

Utilização de Métodos Computacional e de  
Homogeneização na Investigação do  
Comportamento Elástico Não-Linear de  
Laminados

**Edmar Borges Théophilo Prado**

Orientador: Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar



**Edmar Borges Theóphilo Prado**

**UTILIZAÇÃO DE MÉTODOS COMPUTACIONAL E DE  
HOMOGENEIZAÇÃO NA INVESTIGAÇÃO DO  
COMPORTAMENTO ELÁSTICO NÃO-LINEAR DE  
LAMINADOS**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Ciências, Programa de Engenharia de Estruturas.

Versão corrigida. A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar

SÃO CARLOS

Setembro de 2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

P896u Prado, Edmar Borges Theóphilo  
Utilização de métodos computacional e de  
homogeneização na investigação do comportamento  
elástico não-linear de laminados / Edmar Borges  
Theóphilo Prado; orientador Adair Roberto Aguiar. São  
Carlos, 2013.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Elasticidade. 2. Método dos elementos finitos.  
3. Métodos de homogeneização. 4. Bilaminados. 5.  
Instabilidades materiais. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDMAR BORGES THEÓPHILO PRADO**.

Título da tese: "utilização de métodos computacional e de homogeneização na investigação do comportamento elástico não-linear de laminados".

Data da defesa: 11/09/2013

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Dr. **Adair Roberto Aguiar (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Associado **Jonas de Carvalho**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO.

Prof. Dr. **Samir Maghous**  
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul/UFRGS)

APROVADO

Prof. Titular **Emílio Carlos Nelli Silva**  
(Escola Politécnica/USP)

APROVADO

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**



# Dedicatória

Aos meus pais, à minha irmã, Ana Maria, e ao meu irmão, Romulo,

por todo o apoio e compreensão para que este trabalho pudesse ser realizado.





# Agradecimentos

Aos meus pais pelas oportunidades concedidas e pelo apoio incondicional às minhas decisões. Ao meu irmão e acima de tudo grande amigo, Romulo, por apoiar-me nos momentos difíceis.

Ao professor Adair Roberto Aguiar pela orientação, dedicação e compreensão das minhas limitações ao longo de toda esta pesquisa.

À CAPES pelo suporte financeiro e a todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas por contribuir direta, ou, indiretamente para a realização deste trabalho.

Ao departamento de Engenharia de Estruturas da USP pela disponibilização das instalações e recursos computacionais para o desenvolvimento do presente trabalho.

Aos professores e amigos Dr. Julian Bravo-Castillero e Dr. Leslie Darien Pérez Fernández por todo o auxílio prestado no desenvolvimento deste trabalho por meio de valiosas trocas de ideias.

Gostaria ainda de agradecer a todos os colegas e amigos que acompanharam a evolução deste trabalho.



## Resumo

PRADO, E. B. T. (2013). *Utilização de Métodos Computacional e de Homogeneização na Investigação do Comportamento Elástico Não-Linear de Laminados*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

A teoria de elasticidade não-linear é apropriada para a investigação de instabilidades materiais relacionadas ao amolecimento e à formação de bandas de cisalhamento. Estes fenômenos podem surgir em compósitos constituídos de fases que, isoladamente, não apresentam tais fenômenos sob as mesmas condições de carregamento. O objetivo principal desta tese de doutorado é utilizar métodos computacional e de homogeneização na investigação do comportamento de laminados bifásicos compostos de lâminas elásticas não-lineares. Em particular, utilizam-se o método dos elementos finitos (MEF) clássico e os métodos de homogeneização assintótica (MHA) e de segunda ordem tangencial para gerar resultados computacionais e analíticos que possam ser comparados entre si. Com este objetivo em mente, estuda-se primeiramente o comportamento efetivo de bilaminados compostos por distribuições periódicas de lâminas elástico-lineares, homogêneas e isotrópicas. Os bilaminados estão em equilíbrio na ausência de forças de corpo. Gera-se uma sequência de bilaminados com número crescente de lâminas e simulam-se ensaios de tração uniaxial no regime de pequenas deformações utilizando malhas de elementos finitos refinadas. Resultados destas simulações computacionais são comparados a resultados analíticos obtidos de ensaio de tração uniaxial similar de um sólido homogeneizado via MHA. Os resultados computacionais tendem aos resultados analíticos à medida que o número de lâminas na sequência de bilaminados tende ao infinito. Em seguida, investiga-se o comportamento efetivo de bilaminados compostos por distribuições periódicas de lâminas elásticas não-lineares, homogêneas, quase-incompressíveis e isotrópicas submetidos a condições de deformação impostas em seus contornos. Utilizando-se o método de homogeneização de segunda ordem tangencial, determinam-se as propriedades efetivas dos bilaminados. Estas propriedades são utilizadas na condição de Legendre-Hadamard para prever perda de elipticidade das equações governantes. A violação desta condição está relacionada à formação de bandas de cisalhamento no compósito. Utilizando malha de elementos finitos refinada, simula-se numericamente o problema de equilíbrio de um bilaminado com número elevado de lâminas na ausência de força de corpo e sujeito a deformações impostas no contorno. Os resultados computacionais preveem perda de elipticidade para um nível de deformação próximo ao nível de deformação da perda de elipticidade predita pelo método de homogeneização. Os resultados analíticos e computacionais indicam que a perda de elipticidade é fortemente influenciada pelo contraste de heterogeneidade entre as fases e pelas condições de contorno.

Palavras-chave: Elasticidade; Método dos Elementos Finitos; Métodos de Homogeneização; Bilaminados; Instabilidades Materiais.



## Abstract

PRADO, E. B. T. (2013). *Use of Computational and Homogenization Methods in the Investigation of the Nonlinear Elastic Behavior of Laminates*. Doctoral Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2013.

The theory of nonlinear elasticity is suitable for the investigation of material instabilities related to softening and formation of shear bands. These phenomena can arise in composites consisting of phases which, taken separately, do not exhibit such phenomena under the same loading conditions. The main objective of this thesis is to use both computational and homogenization methods in the investigation of the behavior of two-phase laminates composed of nonlinear elastic laminae. In particular, we use the finite element method (FEM) and both the asymptotic homogenization method (AHM) and the tangent second-order homogenization method to generate computational and analytical results that can be compared to each other. With this goal in mind, we study first the effective behavior of bilaminates composed of periodic distributions of linearly elastic, homogeneous, and isotropic laminae. The bilaminates are in equilibrium in the absence of body forces. A sequence of bilaminates with increasing number of laminae is used to numerically simulate uniaxial tensile tests in the small strain regime using refined finite element meshes. Computational results are then compared with analytical results obtained from a similar tensile test of a solid homogenized via MHA. The computational results tend to the analytical result as the number of laminae in the sequence of bilaminates tends to infinity. Next, we investigate the effective behavior of bilaminates composed of periodic distributions of nonlinearly elastic, homogeneous, isotropic, and quasi-incompressible laminae that are subjected to deformation conditions on their boundaries. Using the tangent second-order homogenization method, the effective properties of the bilaminates are determined. These properties are used in the Legendre-Hadamard condition to predict loss of ellipticity of the governing equations. Violation of this condition is related to the formation of shear bands in the composite. Using refined finite element meshes, we simulate numerically the problem of equilibrium of a bilaminate with a high number of laminae in the absence of body force and subjected to deformation conditions on the boundary. The computational results predict loss of ellipticity at a deformation level close to the deformation level for which loss of ellipticity is predicted by the homogenization method. The computational and analytical results indicate that the loss of ellipticity is strongly influenced by both the heterogeneity contrast between the phases and the boundary conditions.

Keywords: Elasticity; Finite Element Method; Homogenization Methods; Bilaminates; Material Instabilities.



## Lista de Figuras

Figura 1	Características geométricas do neoprene fretado. ....	20
Figura 2	Exemplo de curva tensão versus deformação com trecho de amolecimen- to. ....	46
Figura 3	As configurações de referência e deformada de um corpo $\mathcal{B}$ . ....	51
Figura 4	Deformação de um corpo. ....	53
Figura 5	Plano $\mathcal{S}$ seccionando corpo deformado. ....	54
Figura 6	Ensaio de tração uniaxial e cisalhamento puro realizados no material de Blatz-Ko. ....	64
Figura 7	Esquerda: Curva $\mathbf{P}_{11}$ versus $\bar{\lambda}$ para tração uniaxial. Direita: Curvas $\mathbf{P}_{11}$ (linha sólida) e $\mathbf{P}_{22}$ (linha tracejada) versus $\bar{\lambda}$ para cisalhamento puro. ....	64
Figura 8	Representação da região $\mathcal{B}$ e as partes do seu contorno para as condições de contorno mistas. ....	66
Figura 9	(a) Sólido constituído pelas partes $\mathcal{B}^1$ e $\mathcal{B}^2$ , (b) Partes $\mathcal{B}^1$ e $\mathcal{B}^2$ separadas. ....	70
Figura 10	Esquerda: Compósito com estrutura periódica. Direita: Célula periódica Y com as regiões da matriz, $R_1$ , e inclusão, $R_2$ . ....	74
Figura 11	Configuração de referência do compósito bilaminado constituído de mate- rial elástico-linear. ....	85
Figura 12	Configuração de referência de a) Laminado; b) Célula periódica. ....	87
Figura 13	Configurações de referência e deformada do bilaminado sob um estado plano de cisalhamento puro. ....	95
Figura 14	Elemento finito tetraédrico SOLID187. ....	98
Figura 15	Cilindros de secção transversal retangular e circular compostos por 2, 16, 64 e 256 lâminas isotrópicas. ....	99
Figura 16	Curvas tensão $T$ versus deformação $\varepsilon$ em $X_3 = 1.0$ obtidas via MEF e via MHA para os cilindros de secção transversal retangular. ....	99
Figura 17	Componentes de $\mathbf{F}$ versus $\bar{\lambda}$ calculadas analiticamente e via MEF para	

	o sólido Neo-Hookeano compressível e homogêneo. Gráficos da Esquerda: Ensaio de tração uniaxial. Gráficos da direita: Ensaio de cisalhamento puro. ....	103
Figura 18	Determinante de $\mathbf{F}$ versus $\bar{\lambda}$ obtidos analiticamente e via MEF para o sólido Neo-Hookeano compressível e homogêneo. Gráficos da Esquerda: Ensaio de tração uniaxial. Gráficos da direita: Ensaio de cisalhamento puro. ....	104
Figura 19	Esquerda: Curvas $\dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$ versus $\bar{\lambda}$ para tração uniaxial em material Neo-Hookeano calculadas analiticamente e utilizando o MEF. Direita: Curvas $\dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$ versus $\bar{\lambda}$ para cisalhamento proposto por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) em material Neo-Hookeano calculadas analiticamente e utilizando o MEF considerando $\bar{\theta} = 20^\circ$ . ....	104
Figura 20	Elemento finito quadrilateral PLANE183. ....	105
Figura 21	Bilaminado com (a) 2 e (b) 32 lâminas. ....	107
Figura 22	Configurações deformadas de elementos localizados na lâminas da fase 1 ( $L_1$ ), concentração 0.7, e fase 2 ( $L_2$ ), concentração 0.3, que se encontram na região central do laminado com 256 lâminas. ....	107
Figura 23	Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias para a fase 1 ( $c_1 = 0.7$ ). ....	109
Figura 24	Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias para a fase 2 ( $c_2 = 0.3$ ). ....	110
Figura 25	Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias considerando a média ponderada $c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2$ . ....	111
Figura 26	Componentes do gradiente de deformação $\mathbf{F}$ versus alongamento $\bar{\lambda}$ . ...	113
Figura 27	Deslocamentos horizontal $u_1$ e vertical $u_2$ e tensão de cisalhamento $T_{12}$ considerando EPD com $t = 20$ , $\bar{\theta} = 20^\circ$ e $\bar{\lambda} = 1.01$ para os casos (a) Linear e (b) Não-linear. ....	115
Figura 28	Deslocamentos horizontal $u_1$ e vertical $u_2$ e tensão de cisalhamento $T_{12}$ considerando EPD com $t = 20$ e $\bar{\theta} = 20^\circ$ para os casos (a) $\bar{\lambda} = 1.08$ e (b) $\bar{\lambda} = 1.30$ . ....	116
Figura 29	Determinante de $\mathbf{F}$ versus $\bar{\lambda}$ para $t = 20$ e $\bar{\theta} \in \{0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ\}$ . ....	118
Figura 30	Determinante de $\mathbf{F}$ versus $\bar{\lambda}$ $\bar{\theta} = 20^\circ$ e $t \in \{1, 2, 4, 8, 16, 20\}$ . ....	119



- Figura 31 Curvas  $\dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para ensaios de cisalhamento puro dados por (6.3) e (5.95) segundo diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$  em material Neo-Hookeano compressível por via analítica (Esquerda) e via MEF (Direita) para as fases 1, 2 e considerando as médias ponderadas de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$ . . . . . 122
- Figura 32 Curvas  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para ensaios de cisalhamento puro dados por (6.3) e (5.95) segundo diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$  em material Neo-Hookeano compressível por via analítica (Esquerda) e via MEF (Direita) para as fases 1, 2 e considerando as médias ponderadas de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$ . . . . . 123
- Figura 33 Curvas  $\dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$  (Esquerda) e  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \dot{\tilde{\mathbf{P}}} : \dot{\mathbf{F}}$  (Direita) versus  $\bar{\lambda}$  para ensaio de cisalhamento puro dados por (6.3) e (5.95) considerando  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$  em material Neo-Hookeano compressível via MEF no caso de média ponderada de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$ . . . . . 124
- Figura 34 Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas de ambos, analítico (Esquerda) e MEF (Direita) no caso de média ponderada de  $\mathbf{F}$  para diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$ . . . 124
- Figura 35 Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas via MEF para material elástico-linear (Linha sólida azul) e via MEF (Linha pontilhada vermelha) e analiticamente (Linha sólida preta) para o material Neo-Hookeano compressível, considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$ . . . . . 126
- Figura 36 Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas via MEF para o material Neo-Hookeano compressível, considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t \in \{1, 2, 4, 8, 16, 20, 32, 64, 128\}$ . . . . . 126
- Figura 37 Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas para cada malha da Tab. 2 considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $t = 4$ ,  $\bar{\theta} = 20^\circ$  (Esquerda) e  $t = 20$ ,  $\bar{\theta} = 30^\circ$  (Direita). . . . . 127



## Lista de Siglas

EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
USP	Universidade de São Paulo
MEF	Método dos Elementos Finitos
CCR	Coordenadas Cartesianas Retangulares
MHA	Método de Homogeneização Assintótica
PVC	Problema de Valor de Contorno
VRE	Volume Representativo Elementar
MEC	Método dos Elementos de Contorno
EPD	Estado Plano de Deformação
APDL	ANSYS Parametric Design Language
PUC/RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>19</b>
1.1	Justificativa .....	21
1.2	Objetivos .....	22
1.3	Metodologia .....	22
1.4	Organização da Tese .....	24
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>27</b>
2.1	Considerações Gerais sobre Compósitos e Métodos de Homogeneização .....	27
2.2	Instabilidades Mecânicas .....	45
<b>3</b>	<b>Elementos da Mecânica do Contínuo</b> .....	<b>51</b>
3.1	Cinemática .....	51
3.2	Equação de Equilíbrio .....	53
3.3	Hiperelasticidade .....	57
3.4	Convexidade e Elipticidade .....	59
<b>4</b>	<b>Considerações sobre a Teoria de Elasticidade Linear Clássica</b> .....	<b>65</b>
4.1	Formulação Diferencial .....	65
4.2	Formulação Integral .....	67
4.3	Energia de Deformação Elástica .....	68
4.4	Unicidade da Solução .....	68
4.5	Problema de Valor de Contorno (PVC) para um Compósito Bifásico Elástico-Linear .....	69
4.5.1	Forma Forte .....	69

4.5.2	Forma Fraca. Equivalência .....	70
<b>5</b>	<b>Aplicação de Métodos de Homogeneização no Estudo de Compósitos Elásticos .....</b>	<b>73</b>
5.1	Aplicação do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) em Problemas da Teoria da Elasticidade Linear Clássica .....	73
5.1.1	Equações Governantes do Problema Homogeneizado .....	73
5.1.2	Coefficientes efetivos $\widehat{C}_{ijpq}$ .....	80
5.1.3	Conservação das Propriedades de Simetria e de Positividade do Tensor de Elasticidade Efetivo .....	80
5.1.4	Comportamento Efetivo de Laminado Elástico-Linear .....	84
5.2	Aplicação do MHA no Estudo do Comportamento Efetivo de Laminado Elástico Não-Linear .....	86
5.3	Aplicação do Método Tangente de Segunda Ordem na Análise de Laminados Elásticos Não-Lineares .....	91
<b>6</b>	<b>Apresentação e Discussão de Resultados .....</b>	<b>97</b>
6.1	Resultados Obtidos do MEF e do MHA para um Laminado Elástico Linear...	97
6.2	Resultados Obtidos do MEF e do MHA para um Laminado Elástico Não-Linear	100
<b>7</b>	<b>Conclusões e Sugestões para Trabalho Futuro .....</b>	<b>129</b>
	<b>Referências .....</b>	<b>131</b>
	<b>Apêndice A – Unicidade e Equivalência das Formulações Variacional e de Minimização na Elasticidade Linear Clássica .....</b>	<b>141</b>

# 1 Introdução

Muitos materiais podem ser considerados compósitos, naturais ou fabricados pelo homem, como os materiais de engenharia. Segundo Christensen (2005), as pesquisas em materiais compósitos têm início no começo dos anos 60. O desenvolvimento acelerado destas pesquisas nas últimas décadas levou ao surgimento da área de mecânica dos materiais compósitos. As aplicações abrangem desde as áreas médicas até a engenharia aeroespacial, passando pela engenharia civil, em que se pode citar o estudo de frações volumétricas de agregados de concreto por Farage et al. (2009), misturas asfálticas por Souza (2005) e o estudo de rochas por Saenger (2008). De acordo com Milton (2002), compósitos são, basicamente, materiais que apresentam heterogeneidades em escalas de comprimento que são muito maiores do que a escala atômica, permitindo, portanto, utilizar as equações da física clássica nas escalas de comprimento da heterogeneidade, mas que são estatisticamente homogêneos em escalas de comprimento macroscópica, ou, pelo menos, em algumas escalas de comprimento intermediário. Ainda segundo Milton (2002), uma liga, apresentando desordem na escala atômica, é excluída da definição de compósito (exceto se for uma das fases em um compósito maior, caso em que é tratada como um material homogêneo). Para Vasiliev e Morosov (2001), de um modo geral, todo material formado por dois ou mais componentes que preenchem regiões bem delimitadas entre os componentes pode ser chamado de material compósito. Materiais compósitos proporcionam ganhos significativos de resistência e redução de peso quando comparados com seus constituintes individuais. Além disso, justifica-se o emprego destes materiais quando se busca distribuições ótimas das frações volumétricas dos componentes que os constituem para as aplicações desejadas.

Os materiais laminados constituem uma classe de compósitos de amplo emprego nas engenharias, principalmente na engenharia aeronáutica e aeroespacial. Laminados correspondem a microestruturas limitantes na classe mais geral de microestruturas particuladas (LOPEZ-PAMIES; PONTE-CASTAÑEDA, 2009). Na Construção Civil, a grande vantagem dos laminados é possibilitar o projeto de elementos estruturais flexíveis e re-

sistentes. Estruturas de amortecimento de vibrações formadas por camadas de aço e borracha têm sido empregadas com maior frequência na construção de pontes e outras estruturas que necessitem de proteção contra abalos sísmicos. No caso de pontes, laminados são empregados na fabricação de *aparelhos de apoio*, os quais são utilizados entre a infraestrutura e a superestrutura de uma ponte com os objetivos de transmitir as reações da superestrutura para a infraestrutura e permitir alguma movimentação da superestrutura (DEBS; TAKEYA, 2010). Nos casos usuais, empregam-se placas de neoprene intercaladas com chapas de aço que aderem às camadas elastoméricas durante o processo de vulcanização, formando um bloco único. Os aparelhos de apoio assim constituídos são chamados de neoprene cintados, ou, fretados. A Fig. 1 traz uma ilustração de um neoprene fretado com as principais dimensões. Eles aliam rigidez e capacidade de carga vertical elevada a uma grande flexibilidade lateral, permitindo deslocamentos horizontais e rotações relativas dos elementos de estruturas em contato com o aparelho. Além destas características, os apoios fabricados de neoprene são duráveis, exigem pouca manutenção e os detalhes de projeto são simples quando comparados a outros tipos de apoios. Laminados são muito empregados também em apoios estruturais elastoméricos utilizados nas fundações de edifícios e plantas nucleares para protegê-los de abalos sísmicos. Os apoios devem suportar carregamentos estáticos, tais como o peso do edifício, e as grandes deformações de cisalhamento no regime sísmico.

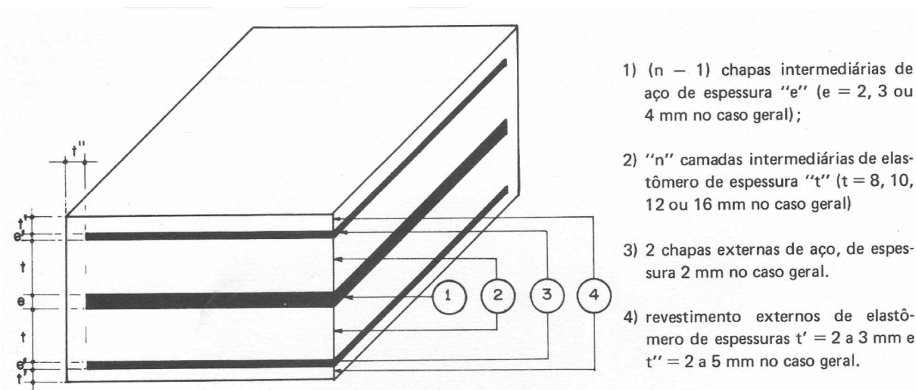


Figura 1: Características geométricas do neoprene fretado.

Fonte: Debs e Takeya (2010).

Diversos autores propuseram modelos constitutivos para determinar o comportamento de elastômeros que possam ser utilizados nessas estruturas de proteção, como, por exemplo, Mooney (1940), Rivlin (1948), Blatz e Ko (1962) e Ko (1963). Investigar o comportamentos desses materiais é de fundamental importância para realizar projetos mais seguros e econômicos. Um exemplo de testes executados com esses materiais pode



ser encontrado no trabalho de Kulak e Hughes (1992).

A presente tese fornece um estudo de materiais laminados formados por fases constituídas de materiais elásticos. Para laminados formados por lâminas de material elástico-linear são apresentadas curvas de tensão-deformação para uma sequência de malhas e lâminas cujos resultados convergem para resultados obtidos com o Método de Homogeneização Assintótica (MHA). No caso de laminados hiperelásticos, são apresentados estudos de instabilidades mecânicas, tais como bifurcação. Os compósitos laminados têm despertado o interesse de vários pesquisadores recentemente, dentre os quais citam-se Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) e Aguiar e Pérez-Fernández (2012). Os resultados obtidos neste trabalho serão úteis na identificação e entendimento de mecanismos físicos inerentes a sistemas materiais com morfologias particuladas mais gerais, tal como no caso de elastômeros reforçados com fibras, ou, partículas, para os quais o estudo analítico e computacional é bem mais complexo. Eles também serão úteis na investigação de uma classe especial de co-polímeros de interesse comercial crescente, tais como os elastômeros termoplásticos (TPEs). Estes materiais possuem uma (nano-)estrutura periódica lamelar (COHEN et al., 2000) semelhante à microestrutura dos laminados investigados nesta tese.

Deve-se destacar que é possível a combinação de ambos os métodos, o MHA e o Método dos Elementos Finitos (MEF), como pode ser verificado dos estudos realizados por Berger et al. (2003, 2005a, 2005b), León-Meciás (2006), Berger et al. (2006), Kari, Berger e Gabbert (2007) e Berger et al. (2007) em que os coeficientes efetivos determinados via MHA para um volume elementar representativo do compósito são utilizados para calcular as tensões e deformações do sólido homogeneizado correspondente. Outros estudos, como, por exemplo, o apresentado por Prado e Aguiar (2009) faz a comparação entre as tensões e deformações obtidas via MEF e via MHA em um volume elementar representativo no caso de um material laminado transversalmente isotrópico composto por duas fases.

## 1.1 Justificativa

Em problemas de engenharia é de grande interesse conhecer o comportamento global de materiais compósitos para obter projetos que otimizem segurança e baixo custo. Justifica-se, portanto, desenvolver um método de homogeneização que permita calcular os coeficientes efetivos dos compósitos. Também é de interesse investigar possíveis comportamentos anômalos que possam aparecer da combinação de materiais que formam as fases do compósito e que individualmente não apresentem nenhuma falha nos critérios

de estabilidade. Assim, uma questão que surge, é saber se o material homogeneizado também apresenta falhas nos critérios de estabilidade. Esse assunto tem sido explorado por pesquisadores como Abeyaratine e Triantafyllidis (1984), Read e Hegemier (1984), Lopez-Pamies e Castañeda (2004), Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009). Nota-se da última referência que o tema continua atual e merece atenção. Neste trabalho investiga-se o aparecimento de instabilidades materiais em bilaminados hiperelásticos utilizando métodos numérico e analítico. O método analítico permite construir uma solução principal para o problema de um laminado submetido a condições de deformação impostas no contorno e prever a deformação para a qual esta solução pode bifurcar em uma solução secundária. A contribuição principal desta tese foi confirmar esta predição numericamente e obter uma solução secundária.

## 1.2 Objetivos

Os objetivos principais deste trabalho são:

- Investigar, a partir do conhecimento da microestrutura, novos comportamentos de materiais compósitos não-lineares, tais como bifurcação e amolecimento.
- Aplicar o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) para verificar a ocorrência de instabilidade mecânica no material homogeneizado.
- Apresentar e comparar os resultados numéricos obtidos com soluções analíticas apresentadas na literatura e outras metodologias numéricas propostas.
- Sugerir novos estudos relacionados às aplicações de teorias de homogeneização assintótica e método dos elementos finitos no entendimento das instabilidades mecânicas.

## 1.3 Metodologia

Neste trabalho, apresentar-se-á os estudos feitos com materiais compósitos sob duas abordagens distintas. A primeira delas trata da investigação do comportamento de um laminado bifásico linear periódico via MHA e sua comparação com resultados obtidos via MEF. A concentração de cada fase, que é constituída de material elástico, linear e isotrópico, é igual a 0.5 no volume elementar representativo. Inicialmente os coeficientes efetivos do laminado são calculados via MHA e plota-se uma curva de tensão versus deformação para o caso de um ensaio de tração uniaxial no compósito homogeneizado.

Em seguida, faz-se a simulação numérica via MEF de um ensaio de tração uniaxial em regime de pequenas deformações, considerando duas geometrias distintas para o compósito bilaminado, a saber: um quarto de cilindro e um quarto de cubo. Para as simulações numéricas via MEF, em que se varia o número de lâminas no compósito, utiliza-se o software computacional de elementos finitos ANSYS, Inc. (2010).

Os elementos finitos escolhidos para a simulação numérica do sólido 3D no caso do material linear são do tipo SOLID187, utilizando integração completa. Esses elementos finitos são tetraédricos e permitem interpolação quadrática dos deslocamentos. Faz-se uma sequência de simulações numéricas variando o número de lâminas no compósito e plotam-se as curvas de tensão média versus deformação média na face onde é aplicada a um carregamento de tração para cada uma das malhas da sequência de ensaios. Os resultados obtidos via MEF são então comparados com os valores obtidos via MHA.

A segunda abordagem constitui um estudo de compósitos formados por lâminas de material hiperelástico, isotrópico e incompressível. A motivação desse estudo vem do trabalho desenvolvido por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009), em que os autores investigam a presença de instabilidades mecânicas em um compósito hiperelástico homogeneizado. Nesta tese, faz-se a simulação numérica via MEF com a utilização do software ANSYS, Inc. (2010) de uma sequência de laminados hiperelásticos sujeitos a um estado plano de deformações, nos quais se varia o número de laminas no laminado e as condições de contorno. O laminado possui célula periódica bifásica, na qual a concentração de cada fase é 0.7 para o material menos rígido e 0.3 para o material mais rígido. O elemento finito do ANSYS adotado nesta análise é o PLANE183 (elemento quadrilateral) para o caso 2D, utilizando integração completa. As condições de contorno aplicadas nos ensaios numéricos do material hiperelástico adotado são as mesmas condições utilizadas por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009). Todos os elementos finitos adotados nesse trabalho são do tipo serendíptico, cujos os elementos desenvolvidos até a atualidade não possuem nós no interior do elemento finito. Os resultados serão apresentados para o bilaminado com 256 lâminas.

Pode-se resumir a estratégia de análise que será adotada da seguinte maneira: o compósito de material linear é abordado do ponto de vista teórico via MHA e via MEF, cujos os resultados são comparados; em seguida, tendo-se por base os estudos em material linear, aborda-se o material hiperelástico via MEF e busca-se a relação com o estudo teórico de Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009), na investigação de instabilidades mecânicas e a comparação com resultados obtidos por meio do MHA.

## 1.4 Organização da Tese

O presente trabalho está organizado como descrito a seguir.

Na Seção 2, apresenta-se uma revisão da bibliográfica, compreendendo diversos trabalhos relacionados ao estudo do comportamento mecânico, das propriedades materiais e instabilidades mecânicas em materiais compósitos de diferentes tipos. Com respeito ao estudo de instabilidades mecânicas, alguns trabalhos e conceitos são apresentados na Seção 2.2, em que se define o conceito de amolecimento que posteriormente será utilizado nas investigações propostas neste trabalho.

Na Seção 3 apresentam-se os fundamentos da mecânica clássica. Após introduzir os conceitos elementares, discute-se na Seção 4 um Problema de Valor de Contorno (PVC) Misto sobre um meio elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo. Esse estudo tem por base os trabalhos de Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia (1992), Figueiredo e Viaño (2005) e Bravo-Castillero (2009). Nessa discussão, recorrer-se-á a aspectos importantes sobre as propriedades de simetria e positividade dos coeficientes de elasticidade linear, assim como da energia de deformação elástica e sua importância para verificar a solução de tais problemas. Serão mostradas diferentes abordagens: clássica, variacional e de otimização. Discussão sobre a unicidade de solução e equivalência das forma forte e fraca é apresentada no Apêndice A. Esse estudo serve para a formulação de problemas que envolvam um meio elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo, fornecendo as bases para modelagens de materiais compósitos no contexto da teoria de elasticidade linear clássica que venham a aplicar métodos oriundos de princípios variacionais, como o MEF, ou métodos de homogeneização, como o MHA. Para uma fundamentação a respeito do MEF, cita-se o trabalho de Hughes (1987). A aplicação do MHA aos problemas da teoria de elasticidade pode ser encontrada em Bakhvalov e Panasenko (1989), Oleinik, Shamaev e Yosifian (1992), Cioranescu e Donato (1999), Allen (2001), Milton (2002).

Na Seção 5, apresentam-se os fundamentos e aplicações do MHA. Para ilustrar melhor o método, desenvolve-se na Seção 5.1 uma aplicação do MHA ao estudo de um PVC da Teoria da Elasticidade Linear Clássica. O problema estudado é um PVC do tipo Dirichlet para sólidos anisotrópicos e heterogêneos, nos quais as propriedades do sólido são descritas pelos 81 coeficientes  $C_{ijkl}$  do tensor de elasticidade do material em um sistema fixo de coordenadas (CCR). Assume-se a elasticidade de Green, de modo que apenas 21 coeficientes são independentes. O MHA é aplicado na construção de uma solução assintótica formal de uma família de PVCs com coeficientes periódicos rapidamente os-

cilantes. Demonstra-se a preservação das condições de simetria e de positividade do tensor de elasticidade do problema homogeneizado. Ressalta-se que as fases dos compósitos considerados na Seção 5.1 deste trabalho são anisotrópicas. Desse modo, compósitos contendo fases ortotrópicas, transversalmente isotrópicas e isotrópicas, comumente empregados em aplicações de engenharia, são casos particulares dos compósitos tratados nessa seção.

Os principais resultados obtidos para o estudo do bilaminado elástico-linear e o não-linear utilizando o MHA e o MEF são apresentados e discutidos na Seção 6. Nas Seções 6.1 e 6.2 resolvem-se os problemas dos laminados bifásicos elástico-linear e hiperelástico, respectivamente, via MEF utilizando o software computacional de elementos finitos ANSYS, em que se utiliza a programação APDL (ANSYS Parametric Design Language) para gerar os laminados de forma automatizada e para obtenção dos campos de deslocamento, tensão e deformação. Para maiores detalhes sobre essa programação, pode-se consultar ANSYS, Inc. (2010). Adicionalmente, apresentam-se nessa seção os resultados relativos ao compósito bifásico linear e a comparação com o MHA. No caso dos compósitos laminados hiperelásticos, são apresentados estudos sobre amolecimento.

Apresentam-se na Seção 7 as conclusões a respeito dos trabalhos desenvolvidos nesta tese e algumas sugestões para a continuidade dos trabalhos.

A lista de referências citadas no corpo da tese encontra-se ao final desta.



## 2 Revisão Bibliográfica

Nesta seção realiza-se uma revisão bibliográfica de trabalhos relevantes na área de determinação de coeficientes elásticos em materiais compósitos e estudos do comportamento mecânico. Observa-se desta revisão que a área de estudo tem pouco mais de meio século de desenvolvimento e que integra diferentes áreas da engenharia, devido às possibilidades de aplicações desses materiais.

### 2.1 Considerações Gerais sobre Compósitos e Métodos de Homogeneização

Vários são os estudos para prever o comportamento mecânico de compósitos, que em sua maioria requerem inicialmente a determinação das propriedades elásticas desses compósitos. Nesse sentido, autores como Christensen (2005) apresentam uma revisão das diferentes abordagens para determinar as propriedades elásticas efetivas de diferentes compósitos e lembra que os teoremas de mínimo podem ser utilizados para obter limites sobre essas propriedades efetivas. Para tanto, procede-se pelo uso de campos admissíveis que sejam os mais simples possíveis, envolvendo tensões uniformes, ou deformações uniformes, através de todas as fases do sólido heterogêneo. Considere o caso de um material compósito que é macroscopicamente isotrópico e que contém  $n$  fases diferentes. Assumindo um estado de deformações uniforme através de todas as fases imposto por um campo de deformações que varia linearmente com a tensão, segue imediatamente do teorema de mínimo potencial de energia e da definição de propriedades efetivas por meio da equivalência energética que os módulos efetivos são limitados por

$$\kappa \leq \sum_{i=1}^n c^{(i)} \kappa^{(i)}, \quad \kappa \in \mathbb{R}^+, \quad \mu \leq \sum_{i=1}^n c^{(i)} \mu^{(i)}, \quad \mu \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

em que  $n$  é o número de fases,  $\kappa^{(i)}$  é o módulo volumétrico da fase  $i$ ,  $\mu^{(i)}$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento da fase  $i$  e  $c_i$  é a fração de volume da fase  $i$ , sendo considerado para a obtenção de (2.1) estados separados de dilatação e cisalhamento simples. De modo

alternativo, para um estado uniforme de tensão ao longo de todo o material, combinado com o teorema de mínima energia complementar, resulta

$$\frac{1}{\kappa} \leq \sum_{i=1}^n \frac{c^{(i)}}{\kappa^{(i)}}, \quad \frac{1}{\mu} \leq \sum_{i=1}^n \frac{c^{(i)}}{\mu^{(i)}}. \quad (2.2)$$

A combinação de (2.1) e (2.2) resulta

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{c^{(i)}}{\kappa^{(i)}}} \leq \kappa \leq \sum_{i=1}^n c^{(i)} \kappa^{(i)}, \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{c^{(i)}}{\mu^{(i)}}} \leq \mu \leq \sum_{i=1}^n c^{(i)} \mu^{(i)} \quad (2.3)$$

Segundo Christensen (2005), no entanto, os limites previstos por Voigt (limite inferior), dado pelos termos que estão à esquerda de  $\kappa$  e  $\mu$  em (2.3), e Reuss (limite superior), dado pelos termos que estão à direita de  $\kappa$  e  $\mu$  em (2.3), são tão distantes de materiais compósitos típicos que estes limites não apresentam nenhum valor prático. Esse autor destaca que certamente pode-se obter uma informação mais explícita sobre propriedades efetivas especificando a geometria das fases que formam o compósito, mas busca dar informação mais explícita possível em termos de limites sem especificar a geometria de cada fase. Entre algumas questões colocadas estão, por exemplo, se é possível obter limites mais estreitos do que aqueles envolvidos em (2.3) sem especificar a geometria da fase. O autor coloca ainda que uma resposta intuitiva a esta pergunta é não e questiona como encontramos o campo admissível apropriado para o uso além dos campos uniformes já utilizados para obter (2.3) sem que a geometria de cada fase seja especificada. Após estas questões citadas, o autor destaca que a resposta à primeira pergunta é sim, ou seja, que iremos encontrar limites mais estreitos e mais significativos do que aqueles em (2.3). Autores como Hashin e Shtrikman (1962, 1963) utilizam formulações variacionais para obter esses limites mais estreitos para materiais bifásicos, o que foi um avanço notável nessa área. Esses limites são dados por

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \kappa_r + \frac{1 - c_r}{\frac{1}{\kappa_m - \kappa_r} + \frac{3c_r}{3\kappa_r + 4\mu_r}}, \\ \kappa_i &= \kappa_m + \frac{c_r}{\frac{1}{\kappa_r - \kappa_m} + \frac{3(1 - c_r)}{3\kappa_m + 4\mu_m}}, \\ \mu_s &= \mu_r + \frac{1 - c_r}{\frac{1}{\mu_m - \mu_r} + \frac{6c_r(\kappa_r + 2\mu_r)}{5\mu_r(3\kappa_r + 4\mu_r)}}, \\ \mu_i &= \mu_m + \frac{1 - c_r}{\frac{1}{\mu_r - \mu_m} + \frac{6c_r(1 - c_r)(\kappa_m + 2\mu_m)}{5\mu_m(3\kappa_m + 4\mu_m)}} \end{aligned} \quad (2.4)$$



em que  $i$  indica o limite inferior,  $s$  o limite superior,  $m$  a matriz,  $r$  o reforço e  $c_r$  é a fração volumétrica do reforço.

Talbot (2000) introduz informações adicionais para melhorar os limites propostos em Milton (1981, 1982) a partir do trabalho de Bruno e Chaubell (apud TALBOT, 2000) para um compósito não-linear de formato cúbico com dimensões fixas formado por uma repetição infinita de inclusões. Os resultados obtidos por Talbot (2000) conseguem limites mais estreitos e realísticos até mesmo quando os parâmetros elásticos já são conhecidos e é feita a comparação com os trabalhos citados acima. Todos estes trabalhos permitiram ampliar os resultados obtidos por Hashin e Shtrikman (1962, 1963) para materiais não-lineares.

Os métodos utilizados nos trabalhos anteriores são variacionais. De acordo com Willis (1983) os vários métodos existentes no estudo da mecânica dos compósitos podem ser classificados dentro de quatro categorias: assintótica, auto-consistente, variacional e métodos de modelagem. No entanto, não existem limites rigorosos entre essas categorias. Nesta tese serão utilizados o MHA e o MEF, cujos os resultados são comparados entre si para os casos de um bilaminado linear e um bilaminado não-linear.

Segundo Huang, Hu e Chandra (1993), os métodos auto-consistentes têm sido amplamente utilizados para estimar os módulos elásticos macroscópicos de sólidos contendo microvazios e inclusões. Outro método baseado na liberação de energia da fissura e balanço de energia potencial também tem sido utilizado para estimar os módulos elásticos globais de um sólido microfissurado. Huang, Hu e Chandra (1993) demonstram que as duas abordagens, autoconsistente e de liberação de energia, são equivalentes para sólidos microfissurados. Desse modo, pode-se tirar proveito de ambos os métodos para estimar os módulos elásticos de compósitos com inclusão-fissura-matriz, ou seja, de material composto microfissurado. Estes autores estudam um sólido que contém inclusões esféricas e inclusões em forma de moeda distribuídas de forma aleatória. Adicionalmente, calculam os módulos elásticos efetivos de um sólido com inclusões esféricas e fissuras em forma de moeda distribuídas paralelamente. Huang, Hu e Chandra (1993) verificam ainda que os efeitos de inclusões e fissuras sobre o módulo global são aproximadamente desacoplados para inclusões rígidas, as quais são muito comuns na maioria dos compósitos de matriz metálica. Desse modo, eles concluem que este resultado é particularmente útil, porque pode-se então obter o módulo de compósitos por uma estimativa de dois passos simples: a combinação de um método auto-consistente que se inicia com o balanço de energia potencial e a relação entre a mudança de energia potencial e a taxa de liberação de energia

da fissura. Outra conclusão destes autores é que, para inclusões não rígidas, incluindo o caso limite de vazios, o desacoplamento não se verifica.

Kalamkarov, Andrianov e Danishevs'kyi (2009) analisam os fundamentos da homogeneização assintótica e as soluções analíticas dos problemas de célula unitária para os compósitos laminados, reforçado com fibra e particulados. Os resultados obtidos são generalizados para os compósitos com distribuição aleatória das fases. Esses autores também analisam estruturas compósitas de paredes finas, danos em materiais compósitos e os efeitos de contorno, bem como correlações aproximadas entre as condutividades térmica e elétrica com problemas elásticos para os materiais compósitos. O estudo tem início com a investigação de compósitos regulares, cujos coeficientes das equações correspondentes que modelam o comportamento mecânico do compósito sólido são funções periódicas rapidamente oscilantes em coordenadas espaciais. Os problemas de valor de contorno resultantes são muito complexos. Kalamkarov, Andrianov e Danishevs'kyi (2009) constatam que a aplicação de métodos numéricos na solução aproximada um problema de valor de contorno para um sólido compósito, nem sempre é conveniente, ou, pode ser inadequada em sua forma padrão. Portanto, é importante desenvolver métodos analíticos baseados em técnicas matemáticas rigorosas. Atualmente, técnicas assintóticas são aplicadas em muitos casos de estudos da estrutura micromecânica de compósitos.

Com efeito, a possibilidade de homogeneizar um sólido compósito formado por uma estrutura regular, ou seja, analisar um sólido homogêneo equivalente em vez do sólido heterogêneo original, é um dos principais resultados da teoria de homogeneização assintótica segundo Kalamkarov, Andrianov e Danishevs'kyi (2009). A teoria de homogeneização também indicou um método de transição do problema original, o qual contém em sua formulação um pequeno parâmetro relacionado com as pequenas dimensões dos constituintes do compósito, para um sólido homogêneo. As propriedades efetivas desse material homogêneo equivalente são determinadas por meio das soluções de problemas locais formulados na célula unitária do material compósito. Estas soluções também permitem o cálculo de tensões locais e as tensões no material compósito. No início da Seção 5 alguns conceitos fundamentais do método de homogeneização assintótica são introduzidos para retomar esse ponto e facilitar o entendimento do método quando das aplicações posteriores.

Compósitos com estrutura periódica permitem definir um elemento representativo de volume contendo todas as suas características físicas. No processo de homogeneização, utiliza-se este elemento representativo para se obter um meio globalmente equivalente e

homogêneo do compósito. As constantes que caracterizam este meio homogeneizado são denominadas coeficientes efetivos. Segundo Panasenکو (2005), o propósito do método de homogeneização é a obtenção de equações cujos coeficientes não são rapidamente oscilantes enquanto suas soluções estão próximas às das equações originais para condições de contorno apropriadas. Normalmente, estas novas equações são de dimensão reduzida; por exemplo, no caso da barra não homogênea, ela tem dimensão 1 com relação às variáveis de espaço. Estas novas equações são chamadas equações homogeneizadas ou equações médias, e seus coeficientes são os coeficientes efetivos.

A medida da homogeneidade equivalente é dada pela proximidade entre a solução do problema original sobre o meio heterogêneo e a solução do problema homogeneizado. Dentre os métodos de homogeneização propostos para obter um modelo constitutivo, adequado para a determinação dos coeficientes efetivos dos compósitos com estrutura periódica, cita-se o MHA (BENSOUSSAN; LIONS; PAPANICOLAOU, 1978.; SANCHEZ-PALENCIA, 1980; BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Obtém-se o problema homogeneizado, via MHA, assumindo que a solução do PVC original é uma série de potências em termos de um parâmetro geométrico escalar pequeno com coeficientes dependentes das variáveis macroscópica, ou lenta, e microscópica, ou rápida. O parâmetro pode ser interpretado fisicamente como a razão entre o tamanho característico da célula periódica do compósito, tal como o comprimento de um cubo elementar, e um tamanho representativo do compósito, tal como o comprimento de uma viga construída com material compósito. Os coeficientes efetivos do problema homogeneizado equivalente são determinados por meio da solução dos chamados problemas locais formulados sobre a célula periódica. Na teoria de elasticidade linear clássica, o MHA garante que a solução do PVC, com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes, converge para a solução do problema equivalente homogeneizado quando o parâmetro geométrico tende a zero (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Bravo-Castillero et al. (1998) utilizam o MHA para obter as expressões analíticas das propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas efetivas de um composto piezoelétrico laminado dotado de uma estrutura periódica. Bravo-Castillero et al. (2006) obtêm fórmulas para as propriedades efetivas de compostos elásticos com fases isotrópicas e reforçados com fibras cilíndricas circulares periodicamente distribuídas. As propriedades efetivas são obtidas para os casos de célula periódica quadrada e hexagonal. Os autores também investigam os casos limites de fibras vazias e infinitamente rígidas. Bravo-Castillero et al. (2009b) aplicam o MHA para determinar fórmulas analíticas para as propriedades efeti-

vas de compósitos multilaminados, periódicos, com propriedades termo-magneto-eleto-elásticas. Outras aplicações do MHA podem ser encontradas, por exemplo, na análise de problemas em termoelasticidade por Francfort (1984) e em termopiezoeletricidade por Galka, Telega e Wojnar (1996). O MHA pode fornecer estimativas das propriedades efetivas de compósitos de interesse na construção civil, tais como as encontradas em Hayashida et al. (1997), dependendo do grau de periodicidade da microestrutura destes materiais. No estudo do comportamento dos concretos, o MHA pode ser aplicado, por exemplo, no estudo das frações volumétricas de seus componentes. Farage et al. (2009) simulam numericamente o módulo de elasticidade efetivo de concretos leves. A partir das propriedades elásticas do agregado e da argamassa empregados na composição do concreto é possível calcular o tensor elástico homogeneizado do material resultante. Segundo Farage et al. (2009), as comparações dos resultados numéricos com medições experimentais indicam a potencialidade do MHA para prever o módulo de elasticidade de concretos. Dentre outros trabalhos que utilizam o MHA podem ser citados os trabalhos de Bensoussan, Lions e Papanicolaou (1978.), Bakhvalov e Panasenko (1989), Galka, Telega e Wojnar (1996), Bravo-Castillero et al. (1998, 2006), Cruz, Oliveira e Teixeira-Dias (2009a, 2009b), Bravo-Castillero et al. (2009b) e Sixto (2010).

O emprego da média no MHA, no entanto, pode produzir equações completamente diferentes das originais; por exemplo, Bakhvalov e Panasenko (1989) apresentam exemplos em que a média de um sistema de equações diferenciais resulta em um sistema de equações diferenciais integrais.

No que diz respeito a vantagens e desvantagens do emprego do MHA, Bakhvalov e Panasenko (1989) dão os seguintes destaques:

- O MHA é eficaz para investigar propriedades tanto macroscópicas como as microscópicas de estruturas periódicas. A primeira aproximação já produz um erro de ordem  $\chi/L$ , em que  $\chi$  é o lado de uma célula periódica e  $L$  o tamanho macroscópico característico do meio heterogêneo que se estuda. Este valor é um milésimo de um por cento para a maioria dos compósitos segundo os autores supracitados. Uma expansão assintótica da solução permite uma precisão da ordem  $(\chi/L)^n$  a ser atingido por qualquer inteiro  $n > 0$ .
- O MHA é universal, ou seja, é aplicável a todos os tipos de processos que podem ocorrer nos meios periódicos, tais como vibrações elásticas, desde que o comprimento de onda seja maior do que o comprimento da célula periódica, difusão, propagação de calor, percolação de fluidos, oscilações eletromagnéticas, radiação, entre outros.

No MHA pode-se considerar tanto modelos de equações diferenciais lineares e não lineares, como equações de operador, como será apresentado na Seção 5. O processo de homogeneização também pode levar em conta os efeitos de contorno, em alguns casos a qualquer grau de precisão.

- O MHA é rigorosamente justificado por vários modelos. Teoremas têm sido provados sobre a resolubilidade dos problemas que são de passos elementares de um algoritmo para a construção de uma solução assintótica. Estimativas de precisão do método foram obtidas para determinar a ordem de erro em uma aproximação particular e, conseqüentemente, para traçar os limites distintos para a aplicação dessa aproximação.
- A principal desvantagem do método é que a solução numérica de problemas de Laplace para células periódicas e os problemas locais gerados a partir dessas equações pelo uso do MHA com as condições de contorno apropriadas, e que estão apresentado na introdução de Bakhvalov e Panasenko (1989), é necessária. Soluções aproximadas para problemas tridimensionais em uma célula tomam grande quantidade de tempo computacional e capacidade de memória.

Deve-se ter em mente, contudo, que as muitas vertentes existentes, misturando regras, e fórmulas de projeto de engenharia freqüentemente produzem aproximações muito grosseiras das propriedades efetivas. Assim, para compósitos com muitas características diferentes de seus componentes, o erro das aproximações Voight-Reuss-Hill é comparável com as próprias características efetivas e podem exceder 100 por cento segundo Bakhvalov e Panasenko (1989).

As fórmulas de projeto mencionadas no parágrafo anterior têm limites rígidos de aplicabilidade, e além disso, a questão do valor de erro cometido e os limites de aplicabilidade muitas vezes não têm sido estudados suficientemente bem. O MHA produz fórmulas explícitas simples para o termo principal dos coeficientes efetivos, sendo bastante importante para as aplicações de materiais compósitos reforçados com fibras de alto módulo. Pode-se consultar os capítulos 7 e 8 de Bakhvalov e Panasenko (1989) para maiores detalhes.

- Os métodos tradicionais não descrevem as características macroscópicas dos processos, como as deformações e tensões locais, e não levam em conta efeitos na camada da fronteira. O MHA permite que limites de aplicabilidade sejam estabelecidos para os métodos de engenharia aproximados usados correntemente para projeto e para

melhorar consideravelmente sua precisão, quando necessário. Assim, uma abordagem unificada torna-se possível para um certo número de problemas que parecem ser diferentes à primeira vista.

A seguir, apresentam-se alguns estudos que têm sido desenvolvidos com a utilização do MHA e suas aplicações, e a descrição dos trabalhos que abordam o problema de homogeneização procurando integrar o MHA e o MEF. Inicialmente, descrevem-se os que buscam aprimoramentos do MHA.

Fernández (2009) estima o comportamento efetivo dos materiais compósitos não lineares, cujas as estruturas são formadas por geometrias periódicas, através de uma abordagem que integra técnicas variacionais e assintóticas de homogeneização. O autor combina a metodologia não-linear variacional a partir dos trabalhos de Hashin e Shtrikman (1962), Hashin e Shtrikman (1963) e Willis (1983), a qual produz limites para o potencial energético efetivo que corresponde à formulação variacional do problema de contorno original, com estimativas obtidas utilizando o MHA para as propriedades efetivas lineares de um compósito de comparação (introduzido na metodologia de Hashin-Shtrikman em que se considera a mesma geometria do compósito não-linear). Esse trabalho tem o objetivo de estabelecer o aspecto matemático para a formulação de leis físicas que servem para modelar o comportamento do material, em que se apresenta a aplicação do método termodinâmico para obter as relações constitutivas lineares e não-lineares da termo-magneto-eleto-elasticidade. Em seguida, com a finalidade de lançar as bases matemáticas do problema a ser resolvido, são formulados modelos diferenciais e variacional da magneto-eleto-elasticidade, apresentando-se as expressões gerais dos limites variacionais e da estimativa assintótica. Por fim, os exemplos são resolvidos considerando vários modelos físicos e geométricos, demonstrando que o enfoque integrador proposto conduz a limites muito estreitos para prever o comportamento energético efetivo. Em alguns casos analisados, os limites inferior e superior obtidos são praticamente indistinguíveis. Dessa forma, assegura-se que a estimativa possua uma boa precisão na predição da lei efetiva correspondente, a qual é obtida pela diferenciação dessas estimativas.

Silva (2009) aplica o MHA na modelagem de estruturas ósseas. Ele considera o osso como um sólido heterogêneo com estrutura bastante complexa que geralmente exige o emprego de múltiplas escalas em sua análise. O autor destaca que a avaliação do comportamento eletromecânico da estrutura óssea tem sido realizada por meio de métodos da mecânica clássica, métodos de elementos finitos e métodos de homogeneização, em que se procura descrever matematicamente a relação entre o comportamento eletromecânico

da estrutura óssea e as propriedades efetivas, ou, globais. O autor utiliza o MHA para determinar as propriedades eletromecânicas efetivas de estruturas ósseas. Inicialmente, ele analisa os problemas de condução de calor e elástico para mostrar que estes problemas estão relacionados entre si. Para o problema de condução de calor em duas dimensões desenvolve-se a formulação considerando-se apenas os três primeiros termos da expansão assintótica. Os problemas de condução térmica são resolvidos por meio de dois métodos: método de passo limite e método de fronteira livre.

A abordagem de passo limite é adequada para resolver inúmeros casos de materiais fibrosos, já a abordagem de fronteira livre é utilizada para resolver estruturas porosas. Silva (2009) mostra, no entanto, que para a estrutura cristalina de classe 6mm ambas as abordagens conduzem aos mesmos resultados. Adicionalmente, uma aplicação do MHA em osso cortical é apresentada a partir dos desenvolvimentos por Bravo-Castillero et al. (2009a), cujos os resultados apresentam-se muito satisfatórios quando comparados com resultados encontrados na literatura.

Hollister e Kikuchi (1992) lembram que o comportamento elástico de materiais compósitos tem sido estudado utilizando muitas abordagens, sendo que todas são fundamentadas no conceito de um Volume Representativo Elementar (VRE). Os métodos utilizados nestas abordagens produzem estimativas precisas das propriedades elásticas efetivas do meio homogeneizado quando a razão entre um comprimento característico do VRE e as dimensões globais da estrutura, denotada por  $\zeta$ , tende a zero. Vale ressaltar que muitos compósitos são localmente periódicos e apresentam  $\zeta$  pequeno, mas não infinitesimal. Hollister e Kikuchi (1992) comparam a homogeneização com análises mecânicas padrão baseadas em VREs para compósitos porosos periódicos com  $\zeta$  pequeno, mas não infinitesimal. Os autores implementam ambos os métodos, MHA e análise mecânica padrão por meio de VRE, utilizando formulação via elementos finitos e mostram que em análises unidimensionais de barras de compósitos os métodos são equivalentes. Entretanto, nas análises bidimensionais e tridimensionais os dois métodos produzem resultados muito distintos, devido ao fato da tensão local no VRE e estado de deformação não serem determinados exclusivamente pelas condições de contorno aplicadas. Para análises bidimensionais de compósitos periódicos porosos as propriedades materiais efetivas previstas por aproximações mecânicas padrão utilizando múltiplas células de VREs convergiram para as previsões da homogeneização utilizando uma única célula. Além disso, as estimativas de homogeneização da densidade energia de deformação local ficaram dentro de 30% de diferença dos resultados obtidos de análises diretas, ou seja, quando todo o sólido é considerado na análise via MEF, enquanto aproximações mecânicas padrão geralmente

diferiam das análises diretas por um valor de mais de 70%. Os resultados obtidos por esses autores sugerem que a teoria de homogeneização é preferível à mecânica padrão para compósitos periódicos, incluindo os casos em que o material é apenas localmente periódico e  $\zeta$  é pequeno, mas não infinitesimal.

Silva, Nishiwaki e Kikuchi (1999) investigam o comportamento de transdutores flexensionais que consistem de um piezocerâmico (ou uma pilha de piezocerâmicos) ligado a uma estrutura mecânica flexível que converte e amplifica o deslocamento de saída do piezocerâmico. Segundo estes autores, entre as aplicações, eles podem ser utilizados como atuadores e sonares. O desempenho do transdutor nesta aplicação depende da distribuição de massa, rigidez e flexibilidade no domínio de estrutura de acoplamento, a qual está relacionada com a topologia da estrutura de acoplamento. Ao conceber outros tipos de estruturas de acoplamento ligadas ao piezocerâmico, os autores obtêm novos tipos de transdutores flexensionais com melhor desempenho para uma aplicação desejada. Neste trabalho, os autores estendem o método de otimização topológica para projetar transdutores flexensionais em aplicações estáticas e de baixa frequência para aplicações dinâmicas, introduzindo o efeito de inércia no problema de otimização. O método aplica a técnica de otimização topológica com base no método de projeto por homogeneização, o qual consiste em encontrar a distribuição ótima de material em um domínio de projeto perfurado com infinitos vazios na microescala. O problema é criado como o projeto de uma estrutura flexível acoplada ao piezocerâmico, que produz deslocamentos de saída elevados em um ponto do domínio e direção especificada, numa frequência especificada. Portanto, trata-se de conceber uma estrutura flexível com um formato especificado em uma frequência de ressonância desejada.

Diferentes autores abordam os problemas de homogeneização via métodos numéricos. A seguir, são apresentados trabalhos que fazem uso dessas abordagens, dentre as quais destacam-se a utilização do Método de Elementos Finitos para determinar as constantes elásticas efetivas. Entre os principais trabalhos, ressaltam-se os de Moulinec e Suquet (1998), Michel, Moulinec e Suquet (1999), Allen (2001), Junior (2003), Zeman (2003), Kari (2006), León-Meciás (2006), Kari et al. (2008), Berger et al. (2005b) e Toulemonde, Masson e Gharib (2008). Outros autores utilizam o Método das Diferenças Finitas como, por exemplo Pasternak e Mühlhaus (2005), no processo de homogeneização para materiais granulares.

Allen (2001) utiliza conceitos de homogeneização para desenvolver metodologias simplificadas para prever resposta de sólidos que desenvolvem dano em multi-escala.



Esta metodologia é implementada computacionalmente com a finalidade de produzir algoritmos eficientes para uma variedade de meios, incluindo compósitos granulares e laminados. Allen (2001) observa que, historicamente, o estudo no campo de compósitos produziu pesquisa inovadora em diferentes áreas de aplicação e que fez a análise dos meios heterogêneos se tornar bastante simplificada. Esse autor utiliza esses conceitos simplificados de homogeneização incorporados na sua metodologia, na qual formula uma extensão desses conceitos para incluir várias escalas, e faz a ligação de cada escala por um princípio de homogeneização baseado no operador da média. Segundo esse autor, a única característica do processo de homogeneização desenvolvido é que a “segunda fase” em cada uma das escalas é apresentada o dano como dependente do tempo. O processo de homogeneização em cada escala conduz a um parâmetro dano baseado cinematicamente na próxima escala de comprimento maior. Como os parâmetros de dano resultantes desse processo de homogeneização são, na verdade, um resultado direto da solução micromecânica em escalas menores, estes parâmetros não precisam ser previstos a partir de uma “lei de evolução do dano”, como é exigido em muitos modelos de dano contínuo fenomenológicos.

Junior (2003) investiga o comportamento de materiais compósitos viscoelásticos. O autor considera um compósito periódico formado por células elementares cúbicas com fibra prismática quadrada, ou, cilíndrica. Os deslocamentos periódicos desta célula são aproximados utilizando expansões ortogonais polinomiais. Segundo esse autor, a exatidão dos cálculos elásticos está associada ao grau dos polinômios utilizados. O procedimento numérico no modelo viscoelástico é incremental no tempo, utilizando-se de variáveis de estado, cuja implementação proporciona grande economia computacional, pois evita o cálculo de integrais hereditárias. A influência de diversos parâmetros físicos na constituição dos compósitos de fibras unidirecionais estudados é discutida e comparada com resultados obtidos com modelos utilizando elementos finitos, tanto em elasticidade, quanto em viscoelasticidade sem envelhecimento. Para o caso de envelhecimento, no qual as características dos constituintes são variáveis com o tempo, o autor apresenta a resposta dos compósitos sob relaxação para diferentes instantes iniciais de carregamento em situações de amolecimento e endurecimento.

Zeman (2003) aplica duas abordagens distintas para calcular as constantes efetivas de materiais compósitos cujas as fases estão distribuídas aleatoriamente na matriz. O autor apresenta uma abordagem simples e intuitiva baseada em estatísticas microestruturais para a partir do cálculo estatístico determinar as células unitárias periódicas. Uma metodologia conceitualmente semelhante é utilizada no nível meso-escala para a definição da célula periódica unitária estatisticamente ótima. A segunda abordagem é baseada

nos limites propostos por Hashin e Shtrikman (1962, 1963), os quais incorporam funções de dois pontos de probabilidade para a formulação do problema. O autor utiliza duas abordagens que, embora sejam distintas em suas formulações teóricas, estão intimamente ligadas aos mesmos descritores estatísticos comumente utilizados para quantificar a morfologia das microestruturas aleatórias. Zeman (2003) esclarece que a primeira abordagem segue procedimentos bem estabelecidos que incorporam vários modelos de células unitárias periódicas combinados com o MEF. No nível da microescala, a complexidade de microestruturas reais é refletida em células unitárias mais complicadas com maior número de partículas. O número necessário de reforços e o seu arranjo é determinado de tal modo que a resposta macroscópica de uma célula unitária é idêntico ao comportamento de um compósito real. Outros exemplos de estudos de estruturas com fases distribuídas aleatoriamente são encontrados em Willis (1985), Buryachenko (2001), Torquato (2002), Ostoj-Starzewski (2007), Kari, Berger e Gabbert (2007) e Berger et al. (2007).

Kari (2006) propõe técnicas de homogeneização numéricas baseadas no método de elementos finitos para a avaliação das propriedades materiais efetivas de diferentes tipos de compósitos. O autor considera diferentes tipos de reforços de compósitos, tais como os compósitos fibrosos, cujas as fibras unidirecionais são distribuídas tanto regularmente quanto aleatoriamente, compósitos de partículas esféricas distribuídas aleatoriamente, compósitos de fibras curtas distribuídas aleatoriamente, compósitos trifásicos de fibras unidirecionais, compósitos trifásicos formados de partículas esféricas distribuídas aleatoriamente. O autor realiza um estudo numérico para determinar a influência de parâmetros morfológicos dos constituintes do compósito, tais como a fração de volume, o arranjo, o tamanho e a forma das inclusões sobre o comportamento efetivo, ou, global de compósitos. A fim de validar as ferramentas de homogeneização desenvolvidas, os autores realizam diversas comparações entre os resultados numéricos, resultados analíticos e, em alguns casos, resultados experimentais encontrados na literatura.

As ferramentas de homogeneização desenvolvidas por Kari (2006) são aplicáveis a compósitos multifuncionais como compósitos puramente elásticos e piezoelétricos. O autor estende os estudos para avaliar a influência do descolamento de inclusões sobre o comportamento de diferentes tipos de materiais compósitos que utilizam o método do VRE. O autor também investiga as influências da distância de vizinhança mais próxima entre as inclusões, a sua disposição, a forma e a fração de volume no comportamento efetivo do material de compósitos submetidos a cargas de tração. Além disso, o autor utiliza algoritmos desenvolvidos em Fortran para gerar automaticamente os modelos de VREs de diferentes tipos de inclusões distribuídas aleatoriamente nos compósitos. Propõe-

se também um procedimento general para avaliar as propriedades materiais efetivas de diferentes tipos de compósitos, na tentativa de reduzir o trabalho manual na geração de modelos VRE, na geração da malha dos componentes e a aplicação de condições de contorno periódicas.

Em outro trabalho sobre modelos que combinam o MEF e o MHA, León-Meciás (2006) desenvolve uma metodologia para calcular as propriedades efetivas de materiais compósitos periódicos em três dimensões em termos das propriedades geométricas e físicas dos seus constituintes. O MHA é utilizado para gerar problemas locais que são então resolvidos via MEF. Os materiais investigados são elásticos e condutores; no entanto, como destaca a autora do trabalho, os resultados podem ser estendidos para materiais dielétricos e magnéticos. Os problemas abordados são do tipo elíptico em que se apresentam sistemas de equações diferenciais parciais com condições de contorno mistas e condições de contato perfeito na interface entre as fases que formam o compósito, ou seja, entre a matriz e a fibra. O problema a ser resolvido via MEF é implementado computacionalmente utilizando a linguagem APDL do ANSYS. Os resultados dos experimentos numéricos são validados por meio de comparações com resultados de limites publicados na literatura e com resultados experimentais. Os bons resultados obtidos nesse trabalho para as propriedades efetivas permitem que se obtenham limites mais estreitos para a energia efetiva de compósitos condutores e elásticos não-lineares. Esses resultados representam, para ampla gama de variação de concentrações volumétricas da inclusão, uma notável melhoria dos limites de Talbot (1999, 2000).

Outros estudos que envolvem materiais compósitos podem ser mencionados, dentre o quais os trabalhos de Hayashida et al. (1997) e Maligno (2007).

Em particular, Hayashida et al. (1997) apresentam uma revisão sobre a aplicação de fibras de carbono na engenharia civil e na arquitetura. Segundo estes autores, as fibras de carbono têm sido tradicionalmente empregadas com finalidade estrutural ou funcional na obtenção de compósitos avançados aplicados, principalmente, nas indústrias aeroespacial e esportiva. Na engenharia civil e arquitetura as fibras de carbono são empregadas na obtenção de concretos especiais, tais como o concreto reforçado com fibras de carbono. As fibras de carbono podem ser unidimensionais curtas, ou, longas, bidimensionais, ou, tridimensionais. As fibras curtas são empregadas no concreto com a finalidade de obter um material isotrópico utilizado em peças estruturais solicitadas por grandes momentos. Já as fibras longas são empregadas em uma direção preferencial com o objetivo de reforçar o membro estrutural naquela direção. Analogamente, as fibras bidimensionais são

empregadas para reforçar membros estruturais, tais como pilares de pontes, segundo duas direções preferenciais. Finalmente, as fibras tridimensionais são empregadas como reforço interlaminar para melhorar a resistência à delaminação dos membros estruturais. Além de descrever o processo de fabricação destas fibras, os autores apresentam as formas de aplicação e as propriedades de cada uma delas.

Maligno (2007) investiga e desenvolve a modelagem de dano para materiais compósitos em sua micro-escala, ou seja, considerando a fibra e a matriz. O modelo de dano desenvolvido para materiais elásticos está fundamentado em uma abordagem de dano “local”, introduzida para prever o início da falha e simular o comportamento pós-falha dos VREs tridimensionais e unidirecionais, ou células unitárias com distribuição hexagonal das fibras sobre a secção transversal. O modelo de dano apresentado pode ser dividido em três partes: um modelo elástico, uma critério de falha e o comportamento pós-falha. Nesse trabalho o autor faz modificações nos critérios de von Mises e Critério de Tensão Principal Máxima a fim de avaliar falhas na matriz, enquanto para a fibra, em geral, utiliza-se nesse trabalho o critério de tensão principal máxima. Os modelos são desenvolvidos utilizando softwares como o ABAQUS e subrotinas implementadas em Fortran. Consideram-se as propriedades do material nas análises de tensões residuais dependentes da temperatura para simular a contração volumétrica durante o processo de fabricação dos materiais. Desse modo, a tensão residual global introduzida a partir da cura foi obtida considerando-se duas contribuições: retração de volume da resina da matriz a partir da polimerização de reticulação durante a cura isotérmica e contração térmica de ambos, resina e fibras, como um resultado de arrefecimento a partir da temperatura de cura para a temperatura de sala <sup>1</sup>.

Por fim, Maligno (2007) aborda três diferentes tipologias de células unitárias 3D em suas investigações. O primeiro tipo de micro-modelo baseia-se em uma distribuição simétrica das fibras e as células unitárias têm duas fases, isto é, matriz e fibras. A segunda tipologia de células unitárias é uma arquitetura uniforme, mas inclui uma interface tridimensional entre a fibra e a matriz, como é visto em compósitos reais que o autor modela, em que no nível de seus constituintes, as fibras dos componentes são distribuídos aleatoriamente. O autor observa ainda que a distância entre as fibras representa um fator crítico para as propriedades finais mecânicas dos micro-compósitos. Devido a isto, o terceiro e último tipo de micro-modelos leva em conta esta posição não uniforme de fibras

---

<sup>1</sup>Temperatura que não se constitui em um padrão e que pode variar de 20 °C a 25 °C; veja, por exemplo, USMA (2012). A temperatura de sala difere de temperatura ambiente por ser controlada artificialmente.

dentro da VRE, apesar deles consistirem em apenas duas fases. Em suas análises via MEF, o autor apresenta de forma bastante clara que o início dos danos previstos e suas evoluções são influenciados pela presença de tensões residuais em todas as três diferentes tipologias de células unitárias analisadas. Outro resultado importante deste trabalho é que a partir das análises numéricas sobre os modelos numéricos mostra-se que, em geral, as propriedades mecânicas globais são fortemente influenciadas pela presença de tensões residuais, fração de volume da fibra, distribuição da fibra e propriedades da interface. Em particular, sobre a carga de tração transversal, as tensões residuais produzem resultados benéficos em termos de resistência máxima, enquanto no caso de carga longitudinal (carregamento paralelo às fibras) da matriz, devido à alta tensão de compressão, ocorre uma falha prematura.

Recentemente, Bravo-Castillero et al. (2012) consideram compósitos elásticos bi-fásicos reforçados com fibras, cujos os constituintes são transversalmente isotrópicos. As fibras apresentam dois tipos de distribuição: quadrado e hexagonal. Os autores consideram condições de contato perfeito entre os constituintes e apresentam fórmulas analíticas simples e unificadas para o cálculo das propriedades efetivas. Estas fórmulas envolvem duas ordens de aproximação semi-analítica de expressões obtidas por meio de homogeneização assintótica. Apresentam também o caso limite de fibras vazias. São ainda discutidas a influência de cada aproximação e realizadas comparações teóricas e experimentais. Essas fórmulas podem ser facilmente programadas e são úteis para aplicações em estudos da mecânica do osso e transdutores de ultra-som, e ainda para a validação de códigos numéricos.

No estudo de laminas de materiais compósitos, uma revisão da literatura dos recentes desenvolvimentos é apresentado em Zhang e Yang (2009). Neste trabalho, os autores apresentam os grupos em que se enquadram as teorias mais comuns de placas utilizadas no modelamento de compósitos laminados, a saber:

- (a) Teoria da Lâmina Equivalente (ESL)
  - Teoria clássica de placas laminadas.
  - Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT)
  - Teoria de Deformação de Cisalhamento de Alta Ordem (HSDT)
  - Teoria de Laminação por Camada (LLT)
- (b) Teoria de Elasticidade 3-D com Base no Contínuo.

A seguir, apresentam-se alguns trabalhos sobre materiais compósitos laminados que estão relacionados com as classificações mencionadas anteriormente e representam contribuições no entendimento do comportamento mecânico desses materiais.

Buhan e Maghous (1997) definem uma lei constitutiva para um material de múltiplas camadas elásticas expressa, no caso de deformações finitas, por meio de um potencial macroscópico, e obtém um comportamento elástico não linear formulado dentro do contexto de pequenas perturbações para o material homogeneizado como um caso limite do modelo de camadas múltiplas. Esta não linearidade origina do fato de que o material de união é submetido a grandes deformações, enquanto ao mesmo tempo a sua espessura tende para zero. O modelo é aplicado aos maciços rochosos fraturados evidenciando claramente a anisotropia elástica destes devido às orientações preferenciais das junções.

Paccola (2001) investiga problemas de placas laminadas apoiadas sobre base elástica. O autor do trabalho adota as hipóteses de Reissner-Mindlin, as quais podem ser encontradas nos trabalhos de Altenbach (2009), Reddy (2004) e Ochoa e Reddy (1992), de placas espessas com cinemática de pequenos deslocamentos e utiliza técnicas de integração reduzida para o cálculo das contribuições dos esforços de cisalhamento para melhor abordar o problema de enrijecimento conhecido na literatura com o nome de efeito de travamento. A formulação é desenvolvida e implementada via MEF, em que elementos quadriláteros de 4, 8 ou 9 nós e funções de forma lineares e quadráticas são empregadas. Os resultados obtidos são os deslocamentos nodais, tensões e esforços solicitantes nos pontos de Gauss. Considera-se ainda nesse trabalho a base elástica segundo as hipóteses de Winkler, Liu (2000), cuja a contribuição na formulação foi levada em conta no cálculo do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Resultados numéricos estão de bom acordo com resultados apresentados na literatura.

Em outro trabalho, Paccola (2004) apresenta uma formulação de cascas laminadas anisotrópicas enrijecidas, ou, não, considerando-se não-linearidade física com lei de fluxo não-associativa e acoplamento com meio contínuo tridimensional viscoelástico. A fim de implementar a formulação proposta, o autor utiliza elementos finitos triangulares planos com aproximação cúbica de variáveis para modelagem das cascas. No caso dos enrijecedores ou elementos de barra geral, desenvolve-se elementos de barra de mesma aproximação. Nesse estudo, adota-se a cinemática de laminados, ou Reissner geral, para ambos, casca e enrijecedores. Segundo o autor, essa formulação permite a representação de estruturas enrijecidas excentricamente e a consideração de elementos compostos de

camadas com diferentes propriedades físicas e espessuras. Desse modo, é possível abordar um grande número de problemas. Para estudar o fenômeno de plasticidade na casca, adota-se o critério de Tsai-Wu para materiais anisotrópicos gerais e obtêm-se expressões fechadas para o multiplicador plástico com fluxo não-associativo. No estudo dos erijecedores, consideram-se critérios uniaxiais em que se desprezam a contribuição do cisalhamento na plastificação, utilizando-se de diagrama multilinear para a relação tensão versus deformação. O autor realiza um acoplamento dos métodos de elementos finitos (MEF) e de elementos de contorno (MEC) para a modelagem do meio contínuo visco-elástico, em que os elementos de contorno são triangulares com funções de aproximação lineares nesses elementos. Apresentam-se, com suas respectivas implementações, as soluções fundamentais de Kelvin e de Mindlin. Para realizar o acoplamento do MEF com o MEC, utiliza-se a técnica de matriz de rigidez equivalente, que transforma as matrizes do MEC em matrizes equivalentes do MEF. Essas matrizes são então somadas às matrizes do MEF, ou seja, essas últimas recebem uma contribuição direta das matrizes do MEC. Validam-se os resultados pela comparação de exemplos gerais implementados e resultados analíticos.

Uma classe de materiais que tem despertado grande interesse de estudo por parte de pesquisadores nos últimos anos é a de materiais com gradação funcional. Um material com gradação funcional pode ser definido como o material que apresenta uma variação gradual, contínua e suave, de suas propriedades constitutivas.

Pascon (2012) aborda materiais com gradação funcional em regime de grandes deslocamentos e elevadas deformações e faz a implementação computacional de modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos. O problema estrutural é simulado com o emprego de elementos sólidos, cujos os tipos são tetraédrico e hexaédrico com ordem de aproximação polinomial qualquer. A fim de reproduzir os grandes deslocamentos, emprega-se a análise não-linear geométrica e adota-se a descrição Lagrangiana total, expressando-se o equilíbrio da estrutura por meio do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Para obter a resposta elástica do material o autor utiliza leis constitutivas hiperelásticas, nas quais a relação tensão-deformação é obtida a partir de um potencial escalar. O comportamento elastoplástico do material é definido pela decomposição da deformação nas parcelas elástica e plástica, pelo critério de plastificação de von-Mises, pela lei de fluxo associativa, pelas condições de consistência e de complementaridade, pelo parâmetro de encruamento isotrópico e pelo tensor das tensões inversas, relacionado ao encruamento cinemático.

Em Pascon (2012) emprega duas formulações elastoplásticas a saber: a de Green-Naghdi, na qual a deformação é decomposta de forma aditiva; e a hiperelastoplástica, em

que o gradiente é decomposto de forma multiplicativa. A solução numérica do equilíbrio de forças é feita via método iterativo de Newton-Raphson. Para satisfazer o critério de plastificação, são utilizadas as estratégias de previsão elástica, e de correção plástica via algoritmos de retorno. São analisados materiais em regime elastoplástico e processos de conformação de metais. Para o problema da barra sob tração uniaxial uniforme, descreve-se equações e soluções analíticas para materiais homogêneos e com gradação funcional em regime elastoplástico. Com as formulações desenvolvidas é possível simular de forma precisa problemas complexos, como a membrana de Cook e o cilindro fino transversalmente tracionado.

Silva e Kogl (2004) mencionam que placas e cascas laminadas que incluem camadas piezoelétricas têm encontrado uso crescente no campo de estruturas inteligentes. O autor concentra-se na concepção atuadores piezoelétricos de cascas e placas tais como bilaminados e atuadores de casca cilíndrica, também denominados “C-block”. Nesse trabalho, o autor propõe um método baseado em otimização topológica para projetar essas estruturas dos atuadores. A abordagem baseia-se no modelo de material SIMP (Material Isotrópico Sólido com Penalização), que foi estendido para materiais piezoelétricos, permitindo a mudança de sinal da polarização do material piezoelétrico. Este novo modelo material é chamado PEMAP-P (material piezoelétrico com penalização e polarização). O problema de projeto consiste em encontrar uma distribuição ótima de material piezoelétrico em uma placa multilaminada ou estrutura de casca para realizar o deslocamento máximo em uma determinada direção em um determinado ponto do domínio, quando uma carga elétrica é aplicada. Segundo este autor, é possível obter novos e diferentes tipos de atuadores de placas e de cascas para a aplicação desejada.

Para uma visão geral a respeito da estimativa de erros a posteriori de modelagem em estruturas elásticas lineares de materiais heterogêneos via MEF, pode-se consultar o trabalho de Júnior (2008). Esse autor emprega uma formulação fundamentada em uma teoria de avaliação de erro de modelagem a posteriori e utiliza o MEF como ferramenta numérica. Os erros de modelagem avaliados são de dois tipos: erros globais e locais. Os erros globais estão baseados em norma de energia e os erros locais, em quantidades de interesse, cujos os erros são induzidos pela substituição das propriedades micromecânicas do material em escala refinada por propriedades efetivas homogeneizadas. Para determinar estas propriedades efetivas são utilizados diferentes modelos da estrutura micromecânica e posteriormente estas são consideradas nos modelos físicos que substituem os materiais heterogêneos. As referidas quantidades de interesse podem ser, por exemplo, tensões médias ou deformações sobre a região selecionada, tais como superfície de inclusões e



deslocamentos nas interfaces da inclusão com a matriz.

## 2.2 Instabilidades Mecânicas

É de grande interesse estudar os materiais compósitos quando submetidos a determinados carregamentos para determinar o seu comportamento global. Dois pontos de grande importância, a perda de elipticidade associada ao fenômeno de estricção e a perda de convexidade, associada ao fenômeno de amolecimento (também denominado por diversos autores como encruamento negativo), têm merecido muitos estudos a partir do final dos anos setenta até os dias atuais, como pode-se notar dos estudos realizados por Lopez-Pamies e Castañeda (2004).

Valanis (1985) define o amolecimento, para o ensaio de tração uniaxial, como um fenômeno caracterizado por uma resposta mecânica por meio da qual a tensão cresce monotonicamente com a deformação, atinge um limite máximo, e então decresce, conforme ilustrado na Fig. 2. De um modo alternativo, pode-se pensar que como a tensão aumenta, o módulo tangente diminui de um valor (positivo) inicial, tornando-se zero (no ponto de máxima tensão) e, finalmente, torna-se negativa. Esse autor apresenta, em termos mais gerais, que se  $\mathbf{F}(t)$  é uma representação paramétrica do caminho (ou histórico) de deformação no espaço das deformações e  $\mathbf{P}(t)$  o correspondente caminho de tensão no espaço das tensões, o material é dito estar em amolecimento em um ponto do caminho de deformação se, nesse ponto, verifica-se que

$$\dot{P}_{ij}\dot{F}_{ij} < 0, \quad (2.5)$$

em que  $(\dot{\cdot})$  representa a derivada com respeito ao tempo  $t$ . Valanis (1985) discute um problema de valor inicial no domínio de amolecimento finito. O autor estabelece primeiramente uma desigualdade para todos os materiais independentemente de sua constituição e mostra que a solução do problema de valor inicial é única quando a equação constitutiva satisfaz uma outra desigualdade, a qual é característica dos modelos de materiais denominados “positivos”. O autor ainda fornece exemplos de equações constitutivas que representam o fenômeno de amolecimento de forma realística e que conduzem a uma única solução do problema de valor inicial.

Vários outros autores investigam fenômenos de instabilidade mecânica, tais como os fenômenos de concentração de deformações e amolecimento, como podem ser exemplificados pelos trabalhos de Rudnicki e Rice (1975), Pietruszczak e Mróz (1981), Abeyaratne

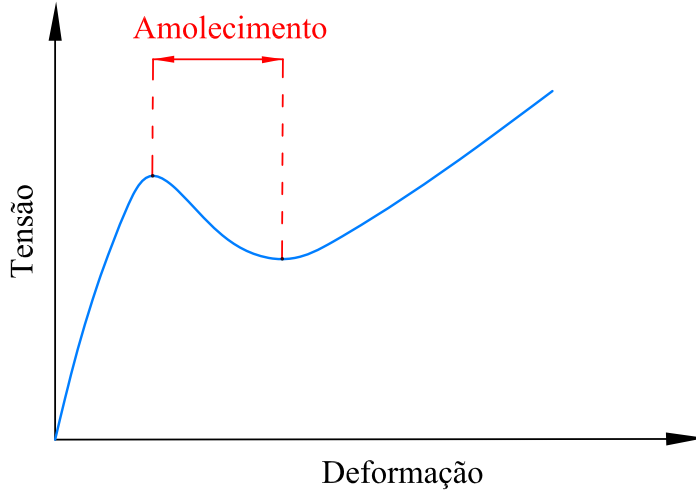


Figura 2: Exemplo de curva tensão versus deformação com trecho de amolecimento.

e Triantafyllidis (1984), Read e Hegemier (1984), Triantafyllidis e Aifantis (1986), Borst et al. (1993), Volokh (2007) e Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009).

Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) utilizam um método de homogeneização de segunda ordem tangencial para determinar as propriedades efetivas de um compósito laminado bifásico com duas fases constituídas de materiais Neo-Hookeanos compressíveis dados pelas funções densidade de energia

$$\tilde{\phi}_1(\mathbf{F}) = \mu^{(1)} \left[ \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - 3}{2} - \log(\det \mathbf{F}) \right] + \left( \frac{\kappa^{(1)}}{2} - \frac{\mu^{(1)}}{3} \right) (\det \mathbf{F} - 1)^2, \quad \tilde{\phi}_2(\mathbf{F}) = t \tilde{\phi}_1(\mathbf{F}), \quad (2.6)$$

em que o subscrito e o sobrescrito denotam a fase,  $t$  é uma razão de rigidez entre as fases 1 e 2,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T)$  e  $\mathbf{F}$  é o gradiente de deformação. Sobre o contorno, os autores impõem a condição  $\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{X}$ , sendo

$$[\bar{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & -\text{sen} \bar{\theta} & 0 \\ \text{sen} \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & \text{sen} \bar{\theta} & 0 \\ -\text{sen} \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

em que  $\bar{\lambda}$  é o estiramento.

Segundo Dai e Peng (2012) quando um espécime sob carregamento muda de um estado de configuração homogênea para um estado não homogêneo de configuração com grandes deformações em região localizada, diz-se que ocorre a localização de deformação. Esse fenômeno é bastante relatado no estudo de sólidos e uma revisão a respeito do

assunto pode ser encontrada em Bower (2010). A perda de elipticidade causada pelo amolecimento pode conduzir ao início da localização de deformações, que consequentemente poderá levar a uma falha do espécime sob carregamento. Nesse trabalho o autor também evidencia que o fenômeno de amolecimento não é uma propriedade do material, e define o amolecimento geométrico como o amolecimento que ocorre devido à mudança da área da secção transversal do espécime sob carregamento.

deBotton (2005) obtém uma expressão geral para a função densidade de energia de compósitos que são laminados sequencialmente. O autor consegue reproduzir para a classe de compósitos Neo-Hookeanos transversalmente isotrópicos, no limite de pequenas deformações, resultados bem conhecidos. No entanto, mostra-se que, sob grandes deformações, esses compósitos não são isotrópicos. Os compósitos transversalmente isotrópicos estudados pelo autor possuem comportamento transversal Neo-Hookeano com o módulo de elasticidade ao cisalhamento na forma dos limites de Hashin-Shtrikman para a correspondente classe de compósitos lineares. Quando o comportamentos destes compósitos são comparados com estimativas recentes para compósitos transversalmente isotrópicos revela que há boa concordância para deformações relativamente grandes e para grandes frações de volume da fase de inclusão.

Rudykh e deBotton (2012) estudam instabilidades macroscópicas dos compósitos reforçados com fibra que estão sujeitos a grandes deformações. Os autores realizam predições analíticas para o início da instabilidade por aplicação de uma nova estimativa variacional para o comportamento de compósitos hiperelásticos. As expressões resultantes são comparadas com as previsões correspondentes obtidas por simulações utilizando o MEF. As simulações são realizadas com modelos de compósitos periódicos tridimensionais de célula unitária hexagonal submetidas à compressão ao longo das fibras e também são feitas simulações como a compressão não alinhada com o eixo das fibras. Diferentemente do que é feito nesta tese, Rudykh e deBotton (2012) estudam a célula periódica e não o sólido por completo. Assim, as condições de contorno no compósito precisam ser transformadas em condições de contorno periódicas apropriadas. Todas as previsões analíticas para as falhas de compósitos Neo-Hookeano e Gent estão de bom acordo com as simulações numéricas. Os autores verificam que a razão de estiramento crítico para compósitos de Gent está próximo daquele determinado para compósitos Neo-Hookeanos com frações de volume semelhantes e contrastes entre as propriedades das fases. Durante a compressão não alinhada as fibras sofrem rotação e consequentemente, para algumas direções de carga, a compressão ao longo das fibras nunca atinge o nível no qual pode ocorrer a perda de estabilidade.

Driemeier (1999) aborda problemas relacionados à mecânica do dano contínuo, cujo o destaque é estudar a localização de deformações decorrente do emprego de modelos constitutivos com amolecimento. Nesse estudo, propõe-se uma contribuição ao estudo de uma das técnicas de regularização da resposta numérica, que têm como objetivo eliminar a dependência dos resultados com relação à discretização adotada. A técnica de regularização consiste na consideração de gradientes da variável de dano na formulação dos modelos constitutivos. Exploram-se tantos os aspectos teóricos como de aplicação numérica, enfatizando-se nos primeiros uma análise do efeito da inclusão de gradientes de ordem superior na relação constitutiva e o emprego do Método dos Elementos Finitos em sua formulação em variáveis generalizadas no segundo aspecto. Discute-se ainda outros aspectos considerados complementares, relacionados à formulação variacional e algoritmos de integração em passo finito dos modelos em estudo. Os exemplos de aplicação consistem de análises estática e dinâmica de estruturas, comparando-se os resultados obtidos com resultados disponíveis na literatura ou mesmo com observações experimentais de ensaios de laboratório.

Aguiar (1989) simula numericamente o fenômeno da estrição em um bloco sob tração. Nesse trabalho, supõe-se que o material seja hiperelástico, isotrópico e que possua uma lei de comportamento descrita pelo modelo de Blatz e Ko (1962) para a espuma de borracha de poliuretano. Utiliza-se o Método dos Elementos Finitos clássico para resolver de forma aproximada o problema de equilíbrio, o qual é altamente não-linear. Realiza-se a busca de soluções por meio da implementação de uma Técnica de Continuação de Euler-Newton. Essa técnica permite abordar situações em que as instabilidades mecânicas, como a concentração de deformações e o amolecimento, estejam presentes. O autor identifica onde ocorrem as instabilidades, constando que, nas regiões onde ocorre a estrição, torna-se evidente a existência simultânea de dois estados de deformação predominantes. No primeiro, segundo o autor, verificam-se pequenas deformações em regiões que apresentam uma tendência de retornar à configuração original. No segundo, observam-se grandes deformações localizadas que evidenciam o fenômeno da estrição. Outra conclusão importante deste trabalho é a observação de que os critérios para a perda de elipticidade e a perda de convexidade são independentes.

Aguiar e Pérez-Fernández (2012) destacam que os modelos clássicos de materiais hiperelásticos exibem crescimento ilimitado das densidades de energia de deformação correspondentes à medida que as deformações se tornam grandes, mas que a deformação dos materiais reais é dominada pela formação e acumulação de defeitos, tais como espaços vazios e fissuras, que restringem a capacidade do material para deformar hiperelásticamente.

te a partir um certo nível de deformação crítica. Os autores investigam o amolecimento macroscópico induzido pelo amolecimento microscópico dos constituintes hiperelásticos de materiais compósitos utilizando o MHA em duas escalas. Em particular, são investigados compósitos bilaminados sob estiramento uniaxial paralelo à direção de laminação. Estende-se a abordagem para o estudo do comportamento macroscópico de materiais compósitos cujas as fases hiperelásticas possuem gradação funcional com amolecimento. Os resultados obtidos nesse trabalho, tais como as curvas de tensão versus deformação mostram o comportamento de amolecimento macroscópico desses laminados sob estiramento biaxial.

Taliercio e Coruzzi (1999) desenvolvem um modelo numérico com o objetivo principal de descrever a resposta mecânica macroscópica de compósitos reforçados com fibras unidirecionais e com matrizes frágeis, sujeitos a tensões atuando em um plano transversal às fibras. São realizadas análises de uma célula unitária representativa via MEF, aplicando-se condições de contorno apropriadas e assegurando a continuidade do campo de deslocamento através das células adjacentes e a periodicidade do campo de deformações sobre toda a célula. Os autores adotam uma lei constitutiva para o amolecimento à deformação para a matriz, o que permite, por exemplo, induzir a fragilidade ocasionada por possíveis defeitos em uma matriz polimérica. Os autores consideram ainda o caso perfeitamente plástico para fins de comparação e concluem que os resultados estabelecidos para os compósitos dúcteis são considerados inadequados para compósitos de matriz frágil. Suas análises numéricas indicam que os compósitos com matriz em que se considera o amolecimento têm propriedades de resistência transversais muito menores do que os compósitos perfeitamente plásticos com matriz de igual rigidez, e até mesmo nos casos em que o compósito com a matriz sem amolecimento não recebe nenhum reforço. O autor também observa a indução de uma anisotropia no regime de pós-pico.

Belytschko et al. (1986) examinam soluções por fórmulas fechadas e por elementos finitos para vários problemas com materiais que apresentam o fenômeno de amolecimento à deformação. Segundo esses autores, nas soluções por fórmulas fechadas, o amolecimento causa a localização de deformações, a qual é acompanhada de um desaparecimento instantâneo da tensão. As soluções obtidas via MEF concordam muito bem com as soluções analíticas em muitos casos, e apresenta uma taxa de convergência que somente fica ligeiramente inferior à dos problemas lineares. A principal dificuldade identificada pelos autores nos modelos constitutivos com amolecimento para dano é a ausência de dissipação de energia no domínio do amolecimento, cuja correção é realizada por uma formulação não local. Os autores apresentam soluções por elementos finitos para problemas de ondas esféricas

convergentes e constatam que esses problemas exibem múltiplos pontos de localização, os quais mudam drasticamente com o refinamento da malha. Para corrigir esses problemas os autores utilizam uma formulação material não local.

Ainda segundo Belytschko et al. (1986), em materiais como o concreto ou rocha, as falhas ocorrem por danificação progressiva como formação de microfissuras e vazios. Na maioria das estruturas de engenharia, a escala em que ocorrem os fenômenos mencionados anteriormente compara-se à escala prática das malhas de elementos finitos e esses fenômenos são usualmente muito pequenos para serem modelados. Usualmente, os seus efeitos devem ser incorporados nas análises numéricas e por meio de um modelo homogeneizado que possa exibir o comportamento de amolecimento. O problema de modelar essas instabilidades persiste e ainda é objeto de estudo, como pode ser observado nos trabalhos de Galavi e Schweiger (2010), Wu e Wang (2010), Dai e Peng (2012). Isso ocorre porque quando se incorpora o fenômeno de amolecimento nas modelagens numéricas, há a ocorrência de vários problemas, como, por exemplo, dependências de malha e escala, que ainda não foram completamente entendidos e continuam em aberto mesmo com os atuais desenvolvimentos computacionais.

Segundo Bazant e Cedolin (1980), em problemas estáticos, a solução obtida empregando-se elementos finitos, em geral, apresenta alta dependência da malha que não é capaz de reproduzir de forma adequada o fenômeno de localização de deformação que caracteriza o amolecimento. Bazant (1976) ainda destaca que as soluções obtidas empregando-se malhas de elementos finitos convencionais não são em geral fisicamente plausíveis, porque à medida em que se aumenta o refinamento da malha a energia dissipada no domínio do processo de amolecimento tende a zero.

Este trabalho representa um avanço dos estudos apresentados nesta revisão bibliográfica no entendimento dos fenômenos de instabilidades materiais em bilaminados hiperelásticos utilizando métodos numérico e analítico. O método analítico permite construir uma solução principal para o problema de um laminado submetido a condições de deformação impostas no contorno e prever a deformação para a qual esta solução pode bifurcar em uma solução secundária. A contribuição principal desta tese foi confirmar esta predição por meio do MEF e obter uma solução secundária que bifurca da solução analítica, dita principal, para deformações a partir do ponto de perda de elipticidade, considerando determinados valores de  $\bar{\theta}$  e  $t$  que estão apresentados e discutidos na Seção 6.2.

### 3 Elementos da Mecânica do Contínuo

Nesta seção apresentam-se os conceitos básicos de cinemática, força, relações constitutivas e leis de balanço, os quais serão aplicados na determinação de parâmetros elásticos. Maiores detalhes sobre a teoria podem ser encontrados em Gurtin, Fried e Anand (2010). Salvo disposição expressa em contrário, emprega-se a notação de Einstein para índices repetidos.

#### 3.1 Cinemática

Seja  $\mathcal{B}$  uma região regular e compacta em  $\mathbb{R}^3$  e seja  $\mathbf{X}$  um ponto material pertencente a  $\mathcal{B}$ . Uma deformação de  $\mathcal{B}$  é um mapeamento suave  $\mathbf{y} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $\det \nabla \mathbf{y} > 0$ , em que  $\nabla(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial \mathbf{X}$ . O ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$  é o lugar ocupado por  $\mathbf{X}$  na deformação  $\mathbf{y}$ , conforme ilustrado na Fig. 3. O campo

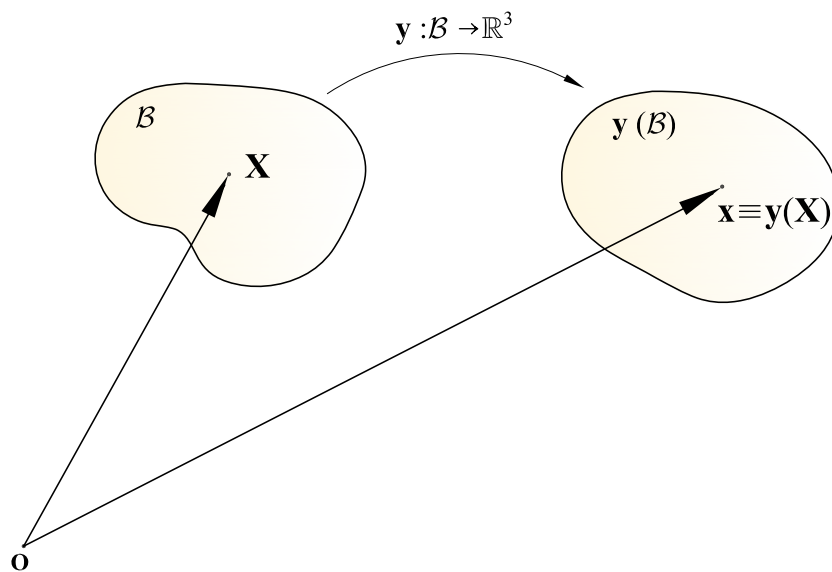


Figura 3: As configurações de referência e deformada de um corpo  $\mathcal{B}$ .

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} \quad (3.1)$$

é um membro do conjunto  $\mathcal{Lin}$  de todas as transformações lineares de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^3$  e é conhecido como o gradiente de deformação; se  $\mathcal{P}$  é uma parte de  $\mathcal{B}$  com dimensões infinitesimais, então  $\det \mathbf{F}$  é a razão entre o volume de  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$  e o volume de  $\mathcal{P}$  e representa o valor local da dilatação volumétrica de  $\mathcal{B}$ . Segue do exposto acima que deformações cinematicamente admissíveis satisfazem  $\det \mathbf{F} > 0$  e que, portanto,  $\mathbf{F}$  é inversível. A deformação é isocórica se

$$\det \mathbf{F} - 1 = 0. \quad (3.2)$$

Em aplicações, utilizam-se com frequência os tensores deformação de Cauchy-Green à direita e à esquerda, definidos, respectivamente, por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (3.3)$$

Segue de (3.2) e (3.3) que deformações isocóricas satisfazem

$$\det \mathbf{C} - 1 = \det \mathbf{B} - 1 = 0. \quad (3.4)$$

Em termos do campo de deslocamento  $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é definido pela relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{X} \quad (3.5)$$

e ilustrado na Fig. 4, obtém-se de (3.1), (3.3.a) e (3.5) que

$$\mathbf{C} - \mathbf{1} = (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

em que  $\mathbf{1} \in \mathcal{Lin}$  é o tensor identidade. Esta diferença é uma medida do desvio de forma entre uma dada deformação e uma deformação de corpo rígido, para a qual  $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ . Devido a isto, é comum introduzir o tensor deformação de Green-Saint Venant

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (3.7)$$

Assumindo pequenas deformações, segue de (3.6) e (3.7) que

$$\mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{u} + \mathcal{O}(|\nabla \mathbf{u}|^2), \quad (3.8)$$

em que

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}], \quad (3.9)$$



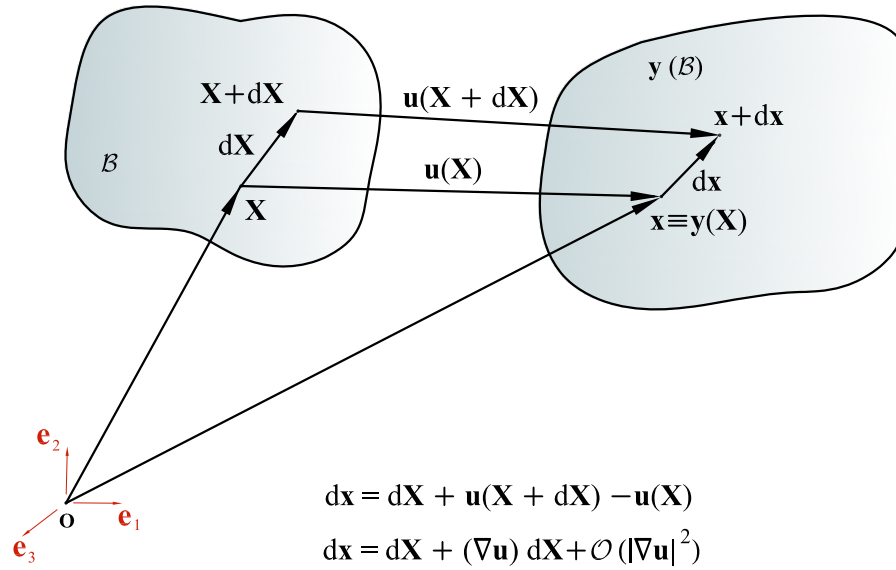


Figura 4: Deformação de um corpo.

é a parte simétrica do tensor  $\nabla \mathbf{u}$  e  $\mathcal{O}(\cdot)$  é um símbolo de ordem que satisfaz  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\mathcal{O}(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| < C < \infty$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Na teoria de elasticidade linear, considera-se somente a primeira aproximação em (3.8), denotada por

$$\mathbf{E}_L = \nabla_s \mathbf{u} \quad (3.10)$$

e denominada tensor deformação infinitesimal.

No estudo do comportamento de laminados elásticos realizado na Seção 5 utiliza-se um sistema de coordenadas cartesianas retangulares com origem em  $\mathbf{O}$  (sistema CCR), conforme ilustrado na Fig. 4, em que  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  é uma base ortonormal associada a este sistema de coordenadas. Neste sistema de coordenadas,  $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ , em que  $X_i$  e  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as componentes de  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$ , respectivamente. Uma vez que  $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$ , tem-se então  $x_i = y_i(X_1, X_2, X_3)$ , em que  $y_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Além disso,  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  e  $\nabla_s \mathbf{u} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , em que  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$  são as componentes do tensor deformação infinitesimal e  $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \mathbf{e}_i$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , define o produto tensorial entre  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}_j$ .

## 3.2 Equação de Equilíbrio

Forças representam a ação de um corpo sobre o outro. Esta ação pode se manifestar por contato entre partes de um corpo, ou, entre um corpo e o meio exterior a este.

Aqui, consideram-se três tipos de força, a saber:

- i*) forças de contato entre partes distintas de um corpo;
- ii*) forças de contato exercidas sobre o contorno de um corpo pelo meio exterior a este;
- iii*) forças de corpo exercidas sobre todos os pontos de um corpo pelo meio exterior, tais como a força gravitacional da Terra.

As forças de contato *i*) e *ii*) são também chamadas forças de superfície internas e externas, respectivamente, pois são transmitidas através de uma superfície de contato.

Seja  $\mathbf{x}$  um ponto arbitrário no interior de  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$  e seja  $\mathcal{S}$  um plano contendo  $\mathbf{x}$  e que divide  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$  nas partes  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$  e  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$ , conforme ilustrado na Fig. 5.a. Isolando a parte  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ , conforme ilustrado na Fig. 5.b, observa-se que na face plana que pertence a  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$  atuam forças de contato internas que correspondem à ação da parte  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$  sobre a parte  $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ . Seja  $\mathbf{n}$  o versor exterior à face plana e seja  $\Delta\mathbf{F}$  a resultante no ponto  $\mathbf{x}$  da força de contato que atua em uma superfície de área  $\Delta A$  contendo o ponto  $\mathbf{x}$ . A expressão

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A}$$

define o vetor tensão  $\mathbf{t}$  no ponto  $\mathbf{x}$ .

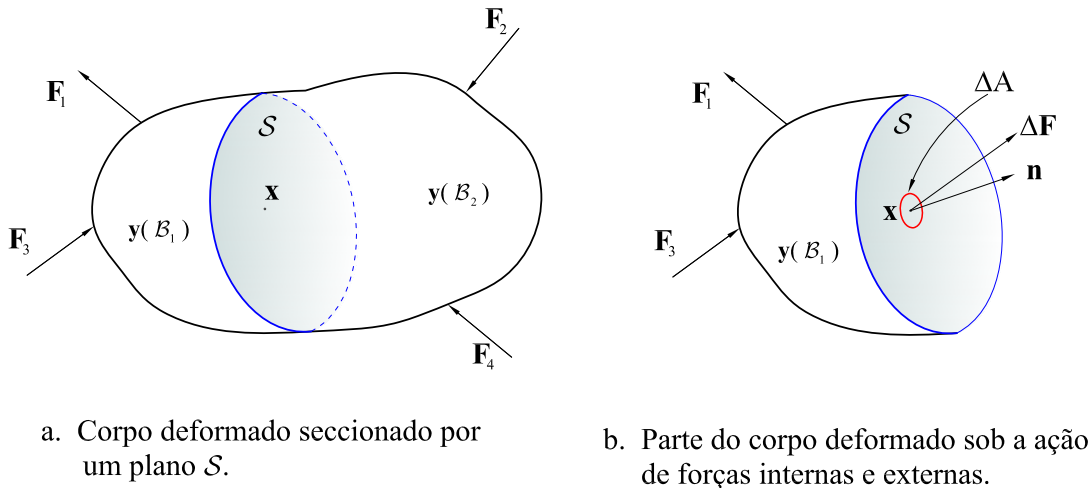


Figura 5: Plano  $\mathcal{S}$  seccionando corpo deformado.

Pela *hipótese de Cauchy*, o vetor tensão é independente da superfície que passa pelo ponto  $\mathbf{x}$ , desde que a normal a esta superfície seja o versor  $\mathbf{n}$  introduzido acima e

que a superfície seja suave no ponto  $\mathbf{x}$ . Assume-se, portanto, que

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \quad (3.11)$$

Por outro lado, as forças de corpo, medidas por unidade de volume em  $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B})$ , são representadas pelo mapeamento  $\mathbf{b} : \mathbf{y}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , em que  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x})$  é contínuo.

Assume-se que  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$  estão consistentes com o balanço de momentum linear

$$\int_{\partial \mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, dS + \int_{\mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{b} \, dV = 0, \quad (3.12)$$

em que  $\mathcal{P}$  é uma parte arbitrária de  $\mathcal{B}$  e, neste trabalho,  $\mathbf{y}(\mathcal{P})$  está em equilíbrio, e com o balanço de momento de momentum linear

$$\int_{\partial \mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, dS + \int_{\mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \, dV = 0, \quad (3.13)$$

em que “ $\wedge$ ” denota o produto vetorial. Apesar de existir a dependência explícita em  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{r}$  nas expressões (3.12) e (3.13), esta foi omitida.

As leis de balanço (3.12) e (3.13), juntamente com a *hipótese de Cauchy* (3.11), garantem a existência de um campo tensorial suave  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}im := \{\mathbf{S} \in \mathcal{L}in : \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\}$ , o tensor tensão de Cauchy, tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (3.14)$$

para todo versor  $\mathbf{n}$  e para qualquer ponto  $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B})$ .

Substituindo (3.14) nas leis de balanço (3.12) e (3.13), utilizando o teorema da divergência e considerando  $\mathcal{P}$  arbitrário, pode-se mostrar que (GURTIN, 1981)

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

e

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B}). \quad (3.15)$$

Neste trabalho, considera-se que  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Observa-se do exposto acima que a força de contato  $\mathbf{t}$  e o tensor tensão de Cauchy  $\mathbf{T}$  estão definidos sobre  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ . No estudo de sólidos é conveniente, entretanto, introduzir a *transformada de Piola* que relaciona tensores definidos sobre a configuração deformada  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$  com tensores definidos sobre a configuração de referência  $\mathcal{B}$ . Quando aplicada sobre

a tensão de Cauchy, a transformada fornece o *primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff*, dado por

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \operatorname{cof} \mathbf{F}, \quad \operatorname{cof} \mathbf{F} := \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (3.16)$$

em que  $\operatorname{cof} \mathbf{F}$  é o *tensor cofator* de  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$  e lembra-se da Seção 3.1 que  $\mathbf{F}^{-1}$  existe, pois consideram-se deformações cinematicamente admissíveis. Segue das expressões acima que as normais unitárias exteriores a elementos de área dos contornos de partes arbitrárias de  $\mathcal{B}$  e de  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ , respectivamente, estão relacionadas entre si por meio de

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{cof} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{N}}{|\operatorname{cof} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \mathbf{N}|}. \quad (3.17)$$

Segue de (3.16.a) que  $\mathbf{T} = \mathbf{P} (\operatorname{cof} \mathbf{F})^{-1}$ . Substituindo esta expressão em (3.15) e considerando força de corpo nula, obtém-se

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad (3.18)$$

em que  $\operatorname{Div} : \mathcal{Lin} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é o operador divergente para campos tensoriais suaves definidos sobre a configuração de referência  $\mathcal{B}$ .

Assume-se que na configuração não deformada,  $\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$  para todo  $\mathbf{X}$  em  $\mathcal{B}$ , a tensão residual é nula, ou seja,  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ . Neste caso e considerando a teoria de pequenas deformações, tem-se que todas as grandezas dependem de  $\mathbf{X}$  (ao invés de  $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$ ).

Em particular, reescreve-se (3.14) na forma

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad (3.19)$$

e considera-se que a equação de equilíbrio (3.15) é satisfeita em  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}. \quad (3.20)$$

No sistema CCR,  $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{e}_i$  e a equação vetorial (3.20) é reescrita em termos de suas componentes, dadas por

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} = 0, \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

Além disso, segue de (3.4) a (3.10) que deformações isocóricas satisfazem

$$\operatorname{tr} \mathbf{E}_L = 0. \quad (3.22)$$

### 3.3 Hiperelasticidade

Considera-se agora que o corpo é elástico e isotrópico, de modo que  $\mathbf{P}$  está relacionado ao gradiente de deformação  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}$  por meio de (Gurtin, Fried e Anand (2010))

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \text{cof } \mathbf{F} \left( \sigma_0 \mathbf{I} + \sigma_1 \mathbf{C} - \sigma_2 \mathbf{C}^{-1} \right). \quad (3.23)$$

Em (3.23),  $\text{cof } \mathbf{F}$  é dado por (3.16.b),  $\mathbf{C}$  é dado por (3.3.a),  $\sigma_k = \sigma_k(\iota_{\mathbf{C}}, \mathbf{X})$ ,  $k = 0, 1, 2$ , e  $\iota_{\mathbf{C}}$  é a lista dos invariantes principais do tensor  $\mathbf{C}$ , dada por

$$\iota_{\mathbf{C}} := \{I_1 := \text{tr } \mathbf{C}, \quad I_2 := \text{tr } \text{cof } \mathbf{C}, \quad I_3 := \det \mathbf{C}\}, \quad (3.24)$$

com  $\text{tr} : \mathcal{Lin} \rightarrow \mathbb{R}$  sendo o operador traço.

O *problema misto da elastostática finita* para corpos isotrópicos, definido sobre a configuração de referência, consiste em achar a deformação  $\mathbf{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio (3.18) com  $\mathbf{P}$  dado por (3.23) juntamente com as condições de contorno

$$\mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{sobre } \Gamma_p, \quad \mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{sobre } \Gamma_f, \quad (3.25)$$

em que  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_f$  são partes regulares do contorno  $\partial B$ , tal que  $\partial B = \Gamma_p \cup \Gamma_f$  e  $\Gamma_p \cap \Gamma_f = \emptyset$ , e  $\bar{\mathbf{p}} : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\bar{\mathbf{f}} : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^3$  são funções suaves e conhecidas nas respectivas partes do contorno  $\partial B$ . Se  $\Gamma_f = \emptyset$  então  $\bar{\mathbf{p}}$  deve satisfazer a condição de equilíbrio global necessária para a existência de soluções.

Neste trabalho, o material é *hiperelástico*, de modo que a função resposta  $\tilde{\mathbf{P}}$  em (3.23) é a derivada de uma *função densidade de energia de deformação*  $\tilde{\phi} : \mathcal{Lin}^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , suave, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = D \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad (3.26)$$

em que a derivada  $D \tilde{\phi}$  é tomada com respeito a  $\mathbf{F}$  mantendo  $\mathbf{X}$  fixo. Uma vez que o material também é isotrópico, pode-se escrever  $\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \phi(\iota_{\mathbf{C}}, \mathbf{X})$ , em que  $\phi : \iota(\mathcal{Sim}^+) \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\iota(\mathcal{Sim}^+) := \{\iota_{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{C} \in \mathcal{Sim}, \det \mathbf{C} > 0\}$ , é suave. Utilizando a regra da cadeia em (3.26) e substituindo a expressão resultante em (3.23), chega-se às expressões

$$\sigma_0 = \frac{2}{I_3^{1/2}} \left[ I_2 \frac{\partial \phi(\iota_{\mathbf{C}})}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial \phi(\iota_{\mathbf{C}})}{\partial I_3} \right], \quad \sigma_1 = \frac{2}{I_3^{1/2}} \frac{\partial \phi(\iota_{\mathbf{C}})}{\partial I_1}, \quad \sigma_2 = 2 I_3^{1/2} \frac{\partial \phi(\iota_{\mathbf{C}})}{\partial I_2}. \quad (3.27)$$

As expressões acima para  $\sigma_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , não são independentes e devem satisfazer as

condições de compatibilidade (Truesdell e Noll (1965))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_2}{\partial I_1} &= I_3 \frac{\partial \sigma_1}{\partial I_2}, \\ I_3^{1/2} \frac{\partial}{\partial I_3} \left( \frac{\sigma_2}{I_3^{1/2}} \right) + \frac{\partial (I_2 \sigma_2)}{\partial I_2} &= I_3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial I_2}, \\ \frac{\partial \sigma_0}{\partial I_1} - \frac{I_2}{I_3} \frac{\partial \sigma_2}{\partial I_1} &= I_3^{1/2} \frac{\partial (I_3^{1/2} \sigma_1)}{\partial I_3}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

as quais são necessárias e suficientes para que o material seja hiperelástico.

Utilizando a base ortonormal fixa  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  introduzida na Seção 3.1 e substituindo (3.26) em (3.18), obtém-se um sistema de três equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem com respeito às três componentes da deformação  $\mathbf{y} = y_i \mathbf{e}_i$ , ou seja,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \Phi_{ij} \partial \Phi_{kl}} \frac{\partial^2 y_k}{\partial \xi_j \partial \xi_l} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \xi_j \partial \Phi_{ij}} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.29)$$

em que  $\mathbf{X} \equiv \xi_j \mathbf{e}_j$  e  $\mathbf{F} \equiv \Phi_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , com  $\otimes$  denotando o produto tensorial de dois vetores introduzido na Seção 3.1. Estas equações são chamadas *quase-lineares* devido à linearidade das mesmas com relação às derivadas de maior ordem,  $\partial^2 y_k / (\partial \xi_j \partial \xi_l)$ . Os termos multiplicando estas derivadas são as componentes do *tensor de elasticidade*

$$\mathbb{A}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) := D \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \Phi_{ij} \partial \Phi_{kl}} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (3.30)$$

em que o lado direito da igualdade acima foi conseguido por meio da expressão (3.26). Na teoria de equações diferenciais parciais, estas componentes são importantes na análise de existência, unicidade e estabilidade das soluções  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de (3.29).

O comportamento de um sólido elástico na vizinhança da configuração de referência, para a qual  $\mathbf{F} = \mathbf{1}$ , é governado pelo *tensor de elasticidade linear*  $\mathbb{C}(\mathbf{X}) := \mathbb{A}(\mathbf{1}, \mathbf{X}) = D \mathbf{P}(\mathbf{1}, \mathbf{X})$  no ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ , uma vez que

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{1}, \mathbf{X}) + \tilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{E}_L, \mathbf{X}) + o(\mathbf{E}_L), \quad \tilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{E}_L, \mathbf{X}) := \mathbb{C}(\mathbf{X})[\mathbf{E}_L], \quad (3.31)$$

em que  $\mathbf{E}_L$  é dado por (3.10),  $o(\cdot)$  é um símbolo de ordem que satisfaz  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| = 0$  e  $\mathbb{C}(\mathbf{X})[\mathbf{E}_L] = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  na base ortonormal  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Supondo tensão residual nula,  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{1}, \mathbf{X}) = 0$ , e desprezando os termos de ordem superior em (3.31), obtém-se a *teoria clássica de elasticidade linear* para corpos em equilíbrio, a qual consiste na relação tensão-deformação (3.31.b), na relação deformação-deslocamento (3.10) e na equação de equilíbrio (3.18) com  $\mathbf{P}$  substituído por  $\tilde{\mathbf{P}}_L$ .

Uma vez que o material é hiperelástico neste trabalho, o tensor de quarta ordem  $\mathbb{C}$  é simétrico no seguinte sentido:

$$\mathbf{H} : \mathbb{C}[\mathbf{G}] = \mathbf{G} : \mathbb{C}[\mathbf{H}], \quad \forall \mathbf{H} \in \mathcal{Lin}, \quad \forall \mathbf{G} \in \mathcal{Lin}, \quad (3.32)$$

em que “:” denota o *produto interno* em  $\mathcal{Lin}$ , definido por  $\mathbf{G} : \mathbb{C}[\mathbf{G}] := \text{tr}(\mathbf{G}^T \mathbb{C}[\mathbf{G}])$ ,  $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{Lin}$ . Em (3.32), pode-se substituir ambos,  $\mathbf{H} \in \mathcal{Lin}$  e  $\mathbf{G} \in \mathcal{Lin}$ , por tensores simétricos arbitrários, pois  $\mathbb{C}$  é completamente determinado pela sua restrição a  $\mathcal{Sim}$  (Gurtin, Fried e Anand (2010)).

Se o material é isotrópico, a relação tensão-deformação (3.31.b) é dada por

$$\tilde{\mathbf{P}}_L = \lambda (\text{tr} \mathbf{E}_L) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}_L, \quad (3.33)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, as quais podem depender do ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ . O tensor  $\mathbb{C}$  é positivo definido, ou seja,

$$\mathbf{E} : \mathbb{C}[\mathbf{E}] > 0, \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{Sim}, \quad \mathbf{E} \neq \mathbf{0}, \quad (3.34)$$

se e somente se as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  satisfazem as desigualdades  $\mu > 0$ ,  $2\mu + 3\lambda > 0$ .

Nas próximas seções apresentam-se exemplos de materiais hiperelásticos e isotrópicos e relacionam-se certas restrições impostas sobre os tensores de elasticidade correspondentes com o surgimento de fenômenos físicos que não são preditos na teoria clássica de elasticidade linear.

### 3.4 Convexidade e Elipticidade

Nesta seção apresentam-se conceitos relacionados aos fenômenos de amolecimento e localização de deformação em um material hiperelástico, homogêneo e isotrópico. O surgimento destes fenômenos está associado à violação de certas restrições sobre o tensor de elasticidade  $\mathbb{A}$  definido em (3.30). Por exemplo, Coleman and Noll (1959) propõem que  $\mathbb{A}$  satisfaça a desigualdade

$$\mathbf{G} : \mathbb{A}[\mathbf{G}] > 0, \quad \forall \mathbf{G} \in \mathcal{Lin}, \quad \mathbf{G} \neq \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

em que  $\mathbb{A}[\mathbf{G}] \in \mathcal{Lin}$ . Conhecida por *desigualdade de Coleman e Noll*, a condição (3.35) juntamente com (3.30) implicam que a função densidade de energia  $\tilde{\phi}(\mathbf{F})$  é estritamente convexa (Ciarlet (1988)), ou seja, dados  $\theta \in [0, 1]$  e  $\mathbf{G}_i \in \mathcal{Lin}$ ,  $i = 1, 2$ , então  $\mathbf{G} :=$

$\theta \mathbf{G}_1 + (1 - \theta) \mathbf{G}_2 \in \mathcal{Lin}$  e  $\tilde{\phi}(\mathbf{G}) < \theta \tilde{\phi}(\mathbf{G}_1) + (1 - \theta) \tilde{\phi}(\mathbf{G}_2)$ .

A desigualdade (3.35) não é uma hipótese plausível, pois ela é incompatível com certas evidências do “mundo real”, tais como

1. Tensões infinitas devem acompanhar deformações infinitas. Este comportamento das tensões em grandes deformações exige que a função densidade de energia de deformação  $\tilde{\phi}$  satisfaça  $\lim_{\det \mathbf{F} \rightarrow 0} \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = +\infty$  à medida que  $\det \mathbf{F} \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{Lin}^+$ . Esta condição não é satisfeita para  $\tilde{\phi}$  convexo sobre  $\mathcal{Lin}^+$ , Ciarlet (1988).
2. Possibilidade de múltiplos pontos de mínimo da energia do sólido hiperelástico, tal como no caso de flambagem de uma coluna delgada.

A desigualdade de Coleman & Noll está, no entanto, relacionada a uma condição de monotonicidade do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff que é fisicamente plausível. Para apresentar esta condição, supõe-se neste trabalho que as condições de contorno do problema misto, dadas por (3.25), sejam funções suaves de um único *parâmetro de carga*  $\bar{\lambda} > 0$ , ou seja,  $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}(\bar{\lambda}, \mathbf{X})$  para  $\mathbf{X} \in \Gamma_p$  e  $\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\lambda}, \mathbf{X})$  para  $\mathbf{X} \in \Gamma_f$ . Supõe-se também que a solução do problema correspondente dependa suavemente de  $\bar{\lambda}$ , de modo que a posição de um ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  na configuração deformada seja dada por  $\mathbf{y}(\bar{\lambda}, \mathbf{X})$  com gradiente de deformação correspondente dado por  $\mathbf{F} := \nabla \mathbf{y}(\bar{\lambda}, \mathbf{X})$ . Se  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\bar{\lambda}, \mathbf{X})$  e  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(\bar{\lambda} + \Delta\bar{\lambda}, \mathbf{X})$  para  $\Delta\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  pequeno e positivo, então  $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \dot{\mathbf{F}}\Delta\bar{\lambda} + o(\Delta\bar{\lambda})$ , em que  $(\dot{\cdot}) := d(\cdot)/d\bar{\lambda}$ . Utilizando a função resposta introduzida em (3.23) e considerando uma parte arbitrária  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ , pode-se interpretar a expressão

$$\int_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_2, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_1, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV \quad (3.36)$$

como sendo a diferença de potência de tensão necessária para aumentar o parâmetro de carga  $\bar{\lambda}$  de  $\Delta\bar{\lambda}$ . Se esta diferença for positiva, diz-se que o *material endureceu*. Caso contrário, diz-se que o *material amoleceu*.

Rearranjando os termos de (3.36) e utilizando (3.26), pode-se reescrever (3.36) na forma

$$\int_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_2, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\mathcal{P}} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}_1, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV = \int_{\mathcal{P}} D\tilde{\phi}(\mathbf{F}_2, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\mathcal{P}} D\tilde{\phi}(\mathbf{F}_1, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} dV. \quad (3.37)$$

Utilizando a regra da cadeia em (3.37), obtém-se que a expressão (3.36) é igual a

$$\int_{\mathcal{P}} \dot{\mathbf{F}} : D^2\tilde{\phi}(\mathbf{F}_1, \mathbf{X}) : [\dot{\mathbf{F}}] dV \Delta\bar{\lambda} + o(\Delta\bar{\lambda}), \quad (3.38)$$



em que  $D^2(\cdot) := D(D(\cdot))$ . Portanto, para  $\Delta\bar{\lambda}$  suficientemente pequeno, o material endurece se

$$\dot{\mathbf{F}} : D^2\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})[\dot{\mathbf{F}}] > 0, \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\bar{\lambda}, \mathbf{X}), \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad (3.39)$$

em que  $(\dot{\cdot}) := d(\cdot)/d\bar{\lambda}$ . Identificando  $\mathbb{A} = D^2\tilde{\phi}$  em (3.35), vê-se que a desigualdade de Coleman & Noll implica no endurecimento do material. Este é o caso, por exemplo, da elasticidade linear clássica, em que a desigualdade (3.35) toma a forma dada por (3.34) com  $\mathbb{C}(\mathbf{X}) := \mathbb{A}(\mathbf{1}, \mathbf{X}) = D^2\tilde{\phi}(\mathbf{1}, \mathbf{X})$ . Neste caso, a função densidade de energia, dada por  $(\mathbf{E}_L : D^2\tilde{\phi}(\mathbf{1}, \mathbf{X})[\mathbf{E}_L]) / 2$ , é quadrática e, portanto, convexa.

Em (3.35), se se considera  $\mathbf{G} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$  para quaisquer versores  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ , obtém-se a *condição de Legendre-Hadamard*, dada por

$$(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) : \mathbb{A}[\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}] > 0, \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } |\mathbf{b}| = 1, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } |\mathbf{c}| = 1. \quad (3.40)$$

Esta condição é também chamada *condição de elipticidade forte* (Truesdell e Noll (1965)), pois é utilizada no estudo de existência e regularidade de soluções dos problemas de valor de contorno associados. A imposição da desigualdade (3.40) está de acordo com a evidência experimental de que “um corpo é alongado na direção das forças aplicadas” Ciarlet (1988). A violação desta condição está relacionada com a formação de bandas de cisalhamento, Knowles e Sternberg (1975), as quais podem levar à falha do material por localização de deformação cisalhante.

Aplicam-se agora os conceitos introduzidos acima no estudo de uma forma particular do material de Blatz e Ko (1962), dada por

$$\phi(\iota_{\mathbf{C}}) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{I_2}{I_3} + 2I_3^{1/2} - 5 \right), \quad (3.41)$$

em que  $\iota_{\mathbf{C}}$  e  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são dados por (3.24) e  $\mu$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento calculado na configuração de referência. Experimentos realizados por estes autores em uma espuma de borracha de poliuretano forneceram o valor médio  $\mu = 32$  psi. As expressões de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{P}$  para o material dado por (3.41) são

$$\mathbf{T} = \mu \left( \mathbf{1} - I_3^{-1/2} \mathbf{B}^{-1} \right), \quad \mathbf{P} = \mu \operatorname{cof} \mathbf{F} \left( \mathbf{1} - I_3^{-1/2} \mathbf{C}^{-1} \right), \quad (3.42)$$

em que  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são dados por (3.3). Utilizando (3.30), obtém-se o tensor de elasticidade

$\mathbb{A}$ , dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\mu [\mathbf{H}] &:= \frac{1}{\mu} \mathbb{A} [\mathbf{H}] = \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}^T) \mathbf{F}^{-T} + \\ &\quad \text{cof} \mathbf{F} [(\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{1} - \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-T}], \quad \forall \mathbf{H} \in \mathcal{Lin}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Observa-se de (3.43) que  $\mathbb{A}$  é simétrico no sentido de (3.32) com  $\mathbb{C}$  substituído por  $\mathbb{A}$ . Este resultado já era esperado, pois o material é hiperelástico.

Em particular, considerando  $\mathbf{H} = \dot{\mathbf{F}}$  em (3.43) e tomando o produto interno da expressão resultante com  $\dot{\mathbf{F}}$ , obtém-se que a condição de amolecimento para o material de Blatz-Ko é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbb{A}^\mu [\dot{\mathbf{F}}] &= (\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + 2\mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{F}}^T) + \\ &\quad (\det \mathbf{F}) \left[ (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}})^2 - 1 \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^2 \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Considerando-se agora a classe de deformações planas e homogêneas dadas por

$$x_1 := \varphi_1(\mathbf{X}) = \lambda_1 X_1, \quad x_2 := \varphi_2(\mathbf{X}) = \lambda_2 X_2, \quad x_3 := \varphi_3(\mathbf{X}) = \lambda_3 X_3. \quad (3.45)$$

Estas expressões juntamente com  $\mathbf{F} := \nabla y = (\partial \varphi_i / \partial X_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  e (3.3) fornecem  $\mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{F}^{-1} = \lambda_1^{-1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2^{-1} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ ,  $\text{tr} \mathbf{B} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1$  e  $\det \mathbf{B} = (\det \mathbf{F})^2 = \lambda_1 \lambda_2$ . Segue então de (3.42) que os tensores de Cauchy e de Piola-Kirchhoff são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^\mu &:= \frac{1}{\mu} \mathbf{T} = (1 - \lambda_1^{-3} \lambda_2^{-1}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-3}) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{P}^\mu &:= \frac{1}{\mu} \mathbf{P} = (\lambda_2 - \lambda_1^{-3}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2^{-3}) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\lambda_1 \lambda_2 - 1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (3.46)$$

respectivamente, e de (3.44) que a condição de amolecimento é dada por

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbb{A}^\mu [\dot{\mathbf{F}}] = 3 \left( \dot{\lambda}_1^2 \lambda_1^{-4} + \dot{\lambda}_2^2 \lambda_2^{-4} \right) + 2 \dot{\lambda}_1 \dot{\lambda}_2 \leq 0. \quad (3.47)$$

Além disso, Knowles e Sternberg (1975) mostram que a condição de elipticidade forte (3.40) é equivalente às desigualdades

$$\rho < \frac{\lambda_i}{\lambda_j} < \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \rho = 2 - \sqrt{3} \cong 0.268. \quad (3.48)$$

No caso de tração uniaxial definido por  $\lambda_1 = \bar{\lambda}$  e  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{P} \mathbf{e}_2 = 0$ , tem-se que  $\dot{\lambda}_2(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^{-1/3}$  e que, portanto,  $\bar{\lambda}_2 = (-\bar{\lambda}^{-4/3})/3$ . Este caso está ilustrado no lado esquerdo da Fig.

6. Tem-se ainda que  $\mathbf{T}_{11}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1 = 1 - \bar{\lambda}^{-8/3}$  e que  $\mathbf{P}_{11}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{P} \mathbf{e}_1 = \bar{\lambda}^{-1/3} - \bar{\lambda}^{-3}$ . Observa-se das expressões acima que  $\mathbf{T}_{11}^\mu$  é uma função côncava e monotonicamente crescente de  $\bar{\lambda}$  no intervalo  $(0, \infty)$  e que tende a 1 à medida que  $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ . Observa-se também que  $P_{11}^\mu$  é uma função crescente para valores pequenos de  $\bar{\lambda} > 0$  e é uma função decrescente para valores grande de  $\bar{\lambda}$ . Tomando-se a derivada de  $P_{11}^\mu$  com respeito a  $\bar{\lambda}$  e igualando a mesma a zero, obtém-se a equação  $3\bar{\lambda}^{-4} - (1/3)\bar{\lambda}^{-4/3}/3 = 0$ , cuja solução fornece o ponto  $\bar{\lambda}_{\max} = 3^{3/4} \cong 2.279$  em que  $P_{11}^\mu$  atinge o seu valor máximo. Seguindo a nossa intuição física, diz-se que o material endurece no intervalo  $(0, 3^{3/4})$  e amolece no intervalo  $(3^{3/4}, \infty)$ . Este resultado pode ser verificado pelo critério de amolecimento (3.47) para o caso de tração uniaxial, o qual fornece a expressão  $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{A}^\mu = 3\bar{\lambda}^{-4} - (1/3)\bar{\lambda}^{-4/3}$ . Esta expressão coincide com o lado esquerdo da equação obtida acima por meio da derivada de  $P_{11}^\mu$ . Por outro lado, segue da desigualdade (3.48) que ocorrerá perda de elipticidade forte sempre que  $\bar{\lambda} \leq \rho^{3/4} \cong 2.685$ . Nota-se do exposto acima que, sob estiramento, o material amolece e, portanto, perde convexidade antes de perder elipticidade. Sob encurtamento, o material não amolece, mas perde elipticidade. No lado esquerdo da Fig. 7, apresenta-se a curva  $P_{11}^\mu$  versus  $\bar{\lambda}$  juntamente com o ponto de máximo  $\bar{\lambda}_{\max}$  onde inicia o amolecimento, representado pelo *ponto negro* da curva, e o ponto  $\rho^{-3/4}$  onde ocorre a perda de elipticidade, representado pelo *ponto azul* da curva.

Outro caso de interesse nesta tese é o *cisalhamento puro*, definido por  $\lambda_1 = \bar{\lambda}$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda}^{-1}$ . Este caso está ilustrado no lado direito da Fig. 6. Tem-se então que  $\mathbf{T}_{11}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1 = 1 - \bar{\lambda}^{-2}$ ,  $\mathbf{T}_{22}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2 = 1 - \bar{\lambda}^2$ ,  $\mathbf{P}_{11}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{P} \mathbf{e}_1 = \bar{\lambda}^{-1} - \bar{\lambda}^{-3}$  e  $\mathbf{P}_{22}^\mu(\bar{\lambda}) := \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{P} \mathbf{e}_2 = \bar{\lambda} - \bar{\lambda}^{-3}$ . Segue das expressões acima que no intervalo  $(0, \infty)$   $\mathbf{T}_{11}^\mu$  é uma função côncava e monotonicamente crescente de  $\bar{\lambda}$  que tende a 1 à medida que  $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$  e  $\mathbf{T}_{22}^\mu$  é uma função côncava e monotonicamente decrescente de  $\bar{\lambda}$  que tende a  $-\infty$  à medida que  $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ . Aqui também  $\mathbf{P}_{11}^\mu$  é uma função crescente para valores pequenos de  $\bar{\lambda} > 0$  e é uma função decrescente para valores grandes de  $\bar{\lambda}$ . Tomando-se a derivada de  $\mathbf{P}_{11}^\mu$  com respeito a  $\bar{\lambda}$  e igualando a mesma a zero, obtém-se a equação  $-\bar{\lambda}^{-2} + 3\bar{\lambda}^2 = 0$ , cuja solução fornece  $\bar{\lambda}_{\max}^{11} = 3^{1/2}$ . Similarmente,  $\mathbf{P}_{22}^\mu$  é uma função crescente para valores pequenos de  $\bar{\lambda} > 0$  e é uma função decrescente para valores grande de  $\bar{\lambda}$ . Tomando-se a derivada de  $\mathbf{P}_{22}^\mu$  com respeito a  $\bar{\lambda}$  e igualando a mesma a zero, obtém-se a equação  $1 - 3\bar{\lambda}^2 = 0$ , cuja solução fornece  $\bar{\lambda}_{\max}^{22} = (1/3)^{1/2}$ . As curvas  $\mathbf{P}_{11}^\mu$  versus  $\bar{\lambda}$  e  $\mathbf{P}_{22}^\mu$  versus  $\bar{\lambda}$  estão representadas no lado direito da Fig. 7 pelas linhas cheia e tracejada, respectivamente. Neste caso de cisalhamento puro, o fenômeno de amolecimento não é evidente. Recorre-se então ao critério de amolecimento (3.47) com  $\lambda_2 = \bar{\lambda}^{-1}$  e chega-se à expressão  $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{A}^\mu[\dot{\mathbf{F}}] = 3\bar{\lambda}^{-4} - 2\bar{\lambda}^{-2} + 3$ , a qual é estritamente positiva. Por outro lado, segue das desigualdades

(3.48) que ocorrerá perda de elipticidade forte sempre que  $\bar{\lambda} \leq \rho^{1/2} \cong 0.518$ , ou, que  $\bar{\lambda} \geq \rho^{-1/2} \cong 1.932$ . Estes valores estão representados no eixo de  $\bar{\lambda}$  por pontos. Portanto, quando submetido ao cisalhamento puro, o material de Blatz-Ko não amolece, mas pode perder elipticidade.

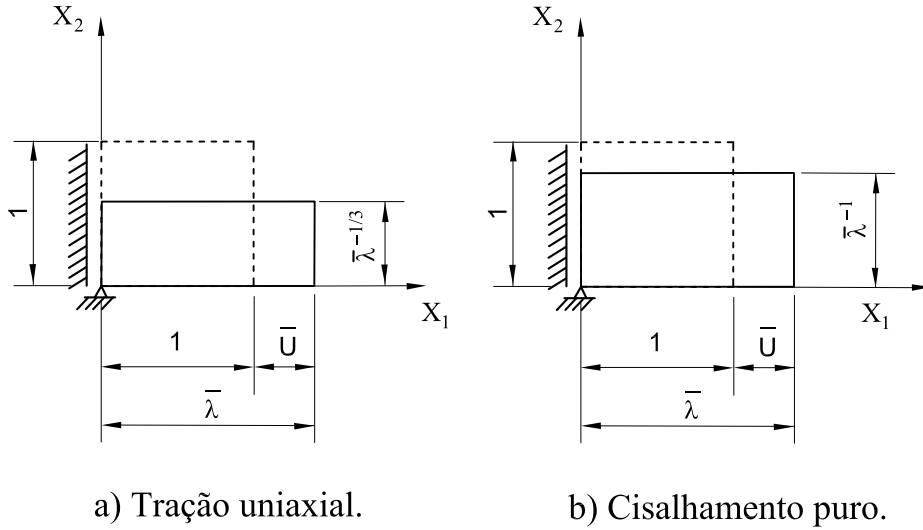


Figura 6: Ensaio de tração uniaxial e cisalhamento puro realizados no material de Blatz-Ko.

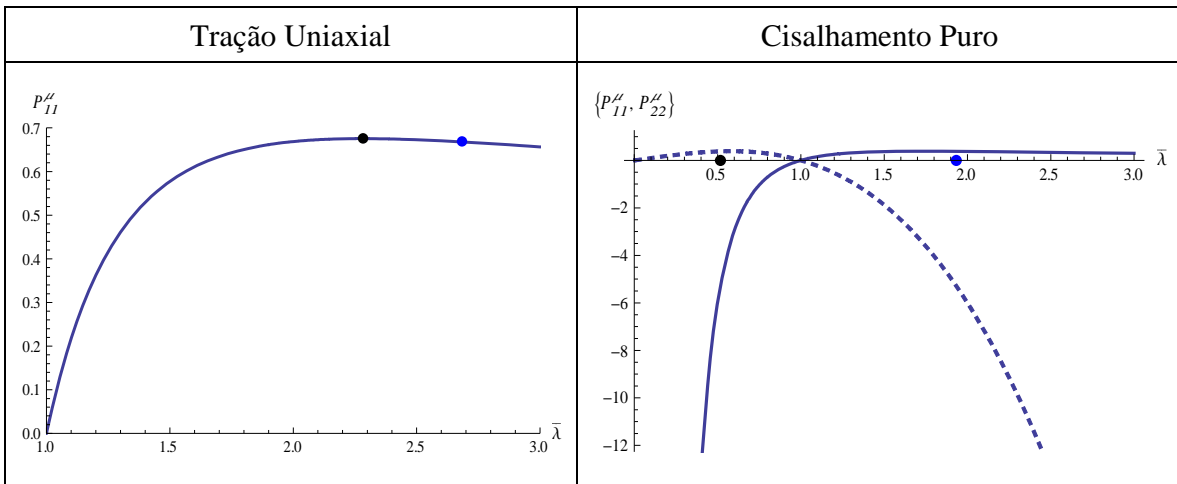


Figura 7: Esquerda: Curva  $\mathbf{P}_{11}$  versus  $\bar{\lambda}$  para tração uniaxial. Direita: Curvas  $\mathbf{P}_{11}$  (linha sólida) e  $\mathbf{P}_{22}$  (linha tracejada) versus  $\bar{\lambda}$  para cisalhamento puro.

## 4 Considerações sobre a Teoria de Elasticidade Linear Clássica

Neste capítulo apresentam-se algumas considerações sobre a teoria de elasticidade linear que servem de base para o estudo de materiais compósitos no regime de pequenas deformações e também servem de base em comparações com modelos não-lineares quando analisados no regime de pequenas deformações para verificar a validade destes.

### 4.1 Formulação Diferencial

Seja um corpo elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo ocupando uma região  $\mathcal{B}$  aberta e limitada de  $\mathbb{R}^3$ . Seja também  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  uma base ortonormal para um sistema de coordenadas cartesianas retangulares fixa na origem. A lei de Hooke generalizada para este corpo é dada por

$$T_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad (4.1)$$

em que  $C_{ijkl}$  são os coeficientes elásticos do meio,  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamento, cujas componentes são  $u_i$ ,  $T_{ij}$  e  $\varepsilon_{kl}$  são as componentes dos tensores tensão e deformação infinitesimal, respectivamente. Ambos os tensores são simétricos e de segunda ordem. Lembrando da Seção 3.1, as componentes do tensor deformação infinitesimal na expressão (4.1) são dadas por

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} \right), \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

No caso do material ser isotrópico, então (4.1) toma a forma

$$T_{ij} = \lambda(\mathbf{X}) \varepsilon(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{X}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad (4.3)$$

em que  $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  e  $\lambda, \mu$  são os parâmetros de Lamé, os quais podem depender de  $\mathbf{X}$ . Os coeficientes elásticos em (4.1) satisfazem as seguintes condições de simetria

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}. \quad (4.4)$$

Utilizando as equações de equilíbrio (3.21), obtém-se um sistema de equações diferenciais parciais para a determinação de  $u$ , o qual é dado por

$$-\frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}(\mathbf{X})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

sendo  $b_i$  as componentes das forças de volume atuantes sobre o corpo.

Para definir o problema de valor de contorno, necessita-se ainda impor condições sobre  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e suas derivadas no contorno de  $\mathcal{B}$ . Estas condições podem ser de três tipos, a saber (SOKOLNIKOFF, 1987)

1. Condições de deslocamento impostas sobre a fronteira  $\partial\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{u}|_{\partial\mathcal{B}} = \mathbf{U}$ , em que  $\mathbf{U}$  é uma função suficientemente suave e conhecida sobre  $\partial\mathcal{B}$ .
2. Condições de carregamento impostas  $T_{ij}n_j$  sobre  $\partial\mathcal{B}$ ,  $T_{ij}n_j|_{\partial\mathcal{B}} = t_i$ , em que  $n_j$  são as componentes do versor exterior a  $\partial\mathcal{B}$ , e  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são funções suficientemente suaves e conhecidas sobre  $\partial\mathcal{B}$ .
3. Condições mistas de deslocamento sobre uma parte  $\partial_{\mathbf{U}}\mathcal{B}$  da fronteira de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{u}|_{\partial\mathcal{B}} = \mathbf{U}$ , e carregamento  $t$  dado sobre  $\partial_{\mathbf{t}}\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \setminus \partial_{\mathbf{U}}\mathcal{B}$  e  $\partial_{\mathbf{U}}\mathcal{B} \cap \partial_{\mathbf{t}}\mathcal{B} = \emptyset$ ,  $T_{ij}n_j|_{\partial_{\mathbf{t}}\mathcal{B}} = t_i$ , conforme ilustrado na Fig. 8. Aqui também as funções  $\mathbf{U}$  e  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são suaves e conhecidas sobre as partes de  $\partial\mathcal{B}$  em que elas estão definidas.

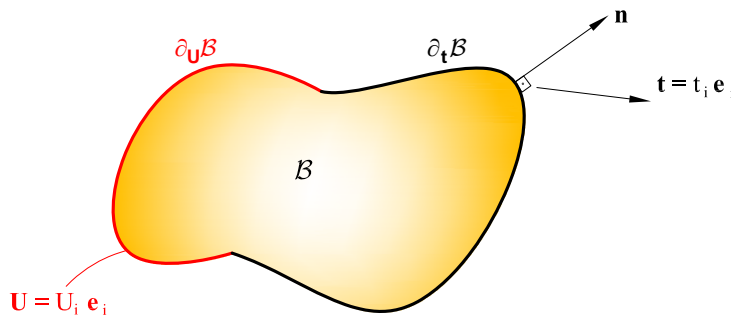


Figura 8: Representação da região  $\mathcal{B}$  e as partes do seu contorno para as condições de contorno mistas.

No estudo que segue, considera-se as condições do tipo 3, chamadas de condições mistas, para o caso  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ , ou

$$u_i|_{\partial_{\mathbf{U}}\mathcal{B}} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{\partial_{\mathbf{t}}\mathcal{B}} = t_i. \quad (4.6)$$

## 4.2 Formulação Integral

Seja  $\mathcal{V}$  o conjunto de todos os campos de deslocamento suficientemente suaves e cinematicamente admissíveis (4.2) definidos sobre  $\mathcal{B}$  que satisfazem as condições de contorno (4.6).

Um elemento  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{V}$  é dado por  $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ , em que  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são suficientemente suaves sobre todo  $\mathcal{B}$ , incluindo o seu contorno. A equação integral para (4.5) é dada por

$$\int_{\mathcal{B}} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dX = \int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX + \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i v_i dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (4.7)$$

O termo à esquerda de (4.7) representa o dobro do trabalho virtual dos esforços internos,  $W_i$ , ao corpo, e o termo à direita representa o dobro do trabalho virtual das forças externas,  $W_e$ , aplicadas sobre o corpo.

Para demonstrar (4.7), multiplicam-se ambos os membros de (4.5) por  $v_i$  e integra-se sobre  $\mathcal{B}$ . Assim

$$\int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX = - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i dX. \quad (4.8)$$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções em (4.8), resulta

$$\int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX = - \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i) - C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \right] dX, \quad (4.9)$$

sendo  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}$ . Reescrevendo (4.9), obtém-se

$$\int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX = - \int_{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i) \right] dX + \int_{\mathcal{B}} [C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dX. \quad (4.10)$$

Aplicando o teorema de Green e rearranjando os termos, chega-se a

$$\int_{\partial_t \mathcal{B}} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i n_j dS + \int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX = \int_{\mathcal{B}} [C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dX. \quad (4.11)$$

Agora, utilizando as condições de contorno dadas por (4.6), observando que  $C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) n_j = t_i$  sobre  $\partial_t \mathcal{B}$  e zero sobre  $\partial_U \mathcal{B}$ , obtém-se finalmente que

$$\int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i v_i dS + \int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX = \int_{\mathcal{B}} [C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dX, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (4.12)$$

Observa-se do exposto acima que, em virtude da linearidade, se  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  é solução

do problema dado por (4.5)-(4.6), também o é  $\xi \mathbf{u}$  quando os dados são  $\xi \mathbf{b}$  e  $\xi \mathbf{t}$  com  $\xi \in [0, 1]$ .

### 4.3 Energia de Deformação Elástica

Os resultados anteriores permitem chegar à expressão de um elemento diferencial  $dW_e$  do trabalho de forças externas para deslocamentos virtuais do tipo  $\mathbf{v} = \xi \mathbf{u}$ , a saber:

$$dW_e = \int_{\partial_t \mathcal{B}} \xi t_i u_i d\xi dS + \int_{\mathcal{B}} \xi b_i u_i d\xi dX = \xi d\xi \left[ \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i u_i dS + \int_{\mathcal{B}} b_i u_i dX \right]. \quad (4.13)$$

Integrando em ambos os membros de (4.13) com respeito à  $\xi \in [0, 1]$  resulta

$$W_e = \frac{1}{2} \left[ \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i u_i dS + \int_{\mathcal{B}} b_i u_i dX \right], \quad (4.14)$$

em que, tendo em conta (4.7) e (4.14) para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , tem-se

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} a_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX, \quad (4.15)$$

ou seja, os trabalhos das forças internas e externas são iguais,  $W_i = W_e$ . Por isso, a partir deste ponto denotam-se ambos os trabalhos por  $W$ .

Os corpos elásticos opõem naturalmente uma resistência à deformação, a quantidade  $W$  deve ser positiva para toda deformação não identicamente nula, a qual implica que os coeficientes devem satisfazer a condição  $C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) > 0$  para todo tensor simétrico de componentes  $\varepsilon_{kl}$  não nulos. Isto significa que a forma quadrática definida pelos coeficientes elásticos deve ser definida positiva, ou seja,

$$\exists C(\mathbf{X}) > 0 \text{ para } \mathbf{X} \in \mathcal{B} \text{ tal que } C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \geq C(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl}. \quad (4.16)$$

### 4.4 Unicidade da Solução

Com o objetivo de verificar a unicidade da solução do problema definido pelas expressões (4.5) e (4.6), utiliza-se a propriedade dada por (4.16). Suponha-se que o problema admite duas soluções  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ . Primeiramente, verifica-se que  $W = 0$  para  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ , ou seja,

$$W = 0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX. \quad (4.17)$$



De fato, como  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  satisfazem (4.5), em virtude da linearidade de  $\frac{\partial(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}))}{\partial X_j}$  com respeito a  $\mathbf{u}$ , tem-se

$$-\frac{\partial}{\partial X_j}(C_{ijkl}(\mathbf{X})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) = 0 \text{ em } \mathcal{B}, \quad (4.18)$$

isto é,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  satisfaz um sistema de equações diferenciais homogêneas.

Similarmente, sobre  $\partial_t \mathcal{B}$  do contorno de  $\mathcal{B}$ , tem-se

$$T_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\partial_t \mathcal{B}} = 0, \quad (4.19)$$

ou seja,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  satisfaz a condição de contorno dada por (4.6) com  $t_i = 0$ . Além disso, como  $\mathbf{u}_1|_{\partial_U \mathcal{B}} = \mathbf{u}_2|_{\partial_t \mathcal{B}} = \mathbf{0}$  por serem soluções do problema original, é evidente que  $\mathbf{u}|_{\partial_U \mathcal{B}} = \mathbf{0}$ . Então, segue de (4.14) que  $W = 0$ .

Finalmente, de acordo com (4.15) e (4.16),  $0 \geq \int_{\mathcal{B}} C(\mathbf{X})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})dX$  da qual resulta  $\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = 0$ ,  $\forall k, l$  e  $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}$ . Portanto,  $\mathbf{u}$  é constante em  $\mathcal{B}$ . Uma vez que  $\mathbf{u}|_{\partial_U \mathcal{B}} = \mathbf{0}$ , então necessariamente  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ ,  $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}$ , verificando-se a unicidade.

## 4.5 Problema de Valor de Contorno (PVC) para um Compósito Bifásico Elástico-Linear

Nesta seção apresenta-se a formulação clássica de um problema de valor de contorno misto da elasticidade linear para um material composto por duas fases elásticas com condições de contato perfeito. Este estudo serve de base para para o que segue nas seções 5.1.4 e 6.1 em que um sólido compósito bifásico linear é estudado empregando-se o MHA e o MEF também considerando condições de contato perfeito entre as lâminas. A partir do estudo do sólido linear estuda-se então um compósito laminado bifásico não-linear.

### 4.5.1 Forma Forte

Suponha agora que  $\mathcal{B}$  é constituído por duas regiões  $\mathcal{B}^1$  e  $\mathcal{B}^2$ , de modo que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ . Estas regiões estão separadas por uma superfície  $\Gamma = \mathcal{B}^1 \cap \mathcal{B}^2$ . Ilustra-se na Fig. 9 um exemplo de  $\mathcal{B}$  constituído por dois materiais, os quais ocupam as componentes  $\mathcal{B}^1$  e  $\mathcal{B}^2$ , respectivamente.

Neste caso, os coeficientes de elasticidade  $C_{ijkl}(\mathbf{X})$  são funções definidas da seguinte

forma

$$C_{ijkl}(\mathbf{X}) = \begin{cases} C_{ijkl}^1(\mathbf{X}) & \text{se } \mathbf{X} \in \mathcal{B}^1, \\ C_{ijkl}^2(\mathbf{X}) & \text{se } \mathbf{X} \in \mathcal{B}^2, \end{cases} \quad (4.20)$$

em que os coeficientes  $C_{ijkl}^m$ ,  $m = 1, 2$ , são funções suficientemente regulares sobre  $\mathcal{B}^m$  que satisfazem as condições de simetria e positividade dadas por (4.4) e (4.16). Desse modo,

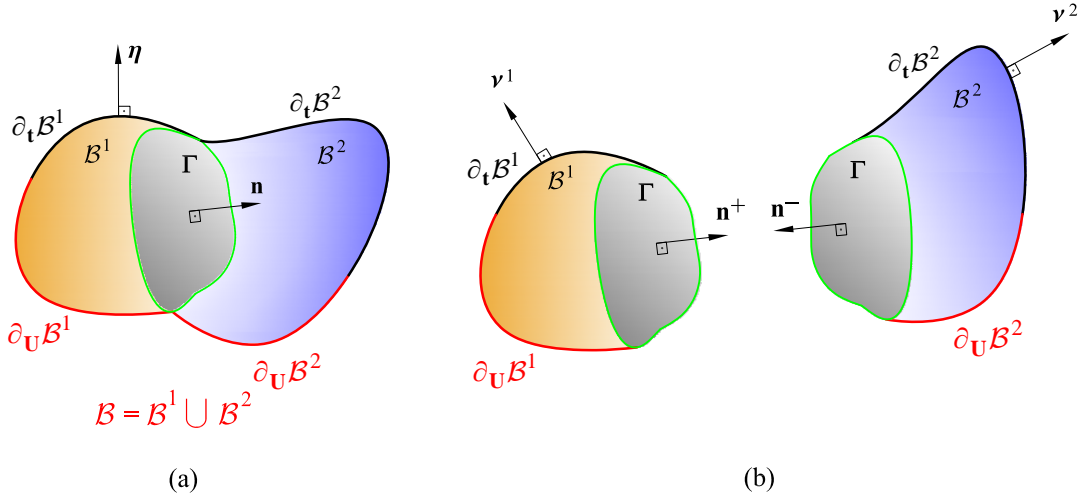


Figura 9: (a) Sólido constituído pelas partes  $\mathcal{B}^1$  e  $\mathcal{B}^2$ , (b) Partes  $\mathcal{B}^1$  e  $\mathcal{B}^2$  separadas.

o problema de valor de contorno é dado por (4.5)- (4.6) e (4.20), e condições para garantir a continuidade dos deslocamentos e do carregamento na superfície de contato  $\Gamma$ . Assim, as condições de contato perfeito são

$$\left. \begin{aligned} [[u_i]] &= 0 \\ [[T_{ij}n_j]] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sobre } \Gamma, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.21)$$

em que  $[[f]] = f^1 - f^2$  denota o salto de  $f$  através de  $\Gamma$ .

O PVC dado por (4.5), (4.6), (4.20) e (4.21) é chamado de problema na forma forte.

#### 4.5.2 Forma Fraca. Equivalência

Consonante com o procedimento utilizado na Seção 4, apresenta-se abaixo a formulação integral do PVC. Para isto, considera-se que o espaço das funções cinematicamente admissíveis introduzido na Seção 4.2 seja dado por

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{v}|_{\partial_U \mathcal{B}} = 0; \quad [[\mathbf{v}]]_{\Gamma} = 0 \}. \quad (4.22)$$

A forma variacional, ou, fraca, do PVC consiste em encontrar  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  tal que

$$\int_{\mathcal{B}} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dX = \int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX + \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i v_i dS, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (4.23)$$

As soluções dos problemas nas formas forte e fraca são únicas e a mesma. Por conseguinte, diz-se que os problemas nas formas forte e fraca são equivalentes.

Para demonstrar esta equivalência, seja  $\mathcal{V}$  o espaço de funções cinematicamente admissíveis dado por (4.22). Sejam ainda

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^1 & \text{se } \mathbf{X} \in \mathcal{B}^1, \\ \mathbf{u}^2 & \text{se } \mathbf{X} \in \mathcal{B}^2. \end{cases} \quad (4.24)$$

De modo similar, pode-se escrever  $\mathbf{v}$  na forma dada para  $\mathbf{u}$  por meio de (4.24).

Multiplicando (4.5) por  $v_i$  e integrando sobre  $\mathcal{B}$ , obtém-se a expressão (4.8), em que, aqui,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$  e ambos,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , pertencem a  $\mathcal{V}$  dado por (4.22).

Decompondo a integral do lado direito de(4.8) em duas integrais definidas sobre as partes  $\mathcal{B}^1$  e  $\mathcal{B}^2$ , obtém-se

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i dX = \sum_{p=1}^2 \int_{\mathcal{B}^p} (C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p)) v_i^p dX. \quad (4.25)$$

Aplicando integração por partes juntamente com o teorema de Green em cada integral, chega-se a

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{B}^p} \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p)) v_i dX \\ &= \int_{\mathcal{B}^p} (C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^p)) dX - \int_{\mathcal{B}^p} \frac{\partial}{\partial X_j} (C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p) v_i^p) dX \\ &= \int_{\mathcal{B}^p} (a_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^p)) dX - \int_{\partial \mathcal{B}^p} C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p) v_i^p \eta_j^p dS, \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

em que  $\eta_j^p$  são as componentes do versor normal  $\eta^p$  a  $\mathcal{B}^p$ .

Sobre as superfícies  $\partial \mathcal{B}^1$  e  $\partial \mathcal{B}^2$  tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^p} C_{ijkl}^p(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^p) v_i^p \eta_j^p dS &= \int_{\partial \mathcal{B}^1} T_{ij}^1 v_i^1 \eta_j^1 dS = \int_{\partial \mathcal{B}^1 \setminus \Gamma} T_{ij}^1 v_i^1 \nu_j^1 dS \\ &+ \int_{\Gamma} T_{ij}^1 v_i^1 n_j^1 dS, \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que  $\eta_j^m |_{\partial \mathcal{B}^m \setminus \Gamma} = \nu_j^m$ ,  $\eta_j^m |_{\Gamma} = n_j^m$ , e  $T_{ij}^m \eta_j^m = C_{ijkl}^m(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^m) \eta_j^m$ ,  $m = 1, 2$ , é a força por unidade de área que atua sobre um plano definido pelo versor exterior  $\eta^m$ . Sabendo

que  $n_j^1 = -n_j^2$  e utilizando as condições de salto (4.21), obtém-se

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_{ij} v_i \eta_j dS = \int_{\partial\mathcal{B}^1 \setminus \Gamma} T_{ij} v_i \nu_j^1 dS + \int_{\partial\mathcal{B}^2 \setminus \Gamma} T_{ij} v_i \nu_j^2 dS. \quad (4.28)$$

As integrais do termo à direita de (4.28), lembrando que  $\partial\mathcal{B} \setminus \Gamma \equiv \partial\mathcal{B}$ , podem ser decompostas segundo as condições de força e deslocamento dadas por (4.6) da seguinte forma

$$\int_{\partial\mathcal{B}^p \setminus \Gamma} T_{ij}^p v_i^p \nu_j^p dS = \int_{\partial_U \mathcal{B}^p \setminus \Gamma} T_{ij}^p v_i^p \nu_j^p dS + \int_{\partial_t \mathcal{B}^p \setminus \Gamma} T_{ij}^p v_i^p \nu_j^p dS, \quad p = 1, 2. \quad (4.29)$$

Lembrando que  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , em que  $\mathcal{V}$  é dado por (4.22), segue de (4.29) juntamente com  $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}^1 \cup \partial\mathcal{B}^2$  que (4.28) pode ser reescrito na forma

$$\int_{\partial\mathcal{B}} T_{ij} v_i \eta_j dS = \int_{\partial_t \mathcal{B}} T_{ij} v_i \eta_j dS = \int_{\partial_t \mathcal{B}} t_i v_i dS, \quad (4.30)$$

sendo a última igualdade obtida a partir de (4.6.b).

Substituindo (4.26) e (4.27) em (4.25) e substituindo (4.30) na expressão resultante, obtém-se finalmente a expressão (4.23).

Para o caso de uma região  $\mathcal{B}$  contendo uma inclusão, e considerando contato perfeito entre a inclusão e a matriz, tem-se que o procedimento descrito acima é análogo e chega-se ao mesmo resultado dado por (4.23).

## 5 Aplicação de Métodos de Homogeneização no Estudo de Compósitos Elásticos

Apresentam-se neste capítulo alguns exemplos de aplicação do MHA em problemas de interesse na mecânica de compósitos, com o propósito de calcular as propriedades efetivas desses materiais.

### 5.1 Aplicação do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) em Problemas da Teoria da Elasticidade Linear Clássica

Prado et al. (2010) empregam o MHA na obtenção de fórmulas analíticas gerais para os coeficientes efetivos de um compósito elástico-linear com microestrutura periódica. Os principais aspectos desta investigação encontram-se abaixo, sendo que detalhes sobre o cálculo dos coeficientes efetivos encontram-se no apêndice do artigo supracitado.

#### 5.1.1 Equações Governantes do Problema Homogeneizado

Seja um corpo elástico-linear, anisotrópico, heterogêneo, provido de uma estrutura periódica. Este corpo ocupa uma região  $\mathcal{B}$  limitada e aberta do espaço Euclidiano tridimensional, com um contorno  $\partial\mathcal{B}$  suave por partes. Um ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  tem coordenadas  $(X_1, X_2, X_3)$  em um sistema CCR fixo, conforme ilustrado na Fig. 10. Devido à estrutura periódica do compósito, identifica-se uma célula periódica ocupando uma região  $Y$ , conforme ilustrado no lado direito da Fig. 10. Esta região é formada pelas regiões  $R_i$ ,  $i = 1, 2$ , ocupadas por uma matriz e uma inclusão, respectivamente. Um ponto  $\mathbf{Y} \in Y$  tem coordenadas locais  $(Y_1, Y_2, Y_3)$ .

Sejam  $u_k$  as componentes do vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  no sistema de coordenadas cartesianas. Aqui, deseja-se achar os campos de deslocamento  $u_k$  que satisfaçam as

equações de equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \right) - b_i(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3, \quad (5.1)$$

$$u_k = 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}, \quad (5.2)$$

em que as componentes do tensor de elasticidade,  $C_{ijkl}$ , são funções reais  $\mathbf{Y}$ -periódicas definidas sobre  $\mathbf{Y}$  e as componentes da força de corpo,  $b_i(\mathbf{X})$ , são funções reais e suaves definidas sobre  $\mathcal{B}$ .

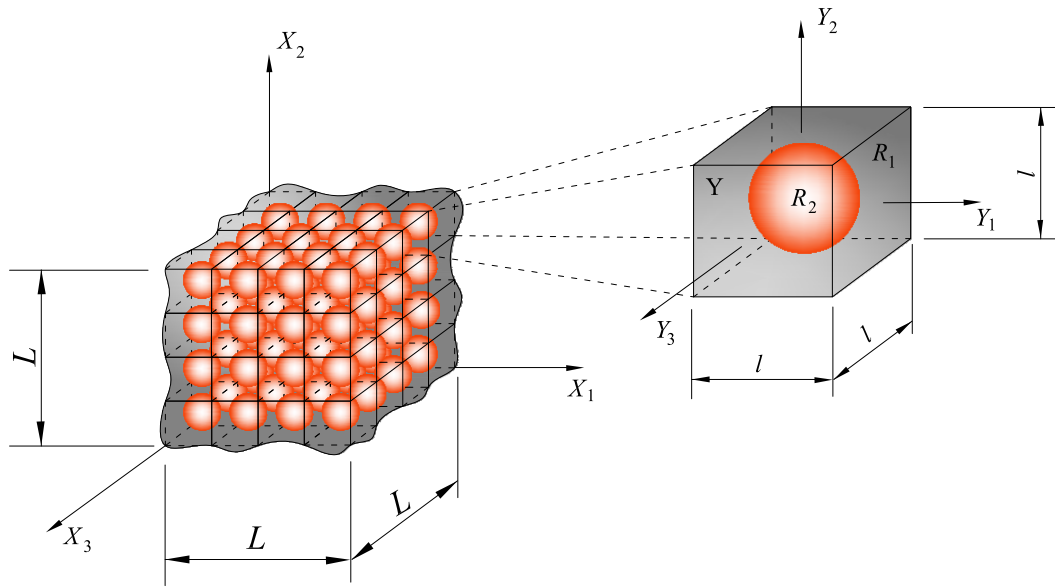


Figura 10: Esquerda: Compósito com estrutura periódica. Direita: Célula periódica  $\mathbf{Y}$  com as regiões da matriz,  $R_1$ , e inclusão,  $R_2$ .

O MHA é um método multiescala que emprega variáveis global e local para descrever o comportamento de um sólido. A variável global, ou, lenta  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  está relacionada à variável local, ou rápida  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ , por meio de  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\varsigma$ , sendo  $\varsigma$  um parâmetro geométrico pequeno representando a razão entre um comprimento característico da célula periódica  $\mathbf{Y}$  e um comprimento característico de  $\mathcal{B}$ . No caso da ilustração da Fig. 10, tem-se que  $\varsigma = l/L$

Considerando a elasticidade linear de Green e as simetrias menores do tensor de elasticidade, é possível mostrar que os coeficientes do PVC dado por (5.1) e (5.2) satisfazem

$$C_{ijkl}(\mathbf{Y}) = C_{jikl}(\mathbf{Y}) = C_{ijlk}(\mathbf{Y}) = C_{klij}(\mathbf{Y}) \quad \forall \quad \mathbf{Y} \in \mathbf{Y}, \quad (5.3)$$

ou seja, a matriz que representa o tensor de elasticidade possui 21 coeficientes elásticos independentes. Além disso, o tensor de elasticidade é positivo definido, de modo que

$$\exists C(\mathbf{Y}) > 0, \forall \mathbf{Y} \in \mathbf{Y} : C_{ijkl}(\mathbf{Y})e_{kl}e_{ij} \geq C(\mathbf{Y})e_{kl}e_{kl}, \forall E_L = (e_{ij}) \in \mathbb{E}_3^s, \quad (5.4)$$

em que  $\mathbb{E}_3^s$  é o espaço das matrizes simétricas de ordem 3. Desta forma, o problema dado por (5.1) e (5.2) representa uma família de problemas para os quais a solução existe e é única para cada valor do parâmetro  $\varsigma$  (CIORANESCU; DONATO, 1999).

Os deslocamentos  $u_k$  que satisfazem (5.1) e (5.2) admitem a expansão assintótica

$$u_k = \varsigma^0 u_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \varsigma^1 u_k^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \varsigma^2 u_k^{(2)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \dots, \quad (5.5)$$

em que  $u_k^{(h)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , com  $h = 0, 1, 2, \dots$ , são funções  $\mathbf{Y}$ -periódicas com relação à variável rápida  $\mathbf{Y}$ .

Derivando (5.5) e aplicando a regra da cadeia, na expressão resultante, obtém-se

$$\frac{\partial u_k(X, \mathbf{Y})}{\partial X_l} = \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial X_l} + \varsigma^{-1} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial Y_l} + \varsigma \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_l} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial Y_l} + \varsigma^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial X_l} + \varsigma \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial Y_l} + \dots \quad (5.6)$$

Em (5.6), utilizou-se  $\partial Y_i / \partial X_j = 1/\varsigma$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Substituindo (5.6) em (5.1) e lembrando que o operador divergente é linear, resulta

$$b_i(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma^{-1} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_l} \right) + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma^2 \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial Y_l} \right) + \dots \quad (5.7)$$

Aplicando novamente a regra da cadeia em(5.7), tem-se

$$b_i(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma^{-1} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma^{-1} \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma^{-2} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_l} \right) + \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_l} \right) + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma^{-1} \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial Y_l} \right) + \varsigma^2 \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial X_l} \right) + \varsigma \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial Y_l} \right) + \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial Y_l} \right) + \dots \quad (5.8)$$

Definindo o operador

$$L_{\alpha\beta} \varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( C_{ijkl} \left( \frac{\mathbf{X}}{\varsigma} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_l} \varphi \right), \quad (5.9)$$

pode-se reescrever (5.8) de forma compacta como

$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{X}) = & L_{XX}u_k^{(0)} + \varsigma^{-1}L_{YX}u_k^{(0)} + \varsigma^{-1}L_{XY}u_k^{(0)} + \varsigma^{-2}L_{YY}u_k^{(0)} + \varsigma L_{XX}u_k^{(1)} + L_{YX}u_k^{(1)} + \\ & + L_{XY}u_k^{(1)} + \varsigma^{-1}L_{YY}u_k^{(1)} + \varsigma L_{XX}u_k^{(2)} + \varsigma L_{YX}u_k^{(2)} + \varsigma L_{XY}u_k^{(2)} + L_{YY}u_k^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agrupando os termos com iguais potências em  $\varsigma$  em (5.10), tem-se

$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{X}) = & \varsigma^{-2}L_{YY}u_k^{(0)} + \varsigma^{-1} \left( L_{YY}u_k^{(1)} + L_{XY}u_k^{(0)} + L_{YX}u_k^{(0)} \right) + \\ & + \varsigma^0 \left( L_{YY}u_k^{(2)} + L_{XY}u_k^{(1)} + L_{YX}u_k^{(1)} + L_{XX}u_k^{(0)} \right) + O(\varsigma) + \dots \end{aligned} \quad (5.11)$$

Fazendo  $\varsigma \rightarrow 0$  em (5.11), obtém-se um sistema de equações para a determinação das funções  $u_k^{(h)}$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$ , dado por

$$L_{YY}u_k^{(0)} = 0, \quad (5.12)$$

$$L_{YY}u_k^{(1)} = -L_{XY}u_k^{(0)} - L_{YX}u_k^{(0)}, \quad (5.13)$$

$$L_{YY}u_k^{(2)} = -L_{XY}u_k^{(1)} - L_{YX}u_k^{(1)} - L_{XX}u_k^{(0)} + f_i. \quad (5.14)$$

As expressões (5.12)-(5.14) representam uma sequência recorrente de PVCs locais, isto é, PVCs definidos sobre a célula periódica  $Y$ , a partir dos quais se elimina a oscilação rápida do problema original e obtém-se a equação do problema homogeneizado juntamente com as expressões dos coeficientes efetivos.

Para o tratamento desta sequência, introduz-se o operador média de uma função  $Y$ -periódica  $g : \mathcal{B} \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$\langle g \rangle(\mathbf{X}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) dY, \quad (5.15)$$

em que  $|Y|$  é o volume de  $Y$ , considerado unitário neste trabalho. Além disso, emprega-se o lema apresentado a seguir, que é um caso particular de um resultado mais geral apresentado no apêndice do livro de Bakhvalov e Panasenko (1989).

**Lema 5.1.** Sejam  $N = (N_i(\mathbf{Y}))$ ,  $F = (F_i(\mathbf{Y}))$ ,  $C_{ijkl}(\mathbf{Y})$  funções suaves e  $Y$ -periódicas, com as componentes  $C_{ijkl}(\mathbf{Y})$  correspondendo a um tensor de elasticidade simétrico e positivo definido. O sistema  $L_{YY}N = F$  tem solução na classe das funções  $Y$ -periódicas se e somente se  $\langle F_i \rangle = 0$ . Segue que  $N = \tilde{N} + C$ , em que  $\tilde{N}$  é uma solução de  $L_{YY}\tilde{N} = F$



com média nula e  $C$  é um vetor constante. Ao reescrever (5.12) juntamente com (5.9), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial Y_l} \right) = 0. \quad (5.16)$$

Em razão da linearidade de (5.16) e pelo Lema 5.1, tem-se que

$$u_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = y_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + v_k(\mathbf{X}), \quad (5.17)$$

em que  $y_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  é uma solução de (5.16) com média nula e  $v_k$  não depende da variável  $\mathbf{Y}$ . Em particular, toma-se  $y_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ , resultando em  $u_k^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = v_k(\mathbf{X})$ . Deste modo, eliminou-se a oscilação rápida dos coeficientes  $C_{ijkl}$ .

Do parágrafo anterior segue que  $L_{XY}u_k^{(0)} = 0$ . Portanto, (5.13) reduz-se a

$$L_{YY}u_k^{(1)} = -L_{YX}u_k^{(0)}. \quad (5.18)$$

Reescrevendo (5.18) em sua forma expandida, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial u_k^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{\partial Y_l} \right) = -\frac{\partial}{\partial Y_j} C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_k(\mathbf{X})}{\partial X_l}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Em virtude da linearidade de (5.19), emprega-se o método de separação de variáveis (WEINBERGER, 1965) para escrever a solução  $u_k^{(1)}$  na forma

$$u_k^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = N_{k(pq)}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_p(\mathbf{X})}{\partial X_q}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.20)$$

em que  $N_{k(pq)}(\mathbf{Y})$  são funções  $Y$ -periódicas.

Substituindo (5.19) em (5.20), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_{k(pq)}(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} \frac{\partial v_p(\mathbf{X})}{\partial X_q} + C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_k(\mathbf{X})}{\partial X_l} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.21)$$

Rearranjando os índices em (5.21) e reescrevendo a expressão resultante, chega-se

a

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_{k(pq)}(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} + C_{ijpq}(\mathbf{Y}) \right) \frac{\partial v_p(\mathbf{X})}{\partial X_q} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.22)$$

Escolhe-se agora  $N_k(pq)(\mathbf{Y})$ ,  $Y$ -periódica,  $p, q = 1, 2, 3$ . tal que

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_k(pq)}{\partial Y_l} + C_{ijpq}(\mathbf{Y}) \right) = 0. \quad (5.23)$$

Esta escolha pode ser realizada porque o sólido possui uma distribuição  $Y$ -periódica de células sob condições de deslocamentos periódicos.

As expressões (5.23) só dependem da variável  $\mathbf{Y}$  e, portanto, permitem a formulação de um PVC local, o qual consiste em achar as funções  $Y$ -periódicas  $N_k(pq)$ ,  $p, q = 1, 2, 3$ , que satisfaçam o sistema de equações (5.23).

Observa-se do exposto acima que o MHA conduz à formulação forte dos problemas locais sobre a célula periódica. Por meio da solução destes problemas é possível determinar as componentes elásticas efetivas do tensor de elasticidade, que são as propriedades mecânicas de um material homogeneizado. Em geral, este material homogeneizado é anisotrópico, mesmo quando todas as fases são isotrópicas.

Para estudar a existência de soluções  $Y$ -periódicas de (5.18), define-se

$$F \equiv -L_{YX} u_k^{(0)}. \quad (5.24)$$

Utilizando (5.9) e lembrando que  $u_k^{(0)}$  depende somente de  $\mathbf{X}$ , escreve-se (5.24) na forma expandida

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = - \frac{\partial C_{ijkl}(\mathbf{Y})}{\partial Y_j} \frac{\partial u_k^{(0)}(\mathbf{X})}{\partial X_l}. \quad (5.25)$$

Aplicando o operador média em (5.25), obtém-se

$$\langle F \rangle(\mathbf{X}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} C_{ijkl} \right\rangle \left( - \frac{\partial v_k(\mathbf{X})}{\partial X_l} \right). \quad (5.26)$$

Utilizando agora o Teorema da Divergência sobre o primeiro termo do lado direito de (5.26), lembrando que  $|Y| = 1$  e que os coeficientes  $C_{ijkl}$  são  $Y$ -periódicos, obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} C_{ijkl} \right\rangle = \int_{\partial Y} C_{ijkl} \eta_j ds = 0, \quad (5.27)$$

em que  $\eta_j$  são as componentes do versor normal à superfície de  $Y$ . Segue, portanto, de (5.26) que  $\langle F \rangle(\mathbf{X}) = 0$ , para  $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}$ . Pelo Lema 5.1, a expressão (5.27) possui solução na classe das funções  $Y$ -periódicas.

A fim de investigar a expressão (5.14), redefine-se  $F$  como

$$F \equiv -L_{XY}u_k^{(1)} - L_{YX}u_k^{(1)} - L_{XX}u_k^{(0)} + b_i. \quad (5.28)$$

Utilizando as expressões (5.9) e (5.20), reescreve-se (5.28) na forma expandida

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial Y_l} \left( N_{k(pq)}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_p(\mathbf{X})}{\partial X_q} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial}{\partial X_l} \left( N_{k(pq)}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_p(\mathbf{X})}{\partial X_q} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial v_k(\mathbf{X})}{\partial X_l} \right) + b_i(\mathbf{X}). \quad (5.29)$$

Lembrando da expressão (5.17) que  $v_p$  depende somente de  $\mathbf{X}$ , obtém-se

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_{k(pq)}(Y)}{\partial Y_l} \frac{\partial^2 v_p(\mathbf{X})}{\partial X_j \partial X_q} - \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( (C_{ijkl} N_{k(pq)}) (\mathbf{Y}) \frac{\partial^2 v_p(\mathbf{X})}{\partial X_l \partial X_q} \right) - C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial^2 v_k(\mathbf{X})}{\partial X_j \partial X_l} + b_i(\mathbf{X}). \quad (5.30)$$

Rearranjando os índices da expressão (5.30), pode-se escrevê-la na forma

$$F \equiv - \left( C_{ijkl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_{k(pq)}(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} + \frac{\partial}{\partial Y_m} (C_{imkj}(\mathbf{Y}) N_{k(pq)}(\mathbf{Y})) + C_{ijpq}(\mathbf{Y}) \right) \frac{\partial^2 v_p(\mathbf{X})}{\partial X_j \partial X_q} + b_i(\mathbf{X}). \quad (5.31)$$

Aplicando o operador média em ambos os lados de (5.31), tem-se

$$\langle F \rangle \equiv - \left\langle C_{ijkl} \frac{\partial N_{k(pq)}}{\partial Y_l} + C_{ijpq} \right\rangle \frac{\partial^2 v_p(\mathbf{X})}{\partial X_j \partial X_q} + \langle b_i(\mathbf{X}) \rangle, \quad (5.32)$$

em que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_m} (C_{imkj} N_{k(pq)}) \right\rangle = 0, \quad (5.33)$$

pois  $C_{imkj} N_{k(pq)}$  é  $Y$ -periódico para cada  $i$ .

A condição necessária e suficiente para que (5.32) admita solução na classe das funções  $Y$ -periódicas é

$$\widehat{C}_{ijpq} \frac{\partial^2 v_p(\mathbf{X})}{\partial X_j \partial X_q} = \langle b_i(\mathbf{X}) \rangle, \quad (5.34)$$

em que

$$\widehat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijkl} \frac{\partial N_{k(pq)}}{\partial Y_l} + C_{ijpq} \right\rangle \quad (5.35)$$

são as expressões gerais para os coeficientes efetivos. O problema homogeneizado correspondente consiste em achar  $v_p : \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = 1, 2, 3$ , que satisfaçam o sistema de equações (5.34) juntamente com condições de contorno compatíveis com (5.2).

Resultados sobre a proximidade entre a solução  $\mathbf{u}$  do problema original, dado por

(5.1) e (5.2), e a solução  $\mathbf{u}$  do problema homogeneizado dado por (5.34) e (5.35), podem ser consultados em Bakhvalov e Panasenko (1989). Estes autores mostram, utilizando o princípio do máximo generalizado para equações elípticas, que

$$\|\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}\|_{C[\bar{\mathcal{B}}]} = O(\varsigma), \quad (5.36)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_0\|_{C[\bar{\mathcal{B}}]} = O(\varsigma), \quad (5.37)$$

em que  $C[\bar{\mathcal{B}}]$  é o espaço das funções contínuas em  $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$ ,  $\|\bullet\|_e \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\mathcal{B}}} |\bullet|$  e  $O$  é um símbolo de ordem, ou, símbolo de Landau que satisfaz  $\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \left| \frac{O(\varsigma)}{\varsigma} \right| = 0$ .

### 5.1.2 Coeficientes efetivos $\widehat{C}_{ijpq}$

Obtém-se agora as expressões analíticas dos coeficientes efetivos para os problemas  $L_{pq}$  definidos em (5.12)-(5.14).

Sendo os coeficientes efetivos de um sólido elástico-linear dados por (5.35), estes podem ser reescritos na forma expandida como

$$\widehat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ij11} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial Y_1} + C_{ij12} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial Y_2} + C_{ij13} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial Y_3} + C_{ij21} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial Y_1} + C_{ij22} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial Y_2} + C_{ij23} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial Y_3} + C_{ij31} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial Y_1} + C_{ij32} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial Y_2} + C_{ij33} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial Y_3} \right\rangle. \quad (5.38)$$

Conforme será demonstrado na Seção 5.1.3, o tensor dos coeficientes efetivos conserva suas propriedades de simetria, embora se obtenha a partir de (5.38) expressões diferentes para um mesmo resultado. Isto ocorre porque, por exemplo, as funções  $N_{k(13)}$  e  $N_{k(33)}$  são soluções de problemas locais diferentes, ou seja,  $N_{k(13)}$  é solução do problema  $L_{13}$  enquanto que  $N_{k(33)}$  é solução do problema  $L_{33}$ . Desta forma, é possível controlar os resultados dos cálculos numéricos para cada material compósito de interesse, pois a partir de problemas diferentes com fórmulas diferentes deve-se obter os mesmos resultados. Este fato mostra a possibilidade de autocontrole dos cálculos dos coeficientes efetivos obtidos com o emprego do MHA.

### 5.1.3 Conservação das Propriedades de Simetria e de Positividade do Tensor de Elasticidade Efetivo

Demonstra-se agora a conservação das propriedades de simetria e de positividade do tensor de elasticidade efetivo com componentes  $\widehat{C}_{ijpq}$  para os problemas  $L_{pq}$ . A demonstração segue o desenvolvimento apresentado nos trabalhos de Bakhvalov e Panasenko

(1989) e Sixto (2010).

Demonstra-se que  $\widehat{C}_{ijpq} = \widehat{C}_{jipq}$ ,  $\widehat{C}_{ijpq} = \widehat{C}_{ijqp}$  e  $\widehat{C}_{ijpq} = \widehat{C}_{pqij}$ , com  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq p \leq 3$ . Para isto, introduz-se a matriz

$$A_{jq}(\mathbf{Y}) = (C_{ijpq})_{i,p=1,2,3}, \text{ ou seja, } A_{jq}(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} C_{1j1q} & C_{1j2q} & C_{1j3q} \\ C_{2j1q} & C_{2j2q} & C_{2j3q} \\ C_{3j1q} & C_{3j2q} & C_{3j3q} \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Pela expressão do coeficiente efetivo, dada em (5.35), e utilizando uma das simetrias menores do tensor de elasticidade,  $C_{ijpq} = C_{jipq}$ , tem-se

$$\widehat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ijsr} \frac{\partial N_{s(pq)}}{\partial Y_r} \right\rangle = \left\langle C_{jipq} + C_{jisr} \frac{\partial N_{s(pq)}}{\partial Y_r} \right\rangle = \widehat{C}_{jipq}. \quad (5.40)$$

Utilizando agora a outra simetria menor,  $C_{ijpq} = C_{ijqp}$ , juntamente com  $u_k^{(1)} = N_{k(pq)}(\mathbf{Y}) \partial v_p(\mathbf{X}) / \partial X_q = N_{k(qp)}(\mathbf{Y}) \partial v_q(\mathbf{X}) / \partial X_p$ , resulta em

$$\widehat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ijsr} \frac{\partial N_{s(pq)}}{\partial Y_r} \right\rangle = \left\langle C_{ijqp} + C_{ijrs} \frac{\partial N_{r(qp)}}{\partial Y_s} \right\rangle = \widehat{C}_{ijqp}, \quad (5.41)$$

em que lembramos da Seção 5.1 que  $N_{s(pq)}(\mathbf{Y})$  são funções  $Y$ -periódicas.

Para mostrar a simetria maior,

$$\widehat{C}_{ijpq} = \widehat{C}_{pqij}, \quad (5.42)$$

utiliza-se (5.35) juntamente com (5.39) e define-se  $N_s(\mathbf{Y}) \equiv N_{s(pq)}(\mathbf{Y})$ . Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{rs}(\mathbf{Y}) &= \left\langle A_{rl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_s(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} + A_{rs}(\mathbf{Y}) \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{rl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial N_s(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} + A_{rl}(\mathbf{Y}) \frac{\partial Y_s}{\partial Y_l} \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{rl}(\mathbf{Y}) \left( \frac{\partial (N_s(\mathbf{Y}) + Y_s I)}{\partial Y_l} \right) \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{rl}(\mathbf{Y}) \left( \frac{\partial M_s(\mathbf{Y})}{\partial Y_l} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.43)$$

em que  $M_s(\mathbf{Y}) \equiv N_s(\mathbf{Y}) + Y_s I$  e  $I$  é a matriz identidade 3 por 3.

Dado  $M_s = (m_\gamma^{s\beta})$ , os elementos da matriz  $\widehat{A}_{rs}$  podem ser escritos como

$$\widehat{C}_{irks} = \left\langle C_{irpq} \frac{\partial M_p(sk)}{\partial Y_q} \right\rangle, \quad (5.44)$$

ou, ainda,

$$\widehat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}}{\partial Y_q} \frac{\partial Y_r}{\partial Y_t} \delta_{il} \right\rangle, \quad (5.45)$$

em que  $\delta_{il}$  é o delta de Kronecker.

Por outro lado, tendo em vista a definição de  $M_s$  acima, a expressão (5.23) toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jq}(\mathbf{Y}) \frac{\partial M_s(\mathbf{Y})}{\partial Y_q} \right) = 0. \quad (5.46)$$

Multiplicando agora (5.46) por uma função teste  $\varphi(\mathbf{Y})$ , matriz 3 por 3, Y-periódica, e aplicando o operador média, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jl} \frac{\partial M_s}{\partial Y_l} \right) \varphi \right\rangle = 0. \quad (5.47)$$

Observa-se que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \right) \varphi \right\rangle + \left\langle A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \frac{\partial \varphi}{\partial Y_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \varphi \right) \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \right) \varphi \right\rangle = 0 \text{ devido a (5.47) e}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_j} \left( A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \varphi \right) \right\rangle = 0 \text{ devido à periodicidade.}$$

Assim,

$$\left\langle A_{jq} \frac{\partial M_s}{\partial Y_q} \frac{\partial \varphi}{\partial Y_j} \right\rangle = 0, \quad (5.48)$$

ou, em componentes,

$$\left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}}{\partial Y_q} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial Y_t} \right\rangle = 0. \quad (5.49)$$

Somando (5.45) e (5.49), obtém-se

$$\widehat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}}{\partial Y_q} \frac{\partial (\varphi_{il} + Y_r \delta_{il})}{\partial Y_t} \right\rangle. \quad (5.50)$$

Fazendo  $\varphi = N_r^T$  e lembrando que  $M_s \equiv N_s + Y_s I$ , tem-se

$$\widehat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}}{\partial Y_q} \frac{\partial m_l^{ri}}{\partial Y_t} \right\rangle = \left\langle C_{pqlt} \frac{\partial m_p^{ri}}{\partial Y_t} \frac{\partial m_l^{sk}}{\partial Y_q} \right\rangle = \widehat{C}_{ksir}. \quad (5.51)$$

Deste modo, demonstram-se todas as simetrias do tensor de elasticidade efetivo, ou seja,

$$\widehat{C}_{ijpq} = \widehat{C}_{jipq} = \widehat{C}_{ijqp} = \widehat{C}_{pqij}. \quad (5.52)$$

Demonstra-se agora a condição de positividade

$$(\widehat{A}_{rs}\eta_r, \eta_s) \geq \psi_1 (\eta_r, \eta_s), \quad (5.53)$$

em que  $\widehat{A}_{rs}$  é a matriz dos coeficientes efetivos definida em (5.39) e  $\psi_1 > 0$ . Explicitamente, tem-se

$$\widehat{C}_{irks}\eta_{ks}\eta_{ir} \geq \psi_1\eta_{ir}\eta_{ir}, \quad (5.54)$$

em que  $\eta_{ir}$  são os elementos de uma matriz simétrica não-nula arbitrária. Logo, segue de (5.50) que

$$\widehat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}(\mathbf{Y})}{\partial Y_q} \frac{\partial m_l^{ri}(\mathbf{Y})}{\partial Y_t} \right\rangle. \quad (5.55)$$

Para demonstrar (5.54), prova-se que

$$\widehat{C}_{irks}\eta_{ks}\eta_{ir} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial \eta_{ks}m_p^{sk}}{\partial Y_q} \frac{\partial \eta_{ir}m_l^{ri}}{\partial Y_t} \right\rangle \geq \psi_1\eta_{ir}\eta_{ir}. \quad (5.56)$$

Dado que a matriz  $A_{rs}(\mathbf{Y})$  é positiva definida, tem-se que

$$C_{ltpq} \frac{\partial \eta_{ks}m_p^{sk}(\mathbf{Y})}{\partial Y_q} \frac{\partial \eta_{ir}m_l^{ri}(\mathbf{Y})}{\partial Y_t} \geq \psi_1 \sum_{i,l} \left( \frac{\partial}{\partial Y_t} (\eta_{is}m_l^{ri}) \right). \quad (5.57)$$

Utilizando (5.56)-(5.57) e aplicando a desigualdade de Cauchy-Buniakowski-Schwarz, ( $\langle fg \rangle^2 \leq \langle f \rangle^2 \langle g \rangle^2$ ), resulta

$$\widehat{C}_{irks}\eta_{ks}\eta_{ir} \geq \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial Y_t} (\eta_{ir}m_l^{ri}) \right)^2 \right\rangle \geq \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_t} (\eta_{ir}m_l^{ri}) \right\rangle^2. \quad (5.58)$$

Dado que  $m_l^{ri} = \eta_l^{ri}$  se  $l \neq i$ ,  $m_l^{ri} = \eta_l^{ri} + Y_r$  se  $l = i$  e  $N_r(Y)$  é uma função  $Y$ -periódica, tem-se que  $\left\langle \frac{\partial}{\partial Y_t} (\eta_{ir}\eta_l^{ri}) \right\rangle = 0$ . Logo, o lado direito de (5.58) resulta em

$$\begin{aligned} \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_t} (n_{ir}m_l^{ri}) \right\rangle^2 &= \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial Y_t} (n_{ir}Y_r) \right\rangle^2, \\ &= \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle n_{ir} \frac{\partial Y_r}{\partial Y_t} \right\rangle^2, \\ &= \psi_1 \sum_{j,\tau} (n_{ir})^2, \\ &= \psi_1 n_{ir} n_{ir}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Portanto,

$$\widehat{C}_{irks}\eta_{ks}\eta_{ir} \geq \psi_1\eta_{ir}\eta_{ir}, \quad (5.60)$$

o que prova a positividade do tensor de elasticidade efetivo  $\widehat{C}$  dado por (5.35).

Neste estudo aplicou-se o MHA para a obtenção das expressões dos coeficientes efetivos de um compósito, modelado por um PVC definido em um meio tridimensional, anisotrópico e heterogêneo da Teoria da Elasticidade Linear. A solução do problema foi expressa em termos de uma expansão assintótica. Esta expansão, ao ser substituída no problema original, gera uma sequência recorrente de problemas auxiliares que conduzem à formulação dos problemas locais, ou, problemas elásticos na célula periódica. As soluções destes problemas locais permitem determinar as expressões dos coeficientes efetivos e a equação do problema homogeneizado. Determinou-se a forma geral dos coeficientes do tensor de elasticidade efetivo, os quais representam as propriedades mecânicas do material homogeneizado. Além disto, demonstrou-se a conservação das propriedades de simetria e de positividade deste tensor de elasticidade.

#### 5.1.4 Comportamento Efetivo de Laminado Elástico-Linear

Considera-se o problema de um laminado composto por fases periódicas feitas de material elástico, linear e isotrópico e aplica-se o MHA para obter a solução do problema homogeneizado correspondente. Na Seção 6.1 mostra-se que a solução obtida numericamente utilizando o MEF converge para a solução do problema homogeneizado obtido via MHA quando o número de lâminas  $n$  tende ao infinito. A investigação do problema linear serve de base para a investigação de problemas não-lineares considerando as fases formadas por materiais hiperelásticos.

Considere um cilindro reto ocupando a região  $\mathcal{B} = (0.5) \times (0.5) \times (1.0) \subset \mathbb{R}^3$ , lembrando da Seção 3, um ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  é dado pelas coordenadas cartesianas retangulares  $(X_1, X_2, X_3)$ . O cilindro é um laminado bifásico contendo uma distribuição periódica de  $n$  lâminas elásticas, lineares e isotrópicas e está submetido a um ensaio de tração uniaxial conforme ilustrado na Fig 11. Na ausência de forças de corpo, segue de (3.21) juntamente com (4.2) e (4.3) que o problema correspondente consiste em achar o deslocamento  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  que satisfaça as equações de equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left( \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right) = 0 \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.61)$$

em que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial u_i / \partial X_i$  e as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{(1)}, \quad \mu = \mu^{(1)}, & \text{fase 1,} \\ \lambda &= \lambda^{(2)}, \quad \mu = \mu^{(2)}, & \text{fase 2,} \end{aligned} \quad (5.62)$$



juntamente com as condições de contorno

$$\begin{cases} u_i = 0, & T_{ij} = 0, & j \neq i, & \text{sobre } X_i = 0, & i, j = 1, 2, 3, \\ T_{ij} = 0 & & & \text{sobre } X_i = 0.5, & i = 1, 2; j = 1, 2, 3, \\ T_{3j} = 0, & j = 1, 2, & T_{33} = T & \text{sobre } X_3 = 1.0, \end{cases} \quad (5.63)$$

em que  $T$  é um valor conhecido.

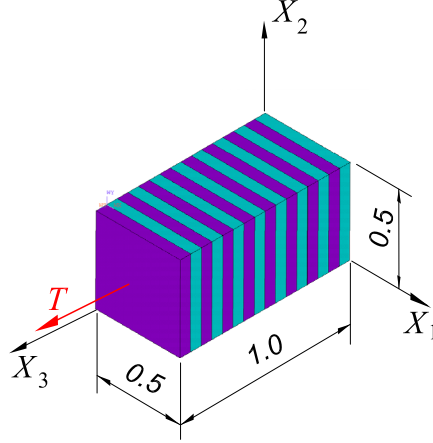


Figura 11: Configuração de referência do compósito bilaminado constituído de material elástico-linear.

Lembra-se da Seção 5.1.1 que o MHA consiste em expressar a solução  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) \equiv u_i(\mathbf{X}) \mathbf{e}_i$  de (5.61) a (5.63) como uma expansão assintótica da forma (5.5) em que  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\zeta$  é a variável local e  $\zeta$  é um parâmetro pequeno. O procedimento descrito naquela seção é geral e pode ser empregado aqui para calcular os coeficientes efetivos do bilaminado elástico-linear composto de fases homogêneas e isotrópicas. Neste sentido, o sistema de equações governantes do problema homogeneizado é dado por (5.34), na ausência das forças de corpo  $b_i(\mathbf{X})$ , e os coeficientes efetivos  $\hat{C}_{ijpq}$ ,  $i, j, p, q = 1, 2, 3$ , por (5.35).

Pode-se mostrar, segundo Pobodrya (1984), que estes coeficientes são as constantes elásticas de um sólido transversalmente isotrópico ocupando a região  $\mathcal{B}$ . Os valores não nulos destas constantes são dados por (POBEDRYA, 1984)

$$\begin{aligned} \hat{C}_{1111} &= \hat{C}_{2222} = \langle \lambda + 2\mu \rangle + \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle^{-1} \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 - \langle \lambda^2/(\lambda + 2\mu) \rangle, \\ \hat{C}_{3333} &= 1/ \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle, & \hat{C}_{1133} &= \hat{C}_{2233} = \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle / \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle, \\ \hat{C}_{1212} &= 1/2 \left( \hat{C}_{1111} - \hat{C}_{1122} \right) = \langle \mu \rangle, & \hat{C}_{1313} &= \hat{C}_{2323} = 1/ \langle \mu \rangle, \end{aligned} \quad (5.64)$$

em que  $\langle \cdot \rangle$  é o operador da média definido em (5.15).

Aqui, o problema homogeneizado consiste em determinar o deslocamento  $\mathbf{u}_0 =$

$(u_{01}, u_{02}, u_{03})$  que satisfaça as equações de equilíbrio

$$\widehat{C}_{ijkl} \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial X_j \partial X_l} = 0 \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.65)$$

juntamente com as condições de contorno

$$\begin{cases} u_{0i} = 0, & \widehat{T}_{0ij} = 0, \quad j \neq i, & \text{sobre } X_i = 0, & i, j = 1, 2, 3, \\ \widehat{T}_{0ij} = 0 & & \text{sobre } X_i = 0.5, & i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \\ \widehat{T}_{03j} = 0, \quad j = 1, 2, & \widehat{T}_{033} = T & \text{sobre } X_3 = 1.0, \end{cases} \quad (5.66)$$

em que  $\widehat{T}_{0ij} = \widehat{C}_{ijkl} \frac{\partial u_{0k}}{\partial X_l}$  e  $T$  é o valor conhecido em (5.63).

O problema homogeneizado (5.65) e (5.66) possui solução da forma

$$u_{0i} = \varepsilon_i X_i, \quad (\text{sem soma sobre } i) \quad (5.67)$$

em que  $\varepsilon_i$  é facilmente determinado das condições de contorno e dado por

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\widehat{C}_{1133} T}{2 \left( \widehat{C}_{1133} \right)^2 - \left( \widehat{C}_{1122} + \widehat{C}_{2222} \right) \widehat{C}_{3333}}, \quad (5.68)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\left( \widehat{C}_{1122} + \widehat{C}_{2222} \right) T}{-2 \left( \widehat{C}_{1133} \right)^2 - \left( \widehat{C}_{1122} + \widehat{C}_{2222} \right) \widehat{C}_{3333}}.$$

Os resultados obtidos para as tensões e deformações médias em  $X_3 = 1.0$  são apresentados na Fig. 16 da Seção 6.1 juntamente com resultados obtidos da solução aproximada via MEF do problema (5.61) a (5.63) utilizando um número crescente de lâminas. A obtenção desta solução é descrita na Seção 6.1.

## 5.2 Aplicação do MHA no Estudo do Comportamento Efetivo de Laminado Elástico Não-Linear

Considera-se um laminado obtido a partir de uma distribuição periódica de células na direção  $X_1$ , na qual cada célula é constituída por duas lâminas planas consecutivas de mesma altura  $H_2$  e largura  $H_3$ , e comprimentos  $L_1$  and  $L_2$  em uma configuração de referência do corpo, como ilustrado na Fig. 12. Tem-se então que as configurações de

referência do laminado e de suas células periódicas são dadas por  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ , e  $\Omega \equiv \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , respectivamente, em que  $\mathcal{B}_r$  e  $\Omega_r$ ,  $r = 1, 2$ , são as configurações de referência não deformadas da fase  $r$  do laminado e suas células periódicas, respectivamente.

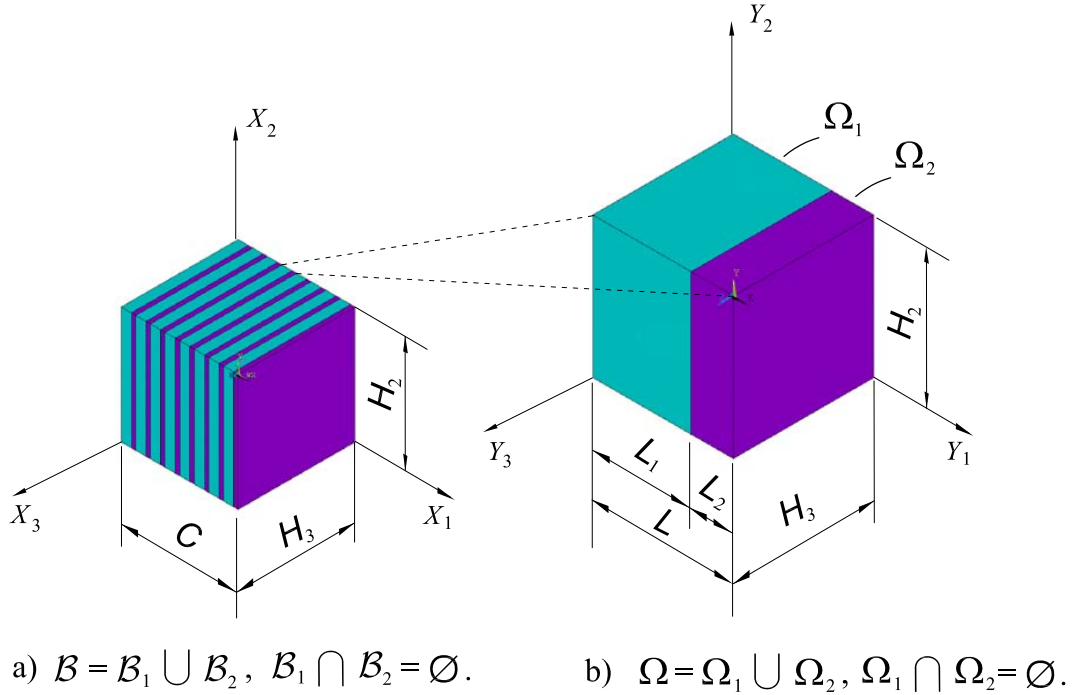


Figura 12: Configuração de referência de a) Laminado; b) Célula periódica.

Observa-se da Fig. 12 que  $L$  é o comprimento da célula periódica e  $C$  é um comprimento característico do composto bifásico, que é muito maior do que  $L$ . Então, introduz-se novamente um parâmetro geométrico pequeno  $\varsigma \triangleq L/C$  e distingue-se duas escalas espaciais, uma das quais é global e relacionada à variável lenta  $\mathbf{X}$  e a outra é local e relacionada à variável rápida  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\varsigma$ . Deseja-se encontrar uma solução do problema de valor de contorno estabelecido na Seção 3 para uma microestrutura refinada,  $\varsigma \ll 1$ , utilizando a expansão em série de potências

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1) \triangleq \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \varsigma^p \mathbf{u}^p(\mathbf{X}, Y_1), \quad (5.69)$$

em que  $\mathbf{u}^0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é continuamente diferenciável e representa o campo de deslocamento em um corpo homogeneizado e  $\mathbf{u}^p : \mathcal{B} \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , é continuamente diferenciável em ambos  $\mathcal{B}$  e  $(0, L_1) \cup (L_1, L)$ , é uma função periódica de  $Y_1 \in (0, L)$ , e representa uma correção de ordem  $O(\varsigma^p)$  para a aproximação de ordem zero  $\mathbf{u}^0$ . Na interface  $Y_1 = L_1$ ,  $\mathbf{u}^p$  é contínuo. Devido a periodicidade  $\Omega$  de  $\partial \mathbf{u}^p(\bullet, Y_1)/\partial Y_1$ , tem-

se que  $\langle \partial \mathbf{u}^p / \partial Y_1 \rangle = 0$ , em que  $\langle \bullet \rangle \triangleq \int_0^L (\bullet) dY_1 / L$  é o operador da média em  $(0, L)$ , conforme já definido anteriormente na Seção 5.1.1. Para evitar campos de translação rígida, impõe-se também  $\langle \mathbf{u}^p \rangle = 0$ . Substitui-se então (5.69) em (3.1), e utilizando a regra da cadeia, obtém-se a expansão em série de potências

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1) \triangleq \mathbf{F}^0(\mathbf{X}) + \varsigma^p \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, Y_1), \quad (5.70)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^0(\mathbf{X}, Y_1) &\triangleq 1 + \text{grad } \mathbf{u}^0(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, Y_1)}{\partial Y_1} \otimes \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, Y_1) &\triangleq \text{grad } \mathbf{u}^p(\mathbf{X}, Y_1) + \frac{\partial \mathbf{u}^{p+1}(\mathbf{X}, Y_1)}{\partial Y_1} \otimes \mathbf{e}_1, \end{aligned} \quad (5.71)$$

$p = 1, 2, \dots$ , com  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  sendo uma base ortonormal fixada para o sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares.

Substituindo (5.70) em (3.16) e considerando a expansão em série de Taylor da expressão resultante  $\mathbf{F}^0$  para  $\varsigma$  pequeno, obtém-se

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1) \triangleq \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) + \varsigma \mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1) + O(\varsigma^2), \quad (5.72)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) &\triangleq \left. \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{F}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1), Y_1)}{\partial \mathbf{F}^\varsigma} \right|_{\varsigma=0}, \\ \mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1) &\triangleq \left. \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(\mathbf{F}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1), Y_1)}{\partial \mathbf{F}^\varsigma \partial \mathbf{F}^\varsigma} \right|_{\varsigma=0} \mathbf{F}^1(\mathbf{X}, Y_1). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Em (5.73),  $\tilde{\phi}(\mathbf{F}^\varsigma, Y_1) = \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  é a densidade de energia armazenada calculada em  $\mathbf{F}^\varsigma$  para um ponto material na coordenada  $Y_1$  na célula periódica  $\Omega$ .

Substituindo  $\mathbf{P}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1)$ , dado por (5.72), na equação de equilíbrio (3.18) e utilizando a regra da cadeia, obtém-se as séries infinitas

$$\begin{aligned} &\varsigma^{-1} \frac{\partial (\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) \mathbf{e}_I)}{\partial Y_1} \\ &+ \varsigma^0 \left[ \text{Div } \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) + \frac{\partial (\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1) \mathbf{e}_I)}{\partial Y_1} \right] + O(\varsigma) = 0, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ,  $Y_1 \in (0, L_1) \cup (L_1, L)$ . Multiplicando estas séries por  $\varsigma$  e fazendo  $\varsigma \rightarrow 0$ , obtém-se a equação diferencial  $\partial (\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) \mathbf{e}_I) / \partial Y_1 = 0$  para  $Y_1 \in (0, L_1) \cup (L_1, L)$  um  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  fixado, que produz um sistema de três equações não-lineares para a determinação das três componentes de  $\partial \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, Y_1) / \partial Y_1$ . Admitindo-se que uma solução para este sistema existe, ela pode ser da forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, Y_1)}{\partial Y_1} = \left[ \chi_1(Y_1) - \frac{c_1}{c_2} \chi_2(Y_1) \right] \mathbf{g}_1(\mathbf{X}), \quad (5.75)$$

em que tem-se utilizado a periodicidade  $\Omega$  de  $\partial \mathbf{u}^1(\bullet, Y_1) / \partial Y_1$ ,

$$\chi_1(Y_1) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } Y_1 \in (0, L_1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \chi_2(Y_1) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } Y_1 \in (L_1, L) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.76)$$

são funções indicadoras, e  $c_i \triangleq \langle \chi_i \rangle \equiv L_i/L$ ,  $i = 1, 2$ , é a fração de volume da  $i$ -ésima fase. Também  $\mathbf{g}_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é determinado da continuidade de carregamentos na interface  $Y_1 = L_1$ , o qual é da forma  $\mathbf{P}^\varsigma(\mathbf{X}, L_1^-) \mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^\varsigma(\mathbf{X}, L_1^+) \mathbf{e}_1$ , em que para  $\delta > 0$ . Segue dessa condição de continuidade que  $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^-) \mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^+) \mathbf{e}_1$ , produzindo um sistema de três equações não-lineares para a determinação das três componentes de  $\mathbf{g}_1(\mathbf{X})$ .

Para o próximo termo nas séries infinitas de potências de  $\varsigma$  dadas por (5.74), correspondendo a  $\varsigma^0$ , faz-se  $\varsigma \rightarrow 0$  e obtém-se a equação diferencial

$$\text{Div } \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) + \frac{\partial (\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1) \mathbf{e}_1)}{\partial Y_1} = \mathbf{0}, \quad (5.77)$$

$\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ ,  $Y_1 \in (0, L_1) \cup (L_1, L)$ , em que ambos  $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1)$  e  $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1)$  são dados por (5.73). Tomando a média de (5.77) e utilizando a periodicidade  $\Omega$  de  $\mathbf{u}^p$ ,  $p = 1, 2, \dots$ , obtém-se a *equação de equilíbrio homogeneizada*

$$\text{Div } \langle \mathbf{P}^0 \rangle = \mathbf{0} \quad \text{em } \mathcal{B}. \quad (5.78)$$

Dado que  $\mathbf{u}^1 : \mathcal{B} \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é conhecido da expressão (5.75) com  $\mathbf{g}_1(\mathbf{X})$  determinado da condição de carregamento  $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^-) \mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^+) \mathbf{e}_1$ , deseja-se encontrar um deslocamento cinematicamente admissível  $\mathbf{u}^0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaça a equação de equilíbrio homogeneizada (5.78) juntamente com a condição de contorno  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}$ . Evidentemente,

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{X}) = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad (5.79)$$

é uma solução deste *problema homogeneizado*, a qual é chamada de *solução principal*. Na Seção 6.2 apresentam-se resultados numéricos indicando que uma *solução secundária* bifurca da solução principal.

De agora em diante, assume-se que (5.79) está assegurada. Então, tem-se que  $\mathbf{g}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{g}$ , em que  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^3$  é constante. Segue-se então a partir de (5.75) que  $\partial \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, Y_1) / \partial Y_1$  é constante por partes em  $(0, L_1) \cup (L_1, L)$  e independente de  $\mathbf{X}$ . Integrando (5.75) com respeito a  $Y_1$  e impondo a condição  $\langle \mathbf{u}^1 \rangle = \mathbf{0}$ , encontra-se que  $\mathbf{u}^1$  é somente uma função

de  $Y_1$ . Portanto,  $\text{grad } \mathbf{u}^1(\mathbf{X}, Y_1) = \mathbf{0}$  em (5.71) para  $p = 1$ , produzindo

$$\mathbf{F}^1(\mathbf{X}, Y_1) = \frac{\partial \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, Y_1)}{\partial Y_1} \otimes \mathbf{e}_1. \quad (5.80)$$

Adicionalmente,  $\mathbf{F}^0$ , dado por (5.71.a), e  $\mathbf{P}^0$ , dado por (5.73.a), deve ser independente de  $\mathbf{X}$ , produzindo  $\text{Div } \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, Y_1) \equiv \mathbf{0}$  e  $\partial(\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1) \mathbf{e}_1) / \partial Y_1 = \mathbf{0}$  de (5.77) para  $Y_1 \in (0, L_1) \cup (L_1, L)$  e um  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  fixado, em que  $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, Y_1)$  é dado por (5.73.b), com  $\mathbf{F}^1(\mathbf{X}, Y_1)$  dado por (5.80). Esta equação diferencial produz um sistema de três equações lineares para a determinação das três componentes de  $\partial \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, Y_1) / \partial Y_1$ . Utilizando a periodicidade  $\Omega$  de  $\partial \mathbf{u}^2(\bullet, Y_1) / \partial Y_1$ , encontra-se que a solução deste sistema é da forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}^2(\mathbf{X}, Y_1)}{\partial Y_1} = \left[ \chi_1(Y_1) - \frac{c_1}{c_2} \chi_2(Y_1) \right] \mathbf{h}_1(\mathbf{X}), \quad (5.81)$$

em que  $\chi_r : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $r = 1, 2$ , são funções indicadoras dadas por (5.76) e lembra-se do exposto acima que  $c_i \triangleq \langle \chi_i \rangle \equiv L_i / L$ ,  $i = 1, 2$ , são as frações de volume. Tem-se também que  $\mathbf{h}_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é determinado da continuidade de carregamento na interface  $Y_1 = L_1$ , dada por  $\mathbf{P}^1(\mathbf{X}, L_1^-) \mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{X}, L_1^+) \mathbf{e}_1$ , em que  $\mathbf{P}^1 : \mathcal{B} \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dado por (5.73.b) juntamente com (5.80). Esta continuidade de carregamento toma a forma

$$\left\{ \left[ \mathbb{A}_0(\mathbf{X}, L_1^-) + \frac{c_1}{c_2} \mathbb{A}_0(\mathbf{X}, L_1^+) \right] (\mathbf{h}_1(\mathbf{X}) \otimes \mathbf{e}_1) \right\} \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \quad (5.82)$$

em que  $\mathbb{A}_0(\mathbf{X}, Y_1) \triangleq D^2 \tilde{\phi}(\mathbf{F}^\varsigma, Y_1) \Big|_{\varsigma=0}$ . A expressão (5.82) produz um sistema de três equações lineares para a determinação das três componentes de  $\mathbf{h}_1(\mathbf{X})$ . Evidentemente, a menos que o tensor de segunda ordem dentro das chaves seja singular, este sistema não tem solução não-trivial. Para a classe especial de materiais hiperelásticos considerados na Seção 6.2, apresentam-se resultados numéricos nessa seção que confirmam a existência de uma solução da forma (5.75) com  $\mathbf{g}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{g}$  determinada da condição de carregamento  $\mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^-) \mathbf{e}_1 = \mathbf{P}^0(\mathbf{X}, L_1^+) \mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{h}_1(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{0}$ .

Repetindo os argumentos dados anteriormente para os termos de alta ordem  $\mathbf{F}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1)$  dados por ambos (5.70) e (5.71), encontram-se sistema de equações lineares para a determinação de  $\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{X}, Y_1) / \partial Y_1$ ,  $p \geq 2$ , que produz  $\mathbf{u}^p(\mathbf{X}, Y_1) = \mathbf{0}$  para  $p \geq 2$ . Segue-se então de (5.69), (5.79), e (5.75) com  $\mathbf{g}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{g}$  que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varsigma(\mathbf{X}, Y_1) &= (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) \mathbf{X} \\ &+ \varsigma \left\{ \int_0^{Y_1} \left[ \chi_1(Y) - \frac{c_1}{c_2} \chi_2(Y) \right] dY + \frac{c_1 L}{c_2} \chi_2(Y_1) - \frac{L_1}{2} \right\} \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

em que se impõe a condição de continuidade através da interface  $Y_1 = L_1$  e nenhuma

traslação rígida sobre  $\mathbf{u}^1$ . A expressão (5.83) produz o campo de deformação  $\mathbf{x}^s \triangleq \mathbf{X} + \mathbf{u}^s$  distante do contorno de um bilaminado hiperelástico em equilíbrio na ausência de forças de corpo e sujeito à condição de contorno

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{1}) \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}, \quad (5.84)$$

em que  $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{L}$  é constante. Próximo ao contorno, termos complementares devem ser acrescentados à expressão (5.69) para levar em conta efeitos de borda (Pruchnicki (1998)). Neste trabalho, considera-se somente o comportamento do laminado distante do contorno.

Na Seção 6.2 considera-se uma classe especial de materiais hiperelásticos juntamente com uma expressão particular para  $\bar{\mathbf{F}}$  em (5.83) e resolve-se o problema do bilaminado estabelecido acima de modo aproximado utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Resultados computacionais obtidos sempre distantes do contorno do bilaminado parecem indicar que uma outra solução é possível para este problema.

### 5.3 Aplicação do Método Tangente de Segunda Ordem na Análise de Laminados Elásticos Não-Lineares

Neste trabalho considera-se um cilindro reto ocupando uma região  $\Omega$ , com contorno  $\partial\Omega$ , em uma configuração de referência. O eixo do cilindro é paralelo a um versor  $\mathbf{e}_1$  de uma base ortonormal fixa  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . O cilindro é um laminado com  $m$  fases distintas contendo uma distribuição periódica de  $n$  lâminas hiperelásticas e isotrópicas com direção de laminação paralela ao versor  $\mathbf{e}_1$  na configuração de referência. Nesta seção considera-se que  $m = 2$ , ou seja, o laminado é bifásico. A distribuição periódica das lâminas permite introduzir um elemento representativo  $\mathcal{Y}$  de comprimento  $L$  e constituído das fases  $\mathcal{Y}_1$  e  $\mathcal{Y}_2$  com comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente.

A função densidade de energia de deformação do bilaminado pode ser escrita na forma

$$\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \sum_{r=1}^2 \chi_r(\mathbf{X}) \tilde{\phi}_r(\mathbf{F}), \quad \chi_r(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{X} \text{ em fase } r, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.85)$$

em que  $\chi_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{\phi}_r : \mathcal{Lin}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  são as funções indicadora e densidade de energia de deformação, respectivamente, da fase  $r$ . Utilizando (5.85), pode-se obter a resposta mecânica do material em um ponto arbitrário  $\mathbf{X} \in \Omega$  a partir de (3.26). Esta resposta mecânica é local, ou, microscópica e depende do conhecimento do campo de deformação associado, o qual, em geral, é calculado de maneira aproximada utilizando métodos

numéricos. Na Seção 6.1 estes métodos foram utilizados na obtenção de soluções aproximadas para problemas de tração uni-axial envolvendo laminados elástico-lineares. Nesta seção também vê-se que é possível obter uma resposta mecânica global, ou, macroscópica no caso linear que coincide com a resposta mecânica obtida a partir dos resultados numéricos quando tanto o número de lâminas quanto o número de graus de liberdade da aproximação numérica tendem ao infinito.

No caso não-linear, resultados análogos ainda são objeto de intensa investigação devido não somente à complexidade de análise dos problemas não-lineares associados, mas também à possibilidade de instabilidades que podem gerar múltiplas soluções para um mesmo problema. Um procedimento de análise consiste em supor que a relação constitutiva global, ou, macroscópica do laminado é dada por (HILL, 1972)

$$\bar{\mathbf{P}}(\bar{\mathbf{F}}) = D \bar{\phi}(\bar{\mathbf{F}}), \quad (5.86)$$

em que  $\bar{\mathbf{P}} := \langle \mathbf{P} \rangle$  e  $\bar{\mathbf{F}} := \langle \mathbf{F} \rangle$  são as médias do 1° tensor tensão de Piola-Kirchhoff e do gradiente de deformação, respectivamente, com  $\langle \cdot \rangle := (1/|\mathcal{Y}|) \int_{\mathcal{Y}} (\cdot) d\mathbf{Y}$  sendo o operador do valor médio, e

$$\bar{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) = \min_{\mathbf{F} \in \mathcal{K}(\bar{\mathbf{F}})} \langle \tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \rangle = \min_{\mathbf{F} \in \mathcal{K}(\bar{\mathbf{F}})} \sum_{r=1}^2 \frac{L_r}{L} \langle \tilde{\phi}_r(\mathbf{F}) \rangle_r \quad (5.87)$$

é a função densidade de energia de deformação efetiva. Em (5.87),

$$\mathcal{K}(\bar{\mathbf{F}}) = \{ \mathbf{F} \mid \exists \mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X}) \text{ com } \mathbf{F} = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{X}) \text{ em } \Omega, \mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{X} \text{ sobre } \partial \Omega \} \quad (5.88)$$

é o conjunto de gradientes de deformação cinematicamente admissíveis e  $\langle \cdot \rangle_r := (1/|\mathcal{Y}_r|) \int_{\mathcal{Y}_r} (\cdot) d\mathbf{Y}$ , em que  $|\mathcal{Y}_r|$  é o volume da  $r$ -ésima lâmina na configuração de referência  $\mathcal{Y}_r$ .

Assumindo deformações homogêneas nas diferentes camadas e impondo continuidade de carregamento e de deformação nas interfaces entre as camadas, obtém-se soluções de equilíbrio, chamadas *soluções principais*, dos problemas mistos associados a (5.86)–(5.88). Bifurcações podem ocorrer a partir das soluções principais devido à não-convexidade de  $\tilde{\phi}$  com respeito a  $\mathbf{F}$ . Estas bifurcações estão associadas a instabilidades materiais que foram apresentadas na Seção 3.4. Neste caso, *soluções secundárias* estáveis e, portanto, fisicamente possíveis, podem existir enquanto que as soluções principais associadas podem se tornar instáveis e, portanto, impossíveis de ocorrer no “mundo real”.

Lopez-Pamies & Ponte Castañeda [2009] investigam a ocorrência de instabilidades macroscópicas ao analisarem a perda de elipticidade forte da função densidade de energia



de deformação efetiva do bilaminado calculada em uma solução principal, a qual é definida por

$$\widehat{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) = \operatorname{stat}_{\mathbf{F} \in \mathcal{K}(\bar{\mathbf{F}})} \sum_{r=1}^2 \frac{L_r}{L} \langle \widetilde{\phi}_r(\mathbf{F}) \rangle_r, \quad (5.89)$$

em que, aqui,  $\bar{\mathbf{F}}$  é constante por partes. Substituindo esta função densidade de energia efetiva em (3.40) juntamente com (3.30), obtém-se a condição de elipticidade forte dada por  $(\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) : D^2 \widehat{\phi}(\bar{\mathbf{F}})[\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}] > 0$ ,  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $|\mathbf{c}| = 1$ . De acordo com os autores, instabilidade macroscópica pode ocorrer no material sempre que esta desigualdade é violada para algum  $\bar{\mathbf{F}}$ . Por definição, está claro que  $\bar{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) = \widehat{\phi}(\bar{\mathbf{F}})$  da configuração de referência,  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{1}$ , até a ocorrência da primeira instabilidade, após a qual  $\bar{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) \leq \widehat{\phi}(\bar{\mathbf{F}})$ .

Os autores utilizam o método de homogeneização de segunda ordem desenvolvido por Castañeda e Tiberio (2000) para ganhar entendimento sobre o comportamento efetivo de laminados hiperelásticos. Eles mostram que a função densidade de energia de deformação efetiva do bilaminado pode ser escrita na forma

$$\widehat{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) = \frac{L_1}{L} \widetilde{\phi}_1(\bar{\mathbf{F}}_1) + \frac{L_2}{L} \widetilde{\phi}_2(\bar{\mathbf{F}}_2), \quad (5.90)$$

em que  $\bar{\mathbf{F}}_1$  e  $\bar{\mathbf{F}}_2$  satisfazem a condição de média global

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{L_1}{L} \bar{\mathbf{F}}_1 + \frac{L_2}{L} \bar{\mathbf{F}}_2 \quad (5.91)$$

e  $\widetilde{\phi}_1$  e  $\widetilde{\phi}_2$  são funções densidade de energia de deformação das fases 1 e 2, respectivamente.

Os autores também mostram que

$$D^2 \widetilde{\phi}(\bar{\mathbf{F}}) = D^2 \phi_1(\bar{\mathbf{F}}_1) + c_2 \left[ c_1 \mathbb{H} - (D^2 \phi_1(\bar{\mathbf{F}}_1) - D^2 \phi_2(\bar{\mathbf{F}}_2))^{-1} \right]^{-1}, \quad (5.92)$$

em que as componentes do tensor de quarta ordem  $\mathbb{H}$  são dadas por

$$H_{ijkl} \triangleq (\mathbf{K}^{-1})_{ik} N_j N_l, \quad K_{ik} \triangleq (D^2 \phi_1(\bar{\mathbf{F}}_1))_{ipkq} N_p N_q, \quad (5.93)$$

com  $N_p, p = 1, 2, 3$ , sendo as componentes da direção  $\mathbf{N}$  de laminação do bilaminado em sua configuração de referência. Neste trabalho  $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ .

Substituindo (5.90) na condição de elipticidade (3.35) com  $\mathbb{A}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  substituído por  $D^2 \bar{\phi}(\bar{\mathbf{F}})$ , tem-se então como resultado a falha da condição de elipticidade forte em  $\bar{\lambda} \cong 1.08$ . Argumenta-se em Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) que instabilidade

macroscópica pode ocorrer como um resultado desta falha no meio efetivo correspondente e que uma segunda solução pode bifurcar da solução principal (na Seção 6.2 são apresentadas evidências dessa bifurcação por meio do estudo numérico utilizando o MEF).

Em particular, Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) restringem a atenção para uma classe de materiais Neo-Hookeanos compressíveis obtidos a partir de (2.6) e repetida abaixo:

$$\tilde{\phi}_1(\mathbf{F}) = \mu^{(1)} \left[ \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - 3}{2} - \log(\det \mathbf{F}) \right] + \left( \frac{\kappa^{(1)}}{2} - \frac{\mu^{(1)}}{3} \right) (\det \mathbf{F} - 1)^2, \quad \tilde{\phi}_2(\mathbf{F}) = t \tilde{\phi}_1(\mathbf{F}), \quad (5.94)$$

em que as constantes materiais  $\mu^{(1)}$  e  $\kappa^{(1)}$  são os módulos de elasticidade ao cisalhamento e volumétrico, respectivamente, da fase 1 na configuração de referência e o fator multiplicativo  $t \in \mathbb{R}$  quantifica o contraste de heterogeneidade entre as fases 1 e 2.

Os autores consideram também que a representação matricial de  $\bar{\mathbf{F}}$  em (5.88) é dada por (2.7) e repetida abaixo:

$$[\bar{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & -\sin \bar{\theta} & 0 \\ \sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} & \sin \bar{\theta} & 0 \\ -\sin \bar{\theta} & \cos \bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.95)$$

em que  $\bar{\lambda} \geq 1$  e  $\bar{\lambda}^{-1}$  denotam os estiramentos principais associados ao tensor  $\bar{\mathbf{F}}$  no plano definido pelos versores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  e  $\bar{\theta} \in [0, \pi/2]$  fornece a orientação, no sentido anti-horário a partir da direção definida pelo versor  $\mathbf{e}_1$ , dos eixos principais de  $\bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ .

Na Fig. 13 são ilustradas as configurações de referência  $\mathcal{B}$  e a deformada  $\mathbf{y}(\mathcal{B})$  do bilaminado ao se considerar o cisalhamento puro dado pela condição de contorno (5.84) juntamente com (5.95). Para  $\bar{\theta} = 0^\circ$  tem-se o experimento de cisalhamento puro ilustrado na Fig.6.(b). Uma vez que a deformação imposta no contorno é plana e paralela ao plano definido pelos versores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , é de se esperar que a deformação do laminado também o seja e que o versor  $\mathbf{N}$  que define a direção de laminação na configuração de referência seja mapeado em um versor  $\mathbf{n}$  que seja paralelo a este plano. O versor  $\mathbf{n}$  define a direção de laminação na configuração atual e está orientado a um ângulo  $\phi$  com respeito à direção definida pelo versor  $\mathbf{e}_1$ , conforme ilustrado no lado direito da Fig. 13. Utilizando a relação (3.17) com  $\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{F}} \mathbf{X}$  e a expressão (5.95), obtém-se

$$\phi = \arccos \left( \frac{\sqrt{2} (\cos^2 \bar{\theta} + \bar{\lambda}^2 \sin^2 \bar{\theta})}{[1 + \bar{\lambda}^4 - (\bar{\lambda}^4 - 1) \cos 2\bar{\theta}]^{1/2}} \right). \quad (5.96)$$

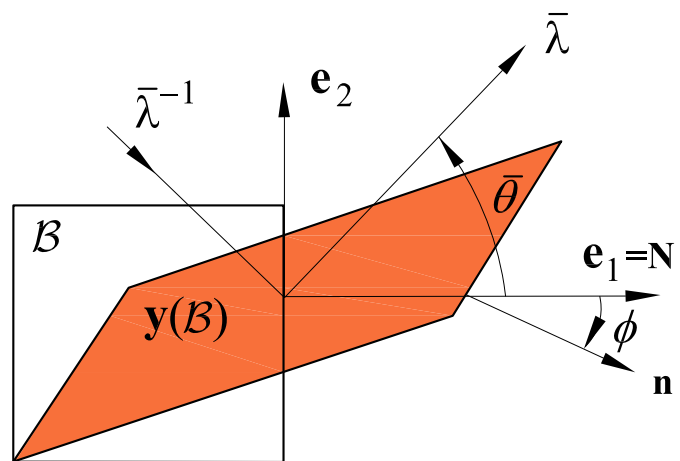


Figura 13: Configurações de referência e deformada do bilaminado sob um estado plano de cisalhamento puro.



## 6 Apresentação e Discussão de Resultados

As implementações computacionais do MEF para comparação com os resultados analíticos apresentadas a seguir, para os casos linear e não-linear, foram feitas utilizando a linguagem APDL do ANSYS para produzir as sequências de laminados de forma automatizada. Para uma consulta sobre como manipular geometrias e atribuir propriedades materiais de forma automatizada pode-se consultar o manual ANSYS, Inc. (2010). A linguagem APDL permite escrever códigos com aspectos bastante similares aos desenvolvidos em Fortran ou outras linguagem de programação, de modo que o leitor que já tenha experiência com alguma linguagem de programação conseguirá utilizar este conhecimento para desenvolver seu próprio código em APDL. Uma forma de iniciar a automatização é salvar o arquivo de comandos obtidos pela interface gráfica do ANSYS, após gerar um modelo de base, seguindo o caminho de comando List>Files>Log file no Menu das opções de listagem. A partir deste arquivo de Log pode-se salvar em extensão \*.TXT, por exemplo, APDL.TXT, para automatizar a geração de sólidos, malhas de elementos finitos e atribuição das condições de contorno por meio de comandos de iteração. Todos os comandos salvos no arquivo \*.TXT podem ser copiados e colados na aba do Prompt do ANSYS e executados com um comando ENTER via teclado. Pode-se também utilizar a interface Mechanical APDL Product Launcher para indicar o arquivo APDL.TXT que será executado em modo Batch no ANSYS, a fim de minimizar os custos computacionais. O manual acima citado aborda este aspecto.

### 6.1 Resultados Obtidos do MEF e do MHA para um Laminado Elástico Linear

O problema do laminado bifásico contendo  $n$  lâminas e correspondendo às expressões (5.61) a (5.63) foi resolvido via MEF utilizando o pacote computacional ANSYS, Inc. (2010). Utilizou-se o elemento finito SOLID187, conforme ilustrado na Fig. 14, o qual é um elemento finito tetraédrico que permite interpolação quadrática dos deslocamentos,

sendo adequado para utilização em malhas não uniformes. Este elemento finito é composto por 10 nós e cada nó possui 3 graus de liberdade, correspondendo aos deslocamentos nas direções  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ .

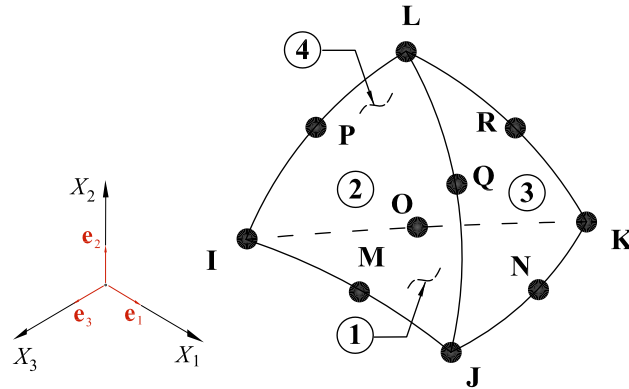


Figura 14: Elemento finito tetraédrico SOLID187.

Na Fig. 15 ilustram-se os cilindros de secções transversais retangulares, (Fig. 15.(a)), e circulares (Fig. 15.(b)) contendo diferentes números de lâminas e discretizações utilizando o elemento finito SOLID187. Os números de lâminas e os dados de discretização relacionados ao cilindro da Fig. 15.(a) são apresentados na Tab. 1 . Os cilindros da Fig. 15.(b) são utilizados para verificar a dependência dos resultados de tensões e deformações com a geometria do sólido.

Os valores utilizados para as constantes de Lamé em (5.62) são  $\lambda^{(1)} = 31.034$  MPa,  $\mu^{(1)} = 3.448$  MPa para a fase 1 (elastômero) e  $\lambda^{(2)} = 79.007$  GPa,  $\mu^{(2)} = 152.007$  GPa para a fase 2 (aço). O empilhamento das lâminas na direção  $X_3$  inicia-se com a lâmina da fase 1.

A Fig. 16 apresenta os valores médios de tensão versus deformação obtidos via MEF e via MHA na face  $X_3 = 1.0$ . A curva sólida refere-se ao MHA e foi obtida da expressão (5.68.b) utilizando  $\varepsilon = \varepsilon_3$ . As demais curvas referem-se ao MEF. Pode-se observar desta figura que, à medida que o número de lâminas  $n$  tende ao infinito, os valores obtidos com o MEF tendem aos valores obtidos com o MHA.

Curvas tensão versus deformação também foram obtidas para o caso dos cilindros com secções transversais circulares ilustrados na Fig. 15.(b). Conforme esperado da teoria, estas curvas são idênticas às curvas mostradas na Fig. 16. Isto demonstra que o comportamento global não depende da geometria do sólido elástico-linear.

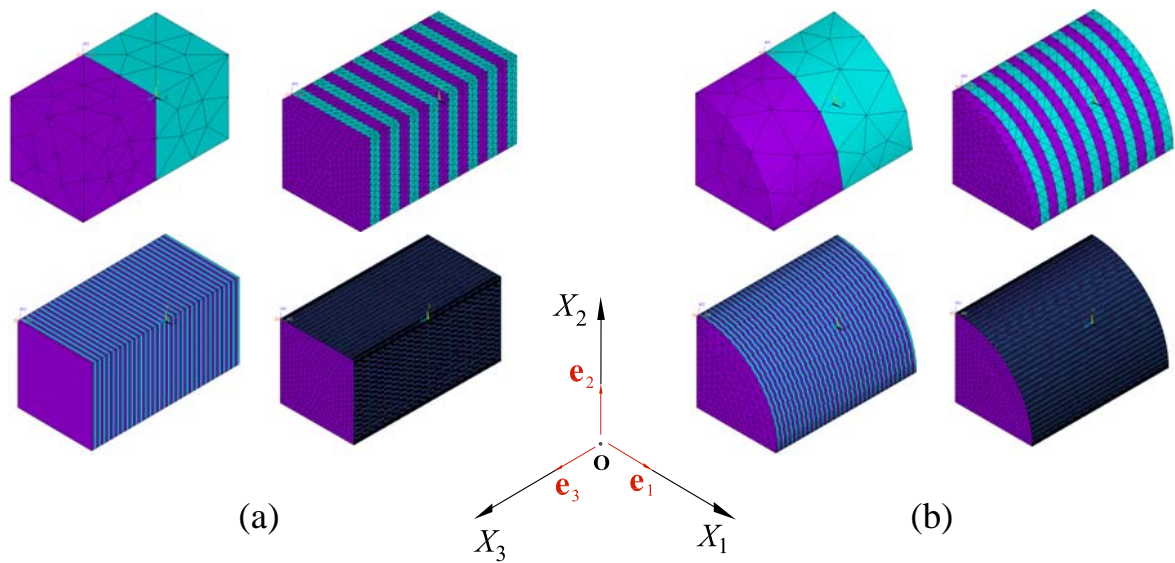


Figura 15: Cilindros de secção transversal retangular e circular compostos por 2, 16, 64 e 256 lâminas isotrópicas.

Tabela 1: Malhas empregadas no cilindro de secção transversal retangular.

Malha	Número de Lâminas (n)	Número de Elementos	Número de Nós	Número de Graus de Liberdade
1	2	200	425	1275
2	16	40551	59464	178392
3	64	98239	141699	425097
4	256	500733	708492	2125476

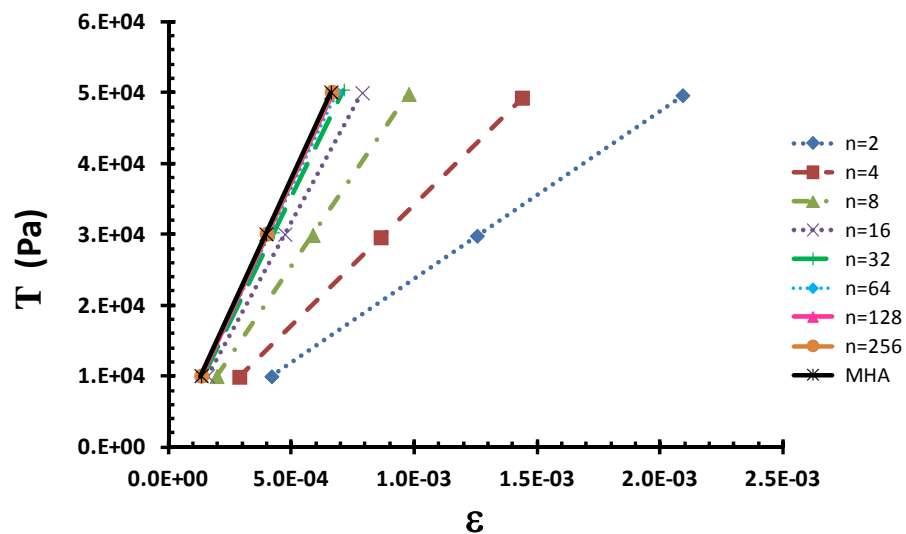


Figura 16: Curvas tensão  $T$  versus deformação  $\varepsilon$  em  $X_3 = 1.0$  obtidas via MEF e via MHA para os cilindros de secção transversal retangular.

## 6.2 Resultados Obtidos do MEF e do MHA para um Laminado Elástico Não-Linear

Nesta seção apresentam-se resultados numéricos do estudo do comportamento de laminados hiperelásticos, no regime de grandes deformações. Estes resultados serão comparados com resultados analíticos obtidos via MHA apresentado na Seção 5.2. Lembrando da Seção 3, a configuração de referência de um laminado é denotada por  $\mathcal{B}$  e o seu contorno por  $\partial\mathcal{B}$ . Considera-se que o laminado está em equilíbrio na ausência de forças de corpo de modo que (3.18) é satisfeita. Lembra-se também da Seção 3 que o material adotado é o Neo-Hookeano compressível implementado no ANSYS, em que as funções densidade de energia nas fases 1 e 2 são dadas por

$$\tilde{\phi}_1(\mathbf{F}) = \frac{\mu^{(1)}}{2} \left( \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}{(\det \mathbf{F})^{2/3}} - 3 \right) + \frac{\kappa^{(1)}}{2} (\det \mathbf{F} - 1)^2, \quad \tilde{\phi}_2(\mathbf{F}) = t \tilde{\phi}_1(\mathbf{F}), \quad (6.1)$$

em que  $\mu^{(1)}$ ,  $\kappa^{(1)}$  e  $t$  denotam as mesmas constantes materiais introduzidas em (5.94). As condições de contorno impostas nos ensaios numéricos são dadas pela expressão geral

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{\partial\mathbf{U}} &= \mathbf{U}, \\ \mathbf{t}|_{\partial\mathbf{t}} &= \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

No caso de cisalhamento puro estas condições de contorno são dadas por

$$\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{X} \quad \text{sobre } \partial\mathcal{B} \quad (6.3)$$

sendo  $\bar{\mathbf{F}}$  dado segundo a expressão (5.95).

Os resultados numéricos foram obtidos considerando estado plano de deformação (EPD) paralelo ao plano  $X_1X_2$ , em que a dimensão  $H_3$  apresentada na Fig. 12 tende a  $\infty$ . Estes problemas de deformação plana correspondem a cisalhamentos puros nos ângulos  $\theta$  impostos. Os laminados ensaiados numericamente possuem condições de contato perfeito entre as lâminas.

Estudos preliminares demonstram que para o material Neo-Hookeano compressível implementado no ANSYS não ocorre qualquer tipo de comportamento anômalo quando um sólido constituído de material homogêneo é ensaiado à tração uniaxial, ou, ao cisalhamento puro correspondente à condição de contorno (6.3). Estes resultados são mostrados nas figuras 17, 18 e 19 e comentados a seguir.

Apresentam-se na Tab. 2 as malhas utilizadas para discretizar os sólidos hiperelásticos aqui estudados. Estas malhas foram também empregadas para verificar as



dificuldades de convergência para problemas com valores de  $t$  superior a 4 para todos os ângulos  $\bar{\theta}$  entre 0 e  $30^\circ$ . Por exemplo, verificou-se não convergência de solução para vários pontos das curvas obtidas via MEF após o ponto de perda de convexidade,  $\bar{\lambda} = 1.06$ , no caso em que  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$  à medida que a malha é refinada. Para valores mais elevados de  $t$  como, por exemplo,  $t = 512$ , só se obtém convergência para todas as malhas da Tab. 2 e para todos os ângulos aqui estudados até aproximadamente  $\bar{\lambda} = 1.01$ .

Apresentam-se na Fig. 17 as curvas das componentes de  $\mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  para o caso de um sólido homogêneo constituído do material Neo-Hookeano sob EPD e com as dimensões  $C = H_2 = 1$  e  $H_3 \rightarrow \infty$  sujeito aos ensaios de tração uniaxial (Esquerda) e de cisalhamento puro considerando  $\bar{\theta} = 20^\circ$  em (5.95)(Direita). Para obter os resultados numéricos empregou-se as malhas da Tab. 2. Nesta figura observa-se que os resultados numéricos obtidos para ambos os ensaios e indicados na legenda por MEF\_NL são idênticos aos resultados obtidos analiticamente. Nestes experimentos numéricos verificou-se ainda que os resultados obtidos empregando-se malhas uniformes e as malhas dadas na Tab. 2 são idênticos entre si e também idênticos aos resultados analíticos. Esta verificação evidencia que a malha utilizada não tem influência nos resultados obtidos numericamente.

Tabela 2: Malhas empregadas na discretização do laminado.

Malha	Divisão do Lado	Número de Lâminas (n)	Número de Elementos	Número de Nós	Número de Graus de Liberdade
1	4	256	4096	14345	28690
2	8	256	8192	26641	53282
3	16	256	16384	51233	102466
4	32	256	32768	100417	200834
5	64	256	65536	198785	397570

Na Fig. 18 apresentam-se as curvas  $\det \mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  para os ensaios de tração uniaxial (Esquerda) e cisalhamento puro considerando  $\bar{\theta} = 20^\circ$  (Direita). Nesta figura observa-se que os resultados analíticos (linha pontilhada) e numéricos (linha cheia) são indistinguíveis para ambos os ensaios. Observa-se ainda que a curva de  $\det \mathbf{F}$  para o ensaio de tração uniaxial é monotonicamente crescente e para o ensaio de cisalhamento puro a curva é constante e igual a um, pois a deformação é isocórica.

Agora, para verificar se o material Neo-Hookeano implementado no ANSYS possui algum tipo de comportamento anômalo, implementam-se os critérios de perda de convexidade (expressão (3.39)) e perda de elipticidade (expressão (3.40)). Apresentam-se

na Fig. 19 curvas  $(\Delta\tilde{\mathbf{P}} : \Delta\mathbf{F})/(\Delta\bar{\lambda})^2$  versus  $\bar{\lambda}$  para ambos os ensaios, tração uniaxial e cisalhamento puro. Os valores de  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  podem ser aproximados por  $(\Delta\tilde{\mathbf{P}} : \Delta\mathbf{F})/(\Delta\bar{\lambda})^2$  versus  $\bar{\lambda}$ . Os valores analíticos apresentados na Fig. 19 são calculados considerando diferenças finitas com os valores analíticos de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{F}$  para que pudessem ser comparados diretamente com os valores obtidos numericamente de  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{F}$  obtidos do ANSYS. No caso de sólido homogêneo a aproximação obtida por diferenças finitas corresponde à solução analítica exata. Observa-se da Fig. 19 que para ambos os ensaios não ocorre perda de convexidade para todo  $\bar{\lambda} \in (1.0, 5.0)$ . Ao verificar o critério de perda de elipticidade, o sólido homogêneo em nenhum momento deixa de atendê-lo. Assim, o sólido homogêneo não apresenta qualquer comportamento anômalo. Ressalta-se novamente que os resultados numéricos foram verificados para malhas regulares e para as malhas irregulares da Tab. 2 e sempre apresentam resultados idênticos aos obtidos analiticamente e expostos acima.

O estudo preliminar apresentado acima sobre sólido homogêneo constituído de material Neo-Hookeano compressível, cuja função densidade de energia tem a forma (6.1.a), forneceu resultados computacionais e analíticos que concordam muito bem entre si para os ensaios de tração uniaxial e de cisalhamento puro com  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . De particular interesse neste estudo é a observação de que não há perdas de convexidade e de elipticidade nestes ensaios.

Apresentam-se agora resultados referentes ao estudo de um bilaminado constituído por fases hiperelásticas cujas funções densidade de energia de deformação são dadas por (6.1) e estão implementadas no ANSYS. Alguns dados referentes ao bilaminado hiperelástico são os mesmos adotados no estudo analítico via MHA da Seção 5.2. Cabe ressaltar que os resultados obtidos utilizando o MHA são idênticos aos resultados obtidos utilizando o método de homogeneização de segunda ordem tangencial apresentado na Seção 5.3 para  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  e para os casos que estão apresentados nesta seção. Os resultados do MHA e do método de homogeneização de segunda ordem tangencial são analíticos, mas quando se tratar de resultados obtidos a partir das médias ponderadas de  $\mathbf{P}$ , entende-se que os resultados obtidos são do método de homogeneização de segunda ordem tangencial. Dados adicionais são apresentados nesta seção. A geometria do bilaminado hiperelástico está apresentada na Fig. 12. Neste trabalho escolheu-se como bilaminado representativo para os resultados que se seguem um formado por 256 lâminas. As informações a respeito da malha de elementos finitos utilizada para discretizar o bilaminado estão apresentadas na Tab. 2. As malhas da Tab. 2 permitem que se tenha em cada uma das lâminas um nó central que não está diretamente conectado a um elemento que faça parte do contorno da

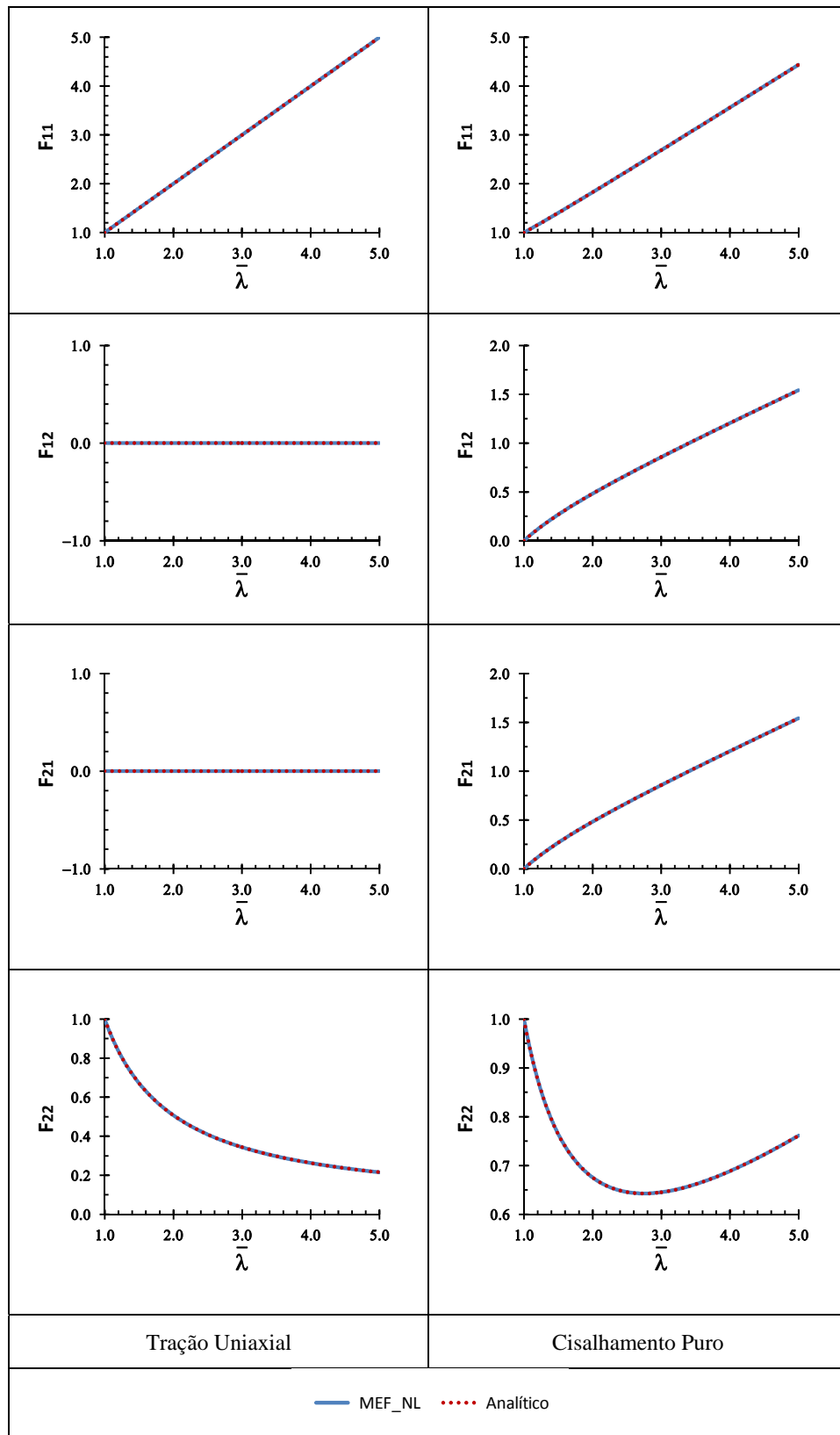


Figura 17: Componentes de  $\mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  calculadas analiticamente e via MEF para o sólido Neo-Hookeano compressível e homogêneo. Gráficos da Esquerda: Ensaio de tração uniaxial. Gráficos da direita: Ensaio de cisalhamento puro.

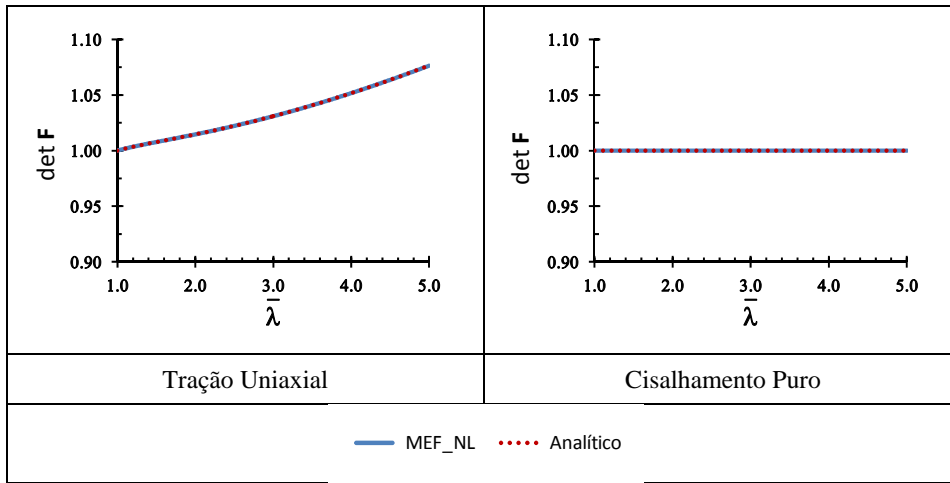


Figura 18: Determinante de  $\mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidos analiticamente e via MEF para o sólido Neo-Hookeano compressível e homogêneo. Gráficos da Esquerda: Ensaio de tração uniaxial. Gráficos da direita: Ensaio de cisalhamento puro.

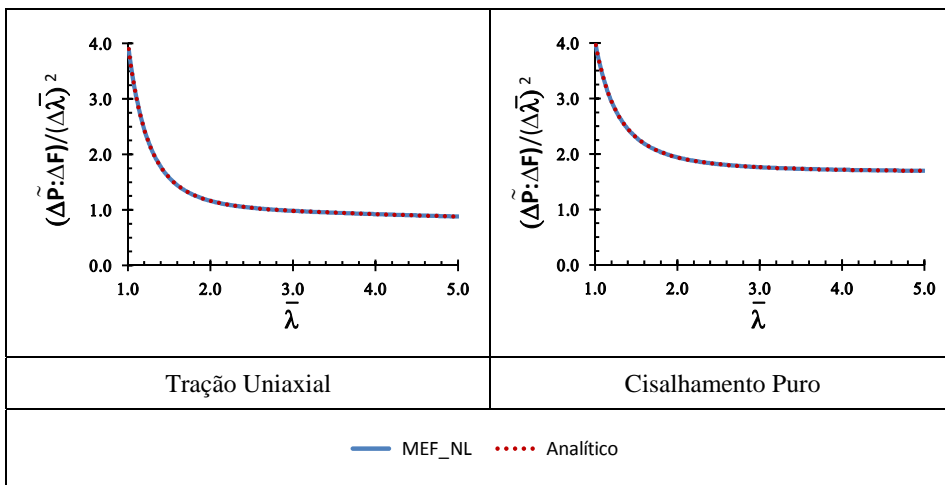


Figura 19: Esquerda: Curvas  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para tração uniaxial em material Neo-Hookeano calculadas analiticamente e utilizando o MEF. Direita: Curvas  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para cisalhamento proposto por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) em material Neo-Hookeano calculadas analiticamente e utilizando o MEF considerando  $\bar{\theta} = 20^\circ$ .

lâmina. Isto permite reduzir efeitos de borda. Após feita a malha de elementos finitos, o bilaminado é então submetido ao ensaio de cisalhamento puro obtido a partir da condição de contorno (6.3) com  $\bar{\mathbf{F}}$  dado por (5.95).

No entanto, neste trabalho utilizou-se a malha 1 da Tab. 2 para discretizar o bilaminado com 256 lâminas porque esta apresentou convergência satisfatória para quase todos os casos de interesse deste trabalho com o menor tempo de processamento computacional. Maiores detalhes serão discutidos posteriormente, com respeito as dificuldades de convergência encontradas que indicam ser decorrentes da combinação de parâmetros  $\bar{\theta}$  e  $t$ . Os elementos finitos utilizados são serendípicos quadrilaterais quadráticos (Q8), 8 nós por elemento finito, cuja designação no ANSYS é PLANE183. Novamente se utilizou da linguagem APDL, analogamente ao feito para o estudo linear, para automatizar a geração dos laminados e suas malhas, bem como para obter os campos de deslocamento de interesse. A Fig. 20 ilustra o elemento finito PLANE183. Optou-se por uma malha com 4 elementos na altura do bilaminado e 4 elementos por lâmina do compósito, a fim de ter um nó no meio de cada lâmina que ficasse livre de efeitos de borda, conforme mencionado anteriormente. Além disso, estudos preliminares indicaram que os campos de deformação e de tensão são aproximadamente uniformes na região central de cada lâmina e que esta malha não apresenta problemas de convergência para os valores de  $t$  e de  $\bar{\theta}$  aqui estudados para  $\bar{\lambda} \in (1, 1.75)$ .

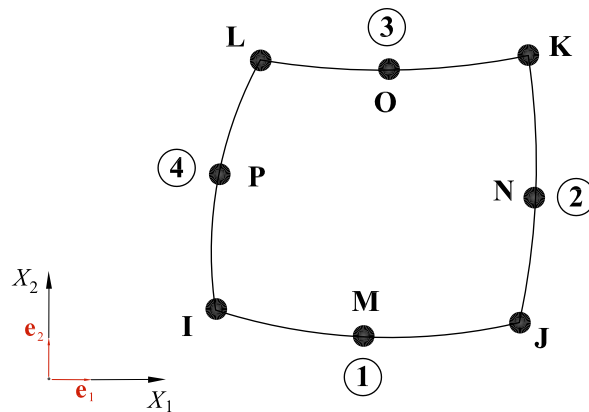


Figura 20: Elemento finito quadrilateral PLANE183.

Neste trabalho utilizou-se as seguintes grandezas com os valores :

- $t = 2, 4, 8, 16, 20, 32, 64$  e  $128$ , em que  $t$  foi introduzido em (6.1) e é uma razão de rigidez entre as fases 1 e 2.
- $\kappa^{(1)} = 100$  e  $\kappa^{(2)} = t \kappa^{(1)}$ , em que  $\kappa^{(i)}, i = 1, 2$ , é o módulo volumétrico

- $\mu^{(1)} = 1$  e  $\mu^{(2)} = t * \mu^{(1)}$ , em que  $\mu^{(i)}, i = 1, 2$ , é o módulo de elasticidade ao cisalhamento.
- $c_1 = L_1/L = 0.7$  e  $c_2 = L_2/L = 0.3$  são as concentrações das fases 1 e 2, respectivamente, na célula periódica.

Nas Figuras 21.(a) e 21.(b) são apresentadas as configurações de referência de dois compósitos bilaminados com 2 e 32 lâminas, respectivamente. Nestes compósitos pode-se notar as células periódicas formadas pelas fases 1 e 2, cujas as concentrações são 0.7 e 0.3, respectivamente.

Apresentam-se na Fig. 22 as configurações deformadas de duas lâminas consecutivas localizadas na região central do bilaminado hiperelástico para  $t = 20$ ,  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $\bar{\lambda} = 1.15$ . Observa-se desta figura que as linhas de interface entre os elementos 2055 e 2059 da fase 1 ( $L_1$ ) e entre os elementos 2039 e 2043 da fase 2 ( $L_2$ ) não são paralelas às linhas do contorno que estão sob deformação imposta. Para investigar melhor este comportamento, calculou-se os gradientes de deformação  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  nos pontos centrais das lâminas  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Estes pontos centrais localizam-se no centro das arestas comuns entre os elementos 2055 e 2059 da lâmina  $L_1$  e entre os elementos 2039 e 2043 da lâmina  $L_2$ . Os gradientes foram então utilizados para gerar deformações homogêneas de elementos quadrilaterais com dimensões unitárias. Configurações deformadas destes elementos correspondendo aos gradientes  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  estão mostrados nas figuras 23 e 24, respectivamente. Calculou-se também a média ponderada dos gradientes,  $c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2$ , e a deformação homogênea correspondente foi utilizada para obter as configurações deformadas dos elementos quadrilaterais mostrados na Fig. 25. As configurações deformadas mostradas nas figuras 23, 24 e 25 estão sobrepostas às configurações de referência correspondentes. A seguir, estes resultados são detalhados para cada uma das figuras citadas acima. Nestas figuras citadas o parâmetro de carga  $\bar{\lambda}$  pertence ao intervalo (1, 1.75). Conforme já mencionado acima, neste intervalo foi possível obter convergência para quase todos os pontos da simulações numéricas realizadas com o bilaminado hiperelástico com 256 lâminas.

Apresentam-se na Fig. 23 as configurações de referência e deformadas do quadrado na fase 1 do laminado hiperelástico. Na coluna da esquerda são apresentados os resultados obtidos via MHA e na coluna da direita os resultados obtidos via MEF. Lembrar que as configurações de referência são quadrados com arestas unitárias sobre os quais aplicam-se deformações homogêneas obtidas analiticamente, MHA, e numericamente, via MEF. Acima de cada figura estão apresentados os valores de  $\bar{\lambda}$ ,  $\phi$  e  $\det \mathbf{F} = J$ . Ao comparar

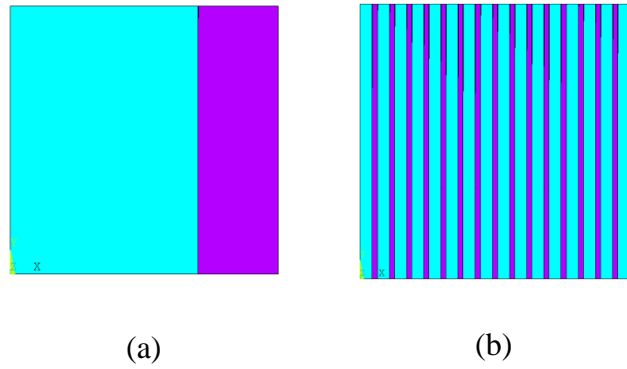


Figura 21: Bilaminado com (a) 2 e (b) 32 lâminas.

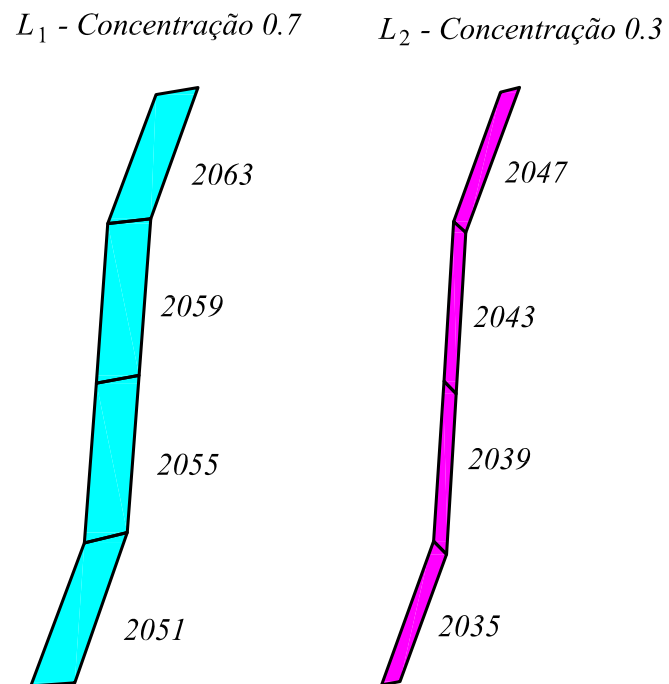


Figura 22: Configurações deformadas de elementos localizados na lâminas da fase 1 ( $L_1$ ), concentração 0.7, e fase 2 ( $L_2$ ), concentração 0.3, que se encontram na região central do laminado com 256 lâminas.

as configurações deformadas obtidas por meio do MHA com suas respectivas obtidas por meio do MEF verifica-se que estas são bastante diferentes umas das outras. Os valores obtidos para  $\phi$  e  $\det \mathbf{F}$  utilizando o MHA também diferem bastante dos valores obtidos numericamente utilizando o MEF. Para  $\bar{\lambda} = 1.375$  o valor de  $\phi$  obtido por meio do MHA é  $-14.5331^\circ$  e o valor obtido por meio do MEF é  $-25.3593^\circ$ . Para esta mesma deformação, o valor de  $\det \mathbf{F}$  é 1.00163 obtido pelo MHA e 0.579412 quando obtido via MEF. Assim,  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF sofre uma redução de aproximadamente 40% em relação ao valor obtido via MHA. Para  $\bar{\lambda} = 1.75$  os valores de  $\phi$  são  $-28.1036^\circ$  via MHA e  $-38.3601^\circ$  via MEF. Nesta deformação, os valores de  $\det \mathbf{F}$  são 1.00205 quando obtido via MHA e 0.243348 quando obtido via MEF. O valor de  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF para esta deformação corresponde a uma redução de aproximadamente 76% em relação ao valor de  $\det \mathbf{F}$  obtido via MHA.

Apresentam-se na Fig. 24 as configurações de referência e deformadas do quadrado calculadas na fase 2 do laminado hiperelástico na mesma organização apresentada na Fig. 23. Novamente, as configurações de referência são quadrados com arestas unitárias sobre os quais aplicam-se deformações homogêneas obtidas analiticamente, MHA, e numericamente, via MEF. Ao comparar as configurações deformadas obtidas por meio do MHA com suas respectivas obtidas por meio do MEF verifica-se novamente que estas são bastante diferentes umas das outras. Os valores obtidos para  $\phi$  e  $\det \mathbf{F}$ , utilizando o MHA diferem bastante dos valores obtidos numericamente utilizando o MEF, mas não diferem dos valores apresentados na Fig. 23 para a fase 1. Para  $\bar{\lambda} = 1.375$  o valor de  $\phi$  obtido por meio do MHA é  $-14.5331^\circ$  e o valor obtido por meio do MEF é  $-25.3949^\circ$ . Para esta mesma deformação, o valor de  $\det \mathbf{F}$  é 0.996188 obtido pelo MHA e 1.92434 quando obtido via MEF. Assim,  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF sofre um aumento de aproximadamente 93% em relação ao valor obtido via MHA. Para  $\bar{\lambda} = 1.75$  os valores de  $\phi$  são  $-28.1036^\circ$  via MHA e  $-38.3149^\circ$  via MEF. Nesta deformação os valores de  $\det \mathbf{F}$  são 0.995214 quando obtido via MHA e 2.70811 quando obtido via MEF. O valor de  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF para esta deformação corresponde a um aumento de aproximadamente 272% em relação ao valor de  $\det \mathbf{F}$  obtido via MHA. É interessante notar da comparação de valores obtidos via MEF e apresentados nas figuras 23 e 24 que os valores de  $\phi$  são muito próximos entre si e que os valores de  $\det \mathbf{F}$  são muito diferentes.

Apresentam-se na Fig. 25 configurações de referência e deformadas do quadrado obtidas da média ponderada  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$  para o laminado hiperelástico. Similarmente à Fig. 23, segue-se a mesma organização dos dados. Ao comparar as configurações deformadas obtidas por meio do MHA com suas respectivas obtidas por meio do MEF,



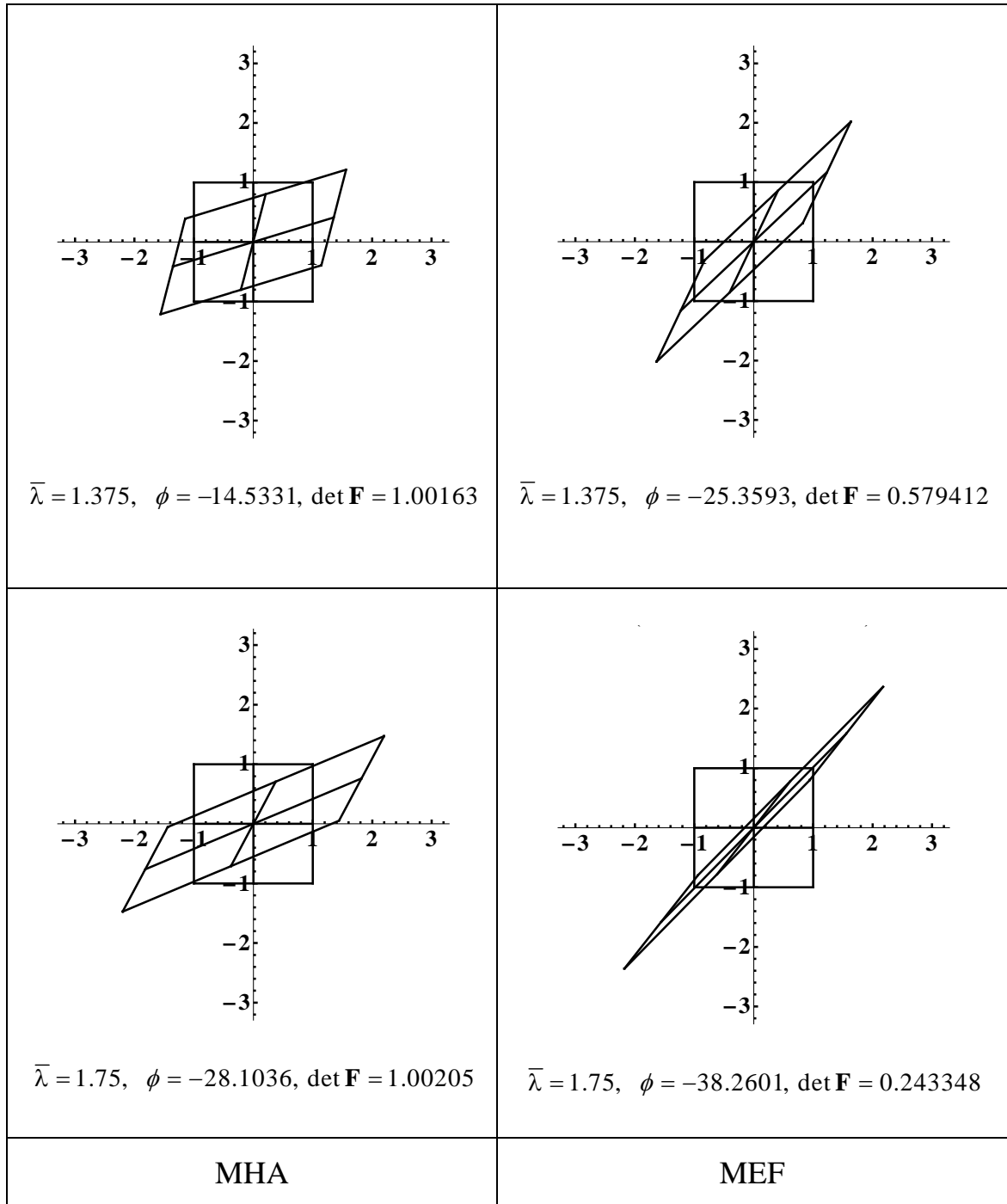


Figura 23: Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias para a fase 1 ( $c_1 = 0.7$ ).

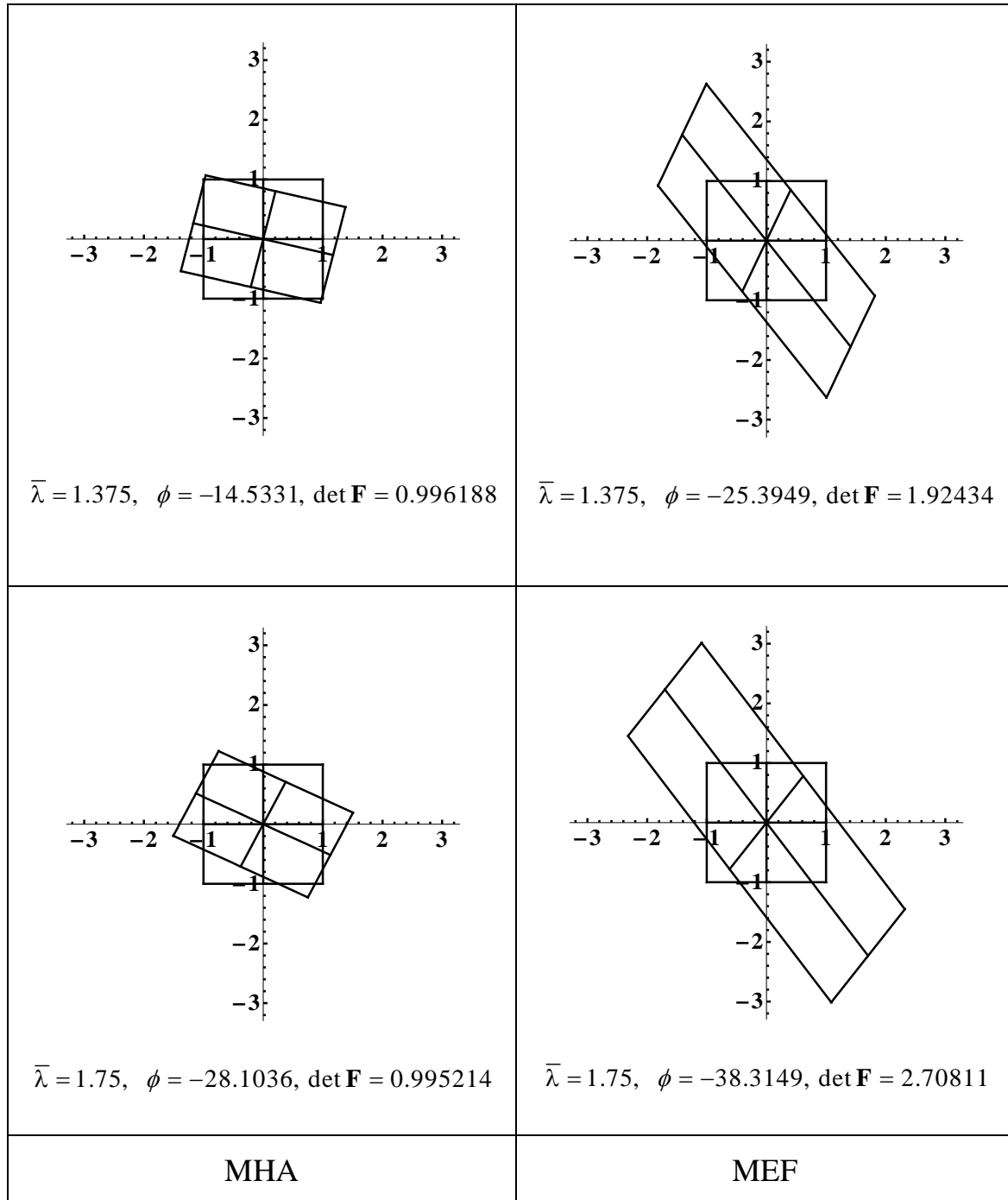


Figura 24: Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias para a fase 2 ( $c_2 = 0.3$ ).

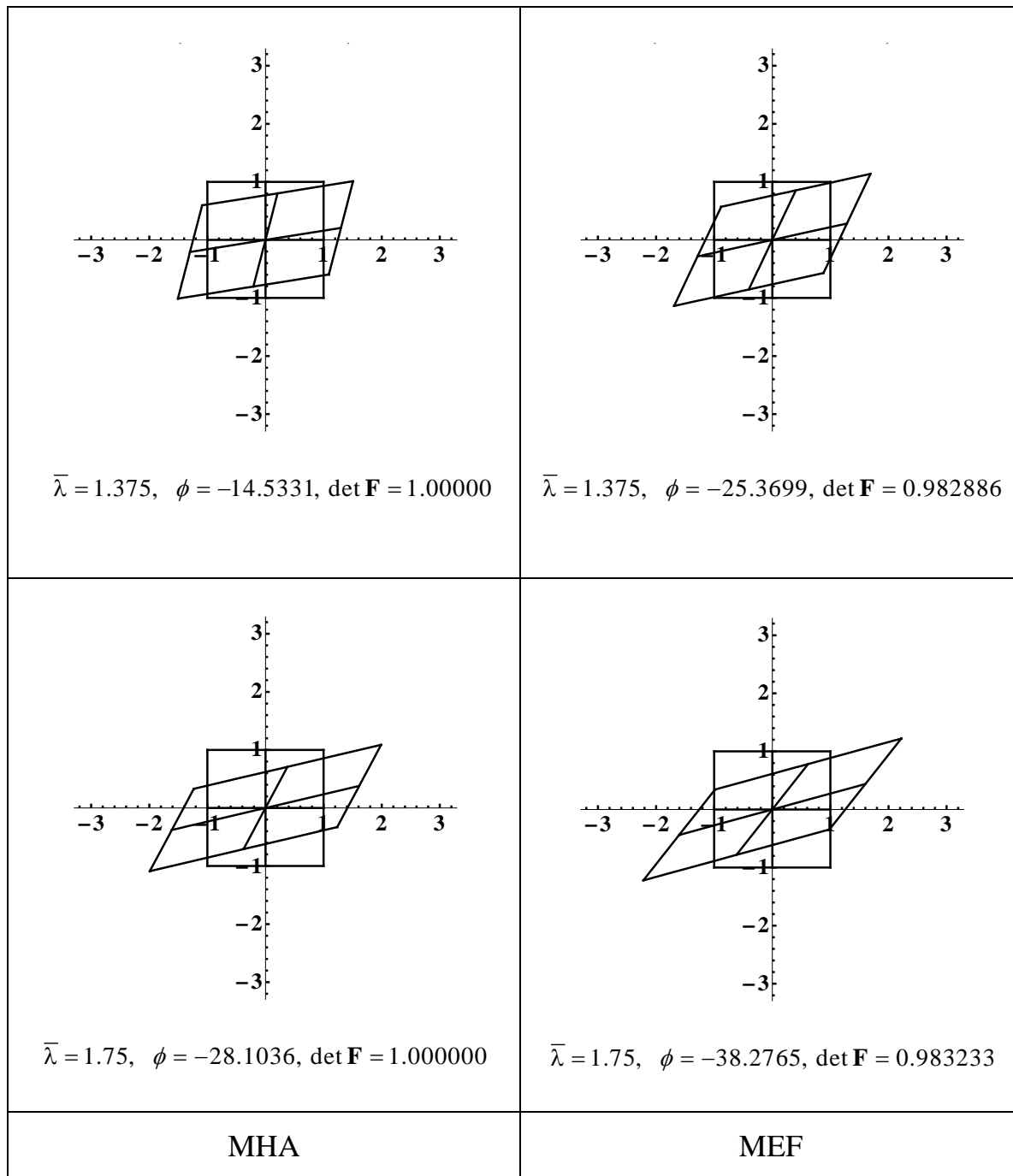


Figura 25: Configurações de referência e deformada de um elemento quadrilateral com dimensões unitárias considerando a média ponderada  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$ .

verifica-se que estas não são muito diferentes umas das outras. Aqui também, os valores obtidos para  $\phi$  utilizando o MHA diferem bastante dos valores obtidos via MEF e são os mesmos valores apresentados nas figuras 23 e 24. Já os valores de  $\det \mathbf{F}$  obtidos via MHA estão próximos dos valores obtidos via MEF. Para  $\bar{\lambda} = 1.375$  o valor de  $\phi$  obtido por meio do MHA é  $-14.5331^\circ$  e o valor obtido por meio do MEF é  $-25.3699^\circ$ . Para esta mesma deformação, o valor de  $\det \mathbf{F}$  é 1 para o MHA e 0.982886 quando obtido via MEF. Assim,  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF sofre uma redução de aproximadamente 2% em relação ao valor obtido via MHA. Para  $\bar{\lambda} = 1.75$  os valores de  $\phi$  são  $-28.1036^\circ$  via MHA e  $-38.2765^\circ$  via MEF. Nesta deformação, os valores de  $\det \mathbf{F}$  são 1 quando obtido via MHA e 0.983233 quando obtido via MEF. O valor de  $\det \mathbf{F}$  obtido via MEF nesta deformação corresponde a uma redução de aproximadamente 2% em relação ao valor obtido via MHA. É interessante notar dos valores obtidos via MEF que, apesar de  $\det \mathbf{F}_1$  ser muito diferente de  $\det \mathbf{F}_2$ , a média ponderada  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$  está próxima de 1, valor este predito pela média ponderada obtida via MHA.

A discussão anterior sobre os resultados das figuras 23, 24 e 25 serve de motivação a discussão que segue abaixo sobre as componentes de gradientes de deformação obtidos via MHA e via MEF. Neste sentido, apresentam-se na Fig. 26 gráficos destas componentes versus  $\bar{\lambda}$  para  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . Os gráficos das colunas (a) e (b) correspondem a gradientes de deformação  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  calculados nas fases 1 e 2, respectivamente e os gráficos da coluna (c) correspondem a gradientes de deformação calculados da média  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$ . As curvas representadas pelas linhas sólida e pontilhada foram obtidas de gradientes de deformação calculadas via MHA e via MEF, respectivamente, para o laminado elástico não-linear. Para fins de comparação apresentam-se também as curvas traço-ponto obtidas de gradientes de deformação calculados via MEF para um laminado elástico-linear. O ponto de perda de elipticidade para o meio efetivo está representado por um ponto verde sobre a linha sólida dos gráficos da coluna (c). Observa-se que, até este ponto, as soluções obtidas via MEF para os materiais linear e Neo-Hookeano e as soluções obtidas via MHA são indistinguíveis, inclusive para os valores das colunas (a) e (b). No caso de  $F_{12}$  e  $F_{22}$ , observa-se que a curva obtida para o material linear (linha traço-ponto) está praticamente sobre a curva obtida pelo MHA (linha cheia) para  $\bar{\lambda} \in (1, 1.75)$  e que ambas as curvas são muito diferentes dos valores obtidos pelo MEF para o material não-linear, representado pela linha pontilhada, para grandes valores de  $\bar{\lambda}$ . Observa-se ainda que os três gráficos para  $F_{12}$  e para  $F_{22}$  são muito semelhantes entre si. Uma vez que  $(\text{Cof } \mathbf{F})\mathbf{e}_1 = F_{22}\mathbf{e}_1 - F_{12}\mathbf{e}_2$ , segue do exposto acima e da discussão que precede (5.96) que os ângulos de rotação obtidos de  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  e  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$  são todos iguais, ou, próximos entre si, conforme observado da análise



Utilizando escala de cores para representar valores numéricos e considerando  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$ , apresentam-se na Fig. 27 campos de deslocamento  $u_1$  na primeira linha e  $u_2$  na segunda linha e campo de tensão de cisalhamento  $T_{12}$  na terceira linha. Estes campos estão mostrados sobre configurações deformadas do laminado linear na primeira coluna e sobre as configurações deformadas do laminado Neo-Hookeano compressível na segunda coluna, correspondendo a  $\bar{\lambda} = 1.01$  para ambos os laminados que possuem 256 lâminas. Observa-se da primeira e segunda colunas que, de forma aproximada, os campos de deslocamento  $u_1$ ,  $u_2$  variam uniformemente e que os valores do caso linear e não-linear são idênticos e próximos de zero. Os campos de tensão de cisalhamento são também uniformes e próximos de zero mas apresentam diferenças entre os casos linear e não-linear.

Novamente, utilizando escala de cores para representar valores numéricos e considerando  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$ , apresentam-se na Fig. 28 campos de deslocamento  $u_1$  na primeira linha e  $u_2$  na segunda linha e campo de tensão de cisalhamento  $T_{12}$  na terceira linha. Estes campos estão mostrados sobre configurações deformadas do laminado Neo-Hookeano compressível com 256 lâminas correspondendo a  $\bar{\lambda} = 1.08$  na primeira coluna e  $\bar{\lambda} = 1.30$  na segunda coluna. O alongamento  $\bar{\lambda} = 1.08$  corresponde ao ponto de perda de elipticidade mostrado nos gráficos da Fig. 26. Observa-se da primeira coluna que, de forma aproximada, os campos de deslocamento  $u_1$ ,  $u_2$  variam uniformemente e fornecem um campo de tensão de cisalhamento também uniforme e próximo de zero. Este não é o caso mostrado na segunda coluna, onde os campos de deslocamento não são uniformes e fornecem um campo de tensão de cisalhamento que tem uma distribuição anti-simétrica com valores bem diferentes de zero.

A seguir, apresentam-se resultados do comportamento de  $\det \mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  quando o parâmetro  $t$  é mantido fixo e varia-se o ângulo  $\bar{\theta}$  e quando faz-se o contrário, fixa-se  $\bar{\theta}$  e varia-se o parâmetro  $t$ . Assim, apresentam-se na Fig. 29 as curvas  $\det \mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas por meio do MHA na primeira coluna e as curvas obtidas por meio do MEF na segunda coluna. Consideram-se para o cálculo dos determinantes  $t = 20$  e os ângulos  $\bar{\theta} = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 70^\circ$  e  $90^\circ$ , conforme indicado na legenda da figura. Nesta figura são apresentadas na primeira linha os resultados obtidos para a fase 1, na segunda linha os resultados obtidos para a fase 2 e na terceira linha os resultados obtidos considerando o determinante da média  $c_1 \mathbf{F}_1 + c_2 \mathbf{F}_2$ . Pode-se observar que os pontos das curvas obtidas utilizando o MHA na fase 1 são monotonicamente crescentes para os ângulo  $\bar{\theta}$  de  $0^\circ$  e  $20^\circ$ , os quais correspondem às linhas traço-ponto e tracejada, respectivamente, e são monotonicamente decrescentes para todos os demais ângulos. Para a fase 2 ocorre o oposto, todas as curvas com exceção das obtidas para os ângulos  $\bar{\theta}$  de  $0^\circ$  e  $20^\circ$  são monotonicamente



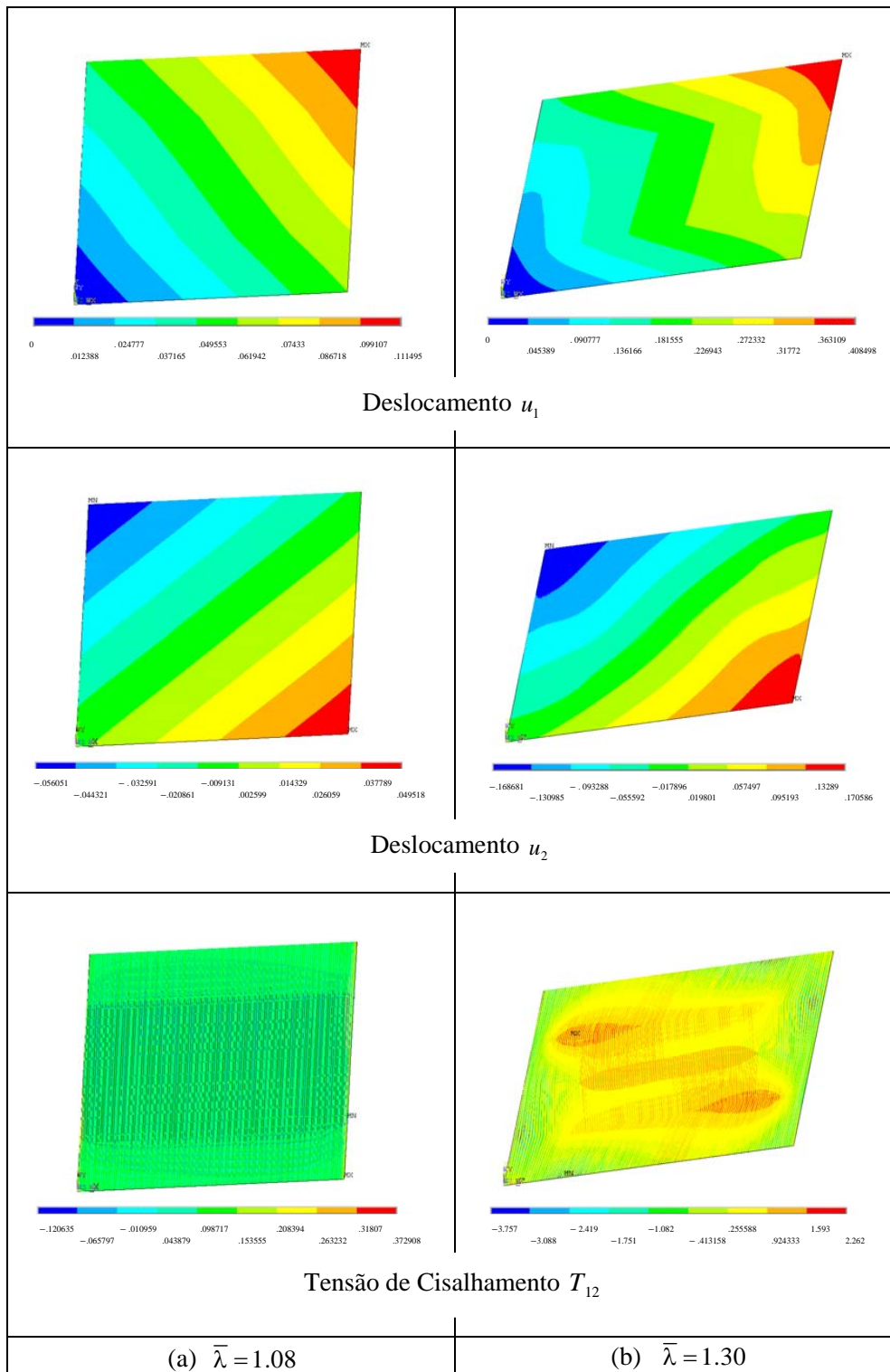


Figura 28: Deslocamentos horizontal  $u_1$  e vertical  $u_2$  e tensão de cisalhamento  $T_{12}$  considerando EPD com  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  para os casos (a)  $\bar{\lambda} = 1.08$  e (b)  $\bar{\lambda} = 1.30$ .



crecentes. No caso do determinante da média ponderada o valor obtido é unitário para todas as curvas. Nos resultados obtidos pelo MEF os valores do determinante de  $\mathbf{F}$  não são monotônicos, à exceção dos ângulos  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Estes resultados não são vistos no gráfico devido à escala adotada. Para o ângulo  $\bar{\theta} = 20^\circ$  observa-se que, a partir do ponto de perda de elipticidade,  $\bar{\lambda} = 1.08$ , ambas as curvas da fase 1 e fase 2 distanciam-se rapidamente da reta horizontal que passa por  $\det \mathbf{F} = 1$ . Após o ponto de perda de elipticidade, as curvas para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  são monotonicamente decrescente para a fase 1 e monotonicamente crescentes para a fase 2. No caso do determinante da média ponderada, observa-se que, mesmo com a oscilação apresentada pela curva  $\bar{\theta} = 20^\circ$ , todas as curvas estão próximas da reta  $\det \mathbf{F} = 1$ .

Apresentam-se Fig. 30 curvas  $\det \mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas via MHA e via MEF para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e para  $t \in \{1, 2, 4, 8, 16, 20\}$ . A organização da figura é similar à descrita para a Fig. 29. Observa-se que os comportamentos de todas as curvas obtidas via MHA são aproximadamente monotônicas para  $\bar{\lambda} \in (1, 1.75)$  e o determinante da média ponderada é igual a um para todos os valores de  $t$ . Para as curvas obtidas via MEF, observa-se que, para valores de  $t$  maiores do que 8, os pontos das curvas se distanciam rapidamente da reta  $\det \mathbf{F} = 1$  a partir do ponto de perda de elipticidade ( $\bar{\lambda} = 1.08$ ) à medida que  $\bar{\lambda}$  aumenta. Similarmente ao que se observa quando  $\bar{\theta}$  varia, verifica-se que o determinante da média de  $\mathbf{F}$  é próximo de um para todas as curvas, mesmo apresentando oscilações nos casos em que  $t$  é maior do que 4. Estes resultados em conjunto com os resultados apresentados na Fig. 29 revelam que a deformação média da célula periódica é praticamente isocórica para todos os valores de  $\bar{\theta}$  e  $t$  considerados neste estudo, embora as deformações de cada fase não o sejam.

Há o interesse de investigar analiticamente e numericamente a desigualdade (3.39), a qual pode ser reescrita na forma  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}} > 0$ . Numericamente, o lado esquerdo desta desigualdade é aproximado por  $\Delta \tilde{\mathbf{P}} : \Delta \mathbf{F} / (\Delta \bar{\lambda})^2$ , em que lembra-se de (5.95) que  $\bar{\lambda}$  é um dos estiramentos principais associados a  $\bar{\mathbf{F}}$ . Há também o interesse no cálculo de  $d\tilde{\phi}(\mathbf{F}, \mathbf{X})/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{F}}$ , em que  $\tilde{\phi}$  é dado por (6.1.a) na fase 1, ou, por (6.1.b) na fase 2. A taxa de variação de  $\tilde{\phi}$  com respeito a  $\bar{\lambda}$  representa uma medida da resposta mecânica do material. Assim, apresentam-se nas Figuras 31 e 32 as curvas  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  e  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$ , respectivamente.

Na primeira coluna da Fig. 31 apresentam-se as curvas  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para as fases 1 e 2 e para a média ponderada  $c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2$  na primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente, obtidos analiticamente. De modo similar, a segunda coluna apresenta

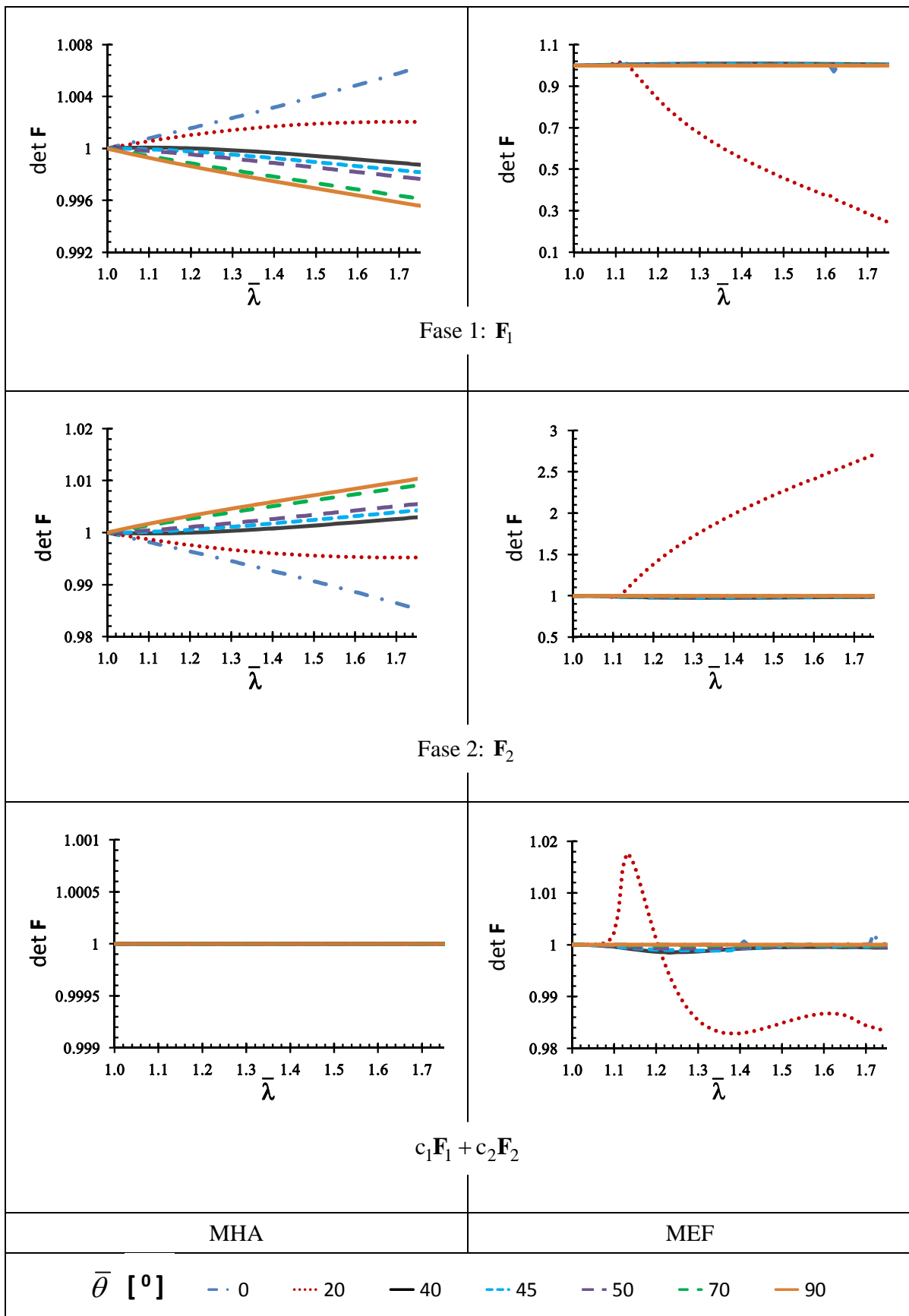


Figura 29: Determinante de  $\mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  para  $t = 20$  e  $\bar{\theta} \in \{0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ\}$ .

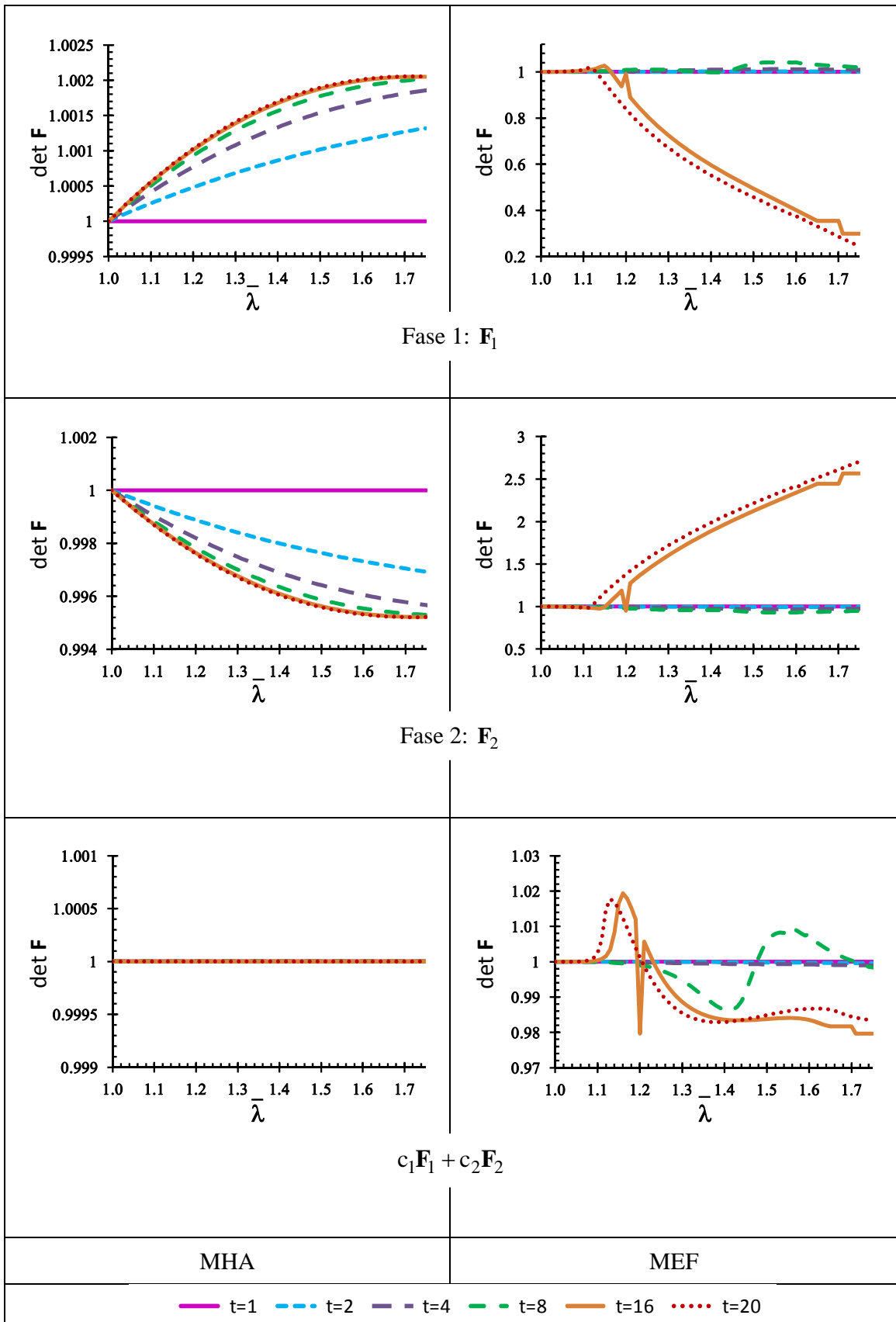


Figura 30: Determinante de  $\mathbf{F}$  versus  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t \in \{1, 2, 4, 8, 16, 20\}$ .

na mesma ordem das linhas da primeira coluna as curvas  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para as fases 1 e 2 e para a média ponderada  $c_1\mathbf{F}_1 + c_2\mathbf{F}_2$  obtidas por meio do MEF. Aqui, no entanto, o eixo da ordenadas é apresentado em escala logarítmica para contemplar todos os valores de  $\tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  no intervalo (1, 1.75) de  $\bar{\lambda}$  para o caso  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . Observa-se da Fig. 31 que os valores obtidos por meio analítico variam suavemente para todos o ângulos apresentados, o que não ocorre para os valores obtidos via MEF após o ponto de perda de elipticidade,  $\bar{\lambda} = 1.08$  no caso  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . Segundo o critério de perda de convexidade, pode-se observar que a fase 1 não sofre amolecimento para valor algum obtido analiticamente e endurece para o ângulo  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . Por esse mesmo critério, a fase 2 amolece segundo os cálculos analíticos para os ângulos  $\bar{\theta} = 40^\circ$  no ponto de perda de elipticidade,  $\bar{\lambda} = 1.08$ , e para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  quando  $\bar{\lambda} = 1.40$ . Para os resultados obtidos por meio do MEF na fase 2, nota-se que esta fase endurece para todos os ângulos  $\bar{\theta}$  e muito acentuadamente para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  após o ponto de perda de elipticidade. No caso do critério calculado utilizando os valores do MEF, verifica-se que, utilizando a média ponderada, há perda de convexidade em  $\bar{\lambda} = 1.06$  quando  $\bar{\theta} = 20^\circ$ . Este valor não pode ser visto no gráfico da média ponderada para o MEF porque os valores no eixo das ordenadas estão em escala logarítmica. Para exibir este valor, fez uma ampliação dessa região de interesse, selecionando apenas a curva correspondente a  $\bar{\theta} = 20^\circ$ , apresentando-a na primeira coluna da Fig. 33 a ser apresentada abaixo.

Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) verificam um outro critério de amolecimento por meio das curvas  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$ , em que considera-se que não há amolecimento quando duas curvas correspondentes a ângulo complementares, por exemplo os ângulos  $\bar{\theta} = 40^\circ$  e  $50^\circ$ , continuam paralelas entre si à medida que  $\bar{\lambda}$  aumenta. Estes resultados podem ser melhor observados na Fig. 32. Nesta figura, a primeira coluna refere-se aos resultados obtidos analiticamente, os quais são idênticos aos resultados obtidos por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009). Lembre-se da Seção 5.3 que estes autores utilizam um método tangente de segunda ordem para calcular as propriedades efetivas do meio homogeneizado. Na segunda coluna são apresentadas as curvas  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas por meio do MEF para as fases 1, 2 e considerando a média ponderada. Comparando as curvas correspondentes obtidas de cada método para cada uma das fases e para as médias ponderadas de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$ , observa-se que o material sofre amolecimento para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  na fase 2 e para a média ponderada nas soluções obtidas analiticamente e endurece nas fases 1 e 2 para este mesmo ângulo nas soluções obtidas pelo MEF. No caso do MEF, tem-se ainda que o material sofre também amolecimento para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  em um pequeno trecho entre  $\bar{\lambda} = 1.085$  (logo após o ponto de perda de elipticidade) e  $\bar{\lambda} = 1.115$ .

Após este trecho, o material começa endurecer abruptamente. Por razões de escala este trecho está melhor detalhado no lado esquerdo da Fig. 33 apresentada a seguir.

Apresentam-se na Fig. 33 curvas  $\check{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  e  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$ , à esquerda e à direita, respectivamente, obtidas do MEF utilizando médias ponderadas de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$  para o ensaio de cisalhamento puro em que  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$ . Estas curvas são trechos de curvas apresentadas nas figuras 31 e 32 no intervalo  $\bar{\lambda} \in (1, 1.15)$ . Na curva  $\check{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  observa-se que o ponto preto refere-se ao ponto de perda de convexidade em  $\bar{\lambda} = 1.06$  e o ponto verde refere-se ao ponto de perda de elipticidade em  $\bar{\lambda} = 1.08$ . Segundo o critério de amolecimento dado por  $\check{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}} \leq 0$ , o material efetivo amolece para  $\bar{\lambda} \in (1.08, 1.115)$ , sendo que em  $\bar{\lambda} = 1.11$  inicia abruptamente uma mudança de direção para endurecer a partir de  $\bar{\lambda} > 1.115$ . Na curva  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  o ponto em que há o primeiro valor negativo é quando  $\bar{\lambda} = 1.085$ , ou seja, após o ponto de perda de elipticidade,  $\bar{\lambda} = 1.08$ , marcado sobre a curva por um ponto verde. Segundo o critério proposto por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) conclui-se que há amolecimento do material na solução obtida pelo MEF para o ângulo  $\bar{\theta} = 20^\circ$  do ponto de perda de elipticidade até aproximadamente  $\bar{\lambda} = 1.115$  e então inicia-se um endurecimento do material bilaminado.

Do exposto anteriormente verifica-se que ambos os critérios de amolecimento permitem obter conclusões semelhantes a respeito do comportamento da microestrutura do bilaminado quando analisadas as soluções da média ponderada obtidas via MEF: as curvas do material indicam amolecimento a partir do ponto de perda de convexidade e acentuação deste amolecimento a partir do ponto de perda de elipticidade até aproximadamente  $\bar{\lambda} = 1.115$  para então iniciar um endurecimento no caso de  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  conforme apresentado na Fig. 33 (Esquerda).

Apresentam-se na Fig. 34 curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas de ambos os métodos, método analítico (à esquerda) e MEF (à direita), no caso da média ponderada de  $\mathbf{F}$  para diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$ . Comparando cada curva obtida por via analítica com a sua correspondente obtida por meio do MEF, pode-se observar que apenas as curvas de  $\bar{\theta} = 10^\circ$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  são muito diferentes para grandes valores de  $\bar{\lambda}$ . Observa-se que a solução obtida via MEF para  $\bar{\theta} = 10^\circ$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  bifurca da solução obtida analiticamente com um trecho de transição suave a partir do ponto de perda de elipticidade (ponto verde) quando comparadas com suas respectivas curvas obtidas pela via analítica. Na curva obtida via MEF para o ângulo  $\bar{\theta} = 10^\circ$  pode-se também observar que há um ponto fora da curva para  $\bar{\lambda} \cong 1.26$ . A investigação deste caso não permitiu chegar a uma conclusão de quais motivos levaram a obter este ponto.



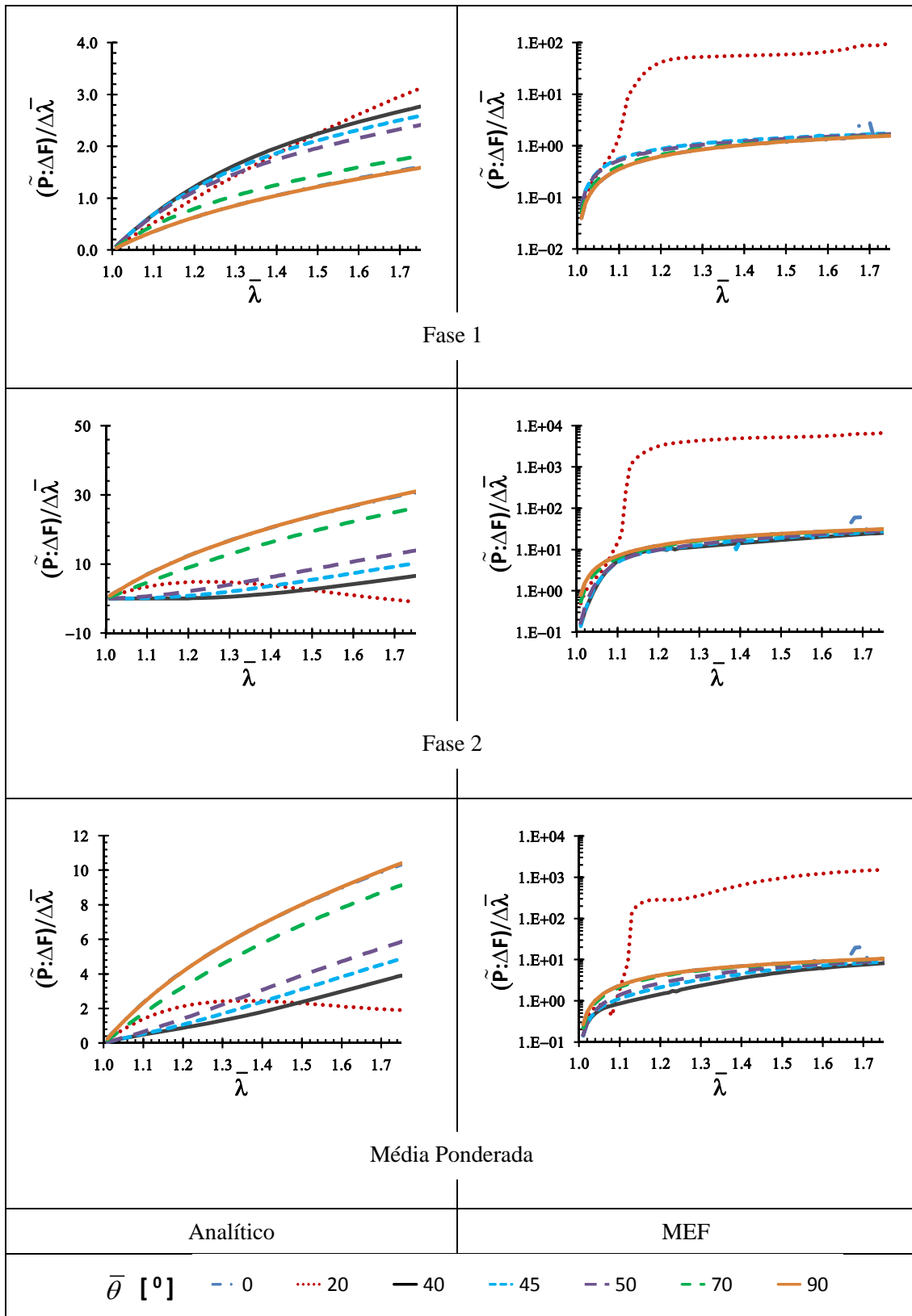


Figura 32: Curvas  $d\bar{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  versus  $\bar{\lambda}$  para ensaios de cisalhamento puro dados por (6.3) e (5.95) segundo diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$  em material Neo-Hookeano compressível por via analítica (Esquerda) e via MEF (Direita) para as fases 1, 2 e considerando as médias ponderadas de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\mathbf{F}$ .

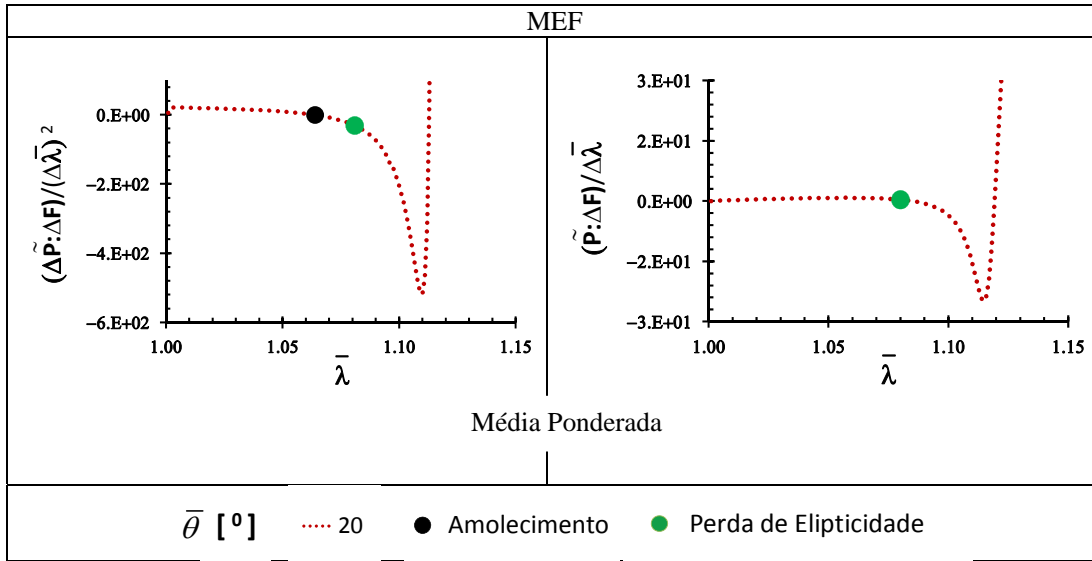


Figura 33: Curvas  $\dot{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  (Esquerda) e  $d\tilde{\phi}/d\bar{\lambda} \equiv \tilde{\mathbf{P}} : \dot{\mathbf{F}}$  (Direita) versus  $\bar{\lambda}$  para ensaio de cisalhamento puro dados por (6.3) e (5.95) considerando  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$  em material Neo-Hookeano compressível via MEF no caso de média ponderada de  $\tilde{\mathbf{P}}$  e  $\dot{\mathbf{F}}$ .

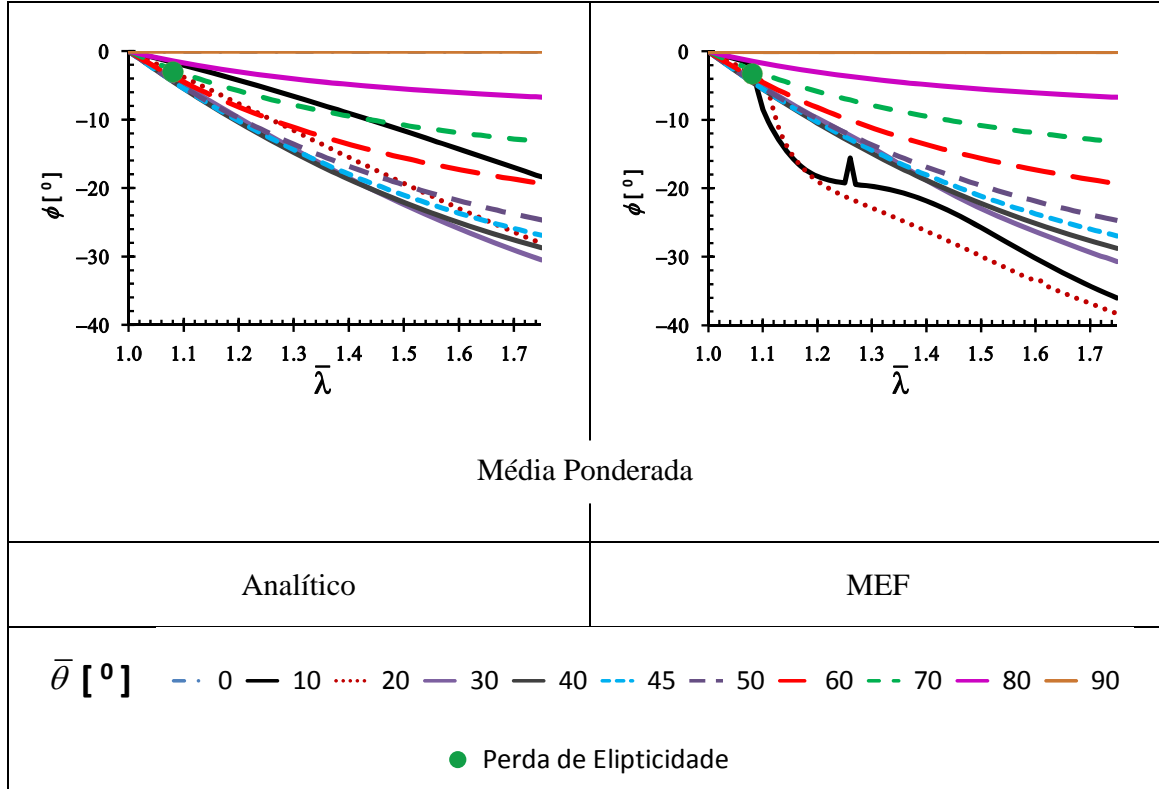


Figura 34: Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas de ambos, analítico (Esquerda) e MEF (Direita) no caso de média ponderada de  $\dot{\mathbf{F}}$  para diferentes ângulos  $\bar{\theta}$  e  $t = 20$ .



Para melhor observar o comportamento das curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas analiticamente e por meio do MEF para os casos linear e não-linear com  $t = 20$  e  $\bar{\theta} = 20^\circ$ , as mesmas foram plotadas conjuntamente na Fig. 35. Nesta figura, à esquerda estão plotadas as curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda} \in (1, 1.75)$  e à direita as mesmas curvas correspondentes no intervalo  $\bar{\lambda} \in (1, 1.10)$ . A curva  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtida via MEF para o material linear serve apenas para efeito comparativo, pois a solução é válida somente na vizinhança da configuração de referência. Mesmo assim, é interessante notar que esta solução está próxima da solução obtida analiticamente para o material não-linear. Na Fig. 35, nota-se claramente a bifurcação da solução obtida via MEF com respeito à solução do MHA a partir do ponto de perda de elipticidade, representado pelo ponto verde sobre a curva obtida analiticamente.

Agora, para investigar melhor como as curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas do MEF bifurcam da solução principal (analítica) em função da variação do parâmetro  $t$ , considerou-se os valores  $t = 1$  (material homogêneo), 2, 4, 8, 16, 20, 32, 64 e 128 e  $\bar{\theta} = 20^\circ$  para obter as curvas mostradas na Fig. 36. Nesta figura, à esquerda, encontram-se as curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda} \in (1, 1.75)$ , obtidas analiticamente e via MEF à medida que  $t$  aumenta. A curva  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  calculada por via analítica não depende das propriedades dos materiais, mas somente do ângulo  $\bar{\theta}$ . À direita encontram-se trechos das curvas mostradas no lado esquerdo para  $\bar{\lambda} \in (1, 1.18)$ . Na figura da direita estão ainda colocadas sobre cada curva obtida por meio do MEF os pontos de perda de elipticidade. Estes pontos foram obtidos analiticamente e estão muito próximos dos valores que puderam ser estimados via MEF quando a solução inicia a bifurcação a partir da solução principal. Nota-se ainda que, para os valores de  $t$  menores ou iguais a 8, não ocorre perda de elipticidade do material e as soluções obtidas analiticamente e via MEF são indistinguíveis. Para valores de  $t$  maiores do que 8, os pontos de perda de elipticidade deslocam-se para a esquerda à medida que  $t$  aumenta.

Apresentam-se na Fig. 37 curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  para  $(t, \bar{\theta}) = (4, 20^\circ)$  no lado esquerdo da figura e  $(t, \bar{\theta}) = (20, 30^\circ)$  no lado direito da figura. As curvas foram obtidas utilizando as malhas 1 a 5 da Tab.2 e analiticamente, conforme indicado na legenda. Para ambas as combinações de  $(t, \bar{\theta})$ , as curvas são indistinguíveis entre si. Esta observação indica que os problemas de convergência numérica relatados acima não se devem à estratégia de refinamento das malhas de elementos finitos, mas sim ao comportamento do material não-linear após a perda de elipticidade para certos valores de  $(t, \bar{\theta})$ .

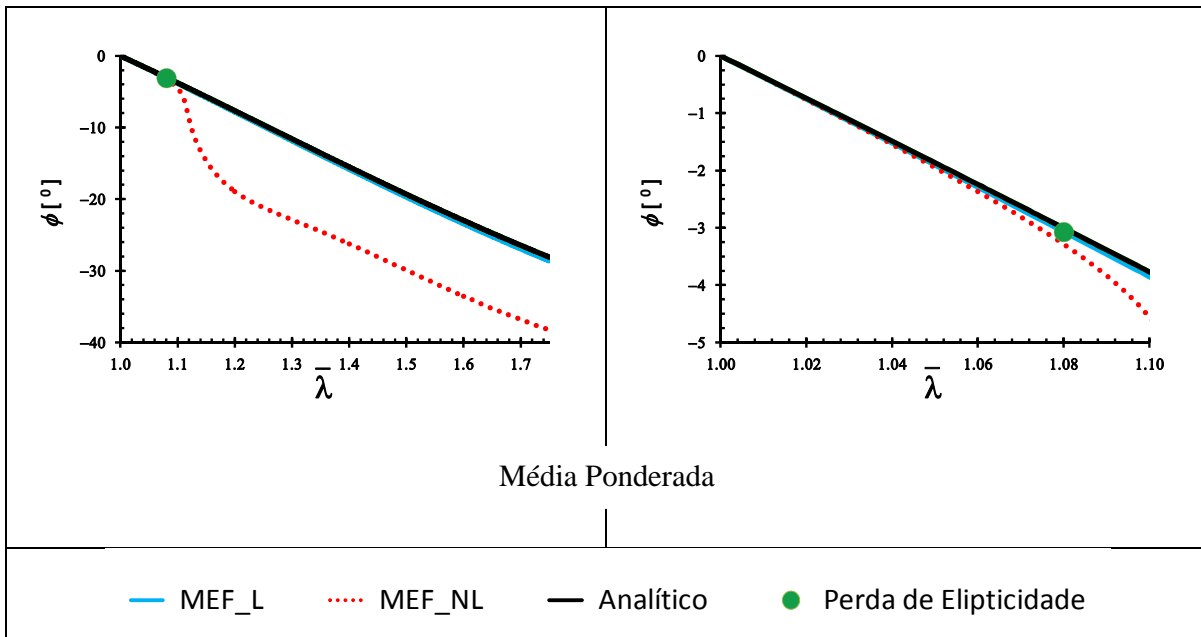


Figura 35: Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas via MEF para material elástico-linear (Linha sólida azul) e via MEF (Linha pontilhada vermelha) e analiticamente (Linha sólida preta) para o material Neo-Hookeano compressível, considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t = 20$ .

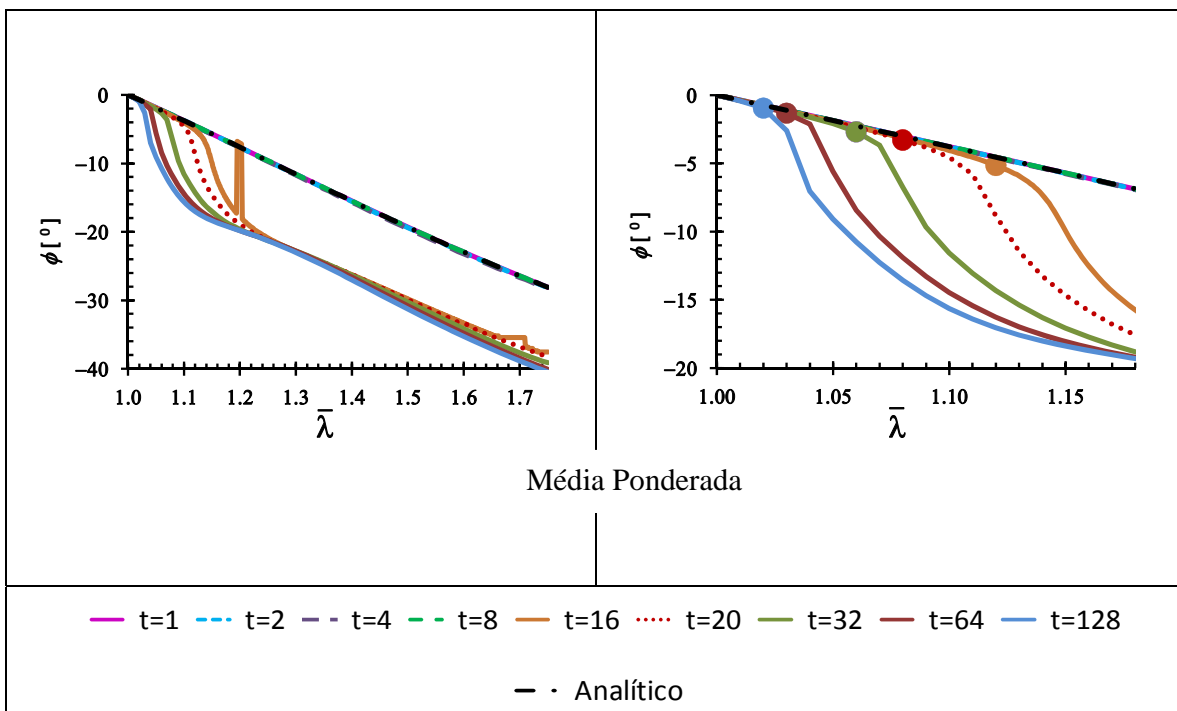


Figura 36: Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas via MEF para o material Neo-Hookeano compressível, considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $\bar{\theta} = 20^\circ$  e  $t \in \{1, 2, 4, 8, 16, 20, 32, 64, 128\}$ .

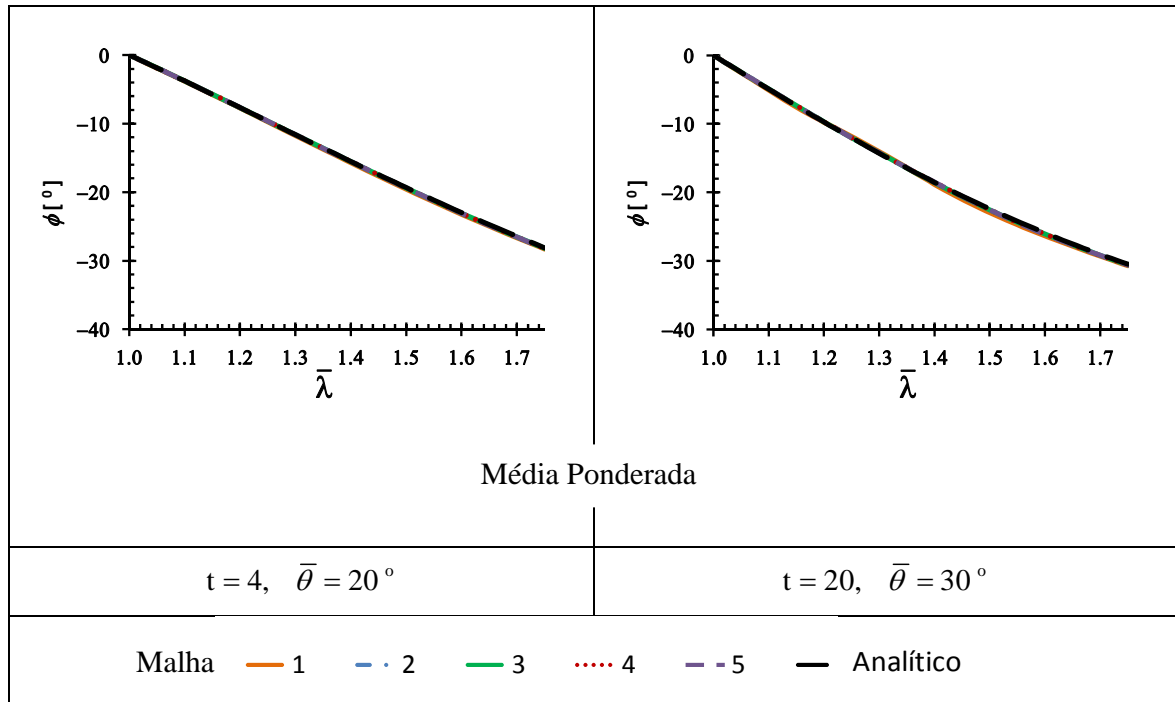


Figura 37: Curvas  $\phi$  versus  $\bar{\lambda}$  obtidas para cada malha da Tab. 2 considerando a média ponderada de  $\mathbf{F}$  para  $t = 4, \bar{\theta} = 20^\circ$  (Esquerda) e  $t = 20, \bar{\theta} = 30^\circ$  (Direita).



## 7 Conclusões e Sugestões para Trabalho Futuro

O estudo do comportamento efetivo de bilaminados compostos por distribuições periódicas de lâminas elástico-lineares, homogêneas e isotrópicas em equilíbrio na ausência de forças de corpo, demonstra claramente que os resultados computacionais obtidos via MEF tendem aos resultados analíticos obtidos via MHA à medida que o número de lâminas na sequência de bilaminados tende ao infinito.

Na investigação do comportamento efetivo de bilaminados compostos por distribuições periódicas de lâminas elásticas não-lineares, homogêneas, quase-incompressíveis e isotrópicas submetidos a condições de deformação impostas em seus contornos, os resultados computacionais predizem perda de elipticidade para um nível de deformação próximo ao nível de deformação da perda de elipticidade predita pelo método de homogeneização de segunda ordem tangencial. Os resultados analíticos e computacionais indicam que a perda de elipticidade é fortemente influenciada pelo contraste de heterogeneidade entre as fases e pelas condições de contorno.

Existem fortes evidências, segundo os estudos numéricos realizados neste trabalho, de que as soluções obtidas pelo MEF birfurcam das soluções analíticas, ditas principais, a partir do ponto de perda de elipticidade para determinados valores de  $\bar{\theta}$  e  $t$  que foram apresentados no capítulo anterior. Este fato explica as grandes diferenças observadas entre as soluções obtidas empregando o MEF e os métodos analíticos estudados nesta tese para deformações após o ponto de perda de elipticidade.

Os problemas descritos acima são altamente não-lineares devido à não-linearidade do material e às medidas de deformação utilizadas, e requerem métodos analíticos e numéricos de análise. Pretende-se utilizar a experiência adquirida e descrita nas seções anteriores de modo a fazer um melhor emprego de métodos assintóticos e dos elementos finitos na análise aproximada destes problemas. De um modo geral, será utilizada esta experiência para obter outras sequências de soluções aproximadas e serão investigadas as propriedades de convergência das mesmas.

Deste modo, sugere-se para a continuidade deste trabalho:

1. A implementação de outros materiais para investigação dos fenômenos de instabilidades mecânicas;
2. A melhoria das malhas de elementos finitos utilizando ambos os tipos de refinamento,  $p$  e  $h$ , a fim de discretizar melhor os laminados em estudo e superar as dificuldades encontradas no decurso do presente trabalho com relação à convergência do método iterativo utilizado pelo ANSYS. O método iterativo utilizado pelo ANSYS para resolver os problemas não-lineares não converge para  $\bar{\theta} \neq 0$  e para valores elevados de  $\bar{\lambda} > 0$ . Espera-se que ao implementar o refinamento  $p$  os problemas de convergência à medida que  $\kappa$  tende a um valor muito alto sejam solucionados. Apesar dos resultados mostrados na Seção 6.2 permitirem extrair importantes conclusões sobre o comportamento local do laminado para  $\bar{\lambda} \leq 1.75$ , deseja-se investigar tal comportamento para valores elevados de  $\bar{\lambda}$  e, assim, poder realizar comparações com resultados obtidos na literatura como, por exemplo, aqueles mostrados por Lopez-Pamies e Ponte-Castañeda (2009) em que  $\bar{\lambda} \in (1, 3)$ ;
3. O aprimoramento do código computacional desenvolvido em APDL para determinação das constantes efetivas;
4. A continuação das simulações numéricas e a participação/ auxílio nos esforços do grupo de pesquisa para a realização do estudo teórico.
5. Pretende-se continuar a implementação do código em APDL do ANSYS e considerar outras condições de contato entre as fases além das condições de contato perfeito que aqui são utilizadas.

## Referências

- ABEYARATINE, R.; TRIANTAFYLLIDS, N. An investigation of localization in a porous elastic material using homogenization theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, p. 481–486, September 1984.
- AGUIAR, A. R. **Simulação Numérica do Fenômeno da Estricção em um Material Elástico**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Departamento de Engenharia Mecânica da PUC/RJ, Rio de Janeiro, Brasil, Dezembro 1989.
- AGUIAR, A. R.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D. An asymptotic homogenization approach to study hyperelastic laminates with functionally graded constituents exhibiting softening. In: **12th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XII**. Port of Spain, Trinidad: [s.n.], 2012. Disponível no link: <http://www.aamech.org/PACAM12/Documents/231.pdf>.
- ALLEN, D. H. Homogenization principles and their application to continuum damage mechanics. **Composites Science and Technology**, v. 61, p. 2223–2230, July 2001.
- ALTENBACH, H. Analysis of homogeneous and non-homogeneous plates. In: BORST, R. de; SADOWSKI, T. (Ed.). **Lecture Notes on Composite Materials: Current Topics and Achievements**. [S.l.]: Springer, 2009, (Solid Mechanics and its Applications, v. 154). p. 1–33.
- ANSYS, INC. **ANSYS Mechanical APDL Programmer's Manual**. Release 13. Canonsburg, PA, USA, November 2010.
- BAKHVALOV; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media**. Dordrecht,: Kluwer, 1989. (Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials). 366 p.
- BAZANT, Z. P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 102, n. 2, p. 331–344, March/April 1976.
- BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. Fracture mechanics of reinforced concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 106, n. 6, p. 1287–1306, November/December 1980.
- BELYTSCHKO, T. et al. Strain-softening materials and finite-element solutions. **Computers & Structures**, v. 23, n. 2, p. 163 – 180, 1986.
- BENSOUSSAN, A.; LIONS, L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. Amsterdam. The Netherlands: North-Holland Publishing Company, 1978. (STUDIES IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, v. 5).
- BERGER, H. et al. Finite element and asymptotic homogenization methods applied to smart composite materials. **Computational Mechanics**, v. 33, p. 61–67, 2003.

BERGER, H. et al. An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5692–5714, April 2005.

BERGER, H. et al. A comprehensive numerical homogenisation technique for calculating effective coefficients of uniaxial piezoelectric fibre composites. **Materials Science and Engineering A**, v. 412, p. 53–60, June 2005.

BERGER, H. et al. Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties. **Smart Mater. Struct.**, v. 15, p. 451–458, February 2006.

BERGER, H. et al. Evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fiber composites using a numerical homogenization technique. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 2, n. 8, p. 1561–1570, October 2007.

BLATZ, P. J.; KO, W. L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. **Transactions of the Society of Rheology**, VI, n. 1, p. 223–251, 1962.

BORST, R. D. et al. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. **Engineering Computations**, v. 10, p. 99–121, 1993.

BOWER, A. F. **Applied Mechanics of Solids**. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2010.

BRAVO-CASTILLERO, J. **Homogeneização e Propriedades Efetivas de Materiais Compostos**. São Carlos, SP, Brasil, 2009. (Notas de Aula).

BRAVO-CASTILLERO, J. et al. Unified analytical formulae for the effective properties of periodic fibrous composites. **Materials Letters**, v. 73, n. 15, p. 68–71, April 2012.

BRAVO-CASTILLERO, J. et al. Asymptotic homogenization of laminated piezocomposite materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 35, n. 5-6, p. 527–541, June 1998.

BRAVO-CASTILLERO, J. et al. Analytical formulae for electromechanical effective properties of 3-1 longitudinally porous piezoelectric materials. **Acta Materialia**, v. 57, p. 795–803, November 2009.

BRAVO-CASTILLERO, J. et al. Homogenization and effective properties of periodic thermomagnetoelastic composites. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 4, n. 5, p. 819–836, 2009.

BRAVO-CASTILLERO, J. et al. Effective elastic properties of periodic fibrous composites. limit cases. applications to porous and nonlinear materials. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Systems**, v. 13, p. 305–322, 2006.

BRUNO, O.; CHAUBELL, J. Personal communication. 1999.

BUHAN, P. de; MAGHOUS, S. Comportement élastique non linéaire macroscopique d'un matériau comportant un réseau de joints. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy**, v. 324, n. 4, p. 209 – 218, 1997.



- BURYACHENKO, V. A. Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of random structure components. **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 6, p. 577–612, June 2001.
- CASTAÑEDA, P. P.; TIBERIO, E. A second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 48, p. 1389–1411, June 2000.
- CHRISTENSEN, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Reprint. New York: Dover Publications, Inc., 2005. (Dover Books on Engineering).
- CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity - Volume 1: Three-Dimensional Elasticity**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1988.
- CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An introduction to homogenization**. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. (Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications,). 224 p.
- COHEN, Y. et al. Deformation of oriented lamellar block copolymer films. **Macromolecules**, v. 33, n. 17, p. 6502–6516, June 2000.
- CRUZ, J. P. da; OLIVEIRA, J.; TEIXEIRA-DIAS, F. Asymptotic homogenisation in linear elasticity. part i: Mathematical formulation and finite element modelling. **Computational Materials Science**, v. 45, p. 1073–1080, March 2009.
- CRUZ, J. P. da; OLIVEIRA, J.; TEIXEIRA-DIAS, F. Asymptotic homogenisation in linear elasticity. part ii: Finite element procedures and multiscale applications. **Computational Materials Science**, v. 45, p. 1081–1096, March 2009.
- DAI, H.-H.; PENG, X. Elliptic-spline solutions for large localizations in a circular blatz-ko cylinder due to geometric softening. **SIAM J. Appl. Math.**, v. 72, n. 1, p. 181–200, January 2012.
- DEBOTTON, G. Transversely isotropic sequentially laminated composites in finite elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 53, n. 6, p. 1334–1361, June 2005.
- DEBS, M. E.; TAKEYA, T. **Introdução às Pontes de Concreto**. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2010. (Texto de Apoio à Disciplina SET - 412).
- DRIEMEIER, L. **Contribuição ao Estudo da Localização de Deformações com Modelos Constitutivos de Dano e Plasticidade**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos/USP, São Carlos, Brasil, Fevereiro 1999.
- FARAGE, M. C. R. et al. Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. **REM: R. Esc. Minas**, v. 64, n. n. 4, p. 455–462, Outubro-Dezembro 2009.
- FERNÁNDEZ, L. D. P. **Un Enfoque Integrador de Métodos Asintóticos y Variacionales para la Evaluación del comportamiento efectivo de materiales compuestos magneto-electro-elásticos no lineales provistos de una estructura periódica**. Tese (Doutorado) — Instituto de Cibernética, Matemática y Física Departamento de Física Aplicada, Ciudad de La Habana, Cuba, 2009.

- FIGUEIREDO, J.; VIAÑO, J. M. **Finite elements Q1-Lagrange for the linear elasticity problem**. Portugal, 2005. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5198/1/linearelasticity.pdf>. Acesso em: 8 agosto 2010.
- FRANCFORT, G. A. Homogenization and linear thermoelasticity. **SIAM J. Math. Anal.**, v. 14, p. 696–708, 1984.
- GALAVI, V.; SCHWEIGER, H. F. Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis. **International Journal of Geomechanics**, v. 10, n. 1, p. 30–44, 2010. January/February.
- GALKA, A.; TELEGA, J. J.; WOJNAR, R. Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites. **Comput. Assisted Mech. Eng. Sci.**, v. 3, p. 133–154., 1996.
- GURTIN, E. M. **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York, USA: Academic Press, 1981. (Mathematics in Science and Engineering, v. 158).
- GURTIN, M. E.; FRIED, E.; ANAND, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 10, n. 4, p. 335–342, October-December 1962.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 2, p. 127–140, March-April 1963.
- HAYASHIDA, M. et al. High-modulus pitch-based graphite fibers for civil engineering and architectural applications. **Nippon Steel Technical Report**, n. 74, p. 57–63, July 1997.
- HILL, R. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 326, n. 1565, p. 131–147, Jan. 1972.
- HOLLISTER, S. J.; KIKUCHI, N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. **Computational Mechanics**, v. 10, p. 73–95, 1992.
- HUANG, Y.; HU, K.; CHANDRA, A. The effective elastic moduli of microcracked composite materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 30, n. 14, p. 1907–1918, 1993.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey, EUA: Prentice-Hall, Inc., 1987.
- JÚNIOR, A. dos S. **Um Estudo sobre Estimativas de Erro de Modelagem em Estruturas de Materiais Heterogêneos**. Dissertação (Mestrado) — Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brasil, Outubro 2008.

JUNIOR, G. K. **Aplicação da Teoria da Homogeneização em Materiais Compósitos Viscoelásticos**. Dissertação (Mestrado) — PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, Agosto 2003.

KALAMKAROV, A. L.; ANDRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. **Applied Mechanical Reviews**, v. 62 (3), p. 030802–1–030802–20, May 2009.

KARI, S. **Micromechanical Modelling and Numerical Homogenization of Fibre and Particle Reinforced Composites**. Tese (Doutorado) — Fakultät für Maschinenbau der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Deutschland, April 2006.

KARI, S.; BERGER, H.; GABBERT, U. Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites. **Computational Materials Science**, v. 39, p. 198–204, 2007.

KARI, S. et al. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. **Composites Science and Technology**, v. 68, p. 684–691, Sep. 2008.

KNOWLES, J.; STERNBERG, E. On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics for a special material. **Journal of Elasticity**, v. 5, p. 341–361, November 1975.

KO, W. L. **Application of finite elastic theory to the behavior of rubber-like materials**. Tese (Ph.D.) — California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, January 1963. Disponível no link: <http://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-03012004-143718>.

KULAK, R. F.; HUGHES, T. H. **Mechanical Testes for Validation of Seismic Isolation Elastomer Constitutive Models**. Argonne, Illinois, USA, December 1992. Disponível no link: <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/5333660-BvLqT/5333660.pdf>.

LEÓN-MECIÁS Ángela M. **Cálculo de propiedades efectivas para materiales compuestos en 3D: Método de Elemento Finito combinado con el Método de Homogeneización Asintótica**. Tese (Doutorado) — Universidad de La Habana, Facultad de Matemática y Computación, Departamento de Matemática Aplicada, La Habana, Cuba, 2006.

LIU, F. L. Rectangular thick plates on winkler foundation: differential quadrature element solution. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p. 1743–1763, 2000.

LOPEZ-PAMIES, O.; CASTAÑEDA, P. P. Second-order estimates for the macroscopic response and loss of ellipticity in porous rubbers at large deformations. **Journal of Elasticity**, v. 76, p. 247–287, December 2004.

LOPEZ-PAMIES, O.; PONTE-CASTAÑEDA, P. Microstructure evolution in hyperelastic laminates and implications for overall behavior and macroscopic stability. **Mechanics of Materials**, v. 41, p. 364–374, 2009.

MALIGNO, A. R. **Finite Element Investigations on the Microstructure of Composite Materials**. Tese (Doutorado) — The University of Nottingham, School of Mechanical, Materials and Manufacturing Engineering, Nottingham, UK, October 2007.

MICHEL, J.; MOULINEC, H.; SUQUET, P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, v. 172, p. 109–143, 1999.

MILTON, G. Bounds on the electromagnetic, elastic, and other properties of two-component composites. **Phys. Rev. Lett.**, v. 46, n. 8, p. 542–545, February 1981.

MILTON, G. Bounds on the elastic and transport properties of two-component composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 30, n. 3, p. 177–191, June 1982.

MILTON, G. W. **The Theory of Composites**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics).

MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. **J. Appl. Phys.**, v. 11, n. 582, p. 582–592, January 1940.

MOULINEC, H.; SUQUET, P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, v. 157, p. 69–74, 1998.

OCHOA, O. O.; REDDY, J. N. **Finite Element Analysis of Composite Laminates**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992. (Solid Mechanics and its Applications, v. 7).

OLEINIK, O. A.; SHAMAIEV, A. S.; YOSIFIAN, G. A. **Mathematical problems in elasticity and homogenization**. The Netherlands: North-Holland Publishing Company/Elsevier, 1992. (STUDIES IN MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS, v. 26).

OSTOJA-STARZEWSKI, M. **Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials**. Boca Raton, Florida, USA: CHAPMAN & HALL/CRC, 2007. (Modern Mechanics and Mathematics).

PACCOLA, R. R. **Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, Campinas, S.P., Brasil, Agosto 2001.

PACCOLA, R. R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos-Usf, São Carlos, SP, setembro 2004.

PANASENKO, G. **Multi-scale Modeling for Structures and Composites**. Netherlands.: Springer, 2005.

- PASCON, J. P. **Sobre Modelos Constitutivos Não Lineares para Materiais com Gradação Funcional Exibindo Grandes Deformações: Implementação Numérica em Formulação Não Linear Geométrica**. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas-EESC-USP, São Carlos, Brasil, Abril 2012.
- PASTERNAK, E.; MÜHLHAUS, H.-B. Generalised homogenisation procedures for granular materials. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 52, p. 199–229, 2005.
- PIETRUSZCZAK, S.; MRÓZ, Z. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 327–334, 1981.
- POBEDRYA, B. E. **Mecânica dos Materiais Compostos**. Moscou: Universidade Estatal de Moscou, 1984. (em russo).
- PRADO, E. B. T.; AGUIAR, A. R. Estudo do comportamento de um sólido elástico-linear transversalmente isotrópico via MHA e via MEF. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 11, n. 53, p. 117–121, 2009.
- PRADO, E. B. T. et al. O método de homogeneização assintótica aplicado na obtenção dos coeficientes efetivos de um compósito elástico linear. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 12, n. 55, p. 67–86, 2010.
- PRUCHNICKI, E. Hyperelastic law for reinforced elastomer at finite strain with edge effects. **Acta Mech.**, v. 129, p. 139–162, 1998.
- READ, H. E.; HEGEMIER, G. Strain softening of rock, soil and concrete—a review article. **Mechanics of Materials**, v. 3, p. 271–294, October 1984.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. Second edition. [S.l.]: CRC Press, 2004. (CRC Mechanical Engineering Series).
- RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. iv. further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 241, n. 835, p. 379–397, 1948.
- RUDNICKI, J. W.; RICE, J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 23, p. 371–394., June 1975.
- RUDYKH, S.; DEBOTTON, G. Instabilities of hyperelastic fiber composites: micromechanical versus numerical analyses. **J. of Elasticity**, v. 106, p. 123–147, 2012.
- SAENGER, E. H. Numerical methods to determine effective elastic properties. **International Journal of Engineering Science**, v. 46, p. 598–605, February 2008.
- SANCHEZ-HUBERT, J.; SANCHEZ-PALENCIA, E. **Introduction aux méthodes asymptotiques et à l’homogénéisation-Application à la mécanique des milieux continus**. Paris, França: Masson, 1992.
- SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non-homogeneous Media and Vibration Theory**. Berlim, Germany: Springer, 1980. (Lectures Notes in Physics, v. 127).

SILVA, E. C. N.; KOGL, M. Design of piezoelectric bilaminar and c-block actuators using topology optimization. In: **Proceedings of 11th SPIE (Annual International Symposium on Smart Structures and Materials) 2004 - Modeling, Signal Processing, and Control conference**. San Diego: The International Society for Optical Engineering, 2004. v. 5383, p. 265–276.

SILVA, E. C. N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Design of flextensional transducers using homogenization design method. In: **Proceedings of 6th SPIE (Annual International Symposium on Smart Structures and Materials): Mathematics and Control in Smart Structures**. Newport Beach, California: Proc. SPIE, 1999. v. 3667, p. 232–243.

SILVA, U. P. da. **Um Estudo do Método de Homogeneização Assimptótica visando Aplicações em Estruturas Ósseas**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - Escola de Engenharia de São Carlos Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, S.P., Brasil, Julho 2009.

SIXTO, L. M. **Homogeneización de compuestos termo-magneto-electro-elásticos com estructura periódica**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cidade de Havana/Cuba, 2010. 87p.

SOKOLNIKOFF, I. S. **Mathematical Theory of Elasticity**. Reprint edition. Malabar, Florida, USA: Robert E. Krieger Publishing Company, 1987.

SOUZA, F. V. **Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) — Centro de Tecnologia-Universidade Federal do Ceará, Fortaleza/CE, 2005.

TALBOT, D. R. S. Bounds which incorporate morphological information for a nonlinear composite dielectric. **Proc. R. Soc. Lond. A**, v. 455, p. 3617–3628, October 1999.

TALBOT, D. R. S. Improved bounds for the effective properties of a nonlinear two-phase elastic composite. **J. Mech. Phys. Solids**, v. 48, p. 1285–1294., 2000.

TALIERCIO, A.; CORUZZI, R. Mechanical behaviour of brittle matrix composites: a homogenization approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 24, p. 3591–3615, August 1999.

TORQUATO, S. **Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties**. Corrected edition. The Netherlands: Springer, 2002.

TOULEMONDE, C.; MASSON, R.; GHARIB, J. E. Modeling the effective elastic behavior of composites: a mixed finite element and homogenisation approach. **C. R. Mecanique**, v. 336, p. 275–282, 2008.

TRIANTAFYLLIDIS, N.; AIFANTIS, E. C. A gradient approach to localization of deformation. i. hyperelastic materials. **Journal of Elasticity**, v. 16, p. 225–237, 1986.

TRUESDELL, C.; NOLL, W. **The non-linear field theories of mechanics**. Berlin: Springer, 1965. (Handbuch der Physik, Vol. III/3).

USMA. Metric system temperature (kelvin and degree celsius). 2012. Disponível em: <http://lamar.colostate.edu/hillger/temps.htm>. Acesso em: 11/05/2012.

VALANIS, K. C. On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 52, p. 649–653, September 1985.

VASILIEV, V. V.; MOROSOV, E. V. **Mechanics and Analysis of Composite Materials**. 1st edition. ed. Kidlington, Oxford, UK: Elsevier, 2001.

VOLOKH, K. Hyperelasticity with softening for modeling materials failure. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 55, p. 2237–2264, February 2007.

WEINBERGER, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. Waltham, Massachusetts-USA: Blaisdell Publishing Company, 1965.

WILLIS, J. R. The overall elastic response of composite materials. **J. Appl. Mech.**, v. 50, n. 4b, p. 1202–1209, 1983.

WILLIS, J. R. Randomly inhomogeneous media. In: SANCHEZ-PALENCIA, E.; ZAOUI, A. (Ed.). **Homogenization Techniques for Composite Media: Lectures Delivered at the CISM International Center for Mechanical Sciences**. Udine, Italy: Springer-Verlag, 1985. (Lecture Notes in Physics, v. 272), p. 279–335.

WU, S.; WANG, X. Mesh dependence and nonlocal regularization of one-dimensional strain softening plasticity. **J. Eng. Mech.**, v. 136, p. 1354–1365, April 2010.

ZEMAN, J. **Analysis of Composite Materials with Random Microstructure**. Tese (Doutorado) — Czech Technical University in Prague Klokner Institute, Czech Republic, 2003.

ZHANG, Y.; YANG, C. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 88, p. 147–157, 2009.





## APÊNDICE A – Unicidade e Equivalência das Formulações Variacional e de Minimização na Elasticidade Linear Clássica

Pode-se verificar a unicidade da formulação variacional, (4.23), por meio da aplicação do teorema de Lax-Milgram, ver por exemplo, Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia (1992) e Cioranescu e Donato (1999).

Assim, verifica-se que o problema dado por (4.23) satisfaz as hipóteses do teorema de Lax-Milgram com o espaço  $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\mathcal{B}), v|_{\partial_{\mathbf{u}}\mathcal{B}} = 0\}$ , a forma bilinear  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{B}} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dX, \quad (\text{A.1})$$

e o funcional linear  $L$

$$\langle L, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{B}} b_i v_i dX + \int_{\partial_{\mathbf{t}}\mathcal{B}} t_i v_i dS. \quad (\text{A.2})$$

Primeiramente, verifica-se que a forma bilinear em (A.1) é contínua sobre  $\mathcal{V}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\mathcal{B}} (C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dX \right| \leq \left| \int_{\mathcal{B}} (k_1 \eta_{ij} \eta_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dX \right| \\ &\leq k_1 \eta_{ij} \eta_{ij} \left| \int_{\mathcal{B}} (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dX \right| \leq k_2 \eta_{ij} \eta_{ij} \int_{\mathcal{B}} |(\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}))| dX \\ &\leq C \int_{\mathcal{B}} |(\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}))| dX \quad (\text{por Cauchy – Schwarz}) \quad (\text{A.3}) \\ &\leq C \int_{\mathcal{B}} |\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})|^2 dX \int_{\mathcal{B}} |\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})|^2 dX \\ &\leq C_1 \underbrace{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}}_{\text{utiliz. a eq. de normas}} \leq C_1 C_2 C_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Na última expressão de (A.3), que completa a demonstração, sugere-se consultar

Cioranescu e Donato (1999), em que é apresentada a equivalência entre as normas  $\|\bullet\|_{\mathcal{V}}$  e  $\|\bullet\|_{\mathcal{H}}$ . Uma outra referência em que se encontram estas demonstrações é o trabalho de Figueiredo e Viaño (2005), que apresentam as demonstrações para o caso linear isotrópico.

Agora, vê-se que a forma bilinear em (A.2) é elíptica sobre  $\mathcal{V}$ . Assim,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} C_{ijkl}(\mathbf{X}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX \\ &\geq \int_{\mathcal{B}} k_2 \eta_{ij} \eta_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX \geq k_2 \eta_{ij} \eta_{ij} \int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX \geq C_4 \int_{\mathcal{B}} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dX \\ &\geq C_4 C_5 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

No último passo de (A.4) utilizou-se a Primeira Desigualdade de Korn conjuntamente com a Desigualdade de Poincaré para completar a demonstração, ver Oleinik, Shamaev e Yosifian (1992).

O teorema de Lax-Milgram permite, em particular, demonstrar o seguinte resultado sobre a minimização de funcionais quadráticos que são de sumo interesse em importantes aplicações na teoria da elasticidade.

Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert,  $L$  um funcional linear e contínuo sobre  $\mathcal{H}$ , e  $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  uma forma bilinear, simétrica, contínua e elíptica sobre  $\mathcal{H}$ , então existe uma única função  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  para a qual o funcional  $I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle L, \mathbf{v} \rangle$  alcança o seu valor mínimo.

Em Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia (1992) pode ser encontrado um estudo mais detalhado sobre a minimização de funcionais lineares.

A forma  $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e o funcional  $L$  satisfazem as hipóteses do teorema de Lax-Milgram, que existe uma única solução  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  do problema variacional dado em (4.23). Qualquer que seja  $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$  é possível expressá-la na forma  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  com  $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ . Utilizando o caráter bilinear e simétrico de  $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , e a linearidade de  $L$ , chega-se a

$$\begin{aligned} I(\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{u} \rangle - \langle L, \mathbf{w} \rangle \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle L, \mathbf{u} \rangle}_{I(\mathbf{u})} + \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{w} \rangle}_0 + \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = I(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}), \end{aligned} \tag{A.5}$$

do qual resulta, em virtude do caráter elíptico de forma  $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , que  $I(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - I(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha_0 \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}$ , e como  $\alpha_0 > 0$  finalmente tem-se que o incremento  $I(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - I(\mathbf{u}) \geq 0$  e a igualdade ocorre apenas quando  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , ou seja, o que se queria provar.

Este teorema fornece um resultado muito importante que permite a busca da

solução do problema variacional, (4.23) (ou a de seu equivalente problema na forma forte dado pelas expressões (4.1), (4.2), (4.6), (4.20) e (4.21) como um problema de minimização do funcional  $I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle L, \mathbf{v} \rangle$ . É interessante, também, que para o problema estudado resulta que o ínfimo do funcional é negativo e igual ao oposto da energia de deformação elástica, ou seja, que se  $\mathbf{u}$  é a solução de (4.23) portanto  $I(\mathbf{u}) = -W$ .

Por fim, sugere-se consultar Sanchez-Hubert e Sanchez-Palencia (1992), em que são apresentados resultados de interesse devido à importância destas formulações para a aplicação de métodos aproximados de solução, como o MEF.