edifício (ampliada 1000 vezes) com resultados dos deslocamentos horizontais na direção  $x_2$ .

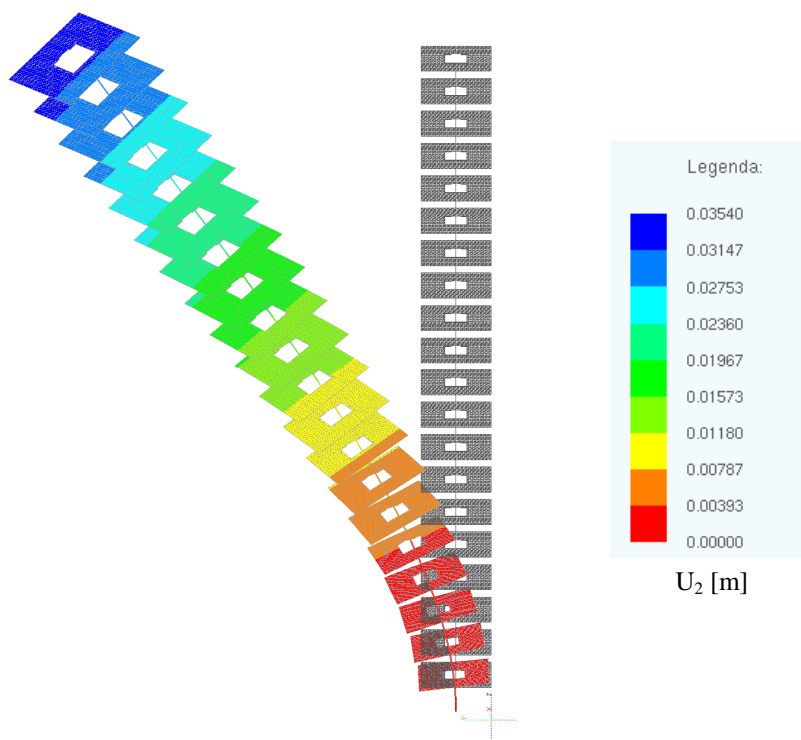


Figura 4.15 – Exemplo 5: Aspecto da deformada do edifício

Na Figura 4.16 são apresentadas as distribuições de tensões normais e de cisalhamento para a seção transversal da base do núcleo.

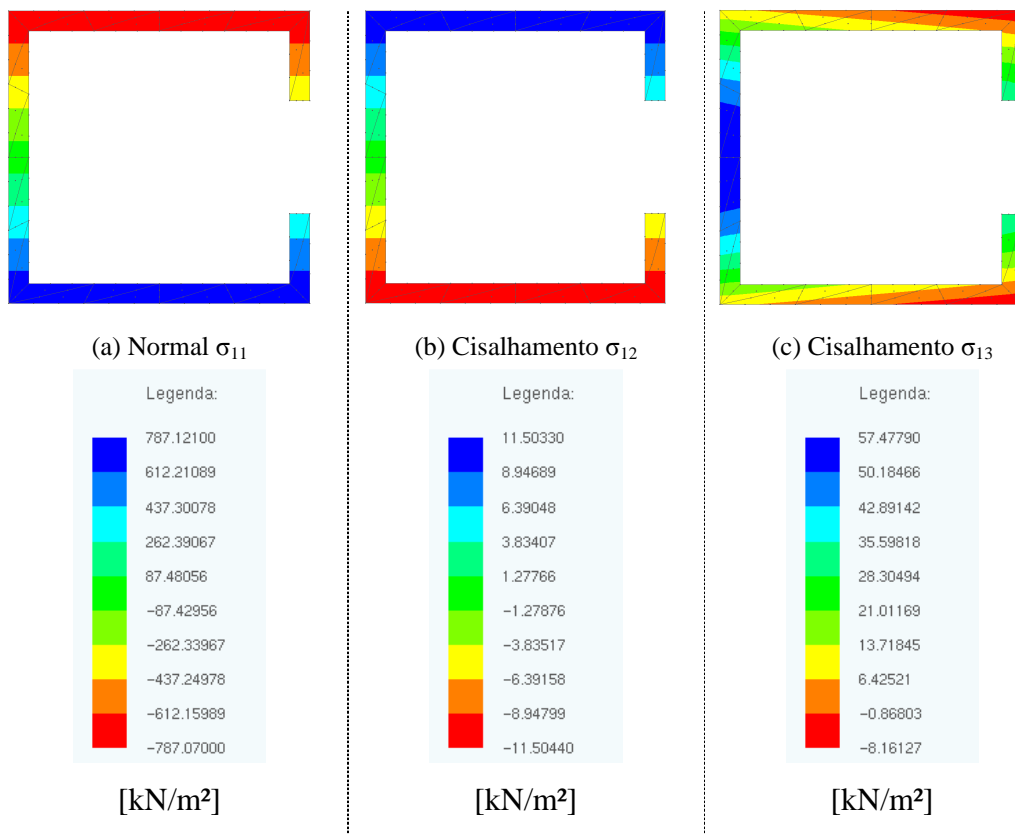


Figura 4.16 – Exemplo 5: Tensões na base do núcleo



A fim de avaliar a influência da rigidez das lajes no comportamento do edifício foi realizada uma segunda análise na qual se observou a variação dos resultados de deslocamentos, rotações e do empenamento do núcleo rígido para diferentes espessuras de laje, sendo os resultados comparados ao caso do núcleo isolado, isto é, sem a presença das lajes. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.17 e 4.18, tendo sido aferidos na linha de referência que passa pelo ponto D da seção.

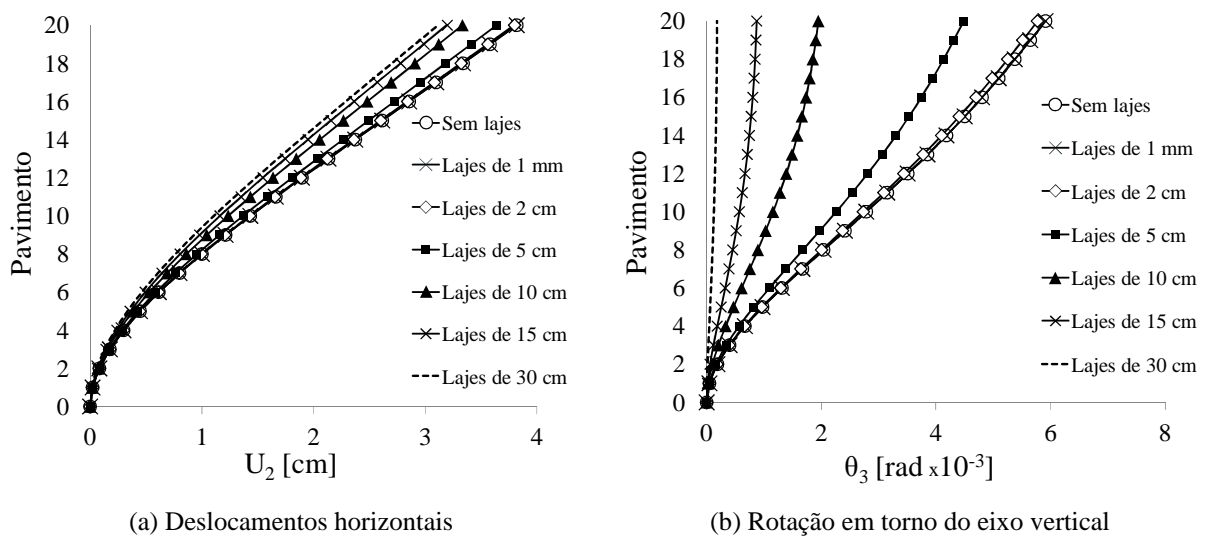


Figura 4.17 – Exemplo 5: Resultados para diferentes espessuras de laje

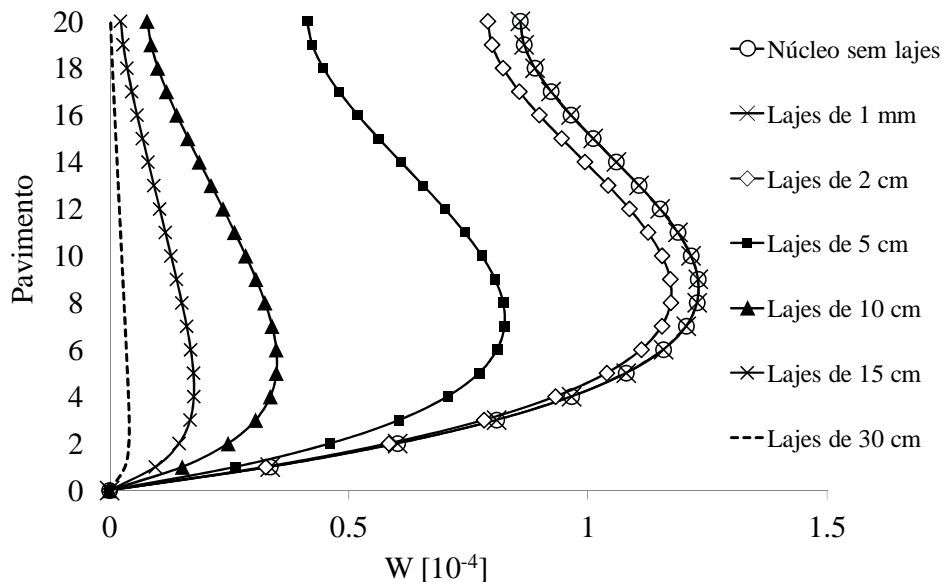


Figura 4.18 – Exemplo 5: Empenamento do núcleo para diferentes espessuras de laje

Observa-se que quando as lajes possuem espessura muito fina (1,0 mm) as mesmas não oferecem rigidez suficiente para interferir no comportamento mecânico do núcleo, e os resultados obtidos nesta situação são praticamente os mesmos do núcleo sem nenhuma laje.

Aumentando-se a espessura das lajes para 2,0 cm já se observam pequenas reduções do empenamento, dos deslocamentos e das rotações. À medida que se consideram maiores espessuras para as lajes verifica-se o aumento da rigidez à torção da edificação, o que era esperado. Estes resultados indicam o adequado funcionamento da estratégia de acoplamento entre o elemento de núcleo e as lajes considerando o empenamento da seção.

Será agora analisado o mesmo edifício (para o caso de lajes com espessura de 15 cm) considerando-se a flexibilidade das fundações através da estratégia de cálculo de uma matriz de rigidez do sistema solo-fundação. Para esta análise será admitido que o edifício encontra-se apoiado em uma placa de fundação do tipo radier com formato (em planta) quadrado com lados de 4,0 metros e 50 cm de espessura sobre solo homogêneo cujo módulo de elasticidade tem valor  $E_s = 200$  MPa (ou seja, 100 vezes menor que o módulo do material da edificação) e coeficiente de Poisson nulo. Para o material do radier admitem-se as mesmas propriedades elásticas dos materiais que constituem os demais elementos estruturais do edifício.

A Figura 4.19 apresenta as malhas discretas adotadas para análise das fundações, tendo sido utilizados 108 elementos de contorno planos para a modelagem da superfície do solo e 648 elementos finitos de casca com formulação convencional para a modelagem do radier. É possível observar nestas malhas a disposição de elementos ao longo das regiões de apoio das paredes do núcleo onde se desenvolve a espessura destas paredes.

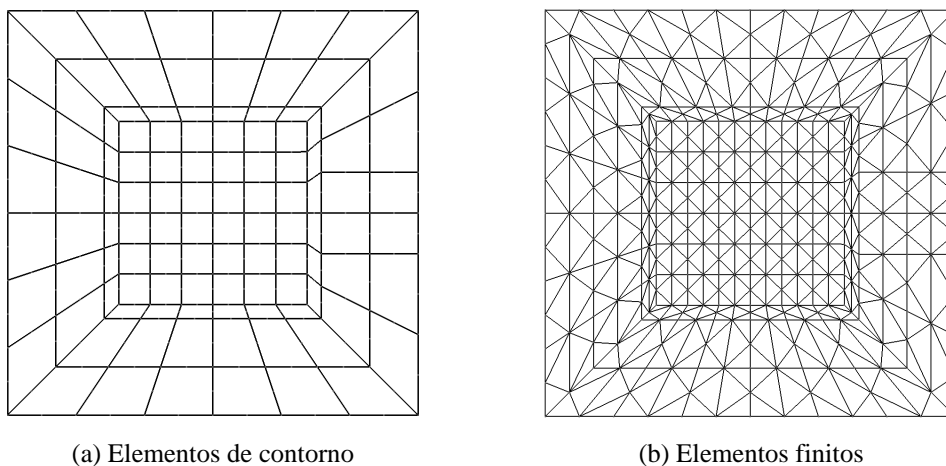


Figura 4.19 – Exemplo 5: Malha discreta para análise das fundações

Conforme descrito no item 3.5.1, a consideração da flexibilidade do solo para o núcleo rígido pode se dar de duas maneiras distintas: calculando-se uma matriz de rigidez para o único ponto de apoio do elemento reticulado de núcleo ou para diversos pontos da fundação sendo, nesta segunda alternativa, utilizada uma malha discreta auxiliar de elementos de casca NLG com espessura fina na base do edifício que, por estarem acoplados à seção, transmitem

indiretamente os coeficientes de rigidez do sistema solo-fundação para o núcleo. Dessa maneira, evita-se a necessidade do tratamento algébrico da matriz de rigidez obtida para as fundações via matriz de incidência cinemática do núcleo. Na primeira opção define-se o ponto de apoio flexível para o núcleo (isto é, o nó para o qual se calculam os coeficientes de flexibilidade) como sendo o nó da malha de fundação que tem a mesma coordenada que o ponto D na base do edifício. Já para a segunda opção de ligação com as fundações os pontos escolhidos são os nós vizinhos à região de apoio das paredes.

Para avaliar a influência que o empenamento do núcleo sobre base flexível exerce no comportamento estrutural do edifício foram analisadas quatro possibilidades de modelos com apoios flexíveis, sendo as características de cada modelo descritas a seguir:

- Modelo 1A: considera-se a flexibilidade do solo na base do núcleo de maneira indireta com "molas" de fundação calculadas para os nós do radier que não estão localizados na região de apoio das paredes, transmitindo-se os coeficientes de rigidez da fundação através de elementos de cascas NLG auxiliares acoplados à seção do núcleo;
- Modelo 1B: mesma consideração do modelo 1A, porém impondo-se que no nó da base do elemento de núcleo o grau de liberdade de empenamento é totalmente restrito;
- Modelo 2A: considera-se a flexibilidade do solo na base do núcleo aplicada diretamente ao nó de barra, ou seja, calculam-se "molas" de fundação para um único ponto da malha discreta do radier sendo que as coordenadas deste ponto coincidem com as coordenadas do nó pertencente à linha de eixo do núcleo na base do edifício;
- Modelo 2B: mesma consideração do modelo 2A, porém impondo-se que no nó da base do elemento de núcleo o grau de liberdade de empenamento é totalmente restrito.

Para os modelos 2A e 2B, neste exemplo, há ainda a necessidade de restringir os graus de liberdade correspondentes ao giro de torção, uma vez que, da maneira como foram formulados os elementos discretos utilizados na análise das fundações, o valor da "mola" de torção para qualquer nó das cascas no radier resulta em valor nulo. Por este motivo as componentes horizontais dos vetores generalizados na seção da base do núcleo foram restringidas nestes dois modelos. Para os modelos 1A e 1B não há necessidade de impor tal condição, pois a vinculação tridimensional dos nós de casca NLG na base do edifício faz com que as rigidezes de translação dos diversos nós sejam solicitadas, evitando assim que o giro de torção esteja livre, nestes casos.

Os resultados obtidos na análise anterior com consideração de apoios rígidos são utilizados agora como referência. A Figura 4.20 exhibe os deslocamentos horizontais na direção  $x_2$  (medido no ponto D) para os modelos estudados. Observa-se que os deslocamentos

de todos os modelos com apoios flexíveis são muito próximos, tendo alcançado valores muito maiores quando comparados à situação de engaste perfeito na base. Além disso, observa-se uma maior inclinação da estrutura em relação ao eixo vertical para o caso de fundações flexíveis.

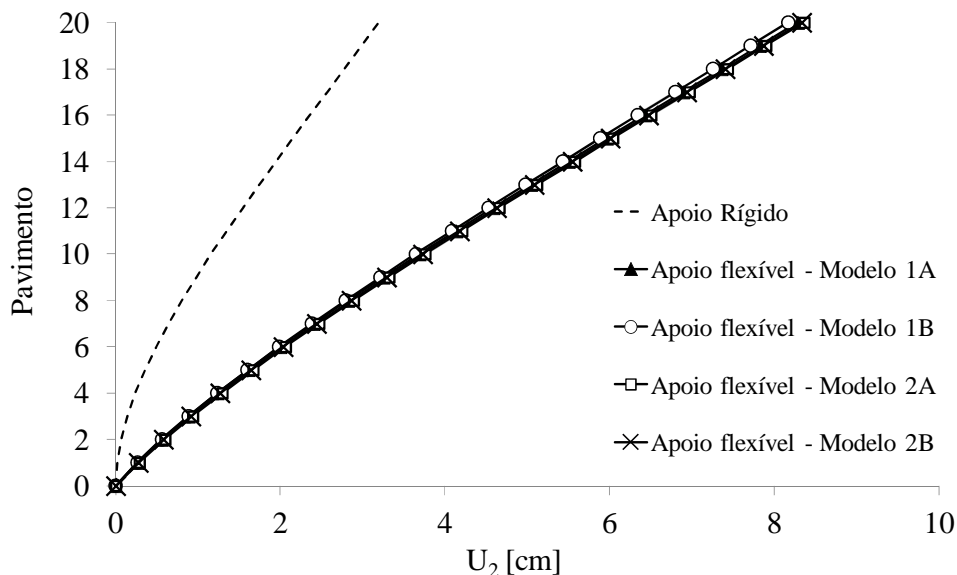


Figura 4.20 – Exemplo 5: Deslocamentos horizontais com ISE

A Figura 4.21 apresenta a variação do momento fletor  $M_1$  (em torno de um eixo local que passa pela seção na direção do eixo  $x_1$ ) ao longo da altura do núcleo rígido. Observa-se que os valores de todos os modelos analisados foram praticamente os mesmos.

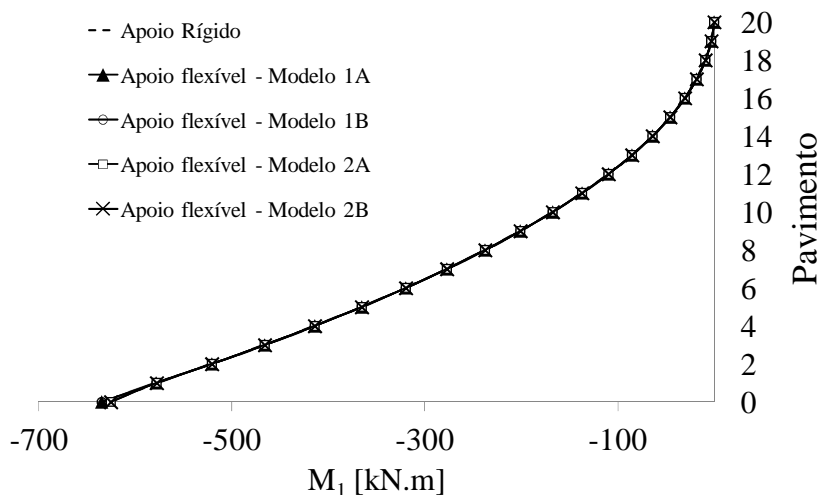


Figura 4.21 – Exemplo 5: Momentos fletores no núcleo com ISE

Analisou-se também o comportamento de torção do edifício para os modelos com apoios flexíveis. Neste caso, a fim de comprovar a influência da rigidez das fundações do

núcleo no comportamento do edifício foi também processado um quinto modelo com as mesmas considerações do modelo 1A, porém, admitindo-se que os elementos de casca auxiliares internos e acoplados à seção da base do núcleo possuem espessura de 1,0 metro para simular a presença de um bloco rígido. Dessa forma, estes elementos de casca além de transferir a flexibilidade do solo para o núcleo, promovem um enrijecimento à torção. Este novo modelo recebeu a denominação de modelo 1A/Bloco.

Os resultados da variação do empenamento, da rotação em torno do eixo vertical do núcleo e do momento de torção ao longo da altura do edifício são apresentados, respectivamente, nas Figuras 4.22, 4.23 e 4.24.

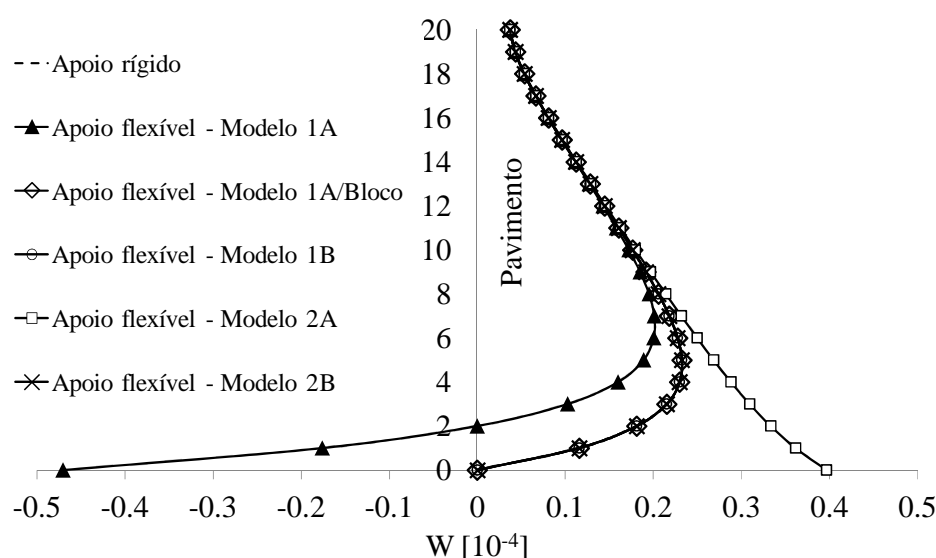


Figura 4.22 – Exemplo 5: Empenamento do núcleo com ISE

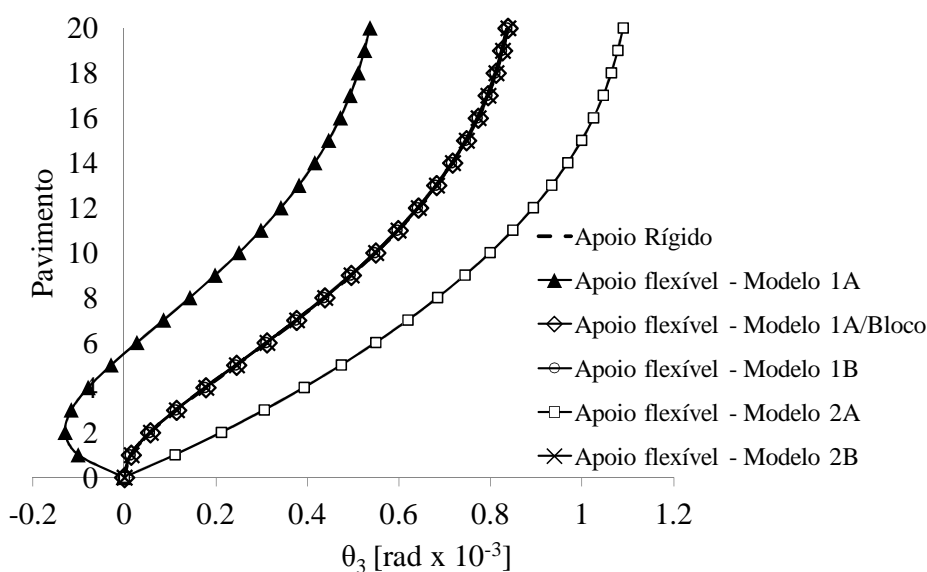


Figura 4.23 – Exemplo 5: Rotações em torno do eixo vertical com ISE

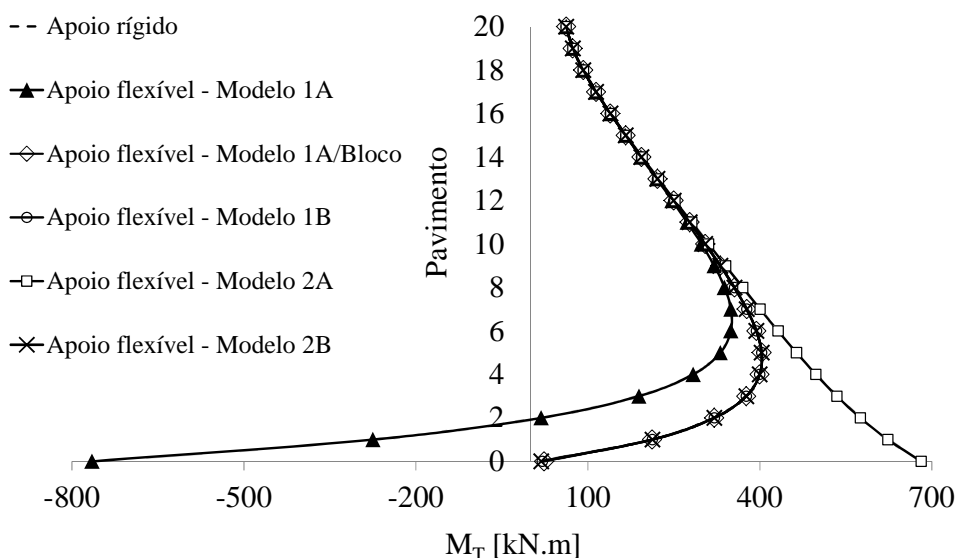


Figura 4.24 – Exemplo 5: Momento de torção no núcleo com ISE

Neste caso, observou-se que os modelos 1B, 2B e 1A/Bloco apresentaram resultados muito próximos ao modelo com apoio rígido, enquanto os modelos 1A e 2A apresentaram maiores diferenças devido à ocorrência de empenamento na base do núcleo. No caso das rotações em torno do eixo vertical, apesar dos valores diferentes obtidos com os modelos flexíveis 1A e 2A, é possível perceber que o comportamento das curvas a partir de certa altura é semelhante. Para os resultados de empenamento e de momento de torção nota-se também que a partir do 9º pavimento os valores são praticamente os mesmos para todos os casos considerados.

Com base nos resultados obtidos é possível afirmar que a flexibilização do empenamento do núcleo pode influenciar no seu comportamento de torção, enquanto que para o comportamento mecânico de flexão a influência do empenamento foi insignificante. Observa-se, no entanto, que as influências são, em geral, mais acentuadas nos pavimentos próximos a base, enquanto que para pavimentos mais próximos ao topo do edifício a rigidez do núcleo tende a uniformizar os efeitos, reduzindo assim as diferenças entre os valores numéricos.

No que diz respeito ao aspecto computacional, observa-se que os modelos de número 1 (1A e 1B) foram mais dispendiosos do que os modelos de número 2 (2A e 2B), tanto na determinação da matriz de rigidez das fundações quanto na aplicação desta matriz ao modelo do edifício, por envolverem uma quantidade maior de pontos de ligação entre infra e superestrutura. Afinal, quanto maior for a quantidade de pontos escolhidos para o cálculo dos coeficientes de flexibilidade das fundações, maior será a matriz de rigidez, o que onera o

tempo computacional de ambos os programas. Além disso, há necessidade de se compatibilizar as coordenadas dos diversos nós ligados à fundação com uma malha discreta auxiliar de cascas na base do modelo do edifício NLG, aumentando a quantidade de elementos e de variáveis do problema. A compatibilização das coordenadas se torna complexa a medida que a malha das fundações e da seção do núcleo é refinada. Por outro lado, os modelos de número 2 oferecem maior praticidade por incluírem um único nó de ligação entre a infraestrutura e o núcleo, o que resultou, para este caso (e neste exemplo), em uma matriz de rigidez com seis linhas e seis colunas apresentada a seguir (valores em unidades de kN e m).

$$[k]_{\text{Exemplo 5}} = \begin{bmatrix} 1272192 & 0 & 15500 & 0 & 8626 & 0 \\ 0 & 1196639 & 0 & -4107 & 0 & 0 \\ 15500 & 0 & 605522 & 0 & -54490 & 0 \\ 0 & -4107 & 0 & 736461 & 0 & 0 \\ 8626 & 0 & -54490 & 0 & 656674 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Apesar de oferecer maior praticidade, a aplicação de coeficientes de rigidez diretamente ao nó do elemento reticulado de núcleo tem como principal limitação a possibilidade de se considerar apenas duas situações extremas para o empenamento: totalmente livre ou totalmente restrito.

A análise da variação do empenamento para o modelo flexível 1A na Figura 4.22 mostra que a rigidez das fundações pode influenciar no valor do empenamento na base do núcleo. No entanto, é importante observar que as características adotadas para o sistema solo-fundação deste exemplo atribuíram grande flexibilidade à superestrutura, causando um aumento de mais de 60% do deslocamento horizontal máximo no topo do edifício em relação à situação de apoios rígidos, conforme mostra a Figura 4.20. Na prática, os sistemas de fundação usuais para núcleos rígidos em edifícios de múltiplos pavimentos são, geralmente, mais robustos e com características que lhe conferem rigidez elevada, como no caso do exemplo citado no capítulo 1 em que núcleos estruturais de um edifício recém-construído em São Paulo se apoiam em um radier com espessura de 3,0 metros. A análise dos resultados do modelo 1A/Bloco demonstra que, quanto maior for a espessura do radier, menor é o empenamento do núcleo na base com conseqüente aumento da rigidez à torção do edifício, de forma análoga ao que acontece com o empenamento ao nível de cada pavimento para maiores espessuras de laje, conforme visto na análise anterior. Logo, para sistemas de fundações rígidos, a adoção do modelo 2B é aceitável.

Em relação à convergência dos resultados, todos os modelos processados neste exemplo convergiram em apenas três iterações, tendo sido novamente observado que valores significativos para a posição de equilíbrio final foram alcançados já na primeira iteração em todos os casos analisados.

#### 4.6 Exemplo 6: Edifício reforçado por um núcleo estrutural

Neste exemplo será analisado um edifício de concreto armado com sistema estrutural formado por pilares, vigas, lajes e um núcleo rígido, sendo a distribuição e a orientação destes elementos estruturais apresentadas na Figura 4.25(a). Este mesmo exemplo foi analisado em diversos outros trabalhos realizados no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP, e alguns destes serão aqui utilizados como referência para análise dos resultados.

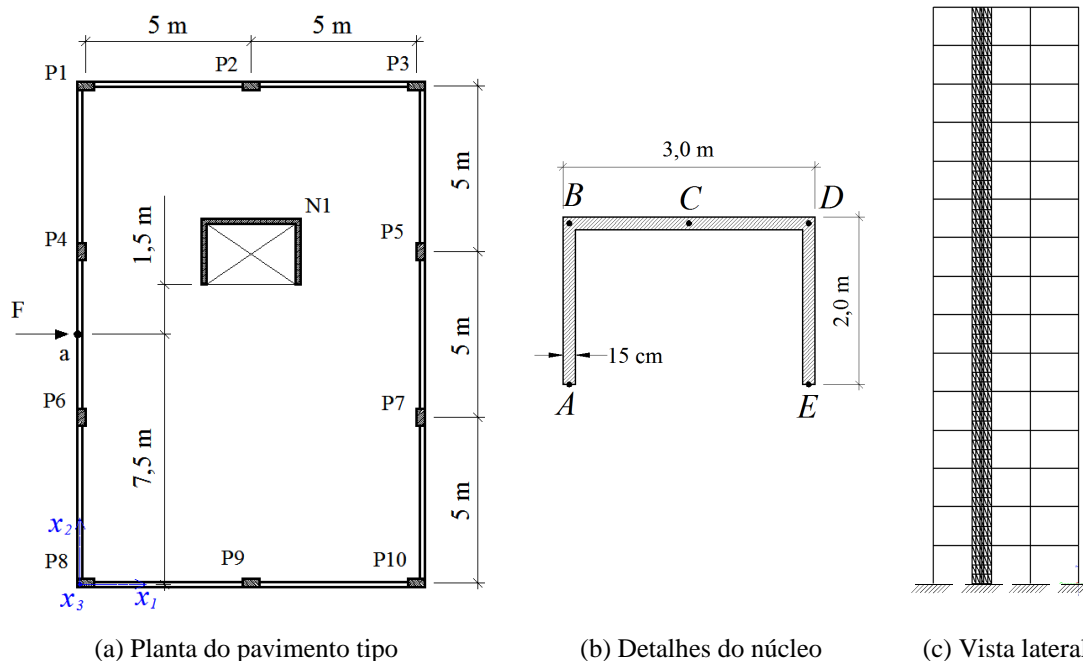


Figura 4.25 – Exemplo 6: Edifício com um núcleo estrutural

O edifício possui 15 pavimentos, cada um com 4,0 metros de pé-direito, totalizando 60 metros de altura. Todos os pilares (P1 a P10) e todas as vigas (V1 a V4) têm seção retangular, sendo as dimensões destes elementos estruturais, respectivamente,  $25 \times 50 \text{ cm}^2$  e  $20 \times 60 \text{ cm}^2$ . Tanto as lajes quanto as paredes do núcleo têm espessura constante de 15 cm. Para os materiais da estrutura do edifício admite-se módulo de elasticidade  $E = 20 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ .



Em cada pavimento consideram-se os seguintes carregamentos: vigas com carregamento vertical distribuído uniforme de 20 kN/m; pontos A e E do núcleo com forças verticais concentradas de 70 kN; pontos B e D do núcleo com forças verticais concentradas de 180 kN; ponto "a" (localizado entre os pilares P4 e P6) com uma força horizontal  $F = 51$  kN para simular a ação do vento. No último pavimento (o que seria a cobertura) os mesmos carregamentos são aplicados, porém com metade dos valores citados. A estrutura do edifício está, portanto, submetida à flexo torção.

A malha adotada após uma análise de convergência inclui 10680 elementos de casca NLG e 1920 elementos de barra NLG. Foi inicialmente analisada a situação em que todos os pilares e o núcleo rígido são engastados na base do edifício, sendo os resultados de deslocamentos horizontais na direção da força  $F$  (medidos no ponto central de cada pavimento) apresentados na Figura 4.26. Estes resultados foram comparados com outros três modelos extraídos de trabalhos anteriores: um primeiro modelo de referência é o modelo de Souza Junior (2001), que adota cinemática linear e considera a interação entre o núcleo e as lajes; outros resultados a serem comparados são os de Silva (1989) que considera a NLG via processo aproximado de 2ª ordem e admite as lajes como diafragmas rígidos nos seus planos e completamente flexíveis nos planos normais à sua superfície; o terceiro modelo de referência, proposto por Martins (2001), considera a NLG também via processo aproximado de 2ª ordem e discretiza as lajes em elementos finitos de placa, considerando, assim, a rigidez transversal à flexão e diafragma rígido para o comportamento de chapa destes elementos. Apresentam-se também os resultados para um modelo processado no presente trabalho no qual as paredes do núcleo rígido são discretizadas com elementos de casca NLG.

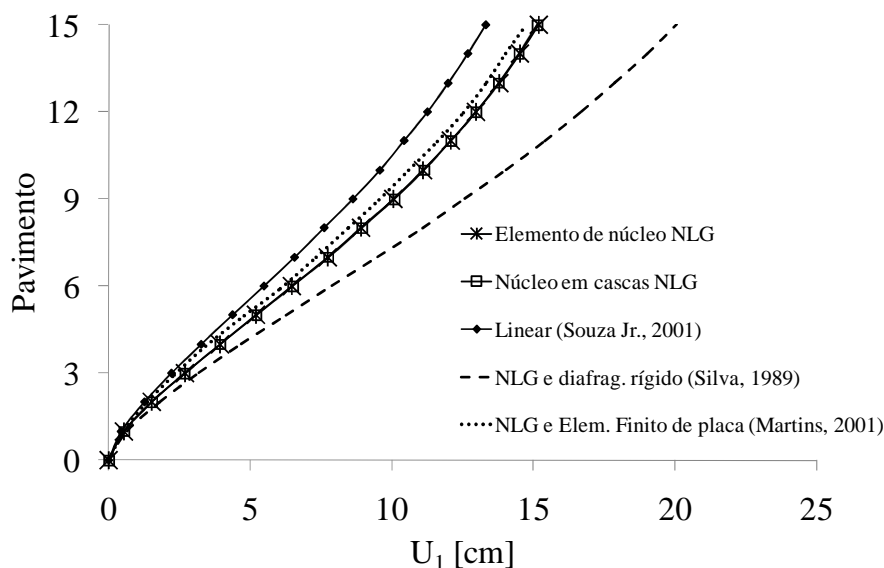


Figura 4.26 – Exemplo 6: Deslocamentos horizontais

Comparando-se os resultados do presente trabalho com o modelo linear de Souza Junior (2001) observa-se a ocorrência de maiores deslocamentos devido à NLG, o que era esperado. É possível perceber também que a consideração da rigidez transversal das lajes no comportamento mecânico do edifício resultou em um modelo menos flexível. O modelo NLG em 2ª ordem que discretiza a laje em elementos finitos de placa com diafragma rígido para o comportamento de chapa (MARTINS, 2001) se mostrou ligeiramente mais rígido do que o modelo proposto no presente trabalho, que utiliza elementos de casca.

A Figura 4.27 apresenta os resultados de rotações em torno do eixo vertical medidos no ponto central de cada pavimento. Os resultados são comparados com o modelo NLG em 2ª ordem de Silva (1989) e, neste caso, o modelo de associação de paredes planas resultou em menores rotações do que modelo aqui proposto, apesar de sua grande flexibilidade à flexão.

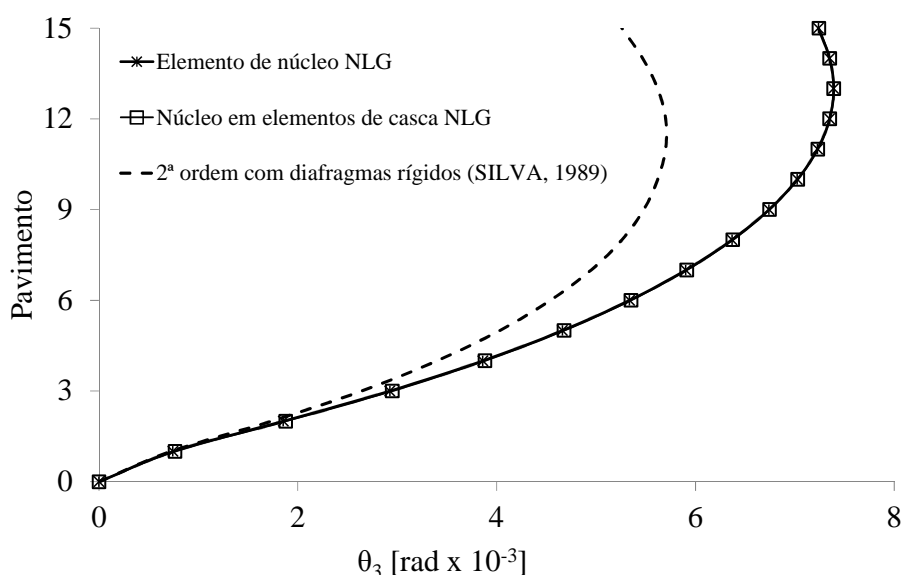


Figura 4.27 – Exemplo 6: Rotações em torno do eixo vertical

Na Figura 4.28 visualiza-se o aspecto do edifício deformado (amplificado 100 vezes) com resultados de deslocamentos verticais nas lajes para uma vista superior, além dos resultados de deslocamentos horizontais na direção da força  $F$  em cada pavimento para uma vista da fachada frontal. Nota-se que o máximo deslocamento horizontal no topo do edifício foi de aproximadamente 20,82 cm para esta análise. A Figura 4.29 exhibe com maior detalhe um trecho da estrutura deformada no qual é possível perceber que há influência das paredes do núcleo empenado no comportamento das lajes, interferindo nas deformações dos pavimentos fora de seu plano.

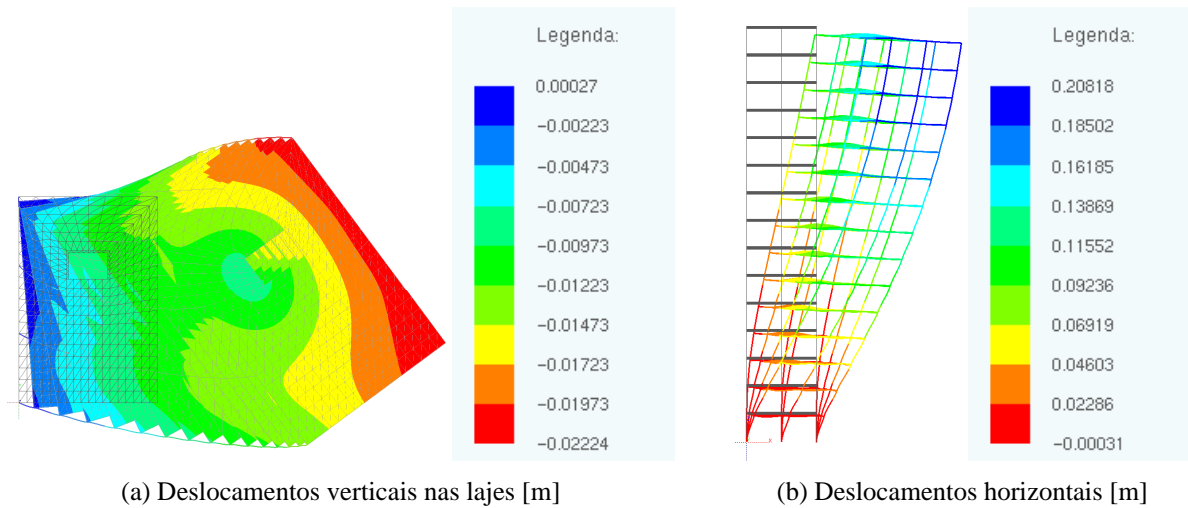


Figura 4.28 – Exemplo 6: Deslocamentos do edifício

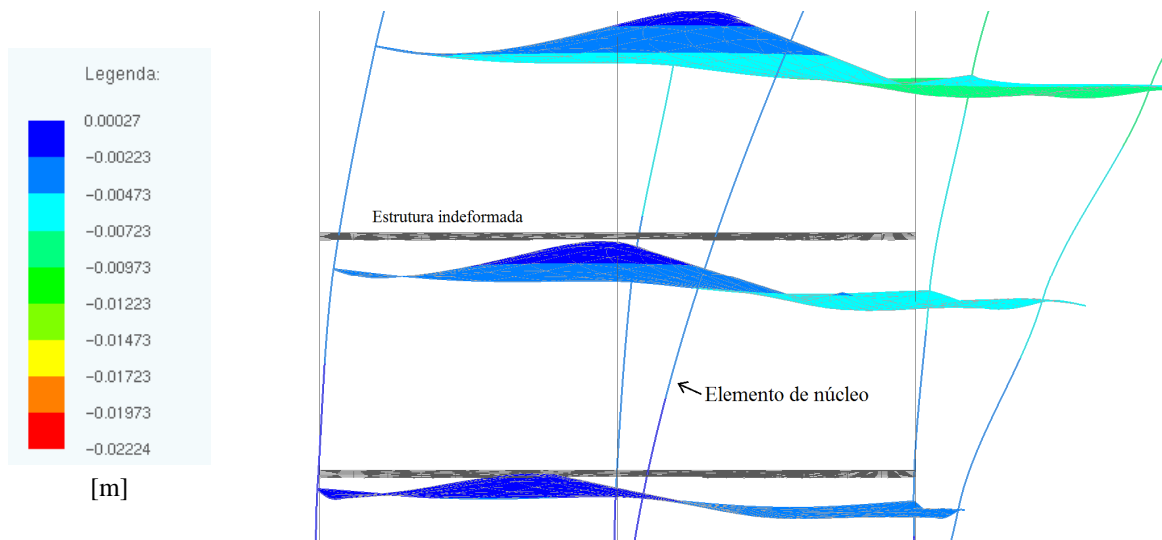


Figura 4.29 – Exemplo 6: Lajes deformadas

Apresentam-se na Figura 4.30 as tensões normais e de cisalhamento na seção de base do núcleo obtidas no presente trabalho.

A fim de verificar a influência das lajes no comportamento do edifício realizou-se uma análise comparativa de resultados para diferentes espessuras de laje. Os resultados de deslocamentos horizontais medidos no ponto central de cada pavimento são apresentados na Figura 4.31, na qual se observa que, quanto mais espessa for a laje, mais rígida se torna a estrutura do edifício. O mesmo comportamento foi observado por Souza Junior (2001) para o regime linear geométrico. Os valores de deslocamento máximo no topo do edifício para cada

espessura foram comparados com os resultados obtidos na análise do modelo linear citado. Esta comparação é apresentada na Tabela 4.

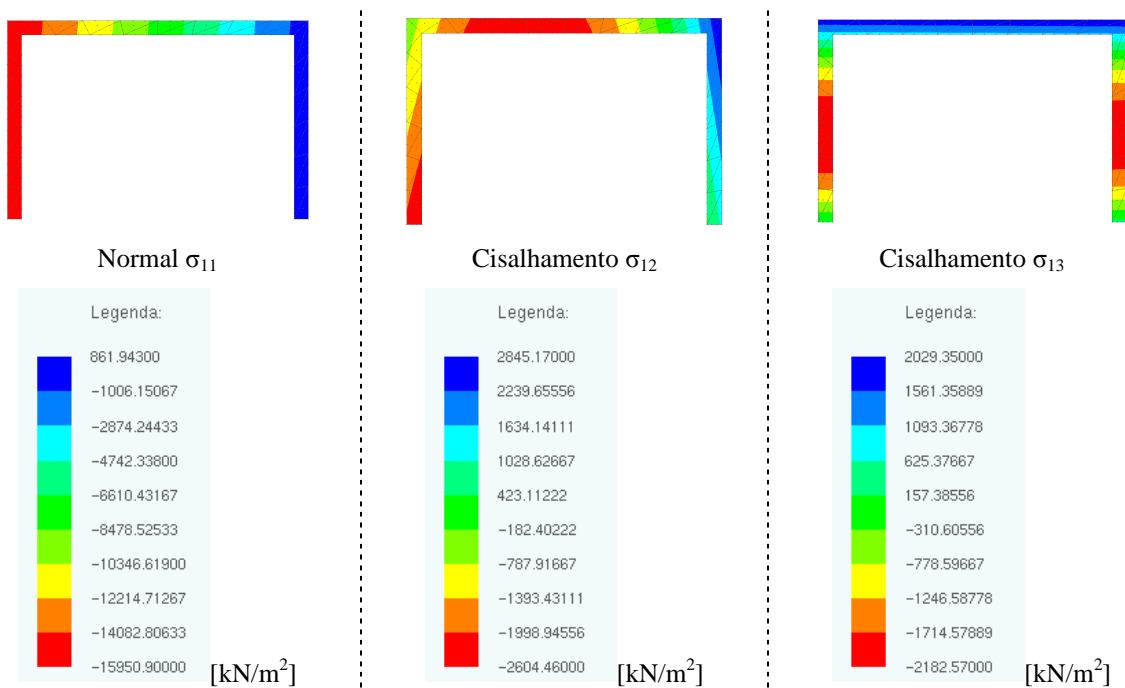


Figura 4.30 – Exemplo 6: Tensões na base do núcleo

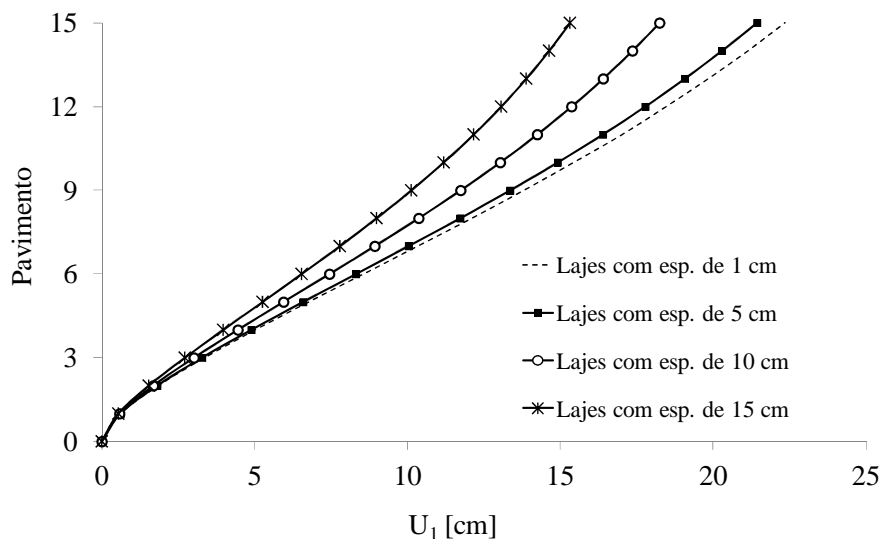


Figura 4.31 – Exemplo 6: Deslocamentos para diferentes espessuras de laje

Tabela 4 – Resultados para diferentes espessuras de lajes do exemplo 6

Modelo	Espessura das lajes			
	1 cm	5 cm	10 cm	15 cm
Presente trabalho	22.35	21.43	18.24	15.32
Linear (SOUZA JUNIOR, 2001)	17.95	17.61	15.80	13.30

Apresentam-se na Figura 4.32 os resultados de empenamento do núcleo e de rotação em torno de seu eixo longitudinal para diferentes espessuras de laje.

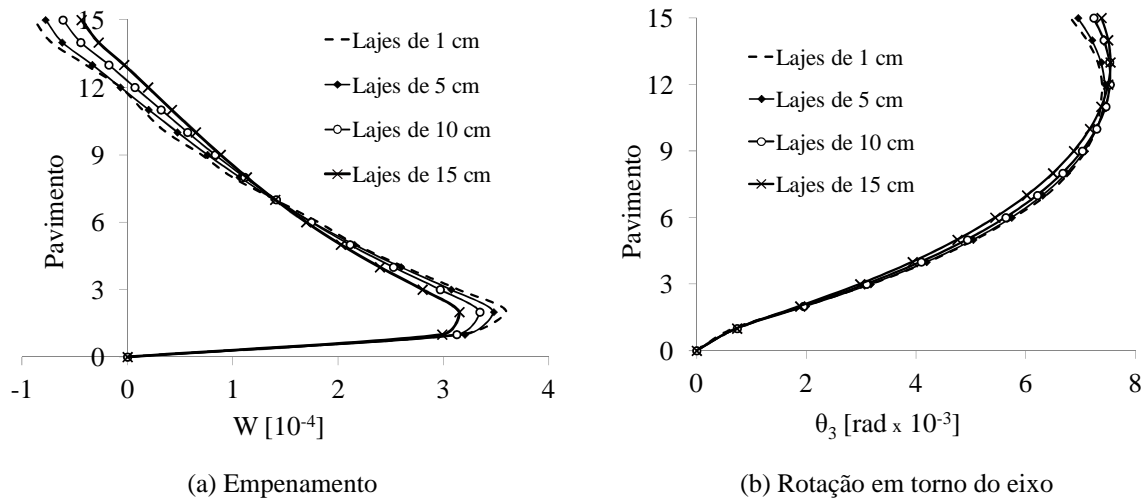


Figura 4.32 – Exemplo 6: Comportamento do núcleo rígido

Foi em seguida realizada uma análise do comportamento mecânico deste edifício considerando-se agora fundações flexíveis através de uma matriz de rigidez calculada para todos os pontos de apoio da estrutura. Optou-se por aplicar os coeficientes de rigidez das fundações diretamente aos nós de base dos elementos reticulados de apoio da edificação, inclusive para o núcleo rígido. Com o intuito de verificar a influência do empenamento da base do núcleo nos resultados, foram analisados dois modelos distintos: um primeiro modelo (A) considera que o empenamento do nó de núcleo na base é totalmente livre e um segundo modelo (B) admite que as fundações são rígidas o suficiente para impedir este empenamento.

Para as fundações foi considerado que o edifício se apoia em uma placa tipo radier com espessura de 50 cm e cujas dimensões em planta são apresentadas na Figura 4.33, sendo a linha tracejada o limite da edificação. O radier é enrijecido por 12 estacas de 30 cm de diâmetro que atingem a profundidade de 9,0 metros, sendo adotada uma estaca vertical para cada pilar do edifício e duas estacas inclinadas logo abaixo do núcleo rígido. Considera-se que o topo das estacas inclinadas coincide com o nó ligado ao elemento de núcleo de maneira a oferecer rigidez à torção das fundações para este elemento, enquanto que, para os pilares, as "molas" de torção terão valor nulo por razões já comentadas anteriormente. Para a malha discreta das fundações são utilizados 92 elementos de contorno planos para o solo, 36 elementos de contorno de linha de carga, 552 elementos finitos de casca com formulação convencional para o radier e 36 elementos finitos de barra com formulação convencional para as estacas.

O solo é homogêneo e possui módulo de elasticidade  $E_s = 150 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,40$ . Para o material das estacas e do radier admitem-se as mesmas propriedades elásticas dos demais elementos estruturais do edifício.

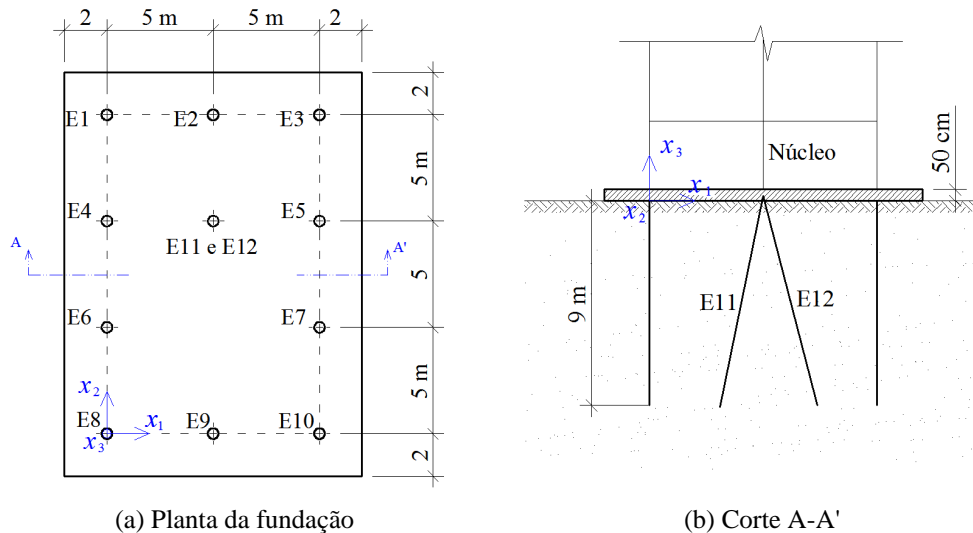


Figura 4.33 – Exemplo 6: Fundação

Para esta análise considera-se o mesmo carregamento da análise anterior e admite-se que as lajes possuem 15 cm de espessura, sendo os resultados obtidos do modelo com pilares e núcleo rígido engastados na base usados aqui como referência. A Figura 4.34 exibe os resultados de deslocamentos horizontais na direção da força  $F$  para o ponto central de cada pavimento. Observa-se que, além da ocorrência de maiores deslocamentos, a curva é mais inclinada para o caso de apoios flexíveis, e a restrição do empenamento na base do núcleo não alterou os resultados neste caso.

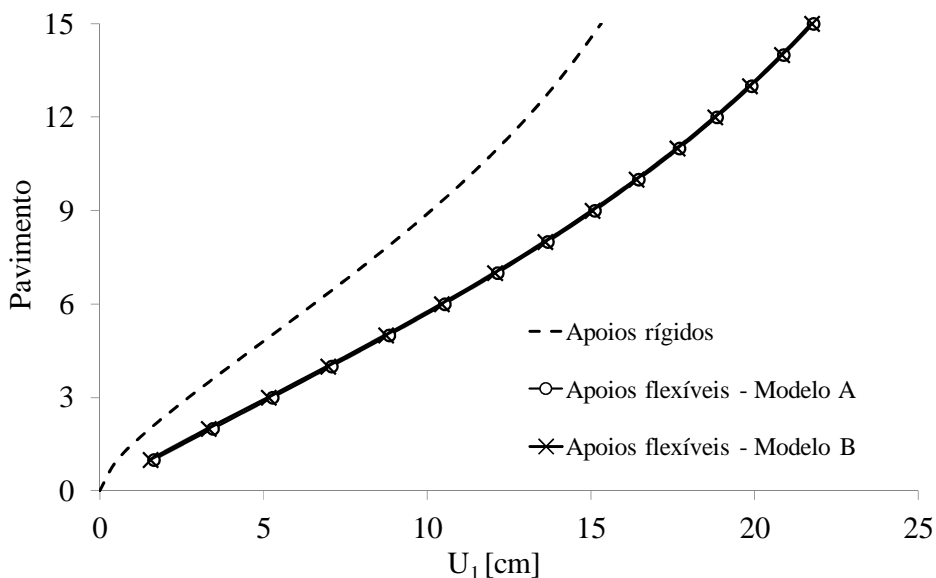


Figura 4.34 – Exemplo 6: Deslocamentos horizontais com ISE

As Figuras 4.35(a) e 4.35(b) apresentam, respectivamente, os resultados da variação do empenamento do núcleo e das rotações em torno do seu eixo vertical ao longo da altura do edifício. Neste caso nota-se que os resultados do modelo com fundações flexíveis no qual o empenamento da base do núcleo é restrito diferem do modelo com empenamento livre de maneira significativa apenas para os pavimentos mais próximos à base do edifício, sendo que a partir do 2º pavimento os resultados são muito próximos. Nota-se ainda que a flexibilização dos apoios reduziu as intensidades de empenamento e de rotação do núcleo neste caso.

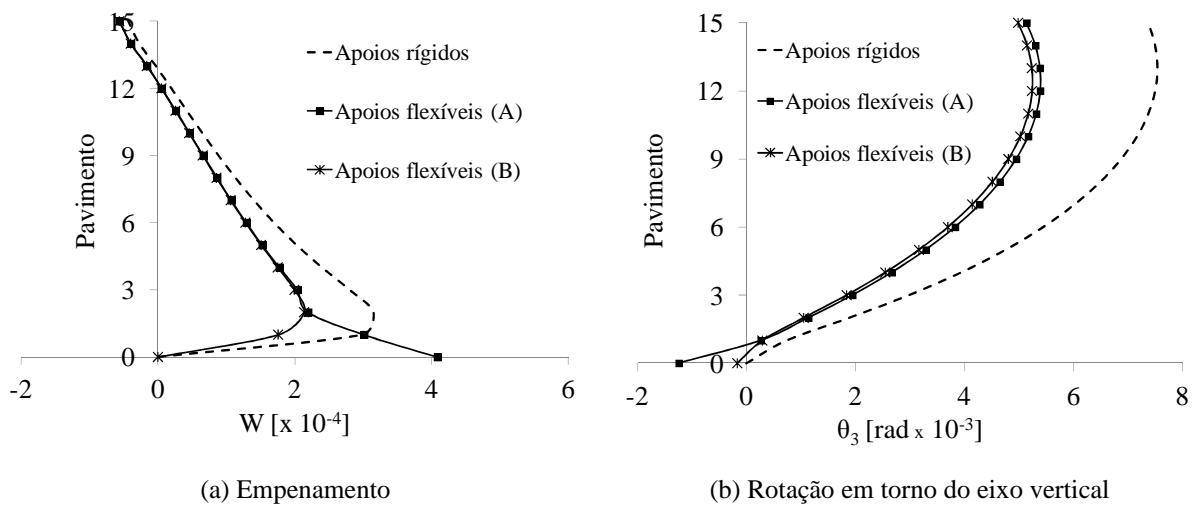


Figura 4.35 – Exemplo 6: Comportamento do núcleo rígido com ISE

Foram também analisados os esforços de momento fletor no núcleo em torno de uma linha que passa pela seção na direção do eixo  $x_2$  e para o momento de torção do núcleo rígido, sendo os resultados apresentados na Figura 4.36.

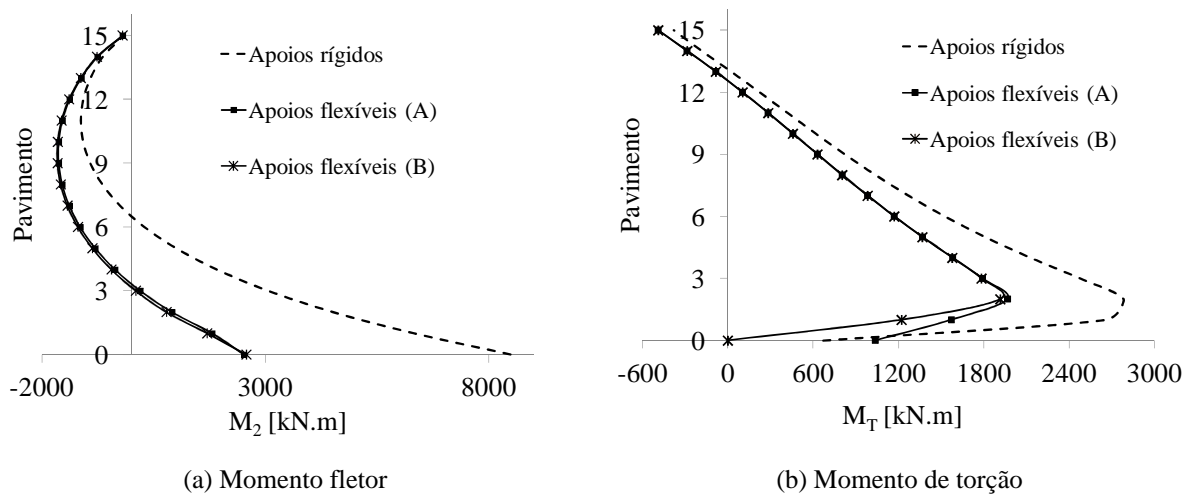
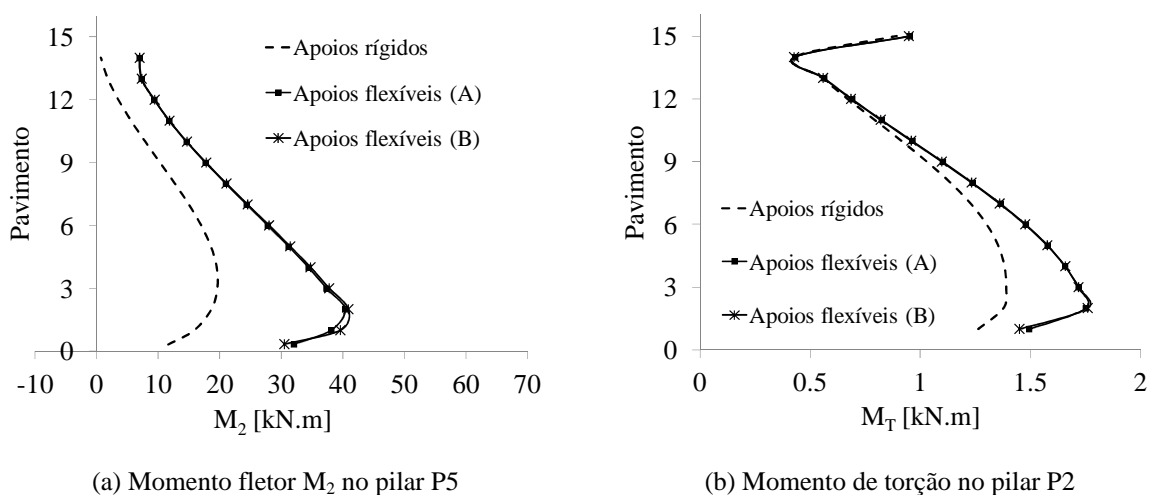


Figura 4.36 – Exemplo 6: Esforços internos no núcleo com ISE

Em ambos os casos de apoios flexíveis observa-se expressiva alteração destes esforços quando comparados ao modelo com apoios rígidos, principalmente para trechos localizados nos pavimentos inferiores. Para os pavimentos mais próximos ao topo as diferenças dos resultados em relação ao modelo de referência são menores.

Analisaram-se também os esforços internos de momento fletor no pilar P5 (para os nós inferiores de cada tramo) e de momento de torção no pilar P2 (para os nós superiores de cada tramo), sendo estes resultados apresentados na Figura 4.37.

(a) Momento fletor  $M_2$  no pilar P5

(b) Momento de torção no pilar P2

Figura 4.37 – Exemplo 6: Esforços internos em pilares com ISE

Observa-se que, diferente do núcleo rígido, a flexibilização dos apoios causou nestes pilares um acréscimo nas intensidades de momentos fletores e momento de torção quando comparados ao modelo com apoios rígidos, o que indica que houve uma redistribuição de esforços internos da estrutura. Estes resultados revelam também que a eficiência do núcleo depende da rigidez da sua fundação.

#### 4.7 Exemplo 7: Edifício com núcleos parcialmente fechados por lintéis

O exemplo a seguir é um edifício de concreto armado com 25 pavimentos, cada um com 2,80 metros de pé-direito, cujo sistema estrutural é formado por lajes, vigas, pilares e três núcleos rígidos distribuídos em planta conforme a Figura 4.38. Os núcleos rígidos são parcialmente fechados por lintéis ao nível de cada pavimento. Todos os pilares têm seção retangular de  $20 \times 120 \text{ cm}^2$  e são orientados conforme o desenho de planta baixa. As vigas perimetrais possuem seção retangular de  $15 \times 60 \text{ cm}^2$ , enquanto que as vigas internas (incluindo os lintéis dos núcleos) têm seção de  $15 \times 40 \text{ cm}^2$ . As lajes possuem espessura de 15



cm e as paredes dos núcleos têm espessura constante de 20 cm. Para este exemplo foram consideradas as excentricidades viga-pilar e laje-viga através da mudança da origem dos vetores generalizados nas seções transversais, conforme comentado no item 2.2.4. Admite-se para os materiais da superestrutura do edifício módulo de elasticidade  $E = 38 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ .

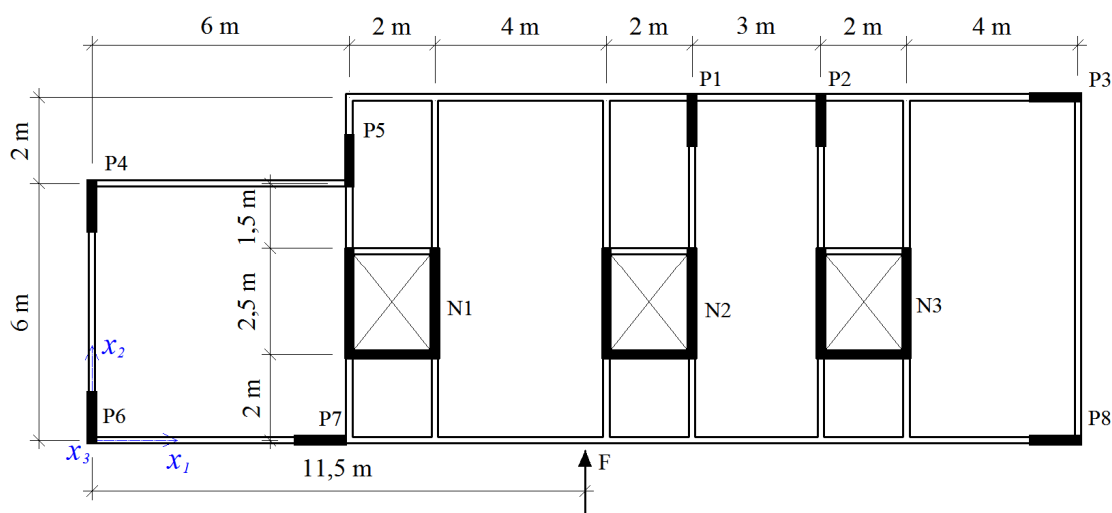


Figura 4.38 – Exemplo 7: Planta do pavimento tipo

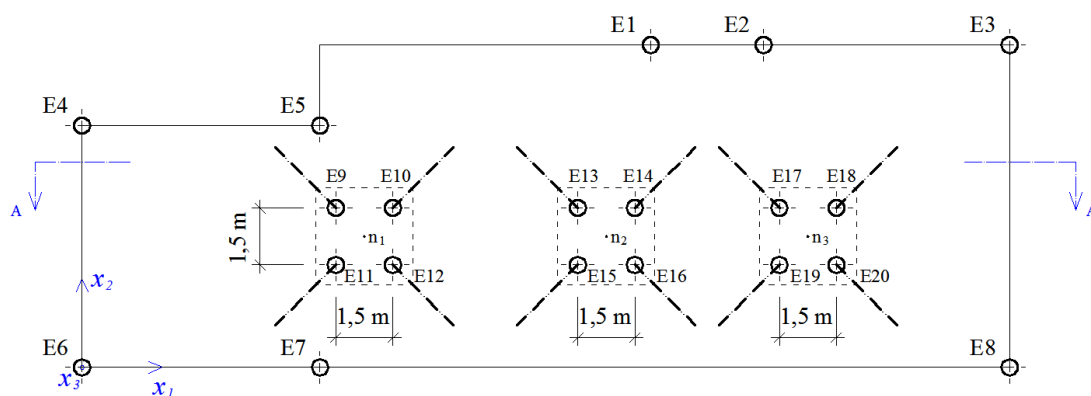
A malha adotada após uma análise de convergência é constituída de 12200 elementos de casca para as lajes e 3275 elementos de barras distribuídos entre pilares, vigas e núcleos. Optou-se, neste exemplo, por modelar os lintéis como parte da seção transversal dos núcleos, e não com elementos de barra, no intuito de demonstrar a possibilidade da consideração de seções variáveis para o elemento aqui proposto. Nesse sentido, cada tramo de cada elemento de núcleo rígido foi dividido em três elementos, sendo que dois destes possuem seção aberta e o terceiro elemento, mais superior, possui seção transversal fechada.

Foram analisadas duas situações para os apoios: uma primeira situação considera que todos os pilares e núcleos são engastados na base; em uma segunda análise foram aplicados coeficientes de rigidez para um sistema de fundação flexível composto por estacas e vigas de fundação. Optou-se por aplicar coeficientes de rigidez diretamente aos nós de barra tanto para os pilares quanto para os núcleos.

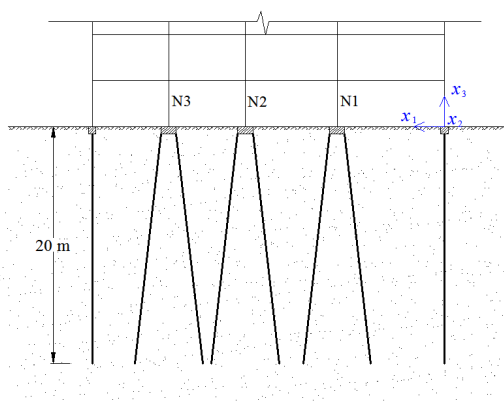
Para as fundações, considera-se que cada um dos pilares (P1 a P8) se apoia sobre uma estaca vertical com diâmetro de 35 cm e comprimento de 20 m. Para cada um dos núcleos considera-se como apoio um bloco de coroamento rígido que recebe quatro estacas inclinadas, cada estaca com diâmetro de 35 cm e topo ligado a um dos vértices do bloco, sendo que o comprimento de cada uma forma um ângulo de aproximadamente  $5^\circ$  em relação ao eixo

vertical e segue a direção (em planta) indicada na Figura 4.39(a) até a profundidade de 20 m. Para este exemplo, optou-se por modelar o bloco com elementos de barra cruzados entre si adotando para estes uma seção extremamente rígida. A Figura 4.39(b) ilustra um corte da fundação no qual se observa a disposição das estacas inclinadas abaixo dos núcleos rígidos.

As vigas de fundação ligam o topo das estacas verticais ao longo do perímetro e possuem seção retangular de 20 x 40 cm<sup>2</sup>. O material do solo possui módulo de elasticidade  $E_s = 0,15$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,35$ . Para as estacas e vigas de fundação admitem-se as mesmas propriedades materiais dos demais elementos estruturais da edificação. A malha discreta da fundação inclui 100 elementos de linha de carga no MEC, 100 elementos de barra para as estacas no MEF e mais 45 elementos finitos de barra para as vigas.



(a) Planta das fundações



(b) Corte A-A'

Figura 4.39 – Exemplo 7: Fundações

Admite-se o seguinte carregamento em cada pavimento: todas as lajes recebem carregamento uniforme de 10 kN/m<sup>2</sup>; todas as vigas recebem carga uniforme de 15 kN/m; considera-se uma força horizontal  $F$  aplicada na direção  $x_2$  no ponto indicado na Figura 4.38 que é equivalente à ação do vento. Os valores da força horizontal  $F$  foram calculados com base

em uma norma técnica de ações dos ventos no trabalho de Martins (2001), do qual este exemplo foi extraído. Estes valores são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Força horizontal em cada pavimento do exemplo 7

Pavimento	F [kN]	Pavimento	F [kN]
1	41.09	14	57.91
2	44.96	15	58.43
3	47.4	16	58.92
4	49.21	17	59.39
5	50.65	18	59.83
6	51.87	19	60.25
7	52.92	20	60.66
8	53.85	21	61.05
9	54.68	22	61.41
10	55.43	23	61.77
11	56.12	24	62.11
12	56.76	25	31.22
13	57.35	-	-

Os resultados de deslocamentos e esforços para as situações aqui estudadas foram comparados com resultados de uma análise linear desenvolvida no trabalho de Martins (2001), sendo que o modelo linear, aqui considerado como referência, adota a hipótese de diafragmas infinitamente rígidos para o comportamento de chapa das lajes e também considera as excentricidades entre os elementos estruturais.

A Figura 4.40 apresenta os resultados de deslocamentos horizontais na direção  $x_2$  e medidos no ponto de aplicação da força  $F$ .

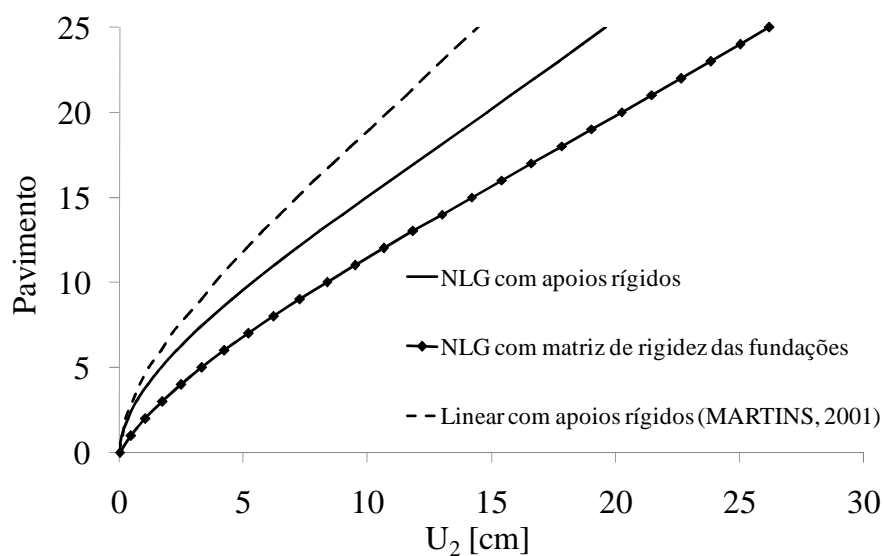


Figura 4.40 – Exemplo 7: Deslocamentos horizontais

Considerando-se primeiramente somente o caso de apoios rígidos, observa-se que o modelo NLG apresentou maiores deslocamentos do que o modelo linear, o que era esperado, sendo que o deslocamento máximo no topo do edifício sofreu um acréscimo de aproximadamente 36%. Ao se considerar a flexibilidade dos apoios no modelo NLG, os deslocamentos, para este caso, aumentam significativamente, e o deslocamento máximo no topo da edificação sofre novo acréscimo, aproximadamente de 34% em relação ao caso NLG com apoios rígidos. Ao serem comparados os resultados do modelo com NLG e ISE com os valores obtidos para a análise linear com apoios rígidos, verificou-se que o deslocamento de topo sofreu um acréscimo total de aproximadamente 81%.

Foram também analisados esforços internos em alguns dos elementos estruturais da edificação. A Figura 4.41 apresenta resultados da variação da força normal no pilar P1 para os casos estudados e para o modelo linear de referência.

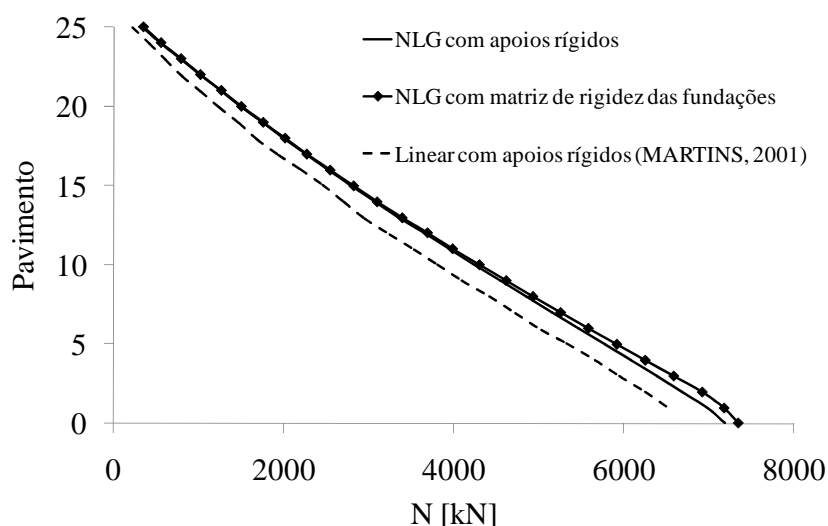


Figura 4.41 – Exemplo 7: Força normal no pilar P1

Comparando-se a força normal dos modelos com apoios rígidos nota-se que, ao considerar o comportamento NLG da estrutura, há um aumento da força normal ao longo de todo o comprimento do pilar. Ao se admitir no modelo NLG a flexibilização dos apoios, a intensidade deste esforço sofre um ligeiro aumento na base do edifício.

Analisaram-se também os momentos fletores  $M_1$  (em torno do eixo local que passa pelo centro de gravidade da seção na direção do eixo  $x_1$ ) ao longo da altura para o núcleo rígido N1 e para o pilar P8, estando os resultados apresentados, respectivamente, nas Figuras 4.42 e 4.43. No caso do núcleo N1, observa-se que a consideração da ISE em conjunto com a NLG resultou em uma redução das intensidades de momentos fletores em relação ao caso não

linear com apoios rígidos, tendo sido observadas maiores diferenças para os pavimentos mais próximos à base do edifício.

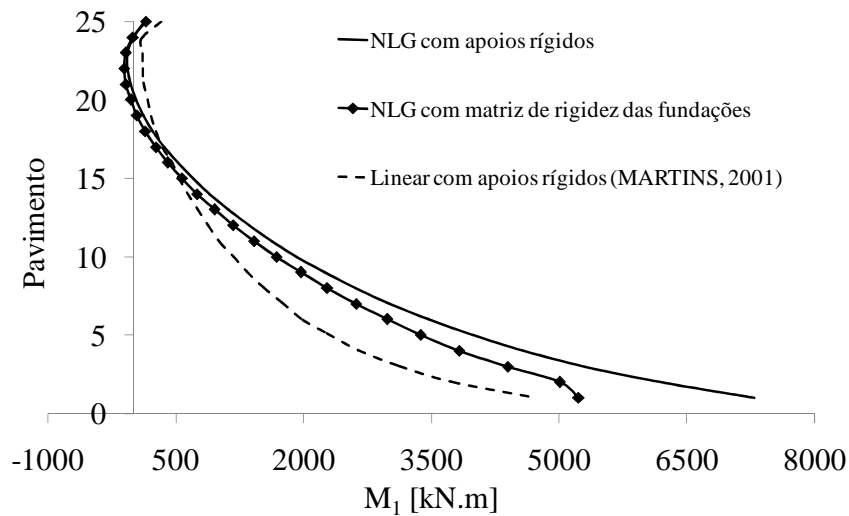


Figura 4.42 – Exemplo 7: Momento fletor no núcleo N1

Em relação ao pilar P8, observa-se significativa diferença na distribuição dos momentos fletores ao longo da altura quando a NLG é considerada juntamente com a rigidez das lajes. Nota-se também a influência da flexibilidade dos apoios que, neste caso, produziu um movimento da curva do diagrama com conseqüente alteração das intensidades de momentos fletores ao longo de toda a altura da edificação, sendo observadas maiores diferenças para os pavimentos mais próximos a base.

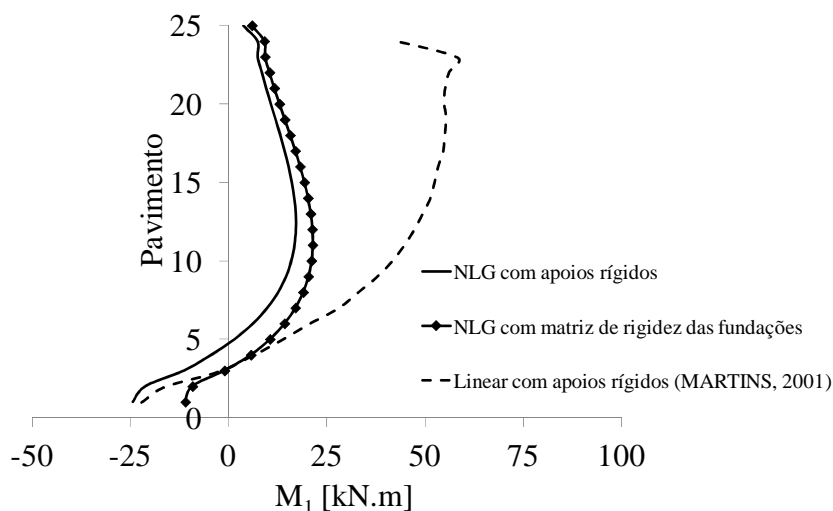


Figura 4.43 – Exemplo 7: Momento fletor no pilar P8

A análise dos resultados mostra que a consideração da flexibilidade do solo no modelo NLG pode causar mudanças significativas nos esforços internos dos elementos estruturais através de uma redistribuição de esforços. No caso do modelo aqui proposto, esta

redistribuição sofre ainda a influência da rigidez das lajes em conjunto com os núcleos empenados.

#### 4.8 Exemplo 8: Análise de um Arranha-céu

Este exemplo tem o intuito de demonstrar o potencial de aplicação do programa desenvolvido para análise de edifícios com elevado número de pavimentos que incluam núcleo rígido com seção transversal qualquer. O exemplo foi extraído da tese de Matias Junior (1997), sendo que no presente trabalho analisa-se o caso em que a edificação é solicitada por forças que causam flexo torção. Para esta situação, o referido autor apresentou somente resultados de uma análise linear, sendo estes resultados aqui comparados com a solução NLG.

O edifício possui cinco diferentes pavimentos tipo, todos com pé-direito de 3,0 metros. Os pavimentos tipo 1,3,4 e 5 se repetem 5 vezes cada, enquanto o pavimento tipo 2 se repete 35 vezes, totalizando 55 andares e 165 metros de altura. A Figura 4.44(a) apresenta a distribuição dos pavimentos tipo ao longo da altura, onde se observa que a diferença entre cada planta baixa consiste em uma redução da largura frontal da edificação de maneira que os pilares localizados nas faces laterais "morrem" enquanto os demais continuam.

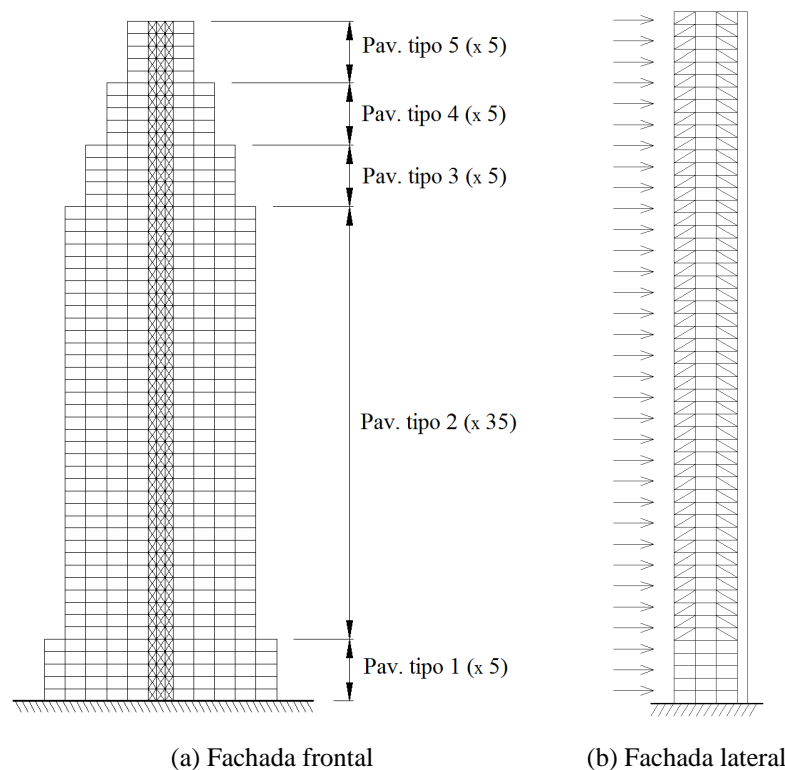


Figura 4.44 – Exemplo 8: Arranha-céu

A Figura 4.45 a seguir apresenta todos os pavimentos tipo em um único desenho, sendo a figura completa referente aos pavimentos de 1 a 5. São indicados os limites laterais dos pavimentos acima do 5º andar, sendo que os pilares localizados mais ao centro da planta e o núcleo estrutural percorrem toda a altura da edificação. A figura apresenta também as dimensões da seção transversal do núcleo, cuja espessura das paredes é constante e vale 10 cm.

A Figura 4.46 mostra alguns cortes nos quais se observam a disposição de barras de treliça na fachada frontal (cortes A-A' e B-B') e as diagonais de contraventamento lateral (corte C-C') presentes em todos os pavimentos tipo, exceto o primeiro. As dimensões dos elementos estruturais são dadas na Tabela 6.

Tabela 6 – Dimensões dos elementos estruturais do exemplo 8

Seções transversais que são iguais em todos os pavimentos tipo		Seções transversais que mudam em cada pavimento tipo		
P37, P38, P39 e P40	20 x 40 cm <sup>2</sup>	Pilares P1 a P35 e P42 a P46	Pav. tipo 1	20 x 40 cm <sup>2</sup>
P36 e P41	20 x 250 cm <sup>2</sup>		Pav. tipo 2	20 x 80 cm <sup>2</sup>
Todas as vigas	15 x 60 cm <sup>2</sup>		Pav. tipo 3	20 x 120 cm <sup>2</sup>
Barras de treliça (Figura 4.46)	10 x 10 cm <sup>2</sup>		Pav. tipo 4	20 x 160 cm <sup>2</sup>
Diagonais laterais (Exceto no pavimento tipo 1)	16 x 60 cm <sup>2</sup>		Pav. tipo 5	20 x 200 cm <sup>2</sup>

No trabalho de referência as lajes são consideradas como diafragmas infinitamente rígidos em seu comportamento de chapa. No presente trabalho foi adotada espessura de 30 cm para todas as lajes. Para o material admitem-se as seguintes propriedades elásticas:  $E = 20$  GPa e  $\nu = 0,25$ . As excentricidades dos elementos estruturais foram consideradas, sendo que os pilares localizados nas fachadas frontal e traseira mantêm fixa a face mais externa, enquanto que para os pilares P11 a P29 o ponto fixo é definido como o ponto central da seção.

Consideram-se as seguintes cargas verticais para todos os pavimentos tipo: forças concentradas de 80 kN atuando nos pontos 1 e 2 (topo de cada tramo das treliças verticais); forças concentradas de 90 kN atuando no topo de cada tramo dos pilares P37 a P40; forças concentradas de 135,55 kN no topo de cada tramo de todos os demais pilares e também do núcleo estrutural.

O carregamento horizontal atua na direção do eixo  $x_2$  e os valores foram calculados através de uma norma referente às ações do vento, tendo sido analisado o caso em que estas forças são aplicadas com uma excentricidade "e" medida na direção do eixo  $x_1$  e cujo valor corresponde a 30% da largura da fachada frontal em cada pavimento tipo. A Tabela 7

apresenta os valores das forças  $F_h$  em cada pavimento bem como a distância de aplicação em relação ao ponto mais central da fachada frontal.

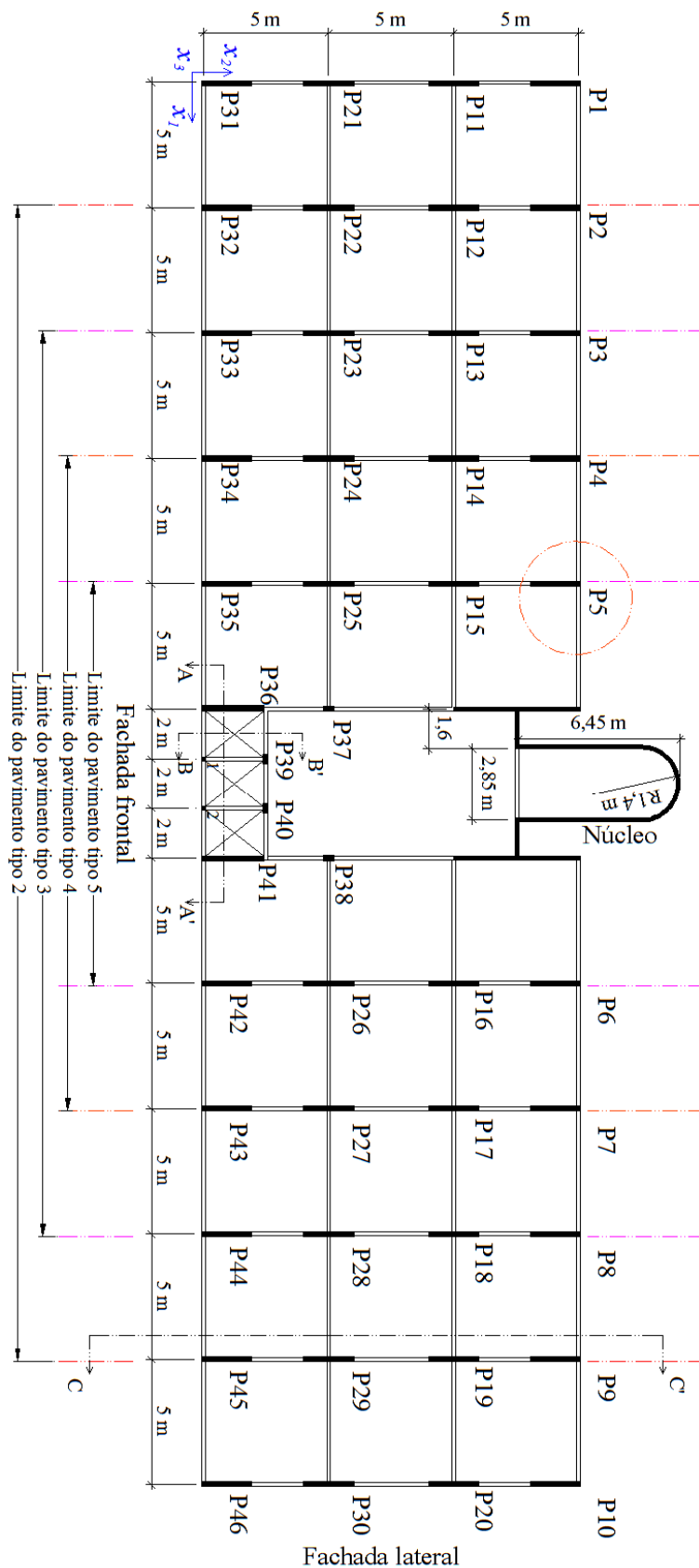


Figura 4.45 – Exemplo 8: Planta dos pavimentos tipo



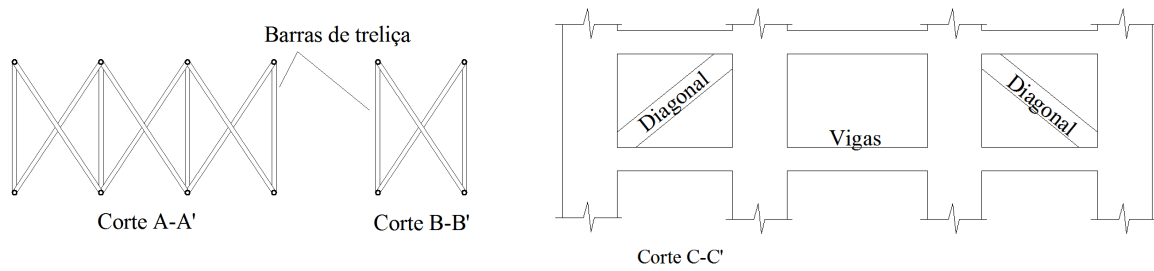


Figura 4.46 – Exemplo 8: Cortes da arquitetura

Tabela 7 – Forças horizontais em cada pavimento do exemplo 8

Andar	$F_h$ [kN]	$e$ [m]	Andar	$F_h$ [kN]	$e$ [m]
01	76.62	11.2	29	190.21	14.2
02	92.40	11.2	30	191.96	14.2
03	103.09	11.2	31	193.66	14.2
04	111.41	11.2	32	195.33	14.2
05	118.33	11.2	33	196.96	14.2
06	124.30	14.2	34	198.55	14.2
07	129.60	14.2	35	200.11	14.2
08	134.34	14.2	36	201.64	14.2
09	138.68	14.2	37	203.14	14.2
10	142.69	14.2	38	204.61	14.2
11	146.41	14.2	39	206.05	14.2
12	149.89	14.2	40	207.46	14.2
13	153.16	14.2	41	208.85	17.2
14	156.26	14.2	42	210.21	17.2
15	159.19	14.2	43	211.55	17.2
16	161.99	14.2	44	212.87	17.2
17	164.67	14.2	45	214.16	17.2
18	167.23	14.2	46	215.49	20.2
19	169.69	14.2	47	216.96	20.2
20	172.05	14.2	48	217.93	20.2
21	174.33	14.2	49	219.15	20.2
22	176.54	14.2	50	220.34	20.2
23	178.67	14.2	51	221.53	23.2
24	180.73	14.2	52	222.69	23.2
25	182.73	14.2	53	223.84	23.2
26	184.68	14.2	54	224.97	23.2
27	186.57	14.2	55	226.09	23.2
28	188.41	14.2	-	-	-

Considera-se que todos os apoios são rígidos, tendo sido medido o deslocamento horizontal na direção  $x_2$  e também a rotação em torno do eixo vertical para o pilar P5, indicado na Figura 4.45. Estes resultados são apresentados na Figura 4.47 juntamente com os resultados do modelo linear extraídos do trabalho de referência para este mesmo ponto.

A Figura 4.48 exibe uma vista do edifício deformado (amplificado 10 vezes) em perspectiva frontal com valores de deslocamentos horizontais na direção  $x_2$ . Observa-se nesta figura a rotação do edifício em torno do eixo vertical, além do deslocamento horizontal máximo da estrutura para o modelo com não linearidade geométrica que, neste caso, alcançou

valor de aproximadamente 1,10 metros. É possível notar ainda que a seção transversal do núcleo estrutural não é exibida, uma vez que a malha discreta inclui apenas a linha de eixo do elemento reticulado.

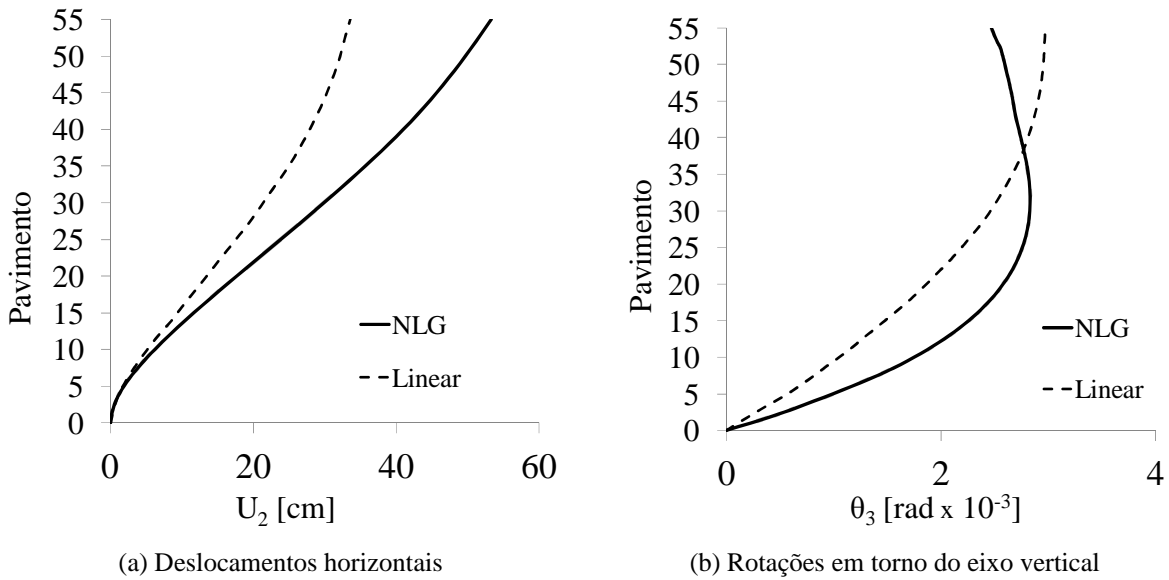


Figura 4.47 – Exemplo 8: Resultados ao longo do pilar P5

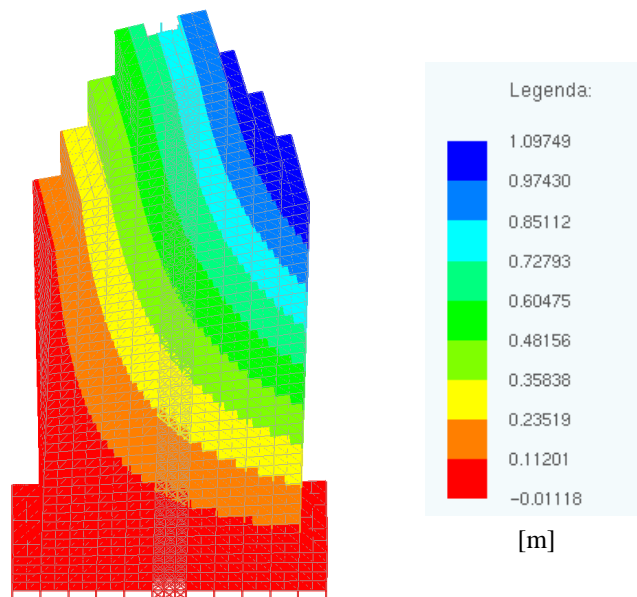


Figura 4.48 – Exemplo 8: Deslocamentos horizontais do edifício

Apresenta-se na Figura 4.49 a distribuição das tensões normais na base do núcleo, sendo possível perceber a variação das tensões de compressão e de tração nas paredes. A Figura 4.50 exhibe os diagramas de força normal e momento fletor ao longo da altura do núcleo estrutural, tendo como referência o centro de gravidade da seção transversal.

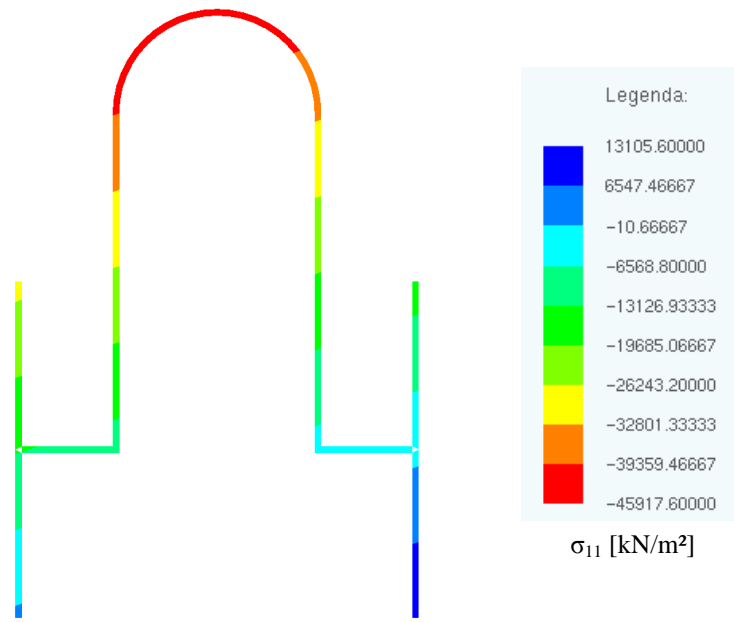


Figura 4.49 – Exemplo 8: Tensões normais na base do núcleo

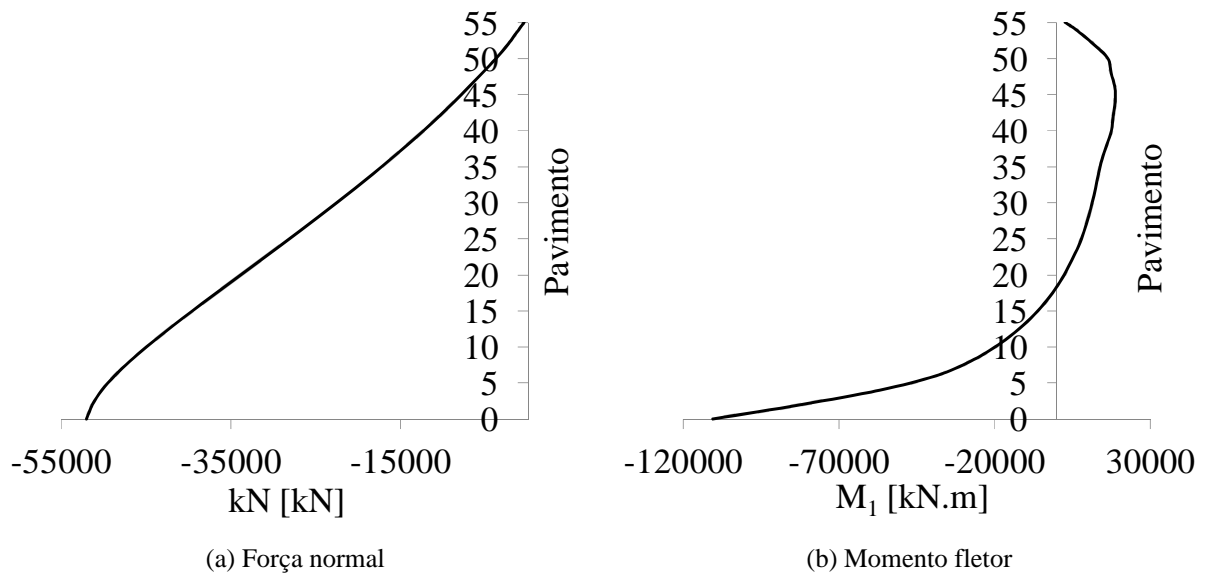


Figura 4.50 – Exemplo 8: Diagramas de esforços seccionais do núcleo



## 5. CONCLUSÕES

No presente trabalho é proposto um modelo para análise não linear geométrica de edifícios de múltiplos pavimentos considerando a interação entre todas as partes componentes do sistema estrutural e o solo. Foram desenvolvidas estratégias numéricas para o acoplamento entre os elementos finitos usados na modelagem do edifício e também para a inclusão da flexibilidade da fundação, sendo estas as principais contribuições desta tese.

A estratégia cinemática de acoplamento de topo entre a seção transversal do elemento finito NLG de barra com o elemento finito NLG de casca resultou em um elemento reticulado de núcleo estrutural que se mostrou eficiente e preciso para aplicações práticas de engenharia. O elemento proposto permite considerar adequadamente os efeitos da interação núcleo-pavimento, sendo possível avaliar a influência do empenamento dos núcleos no comportamento mecânico das lajes e a contribuição das lajes na rigidez global do edifício. Outra vantagem é a dispensa do uso de elementos de casca para a modelagem dos núcleos estruturais, o que resulta em significativa redução de graus de liberdade do problema. O elemento permite também que sejam traçados diagramas de esforços seccionais precisos para os núcleos, informações estas com as quais os engenheiros estão acostumados a trabalhar.

A técnica de penalização para as ligações entre elementos de barra não colineares no modelo do edifício também apresentou desempenho eficiente. A estratégia proposta para a definição do valor do termo penalizador se mostrou suficiente para os casos analisados.

Em relação à consideração dos efeitos da interação solo-estrutura, a metodologia baseada no Teorema da Reciprocidade permitiu a consideração da flexibilidade das fundações de maneira prática e eficiente. Os coeficientes de rigidez calculados para os diversos pontos de apoio da superestrutura se assemelham a um sistema de molas, porém, neste caso, consideram a influência mútua entre os elementos estruturais de fundação vizinhas e a continuidade do solo.

Quanto às matrizes de rigidez obtidas no programa de análise do sistema solo-fundação, a técnica adotada para "corrigir" a assimetria observada nos testes iniciais, apesar de bastante simples, permitiu que estas matrizes pudessem ser aplicadas diretamente no modelo do edifício. A grande diferença relativa entre os valores dos termos da diagonal principal e os termos fora da diagonal justifica o uso de tal metodologia simplificada, sendo esta assimetria atribuída a problemas numéricos.

A substituição da solução fundamenta de Kelvin pela solução fundamental de Mindlin na formulação do MEC permitiu que apenas as regiões carregadas do solo fossem consideradas na geração de uma malha discreta para as fundações, promovendo maior generalidade à técnica e facilitando a entrada de dados. O modelo numérico proposto para análise da infraestrutura permite a simulação de sistemas de fundação gerais, diretas ou profundas, incluindo estacas em qualquer direção.

No que se refere ao desempenho do programa, o controle do processo iterativo na análise não linear através de norma de parada em posição se mostrou suficiente, fornecendo resultados precisos com poucas iterações para todos os exemplos processados. Apesar da desconsideração de uma parcela da matriz de transferência da Hessiana dos elementos de casca para o núcleo, não foram verificadas alterações significativas na taxa e na velocidade de convergência quando da aplicação deste procedimento.

Todas as estratégias numéricas foram implementadas e testadas com sucesso, originando um programa computacional que permite a análise de edifícios completos. Os exemplos numéricos apresentados comprovam a versatilidade do programa e demonstram a eficiência e a praticidade de aplicação destas estratégias. Os resultados confirmaram a boa precisão da formulação aqui proposta quando comparada aos modelos de referência.

As análises estruturais dos diversos exemplos demonstraram a importância da consideração das interações tridimensionais no comportamento mecânico dos edifícios, principalmente quando a não linearidade geométrica e a flexibilidade dos apoios são também consideradas. A influência da rigidez das lajes no comportamento dos núcleos se mostrou relevante, especialmente em edifícios solicitados à torção. Esta influência ficou evidente nos testes realizados para diferentes espessuras de lajes, sendo que quanto mais rígida a laje, maior também a rigidez à torção dos edifícios. Verificou-se também que o empenamento das seções transversais dos núcleos interfere nas deformações das lajes fora de seu plano. Nesse sentido, sugere-se considerar a rigidez transversal das lajes na análise destas estruturas e recomenda-se maior atenção para os efeitos produzidos pelo empenamento do núcleo nos pavimentos.

Observou-se ainda que a flexibilidade do solo promove uma redistribuição dos esforços internos entre os elementos estruturais do edifício. Quando o sistema estrutural inclui núcleos rígidos, verificou-se que a eficiência destes elementos depende da rigidez de sua fundação, demonstrando assim a importância da consideração dos efeitos da interação solo-estrutura pra estes casos.

Apesar do foco da aplicação para edifícios de concreto armado, a formulação é geral e pode ser aplicada para análise de edifícios com outros materiais. Recomenda-se maiores cuidados com relação à definição de vinculações semirrígidas em sistemas estruturais específicos, como nos edifícios de aço e nas estruturas mistas aço-concreto. Graças à versatilidade dos elementos desenvolvidos que oferecem recursos como a possibilidade de definir geometria inicial curva e seções transversais com qualquer forma geométrica, o programa pode ser aplicado para análise de barras de paredes finas com diafragmas em geral, incluindo problemas de engenharia mecânica e aeronáutica, por exemplo. O uso de elementos discretos para as seções transversais pode servir ainda para a consideração de materiais heterogêneos compósitos com a simples adoção de diferentes propriedades elásticas nos elementos planos da seção das barras, definindo-se assim fibras heterogêneas.

Por fim, são sugeridos os seguintes desenvolvimentos para trabalhos futuros:

- 1) Desenvolvimento e implementação de modos de instabilidade locais adicionais para o elemento de barra, permitindo assim a mudança de forma de seções transversais;
- 2) Adoção de modelos constitutivos mais gerais para a consideração da não linearidade física do material;
- 3) Consideração de estratificações do solo de fundação;
- 4) Consideração de não linearidades de contato nas fundações, como o escorregamento relativo entre o solo e as estacas;
- 5) Desenvolvimento da mesma formulação para análise de problemas dinâmicos.





## 6.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS<sup>1</sup>

ALMEIDA, R.; PINHEIRO, R.J.B.; SOARES, J.M.D.; NIENOV, F.A. **Análise numérica de estacas escavadas utilizando-se o Método dos Elementos Finitos**. Engenharia Estudo e Pesquisa. Santa Maria, v.10, n. 1, p. 28-38, 2010.

ANSYS. **Realease 10: Basic Analysis Procedures**. SAS IP Inc.® Publications, 2010.

ANTMAN, S.S. **Ordinary differential equations of one-dimensional elasticity: foundations of the theories of nonlinearly elastic rods and shells**. Arch Rational Mech. Anal. v.61, p.307–351, 1976.

AOKI, N.; LOPES, F.R. **Estimating stress and settlements due to deep foundation**. In: 5th Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Buenos Aires. Proceedings, Tomo I, p. 377-386, 1975.

AOKI, N. **Modelo simples de transferência de carga de estaca vertical sujeita a carga axial de compressão**. In: Ciclo de palestras sobre Engenharia de Fundações, ABMS/NR, Recife. Anais, 1987.

ASSAN, A.E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – procedimentos**. Rio de Janeiro, 2014.

BADIE, S.S.; SALMON, D.C.; BESHARA, A.W. **Analysis of shear wall structures on elastic foundations**. Compt Struct, v.65, n.2, p.213-224, 1997.

BARATA, F.E. **Recalques de edifícios sobre fundações diretas em terrenos de compressibilidade rápida e com consideração da rigidez da estrutura**. Tese de concurso para Professor Titular do Depart. de Construção Civil do Setor de Geomecânica da EEUFRJ. Rio de Janeiro, 1986.

BARBIRATO, J.C.C. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. **Non-linear GBT formulation for open-section thin-walled members with arbitrary support conditions**. Compt Struct, 89(1), p.1906-1919, 2011.

BATHE, K. **Finite element procedures**. London [etc.]: Prentice-Hall International, 1996.

BENNETTS, I.D.; KOWALCZYK, R.; SINN, R.; KILMISTER, M. **Structural systems for tall buildings**. Council on tall buildings and urban habitat, New York: McGraw-Hill, 1995.

BISCHOFF, M.; RAMM, E. **On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation**. Int J Solids Struct. 37(46-47), 6933–6960, 2000.

BONET, J.; WOOD, R.D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. **Finite element analysis of air supported membrane structures**. Comput Methods Appl Mech Eng. 190, 2000. 579-595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.

---

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

BOTTURA, H.M. **Estudo sobre o efeito da deformabilidade das lajes na distribuição dos esforços horizontais nos painéis de contraventamento**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

BREBBIA, C.; FERRANTE, A. **Computational methods for the solution of engineering problems**. London: Pentech, 1975.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. Computational Mechanics Publications, London, 1992.

BUECHTER, N.; RAMM, E. **Shell theory versus degeneration: a comparison in large rotation finite element analysis**. Int J Numer Meth Engrg., 34, p.39-59, 1992.

CAMPELLO, E.M.B.; PIMENTA, P.M.; WRIGGERS, P. **A triangular finite shell element based on a fully non-linear shell formulation**. Computational Mechanics, v.31, p.505-518, 2003.

CAMPELLO, E.M.B.; LAGO, L.B. **Effect of higher order constitutive terms on the elastic buckling of thin-walled rods**. Thin-Walled Structures, v.77, p.8-16, 2014.

CARMO, R.M.S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

CARVALHO, C; HERDY, T. **Verticalização altera paisagens de cidades do Norte e do Nordeste**. Jornal O Globo, São Paulo, 20 Abr 2013. Disponível em: <<http://oglobo.globo.com/brasil>>. Acesso em: 01 Jun. 2013.

CARVALHO, F.A.C. **Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.

CHENG, A.H.D.; CHENG, D.T. **Heritage and early history of the boundary element method**. Engineering Analysis with Boundary Elements v.29, p.268–302, 2005.

CODA, H.B. **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

CODA, H.B. **Contribuição à Análise Dinâmica Transiente de Meios Contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno**. Tese (Livre Docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

CODA, H.B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. In: XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, São Paulo, 2003.

CODA, H.B.; GRECO, M. **A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v.193, p.3541-3557, 2004.

CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. **An alternative positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements**. Computational Mechanics, 40(1), p.185-200, 2007.

CODA, H.B. **Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais: Uma Abordagem Energética Baseada no MEF** – Notas de aula. São Carlos, 2008.

- CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. **A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells**. Latin American Journal of Solids and Structures, p. 205-223, 2008.
- CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. **Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamic of shells**. Mathematical Problems in Engineering, Article ID 575131(2009),32p., 2009.
- CODA, H.B. **A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames**. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 198, p.3712-3722, 2009.
- CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. **Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section**. Applied Mathematical Modelling. 34, p.1107-1137, 2010.
- CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. **A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames**. Finite Elements in Analysis and Design, 47(4), p.319-333, 2011.
- COLARES, G.M. **Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- CORELHANO, A.G. B.; CORRÊA, M.R. da S. **Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado**. Caderno de Engenharia de Estruturas, São Carlos. v.12 n.56 p.1-9, 2010.
- CORRÊA, M.R.S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1991.
- CORRÊA, M.R.S.; VENTURINI, W.S. **Trechos rígidos em estruturas reticuladas: análise linear e não linear geométrica**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.12, n.57, p.57-66, 2010.
- COSTA, J.L. **Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1982.
- CRISFIELD, M.A. **A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional beam-elements**. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng v.81, p.131-150, 1990.
- CRISFIELD, M.A. **Non-Linear finite element analysis of solids and structures**. v.1. England, John Wiley & Sons, 1991.
- CRISFIELD, M.A.; JELENIC, G. **Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation**. Proc R Soc Lond A. 455, p.1125-1147, 1999.
- CTBUH. **The skyscraper center: The Global Tall Building Database of the CTBUH**. Concil on Tall Buildings and Urban Habitat. Disponível em: <<http://skyscrapercenter.com>>. Acesso em: 01 de jun. 2014.
- DAVIES, J.M.; LEACH, P. **1st-order generalized beam theory**, J. Construct. Steel Res. 31(2-3), p.187-220, 1994.
- FERRO, N.C.P. **Uma combinação MEC/MEF para análise de fundações enrijecidas por estacas**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A. C. **Practical assessment of second order effects in tall buildings**. Colloquium on the CEB-FIP MC 90, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.

GANAINY, H.El; NAGGAR, M.H.El. **Efficient 3D nonlinear Winkler model for shallow foundations**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, v.29, Issue 8, p.1236-1248, 2009.

GOMES, T.C.M. **Estudo comparativo de processos contínuos para análise de núcleos estruturais submetidos à torção**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

GRECO, M.; CODA, H.B. **Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis**. Journal of Sound and Vibration 290, p.1141-1174, 2006.

GRECO, M. ; GESUALDO, F. ; VENTURINI, W. ; CODA, H.B. **Nonlinear positional formulation for space truss analysis**. Finite Elem Anal Des, EUA, v.42, n.12, p.1079-1086, 2006.

GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. **Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour**. J. Numer. Methods Engrg. 48 (12), p.1675-1702, 2000.

HARTMANN, F. **Computation the C-matrix in non-smooth boundary points**. In: BREBBIA, C.A., ed. New developments in boundary element methods. Southampton, Computational Mechanics Centre publication, 1980.

HEIDEBRECHT, A.C.; SWIFT, R.D. **Analysis of asymmetrical coupled shear walls**. Journal of the Structural Division, p.1407-1422, May, 1971.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R.L. **On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations**. Comput Methods Appl Mech Engrg. 191, p.5159-5176, 2002.

IWAMOTO, R. K. **Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

LAVALL, A.C.C. **Uma formulação consistente para análise não-linear de pórticos planos de aço considerando imperfeições iniciais e tensões residuais**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

LLERENA, C.A.E. **Análise de edifícios altos submetidos a terremotos pela técnica do meio contínuo**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

MACIEL, D.N.; CODA, H.B. **Positional description for nonlinear 2-D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner kinematics**. Third MIT conference on com. Fluid and sol Mech., Cambridge, Massachussets, USA, 2005.

MARTINS, C.H. **Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

MATIAS JUNIOR, I.G. **Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

- MEDEIROS, D.S.; CAMPOS FILHO, A.; CONSOLI, N.C.; PACHECO, A.R. **Estudo Tridimensional da Interação Solo-Estrutura pelo Método dos Elementos Finitos**. Anais do 51º Congresso Brasileiro do Concreto, Curitiba, 2009.
- MINDLIN, R.D. **Force at a point in the interior of a semi-infinite solid**. J. Physics, 7:195-202, 1936.
- MONCAYO, W.J.Z. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- MORI, D.D. **Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.
- NUNES, V.Q.G. **Análise estrutural de edifícios de paredes de concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- PACCOLA, R.R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional visco elástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- PACCOLA, R.R.; CODA, H.B. **Acadview: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D**. Versão 1.0. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- PASCON, J.P.; CODA, H.B. **Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements**. Finite Elements in Analysis and Design, v.76, p.21-38, 2013.
- PEREIRA, G. **Contribuições à análise de estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- PEREIRA, A.C. de O. **Estudo da influência da modelagem estrutural do núcleo nos painéis de contraventamento de edifícios altos**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- PIMENTA, P.M. **On a geometrically-exact finite-strain shell model**. Proceedings of the 3rd Pan-American Congress on Applied Mechanics, III (PACAM), São Paulo, 1993.
- PIMENTA, P.M. **Geometrically exact analysis of initially curved rods**. Conference Information: 3rd International Conference in Computational Structures Technology. Advances in Computational Techniques for Structural Engineering. Budapest, Hungary. p.99-108, 1996.
- PIMENTA, P.M.; YOJO, T. **Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames with Consideration of Torsion Warping**. Proceedings of the XIV Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, IPT, São Paulo, 21-30, 1993.
- PIMENTA, P.M.; CAMPELLO, E.M.B.; WRIGGERS, P. **A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element**. Computational Mechanics. v.34, p.181-193, 2004.
- PINTO, F.O.R. **Análise sísmica de estruturas de edifícios pela técnica do meio contínuo**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2011.

- PINTO, R.S., CORRÊA, M.R.S.; RAMALHO, M.A. **Utilização do parâmetro  $\gamma_z$  para estimar esforços de segunda ordem em edifícios de concreto armado**. Revista IBRACON de Estruturas, v.1, n.2, 2005.
- POULOS, H.G. **Behaviour of laterally loaded piles: 2 - pile groups**. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 97(5):733-751, 1971.
- POULOS, H.G.; DAVIES, H.G. **The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers**. Geotechnique, 18:351-371, 1968.
- PRADO, J.F.M. de A. **Estruturas de edifícios em concreto armado submetidas a ações de construção**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- PRZEMIENIECKI, J. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, 1985.
- RAMALHO, M.A. **Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.
- RAMOS, A.P.F. **Análise da interação estaca-solo-superestrutura com o acoplamento MEC-MEF**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- REIS, M.C.J.; CODA, H.B. **Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM**. Latin American J of Solids and Structures, 11(7), 1163-1189, 2014.
- REISSER, E. **On one-dimensional finite strain theory: the plan problem**. J Appl Math Phys., 23, 795-804, 1972.
- RIGOBELLO, R.; CODA, H.B.; MUNAIAR NETO, J. **A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures**. Finite Elem Anal Des., v.91, p.68-83, 2014.
- RIBEIRO, D.B. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- ROCHA, A.B. **Análise de núcleos estruturais de edifícios sujeitos a torção**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1985.
- RUTENBERG, A.V.; TSO, W.K. **Torsional Analysis of perforated core structures**. Journal of the Structural Division, ASCE, v.101, No. ST3, p. 539-550, March, 1975.
- SAMPAIO, M.S.M.; PACCOLA, R.R.; CODA, H. B. **Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis**. Finite Elements in Analysis and Design, 66, p.12-25, 2013.
- SANCHEZ, J.A.G. **Uma formulação em elementos finitos para a análise dinâmica e estática não linear de risers incluindo o contato com o leito do mar**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- SANTOS, A.P.F. **Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

- SCARLAT, A.S. **Effect of soil deformability on rigidity: related aspects of multistory buildings analysis**. ACI Struct. J., Detroit, v. 90, n. 2, p.156-162, 1993.
- SCHARDT, R. **Verallgemeinerte Technische Biegetheorie [Generalised Beam Theory]**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989.
- SCHULZ, M.; FILIPPOU, F.C. **Generalized warping torsion formulation**. J Eng Mech. ASCE 124(3), p.339–347, 1998.
- SERRA, J.L.F. de A. **Contribuição ao estudo de núcleos resistentes de concreto armado**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.
- SILVA, R.M. **Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes considerando o efeito P- $\Delta$** . Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.
- SILVA, W.Q. **Análise não linear geométrica de estruturas bidimensionais acopladas ao solo**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- SILVA, W.Q.; CODA, H.B. **Numerical combination for nonlinear analysis of structures coupled to layered soils**. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 9, p. 235-257, 2012.
- SILVESTRE, N.; CAMOTIM, D. **Second-order Generalized Beam Theory for arbitrary orthotropic materials**. Thin-Walled Structures, vol. 40, No. 9, pp. 791-820, 2002.
- SMITH, B.S.; TARANATH, B.S. **The analysis of tall core-supported structures subject to torsion**. Proc. Institution of Civil Engineers, v.53, p.173-87, 1972.
- SMITH, B.S; GIRGIS, A.M. **Simple analogous frames for shear wall analysis**. Journal of Structural Engineering v.110. No. 11, p. 2655-2666, 1984.
- SMITH, B.S.; COULL, A. **Tall Building Structures: Analysis and Design**. A Wiley-Interscience Publication, 1991.
- SPCORPORATE. **Empreendimentos: Centro Empresarial Nações Unidas - Torre IV**. Disponível em: <<http://www.spcorporate.com.br/empreendimentos/sao-paulo/berrini/>>. Acesso em: 01 jun. 2012.
- SIMO, J.C. **A finite-strain beam formulation: The three-dimensional dynamic problem. Part I**, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg. 49, p.55-70, 1985.
- SIMO, J.C.; VU-QUOC, L. **Three-dimensional finite strain model-Part II: computational aspects**. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 38, p.79-116, 1986.
- SIMO, J.C. **The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: intrinsic definition and geometric interpretation**. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 96, p.183–200, 1992.
- SORIANO, H. M. **Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas**. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SOUZA JUNIOR, E. **Análise da interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

STAMATO, M.C. **Associação contínua de painéis de contraventamento**. Publ. da Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1972.

TAMAKI, L. **Obras: Três faces**. Revista Técnica, ed. 187. São Paulo, Out. 2012. Disponível em: <<http://techne.pini.com.br/engenharia-civil/187/artigo287995-1.aspx>>. Acesso em: 01 dez. 2012.

TARANATH, B.S. **Torsional behavior of open section shear wall structures**. Tese (Doutorado). University of Southampton, Southampton, England, 1968.

TARANATH, B.S. **Torsion analysis of braced multi-storey cores**. The Structural Engineer, v.53, p.285-288, 1975.

TARANATH, B.S. **Structural Analysis and Design of Tall Buildings**. 1st ed. New York: McGraw-Hill, 1988.

TARANATH, B.S. **Reinforced concrete design of tall buildings**. 1st ed. Boca Raton: CRC Press, 2010.

TESTONI, E. **Análise estrutural de edifícios de paredes de concreto por meio de pórtico tridimensional sobre apoios elásticos**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1970.

TORRES, I.F.R. **Efeito da deformação por cortante no cálculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

VASCONCELOS, A.C. **Em que casos não se deve aplicar o processo simplificado do  $\gamma_z$  para determinação dos efeitos de 2ª Ordem?**. Artigo Biblioteca Digital TQS, São Paulo, 2000.

VENTURINI, W.S. **Alternative formulations of the boundary element method for potential and elastic problems**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 9:203-207, 1992.

VLASOV, V.Z. **Thin-walled elastic beams**. National Science foundation, Washington DC, 493p, 1961.

WINKLER, E. **Die lehre von der Elastizität und Festigkeit**. Domicus. Prage, 1867.

WUTZOW, W.W.; PAIVA, J.B. **Análise de chapas com enrijecedores via MEC com condensação de variáveis**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.10, n.44, p.1-18, 2008.

YAGUI, T. **Estruturas constituídas de paredes delgadas com diafragmas transversais**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1971.

YAGUI, T. **Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço**. Tese (Livre-docência). Departamento de Construção Civil, Faculdade de Engenharia de Limeira, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1978.

ZIENKIEWICZ, O.C.; PAREKH, C.J.; TEPLY, B. **Three-dimensional analysis of buildings composed of floor and wall panels**. Proc Instn Civ Engrs., v.2, p.316-332, 1971.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **The finite element method**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.



## APÊNDICE A – O MODO DE EMPENAMENTO UNITÁRIO

Descreve-se a seguir a formulação para a determinação do modo de empenamento unitário aplicado no elemento finito de barra tridimensional não linear geométrico (NLG). A descrição é feita conforme o trabalho de Santos (2008), sendo também apresentados os procedimentos para o cálculo da posição do centro de cisalhamento da seção transversal com forma qualquer. Os desenvolvimentos são baseados na teoria de torção livre, também conhecida como teoria de torção de Saint-Venant.

Segundo esta teoria, admitem-se as seguintes hipóteses para o caso de uma barra submetida à torção:

- 1) As dimensões da seção transversal da barra não variam ao longo do comprimento;
- 2) O momento de torção é constante ao longo do comprimento;
- 3) Não há impedimento a deslocamentos longitudinais, ou seja, o empenamento é livre.

Supõem-se então uma barra prismática de comprimento  $L$  submetida a momento de torção constante  $M_T$ , como mostra a Figura A.1(a). Adota-se um sistema de eixos cartesianos  $(x_1, x_2, x_3)$  sendo o eixo  $x_3$  medido na direção longitudinal da barra e os demais paralelos ao plano da seção transversal.

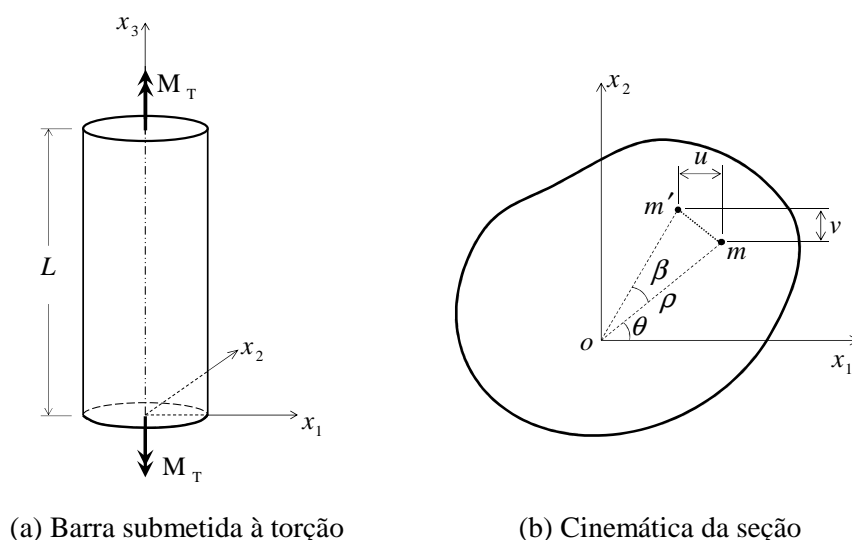


Figura A.1 – Problema de torção livre

Na Figura A.1(b) é ilustrada a cinemática de um ponto  $m$  qualquer sobre a seção transversal que muda para a posição  $m'$  com a ocorrência do giro de uma linha  $\overline{om} = \rho$  em torno da origem "o" à medida que a barra sofre ação do momento de torção. O ângulo medido

entre  $\overline{om}$  e  $\overline{om'}$  tem valor  $\beta$ , e, se este ângulo for muito pequeno, o arco formado pelo alinhamento  $\overline{mm'}$  será muito próximo de uma linha reta normal à  $\rho$ . Assim é possível escrever que os deslocamentos transversais  $u$  e  $v$  são dados, respectivamente por:

$$u = -(\rho\beta)\text{sen}(\theta) = -\beta x_2 \quad (\text{A.1})$$

$$v = (\rho\beta)\text{cos}(\theta) = \beta x_1 \quad (\text{A.2})$$

É importante comentar que a consideração de pequenas rotações nesta etapa não implica em simplificação da cinemática para o elemento finito de barra NLG. Afinal, o modo de deformação da seção transversal aqui calculado serve como função enriquecedora apenas para permitir à barra a mobilidade necessária para a consideração do grau de liberdade de empenamento.

Além dos deslocamentos  $u$  e  $v$ , considera-se a ocorrência do deslocamento na direção longitudinal  $w$  referente ao empenamento de cada ponto da seção. Saint-Venant observou que, considerando as hipóteses anteriormente descritas, este deslocamento independe da coordenada  $x_3$ , ou seja, para um ponto  $(x_1, x_2)$  qualquer sobre a seção transversal o deslocamento  $w$  será o mesmo em todas as seções ao longo do comprimento.

Fixando-se a seção transversal de origem (onde  $x_3 = 0$ ) e admitindo que nesta seção os deslocamentos transversais  $u$  e  $v$  devido à torção são nulos, tem-se para outra seção transversal distante da origem o ângulo  $\beta$  dado por:

$$\beta = \alpha x_3 \quad (\text{A.3})$$

Nessa última expressão  $\alpha$  é definido como o ângulo de rotação da seção por unidade de comprimento da barra. Logo, a cinemática de torção é descrita pelas seguintes expressões:

$$u = -\alpha x_2 x_3 \quad (\text{A.4})$$

$$v = \alpha x_1 x_3 \quad (\text{A.5})$$

$$w = w(x_1, x_2) \quad (\text{A.6})$$

Se o ângulo  $\alpha$  for relacionado ao deslocamento longitudinal para um trecho de comprimento unitário, pode-se dizer que esta grandeza representa a intensidade de empenamento ou o modo de empenamento unitário da barra. Para estabelecer esta relação, considera-se a equação de equilíbrio do problema de torção, que envolve apenas tensões cisalhantes e tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

ou, em notação de índice:

$$\tau_{3i,i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.8})$$

Aplica-se sobre a equação (A.8) a técnica dos resíduos ponderados adotando uma função ponderadora  $\delta w$ , de maneira que:

$$\delta w \cdot \tau_{3i,i} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Realiza-se a integral da equação (A.9) no domínio  $\Omega$  da barra e aplica-se o Teorema da Divergência, obtendo como resultado a seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \delta w \cdot \tau_{3i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta w \cdot \tau_{3i} n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w_{,i} \cdot \tau_{3i} d\Omega = 0 \quad (\text{A.10})$$

Uma vez que a função ponderadora é arbitrária, portanto pode assumir um valor  $\delta w$  constante e, sabendo que pelo problema de valor de contorno o vetor  $\tau$  é perpendicular ao vetor normal  $n$  no contorno  $\Gamma$ , a integral no contorno da equação (A.10) resulta em valor nulo, o que permite escrever:

$$\int_{\Omega} \delta w_{,i} \cdot \tau_{3i} d\Omega = 0 \quad (\text{A.11})$$

Da Teoria da Elasticidade sabe-se que as relações entre deformações e deslocamentos são dadas por:

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = \frac{dw}{dx_1} + \frac{du}{dx_3} = \frac{dw}{dx_1} - \alpha x_2 \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{32} = \gamma_{23} = \frac{dw}{dx_2} + \frac{dv}{dx_3} = \frac{dw}{dx_2} + \alpha x_1 \quad (\text{A.13})$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0 \quad (\text{A.14})$$

O material é considerado com comportamento elástico linear. Assim, as componentes de tensão são calculadas pela Lei de Hooke:

$$\tau_{31} = \tau_{13} = G \gamma_{13} = G \left( \frac{dw}{dx_1} - \alpha x_2 \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\tau_{32} = \tau_{23} = G \gamma_{23} = G \left( \frac{dw}{dx_2} + \alpha x_1 \right) \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_{12} = \tau_{21} = 0 \quad (\text{A.17})$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material.

Substituindo-se (A.15) e (A.16) em (A.11), tem-se que:

$$\int_{\Omega} \left[ \delta w_{,1} G (w_{,1} - \alpha x_2) + \delta w_{,2} G (w_{,2} + \alpha x_1) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{A.18})$$

que pode ser reorganizada na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} G(\delta w_{,1} \cdot w_{,1} + \delta w_{,2} \cdot w_{,2}) d\Omega - \alpha \int_{\Omega} G(\delta w_{,1} x_2 - \delta w_{,2} x_1) d\Omega = 0 \quad (\text{A.19})$$

Ao se resolver a equação (A.19) encontram-se os valores de empenamento ao longo da seção da barra. Sua solução numérica é feita a partir de um espaço adimensional auxiliar ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$ ) e escrevem-se aproximações para o empenamento  $w$  e para o ponderador  $\delta w$  com uso de funções de forma polinomiais, como:

$$w = \varphi_{\ell}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) W^{\ell} \quad (\text{A.20})$$

$$\delta w = \varphi_{\ell}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta W^{\ell} \quad (\text{A.21})$$

sendo  $\varphi_{\ell}$  o valor das funções de forma para o nó  $\ell$ ,  $W^{\ell}$  e  $\delta W^{\ell}$  valores nodais dos parâmetros considerados. No presente trabalho consideram-se aproximações através de elementos planos triangulares de ordem cúbica.

Substituindo-se estas aproximações em (A.19) obtém-se a equação de equilíbrio de torção em sua forma fraca:

$$\int_A G(\varphi_{,1}^{\ell} \varphi_{,1}^{\gamma} + \varphi_{,2}^{\ell} \varphi_{,2}^{\gamma}) dA W^{\gamma} = \alpha \int_A G(\varphi_{,1}^{\ell} x_2 - \varphi_{,2}^{\ell} x_1) dA \quad (\text{A.22})$$

sendo os índices  $\ell$  e  $\gamma$  referentes aos nós de elementos finitos planos sobre a seção transversal e  $A$  é a área da seção.

A equação (A.22) pode ser escrita na forma de um sistema algébrico:

$$KW = \alpha F \quad (\text{A.23})$$

de maneira que:

$$K = \int_A G(\varphi_{,1}^{\ell} \varphi_{,1}^{\gamma} + \varphi_{,2}^{\ell} \varphi_{,2}^{\gamma}) dA \quad (\text{A.24})$$

$$F = \int_A G(\varphi_{,1}^{\ell} x_2 - \varphi_{,2}^{\ell} x_1) dA \quad (\text{A.25})$$

Admitindo-se que  $\alpha = I$ , calculam-se valores de deslocamentos longitudinais referentes a um giro unitário de torção. Estes deslocamentos correspondem ao modo de empenamento unitário da seção transversal.

Da forma como foi descrita, a metodologia fornece a solução do problema de torção livre tendo como referência a origem "o" da seção transversal. Para o caso de barras com seção de paredes finas esta solução deve ser obtida para uma origem posicionada no centro de cisalhamento (ou centro de torção) da seção, caso contrário os resultados sofrem interferência de um movimento de corpo rígido (SANTOS, 2008).

Estando a origem localizada no centro de torção da seção transversal, isto é, passando pelos pontos  $(x_1^{cc}, x_2^{cc})$ , a cinemática de empenamento dada em (A.6) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$w = w \left[ (x_1 - x_1^{cc}), (x_2 - x_2^{cc}) \right] \quad (\text{A.26})$$

Refazendo-se todos os procedimentos anteriores para esta nova cinemática um sistema algébrico semelhante ao da expressão (A.23) é obtido, porém agora escrito em relação a nova origem e, conseqüentemente, incluindo novas parcelas:

$$KW = \alpha F + \alpha x_2^{cc} F_1 + \alpha x_1^{cc} F_2 \quad (\text{A.27})$$

sendo que:

$$F_1 = - \int_A G \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_1} dA \quad (\text{A.28})$$

$$F_2 = - \int_A G \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_2} dA \quad (\text{A.29})$$

O empenamento total da barra, neste caso, pode ser escrito como:

$$W = \alpha (W_0 + x_1^{cc} W_2 + x_2^{cc} W_1) \quad (\text{A.30})$$

de tal maneira que:

$$W_0 = K^{-1} F \quad (\text{A.31})$$

$$W_1 = K^{-1} F_1 \quad (\text{A.32})$$

$$W_2 = K^{-1} F_2 \quad (\text{A.33})$$

Estando a origem posicionada no centro de cisalhamento da seção e havendo restrição ao empenamento, a resultante das tensões normais não gera nenhum momento fletor na barra, o que se traduz através das seguintes condições:

$$\int_A E w x_1 dA = 0 \quad \text{e} \quad \int_A E w x_2 dA = 0 \quad (\text{A.34})$$

Aplicando-se a (A.30) nestas condições, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A E W_0 x_1 dA + x_2^{cc} \int_A E W_1 x_1 dA + x_1^{cc} \int_A E W_2 x_1 dA = 0 \\ \int_A E W_0 x_2 dA + x_2^{cc} \int_A E W_1 x_2 dA + x_1^{cc} \int_A E W_2 x_2 dA = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.35})$$

que pode ser também escrito em notação matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{cc} \\ x_2^{cc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

sendo cada termo da matriz dado por:

$$a_{11} = \int_A EW_2 x_2 dA \quad (\text{A.37})$$

$$a_{12} = \int_A EW_1 x_2 dA \quad (\text{A.38})$$

$$a_{21} = \int_A EW_1 x_2 dA \quad (\text{A.39})$$

$$a_{22} = \int_A EW_1 x_1 dA \quad (\text{A.40})$$

As componentes do vetor livre deste sistema são dadas por:

$$R_1 = -\int_A EW_0 x_1 dA \quad (\text{A.41})$$

$$R_2 = -\int_A EW_0 x_2 dA \quad (\text{A.42})$$

Com estas expressões é possível se calcular as coordenadas do centro de cisalhamento para uma barra com seção transversal qualquer. Em seguida, utiliza-se a equação (A.30) para se determinar o modo de empenamento unitário da barra considerando agora a origem do sistema de coordenadas neste ponto. Ao final do procedimento obtém-se um vetor  $\bar{w}$  contendo valores de empenamento para cada ponto da seção transversal de uma barra com comprimento unitário. Este vetor pode ser aplicado como função de aprimoramento para a cinemática de torção de elementos finitos de barra tridimensionais em geral.