

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

ALESSANDRA KIYOKO DA ROSA

***Estudo comparativo de formulações do MEC para análise da
interação estaca-solo***

São Carlos
2013

ALESSANDRA KIYOKO DA ROSA

***Estudo comparativo de formulações do MEC para análise da
interação estaca-solo***

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Área de Concentração: Métodos Numéricos

Orientador: Prof. Dr. João Batista de Paiva

Versão Corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos
2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R788e Rosa, Alessandra Kiyoko da
Estudo comparativo de formulações do MEC para
análise da interação estaca-solo / Alessandra Kiyoko da
Rosa; orientador João Batista Paiva. São Carlos, 2013.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Método dos elementos finitos. 2. Métodos dos
elementos de contorno. 3. Método das diferenças
finitas. 4. Interação estaca-solo. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **ALESSANDRA KIYOKO DA ROSA**.

Título da dissertação: "Estudo comparativo de formulações do MEC para análise da interação estaca-solo".

Data da defesa: 01/11/2013

Comissão Julgadora:

Prof. Associado **João Batista de Paiva (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Valério da Silva Almeida**
(Escola Politécnica/USP)

Resultado:

Aprovada

APROVADA

APROVADO

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Dedico este trabalho
aos meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio durante toda minha jornada.

Aos meus professores da Escola de Engenharia de São Carlos pelo conhecimento passado.

Ao Prof. Dr. João Batista de Paiva pela paciência, orientação e incentivo durante todos esses anos em que trabalhamos juntos.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela concessão da bolsa de mestrado e pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

E à todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente.

RESUMO

ROSA, A. K. **Estudo comparativo de formulações do MEC para a análise da interação estaca-solo**. 2013. 89p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Para uma análise mais exata do sistema estrutural, é necessário um estudo do comportamento interativo entre as diversas partes que o compõe, entre eles, destaca-se a interação entre os elementos de fundação e o maciço de solos. Neste trabalho foram desenvolvidas formulações numéricas para a análise da interação estaca-solo via acoplamento entre diferentes métodos numéricos: método dos elementos de contorno, método dos elementos finitos e método das diferenças finitas. As estacas podem estar submetidas a carregamentos horizontais, verticais e momentos aplicados em seu topo. Nestas formulações foram utilizadas, além das equações integrais de deslocamentos, as equações de suas derivadas, levando a um grau maior de singularidade, porém permitindo a adoção de aproximações mais refinadas para os deslocamentos e tensões ao longo da estaca. Todos os deslocamentos e suas derivadas referentes à estaca foram compatibilizados com os correspondentes do solo. Desenvolvidas as formulações, feito o devido acoplamento entre eles, foram analisados exemplos, que foram comparados com os resultados obtidos por outros pesquisadores, demonstrando sua validade.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno, Método das Diferenças Finitas, interação estaca-solo.

ABSTRACT

ROSA, A. K. **Comparative study of BEM formulations for the analysis of pile-soil interaction.** 2013. 89p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

For a more accurate analysis of the structural system, it is necessary to study the interactive behavior between the various parts that compose it, among them, there is the interaction between the foundation elements and massive soil. In this work, numerical formulations were developed for the analysis of pile-soil interaction by coupling between different numerical methods: the boundary element method, finite element method and finite difference method. Piles can be subjected to horizontal loads, vertical and moments applied on its top. In these formulations were used in addition to the displacement integral equations, the equations of their derivatives, leading to a higher degree of uniqueness but allowing the adoption of more sophisticated approaches to displacements and contact tractions along the pile. All displacements and their derivatives relating to the pile were matched with the corresponding soil. Developed formulations made due coupling between them were analyzed examples, which were compared with results obtained by other authors, demonstrating its validity.

Keywords: Finite Element Method, Boundary Element Method, Finite Difference Method, pile-soil interaction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES E TABELAS

- Figura 1.1 – Sistema estrutural de um edifício
- Figura 1.2 – Torre de Pisa
- Figura 1.3 – Prédios da cidade de Santos
- Figura 1.4 – Ruptura do sistema de sustentação (SOUZA, 2003)
- Figura 2.1 – Tipos de EEF superficial: (a) bloco, (b) sapata, (c) sapata corrida, (d) sapata associada, (e) grelha e (f) radier
- Figura 2.2 – Tipos de EEF profundo: (a) estaca, (b) tubulão e (c) caixão
- Figura 2.3 – Tipos de EEF misto: (a) estaca ligada a sapata; (b) estaca abaixo de sapata; (c) radier sobre estacas e (d) radier sobre tubulões
- Figura 3.1 – Domínio Ω , contido em Ω^*
- Figura 3.2 – Figura Adaptada de NAKAGUMA (1979) - Problema de Mindlin
- Figura 3.3 – Ponto fonte situado no contorno
- Figura 3.4 – Domínio tridimensional com linhas de cargas.
- Figura 4.1 – Representação da estaca submetida à força horizontal H_1 e momento M_1 .
- Figura 4.2 – Representação da estaca submetida à força vertical V .
- Figura 5.1 – Discretização da estaca para carregamentos na direção x_1 : (a) carregamento no topo da estaca; (b) pontos nodais; (c) parâmetros nodais da estaca.
- Figura 5.2 – Discretização da estaca para carregamentos na direção x_3 : (a) carregamento no topo da estaca; (b) pontos nodais; (c) parâmetros nodais da estaca.
- Figura 7.1 – Configuração exemplo 1.
- Figura 7.2 – Resultado obtido para exemplo 1, para força horizontal de 181,6kN.
- Figura 7.3 – Resultado obtido para exemplo 1, para momento de -95,826kN.
- Figura 7.4 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 6,096m).
- Figura 7.5 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 12m).
- Figura 7.6 – Deslocamento versus lateral número de elementos da estaca (de comprimento 18m).
- Figura 7.7 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 24m).
- Figura 7.8 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 30m).
- Figura 7.9 – Configuração exemplo 2.
- Figura 7.10 – Configuração exemplo 3.
- Figura 7.11 – Resultado obtido para exemplo 3, para direção x_1 .
- Figura 7.12 – Resultado obtido para exemplo 3, para direção x_2 .
- Figura 7.13 – Configuração do exemplo 4.
- Figura 7.14 – Configuração do exemplo 5.
- Figura 7.15 – Deslocamentos verticais para os dois programas criados e os obtidos por [1].
- Figura 7.16 – Deslocamento versus número de elementos, para $k=100$.
- Figura 7.17 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (6,096m).

- Figura 7.18 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (6,096m).
- Figura 7.19 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (12m).
- Figura 7.20 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (12m).
- Figura 7.21 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (18m).
- Figura 7.22 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (18m).
- Figura 7.23 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (24m).
- Figura 7.24 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (24m).
- Figura 7.25 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (30m).
- Figura 7.26 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (30m).
- Figura A.1 – Configuração exemplo 1.
- Figura A.2 – Configuração exemplo 2.
- Figura A.3 – Configuração exemplo 3.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|-----------------------------------|
| MEC | Método dos Elementos de Contorno |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| MDF | Método das Diferenças Finitas |
| BEM | Boundary Element Method |
| FEM | Finite Element Method |
| FDM | Finite Difference Method |
| EEF | Elementos Estruturais de Fundação |

LISTA DE SÍMBOLOS (atualizar)

| | |
|-----------------------|--|
| Ω^* | domínio infinito associado ao problema fundamental |
| u_{ij}^* | tensor de deslocamentos fundamentais de ordem 2 |
| p_{ij}^* | tensor de forças de superfície fundamentais de ordem 2 |
| σ_{ijk}^* | tensor de tensões fundamentais de ordem 3 |
| ε_{ijk}^* | tensor de deformações fundamentais de ordem 3 |
| Ω | domínio finito associado ao problema real |
| u_i | representa as componentes de deslocamento, na direção i |
| p_i | representa as componentes das forças na interface, na direção i |
| σ_{ij} | representa as componentes de tensão no sistema global |
| ε_{ij} | representa as componentes de deformação do sistema global |
| p | ponto campo, ponto resposta devido solicitação |
| s | ponto fonte, ponto onde é aplicada a solicitação |
| F_i | força unitária na direção i |
| $\delta(s, p)$ | distribuição Delta de Dirac |
| δ_{ij} | delta de Kronecker |
| ν | coeficiente de Poisson |
| ν_s | coeficiente de Poisson do solo |
| G | módulo de elasticidade transversal |
| X_i | coordenada com direção i |
| Kd | constante da solução fundamental de Mindlin |
| E | módulo de elasticidade longitudinal |
| E_s | módulo de elasticidade longitudinal do solo |
| r | distância entre ponto fonte e ponto campo |
| R | distância entre ponto fonte fictício e ponto campo |
| r_i | distância entre ponto fonte e ponto campo, na direção i |
| R_i | distância entre ponto fonte fictício e ponto campo, na direção i |
| c | cota do ponto fonte |
| z | cota do ponto campo |
| b_i | componente da força volumétrica segundo eixo X_i |
| Γ | contorno finito de um elemento genérico |
| Γ_1 | região do contorno de um corpo que contem as forças de superfície prescritas |
| Γ_2 | região do contorno de um corpo que contem os deslocamentos prescritos |
| Γ_ε | contorno volumétrico fictício |
| Ω_ε | domínio volumétrico fictício |
| $\bar{\Gamma}$ | contorno superficial fictício |
| ε | raio do volume fictício |
| $C_{ij}(s)$ | coeficiente de ponderação utilizado na formulação do MEC |
| $[I]$ | é a matriz identidade de ordem 3 |
| q_j^e | carga distribuída ao longo da estaca |
| Γ_e | contorno onde são aplicadas as forças de interação |
| Ne | número de estacas do sistema |
| q_j | tensões de interface estaca-solo de direção j |
| ϖ_i | giro do solo em torno do eixo X_i |

| | |
|--------------------|---|
| $\{u_s\}^G$ | é o vetor de deslocamentos dos pontos de colocação |
| $[U^*]$ | é a matriz de soluções fundamentais de Mindlin |
| $\{\bar{\phi}\}^T$ | é o vetor de funções interpoladoras para as forças de interação |
| $\{Q_s\}^G$ | é o vetor de forças de interface estaca-solo |
| $[G]^G$ | matriz global de coeficientes de influência do maciço de solos |
| d_p | diâmetro da estaca |
| L_p | comprimento total da estaca |
| E_p | módulo de elasticidade longitudinal da estaca |
| I_p | momento de inércia da estaca |
| n | número de nós da estaca |
| h | comprimento do elemento de estaca |
| q_i | tensão de interface estaca-solo, na direção i |
| H_i | força horizontal, na direção i |
| M_i | momento horizontal, na direção i |
| $[H]$ | matriz de coeficientes das diferenças finitas |
| $\{u_p\}$ | vetor de deslocamentos nodais da estaca |
| $\{F_p\}$ | vetor de forças externas nodais decorrentes das condições de contorno |
| $\{Q_p\}$ | vetor de tensões de interface nodais |
| σ_b | tensão na base da estaca |
| S_p | área da seção transversal da estaca |
| $[H]^T$ | matriz de rigidez da estaca |
| a_{ij} | termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos horizontais |
| c_{ij} | termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos verticais |
| $\{u_p\}^T$ | vetor de deslocamentos nodais 3D da estaca |
| $\{F_p\}^T$ | vetor de forças externas nodais 3D da estaca |
| $\{Q_p\}^T$ | vetor de tensões de interface 3D da estaca. |
| $[H]^G$ | matriz de rigidez global, quadrada, com dimensão |
| $\{u_p\}^G$ | vetor de deslocamentos global, com dimensão |
| $\{F_p\}^G$ | vetor de forças externas global, com dimensão |
| $\{Q_p\}^G$ | vetor de tensões de interface global, com dimensão |
| U | energia de deformação de um dado corpo |
| σ_i | tensões normais atuantes na direção i |
| τ_{ij} | tensões tangenciais atuantes no planos i - j |
| ε_i | deformações na direção i |
| γ_{ij} | distorções no planos i - j |
| M | momento fletor |
| Q | força cortante |
| M_T | momento torçor |
| N | força normal |
| E | módulo de elasticidade longitudinal |
| I | momento de inércia |
| G | módulo de elasticidade transversal |
| S | área da seção transversal |
| J_T | momento de inércia à torção |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Considerações iniciais | 1 |
| 1.2 | Objetivos | 1 |
| 1.3 | Justificativa | 2 |
| 1.4 | Organização do trabalho | 4 |
| 2 | REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 6 |
| 2.1 | Introdução | 6 |
| 2.2 | Sobre os elementos de fundação | 6 |
| 2.3 | Sobre o maciço de solos | 10 |
| 2.4 | Sobre os métodos numéricos | 11 |
| 2.5 | Sobre a interação solo-estrutura | 14 |
| 3 | MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO | 20 |
| 3.1 | Introdução | 20 |
| 3.2 | Desenvolvimento teórico | 20 |
| 3.2.1 | Soluções fundamentais | 20 |
| 3.2.2 | Solução fundamental de Mindlin | 21 |
| 3.2.3 | Representação integral para o campo de deslocamentos | 22 |
| 3.2.4 | Interação de um meio tridimensional com estruturas de barras | 25 |
| 3.2.5 | Discretização da representação integral para o maciço de solos | 27 |
| 4 | MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS | 29 |
| 4.1 | Introdução | 29 |
| 4.2 | Desenvolvimento teórico | 29 |
| 4.2.1 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais | 29 |
| 4.2.1.1 | Condições de contorno | 30 |
| 4.2.1.2 | Sistema de equações | 32 |
| 4.2.2 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos verticais | 33 |
| 4.2.2.1 | Condições de contorno | 34 |
| 4.2.2.2 | Sistema de equações | 35 |
| 4.2.3 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais e verticais | 36 |
| 4.2.4 | Análise elástica em grupo de estacas, para carregamentos horizontais e verticais | 37 |
| 5 | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS | 39 |
| 5.1 | Introdução | 39 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.2 | Desenvolvimento teórico | 39 |
| 5.2.1 | Energia de deformação dos esforços internos | 40 |
| 5.2.2 | Energia potencial das cargas externas | 41 |
| 5.2.3 | Energia potencial total | 42 |
| 5.2.4 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais | 43 |
| 5.2.5 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos verticais | 47 |
| 5.2.6 | Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais e verticais | 51 |
| 5.2.7 | Análise elástica em grupo de estacas, para carregamentos horizontais e verticais | 53 |
| 6 | ACOPLAMENTO MEC/MEF E MEC/MDF | 55 |
| 6.1 | Introdução | 55 |
| 6.2 | Desenvolvimento numérico | 55 |
| 6.2.1 | Acoplamento MEC/MDF | 55 |
| 6.2.2 | Acoplamento MEC/MEF | 57 |
| 7 | AVALIAÇÃO NUMÉRICA | 59 |
| 7.1 | Introdução | 59 |
| 7.2 | Avaliação para carregamentos horizontais em estacas isoladas | 59 |
| 7.2.1 | Exemplo 1 | 59 |
| 7.2.2 | Exemplo 2 | 64 |
| 7.3 | Avaliação para carregamentos horizontais em grupo de estacas | 64 |
| 7.3.1 | Exemplo 3 | 65 |
| 7.3.2 | Exemplo 4 | 66 |
| 7.4 | Avaliação para carregamentos verticais em estacas isoladas | 68 |
| 7.4.1 | Exemplo 5 | 68 |
| 8 | CONCLUSÃO | 76 |
| 9 | REFERÊNCIAS | 78 |
| | ANEXO A | 87 |

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1) Considerações Iniciais

As obras civis são usualmente divididas em três partes: superestrutura (composta por lajes, vigas e pilares), subestrutura ou elementos de fundação (como sapatas, estacas e tubulões) e o maciço de solos. Entre todos os elementos que as compõem existe um mecanismo de interação na interface entre eles, que garante a transferência de esforços e compatibilidade de deslocamentos e rotações.

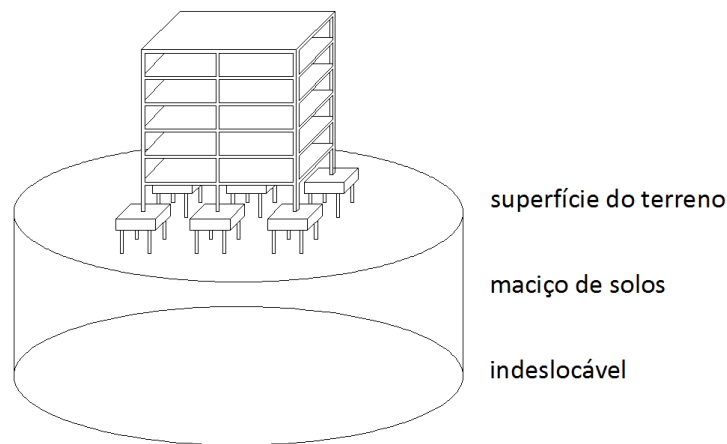


Figura 1.1 – Sistema estrutural de um edifício

Através da consideração destas interações, podem-se obter valores mais próximos dos reais, garantindo uma economia com os materiais que compõem a estrutura, sem perda de segurança da mesma.

1.2) Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo comparativo de diferentes formulações do método dos elementos de contorno (MEC) para a análise da interação estaca-solo. Dentre estas formulações tem-se o acoplamento do MEC com o método dos elementos finitos (MEF) e do MEC com o método das diferenças finitas (MDF).

O MEC foi utilizado para a modelagem do maciço de solos, através das equações integrais escritas em termos de deslocamentos e de suas derivadas. Para este trabalho

utilizou-se a solução fundamental de Mindlin, que considera o meio em estudo como sendo um domínio semi-infinito, homogêneo, isótropo e elástico-linear.

As estacas são modeladas pelo MEF e MDF, e têm seus deslocamentos e forças de interface compatibilizados com os respectivos do maciço de solos, de forma a atender a condição de compatibilidade.

Depois de realizados os desenvolvimentos teóricos dos métodos de maneira individual, foram feitos os acoplamentos entre eles resultando nas formulações de interesse para este trabalho.

Ao final do trabalho, foram analisados exemplos a fim de constatar a viabilidade destas formulações, frente aos resultados obtidos por outros pesquisadores.

1.3) Justificativa

Nas últimas décadas, o tema interação solo-estrutura vem sendo abordado por muitos pesquisadores, tais como ARAUJO (2009), COLARES (2006) e HOLANDA JÚNIOR (1998). Isso porque, com o decorrer do tempo, constatou-se que tal negligência nos cálculos das estruturas causaram situações indesejáveis, podendo ser mencionados, como exemplo, a inclinação da Torre de Pisa e os recalques diferenciais expressivos em prédios da cidade de Santos.



Figura 1.2 – Torre de Pisa



Figura 1.3 – Prédios da cidade de Santos

Os carregamentos horizontais e transversais que atuam em um edifício são suportados e transferidos entre os elementos da superestrutura e transmitidos para a subestrutura. A subestrutura, por sua vez, transfere tais solicitações para o maciço de solos. A perfeita integração destas três partes no caminho das ações, dentro de suas capacidades portantes, garante o desempenho desejado dos sistemas estruturais.

Assim sendo, a análise do comportamento mecânico combinado entre os elementos de fundação, no caso deste trabalho, as estacas e o maciço de solos, é de fundamental importância. Esta análise permite obter os deslocamentos e as rotações que as estacas sofreriam devido aos carregamentos nelas aplicados. Isto é feito para garantir se as estacas irão suportar ou não suas solicitações, ou se tais deslocamentos e rotações não irão resultar em valores superiores aos esteticamente desejáveis.



Figura 1.4 – Ruptura do sistema de sustentação (SOUZA, 2003).

Em razão da complexidade envolvida neste problema de engenharia, o qual envolve elevado número de parâmetros que influenciam o comportamento da associação solo-estrutura, recorre-se aos métodos numéricos para a concepção de modelos mais realistas.

Para o estudo do comportamento destas estruturas, faz-se uso dos chamados métodos numéricos, para o desenvolvimento de formulações numéricas. O que se tem observado na literatura é a utilização de formulações mistas para a análise de problema deste tipo. Essas formulações, que empregam diferentes métodos numéricos para a construção do modelo, apresentam resultados satisfatórios, pois aproveitam as vantagens que cada método proporciona ao compor o problema como um todo. Neste trabalho também foram utilizadas formulações mistas.

O método das diferenças finitas foi um dos primeiros métodos utilizados para análises numéricas. Este método transforma um sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico, utilizando valores do domínio.

O método dos elementos finitos é um método consagrado na área de simulação numérica em engenharia. O domínio é discretizado em vários elementos de dimensões finitas, podendo representar adequadamente a super, a infra e a subestrutura.

O método dos elementos de contorno usado para meios infinitos ou semi-infinitos tem como vantagem a necessidade de discretizar um número reduzido de pontos, diminuindo assim o número de variáveis envolvidas, e conseqüentemente o número de equações. Com estas características, este modelo é adequado para a representação do maciço de solos.

1.4) Organização do Trabalho

Neste capítulo foi feita uma sucinta apresentação do trabalho desenvolvido. Nele foram explicitados os objetivos deste trabalho e uma justificativa para sua realização.

Será apresentado a seguir a estruturação feita e a descrição de cada capítulo elaborado, a fim de fazer um apanhado geral do trabalho em si.

No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica dos tópicos abordados neste trabalho, que são: elementos de fundação, maciço de solos, métodos numéricos e interação solo-estrutura.

No capítulo 3 é apresentada a formulação do método dos elementos de contorno, para a análise do maciço de solos. Assume-se que este maciço seja um meio semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear, cuja solução fundamental é a de MINDLIN (1936). Na análise do meio contínuo semi-infinito via método dos elementos de contorno (MEC), somente se torna necessária a discretização da interface fundação-solo.

No capítulo 4 é apresentada a formulação utilizada para discretizar a estaca por meio do método das diferenças finitas.

No capítulo 5 é apresentada a formulação utilizada para modelar a estaca via método dos elementos finitos.

No capítulo 6 é demonstrada a metodologia adotada para o acoplamento MEC-MEF e MEC-MDF, por meio de uma análise matricial dos sistemas de equações lineares obtidos por estes três métodos numéricos.

No capítulo 7 é realizada a avaliação numérica das formulações. Através de exemplos, onde os resultados aqui obtidos são comparados com os resultados de outros autores, verificou-se a validade de aplicação de tais formulações.

No capítulo 8 são apresentadas as conclusões pertinentes a este trabalho, sugestões e propostas de trabalhos que podem dar continuidade a esta linha de pesquisa.

No capítulo 9 são listadas as referências utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1) Introdução

A análise da interação solo-estrutura não é um assunto recente. Com o advento dos computadores e avanços tecnológicos, se fez possível, através do uso de modelos matemáticos adequados, a representação desse problema de forma relativamente simples e intuitiva.

Esta revisão bibliográfica aborda quatro principais temas:

- elementos de fundação, onde é dada ênfase às estacas;
- maciço de solos;
- métodos numéricos, em especial o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno;
- interação solo-estrutura.

Neste capítulo são citados alguns trabalhos desenvolvidos dentro destas linhas de pesquisa, representando um acervo diversificado e representativo para a ciência de forma geral.

2.2) Sobre os elementos de fundações

De acordo com CINTRA & AOKI (1999), entende-se por fundação o sistema formado por Elementos Estruturais de Fundação (EEF) e as diversas camadas de solo que os envolvem.

Os EEF são divididos em dois grandes grupos:

- superficiais, também chamados de “diretos” ou rasos, e
- profundos.

A diferença entre estes dois grupos é que um EEF profundo é aquele em que o mecanismo de ruptura de base não surge na superfície do terreno. A norma NBR 6122 caracteriza-o como uma estrutura cuja base está implantada a uma profundidade superior a duas vezes sua menor dimensão em planta e a pelo menos 3 m de profundidade, e que transmite a carga ao terreno pela base (resistência de ponta), por sua superfície lateral (resistência de fuste) ou por uma combinação das duas.

São tipos de elementos superficiais: bloco, sapata, sapata corrida, grelha, sapata associada e radier, como ilustrado na figura 2.1.

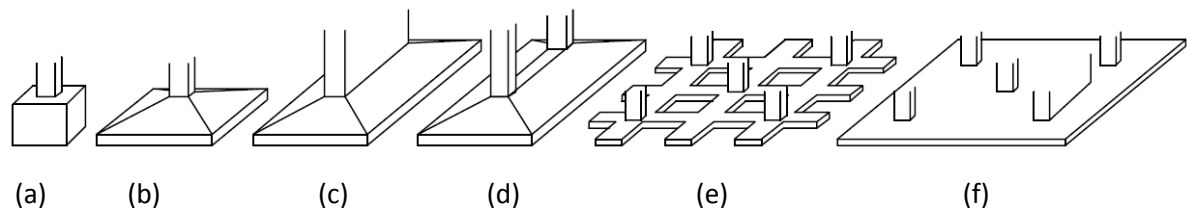


Figura 2.1 – Tipos de EEF superficial: (a) bloco, (b) sapata, (c) sapata corrida, (d) sapata associada, (e) grelha e (f) radier.

Já os elementos profundos são separados em três subgrupos: estaca, tubulão e caixão, como apresentado na figura 2.2.

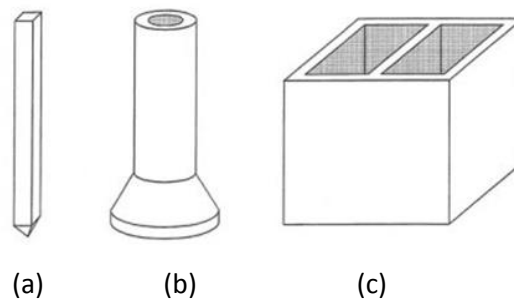


Figura 2.2 – Tipos de EEF profundo: (a) estaca, (b) tubulão e (c) caixão.

Existem ainda os EEF mistos, que são uma combinação de elemento superficial e elemento profundo, como indicado na figura 2.3.

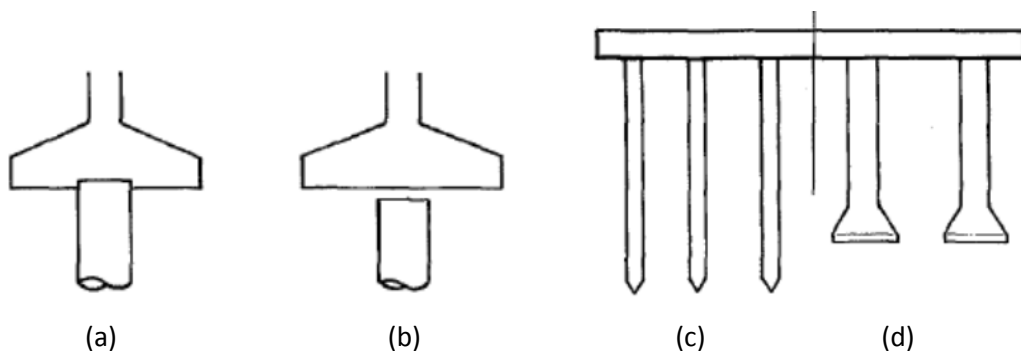


Figura 2.3 – Tipos de EEF misto: (a) estaca ligada a sapata; (b) estaca abaixo de sapata; (c) radier sobre estacas e (d) radier sobre tubulões.

As estacas são elementos estruturais que fornecem estabilidade aos mais diversos tipos de edificações. São elementos de fundação executados inteiramente por equipamentos ou ferramentas, execução esta que pode ser por cravação a percussão, prensagem, ou por escavação, ou ainda, mista, sem que haja descida de operário em

qualquer fase de sua execução. A transferência de carga para o maciço ocorre pelo atrito lateral ao longo do fuste e pela base.

As estacas são classificadas de diversas formas. Segundo o Código Inglês da Prática de Fundações, CP 2004:1972, que se baseia no efeito que a estaca produz sobre o solo durante a escavação, as estacas são agrupadas em três classes principais: grandes deslocamentos, pequenos deslocamentos e sem deslocamentos, com mais subdivisões. De acordo com TERZAGHI & PECK (1967), as estacas podem ser de três tipos: estacas de atrito em solos granulares muito permeáveis, estacas de atrito em solos finos de baixa permeabilidade e estacas de ponta. De acordo com o material, podem ser: de madeira, de concreto, de aço e mistas.

O emprego de fundações em estacas remonta à pré-história com a construção de palafitas. No livro de STRAUB (1964), que trata sobre a história da Engenharia Civil, encontram-se algumas passagens que ilustram a utilização de estacas no passado. COSTET & SANGLERAT (1969) relatam que as primeiras estacas de concreto armado foram utilizadas por Hennebique, em 1897, nas fundações das usinas Babcock-Wilcox. Atualmente, a construção das estruturas “offshore” para exploração de petróleo trouxe um espetacular desenvolvimento às fundações em estacas. Por exemplo, na plataforma Cognac, no Golfo do México, foram utilizadas estacas tubulares de aço em 2,13 m de diâmetro, pesando cerca de 500 tf.

Para a escolha correta do tipo de estaca que se deve adotar, é necessário considerar os seguintes fatores:

- a localização e o tipo de estrutura que irá suportar;
- as condições do solo, inclusive a posição do nível do lençol freático;
- a durabilidade a longo prazo. Estacas de madeira estão sujeitas à decomposição e ao ataque dos microorganismos marinhos, as de concreto são susceptíveis ao ataque químico na presença de sais e ácidos do solo, e as estacas de aço podem sofrer corrosão;
- custos totais para o cliente.

As estacas são comumente solicitadas, tanto por carregamentos horizontais quanto por verticais, como por exemplo, ação do vento, ondas marítimas, empuxo de terra, dentre outros.

Segundo CINTRA (1983), a estaca pode suportar carregamentos transversais como:

- elemento ativo, quando as cargas são oriundas de ações que atuam sobre a estrutura, chegando à fundação pela ligação superestrutura-fundação;
- elemento passivo, quando o carregamento é aplicado sobre o maciço de solo e transmitido através dele.

As estacas podem ser utilizadas para diversas finalidades, tais como:

- transferir as cargas para uma camada mais resistente ou menos compressível;
- suportar forças horizontais, como ocorre em pontes e muros de arrimo;
- aumentar a estabilidade de altas edificações;
- resistir a forças de subpressão;
- evitar danos devidos à erosão superficial;

As solicitações que atuam nas estacas podem ser das mais diversas. Elas podem ser classificadas de diferentes formas. No exterior é comum separá-las em dois grandes grupos:

- a) cargas “vivas”, sub-divididas em
 - cargas operacionais: ocupação por pessoas e móveis, passagem de veículos e pessoas, operação de equipamentos móveis, armazenamento, atracação de navios, pouso de helicópteros, frenagem e aceleração de veículos;
 - cargas ambientais: vento, ondas, correntes, temperatura e sismos;
 - cargas acidentais: solicitações especiais de construção e instalação, colisão de veículos, explosão e fogo.
- b) cargas “mortas” ou permanentes: peso próprio, empuxo de água e empuxo de terra.

Já no Brasil, a norma NBR 8681/2003 (Ações e Segurança nas Estruturas) enquadra as ações que atuam nas estruturas em quatro tipos:

- a) ações permanentes: peso próprio da construção e de equipamentos fixos, empuxos, esforços devidos a recalques de apoios;
- b) ações variáveis: ações devidas ao uso da obra;
- c) ações excepcionais: explosões, colisões, incêndios, enchentes, sismos;
- d) cargas acidentais: são as ações variáveis que atuam nas construções em função de seu uso (pessoas, mobiliário, veículos, materiais diversos etc.).

2.3) Sobre o maciço de solos

A estrutura é melhor modelada quando os apoios são corretamente representados. Muitos pesquisadores vêm constatando que as obras civis não podem ser tratadas como peças isoladas, tais como SOUZA (2003), ARAÚJO (2009) e COLARES (2006). É comum, em escritórios de projetos, considerar que a estrutura encontra-se apoiada sobre superfície rígida indeformável. Mas sabe-se que o solo também se deforma, interferindo nos deslocamentos finais da superestrutura. Devido a essa flexibilidade do solo, recalques diferenciais podem ocorrer, o que por sua vez causam uma redistribuição nos esforços na edificação. Deste modo, a interação entre a estrutura que recebe o carregamento de natureza diversa e o meio em que ela se encontra é de fundamental importância.

São vários os modelos desenvolvidos para idealizar o maciço de solos, sendo três deles aqui descritos. O primeiro modelo foi o desenvolvido por WINKLER (1867). Segundo ele, uma carga aplicada em um ponto qualquer da superfície do solo gera um deslocamento, diretamente proporcional, unicamente no ponto de aplicação desta carga, independente dos carregamentos aplicados em outros pontos. Desta forma, um meio tido como contínuo pode ser representado por um sistema de molas com rigidez equivalente. MATLOCK & REESE (1961), CHEUNG & ZIENKIEWICZ (1965) e TACITANO (2006) utilizaram este modelo para suas análises. Este modelo vem sendo muito criticado devido a sua falta de representatividade.

O segundo modelo é o chamado modelo de dois parâmetros. Neste modelo são definidas duas constantes elásticas independentes, reduzindo assim a descontinuidade presente no modelo de Winkler. SELVADURAI (1979) cita alguns autores que desenvolveram trabalhos baseados neste modelo: Filonenko-Borodich, Pasternack e Hetényi.

O modelo de Filonenko-Borodich garante a continuidade entre as duas molas por meio de uma membrana delgada tencionada entre elas. O modelo de Pasternack, análogo ao anterior, promove a continuidade através de uma camada flexível apenas ao cisalhamento. O modelo de Hetényi introduz uma viga elástica na interação entre as molas.

O terceiro modelo é o do meio contínuo, que leva em conta o efeito da continuidade do meio: CERRUTI (1882), BOUSSINESQ (1885) e MINDLIN (1936).

Mindlin trabalhou com soluções fundamentais para representar domínios semi-infinitos, homogêneos, isotrópicos e elásticos-linear, submetida a uma carga concentrada

unitária, situada em qualquer ponto do espaço semi-infinito. Anteriormente a Mindlin, Boussinesq e Cerruti trabalharam com formulações que podem ser consideradas casos particulares da solução de Mindlin: o primeiro para cargas concentradas normais ao plano $x_3=0$ e o segundo para cargas tangenciais a este plano.

2.4) Sobre os métodos numéricos

Para o estudo do comportamento de sistemas físicos podem ser empregados modelos em escala reduzida, aplicados em ensaios de laboratório, ou modelos matemáticos, onde por meio de métodos numéricos é possível discretizar o objeto de estudo. Com o avanço da ciência e o aprimoramento dos métodos numéricos, os modelos matemáticos têm sido cada vez mais empregados em detrimento aos modelos físicos. Isto acontece devido a sua boa representatividade, confiabilidade nos resultados obtidos e aplicações práticas na engenharia, além de ser uma opção muito mais econômica, embora a parte experimental de forma alguma deva ser descartada.

Os chamados métodos numéricos surgiram da limitação das soluções analíticas, que eram muito específicas para determinados problemas. Com isso, os mais diversos problemas puderam ser avaliados por meios mais abrangentes de análise. Com a rápida evolução dos computadores, os métodos numéricos foram ganhando maior destaque no meio científico, além de sua aplicação no meio prático, fazendo com que muitos problemas, antes extremamente complexos de serem simulados, pudessem ser analisados de forma simples e rápida. Dentre os métodos numéricos que merecem destaque podem-se citar o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC), onde os dois primeiros são tratados no domínio e o último no contorno. Quando possível, a escolha do método numérico é feita de acordo com as vantagens que ele apresenta para cada caso estudado.

O primeiro método aproximado a surgir foi o MDF. Este método substitui equações diferenciais do problema em equações de diferenças finitas, transformando um sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico usando valores de domínio. A técnica pode ser interpretada como um caso especial do mais geral método dos resíduos ponderados. Quem deu origem a este método foi SOUTHWELL (1946) e quem o utilizou pela primeira vez para problemas da elasticidade foi C. Runge, em 1908.

Já o MEF é dos três métodos o mais famoso. Este método possibilita analisar a maioria dos sistemas dos quais trata a engenharia, desde mecânica dos sólidos e fluidos, até eletromagnetismo. Ele consiste basicamente em discretizar todo o domínio contínuo em elementos, que são delimitados pelos seus nós. Nesses elementos são tomadas aproximações padronizadas em seus campos de deformações, para se chegar às variáveis de interesse. Cada elemento é equacionado isoladamente para depois serem reunidos num sistema global, para a solução do problema como um todo.

O MEF surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de modelos reticulados, datado do início da década de 1930 para uso na indústria aeronáutica britânica. Os primeiros elementos foram concebidos para análise da distribuição de tensões em chapas de asa de avião e tem como pioneiro nesta área o trabalho desenvolvido por ARGYRIS & KELSEY (1955). Essa abordagem inicial foi física e intuitiva. A formulação foi desenvolvida através do princípio dos deslocamentos virtuais e para o desenvolvimento do elemento não se tinha garantia de convergência para uma solução exata. O desenvolvimento a partir daquele princípio é dito formulação direta.

Em seu trabalho, MELOSH (1963) apresentou uma formulação do MEF a partir da minimização da grandeza escalar funcional energia potencial total. Em seguida, VEUBEKE (1965) apresentou a formulação do método a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Mais tarde, constatou-se que as bases do método já haviam sido consagradas com Lord Rayleigh em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant em 1943. Com isso mostrou-se que o MEF é um caso particular do método de Rayleigh-Ritz, onde são estabelecidos critérios de convergência, verificando-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema de meio contínuo por meio de um funcional. Essa é a formulação é conhecida como formulação variacional.

O conceito de energia elástica de deformação foi criado por Daniel Bernoulli em 1738, mas essa energia sob a forma de uma função quadrática das componentes de deformação, como é hoje utilizada na mecânica dos sólidos, foi desenvolvida por George Green, em 1837, com o nome função potencial.

Com o advento da formulação variacional, o MEF pode ser aplicado a uma ampla variedade de problemas em meio contínuo, como meios porosos, transferência de calor e eletrostático, presentes nos trabalhos de ZIENKIEWICZ & CHEUNG (1965), ZIENKIEWICZ et al. (1966) e WILSON & NICKELL (1966). Com ZIENKIEWICZ & CHEUNG (1965)

houve a primeira aplicação do método na análise da interação solo-estrutura, utilizando a hipótese de Winkler em semi-espaço elástico isótropo. ZIENKIEWICZ & CHEUNG (1967) publicaram o primeiro livro dedicado exclusivamente ao MEF, e ZIENKIEWICZ et al. (1968) realizaram um procedimento iterativo nesse método em análise de fissuras em meios elásticos.

Após a consolidação da formulação variacional, SZABO & LEE (1969) constataram que o mesmo método poderia ser formulado diretamente a partir das equações diferenciais e suas respectivas condições de contorno em problemas de meio contínuo, como aplicação do método de Galerkin. HERRMANN (1972) demonstrou correspondência entre o elemento finito obtido pelo campo de deslocamentos com o funcional de energia potencial total e o obtido com o método de mínimos quadrados de resíduos de tensões. LYNN & ARYA (1973) utilizaram o método dos mínimos quadrados, que também se enquadra na categoria dos métodos de resíduos ponderados. Dessa forma, o MEF se aplica a problemas não regidos por funcionais. Assim como na formulação variacional, a formulação de resíduos do MEF, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais.

E por fim, o Método dos Elementos de Contorno que é dos três métodos o mais recente e que possui melhor desempenho do que os outros quando aplicado em domínio infinito ou semi-infinito. É um método para solução de equações diferenciais, formulados em forma integral no contorno. Possui menor número de dados de entrada, equações e variáveis envolvidas, pois só necessita da discretização do contorno, reduzindo o problema em uma dimensão. Porém, a matriz do sistema é dita cheia e não simétrica.

Uma das primeiras formulações desenvolvidas com o uso do MEC deve-se a KUPLADZE (1965). Ele estudou problemas da elastostática por meio de técnica indireta do MEC. Em seguida, RIZZO (1967) obteve, com o auxílio dessa técnica, o método das equações integrais de contorno na forma direta.

O nome do método foi sugerido pela primeira vez por BREBBIA (1978), que formulou as equações integrais a partir do método dos resíduos ponderados, com uma conveniente escolha da função ponderadora. A partir dos resíduos ponderados, a formulação tornou-se mais abrangente e permitiu associação com outros métodos numéricos.

No campo linear, NAKAGUMA (1979) e TELLES & BREBBIA (1981) fizeram análises de tensões próximas a uma borda livre utilizando soluções fundamentas próprias. Para

problemas em meios contínuos bi e tridimensionais, encontram-se formulações que analisam o comportamento plástico, como em RICCARDELLA (1973) e viscoplástico, em CHAUDONNERET (1978).

Em análises de placas, tem-se trabalhos como os de JASWON et al. (1967), HANSEN (1976), STERN (1979), PAIVA & VENTURINI (1987), PAIVA & VENTURINI (1988), PAIVA & VENTURINI (1992), REZENDE, PAIVA & VENTURINI (1985). No campo da não-linearidade, podem ser citados trabalhos como os de PACOLLA (2004) e SILVA (2010).

2.5) Sobre a interação solo-estrutura

Um projeto de estruturas baseado na representação mais realista do comportamento estrutural necessita considerar a interação solo-estrutura. A importância dessa interação na segurança de uma obra é estabelecida pelo fato de uma estrutura submetida a cargas externas, apresenta reações de apoio que variam com as condições do solo em que ela se apoia. E para seu correto dimensionamento, a obtenção dos esforços e deslocamentos que atuam nos elementos de fundação é de fundamental importância. COLARES (2006) demonstra os efeitos da flexibilidade do maciço de solos na distribuição dos esforços em edifícios de concreto armado.

A interação solo-estrutura estabelece a integração de dois sistemas distintos: os sistemas estruturais e os sistemas geotécnicos. Essa relação resulta em um sistema mecânico integrado, onde as partes são tratadas separadamente para depois serem acopladas, através de correlações possíveis entre estas duas entidades. Esta simplificação se faz necessária devida complexidade dos fenômenos analisados em conjunto.

A interação solo-estrutura teve como precursores MEYERHOF (1953), que utilizou essa interação para obter estimativas de recalques totais e diferenciais dos elementos de fundação de edificações e CHAMEKI (1954), relatado como o primeiro a apresentar interesse deste assunto no Brasil.

Um dos estudos pioneiros da interação solo-estaca foi o de POULOS & DAVIS (1968), onde uma estaca cilíndrica incompressível e isolada é submetida a um carregamento axial, imersa em meio isótropo, homogêneo e semi-infinito. Posteriormente em POULOS (1968) foram analisados grupos de estacas, sempre duas a duas. Em MATTES & POULOS (1969), a estaca é considerada compressível. Nessas formulações, combina-se o MEC, que simula o comportamento do solo, com o MDF, que considera a contribuição da estaca. Mais tarde,

POULOS (1971a) apresenta uma formulação semelhante para uma estaca submetida à força horizontal e momento, e logo em seguida, em POULOS (1971b) é feita a análise para grupos de estacas dispostas simetricamente.

Estendendo-se a análise elástica para estacas ou grupo de estacas, BUTTERFIELD & BANERJEE (1971a) utilizaram o método indireto das equações integrais. Neste trabalho consideram-se os deslocamentos radiais devido à carga vertical. Em BUTTERFIELD & BANERJEE (1971b) apresenta-se grupo de estacas, considerando a interação solo-estaca-bloco.

O acoplamento do MEC com o MEF tem se mostrado uma boa solução, e vem sendo frequentemente usado em problemas que envolvem a interação de elementos de dimensões definidas envoltos por domínio infinito ou semi-infinito. Esta combinação parece ter tomado forma com MCDONALD & WEXLER (1972) para análise de problemas de engenharia elétrica e com CHEN & MEI (1974) em mecânica dos fluidos.

Dentre os trabalhos que utilizam o acoplamento MEC/MEF, podem ser citados ZIENKIEWICZ et al. (1977), SHAW & FALBY (1977) e OSIAS et al. (1977), que foram os primeiros a tratar sólidos, onde parte é discretizado via elementos finitos e o restante por elementos de contorno. Para estaca isolada ou grupo de estacas submetidas a cargas horizontais e verticais, analisados via MEC/MEF, tem-se os trabalhos de BASILE (1999) e MATOS & PAIVA (1999a, 1999b), que consideram as estacas dispostas verticalmente, e OSHIMA & PAIVA (2003), que considera a interação entre estacas inclinadas e solo. MESSAFER & COATES (1989), MENDONÇA & PAIVA (1997) e PAIVA & BUTTERFIELD (1997) consideram a interação placa-solo. PAIVA & TRONDI (1999), MATOS, MENDONÇA & PAIVA (2005) e MATOS & PAIVA (2007) são alguns dos trabalhos que analisam estacas sob bloco rígido. LEI, CHEUNG & THAM (1993), ALMEIDA, V. (2003), ALMEIDA & PAIVA (2007) e RIBEIRO (2009) estudaram a interação solo-estrutura, considerando o solo não homogêneo, composto por várias camadas com diferentes características.

Outra aplicação para o acoplamento solo-estrutura é aquele em que envolve a interação dinâmica entre eles, como em SPYRAKOS, PATEL & KOKKINOS (1989), WANG & SCHMID (1992), RIZOS, WANG & KARABALIS (2001), ALMEIDA, F. (2003), PADRÓN, AZNÁREZ & MAESO (2007) e MILLÁN & DOMÍNGUEZ (2009).

Outros tipos de fundações também são analisados através da interação solo-estrutura, como sapatas, apresentado por RAMALHO (1990), HOLANDA JÚNIOR (1998) e

COLARES (2006), e radiers, que foram modelados por RIBEIRO (2009). Outros elementos, como lâminas apoiadas em camada finita de solo foram estudadas por RIBEIRO & PAIVA (2011).

A interação solo-estrutura é o tema de muitos trabalhos desenvolvidos até hoje. No departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, pode-se verificar isso em trabalhos de mestrado e doutorado, onde a estrutura analisada é tratada de formas variadas. Aqui serão comentados alguns destes trabalhos, considerados pertinentes ao presente estudo.

Em PAIVA (1993) é desenvolvida uma formulação do MEC para analisar a interação placa-estaca-solo, onde a placa teve seu contorno dividido em elementos de contorno lineares, com nós em suas extremidades, e a estaca foi admitida como um elemento com três pontos nodais. Através de exemplos numéricos, foi possível verificar a aplicabilidade do modelo apresentado neste trabalho.

FERRO (1993) combinou o MEC ao MEF para a análise da interação estaca-solo, considerando o solo um meio semi-infinito, homogêneo e elástico linear, modelado pelo MEC utilizando a solução fundamental de Mindlin, e a estaca como elemento de barra modelado pelo MEF. Com a combinação destes métodos, obteve-se um sistema final que representa um meio contínuo semi-infinito enrijecido. Os resultados obtidos por Ferro foram coerentes com os esperados.

BARRETTO (1995), com a formulação do MEC, realiza uma análise elastostática e elastodinâmica para interação solo-placa. Outro trabalho que também trata da interação solo-placa através do MEC foi o desenvolvido por TEJERINA (1996).

MENDONÇA (1997) apresenta acoplamento MEC/MEF para análise da interação placa-estaca-solo, em que são modeladas pelo MEF a placa, através dos elementos DKT e HSM, e a estaca, definida como um elemento com três pontos nodais. Para o solo utiliza-se o MEC para meio elástico e semi-infinito. A interface placa-solo é dividida em elementos de contorno triangulares coincidentes com os elementos finitos de placa. Esta formulação permite também a análise de blocos de estacas com ou sem contato entre o bloco e o solo. Exemplos foram testados e confirmou-se a aplicabilidade da formulação proposta.

Alguns trabalhos foram desenvolvidos para verificação dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios, podendo citar HOLANDA JÚNIOR (1998) e COLARES (2006), com fundação em sapatas, e IWAMOTO (2000) e MOTA (2009), em estacas.

MATOS FILHO (1999) também apresentou combinação de formulações numéricas para analisar interação estaca-solo com ou sem bloco de capeamento rígido, sujeito à carga horizontal e vertical. As estacas foram discretizadas através do MDF e do MEF. O solo foi representado pelo MEC, como um meio semi-infinito, contínuo, elástico linear, isotrópico e homogêneo. Resolvendo o sistema final da combinação, obtêm-se como respostas deslocamentos e rotações nos nós da estaca e tensões de contato estaca-solo. Neste trabalho conclui-se que o uso do MEC é adequado para análise do maciço de solos, e que as soluções fundamentais de Mindlin são convenientes, pois ela dispensa a discretização da superfície livre, diminuindo assim o número de variáveis envolvidas no problema. Comprovou-se por meio de exemplos a boa concordância do método proposto por Matos Filho.

ALMEIDA, V. (2003) analisou o comportamento do sistema composto solo-subestrutura-superestrutura. O maciço de solos foi representado pelo MEC, para simular seu comportamento não homogêneo, considerando-se uma camada de apoio indeslocável a uma distância conhecida, e a subestrutura envolvida pelo meio heterogêneo. A infra e superestrutura são discretizadas pelo MEF, empregando elementos estruturais reticulares e elementos laminares. Para otimização da formulação, foram empregados o paralelismo e um método para resolução de sistemas esparsos. Os resultados obtidos pela formulação proposta demonstraram boa concordância. Introduzindo mais recursos a esta ferramenta numérica, RIBEIRO (2005) desenvolveu seu trabalho sobre interação solo-estrutura. O solo é modelado pelo MEC, com uso da solução fundamental de Kelvin, podendo ser composto por camadas com diferentes características físicas apoiadas sobre a camada indeslocável. O elemento de fundação foi também modelado pelo MEC tridimensional e a superestrutura pelo MEF, composta de elementos planos e reticulares. Foi introduzido ao programa o recurso de simular um número qualquer de blocos apoiados sobre o solo, modelados pelo MEC 3D.

Outra combinação MEC/MEF foi apresentada por OSHIMA (2004). Nele, inicialmente as estacas são tratadas como elementos verticais para, depois de realizadas as modificações necessárias, analisá-las como inclinadas. Aqui o solo também é tratado pelo MEC, com uso da solução fundamental de Mindlin, e as estacas pelo MEF, como elementos de barra. Constatou-se nesta análise que os deslocamentos são pouco influenciados pelo ângulo de

inclinação das estacas, notando-se comportamento parecido entre as estacas verticais e as inclinadas.

A seguir são listados alguns trabalhos realizados na área de interação solo-estrutura, desenvolvidos em outras instituições.

RIBEIRO (1989) que aborda o problema da interação solo e a cabeça de poço marítimo de petróleo utilizando uma estaca envolta por meio semi-infinito, linear, elástico, isotrópico e homogêneo. Os resultados obtidos neste trabalho, que utiliza o MEF para discretização, foram comparados com os de POULOS & DAVIS (1980).

Em VITORETI (2003) e MEDEIROS (2006) foram feitas análises da interação solo-estrutura em elementos de fundações rasas, através do MEF.

CAVALCANTI (2006) trata da interação solo-estrutura com o emprego do acoplamento MEC-MEF. A estrutura foi discretizada por elementos finitos DKT e o solo modelado utilizando a solução fundamental de Kelvin.

MOTA (2008) analisa a interação solo-estrutura de um muro de contenção. O estudo foi composto por medições em obra, análise em laboratório e análise numérica, com uso do MEF.

BOBADILLA GUADALUPE (2009) realiza uma análise dinâmica da interação solo-estrutura, utilizando a transformada implícita de Fourier.

Em ARAUJO (2009) foi analisada a interação solo-estrutura em edifícios sobre estacas, utilizando o método de Aoki e Lopes. Como resultado, são obtidos recalques e reações de apoio, através de um método iterativo.

VIERA (2009) desenvolve uma ferramenta computacional, para análise bidimensional da interação solo-estrutura. O solo é modelado com o MEC, com uso da solução fundamental de Kelvin 2D e Melan, e a estrutura com o MEF.

LAUTENSCHLÄGER (2010) analisa, por meio de modelagem numérica, o comportamento de fundações profundas submetidas a carregamentos laterais. Trata-se de uma análise feita para torres e postes de linhas de transmissão de energia elétrica. Nele considera-se a parcela coesiva e friccional dos solos, e é feito um estudo para a melhoria das propriedades dos solos em regiões mais solicitadas.

ZHEMCHUZHNIKOV (2011) faz um estudo comparativo entre diversos métodos usados para cálculo de recalque para grupo de estacas.

DUARTE (2012) estudou o comportamento da interação solo-sapata estaqueada por meio de corpos de prova.

MENEZES JÚNIOR (2012) trata da interação solo-estrutura via acoplamento MEC/MEF. Corresponde a uma análise estática de dutos enterrados, onde o solo é representado pelo MEC por meio de elementos de contorno especiais, com superfície curva ou bordos curvos.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1) Introdução

Neste capítulo é apresentada a base teórica do método dos elementos de contorno (MEC) para a formulação utilizada neste trabalho. As equações foram desenvolvidas para uma análise elástico-linear em meio contínuo semi-infinito, isótropo, para representação do comportamento real de problemas ligados a engenharia.

3.2) Desenvolvimento Teórico

Ao se analisar problemas elásticos, são determinadas variáveis associadas aos campos de deslocamentos, deformações e forças de superfície. O MEC, com o auxílio de relações e teoremas fornecidos pela teoria da elasticidade, consiste em uma representação integral que envolve dois tipos de problemas: o primeiro associado a um domínio infinito Ω^* e representado pelas componentes u_{ij}^* (tensor de deslocamentos fundamentais de ordem 2), p_{ij}^* (tensor de forças de superfície fundamentais de ordem 2), σ_{ijk}^* (tensor de tensões fundamentais de ordem 3) e ε_{ijk}^* (tensor de deformações fundamentais de ordem 3), que é denominado como problema fundamental, e o outro que representa o problema real, definido em um domínio finito Ω , contido na região Ω^* , representado pelas componentes vetoriais u_i , p_i , σ_{ij} e ε_{ij} , caracterizado pelas condições de contorno naturais e essenciais.

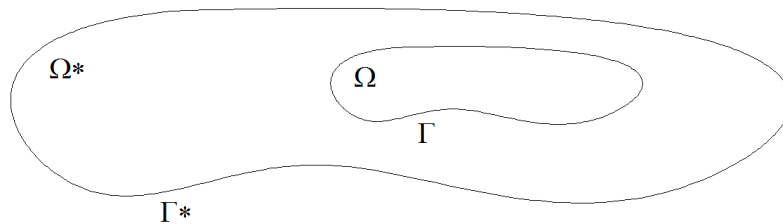


Figura 3.1 - Domínio Ω , contido em Ω^* .

3.2.1) Soluções Fundamentais

Por solução fundamental entende-se como sendo a resposta em um ponto “ p ” (ponto campo), devido à aplicação de uma fonte pontual “ F_i ” no ponto “ s ” (ponto fonte). Como resposta obtêm-se, pelo objeto de estudos deste trabalho, deslocamentos, forças de

superfície e tensões. A equação utilizada para sólidos elásticos com carregamento unitário concentrado aplicado é descrita como:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{ik,jk}^* + u_{ij,kk}^* + \frac{1}{G} \delta(s,p) \delta_{ij} = 0 \quad (3.1)$$

onde: $\delta(s,p)$ é a distribuição Delta de Dirac;
 δ_{ij} é o delta de Kronecker (0 se $i \neq j$ e 1 se $i = j$);
 ν é o coeficiente de Poisson;
 G é o módulo de elasticidade transversal.

3.2.2) Solução Fundamental de Mindlin

MINDLIN (1936) desenvolveu o equacionamento empregado na solução de problemas de domínio semi-infinito, homogêneo, isótropo e elástico-linear, assumindo o plano definido em $X_3 = 0$ livre de forças de superfície e aplicando uma força concentrada no interior do sólido.

Na figura 3.2 é mostrada a representação geométrica do problema fundamental de Mindlin.

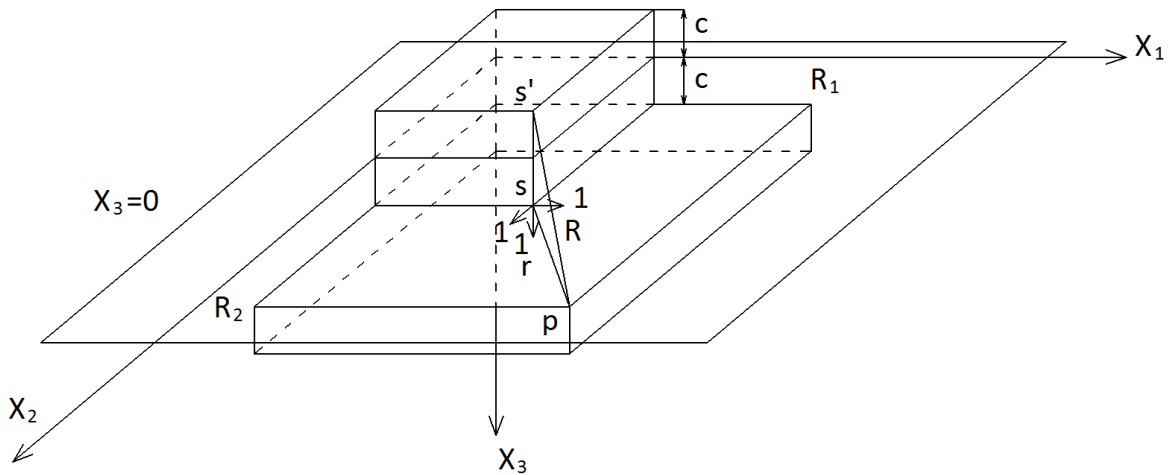


Figura 3.2- Figura Adaptada de NAKAGUMA (1979) - Problema de Mindlin

São apresentadas a seguir as soluções fundamentais para deslocamentos, obtidas por MINDLIN (1936):

$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (3.2)$$

$$u_{12}^* = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.3)$$

$$u_{13}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.4)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (3.5)$$

$$u_{22}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (3.6)$$

$$u_{23}^* = K_d r_2 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.7)$$

$$u_{31}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.8)$$

$$u_{32}^* = K_d r_2 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.9)$$

$$u_{33}^* = K_d \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} + \frac{6czR_3^2}{R^5} \right\} \quad (3.10)$$

onde: $K_d = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}$

$$r = (r_1 r_i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

$$R = (R_1 R_i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}$$

$$r_i = x_i(p) - x_i(s)$$

$$R_i = x_i(p) - x_i(s')$$

$$c = x_3(s) > 0$$

$$z = x_3(p) > 0$$

3.2.3) Representação Integral para o Campo de Deslocamentos

A representação integral para o campo de deslocamentos é dividida em duas parcelas: a primeira recebe o nome de identidade Somigliana, que é representada por uma equação integral para pontos de domínio e a segunda trata da representação do contorno do sólido.

A equação integral para os pontos do domínio são obtidos através da técnica dos resíduos ponderados, conforme mostrado a seguir.

A equação de equilíbrio de um corpo elástico é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

onde: b_i são as componentes das forças volumétricas segundo os três eixos do sistema de coordenadas cartesianas.

Para que o equilíbrio do corpo esteja garantido, é necessário obter a solução das equações diferenciais de equilíbrio. A integração sobre o domínio Ω de um integrando formado pelo produto de (3.11) por uma função ponderadora u_{ij}^* , fica representada por:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

Impõe-se que u_{ij}^* seja a solução fundamental relativa a uma carga unitária de direção “ i ” e deslocamento na direção “ j ”, satisfazendo assim a seguinte equação de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j}^* + \delta(s, p) \delta_{ij} = 0 \quad (3.13)$$

Integrando duas vezes por partes a equação (3.12) e lembrando-se que, na solução fundamental de Mindlin, p_{ij}^* é igual a zero para $X_3 = 0$, obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} b_i u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_{ij}^* d\Gamma \quad (3.14)$$

Considerando-se que a integração de uma função Delta de Dirac ao longo de um domínio resulta em um valor unitário, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta(s, p) \delta_{ij} u_j d\Omega = \delta_{ij} u_j = u_i \quad (3.15)$$

Substituindo-se agora a integração descrita em (3.15) na equação (3.14), obtém-se que:

$$u_i = \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (3.16)$$

Esta equação integral é conhecida como Identidade Somigliana para meios contínuos semi-infinitos e só é válida para pontos de domínio. Através dela é possível obter deslocamentos para os pontos fontes no interior do domínio real (Ω), uma vez conhecidos u_j e p_j para todos os pontos do contorno.

Dividindo-se o contorno Γ em Γ_1 e Γ_2 , onde são prescritos os deslocamentos (condições essenciais) e as forças de superfície (condições naturais) respectivamente, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ij}^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} p_i u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} p_i u_{ij}^* d\Gamma \quad (3.17)$$

onde : $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Devido à singularidade que ocorre quando se efetuam as integrais para os pontos situados no contorno, e devido a necessidade da obtenção de equações integrais para esses pontos, alguns artifícios matemáticos são utilizados. Um artifício é ampliar o domínio original ($\Omega + \Gamma$), através da adição de uma superfície esférica de contorno Γ_{ε} e domínio Ω_{ε} ,

formando assim um novo domínio $\Omega + \Omega_\varepsilon$ e um novo contorno $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$, para o sistema como mostra a figura 3.3.

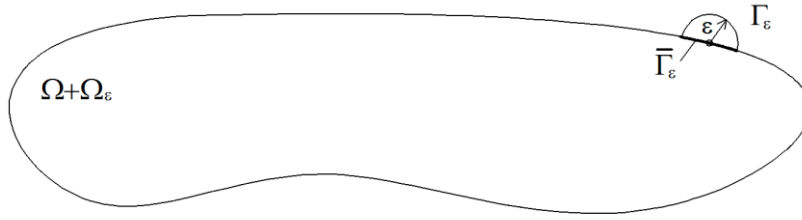


Figura 3.3 - Ponto fonte situado no contorno

Para este domínio modificado, a equação (3.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$u_i = \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (3.18)$$

Com a finalidade de retornar ao domínio inicial, no qual o ponto “s” pertence ao contorno, faz-se $\varepsilon \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\Omega_\varepsilon \rightarrow 0$ e $\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja:

$$u_i = \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right] + \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right] \quad (3.19)$$

Incluindo-se agora o limite dos termos referentes à $\Gamma - \bar{\Gamma}$, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (3.20)$$

Para as parcelas de domínio, verifica-se que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a integral de Ω representa todo o domínio do problema, enquanto que Ω_ε tende a zero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega \right] = 0 \quad (3.21)$$

Considerando-se agora a primeira parcela do segundo termo, observa-se que os valores de u_{ij}^* são da ordem de $1/\varepsilon$, enquanto que os valores obtidos do contorno Γ_ε são da ordem de ε^2 , concluindo-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right] = 0 \quad (3.22)$$

Desta forma pode-se escrever a equação geral de deslocamentos para pontos de domínio e de contorno, como sendo:

$$C_{ij}(s)u_i = \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (3.23)$$

Onde, para a solução fundamental de Mindlin, C_{ij} assume o seguinte valor, para $s \in \Omega$:

$$C_{ij}(s) = \delta_{ij} \quad (3.24)$$

Por praticidade, δ_{ij} é assumido como uma matriz identidade de ordem 3.

3.2.4) Interação de um Meio Tridimensional com Estruturas de Barras

Para o caso de estacas imersas em um meio contínuo simulado pelo MEC, é necessário adicionar um termo a equação geral de deslocamentos correspondente à aplicação de uma carga distribuída ao longo da estaca (VENTURINI, 1988), sendo feito este acréscimo a partir do limite de forças volumétricas.

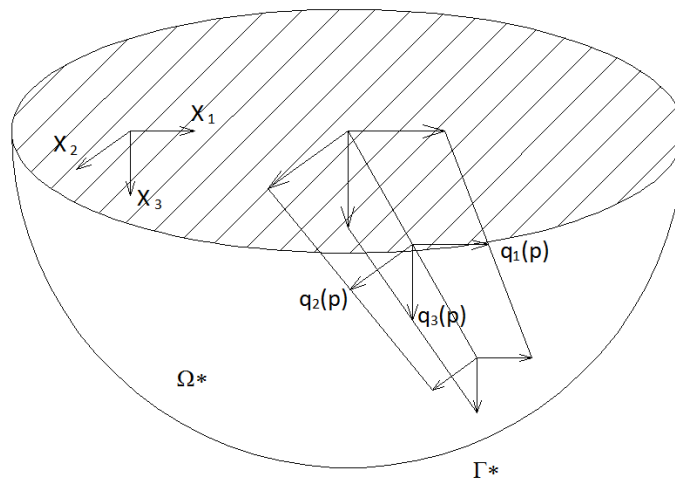


Figura 3.4- Domínio tridimensional com linhas de cargas.

Modificando a equação de deslocamentos (3.23) pode-se escrever agora que:

$$C_{ij}(s)u_i = \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* q_j^e d\Gamma \quad (3.25)$$

onde: q_j^e representa as forças de interação aplicadas no meio tridimensional;
 Γ_e representa a superfície de contato estaca-solo quando se procura obter a influência de uma estaca sobre ela mesma e representada a linha de carga onde essas forças estão aplicadas quando procura-se obter a influência entre estacas distintas.

Na equação (3.25), algumas modificações serão feitas. Para as aplicações deste trabalho, pode-se desprezar a parcela referente às forças volumétricas, e como não será considerado carregamento p_j em $x_3 = 0$, as duas primeiras parcelas do segundo termo da equação (3.25) podem também ser eliminadas.

Após todas estas alterações chega-se a seguinte equação:

$$u_i(s) = \sum_{e=1}^{Ne} \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(s,p) q_j^e(p) d\Gamma(p) \quad (3.26)$$

sendo “ Ne ” o número de estacas do sistema.

O deslocamento do maciço de solos, com a influência das estacas, é então representado pela equação integral

$$u_i(s) = \int u_{ij}^* q_j d\Gamma \quad (3.27)$$

$$u_1(s) = \int [u_{11}^* q_1 + u_{12}^* q_2 + u_{13}^* q_3] d\Gamma \quad (3.28)$$

$$u_2(s) = \int [u_{21}^* q_1 + u_{22}^* q_2 + u_{23}^* q_3] d\Gamma \quad (3.29)$$

$$u_3(s) = \int [u_{31}^* q_1 + u_{32}^* q_2 + u_{33}^* q_3] d\Gamma \quad (3.30)$$

onde: q_j são as tensões de interface estaca-solo.

Além dos deslocamentos, também são utilizadas as suas derivadas para assim compatibilizar o giro da estaca com o respectivo do solo, ou seja:

$$\frac{\partial u_2(s)}{\partial x_1(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{21}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_1 + \frac{\partial u_{22}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_2 + \frac{\partial u_{23}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial u_3(s)}{\partial x_1(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{31}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_1 + \frac{\partial u_{32}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_2 + \frac{\partial u_{33}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial u_1(s)}{\partial x_2(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{11}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_1 + \frac{\partial u_{12}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_2 + \frac{\partial u_{13}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial u_3(s)}{\partial x_2(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{31}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_1 + \frac{\partial u_{32}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_2 + \frac{\partial u_{33}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u_1(s)}{\partial x_3(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{11}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_1 + \frac{\partial u_{12}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_2 + \frac{\partial u_{13}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3(s)} = \int \left[\frac{\partial u_{21}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_1 + \frac{\partial u_{22}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_2 + \frac{\partial u_{23}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} q_3 \right] d\Gamma \quad (3.36)$$

As derivadas das soluções fundamentais indicadas da equação (3.31) à (3.36) são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{11}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_3}{r^3} - \frac{R_3}{R^3} + \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{2z}{R^5} \left[R^2 - 3cR_3 - \frac{3r_1^2(R^2 - 5cR_3)}{R^2} \right] - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_1^2(2R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{12}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6z}{R^7} [R^2 - 5cR_3] + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^3(R+R_3)^2} [2R + R_3] \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial u_{13}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} = K_d r_1 \left\{ -\frac{r^2 - 3r_3^2}{r^5} - \frac{(3-4\nu)(R^2 + 3r_3 R_3)}{R^5} + \right.$$

$$-\frac{6z[R^2(z+2c)-5cR_3^2]}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^3} \} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial u_{22}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_3}{r^3} - \frac{R_3}{R^3} + \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. + \frac{2z}{R^5} \left[R^2 - 3cR_3 - \frac{3r_2^2(R^2-5cR_3)}{R^2} \right] - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[1 - \frac{r_2^2(2R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] \right\} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial u_{23}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3(s)} = K_d r_2 \left\{ -\frac{r^2-3r_3^2}{r^5} - \frac{(3-4\nu)(R^2+3r_3R_3)}{R^5} - \frac{6z[R^2(z+2c)-5cR_3^2]}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^3} \right\} \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial u_{31}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} = K_d \left\{ -\frac{r_3(r^2-3r_1^2)}{r^5} - \frac{(3-4\nu)r_3(R^2-3r_1^2)}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6czR_3(R^2-5r_1^2)}{R^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)[R(R^2-2r_1^2)+R_3(r_2^2+R_3^2)]}{R^3(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u_{31}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{3r_3}{r^5} + \frac{3(3-4\nu)r_3}{R^5} + \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(2R+R_3)}{R^3(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial u_{32}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{3r_3}{r^5} + \frac{3(3-4\nu)r_3}{R^5} + \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(2R+R_3)}{R^3(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial u_{32}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} = K_d \left\{ -\frac{r_3(r^2-3r_2^2)}{r^5} - \frac{(3-4\nu)r_3(R^2-3r_2^2)}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6czR_3(R^2-5r_2^2)}{R^7} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)[R(R^2-2r_2^2)+R_3(r_1^2+R_3^2)]}{R^3(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial u_{33}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1(s)} = K_d r_1 \left\{ \frac{3-4\nu}{r^3} + \frac{8(1-\nu)^2-(3-4\nu)}{R^3} + \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{3[(3-4\nu)R_3^2-2cz]}{R^5} + \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial u_{33}^*(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2(s)} = K_d r_2 \left\{ \frac{3-4\nu}{r^3} + \frac{8(1-\nu)^2-(3-4\nu)}{R^3} + \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{3[(3-4\nu)R_3^2-2cz]}{R^5} + \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (3.47)$$

Os giros do solo, que serão compatibilizados com o da estaca, são definidos pelas seguintes equações:

$$\varpi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3(s)}{\partial x_2(s)} - \frac{\partial u_2(s)}{\partial x_3(s)} \right) \quad (3.48)$$

$$\varpi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1(s)}{\partial x_3(s)} - \frac{\partial u_3(s)}{\partial x_1(s)} \right) \quad (3.49)$$

$$\varpi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2(s)}{\partial x_1(s)} - \frac{\partial u_1(s)}{\partial x_2(s)} \right) \quad (3.50)$$

3.2.5) Discretização da Representação Integral para maciço de solo

A equação (3.26) pode ser representada na forma algébrica da seguinte maneira:

$$\{u_s\}^G = \sum_{e=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_e} [U^*] \{\bar{\phi}\}^T d\Gamma \right] \{Q_s\}^G \quad (3.51)$$

onde: $\{u_s\}^G$: é o vetor de deslocamentos dos pontos de colocação;
 $[U^*]$: é a matriz de soluções fundamentais de Mindlin;
 $\{\bar{\phi}\}^T$: é o vetor de funções interpoladoras para as forças de interação;
 $\{Q_s\}^G$: é o vetor de forças de interface estaca-solo;

N_e : é o número de linhas de carga ou de estaca.

Pode-se então escrever a equação (3.51) na forma matricial:

$$\{u_s\}^G = [G]^G \{Q_s\}^G \quad (3.52)$$

onde:

$$[G]^G = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} [U^*] \{\bar{\phi}\}^T d\Gamma \quad (3.53)$$

A interferência que uma estaca exerce sobre ela mesma ou sobre outra é considerada da seguinte forma:

- A interferência que uma estaca exerce sobre ela mesma é feita através da integração, onde os pontos de colocação (pontos campo) são considerados no centro das estacas e os pontos de integração (pontos fonte) são locados no contorno das estacas. Observa-se que, neste caso, a menor distância entre os pontos campo e fonte é o raio da estaca, eliminando assim a possível singularidade que poderia ocorrer por conta das soluções fundamentais;
- A interferência de uma estaca sobre outra é admitida de forma semelhante diferenciando apenas na localização dos pontos fontes, pois estes agora são considerados no eixo da estaca.

CAPÍTULO 4

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

4.1) Introdução

Neste capítulo são apresentados aspectos relativos ao método das diferenças finitas (MDF), utilizados neste trabalho, para análise da estaca. Considerou-se a estaca como um elemento de barra geral submetida a carregamento transversal e axial. Trata-se de uma formulação adaptada de POULOS (1971), que considera as forças da interface atuando em linhas de cargas aplicadas ao longo da estaca.

As estacas são consideradas como elementos flutuantes, pois a camada de solo incompressível encontra-se no infinito. Por simplificação, a estaca é admitida como uma barra vertical, com diâmetro d_p , comprimento L_p , área da seção transversal S_p e constante de flexibilidade $E_p I_p$, para estacas axissimétricas.

4.2) Desenvolvimento Teórico

Nesta formulação, a distribuição das forças da interface estaca-solo se dá por meio de linhas de cargas, onde estas são delimitadas pelo comprimento dos elementos da estaca.

A estaca é composta de n nós e $(n - 1)$ elementos, onde cada um deles possui comprimento h . Cada elemento é submetido a uma força horizontal uniformemente distribuída q_i , linearmente variável e aplicada ao longo de seu comprimento, na interface estaca-solo. Nesta formulação, são compatibilizados os deslocamentos nodais da estaca e do solo.

4.2.1) Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais

Por analogia, o comportamento mecânico da estaca é modelado por meio de um elemento de viga, cuja equação diferencial de flexão é dada por:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 u_i}{\partial x_3^4} + q_i(x_3) = 0 \quad (4.1)$$

onde o índice i indica a direção do carregamento aplicado na estaca ($i = 1$ ou 2).

A equação (4.1) é utilizada para montar o sistema de equações lineares pelo MDF para os pontos nodais de 1 a n , sendo necessário para as equações dos nós iniciais e finais o

uso de nós auxiliares, que são eliminados no desenvolvimento numérico, através das seguintes equações de condições de contorno.

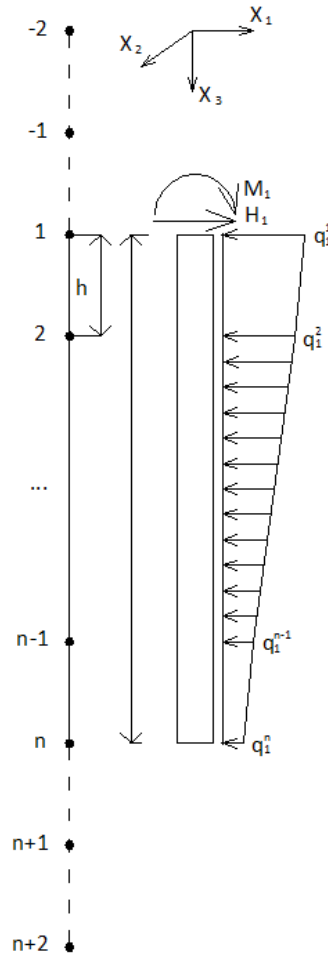


Figura 4.1 – Representação de estaca submetida à força horizontal H_1 e momento M_1 .

4.2.1.1) Condições de contorno

No topo da estaca algumas condições de contorno podem ser consideradas, tais como a condição para força cortante, dada pela equação (4.2), e a condição para momento fletor, dada pela equação (4.3).

Para as condições onde a estaca encontra-se com o topo livre, submetida a solicitações de força horizontal H_i e momento M_i , tem-se que:

$$H_i = -E_p I_p \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_3^3} \quad (4.2)$$

$$M_i = -E_p I_p \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \quad (4.3)$$

Para o nó do topo da estaca, a equação (4.1), em diferenças finitas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_p I_p \left[\frac{1}{h^4} (u_i^{-1} - 4u_i^1 + 6u_i^2 - 4u_i^3 + u_i^4) \right] = q_i^1 \quad (4.4)$$

onde q_i^1 é o carregamento na direção i ($i = 1$ ou 2) aplicado no nó 1.

Para obter uma relação de u_i^{-1} , a fim de eliminá-lo da equação acima, utilizou-se o operador de derivada de terceira ordem aplicado à equação (4.2):

$$E_p I_p \left[\frac{1}{h^3} (-u_i^{-1} + 3u_i^1 - 3u_i^2 + u_i^3) \right] = -H_i \quad (4.5)$$

Ou seja,

$$u_i^{-1} = 3u_i^1 - 3u_i^2 + u_i^3 + \frac{h^3}{E_p I_p} H_i \quad (4.6)$$

Substituindo u_i^{-1} em (4.4), obtêm-se:

$$\frac{E_p I_p}{h^4} (-u_i^1 + 3u_i^2 - 3u_i^3 + u_i^4) = -\frac{H_i}{h} + q_i^1 \quad (4.7)$$

A equação (4.7) é a primeira equação do sistema de equações linear.

De forma análoga, obtêm-se a equação para o nó da base da estaca:

$$\frac{E_p I_p}{h^4} (-u_i^n + 3u_i^{n-1} - 3u_i^{n-2} + u_i^{n-3}) = q_i^n \quad (4.8)$$

Para o segundo nó da estaca, tem-se que:

$$E_p I_p \left[\frac{1}{h^4} (u_i^{-1} - 4u_i^1 + 6u_i^2 - 4u_i^3 + u_i^4) \right] = q_i^2 \quad (4.9)$$

Para obter uma relação de u_i^{-1} , a fim de eliminá-lo da equação acima, utilizou-se o operador de derivada de segunda ordem aplicado à equação (4.3):

$$E_p I_p \left[\frac{1}{h^2} (u_i^{-1} - 2u_i^1 + u_i^2) \right] = -M_i \quad (4.10)$$

Ou seja,

$$u_i^{-1} = 2u_i^1 - u_i^2 - \frac{h^2}{E_p I_p} M_i \quad (4.11)$$

Substituindo u_i^{-1} em (4.9), obtêm-se:

$$\frac{E_p I_p}{h^4} (-2u_i^1 + 5u_i^2 - 4u_i^3 + u_i^4) = \frac{M_i}{h^2} + q_i^2 \quad (4.12)$$

A equação (4.12) é a segunda equação do sistema de equações linear.

De forma análoga, obtêm-se a equação para o penúltimo nó da estaca:

$$\frac{E_p I_p}{h^4} (u_i^{n-3} - 4u_i^{n-2} + 5u_i^{n-1} - 2u_i^n) = q_i^{n-1} \quad (4.13)$$

4.2.1.2) Sistema de equações

Utilizando-se a equação (4.1), pelo MDF, com as respectivas condições de contorno para a base e o topo da estaca, obtidas pelas equações (4.7), (4.8), (4.12) e (4.13), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{E_p I_p}{h^4} [H] \{u_p\} = \{F_p\} + \{Q_p\} \quad (4.14)$$

onde: $[H]$ é a matriz $(n \times n)$ de coeficientes das diferenças finitas;

$\{u_p\}$ é o vetor (n) de deslocamentos nodais da estaca;

$\{F_p\}$ é o vetor (n) de forças externas nodais decorrentes das condições de contorno;

$\{Q_p\}$ é o vetor (n) de tensões de interface nodais.

$$[H] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\{u_p\} = \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \\ \vdots \\ u_i^{n-2} \\ u_i^{n-1} \\ u_i^n \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\{F_p\} = \begin{Bmatrix} -\frac{H_i}{h} \\ \frac{M_i}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\{Q_p\} = \begin{Bmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \\ q_i^3 \\ \vdots \\ q_i^{n-2} \\ q_i^{n-1} \\ q_i^n \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

4.2.2) Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos verticais

Para a análise de uma estaca submetida a carregamento vertical, foram utilizados dois nós auxiliares: um nó acima do topo da estaca e outro abaixo da base da estaca, ambos eliminados no desenvolvimento da formulação. A figura 4.2 ilustra a estaca submetida a carregamento vertical e um elemento de estaca submetida aos esforços normais.

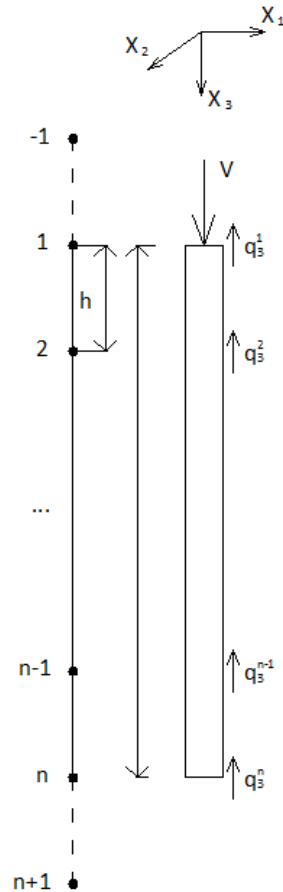


Figura 4.2 – Representação de estaca submetida à força vertical V .

Da condição de equilíbrio do elemento infinitesimal, pode-se se escrever

$$\frac{\sigma_b}{dx_3} = - \frac{q_p(x_3)}{S_p} \quad (4.19)$$

Da Lei de Hooke, sabe-se que:

$$\varepsilon_3 = \frac{du_3}{dx_3} = \frac{\sigma_b}{E_p} \quad (4.20)$$

Portanto:

$$\frac{d^2u_3}{dx_3^2} = - \frac{q_p(x_3)}{E_p S_p} \quad (4.21)$$

onde: σ_b é a tensão na base da estaca;
 $q_p(x_3)$ é a força na interface estaca-solo;

E_p é módulo de elasticidade da estaca;
 S_p é a área da seção transversal da estaca.

A equação (4.21) é utilizada para montar o sistema de equações lineares pelo MDF para os pontos nodais de 1 a n , sendo necessário para as equações dos nós inicial e final o uso de nós auxiliares, que são eliminados no desenvolvimento numérico, através das seguintes equações de condições de contorno.

4.2.2.1) Condições de contorno

Para análise de carregamentos verticais, foram desenvolvidas duas formulações diferentes: a primeira que considera um nó extra na base da estaca e a segunda que não considera este nó extra.

Para ambas as formulações, como no topo da estaca têm-se uma força vertical V aplicada, a equação de equilíbrio neste ponto é dada por:

$$\frac{du_3}{dx_3} = \frac{\sigma_b}{E_p} = \frac{V}{E_p S_p} \quad (4.22)$$

Escrevendo-se a equação (4.21) em diferenças finitas, para o primeiro nó da estaca, obtêm-se que:

$$\frac{1}{h^2} (u_3^{-1} - 2u_3^1 + u_3^2) = -\frac{q_3^1}{E_p S_p} \quad (4.23)$$

Ou seja,

$$(u_3^{-1} - 2u_3^1 + u_3^2) \frac{E_p S_p}{h^2} = -q_3^1 \quad (4.24)$$

Para obter uma relação de u_3^{-1} , a fim de eliminá-lo da equação acima, utilizou-se o operador de derivada de primeira ordem, aplicado a equação (4.22):

$$\frac{1}{2h} (u_3^2 - u_3^{-1}) = \frac{V}{E_p S_p} \quad (4.25)$$

$$u_3^{-1} = u_3^2 - \frac{2hV}{E_p S_p} \quad (4.26)$$

Substituindo u_3^{-1} em (4.24), obtêm-se:

$$\frac{E_p S_p}{h^2} (2u_3^1 - 2u_3^2) = -\frac{2V}{h} + q_3^1 \quad (4.27)$$

A equação (4.27) é a primeira equação do sistema de equações linear da estaca.

Para o último nó, a equação é obtida através da relação (4.20), obtendo-se (4.28) para a formulação com o nó extra e (4.29) para a formulação sem o nó extra:

$$\frac{E_p}{2h} (u_3^{n+1} - u_3^{n-1}) = \sigma_b = q_3^n \quad (4.28)$$

$$\frac{E_p}{2h}(u_3^n - u_3^{n-2}) = \sigma_b \quad (4.29)$$

As equações (4.28) e (4.29) são as últimas equações do sistema de equações linear da estaca.

4.2.2.2) Sistema de equações

Utilizando a equação (4.21), pelo MDF, com as respectivas condições de contorno para a base e o topo da estaca, obtidas pelas equações (4.24) e (4.29), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{E_p S_p}{h^2} [\bar{H}] \{\bar{u}_p\} = \{\bar{F}_p\} + \{\bar{Q}_p\} \quad (4.30)$$

onde: $[\bar{H}]$ é a matriz ($n \times n$) de coeficientes de efeito axial das diferenças finitas;
 $\{\bar{u}_p\}$ é o vetor (n) de deslocamentos nodais da estaca;
 $\{\bar{F}_p\}$ é o vetor (n) de forças externas nodais decorrentes das condições de contorno;
 $\{\bar{Q}_p\}$ é o vetor (n) de forças de interface nodais.

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{2h}{S_p} & \frac{2h}{S_p} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\{\bar{u}_p\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\{\bar{F}_p\} = \begin{Bmatrix} -\frac{V}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\{\bar{Q}_p\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ \sigma_b \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

4.2.3) Análise elástica em estacas isoladas, para carregamentos horizontais e verticais

Uma ampliação da aplicação do método desenvolvido até agora, para análise do comportamento para estacas isoladas, pode ser realizada considerando as estacas ainda isoladas submetidas a carregamentos nas três direções.

Fazendo uso dos sistemas obtidos nos itens anteriores, é possível fazer essa ampliação. Para isso, é necessário organizar a matriz final do sistema de forma a ficar compatível com o sistema final do MEC, para a correta compatibilização de tensões e deslocamentos. Assim, para o MDF, a matriz de influência das estacas assume a seguinte forma:

$$[\bar{H}]\{\bar{u}_p\} = \{\bar{F}_p\} + \{\bar{Q}_p\} \tag{4.35}$$

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & 0 & 0 & k_1 a_{12} & 0 & 0 & \dots & k_1 a_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & k_1 a_{11} & 0 & 0 & k_1 a_{12} & 0 & \dots & 0 & k_1 a_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 c_{11} & 0 & 0 & k_2 c_{12} & \dots & 0 & 0 & k_2 c_{1n} \\ k_1 a_{21} & 0 & 0 & k_1 a_{22} & 0 & 0 & \dots & k_1 a_{2n} & 0 & 0 \\ 0 & k_1 a_{21} & 0 & 0 & k_1 a_{22} & 0 & \dots & 0 & k_1 a_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 c_{21} & 0 & 0 & k_2 c_{22} & \dots & 0 & 0 & k_2 c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 a_{n1} & 0 & 0 & k_1 a_{n2} & 0 & 0 & \dots & k_1 a_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & k_1 a_{n1} & 0 & 0 & k_1 a_{n2} & 0 & \dots & 0 & k_1 a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 c_{n1} & 0 & 0 & k_2 c_{n2} & \dots & 0 & 0 & k_2 c_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

onde: $[\bar{H}]$ é a matriz de influência, para uma estaca ($3n \times 3n$);
 a_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos horizontais;
 c_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos verticais;
 $k_1 = \frac{E_p I_p}{h^4}$;
 $k_2 = \frac{E_p S_p}{h^2}$.

Assim como a matriz de influência, os vetores do sistema de equações também são reformulados:

$$\{\bar{u}_p\} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\{\bar{F}_p\} = \begin{pmatrix} -\frac{H_1}{h} \\ -\frac{H_2}{h} \\ -V \\ \frac{M_1}{h^2} \\ \frac{M_2}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\{\bar{Q}_p\} = \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ \vdots \\ q_1^n \\ q_2^n \\ q_3^n \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

onde: $\{\bar{u}_p\}$ é o vetor de deslocamentos, para uma estaca ($3n$);
 $\{\bar{F}_p\}$ é o vetor de forças externas, para uma estaca ($3n$);
 $\{\bar{Q}_p\}$ é o vetor de forças de interface, para uma estaca ($3n$).

4.2.4) Análise elástica em grupos de estacas, para carregamentos horizontais e verticais

Para finalizar a formulação do MDF, ampliou-se mais uma vez o modelo, agora para analisar grupo de estacas submetidas a carregamentos nas três direções.

Fazendo uso da matriz e vetores ampliados no item anterior, é possível fazer essa aplicação. Para isso, é necessário organizar a matriz final do sistema de forma a ficar compatível com o sistema final do MEC, para a correta compatibilização de tensões e deslocamentos. Assim, para o MDF, a matriz de influência global para grupo de estacas, e os vetores do sistema assumem a seguinte forma:

$$[H]^G \{u_p\}^G = \{F_p\}^G + \{Q_p\}^G \quad (4.40)$$

$$[H]^G = \begin{bmatrix} [\bar{H}]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [\bar{H}]_2 & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [\bar{H}]_{Ne} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\{u_p\}^G = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{u}_p\}_1 \\ \{\bar{u}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{u}_p\}_{Ne} \end{array} \right\} \quad (4.42)$$

$$\{F_p\}^G = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{F}_p\}_1 \\ \{\bar{F}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{F}_p\}_{Ne} \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

$$\{Q_p\}^G = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{Q}_p\}_1 \\ \{\bar{Q}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{Q}_p\}_{Ne} \end{array} \right\} \quad (4.44)$$

onde: $[H]^G$ é a matriz de influência global, para Ne estacas ($3n \cdot Ne \times 3n \cdot Ne$);
 $\{u_p\}^G$ é o vetor de deslocamentos global, para Ne estacas ($3n \cdot Ne$);
 $\{F_p\}^G$ é o vetor de forças externas global, para Ne estacas ($3n \cdot Ne$);
 $\{Q_p\}^G$ é o vetor de forças de interface global, para Ne estacas ($3n \cdot Ne$).

CAPÍTULO 5

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1) Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação do método dos elementos finitos (MEF) adotada para a representação do comportamento mecânico das estacas. Estas são idealizadas como imersas em um meio semi-infinito, homogêneo, isótropo e elástico-linear, submetidas à carregamentos horizontais, verticais e momentos, todos aplicados no topo das estacas.

5.2) Desenvolvimento Teórico

O método numérico adotado para a modelagem das estacas foi o Método dos Elementos Finitos fundamentado no método aproximado de Rayleigh-Ritz. Este método divide o domínio contínuo de integração em um número finito de pequenas parcelas, chamadas elementos finitos.

No MEF, ao invés de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito.

A formulação desenvolvida foi baseada no modelo dos deslocamentos ou modelo da rigidez. Neste modelo, o campo de deslocamentos é descrito por funções aproximadoras e o princípio da mínima energia potencial é empregado, a fim de obter as componentes dos deslocamentos nodais, que são as incógnitas do problema.

Foram adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras para os fatores que influenciam o comportamento real do conjunto estaca-solo:

- o espaçamento entre estacas é definido como a distância entre eixos;
- o solo e estaca são admitidos como tendo comportamento mecânico em regime elástico-linear;
- as estacas estão totalmente imersas em um semi-espaço, elástico linear, homogêneo e isótropo;
- o solo e as estacas estão livres de tensões iniciais decorrentes do processo de instalação;

- as superfícies das estacas são admitidas rugosas, impedindo assim o deslizamento na região de contato estaca-solo;
- as forças volumétricas são desprezadas;
- existe compatibilidade de deslocamentos entre o solo e a estaca.

5.2.1) Energia de Deformação dos Esforços Internos

A energia potencial total de um sistema elástico é formada por duas parcelas: a energia potencial dos esforços internos e energia potencial das cargas externas.

A energia potencial dos esforços internos, ou também conhecida como energia de deformação, é a energia que um dado corpo absorve ao deformar-se sob a ação de um carregamento nele aplicado. Esta energia nada mais é que o trabalho realizado pelas forças internas do corpo sobre os respectivos deslocamentos e pode ser representada pela seguinte expressão integral, que é realizada sobre todo o volume do corpo em questão:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{13} \gamma_{13} + \tau_{23} \gamma_{23}) dV \quad (5.1)$$

onde: U é a energia de deformação de um dado corpo;
 σ_i são as tensões normais atuantes na direção i ;
 τ_{ij} são as tensões tangenciais atuantes no planos i - j ;
 ε_i são as deformações na direção i ;
 γ_{ij} são as distorções no planos i - j .

Para estruturas formadas por barras, como vigas, pórticos e grelhas, a expressão (5.1), após a integração nas seções transversais das barras, pode ser reformulada como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{cQ^2}{GS} + \frac{M_T^2}{GJ_T} + \frac{N^2}{ES} \right) dx \quad (5.2)$$

onde: M é o momento fletor;
 c é o fator de forma;
 Q é a força cortante;
 M_T é o momento torçor;
 N é a força normal.
 E é o módulo de elasticidade longitudinal;
 I é o momento de inércia;
 G é o módulo de elasticidade transversal;
 S é a área da seção transversal;
 J_T é o momento de inércia à torção.

M , Q , M_T e N são os esforços solicitantes da estrutura, I , S e J_T são propriedades geométricas da barra, E e G são propriedades mecânicas do material. Entre os dois módulos de elasticidade existe a seguinte relação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.3)$$

onde: ν é o coeficiente de Poisson.

Como o presente trabalho trata da modelagem de estacas por meio do MEF, restringiu-se o estudo para problemas de flexão de barras elásticas e carga axial. Portanto, o momento torçor é nulo e os efeitos das forças cortantes e normal são desprezados, reduzindo a expressão (5.2) para:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx \quad (5.4)$$

O momento fletor está relacionado com os deslocamentos do eixo da barra elástica da viga através da seguinte expressão:

$$M = -EIu'' \quad (5.5)$$

Substituindo (5.5) em (5.4) obtemos,

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2u}{dx^2} \right]^2 dx \quad (5.6)$$

Assim, conhecida a elástica da viga, pode-se calcular, utilizando (5.6), a energia de deformação acumulada durante sua flexão.

5.2.2) Energia Potencial das Cargas Externas

Contraopondo a energia que o corpo acumula ao se deformar, tem-se a variação de trabalho realizado pelas cargas externas nele aplicadas. Esse trabalho é obtido através do produto entre a carga e o deslocamento em seu ponto de aplicação.

O deslocamento é medido no sentido da carga aplicada. Desta forma, para uma carga concentrada, um momento concentrado e um carregamento distribuído, o trabalho realizado é dado, respectivamente, por:

$$T_F = F_i u_i \quad (5.7)$$

$$T_M = M_j u'_j \quad (5.8)$$

$$T_q = \int_L q \cdot u dx \quad (5.9)$$

onde: F_i é a intensidade da carga concentrada no ponto i ;
 u_i é o deslocamento transversal no ponto de aplicação da carga;
 M_j é o momento fletor aplicado no ponto j ;
 u'_j é a derivada do deslocamento transversal no ponto de aplicação do momento;
 q é o carregamento distribuído aplicado ao longo do comprimento L ;
 u é função do deslocamento transversal.

5.2.3) Energia Potencial Total

A energia potencial total da estrutura é dada pela soma da energia de deformação com a energia potencial do carregamento externo aplicado.

Para uma viga submetida a carregamento transversal, a expressão da energia total é obtida a partir de (5.6) a (5.9), e é dada por:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI u''^2 dx - \sum F_i u_i - \sum M_j u'_j - \int_L q \cdot u dx \quad (5.10)$$

Na posição de equilíbrio, a energia potencial total é estacionária, ou seja:

$$d\pi = du + d\Omega = 0 \quad (5.11)$$

Assim o objetivo é procurar uma função u que minimize a energia potencial total (5.10). Esta função é conhecida como solução de Euler. Para obtê-la, é necessário reescrever a expressão da energia potencial total, também denominada de funcional, como se segue:

$$\pi = \int F(x, u, u', u'') dx \quad (5.12)$$

A equação de Euler para este funcional é:

$$\frac{dF}{du} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{du'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dF}{du''} \right) = 0 \quad (5.13)$$

Admitindo-se que os carregamentos, transversal e axial, sejam constantes, a equação de Euler para um trecho genérico da viga é dada por:

$$EI u^{iv} + g = 0 \quad (5.14)$$

A resolução desta equação pode ser trabalhosa. Uma alternativa a este procedimento consiste em procurar uma solução aproximada para a viga. Obviamente esta função deve obedecer às condições de contorno essenciais da viga.

No método de Rayleigh-Ritz, uma função $y(x)$, suposta exata, é substituída por uma função aproximada $u(x)$, formada por uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$. Após a substituição de $u(x)$ no funcional, este é minimizado.

5.2.4) Análise Elástica em Estacas Isoladas, para Carregamentos Horizontais

Para análise feita pelo MEF, assumiu-se que a estaca era composta por um elemento com 4 nós e 5 parâmetros nodais para carregamentos horizontais, como ilustrado na figura a seguir.

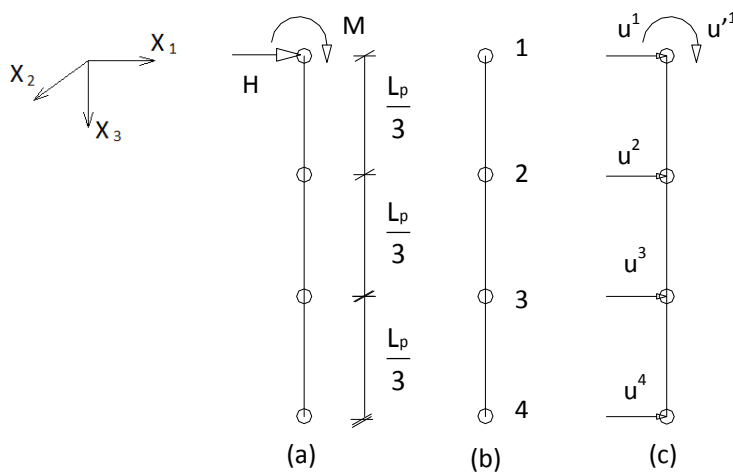


Figura 5.1 – Discretização da estaca para carregamentos horizontais: (a) carregamento no topo da estaca; (b) pontos nodais; (c) parâmetros nodais da estaca.

O polinômio aproximador adotado, para os deslocamentos horizontais e as forças de interação, foi do 4º grau.

$$f(x_3) = A + Bx_3 + Cx_3^2 + Dx_3^3 + Ex_3^4 \quad (5.15)$$

Para a rotação do primeiro nó da estaca, o polinômio adotado para os deslocamentos assume a seguinte forma:

$$f'(x_3) = B + 2Cx_3 + 3Dx_3^2 + 4Ex_3^3 \quad (5.16)$$

Sabendo-se que para os deslocamentos horizontais tem-se:

$$\text{Se } x_3 = 0 \rightarrow u_1(0) = A = u_1^1$$

$$\text{Se } x_3 = 0 \rightarrow u_1'(0) = B = u_1^1$$

$$\text{Se } x_3 = \frac{L_p}{3} \rightarrow u_1\left(\frac{L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{L_p}{3}\right) + C\left(\frac{L_p}{3}\right)^2 + D\left(\frac{L_p}{3}\right)^3 + E\left(\frac{L_p}{3}\right)^4 = u_1^2$$

$$\text{Se } x_3 = \frac{2L_p}{3} \rightarrow u_1\left(\frac{2L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{2L_p}{3}\right) + C\left(\frac{2L_p}{3}\right)^2 + D\left(\frac{2L_p}{3}\right)^3 + E\left(\frac{2L_p}{3}\right)^4 = u_1^3$$

$$\text{Se } x_3 = L_p \rightarrow u_1(L_p) = A + BL_p + CL_p^2 + DL_p^3 + EL_p^4 = u_1^4$$

Matricialmente, a função dos deslocamentos pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L_p}{3} & \frac{L_p^2}{9} & \frac{L_p^3}{27} & \frac{L_p^4}{81} \\ 1 & \frac{2L_p}{3} & \frac{4L_p^2}{9} & \frac{8L_p^3}{27} & \frac{16L_p^4}{81} \\ 1 & L_p & L_p^2 & L_p^3 & L_p^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u'_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

ou

$$[C]\{\alpha\} = \{u_p\} \quad (5.18)$$

Isolando o vetor dos coeficientes, tem-se que:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u_p\} \quad (5.19)$$

A função dos deslocamentos é dada por:

$$u_1(x_3) = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2 \quad x_3^3 \quad x_3^4\}\{\alpha\} \quad (5.20)$$

Assim, o polinômio de deslocamentos pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos e da rotação nos pontos de colocação, da seguinte forma:

$$u_1(x_3) = \{\phi\}[C]^{-1}\{u_p\} \quad (5.21)$$

$$u''_1(x_3) = \{\phi''\}[C]^{-1}\{u_p\} \quad (5.22)$$

onde: $\{\phi\} = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2 \quad x_3^3 \quad x_3^4\}$

Adotando-se a coordenada adimensional $\xi = \frac{x_3}{L_p}$, onde x_3 é a cota do ponto de colocação e L_p o comprimento total da estaca, as funções de forma são as representadas a seguir:

$$\{\vartheta\}^T = \{\phi\}[C]^{-1} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4}\xi^4 + 45\xi^3 - \frac{85}{4}\xi^2 + 1 \\ -\frac{9}{2}x_3\xi^3 + 9x_3\xi^2 - \frac{11}{2}x_3\xi + x_3 \\ \frac{81}{2}\xi^4 - \frac{135}{2}\xi^3 + 27\xi^2 \\ -\frac{81}{4}\xi^4 + 27\xi^3 - \frac{27}{4}\xi^2 \\ \frac{9}{2}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

$$\{\vartheta''\}^T = \frac{1}{2L_p^2} \begin{Bmatrix} -594\xi^2 + 540\xi - 85 \\ -108L\xi^2 + 108L\xi - 22L \\ 972\xi^2 - 810\xi + 108 \\ -486\xi^2 + 324\xi - 27 \\ 108\xi^2 - 54\xi + 2 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Já para as forças de interface, tem-se que:

$$\text{Se } x_3 = 0 \rightarrow p_1(0) = A = p_1^1$$

$$\text{Se } x_3 = \frac{L_p}{4} \rightarrow p_1\left(\frac{L_p}{4}\right) = A + B\left(\frac{L_p}{4}\right) + C\left(\frac{L_p}{4}\right)^2 + D\left(\frac{L_p}{4}\right)^3 + E\left(\frac{L_p}{4}\right)^4 = p_1^2$$

$$\text{Se } x_3 = \frac{L_p}{2} \rightarrow p_1\left(\frac{L_p}{2}\right) = A + B\left(\frac{L_p}{2}\right) + C\left(\frac{L_p}{2}\right)^2 + D\left(\frac{L_p}{2}\right)^3 + E\left(\frac{L_p}{2}\right)^4 = p_1^3$$

$$\text{Se } x_3 = \frac{3L_p}{4} \rightarrow p_1\left(\frac{3L_p}{4}\right) = A + B\left(\frac{3L_p}{4}\right) + C\left(\frac{3L_p}{4}\right)^2 + D\left(\frac{3L_p}{4}\right)^3 + E\left(\frac{3L_p}{4}\right)^4 = p_1^4$$

$$\text{Se } x_3 = L_p \rightarrow p_1(L_p) = A + BL_p + CL_p^2 + DL_p^3 + EL_p^4 = p_1^5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L_p}{4} & \frac{L_p^2}{16} & \frac{L_p^3}{64} & \frac{L_p^4}{256} \\ 1 & \frac{L_p}{2} & \frac{L_p^2}{4} & \frac{L_p^3}{8} & \frac{L_p^4}{16} \\ 1 & \frac{3L_p}{4} & \frac{9L_p^2}{16} & \frac{27L_p^3}{64} & \frac{81L_p^4}{256} \\ 1 & L_p & L_p^2 & L_p^3 & L_p^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \\ p_1^3 \\ p_1^4 \\ p_1^5 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

ou

$$[D]\{\beta\} = \{p_p\} \quad (5.26)$$

Isolando o vetor dos coeficientes, tem-se que:

$$\{\beta\} = [D]^{-1}\{p_p\} \quad (5.27)$$

A função das forças de interação é dada por:

$$p_1(x_3) = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2 \quad x_3^3 \quad x_3^4\}\{\beta\} \quad (5.28)$$

Portanto o polinômio para as forças de interface pode ser escrito em função dos valores das forças nos pontos de colocação:

$$p_1(x_3) = \{\phi\}[D]^{-1}\{p_p\} \quad (5.29)$$

$$\{\bar{\vartheta}\}^T = \{\phi\}[D]^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{32}{3}\xi^4 - \frac{80}{3}\xi^3 + \frac{70}{3}\xi^2 - \frac{25}{3}\xi + 1 \\ -\frac{128}{3}\xi^4 + 96\xi^3 - \frac{208}{3}\xi^2 + 16\xi \\ 64\xi^4 - 128\xi^3 + 76\xi^2 - 12\xi \\ -\frac{128}{3}\xi^4 + \frac{224}{3}\xi^3 - \frac{112}{3}\xi^2 + \frac{16}{3}\xi \\ \frac{32}{3}\xi^4 - 16\xi^3 + \frac{22}{3}\xi^2 - \xi \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

Pelo método da energia potencial total, o funcional da estaca, com a contribuição dos carregamentos externos e da reação das forças de interface estaca-solo, pode ser escrito como:

$$\Pi_{ap} = \frac{E_p I_p}{2} \int_0^{L_p} u''_1(x_3)^2 dx_3 - \int_0^{L_p} p_1(x_3) u_1(x_3) dx_3 - H_1 u_1 - M_1 u'_1 \quad (5.31)$$

onde: Π_{ap} é o funcional da estaca;
 E_p é o módulo de elasticidade longitudinal da estaca;
 I_p é o momento de inércia da estaca;
 u''_1 é a segunda derivada do deslocamento na direção 1;
 u'_1 é a primeira derivada do deslocamento na direção i;
 u_1 é o deslocamento na direção i;
 p_1 é a força de interface estaca-solo na direção i;
 H_1 é a força horizontal concentrada;
 M_1 é o momento aplicado no topo da estaca.

Sabendo que:

$$u''_1(x_3)^2 = \{u_p\}^T [C]^{-1} \{\phi''\}^T \{\phi''\} [C]^{-1} \{u_p\} \quad (5.32)$$

E substituindo-se as expressões (5.33), (5.41) e (5.30) em (5.31), obtém-se:

$$\Pi_{ap} = \frac{E_p I_p}{2} \int_0^{L_p} \{u_p\}^T \{\vartheta''\}^T \{\vartheta''\} \{u_p\} dx_3 - \int_0^{L_p} \{\bar{\vartheta}\}^T \{p_p\} \{\vartheta\} \{u_p\} dx_3 - \{u_p\}^T \{F\} \quad (5.33)$$

onde: $\{u_p\}^T = \{u_1 \quad u'_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5\}$
 $\{p_p\}^T = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5\}$
 $\{F\}^T = \{H_1 \quad M_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$

Minimizando o funcional de energia potencial total obtém-se um sistema de equações, onde são incógnitas os deslocamentos e as forças de interação.

$$[K]\{u_p\} = \{F_p\} + [Q]\{p_p\} \quad (5.34)$$

onde: $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento finito;
 $\{u_p\}$ é o vetor de deslocamentos na estaca;
 $\{F_p\}$ é o vetor de forças nodais externas;

$[Q]$ é a matriz de transformação das forças de interação em forças nodais equivalentes;
 $\{p_p\}$ é o vetor das forças de interface estaca-solo.

Resolvendo-se as integrais e derivadas do sistema de equações representado pela expressão (5.33), obtêm-se os coeficientes das matrizes H e Q .

$$[K] = \frac{E_p I_p}{5L_p} \begin{bmatrix} \frac{11861}{4L_p^2} & \frac{1021}{2L_p} & -\frac{10719}{2L_p^2} & \frac{13419}{4L_p^2} & -\frac{1921}{2L_p^2} \\ \frac{1021}{2L_p} & 101 & -\frac{864}{L_p} & \frac{999}{2L_p} & -\frac{146}{L_p} \\ -\frac{10719}{2L_p^2} & -\frac{864}{L_p} & \frac{10206}{L_p^2} & -\frac{13851}{2L_p^2} & \frac{2079}{L_p^2} \\ \frac{13419}{4L_p^2} & \frac{999}{2L_p} & -\frac{13851}{2L_p^2} & \frac{21141}{4L_p^2} & -\frac{3429}{2L_p^2} \\ -\frac{1921}{2L_p^2} & -\frac{146}{L_p} & \frac{2079}{L_p^2} & -\frac{3429}{2L_p^2} & \frac{596}{L_p^2} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$[Q] = L_p \begin{bmatrix} \frac{379}{L} & \frac{52}{4L} & -\frac{59}{L} & \frac{32}{4L} & \frac{11}{L} \\ 5040 & 315 & -420 & 315 & 720 \\ \frac{360}{3} & \frac{315}{6} & -\frac{70}{9} & \frac{315}{35} & \frac{360}{70} \\ 280 & 35 & 35 & -35 & 70 \\ -\frac{3}{560} & 0 & \frac{9}{140} & \frac{12}{35} & \frac{27}{560} \\ -\frac{1}{360} & \frac{2}{105} & -\frac{1}{21} & \frac{26}{315} & \frac{2}{35} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

5.2.5) Análise Elástica em Estacas Isoladas, para Carregamentos Verticais

Primeiramente, assumiu-se que a estaca era composta por um elemento com 4 nós e 4 parâmetros nodais para carregamentos verticais, como ilustrado nas figuras a seguir.

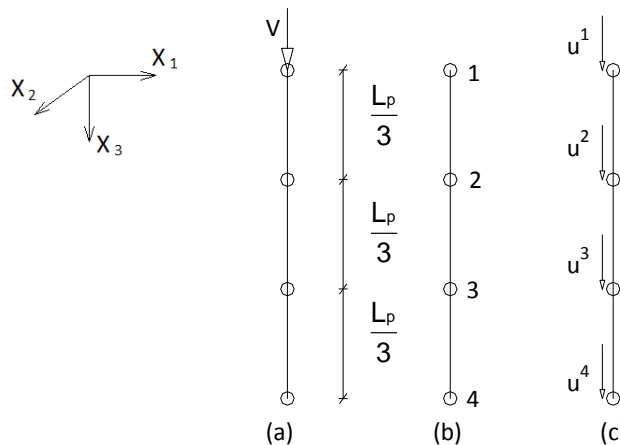


Figura 5.2 - Discretização da estaca para carregamentos verticais: (a) carregamento no topo da estaca; (b) pontos nodais; (c) parâmetros nodais da estaca.

O polinômio aproximador dos deslocamentos verticais adotado foi do 3º grau.

$$f(x_3) = A + Bx_3 + Cx_3^2 + Dx_3^3 \quad (5.37)$$

Sabendo-se que para os deslocamentos verticais temos:

$$\text{Para } x_3 = 0 \rightarrow u_3(0) = A = u_3^1$$

$$\text{Para } x_3 = \frac{L_p}{3} \rightarrow u_3\left(\frac{L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{L_p}{3}\right) + C\left(\frac{L_p}{3}\right)^2 + D\left(\frac{L_p}{3}\right)^3 = u_3^2$$

$$\text{Para } x_3 = \frac{2L_p}{3} \rightarrow u_3\left(\frac{2L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{2L_p}{3}\right) + C\left(\frac{2L_p}{3}\right)^2 + D\left(\frac{2L_p}{3}\right)^3 = u_3^3$$

$$\text{Para } x_3 = L_p \rightarrow u_3(L_p) = A + BL_p + CL_p^2 + DL_p^3 = u_3^4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L_p}{3} & \frac{L_p^2}{9} & \frac{L_p^3}{27} \\ 1 & \frac{2L_p}{3} & \frac{4L_p^2}{9} & \frac{8L_p^3}{27} \\ 1 & L_p & L_p^2 & L_p^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3^1 \\ u_3^2 \\ u_3^3 \\ u_3^4 \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

ou

$$[C]\{\alpha\} = \{u_p\} \quad (5.39)$$

Isolando o vetor dos coeficientes, tem-se que:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{u_p\} \quad (5.40)$$

A função dos deslocamentos é dada por:

$$u_3(x_3) = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2 \quad x_3^3\}\{\alpha\} \quad (5.41)$$

Portanto, o polinômio de deslocamentos pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nos pontos de colocação, da seguinte forma:

$$u_3(x_3) = \{\phi\}\{\alpha\} \quad (5.42)$$

$$u'_3(x_3) = \{\phi'\}\{\alpha\} \quad (5.43)$$

onde: $\{\phi\} = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2 \quad x_3^3\}$

Adotando-se a coordenada adimensional $\xi = \frac{x_3}{L_p}$, onde x_3 é a cota do ponto de colocação e L_p o comprimento total da estaca, pode-se escrever as funções de forma:

$$\{\vartheta\}^T = \{\phi\}[C]^{-1} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \\ \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \\ -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \\ \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\{\vartheta'\}^T = \frac{1}{L_p} \begin{Bmatrix} -\frac{27}{2}\xi^2 + 18\xi - \frac{11}{2} \\ \frac{81}{2}\xi^2 - 45\xi + 9 \\ -\frac{81}{2}\xi^2 + 36\xi - \frac{9}{2} \\ \frac{27}{2}\xi^2 - 9\xi + 1 \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

Já para as forças de superfície, optou-se pelo uso de uma função que variasse quadraticamente ao longo do fuste, sendo elas representadas pela função:

$$f(x_3) = A + Bx_3 + Cx_3^2 \quad (5.46)$$

Para $x_3 = 0 \rightarrow \tau(0) = A = \tau_1$

Para $x_3 = \frac{L_p}{3} \rightarrow \tau\left(\frac{L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{L_p}{3}\right) + C\left(\frac{L_p}{3}\right)^2 = \tau_2$

Para $x_3 = \frac{2L_p}{3} \rightarrow \tau\left(\frac{2L_p}{3}\right) = A + B\left(\frac{2L_p}{3}\right) + C\left(\frac{2L_p}{3}\right)^2 = \tau_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L_p}{3} & \frac{L_p^2}{9} \\ 1 & \frac{2L_p}{3} & \frac{4L_p^2}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

ou

$$[D]\{\beta\} = \{Q_p\} \quad (5.48)$$

Isolando o vetor dos coeficientes, tem-se que:

$$\{\beta\} = [D]^{-1}\{Q_p\} \quad (5.49)$$

A função das forças de interação é dada por:

$$\tau(x_3) = \{1 \quad x_3 \quad x_3^2\}\{\beta\} \quad (5.50)$$

Portanto, o polinômio para as forças de interface pode ser escrito em função dos valores das forças nos pontos de colocação:

$$\tau(x_3) = \{\phi\}[D]^{-1}\{Q_p\} \quad (5.51)$$

$$\{\bar{\vartheta}\}^T = \{\phi\}[D]^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{9}{2}\xi + 1 \\ -9\xi^2 + 6\xi \\ \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

A energia potencial total de um sistema elástico é composta por duas parcelas, energia de deformação e energia potencial das cargas externas, e para a estaca com a contribuição dos carregamentos externos e da reação das forças de interface estaca-solo, pode ser escrita como:

$$\Pi_{ap} = \frac{E_p S_p}{2} \int_0^{L_p} u'_3(x_3)^2 dx_3 - \int_0^L \tau(x_3) u_3(x_3) dx_3 - \int_{S_p} \sigma_b u_3^4 dS - V u_3^1 \quad (5.53)$$

onde: Π_{ap} é o funcional da estaca;
 E_p é o módulo de elasticidade da estaca;
 S_p é a área da estaca;
 u'_3 é a primeira derivada do deslocamento vertical;
 u_3 é o deslocamento vertical;
 τ é a força de superfície;
 σ_b é a tensão da base;
 V é a força vertical concentrada.

Sabendo que:

$$u'_3(x_3)^2 = \{u_p\}^T [C]^{-1} \{\phi'\}^T \{\phi'\} [C]^{-1} \{u_p\} \quad (5.54)$$

E substituindo as expressões (5.42), (5.51) e (5.54) em (5.53), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Pi_{ap} = & \frac{E_p S_p}{2} \int_0^{L_p} \{u_p\}^T \{\vartheta'\}^T \{\vartheta'\} \{u_p\} du_3 - \int_0^{L_p} \{Q_p\} \{\bar{\vartheta}\} \{\vartheta\} \{u_p\} du_3 \\ & - \int_{S_p} \sigma_b u_3^4 dS_p - \{u_p\}^T \{F_p\} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Minimizando o funcional de energia potencial total, obtém-se um sistema de equações, onde são incógnitas os deslocamentos e as forças de interação.

$$[\bar{K}]\{\bar{u}_p\} = \{\bar{F}_p\} + [\bar{Q}]\{\bar{Q}_p\} \quad (5.56)$$

onde: $[\bar{K}]$ é a matriz com os coeficientes de elementos finitos;
 $\{\bar{u}_p\}$ é o vetor de deslocamentos na estaca;
 $\{\bar{F}_p\}$ é o vetor de forças verticais nodais externas;
 $[\bar{Q}]$ é a matriz de transformação das forças de interação em forças nodais equivalentes;
 $\{\bar{Q}_p\}$ é o vetor das forças de interface estaca-solo.

$$\{\bar{u}_p\} = \{u_3^1 \quad 0 \quad u_3^4 \quad u_3^4 \quad u_3^4\}$$

$$\{\bar{Q}_p\} = \{\tau^1 \quad 0 \quad \tau^2 \quad \tau^3 \quad \sigma_b\}$$

$$\{\bar{F}_p\} = \{V \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$$

Resolvendo-se as integrais e derivadas do sistema de equações, dado pela expressão (5.56), fazendo a segunda linha nula do sistema e deslocando as demais para assim ficar compatível com o sistema de equações obtidos para carregamentos horizontais, obtêm-se os coeficientes das matrizes K e Q .

$$[\bar{K}] = \frac{E_p S_p}{2L_p} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

$$[\bar{Q}] = \frac{L_p}{80} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 36 & -9 & 0 \\ 3 & -18 & 45 & 0 \\ 7 & -20 & 23 & \frac{80}{L_p} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

5.2.6) Análise Elástica em Estacas Isoladas, para Carregamentos Horizontais e Verticais

A generalização da aplicação do método desenvolvido até agora, para análise do comportamento mecânico para estacas isoladas, pode ser realizada considerando as estacas ainda isoladas submetidas a carregamentos nas três direções.

Fazendo uso dos sistemas obtidos nos itens anteriores, as expressões (5.34) e (5.56), é possível fazer essa generalização. Para isso, é necessário organizar a matriz final do sistema de forma a ficar compatível com o sistema final do MEC, para a correta compatibilização das forças de interface e deslocamentos. Assim, para o MEF, a matriz de rigidez das estacas e a matriz de coeficientes das forças de interface assumem a seguinte forma:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & a_{15} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{15} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & \dots & 0 & 0 & c_{15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{51} & 0 & 0 & \dots & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & 0 & \dots & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & c_{51} & \dots & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 & \dots & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & f_{11} & \dots & 0 & 0 & f_{15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{51} & 0 & 0 & \dots & d_{55} & 0 & 0 \\ 0 & d_{51} & 0 & \dots & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & f_{51} & \dots & 0 & 0 & f_{55} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

onde: $[\bar{K}]$ é matriz de rigidez da estaca, de ordem (15 x 15);
 $[\bar{Q}]$ é matriz dos coeficientes das forças de interface, de ordem (15 x 15);
 a_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos horizontais;
 c_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de deslocamentos verticais;
 d_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de forças de interface horizontais;
 f_{ij} são os termos relativos aos parâmetros nodais de forças de interface verticais;

Assim como a matriz de rigidez, os vetores do sistema de equações também são reformulados:

$$\{\bar{u}_p\} = \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_3^5 \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

$$\{\bar{F}_p\} = \begin{Bmatrix} -\frac{H_1}{h} \\ \frac{H_2}{h} \\ -V \\ \frac{M_1}{h^2} \\ \frac{M_2}{h^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\{\bar{Q}_p\} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ \vdots \\ q_1^n \\ q_2^n \\ q_n^n \end{Bmatrix} \quad (5.63)$$

onde: $\{\bar{u}_p\}$ é o vetor de deslocamentos nodais da estaca, de ordem (15);

$\{\bar{F}_p\}$ é o vetor de forças externas nodais da estaca, de ordem (15);
 $\{\bar{Q}_p\}$ é o vetor de forças de interface da estaca, de ordem (15).

5.2.7) Análise Elástica em Grupos de Estacas, para Carregamentos Horizontais e Verticais

Para finalizar a formulação do MEF, ampliou-se mais uma vez o modelo, agora para analisar grupo de estacas submetidas a carregamentos nas três direções.

Fazendo uso da matriz e vetores ampliados no item anterior, é possível fazer essa aplicação. Para isso, é necessário organizar a matriz final do sistema de forma a ficar compatível com o sistema final do MEC, para a correta compatibilização de forças e deslocamentos. Assim, para o MEF, a matriz de rigidez global para grupo de estacas, e os vetores do sistema assumem a seguinte forma:

$$[K]^G = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [\bar{K}]_2 & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [\bar{K}]_{Ne} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

$$[Q]^G = \begin{bmatrix} [\bar{Q}]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [\bar{Q}]_2 & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [\bar{Q}]_{Ne} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$\{u_p\}^G = \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_p\}_1 \\ \{\bar{u}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{u}_p\}_{Ne} \end{Bmatrix} \quad (5.66)$$

$$\{F_p\}^G = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}_p\}_1 \\ \{\bar{F}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{F}_p\}_{Ne} \end{Bmatrix} \quad (5.67)$$

$$\{Q_p\}^G = \begin{Bmatrix} \{\bar{Q}_p\}_1 \\ \{\bar{Q}_p\}_2 \\ \vdots \\ \{\bar{Q}_p\}_{Ne} \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

onde: $[K]^G$ é matriz de rigidez global, quadrada, de ordem $(15Ne) \times (15Ne)$;
 $\{u_p\}^G$ é o vetor de deslocamentos global, de ordem $(15Ne)$;

$\{F_p\}^G$ é o vetor de forças externas global, de ordem $(15Ne)$;

$\{Q_p\}^G$ é o vetor de forças de interface global, de ordem $(15Ne)$;

CAPÍTULO 6

ACOPLAMENTO MEC/MDF E MEC/MEF

6.1) Introdução

Com base nas deduções feitas nos capítulos anteriores, é possível descrever as formulações desenvolvidas baseadas no acoplamento MEC/MDF e MEC/MEF, para a análise do comportamento mecânico do sistema formado por solo-estaca.

6.2) Desenvolvimento Numérico

Através das condições de compatibilidade de deslocamentos nodais e de equilíbrio de forças de interação ao longo da interface estaca-solo, foi desenvolvida a formulação do acoplamento estaca-solo. A seguir são descritos individualmente os acoplamentos MEC/MDF e MEC/MEF, com suas respectivas particularidades.

6.2.1) Acoplamento MEC/MDF

Da equação geral de deslocamentos do MEC, representada pela equação (3.52), tem-se:

$$\{u_s\}^G = [G]^G \{Q_s\}^G \quad (6.1)$$

onde os seus vetores e matrizes já foram determinados anteriormente, no capítulo 3.

Sabe-se também que a equação dos deslocamentos da estaca via MDF é dado por:

$$[H]^G \{u_p\}^G = \{F_p\}^G + \{Q_p\}^G \quad (6.2)$$

onde os seus vetores e matrizes também já foram determinados anteriormente, no capítulo 4.

Levando-se em consideração as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio ao longo da interface estaca-solo, tem-se:

$$\{u_s\}^G = \{u_p\}^G = \{u\} \quad (6.3)$$

$$\{Q_s\}^G + \{Q_p\}^G = \{Q\} - \{Q\} = 0 \quad (6.4)$$

Assim sendo, substituindo (6.1), (6.3) e (6.4) em (6.2), tem-se:

$$-[H]^G [G]^G \{Q\} = \{F_p\}^G + \{Q\} \quad (6.5)$$

$$[[H]^G [G]^G + [I]] \{Q\} = \{F_p\}^G \quad (6.6)$$

Chamando $[K] = [H]^G [G]^G + [I]$ e $\{F_p\}^G = \{F\}$, o sistema final da interação fica representado por:

$$[K]\{Q\} = \{F\} \quad (6.7)$$

onde: $[K]$ é a matriz final do sistema de interação MEC/MDF;
 $\{Q\}$ é o vetor das forças de interface estaca-solo;
 $\{F\}$ é o vetor de cargas externas aplicadas no topo da estaca.

Após montado o sistema final do conjunto estacas-solo foram realizadas algumas alterações referentes aos carregamentos horizontais e momentos, que demonstraram resultar em uma resposta mais próxima do esperado. Para isso procedeu-se da seguinte forma:

a) No sistema de equações lineares para a estaca:

Foram zeradas as duas primeiras equações correspondentes à força horizontal e momento aplicados no topo das estacas.

$$[H]^G \{u_p\}^G = \{0\} + \{Q_p\}^G \quad (6.8)$$

b) Obtenção de equações adicionais:

As equações adicionais são obtidas a partir das condições de equilíbrio da estaca submetida ao carregamento do solo e à carga aplicada no topo da estaca.

Para a somatória de forças horizontais, tem-se que:

$$\sum F = 0 \quad (6.9)$$

$$H_i - \int g_i dx_3 = 0 \quad (6.10)$$

$$H_i - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(g_i^k + g_i^{k+1})}{2} h_p = 0 \quad (6.11)$$

$$\frac{h_p}{2} g_i^1 + h_p g_i^2 + h_p g_i^3 + \dots + h_p g_i^{n-1} + \frac{h_p}{2} g_i^n = H_i \quad (6.12)$$

onde: H_i é a força horizontal aplicada no topo da estaca, na direção i ;
 h_p é o comprimento de cada elemento da estaca;
 g_i são os valores das tensões de interface estaca-solo;

Para a somatória de momentos, tem-se que:

$$\sum M = 0 \quad (6.13)$$

$$M_i - \int g_i x_3 dx_3 = 0 \quad (6.14)$$

onde: M_i é o momento aplicado no topo da estaca, em torno da direção i ;
 h_p é o comprimento de cada elemento da estaca;
 g_i são os valores das tensões de interface estaca-solo;

Como a força de interface é admitida como se comportando de forma linear em cada elemento, temos que:

$$g_i(x_3) = Ax_3 + B \quad (6.15)$$

$$x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = g_i^j$$

$$x_3 = h_p \quad \Rightarrow \quad A = \frac{g_i^k - g_i^j}{h_p}$$

$$g_i(x_3) = \left(1 - \frac{x_3}{h_p}\right) g_i^j + \frac{x_3}{h_p} g_i^k \quad (6.16)$$

Assim sendo, temos:

$$\left(\frac{h_p^2}{2} - \frac{h_p^2}{3}\right) g_i^1 + h_p^2 g_i^2 + \dots + (n-2)h_p^2 g_i^{n-1} + \left[(n-2)\frac{h_p^2}{2} + \frac{h_p^2}{3}\right] g_i^n = M_i \quad (6.17)$$

As equações (6.12) e (6.14) são então inseridas no sistema de equações (6.7), podendo-se assim obter o vetor de tensões de interface estaca-solo. Tendo-se este vetor, é possível obter os deslocamentos substituindo-o na equação (6.1).

6.2.2) Acoplamento MEC/MEF

Da equação geral de deslocamentos do MEC, representada pela equação (3.52), tem-se:

$$\{u_s\}^G = [G]^G \{Q_s\}^G \quad (6.18)$$

Isolando o vetor das forças de interface, tem-se que:

$$\{Q_s\}^G = [G]^{G^{-1}} \{u_s\}^G \quad (6.19)$$

onde os seus vetores e matrizes já foram determinados anteriormente, no capítulo 3.

Sabe-se também que a equação dos deslocamentos da estaca via MEF é dado por:

$$[H]^G \{u_p\}^G = \{F_p\}^G + [Q]^T \{Q_p\}^G \quad (6.20)$$

onde os seus vetores e matrizes também já foram determinados anteriormente, no capítulo 5.

Levando-se em consideração as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio ao longo da interface estaca-solo, tem-se:

$$\{u_s\}^G = \{u_p\}^G = \{u\} \quad (6.21)$$

$$\{Q_s\}^G + \{Q_p\}^G = 0 \quad (6.22)$$

Assim sendo, substituindo (6.19), (6.21) e (6.22) em (6.20), tem-se:

$$[H]^G \{u\} = \{F_p\}^G - [Q]^T [G]^{G^{-1}} \{u\} \quad (6.23)$$

$$[H]^G \{u\} + [Q]^T [G]^{G^{-1}} \{u\} = \{F_p\}^G \quad (6.24)$$

Chamando $[K] = [H]^G + [Q]^T [G]^{G^{-1}}$ e $\{F_p\}^G = \{F\}$, o sistema final da interação fica representado por:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (6.25)$$

onde: $[K]$ é a matriz final do sistema de interação MEC/MEF;
 $\{u\}$ é o vetor que engloba todos parâmetros nodais considerados no sistema;
 $\{F\}$ é o vetor de cargas externas aplicadas no topo da estaca.

Para obter a mesma ordem da matriz $[H]^G$, expandiu-se a matriz resultante do produto $[Q]^T [G]^{G^{-1}}$, da seguinte forma:

$$[Q]^T [G]^{G^{-1}} = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & e_{13} & e_{14} & 0 & e_{16} & \dots & e_{13n} \\ e_{21} & 0 & e_{23} & e_{24} & 0 & e_{26} & \dots & e_{23n} \\ e_{31} & 0 & e_{33} & e_{34} & 0 & e_{36} & \dots & e_{33n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{3n1} & 0 & e_{3n3} & e_{3n4} & 0 & e_{3n6} & \dots & e_{3n3n} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

CAPÍTULO 7

AVALIAÇÃO NUMÉRICA

7.1) Introdução

Serão apresentados, neste capítulo, exemplos numéricos para validação das formulações propostas neste trabalho. Os exemplos tratam de avaliações numéricas realizadas por outros pesquisadores com a finalidade de validar as formulações desenvolvidas neste trabalho.

7.2) Avaliação para carregamentos horizontais em estacas isoladas

Neste item serão apresentados exemplos numéricos analisados com as formulações desenvolvidas neste trabalho e comparados com os resultados obtidos nas formulações propostas por FERRO (1993) e MATOS FILHO (1999), para a análise da interação entre estacas verticais isoladas submetidas a carregamentos horizontais e momento.

7.2.1) Exemplo 1

Para o primeiro exemplo, tem-se uma estaca isolada com comprimento igual a 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m, submetida a uma força horizontal de 181,60 kN aplicada na direção X_1 e um momento em torno do eixo X_2 de -95,826 kN.m, atuando separadamente. O módulo de elasticidade da estaca é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k (relação entre os módulos do solo e da estaca, $k = \frac{E_p}{E_s}$) igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

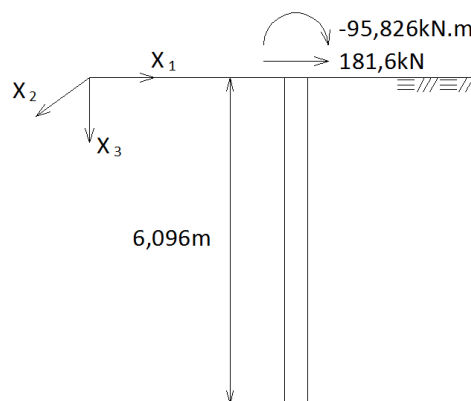


Figura 7.1 – Configuração exemplo 1.

Os deslocamentos obtidos com as formulações propostas neste trabalho e os obtidos por outros pesquisadores estão indicados nas figuras 7.2 e 7.3.

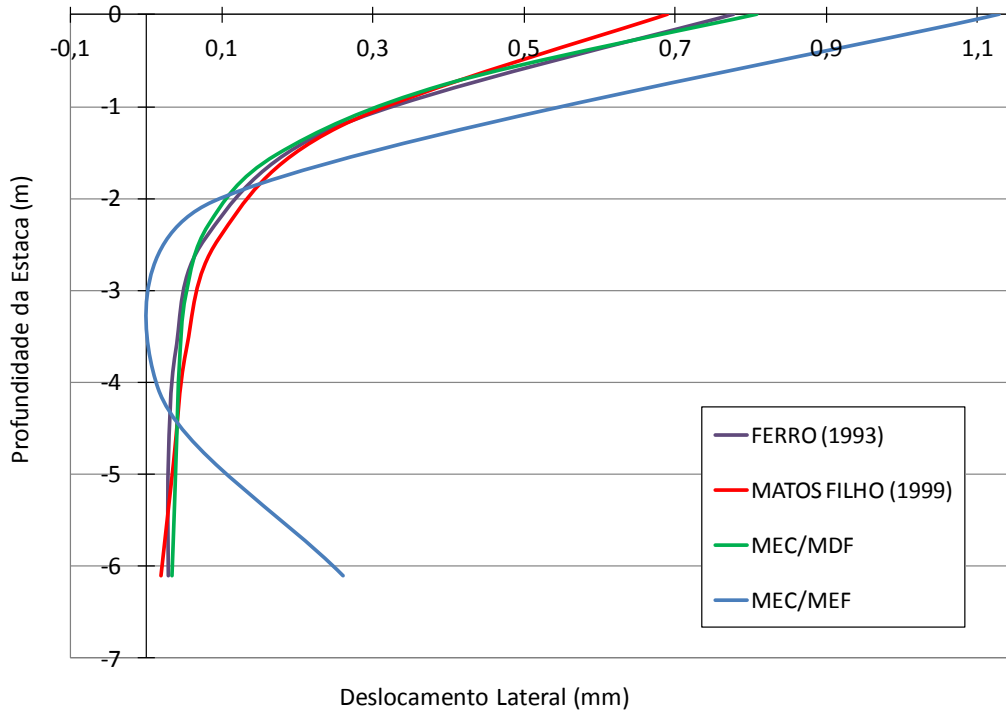


Figura 7.2 – Resultado obtido para exemplo 1, para força horizontal de 181,6kN.

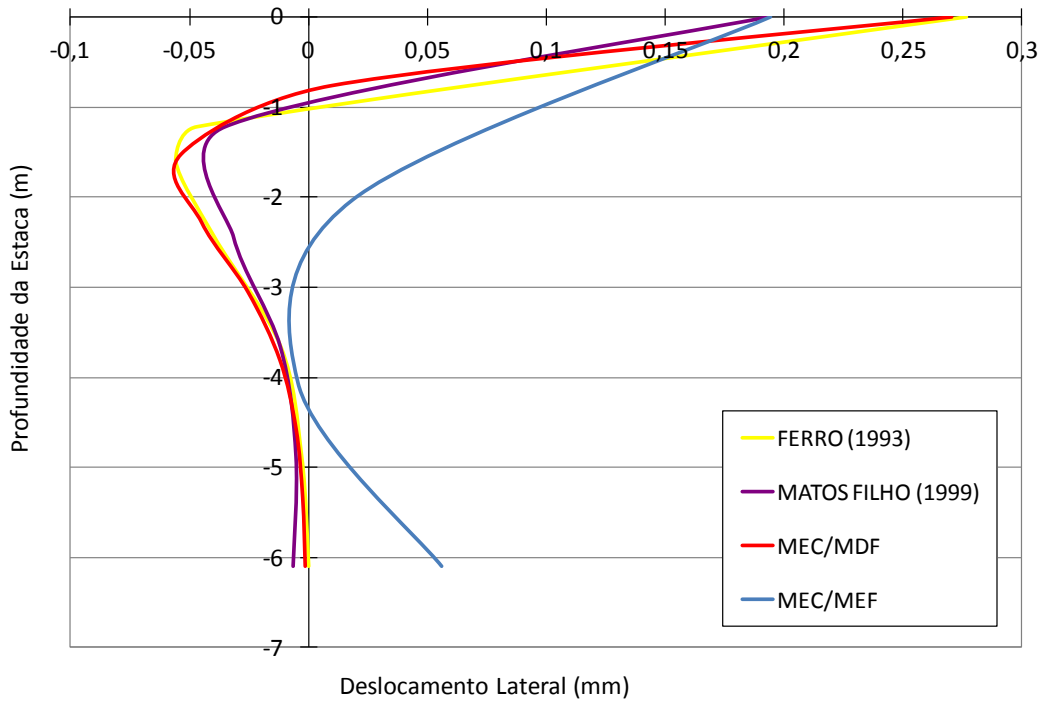


Figura 7.3 – Resultado obtido para exemplo 1, para momento de -95,826kN.

Observou-se uma boa resposta da formulação MEC/MDF quando comparada com as referências, porém uma resposta diferente da esperada para a formulação MEC/MEF. Este comportamento da formulação MEC/MEF é devido ao uso das equações hipersingulares desenvolvidas no MEC. Observou-se que, com o uso destas equações, o sistema estaca-solo ficou mais flexível do que quando elas não são utilizadas. Nas formulações desenvolvidas por Matos e Ferro, estas equações não são utilizadas.

Com base neste exemplo, onde a estaca está submetida a um carregamento horizontal, foram feitas análises. Nestas análises foram comparados os resultados obtidos pela formulação MEC/MDF desenvolvida neste trabalho e os resultados de uma rotina alterada para simulação da formulação de Poulos. Variando-se a relação k , o comprimento da estaca e o número de nós, obtiveram-se os seguintes resultados.

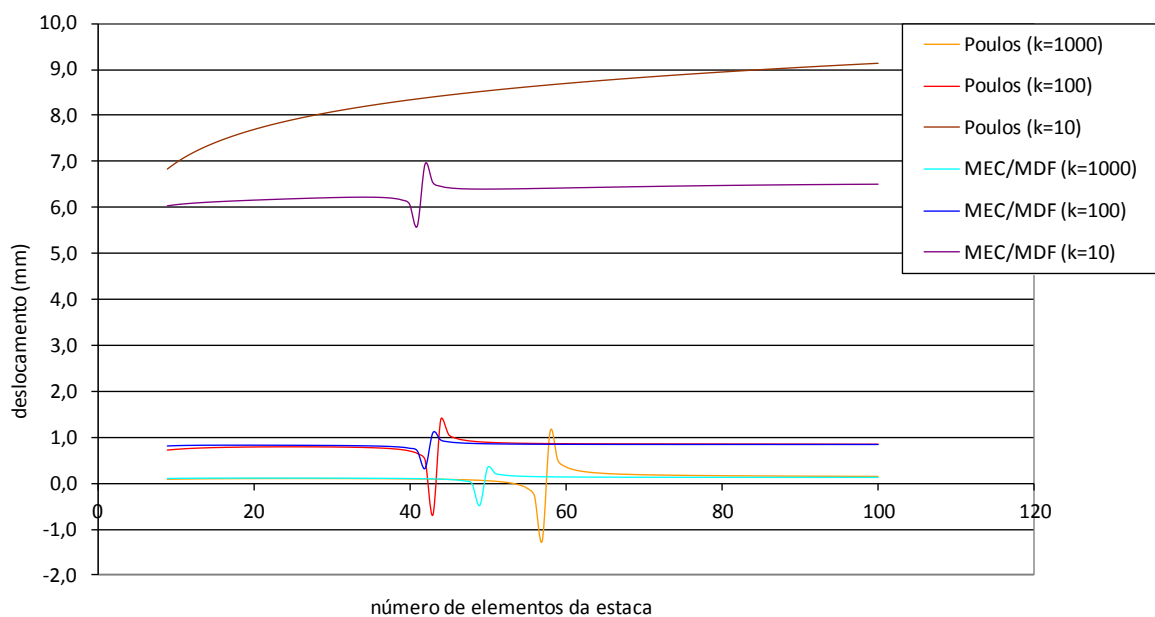


Figura 7.4 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 6,096m).

Na figura 7.4 observa-se a ocorrência de uma instabilidade em pontos específicos das curvas, nas duas formulações. Este “salto” acontece, para $k=100$, quando o comprimento do elemento da estaca (h) é da ordem de $R/2$, onde R representa o raio da estaca.

Constatou-se que quando isto ocorre ($h=R/2$), o determinante do sistema de equações, usado para o cálculo dos deslocamentos, muda de sinal. Com isso, em algum momento o determinante é igual à zero, ou seja, o sistema não teria solução numérica. Isso indica um mau condicionamento do sistema de equações.

Verificou-se também, que estas mesmas observações se aplicam à matriz do sistema de equações do solo. Isto indica que o que motivou a instabilidade numérica do sistema algébrico de equações foi a matriz de flexibilidade do solo.

Nas figuras a seguir, estes comentários são reforçados pelo estudo da instabilidade do sistema, variando o comprimento da estaca.

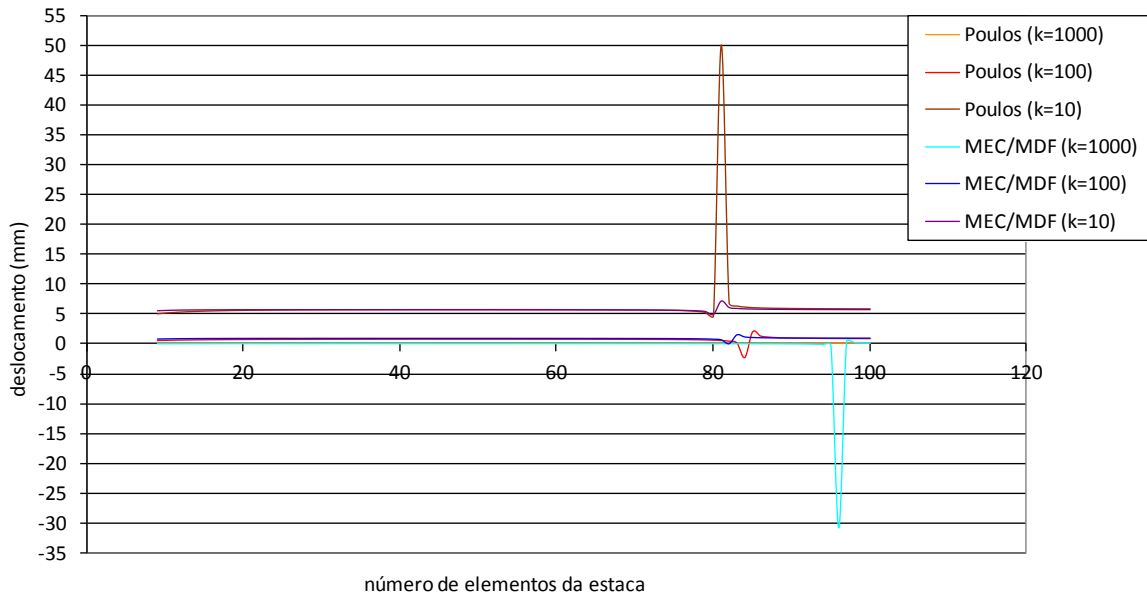


Figura 7.5 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 12m).

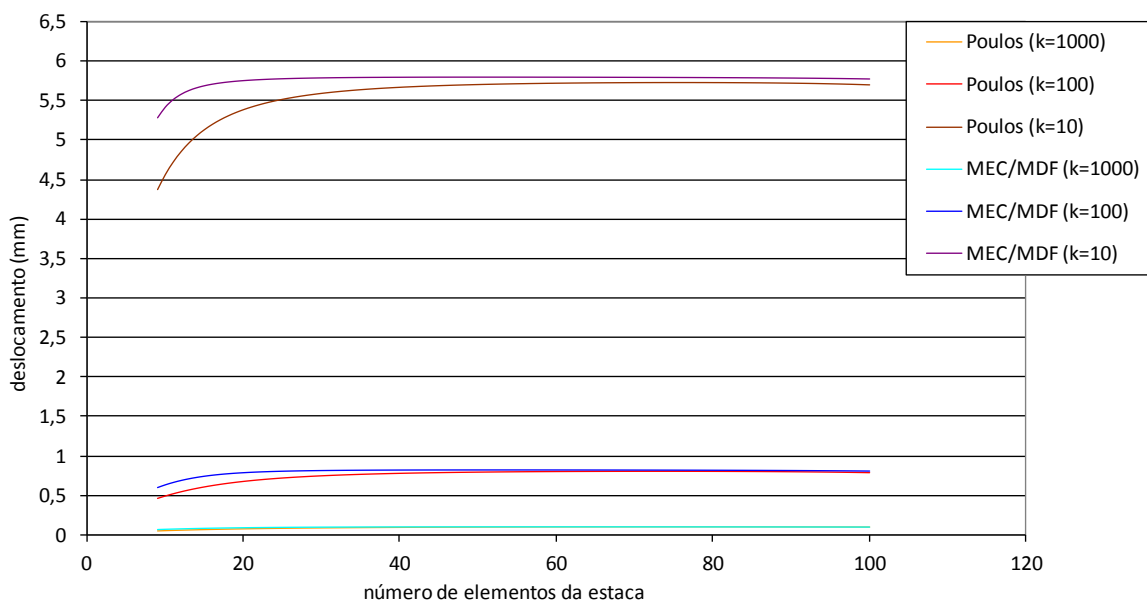


Figura 7.6 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 18m).

Como se limitou o número de nós, nesta estaca de 18 m e em outras de maior comprimento, como 24 e 30 m, não iremos observar o “salto”, pois este possivelmente encontra-se próximo dos valores 118, 157 e 197 elementos, respectivamente.

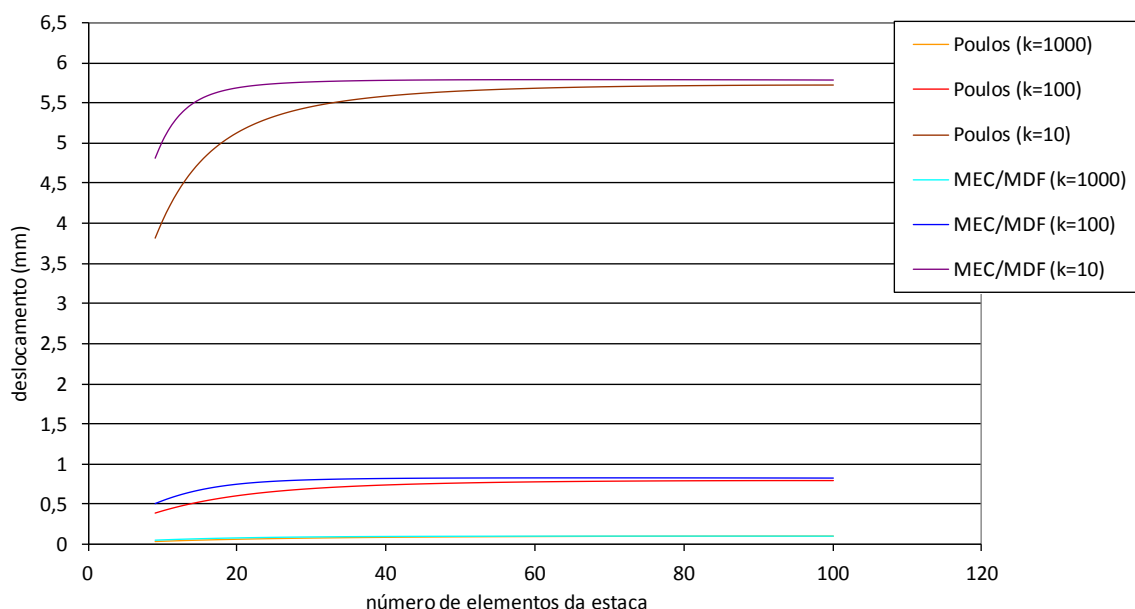


Figura 7.7 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 24m).

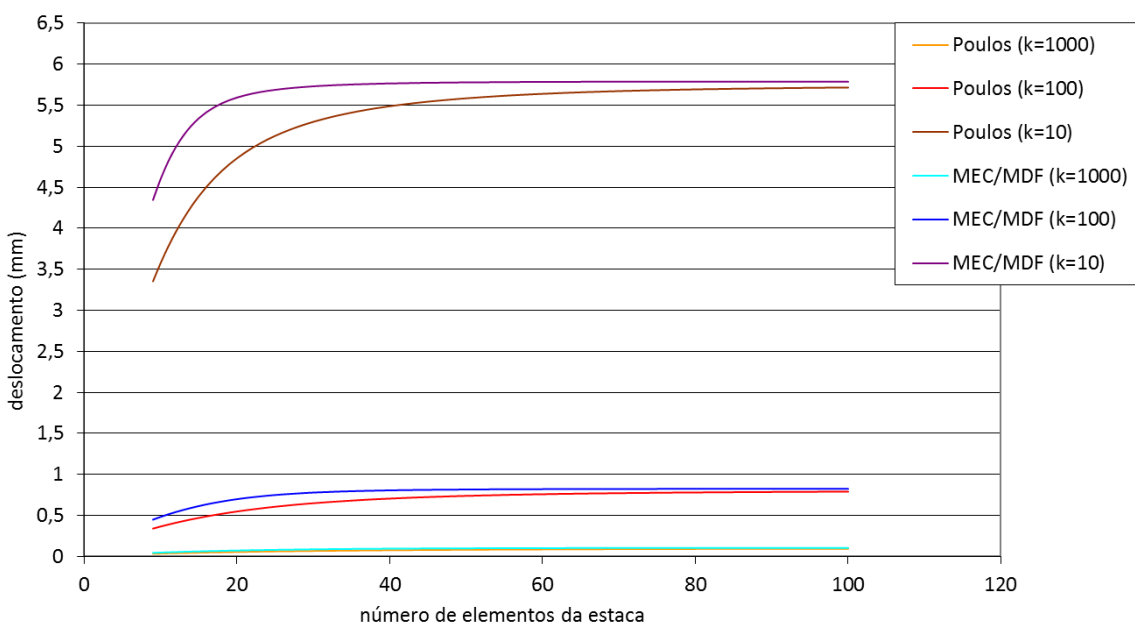


Figura 7.8 – Deslocamento lateral versus número de elementos da estaca (de comprimento 30m).

Para evitar resultados próximos da região instável, aconselha-se adotar h superior a $R/2$, mais seguramente $h=3R/4$, ou seja, $N=4L/3R$.

Uma observação consistente verificada em todas as curvas foi que quão maior a razão entre os módulos de elasticidade (da estaca e do solo), menor será o deslocamento. Isto já era de se esperar, pois alterando o valor de k , quanto maior o módulo de elasticidade do solo, mais rígido ele é e, portanto, menor será o deslocamento.

7.2.2) Exemplo 2

A mesma estaca do item 7.2.1 foi testada com o carregamento de 181,6 kN nas direções X_1 e X_2 . A estaca é isolada com comprimento igual a 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m. O módulo de elasticidade da estaca é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

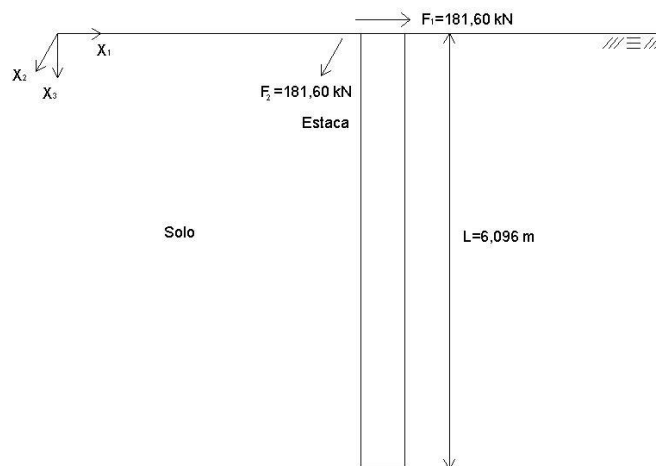


Figura 7.9 – Configuração exemplo 2.

Os resultados, como esperado, foram iguais aos do exemplo 1, do item 7.2.1, para cada uma das direções.

7.3) Avaliação para carregamentos horizontais em grupo de estacas

A seguir serão apresentados exemplos analisados com as formulações desenvolvidas neste trabalho. Os resultados fornecidos pelas formulações desenvolvidas serão comparados com MATOS FILHO (1999), para a análise da interação entre grupo de estacas verticais submetido a carregamentos horizontais.

7.3.1) Exemplo 3

Para este exemplo, tem-se duas estacas idênticas com 6,096 m de comprimento e 0,6096 m de diâmetro, espaçadas em 1,5 m, submetidas a duas cargas horizontais de 181,60 kN aplicadas nas direções X_1 e X_2 . O módulo de elasticidade da estaca é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

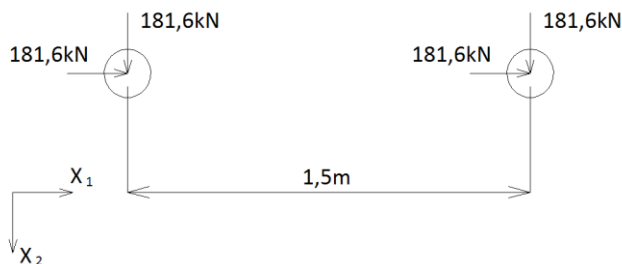


Figura 7.10 – Configuração exemplo 3.

Como forma de comparação, foram analisados os deslocamentos resultantes de carregamentos aplicados em estacas isoladas (caso 1), e os deslocamentos devido a cargas aplicadas nas duas estacas (caso 2, para deslocamentos na direção X_1 e caso 3, para deslocamentos na direção X_2).

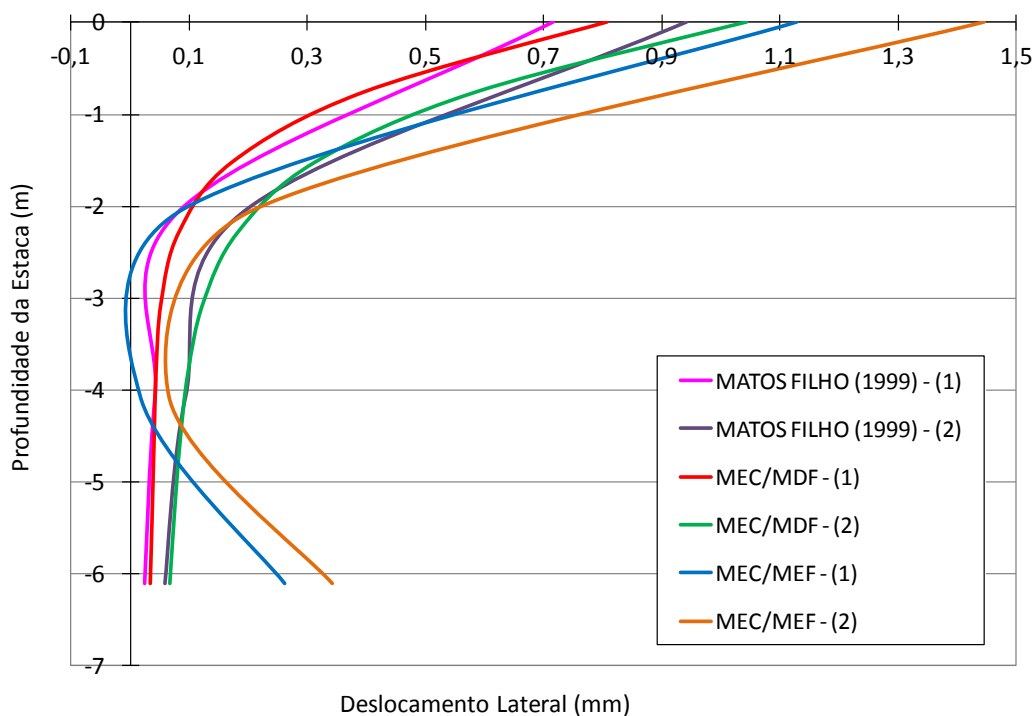


Figura 7.11 – Resultado obtido para exemplo 3, para direção x_1 .

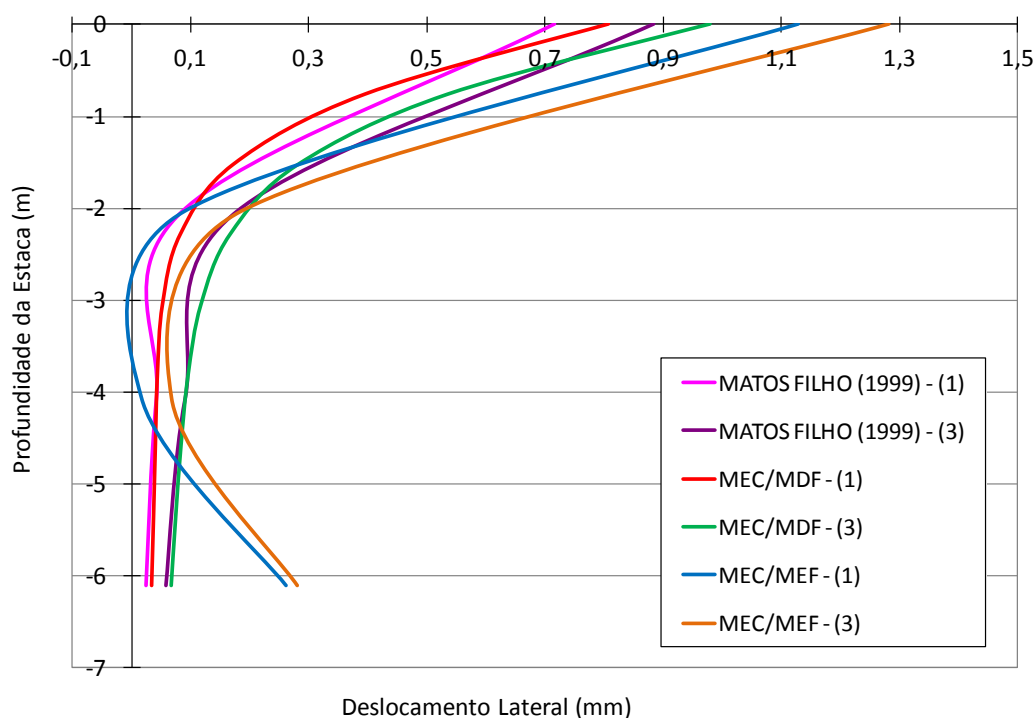


Figura 7.12 – Resultado obtido para exemplo 3, para direção x_2 .

Observou-se um aumento nos deslocamentos resultante da influência que uma estaca tem sobre a outra, quando comparado com o exemplo feito com uma única estaca.

Submetendo-se as mesmas estacas deste exemplo às mesmas solicitações, porém estando elas bem mais afastadas, constatou-se a perda da interferência. À medida que as estacas eram afastadas, o comportamento foi aproximando-se do obtido no exemplo 1. Comportamento este esperado, devida à perda da influência que uma estaca exerce sobre a outra, à longa distância.

Assim como observado no exemplo 1, verificou-se um comportamento divergente nos resultados do MEC/MEF quando comparado com as demais formulações. Constatou-se um aumento na flexibilidade do sistema, resultando em deslocamentos maiores do que os esperados.

7.3.2) Exemplo 4

Agora são analisadas quatro estacas espaçadas em 1,0 m e com cargas horizontais nas duas direções, de 181,60 kN e sentidos variáveis de maneira que mantenham uma simetria entre as cargas, observando-se assim a obtenção de deslocamentos iguais em módulo. Cada estaca tem comprimento de 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m, módulo de

elasticidade $21.111.000 \text{ kN/m}^2$ e a relação k igual a 1000. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

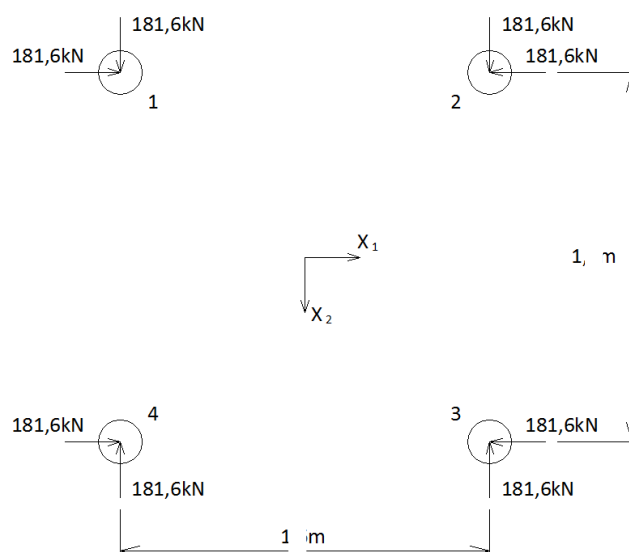


Figura 7.13 – Configuração exemplo 4.

Tabela 7.1 – Deslocamentos no topo das estacas, para MEC/MDF.

| Estaca | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|--------|---------|---------|---------|
| Coordenadas (x;y) | 0;0 | 1;0 | 1;1 | 0;1 |
| Carga em x (kN) | 181,6 | -181,6 | -181,6 | 181,6 |
| Carga em y (kN) | 181,6 | 181,6 | -181,6 | -181,6 |
| Deslocamento em x (mm) | 2,9133 | -2,9133 | -2,9133 | 2,9133 |
| Deslocamento em y (mm) | 2,9133 | 2,9133 | -2,9133 | -2,9133 |

Tabela 7.2 – Deslocamentos no topo das estacas, para MEC/MEF.

| Estaca | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|--------|---------|---------|---------|
| Coordenadas (x;y) | 0;0 | 1;0 | 1;1 | 0;1 |
| Carga em x (kN) | 181,6 | -181,6 | -181,6 | 181,6 |
| Carga em y (kN) | 181,6 | 181,6 | -181,6 | -181,6 |
| Deslocamento em x (mm) | 3,6172 | -3,6172 | -3,6172 | 3,6172 |
| Deslocamento em y (mm) | 3,6172 | 3,6172 | -3,6172 | -3,6172 |

Tabela 7.3 – Deslocamentos no topo das estacas, obtidos por MATOS FILHO (1999).

| Estaca | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|--------|---------|---------|---------|
| Coordenadas (x;y) | 0;0 | 1;0 | 1;1 | 0;1 |
| Carga em x (kN) | 181,6 | -181,6 | -181,6 | 181,6 |
| Carga em y (kN) | 181,6 | 181,6 | -181,6 | -181,6 |
| Deslocamento em x (mm) | 2,5611 | -2,5611 | -2,5611 | 2,5611 |
| Deslocamento em y (mm) | 2,5611 | 2,5611 | -2,5611 | -2,5611 |

Estes resultados obtidos pelo MEC/MDF estão com boa concordância se comparadas com os resultados obtidos por MATOS FILHO (1999). Já os resultados obtidos pelo MEC/MEF resultaram, assim como em outros exemplos, maiores.

7.4) Avaliação para carregamentos verticais em estacas isoladas

Neste item serão apresentados alguns exemplos com a finalidade de expressar em números a formulações desenvolvidas, para estacas verticais submetidas a carregamentos verticais. Os resultados obtidos serão comparados com exemplos apresentados por MATOS FILHO (1999).

7.4.1) Exemplo 5

Para este exemplo tem-se uma estaca vertical submetida a um carga vertical de 726.40 kN. A estaca tem comprimento de 6,096m, diâmetro de 0,3048m e módulo de elasticidade 21.111.000 kN/m². Para o solo, o coeficiente de Poisson é de 0,2 e o módulo de elasticidade 211.110 kN/m².

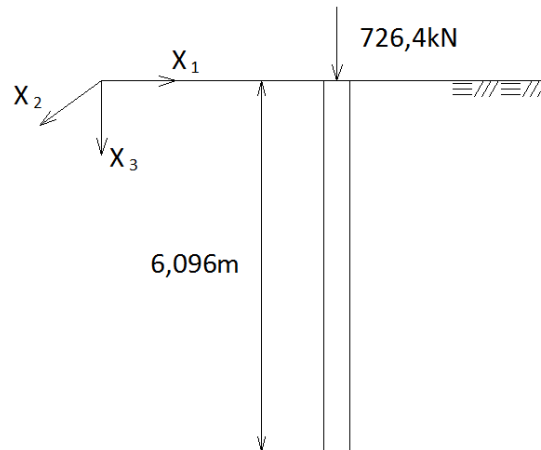


Figura 7.14 – Configuração exemplo 5.

Para a análise do MEC/MDF foram desenvolvidas duas formulações: uma que considera o nó extra, situado abaixo da base da estaca (caso 2) e outra que não considera (caso 1).

Através da figura 7.15 é possível constatar boa concordância entre as diversas formulações.

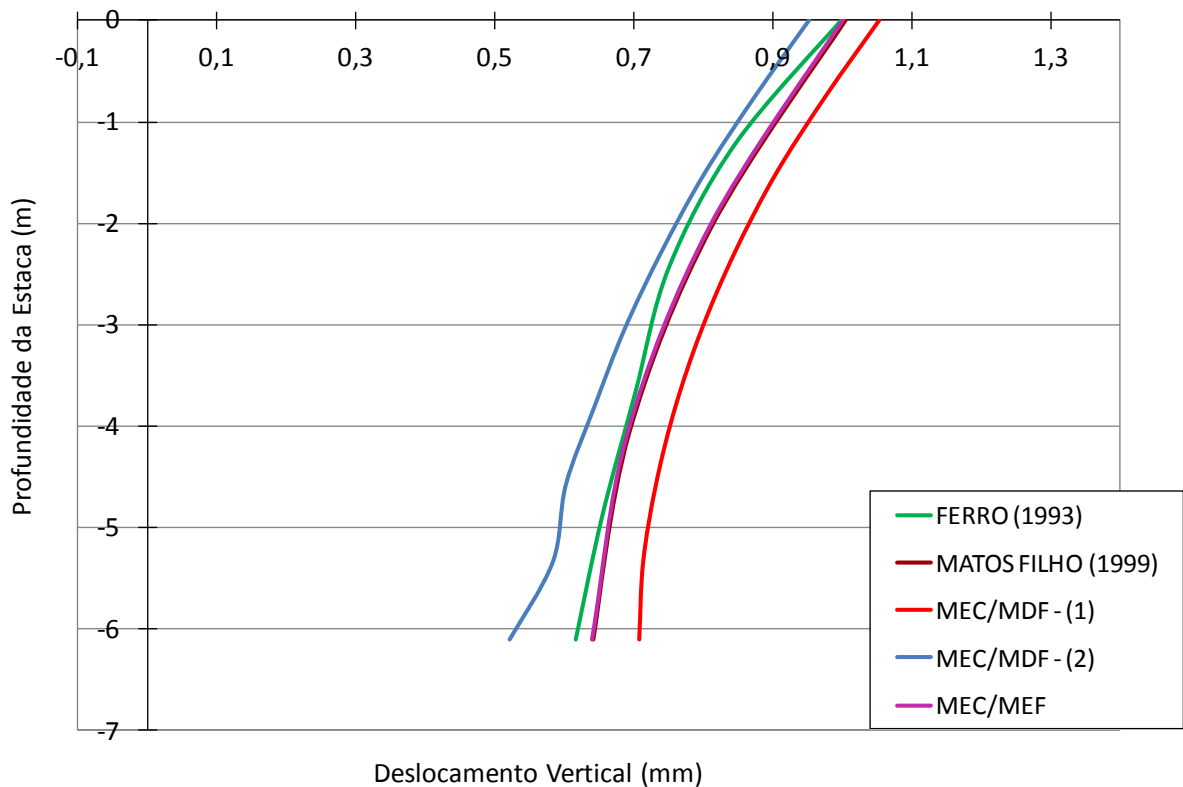


Figura 7.15 – Deslocamentos verticais para os dois programas criados e os obtidos por [1].

Com base neste exemplo, foram feitas análises entre as formulações com e sem o nó extra. Estas comparações foram realizadas variando-se o número de elementos na estaca, a relação entre os módulos de elasticidade do solo e da estaca, fixando-se o valor da estaca em 21.111.000 kN/m², e variando-se o comprimento da estaca analisada.

Observou-se pela figura 7.16 a ocorrência de instabilidades em pontos específicos das curvas. Como ocorrido em caso semelhante relatado anteriormente, esse “salto” acontece, para $k=100$, quando o comprimento do elemento da estaca (h) é da ordem de $R/2$, onde R representa o raio da estaca. Constatou-se que quando isto ocorre ($h=R/2$), o determinante do sistema de equações, usado para o cálculo dos deslocamentos, muda de sinal. Com isso, em algum momento o determinante é igual à zero, ou seja, o sistema não teria solução numérica. Isso indica um mau condicionamento do sistema de equações. Verificou-se também, que estas mesmas observações se aplicam à matriz do sistema de equações do solo. Isto indica que a causa da instabilidade está na matriz de flexibilidade do solo.

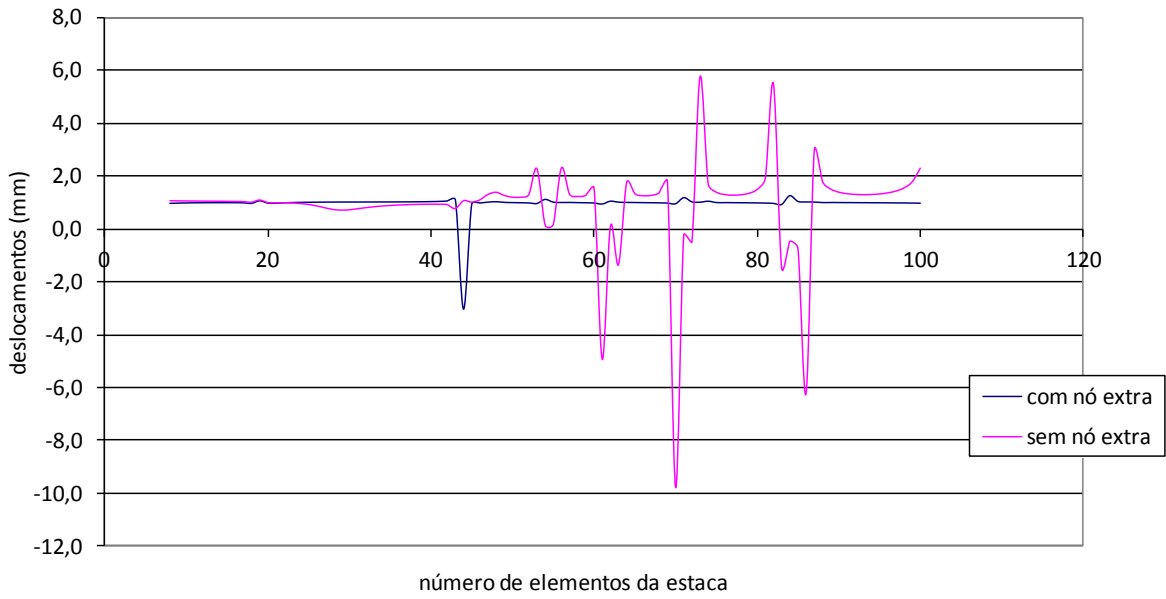


Figura 7.16 – Deslocamento versus número de elementos, para k=100.

A seguir são apresentados um estudo da influência da rigidez do solo, medida pela relação entre os módulos de elasticidade do solo e da estaca, k , para diferentes comprimentos da estaca.

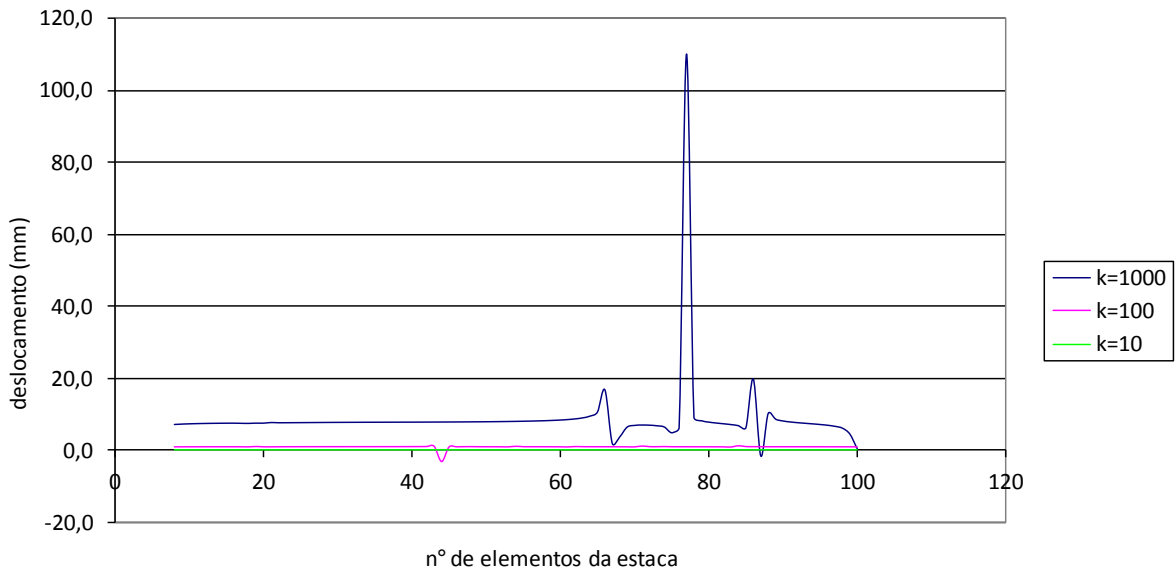


Figura 7.17 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (6,096m).

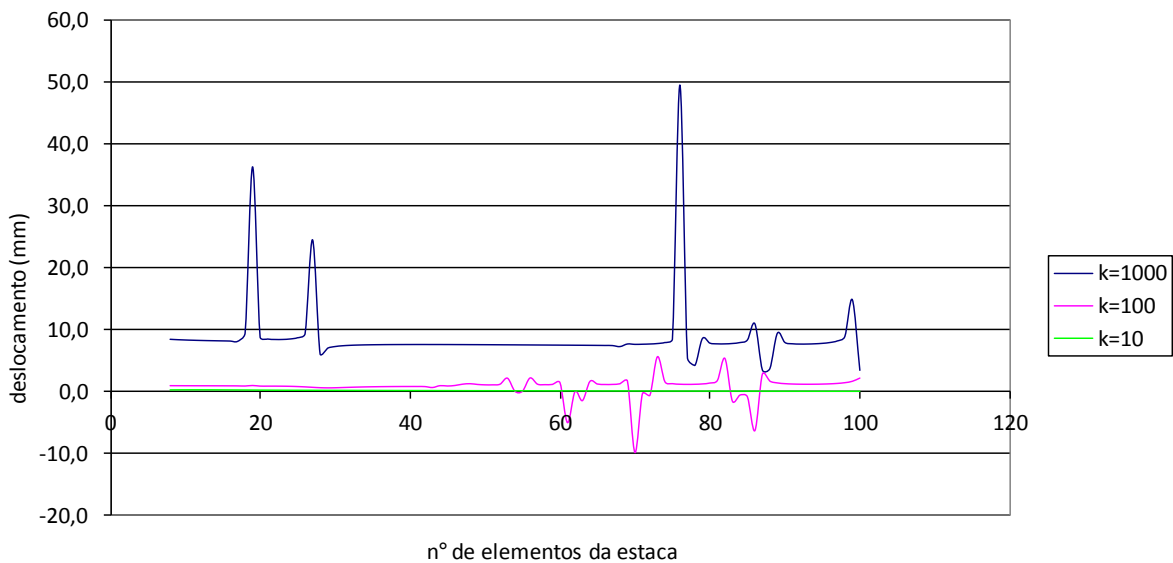


Figura 7.18 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (6,096m).

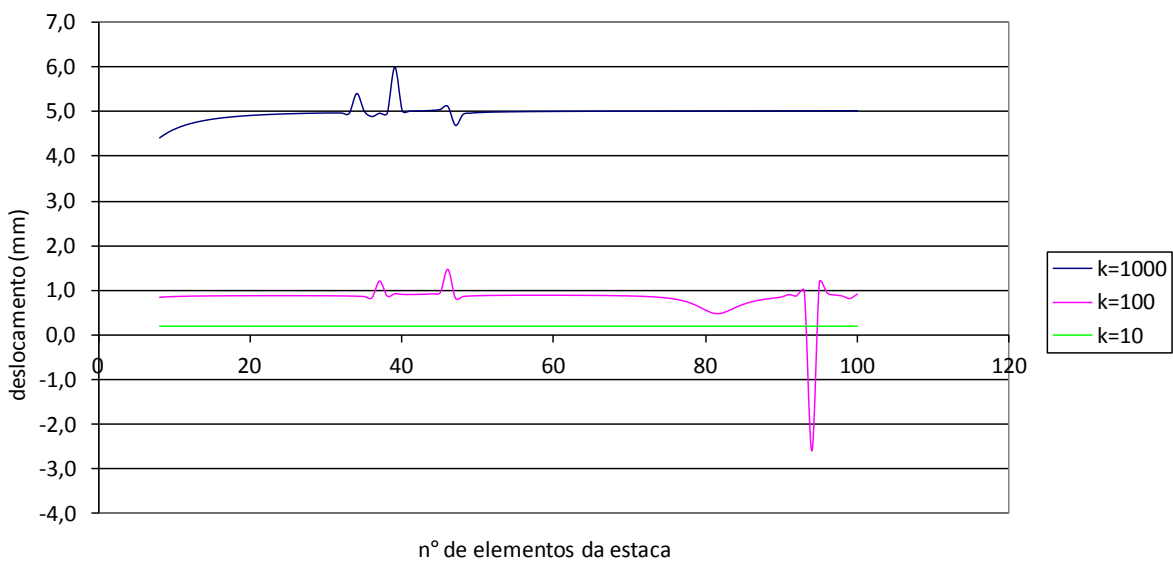


Figura 7.19 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (12m).

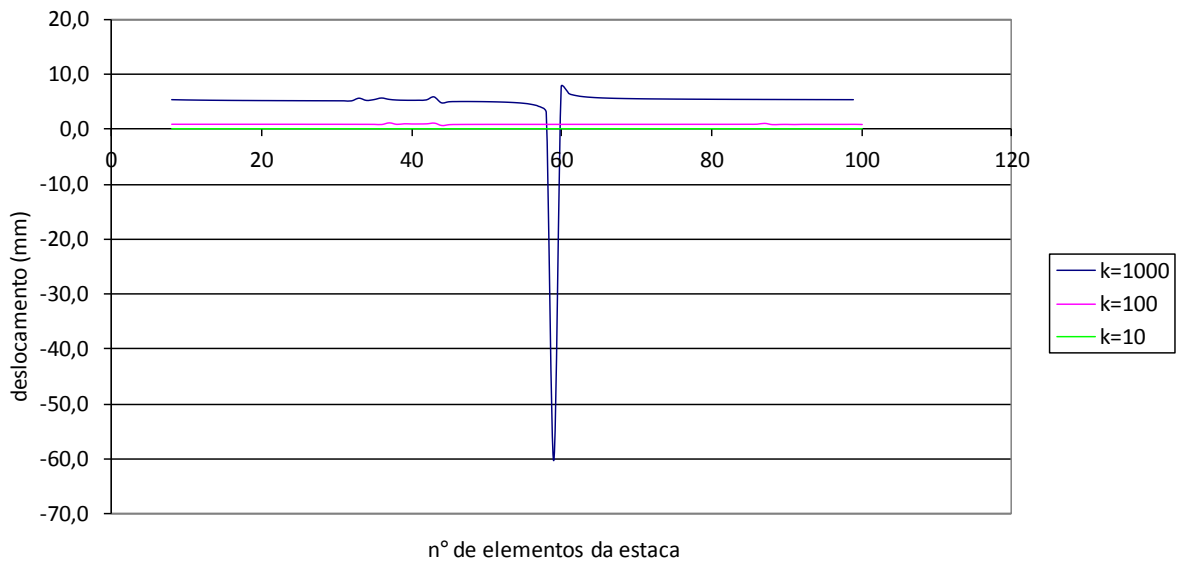


Figura 7.20 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (12m).

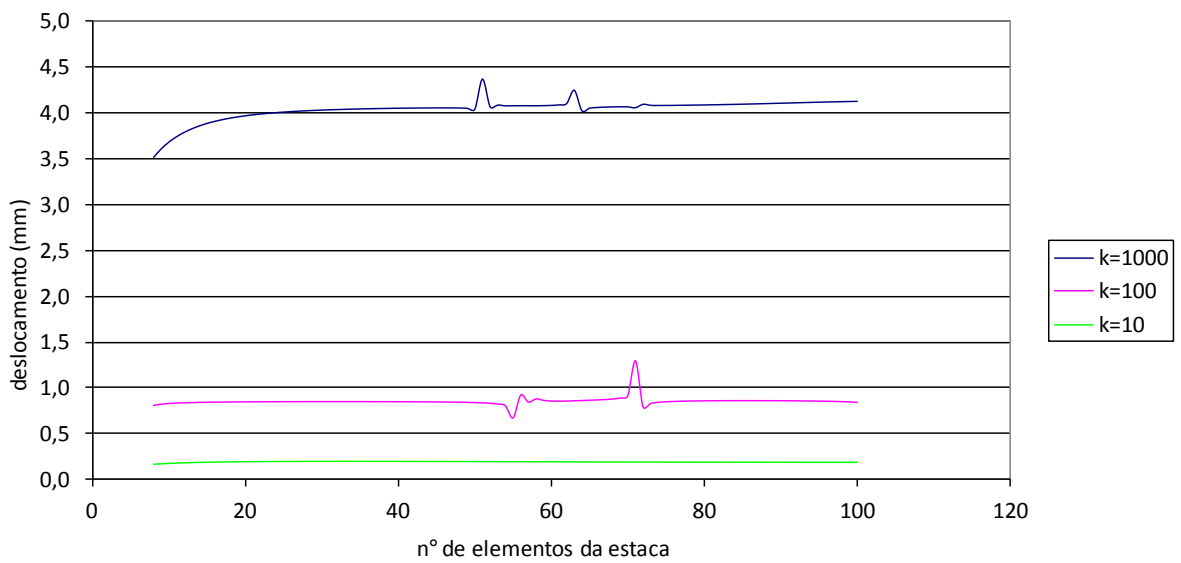


Figura 7.1 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (18m).

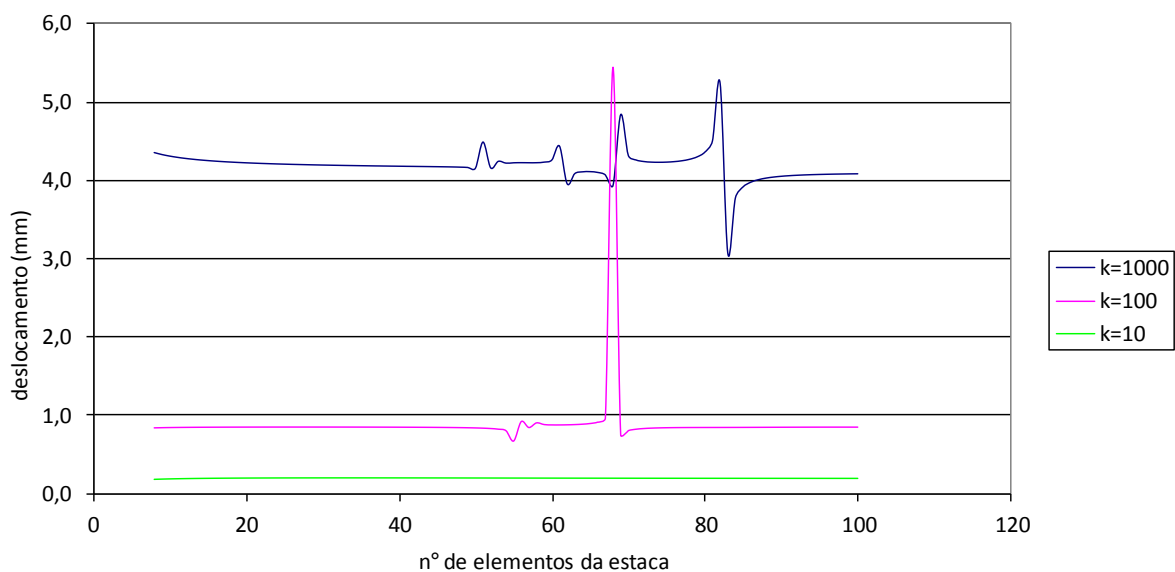


Figura 7.22 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (18m).

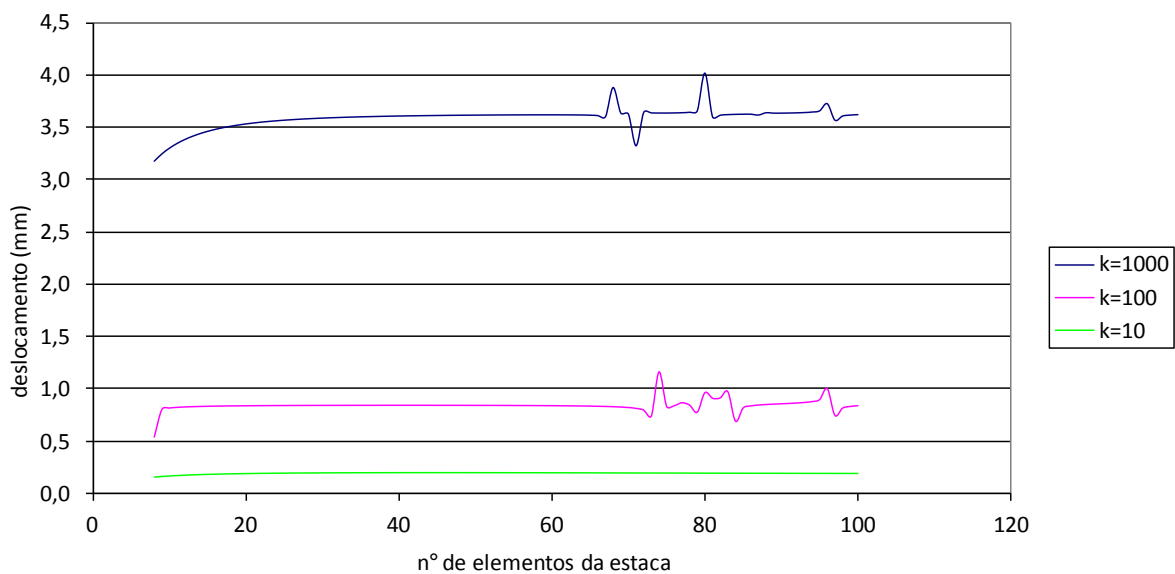


Figura 7.23 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (24m).

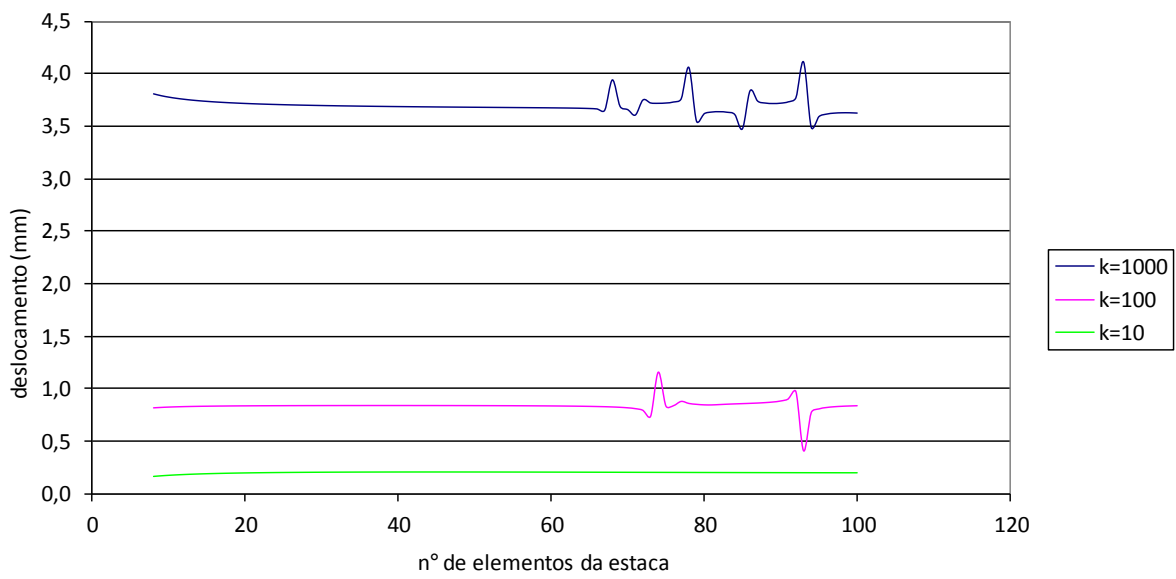


Figura 7.24 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (24m).

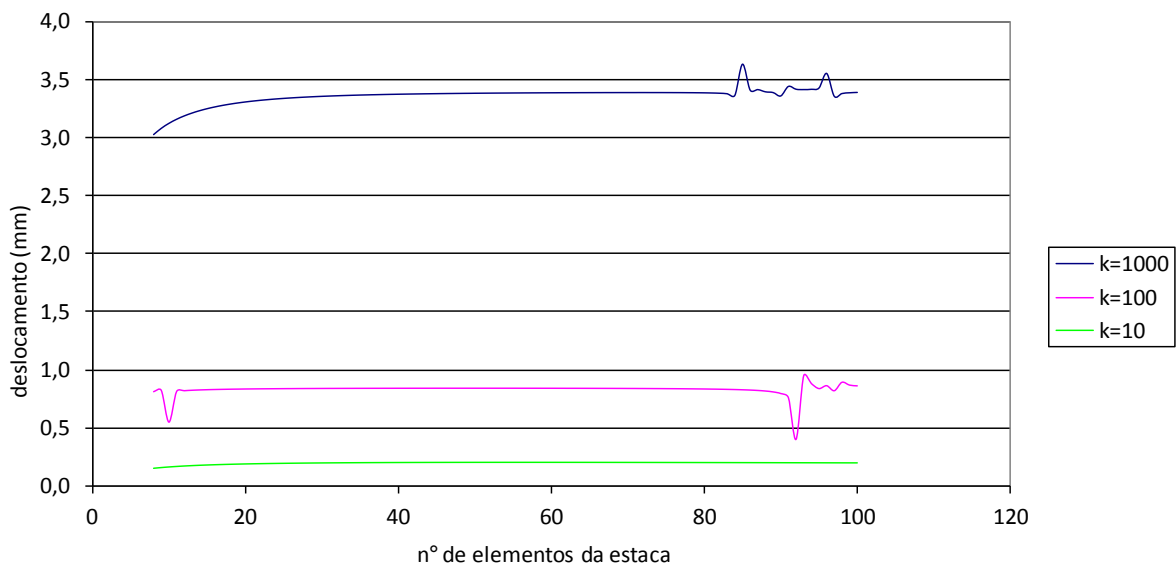


Figura 7.25 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação com nó extra (30m).

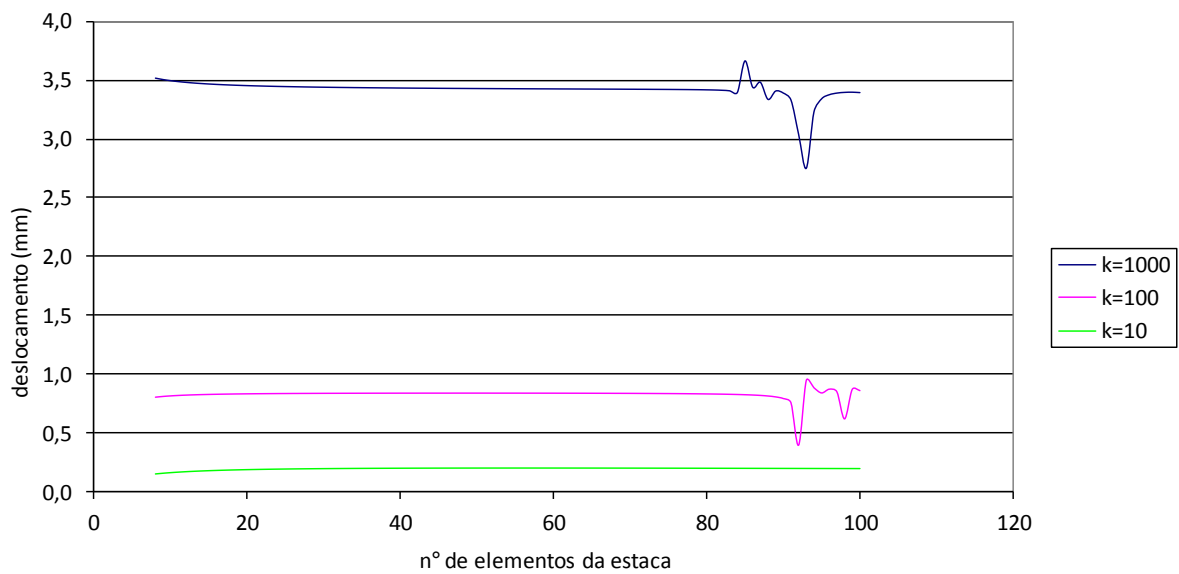


Figura 7.26 – Deslocamento versus número de elementos da estaca, para formulação sem nó extra (30m).

Para evitar resultados próximos da região instável, aconselha-se adotar h superior a $R/2$, mais seguramente $h=3R/4$, ou seja, $N=4L/3R$.

Uma observação lógica que se constatou em todas as curvas foi que quanto maior k , menor será o deslocamento. Isto era de se esperar, pois variando-se o k , varia-se o módulo de elasticidade do solo, e quanto maior o módulo de elasticidade do solo, mais rígido ele é e, portanto, menor será o deslocamento.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentadas duas formulações para a análise da interação estaca-solo utilizando o MEC. A primeira trata de uma formulação baseada na formulação de POULOS (1971), que juntamente com o MEC, utiliza o MDF. A segunda formulação trata do acoplamento MEC/MEF.

Em ambas as formulações, o MEC é utilizado para discretizar um meio semi-infinito, isótropo e elástico-linear que corresponde ao maciço de solos. Por essa razão, as soluções fundamentais de MINDLIN (1936) tornam-se adequadas, pois através delas, elimina-se a necessidade de discretização da superfície livre, reduzindo assim as dimensões das matrizes utilizadas na resolução do problema.

As estacas, por sua vez, foram tratadas como elementos de barra, discretizados pelo MDF e MEF. Em ambos os métodos, foram analisadas primeiramente estacas verticais isoladas submetidas a carregamentos em uma direção, para depois serem considerados carregamentos em todas as direções e por fim, analisar grupo de estacas.

Após o desenvolvimento numérico dos métodos, foi realizado o acoplamento entre eles, de forma a obter um sistema de equações final, de onde são obtidos os deslocamentos nodais da estaca.

Comprovou-se, através dos exemplos, a boa concordância dos resultados obtidos pelo acoplamento MEC/MDF, quando comparados com modelos teóricos de FERRO (1993), e MATOS FILHO (1999).

Pode-se observar que a incorporação da equação hipersingular acaba tornando o sistema mais flexível, resultando em deslocamentos maiores para a estaca na formulação MEC/MEF, ao contrário daquilo que se esperava, ou seja, um aumento na rigidez do sistema.

Embora a equação hipersingular tenha sido exaustivamente conferida para se evitar erros, não se conseguiu uma explicação para tal fato.

Como nenhum outro autor utilizou também a equação hipersingular do deslocamento, não foi possível avaliar se este é um resultado coerente com outros métodos ou não.

Pode-se concluir com este trabalho que os deslocamentos horizontais e verticais nas estacas são diretamente influenciados seu comprimento, pela rigidez do sistema e pelo

espaçamento entre elas. Podendo-se afirmar ainda que as distribuições de carga tornam-se mais uniformes conforme aumentam os espaçamentos.

Muitos aprimoramentos podem ser implementados aos modelos desenvolvidos, tais como a estratificação do solo, a determinação da posição da camada indeslocável do maciço de solos, assim como a colocação de uma placa flexível e posteriormente acoplar o sistema placa-estaca-solo a uma superestrutura.

CAPÍTULO 9

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. P. A. (2003). Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estrutura. 285p. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALMEIDA, V. S. (2003). Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF. 192p. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. (2007). Static analysis of soil/pile interaction in layered soil by BEM/BEM coupling. *Advances in Engineering Software*, v.38, n.11-12, p.835-845, nov./dec. (ISSN: 0965-9978).

ARAUJO, A. C. (2009). Análise da interação solo-estrutura em edifícios sobre estacas. 144p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. (1955) *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, 1960 (collection of papers published in *Aircraft Engineering* in 1954 and 1955).

ASSAN, A. E. (2003). Método dos Elementos Finitos Primeiros Passos. Campinas: Editora da Unicamp.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de fundações, NBR 6122. Rio de Janeiro, ABNT, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, NBR 8681. Rio de Janeiro, ABNT, 2003.

BARRETTO, S. F. A. (1995). Análise elastodinâmica de placas através do método dos elementos de contorno, com interação solo-estrutura. 130p. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo – São Carlos.

BASILE, F. (1999). Non-linear analysis of pile groups. *Geotechnical Engineering*, v 137, n 2, p 105-115.

BOBADILLA GUADALUPE, U. (2009). Análise dinâmica da interação solo-estrutura para estruturas superficiais utilizando a transformada implícita de Fourier. 121p. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BOUSSINESQ, J. (1885). *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides*. Gualtier-villars, Paris.

BREBBIA, C. A. (1978). Weighted residual classification of approximate methods. *Applied Mathematical Modelling*, v.2, n.3.

BUTTERFIELD, R.; BANERJEE, P. K. (1971a). The elastic analysis of compressible piles and piles group. *Geotechnique*, v.21, n.1, p.43-60.

_____. (1971b). The problem of pile group-pile cap interaction. *Geotechnique*, v.21, n.2, p.135-142.

CAVALCANTI, D. J. H. (2006). Análise da interação solo-estrutura através do emprego conjunto dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e Elementos Finitos (MEF). 137p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

CERRUTI, V. (1882). *Mem. Fis. Mat.. Acc. Lincei*, Roma.

CHAMEKI, S. (1954). Consideração da rigidez da estrutura no cálculo dos recalques da fundação, separata dos Anais do I Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos – v.1, Porto Alegre, RS, PP.35-80.

CHAUDONNERET, M. (1978). On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis. In: *Recent Advances in Boundary Element Methods* (C. A. Brebia, ed.), London, Pentech Press.

CHEN, H. S; MEI, C. C. (1974). Oscillations and wave forces in a man-made harbor. In: *NAVAL HIDRO. SYMP.*, 10th, Cambridge, USA. Proc.

CHEUNG, Y. K.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1965) Plates and tanks on elastic foundations – An application of finite element method. *International Journal of Solids Structures*, v.1, pp.451-481.

CINTRA, J. C. A. (1983). Carregamento lateral em estacas. São Carlos. Publicação 058/94. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CINTRA, J.C.A.; AOKI, N.(1999). Carga Admissível em Fundações Profundas. São Carlos. Projeto REENGE. EESC/USP.

_____. (2009). Projeto de Fundações em Solos Colapsíveis. São Carlos: EESC/USP. 108p.

COLARES, G. M. (2006). Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de estruturas. 83p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

COSTET, J.; SANGLERAT, G. (1969). *Cours pratique de Mécanique des Sols*. Paris: Dunod.

DUARTE, L. N.(2012). Avaliação do comportamento solo-estrutura de elementos de fundação tipo sapata estaqueada. 150p. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa.

FERRO, N. C. P. (1993). Uma combinação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos para análise de fundações enrijecidas por estacas. 135p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

HASEN, E. B. (1976). Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. *J. of Elasticity*, v.6, n.1, p.39-56.

HERRMANN, L. R. (1972). Interpretation of finite element procedure as stress error minimization procedure. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v. 98, n.EMS pp.1330-1336.

HOLANDA JÚNIOR, O. G. (1998). Interação solo-estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas. 191p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

IWAMOTO, R. K. (2000). Alguns aspectos dos efeitos da interação solo – estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda. 157p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

JASWON, M. A.; MAITI, M.; SYMM, G. T. (1967). Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. Journal of Solids and Structures*, v.3, p.309-312.

KUPRADZE, V.D. (1965). *Potencial Methods in the Theory of Elasticity*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.

LAUTENSCHLÄGER, C. E. R. (2010). Modelagem numérica do comportamento de fundações profundas submetidas a carregamentos laterais. 179p. Dissertação (mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

LEI, Z. X.; CHEUNG, Y.K.; THAM, L.G. (1993). Vertical response of single piles: transient analysis by time-domain BEM. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v 12, n 1, p 37-49.

LYNN, P. P.; ARYA, S. K. (1973). Use of the least squares criterion in the finite element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.6, pp.75-83.

MATLOCK, H.; REESE, L. C. (1961). Foundation analysis of offshore pile supported structures. In: *International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineers*, 5, 1961. Paris. Proceeding... ISSMFE, 1961, v.2, P.91-97.

MATOS FILHO, R. F. (1999). Análise da interação estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno. 116p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MATOS FILHO R. F.; MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B. (2005). Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Engineering analysis with boundary elements*, v.29, n.3, p.195-203, mar. (ISSN: 0955-7997).

MATOS FILHO, R. F.; PAIVA, J. B. (1999a) Análise elástica de grupos de estacas solicitadas por carregamentos verticais e horizontais [CD-ROM]. In: PIMENTA, P.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ALMEIDA NETO, E.S., eds. Computational methods in engineering=99 (Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 20. / Brazilian Congress on Computational Mechanics, 1., São Paulo, 3-5 nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 1999. 17p.

_____. (1999b). Análise de estacas submetidas a cargas horizontais via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno [CD-ROM]. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 15., Águas de Lindóia, 22-26 nov. 1999. Campinas, UNICAMP / ABCM, 1999. 10p.

_____. (2007). Análise da interação estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.9, n.40, p.59-80 (ISSN: 1809-5860).

MATTES, N. S.; POULOS, H. G. (1969). Settlement of single compressible pile. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, v.97, n.SM1, p.189-207.

MCDONALD, B. H., WEXLER, A. (1972). Finite element solution of unbounded field problems. IEE Trans. Microwave Theory and Technique, MTT-20, p.841-847.

MEDEIROS, D. S. (2006). Análise tridimensional da interação solo-estrutura em fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos. 173p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MELOSH, R. J. (1963). “Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method”, American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol. 1, pp. 1631-1637.

MENDONÇA, A. V. (1997). Análise da interação placa-estaca-solovia combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno. 151p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B. (1997). Análise da interação placa-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno. In: XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, São Carlos, 1-5 set. 1997.

MENEZES JÚNIOR, R. A. (2012). Análise estática de dutos enterrados pelo acoplamento entre o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. 208p. Tese (doutorado) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

MESSAFER, T.; COATES, L. E. (1989). An application of FEM/BEM, coupling to foundation analysis. In: BREBBIA, C. A.; CONNOR, J. J., eds. Advances in boundary elements – 3: stress analysis. Southampton, CML Publ., p.211-223.

MEYERHOF, G. G. (1953). Some recent foundation research and its application to design. Structural Engineering, v.31, pp.151-167, Londres.

MILLÁN, M.A.; DOMÍNGUEZ, J. (2009). Simplified BEM/FEM model for dynamic analysis of structures on piles and pile groups in viscoelastic and poroelastic soils. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v 33, n 1, p 25-34, January.

MINDLIN, R. D. (1936). Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *J. Physics*, v.7, p.195-202.

MOTA, R. J. (2008). Análise da interação solo-estrutura de uma obra de contenção na cidade de Goiânia-GO. 128p. Dissertação (mestrado) – Universidade de Brasília, Brasília.

MOTA, M. M. C. (2009). Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados no campo. 222 p. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

NAKAGUMA, R. K. (1979). Three dimensional elastostatics using the boundary element method. Southampton. Thesis of Doctor of Philosophy. University of Southampton.

OSHIMA, S. T. (2004). Uma combinação MEC/MEC para análise da interação de estacas inclinadas e o solo. 84p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

OSHIMA, S. T.; PAIVA, J. B. (2003). Uma combinação MEC/MEF para análise da interação de estacas inclinadas e o solo. In: *IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, 24.,Ouro Preto, 29-31 out. 2003. Ouro Preto: UFOP, 2003. 11p., 1CD-ROM. (ISBN: 85-288-0040-7).

OSIAS, J. R.; WILSON, R. B.; SEITELMAN, L. A. (1977). Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. In: *SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE*, 1st, Versailles, CETIM. Proc.

PACOLLA, R. R. (2004). Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PADRÓN, L.A.; AZNÁREZ, J.J.; MAESO, O. (2007). BEM-FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v 31, n 6, p 473-484, June.

PAIVA, J. B. (1993). Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura. São Carlos. Tese (livre docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PAIVA, J. B. & BUTTERFIELD, R. (1997). Boundary element Analysis of plate-SOIL interaction. *Computers&Structures*, v.64, n.1-4, p.319-328.

PAIVA, J. B.; VENTURINI, W. S. (1992). Alternative technique for the solution of plate bending problems using the boundary element method. . Engineering Analysis with Boundary Elements, Inglaterra, v. 12, p. 265-271, 1992.

PAIVA, J. B.; VENTURINI, W. S. (1987). Analysis Of Building Structures Considering Plate-Beam-Column Interaction.. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY, 1987.

PAIVA, J. B.; VENTURINI, W. S. (1988). Plate bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain. Engineering Analysis with Boundary Elements, Inglaterra, v. 4, p. 183-185, 1988.

PAIVA, J.B.; TRONDI, R.R. (1999). Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups. Advances in Engineering Software, v.30, n.9-11, p.715-724, Sept./Nov.

POULOS, H. G. & DAVIS, E. H. (1980). Pile foundation analysis and design. John Wiley & Sons, New York, N.Y.

POULOS, H. G. (1968). Analysis of the settlement of pile groups. Geotechnique, v.18, p.449-471.

POULOS, H. G. (1971a). Behavior of laterally loaded piles: I-single piles. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, v.97, n.SM5, p.711-731.

_____. (1971b). Behavior of laterally loaded piles: II- piles groups. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, v.97, n.SM5, p.733-751.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. (1968). The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. Geotechnique, v.18, p.351-371.

RAMALHO, M. A. (1990). Sistema para análise de estruturas considerando interação com meio elástico. 389p. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

REZENDE, M. N. ; PAIVA, J. B. ; VENTURINI, W. S. (1985). Análise de placas elásticas pelo método dos elementos finitos em microcomputador.. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA EM ENGENHARIA, 4., 1985, São Carlos. Anais do 4º Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia, 1985. p. 70.

RIBEIRO, P. R. (1989). Estudo da interação entre o solo e a cabeça do poço pelo método dos elementos finitos. 99p. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

RIBEIRO, D. B. (2005). Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF. 121p. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

RIBEIRO, D. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. 121p. Tese (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. (2011). Análise tridimensional de lâminas apoiadas em uma camada finita de solo empregando elementos de contorno infinitos com acoplamento MEC-MEF. In: Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia, 2011, Coimbra. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia, 2011. p. 1-20.

RICCARDELA, P.C. (1973). An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, (Report No. SM-73-10)

RIZOS, D.C.; WANG, J.; KARABALIS, D.L. (2001). A direct time domain BEM-FEM scheme for soil-structure interaction problems. International Series on Advances in Boundary Elements, v 10, p 103-115, Boundary Elements XXIII. In: Twenty-Third International Conference on the Boundary Element Method, BEM XXIII, May 7 - 9 2001; Sponsor: Wessex Institute of Technology; International Society of Boundary Elements; Publisher: WITPress

RIZZO, F. J. (1967). An Integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quarterly of Applied Mathematic, v.25, n.1, p.83-95.

SELVADURAI, A.P.S. (1979). Elastic analysis of soil-interaction. Amsterdam. Elsevier Scientific Publishing Company.

SHAW, R. P.; FALBY, W. (1977). A combined finite element-boundary integral equation method. In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1st, Versailles, CETIM. Proc.

SILVA, W. Q. (2010). Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF. 148p. Dissertação (mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMONS, N. S. (1977). Introdução à Engenharia de Fundações. Rio de Janeiro: Interciência.

SORIANO, H. L. (2003). Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. Editora da Universidade de São Paulo (Edusp). São Paulo.

SOUTHWELL, R.V. (1946). Relaxation methods in theoretical physics. London, Oxford. University Press, (The Oxford Engineering Sciences Series).

SOUZA, E. G. (2003). Colapso de edifício por ruptura das estacas: estudo das causas e da recuperação. São Carlos. 115p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

SPYRAKOS, C.C.; PATEL, P.N.; KOKKINOS, F.T. (1989). Assessment of computational practices in dynamic soil-structure interaction. *Journal of Computing in Civil Engineering*, v 3, n 2, p 143-157, Apr.

STERN, M. (1979). A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. Journal of Solids and Structures*, v.15, p.769-782.

STRAUB, H. A. (1964). *History of Civil Engineering*, MIT Press.

SZABO, B. A.; LEE, G. C. (1969). Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.1, pp.301-310.

TACITANO, M. (2006). Análise de paredes de contenção através de método unidimensional evolutivo. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TEJERINA CALDERÓN, E. (1996). Sobre o uso do método dos elementos de contorno MEC para o estudo da interação de placas com o meio contínuo. 268p. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. (1981). Boundary element solution for half –plane problems, *Int. J. Solids Structures* in press.

TERZAGHI, K.; PECK, R.B. (1967) – *Soil mechanics in engineering practice*. John Wiley and Sons Co., New York, 2a ed., 729 p.

VELLOSO, D. A. (1996). *Fundações*. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro. V.1

VELLOSO, D. A. (1996). *Fundações*. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro. V.2

VENTURINI, W. S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos. Tese (livre docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VEUBEKE, B. F. (1965) Displacement and equilibrium models in finite element method, in: O.C. Zienkiewicz, G.S. Holister (Eds.), *Stress Analysis'*, John Wiley & Sons, Chichester, 1965, Cap.9, 1491-1506.

VIEIRA, C. S. (2009). Aplicação do acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para análise bidimensional da interação solo-estrutura. 93p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

VITORETI, M. M. (2003). Análise da interação solo-estrutura em fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos. 165p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

WANG, S.; SCHMID, G. (1992). Dynamic structure-soil-structure interaction by FEM and BEM. *Computational Mechanics*, v 9, n 5, p 347-357.

WILSON, E. L.; NICKELL, R. E. (1966). Application of the finite element method to heat conduction analysis. *Nuclear Engineering and Design*, v.3, pp1-41.

WINKLER, E. (1867). Die lehre von der Elastizitat und Festigkeit. Domicius. Prage.

ZHEMCHUZHNIKOV, A. (2011). Análise comparativa dos diversos métodos da previsão do recalque de grupo de estacas em meio homogêneo. 129p. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. (1965). Finite element in the solution of field problems. *The Engineer*, 200, pp.507-510.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. (1967). The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill Publishing Company Ltd.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MAYER, P.; CHEUNG, Y. K. (1966). Solution of anisotropic seepage problems in finite elements. *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, v.92, pp.111-120.

ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I. P. (1968). Stress analysis of rock as a 'no tension' material. *Géotechnique*, v.18, n.1, pp.56-66.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. (1977). The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.355-375.

<http://pnld.moderna.com.br/2012/02/27/torre-de-pisa-tomara-que-nao-caia/>

<http://www.melhordesantos.com/2010/04/predios-de-santos.html>

ANEXO A

A) Exemplos Complementares

A.1) Exemplo 1

A mesma estaca do item 7.2.1 foi submetida à forças de 181,6 kN nas direções X_1 e X_2 , atuando simultaneamente. Trata-se de uma estaca é isolada, com comprimento igual a 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m. O módulo de elasticidade da estaca é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

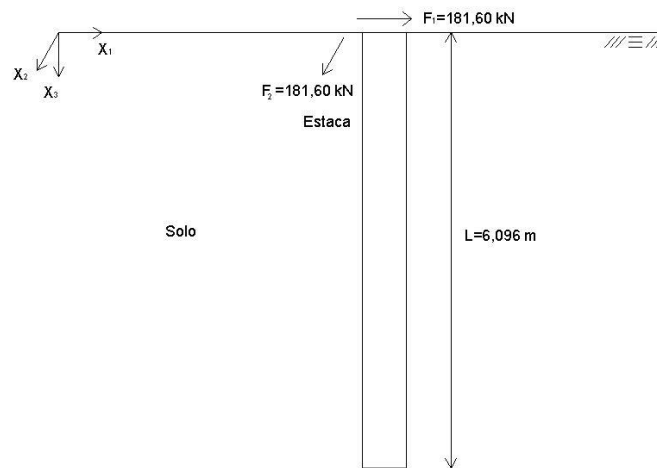


Figura A.1 – Configuração exemplo 1.

Os resultados, como esperado, foram iguais aos do exemplo 1, do item 7.2.1, para cada uma das direções.

A.2) Exemplo 2

Foi elaborado um exemplo semelhante ao anterior, porém alterando os valores das forças aplicadas. A estaca é isolada, com comprimento igual a 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m. O módulo de elasticidade da estaca é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

A estaca foi testada com o carregamento de 128,4106 kN aplicados nas direções X_1 e X_2 , como ilustra a figura:

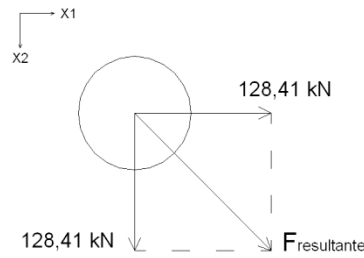


Figura A.2 – Configuração exemplo 2.

O resultado foi como esperado: os deslocamentos para as duas direções tem o mesmo valor, e a somatória vetorial dos dois resulta no deslocamento de uma força única de 181,6 kN aplicada na direção do deslocamento, ou seja, os resultados são coerentes com os obtidos no item 7.2.1. O resultado é esperado, pois a soma vetorial das forças aplicadas resulta neste valor.

A.3) Exemplo 3

Como não se tem muitos parâmetros de comparação devido aos diferentes métodos utilizados por outros pesquisadores, foi proposto este exemplo. Seu objetivo é verificar se, mesmo com a interferência dos componentes u_{12} e u_{21} , os resultados seriam coerentes com os obtidos no exemplo do item 7.3.1, onde a contribuição de um dos componentes é nula (devido às duas estacas se encontrarem sobre um dos eixos). Para isso, as forças foram decompostas como ilustra a figura a seguir.

Os dados da estaca e do solo foram mantidos iguais aos do item 7.3.1: estacas com comprimento igual a 6,096 m e diâmetro de 0,6096 m. O módulo de elasticidade das estacas é admitido como sendo 21.111.000 kN/m² e a relação k igual a 100. O coeficiente de Poisson do solo é igual a 0,2.

$$F_1 = 181,6 \cdot \cos 30^\circ - 181,60 \cdot \cos 60^\circ = 66,470kN$$

$$F_2 = 181,6 \cdot \sin 30^\circ + 181,60 \cdot \sin 60^\circ = 248,07kN$$

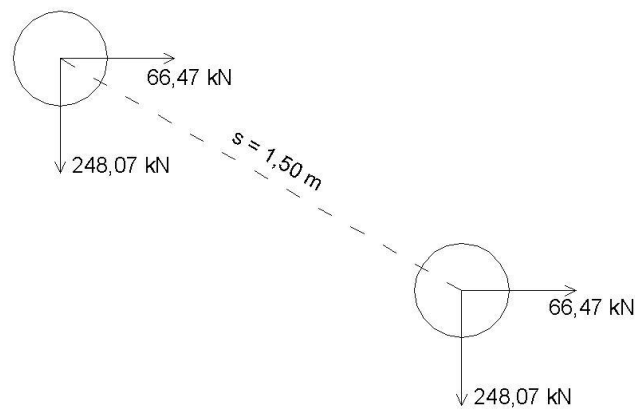


Figura A.3 – Configuração do exemplo 3.

Os resultados foram exatamente como esperado: os deslocamentos para as duas direções tem o mesmo valor, e a somatória vetorial dos dois resulta no deslocamento de uma força única de $181,6 \text{ kN}$ aplicada na direção do deslocamento, ou seja, os resultados coincidem com os obtidos no item 7.3.1, o que é coerente pois a soma vetorial das forças aplicadas resulta neste valor.