

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MARCELO CAMPOS JUNQUEIRA REIS

**Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando
ligações semirrígidas elastoplásticas**

São Carlos

2012

MARCELO CAMPOS JUNQUEIRA REIS

**Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando
ligações semirrígidas elastoplásticas**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Titular Humberto Breves Coda

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Reis, Marcelo Campos Junqueira

R375a Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas / Marcelo Campos Junqueira Reis ; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2012.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

1. Análise não linear. 2. Método dos elementos finitos posicional. 3. Ligações semirrígidas elastoplásticas. 4. Estruturas de concreto pré-moldado. 5. Estruturas metálicas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MARCELO CAMPOS JUNQUEIRA REIS**.

Título da dissertação: "Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas".

Data da defesa: 22/06/2012

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EEESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EEESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Marcelo de Araújo Ferreira**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Suplente do Presidente da Comissão de Pós-Graduação em Exercício:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais e aos meus irmãos pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio e incentivo durante a minha formação profissional e acadêmica. Principalmente, aos meus pais e irmãos que me ajudaram muito em toda essa jornada.

Ao Prof. Humberto Breves Coda pela excelente orientação, pela amizade, pelos conhecimentos, pela dedicação, pela paciência, pelo companheirismo e por todo o esforço dele em me ajudar.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, incluindo professores e funcionários que de uma maneira me ajudaram para a realização desta dissertação.

À CAPES pela bolsa que me foi concedida durante o mestrado.

A todos os amigos e colegas do programa de Pós-graduação do departamento de estruturas que me ajudaram com ideias e com conhecimentos e principalmente com a amizade durante o período do mestrado.

A todos os amigos de faculdade e colégio que não estavam presentes fisicamente, mas que sempre me deram apoio e torceram por mim.

RESUMO

REIS, M.C.J. (2012). **Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas.** Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

Neste trabalho foi implementada uma técnica para considerar ligações semirrígidas elastoplásticas para a análise não linear geométrica de pórticos planos. As ligações semirrígidas foram consideradas com o comportamento elastoplástico multilinear e modeladas via o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esta técnica foi acoplada ao programa AcadFrame, baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) para a análise não linear geométrica de pórticos planos e treliças planas. O acoplamento numérico foi realizado através de uma formulação algébrica em que a matriz de rigidez das ligações semirrígidas elastoplásticas e as forças internas das ligações são somadas à matriz e ao vetor de forças internas da estrutura a cada iteração no processo de Newton-Raphson. Conceitos de álgebra linear e tensorial, dinâmica não linear, deformação, tensão, princípios variacionais e métodos numéricos são necessários para este propósito. Simular-se-ão diversos exemplos de ligações semirrígidas de estruturas metálicas e de concreto pré-moldado para a verificação das implementações realizadas. O trabalho permite a análise não linear geométrica de pórticos planos considerando as ligações semirrígidas elastoplásticas.

Palavras-chave: Análise não linear geométrica. Método dos elementos finitos posicional. Ligações semirrígidas elastoplásticas. Estruturas de concreto pré-moldado. Estruturas metálicas

ABSTRACT

REIS, M.C.J. (2012). **Geometric nonlinear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections**. Dissertation (MA) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

This work presents a technique to consider elastoplastic semi-rigid connections for geometric nonlinear analysis of plane frames. The connections were considered semi-rigid with elastoplastic behavior and modeled by The Finite Element Method (FEM). This technique was coupled to AcadFrame program, based on the Finite Element Method for geometric nonlinear analysis of plane frames and trusses flat. The numerical coupling is made by an algebraic formulation where, at each iteration of the Newton-Raphson process, the connection's stiffness matrix and elastoplastic internal forces of are added to the Hessian matrix and the internal force vector of the structure. Concepts of linear and tensor algebra, non-linear strain, stress, variational principles and numerical methods are needed for this purpose. Several examples with semi-rigid connections are solved to verify the proposed formulation and performed implementations. This study allows geometric nonlinear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections, as steel and precast concrete structures.

Keywords: Analysis of nonlinear geometric. The finite element method positional. Elastoplastic semi-rigid connections. Precast concrete structures. Metal structures

Sumário

Capítulo 1.....	12
1.1. Generalidades	12
1.1.1. Sistemas Estruturais de Concreto Pré-moldado e de Aço	12
1.1.2. Ligações semirrígidas.....	13
1.1.2. Método dos Elementos Finitos.....	15
1.2. Justificativas	16
1.3. Objetivos	16
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica	17
2.1. Introdução.....	17
2.2. Teoria da Elasticidade Linear	17
2.3. Mecânica do Contínuo	17
2.4. Análise Não linear Geométrica através do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF)	17
2.5. Análise não linear geométrica de sólidos bidimensionais	18
2.6. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)	18
2.8. Associações internacionais.....	23
2.9. Ligações semirrígidas.....	28
Capítulo 3 – Ligações semirrígidas.....	31
3.1 Introdução.....	31
3.2. Comportamento das ligações semirrígidas	32
3.3. Modelagem Analítica do Comportamento das Ligações	34
3.3.1. Modelo Linear	35
3.3.2. Modelo Bi-linear	35
3.3.3. Modelo polinomial.....	35
3.3.4. Modelo b-spline cúbico	37
3.3.5. Modelo Exponencial.....	37
3.3.6. Modelo dos três parâmetros	38
3.4. Modelagem Experimental.....	38
3.5. Modelagem Multilinear	39
Capítulo 4 - Energia Potencial Total Mecânica.....	40
4.1. Introdução.....	40
4.2. Energia Potencial Total	40

4.3. Energia de deformação	40
4.4. Potencial das forças externas	41
4.5. Conceito de conjugado energético	42
4.5.1. Conjugado Energético – Força – Deslocamento	42
4.5.2. Conjugado Energético – Força – Posição	43
4.5.3. Conjugado Energético – Tensão – Deformação uniaxial	44
4.6. Tensão nominal (uniaxial) e deformação de engenharia	45
4.7. Tensão real ou de Cauchy e a sua deformação conjugada uniaxial	46
4.8. Medidas de deformação para sólidos gerais	47
4.8.1. Mudança de configuração	47
4.8.2. Gradiente da função mudança de configuração	48
4.8.3. Alongamento de Cauchy-Green	50
4.8.4. Deformação de Green	51
4.8.5. Lei de Saint Venant-Kirchhoff	52
Capítulo 5-Método dos Elementos Finitos Posicional para a análise não linear geométrica de estruturas	54
5.1 Introdução	54
5.3. Princípio da mínima energia potencial	57
5.3.1. Polinômios de Lagrange	66
5.3.2. Mapeamento posicional da configuração inicial	68
5.3.3. Mapeamento posicional da configuração atual (corrente)	71
5.3.4. Mudança de configuração e seu gradiente	72
5.3.5. Processo de solução de Newton-Rapson	74
Capítulo 6 – Modelo de Rótula Elasto- Plástica	77
6.1. Introdução	77
6.2. Conceitos básicos da teoria da plasticidade uniaxial	77
6.3. Comportamento elásto-plástico perfeito	78
6.4. Comportamento elásto-plástico com encruamento linear positivo	82
6.5. Modelo de Rótula Elasto-Plástica Proposto	83
Capítulo 7 – Programa básico de pórtico plano	88
7.1. Introdução	88
7.2. Programa Principal	88
7.3. Implementação da ligação semirrígida	90
8. Exemplos numéricos	96

8.1. Exemplo 1 – Viga Biengastada.....	96
8.2. Exemplo 2 – Viga Biapoiada com ligação elástica.....	97
8.3. Exemplo 3 – Viga Biapoiada com ligação elasto-plástica	101
8.4. Exemplo 4 – Viga engastada com ligação elasto-plástica com modelo bilinear.....	105
8.5. Exemplo 5–Viga engastada com ligação elasto-plástica com modelo multilinear ..	106
9. Conclusões.....	110
10. Referências Bibliográficas	112

Capítulo 1

1.1. Generalidades

1.1.1. Sistemas Estruturais de Concreto Pré-moldado e de Aço

Está cada vez mais difundido na engenharia o uso de estruturas em aço e em concreto pré-moldado. A diferença entre o estudo de um sistema estrutural constituído por elementos pré-moldados e de aço com um sistema monolítico é o tratamento das ligações presentes entre os pilares e vigas.

Segundo IGIC et al (2009), nas construções e principalmente nas construções pré-fabricadas as ligações estruturais não podem ser consideradas nem absolutamente rígidas e nem idealmente elásticas. Elas devem ser consideradas semirrígidas. Esse tipo de ligações muda as tensões e as deformações na estrutura. Por isso, a necessidade de considerar nas análises estruturais e no dimensionamento o nível de rigidez das conexões.

TURKER et al (2009) afirma que é muito comum em estruturas de aço adotar as ligações completamente rígidas e que esses tipos de ligação são semirrígidas. Além disso, eles dizem que as ligações semirrígidas geram mudanças nas características dinâmicas das estruturas. O estudo de TUKER et al (2009) foi feito para determinar a qualidade das ligações semirrígidas quando ocorrem mudanças nas características dinâmicas das estruturas de aço.

Segundo EL DEBS et al (2010), componentes pré-moldados de concreto protendido são caracterizados pela sua capacidade de serem facilmente produzidos em fábricas. No entanto, é necessário ligar esses componentes para construir a estrutura do edifício. Essas ligações são um dos principais problemas dos projetistas ao usar estruturas de pré-moldado. As ligações afetam todas as fases de produção das estruturas. EL DEBS et al (2010) afirmaram ainda que apesar do uso de ligações semirrígidas ter sido até agora pouco explorada em estruturas de concreto pré-moldado entende-se que o seu uso pode trazer benefícios significativos para o projeto de edifícios com altura média e pequena.

WANG XIN-WU (2008) afirmou que é muito necessário o estudo do comportamento de barras de aço com ligações semirrígidas. Eles desenvolveram um código computacional

que considera a ligação semirrígida, a não linearidade geométrica e o material não linear.

Segundo SANTOS (1998), as ligações de estruturas de aço eram consideradas monolíticas, pois facilitavam a análise estrutural e diminuíaam o tempo de elaboração de projetos. Após vários estudos sobre as ligações, percebeu-se que o comportamento real era diferente do idealizado. Com isso ocorreu uma revisão dos conceitos e procedimentos de cálculo de ligações de estruturas de aço.

SANTOS (1998) disse que estudos realizados no início do século XX demonstraram que as ligações das estruturas de aço possuem um comportamento intermediário entre o monolítico e o de rótula ideal, ou seja, são capazes de transmitir momento, mas possuem alguma capacidade de giro.

As ligações em estruturas de concreto pré-moldado também são muito difundidas na literatura. Em ORDÓÑEZ ET al. (1994), é afirmado que a influência das ligações pré-moldadas é tão importante que alguns especialistas chegaram a afirmar que as questões técnicas relacionadas com as ligações têm impedido o desenvolvimento de construções de estruturas em concreto pré-moldado. Em BALLARIN (1993), comenta-se que o estudo de tipos de ligações não tem acompanhado a utilização de concreto pré-moldado.

1.1.2. Ligações semirrígidas

Segundo FERREIRA (1999), o termo ligações semirrígidas foi usado inicialmente para estruturas metálicas e posteriormente incorporado ao estudo das estruturas pré-moldadas. FERREIRA (1999) afirma ainda que a princípio essa notação esteja relacionada com a rigidez à flexão da ligação ou com a sua flexibilidade.

Conforme a norma Americana AISC/ASD (1978), as ligações semirrígidas podem ser definidas como os tipos de conexões onde a rotação relativa entre as peças varia entre 20 e 90% da rotação que poderia ter se a ligação fosse perfeitamente flexível.

A figura a seguir mostra a classificação das ligações em função da rigidez.

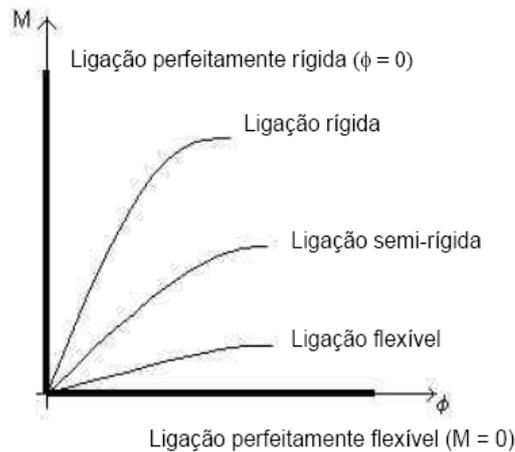


Figura 1.1 – Classificação das ligações.
Fonte: SANTOS (1998).

SANTOS (1998) define rigidez como a capacidade de restrição ao giro relativo imposta pela ligação e flexibilidade como a capacidade de rotação da ligação.

Através de curvas de momento-rotação obtidas experimentalmente ou por modelos teóricos, é que se obtém a descrição do comportamento das ligações. A figura 2 mostra uma curva momento-rotação para uma ligação.

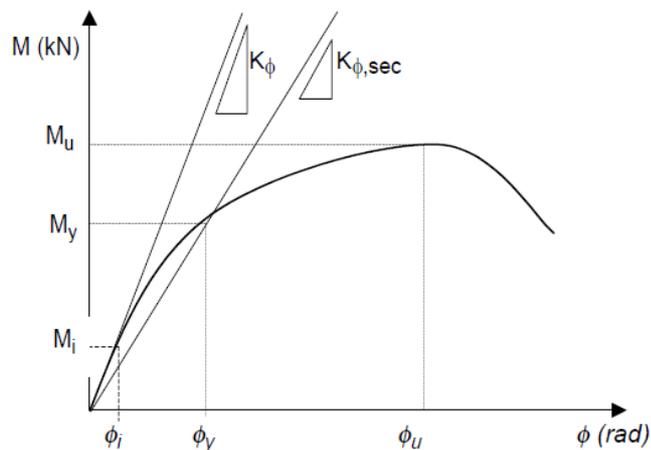


Figura 1.2 – Curva momento-rotação para uma ligação.
Fonte: FERREIRA (1999).

“As ligações de estruturas de aço são a origem de descontinuidades geométricas e mecânicas, que introduzem efeitos localizados e imperfeições que interferem no comportamento global da estrutura, e por isso devem ser estudadas de modo rigoroso, não só do ponto de vista de fabricação e de montagem, mas também do ponto de vista da função estrutural.” (COLSON (1991), p.213).

Segundo FERREIRA (1993), as ligações de concreto pré-moldado, onde ocorrem às concentrações de tensões, promovem a redistribuição dos esforços nos elementos e que falhas de certas ligações podem provocar o colapso de estruturas. O procedimento de cálculo usado na determinação dos esforços e dos deslocamentos de estruturas de concreto pré-moldado considera as ligações rígidas, apesar de serem semirrígidas. FERREIRA (1999) também mostra que ligações de uma estrutura de pré-moldada não podem ser consideradas como nós na estrutura, mas como uma região da estrutura. Essa região se diferencia do restante da estrutura por ser um local com concentrações de tensões onde as deformações e deslocamentos não podem ser desconsiderados, mesmo para as ações de serviço.

FERREIRA (1993) afirma ainda que as ligações semirrígidas liberam deslocamentos nas extremidades das barras da estrutura, promovendo uma perda de rigidez da estrutura, uma redistribuição dos esforços, e ainda, uma modificação dos deslocamentos globais.

Então, é necessário o desenvolvimento de um código computacional que leve em consideração a semi-rigidez da ligação. Desse modo, pode-se obter uma análise estrutural melhor para o dimensionamento e o estudo de estabilidade desses tipos de estruturas.

1.1.2. Método dos Elementos Finitos

Segundo ASSAN (2003), o método dos elementos finitos é uma alternativa para resolver os problemas da teoria da elasticidade, superando os problemas de outros métodos como, por exemplo, o Método de Rayleigh-Ritz e Garlekin.

ASSAN (2003) afirma que o método dos elementos finitos é baseado no método de Rayleigh-Ritz e que ele faz a divisão de um domínio de integração contínuo em um número finito de pequenas regiões que são chamadas de elementos finitos. A divisão do domínio é denominada de rede de elementos finitos. Essa rede pode ser aumentada ou diminuída variando o tamanho do elemento finito. Os pontos de interseção dessa malha são chamados de nós.

Dissertações e teses do SET e artigos internacionais serão utilizados ao longo do trabalho como base dos desenvolvimentos computacionais relacionados a não linearidade geométrica via elementos finitos. As principais teses são: MACIEL (2008), GRECO (2004), MARQUES (2006), PASCON (2008).

1.2. Justificativas

Devido à crescente utilização de estruturas em concreto pré-moldado e de aço, torna-se necessário buscar melhorias no projeto e no dimensionamento dessas estruturas. Para isto, deve-se ampliar o conhecimento em relação ao comportamento das ligações semirrígidas e desenvolver códigos computacionais que possam fornecer resultados mais precisos com a realidade. Segundo CAMPOS Jr. (1990), JONES & al. (1983), PFEIL (1986), o emprego de ligações semirrígidas podem diminuir o custo do projeto.

1.3. Objetivos

O objetivo principal desta pesquisa é desenvolver um modelo de ligação semirrígida geral que possa ser adaptado às curvas normativas de estruturas pré-moldadas e em aço e sua implementação em código (software) de análise não linear geométrica de estruturas (Acadframe). O objetivo secundário é a formação do pesquisador e para atingir tal propósito necessita dos seguintes conhecimentos:

- Métodos Numéricos;
- Teoria da elasticidade;
- Análise não linear geométrica;
- Método dos Elementos Finitos;
- Dinâmica das Estruturas;
- Álgebra linear e tensorial, mecânica do contínuo, não linearidade geométrica e formulação Lagrangiana posicional;
- Estudo das Normas Técnicas Brasileiras.

Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

2.1. Introdução

Na revisão bibliográfica, serão citados e comentados trabalhos que foram feitos anteriormente por pesquisadores e que servirão como base para o desenvolvimento desta dissertação. Os trabalhos são das áreas de elasticidade, análise não linear geométrica, método dos elementos finitos e ligações semirrígidas. Também serão citadas as normas brasileiras e internacionais que abordam sobre as ligações em estruturas de concreto pré-moldado e de aço.

2.2. Teoria da Elasticidade Linear

TIMOSHENKO & GOODIER (1951) reuniram diversos trabalhos desenvolvidos no campo da Elasticidade Linear. Eles determinaram as equações de compatibilidade, de equilíbrio estático, a lei constitutiva para materiais isotrópicos e elásticos submetidos às pequenas deformações e deslocamentos. Mostraram as soluções analíticas para casos de carregamento e geometria simplificados.

2.3. Mecânica do Contínuo

COIMBRA (1981) reúne vários conceitos de álgebra de vetores e tensores, análise de funções tensoriais, deformações e movimentos de corpos, balanços de quantidade de movimento e de energia, relação tensão deformação.

2.4. Análise Não linear Geométrica através do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF)

O trabalho de BATHE (1996) apresentou várias formulações e conceitos relativos ao Método dos Elementos Finitos (MEF) que foram usadas em análises estruturais estáticas, dinâmicas, geometricamente lineares e não lineares.

CODA & GRECO (2004) utilizaram a formulação do Método dos Elementos Finito Posicional (MEFP) para a análise de problemas não lineares geométricos de estruturas

tanto para o caso estático como dinâmico. O MEFP foi estendido para questões de impacto bidirecional entre estruturas birreticuladas e anteparo rígido. Além disso, a formulação ainda considera os efeitos relacionados com a elastoplasticidade nos membros estruturais e ligações que consideram deslocamentos livres nas conexões nodais. Assim, possibilita-se a análise de mecanismos flexíveis.

MACIEL (2008) estudou problemas não lineares geométricos que envolviam pórticos planos e sólidos tridimensionais. Esses problemas foram analisados através formulação dos métodos dos elementos finitos posicional e uma formulação lagrangiana total. Nessa formulação, o algoritmo de Newton-Raphson é usado para solução iterativa do problema não linear. Já os problemas que envolvem dinâmica, a matriz de massa é consistente e o integrador temporal é o algoritmo de Newmark. Para a análise do pórtico plano, a cinemática adotada é a de Reissner, em que a seção plana do pórtico não precisa permanecer perpendicular ao seu eixo central após deformação. Em relação à formulação de sólido tridimensional, foi adotada aproximação cúbica de variáveis com elementos finitos tetraédricos de 20 nós.

2.5. Análise não linear geométrica de sólidos bidimensionais

MARQUES (2006) desenvolveu uma formulação e sua implementação computacional para se analisar por via do Método dos Elementos Finitos, o comportamento não linear geométrico de sólidos bidimensionais. O trabalho aborda o comportamento geometricamente não linear através de uma formulação posicional. Essa formulação é classificada como Lagrangeana total com cinemática exata. Na análise do comportamento dinâmico usou-se um algoritmo de integração temporal baseado na família de integradores temporais de Newmark. O impacto foi adotado através de uma técnica que utiliza como integrador temporal o algoritmo de Newmark, alterado para garantir sua estabilização.

2.6. Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT)

A NBR 8800/2008 - Projeto e execução de estruturas de aço em edifícios – possui a seção 6 que aborda as condições específicas para o dimensionamento de ligações semirrígidas.

Segundo a NBR 8800/2008, as ligações metálicas consistem em elementos de ligação, por exemplo, enrijecedores, chapas de ligação, cantoneiras e consolos, e meios de ligação, como soldas, parafusos, barras redondas rosqueadas e pinos. Esses elementos devem ser dimensionados de modo que a sua resistência de cálculo a um determinado estado-limite último seja igual ou superior à solicitação de cálculo.

A NBR 8800/2008 considera uma ligação viga pilar rotulada se:

$$S_i \leq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (2.1)$$

E rígida se:

$$S_i \geq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (2.2)$$

Onde S_i é a rigidez da ligação que corresponde a dois terços do momento resistente de cálculo (rigidez inicial) e I_v e L_v são o momento de inércia da seção transversal no plano da estrutura e comprimento da viga conectada à ligação, respectivamente. A NBR 8800/2008 afirma ainda que a rigidez da ligação pode ser determinada, na ausência de Norma Brasileira aplicável, de acordo com o Eurocode 3 Parte 1-8 ou por base em resultados experimentais. A Norma Brasileira admite que para qualquer caso de análise elástica a ligação pode ser considerada semirrígida com S_i constante durante todo o período do carregamento.

Segundo a A NBR 8800/2008, o limite da equação 2.2 é válido desde que em cada andar da estrutura seja satisfeita a relação:

$$\frac{K_v}{K_p} \geq 0,1 \quad (2.3)$$

Onde K_v é o valor médio de I_v/L_v para todas as vigas no topo do andar e K_p é o valor médio de I_p/L_p para todos os pilares do andar. I_v é o momento de inércia de uma viga no plano da estrutura e L_v é o vão de uma viga considerado de centro a centro de pilares e

L_p é a altura do andar para um pilar. Caso as duas expressões a seguir sejam satisfeitas, a ligação deve ser considerada como semirrígida.

$$S_i \geq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (2.4)$$

$$\frac{K_v}{K_p} \leq 0,1 \quad (2.5)$$

A NBR 8800/2008 ainda afirma que as ligações usuais (rotuladas ou rígidas) podem ser simuladas com esses tipos de vinculação na análise estrutural, a critério do responsável técnico pelo projeto.

A NBR-9062: Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-Moldado – no item 7 trata das ligações em estruturas de concreto pré-moldado. Segundo a NBR-9062, no projeto das ligações de elementos pré-moldados entre si ou entre estes e concreto moldados no local são levadas em consideração a estabilidade geral da estrutura montada e a estabilidade durante a fase de montagem da estrutura. O dimensionamento destas ligações deve estar de acordo com a NBR-6118. Para a utilização de outras ligações que não estão presentes nesse item devem ser verificadas quanto a sua eficácia, qualidade e durabilidade através de cálculo analítico. O projeto das ligações deve ser elaborado após um estudo das possíveis solicitações em serviço e também em montagem. A NBR-9062 também afirma que solicitações provenientes de variações volumétricas da estrutura (retração, fluência, temperatura) não podem ser desprezadas, salvo em casos especiais. Já em casos mais complexos, é necessário considerar as rotações e deformações imediatas ocasionadas pela aplicação e retiradas de cargas acidentais, deslocamentos possíveis de ocorrer devido a vibrações de máquinas e equipamentos industriais. A NBR-9062 apresenta os seguintes tipos de ligações: ligações solicitadas predominantemente por compressão, tração e flexão, ligação de vigas e lajes, ligação de vigas ou de lajes com seus apoios, ligação de pilares, pórticos e arcos, ligação transversal de lajes e mesas de vigas T, ligações de pilares, pórticos, e arcos em região de momento nulo, ligação de pilares, pórticos e arcos com fundação e ligações por meio de consolos de concreto.

Nas ligações solicitadas predominantemente por compressão, situam-se neste caso os apoios de elemento pré-moldado sobre os outros elementos de concreto moldado no local com exceção nos apoios de pilares sobre suas fundações. Os elementos pré-moldados podem ser assentados nos seus apoios definitivos:

- Com junta a seco;
- Com intercalação de uma camada de argamassa;
- Com concretagem local;
- Com rótulas metálicas;
- Com almofadas de elastômero;

Nas ligações solicitadas predominantemente por tração, situam-se neste caso suspensão de elementos pré-moldados por tirantes ou outros dispositivos, fixados em outros elementos pré-moldados ou de concreto moldado no local, ou a ligação de elementos pré-moldados de vedação com seus apoios superiores.

Já nas ligações solicitadas predominantemente por flexão, situa-se neste caso a realização da continuidade de elementos pré-moldados como vigas, lajes, pilares, pórticos e arcos.

Segundo a NBR-9062, a análise de estruturas pré-moldadas devem ser tratadas conforme disposto na NBR6118, respeitando algumas peculiaridades. Serão apresentadas a seguir duas destas peculiaridades:

- A capacidade das estruturas pré-moldadas deve ser governada pela capacidade de seus elementos estruturais e não por suas ligações. Na análise da estabilidade, deve ser levada em consideração a influência desfavorável do comportamento efetivo das ligações. Dependendo do fator de restrição à rotação da ligação, o comportamento da ligação no apoio pode ser considerado articulado, rígido ou semi-rígido.
- A estrutura deve ser analisada, em relação a estabilidade, em todas as fases, considerando o comportamento das ligações na montagem.

Conforme a NBR-9062, o fator de restrição à rotação α_r que define a rigidez relativa de cada ligação da extremidade do elemento conectado, é expresso por:

$$\alpha_r = \frac{1}{1 + \frac{3(EI)_{sec}}{R_{sec} L_{ef}}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad (2.6)$$

Onde:

$(EI)_{sec}$ é a rigidez secante da viga conforme a ABNT NBR 6118;

L_{ef} é o vão efetivo entre apoios, ou seja, a distância entre os centros de giro nos apoios;

R_{sec} é a rigidez secante ao momento fletor da ligação viga-pilar.

A NBR 9062 afirma que o fator de restrição à rotação pode ser entendido como a relação da rotação θ_1 da extremidade do elemento em relação à rotação combinada θ_2 do elemento e da ligação devido ao momento de extremidade, conforme a figura 2.1:

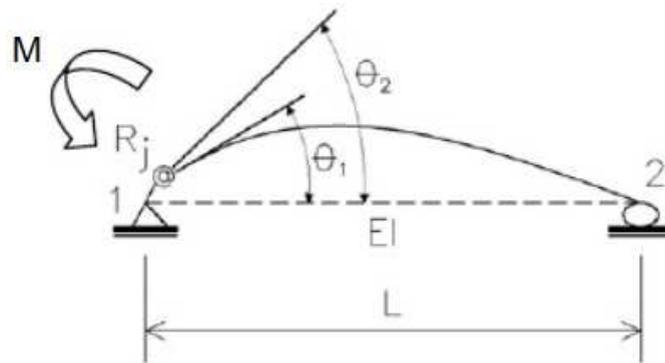


Figura 2.1. Fator de restrição à rotação

Fonte: ABNT NBR 9062

Segundo a NBR-9062, a rigidez ao momento fletor de uma ligação viga-pilar é definida pela sua relação momento-rotação. O comportamento não linear da ligação pode ser realizada com base na análise linear usando a rigidez secante R_{sec} , conforme mostrada na figura 2.2.

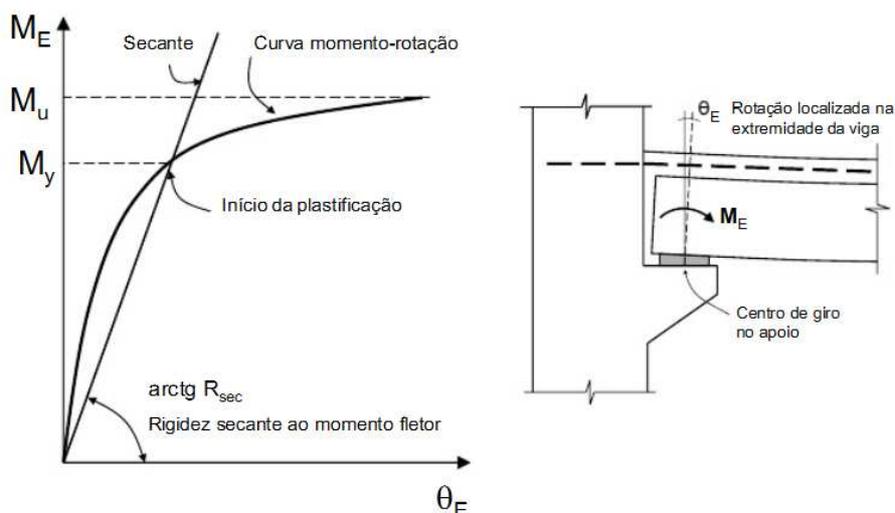


Figura 2.2. Relação momento-rotação na ligação viga-pilar

Fonte: ABNT NBR 9062

Onde:

θ_e é a rotação localizada na ligação na extremidade da viga;

M_e é o momento fletor mobilizado na extremidade da viga.

O limite de rigidez aos momentos fletores para ligações semi-rígidas definido pela NBR-9062 é dado por:

$$\frac{0,5(EI)_{sec}}{L_{ef}} < R_{sec} \leq \frac{20(EI)_{sec}}{L_{ef}} \quad (2.7)$$

2.8. Associações internacionais

American Institute of steel construction (AISC) classifica as ligações de aço em ligações simples e ligações momentos.

A ligação simples transfere um momento insignificante para a ligação. Na análise de estruturas, as ligações simples podem ser assumidas como livres para rotacionarem. Uma ligação simples deve ter uma capacidade de rotação suficiente para apenas acomodar a rotação requerida determinada pela análise da estrutura.

As ligações de momento transmitem momentos para a ligação. Segundo a AISC, há dois tipos de conexões de momento. Eles são FR e FD que são especificados abaixo:

- Fully-Restrained (FR) Moment Connections: transfere um momento com uma insignificante rotação entre os elementos conectados. Na análise da estrutura, a ligação pode ser assumida com nenhuma rotação relativa. A ligação FR deve ter suficiente

resistência e rigidez para manter o ângulo entre os elementos conectados de acordo com o estado-limite de resistência.

- Partially-Restrained (PR) Moment Connections: transfere momentos, mas a rotação dos elementos conectados não é negligenciada. Na análise da estrutura, as características de força-deformação de resposta da conexão devem ser incluídas. As características de resposta de uma conexão PR devem ser documentadas na literatura técnica ou determinadas por meios analíticos ou experimentais. Os componentes de uma ligação PR devem apresentar força suficiente, rigidez e capacidade de deformação conforme o estado limite de resistência.

O Eurocode 3 (Design of Steel Structures. Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings, European Prestandard — ENV 1993-1-1, 1992.) considera os efeitos do comportamento das ligações na distribuição dos esforços numa estrutura e nas deformações globais da estrutura. Porém, esses efeitos podem ser desprezados desde que sejam suficientemente reduzidos. Segundo o Eurocode 3, para avaliar se é necessário levar em consideração os efeitos da ligação na análise da estrutura pode-se fazer a seguinte distinção entre três modelos simplificados de ligações:

- articulada, quando considera que a ligação não transmite momentos fletores;
- contínua, quando se pode admitir que o comportamento da ligação não houvesse qualquer efeito na análise;
- semicontínua, para as quais o comportamento da ligação tem que ser levado em consideração na análise estrutural.

O tipo de modelo adequado para cada caso deve ser de acordo com base no Quadro 5.1 do Eurocode em função da classificação da ligação e do método de análise escolhido.

Quadro 5.1 – Tipos de modelos de junta

Método de análise global	Classificação da junta		
Elástica	Nominalmente articulada	Rígida	Semi-rígida
Rígido-plástica	Nominalmente articulada	Resistência total	Resistência parcial
Elasto-plástica	Nominalmente articulada	Rígida e resistência total	Semi-rígida e resistência parcial Semi-rígida e resistência total Rígida e resistência parcial
Tipo de modelo da junta	Articulada	Contínua	Semicontínua

Figura 2.3: Tipos de modelo de ligação.

Fonte: Eurocode 3.

O Eurocode 3 ainda afirma que a relação momento-rotação de cálculo de uma ligação que será utilizada na análise, pode ser simplificada desde que a curva seja apropriada, incluindo uma aproximação linear (por exemplo, bilinear), desde que essa curva simplificada se situe totalmente sob a curva da relação momento-rotação de cálculo característica.

Na análise global elástica, as ligações devem ser classificadas em função da sua rigidez de rotação e as juntas deverão apresentar resistência suficiente para transmitir os esforços atuantes que resultam da análise estrutural. No caso de uma junta semirrígida, em geral deve usar na análise a rigidez de rotação da ligação S_j correspondente ao momento fletor solicitante de cálculo de uma ligação no estado limite último $M_{j,Ed}$. Caso $M_{j,Ed}$ não exceder $2/3$ do momento fletor resistente de cálculo da ligação $M_{j,Rd}$, pode adotar a rigidez de rotação inicial, $S_{j,ini}$, na análise global, conforme a Figura 2.4.a. O Eurocode permite como uma simplificação considerar a rigidez de rotação inicial igual a $S_{j,ini}/\eta$, para todos os valores de $M_{j,Ed}$, como mostrado na Figura 2.4.b, onde η é o coeficiente de modificação da rigidez indicado na Figura 2.5.

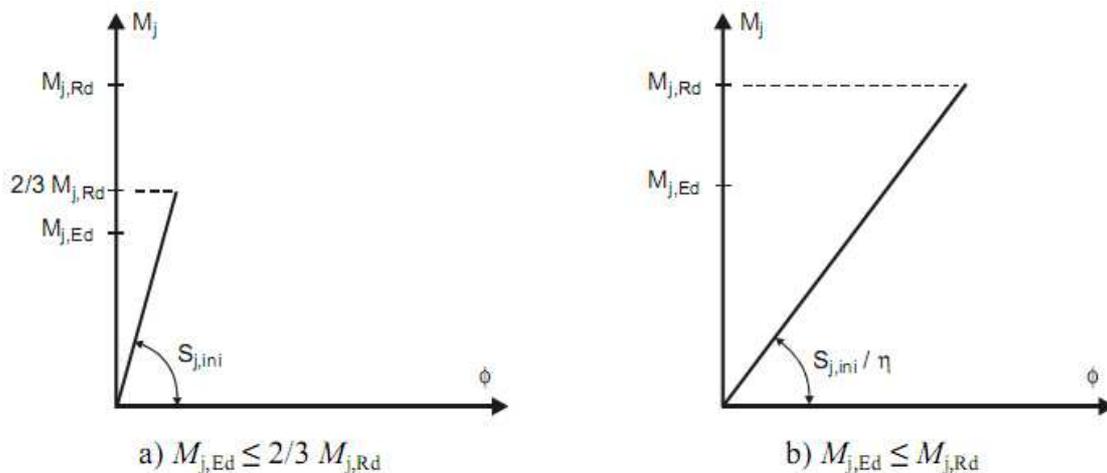


Figura 2.4. Rigidez de rotação utilizada na análise global elástica.

Fonte: Eurocode 3.

O índice j indica que se trata da ligação, o E_d indica que é uma solicitação de cálculo e o R_d indica que é uma resistência de cálculo.

Tipo de ligação	Juntas viga-coluna	Outros tipos de junta (viga-viga, de continuidade de vigas, da base de colunas)
Soldada	2	3
Chapas de extremidade aparafusadas	2	3
Cantoneiras de apoio de banzo aparafusadas	2	3,5
Chapas de base	-	3

Figura 2.5: Coeficiente de modificação da rigidez.
Fonte: Eurocode 3.

Na análise rígido-plástica, a capacidade de rotação de uma junta deverá ser suficiente para assegurar as rotações resultantes da análise estrutural. Já na análise global elástica, as juntas devem ser classificadas em função da sua resistência. Na determinação da distribuição dos esforços deverá ser utilizada a relação momento característica de cada ligação. Como simplificação, o Eurocode 3 permite adotar a relação de cálculo bilinear momento-rotação representada na figura 2.6. O coeficiente de modificação da rigidez η é obtido na figura 2.5.

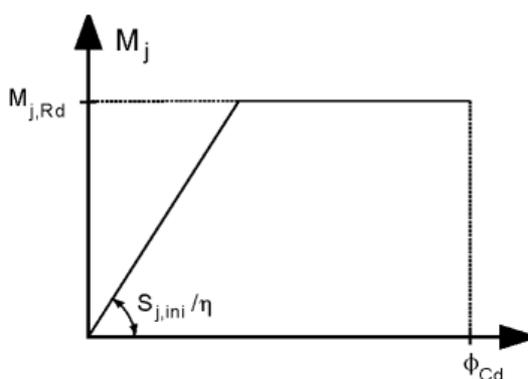


Figura 2.6: Relação momento-rotação de cálculo bilinear simplificada

Na análise global de barras de treliças, a distribuição dos esforços axiais numa treliça poderá ser determinada admitindo a hipótese de que a ligação dos nós seja articulada.

O Eurocode 3 classifica as ligações segundo a sua resistência e segundo a sua rigidez. Na classificação segundo a rigidez, uma ligação pode ser classificada como rígida, nominalmente articulada ou semirrígida em função da sua rigidez de rotação, através de

uma comparação da sua rigidez de rotação inicial $S_{j,ini}$. Uma ligação nominalmente articulada deve ser capaz de transmitir os esforços sem a ocorrência de momentos significativos que possam afetar de modo desfavorável os elementos ou a estrutura em o seu todo. Uma ligação é considerada rígida quando ela possui rigidez de rotação suficiente para justificar uma análise baseada na continuidade total. Uma ligação que não satisfaça as condições de uma ligação rígida nem de uma ligação nominalmente articulada deve ser classificada como ligação semirrígida. As ligações semirrígidas devem ser capazes de transmitir os esforços aplicados.

Na classificação segundo a resistência, uma ligação pode ser classificada como totalmente resistente, flexível ou parcialmente resistente comparando o valor de cálculo do seu momento resistente, $M_{j,Rd}$, considerando os valores de cálculo dos momentos resistentes dos elementos ligados. Uma ligação flexível deve transmitir os esforços sem que haja momentos significativos que possam afetar de modo desfavorável os elementos ou a estrutura no seu todo. Numa ligação totalmente resistente, o valor de cálculo da resistência deverá ser pelo menos igual ao dos elementos ligados. Uma ligação que não apresente as condições requeridas para ser uma junta de resistência total ou uma ligação flexível deve ser classificada como uma ligação parcialmente resistente. A Figura 2.7 mostra os limites de classificação das ligações que não sejam bases de coluna.

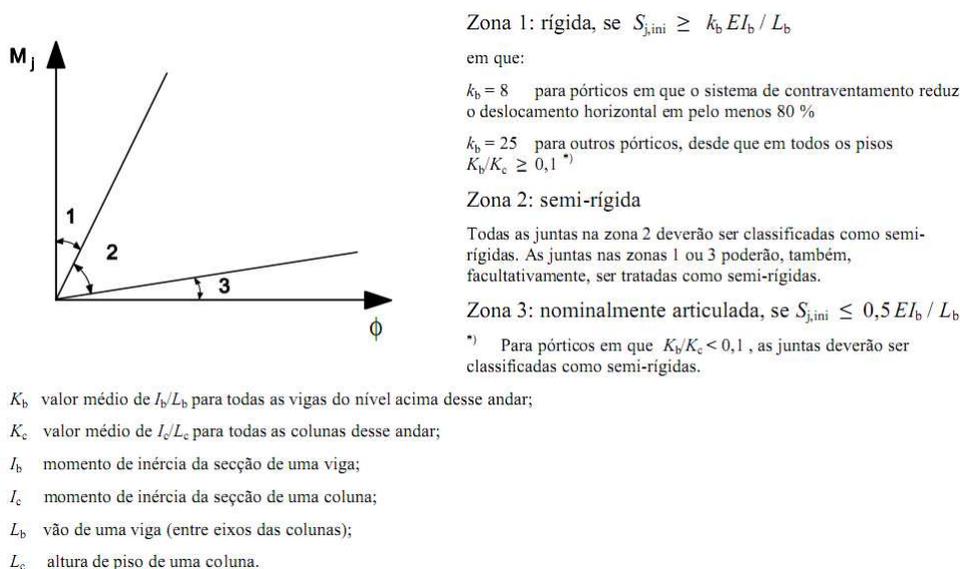


Figura 2.7: Classificação das ligações segundo a rigidez.

Fonte: Eurocode 3

2.9. Ligações semirrígidas

Diversos autores têm mostrado que uma avaliação mais criteriosa dos modelos estruturais utilizados é muito importante na análise e dimensionamento de estruturas de aço e de concreto pré-moldado.

WILSOON e MOORE (1917) apud MAGGI (2004) começaram as pesquisas na área experimental quando estudaram a rigidez rotacional de ligações e sua influência no comportamento das estruturas.

LIGHTFOOT e BAKER (1961) apud SANTOS (1998) aproveitaram a difusão dos microcomputadores na década de 1960 para desenvolver códigos computacionais que analisavam pórticos planos com ligações elásticas.

MONFORTON e WU (1963) apud CHEN e TOMA (1994) acrescentaram as ligações semirrígidas na análise matricial de estruturas.

Segundo SILVA, R. (2010), desde a década de 1970 metodologias modeladas em método dos elementos finitos têm sido implementadas e modificadas.

SILVA, R. (2010) afirma também que o Método dos Estados limites a partir de 1980 foi extremamente importante para que as ligações fossem classificadas por parâmetros mais realísticos como, por exemplo, rigidez e resistência. JONES e al. (1980) observaram a influência das ligações semirrígidas nos pilares de aço. Em 1983, JONES ET AL fizeram a análise do comportamento de pórticos com ligações semirrígidas.

GOVERDHAM (1983) apud CHEN et al. (1996) reuniram 230 curvas de momento-rotação obtidas experimentalmente. KISHI e CHEN (1986) apud CHEN ET al. (1996) aumentaram a coleta realizada por GOVERDHAM.

BJORHOVDE ET al. (1990) determinaram um esquema que classificava as ligações devido a sua rigidez, resistência e ductilidade que elas apresentavam.

CAMPOS Jr. (1990) elaborou um elemento híbrido de viga-pilar que usava a não linearidade geométrica dos pórticos e a não linearidade das ligações em um código computacional de análise estrutural de pórticos planos com ligações semirrígidas entre vigas e pilares de aço.

QUEIROZ (1992) pesquisou o comportamento de ligações rígidas entre perfis I com almas coplanares e desenvolveu um código computacional capaz de dimensionar esse tipo de ligação. QUEIROZ (1995) estudou a resistência, rigidez e a capacidade de ligações soldadas através de ensaios laboratoriais.

MONTEIRO (1997) desenvolveu um código computacional para análise de pórticos planos com o objetivo de avaliar a influência das ligações semirrígidas nas estruturas.

SANTOS (1998) elaborou um modelo para determinar o comportamento momento-rotação de ligações com placa de extremidade estendida e estudou a influência da rigidez dessas ligações na deslocabilidade lateral e na distribuição de esforços de pórticos planos de aço.

HASAN ET al. (1998) propuseram um novo sistema de classificação para as ligações. Esse novo sistema consistia em dividir o diagrama momento-rotação de uma ligação de uma estrutura não contraventada em três partes, determinando assim um diagrama trilinear.

FOLEY e VINNAKOTA (1997, 1999-a) elaboraram um elemento finito que era capaz de fazer uma análise inelástica de segunda ordem em que a plasticidade foi considerada nas seções transversais e ao longo do comprimento das barras de pórticos planos de aço de pequeno porte. FOLEY e VINNAKOTA (1999-b) estenderam a pesquisa para analisar pórticos com múltiplos andares e múltiplos vãos.

CHRISTOPHER e BJORHOVDE (1999) analisaram o comportamento de pórticos com ligações semirrígidas levando em consideração as diferenças das características de carga e descarga.

MELLO (1999) elaborou um código computacional considerando-se os efeitos da não linearidade geométrica e do material, relacionados ao comportamento das ligações semirrígidas. Ele baseou-se no método dos deslocamentos usando a técnica matricial com as funções de estabilidade.

SOUZA (1999) desenvolveu um código computacional para análise elástica em teorias de 1ª e 2ª ordem, de estruturas planas de aço considerando as ligações semirrígidas, através de modificações na matriz de rigidez dos elementos componentes.

ROMANHOLO (2001) desenvolveu um código computacional que considerava o comportamento das ligações semirrígidas na matriz de rigidez do elemento de estruturas planas. A matriz de rigidez era modificada por coeficientes que consideravam a rigidez axial e rotacional das ligações.

SEKULOVIC e SALATIC (2001) desenvolveram um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para calcular os esforços e deslocamentos nas estruturas planas de aço, levando em consideração o comportamento não linear das ligações e a não linearidade geométrica. SEKULOVIC e SALATIC (2001) utilizaram o modelo de três parâmetros para simular o comportamento não linear das ligações.

OLIVEIRA (2003) propôs um código computacional para análise de sistemas de pisos mistos aço-concreto considerando a presença da ligação semirrígida viga-viga.

LANDESMANN (2003) elaborou um método de análise estrutural não linear elastoplástica para pórticos que levava em consideração a flexibilidade das ligações metálicas entre viga-pilar.

BORGES ET al. (2003) elaboraram o NASCON que é um programa de cálculo não linear baseado no método das componentes preconizado pelo EN 1993-1-8: 2005.

GALVÃO (2004) realizou uma análise dinâmica no cálculo das estruturas de pórticos planos com ligações semirrígidas.

LANDESMANN e BATISTA (2005) elaboraram um código computacional que realiza uma análise avançada baseada no método da rótula plástica refinada, em que o conceito do módulo tangente é utilizado e ele é determinado pelas curvas de resistência à compressão, especificadas pela antiga ABNT NBR 8800: 1986.

PINHEIRO e SILVEIRA (2005) demonstraram detalhes e procedimentos computacionais referentes às análises de pórticos com ligações semirrígidas.

ZHOU (2005) elaborou um código computacional que simulava o comportamento momento-rotação com placa de extremidade com oito parafusos e expressões matemáticas que realizavam os cálculos dos parâmetros dessas ligações.

CASTRO (2006) estudou a utilização de um modelo mecânico com elementos de mola rotacionais não lineares para simular o efeito das ligações semirrígidas na análise dinâmica de pórticos de aço.

LIU ET al. (2008) estudaram a interação entre o comportamento semirrígido das ligações e o comportamento elasto-plástico das barras. Eles propuseram um elemento de barra híbrido com duas molas nas extremidades.

Segundo SILVA, R. (2010), com o desenvolvimento computacional aliado ao avanço das pesquisas tem-se incorporado o comportamento semirrígido das ligações nas análises de cálculo. Assim, resulta-se em análises mais realistas permitindo um dimensionamento mais preciso.

Capítulo 3 – Ligações semirrígidas

3.1 Introdução

As análises e dimensionamento de estruturas de aço e de concreto pré-moldado normalmente consideram as ligações como completamente rígidas ou rotuladas. Quando se assume uma ligação completamente rígida, implica que nenhuma rotação relativa da ligação ocorre e que o momento da viga é completamente transferido para o pilar. Desse modo, os deslocamentos que ocorrem nas estruturas são subestimados enquanto os esforços atuantes nas ligações são superestimados. Já nas ligações rotuladas não existe nenhuma restrição para rotação da ligação em que o momento da ligação é sempre zero e assim pode ocorrer um maior gasto com material nas estruturas. Porém, é evidente através de observações experimentais que todas as ligações viga-pilar usadas possuem uma rigidez que está entre os dois casos extremos que são completamente rígidas e rotuladas. Segundo SILVA, R. (2010), tem se exigido cada vez mais dos engenheiros estruturais e pesquisadores o conhecimento do comportamento das ligações das estruturas com o objetivo de melhorar esses modelos de cálculo.

Segundo SANTOS (1998), estudos experimentais para a caracterização do comportamento momento-rotação das ligações mostraram um comportamento não linear e que esse comportamento é devido à perda da rigidez da ligação à medida que a sollicitação é aumentada. SANTOS (1998) afirma que a explicação para esse comportamento é atribuída a diversos fatores, como por exemplo:

- largura e comprimento das vigas conectadas;
- presença de tensões residuais oriundas de operações de soldagem e recorte;
- alta concentração de tensões nas regiões dos furos e deformações de parafuso;
- rigidez devida à coluna;
- flambagem local das abas da viga;
- plastificação dos elementos de ligação devido ao giro da viga;
- imperfeições geométricas;

3.2. Comportamento das ligações semirrígidas

A ligação é um dispositivo pelo qual forças e momentos são transmitidos de um elemento para o outro. A ligação viga-coluna é normalmente submetida à força axial, força cortante, momento fletor e torção. Para um estudo no plano pode-se excluir o efeito devido à torção. Além disso, os efeitos relacionados às forças cortantes e axiais são geralmente pequenos quando comparados com o momento. Conseqüentemente, é necessário considerar somente o momento e a rotação das ligações. Na figura 3.1 a seguir, a ligação sofre uma rotação θ_r , quando um momento M é aplicado. O ângulo θ_r corresponde à rotação relativa entre a viga e o pilar.

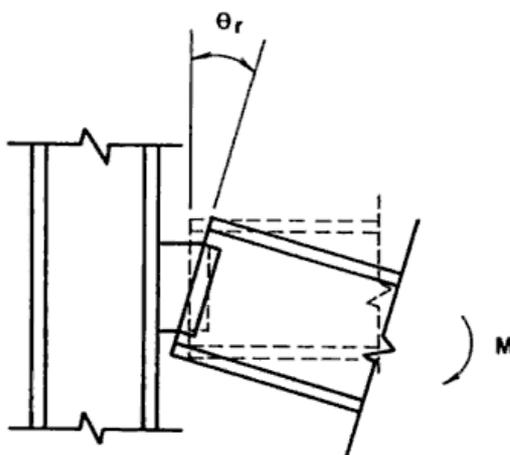


Figura 3.1.- Momento-Rotação da ligação

Fonte: CHEN (1995)

Portanto, o comportamento das ligações semirrígidas no plano é representado por $M-\theta_r$ que é a relação momento-rotação da ligação. O comportamento da relação momento-rotação para uma variedade de ligações normalmente usadas está representado na figura 3.2. Todos os tipos de ligações apresentam um comportamento não linear na relação momento-rotação. Além disso, o comportamento não linear está entre os dois casos extremos de ligação completamente rígida e rotulada. As curvas de momento-rotação de todos os tipos de ligações são não lineares durante todo o carregamento. O comportamento não linear de uma ligação está associado a vários fatores como, por exemplo, a descontinuidade do material da ligação, a flambagem local de um elemento, etc. As ligações semirrígidas normalmente são muito dúcteis.

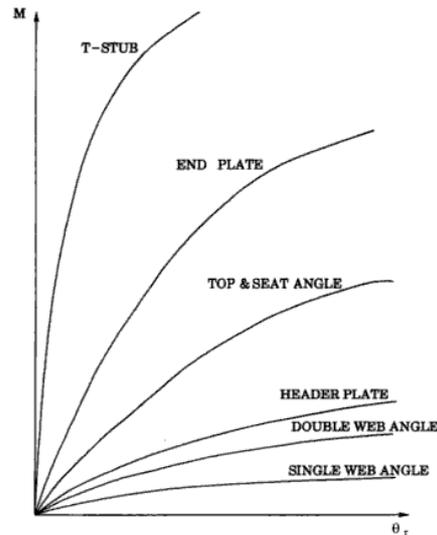


Figura 3.2. – Curvas momento-rotação

Fonte: CHEN (1995)

A figura 3.3. mostra os tipos de ligações semirrígidas que são usadas na prática em vigas e pilares.

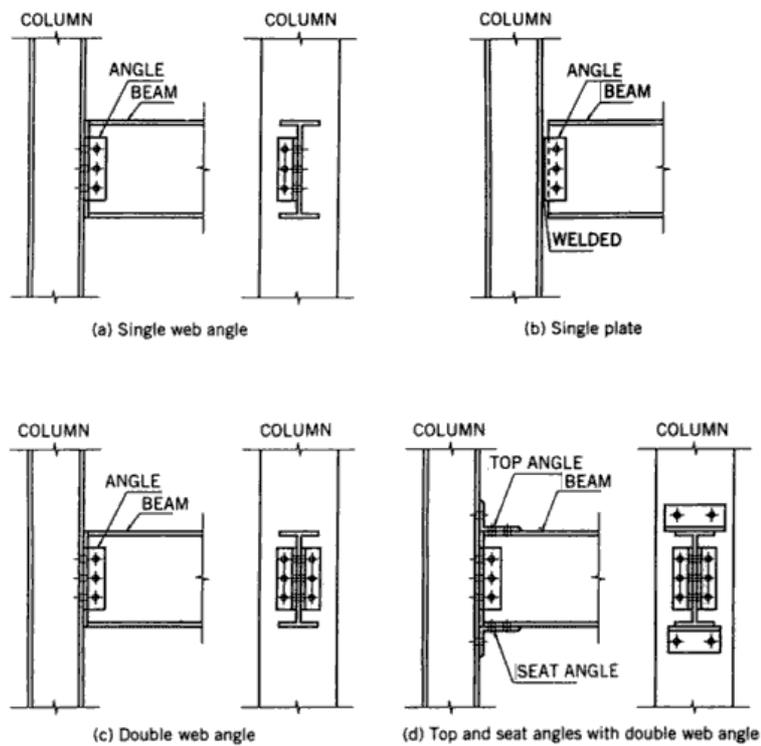


Figura 3.3 – Tipos de ligações vigas-pilares.

Fonte: CHEN (1995).

Segundo SILVA, R. (2010), os esforços nas barras, deslocamentos e rotações dos nós estão relacionados com o tipo de ligação que foi considerado. A figura 3.4. mostra a

variação do momento fletor e a flecha no meio do vão quando se considera um apoio flexível, semirrígido e rígido, adotando-se o mesmo carregamento.

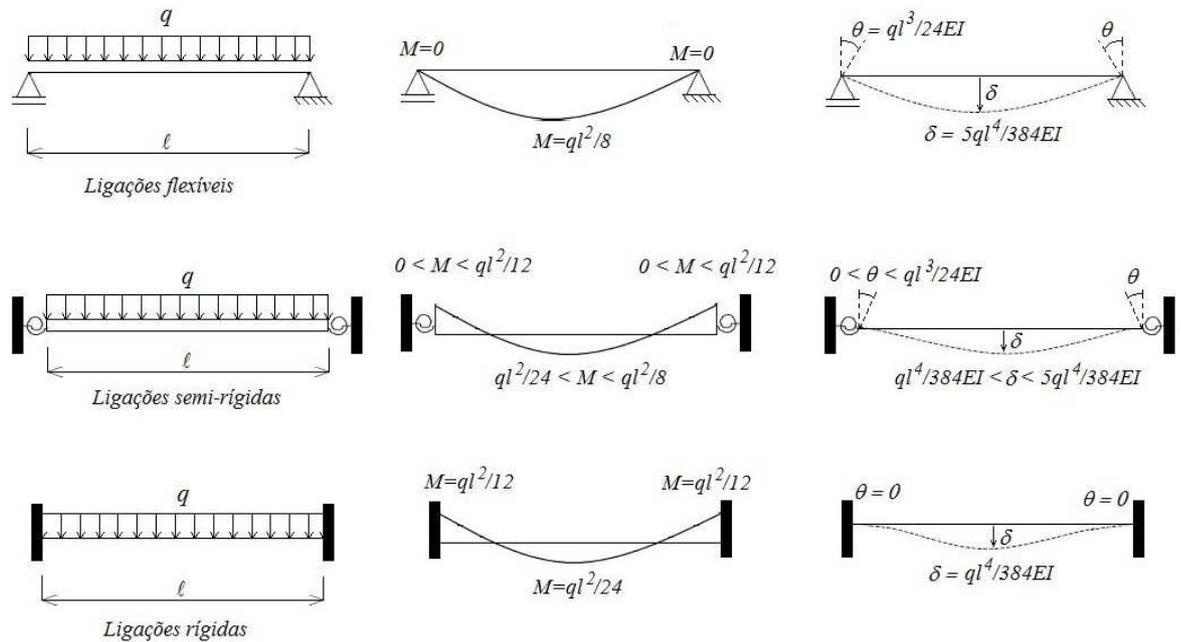


Figura 3.4. – Influência da ligação no comportamento da viga.

Fonte: SILVA (2010).

3.3. Modelagem Analítica do Comportamento das Ligações

Segundo CASTRO (2006), o conhecimento da curva momento versus rotação é necessário para que a sua influência seja considerada na análise estrutural de pórticos semirrígidos. CASTRO (2006) afirma ainda que o nível de sofisticação da modelagem da ligação depende do tipo de análise global que será feita. Atualmente, o que se tem feito é buscar uma representação matemática da curva momento-rotação da ligação. CASTRO (2006) disse ainda que a representação da curva momento-rotação pode ser feita através de uma relação linear ou não linear. A Figura 3.5 mostra alguns tipos de representações matemáticas da curva momento-rotação.

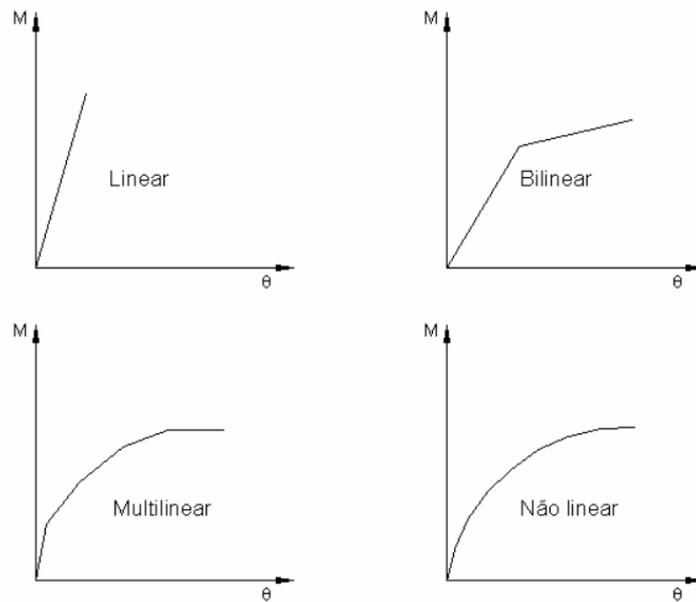


Figura 3.5: Representações matemáticas da curva momento-rotação.

Fonte: CASTRO (2006)

3.3.1. Modelo Linear

No modelo linear, é admitido um comportamento linear da relação momento-rotação. É a maneira mais simples para representar a influência da flexibilidade das ligações na análise estrutural. Segundo SANTOS (1998), a grande vantagem desse modelo é a facilidade para usá-lo, já que a rigidez inicial da ligação é usada para representar todo o comportamento da ligação. SANTOS (1998), afirma ainda que à medida que o esforço aumenta o modelo torna-se menos preciso e superestima a capacidade da ligação.

3.3.2. Modelo Bi-linear

O modelo bi-linear foi feito para melhorar os resultados do modelo linear. Assim como o modelo linear, o modelo bi-linear também possui a grande facilidade de uso e descreve a curva momento-rotação de uma maneira mais precisa do que o linear.

3.3.3. Modelo polinomial

O modelo polinomial foi proposto primeiramente por SOMMER em 1969 com o objetivo de representar o comportamento de ligações com chapa de topo e posteriormente foi generalizado por FRYE e MORRIS em 1975 para os outros tipos de

ligações. Segundo CHEN e TOMA (1994), é o modelo mais popular usado na análise estrutural. O modelo FRYE-MORRIS utiliza o método dos mínimos quadrados para determinar as constantes do polinômio. Esse modelo tenta aproximar a curva experimental através de uma função polinomial que possui a seguinte forma:

$$\theta_r = C_1(kM) + C_2(kM)^3 + C_3(kM)^5 \quad (3.1)$$

Onde k é um parâmetro de padronização que depende do tipo e das características geométricas das ligações e C1, C2 e C3 são as constantes obtidas pelo ajuste da curva. Segundo SILVA, R. (2010), o modelo representa bem a ligação até certo limite do carregamento e a partir do qual começa a apresentar discrepâncias consideráveis em relação à curva experimental. SILVA, R. (2010) afirma ainda que para determinados tipos de ligações valores negativos de rigidez podem ser apresentados.

A tabela 3.1 apresenta alguns parâmetros das funções polinomiais de FRYE e MORRIS (1975) para alguns tipos de ligações.

Tabela 3.1. Parâmetros das funções polinomiais de FRYE e MORRIS (1975)

Tipo de ligação	Constantes de ajuste de curva	Parâmetro de padronização
com uma cantoneira de alma	$C_1 = 4,28 \times 10^{-3}$	$k = d_a^{-2,4} t_a^{-1,84} g^{0,15}$
	$C_2 = 1,45 \times 10^{-9}$	
	$C_3 = 1,51 \times 10^{-16}$	
com dupla cantoneira de alma	$C_1 = 3,66 \times 10^{-4}$	$k = d_a^{-2,4} t_a^{-1,84} g^{0,15}$
	$C_2 = 1,15 \times 10^{-6}$	
	$C_3 = 4,57 \times 10^{-8}$	
com cantoneiras de topo e assento e dupla cantoneira de alma	$C_1 = 2,23 \times 10^{-5}$	$k = d^{-1,287} t^{-1,128} t_c^{-0,415} l^{-0,694} g^{1,35}$
	$C_2 = 1,85 \times 10^{-8}$	
	$C_3 = 3,19 \times 10^{-12}$	
com cantoneiras de topo e assento	$C_1 = 8,46 \times 10^{-4}$	$k = d^{-1,5} t^{-0,5} l_a^{-0,7} d_b^{-1,1}$
	$C_2 = 1,01 \times 10^{-4}$	
	$C_3 = 1,24 \times 10^{-8}$	
com chapa de topo estendida sem enrijecedores de alma	$C_1 = 1,83 \times 10^{-3}$	$k = d_g^{-2,4} t_p^{-0,4} t_f^{-1,5}$
	$C_2 = -1,04 \times 10^{-4}$	
	$C_3 = 6,38 \times 10^{-6}$	
com chapa de topo estendida com enrijecedores de alma	$C_1 = 1,79 \times 10^{-3}$	$k = d_g^{-2,4} t_p^{-0,4}$
	$C_2 = -1,76 \times 10^{-4}$	
	$C_3 = 2,04 \times 10^{-4}$	
T-stub	$C_1 = 2,10 \times 10^{-4}$	$k = d^{-1,5} t^{-0,5} l_t^{-0,7} d_b^{-1,1}$
	$C_2 = 6,2 \times 10^{-5}$	
	$C_3 = -7,6 \times 10^{-9}$	
com chapa de topo soldada à alma da viga	$C_1 = 5,10 \times 10^{-5}$	$k = t_p^{-1,6} g^{1,6} d_p^{-2,3} t_w^{-0,5}$
	$C_2 = 6,20 \times 10^{-10}$	
	$C_3 = 2,10 \times 10^{-13}$	

Fonte: CHEN e TOMA (1994)

Segundo SILVA, R. (2010), esse modelo só é capaz de descrever o comportamento da ligação até certo limite do carregamento. A partir desse limite, começa a apresentar grandes diferenças em relação à curva experimental.

3.3.4. Modelo b-spline cúbico

O modelo b-spline cúbico consiste na subdivisão da curva experimental em pequenos intervalos que são ajustados por uma função do terceiro grau de forma que a primeira e a segunda derivadas sejam contínuas entre os intervalos adjacentes. Dessa maneira, é possível obter curvas que se aproximam muito das curvas experimentais. Esse modelo foi proposto para evitar as deficiências do modelo polinomial que eram o problema da tangente negativa e aproximação da curva.

3.3.5. Modelo Exponencial

O modelo exponencial foi proposto por LUI e CHEN em 1985 e foi modificado por KISHI e CHEN em 1986 e passou a ser nomeado por modelo exponencial modificado. Os dois modelos representam o comportamento das ligações por equações exponenciais que são obtidas através da técnica dos mínimos quadrados. O modelo exponencial é representado pela seguinte função:

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^m C_j \left[1 - \exp\left(-\frac{|\theta_r|}{2j\alpha}\right) \right] + \sum_{k=1}^n D_k (|\theta_r| - |\theta_k|) H[|\theta_r| - |\theta_k|] \quad (3.2)$$

Onde:

M_0 = momento inicial da ligação

α = fator de escala

C_j e D_k = coeficientes de ajuste de curva

θ_k = rotação inicial da k-ésima componente linear da curva experimental $M-\theta_r$

$H[\theta]$ = função de ponderação

3.3.6. Modelo dos três parâmetros

O modelo dos três parâmetros foi proposto por KISHI e CHEN (1990). Esse modelo é representado pelos três seguintes fatores:

1. Rigidez inicial da ligação (R_{ki});
2. Capacidade última de momento na ligação (M_u);
3. Fator de forma (n);

A relação momento-rotação da ligação é definida pela seguinte expressão:

$$M = \frac{R_{ki} \theta}{\left\{ 1 + \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^n \right\}^{1/n}} \quad (3.3)$$

Onde,

θ_0 é a rotação plástica e é definida pela razão M_u e R_{ki} . Conforme SANTOS (1998), esse modelo pode ser aplicado a qualquer tipo de ligação desde que sejam avaliados teoricamente ou experimentalmente os três parâmetros citados anteriormente. Segundo CHEN e TOMA, o parâmetro fator de forma pode ser obtido usando o método dos mínimos quadrados às diferenças entre as curvas experimental e teórica. CHEN e TOMA (1994) afirmam ainda que esse modelo é bastante propício para análises não lineares, já que a rigidez tangente e a rotação da conexão podem ser obtidas diretamente através do modelo sem a necessidade de processos iterativos adicionais.

3.4. Modelagem Experimental

Segundo SILVA, R. (2010), a modelagem experimental é realizada por ensaios experimentais que podem ser em escala real ou reduzida com o objetivo de estudar o comportamento das ligações. Os ensaios laboratoriais permitem obter de uma maneira correta e confiável o comportamento das ligações. Através dos ensaios laboratoriais, obtêm-se as curvas de momento e rotação de cada ligação.

SILVA, R. (2010) afirma que apesar dos ensaios laboratoriais serem importantes na avaliação dos resultados, na calibração e validação dos modelos analíticos, os recursos

usados são altos e assim muitas vezes a modelagem experimental é usada somente para estudos de pesquisas.

3.5. Modelagem Multilinear

Conforme SILVA, R. (2010), o modelo multilinear consegue descrever a curva momento-rotação da ligação com maior precisão do que os outros modelos bi e tri-lineares. A figura 3.6 é uma representação multilinear da curva momento-rotação adotada neste trabalho. Os cinco valores diferentes de rigidez apresentados na figura são ajustados para cada tipo de ligação.

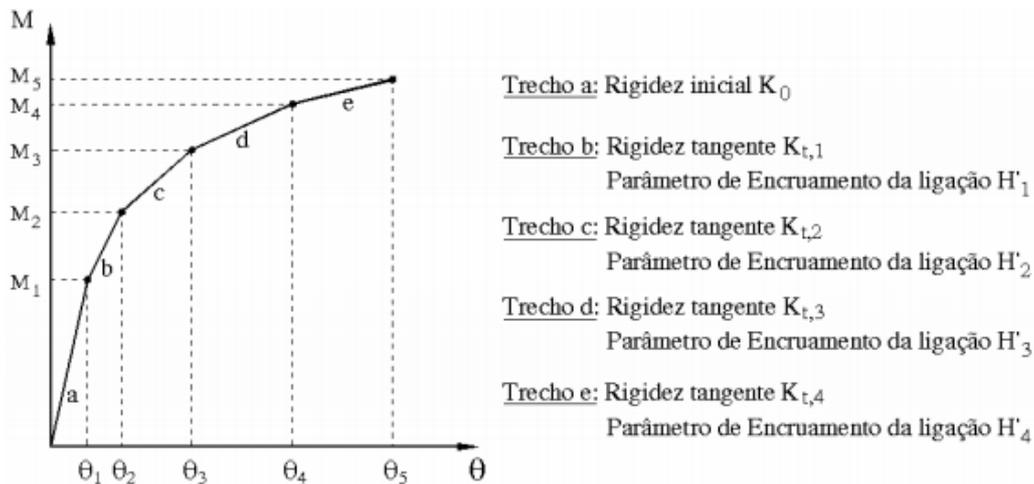


Figura 3.6. Diagrama multilinear

Fonte: SILVA, R. (2010)

O primeiro trecho da curva momento-rotação será definido por uma rigidez elástica inicial. O comportamento não linear da ligação é simulado através dos demais trechos que possuem uma rigidez tangente e um parâmetro de encruamento da ligação.

Capítulo 4 - Energia Potencial Total Mecânica

4.1. Introdução

O texto deste capítulo é baseado em CODA (2010). Neste capítulo, serão introduzidos conceitos importantes para o entendimento do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) para a análise não linear geométrica de estruturas. O MEFP será abordado no capítulo 5.

4.2. Energia Potencial Total

Conforme CODA (2010), uma maneira bem segura e geral para a determinação das equações de equilíbrio é o Princípio da estacionariedade da energia potencial de um sistema mecânico. Por esse princípio, a determinação das equações de equilíbrio pode ser determinada derivando-se a energia potencial do sistema em relação a uma ou mais variáveis e igualando-se o resultado a zero.

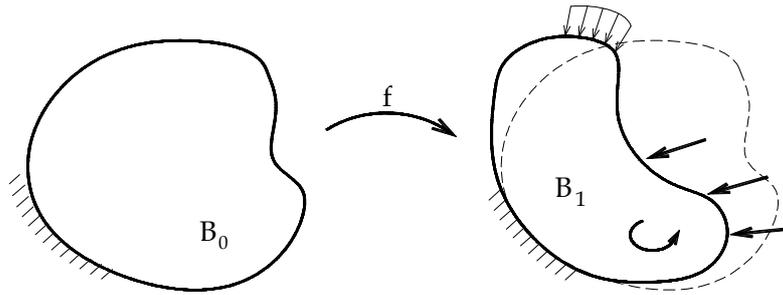
Segundo MACIEL ET al. (2006), a energia potencial total de um sistema será formada por duas parcelas: a energia de deformação do corpo (U_e) e pela energia potencial das forças externas (P). A energia potencial do sistema pode ser expressa por:

$$\pi = U_e + P \quad (4.1)$$

Onde U_e é a energia de deformação e P é o potencial das forças externas.

4.3. Energia de deformação

CODA (2010) afirma que a ação de um conjunto de forças externas sobre um corpo elástico gera uma deformação sobre o mesmo. Assim, a sua mudança de configuração ou forma mostra que as forças externas realizaram um trabalho e que o equilíbrio energético foi atingido na configuração deformada. A figura 4.1. mostra essa situação.



(a) Configuração inicial

(b) Configuração atual

Figura 4.1. Mudança de configuração para o corpo solicitado

Num sistema mecânico estático e sem dissipação de energia, a energia devido ao trabalho realizado pelas forças externas aplicadas fica armazenada no corpo e a esta energia se dá o nome de energia de deformação U_e .

4.4. Potencial das forças externas

Segundo CODA (2010), o trabalho feito por uma força externa sobre um corpo pode ser considerado como a perda de parte da capacidade total de trabalho que a força externa possui em relação a uma referência fixa no espaço. A figura 4.2 mostra diversas forças aplicadas em distintas posições em relação ao referencial.

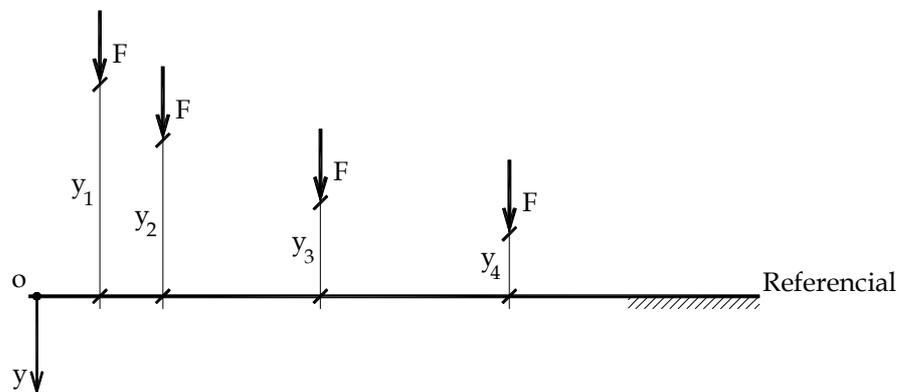


Figura 4.2. Força aplicada em distintas posições em relação ao referencial

Observando a figura acima, inferimos que a mesma força F apresenta uma maior potencialidade de trabalho quanto mais distante estiver da referência, isto é, mais negativa for a sua coordenada. Desse modo, para uma força concentrada na direção y o potencial desta força é definido por:

$$P = -Fy \quad (4.2)$$

Conforme CODA ET. al (2008), o potencial das forças concentradas em um sistema com corpo deformável é definido por:

$$P = -F_i^k y_i^k \quad (4.3)$$

Onde k indica o ponto de aplicação da força e o índice i indica a direção. A repetição desse índice indica a soma com k variando de 1 ao número total de forças aplicadas e i variando de 1 até 3 para problemas tridimensionais e de 1 até 2 para problemas bidimensionais.

No caso de forças distribuídas em um sistema com corpo deformável, o potencial das forças distribuídas pode ser definido por:

$$P = -\int_{A^{k_0}} q_i^{k_0} y_i^1(x_1, x_2) dA^0 \quad (4.4)$$

4.5. Conceito de conjugado energético

Há diversas maneiras para se calcular a energia de deformação, levando em consideração a medida de deformação adotada. Uma das maneiras é calculá-la diretamente através do trabalho realizado por uma força externa.

4.5.1. Conjugado Energético – Força – Deslocamento

Na figura 4.3, está representada uma mola elástica que é solicitada por uma força que está aumentando gradativamente.

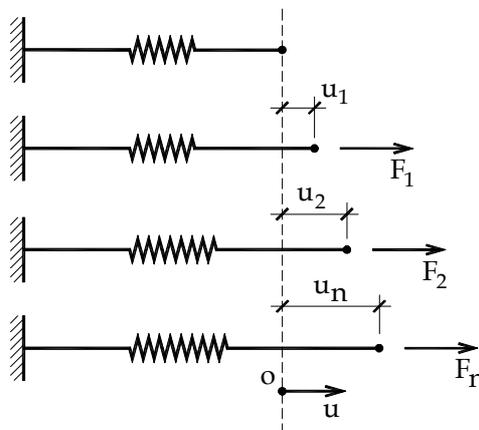


Figura 4.3. Mola elástica solicitada por uma força crescente

Pelo fato da mola ser elástica ao ser descarregada ela voltará para a sua posição inicial, sem ocorrer uma deformação. Na figura 4.3, está representado um ensaio em que se mediram os níveis de deslocamento u para uma força F crescente. A flecha indica que ao descarregar a mola, ela voltará pelo mesmo caminho.

A medida de deformação U_e armazenada na mola pode ser calculada pelo trabalho feito pela força para gerar o deslocamento atingido. O trabalho é calculado pela seguinte expressão:

$$U_e = \int_0^u F(u)du \quad (4.5)$$

Quando se deriva a energia de deformação segundo a grandeza deslocamento, encontra-se:

$$F = \frac{dU_e}{du} \quad (4.6)$$

Onde a força F é o conjugado energético (par energético) do deslocamento.

4.5.2. Conjugado Energético – Força – Posição

É o caso anterior, porém muda-se o ponto de referência da análise, segundo a figura 4.4.

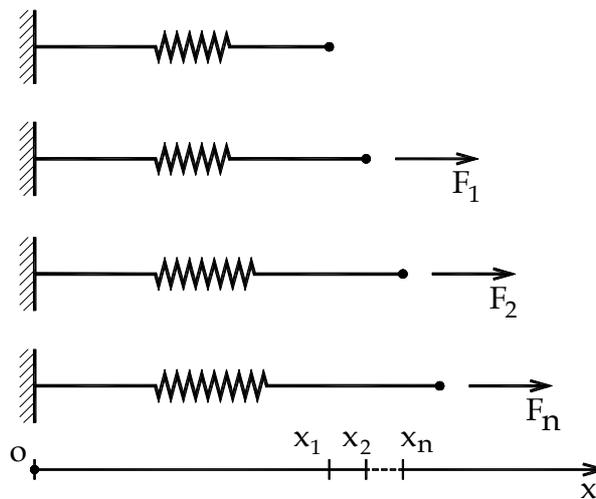


Figura 4.4. Mola elástica solicitada por uma força crescente

Escreve-se a energia de deformação segundo a grandeza força, pela integral:

$$U_e = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (4.7)$$

Deriva-se a energia de deformação segundo a grandeza posição e encontra-se:

$$F = \frac{dU_e}{dx} \quad (4.8)$$

Onde a força F é o conjugado energético (par energético) da posição. Deve-se ficar atento que:

$$u = x - x_0 \quad (4.9)$$

E logo,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad (4.10)$$

4.5.3. Conjugado Energético – Tensão – Deformação uniaxial

Imagine um trecho infinitesimal de uma barra elástica que está solicitada a uma força uniaxial crescente como mostra na figura 4.5 abaixo.

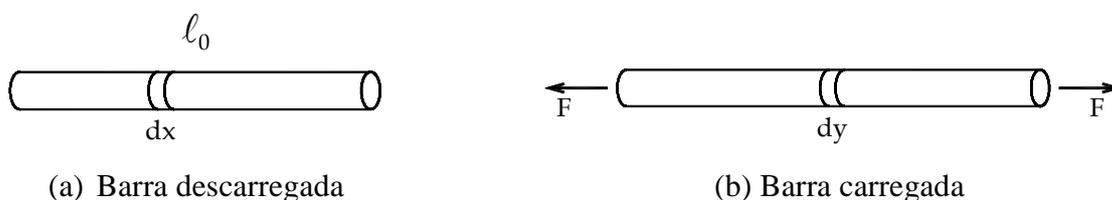


Figura 4.5. Barra sujeita à força uniaxial

A deformação longitudinal relacionada com a figura 4.5 pode ser escrita por:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \quad (4.11)$$

Onde o dy é o comprimento deformado do infinitésimo de barra, após a solicitação. Quando a barra não foi solicitada o comprimento do infinitésimo é dx . Para esta situação a deformação longitudinal é constante e pode ser expressa por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (4.12)$$

A energia de deformação por unidade de volume (energia de deformação específica) pode ser definida pela seguinte integral:

$$u_e^0 = \int_0^\varepsilon \sigma^0 d\varepsilon \quad (4.13)$$

Deriva-se a energia de deformação específica pela grandeza deformação, obtém-se:

$$\frac{du_e^0}{d\varepsilon} = \sigma^0(\varepsilon) \quad (4.14)$$

Onde a tensão σ^0 é o conjugado energético (par energético) da deformação longitudinal. Se considerar o material elástico, pode-se aplicar a Lei de Hooke,

$$\sigma^0 = E\varepsilon \quad (4.15)$$

E obter:

$$u_e^0 = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^0 \varepsilon}{2} \quad (4.16)$$

4.6. Tensão nominal (uniaxial) e deformação de engenharia

Ao se fazer um ensaio de compressão ou de tração de um corpo de prova usam-se o comprimento e a área da seção transversal inicial do corpo de prova para o cálculo da deformação e da tensão.

Desse modo, a deformação de engenharia calculada como a deformação média é definida por:

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (4.17)$$

E a tensão nominal de engenharia, também média, é definida por:

$$\sigma^0 = \frac{F}{A_0} \quad (4.18)$$

Segundo MACIEL (2008), a tensão nominal σ^0 é determinada a partir da configuração inicial, sendo usada na maioria dos problemas de engenharia devido a sua fácil obtenção em laboratórios de engenharia.

4.7. Tensão real ou de Cauchy e a sua deformação conjugada uniaxial

Normalmente, as medidas de deformação de engenharia e tensão nominal são muito usadas na prática. Porém, para determinados tipos de materiais (elastômeros) que possuem elevadas deformações é importante saber a tensão real e a sua deformação conjugada.

Quando se considera uma situação uniaxial como mostra na figura 4.6, pode-se obter facilmente a tensão real e a tensão nominal.

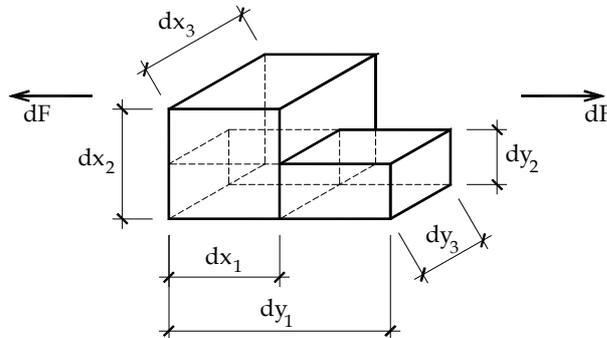


Figura 4.6. Solicitação uniaxial em um infinitésimo de sólido

Desse modo, a tensão nominal e tensão real podem ser definidas por:

$$\sigma^0 = \frac{dF}{dx_2 dx_3} \text{ (tensão nominal)} \quad (4.19)$$

$$\sigma = \frac{dF}{dy_2 dy_3} \text{ (tensão real)} \quad (4.20)$$

Outra grandeza que podemos obter é o alongamento relativo ou estiramento das fibras que é a razão entre o comprimento final da fibra e o inicial. Essa grandeza pode ser definida por:

$$\lambda_i = \frac{dy_{(i)}}{dx_{(i)}} \quad (4.21)$$

Substituindo a equação (4.21) na equação (4.20) obtém-se uma relação entre a tensão nominal e a tensão real. Essa relação é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma = \frac{\sigma^0}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.22)$$

4.8. Medidas de deformação para sólidos gerais

Neste tópico, os conceitos de deformação serão usados para os sólidos em gerais. Serão apresentadas formulações que podem ser aplicadas tanto para sólidos bidimensionais quanto para tridimensionais. Além disso, serão apresentadas duas medidas de deformação que estão relacionadas com o tensor de Cauchy-Green.

4.8.1. Mudança de configuração

Segundo SILVA, W. (2010), toda mudança de configuração geométrica de um sólido está relacionada por ações mecânicas ou térmicas e que o corpo sólido muda da situação indeslocada para a situação deslocada.

Sabe-se que todo sólido deformável, ou estrutura, que esteja em equilíbrio estático ao ser solicitado por ações mecânicas externas, muda de forma ou configuração.

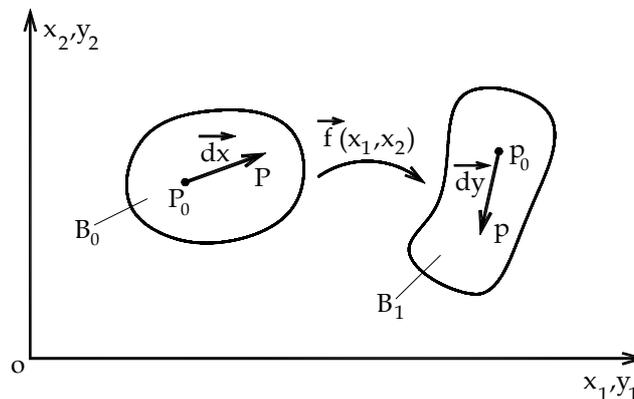


Figura 4.7. Função Mudança de configuração

A função \vec{f} descreve a mudança de configuração inicial B_0 para a configuração atual B de um sólido qualquer. Nesse estudo, a função \vec{f} é contínua e diferenciável até a segunda derivada e é nomeada por função mudança de configuração.

Ela possui duas componentes que podem ser expressas por:

$$f_1(x_1, x_2) = y_1(x_1, x_2) \quad (4.23)$$

$$f_2(x_1, x_2) = y_2(x_1, x_2) \quad (4.24)$$

Onde as letras x e y representam as coordenadas nas configurações B_0 e B , respectivamente. Os índices 1 e 2 mostram as direções horizontal e vertical, respectivamente. P_0 e P representam pontos genéricos na configuração inicial e p_0 e p representam pontos genéricos na configuração final. Desse modo, o ponto P_0 na configuração inicial será o ponto p_0 após a mudança da configuração.

4.8.2. Gradiente da função mudança de configuração

Os pontos mostrados na figura 4.7 podem-se atribuir as suas coordenadas por:

$$P_0 = (x_1^0, x_2^0) \quad (4.25)$$

$$P = (x_1, x_2) \quad (4.26)$$

$$p_0 = (y_1^0, y_2^0) \quad (4.27)$$

$$p = (y_1, y_2) \quad (4.28)$$

Considera-se P_0 um ponto para o estudo de deformações, portanto o vetor distância de um ponto P ao ponto P_0 é definido por:

$$\overrightarrow{dx} = P - P_0 \quad (4.29)$$

Ou por:

$$dx_1 = x_1 - x_1^0 \quad (4.30)$$

$$dx_2 = x_2 - x_2^0 \quad (4.31)$$

Se escrevermos a posição do ponto P em relação a P_0 , obtém-se:

$$x_1 = x_1^0 + dx_1 \quad (4.32)$$

$$x_2 = x_2^0 + dx_2 \quad (4.33)$$

As equações 4.30. e 4.31 podem ser escritas para os pontos p e p₀ da configuração atual.

Assim obtém-se:

$$dy_1 = y_1 - y_1^0 \quad (4.34)$$

$$dy_2 = y_2 - y_2^0 \quad (4.35)$$

As expressões 4.33 e 4.32 podem ser escritas em função das equações 4.30 e 4.31 por:

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^0, x_2^0) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{P_0} dx_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{P_0} dx_2 \quad (4.36)$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_1^0, x_2^0) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{P_0} dx_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{P_0} dx_2 \quad (4.37)$$

Ou ainda por

$$dy_1 = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{P_0} dx_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{P_0} dx_2 \quad (4.38)$$

$$dy_2 = \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{P_0} dx_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{P_0} dx_2 \quad (4.39)$$

Onde as derivadas parciais da função f foram calculadas no ponto P₀. As equações 4.38 e 4.39 podem ser escritas em notação matricial para um ponto P₀ como:

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{P_0} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{P_0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{P_0} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{P_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Ou ainda por:

$$\overline{dy} = \mathbf{A} \overline{dx} \quad (4.41)$$

Então, a matriz (tensor de segunda ordem) \mathbf{A} é definido por gradiente da mudança de configuração para qualquer ponto do domínio de B_0 que se queira estudar a deformação.

4.8.3. Alongamento de Cauchy-Green

Imagine-se que um infinitésimo de um sólido genérico “dx” seja um extensômetro e assim podem-se comparar os módulos de “dx” e “dy” para estudar o alongamento λ que uma fibra de um sólido sofre após a mudança de configuração como mostra a figura 4.8.

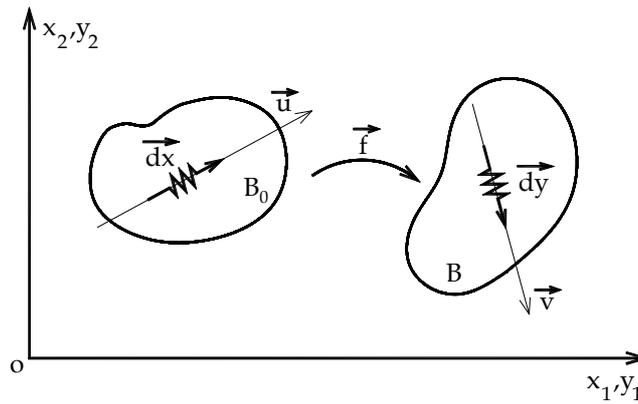


Figura 4.8. Extensômetro infinitesimal

Na figura acima, o vetor \mathbf{u} é unitário na direção de dx e o vetor \mathbf{v} é unitário na direção do dy . Pode-se escrever que:

$$\overline{dx} = \mathbf{u} |\overline{dx}| = \mathbf{u} dx \quad (4.42)$$

$$\overline{dy} = \mathbf{v} |\overline{dy}| = \mathbf{v} dy \quad (4.43)$$

Em que dx é o módulo de dx e dy é o módulo de dy . O vetor unitário \mathbf{u} e o seu transposto é definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{u}^t = \{u_1 \quad u_2\} \quad (4.45)$$

Sabe-se da álgebra linear que o produto interno entre dois vetores quaisquer é dado por:

$$\mathbf{a}^t \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta) \quad (4.46)$$

Onde θ é o ângulo entre os dois vetores. Assim, das equações 4.41 e 4.42 obtém-se:

$$\overline{dy} = \mathbf{A} \overline{dx} = \mathbf{A} \vec{u} dx \quad (4.47)$$

Pela equação 4.47 o quadrado do módulo de dy é definido por:

$$dy^2 = \overline{dy}' \cdot \overline{dy} = \vec{u}' \mathbf{A}' \mathbf{A} \vec{u} dx^2 \quad (4.48)$$

Ou ainda por:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \vec{u}' \mathbf{A}' \mathbf{A} \vec{u} \quad (4.49)$$

Lembrando-se da equação 4.21, expressão 4.49 pode ser reescrita como:

$$\lambda_{\vec{u}} = \vec{u}' \mathbf{C} \vec{u} \quad (4.50)$$

Onde \mathbf{C} é o tensor de alongamento Cauchy-Green que é simétrico. Os termos da diagonal do tensor de Cauchy-Green refletem uma medida precisa dos alongamentos de fibras dispostas inicialmente segundo os eixos coordenados. Já os termos fora da diagonal se referem à medida de quanto o ângulo entre duas fibras é desviado, ou seja, mede a distorção ocorrida. O tensor de Green é positivo definido e, portanto o gradiente da função mudança de configuração deve apresentar determinante maior que zero.

4.8.4. Deformação de Green

Segundo CODA ET. al (2008), a medida de deformação de Green pode ser obtida através do gradiente da mudança de configuração. Mesmo nos casos onde mudanças de configurações envolvam grandes deslocamentos, se as deformações forem pequenas, a deformação de Green confunde com a deformação de engenharia. A deformação de Green é dada por:

$$E = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4.51)$$

Onde I é a matriz de identidade ou o tensor de identidade de segunda ordem. A deformação de Green é tensorial e as direções principais do tensor de alongamento de Cauchy-Green são coincidentes com as direções principais da deformação de Green. Conforme SILVA, W. (2010), a deformação de Green pode ser usada para a análise não linear de estruturas e que ela para pequenas deformações se confunde com a deformação de engenharia mesmo para situações que envolvam grandes deslocamentos. O par energético da deformação de Green é a tensão de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie denominada nesse estudo por S . A sua relação com a tensão real de cauchy é:

$$\sigma = \frac{1}{J} ASA^t \quad (4.52)$$

Onde J é o determinante do gradiente mudança de configuração e ele é maior que zero. SILVA, W. (2010) conclui que pode-se escrever o funcional de energia de deformação para a deformação de Green com o par conjugado tensão de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie a partir das posições do sólido.

4.8.5. Lei de Saint Venant-Kirchhoff

Os materiais comuns das estruturas civis admitem pequenas deformações, porém as estruturas podem desenvolver grandes deslocamentos. Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff é uma expressão semelhante à lei de Hooke e que relaciona de forma linear com a deformação de Green à chamada tensão de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie. A lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff é válida para grandes deformações e deslocamentos e para deformações entre -0.01 e 0.01 ela se confunde com a lei de Hooke.

Como em pequenas deformações a deformação de Green se confunde com a deformação de engenharia, podem-se aproveitar os resultados de laboratório da Lei de Hooke para a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff.

Conforme CODA ET. al (2008), a lei de Saint-Venant_Kirchhoff é definida por:

$$S_{ij} = C_{ijkl}.E_{kl} \quad (4.53)$$

Onde S é a tensão de Piolla-Kirchhoff de segunda espécie, C o tensor Cauchy-Green e E é a deformação de Green.

Em notação matricial, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} S11 \\ S22 \\ S33 \\ S12 \\ S13 \\ S23 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^0 \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & \frac{E^0 \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E11 \\ E22 \\ E33 \\ E12 \\ E13 \\ E23 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Onde E^0 é o módulo de elasticidade do material, G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

Para o estado plano de tensões (aproximação), tem-se:

$$\begin{pmatrix} S11 \\ S22 \\ S12 \end{pmatrix} = \frac{E^0}{1+\nu} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E11 \\ E22 \\ E12 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

Para o estado plano de deformações, tem-se:

$$\begin{pmatrix} S11 \\ S22 \\ S12 \end{pmatrix} := 2 \cdot G \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1-\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E11 \\ E22 \\ E12 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Capítulo 5-Método dos Elementos Finitos Posicional para a análise não linear geométrica de estruturas

5.1 Introdução

Segundo SILVA, W. (2010), o método dos elementos finitos (MEF) é o mais difundido no meio acadêmico e profissional para a modelagem computacional em engenharia e isso se deve à grande utilidade do método, podendo servir à análise de corpos sólidos, fluidos, meios porosos, meios elásticos e plásticos em análise linear e não linear de estruturas.

SILVA, W. (2010) afirma que a idéia básica do MEF é a de que os corpos podem ser analisados como sendo constituídos por elementos de dimensões finitas e que se relacionam uns com os outros pelos seus nós.

Apresentam-se neste capítulo, o conceito da não linearidade geométrica, o Método dos Elementos Finitos Posicional para a análise não linear geométrica de pórticos planos. Todos esses conceitos são importantes para o desenvolvimento desta dissertação.

5.2. Conceito da não linearidade geométrica

O estudo da não linearidade geométrica se resume em determinar a posição de equilíbrio das estruturas, ou seja, na sua posição deslocada. Já na análise linear o equilíbrio das estruturas é realizado na posição indeslocada.

Um exemplo que representa bem o comportamento não linear geométrico é o caso de uma barra, supostamente rígida, de comprimento ℓ que está vinculada na sua extremidade esquerda através de um apoio fixo e uma mola de rotação. Essa mola de rotação apresenta um comportamento elástico-linear, isto é, fornece um momento resistente proporcional e em sentido contrário ao giro em radianos que é submetida.

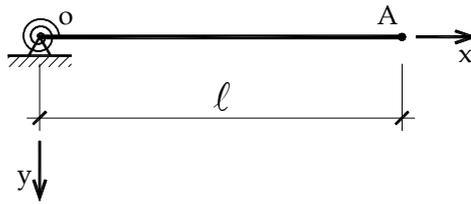


Figura. 5.1. Viga rígida em engaste elástico

Na figura 5.2, a barra acima está sendo solicitada por uma força vertical de valor F .

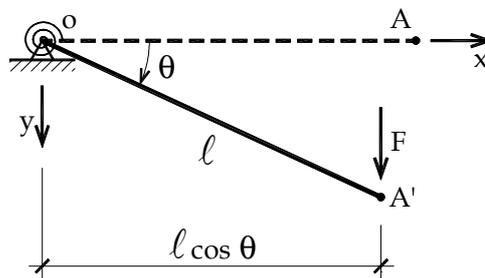


Figura 5.2. Estrutura carregada – posição deslocada

Ao aplicar a força F na viga, o ponto de aplicação da viga desloca e o seu comprimento na horizontal deixa de ser l para ser $l \cos(\theta)$. Na figura 5.3, está representado o diagrama de corpo livre na posição deslocada.

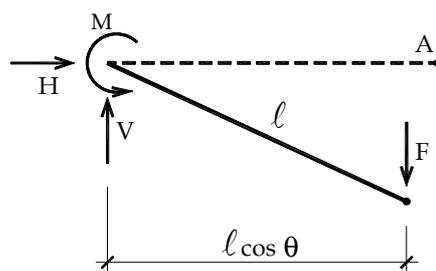


Figura 5.3. Diagrama de corpo livre na posição deslocada

Fazendo o equilíbrio da estrutura na posição deslocada sabe-se que $H=0$; $V=F$ e $M=F l \cos(\theta)$. Por considerar a mola elástica temos que $M=k\theta$ e assim obtém-se:

$$k\theta = F l \cos(\theta) \quad (5.1)$$

Ou

$$F = \frac{k\theta}{\ell \cos(\theta)} \quad (5.2)$$

O intervalo de validade da solução é $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Observa-se o comportamento não linear da viga em estudo, já que o equilíbrio do sistema depende da sua configuração geométrica representada pelo θ na Equação 5.2.

O potencial de trabalho associado à força F pode ser definido por:

$$P = -Fy = F\ell \sin(\theta) \quad (5.3)$$

A energia de deformação armazenada na mola elástica linear é medida por:

$$U_e = \int_0^{\theta} M d\theta \quad (5.4)$$

Resolvendo a integral acima, obtém-se:

$$\int_0^{\theta} k\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta^2 k \quad (5.5)$$

Quanto maior o giro θ , mais energia estará acumulada na mola. Por definição, a energia total do sistema é dada por:

$$\pi = U_e + P \quad (5.6)$$

Onde U_e é a energia de deformação da mola e P é o potencial de trabalho associado à força F .

A energia potencial do sistema em função de θ é definida por:

$$\pi = \frac{k\theta^2}{2} - F\ell \sin(\theta) \quad (5.7)$$

Aplicando-se o princípio da energia potencial estacionária, o equilíbrio pode ser escrito derivando-se a equação acima em relação a θ e igualando-se o resultado a 0:

$$\frac{d\pi}{d\theta} = 0 \quad (5.8)$$

O resultado da expressão acima é:

$$k\theta - F\ell \cos(\theta) = 0 \quad (5.9)$$

A equação (5.9) é idêntica a equação (5.1) o que confirma a igualdade entre os processos diretos e energéticos para a análise do equilíbrio de sistemas estruturais, no caso, estático.

5.3. Princípio da mínima energia potencial

Antes de definir o princípio da mínima energia potencial, será explicado o conceito de equilíbrio mecânico. Conforme SILVA, W. (2010), há três tipos fundamentais de equilíbrio mecânico que um sistema pode ter e eles estão ilustrados na figura a seguir:

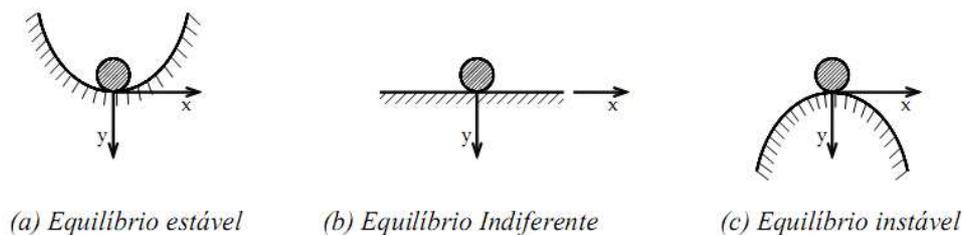


Figura 5.4. Naturezas do equilíbrio mecânico

Fonte: SILVA, W. (2010)

As três esferas estão em equilíbrio, mas sabe-se da estática dos corpos rígidos que se trata de três formas de equilíbrio. SILVA, W. (2010) afirma que no equilíbrio estável, qualquer perturbação no sistema gerará um movimento oscilatório em torno da posição

inicial até retornar à mesma. No equilíbrio indiferente, em qualquer posição o sistema pode ser equilibrado.

No equilíbrio instável, qualquer perturbação no sistema gerará um movimento sem volta, ou seja, a posição inicial não será retornada. No estudo das estruturas, devemos projetar estruturas sempre para o equilíbrio estável e evitando equilíbrios neutro e instável.

Conforme SILVA, W. (2010), pode-se escrever a energia do sistema para cada uma das situações citadas acima. A energia do sistema se limita a energia potencial do peso da esfera, portanto pode ser expressa em termos da coordenada x como:

$$\pi_a = -Fy = Fx^2 \quad (5.10)$$

$$\pi_b = 0 \quad (5.11)$$

$$\pi_c = -Fy = -Fx^2 \quad (5.12)$$

Segundo SILVA, W. (2010), ao fazermos a primeira derivada da energia potencial em relação à x nas expressões anteriores obtém-se:

$$\frac{d\Pi_a}{dx} = 2Fx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d\Pi_b}{dx} = 0 \quad \forall x \quad (5.14)$$

$$\frac{d\Pi_c}{dx} = -2Fx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (5.15)$$

Ao realizar a segunda derivada, obtém-se:

$$\frac{d^2\Pi_a}{dx^2} > 0 \quad (5.16)$$

$$\frac{d^2\Pi_b}{dx^2} = 0 \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2\Pi_c}{dx^2} < 0 \quad (5.18)$$

Observa-se que quando $x=0$ a energia potencial apresenta um ponto mínimo para Π_a , de máximo para Π_c e indiferente para Π_b . SILVA, W. (2010) afirma que o equilíbrio de um sistema mecânico é estável quando a posição de equilíbrio apresenta um mínimo local para a função de energia de potencial total. O equilíbrio de um sistema mecânico é instável quando a posição de equilíbrio representa um máximo local para o potencial.

5.2. Análise não linear de uma treliça simples

Na figura 5.5 temos duas barras na posição inicial.

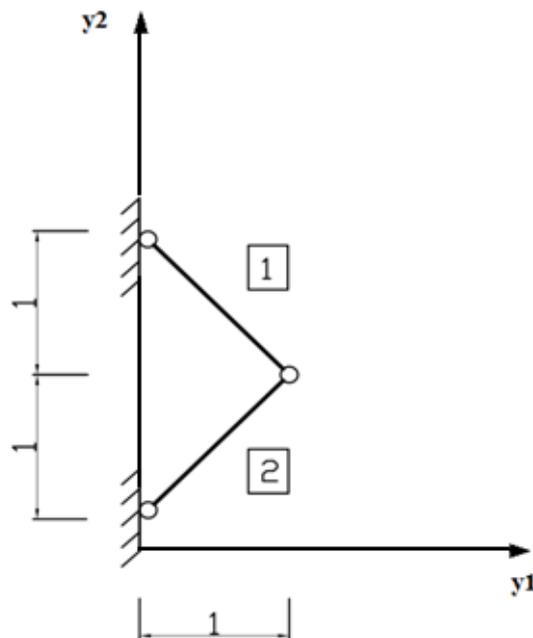


Figura 5.5 – Barras de treliça na posição indesejada

Quando as forças F_1 e F_2 solicitam as barras da treliça é deslocada para uma nova posição como mostra a figura 5.6.

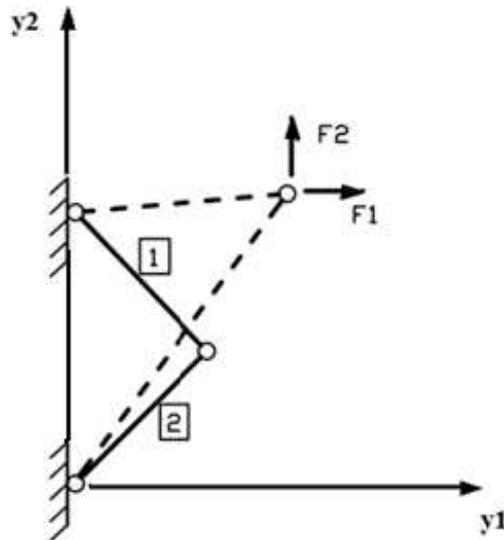


Figura 5.6 – Barras de treliça na posição deslocada

A energia total de deformação nas barras é:

$$\int u_{e1} dv_1 + \int u_{e2} dv_2 \quad (5.19)$$

Se o material segue a lei de Hooke tem-se:

$$u_e = \frac{E \times \varepsilon^2}{2} \quad (5.20)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material e ε é a deformação de engenharia.

Se o material segue a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff tem-se:

$$u_e = \frac{E \times E_G^2}{2} \quad (5.21)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material e E_G é a deformação de Green. A deformação de Green pode ser definida por:

$$E_G = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2} \right) \quad (5.22)$$

Onde L é o comprimento final das barras e L_0 é o comprimento inicial das barras. Observa-se que a deformação de Green é uma grandeza não linear e desse modo a Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff também não é linear.

Para a Lei de Hooke tem-se:

$$U_e = \int \frac{E \times \varepsilon_1^2}{2} dv_1 + \int \frac{E \times \varepsilon_2^2}{2} dv_2 \quad (5.23)$$

A deformação de engenharia para as duas barras é definida por:

$$\varepsilon_1 = \frac{L_1 - L_1^0}{L_1^0} \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{L_2 - L_2^0}{L_2^0} \quad (5.25)$$

Os números 1 e 2 representam a barra 1 e a barra 2, respectivamente e o 0 representa comprimento inicial das barras. Então, as deformações de engenharia para o problema em estudo ficam:

$$\varepsilon_1 = \frac{\left[(y_1 - 0)^2 + (y_2 - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\left[(y_1 - 0)^2 + (y_2 + 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (5.27)$$

Onde y indica a posição deslocada das barras.

Para a lei de Saint-Venant_Kirchhoff tem-se:

$$U_e = \int \frac{E \times E_{G1}^2}{2} dv_1 + \int \frac{E \times E_{G2}^2}{2} dv_2 \quad (5.28)$$

A deformação de Green para as duas barras é:

$$E_{G1} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{y_1^2 + (y_2 - 1)^2 - 2}{2} \right] \quad (5.29)$$

$$E_{G2} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - 2}{2} \right] \quad (5.30)$$

Integrando a energia de deformação total, obtém-se:

$$U_e = \frac{E \times E_{G1}^2}{2} \times \int dv_1 + \frac{E \times E_{G2}^2}{2} \times \int dv_2 \quad (5.31)$$

Como $v_1 = A_1 \cdot L_1$ e $v_2 = A_2 \cdot L_2$ tem-se:

$$U_e = \frac{E \times E_{G1}^2 \times L_1 \times A_1}{2} + \frac{E \times E_{G2}^2 \times L_2 \times A_2}{2} \quad (5.32)$$

A energia mecânica total do sistema é:

$$\pi = U_e - F_1 y_1 - F_2 y_2 \quad (5.33)$$

Ou por:

$$\pi = \frac{E \times E_{G1}^2 \times L_1 \times A_1}{2} + \frac{E \times E_{G2}^2 \times L_2 \times A_2}{2} - F_1 y_1 - F_2 y_2 \quad (5.34)$$

Ou ainda por:

$$\pi = \frac{E \times \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{y_1^2 + (y_2 - 1)^2 - 2}{2} \right]^2 \right] \times L_1 \times A_1}{2} + \frac{E \times \left[\frac{1}{2} \times \left[\frac{y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - 2}{2} \right]^2 \right] \times L_1 \times A_1}{2} - F_1 y_1 - F_2 y_2 \quad (5.35)$$

Observa-se da equação 5.35 que a energia potencial mecânica do sistema está em função de y_1 e y_2 que são as incógnitas do problema em estudo.

O equilíbrio do sistema é obtido quando as derivadas parciais de π em relação aos graus de liberdade y_1 e y_2 forem simultaneamente nulos, ou seja:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = 0 \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_1} = \frac{E \cdot E_{G1} \cdot L_1 \cdot A_1 \cdot y_1}{2} + \frac{E \cdot E_{G2} \cdot L_2 \cdot A_2 \cdot y_1}{2} - F_1 = 0 \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y_2} = \frac{E \cdot E_{G1} \cdot L_1 \cdot A_1 \cdot (y_2 - 1)}{2} + \frac{E \cdot E_{G2} \cdot L_2 \cdot A_2 \cdot (y_2 + 1)}{2} - F_2 = 0 \quad (5.39)$$

Considerando que $L_1 = L_2 = \sqrt{2}$ e que $A_1 = A_2$ e substituindo as deformações de Green nas expressões 5.38 e 5.39, obtém-se:

$$E \cdot \frac{y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2}{4} \cdot \frac{y_1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot A + E \cdot \frac{y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - 2}{4} \cdot \frac{y_1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot A - F_1 = 0 \quad (5.40)$$

$$\frac{1}{4} \cdot E \cdot y_1^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot A + \frac{1}{4} \cdot E \cdot y_1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot y_2^2 - \frac{1}{4} \cdot E \cdot y_1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot A - F_1 = 0 \quad (5.41)$$

$$F_1 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot A \cdot (y_1^3 + y_2^2 \cdot y_1 - y_1) \quad (5.42)$$

$$E \cdot \frac{y_1^2 + (y_2 - 1)^2 - 2}{4} \cdot \frac{y_2 - 1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot A + E \cdot \frac{y_1^2 + (y_2 + 1)^2 - 2}{4} \cdot \frac{y_2 + 1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot A - F_2 = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{E}{8} \cdot (y_1^2 y_2 - y_1^2 + y_2^3 - 3y_2^2 + y_2 + 1) \cdot \sqrt{2} \cdot A + \frac{E}{8} \cdot (y_1^2 y_2 + y_1^2 + y_2^3 + 3y_2^2 + y_2 - 1) \cdot \sqrt{2} \cdot A - F_2 = 0 \quad (5.44)$$

$$F_2 = \frac{E \cdot \sqrt{2} \cdot A}{4} \cdot (y_1^2 y_2 + y_2^3 + y_2) \quad (5.45)$$

As equações 5.42 e 5.45 são não lineares, então se realiza o método numérico de Newton-Rapson para resolvê-las.

$$\frac{\partial \pi(y_1, y_2)}{\partial y_1} = g_1(y_1, y_2) = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial \pi(y_1, y_2)}{\partial y_2} = g_2(y_1, y_2) = 0 \quad (5.47)$$

$$g_1(y_1, y_2) = g_1(y_1^0, y_2^0) + \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \Big|_{(y_1^0, y_2^0)} \Delta y_1 + \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \Big|_{(y_1^0, y_2^0)} \Delta y_2 + \sigma_1^2 \quad (5.48)$$

$$g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1^0, y_2^0) + \frac{\partial g_2}{\partial y_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2} + \sigma_2^2 \quad (5.49)$$

Escrevendo matricialmente tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} \Big|_{y_1^0, y_2^0} = - \begin{pmatrix} g_1(y_1^0, y_2^0) \\ g_2(y_1^0, y_2^0) \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Para se estudar a estabilidade do sistema estrutural calcula-se a segunda derivada do funcional de energia potencial total, encontrando-se a matriz Hessiana do sistema.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial y_2^2} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Como se observa a matriz Hessiana é simétrica e a condição de estabilidade da estrutura se dá na avaliação do seu determinante:

$$\text{Det}(H) > 0 \rightarrow \text{Positiva definida-estável} \quad (5.52)$$

$$\text{Det}(H) = 0 \rightarrow \text{Ponto crítico} \quad (5.53)$$

$$\text{Det}(H) < 0 \rightarrow \text{instável} \quad (5.54)$$

Calculando-se a matriz Hessiana do problema dado, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y_1^2} = \frac{E\sqrt{2}A}{4} (3y_1^2 + y_2^2 - 1) \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{EAy_1y_2\sqrt{2}}{2} \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial y_2^2} = \frac{E\sqrt{2}A}{4} (y_1^2 + 3y_2^2 + 1) \quad (5.57)$$

5.3. Análise não linear geométrica de pórticos planos

Este item abordará a descrição do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) para a análise não linear geométrica de pórticos planos que foi usada no desenvolvimento do código computacional aqui modificado, Acadframe. O Acadframe foi elaborado pelo Prof. Dr. Humberto Breves Coda e pelo Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola em 2006. Neste trabalho o Acadframe foi usado para a modelagem das ligações semirrígidas das estruturas. O código das ligações semirrígidas foi acoplado ao Acadframe, portanto o entendimento da formulação do MEFP é muito importante para o acoplamento dos códigos. Além disso, conceitos para o desenvolvimento do MEFP serão abordados.

5.3.1. Polinômios de Lagrange

Uma maneira fácil para gerar funções de forma são os polinômios de Lagrange. Segundo SILVA, W. (2010), os polinômios de Lagrange são polinômios de interpolação que podem ser usados para gerar funções de forma para um elemento curvo, por exemplo. Eles são escritos em função de uma coordenada adimensional definida no intervalo fechado de -1 a 1. A coordenada adimensional é usualmente chamada de ξ .

Na figura 5.7 mostra-se a representação dos polinômios de ordem um e dois.

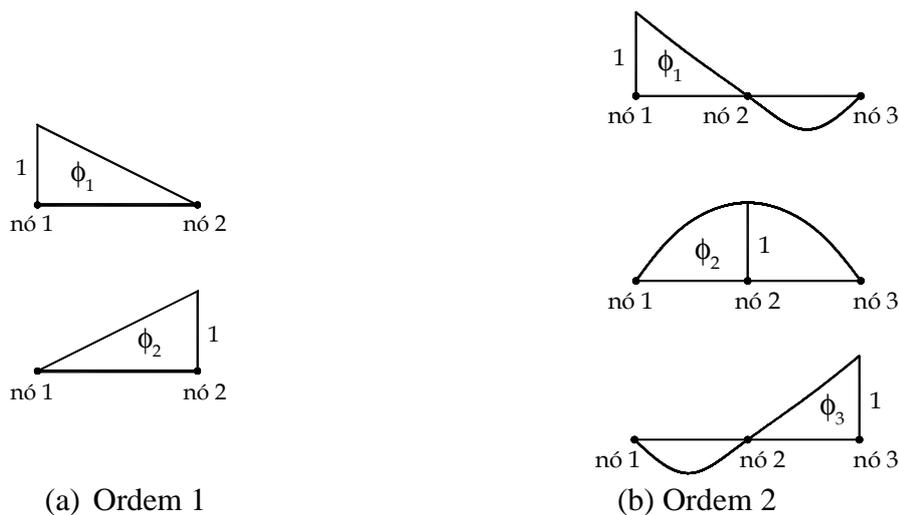


Figura 5.7. Esquematização dos polinômios de Lagrange

Para o polinômio de ordem 1 da figura 5.7 o nó 1 é $\xi=-1$ e o nó 2 é $\xi=1$. Já para polinômio de grau 2 tem-se para o nó 1 $\xi=-1$, $\xi=0$ para o nó 2 e finalmente $\xi=1$ para o

nó 3. Como se pode observar, cada função de forma ϕ_k assume valor unitário em k e valor nulo nos outros nós. As fórmulas para os polinômios de ordem 1 são:

$$\phi_1 = \frac{\xi - 1}{2} \quad (5.58)$$

$$\phi_2 = \frac{\xi + 1}{2} \quad (5.59)$$

Conforme SILVA, W. (2010), podem-se escrever todas as funções de forma de um elemento de n nós através dos polinômios de Lagrange através da fórmula que segue (BREBIA & FERRANTE, 1978):

$$\phi_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \right) \quad (5.60)$$

As coordenadas adimensionais ξ assumem valores entre -1 e 1. O somatório de todos os polinômios de uma mesma ordem resulta na unidade. Então, para se usar os polinômios de Lagrange como função aproximadora é necessário somente conhecer os valores da função a ser aproximada nos respectivos nós.

No caso do Método dos Elementos Finitos Posicional para pórticos 2D, o objetivo é parametrizar as configurações inicial e atual da estrutura. A linha média do elemento de pórtico é aproximada através da seguinte expressão:

$$x_i^m(\xi) = \phi_\ell X_{i\ell}^m \quad (5.61)$$

Onde i é a direção da coordenada (1 ou 2), m é a linha média e ℓ é o nó do elemento. Na equação 5.61, o índice ℓ repetido indica soma sobre o mesmo. Tem-se um elemento com quatro nós, logo a equação 5.61 representará um elemento de aproximação cúbica, como é mostrado na figura 5.8 e é expresso por:

$$x_1^m(\xi) = \phi_1 X_{11}^m + \phi_2 X_{12}^m + \phi_3 X_{13}^m + \phi_4 X_{14}^m \quad (5.62)$$

$$x_2^m(\xi) = \phi_1 X_{21}^m + \phi_2 X_{22}^m + \phi_3 X_{23}^m + \phi_4 X_{24}^m \quad (5.63)$$

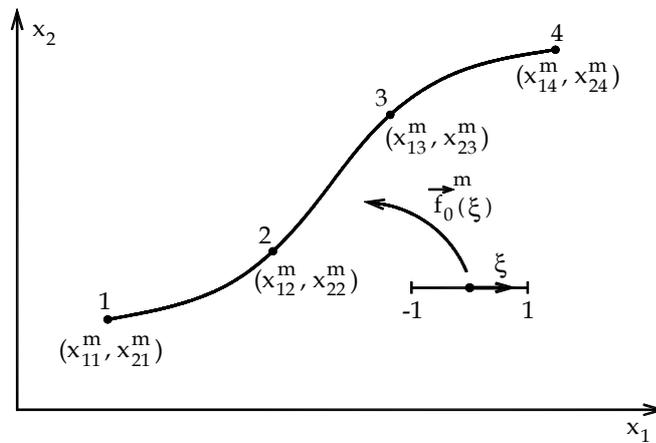


Figura 5.8. Parametrização da linha média do elemento

Fonte: SILVA, W. (2010)

Na figura 5.8, a função $f_0^m(\xi)$ é denominada por mapeamento inicial da linha média do elemento na sua posição inicial.

5.3.2. Mapeamento posicional da configuração inicial

Segundo SILVA, W. (2010), o mapeamento da configuração inicial consiste em definir todas as posições dos nós da estrutura indesejada, o ângulo formado pela seção transversal em cada nó com eixo de referência horizontal. SILVA, W. (2010) afirma que é necessário definir o ângulo citado acima, porque na formulação utiliza a teoria de Reissner que considera que a seção plana do elemento mantenha plana, mas não necessariamente perpendicular à linha média, podendo girar de um ângulo θ em relação eixo horizontal.

As componentes dos vetores tangentes podem ser obtidas a partir do mapeamento da linha média e escritas de uma forma geral pela equação 5.64:

$$T_{ik} = \left. \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_k} X_{il}^m \quad (5.64)$$

Onde ξ_k representam as coordenadas adimensionais para os nós k e T_{ik} é a componente i do vetor tangente no nó k . Infere-se que ao determinar as coordenadas iniciais dos nós da linha média do elemento finito, obtêm-se os vetores tangentes nos nós dos elementos finitos.

O versor normal V_{ik} na configuração indeslocada é calculado por:

$$V_{1k} = -T_{2k} / \sqrt{T_{i(k)}T_{i(k)}} \quad (5.65)$$

$$V_{2k} = T_{1k} / \sqrt{T_{i(k)}T_{i(k)}} \quad (5.66)$$

Conhecendo-se os valores nodais das componentes dos versores normais, os ângulos θ_k^0 são determinados por:

$$\theta_k^0 = \text{arctg}(V_{2(k)} / V_{1(k)}) \quad (5.67)$$

Utilizando-se os polinômios de Lagrange para aproximar os valores dos ângulos iniciais $\theta^0(\xi)$ ao longo da barra obtém-se:

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0 \quad (5.68)$$

Para exemplificar o que foi descrito, observa-se a figura 5.9 que representa um ponto de uma barra de pórtico com uma altura constante h_0 .

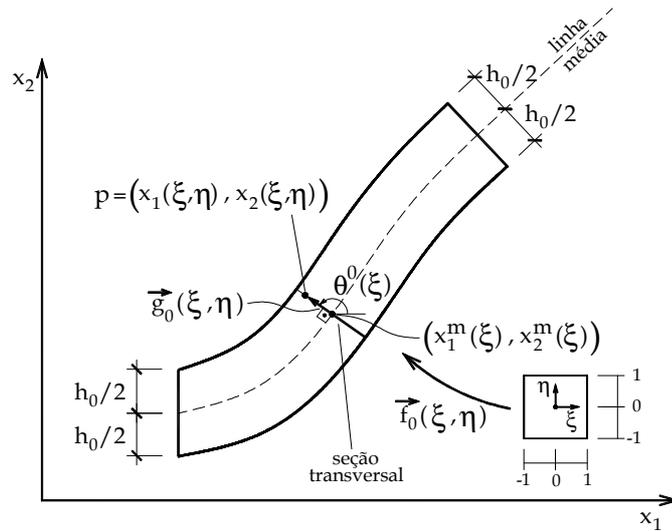


Figura 5.9 – Ponto P sobre seção transversal qualquer

Fonte: SILVA, W. (2010)

Observa-se da figura 5.9 que a seção transversal inicial é ortogonal à linha média inicial do corpo e que para descrever um ponto qualquer no elemento ao longo da altura usa-se uma variável adimensional η que varia de -1 a 1 e é ortogonal a variável ξ . Desse modo, há um vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ que somado a um ponto qualquer pertencente à linha média de um ponto resulta num ponto genérico P:

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (5.69)$$

O ponto genérico P pode estar no máximo $h_0/2$ da linha média, tanto no sentido positivo como negativo. Assim, o vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ é definido por:

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0) \quad (5.70)$$

$$g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0) \quad (5.71)$$

Substituindo 5.61, 5.70 e 5.71 em 5.69, obtém-se:

$$x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi) \theta_\ell^0) \quad (5.72)$$

$$x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (5.73)$$

5.3.3. Mapeamento posicional da configuração atual (corrente)

Na configuração atual, as posições e os ângulos relacionados aos nós dos elementos finitos são as incógnitas e são chamados de graus de liberdade. Eles não são fornecidos pelo usuário e deverão ser determinados pela análise. Todavia, um ponto genérico de um elemento de pórtico pode ser escrito de forma semelhante ao mapeamento da configuração inicial, ou seja:

$$y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (5.74)$$

$$y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (5.75)$$

Onde y_i representam as coordenadas atuais de um ponto qualquer, $Y_{i\ell}^m$ são as coordenadas atuais nodais e θ_ℓ são os ângulos nodais, como mostra a figura 5.10.

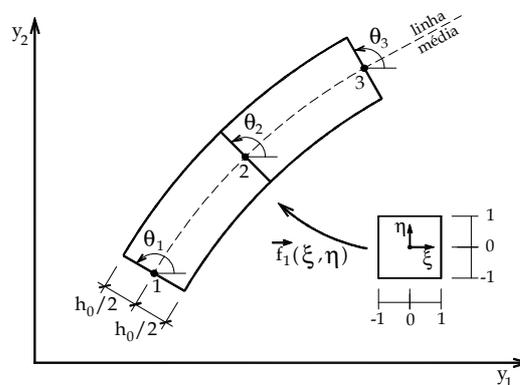


Figura 5.10 – Mapeamento do elemento para configuração corrente

Fonte: SILVA, W. (2010)

As seções transversais permanecem planas como pode ser inferido a partir da figura, entretanto elas não formam ângulo reto com a linha média. Além disso, a altura de referência continua sendo h_0 e com coeficiente de Poisson nulo.

5.3.4. Mudança de configuração e seu gradiente

Com os mapeamentos definidos da posição inicial e da configuração corrente, é preciso definir a função mudança de configuração. A função mudança de configuração descreve a mudança da configuração inicial B_0 para a configuração atual B .

Ela pode ser escrita através da composição dos mapeamentos descritos anteriormente, isto é:

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \tag{5.76}$$

Essa composição pode ser vista na figura 5.11.

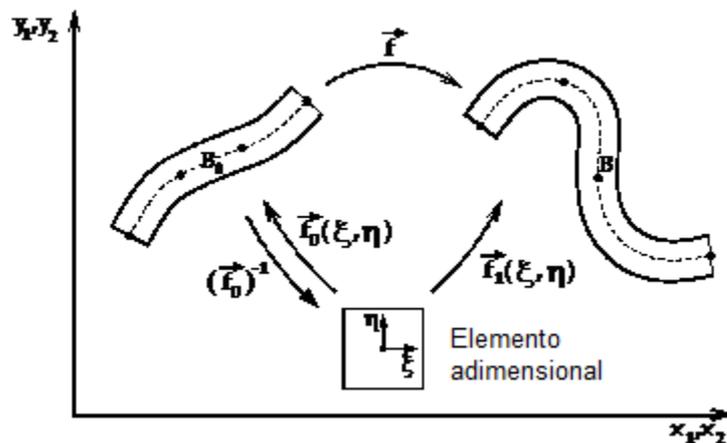


Figura 5.11 – Composição dos mapeamentos

Segundo SILVA, W. (2010), o vetor \vec{f}_0 é a função que faz a mudança de coordenadas entre o elemento adimensional e a configuração inicial. O vetor \vec{f}_1 faz a mudança de coordenadas entre o elemento adimensional e a configuração corrente. Para cada um desses vetores, há um gradiente da função mudança de configuração A, correspondente que foi apresentado anteriormente no item 4.8.2. Assim, o gradiente da mudança de configuração é:

$$A = A^1.(A^0)^{-1} \quad (5.77)$$

Conforme SILVA, W. (2010), os elementos das matrizes A^0 e A^1 são calculados através das expressões dos mapeamentos das configurações iniciais e finais, respectivamente, para valores conhecidos de ξ .

Assim, tem-se:

$$A_{ij}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

$$A_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

$$A_{11}^0 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi)x_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0)D\phi_k(\xi)\theta_k^0 \quad (5.80)$$

$$A_{12}^0 = \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2}\cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (5.81)$$

$$A_{21}^0 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi)x_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0)D\phi_k(\xi)\theta_k^0 \quad (5.82)$$

$$A_{22}^0 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2}\text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (5.83)$$

$$A_{11}^1 = \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi) y_{1\ell}^m - \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) D\phi_k(\xi)\theta_k \quad (5.84)$$

$$A_{12}^1 = \frac{\partial y_1}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (5.85)$$

$$A_{21}^1 = \frac{\partial y_2}{\partial \xi} = D\phi_\ell(\xi) y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) D\phi_k(\xi)\theta_k \quad (5.86)$$

$$A_{22}^1 = \frac{\partial y_2}{\partial \eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (5.87)$$

As equações acima serão resolvidas por um processo iterativo, baseado em tentativas e correções. Desse modo, os valores de tentativa para $Y_{i\ell}$ e θ_ℓ serão sempre conhecidos e as referidas equações resultam em matrizes A_{ij}^0 e A_{ij}^1 numéricas para cada par coordenado (ξ, η) pré-estabelecido.

5.3.5. Processo de solução de Newton-Rapson

Sabe-se do princípio da estacionariedade da energia que o equilíbrio de uma estrutura acontece quando a energia potencial total é estacionária, ou seja, quando sua derivada é nula. O equilíbrio será estável quando a segunda derivada da energia potencial é positiva caracterizando um mínimo.

Como já foi descrito no capítulo 4, a energia potencial mecânica total de um sistema sujeito à ação de forças externas pode ser descrito por:

$$\pi = U_e - P_{ext} \quad (5.88)$$

Onde U_e é energia de deformação do corpo e P_{ext} é o potencial das forças externas. A U_e é obtida através da integral da energia de deformação específica u_e e P_{ext} pode ser escrito por:

$$P_{ext} = -F_i y_i - Q_i y_i \quad (5.89)$$

Sendo F_i as forças externas aplicadas nos pontos i e y_i as respectivas posições. O valor de Q_i representa os valores nodais equivalentes dos carregamentos distribuídos.

Assim, a solução do equilíbrio da estrutura consistirá em determinar os parâmetros nodais da mesma que garantam a estacionariedade da energia potencial mecânica, ou seja:

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = \frac{\partial U_e(y_{tent})}{\partial y} - F = 0 \quad (5.90)$$

Tal que

$$\frac{\partial U_e}{\partial y} = \int \frac{\partial u_e}{\partial y} dv_0 \quad (5.91)$$

Ou ainda por:

$$F_{int}(y_{tent}) - F_{ext} = 0 \quad (5.92)$$

Onde F_{ext} são as forças externas e F_{int} representa a derivada da energia de deformação em relação à posição tentativa y_{tent} .

A equação é não linear e deve ser solucionada através de um processo iterativo. A solução da equação (5.92) consiste em determinar um conjunto de posições y_{tent} para os nós da estrutura em que a equação 5.92 seja satisfeita. O método iterativo a ser usado será o de Newton-Rapson que será descrito a seguir.

A equação 5.92 pode ser reescrita como:

$$g_y = F_{int} - F_{ext} \quad (5.93)$$

Onde g_y é um vetor nulo, caso y seja solução de 5.93. Quando isso ocorre, significa que a estrutura foi resolvida e que o equilíbrio das forças foi resolvido. Caso contrário, dever-se-á calcular uma nova tentativa de posição y_{tent} até que o vetor $g_{y_{tent}}$ seja nulo, ou seja:

$$\mathbf{g}_{(y_{tent})} = \mathbf{F}_{int(y_{tent})} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{g}_{tent} \quad (5.94)$$

O vetor \mathbf{g}_{tent} é o vetor de desbalanceamento de forças no sistema mecânico. Expandindo-se o vetor \mathbf{g}_y em série de Taylor em torno da tentativa y_{tent} , obtém-se:

$$\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_{tent} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \right|_{y_{tent}} \Delta y \quad (5.95)$$

Sabe-se que o valor de $\mathbf{g}_y=0$, como mostra a equação (5.93). Então, a equação (5.94) fica reescrita como:

$$\mathbf{H} \Delta y = -\mathbf{g}_{tent} \quad (5.96)$$

Onde $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y}$ que é a matriz hessiana do problema calculada na posição tentativa. A nova posição tentativa é:

$$y_{tent+1} = y_{tent} + \Delta y \quad (5.97)$$

Onde Δy é a variação da posição que é acrescentada à posição atual para a próxima iteração. A partir da nova posição tentativa, recalcula-se o vetor desbalanceamento \mathbf{g}_{tent} e a nova matriz Hessiana. Isto é feito até que uma das duas condições a seguir sejam atendidas:

$$\frac{|\Delta y|}{y_0} \leq tol \quad (5.98)$$

$$\frac{|\mathbf{g}|}{F_{ext}} \leq tol \quad (5.99)$$

Onde tol é um valor arbitrário e pequeno que determina quando o equilíbrio foi atingido satisfatoriamente. No fim do processo iterativo, obtém-se a posição final da estrutura no equilíbrio estável.

Capítulo 6 – Modelo de Rótula Elasto- Plástica

6.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é o estabelecimento do modelo de Rótula elasto-plástica a ser adotado neste trabalho que é baseado nos modelos clássicos da teoria da plasticidade uniaxial. Neste sentido um conhecimento básico de elasto-plasticidade uniaxial é necessário. Desta forma o capítulo se divide em dois assuntos principais, a saber a elasto-plasticidade uniaxial utilizando-se modelos bilineares no formato apresentado por PROENÇA (2007) e sua adaptação para a relação momento-giro relativo a ser utilizada na Formulação de Rótulas elasto-plásticas.

6.2. Conceitos básicos da teoria da plasticidade uniaxial

Segundo PROENÇA (2007), plasticidade e encruamento são fenômenos que ocorrem além do regime elástico. A plasticidade é caracterizada pelo surgimento de deformações permanentes e o encruamento é caracterizado pelo aumento de resistência com o crescimento da deformação. Esses fenômenos são muito frequentes em materiais metálicos.

Conforme PROENÇA (2007), o comportamento elasto-plástico de um material é visível quando aparecem deformações ou tensões residuais em ciclos de tensão ou deformação, respectivamente. Observa-se que em qualquer um dos ciclos o descarregamento ocorre por uma reta de inclinação paralela à resposta elástica inicial, como mostra a figura 6.1.

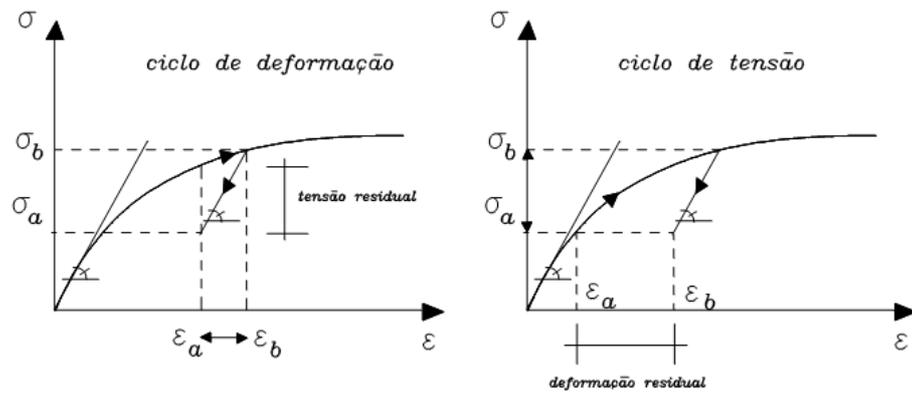


Figura 6.1 – Ciclos de deformação e de tensão

Fonte: PROENÇA (2007)

O comportamento elásto-plástico também é caracterizado pela irreversibilidade por abordar um processo que há dissipação de energia e não-viscosidade.

6.3. Comportamento elásto-plástico perfeito

No regime elasto-plástico, a deformação total é composta por duas parcelas, sendo uma elástica e outra plástica. Observando-se a figura 6.2, podem-se obter as seguintes relações:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (6.1)$$

Onde ε é a deformação total, ε^e é a parcela elástica da deformação e ε^p é a parcela plástica da deformação.

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (6.2)$$

Conclui-se que a tensão em (6.2) está em função da deformação total e da parcela plástica da deformação.

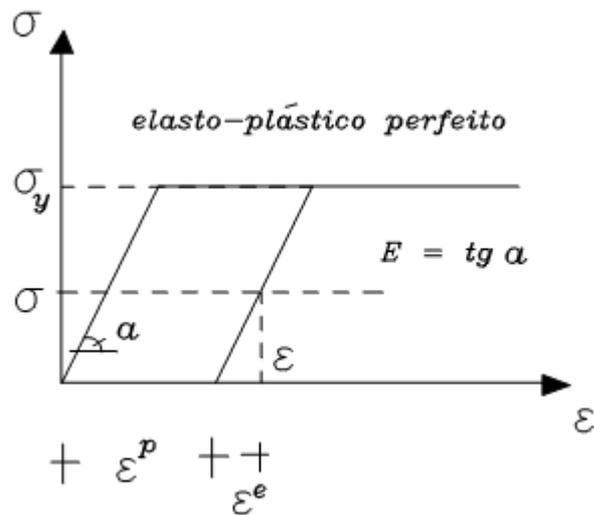


Figura 6.2 – Comportamento elasto-plástico perfeito

Fonte: PROENÇA (2007)

PROENÇA (2007) afirma que a deformação plástica presente na lei constitutiva do material como mostra na equação 6.2 confere um caráter não linear. Observando-se o diagrama de tensão e deformação apresentado na figura 6.2 e considerando que o material possui uma resposta simétrica na compressão, conclui-se que o módulo da tensão não pode ser maior que σ_y . Então, estados admissíveis de tensão devem respeitar a seguinte relação:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (6.3)$$

Essa equação é fundamental no modelo matemático, já que possibilita identificar se o regime é elástico ou elasto-plástico. Caso o estado de tensão for tal que $f(\sigma) < 0$, logo a resposta ocorre sem a variação da deformação plástica. A figura 6.3. representa essa situação.

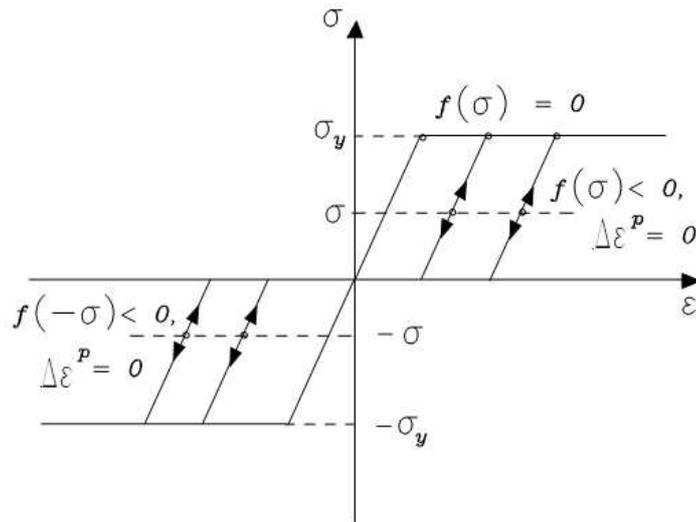


Figura 6.3 – Resposta imediata sem acréscimo de deformação plástica

Fonte: PROENÇA (2007)

Segundo PROENÇA (2007), outra possibilidade seria de um estado de tensão em que $f(\sigma) = 0$ e se o novo estado for $f(\sigma + \Delta\sigma) < 0$, portanto a resposta imediata não apresentará alteração na deformação plástica acumulada, isto é $\Delta\epsilon^p = 0$ e conseqüentemente a resposta do material será somente elástica, correspondente a um descarregamento. Todavia, se o novo estado for $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$, então a resposta imediata terá um acréscimo de deformação plástica.

Seja, portanto, $\Delta\lambda \geq 0$ o valor absoluto do incremento de deformação plástica, caso ela ocorra. Considerando-se que a deformação plástica pode acontecer tanto para compressão como para a tração. Tem-se que:

$$\Delta\epsilon^p = \Delta\lambda \geq 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y (> 0) \quad (6.4)$$

$$\Delta\epsilon^p = -\Delta\lambda \leq 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y (< 0) \quad (6.5)$$

Verifica-se que o sinal de $\Delta\epsilon^p$ é coincidente com o de σ e desse modo pode-se utilizar o operador de sinal, $sign(\cdot)$, e assim obter:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \text{sign}(\sigma) \text{ caso } f(\sigma) = 0 \text{ com } \Delta \lambda \geq 0 \quad (6.6)$$

Por definição: $\text{sign}(\sigma) = 1$ se $\sigma > 0$ e $\text{sign}(\sigma) = -1$ se $\sigma < 0$ (6.7)

Quando se considera um modelo elasto-plástico perfeito a condição acima é testada nos pontos $\sigma = \sigma_y$ e $\sigma = -\sigma_y$.

Então, a lei de evolução da deformação plástica pode ser definida por:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \text{sign}(\sigma) \quad (6.8)$$

Do que foi apresentado, observa-se que $\Delta \lambda$ e $f(\sigma) = 0$ verificam determinadas condições complementares em termos de sinal, isto é: $\Delta \lambda \geq 0$ e $f(\sigma) \leq 0$. Além disso, se $\Delta \lambda \geq 0$ então $f(\sigma) = 0$ e caso $f(\sigma) < 0$ logo $\Delta \lambda = 0$. Essas possibilidades podem ser expressas na seguinte relação:

$$\Delta \lambda \Delta f(\sigma) = 0 \quad (6.9)$$

Essa condição acima é chamada de condição de complementaridade. Além disso, a condição de complementaridade implica que $f(\sigma) = 0$ na hipótese de $\Delta \lambda > 0$.

As relações que expressam a forma incremental do modelo constitutivo elasto-plástico perfeito sem considerar o encruamento são:

$$\Delta \sigma = E \Delta \varepsilon^e = E(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p) \quad (6.10)$$

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \rightarrow \text{critério de plastificação} \quad (6.11)$$

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \text{sign}(\sigma) \rightarrow \text{lei de plastificação} \quad (6.12)$$

$$\Delta \lambda f = 0 \text{ com } \Delta \lambda \geq 0 \text{ e } f \leq 0 \rightarrow \text{condição de complementaridade} \quad (6.13)$$

6.4. Comportamento elásto-plástico com encruamento linear positivo

Segundo PROENÇA (2007), o encruamento é caracterizado pela alteração do intervalo elástico inicial de tensões devido à evolução da deformação plástica. Existem várias maneiras para se modelar o encruamento. Uma delas é o modelo de encruamento linear isótropo apresentado na figura 6.4 a seguir.

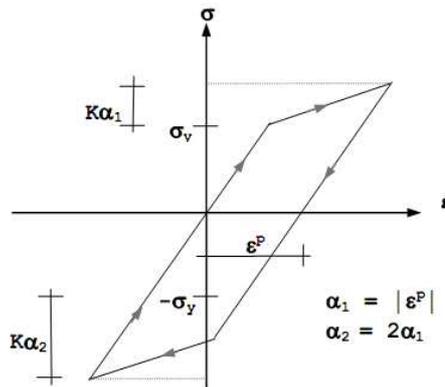


Figura 6.4. Modelo com encruamento linear

Fonte: PROENÇA (2007)

Observa-se da figura acima que o intervalo elástico inicial de tensões é $[-\sigma_y, \sigma_y]$ indicado no eixo das tensões e que esse intervalo é alterado para $(\sigma_y + k\alpha_1)$ e $(\sigma_y + k\alpha_2)$. Isso aconteceu em função da história de plastificação que ocorre no ciclo. O parâmetro k é denominado módulo plástico de encruamento e é expresso por:

$$k = \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \quad (6.14)$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, E_t é o módulo elasto-plástico tangente. O α é a medida que registra a história de deformação plástica no ciclo.

Assim, o critério de plastificação para um comportamento elasto-plástico com encruamento é dado por:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (6.15)$$

Observa-se que $\alpha \geq 0$, sendo $\sigma_y > 0$ e $k > 0$ são constantes do material. Nota-se que a parcela $k\alpha$ modifica a dimensão do intervalo elástico inicial.

Um modelo parecido com o apresentado será usado para fazer as ligações semirrígidas que serão mostradas no item seguinte.

6.5. Modelo de Rótula Elasto-Plástica Proposto

A ligação entre barras de pórtico plano é governada por uma grandeza unidimensional, a saber, o giro relativo entre as mesmas. O momento transmitido por essa ligação, conforme descrito em capítulos precedentes, apresenta comportamento que pode ser modelado por uma relação constitutiva elasto-plástica, conforme será apresentado neste capítulo.

Este modelo é uma adaptação do descrito para a relação elasto-plástica momento-giro relativo uniaxial.

No regime elasto-plástico, a rotação relativa total é composta por duas parcelas, sendo uma elástica e outra plástica. Observando-se a figura 6.5, podem-se obter as seguintes relações:

$$\theta = \theta^p + \theta^e \quad (6.16)$$

Onde θ é a rotação relativa total, θ^e é a parcela elástica da rotação e θ^p é a parcela plástica da rotação.

$$M = E\theta^e = E(\theta - \theta^p) \quad (6.17)$$

Infere-se que o momento em (6.17) está em função da rotação total e da parcela plástica da rotação.

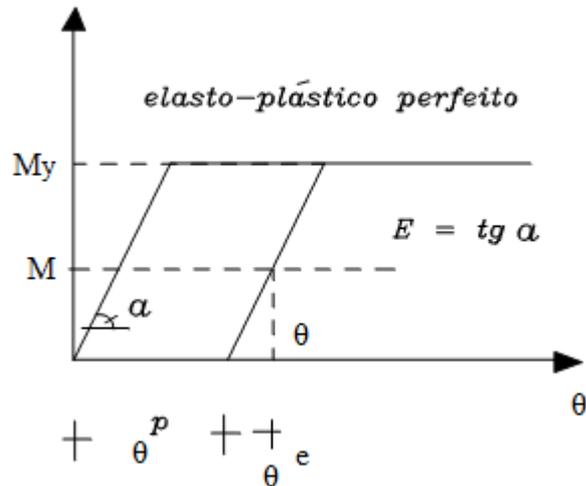


Figura 6.5 – Comportamento elasto-plástico perfeito

Fonte: Adaptação de PROENÇA (2007)

A rotação plástica presente na lei constitutiva do material como mostra na equação 6.17 confere um caráter não linear. Observando-se o diagrama de rotação-momento apresentado na figura 6.5 e considerando que o material possui uma resposta simétrica para giros relativos de abertura e fechamento, conclui-se que o módulo do momento não pode ser maior que M_y . Então, estados admissíveis de momento devem respeitar a seguinte relação:

$$f(M) = |M| - M_y \leq 0 \quad (6.18)$$

Essa equação é fundamental no modelo matemático, já que possibilita identificar imediatamente se o regime é elástico ou elasto-plástico. Ela funciona como um critério de plastificação.

Caso o estado de momento for tal que $f(M) < 0$, logo a resposta ocorre sem a variação da deformação plástica. A figura 6.6. representa essa situação.

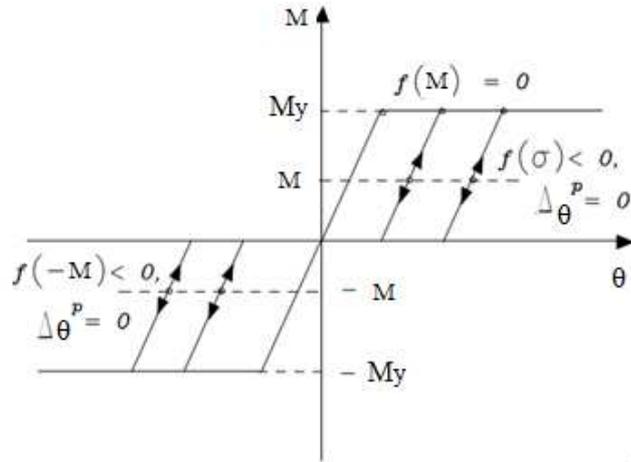


Figura 6.6 – Resposta imediata sem acréscimo de rotação plástica

Fonte: Adaptação de PROENÇA (2007)

Outra possibilidade seria de um nível de momento em que $f(M) = 0$ e se o novo nível for $f(M + \Delta M) < 0$, portanto a resposta imediata não apresentará alteração na rotação plástica, isto é $\Delta\theta^p = 0$ e consequentemente a resposta do material será somente elástica. Todavia, se o novo nível de momento for $f(M + \Delta M) = 0$, então a resposta imediata terá um acréscimo de giro plástico.

Seja, portanto, $\Delta\lambda > 0$ o valor absoluto do incremento de giro plástico, caso ele ocorra. O giro plástico pode ser tanto de abertura como de fechamento, tem-se que:

$$\Delta\theta^p = \Delta\lambda \geq 0 \text{ se } M = M_y (> 0) \quad (6.19)$$

$$\Delta\theta^p = -\Delta\lambda > 0 \text{ se } M = -M_y (< 0) \quad (6.20)$$

Verifica-se que o sinal de $\Delta\theta^p$ é coincidente com o de M e desse modo pode-se utilizar o operador de sinal, $sign(\cdot)$, e assim obter:

$$\Delta\theta^p = \Delta\lambda sign(M) \text{ caso } f(M) = 0 \text{ com } \Delta\lambda > 0 \quad (6.21)$$

Por definição: $sign(M) = 1$ se $M > 0$ e $sign(M) = -1$ se $M < 0$. (6.22)

Quando se considera um modelo elasto-plástico perfeito a condição acima é testada nos pontos $M=M_y$ e $M= - M_y$.

Então, a lei de evolução da deformação plástica pode ser definida por:

$$\Delta\theta^p = \Delta\lambda \text{sign}(M) \quad (6.23)$$

Do que foi apresentado, observa-se que $\Delta\lambda$ e $f(M)=0$ verificam determinadas condições complementares em termos de sinal, isto é: $\Delta\lambda \geq 0$ e $f(M) \leq 0$. Além disso, se $\Delta\lambda \geq 0$ então $f(M)=0$ e caso $f(M) < 0$ logo $\Delta\lambda = 0$. Essas possibilidades podem ser expressas na seguinte relação:

$$\Delta\lambda \Delta f = 0 \quad (6.24)$$

Essa condição acima é chamada de condição de complementaridade. Além disso, a condição de complementaridade implica que $\Delta f(M) = 0$ na hipótese de $\Delta\lambda > 0$.

As relações que expressam a forma incremental do modelo momento-giro relativo elasto-plástico perfeito sem considerar o encruamento são:

$$\Delta M = E\Delta\theta^e = E(\Delta\theta - \Delta\theta^p) \quad (6.25)$$

$$f(M) = |M| - M_y \leq 0 \rightarrow \text{critério de plastificação} \quad (6.26)$$

$$\Delta\theta_p = \Delta\lambda \text{sign}(M) \rightarrow \text{lei de plastificação} \quad (6.27)$$

$$\Delta\lambda f = 0 \text{ com } \Delta\lambda \geq 0 \text{ e } f \leq 0 \rightarrow \text{condição de complementariedade} \quad (6.28)$$

O encruamento é caracterizado pela alteração do intervalo elástico inicial de momento devido à evolução do giro plástico. Existem várias maneiras para se modelar o encruamento. Uma delas é o modelo de encruamento linear isotrópico apresentado na figura 6.7 a seguir.

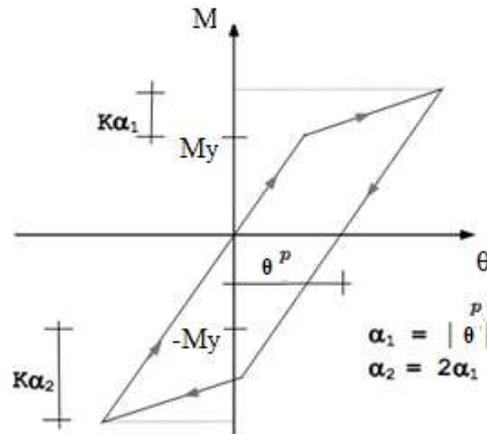


Figura 6.7. Modelo com encruamento linear

Fonte: Adaptação de PROENÇA (2007)

Observa-se da figura acima que o intervalo elástico inicial de momentos é $[-M_y, M_y]$ indicado no eixo dos momentos e que esse intervalo é alterado para $(M_y + k\alpha_1)$ e $(-M_y + k\alpha_2)$. Isso aconteceu em função da história de plastificação que ocorre no ciclo. O parâmetro k é denominado módulo plástico de encruamento e é expresso por:

$$k = \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} \quad (6.29)$$

Onde E é o módulo elástico da ligação, E_t é o módulo elasto-plástico tangente e α é a medida que registra a história do giro plástico no ciclo.

Assim, o critério de plastificação para um comportamento elasto-plástico com encruamento é dado por:

$$f(M) = |M| - (M_y + k\alpha) \leq 0 \quad (6.30)$$

Observa-se que $\alpha \geq 0$, sendo $M_y > 0$ e $k > 0$ são constantes da ligação. Nota-se que a parcela $k\alpha$ modifica a dimensão do intervalo elástico inicial.

Capítulo 7 – Programa básico de pórtico plano

7.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se a descrição do código do programa estático de análise não linear geométrica de pórticos planos (Acadframe), cuja teoria foi descrita nos capítulos anteriores. Em especial será apresentada a sub-rotina que foi desenvolvida e implementada neste trabalho para a consideração das ligações semirrígidas.

Apresenta-se, inicialmente, o corpo do programa principal com as chamadas das sub-rotinas necessárias para a montagem do programa. Em seguida apresenta-se a sub-rotina que foi implementada para simular as ligações semirrígidas.

7.2. Programa Principal

Inicia-se o programa com a chamada de uma sub-rotina responsável por informar os dados que não se alteram com as fases de carga.

```
Call dadosiniciais      ! entrada de dados que não modificam com a fase
```

Em seguida definem-se os pesos e os pontos de integração de Gauss necessários para calcular, por exemplo, as expressões (5.72) e (5.73).

```
call dgqrul(ng,1,0.d0,0.d0,0,qsi,w)      !Pesos e coord. de Gauss long.
```

```
call dgqrul(ng3,1,0.d0,0.d0,0,qsi3,w3) !Idem transversal
```

Depois que se têm os dados iniciais e os pontos de integração definidos, inicia-se o processo incremental de aplicação das cargas externas e movimento de base.

```
f=0.
```

```
ipt=0
```

```
do ifc=1,nfc                !Início das fases de carga
```

```
    call dadosdin           !Entrada de dados que mudam com a fase de carga
```

```

dt=1.

do ipc=1,npt      !Passos de carga

    ipt=ipt+1     !Cálculo do passo de carga atual

    ia=0          !Contador de iterações

    rnorma=100000. !Inicializando a norma de incremento

do i=1,n !Número de graus de liberdade - Aplicação da carga e
recalque

    if(ko(i).eq.0) !Formula da carga

#       f(i)=df(i)*(ca+cb*ipc*dt+cc*(ipc*dt)**2
#       +cd*sin(ce*ipc*dt)+cf*cos(cg*ipc*dt)
#       +crh*exp(cri*ipc*dt)+cj*exp(ck*ipc*dt))

    if(ko(i).eq.1) p(i)=p(i)+dp(i) !Recalque

enddo

```

Posteriormente, é feito o processo iterativo de Newton Rapson que deve atualizar a posição das variáveis e calcular o vetor de forças internas e a matriz Hessiana (sub-rotina matriz). O algoritmo do processo iterativo de Newton Rapson é dado por:

```

do while((rnorma.gt.tol).and.(ia.le.maxia)) ! maxia = número máximo de iterações

    call geometriaatual ! Atualizar configuração nos elementos

    call matriz          !Calcula matrizes e vetores

    call condcon         !Aplica condições de contorno

    call solver          !Solução do sistema

    call calculanorma    ! calcula norma de posições para critério de parada

```

```

call destroca1      !Retorno das condições de contorno

    ia=ia+1

enddo

    call geometriaatual ! Atualizar configuração nos elementos

    call saida      !Lista completa de posições e passo

enddo              !Final dos passos de carga

enddo              !Final das fases de carga

stop               !Fim do programa principal

end

```

7.3. Implementação da ligação semirrígida

As ligações semirrígidas foram modeladas utilizando-se uma curva multi-linear momento-rotação. A representação multi-linear da curva momento-rotação representa com boa precisão uma curva experimental ou de norma. Neste trabalho adotaram-se elementos de molas para simular as ligações semirrígidas, já que eles podem representar uma ligação deformável. Além disso, eles são capazes de unir dois elementos de barras e assim descrever o comportamento de uma ligação numa estrutura.

Primeiramente, definem-se quais os nós e a quantidade de ligações que cada nó terá. Também são lidas as incidências das molas. Isso é feito na sub-rotina dos dados iniciais já que esses dados não serão alterados durante o processo. O código computacional dessa parte é descrito a seguir:

```

do ima=1,nnosmola

    read(3,*) icmolano(ima),iqmola(ima)

    do jm=1,iqmola(ima)

        read(3,*) (icmola(ima,jm,km),km=1,2)
    
```

end do

end do

Onde n_{nosmola} : é a quantidade de nós que possuem ligações semirrígidas; i_{qmola} : é a quantidade de molas que cada nó possui; i_{cmolasno} : é a incidência dos nós que possuem ligações semirrígidas.

Na incidência das molas, é necessário adicionar mais dois para que os graus de liberdade sejam os correspondentes aos giros relativos desses nós que possuem as ligações semirrígidas. O código computacional dessa parte foi descrito a seguir:

```
do ima=1,nnosmola
```

```
do jm=1,iqmola(ima)
```

```
icmola(ima,jm,1)=icmola(ima,jm,1)+2
```

```
icmola(ima,jm,2)=icmola(ima,jm,2)+2
```

```
end do
```

```
end do
```

Além disso, também são definidas todas as propriedades das ligações semirrígidas que são: rigidez inicial elástica das ligações, o número de trechos plásticos, a leitura dos pontos dos gráficos de momento versus rotação para cada tipo de ligação. A partir desses dados, calcula-se o encruamento de cada trecho plástico.

A partir de um gráfico de momento-rotação de uma ligação como na figura 7.1, define-se um trecho inicial que sempre será determinado por uma rigidez inicial elástica e por um encruamento nulo. O restante do gráfico é usado para simular o comportamento não linear da ligação. Esses demais trechos apresentam rigidez tangente e parâmetro de encruamento da ligação. Observa-se que o modelo adotado para simular a ligação semirrígida é multilinear. Desse modo, quanto maior o número de divisões mais representativo será o modelo. Os valores dos pares de momento fletor e rotação relativa são dados de entrada do programa. Assim, os valores de rigidez e de encruamento de cada ligação são calculados automaticamente pelo programa.

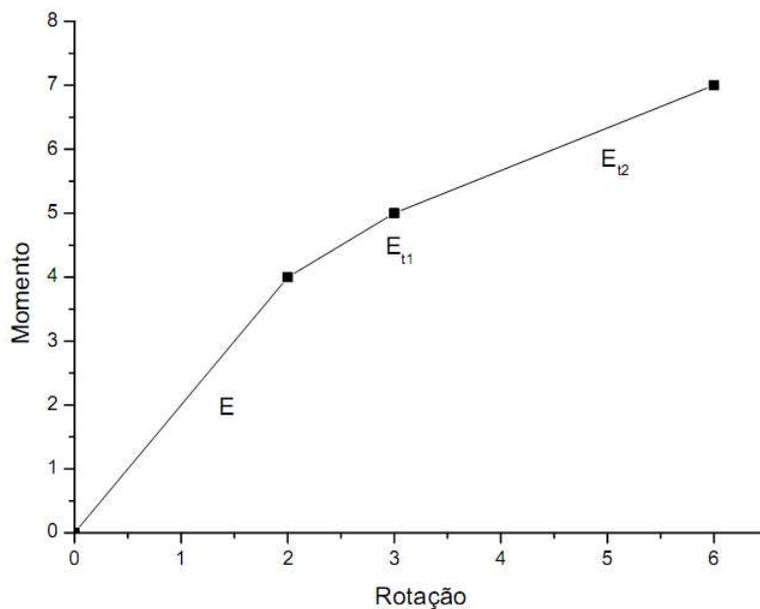


Figura 7.1. – Curva momento x rotação

No gráfico acima, E é a rigidez inicial da mola, E_{t1} e E_{t2} são os módulos de rigidez tangente que são calculados a partir da seguinte expressão:

$$E_{ti} = \frac{\Delta M}{\Delta \theta} \quad (7.1)$$

O índice i representa o número de trechos plásticos. Com os módulos de rigidez tangente calculados, obtêm-se os encruamentos de cada trecho plástico. O encruamento é calculado por:

$$k = \frac{E \times E_{ti}}{E - E_{ti}} \quad (7.2)$$

Depois que foram definidos todos os parâmetros dentro da sub-rotina matriz calcula-se a matriz Hessiana local de cada mola, pois a energia de cada mola entrará na energia potencial total como uma parcela a mais e assim a energia potencial total será dada por:

$$\pi = U_e + P + U_{mola} \quad (7.3)$$

Onde U_e é a energia de deformação, P é o potencial das forças externas e U_{mola} é a energia interna da mola.

Assim a matriz Hessiana de cada mola que será somada a matriz Hessiana global do sistema e é dada por:

$$h_{mola} = \begin{pmatrix} E & -E \\ -E & E \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Posteriormente, é calculada a força interna devido à ligação semirrígida que será somada ao vetor de forças internas global. Para o cálculo dessa força interna é utilizado um modelo elasto-plástico como foi apresentado no capítulo 6 com algumas pequenas modificações.

O algoritmo do modelo que foi usado será apresentado a seguir:

I – Calcula-se o θ_r que é a rotação da estrutura quando ela sofre a ação de um carregamento.

II – O passo seguinte é definir em qual trecho o encruamento da mola se encontra. Define-se o trecho mesmo que depois ele seja elástico. A função $f_{tentativa}$ será a responsável por definir se o trecho é elástico ou não. Para definir em qual trecho o encruamento se encontra, devem-se verificar duas condições (a) e (b) a partir do segundo trecho plástico até o último:

- a) Se $(\theta_r > \theta_p)$ e $(\theta < \theta_p) \rightarrow$ tem descontinuidade de derivada no incremento. Então, o comportamento de θ e do encruamento da ligação devem ser divididos em dois. A curva apresentará dois trechos. O θ_p é o ângulo plástico que foi lido a partir do gráfico momento versus rotação da ligação.

E assim, calculam-se os dois encruamentos:

$$rk(1) = k(it - 1) \quad (7.5)$$

A variável acima é o encruamento no primeiro trecho.

$$rk(2) = k(it) \quad (7.6)$$

A variável acima é o encruamento do segundo trecho.

E os dois θ_r :

$$\theta_2 = \theta_r \quad (7.7)$$

O θ_1 deixa de ser o real, pois o θ_2 será o θ_r e o θ_1 passará a ser o parcial.

$$\theta_1 = \theta_r \times aux \quad (7.8)$$

Onde a variável aux é calculada por:

$$aux = \frac{\theta_p(it)}{\theta_r} \quad (7.9)$$

E o número de trecho passa a ser igual a 2 e a variável que representa o número de trecho $n_{ped} = 2$.

- b) Se $(\theta_r > \theta_p)$ e $(\theta_0 > \theta_p) \rightarrow$ não tem descontinuidade da derivada no incremento e tem somente um trecho.

Então, tem-se:

$$rk(1) = k(it) \quad (7.10)$$

$$\theta_1 = \theta_r \quad (7.10)$$

E o número de trecho passa a ser igual a 1 e a variável que representa o número de trecho $n_{ped} = 1$. Quando há somente um trecho o θ_1 passa a ser o θ_r .

III – O último passo é definir se no trecho em estudo ocorre a plastificação ou não para que se possa obter o valor da força interna que será adicionada ao vetor global da força interna. O modelo a ser usado foi apresentado no capítulo 6. Porém, ele será multilinear e não bilinear como apresentado.

Faz-se um laço variando de 1 até o número de trechos que pode ser 1 ou 2.

O momento tentativa é calculado pela expressão 6.25:

$$M_{tent} = E \times (\theta - \Delta\theta_p) \quad (7.11)$$

Onde E é a rigidez inicial da ligação e $\Delta\theta_p$ é a variação do ângulo de plastificação.

Posteriormente, calcula-se a função f_{tent} que é a responsável por definir se no trecho há plastificação ou não. A função f_{tent} é calculada por:

$$f_{tent} = |M_{tent}| - M_p + q \quad (7.11)$$

Onde M_p é momento plástico acumulado e q representa o somatório do produto entre o encruamento e o incremento de deformação plástica $\Delta\lambda$.

Se f_{tent} for maior que zero, então ocorre plastificação. Caso contrário não há plastificação. Ocorrendo a plástificação calcula-se o $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{f_{tent}}{E_m + rk} \quad (7.12)$$

E q é calculado por:

$$q = q + \Delta\lambda \times rk \quad (7.13)$$

O sinal da variação da deformação plástica coincide com o sinal de M_{tent} . Se M_{tent} for positivo então $\Delta\theta_p$ será positiva caso contrário será negativa. Assim, a variação da deformação plástica é expressa por:

$$\Delta\theta_p = \Delta\lambda sign \quad (7.14)$$

Onde $sign$ é igual a 1 ou -1 dependendo do sinal de M_{tent} .

Calcula-se o novo M_{tent} considerando a variação do ângulo de plastificação, pois no início do laço era considerado que $\Delta\theta_p$ fosse nulo. Assim, o M_{tent} é somado ao vetor de forças internas global.

8. Exemplos numéricos

Neste capítulo alguns exemplos serão apresentados com o intuito de validar a formulação desenvolvida. Mostra-se ser possível a aplicação das curvas momento-rotação definidas pelas normas técnicas, tal como comentado nos capítulos iniciais.

Entretanto, não é objetivo do trabalho fazer análises reais comparando os diversos modelos de norma, ficando esta tarefa para pesquisadores e profissionais das áreas aplicadas.

8.1. Exemplo 1 – Viga Biengastada

O primeiro exemplo é uma viga biengastada isotrópica apresentada na figura 8.1 com suas características geométricas e carregamento uniforme distribuído de $0,10\text{kN/cm}$. As ligações apresentam comportamento linear com rigidez inicial rotacional igual a 326550kN.cm/rad . A seção transversal é constituída pelo perfil VE 400x49 e o módulo de elasticidade do aço é 20000kN/cm^2 .

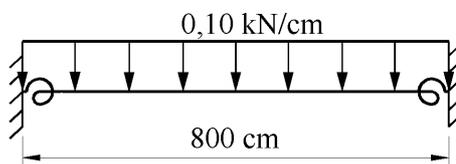


Figura 8.1. Viga submetida à carga uniformemente distribuída com ligações semirrígidas

Fonte: Silva, R. (2010)

As soluções numéricas são comparadas com os resultados analíticos obtidos pelo método linha elástica para uma viga isotrópica submetida às mesmas condições de contorno. A seguir são apresentados na figura 8.2 os resultados de momento fletor e deslocamentos angulares e transversais obtidos no meio do vão e nas extremidades da viga.

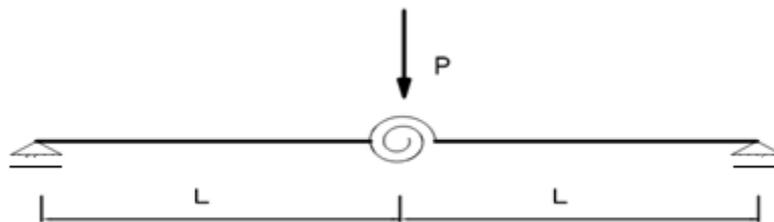
Rigidez inicial da ligação (kN.cm/rad)	Numérico				Analítico			
	Mext (kN.cm)	Meio do vão	Rotação (rad)	Flecha meio (cm)	Mext (kN.cm)	Meio do vão	Rotação (rad)	Flecha meio (cm)
326550	1453,16	6538,42	0,00445	1,208	1454,7	6545,3	0,00445	1,197

Figura 8.2. Comparação das soluções

Pode-se observar na figura 8.2, para ambas soluções de análise, uma grande concordância entre os resultados analíticos e os numéricos.

8.2. Exemplo 2 – Viga Biapoiada com ligação elástica

Analisa-se uma viga-biapoiada isotrópica, possuindo uma ligação linear no meio do vão com rigidez inicial rotacional. A viga está apresentada na figura 8.3 com suas características geométricas e um carregamento concentrado no meio do vão.



8.3. Viga biapoiada com ligação elástica

Com o intuito de se ter um melhor entendimento do comportamento da ligação linear, a solução analítica será apresentada e posteriormente comparada com a numérica.

Solução analítica:

Ao aplicarmos à carga concentrada no meio do vão a viga terá um deslocamento transversal como mostra a figura 8.4.

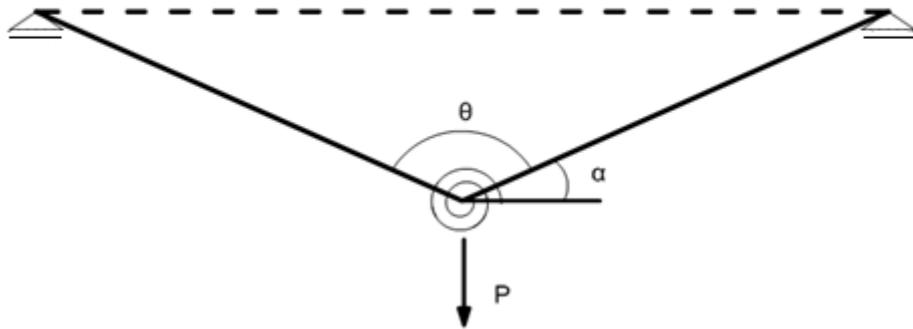


Figura 8.4. Viga biapoiada deslocada com ligação elástica

O momento pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$M = E \times (\pi - \theta) = E \times \varphi \quad (8.1)$$

Onde E é a rigidez inicial da mola e φ é igual a $\pi - \theta$.

A figura 8.5 a seguir mostra o esquema das forças.

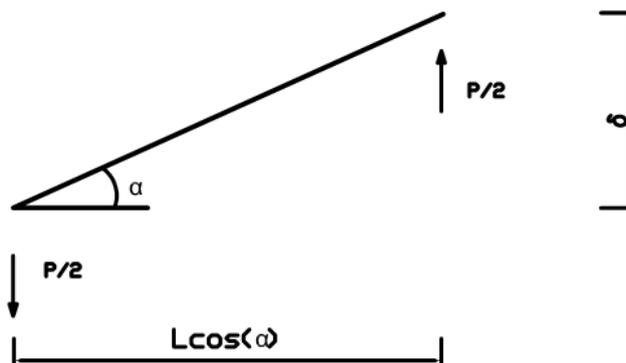


Figura 8.5. Esquema das forças

Observando as figuras 8.4 e 8.5, podem-se deduzir as seguintes expressões:

$$\alpha + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (8.2)$$

$$\alpha = \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\varphi}{2} \quad (8.3)$$

$$\delta = L \times \sin(\alpha) = L \times \sin \frac{\pi - \theta}{2} \quad (8.4)$$

$$M = \frac{P \times L \times \cos(\alpha)}{2} \quad (8.5)$$

$$M = \frac{P \times L \times \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)}{2} \quad (8.6)$$

Igualando a equação 8.1 com a 8.6, obtém-se:

$$\frac{P \times L \times \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)}{2} = E \times (\pi - \theta) = E \times \varphi \quad (8.7)$$

Isolando P na expressão acima tem-se:

$$P = \frac{2 \times E \times (\pi - \theta)}{L \times \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)} = \frac{2 \times E \times \varphi}{L \times \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (8.8)$$

$$\delta = L \times \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = L \times \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (8.9)$$

As soluções de P e δ para as equações 8.8 e 8.9 são válidas para φ variando de 0 a π .

Escrevendo tudo em função de α que é igual a $\varphi/2$. Assim, obtém-se:

$$P = \frac{4 \times E \times \alpha}{L \times \cos(\alpha)} \quad (8.10)$$

$$\delta = L \times \sin(\alpha) \quad (8.11)$$

As soluções de P e δ para as equações 8.10 e 8.11 são válidas para α variando de 0 a $\pi/2$.

A figura 8.6. mostra a solução analítica do exemplo 2 variando o ângulo alfa de 5 a 90° e a figura 8.7. mostra a comparação da solução numérica com a analítica através de um gráfico de deslocamento versus força.

k(kN*cm/rad)	alfa(°)	alfa(rad)	L(cm)	P(kN)	delta(cm)
1000	5	0,087266	100	3,50399225	8,7155743
1000	10	0,174533	100	7,08901508	17,364818
1000	15	0,261799	100	10,8413868	25,881905
1000	20	0,349066	100	14,8587248	34,202014
1000	25	0,436332	100	19,2575776	42,261826
1000	30	0,523599	100	24,1839915	50
1000	35	0,610865	100	29,8291504	57,357644
1000	40	0,698132	100	36,4538484	64,278761
1000	45	0,785398	100	44,4288294	70,710678
1000	50	0,872665	100	54,3050061	76,604444
1000	55	0,959931	100	66,9435512	81,915204
1000	60	1,047198	100	83,7758041	86,60254
1000	65	1,134464	100	107,374822	90,630779
1000	70	1,22173	100	142,884038	93,969262
1000	75	1,308997	100	202,303032	96,592583
1000	80	1,396263	100	321,630419	98,480775
1000	85	1,48353	100	680,86385	99,61947
1000	90	1,570796	100	8,638E+16	100

Figura 8.6 . Solução analítica

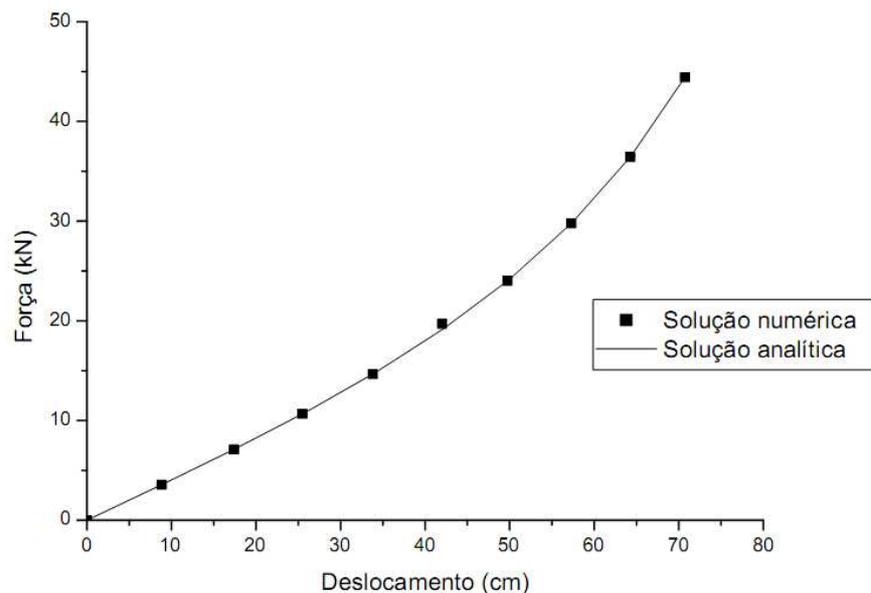


Figura 8.7 . Gráfico das soluções

Pode-se observar na figura 8.7, para ambas soluções de análise, uma grande concordância entre os resultados analíticos e os numéricos.

8.3. Exemplo 3 – Viga Biapoiada com ligação elasto-plástica

Analisa-se a mesma viga do exemplo 2, porém com uma ligação elasto-plástica no meio do vão. Também com o intuito de se ter um melhor entendimento do comportamento da ligação elasto-plástica, a solução analítica será apresentada e posteriormente comparada com a numérica.

Solução analítica:

Observando a figura 8.8, podem-se calcular as seguintes grandezas:

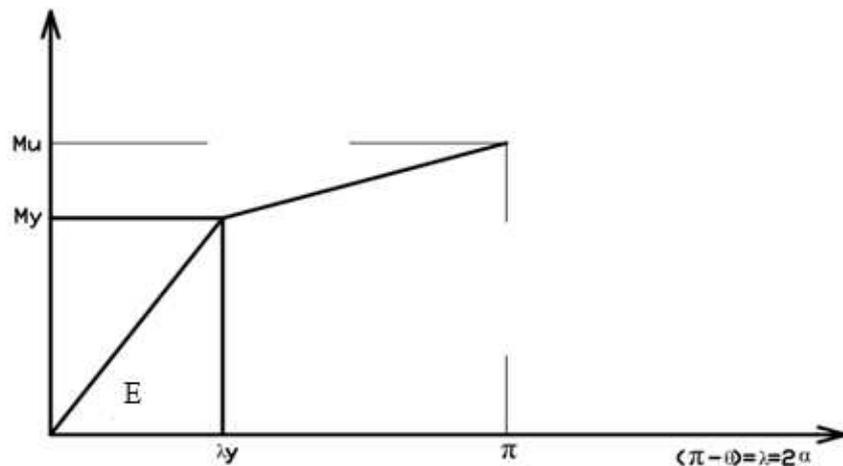


Figura 8.8 . Modelo bilinear para a solução elasto-plástico

- Módulo de elasticidade tangente:

$$E_t = \frac{M_u - M_y}{\pi - \lambda_y} \quad (8.12)$$

- Encruamento da mola (hardening):

$$k = \frac{E \times E_t}{E - E_t} \quad (8.13)$$

Onde: k é a rigidez inicial da ligação e E_t é o módulo de elasticidade tangente.

Substituindo 8.12 em 8.13 tem-se:

$$k = \frac{E \times \frac{M_u - M_y}{\pi - \lambda_y}}{E - \frac{M_u - M_y}{\pi - \lambda_y}} = \frac{E \times (M_u - M_y)}{E \times (\pi - \lambda_y) - M_u + M_y} \quad (8.14)$$

Como $\lambda = 2 \alpha$, tem-se:

$$k = \frac{E \times (M_u - M_y)}{E \times (\pi - 2\alpha_y) - M_u + M_y} \quad (8.15)$$

Posteriormente, deve-se calcular o momento tentativa M_{tent} que é dado por:

$$M_{tent} = E \times (\alpha - \alpha_p) \quad (8.16)$$

Onde k é a rigidez inicial da mola e α é a rotação total e α_p é a rotação plástica. Considera-se $\alpha_p = 0$ na primeira tentativa, logo:

$$M_{tent} = E \times \alpha \quad (8.17)$$

O cálculo da função tentativa f_{tent} é obtido por:

$$f_{tent} = abs(E \times \alpha) - (M_y + k\alpha_p) \quad (8.18)$$

Como α_p é igual a zero na primeira tentativa, a função tentativa é calculada por:

$$f_{tent} = abs(E \times \alpha) - M_y \quad (8.19)$$

Se $f_{tent} < 0$, não há rotação plástica. Logo, é a mesma solução apresentada para o modelo com a ligação elástica.

Se $f_{tent} > 0$, há rotação plástica. Então, deve-se calcular ela.

$$\Delta p = \frac{f_{tent}}{E+k} = \frac{abs(E \times \alpha) - M_y}{E + \frac{E \times (M_u - M_y)}{E \times (\pi - 2\alpha_y) - M_u + M_y}} \quad (8.20)$$

$$\alpha_p = \Delta p \quad (8.21)$$

$$\alpha_p = \frac{abs(E \times \alpha) - M_y}{E + \frac{E \times (M_u - M_y)}{E \times (\pi - 2\alpha_y) - M_u + M_y}} \quad (8.22)$$

Tem-se que:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_p \quad (8.23)$$

Onde α_e é a parcela elástica do α e α_p é a parcela plástica do α .

Logo,

$$\alpha_e = \alpha - \alpha_p \quad (8.24)$$

A solução elasto-plástica é dada por:

$$P = \frac{4 \times E \times (\alpha - \alpha_p)}{L \times \cos(\alpha - \alpha_p)} \quad (8.25)$$

$$\delta = L \times \sin(\alpha - \alpha_p) \quad (8.26)$$

Substituindo a expressão 8.22 em 8.25 e 8.26, obtém-se:

$$P = \frac{4 \times E \times \left(\alpha - \frac{\text{abs}(E \times \alpha) - M_y}{E \times (M_u - M_y)} \right)}{L \times \cos \left(\alpha - \frac{\text{abs}(E \times \alpha) - M_y}{E \times (M_u - M_y)} \right)} \quad (8.27)$$

$$\delta = L \times \sin \left(\alpha - \frac{\text{abs}(E \times \alpha) - M_y}{E \times (M_u - M_y)} \right) \quad (8.28)$$

As soluções de P e δ para as equações 8.27 e 8.28 são válidas para α variando de 0 a $\pi/2$.

A figura 8.9 mostra a comparação da solução analítica e numérica do exemplo 2 variando o ângulo alfa de 5 a 90°. Neste exemplo, utilizou-se $M_u=100\text{kN.cm}$, $M_y=60\text{kN.cm}$ e E (rigidez inicial da mola) igual a 70kN.cm/rad . A figura 8.10 mostra a comparação da solução numérica com a analítica através de um gráfico de deslocamento versus força.

alfa(°)	P(kN) Analítico	delta(cm) Analítico	P(kN) Numérico	Delta(cm) Numérico
5	0,245279458	8,715574275	0,2139	7,611
10	0,496231055	17,36481777	0,4991	17,4641
15	0,758897077	25,88190451	0,7842	26,6737
20	1,040110734	34,20201433	1,0694	35,02
25	1,348030431	42,26182617	1,3546	42,43
30	1,692879407	50	1,711	50,38
35	2,088040528	57,35764364	2,0675	57,02
40	2,551769391	64,27876097	2,566	64,48
45	3,110018057	70,71067812	3,0656	70,27
50	3,699813048	75,85285129	3,636	75,3698
55	3,904313717	77,3322851	3,9326	77,454
60	4,14163704	78,8887644	4,1446	78,8545
65	4,420490847	80,52494546	4,4272	80,53
70	4,75296717	82,24239078	4,7822	83,36
75	5,156359531	84,04088484	5,2083	84,24
80	5,656288967	85,91740644	5,6348	85,84
85	6,292386082	87,86457787	6,2754	87,8184
90	7,129346957	89,86830839	7,1301	89,8725

Figura 8.9 . Solução analítica e numérica

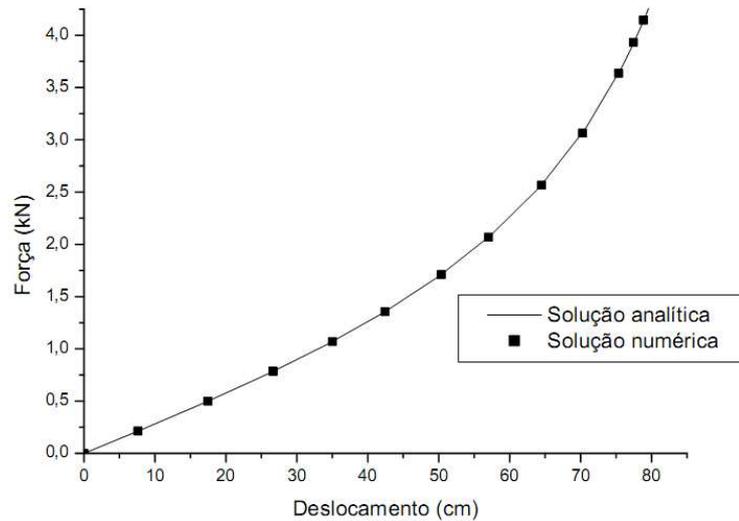


Figura 8.10 . Gráfico das soluções

Pode-se observar nas figuras 8.9 e 8.10, para ambas soluções de análise, uma grande concordância entre os resultados analíticos e os numéricos.

8.4. Exemplo 4 – Viga engastada com ligação elasto-plástica com modelo bilinear

Analisa-se uma viga engastada isotrópica, possuindo uma ligação elasto-plástica no meio. Para simular a curva da ligação utilizou-se um modelo bilinear A viga está apresentada na figura 8.11 com suas características geométricas e um carregamento concentrado na extremidade não engastada. O módulo de elasticidade da barra é 21000kN/cm^2 e o momento de inércia é $833,333\text{cm}^4$. O comprimento total da barra é 2m.



Figura 8.11. – Viga engastada com um momento aplicado na ponta

A figura 8.12 mostra a curva bilinear que se usou para simular a ligação elasto-plástica bilinear e a solução numérica que se obteve.

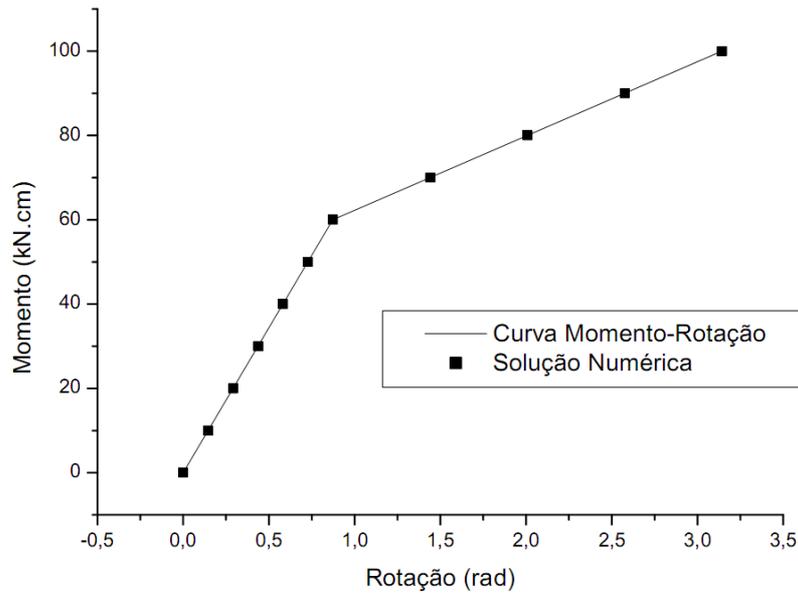


Figura 8-12. Curva momento-rotação x solução numérica

Pode-se observar que a solução numérica ficou muito próxima da curva momento-rotação como era esperado para esse exemplo porque a valor da carga concentrada aplicada é igual ao valor final do momento da curva da ligação adotada. Logo, era esperado que a barra tivesse o mesmo comportamento da curva momento-rotação como ocorreu.

8.5. Exemplo 5–Viga engastada com ligação elasto-plástica com modelo multilinear

Analisa-se uma viga engastada isotrópica também como no exemplo anterior, porém com um modelo multilinear para simular a curva da ligação. A viga foi submetida a uma rotação imposta igual a 4 rad. O módulo de elasticidade da barra é 21000kN/cm², o momento de inércia é 833,333cm⁴. O comprimento total da barra é 2m. A figura 8.13 exemplifica a barra.

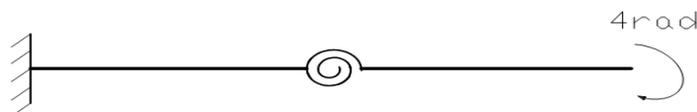


Figura 8.13. – Viga engastada com um momento aplicado na ponta

A figura 8.14 mostra a curva multilinear que se utilizou para simular a ligação elasto-plástica multilinear e a solução numérica que se obteve.

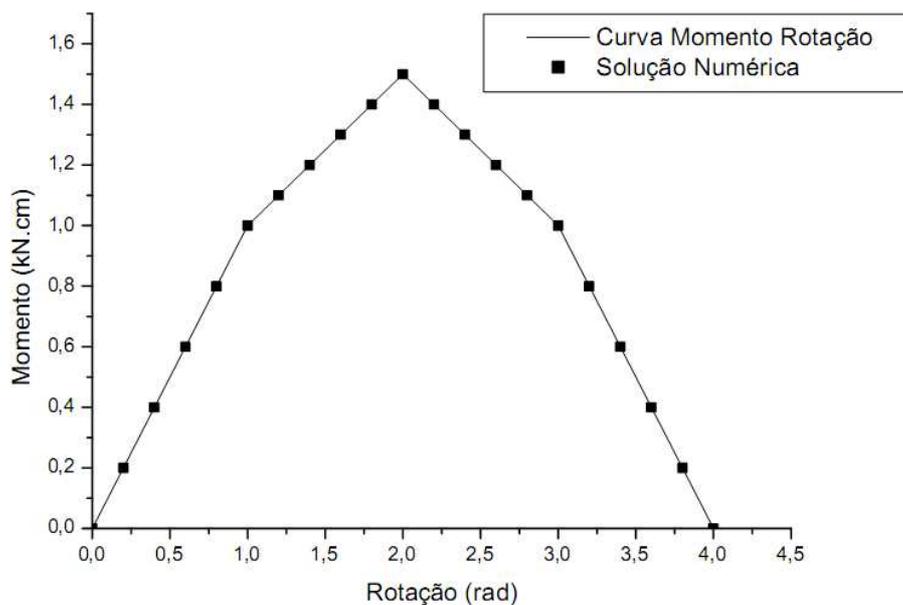


Figura 8-14. Curva momento-rotação x solução numérica

Pode-se observar que a solução numérica ficou muito próxima da curva momento-rotação como era esperado para esse exemplo porque a valor da rotação imposta aplicada é igual ao valor final da rotação da curva da ligação adotada. Logo, era esperado que a barra tivesse o mesmo comportamento da curva momento-rotação como ocorreu.

8.6. Exemplo 6 – Pórtico com ligação semirrígida elastoplástica

Este exemplo é um problema que foi resolvido por PINHEIRO e SILVEIRA (2006). Trata-se de um pórtico de dois andares e um vão com bases rotuladas. Esse pórtico foi analisado para o carregamento e as dimensões de barras mostradas na figura 8.15. As vigas e os pilares possuem, respectivamente, pelos perfis W 360x72 e W 310x143. O carregamento é formado por quatro cargas verticais concentradas P , aplicadas nos pilares e por duas cargas horizontais, de $0,002P$ aplicada no primeiro andar e outra de $0,001P$ aplicada no segundo andar. O módulo de elasticidade do aço é igual a 20500kN/cm^2 . Todas as ligações são iguais em todos os nós e utilizou-se uma curva multilinear para representar a ligação semirrígida. A figura 8.15 mostra a geometria do problema.

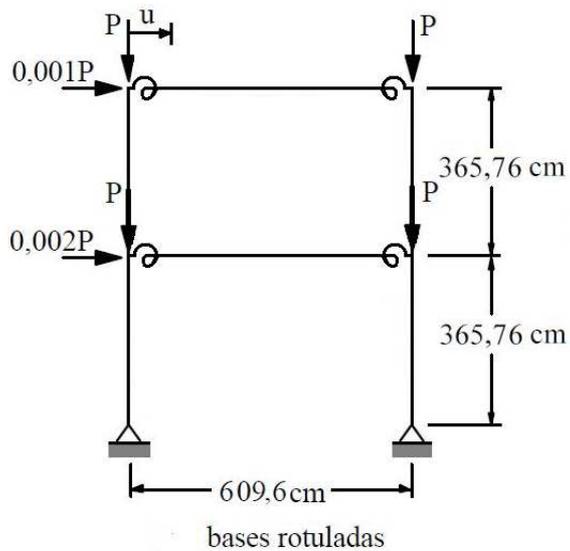


Figura 8.15 – Geometria do pórtico e cargas aplicadas
 Fonte: Adaptado de Pinheiro e Silveira (2006)

As figuras 8.16 e 8.17 mostram os dados relativos da curva multilinear de aproximação que foi usada para simular a ligação semirrígida. PINHEIRO e SILVEIRA (2006) não forneceram os pares de ordenados da curva multilinear da ligação.

Curva multi-linear para a ligação	
θ_r (rad $\times 10^{-3}$)	M (kN \times cm)
0	0
0,49	1783,24
3,66	13001,046
6,476	17528,234
11,45	21097,762
15,32	22596,96

Figura 8.16 – Pontos da curva multilinear

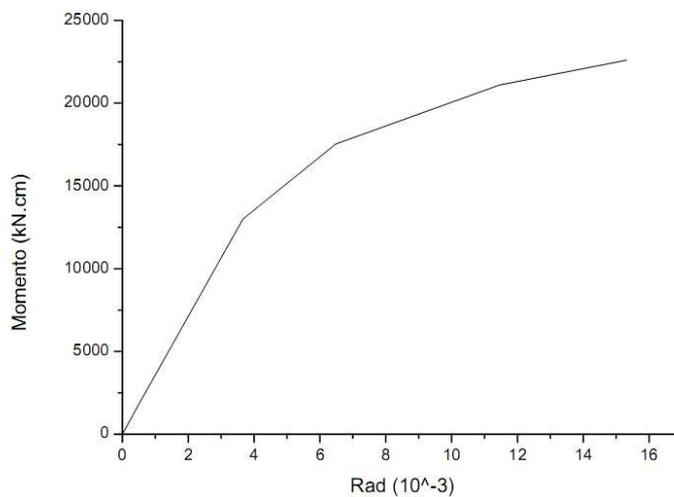


Figura 8.17 – Curva multilinear

A figura 8.18 mostra o deslocamento lateral do pórtico.

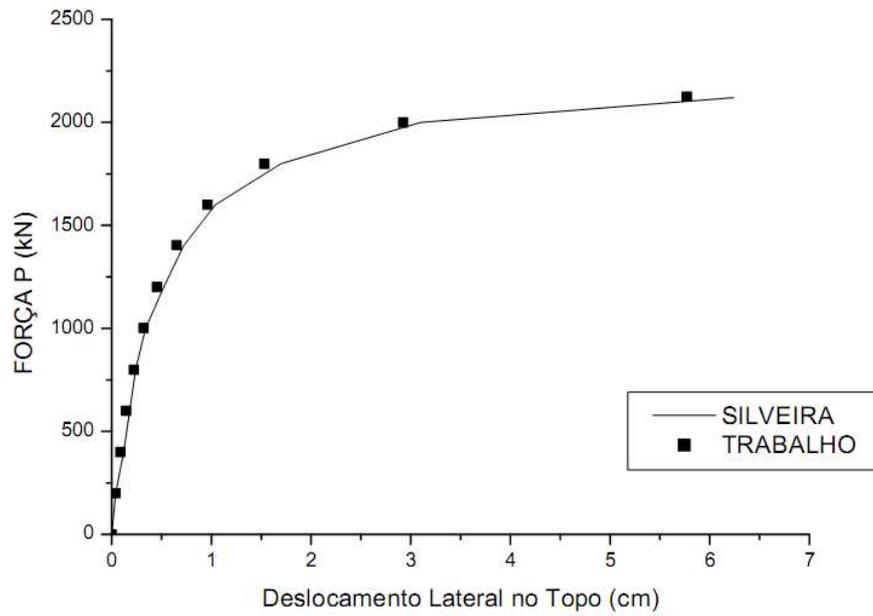


Figura 8.18 – Deslocamento lateral do pórtico

Pode-se observar na figura 8.18, para ambas soluções, uma boa aproximação entre os resultados.

9. Conclusões

O principal objetivo do trabalho foi desenvolver um código computacional que permitisse a análise bidimensional estática das ligações semirrígidas nas estruturas de aço e de concreto pré-moldado, considerando o comportamento não linear geométrico da estrutura e o comportamento não linear da ligação. Para o desenvolvimento do referido código computacional adaptou-se a formulação não linear geométrica existente para receber rótulas elásticas e elastoplásticas. Além disso, desenvolveu-se com sucesso rotina elastoplástica multilinear relacionando giro relativo e momento transmitido para rótulas multilineares capaz de representar curvas de norma ou experimentais das ligações semirrígidas.

O código computacional desenvolvido permite o usuário simular as ligações semirrígidas de estruturas de concreto pré-moldado e de aço através de três modelos. O usuário pode escolher um modelo linear, bilinear ou multilinear. Também, permite utilizar ligações distintas para cada nó do pórtico plano. O referido código mostra-se ser possível a aplicação das curvas momento-rotação definidas pelas normas técnicas.

Os exemplos apresentados comprovam a eficiência do código computacional. Nos exemplos 1 e 2 comparam-se respostas do código desenvolvido com soluções analíticas de estruturas simples com a presença de rótula elástica. Os deslocamentos desenvolvidos nestes exemplos são grandes e os resultados praticamente coincidentes. Nos exemplos 3 e 4 soluções analíticas para estruturas simples com rótulas em regime elastoplástico bilinear foram apresentadas. Também neste caso, os resultados apresentados pelo código foram muito precisos, validando a formulação desenvolvida para a validação do código. Finalmente, nos exemplos 5 e 6 o modelo multilinear foi comparado com sucesso com resultados da literatura.

O presente trabalho pode ser aplicado às pesquisas futuras de pesquisadores e profissionais das áreas aplicadas que desejam fazer análises comparando os diversos modelos de ligações de normas.

Analisando-se todos os exemplos apresentados conclui-se que o código computacional descreve adequadamente as ligações semirrígidas elastoplásticas podendo ser colocado à disposição do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos

(EESC) para que possa ser útil em pesquisas futuras do departamento que envolvam ligações semirrígidas de estruturas de aço e de concreto pré-moldado.

10. Referências Bibliográficas

ABNT NBR 6118: 2003. **Projeto de Estruturas de Concreto**. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ABNT NBR 8800: 1986. **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Método dos Estados-limites** - ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

AISC (1980). **Manual of Steel Construction**. American Institute of Steel Construction, Chicago.

ASSAN, A.E. (2003). **Método dos elementos finitos primeiros passos**. UNICAMP, Campinas, Brasil, 2 edição.

BALLARIN, A. W. (1999). **Desempenho das Ligações de Elementos Estruturais Pré-Moldados de Concreto**. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 5.

BATHE, K-J. (1996). **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA.

BJORHOVDE, R.; COLSON, A.; BROZZETTI, J. (1990). **Classification System for Beam-to column Connections**. Journal of Structural Engineering, v. 116, n. 11, pp. 3059-3077.

BORGES, L., SILVA, L. S., LIMA, L., RAMIRES, F. E VELLASCO, P. (2003) **NASCON: Uma Ferramenta para Análise Avançada de Ligações Metálicas e Mistas**. In: IV Congresso de Construção Metálica e Mista, Lisboa, Portugal.

BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. (1978). **Computational methods for the solution of engineering problems**, London, Pentech Press.

CAMPOS Jr. R. A. (1990). **Análise do comportamento de estruturas reticuladas de aço com ligações semirrígidas**. Rio de Janeiro, 165 p. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

CASTRO, R. A. (2006). **Modelagem Computacional de Ligações Semirrígidas e sua Influência na Resposta Dinâmica Não linear de Pórticos de Aço**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia da UERJ, p. 117.

CHEN, W. F. E TOMA, S. (1994) **Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software, and Applications**. Boca Raton: CRC-Press, p. 384.

CHRISTOPHER, J. E.; BJORHOVDE, R. (1999) **Semi-rigid Frame Design Methods for Practicing Engineers**. Engineering Journal, First Quarter, pp. 12-28.

CODA, H. B. (2010). **Energia Potencial Total Mecânica**. Notas de Aula. São Carlos, SP, 2010.

CODA, H. B., GRECO, M. (2004). **A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193, p.3541-3557.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R . **A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells**. Latin American Journal of Solids and Structures (Impresso), v. 5, p. 205-223, 2008.

COIMBRA, A. L. (1981). **Novas Lições de Mecânica do Contínuo**. Edgard Blucher, São Paulo.

COLSON, A. (1991). **Theoretical modelling of semirigid connectionsbehaviour**. Journal of Constructional of Steel Research, n. 19, p. 213-224

EL DEBS, M. K., MIOTTO, A.M., EL DEBS, A. L. H. C. (2010). **Analysis of a semi-rigid connection for precast concrete**. Structures and Buildings 163 Issue SB1, pp. 41-51

EN 1993-1-1: 2005 **Eurocode 3: Design of Steel Structures**, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings. European Committee for Standardization.

EN 1993-1-8: 2005 Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.8: Design of Joints. European Committee for Standardization.

FERREIRA, M. A. (1999). **Deformabilidade de Ligações Viga-Pilar de Concreto Pré-Moldado**. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 3.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1997). **Inelastic Analysis of Partially Restrained Unbraced Steel Frames**. Engineering Structures, v. 19 (11), pp. 891-902.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1999-a). **Inelastic Behavior of Multistory Partially Restrained Steel Frames**. Part I. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 125 (8), pp. 854-861.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1999-b). **Inelastic Behavior of Multistory Partially Restrained Steel Frames**. Part II. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 125 (8), pp. 862-869.

FRYE, M. J.; MORRIS, G. A. (1975). **Analysis of Flexibility Connected Steel Frames**. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 2, pp. 280-291.

GALVÃO, A.S. (2004). **Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semirrígidas**. Tese de Doutorado. PUC-RIO, p. 245.

GOVERDHAM, A. V. (1983). **A Collection of Experimental Moment Rotation Curves and Evaluation of Predict Equations for Semi-rigid Connections**. Nashville. Master's Thesis. Vanderbilt University.

GRECO, M. (2004). **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

HASAN, R., KISHI, N. E CHEN, W.F. (1998). **A New Nonlinear Connection Classification System**. Journal of Constructional Steel Research, V. 11, pp. 119-140.

IGIĆ, T., ZDRAVKOVIĆ, S., ZLATKOV D., ŽIVKOVIĆ, S., STOJIĆ N. (2010). Architecture and Civil Engineering Vol. 8, No 2, 2010, pp. 261 – 275.

JONES, S. W.; KIRBY, P. A.; NETHERCOT, D. A. (1983). **The analysis of frames with semi-rigid connections** - A state-of-the-art-report. Journal of constructional Steel Research, v. 3, n. 2, p.2-13.

KISHI, N. E CHEN, W. F. (1986) **Data Base of Steel Beam-to-Column Connections**. Structural Engineering Report No. CE-STR-86-26. School of Civil Engineering. Purdue University, West Lafayette, IN. Vol. 2, p. 653.

LANDESMANN, A. (2003) **Modelo Não linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Apertadas em Condições de Incêndio**. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, p. 295.

LANDESMANN, A E BATISTA, E. M (2005). **Advanced Analysis of Steel Framed Buildings Using the Brazilian Standard and Eurocode-3**. Journal Constructional Steel Research. v. 61, pp. 1051–1074.

LIGHTFOOT, E., BARKER, A. R. (1961). **The Analysis of Steel Fames with Elastic Beam Column Connections**. In: Congress Symposium On The Design Of Building, Hong Kong: Hong Kong University Press, pp. 205-17.

LIU, Y., XU, L. E GRIERSON, D. E. (2008). **Compound-Element Modeling Accounting for Semi-rigid Connections and Member Plasticity**. Engineering Structures, v. 30, pp. 1292–1307.

LUI, E. M., E CHEN, W. F. (1986). **Analysis and Behavior of Flexibly Jointed Frames**. Engineering Structures, v. 8(2), pp. 107-118.

MACIEL, Daniel Nelson ; CODA, H. B. **Formulação posicional do método dos elementos finitos para pórtico não linear geométrico 2D**. Cadernos de Engenharia de Estruturas (USP), v. 8, p. 137-140, 2006.

MACIEL, Daniel Nelson ; CODA, H. B. . **Positional Finite Element Methodology for geometrically non-linear analisys of of 2D Frames**. Revista Minerva, v. 5, p. 73-83, 2008.

MACIEL, D.N. (2008). **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. Tese de doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MAGGI, Y. I. (2004). **Análise do Comportamento Estrutural de Ligações parafusadas Viga-Pilar com Chapa de Topo Estendida**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 269.

MARQUES, G.C.S.C (2006). **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no MEF para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MELLO, W. L. (1999). **Análise de Pórticos Metálicos Planos com Conexões Semirrígidas Considerando a Não linearidade Física e Geométrica**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, p. 177.

MONFORTON, G. R., WU, T. S. (1963) **Matrix Analysis of Semi-rigid Connected Frames**. Journal of the Structural Division, v. 87, n. ST6, pp. 13-42.

MONTEIRO, R. C. (1997). **Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 193.

OLIVEIRA, T. J. L. (2003) **Análise de Pisos Mistos com Ligações Semirrígidas**. Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ, p. 106.

ORDOÑEZ, J.A.F. et alii, (1974). **Prefabricacion teoria y práctica**”. Barcelona, V.2.

PASCON, J. P. (2008). Modelos **constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PINHEIRO, L E SILVEIRA, R. A. M. (2005). **Computational Procedures for Nonlinear Analysis of Frames with Semi-rigid Connections**. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 2, pp. 339-367.

PFEIL, W. (1986). **Estruturas de aço**. Rio de Janeiro. LCT - Livro Técnico e Científico S.A. vol. 3.

PROENÇA, S.P.B. **Análise não-linear de estruturas** . Capítulo 6 (Teoria da Plasticidade) São Carlos, SP: 2007. (Notas de Aula).

QUEIROZ, G. (1992). **Estudo do Comportamento e Sistematização do Projeto de Ligações Rígidas Entre Perfis I com Almas Coplanares**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p.159.

QUEIROZ, G. (1995). **Análise Experimental e Análise Não linear de Nós Soldados Semirrígidos**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia da UFMG, p.285.

ROMANHOLO, G. A. (2001). **Análise das Ligações Semirrígida em Estruturas Planas**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, p. 160.

SANTOS, L. B. (1998). **Influência da Rrigidez das Ligações em Estruturas de Aço**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 1e 2.

SEKULOVIC, M., E SALATIC, R. (2001). **Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections**. Computers and Structures, v. 79(11), pp. 1097-1107.

SILVA, R.G.L. (2010). **Análise inelástica avançada de pórticos planos de aço considerando as influências do cisalhamento e de ligações semirrígidas**. Tese de doutorado, Escola de engenharia da UFMG.

SILVA, W.Q. (2010) **Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF**. Dissertação de Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SOUZA, M. L. (1999) **Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas em Teoria de 2ª Ordem**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 225.

TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N. (1951). **Theory of Elasticity**. Ed. McGraw-Hill, New York.

TÜRKER, T., KARTAL, M.E., BAYRAKTAR, A. E MUVAFIK, M. (2009). **Assessment of semi-rigid connections in steel structures by modal testing.** Volume 65, Issue 7, Pages 1538-1547- Journal of Constructional Steel Research

ZHOU, F. (2005). **Model-Based Simulation of Steel Frames with Endplate Connections.** Ph. D Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Cincinnati, p. 133.

WANG XIN-WU (2008). **Nonlinear Finite Element Analysis on the Steel Frame with Semi-rigid Connections.** 7th WSEAS Int. Conf. On Applied Computer & Computational Science, Hangzhou, China, April 6-8, 2008.

WILSON, W. M. E MOORE, H. F. (1917). **Tests to Determine the Rigidity of Riveted Joints in Steel Structures.** Bulletin n° 104, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urban, IL.