

HUGO LUIZ OLIVEIRA

Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2013

Autorizo a reprodução total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

O48u Oliveira, Hugo Luiz
Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis / Hugo Luiz Oliveira; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2013.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Mecânica da Fratura Não Linear. 3. Modelo de Fratura Coesiva. 4. Operador Tangente. 5. Formulação baseada em Dipolos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **HUGO LUIZ OLIVEIRA**.

Título da dissertação: "Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis".

Data da defesa: 25/03/2013

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Gabriel de Oliveira Ribeiro**
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

SECRETARIA
DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
UNIVERSIDADE DE SÃO CARLOS

Aos meus pais Teresinha e Jorge (em memória)...

AGRADECIMENTOS

Ao Pai Celestial, sempre, e em primeiro lugar, pelas enormes bênçãos derramadas sobre mim durante a realização desse trabalho. Trabalho este que significa um importante passo para a concretização do sonho de me tornar um pesquisador.

À minha família pelos manifestos de apoio e compreensão em todos os momentos, ainda que difíceis. Em especial à minha mãe, Teresinha, e ao meu irmão Igor.

À minha namorada, Karla, pelo carinho, compreensão e incentivo durante essa longa jornada.

Ao prof. Dr. Edson Leonel, pela atenção, paciência e disposição em me atender, mesmo que por inúmeras vezes. Sua praticidade, objetividade e coerência profissional, têm sido importantes na minha formação, enquanto pesquisador, e certamente corroboraram para o desenvolvimento do trabalho. Além de um grande orientador, ganhei um grande amigo.

Ao prof. Dr. Humberto Coda, pela amizade e pelos vários ensinamentos, tanto científicos quanto para a vida. Suas falas são veementes e evidenciam a experiência de uma pessoa sábia.

Ao prof. Dr. Rodrigo Paccola, pela amizade e companheirismo, bem como nas várias conversas sobre engenharia que contribuíram para o trabalho. Aos demais professores do departamento de estruturas pela sólida formação que me propiciaram, como Proença, Paiva, Giongo e Jorge, e todos os demais. E ainda à toda equipe da secretaria do SET pelo acolhimento e adicionais ajudas burocráticas.

Ao professor Dr. Francisco dos Santos Rocha que me atendeu prontamente, e se dispôs a esclarecer várias questões referentes ao tema do trabalho. Tema este, que por sinal encontra raízes em suas pesquisas.

Aos amigos de turma, Daniel, João, Elias, Matheus, Paulo Eugênio, Diego, Diogo, Janaina, Gramoza, Alomir, Fernando, Tiago, Lucas, Igor, Ketson ('monstro'), Arthur, Lauren, Carlinhos, Paulo Vitorio, pelos momentos de amizade e descontração. Aos alunos de doutorado, Fábio Rocha, Dorival, Aref, Edimar, Rafael, David, pelos ensinamentos transmitidos.

À CAPES pelo apoio financeiro, que possibilitou a dedicação exclusiva à esta pesquisa. À FAPESP, projeto 2011/07771-7, pelo financiamento dos equipamentos utilizados e das despesas com eventos nacionais e internacionais para a divulgação do presente trabalho.

LISTA DE SIGLAS

DBEM	Dual Boundary Element Method
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
MFF	Modelo de Fissuras Fictícias
MFNL	Mecânica da Fratura Não Linear
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
OC	Operador Constante
OT	Operador Tangente
PFH	Parte Finita de Hadamard
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
PVC	Problema de Valor de Contorno
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas
USP	Universidade de São Paulo
VPC	Valor Principal de Cauchy
ZPI	Zona de Processos Inelásticos

RESUMO

OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Este trabalho trata da análise da propagação de fissuras, independente do tempo, em domínios bidimensionais utilizando uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno (MEC). O MEC vem sendo utilizado com sucesso na análise de diversos problemas de engenharia. Considerando problemas de mecânica da fratura, o MEC é especialmente eficiente devido à redução da dimensionalidade de sua malha, o que permite a simulação do crescimento das fissuras sem as dificuldades do processo de remalhamento. Nesta pesquisa, desenvolvem-se formulações não lineares do MEC para a análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis. Nesses materiais, a zona de processo à frente da ponta da fissura introduz efeitos fisicamente não lineares no comportamento estrutural. Assim, para a simulação da presença da zona de processo, modelos não lineares são necessários. Classicamente a formulação dual do MEC é utilizada para modelar propagação de fissuras na quais equações singulares e hipersingulares são escritas para elementos definidos ao longo das faces das fissuras. O presente trabalho propõe uma segunda formulação utilizando um campo de tensões iniciais para a representação da zona coesiva. Nesta formulação, o termo de domínio da equação integral clássica do MEC é degenerado, de forma a atuar somente ao longo do caminho de crescimento das fissuras, sendo que esse procedimento dá origem a uma nova variável denominada dipolo, responsável por garantir o atendimento das condições de contorno. Em conjunto com essa nova formulação, se propõe o uso do operador tangente (OT), que é deduzido no trabalho, a fim de acelerar o processo de convergência da solução. Os resultados obtidos, por meio da formulação alternativa, são comparados tanto com dados experimentais quanto com o MEC dual, ambos disponíveis na literatura. As respostas encontradas foram satisfatórias no sentido de conseguir reproduzir o comportamento real da estrutura explorando as vantagens computacionais proporcionadas pelo OT.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura Não Linear, Modelo de Fratura Coesiva, Operador Tangente, Formulação baseada em Dipolos.

ABSTRACT

OLIVEIRA, H. L. **An alternative formulation of the boundary element method applied to crack propagation analysis in quasi-brittle materials**. 2013. 132 p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2013.

This work presents a time-independent crack propagation analysis, in two-dimensional domains, using an alternative boundary element method (BEM) formulation. BEM has been used successfully to analyze several engineering problems. Considering fracture mechanics problems, BEM is especially efficient due to its mesh reduction aspects, which allows the simulation of crack growth without remeshing difficulties. In this research, nonlinear BEM formulations are developed in order to analyze crack propagation in quasi-brittle materials. Considering these materials, the process zone ahead of the crack tip leads to nonlinear effects related to structural behavior. Thus, nonlinear models are required for simulating the presence of the process zone. Classically, the dual BEM is used for modeling the crack propagation, in which singular and hyper-singular equations are written for elements defined along the crack faces. This work proposes an alternative formulation using the initial stress field to represent the cohesive zone. In this formulation, the classic domain integral term is degenerated in order to be non-null only at the crack growth path. This procedure leads to the creation of a new variable called dipole, which is responsible for ensuring the compliance of the boundary conditions. In addition to this new formulation, it is proposed the use of the tangent operator (TO), which is derived in this work, in order to accelerate the convergence. The results obtained using the new formulation, are compared with experimental data and dual BEM results available in the literature. The responses were found satisfactory in reproducing the behavior of real structures exploiting the computational advantages provided by the TO.

Keywords: Boundary Element Method, Non-Linear Fracture Mechanics, Cohesive Fracture Model, Tangent Operator, Dipole based formulation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	11
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	15
1.3	OBJETIVOS DA PESQUISA.....	19
1.4	METODOLOGIA.....	19
1.5	ESTRUTURA DO TEXTO.....	20
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	22
2.1	FORMULANDO O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO.....	22
2.2	SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....	26
2.3	FORMULAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO.....	29
2.4	PONTOS NO CONTORNO.....	34
2.5	FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	36
2.6	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	38
2.7	SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	39
2.8	PONTOS INTERNOS.....	41
2.9	DESCONTINUIDADE EM PONTOS DE CANTO.....	42
2.10	TRATAMENTO DE INTEGRAIS NO DOMÍNIO.....	43
	2.10.1 Consideração das tensões iniciais.....	44
2.11	MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE.....	45
3	MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO.....	52
3.1	COMPORTAMENTO DO CONCRETO À TRAÇÃO.....	53
3.2	COMPORTAMENTO DO CONCRETO A COMPRESSÃO.....	54
3.3	COMPORTAMENTO DO CONCRETO SUJEITO A CARREGAMENTOS CÍCLICOS.....	55
3.4	MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR.....	57
3.5	MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR.....	63
3.6	MODELO DE FISSURAS FICTÍCIAS.....	67
3.7	MODELAGEM DA ZONA DE PROCESSO.....	69
3.8	CÁLCULO DA TENSÃO NA EXTREMIDADE DA FISSURA.....	72

3.9	CÁLCULO DO ÂNGULO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA.....	73
3.10	INCREMENTO NO COMPRIMENTO DA FISSURA.....	73
3.11	PROCEDIMENTO ITERATIVO PARA OBTENÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO.....	74
4	FORMULAÇÃO DO MEC APLICADA À MFNL.....	75
4.1	DEFININDO OS DIPOLOS.....	75
4.2	REPRESENTAÇÃO DA ZPI UTILIZANDO O MEC.....	78
4.3	ELEMENTOS DE CONTORNO PARA FISSURA.....	84
4.4	SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE DO NÚCLEO INTEGRAL QUE REPRESENTA A FISSURA.....	89
4.5	PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO NÃO LINEAR UTILIZANDO DIPOLOS.....	92
4.6	PROCESSO EVOLUTIVO DA FISSURA.....	94
4.7	OBTENÇÃO DO OPERADOR TANGENTE.....	96
5	EXEMPLOS E DISCUSSÕES.....	101
5.1	EXEMPLO 1 – CHAPA COM FURO CENTRAL.....	101
5.2	EXEMPLO 2 – CHAPA TRACIONADA.....	104
5.3	EXEMPLO 3 – VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS SUBMETIDA A MODO I.....	112
5.4	EXEMPLO 4 – VIGA SUBMETIDA A MODO MISTO (I – II).....	117
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	121
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	123

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Desde os tempos antigos o homem tem a necessidade de transformar os recursos disponíveis à sua volta a seu favor. Tanto a invenção de instrumentos como a necessidade de construir suas moradias e conseqüentemente seus acessos (estradas, tuneis, pontes), tudo isto fez com que o ser humano fosse capaz de desenvolver e aplicar conhecimentos empíricos/científicos para a criação e aperfeiçoamento de bens. Com o passar do tempo, os conceitos foram sendo aperfeiçoados a ponto de se tornarem ciência especializada que passou a ser conhecida como engenharia.

A engenharia, em linhas gerais, é uma ciência que aplica conhecimentos matemáticos, científicos e tecnológicos na criação de determinada utilidade que exerce determinada função ou objetivo. Como ciência, engloba vários ramos especializados e dentre eles a engenharia estrutural. Esta é responsável por aplicar os conceitos da mecânica dos sólidos para o projeto de estruturas de sustentação, seja ela estrutura civil, estrutura mecânica, aeronáutica ou até mesmo biomecânica, para citar alguns de seus vários ramos de aplicação.

Os problemas de interesse para a engenharia estrutural consistem na avaliação do comportamento das estruturas e sua interação com o meio externo. Com essa finalidade, as leis físicas sustentam modelos matemáticos, que de maneira geral, são expressos por equações diferenciais ou integrais. Nessas equações surgem termos contendo variações de determinado conjunto de variáveis que estão relacionadas entre si, e que por sua vez, representam processos naturais.

Uma importante hipótese que é adotada ao se elaborar modelos físico-matemáticos referentes aos sólidos é a continuidade. Nesse sentido, os meios de interesse são idealizados como ausentes de lacunas ou espaços vazios e, portanto pode-se associar a cada ponto geométrico uma determinada quantidade de massa. Essa hipótese permite a aplicação das ferramentas do Cálculo (definidas em espaços contínuos) na modelagem do problema, e ainda faz ter sentido algumas definições físicas como: estado de tensão ou deformação em um ponto, por exemplo. Por esse mesmo motivo (continuidade do meio) as funções que são

oriundas das formulações do modelo devem apresentar a regularidade requerida para si, e para suas ordens de derivadas. (PROENÇA, 2011)

Os problemas tratados pela engenharia de estruturas normalmente envolvem a determinação do campo de deslocamentos, tensões e deformações em um sólido submetido a um conjunto de ações externas e condições de contorno prescritas. As incógnitas devem estar relacionadas e atender a certas restrições, que à luz da Mecânica são: relação de equilíbrio, relação de compatibilidade do campo de deslocamentos e relação constitutiva. Ao conjunto formado por essas relações e as condições de contorno dá-se o nome de problema de valor de contorno (PVC).

Simplificações podem ser adotadas na modelagem a fim de facilitar a obtenção dos valores incógnitos. Teorias lineares e não lineares, entre outras podem ser incluídas no modelo ou não, a depender da abordagem a ser feita, desde que a resposta obtida represente com aceitável suficiência o problema físico para determinado objetivo.

Finalizada a etapa de definição do modelo passa-se então à etapa de solução das equações, que pode ser feita por meios analíticos ou numéricos. Os meios analíticos são soluções diretas de equações diferenciais enquanto que os métodos numéricos buscam encontrar uma solução aproximativa com precisão suficiente. Em geral, os métodos analíticos podem ser aplicados a casos restritos o que faz com que os métodos numéricos sejam uma valiosa alternativa para a solução dos problemas de interesse.

Nesse contexto, os métodos numéricos podem ser divididos em dois grandes grupos de acordo com sua maneira de introduzir a aproximação. O primeiro deles é o chamado método de domínio no qual se admite que as condições de contorno sejam obedecidas e as aproximações inerentes ao método, limitando-se à análises lineares, se dão no domínio. Como exemplo deste grupo tem-se o método dos elementos finitos (MEF) que é amplamente aplicado em vários campos da engenharia e é consagrado pelo seu uso. O segundo grupo é o do chamado método de contorno, no qual se admite que as equações do modelo são atendidas no domínio e as aproximações pertinentes são feitas em seu contorno. Como exemplo deste grupo tem-se o método dos elementos de contorno (MEC) que tem grande aplicabilidade em vários campos da Física, como a Elasticidade, por exemplo.

Para que seja criada uma estrutura são necessárias duas informações básicas. A primeira delas é o conhecimento dos esforços atuantes devidos aos carregamentos externos. A

segunda informação é relativa à capacidade que o material empregado tem de resistir mecanicamente aos esforços. Assim, o entendimento dos mecanismos que levam um material à ruptura é de suma importância para a engenharia, pois pode-se fazer uso das características mecânicas e ao mesmo tempo evitar os efeitos que levam o material ao colapso.

Por mais rigoroso que seja o controle do processo de manufatura do material, não se consegue garantir a inexistência de falhas ou imperfeições, especialmente em materiais cimentícios como o concreto. Uma importante característica que deve ser levada em consideração para abordagem mais realista das propriedades mecânicas é o estado de fissuração em que o material se encontra. Nesse contexto convém saber se as fissuras presentes no meio podem se propagar ou não, e de que forma. Esse mecanismo, que ajuda a entender a ruptura dos materiais, é apresentado pelas teorias da Mecânica da Fratura que surgiram no século XX para explicar o motivo pelo qual as teorias clássicas da elasticidade linear por si só falhavam ao prever o comportamento de meios contínuos com a presença de descontinuidades.

A construção de um modelo que leve em consideração os efeitos da fissuração, em especial para materiais quase frágeis, pode ter aplicações imediatas bastante amplas no que se refere a previsão da integridade das estruturas. Nesse contexto, o presente trabalho se constitui numa contribuição para o entendimento e previsão do comportamento dessas estruturas fundamentado na união dos preceitos da Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL) e do MEC.

Os grupos de métodos numéricos e mecânica dos materiais do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) têm obtido, nos últimos anos, um progresso expressivo no desenvolvimento de trabalhos nos campos de mecânica computacional, mecânica dos materiais e mecânica das estruturas. Vários temas têm sido tratados por estes grupos. Dentre estes, devem ser destacados o desenvolvimento de formulações do MEC, MEF e também do acoplamento entre ambos para a análise de problemas não lineares como problemas visco-plásticos e visco-elásticos, problemas transientes, fadiga, propagação de fissuras, domínios enrijecidos, etc., além da extensão dessas formulações para a abordagem de problemas de mecânica estrutural.

Esse trabalho se insere nesse contexto, contribuindo com o campo de pesquisa destes grupos e de suas aplicações, com a abordagem, análise e inclusão de um importante tema de pesquisa em engenharia estrutural. O tema da propagação de fissuras, em meios quase frágeis, tem recebido destaque na comunidade científica internacional, não somente por se tratar de

um problema complexo, mas também por envolver formulações complexas para a representação de seus fenômenos físicos. Esse problema estrutural pode ser modelado com a utilização de ferramentas numéricas, que tornam possível a análise de estruturas e sistemas estruturais, com base em modelos que são em geral construídos a partir de observações pontuais.

O MEC tem se mostrado um método numérico preciso para a análise de diversos problemas de engenharia. Dentre esses problemas destacam-se aqueles onde as grandezas de interesse da análise (tensões e deformações em mecânica dos sólidos) apresentam elevados gradientes. Em relação aos problemas de mecânica da fratura, o MEC tem-se mostrado uma ferramenta computacional muito promissora. Nesses problemas, a discretização das fissuras ou microfissuras iniciais é bastante simples, uma vez que o método não requer a discretização do domínio e a correspondente aproximação das variáveis no interior do corpo. Além disso, com o emprego de soluções singulares como ponderadora, consegue-se simular a presença de singularidades na ponta da fissura com maior precisão. Essas vantagens permitem a simulação mais eficiente da propagação das fissuras, sua coalescência e conseqüentemente a representação mais realista da ruptura dos sólidos.

Com relação à modelagem do crescimento de fissuras em materiais quase frágeis, Hillerborg et al (1976) utilizaram o modelo de fissuras fictícia e tensões coesivas para a representação da zona de processo. Este modelo clássico caracteriza-se por substituir a zona danificada à frente da ponta da trinca por uma fissura equivalente, sendo a rigidez residual desta zona representada por tensões coesivas. Este modelo tem sido utilizado com sucesso para carregamentos independentes do tempo e solicitações monotônicas e estáticas. Formulações numéricas utilizando este modelo foram utilizadas por Leonel (2009), onde formulações não lineares do MEC foram propostas para a análise da propagação de fissuras em estruturas de concreto. Neste último trabalho, casos de propagação de fissuras em modo I e em modo misto foram eficazmente modelados.

Com relação à formulação do MEC para a simulação do crescimento das fissuras, classicamente se utiliza a formulação dual do MEC. Aqui será apresentado um novo modelo empregando-se uma formulação alternativa que usa campos de tensões iniciais. Nesta formulação, o termo de domínio da equação integral clássica do MEC será degenerado a uma linha, exatamente posicionado ao longo do caminho de crescimento das fissuras. Esta formulação alternativa representa uma importante contribuição ao desenvolvimento de

formulações do MEC, principalmente no que concerne à dedução e conveniente manipulação matemática do termo de domínio. A variação das tensões coesivas em relação à abertura das faces da fissura será modelada com a utilização do operador tangente.

A presente pesquisa se insere também no conjunto de trabalhos que vêm sendo desenvolvidos pelo SET nos últimos anos, objetivando o desenvolvimento e proposição de formulações do MEC visando sua utilização em problemas de engenharia, especialmente aqueles onde a compreensão sobre o comportamento da ruptura de sólidos é importante, possibilitando a determinação da carga de ruptura e também a configuração de falha.

As referências a seguir relacionadas, embora não sejam exaustivas, constituem fontes de informação relevantes para o entendimento e a realização desse trabalho.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As formulações do MEC e suas soluções numéricas para problemas mecânicos surgiram em meados da década de 1960. O problema potencial 2D foi primeiro formulado por Jaswon (1963) sendo que Rizzo (1967) o estendeu para o caso de problemas elásticos 2D. Seguido a esses esforços, um grande número de pesquisas têm sido feitas para o desenvolvimento de formulações do MEC, como mostrado por exemplo, em Brebbia (1978), Brebbia e Dominguez (1989). Com relação aos problemas envolvendo mecânica da fratura, o MEC é amplamente reconhecido na literatura como uma poderosa ferramenta numérica para o estudo deste domínio, em especial se o problema trata da propagação de fissuras. Comparado a outros métodos numéricos, a redução da dimensionalidade da malha diminui fortemente os dados de entrada e também o trabalho de *remeshing* durante a análise de crescimento das fissuras. Facilitando, portanto, a análise da propagação de fissuras, sua coalescência e por consequência, a simulação da ruptura de sólidos.

Um dos primeiros trabalhos do MEC que trataram do problema da análise de fissuras é ainda da década de setenta de autoria de Cruse e van Buren (1971) o qual foi rapidamente expandido com a proposta de utilização de funções de Green (SNYDER; CRUSE, 1975). As funções de Green são obtidas considerando a fissura no meio infinito, assim os termos integrais referentes ao contorno da fissura desaparecem. Embora precisa, sua aplicação é

restrita, permitindo o estudo dos fatores de intensidade de tensão, porém não o avanço da fissura.

O uso de sub-regiões para a simulação de fissuras aparece no trabalho de Blandford, Ingraffea e Liggett (1981). A propagação das fissuras segue as interfaces entre os corpos, onde um critério escolhido é aplicado. Essa técnica emprega apenas equações singulares, que são mais estáveis, porém exigem remalhamento levando o algoritmo a ter fraco desempenho computacional. Modelo semelhante foi desenvolvido por Leonel (2009) para a análise de separação e deslizamento de juntas. Esse modelo foi desenvolvido utilizando um operador tangente consistente para a correção do sistema não linear de equações, considerando o critério de escorregamento de Coulomb. A formulação singular aparece em muitos trabalhos de fratura como nos de Cen e Maier (1992) e de Liang e Li (1991) que utilizaram a técnica para a modelagem de fratura coesiva. Várias outras técnicas que evitam o remalhamento foram já utilizadas com resultados excelentes. O método de descontinuidade de deslocamentos (CROUCH, 1976; CROUCH; SRARFIELD, 1983; WEN; FAN, 1994; YAN, 2006) utiliza equações integrais cujas soluções fundamentais são obtidas com a aplicação de descontinuidades de deslocamentos unitárias.

A formulação do MEC mais utilizada para a análise de problemas de fratura aleatória é o conhecido *Dual Boundary Element Method – DBEM* (PORTELA; ALIABADI; ROOKE, 1992). Esses autores desenvolveram um modelo para fratura elástico-linear, onde para cada ponto da fissura escreviam-se quatro equações algébricas, duas obtidas da representação integral dos deslocamentos e duas da representação integral das forças de superfície. O contorno da fissura é descrito por elementos duplos definidos em direções opostas que permitem impor deslocamentos e forças de superfície distintas em cada uma das faces. É importante salientar que a utilização de equações integrais de deslocamento e de sua derivada já aparece em trabalhos anteriores como o de Watson (1986, 1988) e de Hong e Chen (1988) para problemas 2D e depois no trabalho de Gray, Martha e Ingraffea (1990) para problemas 3D. Destacam-se ainda os seguintes trabalhos referentes ao DBEM: Portela (1992), Portela, Aliabadi e Rooke (1993), Mi e Aliabadi (1992a, 1992b, 1994a, 1994b, 1995), Mi (1996), Mellings e Aliabadi (1994), Sollero e Aliabadi (1994), Saleh (1997), Chen et al. (1999). Formulações do MEC, usando DBEM, para análises de coalescência e localização são apresentadas em Leonel e Venturini (2010a, 2010b, 2011) considerando problemas de fratura linear e não linear.

Desde o pioneiro trabalho de Griffith (1920) e o seu rápido crescimento nos anos sessenta e setenta, a mecânica da fratura é um dos principais conjuntos de teorias utilizados para prever rupturas em sólidos. Na literatura existem muitos livros sobre o tema tratando da fratura linear e não linear. Para a fratura elástica linear os trabalhos de Tada, Paris e Irwin (1985), Rooke e Cartwright (1976) e Murakami (1987) trazem extensas relações de fatores de intensidade de tensão e também expressões para os campos de tensão, deformação e deslocamento na região vizinha à ponta da trinca. Bazant e Li (1997), Cruse (1988), Elices et al (2002) e Planas et al (2003) discutem e apresentam aspectos relevantes da teoria da mecânica da fratura não linear, especialmente tópicos importantes relacionados aos materiais quase frágeis.

A modelagem do problema de propagação de fissuras em materiais frágeis e quase frágeis (concreto em especial) é de grande importância na análise da degradação da matriz do material estrutural. Desde a proposição dos modelos coesivos de Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), vários trabalhos têm sido dedicados a esse tema, devendo-se destacar Hillerborg, Modeer e Petersson (1976) e Carpinteri (1992) os quais analisaram diversas estruturas experimental e numericamente. Estes dois últimos trabalhos destacam o comportamento da fratura coesiva com um modelo de fraturamento não linear bastante simples, porém que já considera uma zona caracterizada pelo aumento das microfissuras e a consequente dissipação de energia. Tal zona é aproximada por uma fissura fictícia colocada à frente da fratura real. A representação mais simples desse modelo é feita utilizando uma curva linear dada por dois parâmetros do material, abertura fictícia máxima e resistência máxima de tração. Além dos trabalhos sobre fratura coesiva já mencionados, algumas importantes publicações sobre o tema, incluindo também as aplicações em problemas de delaminação são: Bazant, Ozbolt e Eligehausen (1994), Barpi e Valente (1998), Reinhardt e Xu (1999), Mai (2002), Moes e Belytschko (2002), de Borst (2003), Tvergaard (2003), Carpinteri et al (2003), Dong, Lo e Cheung (2003), Yang e Cox (2005).

Um modelo para a análise do crescimento de fissuras em materiais quase frágeis foi proposto por Leonel e Venturini (2010b) utilizando o MEC e um operador tangente consistente. Esse modelo, utilizado para carregamentos independentes do tempo e monotônicos, mostrou-se muito eficiente necessitando um número consideravelmente menor de iterações, para a obtenção da solução, quando comparado ao modelo clássico.

Apesar de sua importância científica e tecnológica, não são muitos os trabalhos que abordam a degradação de materiais quase frágeis ao longo do tempo. Para a fratura coesiva alguns trabalhos importantes que procuram descrever as condições de carga e descarga necessárias para a definição da fadiga e efeitos dependentes do tempo são: Bazant e Li (1995), Bazant e Li (1997), Begley, Cox e McMeeking (1997), Xu e Needleman (1994), Ortiz (1996); Buyukozturk e Hearing (1998), Yang e Ravi-Chandar (1998a), Li, Shis e Needleman (1985), de Andrés (1999), Yang, Mall e Ravi-Chandar (2001), Roe e Siegmund (2003), Li e Chandra (2003), Svahn e Runesson (2006), Dong et al (2010), Maiti e Geubelle (2006), Nguyen et al (2001), Bouvard et al (2009), Leise, Walton e Gorb (2010) e Yoon e Allen (1999). Considerando análises deste problema usando o MEC, são poucos os trabalhos que tratam sobre o assunto como mostrado em Yang e Ravi-Chandar (1998b), o que inclusive justifica a extensão dessa pesquisa.

Uma técnica alternativa ao modelo dual para a análise do processo de fratura não linear é a que emprega um campo de tensões iniciais para a correção das tensões coesivas nas faces das fissuras. Neste modelo, a espessura da zona de processo é degenerada para zero. Conseqüentemente, o termo de domínio da formulação clássica do MEC é avaliado somente ao longo do caminho de crescimento das fissuras, simulando assim o comportamento não linear da zona de processo.

Nesse sentido, Lopes Jr. (1996) apresenta uma formulação baseada no conceito de dipolos (capítulo 4) para o estudo de fissuras (descontinuidades) à luz dos olhos da Mecânica da Fratura Não Linear em meios bidimensionais. A formulação, que contava com elementos lineares isoparamétricos com tratamento analítico de singularidades, mostrou-se efetiva em reproduzir alguns efeitos característicos do concreto como o amolecimento e o efeito escala, além da propagação da fissura macroscópica.

Barbirato (1999) elaborou um estudo sobre propagação tridimensional de fissuras utilizando o modelo coesivo e a formulação por dipolos. Seu trabalho contribuiu para a formulação, em termos de dipolos, de problemas de propagação de fissuras sob ação de carregamentos dinâmicos.

Interessantes resultados empregando técnicas similares de manipulação do termo de domínio do MEC podem ser encontrados em Jiang e Venturini (1998), Jiang, Hung e Venturini (1999) e Jiang e Venturini (2000).

Tendo em vista a investigação de temas atuais e de clara relevância, além de representar uma continuidade da linha de pesquisa iniciada com Rocha (1988), no que se refere ao uso dos dipolos, o presente trabalho propõe os objetivos gerais do próximo item.

1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos deste trabalho tratam do desenvolvimento de formulações não lineares do MEC e sua implementação computacional, com elementos de alta ordem, para a análise da degradação mecânica de estruturas compostas por materiais quase frágeis (concreto em particular).

De maneira sucinta, o primeiro objetivo é verificar se a formulação por dipolos, utilizando operador constante (OC), é capaz de reproduzir satisfatoriamente os comportamentos experimentais de componentes estruturais (vigas) de concreto, sob diferentes modos de solicitação à fratura.

Já o segundo objetivo, que constitui uma contribuição para esse campo das análises do MEC, é desenvolver e implementar o operador tangente (OT) consistente visando acelerar a solução do sistema de equações não lineares resultantes da formulação do problema em questão.

1.4 METODOLOGIA

Embora o presente trabalho represente um avanço significativo em novos temas, a metodologia seguida é basicamente a mesma que vem sendo empregada pelo grupo de métodos numéricos do SET/EESC/USP para o desenvolvimento de formulações do MEC e também do MEF.

O código computacional inicial foi fornecido pelo professor do SET, Dr. Edson Leonel. Esse código é capaz de realizar análise elástica estática de sólidos bidimensionais sujeitos a carregamentos e vinculações arbitrários, utilizando formulação singular e

hipersingular do MEC para qualquer ponto fonte, considerando ainda elementos de contorno de alta ordem.

A partir desse código inicial, foi criado um algoritmo não linear capaz de simular a formação e propagação da fissura por meio dos dipolos (capítulo 4). Essa etapa foi concebida para utilizar o OC durante a solução do sistema não linear, e adicionalmente servir como parâmetro para a próxima etapa. Vários exemplos conhecidos foram testados de modo a validar o código, conforme será mostrado no capítulo 5.

A seguir, foi implementada a etapa final do código não linear referente ao OT, resultando num menor tempo de processamento. Os mesmos exemplos executados com OC foram testados utilizando OT levando, evidentemente, à mesma resposta.

Todas as formulações propostas e desenvolvidas neste trabalho foram implementadas em linguagem de programação FORTRAN.

1.5 ESTRUTURA DO TEXTO

O presente texto não tem o propósito de ser exaustivo sobre os assuntos que são tratados, mas sim de representar um compêndio de ideias tomadas de forma sistemática, como é pertinente a um trabalho científico dissertativo, acerca dos diversos temas apresentados, sob o ponto de vista do autor, importantes para o desenvolvimento dessa pesquisa.

O capítulo a seguir, por exemplo, faz uma revisão dos principais conceitos do MEC utilizados para elaborar os códigos constituintes do método numérico. Primeiramente as equações integrais são apresentadas e posteriormente são transformadas em termos discretos para viabilizar o seu uso computacional. Esse capítulo traz conceitos importantes que são utilizados posteriormente, no tocante dos elementos de alta ordem e do método da subtração da singularidade para integração numérica.

Já o terceiro capítulo faz uma breve explanação sobre a mecânica da fratura aplicada ao concreto. De certa maneira os conceitos são apresentados em ordem cronológica. O texto é voltado para as necessidades do presente trabalho, e por isto, os conceitos sobre mecânica da

fratura elástica linear restringem-se aos necessários para compreensão do texto, enquanto que maior ênfase é dada à mecânica da fratura não linear.

No capítulo 4, os conceitos relativos à representação da fissura por meio dos dipolos são apresentados. Inicialmente realiza-se a dedução das equações algébricas que serão utilizadas no algoritmo não linear. A seguir algumas especificidades referentes à implementação computacional do método são discutidas. Destaca-se aqui o tratamento da singularidade do núcleo de dipolos e a dedução do operador tangente consistente da solução não linear.

O quinto capítulo aborda exemplos que validam a formulação proposta e ao mesmo tempo discute alguns aspectos de interesse tanto computacional quanto físicos. Além dos resultados obtidos com o OC, outros resultados numéricos obtidos com o clássico modelo dual enriquecem os argumentos que sustentam a eficiência da formulação aqui proposta.

O capítulo 6 dedica-se às considerações finais e às sugestões de investigações futuras.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O MEC é um método numérico para solução de equações integrais de contorno, que possui a característica de não necessitar de definição de malhas no domínio de interesse, fato que será explorado no decorrer do trabalho. Pode ser aplicado em vários campos da Engenharia como acústica, mecânica dos fluidos, elasticidade linear ou não linear, mecânica da fratura, eletromagnetismo entre outros. (STEFAN, CHRISTOPH, 2011)

Pode-se dividir o MEC didaticamente em dois grupos. O primeiro refere-se aos Métodos dos Elementos de Contorno Indiretos. Nesse tipo de abordagem as incógnitas do problema não são as grandezas de interesse (deslocamentos, ou forças de superfície), mas sim, funções indiretas chamadas de densidade, que uma vez determinadas, possibilitam a obtenção das variáveis de interesse. A depender do tipo de campo vetorial adotado como contínuo podem-se ter dois seguimentos: *source method* (adotam deslocamentos contínuos) e *dipole method* (adotam forças de superfície contínuas).

O segundo grupo recebe o nome de método dos elementos de contorno diretos. Nesse caso as grandezas físicas de interesse são obtidas diretamente, pois constituem o conjunto das incógnitas do problema. O presente trabalho é desenvolvido considerando esse grupo de análise por aparecer com maior frequência nas aplicações de engenharia.

É interessante ressaltar que o MEC é uma alternativa numérica para solução de uma formulação maior, conhecida como PVC, que inclusive pode ser resolvido por meio de métodos de domínio como o Método dos Elementos Finitos. Assim, torna-se conveniente uma breve explanação da maneira pela qual esses problemas são formulados para que então, o MEC seja apresentado.

2.1 FORMULANDO O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Desde os tempos antigos, a Engenharia Civil tenta usar os materiais disponíveis para confecção de obras que proporcionassem segurança, conforto e economia. Nos primórdios da engenharia as construções eram executadas por meio da experiência e do bom senso. Com o

passar dos anos houve uma evolução do pensamento que deu origem ao tratamento racional baseado em observação e experimentação por engenheiros, matemáticos e físicos do século XV/XVI que inventaram formulações matemáticas que seriam capazes de prever o comportamento dos materiais sob algum tipo de solicitação. O conjunto de ideias criadas por cientistas notáveis como, por exemplo, Leonardo da Vinci ou Galileo Galilei, e que depois foram expandidas e formalizadas por vários outros colaboradores como Robert Hooke, Edme Mariote, Jacob Bernoulli, Leonhard Euler, Charles Coulomb e Augustin Louis Cauchy, somente para citar alguns, culminaram no que atualmente é conhecido como Mecânica dos Sólidos. Nos próximos parágrafos alguns conceitos selecionados dessa teoria serão brevemente expostos sob seu ponto de vista moderno. Maiores detalhes podem ser encontrados em obras clássicas da Teoria da Elasticidade como Timoshenko e Goodier (1980), Mecânica do Contínuo em Malvern (1969), enquanto que o contexto histórico pode ser consultado nos primeiros capítulos de Love (1944), e em Timoshenko (1953).

Objetivando descrever a distribuição de forças no interior de sólidos deformáveis, parte-se do princípio de que o sólido esteja homogeneamente preenchido por material, embora na realidade essa premissa dependa da escala em que se trabalha. Segundo esse princípio (Teoria clássica do Contínuo), assume-se que a matéria está continuamente distribuída e que interações mútuas agem em todos os pontos interiores do sólido como resultado de forças de massa e de forças de superfície. Tais forças, ditas internas, podem ser caracterizadas utilizando o conceito de vetor tensão. Para tanto, tome um corpo em equilíbrio submetido a um conjunto de condições de contorno. Imagine-se um plano S , que passe por um ponto interno arbitrário P , caracterizado por um vetor normal n_i . O plano corta o sólido em duas partes. Uma porção em cada lado do vetor normal (conforme Figura 2.1).

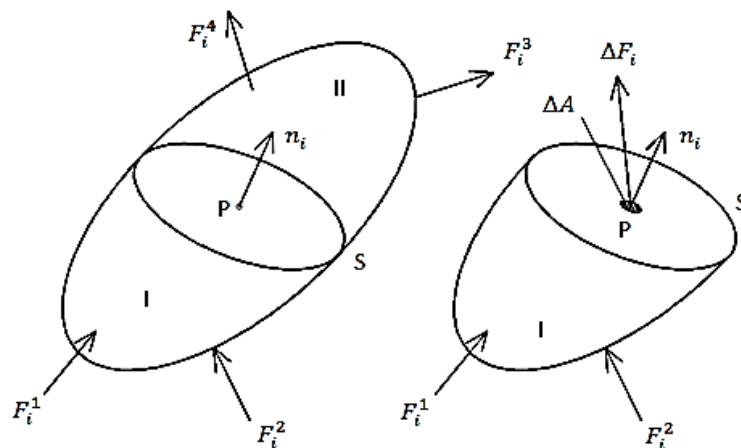


Figura 2.1 Divisão do sólido

Considerando a porção I como corpo livre, existe no plano S uma força resultante ΔF_i agindo numa pequena área ΔA contendo P. Considera-se como vetor tensão (agindo de II para I no ponto P pertencente ao plano S) o resultado do limite:

$$t_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A} \quad (2.1)$$

Essa relação mostra que o vetor tensão é dependente do ponto P e do vetor n_i . Como em um mesmo ponto podem passar infinitos planos, existem infinitos vetores tensão no mesmo ponto P. Entretanto é possível mostrar utilizando o princípio de Cauchy que o vetor tensão no ponto P depende do vetor n_i por meio de uma transformação linear, tal que:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.2)$$

Na relação acima, σ_{ij} é conhecido como tensor de tensões de Cauchy. Assim, uma vez obtido o tensor de tensões em um ponto, automaticamente conhece-se todos os vetores tensão que podem atuar no mesmo ponto, bastando estipular uma direção. Pode-se notar que, descrever o comportamento do corpo por meio do campo tensorial de tensões, por assim dizer, é mais adequado que por meio de campos vetoriais de tensões.

Em princípio, o tensor σ possui nove componentes. Entretanto o equilíbrio rotacional em um elemento cúbico diferencial, que englobe P, tem que ser garantido. Isto faz com que três de suas componentes sejam dependentes resultando num tensor simétrico. Assim, para determinar o tensor σ , é necessário encontrar seis componentes independentes, que são incógnitas do problema.

O princípio clássico da mecânica, que estabelece o equilíbrio estático dos sólidos (deformáveis e indeformáveis) escrito em termos de forças, precisa ser escrito em termos tensoriais, conforme a expressão:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

Essa equação, escrita em termos indiciais, representa um conjunto de três equações diferenciais de equilíbrio que devem ser atendidas em todos os pontos do sólido. O vetor b_i representa as forças de volume atuantes, que normalmente são conhecidas.

Outro aspecto de interesse na descrição do comportamento do sólido é saber definir o campo vetorial de deslocamentos sofrido pelo meio, ou melhor, sua variação contínua, quando atua algum tipo de solicitação. Para descrever esse campo de deslocamentos, especialmente

para fins estruturais, deve-se evitar que o corpo tenha deslocamentos de corpo rígido (translação e rotação) por meio das condições de vinculação (apoios). Isso garante o equilíbrio estático. Deste modo os deslocamentos resultantes serão resultados exclusivamente de processos de deformação. No âmbito dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações, define-se o tensor de deformações como a parte simétrica do tensor gradiente do vetor deslocamentos, ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

O tensor ε_{ij} possui seis componentes independentes, semelhante ao tensor de tensões. A descrição do campo de deslocamentos deve ser tal que não ocorram descontinuidades durante o processo de deformação. Isso é assegurado desde que o campo de deslocamentos respeite a condição de compatibilidade, que é dada em termos indiciais por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.5)$$

Ainda na modelagem do comportamento do sólido, é preciso que se estabeleça alguma relação envolvendo os campos tensoriais de tensões e deformações. Essas relações são conhecidas como constitutivas, podem representar vários fenômenos físicos a depender do problema. No contexto deste trabalho, utiliza-se a lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos que apresentem resposta elástica linear entre tensão e deformação, e pode ser escrita indicialmente como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ij} \right) \quad (2.6)$$

Nessa equação μ representa uma das constantes de Lamé enquanto ν o coeficiente de Poisson, ambas representando informações características dos materiais. É importante destacar que as equações de equilíbrio e deformação-deslocamento permanecem válidas independentemente da lei constitutiva do material.

O conjunto formado pelas equações de equilíbrio, relação deslocamento deformação, relação constitutiva, somado às condições de contorno formam o problema de valor de contorno.

Os PVCs possuem solução analítica fechada apenas para uma pequena classe de problemas em que a geometria em geral é simples, com distribuições simplificadas ou simétricas de carregamento e condições de vinculação. Portanto para se conseguir uma maior generalidade de aplicação, os PVCs precisam ser resolvidos utilizando algum tipo de modelagem numérica que obtenha respostas aproximadas para o modelo físico matemático empregado. É importante observar que o modelo discreto, em tese, deve se aproximar da resposta exata na medida em que o nível de refinamento da malha aumentar. Isto se deve ao fato de que o modelo original apresenta infinitos graus de liberdade, enquanto que o modelo numérico possui um número finito para representar determinado comportamento. O método numérico escolhido para desenvolver o presente trabalho foi o MEC, que será descrito a seguir.

2.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Uma das premissas necessárias para a formulação do MEC é o conhecimento de uma solução particular para o problema em questão considerando as mesmas propriedades materiais do sólido a ser analisado, porém com domínio infinito, sob a ação de um carregamento singular. A esta solução é dado o nome de solução fundamental.

Em problemas elásticos, a solução fundamental é uma expressão que fornece o deslocamento em qualquer ponto do domínio devido à atuação de uma força concentrada agindo em determinado ponto de um sólido homogêneo de dimensões infinitas. Segundo Love (1944), esta solução foi desenvolvida por Sir William Thomson em 1948 e posteriormente ficou conhecida como solução fundamental de Kelvin.

Apresenta-se a seguir uma breve descrição da maneira de obtenção dessa solução fazendo-se uso do Vetor de Galerkin, conforme descrito por Brebbia e Dominguez (1989).

Podem-se combinar as equações (2.4) e (2.6) na equação (2.3). Desse modo chega-se a uma nova equação, dada por:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{\mu}b_l = 0 \quad (2.7)$$

Essa equação é conhecida como equação de Navier, e representa o equilíbrio do corpo em termos de deslocamentos englobando as relações de compatibilidade e constitutiva em uma única expressão.

A solução de Kelvin é obtida considerando a aplicação uma carga unitária num ponto 'i' qualquer, na direção do vetor unitário e_i . A representação matemática da existência de uma força aplicada pontualmente fica a cargo da distribuição Delta de Dirac (devido a Paul Adrien Maurice Dirac). Desse modo a carga unitária concentrada fica dada por:

$$b_i = \Delta^{(i)} e_i \quad (2.8)$$

Brebbia e Dominguez (1989) indicam que a solução de Kelvin pode ser encontrada por meio do uso do vetor de Galerkin. Isto consiste em considerar um vetor G_i que origina o vetor de deslocamentos procurado da seguinte maneira:

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (2.9)$$

Substituindo as equações (2.8) e (2.9) na de Navier vem:

$$G_{i,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^{(i)} e_i = 0 \quad (2.10)$$

Agora o equilíbrio em termos de deslocamentos passou a ser expresso em termos do vetor de Galerkin. Portanto, o foco momentâneo da solução passa a ser o vetor G_i , que deve satisfazer a equação (2.10) podendo ser reescrita como:

$$\nabla^2(\nabla^2 G_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^{(i)} e_i = 0 \quad (2.11)$$

Para facilitar o desenvolvimento, pode-se utilizar uma variável vetorial auxiliar, $F_i = \nabla^2 G_i$, logo:

$$\nabla^2(F_i) + \frac{1}{\mu} \Delta^{(i)} e_i = 0 \quad (2.12)$$

que possui uma forma similar à equação dos problemas potenciais. Note-se que aqui o potencial não é um valor escalar, mas sim, um valor vetorial. A solução dessa equação para problemas bidimensionais é:

$$F_i = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_i \quad (2.13)$$

Agora é possível obter o valor do Laplaciano de G_i :

$$\nabla^2 G_l = F_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad (2.14)$$

Considerando o caso de problemas planos, a equação acima resulta em:

$$G_l = G e_l \quad (2.15)$$

Onde

$$G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.16)$$

Para casos bidimensionais (ou tridimensionais) adota-se que em um determinado ponto, os deslocamentos ocorridos em função de uma carga unitária aplicada em uma direção não sofrem alteração devido à outro carregamento unitário aplicado em outra direção. No caso, cada carregamento unitário é tomado como independente um do outro. Assim, pode-se escrever essa consideração em forma indicial da seguinte maneira:

$$G_{lk} = G \delta_{lk} \quad (2.17)$$

Onde G_{lk} é a componente k do vetor de Galerkin em qualquer ponto quando uma carga unitária concentrada é aplicada no ponto 'i' na direção l .

Da mesma maneira pode-se escrever o deslocamento em qualquer ponto do domínio pode ser dado por:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad (2.18)$$

Onde u_{lk} representa o deslocamento em qualquer ponto na direção k quando uma carga unitária é aplicada no ponto 'i' na direção l .

Uma vez encontrado o vetor G_l , pode-se utilizar a equação (2.9) para escrever:

$$u_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km} \quad (2.19)$$

Para estados planos de deformação a solução fundamental é obtida substituindo as equações (2.16) e (2.17) na equação (2.19) resultando:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (2.20)$$

As tensões internas em cada ponto podem ser obtidas utilizando as relações de deformação-deslocamento e tensão-deformação resultando em:

$$\sigma_{kj}^* = S_{lkj}^* e_l \quad (2.21)$$

Em que o tensor de terceira ordem S_{lkj}^* será mostrado no item 2.7.

As forças de superfície no contorno Γ com normal n podem ser escritas como

$$p_k^* = p_{lk}^* e_l \quad (2.22)$$

Em que as componentes p_{lk}^* para o plano são:

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\} \quad (2.23)$$

A Figura 2.2 mostra uma interpretação geométrica da solução fundamental para o caso tridimensional. Nota-se que independentemente da direção que seja aplicada a carga unitária, as componentes da solução fundamental aparecem ao longo das três direções perpendiculares.

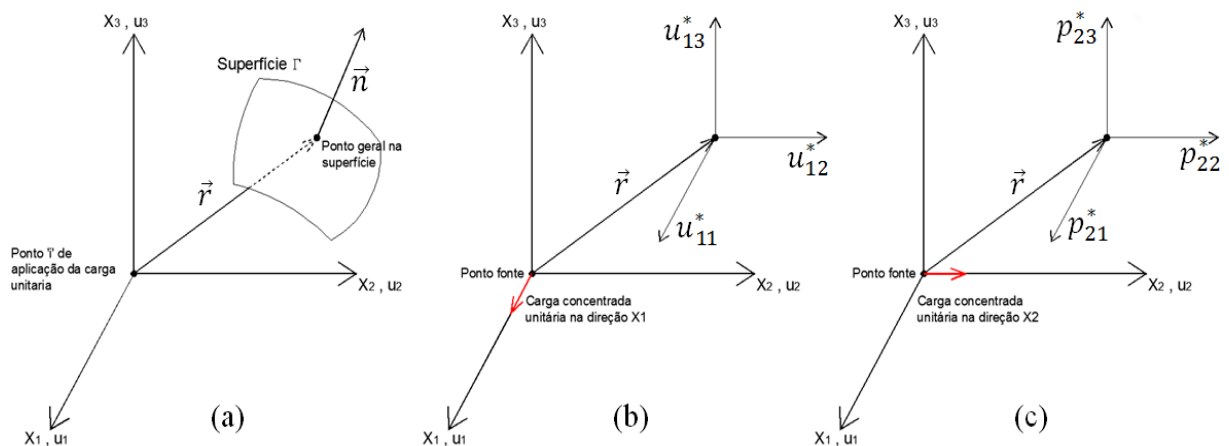


Figura 2.2 Interpretação geométrica das componentes da solução fundamental (Brebbia e Dominguez, 1989)

2.3 FORMULAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

Frank J. Rizzo (1989) aponta que o MEC, embora faça uso de recursos computacionais, está fundamentado em uma herança rica e clássica da matemática analítica. Ele se refere ao teorema fundamental do Cálculo Integral que afirma que ao realizar a soma de todas as taxas de variação de uma função num intervalo resulta na diferença entre os valores da função nos extremos do intervalo, ou seja, no contorno. O teorema de Green no plano e o teorema da divergência de Gauss no espaço tridimensional são apenas generalizações dessa ideia para funções mais abrangentes do ponto de vista físico (tensoriais)

que, sobretudo relacionam os valores de domínio aos valores do contorno. Essa redução da dimensão do problema é uma característica muito importante e bastante explorada pelo MEC.

Brebbia (1978) mostra que a equação integral que governa os problemas de elastostática pode ser obtida utilizando os conceitos do Método dos resíduos ponderados (MRP) por serem formalmente aceitos como uma técnica clássica de resolução de problemas de engenharia. Além disso, Brebbia, Telles e Wrobel (1984) mostram que as diferentes técnicas numéricas existentes (Diferenças finitas, Elementos finitos, Elementos de contorno) estão relacionadas entre si por meio do amplo conceito do MRP. A Figura 2.3 ilustra essa relação.

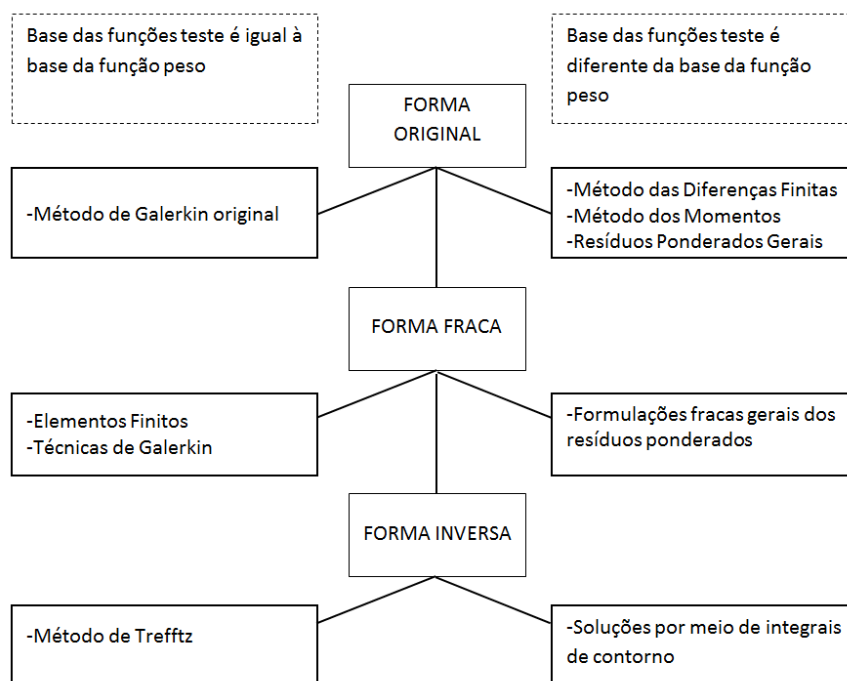


Figura 2.3 Classificação das diferentes técnicas de aproximação (Brebbia, Telles, Wrobel, 1984)

Suponha-se que um determinado corpo esteja em equilíbrio estático sujeito às seguintes condições de contorno:

- i. Condições de contorno essenciais, conhecidas como condição de Dirichlet: $u_i = \bar{u}_i$ em Γ_1
- ii. Condições de contorno naturais, ou condição de Neumann: $p_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i$ em Γ_2

Isto implica que a equação de equilíbrio, que representa a forma forte do PVC, deve ser satisfeita, ou seja:

$$\sigma_{jk'k} + b_j = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.24)$$

Ao se propor uma solução aproximada, a equação acima passa a não ser mais atendida em todos os pontos, levando a um resíduo. O MRP parte da premissa que esse resíduo deve ser minimizado, e para isto, deve-se ortogonalizar o produto escalar envolvendo a função a ser aproximada e a função ponderadora. Tomando u_j^* como função peso, pode-se escrever essa consideração da seguinte maneira:

$$\langle \sigma_{jk'k} + b_j, u_j^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} (\sigma_{jk'k} + b_j) u_j^* d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

Esta forma também é conhecida como forma variacional direta do problema de valor de contorno.

Procedendo à integração por partes uma vez, utilizando a lei constitutiva, ter-se-á:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (2.26)$$

Integrando o primeiro termo por partes novamente resulta:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk'k}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma \quad (2.27)$$

Note-se que as integrais do segundo membro da equação correspondem a integrais apenas na superfície do sólido. Considerando que o contorno está dividido em duas partes Γ_1 e Γ_2 onde atuam as condições prescritas em deslocamento e força de superfície, pode-se reescrever a equação acima, agora com condições de contorno impostas, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk'k}^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega \\ = -\int_{\Gamma_1} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_j^* \bar{u}_j d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_j^* u_j d\Gamma \end{aligned} \quad (2.28)$$

Integrando novamente por partes o primeiro termo do lado esquerdo dessa equação por duas vezes consecutivas chega-se a:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk'k} + b_j) u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_j - u_j) p_j^* d\Gamma \quad (2.29)$$

Esta expressão corresponde a uma forma em resíduos ponderados generalizada, utilizada como ponto de partida para formulação do MEC. Em termos gerais, pode-se observar que a solução aproximada deve ser tal que o resíduo por ela gerado no domínio, ponderada por uma função peso, deve ser igual ao resíduo por ela gerado no contorno, também ponderado pela mesma função peso. Desta maneira considera-se, por exemplo, que a função peso não necessariamente seja homogênea nas condições de contorno.

Uma vez que o ponto de partida ficou evidente, retoma-se a solução fundamental que pode ser escrita inicialmente como segue:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{lj}^* e_l \\ p_j^* &= p_{lj}^* e_l \end{aligned} \quad (2.30)$$

Onde u_{lj}^* , p_{lj}^* são j componentes de deslocamento e força devido a uma carga unitária aplicada na direção l . Pode-se agora retornar à expressão (2.28) (que é equivalente a (2.29)) e utilizar a solução fundamental apresentada em (2.20) como função ponderadora. O primeiro termo da equação fica:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk'k}^* u_j d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^{(i)} e_j u_j d\Omega = -u_j^{(i)} e_j \quad (2.31)$$

Essa manipulação é possível pois a solução fundamental respeita plenamente a equação diferencial de equilíbrio. Logo, $\sigma_{jk'k}^* = -\Delta^{(i)} e_j$.

Na equação(2.31), $u_j^{(i)}$ representa a componente j do deslocamento no ponto i de aplicação da carga unitária. A equação (2.28) pode agora ser escrita em termos de componentes independentes de deslocamento no ponto i .

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma_1} p_{jk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u_{jk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{jk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{jk}^* d\Omega \quad (2.32)$$

Pode-se observar que quando uma carga unitária é aplicada numa direção específica j , os deslocamentos e forças de superfície têm componentes nas duas (ou três) direções enquanto que os termos do tipo $\sigma_{jk'k}$ são diferentes de zero apenas ao longo da direção j , apontam Brebbia e Dominguez (1989).

A equação (2.32) pode ser escrita de maneira mais compacta como:

$$u_j^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_k d\Omega \quad (2.33)$$

Esta equação é conhecida como identidade Somigliana (devido ao matemático italiano Carlo Somigliana) e permite encontrar os deslocamentos em qualquer ponto do domínio desde que se conheçam os deslocamentos e forças de superfície dos pontos de contorno, as forças de domínio atuantes e a solução fundamental.

Observações adicionais podem ser feitas com relação à equação (2.26), aqui reproduzida por conveniência da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (2.34)$$

Se a função ponderadora for tomada como um campo de deslocamentos virtuais admissíveis, compatíveis e, portanto integrante do espaço solução, a equação acima pode ser interpretada da seguinte maneira: o membro esquerdo corresponde ao trabalho das forças internas gerado pelo deslocamento virtual u_j^* . O membro direito significa o trabalho que as forças externas exercem sobre esse mesmo campo de deslocamento. Assim a equação (2.34) assume o caráter físico de um importante princípio da Mecânica, o princípio dos trabalhos virtuais (PTV).

No tocante da equação (2.27), lembrando que $\sigma_{jk}^* = -b_j^*$, pode-se escrevê-la da seguinte maneira:

$$-\int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma \quad (2.35)$$

Ou rearranjando os termos,

$$\int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (2.36)$$

Adotando a correspondência de que o corpo esteja em equilíbrio e sujeito a dois conjuntos de forças $\{b_j^*, p_j^*\}$ e $\{b_j, p_j\}$, que produzem respectivamente os deslocamentos u_j^* e u_j , a equação (2.36) mostra que o trabalho das forças do primeiro conjunto atuando sobre os deslocamentos do segundo é igual ao trabalho das forças do segundo conjunto sobre os deslocamentos do primeiro em cada ponto. Este enunciado constitui outro princípio geral da Mecânica e é conhecido como teorema dos trabalhos recíprocos ou teorema de Betti.

Esses dois princípios que foram obtidos do mesmo ponto de partida, que foi a forma variacional direta, podem ser tomados também como pontos iniciais alternativos para a formulação do MEC.

2.4 PONTOS NO CONTORNO

A identidade de Somigliana fornece o deslocamento em qualquer ponto desde que se conheça u_k e p_k em todo o contorno. Deste modo para calcular os deslocamentos internamente é necessário que primeiro se resolva o problema. Entretanto essa identidade, que vale para todos os pontos do domínio e contorno, pode ser modificada para ser aplicada em diferentes pontos do contorno para produzir um sistema de equações que uma vez resolvido fornece os valores do contorno.

Quando o ponto fonte é tomado sobre o contorno, deve-se tratar a singularidade que surge da solução fundamental (quando $r \rightarrow 0$) para efetuar a integração. Para estudar os efeitos da singularidade em problemas 2D, pode-se envolver o ponto fonte com uma região do domínio circular de raio ϵ e centro em 'i' e então avaliar o que ocorre com as expressões quando o raio tende a zero (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989). A Figura 2.4 elucida a situação.

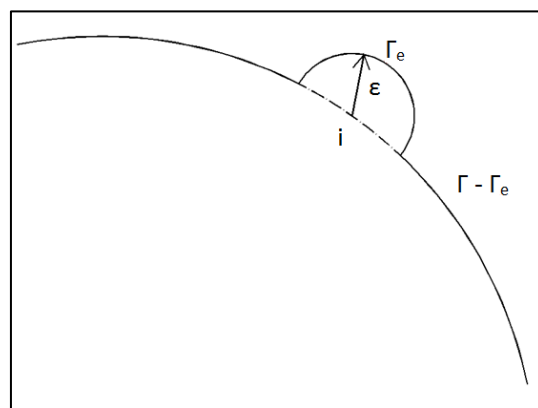


Figura 2.4 Ponto de colocação no contorno

Na intenção de analisar o que ocorre com a identidade de Somigliana, passa-se a avaliar a equação (2.33) termo a termo. Considerando primeiramente a integral:

$$\int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{jk}^* p_k d\Gamma \quad (2.37)$$

A primeira integral do segundo membro da equação acima se torna simplesmente a integral ao longo de todo o contorno Γ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Quanto a segunda integral pode-se fazer:

$$p_k^{(i)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{jk}^* d\Gamma \quad (2.38)$$

Uma vez que a singularidade de u^* é da ordem de $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ e o contorno de integração produz ε , pode-se concluir que quando o conjunto tender a zero, o limite é nulo, pois:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) \xrightarrow{l' Hopital} = 0 \quad (2.39)$$

Em outras palavras a integral investigada não é afetada pela singularidade em 'i'. Logo,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* d\Gamma = 0 \quad (2.40)$$

Quanto à integral do primeiro membro da identidade de Somigliana, vem:

$$\int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{jk}^* u_k d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{jk}^* u_k d\Gamma \quad (2.41)$$

Novamente a primeira integral do segundo membro torna-se uma integral ao longo de todo o contorno Γ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Quanto a segunda integral, existe uma singularidade da ordem de $\frac{1}{\varepsilon}$ em p^* enquanto que o contorno produz ε , logo o limite resultante não é nulo e precisa ser avaliado.

Pode ser demonstrado que para superfícies suaves o resultado do limite é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{jk}^* u_k d\Gamma = -\frac{1}{2} \delta_{jk} u_k^{(i)} = -\frac{1}{2} u_j^{(i)} \quad (2.42)$$

O resultado da equação (2.41) fica:

$$\int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_j^{(i)} \quad (2.43)$$

Em que a integral em Γ é definida no sentido do valor principal de Cauchy (VPC).

A expressão final da identidade de Somigliana agora escrita em termos de pontos exclusivamente sobre o contorno passa a ser:

$$c_{jk}^{(i)} u_k^{(i)} + \int_{\Gamma} p_{jk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{jk}^* b_k d\Omega \quad (2.44)$$

Onde as integrais devem ser calculadas no sentido do VPC, e quando a superfície for suave no ponto 'i', então $c_{jk}^{(i)} = \frac{1}{2} \delta_{jk}$. Caso a superfície não seja suave no ponto de colocação, o valor do limite (2.42) será um resultado diferente e, em geral, de difícil generalização quanto se trata de problemas tridimensionais. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.5 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A equação (2.44) envolve termos definidos continuamente no contorno de interesse. O MEC adota, para resolver a equação integral numericamente, uma discretização do contorno em um número finito de elementos. Para cada elemento, tanto os deslocamentos quanto forças de superfície são escritos em função de valores nodais. Dessa maneira, ao aplicar a equação (2.44) para cada nó do contorno, o que se obtém é um sistema linear algébrico de equações. Uma vez que as condições de contorno são aplicadas ao sistema, pode-se obter a resposta única que contém todos os valores incógnitos e assim, a solução aproximada no contorno é encontrada.

Neste ponto, torna-se conveniente trabalhar com matrizes em vez e notação indicial. Assim, podem-se definir as funções \mathbf{u} e \mathbf{p} válidas para cada elemento 'j'.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \boldsymbol{\phi} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{p} &= \boldsymbol{\phi} \mathbf{p}^j \end{aligned} \quad (2.45)$$

Onde \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são vetores de deslocamento e força de superfície nodais de dimensão 2Q em que Q é o número de nós do elemento. Os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} são deslocamentos e forças de superfície em qualquer ponto do elemento Γ_j .

A matriz de funções de forma que aparece na equação (2.45) tem dimensão 2x2Q sendo dada por:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_Q & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_Q \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

As forças de domínio em qualquer ponto de Ω podem ser expressas em forma vetorial sendo:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Os coeficientes da solução fundamental, que são expressos em forma indicial pela equação (2.23), podem ser agrupados em forma de matriz da seguinte maneira:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Nessa matriz, os coeficientes p_{lk}^* , são as forças de superfície na direção k devido a uma força unitária aplicada no ponto fonte ' i ' na direção ' l '.

De maneira análoga:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Para essa matriz, os coeficientes u_{lk}^* , são os deslocamentos na direção k devido a uma força unitária aplicada em ' i ' na direção ' l '.

A partir dessas definições a equação integral no contorno (2.44) pode ser escrita como:

$$\mathbf{c}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad (2.50)$$

Em que para contornos suaves:

$$\mathbf{c}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Levando em conta a discretização no contorno a equação integral fica:

$$\mathbf{c}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\phi} d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi} d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\} \quad (2.52)$$

Nota-se que a soma de $j=1$ até NE indica a soma sobre todos os NE elementos do contorno enquanto que, Γ_j representa o contorno do elemento ' j '.

De modo geral quando existem forças de domínio pode-se calcular a integral de domínio por meio de células de integração. Existem alguns casos que permitem a transformação dessa integral de domínio em uma de contorno, o que evitaria o uso das células.

A equação (2.52) é usualmente calculada numericamente devido às dificuldades de solução analítica. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.6 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A transformação de coordenadas é feita por meio do Jacobiano, cuja representação geométrica é mostrada na Figura 2.5, que para o sistema bidimensional em questão pode ser obtido da maneira como segue.

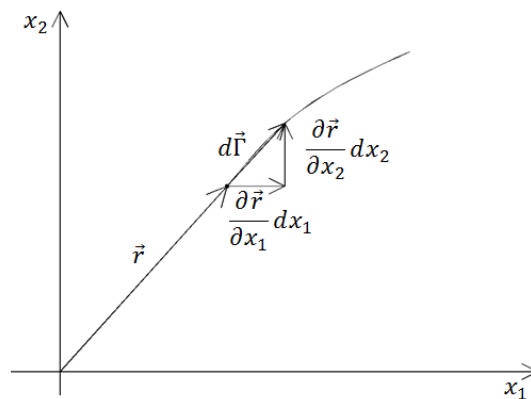


Figura 2.5 Interpretação geométrica do Jacobiano (Brebbia, Telles, Wrobel, 1984)

Da figura tem-se:

$$d\Gamma^2 = \left[\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi^2 \quad (2.53)$$

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2} = \frac{d\Gamma}{d\xi} \quad (2.54)$$

$$d\Gamma = |J| d\xi \quad (2.55)$$

Para calcular as derivadas de x_l e x_2 em relação a ξ basta fazer o uso das mesmas funções interpoladoras dos deslocamentos e forças de superfície:

$$x_l(\xi) = \phi_k(\xi)x_l^k \quad (2.56)$$

$$\frac{d}{d\xi} x_l(\xi) = \left[\frac{d}{d\xi} \phi_k(\xi) \right] x_l^k \quad (2.57)$$

Onde x_l^k são as coordenadas x_l do nó k , enquanto x_l é a coordenada em qualquer ponto do elemento em questão.

Assim a equação (2.52) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\phi} |J| d\xi \right\} \mathbf{u}^j \\ = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi} |J| d\xi \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} |L| d\xi_1 d\xi_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Onde $|L|$ representa outro Jacobiano a ser definido no domínio.

Essa transformação permite a avaliação das integrais dos elementos Γ_j numericamente por meio da quadratura de Gauss fazendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l (\mathbf{p}^* \boldsymbol{\phi})_k |J| w_k \right\} \mathbf{u}^j \\ = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^l (\mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi})_k |J| w_k \right\} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \sum_{p=1}^r (\mathbf{u}^* \mathbf{b} |L|)_p w_p \right\} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Onde l é o número de pontos de integração no contorno, w_k são os pesos de Gauss nesses pontos, r é o número de pontos de integração nas células e w_p são os respectivos pesos. As funções $\mathbf{p}^* \boldsymbol{\phi}$, $\mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi}$ e $\mathbf{u}^* \mathbf{b}$ devem ser avaliadas nos pontos de integração. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.7 SISTEMA DE EQUAÇÕES

A equação (2.59) ou sua forma integral (2.52) corresponde a um nó particular 'i' e uma vez integrada pode ser escrita como:

$$\mathbf{c}^{(i)} \mathbf{u}^{(i)} + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \quad (2.60)$$

Onde N é o número de nós. As matrizes $\hat{\mathbf{H}}^{ij}$ e \mathbf{G}^{ij} são conhecidas como matrizes de influência ambas de ordem $2 \times 2N$ (para problemas planos) e são dadas por:

$$\hat{\mathbf{H}}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \phi d\Gamma = \sum_{k=1}^l (\mathbf{p}^* \phi)_k |J| w_k \quad (2.61)$$

$$\mathbf{G}^{ij} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \phi d\Gamma = \sum_{k=1}^l (\mathbf{u}^* \phi)_k |J| w_k \quad (2.62)$$

Ao criar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{ij} &= \hat{\mathbf{H}}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \mathbf{H}^{ij} &= \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^{(i)} & \text{se } i = j \end{aligned} \quad (2.63)$$

a equação (2.60), que representa a contribuição do nó 'i', pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \quad (2.64)$$

Ao realizar a soma das contribuições de todos os nós 'i', o resultado pode ser agrupado em forma matricial resultando no seguinte sistema de equações lineares global:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{P} + \mathbf{B} \quad (2.65)$$

Nota-se que $\mathbf{c}^{(i)}$ é uma série de matrizes de ordem 2×2 dispostas ao longo da diagonal principal de \mathbf{H} .

Os vetores \mathbf{U} e \mathbf{P} representam todos os valores de deslocamentos e forças de superfície antes de aplicar as condições de contorno. Essas condições podem ser introduzidas rearranjando as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , trocando convenientemente suas colunas, de modo que todos os valores desconhecidos sejam colocados no vetor \mathbf{X} no membro esquerdo. Assim chega-se ao sistema final:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.66)$$

Nota-se que \mathbf{B} foi incorporado a \mathbf{F} . Resolvendo o sistema linear acima os valores de contorno ficam totalmente determinados. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.8 PONTOS INTERNOS

De posse dos valores dos deslocamentos e forças de superfície ao longo de todo o contorno, pode-se utilizar a expressão de Somigliana para encontrar o deslocamento em qualquer ponto interno. Sua formulação discreta é dada por:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\phi} d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \boldsymbol{\phi} d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j + \sum_{s=1}^M \left\{ \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\} \quad (2.67)$$

Nessa equação, Γ_j representa o contorno correspondente ao elemento ' j ' enquanto ' i ' é um ponto interno. Pode-se ainda escrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \quad (2.68)$$

Os termos \mathbf{H}^{ij} e \mathbf{G}^{ij} consistem em integrais ao longo dos elementos. Essas integrais não contem nenhuma singularidade e podem ser calculadas usando integração numérica. Termos como \mathbf{B}^{is} , entretanto contém singularidade (pois são integrais de domínio e ' i ' agora pertence ao domínio) e necessitam de cuidado especial.

Para meios isotrópicos a tensão interna pode ser calculada diferenciando os deslocamentos em pontos internos e introduzindo a deformação correspondente na relação tensão-deformação.

$$\sigma_{mj} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{mk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right) \quad (2.69)$$

Depois de realizar as derivações da equação integral chega-se a:

$$\begin{aligned}
\sigma_{mj} = & \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{mj} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_m} \right) \right] p_k d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{mj} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_m} \right) \right] u_k d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \left[\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{mj} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \left(\frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_m} \right) \right] u_k d\Omega
\end{aligned} \quad (2.70)$$

Todas as derivadas são tomadas nos pontos internos considerados, que correspondem a pontos de colocação da solução fundamental. Tomando as derivadas correspondentes da solução fundamental, a equação acima pode ser escrita como:

$$\sigma_{mj} = \int_{\Gamma} D_{kmj} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kmj} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kmj} b_k d\Omega \quad (2.71)$$

Em que as componentes dos tensores de terceira ordem D_{kij} e S_{kij} no espaço bidimensional são:

$$D_{kmj} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{km}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,m} - \delta_{mj}r_{,k}) + 2r_{,m}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}
S_{kmj} = & \frac{2\nu}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{mj}r_{,k} + \nu(\delta_{mk}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,m}) - 4r_{,m}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \\
& + 2\nu(n_m r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,m}r_{,k}) \\
& \left. + (1-2\nu)(2n_k r_{,m}r_{,j} + n_j \delta_{mk} + n_m \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{mj} \right\}
\end{aligned} \quad (2.73)$$

A equação (2.71) pode ser discretizada em uma soma finita de elementos sobre o contorno assumindo as correspondentes funções aproximadoras para u_k e p_k .

Os valores obtidos para tensões internas usando a formulação acima são em geral mais precisos que aqueles obtidos por outros métodos numéricos com discretização similar. O mesmo pode ser dito dos deslocamentos internos calculados por (2.67). Entretanto, quando o ponto interno situa-se muito próximo do contorno deve-se utilizar técnicas especiais de integração para manter o resultado preciso, devido ao pico de singularidade da solução fundamental. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.9 DESCONTINUIDADE EM PONTOS DE CANTO

Quando um nó é localizado em um ponto onde o contorno não é suave (no caso bidimensional, seria um ponto de canto ou encontros de lados com angulosidades diferentes) uma descontinuidade de forças de superfície ocorre nesse ponto.

Uma maneira de contornar esse problema é utilizar elementos descontínuos, que será adotado neste trabalho, que consiste em deslocar ao longo do elemento, os nós que encontram ou deveriam encontrar nos cantos. A Figura 2.6 ilustra a situação.

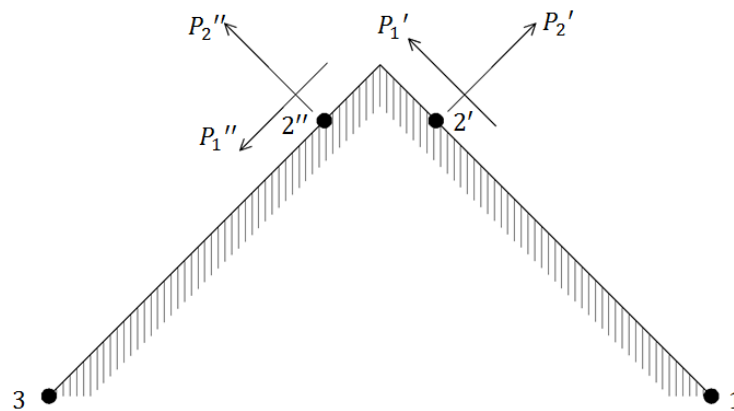


Figura 2.6 Esquema para ponto de canto (Brebbia, Telles, Wrobel, 1984)

Essa estratégia permite a determinação das forças de superfície utilizando o procedimento comum e possui a vantagem de melhor representar cantos com concentração de tensões. Quando usado para modelar singularidades com elementos de contorno, como em mecânica da fratura, por exemplo, os resultados convergem bem para a solução. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.10 TRATAMENTO DE INTEGRAIS NO DOMÍNIO

As integrais de domínio são muito importantes em elementos de contorno, pois são elas que representam os efeitos de forças de campo como força gravitacional (caso do peso próprio) e forças térmicas por exemplo. Mas, além disso, por meio delas pode-se representar os efeitos de não linearidades como o caso a ser abordado pelo presente trabalho.

2.10.1 Consideração das tensões iniciais

Em certos problemas de engenharia existe a presença de campos de tensão ou deformação antes da atuação do carregamento externo. Essas tensões (correspondentes deformações) são chamadas de tensões iniciais e podem ser consideradas nas formulações do MEC como descreve-se a seguir.

Sendo:

σ_{mj} tensão elástica

σ_{mj}^t tensão total atuante

σ_{mj}^0 tensão inicial

Pode-se escrever que a tensão elástica é:

$$\sigma_{mj}^t = \sigma_{mj} - \sigma_{mj}^0 \quad (2.74)$$

Escrevendo a equação inicial, levando em consideração a solução fundamental agindo na direção 'l', pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^t + b_k) u_{lk}^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_{lk}^* d\Gamma \quad (2.75)$$

Integrando por partes uma vez, vem:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^t \varepsilon_{ljk}^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{lk}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_{lk}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nota-se que a integração por partes deve ser feita sobre σ_{jk}^t e não σ_{jk} pois o campo de tensões atuante deve estar relacionado com os deslocamentos totais.

Substituindo a equação (2.74) pode-se fazer:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{ljk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ljk}^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{lk}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_{lk}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2.77)$$

Utilizando as propriedades de simetria e integrando por partes novamente chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ijk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{ik}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_{ik}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2.78)$$

Substituindo a solução fundamental em (2.78) fica:

$$c_{ik}^{(i)} u_k^{(i)} = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\Omega \quad (2.79)$$

Isto mostra que as tensões iniciais (e similarmente deformações iniciais) podem ser tratadas de maneira similar às forças de domínio, b_k , embora geralmente seja difícil a transformação de integrais de σ^0 no domínio em integrais de contorno. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)

2.11 MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

A solução fundamental de Kelvin apresenta tipos distintos de singularidades, que faz com que a função não tenha valor finito sobre os pontos fonte, o que em princípio torna-se um problema ao realizar a integral de linha, no sentido de Riemann, sobre o elemento. Entretanto, a existência dessa singularidade pode ser contornada tomando partido dos preceitos de regularização de integrais.

Uma maneira de avaliação analítica de integrais singulares, que aparece correntemente nas formulações MEC consiste em realizar um processo limite da seguinte maneira:

Seja uma integral imprópria

$$I = \int_A^B f(x) dx \quad (2.80)$$

cujo integrando se torna infinito para um valor a no intervalo de integração,

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty \quad (2.81)$$

A integral (2.80) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\int_A^B f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_A^{a-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^B f(x)dx + \theta \quad (2.82)$$

A esse limite é dado o nome de Valor Principal de Cauchy (VPC) e a integral é designada por Integral no sentido de Cauchy (KREYSZIG, 2006). O termo θ é resultado do estudo limite sobre o ponto de singularidade.

Segundo Aliabadi (2002), uma clássica maneira de tratar núcleos de integração singulares consiste em subtrair o ponto de singularidade dando origem a um novo núcleo regular e a uma nova integral, ainda singular:

Singular		Regular		Singular
----------	--	---------	--	----------

$$\int_{-1}^1 F(x)dx = \int_{-1}^1 [F(x) - F^*(x)]dx + \int_{-1}^1 F^*(x)dx \quad (2.83)$$

Nessa equação, $F^*(x)$ necessita ter a mesma singularidade de $F(x)$ porém, de uma forma mais simples, pode ser integrada analiticamente. Deste modo o núcleo $[F(x) - F^*(x)]$ pode ser calculado computacionalmente por meio de quadraturas numéricas. A essa técnica dá-se o nome Método de Subtração da Singularidade (MSS).

Segundo este conceito, Kzam (2009) realiza a subtração das singularidades presentes nas soluções fundamentais, de ordens como $\mathcal{O}(\ln(r))$, $\mathcal{O}(r^{-1})$ e $\mathcal{O}(r^{-2})$, em que as integrais singulares remanescentes são avaliadas sobre um elemento de geometria reta tangente no ponto fonte singular. Esse procedimento, que foi utilizado no presente trabalho, é descrito a seguir.

Suponha-se um elemento curvo Γ de ordem superior. Pretende-se calcular uma integral imprópria cujo ponto de singularidade pertence ao elemento. O ponto de singularidade (ponto fonte) será designado por sua coordenada adimensional ξ_0 .

Em termos gerais, a coordenada cartesiana de qualquer ponto do elemento pode ser escrita de duas maneiras. Uma delas já foi utilizada na definição do Jacobiano, e leva em consideração as coordenadas nodais do elemento.

$$x_i(\xi) = \phi_i(\xi)x_i^l \quad (2.84)$$

A outra maneira seria tomar partido dos preceitos de continuidade e fazer uma expansão em série de Taylor nas vizinhanças do ponto fonte (singular). Tomando $\varepsilon = \xi - \xi_0$ como representante do raio da expansão enquanto que, $o(\cdot)$ os termos de ordem superior, vem:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n) \quad (2.85)$$

Desconsiderando os termos de ordem superior, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon \quad (2.86)$$

que segundo a Geometria Analítica representa a equação de uma reta, tangente ao elemento curvo exatamente no ponto fonte. Como o intervalo de variação para a coordenada adimensional é $[-1,+1]$ pode-se construir nesta reta um elemento auxiliar de dimensões finitas, conforme ilustra a Figura 2.7.

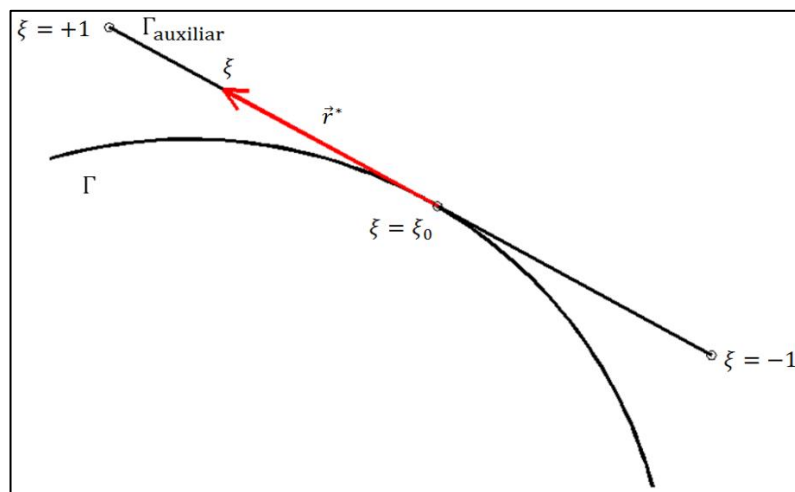


Figura 2.7 Configuração do elemento reto auxiliar

Sobre o elemento auxiliar, a posição do ponto de coordenada ξ em relação ao ponto de tangência fica definida pelo vetor \vec{r}^* , da seguinte maneira:

$$\vec{r}^* = r_i^*(\xi)e_i \quad (2.87)$$

sendo e_i versores cartesianos e r_i as componentes do vetor \vec{r} .

Como a equação (2.86) vale para o elemento reto, pode-se fazer:

$$x_i(\xi) - x_i(\xi_0) = x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon = r_i^*(\xi) \quad (2.88)$$

A distância de qualquer ponto de coordenada ξ ao ponto de singularidade fica denotada por:

$$r^* = |\vec{r}^*| = \sqrt{r_i^*(\xi)r_i^*(\xi)} = \sqrt{x_{i,\xi}(\xi_0) x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon^2} \quad (2.89)$$

$$r^* = J(\xi_0)|\varepsilon| \quad (2.90)$$

A equação acima representa o raio calculado sobre o elemento auxiliar e tem fundamental importância na subtração da singularidade, pois no limite, com r^* tendendo a zero, os valores funcionais calculados sobre o elemento curvo se confundem com aqueles calculados sobre o elemento reto, logo se subtraídos, resultam zero.

Desconsiderando os efeitos das forças de domínio, a equação integral de contorno (2.44) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$c_{lk}^{(i)}u_k^{(i)} + \oint_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \quad (2.91)$$

O traço presente na integral de linha simboliza a presença de um núcleo singular que pode ser tratado segundo senso de Cauchy. Nessas integrais as singularidades são de ordem $\mathcal{O}(\ln(r))$ e $\mathcal{O}(r^{-1})$ conforme será mostrado.

Toma-se o termo referente a u^* na equação (2.91), restrito ao contorno que contenha a singularidade, Γ_j . Procedendo à transformação de coordenadas, de cartesianas para adimensionais, e substituindo a aproximação referente às forças de superfície, fica:

$$\oint_{\Gamma_j} u_{lk}^* p_k d\Gamma = \left[\int_{-1}^{+1} u_{lk}^*(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi) J_j(\xi) d\xi \right] p_k^{mj} \quad (2.92)$$

Aqui, as variáveis dependentes de ξ foram evidenciadas por clareza.

Substituindo u_{lk}^* na equação acima resulta em:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} u_{ik}^* p_k d\Gamma = & \left[\int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m(\xi) J_j(\xi) \delta_{lk} d\xi \right. \\ & \left. + \int_{-1}^{+1} u_2 \phi_i(\xi) r_{,l} r_{,k} J_j(\xi) d\xi \right] p_k^{mj} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Nessa equação, $u_1 = -(3 - 4\nu)/[8\pi\mu(1 - \nu)]$ e $u_2 = 1/[8\pi\mu(1 - \nu)]$ são constantes definidas de modo a facilitar a notação.

O termo integral contendo a constante u_2 é regular e pode ser integrado numericamente. Entretanto, o termo que contém u_1 apresenta singularidade logarítmica e por esse motivo deve sofrer uma regularização por meio do MSS. Para tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m(\xi) J_j(\xi) \delta_{lk} d\xi = & \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m(\xi) J_j(\xi) \delta_{lk} d\xi - \\ & \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_m^*(\xi) J_j(\xi_0) \delta_{lk} d\xi + \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_m^*(\xi) J_j(\xi_0) \delta_{lk} d\xi \end{aligned} \quad (2.94)$$

Em que $\phi_m^*(\xi) = \phi_i(\xi_0) + \phi_{m,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n)$ é uma expansão em série das funções de forma nas vizinhanças do ponto de singularidade. Para singularidades da ordem $\mathcal{O}(\ln(r))$ e $\mathcal{O}(r^{-1})$, apenas o termo constante da expansão é suficiente para garantir a regularização. O termo $r^* = J_j(\xi_0)|\xi - \xi_0|$ é o raio definido sobre o elemento auxiliar conforme já definido. Pode-se notar a semelhança da natureza da singularidade dos termos integrais adicionados e ainda, tal inserção não altera a igualdade, mas sim, regulariza o núcleo singular. Assim a equação (2.94) fica:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m(\xi) J_j(\xi) \delta_{lk} d\xi = & \int_{-1}^{+1} u_1 \{\ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m(\xi) J_j(\xi) \\ & - \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi(\xi_0) J_j(\xi_0)\} \delta_{lk} d\xi + \int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi_m^*(\xi) J_j(\xi_0) \delta_{lk} d\xi \end{aligned} \quad (2.95)$$

Pode ser verificado que o termo entre chaves na expressão acima possui valor limitado, logo regular, no limite quando $\xi \rightarrow \xi_0$ (isso implica que $r \rightarrow 0$ e $r^* \rightarrow 0$, simultaneamente). Quanto a ultima integral que ainda permanece singular, procede-se a integração no sentido de Cauchy resultando em:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} u_1 \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi(\xi_0) J_j(\xi_0) \delta_{lk} d\xi \\
= u_1 \phi(\xi_0) J_j(\xi_0) \delta_{lk} \{ (1 + \xi_0) \ln[(1 + \xi_0) J_j(\xi_0)] \\
+ (1 - \xi_0) \ln[(1 - \xi_0) J_j(\xi_0)] - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)] \}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

A expressão final, que pode ser implementada computacionalmente, para o cálculo do termo referente a u^* da equação (2.91) é dado por:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} u_{ik}^* p_k d\Gamma = \left\{ \int_{-1}^{+1} u_1 \{ \ln[r(\xi_0, \xi)] \phi_m J_j(\xi) - \ln[r^*(\xi_0, \xi)] \phi(\xi_0) J_j(\xi_0) \} \delta_{lk} d\xi \right. \\
+ \int_{-1}^{+1} u_2 \phi_m(\xi) r_{,l} r_{,k} J_j(\xi) d\xi \\
+ u_1 \phi(\xi_0) J_j(\xi_0) \delta_{lk} \{ (1 + \xi_0) \ln[(1 + \xi_0) J_j(\xi_0)] \\
+ (1 - \xi_0) \ln[(1 - \xi_0) J_j(\xi_0)] - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)] \} \} p_k^{mj}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Procedendo de maneira semelhante o termo referente a p^* fica:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_j} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \left\{ \int_{-1}^1 \left(\frac{\bar{T}_{lk}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} \phi_m(\xi) J_j(\xi) - \frac{\bar{T}_{lk}(\xi_0)}{|\xi_0 - \xi|} \phi_m(\xi_0) \right) d\xi \right. \\
+ \left. \phi_m(\xi_0) \bar{T}_{lk}(\xi_0) [\ln(1 - \xi_0) - \ln(1 + \xi_0)] \right\} u_k^{mj}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Em que,

$$\bar{T}_{lk}(\xi_0, \xi) = T_1(r_m \delta_{lk}) + T_2(r_m r_{,l} r_{,k}) + T_3(r_{,k} n_l - r_{,l} n_k)$$

$$\bar{T}_{lk}(\xi_0) = T_3(r_{,k}(\xi_0) n_l(\xi_0) - r_{,l}(\xi_0) n_k(\xi_0))$$

$$T_1 = -\frac{(1 - 2\nu)}{4\pi(1 - \nu)}$$

$$T_2 = -\frac{2}{4\pi(1 - \nu)}$$

$$T_3 = -T_1$$

Alguns cuidados devem ser tomados caso se utilize elementos contínuos, pois nesse caso $\xi_0 = \pm 1$. Para tanto, basta eliminar a expressão que conteria o logaritmo nulo, pois esse é o resultado obtido ao ser realizado novo limite pelo senso de Cauchy.

As expressões (2.97) e (2.98) permitem o uso de quadraturas desde que se tenha a precaução de escolher um número de pontos de integração tal que nenhum ponto de integração coincida com o ponto fonte, pois nesse caso ter-se-ia uma situação de $\xi = \xi_0 \neq \pm 1$, o que anularia os raios r e r^* gerando um mau condicionamento do sistema de equações.

3 MECÂNICA DA FRATURA APLICADA AO CONCRETO

Em breves palavras pode-se dizer que a Mecânica da Fratura é o ramo da Mecânica dos Materiais que trata do comportamento mecânico de meios fraturados, analisando os mecanismos de falha, ocorrência, estabilidade e propagação de fissuras no domínio de interesse.

Os mecanismos que causam as falhas nos materiais são associados à natureza do próprio material ou às suas condições de utilização. Pode-se dizer que essencialmente dois mecanismos levam os materiais à falha sendo eles o de ruptura frágil e o de ruptura dúctil. A maneira (macroscopicamente) utilizada para identificar esse comportamento é a realização de um ensaio de tração (ou compressão) uniaxial. Nesse ensaio caso a ruptura do material se dê de forma brusca, diz-se que o material é frágil. Caso a ruptura ocorra precedida pela manifestação de apreciáveis deformações plásticas, diz-se que o material é dúctil.

O material tratado pelo presente trabalho é o concreto, que possui estrutura heterogênea constituída pela mistura entre materiais inertes (agregados), aglomerante (normalmente o cimento e adições) e água. Suas fases internas podem ser divididas didaticamente em: matriz pasta, o agregado e a zona de transição de interface. Esta última é caracterizada por uma região de menor resistência devido à alta concentração de vazios que se formam devido ao processo de exudação interna. Normalmente o uso de aditivos redutores de água pode contribuir para inibição da exudação e conseqüentemente aumento da resistência global a compressão (MEHTA; MONTEIRO, 2008).

Além da zona de transição, o material como um todo apresenta descontinuidades como poros, ar incorporado ou ainda fissuras devido a processos de retração e secagem, que são inerentes ao material e assim estão presentes mesmo antes da estrutura sofrer qualquer solicitação mecânica.

Somando-se à natureza fraturada do material, que seria um motivo coerente para sua aplicação, os conceitos da Mecânica da Fratura conseguem explicar com base em sólidos princípios físicos vários comportamentos apresentados pelo concreto, que anteriormente eram estabelecidos empiricamente. Nos próximos itens alguns aspectos frequentemente observados serão sucintamente comentados à luz dos olhos da Mecânica da Fratura.

3.1 COMPORTAMENTO DO CONCRETO À TRAÇÃO

O comportamento típico do concreto simples em um ensaio de tração direta, sob deformação controlada, é mostrado na Figura 3.1. O material inicialmente apresenta uma resposta aproximadamente elástica linear até atingir o ponto A. Em seguida o material desvia-se ligeiramente do comportamento linear até que atinge a carga máxima (ponto B) chamada de resistência a tração do concreto (f_t). Em seguida nota-se um aumento de deformação seguido por uma diminuição da capacidade resistente do material (região BCD). Essa característica representada pelo trecho pós-pico é chamada de amolecimento ou ‘*softening*’. Os materiais que apresentam considerável encruamento no regime pré-pico e amolecimento no regime pós-pico podem ser chamados de materiais quase frágeis, que tem como exemplo além do concreto, algumas rochas, cerâmicas e também materiais compósitos.

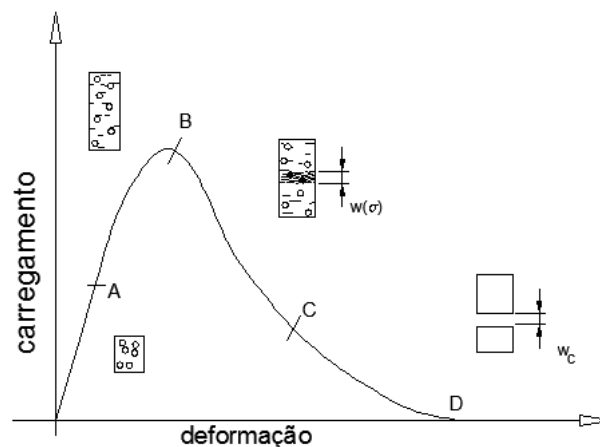


Figura 3.1 Resposta típica do concreto sob ensaio de tração direta (KARIHALOO, 1995)

A explicação para o amolecimento dada pela Mecânica da Fratura baseada no conceito de localização das microfissuras, sua propagação e ainda o intertravamento dos agregados graúdos. De maneira geral pode-se dizer que até o ponto A as fissuras, naturalmente presentes, apresentam influência desprezível no comportamento global. Do ponto A em diante as fissuras presentes começam a se estender tanto na zona de transição quanto na matriz pasta

de cimento. No trecho de ramo descendente as fissuras se conectam formando microfissuras, que tem caráter localizado. Ao processo de união entre fissuras dá-se o nome *coalescência*. Com o avanço da deformação a microfissura propaga e leva à ruptura física do corpo de concreto (KARIHALOO,1995).

3.2 COMPORTAMENTO DO CONCRETO A COMPRESSÃO

O comportamento do concreto simples quando solicitado por forças compressivas, sob controle de deformação, é similar ao item anterior. Observa-se uma forte influência das fissuras internas na resistência global do material. O diagrama tensão-deformação típico de um ensaio de compressão centrada é mostrado na Figura 3.2.

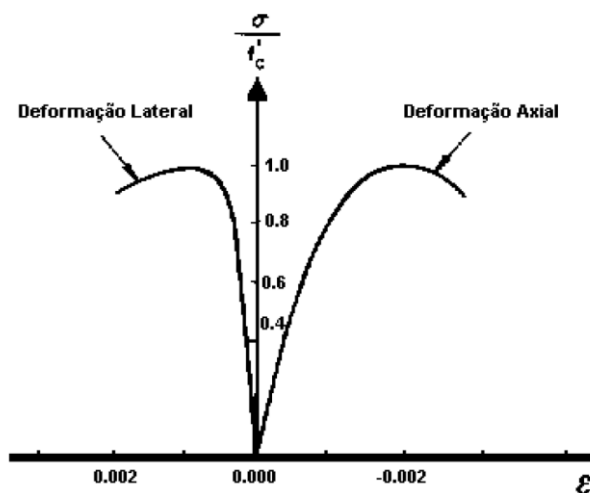


Figura 3.2 Diagrama tensão x deformação típico do concreto (CHEN & HAN, 1988)

Simplificadamente pode-se dizer que até 30% da resistência à compressão axial, f'_c , tem-se um comportamento predominantemente elástico linear, pois cargas nessa faixa não afetam significativamente as microfissuras presentes na zona de transição.

Para faixa de tensões no intervalo entre 30% a 50% de f'_c , inicia-se a extensão das fissuras presentes na zona de transição devido à concentração de tensões nas extremidades das fissuras. Diz-se que esse trecho apresenta propagação *estável* (ou regime *subcrítico*) de

fissuras, pois mantido o carregamento constante não ocorre propagação espontânea das fissuras.

No intervalo de carregamento entre 50% a 75% de f'_c , começa a ocorrer extensão das microfissuras presentes na matriz aglomerante e, aliada à rápida propagação das fissuras da zona de transição, tende a tornar o sistema instável.

A propagação das fissuras no concreto torna-se instável para carregamentos superiores a 75% de f'_c . Nesse intervalo ocorre a conexão entre as fissuras da zona de transição e da matriz aglomerante e rapidamente observa-se o colapso da peça. O regime de propagação é dito *instável* (ou *crítico*) quando ocorre propagação das fissuras, mesmo sem aumento da carga externa.

O regime subcrítico geralmente é observado em materiais de comportamento dúctil ou em elementos estruturais que apresentem elevados níveis de plastificação na ponta da fissura, a exemplo de elementos delgados e das chapas finas. Ocorre também em materiais quase frágeis uma vez ultrapassado o limite de elasticidade e antes da carga última. A *carga crítica* é considerada o valor do carregamento que dá início ao processo de propagação crítica. Esse regime é característico de materiais frágeis como, por exemplo, o vidro e metais com alto teor de carbono. No entanto está presente também em materiais quase frágeis.

Em 1960, Rusch mostrou que se o concreto fosse submetido a carregamentos superiores a esse valor (cerca de 75% de f'_c), mesmo que mantido constante, o material seria levado à ruína com o passar do tempo. Explica-se essa ocorrência com base na propagação instável de fissuras uma vez ultrapassada a carga crítica do material. Esse efeito ficou conhecido como efeito Rusch e atualmente é levado em conta nos códigos normativos de dimensionamento (MEHTA; MONTEIRO, 2008).

3.3 COMPORTAMENTO DO CONCRETO SUJEITO A CARREGAMENTOS CÍCLICOS

Constata-se que o carregamento repetido ou cíclico tem efeito considerável sobre a resistência do concreto somente quando as solicitações superam cerca de 50% de f'_c . O

comportamento típico do concreto simples submetido a um carregamento de compressão cíclico é mostrado na Figura 3.3.

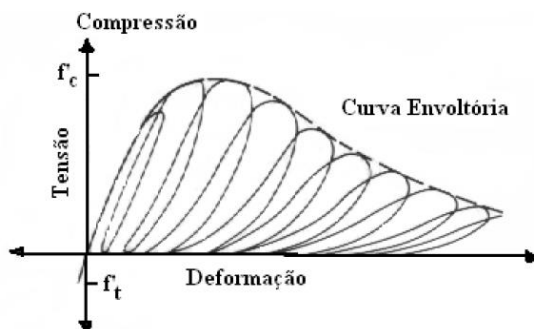


Figura 3.3 Resposta típica ao carregamento compressivo uniaxial cíclico (MEHTA e MONTEIRO, 2008)

Para carregamentos cíclicos com tensões no intervalo de 50% a 75% de f'_c constata-se uma degradação progressiva da rigidez (módulo de elasticidade e resistência) que pode ser atribuída ao contínuo processo de fissuração tanto na zona de transição quanto na matriz aglomerante.

Conforme pode ser notado, o aumento do número de ciclos leva a formas não lineares tanto para descarga quanto para recarga, sendo que padrões similares de histerese podem ser notados nas curvas de recarregamento. Quando os níveis de tensão superam 75% de f'_c , o comportamento é semelhante, porém a não linearidade das curvas carregamento e descarregamento tornam-se mais acentuadas (MEHTA e MONTEIRO, 2008).

A explicação para os comportamentos apresentados (à tração, à compressão e à cargas cíclicas) são de certa maneira consensuais entre a comunidade científica da Mecânica da Fratura. Certamente existem questões relevantes que estão sob investigação e, portanto constituem um campo aberto à pesquisa como, por exemplo, o comportamento multiaxial do concreto, os efeitos do conhecido efeito escala ou '*size effect*', a invenção de aparatos de ensaio que possibilitem a melhor investigação de regimes bi e triaxiais.

O presente trabalho faz uso dos conceitos apresentados no item 3.1, logo é necessário ter um modelo capaz de representar o comportamento do concreto sob tração de forma coerente e fundamentada nos princípios Mecânica da Fratura. Para tanto, é coerente a apresentação dos conceitos envolvidos, embora de forma breve, tentando mostrar o motivo

pelo qual se aplicam, de maneira sequencial para que finalmente seja apresentado o modelo adotado nas formulações posteriores. Isto será feito nos itens a seguir.

3.4 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

A Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) pode ser vista sob duas abordagens. Na primeira, utiliza-se o desenvolvimento feito por Griffith em que o critério de propagação é construído por meio de taxas críticas de liberação de energia, que assim representa o comportamento global do sólido. A segunda maneira segue os conceitos apresentados por Irwin, baseando em fatores de intensidade de tensão como critérios de propagação, similarmente à análise clássica de tensões, representando assim um caráter local do sólido. No que segue, ambas abordagens serão brevemente apresentadas baseados em Leonel (2012), além de obras clássicas sobre o tema como Ewalds e Wanhill (1984) e Broek (1982), sendo inclusive fonte de pesquisa em maior profundidade.

A primeira idealização para investigar o problema da descontinuidade, fundamentada na Elasticidade, data do início do século XX. A ideia seria descobrir qual o efeito que um furo, com determinada forma geométrica, causaria no campo de tensões atuante no restante do corpo admitido contínuo. Nesse sentido, utilizando o conceito de superposição de efeitos, Charles Edward Inglis, engenheiro civil britânico, em 1913, apresentou a solução de uma chapa infinita tracionada com um furo elíptico. O que se pôde notar, é que a presença do furo altera o campo de tensões numa região vizinha a ele. Por exemplo, em chapas tracionadas com descontinuidade circular (caso particular de elipse), a tensão na borda do furo corresponde a três vezes o valor do carregamento remotamente aplicado.

Para conseguir formar uma fissura, pode-se pensar em fazer com que o semieixo menor do furo elíptico tenda a zero, ou seja, justapondo as faces e formando uma descontinuidade discreta. O que ocorre é que a tensão atuante no ponto que define a borda da elipse tende a um valor infinito, sendo portanto, um ponto de singularidade. Naturalmente essa formulação não encontrou aplicabilidade prática quanto à previsão da integridade mecânica, pois não se permite por exemplo, aplicar critérios de resistência clássicos (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970). A Figura 3.4 elucida o exposto e traz um gráfico da distribuição de tensões à frente da fissura.

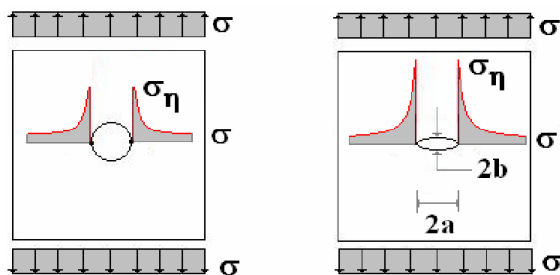


Figura 3.4 Problema de Inglis

O problema persistia. Como explicar o fato do material fissurado apresentar resistência menor, que a prevista elasticamente, sabendo que o estado de tensões previsto na ponta da fissura era singular? Em 1920, Alan Arnold Griffith apresentou uma alternativa que em princípio contornava o problema. Ele tentou propor um critério de propagação da fissura (que leva à ruptura do material) baseado no balanço entre a energia elástica liberada devido ao crescimento da fissura e da energia requerida para criação de novas faces de fissura.

Na realidade outras formas de energia compõem o balanço de energia, como por exemplo, a energia cinética do corpo, a energia térmica, que aqui não serão inseridas devido à consideração que o corpo não está sob efeitos de diferenças de temperatura e desenvolve baixos ou nulos campos de velocidade. Entretanto, em casos de propagação dinâmica, sob efeitos de gradientes térmicos, essas energias devem ser consideradas.

A quantidade de energia elástica liberada foi calculada a partir do alívio de tensão de uma área admitida circular de raio a (semicomprimento da fissura), acima e abaixo da fissura conforme mostra a Figura 3.5.

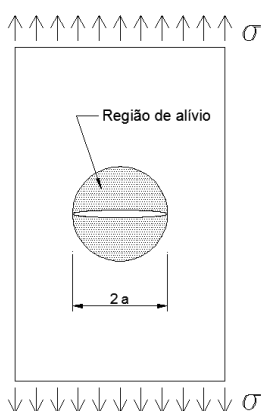


Figura 3.5 Região de liberação de energia em uma chapa infinita uniformemente tracionada com fissura de comprimento $2a$ (van MIER, 1997)

Sendo E o módulo de elasticidade e σ o carregamento remotamente aplicado, a energia liberada é igual a:

$$W_e = \pi a^2 \frac{\sigma^2}{E} \quad (3.1)$$

A quantidade de energia necessária para criar uma fissura de comprimento $2a$ é:

$$W_s = 2a\gamma \quad (3.2)$$

Nessa expressão γ é a energia requerida para criar uma unidade de superfície de fissura. De fato, γ tem origem em conceitos termodinâmicos, e pode aqui ser definida como a diferença entre a energia total de todas as moléculas presentes na superfície do sólido e a energia que essas mesmas moléculas teriam se estivessem no interior do sólido (BURAKOWSKI e WIERZCHON, 1999). Considerando contorno remoto imóvel, assume-se que a propagação da falha ocorre quando a taxa de liberação de energia dW_e/da ultrapassar o aumento da energia de superfície dW_s/da , ou seja:

$$\frac{dW_e}{da} \geq \frac{dW_s}{da} = 2\gamma \quad (3.3)$$

Resolvendo esta equação chega-se em:

$$\sigma = \left(\frac{E\gamma}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Em outras palavras, a fissura de tamanho $2a$ irá propagar, sob regime de tração uniforme, quando o carregamento aplicado remotamente exceder o valor dado pela expressão (3.4), desde que se conheça γ do material. Os experimentos realizados por Griffith apresentaram resultados coerentes para o material vidro, que apresenta comportamento frágil. Na literatura frequentemente aparece G_{Ic} em vez de γ . G_{Ic} é a taxa crítica de liberação de energia, que é igual à energia consumida no processo de fraturamento. (van MIER, 1997)

Por volta de 1950, Irwin fez uso de funções de tensão complexas propostas por Westergaard para representar o campo de tensões na região próxima da ponta da fissura. Para uma chapa infinita tracionada uniformemente em uma direção perpendicular à fissura, Figura 3.6, o campo de tensões fica dado por:

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \quad (3.5)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (3.7)$$

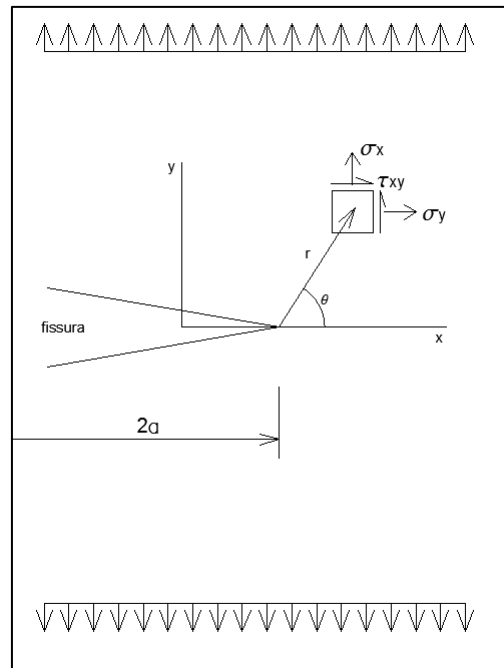


Figura 3.6 Campo de tensões em uma chapa tracionada

Todas essas componentes de tensão possuem uma singularidade de $r^{-1/2}$, e portanto, tendem ao infinito quando a distância r tende a zero. Tais funções podem ser enxergadas como o produto entre a função de posição $f(\theta)/\sqrt{2\pi r}$ e o fator $\sigma\sqrt{\pi a}$. Este último fator é o produto entre o carregamento remotamente aplicado e o semicomprimento da fissura, e determina a magnitude (ou amplitude) da concentração de tensão na ponta da fissura. Este fator é chamado de fator de intensidade de tensão em modo I (tração).

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.8)$$

A expressão acima é válida para estado plano de tensões. De maneira geral as expressões (3.5), (3.6) e (3.7) podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (3.9)$$

Semelhantemente, é possível utilizar as funções de tensão complexas para deduzir outros modos de carregamento, a saber, o modo II (cisalhamento plano ou escorregamento) e o modo III (cisalhamento antiplano ou rasgamento). A Figura 3.7 traz esquematicamente os três modos de solitação.

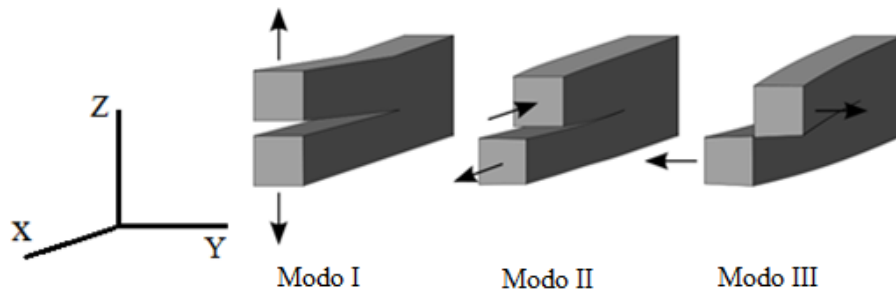


Figura 3.7 Principais modos de solitação

Existem infinitos modos, porém todos eles podem ser decompostos nesses modos básicos. Quanto às expressões para os campos de tensões tem-se; para modo II:

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \quad (3.10)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (3.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \quad (3.12)$$

No modo III valem:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.13)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.14)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (3.15)$$

Em princípio o modo de abertura (modo I) é o modo mais importante em termos práticos. Entretanto é aceito que modos de fraturamento mais complexos são na realidade combinações dos modos I, II e III. Por exemplo, o modo misto composto por solicitações do tipo I e II simultaneamente, resultaria em uma fissura que teria abertura e escorregamento das faces em seu plano. Quanto às definições de K_{II} e K_{III} , são iguais à de K_I .

Em uma estrutura previamente fissurada, ao ser elevado o nível de solicitação externa no modo I, por exemplo, o fator de intensidade de tensão, K_I , cresce proporcionalmente. Em um material que apresente resposta elástica linear ao fraturamento, o crescimento de K_I ocorrerá até que se atinja o nível crítico, a partir do qual a fissura passa a se propagar de maneira instável. Nesse caso tem-se uma situação de limite de resistência, ou seja,

$$K_I = K_{Ic} \quad (3.16)$$

O termo K_{Ic} é conhecido como tenacidade ao fraturamento do material, sendo determinada experimentalmente. Esse termo pode ser entendido como a propriedade que o material apresenta de absorver e dissipar energia antes e durante o processo de fraturamento, ou ainda, a propriedade que o material possui de resistir ao avanço da fissura sendo por vezes utilizada em atividade de projeto.

Nota-se que a tenacidade ao fraturamento apresenta um caráter local de resistência.

Existe uma simples relação entre o fator de intensidade de tensão de Irwin e a taxa de liberação de energia de Griffith, o que permite a obtenção de uma por intermédio de outra, fato explorado no âmbito laboratorial (BROEK, 1982). Em geral tem-se:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.17)$$

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (3.18)$$

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2 (1 + \nu)}{E} \quad (3.19)$$

Em que $E' = E$ para o estado plano de tensão e $E' = E/(1 - \nu^2)$ para o estado plano de deformações.

Os pesquisadores tentaram aplicar os conceitos da MFEL ao concreto, que era admitido ser um material frágil. Porém os resultados previstos não correspondiam aos

resultados observados, embora o uso de correlações ou ajustes experimentais fosse utilizado dentro de certas limitações.

O fato é que a MFEL parece adequada quando (idealmente) uma única fissura está presente. Essa condição pode ser razoavelmente aceita em materiais frágeis como o vidro ou pasta de cimento endurecida. Mas o concreto simples é exatamente o oposto. Em uma escala mediana (em nível de agregados) existem várias falhas e microfissuras, mesmo antes do material ser carregado. Nesse caso tornou-se necessário a criação de formulações novas que não seguissem os critérios de propagação acima descritos, mas sim, critérios baseados em comportamentos reais apresentados pelo material, como resistência a tração por exemplo. As respostas constatadas experimentalmente motivaram a criação de modelos constitutivos não lineares, levando a um novo ramo da Mecânica, a saber, a Mecânica da Fratura Não Linear que será brevemente descrita logo a seguir.

Ainda sim é possível aplicar MFEL ao concreto de forma adequada a casos de estruturas de grandes dimensões como barragens. Modelagens realizadas no ramo da micromecânica também são passíveis da utilização da MFEL, porém não será discutida neste trabalho.

3.5 MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR

A Mecânica da Fratura Não Linear (MFNL) teve seu início no ramo dos metais. Naturalmente, em materiais reais, as tensões não podem aumentar infinitamente. Neste contexto, Irwin constatou que os materiais dúcteis sofrem deformações plásticas apreciáveis, quando solicitados ao fraturamento. Então era necessário ampliar a teoria criada por Griffith para incorporar termos de energia referentes à plastificação. Era o início da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica. (ALLEN, BOOTH e JUTLA, 1988)

É consensual que a frente da fissura existe uma região em que o material não responde elasticamente às solicitações externas, ou seja, uma zona de dissipação de energia, porém capaz de transmitir algum esforço. Essa região é conhecida como zona de processos inelásticos (ZPI) que em princípio possui tamanho e forma desconhecida. Em geral, uma representação coerente da ZPI leva a uma coerente representação global do material.

Neste ponto é conveniente distinguir a MFNL aplicável a materiais dúcteis daquela aplicável a materiais quase frágeis. Interiormente à ZPI existe uma região de alta concentração de tensão que leva o material a perder sua forma íntegra. Essa região é chamada zona de processo de fraturamento. Ocorre que em metais essa região é pequena quando comparada com a ZPI, o que explica o fato de os metais manifestarem primeiramente plastificação em vez de propagação de fissuras. Já com o concreto, a situação é um pouco diferente, pois a zona de processo de fraturamento ocupa quase que totalmente a ZPI, fazendo com que o concreto manifeste propagação da fissura presente em detrimento à plastificação como meio eficaz de liberação de energia. (KARIHALOO,1995). A Figura 3.8 ilustra esquematicamente essa consideração.

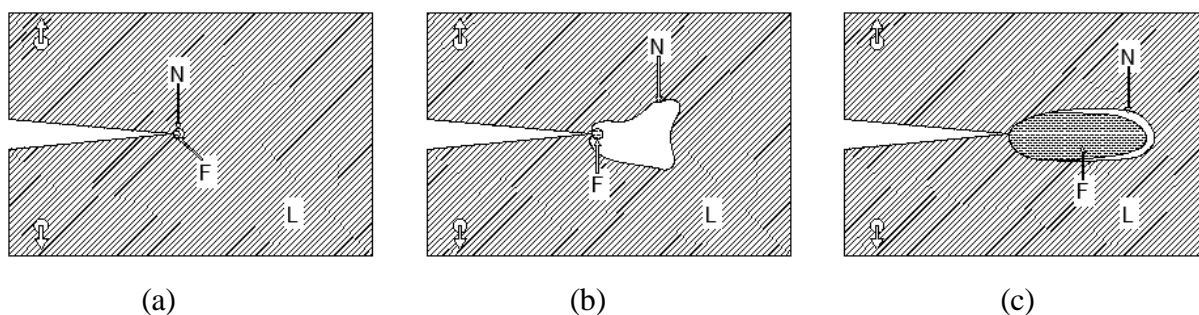


Figura 3.8 Características diferentes quanto ao fraturamento em (a) Linear Elástico (frágil) (b) Material dúctil (c) Material quase frágil. L refere-se a região elástica linear, F à zona de processo de fraturamento e N à zona de processos Não lineares (KARIHALOO, 1995)

Uma vez que nos materiais frágeis a ZPI apresenta tamanho desprezível, as deduções feitas por meio da teoria da Elasticidade se aplicam com razoável precisão. Entretanto, quando materiais plásticos ou visco-plásticos são considerados, quantidades substanciais de deformações irreversíveis (dissipação energética) ocorrem. Nesse caso a ZPI deixa de ter dimensão desprezível em comparação a outras dimensões representativas do sólido ou até mesmo à própria fissura.

Os materiais cuja ZPI apresenta dimensão considerável, usualmente apresentam crescimento estável de fissuração, em algum estágio do seu uso, comportamento desejável sob o ponto de vista da segurança estrutural. No caso de aços que apresentam encruamento, o desempenho progressivo do material é um indicador de que a tenacidade ao fraturamento do meio, nesses casos, não tem um valor constante. (BROEK, 1982)

Um modelo que ganhou bastante destaque na modelagem de sólidos metálicos fissurados foi o proposto por Dugdale (1960). Esse modelo admite que todos fenômenos de

plastificação da ZPI estão concentrados ao longo de uma estreita região localizada à frente da fissura e possui uma extensão ρ . Nessa região supõe-se a existência de uma tensão de fechamento (coesiva) uniforme de valor igual à tensão de escoamento do material. A união entre a fissura real e a fissura adicional, ρ , gera a *fissura efetiva*, que é o comprimento utilizado nas formulações. A Figura 3.9 mostra uma representação da fissura efetiva. Note-se que a ZPI é levada em consideração por meio de ρ .

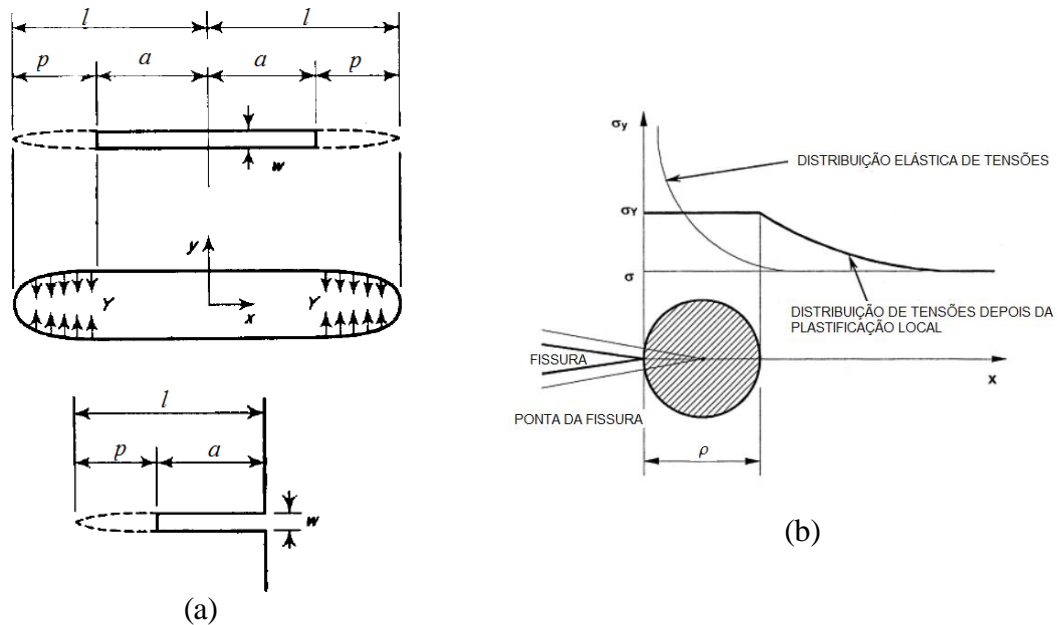


Figura 3.9 (a) Representação da fissura efetiva (DUGDALE, 1960) (b) Modelo de plastificação

A determinação da extensão adicional é procedida considerando a superposição de efeitos dos fatores de intensidade de tensão decorrentes tanto do carregamento externo, K_I^σ , quanto da tensão de fechamento que atua ao longo da extensão ρ , K_I^ρ .

O intuito é fazer com que a singularidade na ponta da fissura efetiva se anule, $K_I = 0$.

A superposição de efeitos leva a:

$$K_I = K_I^\sigma + K_I^\rho = 0 \quad (3.20)$$

Que conduz a:

$$K_I^\sigma = -K_I^\rho \quad (3.21)$$

As expressões para os fatores de intensidade de tensão, devido às tensões de fechamento e ao carregamento externo, podem ser encontradas na literatura bem como

expressões para o cálculo de p . Baseado nesses conceitos é possível propor correções para os fatores de intensidade de tensão em materiais dúcteis, desde que a zona de plastificação não se torne demasiadamente grande, o que colocaria em dúvida os resultados já que as expressões de K tem validade em domínios elásticos lineares com ZPI desprezível.

Tendo em vista as ideias por trás do modelo plástico de Dugdale (também referenciado como Dugdale-Barenblatt), Hillerborg, Modeer e Petersson (1976) propuseram o Modelo de Fissuras Fictícias (MFF) para analisar o processo de fissuração em materiais compostos de cimento.

Sob uma ótica simples, foi proposto um modelo baseado na observação e experimentação do material sob tração. O diagrama de tensão x deformação do concreto sob tração controlada é caracterizado por um longo trecho descendente depois que o pico de resistência foi alcançado. Pode-se então assumir que a fissura é formada assim que a resistência à tração é alcançada, entretanto o alívio em suas faces não se dá imediatamente, mas sim, permanece uma capacidade residual de transmissão de esforços perpendiculares às suas faces. A capacidade de transmissão de esforços depende da abertura da fissura. Quanto maior a abertura menor a capacidade resistente residual.

Um modelo um tanto similar ao MFF foi apresentado por Bazant e Oh (1983). Eles propuseram que uma região microfissurada, idêntica à zona plástica de Dugdale, se estende em frente à macrofissura do concreto. De fato, essa região (que é a ZPI) também existe e é assumida como uma linha no MFF, enquanto que no modelo de Bazant e Oh a zona é representada por uma banda com largura definida. A largura da banda de fissuração é muitas vezes associada ao diâmetro máximo do agregado graúdo. Convém dizer que a ZPI nesses modelos é frequentemente chamada de zona coesiva, enquanto que os modelos que as contêm são chamados modelos coesivos (van MIER, 1997). A Figura 3.10 apresenta esquematicamente os aspectos considerados pelos dois modelos.

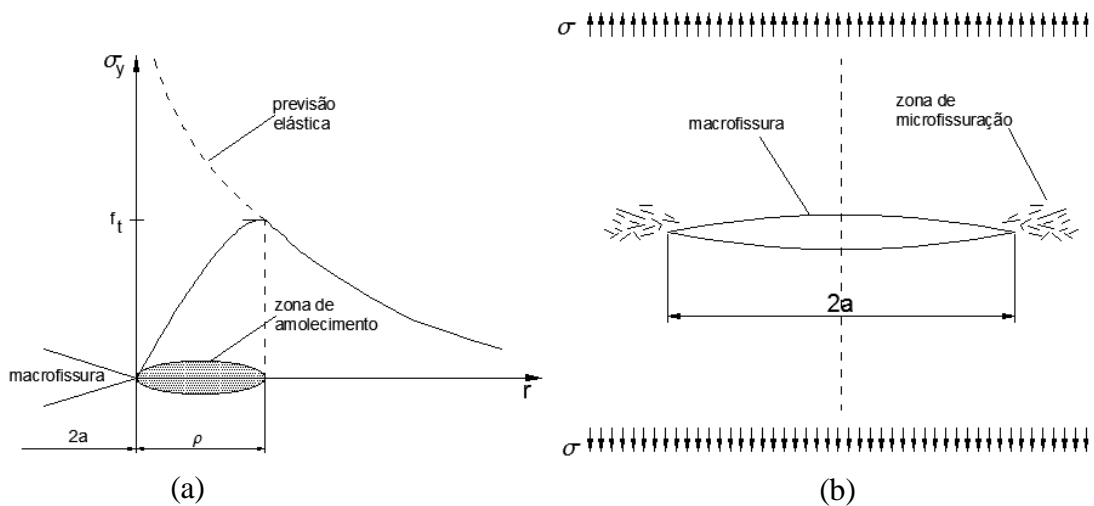


Figura 3.10 Zona de processos inelásticos em frente à macrofissura conforme assumidas por (a) MFF (b) Modelos das Bandas de Fissuração (van MIER, 1997, modificada)

O modelo de fissuras fictícias foi adotado no presente trabalho e será descrito no item a seguir.

3.6 MODELO DE FISSURAS FICTÍCIAS (MFF)

Num ensaio de tração do concreto, antes que o material atinja o pico de resistência é razoável admitir que o processo de deformação se dê de forma distribuída por todo o corpo. Evidentemente microfissuras estão presentes e podem se propagar no regime pré-pico, porém se darão de forma disseminada por todo o corpo de prova. Neste sentido é coerente descrever o comportamento pré-pico em termos de deformação. Ao chegar ao pico surge uma zona de fraturas visíveis, ou macroscópicas, que se localizam em determinada região frágil do material sob tração. Na Figura 3.11, se um dispositivo de medição fosse posicionado na região fraturada (A), um ramo descendente seria mostrado. Entretanto se o dispositivo de medição fosse posicionado no trecho que não apresenta macrofissura, uma curva de descarregamento seria mostrada. (van MIER, 1997)

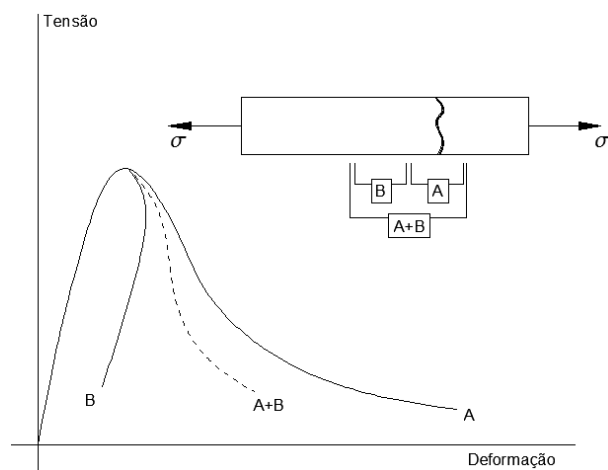


Figura 3.11 Diagrama tensão deformação segundo dispositivos de medição posicionados em locais diferentes (van MIER, 1997)

Devido ao fato de que no regime pós-pico a deformação é localizada em uma região estreita, Hillerborg propôs uma maneira mais adequada de expressar o comportamento do material, que não fosse a termos de deformação global. O comportamento pós-pico deveria ser modelado como uma relação tensão x abertura de fissura em vez de tensão x deformação.

Experimentos mostram que o regime pré-pico é aproximadamente linear, sendo que possíveis interações com os dispositivos de ensaio ou ainda o tamanho dos corpos de prova podem levar, dentre de outros fatores, a comportamento não lineares mesmo antes de atingir o pico. Para fins práticos o modelo de fissuras fictícias adota comportamento elástico linear no regime pré-pico. No regime pós-pico considera-se a lei tensão x abertura de fissura conforme Figura 3.12.

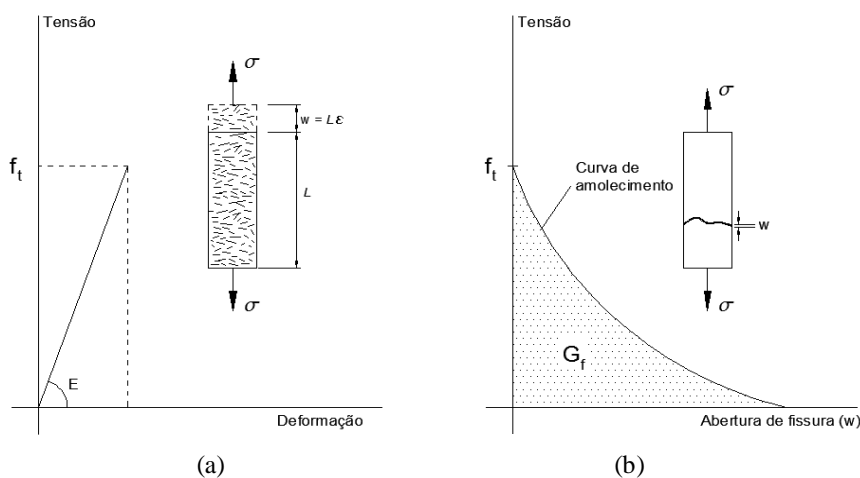


Figura 3.12 Fraturamento na barra sob tração. (a) Regime pré-pico (b) Regime pós-pico (van MIER, 1997)

Caso ocorra descarregamento esse se dá ao longo de uma reta paralela à reta inicial de carregamento. A área sob a curva de amolecimento é definida como energia de fratura G_f .

$$G_f = \int_0^{w_{max}} \sigma(w) dw \quad (3.22)$$

A energia de fratura, considerada como característica do material, deve ser determinada experimentalmente com ensaios de tração controlada.

Neste ponto, pode-se dizer que o modelo de fissuras fictícias deve satisfazer a duas leis constitutivas distintas, sendo uma (pré-pico) elástico linear e outra (pós-pico) não linear. Para a descrição desse modelo são necessários três parâmetros, a saber: (i) resistência à tração do material (experimental), (ii) energia de fratura (experimental) e (iii) forma do trecho descendente que para fins desse trabalho utiliza-se linear, bilinear e exponencial. Maiores detalhes sobre os trechos descendentes serão apresentados no item seguinte, embora já se adiante que todas as curvas levaram a resultados semelhantes.

3.7 MODELAGEM DA ZONA DE PROCESSO

Para essa etapa é necessário que se estabeleça o critério de verificação e uma lei de evolução que represente o desenvolvimento da fissura. Para tanto utiliza-se o MFF tomando por base os seguintes aspectos, conforme descrito em Leonel (2009):

- (i) A zona de processos desenvolve-se assim que a máxima tensão principal atuante na ponta da fissura fictícia alcance a resistência à tração característica do material (critério para verificação);
- (ii) A fissura cresce perpendicularmente à direção de atuação da máxima tensão principal (critério de evolução);
- (iii) A zona de processo é parcialmente danificada durante o crescimento da fissura, porém, ainda é capaz de transmitir esforços. Tais esforços dependem da abertura atual que a fissura tenha (evolução, dependência não linear do carregamento aplicado);
- (iv) As propriedades do material fora da zona de processo permanecem com características elásticas.

De modo geral, quando a tensão na ponta da fissura fictícia exceder a resistência a tração do material, a fissura fictícia cresce, conforme hipótese ii, mantendo suas faces sob ação de forças de coesão. Entretanto, quando a abertura normal das faces da fissura alcançar um valor limite, estipulado pela lei constitutiva, então as suas faces se tornam livres de tensões coesivas.

A relação entre a força coesiva e a abertura da fissura é expressa pela lei coesiva que for adotada. Dentre as várias disponíveis na literatura, para fins deste trabalho escolheram-se três delas, por serem mais frequentemente utilizadas.

A lei constitutiva linear (Figura 3.13) expressa a relação tensão x abertura da fissura por meio de uma relação linear, a saber:

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t(1 - w/w_c) && \text{se } 0 \leq w \leq w_c \\ \sigma(w) &= 0 && \text{se } w_c \leq w \end{aligned} \quad (3.23)$$

É possível obter o valor de w_c por meio da energia de fratura e f_t .

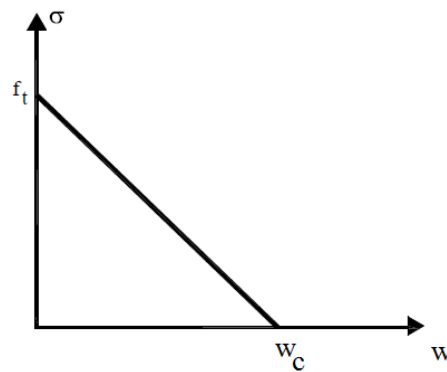


Figura 3.13 Lei constitutiva linear

A segunda relação a ser utilizada é a relação bilinear, de tal maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{w''} \right) \cdot w && \text{se } 0 \leq w \leq w'' \\ \sigma(w) &= \frac{f_t''}{w'' - w_c} \cdot w + f_t'' \cdot \left(1 - \frac{w''}{w'' - w_c} \right) && \text{se } w'' \leq w \leq w' \\ \sigma(w) &= 0 && \text{se } w' \leq w \\ f_t'' &= \frac{f_t}{3} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$w'' = 0,8 \cdot \frac{G_f}{f_t}$$

$$w_c = 3,6 \cdot \frac{G_f}{f_t}$$

A Figura 3.14 ilustra o comportamento geral desse critério coesivo.

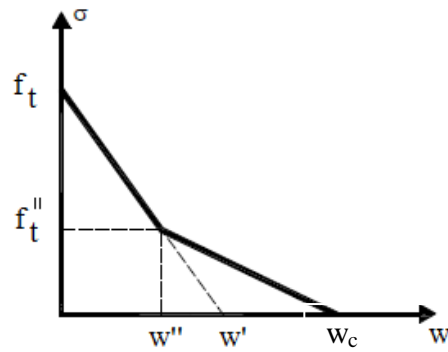


Figura 3.14 Lei constitutiva bilinear

Quanto à terceira equação constitutiva utilizada para modelar o trecho pós-pico tem-se a forma exponencial (Figura 3.15). Tem-se:

$$\sigma(w) = f_t \cdot e^{-\frac{f_t}{G_f} w} \quad \text{se } w \geq 0 \quad (3.25)$$

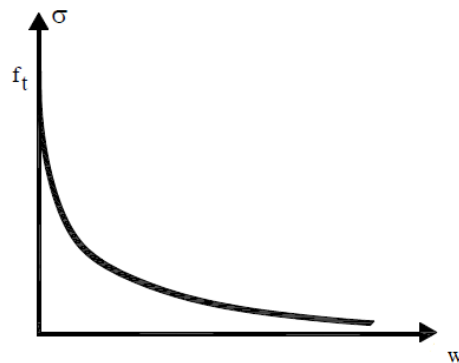


Figura 3.15 Lei constitutiva exponencial

No que se seguem, alguns procedimentos numéricos de interesse para a realização desse trabalho são apresentados. Trata-se de algumas considerações que foram feitas para calcular o estado de tensão na ponta da fissura (para aplicação do critério de verificação), a direção de propagação e comprimento do incremento de fissura (para os cálculos de evolução da fissura).

3.8 CÁLCULO DA TENSÃO NA EXTREMIDADE DA FISSURA

Esse trabalho faz uso do critério de Rankine para identificar se a fissura fictícia deve propagar ou não. Para tanto é necessário obter o estado de tensão da ponta da fissura para que se calculem as tensões principais e aí sim verificar o critério.

Segundo Leonel (2009) uma maneira eficiente de obter o estado de tensões na ponta da fissura é fazer uma extrapolação polinomial, considerando o estado de tensão de pontos internos vizinhos localizados afrente da extremidade. A situação é ilustrada pela Figura 3.16. Convém mencionar nesse ponto que a validade desse método está baseada no método numérico utilizado na obtenção do estado de tensões. Devido à singularidade da solução fundamental do MEC, consegue-se capturar o efeito do alto gradiente de tensões que existe nessa região.

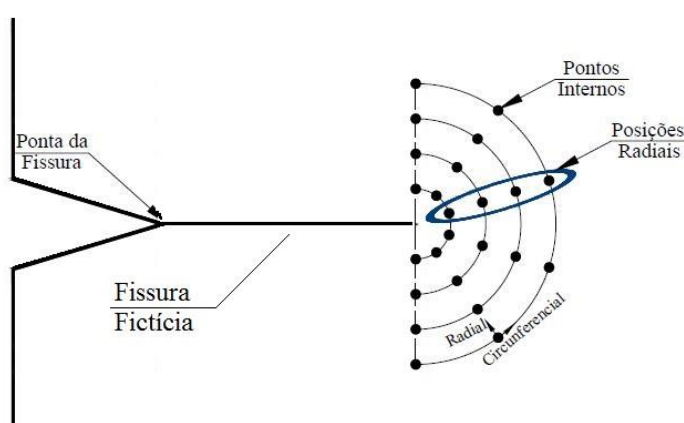


Figura 3.16 Distribuição de pontos internos à frente da ponta da fissura (LEONEL, 2009, com modificações)

O número de semicírculos assim como o número de pontos internos em cada um deles pode ser escolhido conforme a precisão desejada na análise. O estado de tensão em cada um dos pontos é obtido utilizando as equações de pontos internos do MEC (capítulo 2). Daí

procede-se à extrapolação polinomial segundo cada uma das direções radiais. O grau do polinômio escolhido é função do número de pontos na linha radial. Por exemplo, se cada linha possuir n pontos, então o grau do polinômio será $n-1$.

Cada linha radial gera um estado de tensão extrapolado na ponta da fissura. Para efeitos práticos admite-se que o estado de tensão atuante na ponta da fissura é a média aritmética simples dos estados de tensão extrapolados.

3.9 CÁLCULO DO ÂNGULO DE PROPAGAÇÃO DA FISSURA

O presente trabalho considera que a fissura se propague perpendicularmente à direção de maior tração principal. Esse critério é conhecido como critério da máxima tensão circunferencial, e fornece (apenas) a direção de crescimento.

Com o estado de tensão obtido no item anterior, pode-se calcular a direção principal por meio de:

$$\theta_p = \frac{1}{2} \cdot \text{ArcTan} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (3.26)$$

Somando-se $\pi/2$ radianos ao valor acima, tem-se a direção de propagação. Esse procedimento tem tido sucesso nas suas aplicações conforme pode ser visto em Leonel (2009).

3.10 INCREMENTO NO COMPRIMENTO DA FISSURA

Uma vez que o estado de tensão na ponta da fissura supere o previsto pelo critério de verificação, a fissura propaga. Entretanto o incremento da fissura deve ser tal que proporcione a obediência da lei constitutiva coesiva. Assim, deve ser encontrado o ponto ao longo da direção (obtida no item anterior) de propagação, em que a tensão normal seja igual, ou ao menos próxima, dentro de certa tolerância, à tensão prevista pela lei coesiva. Uma vez encontrado esse ponto, determina-se a nova posição da ponta da fissura coesiva. Cabe aqui

ressaltar que a relação entre o incremento de carregamento externo e o incremento de fissura é não linear. (LEONEL, 2009)

3.11 PROCEDIMENTO ITERATIVO PARA OBTENÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Uma vez que se determine o estado de tensão na ponta da fissura, o ângulo de propagação e o incremento no comprimento da fissura pode-se agora partir para o processo incremental iterativo. Este procedimento visa determinar o conjunto de valores de w e σ para o qual a estrutura encontra o equilíbrio. Descreve-se aqui brevemente o procedimento utilizado para a análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis, empregando o modelo de fissura fictícia, utilizando a técnica do operador constante. Nesse modelo, o equilíbrio é obtido por meio da reaplicação da diferença entre as tensões atuantes reais e as tensões máximas previstas pelo critério coesivo. As matrizes que multiplicam as grandezas conhecidas e desconhecidas no contorno e no domínio não mudam durante o processo iterativo, o que dá origem a denominação operador constante (LEONEL, 2009).

Os passos a serem seguidos são:

1. Aplicação do incremento de carregamento a ser aplicado;
2. Cálculo do estado de tensão na ponta da fissura, o ângulo de propagação e também o incremento no comprimento da fissura;
3. Cálculo da tensão verdadeira por meio da lei coesiva adotada;
4. A diferença entre a tensão atuante e a tensão verdadeira deve ser reaplicada na estrutura de forma a alcançar o equilíbrio;
5. Verificar a convergência por meio da norma de forças $\|\Delta P_i - \Delta P_{i-1}\| \leq Tol$.
6. Caso a norma de convergência seja atendida aplica-se um novo incremento de carga. Caso contrário repete-se os passos 3 a 6.

Esse procedimento conduz a bons resultados, embora requeira um elevado número de iterações. No capítulo posterior uma alternativa ao operador constante, chamado operador tangente consistente, será apresentada. Esse novo operador resulta numa diminuição no tempo de processamento, pois requer menor número de iterações.

4 FORMULAÇÃO DO MEC APLICADA À MFNL

O presente capítulo dedica-se a esclarecer como é possível unir os conceitos do MFF às formulações do MEC, para analisar a propagação de fissuras em corpos de material quase frágil. O desenvolvimento a seguir constitui-se numa alternativa ao Modelo Dual levando em consideração os modelos coesivo e de fissura fictícia. Deve-se destacar que a formulação proposta pode também ser aplicada a problemas da MFEL bastando impor uma lei conveniente para o comportamento das tensões atuantes na zona de processo.

Antes de discutir a formulação, é conveniente apresentar os artifícios matemáticos envolvidos para a representação de descontinuidades. A questão fundamental é como representar uma fissura em um meio contínuo? Para responder a essa indagação, recorre-se ao trabalho de Francisco dos Santos Rocha (1988) que mostra ser possível representar uma descontinuidade por meio de uma equação integral, de maneira conveniente aos propósitos do MEC. Para tanto é necessário definir uma nova grandeza, denominada dipolo, que constitui o elemento básico para a avaliação dos efeitos devido à presença da descontinuidade do corpo.

4.1 DEFININDO OS DIPOLOS

Existe uma consideração física, clássica da teoria da Elasticidade, que serve para elucidar o papel dessa nova grandeza. Para tanto, toma-se um corpo homogêneo e isótropo, submetido a uma tensão de tração σ_y constante ao longo de toda sua extensão conforme Figura 4.1.

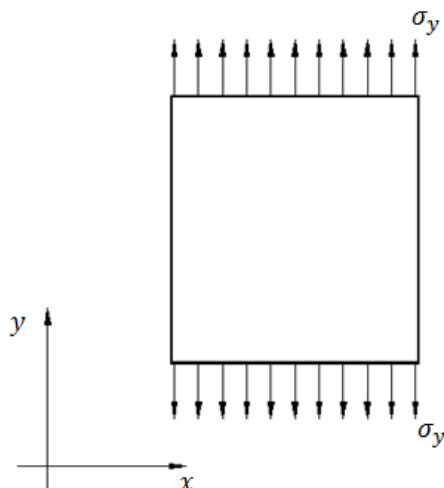


Figura 4.1 Corpo íntegro (ROCHA, 1988)

Admita-se que, por meio de um recurso qualquer, se realize um corte estreito nesse corpo sem que se alterem as condições de contorno (Figura 4.2). Nesse caso, as tensões nas faces superior e inferior da fenda se tornam nulas levando a uma alteração no campo de tensões ao longo do corpo, que não é mais constante.

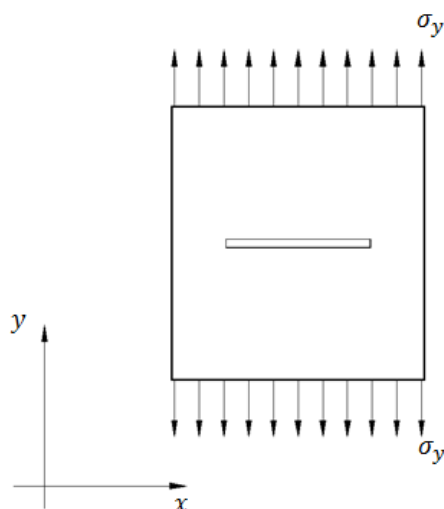


Figura 4.2 Corpo possuindo uma descontinuidade (ROCHA, 1988)

A intenção é resolver esse caso por meio de correções no problema mostrado pela Figura 4.1, por ser mais simples. Para tanto, o primeiro passo é supor no corpo com a fenda, o mesmo estado de tensão do corpo sem a descontinuidade. Em seguida realiza-se um processo de correção do campo tensorial utilizando o efeito de forças virtuais autoequilibradas aplicadas no contorno da fenda, conforme Figura 4.3.

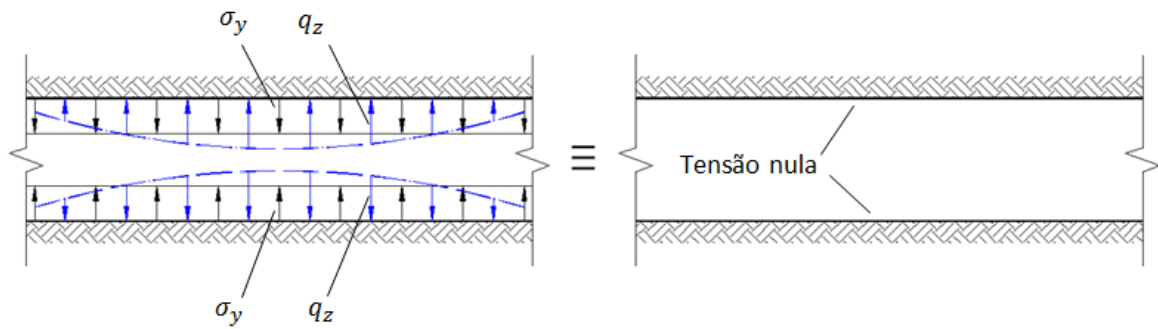


Figura 4.3 Ilustração do dipolo q_z (ROCHA, 1988)

Pode-se dizer que a resolução é feita distribuindo convenientemente forças virtuais ao longo do contorno da descontinuidade, de modo que as condições requeridas para o contorno da fenda sejam atendidas. As forças fictícias apresentadas pela Figura 4.3 não possuem resultante, entretanto dão origem a um campo de tensões. Essas forças são chamadas de *dipolos*, em semelhança ao dipolo elétrico existente na Eletrostática (ROCHA, 1988).

Em problemas mais gerais, além das tensões normais ao contorno da descontinuidade, existem as tensões tangenciais que demandam por respectivos dipolos no contorno da descontinuidade.

Rocha (1988) utilizou os efeitos dos dipolos inclusos na formulação do MEC para estudar problemas relacionados à segurança de escavações em maciços de solos com presença de descontinuidades. Seu trabalho mostrou substanciais alterações no campo de tensões na região vizinha à falha conforme era esperado, mostrando que os campos fictícios de tensão poderiam ser utilizados com a intenção de analisar meios com alguma descontinuidade.

Desse modo, a formulação em termos de dipolos é adequada ao ramo da Mecânica da Fratura, especialmente quando em conjunto com o MEC conforme será mostrado, pois nesse segmento de análise necessariamente existem descontinuidades (fissuras). Para tanto os dipolos podem ser utilizados para atender às condições de contorno estabelecidas pela lei constitutiva, na região da ZPI.

O próximo item mostrará como é possível transformar a ZPI em uma linha sobre a qual serão representados todos os efeitos não lineares pertinentes a essa região.

4.2 REPRESENTAÇÃO DA ZPI UTILIZANDO O MEC

Existe uma maneira conveniente de representar a zona coesiva utilizando os conceitos apresentados na seção de tensões iniciais do MEC (item 2.10.1). Nesse sentido a ZPI será representada nas formulações numéricas como uma região de tensões de origem distinta da tensão proveniente do carregamento externo. Para conseguir transformar essa região em uma linha, se realiza uma degeneração do termo de domínio. Esse procedimento será apresentado a seguir de acordo com Rocha (1988), Rocha e Venturini (1988), Venturini (1994), Venturini (1995), Lopes Jr. (1996), Lopes Jr. e Venturini (1997) e Barbirato (1999).

A equação 2.79 será aqui retomada por completude do desenvolvimento algébrico. Esta equação pode ser entendida como a relação integral expressa no contorno do sólido, considerando o carregamento externo, representado por p_k e u_k , e um campo de tensões de origem distinta do carregamento externo, σ_{jk}^0 . Pode-se enxergar o campo σ_{jk}^0 como resultado da atuação de forças, coesivas, que atuam apenas em uma região definida por $\bar{\Omega}$, representando a ZPI. Note-se a consistência e adequabilidade dos conceitos fornecidos pelas formulações do MEC. Desconsiderando as forças de domínio tem-se:

$$c_{lk}^{(i)} u_k^{(i)} = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\bar{\Omega}} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ljk}^* d\bar{\Omega} \quad (4.1)$$

Considerando a região $\bar{\Omega}$ estreita e limitada por um contorno $\bar{\Gamma}^c$, é aceitável desconsiderar os contornos das extremidades e assim estabelecer $\bar{\Gamma}^c = \bar{\Gamma}_1^c \cup \bar{\Gamma}_2^c$ conforme Figura 4.4.

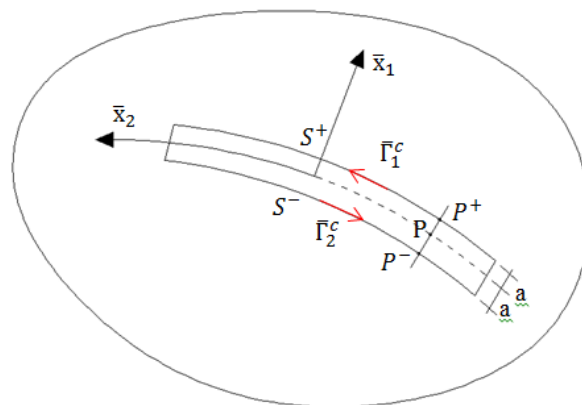


Figura 4.4 Sub-região estreita de tensões iniciais (VENTURINI, 1995)

A partir desse momento, dar-se-á atenção ao termo que representa a contribuição das tensões iniciais a partir da equação (4.1), já que os demais termos integrais não serão modificados. Realizando a integração por partes vem:

$$\int_{\bar{\Omega}} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^* \sigma_{jk}^0 n_k d\bar{\Gamma}^c - \int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\bar{\Omega} \quad (4.2)$$

Nessa expressão, n_k é o vetor normal ao contorno $\bar{\Gamma}^c$. O produto $\sigma_{jk}^0 n_k$ resulta em p_j^{01} , que é o vetor de forças aplicado no contorno $\bar{\Gamma}^c$, e permite escrever o primeiro termo do segundo membro da seguinte maneira:

$$\int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^* \sigma_{jk}^0 n_k d\bar{\Gamma}^c = \int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^* p_j^{01} d\bar{\Gamma}^c = \int_{\bar{\Gamma}_1^c} u_{ij}^* p_j^{01} d\bar{\Gamma}_1^c + \int_{\bar{\Gamma}_2^c} u_{ij}^* p_j^{01} d\bar{\Gamma}_2^c \quad (4.3)$$

Por hora, é conveniente explicitar os pontos fonte e campo. Logo:

$$\int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\bar{\Gamma}^c = \int_{\bar{\Gamma}_1^c} u_{ij}^*(p, S^+) p_j^{01}(S^+) d\bar{\Gamma}_1^c + \int_{\bar{\Gamma}_2^c} u_{ij}^*(p, S^-) p_j^{01}(S^-) d\bar{\Gamma}_2^c \quad (4.4)$$

em que S^+ e S^- são os pontos campo correspondentes e pertencentes aos contornos $\bar{\Gamma}_1^c$ e $\bar{\Gamma}_2^c$.

Admitindo que a largura da sub-região, $2a$, é muito pequena em relação ao seu comprimento, os núcleos definidos em S^+ e S^- podem ser redefinidos para um ponto médio S , tomando-se os dois primeiros termos da expansão de Taylor utilizada para aproximação de $u_{ij}^*(p, S^+)$ e $u_{ij}^*(p, S^-)$, ou seja:

$$u_{ij}^*(p, S^+) = u_{ij}^*(p, S) + \frac{\partial u_{ij}^*(p, S)}{\partial \bar{x}_1} a \quad (4.5)$$

$$u_{ij}^*(p, S^-) = u_{ij}^*(p, S) - \frac{\partial u_{ij}^*(p, S)}{\partial \bar{x}_1} a \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) e (4.6) em (4.4):

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\bar{\Gamma}^c &= \int_{\bar{\Gamma}_1^c} \left[u_{ij}^*(p, S) + \frac{\partial u_{ij}^*(p, S)}{\partial \bar{x}_1} a \right] p_j^{01}(S^+) d\bar{\Gamma}_1^c \\
&+ \int_{\bar{\Gamma}_2^c} \left[u_{ij}^*(p, S) - \frac{\partial u_{ij}^*(p, S)}{\partial \bar{x}_1} a \right] p_j^{01}(S^-) d\bar{\Gamma}_2^c
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para que a sub-região se torne uma linha, basta fazer com que a largura a tenda a zero. Nesse caso os pontos S^- , S^+ e S coincidem, e ainda, $d\bar{\Gamma}_1^c = d\bar{\Gamma}$, $d\bar{\Gamma}_2^c = -d\bar{\Gamma}$, $p = P$. Logo:

$$\int_{\bar{\Gamma}^c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\bar{\Gamma}^c = \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*(P, S)}{\partial \bar{x}_1} p_j^{01}(S) 2ad\bar{\Gamma} \tag{4.8}$$

Em que \bar{x}_1 é a coordenada local perpendicular ao contorno médio $\bar{\Gamma}$ e p_j^{01} representa as componentes do dipolo associadas à superfície da fratura.

Na equação (4.2) ainda resta uma integral de domínio possuindo derivadas de componentes de tensão. Esse termo também pode ser transformado em integrais sobre $\bar{\Gamma}_1^c$ e $\bar{\Gamma}_2^c$ e depois sobre $\bar{\Gamma}$, como realizado anteriormente. Para isto basta considerar constantes as componentes de tensão ao longo da direção \bar{x}_1 , já que a região tem dimensão muito pequena nessa direção ($2a$). Isto faz com que $\sigma_{jk}^0(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sigma_{jk}^0(\bar{x}_2)$, simplificando a derivação. Segue-se:

$$\sigma_{jk,k}^0 = \frac{\partial \sigma_{jk}^0}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{jk}^0}{\partial \bar{x}_m} \frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{jk}^0}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{jk}^0}{\partial \bar{x}_2} t_k = \frac{\partial(\sigma_{jk}^0 t_k)}{\partial \bar{x}_2} \tag{4.9}$$

Na expressão acima t_k é versor direção \bar{x}_2 (Figura 4.1). Para tanto se considera que t_k não varia com \bar{x}_2 o que leva a uma fissura reta, em princípio. Retomando o último termo de (4.2):

$$-\int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\bar{\Omega} = -\int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* \frac{\partial(\sigma_{jk}^0 t_k)}{\partial \bar{x}_2} d\bar{\Omega} = -\int_{\bar{x}_2} u_{ij}^* \frac{\partial(\sigma_{jk}^0 t_k)}{\partial \bar{x}_2} 2ad\bar{x}_2 \tag{4.10}$$

Integrando por partes:

$$-\int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\bar{\Omega} = -[u_{ij}^* (\sigma_{jk}^0 t_k) 2a]_{\bar{x}_2^{(2)}}^{\bar{x}_2^{(1)}} + \int_{\bar{x}_2} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial \bar{x}_2} (\sigma_{jk}^0 t_k) 2a d\bar{x}_2 \quad (4.11)$$

O termo independente se anula quando a tender a zero. Fazendo $d\bar{x}_2 = d\bar{\Gamma}$, $\sigma_{jk}^0 t_k = p_j^{02}$, em que p_j^{02} representa o vetor de forças de superfície relacionadas a uma normal paralela a \bar{x}_2 , a relação acima fica:

$$-\int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial \bar{x}_2} p_j^{02} 2a d\bar{\Gamma} \quad (4.12)$$

As expressões obtidas em (4.8) e (4.12) representam a transformação da integral de tensão inicial da equação (4.1) em integrais sobre a linha média da região estreita e alongada $\bar{\Omega}$. Segue-se:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\bar{\Omega} &= \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*(P, S)}{\partial \bar{x}_1} p_j^{01}(S) 2a d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial \bar{x}_2} p_j^{02} 2a d\bar{\Gamma} \\ &= \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial \bar{x}_k} p_j^{0k} 2a d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Com a finalidade de eliminar o carácter local da dedução pode-se fazer:

$$\int_{\bar{\Omega}} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial \bar{x}_k} p_j^{0k} 2a d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}_k} p_j^{0k} 2a d\bar{\Gamma} \quad (4.14)$$

Para adequar o modelo à análise de fratura admite-se a definição de uma nova variável da seguinte maneira.

$$\frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}_k} p_j^{0k} 2a = q_j^m \quad (4.15)$$

Essa nova variável, aqui chamada *quadripolo*, é sempre finita, mesmo que o valor $2a$ tenda a zero. Nesse caso as forças de superfície, p_j^{0k} , tendem ao infinito. Segundo Venturini (1995) o quadripolo é uma grandeza tensorial, semelhante ao tensor de tensões, constituída por dipolos. Ele é responsável por representar as tensões iniciais (ou, no caso, tensões

coesivas da ZPI) ao longo da zona estreita. Assim é consistente se falar em *estado de dipolo*. A Figura 4.5 ilustra a orientação dos dipolos e quadripolos.

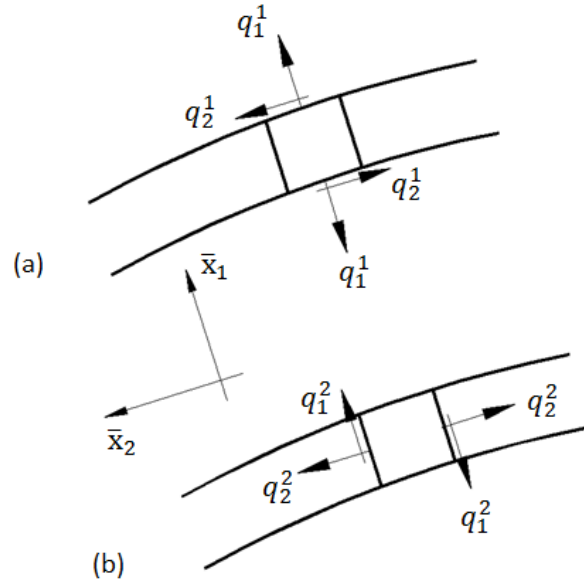


Figura 4.5 Representação local dos quadripolos (a) q_1^1 (composto pelo dipolo q_1^1 e q_2^1) e (b) q_2^2 (composto pelo dipolo q_1^2 e q_2^2) (LOPES JR., 1996)

Rocha (1988) alerta que o dipolo q_2^2 não é independente, mas sim, é função de q_1^1 por meio da relação:

$$q_2^2 = \frac{\nu}{1 - \nu} q_1^1 \quad (4.16)$$

O equilíbrio rotacional também deve ser garantido, assim como na análise de tensões. Isto faz com que a componente q_1^2 seja igual à q_2^1 . Conclui-se que o tensor de dipolos (bidimensional) possui apenas duas componentes independentes, a saber, q_1^1 e q_2^1 .

Substituindo (4.15) e (4.14) em (4.1) e considerando $\partial u_{ij}^* / \partial x_m = G_m^{lj}$, resulta:

$$c_{lk}^{(i)} u_k^{(i)} = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} G_m^{lj} q_j^m d\bar{\Gamma} \quad (4.17)$$

Essa equação é a nova integral de contorno já considerando a existência da ZPI.

$$G_m^{lj} = u_{ijm}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} \{(3-4\nu)r_{im}\delta_{lj} - r_{ij}\delta_{lm} - r_{il}\delta_{jm} + 2r_{ij}r_{il}r_{im}\} \quad (4.18)$$

Uma expressão de suma importância para a solução do problema de análise não linear é a equação que fornece o estado de tensão em pontos internos. Pode-se a partir de (4.17), diferenciá-la e substituí-la na lei de Hooke generalizada chegando a:

$$\begin{aligned} \sigma_{im} = & - \int_{\Gamma} S_{imk}(p, S) u_k(S) d\Gamma(S) + \int_{\Gamma} D_{imk}(p, S) p_k(S) d\Gamma(S) \\ & + \int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj}(p, S) q_j^l(S) d\bar{\Gamma} + g_{im}^{lj}(\sigma_{lj}(p)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

A equação é uma formulação particular para análise de efeitos não lineares em zonas com as características aqui consideradas e pode ser usada para fazer correções no campo de tensões inicialmente elástico.

$$\begin{aligned} G_{im}^{lj} = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}) \\ & - 2(1-2\nu)(r_{im}r_{il}\delta_{ij} + r_{ii}r_{il}\delta_{mj} - r_{ij}r_{il}\delta_{im}) \\ & + 2(r_{ij}r_{im}\delta_{il} + r_{ij}r_{ii}\delta_{ml} + r_{im}r_{ii}\delta_{jl}) - 8r_{ii}r_{ij}r_{im}r_{il} \} \end{aligned} \quad (4.20)$$

O termo g_{ij}^{im} que aparece deve-se ao tratamento da hipersingularidade do núcleo G_{ij}^{im} , de ordem r^{-2} .

Falta esclarecer um ponto chave na formulação. Como obter a abertura normal da fissura com esse modelo, uma vez que ela ditará o valor da força coesiva por meio da lei constitutiva. Para tanto se utiliza a equação (4.17), já que ela representa deslocamentos de quaisquer pontos no domínio para uma dada distribuição de quadripolos. Não apenas isto, mas por meio dela é possível obter uma expressão para a descontinuidade existente no campo de deslocamentos. Para tanto, escreve-se a equação (4.17) para dois pontos (P^+ e P^-) sobre os contornos Γ_1^c e Γ_2^c (Figura 4.4). Como a equação de deslocamentos possui uma singularidade de r^{-1} as equações dos pontos P^+ e P^- devem ser obtidas por meio de análise limite, semelhante ao que ocorre para pontos do contorno externo. Esse procedimento conduz a

termos independentes dados em função de dipolos. Subtraindo as respectivas equações chega-se à seguinte relação:

$$[[\Delta w]] = \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Note-se que a existência de quadripolos implica na existência de descontinuidade de deslocamentos. Na relação acima, Δw_1 representa uma descontinuidade no campo de deslocamentos perpendicular à linha da fissura enquanto Δw_2 representa uma descontinuidade no sentido paralelo à linha da fissura. O presente trabalho será desenvolvido considerando apenas os efeitos do modo I de abertura da fissura, portanto, apenas a expressão para Δw_1 será utilizada. (LOPES JR., 1996)

$$\Delta w_1 = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} q_1^1 \quad (4.22)$$

4.3 ELEMENTOS DE CONTORNO PARA FISSURA

A expressão (4.17) representa a equação integral de contorno considerando a presença da fissura. Pode-se dar uma forma matricial a essa expressão fazendo:

$$\begin{aligned} G_m^{lj} q_j^m &= G_1^{l1} q_1^1 + G_1^{l2} q_2^1 + G_2^{l1} q_1^2 + G_2^{l2} q_2^2 = G_1^{l1} q_1^1 + (G_1^{l2} + G_2^{l1}) q_2^1 + G_2^{l2} q_2^2 \\ &= [G_1^{l1} \quad G_1^{l2} + G_2^{l1} \quad G_2^{l2}] \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{k} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Portanto vem:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{k} \mathbf{q} d\bar{\Gamma} \quad (4.24)$$

Variando o índice l de 1 a 2, obtêm-se os seguintes termos da matriz \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_1} \{1 - 4\nu + 2(r_{r_1})^2\} \\
k_{12} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_2} \{2 - 4\nu + 4(r_{r_2})^2\} \\
k_{13} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_1} \{-1 + 2(r_{r_2})^2\} \\
k_{21} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_2} \{-1 + 2(r_{r_1})^2\} \\
k_{22} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_1} \{2 - 4\nu + 4(r_{r_2})^2\} \\
k_{23} &= \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} r_{r_2} \{1 - 4\nu + 2(r_{r_2})^2\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De forma semelhante ao desenvolvimento (4.17) pode-se reorganizar o penúltimo termo de (4.19):

$$\begin{aligned}
G_{im}^{lj} q_j^l &= G_{im}^{11} q_1^1 + G_{im}^{12} q_2^1 + G_{im}^{21} q_1^2 + G_{im}^{22} q_2^2 = G_{im}^{11} q_1^1 + (G_{im}^{12} + G_{im}^{21}) q_2^1 + G_{im}^{22} q_2^2 \\
&= [G_{im}^{11} \quad G_{im}^{12} + G_{im}^{21} \quad G_{im}^{22}] \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{k}' \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Assim a equação (4.19) pode ser escrita matricialmente como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Gamma} \mathbf{D} \mathbf{p} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{k}' \mathbf{q} d\bar{\Gamma} \tag{4.27}$$

Variando os índices i, m de 1 a 2 obtêm-se os termos da matriz \mathbf{k}' :

$$\begin{aligned}
k'_{11} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{1 - 2\nu + 4(r_{r_1})^2 [1 + \nu - 2(r_{r_1})^2]\} \\
k'_{12} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{r_{r_1} r_{r_2} [4 - 16(r_{r_1})^2]\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$k'_{13} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[-1+2(r_{i2})^2] + (r_{i1})^2[2-8(r_{i2})^2]\}$$

$$k'_{21} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{r_{i1}r_{i2}[2+4\nu-8(r_{i1})^2]\}$$

$$k'_{22} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2-16(r_{i1})^2(r_{i2})^2\}$$

$$k'_{23} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{r_{i1}r_{i2}[2+4\nu-8(r_{i2})^2]\}$$

$$k'_{31} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[-1+2(r_{i1})^2] + (r_{i2})^2[2-8(r_{i1})^2]\}$$

$$k'_{32} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{r_{i1}r_{i2}[4-16(r_{i2})^2]\}$$

$$k'_{33} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{1-2\nu+4(r_{i2})^2[1+\nu-2(r_{i2})^2]\}$$

A distribuição do campo tensorial de dipolos não é conhecida. Pode-se então seguir o mesmo procedimento realizado para os elementos no contorno externo. Adota-se que o campo de dipolos será interpolado por funções polinomiais Lagrangeanas de valores de dipolos nodais distribuídos ao longo da fissura. As mesmas aproximações feitas para aproximar a linha da fissura (geometria) serão utilizadas para aproximar o campo de dipolos (elementos isoparamétricos). Chama-se a atenção para o fato dos elementos de fissura poderem ser de ordem diferente dos elementos no contorno. Cabe aqui ressaltar que o núcleo \mathbf{k}' apresenta singularidade r^{-2} , logo deve-se utilizar elementos descontínuos para integração dos elementos de fissura fictícia.

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{q}^j \quad (4.29)$$

Nessa expressão \mathbf{q}^j é uma variável em forma de matriz coluna que guarda as componentes do tensor de dipolos nodais. Por sua vez, \mathbf{q} também é uma matriz coluna e guarda as componentes de dipolo em qualquer ponto do elemento $\bar{\Gamma}_j$. Sendo n o número de nós que possui o elemento j de fissura, vem:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \dots & \psi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{1(1)} \\ q_2^{1(1)} \\ q_2^{2(1)} \\ q_1^{1(2)} \\ q_2^{1(2)} \\ q_2^{(2)} \\ \vdots \\ q_2^{2(n)} \end{Bmatrix}^j \quad (4.30)$$

Retomando o último termo de (4.24):

$$\int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{k} \mathbf{q} d\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k} \mathbf{q} d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k} \boldsymbol{\psi} \mathbf{q}^j d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k} \boldsymbol{\psi} d\bar{\Gamma}_j \mathbf{q}^j = \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4.31)$$

De modo análogo é possível reescrever o último termo de (4.27) como:

$$\int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{k}' \mathbf{q} d\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k}' \mathbf{q} d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k}' \boldsymbol{\psi} \mathbf{q}^j d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} \mathbf{k}' \boldsymbol{\psi} d\bar{\Gamma}_j \mathbf{q}^j = \mathbf{K}' \mathbf{Q} \quad (4.32)$$

As expressões (4.31) e (4.32) representam a forma discreta do termo integral de contorno sobre o caminhamento da fissura. Desse modo as equações (4.24) e (4.27) podem ser matricialmente escritas respectivamente da seguinte forma:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{P} + \mathbf{K} \mathbf{Q} \quad (4.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{H}' \mathbf{U} + \mathbf{G}' \mathbf{P} + \mathbf{K}' \mathbf{Q} \quad (4.34)$$

Convém mencionar que, nas expressões acima, os termos $\mathbf{K} \mathbf{Q}$ e $\mathbf{K}' \mathbf{Q}$ são o que matematicamente representa a presença da ZPI. Observe-se que são necessárias apenas três equações para sua formulação, enquanto que no MEC Dual se utilizam quatro equações para realizar uma representação semelhante.

Um quesito importante que deve ser comentado é quanto à transição de sistemas referenciais. Note-se que para determinar a abertura da fissura é necessário ter o estado de dipolo referenciado no sistema de coordenadas local. Caso a fissura esteja inclinada, como em modo misto (I e II), por exemplo, deve-se transformar o dipolo global para o sistema local da seguinte maneira:

$$\bar{q}_j^i = R_{im} q_k^m R_{jk} \quad (4.35)$$

Em que:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & -\text{Sen}(\theta) \\ \text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Como as variáveis tensoriais foram escritas em forma matriz coluna, é possível reorganizar a equação (4.35) da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \bar{q}_{11} \\ \bar{q}_{12} \\ \bar{q}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos}^2(\theta) & \text{Sen}(2\theta) & \text{Sen}^2(\theta) \\ -\frac{1}{2}\text{Sen}(2\theta) & \text{Cos}(2\theta) & \frac{1}{2}\text{Sen}(2\theta) \\ \text{Sen}^2(\theta) & -\text{Sen}(2\theta) & \text{Cos}^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Ou de forma sintética:

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \mathbf{q} \quad (4.38)$$

A Figura 4.6 ilustra os sistemas de referências acima mencionados.

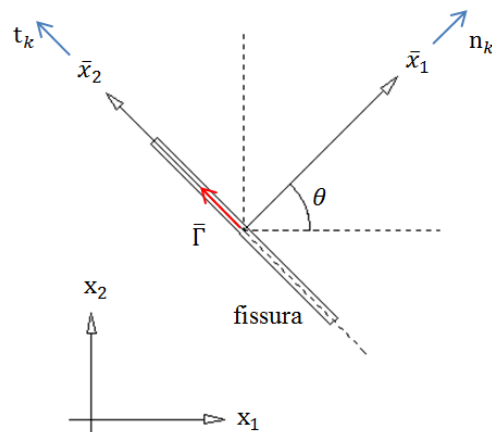


Figura 4.6 Sistemas global e local de referência

As equações (4.31) e (4.32) servirão de ponto de partida para a solução não linear que será apresentada adiante nesse texto. Antes, porém é necessário obter uma maneira de calcular

a tensão sobre os pontos fonte da fissura, pois serão sobre eles que a equação (4.34) deve ser calculada para possibilitar a correção do campo de tensões elástico. Para tanto recorre-se ao MSS que será descrito no item a seguir.

4.4 SUBTRAÇÃO DA SINGULARIDADE DO NÚCLEO INTEGRAL QUE REPRESENTA A FISSURA

A fim de facilitar o trabalho algébrico definem-se as seguintes variáveis auxiliares. Seja:

$$c = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} N_{ljim} = & \{(1-2\nu)(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}) \\ & - 2(1-2\nu)(r_{lm}r_{il}\delta_{ij} + r_{li}r_{il}\delta_{mj} - r_{lj}r_{il}\delta_{im}) \\ & + 2(r_{lj}r_{lm}\delta_{il} + r_{lj}r_{li}\delta_{ml} + r_{lm}r_{li}\delta_{jl}) - 8r_{li}r_{lj}r_{lm}r_{il}\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Esta manipulação permite escrever o termo G_{im}^{lj} da seguinte forma:

$$G_{im}^{lj} = \frac{c}{r^2} N_{ljim} \quad (4.41)$$

A intenção é integrar o termo $\int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj} q_j^l d\bar{\Gamma}$, logo:

$$\int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj} q_{lj} d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj} \psi_n q_{lj}^n d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj} \psi_n d\bar{\Gamma} q_{lj}^n \quad (4.42)$$

O termo q_{lj}^n representa os dipolos nodais. Substituindo as variáveis auxiliares fica:

$$\int_{\bar{\Gamma}} G_{im}^{lj} q_{lj} d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} \frac{c}{r^2} N_{ljim} \psi_n d\bar{\Gamma} q_{lj}^n = c \left(\int_{\bar{\Gamma}} \frac{1}{r^2} N_{ljim} \psi_n d\bar{\Gamma} \right) q_{lj}^n \quad (4.43)$$

O que confere a hipersingularidade ao núcleo integral é o fator r^{-2} . Explicitando o ponto fonte e o ponto campo, seja:

$$I = \oint_{\bar{\Gamma}} \frac{1}{r^2} N_{ljim} \psi_n d\bar{\Gamma} = \oint_{-1}^1 \frac{1}{r^2(\xi_0, \xi)} N_{ljim}(\xi_0, \xi) \psi_n(\xi) J(\xi) d\xi \quad (4.44)$$

Adicionando e subtraindo um termo com singularidade de mesma natureza ao núcleo integral no mesmo intervalo de definição, vem:

$$I = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r^2(\xi_0, \xi)} N_{ljim}(\xi_0, \xi) \psi_n(\xi) J(\xi) - \frac{1}{\bar{r}^2(\xi_0, \xi)} \bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) \bar{\psi}_n(\xi) \bar{J}(\xi) \right] d\xi \quad (4.45)$$

$$+ \oint_{-1}^1 \frac{1}{\bar{r}^2(\xi_0, \xi)} \bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) \bar{\psi}_n(\xi) \bar{J}(\xi) d\xi$$

Sendo $II = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r^2(\xi_0, \xi)} N_{ljim}(\xi_0, \xi) \psi_n(\xi) J(\xi) - \frac{1}{\bar{r}^2(\xi_0, \xi)} \bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) \bar{\psi}_n(\xi) \bar{J}(\xi) \right] d\xi$ e $III = \oint_{-1}^1 \frac{1}{\bar{r}^2(\xi_0, \xi)} \bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) \bar{\psi}_n(\xi) \bar{J}(\xi) d\xi$, a expressão acima fica $I = II + III$.

Para que a integral II se torne regular é necessário que o termo entre colchetes se anule quando ξ tender a ξ_0 . Isto é assegurado assumindo as seguintes considerações sobre o elemento tangente no ponto fonte:

$$\begin{aligned} \bar{r}(\xi_0, \xi) &= J(\xi_0) |\xi - \xi_0| \\ J(\xi) &= J(\xi_0) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\bar{\psi}_n(\xi) = \psi_n(\xi_0) + \psi_{n,\xi} \Big|_{\xi_0} (\xi - \xi_0)$$

$$\bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) = N_{ljim}(\xi_0)$$

O cálculo de $N_{ljim}(\xi_0)$ é realizado da mesma maneira que $N_{ljim}(\xi_0, \xi)$ exceto que se usa $\bar{r}(\xi_0, \xi)$ do elemento tangente. Resta tratar a integral III que permanece hipersingular. Tem-se:

$$III = \int_{-1}^1 \frac{1}{J(\xi_0)^2 (\xi - \xi_0)^2} N_{ljim}(\xi_0) [\psi_n(\xi_0) + \psi_{n,\xi} |_{\xi_0} (\xi - \xi_0)] J(\xi_0) d\xi \quad (4.47)$$

$$III = \int_{-1}^1 \frac{1}{J(\xi_0)^2 (\xi - \xi_0)^2} N_{ljim}(\xi_0) \psi_n(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.48)$$

$$+ \int_{-1}^1 \frac{1}{J(\xi_0)^2 (\xi - \xi_0)^2} N_{ljim}(\xi_0) \psi_{n,\xi} |_{\xi_0} (\xi - \xi_0) J(\xi_0) d\xi$$

Pode-se simplificar a expressão acima e chegar a:

$$III = \frac{N_{ljim}(\xi_0) \psi_n(\xi_0)}{J(\xi_0)} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi + \frac{N_{ljim}(\xi_0) \psi_{n,\xi} |_{\xi_0}}{J(\xi_0)} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0)} d\xi \quad (4.49)$$

Os termos integrais acima quando calculados por meio de limites laterais resultam em:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0)^2} d\xi = - \left(\frac{1}{1 + \xi_0} + \frac{1}{1 - \xi_0} \right) = \{PFH\} \quad (4.50)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(\xi - \xi_0)} d\xi = -\ln(1 + \xi_0) + \ln(1 - \xi_0) = \{VPC\} \quad (4.51)$$

Em suma, a expressão final para integração do elemento quando o ponto fonte pertencer a ele mesmo é:

$$I = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{r^2(\xi_0, \xi)} N_{ljim}(\xi_0, \xi) \psi_n(\xi) J(\xi) - \frac{1}{r^{-2}(\xi_0, \xi)} \bar{N}_{ljim}(\xi_0, \xi) [\psi_n(\xi_0)] \right. \\ \left. + \psi_{n,\xi} |_{\xi_0} (\xi - \xi_0) J(\xi_0) \right\} d\xi \quad (4.52)$$

$$+ \frac{N_{ljim}(\xi_0) \psi_n(\xi_0)}{J(\xi_0)} [\{PFH\} \cdot \psi_n(\xi_0) + \{VPC\} \cdot \psi_{n,\xi} |_{\xi_0}]$$

Agora é possível calcular a tensão em pontos que estejam sobre a fissura e estabelecer um procedimento para solução não linear do problema de propagação de fissuras em meios

que contenham descontinuidades. O próximo item se dedica a mostrar como as equações deduzidas até aqui serão utilizadas para esse fim.

4.5 PROCEDIMENTO NUMÉRICO PARA SOLUÇÃO NÃO LINEAR UTILIZANDO DIPOLOS

A estratégia de solução utilizada no trabalho é do tipo incremental iterativa. Essa técnica estabelece que o carregamento deve ser aplicado em frações (passos) sendo que só ocorre o avanço quando determinado passo for equilibrado segundo algum critério. Aspectos de interesse relativos a formulações não lineares podem ser encontradas em Proença (2012), Proença (1988), Coda (2000) e Cen e Maier (1992).

Para fins da presente formulação, o campo que deverá atender ao critério adotado por meio da lei coesiva é o de tensões. Portanto é conveniente expressar o problema em termos desse campo. Pode-se resolver a equação (4.33) em termos do valor de contorno realizando as mudanças de colunas necessárias nas matrizes H e G . Então:

$$X = M + RQ \quad (4.53)$$

Em que $M = A^{-1}F$ e $R = A^{-1}K$. Observe-se que as condições de contorno do problema estão inseridas na matriz A . Substituindo a solução do contorno na equação (4.34) resulta:

$$\sigma = N + SQ \quad (4.54)$$

Em que $N = F' - A'M$ e $S = K' - A'R$.

Observe-se que a equação (4.54) é a equação que permite obter o campo de tensões dada uma determinada distribuição de dipolos.

No modelo não linear proposto, a lei coesiva adotada fornece o valor do campo de tensões a ser corrigido. Entretanto é preciso transformá-los em dipolos para poder utilizar a equação (4.54). Note-se que a própria equação (4.54) pode ser utilizada para estimar o vetor Q a ser aplicado. Sendo o processo não linear é conveniente estimar esse vetor a partir do valor

local das tensões de cada elemento de fratura ou nó como se fossem campos independentes. Durante a implementação computacional, optou-se por utilizar as próprias sub-matrizes de \mathbf{S} obtidas para cada nó.

Os passos a seguir compõem os procedimentos da solução do problema não linear considerando o operador constante. Esse modo de solução é consagrado pelo seu uso e será utilizado no presente trabalho como referência para validação da solução via operador tangente. Valendo-se dos conceitos de dipolos, o procedimento geral descrito na seção 3.11 é aqui reformulado da seguinte forma:

❖ Para cada passo de carregamento

i. Calcular excesso de tensão

$$\Delta\sigma = \sigma^{\text{critério}} - \sigma^{\text{elástico}} \quad (4.55)$$

ii. Transformar excesso de tensão em dipolos e atualizar seu valor acumulado

$$\Delta Q = \mathbf{S}^{-1} \Delta\sigma \quad (4.56)$$

iii. Calcular o incremento na abertura da fissura e atualizar seu valor acumulado

Equação (4.22)

iv. Verificar atendimento ao equilíbrio sob determinada tolerância

Equação (4.54)

v. Caso iv não se verifique, repita os passos i ao iv com $\sigma^{\text{critério}}$ atual.

É possível dar um sentido geométrico ao processo de correção. A Figura 4.7 permite acompanhar a evolução do estado de tensão normal em um determinado ponto da fissura. Quando ocorre a distribuição dos elementos de fissura, todos os pontos fonte são admitidos terem abertura nula. À medida que o processo avança a fissura abre até que todos os pontos fonte atendam ao critério coesivo. Tome-se um desses pontos e suponha que sua tensão normal corresponda ao ponto A da Figura 4.7 se tratando de um critério coesivo linear. Como $\sigma(A)$ é superior a f_t , estado não permitido pela relação constitutiva, o excesso de tensão $\Delta\sigma^{(1)}$ deve ser reaplicado na estrutura chegando-se ao ponto B. O excesso de tensão origina uma parcela de dipolos (equação (4.56)), que por sua vez gera uma abertura de fissura Δw_1 , chegando ao ponto C. Nesse ponto se verifica a diferença existente entre o ponto C e o ponto D do critério, $\Delta\sigma^{(2)}$. Caso $\Delta\sigma^{(2)}$ seja superior a uma dada tolerância então reaplica-se esse

excesso na estrutura originando um novo incremento de abertura Δw_2 que é acumulado. O procedimento é repetido i vezes até que $\Delta\sigma^{(i)}$ seja próximo de zero dentro de certa tolerância. Ao final ter-se-á o valor acumulado da abertura da fissura $w_{equilíbrio}$ que corresponde ao equilíbrio bem como a tensão coesiva real.

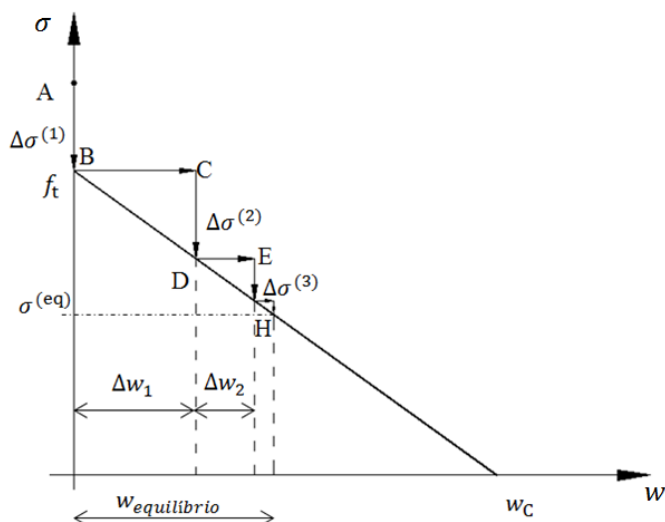


Figura 4.7 Interpretação geométrica do operador constante

Os valores atuais do contorno são obtidos substituindo o vetor de dipolos acumulados na equação (4.53).

É possível que exista convergência em determinado passo de carregamento, mesmo que a tensão na ponta da fissura não tenha atingido o valor de f_t . Nesse caso a fissura deve se propagar até que essa condição seja verdadeira, para que aí sim se avance ao próximo passo de carga. Torna-se necessário a criação de um procedimento evolutivo para considerar os efeitos da propagação. A essa tarefa que o próximo item se propõe.

4.6 PROCESSO EVOLUTIVO DA FISSURA

O primeiro passo a ser dado é identificar a direção de propagação em determinado passo de carregamento. Destaca-se que a direção de propagação permanece fixa durante a aplicação do passo de carga. Isto significa que os incrementos de fissura que se fizerem necessários serão dados segundo a mesma direção de propagação. O presente trabalho adota o

procedimento da bisseção como critério para determinar o tamanho do incremento da fissura. Este procedimento é feito para considerar o fato que a medida em que a fissura avança, o material perde rigidez, e conseqüentemente faz com que não seja mais necessário crescer o comprimento total inicial.

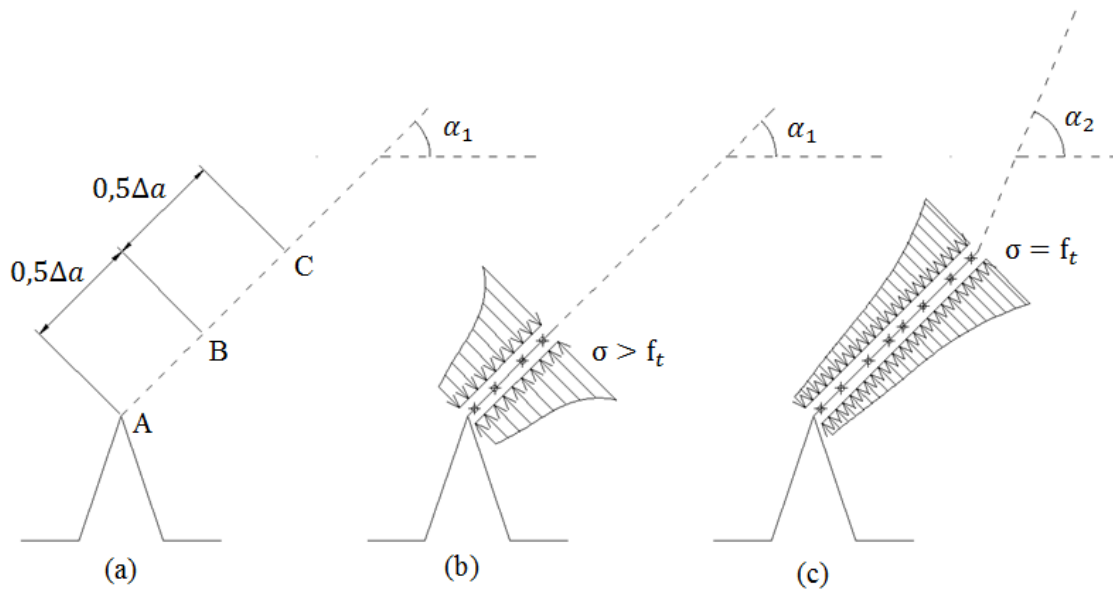


Figura 4.8 Inserindo elementos de fissura: a) Posição inicial da fissura (b) Incremento 1 de fissura (c) Incremento 2 de fissura

A Figura 4.8 ajuda a elucidar o procedimento. Suponha-se que em determinado momento o critério de verificação aponte que a fissura deve crescer na direção α_1 de um tamanho Δa (\overline{AC}). Nesse caso se insere um elemento de contorno (no caso de ordem cúbica) de tamanho $0,5\Delta a$ (\overline{AB}) e através do procedimento iterativo (item 4.5) chega-se ao equilíbrio. Nesse ponto é necessário checar a tensão que atua na ponta da fissura. Caso a tensão atuante seja maior que a resistência a tração do material, outro elemento de fissura deve ser adicionado e novamente seu tamanho será $0,5\Delta a$ na direção inicial α_1 . Novamente se verifica o atendimento ao critério de Rankine. Caso se verifique, avança-se ao próximo passo de carregamento e uma nova direção α_2 é calculada, e então esse procedimento é repetido.

O processo de evolução implica em um aumento da dimensão das matrizes K e K' . Conseqüentemente a matriz S aumentará seu número de linhas e colunas à medida que a fissura avança. No entanto, semelhante ao que ocorre na formulação Dual, a reconstrução total do sistema de equações não é necessária. Basta inserir os efeitos dos novos elementos de fissura nas matrizes já existentes, uma vez que o contorno externo é o mesmo durante todo o processo. Na prática esse processo dá origem a novas linhas e colunas nas matrizes que

representam o sistema de equações. A Figura 4.9 ilustra esquematicamente o que ocorre durante a atualização das equações, $SQ = \sigma$.

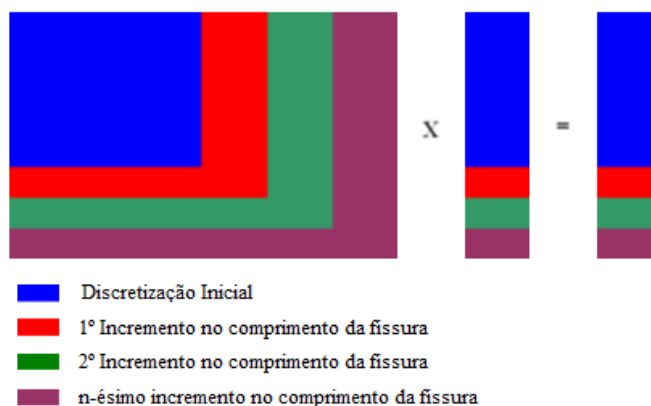


Figura 4.9 Esquema de atualização da equação matricial (LEONEL, 2009)

O procedimento acima descrito pode levar muito tempo a depender do refinamento adotado na análise. Assim, formulações que contribuam para reduzir o tempo de processamento são necessárias. Uma alternativa, proposta por este trabalho, é o desenvolvimento de uma formulação que determine o incremento dipolos de uma maneira mais direta. Esse procedimento será descrito no item a seguir.

4.7 OBTENÇÃO DO OPERADOR TANGENTE

Tome-se a equação (4.57) como representante da relação de equilíbrio não linear do problema.

$$Y(Q) = -\sigma(Q) + N + SQ \quad (4.57)$$

Em termos incrementais, em um determinado passo de carregamento n se pode fazer:

$$Y(\Delta Q_n) = -\Delta\sigma_n(\Delta Q_n) + \Delta N_n + S\Delta Q_n \quad (4.58)$$

Admitindo que o valor do dipolo acumulado para próxima iteração ($i+1$) é dado pelo valor atual somado a um incremento, ou seja:

$$\Delta \mathbf{Q}_n^{i+1} = \Delta \mathbf{Q}_n^i + \delta \Delta \mathbf{Q}_n^i \quad (4.59)$$

Para encontrar o incremento, admite-se que se esteja suficientemente próximo da solução e que por isto se possa expandir a equação de equilíbrio nas vizinhanças de $\Delta \mathbf{Q}_n^i$.

$$Y(\Delta \mathbf{Q}_n^{i+1}) = Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i) + \frac{\partial Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i)}{\partial \Delta \mathbf{Q}_n^i} \delta \Delta \mathbf{Q}_n^i + o(\delta \Delta \mathbf{Q}_n^i) \quad (4.60)$$

A equação acima deve ser nula para a situação de equilíbrio. Tomando apenas os dois primeiros termos da expansão:

$$Y(\Delta \mathbf{Q}_n^{i+1}) = Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i) + \frac{\partial Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i)}{\partial \Delta \mathbf{Q}_n^i} \delta \Delta \mathbf{Q}_n^i = 0 \quad (4.61)$$

Seja

$$\frac{\partial Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i)}{\partial \Delta \mathbf{Q}_n^i} = \mathbf{K}_t \quad (4.62)$$

o operador tangente, então:

$$\delta \Delta \mathbf{Q}_n^i = -\mathbf{K}_t^{-1} Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i) \quad (4.63)$$

Com essa operação é possível obter uma relação para calcular o acréscimo de dipolo com base no próprio resíduo da iteração atual. Essa formulação se insere na categoria de algoritmos tipo Newton-Raphson. Resta calcular a matriz \mathbf{K}_t .

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial Y(\Delta \mathbf{Q}_n^i)}{\partial \Delta \mathbf{Q}_n^i} = -\frac{\partial [\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i(\Delta \mathbf{Q}_n^i)]}{\partial \Delta \mathbf{Q}_n^i} + 0 + \mathbf{S} \quad (4.64)$$

A relação entre $\boldsymbol{\sigma}$ e \mathbf{Q} envolve uma composição de funções e transformações entre eixos locais e globais. O vetor de dipolos que serve para calcular w deve estar escrito em coordenadas locais, já que w é local. Para tanto é possível estabelecer uma transformação de sistemas global – local que sirva tanto para dipolo (4.37) quanto para tensão:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}_n^i = \mathbf{T} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^i \quad \text{Global} \rightarrow \text{Local} \quad (4.65)$$

$$\Delta\sigma_n^i = \mathbf{T}^{-1}\Delta\bar{\sigma}_n^i \quad \text{Local} \rightarrow \text{Global} \quad (4.66)$$

A barra indica referência local. Logo:

$$\frac{\partial\Delta\sigma_n^i}{\partial\Delta\mathbf{Q}_n^i} = \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial\Delta\bar{\sigma}_n^i}{\partial\Delta\mathbf{Q}_n^i} = \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial\Delta\bar{\sigma}_n^i}{\partial\Delta w_n^i} \frac{\partial\Delta w_n^i}{\partial\Delta\bar{\mathbf{Q}}_n^i} \frac{\partial\Delta\bar{\mathbf{Q}}_n^i}{\partial\Delta\mathbf{Q}_n^i} \quad (4.67)$$

Pode-se fazer:

$$\bar{\sigma}_n = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}(w) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{\partial\Delta\bar{\sigma}_n}{\partial\Delta w_n} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{\sigma}_{11}(w)}{\partial w} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

Lembrando que $\partial\bar{\sigma}_{11}(w)/\partial w$ vem do critério coesivo.

$$\Delta w_n = \Delta w_n(\Delta\bar{Q}_{11}, \Delta\bar{Q}_{12}, \Delta\bar{Q}_{22}) \rightarrow \frac{\partial\Delta w_n^i}{\partial\Delta\bar{\mathbf{Q}}_n^i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\Delta w_n^i}{\partial\Delta\bar{Q}_{11}^i} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

Da relação (4.22) vem $\partial\Delta w_n^i/\partial\Delta\bar{Q}_{11}^i = 1 - 2\nu/2G(1 - \nu)$.

$$\Delta\bar{\mathbf{Q}}_n = \mathbf{T}\Delta\mathbf{Q}_n \rightarrow \frac{\Delta\bar{\mathbf{Q}}_n^i}{\partial\Delta\mathbf{Q}_n^i} = \mathbf{T} \quad (4.70)$$

Substituindo (4.68), (4.69) e (4.70) em (4.67) vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\sigma_n}{\partial\Delta\mathbf{Q}_n^i} &= \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\bar{\sigma}_{criterio}}{\partial w} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (1 - 2\nu/2G(1 - \nu))^t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathbf{T} \\ &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \frac{\partial\bar{\sigma}_{criterio}}{\partial w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Substituindo o valor de T calculado vem:

$$K_t = S - \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \frac{\partial \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial w} \mathbf{V} \quad (4.72)$$

Em que:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \text{Cos}^4(\theta) & 2\text{Cos}^3(\theta)\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}^2(\theta)\text{Sen}^2(\theta) \\ \text{Cos}^3(\theta)\text{Sen}(\theta) & 2\text{Cos}^2(\theta)\text{Sen}^2(\theta) & \text{Cos}(\theta)\text{Sen}^3(\theta) \\ \text{Cos}^2(\theta)\text{Sen}^2(\theta) & 2\text{Cos}(\theta)\text{Sen}^3(\theta) & \text{Sen}^4(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

A expressão (4.71) é a matriz do operador tangente, dito consistente por incorporar a lei coesiva em sua definição.

Conforme foi visto no item anterior é possível dar um sentido geométrico ao processo de correção da tensão na fissura, utilizando o operador tangente. Para tanto, admita que o critério pós-pico ainda seja linear. Na Figura 4.10, suponha que em determinado ponto fonte exista um estado de tensão que viole o equilíbrio. Semelhantemente ao caso do operador constante, o excesso de tensão $\Delta\sigma^{(1)}$ deve ser reaplicado na estrutura dando origem a um incremento na abertura da fissura. Eis aqui a fundamental diferença. O incremento é calculado seguindo a reta tangente à curva do critério, no ponto B, que é a própria curva nesse caso. Isto implica no alcance do ponto de equilíbrio com apenas uma iteração. Caso o critério não seja linear (como o exponencial, por exemplo) o comportamento é similar, porem o operador tangente é atualizado a cada passo, sendo que as aproximações ocorrem segundo retas tangentes à curva do critério escolhido.

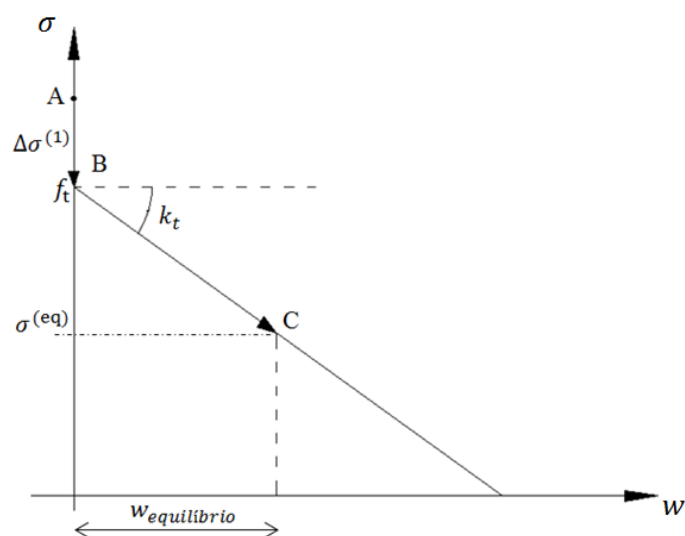


Figura 4.10 Interpretação geométrica do operador tangente

Fica evidente que o uso do operador tangente implica em um menor número de iterações para solução não linear do sistema de equações. Desta maneira, a presente formulação constitui uma importante contribuição para a análise de propagação de fissuras que utilize o conceito dos dipolos.

A seguir serão mostrados os resultados obtidos por um programa computacional que foi desenvolvido envolvendo os conceitos apresentados neste capítulo.

5 EXEMPLOS E DISCUSSÕES

As formulações descritas ao longo dos capítulos anteriores foram estruturadas em forma de código computacional. A seguir serão apresentados quatro exemplos nos quais os resultados da formulação implementada são comparados a resultados experimentais e numéricos disponíveis na literatura.

5.1 EXEMPLO 1 – CHAPA COM FURO CENTRAL

Apresenta-se um exemplo clássico da Teoria da Elasticidade que procura evidenciar a eficiência do MEC em problemas que envolvam concentração de tensões. Trata-se de uma chapa tracionada ao longo de uma direção em um contorno remoto valendo-se das propriedades de simetria. As propriedades físicas do material, representadas pelo Módulo de Elasticidade Linear (E) e coeficiente de Poisson (ν), bem como as condições de carregamento e vinculação são apresentadas pela Figura 5.1

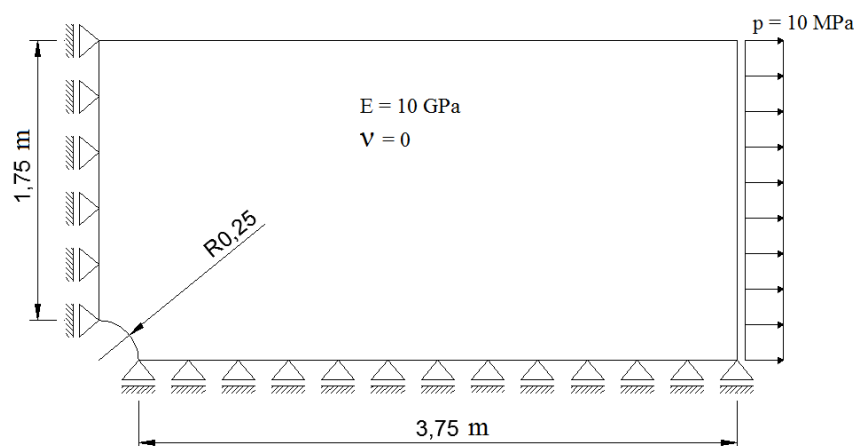


Figura 5.1 Chapa tracionada

Para analisar este problema foi elaborada uma malha de contorno conforme mostrada na Figura 5.2. Primeiramente foi utilizada apenas a formulação singular (para cada ponto fonte) sendo que o número de nós (graus de liberdade) foi mantido fixo enquanto a ordem dos elementos empregados foi aumentada gradualmente. O carregamento foi aplicado em regime de estado plano de tensões.

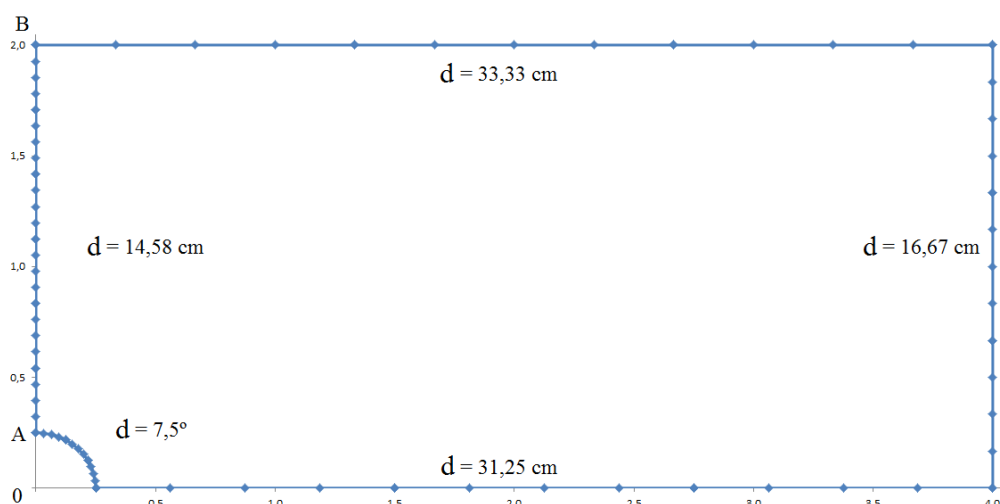


Figura 5.2 Malha de elementos de contorno para formulação singular, d indica distância entre nós

Posteriormente uma análise considerando apenas a formulação hipersingular (para cada ponto fonte) foi realizada. Nesse caso os elementos de contorno devem ser descontínuos nas extremidades e por isto o número de graus de liberdade varia de acordo com a ordem dos elementos utilizados.

Em ambas as análises (singular e hipersingular) a mesma ordem dos elementos foi utilizada, começando com ordem linear até chegar a elementos de quarta ordem. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.1. O resultado analítico previsto para o ponto A corresponde a três vezes o valor da força de superfície aplicada, ou seja, 30,00 MPa.

Tabela 5.1 - Resultados apresentados pelo programa

Ordem do Elemento de Contorno	Quantidade de elementos	Formulação Singular		Formulação Hipersingular	
		Quantidade de nós	σ_x em A (MPa)	Quantidade de nós	σ_x em A (MPa)
Primeira	72	77	27,44	144	29,36
Segunda	36	77	29,45	108	29,95
Terceira	24	77	29,82	96	30,12
Quarta	18	77	30,10	90	30,59

Os gráficos que ilustram a variação das tensões ao longo do trecho OAB são mostrados pela Figura 5.3 e Figura 5.4.

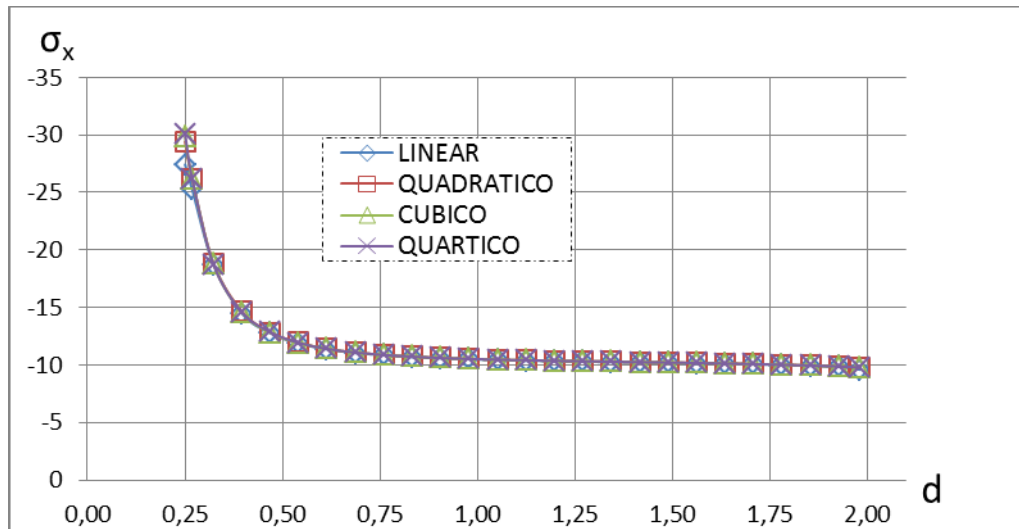


Figura 5.3 Diferentes ordens dos elementos sob formulação MEC Singular

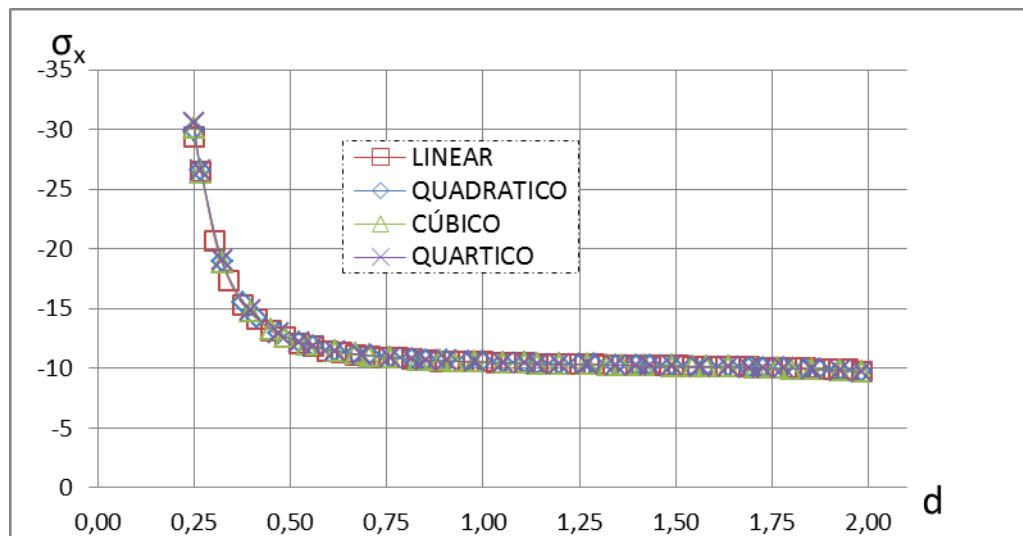


Figura 5.4 Diferentes ordens dos elementos sob formulação MEC Hipersingular

Pode-se notar que (para a malha adotada) todas as ordens utilizadas na discretização conseguiram capturar os efeitos da concentração de tensões (decaimento das curvas) sendo que as ordens mais elevadas conseguiram aproximar o valor da tensão em A com maior exatidão. Observa-se que à medida que a ordem dos elementos hipersingulares aumenta, diminui o número de nós, mas ainda sim se consegue preservar os bons resultados.

A título de comparação, o mesmo problema foi analisado pelo software ANSYS por meio do MEF fazendo uso de 7426 elementos de ordem quadrática. O resultado apresentado para σ_x ao longo do trecho OAB é apresentado pela Figura 5.5. Note-se a semelhança dos resultados apresentados por ambos os métodos numéricos.

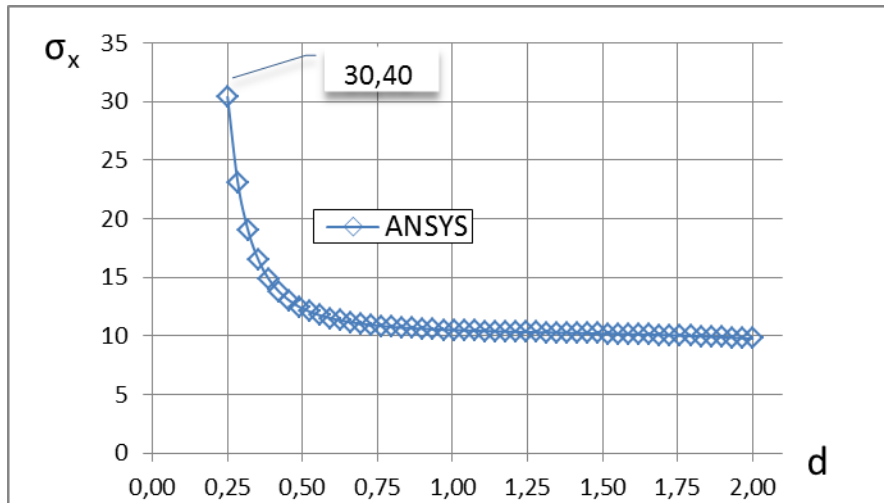


Figura 5.5 Resultados obtidos via MEF

Fica evidente por meio destes gráficos que o MEC consegue capturar o efeito da concentração de tensões sendo útil em problemas que apresentem essa característica como a propagação de fissuras, por exemplo.

5.2 EXEMPLO 2 – CHAPA TRACIONADA

O segundo exemplo é dedicado ao estudo do comportamento estrutural global de um sólido considerando a formação e propagação da fissura coesiva. Este problema foi escolhido devido ao fato de poder ser resolvido por meio do equacionamento analítico apresentado na Resistência dos Materiais. Portanto, a solução analítica proporcionará resultados que servirão de parâmetro para a validação do código computacional desenvolvido. As características geométricas são mostradas pela Figura 5.6. Trata-se de uma chapa solicitada em tração pura. A tração é provocada por um deslocamento prescrito de 0,020 m em sua extremidade direita.

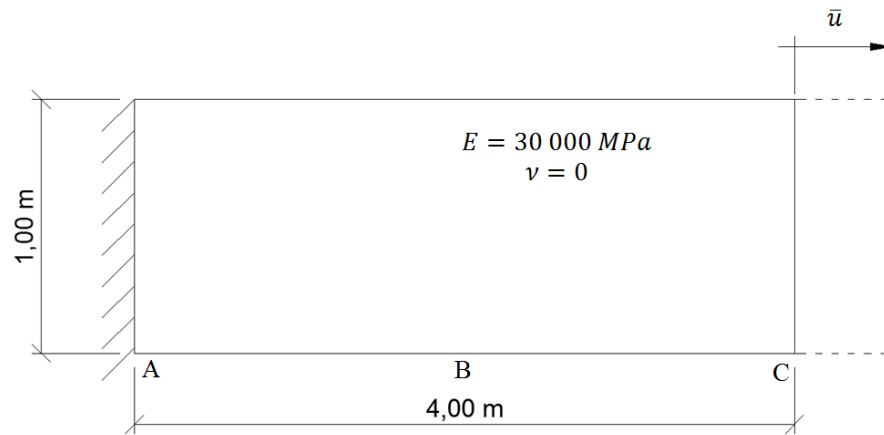


Figura 5.6 Chapa tracionada

A lei coesiva adotada para esse exemplo, por ora, será a linear, enquanto o operador para a correção não linear será o constante (O.C.). A resistência a tração será 3 MPa e energia de fratura de $0,015 \text{ MN/m}$. A tolerância adotada para convergência será de 10^{-4} MPa para tensão coesiva. Admite-se que caso ocorra fissura, ela se iniciará no ponto B que se situa no ponto médio do lado \overline{AC} . A Figura 5.7 ilustra a malha utilizada para processar o exemplo sendo que os pontos contíguos indicam a existência de nós duplos. A malha de contorno é composta por seis elementos de ordem cúbica descritos com formulação singular. A fissura será modelada por elementos de ordem cúbica. Observa-se que no ponto monitorado para o surgimento da fissura deve haver encontro de elementos descontínuos (nó duplo) para que se permita a abertura da fissura.

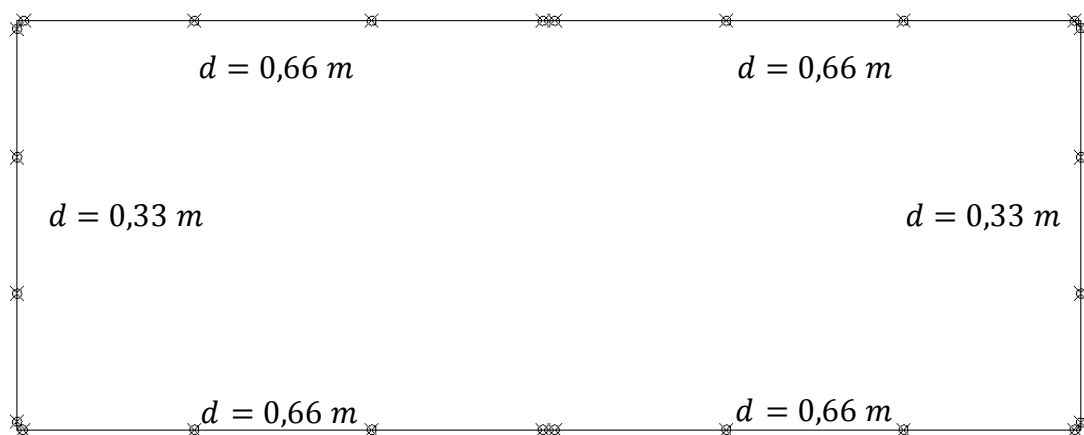


Figura 5.7 Malha de contorno para exemplo 2

O resultado de força versus deslocamento para o ponto C é mostrado pela Figura 5.8. Esse gráfico mostra a resposta não linear global da estrutura quando submetido ao

carregamento indicado. Inicialmente a estrutura apresenta comportamento elástico linear até o material atingir a sua resistência à tração ($3,0 \text{ MPa}$). Nesse momento surge uma fissura fictícia que inicia em B e que se estende por toda altura do sólido, já que o estado de tensão é constante. Uma vez atingida a resistência f_t a lei constitutiva coesiva deve ser obedecida na região em que se estabeleceu a fissura, enquanto que a elasticidade linear permanece válida para o restante do corpo.

Os incrementos de carga que são dados posteriormente ao pico de resistência promovem uma abertura das faces da fissura que por sua vez provocam uma diminuição da capacidade de transferência de esforços normais entre as faces. Este comportamento está configurado no trecho descendente do gráfico (Figura 5.8). Quando o deslocamento aplicado na estrutura atingir o valor da abertura crítica da fissura ($w_c = 0,01$) ocorre uma separação total das faces da fissura fictícia dando origem a uma fissura visível que provocará a fratura do corpo. Como a fissura ocupa o trecho correspondente à altura do sólido, ocorrerá uma separação física do sólido em duas partes, e então estingue-se a capacidade portante da estrutura (correspondente ao trecho horizontal da Figura 5.8 entre $0,01\text{m}$ e $0,02\text{m}$).

A captura dos efeitos que ocorrem após a separação física são possíveis com o MEC, enquanto com o MEF a matriz de rigidez torna-se singular devido ao movimento de corpo rígido.

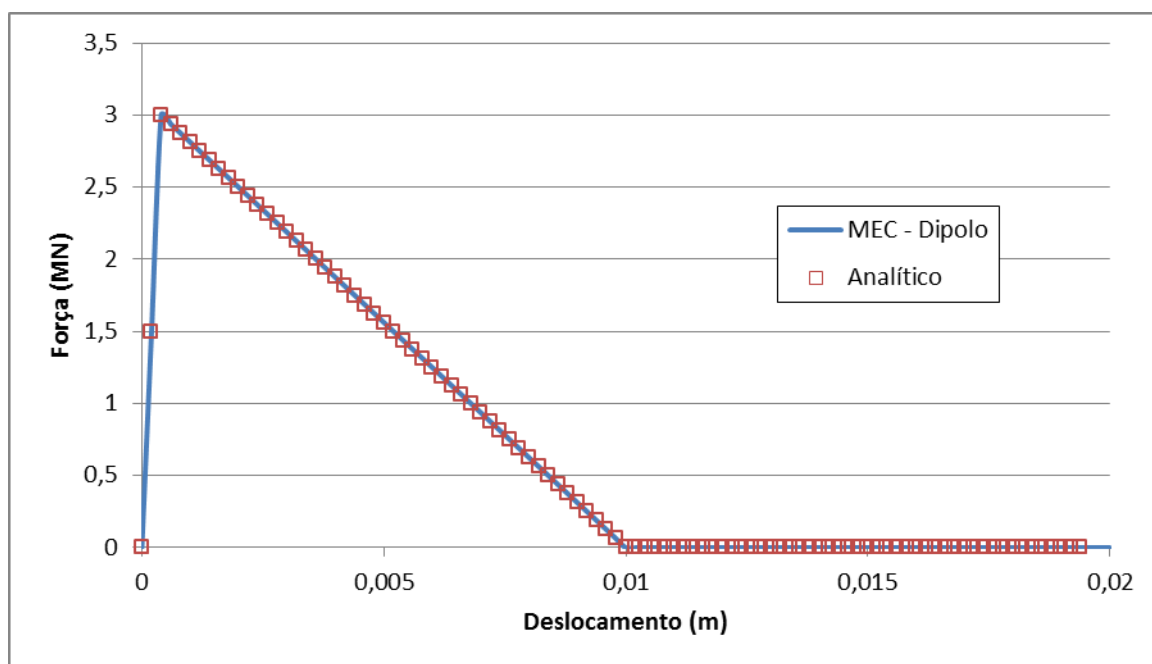


Figura 5.8 Força x Deslocamento da face C

A Figura 5.9 mostra a variação das tensões coesivas durante o processo de fratura do corpo. É possível observar o critério obedecido pelo programa durante o processamento do exemplo, para um ponto fonte situado na região fissura. Inicialmente a estrutura como um todo apresenta comportamento elástico linear, logo não existe descontinuidade (abertura de fissura). Quando a estrutura atinge o pico de resistência, a fissura surge e dá origem ao processo de afastamento entre as faces (modo I) até atingir o ponto de abertura máxima. Fica clara a recuperação da lei coesiva inserida como parâmetro de entrada (no caso linear).

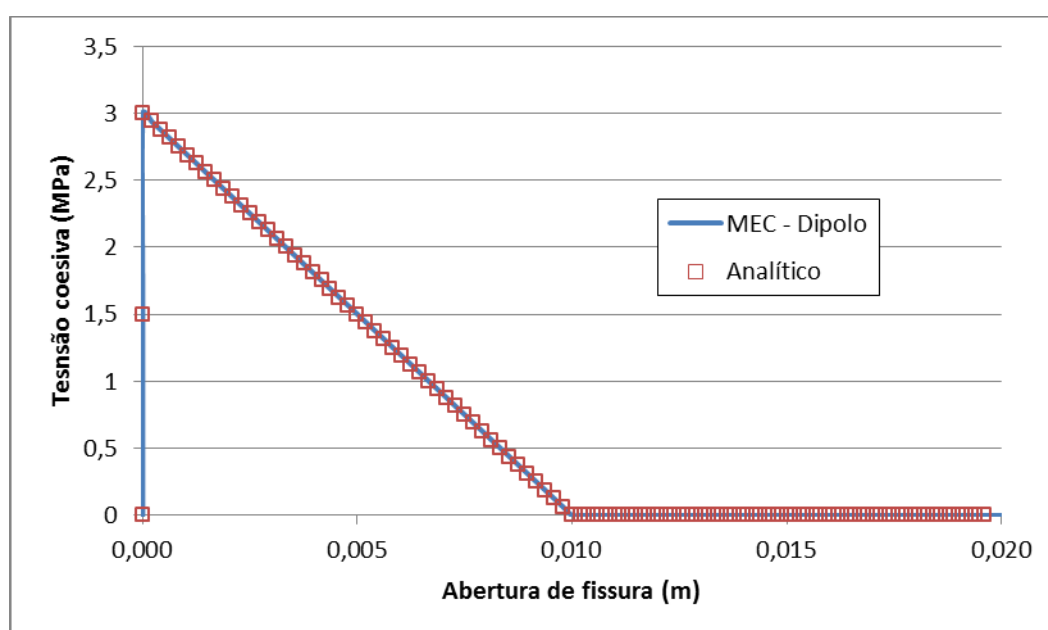


Figura 5.9 Lei constitutiva coesiva linear

Uma informação interessante pode ser extraída deste exemplo. Para tanto, tomam-se os pontos PF4 e PF5, localizados respectivamente à esquerda e à direita do ponto B, conforme ilustra a Figura 5.10.

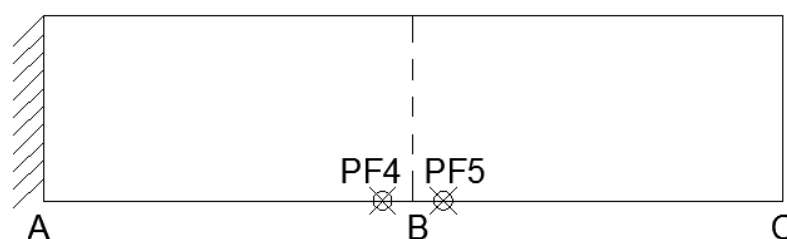


Figura 5.10 Localização dos pontos PF4 e PF5

A resposta da estrutura, em termos de deslocamentos no ponto PF4, é mostrada pela Figura 5.11, tendo em vista duas situações: a primeira delas se refere à uma análise elástica linear (sem possibilidade de formação de fissura) enquanto que a segunda considera a análise de fissuração por dipolos. O que se observa é que enquanto o pico de resistência à tração não é atingido, as curvas das duas análises são coincidentes. Após o pico, o ponto PF4, na análise correspondente ao sólido fraturado, passa a se deslocar cada vez menos frente ao que se deslocaria na situação elástica linear. Esse comportamento continua até que o ponto PF4 não se desloque mais, momento este que coincide com o instante em que ocorre a separação física do sólido. Isto mostra que ao atingir a ruptura, o ponto PF4, e conseqüentemente todo o lado esquerdo do sólido, permanece em repouso, conforme o esperado.

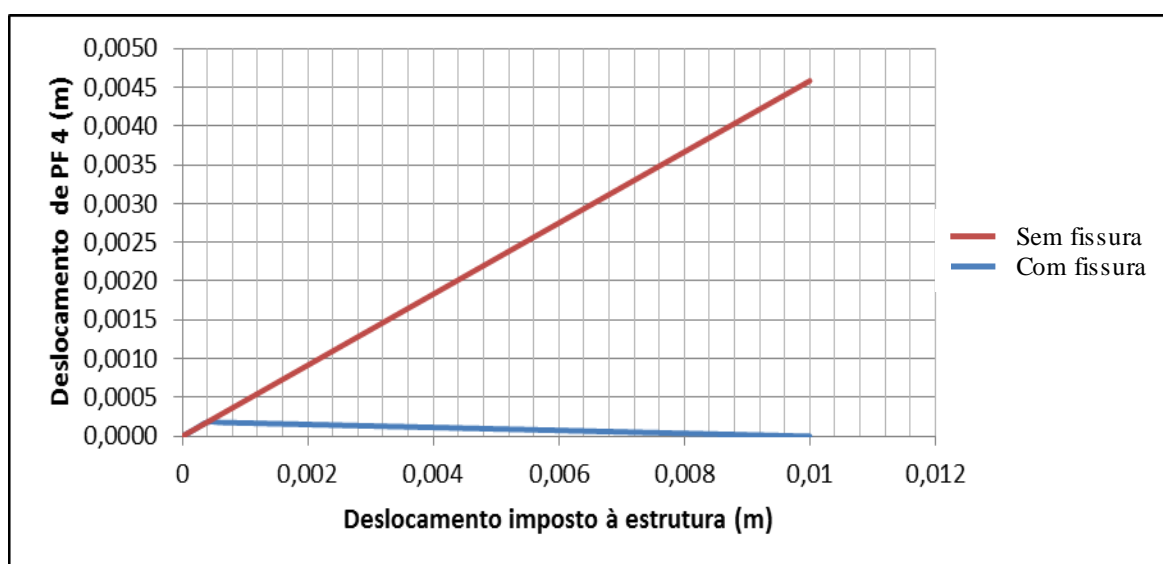


Figura 5.11 Deslocamento do ponto PF 4 (esquerda da fissura)

Quanto à parcela direita do corpo, representado na Figura 5.12, esta segue comportamento semelhante. Inicialmente os deslocamentos são similares até atingir a resistência à tração do material. A partir daí o lado direito do corpo fissurado começa a se deslocar mais do que deslocaria caso a fissura não existisse. Esse comportamento continua até que ocorre a separação física do corpo. Nesse caso o ponto PF 5, e conseqüentemente todo o lado direito, apresenta deslocamento igual ao deslocamento imposto, fato que também corresponde ao esperado.

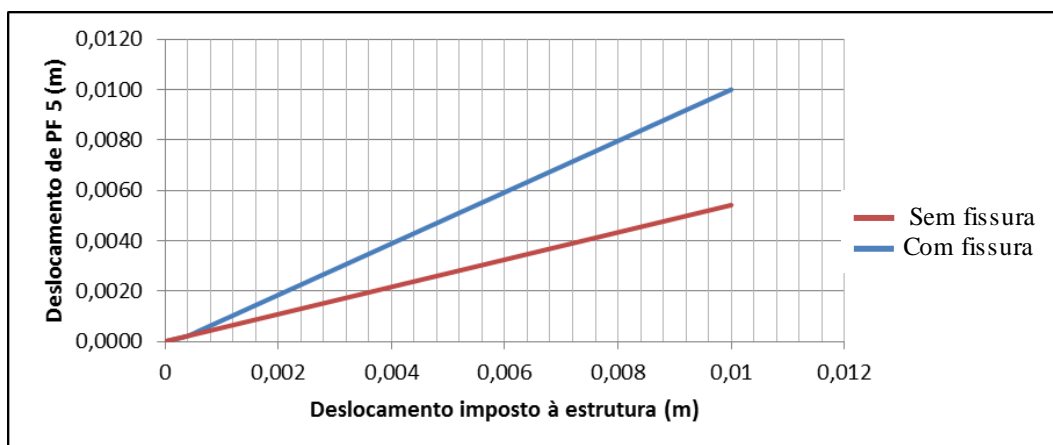


Figura 5.12 Deslocamento do ponto PF 5 (direita da fissura)

Foram realizados testes adicionais para verificar o comportamento da estrutura quando a lei coesiva for alterada, mantendo os mesmos dados de geometria, carregamento, parâmetros físicos e malha, já expostos, bem como o O.C.

A resposta evidenciada pelo corpo, em termos de força x deslocamento, quando submetido à lei coesiva bilinear é mostrado pela Figura 5.13.

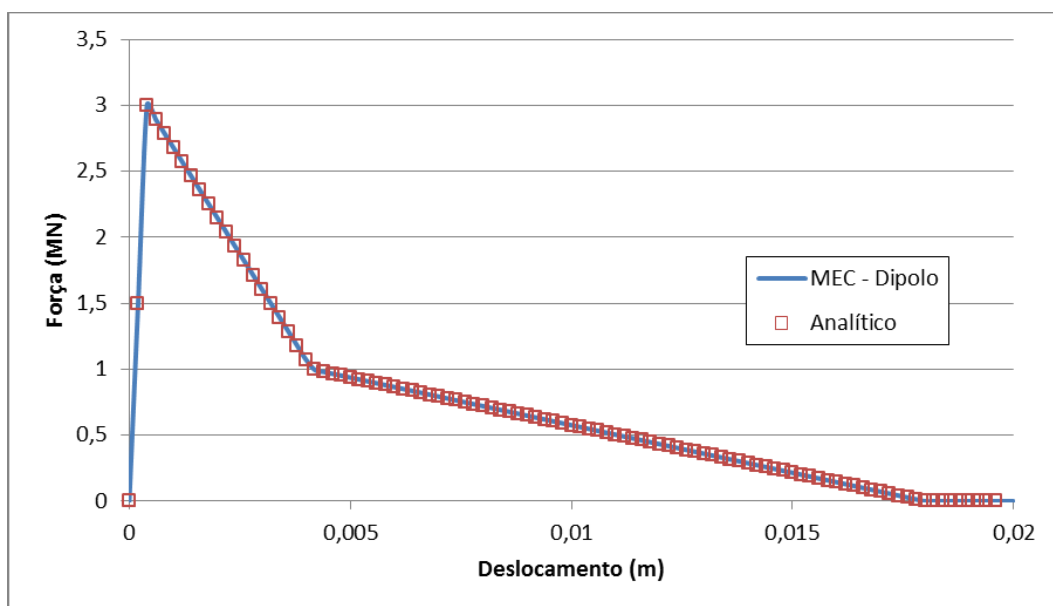


Figura 5.13 Força x Deslocamento para a face C (lei bilinear)

O comportamento da força coesiva manifestada na região fissura é mostrado pela Figura 5.14.

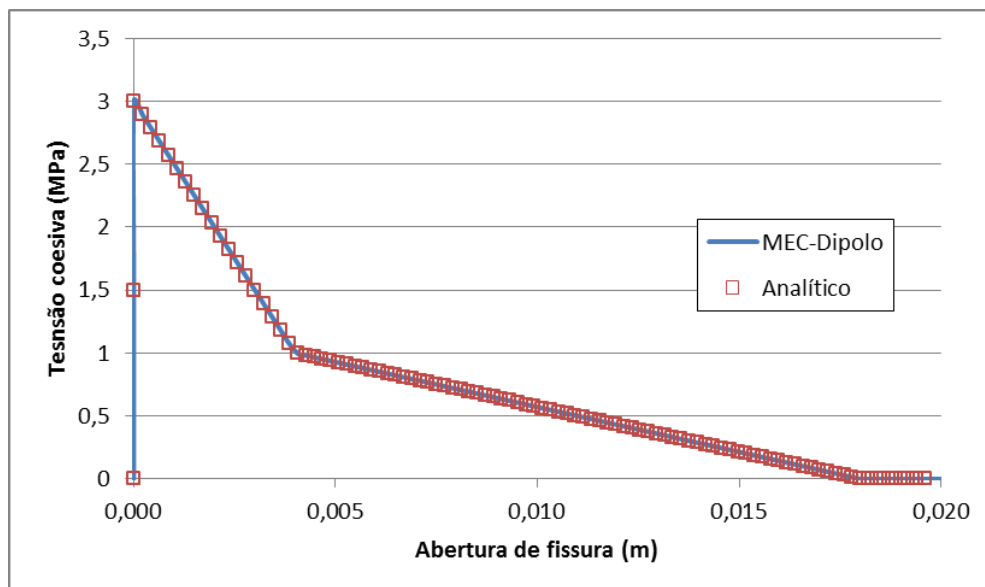


Figura 5.14 Lei constitutiva coesiva bilinear

As respostas mostradas pelas duas figuras acima correspondem ao esperado para a lei coesiva em questão.

O mesmo procedimento foi realizado para a terceira lei coesiva, a saber, exponencial, obtendo o comportamento mostrado pela Figura 5.15

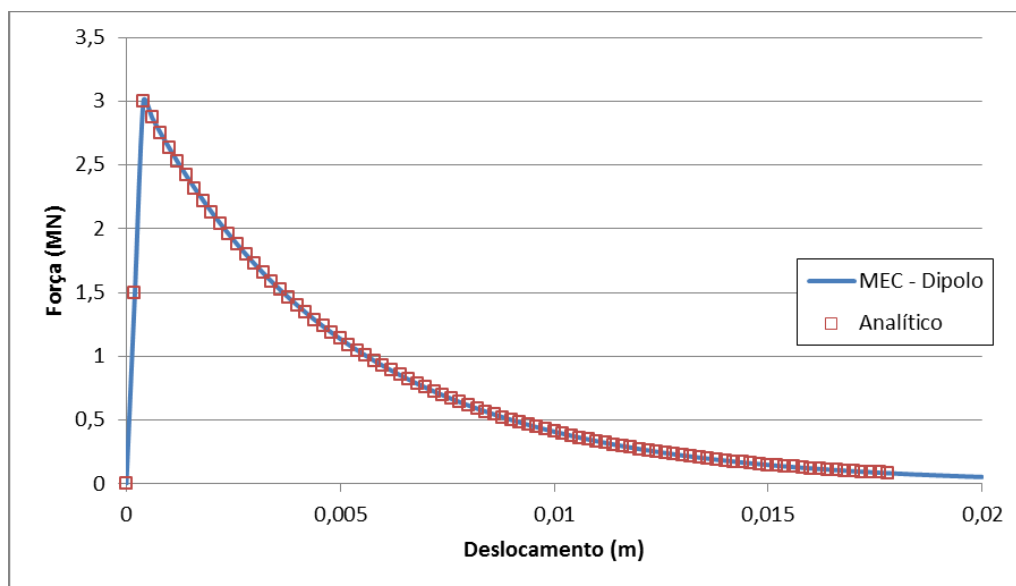


Figura 5.15 Força x Deslocamento para a face C (lei exponencial)

Já a resposta coesiva observada é mostrada pela Figura 5.16.

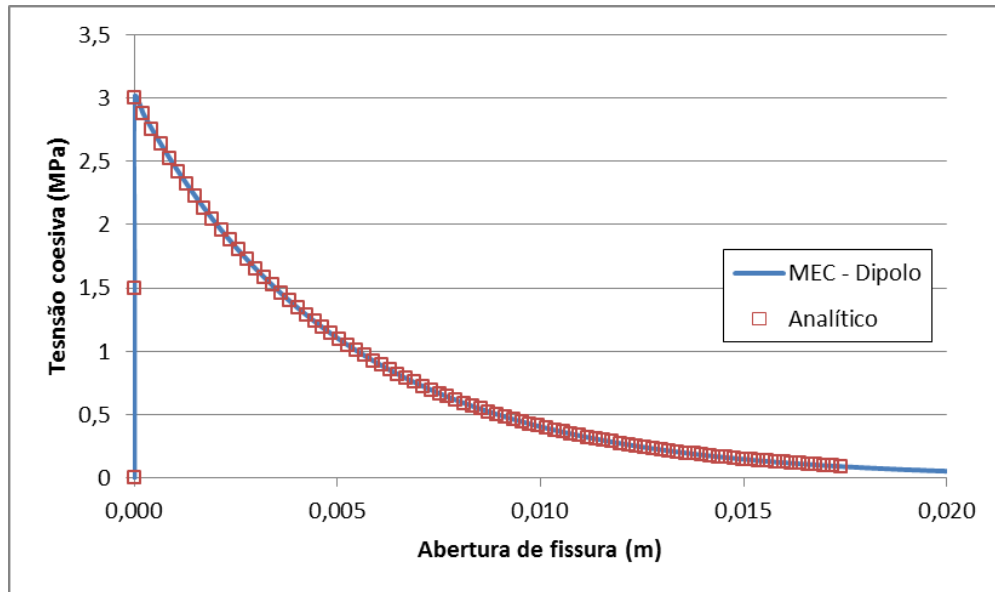


Figura 5.16 Lei constitutiva coesiva exponencial

Ambos os comportamentos acima correspondem ao esperado.

Resta investigar os efeitos pertinentes à solução do sistema não linear utilizando o O.T., já que os resultados acima foram obtidos considerando o O.C. Para tanto, as análises acima foram processadas novamente considerando a formulação apresentada no item 4.7. Os resultados obtidos foram exatamente os mesmos já comentados conforme se verifica na Figura 5.17.

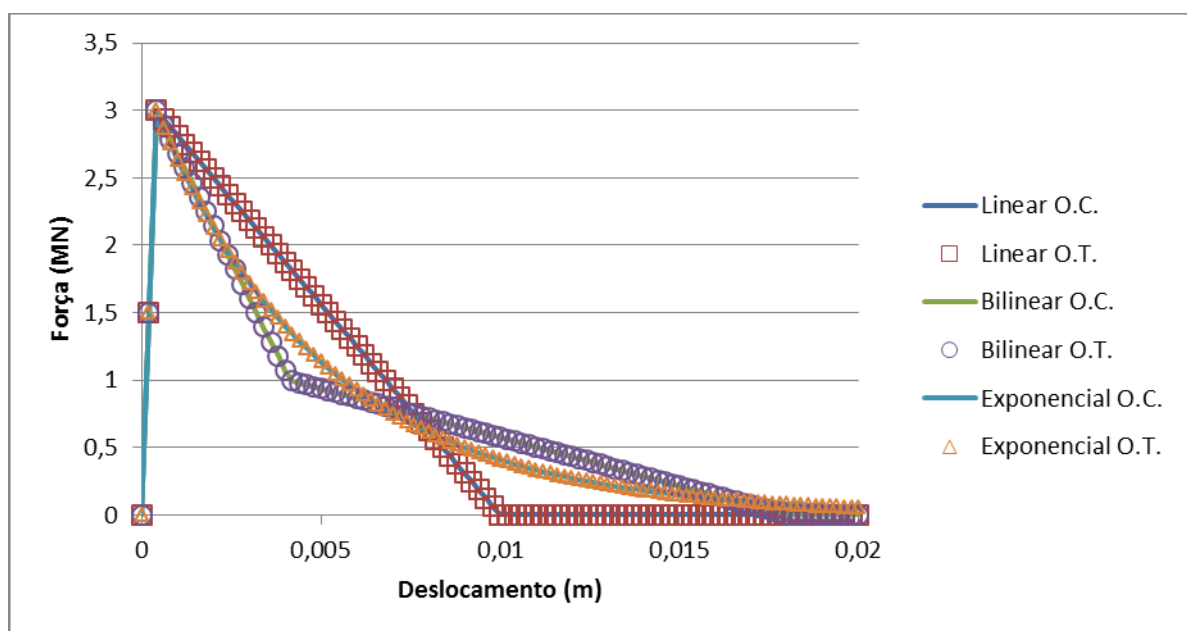


Figura 5.17 Comparação entre operadores constante e tangente (face C)

A coincidência de resultados apresentada está de acordo com o esperado, uma vez que a resposta física da estrutura não pode variar com o método escolhido para solução do sistema de equações. Então, o uso do operador tangente é vantajoso, em termos gerais, sob o ponto de vista computacional, já que conduz à mesma resposta utilizando menor número de iterações. A Tabela 5.2 apresenta dados sobre a economia alcançada em termos de número total de iterações.

Tabela 5.2 - Número total de iterações na análise

Lei coesiva	Operador Constante (iteraões)	Operador Tangente (iteraões)	Economia (%) no número de iteraões
Linear	292	75	~74%
Bilinear	312	76	~76%
Exponencial	298	148	~50%

Em última análise, esse exemplo, que possui simples condições de vinculação e carregamento, permite inferir que a formulação da fissura coesiva por meio do termo integral envolvendo dipolos consegue reproduzir o comportamento global esperado do sólido fraturado. Além disso, o operador tangente mostrou ser uma importante ferramenta para a redução do tempo de processamento.

Agora, é possível partir para análises mais elaboradas em termos de vinculação e carregamento a fim de verificar a eficácia da formulação apresentada. Nesse sentido, seguem os próximos exemplos.

5.3 EXEMPLO 3 – VIGA SOB FLEXÃO EM TRÊS PONTOS SUBMETIDA A MODO I

O presente exemplo trata de uma viga de concreto com entalhe inicial submetida a um ensaio de flexão por três pontos realizado experimentalmente por SALEH (1997). Análises

numéricas envolvendo o MEC Dual foram desenvolvidas por Leonel (2009). Os dados geométricos são mostrados pela Figura 5.18 enquanto que os parâmetros materiais são: módulo de elasticidade longitudinal, $E = 30000MPa$, coeficiente de Poisson, $\nu = 0,15$, resistência à tração, $f_t = 3,0MPa$ e energia de fratura $G_f = 75N/m$.

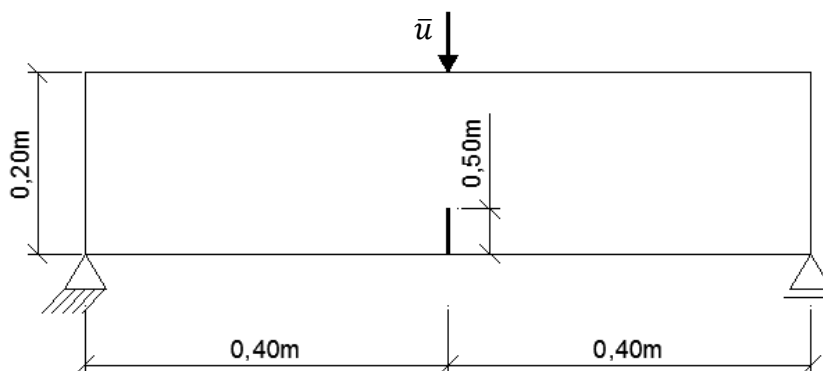


Figura 5.18 Geometria da viga ensaiada

Para analisar esse exemplo, as três leis coesivas (linear, bilinear e exponencial) serão consideradas. O carregamento será aplicado em 24 passos adotando tolerância de $1 \cdot 10^{-5}$ para convergência baseada em tensões coesivas na ZPI. A malha de contorno constitui-se de 35 elementos descontínuos de ordem cúbica, e 2 elementos lineares descontínuos na extremidade superior do entalhe, para propiciar abertura, totalizando 144 nós inicialmente. Nesse exemplo o entalhe foi modelado como contorno externo possuindo abertura de 2 mm. Os incrementos de fissura serão representados por elementos lineares descontínuos.

A Figura 5.19 apresenta um gráfico da resposta da estrutura em termos de força x deslocamento. Além do resultado experimental, os resultados numéricos, considerando a formulação MEC Dual, são apresentados. As denominações Linear, Bilinear e Exponencial indicam a lei coesiva utilizada na formulação por dipolos (capítulo 4) utilizando O.C. para solução do sistema de equações.

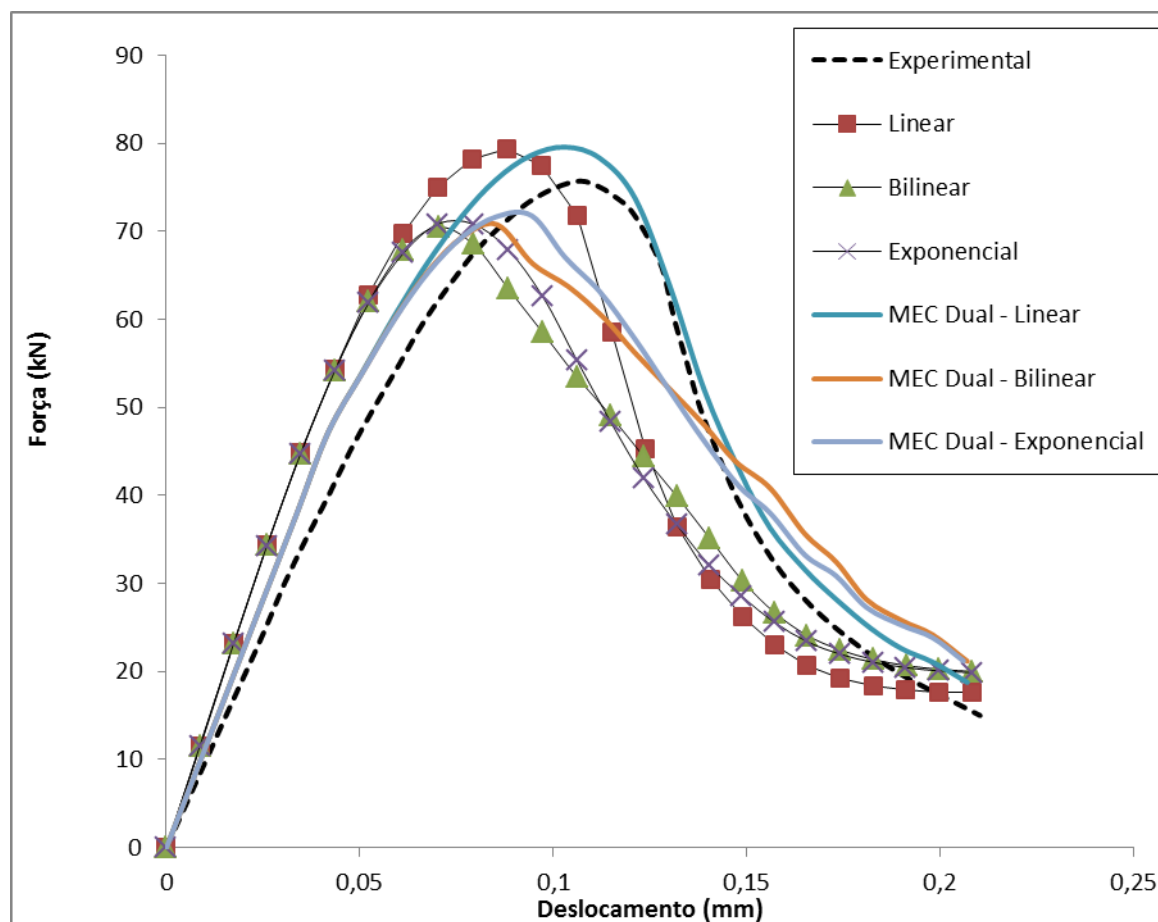


Figura 5.19 Confronto entre resultados numéricos e experimentais

De maneira geral, é possível constatar que a formulação por dipolos foi capaz de capturar o comportamento não linear da estrutura. Inicialmente, o modelo numérico apresenta resposta mais rígida em relação ao experimental. Ainda sim, se obtém razoável aproximação para carga de pico. O trecho descendente apresentou maior flexibilidade que o real. Observa-se uma semelhança entre as respostas via modelo MEC Dual e via dipolos.

É importante mencionar que, a malha do contorno influencia sobremaneira os resultados globais. Os dados apresentados pela Figura 5.19 foram obtidos após sucessivos refinamentos até atingir um ponto em que os resultados não mais variassem. Deste modo, uma análise de convergência de malha é uma opção adequada para uma obtenção mais direta da resposta final.

A Figura 5.20 ilustra o processo de propagação da fissura a partir do entalhe central. Os dados foram obtidos para alguns passos de carregamento e fissura mantida fixa a direção de propagação.

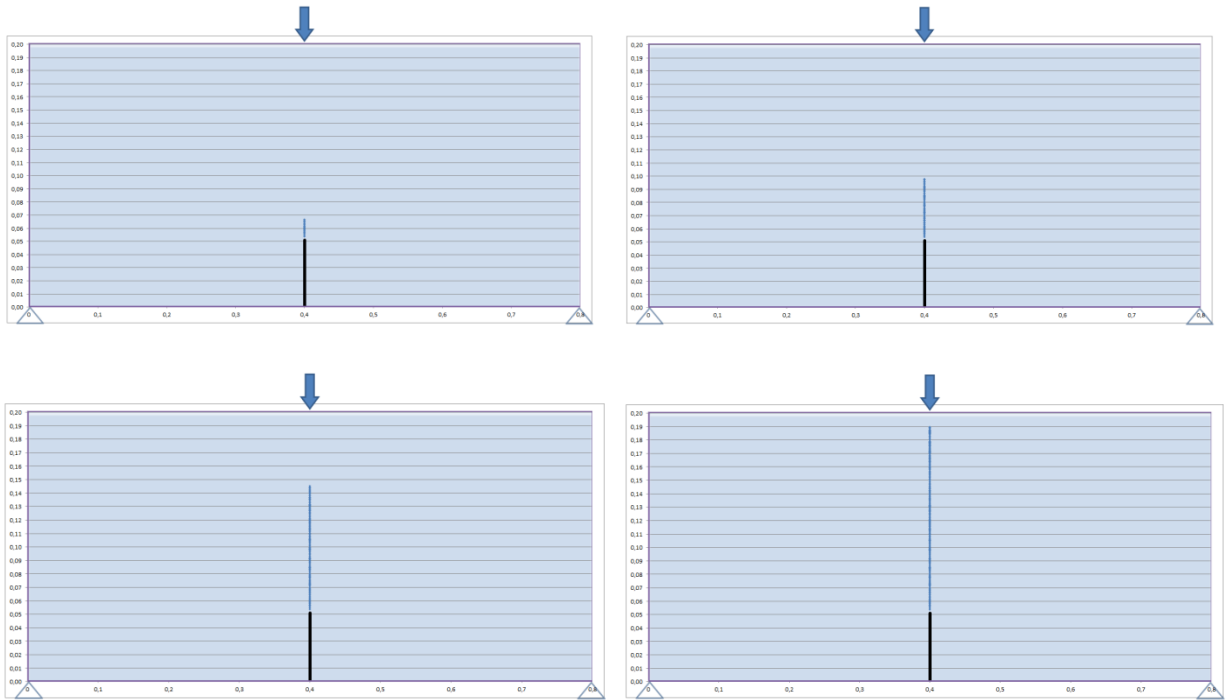


Figura 5.20 Evolução da fissura coesiva

A resposta coesiva também foi avaliada durante a análise e é mostrada pela Figura 5.21. Observe-se que a tensão coesiva atinge valor nulo quando a lei linear ou bilinear é utilizada. Isto significa que esse ponto, correspondente ao primeiro ponto fonte da fissura fictícia acima do entalhe, apresenta fissura visível e faz parte de uma macrofissura.

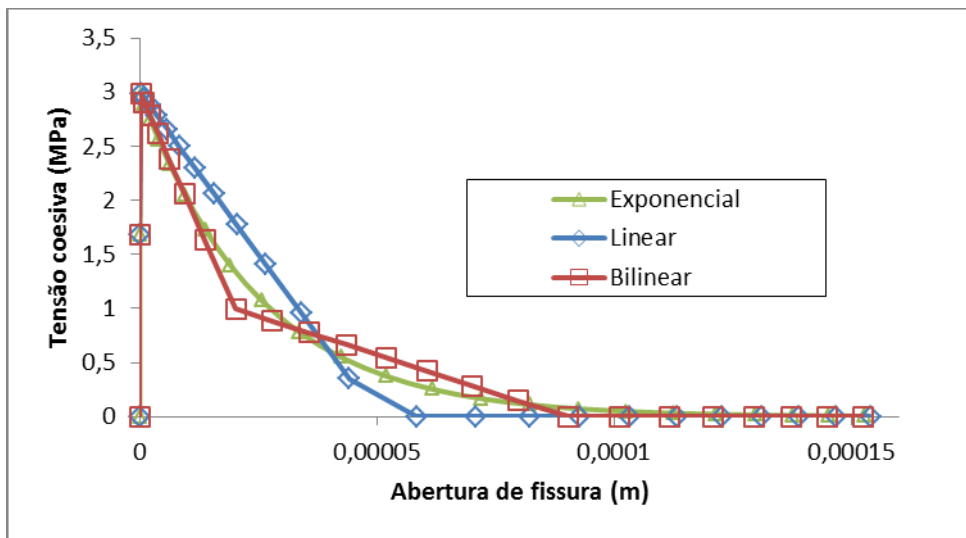


Figura 5.21 Resposta de tensão coesiva

Com respeito ao O.T. os resultados observados são idênticos aos do O.C. em termos gerais. Os dados da Tabela 5.3 mostram os efeitos do uso do O.T. no que se refere ao número de total de iterações.

Tabela 5.3 - Comparativo de iterações do exemplo 3

Lei coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	31002	9549	~69%
Bilinear	154533	52085	~66%
Exponencial	158136	31639	~80%

Embora os resultados mostrados pela tabela acima sejam satisfatórios ressalta-se que o algoritmo de correção ficou mais sensível à malha de contorno, requerendo ainda mais cuidado com respeito ao refinamento adotado para a análise. O gráfico da Figura 5.22 representa o comportamento global em termos de força x deslocamento considerando o operador tangente nas comparações.

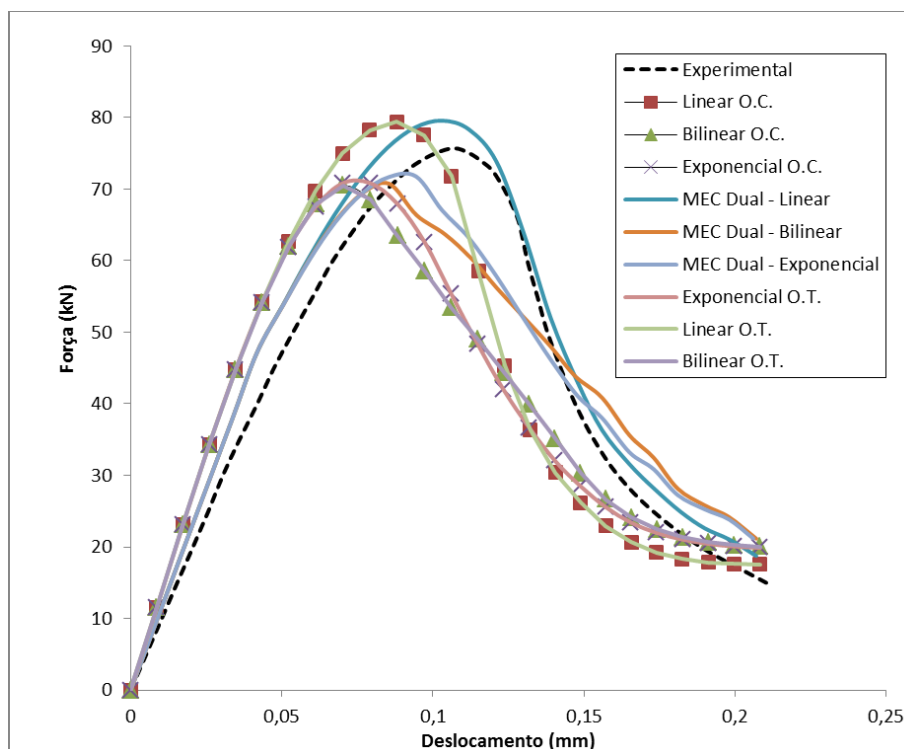


Figura 5.22 Resposta não linear da estrutura

Esse exemplo apresenta apenas o modo I de propagação. Isto significa que a fissura não tem mudança de direção durante o caminho de propagação. De acordo com os resultados numéricos observados, a formulação integral por dipolos conseguiu capturar os efeitos não lineares decorrentes do processo de fissuração e propagação. Cabe averiguar se a formulação proposta consegue capturar o comportamento quando a direção de propagação não é fixa, ou ainda, quando existe a inclinação da fissura a medida que o processo evolutivo se desenvolve. Nesse caso surge o modo misto de propagação composto pelos modos I e II. Esse caso será investigado no exemplo seguinte.

5.4 EXEMPLO 4 – VIGA SUBMETIDA A MODO MISTO (I – II)

O exemplo final de aplicação é uma viga de concreto com entalhe central submetida a um ensaio de cisalhamento. Os dados experimentais foram apresentados por Galvez et al. (1998). As informações sobre a geometria e vinculação do modelo estão contidas na Figura 5.23. Os parâmetros materiais são: módulo de elasticidade longitudinal $E = 37000MPa$, coeficiente de Poisson, $\nu = 0,20$, resistência à tração, $f_t = 3,0MPa$ e energia de fratura, $G_f = 69N/m$.

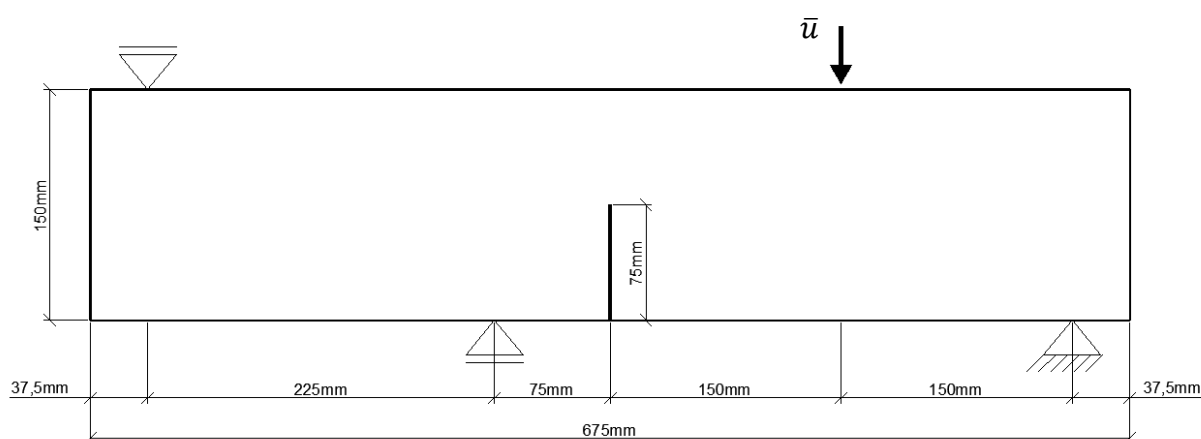


Figura 5.23 Dados geométricos do Exemplo 04

Assim como nos exemplos anteriores, as três leis coesivas foram consideradas. A convergência adotada é $1 \cdot 10^{-4}$ para tensões coesivas na ZPI. O carregamento foi aplicado em 24 passos. Quanto à malha do contorno, foram utilizados 65 elementos de contorno de ordem cúbica e 2 elementos de ordem linear, no topo do entalhe, todos descontínuos, totalizando 264 nós na malha inicialmente. O entalhe foi considerado como contorno externo com abertura de 2 mm. Os incrementos de fissura constituem-se de elementos de ordem linear descontínuos. Os resultados obtidos em termos de força x deslocamento são mostrados pela Figura 5.24. Os dados numéricos relativos ao MEC Dual estão de acordo com Leonel (2009).

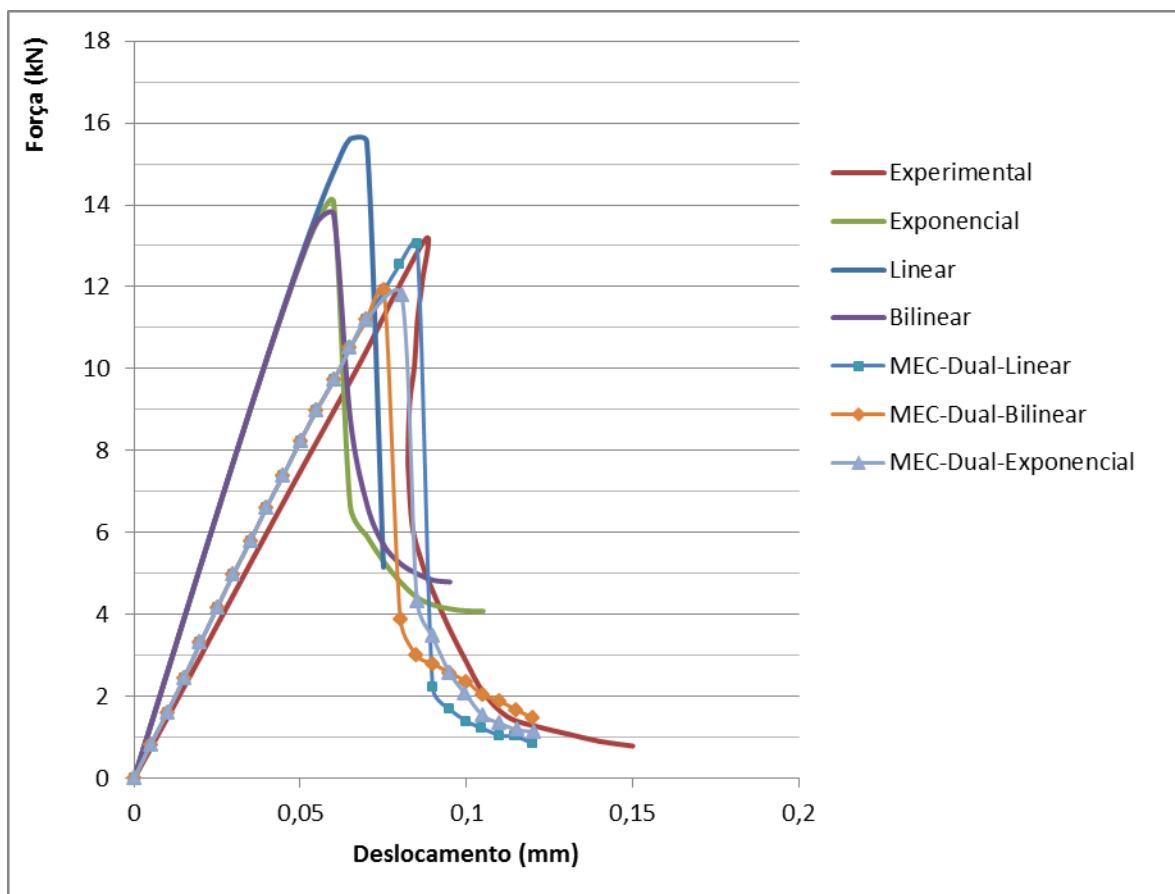


Figura 5.24 Resposta força deslocamento Exemplo 04

Nota-se que o modelo numérico se comporta de maneira mais rígida em relação ao real. Isto é esperado, uma vez que se tenta reproduzir infinitos graus de liberdades por meio de um número discreto de pontos sobre o contorno. Convém ressaltar que inicialmente adotou-se uma malha pré-definida que foi refinada sucessivamente até que o comportamento

da estrutura não mais se alterasse de maneira significativa, obtendo a malha descrita anteriormente.

Em termos gerais, o comportamento não linear pôde ser capturado pela formulação com dipolos, sendo que a lei coesiva bilinear a que melhor aproximou a carga de pico. No ramo descendente foi observada a perda de estabilidade do algoritmo causando quedas abruptas das curvas da Figura 5.23. Esse fato fica evidente ao observar o gráfico da Figura 5.25 que mostra longos trechos retos na curva de resposta coesiva, independentemente da lei utilizada.

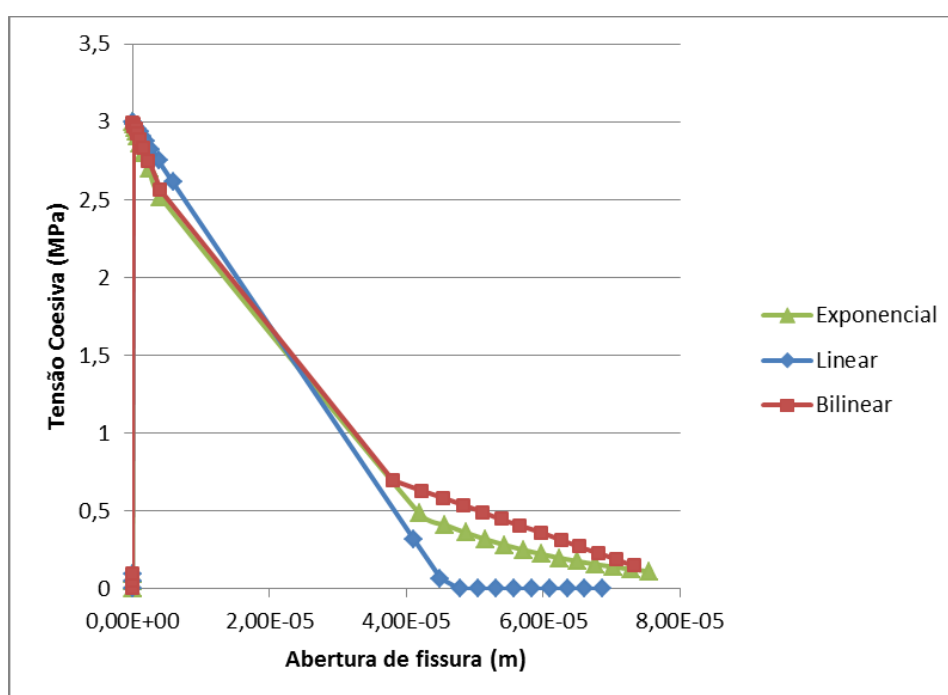


Figura 5.25 Resposta coesiva da estrutura

No comportamento real da estrutura se observa a presença de uma instabilidade conhecida como *snap back*. Como essa instabilidade ocorre justamente no trecho correspondente ao salto no diagrama acima, pode-se inferir que o algoritmo de solução não linear proposto neste trabalho não é hábil o bastante para lidar com esse fenômeno. Uma alternativa para resolver esse problema, poderia ser o desenvolvimento de um algoritmo complementar baseado no *arc length*, semelhante aos casos conhecidos da Teoria da Plasticidade. Outra maneira possível, indicada por Venturini (1995), é o rearranjo das equações do sistema não linear de modo que se possa ter outra variável guia que não seja o deslocamento ou a força de superfície, como a abertura de fissura, por exemplo.

Quanto ao caminhamento da fissura, a Figura 5.26 mostra a configuração da fissura em determinados instantes da análise. É possível notar que a fissura tende a seguir um caminho que a conduza a uma região próxima de onde o carregamento é aplicado. O resultado experimental foi inserido para fins de comparação. Nota-se um comportamento coerente com as observações reais.

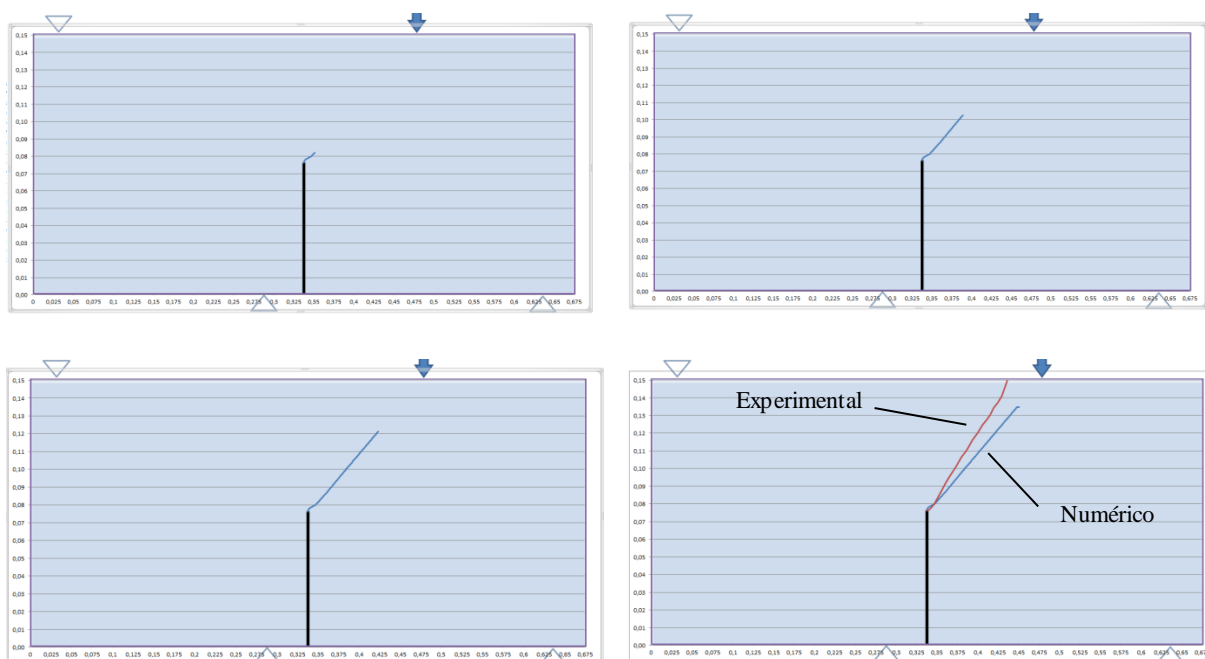


Figura 5.26 Evolução da fissura

No que se refere ao uso do operador tangente, para esse exemplo, os resultados foram satisfatórios, pois reproduziram os obtidos com o operador constante. Novamente o caráter local das correções foi levado em consideração em ambos os operadores. A Tabela 5.4 traz informações referentes ao número total de iterações, bem como a economia alcançada.

Tabela 5.4 Número de iterações do exemplo 04

Lei coesiva	Operador Constante (iterações)	Operador Tangente (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	2174	687	~68%
Bilinear	2637	721	~73%
Exponencial	4979	740	~85%

Em termos gerais os resultados obtidos para propagação em modo misto desse exemplo foram satisfatórios mostrando que a formulação por dipolos também pode ser usada para esse fim.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essencialmente, o presente trabalho abordou o desenvolvimento de uma formulação alternativa do MEC para a modelagem do processo de propagação de fissuras em corpos bidimensionais formados por materiais quase frágeis. Esses materiais possuem a ZPI composta por microfissuras que tendem a coalescer e originar novas fissuras, conferindo um comportamento altamente não linear ao sólido em questão.

O modelo utilizado para simular a presença da ZPI, embora existam outros, foi o MFF. Este modelo mostrou ser adequado para simular a presença da zona coesiva, especialmente, quando em conjunto com a formulação do MEC discutida no trabalho.

A formulação alternativa do MEC foi derivada a partir da degeneração da integral de domínio do termo clássico de tensões iniciais. Esse procedimento deu origem a uma nova variável, o dipolo, que permitiu inserir correções no campo de tensões elástico, possibilitando a análise não linear. Para descobrir a distribuição adequada de dipolos foi necessária a criação de elementos de contorno isoparamétricos de alta ordem, que exercem tanto a função de interpolar o campo de dipolos quanto a de servir como caminho para propagação de fissuras.

O comportamento não linear das estruturas analisadas pôde ser descrito de maneira satisfatória por meio da formulação proposta, utilizando três equações para representar a ZPI, e com isso, mostrou ser uma possível alternativa ao consagrado modelo Dual, que utiliza quatro equações para modelagem equivalente da zona de processos, no campo de análise da propagação de fissuras.

O processo de reaplicação de esforços excedentes ao critério por meio dos dipolos foi inicialmente implementado com o O.C., constituindo um método clássico de análise. Pôde-se observar um comportamento estável dessa técnica de solução. Posteriormente, foi deduzido e implementado o O.T. consistente que evidenciou ser uma alternativa vantajosa em termos computacionais, uma vez que alcançou a mesma resposta do O.C. em consoante com reduções substanciais no número total de iterações.

No que se refere à formulação clássica do MEC, o presente trabalho fez uso de elementos de contorno de alta ordem, contribuindo para a difusão do seu uso.

Quanto às singularidades inerentes ao MEC, utilizou-se o MSS por meio de um elemento reto tangente no ponto fonte. Esse procedimento foi satisfatório e possibilitou a utilização de integração numérica de Gauss sem maiores dificuldades.

Desse modo, considera-se que foram atingidos os objetivos a que se propôs a presente pesquisa.

É possível sugerir várias possibilidades de investigações futuras a partir das formulações apresentadas ao longo do trabalho.

Nesse sentido, a extensão das formulações, aqui discutidas, para múltiplos domínios poderia ser utilizada no estudo de propagação de fissuras coesivas em materiais que possam ser tratados como multifásicos.

Pode-se ainda promover estudos relacionados a domínios reforçados com fibras, por exemplo, utilizando acoplamento MEC-MEF em que fissuras estejam presentes no domínio.

Outra sugestão seria a investigação dos efeitos de múltiplas fissuras do domínio de interesse, tendo em vista os processos de coalescência e/ou arrestamento.

É possível a incorporação da energia de fraturamento ao cisalhamento nas formulações, embora formas experimentais de identificação dessa energia ainda não sejam consensuais entre os pesquisadores.

No que se refere aos efeitos dependentes do tempo, estes podem ser incorporados nas formulações por dipolos, resultando em uma maneira alternativa de modelar o comportamento de materiais e estruturas que estejam suscetíveis a deformações de fluência.

No campo da fadiga dos materiais, pode-se modelar a propagação de descontinuidades em regime de fadiga de baixo ciclo, em que a estrutura é solicitada por tensões superiores ao limite elástico linear, levando a comportamentos não lineares.

Apesar dos bons resultados, a formulação discutida não foi capaz de reproduzir convenientemente situações em que exista *snap back*. Logo, um recurso de valia que pode ser investigado é o uso do *arc length* como algoritmo complementar para solução do sistema não linear em questão, com intuito de minimizar ou eliminar os efeitos dessa instabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS¹

ALIABADI, M. H. **The boundary element method. Applications in solids and structures.** v. 2, New York: J. Wiley, 2002.

ALLEN, R. J.; BOOTH, G. S.; JUTLA, T. A review of fatigue crack growth characterization by linear elastic fracture mechanics (LEFM). Part I – Principles and methods of data generation. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 11, n. 1, p. 45-69, 1988.

BARBIRATO, J. C. C. **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento.** Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.

BARPI, F.; VALENTE, S. Size-effects induced bifurcation phenomena during multiple cohesive crack propagation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, n. 16, p. 1851-1861, 1998.

BAZANT, Z. P.; LI, Y-N. Cohesive crack model with rate-dependent opening and viscoelasticity: I. Mathematical model and scaling. **International Journal of Fracture**, v. 86, n. 3, p. 247–265, 1997.

BAZANT, Z. P.; LI, Y-N. Stability of cohesive crack model: Part I – Energy principles. Transactions of ASME. **Journal of Applied Mechanics**, v. 62, n. 4, p. 959 - 964, 1995.

BAZANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete, **Materials and Structures**, v. 16, n. 3, p. 155 – 177, 1983.

BAZANT, Z. P.; OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R. Fracture size effect: review of evidence for concrete structures. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 8, p. 2377–2398, 1994.

BEGLEY, M. R.; COX, B. N.; MCMEEKING, R. M. Creep crack growth with small scale bridging in ceramic matrix composites. **Acta Materialia**, v. 45, n.7, p. 2897 - 2909, 1997.

¹ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGET, J. A. Two-dimensional Stress Intensity Factor computations using the Boundary Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 3, p. 387-404, 1981.

BOUVARD, J. L.; CHABOCHE, J. L.; FEYEL, F.; GALLERNEAU, F. A cohesive zone model for fatigue and creep-fatigue crack growth in single crystal superalloys. **International Journal of Fatigue**, v. 31, n. 5, p. 868-879, 2009.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**, London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**, Southampton: McGraw Hill, 1989.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. 3 ed., Dordrecht : Kluwer Academic Publications, 1982.

BURAKOWSKI, T.; WIERZCHON, T. **Surface Engineering of Metals: Principles, equipment, technologies**. Boca Raton: CRC press, 1999.

BUYUKOZTURK, O.; HEARING, B. Crack propagation in concrete composites influenced by interface fracture parameters. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, n. 31, p. 4055 -4066, 1998.

CARPINTERI, A. **Meccanica dei Materiali e della Frattura**. Bologna: Pitagora Editrice, 1992.

CARPINTERI, A.; CORNETTI, P.; BARPI, F.; VALENTE, S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, p. 1809-1839, 2003.

CEN, Z.; MAIER, G. Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-softening structures: A boundary element analysis. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 15, n.9, p. 911-928, 1992.

CEN, Z.; MAIER, G. Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: a boundary element analysis. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 15, n. 9, p. 911-928, 1992.

CHEN, T.; WANG, B.; CEN, Z.; WU, Z. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 63, n.5, p. 591-609, 1999.

CHEN, W. F.; HAN, G. J. *Plasticity for structural engineers*, New York: Springer-Verlag, 1988.

CODA, H. B. **Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno**. Tese (Livre docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. 2, p. 301-342, 1976.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. **Boundary element method in solid mechanics**. London: George Allen and Unwin, 1983.

CRUSE, T. A. **Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 1-15, 1971.

de BORST, R. Numerical aspects of cohesive-zone models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70 n. 14, p. 1743-1757, 2003.

de-ANDRÉS, A.; PÉREZ, J. L.; ORTIZ, M. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 15, p. 2231 - 2258, 1999.

DONG, C. Y.; LO, S. H.; CHEUNG, Y. K. Interaction between cracks and rigid-line inclusions by an integral equation approach. **Computational Mechanics**, v. 31, n. 3, p. 238 - 252, 2003.

DONG, Y.; WU, S.; XU, S. S.; ZHANG, Y.; FANG, S. Analysis of concrete fracture using a novel cohesive crack method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 12, p. 4219 – 4231, 2010.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.

ELICES, M.; GUINEA, G. V.; GÓMEZ, J.; PLANAS, J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n.2, p. 137-163, 2002.

EWALDS, H. L.; WANHILL, R. J. H. **Fracture Mechanics**. Victoria, Australia; Delft, The Netherlands : Edward Arnold: Delftse Uitgevers, 1984.

GRAY, L. J.; MARTHA, L. F.; INGRAFEA, A. R. Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 6, p. 1135-1158, 1990.

GRIFFTH, A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society series A**, v. 221, n. 582-593, p.163-198, 1920.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773-781, 1976.

HONG, H.; CHEN, J. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 114, n. 6, p. 1028-1044, 1988.

JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory I. **Proceedings of The Royal Society. A**, v. 275, n. 1360, p. 23-32. 1963.

JIANG, Y.; HUNG, N. D.; VENTURINI, W. S. A 3D crack element based on boundary integrals. **Journée de rencontre du groupe de contact du FNRS**, Liège, Université de Liège, 1999.

JIANG, Y.; VENTURINI, W. S. A general boundary element method for analysis of slope stability. In: De Roeck, G; Topping, B, H, V. **Computational civil and structural engineering**, Edinburgh, Civil-Comp Press, 2000.

JIANG, Y.; VENTURINI, W. S. Limit analysis of slope stability with boundary element methods, In: Idelsohn, S, R; Oñate, E; Dvorkin, E, N; eds. **Computational mechanics: new trends and applications**, Barcelona, CIMNE/IACM, 1998.

KARIHALOO, L. B., **Fracture Mechanics & Structural Concrete**. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1995.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 9 ed., Hoboken : John Wiley & Sons, 2006.

KZAM, A. K. L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

LEISE, T. L.; WALTON, J. R.; GORB, Y. A boundary integral method for a dynamic, transient mode I crack problem with viscoelastic cohesive zone. **International Journal of Fracture**, v. 162, n. 1-2, p. 69 – 76, 2010.

LEONEL, E. D. **Introdução à Mecânica da Fratura**. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. **Engineering Analysis with boundary elements**, v.34, n. 12, p. 1092-1099, 2010a.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. **Engineering fracture mechanics**, v. 78, n. 6, p. 1077-1090, 2011.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. **Engineering Analysis with boundary elements**, v. 34, n. 2, p. 122-129, 2010b.

LI, F. Z.; SHIS, C. F.; NEEDLEMAN, A. A comparison of methods for calculating energy release rates. **Engineering fracture mechanics**, v. 21, n. 2, p. 405 - 421, 1985.

LI, H.; CHANDRA, N. Analysis of crack growth and crack-tip plasticity in ductile materials using cohesive zone models. **International Journal of Plasticity**, v. 19, n. 6, p. 849-882, 2003.

LIANG, R. Y.; LI, Y. N. Simulations of non-linear fracture process zone in cementitious material a boundary element approach. **Computational Mechanics**, v. 7, n. 5-6, p. 413-427, 1991.

LOPES Jr, M. C. **Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

LOPES Jr, M. C.; VENTURINI, W. S. Cohesive crack analysis by the boundary element method, In: XV INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL PLASTICITY, 1997, Barcelona. **Proceedings...**, Barcelona: CIMNE, v.1, p. 1057 – 1062, 1997.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**, 4 ed., New York, Dover Publications, 1944.

MAI, Y-W. Cohesive zone and crack–resistance (R)-curve of cementitious materials and their fibre-reinforced composites. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n. 2, p. 219-234, 2002.

MAITI, S.; GEUBELLE, P. H. Cohesive modeling of fatigue crack retardation in polymers: Crack closure effect. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 73, n. 1, p. 22–41, 2006.

MALVERN, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**, Englewood Cliffs: N. J. Prentice – Hall, 1969.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. 3 ed., São Paulo: Ibracon, 2008.

MELLINGS, S. C.; ALIABADI, M. H. Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis. In: Brebbia, C.A. (ed.). **Boundary Element Method XVI**, v. 7, p. 149-156, 1994.

MI, Y. **Three-dimensional analysis of crack growth**. **Topics in Engineering**, v. 28, Southampton: UK Computational Mechanics Publications, 1996.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 2, p. 167-177, 1995.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. **International Journal of Fracture**, v. 67, n.3, p. 67-71, 1994b.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In: Brebbia C.A. (ed.). **Fourteenth International Conference on Boundary Elements**, v. 2, p.315-329, 1992a.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 10, n. 2, p. 161-171, 1992b.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM. **Computers & Structures**, v. 52, n. 5, p. 871-878, 1994a.

MOES, N.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n. 7, p. 813-833, 2002.

MURAKAMI, Y. **Stress intensity factors handbook**, London: Oxford Pergamon Press, 1987.

NGUYEN, O.; REPETTO, E. A.; ORTIZ, M.; RADOVITZKY, R. A. A cohesive model of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, v. 110, n. 4, p. 351-369, 2001.

ORTIZ, M. Computational micromechanics. **Computational Mechanics**, v. 18, n. 5, p. 321 - 338, 1996.

PLANAS, J.; ELICES, M.; GUINEA, G. V.; GÓMEZ, F. J.; CENDÓN, D. A.; ARBILLA, I. Generalizations and specializations of cohesive crack models. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 14, p. 1759-1776, 2003.

PORTELA, A. **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**, PhD Thesis – Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, Southampton, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. **Computers & Structures**, v. 46, n.2, p. 237-247, 1993.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element method: Effective implementation for cracked problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, n. 6, p. 1269-1287, 1992.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não linear de estruturas**. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

PROENÇA, S. P. B. **Introdução à Mecânica do Contínuo**. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

REINHARDT, H. W.; XU, S. Crack extension resistance based on the cohesive force in concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 64, n. 5, p. 563-587, 1999.

RIZZO, F. J. The Boundary Element Method: Some Early History--A Personal View, **Boundary Element Methods in Structural Analysis**, Ed. D.E. Beskos, ASCE, 1989.

RIZZO, P. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, n. 25, p. 83-95, 1967.

ROCHA, F. S. **Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

ROCHA, F. S.; VENTURINI, W. S. Boundary element algorithm to solve discontinuity problems, In: Brebbia, C. A., **Boundary Elements X: Stress Analysis**, Southampton: Computational Mechanics Publications, v.3, p. 107 - 118, 1988.

ROE, K. L.; SIEGMUND, T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 2, p. 209-232, 2003.

ROOKE, D. P.; CARTWRIGHT, D. J. **A compendium of stress intensity factors**, London: HMSO, 1976.

SALEH, A. L. **Crack growth in concrete using boundary elements**, Topics in Engineering, v. 30, Southampton: UK Computational Mechanics Publications Boston, 1997.

SNYDER, M. D.; CRUSE, T. A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**, v. 11, n. 2, p. 315-328, 1975.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 49, n. 2, p. 213-224, 1994.

STEFAN, A. S.; CHISTOPH, C. **Boundary element methods**, translated from German, Berlin: Springer-Verlag, 2011.

SVAHN, P. O.; RUNESSON, K. A rate-dependent cohesive crack model based on anisotropic damage coupled to plasticity. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 30, n. 9, p. 887–916, 2006.

TADA, H.; PARIS, P.; IRWIN, G. **The stress analysis cracks Handbook**, Missouri: Paris Production Inc. St. Louis, 1985.

TIMOSHENKO, S. P. **History of strength of materials**, New York: Dover Publications, 1953.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**, traduzido por Villaça, S. F.; Soriano, H. L.; Souza, H. S., 3 ed., Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1970.

TVERGAARD, V. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, n. 14, p. 1859-1868, 2003.

van Mier, J. G. M. **Fracture processes of concrete**, Boca Raton: CRC press, 1997.

VENTURINI, W. S. A new boundary element formulation for crack analysis. In: Brebbia, C.A., **Boundary element method XVI**, Southampton: Computational Methods Publ., p. 405 – 4012, 1994.

VENTURINI, W. S. Análise de problemas de fratura coesiva usando o método dos elementos de contorno, In: XVI CILAMCE, 1995, Curitiba. **Anais...**, Curitiba: UFpr, v. 2, p. 1012-2021, 1995.

WATSON, J. O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. In: Banerjee, P. K.; Watson, J. O. (eds) **Developments in boundary element methods**, Elsevier Applied Science Publishers, n. 4, p. 1-28, 1986.

WATSON, J. O. Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry. In: Cruse, T. A. **Advanced Boundary Element Methods**, Springer-Verlag, p. 465-474, 1988.

WEN, P.; FAN, T. The discontinuity displacement method applied to three-dimensional coplanar crack problem for any boundary value condition. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 48, n. 5, p. 691-702, 1994.

XU, X. P.; NEEDLEMAN, A. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 42, n. 9, p. 1397 - 1434, 1994.

YAN, X. A finite main crack interaction with an arbitrarily orientated microdefect. **Engineering Failure Analysis**, v.13, n.6, p. 971-980, 2006.

YANG, B.; MALL, S.; RAVI-CHANDAR, K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 22 – 23, p. 3927-3944, 2001.

YANG, B.; RAVI-CHANDAR, K. A single-domain dual-boundary-element formulation incorporating a cohesive zone model for elastostatic cracks. **International Journal of Fracture**, v. 93, n. 1, p. 115 -144, 1998a.

YANG, B.; RAVI-CHANDAR, K. Antiplane shear crack growth under quasistatic loading in a damaging material. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, n. 28, p. 3695 - 3715, 1998b.

YANG, Q, D; COX, B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. **International Journal of Fracture**, v. 133, n. 2, p. 107 - 137, 2005.

YOON, C.; ALLEN, D. H. Damage dependent constitutive behavior and energy release rate for a cohesive zone in a thermoviscoelastic solid. **International Journal of Fracture**, v. 96, n. 1, p. 55–74, 1999.