

Wellison José de Santana Gomes

**OTIMIZAÇÃO DE RISCOS
SOB PROCESSOS ALEATÓRIOS
DE CORROSÃO E FADIGA**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. André Teófilo Beck

Versão corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

G633o Gomes, Wellison José de Santana
Otimização de riscos sob processos aleatórios de
corrosão e fadiga / Wellison José de Santana Gomes;
orientador André Teófilo Beck. São Carlos, 2013.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São
Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Confiabilidade estrutural. 2. Otimização
estrutural. 3. Otimização de risco. 4. Polinômios de
Caos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **WELLISON JOSÉ DE SANTANA GOMES**.

Título da tese: "Otimização de riscos sob processos aleatórios de corrosão e fadiga".

Data da defesa: 07/03/2013

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. **André Teófilo Beck (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Associado **Marcelo Areias Trindade**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Luis Volnei Sudati Sagrilo**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Prof. Dr. **Fernando Alves Rochinha**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Resultado:

APROVADO

APROVADO

APROVADO

Aprovado

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

Dedico este trabalho a Deus e à minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas oportunidades que a vida me trouxe.

Ao professor André Beck, orientador do presente trabalho, por tudo que me ensinou, por tudo que tentou me ensinar, pela paciência e disponibilidade. Pelas reuniões semanais que muitas vezes se tornaram diárias.

Aos professores da Universidade Federal de Alagoas, onde cursei minha graduação, e em especial ao professor Roberaldo Carvalho de Souza, pela oportunidade de participar do grupo PET de Engenharia Civil.

À Kamila, por ter escutado as minhas divagações a respeito do desenvolvimento desta Tese, por ter me ajudado e por ter estado o tempo todo ao meu lado, mesmo quando distantes fisicamente.

À minha família e a todos os meus amigos, em especial aos amigos da banda TIB.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos – USP, que muito contribuíram para a minha formação, e aos funcionários por estarem sempre disponíveis e dispostos a ajudar.

À FAPESP, por acreditar e investir na minha formação.

RESUMO

GOMES, W. J. S. **Otimização de riscos sob processos aleatórios de corrosão e fadiga.** 2013. 188 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Processos aleatórios de corrosão e fadiga reduzem lentamente a resistência de estruturas e componentes estruturais, provocando um aumento gradual nas probabilidades de falha. A gestão do risco de falha de componentes sujeitos a corrosão e/ou fadiga é feita através de políticas de inspeção, manutenção e substituição, atividades que implicam em custos, mas visam manter a confiabilidade em níveis aceitáveis, enquanto o componente permanecer em operação. Aparentemente, os objetivos economia e segurança competem entre si, no entanto, a redução de recursos para inspeção e manutenção pode levar a maiores e crescentes probabilidades de falha, implicando em maiores custos esperados de falha, ou seja, maior risco. A otimização de risco estrutural é uma formulação que permite equacionar este problema, através do chamado custo esperado total. Nesta Tese, a otimização de risco é utilizada no intuito de encontrar políticas ótimas de inspeção e manutenção, isto é, quantidades de recursos a serem alocadas nestas atividades que levem ao menor custo esperado total possível. Os processos de corrosão e fadiga são representados através de modelos em polinômios de caos, construídos de maneira inédita, com base em dados experimentais ou observados da literatura. Com base nestes modelos, os problemas de otimização de risco envolvendo processos de fadiga e corrosão são resolvidos para diferentes configurações de custos de falha e de inspeções. Verifica-se que as políticas ótimas de inspeção, manutenção e substituição podem ser bastante diferentes para configurações de custo distintas, e que a determinação destas políticas é bastante desafiadora, devido, dentre outros fatores, à grande quantidade de mínimos locais do problema de otimização em questão, causadas por descontinuidades e oscilações da função custo esperado total.

Palavras-chave: Confiabilidade Estrutural. Otimização Estrutural. Otimização de Risco. Polinômios de Caos.

ABSTRACT

GOMES, W. J. S. **Risk optimization under random corrosion and fatigue processes.** 2013. 188 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

Random corrosion and fatigue processes reduce slowly but gradually the resistance of structures and mechanical components, leading to gradual increase in failure probabilities. Risk management for mechanical components subject to corrosion and fatigue is made by means of policies of inspection, maintenance and substitution. These activities imply costs, but are made to maintain the reliability at acceptable levels, while the component remains in operation. Apparently, economy and safety are competing objectives; however, reduction in inspection and maintenance spending may lead to larger failure probabilities, increasing expected costs of failure (risk). Risk optimization allows one to solve this problem, by means of the so-called total expected cost. In this Thesis, risk optimization is used in order to find the best inspection and maintenance policy, *i.e.*, the proper amount of resources to allocate to such activities in order to obtain minimum total expected cost. Corrosion and fatigue are modeled by means of polynomial chaos expansions, using a novel approach developed herein and experimental or observed data obtained from the literature. These models are employed within two risk optimization problems, solved for different failure and inspection cost configurations. Results show that the optimal policies of inspection, maintenance and replacements can be very different, for different cost configurations, and that the solution of the associated risk optimization problems is a very challenging task, due to the large number of local minima, caused by discontinuities and fluctuations in the total expected costs.

Keywords: Structural Reliability. Structural Optimization. Risk Optimization. Polynomial Chaos.

Lista de Figuras

Figura 1 - Hipercubo latino para duas dimensões e amostra de tamanho 10.	47
Figura 2 - Escopo das formulações de otimização estrutural.	49
Figura 3 - Composição do custo esperado total de um sistema estrutural hipotético.....	51
Figura 4 - Curva POD do tipo exponencial.	53
Figura 5 - Curva POD do tipo <i>Log-Odds-Log</i>	54
Figura 6 - Árvore de eventos ao longo da vida útil para um defeito sujeito a uma inspeção...55	
Figura 7 - Efeito de inspeções periódicas não destrutivas na confiabilidade de um componente contendo defeitos.	60
Figura 8 - Possíveis pontos gerados pelo algoritmo Simplex.....	68
Figura 9 - Grade de pontos iniciais para um caso bidimensional.	69
Figura 10 - Simplex gerado para o ponto inicial z_0	70
Figura 11 - Visão geral do processo para representação de uma v.a. via PCE.	80
Figura 12 - Aproximação linear da FDA da representação em polinômios de caos.	81
Figura 13 - Erro calculado através da Equação (105).	82
Figura 14 - Resultado da primeira otimização (pontos u_i^j , gráfico da esquerda) e determinação dos coeficientes a_j^i , dados os parâmetros p_k^i , (gráfico da direita), para um exemplo fictício. .84	
Figura 15 - Visão geral do processo para representação de um p.e. via PCE.	85
Figura 16 - Dimensões do defeito de corrosão.	88
Figura 17 - Resultados discretos versus funções interpoladoras.	92
Figura 18 - Funções de distribuição acumulada empírica e via PCE, para quatro valores do contínuo t , processo estocástico de corrosão.	92
Figura 19 - Dados observados <i>versus</i> modelos PCE e de Caleyó <i>et al.</i> (2009).....	94
Figura 20 - Resultados de propagação de trincas em trilhos (Limberger, 2000).....	95
Figura 21 - Corpo de prova utilizado (dimensões em mm).	98
Figura 22 - Detalhe da trinca inicial (dimensões em mm).	98
Figura 23 - Tamanho da trinca versus número de ciclos para 60 corpos de prova (condições de teste I).	99
Figura 24 - Determinação da discretização para sincronização dos dados.....	100
Figura 25 - Taxa de crescimento da trinca versus variação do fator de intensidade de tensões (antes e depois da sincronização).	101

Figura 26 - Dados selecionados para aproximação via PCE.	101
Figura 27 - Raiz quadrada dos autovalores para cada autofunção.	103
Figura 28 - Resultados discretos <i>versus</i> funções interpoladoras, PCE1.	106
Figura 29 - Funções de distribuição acumulada empírica e via PCE, para quatro valores do contínuo $\ln(\Delta K)$, processo estocástico de fadiga.	107
Figura 30 - Dados experimentais, média e média mais ou menos dois desvios-padrão da PCE1 (esquerda), e realizações da PCE1 (direita).	108
Figura 31 - Capacidade de extrapolação da PCE para o caso de processo de propagação de trincas de fadiga.	109
Figura 32 - Simulação de crescimento de trinca utilizando a PCE1 (x-vermelho) e dados experimentais (o-preto).	110
Figura 33 - Probabilidades experimentais e via PCE para dois valores distintos do tamanho da trinca.	111
Figura 34 - Resultados discretos <i>versus</i> funções interpoladoras, PCE1 ¹	112
Figura 35 - Dados experimentais, média e média mais ou menos dois desvios-padrão da PCE1 ¹ (esquerda), e realizações da PCE1 ¹ (direita).	113
Figura 36 - Simulação de crescimento de trinca utilizando a PCE1 ¹ (x-vermelho) e dados experimentais (o-preto).	113
Figura 37 - Probabilidades experimentais e aproximadas, modelo PCE simplificado.	114
Figura 38 - Realizações dos processos de corrosão e fadiga via PCE.	115
Figura 39 - Esquema baseado em Au (2005) para obtenção de estimadores mais suaves de EnR e EnF com relação às variáveis de projeto.	120
Figura 40 - Quatro cenários possíveis envolvendo substituições e reparos, ou nenhum dos dois.	123
Figura 41 - Custo esperado total versus tamanho da amostra.	135
Figura 42 - Função objetivo para configuração de custos de referência, para diferentes valores da sobre-espessura de corrosão.	136
Figura 43 - Função objetivo para diferentes intervalos entre inspeções, configuração de custo de referência.	137
Figura 44 - Valores da função objetivo para diferentes configurações de custo de explosão e inspeção, computados por busca exaustiva.	138
Figura 45 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de explosão e inspeção, computados por busca exaustiva.	139

Figura 46 - Valores ótimos da função objetivo para diferentes configurações de custos de inspeção e explosão, computados através do método Simplex.	141
Figura 47 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de inspeção e explosão, computadas através do método Simplex.	142
Figura 48 - Custo esperado total versus tamanho da amostra.	151
Figura 49 - Função objetivo para configuração de custos de referência, para diferentes valores do tamanho de reparo da trinca.	152
Figura 50 - Função objetivo para diferentes intervalos entre inspeções, configuração de custo de referência.	153
Figura 51 - Valores da função objetivo para diferentes configurações de custo de falha e inspeção, computados por busca exaustiva.	154
Figura 52 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de falha e inspeção, computados por busca exaustiva.	155
Figura 53 - Valores ótimos da função objetivo para diferentes configurações de custos de inspeção e falha, computados através do método Simplex.	156
Figura 54 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de inspeção e falha, computadas através do método Simplex.	156
Figura 55 - Custo esperado total para a_{rep} ótimo e diferentes valores de ΔS , configuração de custo de referência.	159

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Algumas distribuições de probabilidade contínuas.	34
Tabela 2 - Distribuições de probabilidade comumente utilizadas na descrição de variáveis aleatórias da engenharia estrutural.	35
Tabela 3 - Polinômios de Caos bidimensionais.	77
Tabela 4 - Erro médio percentual em relação aos dados observados de corrosão.	94
Tabela 5 - Erro médio percentual em relação aos dados experimentais de fadiga.	105
Tabela 6 - Erro médio percentual em relação aos dados experimentais de fadiga considerando PCE com dimensão unitária e ordens 1 e 3.	111
Tabela 7 - Parâmetros para o modelo do comprimento do defeito.	127
Tabela 8 - Atributos básicos do duto e distribuição do erro de modelo.	130
Tabela 9 - Fatores multiplicativos para cálculo dos custos.	132
Tabela 10 – Tempos de processamento associados à busca exaustiva e ao método Simplex com múltiplas inicializações, para as 72 configurações de custo diferentes.	141
Tabela 11 – Variáveis aleatórias envolvidas no problema de fadiga.	147
Tabela 12 - Fatores multiplicativos para cálculo dos custos.	149
Tabela 13 – Tempos de processamento associados à busca exaustiva e ao método Simplex com múltiplas inicializações, para as 30 configurações de custo diferentes.	157

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	19
1.1. ESTADO DA ARTE.....	20
1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO	21
1.3. JUSTIFICATIVA	22
1.4. OBJETIVOS	24
1.5. METODOLOGIA.....	24
1.6. ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO	25
2. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	27
2.1. ESTADOS LIMITES E COEFICIENTES DE SEGURANÇA	27
2.2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS	28
2.2.1. <i>Propriedades de variáveis aleatórias</i>	30
2.2.2. <i>Propriedades de processos estocásticos</i>	31
2.3. DISTRIBUIÇÕES USUAIS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS.....	34
2.4. INCERTEZAS NA ENGENHARIA ESTRUTURAL	35
2.5. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS GAUSSIANOS	36
2.6. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL INDEPENDENTE DO TEMPO.....	37
2.7. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DEPENDENTE DO TEMPO.....	39
2.8. ANÁLISE PROBABILÍSTICA E MÉTODOS DE SIMULAÇÃO.....	43
2.8.1. <i>Método de simulação de Monte Carlo</i>	43
2.8.2. <i>Amostragem via hipercubo latino</i>	46
3. OTIMIZAÇÃO DE RISCOS SOBRE O CICLO DE VIDA.....	49
3.1. ATUALIZAÇÃO DE INCERTEZAS APÓS INSPEÇÕES E REPAROS	52
3.2. OUTROS ASPECTOS QUE AFETAM CUSTOS SOBRE O CICLO DE VIDA....	61
4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO	63
4.1. PROBLEMA GERAL DE OTIMIZAÇÃO	64
4.2. MÉTODO SIMPLEX	65
4.3. ESTRATÉGIA DE MÚLTIPLAS INICIALIZAÇÕES.....	69

5. REPRESENTAÇÃO DOS PROCESSOS DE CORROSÃO E FADIGA.....	73
5.1. REPRESENTAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UTILIZANDO POLINÔMIOS DE CAOS	74
5.1.1. Definição.....	74
5.1.2. Implementação computacional.....	76
5.2. REPRESENTAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS UTILIZANDO POLINÔMIOS DE CAOS	82
5.3. EXPANSÃO DE KARHUNEN-LOÈVE	86
5.4. REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE CORROSÃO VIA PCE.....	88
5.4.1. Modelo preditivo de crescimento do defeito.....	89
5.4.2. Modelo em polinômios de caos.....	90
5.5. REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE FADIGA VIA PCE	95
5.5.1. Propagação de trincas de fadiga.....	95
5.5.2. Dados experimentais de Ghonem & Dore	96
5.5.3. Aplicação da expansão de Karhunen-Loève.....	101
5.5.4. Modelo em polinômios de caos.....	104
5.5.5. Modelo em polinômios de caos simplificado	111
5.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS COMPORTAMENTOS DOS PROCESSOS DE CORROSÃO E FADIGA.....	114
6. ESTRATÉGIAS PARA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE RISCO	117
6.1. ESTRATÉGIAS DE SUAVIZAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO	117
6.1.1. Obtendo valores esperados suavizados através do problema de confiabilidade aumentado.....	118
6.2. ANÁLISE PROBABILÍSTICA VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	120
6.2.1. Atualização das incertezas através da simulação	123
7. OTIMIZAÇÃO DE UM DUTO ENTERRADO SUJEITO À CORROSÃO.....	125
7.1. MODELOS DE CRESCIMENTO DOS DEFEITOS DE CORROSÃO	127
7.2. EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE	128
7.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA O CASO DO DUTO ENTERRADO	130

7.4.	RESULTADOS NUMÉRICOS	134
7.4.1.	<i>Resultados para uma configuração de custos de referência.....</i>	<i>134</i>
7.4.2.	<i>Resultados obtidos via busca exaustiva.....</i>	<i>137</i>
7.4.3.	<i>Resultados obtidos via Simplex com múltiplas inicializações.....</i>	<i>139</i>
7.4.4.	<i>Conclusões a respeito do problema de otimização do duto sujeito à corrosão</i>	<i>142</i>
8.	OTIMIZAÇÃO DE UMA PLACA SUJEITA À FADIGA	145
8.1.	DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS MECÂNICO E PROBABILÍSTICO	146
8.2.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA O CASO DA PLACA SUJEITA À FADIGA.....	148
8.3.	RESULTADOS NUMÉRICOS	151
8.3.1.	<i>Resultados para uma configuração de custos de referência.....</i>	<i>151</i>
8.3.2.	<i>Busca exaustiva</i>	<i>154</i>
8.3.3.	<i>Otimização via Simplex com múltiplas inicializações.....</i>	<i>155</i>
8.3.4.	<i>Conclusões a respeito do problema de otimização da placa sujeita à fadiga.....</i>	<i>157</i>
8.3.5.	<i>Sensibilidade da função custo esperado total a diferentes variações de tensão</i>	<i>158</i>
9.	CONCLUSÕES	161
9.1.	DISCUSSÃO E CONCLUSÕES.....	161
9.2.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	164
	REFERÊNCIAS.....	167
	ANEXO A. – MÉTODO HÍBRIDO DE OTIMIZAÇÃO	179
	ANEXO B. – OTIMIZAÇÃO DE UMA TORRE SUJEITA A CARGAS DE VENTO ALEATÓRIAS	181
	ANEXO C. – REPRESENTAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS DE CORROSÃO MARINHA VIA POLINÔMIOS DE CAOS.....	183
	ANEXO D. – MECÂNICA DA FRATURA ESTOCÁSTICA UTILIZANDO POLINÔMIOS DE CAOS.....	185
	ANEXO E. – PLANEJAMENTO ÓTIMO DE INSPEÇÕES PARA DUTOS ENTERRADOS SUJEITOS À CORROSÃO EXTERNA.....	187

1. INTRODUÇÃO

Em um ambiente competitivo, sistemas estruturais devem ser projetados levando em conta não apenas a sua funcionalidade, mas também os custos esperados de construção, operação, manutenção e de substituição. Embora tenha sido comum em projetos de engenharia estrutural desprezar termos de custo tais como os custos esperados de falha e os custos esperados de manutenção e substituição, a não consideração de um ou mais termos de custo deve ser vista como uma simplificação do problema real, e pode levar a uma medida incompleta do custo do sistema estrutural. O impacto da não consideração de um ou mais termos depende da importância relativa destes custos em comparação com os demais custos envolvidos.

O custo esperado, ou risco, consiste no produto do custo de ocorrência de um evento pela probabilidade de ocorrência do mesmo, e origina o chamado custo esperado total. O custo esperado total de um sistema estrutural envolve tanto os custos usuais, como os custos de construção e operação, quanto os custos esperados de falha para os diversos modos de falha possíveis e os custos esperados de manutenção e substituição, e é diretamente afetado pelo risco que a estrutura oferece a usuários, empregados, ao público em geral e ao meio ambiente.

Fenômenos aleatórios como corrosão ou propagação de trincas de fadiga reduzem a resistência de componentes mecânicos, e, portanto, sua vida útil. Estes fenômenos levam frequentemente a falhas estruturais, aumentando gradualmente as probabilidades de falha e os custos esperados de falha associados. A análise da segurança ao longo do tempo de componentes sujeitos a tais fenômenos é, portanto, um problema de confiabilidade estrutural dependente do tempo.

A gestão do risco de falha de componentes sujeitos a corrosão e fadiga é feita através de políticas de inspeção, manutenção preventiva, manutenção corretiva e substituição, atividades que implicam em custos e buscam manter a confiabilidade dos componentes em níveis aceitáveis, durante toda a vida útil dos mesmos. A decisão sobre adoção de políticas de inspeção, manutenção e substituição, ou sobre a quantidade de recursos a alocar para estas atividades é um típico exemplo de tomada de decisões na presença de incertezas.

Os objetivos economia e segurança aparentemente competem entre si, pois a redução de recursos para construção, inspeção e manutenção pode diminuir a segurança. No entanto,

ao considerar os custos esperados de falha, manutenção e substituição, a chamada otimização de risco estrutural permite encontrar o ponto ótimo no compromisso entre economia e segurança. Este ponto ótimo, que corresponde à melhor estrutura do ponto de vista mecânico, à melhor política de inspeção e manutenção, e à quantidade ótima de recursos a serem utilizados nestas atividades, é procurado no presente trabalho.

1.1. ESTADO DA ARTE

Apesar de existirem na literatura vários artigos que abordam otimização envolvendo incertezas, por exemplo, Royset & Polak (2004) e Jensen *et.al.* (2009), a maior parte dos mesmos envolve a formulação denominada RBDO (*Reliability-Based Design Optimization*), na qual as incertezas são incorporadas ao problema de otimização através de restrições sobre as probabilidades de falha, isto é, considerando que as probabilidades de falha não podem ser maiores que determinados valores ditos aceitáveis. Limitando o espaço de busca, esta formulação leva a soluções seguras, mas ótimas apenas do ponto de vista mecânico, a não ser que, para cada modo de falha envolvido, as probabilidades de falha denominadas aceitáveis coincidam com as probabilidades de falha ótimas (Beck & Gomes, 2012a). Em contrapartida, a formulação de otimização de risco permite encontrar soluções ótimas do ponto de vista mecânico e as probabilidades de falha ótimas associadas, simultaneamente.

No contexto da otimização de risco considerando políticas de inspeção, manutenção e substituição, os dois trabalhos encontrados na literatura mais próximos ao que é desenvolvido nesta Tese são os artigos de Zhou & Nessim (2011), para o caso da corrosão, e de Valdebenito & Schuëller (2010), para o caso da fadiga. Porém, no primeiro artigo, apesar de dez projetos diferentes de dutos serem comparados entre si, não é efetuada uma otimização propriamente dita. No segundo caso, que envolve componentes metálicos sujeitos à fadiga, são consideradas várias simplificações e o problema de otimização é resolvido admitindo limites às variáveis de projeto de maneira a evitar descontinuidades da função custo esperado total. Como exemplo das simplificações adotadas em Valdebenito & Schuëller (2010) tem-se que: tanto a ocorrência de um reparo quanto a ocorrência de uma falha anulam a probabilidade de falhas futuras.

Nesta Tese de doutorado procura-se resolver o problema de otimização de risco, mas sem impor limites às variáveis de projeto que restrinjam a solução ótima, e evitando simplificações ao máximo.

1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO

No departamento de engenharia de estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, o primeiro trabalho desenvolvido na área de otimização de risco foi o de Verzenhassi (2008), no qual o custo esperado total ótimo foi encontrado considerando o coeficiente de segurança parcial de projeto como variável de projeto e resolvendo o problema de otimização por meio de dois algoritmos de programação não linear. Dentre os estudos de caso apresentados, otimizou-se o coeficiente de segurança de uma torre de telefonia sujeita a cargas de vento e de tornado. O trabalho apontou que a confiabilidade ótima é altamente dependente das consequências e custos de falha, e que, portanto, em situações de projeto diferentes é razoável trabalhar com níveis de confiabilidade distintos.

Dentre outros trabalhos desenvolvidos no SET, relacionados à confiabilidade, mas não diretamente à otimização de risco, pode-se citar Leonel (2009) e Nogueira (2010). No primeiro trabalho foram abordados modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e a aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga. Foi aplicada a formulação denominada otimização baseada em confiabilidade, na qual um determinado nível de segurança estrutural desejado é aplicado como restrição em uma otimização determinística, e diversos problemas de otimização foram resolvidos, utilizando o método de programação não linear denominado programação quadrática sequencial. Os casos estudados envolveram inclusive a determinação do tempo de inspeção e manutenção, entretanto, sem considerar o custo esperado total e as incertezas envolvidas nos processos de inspeção e manutenção. Em Nogueira (2010), foram desenvolvidos modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado. Foram utilizados, tal qual em Leonel (2009), a formulação de otimização baseada em confiabilidade e o método de programação quadrática sequencial, entretanto, o foco foi a otimização de vigas e pórticos de concreto armado.

Recentemente, algumas pesquisas têm sido desenvolvidas na área de otimização de risco. Dentre estas, pode-se citar Beck *et al.* (2012), na qual se investigou como a otimização de risco poderia se tornar robusta frente a incertezas do tipo fenomenológico, bem como frente a arbitrariedades na escolha, por exemplo, dos modelos de distribuição de probabilidades assumidos para as diferentes variáveis aleatórias do problema. Nesse estudo, foram utilizadas variáveis *fuzzy* para descrever as incertezas fenomenológicas e outras

arbitrariedades dos modelos, e foi obtida uma descrição *fuzzy* da função objetivo. A formulação robusta foi obtida minimizando-se uma função difusa dos custos esperados totais.

Na dissertação de mestrado do autor do presente trabalho, Gomes (2010), quatro problemas de otimização de risco estrutural envolvendo confiabilidade independente do tempo foram resolvidos por meio de algoritmos de otimização com fundamentação matemática, algoritmos heurísticos e híbridos. Três formulações de otimização estrutural foram utilizadas e comparadas: otimização determinística, otimização baseada em confiabilidade e otimização de risco. Naquela ocasião mostrou-se que um projeto de custo mínimo só pode ser obtido quando os custos esperados de falha são considerados. Em contrapartida, com a otimização determinística ou com a otimização baseada em confiabilidade pode-se obter estruturas esbeltas e econômicas em termos de material, mas neste caso a otimalidade é obtida em termos de custo de manufatura apenas. Os resultados e conclusões, bem como um quinto problema envolvendo uma torre estaiada, foram publicados na revista *Probabilistic Engineering Mechanics* (Beck & Gomes, 2012a).

A presente Tese de doutorado é, de certo modo, uma extensão do trabalho desenvolvido durante o mestrado, uma vez que passa a envolver otimização de risco e problemas de confiabilidade não mais independentes do tempo. Entretanto, a construção de modelos em polinômios de caos para representação de processos estocásticos de fadiga e corrosão, contribuição inédita deste trabalho, e a aplicação destes modelos para solução de problemas de otimização de risco envolvendo custos sobre o ciclo de vida a direcionam a tópicos significativamente diferentes dos abordados na dissertação de mestrado.

Ressalta-se que, apesar de existirem outros métodos para obtenção de modelos para representar tanto variáveis aleatórias quanto processos estocásticos, inclusive técnicas testadas e consolidadas na literatura tais como a inferência bayesiana (Box & Tiao, 1973; Gelman *et al.*, 2003), optou-se neste trabalho por efetuar aproximações usando os polinômios de caos, uma vez que na literatura não foram encontradas aplicações dos mesmos para representação de dados experimentais ou observados.

1.3. JUSTIFICATIVA

A prática de engenharia no Brasil mostra que, mesmo em grandes empresas com forte atuação tecnológica como PETROBRAS e VALE, a gestão dos riscos de origem estrutural ainda é feita de maneira subjetiva, sem endereçar explicitamente as incertezas

envolvidas. Este trabalho é uma iniciativa no sentido de desenvolver conhecimento e ferramentas necessários para a gestão destes riscos. Como exemplos de aplicação, tem-se:

- a) falhas por fadiga em trilhos, que tem levado a um grande número de descarrilamentos e tombamento de trens na estrada de ferro de Carajás;
- b) problemas de fadiga, corrosão, corrosão sob tensão e fadiga sob corrosão, que afetam a vida de dutos de petróleo, de *risers* e de estruturas de plataformas *off-shore*;
- c) problemas de fadiga em estruturas aeronáuticas.

Problemas de otimização de risco têm sido bastante abordados em publicações internacionais recentes, em particular devido a avanços na área de confiabilidade estrutural. No entanto, há vários aspectos relativos à solução de problemas de confiabilidade estrutural dependente do tempo que necessitam de desenvolvimento. Um destes é o elevado custo computacional associado à solução de problemas envolvendo mais de um processo estocástico de carregamento ou envolvendo degradação da resistência.

Por outro lado, há importantes e recentes avanços sendo realizados na representação de processos estocásticos utilizando expansão em séries polinomiais (os chamados polinômios de caos). O ineditismo desta Tese consiste em utilizar os polinômios de caos para obtenção de representações completas da evolução temporal dos processos não estacionários de corrosão e fadiga. Esta representação tem o potencial de permitir uma solução mais precisa e mais eficiente do problema de confiabilidade dependente do tempo, em consideração ao efeito de inspeções e manutenção, uma vez que:

- a) evita a representação determinística da propagação de defeitos (de fadiga ou corrosão), frequentemente utilizada na literatura;
- b) para cada “realização” do vetor de variáveis aleatórias (ou de processos estocásticos gaussianos) que forma a base polinomial, é obtido um histórico determinístico de crescimento do defeito de corrosão ou de fadiga; estas realizações são utilizadas para avaliar as probabilidades ou números esperados de falha, manutenção e substituição;
- c) para um tempo de inspeção t_{insp} , a representação polinomial fornece uma expressão analítica para a variável aleatória tamanho do defeito. Nos casos mais simples, esta expressão pode ser utilizada junto com o Teorema de Bayes para quantificar analiticamente os possíveis resultados de uma inspeção imperfeita (defeito encontrado ou não encontrado, com falsos positivos e falsos negativos), e probabilidades ou números esperados de falha, manutenção e substituição.

Ressalta-se ainda que a otimização de risco requer centenas ou milhares de soluções do problema de confiabilidade dependente do tempo, podendo a função objetivo depender de muitas variáveis de projeto, apresentar vários mínimos locais e descontinuidades. Esses aspectos levam à necessidade do desenvolvimento de técnicas que resolvam este problema de forma eficiente, mas sem comprometer a precisão.

1.4. OBJETIVOS

O objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de conhecimento e ferramental necessários para a gestão de riscos com origem em falhas estruturais provocadas por processos aleatórios de corrosão e fadiga. Para atingir esta meta, os seguintes objetivos específicos são elencados:

- a) Desenvolvimento de modelos para representar a variação temporal de processos estocásticos não estacionários utilizando polinômios de caos;
- b) Adaptação destes modelos para a representação de processos de corrosão e fadiga;
- c) Desenvolvimento de algoritmos que permitam simulação rápida e eficaz utilizando a representação em polinômios de caos;
- d) Formulação e solução de problemas de otimização de políticas de inspeção, manutenção, reparo e substituição, aplicados à corrosão em dutos e fadiga de placas metálicas.

1.5. METODOLOGIA

Inicialmente é feita uma revisão abordando os seguintes tópicos: confiabilidade estrutural dependente do tempo, análise probabilística, otimização de riscos sobre o ciclo de vida e métodos de otimização, o que leva à formulação do problema de otimização e à implementação do método de simulação requerido pela análise probabilística.

Busca-se então um método de otimização global independente de números aleatórios, para garantir a utilização dos mesmos passos do algoritmo de otimização ao se testar diferentes configurações de custo, e passível de ser aplicado mesmo nos casos em que a função objetivo apresente descontinuidades e oscilações. Tais descontinuidades e oscilações são esperadas na otimização de risco estudada, uma vez que políticas de inspeção e

manutenção/substituição tendem a introduzir descontinuidades. Além disto, o fato de não se poder utilizar amostras de tamanho infinito na análise probabilística leva a oscilações, nos casos em que a solução analítica não é possível. Com base nas características requeridas, o método Simplex é escolhido e implementado juntamente com um esquema de inicializações múltiplas para aumentar a probabilidade de encontrar o mínimo global. Ao mesmo tempo, são implementadas duas diferentes estratégias de suavização da função objetivo, no intuito de facilitar o processo de otimização. Como contribuição desta Tese, uma terceira estratégia, que pode servir tanto para suavização quanto para cálculo da sensibilidade da função objetivo com relação às variáveis de projeto, é implementada.

É feita uma revisão a respeito dos processos estocásticos de fadiga e corrosão e dos polinômios de caos, o que leva à implementação de polinômios de caos generalizados para representação de variáveis aleatórias e, posteriormente, à extensão da mesma para representação de processos estocásticos. A expansão em polinômios de caos é aplicada a dados experimentais ou observados e comparada a esses dados e também, para o caso da corrosão, a um modelo da literatura.

O código computacional necessário para a solução do problema de otimização de risco é finalizado ao se acoplar a expansão em polinômios de caos ao algoritmo de simulação.

Por último, todo o ferramental desenvolvido é aplicado a dois problemas de otimização de políticas de inspeção. O primeiro consiste em um duto sujeito à corrosão no qual são otimizados: o tempo até a primeira inspeção, o intervalo entre as inspeções subsequentes e a espessura da parede do duto. No segundo caso, que consiste em uma placa metálica sujeita à fadiga, além do tempo até a primeira inspeção e do intervalo entre as inspeções subsequentes, é otimizado o tamanho da trinca de fadiga a partir do qual um defeito detectado é reparado.

1.6. ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO

No Capítulo 2 são apresentados, de maneira bastante concisa, os conceitos de confiabilidade estrutural e da análise probabilística utilizados neste trabalho, abordando parte da teoria relacionada e apontando referências que podem ser consultadas para maiores detalhes.

No Capítulo 3 define-se o problema de otimização de riscos sobre o ciclo de vida, comparando esta formulação com duas outras formulações de otimização estrutural: a baseada

em confiabilidade e a determinística. O capítulo aborda também a atualização de incertezas após inspeções e reparos, e outros aspectos que afetam os custos do ciclo de vida.

A seguir, o Capítulo 4 mostra de modo geral o problema de otimização e o método de otimização adotado. Alguns detalhes a respeito da implementação do mesmo são apresentados.

O Capítulo 5 traz de forma sucinta a base teórica da expansão em polinômios de caos, detalhes a respeito da utilização deste tipo de expansão para representação de variáveis aleatórias e a respeito das alterações necessárias para representação de processos estocásticos. Os polinômios de caos são aplicados a dados observados de corrosão e dados experimentais de fadiga e são analisados os erros de aproximação.

No Capítulo 6 algumas estratégias aplicadas para a solução dos problemas de otimização de risco são elencadas e discutidas. Basicamente, o capítulo engloba as estratégias de suavização da função objetivo e detalhes gerais a respeito da solução do problema de otimização.

Nos Capítulos 7 e 8, dois problemas de otimização de políticas de inspeção, manutenção e substituição são resolvidos, considerando várias configurações de custo diferentes, no intuito de estudar o efeito das suposições sobre as soluções ótimas obtidas. O primeiro problema, abordado no Capítulo 7, trata de um duto sujeito à corrosão, enquanto o segundo problema, abordado no Capítulo 8, envolve uma placa sujeita à fadiga.

O Capítulo 9 encerra a presente Tese, com um breve resumo do que foi desenvolvido na mesma, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL



Sistemas estruturais e os elementos que os compõem devem ser economicamente viáveis, cumprir de maneira satisfatória determinada função e manter um nível adequado de segurança durante o período denominado vida útil. Na tentativa de atingir esses objetivos, projetos estruturais devem atender a alguns requisitos básicos, equacionados na forma de estados limites.

A próxima seção aborda a definição das equações de estado limite e dos coeficientes de segurança, considerando as variáveis de projeto na formulação. Nas seções seguintes, que tratam de variáveis aleatórias, processos estocásticos, confiabilidade dependente e independente do tempo e análise probabilística, as variáveis de projeto são consideradas constantes, e, portanto, suprimidas da formulação, por questão de simplificação.

2.1. ESTADOS LIMITES E COEFICIENTES DE SEGURANÇA

Os estados limites podem ser divididos em duas categorias principais: os estados limites de serviço, que correspondem aos requisitos funcionais e condições normais de uso, e os estados limites últimos, que correspondem aos requisitos de segurança e que estão relacionados ao esgotamento da capacidade portante ou de deformação da estrutura. Este esgotamento implica colapso ou dano grave e permanente para a mesma.

Cada modo de falha pode ser formulado através de uma equação de estado limite $g(\mathbf{X}, \mathbf{z})$, Equação (1), onde o vetor \mathbf{z} contém as n_{opt} variáveis de projeto ou otimização, e o vetor \mathbf{X} contém n_{var} variáveis aleatórias.

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = g(X_1, X_2, \dots, X_{n_{var}}, z_1, z_2, \dots, z_{n_{opt}}) = 0 \quad (1)$$

A Equação (1) é definida de tal maneira que valores negativos da mesma implicam falha estrutural, enquanto valores positivos implicam não falha. Isso leva à definição dos chamados domínios de falha (D_f) e de sobrevivência (D_s), conforme as Equações (2) e (3).

$$D_f = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{X}, \mathbf{z}) \leq 0\} \quad (2)$$

$$D_s = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{X}, \mathbf{z}) > 0\} \quad (3)$$

Durante muitos anos, o projeto de sistemas estruturais foi realizado utilizando o chamado método das tensões admissíveis, onde um único coeficiente de segurança era aplicado para criar uma margem de segurança entre resistência e sollicitação. A razão entre a tensão resistente e a tensão sollicitante foi denominada fator de segurança (Sorensen, 2004), ou coeficiente de segurança. Nas modernas normas técnicas de projeto estrutural, coeficientes parciais de segurança passaram a ser adotados. Valores característicos de sollicitações e de resistência são especificados e coeficientes parciais de segurança são aplicados às sollicitações e às resistências, no intuito de garantir que a estrutura seja segura o suficiente (Sorensen, 2004).

Apesar da adoção de margens de segurança em projeto, ainda existe a possibilidade de que o sistema estrutural atinja um ou mais estados limites, isto é, existem probabilidades de falha da estrutura com relação aos diversos modos de falha. Essas probabilidades são ocasionadas pela existência de parâmetros que são variáveis aleatórias ou processos estocásticos por natureza e de outros que não podem ser definidos deterministicamente devido a fontes diversas de incerteza.

2.2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Uma variável aleatória real $X(\omega)$ é uma variável que pode assumir um valor real diferente, para cada evento ω de um espaço amostral Ω . Em outras palavras, trata-se de uma função real que atribui a cada ponto amostral ω_i pertencente a um espaço amostral Ω um valor real $x(\omega_i)$. Considerando esta definição, a notação $\{X \leq x\}$ equivale a dizer que a variável aleatória X assume qualquer valor menor ou igual a x . Portanto, $\{X \leq x\}$ representa um conjunto, ou evento, para qualquer número real x .

Um processo estocástico $X(\omega, t)$ pode ser visto como uma família de variáveis aleatórias ao longo do contínuo t , ou seja, para cada t fixo, o processo estocástico é uma variável aleatória. Por outro lado, como para cada ω_i pertencente ao espaço amostral Ω o processo estocástico é uma função do contínuo t , $x(\omega_i, t)$, o mesmo pode ser visto também como uma família de funções do contínuo. No caso dos processos estocásticos, a notação

$\{X(t) \leq x\}$ equivale a dizer que, para um valor específico t a variável aleatória $X(\omega, t)$ assume qualquer valor menor ou igual a x .

Variáveis aleatórias (v.a.s) e processos estocásticos (p.e.s) são utilizados para representar numericamente resultados de experimentos aleatórios. São representados geralmente por letras maiúsculas, enquanto uma realização dos mesmos, ou um resultado do experimento, é representada pela correspondente letra minúscula.

Apesar de as variáveis aleatórias poderem ser contínuas ou discretas, visto que o espaço amostral pode ser constituído por conjuntos discretos ou contínuos de pontos (Ang & Tang, 2007), o interesse do presente trabalho se restringe às variáveis aleatórias do tipo contínuo. Com relação aos processos estocásticos, o foco deste trabalho são os processos de corrosão e de fadiga, para os quais sempre serão obtidas representações contínuas através dos polinômios de caos. Quando necessário, são utilizados ainda processos estocásticos gaussianos, descritos na Seção 2.5.

A probabilidade de ocorrência do evento $\{X \leq x\}$ é uma função de x , denominada função de distribuição acumulada (ou cumulativa) de probabilidades (FDA) da variável aleatória X e representada por F_X . A FDA é definida para qualquer número x tal que $-\infty \leq x \leq +\infty$ e dada pela Equação (4).

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] \quad (4)$$

Quando se trata de um processo estocástico, a função de distribuição acumulada de probabilidades passa a depender do contínuo t , e é denominada distribuição cumulativa de primeira ordem do processo, $F_1(x, t)$:

$$F_1(x, t) = P[\{X(\omega, t) \leq x\}] \quad (5)$$

Derivando-se a função de distribuição acumulada de probabilidades em relação a x obtém-se a chamada função de densidade de probabilidades (FDP) de uma variável aleatória X , representada por f_X , dada pela Equação (6).

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (6)$$

Para processos estocásticos, a derivada é efetuada sobre $F_1(x,t)$, e a função de densidade de primeira ordem $f_1(x,t)$ é obtida como:

$$f_1(x,t) = \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x} \quad (7)$$

Adotando-se dois valores específicos t_1 e t_2 , $X(\omega, t_1)$ e $X(\omega, t_2)$ são duas variáveis aleatórias, dependentes de t_1 e t_2 . A função conjunta de distribuição acumulada de probabilidades, ou função de distribuição cumulativa de segunda ordem do processo, é dada por:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\left[\left\{X(\omega, t_1) \leq x_1, X(\omega, t_2) \leq x_2\right\}\right] \quad (8)$$

e a respectiva função de densidade é dada por:

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (9)$$

Funções de distribuição e de densidade de ordem superior são determinadas de forma análoga. Um processo estocástico é completamente descrito por suas (infinitas) funções de distribuição cumulativa ou de densidade.

As funções de distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias e de processos estocásticos são necessárias ao cálculo de diversas quantidades descritivas dos mesmos, conforme apresentado nas próximas subseções.

2.2.1. Propriedades de variáveis aleatórias

Dada uma variável aleatória X , define-se como seu valor esperado, ou média, a integral apresentada na Equação (10).

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (10)$$

A variância, $Var(X)$ ou $E[(X-\mu_X)^2]$, uma medida da dispersão da variável aleatória em torno da média, e o desvio-padrão (σ_X), raiz quadrada da variância, são duas medidas muito importantes na descrição das v.a.s, calculadas pela Equação (11) (Ang & Tang, 2007).

$$E[(X - \mu_X)^2] = Var(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (11)$$

Devido à dificuldade em comparar desvios-padrão de v.a.s diferentes, uma medida adimensional da dispersão é mais significativa. Dividindo-se o desvio-padrão pela média da variável aleatória tem-se o coeficiente de variação (c.v.):

$$c.v. = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (12)$$

O valor esperado de uma v.a. é, na verdade, um caso particular do chamado momento de ordem k da variável, definido pela Equação (13), enquanto a variância é um caso particular do momento central de ordem k , definido pela Equação (14).

$$E[X^k] = \mu_X^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx \quad (13)$$

$$E[(X - \mu_X)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^k f_X(x) dx \quad (14)$$

2.2.2. Propriedades de processos estocásticos

A média $\mu(t)$ de um processo estocástico é uma função do contínuo t , e, para t fixo, se iguala ao valor esperado da variável aleatória $X(\omega, t)$:

$$\mu(t) = E[X(\omega, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x, t) dx \quad (15)$$

Trata-se de um caso particular do momento de ordem k do processo estocástico:

$$\mu^k(t) = E\left[X(\omega, t)^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_1(x, t) dx \quad (16)$$

Ao momento conjunto das v.a.s $X(\omega, t_1)$ e $X(\omega, t_2)$ dá-se o nome de função de autocorrelação do processo, R_{XX} , dada pela Equação (17), enquanto a covariância dessas mesmas duas v.a.s é denominada função de autocovariância, e calculada pela Equação (18).

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\left[X(\omega, t_1)X(\omega, t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (17)$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E\left[\left(X(\omega, t_1) - \mu(t_1)\right)\left(X(\omega, t_2) - \mu(t_2)\right)\right] = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2) \quad (18)$$

Ao se dividir a função de autocovariância pelos desvios-padrão associados, $\sigma(t_1)$ e $\sigma(t_2)$, obtém-se a chamada função índice de autocorrelação:

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E\left[\left(X(\omega, t_1) - \mu(t_1)\right)\left(X(\omega, t_2) - \mu(t_2)\right)\right]}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} \quad (19)$$

Se todas as infinitas funções de distribuição de dimensão finita de um processo $X(\omega, t)$, $(F_1(x, t), F_2(x_1, x_2; t_1, t_2), \dots)$ são invariantes em relação a uma translação linear do tempo, o processo é dito estritamente estacionário. Nesse caso, $F_1(x, t)$ se torna independente do tempo e $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$, $R_{XX}(t_1, t_2)$ e $C_{XX}(t_1, t_2)$ passam a ser dependentes apenas da diferença $\tau = t_1 - t_2$ (Sorensen, 2004). Se a invariância com o tempo ocorre somente para $F_1(x, t)$ e $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$, o processo é dito fracamente estacionário.

Aplicando-se a transformada de Fourier à função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário $X(\omega, t)$, obtém-se a chamada função de densidade espectral de potência do processo, $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (20)$$

Os momentos da função de densidade espectral de potência são de grande utilidade no trabalho com processos estocásticos. Cada momento de ordem k é definido como sendo:

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^k S_X(\omega) d\omega \quad (21)$$

Utilizando propriedades da transformada de Fourier, obtêm-se as funções de densidade espectral de potência dos processos derivada, $\dot{X}(\omega, t)$, e segunda derivada, $\ddot{X}(\omega, t)$:

$$S_{\dot{X}}(\omega) = \omega^2 \cdot S_X(\omega) \quad (22)$$

$$S_{\ddot{X}}(\omega) = \omega^4 \cdot S_X(\omega) \quad (23)$$

Os momentos espectrais se relacionam com o processo $X(\omega, t)$ e suas derivadas de acordo com as seguintes Equações:

$$\lambda_0 = \sigma_X^2 \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \sigma_{\dot{X}}^2 \quad (25)$$

$$\lambda_4 = \sigma_{\ddot{X}}^2 \quad (26)$$

Finalmente, para o caso de processos estocásticos gaussianos, define-se a frequência angular média de passagens por zero do processo, ω_0 , em radianos por segundo, e os parâmetros espectrais adimensionais δ e ε :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} = \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \quad (27)$$

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}} \quad (28)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0 \lambda_4}} \quad (29)$$

O parâmetro adimensional ε pode ser utilizado ainda para calcular o chamado fator de regularidade do processo, denominado α :

$$\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon} \quad (30)$$

Este fator apresenta valores entre 0 e 1, e caracteriza a regularidade do processo. Para processos de banda estreita, que apresentam elevado nível de regularidade, α assume valores próximos de 1, para processos de banda larga, α se aproxima de 0.

2.3. DISTRIBUIÇÕES USUAIS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Apesar de existirem várias funções de distribuição de probabilidades teóricas, algumas delas são especialmente usuais por representarem de maneira aceitável processos físicos, características de materiais, dentre outros objetos de estudo, ou por serem funções resultantes de processos limite, como, por exemplo, o somatório de infinitas outras distribuições.

Algumas das FDPs usuais e de particular interesse desse trabalho são apresentadas na Tabela 1, baseada em Ang & Tang (2007).

Tabela 1 - Algumas distribuições de probabilidade contínuas.

Distribuição	$f_X(x)$	Média (μ)	Variância(σ^2)
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	μ	σ^2
Gamma	$\frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}$ (*)	$\frac{r}{\alpha}$	$\frac{r}{\alpha^2}$
Gumbel (Tipo I)	$\beta \cdot \exp\left[-\beta \cdot (x - u_n) - e^{-\beta(x-u_n)}\right]$	$u_n + \frac{\gamma}{\beta}$ (**)	$\frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\beta}$
Lognormal	$\frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$\exp(\lambda + 0,5\xi^2)$	$\mu^2[\exp(\xi^2) - 1]$
Exponencial deslocada	$\nu \exp(-\nu(x - \varepsilon))$	$\frac{1}{\nu} + \varepsilon$	$\frac{1}{\nu^2}$

* $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma.

** γ é a chamada constante de Euler, igual a aproximadamente 0.577216.

Alguns detalhes sobre a escolha das distribuições adequadas às diferentes variáveis aleatórias que se encontram usualmente em projetos de engenharia são apresentados na Seção 2.4.

2.4. INCERTEZAS NA ENGENHARIA ESTRUTURAL

Dentre as incertezas presentes na engenharia estrutural, as mais comuns são as denominadas incertezas intrínsecas e as incertezas epistêmicas. Intrínsecas são aquelas que não podem ser eliminadas, pois fazem parte da natureza dos processos envolvidos. Epistêmicas são aquelas que, em tese, podem ser reduzidas ou eliminadas, através da coleta de mais dados ou de melhor conhecimento do problema (Beck *et al.*, 2012).

Enquanto o efeito da incerteza intrínseca leva à probabilidade de falha calculada, o efeito do tipo epistêmico leva à incerteza da probabilidade ou risco estimado. A incerteza epistêmica pode ser reduzida através, por exemplo, da aplicação de melhores modelos estruturais (Ang & Tang, 2007), e, portanto, não será discutida neste trabalho.

Com relação às incertezas intrínsecas, para o caso das variáveis aleatórias, muitos estudos têm sido feitos no sentido de determinar quais funções de distribuição de probabilidade melhor as representam. A Tabela 2 apresenta algumas variáveis aleatórias de particular interesse para este trabalho e as distribuições usuais para representá-las, de acordo com Ellingwood & Galambos (1982). Os intervalos dados como valores possíveis do coeficiente de variação para as v.a.s de resistência decorrem do fato de que os autores abordam as propriedades de acordo com a função estrutural do elemento em estudo. Outras abordagens podem ser vistas em Melchers (1999) e no *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001).

Tabela 2 - Distribuições de probabilidade comumente utilizadas na descrição de variáveis aleatórias da engenharia estrutural.

Variável aleatória	Tipo	Distribuição	c.v.
de resistência	Propriedades do Aço estrutural	Lognormal	0,11 a 0,17
	Propriedades do Concreto	Lognormal	0,09 a 0,20
de solicitação	Peso próprio	Normal	0,10
	Carga acidental	Gamma	0,55
	Ambientais (Carga de vento)	Tipo I	0,37 e 0,60*

*Para máximo de 50 anos e extremo anual, respectivamente.

Em se tratando de processos estocásticos, conforme já citado, processos de fadiga e corrosão serão representados diretamente através de Polinômios de Caos. Com relação às solicitações estocásticas, elas podem ser representadas de uma forma geral por processos estocásticos que são não estacionários tanto na amplitude quanto no conteúdo de frequências. A modelagem de cada tipo de carregamento estocástico é um problema à parte (Yeh & Wen, 1990; Papadimitriou, 1990; Conte, 1992), mas, uma vez determinada uma forma de simulação do carregamento no contínuo, a mesma pode ser incorporada facilmente ao problema de otimização que é apresentado no presente trabalho.

No intuito de focar nos problemas de otimização e na representação via Polinômios de Caos dos processos de deterioração da resistência no tempo, os processos de carregamento são considerados sempre determinísticos ou variáveis aleatórias.

Entretanto, na seção seguinte, é abordada a definição de processo estocástico Gaussiano, por se tratar do tipo de processo mais utilizado e para os quais algumas soluções analíticas para o problema de confiabilidade dependente do tempo estão disponíveis. Além disso, os Polinômios de Caos podem ser indexados em processos estocásticos Gaussianos, caso seja possível determinar a função de autocorrelação do processo a ser representado, conforme apresentado nas seções 5.2, 5.3 e 5.5 do Capítulo 5.

2.5. PROCESSOS ESTOCÁSTICOS GAUSSIANOS

Um processo estocástico é considerado Gaussiano, ou Normal, quando as v.a.s $\{X(\omega, t_1), X(\omega, t_2), \dots, X(\omega, t_n)\}$ são conjuntamente normais para quaisquer $\{n, t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Um processo Gaussiano é completamente definido em termos de sua média $\mu(t)$ e de sua função de autocorrelação $R_{XX}(t_1, t_2)$. Sua função de densidade de probabilidades de primeira ordem é dada por:

$$f_1(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu(t)}{\sigma(t)} \right)^2 \right] \quad (31)$$

onde $\sigma(t)$ é o desvio-padrão do processo, função do contínuo t , tal qual sua média, $\mu(t)$.

Nota-se que, como um processo Gaussiano é completamente definido por suas funções de distribuição de primeira e segunda ordem, estacionariedade fraca para este tipo de processo corresponde à estacionariedade estrita.

A simulação de um processo estocástico Gaussiano estacionário pode ser feita através do método de representação espectral apresentado em Borgman (1969). Este método é baseado na superposição de ondas senoidais, onde cada onda possui fase aleatória e amplitude consistente com a energia para a correspondente frequência da densidade espectral a ser representada. Em outras palavras, cada realização do processo estocástico é obtida somando as contribuições das várias frequências que compõem o processo e, a princípio, um número infinito de termos deveria ser utilizado neste somatório. Entretanto, a quantidade de termos necessários para uma boa representação depende da função de autocorrelação do processo e do tempo total de simulação. Outros detalhes a respeito deste método de simulação podem ser encontrados em Borgman (1969) e Beck (2003).

Outra maneira de representar um processo estocástico Gaussiano é através da chamada expansão de Karhunen-Loève, apresentada na Seção 5.3 desta Tese, que permite representar o processo através da soma de autofunções e autovalores obtidos a partir da função de autocorrelação do mesmo.

Uma vez definidos os processos estocásticos e variáveis aleatórias utilizados neste trabalho, nas seções 2.6 e 2.7, apresenta-se a formulação do problema de confiabilidade estrutural, independente e dependente do tempo, respectivamente, e a definição do que é a probabilidade de falha dentro deste escopo.

2.6. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL INDEPENDENTE DO TEMPO

O problema fundamental de confiabilidade pode ser resolvido através da variável denominada margem de segurança, M . Para um problema envolvendo apenas duas variáveis aleatórias, resistência R e solicitação S , M é definida pela Equação (32), e corresponde também a uma variável aleatória.

$$M = R - S \quad (32)$$

A probabilidade de falha da estrutura passa a ser calculada a partir de M , e de sua função de densidade de probabilidades, f_M :

$$P_f = P[\{R - S \leq 0\}] = P[\{M \leq 0\}] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) \quad (33)$$

Caso R e S sejam variáveis aleatórias Normais independentes, M também apresenta distribuição Normal, com média e desvio-padrão calculados utilizando as Equações (34) e (35) (Sorensen, 2004).

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (34)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (35)$$

Transformando a variável M em uma variável aleatória Normal padrão Y , com média nula e desvio-padrão unitário, através da Equação (36), é possível avaliar probabilidades associadas a esta variável utilizando a função de distribuição acumulada Normal padrão, $\Phi(\cdot)$. Desse modo, a probabilidade de falha pode ser calculada pela Equação (37).

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (36)$$

$$P[\{M \leq 0\}] = P\left[\left\{Y \leq -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right\}\right] = \Phi\left[-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right] \quad (37)$$

Constata-se que μ_M/σ_M coincide com a distância entre o ponto correspondente a $m=0$ e a origem da distribuição de Y ; esta distância é chamada de índice de confiabilidade, representada por β e utilizada frequentemente como uma medida da confiabilidade.

Para um problema estrutural envolvendo apenas variáveis aleatórias, isto é, sem processos estocásticos, o vetor de variáveis aleatórias que caracteriza o problema é simplesmente chamado de \mathbf{X} . Trata-se de uma generalização de M para um número qualquer de variáveis aleatórias, sendo que estas v.a.s são ou de resistência ou de solicitação.

A probabilidade de falha é obtida integrando-se a função conjunta de densidade de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ sobre o domínio de falha, D_f , conforme a equação a seguir.

$$P_f = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx \quad (38)$$

A solução da integral apresentada acima pode ser efetuada através de vários métodos, tais como o método de simulação de Monte Carlo, o método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM – *First Order Reliability Method*), dentre outros (Melchers, 1999; Sorensen, 2004).

2.7. CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DEPENDENTE DO TEMPO

Em um problema de confiabilidade dependente do tempo a resposta fundamental procurada é a probabilidade de falha durante o chamado período de vida útil (T), ou seja, a probabilidade de que o vetor de respostas do processo ultrapasse uma superfície de estado limite durante um determinado tempo de exposição (Barbato & Conte, 2011). Considerando: variáveis aleatórias, processos estocásticos e parâmetros que descrevem a resistência da estrutura, incluídos no vetor $\mathbf{R}(t)$; processos estocásticos e variáveis aleatórias de carregamento (solicitação), $\mathbf{S}(t)$; e suprimindo as variáveis de projeto, isto é, considerando-as constantes, tal probabilidade de falha pode ser equacionada da seguinte forma:

$$P_f(T) = P\left[\min_{0 \leq t \leq T} g(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) \leq 0\right] \quad (39)$$

onde a equação:

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{S}, t) = 0 \quad (40)$$

é a equação de estado limite, que determina os domínios de falha e sobrevivência:

$$D_f(t) = \{\mathbf{r}, \mathbf{s} \mid g(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) \leq 0\} \quad (41)$$

$$D_s(t) = \{\mathbf{r}, \mathbf{s} \mid g(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t) > 0\} \quad (42)$$

A probabilidade de falha é sempre maior ou igual a zero, e é uma função monotonicamente crescente com o tempo. Entretanto, caso novas informações sejam adicionadas à análise ou caso sejam feitos reparos, substituições ou modificações na estrutura, a equação de estado limite pode mudar, fazendo com que a probabilidade de falha deixe de ser

monotonicamente crescente. Novas informações podem ser adicionadas, por exemplo, através de uma inspeção com resultado conhecido.

O cálculo da probabilidade de falha variante com o tempo é também conhecido como problema de falha à primeira sobrecarga (*first-passage problem*) ou problema de passagem pela barreira.

Dada uma barreira r e uma taxa de chegadas de sobrecargas $\eta(r,t)$, a ser determinada posteriormente. Caso a ocorrência de sobrecargas seja aproximada como um processo de Poisson (Cramer & Leadbetter, 1967), assume-se a independência entre eventos sobrecarga, e o tempo entre sobrecargas se torna exponencialmente distribuído (Beck, 2003).

A probabilidade de falha para um tempo de vida T da estrutura é então calculada como sendo a probabilidade de falha no tempo inicial, $P_{f_0}(r)$, somada à probabilidade de não ocorrência de falha no tempo inicial multiplicada pela probabilidade de ocorrência de sobrecarga no tempo T , ou seja:

$$P_f(r,T) = P_{f_0}(r) + (1 - P_{f_0}(r)) \left(1 - \exp \left[- \int_0^T \eta(r,u) du \right] \right) \quad (43)$$

O cálculo de $P_{f_0}(r)$ envolve apenas variáveis aleatórias, se tratando, portanto, de um problema de confiabilidade independente do tempo, passível de ser resolvido pelos métodos citados na seção anterior.

A solução da Equação (43) requer a definição da taxa de chegadas de sobrecargas, $\eta(r,t)$, taxa esta que dificilmente pode ser calculada analiticamente. Isso justifica a utilização de aproximações, dentre as quais as de Poisson e Vanmarcke, que oferecem um bom compromisso entre precisão e esforço computacional (Rice, 1944; Rice, 1945; Corotis *et al.*, 1972; Vanmarcke, 1975).

Assumindo que os eventos de ultrapassagem de baixo para cima são estatisticamente independentes com sua ocorrência no tempo seguindo um processo de Poisson, obtém-se a aproximação de Poisson, na qual a taxa de chegada de sobrecargas é aproximada pela taxa de passagens pela barreira de baixo para cima, $v^+(r,t)$:

$$\eta(r,t) \approx v^+(r,t) \quad (44)$$

Entretanto, a taxa $v^+(r,t)$ não incorpora a condição de que a sobrecarga não tenha ocorrido antes de t , de maneira que tal aproximação é adequada para estruturas com baixa probabilidade de falha, mas já não é apropriada para processos de banda estreita (Beck, 2003).

Uma melhoria na aproximação de Poisson foi desenvolvida por Vanmarcke (1975), levando em conta a fração do tempo que o processo envelope passa acima do nível da barreira r , e o fato que passagens de baixo para cima do processo envelope nem sempre estão associados com uma ou mais passagens de baixo para cima do próprio processo (Barbato & Conte, 2011). A denominada aproximação clássica de Vanmarcke (1975) é dada por:

$$\eta(r,t) \approx v^+(r,t) \cdot \frac{1 - \exp\left[-\delta \cdot \frac{r - \mu_X}{\sigma_X} \cdot \sqrt{2\pi}\right]}{1 - \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]} \quad (45)$$

Em ambas aproximações, $v^+(r,t)$ pode ser obtida através da fórmula de Rice (Rice, 1944; Rice, 1945), que parte da condição que, para que ocorra uma ultrapassagem de barreira num intervalo dt é necessário que o processo esteja abaixo do nível r no instante t e que tenha derivada suficiente para ultrapassar a barreira no intervalo. Considerando $\dot{X}(\omega,t)$, o processo derivada de $X(\omega,t)$, e a distribuição conjunta de probabilidades $f_{X\dot{X}}(x,\dot{x})$, a fórmula de Rice é dada por:

$$v^+(r,t) = \int_0^\infty \dot{x} \cdot f_{X\dot{X}}(r,\dot{x}) d\dot{x} \quad (46)$$

Para o caso de processos Gaussianos estacionários e barreira constante no tempo, uma solução analítica para a fórmula de Rice é dada por (Beck, 2003):

$$v^+(r) = v_0^+ \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad (47)$$

onde v_0^+ é taxa de passagens pela média, calculada através da Equação (48):

$$\nu_0^+ = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (48)$$

e ω_0 é dado pela Equação (27).

Para uma barreira que varia linearmente com o tempo, $r(t)=a_r+b_r \cdot t$, a taxa $\nu^+(r,t)$ é calculada através da seguinte Equação (Cramer & Leadbetter, 1967):

$$\nu^+(t) = \omega_0 \cdot \phi \left[\frac{a_r - b_r t - \mu_X}{\sigma_X} \right] \cdot \Psi \left[\frac{b_r}{\omega_0 \sigma_X} \right] \quad (49)$$

onde $\Psi[x]=\phi[x]-x \cdot \Phi[-x]$, $\phi[.]$ é a função de densidade de probabilidades normal padrão e $\Phi[.]$ é a respectiva função de distribuição acumulada.

Nota-se ainda que toda a formulação apresentada foi desenvolvida para uma barreira escalar r . Em se tratando de resistência estrutural função de um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{R} , para cada realização \mathbf{r} uma probabilidade de falha condicional é determinada:

$$P_f(T|\mathbf{r}) = P_{f_0}(\mathbf{r}) + (1 - P_{f_0}(\mathbf{r})) \left(1 - \exp \left[- \int_0^T \eta(\mathbf{r}, u) du \right] \right) \quad (50)$$

A probabilidade de falha (incondicional) é obtida utilizando-se o teorema da probabilidade total:

$$P_f(T) = \int_{\mathbf{R}} P_f(T|\mathbf{r}) \cdot f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (51)$$

A solução do problema de confiabilidade dependente do tempo permite quantificar a probabilidade de falha ao longo do tempo, entretanto, o problema de otimização de risco considerando inspeções, reparos e manutenções, requer números esperados de falha. Portanto, a análise de confiabilidade é substituída por uma análise probabilística, apresentada na Seção 2.8, na qual são calculados números esperados de falha, de reparos e de substituições, ao invés de probabilidades. A Seção 2.8 aborda também os métodos de simulação utilizados na análise probabilística.

2.8. ANÁLISE PROBABILÍSTICA E MÉTODOS DE SIMULAÇÃO

Em problemas de confiabilidade estrutural dependente do tempo o principal resultado de interesse é a probabilidade de falha ao longo do tempo, para os diversos modos de falha considerados. Em geral, no cálculo destas probabilidades ao longo do tempo utilizando simulação considera-se que um determinado cenário representa falha para todos os instantes de tempo após a ocorrência da primeira falha. Como no presente trabalho o sistema estrutural precisa ser mantido em serviço até o fim de sua vida útil, T , quando há uma ocorrência de falha a estrutura ou uma parte da mesma é substituída ou reparada e a simulação continua, podendo ocorrer falha ou reparo mais de uma vez para um mesmo cenário ao longo de T . Dessa maneira, torna-se necessário trabalhar com probabilidades de falha condicionais caso se deseje continuar utilizando a análise de confiabilidade, ou, alternativamente, computar números esperados de falha, através da chamada análise probabilística. No presente trabalho, a segunda alternativa é adotada.

Na análise probabilística, se durante a simulação de um cenário uma falha vem a ocorrer, basta que se acrescente um ao número esperado de falhas para aquele cenário. No caso da análise de confiabilidade, uma probabilidade por definição não pode ser maior que 1, de maneira que a ocorrência de uma falha deve ser condicional à ocorrência de falhas anteriores, tornando mais complicada a simulação de cada cenário. Entretanto, apesar desta diferença, os mesmos métodos de simulação utilizados em análises de confiabilidade podem ser utilizados em análises probabilísticas.

No presente trabalho o método LHS (Amostragem por Hipercubo Latino ou *Latin Hypercube Sampling*) é utilizado. A escolha deste método se justifica pela relativa facilidade de implementação, generalidade de aplicação e à obtenção de estimativas em geral melhores ou iguais às obtidas através do método de Monte Carlo simples.

Nas subseções seguintes, apresenta-se inicialmente o método de Monte Carlo simples. Com base nesse método define-se o método LHS.

2.8.1. Método de simulação de Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo simples, MCS, é o método mais direto e fácil de implementar para calcular probabilidades de falha. Trata-se, na verdade, de um método numérico para cálculo de integrais semelhantes às apresentadas nas Equações (38) e

(51), que consiste em gerar uma amostra aleatória de tamanho n_{samp} , conforme a função conjunta de densidade conjunta de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, e analisar a equação de estado limite para cada realização \mathbf{x}_i , com $i=1,2,\dots,n_{samp}$, onde cada \mathbf{x}_i é um vetor com uma realização de cada variável aleatória envolvida.

Para calcular o número esperado de falhas, ou um número esperado qualquer, uma função indicadora de falha, $I(\cdot)$, é aplicada sobre cada realização conjunta \mathbf{x}_i . Essa função geralmente assume valor 1 para falha ou 0 para sobrevivência, dependendo do valor da equação de estado limite para a realização sendo analisada. Tal função pode depender não apenas de \mathbf{x}_i , mas também de algum outro parâmetro, como, por exemplo, o tempo ou uma variável de projeto. A Equação (52) apresenta a função indicadora como função apenas de \mathbf{x}_i e do tempo, considerando um dado instante t_p :

$$I(\mathbf{x}_i, t_p) = \begin{cases} 1, & \text{se } g(\mathbf{x}_i, t_p) < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (52)$$

Se durante uma análise de confiabilidade dependente do tempo uma falha ocorre num determinado instante, a função indicadora assume valor unitário para todo o tempo restante, até o tempo final de simulação, o que corresponde ao problema de primeira passagem pela barreira.

O valor médio estimado da probabilidade de falha para o instante t_p é calculado considerando os valores assumidos pela função indicadora para cada \mathbf{x}_i :

$$\bar{P}_f(t_p) = \frac{1}{n_{samp}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{samp}} I(\mathbf{x}_i, t_p) \quad (53)$$

A probabilidade de falha estimada pela Equação (53) está sujeita a um erro estatístico, que corresponde à variância da função indicadora, e é dado por:

$$Var(\bar{P}_f(t_p)) = \frac{1}{(n_{samp} - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{n_{samp}} (I(\mathbf{x}_i, t_p) - \bar{P}_f(t_p))^2 \quad (54)$$

Na análise probabilística, a mesma função indicadora é utilizada; entretanto, a ocorrência de uma falha num determinado instante implica que a função indicadora assumirá

o valor unitário apenas para aquele instante. Dessa maneira, a falha pode vir a ocorrer novamente para a mesma realização \mathbf{x}_i , o que leva à utilização de números esperados de falha. O número esperado de falhas, EnF , é calculado somando, do tempo inicial de simulação, t_{ini} , ao tempo de vida útil da estrutura, T , os valores que a função indicadora assume para cada realização, isto é:

$$EnF(\mathbf{X}, T) = \frac{1}{n_{samp}} \cdot \sum_p \sum_{i=1}^{n_{samp}} I(\mathbf{x}_i, t_p) \quad (55)$$

Portanto, apesar de ser possível calcular o número esperado de falhas para cada instante de tempo, no presente trabalho o mesmo é sempre calculado para toda a vida útil da estrutura.

O sentido físico de ter uma função indicadora assumindo um valor unitário em um ou mais pontos no tempo é que isso representa substituição ou reparo do sistema estrutural ou de uma parte do mesmo imediatamente após a ocorrência da falha. A palavra “imediatamente” pode ser interpretada como um intervalo desprezível de tempo.

Na prática da engenharia estrutural, em que as probabilidades de falha são muito pequenas, é muito pouco provável a ocorrência de falha duas ou mais vezes para uma mesma realização do vetor \mathbf{X} . Para um tempo de vida da estrutura de, por exemplo, 50 anos, até mesmo um intervalo de 1 semana para operações de reparo ou substituição pode ser considerado desprezível, pois não afetará significativamente o desenvolvimento da degradação estrutural. Nos casos em que a interdição da estrutura leva a perdas monetárias, por exemplo, devido a indenizações e multas, tais perdas levam a um aumento do custo de falha, de modo que a estrutura ótima passa a apresentar números esperados de falha ainda menores e a ocorrência de mais de uma falha se torna ainda menos provável.

Em outras palavras, o tempo para reparo ou substituição pode ser desprezado desde que os custos referentes ao tempo de inatividade tenham sido devidamente incorporados aos custos de reparo e substituição.

A mesma equação usada para calcular o número esperado de falhas, Equação (55), pode ser utilizada para calcular o número esperado de ocorrências de um evento qualquer, por exemplo, o número esperado de reparos, bastando substituir a função indicadora de falha pela função indicadora correspondente, por exemplo, pela função indicadora de reparos. Esse é o procedimento utilizado para calcular o número esperado de reparos requerido pela otimização de risco, conforme apresentado no Capítulo 3.

2.8.2. Amostragem via hipercubo latino

A amostragem via hipercubo latino, ou LHS, é uma alternativa ao método de Monte Carlo Simples que vem sendo bastante utilizada, seja por manter a generalidade de aplicação do MCS, que pode ser usado em diversos tipos de problemas sem que sejam necessárias grandes modificações, seja por permitir obter amostras que refletem de maneira mais precisa a forma da função de distribuição da qual a amostra é gerada.

O método LHS foi proposto por McKay *et al.* (1979), como uma extensão da chamada “*quota sampling*” (Steinberg, 1963) ou uma extensão k -dimensional da amostragem por quadrado latino (Raj, 1968). Em McKay *et al.* (1979) é feita uma comparação entre o método LHS, o método MCS, que utiliza amostragem aleatória, e o método de amostragem estratificada, mostrando que o método LHS apresenta melhores resultados, basicamente em termos da obtenção de um estimador com menor variância.

A diferença entre o método LHS e o método MCS se dá na geração da amostra \mathbf{x}_i , com $i=1,2,\dots,n_{samp}$. Considerando o caso geral, com n_{var} variáveis aleatórias, dada a função conjunta de densidade de probabilidades $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, o intervalo de variação de cada uma das variáveis aleatórias é dividido em n_{samp} intervalos equiprováveis. A seguir, seleciona-se aleatoriamente um intervalo de cada variável aleatória e gera-se um ponto amostral dentro dos intervalos selecionados. O ponto amostral pode ser colocado diretamente no centro dos intervalos ou aleatoriamente em qualquer posição dentro dos intervalos, essa segunda alternativa foi adotada no presente trabalho. O procedimento de seleção dos intervalos e geração do ponto amostral se repete até que sejam obtidos os n_{samp} pontos desejados, satisfazendo o requisito de que nenhum intervalo de nenhuma das variáveis aleatórias seja escolhido mais de uma vez.

A Figura 1 mostra um hipercubo latino gerado para o caso com duas variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1, para amostra de tamanho 10.

Depois de efetuada a amostragem, a simulação transcorre identicamente ao apresentado na Subseção 2.8.1, utilizando a função indicadora de ocorrência do evento de interesse e as Equações (53) ou (55).

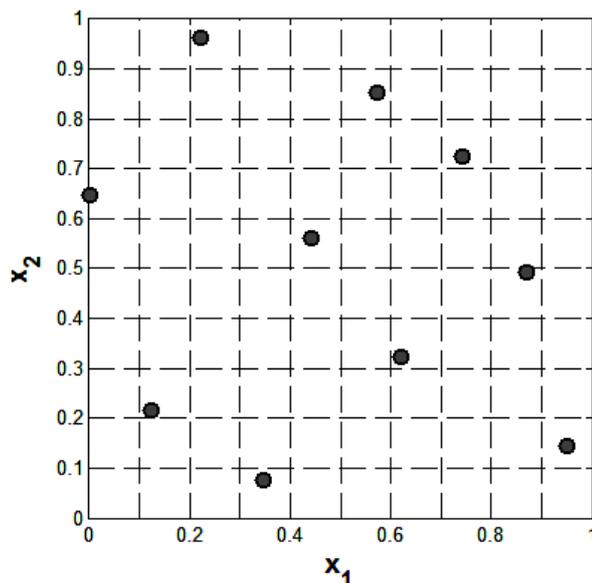


Figura 1 - Hipercubo latino para duas dimensões e amostra de tamanho 10.

Na prática, a função conjunta de densidade de probabilidades raramente é conhecida. É comum admitir independência entre as variáveis aleatórias ou processos estocásticos envolvidos, de modo que a função conjunta de densidade de probabilidades passa a ser igual ao produto das funções de densidade marginais. Nesse caso, o método LHS passa a ser aplicado individualmente para geração da amostra de cada uma das v.a.s e p.e.s envolvidos, perdendo um pouco de sua eficiência devido à escolha separada de intervalos, para cada uma das distribuições marginais, uma vez que a escolha conjunta é a que leva a uma melhor distribuição dos pontos amostrais sobre todo o espaço amostral. Mesmo assim, o método ainda apresenta resultados melhores que os obtidos por meio do método de Monte Carlo simples.

Outros detalhes a respeito do LHS podem ser vistos, por exemplo, em Stein (1987).

3. OTIMIZAÇÃO DE RISCOS SOBRE O CICLO DE VIDA

A otimização de risco ou RBRO (*Reliability-Based Risk Optimization*) se distingue de outras formulações de otimização estrutural por levar em consideração o efeito de incertezas em termos de números esperados de ocorrências de determinados eventos de interesse, tais como falha estrutural, e os custos associados à ocorrência desses eventos.

Em comparação, a otimização determinística (DDO – *Deterministic Design Optimization*) ignora incertezas e consequências de falha, ou, no máximo, leva-as em conta indiretamente através de coeficientes de segurança, e a otimização baseada em confiabilidade (RBDO – *Reliability-Based Design Optimization*) considera o efeito de incertezas ao impor restrições em termos de números esperados de falha admissíveis, mas sem levar em consideração os custos de falha. A Figura 2 compara o escopo, ou domínio, da otimização de risco em relação às outras formulações de otimização estrutural.

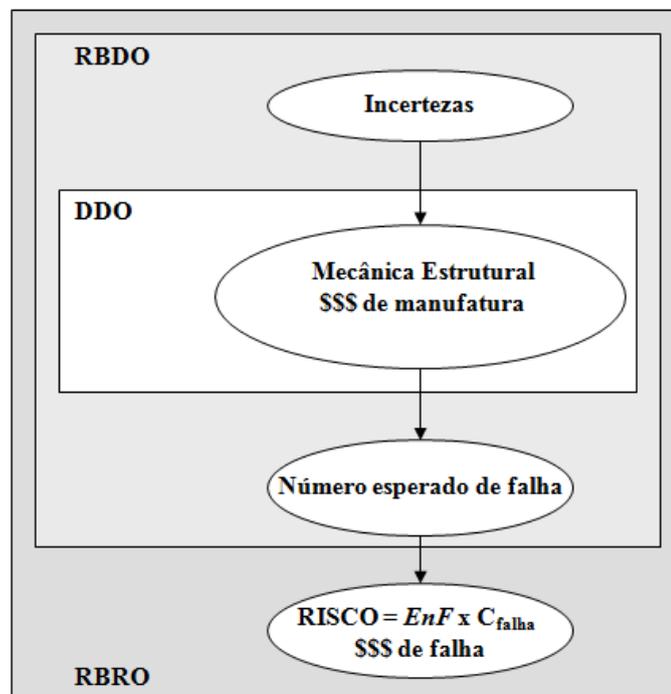


Figura 2 - Escopo das formulações de otimização estrutural.

De acordo com Beck & Gomes (2012a), o projeto de custo mínimo só pode ser obtido quando os custos esperados de falha são considerados. Em contrapartida, com a otimização determinística ou com a RBDO pode-se obter estruturas esbeltas e econômicas em termos de material, mas neste caso a otimalidade é obtida apenas em termos do custo de manufatura. Portanto, a formulação de otimização de risco é adotada no presente trabalho.

Na formulação do problema de otimização de risco descrita a seguir, são incluídas todas as variáveis envolvidas, isto é, tanto o vetor \mathbf{z} , que contém as n_{opt} variáveis de projeto, quanto o vetor \mathbf{X} , que contém n_{var} variáveis aleatórias. Também é incluído o tempo de vida útil da estrutura, T .

Considerando os custos relacionados ao ciclo de vida da estrutura, o custo esperado total, C_{ET} , de um sistema estrutural que apresenta probabilidade de falha pode ser decomposto em (Beck & Gomes, 2012a):

1. Custo inicial ou de construção e instalação da estrutura;
2. Custo de operação;
3. Custo de inspeção, manutenção e substituição;
4. Custo de descarte;
5. Custo esperado de falha.

A manutenção é comumente subdividida em manutenção preventiva e manutenção corretiva, ou reparo.

O custo esperado de falha, ou risco de falha, por sua vez, vem a ser o produto do custo de falha pelo número esperado de falhas associado:

$$\text{Custo esperado de falha } (\mathbf{X}, \mathbf{z}, T) = \text{custo de falha } (\mathbf{z}) \times \text{EnF}(\mathbf{X}, \mathbf{z}, T) \quad (56)$$

O custo de falha, C_{falha} , pode incluir custos de reparo ou de substituição dos componentes danificados, custo de reconstrução completa do sistema, custo de indenizações pagas a funcionários e a terceiros em decorrência da falha, e outros. Para determinar o custo esperado de falha, é necessário quantificar o custo de falha em termos monetários e determinar o número esperado de falhas.

Para cada modo de falha do sistema ou de componentes do mesmo haverá um componente de custo esperado de falha. O custo esperado total do sistema é dado pela soma de todos os termos parciais de custo, incluindo os custos esperados de falha:

$$\begin{aligned}
\text{Custo esperado total } (\mathbf{z}, \mathbf{X}, T) &= \text{custo inicial } (\mathbf{z}, T) \\
&+ \text{custo operação } (\mathbf{z}, T) \\
&+ \text{custo inspeção, manutenção e substituição } (\mathbf{z}, \mathbf{X}, T) \\
&+ \text{custos de descarte } (\mathbf{z}, T) \\
&+ \sum_{i=1}^{\# \text{ modos de falha}} \text{custo de falha}_i(\mathbf{z}) \cdot \text{EnF}(\mathbf{z}, \mathbf{X}, T)
\end{aligned} \tag{57}$$

O custo inicial aumenta diretamente com o nível de controle ou de segurança planejados em projeto. Os custos de inspeção, manutenção, reparo e substituição variam conforme a política adotada. Em geral, gastos com estas ações tem impacto no número esperado de falhas do sistema, e, portanto, nos custos esperados de falha. Dessa maneira, gastos com inspeção, manutenção e substituição aumentam a terceira parcela da Equação (57), mas tendem a diminuir a parcela dos custos esperados de falha. Maiores investimentos em inspeção, manutenção e substituição têm um efeito aproximadamente linear nos custos diretos (terceira linha da Equação (57)), mas um efeito não linear nos números esperados de falha, conforme ilustrado na Figura 3. Isto ocorre até mesmo porque, a partir de um determinado nível de investimento nestas ações, o número esperado de falhas não é mais afetado pelas mesmas.

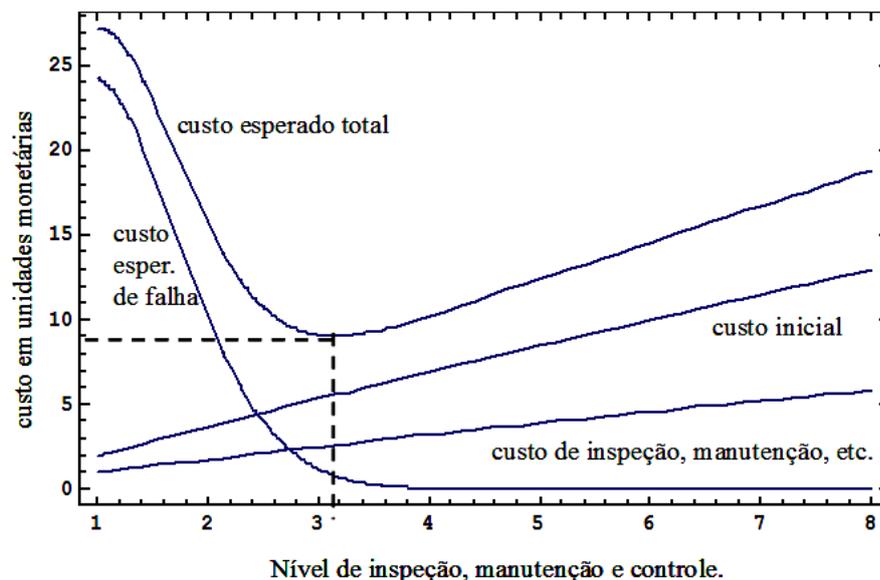


Figura 3 - Composição do custo esperado total de um sistema estrutural hipotético.

A quantidade ideal de recursos a investir em políticas de inspeção e manutenção é aquela que leva ao mínimo custo esperado total. Esta pode ser encontrada através da solução do seguinte problema de otimização de risco:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar: } \mathbf{z}^* \\ &\text{que minimize: custo esperado total}(\mathbf{X}, \mathbf{z}, T) \end{aligned} \quad (58)$$

Quando a falha do sistema em questão envolve consequências sem mensuração monetária, como a morte de pessoas ou danos irreparáveis ao meio ambiente, então um limite superior aceitável para o número esperado de falhas pode ser imposto ao problema:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar: } \mathbf{z}^* \\ &\text{que minimize: custo esperado total}(\mathbf{X}, \mathbf{z}, T) \\ &\text{sujeito a: } EnF(\mathbf{X}, \mathbf{z}, T) < EnF_{admissível} \end{aligned} \quad (59)$$

Do mesmo modo como para o custo esperado de falha, todos os custos que não apresentem valores determinísticos são substituídos pelo valor esperado equivalente, bastando multiplicar o custo de ocorrência do evento pela respectiva probabilidade de ocorrência ou número esperado de ocorrências do mesmo.

Isso acontece, por exemplo, ao se adotar manutenções corretivas que não são fixas, ou, mais especificamente, que dependem da natureza aleatória do problema e da incerteza inerente às inspeções, o que vem a ser o caso dos problemas de interesse do presente trabalho, nos quais o custo de reparo é substituído pelo custo esperado de reparos. Além disso, atividades tais como reparos e substituições alteram o estado da estrutura, assim, cada vez que uma dessas atividades acontece, é necessário efetuar uma atualização das incertezas. Esse assunto é discutido na seção a seguir.

3.1. ATUALIZAÇÃO DE INCERTEZAS APÓS INSPEÇÕES E REPAROS

Através de inspeções periódicas não destrutivas, manutenção e substituição de componentes estruturais, procura-se diminuir o número esperado de falhas e manter a confiabilidade do sistema em níveis aceitáveis. Porém, na prática as inspeções também estão sujeitas a incertezas.

Métodos de inspeção podem ser caracterizados por uma curva denominada curva POD (*Probability of Detection*) que descreve a probabilidade de detecção de um defeito em função do tamanho do mesmo, $POD(a)$, e que reflete o fato que, quanto maior o tamanho do defeito, maior a probabilidade de detectá-lo. Um tipo de curva POD bastante comum é o exponencial, utilizado, por exemplo, em Valdebenito & Schuëller (2010), mostrado na Equação (60), e adotado no presente trabalho para o caso de defeitos de corrosão:

$$\begin{aligned} POD(a) &= P[\text{detectar defeito de tamanho} \geq a] \\ &= 1 - e^{-q_{pod} \cdot a} \end{aligned} \quad (60)$$

O parâmetro q_{pod} assume valores maiores que zero e caracteriza o método de inspeção. Esta expressão para a curva POD pode ser interpretada como a distribuição exponencial de probabilidades para o tamanho detectável, e $(1/q_{pod})$ pode ser interpretado como o tamanho médio de defeito detectável (Pandey, 1998). Portanto, quanto maior o valor de q_{pod} , menor o tamanho médio de defeito detectável, e maior a qualidade do método de inspeção representado. A Figura 4 apresenta a curva de detecção do tipo exponencial para diferentes valores do parâmetro q_{pod} .

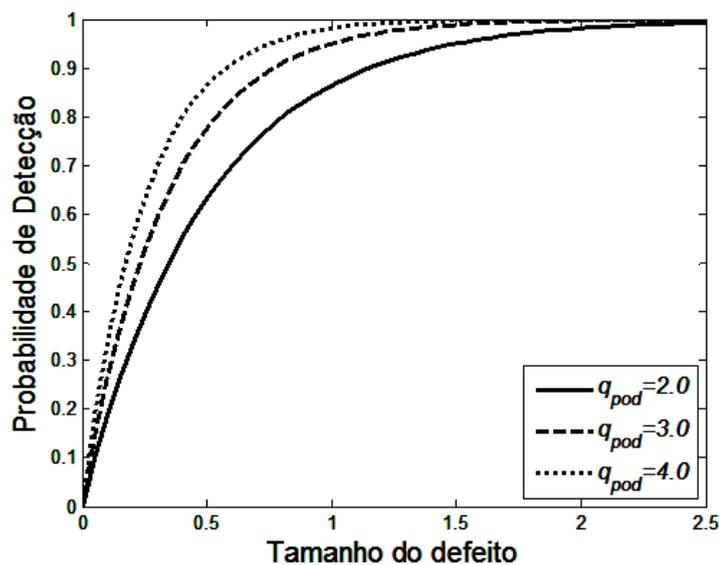


Figura 4 - Curva POD do tipo exponencial.

Outro modelo para a curva POD é o chamado “*Log-Odds-Log scale model*” (Berens & Hovey, 1981), definido por:

$$POD(a) = \frac{\alpha_{pod} \cdot a^{\gamma_{pod}}}{1 + \alpha_{pod} \cdot a^{\gamma_{pod}}} \quad (61)$$

onde os parâmetros α_{pod} e γ_{pod} caracterizam a técnica de inspeção.

Este modelo foi adotado, por exemplo, em Kulkarni & Achenbach (2007), e é adotado no presente trabalho para o caso de defeitos de fadiga. A Figura 5 apresenta a curva do tipo *Log-Odds-Log* para γ_{pod} constante e diferentes valores de α_{pod} . Constata-se que, para γ_{pod} constante, quanto maior o valor de α_{pod} , maior a qualidade da inspeção.

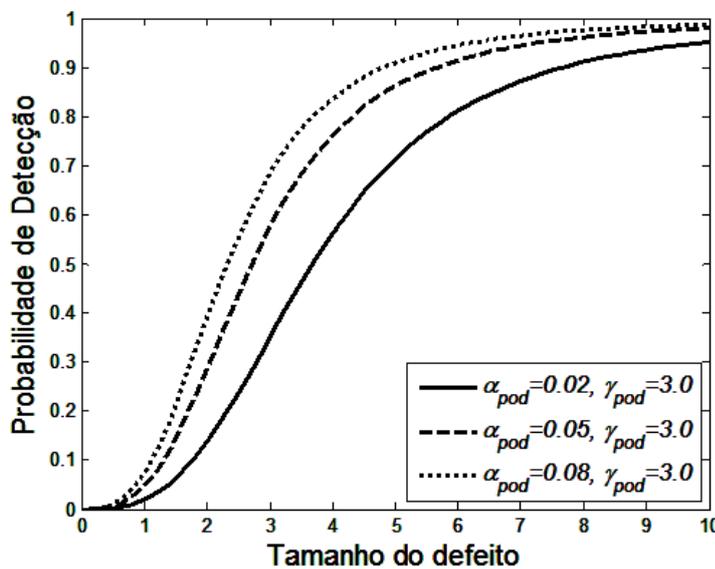


Figura 5 - Curva POD do tipo *Log-Odds-Log*.

Para uma dada técnica de inspeção, descrita por sua curva POD, os dois possíveis resultados de uma inspeção são: não detecção de um defeito, que pode existir; e detecção de um defeito e medição do seu tamanho. Entretanto, as medições obtidas podem também apresentar incertezas, fazendo com que o tamanho do defeito após medição seja descrito por uma distribuição de probabilidades ao invés de se tratar de um valor determinístico.

Dependendo do resultado da inspeção e de alguns critérios adotados, um reparo pode ser executado logo após a inspeção. A Figura 6 mostra uma árvore de eventos obtida ao acompanhar um defeito ao longo da vida útil da estrutura, considerando uma inspeção no tempo t_{insp} e as possibilidades de detecção e não detecção, reparo e não reparo.

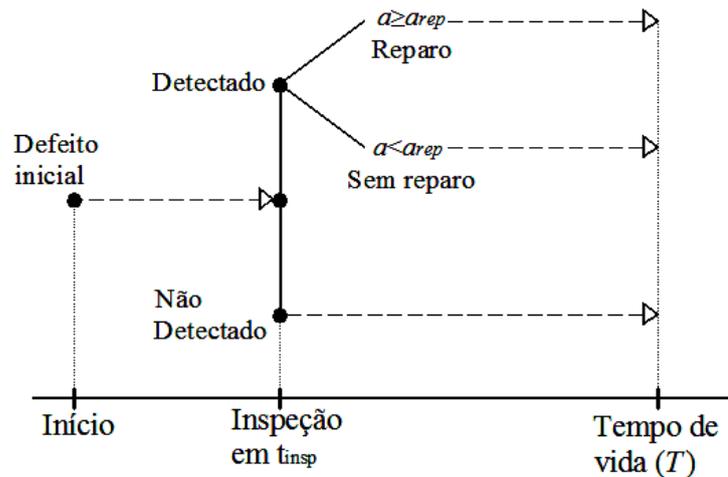


Figura 6 - Árvore de eventos ao longo da vida útil para um defeito sujeito a uma inspeção.

Para levar em conta o resultado de uma inspeção “imperfeita” é necessário atualizar a função de distribuição de probabilidades do tamanho do defeito, f_A . Uma das formas de efetuar essa atualização é utilizando o teorema de Bayes, cuja definição pode ser encontrada em Box & Tiao (1973).

A formulação apresentada a seguir baseia-se em Kulkarni & Achenbach (2007), e é desenvolvida para a hipótese de ocorrência de reparo sempre que o tamanho do defeito medido for maior que um valor crítico, a_{rep} , e considerando uma única variável aleatória: o tamanho inicial do defeito, a_0 .

O objetivo da atualização de incertezas é a determinação da FDP do tamanho do defeito logo após a inspeção, $f_A^+(a)$, sendo conhecidos: o tempo no qual ocorre a inspeção, t_{insp} ; a FDP do tamanho do defeito imediatamente antes da inspeção, $f_A^-(a)$; a curva POD, $POD(a)$; o tamanho crítico do defeito a partir do qual efetua-se reparo, a_{rep} ; e a FDP do tamanho do defeito após reparo, $f_R(a)$.

Tem-se que a probabilidade de existência de um defeito de tamanho menor ou igual a um dado valor A , logo após a inspeção, é dada por:

$$P(a < A) = \int_0^A f_A^+(a') da' \quad (62)$$

Entretanto, essa mesma probabilidade pode ser calculada somando as probabilidades referentes a cada um dos ramos pós-inspeção da árvore de eventos apresentada na Figura 6:

1. Probabilidade de $a < A$ após ocorrência de reparo;

2. Probabilidade de $a < A$ após detecção sem realização de reparo;
3. Probabilidade de $a < A$ quando não houve detecção.

Em termos matemáticos, tem-se:

$$P(a < A) = P(a < A \text{ após reparo}) + P(a < A \text{ sem reparo}) + P(a < A \text{ sem detecção}) \quad (63)$$

A probabilidade de $a < A$ após detecção e reparo de um defeito, que está relacionada ao primeiro ramo da árvore de eventos após a inspeção, é igual à probabilidade de detecção de um defeito com tamanho maior que o crítico, denominada K_1 , multiplicada pela probabilidade do defeito reparado apresentar tamanho $a < A$:

$$P(a < A \text{ após reparo}) = K_1 \cdot \int_0^A f_R(a') da' \quad (64)$$

onde:

$$K_1 = \int_{arep}^{\infty} POD(a') \cdot f_A^-(a') da' \quad (65)$$

A probabilidade de $a < A$ após detecção do defeito sem execução de reparo depende de dois fatores: da probabilidade de não ocorrência de reparo após detecção e da FDP de um defeito que foi detectado, mas não reparado.

A probabilidade de não ocorrência de reparo após detecção, P^{NR} , é igual à probabilidade de detecção de defeito com tamanho menor que o valor crítico, ou seja:

$$P^{NR} = \int_0^{arep} POD(a') \cdot f_A^-(a') da' \quad (66)$$

A função de densidade de probabilidades para um defeito de tamanho a que foi detectado, mas não reparado, designada por $f_A^{NR}(a)$, é não nula apenas no intervalo $[0, arep]$, e é dada pela probabilidade de detecção e ocorrência do defeito de tamanho a , dividida pela probabilidade de não ocorrência de reparo após detecção:

$$f_A^{NR}(a) = \frac{POD(a) \cdot f_A^-(a)}{P^{NR}}, \text{ para } 0 < a < a_{rep} \quad (67)$$

Utilizando a função de *Heaviside*, $H(\cdot)$, que assume valor unitário para argumentos positivos e valor nulo para argumentos negativos, a Equação (67) é reescrita como:

$$f_A^{NR}(a) = \frac{POD(a) \cdot f_A^-(a)}{P^{NR}} H(a_{rep} - a) \quad (68)$$

Portanto, a probabilidade condicional de $a < A$, dado que houve detecção, mas não houve reparo, é igual a:

$$P(a < A | \text{defeito detectado, sem reparo}) = \int_0^A \frac{POD(a') \cdot f_A^-(a')}{P^{NR}} H(a_{rep} - a') da' \quad (69)$$

A probabilidade incondicional é calculada multiplicando a Equação (69) pela probabilidade de não ocorrência de reparo, e está relacionada ao segundo ramo da árvore de eventos, após a inspeção:

$$\begin{aligned} P(a < A, \text{ sem reparo}) &= P^{NR} \cdot \int_0^A \frac{POD(a') \cdot f_A^-(a')}{P^{NR}} H(a_{rep} - a') da' \\ &= \int_0^A POD(a') \cdot f_A^-(a') \cdot H(a_{rep} - a') da' \end{aligned} \quad (70)$$

A partir da curva POD, define-se a probabilidade de não detecção como sendo também uma função do tamanho do defeito, evento complementar à detecção do mesmo:

$$PND(a) = 1 - POD(a) \quad (71)$$

A probabilidade de existência de um defeito não detectado é dada por:

$$P^{ND} = \int_0^{\infty} PND(a') \cdot f_A^-(a') da' \quad (72)$$

A FDP do tamanho do defeito não detectado logo após a inspeção é então definida por:

$$f_A^{ND}(a) = \frac{PND(a) \cdot f_A^-(a)}{P^{ND}} \quad (73)$$

Assim, a probabilidade de $a < A$ dado que o defeito não foi detectado é igual a:

$$P(a < A | \text{não detecção}) = \int_0^A \frac{PND(a') \cdot f_A^-(a')}{P^{ND}} da' \quad (74)$$

Portanto, a probabilidade incondicional, que está relacionada ao terceiro e último ramo da árvore de eventos, resulta:

$$\begin{aligned} P(a < A \text{ sem detecção}) &= P^{ND} \cdot \int_0^A \frac{PND(a') \cdot f_A^-(a')}{P^{ND}} da' \\ &= \int_0^A PND(a') \cdot f_A^-(a') da' \end{aligned} \quad (75)$$

Por fim, substituindo as Equações (62), (64), (65), (70) e (75) na Equação (63), chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \int_0^A f_A^+(a') da' &= K_1 \cdot \int_0^A f_R(a') da' + \int_0^A POD(a') \cdot f_A^-(a') \cdot H(a_{rep} - a') da' \\ &\quad + \int_0^A PND(a') \cdot f_A^-(a') da' \\ &= \int_0^A \left(K_1 \cdot f_R(a') + POD(a') \cdot f_A^-(a') \cdot H(a_{rep} - a') \right. \\ &\quad \left. + PND(a') \cdot f_A^-(a') \right) da' \end{aligned} \quad (76)$$

Segue que a função de densidade do tamanho do defeito logo após a inspeção no tempo t_{insp} pode ser escrita como:

$$f_A^+(a) = K_1 \cdot f_R(a) + POD(a) \cdot f_A^-(a) \cdot H(a_{rep} - a) + PND(a) \cdot f_A^-(a) \quad (77)$$

Essa equação pode ser utilizada de maneira recursiva para atualizar a FDP do tamanho do defeito para cada ocorrência de inspeção. O mesmo procedimento utilizado para determinar a Equação (77) pode ser aplicado para determinar equações de atualização de funções de distribuição de probabilidades de outras grandezas aleatórias que sejam afetadas por eventos tais como inspeção e reparos.

Nota-se que, quando o tamanho crítico do defeito, a_{rep} , tende ao infinito, K_1 tende a zero, e a função *Heaviside* de $a_{rep}-a$ assume sempre o valor unitário. Pela Equação (77) tem-se:

$$\begin{aligned} f_A^+(a) &= POD(a) \cdot f_A^-(a) + PND(a) \cdot f_A^-(a) \\ &= (POD(a) + PND(a)) \cdot f_A^-(a) \end{aligned} \quad (78)$$

E, como $POD(a)$ e $PND(a)$ são complementares:

$$f_A^+(a) = f_A^-(a) \quad (79)$$

Assumir a_{rep} tendendo ao infinito é uma das formas de representar a não ocorrência de reparos decorrentes da inspeção, e a Equação (79) mostra que, nessas circunstâncias, a FDP do tamanho do defeito não muda após a atualização. Em outras palavras, somente a ocorrência de inspeção, considerando todos os resultados possíveis, mas sem reparos ou substituições, não altera as incertezas do problema, uma vez que nenhuma informação é adicionada. Entretanto, esse caso é completamente diferente do caso no qual o resultado da inspeção é conhecido, pois nesse último, informações são obtidas, e, portanto, as incertezas são afetadas.

De acordo com o que foi apresentado, o procedimento de atualização, mesmo com as hipóteses simplificadoras adotadas, envolve várias integrais sobre o tamanho do defeito. A Equação (77) é uma solução analítica para o problema em que apenas o tamanho inicial do

defeito é variável aleatória, mas pode ser utilizada para o caso em que mais variáveis aleatórias estejam envolvidas. A extensão para o caso com mais de uma variável aleatória pode ser feita considerando realizações de cada uma das variáveis aleatórias, exceto a_0 , e efetuando integração dos resultados através do teorema da probabilidade total (Melchers, 1999).

Para casos mais gerais, Kulkarni & Achenbach (2007) afirmam que métodos alternativos tais como integração via Monte Carlo devem ser aplicados. Soluções numéricas podem ser obtidas utilizando métodos de simulação tais como os apresentados na Seção 2.8, que inclui o método de Monte Carlo. As soluções numéricas são, em geral, mais custosas computacionalmente e menos precisas; entretanto, são mais fáceis de implementar, não requerem tantas hipóteses quanto as analíticas e a extensão para casos mais complexos é feita de maneira muito mais simples. Uma abordagem do problema de atualização de incertezas do ponto de vista da simulação computacional é apresentada no Capítulo 6.

A Figura 7 ilustra os efeitos de inspeções na confiabilidade (índice de confiabilidade β) de um componente estrutural, levando em conta o resultado obtido pela inspeção, e não todos os resultados possíveis. Ou seja, para cada ocorrência de inspeção apenas um dos três possíveis ramos é considerado.

Na ilustração, o resultado da primeira inspeção é não detecção do defeito, o que aumenta a confiabilidade, pois reduz a possibilidade de que existam grandes defeitos. O resultado da segunda inspeção é a detecção de um defeito, o que provoca uma redução na confiabilidade. A Figura 7 também ilustra o resultado de uma substituição, que é o de elevar a confiabilidade a, ou próximo a, níveis iniciais.

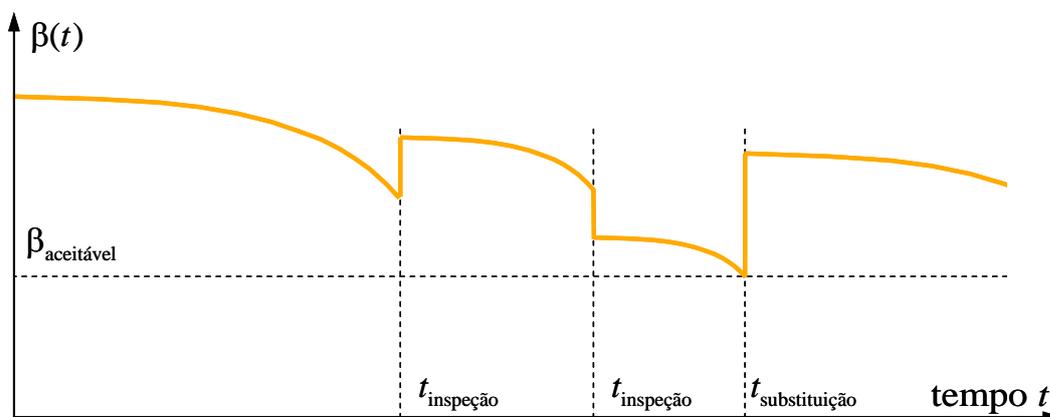


Figura 7 - Efeito de inspeções periódicas não destrutivas na confiabilidade de um componente contendo defeitos.

3.2. OUTROS ASPECTOS QUE AFETAM CUSTOS SOBRE O CICLO DE VIDA

Alguns aspectos que afetam os custos sobre o ciclo de vida da estrutura são apontados nesta seção. Detalhes a respeito de como a presente Tese aborda tais aspectos são discutidos no Capítulo 6, que está relacionado à solução do problema de otimização de risco.

Apesar da atualização das incertezas relacionada às políticas de inspeção, manutenção e substituição ser um fator primordial para a formulação de otimização de risco envolvendo os custos do ciclo de vida da estrutura, outros aspectos são de grande importância para obter uma formulação condizente com a realidade. Eles englobam: a desvalorização monetária com o tempo; seleção do tipo de manutenção e qualidade associada; impacto da manutenção e dos reparos na confiabilidade do sistema; caminhos de falha possíveis, geralmente representados por árvores de eventos; dentre outros.

Uma breve e geral revisão a respeito da otimização envolvendo confiabilidade e custos do ciclo de vida, com ênfase em estruturas civis e aeroespaciais, é apresentada em Frangopol & Maute (2003). Os autores listam aproximadamente duzentos artigos relacionados ao tema, apresentando a formulação básica, o estado da arte e algumas possíveis aplicações civis, aeroespaciais, em estruturas constituídas por materiais compósitos, dentre outras.

A questão da desvalorização monetária com o tempo é abordada, por exemplo, em Rackwitz *et al.* (2005), no qual se afirma que o modelo contínuo de desvalorização monetária é suficientemente preciso para todos os fins práticos. Nesse modelo, considerando uma taxa de desvalorização monetária constante, λ_c , o custo no tempo inicial, $C(0)$, equivalente a um dado custo no tempo t , $C(t)$, é determinado pela seguinte Equação:

$$C(0) = C(t) \cdot \exp(-\lambda_c \cdot t) \quad (80)$$

Esse modelo já foi utilizado em diversos artigos da área de otimização envolvendo custos sobre o ciclo de vida, tais como Streicher *et al.* (2008) e Zhou & Nessim (2011). Valores usuais para a taxa λ_c são apontados em Ditlevsen & Madsen (1996) e Wen (2001). No presente trabalho adota-se uma taxa $\lambda_c=5\%$ para todos os casos estudados.

Streicher & Rackwitz (2004) trazem questões relacionadas à confiabilidade (dependente do tempo) de sistemas em série, generalizando teorias propostas anteriormente

envolvendo probabilidade de falha de componentes e confiabilidade (independente do tempo) de sistemas em série.

Kong & Frangopol (2004) discutem aspectos importantes a respeito da qualidade das intervenções de manutenção e do tempo de aplicação das mesmas, associados ao mínimo custo do ciclo de vida. Apresenta-se ainda um exemplo prático mostrando como estabelecer funções de custo para as intervenções de manutenção.

Por último, cita-se aqui o trabalho de Frangopol *et al.* (1997), que aborda diversos tópicos a respeito do assunto, tais como: o valor do dinheiro no tempo, efeitos de envelhecimento estrutural, deterioração devido à corrosão em ambientes agressivos, possibilidades baseadas em árvores de eventos, dentre outros.

4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO



A solução de problemas de otimização de risco requer centenas ou milhares de análises probabilísticas, para que sejam estimados os números esperados requeridos. Cada análise probabilística, por sua vez, apresenta considerável custo computacional mesmo quando as equações de estado limite em questão são razoavelmente simples. Além disso, o custo esperado total pode ser função de muitas variáveis de projeto e apresentar vários mínimos locais e descontinuidades. Isso torna necessária a utilização de métodos de otimização que sejam eficientes e capazes de buscar o mínimo global mesmo nessas circunstâncias. Nesse contexto, além dos métodos ditos de otimização global, os algoritmos híbridos têm se destacado.

Estratégias híbridas para otimização são obtidas acoplando dois ou mais algoritmos de otimização, em geral um algoritmo heurístico com um algoritmo com fundamentação matemática. O algoritmo heurístico é utilizado para cobrir todo o espaço de busca, identificando a região do mínimo global, enquanto o algoritmo matemático, partindo de um ponto dentro desta região, rapidamente encontra o ponto de projeto.

Durante o desenvolvimento da presente Tese, dois algoritmos híbridos foram implementados, acoplando o método heurístico chamado de otimização por enxame de partículas ou PSO (*Particle Swarm Optimization*) aos métodos de Powell modificado e BFGS, e utilizando uma estratégia de transição adequada. Uma descrição completa do algoritmo híbrido PSO-Powell é apresentada no artigo Beck & Gomes (2011); um resumo deste artigo é apresentado no Anexo A desta Tese.

O segundo algoritmo híbrido foi obtido substituindo o método de Powell pelo método BFGS, um método mais eficiente e que também possui fundamentação matemática. Uma aplicação desse segundo método híbrido na otimização de risco de uma torre de transmissão de energia elétrica sujeita a cargas aleatórias de vento é mostrada no artigo Gomes & Beck (2012). Uma breve descrição do artigo é apresentada no Anexo B desta Tese.

Embora os métodos híbridos sejam eficientes quando aplicados a problemas com muitas variáveis de projeto, no presente trabalho o foco é mantido na otimização das políticas de inspeção e manutenção, o que leva a problemas com poucas variáveis de projeto. Dessa maneira, optou-se por não utilizar os métodos híbridos desenvolvidos, mas por aplicar outro

método de otimização global, mais simples, mas capaz de lidar com as peculiaridades do problema em foco.

Ao mesmo tempo, evita-se a utilização de métodos que dependem de aleatórios, tais como o método PSO e outros heurísticos, e a solução passa a ser independente de geradores de aleatórios pelo menos no que diz respeito ao método de otimização, uma vez que a análise probabilística geralmente depende de tais geradores. Além disso, a adoção de um método de otimização que não depende de aleatórios facilita a resolução, sob mesmas condições, de um mesmo problema de otimização para diferentes parâmetros, permitindo uma comparação direta entre as soluções ótimas encontradas.

No presente trabalho, depois de serem testados vários algoritmos diferentes, dentre os quais o chamado *Global Search* (Ugray *et al.*, 2007), o método Simplex (Nelder & Mead, 1965) e o *Pattern Search* (Audet & Dennis Jr., 2003; Kolda *et al.*, 2003), optou-se por utilizar o método Simplex juntamente com um estratégia de múltiplas inicializações. A escolha se justifica pelo fato deste método não depender de derivadas e poder ser utilizado mesmo na presença de descontinuidades e oscilações na função objetivo (Kelley, 1999). A confiabilidade do método, no sentido de buscar o mínimo global, é aumentada ao se resolver o problema de otimização várias vezes, partindo de diferentes pontos iniciais.

A próxima seção define em linhas gerais no que consiste o problema de otimização. A seguir, as seções 4.2 e 4.3 abordam o método Simplex e a estratégia de múltiplas inicializações adotada.

4.1. PROBLEMA GERAL DE OTIMIZAÇÃO

O problema geral de otimização, também conhecido como problema de programação não linear, de acordo com Vanderplaats (1984), consiste basicamente em:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{z}) \quad (81)$$

sujeita a:

$$g_j(\mathbf{z}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (82)$$

$$h_k(\mathbf{z}) = 0, \quad k = 1, \dots, l \quad (83)$$

$$z_i^{\min} \leq z_i \leq z_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n \quad (84)$$

O problema consiste em minimizar a chamada função objetivo, $f(\mathbf{z})$, sujeita às restrições de igualdade, $h_k(\mathbf{z})$, às restrições de desigualdade, $g_j(\mathbf{z})$ e aos limites inferiores e superiores impostos a cada variável z_i . O vetor \mathbf{z} contém as chamadas variáveis de projeto ou de otimização, ou seja, aquelas variáveis cujo valor se deseja determinar de maneira a obter o valor ótimo da função objetivo, respeitado as restrições e limites. Como no presente trabalho a função objetivo está relacionada ao custo da estrutura durante sua vida útil, o valor ótimo desta função consiste no menor custo possível. Os valores do vetor \mathbf{z} que resultam do processo de minimização geram o chamado ponto de projeto, ou ponto ótimo.

Na formulação de otimização de risco algumas equações e inequações que dariam origem a restrições nas formulações determinística ou baseada em confiabilidade passam a ser escritas na forma de equações de estado limite. Essas equações são utilizadas na análise probabilística para determinar números esperados, os quais são incorporados ao cálculo da função objetivo. Assim, a formulação de otimização de risco geralmente apresenta menos restrições que outras formulações, dando maior liberdade ao algoritmo de otimização para a escolha da configuração ótima, mas podendo gerar uma maior quantidade de mínimos locais.

De fato, nos problemas de otimização apresentados nos Capítulos 7 e 8 não há restrições nem de desigualdade nem de igualdade, e mesmo os limites das variáveis de projeto são bastante flexíveis, modificados conforme necessário, no intuito de reduzir o espaço de busca mas sem restringir a solução final.

4.2. MÉTODO SIMPLEX

O algoritmo Nelder-Mead Simplex foi implementado conforme descrito em Lagarias *et al.* (1998). Trata-se de uma versão do método de otimização livre de derivadas proposto por Nelder & Mead (1965) baseado na ideia apresentada por Spendley *et al.* (1962).

O método utiliza-se de uma figura geométrica constituída por $n_{opt}+1$ vértices e todos os segmentos, poligonais e faces que os interconectam. Essa figura é denominada simplex n_{opt} -dimensional, ou simplesmente simplex. Cada vértice do simplex é um ponto no espaço de busca, e, portanto, pode ser representado por um vetor de tamanho n_{opt} , no qual cada componente contém um possível valor de uma das variáveis de projeto do problema de otimização. Para cada ponto do simplex há um valor da função objetivo associado.

Considerando $\mathbf{z}_S(i)$, com $i=1,\dots,(n_{opt}+1)$, uma lista contendo todos os pontos do simplex e designando a função objetivo por $f(\cdot)$. Em cada iteração do algoritmo,

primeiramente os pontos do simplex são organizados em ordem crescente de acordo com o valor da função objetivo associado. Dessa maneira, $\mathbf{z}_S(1)$ passa a ser o ponto associado ao menor valor da função objetivo e $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ o ponto que apresenta maior valor, ou seja, $f(\mathbf{z}_S(1)) \leq f(\mathbf{z}_S(2)) \leq \dots \leq f(\mathbf{z}_S(n_{opt}+1))$.

Após o ordenamento dos pontos, o simplex é submetido a uma série de operações e cálculos da função objetivo, através dos quais se busca substituir o ponto com mais alto valor da função objetivo por um ponto com menor valor, gerado pela operação. Caso nenhuma das operações seja bem sucedida, uma última operação é executada, na qual todos os pontos, com exceção daquele que apresenta menor valor da função objetivo, são contraídos em direção ao melhor ponto. A série de operações, incluindo a última contração, é detalhada a seguir.

Considere o centroide, \mathbf{m}_S , dos primeiros n_{opt} pontos do simplex, o que significa calcular o centroide do simplex desprezando o pior ponto:

$$\mathbf{m}_S = \sum_{i=1}^{n_{opt}} \frac{\mathbf{z}_S(i)}{n_{opt}} \quad (85)$$

A primeira operação vetorial, denominada reflexão, dá origem ao ponto refletido, \mathbf{r}_S , através da seguinte equação:

$$\mathbf{r}_S = 2 \cdot \mathbf{m}_S - \mathbf{z}_S(n_{opt} + 1) \quad (86)$$

A segunda operação, denominada expansão, é definida pela Equação (87), e gera o ponto expandido, \mathbf{s}_S :

$$\mathbf{s}_S = \mathbf{m}_S + 2 \cdot (\mathbf{m}_S - \mathbf{z}_S(n_{opt} + 1)) \quad (87)$$

A terceira operação, contração para fora, gera o ponto \mathbf{c}_S , e depende do ponto refletido:

$$\mathbf{c}_S = \mathbf{m}_S + (\mathbf{r}_S - \mathbf{m}_S)/2 \quad (88)$$

A quarta operação, que gera o ponto contraído para dentro, \mathbf{cc}_S , é dada por:

$$\mathbf{cc}_S = \mathbf{m}_S + \left(\mathbf{z}_S(n_{opt} + 1) - \mathbf{m}_S \right) / 2 \quad (89)$$

Por último, a operação de contração do simplex como um todo gera n_{opt} pontos:

$$\mathbf{v}_S(i) = \mathbf{z}_S(1) + \left(\mathbf{z}_S(i) - \mathbf{z}_S(1) \right) / 2, \text{ para } i=2, \dots, (n_{opt}+1) \quad (90)$$

Para que os limites das variáveis de projeto sejam sempre obedecidos, cada vez que uma operação gera um ponto fora do espaço de busca, as coordenadas do ponto que não estão de acordo com os limites são substituídas pelos respectivos limites. As operações que definem o método Simplex são combinadas em sequência, dando origem ao algoritmo descrito pelos seguintes passos:

1. Dado o simplex atual, $\mathbf{z}_S(i)$, com $i=1, \dots, n_{opt}$;
2. Calcular \mathbf{m}_S , através da Equação (85);
3. Gerar o ponto refletido, \mathbf{r}_S , através da Equação (86);
4. Se $f(\mathbf{z}_S(1)) \leq f(\mathbf{r}_S) < f(\mathbf{z}_S(n_{opt}))$, substituir $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ por \mathbf{r}_S , terminar a iteração;
5. Se $f(\mathbf{r}_S) > f(\mathbf{z}_S(1))$, calcular o ponto expandido, \mathbf{s}_S , através da Equação (87);
 - a. Se $f(\mathbf{s}_S) < f(\mathbf{r}_S)$, substituir $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ por \mathbf{s}_S , terminar a iteração;
 - b. Caso contrário, substituir $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ por \mathbf{r}_S , terminar a iteração.
6. Se $f(\mathbf{r}_S) \geq f(\mathbf{z}_S(n_{opt}))$, executar uma contração entre \mathbf{m}_S e o melhor entre $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ e \mathbf{r}_S :
 - a. Se $f(\mathbf{r}_S) < f(\mathbf{z}_S(n_{opt}+1))$, calcular \mathbf{c}_S através da Equação (88); se $f(\mathbf{c}_S) < f(\mathbf{r}_S)$, substituir $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ por \mathbf{c}_S , terminar a iteração; caso contrário, ir para o passo 7;
 - b. Se $f(\mathbf{r}_S) \geq f(\mathbf{z}_S(n_{opt}+1))$, calcular \mathbf{cc}_S através da Equação (89); se $f(\mathbf{cc}_S) < f(\mathbf{z}_S(n_{opt}+1))$, substituir $\mathbf{z}_S(n_{opt}+1)$ por \mathbf{cc}_S , terminar a iteração; caso contrário, ir para o passo 7;
7. Calcular os n_{opt} pontos $\mathbf{v}_S(i)$, com $i=1, \dots, n_{opt}$; o simplex na próxima iteração será $\mathbf{z}_S(1), \mathbf{v}_S(2), \dots, \mathbf{v}_S(n_{opt}+1)$.

O procedimento apresentado é iterado até que um determinado critério de parada seja atingido. O critério de parada adotado tem por base duas medidas:

1. O valor acumulado da variação da função objetivo nas últimas n_{acum} iterações, considerando sempre o melhor ponto do simplex;

2. A distância entre o melhor ponto e o centroide do simplex. Nesse caso, utiliza-se o centroide real do simplex, diferente de \mathbf{m}_s , isto é, levando em conta todos os vértices. A distância é calculada em um espaço transformado no qual todas as variáveis de projeto estão no intervalo [0,1].

Caso a distância calculada seja menor que uma distância mínima pré-estabelecida, $dist_{min}$, e o valor acumulado seja menor que uma dada tolerância tol_{simp} , o algoritmo é parado e a solução ótima é o ponto do simplex que apresenta menor valor da função objetivo. Isso significa que o algoritmo é interrompido caso os pontos do simplex estejam bastante próximos e caso o valor ótimo encontrado não esteja mudando significativamente. Sob essas circunstâncias é pouco provável que o ponto ótimo para o qual o simplex está convergindo difira suficientemente do melhor valor atual.

Além disso, adotou-se um número máximo de iterações, denominado $nite_{max_simp}$, que pode também funcionar como critério de parada, caso o algoritmo não convirja em um número de iterações menor que o máximo admissível.

A Figura 8 mostra, para o caso bidimensional, os pontos que o algoritmo pode calcular durante o procedimento, juntamente com cada novo simplex possível. O simplex atual é apresentado com uma linha mais espessa.

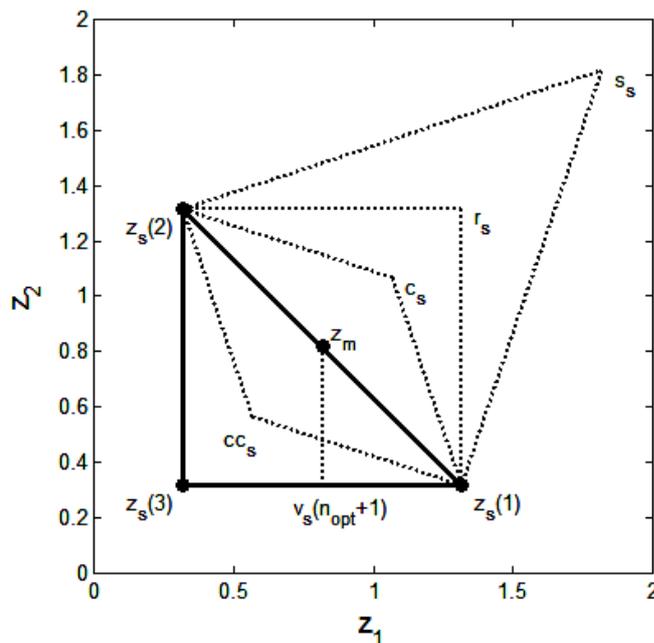


Figura 8 - Possíveis pontos gerados pelo algoritmo Simplex.

4.3. ESTRATÉGIA DE MÚLTIPLAS INICIALIZAÇÕES

A estratégia de múltiplas inicializações parte de uma grade de n_{grid} pontos, definida pelo vetor $[n_1, n_2, \dots, n_{n_{opt}}]$, que determina quantos valores diferentes de cada variável de projeto serão utilizados para gerar os pontos iniciais. Desse modo, o número total de pontos de inicialização é dado por:

$$n_{grid} = \prod_{i=1}^{n_{opt}} n_i \quad (91)$$

O objetivo desta estratégia é aumentar a probabilidade de encontrar o mínimo global, através de n_{grid} soluções do mesmo problema de otimização. Cada solução é obtida partindo de um ponto inicial diferente, e os pontos são distribuídos ao longo de todo o espaço de busca.

A grade de pontos é definida considerando os limites inferiores, \mathbf{z}^{\min} , e superiores, \mathbf{z}^{\max} , das variáveis de projeto. Calcula-se inicialmente o vetor δ_{grid} , definido por:

$$\delta_{grid}(i) = (\mathbf{z}_i^{\max} - \mathbf{z}_i^{\min}) / n_i, \text{ para } i=1, \dots, n_{opt} \quad (92)$$

A grade é então construída impondo que a distância entre a mesma e os limites $[\mathbf{z}^{\min}, \mathbf{z}^{\max}]$ seja igual a $\delta_{grid}(i)/2$, e que a distância entre os pontos da grade seja igual a $\delta_{grid}(i)$, para cada coordenada i . A Figura 9 mostra a grade gerada para um caso bidimensional, com $[n_1, n_2]=[3,4]$, e limites $\mathbf{z}^{\min}=[0,0]$, $\mathbf{z}^{\max}=[6,8]$.

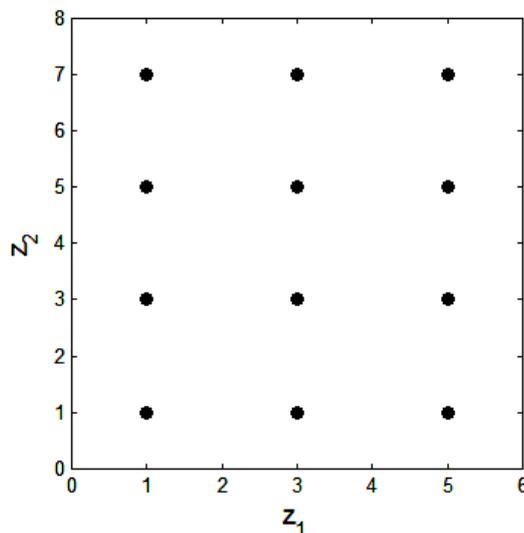


Figura 9 - Grade de pontos iniciais para um caso bidimensional.

Para cada ponto inicial, \mathbf{z}_0 , o simplex é construído levando em conta a grade de pontos iniciais, uma vez que cada simplex deverá explorar uma determinada região do espaço de busca. Essa construção é feita de maneira que o centro do simplex coincida com o ponto inicial, e depende de perturbações δ_{simp} , em cada direção, calculadas pela seguinte equação:

$$\delta_{simp}(i) = \frac{\mathbf{z}_i^{\max} - \mathbf{z}_i^{\min}}{\lambda_{simp} \cdot n_i}, \text{ para } i=1, \dots, n_{opt} \quad (93)$$

onde λ_{simp} é um fator definido pelo usuário, que define o tamanho do simplex.

O i -ésimo ponto do simplex é gerado tomando por base o ponto inicial, \mathbf{z}_0 , e adicionando a perturbação $\delta_{simp}(i)$ ao componente $\mathbf{z}_0(i)$, para $i=1, \dots, n_{opt}$. O último ponto do simplex é tomado como sendo exatamente igual ao ponto inicial. Por último, aplica-se uma translação sobre o simplex gerado, fazendo com que o centro do mesmo passe a coincidir com o ponto inicial.

A Figura 10 ilustra o simplex gerado para o primeiro ponto da grade apresentada na Figura 9, ou seja, para $\mathbf{z}_0=[1,1]$, para $\lambda_{simp}=3$, valor adotado em todos os exemplos desta Tese. Ressalta-se que, para que não haja intersecção entre os simplex gerados, o fator λ_{simp} deve ser maior que 2.

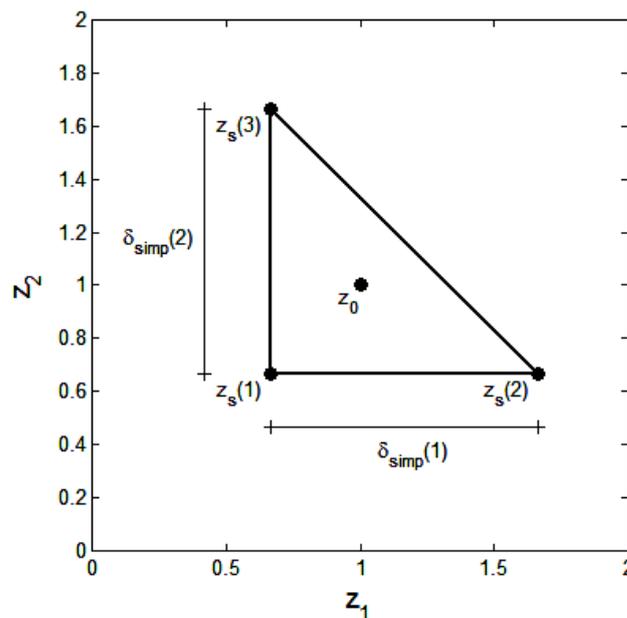


Figura 10 - Simplex gerado para o ponto inicial z_0 .

Apesar da orientação do simplex no espaço de busca ter influência sobre a velocidade de convergência do método, isso está fora do escopo do presente trabalho. Portanto, não se aplica nenhuma rotação sobre o simplex gerado pelo procedimento descrito.

A quantidade de pontos da grade em cada direção coordenada, dada por $[n_1, n_2, \dots, n_{n_{opt}}]$, deve ser definida de acordo com a complexidade da função objetivo em relação a cada variável de projeto. Quanto mais complexa a função objetivo, principalmente em termos de número de mínimos locais, maior deve ser n_i . Porém, como não há fórmulas para definir tais quantidades e como num problema prático de otimização pouco se sabe a priori a respeito da complexidade da função objetivo e da quantidade e localização de mínimos locais, a definição da grade de pontos se torna um processo subjetivo.

5. REPRESENTAÇÃO DOS PROCESSOS DE CORROSÃO E FADIGA



A perda de massa do aço devido à corrosão é um fenômeno aleatório cujas estatísticas variam ao longo do tempo. Desse modo, a perda de massa por corrosão de cupons individuais pode ser vista como uma função do tempo de exposição (Jeffrey & Melchers, 2001) e o fenômeno em si é considerado um processo estocástico.

Por outro lado, ensaios experimentais mostram que, mesmo nas condições controladas de um laboratório, a taxa de propagação de trincas de fadiga não é descrita adequadamente por uma equação determinística, se tratando também de um processo estocástico.

A modelagem (e simulação) destes tipos de processos pode ser feita utilizando expansão em polinômios de caos (PCE – *Polynomial Chaos Expansion*), uma ferramenta amplamente conhecida, aplicada para representar diferentes tipos de processos aleatórios e adequada para respostas com função de densidade de probabilidade suave ou respostas desprovidas de não linearidades significativas (Acharjee & Zabarar, 2007). Nos últimos anos, a PCE tem sido bastante utilizada na solução de problemas de quantificação e propagação de incertezas na área de mecânica computacional. Entretanto, aplicações de polinômios de caos para representação de dados reais, medidos através de experimentos ou obtidos através de observação, ainda são limitadas.

Em Gomes *et al.* (2013), artigo apresentado resumidamente no Anexo C desta Tese, polinômios de caos são utilizados para representar a evolução (aleatória) no tempo do crescimento do defeito de corrosão em metais sujeitos a ambientes marinhos.

Na presente Tese, um modelo em polinômios de caos é construído para representar a máxima profundidade do defeito de corrosão considerando dados reais de corrosão em dutos, apresentados em Velázquez *et al.* (2010). Expansões em polinômios de caos são utilizadas também para representar a variação da taxa de propagação de trincas em função do fator de intensidade de tensões, a partir dos resultados experimentais de Ghonem & Dore (1987).

A próxima seção traz uma breve revisão de literatura a respeito da expansão em polinômios de caos, focando em sua implementação computacional. Na Seção 5.4, a PCE é utilizada para representar os dados de corrosão em dutos e comparada tanto com os dados

reais quanto com um modelo de corrosão em dutos da literatura. Por último, na Seção 5.5, a expansão em PC é utilizada para representar dados experimentais de fadiga obtidos por Ghonem & Dore (1987), procurando uma forma de representação que possa ser aplicada em diversos casos, desde que o tipo de material seja mantido, e discutindo a acurácia do modelo.

No Anexo D desta Tese é apresentado um artigo, desenvolvido no decorrer do presente trabalho, no qual uma representação tipo PCE é obtida também para os resultados experimentais de fadiga de Virkler *et al.* (1978).

5.1. REPRESENTAÇÃO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS UTILIZANDO POLINÔMIOS DE CAOS

5.1.1. Definição

O teorema de Cameron-Martin (Cameron & Martin, 1947) mostra que qualquer variável aleatória de segunda ordem X^{PCE} pode ser representada através de uma série na forma:

$$X^{PCE}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi) \quad (94)$$

onde u_i são coeficientes a determinar, $\Psi_i(\xi)$ são funções ortogonais de variáveis aleatórias, formando uma base polinomial completa, e o vetor ξ representa a dimensão estocástica do problema. Esta representação é chamada de expansão em polinômios de caos, apresentada por Xiu & Karniadakis (2002) baseada numa generalização das ideias apresentadas anteriormente por Wiener (1938), Ogura (1972), Askey & Wilson (1985) e Ghanem & Spanos (1991).

As funções $\Psi_i(\xi)$ são um conjunto completo de variáveis aleatórias ortogonais, definidas como polinômios em ξ , e satisfazem às seguintes condições (Sudret & Der Kiureghian, 2000):

$$\Psi_0 \equiv 1 \quad (95)$$

$$E[\Psi_i] = 0, \text{ para } i > 0 \quad (96)$$

$$E[\Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi)] = 0, \text{ para } i \neq j \quad (97)$$

Uma importante classe de polinômios ortogonais são os membros dos denominados polinômios do esquema Askey (Askey & Wilson, 1985). Cada subconjunto de polinômios ortogonais tem diferentes funções peso em suas relações de ortogonalidade (Xiu & Karniadakis, 2002) e algumas funções peso são idênticas a funções de distribuição de probabilidades de certas variáveis aleatórias. Este trabalho foca na família de polinômios de Hermite multivariados, que são ortogonais com respeito à medida Gaussiana. Dessa maneira, o vetor ξ é composto por variáveis aleatórias normais padrão e independentes.

De forma clássica, os polinômios de Hermite em uma dimensão são definidos pela Equação (98), e polinômios de Hermite multidimensionais ou multivariados são obtidos como produtos destes polinômios unidimensionais.

$$h_n(x) = (-1)^n \frac{d^n \left[e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]}{dx^n} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (98)$$

De acordo com Sudret & Der Kiureghian (2000), para construção desses polinômios consideram-se as seguintes sequências de inteiros:

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}, \text{ com } \alpha_j > 0 \quad (99)$$

$$\mathbf{i} = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \text{ com } i_j > 0 \quad (100)$$

O polinômio de Hermite multidimensional associado com as sequências $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{i})$ é:

$$\Psi_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{k=1}^p h_{\alpha_k}(\xi_{i_k}) \quad (101)$$

e o conjunto de todos os polinômios associados com todas as sequências possíveis $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{i})$ de qualquer tamanho p forma uma base polinomial.

Denotando por $\Gamma_p(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ip})$ o conjunto de polinômios da base $\{\Psi_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \mid \sum_{k=1}^p \alpha_k = p\}$, Γ_p é o espaço por ele gerado, usualmente chamado “caos homogêneo de ordem p ”.

5.1.2. Implementação computacional

Para propósitos computacionais, polinômios de Caos de dimensão finita são construídos utilizando um número finito M de variáveis aleatórias Gaussianas ortonormais. A base polinomial formada através destas M variáveis aleatórias é denotada por $\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$ e chamada de “caos homogêneo de dimensão M e ordem p ”.

Cada componente da base $\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)$ está associado a um conjunto de M inteiros $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$, e é dado por:

$$\Psi_{\alpha}(\xi) = \prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}(\xi_i) \quad (102)$$

onde cada inteiro α_i varia entre 0 e p , e os coeficientes α listam todas as combinações possíveis de inteiros cuja soma é menor ou igual a p . Assim, o polinômio de caos de M -ésima dimensão e p -ésima ordem consiste, neste caso, em um conjunto de polinômios de Hermite multidimensionais em $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M\}$, cujo grau não excede p .

Ao se truncar a Equação (94) após os termos de ordem igual a p , o número total de polinômios da base, n_{caos} , é dado por:

$$n_{caos} = \sum_{k=0}^p \binom{M+k-1}{k} \quad (103)$$

Para n_{caos} termos a Equação (94) é reescrita como:

$$X^{PCE}(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{caos}} u_i \Psi_i(\xi) \quad (104)$$

Alguns polinômios de Caos de baixa dimensão (até $M=4$) foram tabelados em Ghanem & Spanos (1991), para diferentes ordens (até $p=4$). Como exemplo, a Tabela 3 apresenta os polinômios de Caos bidimensionais até terceira ordem, o que resulta em até 10 termos na expansão.

Sudret & Der Kiureghian (2000) apresentam um algoritmo recursivo para geração dos polinômios de Hermite unidimensionais, além de um algoritmo para geração das

sequências $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ e a implementação dos polinômios de Hermite multidimensionais utilizando as sequências geradas.

Tabela 3 - Polinômios de Caos bidimensionais.

j	p	j -ésima base polinomial Ψ_j
0	$p = 0$	1
1	$p = 1$	ξ_1
2		ξ_2
3	$p = 2$	$\xi_1^2 - 1$
4		$\xi_1 \xi_2$
5		$\xi_2^2 - 1$
6	$p = 3$	$\xi_1^3 - 3\xi_1$
7		$\xi_2 (\xi_1^2 - 1)$
8		$\xi_1 (\xi_2^2 - 1)$
9		$\xi_2^3 - 3\xi_2$

Polinômios de Caos são comumente utilizados para representar respostas de modelos sujeitos a incertezas. Um modelo mecânico sujeito a incertezas pode ser visto como uma função de variáveis aleatórias ou de processos estocásticos, e sua resposta é também uma variável aleatória ou processo estocástico.

A construção de uma expansão em polinômios de Caos para representar uma função de variáveis aleatórias consiste basicamente em, dada a base de polinômios, determinar os coeficientes u_i da expansão, considerando ordem e dimensão estocástica suficientemente grandes para se atingir a precisão desejada. A dimensão estocástica a ser adotada está diretamente relacionada à dimensão estocástica da função a ser representada, enquanto a ordem da PCE depende da suavidade da função a ser aproximada.

Em geral, quanto maior a ordem da PCE, maior a precisão da representação; porém, maior o custo computacional. Entretanto, quando dados experimentais ou observados estão envolvidos, um aumento na ordem da PCE pode fazer com que os dados disponíveis não sejam mais suficientes para determinar os coeficientes requeridos, levando a aproximações piores do que aquelas obtidas para ordens menores. Nas aproximações construídas nesta Tese, a ordem da expansão é sempre determinada testando diferentes valores de p , e adotando aquele que leva ao menor erro, conforme descrito mais adiante neste capítulo.

Na literatura, os métodos utilizados para determinar os coeficientes da expansão, no intuito de representar um dado modelo, são comumente classificados em dois grupos: os intrusivos e os não intrusivos.

Os métodos intrusivos requerem a inserção da expansão de polinômios de caos diretamente no modelo mecânico, necessitando de grandes modificações nos códigos computacionais (determinísticos) existentes. Como exemplo tem-se o chamado “*Spectral Stochastic Finite Element Method*”, no qual os coeficientes da PCE são obtidos através de um esquema de Galerkin que leva a um sistema de equações determinísticas acopladas (Blatman & Sudret, 2010).

Como alternativa, os métodos não intrusivos permitem computar a resposta estocástica do modelo através de um conjunto de chamadas ao modelo determinístico existente, isto é, sem a necessidade de modificações no código computacional básico (Blatman & Sudret, 2010). Dois métodos não intrusivos bastante utilizados são os métodos da projeção e da regressão. No caso da projeção, cada coeficiente da expansão é escrito como uma integral multidimensional, que pode ser resolvida por simulação ou quadratura. No caso da regressão, os coeficientes são estimados através da minimização do erro médio quadrático da resposta. Descrições mais detalhadas destes métodos podem ser encontradas, por exemplo, em Blatman & Sudret (2010).

Entretanto, enquanto a implementação de tais métodos geralmente envolve a existência de um modelo conhecido e o cálculo da resposta do modelo para determinadas realizações das variáveis aleatórias envolvidas, no caso da representação a partir de dados experimentais ou observados, o modelo não é conhecido e não é possível controlar a aleatoriedade dos experimentos ou das observações. Assim, métodos computacionais diferentes devem ser utilizados.

No presente trabalho, um método não intrusivo semelhante ao método da regressão é implementado. A diferença básica é que no método da regressão a seleção dos valores das variáveis de entrada permite obter uma solução analítica para o problema de minimização, através do método dos mínimos quadrados. Nos casos aqui estudados não é possível selecionar os valores das variáveis de entrada, a solução do problema de minimização deve ser procurada através de um método iterativo de otimização. Assim, os coeficientes da PCE são determinados minimizando o erro médio absoluto entre estimativas experimental (ou observada) e aproximada da função de distribuição acumulada de probabilidades (FDA's).

Para estimar a FDA aproximada, gera-se um vetor \mathbf{X}^{PCE} , para cada ponto t_j do contínuo, contendo n_{SPCE} realizações da PCE, em ordem crescente. Estas realizações são

obtidas tomando-se valores igualmente distribuídos entre 0 e 1 e aplicando a função inversa da função de distribuição acumulada normal de probabilidades, para cada variável aleatória constituinte do vetor ξ .

Considerando que, para um dado ponto do contínuo, t_j , n_{samp} dados reais estão disponíveis, e que estes dados são representados pelo vetor $\mathbf{X}_j^{EXP} = \{x_1^{EXP}, x_2^{EXP}, \dots, x_{n_{samp}}^{EXP}\}$, com valores em ordem crescente, ou seja, $x_1^{EXP} \leq x_2^{EXP} \leq \dots \leq x_{n_{samp}}^{EXP}$. Os coeficientes u_i do polinômio de caos dado pela Equação (104) são obtidos minimizando o erro médio absoluto entre as estimativas experimental (ou observada) e aproximada da FDA através de um processo de otimização sem restrições, resolvido utilizando a função *fminunc* do MATLAB®.

Na geração do ponto inicial deste processo de otimização, conhecimento a respeito do significado dos coeficientes da PCE é incorporado. No apêndice A de Blatman & Sudret (2010) afirma-se que os coeficientes da PCE contêm informações probabilísticas completas do processo que representam, e que os momentos estatísticos da PCE podem ser derivados analiticamente de seus coeficientes. Em particular, a média da PCE é igual ao coeficiente u_1 , e a variância é dada pela soma dos quadrados dos demais coeficientes. Assim, no intuito de ajudar o processo de otimização, mas ao mesmo tempo estimulando uma representação o mais simples possível, para cada ponto do contínuo, t_j , utiliza-se como ponto inicial o ponto no qual o coeficiente u_1 é igual à média experimental, os coeficientes u_i , com $i=1, \dots, M+1$, são iguais ao desvio-padrão, e os demais coeficientes são nulos.

O resultado do problema de otimização é um conjunto de coeficientes u_i^j , para cada t_j . Para resolver o problema em questão a função *fminunc* aplica o método BFGS *Quasi-Newton* com busca linear via interpolação cúbica. Assim, durante esta etapa, a seguinte medida de erro é minimizada:

$$erro_j^{FDA} = \frac{1}{n_{samp}} \cdot \sum_{n=1}^{n_{samp}} \left| F_X^{PCE}(x_n^{EXP}, t_j) - F_X^{EXP}(x_n^{EXP}, t_j) \right| \quad (105)$$

onde:

$$F_X^{EXP}(x_n^{EXP}, t_j) = \frac{n}{n_{samp} + 1} \quad (106)$$

é a função de distribuição acumulada de probabilidades empírica, e a estimativa da FDA da aproximação PCE no ponto x_n^{EXP} é dada por:

$$F_X^{PCE}(x_n^{EXP}, t_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_n^{EXP} < x_1^{PCE} \\ \frac{k}{ns_{PCE} + 1} + \left(\frac{x_n^{EXP} - x_k^{PCE}}{x_{k+1}^{PCE} - x_k^{PCE}} \right) \cdot \frac{1}{ns_{PCE} + 1}, & \text{se } x_k^{PCE} \leq x_n^{EXP} \leq x_{k+1}^{PCE} \\ 1, & \text{se } x_n^{EXP} > x_{ns_{PCE}}^{PCE} \end{cases} \quad (107)$$

onde k é um inteiro entre 1 e $(ns_{PCE}-1)$.

Em outras palavras, a FDA da PCE é descrita por ns_{PCE} pontos, e aproximações lineares são utilizadas para determinar os valores da FDA nos pontos requeridos, isto é, $F_X^{PCE}(x_n^{EXP}, t_j)$. Isso evita a determinação da FDA analítica da aproximação em polinômios de caos, que pode ser de difícil obtenção, uma vez que a mesma pode depender de muitas variáveis aleatórias e apresentar muitos termos. Ao mesmo tempo, diminui-se o custo computacional associado a uma etapa que, conforme é apresentado na Seção 5.2, serve apenas para gerar o ponto inicial que será utilizado no processo de otimização relacionado à representação do processo estocástico como um todo.

Na Figura 11 é apresentada uma visão geral do processo de obtenção da aproximação em polinômios de caos para representar uma variável aleatória.

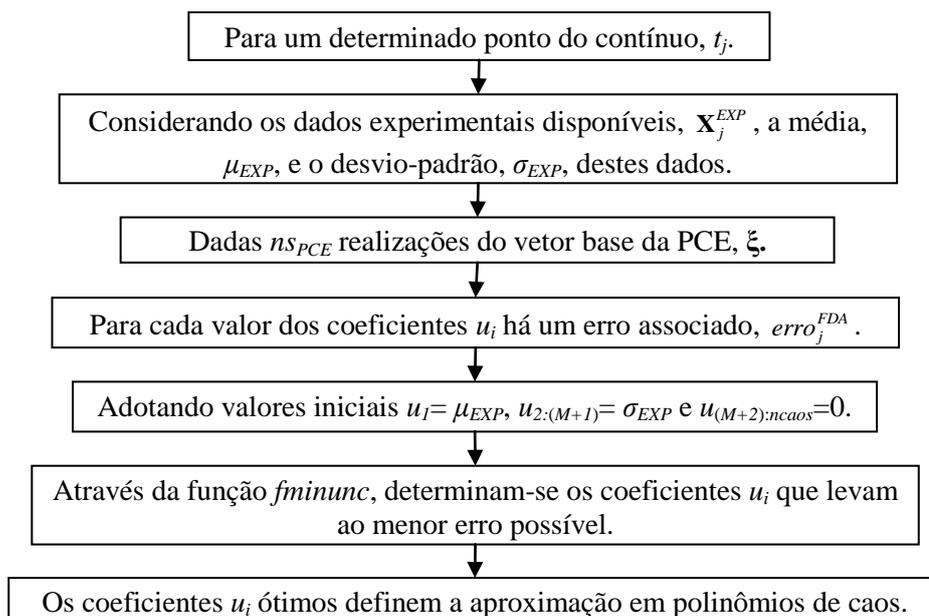


Figura 11 - Visão geral do processo para representação de uma v.a. via PCE.

A Figura 12 ilustra a aproximação linear $F_X^{PCE}(x_n^{EXP}, t_j)$ para o caso em que

$$x_k^{PCE} \leq x_n^{EXP} \leq x_{k+1}^{PCE}.$$

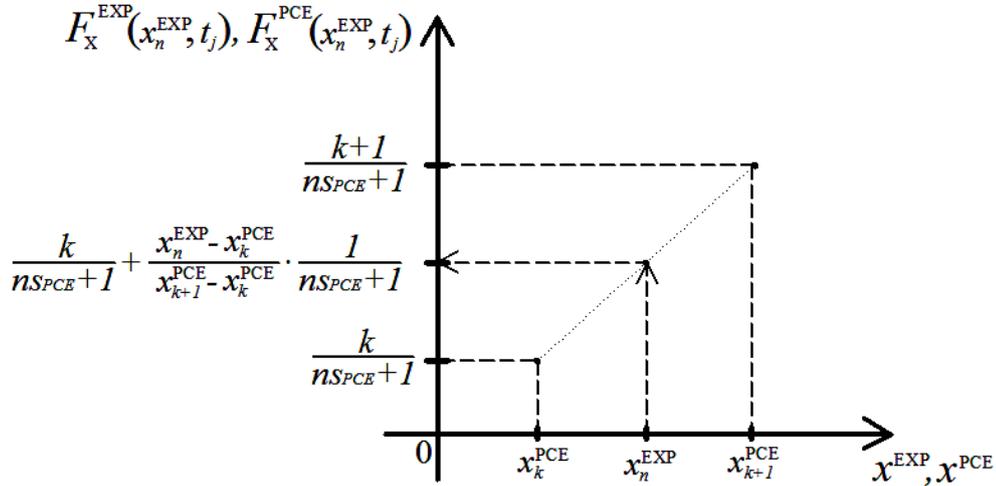


Figura 12 - Aproximação linear da FDA da representação em polinômios de caos.

Além da minimização do erro de representação da FDA, para cada t_j o teste de Kolmogorov-Smirnov é empregado para garantir que o modelo discreto em polinômios de caos apresenta mesma distribuição de probabilidades que os dados experimentais ou observados.

Para se ter uma ideia da ordem de grandeza do erro calculado através da Equação (105), a Figura 13 apresenta os erros obtidos ao comparar, para $n_{samp}=100$, a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória normal padrão, $N(0,1)$, e as FDA's das seguintes variáveis aleatórias: uniforme entre -2 e 2, $U(-2,2)$, e normais com média nula e desvios-padrão 0.70, 0.80 e 0.90, designadas por $N(0,0.70)$, $N(0,0.80)$ e $N(0,0.90)$, respectivamente.

Constata-se que erros da ordem de 0.035 ou menores que este valor são aceitáveis, pois estão relacionados a funções de distribuição acumulada razoavelmente próximas. Considerando eventuais irregularidades, comuns tanto a dados experimentais quanto a dados observados, ao invés das FDA's bem comportadas apresentadas na Figura 13, erros da ordem de 0.04 ou 0.05 ainda são aceitáveis.

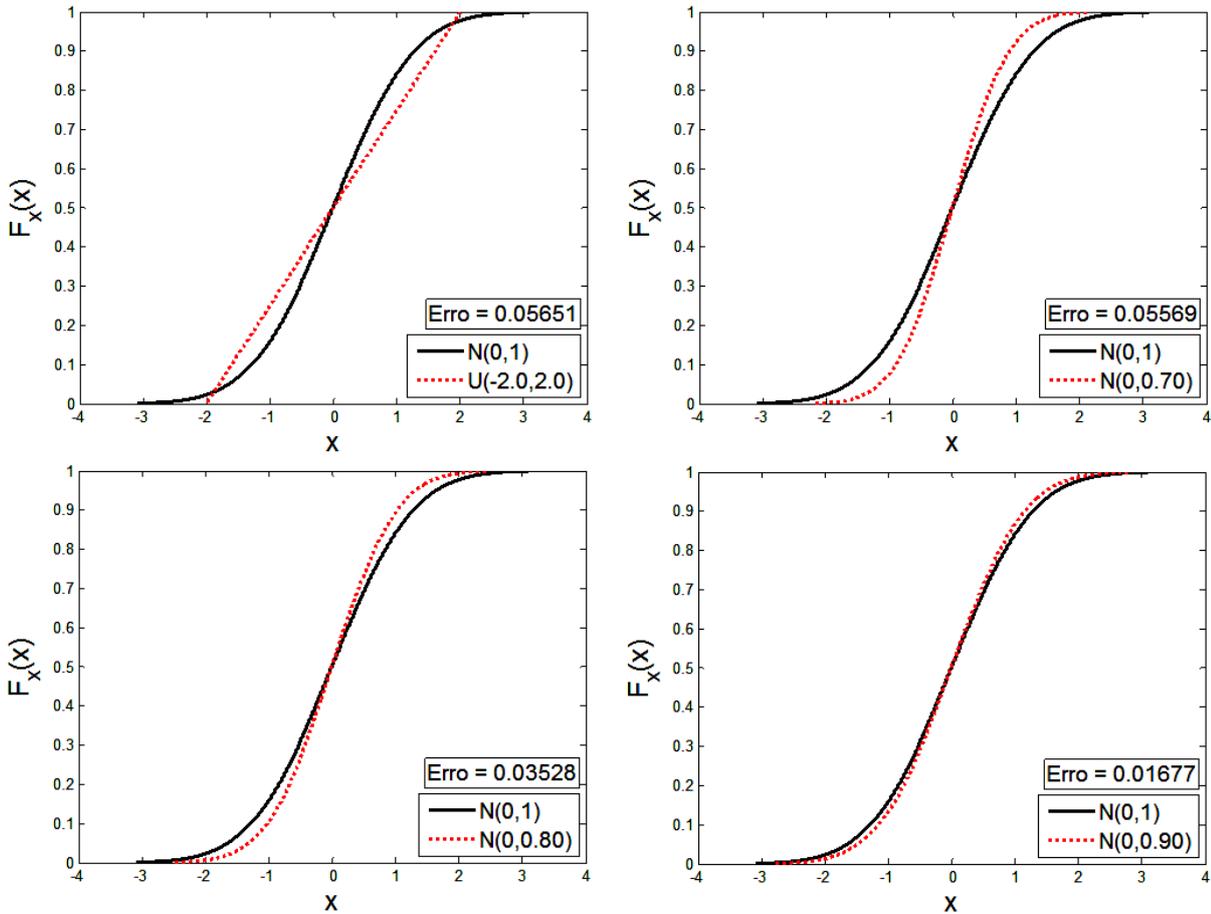


Figura 13 - Erro calculado através da Equação (105).

5.2. REPRESENTAÇÃO DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS UTILIZANDO POLINÔMIOS DE CAOS

A extensão da expansão em polinômios de caos para aproximar processos estocásticos, ao invés de variáveis aleatórias, pode ser feita inicialmente de forma discreta, determinando os coeficientes para pontos específicos do contínuo, t , e substituindo-os em seguida por funções do contínuo, $\hat{u}_i(t)$. Assim, a PCE é reescrita como:

$$X^{PCE}(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n_{caos}} \hat{u}_i(t) \Psi_i(\xi) \tag{108}$$

Observa-se que, para um dado ponto do contínuo, $X^{PCE}(t_j, \xi)$ é uma variável aleatória.

A definição das funções interpoladoras $\hat{u}_i(t)$ é fundamental para a capacidade de extrapolação e de interpolação dos dados. Enquanto a adoção de funções muito complexas

pode levar a resultados péssimos de extrapolação e a flutuações indesejáveis dos resultados entre pontos conhecidos, a adoção de funções muito simples pode levar à perda de detalhes importantes a respeito do comportamento do processo estocástico. Assim, o compromisso entre complexidade das funções interpoladoras e capacidade de extrapolação/interpolação deve ser buscado em cada problema levando em conta características intrínsecas aos dados que se deseja representar e considerando ainda que tais funções serão avaliadas milhares de vezes durante o processo de otimização. Portanto, na escolha das funções $\hat{u}_i(t)$, conhecimento a respeito do processo aleatório a ser modelado deve ser utilizado e não se deve desprezar o custo computacional associado às funções, ou seja, deve-se buscar simplificá-las ao máximo.

Estas funções são definidas para cada aplicação específica, nas seções 5.4 e 5.5, entretanto, as mesmas apresentam um formato bem definido, detalhado a seguir e baseado em n_{par} parâmetros p_k^i , n_{coef} coeficientes a_j^i , e funções base $\tilde{v}_j(t)$ em quantidade igual ao número de coeficientes.

Cada função base pode depender do contínuo t , de constantes quaisquer, e de um ou mais parâmetros dentre os parâmetros p_k^i . Um exemplo de função base é apresentado a seguir:

$$\tilde{v}_1(t) = p_1^i \cdot (t - t_0)^{p_2^i} + p_3^i \quad (109)$$

no qual t_0 é uma constante.

Após a definição das funções base, as funções de interpolação, $\hat{u}_i(t)$, são calculadas a partir da equação:

$$\hat{u}_i(t) = \sum_{j=1}^{n_{coef}} a_j^i \cdot \tilde{v}_j(t) \quad (110)$$

A diferença básica entre parâmetros e coeficientes é que para o primeiro grupo o usuário deve informar valores iniciais, enquanto os valores iniciais dos coeficientes são determinados por mínimos quadrados, minimizando a diferença entre a Equação (110) e os pontos u_i^j , provenientes da otimização discreta apresentada na Seção 5.1, Subseção 5.1.2. A Figura 14 ilustra a obtenção dos coeficientes a_j^i , dados os parâmetros p_k^i e os pontos u_i^j , para um processo estocástico fictício e PCE com dimensão e ordem unitárias.

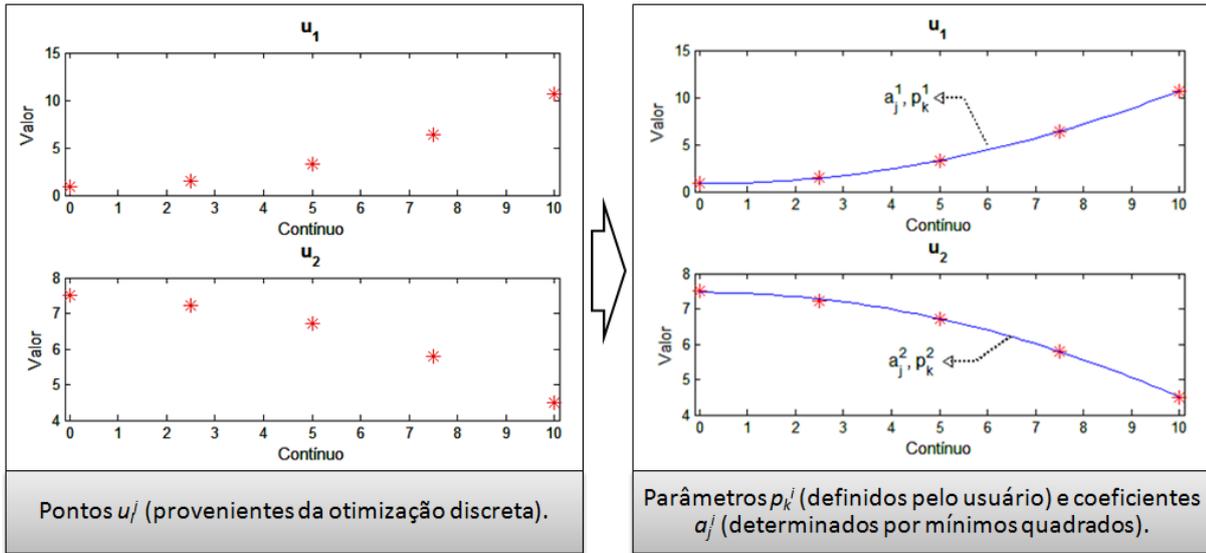


Figura 14 - Resultado da primeira otimização (pontos u_j^i , gráfico da esquerda) e determinação dos coeficientes a_j^i , dados os parâmetros p_k^i , (gráfico da direita), para um exemplo fictício.

Finalmente, os valores iniciais dos coeficientes a_j^i e dos parâmetros p_k^i definem o ponto inicial de um processo de otimização no qual tanto os coeficientes quanto os parâmetros são admitidos como variáveis de projeto. O problema de otimização apresenta restrições em termos de limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, definidos pelo usuário, e é resolvido utilizando o algoritmo do ponto interior através da função *fmincon* do MATLAB®, conforme descrito em Byrd *et al.* (1999), Byrd *et al.* (2000) e Waltz *et al.* (2006). As restrições são respeitadas em todas as iterações, isto é, não se permite que as variáveis de projeto assumam valores fora dos intervalos definidos, e adota-se uma tolerância de 10^{-8} tanto na variação das variáveis de projeto quanto na variação da função objetivo.

A princípio a mesma medida de erro utilizada na otimização discreta poderia ser utilizada nesta etapa; entretanto, como se trata de um problema de otimização com mais variáveis de projeto e como o erro é calculado para todos os pontos t_j do contínuo, a função objetivo $erro^{FDA}$ se torna excessivamente complexa, levando a problemas de convergência, mesmo ao se empregar o ponto inicial definido anteriormente. Assim, a medida de erro é substituída por $erro^{MOM}$, a soma da diferença normalizada entre os primeiros n_{mom} momentos estatísticos da representação e dos dados experimentais (ou observados), para todos os pontos t_j , dada pela Equação (111):

$$erro^{MOM} = \sum_j \sum_{q=1}^{n_{mom}} \left| \frac{m_q(X^{PCE}(t_j, \xi)) - m_q(\mathbf{X}_j^{EXP})}{m_q(\mathbf{X}_j^{EXP})} \right| \quad (111)$$

onde:

$$m_q(X) = \begin{cases} E(X), & \text{se } q=1 \\ E(X - \mu_X)^q, & \text{se } q>1 \end{cases} \quad (112)$$

e $E(.)$ é o operador valor esperado.

Além disso, para que não haja perdas na descrição da função de distribuição acumulada experimental, calcula-se o $erro^{FDA}$ relativo ao ponto inicial do segundo processo de otimização, e aplica-se este valor como restrição. Assim, o ponto de projeto obtido pela segunda otimização é melhor ou igual ao ponto inicial, em termos de ambas as medidas $erro^{MOM}$ e $erro^{FDA}$.

De maneira resumida, a solução discreta, que corresponde à determinação dos coeficientes u_i^j , é efetuada somente para obter um bom ponto inicial para um processo de otimização mais geral. Neste segundo processo os parâmetros e coeficientes que definem as funções $\hat{u}_i(t)$ são determinados de modo que os primeiros n_{mom} momentos estatísticos da representação se aproximem ao máximo dos respectivos momentos estatísticos dos dados experimentais, mas mantendo a qualidade da representação da FDA. O segundo processo é efetuado considerando todos os pontos t_j do contínuo, simultaneamente.

A Figura 15 apresenta uma visão geral do processo de obtenção da aproximação em polinômios de caos para representar um processo estocástico.

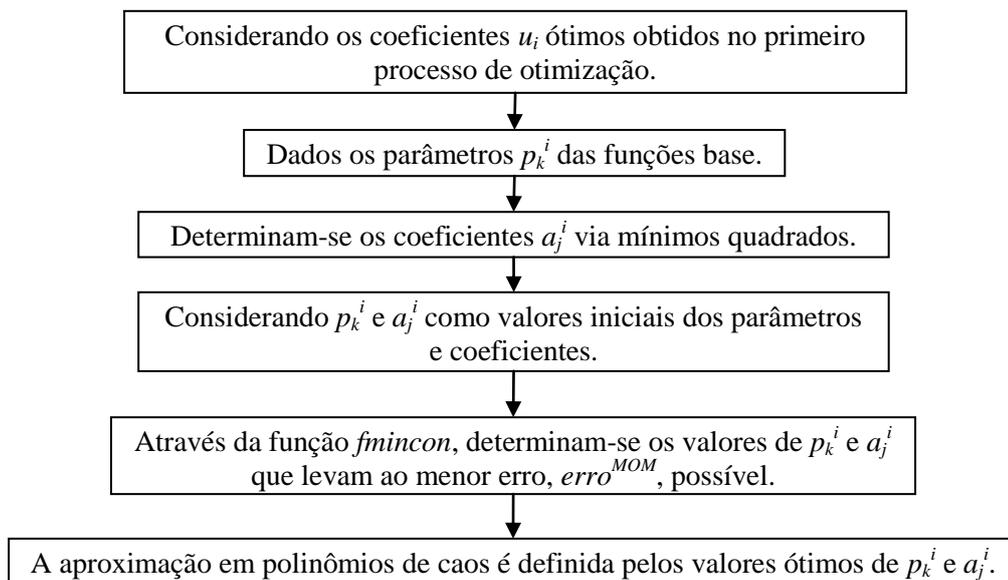


Figura 15 - Visão geral do processo para representação de um p.e. via PCE.

Se o processo estocástico em questão apresenta autocorrelação não nula e caso seja possível determinar a função de autocorrelação do mesmo, esta informação pode ser incorporada à representação substituindo as variáveis aleatórias ξ por processos estocásticos Gaussianos estacionários $\xi(t)$, com função de autocorrelação pré-determinada, de maneira semelhante à apresentada em Sakamoto & Ghanem (2002), isto é:

$$X^{PCE}(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n_{\text{caos}}} \hat{u}_i(t) \Psi_i(\xi(t)) \quad (113)$$

Como para cada ponto t do contínuo, $\xi(t)$ é um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão, mantendo os polinômios de Hermite como funções $\Psi_i(\cdot)$ o teorema de Cameron-Martin permanece válido, para cada t separadamente. Os processos estocásticos $\xi(t)$ podem ser representados através da chamada expansão de Karhunen-Loève, abordada na seção seguinte.

5.3. EXPANSÃO DE KARHUNEN-LOÈVE

Embora a expansão de Karhunen-Loève (Loève, 1978), ou KLE (*Karhunen-Loève Expansion*), possa ser vista como outra maneira de representar processos estocásticos quaisquer, no presente trabalho ela é utilizada somente para representar os processos estocásticos estacionários $\xi(t)$ nos quais a base dos polinômios de caos está indexada, quando for possível determinar a função de autocorrelação do processo.

De acordo com Sudret & Der Kiureghian (2000), a expansão de Karhunen-Loève com n_{KLE} termos de um dado processo estocástico, denominada $\hat{H}(t, \xi)$, é definida por:

$$\hat{H}(t, \xi) = \mu + \sum_{i=1}^{n_{KLE}} \sigma \sqrt{\lambda_i} \cdot \varphi_i(t) \cdot \xi_i \quad (114)$$

onde μ e σ são a média e o desvio-padrão do processo, e (λ_i, φ_i) são soluções do seguinte problema de autovalores:

$$\int_D \rho(t_1, t_2) \varphi_i(t_2) dt_2 = \lambda_i \varphi_i(t) \quad (115)$$

no qual $\rho(t_1, t_2)$ é a função índice de autocorrelação e D é o domínio do processo.

As funções $\varphi_i(t)$ são as chamadas autofunções enquanto os valores λ_i são os respectivos autovalores.

Considerando função índice de autocorrelação do tipo exponencial e domínio retangular $D=[-a, a]$, o problema de autovalores pode ser reescrito como:

$$\int_{-a}^a \varphi_i(t_2) e^{-\frac{|t_1-t_2|}{l}} dt_2 = \lambda_i \varphi_i(t) \quad (116)$$

onde l é o chamado comprimento de correlação. A solução para este caso é obtida analiticamente, conforme apresentado em Ghanem & Spanos (1991), e se resume às seguintes equações:

- Para todos os casos:

$$\lambda_i = \frac{2 \cdot l}{1 + \omega_i^2 l^2} \quad (117)$$

- Para i ímpar, $i \geq 1$:

$$\varphi_i(t) = \frac{\cos \omega_i t}{\sqrt{a + \frac{\sin 2\omega_i a}{2\omega_i}}} \quad (118)$$

onde ω_i é a solução da equação:

$$\frac{1}{l} - \omega_i \tan \omega_i a = 0 \quad (119)$$

no intervalo $[(i-1)\pi/a, (i-1/2)\pi/a]$.

- Para i par, $i \geq 2$:

$$\varphi_i(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\sqrt{a - \frac{\sin 2\omega_i a}{2\omega_i}}} \quad (120)$$

onde ω_i é a solução da equação:

$$\frac{1}{l} \tan \omega_i a + \omega_i = 0 \quad (121)$$

no intervalo $[(i-1/2)\pi/a, i\pi/a]$.

Caso o domínio D não seja simétrico, isto é, $D=[a_{min}, a_{max}]$, é necessário primeiramente transformá-lo em simétrico através da seguinte equação:

$$D' = [-a, a] = \left[\frac{a_{min} - a_{max}}{2}, \frac{a_{max} - a_{min}}{2} \right] \quad (122)$$

5.4. REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE CORROSÃO VIA PCE

Tanto na literatura relacionada à corrosão em dutos quanto na prática (Penspen Group, 2002), é comum representar um defeito de corrosão com forma arbitrária de maneira simplificada, considerando somente a máxima profundidade, d_{max} , e o comprimento do defeito na direção longitudinal do duto, L , como mostrado na Figura 16, onde w é a espessura da parede do duto.

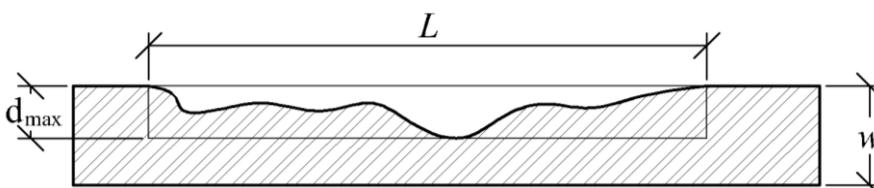


Figura 16 - Dimensões do defeito de corrosão.

Como não foram encontrados dados experimentais nem dados observados para o crescimento do comprimento do defeito, a expansão em polinômios de caos é utilizada para representar apenas a profundidade máxima, conforme descrito nas subseções seguintes. Para o comprimento do defeito, no Capítulo 7 é utilizado um modelo simples à parte, obtido da literatura, apesar de que tanto o comprimento do defeito quanto sua profundidade estão associados ao mesmo processo físico, de maneira que seus modelos deveriam ser dependentes.

5.4.1. Modelo preditivo de crescimento do defeito

O modelo da literatura com o qual a PCE é comparada é o chamado modelo preditivo de crescimento do defeito (*Predictive Pit Growth Model*), desenvolvido por Caleyó *et al.* (2009) para descrever a evolução de d_{max} ao longo do tempo. Este modelo, daqui em diante designado “modelo de Caleyó”, é baseado em dados reais constituídos pela máxima profundidade do defeito e por diversos parâmetros que descrevem o solo presente no entorno do duto, no local onde o defeito foi encontrado.

Os dados utilizados em Caleyó *et al.* (2009) foram coletados durante um período de três anos a partir de 250 escavações efetuadas ao longo da região sul do México e apresentados em Velázquez *et al.* (2010). As medidas da máxima profundidade do defeito de corrosão externa foram obtidas para os chamados *pits* de corrosão, identificados em campo como sendo perdas de metal causadas por corrosão, com diâmetro menor ou igual a duas vezes a espessura da parede do duto. Os dutos estudados haviam sido postos em serviço por períodos de até 50 anos.

O modelo de Caleyó leva em conta o tempo de iniciação da corrosão, t_0 , e várias propriedades do solo que envolve o duto. Para dados valores dos parâmetros k , α e t_0 , a profundidade do defeito para o instante t é nula se $t < t_0$; caso contrário, ela é calculada por:

$$d_{max}(t) = k(t - t_0)^\alpha \quad (123)$$

Os parâmetros k e α são obtidos através da soma de várias variáveis aleatórias que descrevem as propriedades do solo, presentes em Caleyó *et al.* (2009), e, portanto, são também variáveis aleatórias. Nesta Tese, somente a categoria geral de solo, que inclui todos os dados apresentados em Velázquez *et al.* (2010), é considerada. Neste caso, as estimativas de Monte Carlo para a média dos parâmetros do modelo de crescimento dos *pits* são $t_0=2.88$ anos, $k=0.164$ mm/(ano) $^\alpha$ e $\alpha=0.78$. No entanto, as comparações apresentadas mais adiante neste capítulo são feitas considerando momentos estatísticos calculados através de amostras de tamanho 1 milhão para cada uma das variáveis que descrevem o solo, o que leva a amostras de igual tamanho para k e α .

5.4.2. Modelo em polinômios de caos

Para a construção do modelo utilizando a PCE, conhecimento a respeito do processo estocástico é incorporado através da adoção de funções interpoladoras que seguem o modelo de corrosão não linear de Caleyó *et al.* (2009), isto é:

$$\hat{u}_i(t) = a_1^i \cdot (t - t_0)^\alpha \quad (124)$$

onde $t_0=2.88$ e $\alpha=0.78$, e a_1^i são os coeficientes a serem determinados, para $i=1, \dots, n_{caos}$. Nota-se que, para este caso, a função base é dada por:

$$\tilde{v}_1(t) = (t - t_0)^\alpha \quad (125)$$

portanto, não depende de nenhum parâmetro p_k^i , apenas do contínuo t , que representa o tempo, e das constantes t_0 e α .

A princípio, t_0 e α poderiam ser considerados parâmetros das funções interpoladoras, cujos valores seriam determinados durante o processo de construção da PCE. Porém, ao dar mais liberdade ao modelo através da inserção destas constantes como parâmetros, problemas de *overfitting* passam a ocorrer, resultando em modelos em polinômios de caos desprovidos de significado físico, o que leva a descartar a possibilidade de adotar t_0 e α como parâmetros.

O modelo em polinômios de caos para representar a profundidade máxima do defeito de corrosão ao longo do tempo é construído de acordo com o procedimento descrito nas seções 5.1e 5.2 do presente capítulo, considerando $n_{SPCE}=50$, $n_{mom}=3$, e o limite $[-10^3 \ 10^3]$ imposto a todos os coeficientes a_j^i . Somente os pontos t_j para os quais os momentos estatísticos de ordem 1 até 3 podem ser calculados foram considerados, isto é, amostras de dados observados de tamanho maior que 2 são requeridas para cada ponto t_j .

No intuito de se verificar qual a PCE que melhor se aplica aos dados em estudo, isto é, qual a dimensão M e qual a ordem p mais adequadas, são testadas expansões em polinômios de caos com dimensões estocásticas 1 e 2 e ordem variando de 1 a 10. Tanto para a dimensão estocástica 1 quanto para dimensão estocástica 2, as melhores aproximações foram obtidas para ordem unitária, o que implica em 2 e 3 termos no somatório apresentado na Equação (108), respectivamente. Porém, como o erro final obtido para os dois casos, calculado pela Equação (111), foi semelhante, e a dimensão estocástica 2 apresenta custo

computacional um pouco mais alto, a aproximação com dimensão estocástica unitária, denominada PCE1, é adotada e detalhada daqui em diante.

Neste caso, o $erro^{FDA}$ final foi da ordem de 0.077, média para todos os pontos t_j do contínuo utilizados, o que corresponde a uma aproximação não muito boa, conforme apresentado na Seção 5.1. Discussões mais detalhadas a respeito da qualidade da representação obtida são efetuadas mais adiante, quando da comparação da PCE com os dados observados e com o modelo de Caleyó.

A PCE1 pode ser completamente descrita pela Equação (108), juntamente com as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(t) &= 0.1801 \cdot (t - 2.88)^{0.78} \\ \hat{u}_2(t) &= 0.0862 \cdot (t - 2.88)^{0.78}\end{aligned}\tag{126}$$

E a base de polinômios de Hermite usada neste caso é:

$$\Psi_1(\xi) = 1; \quad \Psi_2(\xi) = \xi.\tag{127}$$

Assim, a Equação (108) pode ser reescrita como:

$$X^{PCE}(t, \xi) = \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) \cdot \xi\tag{128}$$

Trata-se, portanto, de um processo estocástico cuja média é descrita por $\hat{u}_1(t)$ e o desvio-padrão por $\hat{u}_2(t)$.

A Figura 17 mostra os coeficientes u_i^j resultantes do processo discreto de otimização (pontos vermelhos), bem como as funções $\hat{u}_i(t)$ (linhas azuis), resultantes do segundo processo de otimização. Na Figura 18 são comparadas as funções de distribuição acumulada empírica e aproximada, para quatro valores diferentes do contínuo. A FDA da expansão em polinômios de caos apresentada é obtida considerando 1000 realizações da PCE.

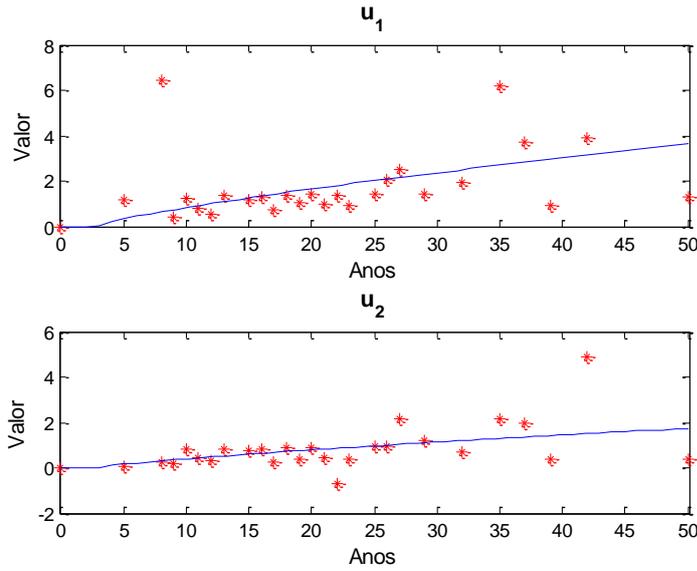


Figura 17 - Resultados discretos versus funções interpoladoras.

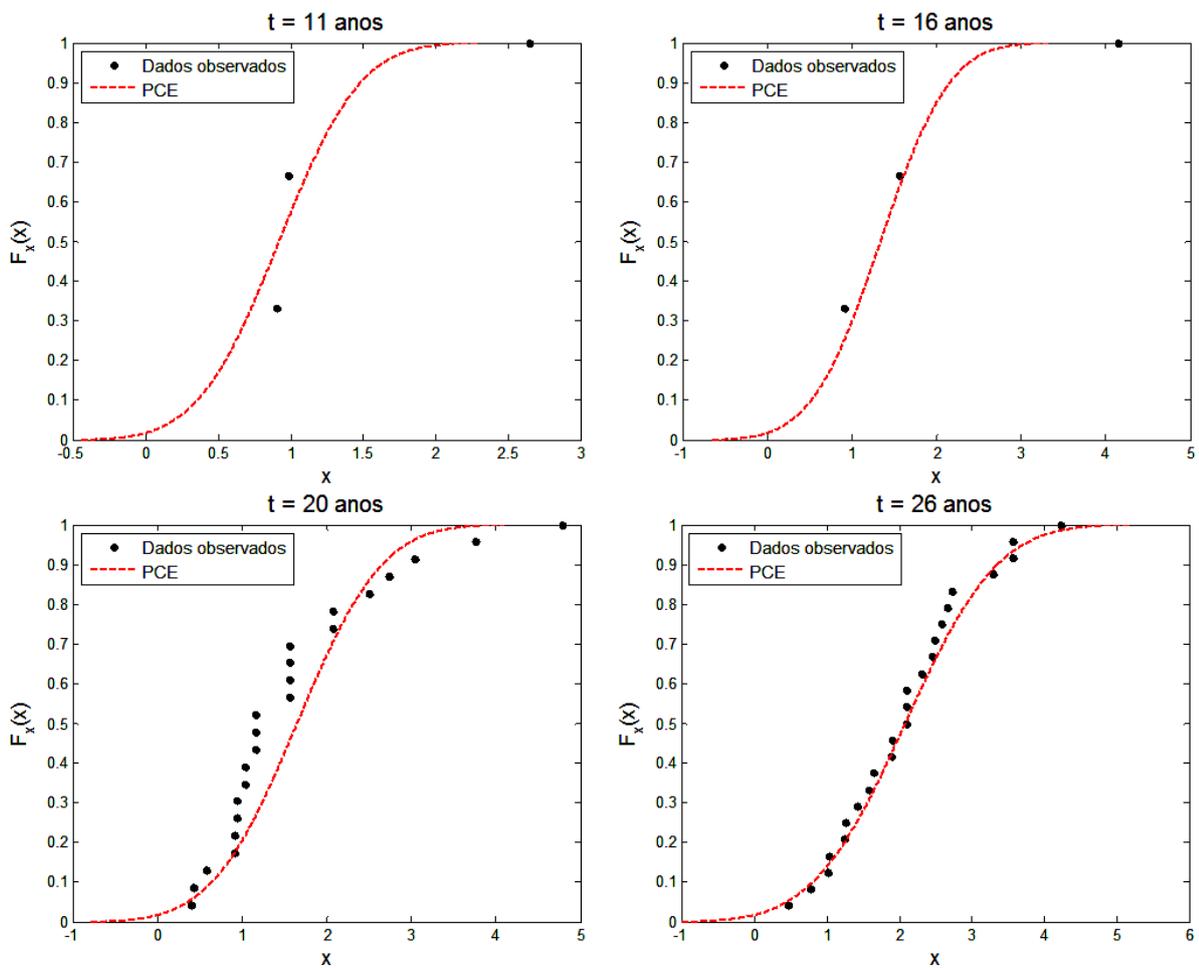


Figura 18 - Funções de distribuição acumulada empírica e via PCE, para quatro valores do contínuo t , processo estocástico de corrosão.

Constata-se que ocorrem grandes oscilações nos valores dos coeficientes u_i^j resultantes da otimização discreta e que, além da grande variação da quantidade de dados observados para cada ponto do contínuo, há também uma variação significativa do comportamento da FDA empírica. Mesmo assim, a expansão em polinômios de caos captura adequadamente o comportamento do processo estocástico em questão.

A Figura 19 apresenta uma comparação visual entre os dados reais de corrosão, a representação PCE1 e o modelo de Caleyó, sendo estes dois últimos representados por suas médias, μ , e suas médias mais ou menos um desvio-padrão, $\mu \pm \sigma$.

Observa-se que os dados reais são bastante dispersos, o que é típico de dados de corrosão, especialmente quando dados relacionados a diferentes tipos de solo são agrupados. Entretanto, os dados de Velázquez *et al.* (2010) apresentam dispersão semelhante, mesmo para tipos específicos de solo. Provavelmente, o motivo mais impactante para a dispersão dos dados é o fato que cada medida foi obtida para um trecho diferente de duto, o que faz com que seja perdida a correlação do processo de corrosão ao longo do tempo. Assim, torna-se extremamente difícil a obtenção de um modelo contínuo, suave e preciso para representar tais dados.

O modelo desenvolvido por Caleyó *et al.* (2009) é o mais preciso modelo para crescimento de corrosão em dutos conhecido pelo autor da presente Tese, e um dos poucos que incorporam o tempo de iniciação da corrosão; mesmo assim, os erros em relação ao desvio-padrão são muito grandes, principalmente para maiores tempos de exposição. O modelo PCE1 desenvolvido neste trabalho, incorporando o formato básico e algumas constantes provenientes do modelo de Caleyó, consegue reduzir significativamente os erros com relação aos momentos estatísticos dos dados reais.

Como há dados para dutos em serviço por até cinquenta anos, tempo de vida comumente utilizado em projetos de estruturas deste tipo, optou-se por não fazer extrapolação dos resultados com nenhum dos modelos.

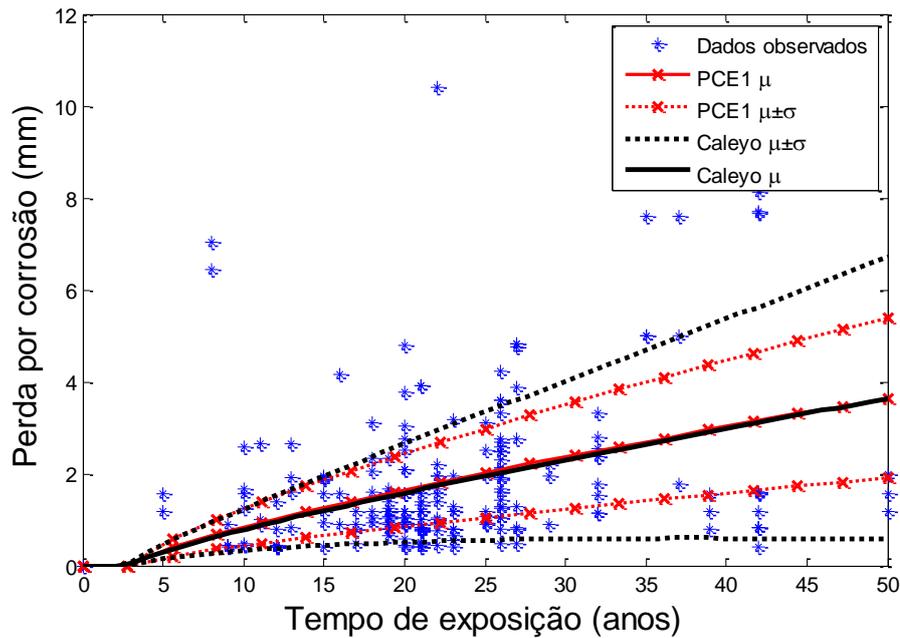


Figura 19 - Dados observados *versus* modelos PCE e de Caleyó *et al.* (2009).

A Tabela 4 apresenta o erro percentual médio para a média e o desvio-padrão, comparando os momentos das expansões PCE1 e PCE2 e do modelo de Caleyó com os momentos observados. Essas medidas de erro são obtidas calculando a diferença absoluta entre momentos, dividindo-a pelo momento observado, e calculando a média sobre todos os pontos discretos do contínuo t_j considerados, o que corresponde ao cálculo efetuado pela Equação (111) para um momento específico, ou seja, sem o somatório sobre a quantidade de momentos utilizados. No caso do terceiro momento, para evitar divisões por zero, um erro absoluto é utilizado ao invés do erro percentual, uma vez que o terceiro momento observado assume valores próximos ou iguais a zero em alguns pontos. A tabela confirma que os resultados obtidos via polinômios de caos foram melhores que os do modelo de Caleyó, e que a aproximação pode ser considerada boa levando em conta a grande dispersão apresentada pelos dados reais.

Tabela 4 - Erro médio percentual em relação aos dados observados de corrosão.

	Erro médio (%) em relação aos dados observados		
	PCE1	PCE2	Caleyó
Média	45.959	45.963	45.172
Desvio-padrão	68.246	68.209	117
$m_3(X)$	2.378*	2.378*	12.860*

*Para $m_3(X)$ utiliza-se erro absoluto ao invés do erro percentual.

5.5. REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE FADIGA VIA PCE

5.5.1. Propagação de trincas de fadiga

Ensaio experimentais mostram que, mesmo nas condições controladas de um laboratório, a taxa de propagação de trincas de fadiga não é descrita adequadamente por uma equação determinística. Porém, é comum representar os dados obtidos em laboratório através de relações determinísticas tais como a chamada Lei de Paris:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \quad (129)$$

na qual os parâmetros (C, m) são determinados a partir de um conjunto de pontos experimentais.

Exemplos de utilização direta da Lei de Paris e de determinação dos parâmetros são encontrados em Varanasi & Whittaker (1976) e Branco *et al.* (2012). Um exemplo de conjunto de pontos é apresentado na Figura 20, onde são mostrados resultados de um ensaio experimental de propagação de trincas por flexão alternada em trilhos ferroviários.

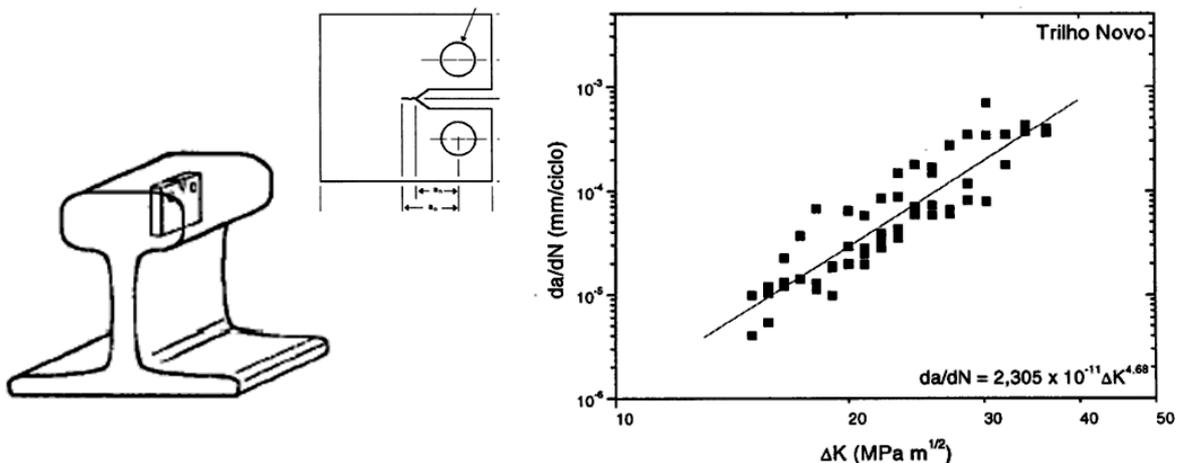


Figura 20 - Resultados de propagação de trincas em trilhos (Limberger, 2000).

A representação através de relações determinísticas tem sérias limitações. Ao utilizar uma curva que descreva a taxa de propagação “média”, a vida do componente será superestimada, e o usuário provavelmente arcará com as consequências (custos de falha). Por

outro lado, ao fazer uma aproximação conservadora e descrever a taxa de propagação máxima, a vida do componente será subestimada e o usuário arcará com custos de substituições prematuras e/ou de inspeções excessivas.

Para evitar as limitações supracitadas, a relação determinística expressa pela Equação (129) é comumente transformada em uma relação estocástica. Dentre as possíveis opções para obtenção de uma lei de Paris estocástica estão: a consideração do parâmetro C como variável aleatória e de m constante (Valdebenito & Schuëller, 2010); a consideração do parâmetro C como variável aleatória e m como uma função de C (Engesvik, 1981); ou mesmo descrições mais complexas do parâmetro C , como, por exemplo, o modelo apresentado por Ortiz & Kiremidjian (1986) e utilizado por Madsen *et al.* (1987) e Cremona (1996):

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_1}{C_2(a)} \Delta K^m \quad (130)$$

onde C_1 é uma variável aleatória que representa variações em C de realização para realização, enquanto $C_2(a)$ é um processo estocástico estacionário com distribuição lognormal que representa variações de C dentro da realização. No trabalho de Ortiz & Kiremidjian (1986), esta variação da Lei de Paris foi aplicada aos dados experimentais de Virkler *et al.* (1978), sendo necessária a determinação da função de autocovariância dos dados experimentais para definição de $C_2(a)$.

Outros modelos para propagação de trincas de fadiga também estão disponíveis na literatura. Como exemplo, o trabalho de Yang *et al.* (1987) apresenta diversos modelos estocásticos e aborda a utilização de modelos tais como o de Forman e o do seno hiperbólico em aplicações envolvendo estruturas aeronáuticas.

No presente trabalho, o crescimento da trinca é representado por uma expansão em polinômios de caos indexados em processos estocásticos gaussianos. Estes, por sua vez, são representados através da expansão de Karhunen-Loève. Ambas as expansões são construídas utilizando os dados experimentais de crescimento de trinca apresentados na próxima seção.

5.5.2. Dados experimentais de Ghonem & Dore

De modo geral, no modelo aqui desenvolvido os polinômios de caos são utilizados para representar a média e momentos de ordem superior do processo de crescimento de

trincas como um todo, enquanto a expansão de Karhunen-Loève é utilizada para representar as oscilações dentro de cada realização do processo. Tanto a ideia quanto o modelo resultante são bastante semelhantes ao que foi proposto por Sakamoto & Ghanem (2002), onde a PCE é usada para representar as densidades marginais de probabilidades e a KLE é usada para obter uma representação precisa da função de correlação. Entretanto, em Sakamoto & Ghanem (2002) não só a base, mas também os próprios coeficientes da PCE são escritos em função da KLE. No presente trabalho optou-se por trabalhar separadamente os coeficientes da PCE, o que permite uma interpretação mais fácil e direta do modelo obtido e um controle maior das capacidades de interpolação e extrapolação. Além disso, enquanto em Sakamoto & Ghanem (2002) o exemplo numérico consiste na construção da representação para um processo estocástico com distribuição marginal conhecida, neste trabalho o modelo é construído utilizando dados experimentais de crescimento de trincas de fadiga, presentes na literatura e apresentados a seguir.

Os dados de Ghonem & Dore (1987), bastante explorados e citados em diversos artigos (Ditlevsen, 1992; Rocha & Schuëller, 1996; Wu & Ni, 2007), foram obtidos através de testes conduzidos utilizando a liga de alumínio 7075-T6, coletando dados de tamanho da trinca *versus* número de ciclos de carga para três diferentes níveis de tensão. Para cada nível foram utilizados 60 corpos de prova idênticos. Neste trabalho somente os dados da primeira condição de carregamento são utilizados.

Nos testes de Ghonem & Dore (1987), foram adotados corpos de prova retangulares ($320\text{mm} \times 101\text{mm}$) com espessura de 3.175mm e uma trinca centralizada, conforme pode ser visto na Figura 21 (corpo de prova) e na Figura 22 (trinca inicial).

Na condição de teste I as placas foram submetidas a carregamentos cíclicos com frequência igual a 10Hz , variando de $P_{min}=13.68\text{kN}$ a $P_{max}=22.79\text{kN}$, o que corresponde a $\Delta P=9.11\text{kN}$ e $R=P_{min}/P_{max}=0.6$. Com base nas recomendações da norma ASTM E647, o comprimento inicial da trinca foi escolhido como 10mm ; entretanto, os tamanhos de trinca foram obtidos para trincas de 9.0mm em diante.

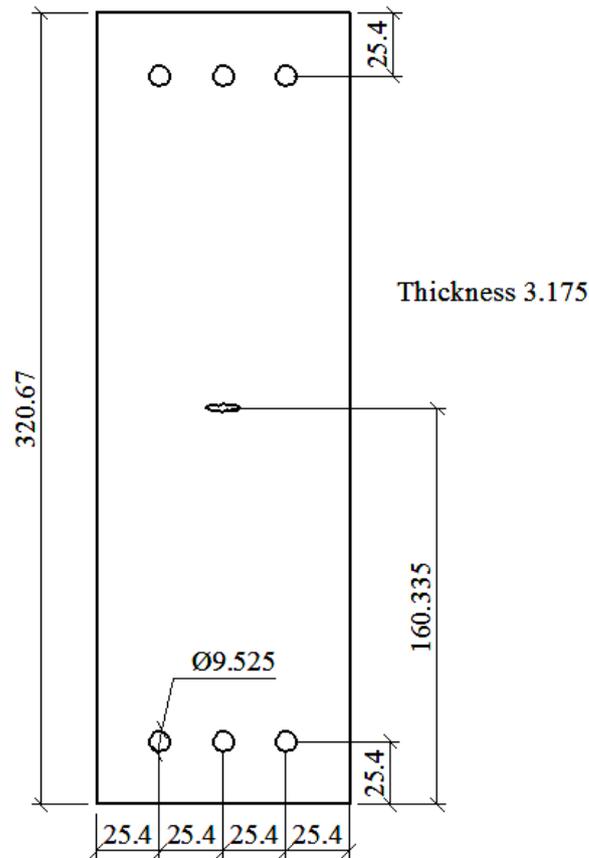


Figura 21 - Corpo de prova utilizado (dimensões em mm).

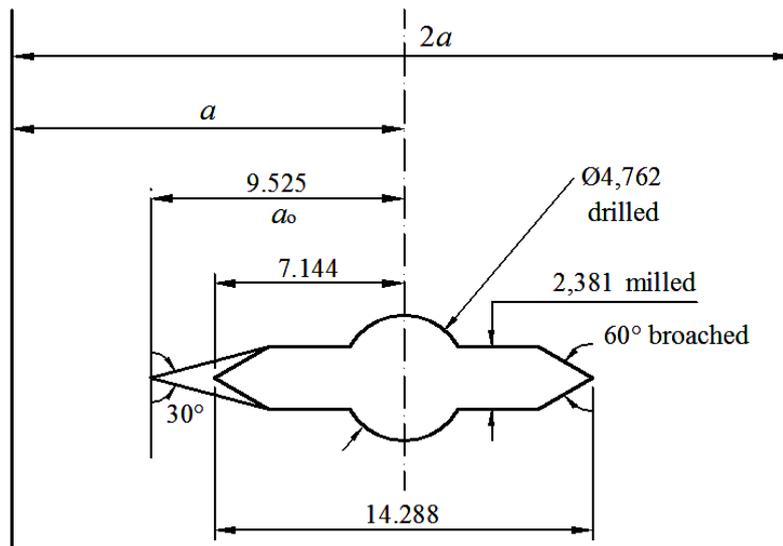


Figura 22 - Detalhe da trinca inicial (dimensões em mm).

Os resultados do experimento são apresentados na Figura 23, em termos de tamanho da trinca, a , versus número de ciclos de carregamento, N . No entanto, no intuito de poder utilizar a representação em polinômios de caos para casos diferentes do ensaiado, desde que o

material utilizado seja o mesmo, optou-se por trabalhar com a taxa de propagação da trinca, da/dN , versus variação do fator de intensidade de tensões, ΔK . Assim, com base nos dados a taxa da/dN foi calculada utilizando diferenças finitas centrais.

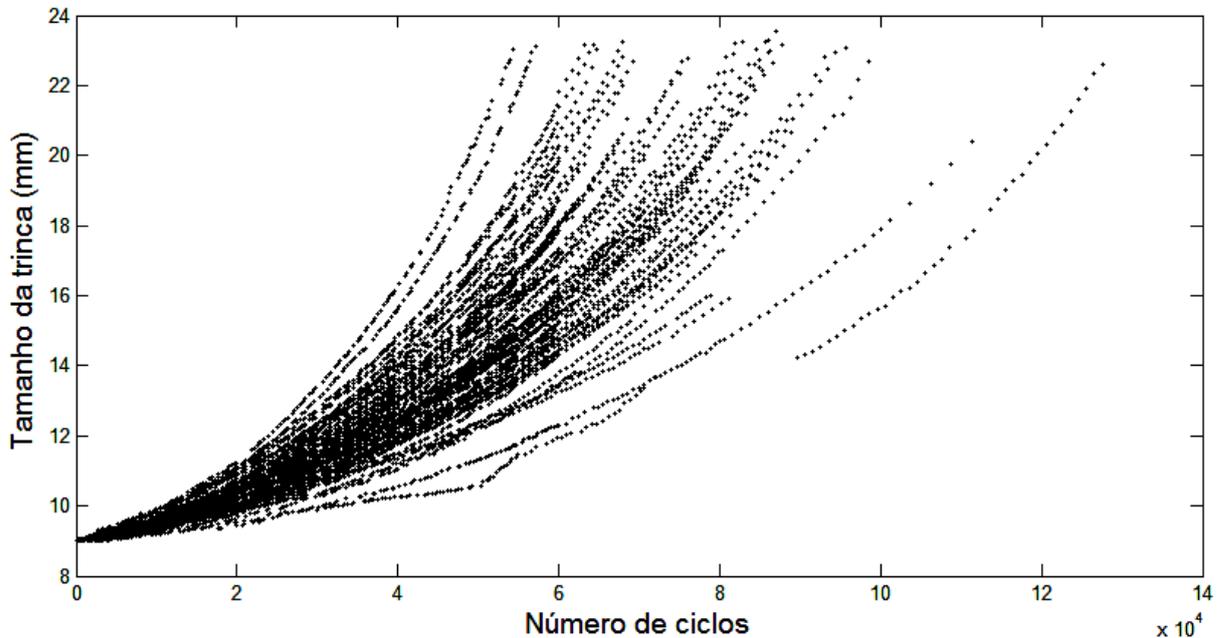


Figura 23 - Tamanho da trinca versus número de ciclos para 60 corpos de prova (condições de teste I).

Levando em conta a variação da tensão aplicada, ΔS , e a função da geometria, $Y(a)$, calcula-se a variação do fator de intensidade de tensões para cada tamanho de trinca a através da seguinte equação:

$$\Delta K = \Delta S \cdot Y(a) \cdot \sqrt{\pi a} \quad (131)$$

onde $Y(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{w}\right)}$ é a função de geometria para placa de espessura finita com uma fissura central (Fett *et al.*, 1987), sendo w a largura da placa (igual a 101.6mm).

Os dados são plotados então em função de $\ln(da/dN) \times \ln(\Delta K)$, porém, como as medições não foram feitas para o mesmo número de ciclos nem para o mesmo tamanho de trinca é necessário sincronizar os dados em $\ln(\Delta K)$ antes de poder aplicar a PCE. Tal sincronização é feita utilizando interpolações lineares (utilizando dois a dois dados para cada interpolação) e mantendo o mesmo número de dados ao longo de $\ln(\Delta K)$.

Denominando $\Delta \ln(\Delta K)$ a variação aplicada em $\ln(\Delta K)$ em cada passo do experimento ou simulação, observa-se que uma variação constante em $\ln(\Delta K)$ não contempla a necessidade de uma melhor discretização para menores valores de $\ln(\Delta K)$, para os quais há mais dados disponíveis, nem contempla a existência de uma menor quantidade de dados experimentais para maiores valores de $\ln(\Delta K)$. Isso levou a adotar uma variação linear de $\Delta \ln(\Delta K)$, partindo de 10% da variação constante (que seria necessária para obter o mesmo número de dados) até 190% da mesma. A variação real de $\ln(\Delta K)$ ao longo dos “passos” do experimento (em preto) e as obtidas com $\Delta \ln(\Delta K)$ linear e constante (azul e vermelho, respectivamente) são apresentadas na Figura 24. Nota-se que a variação constante leva a valores de $\ln(\Delta K)$ mais próximos do valor máximo experimental, ao longo dos passos, enquanto a variação linear leva a valores mais próximos do desejado, isto é, mais próximos da média experimental.

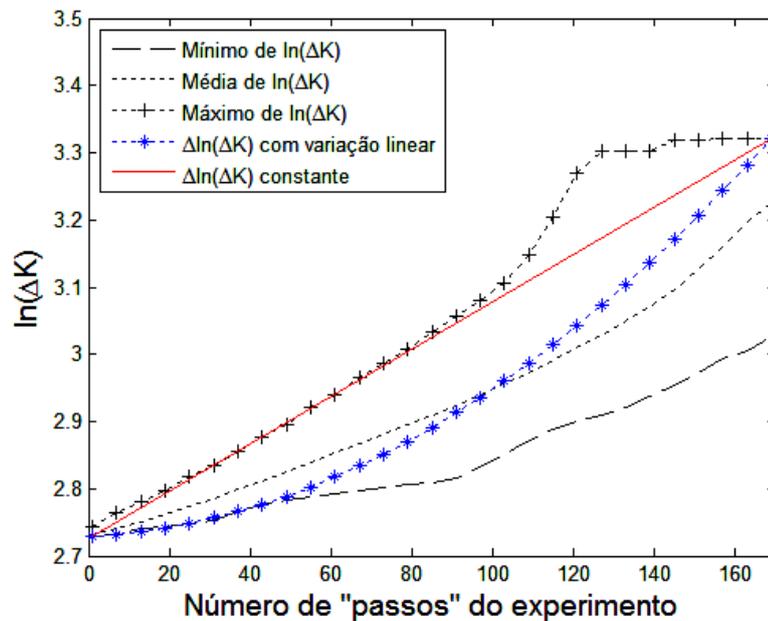


Figura 24 - Determinação da discretização para sincronização dos dados.

Os dados $\ln(da/dN) \times \ln(\Delta K)$ antes e depois da sincronização são mostrados na Figura 25. A aplicação direta destes dados para aproximação pela PCE resultaria num custo computacional desnecessário, de maneira que apenas dados relacionados a 22 valores de $\ln(\Delta K)$ (ao invés dos 169 referentes ao total dos dados sincronizados) foram utilizados, conforme a Figura 26. No intuito de melhor distinguir o comportamento do processo estocástico em questão, cada cor representa uma das 60 placas testadas.

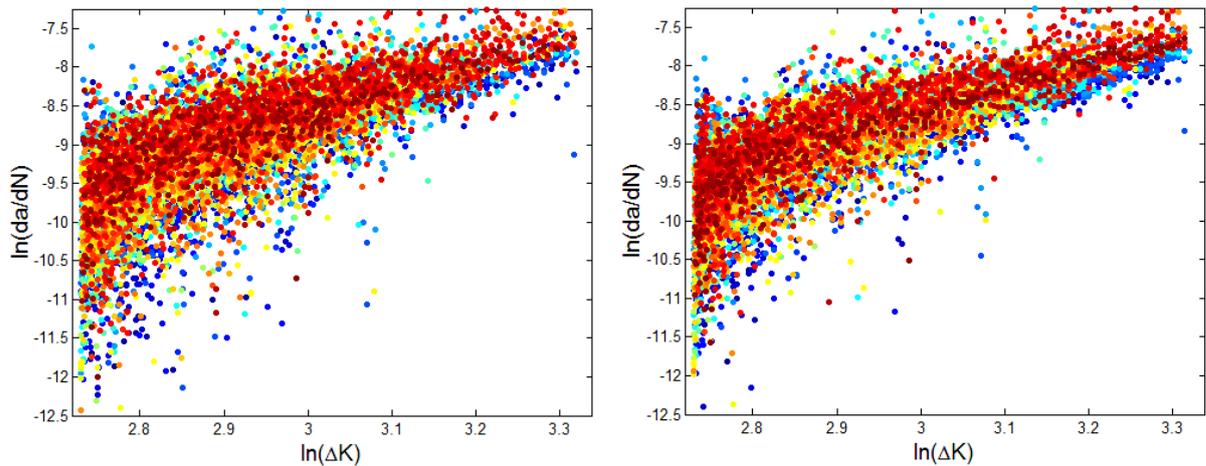


Figura 25 - Taxa de crescimento da trinca versus variação do fator de intensidade de tensões (antes e depois da sincronização).

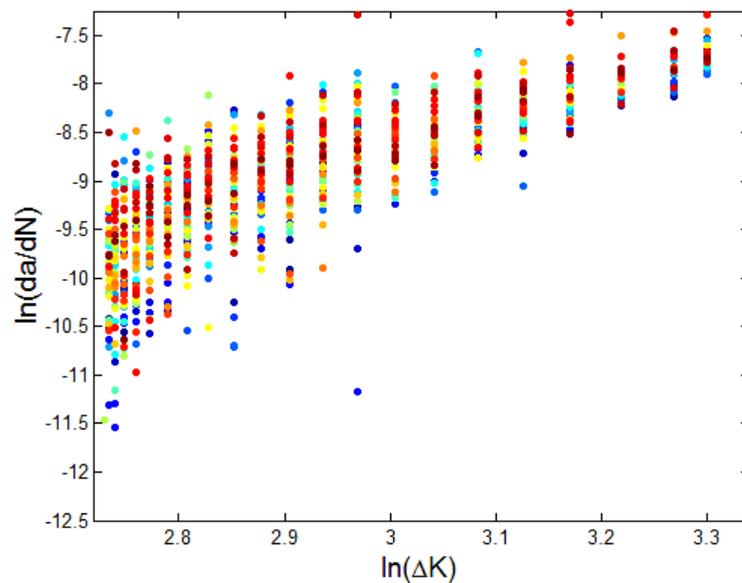


Figura 26 - Dados selecionados para aproximação via PCE.

5.5.3. Aplicação da expansão de Karhunen-Loève

Com base no trabalho de Ortiz & Kiremidjian (1986), no qual um modelo de propagação de trincas de fadiga é construído utilizando a lei de Paris e os dados experimentais de Virkler *et al.* (1978), no presente trabalho assume-se uma função exponencial, Equação (132), como função índice de autocorrelação do processo estocástico em estudo. Esta suposição se torna bastante útil, uma vez que para este caso as autofunções da KLE podem ser determinadas analiticamente, conforme foi apresentado na Seção 5.3.

$$\rho(t_1, t_2) = e^{-\frac{|t_1 - t_2|}{l}} \quad (132)$$

Para o caso de processos estocásticos estacionários, a função índice de autocorrelação depende apenas de $\tau = t_2 - t_1$:

$$\rho(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{l}} \quad (133)$$

De acordo com Ortiz & Kiremidjian (2002), boa parte da correlação da taxa de propagação da trinca é, provavelmente, devida à periodicidade artificial, provocada pelo intervalo entre as medições durante o experimento. Esta conclusão foi feita com base nos dados experimentais de Virkler *et al.* (1978), porém estudos preliminares dos dados de Ghonem & Dore (1987) mostraram que o mesmo se aplica a este caso. Dessa maneira, no presente trabalho o comprimento de correlação não é determinado diretamente; ao invés disto, o mesmo é determinado de maneira aproximada através da comparação direta de simulações do crescimento da trinca *versus* número de ciclos com os dados experimentais.

Para os dados em questão, contidos em Ghonem & Dore (1987), através deste procedimento encontrou-se um comprimento de correlação próximo a 0.034. Este parâmetro, juntamente com a Equação (133), é utilizado para determinar as autofunções e autovalores da expansão de Karhunen-Loève, conforme descrito na Seção 5.3.

A quantidade de termos necessários a uma boa aproximação depende do comprimento de correlação, pois cada termo ou autofunção da KLE é responsável por uma determinada frequência do processo, e as frequências são incorporadas à expansão em ordem crescente. Dessa maneira, processos com valores maiores do comprimento de correlação requerem menos termos, pois são mais influenciados por menores frequências, enquanto para menores comprimentos de correlação mais termos são necessários.

A influência de cada autofunção $\varphi_i(t)$ é diretamente proporcional à raiz quadrada do respectivo autovalor λ_i , de modo que a quantidade de termos pode ser determinada verificando-se os autovalores à medida que a quantidade de termos aumenta. Para o caso em estudo, a Figura 27 mostra a raiz quadrada dos autovalores de cada autofunção para um total de 25 termos da KLE.

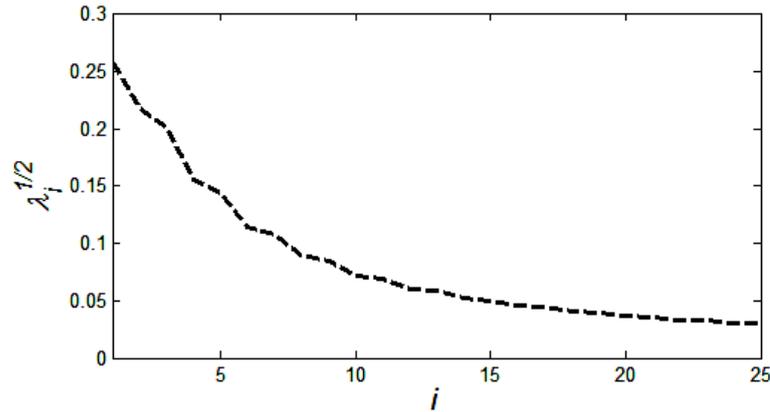


Figura 27 - Raiz quadrada dos autovalores para cada autofunção.

Com base na Figura 27, e no intuito de não obter um custo computacional desnecessário para a KLE, foram adotados 15 termos para representar o processo $H(\ln(\Delta K))$. Como o processo apresenta média nula e desvio-padrão unitário, a Equação (114) é reescrita como:

$$\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi) = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{\lambda_i} \cdot \varphi_i(\ln(\Delta K)) \cdot \xi_i \quad (134)$$

O truncamento da KLE num número finito de termos resulta numa variância menor que 1, sendo necessário efetuar uma normalização para variância unitária. A normalização é feita através da seguinte equação (Sakamoto & Ghanem, 2002):

$$\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi) = \frac{\sum_{i=1}^{15} \sqrt{\lambda_i} \cdot \varphi_i(\ln(\Delta K)) \cdot \xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{15} (\sqrt{\lambda_i} \cdot \varphi_i(\ln(\Delta K)) \cdot \xi_i)^2}} \quad (135)$$

A simulação de n realizações do processo $\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi)$ exige a geração de um conjunto n de realizações de ξ_i , isto é, n vetores ξ de tamanho 15, onde os valores de ξ apresentam distribuição normal padrão de probabilidades. Para cada valor de $\ln(\Delta K)$, $\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi)$ é uma variável aleatória com distribuição Normal na qual a base da expansão em polinômios de caos estará indexada. Caso a dimensão estocástica da PCE seja maior que 1, basta que sejam gerados conjuntos independentes de vetores ξ .

5.5.4. Modelo em polinômios de caos

Dado o processo estocástico gaussiano representado pela expansão de Karhunen-Loève, $\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi)$, a Equação (113) pode ser reescrita como:

$$X^{PCE}[\ln(\Delta K), \hat{H}(\ln(\Delta K), \xi)] = \sum_{i=1}^{n_{caos}} \hat{u}_i(\ln(\Delta K)) \Psi_i[\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi)] \quad (136)$$

A variação global do processo $\ln(da/dN)$ é representada pelas funções $\hat{u}_i(\ln(\Delta K))$, que determinam como os momentos do processo em questão mudam ao longo do contínuo, enquanto as oscilações internas em cada realização são representadas a grosso modo pela KLE que, por sua vez, está diretamente relacionada à função de autocorrelação do processo. Mais precisamente, as oscilações internas são representadas pelas funções $\Psi_i(\hat{H}(\ln(\Delta K), \xi))$, que moldam a distribuição de probabilidades do processo através de operações algébricas efetuadas sobre a KLE. Estas operações são definidas pela base polinomial utilizada, no presente caso, a base de polinômios de Hermite.

Considerando o comportamento da curva $\ln(da/dN) \times \ln(\Delta K)$, as seguintes funções base foram adotadas:

$$\tilde{v}_1(\ln(\Delta K)) = 1 \quad (137)$$

$$\tilde{v}_2(\ln(\Delta K)) = \ln(\Delta K)^{p_1^i} \quad (138)$$

$$\tilde{v}_3(\ln(\Delta K)) = \ln(\Delta K)^{p_2^i} \quad (139)$$

$$\tilde{v}_4(\ln(\Delta K)) = \ln(\Delta K)^{p_3^i} \quad (140)$$

com valores iniciais para os parâmetros p_1^i , p_2^i e p_3^i iguais a 1.0, 1.5 e 2.0, respectivamente.

Assim, inicialmente as funções interpoladoras são dadas por:

$$\hat{u}_i(t) = a_1^i \cdot 1 + a_2^i \cdot \ln(\Delta K)^{1.0} + a_3^i \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} + a_4^i \cdot \ln(\Delta K)^{2.0} \quad (141)$$

Utilizando o procedimento descrito nas seções 5.1 e 5.2, com $n_{SPCE}=80$, $n_{mom}=3$, e limites iguais a $[-10^4 \ 10^4]$ impostos aos coeficientes a_j^i e testando expansões em polinômios de caos com dimensões estocásticas 1 e 2 e ordem variando de 1 a 10, as melhores aproximações foram obtidas com ordem igual a 3, para a PCE de dimensão unitária, PCE1, e

ordem igual a 1 para dimensão 2, PCE2. A Tabela 5 apresenta os erros de aproximação via PCE1 e PCE2, para a média, o desvio-padrão e o terceiro momento, em comparação com os dados experimentais. Constata-se que, apesar de apresentarem custos computacionais semelhantes, uma vez que a PCE1 de ordem 3 tem 4 termos e a PCE2 de ordem 1 tem 3 termos, os erros foram menores para a representação PCE1, que é adotada e detalhada daqui em diante.

Tabela 5 - Erro médio percentual em relação aos dados experimentais de fadiga.

	Erro médio (%) em relação aos dados experimentais	
	PCE1	PCE2
Média	0.418	0.500
Desvio-padrão	14.647	19.910
$m_3(X)$	0.047*	0.045*

*Para $m_3(X)$ utiliza-se erro absoluto ao invés do erro percentual.

A base de polinômios de Hermite usada para obter a PCE1, escrita em função de $\zeta(t)$, é constituída pelas seguintes funções:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(\zeta(t)) &= 1; \\
 \Psi_2(\zeta(t)) &= \zeta(t); \\
 \Psi_3(\zeta(t)) &= \zeta(t)^2 - 1; \\
 \Psi_4(\zeta(t)) &= \zeta(t)^3 - 3\zeta(t).
 \end{aligned} \tag{142}$$

E as funções interpoladoras que constituem a PCE1, para cada coeficiente, são:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_1(\ln(\Delta K)) &= -890.1032 + 1704.1371 \cdot \ln(\Delta K) - 1292.2696 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} + 275.9952 \cdot \ln(\Delta K)^{2.0} \\
 \hat{u}_2(\ln(\Delta K)) &= 112.4597 - 216.5096 \cdot \ln(\Delta K) + 164.1880 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} - 35.0832 \cdot \ln(\Delta K)^{2.0} \\
 \hat{u}_3(\ln(\Delta K)) &= -31.3519 + 58.3168 \cdot \ln(\Delta K) - 43.2744 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} + 9.0298 \cdot \ln(\Delta K)^{2.0} \\
 \hat{u}_4(\ln(\Delta K)) &= 13.9964 - 29.1850 \cdot \ln(\Delta K) + 22.8476 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} - 5.0164 \cdot \ln(\Delta K)^{2.0}
 \end{aligned} \tag{143}$$

Apesar dos parâmetros p_k^i e dos coeficientes a_j^i serem variáveis de otimização, o algoritmo optou por valores muito próximos aos valores iniciais, com diferenças desprezíveis. De maneira geral, espera-se que o ponto inicial seja um ponto de mínimo local em relação aos coeficientes a_j^i , uma vez que estes são determinados via mínimos quadrados; porém, como

mais liberdade é dada ao algoritmo ao incluir os parâmetros p_k^i como variáveis de otimização, pode acontecer do ponto de projeto encontrado ser bastante diferente do ponto inicial. No problema em questão os resultados indicam que o ponto inicial é provavelmente um ponto de mínimo local em relação a todas as variáveis de projeto, de modo que a segunda otimização é apenas um ajuste fino da solução obtida via otimização discreta e mínimos quadrados. Entretanto, mesmo efetuando uma otimização global através do método de busca por padrões, utilizando a função *patternsearch* do MATLAB®, não foi possível encontrar pontos de projeto significativamente diferentes do apresentado. Soluções partindo de diferentes valores iniciais para os parâmetros p_k^i , também não foram muito diferentes das obtidas para os valores iniciais $[p_1^i, p_2^i, p_3^i]=[1.0, 1.5, 2.0]$. Portanto, a solução encontrada deve ser pelo menos próxima ao mínimo global procurado.

A Figura 28 mostra os coeficientes u_i^j resultantes da otimização discreta (pontos vermelhos), juntamente com as funções $\hat{u}_i(t)$ obtidas pelo segundo processo de otimização (linha azul). Na Figura 29 são comparadas as FDAs empírica e aproximada, para quatro valores diferentes do contínuo, tal qual no caso do processo de corrosão.

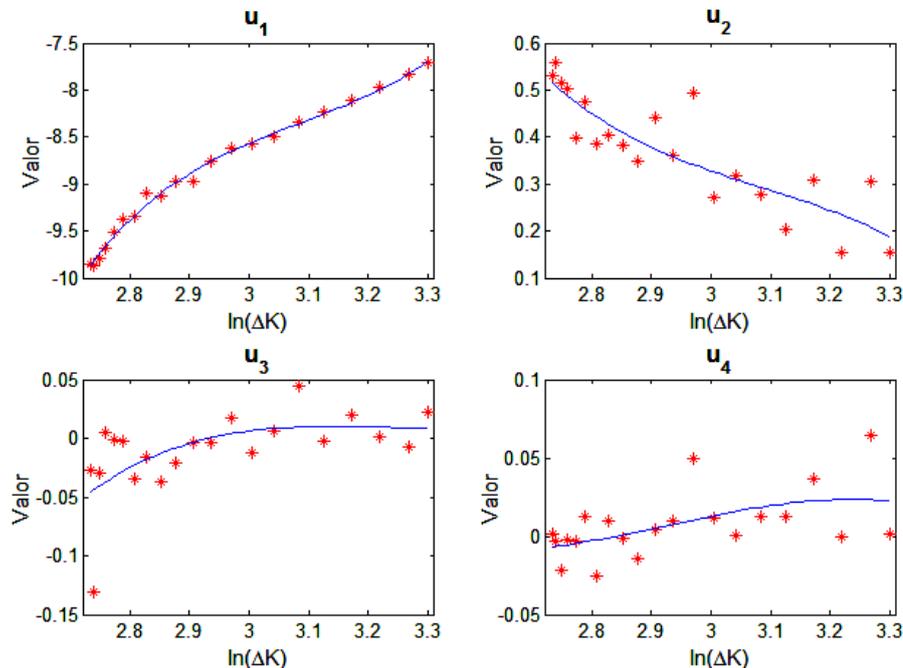


Figura 28 - Resultados discretos *versus* funções interpoladoras, PCE1.

Constata-se que, também neste caso, ocorrem oscilações nos valores dos coeficientes u_i^j resultantes da otimização discreta; entretanto, as oscilações são muito pequenas para o coeficiente u_1 (gráfico superior esquerdo), que está diretamente relacionado à média do

processo ao longo do contínuo, e para os outros coeficientes ainda é possível distinguir determinados comportamentos, devidamente capturados pelas funções interpoladoras.

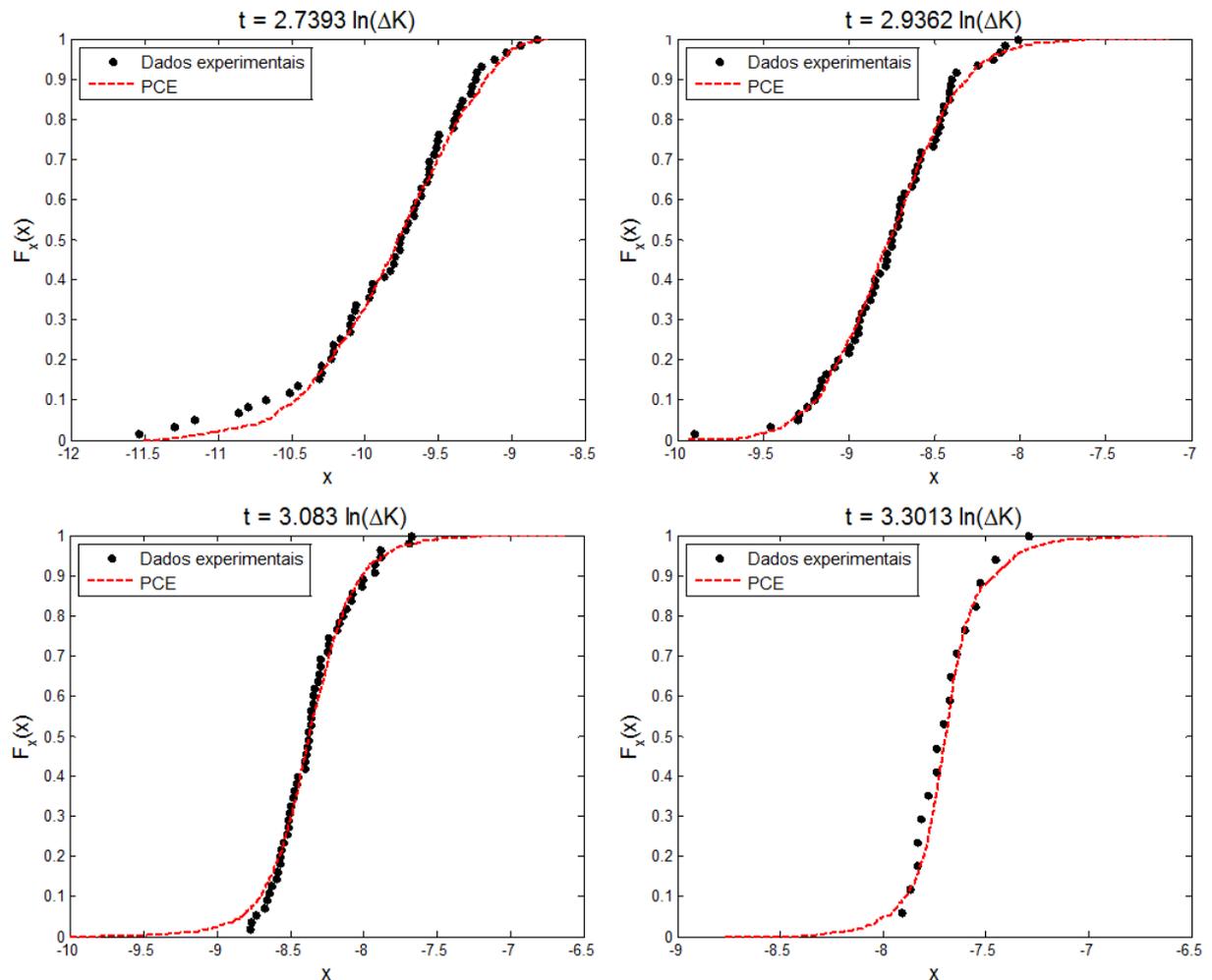


Figura 29 - Funções de distribuição acumulada empírica e via PCE, para quatro valores do contínuo $\ln(\Delta K)$, processo estocástico de fadiga.

Verifica-se que o processo em questão apresenta funções de distribuição acumulada bem mais suaves ao longo do contínuo do que o processo de corrosão, provavelmente porque no presente caso as medidas são obtidas para as mesmas placas ao longo do tempo, de maneira que a correlação do processo está presente nos dados experimentais.

O $erro^{FDA}$ final foi de 0.027, média para todos os pontos t_j do contínuo utilizados, o que corresponde a uma aproximação muito boa, de acordo com o apresentado na Seção 5.1. Os gráficos mostrados na Figura 29 corroboram esta afirmação.

O gráfico do lado esquerdo da Figura 30 apresenta os dados experimentais utilizados *versus* a aproximação PCE1, em termos da média e da média mais ou menos dois desvios-padrão, curvas obtidas através de 10000 realizações do processo aproximado. O gráfico do

lado direito da mesma figura mostra 60 realizações do processo, via PCE1, ilustrando a oscilação do processo estocástico ao longo do contínuo, inserida na expansão em polinômios de caos através da KLE.

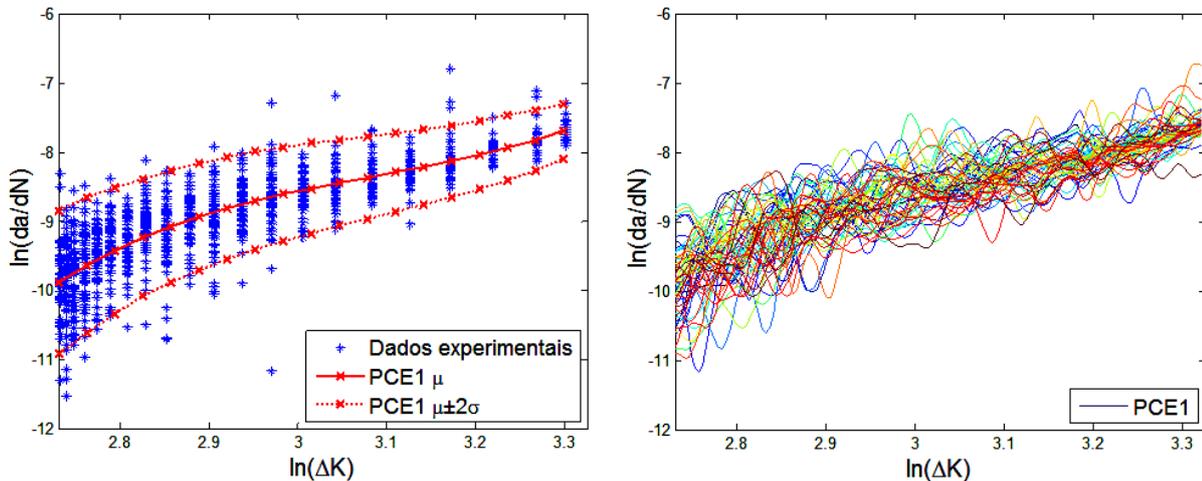


Figura 30 - Dados experimentais, média e média mais ou menos dois desvios-padrão da PCE1 (esquerda), e realizações da PCE1 (direita).

Como os testes experimentais são usualmente conduzidos para espécimes com grandes defeitos iniciais, mas em estruturas reais as trincas iniciais são bem menores, a capacidade de extrapolação do modelo é fundamental.

Ao se considerar a possibilidade de extrapolação do modelo do crescimento da trinca via polinômios de caos aqui desenvolvido, é necessário considerar o que se sabe a respeito da propagação de trincas para valores muito pequenos a muito grandes de ΔK . Em termos de $\ln(da/dN)$ versus $\ln(\Delta K)$, sabe-se que, para valores muito pequenos de ΔK , a taxa de propagação da trinca tende a zero. Para alguns materiais, chega a existir um limite (ΔK_{th}) abaixo do qual não ocorre propagação de trincas. Para valores muito grandes de ΔK , a taxa de propagação tende ao infinito. Além disso, para valores intermediários de ΔK , existe uma relação linear entre $\ln(\Delta K)$ e $\ln(da/dN)$, que pode ser adequadamente descrita pela lei de Paris (Equação (129)). Daí, o comportamento geral de $\ln(\Delta K)$ versus $\ln(da/dN)$ é descrito por uma curva em formato de “S”.

A representação em polinômios de caos aqui construída não foi desenvolvida tendo em mente a extrapolação. Entretanto, na Figura 31 observa-se uma tendência da PCE em apresentar o formato “S” desejável, tendência esta que foi capturada dos dados experimentais, a partir de uma adequada escolha das funções interpoladoras $\hat{u}_i(t)$. Isto sugere que a PCE obtida pode ser utilizada com cuidado e de maneira limitada para extrapolação, conforme

feito no Capítulo 8. Entretanto, a princípio seria necessário um estudo formal das capacidades de extrapolação do modelo construído, o que está fora do escopo do presente trabalho e é deixado como sugestão para futuras investigações.

A possibilidade da escolha das funções interpoladoras $\hat{u}_i(t)$ é a diferença principal entre a metodologia proposta neste trabalho e a proposta por Sakamoto & Ghanem (2002), na qual expansões de Karhunen-Loève são adotadas no lugar das funções $\hat{u}_i(t)$.

Dos dados de Ghonem & Dore, observa-se que o desvio-padrão tende a se anular para valores grandes de ΔK . O mesmo ocorre para a PCE, como pode ser observado através do comportamento da função $\hat{u}_2(t)$, mostrado na Figura 28. Esta tendência é introduzida na PCE devido às tendências dos dados experimentais, e também impõe limitações à capacidade de extrapolação da representação.

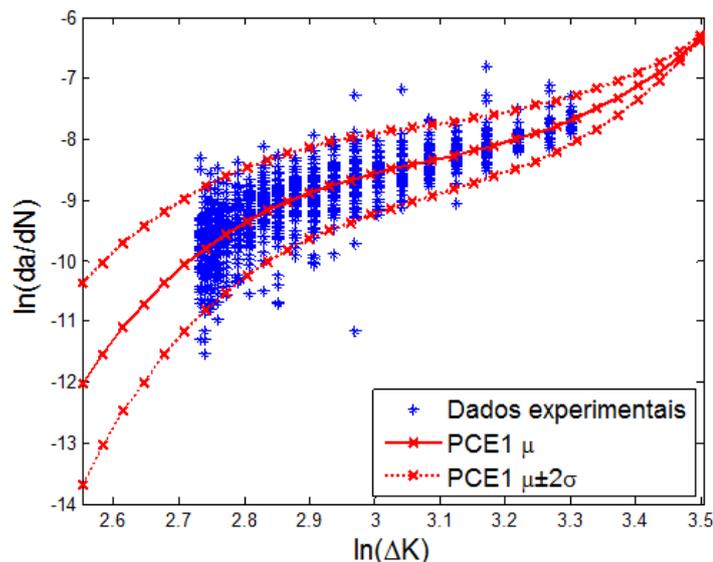


Figura 31 - Capacidade de extrapolação da PCE para o caso de processo de propagação de trincas de fadiga.

O resultado final desejado a partir da PCE1 é a simulação de curvas de propagação de trinca ou, mais precisamente, o cálculo de probabilidades de falha (ou números esperados de falha). Nota-se que, mesmo que o modelo apresente resultados muito bons para a média e o desvio-padrão do processo, ainda assim os resultados provenientes de análises de confiabilidade ou probabilísticas, bem como os resultados em termos das curvas de propagação, podem ser ruins. Isto pode acontecer porque as probabilidades de falha estão, em geral, relacionadas à qualidade de representação da cauda da distribuição do processo, e, no caso das simulações, porque o comportamento oscilatório de cada realização pode não ser devidamente descrito pelo modelo, mas mesmo assim levar a erros pequenos na média e no

desvio-padrão. Assim, uma última verificação da qualidade do modelo obtido é efetuada comparando os dados originais “tamanho da trinca *versus* número de ciclos” com as simulações via PCE (Figura 32), e calculando probabilidades experimentais e via PCE (Figura 33). No caso do cálculo das probabilidades, verifica-se que as curvas experimentais e via PCE são bastante próximas, principalmente para maiores valores do tamanho do defeito, a , que são de maior interesse para este trabalho, uma vez que são eles que, mais provavelmente, estão associados à falha da estrutura. Ambas as figuras confirmam que o modelo em polinômios de caos é bom o suficiente para o propósito para o qual foi construído.

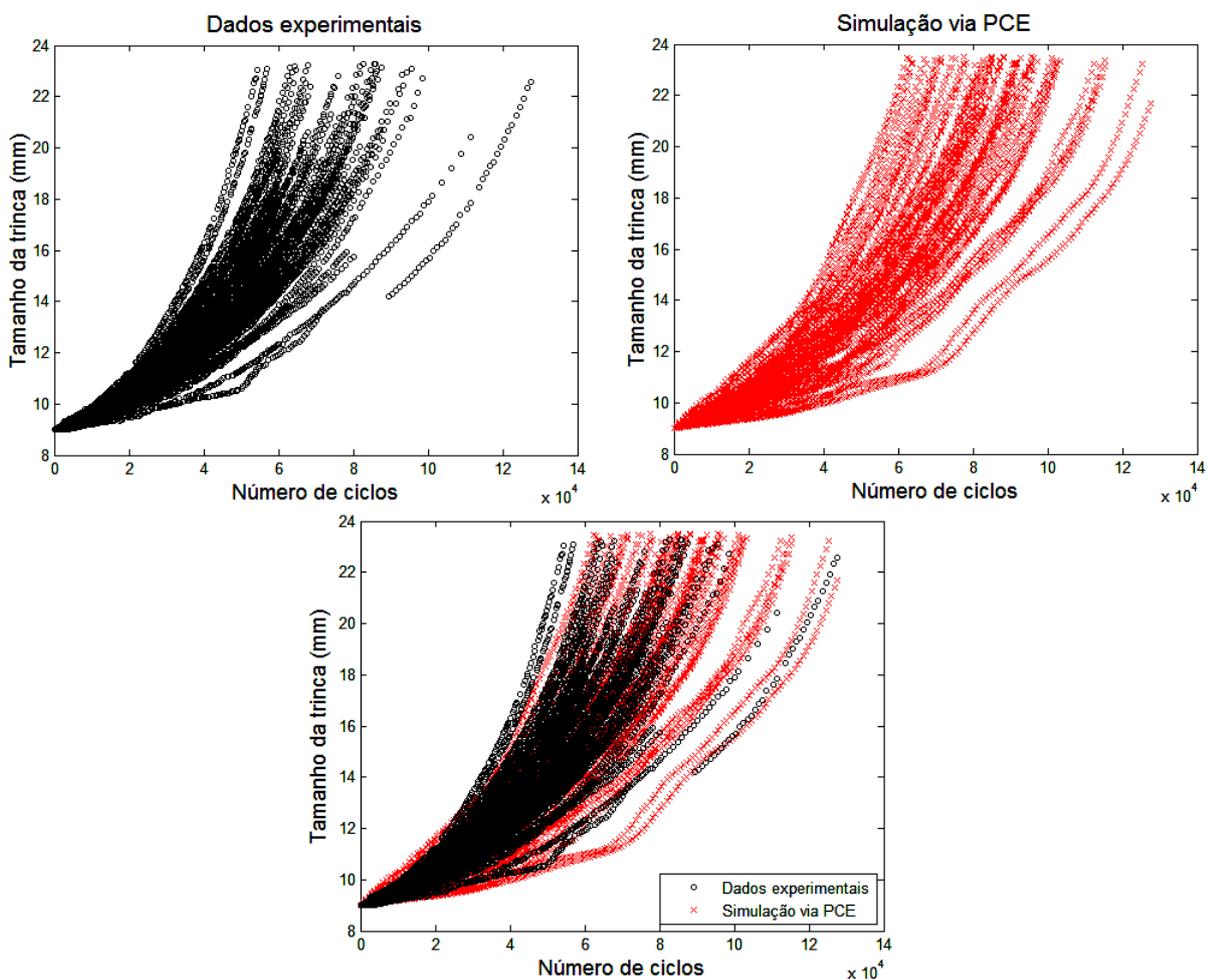


Figura 32 - Simulação de crescimento de trinca utilizando a PCE1 (x-vermelho) e dados experimentais (o-preto).

A comparação de probabilidades aqui efetuada só têm sentido porque os dados experimentais apresentam correlação ao longo do contínuo, o que não é o caso dos dados utilizados na Seção 5.4, por isso comparações equivalentes não foram feitas para o modelo de corrosão em dutos. Naquele caso, as probabilidades calculadas considerando os dados reais nem sequer são funções monotonicamente crescentes do tempo.

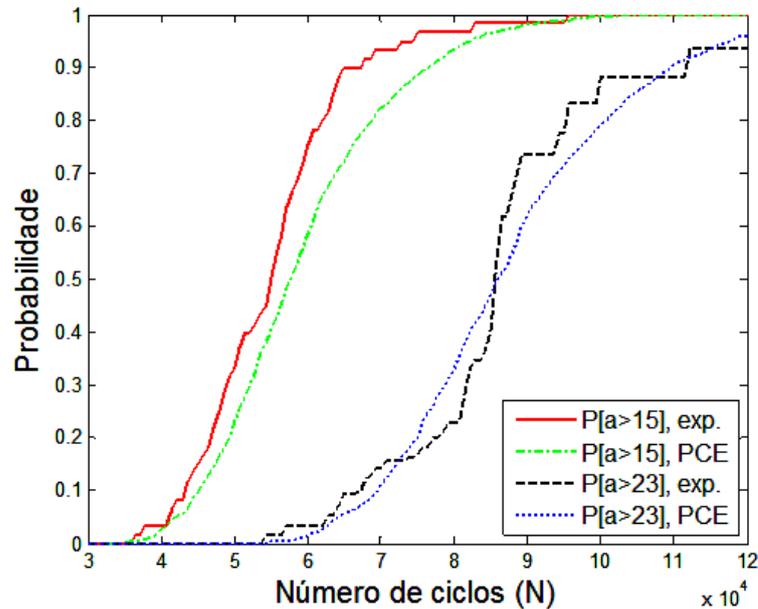


Figura 33 - Probabilidades experimentais e via PCE para dois valores distintos do tamanho da trinca.

5.5.5. Modelo em polinômios de caos simplificado

Uma análise dos valores dos coeficientes u_i presentes na Figura 28 permite constatar que a influência dos coeficientes u_1 e u_2 sobre a representação é bem maior do que a influência dos outros coeficientes. Uma representação com menor custo computacional associado pode ser obtida utilizando apenas dois coeficientes, ou seja, com uma expansão em polinômios de caos com dimensão e ordem unitárias. Tal representação é denominada $PCE1^1$, e a representação encontrada anteriormente passa a ser denominada $PCE1^3$, onde o sobrescrito indica a ordem do polinômio de caos utilizado. A Tabela 6 compara os erros para os dois casos.

Tabela 6 - Erro médio percentual em relação aos dados experimentais de fadiga considerando PCE com dimensão unitária e ordens 1 e 3.

	Erro médio (%) em relação aos dados experimentais	
	$PCE1^1$	$PCE1^3$
Média	0.479	0.418
Desvio-padrão	13.932	14.647
$m_3(\mathbf{X})$	0.042*	0.047*

*Para $m_3(\mathbf{X})$ utiliza-se erro absoluto ao invés do erro percentual.

Devido ao menor custo computacional da $PCE1^1$ e à pequena diferença em relação aos erros de aproximação, esta representação é adotada para representar a propagação de trincas de fadiga no problema de otimização do Capítulo 8.

Para este caso, as funções interpoladoras para cada um dos dois coeficientes são:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\ln(\Delta K)) &= -867.3592 + 1663.0528 \cdot \ln(\Delta K) - 1262.2797 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} + 269.8474 \ln(\Delta K)^{2.0} \\ \hat{u}_2(\ln(\Delta K)) &= 100.0191 - 189.9865 \cdot \ln(\Delta K) + 143.3099 \cdot \ln(\Delta K)^{1.5} - 30.4906 \cdot \ln(\Delta K)^{2.0} \end{aligned} \quad (144)$$

A Figura 34 mostra os coeficientes u_i^j resultantes da otimização discreta em comparação com as funções $\hat{u}_i(t)$ obtidas pelo segundo processo de otimização, enquanto na Figura 35 são comparados os dados experimentais com a média e a média mais ou menos dois desvios-padrão da $PCE1^1$, obtidos através da simulação de 10000 realizações do processo, e são apresentadas 60 realizações do processo aproximado.

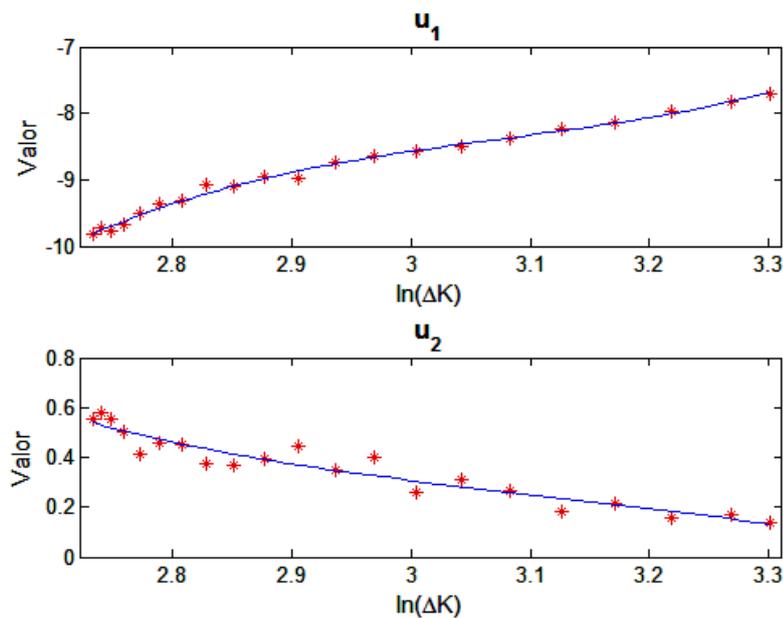


Figura 34 - Resultados discretos *versus* funções interpoladoras, $PCE1^1$.

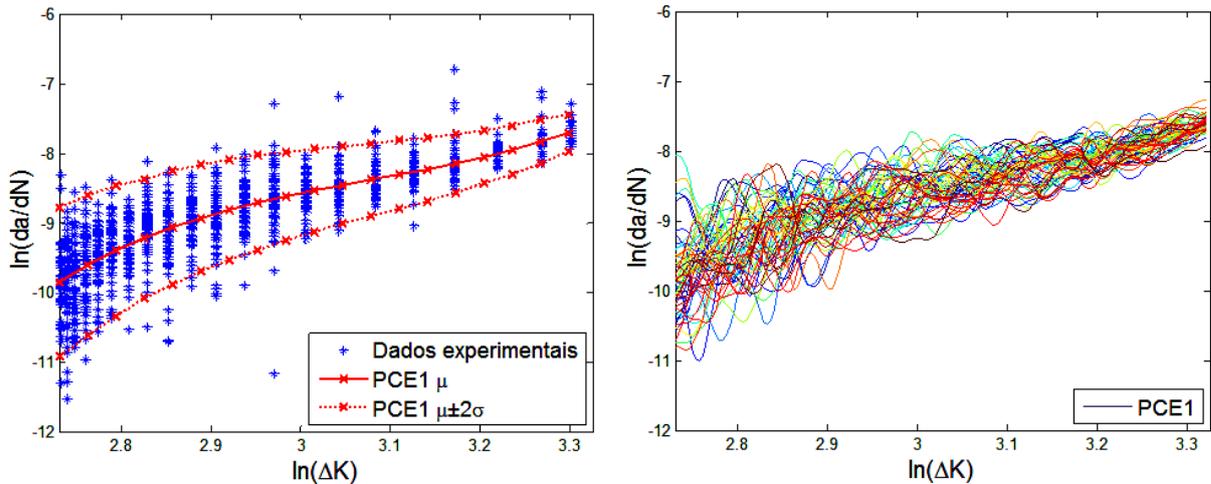


Figura 35 - Dados experimentais, média e média mais ou menos dois desvios-padrão da PCE1¹ (esquerda), e realizações da PCE1¹ (direita).

A Figura 36 apresenta simulações de propagação de trinca de fadiga obtidas via PCE1¹ em comparação com os dados experimentais, e a Figura 37 ilustra probabilidades experimentais e aproximadas. Estas figuras confirmam que uma adequada representação do processo de propagação de trincas de fadiga é mantida, mesmo utilizando o modelo simplificado, PCE1¹.

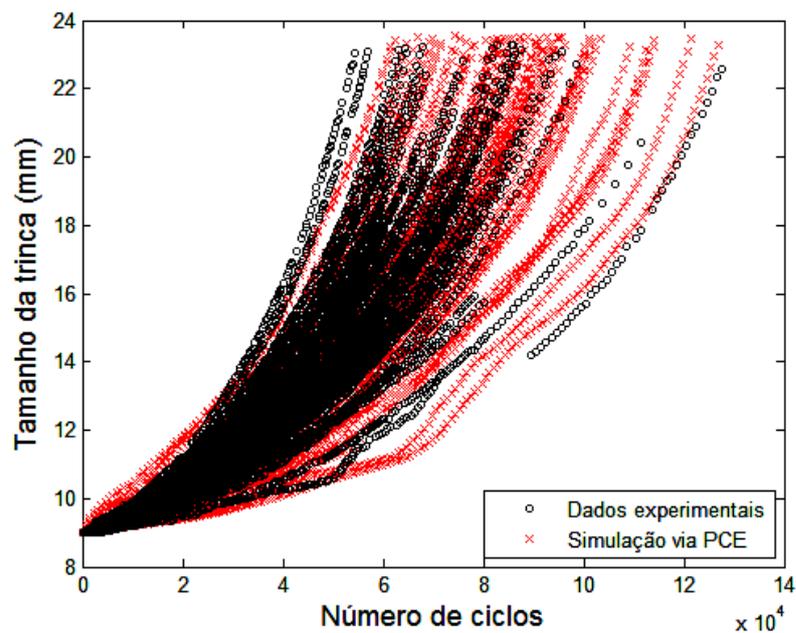


Figura 36 - Simulação de crescimento de trinca utilizando a PCE1¹ (x-vermelho) e dados experimentais (o-preto).

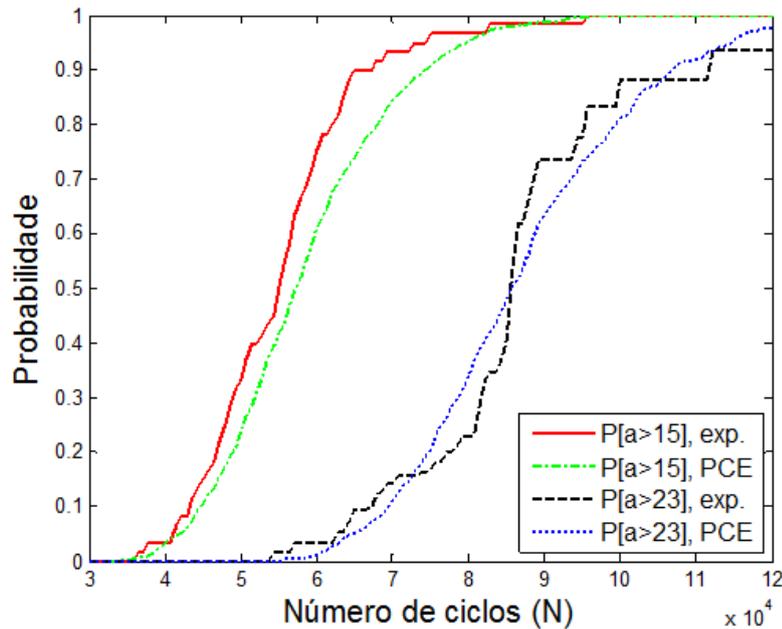


Figura 37 - Probabilidades experimentais e aproximadas, modelo PCE simplificado.

5.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS COMPORTAMENTOS DOS PROCESSOS DE CORROSÃO E FADIGA

A Figura 38 apresenta cinco curvas de tamanho da trinca e cinco curvas de profundidade máxima de corrosão ao longo do tempo, para um período total de 10 anos, obtidas considerando as respectivas representações em polinômios de caos, com ordens e dimensões estocástica unitárias. No intuito de facilitar a comparação entre as curvas, os valores relacionados ao processo de corrosão são multiplicados por 10, e considera-se uma frequência de 12.000 ciclos por ano para o processo de fadiga, com carregamento de amplitude igual à da condição de teste I de Ghonem & Dore (1987).

Nota-se que, enquanto as taxas de crescimento do processo de corrosão desaceleram ao longo do tempo, as trincas do processo de fadiga apresentam uma taxa de propagação cada vez maior, chegando a limites nos quais, para um pequeno intervalo de tempo, o crescimento da trinca tende ao infinito.

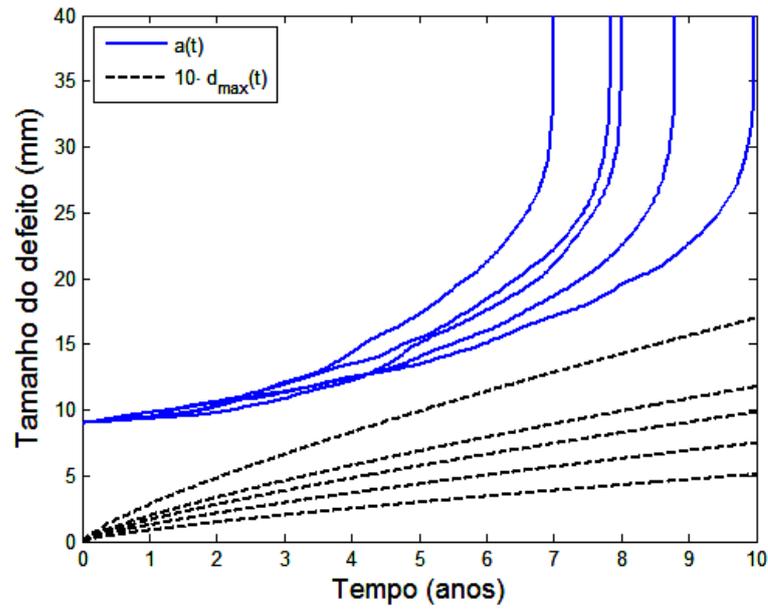


Figura 38 - Realizações dos processos de corrosão e fadiga via PCE.

Quando os processos de corrosão e/ou fadiga são aplicados a problemas de otimização de risco, as características do processo de degradação apresentam grande influência sobre o custo esperado total. Discussões a respeito desta influência e do impacto nos problemas de otimização de risco são apresentadas nos Capítulos 7 e 8 desta Tese.

6. ESTRATÉGIAS PARA SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO DE RISCO



Neste capítulo são abordadas algumas estratégias e alguns detalhes a respeito da solução de problemas de otimização de risco, tendo em vista os problemas abordados nos Capítulos 7 e 8.

6.1. ESTRATÉGIAS DE SUAUIZAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO

Conforme citado anteriormente, o custo esperado total, função objetivo do problema de otimização de risco, pode apresentar descontinuidades, introduzidas pelas atividades de inspeção e manutenção/substituição, e oscilações, devido à utilização de amostras de tamanho finito na análise probabilística. Dessa maneira, para reduzir a variabilidade das estimativas do número esperado de reparos, EnR , e do número esperado de falhas, EnF , e assim obter uma função custo esperado total mais suave, três estratégias são adotadas.

Duas destas estratégias foram investigadas por Taflanidis & Beck (2008) e aplicadas em Valdebenito & Schuëller (2010). A primeira, conhecida como “*Common Random Numbers*”, CNR, consiste em utilizar sempre a mesma cadeia de números aleatórios para geração das amostras, independentemente dos valores que os parâmetros do problema e que as variáveis de projeto estejam assumindo. Esta estratégia atua diretamente na redução da variabilidade das estimativas de EnR e EnF ao longo do espaço de busca e ao longo de qualquer parâmetro cuja variação esteja sendo estudada, fazendo com que as mesmas realizações dos processos estocásticos e variáveis aleatórias envolvidas sejam empregadas em todas as análises probabilísticas efetuadas durante todo o processo de otimização. Neste trabalho, “*Common Random Numbers*” são utilizados dentro do método LHS, durante a geração das realizações de todas as variáveis aleatórias e processos estocásticos envolvidos, o que engloba as variáveis aleatórias nas quais as expansões PCE e KLE são indexadas. A segunda estratégia consiste em substituir a função indicadora apresentada na Equação (52) por uma função indicadora suave. Como sugerido em Taflanidis & Beck (2008), adota-se como função indicadora a função de distribuição normal acumulada de probabilidades, com média

$\mu=1$ e um pequeno desvio-padrão, por exemplo, $\sigma=0.01$. Apesar de ter um efeito mais localizado do que a CNR, esta estratégia ajuda a suavizar os números estimados ao introduzir uma transição mais suave entre os domínios de falha e sobrevivência. O processo é similar a assumir que as equações de estado limite possuem um erro de previsão do modelo associado, erro este definido por ε , e que o erro segue uma distribuição normal de probabilidades com média nula e desvio-padrão pequeno, por exemplo, $\sigma=0.01$. A equação de estado limite com o erro incorporado é designada por $\hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{z})$, e definida por:

$$\hat{g}(\mathbf{X}, \mathbf{z}) = g(\mathbf{X}, \mathbf{z}) + \varepsilon \quad (145)$$

Neste trabalho, a segunda estratégia é utilizada tanto no cálculo dos números esperados de falha quanto do número esperado de reparos.

A terceira e última estratégia adotada, baseada em Au (2005), mas apresentada como contribuição desta Tese, consiste em obter um custo esperado total médio, através da solução do chamado “problema de confiabilidade aumentado”. Esta estratégia é descrita em detalhes a seguir.

6.1.1. Obtendo valores esperados suavizados através do problema de confiabilidade aumentado

O método apresentado aqui para obtenção de estimativas mais suaves baseia-se no problema de confiabilidade aumentado proposto por Au (2005).

De acordo com Au (2005), é possível estimar sensibilidades utilizando uma única simulação de Monte Carlo, através de um “problema de confiabilidade aumentado”. Alguns dos algoritmos mais efetivos e eficientes de otimização são baseados em gradientes, o que significa que empregam derivadas parciais da função objetivo com respeito às variáveis de projeto. Portanto, pode ser bastante vantajoso ter estimativas precisas das sensibilidades da função objetivo com relação a essas variáveis.

Algoritmos baseados em gradiente, em geral, requerem continuidade da função objetivo. Este não é o caso dos problemas considerados nesta Tese, como será mostrado nos Capítulos 7 e 8. Entretanto, o problema de confiabilidade aumentado também pode ser usado para obter estimativas mais suaves de EnR e EnF , utilizando amostra de mesmo tamanho que numa simulação “usual” de algum método de simulação. Esta é a terceira estratégia adotada

neste trabalho para suavizar EnR e EnF , e, conseqüentemente, reduzir a variabilidade do estimador do custo esperado total. A utilização do problema de confiabilidade aumentado para suavizar EnR e EnF é uma contribuição desta Tese.

No problema de confiabilidade aumentado, as variáveis de projeto são artificialmente consideradas como incertas e as sensibilidades desejadas podem ser extraídas do problema aumentado. Por exemplo, para calcular a sensibilidade do custo esperado total em relação à variável de projeto z_I , é necessário assumir que a própria z_I é uma variável aleatória, com distribuição conhecida.

Conforme Au (2005), a análise probabilística passa a ser feita em intervalos I , isto é, os valores esperados são calculados para cada intervalo I , considerando somente os pontos amostrais nos quais $z_I \in I$. Portanto, este é um valor esperado condicional ao evento $z_I \in I$, e a distribuição condicional é obtida na forma de um histograma. Os valores esperados calculados são estimadores mais robustos, em detrimento de uma resolução mais baixa.

Neste trabalho, distribuições uniformes são adotadas para todas as variáveis de projeto, ou variáveis aleatórias adicionais, e dois intervalos são considerados para cada uma delas. O intervalo adotado para cada variável aleatória adicional z_i , quando a mesma assume um valor \bar{z} , é definido por $[\bar{z} - \delta_{au}, \bar{z} + \delta_{au}]$, onde δ_{au} foi assumido igual a 0.001. Dez valores igualmente distribuídos das variáveis aleatórias adicionais são considerados em cada intervalo.

Nota-se que os resultados obtidos por essa metodologia dependem do valor de δ_{au} adotado. O impacto é maior para valores maiores do parâmetro, entretanto, à medida que δ_{au} aumenta, a resolução em cada intervalo diminui, há uma maior influência de regiões mais distantes do ponto para o qual a função objetivo está sendo avaliada, e a estimativa vai se tornando diferente da função objetivo original, mesmo que a resolução seja reestabelecida através de um aumento do tamanho da amostra. Este efeito é similar ao que ocorre ao se utilizar o método da média móvel para reduzir ruídos de uma determinada medida: quanto mais pontos são utilizados para efetuar a média móvel, o que equivale a aumentar δ_{au} , menor o ruído se torna, mas a medida obtida vai se tornando diferente da medida original.

Como mostrado na Figura 39, uma estimativa geral do número esperado de falhas, EnF , é obtida calculando a média dos números esperados de falha em cada intervalo:

$$EnF \cong \frac{EnF_1 + EnF_2}{2} \quad (146)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para calcular quaisquer valores esperados desejados.

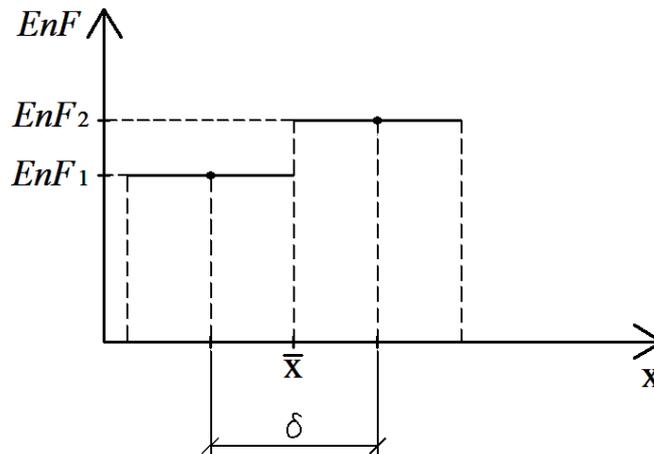


Figura 39 - Esquema baseado em Au (2005) para obtenção de estimadores mais suaves de EnR e EnF com relação às variáveis de projeto.

A estratégia CNR é também empregada dentro do problema de confiabilidade aumentado, no intuito de evitar a influência de diferentes números aleatórios em cada intervalo.

Uma vez que o procedimento descrito nesta subseção emprega essencialmente uma média sobre cada intervalo, o mesmo é capaz de diluir pequenas discontinuidades do valor esperado a ser estimado. Dessa maneira, os valores esperados se tornam mais suaves com relação às variáveis, aleatórias adicionais, de projeto. O alcance do efeito da suavização, por sua vez, depende do valor de δ_{au} adotado.

6.2. ANÁLISE PROBABILÍSTICA VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Os números esperados de reparos e falhas são calculados via LHS, conforme descrito na Seção 2.8. Cada ponto amostral é definido por uma realização de cada variável aleatória para o instante inicial, t_{ini} , incluindo as variáveis aleatórias da representação do processo estocástico em polinômios de caos, ou da expansão de Karhunen-Loève, quando for o caso. Utilizando estas realizações é possível descrever a evolução do processo de deterioração sobre toda a vida útil da estrutura, T , o que corresponde a obter as realizações dos processos de corrosão e fadiga.

Nota-se que, como a estrutura precisa ser mantida em serviço continuamente, se uma falha ocorre, a estrutura, ou parte dela, é reparada ou substituída e a simulação prossegue até o fim da vida útil. Este é o motivo pelo qual números esperados de falha são computados, através de uma análise probabilística, ao invés da mais comum probabilidade de falha, computada por análise de confiabilidade. A obtenção dos números esperados tanto de falha quanto de reparo por meio da análise probabilística via simulação é descrita a seguir, assumindo que o contínuo representa o tempo, no intuito de simplificar a descrição.

Para cada ponto amostral ao longo do tempo, o tempo de ocorrência da falha para cada modo de falha corresponde ao primeiro instante no qual a equação de estado limite passa de um valor positivo para um valor negativo, o que corresponde à chamada falha à primeira sobrecarga. Isto caracteriza um problema de determinação de raiz da função, que pode ser resolvido utilizando o método secante, adotado no presente trabalho, um método eficiente para solução deste tipo de problema e que não requer o cálculo de derivadas da função para a qual se deseja determinar a raiz.

Dada uma equação de estado limite dependente do tempo, $g(\mathbf{X}, \mathbf{z}, t)$, para uma determinada realização do vetor de variáveis aleatórias e processos estocásticos \mathbf{X} , e considerando que o vetor de variáveis de projeto \mathbf{z} assume valores conhecidos, a equação de estado limite passa a ser função apenas do tempo, $g(t)$. O método secante parte de dois pontos iniciais t_1 e t_2 , e dos correspondentes valores da função, $g(t_1)$ e $g(t_2)$. A solução iterativa para determinação do tempo para o qual a função $g(t)$ se iguala a zero, denominado t_{falha} , é dada pela equação:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{(t_n - t_{n-1}) \cdot g(t_n)}{g(t_n) - g(t_{n-1})}, \text{ para } n=2, 3, 4, \dots \quad (147)$$

Trata-se, na verdade, de uma variação do chamado método de Newton-Raphson, na qual a derivada de $g(t)$, denominada $g'(t)$, é substituída por uma aproximação, dada por:

$$g'(t_n) = \frac{g(t_n) - g(t_{n-1})}{(t_n - t_{n-1})} \quad (148)$$

Se, em alguma iteração, a aproximação da derivada for muito ruim, o algoritmo pode levar a um valor de t_{n+1} fora do intervalo $[t_1, t_2]$, quando a solução na verdade encontra-se

dentro deste intervalo, e apresentar problemas de convergência. Nestes casos, a Equação (147) é substituída pela equação de atualização do chamado método da bisseção:

$$t_{n+1} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}, \text{ para } n=2, 3, 4, \dots \quad (149)$$

O método da bisseção é bem menos eficiente que o da secante, mas pode ser útil nos casos em que a aproximação da derivada conduza a erros significativos.

Em cada iteração o valor de t é atualizado através da Equação (147), ou da Equação (149) quando necessário, até que $g(t_{n+1})$ seja menor que uma dada tolerância, no presente trabalho, 10^{-4} . Quando este critério de parada é atingido, o algoritmo iterativo é encerrado, e assume-se $t_{falha}=t_{n+1}$ como sendo a solução do problema, ou seja, o tempo no qual ocorre a falha.

Como pontos iniciais, cada vez que é necessário calcular o tempo de ocorrência das falhas, adota-se t_1 igual ao tempo atual de simulação e t_2 igual ao tempo final de simulação, T . Além disso, para evitar cálculos desnecessários, antes de iniciar o método secante verifica-se se $g(t_2)$ é maior ou não que zero, caso seja, não é necessário determinar o tempo para o qual a falha ocorrerá, pois o mesmo será maior que T e, portanto, não terá influência sobre o problema de otimização em questão. Esta verificação se baseia no fato de que a equação de estado limite é monotonicamente decrescente sobre todo o intervalo de simulação, dessa maneira, se $g(T)>0$, então $g(t)>0$ para todo $0 \leq t \leq T$, portanto, não há ocorrência de falha no tempo de vida útil para o ponto amostral em análise.

Após a determinação dos tempos de ocorrência de cada modo de falha, o tempo de ocorrência do reparo é determinado considerando os tempos das inspeções, a probabilidade de detecção e os critérios de reparo, este último definindo se o defeito é reparado ou não.

O tempo no qual uma ação ocorre, seja ela reparo ou substituição, é igual ao mínimo entre o tempo de ocorrência do próximo reparo e o tempo de ocorrência da falha, considerando todos os modos de falha. No caso de ocorrência de falha, a depender do tipo de falha, pode se efetuar um reparo ou uma substituição. Quando um reparo acontece, o defeito atual é eliminado e um novo defeito, com diferentes taxas de crescimento ou propagação, é gerado; quando uma substituição acontece, o defeito atual é eliminado, um novo defeito é gerado, mas também as propriedades do material são reamostradas. Em ambos os casos, isto é, reparo ou substituição, um novo período de iniciação do defeito, igual a t_0 , é imposto, caso o modelo de deterioração envolva um período de iniciação. Depois disso, as funções

indicadoras, usadas para calcular números esperados de reparo e de falhas, são atualizadas. O procedimento, desde a determinação dos tempos de ocorrência das falhas até a atualização das funções indicadoras, é repetido até que o tempo da próxima ação seja maior que T . Números esperados de falha e reparo são obtidos através da divisão das funções indicadoras acumuladas pelo tamanho da amostra.

6.2.1. Atualização das incertezas através da simulação

A atualização de incertezas é feita automaticamente, através da simulação direta, uma vez que a história de cada ponto amostral ao longo do tempo inclui substituição da estrutura ou de parte dela e/ou possíveis reparos após inspeções ou determinados tipos de falha.

Em outras palavras, a simulação de cada cenário é feita do início ao fim da vida útil, considerando inspeções, reparos e substituições. Cada cenário simulado corresponde a um dos infinitos ramos da árvore de eventos. A compilação dos resultados obtidos para os vários cenários diferentes corresponde a uma integração numérica sobre todas as incertezas consideradas, resultando nos números esperados desejados.

Na Figura 40 são ilustrados quatro cenários simulados considerando um defeito, e inspeções a cada 20 anos. Um dos cenários envolve uma substituição, outro envolve um reparo e nos outros dois não ocorreram nem substituições nem reparos.

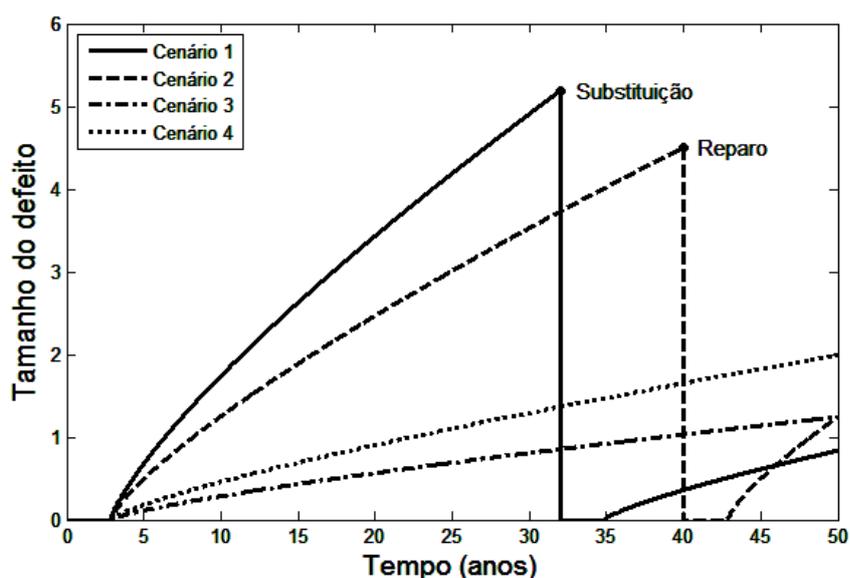


Figura 40 - Quatro cenários possíveis envolvendo substituições e reparos, ou nenhum dos dois.

7. OTIMIZAÇÃO DE UM DUTO ENTERRADO SUJEITO À CORROSÃO



De maneira geral, a resistência de dutos é reduzida ao longo do tempo devido a fenômenos aleatórios tais como a corrosão. Assim, a operação contínua de sistemas de dutos envolve a execução de atividades de inspeção e manutenção ao longo de toda a vida útil dos mesmos. Como estas atividades são impactantes nos custos associados à operação do sistema, é importante identificar planos ótimos de manutenção e inspeção (Faber *et al.*, 1996), de maneira a controlar os custos esperados de falha, ou riscos, mantendo a segurança da estrutura em níveis aceitáveis. Além disso, cada vez que uma inspeção, um reparo ou substituição ocorre, seja em toda a estrutura ou em uma parte dela, as incertezas envolvidas precisam ser atualizadas de acordo.

Nos últimos anos, muitos autores têm endereçado a questão da otimização de políticas de inspeção e manutenção bem como a atualização das incertezas envolvidas. Artigos conceituais têm discutido a otimização de inspeções e manutenções com base em mecanismos gerais de degradação e envolvendo vários tipos de estruturas civis (Onoufriou & Frangopol, 2002; Rackwitz *et al.*, 2005; Straub & Faber, 2005; Bucher & Frangopol, 2006; Streicher *et al.*, 2008; Okasha & Frangopol, 2009; Sanchez-Silva *et al.*, 2011).

A otimização de políticas de manutenção de pontes foi discutida, por exemplo, em Tao *et al.* (1994), Orcesi *et al.* (2010) e Orcesi & Frangopol (2011); o caso específico de pontes de concreto foi endereçado em Estes & Frangopol (2001) e Chassiakos *et al.* (2005). Otimização de custos do ciclo de vida de estruturas de concreto armado foi abordada em Biondini & Frangopol (2009) e Bastidas-Arteaga & Schoefs (2012). Além disso, muitos autores têm considerado a deterioração por fadiga e suas respectivas atividades de inspeção e manutenção (Cremona, 1996; Kulkarni & Achenbach, 2007; Valdebenito & Schuëller, 2010; Riahi *et al.*, 2011).

Entretanto, poucos artigos têm endereçado a otimização de políticas de inspeção e manutenção envolvendo dutos sujeitos à corrosão. Hong (1999) modelou o efeito do tamanho do defeito de corrosão na resistência remanescente de dutos através de um processo de Markov. A probabilidade de falha foi estimada incorporando a probabilidade de detecção do

defeito e a incerteza relacionada à medida dos defeitos detectados. Políticas ótimas de inspeção e manutenção foram selecionadas com base em restrições arbitrárias de confiabilidade. Zhou & Nessim (2011) consideraram o projeto ótimo de dutos de gás natural “*onshore*”, comparando dez diferentes espessuras de parede, incluindo aquelas determinadas pelas normas de dutos dos Estados Unidos (ASME, 1999) e do Canadá (CSA, 2007). Foi adotado um modelo conservador linear para o crescimento do defeito, no qual se assume que a profundidade e o comprimento do defeito crescem a uma taxa constante, mas aleatória. Também de maneira conservadora, cada defeito foi gerado no início da vida útil da estrutura, isto é, o tempo de iniciação da corrosão foi desconsiderado. O critério do mínimo custo esperado sobre o ciclo de vida e regras de dominância estocástica foram empregados para determinar o melhor projeto dentre os dez casos estudados. Foram consideradas: inspeções periódicas fixas, a cada dez anos; manutenções preventivas de defeitos de corrosão externa; e impactos de equipamentos devido à interferência de terceiros. O problema de otimização estudado pelos autores é limitado, do ponto de vista que o projeto ótimo é obtido comparando 10 projetos diferentes. Ainda assim, muitos parâmetros relevantes ao problema utilizados em Zhou & Nessim (2011) foram adotados no presente trabalho.

Dutos podem ser projetados e operados em favor da segurança através da adoção de coeficientes de segurança, recomendados por norma, e através de aproximações conservadoras. A gestão da segurança em curso de sistemas de dutos pode ser feita adotando-se taxas conservadoras de corrosão, que levam a intervalos de inspeção conservadores. Entretanto, quando se procura o projeto ótimo de um sistema estrutural, consequências (custos) esperadas de falha, devem ser consideradas (Beck & Gomes, 2012a; Beck *et al.*, 2012; Gomes & Beck, 2012). Custos esperados de falha dependem de números esperados de falha, que devem ser determinados a partir de modelos não conservadores, caso contrário, os custos esperados de falha são superestimados e o ótimo não pode ser encontrado.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, o primeiro problema de otimização de risco resolvido envolveu um duto enterrado sujeito à corrosão, tendo como variável de projeto o intervalo entre inspeções. Para representação do processo de corrosão foi utilizado o modelo preditivo de crescimento do defeito, apresentado na Subseção 5.4.1. A resolução deste problema resultou no artigo descrito no Anexo E desta Tese.

No presente capítulo, o modelo de corrosão em polinômios de caos construído na Seção 5.4 é empregado na busca do projeto ótimo para um exemplo que consiste em um duto enterrado sujeito à corrosão externa. Modelos precisos para determinação de falha em dutos contendo defeitos de corrosão são também considerados (Zhou, 2010). O projeto ótimo é

buscado assumindo a sobre-espessura de corrosão, o tempo até a primeira inspeção e o tempo entre inspeções sucessivas como variáveis de projeto e aplicando o método Simplex, descrito na Seção 4.2, juntamente com a estratégia de múltiplas inicializações apresentada na Seção 4.3. Resultados são apresentados para várias configurações de custo, refletindo diferentes consequências de falha e diferentes custos de inspeção.

7.1. MODELOS DE CRESCIMENTO DOS DEFEITOS DE CORROSÃO

A máxima profundidade do defeito de corrosão, d_{max} , é descrita ao longo do tempo utilizando o modelo em polinômios de caos construído na Seção 5.4 desta Tese. Entretanto, a caracterização do defeito envolve também um modelo para descrever a evolução temporal do comprimento do defeito, L , conforme apresentado na Figura 16.

Para o comprimento do defeito, não foram encontrados dados experimentais ou observados. Assim, para descrever o crescimento do comprimento, um modelo linear similar ao empregado por Zhou & Nessim (2011) é adotado, apesar de que, como tanto a profundidade do defeito quanto o seu comprimento estão relacionados ao mesmo processo físico, seus modelos deveriam ser dependentes.

Neste caso, assume-se que a taxa de crescimento do comprimento do defeito é uma variável aleatória com distribuição Lognormal, ou seja, para cada realização do processo estocástico comprimento do defeito, a taxa de crescimento é constante e igual a uma realização da respectiva variável aleatória. Em Zhou & Nessim (2011), o comprimento do defeito tem uma média inicial igual a 30.0mm e uma taxa de crescimento com distribuição Lognormal, média 1.0mm/ano e desvio-padrão 0.5mm/ano, o que leva a um comprimento médio de defeito igual a 80.0mm em 50 anos.

Para incluir o tempo de iniciação de corrosão, t_0 , o comprimento do defeito é considerado nulo até t_0 , e os parâmetros da distribuição da taxa são ajustados de maneira a atingir, após 50 anos de exposição, o mesmo comprimento médio de defeito que no modelo linear original. Os parâmetros determinados deste modo são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Parâmetros para o modelo do comprimento do defeito.

Variável	Distribuição de probabilidades	Parâmetros
Taxa de crescimento do comprimento do defeito	Lognormal	Média: $\mu=1.698\text{mm/ano}$ c.v.: 0.5
t_0	Determinística	$t_0=2.88\text{anos}$

7.2. EQUAÇÕES DE ESTADO LIMITE

A metodologia aqui adotada para determinar falha ou sobrevivência de um trecho de duto contendo defeitos de corrosão foi proposta por Zhou (2010). Ela consiste em três diferentes equações de estado limite que são combinadas para dar origem a três diferentes eventos de falha: pequeno vazamento, grande vazamento e ruptura.

Um pequeno vazamento ocorre quando o defeito penetra a parede do duto. A equação de estado limite para o pequeno vazamento é função da máxima profundidade do defeito e da espessura da parede do duto, w :

$$g_1(t) = 0.8 \cdot w - d_{\max}(t) \quad (150)$$

Observa-se que, na Equação (150), deveria se considerar toda a espessura do duto, w , ao invés de $0.8w$, para fins de comparação com a profundidade do defeito. Porém, na prática considera-se a ocorrência de pequeno vazamento quando d_{\max} atinge um valor igual oitenta por cento de w , e optou-se por manter este critério nas verificações de falha aqui efetuadas.

A equação de estado limite para a denominada “explosão”, que está relacionada a grandes vazamentos ou rupturas, é dada por:

$$g_2(t) = r_b(t) - p \quad (151)$$

onde r_b é a pressão de explosão e p é a pressão interna atuando no duto. A pressão de ruptura é função das propriedades do material e da geometria do duto, assim como da geometria do defeito. O modelo denominado PCORRC, desenvolvido por Leis & Stephens (1997), é adotado para descrever r_b em função do tempo:

$$r_b(t) = X_M \cdot \frac{2 \cdot \sigma_u \cdot w}{D} \left[1 - \frac{d_{\max}(t)}{w} \cdot \left(1 - \exp \left(- \frac{0.157 \cdot L(t)}{\sqrt{0.5 \cdot D \cdot (w - d_{\max}(t))}} \right) \right) \right] \quad (152)$$

onde σ_u é a resistência última à tração do material do duto, D é o diâmetro, L é o comprimento do defeito na direção longitudinal do duto e X_M é um fator multiplicativo do erro de modelo.

A explosão de um duto contendo defeitos de corrosão pode ser seguida por ruptura instável na direção longitudinal. A equação de estado limite para este modo de falha é:

$$g_3(t) = r_{rp}(t) - p \quad (153)$$

onde r_{rp} é a pressão de ruptura para um duto contendo um defeito que atravessa a parede. A pressão de ruptura pode ser calculada através do modelo desenvolvido por Kiefner *et al.* (1973), que leva em conta a tensão de escoamento, σ_f :

$$r_{rp}(t) = \frac{2 \cdot w \cdot \sigma_f}{M(t) \cdot D} \quad (154)$$

onde o fator de dilatação, M , também conhecido como “*Folias factor*”, é aproximado por:

$$M(t) = \begin{cases} \sqrt{1 + 0.6275 \cdot \frac{L(t)^2}{D \cdot w} - 0.003375 \cdot \left(\frac{L(t)^2}{D \cdot w}\right)^2}, & \text{se } \frac{L^2}{D \cdot w} \leq 50 \\ 0.032 \cdot \frac{L(t)^2}{D \cdot w} + 3.293, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (155)$$

e a tensão de escoamento, σ_f , é definida como sendo $0.9 \cdot \sigma_u$.

Uma explosão ocorre quando a parede do duto entra em colapso plástico devido à pressão interna no local do defeito, antes que o defeito penetre a parede. Uma explosão é subclassificada como ruptura ou grande vazamento. Em particular, uma ruptura ocorre quando o defeito através da parede resultante de uma explosão é grande o suficiente para que ocorra extensão axial instável do defeito resultante através da parede, enquanto um grande vazamento é definido como uma explosão sem extensão axial instável. Em resumo, como valores negativos da equação de estado limite denotam falha, um pequeno vazamento ocorre quando $g_1 \leq 0$ e $g_2 > 0$, um grande vazamento ocorre quando $g_1 > 0$, $g_2 \leq 0$ e $g_3 > 0$, e uma ruptura ocorre quando $g_1 > 0$, $g_2 \leq 0$ e $g_3 \leq 0$.

Os parâmetros de entrada requeridos para a avaliação da confiabilidade do duto são apresentados na Tabela 8. Todos os valores foram obtidos de Zhou & Nessim (2011), considerando um duto de classe dois, de acordo com a norma atual de dutos do Canadá (CSA, 2007), exceto o fator multiplicativo do erro de modelo, X_M , cuja distribuição foi obtida de Zhou (2010).

Tabela 8 - Atributos básicos do duto e distribuição do erro de modelo.

Variável	Média	c.v	Tipo de distribuição
Diâmetro (D)	508 mm	-	Determinística
Pressão interna (p)	9.653 MPa	-	Determinística
Espessura da parede (w)	7.05 mm	1.5%	Normal
Resistência à tração (σ_u)	615.9 MPa	3.0%	Normal
Erro de modelo para a pressão de explosão (X_M)	0.97	10.5%	Lognormal

7.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA O CASO DO DUTO ENTERRADO

No intuito de buscar a política ótima de inspeção e manutenção, é necessário definir em termos matemáticos o critério de otimalidade adotado. Neste trabalho, a política ótima é aquela que leva ao mínimo custo esperado total, isto é, o custo esperado total é a função objetivo do problema de otimização. A política de inspeção, por sua vez, é definida pelo tempo até a primeira inspeção, t_{insp1} , e pelo intervalo entre sucessivas inspeções, δt_{insp} .

O problema de otimização é resolvido de uma perspectiva de projeto inicial; dessa maneira, custos de inspeção, reparo e falha são trazidos para o tempo inicial, no qual o projeto é desenvolvido e as decisões devem ser tomadas. Para isso utiliza-se o modelo contínuo de desvalorização monetária apresentado na Seção 3.2. A ideia da otimização é de guiar a criação do projeto e definir o tempo para a primeira inspeção, incluindo custos iniciais, mas incluindo também custos esperados futuros de inspeção, reparo e falha.

Do ponto de vista da segurança, as variáveis de projeto mais relevantes no caso de dutos enterrados são a espessura da parede e o tipo de material utilizado. Variáveis tais como o diâmetro e a pressão interna são geralmente relacionadas a requerimentos produtivos, e são assumidas constantes neste trabalho. O material do duto não é considerado uma variável de projeto, uma vez que o foco do estudo está na otimização das políticas de inspeção. A espessura da parede não é propriamente uma variável de projeto, porque dutos tem que ser projetados de acordo com as normas de projeto locais. Tais normas especificam fatores de projeto que determinam a espessura da parede, uma vez que as outras variáveis envolvidas tenham sido definidas. Entretanto, é prática comum na indústria de óleo e gás utilizar a chamada sobre-espessura de corrosão, w_{cor} , uma espessura adicional de metal levando em conta a corrosão, que é especificada em adição à espessura mínima requerida para suportar a pressão interna. O objetivo da sobre-espessura de corrosão é adiar inspeções, reduzindo os dispêndios em tais atividades. Desse modo, o primeiro objetivo do problema de otimização

aqui formulado é decidir se uma espessura adicional de corrosão é compensada em termos da redução nos custos de inspeção e falha. Outro objetivo é encontrar o tempo ótimo para a primeira e segunda inspeções programadas. Seguindo o mesmo princípio, o tempo da terceira e das demais inspeções seria normalmente decidido considerando as taxas de corrosão reais, calculadas através dos resultados das duas primeiras inspeções. Inclusive, mesmo o tempo da segunda inspeção poderia ser mais bem definido levando em conta o resultado da primeira inspeção. Assim, o tempo entre inspeções, δt_{insp} , aqui encontrado, fornece uma estimativa dos custos de inspeção ao longo da vida útil, na fase de projeto, a ser atualizado durante a operação real do duto.

Para formular o custo esperado total, um custo de referência, C_{ref} , é adotado. Este custo representa o custo para produção e instalação de uma unidade de comprimento do duto, e pode ser substituído pelo custo real de um duto se uma medida real da função objetivo é requerida. Nos exemplos numéricos aqui apresentados, um custo unitário de referência é considerado e todos os outros custos são definidos em função de C_{ref} .

Fatores multiplicativos são usados para obtenção de custos relativos para os eventos: pequeno vazamento, explosão, reparo e inspeção; estes fatores são representados por f_{small} , f_{burst} , f_{rep} e f_{insp} , respectivamente. Assim, para cada evento de interesse v ocorrendo em um dado instante t_v , o custo, considerando a desvalorização monetária, é dado por:

$$C_{\eta}^v = f_{\eta} \cdot C_{ref} \cdot e^{-\lambda t_v}, \quad \eta = \{small, burst, insp, rep\} \quad (156)$$

Custos relacionados a inspeções são “pagos” em pontos conhecidos do tempo, de acordo com o planejamento das inspeções. Entretanto, um número variável de falhas e reparos ocorre aleatoriamente ao longo da vida útil do duto. Assim, para falhas e reparos, os custos apresentados na Equação (156) se tornam variáveis aleatórias. Na função objetivo, valores esperados destes custos são considerados.

Quando a sobre-espessura de corrosão é adicionada à espessura mínima da parede, o custo para produzir e instalar uma unidade de comprimento do duto, que é independente do tempo, é calculado por:

$$C_{wcor} = f_{wcor} \cdot C_{ref} \quad (157)$$

O fator f_{wcor} é dado pela área da seção transversal do duto considerando a sobre-espessura dividido pela área da seção transversal de referência. Desse modo, o fator assume um valor unitário se a sobre-espessura é nula e valores maiores que um para sobre-espessuras positivas. No intuito de não impor restrições excessivas ao problema, sobre-espessuras negativas também são permitidas, o que pode levar a projetos que não estão de acordo com a norma. Porém, os resultados obtidos são interpretados de acordo.

Os fatores multiplicativos para inspeção, reparo e custos de falha são determinados com base nos custos unitários apresentados em Zhou & Nessim (2011). O custo de falha por explosão é assumido como sendo o somatório dos custos de escavação e substituição do trecho do duto, mais indenizações por danos a terceiros e mortes. Através da consideração de diferentes cenários, com diferentes números de danos, fatalidades e outros fatores, o custo de explosão é obtido assumindo valores entre aproximadamente 25 e 200 vezes C_{ref} . Oito valores são adotados neste intervalo, e os mesmos valores são assumidos para o custo de falha por ruptura. O valor inferior, correspondente a $25 \times C_{ref}$, está relacionado a danos a uma propriedade, devido à ruptura com ignição, mas sem danos a terceiros ou mortes. O valor superior, $200 \times C_{ref}$, corresponde a danos causados a duas propriedades devido à ruptura com ignição e duas mortes. Em ambos os casos, três defeitos por quilômetro foram considerados, em comparação com Zhou & Nessim (2011), onde o número médio de defeitos significativos de corrosão foi considerado igual a quatro defeitos por quilômetro.

O custo de um pequeno vazamento é assumido igual a somente o custo de escavação e reparo do duto na região do vazamento, o que leva a aproximadamente 0.243 vezes C_{ref} . O custo de inspeções foi calculado como aproximadamente $0.0177 \times C_{ref}$, entretanto, para estudar a influência deste custo, nove valores no intervalo entre $0.0177 \times C_{ref}$ e $0.0550 \times C_{ref}$ foram adotados. Valores de todos os fatores multiplicativos dos custos, exceto f_{wcor} , que é função da sobre-espessura de corrosão, são dados na Tabela 9.

Tabela 9 - Fatores multiplicativos para cálculo dos custos.

Fator	Valor(es)
f_{insp}	[0.0177, 0.0550]
f_{rep}	0.243
f_{small}	0.243
f_{burst}	[25, 200]

Conforme citado na Seção 3.1, após uma inspeção, se um defeito é detectado, o mesmo pode ser reparado ou não. Os critérios de reparo adotados em Zhou & Nessim (2011)

são considerados no presente trabalho, isto é, um defeito é reparado imediatamente após uma inspeção se o mesmo satisfaz a qualquer um dos seguintes critérios:

$$d_{\max}(t) \geq 0.5 \cdot w \quad (158)$$

$$1.39 \cdot p \geq r_b(t) \quad (159)$$

A Equação (159) corresponde a um fator estimado de reparo (ERF – *Estimated Repair Factor*) igual a 1.39, que é o fator de segurança adotado em projeto de dutos de classe 2 considerando a norma canadense (CSA, 2007).

Imprecisão do equipamento de inspeção também é incluída, através de uma curva POD do tipo exponencial, descrita na Seção 3.1, considerando $q_{pod} = 3.262$. Isto corresponde a uma técnica de inspeção que apresenta 90% de probabilidade de detecção para um defeito com profundidade igual a 10% da espessura da parede do duto, isto é, para $d_{\max} = 0.705 \text{ mm}$.

Dado o tempo de vida, T , o tempo até a primeira inspeção, t_{insp1} , e o intervalos entre inspeções seguintes, δt_{insp} , o número inspeções é dado por:

$$N_{insp} = 1 + \text{floor} \left(\frac{T - t_{insp1}}{\delta t_{insp}} \right) \quad (160)$$

onde a função $\text{floor}(\cdot)$ retorna o maior inteiro menor que ou igual a seu argumento.

Finalmente, o custo esperado total, C_{ET} , é igual à soma do custo inicial, incluindo a sobre-espessura de corrosão, ou seja, C_{wcor} , com o custo esperado de inspeções e os custos esperados de reparo e falha:

$$C_{ET} = C_{wcor} + N_{insp} \cdot E(C_{insp}^v) + EnR \cdot E(C_{rep}^v) + EnF(1) \cdot E(C_{small}^v) + (EnF(2) + EnF(3)) \cdot E(C_{burst}^v) \quad (161)$$

onde $E(\cdot)$ é o operador valor esperado, EnR é o número esperado de reparos e EnF é um vetor contendo os números esperados de falha para cada evento de falha, isto é, para pequeno vazamento, grande vazamento e ruptura.

O problema de otimização é então definido por:

$$\begin{aligned}
& \text{encontrar: } [t_{insp1}, \delta t_{insp}, w_{cor}] \\
& \text{que minimiza: } C_{ET}(t_{insp1}, \delta t_{insp}, w_{cor}) \\
& \text{sujeito a: } t_{insp1} \in (t_{insp1}^{\min}, t_{insp1}^{\max}) \\
& \quad \delta t_{insp} \in (\delta t_{insp}^{\min}, \delta t_{insp}^{\max}) \\
& \quad w_{cor} \in (w_{cor}^{\min}, w_{cor}^{\max})
\end{aligned} \tag{162}$$

onde $(t_{insp1}^{\min}, \delta t_{insp}^{\min}, w_{cor}^{\min})$ e $(t_{insp1}^{\max}, \delta t_{insp}^{\max}, w_{cor}^{\max})$ são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto t_{insp1} , δt_{insp} e w_{cor} , respectivamente, definidos de maneira a não restringir a solução do problema de otimização. Os valores (5.0,2.5,-0.75) e (45.0,30.0,0.75) foram considerados.

Para cada conjunto de valores das variáveis de projeto $(t_{insp1}, \delta t_{insp}, w_{cor})$, o cálculo dos números esperados de reparos e falhas é feito por meio da análise probabilística via *Latin Hypercube Sampling*, descrita na Seção 2.8, considerando os detalhes apresentados no Capítulo 6. Durante a simulação, quando uma falha ocorre, a depender do tipo, ela pode ser seguida por um reparo ou substituição. Para um evento do tipo pequeno vazamento, a execução de um reparo é suficiente, nos outros dois casos, que envolvem grande vazamento e ruptura, é necessário efetuar uma substituição.

7.4. RESULTADOS NUMÉRICOS

7.4.1. Resultados para uma configuração de custos de referência

O cálculo do custo esperado total depende dos números esperados de falha e reparo, que por sua vez são determinados por simulação através do método LHS. Neste problema, o desvio-padrão relacionado à função indicadora suavizada foi mantido igual ao recomendado em Taflanidis & Beck (2008), isto é, $\sigma=0.01$. Claramente, é necessário primeiramente estabelecer o tamanho apropriado da amostra, no intuito de calcular tais números esperados com suficiente precisão. Ao mesmo tempo, a busca pela precisão deve levar em conta o custo computacional envolvido, para evitar que o problema de otimização apresente um custo computacional proibitivo. Com este propósito, uma configuração de custo de referência, definida por $C_{burst}=25 \times C_{ref}$ e $C_{insp}=0.0177 \times C_{ref}$, é adotada, e diferentes tamanhos de amostra são testados.

A Figura 41 mostra a convergência dos resultados da simulação com relação ao tamanho da amostra, bem como a variabilidade do custo esperado total, em termos de seu desvio-padrão, σ , para a configuração de referência, com $t_{insp1}=25.0$, $\delta t_{insp}=10.0$ e $w_{cor}=0.0$. No intuito de obter resultados estáveis e precisos, uma amostra de tamanho 4.0×10^5 é utilizada daqui em diante, mas tendo em mente que os resultados podem ser ligeiramente diferentes para diferentes valores das variáveis de projeto. Em todos os casos, processamento paralelo foi empregado, utilizando oito processos num processador Intel® Core™ I7 CPU 860 @ 2.80GHz, com quatro núcleos de processamento e tecnologia *Hyper-Threading*, que permite trabalhar como se houvessem oito núcleos ao invés de quatro. Na busca exaustiva, apresentada na Subseção 7.4.2, cada núcleo é responsável pela simulação de 50.000 pontos amostrais por análise probabilística; no algoritmo Simplex com múltiplas inicializações, cujos resultados são apresentados na Subseção 7.4.3, cada núcleo é responsável por um ponto de inicialização por vez.

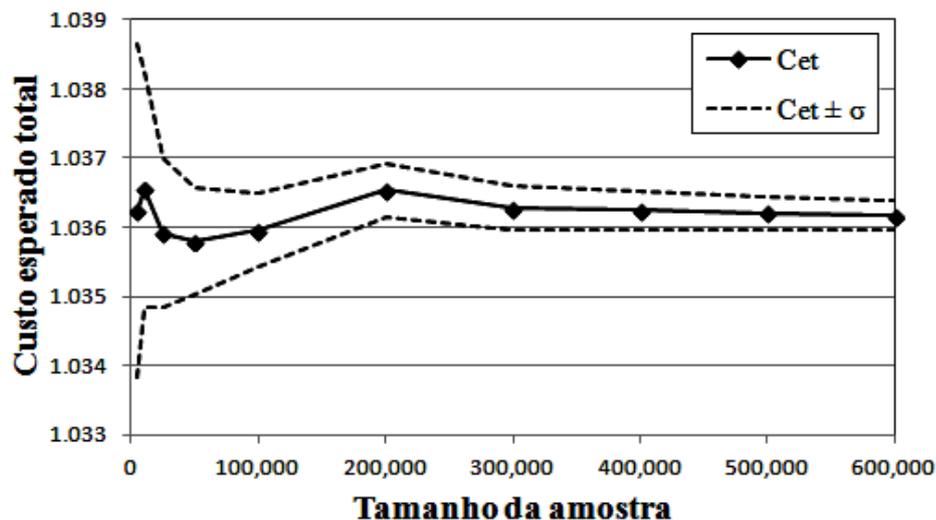


Figura 41 - Custo esperado total versus tamanho da amostra.

A Figura 42 apresenta os valores da função objetivo para a configuração de custos de referência, em termos de t_{insp1} e δt_{insp} , para diferentes valores de w_{cor} (-0.60, 0.0 e 0.60). Observa-se que a função objetivo como um todo não é suave, mas apresenta claramente vales suaves separados por nervuras. As nervuras são causadas por descontinuidades no número de inspeções que ocorrem dentro do intervalo de 50 anos, para cada política de inspeção diferente. As descontinuidades são mais pronunciadas para pequenos números de inspeções; por exemplo, no caso onde uma única inspeção ocorre, isto é, $N_{insp}=1$, $t_{insp1} < T$ e $t_{insp1} + \delta t_{insp} > T$. Para pequenos valores de t_{insp1} e δt_{insp} o número de inspeções é muito alto, e o custo de

inspeções domina o custo esperado total. À medida que o número de inspeções diminui, o número esperado de falhas aumenta, levando a uma maior influência dos custos de falha sobre C_{ET} . Dentro de cada região na qual o número de inspeções se mantém constante, isto é, dentro de cada vale, a função objetivo é suave e convexa, o que significa que há um ponto de mínimo custo esperado total para cada número fixo de inspeções. Dentro de cada vale, o mínimo é definido pela combinação de números esperados de reparo e de falha que leva ao menor valor do custo esperado total.

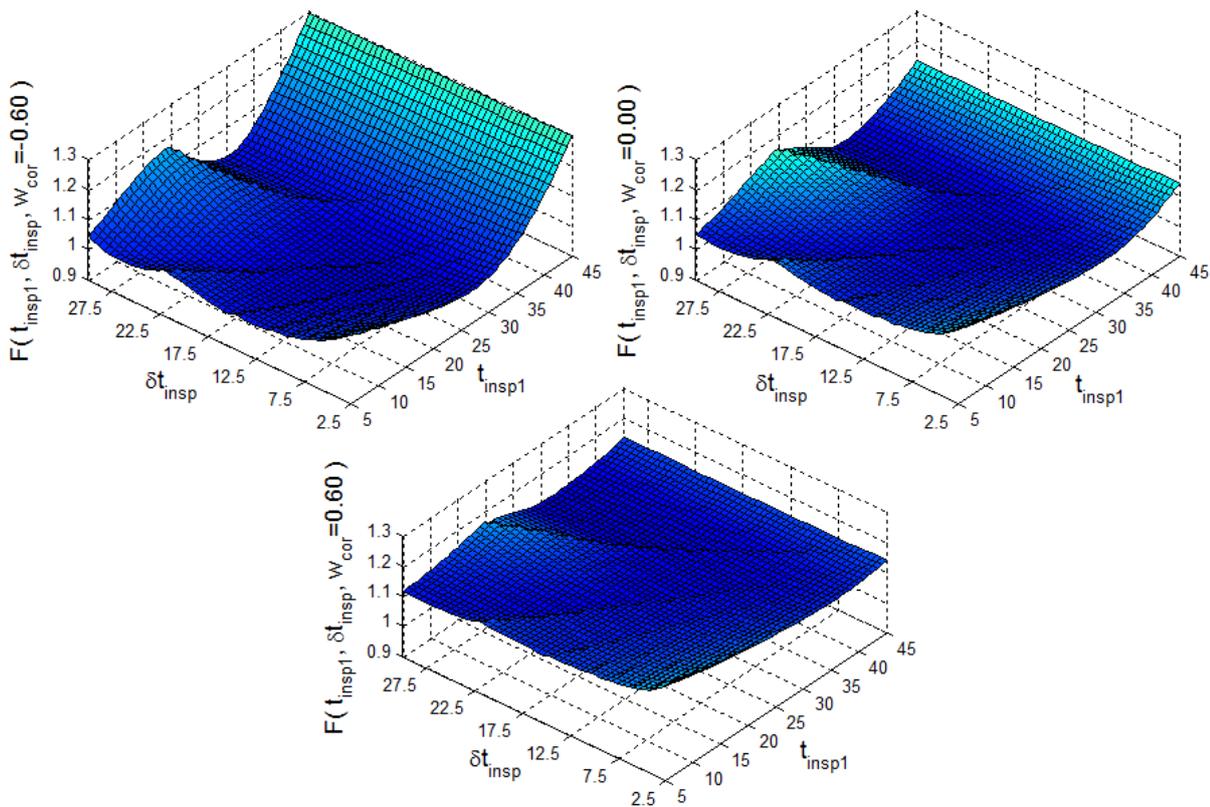


Figura 42 - Função objetivo para configuração de custos de referência, para diferentes valores da sobre-espessura de corrosão.

A Figura 43 mostra a função objetivo para diferentes intervalos entre as inspeções que sucedem a primeira, para valores fixos $t_{insp1}=25$ e $w_{cor}=0.0$. Nesta figura, as descontinuidades associadas com mudanças no número de inspeções são mais evidentes. Descontinuidades ocorrem, por exemplo, para δt_{insp} próximo a 12.5 anos, uma vez que o número de inspeções muda de três (para $8.33 < \delta t_{insp} \leq 12.5$) para dois (para $12.5 < \delta t_{insp} \leq 25.0$). Quando a segunda inspeção passa a ocorrer depois da vida útil de projeto, $T=50$ anos, δt_{insp} passa a não mais influenciar o custo esperado total, assim, na Figura 43 o custo esperado total se torna constante para $\delta t_{insp} > 25.0$ anos.

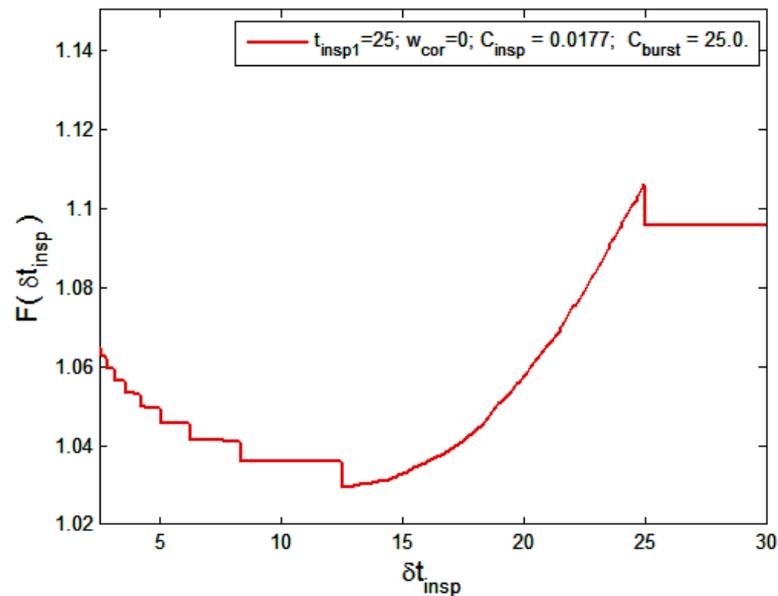


Figura 43 - Função objetivo para diferentes intervalos entre inspeções, configuração de custo de referência.

Estas figuras mostram que, apesar de serem utilizadas variáveis de projeto contínuas (t_{insp} e δt_{insp}) para representar o planejamento das inspeções, o número de inspeções dentro da vida de projeto T é discreto, e isto leva a descontinuidades significativas na função custo esperado total. Estas descontinuidades tornam a solução do problema de otimização muito mais difícil. Além disso, a diferença entre custos esperados totais para diferentes mínimos locais é muito pequena no problema em estudo, e há muitas regiões nas quais as derivadas parciais se aproximam de zero, isto é, regiões quase planas. Por estas razões, o problema é resolvido utilizando o método Simplex com múltiplas inicializações ao invés de um método de otimização baseado em gradiente. Entretanto, para se ter uma ideia dos resultados procurados, o problema é resolvido inicialmente através de uma busca exaustiva com uma pequena resolução associada.

7.4.2. Resultados obtidos via busca exaustiva

Uma vez que o problema de otimização aqui considerado possui somente três variáveis de projeto, a solução ótima pode ser encontrada diretamente através de uma busca exaustiva, pelo menos utilizando uma baixa resolução. Na busca exaustiva, a função objetivo é calculada para uma grade fixa de valores das variáveis de projeto, e seleciona-se o mínimo dentre os valores computados. Com este propósito, custos esperados totais são calculados para uma grade de $50 \times 50 \times 21$ pontos ($t_{insp1} \times \delta t_{insp} \times w_{cor}$) igualmente espaçados dentro dos

intervalos [5.0; 45] anos, [2.5; 30.0] anos e [-0.75; 0.75] mm. A busca exaustiva provê uma solução pouco precisa, devido à baixa resolução da grade, mas confiável, pois, desde que a resolução utilizada seja suficiente, o algoritmo não fica preso a mínimos locais muito diferentes do mínimo global. Assim, os resultados obtidos pela busca exaustiva podem servir de base para comparação com outra solução mais refinada. Na Subseção 7.4.3, a solução exaustiva é comparada e substituída pela solução via Simplex com múltiplas inicializações.

Estudos paramétricos e análises de sensibilidade aumentam o conhecimento obtido a partir dos resultados das simulações numéricas. O problema de otimização aqui estudado é altamente sensível aos custos de inspeção e falha assumidos inicialmente. No intuito de estudar a influência dos custos assumidos sobre as soluções ótimas, o problema é resolvido para oito valores de C_{burst} , custo de falha devido à explosão, e nove valores do custo de inspeção, C_{insp} , resultando em 72 cenários de custos diferentes. Valores ótimos da função objetivo para os diferentes cenários de custos são apresentados na Figura 44. Resultados em termos dos valores ótimos das variáveis de projeto são mostrados na Figura 45.

O comportamento da função objetivo, ilustrado na Figura 44, está de acordo com o esperado, pois o custo esperado total se apresenta diretamente proporcional aos custos de inspeção e manutenção. Por outro lado, a não monotonicidade dos resultados e as regiões planas mostradas na Figura 45 são devidas à baixa resolução da grade de pontos utilizada na busca exaustiva. Para se ter uma ideia do número ótimo de inspeções, na área plana no centro dos gráficos, $N_{insp}=3$, com a primeira inspeção ocorrendo em $t_{insp1}\approx 22.96$ anos e as inspeções seguintes ocorrendo a cada $\delta t_{insp}\approx 9.23$ anos.

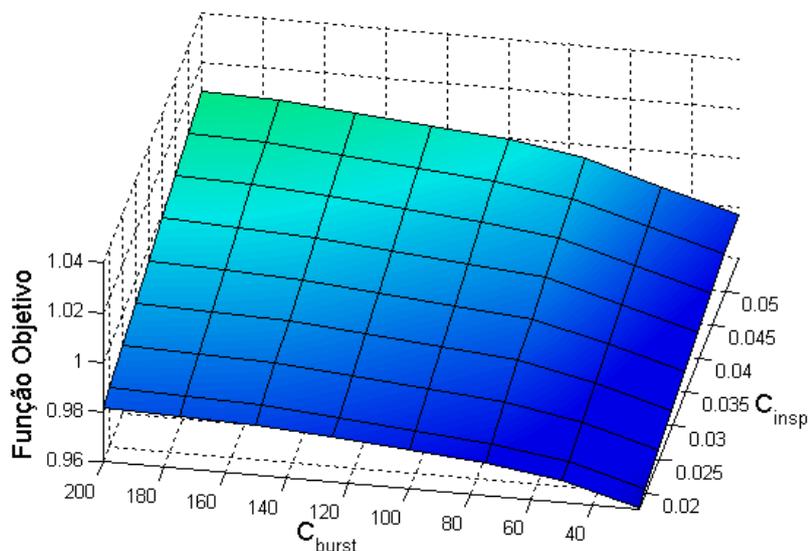


Figura 44 - Valores da função objetivo para diferentes configurações de custo de explosão e inspeção, computados por busca exaustiva.

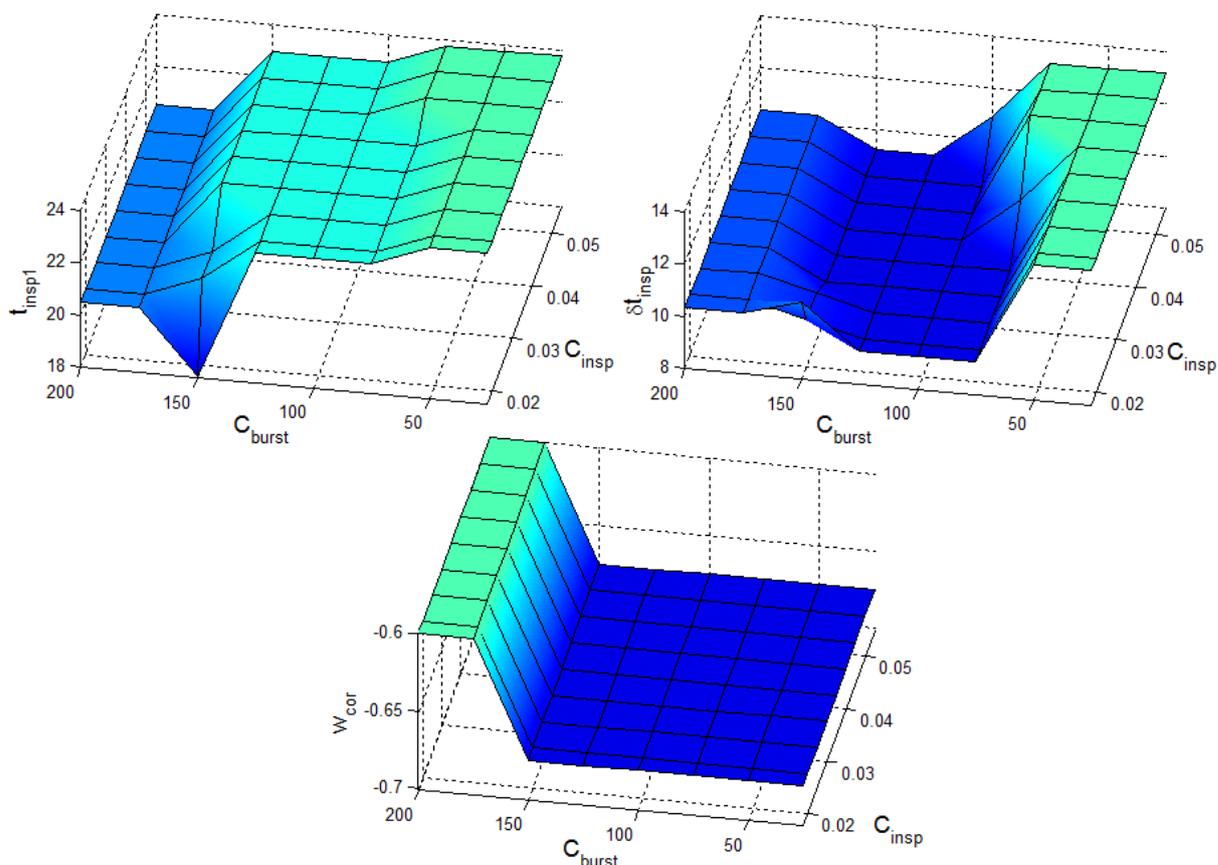


Figura 45 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de explosão e inspeção, computados por busca exaustiva.

7.4.3. Resultados obtidos via Simplex com múltiplas inicializações

O método Simplex descrito na Seção 4.2 foi utilizado considerando um total de 60 pontos de inicialização, isto é, $n_{grid} = 60$, distribuídos numa grade de $[n_1, n_2, n_3] = [5, 4, 3]$ pontos, conforme apresentado na Seção 4.3.

Soluções são computadas para 72 cenários diferentes de custos de inspeção e falha (C_{insp} , C_{burst}), tal qual no caso da busca exaustiva. A Figura 46 mostra os valores ótimos do custo esperado total para os 72 casos, obtidos através do método Simplex com múltiplas inicializações. Valores ótimos das variáveis de projeto são mostrados na Figura 47. Comparação com as figuras apresentadas na Subseção 7.4.2 revela que tanto as variáveis de projeto quanto os custos esperados totais ótimos foram similares aos obtidos via busca exaustiva, o que indica haver consistência nos resultados. Entretanto, como o Simplex com múltiplas inicializações é uma busca mais refinada, os projetos ótimos apresentam menos

oscilações e, em geral, maior precisão. As diferenças são mais pronunciadas para w_{cor} , uma vez que na busca exaustiva poucos pontos foram utilizados para descrever a função objetivo com relação a essa variável de projeto. Entretanto, os resultados obtidos mostram mudanças não muito grandes no valor ótimo de w_{cor} para os diferentes cenários de custo.

Na solução via Simplex, quando o custo de explosão muda de 100 para 75, com um valor fixo de $C_{insp}=0.0550$, o tempo da primeira inspeção muda de aproximadamente 21.85 anos para 25.02 anos, δt_{insp} muda de 10.01 para 12.49 anos e w_{cor} muda de -0.6860 para -0.6500mm. A diferença em termos do valor da função objetivo é de aproximadamente 0.79%, de 1.0025 para 0.9946, muito menor que a variação nos custos de explosão considerados.

Devido à pequena diferença entre os mínimos locais em termos do valor da função objetivo, os custos esperados totais encontrados via Simplex são bastante similares aos custos encontrados pela busca exaustiva, sendo a diferença média entre os valores ótimos menor que 0.1%. Em contraste, o número total de chamadas à função objetivo para o algoritmo Simplex foi aproximadamente seis vezes menor que o número de chamadas para o caso da busca exaustiva. Uma comparação justa em termos do tempo de processamento é bem mais complexa de ser efetuada, mas é apresentada a seguir.

Na busca exaustiva a avaliação da função custo esperado total é efetuada sempre para os mesmos valores das variáveis de projeto, ou seja, considerando uma grade fixa de pontos. Assim, como os resultados das análises probabilísticas são independentes dos custos envolvidos, os números esperados calculados para uma configuração de custo podem ser reutilizados em todas as outras configurações estudadas, reduzindo drasticamente o custo computacional envolvido.

Na otimização via Simplex, a solução de cada problema de otimização leva à avaliação da função objetivo para diferentes valores das variáveis de projeto, tornando bem mais difícil a reutilização de resultados de análises probabilísticas anteriores. No entanto, neste caso seria possível reaproveitar os resultados de otimizações anteriores como pontos iniciais “privilegiados” nas demais otimizações, o que não foi utilizado neste trabalho.

Uma comparação justa é obtida então considerando os tempos de processamento “reais” da busca exaustiva e do método Simplex, isto é, sem reutilização de resultados e sem a utilização de pontos iniciais “privilegiados”. Essa comparação é dita justa uma vez que para casos reais o problema de otimização é comumente resolvido para uma única configuração de custo, impossibilitando a utilização de qualquer uma das duas estratégias supracitadas.

Os tempos de processamento são apresentados na Tabela 10, que mostra que o tempo associado ao método Simplex com múltiplas inicializações, conforme esperado, é bem menor do que o tempo associado à busca exaustiva.

Tabela 10 – Tempos de processamento associados à busca exaustiva e ao método Simplex com múltiplas inicializações, para as 72 configurações de custo diferentes.

Tempo de processamento (horas)	
Busca exaustiva	Método Simplex
177.92	16.31

Ressalta-se ainda que este problema apresenta regiões quase planas que dificultam a convergência do algoritmo de otimização. Em problemas onde os mínimos são mais pronunciados a performance do algoritmo de otimização em comparação com a busca exaustiva tende a ser bem melhor.

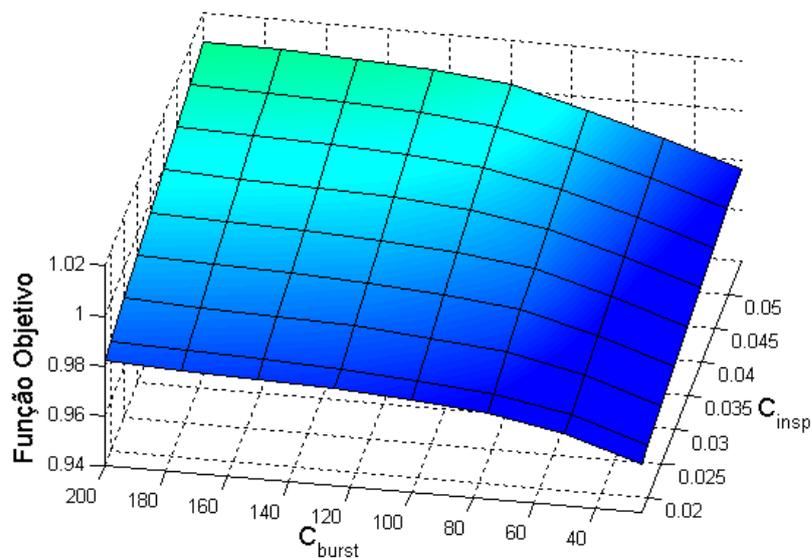


Figura 46 - Valores ótimos da função objetivo para diferentes configurações de custos de inspeção e explosão, computados através do método Simplex.

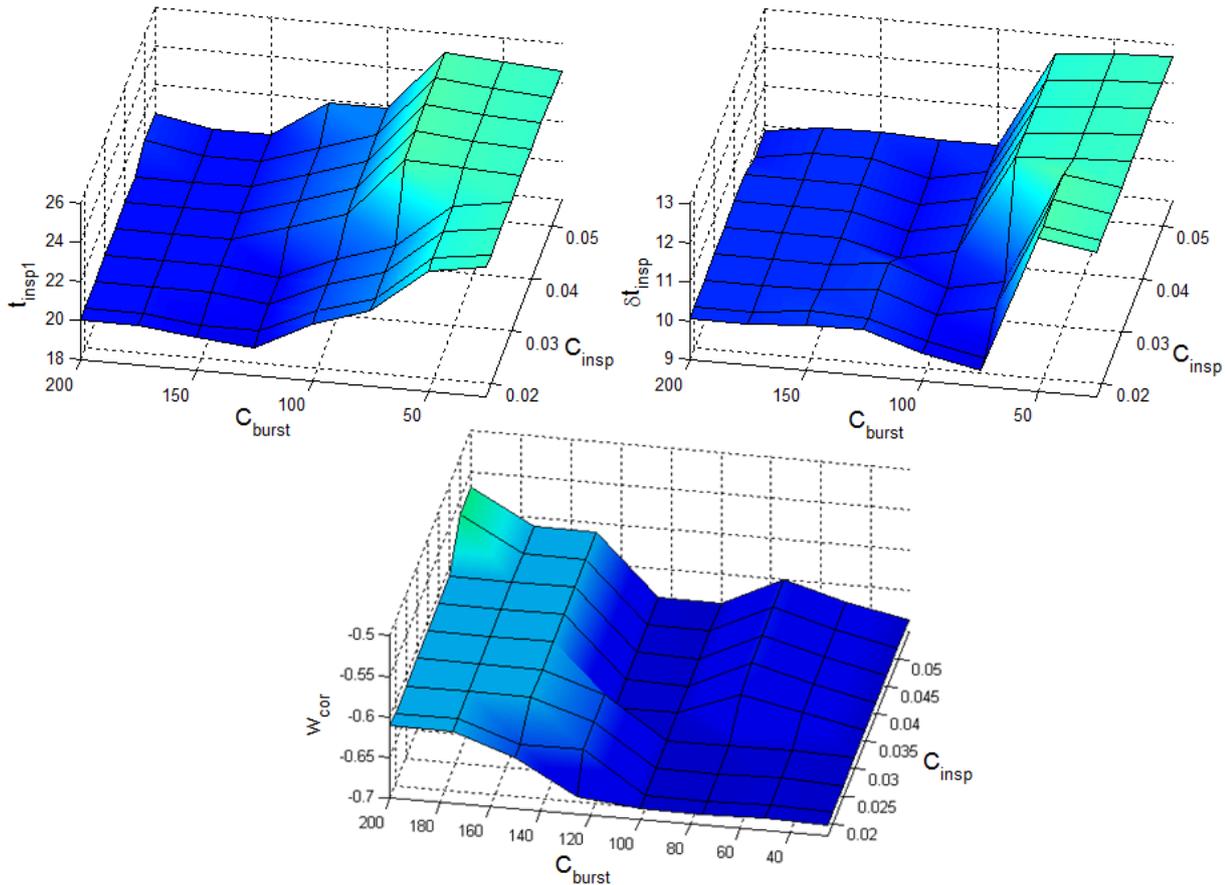


Figura 47 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de inspeção e explosão, computadas através do método Simplex.

7.4.4. Conclusões a respeito do problema de otimização do duto sujeito à corrosão

Observa-se, conforme esperado, que a função objetivo aumenta proporcionalmente aos custos de falha (explosão) e inspeção. Mais ainda, tanto a Figura 44 quanto a Figura 46 indicam que não houve grandes problemas com mínimos locais, pelo menos em termos dos custos esperados totais ótimos, pois há regularidade nos valores ótimos para todas as configurações de custo estudadas.

Na Figura 47 nota-se que os valores ótimos do tempo até a primeira inspeção e do intervalo entre inspeções tendem a diminuir à medida que o custo de explosão cresce e o custo de inspeção diminui. Observa-se ainda que para diferentes custos de explosão e inspeção as configurações ótimas podem ser bastante diferentes.

Para todos os cenários de custo, a sobre-espessura de corrosão é negativa. Isto significa que o fator de segurança adotado em projeto é (bastante) conservador, ou, de outro

ponto de vista, que é menos custoso adotar uma parede de duto menos espessa e aumentar o número de inspeções do que adotar uma parede mais espessa com menos inspeções. Este resultado está, de certo modo, de acordo com Zhou & Nessim (2011), onde dez diferentes espessuras são comparadas e o mínimo custo esperado total foi obtido para um projeto com fator de segurança menor que o recomendado pela norma canadense (CSA, 2007), aqui adotado. A sobre-espessura de corrosão ótima assume valores entre aproximadamente -0.57mm e -0.69mm, para diferentes configurações de custo, o que corresponde a um fator de segurança entre 1.276 e 1.253, ao invés do valor 1.39 presente na norma.

Os resultados apresentados mostram também que, apesar das discontinuidades, a função objetivo é bem comportada na vizinhança de mínimos locais, pelo menos para valores fixos da sobre-espessura de corrosão. Isto é, ela não é muito sensível a pequenas mudanças nos valores das variáveis de projeto nem de parâmetros tais como os custos de explosão e inspeção. Este bom comportamento pode ser comum a problemas de otimização estrutural; entretanto, ele é também uma das principais fontes de problemas de convergência, uma vez que os mínimos locais apresentam valores da função objetivo similares aos do mínimo global. Isto pode levar à aceitação de um mínimo local como sendo uma boa solução, que poderia em princípio ser encontrado aplicando buscas locais bastante eficientes, tais como os algoritmos baseados em gradientes. Neste trabalho, entretanto, o interesse está no mínimo global, e, considerando as discontinuidades mostradas anteriormente, algoritmos de busca local não são apropriados para este caso.

8. OTIMIZAÇÃO DE UMA PLACA SUJEITA À FADIGA



Em geral, estruturas metálicas submetidas à ação de carregamentos cíclicos são passíveis de desenvolver defeitos de fadiga ao longo de sua vida útil. Devido à natureza do processo de propagação de trincas de fadiga, que ao contrário do processo de corrosão não tende a desacelerar com o tempo, a existência de uma trinca de fadiga pode levar rapidamente a um colapso catastrófico da estrutura. Uma maneira efetiva de lidar com este problema é através de inspeções periódicas e reparos.

As condições que governam a propagação de trincas de fadiga são: a geometria do defeito e da estrutura, a localização do defeito inicial, e características do material e do carregamento aplicado; e todas elas apresentam, em geral, natureza aleatória (Cremona, 1996). Assim, embora as atividades de manutenção e inspeção sejam estratégias eficientes para lidar com a deterioração por fadiga, o planejamento de tais atividades é bastante desafiador (Valdebenito & Schuëller), e envolve atualização de probabilidades e tomada de decisões na presença de incertezas.

Como citado no Capítulo 7, muitos autores têm considerado a deterioração por fadiga e suas respectivas atividades de inspeção e manutenção, considerando a natureza aleatória envolvida (Cremona, 1996; Kulkarni & Achenbach, 2007; Valdebenito & Schuëller, 2010; Riahi *et al.*, 2011). Entretanto, a maioria dos trabalhos presentes na literatura não aborda a questão da otimização das políticas de manutenção e inspeção, seja endereçando apenas as atualizações necessárias para a análise de confiabilidade (Riahi *et al.*, 2011), seja lançando apenas as bases para futuras otimizações, como em Cremona (1996) e Madsen *et al.* (1987). Em outros casos, o problema de otimização chega a ser resolvido, mas considerando algumas simplificações, como, por exemplo, em Kulkarni & Achenbach (2007), no qual somente o tamanho inicial da trinca é considerado variável aleatória.

Em Valdebenito & Schuëller (2010) o problema de otimização do planejamento de inspeções e manutenções foi resolvido para o caso de uma placa metálica contendo quatro furos de rebite e oito trincas iniciais. A variante do método dos elementos finitos denominada FEAM (*Finite Element Alternating Method*) foi utilizada para cálculo dos fatores de

intensidade de tensões na ponta de cada trinca, e a qualidade e o tempo de inspeção foram considerados variáveis de projeto num processo de otimização cujo objetivo foi minimizar o custo esperado total. Porém, o problema envolveu somente uma inspeção, os intervalos das variáveis de projeto foram definidos de maneira a evitar descontinuidades inerentes à função objetivo, e foram utilizadas aproximações tanto para efetuar o processo de otimização local, quanto para cálculo das derivadas necessárias ao método de otimização empregado. Além disso, uma das versões aleatórias da lei de Paris foi utilizada, na qual considerou-se C descrito por uma variável aleatória com distribuição lognormal e m como um valor determinístico, e assumiu-se que a ocorrência de um reparo ou falha anulava qualquer probabilidade de falha futura.

Neste capítulo, o modelo de propagação de trinca em polinômios de caos construído na Seção 5.5 é aplicado em um problema de determinação tanto dos tempos ótimos de inspeção quanto do valor “crítico” ótimo do tamanho de trinca a partir do qual um defeito detectado deve ser reparado, para o caso de uma placa de alumínio 7075-T6. No intuito de obter resultados confiáveis da aproximação PCE, a placa é sujeita a condições idênticas às aquelas dos testes de Ghonem & Dore (1987) sobre os quais a aproximação foi construída. O problema é resolvido utilizando simulação, tal qual descrito na Seção 6.2, e procurando evitar ao máximo aproximações. Desse modo, não há simplificações em termos da ocorrência de falhas e reparos, nem são utilizadas aproximações para solução do problema de otimização.

O procedimento para resolução do problema é bastante semelhante ao utilizado no caso do duto enterrado sujeito à corrosão (Capítulo 7), como é visto a seguir.

8.1. DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS MECÂNICO E PROBABILÍSTICO

O problema consiste em uma placa de liga de alumínio 7075-T6, com dimensões iguais às das placas testadas por Ghonem & Dore (1987), isto é, com largura 101mm, altura 320mm e espessura de 3.175mm (Figura 21). A placa possui uma trinca centralizada cujo tamanho inicial, a_0 , é uma variável aleatória, descrita na Tabela 11, com parâmetros semelhantes aos utilizados em Valdebenito & Schuëller (2010). A placa está sujeita a um carregamento cíclico com $P_{min}=16.94kN$, $P_{max}=28.23kN$ e amplitude $\Delta P=11.29kN$, que consiste em uma condição intermediária entre o carregamento aplicado até que o defeito atingisse 7.5mm e o carregamento aplicado no decorrer do teste I em Ghonem & Dore (1987), mantendo a relação $R=P_{min}/P_{max}=0.6$, e que corresponde a uma variação de tensão igual a

aproximadamente 3.5kN/cm². O tempo de vida útil, T , da estrutura é de 10 anos, e foi considerada uma frequência de carregamento igual a 1.2×10^5 ciclos por ano.

As características da liga de alumínio utilizadas são: resistência à fratura, K_{Ic} , com distribuição Lognormal, média 86.96kN/cm² (Lai & Ferguson, 1985) e coeficiente de variação igual a 10% (Valdebenito & Schuëller, 2010); tensão de escoamento, σ_y , também descrita por uma variável aleatória com distribuição Lognormal, com média 50.3kN/cm² (ASM, 2012) e coeficiente de variação 10% (Valdebenito & Schuëller, 2010). A Tabela 11 apresenta um sumário das variáveis aleatórias envolvidas.

Tabela 11 – Variáveis aleatórias envolvidas no problema de fadiga.

Variável	Média	c.v.	Tipo de distribuição
Tamanho inicial da trinca (a_0)	1.5mm	50%	Lognormal
Resistência à fratura (K_{Ic})	86.96kN/cm ²	10%	Lognormal
Tensão de escoamento (σ_y)	50.3kN/cm ²	10%	Lognormal

A metodologia para determinar falha ou sobrevivência da placa é baseada na curva de resistência R6 (Anderson, 1991), na qual a falha pode ocorrer devido à interação entre fratura frágil (quando o fator de intensidade de tensões é maior do que a resistência à fratura) e dúctil (quando a tensão atuante no componente estrutural é maior do que sua resistência). A equação de estado limite é então dada por:

$$g_1(a) = K_{Ic} \cdot C_f(a) - K_I(a) \quad (163)$$

onde:

$$C_f(a) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_c(a)} \left(\frac{8}{\pi^2} \log \left(\sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max}}{\sigma_c(a)} \right) \right) \right)^{-0.5} \quad (164)$$

e no caso de uma estrutura sob tensão axial, a tensão de colapso $\sigma_c(\cdot)$ é igual à tensão de escoamento do material, σ_y .

Além das variáveis aleatórias apresentadas na Tabela 11, o problema envolve dois processos estocásticos: o tamanho da trinca, que é função do número de ciclos e, portanto, do tempo, denominado $a(t)$, e o fator de intensidade de tensões, que pode ser visto como uma

função do tamanho da trinca, $K_I(a)$, ou do tempo, $K_I(t)$. Realizações de tais processos são obtidas conforme detalhado a seguir.

Como a função de geometria para uma placa de tamanho finito com uma trinca centralizada, apresentada junto à Equação (131), depende do cálculo da secante, não foi possível integrar analítica ou simbolicamente o crescimento de trinca e obter uma solução fechada, capaz de descrever o tamanho do defeito como uma função explícita do tempo e das variáveis estocásticas envolvidas. Dessa maneira, para cada realização do processo estocástico gaussiano no qual a PCE está indexada, a integração é feita numericamente, considerando 1010 pontos igualmente espaçados ao longo do tempo. Após a integração, 101 pontos igualmente espaçados são armazenados para descrever o histórico de evolução do tamanho da trinca. Durante a simulação, o tamanho da trinca para um dado instante t , denominado $a(t)$, é calculado efetuando interpolações lineares, considerando os dois pontos mais próximos disponíveis. O mesmo procedimento é utilizado para calcular o fator de intensidade de tensões, $K_I(t)$.

Enquanto o processo estocástico $K_I(t)$ é empregado na avaliação da equação de estado limite, o processo $a(t)$ é aplicado tanto no cálculo da probabilidade de detecção quanto para avaliar o critério de reparo, conforme descrito na seção a seguir.

8.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO PARA O CASO DA PLACA SUJEITA À FADIGA

O mesmo critério de otimalidade utilizado no Capítulo 7 é adotado neste problema: a política ótima de inspeção e manutenção é aquela que leva ao menor custo esperado total. O problema de otimização continua a ser resolvido de uma perspectiva de projeto inicial, na qual todos os custos são trazidos para o tempo inicial, aplicando o modelo de desvalorização monetária apresentado na Seção 3.2, e a política de inspeção continua a ser definida pelas variáveis de projeto “tempo até a primeira inspeção”, t_{insp1} , e “intervalo entre sucessivas inspeções”, δt_{insp} .

Conforme citado na Seção 3.1, após uma inspeção, se um defeito é detectado, o mesmo pode ser reparado ou não. Um critério de reparo bastante comum em problemas de fadiga consiste em comparar o tamanho do defeito com um valor crítico de reparo, a_{rep} :

$$a(t) \geq a_{rep} \quad (165)$$

ou seja, um defeito detectado $a(t)$ é reparado se e somente se seu tamanho for maior ou igual ao valor crítico.

A influência de a_{rep} no projeto ótimo foi estudada de forma simplificada em Kulkarni & Achenbach (2007), calculando o custo esperado total para sete valores diferentes de a_{rep} , num problema onde somente o tamanho inicial do defeito foi considerado variável aleatória. Naquele caso, o custo esperado total comportou-se como uma função aproximadamente convexa de a_{rep} , havendo, portanto, um valor ótimo para o mesmo. Sob as condições apresentadas em Kulkarni & Achenbach (2007) o valor ótimo de a_{rep} encontrado foi igual a 1.2mm, considerando uma curva POD do tipo “*Log-Odds-Log scale model*” (Equação (61)), com parâmetros $\alpha_{pod}=0.3$ e $\gamma_{pod}=3.0$.

No presente problema o mesmo tipo de curva POD é utilizado, entretanto com parâmetros $\alpha_{pod}=0.085$ e $\gamma_{pod}=3.0$, que correspondem à curva que descreve uma inspeção de qualidade intermediária dentre as três curvas aplicadas em Kulkarni & Achenbach (2007). O valor crítico a_{rep} é incorporado ao problema de otimização como sendo a terceira variável de projeto, permitindo, desse modo, ajustar a política de manutenção às características do problema em questão, e determinar o valor ótimo, também, de a_{rep} .

O custo esperado total é formulado em termos de um custo unitário de referência, C_{ref} , que representa o custo para produção e instalação da placa. Todos os outros custos são definidos em função de C_{ref} .

Fatores multiplicativos são usados para obtenção de custos relativos para os eventos falha, reparo e inspeção, e são representados por f_{fail} , f_{rep} e f_{insp} , respectivamente. Um valor fixo igual a 0.25 é adotado para o caso de reparo, isto é, $f_{rep} = 0.25$. Para estudar o efeito de diferentes configurações de custo, cinco valores de f_{fail} e seis valores de f_{insp} foram assumidos, respeitando os intervalos apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 - Fatores multiplicativos para cálculo dos custos.

Fator	Valor(es)
f_{insp}	[0.025, 0.150]
f_{rep}	0.25
f_{fail}	[50, 250]

Assim, para cada evento de interesse v ocorrendo em um dado instante t_v , o custo considerando a desvalorização monetária é dado por:

$$C_{\eta}^v = f_{\eta} \cdot C_{ref} \cdot e^{-\lambda t_v}, \quad \eta = \{fail, rep, insp\} \quad (166)$$

O custo inicial não é afetado por nenhuma das variáveis de projeto, apresentando valor exatamente igual ao custo de referência. Portanto, o custo esperado total, C_{ET} , é dado por:

$$C_{ET} = C_{ref} + N_{insp} \cdot E(C_{insp}^v) + EnR \cdot E(C_{rep}^v) + EnF(1) \cdot E(C_{fail}^v) \quad (167)$$

onde $E(.)$ é o operador valor esperado, EnR é o número esperado de reparos e EnF contém o número esperado de falhas para o único modo de falha.

O problema de otimização é então definido por:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar: } [t_{insp1}, \delta t_{insp}, a_{rep}] \\ &\text{que minimiza: } C_{ET}(t_{insp1}, \delta t_{insp}, a_{rep}) \\ &\text{sujeito a: } t_{insp1} \in (t_{insp1}^{\min}, t_{insp1}^{\max}) \\ &\quad \delta t_{insp} \in (\delta t_{insp}^{\min}, \delta t_{insp}^{\max}) \\ &\quad w_{cor} \in (a_{rep}^{\min}, a_{rep}^{\max}) \end{aligned} \quad (168)$$

onde $(t_{insp1}^{\min}, \delta t_{insp}^{\min}, a_{rep}^{\min})$ e $(t_{insp1}^{\max}, \delta t_{insp}^{\max}, a_{rep}^{\max})$ são os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto t_{insp1} , δt_{insp} e a_{rep} , respectivamente, definidos de maneira a não restringir a solução do problema de otimização. Os valores (0.0025,0.25,1.5) e (2.50,7.25,5.5) foram considerados.

Para dados valores das variáveis de projeto $(t_{insp1}, \delta t_{insp}, a_{rep})$, o cálculo dos números esperados de reparo e falha é feito através de análise probabilística via *Latin Hypercube Sampling*. Durante a simulação, falhas implicam, necessariamente, em substituições.

8.3. RESULTADOS NUMÉRICOS

8.3.1. Resultados para uma configuração de custos de referência

O cálculo do custo esperado total depende dos números esperados de falha e reparo, que por sua vez são determinados por simulação, através do método LHS. Neste caso, devido ao fato da taxa de propagação da falha por fadiga aumentar com o tempo, o que leva a equações de estado limite menos suaves, adotou-se desvio-padrão para a função indicadora suavizada igual a duas vezes o sugerido por Taflanidis & Beck (2008), isto é, $\sigma=0.02$.

Primeiramente, é necessário estabelecer o tamanho apropriado da amostra, levando em conta tanto o custo computacional envolvido, para evitar que o problema de otimização apresente um custo computacional proibitivo, quanto a precisão requerida. Com este propósito, uma configuração de custo de referência definida por $C_{fail}=50\times C_{ref}$ e $C_{insp}=0.025\times C_{ref}$, é adotada, e diferentes tamanhos de amostra são testados.

A Figura 48 mostra a convergência dos resultados da simulação com relação ao tamanho da amostra para a configuração de referência, com $t_{insp1}=0.5$, $\delta t_{insp}=1.0$ e $a_{rep}=3.0$, bem como a variabilidade do custo esperado total, em termos de seu desvio-padrão, σ .

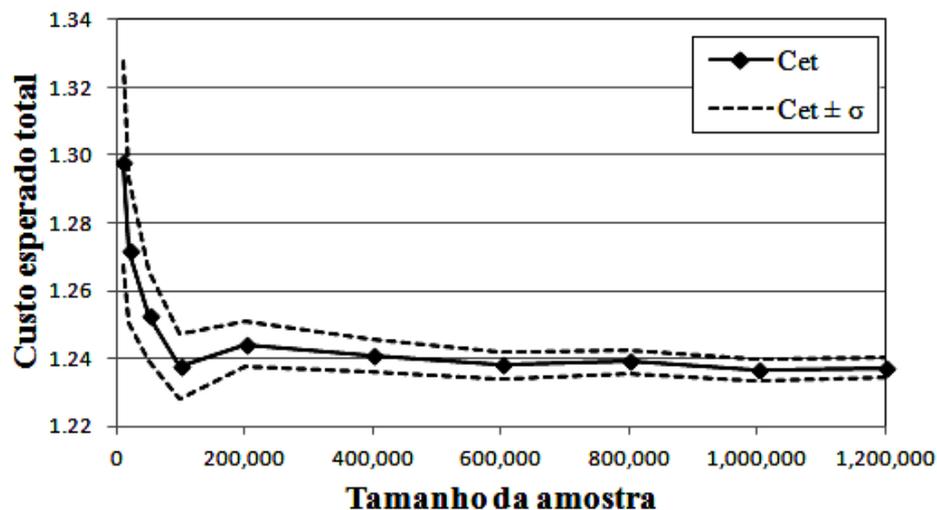


Figura 48 - Custo esperado total versus tamanho da amostra.

No intuito de obter resultados estáveis e precisos, uma amostra de tamanho 8.0×10^5 é utilizada daqui em diante, tendo em mente que os resultados podem ser ligeiramente diferentes para diferentes valores das variáveis de projeto. Em todos os casos, processamento paralelo foi empregado, utilizando oito processos simultâneos num processador Intel®

Core™ I7 CPU 860 @ 2.80GHz. Na busca exaustiva, cada núcleo de processamento é responsável pela simulação de 100.000 pontos amostrais por análise probabilística; no algoritmo Simplex com múltiplas inicializações cada núcleo é responsável por um ponto de inicialização por vez.

A Figura 49 apresenta os valores da função objetivo para a configuração de custos de referência, em termos de t_{insp1} e δt_{insp} , para diferentes valores de a_{rep} (1.50, 3.50 e 4.50). Em comparação com o custo esperado total do problema abordado no Capítulo 7, observa-se que a função objetivo é bem mais suave, porém, ainda estão presentes as nervuras causadas por descontinuidades no número de inspeções ocorridas durante a vida útil, decorrentes de políticas de inspeção diferentes.

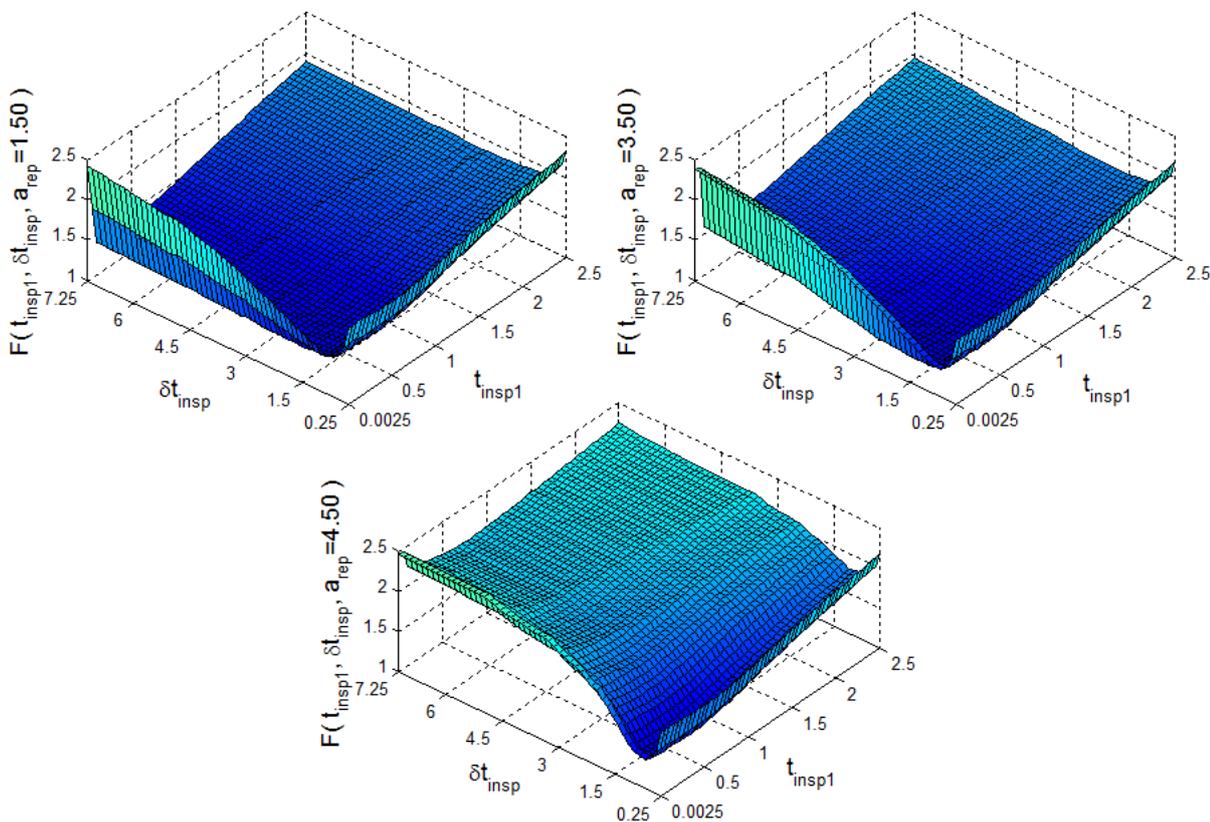


Figura 49 - Função objetivo para configuração de custos de referência, para diferentes valores do tamanho de reparo da trinca.

Para pequenos valores de t_{insp1} ou δt_{insp} o número de inspeções é muito alto, e o custo de inspeções domina o custo esperado total. Porém, isto ocorre apenas para uma estreita faixa de valores destas variáveis de projeto. À medida que o número de inspeções diminui, o número esperado de falhas aumenta, levando a uma maior influência dos custos de falha sobre C_{ET} . Devido ao comportamento do processo de propagação de trincas, no qual de uma forma

geral, quanto maior a trinca, maior a velocidade de propagação da mesma, os mínimos locais, ou regiões de mínimos locais, são mais bem definidos do que no caso do duto sujeito à corrosão. Por exemplo, para o caso em que $a_{rep}=1.5\text{mm}$, há uma faixa de mínimos locais que apresentam valores semelhantes da função objetivo; esta faixa é definida por um valor aproximadamente constante de t_{insp1} , menor que 0.5 anos, e vários valores de δ_{tinsp} . Para o caso em que $a_{rep}=4.5\text{mm}$, o mínimo global se destaca mais dos mínimos locais, em termos do valor da função objetivo, estando próximo ao ponto definido por $t_{insp1}=0.5\text{anos}$ e $\delta_{tinsp}=1\text{ano}$. Tais comportamentos diferem um pouco do comportamento comum a problemas de otimização estrutural, onde o mínimo global é menos pronunciado, mas a região na qual ele está inserido costuma ser bem definida, mas se justificam pela influência do processo de fadiga sobre o custo esperado total.

A Figura 50 mostra a função objetivo para diferentes intervalos entre inspeções sucessivas à primeira inspeção, para valores fixos $t_{insp1}=0.5\text{anos}$ e $a_{rep}=3.0\text{mm}$. Consta-se de maneira mais evidente a presença de descontinuidades associadas com mudanças no número de inspeções. É possível verificar também que o tamanho da amostra utilizada, juntamente com as estratégias de suavização, permite a obtenção de avaliações da função objetivo precisas o suficiente para solução do problema de otimização via método simplex com múltiplas inicializações. Caso um método baseado em gradientes fosse utilizado, uma análise mais detalhada da precisão e das oscilações da função objetivo seria necessária.

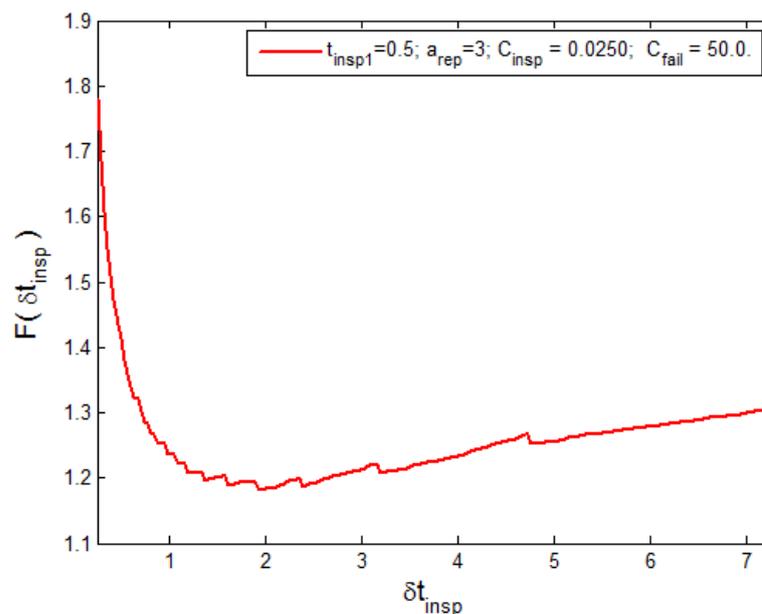


Figura 50 - Função objetivo para diferentes intervalos entre inspeções, configuração de custo de referência.

Tanto a Figura 49 quanto a Figura 50 ressaltam que, apesar de serem utilizadas variáveis de projeto contínuas (t_{insp} e δt_{insp}) para representar o planejamento das inspeções, o número de inspeções dentro da vida de projeto T é discreto, e isto leva a descontinuidades na função custo esperado total que podem ser significativas e tornar a solução do problema de otimização muito mais trabalhosa. Assim, os projetos ótimos são buscados através do método Simplex com múltiplas inicializações. Porém, inicialmente é obtida uma solução de referência através de uma busca exaustiva com baixa resolução, para fins de comparação.

8.3.2. Busca exaustiva

Custos esperados totais são calculados para uma grade de $50 \times 50 \times 21$ pontos ($t_{insp1} \times \delta t_{insp} \times a_{rep}$), igualmente espaçados dentro dos intervalos [0.0025; 2.5] anos, [0.25; 7.25] anos e [1.5; 5.5] mm, respectivamente. A busca exaustiva provê uma solução pouco precisa, mas confiável.

No intuito de estudar a influência dos custos assumidos sobre as soluções ótimas, o problema é resolvido para cinco valores do custo de falha, C_{fail} , e seis valores do custo de inspeção, C_{insp} , resultando em trinta cenários de custos diferentes. Valores ótimos da função objetivo para os diferentes cenários de custos são apresentados na Figura 51. Resultados em termos dos valores ótimos das variáveis de projeto, obtidos via busca exaustiva, são mostrados na Figura 52.

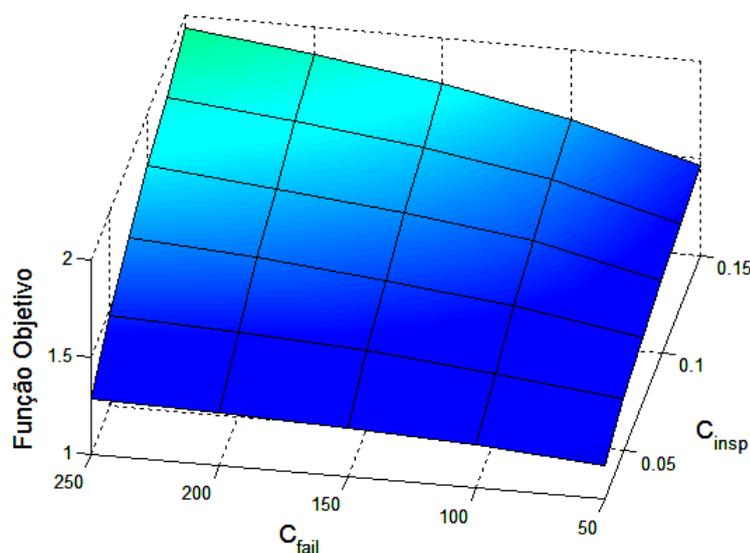


Figura 51 - Valores da função objetivo para diferentes configurações de custo de falha e inspeção, computados por busca exaustiva.

Constata-se que, mesmo utilizando uma grade de pontos igual à utilizada no problema envolvendo corrosão, os resultados apresentados pela busca exaustiva são bastante regulares, o que indica que os problemas com mínimos locais não são muito impactantes no presente caso e que a função objetivo é, conforme citado anteriormente, mais suave. Mesmo assim, as oscilações ainda estão presentes, bem como as descontinuidades da função objetivo, o que leva a descartar a aplicação de algoritmos de busca local, e a utilizar o método Simplex com múltiplas inicializações na busca pelos ótimos globais.

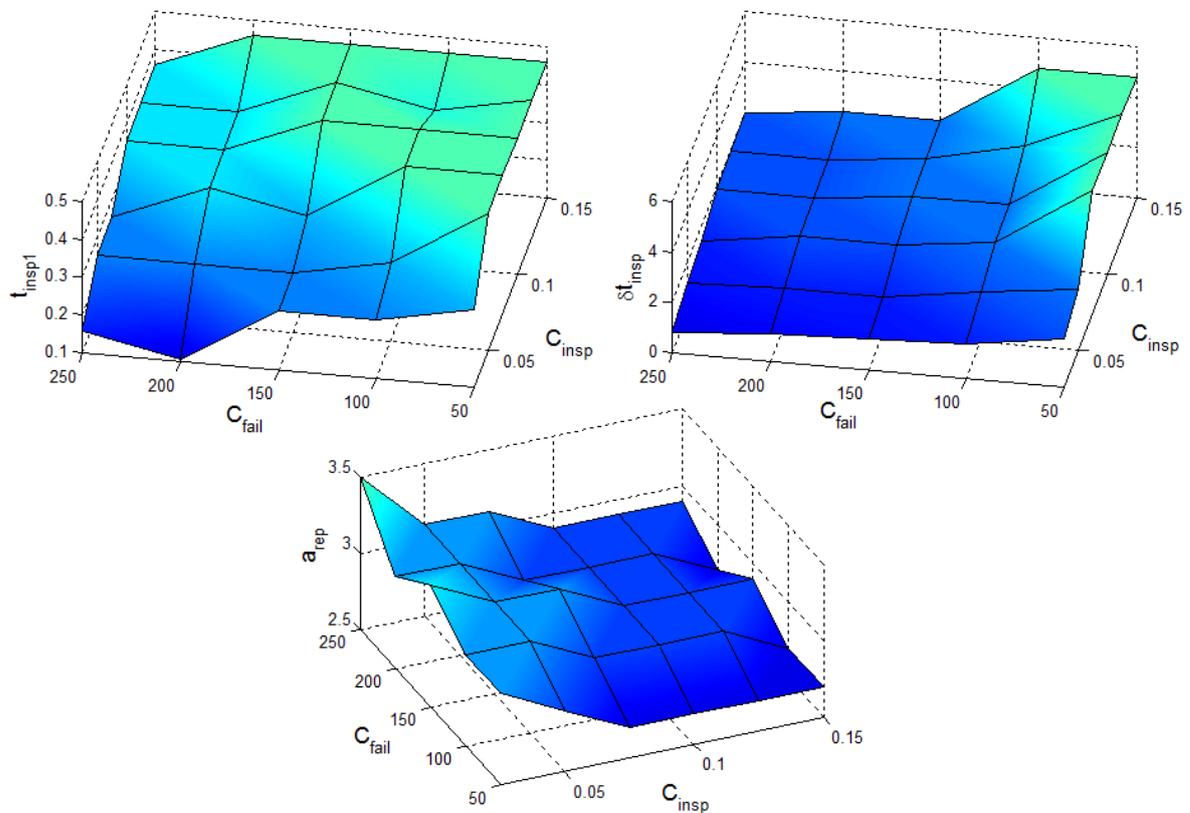


Figura 52 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de falha e inspeção, computados por busca exaustiva.

8.3.3. Otimização via Simplex com múltiplas inicializações

Como a função objetivo neste caso se mostrou mais suave e com menos problemas com mínimos locais, o método Simplex foi utilizado considerando um total de 32 pontos de inicialização, isto é, $n_{grid}=32$, distribuídos numa grade de $[n_1, n_2, n_3]=[4, 2, 4]$ pontos.

Soluções são computadas para trinta cenários diferentes de custos de inspeção e falha (C_{insp} , C_{fail}), tal qual no caso da busca exaustiva. A Figura 53 mostra os valores ótimos do

custo esperado total para os trinta casos, obtidos através do método Simplex com múltiplas inicializações. Valores ótimos das variáveis de projeto são mostrados na Figura 54.

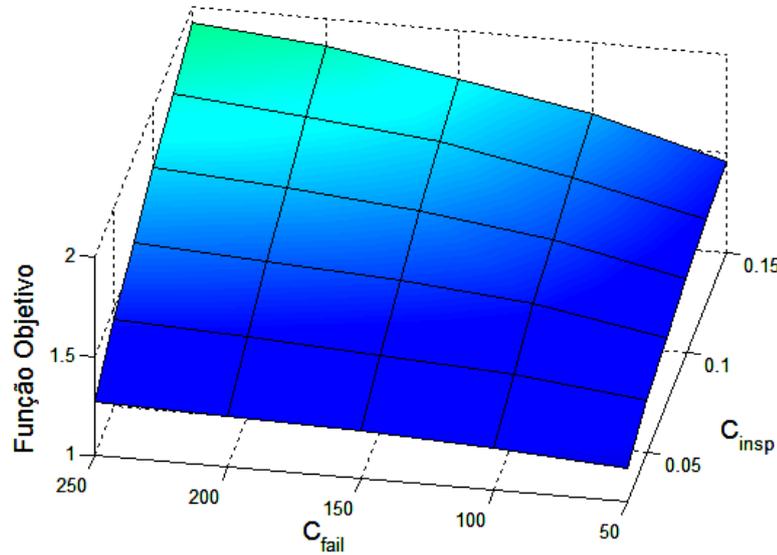


Figura 53 - Valores ótimos da função objetivo para diferentes configurações de custos de inspeção e falha, computados através do método Simplex.

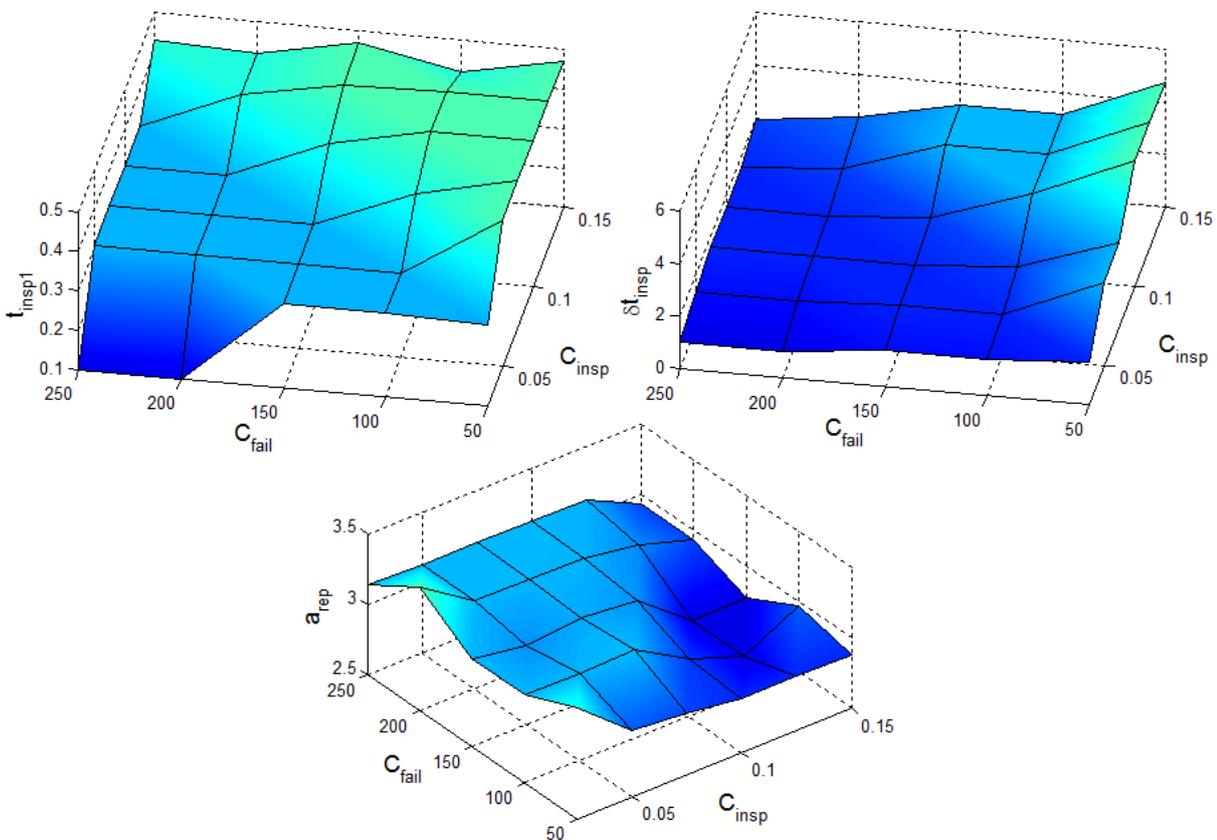


Figura 54 - Soluções ótimas para diferentes configurações de custos de inspeção e falha, computadas através do método Simplex.

Os resultados obtidos são semelhantes aos encontrados via busca exaustiva, entretanto, apresentam precisão um pouco maior e menos oscilações. Os custos ótimos obtidos via Simplex são em média 0.84% menores que os obtidos pela busca exaustiva. O número de chamadas à função objetivo, por sua vez, foi cerca de 10 vezes menor.

Os tempos de processamento, conforme descrito na seção 7.4.3, são apresentados na Tabela 13. Conforme esperado, o tempo de processamento associado ao método Simplex com múltiplas inicializações é bem menor do que o tempo associado à busca exaustiva.

Tabela 13 – Tempos de processamento associados à busca exaustiva e ao método Simplex com múltiplas inicializações, para as 30 configurações de custo diferentes.

Tempo de processamento (horas)	
Busca exaustiva	Método Simplex
98.42	8.94

8.3.4. Conclusões a respeito do problema de otimização da placa sujeita à fadiga

Os valores da função objetivo aumentam proporcionalmente aos custos de falha e inspeção. Além disso, a regularidade dos custos esperados ótimos encontrados indica que o impacto dos mínimos locais na solução, de uma forma geral, foi pequeno. Em outras palavras, como não há oscilações nos gráficos apresentados tanto na Figura 51 quanto na Figura 53, conclui-se que o ótimo global foi encontrado para todos os casos, ou, pelo menos, pontos de mínimo local muito próximos ao global.

Na Figura 54 nota-se que a quantidade de inspeções tende a aumentar para maiores custos de falha e menores custos de inspeção. Mais ainda, os tempos das inspeções ótimas podem ser bastante diferentes para diferentes configurações de custo. O tempo da primeira inspeção varia entre aproximadamente 0.1 anos, isto é, inspeção após os primeiros 37 dias, e 0.47 anos, o que significa primeira inspeção após aproximadamente 5 meses e meio. A variação do intervalo entre inspeções sucessivas à primeira inspeção também é significativa: a maior frequência se dá com inspeções a cada ano, aproximadamente, enquanto a menor frequência corresponde a inspeções a cada 4.8 anos. Nota-se também que a natureza do processo de propagação de trincas de fadiga, em comparação ao problema de corrosão, força uma política de inspeções mais refinada, com inspeções mais regulares. Além disso, conforme

a Figura 49, as perdas monetárias associadas à utilização de tempos de inspeção diferentes dos ótimos são bem maiores do que no problema do duto sujeito à corrosão.

Outro aspecto importante é que existem valores ótimos para o valor crítico de reparo, a_{rep} . Mais ainda, tais valores dependem dos custos de falha e inspeção adotados e apresentam uma variação considerável, entre 2.77 e 3.37mm. À medida que o custo de inspeção aumenta, é necessário diminuir a quantidade de inspeções, e aumentar a quantidade de reparos por inspeção para manter a confiabilidade. Assim, o valor crítico de reparo diminui à medida que o custo de inspeção aumenta. Por outro lado, e menos óbvio, é o fato que, à medida que o custo de falha aumenta, o valor crítico de reparo também aumenta. Isso se dá, provavelmente, porque o custo relativo de inspeção é menor, então é possível aumentar a quantidade de inspeções e fazer somente os reparos que sejam realmente necessários, ou seja, os reparos relacionados a defeitos que apresentam maior probabilidade de levar ao colapso da estrutura. Em outras palavras, aumentando a quantidade de inspeções é possível evitar fazer reparos em excesso, reparos estes que serviriam, na verdade, para compensar uma quantidade insuficiente de inspeções. Logicamente, o comportamento geral dos valores ótimos de cada uma das variáveis de projeto é função de todos os custos envolvidos, simultaneamente.

8.3.5. Sensibilidade da função custo esperado total a diferentes variações de tensão

A Figura 49 mostra que, para diferentes valores do valor crítico de reparo, o custo esperado total pode apresentar comportamentos bastante diferentes. Nesta seção, analisa-se o efeito sobre a função objetivo da aplicação de diferentes variações de tensão, ΔS , considerando o valor crítico de reparo ótimo.

Com este objetivo, adota-se a configuração de custo de referência, definida por $C_{fail}=50 \times C_{ref}$ e $C_{insp}=0.025 \times C_{ref}$, e calcula-se o custo esperado total para diferentes valores de t_{insp1} e δ_{insp} . O valor crítico de reparo ótimo para este caso, encontrado na Seção 8.3.3, é dado por $a_{rep}=3.2824$ mm. A Figura 55 apresenta os resultados para três valores diferentes de ΔS . O valor para o qual a_{rep} ótimo foi determinado, isto é, $\Delta S=3.5$ kN/cm², é utilizado como referência, e designado por ΔS_{ref} .

Para valores de ΔS menores que ΔS_{ref} , mesmo que a diferença seja pequena (apenas 0.5kN/cm²), as falhas praticamente deixam de ocorrer, pois os defeitos não conseguem atingir tamanhos grandes o suficiente para que a taxa de propagação da trinca seja significativa.

Assim, os menores valores do custo esperado total passam a acontecer para números de inspeções pequenos, tendendo a nenhuma inspeção.

Para valores de ΔS maiores que ΔS_{ref} , as falhas passam a dominar completamente o custo esperado total, forçando a adoção de um número grande inspeções no intuito de melhor controlar a evolução dos defeitos, e evitar falhas. A política ótima se torna muito bem definida, e a adoção de políticas de inspeção diferentes da ótima leva a prejuízos financeiros bastante pronunciados.

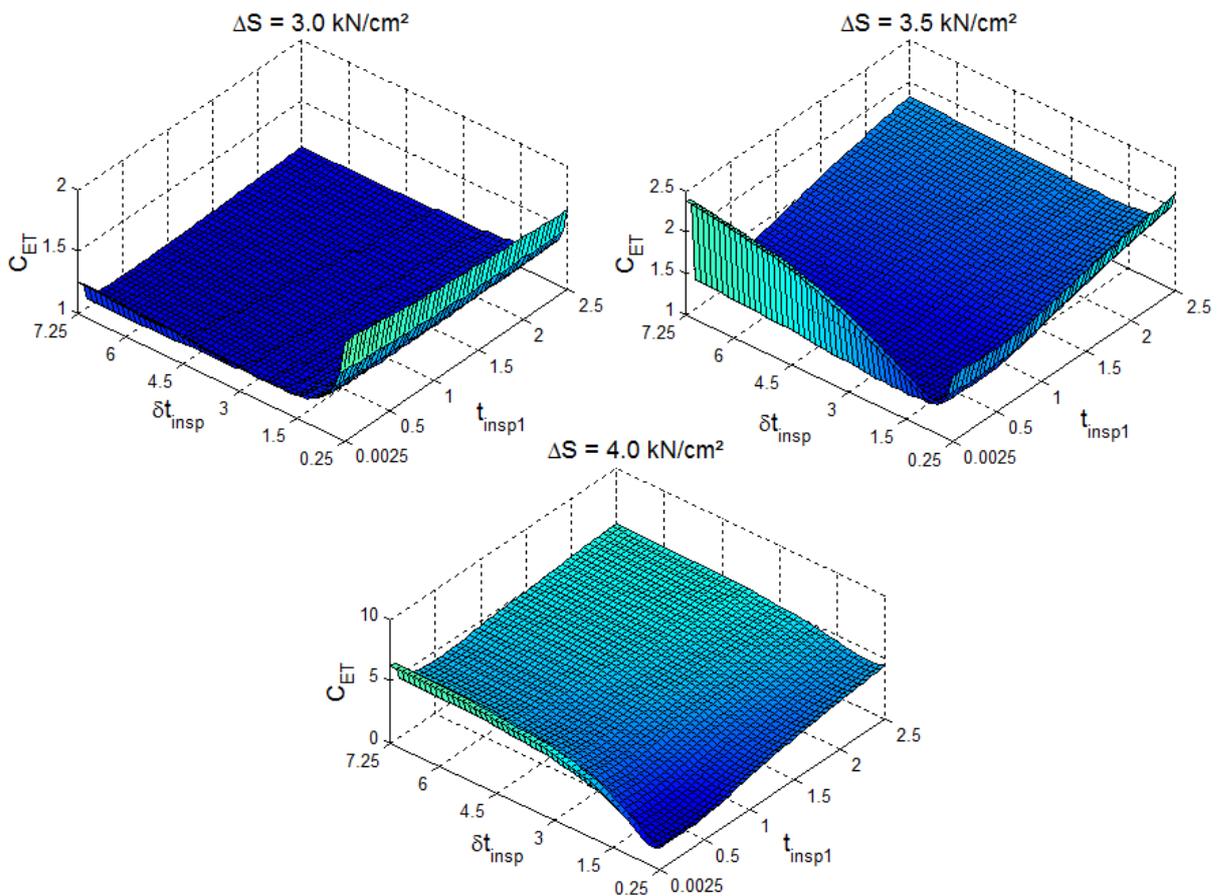


Figura 55 - Custo esperado total para a_{rep} ótimo e diferentes valores de ΔS , configuração de custo de referência.

Estes resultados, juntamente com os gráficos relacionados ao processo de corrosão apresentados na Figura 42, mostram que a otimização de políticas de inspeção é bastante dependente da natureza do processo de degradação envolvido. Processos cuja taxa de crescimento aumenta com o tempo precisam ser constantemente monitorados, caso contrário, falhas catastróficas podem vir a ocorrer, e as altas consequências monetárias precisam ser pagas. Por outro lado, para o caso do processo de fadiga em específico, pequenas perturbações na variação de tensões aplicada podem ocasionar grandes diferenças no custo esperado total envolvido. Assim, é preferível efetuar a otimização da política de inspeções considerando um

limite superior de ΔS , do que se expor ao risco de utilizar um valor menor do que o que poderá ser aplicado na prática. Outras opções, caso haja incertezas no valor de ΔS , são: inserir ΔS como uma variável aleatória no problema de otimização de risco ou determinar o projeto ótimo através de uma formulação robusta de otimização, tal como a apresentada em Beck *et al.* (2012).

9. CONCLUSÕES



Neste capítulo, são apresentadas as principais conclusões obtidas durante o desenvolvimento desta Tese de doutorado, tanto no que diz respeito à representação em polinômios de caos quanto aos problemas de otimização de risco abordados. Por último, são feitas algumas sugestões para trabalhos futuros, relacionadas ao trabalho aqui desenvolvido.

9.1. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Basicamente, esta Tese consistiu no desenvolvimento de modelos em polinômios de caos para representação de processos estocásticos de degradação estrutural, mais especificamente de processos de corrosão e fadiga, e na aplicação de tais modelos em dois problemas de otimização de risco envolvendo custos sobre o ciclo de vida.

Após uma revisão de literatura breve envolvendo confiabilidade estrutural dependente e independente do tempo, otimização de risco sobre o ciclo de vida e métodos de otimização, foi apresentada a teoria relacionada aos polinômios de caos, necessária ao desenvolvimento dos modelos de degradação.

O ineditismo desta Tese consistiu tanto no desenvolvimento de metodologias para construção dos modelos em polinômios de caos para representação de processos estocásticos de corrosão e fadiga com base em dados experimentais, quanto na resolução de problemas inéditos de otimização de risco considerando custos sobre o ciclo de vida.

A metodologia para construção dos modelos em polinômios de caos foi dividida em duas etapas de otimização: a primeira, dita discreta, consistiu em determinar expansões em polinômios de caos para representar os dados em cada ponto do contínuo, o que corresponde à representação de variáveis aleatórias; a segunda consistiu em, partindo de um ponto inicial proveniente da primeira etapa, determinar a representação contínua procurada, isto é, a representação do processo estocástico.

A aplicação desta metodologia aos dados observados de corrosão em dutos apresentados em Velázquez *et al.* (2010) e aos dados de propagação de trincas de fadiga de Ghonem & Dore (1987), levou à obtenção de bons modelos para a representação de tais processos estocásticos.

No caso da corrosão em dutos, apesar da grande dispersão dos dados, provavelmente relacionada ao fato dos dados não incorporarem a correlação do processo ao longo do tempo, a expansão em polinômios de caos apresentou resultados bem melhores do que os obtidos através da utilização do modelo de Caleyó *et al.* (2009), sendo este modelo o mais preciso para crescimento de corrosão em dutos dentre os modelos da literatura conhecidos pelo autor e baseado nos mesmos dados aqui utilizados.

No caso da propagação de trincas de fadiga, pelo menos parte da correlação do processo estava presente nos dados experimentais. A incorporação da expansão de Karhunen-Loève para representar os processos estocásticos gaussianos estacionários nos quais a base dos polinômios de caos adotados é indexada permitiu a obtenção de resultados muito bons, com erros finais da ordem de 0.4% para a média, e menores que 15% para o desvio-padrão, em comparação com os dados experimentais.

Uma vez definidos os modelos em polinômios de caos, o primeiro problema de otimização de risco resolvido consistiu em um duto enterrado sujeito à corrosão, tendo como variáveis de projeto o tempo da primeira inspeção, o intervalo entre inspeções sucessivas à primeira e a chamada sobre-espessura de corrosão. Verificou-se que, para diferentes configurações de custos de falha e de inspeção, as políticas ótimas de inspeção e manutenção podem ser bastante diferentes. Verificou-se também que os valores ótimos encontrados para a sobre-espessura de corrosão foram negativos para todas as configurações de custo. Isto significa que o fator de segurança adotado, sugerido pela norma canadense CSA (2007), é bastante conservador, ou, de outro ponto de vista, que é menos custoso adotar uma parede de duto menos espessa do que a recomendada por norma e aumentar o número de inspeções do que o contrário.

O segundo problema de otimização envolveu uma placa metálica sujeita à ação de um carregamento cíclico, e, portanto, à fadiga. Neste caso, além do tempo da primeira inspeção e do intervalo entre as inspeções sucessivas, o valor crítico de reparo, a partir do qual um defeito detectado deve ser reparado, foi considerado variável de projeto. Constatou-se que, também para este caso, configurações de custos de falha e inspeção diferentes podem levar a políticas ótimas de inspeção e manutenção bastante diferentes. Além disso, verificou-se que não só existem valores ótimos para o valor crítico de reparo, como também tais valores dependem dos custos de falha e inspeção adotados, podendo apresentar variações consideráveis para diferentes configurações de custo. Uma análise da sensibilidade do custo esperado total em relação à variação de tensões aplicada no problema, bem como uma comparação com o custo esperado total relacionado ao problema envolvendo corrosão,

revelou que a otimização de políticas de inspeção é bastante dependente da natureza do processo de degradação envolvido. Processos que apresentam taxa de propagação crescente com o tempo precisam ser constantemente monitorados, e mesmo pequenas perturbações em parâmetros que definem tais processos podem levar a grandes variações no custo esperado total, e, conseqüentemente, a mudanças significativas nas políticas ótimas de inspeção e manutenção.

Em ambos os problemas de otimização foi necessário lidar com descontinuidades e oscilações da função objetivo, causadas por variações discretas no número de inspeções (para políticas de inspeção e manutenção distintas) e pela utilização de amostras de tamanho finito na análise probabilística, respectivamente. Tais problemas levaram à utilização de duas estratégias de suavização da função objetivo presentes na literatura (Taflanidis & Beck, 2008), e de uma terceira estratégia, proposta nesta Tese com base no trabalho de Au (2005). Além disso, o alto custo computacional envolvido na solução dos problemas fez necessária a utilização de processamento paralelo e o desenvolvimento de estratégias eficientes para a geração de realizações dos processos estocásticos, via polinômios de caos, e para a simulação dos cenários envolvidos nas análises probabilísticas.

Por último, ressalta-se que todos os objetivos elencados na Seção 1.4 desta Tese foram alcançados com êxito e que o ferramental aqui desenvolvido pode ser utilizado como base para vários trabalhos futuros tanto na área de representação de processos estocásticos via polinômios de caos quanto na área de otimização de risco envolvendo custos sobre o ciclo de vida.

Conclusões mais detalhadas a respeito dos problemas de otimização e dos métodos desenvolvidos podem ser encontradas nos seis artigos resultantes desta Tese.

A construção de um método híbrido de otimização, passível de ser utilizado em problemas de otimização de risco envolvendo maiores números de variáveis de projeto é abordada em Beck & Gomes (2011), Anexo A desta Tese. A aplicação do método híbrido e aspectos gerais sobre otimização na presença de incertezas são apresentados em Gomes & Beck (2012), Anexo B desta Tese. A aplicação de polinômios de caos a dados de corrosão marinha é tratada em Gomes *et al.* (2013), Anexo C desta Tese. Mecânica da fratura estocástica utilizando polinômios de caos é tema do artigo Beck & Gomes (2012b), Anexo D desta Tese. O problema do planejamento ótimo de inspeções para dutos enterrados, considerando um modelo da literatura para representação do processo de corrosão externa é abordado em Gomes *et al.* (2012), Anexo E desta Tese. Enquanto que o problema da otimização de uma placa sujeita à fadiga é endereçado em Gomes & Beck (2013).

9.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões de trabalhos futuros, dando continuidade, de certa maneira, ao que foi desenvolvido nesta Tese, são apresentadas a seguir:

- a) A metodologia utilizada para construção da expansão em polinômios de caos levou a bons resultados nos casos aqui estudados, mesmo ao se analisar possíveis problemas com mínimos locais. Entretanto, tal metodologia está baseada em dois métodos de programação não linear e ambos são susceptíveis a ficarem presos em mínimos locais. Dessa maneira, sugere-se a aplicação de métodos de otimização global em substituição aos métodos locais adotados, ou mesmo o desenvolvimento de uma metodologia ou formulação mais robusta, no intuito de evitar tais problemas e, até mesmo, de encontrar melhores resultados;
- b) Neste trabalho o método da secante foi aplicado dentro da simulação de cada cenário durante a análise probabilística. Esta estratégia permitiu diminuir bastante o custo computacional em comparação à análise probabilística usual, na qual a simulação é feita considerando um número fixo de pontos ao longo do contínuo. Também foi possível manter uma boa precisão da análise, uma vez que a precisão está diretamente relacionada à tolerância adotada no método da secante. Entretanto, um estudo aprofundado dos ganhos em termos de custo computacional e precisão ainda se faz necessário, dado o grande impacto do custo da análise probabilística no custo computacional da otimização de risco como um todo;
- c) No presente trabalho o foco foi mantido na otimização das políticas de manutenção e inspeção. Problemas envolvendo uma quantidade pequena de variáveis de projeto permitiram estudar mais a fundo a influência destas variáveis no problema de otimização de risco e verificar o comportamento do custo esperado total em função das mesmas. No entanto, a estratégia de simulação adotada, juntamente com o método híbrido de otimização global apresentado no Anexo A desta Tese e com a utilização de processamento paralelo, pode ser aplicada para a resolução de problemas de otimização envolvendo um número muito maior de variáveis de projeto. Em trabalhos futuros, as variáveis de projeto podem englobar tanto as dimensões e a forma da estrutura quanto outras

variáveis relacionadas às políticas de inspeção e manutenção, como, por exemplo, parâmetros de qualidade dos métodos de inspeção.

REFERÊNCIAS

ACHARJEE, S.; ZABARAS, N. **A non-intrusive stochastic Galerkin approach for modeling uncertainty propagation in deformation processes.** Computers & Structures, 85(5-6), 244–254, doi:10.1016/j.compstruc.2006.10.004, 2007.

ANDERSON, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications.** CRC Press, 1991.

ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering.** 2nd. Edition. John Wiley & Sons, 2007.

ASKEY, R.; WILSON, J. **Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials.** Mem. Amer. Math. Soc. 319, AMS, Providence, RI, 1985.

ASM – Aerospace Specification Materials Inc. **Aluminum 7075-T6; 7075-T651.** Disponível em < <http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA7075T6>>. Acessado em: 18 dez. 2012.

ASME - American Society of Mechanical Engineers. **ASME B31.8: Gas Transmission and Distribution Piping Systems.** 1999.

AU, S.K. **Reliability-based design sensitivity by efficient simulation.** Computers & Structures, 83(14), 1048–1061, 2005.

AUDET, C.; DENNIS Jr., J. E. **Analysis of Generalized Pattern Searches.** SIAM Journal on Optimization, Volume 13, Number 3, pp. 889–903, 2003.

BARBATO, M.; CONTE, J.P. **Structural Reliability Applications of Nonstationary Spectral Characteristics**. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 137, No. 5, May, 2011.

BASTIDAS-ARTEAGA, E.; SCHOEFS, F. **Stochastic improvement of inspection and maintenance of corroding reinforced concrete structures placed in unsaturated environments**. Engineering Structures 41, 50-62, 2012.

BECK, A.T. **Reliability analysis of degrading uncertain structures: with applications to fatigue and fracture under random loading**. Doctoral Thesis, The University of Newcastle, Australia, 2003.

BECK, A.T.; GOMES, W.J.S. **Hybrid Algorithms Based on Particle Swarm Optimization and a Powell Method for Global Optimization**. Proceedings of the Thirteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing (p. Paper 42). Civil-Comp Press, 2011.

BECK, A.T.; GOMES, W.J.S. **A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty**. Probabilistic Engineering Mechanics 28, 18-29, 2012a.

BECK, A.T.; GOMES, W.J.S. **Stochastic fracture mechanics using polynomial chaos**. Probabilistic Engineering Mechanics (versão revisada submetida em 13.12.2012), 2012b;

BECK, A.T.; GOMES, W.J.S.; BAZÁN, F.A.V. **On the robustness of structural risk optimization with respect to epistemic uncertainties**. International Journal for Uncertainty Quantification 2, 1-20, 2012.

BERENS, A.; & HOVEY, P. **Evaluation of NDE reliability characterization**. Report no. AFWAL-TR-81-4160, vol. 1. University of Dayton Research Institute, 1981.

BIONDINI, F.; FRANGOPOL, D.M. **Lifetime reliability-based optimization of reinforced concrete cross-sections under corrosion**. Structural Safety 31, 483-489, 2009.

BLATMAN, G.; SUDRET, B. **An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis.** Probabilistic Engineering Mechanics 25(2), 183–197, 2010.

BORGMAN, L. E. **Ocean Wave Simulation for Engineering Design.** Journal of Waterways and Harbors Division, ASCE, 95, No. WW4, Proc. Paper 6925, p. 557-583, 1969.

BOX, G.E.P.; TIAO, G.C. **Bayesian Inference in Statistical Analysis.** Ed. John Wiley & Inc Sons. Addison-Wesley, 1973.

BRANCO, R.; ANTUNES, F.V.; COSTA, J.D.; YANG, F.P.; KUANG, Z.B. **Determination of the Paris law constants in round bars from beach marks on fracture surfaces.** Engineering Fracture Mechanics. doi:10.1016/j.engfracmech.2012.07.009, 2012.

BUCHER, C.; FRANGOPOL, D.M. **Optimization of lifetime maintenance strategies for deteriorating structures considering probabilities of violating safety, condition, and cost thresholds.** Original, Probabilistic Engineering Mechanics 21, 1-8, 2006.

BYRD, R.H.; HRIBAR, M.E.; NOCEDAL, J. **An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming.** SIAM Journal on Optimization, Vol 9, No. 4, pp. 877–900, 1999.

BYRD, R.H.; GILBERT, J.C.; NOCEDAL, J. **A Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming.** Mathematical Programming, Vol 89, No. 1, pp. 149–185, 2000.

CALEYO, F.; VELÁZQUEZ, J.C.; VALOR, A.; HALLEN, J.M. **Probability distribution of pitting corrosion depth and rate in underground pipelines: A Monte Carlo study.** Corrosion Science, 51(9), 1925–1934, 2009.

CAMERON, R.H.; MARTIN, W.T. **The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier Hermite functional.** Annals Mathematics, no. 48, pp.385-392, 1947.

CHASSIAKOS, A.P.; VAGIOTAS, P.; THEODORAKOPOULOS, D.D. **A knowledge-based system for maintenance planning of highway concrete bridges.** *Advances in Engineering Software* 36, 740-749, 2005.

CONTE, J. P. **Effects of earthquake frequency nonstationarity on inelastic structural response.** *Proc. 10th World Conf. on Earthquake Engineering*, AA Balkema, Rotterdam, The Netherlands, 3645–3651, 1992.

COROTIS, R. B.; VANMARCKE, E. H.; CORNELL, C. A. **First passage of nonstationary random processes.** *J. Eng. Mech. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, 98(EM2), 401–414, 1972.

CRAMER, H.; LEADBETTER, M.R. **Stationary and Related Stochastic Processes.** John Wiley and Sons, 1967.

CREMONA, C. **Reliability updating of welded joints damaged by fatigue.** *International Journal of Fatigue* 18, 567-575, 1996.

CSA - Canadian Standard Association. **CSA Z662-07: Oil and Gas Pipeline Systems.** 2007.

DITLEVSEN, O. **Uniquely defined unit of stress intensity range as a statistical material population property entering the Paris-Erdogan equation.** *Engineering Fracture Mechanics*, 42(4), 601–616. doi:10.1016/0013-7944(92)90043-E, 1992.

DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. **Structural Reliability Methods.** John Wiley & Sons, 384 páginas, 1996.

ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V. **Probability-based criteria for structural design.** *Structural Safety*, v. 1, p. 15-26, 1982.

ENGESVIK, K.M. **Analysis of Uncertainties in the Fatigue Capacity of Welded Joints.** Norwegian Inst. of Technology, University of Trondheim, 1981.

ESTES, A.C.; FRANGOPOL, D.M. **Minimum expected cost-oriented optimal maintenance planning for deteriorating structures: application to concrete bridge decks.** Reliability Engineering & System Safety 73, 281-291, 2001.

FABER, M.H.; KROON, I.B.; SORENSEN, J.D. **Sensitivities in structural maintenance planning.** Reliability Engineering and System Safety 51, 317-329, 1996.

FETT, T.; MATTHECK, C.; MUNZ, D. **On the calculations of crack opening displacement from the stress intensity factor.** Engineering Fracture Mechanics, vol. 27, no. 6, p. 697-715, 1987.

FRANGOPOL, D.M.; LIN, K.; ESTES, A.C. **Life-cycle cost design of deteriorating structures.** Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 123 (10), p. 1390-1401, 1997.

FRANGOPOL, D.M.; MAUTE, K. **Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures.** Computer and Structures, 81. p. 397-410, 2003.

GELMAN, A.; CARLIN, J.B.; STERN, H.S.; RUBIN, D.B. **Bayesian Data Analysis.** Chapman & Hall CRC, 2nd edition, 2003.

GHANEM, R.; SPANOS, P. **Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach.** Springer, 1991.

GHONEM, H.; DORE, S. **Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading.** Engineering Fracture Mechanics, vol.27, no. 1, p. 1-25, 1987.

GOMES, W.J.S. **Estudo do efeito de incertezas na otimização estrutural.** Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T. **Global Structural Optimization considering Expected Consequences of Failure and using ANN surrogates.** A ser publicado em Computers & Structures (artigo aceito), <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.10.013>, 2012.

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T.; HAUKAAS, T. **Optimal inspection planning for onshore pipelines subject to external corrosion**. Reliability Engineering and System Safety (versão revisada submetida em 04.12.2012), 2012;

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T.; SILVA JR., C.R.A. **Modeling Random Corrosion Processes via Polynomial Chaos Expansion**. A ser publicado em Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (artigo aceito), 2013.

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T. **Optimal design of metallic components using a polynomial chaos model of fatigue crack propagation**. (Em elaboração), 2013.

HONG, H.P. **Inspection and maintenance planning of pipeline under external corrosion considering generation of new defects**. Structural Safety 21, 203-222, 1999.

JCSS – Joint Committee on Structural Safety. **Probabilistic Model Code**. Disponível em: <http://www.jcss.ethz.ch/>, (acesso em 29 de setembro de 2009), 2001.

JEFFREY, R.; MELCHERS, R. E. **Corrosion tests of mild steel in temperature seawater**. Research Report No. 217.12.2001, The University of Newcastle, Australia, 2001.

JENSEN, H.A.; VALDEBENITO, M. A.; SCHUËLLER, G.I.; KUSANOVIC, D.S. **Reliability-based optimization of stochastic systems using line search**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(49-52), 3915–3924, 2009.

KELLEY, C. **Iterative Methods for Optimization, Frontiers of Applied Mathematics**. Philadelphia: SIAM, 18, 1999.

KIEFNER, J.F.; MAXEY, W.A.; EIBER, R.J.; DUFFY, A.R. **Failure stress levels of flaws in pressurized cylinders, Progress in flaw growth and fracture toughness testing**. ASTM STP 536. American Society of Testing and Materials. 461-481, 1973.

KOLDA, T.G.; LEWIS, R.M.; TORCZON, V. **Optimization by direct search: new perspectives on some classical and modern methods**. SIAM Review, Volume 45, Issue 3, pp. 385–482, 2003.

KONG, J.S.; FRANGOPOL, D.M. **Cost-Reliability Interaction in Life-Cycle Cost Optimization of Deteriorating Structures**. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2004.

KULKARNI, S.S.; ACHENBACH, J.D. **Optimization of inspection schedule for a surface-breaking crack subject to fatigue loading**. Probabilistic Engineering Mechanics. 22:301-312, 2007.

LAGARIAS, J.C.; REEDS, J.A.; WRIGHT, M.H.; WRIGHT, P.E. **Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions**. SIAM Journal on Optimization, 9(1), 112–147, 1998.

LAI, M.O.; FERGUSON, W.G. **Fracture toughness of aluminium alloy 7075-T6 in the as-cast condition**. Materials Science and Engineering, 74(2), 133–138, 1985.

LEIS, B.N.; STEPHENS, D.R. **An alternative approach to assess the integrity of corroded line pipe – part II: alternative criterion**. In Proceedings of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference. 635-640, 1997.

LEONEL, E.D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

LIMBERGER, I.F. **Estudo da Propagação de Trincas Transversais por Fadiga em Trilhos Ferroviários**. Tese de doutorado, PPGEM, UFRGS, 2000.

LOÈVE, M. **Probability Theory**. vols. I–II, Springer, New York, 1978.

MADSEN, H.; SKJONG, R.; TALLIN, A.; KIKERMO, F. **Probabilistic fatigue crack growth analysis of offshore structures, with reliability updating through inspection**. Marine Structural Reliability Symposium. Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1987.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code.** Technometrics, vol. 21, no. 2, p. 239-245, 1979.

MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction.** 2nd. Ed., John Wiley & Sons, NY, 1999.

NELDER, J.A.; MEAD, R. **A simplex method for function minimization.** The Computer Journal, 7, 308-313, 1965.

NOGUEIRA, C.G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado.** Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

OGURA, H. **Orthogonal functionals of the Poisson process.** IEEE Trans. Inform. Theory, v.18, no. 4, pp. 473-481, 1972.

OKASHA, N.M.; FRANGOPOL, D.M. **Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA.** Structural Safety 31, 460-474, 2009.

ONOUFRIOU, T.; FRANGOPOL, D.M. **Reliability-based inspection optimization of complex structures: a brief retrospective.** Computers & Structures 80, 1133-1144, 2002.

ORCESI, A.D.; FRANGOPOL, D.M.; KIM, S. **Optimization of bridge maintenance strategies based on multiple limit states and monitoring.** Engineering Structures 32, 627-640, 2010.

ORCESI, A.D.; FRANGOPOL, D.M. **Optimization of bridge maintenance strategies based on structural health monitoring information.** Structural Safety 33, 26-41, 2011.

ORTIZ, K.; KIREMIDJIAN, A. **Time series analysis of fatigue crack growth rate data.** Engineering fracture mechanics, 24(5), 1986.

PANDEY, M. **Probabilistic models for condition assessment of oil and gas pipelines.** NDT & E International, 31(5), 349–358. doi:10.1016/S0963-8695(98)00003-6, 1998.

PAPADIMITRIOU, C. **Stochastic characterization of strong ground motion and applications to structural response.** Rep. No. EERL 90-03, California Institute of Technology. Pasadena, CA, 1990.

PENSPEN GROUP. **The Pipeline Defect Assessment Manual.** 2002.

RACKWITZ, R.; LENTZ, A.; FABER, M. **Socio-economically sustainable civil engineering infrastructures by optimization.** Structural safety, 27, p. 187-229, 2005.

RAJ, D.E.S. **Sampling Theory.** pp. 206-209. New York: McGraw-Hill, 1968.

RIAHI, H.; BRESSOLETTE, P.; CHATEAUNEUF, A.; BOURAOUI, C.; FATHALLAH, R. **Reliability analysis and inspection updating by stochastic response surface of fatigue cracks in mixed mode.** Engineering Structures 33, 3392-3401, 2011.

RICE, S. O. **Mathematical analysis of random noise.** Bell Syst. Tech. J., 23(3), 282–332, 1944.

RICE, S.O. **Mathematical analysis of random noise - Conclusions.** Bell Syst. Tech. J., 24(1), 46–156, 1945.

ROCHA, M.; SCHUËLLER, G. **A probabilistic criterion for evaluating the goodness of fatigue crack growth models.** Engineering fracture mechanics, 53(5), 707–731, 1996.

ROYSET, J.O.; POLAK, E. **Reliability-based optimal design using sample average approximations.** Probabilistic Engineering Mechanics, 19(4), 331–343, 2004.

SAKAMOTO, S.; GHANEM, R. **Simulation of multi-dimensional non-Gaussian non-stationary random fields.** Probabilistic Engineering Mechanics, 17, 167–176, 2002.

SANCHEZ-SILVA, M.; KLUTKE, G.A.; ROSOWSKY, D.V. **Life-cycle performance of structures subject to multiple deterioration mechanisms.** *Structural Safety* 33, 206-217, 2011.

SORENSEN, J. D. **Notes in structural reliability theory and risk analysis.** Aalborg University, 2004.

SPENDLEY, W.; HEXT, G.; HIMSWORTH, F. **Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation.** *Technometrics*, 4(4), 441-461, 1962.

STEIN, M. **Large sample properties of simulations using Latin hypercube sampling.** *Technometrics*, 29(2), 143-151, 1987.

STEINBERG, H. A. **Generalized quota sampling.** *Nuc. Sci. and Engr.*, 15, 142-145, 1963.

STRAUB, D.; FABER, M.H. **Risk based inspection planning for structural systems.** *Structural Safety* 27, 335-355, 2005.

STREICHER, H.; RACKWITZ, R. **Time-variant reliability-oriented structural optimization and a renewal model for life-cycle costing.** *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19, p. 171-183, 2004.

STREICHER, H.; JOANNI, A.; RACKWITZ, R. **Cost-benefit optimization and risk acceptability for existing, aging but maintained structures.** *Structural Safety*, 30(5), 375-393. doi:10.1016/j.strusafe.2006.10.004, 2008.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN, A. **Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A state-of-the-art report.** Report No. UCB/SEMM-2000/08, 2000.

TAFLANIDIS, A.A.; BECK, J.L. **An efficient framework for optimal robust stochastic system design using stochastic simulation.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1), 88-101, 2008.

TAO, Z.; COROTIS, R.B.; ELLIS, J.H. **Reliability-based bridge design and life cycle management with Markov decision processes.** *Structural Safety* 16, 111-132, 1994.

UGRAY, Z.; LASDON, L.; PLUMMER, J.; GLOVER, F.; KELLY, J.; MARTÍ, R. **Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization.** *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 19, No. 3, pp. 328–340, 2007.

VALDEBENITO, M.A.; SCHUËLLER, G.I. **Design of maintenance schedules for fatigue-prone metallic components using reliability-based optimization.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 199:2305-2318, 2010.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications.** New York: McGraw-Hill, 1984.

VANMARCKE, E. H. **On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes.** *J. Appl. Mech.*, 42(1), 215–220, 1975.

VARANASI, S.; WHITTAKER, I. **Structural reliability prediction method considering crack growth and residual strength.** *Fatigue Crack Growth Under Spectrum Loads.* ASTM STP 5, 292–305, 1976.

VELÁZQUEZ, J.C.; CALEYO, F.; VALOR, A.; HALLEN, J.M. **Technical Note: Field Study - Pitting Corrosion of Underground Pipelines Related to Local Soil and Pipe Characteristics.** *Corrosion*, 66(1), 16001–16005, 2010.

VERZENHASSI, C.C. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade.** Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

VIRKLER, D.; HILLBERRY, B.; GOEL, P. **The statistical nature of fatigue crack propagation.** Air Force Flight Dynamics Laboratory, AFFDL-TR-43-78, 1978.

WALTZ, R.A.; MORALES, J.L.; NOCEDAL, J.; ORBAN, D. **An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps.** Mathematical Programming, Vol. 107, No. 3, pp. 391–408, 2006.

WEN, Y. **Reliability and performance-based design.** Structural safety, 23, 407–428, 2001.

WIENER, N. **The homogeneous Chaos.** American Journal Mathematics, no. 60, pp. 897-936, 1938.

WU, W.F.; NI, C.C. **Statistical aspects of some fatigue crack growth data.** Engineering Fracture Mechanics, 74(18), 2952–2963. doi:10.1016/j.engfracmech.2006.08.019, 2007.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. **The Wiener-Askey polynomial Chaos for stochastic differential equations.** SIAM, J. Sci. Comput., vol. 24, no. 2, pp. 619-644, 2002.

YANG, J.N.; HIS, W.H.; MANNING, S.D.; RUDD, J.L. **Stochastic crack growth models for applications to aircraft structures.** In: Provan JW (*ed.*) Probabilistic fracture mechanics and reliability Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 171–211, 1987.

YEH, C.-H.; WEN, Y. K. **Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response.** Struct. Saf., 8 (1–4), 281–298, 1990.

ZHOU, W. **System reliability of corroding pipelines.** International Journal of Pressure Vessels and Piping 87, 587-595, 2010.

ZHOU, W.; NESSIM, M. **Optimal Design of Onshore Natural Gas Pipelines.** Journal of Pressure Vessel Technology, 133(3), 031702. doi:10.1115/1.4002496, 2011.

Anexo A. – Método Híbrido de Otimização

Neste anexo é descrito brevemente um método híbrido de otimização desenvolvido utilizando o método de Powell e o método do enxame de partículas, PSO (*Particle Swarm Optimization*), que resultou no artigo “*Hybrid Algorithms Based on Particle Swarm Optimization and a Powell Method for Global Optimization*”, apresentado no congresso “*Thirteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*” e publicado nos anais do mesmo evento, no ano de 2011 (Beck & Gomes, 2011).

Métodos de otimização de propósito geral, isto é, que não foram desenvolvidos para resolver problemas de otimização específicos, precisam apresentar algumas características concorrentes. Devido à possibilidade da existência de mínimos locais e às diferentes complexidades das funções objetivo, é necessário incorporar estratégias que tornem o algoritmo confiável (em termos de encontrar o mínimo global) e ao mesmo tempo manter propriedades que levem à rápida convergência. Uma das maneiras de alcançar estes objetivos é através do acoplamento de dois ou mais algoritmos distintos de otimização, que apresentem características complementares, o que resulta nos chamados algoritmos híbridos.

É comum encontrar algoritmos híbridos que envolvam um algoritmo do tipo heurístico, utilizado para cobrir todo o espaço de busca e identificar a região onde o mínimo global se encontra, e um algoritmo com fundamentação matemática, dito de programação não linear, capaz de atingir rapidamente o mínimo, uma vez que a região tenha sido identificada. Este tipo de estratégia aumenta a confiabilidade em comparação com os métodos de programação não linear, porque é mais provável encontrar o mínimo global, e aumenta a eficiência em comparação com algoritmos heurísticos puros.

Dentre as várias probabilidades de acoplamento, optou-se por utilizar o método heurístico PSO com o método de Powell modificado, sendo este último um método que não necessita de derivadas, mas que apresenta prova matemática de convergência.

Foram desenvolvidas duas variações autorreguláveis do PSO, isto é, que não necessitam da definição por parte do usuário dos parâmetros inerentes ao método PSO, mas que procuram automaticamente os valores ótimos dos parâmetros, ou seja, aqueles que levam à mais rápida e eficiente convergência. Desenvolveu-se também uma estratégia de transição entre o método heurístico e o método matemático, a fim de parar o método heurístico o quanto antes, mas sem deixar de encontrar o mínimo global.

Dois algoritmos híbridos foram desenvolvidos, combinando as duas variações do PSO com o método de Powell modificado. Estes algoritmos foram aplicados à solução de sete funções de teste da literatura e comparados com dez outros algoritmos de otimização. Mostrou-se que, apesar de se originarem da junção de dois algoritmos bastante simples, os dois algoritmos híbridos apresentaram resultados muito bons, superando nove dos dez algoritmos da literatura, e apresentando maior vantagem nos casos das funções de teste mais complexas. Além disso, o único dentre os algoritmos da literatura comparados a apresentar resultados melhores que os híbridos propostos foi um algoritmo muito mais complexo e, portanto, mais difícil de implementar. Por último, os dois algoritmos híbridos foram comparados entre si, e apontou-se qual dentre os dois é o mais eficiente.

O artigo completo pode ser encontrado nos anais do congresso supracitado.

Anexo B. – Otimização de uma torre sujeita a cargas de vento aleatórias

Após o desenvolvimento do algoritmo híbrido apresentado no Anexo A, optou-se por substituir o método de Powell por um método de programação não linear mais eficiente. Com este intuito, foi implementado o método denominado BFGS, e o método híbrido resultante foi aplicado na solução de um problema de otimização de risco envolvendo uma torre de transmissão de energia elétrica sujeita a cargas de vento aleatórias, o que levou à publicação do artigo “*Global Structural Optimization considering Expected Consequences of Failure*”, na revista “*Computers & Structures*” em 2012 (Gomes & Beck, 2012).

O artigo aborda algumas das dificuldades inerentes à solução de problemas reais de otimização estrutural, levando em conta as probabilidades de falha e as respectivas consequências, através dos custos esperados de falha. A solução desenvolvida combina: um modelo mecânico utilizando o método dos elementos finitos com formulação posicional e não linearidades física e geométrica; análises de confiabilidade estrutural, para determinar probabilidades de falha; redes neurais artificiais, utilizadas como metamodelos da função objetivo no intuito de diminuir o custo computacional envolvido; e o método híbrido de otimização PSO-BFGS, uma ferramenta eficiente para solução do problema de otimização global.

O exemplo de aplicação consiste em uma torre de transmissão de energia elétrica sujeita a um carregamento aleatório proveniente da ação do vento sobre a estrutura. O modelo em elementos finitos contém 47 elementos de viga, e 69 nós, com um total de 207 graus de liberdade. As variáveis de projeto são as coordenadas da maioria dos nós da estrutura, exceto as coordenadas dos nós aos quais os cabos de energia elétrica são acoplados, e as áreas das seções transversais dos elementos, totalizando 44 variáveis de projeto, ao se considerar a simetria da torre.

O alto custo computacional associado à solução do problema de otimização está vinculado, principalmente, ao fato de ser efetuada uma análise não linear geométrica e física, e à necessidade de determinar, milhares de vezes, a probabilidade de falha da estrutura. Além disso, a busca global faz com que muitas configurações diferentes do usual sejam testadas, o que leva a problemas de convergência numérica na solução via elementos finitos, e torna

necessária a adoção de estratégias para lidar com este problema. Todas as estratégias utilizadas foram descritas no trabalho.

Os resultados mostraram que, quando as incertezas são relevantes, o projeto ótimo somente pode ser encontrado através da consideração dos custos esperados de falha, ou seja, através da otimização de risco. Mostrou-se também como a utilização de um metamodelo adequado pode não só ajudar a diminuir o custo computacional, mas também facilitar a busca pelo ótimo global, através de uma suavização da função objetivo em questão.

O artigo completo pode ser encontrado na revista *Computers & Structures*, através do site <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.10.013>.

Anexo C. – Representação de processos estocásticos de corrosão marinha via polinômios de caos



A aplicação da expansão em polinômios de caos para representação de dados referentes à perda de massa do aço devido à corrosão em condições de imersão marinha resultou no artigo intitulado “*Modeling Random Corrosion Processes via Polynomial Chaos Expansion*”, aceito para publicação no “*Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*” (Gomes *et al.*, 2013).

A metodologia utilizada neste artigo para construção da expansão em polinômios de caos foi uma das primeiras criadas durante o desenvolvimento deste trabalho, e trata-se, portanto, de uma metodologia um pouco diferente da apresentada nesta Tese.

Para a construção da PCE, foram utilizados dados de corrosão de 45 cupons metálicos medindo 100mm×50mm×3mm, testados por Jeffrey & Melchers (2001), em *Taylor's Beach*, Austrália. Para obtenção dos dados experimentais, todos os 45 cupons foram inicialmente imersos em ambiente marinho. A seguir, foram retiradas nove placas para cada um dos cinco diferentes tempos de exposição, efetuando um tratamento químico de limpeza antes de obter as medidas de perda de espessura por corrosão. Como cada placa foi descartada após a medida, o total de dados experimentais foi igual ao número inicial de cupons, ou seja, 45 dados, com 9 medidas para cada tempo de exposição. O tempo de exposição variou entre 1.00 ano e 4.21 anos.

No intuito de procurar a ordem e dimensão estocástica da PCE que melhor se adequasse ao problema em questão, foram testadas expansões com ordem variando entre 1 e 10 e dimensões estocásticas 1 e 2.

Apesar da pouca quantidade de dados, não só foi estudada a construção da expansão em polinômios de caos, mas também estudou-se uma estratégia de validação do modelo, na qual dados referentes ao tempo de exposição 4.21 anos foram suprimidos da determinação da expansão e utilizados apenas para validar o modelo obtido. Além disso, foram também discutidas a acurácia da representação e possibilidades de extrapolação do modelo.

O modelo construído foi aplicado em duas análises de confiabilidade dependente do tempo, a primeira envolvendo um carregamento descrito por uma variável aleatória e a segunda um carregamento descrito por um processo estocástico.

Foram verificados: a evolução das probabilidades de falha ao longo do tempo, considerando extrapolação do modelo para um tempo de vida útil igual a 10 anos, e também o cálculo da probabilidade de falha em si, efetuado através de simulação de Monte Carlo simples e através de soluções semi analíticas. As soluções ditas semi analíticas envolveram, por exemplo, aproximações lineares da barreira, para o problema de falha à primeira sobrecarga, e integrações via método de Monte Carlo.

O artigo deve estar disponível em breve no site do “*Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*”, cujo endereço é:

http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_serial&pid=0100-7386&lng=en&nrm=iso.

Anexo D. – Mecânica da fratura estocástica utilizando polinômios de caos



Na presente Tese, foram desenvolvidas metodologias para a construção de representações de processos estocásticos via polinômios de caos, e estas metodologias foram aplicadas, no caso do processo de propagação de trincas de fadiga, aos dados presentes em Ghonem & Dore (1987). Os resultados obtidos para os dados de Ghonem & Dore, juntamente com os resultados provenientes da aplicação desta mesma metodologia a outro conjunto de dados amplamente utilizados na literatura, isto é, os de Virkler *et al.* (1978), resultaram em um artigo intitulado “*Stochastic Fracture Mechanics Using Polynomial Chaos*”, cuja versão revisada foi submetida para publicação na revista *Probabilistic Engineering Mechanics*, em dezembro de 2012 (Beck & Gomes, 2012b).

Neste artigo, conforme o título sugere, o foco foi mantido na natureza estocástica dos processos de propagação de trincas e na representação destes processos utilizando a expansão em polinômios de caos. Em outras palavras, os modelos foram construídos e comparados aos dados reais, discussões foram feitas a respeito do processo em questão e das representações obtidas, mas os modelos não foram aplicados em nenhum problema de otimização ou de confiabilidade dependente do tempo.

Os testes de Virkler *et al.* (1979) consistiram em 68 painéis de liga de alumínio 2024-T3, cortados de uma mesma placa, possuindo trincas centralizadas e sujeitos a carregamentos de amplitude constante, o que resultou em 68 históricos de crescimento de trinca. A razão entre os carregamentos mínimo e máximo aplicados neste caso, $R=P_{min}/P_{max}=0.2$, bem como a amplitude do carregamento, $\Delta P=18.68kN$, diferem significativamente das três condições testadas em Ghonem & Dore (1987), onde $R=0.6, 0.5$ e 0.4 , e $\Delta P=9.11, 11.12$ e $9.11kN$, para as condições I, II e III, respectivamente, além de se tratar de diferentes ligas de alumínio (em Ghonem & Dore (1987) foi utilizada a liga de alumínio 7075-T6).

Todos estes fatores levam a um comportamento razoavelmente diferente do processo de fadiga ao longo do contínuo. Mesmo desprezando-se diferenças entre tamanhos de trinca e números de ciclos, ao se comparar os dados de Virkler com aqueles referentes à condição de teste I de Ghonem & Dore, verifica-se que o primeiro caso leva a menos intersecções entre as curvas de propagação de trinca e a menores desvios-padrão do processo como um todo. Isto

ocorre provavelmente porque, quando os carregamentos são maiores, a influência da microestrutura na propagação da trinca é reduzida, diminuindo as variações entre realizações do processo, conforme foi discutido em Ghonem & Dore (1987), com base nas três condições de teste daquele artigo.

Notou-se que, mesmo para um comportamento bastante distinto, os erros da aproximação PCE em comparação com os dados experimentais se mantiveram pequenos, com erros da ordem de 0.16% para a média e menores que 13% para o desvio-padrão.

A aplicação da PCE para a representação de um caso diferente de propagação de trincas de fadiga permitiu tanto verificar a flexibilidade desta ferramenta quanto levantar conclusões mais gerais a respeito deste processo. Além disso, também foi possível analisar e discutir de uma maneira mais abrangente as capacidades de interpolação e extrapolação dos modelos obtidos.

Anexo E. – Planejamento ótimo de inspeções para dutos enterrados sujeitos à corrosão externa



O primeiro problema de otimização de risco resolvido durante o desenvolvimento desta Tese consistiu na determinação de intervalos ótimos de inspeção para um duto enterrado sujeito à corrosão externa, e originou o artigo “*Optimal inspection planning for onshore pipelines subject to external corrosion*”, cuja versão revisada foi submetida à revista “*Reliability Engineering and System Safety*” em dezembro de 2012 (Gomes *et al.*, 2012).

Este artigo, desenvolvido em parceria com o professor Terje Haukaas da instituição “*The University of British Columbia*”, em Vancouver, Canadá, permitiu implementar as bases para a resolução de problemas de otimização de risco, conhecer melhor os problemas em questão, e estudar alguns tópicos relacionados, mas diferentes dos abordados nos Capítulos 7 e 8 desta tese.

Uma das contribuições do artigo foi a proposição de um método para calcular sensibilidades da função objetivo, com base no chamado “problema de confiabilidade aumentado” (Au, 2005), que levou posteriormente ao desenvolvimento da estratégia de suavização do custo esperado total aplicada nesta Tese e apresentada na Subseção 6.1.1 da mesma.

Uma das principais diferenças em relação ao problema resolvido no Capítulo 7 da presente Tese foi a utilização de um modelo da literatura para representação do processo de corrosão, o denominado modelo de Caley (Caley *et al.*, 2009). O modelo de Caley foi construído com base nos mesmos dados reais de corrosão utilizados para construção do modelo em polinômios de caos aplicado no Capítulo 7, mas leva a desvios-padrão significativamente maiores do que os obtidos experimentalmente, e, portanto, a maiores probabilidades de falha. Maiores números esperados de falha levaram a uma redução nas oscilações provenientes da análise probabilística, permitindo a solução do problema de otimização de risco através de um método de otimização baseado em derivadas, em conjunto com uma estratégia inteligente de múltiplas inicializações. As derivadas requeridas foram determinadas através do método para cálculo de sensibilidades proposto.

No artigo, estudou-se o custo esperado total como função do intervalo entre inspeções, o que levou à constatação da presença de várias discontinuidades, provenientes da variação discreta do número de inspeções. Constatou-se também a existência de um ponto de mínimo para cada número discreto de inspeções. A estratégia de múltiplas inicializações foi baseada nestas constatações, e envolveu a geração de um ponto inicial para cada número de inspeções, aumentando o número de inspeções a cada iteração, até que o custo esperado total relacionado ao ponto de mínimo começasse a aumentar.

Foi estudada também a influência de diferentes custos de falha e inspeção sobre os valores ótimos do intervalo entre inspeções e do custo esperado total, e feita uma análise de robustez dos projetos ótimos encontrados.

Dentre as conclusões levantadas, constatou-se que, na ausência de estimativas precisas dos custos envolvidos, é melhor utilizar valores maiores que os reais, ao invés de subestimar os custos, pois as consequências se tornam menores caso valores errados sejam adotados. De fato, conforme discutido no artigo, quanto maiores os custos de inspeção e falha, mais sensível o custo esperado total se torna a mudanças no intervalo entre inspeções adotado.