

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**ANA PAULA FERREIRA RAMOS**

**Análise da interação estaca-solo-superestrutura  
com o acoplamento MEC-MEF**

**São Carlos  
2013**



ANA PAULA FERREIRA RAMOS

**Análise da interação estaca-solo-superestrutura  
com o acoplamento MEC-MEF**

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutora em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

Orientador: Professor Associado Doutor João Batista de Paiva

Tese de Doutorado desenvolvida com auxílio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. CNPq - Processo 141252/2008-1

Data da defesa: 26 de Setembro de 2013

Versão corrigida da tese. A versão original encontra-se disponível na Biblioteca da EESC-USP.

São Carlos

2013

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

R175a Ramos, Ana Paula Ferreira  
Análise da interação estaca-solo-superestrutura com  
o acoplamento MEC-MEF / Ana Paula Ferreira Ramos;  
orientador João Batista de Paiva. São Carlos, 2013.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2013.

1. Interação solo-estrutura. 2. Acoplamento  
MEC-MEF. 3. Soluções de Mindlin. I. Título.



## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel ANA PAULA FERREIRA RAMOS.

Título da tese: "Análise da interação estaca-solo-superestrutura com o acoplamento mec-mef".

Data da defesa: 26/09/2013

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Associado João Batista de Paiva (Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EEESC)

APROVADA

Prof. Dr. Edson Denner Leonel  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EEESC)

APROVADA

Prof. Dr. Leandro Palermo Junior  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Prof. Dr. Angelo Vieira Mendonça  
(Universidade Federal da Paraíba/UFPB)

APROVADA

Prof. Dr. José Sergio Komatsu  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADA

Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profª. Associada Ana Lucia Homce de Cresce El Debs

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Titular Denis Vinicius Coury

**Para o meu amado marido, Oscar Bayardo Ramos Lovón  
pela felicidade e privilégio de ter as nossas vidas mutuamente compartilhadas.  
E por todo o apoio, indispensável, para o desenvolvimento e conclusão desta tese.**

**Para a minha mãe, Abnair Ferreira de Oliveira por todos os ensinamentos.**

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida e realização desta tese.

Ao meu amado marido, Oscar Bayardo Ramos Lovón, pelo amor, apoio e motivação, em todas as circunstâncias, indispensáveis para a realização deste trabalho. E também pelas explicações sobre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e comentários sobre esta tese.

Ao professor João Batista de Paiva pela orientação deste trabalho e oportunidade de desenvolvê-lo.

Ao professor Angelo Vieira Mendonça pelas explicações sobre interação solo-estrutura e por ter sido membro da banca deste doutorado. E à sua esposa: Lucineide Balbino, pelas palavras de incentivo para a continuação deste trabalho.

Aos professores Leandro Palermo Junior e Edson Denner Leonel pela avaliação do exame de qualificação e banca deste doutorado. Ao professor José Sergio Komatsu pela presença na banca deste doutorado, avaliação e sugestões referentes a este trabalho.

Aos professores Adair Roberto Aguiar, representante da USP no Thirteenth Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM XIII), e Yashashree Kulkarni e Pradeep Sharma, representantes da University of Houston no PACAM XIII, pela oportunidade de apresentação e publicação deste trabalho, além da participação no PACAM XIII, que proporcionaram valiosos aprendizados científicos. Além da motivação presente na oportunidade de conhecer a astronauta da NASA Bonnie J. Dunbar e de visitar a NASA - Johnson Space Center.

Aos professores das disciplinas cursadas durante este doutorado, que contribuíram para a minha formação profissional e conseqüentemente para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho: André Teófilo Beck, Marcio Roberto Silva Correa, José Samuel Giongo, João Bento de Hanai, Humberto Breves Coda, Nelson Aoki e José Carlos Cintra. Ao Prof. Walter Savassi pelas explicações sobre placas. Aos professores Coda e Paccola pela orientação do mestrado, que foi uma formação importante para o doutorado. Ao Prof. José Elias Laier pelas disciplinas de dinâmica, cursadas ainda no mestrado, que contribuíram para uma visão mais ampla sobre mecânica das estruturas. Também ao Prof. Cintra pelas inúmeras palestras com orientações sobre apresentação de trabalhos acadêmicos, que enriquece os mesmos. E, ao Prof. Aoki, além das aulas, por toda a disponibilidade, paciência e orientações sobre Interação Solo-Estrutura, no Departamento de Geotecnia, EESC-USP.

Aos professores, chefes do departamento de Engenharia de Estruturas, no período deste doutorado: Marcio Antonio Ramalho, Maximiliano Malite e Ana Lucia Homce de Cresce El Debs e aos respectivos professores suplentes. Ao professor, que também foi chefe do SET no período deste doutorado, Sergio Persival Baroncini Proença, vice-diretor da EESC. E aos professores Geraldo Roberto Martins da Costa e Denis Vinicius Coury, presidentes da Comissão de Pós-Graduação.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas, SET, da Escola de Engenharia de São Carlos, EESC, da Universidade de São Paulo, USP, e toda a sua equipe, principalmente ao Masaki Kawabata e Rosi Jordão, que foram solicitados com maior frequência durante a realização deste trabalho. E ainda, ao SET e todos os colegas pela oportunidade de estar nesse

local por mais de cinco anos, o que proporcionou aprendizados e crescimento ímpares, tanto profissional quanto pessoal.

À Erica Kimura, que foi quem esteve comigo em São Carlos nos dias iniciais da enfermidade que aconteceu em 2010, e o Bayardo não estava na cidade. À Danilla Carneiro e à sua família pelos cuidados dedicados a mim na semana seguinte na casa dos seus pais; a minha mãe e aos meus outros familiares pela atenção comigo naquele momento, cuja recuperação permitiu a continuidade deste trabalho. E também às amigas Lílian Cristina, Samantha e Danilla que fizeram os momentos de descontração em Goiânia muito mais divertidos, e todos os outros amigos que de alguma forma fizeram os meus dias ainda mais animados. À Loyde Abreu pela visita na USP. E a minha mãe, pela presença em São Carlos no depósito desta tese. Ao meu marido, Bayardo, por todo o amor, apoio e presença em todos os momentos, principalmente pelos cuidados, atenção e paciência nos intermináveis meses de “repouso”; e aos nossos familiares, tanto de Goiás quanto do Peru, pela importância em nossas vidas e conseqüentemente nas nossas realizações, cuja bênção de serem numerosos impossibilita-me nomeá-los aqui evitando injustiças.

À família Guerreiro: Marisa, Moacir, Mariana e Marcel pela amizade e atenção em São Carlos.

Ao Paulo Cesar de Oliveira Queiroz pelo suporte em São Carlos, na etapa final deste doutorado e inestimável trabalho de providenciar a impressão e depósito da versão definitiva desta tese. Ao Raphael Almeida e equipe do serviço de pós-graduação da EESC-USP. Às bibliotecas da USP. Ao serviço VPN – USP. À SVPGR-EESC e Pró-Reitoria de Pós-GRaduação da USP.

Às experiências anteriores em mecânica das estruturas, que mesmo remotas contribuíram para que eu chegasse a este trabalho: Ao Professor Leão, de Filosofia do CEFET-GO, pelas aulas que em 1998 me interessaram e despertaram a minha curiosidade. Ao Professor e Filósofo Alberto Boaventura que apresentou a engenharia de estruturas como uma experiência filosófica, e de quem eu ouvi pela primeira vez, em 1999, a definição de viga de uma forma que estimulou a minha curiosidade e interesse pela área de mecânica das estruturas. E todos os professores seguintes, principalmente da área de mecânica das estruturas, que tiveram paciência para suportar as minhas dúvidas. E ao CEFET-GO por todas as visitas técnicas, inclusive ao IPT-USP. Ao Arcebispo Dom Antônio Ribeiro de Oliveira pela atuação na PUC-GO. Ao Padre Silva, pela amizade. Aos Professores Elias Calixto Carrijo, Edson Tejerina Calderón e Antonio Paulo Mendes, pelo contato na USP – São Carlos. Aos Professores José Sergio dos Passos Oliveira, Ricardo Veiga e Alberto Vilela Chaer pela oportunidade de participar do 46° IBRACON, no qual eu vi os trabalhos da USP e conheci o Professor Libânio Miranda Pinheiro - USP; e ao Sr. Carlos Campos que acompanhou os estudantes de Goiás na viagem para o 46° IBRACON. Aos professores Janes Cleiton Alves de Oliveira e Tejerina Calderón pela oportunidade de ser monitora, na área de mecânica das estruturas na PUC-GO. Ao Professor Dario de Araujo Dafico pela participação no projeto BITEC (IEL-SEBRAE-CNPq). Aos Professores João Bosco da Costa e Isamu Ikeda Junior pela oportunidade de estagiar na área de projetos estruturais. Ao Professor Eliel Castro, do Instituto Presbiteriano de Educação e outros professores de ensino religioso do IPE, cujos ensinamentos contribuíram para que eu alcançasse este trabalho.

À Universidade de São Paulo, USP, por propiciar a realização desta tese.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo auxílio financeiro.

"Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux."

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, Oeuvres, Gauthier, Villars, 1886, vol.VII, 1, pp.6-7.

"But, beloved, be not ignorant of this one thing: that with the Lord one day is as a thousand years, and a thousand years as one day."

2 Peter 3:8

32. Si quieres, hijo, serás adoctrinado, si te aplicas bien, entenderás de todo.

33. Si te gusta escuchar, aprenderás, si inclinas tu oído, serás sabio.

34. Acude a la reunión de los ancianos; ¿que hay un sabio?, júntate a él.

35. Anhela escuchar todo discurso que venga de Dios, que no se te escapen los proverbios agudos.

36. Si ves un hombre prudente, madruga a seguirle, que gaste tu pie el umbral de su puerta.

37. Medita en los preceptos del Señor, aplícate sin cesar a sus mandamientos. El mismo afirmará tu corazón, y se te dará la sabiduría que deseas.

Eclesiástico, 6

“Ouvistes que foi dito: Amarás o teu próximo, e odiarás o teu inimigo. Eu, porém, vos digo: Amai a vossos inimigos, bendizei os que vos maldizem, fazei bem aos que vos odeiam, e orai pelos que vos maltratam e vos perseguem; para que sejais filhos do vosso Pai que está nos céus; Porque faz que o seu sol se levante sobre maus e bons, e a chuva desça sobre justos e injustos. Pois, se amardes os que vos amam, que galardão tereis? Não fazem os publicanos também o mesmo? E, se saudardes unicamente os vossos irmãos, que fazeis de mais? Não fazem os publicanos também assim?”

Mateus 5: 43-47

## RESUMO

RAMOS, A. P. F. **Análise da interação estaca-solo-superestrutura com o acoplamento MEC-MEF**. 2013. 193 f. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

Fundações do tipo radier estaqueado são aquelas formadas pelos elementos estruturais de placa e estacas (elementos de barras) e o solo. Ao contrário de outros tipos de fundações, onde a carga da superestrutura é transferida ao solo pelo radier ou pelas estacas apenas, no radier estaqueado a contribuição das estacas, bem como a do radier são consideradas. As estacas transferem as cargas da superestrutura ao solo e, assim, permitem a redução dos recalques de uma forma muito econômica. O objetivo do presente trabalho é a análise da interação solo-estrutura através do acoplamento MEC-MEF. O solo é considerado um semi-espaço homogêneo, elástico e linear governado pela equação de Navier e modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), admitindo a solução fundamental de Mindlin. As estacas são modeladas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e cada elemento possui quatro nós. Além disso, as estacas podem receber forças horizontais, verticais e momentos. A tensão de cisalhamento ao longo da estaca é aproximada por um polinômio do segundo grau e as forças na direção horizontal são aproximadas por um polinômio do quarto grau. O elemento de fundação que faz a ligação do pilar com a estaca é representado por uma placa de grande rigidez, que apresenta o comportamento de um bloco. A interação entre o radier estaqueado e o solo é feita através da reação resultante da interação estaca-solo, nos nós com estaca. A interface radier-solo é dividida em elementos triangulares e para a reação do solo considera-se a variação linear ao longo de cada elemento. A superestrutura é modelada pelo MEF. Vários exemplos de interação solo-estrutura são estudados nesta tese, e mostram que as soluções obtidas a partir do programa computacional desenvolvido no presente trabalho denominado SSI estão de acordo com outros autores.

Palavras Chaves: Interação Solo-Estrutura. Acoplamento MEC-MEF. Soluções de Mindlin.

## ABSTRACT

RAMOS, A. P. F. **Pile-Soil-Superstructure Interaction using BEM-FEM coupling**. 2013. 193 p. PhD Thesis – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2013.

Piled raft foundations are structures consisting of piles, the raft and the soil. Unlike classical foundation design where the building load is either transferred by the raft or the piles alone, in a piled raft foundation the contribution of the piles as well as the raft is taken into account. The piles transfer a part of the building loads into the soil and thereby allow the reduction of settlement in a very economic way. The objective of the present work is the analysis of soil-structure interaction using BEM-FEM coupling. The soil, assumed to be an elastic linear homogeneous half space is governed by Navier's equation and it is modeled by the Boundary Elements Method (BEM) using Mindlin's fundamental solution. The piles are modeled by the Finite Element Method (FEM) with four nodes each. In addition, the piles can received horizontal and vertical forces and bending moments. The shear traction along the pile is approximated by a second-degree polynomial and the tractions in the horizontal direction are approximated by a fourth degree polynomial. The cap of the pile group is assumed to be rigid. The interaction between the raft and soil is made through the subgrade reaction. The soil-cap interface is divided into triangular elements and the subgrade reaction is assumed to vary linearly across each element. The building's structure is modeled by FEM. Several soil structure interaction examples are studied in this thesis, and they show that the solutions obtained from program SSI are in good agreement with others authors.

Key-words: Soil Structure Interaction. BEM-FEM coupling. Mindlin's fundamental solution.

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
1.1 APRESENTAÇÃO .....	15
1.2 EXEMPLOS DE INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA (ISE): PONTES .....	15
1.3 EXEMPLO DE ISE: TORRE DE PIZZA.....	19
1.4 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA TESE.....	22
1.5 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....	24
1.6 RAYMOND DAVID MINDLIN.....	30
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E OBJETIVOS</b> .....	<b>33</b>
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	33
2.1.1 <i>ISE e solo homogêneo</i> .....	36
2.1.2 <i>Steinbrenner</i> .....	39
2.1.3 <i>ISE e solo não homogêneo</i> .....	40
2.1.4 <i>MEC infinito</i> .....	42
2.2 JUSTIFICATIVA .....	43
2.3 OBJETIVOS .....	44
2.3.1 <i>Solos</i> .....	45
2.3.1 <i>Interação placa-solo</i> .....	45
2.3.1 <i>Interação estaca-solo</i> .....	47
2.3.2 <i>Interação estaca-solo-superestrutura</i> .....	48
<b>3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À ANÁLISE MECÂNICA DOS SÓLIDOS</b> .....	<b>49</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	49
3.2 ELASTICIDADE LINEAR .....	50
3.2.1 <i>Equações de equilíbrio</i> .....	50
3.2.2 <i>Componentes de forças de superfície</i> .....	52
3.2.3 <i>Relações deslocamento-deformação</i> .....	52
3.2.4 <i>Equações constitutivas</i> .....	53
3.2.5 <i>A equação de Navier</i> .....	53
3.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....	55
3.3.1 <i>Funções de Papkovitch</i> .....	55
3.3.2 <i>Equação de Green</i> .....	57
3.3.3 <i>Força aplicada em um ponto</i> .....	58
3.3.4 <i>Força normal no plano do contorno</i> .....	59
3.3.5 <i>Força paralela ao plano do contorno</i> .....	61
3.3.6 <i>Comparação dos resultados</i> .....	63
3.3.7 <i>Soluções fundamentais de Mindlin</i> .....	64
3.3.8 <i>Soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti</i> .....	68
3.4 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA O PROBLEMA ELÁSTICO.....	70
3.4.1 <i>Equação Somigliana para pontos do domínio</i> .....	70
3.4.2 <i>Equação Somigliana para pontos do contorno - Mindlin</i> .....	71



3.4.3	<i>Integral para o campo das tensões</i> .....	72
3.5	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AO PROBLEMA DE BOUSSINESQ-CERRUTI .....	73
3.6	EXEMPLO 1: SOLO - ÁREA QUADRADA .....	78
3.7	EXEMPLO 2: SOLO - ÁREA CIRCULAR.....	80
<b>4.</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E INTERAÇÃO PLACA - SOLO.....</b>	<b>83</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	83
4.2	FORMULAÇÃO DO MEF PELOS MÉTODOS NUMÉRICOS.....	83
4.2.1	<i>Forma forte</i> .....	84
4.2.2	<i>Forma fraca</i> .....	84
4.2.3	<i>Resíduos ponderados</i> .....	85
4.2.4	<i>Galerkin e o MEF</i> .....	86
4.3	FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO MEF .....	87
4.3.1	<i>Funcional da energia potencial total</i> .....	87
4.3.2	<i>Convergência</i> .....	88
4.3.3	<i>Princípio da mínima energia potencial</i> .....	88
4.3.4	<i>Discretização da energia potencial total</i> .....	88
4.3.5	<i>Funções de interpolação</i> .....	89
4.3.6	<i>Equações do MEF</i> .....	90
4.4	CHAPA .....	91
4.4.1	<i>Elemento Finito Triangular de Deformação Constante (CST)</i> .....	91
4.4.2	<i>Condensação Estática</i> .....	96
4.5	MEMBRANA.....	98
4.5.1	<i>Equacionamento da Formulação Livre</i> .....	98
4.5.2	<i>Características do elemento de formulação livre</i> .....	99
4.5.3	<i>Deslocamento do elemento</i> .....	99
4.5.4	<i>Equações de membrana</i> .....	101
4.5.5	<i>Matriz L</i> .....	103
4.5.6	<i>Matriz generalizada de alta ordem</i> .....	103
4.5.7	<i>Matriz de rigidez do elemento</i> .....	104
4.5.8	<i>Parâmetros livres</i> .....	104
4.5.9	<i>Deformações e tensões na membrana</i> .....	105
4.6	EXEMPLO 3: CHAPA ENGASTADA COM CARGA CONCENTRADA .....	105
4.7	ELEMENTO FINITO DE PLACA DISCRETE KIRCHHOFF TRIANGLE – DKT .....	107
4.7.1	<i>Elemento Finito de Placa – DKT</i> .....	108
4.7.2	<i>Energia de deformação para o elemento finito DKT</i> .....	108
4.7.3	<i>Vetor de deformação por flexão <math>\{ \varepsilon \}_f</math></i> .....	109
4.8	ACOPLAMENTO DOS ELEMENTOS DKT E FORMULAÇÃO LIVRE .....	116
4.9	EXEMPLO 4: PLACA ENGASTADA COM CARGA DISTRIBUÍDA .....	118
4.10	ACOPLAMENTO PLACA-SOLO.....	123
4.11	EXEMPLO 5: ACOPLAMENTO PLACA - SOLO SOB CARGA DISTRIBUÍDA.....	124
4.12	EXEMPLO 6: ACOPLAMENTO PLACA - SOLO SOB CARGA CONCENTRADA .....	125
4.13	EXEMPLO 7: ACOPLAMENTO PLACA - SOLO SOB CARGA DISTRIBUÍDA.....	127
<b>5.</b>	<b>INTERAÇÃO ESTACA-SOLO.....</b>	<b>129</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	129
5.2	HIPÓTESES.....	129
5.3	ESTACA VERTICAL ISOLADA .....	130
5.3.1	<i>Estaca sob Força e Momento na direção <math>x_1</math></i> .....	130
5.3.2	<i>Estaca sob Força e Momento na direção <math>x_2</math></i> .....	135
5.3.3	<i>Estaca sob Força na direção <math>x_3</math></i> .....	135
5.3.4	<i>Estaca sob carregamentos nas direções <math>x_1</math>, <math>x_2</math> e <math>x_3</math></i> .....	139
5.3.5	<i>Solo e interação com a estaca</i> .....	141
5.3.6	<i>Discretização da Equação Integral</i> .....	141
5.4	INTERAÇÃO ESTACA-SOLO.....	145
5.5	EXEMPLO 8: INTERAÇÃO ESTACA-SOLO.....	145

<b>6.</b>	<b>ACOPLAMENTO SOLO – RADIER ESTAQEADO – SUPERESTRUTURA .....</b>	<b>149</b>
6.1	INTRODUÇÃO.....	149
6.2	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO MEF PARA O PÓRTICO ESPACIAL.....	150
6.3	ACOPLAMENTO SOLO - RADIER ESTAQEADO - SUPERESTRUTURA.....	152
6.4	EXEMPLO 9: PLACA SOBRE 1 ESTACA.....	154
6.5	EXEMPLO 10: PLACA SOBRE 4 ESTACAS .....	156
6.6	EXEMPLO 11: INTERAÇÃO SOLO - RADIER ESTAQEADO - SUPERESTRUTURA.....	158
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>161</b>
7.1	OBSERVAÇÕES FINAIS .....	161
7.2	PROPOSTA DE DESENVOLVIMENTO FUTURO .....	164
	<b>REFERÊNCIAS<sup>1</sup> .....</b>	<b>165</b>

## **1. Introdução**

### **1.1 Apresentação**

Como exemplos de aplicação, importância, complexidade e necessidade da continuidade e avanço das pesquisas sobre Interação Solo Estrutura (ISE) cita-se: a ponte JK, a ponte Newton Navarro e a Torre de Pizza. Logo em seguida descrevem-se os capítulos desta tese.

### **1.2 Exemplos de Interação Solo-Estrutura (ISE): Pontes**

Inaugurada em 2002 em Brasília, a Ponte JK foi eleita em 2003, a ponte mais bonita do mundo pela Sociedade de Engenharia do Estado da Pennsylvania, nos Estados Unidos. A ponte liga o Plano Piloto ao Lago Sul e se destaca por seus três arcos assimétricos e localizados em planos diferentes com cabos tensionados de aço, Figura 1.1, com 1200m e largura de 24m com duas pistas e vão de 720m e quatro apoios com pilares submersos, como descrito em Bailey (2007).

A Ponte Newton Navarro, Figura 1.2 liga a Zona Norte aos municípios da Zona Sul de Natal, além de outras regiões da cidade passando pelo Rio Potengi. A ponte possui um tabuleiro de concreto protendido com uma largura de 21m e comprimento total de 1780m, sendo um vão central estaiado com 400m de extensão e está localizada a uma altura de 56m do rio Potengi, como pode ser visto em Mazarim (2011).

Depois de citar duas pontes no Brasil, que são exemplos complexos de ISE como afirma Tseng e Penzien (2000), admite-se a ponte sobre um rio ilustrada na Figura 1.3.



Figura 1.1 - Ponte JK



Figura 1.2 - Ponte Newton Navarro

Para este exemplo citam-se alguns aspectos das dificuldades para modelar esse problema: a estrutura da ponte é um modelo numérico complexo. Além da ligação entre os



elementos estruturais, ainda tem a interação da estrutura com o solo em vários níveis e diferentes características do solo.

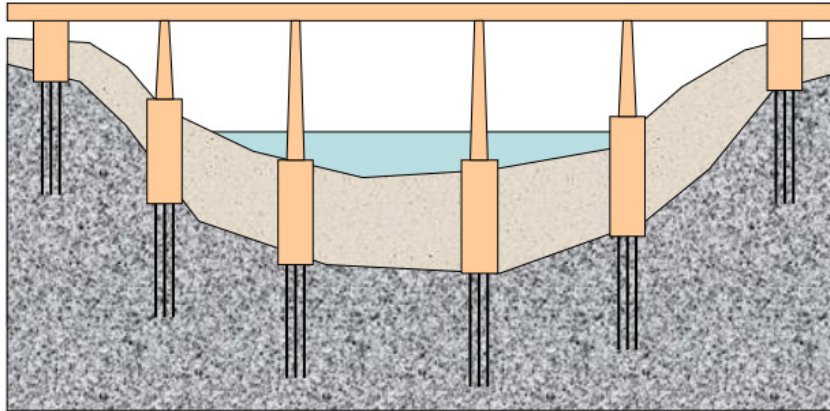


Figura 1.3 – Ponte, Kausel (2007)



Figura 1.4 - Nova Ponte Tacoma Narrows, Jones e Treyger (2005)

Observa-se a ação do rio nos pilares, que se apresentam parcialmente deteriorados, além de todos esses problemas já citados tem-se o comportamento não linear dos materiais; neste local há abalos sísmicos e não se sabe como este se propaga, e a repercussão sísmica no interior da ponte também é uma incógnita. Mesmo com toda a complexidade do problema, os efeitos da ISE para este tipo de análise podem ser estimados, através de hipóteses simplificadoras.



Figura 1.5 - Ponte Tacoma Narrows 1940, Jones e Treyger (2005)

Sendo possível que a estrutura seja adequadamente projetada para suportar os abalos sísmicos, como por exemplo, a Nova Ponte Tacoma Narrows mostrada na Figura 1.4, que substituiu a Ponte Tacoma Narrows com 1600m de comprimento que caiu em 1940 e está ilustrada na Figura 1.5, como descrito em Tseng e Penzien (2000), cujos aspectos sobre projeto e ISE podem ser visto em Jones e Treyger (2005).

Para a ponte ilustrada na Figura 1.3, Kausel (2007) afirma que neste tipo de ISE não é possível representar este problema de forma real, por um elemento finito tridimensional e tem-se a ilusão de que as soluções obtidas são precisas. Além das limitações numéricas e da

complexidade dos materiais e abalos sísmicos conclui-se que os problemas de ISE ainda representam um vasto campo de pesquisa, que ainda hoje é respondida apenas como uma probabilidade, no qual a solução “exata” não existe.

### 1.3 Exemplo de ISE: Torre de Pizza

As informações sobre o comportamento da torre inclinada de Pisa, após o trabalho de estabilização que terminou em 2001 são apresentadas Burland (2009). A Torre de Pisa é a torre do sino da Catedral e é um dos quatro monumentos dentro do medieval Piazza dei Miracoli, três dos quais são mostrados na Figura 1.7.



Figura 1.6 - Vista aérea da torre de Pisa, Burland (2009)

A sua construção começou em 1173 e continuou (com duas interrupções longas) durante cerca de 200 anos. A torre foi construída como um cilindro oco de alvenaria rodeado por seis colunas, com pilares e abóbadas maiores na base do cilindro. As paredes exteriores e interiores são revestidas com o mármore San Giuliano, enquanto a cavidade anelar entre elas é preenchida com fragmentos de pedra e argamassa variadas, formando uma estrutura de alvenaria com enchimento tipicamente medieval. A torre começou a inclinar para o sul durante a segunda fase da sua construção, como mostrado na Figura 1.7, e posteriormente, a sua inclinação continuou a aumentar. A inclinação máxima aconteceu em 1993, antes do início do



trabalho de estabilização. A pressão média da fundação é 500kPa e uma análise computacional detalhada, em 1994, indicou que a pressão na borda sul foi de cerca de 1000kPa, enquanto que a pressão na extremidade norte estava perto de zero.

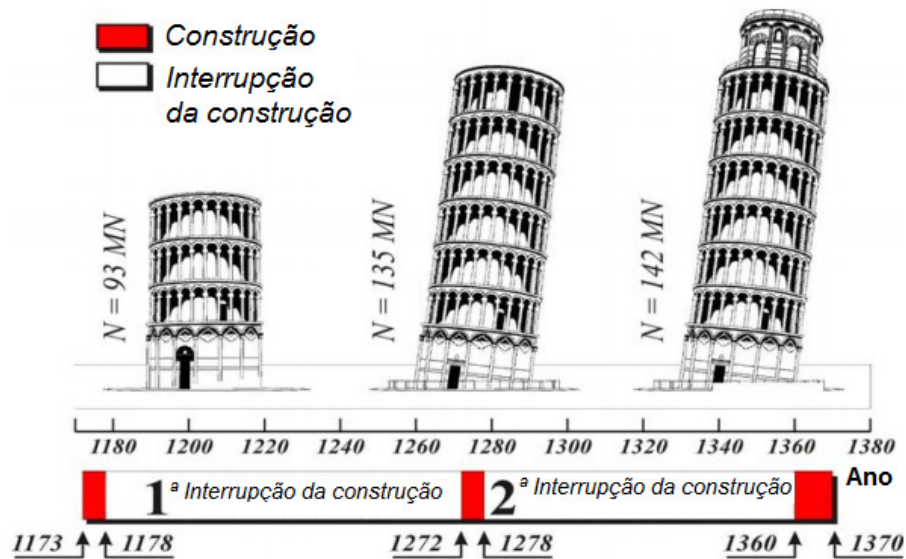


Figura 1.7 - História da construção da torre de Pisa, Burland (2009)

A Torre de Pisa é um exemplo do fenômeno da ISE, Figura 1.8, onde o cenário supõe que o aumento contínuo da inclinação da fundação com o tempo foi originado pelos efeitos combinados da fluência solo da fundação e da oscilação das águas subterrâneas. Para Burland (2009), o comportamento futuro da Torre dependerá consideravelmente da continuidade da eficácia do sistema de drenagem no lado norte da torre.

O monitoramento da torre de Pisa envolve a necessidade de controlar o complexo fenômeno da interação solo-estrutura, como afirma Burland (2009). Uma resposta inequívoca não é possível, portanto, os cientistas debatem os seguintes aspectos:

- Cenário otimista - O fenômeno da instabilidade parou, a rotação continua, exceto para alguns movimentos leves causados pelas oscilações sazonais da água do solo e os efeitos da radiação solar sobre a alvenaria. Este cenário implica que o mecanismo dominante dirigindo a instabilidade da inclinação acontece devido às flutuações do nível do lençol freático.
- Cenário pessimista - Tal como ilustrado na Figura 1.9, após a conclusão dos efeitos da intervenção (período de 2-3), a torre vai permanecer imóvel durante um período de tempo considerado como algumas décadas, período (3-4), em seguida acontecerá uma possível retomada da rotação para o sul. Inicialmente, esta taxa de rotação ao sul será muito menos do que os 6 segundos de arco por ano, que existia antes da estabilização



acontecer. No entanto, a velocidade de rotação aumenta gradualmente, (período 4-5) e pode aproximar-se de novo, depois de um tempo muito longo, de um valor próximo de 6 segundos do arco. Em que período de tempo isso vai ocorrer é difícil de estimar. No entanto, considerando que a estabilização funciona e que a inclinação da torre volte para a situação que prevalecia no início do século XIX, Burland (2009) acredita que o período de tempo para a torre retornar à sua inclinação de 1993 seja, no mínimo, 200 anos.



Figura 1.8 - Torre de Pizza

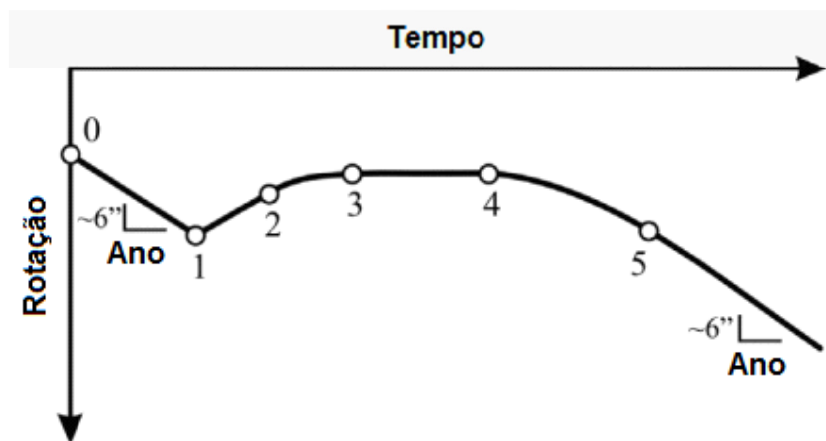


Figura 1.9 - Comportamento esperado para a Torre de Pizza, Burland (2009)

Finalmente, deve ser enfatizado que, graças à natureza não invasiva da intervenção, em todos os eventos, em qualquer momento no futuro, o procedimento para reduzir a inclinação da base da torre pode ser repetido.

Como descrito, a inclinação da torre de Pizza envolve um complexo problema de ISE, o que motiva a continuidade de pesquisas nesta área, devido à dificuldade de análise real de um problema como este.

#### 1.4 Descrição dos capítulos da tese

Após os exemplos de aplicações da ISE apresentam-se os sete capítulos desta tese, bem como, uma breve descrição do que é abordado em cada um deles, assim como, as referências bibliográficas. Observa-se que nas diretrizes para a elaboração de teses<sup>1,2, 3, 4, 5</sup>, neste programa de pós-graduação Funaro et al. (2009) afirmam que as listas de símbolos, abreviaturas e siglas, ilustrações e tabelas são opcionais (página 28 das Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP - Parte I (ABNT) ), assim, nesta tese tais listas são omitidas.

- Capítulo 1: Introdução – Este é o presente capítulo no qual se descreve os outros. Porém, antes desta descrição, apresentaram-se exemplos de aplicações e importância de pesquisas sobre Interação Solo-Estrutura (ISE), tais como as pontes JK e Newton Navarro e também a torre de Pizza. Ainda neste primeiro capítulo, após a descrição dos capítulos da tese, apresentam-se a definição de soluções fundamentais e pesquisas sobre o tema. O capítulo 1 é finalizado com um tópico sobre Raymond David Mindlin. Abordaram-se características das soluções fundamentais e aspectos sobre Mindlin na introdução deste trabalho, devido à sua importância destes assuntos para o desenvolvimento desta tese.
- Capítulo 2: Revisão bibliográfica e objetivos – Nesse capítulo, no item referente à revisão bibliográfica descreve-se a ISE aplicada ao solo homogêneo, Steinbrenner, ISE em solo não homogêneo e MEC infinito.

---

<sup>1</sup> Funaro et al. (2009a).

<sup>2</sup> Id. (2009b).

<sup>3</sup> Id. (2009c).

<sup>4</sup> Id. (2009d).

Observa-se que o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) estão inseridos nos tópicos descritos, e desta forma há uma revisão bibliográfica sobre os métodos numéricos aplicados a este trabalho. Finalmente, no capítulo 2 apresenta-se a justificativa e objetivos para o desenvolvimento desta tese, que inclui as seguintes análises mecânicas das estruturas e dos sólidos: solos, estacas, interação estaca-solo, interação placa-solo, superestrutura e interação estaca-solo-superestrutura.

- Capítulo 3: O Método dos Elementos de Contorno aplicado à análise mecânica dos sólidos – Desenvolvem-se as formulações da elasticidade linear, que compreende as seguintes equações: equações de equilíbrio, componentes de forças de superfície, relações deslocamento-deformação, equações constitutivas e a equação de Navier. Em seguida descrevem-se as soluções fundamentais de Mindlin e de Boussinesq-Cerruti, cujas formulações envolvem as funções de Papkovitch e a equação de Green. E finalmente formula-se a equação integral para o problema elástico, ou seja, a equação Somigliana para pontos do domínio e do contorno para a análise feita por Mindlin, bem como a integral para o campo das tensões. O MEC é aplicado ao problema de Boussinesq-Cerruti. Apresentam-se os seguintes exemplos de aplicações da formulação descrita: o primeiro exemplo corresponde a uma área quadrada do solo carregado e o segundo a uma área circular do solo carregado.
- Capítulo 4: Método dos Elementos Finitos e interação placa-solo – Nesse capítulo apresenta-se de forma muito sucinta a formulação do MEF pelos métodos numéricos e pela formulação variacional. Descrevem-se o Elemento Finito Triangular de Deformação Constante (CST) aplicado à chapa, a condensação estática e o elemento de membrana da Formulação Livre; para a verificação destes elementos apresenta-se o exemplo de uma chapa engastada com carga concentrada. Posteriormente tem-se uma breve descrição do Elemento Finito de Placa Discrete Kirchhoff Triangle (DKT). Logo, o elemento de membrana da Formulação Livre é acoplado ao elemento DKT e tal implementação computacional é verificada através do exemplo de uma placa engastada com carga distribuída. O último tema deste capítulo é o

acoplamento placa-solo e são apresentados os exemplos de acoplamento placa-solo considerando as condições de carregamento distribuído e concentrado.

- Capítulo 5: Interação estaca-solo – Descreve-se o elemento finito da estaca vertical isolada, que pode estar submetida à força e momento na direção  $x_1$  ou na  $x_2$ , e força na direção  $x_3$ . Assim como, a interação estaca-solo é um exemplo que confirma a eficácia do modelo adotado.
- Capítulo 6: Acoplamento solo-radier estaqueado-superestrutura – Apresentam-se os sistemas de equações do MEF para o pórtico espacial e o acoplamento solo - radier estaqueado - superestrutura, bem como exemplos de aplicações da implementação computacional desenvolvida.
- Capítulo 7: Conclusões – Apresentam-se as observações finais sobre esta pesquisa. Bem como, algumas propostas para desenvolvimento futuro.
- Referências – Lista-se, de acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas - NBR 6023, Funaro et al. (2009), as obras consultadas e citadas no texto desta tese, que se referem aos temas descritos aqui, tais como: ISE, MEC, MEF e soluções fundamentais de Mindlin. Algumas referências possibilitam uma visão mais ampla sobre a complexidade e variedade de temas encontrados nas pesquisas sobre ISE, embora extrapolem os objetivos deste trabalho.

## 1.5 Soluções fundamentais

As soluções fundamentais de Mindlin são descritas matematicamente no capítulo 3. Sabendo-se que a decomposição de Helmholtz, Gurtin (1962), permite a identificação das características e singularidades da função apresenta-se que Palermo Junior (1989), p.22 define solução fundamental assim:

“A equação de Navier pode ser resolvida para uma força discreta aplicada em um ponto. Esta solução, chamada potencial para problemas de elasticidade, tem valor infinito num ponto. Aqui chamada solução fundamental, ela é definida como uma solução singular da equação de Laplace com não homogeneidade discreta dada pela função delta de Dirac. A função delta de Dirac é uma função generalizada que pode ser definida como o limite da função normal.

No limite, esta função é zero em todos os pontos do domínio exceto onde o argumento é zero, quando ela vale infinito.”

A Figura 1.10 ilustra a distribuição de  $f(x)$  que se torna mais “concentrada” quanto mais o corpo torna-se menos deformável. Esta distribuição é expressa pelo aumento do valor de  $k$ . O limite, onde o corpo é rígido é expresso por  $k \rightarrow \infty$ . Esta função produz uma distribuição fictícia da força unitária por unidade de comprimento, que é denotada por  $\delta(x)$  e definida como  $\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ , onde  $f_k(x)$  são as funções ilustradas e  $\delta(x)$  é a função Delta de Dirac.

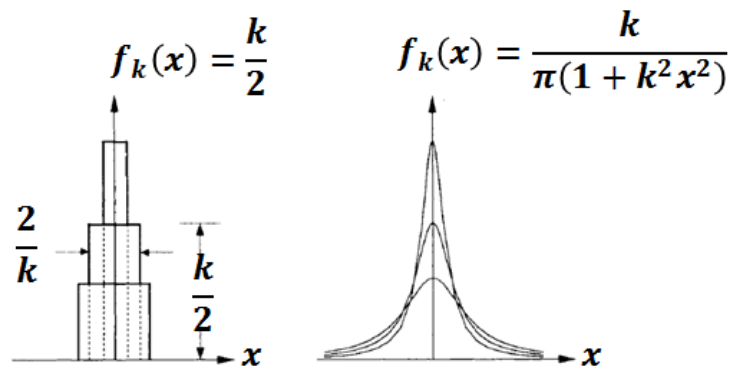


Figura 1.10 - Função  $f_k$  concentrada para valores grandes de  $k$

Fisicamente, a solução fundamental expressa os deslocamentos produzidos pela ação de uma força concentrada unitária em um plano infinito. Esta solução atribuída a Kelvin, Love, (1944), e conhecida como solução fundamental de Kelvin pode ser estabelecida pelo seguinte procedimento: considera-se a força concentrada  $F(F_\xi, F_\eta)$  aplicada no ponto  $P(\xi, \eta)$  do plano, Figura 1.11.

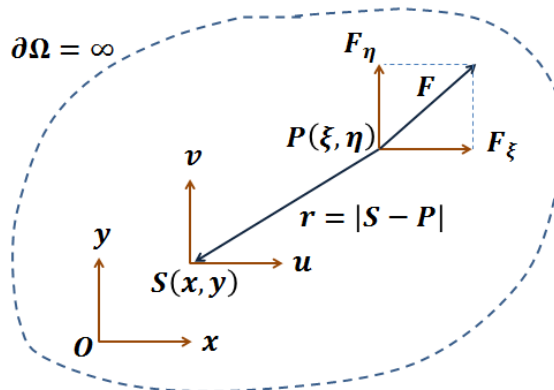


Figura 1.11 - Força concentrada unitária  $F(F_\xi, F_\eta)$  aplicada no ponto  $P(\xi, \eta)$  do plano

Como ilustrado, as componentes  $F_\xi$  e  $F_\eta$  da força  $F$  são os cossenos diretores do vetor unitário que representam a força. As forças de massa produzidas pela força  $F$  em um ponto  $S(x, y)$  podem ser representadas através de uma função delta.

Assim:

$$b = \delta(S - P)F \quad (1.1)$$

ou

$$b_x = \delta(S - P)F_\xi \quad (1.2)$$

$$b_y = \delta(S - P)F_\eta$$

E a solução fundamental para a equação de Navier é uma solução singular:

$$\nabla^2 u + \frac{1 + \bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{G} \delta(S - P)F_\xi = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1 + \bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{G} \delta(S - P)F_\eta = 0$$

A equação (1.3) pode ser estabelecida pela expressão das componentes de deslocamento em termos das funções de Galerkin. Assim:

$$2Gu = \frac{2}{1 + \bar{\nu}} \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (1.4)$$

$$2Gv = \frac{2}{1 + \bar{\nu}} \nabla^2 \psi - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

onde  $\phi = \phi(x, y)$  e  $\psi = \psi(x, y)$  são as funções de Galerkin, que representam as componentes de um vetor denominado vetor de Galerkin.

Substituindo as equações (1.4) nas equações (1.3):

$$\nabla^4 \phi = -(1 + \bar{\nu})\delta(S - P)F_\xi \quad (1.5)$$

$$\nabla^4 \psi = -(1 + \bar{\nu})\delta(S - P)F_\eta$$

onde

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1.6)$$

A equação (1.6) é o operador bi harmônico. Por isso, as equações (1.4) são soluções das equações (1.3), se as funções representarem soluções singulares particulares das equações (1.5).

Após a definição de soluções fundamentais acrescenta-se que no século XIX e século XX alguns cientistas – principalmente matemáticos, mas também engenheiros – desenvolveram um algoritmo junto com as funções de Green, que fizeram com que o desenvolvimento da ISE fosse viável, e também que fosse aplicada amplamente no Método dos Elementos de Contorno (MEC), como afirma Kausel (2010).

Os primeiros cientistas que abordaram o problema de cargas no interior de um meio elástico infinito (ou semi-infinito) foram os matemáticos franceses Gabriel Lamé e Benoît Paul Émile Clapeyron, segundo Tazzioli (2009), que na primeira metade do século XIX descreveram o problema no semi-espaço com ferramentas matemáticas e métodos dos quais eles não conseguiram obter quaisquer resultados úteis ou práticos. Assim, a primeira solução fundamental teve que esperar até meados do século XIX, antes de 1848, quando William Thomson – mais conhecido como Lord Kelvin e cuja biografia pode ser lida em Thompson (1910) – apresentou expressões para os deslocamentos do problema estático, no quais forças concentradas atuam em qualquer ponto do sólido elástico, Thomson (1848). Pouco depois, em 1849, George Gabriel Stokes apresentou a solução de um problema que considerava as forças aplicadas em um ponto variando no tempo em um meio infinito, Stokes (1849). Convém notar que a solução de Stokes constitui hoje o início do MEC e exerce uma maior influência tanto no campo da ISE, quanto na geofísica, acústica e muitos outros ramos da ciência. Uma característica marcante do trabalho de Stokes é o fato de ser uma das poucas soluções fundamentais conhecidas na forma fechada, em todo o espaço, em ambos os domínios: tempo e frequência. Uma versão moderna da solução de Stokes, em duas e três dimensões é encontrada no artigo de três matemáticos britânicos: Eason, Fulton e Sneddon (1956).

Ainda no século XIX outro matemático francês, Joseph Valentin Boussinesq publicou em 1878 uma série de pequenos artigos em *Comptes Rendus*, no qual apresenta um método de solução considerando um semi-espaço elástico submetido à carga vertical estática, aplicada em um ponto sobre a superfície do semi-espaço. E também fornece uma solução na forma fechada para um disco sobre a superfície do semi-espaço submetido a cargas concentradas verticais, Boussinesq (1878). No entanto, detalhes completos sobre esse método baseado no potencial foram publicados em 1885. Antes, o matemático italiano Valentino Cerruti, publicou em 1882, um artigo o qual muitos artigos modernos fazem referência ao problema de Cerruti e Boussinesq (1890) com aplicações em mecânica das estruturas.

Antes de continuar descrevendo o trabalho de Cerruti faz-se necessário mencionar o desenvolvimento do MEC, para localizar historicamente a pesquisa de Betti. Inicialmente o MEC era denominado Método de Equações Integrais de Contorno. E era um método para

resolver problemas físicos matematicamente, que teve origem no trabalho de Green (1828). Ele formulou a representação integral da solução dos problemas de Dirichlet e Neumann, da equação de Laplace, pela introdução da função de Green. Em 1872, Betti apresentou um método geral para a integração de equações da elasticidade e derivadas das suas soluções na forma integral. Basicamente, esta poderia ser considerada a extensão da aproximação de Green para as equações de Navier da elasticidade. Somigliana (1885) aplicou o teorema da reciprocidade de Betti, descrito no capítulo 3, para derivar a representação integral da solução do problema da elasticidade, incluindo expressões de força de massa, deslocamentos e tensões no contorno.

Continuando a descrição do artigo de Cerruti, que é bastante geral em sua aproximação e faz um extenso uso de teoremas integrais em elastostática conhecido como teorema de Betti – semelhantes aos que estão na base moderna do MEC – obteve a resposta no interior de um sólido arbitrário solicitado por forças, ou com deslocamentos prescritos no contorno externo. Embora Cerruti não use a linguagem da mecânica do contínuo, seu artigo investiga o que pode claramente ser reconhecido hoje, como um problema de valor de contorno, envolvendo um corpo elástico, cujo contorno é em parte de Dirichlet, onde os deslocamentos são prescritos, e em parte de Neumann, onde as forças são prescritas. Posteriormente, o pesquisador aplica seu método em um corpo infinito de forma limitada por uma superfície plana (semi-espço); mas ele não apresenta as equações finais para o campo de deslocamentos devido a um carregamento tangencial atribuída a ele, de acordo com Kausel (2010). No entanto, estas equações contêm as ferramentas necessárias para a obtenção de uma solução deste tipo, para cargas concentradas tangenciais na superfície, ou qualquer distribuição de carga, horizontal ou vertical. Como exemplo de aplicação desta aproximação, ele deduz as equações para o caso da carga vertical e obtêm resultados que estão de acordo com Boussinesq.

Um avanço significativo aconteceu na forma de solução fundamental para um semi-espço homogêneo submetido a uma carga dinâmica em sua superfície, que está contido nos artigos de 1904 do matemático Horace Lamb (1904). Neste trabalho, Lamb recorre a um precursor do que constitui o método moderno de transformação de integral para obter a resposta tanto para as cargas verticais, na superfície de um semi-espço elástico, impulsiva (2D) ou aplicadas repentinamente (3D). No entanto, Lamb não dispunha no seu tempo de auxílio computacional, necessário para avaliar completamente todas as integrais do problema. Assim, Lamb pesquisou em detalhe somente a resposta do ponto campo, ponto onde os deslocamentos são calculados, até à distância do ponto fonte, ponto onde a carga unitária é



aplicada. Ainda assim, hoje o problema de fonte dinâmica aplicada na superfície de um semi-espaço elástico é denominado problema de Lamb.

O marco seguinte nas soluções fundamentais veio com a publicação de Raymond David Mindlin (descrito mais detalhadamente no próximo subitem), em 1936, do conjunto de equações na forma fechada para o campo de deslocamentos, no qual se considerou cargas concentradas estáticas verticais e horizontais aplicadas em um ponto qualquer no interior e abaixo da superfície de um semi-espaço elástico, Mindlin (1936). As soluções fundamentais de Mindlin são descritas neste trabalho, no capítulo 3.

Quatro décadas após Lamb, Cagniard (1939), finalmente conseguiu avaliar o requisito de transformação de integral dupla no problema de Lamb por meio de uma integração do contorno. Duas décadas mais tarde, por sua vez, De Hoop (1960) encontrou uma simplificação para o problema de Cagniard e que agora foi denominado método de Cagniard-Hoop. Esta estratégia analítica foi usada também por Pekeris (1955) para obter soluções na forma fechada – nas quais não é necessária integração numérica – para cargas concentrada dinâmica vertical e horizontal no semi-espaço, mas somente quando o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,25$ . Posteriormente, Mooney (1974) generalizou os resultados de Pekeris para cargas concentradas verticais atuando no semi-espaço com coeficiente de Poisson arbitrário, mas somente com soluções para componentes horizontais de deslocamento com relação de Poisson  $\nu = 0,2631$ , que é o valor para o qual falsas raízes das equações para a velocidade de ondas de Rayleigh tornam-se complexa. Em todas estas soluções, deslocamentos são conhecidos somente na forma fechada na superfície e na direção de simetria abaixo da carga e não em pontos no interior. Quanto às linhas de carga dinâmica, quando se trata de duas dimensões, soluções completas na forma fechada para o problema de Lamb existem e podem ser escritas somente para fontes na superfície e deslocamentos em qualquer parte do corpo, ou para linhas de carga no interior do corpo e deslocamentos na superfície. Ao contrário, deslocamentos em qualquer ponto no semi-espaço devido às cargas dinâmicas no interior do corpo podem ser obtidos por meios numéricos, e o mesmo acontece quando as cargas são harmônicas, mesmo quando as linhas de carga são aplicadas na superfície, exceto para o caso de linha de carga.

O trabalho inicial de Lamb junto com refinamentos nas décadas seguintes, no início e meados do século XX, são as equações exatas para a resposta do semi-espaço elástico provocada pela aplicação repentina da linha de carga e ponto fonte em sua superfície. Talvez a razão encontra-se parcialmente na dificuldade envolvida em obter resultados exatos para uma única transformação, mas também porque a disponibilidade da solução espaço-tempo remove grande parte da motivação para encontrar soluções tais como transformações parciais.

Uma solução eficiente é o método da camada delgada para funções de Green de camadas médias, vistas em Kausel (1981) e Kausel e Peek (1982), que agora está no centro de códigos computacionais amplamente utilizados, como por exemplo, o SASSI, cuja descrição pode ser vista em Menglin, Huaifeng e Yongmei (2011). Uma vez que estas soluções fundamentais pioneiras tornaram-se amplamente conhecidas, muitas outras soluções para cargas distribuídas de várias formas e características foram desenvolvidas, incluindo meios transversalmente isotrópicos. Acrescenta-se ainda que muitas outras soluções estáticas possam ser encontradas em Poulos e Davis (1974), enquanto a parte dinâmica – incluindo os problemas de Stokes, Lamb e Chao – é pesquisada por Kausel (2006), para citar exemplos de autores que desenvolvem trabalhos nesta área.

### **1.6 Raymond David Mindlin**

Professor D. Mindlin (1906-1987), membro da U.S. National Academy of Engineering e da National Academy of Science, dedicou a sua vida profissional ensinando engenharia na Universidade de Columbia, Nova York. Ele também participou de cursos de verão da Universidade de Michigan, do Departamento de Engenharia Mecânica, organizado por Stephen Timoshenko, em 1933, 1934 e 1935, segundo Cheng (2006). Suas contribuições em pesquisas científicas foram principalmente em aplicações mecânicas para as engenharias civil, mecânica, elétrica e ultrasônica, Figura 1.12.

As maiores contribuições de Mindlin podem ser classificadas nos seguintes temas: fotoelasticidade e mecânica experimental, elasticidade tridimensional, contínuo elástico, contato friccional e meio granular, ondas e vibrações em placas isotrópicas e anisotrópicas, propagação de ondas em barras e cilindros, teoria da eletro-elasticidade e cristais piezoelétricos e estrutura cristalina. Os primeiros oito artigos escritos por alunos de Mindlin foram editados por G. Herrmann no “R. D. Mindlin and Applied Mechanics, Pergamon Press, New York, 1974”, e o último artigo foi um dos primeiros trabalhos sobre vibrações de placas elásticas, de acordo com Pao (2006).

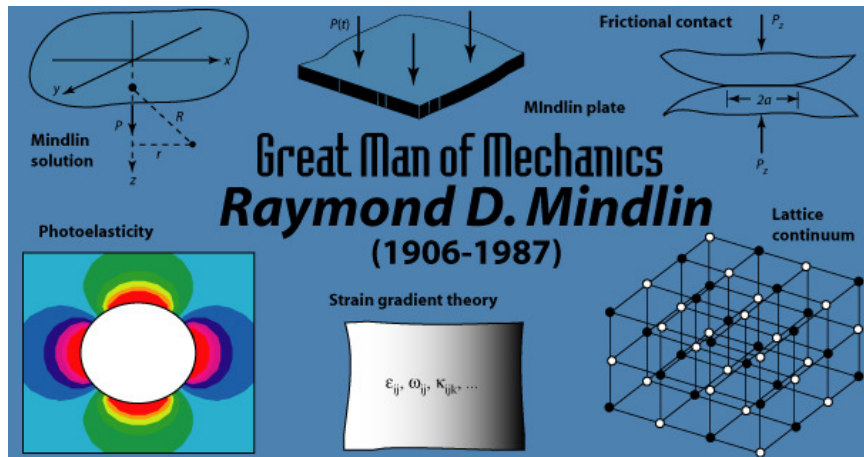


Figura 1.12 - Raymond David Mindlin, Cheng (2006)

A solução fundamental, para sólidos elástico-linear, homogêneo e isótropo definida em um meio semi-infinito, obtida pela aplicação da teoria potencial, que considerou a carga unitária concentrada aplicada no interior do sólido foi descrita em Mindlin (1936). Esta é a solução adotada para a análise do solo nesta tese. Uma das vantagens da solução fundamental de Mindlin, quando o solo é modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) é a necessidade de discretização apenas do contorno do sólido, o que resulta em um menor número de informações envolvidas no problema, ou seja, menor dimensão das matrizes e vetores necessários nessa análise. Também se pode afirmar que as soluções fundamentais de Kelvin e Boussinesq-Cerruti estão contidas, ou podem ser obtidas a partir da solução fundamental de Mindlin, Figura 1.13.

A relação entre as três soluções fundamentais, como afirma Mindlin (1953) pode ser estabelecida a partir do parâmetro  $c$ , da Figura 1.13, que é a distância do plano de contorno  $x_3 = 0$  ao ponto de aplicação da carga  $P$ . O problema de Kelvin é encontrado fazendo-se  $c$  tender para o infinito, já que assim não há a consideração do plano livre de força de superfície. Por outro lado, quando  $c$  tende à zero tem-se o problema de Boussinesq-Cerruti.

Mindlin<sup>5</sup> descreve o modo de vibração torção-espessura de uma placa infinita, que são ondas estacionárias com deslocamento e onda-normal perpendicular e paralelo às faces da placa. Na placa com cristal monolítico, as ondas são possíveis se o deslocamento é na direção diagonal. A solução pertinente das equações tridimensionais da elasticidade para a placa de faces livre é mostrada, bem como outras soluções com o efeito da inercia de eletrodos são considerados.

<sup>5</sup> Mindlin (1965a).

Na teoria da elasticidade clássica é possível reduzir as equações de deslocamentos do movimento na forma de Lamé através da resolução de Helmholtz<sup>6</sup>. No artigo mencionado a redução é feita considerando o material elástico isotrópico e com microestrutura.

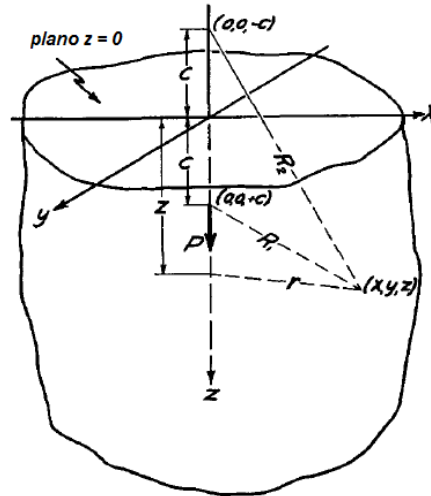


Figura 1.13 - Força normal no interior de um sólido semi-infinito, Mindlin (1936)

Uma teoria linear<sup>7</sup> para um sólido elástico é formulada, em que a energia potencial é uma função da deformação, nos seus primeiros e segundos gradientes. Esta é uma teoria em que a força coesiva e a tensão na superfície são intrínsecas. A solução é fornecida para a deformação e tensão na superfície, ou energia na superfície por unidade de área, resultante da separação de um sólido ao longo do plano. O artigo descrito também apresenta uma solução geral da equação de deslocamentos do equilíbrio em termos das funções de tensão, e a solução particular para a carga concentrada. O caso especial de um líquido é considerado e as soluções são dadas para a superfície de tensões no plano e em superfícies esféricas.

Uma solução completa, em termos de funções de tensão análoga às funções de Papkovitch da elasticidade clássica é apresentada por Mindlin<sup>8</sup>, para equações lineares de um contínuo de Cosserat elástico e isotrópico são apresentadas. Soluções especiais para carga concentrada também são fornecidas.

Como exemplos de alguns de outros desenvolvimentos do pesquisador, em mecânica das estruturas citam-se Mindlin (1936b, 1963, 1964, 1972), Mindlin e Cheng (1950) e Mindlin e Tiersten (1962).

<sup>5</sup> Mindlin (1965a).

<sup>6</sup> Id. (1965b).

<sup>7</sup> Mindlin (1965c).

<sup>8</sup> Id. (1965d).

## 2. Revisão Bibliográfica e Objetivos

### 2.1 Revisão Bibliográfica

A interação solo-estrutura representa um sistema mecânico integrado. O sistema formado pelo solo - elemento estrutural de fundação - superestrutura deve ser analisado e modelado como um conjunto, Figura 2.1.

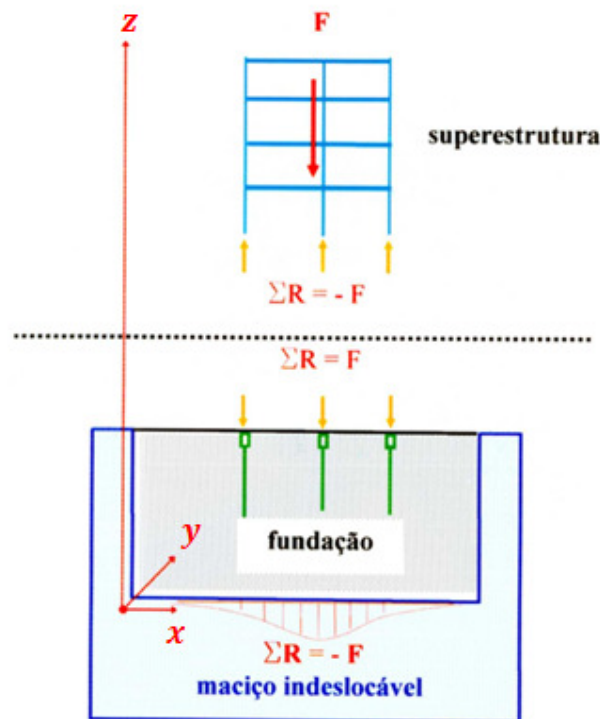


Figura 2.1 - Interação solo-estrutura

O engenheiro geotécnico usualmente analisa a complexa interação entre a subestrutura e o maciço de solos, sem, entretanto, considerar as possíveis mudanças de configurações que possam ocorrer na superestrutura e que venham a gerar a um estado de tensões não previsto

no sistema subestrutura-macço. Por outro lado, o engenheiro estrutural analisa de maneira mais minuciosa os fenômenos que ocorrem na superestrutura, sem ponderar sobre os efeitos que o meio de apoio está sujeito quando da absorção das ações, e nas posteriores modificações da superestrutura que poderão acontecer devido à interação com o solo. Um exemplo simples de modelo de ISE é mostrado em Kocak e Mengi (2000).

A Interação Solo Estrutura (ISE) é composta por várias linhas de pesquisa, detalhadas em Kausel (1976), como por exemplo: mecânica das estruturas, ciências dos solos, ciência dos materiais, métodos numéricos e computacionais. Cada um dos sistemas, ou seja, solo ou estrutura, isoladamente já representa um vasto campo de estudo, tanto na complexidade do comportamento mecânico, quanto nas correspondentes idealizações desses modelos. Além disso, os diversos focos de interesse e de conhecimento dos pesquisadores nesta área são voltados para referenciais diferentes. A análise, geralmente avaliada entre os meios, ou mais especificamente, entre a superestrutura e a fundação são tratadas de forma independente, simplificação que advém do alto grau de complexidade envolvido na avaliação do fenômeno mecânico integrado, que é a interação solo-estrutura.

Pesquisando sobre a interação solo-estrutura, Kausel (2010) e Menglin, Huafeng e Yongmei (2011) descrevem aspectos históricos referentes a este importante problema. Suas origens remontam ao século XIX com gradual desenvolvimento até a primeira metade do século XX. Em meados do século XX tem-se uma rápida progressão, principalmente pelas necessidades das indústrias de energia nuclear e offshore, e também pela evolução dos computadores e de ferramentas de simulação numérica, como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A segurança sísmica foi outro campo a alavancar o desenvolvimento da ISE.

O conceito de ISE abrange fenômenos estáticos e dinâmicos, o macço de solos e a superestrutura, que compreendem diversos temas, às vezes sutilmente interligados. Resumidamente os principais aspectos dos problemas abrangidos pela teoria da ISE podem ser assim descritos:

- Resposta do macço de solo às cargas externas dinâmicas ou estáticas atuando próximo ou na superfície do solo. As cargas podem ser concentradas ou distribuídas e, harmônicas em função do tempo ou gradualmente aplicadas em uma variação de tempo arbitrária (funções de Green ou soluções fundamentais).

- Resposta do macço de solo às vibrações decorrentes de terremotos ou outras fontes, como movimento rápido de trens (problema de campo livre).

- Passagem de onda ou interação cinemática.

- Rigidez estática e dinâmica.
- Deformação adicional do solo na vizinhança da estrutura atual, causada pela inércia da própria estrutura (interação inercial).
- Métodos numéricos necessários para analisar os problemas acima (acoplamento MEF-MEC, por exemplo).

Em decorrência da multidisciplinaridade, a ISE tem-se desenvolvido por pesquisadores de diferentes áreas, tais como, matemáticos e engenheiros. Como apresentado, a análise dinâmica, não pesquisada neste trabalho é muito importante para países que sofrem com abalos sísmicos, já no Brasil os terremotos são de pequena magnitude e alguns deles são considerados imperceptíveis na superfície terrestre. Na análise da interação solo-estrutura, sobre aspectos geotécnicos sugere-se: Aoki<sup>3,4,5</sup>, Aoki e Cintra<sup>6,7</sup>, Aoki e Lopes (1975), Aoki e Velloso (1975), Bowles (1997), Chamecki (1954), Cintra, Aoki e Albiero (2003), Poulos e Davis<sup>1,2</sup>.

As pesquisas recentes têm analisado o problema da ISE utilizando métodos numéricos, mais precisamente via MEF e MEC. O MEF é, em geral, a mais versátil e adequada ferramenta aplicada na resolução de problemas da mecânica computacional. No entanto, para o caso de ser aplicado na análise de problemas de domínio infinito ou semi-infinito - caso da análise de solos - ela é uma ferramenta difícil na preparação dos dados, onerosa para o seu armazenamento e para a resolução do sistema final, principalmente para o caso de uma formulação com elementos tridimensionais, devido à grande dimensão das matrizes e vetores, isto porque o MEF necessita de uma representação de todo o domínio. Assim, poucos pesquisadores têm empregado o MEF na análise de maciços homogêneos e não homogêneos, citando-se o trabalho de Chow e Teh (1991) e Ottaviani (1975).

Nos próximos subitens descrevem-se algumas pesquisas sobre ISE, principalmente as que são referências bibliográficas para este trabalho, que analisa a ISE estática e considera o solo homogêneo e modelado pelo MEC, mas comenta-se também o solo não homogêneo e o MEC infinito.

---

<sup>1</sup> Poulos e Davis (1974).

<sup>2</sup> Id. (1980).

<sup>3</sup> Aoki (1979).

<sup>4</sup> Id. (1989).

<sup>5</sup> Id. (1997).

<sup>6</sup> Aoki e Cintra (1999).

<sup>7</sup> Id. (2004).

### 2.1.1 ISE e solo homogêneo

Uma vez que as soluções para cargas concentradas aplicadas no semi-espço elástico foram conhecidas, formulações para cargas distribuídas sobre a superfície seriam deduzidas, mas os resultados das integrais raramente foram tratados, quando a resposta do sólido carregado era observada em um ponto qualquer no interior do semi-espço. Ainda, Boussinesq (1885) considerou além do problema de cargas concentradas verticais, as soluções para cargas uniformemente distribuídas sobre uma área circular finita, embora ele assim o fizesse somente para os deslocamentos na superfície, na direção de simetria, e nos deslocamentos médios abaixo da carga. A última é uma aproximação aceita para um disco rígido circular. Além disso, o pesquisador resolveu o problema de uma placa circular rígida submetida à carga vertical no seu centro, e encontrou a rigidez da placa  $K_z$  bem como a distribuição de tensão  $\sigma_z$  sob a placa considerando que a mesma estava em contato com outro material, por exemplo, a interface placa-solo.

Uma das primeiras contribuições para a engenharia de fundações pode ser encontrada em um trabalho de Fr. Engesser, que em 1893 escreveu *Zur Theorie des Baugrundes* (sobre a teoria dos solos) em que ele abordou a estabilidade e a capacidade de carga das fundações. Ainda assim, maiores desenvolvimentos nessa área devem-se ao engenheiro austríaco Karl Terzaghi, como afirma Kausel (2010), agora considerado o pai da mecânica dos solos.

Ainda sobre o problema de Boussinesq para carga vertical distribuída sobre uma superfície elástica do semi-espço, Schleicher (1926) apud Kausel (2010) confirmou os resultados de Boussinesq tanto para um disco carregado com rigidez nula quanto para um disco com rigidez infinita (placa). O autor aplicou esses resultados para inferir o valor do módulo de reação do solo sobre a placa (Bodenziffer), que é útil na formulação de problemas de fundações mecânicas pela distribuição das molas de Winkler; observa-se que este coeficiente não é uma constante do tipo de solo, mas inversamente proporcional à dimensão linear que a carga suporta. Mais significativamente, Scheicher voltou sua atenção para carga vertical uniformemente distribuída sobre uma área retangular e fornece as primeiras equações na forma fechada para esse tipo de carga. Na verdade, ele fornece expressões explícitas para deslocamentos verticais em qualquer ponto da superfície do semi-espço, dentro ou fora da área carregada, e observa que o menor deslocamento ocorre nos quatro cantos e é igual à metade do deslocamento no centro, independente do formato da área carregada, e do valor do coeficiente de Poisson. Além disso, o autor calcula o deslocamento médio, que é



consequência da aplicação da carga, especializando-se em cargas lineares e distribuídas e comparando os resultados com o disco carregado.

Em retrospecto, parece peculiar que as primeiras pesquisas de ISE estática deveriam ter negligenciado a placa submetida ao estado de torção potencialmente mais simples, mas talvez as cargas verticais fossem primordiais na fundação, enquanto a rigidez à torção teve menor importância. Assim, somente no ano de 1944 que Reissner e Sagoci, ambos do Massachusetts Institute of Technology, consideraram a rigidez de torção,  $K_t$ , de uma placa circular sobre um semi-espaço elástico Reissner e Sagoci (1944). Finalmente, em meados do século XX o conjunto de quatro rigidezes de um disco rígido foi completado, quando Mindlin (1949) apresentou os resultados de uma placa submetida à carregamentos tangenciais, no modo de deslocamento horizontal.

A partir da solução elástica para uma carga concentrada no espaço elástico semi-infinito, Li e Berger (2001) descrevem as equações de Boussinesq-Cerruti considerando o carregamento distribuído sobre uma área triangular, e esta carga pode ser normal ou tangencial. Eles apresentam as equações para a situação descrita, que são resultados da aplicação de várias técnicas de integração e ainda sugerem uma metodologia para o desenvolvimento de soluções, para carregamentos mais complexos aplicando o princípio da superposição.

Telles e Brebbia (1981) mostram uma solução fundamental para o problema da carga aplicada no interior do semi-plano modelado pelo MEC. As expressões para as tensões em pontos internos do semi-plano também são apresentadas, assim como a aplicação da formulação à problemas clássicos.

Uma formulação para a análise da interação placa-estaca-solo foi desenvolvida em um trabalho de Paiva e Mendonça (2000), onde tanto a placa quanto o solo são modelados via MEC e assim o volume de dados necessários para a análise se reduz aos da interface placa-solo. Nessa formulação são escritas as equações integrais de placas para os nós dos elementos de contorno e para os nós das células em que foi dividida a interface, e também são escritas as equações integrais para o meio contínuo semi-infinito solo-estaca. Sendo possível obter um sistema de equações lineares relacionando o carregamento e os deslocamentos transversais dos nós do contorno e dos elementos. Uma vez resolvido esse sistema de equações, a carga aplicada em cada estaca e a reação do solo também são obtidas.

Em relação às formulações envolvendo a associação do MEC com o MEF para a análise da interação placa-solo, estaca-solo e interação placa-estaca-solo, que foi pesquisada por Mendonça e Paiva e encontram-se descrita em alguns trabalhos<sup>10,13</sup>, já em outras

pesquisas, os autores consideraram que as estacas são solicitadas apenas por forças verticais<sup>14, 15, 16</sup>.

Para as formulações que possibilitam a análise da interação placa-solo<sup>8,9</sup> citam-se também Paiva e Butterfield (1997); para o problema da interação de grupos de estacas e o solo, ligadas ou não por um bloco rígido<sup>10,11,12</sup> foram pesquisadas ainda por Paiva e Trondi (1996).

Sobre a ISE, também se citam Paiva e Trondi (1999), a formulação do MEC para a análise da interação de um grupo de estacas com o solo e uma formulação para a análise elástica de estacas com cargas horizontais e verticais foi pesquisada pelos seguintes autores: Coda, Mesquita e Paiva (2001), Coda e Paiva (2001), Ferro (1999), Matos Filho (1999), Matos Filho, Mendonça e Paiva (2005), Matos Filho e Paiva (1999), Matos Filho, Paiva e Coda (2001) e Oshima (2004) e. Já Iwamoto (2000) considera as estacas submetidas às cargas verticais.

Dutta e Roy (2002), Tejerina Calderón (1996), Tejerina Calderón e Venturini (1997) e Venturini (1989) analisam a interação de placas com o meio contínuo, o solo é considerado homogêneo e semi-infinito. Já Paccola (2004) pesquisou tanto as soluções fundamentais de Mindlin, quanto às de Kelvin e considerou o acoplamento MEC-MEF. Barretto (1995) faz uma análise elastodinâmica de placas, através do MEC, com interação solo-estrutura adotando o solo homogêneo. A ISE estática é pesquisada em Queiroz (2010), onde a superestrutura é modelada pelo MEF e o solo pelo MEC sendo considerado um sólido elástico semi-infinito e o código computacional foi desenvolvido em linguagem de programação Java.

Já Selvadurai (2001) apresenta um procedimento elementar para a solução do problema de Boussinesq para o semi-espaço elástico isotrópico carregado por uma carga concentrada normal ao plano da superfície.

---

<sup>8</sup> Paiva (1993a).

<sup>9</sup> Id. (1993b).

<sup>10</sup> Mendonça e Paiva (1997).

<sup>11</sup> Id. (1997a).

<sup>12</sup> Id. (1997b).

<sup>13</sup> Id. (1998).

<sup>14</sup> Paiva e Mendonça (1997).

<sup>15</sup> Id. (1998).

<sup>16</sup> Id. (1999).

### 2.1.2 Steinbrenner

Em 1934, Steinbrenner publicou um artigo no *Journal Die Strasse*, no qual ele observou que a tensão vertical em qualquer ponto do solo pode ser inferida a partir das tensões sob o centro de simetria da área carregada e dos cantos (ou vice-versa). Esse cálculo pode ser obtido da integração da solução de Boussinesq para cargas concentradas, que atualmente são amplamente aplicadas na prática da engenharia, já que Steinbrenner (1934), Figura 2.2, considera o solo estratificado e a camada indeslocável em uma determinada profundidade, possibilitando os seguintes resultados: o recalque  $\rho_i^\infty$  na profundidade  $i$  entre a superfície e o indeslocável e o recalque  $\rho_h^\infty$  na profundidade  $h$  admitida como indeslocável. Para a profundidade indeslocável considera-se o deslocamento nulo, portanto, qualquer recalque no nível  $i$  é a diferença entre os recalques dos dois níveis:  $\rho_i = \rho_i^\infty - \rho_h^\infty$ . O número de camadas pode ser maior que dois, e o mesmo cálculo é repetido do indeslocável para a superfície do solo.

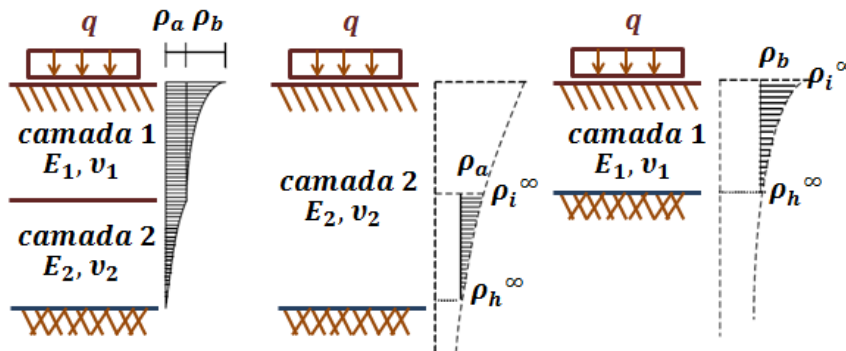


Figura 2.2 - Modelo de Steinbrenner

O MEC tem demonstrado eficiência na análise de problemas de domínio infinito, devido às características peculiares das funções ponderadoras, que já contemplam as condições de contorno atendidas às grandes distâncias. Um grupo de pesquisadores tem empregado a solução de Mindlin (1936) - a qual avalia os campos de deslocamentos dentro de um meio semi-infinito e homogêneo, quando se aplica uma força unitária dentro do meio - para o caso da análise de um meio elástico apoiado em um plano indeslocável, a uma distância  $h$  da superfície do solo. Assim, tem-se o modelo simplificado e prático de Steinbrenner, Poulos (1967) que adota a solução de Mindlin calculando os deslocamentos de um determinado ponto e subtraindo-se este do deslocamento surgido na cota indeslocável

( $\rho_x^{Steinbrenner} = \rho_x^{Mindlin} - \rho_h^{Mindlin}$ ), onde  $\rho_x$  é o deslocamento na cota  $x$  e  $\rho_h$  é o deslocamento na cota do plano indeslocável, análogo à teoria já descrita de Steinbrenner (1934). O trabalho seguinte<sup>17</sup> estende o do ano anterior considerando uma estaca carregada na direção axial, e Poulos<sup>18</sup> aplica a formulação de Steinbrenner para grupos de estacas. A influência de uma estaca<sup>18,19</sup> dentro de um meio utilizando a expressão  $\left(\rho_{ij} = \frac{d}{E_s} \cdot I_{ij} \cdot p_j\right)$  é avaliada, onde  $\rho_{ij}$  é o deslocamento do solo do elemento  $i$  devido a um fator de influência de tensão  $p_j$  do elemento  $j$ ,  $d$  é o diâmetro da estaca,  $I_{ij}$  é o fator de influência de deslocamento obtido por Mindlin, e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do meio. Para um solo não homogêneo Poulos, por conveniência, altera os valores do módulo de elasticidade ao longo da profundidade do solo e conclui que os resultados estão de acordo com os obtidos via MEF. Entretanto, para casos em que as estacas estão imersas em meios onde as camadas inferiores são mais compressíveis que as superiores, os resultados não são tão aceitáveis, como afirmam Poulos e Davis (1968).

### 2.1.3 ISE e solo não homogêneo

Entretanto, a aplicação do MEC utilizando-se a solução fundamental de Mindlin, mesmo com a introdução da cota no plano indeslocável, só é válida na representação de um único meio homogêneo, não sendo possível, dentro da teoria da elasticidade, introduzir outros meios com características físicas diferentes, em função das condições de contorno já impostas *a priori* por Mindlin (1936) em sua formulação.

Uma alternativa é utilizar o MEC com as respostas de domínio finito. A solução de Kelvin, Love (1944) fornece a base para as mais gerais formulações sobre um corpo isótropo de forma arbitrária. Essa solução é a mais adotada para acoplar diversas regiões com propriedades diferentes, equilibrando-as e compatibilizando-as nas superfícies de contorno, mantendo assim a continuidade do meio heterogêneo, como pode ser visto em Becker e Bevis (2004). Dentre os pesquisadores que aplicam o MEC utilizando a solução fundamental de Kelvin para simular o meio heterogêneo podem ser citados: Almeida e Paiva (2004), Banerjee (1976), Banerjee e Davies (1978), Maier e Novati (1987) e Ribeiro (2009).

<sup>17</sup> Poulos (1967).

<sup>18</sup> Id. (1968-a).

<sup>19</sup> Id. (1968-b).

Entretanto esta formulação apresenta entre outros problemas, a dimensão do sistema de equações final a ser resolvido, representando um enorme consumo de tempo de CPU para a análise de um problema. Por outro lado, compatibilizando as reações e deslocamentos entre a estrutura de fundação e o solo e utilizando as soluções fundamentais de Mindlin (1936), os seguintes trabalhos foram desenvolvidos: Aoki e Lopes (1975), Aoki e Velloso (1975), Colares (2006), Mota (2009), Mota, Pinheiro e Aoki (2006) e Iwamoto (2000).

Almeida (2003) pesquisa ISE e considera o maciço de solos 3D e não homogêneo modelado pelo MEC, além de adotar uma camada de apoio indeslocável às distâncias prescritas a priori e condição de aderência adequada. A superestrutura e o elemento estrutural de fundação são tridimensionais e modelados pelo MEF. O autor ainda aperfeiçoa a formulação empregando as seguintes ferramentas numéricas: paralelismo e método de resolução de sistemas esparsos.

As equações para a determinação dos deslocamentos e tensões em pontos no interior das camadas de solo são apresentadas em Burmister (1945), para problemas com três camadas de solo, o qual se encontra externamente carregado por uma carga distribuída em uma área circular. Como exemplos<sup>20,21</sup> de pesquisas desenvolvidas a partir das soluções de Burmister citam-se: Chan, Karasudhi e Lee (1974), Davies e Banerjee (1978) e Poulos (1967).

As estacas e grupos de estacas submetidas a carregamentos verticais e abalos sísmicos, através da aplicação do MEC, com a função de Green que corresponde à análise dinâmica do problema de Mindlin foram pesquisadas por Mamoon e Banerjee (1990). Para o problema de estacas submetidas às excitações distribuídas harmônicas são empregadas soluções analíticas exatas para as equações diferenciais. O solo é considerado um semi-espaço contínuo elástico tridimensional e o problema de interação é formulado satisfazendo as condições de equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos na interface estaca-solo.

As integrais de Lipschitz-Hankel são adotadas por Oliveira, Dumont e Selvadurai (2012), para analisar o semi-espaço, já que integrais deste tipo satisfazem as condições de contorno do plano com tensões nulas e redução dos deslocamentos em campos distantes. Já Selvadurai e Katebi (2013) examinam o problema de carregamento interno de um semi-espaço elástico incompressível, onde o módulo de elasticidade transversal varia exponencialmente com a profundidade.

---

<sup>20</sup> Gibson (1967).

<sup>21</sup> Id. (1974).

Finalmente, um novo MEC para o problema de placas em um semi-espço, cuja formulação é baseada em Vander Weeën para deformação cisalhante da teoria de placas de Reissner foi desenvolvido por Shaaban e Rashed (2013). Para o semi-espço adota-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Mindlin e para o solo estratificado considera-se Steinbrenner.

#### 2.1.4 MEC infinito

Uma aproximação eficiente para o elemento infinito, na análise de elementos de contorno de problemas de semi-espço é descrita em Davies e Bu (1996). Já Gao e Davies (1998) apresentam uma nova aproximação para o elemento infinito na análise do elemento de contorno tridimensional de problemas de semi-espço, onde as integrais com singularidade forte sobre a superfície infinita são calculadas analiticamente pela transformação das integrais de superfície em integrais de linha. E Abdel-Fattah, Hodhod e Akl (2000) descrevem a formulação do Método dos Elementos de Contorno Infinito e funções de forma e mapeamento para elementos bidimensionais e tridimensionais e a subrotina da matriz de rigidez finita e infinita, para a verificação de problemas de domínio infinito.

Lopes (2003) estuda a interação solo-estrutura estática e dinâmica considerando estruturas reticuladas com fundações superficiais aplicando o MEF e o Método dos Elementos Infinitos. A implementação dos elementos baseia-se na técnica de mapeamento para a modelagem de problemas de domínios infinitos. Já para o problema elástico em um semi-espço estático, Salvadori (2008) descreve o Método dos Elementos de Contorno Infinito, com integrais de contorno hipersingulares, para o estado plano de deformação bidimensional.

Em relação aos trabalhos de interação solo-estrutura desenvolvidos no SET-EESC-USP<sup>22, 23, 24, 25, 26</sup> citam-se ainda Ribeiro (2009), que equacionaram todo o solo, baseado nas soluções fundamentais de Kelvin, como um único sólido tridimensional e este pôde ser simulado de forma não homogênea, e é modelado pelo MEC infinito.

---

<sup>22</sup> Ribeiro e Paiva (2009).

<sup>23</sup> Id. (2009-b).

<sup>24</sup> Id. (2010-a).

<sup>25</sup> Id. (2010-b).

<sup>26</sup> Id. (2013).

Su e Wang (2013) propõe um elemento infinito para a análise dinâmica da interação solo-estrutura através da combinação MEC-MEF. E Gu e Chen (2013) desenvolveram uma nova formulação do método dos elementos de contorno singular para aplicação no novo método de domínio infinito, para problemas potenciais.

## 2.2 Justificativa

Este trabalho aborda temas amplamente discutidos na engenharia de estruturas: acoplamento MEC-MEF, interação solo-estrutura e as soluções fundamentais de Mindlin. Para o estudo da Interação Solo Estrutura (ISE) destacam-se as seguintes vertentes: representando o solo como meio contínuo tridimensional aplicando a solução fundamental de Kelvin, ou representando o solo como meio contínuo semi-infinito considerando a solução fundamental de Mindlin. Se por um lado a formulação de sólidos tridimensionais (Kelvin) consegue representar o problema de forma mais abrangente, por outro lado a dimensão do sistema de equações inviabiliza sua utilização em problemas práticos, nos escritórios de projeto estrutural. O grande problema desta formulação é que cada camada precisa ter grandes dimensões no plano da superfície livre para representar adequadamente o solo, que teria deslocamentos e tensões nulas no infinito. Caso as dimensões no plano X-Y não sejam grandes o suficiente, a imposição de deslocamentos ou forças de superfícies nulas em seu contorno acarretam grandes erros nos resultados. Entretanto, o número de elementos de contorno necessários para representar esse problema adequadamente é muito grande, o que resulta em um sistema de equações lineares cuja resolução pode demorar várias horas ou até dias, inviabilizando seu uso na análise de problemas práticos, segundo Paiva (1993). Outro problema que aparece também são as estacas, que são modeladas como meios contínuos tridimensionais, o que significa um grande número de elementos de contorno para representar adequadamente sua superfície lateral.

Já a solução de meio contínuo semi-infinito (Mindlin) representa o problema real, se não houver plano indeslocável, de forma menos ampla do que Kelvin, mas por outro lado, as dimensões das matrizes envolvidas e o consumo de CPU a tornam viável para ser utilizada nos escritórios de cálculo estrutural. Como o erro cometido quando o solo é representado por um meio contínuo semi-infinito não é muito significativo, segundo Poulos e Davis (1980) para diversos estudos realizados, esta representação é a mais adequada para desenvolver um programa para ser utilizado em problemas usuais de ISE. A principal contribuição desta tese é

a evidência de que para problemas com apenas uma camada de solo, as soluções fundamentais de Mindlin e o solo modelado pelo MEC representam o problema de forma mais aproximada do que com a consideração das soluções fundamentais de Kelvin, mesmo quando o problema é modelado pelo MEC infinito.

O método numérico mais adequado para a análise dos solos, já que se trata de um sólido tridimensional é o MEC, como neste método apenas o contorno do corpo em análise é discretizado, a malha de domínio tem dimensão pequena, sendo apropriado para a resolução de problemas 3D reduzidos em soluções do contorno. Como este trabalho trata-se de problemas de ISE, o MEC é uma ferramenta interessante, já que possibilita o estudo de domínios infinitos e semi-infinito, tais como o solo, mais eficientemente que o MEF. No presente trabalho o solo é analisado de acordo com as soluções fundamentais de Mindlin que considera o domínio semi-infinito. As equações do MEC são desenvolvidas utilizando o método dos resíduos ponderados e posteriormente são acopladas ao MEF, que modela a superestrutura e os elementos estruturais de fundação.

### 2.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é a análise estática da Interação Solo-Estrutura (ISE), Figura 2.3, por meio de um modelo que possibilita a determinação dos deslocamentos oriundos desse problema, onde o solo é representado por um meio contínuo semi-infinito, a estaca é representada por elementos de barra, e a placa pelo elemento DKT e Formulação Livre.

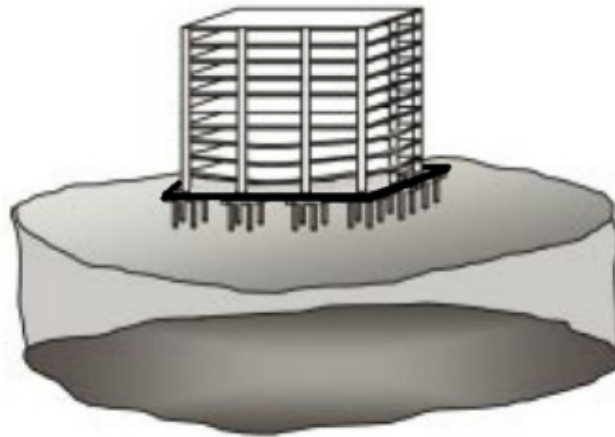


Figura 2.3 – ISE



Desenvolve-se um modelo para a ISE que permite a abordagem de problemas usuais, como por exemplo, a interação estaca-solo-superestrutura descrita na tese, em um tempo compatível com as necessidades do usuário. O programa computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, cuja metodologia para esse tipo de programação adotada pode ser vista em Beck e Bazán (2011), e empregaram-se rotinas do LAPACK (Linear Algebra PACKage). Os resultados obtidos são comparados com os poucos disponíveis na literatura e com os encontrados com a formulação tridimensional decorrentes de trabalhos desenvolvidos por outros autores. Com relação ao modelo elaborado, as diretrizes seguidas são apresentadas nos subitens seguintes.

### 2.3.1 Solos

O solo é representado pelo MEC considerando um meio contínuo semi-infinito a partir das soluções fundamentais de Mindlin. O sólido tridimensional encontra-se descrito no capítulo 2, Figura 2.4. O programa computacional desenvolvido no presente trabalho, que permite a análise da área do solo carregado, exemplos 1 e 2 do capítulo 2, foi denominado *Soil-Mindlin-BEM-2009*.

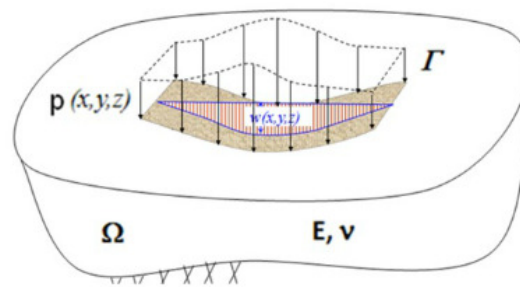


Figura 2.4 – Solo

### 2.3.1 Interação placa-solo

O modelo e simplificações adotadas para a análise do solo já foram comentados. A interação do edifício com o solo foi feita mediante a utilização de uma placa de fundação estaqueada. Para o solo são escritas as equações integrais para a representação dos deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  dos pontos nodais dos elementos de contorno do meio contínuo, resultando em um sistema de equações lineares em função da reação do solo nos pontos das

células da interface placa-solo. A placa é modelada via MEF resultando em um sistema de equações lineares também em função da reação nodal do solo. Eliminando-se nesses dois sistemas de equações a reação do solo, obtém-se assim um sistema para análise placa-solo. Após a resolução do sistema de equações, os deslocamentos resultantes da interação placa-solo são obtidos, como descritos no capítulo 3.

O programa computacional que permite a análise da interação placa-solo, exemplos 5, 6 e 7 do capítulo 3, denominado *Plate Soil Interaction – BEM-FEM – 2010*, e inclui os seguintes programas:

- *Plate in tension or compression - CST-FF - FEM – 2009*: permite a análise de chapa pelo elemento finito CST ou o elemento de membrana da Formulação Livre, exemplo 3 do capítulo 4;

- *Plate in tension or compression - Plate in bending coupling – CST-FF- DKT – FEM – 2009*: permite a análise do elemento de casca, ou seja, o elemento de placa DKT acoplado ao elemento de membrana da Formulação Livre, que resulta em um elemento com seis graus de liberdade por nó (Figura 2.5), exemplo 4 do capítulo 4;

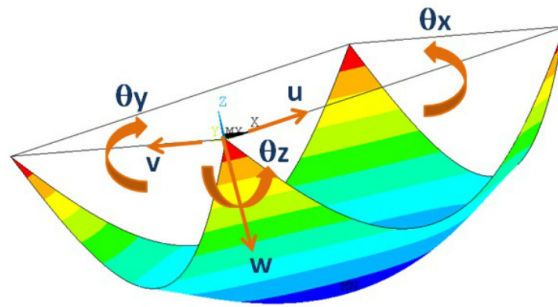


Figura 2.5 – Acoplamento DKT-Formulação Livre

- *Soil - Mindlin - BEM - 2009*, cuja formulação e exemplos de aplicação são descritas no Capítulo 2.

A condensação estática apresentada no capítulo 3 foi implementada neste trabalho, já as matrizes de rigidez e vetores de forças, da Formulação Livre e elemento DKT encontravam-se disponíveis na versão Fortran 90, de outros trabalhos orientados pelo Prof. Paiva, que pesquisaram essa formulação, como por exemplo, Carrijo (1995); e estas foram atualizadas para a linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, cuja metodologia para este tipo de programação encontra-se descrita em Beck e Bazán (2011) e Pagliosa (1998), e adotaram-se rotinas do LAPACK (Linear Algebra PACKage).

### 2.3.1 Interação estaca-solo

As estacas, descritas no capítulo 4, são modeladas pelo MEF, através de elementos unidimensionais e sua influência no solo é suposta como uma linha de carga. As estacas são consideradas verticais e solicitadas por forças horizontais, verticais e momentos fletores aplicados em seu topo. Os blocos são representados por uma placa de rigidez muito grande. Embora para o cálculo das tensões no bloco este modelo não seja adequado, o mesmo é muito conveniente do ponto de vista da elaboração de um programa computacional para essa análise. Caso se pretenda analisar as tensões e deformações internas no bloco, adotam-se elementos finitos tridimensionais a partir das reações obtidas na análise simplificada, como informações iniciais.

Cada estaca é considerada um único elemento finito, Figura 2.6, definido por quatro pontos nodais. Os esforços horizontais de interação estaca-solo são aproximados por uma função polinomial do quarto grau e o esforço vertical por um polinômio do terceiro grau. Os graus de liberdade para a estaca são os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  e as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  para o topo da estaca; e os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  para os outros nós.

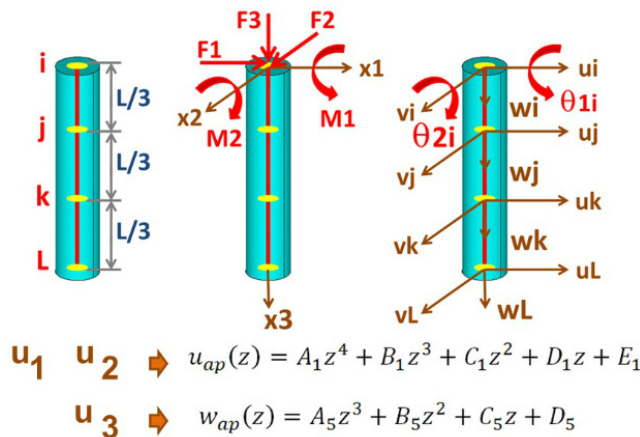


Figura 2.6 – Estaca

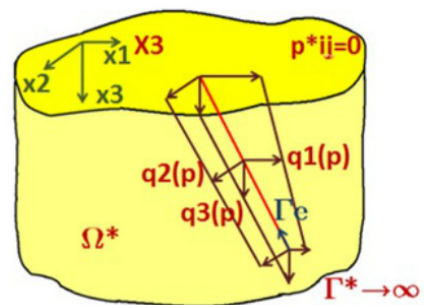


Figura 2.7 – Estaca-solo

O sistema de equações para o conjunto estaca-solo (Figura 2.7) é obtido da mesma forma que explicado anteriormente, para a interação placa-solo e que neste caso, se incorpora à contribuição das tensões nodais nas estacas. A modelagem da estaca pelo MEF resulta em um sistema de equações também em função das tensões nodais, que após serem eliminadas nos dois sistemas de equações anteriormente mencionados, resultam no sistema de equações global para a análise desse problema.

O programa computacional que permite a análise da interação estaca-solo, exemplo 8 do capítulo 5, foi denominado *Pile Soil Interaction – BEM-FEM – 2010* e foi desenvolvido em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos.

### 2.3.2 Interação estaca-solo-superestrutura

O edifício tridimensional, descrito no capítulo 5 é modelado em teoria de primeira ordem via MEF com elementos de barras para os pilares e as vigas e com elementos de cascas para as lajes. O elemento de casca utilizado é o elemento plano de casca, onde se acopla o elemento de placa DKT, que pode ser visto em Batoz, Bathe e Ho (1980) e Batoz (1982), com o elemento de membrana, que é adotado o elemento da formulação livre, proposto em Bergan e Felippa (1985).

O programa computacional desenvolvido no presente trabalho, que permite a análise da interação estaca – solo – superestrutura (Figura 2.8), exemplo 11 do capítulo 5, denominado *SSI–BEM-FEM-2013*. O programa foi implementado em linguagem Fortran 6.6 e compreende o programa *Cap Pile Soil Interaction - BEM-FEM – 2012*, exemplos: 9 e 10. A maioria dos exemplos descritos nesta tese são retirados de outros trabalhos e comparados com os mesmos. As malhas dos exemplos descritos na tese são geradas através do ANSYS 10 ou do PEC – Sousa Jr. (1996).

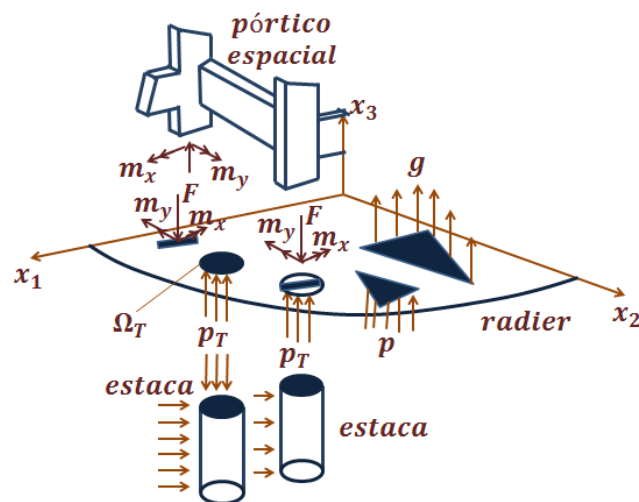


Figura 2.8 – Estaca-solo-superestrutura

### 3. Método dos Elementos de Contorno aplicado à análise mecânica dos sólidos

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do MEC aplicada à modelagem mecânica dos sólidos considerando as soluções fundamentais de Mindlin. Nesta formulação adota-se o sólido homogêneo, para a simplificação e resolução do problema de Mindlin, como um domínio semi-infinito, cujo material é homogêneo (único material), isotrópico (possui as mesmas propriedades físicas independente da direção considerada) e de comportamento elástico-linear (as tensões e deformações estão linearmente relacionadas), o problema de Mindlin como descrito no capítulo anterior já foi pesquisado por diversos outros autores e acrescenta-se Lyell e Sanders (1984). Como a análise do sólido descrita é governada pelas equações da elasticidade linear de um sólido semi-infinito, as principais equações necessárias para a formulação das integrais no contorno são os deslocamentos do sólido determinados pelas soluções fundamentais de Mindlin. Para maiores detalhes sobre as equações da elasticidade linear sugere-se Ciarlet (1988), Constantinescu e Korsunsky (2007), Ekeland e Temam (1976), Fridman (2001), Temam (1976), Timoshenko e Goodier (1951), Villaça e Taborda Garcia (2000), Westenholtz (1978). Em relação ao MEC, maiores informações podem ser obtidas em Brebbia e Dominguez (1998), Brebbia e Nakaguma (1979), Mukherjee (2005), Schanz e Steinbach (2007).

A equação integral, cuja solução resulta nos deslocamentos do sólido em pontos do contorno ou do domínio é conhecida como identidade Somigliana. Esta equação pode ser obtida aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados sobre a equação diferencial de equilíbrio que será mostrada neste capítulo. Também se apresentam as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti, que são um caso particular do problema de Mindlin. Alguns trabalhos que descrevem estas soluções fundamentais são: Barbirato (1991), Matos Filho (1999),

Mendonça (1997), Mindlin (1936), Oshima (2004) e Paiva e Butterfield (1997). Exemplos recentes que adotam as soluções fundamentais de Mindlin: Oliveira, Dumont, e Selvadurai (2012), Selvadurai e Katebi (2013) e Venturini, Coda e Tejerina Calderón (1998).

Com o MEC aplicado à mecânica dos sólidos, neste capítulo ainda, apresentam-se exemplos de domínios representativos do solo sob carregamento. Os resultados desses exemplos permitem verificar a eficiência da implementação computacional desenvolvida para o problema de Boussinesq-Cerruti.

### 3.2 Elasticidade linear

Apresentam-se as equações básicas da teoria da elasticidade linear. Como as equações de equilíbrio, as equações diferenciais que governam o problema elástico, em função dos deslocamentos, denominadas equações de Navier são deduzidas. Adotando-se as condições de contorno formula-se o problema de equilíbrio em teoria da elasticidade linear, como descrito em Ramos Lovón (2006).

#### 3.2.1 Equações de equilíbrio

A Figura 3.1 mostra um elemento infinitesimal, no qual são ilustrados forças de superfície, tensões e deslocamentos em um sólido tridimensional.

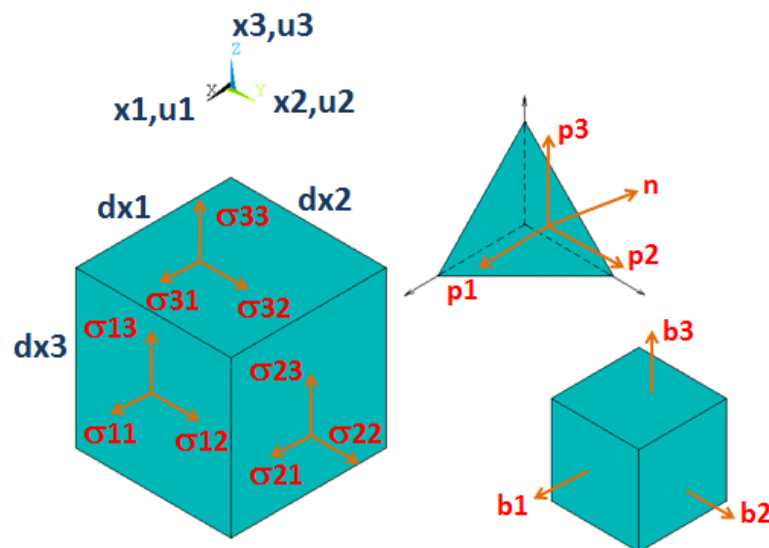


Figura 3.1 - Notação para a superfície de forças, tensões e deslocamentos

O equilíbrio de forças sobre o elemento infinitesimal nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  resulta nas equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas no domínio do corpo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  são as componentes das forças de massa (por unidade de volume).

Escrevendo-se as Equações (3.1) em notação indicial:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad \text{no } \Omega \tag{3.2}$$

ou

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{3.3}$$

onde  $i = 1,2,3$  e  $j = 1,2,3$ . Como ilustrado na Figura 3.1, o índice  $i$  está associado à faceta,  $j$  está associado à componente  $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) = t_1\hat{e}_1 + t_2\hat{e}_2 + t_3\hat{e}_3$ , mostrada na Figura 3.2. A vírgula indica a derivada, pela notação de Einstein.

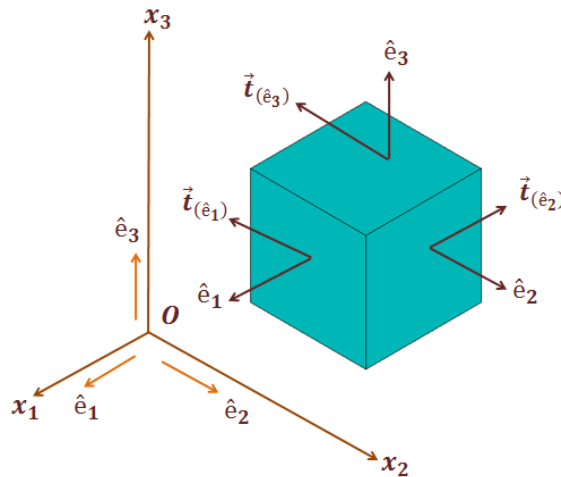


Figura 3.2 - Vetor tensão nas 3 facetas paralelas aos planos coordenados

A Equação (3.3) deve satisfazer às seguintes condições de contorno, ilustradas na Figura 3.3:

- (i) Essencial ou deslocamentos prescritos (Dirichlet)
 
$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \tag{3.4}$$
- (ii) Natural ou forças prescritas (Neumann)

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_2 \quad (3.5)$$

é a equação de equilíbrio em uma superfície qualquer, onde  $i = 1,2,3$  e  $j = 1,2,3$ .

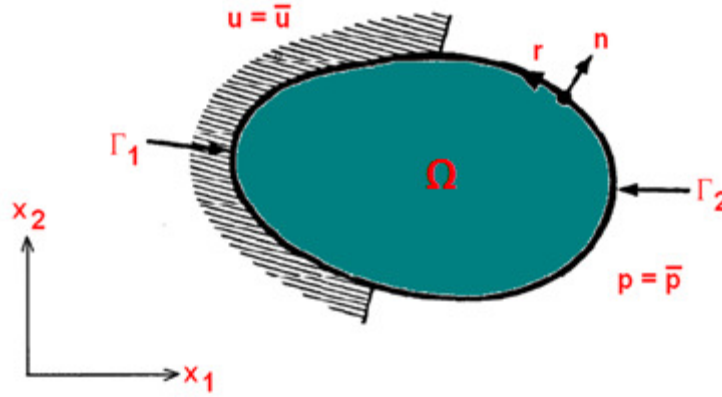


Figura 3.3 - Condições de Contorno

### 3.2.2 Componentes de forças de superfície

As componentes de tensão são projetadas em um elemento diferencial do contorno  $d\Gamma$  e o seu equilíbrio resulta em forças de superfície  $p_i$ , também denominadas na literatura internacional como tractions:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ p_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ p_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $n_1, n_2, n_3$  são os cossenos diretores da normal  $n$  em relação às direções  $x_1, x_2, x_3$ :

$$n_1 = \cos(n, x_1); \quad n_2 = \cos(n, x_2); \quad n_3 = \cos(n, x_3) \quad (3.7)$$

Reescrevendo-se a equação (3.6) em notação indicial:

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Relações deslocamento-deformação

As relações deslocamento-deformação são as seguintes:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] \quad (i, j = 1,2,3) \quad (3.9)$$

onde,  $u_i$  é o deslocamento na direção  $i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor das deformações,  $s$  é um ponto genérico

no corpo elástico e  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .



### 3.2.4 Equações constitutivas

Considerando-se um corpo homogêneo e isotrópico (mesmas propriedades materiais em todos os seus pontos e em cada ponto estas propriedades são iguais em todas as direções), a relação entre tensões e deformações em um ponto  $s$  é obtida pela Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(s) + 2G \varepsilon_{ij}(s) \quad (3.10)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes de deformação e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & \text{se} & \quad i = j \\ \delta_{ij} &= 0 & \text{se} & \quad i \neq j \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (3.12)$$

### 3.2.5 A equação de Navier

Substituindo-se as relações deformação-deslocamento, Equação (3.9), nas Equações constitutivas, Equação (3.10), resulta a seguinte relação:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

Derivando-se a Equação (3.13):

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ij} + G \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\sigma_{ij,j} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,kj} \delta_{ij} + G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) \quad (3.15)$$

Eliminando delta de Kronecker tem-se:

$$\sigma_{ij,j} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,ki} + G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) \quad (3.16)$$

Fazendo-se  $k = j$  e sabendo-se que  $u_{j,ji} = u_{j,ij}$  porque o deslocamento é contínuo.

$$\sigma_{ij,j} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{j,ji} + G(u_{i,jj} + u_{j,ji}) \quad (3.17)$$

Substituindo-se a Equação (3.17) na equação de equilíbrio (3.3) obtém-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{j,ji} + G(u_{i,jj} + u_{j,ji}) + b_i = 0 \quad (3.18)$$

Da equação (3.18) resulta a equação de Navier-Cauchy, que é uma equação diferencial que governa os deslocamentos de um corpo sólido tridimensional:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (3.19)$$

ou

$$G \cdot u_{j,ji} + (\lambda + G) \cdot u_{i,jj} + b_i = 0 \quad (3.20)$$

onde  $b_i$  são forças de massa.

A equação (3.21) é denominada equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (3.21)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador de Laplace definido como:

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3.22)$$

Considerando-se a aplicação de uma carga unitária  $F$  em um ponto  $P$  (ponto fonte) do domínio na direção cartesiana  $m$ ,  $F_i^*(P)$ , observam-se os seus efeitos nas direções cartesianas em outro ponto  $S$  (ponto campo). Nas respostas para deslocamentos  $u_{ij}^*$  e forças de superfície  $p_{ij}^*$ ,  $i$  é a direção de aplicação da força e  $j$  a direção do efeito medido. Denomina-se solução fundamental as respostas da carga unitária, que é uma solução da equação de Laplace (3.21). As expressões da solução fundamental para deslocamentos e forças de superfície são obtidas substituindo-se as forças volumétricas na equação de equilíbrio (3.3) e na equação de deslocamentos (3.19), pela função Delta de Dirac, resultando em:

$$b_i(q) = \delta(P, S) \delta_{ij} \quad (3.23)$$

$$\sigma_{ij,j} + \delta(P, S) \delta_{ki} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{jk,ji}^*(P, S) + u_{ik,jj}^*(P, S) + \frac{1}{G} \delta(P, S) \delta_{ik} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.25)$$

A equação (3.25) é denominada Equação de Navier, que é a equação (3.24) em termos de deslocamentos.

A função delta de Dirac é uma função generalizada que pode ser definida como o limite da função normal. No limite, esta função é zero em todos os pontos do domínio exceto onde o argumento é zero, quando ela vale infinito. Para a função delta de Dirac  $\delta(p, s)$  são válidas as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \delta(p, s) &= 0 & se & \quad p \neq s \\ \delta(p, s) &= \infty & se & \quad p = s \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega} f(p) \delta(p, s) d\Omega = f(p)$$

$\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, equações (3.11),  $\nu$  e  $G$  são o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade transversal do solo, respectivamente.

Das equações (3.8), (3.9) e (3.10) encontram-se as forças de superfície para o problema fundamental:

$$p_i^*(s) = G \left[ u_{i,k}^*(s) + u_{j,i}^*(s)n_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} u_{j,j}^*(s)n_i \right] \quad (3.27)$$

### 3.3 Soluções fundamentais

A solução da equação diferencial (3.25) é conhecida como solução fundamental em deslocamentos  $u_{ij}^*$ . As soluções fundamentais dependem das características do domínio e do contorno da região onde o problema elástico fundamental está definido. Neste trabalho é analisado o problema fundamental de Mindlin, bem como, o problema fundamental de Boussinesq-Cerruti, que é um caso particular do sólido descrito por Mindlin.

As soluções fundamentais de Mindlin (1936) são obtidas diretamente pela aplicação da teoria potencial, apresentada em notação vetorial, como afirma Mindlin (1953). A solução das equações lineares de equilíbrio do corpo elástico é encontrada para o caso de uma força atuando em um ponto interno do corpo isotrópico limitado por um plano. O resultado foi obtido a partir da solução de Kelvin para a força atuando em um corpo sólido e admitindo-se o núcleo de deformações, que são adicionados fora do corpo semi-infinito e assim anulam as tensões no plano que limita o sólido. Para mais detalhes do problema da força atuando em um ponto, também se sugere Love (1944).

#### 3.3.1 Funções de Papkovitch

Considerando-se um corpo elástico isotrópico em equilíbrio, o deslocamento  $\underline{u}$  é governado pela equação:

$$\mu \nabla^2 \underline{u} + \frac{\mu}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \underline{F} = 0 \quad (3.28)$$

onde  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\underline{F}$  é a força de massa por unidade de volume. A notação vetorial pode ser entendida em Weatherburn (1928).

Para o corpo isotrópico, a tensão,  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tem a seguinte relação com o deslocamento:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{u}} \underline{\underline{I}} + \mu \left( \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}} \underline{\underline{\nabla}} \right) \quad (3.29)$$

onde  $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ .

Pelo teorema de Helmholtz, descrito em Weatherburn (1928),  $\underline{\underline{u}}$  pode ser resolvido através das componentes planas e senoidais:

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\nabla}} \varphi + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{H}}, \quad \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{H}} = 0 \quad (3.30)$$

De modo que se reescrevendo a equação (3.28) tem-se:

$$\mu \nabla^2 \left( \alpha \underline{\underline{\nabla}} \varphi + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{H}} \right) + \underline{\underline{F}} = 0 \quad (3.31)$$

onde  $\alpha = (1-\nu)/(1-2\nu)$ .

O valor entre parênteses na equação (3.31) é um vetor, tal que,  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{i}}B_x + \underline{\underline{j}}B_y + \underline{\underline{k}}B_z$ ,

por exemplo:

$$\alpha \underline{\underline{\nabla}} \varphi + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{B}} \quad (3.32)$$

$$\mu \nabla^2 \underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{F}} \quad (3.33)$$

Da equação (3.32) com  $\underline{\underline{\nabla}} \cdot$  encontra-se:

$$\alpha \nabla^2 \varphi = \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{B}} \quad (3.34)$$

a solução completa é:

$$2\alpha\varphi = \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{B}} + \beta \quad (3.35)$$

onde  $\beta$  é uma função escalar, que satisfaz:

$$\mu \nabla^2 \beta = \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (3.36)$$

e  $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{i}}x + \underline{\underline{j}}y + \underline{\underline{k}}z$  é a posição do vetor.

Substituindo a equação (3.35) na equação (3.30) e eliminando  $\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{H}}$  por meios da equação (3.32) resulta em:

$$\underline{u} = \underline{B} - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla \left( \underline{r} \cdot \underline{B} + \underline{\beta} \right) \quad (3.37)$$

$$\mu \nabla^2 \underline{B} = -\underline{F} \quad (3.38)$$

$$\mu \nabla^2 \underline{\beta} = \underline{r} \cdot \underline{F} \quad (3.39)$$

Assim o deslocamento é expresso em termos das funções de Papkovitch,  $\underline{B}$  e  $\underline{\beta}$ , das quais os laplacianos são conhecidos se a força de massa  $\underline{F}$  é conhecida.

A prova de completude da função de Papkovitch, dada acima é uma extensão para incluir as forças de massa, vista em Mindlin (1936), onde  $\underline{B}$  e  $\underline{\beta}$  são denominadas funções de Papkovitch, comentada em Tran-Cong (1981, 1994), após a solução original da equação (3.37), da teoria da elasticidade. Estas são as funções de Boussinesq (1885), que foi quem introduziu  $B_x$  e  $\beta$ , mas empregou funções de tipos diferentes onde  $B_x$  e  $B_y$  poderiam ser consideradas.

### 3.3.2 Equação de Green

O valor de uma função  $V$ , em algum ponto de uma região pode ser expresso em termos dos valores do seu contorno, Laplaciano e função de Green,  $G$ , para a região, através da fórmula de Green descrita em Weatherburn (1928):

$$-4\pi V = \int \underline{n} \cdot \nabla G dS + \int G \nabla^2 V dV \quad (3.40)$$

Para a região  $z \geq 0$ , a função de Green é:

$$G = r_1^{-1} - r_2^{-1} \quad (3.41)$$

onde

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (3.42)$$

$$r_2^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2 \quad (3.43)$$

em que  $(x,y,z)$  são as coordenadas de um ponto  $P(x,y,z)$  na região, e  $(\xi,\eta,\zeta)$ ,  $(\xi,\eta,-\zeta)$  são as coordenadas do ponto fonte  $Q(\xi,\eta,\zeta)$  e a sua imagem  $Q'(\xi,\eta,-\zeta)$ , respectivamente.

### 3.3.3 Força aplicada em um ponto

A definição de Kelvin para força aplicada em um ponto toma a seguinte forma, neste caso: considerando-se a distribuição de forças de massa  $\underline{F}$  em uma região fechada T dentro de  $z > 0$ , com  $\underline{F} = 0$  e fora T, mas dentro  $z \geq 0$ . Subtraindo-se T indefinidamente, sempre colocando o ponto  $C(0,0,c)$  tem-se:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \underline{F} dV = \underline{P} \quad (3.44)$$

onde  $\underline{P}$  é uma força constante em C.

Para aplicação posterior, nota-se que no limite de T aproximando-se de zero tem-se:

$$Q(\xi,\eta,\zeta) = C(0,0,c) \quad (3.45)$$

$$Q'(\xi,\eta,-\zeta) = C'(0,0,-c) \quad (3.46)$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z-c)^2 = R_1^2 \quad (3.47)$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + (z+c)^2 = R_2^2 \quad (3.48)$$

$$G = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.52)$$

### 3.3.4 Força normal no plano do contorno

Neste caso tem-se  $F_x = F_y = 0$  e  $B_x = B_y = 0$ . A função de Papkovitch (Boussinesq) restante,  $B_z$  e  $\beta$ , deve satisfazer a condição de força de superfície nula em  $z=0$ . Assim tem-se das equações (3.29) e (3.37), em  $z=0$ :

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3.53)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial z} \right] = 0 \quad (3.54)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} \right] = 0 \quad (3.55)$$

A função entre colchetes na equação (3.53) é uma das quais o Laplaciano:

$$\nabla^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right] = -\frac{2(1-\nu)}{\mu} \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 (zF_x)}{\partial z^2} \quad (3.56)$$

é conhecida para todo  $z \geq 0$  e do qual o valor no contorno é zero. Por isso, da equação (3.40):

$$2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi\mu} \int G \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial F_z}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 (\zeta F_z)}{\partial \zeta^2} \right] dV \quad (3.57)$$

Agora, integrando o primeiro termo na integral de volume por partes, resulta em:

$$\iiint G \frac{\partial F_z}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta = \iiint G F_z d\xi d\eta - \iiint F_z \frac{\partial G}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.58)$$

A integral na superfície na equação (3.58) desaparece porque  $F_z = G = 0$  no contorno do corpo. Em seguida, das equações (3.44) e (3.50):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int G \frac{\partial F_z}{\partial \zeta} dV = P_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.59)$$

Analogamente, integrando por partes as equações (3.44), (3.45) e (3.51):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int G \frac{\partial^2 F_z}{\partial \zeta^2} dV = c P_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.60)$$

Por isso,

$$2(1-\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{P_z}{4\pi\mu} \left[ 2(1-\nu) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (3.61)$$

onde uma integração em relação à  $z$  é realizada (a função arbitrária de  $x$  e  $y$ , assim introduzida deve ser eliminada desde que  $2(1-\nu) B_z - \partial\beta/\partial z$ , para  $z \rightarrow \infty$ ).

Voltando às condições de contorno, nota-se que as equações (3.54) e (3.55) podem ser integradas em relação à  $x$  e  $y$ , respectivamente, de modo que, em  $z=0$ :

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0 \quad (3.62)$$

O Laplaciano:

$$\nabla^2 \left[ (1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] = \frac{1-2\nu}{\mu} F_z - \frac{1}{\mu} \frac{\partial (z F_z)}{\partial z} \quad (3.63)$$

é conhecido através de  $z \geq 0$  e por isso, da equação (3.40):

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\mu} \int G \left[ (1-2\nu) F_z + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta F_z) \right] dV \quad (3.64)$$

Pelo mesmo processo descrito anteriormente, das equações (3.44), (3.45), (3.49) e (3.50) encontra-se:

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{P_z}{4\pi\mu} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (3.65)$$

Finalmente, das equações (3.61) e (3.65) tem-se:

$$B_z = \frac{P_z}{4\pi\mu} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{3-4\nu}{R_2} + \frac{2c(z+c)}{R_2^3} \right] \quad (3.66)$$

$$\beta = \frac{P_z}{4\pi\mu} \left[ 4(1-\nu)(1-2\nu) \log(R_2 + z + c) - \frac{c}{R_1} - \frac{(3-4\nu)c}{R_2} \right] \quad (3.67)$$

Estas duas funções, (3.66) e (3.67), constituem as soluções para o caso de forças em  $(0,0,c)$  normal ao plano do contorno ( $z=0$ ).



### 3.3.5 Força paralela ao plano do contorno

Neste caso tem-se  $F_Y = F_Z = 0$  e  $B_Y = 0$ . As condições de contorno são as do plano  $z = 0$ , portanto:

$$\sigma_{zz} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial B_x}{\partial x} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3.68)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial z} \right] = 0 \quad (3.69)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{\mu}{2(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial B_z}{\partial y} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} \right] = 0 \quad (3.70)$$

Derivando a equação (3.69) em relação à  $y$  e a equação (3.70) em relação à  $x$  e subtraindo-as encontra-se em  $z = 0$ :

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3.71)$$

Portanto em  $z = 0$ :

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (3.72)$$

Logo, em  $z \geq 0$ :

$$\nabla^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (3.73)$$

Portanto a partir da equação (3.40) tem-se:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\mu} \int G \frac{\partial F_x}{\partial \zeta} dV \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{P_x}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Assim, da equação (3.59):

$$B_x = \frac{P_x}{4\pi\mu} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.75)$$

Da equação (3.70) em  $z = 0$ :

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = x \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (3.76)$$

Da equação (3.71) em  $z \geq 0$ :

$$\nabla^2 \left[ (1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right] = -\frac{x}{\mu} \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (3.77)$$

Assim, pela equação (3.40):

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\mu} \int G \xi \frac{\partial F_x}{\partial \zeta} dV \quad (3.78)$$

Mas o lado direito da equação (3.78) desaparece desde que  $\xi \rightarrow 0$  como  $T \rightarrow 0$ . Por isso:

$$(1-2\nu) B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 0 \quad (3.79)$$

em toda a região  $z \geq 0$ .

Da equação (3.68), em  $z = 0$ :

$$2(1-\nu) \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + 2\nu \frac{\partial B_x}{\partial x} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = 0 \quad (3.80)$$

Logo, da equação (3.75):

$$2\nu \frac{\partial B_x}{\partial x} - x \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{(1-2\nu) P_x x}{2\pi\mu R_o} - \frac{3P_x c^2 x}{2\pi\mu R_o^3} \quad (3.81)$$

onde  $R_o^2 = x^2 + y^2 + c^2$ . Mas, em  $z = 0$ :

$$-(1-2\nu) \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{(1-2\nu) P_x x}{2\pi\mu R_o} \quad (3.82)$$

e

$$\frac{P_x c}{2\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) = \frac{3P_x c^2 x}{2\pi\mu R_o} \quad (3.83)$$

Por isso, a equação (3.80) pode ser reescrita como:

$$\chi = 2(1-\nu) \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - (1-2\nu) \frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{P_x c}{2\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) = 0 \quad (3.84)$$

em  $z = 0$ . O Laplaciano do lado esquerdo da equação (3.84) na região  $z \geq 0$ :

$$\nabla^2 \chi = -\frac{x}{\mu} \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} + \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad (3.85)$$

Portanto, da equação (3.40):

$$\chi = \frac{1}{4\pi\mu} \int G \left[ \xi \frac{\partial^2 F_x}{\partial \zeta^2} - (1-2\nu) \frac{\partial F_x}{\partial \xi} \right] dV \quad (3.86)$$

O primeiro termo do integrando é eliminado desde que  $\xi \rightarrow 0$  e  $T \rightarrow 0$ . Integrando-se por partes o segundo termo tem-se que a integral de área é suprimida resultando em:

$$\chi = \frac{1-2\nu}{4\pi\mu} \int F_x \frac{\partial G}{\partial \xi} dV \quad (3.87)$$

onde, pelas equações (3.44) e (3.52) tem-se:

$$\chi = -\frac{(1-2\nu)P_x}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.88)$$

Logo, das equações (3.88), (3.84) e (3.75):

$$2(1-\nu) \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = -\frac{(1-2\nu)P_x x}{2\pi\mu R_2^3} + \frac{3P_x cx(z+c)}{2\pi\mu R_2^5} \quad (3.89)$$

ou

$$2(1-\nu)B_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{(1-2\nu)P_x x}{2\pi\mu R_2(R_2+z+c)} - \frac{P_x cx}{2\pi\mu R_2^3} \quad (3.90)$$

Finalmente, das equações (3.90) e (3.79) tem-se:

$$B_x = \frac{(1-2\nu)P_x x}{2\pi\mu R_2(R_2+z+c)} - \frac{P_x cx}{2\pi\mu R_2^3} \quad (3.91)$$

$$\beta = -\frac{(1-2\nu)^2 P_x x}{2\pi\mu(R_2+z+c)} + \frac{(1-2\nu)P_x cx}{2\pi\mu R_2(R_2+z+c)} \quad (3.92)$$

Estas duas funções, (3.91) e (3.92), e a equação (3.75), abrangem a solução para o problema da força aplicada em (0,0,c) paralela ao plano do contorno.

### 3.3.6 Comparação dos resultados

As soluções de Mindlin (1953) foram formuladas em termos do vetor de Galerkin  $\underline{F}$  (diferente da força de massa  $\underline{F}$ ).

Para a força normal ao plano do contorno a solução obtida foi:

$$\underline{F} = \frac{P_z k}{4\pi(1-\nu)} \left\{ R_1 + [8\nu(1-\nu) - 1]R_2 - \frac{2cz}{R_2} + 4(1-2\nu)[(1-\nu)z - \nu c] \log(R_2 + z + c) \right\} \quad (3.93)$$

e para o problema de uma força paralela ao plano do contorno:

$$\begin{aligned} \underline{F} = \frac{P_x \underline{i}}{4\pi(1-\nu)} \left\{ R_1 + R_2 - \frac{2c^2}{R_2} + 4(1-\nu)(1-2\nu) \left[ (z+c) \log(R_2 + z+c) - R_2 \right] \right\} \\ + \frac{P_x \underline{k}}{8\pi(1-\nu)} \left[ \frac{2cx}{R_2} + 2(1-2\nu)x \log(R_2 + z+c) \right] \end{aligned} \quad (3.94)$$

A relação entre as funções de Galerkin e Papkovitch mostram que:

$$\underline{\mu B} = (1-\nu) \nabla^2 \underline{F} \quad (3.95)$$

$$\underline{\mu \beta} = (1-\nu) \left( 2 \nabla \cdot \underline{F} - r \cdot \nabla^2 \underline{F} \right) \quad (3.96)$$

Substituindo-se as equações (3.93) e (3.94) nas equações (3.95) e (3.96) verifica-se que as soluções apresentadas são idênticas.

### 3.3.7 Soluções fundamentais de Mindlin

Mindlin (1936) ao analisar um sólido fez algumas simplificações em relação ao seu comportamento mecânico. O solo foi considerado como um material elástico-linear, homogêneo e isótropo. As soluções fundamentais foram definidas em um meio semi-infinito,  $\Omega^*$ .

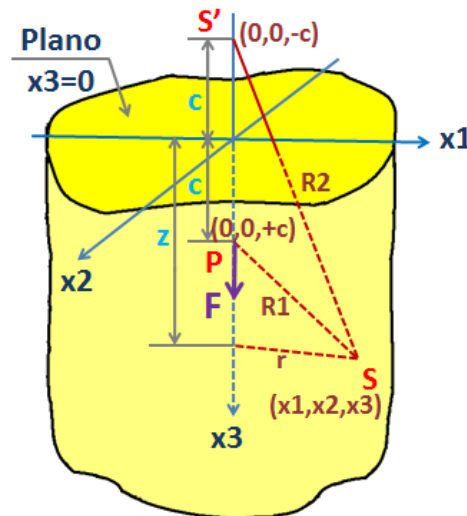


Figura 3.4 - Sólido de Mindlin (1936)

Considerou-se o sólido submetido a uma carga concentrada unitária  $P$  aplicada em qualquer ponto no interior do domínio semi-infinito,  $\Omega^*$ . Definiu-se a superfície do contorno no plano

$x_3 = 0$  e esta foi considerada livre de forças de superfície. A ilustração deste problema encontra-se na Figura 3.4.

As soluções fundamentais de Mindlin (1936), referentes aos deslocamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as seguintes:

$$\begin{aligned}
u_{11}^* &= K_d \left\{ \frac{3-4\nu_S}{r_{SP}} + \frac{1}{R_{SS'}} + \frac{r_{SP1}^2}{r_{SP}^3} + \frac{(3-4\nu_S)r_{SP1}^2}{R_{SS'}^3} + \frac{2CZ}{R_{SS'}^3} \left( 1 - \frac{3r_{SP1}^2}{R_{SS'}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(1-\nu_S)(1-2\nu_S)}{R_{SS'} + R_{SS'3}} \left[ 1 - \left( \frac{r_{SP1}^2}{R_{SS'}(R_{SS'} + R_{SS'3})} \right) \right] \right\} \\
u_{12}^* &= K_d r_{SP1} r_{SP2} \left[ \frac{1}{r_{SP}^3} + \frac{3-4\nu_S}{R_{SS'}^3} - \frac{6CZ}{R_{SS'}^5} - \frac{4(1-\nu_S)(1-2\nu_S)}{R_{SS'}(R_{SS'} + R_{SS'3})^2} \right] \\
u_{13}^* &= K_d r_{SP1} \left[ \frac{r_{SP3}}{r_{SP}^3} + \frac{(3-4\nu_S)r_{SP3}}{R_{SS'}^3} - \frac{6CZ R_{SS'3}}{R_{SS'}^5} + \frac{4(1-\nu_S)(1-2\nu_S)}{R_{SS'}(R_{SS'} + R_{SS'3})} \right] \\
u_{21}^* &= u_{12}^* \\
u_{22}^* &= K_d \left\{ \frac{3-4\nu_S}{r_{SP}} + \frac{1}{R_{SS'}} + \frac{r_{SP2}^2}{r_{SP}^3} + \frac{(3-4\nu_S)r_{SP2}^2}{R_{SS'}^3} + \frac{2CZ}{R_{SS'}^3} \left( 1 - \frac{3r_{SP2}^2}{R_{SS'}^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(1-\nu_S)(1-2\nu_S)}{R_{SS'} + R_{SS'3}} \left[ 1 - \frac{r_{SP2}^2}{R_{SS'}(R_{SS'} + R_{SS'3})} \right] \right\} \\
u_{23}^* &= \frac{r_{SP2}}{r_{SP1}} u_{13}^* \\
u_{31}^* &= K_d r_{SP1} \left[ \frac{r_{SP3}}{r_{SP}^3} + \frac{(3-4\nu_S)r_{SP3}}{R_{SS'}^3} + \frac{6CZ R_{SS'3}}{R_{SS'}^5} - \frac{4(1-\nu_S)(1-2\nu_S)}{R_{SS'}(R_{SS'} + R_{SS'3})} \right] \\
u_{32}^* &= \frac{r_{SP2}}{r_{SP1}} u_{31}^* \\
u_{33}^* &= K_d \left[ \frac{R_{SP3}^2}{R_{SP}^3} + \frac{3-4\nu_S}{R_{SP}} + \frac{6CZ R_{SS'3}^2}{R_{SS'}^5} + \frac{8(1-\nu_S)^2 - (3-4\nu_S)}{R_{SS'}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(3-4\nu_S)R_{SS'3}^2 - 2CZ}{R_{SS'}^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.97}$$

onde:

$$\begin{aligned}
K_d &= \frac{1 + \nu_S}{8\pi E_S (1 - \nu_S)} \\
\pi &= 3.1415926536 \\
C &= x_{3P} \\
Z &= x_{3\xi} \\
R_{SP} &= \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1P})^2 + (x_{2\xi} - x_{2P})^2 + (x_{3\xi} - x_{3P})^2}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$R_{SP1} = x_{1\xi} - x_{1P}$$

$$R_{SS'} = \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1S'})^2 + (x_{2\xi} - x_{2S'})^2 + (x_{3\xi} - x_{3S'})^2}$$

$$R_{SS'3} = x_{3\xi} - x_{3S'}$$

$$K_S = \frac{1}{8\pi(1 - \nu_S)}$$

onde  $u_{ij}^*$  é a solução fundamental,  $i$  é a direção da força,  $j$  é a direção do deslocamento,  $\nu_S$  é o coeficiente de Poisson do solo,  $E_S$  é o módulo de elasticidade longitudinal do solo,  $L$  é o comprimento da estaca,  $R_o$  é o raio,  $(x_{1P}, x_{2P}, x_{3P})$  são as coordenadas do ponto fonte  $P$ ,  $(x_{1\xi}, x_{2\xi}, x_{3\xi})$  são as coordenadas do ponto campo  $S$ ,  $S'$  é um ponto definido tal que  $(x_{1S'}, x_{2S'}, x_{3S'}) = (x_{1P}, x_{2P}, -x_{3P})$ ,  $R_{SP}$  é a distância do ponto de integração  $S$  ao ponto fonte  $P$  e  $R_{SS'}$  é a distância do ponto de integração  $S$  ao ponto  $S'$ .

As forças de superfície são expressas em função do tensor de terceira ordem das tensões,  $\sigma_{jk}^{*i}$ , e do vetor normal à superfície,  $n_k$ .

$$P_{ij}^* = \sigma_{jk}^{*i} n_k \quad (3.99)$$

onde as componentes do tensor de terceira ordem das tensões são:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{*1} &= K_S r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - (3-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{12}^{*1} &= K_S r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[ 1 - \frac{5r_1^2}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{13}^{*1} &= K_S \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 R_3}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{6c}{R^5} \left[ zR_3 - (1-2\nu)r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{22}^{*1} &= K_S r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{*1} &= K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[ 1-2\nu + \frac{5zR_3}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{33}^{*1} &= K_s r_1 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} - \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^3} \left[ c + (1-2\nu) + \frac{5R_3^2 z}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{11}^{*2} &= K_s r_2 \left\{ \frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_1^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ c - (1-2\nu)R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{12}^{*2} &= K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[ 1 - \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{13}^{*2} &= \sigma_{23}^{*1} \\ \sigma_{22}^{*2} &= K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3-4\nu)}{R^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 3 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[ 3c - (3-2\nu)R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{23}^{*2} &= K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 R_3}{R^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{6c}{R^5} \left[ zR_3 - (1-2\nu)r_2^2 - \frac{5r_2^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{33}^{*2} &= \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1} \\ \sigma_{11}^{*3} &= K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3r_3-4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(3-4\nu)r_1^2 r_3 - 6cR_3 [(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_1^2 z R_3}{R^7} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] \right\} \\ \sigma_{12}^{*3} &= K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)r_3}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R^2(R+R_3)} \left[ \frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{22}^{*3} = K_s \left\{ \frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{3(3-4\nu)r_2^2 r_3 - 6cR_3[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R^5} - \frac{30cr_2^2 z R_3}{R^7} + \right. \\ \left. - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \left[ 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*3} = K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{r^3} + \frac{1-2\nu}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3 - 3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\}$$

$$\sigma_{33}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{(1-2\nu)r_3}{r^3} + \frac{(1-2\nu)r_3}{R^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{3(3-4\nu)zR_3^2 - 3cR_3(5z-c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\}$$

### 3.3.8 Soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti

A distância entre o ponto carregado e o plano  $x_3 = 0$  é o parâmetro  $c$ , mostrado na Figura 3.4. De Mindlin (1953) sabe-se que se  $c \rightarrow \infty$  tem-se o problema de Kelvin, visto que a caracterização do problema de Mindlin deixa de existir, ou seja, o plano  $x_3 = 0$  não é mais livre de forças de superfície. Analogamente, quando  $c \rightarrow 0$  tem-se o problema no qual a força é aplicada no plano  $x_3 = 0$  e as forças de superfície são nulas, caracterizando o problema de Boussinesq-Cerruti.

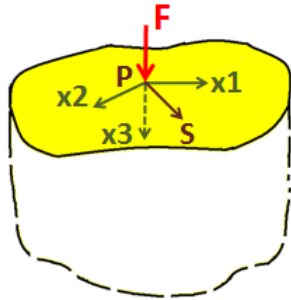


Figura 3.5 - Problema de Boussinesq

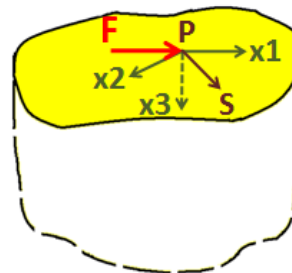


Figura 3.6 - Problema de Cerruti

A diferença entre as abordagens refere-se também ao ponto de aplicação da carga. Ao contrário de Mindlin, que considerou a carga aplicada em qualquer ponto no interior do domínio semi-infinito  $\Omega^*$ , Boussinesq-Cerruti considerou a carga unitária concentrada



aplicada em qualquer ponto da superfície do sólido, ou seja, em qualquer ponto do plano  $x_3 = 0$ . Boussinesq (1885) considerou a carga aplicada normal ao plano como ilustrado na Figura 3.5, e no problema de CERRUTI (1882) apud Mindlin (1936) a carga foi aplicada tangencialmente ao plano, como mostrado na Figura 3.6.

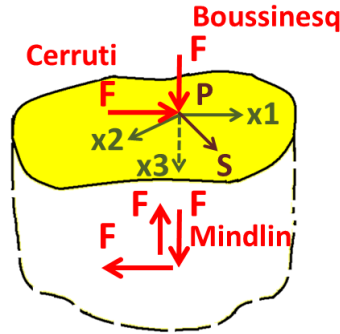


Figura 3.7 - Domínio elástico semi-infinito

Portanto, as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti são determinadas a partir das soluções de Mindlin (3.97) fazendo-se  $c \rightarrow 0$ , com as considerações feitas anteriormente, Figura 3.7, resultando em:

$$\begin{aligned}
 u_{ji}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} [(1 - \nu)\delta_{ij} + \nu r_{,i}r_{,j}] \quad i, j = 1, 2 \\
 u_{j3}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \nu \right) r_{,j} + \delta_{3j} \left[ (1 - \nu) + r_{,j} \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad j = 1, 2, 3 \\
 u_{3j}^* &= -(-1)^{\delta_{3j}} u_{j3}^* \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.101}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 u_{11}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} [(1 - \nu) + \nu r_{,1}^2] \\
 u_{12}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} \nu r_{,1}r_{,2} \\
 u_{13}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} \left( \frac{1}{2} - \nu \right) r_{,1} \\
 u_{21}^* &= u_{12}^* \\
 u_{22}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} [(1 - \nu) + \nu r_{,2}^2] \\
 u_{23}^* &= \frac{1}{2\pi Gr} \left( \frac{1}{2} - \nu \right) r_{,2} \\
 u_{31}^* &= -u_{13}^* \\
 u_{32}^* &= -u_{23}^*
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

$$u_{11}^* = \frac{1}{2\pi Gr}(1 - \nu)$$

### 3.4 Equação integral para o problema elástico

A equação Somigliana, que governa o problema da elasticidade linear é obtida a partir da simetria dos tensores de deformação e das tensões e é escrita em função dos campos de contorno e domínio, como visto em Ramos Lovón (2006). Assim, o problema é transformado na exclusiva determinação dos campos de contorno, a partir dos quais são determinados os campos de domínio, que após manipulações algébricas e aplicação de alguns teoremas como o de Betti, por exemplo.

#### 3.4.1 Equação Somigliana para pontos do domínio

Formula-se a equação integral do solo a partir da equação de equilíbrio, equação (3.3), nesse domínio. Escreve-se a expressão dos resíduos ponderados para este problema, onde existem soluções aproximadas no domínio e no contorno, como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,k} + b_i) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.103)$$

onde a função peso  $u_{ij}^*$  é a solução fundamental que se refere ao deslocamento na direção  $j$  devido a uma carga unitária aplicada na direção  $i$  e  $b_i$  é a força de massa (por unidade de volume) na direção  $i$ . Integrando-se a Equação (3.103) duas vezes por partes tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_i d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_i d\Gamma \quad (3.104)$$

Sabe-se que  $\sigma_{ij,j}^* = -b_i^*$  e:

$$b_i^* = \delta(p, s) e_i \quad (3.105)$$

onde  $b_i^*$  é a carga unitária aplicada no ponto  $p$  segundo uma das direções ortogonais  $e_i$  e este pode ser escrito como o delta de kronecker:

$$b_i^* = \delta(p, s) \delta_{ij} \quad (3.106)$$

Substituindo-se a terceira Equação (3.26) e a Equação (3.106) no primeiro termo da Equação (3.104):

$$\int_{\Omega} \delta(p, s) \delta_{ij} u_j(s) d\Omega = \delta_{ij} u_j(p) = u_i(p) \quad (3.107)$$

ou seja, sabe-se que nessa condição o delta de Dirac tem valor unitário e pela notação indicial eliminam-se os índices repetidos, como feito na Equação (3.107).

Substituindo-se a Equação (3.107) na Equação (3.104) obtém-se:

$$u_i(p) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(p, s) u_j(s) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(p, s) p_j(s) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(p, s) b_j(s) d\Omega \quad (3.108)$$

A Equação (3.108) é a Identidade Somigliana, que é válida para todos os pontos do espaço, do domínio e contorno.

### 3.4.2 Equação Somigliana para pontos do contorno - Mindlin

Para a solução fundamental de Mindlin, considerando o caso particular de Boussinesq e Cerruti, no qual o plano  $x_3 = 0$  representa a superfície de contorno, a qual é admitida livre de forças de superfície  $p_{ij}^* = 0$ . Admitindo-se essas considerações e a Equação (3.104) tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_i d\Omega = - \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_i d\Gamma \quad (3.109)$$

Observa-se na Equação (3.109) que o termo do lado direito da integral refere-se ao contorno do solo. Considerando-se o contorno dividido em duas regiões  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , correspondentes aos deslocamentos e forças prescritas respectivamente, tem-se a equação (3.109) e admitindo-se as condições de contorno descritas (3.4) e (3.5):

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_i d\Omega = - \int_{\Gamma_1} u_{ij}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_{ij}^* \bar{p}_i d\Gamma \quad (3.110)$$

onde  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

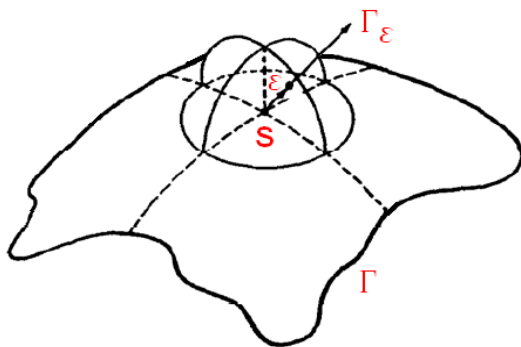


Figura 3.8 - Ponto campo s situado no domínio

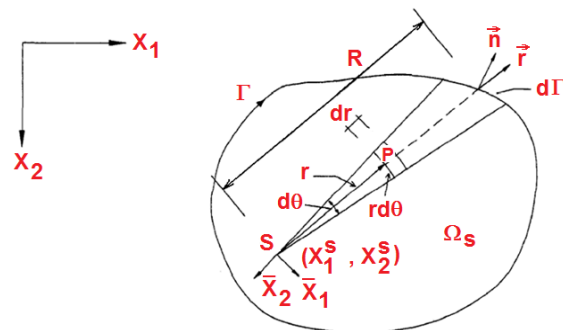


Figura 3.9 - Integração da região carregada

A equação (3.110) pode ser escrita para pontos do contorno acrescentando-se um domínio infinitesimal  $\Omega_\varepsilon$  ao domínio original, como ilustrado na Figura 3.8. Dessa forma tem-se o ponto campo  $s$  pertencente ao domínio. E o novo contorno é  $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$  e o novo domínio é  $\Omega - \bar{\Omega}_\varepsilon + \Omega_\varepsilon$ . Reescrevendo-se a Equação (3.108):

$$u_i = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega - \bar{\Omega}_\varepsilon + \Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (3.111)$$

Aplicando-se, na Equação (3.111), o limite quando  $\varepsilon$  tende à zero:

$$u_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega - \bar{\Omega}} u_{ij}^* b_j d\Omega \right] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega \right] \quad (3.112)$$

Analisando-se cada termo individualmente:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^* b_j d\Omega_\varepsilon \right] &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{ij}^* p_j d\Gamma_\varepsilon \right] &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma \right] &= \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega - \bar{\Omega}} u_{ij}^*(P, S) b_j(S) d\Omega \right] &= \int_{\Omega} u_{ij}^*(P, S) b_j(S) d\Omega \end{aligned} \quad (3.113)$$

Substituindo-se a Equação (3.113) na Equação (3.112) tem-se a Equação Somigliana para a solução fundamental de Mindlin:

$$C_{ij}(P)u_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S)p_j(S) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(P, S)b_j(S) d\Omega \quad (3.114)$$

### 3.4.3 Integral para o campo das tensões

O campo das tensões, para pontos do domínio, é encontrado pelas diferenciações nas equações que regem o campo dos deslocamentos. Assim, a partir da identidade de Somigliana, a equação integral que representa o campo das tensões, que um ponto  $P$  está submetido é escrita como:

$$\sigma_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* b_k d\Omega \quad (3.115)$$

O estado de tensões para pontos situados no contorno do corpo é determinado de forma análoga ao que acontece no campo de deslocamentos. No caso de pontos situados sobre contorno sem presença de angulosidades, a representação integral é escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{P}) = - \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \varepsilon_{ijk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* b_k d\Omega \quad (3.116)$$

### 3.5 Método dos Elementos de Contorno aplicado ao problema de Boussinesq-Cerruti

Desenvolve-se a solução numérica, das equações integrais apresentadas anteriormente neste capítulo. A solução é obtida com uma técnica numérica, para estabelecer um modelo discreto que aproxime campos do contínuo a determinar. No MEC, a solução é encontrada pelo processo de discretização da equação integral que governa o problema, que neste trabalho é escrita unicamente em função dos campos de contorno, análogo à Ramos Lovón (2006). Este processo de discretização resulta em um sistema linear de equações algébricas que permite a determinação dos deslocamentos.

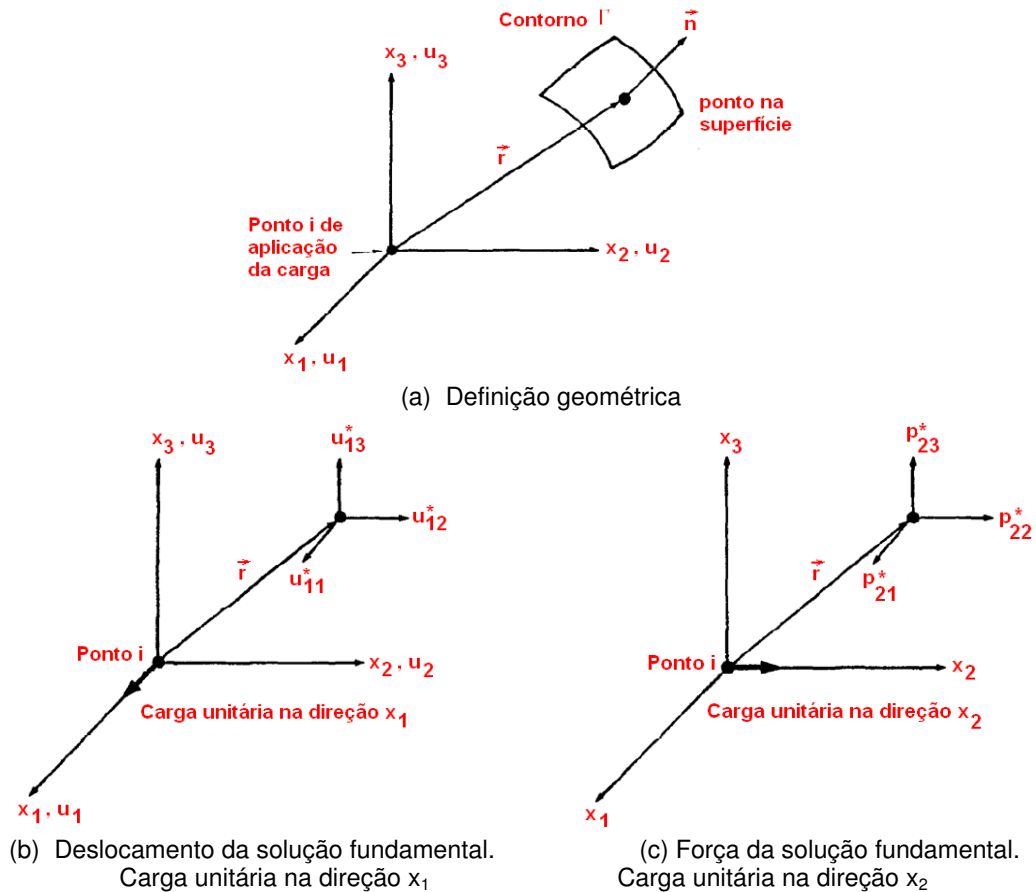


Figura 3.10 - Interpretação geométrica das componentes da solução fundamental

Descrevem-se neste item as equações do solo sob carregamento distribuído em sua superfície, que se refere à solução fundamental de Boussinesq-Cerruti descrita anteriormente. E em seguida, apresentam-se alguns exemplos que comprovam a eficiência da implementação computacional das equações referentes ao solo, no presente trabalho.

Reescrevendo-se a Identidade Somigliana (3.114):

$$c_{ik}(P)u_i(P) = \int_{\Gamma_S} u_{ik}^*(P, S)p_k(S)d\Gamma(S) + \int_{\Omega} u_{ik}^*(P, S)b_k(S)d\Omega(S) \quad (3.117)$$

onde  $P$  é o ponto fonte e  $S$  é o ponto campo, como ilustrado na Figura 3.9. E  $p_k$  e  $u_k$  ( $k=1,2,3$ ) são as forças e deslocamentos, respectivamente;  $u_{ik}^*$  é o deslocamento na direção  $k$  quando a força unitária é aplicada na direção  $i$ ; e  $p_{ik}^*$  é a força na direção  $k$  quando a força unitária é aplicada na direção  $i$ , Figura 3.10.

Desde que somente a compatibilidade dos deslocamentos verticais, na direção  $x_3$ , seja admitida, somente a equação integral envolvendo a componente  $x_3$  é necessária. Nomeando-se o deslocamento na direção  $x_3$  com a letra  $w$ , reescreve-se a Equação (3.117), sendo esta livre de forças de massa (por unidade de volume):

$$w(P) = \int_{\Gamma_S} u_{33}^*(P, S)p_3(S)d\Gamma(S) \quad (3.118)$$

A integral (3.118) é uma integral de contorno, que pode ser escrita como integral de domínio por causa de  $p_3$ , que é uma carga aplicada sobre o domínio do solo. Reescreve-se a Equação (3.118):

$$w(P) = \int_{\Omega_S} u_{33}^*(P, S)p_3(S)d\Omega_S \quad (3.119)$$

As forças de superfície  $p_3(S)$  são aplicadas em uma área qualquer de solo carregada e esta área é aproximada por elementos triangulares, Figura 3.11.

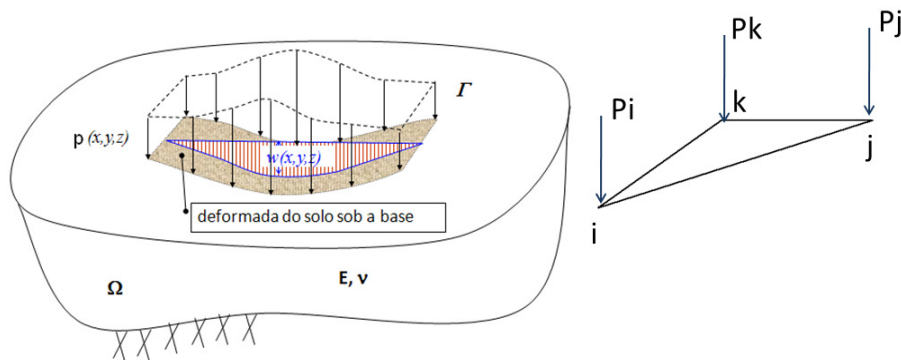


Figura 3.11 - Forças de superfície e cargas nodais equivalentes

Portanto, a função interpoladora das forças de superfície,  $p_3(S)$ , pode ser descrita como um polinômio do primeiro grau:

$$p_3(S) = Ax_1^S + Bx_2^S + C \quad (3.120)$$

onde  $(x_1^S, x_2^S)$  são as coordenadas do ponto campo S no sistema global de referência  $(x_1, x_2)$ , conforme ilustrado na Figura 3.9.

Os coeficientes A, B e C referem-se à carga de domínio  $p_3$ , Equação (3.120). Aproximando-se esta área por um elemento triangular escreve-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \end{Bmatrix} = \bar{p}_i \quad (3.121)$$

Resolvendo-se o sistema (3.121) e substituindo-o na Equação (3.120):

$$p_3(S) = \frac{1}{2A_r} \left\{ \begin{aligned} & [(x_{2j} - x_{2k})x_1 + (x_{1k} - x_{1j})x_2 + (x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j})]p_i + \\ & [(x_{2k} - x_{2i})x_1 + (x_{1i} - x_{1k})x_2 + (x_{1k}x_{2i} - x_{1i}x_{2k})]p_j + \\ & [(x_{2i} - x_{2j})x_1 + (x_{1j} - x_{1i})x_2 + (x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i})]p_k \end{aligned} \right\} \quad (3.122)$$

onde  $A_r$  é a área do elemento. Da Equação (3.122) define-se a relação:

$$p_3(S) = \frac{1}{2A_r} \left\{ \begin{aligned} & [A_1x_1 + B_1x_2 + C_1]p_i + \\ & [A_2x_1 + B_2x_2 + C_2]p_j + \\ & [A_3x_1 + B_3x_2 + C_3]p_k \end{aligned} \right\} \quad (3.123)$$

A área do triângulo é:

$$A_r = \frac{1}{2} [(x_{1j}x_{2k} - x_{1k}x_{2j}) - (x_{1i}x_{2k} - x_{1k}x_{2i}) + (x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i})] \quad (3.124)$$

Através da translação de eixos, as coordenadas do ponto S podem ser escritas em relação a um sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^S \\ x_2^S \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.125)$$

As forças de superfície no sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , Figura 3.9, correspondentes a uma área qualquer de solo carregado, de forma análoga à Equação (3.125), tem as áreas correspondentes descritas pela aproximação de elementos triangulares como:

$$\bar{p}_3(S) = A\bar{x}_1 + B\bar{x}_2 + D \quad (3.126)$$

e

$$D = Ax_1^S + Bx_2^S + C \quad (3.127)$$

Escreve-se a Equação (3.119), no domínio, em coordenadas polares:

$$w(P) = \int_{\theta} \int_R u_{33}^*(P, S) \bar{p}_3(S) r dr d\theta \quad (3.128)$$

Escrevendo-se a força de superfície, Equação (3.126), função do sistema cartesiano local, em coordenadas polares  $(r, \theta)$ :

$$\bar{p}_3(S) = \text{Arcos}\theta + B\text{sen}\theta + D \quad (3.129)$$

Substituindo-se a Equação (3.127) na (3.129), o D é substituído, e tendo-se em vista a Equação (3.122) e a Equação (3.123), a força de superfície ( $\bar{p}_i$ ) resulta da aproximação pelo polinômio do primeiro grau:

$$\bar{p}_3(S) = \frac{1}{2A_r} (\text{Arcos}\theta + B\text{sen}\theta + Ax_1^S + Bx_2^S + C) \bar{p}_i \quad (3.130)$$

Substituindo-se a Equação (3.130) na Equação (3.128):

$$w(P) = \int_{\theta} \int_R u_{33}^*(P, S) \frac{1}{2A_r} [(\text{Arcos}\theta + B\text{sen}\theta + Ax_1^S + Bx_2^S + C)] \bar{p}_i r dr d\theta \quad (3.131)$$

De posse da integral (3.131) necessita-se determinar a solução fundamental em deslocamentos  $u_{33}^*$  que é o resultado da resolução da Equação de Navier, Equação (3.25).

Como se trata de um problema de Boussinesq-Cerruti substituindo-se  $j=3$  na segunda das Equações (3.101), que é resultado da substituição de  $x_3 = 0$  na solução fundamental de Mindlin (3.97), tem-se:

$$u_{33}^* = \frac{1}{2\pi Gr} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \nu \right) r_{,3} + \delta_{33} \left[ (1 - \nu) + r_{,3} \left( \nu - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (j=1,2,3) \quad (3.132)$$

onde  $\delta_{33}$  é o delta de Kroenecker e é igual a 1, já que  $i=j$ . Portanto, encontra-se a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti:

$$u_{33}^* = \frac{1 - \nu}{2\pi Gr} \quad (3.133)$$

Substituindo-se a solução fundamental (3.133) na Equação (3.131):

$$w(P) = \int_{\theta} \int_R \frac{1 - \nu}{2\pi Gr} \left[ \frac{1}{2A_r} (\text{Arcos}\theta + B\text{sen}\theta + Ax_1^S + Bx_2^S + C) \right] r dr d\theta \bar{p}_i \quad (3.134)$$

Da Equação (3.134):

$$w(P) = \frac{1 - \nu}{8\pi G} \int_{\theta} \left\{ \frac{1}{A_r} [AR^2 \cos\theta + BR^2 \text{sen}\theta + 2(Ax_1^S + Bx_2^S + C)] \right\} d\theta \bar{p}_i \quad (3.135)$$

Da Figura 3.9:

$$d\theta = \frac{\vec{n}\vec{r}}{R} d\Gamma_{\Omega_s} \quad (3.136)$$

Substituindo-se a Equação (3.136) na Equação (3.135), sabendo-se da Figura 3.9 que  $r_1 = \cos\theta$  e  $r_2 = \text{sen}\theta$ , e fazendo-se as devidas simplificações:

$$w(P) = \frac{1 - \nu}{8\pi G} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{A_r} (A_i R r_1 + B_i R r_2 + 2(Ax_1^S + Bx_2^S + C_i)) \right] n r d\Gamma \bar{p}_i \quad (3.137)$$



Na Equação (3.137) tem-se o deslocamento  $w$ , quando determinada área de solo que se encontra carregada em sua superfície e é considerada a solução fundamental para o problema de Boussinesq-Cerruti. Acrescenta-se que esta integral representa a soma de todos os elementos triangulares que compõe determinada área de solo carregada.

Transformando a integral (3.137), inicialmente no contorno em uma integral numérica:

$$w_i = \frac{1-\nu}{8\pi G} \sum_{n=1}^{\text{fonte triangulo}} \sum_{j=1}^{\text{lado Gauss}} \sum_{k=1} \sum_{\xi=1} \left\{ \left[ \frac{1}{A_r(j)} (A_k R r_1 + B_k R r_2 + 2(A_k x_1^S + B_k x_2^S + C_k)) \right] n_k r_k \right\} (J_i(\xi) w(\xi)) \bar{p}_i \quad (3.138)$$

onde  $n$  é o número de nós,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson;  $G$  é o módulo de elasticidade transversal;  $A_r$  é a área de cada elemento triangular;  $k=1,2,3$  refere-se a cada lado do triângulo e corresponde à aproximação do elemento triangular, e os valores das constantes encontram-se na Equação (3.123);  $J$  é o jacobiano;  $w$  é o peso;  $\xi$  refere-se a cada ponto de Gauss;  $(x_1^S, x_2^S)$  são as coordenadas do ponto campo;  $n$  refere-se ao número de pontos fontes (número de nós);  $j$  refere-se ao número de elementos triangulares e da notação indicial sabe-se que índices repetidos significam uma soma, portanto:

$$n_k r_k = n_1 r_1 + n_2 r_2 \quad (3.139)$$

onde  $n_k$  é o vetor normal e  $r_k$  é o versor de  $R$ , que é a distância do ponto fonte  $(x_1^S, x_2^S)$  ao ponto de integração  $(x_1(\xi), x_2(\xi))$ . O índice  $n$  refere-se aos nós de cada triângulo, portanto têm-se os seguintes vetores:

$$w_n = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad p_n = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (3.140)$$

Escrevendo-se a Equação (3.138) na forma matricial para uma área triangular de solo carregada e formada por apenas um elemento triangular:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \frac{1-\nu}{8\pi G} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (3.141)$$

onde o índice referente à linha é o ponto fonte e o índice referente à coluna é o nó do elemento triangular. Assim:

$$\{w\} = \frac{1-\nu}{8\pi G} [U]\{p\} \quad (3.142)$$

onde:

$$[U] = \sum_{n=1}^{\text{fonte triangulo}} \sum_{j=1}^{\text{lado Gauss}} \sum_{k=1} \sum_{\xi=1} \left\{ \frac{1}{\text{Area}(j)} (A_k R r_1 + B_k R r_2 + 2(A_k x_1^S + B_k x_2^S + C_k)) \right\} n_k r_k \left\{ (\phi(\xi) J_k(\xi) w(\xi)) \right\} \quad (3.143)$$

E a Equação (3.141) na forma global, ou seja, dependendo do número de elementos triangulares tem-se a seguinte dimensão:

$$\{w\}_{n \text{ nos} \times 1} = \frac{1-\nu}{8\pi G} [U]_{n \text{ nos} \times n \text{ nos}} \{p\}_{n \text{ nos} \times 1} \quad (3.144)$$

onde nnos é o número de nós.

### 3.6 Exemplo 1: Solo - área quadrada

Neste exemplo analisa-se uma área quadrada do solo carregada, a geometria do sólido analisado bem como os carregamentos considerados encontram-se ilustrados na Figura 3.12.

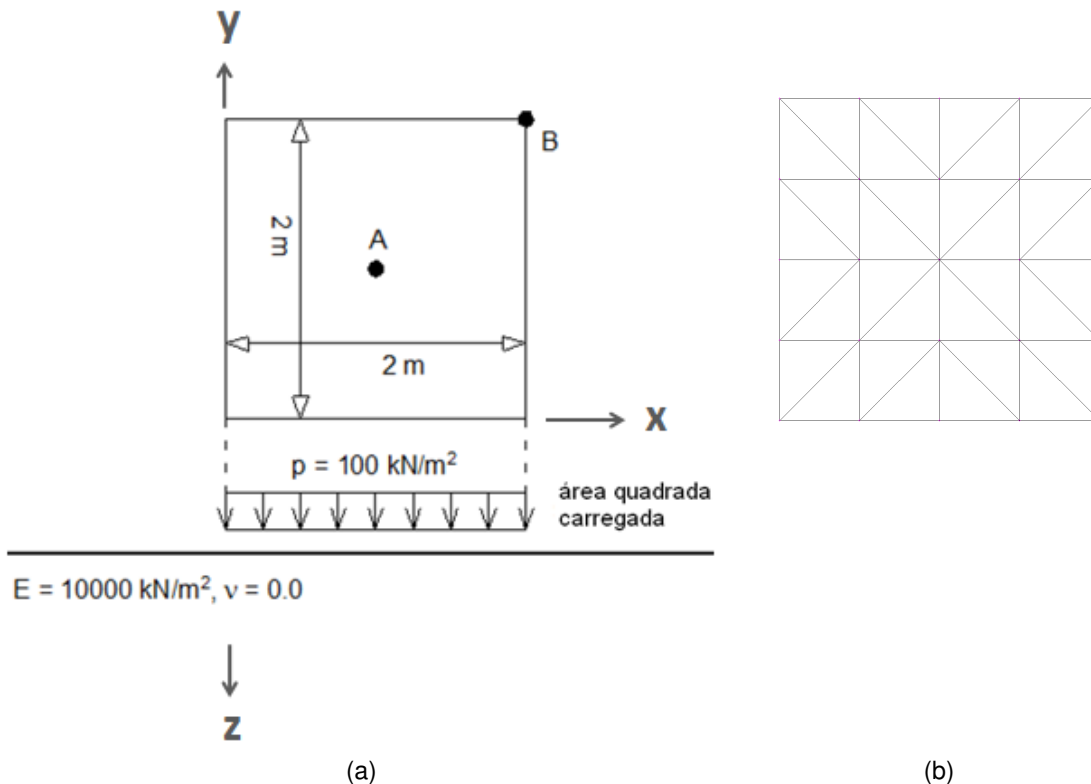


Figura 3.12 - Malha do exemplo 1, solo - área quadrada

Um carregamento distribuído  $p=100\text{kN/m}^2$  é aplicado em uma área quadrada, ao longo da direção z. A área carregada tem lado igual a 2 metros. O carregamento p é aplicado na

superfície de um solo o qual foi considerado homogêneo, isótropo e elástico linear. Foram adotados o módulo de elasticidade  $E=10.000\text{kN/m}^2$  e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , para comparar os resultados com outros autores que têm esses valores nos exemplos descritos em seus trabalhos. O nó A encontra-se no meio do quadrado e o B em um dos vértices, como mostrado na Figura 3.12 (a).

Os resultados obtidos neste trabalho considera uma malha com 32 elementos triangulares e 25 nós, Figura 3.12 (b). Adotou-se o número de pontos de Gauss igual a 6, como os outros autores.

A Tabela 3.1 são os valores dos deslocamentos  $w$ , na direção  $z$ , calculados para os nós A e B, ilustrados na Figura 3.12 (a).

Tabela 3.1 – Deslocamentos na direção  $z$ , calculados para os nós A e B do exemplo1, solo, área quadrada ( $\text{m} \times 10^{-2}$ )

Solução	Nó A	Razão Relativa (%)	Nó B	Razão Relativa (%)
Exata, Timoshenko e Goodier (1951)	2,2444	-	1,1222	-
Presente Trabalho	2,2444	0,00	1,1222	0,00
Moser, Duenser e Beer (2004)	2,2520	0,34	1,1298	0,68
Ribeiro e Paiva (2010a) – EC	2,1410	4,61	1,0371	7,58
Ribeiro e Paiva (2010b) – ECI	2,2114	1,47	1,1159	0,56

A Tabela 3.2 é a comparação do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Tabela 3.2 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEC	Mindlin
Moser, Duenser e Beer (2004)	MEC infinito	Kelvin
Ribeiro e Paiva (2010a)	MEC	Kelvin
Ribeiro e Paiva (2010b)	MEC infinito	Kelvin

Os primeiros valores da Tabela 3.1 referem-se à solução exata deste problema para o deslocamento  $w$  no nó A e no nó B, de acordo com Ribeiro e Paiva (2010a, 2010b). Estes valores foram referência para o cálculo da razão relativa. Como se observa os resultados

referentes ao Presente Trabalho são iguais à solução exata, para a discretização que foi utilizada. O presente trabalho apresenta resultado mais próximo da solução exata do que Moser, Duenser e Beer (2004) que adotou as soluções fundamentais de Kelvin e elementos de contorno infinito quadrático. As diferenças encontradas entre o Presente Trabalho e Ribeiro e Paiva (2010) ocorrem por que o ultimo trabalho foi desenvolvido de acordo com a solução fundamental de Kelvin (EC -Elementos de Contorno; ECI - Elementos de Contorno Infinito) e o Presente Trabalho, segundo a solução fundamental de Mindlin que apresenta resultados mais aproximados, para problemas com essas características. Observa-se que para este exemplo obtém-se os mesmos resultados quando a malha é assimétrica.

### 3.7 Exemplo 2: Solo - área circular

No segundo exemplo adotou-se uma área circular do solo carregada. A geometria e carregamentos considerados neste exemplo encontram-se ilustrados na Figura 3.13.

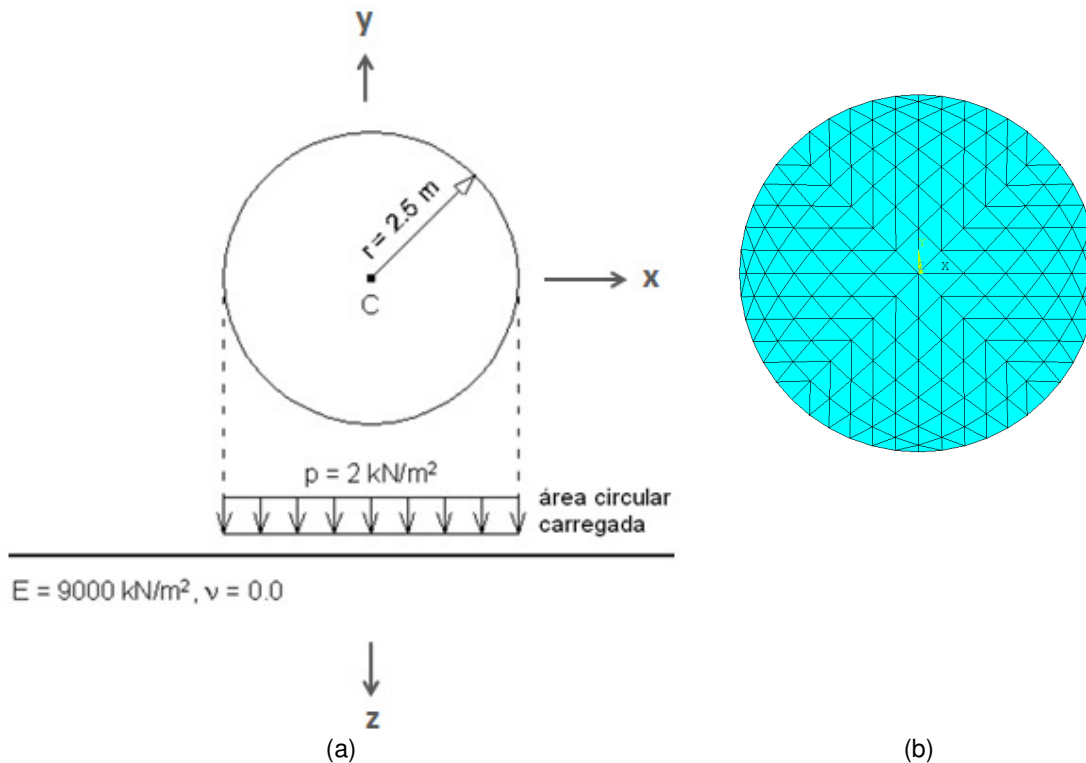


Figura 3.13 - Malha do Exemplo2, solo - área circular

Um carregamento  $p=2\text{kN/m}^2$  é aplicado em uma área circular de raio  $r=2,5\text{m}$ , na direção  $z$ . O carregamento  $p$  encontra-se sobre a superfície do solo, que foi considerado homogêneo,

isótopo e elástico linear. Foram adotados o Módulo de Elasticidade  $E=9000\text{kN/m}^2$  e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , para comparar os resultados com outros autores que adotaram o solo com essas características.

Uma expressão analítica é apresentada em Burland, Broms e Mello (1977) para o deslocamento  $w$  no nó central C, da área circular carregada, que se encontra ilustrado na Figura 3.13 (a). A expressão é a seguinte:

$$d = 2rp \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (3.145)$$

onde  $d$  é o deslocamento na direção  $z$  no ponto C,  $r$  é o raio do círculo carregado,  $p$  é o valor da carga aplicada na área circular,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade.

Tabela 3.3 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEC	Mindlin
Ribeiro e Paiva (2010a)	MEC	Kelvin
Ribeiro e Paiva (2010b)	MEC infinito	Kelvin

Obtiveram-se os resultados do Presente Trabalho considerando-se uma malha com 288 elementos triangulares e 169 nós, Figura 3.13 (b). Neste exemplo adotaram-se seis pontos de integração. Já a Tabela 3.4 são os valores dos deslocamentos  $w$ , na direção  $z$ , calculados para o nó C, ilustrados na Figura 3.13 (a). A Tabela 3.3 é um resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Tabela 3.4 – Deslocamentos na direção  $z$ , calculados para o nó C do exemplo2, solo, área circular ( $\text{m} \times 10^{-3}$ )

Solução	Nó C	Razão Relativa (%)
Exata, Timoshenko e Goodier (1951)	1,1111	-
Presente Trabalho	1,1095	0,1
Ribeiro e Paiva (2010a) – EC	1,0107	9,0
Ribeiro e Paiva (2010b) – ECI	1,0849	2,4

Os primeiros valores da Tabela 3.1 referem-se à solução exata deste problema para o deslocamento  $w$  no centro da área circular, nó C, de acordo com Ribeiro e Paiva (2009). Estes valores foram referência para o cálculo da razão relativa. Como se observa, os resultados do

Presente Trabalho são aproximadamente iguais à solução exata, com uma razão relativa igual a 0,1%.

Neste exemplo fica explícita a melhor precisão da aplicação das soluções fundamentais de Mindlin na análise de uma camada de solo, quando comparado com Kelvin. Ribeiro e Paiva (2010a, 2010b) adotaram as soluções fundamentais de Kelvin e encontraram uma diferença no resultado, comparado com a solução exata de 9,0%; quando utilizou o método de elementos de contorno infinito essa diferença foi 2,4%. Já o resultado do presente trabalho foi aproximadamente igual à solução exata, com uma diferença de apenas 0,1%, o que comprova a eficiência e precisão deste trabalho na análise desse tipo de problema.

## **4. Método dos Elementos Finitos e Interação Placa - Solo**

### **4.1 Introdução**

Descreve-se inicialmente neste capítulo o MEF de forma breve, objetivando as aplicações diretas nesta tese. Posteriormente, apresenta-se a interação placa-solo que é o resultado do acoplamento MEC-MEF, onde a malha referente à área de solo carregada (MEC) e a malha da placa (MEF) são iguais. A interação placa-solo<sup>1, 2</sup> também foi pesquisado por Brebbia e Connor (1989), Mendonça (1997), Messafer e Coates (1989), Selvadurai (2000), Selvadurai e Dumont (2011) e Tejerina Calderón e Venturini (1997b).

Para maiores detalhes sobre o MEF sugere-se Bathe (1982), Boffi et al. (2006), Brebbia e Ferrante (1975), Carey e Oden (1981), Cook, Malkus e Plesha (1989), Dhatt e Touzot (1984), Oden (1976), Onate (1995), Rao (2005), Zienkiewicz et al. (2005) e Zienkiewicz e Taylor (2000) ou outros autores que pesquisam esse tema.

Já a formulação de placas pode ser vista em: Andrade (2001), Ciarlet (1997), Paiva (1980), Palermo Junior (1989), Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976). Citam-se ainda, outras contribuições do SET-EESC-USP sobre placas: Almeida (1999b), Carmo (2001), Manzoli (1992), Oliveira Neto (1991), Ribeiro (1992), Silva (1988) e Soares (1991).

### **4.2 Formulação do MEF pelos métodos numéricos**

Neste subitem apresenta-se uma breve introdução do MEF pelo método dos resíduos ponderados.

---

<sup>1</sup> Paiva e Butterfield (1994).

<sup>2</sup> Id. (1997).

### 4.2.1 Forma forte

A equação de Laplace introduzida no capítulo 3 é um exemplo muito conveniente para iniciar aproximações numéricas. Outro exemplo é a equação de Poisson:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q = 0 \quad (4.1)$$

onde  $k$  e  $Q$  são funções específicas. Estas equações com condições de contorno apropriadas definem um único problema. As condições de contorno como mostradas no capítulo 3, podem ser do tipo Dirichlet e neste caso tem-se:

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{em} \quad \Gamma_\phi \quad (4.2)$$

ou do tipo Neumann

$$q_n = -k \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q}_n \quad \text{em} \quad \Gamma_q \quad (4.3)$$

onde a barra denota um valor conhecido.

As equações (4.1) até (4.3) são conhecidas como a forma forte do problema.

### 4.2.2 Forma fraca

Observa-se que a aplicação direta da equação (4.1) requer as derivadas segundas para solucionar o problema por técnicas aproximadas. Esta condição pode ser “enfraquecida” pela consideração da integração da equação (4.1), assim:

$$\int_{\Omega} v \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + Q \right] d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

em que  $v$  é uma função arbitrária. A prova da equação (4.4) é análoga à equação (4.1).

Assumindo-se que a equação (4.1) não é zero em algum ponto  $x_i$  do  $\Omega$  tem-se que  $v$  é um parâmetro positivo, que multiplica o mesmo valor resultante da integral (4.4). Uma vez que esta viola a igualdade, conclui-se que a equação (4.1) deve ser zero para todo  $x_i$  do  $\Omega$  e por isso prova-se a igualdade da equação (4.4).

Integrando-se por partes a segunda derivada em termos da equação (4.4) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} v Q d\Omega - \int_{\Gamma} v n_i \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Gamma = 0 \quad (4.5)$$

Separando-se o contorno em duas partes,  $\Gamma_\phi$  e  $\Gamma_q$ , com  $\Gamma = \Gamma_\phi \cup \Gamma_q$ , e substituindo-se a equação (4.3) na equação (4.5) resulta:



$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} v Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} v \bar{q}_n d\Gamma = 0 \quad (4.6)$$

que é válida somente se  $v$  desaparece de  $\Gamma_{\phi}$ . Portanto deve-se impor a equação (4.2) para a equivalência. A equação (4.6) é conhecida como a forma fraca do problema desde que somente a primeira derivada seja necessária no desenvolvimento da solução. Tais formas são a base para as soluções em elementos finitos.

### 4.2.3 Resíduos ponderados

No método dos resíduos ponderados escreve-se uma aproximação independente da variável  $\phi$ , como a soma de funções conhecidas  $N_a(x_i)$  e parâmetros incógnitos  $\bar{\phi}^a$ . Assim:

$$\begin{aligned} \phi &\approx \hat{\phi} = N_1(x_i)\tilde{\phi}^1 + N_2(x_i)\tilde{\phi}^2 + \dots \\ \phi &\approx \hat{\phi} = \sum_{a=1}^n N_a(x_i)\tilde{\phi}^a = N(x_i)\tilde{\phi} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_n] \quad (4.8)$$

e

$$\tilde{\phi} = [\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \dots, \tilde{\phi}^n]^T \quad (4.9)$$

Analogamente os valores arbitrários  $v$  podem ser expressos como

$$\begin{aligned} v &\approx \hat{v} = W_1(x_i)\tilde{v}^1 + W_2(x_i)\tilde{v}^2 + \dots \\ v &\approx \hat{v} = \sum_{a=1}^n W_a(x_i)\tilde{v}^a = W(x_i)\tilde{v} \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que  $W_a$  são as funções aproximadoras e  $\tilde{v}^a$  são os parâmetros incógnitos. Aplicando-se essa forma de aproximação converte-se a equação (4.6) em um conjunto de equações algébricas.

No método dos elementos finitos, e de fato, em outros métodos numéricos para que a solução computacional possa ser aplicada, as funções aproximadoras geralmente são definidas localmente. É conveniente considerar cada função definida no domínio do elemento  $\Omega_e$ , cuja contribuição de todos os elementos corresponde ao domínio total  $\Omega$ . Esta divisão do domínio é denotada por:

$$\Omega \approx \Omega_h = \cup \Omega_e \quad (4.11)$$

A aplicação mais simples do MEF são os elementos de barra em uma dimensão, os elementos triangulares bidimensionais e os tetraedros em três dimensões, em que as funções aproximadoras são geralmente polinômios lineares em cada elemento e  $\phi$  os parâmetros incógnitos.

Na técnica dos resíduos ponderados, primeiro insere-se a função de aproximação  $\hat{\phi}$  na equação diferencial que governa o problema, gerando assim um residual,  $R(x_i)$ , que naturalmente deve ser zero para a solução exata. Para a equação descrita tem-se:

$$R = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \sum_a \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \tilde{\phi}^a \right) + Q \quad (4.12)$$

e a etapa seguinte é a escolha dos valores mais convenientes para o conjunto de parâmetros  $\tilde{\phi}^a$  que assegura o seguinte:

$$\int_{\Omega} W_b R d\Omega = 0; \quad b = 1, 2, \dots, n \quad (4.13)$$

Nota-se que este é o termo que multiplica o parâmetro arbitrário  $\tilde{v}^b$ . Como descrito anteriormente, a integração por partes é aplicada para evitar derivadas de alta ordem, e, portanto reduzir as restrições na escolha das funções de forma para permitir a integração sobre o elemento, equação (4.11). Neste caso, por exemplo, o resíduo após a integração por partes e aplicação das condições de contorno natural torna-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W_b}{\partial x_i} \left( k \sum_a \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \tilde{\phi} \right) d\Omega + \int_{\Omega} W_b Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} W_b \bar{q}_n d\Gamma = 0 \quad (4.14)$$

#### 4.2.4 Galerkin e o MEF

O método de Galerkin considera  $W_b = N_b$ , que leva ao sistema de equações:

$$\sum_{a=1}^n K_{ba} \tilde{\phi}^a + f_b = 0; \quad b = 1, 2, \dots, n - r \quad (4.15)$$

onde  $r$  é o número de nós que aparece na aproximação para a condição de contorno de Dirichlet e  $K_{ba}$  é a matriz de rigidez total formada pelas contribuições de todos os elementos  $K_{ba}^e$ :

$$K_{ba}^e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} k \frac{\partial N_a}{\partial x_i} d\Omega \quad (4.16)$$

Analogamente para o vetor de forças  $f_b$  tem-se:

$$f_b^e = \int_{\Omega_e} N_b Q d\Omega + \int_{\Gamma_{eq}} N_b \bar{q}_n d\Gamma \quad (4.17)$$

Para impor a condição de contorno de Dirichlet substitui-se  $\tilde{\phi}^a$  por  $\bar{\phi}_a$  para os  $r$  nós do contorno.

Neste exemplo o método de Galerkin resulta em um conjunto de equações algébricas simétricas, ou seja,  $K_{ba} = K_{ab}$ . Porém, isso só acontece se as equações diferenciais são auto-adjunta. De fato, a existência de simetria fornece um teste para auto-adjunta e também para a existência de um princípio variacional do qual a estacionariedade é necessária.

Observa-se que para a consideração de uma equação convexa pura tem-se:

$$u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + Q = 0 \quad (4.18)$$

As relações para uma solução de elemento finito por Galerkin são as equações (4.15) à (4.17). E os coeficientes de  $K_{ba}$  e  $f_b$  podem ser determinados da forma descrita.

### 4.3 Formulação variacional do MEF

Neste subitem descreve-se sucintamente, a formulação variacional do MEF baseada na energia potencial total.

#### 4.3.1 Funcional da energia potencial total

Em mecânica dos materiais, a energia interna em um ponto de um sólido elástico linear submetido a um estado de tensão  $\sigma$  e de deformação  $\varepsilon$  é  $U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ , cuja integral de volume é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV \quad (4.19)$$

A energia potencial externa,  $W$  é formado pelas forças mecânicas aplicadas no sólido e deslocamentos. A energia potencial das forças externas é negativa, devido ao trabalho se a estrutura retornar da posição final para a inicial:  $V = -W = -\sum_{i=1}^n P_i \delta_i$ , onde  $n$  é o número de cargas.

A energia potencial total,  $\Pi$ , do sólido é dada pela seguinte equação:

$$\Pi = U - W \quad (4.20)$$

Matematicamente  $\Pi$  é um funcional denominado funcional da energia potencial total. E de acordo com as regras do cálculo variacional, a equação de Euler-Lagrange para  $\Pi$  é:

$$\varepsilon = \frac{\partial \Pi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Pi}{\partial u'} \quad (4.21)$$

A condição de estacionariedade para  $\Pi$  é  $\varepsilon = 0$ , que não é explícita no desenvolvimento do MEF. Ao contrário, esta condição é substituída por  $\delta \Pi = 0$ , com a variação restrita sobre a função de interpolação do elemento finito.

### 4.3.2 Convergência

No MEF, para que haja convergência devem-se observar os seguintes aspectos:

- a aproximação  $u(x)$  deve ser representada por polinômios completos de grau  $n$ .
- as derivadas da aproximação de ordem  $n-1$  devem ser contínuas nas interfaces dos elementos.

### 4.3.3 Princípio da mínima energia potencial

Pelo princípio da mínima energia potencial total, o deslocamento  $u^*(x)$  deve satisfazer às equações que governam o problema, que ficam estacionárias:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0 \quad \text{se} \quad u = u^* \quad (4.22)$$

em relação às variações admitidas  $u = u^* + \delta u$  do campo de deslocamentos exatos  $u^*(x)$ .

Aplicando a técnica variacional do cálculo verifica-se que a solução  $u^*(x)$  da equação (4.22) existe e é única, e torna  $\Pi$  um mínimo sobre os deslocamentos cinematicamente admitidos.

### 4.3.4 Discretização da energia potencial total

Aplicando o funcional da energia potencial total para derivar as equações do MEF substitui-se um modelo matemático contínuo por um discreto. Os funcionais são escalares. Portanto, para uma discretização, o funcional da energia potencial total pode ser decomposto em uma soma das contribuições dos elementos:

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \dots + \Pi^{(N_e)} \quad (4.23)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos. Para a mesma decomposição aplicada à energia interna e ao potencial externo tem-se:

$$\delta U = \delta U^{(1)} + \dots + \delta U^{(N_e)} = 0, \quad \delta W = \delta W^{(1)} + \dots + \delta W^{(N_e)} = 0 \quad (4.24)$$

bem como, a condição de estacionariedade (4.22):

$$\delta \Pi = \delta \Pi^{(1)} + \delta \Pi^{(2)} + \dots + \delta \Pi^{(N_e)} = 0 \quad (4.25)$$

Aplicando-se o lema fundamental do cálculo variacional, equação (4.25), para um elemento genérico ( $e$ ) tem-se:

$$\delta \Pi^{(e)} = \delta U^{(e)} - \delta W^{(e)} = 0 \quad (4.26)$$

Esta equação variacional é a base para a derivada das equações da rigidez do elemento, uma vez que o campo dos deslocamentos é discretizado sobre o elemento. Em matemática, a equação (4.26) é denominada como a primeira forma de variação. Neste caso, para uma equação mais geral é a forma fraca. Em mecânica, pelo princípio dos trabalhos virtuais, para cada elemento tem-se:  $\delta U^{(e)} = \delta W^{(e)}$ , que enuncia o trabalho virtual interno e das forças externas que são iguais se o elemento está em equilíbrio.

O MEF é um método numérico eficiente na obtenção de soluções aproximadas para problemas em que o funcional exato,  $\Pi$ , do problema é substituído por um funcional aproximado  $\Pi_i$ . As incógnitas do elemento estrutural (os deslocamentos) são expressas em termos de funções de interpolação, ponderadas por parâmetros a determinar, que são associados às variáveis do problema. O deslocamento exato  $u^*$  é substituído por um deslocamento aproximado:

$$u^*(x) \approx u^e(x) \quad (4.27)$$

sobre a malha dos elementos finitos  $e = 1, 2, \dots, N^e$ .

#### 4.3.5 Funções de interpolação

O domínio é dividido em elementos, que são expressos por combinações lineares das funções de interpolação, ponderadas pelos parâmetros incógnitos:

$$u^e(x) = N_1^e u_1^e + N_2^e u_2^e = [N_1^e \quad N_2^e] \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = N^e u^e \quad (4.28)$$

onde em cada elemento a função de aproximação é composta por variáveis  $u^e$  referentes aos nós (denominadas parâmetros nodais) e por funções de forma ou funções de interpolação  $N^e$ .

As equações (4.28) descrevem o comportamento aproximado das variáveis do problema sobre o elemento. Cada elemento é estudado isoladamente e o seu comportamento individual é determinado em termos de uma relação entre cargas e deslocamentos nodais, descritos como valores nodais das variáveis, aproximadas pelas funções de interpolação.

Escolhem-se os pontos nodais no elemento de forma que os parâmetros incógnitos sejam os valores das variáveis do problema nestes pontos.

A relação deformação-deslocamento é:

$$\varepsilon = B u^e \quad (4.29)$$

onde  $B$  é a matriz de operadores diferenciais.

#### 4.3.6 Equações do MEF

No MEF linear, o processo de discretização baseado nos funcionais da energia potencial total resulta na seguinte forma algébrica para os deslocamentos nodais:

$$\Pi^e = U^e - W^e \quad (4.30)$$

em que

$$U^e = \frac{1}{2} (u^e)^T K^e u^e \quad (4.31)$$

e

$$W^e = (u^e)^T f^e \quad (4.32)$$

onde  $K^e$  e  $f^e$  são a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do elemento, respectivamente. Os escalares  $\Pi^e$ ,  $U^e$  e  $W^e$  são funções somente dos deslocamentos  $u^e$ , que é uma consequência dos deslocamentos serem variáveis primárias do funcional da energia potencial total.

Da condição de estacionariedade do funcional (4.22), que resulta em um sistema de equações algébricas lineares:

$$\delta \Pi^e = (\delta u^e)^T \frac{\partial \Pi^e}{\partial u^e} = (\delta u^e)^T [K^e u^e - f^e] = 0 \quad (4.33)$$

A solução do sistema de equações (4.33) são os valores dos parâmetros nodais  $u^e$ , que no presente trabalho são os deslocamentos:

$$K^e u^e = f^e \quad (4.34)$$

Analisando-se as relações (4.34), em termos dos coeficientes de rigidez, a interação entre cada parte do domínio permite estabelecer a solução dos coeficientes incógnitos, na forma de um sistema de equações algébricas lineares.

### 4.4 Chapa

A chapa foi modelada com o elemento finito Constant Strain Triangle (CST) e programou-se a condensação estática desse elemento. Neste item utiliza-se coordenadas cartesianas e de área, e não mais a notação indicial, como no capítulo anterior. Outro exemplo de aplicação do elemento finito triangular, para a análise da elasticidade plana pode ser visto em Allman (1984).

#### 4.4.1 Elemento Finito Triangular de Deformação Constante (CST)

Quando expressa em coordenadas cartesianas, as funções de interpolação para o elemento triangular são complexas algebricamente. As coordenadas de área (coordenadas homogêneas) são uma forma de simplificar as funções de interpolação. Adota-se o elemento triangular linear para os deslocamentos do elemento estrutural chapa procedendo-se de acordo com Assan (2003).

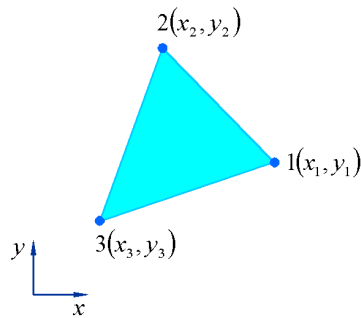


Figura 4.1 - Elemento finito triangular linear, Santos (2008)

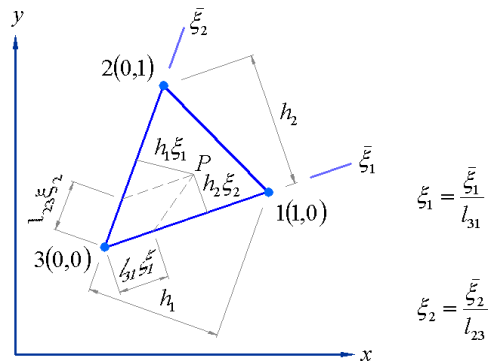


Figura 4.2 - Coordenadas homogêneas, Santos (2008)

O elemento triangular linear tem como função interpoladora para as translações nas direções 1 e 2 (deslocamento  $u$  e  $v$ ) os seguintes polinômios de primeiro grau:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y \end{aligned} \tag{4.35}$$

sendo o elemento mostrado na Figura 4.1.

O elemento triangular está inicialmente definido em coordenadas cartesianas e será formulado em coordenadas triangulares ou homogêneas. Esse elemento finito triangular é numerado no sentido anti-horário e seus lados têm o número do nó oposto.

O sistema de coordenadas homogêneas é mostrado na Figura 4.2. Estas coordenadas relacionam-se ao lado do elemento triangular, variando de 0 a 1. Portanto, as coordenadas homogêneas são definidas da seguinte forma:  $\xi_1$  é a distância relativa entre os nós 1 e 3 ao longo do lado 2 de comprimento  $l_{13}$ , definem-se as outras coordenadas de forma análoga.

Introduz-se um ponto  $P$ , interno ao triângulo, com coordenadas  $x$  e  $y$  para se obter as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas.

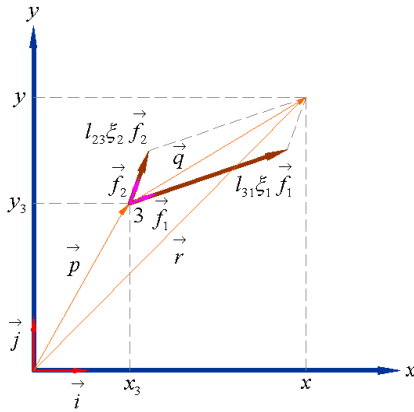


Figura 4.3 - Representação vetorial, Santos (2008)

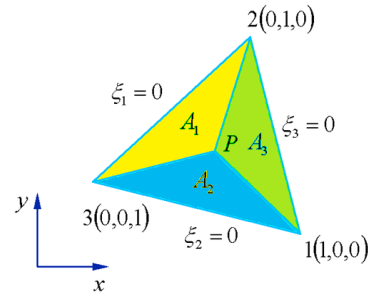


Figura 4.4 - Triângulo dividido em áreas Santos (2008)

A Figura 4.3 mostra a representação das bases vetoriais  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  definidas respectivamente em relação aos sistemas  $x$ ,  $y$  e  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ . Portanto, escreve-se o vetor posição do ponto  $P$ :

$$\vec{r} = \vec{p} + \vec{q} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (4.36)$$

Os vetores  $P$  e  $Q$  podem ter esta representação:

$$\vec{p} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} \quad (4.37)$$

$$\vec{q} = l_{13} \xi_1 \vec{f}_1 + l_{23} \xi_2 \vec{f}_2$$

Substituindo-se as Equações (4.37) na Equação (4.36):

$$\vec{r} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + l_{13} \xi_1 \vec{f}_1 + l_{23} \xi_2 \vec{f}_2 \quad (4.38)$$

Os vetores  $l_{13} \vec{f}_1$  e  $l_{23} \vec{f}_2$  projetados nas direções  $x$  e  $y$  são:

$$l_{13} \vec{f}_1 = (x_1 - x_3) \vec{i} + (y_1 - y_3) \vec{j} \quad (4.39)$$



$$l_{23} \vec{f}_2 = (x_2 - x_3) \vec{i} + (y_2 - y_3) \vec{j}$$

Substituindo as Equações (4.39) na Equação (4.38), tem-se:

$$x \vec{i} + y \vec{j} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + \xi_1 (x_1 - x_3) \vec{i} + \xi_2 (x_2 - x_3) \vec{i} + \xi_1 (y_1 - y_3) \vec{j} + \xi_2 (y_2 - y_3) \vec{j} \quad (4.40)$$

resultando:

$$x = x_3 + \xi_1 (x_1 - x_3) + \xi_2 (x_2 - x_3) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) x_3 \quad (4.41)$$

$$y = y_3 + \xi_1 (y_1 - y_3) + \xi_2 (y_2 - y_3) = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) y_3$$

As coordenadas homogêneas também podem ser explicadas como relações entre as áreas dos triângulos definidos pelos nós 1,2,3 e o ponto  $P$ , de acordo com a Figura 4.4.

A altura do triângulo  $1P3$  é igual à  $\xi_2 h_2$ . Da Figura 4.2, verifica-se que se o ponto  $P$  coincidissem com o nó 3, o produto  $\xi_2 h_2$  seria nulo, já que nesse nó  $\xi_2 = 0$ ; porém, se o ponto  $P$  coincidissem com o nó 2, o produto  $\xi_2 h_2$  seria igual a  $h_2$ , já que no nó 2 tem-se  $\xi_2 = 1$ .

Portanto a área  $A_2$  do triângulo  $1P3$  é dada por:

$$A_2 = \frac{1}{2} l_{13} \xi_2 h_2 \quad (4.42)$$

Analogamente, tem-se para a área  $A_1$  do triângulo  $2P3$ :

$$A_1 = \frac{1}{2} l_{23} \xi_1 h_1 \quad (4.43)$$

De acordo com a Figura 4.2 tem-se o valor da área  $A$  do triângulo 123:

$$A = \frac{1}{2} l_{13} h_2 = \frac{1}{2} l_{23} h_1 \quad (4.44)$$

Dividindo-se  $A_1$  e  $A_2$  por  $A$  obtém-se:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad (4.45)$$

E a seguinte relação deve ser obedecida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (4.46)$$

Dividindo-se a Equação (4.46) por  $A$ , tem-se:

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \frac{A_3}{A} \quad (4.47)$$

Portanto, define-se:

$$\xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (4.48)$$

Substituindo-se a relação (4.48) na Equação (4.47):

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (4.49)$$

Lembra-se que as expressões para as áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , em termos das coordenadas dos vértices do triângulo 123:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (4.50)$$

Substituindo as Equações (4.50) nas Equações (4.45) e (4.48) encontram-se as coordenadas homogêneas em relação às coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] \\ \xi_2 &= \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] \\ \xi_3 &= \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde  $A$  é a área do elemento triangular, dadas pelas coordenadas dos três vértices do triângulo 123, e pode ser obtida da relação:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

ou seja:

$$A = \frac{1}{2} [x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2] \quad (4.53)$$

Substituindo-se a Equação (4.49) nas Equações (4.41):

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \\ y &= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \end{aligned} \quad (4.54)$$

que são as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas.

De acordo com a Equação (4.35):

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ v_i &= a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.55)$$

que leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Resolvendo os coeficientes polinomiais do sistema (4.56) encontram-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \\ a_2 &= \frac{1}{2A} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \\ a_3 &= \frac{1}{2A} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Substituindo a Equação (4.57) na Equação (4.35):

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{aligned} &[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]u_1 + \\ &[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]u_2 + \\ &[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]u_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Escrevendo-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2A} [x_2y_3 - x_3y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] \\ \phi_2 &= \frac{1}{2A} [x_3y_1 - x_1y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] \\ \phi_3 &= \frac{1}{2A} [x_1y_2 - x_2y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (4.59)$$

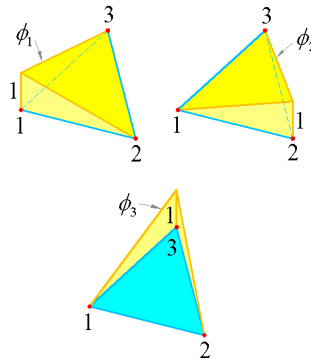


Figura 4.5 - Funções de forma para o elemento triangular linear, Santos (2008)

Levando-se em consideração as definições (4.59), a Equação (4.58) pode ser escrita:

$$u = \sum_{i=1}^3 \phi_i u_i \quad (4.60)$$

$$v = \sum_{i=1}^3 \phi_i v_i$$

As equações (4.60) expressam os deslocamentos em um ponto sobre o elemento em termos dos deslocamentos nodais do elemento. Para este elemento, as funções  $\phi_i$  devem ser polinômios de primeira ordem em  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ . A variação das funções de forma está representada na Figura 4.5, permitindo visualizar como os deslocamentos variam. Por exemplo, para  $\xi_1 = 1$  tem-se  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ , e os deslocamentos  $u$  e  $v$  tem a variação mostrada na Figura 4.5.

Comparando-se as Equações (4.59) com as Equações (4.51) chega-se à seguinte conclusão:

$$\phi_1 = \xi_1 \quad \phi_2 = \xi_2 \quad \phi_3 = \xi_3 \quad (4.61)$$

#### 4.4.2 Condensação Estática

Condensação Estática é o processo no qual alguns graus de liberdade são subtraídos das equações de equilíbrio global. No presente trabalho eliminam-se os graus de liberdade interno do elemento quadrangular, considerando este composto por quatro elementos finitos triangulares, suprime-se o nó central, que é comum nesses quatro elementos. O procedimento descrito aqui foi implementado tanto para o elemento de membrana quanto para o de placa. No elemento de membrana são admitidos três graus de liberdade por nó, duas translações ( $u$  e  $v$ ) e uma rotação ( $\theta_z$ ). E o elemento DKT, referente à estrutura de placa, apresenta um deslocamento na direção longitudinal ( $w$ ) e duas rotações ( $\theta_x$  e  $\theta_y$ ). A vantagem da condensação estática é a maior facilidade nos cálculos computacionais, visto que para cada elemento quadrangular há uma economia de três graus de liberdade, com a mesma precisão nos resultados, se houvessem quatro elementos triangulares. A condensação estática é possível desde que quatro elementos triangulares componham um elemento quadrangular da forma ilustrada na Figura 4.6.

Para cada elemento finito triangular têm-se três graus de liberdade por nó resultando em uma matriz de rigidez do elemento com nove linhas e nove colunas,  $[K_e]_{9 \times 9}$ . O elemento quadrangular tem cinco nós. Portanto, a matriz com a contribuição dos quatro elementos triangulares tem quinze linhas e quinze colunas  $[K_q]_{15 \times 15}$ .

Como ilustrado na Figura 4.6, cada posição correspondente ao nó do vértice recebe a contribuição dos dois elementos adjacentes. E, a posição referente ao nó central tem a contribuição dos quatro elementos triangulares.

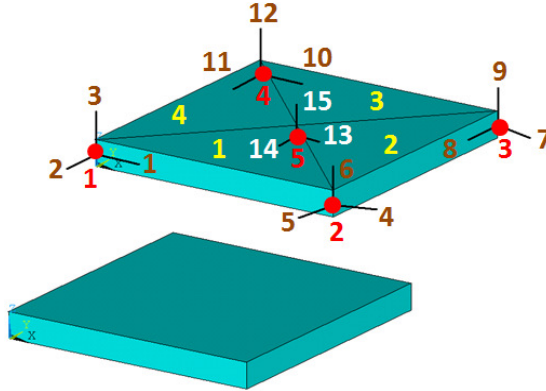


Figura 4.6 - Condensação estática

Portanto tem-se o seguinte sistema de equações:

$$[K_q]_{15 \times 15} \{\delta_q\}_{15 \times 1} = \{F_q\}_{15 \times 1} \quad (4.62)$$

Reescrevendo-se a Equação (4.62):

$$\begin{Bmatrix} \{F_e\}_{12 \times 1} \\ \{F_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\}_{12 \times 1} \\ \{\delta_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (4.63)$$

onde os índices  $e$  referem-se aos nós dos vértices do retângulo (1,2,3,4) e, índices  $i$  referem-se ao nó interno 5.

Efetuando o produto (4.63):

$$\{F_e\}_{12 \times 1} = [K_{ee}]_{12 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1} + [K_{ei}]_{12 \times 3} \{\delta_i\}_{3 \times 1} \quad (4.64)$$

e

$$\{F_i\}_{3 \times 1} = [K_{ie}]_{3 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1} + [K_{ii}]_{3 \times 3} \{\delta_i\}_{3 \times 1} \quad (4.65)$$

Isolando-se  $\{\delta_i\}_{3 \times 1}$  na Equação (4.65):

$$\{\delta_i\}_{3 \times 1} = [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} (\{F_i\}_{3 \times 1} - [K_{ie}]_{3 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1}) \quad (4.66)$$

Substituindo-se a Equação (4.66) na Equação (4.64):

$$\{F_e\}_{12 \times 1} = [K_{ee}]_{12 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1} + [K_{ei}]_{12 \times 3} ([K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} [\{F_i\}_{3 \times 1} - [K_{ie}]_{3 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1}]) \quad (4.67)$$

logo,

$$\begin{aligned} \{F_e\}_{12 \times 1} = & [K_{ee}]_{12 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1} + [K_{ei}]_{12 \times 3} [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} [\{F_i\}_{3 \times 1} \\ & - [K_{ie}]_{3 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1}] \end{aligned} \quad (4.68)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \{F_e\}_{12 \times 1} - [K_{ei}]_{12 \times 3} [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} \{F_i\}_{3 \times 1} \\ = ([K_{ee}]_{12 \times 12} - [K_{ei}]_{12 \times 3} [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} [K_{ie}]_{3 \times 12}) \{\delta_e\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Reescrevendo-se a Equação (4.69):

$$\{F_c\}_{12 \times 1} = [K_c]_{12 \times 12} \{\delta_e\}_{12 \times 1} \quad (4.70)$$

onde a matriz de rigidez do elemento quadrangular é a seguinte:

$$[K_c]_{12 \times 12} = [K_{ee}]_{12 \times 12} - [K_{ei}]_{12 \times 3} [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} [K_{ie}]_{3 \times 12} \quad (4.71)$$

e o vetor de forças:

$$\{F_c\}_{12 \times 1} = \{F_e\}_{12 \times 1} - [K_{ei}]_{12 \times 3} [K_{ii}]_{3 \times 3}^{-1} \{F_i\}_{3 \times 1} \quad (4.72)$$

Na condensação estática eliminam-se os graus de liberdade dos nós internos, de cada grupo de elementos que formam a condensação, resultando em uma análise mais precisa com as dimensões das matrizes e vetores menores do que seriam sem esse procedimento. No SET-EESC-USP, a condensação estática foi pesquisada em Carrijo (1995), Coda (1993) e Peleteiro (1996). Inicialmente, a condensação estática foi desenvolvida por Wilson (1974).

## 4.5 Membrana

O elemento de membrana implementado neste trabalho encontra-se descrito detalhadamente em Bergan e Felippa (1985), também se sugere a consulta de: Bergan (1980), Bergan e Hanssen (1978), Bergan e Nygard (1984). Ainda esse elemento de membrana foi pesquisado no SET por: Carrijo (1995), Mesquita (1998), Oliveira (2001) e Peleteiro (1996). No presente trabalho, o elemento membrana é quadrangular, formado por quatro elementos triangulares, obtido pela condensação estática já descrita.

A formulação livre, sugerida por Bergan e Nygard (1984) define um elemento finito de membrana que incorpora além das duas translações por nó em seu plano, uma rotação em torno do eixo perpendicular a esse plano.

### 4.5.1 Equacionamento da Formulação Livre

Esta formulação tem como característica a separação da função de forma em dois modos que são denominados modos básicos e modos de alta ordem. A matriz de rigidez total dos elementos também é composta por duas parcelas, que são os coeficientes da matriz de rigidez básica  $K_b$  e de alta ordem  $K_s$ , ou seja,  $K = K_b + K_s$ .

### 4.5.2 Características do elemento de formulação livre

O elemento de membrana, de acordo com a formulação livre, é determinado definindo-se as coordenadas adimensionais ( $\xi$  e  $\eta$ ) e a área do elemento. De acordo com a geometria de um elemento individual ilustrada na Figura 4.7, adota-se  $x_c$  e  $y_c$  como sendo as coordenadas do centroide do elemento.

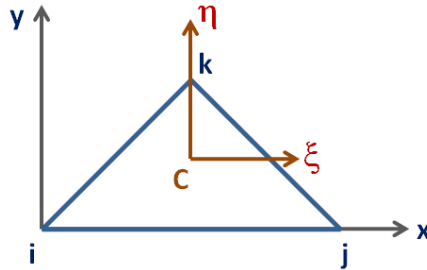


Figura 4.7 - Coordenadas locais do elemento triangular

E as coordenadas adimensionais dadas por  $\xi_i$  e  $\eta_i$  são:

$$\xi_i = \lambda \cdot (x_i - x_c) \quad (4.73)$$

$$\eta_i = \lambda \cdot (y_i - y_c)$$

onde  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A}}$ .  $A$  é a área do triângulo.

Como visto anteriormente, para o elemento CST, a área do triângulo é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[ (y_j - y_i) \cdot (x_i - x_k) + (x_j - x_i) \cdot (y_i - y_k) \right] \quad (4.74)$$

### 4.5.3 Deslocamento do elemento

O campo de deslocamentos  $u$  do elemento de membrana é:

$$U = U_b + U_s \quad (4.75)$$

onde  $U_b$  e  $U_s$  referem-se aos modos básicos e de alta ordem, respectivamente.

O campo de deslocamentos  $U_b$  é obtido em função de  $\xi$  e  $\eta$  como mostra a seguinte equação:

$$U_b = N_r \cdot q_r + N_c \cdot q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \cdot q_r + \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} \cdot q_c \quad (4.76)$$

onde  $N_r$  e  $N_c$  representam um polinômio completo, até o grau que corresponde aos modos rígidos e de deformação constantes, linearmente independentes;  $q_r$  e  $q_c$  são os coeficientes associados (parâmetros generalizados). Estes modos representam duas translações rígidas nas direções  $x$  e  $y$ , uma rotação rígida em torno do eixo  $z$  e as três deformações constantes  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ .

Para a determinação dos modos de alta ordem são necessários três modos, uma vez que o elemento possui nove graus de liberdade. Como as funções de forma para os modos básicos são lineares, a função mais apropriada para os modos de alta ordem são polinômios quadráticos em termos de  $x$  e  $y$  que produzirão uma variação linear de tensões. Bergan e Felippa (1985) sugerem os modos de flexão pura como uma maneira eficaz de atingir resultados adequados.

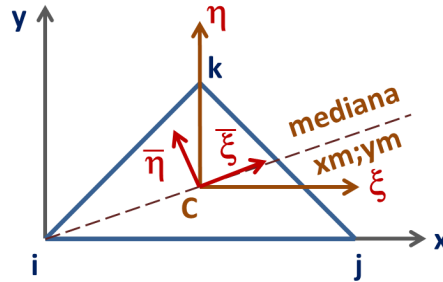


Figura 4.8 - Sistema de coordenadas auxiliares

Na Figura 4.8 mostra-se um sistema de eixos auxiliar rotacionado  $\bar{\eta} \bar{\xi}$  com origem no centroide do elemento. Admitindo-se que os modos escolhidos estejam relacionados a este novo sistema de coordenadas auxiliares rotacionado tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{\xi} \cdot \bar{\eta} \\ \bar{v} &= -\frac{1}{2} \cdot \bar{\xi}^2 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Se  $\varphi$  é o ângulo entre os eixos  $\xi$  e  $\bar{\xi}$ , o sistema pode ser rotacionado com a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$



A relação entre os deslocamentos no sistema auxiliar e as coordenadas locais adimensionais é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ -0,5 \cdot \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cdot \cos \varphi & -0,5 \cdot \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

A transformação dos deslocamentos locais para os deslocamentos no sistema auxiliar pode ser obtida pela equação:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

A equação final que rege o campo de deslocamentos em função das coordenadas adimensionais é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi & \cos^3 \varphi & 0,5 \cdot \sin^3 \varphi + \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ -\sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - 0,5 \cdot \cos^3 \varphi & -\sin^3 \varphi & 0,5 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (4.81)$$

De acordo com este equacionamento, podem-se determinar os modos de alta ordem pelas equações:

$$U_s = N_s \cdot q_s = N_{s1} \cdot q_7 + N_{s2} \cdot q_8 + N_{s3} \cdot q_9$$

$$N_{si} = \begin{Bmatrix} u_{si} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

com o índice  $i$  variando de 1 a 3. Onde,

$$\begin{aligned} a_{1i} &= -0,5(s_i \cdot c_i^2) & a_{2i} &= c_i^3 & a_{3i} &= 0,5 \cdot s_i^3 + s_i \cdot c_i^2 \\ b_{1i} &= -s_i^2 \cdot c_i - 0,5 \cdot c_i^3 & b_{2i} &= -s_i^3 & b_{3i} &= 0,5 \cdot s_i^2 \cdot c_i \\ s_i &= \sin \varphi = -\frac{3\eta_i}{2\mu_i} & c_i &= \cos \varphi = -\frac{3\xi_i}{2\mu_i} & \mu_i &= \frac{3}{2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Equações de membrana

Adotando um elemento triangular de membrana, podem-se escrever os graus de liberdade deste elemento na forma vetorial da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V &= V_{rc} + V_s = G_{rc} \cdot q_{rc} + G_s \cdot q_s = G \cdot q \\ V^T &= [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_3] \end{aligned} \quad (4.83)$$

Para se relacionar os deslocamentos nodais,  $q$ , com os parâmetros generalizados, deve-se utilizar a matriz  $G$  fazendo-se uma substituição apropriada das coordenadas nodais nas funções de forma. Portanto:

$$q = \begin{Bmatrix} q_r \\ q_c \\ q_s \end{Bmatrix}$$

$$G_{rc} = \begin{Bmatrix} G_{rc,i} \\ G_{rc,j} \\ G_{rc,k} \end{Bmatrix} \quad G_{rc,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta_i & \xi_i & 0 & \eta_i \\ 0 & 1 & \xi_i & 0 & \eta_i & \xi_i \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

$$G_s = \begin{Bmatrix} G_{s11} & G_{s12} & G_{s13} \\ G_{s21} & G_{s22} & G_{s23} \\ G_{s31} & G_{s32} & G_{s33} \end{Bmatrix} \quad G_{sij} = \begin{bmatrix} a_{1j} \cdot \xi_i^2 + a_{2j} \cdot \xi_i \cdot \eta_i + a_{3j} \cdot \eta_i^2 \\ b_{1j} \cdot \xi_i^2 + b_{2j} \cdot \xi_i \cdot \eta_i + b_{3j} \cdot \eta_i^2 \\ -\lambda \cdot (c_j \cdot \xi_i + s_j \cdot \eta_i) \end{bmatrix}$$

As deformações da membrana são determinadas pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = B_{rc} \cdot q_{rc} + B_s \cdot q_s \quad (4.85)$$

Sendo as matrizes  $B_s$  e  $B_{rc}$  descritas pelas equações:

$$B_s = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2a_{11}\xi + a_{21}\eta & 2a_{12}\xi + a_{22}\eta & 2a_{13}\xi + a_{23}\eta \\ b_{21}\xi + 2b_{31}\eta & b_{22}\xi + 2b_{32}\eta & b_{23}\xi + 2b_{33}\eta \\ -4b_{31}\xi - 4a_{11}\eta & -4b_{32}\xi - 4a_{12}\eta & -4b_{33}\xi - 4a_{13}\eta \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$B_{rc} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

As forças de membrana por unidade de comprimento ( $p$ ) são calculadas relacionando-se as deformações com a matriz  $D_m$  conforme a seguinte equação:

$$p = \begin{Bmatrix} p_{xx} \\ p_{yy} \\ p_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = D_m \cdot \varepsilon \quad (4.87)$$

$$D_m = \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

### 4.5.5 Matriz L

A matriz L definida para o elemento de membrana estudado é expressa pela relação entre as forças nodais  $t_c$  e as forças de membrana por unidade de comprimento  $p_c$ .

$$t_c = L \cdot p_c \quad (4.88)$$

Explicitando os elementos da matriz L de acordo com a expressão anterior tem-se:

$$L = \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

onde:

$$L_j = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ik} \\ \frac{\alpha}{6}(y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \frac{\alpha}{6}(x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & \frac{\alpha}{3}(x_{ij}y_{ji} - x_{jk}y_{kj}) \end{bmatrix}$$

Se  $\alpha$  for nulo, a matriz L corresponde à mesma matriz dada para o triângulo com deformação constante (elemento CST).

### 4.5.6 Matriz generalizada de alta ordem

A matriz generalizada de alta ordem para o elemento de membrana estudado é dada pela equação:

$$K_{qs} = \int_A B_s^T \cdot D_m \cdot B_s \cdot dA \quad (4.90)$$

onde,  $B_{si} = \xi \cdot B_{\xi i} + \eta \cdot B_{\eta i}$ . Portanto:

$$K_{qs}(i, j) = J_{\xi\xi} B_{\xi i}^T D_m B_{\xi j} + J_{\xi\eta} (B_{\xi i}^T D_m B_{\eta j} + B_{\eta i}^T D_m B_{\xi j}) + J_{\eta\eta} B_{\eta i}^T D_m B_{\eta j} \quad (4.91)$$

onde os momentos de inércia  $J_{\xi\xi}$ ,  $J_{\xi\eta}$  e  $J_{\eta\eta}$  são:

$$\begin{aligned} J_{\xi\xi} &= \int_A \xi^2 \cdot dA = -\frac{A}{6} \cdot (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_i) \\ J_{\xi\eta} &= \int_A \xi \eta \cdot dA = \frac{A}{12} \cdot (\xi_i \eta_i + \xi_j \eta_j + \xi_k \eta_k) \\ J_{\eta\eta} &= \int_A \eta^2 \cdot dA = -\frac{A}{6} \cdot (\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_k + \eta_k \eta_i) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Para obter a matriz  $H_s$ , também referente aos modos de alta ordem, as seguintes equações são necessárias:

$$R = G_{22} - G_{21} \cdot G_{11}^{-1} \cdot G_{12} \quad (4.93)$$

$$H_s = R^{-1} \cdot G_{21} \cdot G_{11}^{-1} \cdot R^{-1}$$

#### 4.5.7 Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento é obtida, somando-se a matriz dos modos básicos com a matriz de alta ordem, de acordo com a equação:

$$K = K_b + \beta K_s \quad (4.94)$$

onde  $K_b$  é a matriz de rigidez dos modos básicos,  $K_s$  é a matriz de rigidez dos modos de alta ordem e  $\beta$  corresponde ao parâmetro que ajusta a matriz de alta ordem para otimizar a convergência do elemento.

Com as matrizes  $L$  e  $D_m$ , a matriz de rigidez referente aos modos básicos pode ser obtida pelas seguintes equações:

$$K_b = \frac{1}{V} \cdot L \cdot C \cdot L^T \text{ ou } K_b = \frac{1}{A} \cdot L \cdot D_m \cdot L^T \quad (4.95)$$

Das matrizes  $H_s$  e  $K_{qs}$  determina-se a matriz de rigidez de alta ordem:

$$K_s = H_s^T \cdot K_{qs} \cdot H_s \quad (4.96)$$

#### 4.5.8 Parâmetros livres

Analisando-se a matriz  $L$  observa-se que esta é afetada por um parâmetro  $\alpha$  que deve ser maior ou igual à zero. Esse parâmetro serve como um fator de escala que multiplica os termos relacionados com os graus de liberdade rotacionais nas funções de forma e interfere na matriz dos modos básicos e na determinação das deformações.

O parâmetro  $\beta$  também deve ser maior ou igual à zero, multiplica a matriz dos modos de alta ordem e tem a função de ajustar a matriz de rigidez total  $K$ , de forma a aperfeiçoar a convergência. Bergan e Fellipa (1986) estudaram quais valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são mais recomendados, e chegaram à conclusão de que para a maioria dos casos deve-se admitir  $\alpha = 1,5$  e  $\beta = 0,5$ .

### 4.5.9 Deformações e tensões na membrana

As deformações do elemento de membrana são determinadas pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_s = (B_{rc} \cdot H_{rc} + \sqrt{\beta} \cdot B_s \cdot H_s) \cdot V \quad (4.97)$$

onde  $\varepsilon_c$  são as deformações de baixa ordem e  $\varepsilon_s$  são as deformações de ordem superior.

O valor  $B_{rc}$  corresponde à parte de corpo rígido que é nula. Da mesma forma,  $\varepsilon_s$  desaparece no centroide do elemento quando  $\xi = \eta = 0$ . As deformações básicas são:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{A} \cdot L \cdot V \quad (4.98)$$

As deformações de alta ordem,  $\varepsilon_s$ , variam linearmente ao longo do elemento e seus valores nos vértices são obtidos pela substituição das coordenadas nodais em  $B_s$ . Já as tensões na membrana relacionam as deformações com a matriz constitutiva  $C$ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \lambda_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

onde,

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \end{bmatrix}$$

e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $E$  é o módulo de elasticidade do material.

### 4.6 Exemplo 3: Chapa engastada com carga concentrada

O primeiro exemplo é a chapa ilustrada na Figura 4.9 e encontra-se descrito em Assan (2003). Trata-se de uma chapa engastada em uma extremidade. E com uma carga concentrada aplicada na extremidade livre, com valor igual a -1 kgf, na direção  $y$ . O comprimento da chapa é igual a 9 cm, a altura  $h$  é igual a 3cm, a largura é igual a 1cm, o módulo de elasticidade  $E$  é igual a 1kgf/cm<sup>2</sup> e o coeficiente de Poisson  $\nu$  é igual a 0. Neste trabalho mantiveram-se os exemplos, condições de vinculação, carregamento e as unidades de Assan (2003).

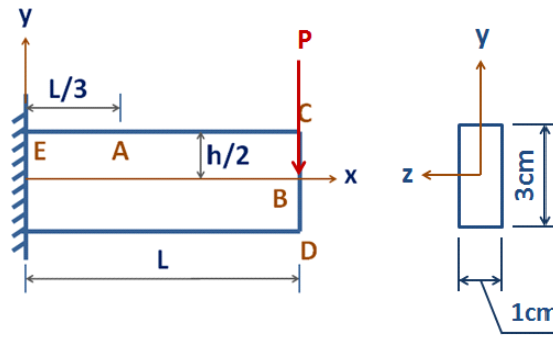


Figura 4.9 - Chapa 1

Tanto no Presente Trabalho quanto no ANSYS 11.0, discretizou-se o contínuo em 1200 elementos quadrangulares (Shell 63) e 1281 nós, Figura 4.10.

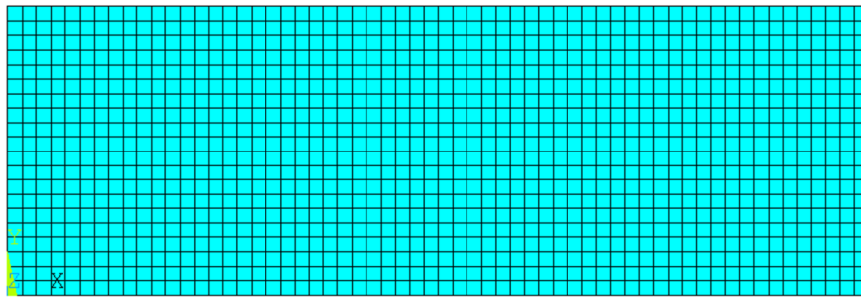
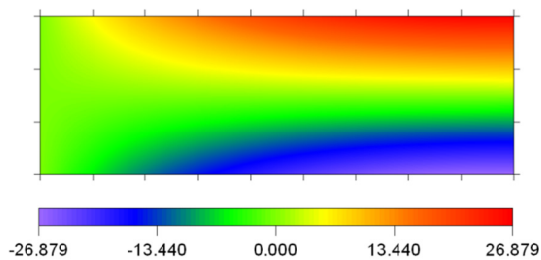
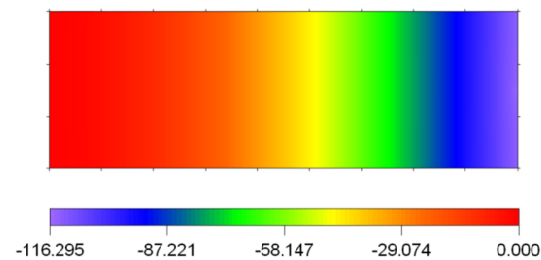


Figura 4.10 - Malha referente à chapa

O programa surfer foi utilizado para gerar os mapas dos deslocamentos dos resultados referentes ao presente trabalho. A Figura 4.11 e a Figura 4.12 são os mapas dos deslocamentos  $u$  e  $v$ , respectivamente e ilustram o comportamento destes deslocamentos da chapa a partir dos resultados obtidos no Presente Trabalho.

Figura 4.11 - Mapa do deslocamento  $u$  da chapa 1, unidade: cm, Presente TrabalhoFigura 4.12 - Mapa do deslocamento  $v$  da chapa 1, unidade: cm, Presente Trabalho

A Tabela 4.1 é a comparação dos valores máximos, em módulo, obtidos no Presente Trabalho e no ANSYS, para a chapa deste exemplo e estes são aproximadamente iguais. Em

trabalhos futuros, devido à limitação de prazo referente ao presente trabalho, pretende-se apresentar o exemplo do Painel de Cook sugerido pelo Prof. Mendonça.

Tabela 4.1 – Resultados dos deslocamentos para a chapa 1

Valores Máximos (módulo)	Presente Trabalho	ANSYS	Razão Relativa (%)
u (cm)	26,934	26,947	0,048
v (cm)	116,784	116,790	0,005

#### 4.7 Elemento Finito de Placa Discrete Kirchhoff Triangle – DKT

Uma pesquisa detalhada sobre a teoria e formulação numérica via MEF de placas encontra-se em Oliveira (2012) e Silva (2010). A placa modelada pelo elemento finito DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) foi pesquisada, no SET-EESC-USP, dentre outros autores por Barretto (1990), Carrijo (1995), Oliveira Neto (1998) e Rezende (1990).

Apresenta-se sucintamente neste trabalho o elemento finito triangular de placa DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), assim chamado por se aplicar a teoria de Kirchhoff nos pontos nodais. O elemento DKT é triangular com nove graus de liberdade (uma translação e duas rotações por nó), o que segundo Batoz e Lardeur (1989), na análise de flexão de placas delgadas pode ser aplicado eficientemente, já que este elemento se apresentou como sendo eficiente no âmbito teórico, numérico e computacional. Como descrito em Mendonça (1997), o que diferencia a teoria de Kirchhoff e a de Reissner é que a última assume que seções planas, inicialmente normais ao plano médio da placa, após a flexão, permanecem planas, mas não obrigatoriamente perpendiculares ao plano médio deformado. As outras hipóteses assumidas pela teoria clássica de placas são incorporadas pela teoria de Reissner.

Os exemplos, referentes à placa, tem como objetivo verificar a eficiência do presente trabalho em resolver essas estruturas. Portanto, os dados foram escolhidos de forma a simplificar a resolução dos problemas, bem como a comparação dos resultados. Utilizaram-se os exemplos propostos por Martinelli, Montanari e Savassi (2003). Os resultados referentes ao Presente Trabalho foram comparados com a teoria técnica citada anteriormente, com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976) e com o ANSYS 11.0. A teoria de placas também pode ser vista em Reddy (2006) e Zagnottis (1973). Neste trabalho adotou-se o elemento finito quadrangular, já no ANSYS 11.0 utilizou-se o elemento Shell 63, quadrangular.

### 4.7.1 Elemento Finito de Placa – DKT

Os elementos finitos DKT possuem três graus de liberdade por nó, sendo a translação segundo o eixo X e a rotação em torno dos eixos Y e Z, como mostra a Figura 4.13.

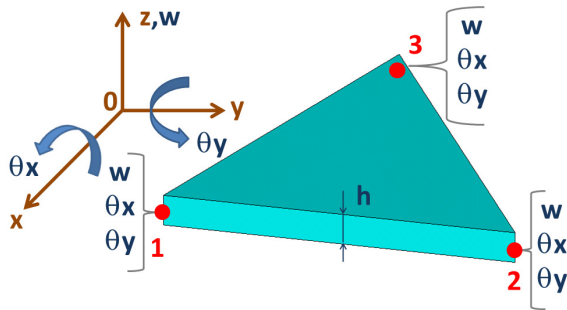


Figura 4.13 - Elemento finito DKT com nove graus de liberdade

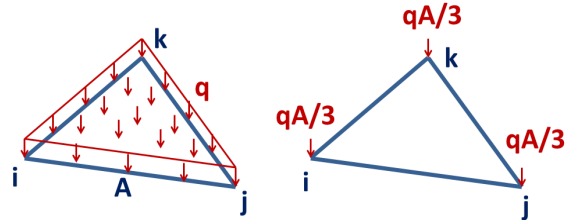


Figura 4.14 - Carregamento uniformemente distribuído no elemento e carregamento nodal equivalente

Em um elemento de área  $A$  com carga uniformemente distribuída ( $q$ ), Figura 4.14, tem-se o seguinte vetor de cargas nodais equivalentes:

$$\{F\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\} \quad (4.100)$$

Se for admitido distribuição linear para os deslocamentos transversais da placa.

### 4.7.2 Energia de deformação para o elemento finito DKT

Pela teoria clássica, as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  de uma reta normal à superfície média segundo os planos Y-X e Z-X, respectivamente, são diretamente relacionados com as derivadas parciais dos deslocamentos transversais  $w'_y$  e  $w'_z$ , segundo os eixos de referência Y e Z das lajes, Figura 4.15.

Ou seja, pela teoria de Kirchhoff:

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial X} = -w'_x \quad (4.101)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial Y} = -w'_y$$

As rotações  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são convencionadas positivas de acordo com a Figura 4.16.



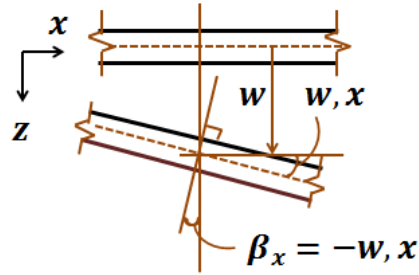


Figura 4.15 - Deslocamento segundo a teoria de Kirchhoff

Considerando-se a hipótese de Kirchhoff, aplicada a posteriori, e admitindo-se pequenos deslocamentos, as componentes de deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$ , de um ponto genérico da placa de coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , são:

$$\begin{aligned}
 u &= z\beta_x(x, y) = -z(-w_{,x} + \gamma_{xz}) \\
 v &= z\beta_y(x, y) = -z(-w_{,y} + \gamma_{yz}) \\
 w &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{4.102}$$

onde  $w$  é o deslocamento na direção de  $z$ . As direções positivas para  $\beta_x$  e  $\beta_y$  estão ilustradas na Figura 4.16.

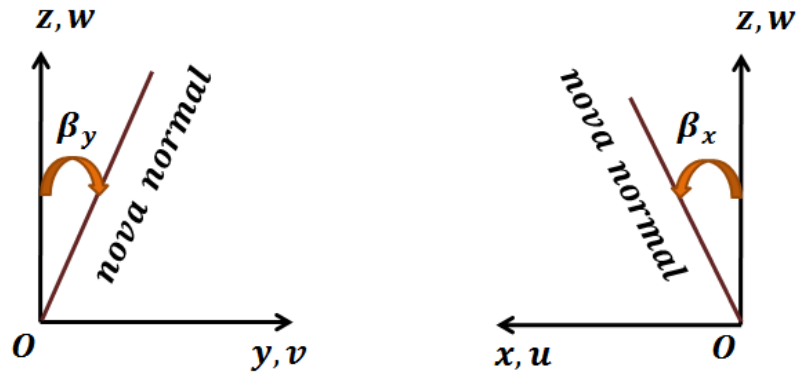


Figura 4.16 - Convenções positivas das rotações  $\beta_x$  e  $\beta_y$

### 4.7.3 Vetor de deformação por flexão $\{\epsilon\}_f$

Da teoria da elasticidade linear têm-se as seguintes relações entre deslocamentos e deformações:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}
 \tag{4.103}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dessa forma, das equações (4.103):

$$\{\varepsilon\}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \beta_{x'x} \\ \beta_{y'y} \\ \beta_{x'y} + \beta_{y'x} \end{Bmatrix} = z \cdot \{k\} \quad (4.104)$$

onde  $\{k\}$  é o vetor curvatura.

Observa-se que as deformações por flexão variam linearmente ao longo da espessura da laje. A componente  $\sigma_x$  é desprezada por ser pequena em relação às componentes  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ .

A relação tensão-deformação na placa de material homogêneo e isotrópico, de comportamento elástico-linear e com espessura  $h$  constante em um ponto genérico é:

$$\{\sigma\}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\}_f \quad (4.105)$$

onde

$$[D_p] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Portanto,

$$\{\sigma\}_f = [D_p] \cdot \{\varepsilon\}_f \quad (4.107)$$

Substituindo a equação (4.104) na (4.107) tem-se:

$$\{\sigma\}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = z [D_p] \{k\} \quad (4.108)$$

A energia de deformação por flexão pode ser escrita de acordo com a seguinte expressão:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}'_f \{\sigma\}_f dV \quad (4.109)$$

Das equações (4.104) e (4.108) escreve-se:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}'_f \{\sigma\}_f dV = \frac{1}{2} \int_V \{k\}' z^2 [D] \{k\} dx dy dz \quad (4.110)$$

Rearranjando os termos desta expressão:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{k\}' Z^2 [D_p] \{k\} dX dY dZ \quad (4.111)$$

Reescrevendo-se a equação (4.111) tem-se:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}' [D]_f \{k\} dA \quad (4.112)$$

onde  $[D]_f$  é a matriz de elasticidade para flexão de placas:

$$[D]_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 [D] dZ \quad (4.113)$$

Realizando a integração ao longo da espessura da placa (h constante) encontra-se:

$$[D]_f = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Observa-se que o vetor de curvatura  $\{k\}$ , relaciona-se com as rotações  $\beta_X$  e  $\beta_Y$ :

$$U_f = \frac{D}{2} \int_A \{\beta_{XX}^2 + \beta_{YY}^2 + 2\nu\beta_{XX}\beta_{YY} + \frac{1-\nu}{2}(\beta_{XY} + \beta_{YX})^2\} dA \quad (4.115)$$

onde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Com a energia de deformação, é possível obter explicitamente a matriz de rigidez do elemento DKT, portanto, assumem-se quatro hipóteses descritas a seguir.

a) Hipótese 1 - As rotações  $\beta_X$  e  $\beta_Y$  variam quadraticamente no elemento.

Consideram-se os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} \beta_X(X, Y) &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 X^2 + \alpha_5 XY + \alpha_6 Y^2 \\ \beta_Y(X, Y) &= \rho_1 + \rho_2 X + \rho_3 Y + \rho_4 X^2 + \rho_5 XY + \rho_6 Y^2 \end{aligned} \quad (4.116)$$

Atende-se a compatibilidade das rotações desde que o elemento tenha três nós por lado, Figura 4.17.

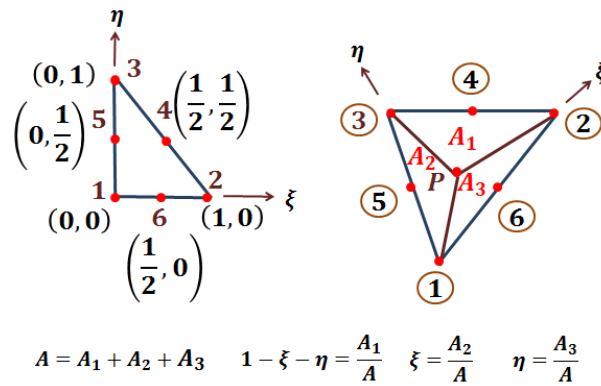


Figura 4.17 - Disposição inicial dos pontos nodais no elemento DKT nas coordenadas homogêneas  $\xi$  e  $\eta$

Escrevendo-se as equações (4.116) na forma matricial, em função das coordenadas homogêneas  $\xi$  e  $\eta$ :

$$\beta_x(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_4 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\psi}(\xi, \eta) \{\alpha'\}$$

(4.117)

$$\beta_y(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \rho'_3 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \\ \rho'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\psi}(\xi, \eta) \{\rho'\}$$

Os parâmetros generalizados  $\{\alpha'\}$  e  $\{\rho'\}$  são transformados para os parâmetros nodais  $\{\beta_x\}$  e  $\{\beta_y\}$ , respectivamente, particularizando-se a função para cada nó do elemento, de acordo com os valores das coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta$ .

b) Hipótese 2 - A teoria de Kirchhoff é imposta nos pontos nodais dos vértices e nos pontos médios dos lados

Esta hipótese possibilita relacionar as rotações com as primeiras derivadas dos deslocamentos transversais.

Para os nós de vértice ( Nós 1, 2 e 3 ) tem-se:

$$\{\mathcal{Y}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.118)$$

E para os nós do meio do lado ( Nós 4,5 e 6 ):

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (4.119)$$

onde o índice k representa os nós do meio do lado, e s uma coordenada que percorre cada lado, no sentido anti-horário e em torno de cada um, como ilustra a Figura 4.18.

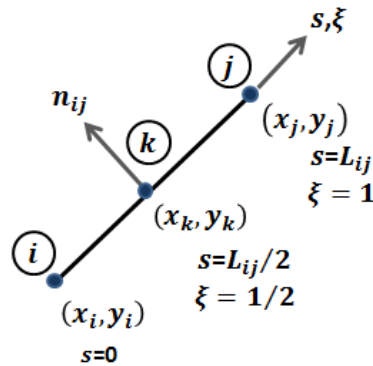


Figura 4.18 - Coordenadas dos nós do lado ij do elemento DKT

Tabela 3.2 - w para os nós dos lados do elemento DKT

nó inicial i	nó central k	nó final j
$\frac{s}{l_{ij}} = 0$	$\frac{s}{l_{ij}} = \frac{1}{2}$	$\frac{s}{l_{ij}} = 1$
$w_i = \alpha'_0$	$w_k = \alpha'_0 + \frac{1}{2}\alpha'_1 + \frac{1}{4}\alpha'_2 + \frac{1}{8}\alpha'_3$	$w_j = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$
$w'_{si} = \frac{1}{l_{ij}}\alpha'_1$	$w'_{sk} = \frac{1}{l_{ij}}\alpha'_1 + \frac{1}{l_{ij}}\alpha'_2 + \frac{3}{4l_{ij}}\alpha'_3$	$w'_{sj} = \frac{1}{l_{ij}}\alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}}\alpha'_2 + \frac{3}{l_{ij}}\alpha'_3$

c) Hipótese 3 - A variação de w é cúbica ao longo dos lados do elemento

Em coordenadas genéricas, a função w em um lado ij qualquer fica:

$$w_s = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \quad (4.120)$$

Escrevendo a equação (4.120) em coordenadas adimensionais:

$$w_s = \alpha'_0 + \alpha'_1 \frac{s}{l_{ij}} + \alpha'_2 \frac{s^2}{l_{ij}^2} + \alpha'_3 \frac{s^3}{l_{ij}^3} \quad (4.121)$$

E calculando-se a derivada primeira desta expressão:

$$w_{s,s} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}^2} \alpha'_2 s + \frac{3}{l_{ij}^3} \alpha'_3 s^2 \quad (4.122)$$

A Tabela 4.2 fornece as expressões de  $w$  para os nós dos lados do elemento.

d) Hipótese 4 - Considera-se uma variação linear  $\beta_n$  ( rotação na direção normal), ao longo dos lados

Dessa forma, tem-se a função  $\beta_n$  em coordenadas homogêneas:

$$\beta_n = \alpha_0 + \xi \alpha_1 \quad (4.123)$$

Como o valor de  $\beta_n$  varia linearmente, de acordo com as hipóteses adotadas, o valor da função no ponto nodal médio dos lados é escrito como a média aritmética dos  $\beta_n$  dos vértices do referido lado. Portanto, para se encontrar o valor da função no nó central  $k$ , iguala-se

$\xi = \frac{1}{2}$ , e substitui-se na equação (4.123):

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (4.124)$$

Considerando-se as quatro hipóteses anteriores e as relações geométricas do triângulo, escreve-se  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  em cada ponto do triângulo em função dos parâmetros nodais  $\{ u_{DKT} \}$ :

$$\{ u_{DKT} \}^T = \{ \delta_{X1} \ \phi_{Y1} \ \phi_{Z1} \ \delta_{X2} \ \phi_{Y2} \ \phi_{Z2} \ \delta_{X3} \ \phi_{Y3} \ \phi_{Z3} \} \quad (4.125)$$

As rotações em função dos parâmetros nodais  $\{ u_{DKT} \}$  são:

$$\begin{aligned} \beta_x &= [\bar{G}] \{ u_{DKT} \} \\ \beta_y &= [\bar{H}] \{ u_{DKT} \} \end{aligned} \quad (4.126)$$

onde  $[\bar{G}]$  e  $[\bar{H}]$  são matrizes de ordem 1 x 9:

$$\begin{aligned} [\bar{G}] &= [1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2] [G] \\ [\bar{H}] &= [1 \ \xi \ \eta \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2] [H] \end{aligned} \quad (4.127)$$

já as matrizes  $[G]$  e  $[H]$  são de ordem 6x9:

$$\begin{aligned}
 [G]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 6a_6 & -6a_5 & -6a_6 & 6(a_5 - a_6) & 6a_5 \\ 0 & 4b_6 & 4b_5 & -4b_6 & -4(b_5 + b_6) & -4b_5 \\ 1 & -3 - 4c_6 & -3 - 4c_5 & 2 + 4c_6 & 4(1 + c_5 + c_6) & 2 + 4c_5 \\ 0 & -6a_6 & 0 & 6a_6 & 6(a_4 + a_6) & 0 \\ 0 & 4b_6 & 0 & -4b_6 & 4(b_4 - b_6) & 0 \\ 0 & -1 - 4c_6 & 0 & 2 + 4c_6 & 4(c_6 - c_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6a_5 & 0 & -6(a_4 + a_5) & -6a_5 \\ 0 & 0 & 4b_5 & 0 & 4(b_4 - b_5) & -4b_5 \\ 0 & 0 & -1 - 4c_5 & 0 & 4(c_5 - c_4) & 2 + 4c_5 \end{bmatrix} \\
 [H]^T &= \begin{bmatrix} 0 & 6d_6 & -6d_5 & -6d_6 & 6(d_5 - d_6) & 6d_5 \\ -1 & 3 + 4e_6 & 3 + 4e_5 & -2 - 4e_6 & -4(1 + e_5 + e_6) & -2 - 4e_5 \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 4b_6 & 4(b_5 + b_6) & 4b_5 \\ 0 & -6d_6 & 0 & 6d_6 & 6(d_4 + d_6) & 0 \\ 0 & 1 + 4e_6 & 0 & -2 - 4e_6 & 4(e_4 - e_6) & 0 \\ 0 & -4b_6 & 0 & 4b_6 & 4(b_6 - b_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6d_5 & 0 & -6(d_4 + d_6) & -6d_5 \\ 0 & 0 & 1 + 4e_5 & 0 & 4(e_4 - e_5) & -2 - 4e_5 \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 0 & 4(b_5 - b_4) & 4b_5 \end{bmatrix} \quad (4.128)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 a_k &= -\frac{Y_{ij}}{l_{ij}^2} & d_k &= -\frac{Z_{ij}}{l_{ij}^2} \\
 b_k &= \frac{3Y_{ij}Z_{ij}}{4l_{ij}^2} & e_k &= \frac{\frac{1}{4}Z_{ij}^2 - \frac{1}{2}Y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \\
 c_k &= \frac{\frac{1}{4}Y_{ij}^2 - \frac{1}{2}Z_{ij}^2}{l_{ij}^2} & l_{ij}^2 &= Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2
 \end{aligned}$$

e  $k = 4, 5$  e  $6$  para os lados  $ij = 23, 31, 12$ , respectivamente.

Escrevendo-se o vetor curvatura  $\{k\}$ , em função dos graus liberdade do elemento finito DKT tem-se:

$$\{k\} = [B]\{u_{DKT}\} \quad (4.129)$$

onde  $[B]$  é a matriz de ordem  $3 \times 9$ , que relaciona o vetor curvatura com o vetor deslocamento do elemento, explicitada em Batoz, Bathe e Ho (1980).

Da equação da energia de deformação do elemento DKT:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^T [D]_f \{k\} dXY \quad (4.130)$$

E substituindo a equação (4.129) na (4.130):

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} dA \quad (4.131)$$

Escrevendo-se a equação (4.131) em coordenadas homogêneas:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} 2A d\xi d\eta \quad (4.132)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \{u_{DKT}\}$$

Da energia de deformação, em função da matriz de rigidez [K] do elemento tem-se a seguinte equação:

$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T [K] \{u_{DKT}\} \quad (4.133)$$

onde:

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (4.134)$$

Efetuada-se as integrações da equação anterior, determina-se explicitamente a matriz de rigidez [K] do elemento DKT, que é uma matriz simétrica de dimensões 9 x 9, descrita em Almeida (1999).

Os momentos  $m_X$ ,  $m_Y$  e  $m_{XY}$  do elemento DKT são:

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_X \\ m_Y \\ m_{XY} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\}_f z dz = \int_{-h/2}^{h/2} [D] \{k\} z^2 dz \quad (4.135)$$

$$\{m\} = [D]_f \{k\} = [D]_f [B] \{u\}$$

O elemento quadrangular pode ser obtido pela composição de quatro elementos triangulares DKT, quando se colocam os parâmetros internos comuns aos elementos, em função dos seus parâmetros externos, através da condensação estática descrita anteriormente.

#### 4.8 Acoplamento dos elementos DKT e Formulação Livre

Acoplando-se o elemento de membrana e o elemento DKT obtém-se um elemento com seis graus de liberdade por nó. Onde o elemento de membrana é o elemento triangular da



Formulação Livre, que incorpora três graus de liberdade por nó: duas translações paralelas aos eixos, que contém o plano médio do elemento e uma rotação em torno da normal a esse plano. Para que a formulação do elemento seja capaz de resolver problemas de estruturas de placas no espaço tridimensional acoplaram-se os elementos DKT e de membrana. Como referência de outros pesquisadores que escreveram sobre cascas cita-se Mesquita (1998), Militello e Felippa (1989) e Paccola (2004).

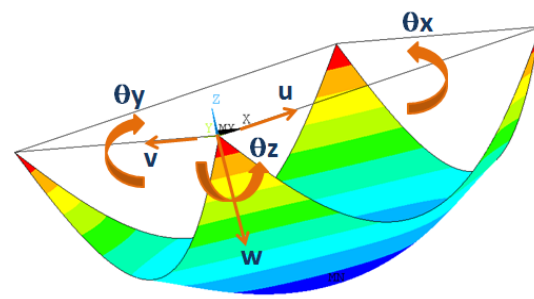
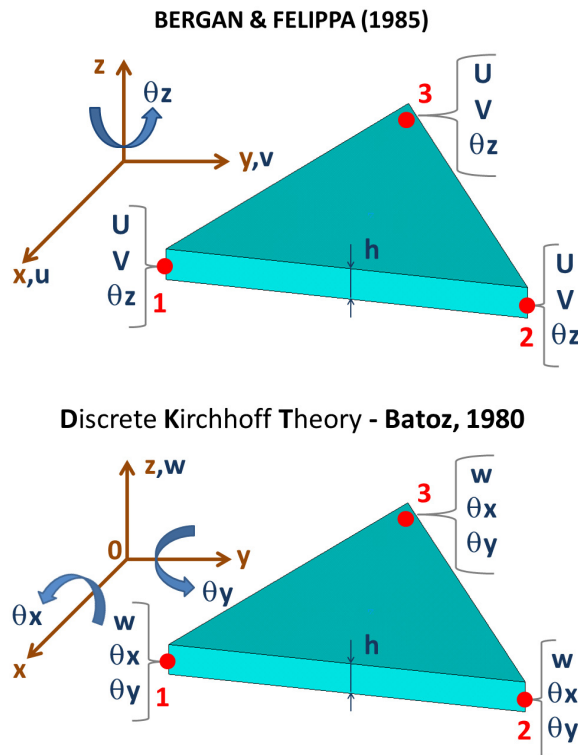


Figura 4.19 - Membrana e elemento DKT

Figura 4.20 – Casca

As matrizes e vetores do elemento de placa apresentados para a interação placa-solo, na verdade é o resultado do acoplamento entre a placa e a membrana, já comentado nos subitens anteriores, Figura 4.19 e Figura 4.20. Portanto, este elemento apresenta seis graus de liberdade por nó, que corresponde a três translações ( $u, v, w$ ) e três rotações ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) por nó.

A ordem das matrizes e vetores referentes ao solo é originalmente igual ao número de nós, visto que nessa situação, o único grau de liberdade considerado é o deslocamento  $w$ . Colocam-se zeros nos coeficientes referentes aos outros graus de liberdade, de forma, que a ordem das matrizes do solo, também seja seis vezes o número de nós.

#### 4.9 Exemplo 4: Placa engastada com carga distribuída

A placa 1 é rígida, representada por um bloco de lado igual a 1m ( $a=b=1m$ ), engastada em todos os lados, sobre a qual atua uma carga distribuída,  $q$ , de  $1kgf/m^2$ , em toda a sua área, Figura 4.21. A placa tem espessura unitária,  $h$ , igual a 1m. O módulo de elasticidade longitudinal,  $E$ , é igual  $10,92kgf/m^2$ . A relação de Poisson,  $\nu$ , é igual a 0,3.

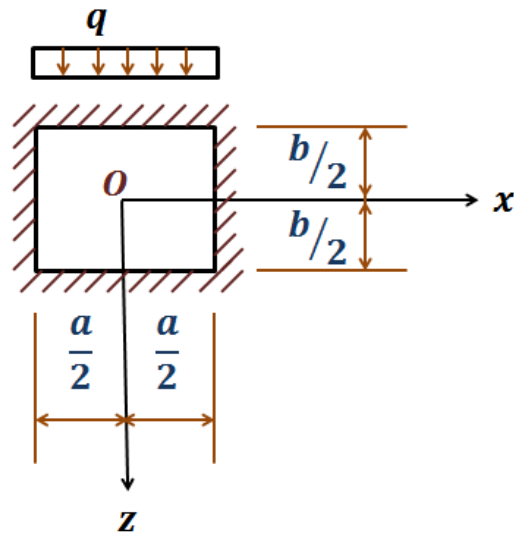


Figura 4.21 - Placa 1

A rigidez de flexão da placa é calculada pela seguinte equação:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.136)$$

Substituindo-se os valores correspondentes na Equação (4.136), encontra-se  $D=1kgf \cdot m$ .

Para a placa quadrada, engastada em todos os lados, sob carga distribuída em toda a sua área, Martinelli, Montanari e Savassi (2003), calculam o deslocamento  $w$ , no centro da placa, pela seguinte equação:

$$w_{max} = \frac{\alpha q l^4}{D} \quad (4.137)$$

A Tabela 4.2 são os valores de  $\alpha$ , necessários na determinação do deslocamento  $w_{max}$  para a placa engastada da equação (4.137), descrito em Martinelli, Montanari e Savassi (2003).

Em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976), para  $b/a=1$ , no centro da placa tem-se o resultado exato para  $w$ :

$$w_{(x=0,y=0)} = \frac{0,00126qa^4}{D} \quad (4.138)$$

Tabela 4.2 – Valores de  $\alpha$ , placa engastada, Martinelli, Montanari e Savassi (2003)

Malha	Nós	$\alpha$
2x2	9	0,001480
4x4	25	0,001403
8x8	81	0,001304
12x12	169	0,001283
16x16	289	0,001275

Da Equação (4.138), para este exemplo, o valor de  $w$  no centro da placa é igual a  $-1,26 \times 10^{-3}$  m. No Presente Trabalho, com uma malha 16x16, obteve-se  $w$  igual a  $-1,27 \times 10^{-3}$  m, que corresponde a uma razão relativa de 0,79% quando os resultados são comparados.

Em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976), o deslocamento  $w$ , no centro da placa, para este exemplo é calculado pela equação:

$$w_{(x=0,y=0)} = \frac{C_{we} q a^4}{D} \quad (4.139)$$

O coeficiente  $C_{we}$ , para diferentes malhas, e para as condições de contorno e carregamento referentes a este exemplo, encontra-se em Savassi (1996) e tem os valores descritos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Valores de  $C_{we}$ . Savassi (1996)

Malha	Nós	$C_{we}$
2x2	9	0,0014796
4x4	25	0,0014033
8x8	81	0,0013039
16x16	289	0,0012752

Tanto no Presente trabalho quanto no ANSYS (elemento Shell 66), a placa apresenta uma malha quadrangular 16x16, Figura 4.22. A Tabela 4.4 apresenta os resultados das análises da comparação do deslocamento  $w$ , entre o Presente Trabalho, Martinelli, Montanari e Savassi (2003), Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976) e o ANSYS.

O deslocamento  $w$  no centro da placa foi igual a  $-1,270 \times 10^{-3}$  m tanto no Presente Trabalho quanto no ANSYS. Para ilustrar o comportamento do deslocamento vertical na placa

para este exemplo, apresenta-se o mapa de deslocamentos, referentes ao presente trabalho na Figura 4.23.

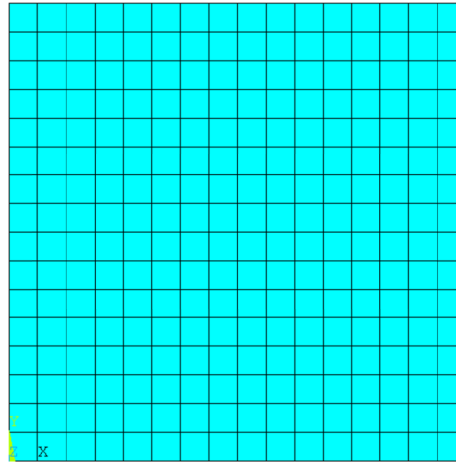


Figura 4.22 - Malha da placa 16x16

Tabela 4.4 – Deslocamento  $w$  da placa 1

Malha	w (m)				Razão Relativa (%)		
	Presente Trabalho	Martinelli et al. (2003)	Timoshenko (1976)	ANSYS	Martinelli et al. (2003)	Timoshenko (1976)	ANSYS
2x2	-0,00142	-0,00148	-0,00148	-0,00148	4,23	4,23	4,23
4x4	-0,00132	-0,00140	-0,00140	-0,00137	6,06	6,06	3,79
8x8	-0,00128	-0,00130	-0,00130	-0,00129	1,56	1,56	0,78
12x12	-0,00127	-0,00128	-	-0,00128	0,79	-	0,79
16x16	-0,00127	-0,00128	-0,00128	-0,00127	0,79	0,79	0,00

A Figura 4.24 ilustra o comportamento da rotação  $\theta_x$ , para o Presente trabalho. A rotação máxima foi igual a  $3,95 \times 10^{-3}$  rad tanto no Presente Trabalho quanto no ANSYS. Já a Figura 4.25 ilustra o comportamento da rotação  $\theta_y$ , referente ao Presente trabalho, o valor da rotação máxima foi igual a  $3,95 \times 10^{-3}$  rad, no Presente Trabalho e no ANSYS.

Em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976), o momento  $M_x$  é igual ao  $M_y$ , no centro da placa, e para este exemplo o momento é calculado pela equação:

$$M_{x(x=0,y=0)} = M_{y(x=0,y=0)} = c_{me} q a^2 \quad (4.140)$$

O coeficiente  $C_{me}$ , para diferentes malhas, e para as condições de contorno e carregamento referentes a este exemplo, encontra-se em Savassi (1996) e tem os valores descritos na Tabela 4.5.

Portanto, o momento no centro da placa, para este exemplo, tem o valor exato obtido pela equação:

$$M_{x(x=0,y=0)} = M_{y(x=0,y=0)} = 0,023187qa^2 \tag{4.141}$$

Da Equação (4.141), para este exemplo, tem-se o valor de  $M_x=M_y$  no centro da placa igual a  $-2,31 \times 10^{-2}$  m. No Presente Trabalho, com uma malha 16x16, obteve-se  $M_x=M_y$  igual a  $-2,3068 \times 10^{-2}$  m, para uma malha 16x16, que corresponde a uma razão relativa de 0,14% entre os trabalhos.

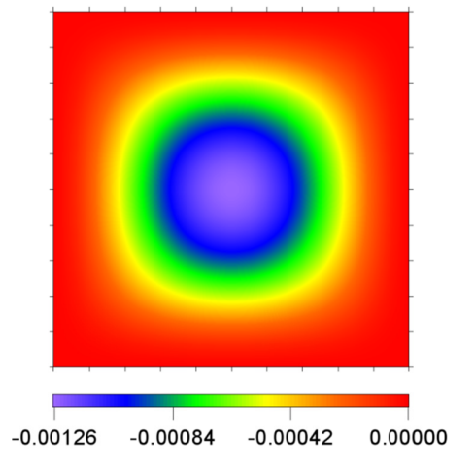


Figura 4.23 - Mapa do deslocamento  $w$  da placa 1, unidade: m, Presente Trabalho

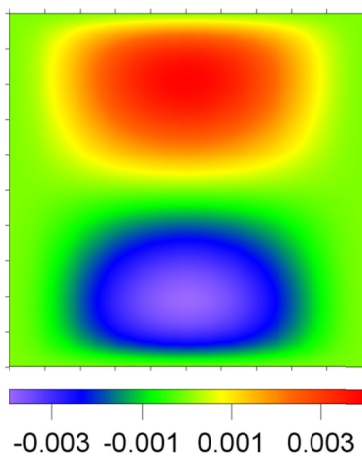


Figura 4.24 - Mapa da rotação  $\theta_x$  da placa 1, unidade: rad, Presente Trabalho

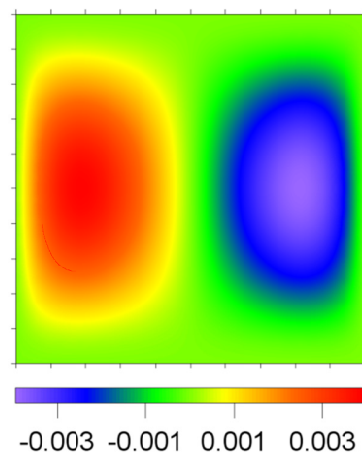


Figura 4.25 - Mapa da rotação  $\theta_y$  da placa 1, unidade: rad, Presente Trabalho

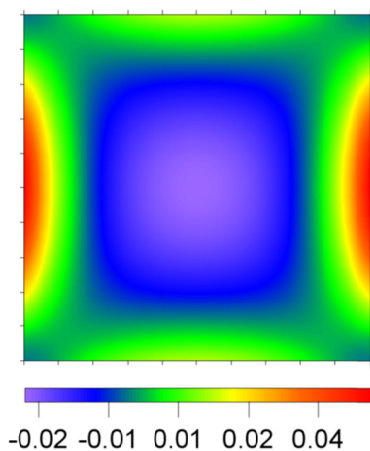
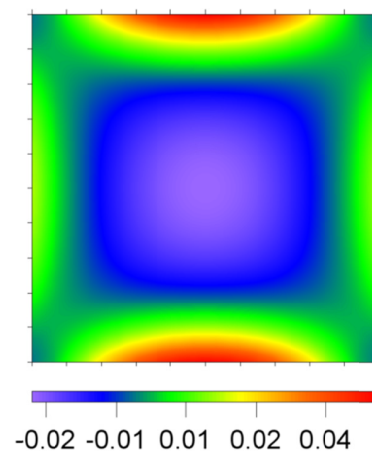
Tabela 4.5 – Valores de  $C_{me}$ . Savassi (1996)

Malha	Nós	$C_{me}$
2x2	9	0,046165
4x4	25	0,027783
8x8	81	0,024048
16x16	289	0,023187

Tabela 4.6 – Momento  $M_x=M_y$ , no centro da placa 1

Malha	$M_x = M_y$ ( $kgf \cdot m$ )		Razão Relativa (%)
	Presente Trabalho	Timoshenko (1976)	
2x2	-0,036208	-0,046165	27,50
4x4	-0,025595	-0,027783	8,55
8x8	-0,023559	-0,024048	2,08
16x16	-0,023068	-0,023187	0,52

A Figura 4.26 e a Figura 4.27 ilustram os mapas dos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ , respectivamente, referentes ao Presente trabalho, para a malha 16x16. Como visto na Tabela 4.6, o resultado no centro da placa é aproximadamente igual ao de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1976) para a malha 16x16.

Figura 4.26 - Mapa do momento fletor  $M_x$  da placa 1, unidade:  $kgf \cdot m$ , Presente TrabalhoFigura 4.27 - Mapa do momento fletor  $M_y$  da placa 1, unidade:  $kgf \cdot m$ , Presente Trabalho

#### 4.10 Acoplamento placa-solo

O acoplamento MEC-MEF também foi pesquisado por outros autores, como por exemplo, Tejerina Calderón (1996) e Komatsu (1995). Para o solo, a carga é considerada somente perpendicular ao plano da área carregada, na direção  $x_3$ . A energia potencial total ( $\Pi_1$ ) do elemento finito de placa, como descrito em Mendonça (1997) é:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \{U_C\}^T [K_C] \{U_C\} - \{U_C\}^T \{F_C\} + \{\bar{U}_C\}^T [Q] \{\bar{P}_C\} \quad (4.142)$$

onde  $\{U_C\}$  é o vetor de deslocamentos referentes ao elemento de placa,  $[K_C]$  é a matriz de rigidez da placa,  $\{F_C\}$  é o vetor de forças do elemento de placa,  $\{\bar{U}_C\}$  é o vetor de deslocamentos do solo,  $\{\bar{P}_C\}$  é o vetor das forças de superfície da interface placa-solo de um elemento de contorno e  $[Q]$  é a matriz de transformação de cargas do elemento em cargas nodais:

$$[Q] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

onde  $A$  é a área do elemento triangular. A matriz  $[Q]$  refere-se apenas ao deslocamento nodal  $w$ , portanto, deve-se expandí-la acrescentando-se zero nos coeficientes referentes aos outros graus de liberdade.

Os vetores  $\{U_C\}^T$  e  $\{\bar{U}_C\}^T$  são iguais e escritos da seguinte forma:

$$\{U_C\}^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj} \ u_k \ v_k \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ \theta_{zk}\} \quad (4.144)$$

e o vetor  $\{\bar{P}_C\}$ :

$$\{\bar{P}_C\}^T = \{0 \ 0 \ p_i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ p_j \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ p_k \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (4.145)$$

Após a contribuição de todos os elementos e minimizando-se o funcional resulta:

$$[K]\{U\} = \{F\} - [\bar{Q}]\{P\} \quad (4.146)$$

onde  $\{U\}$  é o vetor de deslocamentos globais referentes à placa,  $[K]$  é a matriz de rigidez global da placa,  $\{F\}$  é o vetor de forças global da placa,  $\{P\}$  é o vetor das forças de superfície da interface placa-solo global e  $[\bar{Q}]$  é a matriz de transformação global de cargas do elemento em cargas nodais.

Em relação ao solo reescreve-se a Equação (3.114) desprezando-se as forças de volume da seguinte forma:

$$[H]\{\bar{U}_S\} = [G]\{\bar{P}_S\} \quad (4.147)$$

A matriz  $[H]$  é igual à matriz identidade, já que a superfície é suposta livre de forças de superfície, portanto, da Equação (4.147):

$$\{\bar{P}_S\} = [G]^{-1}\{\bar{U}_S\} \quad (4.148)$$

onde  $\{\bar{U}_S\}$  é o vetor de deslocamento do solo,  $\{\bar{P}_S\}$  é o vetor de força de superfície do solo e  $[G]$  é a matriz do solo relativa à solução fundamental  $u_{33}^*$ . Lembra-se que as matrizes e vetores referentes ao solo também devem ser expandidas para que as suas ordens sejam iguais a seis vezes o número de nós.

Substituindo-se a Equação (4.148) na Equação (4.146):

$$[K]\{U\} = \{F\} - [\bar{Q}][G]^{-1}\{\bar{U}_S\} \quad (4.149)$$

Resultando no seguinte sistema de equações:

$$[K_2]\{U\} = \{F\} \quad (4.150)$$

e

$$[K_2] = [K] + [\bar{Q}][G]^{-1} \quad (4.151)$$

onde  $[K_2]$  é a matriz de rigidez resultante da interação placa-solo através da combinação MEC-MEF.

#### 4.11 Exemplo 5: Acoplamento placa - solo sob carga distribuída

O acoplamento placa-solo é verificado neste exemplo. A placa é quadrada, com lado  $L = 12m$ , sob ação de uma carga distribuída uniformemente,  $q = 1 N/m^2$ , em toda a sua área. A espessura da placa é  $t = 0,10m$ . Os módulos de elasticidade do solo e da placa são  $E_S = 2,60 \times 10^8 N/m^2$  e  $E_P = 9,7833 \times 10^{13} N/m^2$ , respectivamente. O coeficiente de Poisson do solo é igual ao da placa,  $\nu_P = \nu_S = 0,3$ . A placa e o solo foram discretizados como a malha ilustrada na Figura 4.28, que possui 25 nós e 32 elementos. No acoplamento placa-solo a malha é triangular devido à aproximação triangular da força de superfície e pela necessidade da malha do MEF coincidir com a malha do MEC.

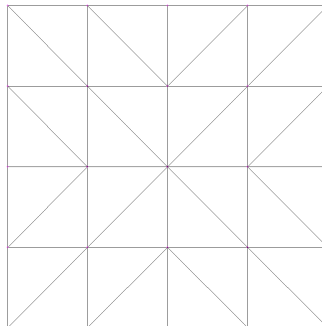


Figura 4.28 - Malha 4x4



A Tabela 4.7 é o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Tabela 4.7 – Método numérico e solução fundamental

Autor	Placa	Elemento	Malha	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEF	DKT-FL	4x4	MEC	Mindlin
Ribeiro (2009)	MEF	DKT	4x4	MEC – infinito	Kelvin
Almeida (2003)	MEF	DKT-FL	8x8	MEC	Kelvin
Messafer e Coates (1989)	MEF	ACM	10x10	MEC	Mindlin
Paiva e Butterfield (1997)	MEC	Linear	8x8	MEC	Mindlin

Os resultados referentes aos deslocamentos na direção  $x_3$  da placa encontram-se na Tabela 4.8. Verificou-se que os deslocamentos no meio do lado e no centro da placa apresentam concordância com os encontrados em Ribeiro (2009).

Tabela 4.8 – Deslocamentos na direção  $z$  ( $m$ )

Autor	meio do lado	Centro
Presente Trabalho	3,37E-08	3,79E-08
Ribeiro (2009)	3,41E-08	3,76E-08
Almeida (2003)	3,54E-08	3,79E-08
Messafer e Coates (1989)	3,00E-08	3,63E-08
Paiva e Butterfield (1997)	2,88E-08	3,26E-08

A malha 4x4, referente ao presente trabalho, é igual à malha adotada em Ribeiro (2009) sendo que este último utilizou as soluções fundamentais de Kelvin e MEC infinito. As diferenças nos resultados, Tabela 4.8, em relação aos outros autores justifica-se pelo tipo de elemento finito e malha adotados, Tabela 4.7.

#### 4.12 Exemplo 6: Acoplamento placa - solo sob carga concentrada

Este exemplo é semelhante ao anterior com exceção da carga, que aqui é concentrada no centro da placa,  $P = 1N$ . E os módulos de elasticidade do solo e da placa são  $E_S = 2,60 \times 10^5 N/m^2$  e  $E_P = 1,176 \times 10^{12} N/m^2$ , respectivamente. O coeficiente de Poisson

do solo é igual ao da placa,  $\nu_p = \nu_s = 0,3$ . A placa e o solo foram discretizados como a malha ilustrada na Figura 4.29, que possui 81 nós e 128 elementos. A malha é a mesma adotada por Mendonça (1997).

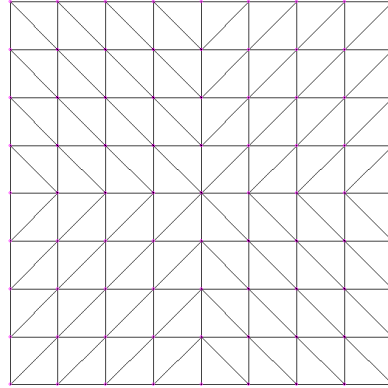


Figura 4.29 - Malha 8x8

Os resultados dos deslocamentos na direção longitudinal da placa encontram-se na Tabela 4.10. Mendonça (1997) estudou este problema através de uma combinação MEF-MEC em que a placa é dividida em 128 elementos finitos triangulares com igual número de elementos de contorno modelando o solo e ele apresenta resultados com o elemento finito DKT e HSM. Messafer e Coates (1989) estudou este problema através de uma combinação MEF-MEC em que a placa é dividida em 100 elementos finitos quadrangulares com igual número de elementos de contorno modelando o solo e o elemento finito utilizado foi o ACM (Adini, Clough e Melosh). A Tabela 4.9 é o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Tabela 4.9 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Placa	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEF	MEC	Mindlin
Mendonça (1997) HSM-MEC	MEF	MEC	Mindlin
Mendonça (1997) DKT-MEC	MEF	MEC	Mindlin
Paiva (1993)	MEC	MEC	Mindlin
Messafer e Coates (1989)	MEF	MEC	Mindlin
Gorbunov-Possadov e Serebrjany (1961)	Analiticamente		

Os resultados de Gorbunov-Possadov e Serebrjanyi (1961) apud Paiva (1993) foram calculados analiticamente. Paiva (1993) modela tanto o solo quanto a placa pelo MEC, e a interface placa-solo é dividida em 128 elementos triangulares e o contorno da placa em 32

elementos de igual comprimento. Os resultados encontrados no presente trabalho estão aproximadamente iguais aos outros autores, como mostrado na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Deslocamentos na direção  $z$  ( $\times 10^{-9}m$ ), no centro da placa

Autor	centro
Presente Trabalho	0,2371
Mendonça (1997) HSM-MEC	0,2122
Mendonça (1997) DKT-MEC	0,2124
Paiva (1993)	0,2160
Messafer e Coates (1989)	0,2400
Gorbunov-Possadov e Serebrjany (1961)	0,2600

#### 4.13 Exemplo 7: Acoplamento placa - solo sob carga distribuída

Neste exemplo a placa é quadrada com lado  $L = 5m$ , sob ação de uma carga distribuída uniformemente,  $q = 1MPa$ , em toda a sua área. A espessura da placa é  $t = 1,25m$ . Os módulos de elasticidade do solo e da placa são  $E_s = 40MPa$  e  $E_p = 21000MPa$ , respectivamente. O coeficiente de Poisson do solo é igual ao da placa,  $\nu_p = \nu_s = 0,3$ . A placa e o solo foram discretizados como a malha ilustrada na Figura 4.29, que possui 81 nós e 128 elementos.

Tabela 4.11 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Placa	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEF	MEC	Mindlin
Ribeiro (2005)	MEF	MEC	Kelvin
Almeida (2003)	MEF	MEC	Kelvin

A Tabela 4.11 é o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Os resultados referentes ao deslocamento na direção longitudinal da placa encontram-se na Tabela 4.12. Almeida (2003), como esperado, apresenta resultado igual ao presente trabalho, visto que ambos adotaram as soluções fundamentais de Mindlin para o solo. A diferença nos resultados, em relação a Ribeiro (2005) acontece porque o mesmo adotou as soluções fundamentais de Kelvin.

Tabela 4.12 – Deslocamentos na direção  $z$  ( $m$ ), no centro da placa

Presente Trabalho	Ribeiro (2005)	Almeida (2003)
0,39	0,26	0,39

## 5. Interação estaca-solo

### 5.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se as equações da interação estaca-solo, bem como as hipóteses admitidas. Na formulação do problema considera-se o elemento finito de estaca vertical e que a estaca pode receber carregamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Para as equações referentes ao solo, necessárias para a interação estaca-solo, adota-se a solução de Mindlin para os deslocamentos, já descrita em capítulos anteriores. A interação estaca-solo também foi pesquisada por outros autores, como por exemplo: Matos Filho (1999), Paiva e Matos (1999), Poulos e Madhav (1971), Poulos e Mates (1971), Ramalho e Venturini (1991) e Selvadurai e Rajapakse (1985).

### 5.2 Hipóteses

A interação estaca-solo é um problema complexo e a sua abordagem neste trabalho foi efetuada considerando as seguintes simplificações:

- Desconsideram-se tensões iniciais, tanto na estaca quanto no solo, decorrente da instalação das estacas;
- Considera-se que tanto as estacas quanto o solo possuem comportamento mecânico elástico-linear.
- O solo é admitido como um semi-espaço elástico-linear, isotrópico e homogêneo;
- Despreza-se qualquer deslocamento relativo entre a estaca e o solo.
- Desconsideram-se as forças volumétricas.

### 5.3 Estaca vertical isolada

A estaca é analisada pelo MEF e discretizada como um único elemento de barra, com quatro pontos nodais, descrita nos tópicos seguintes, bem como os carregamentos atuando na estaca.

#### 5.3.1 Estaca sob Força e Momento na direção $x_1$

Admite-se que a estaca seja submetida aos seguintes carregamentos no seu topo: momento e força aplicados na direção 1, Figura 5.1. A consequência deste carregamento, analisada nos pontos nodais, são os deslocamentos na direção 1 no topo e ao longo do fuste da estaca, e a rotação na direção 1 no topo da estaca, Figura 5.2.

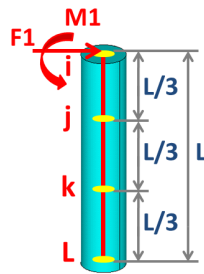


Figura 5.1 - Discretização da estaca e carregamento aplicado na direção  $x_1$

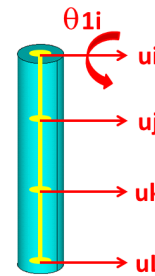


Figura 5.2 - Deslocamento da estaca devido ao carregamento aplicado na direção  $x_1$

Portanto, descrevem-se os deslocamentos deste problema com uma função polinomial do 4º grau:

$$u_{ap}(z) = A_1 z^4 + B_1 z^3 + C_1 z^2 + D_1 z + E_1 \quad (5.1)$$

Substituindo-se os valores de  $z$ , correspondentes aos pontos nodais ao longo do fuste da estaca, na Equação (5.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \text{para } z = 0 \quad E_1 &= u_i \\ \text{para } z = \frac{L}{3} \quad A_1 \left(\frac{L}{3}\right)^4 + B_1 \left(\frac{L}{3}\right)^3 + C_1 \left(\frac{L}{3}\right)^2 + D_1 \left(\frac{L}{3}\right) + E_1 &= u_j \\ \text{para } z = \frac{2L}{3} \quad A_1 \left(\frac{2L}{3}\right)^4 + B_1 \left(\frac{2L}{3}\right)^3 + C_1 \left(\frac{2L}{3}\right)^2 + D_1 \left(\frac{2L}{3}\right) + E_1 &= u_k \\ \text{para } z = L \quad A_1 (L)^4 + B_1 (L)^3 + C_1 (L)^2 + D_1 (L) + E_1 &= u_L \end{aligned} \quad (5.2)$$

A Equação referente à rotação é a derivada da Equação (5.1) em relação à  $z$ , que quando  $z$  é igualado à zero, tem-se o valor de  $x_3$  no topo da estaca:

$$\frac{du_{ap}}{dz} = 4A_1z^3 + 3B_1z^2 + 2C_1z + D_1 \quad (5.3)$$

para  $z = 0 \quad D_1 = \theta_i$

Escrevendo-se as Equações (5.2) e (5.3) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \left(\frac{L}{3}\right)^4 & \left(\frac{L}{3}\right)^3 & \left(\frac{L}{3}\right)^2 & \left(\frac{L}{3}\right) & 1 \\ \left(\frac{2L}{3}\right)^4 & \left(\frac{2L}{3}\right)^3 & \left(\frac{2L}{3}\right)^2 & \left(\frac{2L}{3}\right) & 1 \\ L^4 & L^3 & L^2 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ E_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_j \\ u_k \\ u_L \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

A Equação (5.4) pode ser escrita na seguinte forma:

$$[C]\{\alpha\} = \{\delta_{e1}\} \quad (5.5)$$

Isolando-se  $\{\alpha\}$ :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{\delta_{e1}\} \quad (5.6)$$

Substituindo a Equação (5.6) na Equação (5.1):

$$u_{ap}(z) = \{z^4 \quad z^3 \quad z^2 \quad z \quad 1\}[C]^{-1}\{\delta_{e1}\} \quad (5.7)$$

ou

$$u_{ap}(z) = \{\phi\}^T [C]^{-1}\{\delta_{e1}\} \quad (5.8)$$

e

$$u''_{ap}(z) = \{\phi''\}^T [C]^{-1}\{\delta_{e1}\} \quad (5.9)$$

Resolvendo-se a Equação (5.8) encontra-se as funções de forma:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4L^4}z^4 + \frac{45}{L^3}z^3 - \frac{85}{4L^2}z^2 + 1 \\ -\frac{9}{2L^3}z^4 + \frac{9}{L^2}z^3 - \frac{11}{2L}z^2 + z \\ \frac{81}{2L^4}z^4 - \frac{135}{2L^3}z^3 + \frac{27}{L^2}z^2 \\ -\frac{81}{4L^4}z^4 + \frac{27}{L^3}z^3 - \frac{27}{4L^2}z^2 \\ \frac{9}{2L^4}z^4 - \frac{9}{2L^3}z^3 + \frac{1}{L^2}z^2 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Fazendo-se  $\xi = z/L$ :

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4}\xi^4 + 45\xi^3 - \frac{85}{4}\xi^2 + 1 \\ -\frac{9}{2}\xi^4 L + 9\xi^3 L - \frac{11}{2}\xi^2 L + \xi L \\ \frac{81}{2}\xi^4 - \frac{135}{2}\xi^3 + 27\xi^2 \\ -\frac{81}{4}\xi^4 + 27\xi^3 - \frac{27}{4}\xi^2 \\ \frac{9}{2}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Efetuando-se o produto indicado em (5.9) encontra-se as derivadas segundas das funções de forma:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \\ \phi_3'' \\ \phi_4'' \\ \phi_5'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{270z}{L^3} - \frac{85}{2L^2} - \frac{297z^2}{L^4} \\ \frac{54z}{L^2} - \frac{11}{L} - \frac{54z^2}{L^3} \\ \frac{54}{L^2} - \frac{405z}{L^3} + \frac{486z^2}{L^4} \\ \frac{162z}{L^3} - \frac{27}{2L^2} - \frac{243z^2}{L^4} \\ \frac{2}{L^2} - \frac{27z}{L^3} + \frac{54z^2}{L^4} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

Outra consequência da estaca submetida a um esforço na direção  $x_1$  são as forças que surgem na interface e estão ilustradas na Figura 5.3.

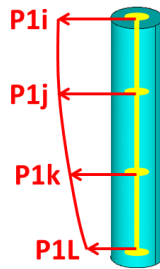


Figura 5.3 - Força na interface na direção  $x_1$

As forças de interface são descritas por uma função polinomial do 3º grau:

$$Px_1(z) = A_2 z^3 + B_2 z^2 + C_2 z + D_2 \quad (5.13)$$

Escrevendo-se a Equação (5.13) em função dos valores das forças de interface nos pontos nodais da estaca discretizada:

$$Px_1(z) = \phi_1 P_{1i} + \phi_2 P_{1j} + \phi_3 P_{1k} + \phi_4 P_{1L} \quad (5.14)$$



ou

$$Px_1(z) = \{\bar{\phi}\}^T \{P_1\} \quad (5.15)$$

Por um procedimento análogo ao descrito para a função aproximadora dos deslocamentos, Equação (5.1), calcula-se as funções de interpolação correspondentes às forças de interface  $\{\bar{\phi}\}$ , Equação (5.13), que são as seguintes:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{9z^3}{2L^3} + \frac{9z^2}{L^2} - \frac{11z}{2L} + 1 \\ \frac{27z^3}{2L^3} - \frac{45z^2}{2L^2} + \frac{9z}{L} \\ -\frac{27z^3}{2L^3} + \frac{18z^2}{L^2} - \frac{9z}{2L} \\ \frac{9z^3}{2L^3} - \frac{9z^2}{2L^2} + \frac{z}{L} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Fazendo-se  $\xi = z/L$ :

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \\ \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \\ -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \\ \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

O funcional que caracteriza a energia potencial referente à energia na direção 1 é:

$$\Pi_1 = U_1 + \Omega_1 \quad (5.18)$$

onde  $U_1$  corresponde à energia potencial de deformação e  $\Omega_1$  representa a energia potencial das cargas externas. Portanto,

$$\Pi_1 = \frac{E_p I_p}{2} \int_0^L (u_{ap}''(z))^2 dz - \int_0^L P x_1(z) u_{ap}(z) dz - F_1 u_i - M_1 \theta_{1i} \quad (5.19)$$

onde  $E_p$  é o módulo de elasticidade longitudinal da estaca,  $I_p$  é o momento de inércia da seção transversal da estaca,  $F_1$  é a força externa e  $M_1$  é o momento externo aplicados no nó  $i$  da estaca na direção  $x_1$ .

Definindo-se:

$$[K_1] = E_p I_p \int_0^L \{\phi''\} \{\phi''\}^T dz \quad (5.20)$$

$$[Q_1] = \int_0^L \{\phi\}\{\bar{\phi}\}^T dz \quad (5.21)$$

onde  $[K_i]$  é a matriz de rigidez do elemento de estaca e  $[Q_i]$  é a matriz de transformação de cargas do elemento em cargas nodais, ambas devido à ação de carregamentos aplicados na estaca na direção  $x_i$ .

Substituindo-se as Equações (5.20) e (5.21) na Equação (5.19):

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \{\delta_{e1}\}^T [K_1] \{\delta_{e1}\} + \{\delta_{e1}\}^T [Q_1] \{P_1\} - \{\delta_{e1}\}^T \{F_1\} \quad (5.22)$$

Minimizando-se o funcional (5.22) em relação às incógnitas ( $u_i$ ,  $\theta_{1i}$ ,  $u_j$ ,  $u_k$  e  $u_L$ ) obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[K_1] \{\delta_{e1}\} = \{F_1\} - [Q_1] \{P_1\} \quad (5.23)$$

onde:

$$[K_1] = \frac{E_p I_p}{40L^3} \begin{bmatrix} 23722 & 4084 & -42876 & 26838 & 7684 \\ 4084L & 808L^2 & -6912L & 3996L & -1168L \\ -42876 & -6912L & 81648 & -55404 & 16632 \\ 26838 & 3996L & -55404 & 42282 & -13716 \\ -7684 & -1168L & 16632 & -13716 & 4768 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$[Q_1] = \frac{L}{6720} \begin{bmatrix} 721 & 495 & -45 & 285 \\ 38L & 18L & 18L & 38L \\ 54 & 2430 & -486 & -486 \\ 27 & -243 & 2673 & 567 \\ 38 & -162 & 378 & 474 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\{\delta_{e1}\}^T = \{u_i \quad \theta_{1i} \quad u_j \quad u_k \quad u_L\} \quad (5.26)$$

$$\{P_1\}^T = \{P_{1i} \quad P_{1j} \quad P_{1k} \quad P_{1L}\} \quad (5.27)$$

$$\{F_1\}^T = \{F_1 \quad M_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (5.28)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez da estaca;  $\{u_p\}$  é o vetor de deslocamentos nodais da estaca;  $\{F\}$  é o vetor de forças externas;  $[Q]$  é a matriz que transforma forças no elemento em forças nodais e  $\{P_p\}$  são as forças de interface nas direções 1 e 2, e as tensões de cisalhamento na direção 3.

### 5.3.2 Estaca sob Força e Momento na direção $x_2$

Analogamente à direção  $x_1$ , descrevem-se os deslocamentos na direção  $x_2$  com uma função polinomial do 4º grau. Portanto, o funcional que caracteriza a energia potencial referente à energia na direção 2 é:

$$\Pi_2 = U_2 + \Omega_2 \quad (5.29)$$

onde  $U_2$  corresponde à energia potencial de deformação e  $\Omega_2$  representa a energia potencial das cargas externas. Portanto,

$$\Pi_2 = \frac{E_P I_P}{2} \int_0^L (v_{ap}''(z))^2 dz + \int_0^L P x_2(z) v_{ap}(z) dz - F_2 v_i - M_2 \theta_{2i} \quad (5.30)$$

onde  $F_2$  é a força externa e  $M_2$  é o momento externo aplicados no nó  $i$  da estaca na direção  $x_2$ .

Portanto, de maneira semelhante à direção  $x_1$  tem-se para a direção  $x_2$  o seguinte sistema de equações:

$$[K_2]\{\delta_{e2}\} = \{F_2\} - [Q_2]\{P_2\} \quad (5.31)$$

e pode-se afirmar que:

$$[K_2] = [K_1] \quad (5.32)$$

$$[Q_2] = [Q_1]$$

Os coeficientes das matrizes  $[K_1]$  e  $[Q_1]$  encontram-se nas Equações (5.24) e (5.25), respectivamente.

Os vetores  $\{\delta_{e2}\}^T$ ,  $\{P_2\}^T$  e  $\{F_2\}$  são, respectivamente, os seguintes:

$$\{\delta_{e2}\}^T = \{v_i \quad \theta_{2i} \quad v_j \quad v_k \quad v_L\} \quad (5.33)$$

$$\{P_2\}^T = \{P_{2i} \quad P_{2j} \quad P_{2k} \quad P_{2L}\} \quad (5.34)$$

$$\{F_2\} = \{F_2 \quad M_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (5.35)$$

### 5.3.3 Estaca sob Força na direção $x_3$

Considera-se um esforço, na direção  $x_3$ , aplicado no topo da estaca, Figura 5.4. O resultado deste carregamento, analisada nos pontos nodais, são os deslocamentos na direção 3 no topo e ao longo do fuste da estaca, Figura 5.5.

Portanto, calcula-se a solução dos deslocamentos deste problema com uma função polinomial do 3º grau:

$$w_{ap}(z) = A_5 z^3 + B_5 z^2 + C_5 z + D_5 \quad (5.36)$$

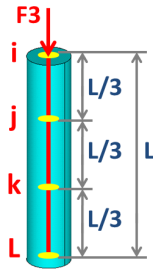


Figura 5.4 - Discretização da estaca e carregamento aplicado na direção  $x_3$

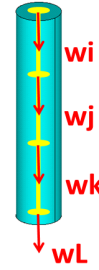


Figura 5.5 - Deslocamento da estaca devido ao carregamento aplicado na direção  $x_3$

Derivando-se a Equação (5.36) em relação à  $z$ :

$$\frac{dw_{ap}}{dz} = 3A_5z^2 + 2B_5z + C_5 \quad (5.37)$$

Como descrito para o deslocamento na direção  $x_1$ , para a direção  $x_3$  considerando-se a Equação (5.36) tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{L}{3}\right)^3 & \left(\frac{L}{3}\right)^2 & \left(\frac{L}{3}\right) & 1 \\ \left(\frac{2L}{3}\right)^3 & \left(\frac{2L}{3}\right)^2 & \left(\frac{2L}{3}\right) & 1 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_5 \\ B_5 \\ C_5 \\ D_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \\ w_L \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

A Equação (5.38) pode ser escrita na seguinte forma:

$$[C_3]\{\alpha_3\} = \{\delta_{e3}\} \quad (5.39)$$

Isolando-se  $\{\alpha_3\}$ :

$$\{\alpha_3\} = [C_3]^{-1}\{\delta_{e3}\} \quad (5.40)$$

Substituindo a Equação (5.40) na Equação (5.36):

$$w_{ap}(z) = \{z^3 \quad z^2 \quad z \quad 1\}[C_3]^{-1}\{\delta_{e3}\} \quad (5.41)$$

ou

$$w_{ap}(z) = \{\bar{\phi}\}^T [C_3]^{-1}\{\delta_{e3}\} \quad (5.42)$$

e

$$w'_{ap}(z) = \{\bar{\phi}'\}^T [C_3]^{-1}\{\delta_{e3}\} \quad (5.43)$$

onde  $\{\bar{\phi}\}$  encontra-se nas Equações (5.16) e (5.17) e, portanto, a derivada da função de forma é a seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1' \\ \phi_2' \\ \phi_3' \\ \phi_4' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{27z^2}{2L^3} + \frac{18z}{L^2} - \frac{11}{2L} \\ \frac{81z^2}{2L^3} - \frac{45z}{L^2} + \frac{9}{L} \\ -\frac{81z^2}{2L^3} + \frac{36z}{L^2} - \frac{9}{2L} \\ \frac{27z^2}{2L^3} - \frac{9z}{L^2} + \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

Aplicando-se um esforço na direção  $x_3$  surgem forças na interface da estaca. Sendo que as forças de interface no fuste da estaca, referentes à direção  $x_3$ , são descritas por uma função polinomial do 2º grau:

$$\tau_p(z) = A_6 z^2 + B_6 z + C_6 \quad (5.45)$$

Ao contrário do fuste, cujas forças de interface são tensões cisalhantes, na base da estaca têm-se uma distribuição de tensão normal, uniforme nesta área, cuja função de aproximação para a base é constante e igual a 1:

$$\varphi_b(z = L) = 1 \quad (5.46)$$

Escrevendo-se a Equação (5.45) em função dos valores das forças de interface nos pontos nodais da estaca discretizada:

$$\tau_p(z) = \varphi_1 \tau_i + \varphi_2 \tau_j + \varphi_3 \tau_k \quad (5.47)$$

ou

$$\tau_p(z) = \{\bar{\varphi}\}^T \{\tau\} \quad (5.48)$$

Por um procedimento análogo ao descrito para a função aproximadora dos deslocamentos na direção  $x_1$  calculam-se as funções de interpolação correspondentes às forças de interface  $\{\bar{\varphi}\}$ , Equação (5.48), que são as seguintes:

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9z^2}{2L^2} - \frac{9z}{2L} + 1 \\ -\frac{9z^2}{L^2} + \frac{6z}{L} \\ \frac{9z^2}{2L^2} - \frac{3z}{2L} \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

Fazendo-se  $\xi = z/L$ :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2} \xi^2 - \frac{9}{2} \xi + 1 \\ -9 \xi^2 + 6 \xi \\ \frac{9}{2} \xi^2 - \frac{3}{2} \xi \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

O funcional que caracteriza a energia potencial referente à energia na direção 3 é:

$$\Pi_3 = U_3 + \Omega_3 \quad (5.51)$$

onde  $U_3$  corresponde à energia potencial de deformação e  $\Omega_3$  representa a energia potencial das cargas externas. Portanto,

$$\Pi_3 = \frac{E_p A_p}{2} \int_0^L (w'_{ap}(z))^2 dz - \int_0^L \tau_p(z) w_{ap}(z) dz - F_3 w_i + \int_{A_p} \sigma_b w_L dA_p \quad (5.52)$$

onde  $A_p$  é a área da seção transversal da estaca e  $F_3$  é a força externa aplicada no nó  $i$  da estaca na direção  $x_3$ .

Portanto, analogamente aos procedimentos realizados para a direção  $x_1$  tem-se para a direção  $x_3$  o seguinte sistema de equações:

$$[K_3]\{\delta_{e3}\} = \{F_3\} - [Q_3]\{P_3\} \quad (5.53)$$

onde:

$$[K_3] = \frac{E_p A_p}{40L} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$[Q_3] = \frac{L}{80} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 36 & -9 & 0 \\ 3 & -18 & 45 & 0 \\ 7 & -20 & 23 & \frac{80}{L} \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$\{\delta_{e3}\}^T = \{w_i \ w_j \ w_k \ w_L\} \quad (5.56)$$

$$\{P_3\}^T = \{\tau_{pi} \ \tau_{pj} \ \tau_{pk} \ \sigma_b\} \quad (5.57)$$

$$\{F_3\} = \{F_3 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (5.58)$$

### 5.3.4 Estaca sob carregamentos nas direções $x_1, x_2$ e $x_3$

Após análise da estaca submetida a carregamentos em cada direção separadamente considera-se a possibilidade de atuação desses carregamentos simultaneamente, como ilustrado na Figura 5.6.

O funcional que caracteriza a energia potencial referente às direções 1, 2 e 3 é:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad (5.59)$$

onde  $\Pi_i$  é a energia potencial devido à energia na direção  $i$  e estas já foram descritas nos subitens anteriores.

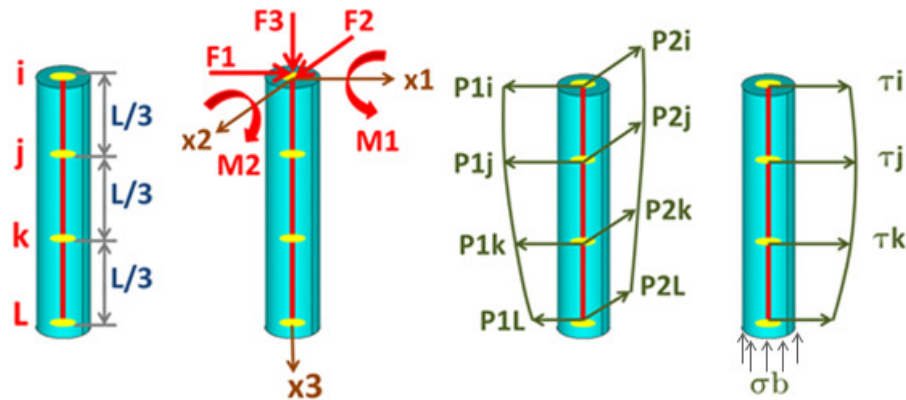


Figura 5.6 - Estaca vertical sob carregamentos nas direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$

Finalmente tem-se um sistema de equações, cujas soluções são os deslocamentos e rotações, do elemento de estaca submetida à carregamentos nas direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$ :

$$[K]_{14 \times 14} \{u_p\}_{14 \times 1} = \{F\}_{14 \times 1} - [Q]_{14 \times 12} \{P_p\}_{12 \times 1} \quad (5.60)$$

onde  $\{u_p\}$  é o vetor dos deslocamentos da estaca de dimensão  $14 \times 1$  e sempre igual a:

$$\{u_p\}^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{1i} \ \theta_{2i} \ u_j \ v_j \ w_j \ u_k \ v_k \ w_k \ u_L \ v_L \ w_L\} \quad (5.61)$$

$\{F\}$  é o vetor do carregamento externo de dimensão  $14 \times 1$  e:

$$\{F\}^T = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ M_1 \ M_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (5.62)$$

$\{P_p\}$  é o vetor das forças de interface de dimensão  $12 \times 1$  e:

$$\{P_p\}^T = \{P_{1i} \ P_{2i} \ \tau_{pi} \ P_{1j} \ P_{2j} \ \tau_{pj} \ P_{1k} \ P_{2k} \ \tau_{pk} \ P_{1L} \ P_{2L} \ \sigma_b\} \quad (5.63)$$

A matriz de rigidez  $[K]$  tem dimensão  $14 \times 14$ :

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0 & b_{15} & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & c_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & 0 & a_{25} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} & 0 & b_{23} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & 0 & b_{25} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & a_{34} & 0 & 0 & a_{35} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & 0 & b_{32} & 0 & b_{33} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & b_{35} & 0 \\ 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 & c_{24} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{42} & 0 & a_{43} & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & a_{45} & 0 & 0 \\ 0 & b_{41} & 0 & 0 & b_{42} & 0 & b_{43} & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 & b_{45} & 0 \\ 0 & 0 & c_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{32} & 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{34} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{52} & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 \\ 0 & b_{51} & 0 & 0 & b_{52} & 0 & b_{53} & 0 & 0 & b_{54} & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & c_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{42} & 0 & 0 & c_{43} & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

onde  $a_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[K_1]$  encontrados na Equação (5.24);  $b_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[K_2]$ , de acordo com a Equação (5.32) tem-se que  $[K_2] = [K_1]$ , portanto,  $b_{ij} = a_{ij}$ ; e  $c_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[K_3]$  encontrados na Equação (5.54). A matriz de transformação de cargas do elemento em cargas nodais  $[Q]$  tem dimensão  $14 \times 12$ :

$$[Q] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{12} & 0 & 0 & d_{13} & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & 0 & 0 & e_{12} & 0 & 0 & e_{13} & 0 & 0 & e_{14} & 0 \\ 0 & 0 & f_{11} & 0 & 0 & f_{12} & 0 & 0 & f_{13} & 0 & 0 & f_{14} \\ d_{21} & 0 & 0 & d_{22} & 0 & 0 & d_{23} & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ 0 & e_{21} & 0 & 0 & e_{22} & 0 & 0 & e_{23} & 0 & 0 & e_{24} & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 & d_{32} & 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & d_{34} & 0 & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 & 0 & e_{32} & 0 & 0 & e_{33} & 0 & 0 & e_{34} & 0 \\ 0 & 0 & f_{21} & 0 & 0 & f_{22} & 0 & 0 & f_{23} & 0 & 0 & f_{24} \\ d_{41} & 0 & 0 & d_{42} & 0 & 0 & d_{43} & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & e_{41} & 0 & 0 & e_{42} & 0 & 0 & e_{43} & 0 & 0 & e_{44} & 0 \\ 0 & 0 & f_{31} & 0 & 0 & f_{32} & 0 & 0 & f_{33} & 0 & 0 & f_{34} \\ d_{51} & 0 & 0 & d_{52} & 0 & 0 & d_{53} & 0 & 0 & d_{54} & 0 & 0 \\ 0 & e_{51} & 0 & 0 & e_{52} & 0 & 0 & e_{53} & 0 & 0 & e_{54} & 0 \\ 0 & 0 & f_{41} & 0 & 0 & f_{42} & 0 & 0 & f_{43} & 0 & 0 & f_{44} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

onde  $d_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[Q_1]$  encontrados na Equação (5.25);  $e_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[Q_2]$ , de acordo com a Equação (5.32) tem-se que  $[Q_2] = [Q_1]$ , portanto,  $e_{ij} = d_{ij}$ ; e  $f_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $[Q_3]$  encontrados na Equação (5.55).



### 5.3.5 Solo e interação com a estaca

A Figura 5.7 representa um elemento de estaca no meio contínuo considerando a solução fundamental de Mindlin para deslocamentos. Interpretando as forças de interação estaca-solo como uma linha de carga no meio contínuo e reescrevendo-se a Equação (3.114) tem-se:

$$C_{ij}(P)u_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(P, S)p_j(S)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(P, S)b_j(S)d\Omega \quad (5.66)$$

$$+ \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(P, S)q_j^e(S)d\Gamma$$

onde  $q_j^e$  são as forças de interação aplicadas ao sólido tridimensional e  $\Gamma_e$  são as linhas de carga onde estão aplicadas as forças  $q_j^e$ .

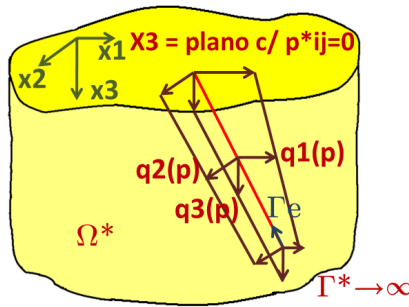


Figura 5.7 - Domínio tridimensional com linhas de carga

Considerando-se o problema da interação estaca-solo fazem-se algumas simplificações na Equação (5.66). Desprezam-se as parcelas referentes às forças volumétricas e as situações de escavações, as duas primeiras parcelas da Equação (5.66) são desconsideradas. Portanto,

$$C_{ij}u_i = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*q_j^e d\Gamma \quad (5.67)$$

Para esse problema  $C_{ij} = [I]$ , portanto:

$$u_i = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*q_j^e d\Gamma \quad (5.68)$$

### 5.3.6 Discretização da Equação Integral

As equações integrais (5.68) podem ser expressas por funções interpoladoras das forças de interação, ou seja:

$$u_i = \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(P, S) \bar{\phi}_j(S) d\Gamma(S) P_j(S) \quad (5.69)$$

Escrevendo-se a expressão da integral numérica (5.68) obtém-se:

$$u_i = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{ng} u_{ij}^*(P, S) \bar{\phi}_j(S) w_k P_j(S) \quad (5.70)$$

onde  $ng$  é o número de pontos de Gauss e  $w_k$  é peso de Gauss correspondente ao número  $k$ , ou

$$\{u_s\} = \sum \left[ \int [U^*] \{\bar{\phi}\} d\Gamma \right] \{P_s\} \quad (5.71)$$

onde  $\{u_s\}$  é o vetor de deslocamentos da estaca,  $[U^*]$  é a matriz de soluções fundamentais de Mindlin,  $\{\bar{\phi}\}$  é o vetor de funções de forma para as forças de interação e  $\{P_s\}$  é o vetor de forças na interface estaca-solo.

O vetor da função de forma  $\{\bar{\phi}\}$  referente à direção  $x_1$  é a Equação (5.17), a função de interpolação é um polinômio do terceiro grau e, e o vetor da função de forma  $\{\bar{\phi}\}$  referente à direção  $x_2$  é igual ao da direção  $x_1$ . Para a direção  $x_3$ , a função de interpolação é aproximada por um polinômio do segundo grau e, o vetor da função de forma  $\{\bar{\phi}\}$  é a Equação (5.50). Sabe-se que  $\xi = x_3(s, p)/L$  e, da Equação (5.46), tem-se que  $\bar{\phi}_4 = 1$ .

Os laços na implementação computacional são: até o número de nós, até o número de estacas e até o número de pontos de Gauss. Escrevendo-se a Equação (5.71) para uma estaca, por exemplo, para a solução fundamental  $u_{ij}^*$ , sendo  $i$  a direção da força e  $j$  a direção do deslocamento:

$$\begin{Bmatrix} u_{S_{di}} \\ u_{S_{dj}} \\ u_{S_{dk}} \\ u_{S_{dL}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{fdi} \bar{\phi}_{1d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdi} \bar{\phi}_{2d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdi} \bar{\phi}_{3d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdi} \bar{\phi}_{4d} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{fdj} \bar{\phi}_{1d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdj} \bar{\phi}_{2d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdj} \bar{\phi}_{3d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdj} \bar{\phi}_{4d} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{fdk} \bar{\phi}_{1d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdk} \bar{\phi}_{2d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdk} \bar{\phi}_{3d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdk} \bar{\phi}_{4d} d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{fdL} \bar{\phi}_{1d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdL} \bar{\phi}_{2d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdL} \bar{\phi}_{3d} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{fdL} \bar{\phi}_{4d} d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{di} \\ P_{dj} \\ P_{dk} \\ P_{dL} \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

onde os sub índices  $i, j, k, L$  referem-se aos nós da estaca;  $f$  é a direção da força e  $d$  é a direção do deslocamento.

Considerando-se as soluções fundamentais nas direções  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , e analogamente à Equação (5.71):

$$\{u_s\}_{12 \times 1} = [G]_{12 \times 12} \{P_s\}_{12 \times 1} \quad (5.73)$$

onde  $\{u_s\}_{12 \times 1}$  é o vetor dos deslocamentos do solo e:

$$\{u_s\}^T = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_j \ v_j \ w_j \ u_k \ v_k \ w_k \ u_L \ v_L \ w_L\} \quad (5.74)$$

$\{P_s\}_{12 \times 1}$  é o vetor de forças de interação na interface estaca-solo e:

$$\{P_s\}^T = \{P_{1i} \ P_{2i} \ \tau_{pi} \ P_{1j} \ P_{2j} \ \tau_{pj} \ P_{1k} \ P_{2k} \ \tau_{pk} \ P_{1L} \ P_{2L} \ \sigma_b\} \quad (5.75)$$

$[G]_{12 \times 12}$  é formada por componentes das soluções fundamentais do solo:

$$[G] = \sum \int_{\Gamma_e} \int [U^*] \{\bar{\phi}\} d\Gamma \quad (5.76)$$

Como exemplo de alguns coeficientes de  $[G]_{12 \times 12}$  têm-se:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{11_1} \phi_{1u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12_1} \phi_{1v} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{13_1} \phi_{1w} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11_1} \phi_{2u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12_1} \phi_{2v} d\Gamma & \dots \\ \int_{\Gamma} u_{21_1} \phi_{1u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22_1} \phi_{1v} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{23_1} \phi_{1w} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21_1} \phi_{2u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22_1} \phi_{2v} d\Gamma & \dots \\ \int_{\Gamma} u_{31_1} \phi_{1u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{32_1} \phi_{1v} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{33_1} \phi_{1w} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{31_1} \phi_{2u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{32_1} \phi_{2v} d\Gamma & \dots \\ \int_{\Gamma} u_{11_2} \phi_{1u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12_2} \phi_{1v} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{13_2} \phi_{1w} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11_2} \phi_{2u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12_2} \phi_{2v} d\Gamma & \dots \\ \int_{\Gamma} u_{21_2} \phi_{1u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22_2} \phi_{1v} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{23_2} \phi_{1w} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21_2} \phi_{2u} d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22_2} \phi_{2v} d\Gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

onde o sub índice  $i$  da solução fundamental  $u_{fdi}$  refere-se ao ponto de integração, ponto fonte.

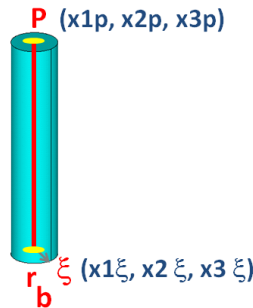


Figura 5.8 – Estaca

Calculam-se os coeficientes da matriz  $[G]$  como já descrito anteriormente. Há uma exceção que se refere à solução fundamental  $u_{33}^*$  quando o ponto de integração for o nó  $L$  da estaca. Nesse caso, a integral deve ser calculada analiticamente, porque fazendo essas considerações transforma-se a integral no contorno em uma integral em coordenadas polares. Assim, da Equação (3.136):

$$u_{s_{3L}} = \int_{\Omega} u_{33}^* \sigma_b d\Omega = \sigma_b \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} u_{33}^* r_b dr_b d\theta = 2\pi \sigma_b \int_0^{R_0} u_{33}^* r_b dr_b \quad (5.78)$$

A solução fundamental  $u_{33}^*$  multiplicada por  $r$  é:

$$u_{33}^* r = \frac{r_3^2}{r^3} r_b + \frac{(3-4\nu)}{r} r_b + \frac{6czR_3^2}{R^5} r_b + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} r_b + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} r_b \quad (5.79)$$

Pelas Equações (3.98) e Figura 5.8 conclui-se que:

$$\begin{aligned} r_b &= \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1p})^2 + (x_{2\xi} - x_{2p})^2} \\ r &= \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1p})^2 + (x_{2\xi} - x_{2p})^2 + (x_{3\xi} - x_{3p})^2} \\ r &= \sqrt{r_b^2 + (L - x_{3p})^2} \\ R &= \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1s})^2 + (x_{2\xi} - x_{2s})^2 + (x_{3\xi} - x_{3s})^2} \\ x_{1s} &= x_{1p} \quad x_{2s} = x_{2p} \quad x_{3s} = -x_{3p} \\ R &= \sqrt{(x_{1\xi} - x_{1p})^2 + (x_{2\xi} - x_{2p})^2 + (L + x_{3p})^2} \\ R &= \sqrt{r_b^2 + (L + x_{3p})^2} \\ c &= x_{3p} \quad z = x_{3\xi} = L \\ r_3 &= x_{3\xi} - x_{3p} = L - x_{3p} \\ R_3 &= x_{3\xi} - x_{3s} = L + x_{3p} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Substituindo-se as Equações (5.80) e (5.79) na Equação (5.78) e calculando-se a integral analiticamente tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} u_{s3L} &= \sigma_b 2\pi [K_d] \left\{ \left[ \frac{-(L - x_{3p})^2}{R_m} + (L - x_{3p}) \right] \right. \\ &\quad + (3 - 4\nu)[R_m - (L - x_{3p})] \\ &\quad + 6x_{3p}L(L + x_{3p})^2 \left[ \frac{-1}{3R_n^3} + \frac{1}{3(L + x_{3p})^3} \right] \\ &\quad + [8(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)][R_n - (L + x_{3p})] \\ &\quad \left. + [(3 - 4\nu)(L + x_{3p})^2 - 2x_{3p}L] \left[ \frac{-1}{R_n} + \frac{1}{(L + x_{3p})} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.81)$$

onde

$$\begin{aligned}
K_d &= \frac{1 + \nu}{8\pi E(1 - \nu)} \\
R_0 &= \frac{\text{diâmetro}}{2} \\
R_m &= \sqrt{R_0^2 + (L - x_{3p})^2} \\
R_n &= \sqrt{R_0^2 + (L + x_{3p})^2}
\end{aligned} \tag{5.82}$$

#### 5.4 Interação Estaca-Solo

Considerando-se as condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio ao longo da interface estaca solo pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned}
\{u_s\} &= \{u_p\} \\
\{P_s\} + \{P_p\} &= 0
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Substituindo-se o sistema de equações do solo (5.73) no sistema de equações da estaca Equação (5.60):

$$[K]_{14 \times 14} \{u_p\}_{14 \times 1} = \{F\}_{14 \times 1} - [Q]_{14 \times 12} [G]_{12 \times 12}^{-1} \{u_s\}_{12 \times 1} \tag{5.84}$$

Em relação à Equação (5.84) define-se que:

$$[M]_{14 \times 12} = [Q]_{14 \times 12} [G]_{12 \times 12}^{-1} \tag{5.85}$$

A matriz  $[M]_{14 \times 12}$  ignora as contribuições das rotações nas direções  $x_1$  e  $x_2$ . Mas para que a resolução do sistema de equações (5.84) seja possível necessita-se que  $[M]$  tenha dimensão  $14 \times 14$ . Portanto acrescentam-se duas colunas de zero à matriz  $[M]$ . Estas colunas de zero serão a quarta e a quinta, já que são estas as posições que se referem às rotações nas direções  $x_1$  e  $x_2$  e esta nova matriz será denominada  $[\bar{M}]_{14 \times 14}$ . Feitas estas considerações escreve-se a Equação (5.84) da seguinte forma:

$$[[K]_{14 \times 14} + [\bar{M}]_{14 \times 14}] \{U\}_{14 \times 1} = \{F\}_{14 \times 1} \tag{5.86}$$

#### 5.5 Exemplo 8: Interação estaca-solo

Verificou-se a eficiência do modelo acoplado e da implementação computacional, referente à estaca vertical submetida à carregamentos nas direções  $x_1$  e  $x_3$  com os exemplos ilustrados na Figura 5.9. Como descrito, a discretização da estaca é um elemento finito com quatro nós. A estaca considerada é cilíndrica e apresenta diâmetro  $D = 0,6096m$ ,

comprimento  $L = 6,096m$ , módulo de elasticidade  $E_p = 2,1111 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p = 0,2$ . O solo é simplificado como um semi-espaço finito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E_s = 2,1111 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,2$ .

Consideraram-se três carregamentos aplicados na estaca individualmente e estes estão ilustrados na Figura 5.9. A força na direção  $x_1$  tem valor  $F_1 = 181,6kN$ , o momento na direção  $x_1$  é igual a  $M_1 = 95,826kN$ , e a força aplicada na direção  $x_3$  tem valor  $F_3 = 726,4kN$ .

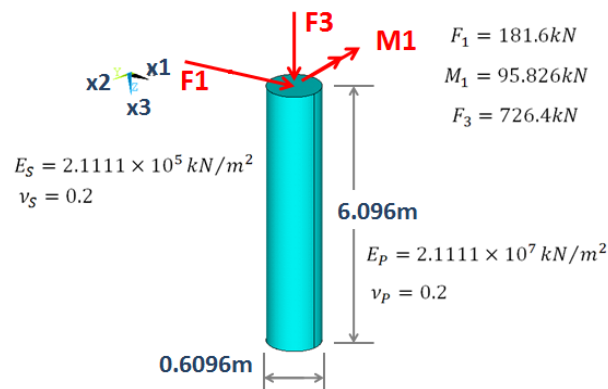


Figura 5.9 - Estaca vertical sob carregamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$

Os resultados, referentes aos deslocamentos na direção  $x_1$  resultante do carregamento  $F_1 = 181,6kN$ , obtidos pela formulação utilizada no presente trabalho, bem como, a comparação com outros autores encontra-se na Figura 5.10.

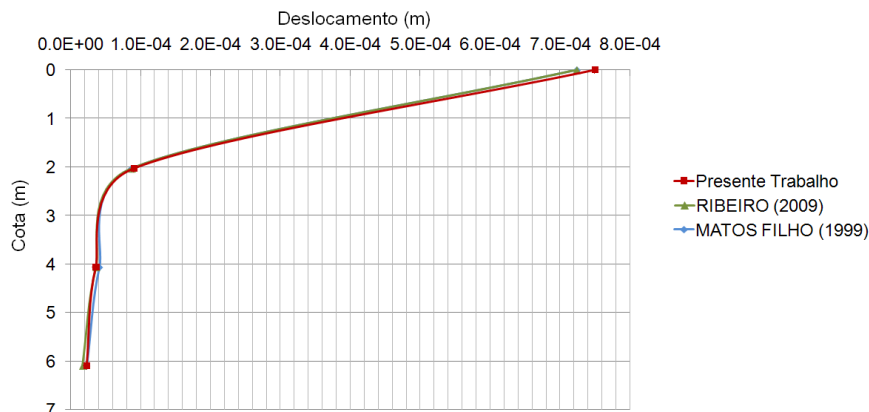


Figura 5.10 - Deslocamento na direção  $x_1$  resultante do esforço  $F_1 = 181,6kN$

Os deslocamentos na direção  $x_1$  referente ao carregamento  $M_1 = 95,826kN \cdot m$ , obtidos pela formulação utilizada no presente trabalho, bem como, a comparação com outros autores encontra-se na Figura 5.11.

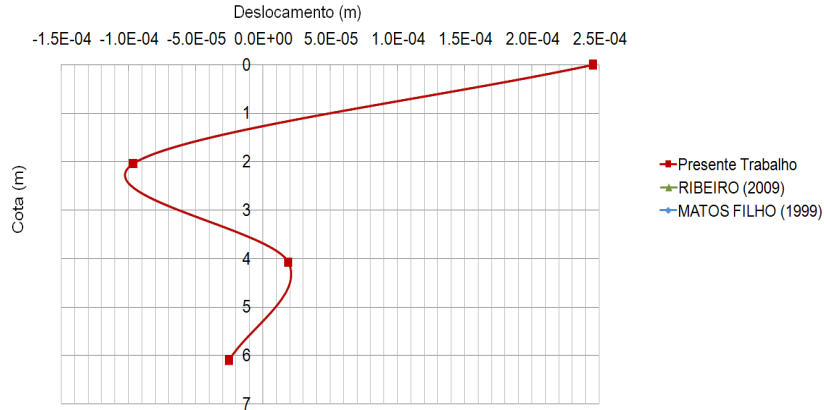


Figura 5.11 - Deslocamento na direção  $x_1$  resultante do carregamento  $M_1 = 95,826kN \cdot m$

Os resultados, referentes aos deslocamentos na direção  $x_3$  resultante do carregamento  $F_3 = 726,4kN$ , do Presente Trabalho, bem como, a comparação com outros autores encontra-se na Figura 5.12. Ribeiro (2009) adotou as soluções fundamentais de Kelvin e o método de elemento de contorno infinito para modelar o solo; e o MEF para modelar a estaca. Matos Filho (1999) considerou as soluções fundamentais de Mindlin, para o solo modelado pelo MEC. A Tabela 5.1 é o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

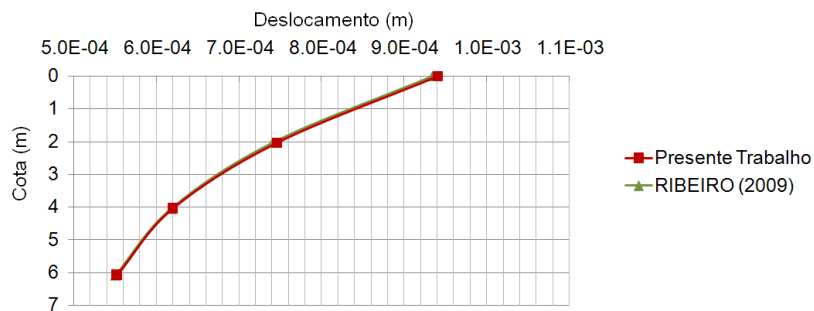


Figura 5.12 - Deslocamento na direção  $x_3$  resultante do carregamento  $F_3 = 726,4kN$

Os resultados do presente trabalho, referente à estaca vertical submetida à carregamentos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são aproximadamente iguais aos dos outros autores neste exemplo, em que todos modelaram a estaca pelo MEF, o solo pelo MEC, sendo que Ribeiro (2009) adotou as soluções fundamentais de Kelvin, para o solo e o MEC infinito e no presente trabalho e em Matos Filho (1999) tem-se as soluções fundamentais de Mindlin.

Tabela 5.1 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Estaca	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEF	MEC	Mindlin
Ribeiro (2009)	MEF	MEC – infinito	Kelvin
Matos Filho (1999)	MEF	MEC	Mindlin



## 6. Acoplamento solo – radier estaqueado – superestrutura

### 6.1 Introdução

Este capítulo descreve o acoplamento solo – radier estaqueado – superestrutura, cujas partes presentes no acoplamento foram descritas nos capítulos anteriores. Sabe-se que o solo foi representado via equações integrais, considerando um meio contínuo semi-infinito utilizando a solução fundamental de Mindlin. A interação do edifício com o solo é feita através de uma placa de fundação estaqueada.

Para o solo foram escritas as equações integrais para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  dos pontos nodais dos elementos de contorno do meio contínuo, resultando em um sistema de equações lineares em função da reação do solo nos pontos das células da interface placa-solo.

A estaca foi representada por elemento finito unidimensional, definido por quatro pontos nodais, e sua influência no solo foi suposta como uma linha de carga. As estacas são verticais e podem ser solicitadas por forças horizontais, verticais e momentos fletores aplicados no seu topo. Os esforços horizontais da interação estaca-solo serão aproximados por uma função polinomial do quarto grau e o esforço vertical por um polinômio do terceiro grau. Os graus de liberdade para a estaca são os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  e as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  para o topo da estaca e os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  para os demais nós. Os blocos são representados por uma placa de rigidez muito grande.

A superestrutura foi modelada em teoria de primeira ordem via MEF com elementos de barras para os pilares e as vigas e com elementos de cascas para as lajes. O elemento de casca utilizado é o elemento plano de casca, onde se acopla o elemento de placa DKT,

descrito em Batoz, Bathe e Ho (1980), com o elemento de membrana, proveniente da formulação livre, proposto em Bergan e Felippa (1985). Sobre a análise estrutural do edifício citam-se algumas pesquisas desenvolvidas no SET-EESC-USP: Bezerra (1995), Lindquist (2002), Oliveira (2001b), Rezende (1990) e Rios (1991).

O acoplamento solo–radier estaqueado–superestrutura<sup>1,2,3</sup> também foi pesquisado por Mendonça (1997). A ISE adotando a solução fundamental de Kelvin foi descrita em Almeida (2003), Moser, Duenser e Beer (2004) e Ribeiro (2009). Outros autores que também pesquisam problemas com as características descritas são: Chow (2007) e Liang, Chen e Han (2009).

## 6.2 Sistemas de equações do MEF para o pórtico espacial

A matriz de rigidez local do elemento de barra para o pórtico espacial apresenta seis graus de liberdade: três deslocamentos para  $u, v, w$ ; três rotações  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ , como descrito em Mendonça e Paiva (2004) e indicado na Figura 6.1.

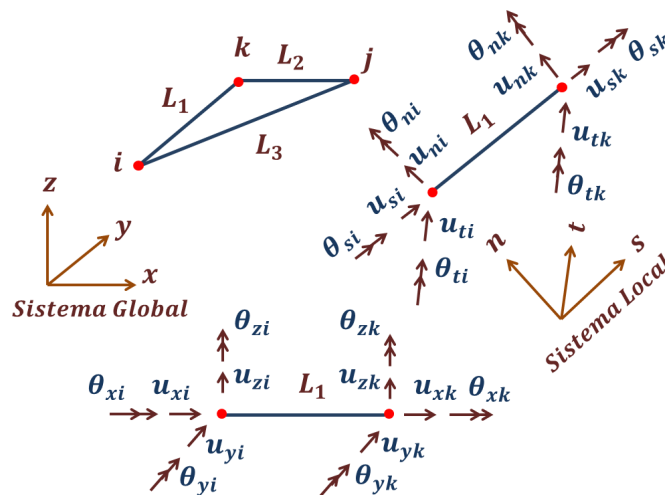


Figura 6.1 - Sistema Local e Global

O sistema de equações desse elemento pode ser obtido a partir da minimização da energia de deformação.

<sup>1</sup> Mendonça e Paiva, 2000.

<sup>2</sup> Id., 2003.

<sup>3</sup> Id., 2004.

Se forem adotadas as seguintes interpolações para as variáveis: variação cúbica para  $v$  e  $w$ ; variação linear para  $u, \theta_z$  e um polinômio quadrático para  $\theta_x, \theta_y$ , o sistema de equações resultante da minimização do funcional é o seguinte:

$$K_{pl} U_{pl} = f_{pl} \tag{6.1}$$

com

$$U_{pl}^T = (u_x^i \quad u_y^i \quad u_z^i \quad \theta_x^i \quad \theta_y^i \quad \theta_z^i \quad u_x^k \quad u_y^k \quad u_z^k \quad \theta_x^k \quad \theta_y^k \quad \theta_z^k)$$

$$f_{pl}^T = (p_x^i \quad p_y^i \quad p_z^i \quad m_x^i \quad m_y^i \quad m_z^i \quad p_x^k \quad p_y^k \quad p_z^k \quad m_x^k \quad m_y^k \quad m_z^k)$$

$$K_{pl} = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ & & & & & & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ & & & & & & & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}$$

*Simétrico*

onde  $A$  denota a área da barra;  $I_x, I_y$  são os momentos de inércia em x, y;  $I_z$  é o momento de inércia à torção;  $L$  é o comprimento e  $E$  é o módulo de elasticidade da barra.

Já que a expressão (6.1) está em coordenadas locais é necessário que as equações no sistema local sejam transformadas para um sistema global comum, para possibilitar o agrupamento das contribuições de barras posicionadas livremente no espaço tridimensional. Assim, o sistema ( $l$ ) em coordenadas globais fica:

$$K_p U_p = f_p \tag{6.2}$$

Com

$$K_p = \beta^T K_{pl} \beta, \quad f_p = \beta^T f_l,$$

onde  $\beta$  é a seguinte matriz de rotações detalhada em Weaver e Gere (1990).

### 6.3 Acoplamento solo - radier estaqueado - superestrutura

Como um exemplo de análise da ISE em edifícios, além dos já citados acrescenta-se Moura (1995) e Ramalho e Correa (1991). Outro subsistema do problema de interação está associado às regiões em que são mobilizadas forças de contato entre o radier e o pórtico espacial, Figura 6.2.b. Dos seis graus de liberdade do vetor de deslocamentos do pórtico no sistema global da estrutura (os deslocamentos horizontais são vinculados rigidamente e a rotação de torção é admitida livre), de forma que apenas seis graus de liberdade (deslocamento vertical, rotações de flexão) são efetivamente compatibilizados com aqueles definidos na placa. As regiões de interação e suas correspondentes forças estão indicadas na Figura 6.2.

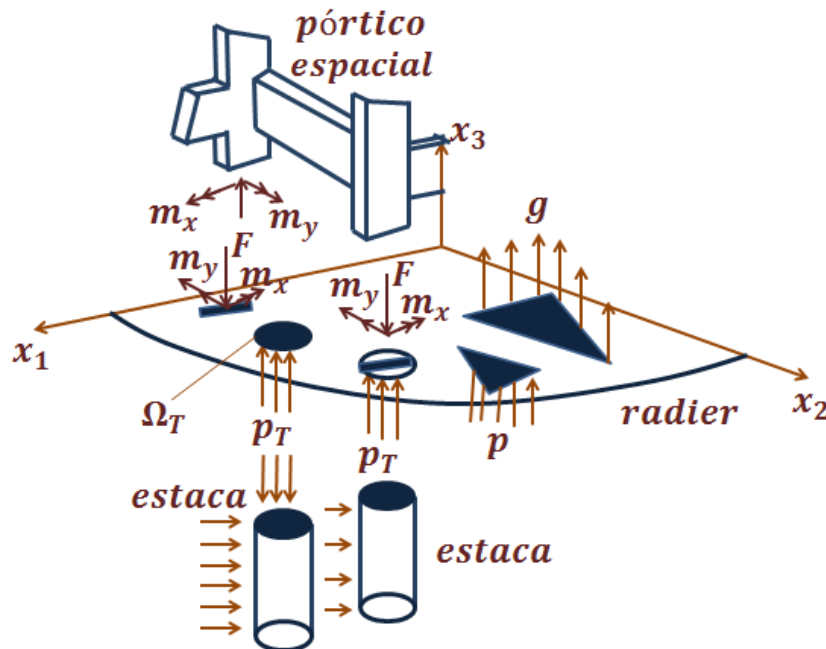


Figura 6.2 - Forças interativas do problema pórtico-radier estaqueado

Na análise solo-estaca-radier, também pesquisada por Poulos (1994) e Davies e Poulos (1972), a atuação da interação estaca-solo é tal que equivale à tensão normal no topo da estaca ( $\sigma_T$ ), resultante da força total ( $N_o$ ) mobilizada na estaca e da sua área transversal, Figura 6.3.

Da equação (5.52), a representação integral de  $p_3$  é:

$$p_3 = \int_{\Gamma_p} u_{33}^* \tau_p d\Gamma_p + \int_{\Gamma_b} u_{33}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (6.3)$$

A tensão no topo da estaca é a divisão da equação (6.3) pela área da base da estaca:

$$\sigma_E = \frac{N_0}{A_b} = C_1 \tau_i + C_2 \tau_j + C_3 \tau_k + C_4 \sigma_b \tag{6.4}$$

onde:  $C_1 = \frac{L}{2R_b}$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = \frac{3L}{2R_b}$  e  $C_4 = 1$ .

O funcional de energia da placa para essas regiões pode ser escrito como:

$$\pi = \pi_r - \sum_{k=1}^{N_{pilar}} u_{zk} F_k - \sum_{k=1}^{N_{pilar}} \theta_{xk} m_{xk} - \sum_{k=1}^{N_{pilar}} \theta_{yk} m_{yk} \tag{6.5}$$

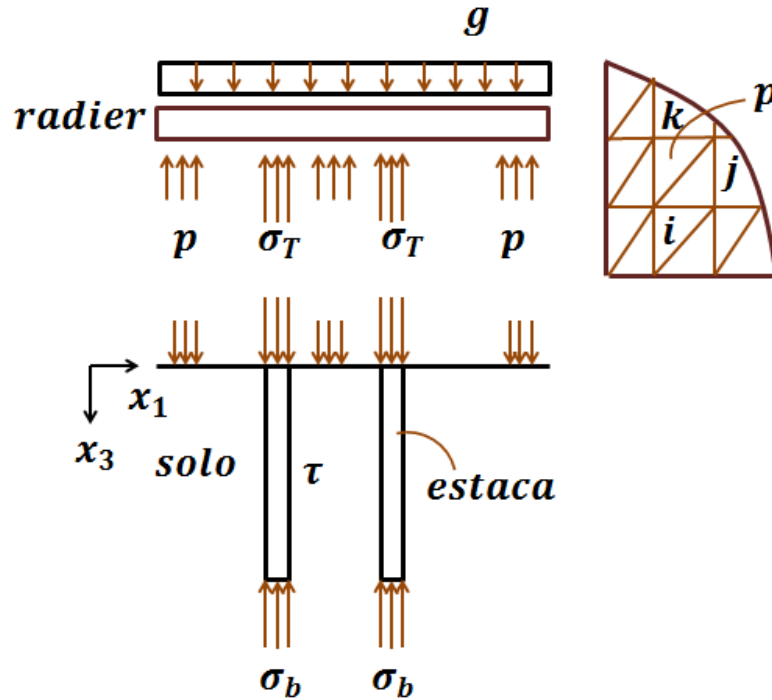


Figura 6.3 - Interação solo-estaca-radier

Na estaca, quando o funcional é escrito para um elemento finito com a barra do pórtico ligado no nó k, tem-se

$$\Pi_l = \frac{1}{2} U_r^T \tilde{K}_r U_r - U_r^T \tilde{F}_r + U_r^T \tilde{f}_r \tag{6.6}$$

O elemento de membrana e o pórtico têm seis graus de liberdade no k  $\{u_{xk} \ u_{yk} \ u_{zk} \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ \theta_{zk}\}$ , de forma que o acoplamento requer que haja uma compatibilização de ordens das matrizes de influência do radier e do pórtico. Assim, o vetor de deslocamento para um elemento do radier com uma barra de pórtico acoplada fica:

$$U_p^T = \{u_{zi} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ u_z \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ u_{xk} \ u_{yk} \ u_{zk} \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ \theta_{zk}\} \tag{6.7}$$

Já o correspondente de forças:

$$p_p^T = \{F_{zi} \ m_{xi} \ m_{yi} \ F_{zj} \ m_{xj} \ m_{yj} \ F_{xk} \ 0 \ 0 \ m_{xk} \ m_{yk} \ 0\} \tag{6.8}$$

Expandindo-se o funcional discretizado nas correspondentes posições dos graus de liberdade do radier, o funcional passa ser escrito como:

$$\Pi_I = \frac{1}{2} U_p^T \bar{K}_c U_p - U_p^T \bar{R} \bar{F}_p \quad (6.9)$$

Ao serem computados todos os elementos acoplados à barra de pórtico, seguida da minimização tem-se a matriz de rigidez desse problema:

$$K_p U_p = F_p - \bar{R} P_p \quad (6.10)$$

A matriz do problema radier-pórtico obtida da matriz (6.10) é:

$$K_{p,r} U_p = F_p \quad (6.11)$$

onde  $K_{p,r} = K_p + \bar{R} K_p$

O sistema de equações do problema global é o seguinte (Figura 6.2):

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pp}^* & 0 \\ K_{pp}^* & K_{pp}^* & K_{pr}^* \\ 0 & K_{rp}^* & K_{rp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_p \\ U_p \\ U_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_p \\ F_r \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

onde p refere-se aos coeficientes do pórtico e r aos coeficientes do radier estaqueado. Portanto, a solução do sistema de equações (6.12) são os deslocamentos resultantes da interação solo-radier estaqueado-superestrutura.

#### 6.4 Exemplo 9: Placa sobre 1 estaca

Neste exemplo tem-se a interação de uma placa sobre uma estaca com o solo, que está ilustrada na Figura 6.4. O solo é representado como um semi-espaco finito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E_s = 3 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,5$ . A estaca considerada é cilíndrica e apresenta diâmetro  $D = 0,8\text{m}$ , comprimento  $L = 8\text{m}$ , módulo de elasticidade  $E_p = 3 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p = 0,2$ . A placa é quadrada com lado igual a  $2\text{m}$ , espessura  $h_p = 0,5\text{m}$ , e módulo de elasticidade  $E_p = 3 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p = 0,2$ . Sobre toda a área da placa é aplicado um carregamento vertical uniformemente distribuído igual a  $200 \text{ kN/m}^2$ . A placa e a estaca são consideradas rígidas, cujo valor do módulo de elasticidade da placa é igual ao da estaca,  $E_p = E_e = 10^6 E_s = 3 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$ .

A malha de elementos de contorno, para o solo, e elementos finitos, para a placa, encontra-se ilustrada na Figura 6.5 e tem 32 elementos triangulares. O eixo da estaca é perpendicular à placa e está posicionada no centro da placa. A discretização da estaca é um elemento finito com quatro nós e 14 parâmetros nodais.

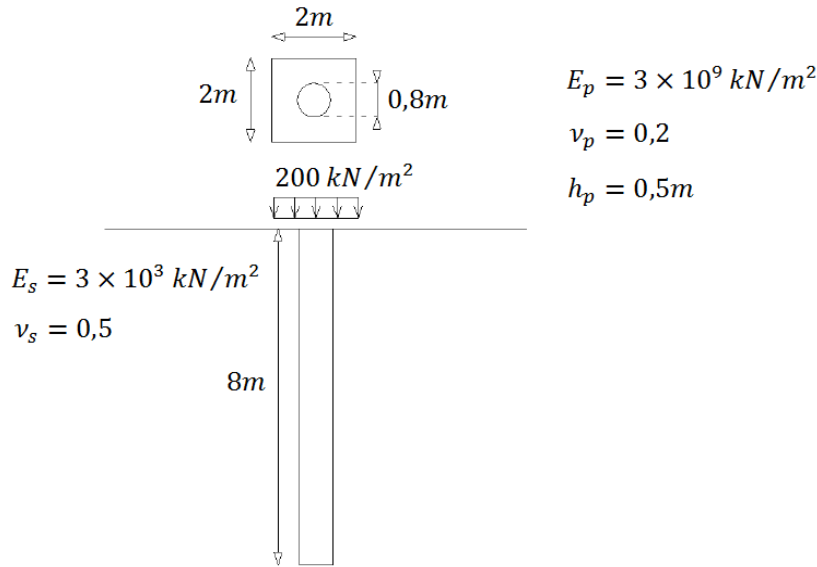


Figura 6.4 - Placa sobre 1 estaca

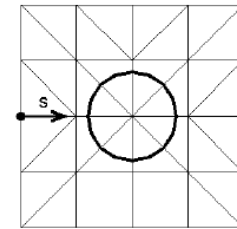


Figura 6.5 – Malha

Adotou-se um eixo  $s$ , com origem no meio do lado da placa ( $x = 0$ ), como ilustrado, para análise dos resultados, Figura 6.6. Como já mencionado, os resultados referentes ao presente trabalho consideram as soluções fundamentais de Mindlin para o solo, sendo que este é modelado pelo MEC; e a placa e a estaca são modeladas pelo MEF. Ribeiro (2009) adota as soluções fundamentais de Kelvin para o solo, sendo que este é modelado pelo MEC e pelo Método dos Elementos de Contorno Infinitos (ECI); e a placa e a estaca são modeladas pelo MEF. Paiva e Trondi (1999) e Butterfield e Banerjee (1971) consideram as soluções fundamentais de Mindlin, mas modelam o solo e a estrutura pelo MEC. A Tabela 6.1 é o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor.

Os resultados deste exemplo mostram, e de forma explícita nos exemplos 1 e 2 do capítulo 2, que a solução mais aproximada seria obtida considerando-se as soluções fundamentais de Mindlin para o solo, quando se trata de problemas que consideram o solo homogêneo ou para a primeira camada, e modelado pelo MEC, e a placa e a estaca modeladas pelo MEF, como foi admitido no presente trabalho.

Tabela 6.1 – Método numérico e solução fundamental de cada autor

Autor	Estrutura	Solo	Solução
Presente Trabalho	MEF	MEC	Mindlin
Ribeiro (2009)	MEF	MEC	Kelvin
Ribeiro (2009)	MEF	MEC – infinito	Kelvin
Paiva e Trondi (1999)	MEC	MEC	Mindlin
Butterfield e Banerjee (1971)	MEC	MEC	Mindlin

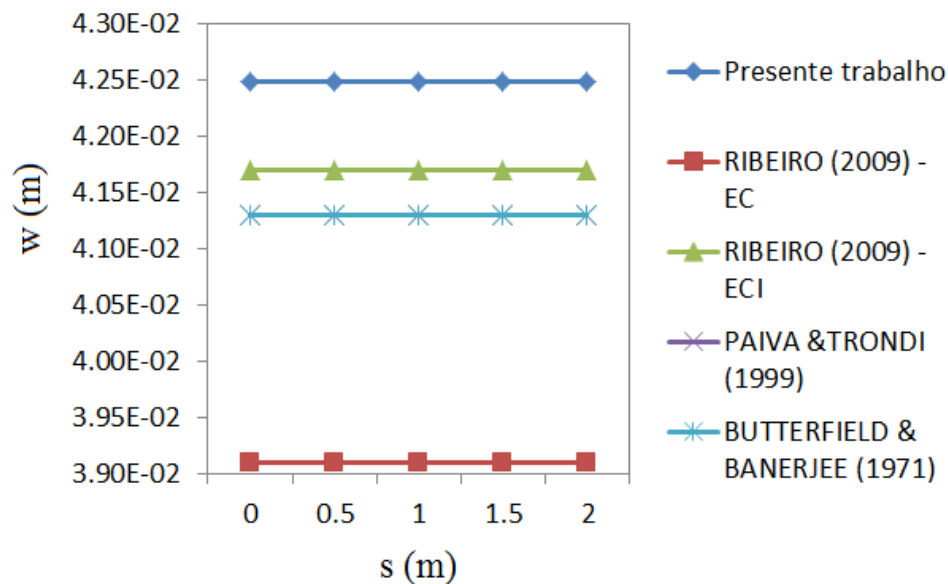


Figura 6.6 - Deslocamento na placa ao longo do eixo s

### 6.5 Exemplo 10: Placa sobre 4 estacas

Neste exemplo, tem-se o radier estaqueado ilustrado na Figura 6.7, composto por uma placa com quatro estacas cilíndricas e verticais imersas no solo. O solo é representado por um meio semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E_s=3000\text{kN/m}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s=0,5$ . As estacas são rígidas, com 0,8m de diâmetro, 8m de comprimento e a distância entre as estacas é 2m, como ilustrado. Os módulos de elasticidade da placa e da estaca são  $10^6 E_s$  e coeficiente de Poisson igual a 0,2. A placa é rígida e quadrada, com lado igual a 4m, espessura igual a 0,5m. Sobre a placa é aplicado um carregamento uniformemente distribuído de  $50\text{kN/m}^2$ .



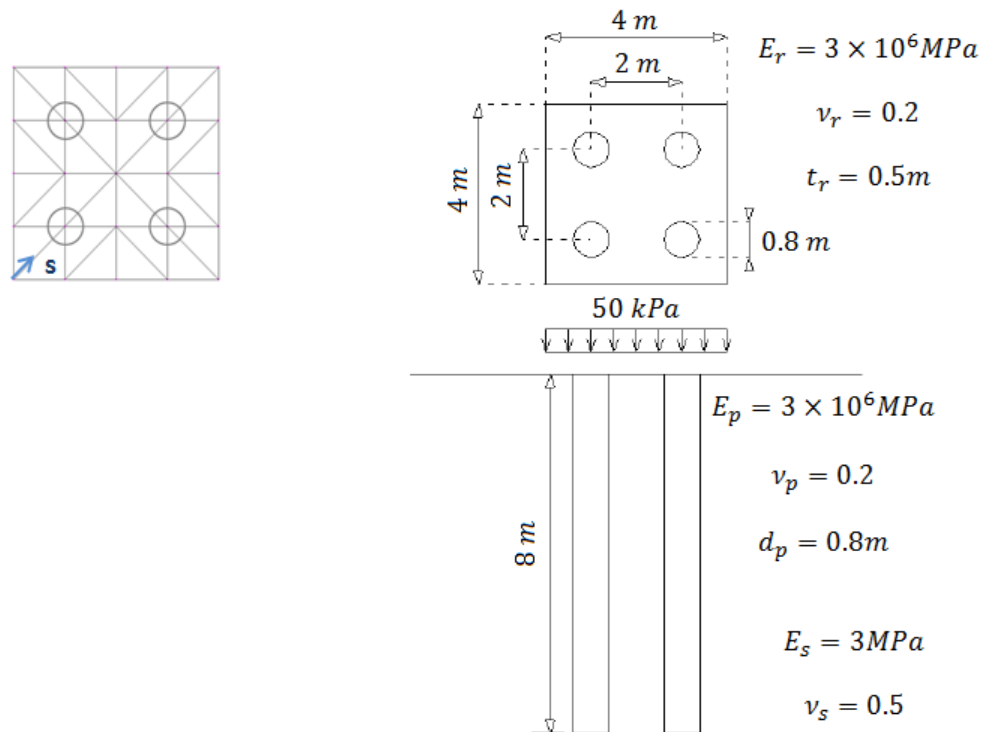
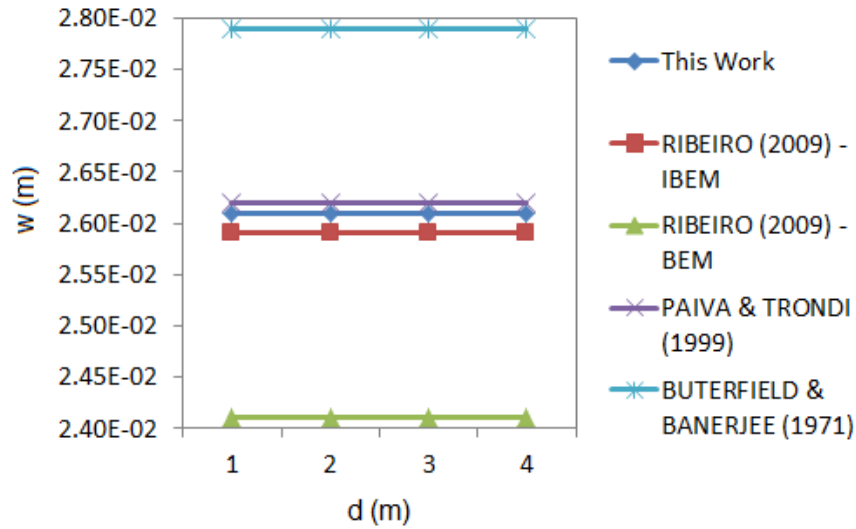


Figura 6.7 - Malha e radier estaqueado

A malha de elementos de contorno e elementos finitos coincidem, sendo formada por 25 nós e 32 elementos e é ilustrada na Figura 6.7. Na figura, os círculos indicam a posição das estacas, e o eixo  $s$  tem origem no vértice indicado. Cada estaca é modelada como um elemento finito, com quatro nós e quatorze parâmetros nodais, e o seu eixo é perpendicular ao plano da malha do solo.

Na Figura 6.8, apresenta-se os resultados do presente trabalho para os deslocamentos nos nós localizados na diagonal  $s$ , e que corresponde às distâncias de 1 m a 4 m. Na Tabela 6.1 tem-se o resumo do método numérico e solução fundamental adotada por cada autor. Ribeiro (2009) modelou o solo pelo método dos elementos de contorno infinito e adotou as soluções fundamentais de Kelvin; e a estaca foi modelada pelo MEF. Tanto Paiva e Trondi (1999) quanto Butterfield e Banerjee (1971) analisaram todo o problema pelo MEC e para o solo consideraram as soluções de Mindlin. O presente trabalho, que modela a estrutura pelo MEF e o solo pelo MEC adotando as soluções fundamentais de Mindlin apresenta-se mais adequada para a análise de problemas com uma camada de solo.

Figura 6.8 - Deslocamento ao longo do eixo  $s$ 

### 6.6 Exemplo 11: Interação solo - radier estaqueado - superestrutura

Neste exemplo, apresenta-se um radier estaqueado com nove estacas ilustrado na Figura 6.9.

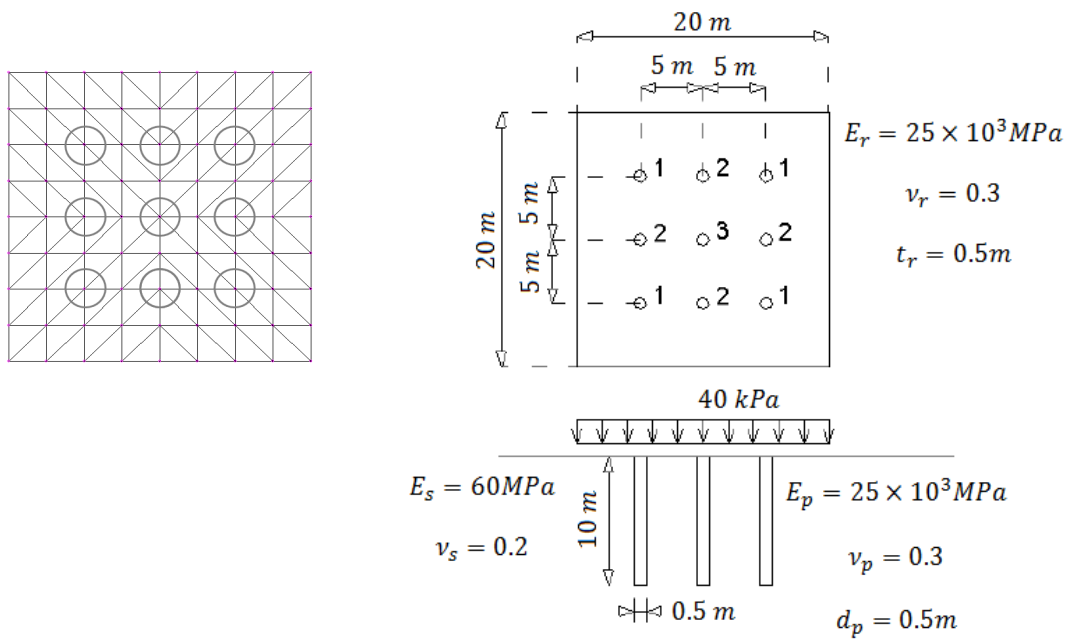


Figura 6.9 - Malha e radier estaqueado

As dimensões da placa são  $20m \times 20m \times 0,5m$ , e módulo de elasticidade igual a  $E_r = 25 \times 10^3 MPa$  e coeficiente de Poisson igual a  $\nu_r = 0,3$ . O solo tem módulo de elasticidade igual a  $E_s = 60 MPa$  e coeficiente de Poisson igual a  $\nu_s = 0,2$ .

A malha da placa coincide com a malha do solo e é composta por 128 elementos finitos e 81 nós como ilustrado. Sobre a placa é aplicada uma carga uniformemente distribuída e igual a  $q = 40kPa$ . Todas as estacas tem comprimento igual a 10m e diâmetro  $D_p = 0,5m$ , o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da estaca são iguais ao da placa e os seus valores são iguais a  $E_r = 25 \times 10^3 MPa$  e  $\nu_r = 0,3$ , respectivamente.

A Figura 6.10 apresenta os deslocamentos no topo das estacas e estes são iguais aos resultados para o mesmo radier estaqueado considerando-se a superestrutura com carga equivalente à carga distribuída sobre o radier estaqueado.

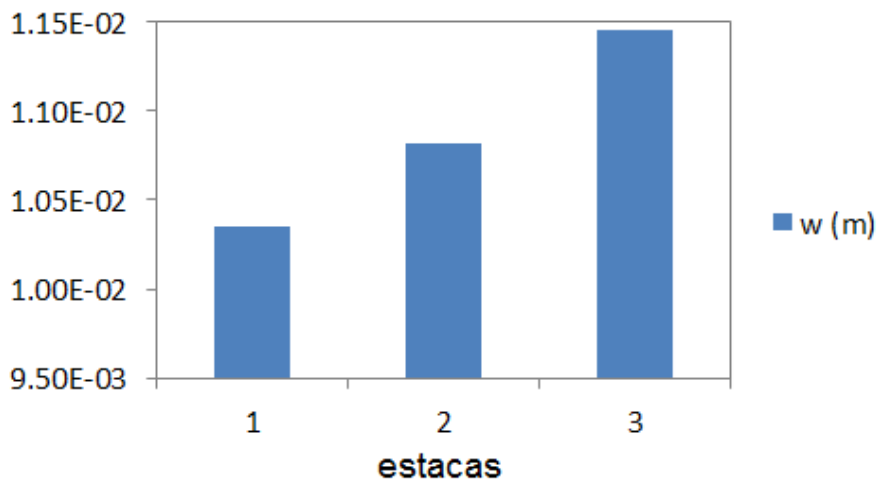


Figura 6.10 - Deslocamento no topo da estaca

A interação solo-radier estaqueado-superestrutura equivalente à interação solo-radier estaqueado descrita anteriormente encontra-se ilustrada na Figura 6.11. Trata-se de um edifício de quatro pavimentos tipo, como ilustrado. As lajes tem espessura igual a 0,3m e, quatro vigas sustentando a laje e quatro pilares recebendo os esforços das vigas. Adotou-se para todas as vigas e pilares uma seção transversal quadrada, com lado igual a 1m.

As cargas externas consideradas são carregamentos de 40kPa distribuídos sobre as quatro lajes, como ilustrado na Figura 6.11. Ressalta-se que, somando-se as cargas das quatro lajes, a força resultante total é igual àquela considerada no exemplo da interação solo-radier estaqueado. Portanto, os deslocamentos encontrados para esses dois exemplos são iguais e encontram-se na Figura 6.10.

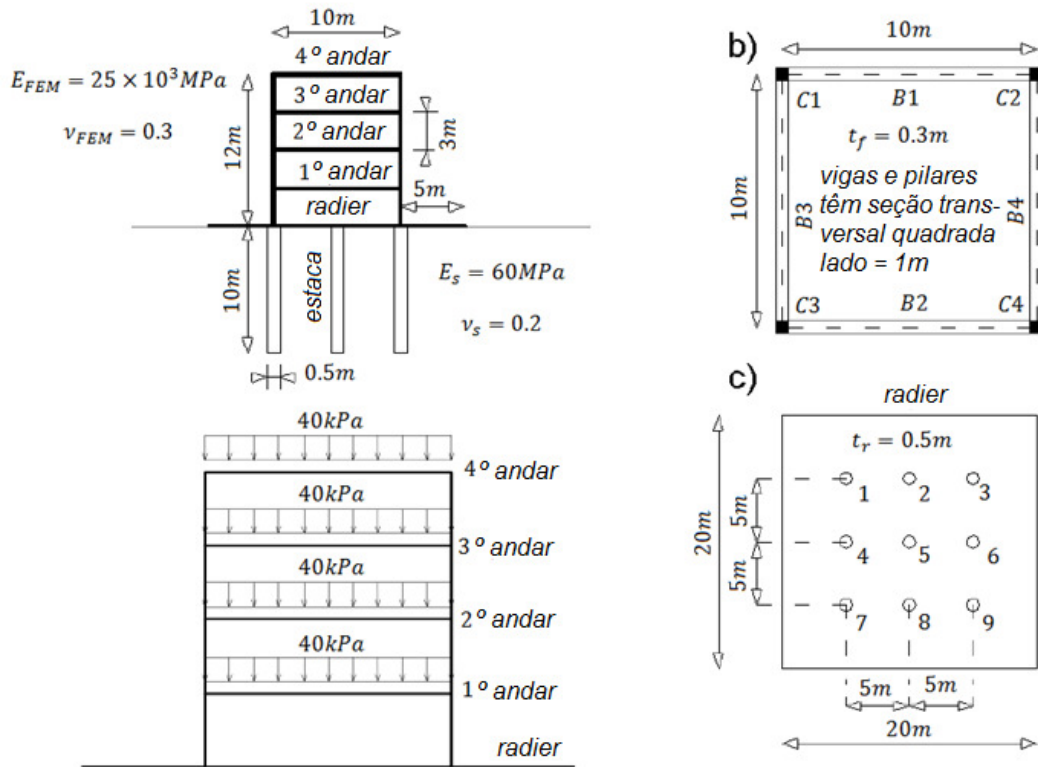


Figura 6.11 - Interação solo-radier estaqueado-superestrutura

## 7. Conclusões

### 7.1 Observações finais

A contribuição desta tese é a implementação computacional da Interação Solo-Estrutura, por meio de um modelo que possibilita a determinação dos deslocamentos provenientes deste problema. O solo é representado por um meio contínuo semi-infinito e modelado pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC). A estrutura é modelada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), onde a estaca é representada por elementos de barra, e a placa pelo elemento DKT e pela formulação livre. Desenvolve-se uma formulação para a análise da ISE que permite obter as respostas dos deslocamentos de problemas de interação estaca-solo-superestrutura, como mostrado no capítulo 6, exemplos 11. O programa computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, de acordo com Beck e Bazán (2011), e empregaram-se subrotinas do LAPACK (Linear Algebra PACKage). Os resultados obtidos mostram que este trabalho apresenta respostas adequadas para a análise dos problemas de ISE propostos. Para a interação estaca-solo-superestrutura, o programa computacional desenvolvido no presente trabalho foi nomeado denominado *SSI – BEM-FEM - 2013*, que inclui o programa computacional *Cap Pile Soil Interaction - BEM-FEM – 2012* para a análise da interação radier estaqueado-solo.

Para um sólido semi-infinito, isotrópico, elástico consideram-se as coordenadas  $(0,0,c)$  e  $(0,0,-c)$ , onde o primeiro é o ponto de aplicação da carga e o segundo a sua imagem. MINDLIN (1953) revela que a partir das soluções fundamentais de MINDLIN (1936) é possível obter também as soluções fundamentais de Kelvin fazendo  $c \rightarrow \infty$ , visto que nesta situação a caracterização do problema de Mindlin deixa de existir, ou seja, o plano  $x_3 = 0$  não é mais livre de forças de superfície; e de Boussinesq-Cerruti, quando  $c \rightarrow 0$  tem-se o problema no qual a força normal ou tangencial é aplicada no plano  $x_3 = 0$  e as forças de superfície são nulas. Finalmente, a partir MINDLIN (1953) sabe-se que através das funções

de Galerkin e Papkovitch, as soluções fundamentais de Mindlin estão corretas e que estas são obtidas através da aplicação da teoria do potencial.

A principal contribuição original desta tese é a evidência de que a solução fundamental de Mindlin, para a análise da ISE, quando o solo carregado é modelado pelo MEC e se considera apenas uma camada é mais precisa do que a solução fundamental de Kelvin, para um exemplo com as mesmas características, quando o solo é modelado pelo MEC ou pelo MEC infinito. Esta análise pode ser vista explicitamente e principalmente, nos exemplos 1 e 2 do capítulo 3. Analisando-se exemplo 2 verifica-se que a solução apresentada neste trabalho é mais próxima da solução exata vista em Timoshenko e Goodier (1951), com diferença de 0,1%, ao contrário dos trabalhos que adotaram as soluções fundamentais de Kelvin, Ribeiro e Paiva (2010-a) obtiveram uma resposta menos precisa que o presente trabalho, divergindo 9,0% da solução exata. E quando, Ribeiro e Paiva (2010-b) utilizam o MEC infinito na modelagem do problema, a razão relativa é 2,4% em relação à solução exata, mas os resultados apresentados nesta tese, ainda são mais aproximados do que os outros autores. Para esta análise desenvolveu-se o código computacional denominado *Soil - Mindlin - BEM - 2009*, em Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, onde o sólido foi modelado pelo MEC e pode ser submetido à carregamento na direção  $x_3$ .

Já os exemplos 9 e 10 do capítulo 6 são de radier estaqueado, e mostram que a partir da análise anterior e resultados obtidos nesses exemplos, novamente as soluções obtidas no presente trabalho são mais aproximadas do problema real. Visto que nesses exemplos considerou-se uma camada de solo e como discutido anteriormente, as respostas quando se utiliza as soluções fundamentais de Mindlin para problemas com estas características são mais precisas do que a análise na qual se adota as soluções fundamentais de Kelvin. Os resultados para os deslocamentos foram obtidos através do *Cap Pile Soil Interaction - BEM-FEM - 2012* desenvolvido em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, onde o radier estaqueado foi modelado pelo MEF e o solo pelo MEC.

A Interação Placa-solo foi analisada através do programa computacional *Plate Soil Interaction - BEM-FEM - 2010* desenvolvido no presente trabalho em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos, os resultados desta análise são os exemplos 5, 6 e 7 do capítulo 3. As respostas do presente trabalho apresentam coerência quando comparado com os outros autores, como pode ser visto mais detalhadamente no capítulo 3. O programa computacional para a análise da interação placa-solo compreende o programa *Soil - Mindlin - BEM - 2009*, já descrito. E, além da implementação computacional dos módulos de ISE desenvolveu-se os programas para a análise de chapas, pelo elemento finito CST e membranas de acordo com a

Formulação Livre que foi denominado *Plate in tension or compression - CST-FF - FEM – 2009*, para o qual foi feita a condensação estática e os elementos foram modelados pelo MEF, os resultados desta implementação foram verificados através do exemplo 3, do capítulo 4. Já o acoplamento membrana-placa denominado *Plate in tension or compression - Plate in bending coupling – CST-FF- DKT – FEM – 2009*, que resulta no elemento de casca, com seis graus de liberdade por nó foi implementado em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos teve sua eficiência confirmada através do exemplo 4, do capítulo 4.

Para a Interação Estaca-solo a programação computacional implementada no presente trabalho foi denominada *Pile Soil Interaction – BEM-FEM – 2010*, e foi desenvolvida em linguagem Fortran 6.6 e Orientado à Objetos. As estacas são modeladas pelo MEF, como um elemento finito de quatro nós, e apresentam quatorze parâmetros nodais, sendo adotadas funções polinomiais do quarto grau para descrever os deslocamentos horizontais e, funções polinomiais do terceiro grau para descrever as forças horizontais e deslocamentos verticais e, funções polinomiais do segundo grau para as tensões de cisalhamento ao longo da estaca. Ao modelar a interação estaca-solo são adotadas as soluções fundamentais de Mindlin. O exemplo 8, do capítulo 5 mostra que para a estaca vertical submetida à carregamentos nas direções  $x_1$  e  $x_3$ , os resultados encontrados no presente trabalho estão aproximadamente iguais aos obtidos pelos outros autores.

Este trabalho de doutorado, como mostrado nesta tese é o resultado da análise e implementação computacional de uma formulação numérica para a análise de problemas da interação estaca-solo-superestrutura utilizando a combinação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos, como publicado em Ramos e Paiva (2013). Como explicado e exemplificado no capítulo 1 desta tese, a Interação Solo-Estrutura é um problema muito complexo, que engloba diversas linhas de pesquisas. Sendo assim, o avanço local em determinada área, que seja parte deste campo contribui para o desenvolvimento da ISE. Portanto, em seguida sugerem-se outros temas para serem desenvolvidos na ISE, com a expectativa de novas contribuições no processo de evolução da ciência.

## 7.2 Proposta de desenvolvimento futuro

Portanto, este doutorado sugere os seguintes desenvolvimentos em pesquisas futuras:

- (1) – o acoplamento do MEC com soluções fundamentais de Mindlin ao Método dos Elementos de Contorno Infinito com soluções fundamentais de Kelvin;
- (2) – não linearidade geométrica do edifício;
- (3) – análise dinâmica;
- (4) – estacas inclinadas no solo;
- (5) – escorregamento da estaca em relação ao solo;
- (6) – não linearidade física do solo;
- (7) – desenvolvimento de formulação que permita dividir as estacas em vários elementos finitos.



## Referências<sup>1</sup>

ABDEL-FATTAH, T. T.; HODHOD, H. A.; AKL, A. Y. A novel formulation of infinite elements for static analysis. **Comput. Struct.**, 77, pp. 371–379, 2000.

ALLMAN, D. J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. **Computers & Structures**, v. 19, n° 1-2, p. 1-8, 1984.

ALMEIDA, F. P. A. **Análise comparativa de resultados de diferentes discretizações para as lajes de pavimentos utilizando os elementos finitos DKT e P15N**. 1999. 153 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ALMEIDA, V. S. **Uma adaptação do MEF para análise em multicomputadores: aplicações em alguns modelos estruturais**. 1999. 151 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

\_\_\_\_\_. **Análise da interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. 2003. 210 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

---

<sup>1</sup> De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6023.

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. A mixed BEM-FEM formulation for layered soil-superstructure interaction. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, V. 28, Issue 9, Pages 1111–1121, September 2004.

ANDRADE, R. C. **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis às placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para o uso no Método dos Elementos de Contorno**. 2001. 278 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia Civil - Estruturas) – Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, 2001.

AOKI, N. Considerações sobre projeto e execução de fundações profundas. **Seminário de Fundações. Sociedade Mineira de Engenharia**, Belo Horizonte, 29p., 1979.

\_\_\_\_\_. Discussion to Session 14, **Proceedings, 12th ICSMFE**, Rio de Janeiro, v. 5, pp. 2963-2966, 1989.

\_\_\_\_\_. Aspectos geotécnicos da interação estrutura-macizo de solos, **XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural**, vol. 1, São Carlos, pp. VII – XX, 1997.

AOKI, N.; CINTRA, J. C. **Carga admissível em fundações profundas**. São Carlos, EESC-USP, 1999, 61p., 1999.

\_\_\_\_\_. **Notas de aula disciplina SGS-404 Fundações**, – EESC-USP Departamento de Geotecnia, EESC, USP, São Carlos, 2004.

AOKI, N; LOPES, F. R. Estimating stresses and settlements due to deep foundations by the Theory of Elasticity, **Proceedings, 5th Pan American CSMFE**, Buenos Aires, v. 1, pp. 377-386, 1975.

AOKI, N.; VELLOSO, D. A. An approximate method to estimate the bearing capacity of piles, **Proceedings, 5th Pan American CSMFE**, Buenos Aires, v. 1, pp. 367-376, 1975.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2003. 298 p.

AZEVEDO, A. **Mecânica dos sólidos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996. 164p.

BAILEY, C. **A critical analysis of the design and construction of the Juscelino Kubitschek bridge**. Proceedings of Bridge Engineering, 2 Conference 2007, University of Bath, Bath, UK, 27 April 2007.

BANERJEE, P. K. Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. **Int. J. Mechanical Science**, v.18, p. 293-303, 1976.

BANERJEE, P.K.; DAVIES, T.G. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. **Géotechnique**, v. 28, n. 3, p. 309-326, 1978.

BARBIRATO, J. C. C. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. 1991. 164 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

BARRETTO, S. F. A. **Aplicação do método dos elementos finitos na análise de placas com deformação por cortante**. 1990. 83 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

\_\_\_\_\_. **Análise elastodinâmica de placas através do Método dos elementos de contorno com interação solo-estrutura**. 1995. São Carlos. 142p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

BATHE, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1982.

BATOZ, J. L. An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 18, p. 1077-1089, 1982.

BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. A study of three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1771-1812, 1980.

BATOZ, J. L.; LARDEUR, P. A discrete shear triangular nine D.O.F. element for the analysis of thick to very thin plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 3, p. 533-560, March, 1989.

BECK, A. T.; BAZÁN, F. A. V. Programação Orientada a Objetos em Fortran. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 13, n. 60, p.17-36, 2011.

BECKER, J. M.; BEVIS, M. Love's problem. **Geophysical Journal International**, 256, 171-178, 2004.

BERGAN, P. G. Finite elements based on energy orthogonal functions. **International Journal for numerical methods in engineering**, v. 15, p. 1541-1555, 1980.

BERGAN, P. G.; FELIPPA, C. A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, n. 1, p. 25-69, July, 1985.

BERGAN, P. G.; HANSSEN, L. A new approach for deriving "good" element stiffness matrices. **Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim**, p. 483-497, 1978.

BERGAN, P. G.; NYGARD, M. K. Finite elements increased freedom on choosing shape functions. **International Journal for numerical methods in engineering**, v. 20, p. 643-663, 1984.

BEZERRA, D. P. **Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes**. 1995. 138 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

BOFFI, D. et al. **Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications**. Springer, 2006.

BOUSSINESQ, J. **Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale**. Gauthier-Villars, Paris, p. 215-241, 1878.

\_\_\_\_\_. **Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques**. Gauthier-Villars, 1885.

\_\_\_\_\_. **Cours d'analyse infinitésimale : à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques**. Gauthier-Villars, Paris, 1890.

BOWLES, J. E. **Foundation analysis and design**. The McGraw-Hill Companies, Inc., Fifth Edition, 1997.

BREBBIA, C. A.; CONNOR, J. J. An application of FEM/BEM coupling to foundation analysis. **Proceedings of the eleventh International Conference on Boundary Element Methods**, Cambridge, USA, August, p. 211 - 223, 1989.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements – Na Introductory**. WIT Press Boston, Southampton/ Computational Mechanics Publications, 1998. 325 p.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. **The Finite Element Technique Technique**. Ed. UFRS, 1975.

BREBBIA, C. A.; NAKAGUMA, R. Boundary elements in stress analysis. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 105, EM1, p. 55-69, February, 1979.

BURLAND, J. B.; BROMS, B. B.; MELLO, V. F. B. **Behavior of foundations and structures**. In: ninth international conference on soil mechanics and foundation engineering, Tokyo, V2, 1977.

BURMISTER, D. M. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems, *Journal of Applied Physics*, Vol. 6, N.2, p. 89-96, N. 3 p. 126-127; N. 5, p. 296-302, 1945.

CABALLERO, F. L.; RAZAVI, A. M. F. Numerical simulation of liquefaction effects on seismic SSI. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 28, p. 85-98, March, 2008.

CAGNIARD, L. Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives. **Gauthier-Villars**. Paris, 1939.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements**, vol. II - A Second Course, PrenticeHall, 1981.

CARMO, R. M. S. **Determinação de rigidez de estruturas de pavimentos através do Método dos Elementos de Contorno e Finitos**. 2001. 160 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

CARRIJO, E. C. **Aplicação do elemento finito DKT à análise de cascas**. 1995. 103 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

CHAMECKI, S. Consideração da rigidez da estrutura no cálculo dos recalques da fundação, separata dos **Anais do I Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos** – v. 1, Porto Alegre, RS, pp. 35-80, 1954.

CHAN, K. S.; KARASUDHI, P.; LEE, S. L. Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. **Int. J. Solids Structs.**, v.10, p.1179-1199, 1974.

CHENG, A. **Great man of mechanics – Raymond D. Mindlin (1906 - 1987)**. Mindlin Centennial (1906 – 2006), Columbia University, 2006.

CHOW, H. S. W. Analysis of piled-raft foundations with piles of different lengths and diameters. Thesis (Doctor of Philosophy), The University of Sydney, School of Civil Engineering, 358p., 2007.

CHOW, Y. K.; TEH, C. I. Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 117, n. 11, p. 1655-1668, 1991.

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity**. Volume I: Three-Dimensional Elasticity. Elsevier, ISBN: 978-0-444-70259-3, V. 20, 451p., 1988.

\_\_\_\_\_. **Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates**. ISBN: 978-0-444-82570-4, V. 27, p. 1-497, 1997.

CINTRA, J. C. A., AOKI, N. e ALBIERO, J. H. **Tensão admissível em fundações diretas**. Editora RiMa. São Carlos, 142p, 2003.

CODA, H. B. **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos**. 1993. 211 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

CODA, H. B.; MESQUITA, A. D.; PAIVA, J. B. Viscoelastic analysis of soil-structure interaction (CD-ROM]. In: **Congresso aimeta di meccanica teorica e applicata**, 15., Taormina, Italia, 26-29 set. 2001. *Memorie*. Taormina, AIMETA, 2001. 9p, 2001.

CODA, H.B.; PAIVA, J.B. Tridimensional dynamic soil-structure interaction by the BEM/FEM coupling [CD-ROM]. In: **Congresso aimeta di meccanica teorica e applicata**, 15., Taormina, Italia, 26-29 set. 2001. *Memorie*. Taormina, AIMETA, 10p., 2001.

COLARES, G. M. **Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios**. 2006. 83 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

CONSTANTINESCU, A.; KORSUNSKY, A., **Elasticity with mathematica – na introduction to continuum mechanics and linear elasticity**, Cambridge University Press, 2007.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Methods** (3rd ed.), John Wiley, 1989.

DAVIES, T. G.; BU, S. Infinite boundary elements for the analysis of halfspace problems. **Comput. Geotech.**, 19 (2), pp. 137–151, 1996.

DAVIES, T. G.; BANERJEE, P. K. The displacement field due to a point load at the interface of a two layer elastic half-space. **Géotechnique**, v. 28, n.1, p. 43-56, 1978.

DAVIES, E. H.; POULOS, H. G. The analysis of pile-raft systems. **Aust. Geomechs. Journal**, v. G2, n.1, 1972.

DE HOOP, A. T. A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. **Applied Science Research, Section B**, 8, 349–356, 1960.



DHATT, G.; TOUZOT, G. **The Finite Element Method Displayed**, John Wiley, 1984.

DOMINGUEZ, A. B. **Stresses and displacements in semi-infinite media**. 1966. 129 p.

Dissertation (Master of Science) – Massachusetts Institute of Technology, 1966.

DUTTA, S. C.; ROY, R. “A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system”. **Computers & Structures**, vol.80, pp.1579-1594, 2002.

EASON, G.; FULTON, J.; SNEDDON, I. N. The generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces. **Philosophical transactions of the Royal Society of London**. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 248, n.955, p. 575-607, Mar., 1956.

EKELAND, I.; TEMAM, R. **Convex Analysis and Variational Problems**. Elsevier, ISBN: 978-0-444-10898-2, V. 1, 402p., 1976.

FERRO, N. C. P. **Uma combinação MEC/MEF para análise da interação solo-estrutura**.

1999. 194 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

FRIDMAN, L. I. General solutions of problems of the theory of elasticity and boundary-value problems. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, V. 65, Issue 2, p. 261-271, 2001.

FUNARO, V. M. B. O. et al. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP: documento eletrônico e impresso – Parte I (ABNT)**. 2009. 102 p. Universidade de São Paulo, Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBi/USP, 2ª edição, revisada e ampliada, São Paulo, 2009a.

\_\_\_\_\_. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP: documento eletrônico e impresso – Parte II (APA)**. 2009. 85 p. Universidade de São Paulo, Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBi/USP, 2ª edição, revisada e ampliada, São Paulo, 2009b.

\_\_\_\_\_. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP: documento eletrônico e impresso – Parte III (ISO)**. 2009. 83 p. Universidade de São Paulo, Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBi/USP, 2ª edição, revisada e ampliada, São Paulo, 2009c.

\_\_\_\_\_. **Diretrizes para apresentação de dissertações e teses da USP: documento eletrônico e impresso – Parte IV (Vancouver)**. 2009. 96 p. Universidade de São Paulo, Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBi/USP, 2ª edição, revisada e ampliada, São Paulo, 2009d.

GAO, X. W.; DAVIES, T. G. 3-D infinite boundary elements for half space problems. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 21, pp. 207–213, 1998.

GIBSON, R. E. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space. *Géotechnique*, 17, p. 58-67, 1967.

\_\_\_\_\_. The analytical method in soil method in soil mechanics. *Géotechnique*, 24, p. 115-140, 1974.

GREEN, G. An essay on the application on mathematical analysis to the theories of electricity and magmetism. Notingham, MSC-Class: 31-301A50, 83p., 1828.

GU, Y.; CHEN, W. Infinite domain potential problems by a new formulation of singular boundary method. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 37, Issue 4, 15, Pages 1638-1651. February, 2013.

GURTIN, M. E. On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovitch-Neuber stress functions for infinite domains. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, V. 9, Issue 1, p. 225-233, 1962.

IWAMOTO, R. K. **Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda**. 2000. 157 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

JONES, M, H.; TREYGER, S. Performance-Based Seismic Design of New Tacoma Narrows Suspension Bridge, Washington. Journal of the Transportation Research Board. Special Volume CD 11-S/2005. **6<sup>th</sup> International Bridge Engineering Conference** – Reliability, Security, and Sustainability in Bridge Engineering; July, 2005.

KAUSEL, E. Soil-Structure Interaction. **Soil Dynamics for Earthquake Design**. International Centre for Computer-aided Design (ICCAD), Santa Margherita, Italy, 1976.

\_\_\_\_\_. **An Explicit Solution for the Green's Functions for Dynamic Loads in Layered Media**. MIT Research Report R81-13, Department of Civil Engineering, 1981.

\_\_\_\_\_. **Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium**. Cambridge University Press, UK, 2006.

\_\_\_\_\_. **Comments on Soil-Structure Interaction**. Keynote lecture presented at the 4<sup>th</sup> US-Japan Workshop on Soil-Structure Interaction, held March 2007 in Tsukuba, Japan, 2007.

\_\_\_\_\_. Early history of soil-structure interaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 30, p. 822 - 832, 2010.

- KAUSEL, E.; PEEK, R. Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum: An Explicit Solution. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 72, (5), 1459-12481. See also *Errata* in BSSA 79 (4), p. 1508, 1982.
- KO, Y. Y.; CHEN, C. H. Soil–structure interaction effects observed in the *in situ* forced vibration and pushover tests of school buildings in Taiwan and their modeling considering the foundation flexibility. **Earthquake Engineering and Structural Dynamic**, v. 39, p. 945 - 966, 2010.
- KOCAK, S.; MENGI, Y. A simple soil-structure interaction model. **Applied Mathematical Modelling**, 24, p.607-635, 2000.
- KOMATSU, J. S. **Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos**. São Carlos. 218p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1995.
- LAMB, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. A, 203, 1–42, 1904.
- LI, J.; BERGER, E. J. A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area. **Journal of Elasticity**, v. 63, p. 137-151, 2001.
- LIANG, F.; CHEN, L.; HAN, J. Integral equation method for analysis of piled rafts with dissimilar piles under vertical loading. **Computers and Geotechnics**, 36, p. 419–426, 2009.
- LINDQUIST, M. **Aplicativo Windows para análise e dimensionamento de pórticos planos em concreto armado**. 2002. 198 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**, 4. ed. New York, Dover, 1944.

LYELL, J.; SANDERS, Jr. Note on the Mindlin Problem. **Studies in Applied Mechanics**, V. 6, p. 345-349, 1984.

MAIER, G.; NOVATI, G. Boundary element elastic analysis by a successive stiffness method. **Int. J. for Numerical and Anal. Methods in Geomechanics**, v.11, p. 435-447, 1987.

MAMOON, S. M.; BANERJEE, P. K. Response of piles and pile groups to travelling SH-waves. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Volume 19, Issue 4, pages 597–610, May, 1990.

MANZOLI, O. L. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica**. 1992. 157 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

MARTINELLI, D. A. O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. **Placas elásticas**. São Carlos, SP: Editora da EESC-USP, 2003. (Notas de Aula).

MATOS FILHO, R. F. **Análise da interação estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. 1999. 132 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

MATOS FILHO, R. F.; MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B.; Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.29, p. 195-203, 2005.

MATOS FILHO, R.F.; PAIVA, J.B. Análise de estacas submetidas a cargas horizontais via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno [CD-

ROMJ. In: **Congresso brasileiro de engenharia mecânica**, 15., Águas de Lindóia, 22-26 nov. 1999. Campinas, UNICAMP / ABCM, 10p, 1999.

MATOS FILHO, R. F.; PAIVA, J. B. ; CODA, H. B. **Elastic analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads**. In: XV Congresso AIMETA di meccanica teorica e applicata, 2001, Taormina. CD ROM do AIMETA 2001, 2001.

MAZARIM, D. M. **Histórico das pontes estaiadas e sua aplicação no Brasil**. 2011. 142 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

MENDONÇA, A. V. **Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. 1997. 151 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B. Análise da interação placa-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno. In: **XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, São Carlos, 1 a 5 de Setembro de 1997.

\_\_\_\_\_. Sobre a influência da flexibilidade axial das estacas no comportamento estaca-solo via método dos elementos de contorno. In: **XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, São Carlos, 1 a 5 de Setembro de 1997.

\_\_\_\_\_. Análise da influência da flexibilidade axial de estacas no comportamento placa-grupo de estacas, pelo método dos elementos de contorno. In: **X ENIEF**, San carlos de Bariloche, Argentina 10 a 14 de Novembro de 1997.

\_\_\_\_\_. FEM/BEM formulation to plate-pile-soil interaction problems. **IABEM98**, Paris, 1998.

\_\_\_\_\_. A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.24, p.237-247, 2000.

\_\_\_\_\_. An elastostatic FEM/BEM analysis of vertically loaded raft and piled raft foundation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.27,p919-933, 2003.

\_\_\_\_\_. Uma abordagem MEC/MEF para análise linear de problemas de interação pórtico-radiê. In: **XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural**, Argentina, 17 a 21 de Mayo de 2004.

MENGLIN, L.; HUAIFENG, W.; XI, C.; YONGMEI, Z. Structure–soil–structure interaction: Literature review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31, p. 1724–1731, 2011.

MESQUITA, A. D. **Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas**. 1998. 144 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

MESSAFER T.; COATES, L. E. An application of FEM/BEM Coupling to Foundation Analysis. **Advances in Boundary Elements**, v. 3, p. 211-223, 1989.

MILITELLO, C.; FELIPPA, C. A. The first ANDES elements: 9-DOF plate bending triangles. **NASA Contractor Report 189068, Colorado Univ.** 35 p. Dec. 1989.

MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. **J. Physics**, v.7, p.195-202, May, 1936.

\_\_\_\_\_. Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions, **Bull. Am. Math. Soc.**, 42, p. 373-379, 1936b.

\_\_\_\_\_. Compliance of elastic bodies in contact. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, p.259-268, 1949.

\_\_\_\_\_. **Force at a point in the interior of a semi-infinite solid**. Office of naval research project n°. 064 388. Technical report n°. 8, May, 1953.

\_\_\_\_\_. Influence of couple-stresses on stress concentrations. **Experimental Mechanics**, V. 3, Issue 1, p. 1-7, January, 1963.

\_\_\_\_\_. Micro-structure in linear elasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, V. 16, Issue 1, p. 51-78, March, 1964.

\_\_\_\_\_. Thickness-twist vibrations of an infinite, monoclinic, crystal plate, *International Journal of Solids and Structures*, 1, p.141-145, 1965.

\_\_\_\_\_. On the equations of elastic materials with micro-structure, *International Journal of Solids and Structures*, 1, p. 73-78, 1965.

\_\_\_\_\_. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1, p. 417-438, 1965.

\_\_\_\_\_. Stress functions for a Cosserat continuum, *International Journal of Solids and Structures*, 1, p. 265-271, 1965.

\_\_\_\_\_. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics. **Journal of Elasticity**, V. 2, Issue 4, p. 217-282, December, 1972.

MINDLIN, R. D.; CHENG, D. H. Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid. **Journal of Applied Physics**, Volume 21, Issue 9, p. 926-930, 1950.

MINDLIN, R. D.; TIERSTEN, H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, V. 11, Issue 1, p. 415-448, 1962.



MOONEY, H. M. Some numerical solutions for Lamb's problem. **Bulletin of the Seismological Society of America**. **64**(2), 473–491, 1974.

MOURA, A. R. L. U. **Interação solo-estrutura em edifícios**. 1995. 135p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1995.

MOSER, W.; DUENSER, Ch.; BEER, G. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004; 61:317–328 (DOI: 10.1002/nme.1073).

MOTA, M. M. C. **Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados no campo**. 2009. 222 p. Tese (Tese em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

MOTA, M. M. C.; PINHEIRO, L. M; AOKI, N. Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados in situ. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 8, n. 32, p. 121-124, 2006.

MUKHERJEE, S.; MUKHERJEE, Y. X. *Boundary Methods – Elements, contours, and nodes*. Taylor & Francis Group, LLC, 235p., 2005.

ODEN, J. T. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**, John Wiley, 1976.

OLIVEIRA, C. J. **Análise da interação placa-viga via método dos elementos de contorno**. 2012. 109p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

OLIVEIRA, M. B. **Estudo das estruturas de membrana: uma abordagem integrada do sistema construtivo, do processo de projetar e dos métodos de análise**. 2001. 173 p. Tese

(Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

OLIVEIRA, R. S. **Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não linearidade física – modelagem e metodologia de aplicação a projetos**. 2001. 216 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

OLIVEIRA, M. F. F.; DUMONT, N. A.; SELVADURAI, A. P. S. Boundary element formulation of axisymmetric problems for an elastic halfspace. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 36, p. 1478–1492, 2012.

OLIVEIRA NETO, L. **Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno**. 1991. 133p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

\_\_\_\_\_. **Uma formulação do Método dos Elementos de Contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural**. 1998. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

ONATE, E. I. N. **Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos**. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, Espana, 1995.

OSHIMA, S. T. **Uma combinação MEC/MEF para a análise da interação de estacas inclinadas e o solo**. 2004. 96 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

OTTAVIANI, M. Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups. **Géotechnique**, v. 25, n. 2, p. 159-174, 1975.

LOPES, A. P. **Análise estática e dinâmica dos problemas de interação solo-estrutura utilizando os métodos dos elementos finitos e infinitos**. 2003. 109p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas e Construção Civil) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, São Carlos, 2003.

PACCOLA, R. R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. 2004. 190 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

PAGLIOSA, P. A. **Um sistema de modelagem estrutural orientado a objetos**. 1998. 433 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

PAIVA, J. B. **Instabilidade de folhas planas com vinculações elásticas**. 1980. 184 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1980.

\_\_\_\_\_. **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 1987. 204 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987.

\_\_\_\_\_. Análise da interação placa-solo pelo método dos elementos de contorno, **Primeiro workshop brasileiro em fenômenos não lineares, caóticos e estocásticos**, UNESP - Rio Claro, 16 a 18 de Novembro de 1993.

\_\_\_\_\_. Numerical analysis of plate-soil interaction. **XIV Congresso latino-ibero-americano sobre métodos computacionais para engenharia**, IPT-USP, SÃO PAULO - SP, 01-03 Nov., 1993.

\_\_\_\_\_. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise da interação solo-estruturas**. 1993. 188 p. Tese (Livre Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

PAIVA, J. B.; BUTTERFIELD, R. Numerical analysis of plate-soil interaction. **Advances in Computational Mechanics**, v. 9, p. 275-281, 1994.

\_\_\_\_\_. Boundary element analysis of plate-soil interaction. **Computers & Structures**, v. 64, n. 1-4, p. 319-328, 1997.

PAIVA, J. B.; MATOS, R. F. Análise elástica de grupos de estacas solicitadas por carregamentos verticais e horizontais. In: **Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 20, 1999, São Paulo. Computational methods in engineering'99, 1999.

PAIVA, J. B.; MENDONÇA, A. V. Boundary Element Analysis of Piled Rafts In: M. Marchetti, C.A. Brebbia, M.H. Aliabadi, eds. *Boundary element XIX (Proc. 19th International Conference on Boundary Element Method*, Rome, Italy, Sept. 1997). Southampton, CMP, p.799-808, 1997.

\_\_\_\_\_. Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de fundações flexíveis enrijecidas por estacas. In: **Congreso chileno de ingeniería mecánica**, 8., Concepcion, Chile, 27-30 oct. 1998. *Actas*. Concepcion, Universidad de Concepcion, v.1, p.161-166, 1998.

\_\_\_\_\_. Um procedimento do método dos elementos de contorno aplicado à análise de radieres estaqueados [CD-ROM]. In: **Computational methods in engineering** (Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 20. / Brazilian Congress on Computational Mechanics, 1., São Paulo, 3-5 Nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 17p., 1999.

PAIVA, J. B.; TRONDI, R. R. A simplified BEM analysis of pile groups, PAIVA, J.B.;In: Topping, B.H.V., eds. **Advances in boundary element methods** (Proc. 3rd International Conference on Computational Structures Technology, Budapest - Hungary, 23-26th Aug 1996). Edinburgh, Civil-Comp Press, p.135-142, 1996.

\_\_\_\_\_. Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups. **Advances in Engineering Software**, v.30, n.9-11, p.715-724, Sept./Nov. 1999.

PALERMO JUNIOR, L. **Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno**. 1989. 169 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.

PAO, Y. **Raymond D. Mindlin and Applied Mechanics**, presented at Mindlin Centennial Symposium, Boulder, CO, June 26, 2006.

PEKERIS, C. L. The seismic surface pulse. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, **41**, 469, 1955.

PELETEIRO, S. C. **Utilização da formulação livre para desenvolvimento de um elemento de membrana com liberdades rotacionais**. 1996. 110 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

POULOS, H. G. Stresses and displacements in an elastic layer underlain by rough rigid base. **Géotechnique**, v. 17, p. 378-410, 1967.

POULOS, H. G. Analysis of the settlement of pile groups. **Géotechnique**, v. 18, p. 449-471, 1968a.

\_\_\_\_\_. The Influence of a Rigid Pile Cap on the Settlement Behaviour of an Axially-Loaded Pile. **Civil Eng. Trans. of Inst. of Engrs Aust**, 10, 206-208.

\_\_\_\_\_. Settlement of single piles in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE**, v. 105,n. 5, p. 627-641, 1979.

\_\_\_\_\_. An approximate numerical analysis of pile raft interaction, **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, vol.18, 73-92, 1994.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, v. 18, p. 351-371, 1968b.

\_\_\_\_\_. **Elastic solutions for soil and rock mechanics**. John Wiley & Sons, 1974.

\_\_\_\_\_. **Pile foundation Analysis and Design**, John Wiley&Sons, 1980.

POULOS, H.G.; MADHAV, M. R. Analysis Of The Movement Of Battered Piles. **Proc. 1st Australia-New Zealand Geomechanics Conf.**, Melbourne, pp. 268-275, 1971.

POULOS, H. G.; MATES, N. S. Settlement and load distributions analysis of pile groups. **Aust. Geomechs**, V.1, 1971.

QUEIROZ, P. C. O. **Análise estática e dinâmica de estruturas reticuladas: ambiente de simulação em Java**. 2010. 235 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Tecnologia, João Pessoa, 2010.

RAMALHO, M. A.; CORRÊA, M. R. S. Interação solo-estrutura para edifícios sobre fundação direta. In: **Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, 25, Porto Alegre, **Anais**, v. 2, p. 433-444, 1991.

RAMALHO, M. A.; VENTURINI, W. S. The use of a foundation element in a three-dimensional structural analysis code. In: **6th International Conference on Boundary Element Technology**, Southampton. v. 1. p. 173-184, 1991.

RAMOS, A. P. F. ; PAIVA, J. B. . Soil-Structure Interaction Analysis. In: **Thirteenth Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM XIII)**, 2013, Houston, TX, EUA, 2013. Proceedings of the Thirteenth Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM XIII). Hosted by University of Houston.. New York City, USA: American Society of Mechanical Engineers (ASME), 2013. v. 1.

RAMOS LOVÓN, O. B. Formulação h-adaptativa do Método dos Elementos de Contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura. 2006. 134 p. Tese (Tese em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

RAO S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. Elsevier Inc, 4th Ed. 2005.

REDDY J. N. **Theory and analysis of elastic Plates and Shells**, CRC Press, 568p., 2nd ed. 2006.

REISSNER, E.; SAGOCI, H. F. Forced torsional oscillation of an elastic half-space. **International Journal of Applied Physics**, 15, 652-654, 1944.

REZENDE, M. N. **Análise de pavimentos de edifício pelo método dos elementos finitos em microcomputador**. 1990. 97 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

RIBEIRO, D. B. **Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF**. 2005. 130 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

\_\_\_\_\_. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF.** 2009. 232 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

RIBEIRO D. B.; PAIVA, J. B. An alternative multi-region BEM technique for three-dimensional elastic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, p. 499-507, 2009.

\_\_\_\_\_. A new Infinite Boundary Element Formulation applied to three-dimensional domains. **Proceedings of the World Congress on Engineering**, v. II, WCE 2009, London, U.K., July, 2009.

\_\_\_\_\_. Analyzing static three-dimensional elastic domains with a new infinite boundary element formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, p. 707-713, 2010.

\_\_\_\_\_. A new infinite boundary element formulation combined to an alternative multi-region technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 818-824, 2013.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner.** 1992. 284 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

RIOS, B. M. C. **Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais.** 1991. 247p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.



SALVADORI, A. Infinite Boundary Elements in 2D elasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Volume 32, Issue 2, Pages 122-138, February, 2008.

SANTOS, A. P. F. **Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer**. 2008. 226 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

SAVASSI, W. **Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas**. São Carlos: Editora da EESC-USP, 1996. 260 p.

SCHANZ, M.; STEINBACH, O. **Boundary Element Analysis – mathematical aspects and applications**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 359p., 2007.

SELVADURAI, A. P. S. Boussinesq' s problem for an elastic half-space reinforced with a rigid disk inclusion. **Mathematics and Mechanics of Solids**, 5: 483, 2000.

\_\_\_\_\_. On Boussinesq' s problem. **International Journal of Engineering Science**, 39, p. 317-322, 2001.

SELVADURAI, A. P. S.; DUMONT, N. A. Mindlin's Problem for a Halfspace Indented by a Flexible Plate. **Journal of elasticity**. V. 105, Ed. 1-2, p. 253-269, 2011.

SELVADURAI, A. P. S.; KATEBI, A. Mindlin's problem for an incompressible elastic half-space with an exponential variation in the linear elastic shear modulus. **International Journal of Engineering Science**, 65, p. 9–21, 2013.

SELVADURAI, A. P. S.; RAJAPAKSE, R.K.N.D. On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. **International Journal of Solids and Structures**, 21, pp. 1213–1229, 1985.

SHAABAN, A. M.; RASHED, Y. F. A coupled BEM-stiffness matrix approach for analysis of shear deformable on elastic half space. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 37, p. 699-707, 2013.

SILVA, H. B. S. **Análise numérica da influência da excentricidade na ligação placa-viga em pavimentos usuais de edifícios**. 2010. 196 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

SILVA, N. A. **Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas**. 1988. 170 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

SOARES, S. M. **Utilização do elemento finito HSM (Hybrid Stress Model) na análise de pavimentos de edifícios**. 1991. 88 p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di' um corpo elastico isótropo. **II Nuovo Comento**, ser. 3, p. 17-20, 1885.

SOUSA JR, E. **Um aplicativo para o ambiente Windows para aquisição de dados para análise de pavimentos de edifícios via Método dos Elementos Finitos**. 1996. 110p. Dissertação (Dissertação em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

STEINBRENNER, W. **Tafeln sur Setzungberechnung**. Die Strasse, v. 1, 121p., 1934.

STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. **Cambridge Philosophical Society Transactions**, 8:287-319, 1849.

SU, J.; WANG, Y. Equivalent dynamic infinite element for soil-structure interaction Original. **Finite Elements in Analysis and Design**, Volume 63, Pages 1-7, January, 2013.

TAZZIOLI, R. Théorie de l'élasticité et philosophie. Gabriel Lamé (1795-1870): Les peregrinations d'un ingénieur au XIXe siècle. **Bulletin de la Sabix**. 44. 2009.

TEJERINA CALDERÓN, E. **Sobre o uso do Método dos Elementos de Contorno - MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo**. 1996. 268 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

TEJERINA CALDERÓN, E.; VENTURINI, W. S. . Interação de placas com o meio contínuo através do método dos elementos de contorno. **XXVIII Jornadas Sul-Americanas em Engenharia Estrutural**, São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos-USP, v. 3. p. 1187-1195, 1997.

\_\_\_\_\_. Analysis of plates in bending resting on three-dimensional half space using BEM/FEM combination. **BEM XIX - Computational Mechanics Publications**, Roma, v. 1. p. 245-1997, 1997.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. Boundary element solution for half-plane problems. **Int. J. Solids Struct.**, 17, pp. 1149–1158, 1981.

TEMAM, R. **Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis**. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, New York, Oxford, ISBN: 978-0-7204-2840-7, V. 2, 500p., 1976.

THOMPSON, S. P. **The life of William Thomson – Baron Kelvin of Largs**. Macmillan and Co., Limited St. Martin's Street, London, v. 1 e 2. 1910.

THOMSON, W. (Lord Kelvin) **Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid**. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Feb, 3, p. 97-99. 1848.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J, N. **Theory of Elasticity**. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., 1951. 506 p.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. United States of America: Mc Graw Hill, 1976. 580 p. ISBN: 0-07-064779-8.

TRAN-CONG, T. Notes on some relationships between the Galerkin, Papkovitch-Neuber and Naghdi-HSU solutions in linear elasticity. **Mechanics Research Communications**, V. 8, Issue 4, p. 207-211, 1981.

\_\_\_\_\_. On the completeness and uniqueness of the Papkovitch-Neuber and the non-axisymmetric Boussinesq, Love, and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates. **Journal of Elasticity**, Volume 36, Issue 3, p. 227-255, 1994.

TSENG, W., PENZIEN, J. **Soil-Foundation-Structure Interaction**. Bridge Engineering Handbook. Ed. Wai-Fah Chen and Lian Duan Boca Raton: CRC Press, 2000.

VENTURINI, W. S. Further developments of boundary element formulation for zoned domain problems. **11th. International Conference on Boundary Element Methods**, Cambridge, USA, 1989.

VENTURINI, W. S. ; CODA, H. B. ; TEJERINA CALDERÓN, E. Analysis of soil composed domains by boundary elements. **Fourth World Congress on Computational Mechanics**, Buenos Aires, 1998.

VILLAÇA, S. F.; TABORDA GARCIA, L. F. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. COPPE/UFRJ, 4ª Ed., 2000.

WEAVER JR., W.; GERE, J. M. **Matrix analysis of framed structures**. Van Nostrand Reinhold – New York, 3<sup>rd</sup> edition, 1990.

WEATHERBURN, C. E. **Advanced vector analysis**. London: G. Bell and Sons, 1928.

WESTENHOLZ, C. **Differential Forms in Mathematical Physics**. Elsevier, ISBN: 978-0-7204-0537-8, V. 3, 487p., 1978.

WILSON, E. L. The static condensation algorithm. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.8, n.1, p.198-203, 1974.

ZAGOTTIS, D. **Introdução à teoria das placas e das cascas**. São Paulo: Editora da Escola Politécnica, 1973. 142 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CBE, FRS; TAYLOR R.L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method Set - Its Basis and Fundamentals**. Elsevier Ltd, Sixth Edition, v.1, 2 e 3, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. Butterworth Heinemann. Fifth Edition, v.1, 2000.