

Manoel Dênis Costa Ferreira

ANÁLISE INVERSA UTILIZANDO O MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO E CORRELAÇÃO DE IMAGENS
DIGITAIS

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Estruturas.

Orientadores:

Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini (*em memória*)

Prof. Tit. Sergio Persival Baroncini Proença

Versão Corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

SÃO CARLOS
Setembro de 2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Atendimentos ao Usuário do Serviço de
Biblioteca – EESC/USP.

F383a Ferreira, Manoel Dênis Costa
 Análise inversa utilizando o método dos elementos
 de contorno e correlação de imagens digitais. / Manoel
 Dênis Costa Ferreira; orientador Sergio Persival
 Baroncini Proença. São Carlos, 2012.

 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
 Engenharia de Estruturas -- Escola de Engenharia de São
 Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

 1. Análise inversa. 2. Método dos elementos de
 contorno. 3. Correlação de imagens digitais. 4. Fratura
 coesiva. 5. Métodos de regularização. 6. Algoritmo
 genético. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MANOEL DÊNIS COSTA FERREIRA.**

Título da tese: "Análise inversa utilizando o método dos elementos de contorno e correlação de imagens digitais".

Data da defesa: 13/07/2012

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença (Orientador)** APROVADO
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel** APROVADO
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **François Hild** APROVADO
(École Normale Supérieure de Cachan/LMT-Cachan - França)

Prof. Dr. **José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa** APROVADO
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Leandro Palermo Junior** APROVADO
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Profa. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Denis Vinicius Coury**

EXCERTE
Serviço de Pós-Graduação
13/07/2012

Dedico este trabalho ao professor
e amigo Wilson Sergio Venturini.

Agradecimentos

A Deus, meu Senhor e Guia.

Aos meus pais, José Cirilo Ferreira e Maria Costa Soares Ferreira, por todo ensinamento, incentivo e amor dedicado a mim em todos os momentos de minha vida.

As minhas irmãs Maraísa e Waleska, pela força, incentivo e toda felicidade que sinto quando estamos juntos.

A minha esposa amada, Marcela, por estar sempre ao meu lado.

Ao professor e amigo, Wilson Sergio Venturini, pela atenção, dedicação, ensinamentos e confiança depositada em minha pessoa até o final de sua jornada. A ele também sou grato por parte da minha formação como pesquisador.

Ao Professor Sergio Persival Baroncini Proença, pelo apoio durante a pesquisa e pela capacidade de me manter motivado. Agradeço a ele também pela amizade e pela confiança que depositou em mim ao aceitar me orientar.

Ao Professor François Hild, meu orientador na École Normale Supérieure de Cachan, agradeço pela grande colaboração no desenvolvimento desta pesquisa, pela orientação sempre segura e pela acolhida em meu estágio na França.

Aos professores Túlio Bittencourt e Edson Leonel, pelas contribuições dadas no exame de qualificação.

Ao amigo Luiz Álvaro, pela inestimável ajuda no laboratório. Aos numerosos amigos da EESC: Alessandro, Aref, Caio, David, Denise, Dorival, Eduardo, Ellen, Érica, Fábio, Fagá, Higor, Jefferson, Jesus Daniel, Jesus Sanches, Marcela Kataoka e Thiago, Rafael, Saulo, Wagner, pelos muitos momentos divertidos.

Aos grandes contribuintes para o desenvolvimento deste trabalho, Edson Leonel, Edmar, Paccola e Wesley pela troca de ideias e apoio.

A todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento do trabalho e a CNPq pelo apoio financeiro.

“Se alguém tem falta de sabedoria,
peça-a Deus, que a todos dá livremente,
de boa vontade, e lhe será concedida.”

Tiago 1:5

Resumo

FERREIRA, M. D. C. (2012). *Análise Inversa Utilizando o Método dos Elementos de Contorno e Correlação de Imagens Digitais*. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

A identificação de parâmetros físicos e geométricos utilizando medições experimentais é um procedimento comum no tratamento de muitos problemas da ciência e engenharia. Neste contexto, a análise inversa apresenta-se como uma importante ferramenta no tratamento desses problemas. Este trabalho apresenta formulações que acoplam o uso do método dos elementos de contorno (MEC) e a técnica de correlação de imagens digitais (CID) (para obtenção dos campos de deslocamentos) na resolução de alguns problemas inversos de interesse para engenharia de estruturas. Implementou-se um código computacional baseado no MEC, em técnicas de regularização e em algoritmo genético, para análise inversa em problemas de identificação das propriedades dos materiais, recuperação das condições de contorno e identificação de parâmetros do modelo coesivo de fraturamento. Exemplos com dados oriundos de uma prévia análise direta (simulando dados experimentais) são apresentados para demonstrar a eficiência das formulações propostas. Ensaio de vigas em flexão em três pontos com entalhe foram realizados com aquisição de imagens para obtenção dos campos de deslocamentos da região de propagação da fissura, via CID. Estes campos foram utilizados para alimentar o modelo inverso proposto. A técnica de CID originou dados em quantidade e precisão suficientes para os fins almejados neste trabalho. A utilização do MEC mostrou-se simples e de grande eficiência para a solução dos problemas inversos tratados.

Palavras-chave: Análise Inversa, Método dos Elementos de Contorno, Correlação de Imagens Digitais, Fratura Coesiva, Métodos de Regularização, Algoritmo Genético.

Abstract

FERREIRA, M. D. C. (2012). *Inverse Analysis Utilizing the Boundary Element Method and Digital Image Correlation*. Thesis (Ph.D. in Structural Engineering) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2012.

The identification of physical and geometrical parameters utilizing experimental measurements is a common procedure in treating many problems of science and engineering. In this context, the inverse analysis is an important tool in treating these problems. This work presents formulations that associate the use of boundary element method (BEM) and the technique of digital image correlation (DIC) (for obtaining the displacement fields) in solving some inverse problems of interest to Structure Engineering. A computer code based on the BEM, on regularization techniques and genetic algorithm has been implemented for the treatment of problems such as Identification of material properties, recovery of boundary conditions and identification of cohesive model parameters. Examples with data from a previous direct analysis (simulating experimental data) are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed formulations. Three point flexural tests with notch were performed and images were acquired to obtain the displacement fields on one lateral surface of the samples, via DIC. These displacement fields were used to feed the inverse model proposed. The DIC technique resulted in quantitative and accurate data for the purposes of this study. The use of the BEM proved to be simple and efficient in solving the inverse problems treated.

Key-words: Inverse Analysis, Boundary Element Method, Digital Image Correlation, Cohesive fracture, Regularization methods, Genetic Algorithm.

Lista de figuras

Figura 2-1 - Modos de fraturamento	32
Figura 2-2 - Zonas do processo de fraturamento	34
Figura 2-3 - Modelo coesivo de Dugdale (1960)	35
Figura 2-4 - Modelo de Barenblatt (1962)	36
Figura 2-5 - Modelo coesivo de Hillerborg et al. (1976).....	36
Figura 2-6 - Curva linear de amolecimento à tração	37
Figura 2-7 - Curva bi linear de amolecimento à tração.....	38
Figura 2-8 - Curva exponencial de amolecimento à tração	38
Figura 4-1 - Configuração típica de um sistema de aquisição para CID 2D.....	59
Figura 4-2 – Grade virtual sobre a imagem de referencia e o campo de deslocamento nos pontos da grade.....	60
Figura 4-3 - Esquema de um subconjunto de pixels.	62
Figura 5-1 - Processo de resolução de um problema direto.....	64
Figura 5-2 - Processo de resolução de um problema inverso.	65
Figura 5-3 - Classificação dos problemas inversos.	66
Figura 5-4 - Processo geral de resolução dos problemas inversos.....	67
Figura 5-5 - Problema inverso sob a ótica de um problema de otimização.....	75
Figura 5-6 - Fluxograma dos processos envolvidos em um AG.....	77
Figura 5-7 - Problema direto na elasticidade.....	78
Figura 5-8 - Problema inverso de estimativa das propriedades mecânicas do material.	79
Figura 5-9 - Problema inverso de valor de contorno.	81
Figura 5-10 - Problema direto considerando interface coesiva entre os subdomínios.	84
Figura 5-11 - Problema inverso de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo. .	85
Figura 6-1 - Esquema geral do programa desenvolvido.....	88
Figura 6-2 - Fluxograma de funcionamento do módulo de análise direta.....	90
Figura 6-3 - Fluxograma de funcionamento do módulo de análise inversa.....	92
Figura 6-4 - Tela Principal do Qt Designer.	94
Figura 6-5 - Tela principal da interface desenvolvida.	95

Figura 6-6 - Abas da interface desenvolvida.....	96
Figura 6-7 - Problema discretizado na interface desenvolvida.	96
Figura 6-8 - Resultados da correlação de imagens.	97
Figura 6-9 - Gráfico de dispersão.	97
Figura 6-10 - Dados do problema para análise direta fratura coesiva.	98
Figura 6-11 - Curvas de amolecimento dos modelos coesivos utilizados na simulação.....	99
Figura 6-12 - Comparação dos resultados da simulação.....	99
Figura 6-13 - Função a ser minimizada e maximizada.	100
Figura 6-14 - Parâmetros utilizados no módulo de AG.....	101
Figura 6-15 - Função a ser minimizada e maximizada.	102
Figura 6-16 - Parâmetros do AG maximização da função de duas variáveis.	102
Figura 6-17 - Dados do problema.	103
Figura 6-18 - Discretização do problema.	104
Figura 6-19 - Configurações de distribuição dos pontos internos.....	105
Figura 6-20 - Parâmetros do AG utilizados no problema.....	106
Figura 6-21 - Região de interesse.	107
Figura 6-22 - Instantes dos campos de deslocamentos apresentados na Figura 6-23.	107
Figura 6-23 - Campos de deslocamento X e Y nos níveis (1 a 10).....	110
Figura 6-24 - Malha da análise inversa.....	110
Figura 6-25 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Linear).....	111
Figura 6-26 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Linear).	111
Figura 6-27 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Linear).	111
Figura 6-28 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Bi-linear).	112
Figura 6-29 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Bi-linear).	112
Figura 6-30 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Bi-linear).	112
Figura 6-31 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Exponencial).	113
Figura 6-32 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Exponencial).	113
Figura 6-33 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Exponencial).	113
Figura 7-1 - Ensaio de compressão axial para determinação da resistência à compressão.	116
Figura 7-2 - Ensaio de compressão axial para determinação do módulo de elasticidade.....	117

Figura 7-3 - Curvas tensão <i>versus</i> deformação.....	118
Figura 7-4 - Ensaio de compressão diametral.....	119
Figura 7-5 - Ensaio de flexão em três pontos.....	120
Figura 7-6 - Detalhe da instalação do clip gauge.	121
Figura 7-7 - Esquema geral para o ensaio de flexão em três pontos com aquisição de imagens.....	121
Figura 7-8 - Detalhe da área de obtenção das imagens.	122
Figura 7-9 - Curvas força <i>versus</i> abertura do clip-gauge.....	122
Figura 7-10 – Gráfico para obtenção de trabalho realizado pela força externa, baseado nas proposições da RILEM 50-FMC.....	123
Figura 7-11 - Quantificação da energia de fratura segundo o RILEM 50-FMC.	124
Figura 7-12 – Histograma da textura do corpo-de-prova CP01.....	125
Figura 7-13 - Critério de flutuação do corpo-de-prova CP01.....	126
Figura 7-14 - Critério do raio de correlação do corpo-de-prova CP01.....	127
Figura 7-15 - Média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos estimados do corpo-de-prova CP01.....	128
Figura 7-16 - Média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos em função do tamanho do elemento do corpo-de-prova CP01.....	128
Figura 7-17 - Curvas força <i>versus</i> abertura do clip-gauge.....	129
Figura 7-18 - Comparação entre as aberturas obtidas pelo clip-gauge e o pela CID.	129
Figura 7-19 - Curva força <i>versus</i> abertura do clip-gauge do corpo de prova CP01, indicando os instantes dos campos de deslocamentos da Figura 7-20.	130
Figura 7-20 - Campos de deslocamentos obtidos pela correlação de imagens.	133
Figura 7-21 - Propagação da fissura.	133
Figura 8-1 - Malha para estimativa do módulo de elasticidade.	135
Figura 8-2 - Evolução da função objetivo para estimativa do módulo de elasticidade ao longo de 35 gerações (CP01).....	136
Figura 8-3 - Detalhe da região de interesse.	137
Figura 8-4 - Ilustração dos pontos de leitura dos deslocamentos pela CID.	137
Figura 8-5 - Posição das imagens selecionadas para realização da análise inversa no gráfico força x abertura do clip.	138
Figura 8-6 - Campos de deslocamentos obtidos pela correlação de imagens.	140
Figura 8-7 - Vértices para geração da malha de elementos de contorno (CP01)....	141

Figura 8-8 – Abertura nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01).	142
Figura 8-9 – Tensão normal nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01). ...	142
Figura 8-10 – Tensão normal versus Abertura nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01).	143
Figura 8-11 – Tensão normal versus Abertura em nós selecionados da interface (07 a 16).	146
Figura 8-12 – Malha utilizada na análise direta.	147
Figura 8-12 - Modelos coesivos utilizados na análise direta.	147
Figura 8-13 - Análise direta com os valores estimados (Máximos).	147
Figura 8-14 - Análise direta com os valores estimados (Médios).	148
Figura 8-15 - Análise direta com os valores estimados (Selecionados A).	148
Figura 8-15 - Análise direta com os valores estimados (Selecionados B).	148
Figura A-1 - Estado de tensão em um ponto	164
Figura A-2 - Elemento infinitesimal equilibrado.....	166
Figura A-3 - Projeções das faces do elemento infinitesimal no plano xy	166
Figura B-1 - Distribuição Delta de Dirac.....	169

Lista de tabelas

Tabela 3-1 - Resumo histórico com os principais pesquisadores e matemáticos.	41
Tabela 6-1 - Tabela com os resultados do exemplo.....	101
Tabela 6-2 - Tabela com os resultados do exemplo.....	103
Tabela 6-3 - Configuração da distribuição dos pontos internos.....	104
Tabela 6-4 - Resultados da análise inversa para configuração A.	106
Tabela 6-5 - Resultados da análise inversa para configuração B.	106
Tabela 6-6 - Resultados da análise inversa para configuração C.	106
Tabela 6-7 - Resultados da análise inversa (LINEAR).	114
Tabela 6-8 - Resultados da análise inversa (BI-LINEAR).	114
Tabela 6-9 - Resultados da análise inversa (EXPONENCIAL).....	114
Tabela 7-1 - Resistência à compressão.	116
Tabela 7-2 - Módulo de elasticidade.	118
Tabela 7-3 - Resistência à tração por compressão diametral.	119
Tabela 7-4 - Energia de faturamento por flexão em três pontos.	124
Tabela 7-5 - Valores base de energia de faturamento (CEB-FIP (1990)).	125
Tabela 8-1 - Valores de E estimados pela análise inversa.....	136
Tabela 8-2 - Valores dos parâmetros do modelo coesivo estimados pela análise inversa.....	144
Tabela 8-3 - Média da tensão normal nas imagens 7 a 11.	145
Tabela 8-4 - Média da abertura crítica nas imagens 12 a 16.	145
Tabela 8-5 – Valores dos parâmetros do modelo coesivo estimados para o conjunto de vigas.....	146

Sumário

1	Introdução	23
1.1	Breve Revisão.....	24
1.2	Objetivos.....	27
1.3	Justificativa	28
1.4	Organização do trabalho.....	29
2	Modelo coesivo	31
2.1	Modos de fraturamento e o fator de intensidade de tensão.....	32
2.2	Processo de fraturamento em materiais quase-frágeis.....	33
2.3	Modelo coesivo	34
2.3.1	Hipóteses clássicas do modelo.....	34
2.3.2	Evolução dos modelos coesivos.....	35
3	Formulação MEC para análise direta.....	39
3.1	Considerações iniciais	40
3.1.1	Resumo histórico	40
3.2	Solução Fundamental	41
3.2.1	Definição.....	42
3.2.2	Caso Bidimensional	42
3.3	Equações Integrais	44
3.3.1	Equacionamento.....	44
3.4	Formulação dos elementos de contorno.....	48
3.4.1	Discretização	49
3.4.2	Sistema de equações	50
3.5	Integração.....	52
3.5.1	Processos de integração	53
3.6	Sub-regiões.....	54
3.6.1	Equacionamento.....	54
4	Tópicos da correlação de imagens digitais	57
4.1	Princípios da correlação de imagens digitais.....	58
4.1.1	Visão geral.....	58
4.1.2	Formulação.....	59
5	Análise inversa.....	63

5.1	Considerações iniciais.....	63
5.1.1	Definição	64
5.1.2	Classificação dos problemas inversos	65
5.1.3	Esquema geral da resolução de um problema inverso	66
5.1.4	Problema mal-posto	68
5.2	Métodos de resolução de problemas inversos	69
5.2.1	Inversão direta	70
5.2.2	Mínimos quadrados.....	71
5.2.3	Decomposição em valor singular	72
5.2.4	Regularização de Tikhonov.....	73
5.2.5	Algoritmo genético	74
5.3	Problemas inversos na elasticidade	77
5.3.1	Estimativa das propriedades elásticas	78
5.3.2	Problema inverso de valor de contorno.....	80
5.3.3	Estimativa de parâmetros do modelo coesivo.....	83
6	Ferramenta computacional desenvolvida	87
6.1	Estrutura do programa	87
6.1.1	Análise direta	88
6.1.2	Análise inversa.....	91
6.2	Interface gráfica.....	93
6.2.1	Plataforma de desenvolvimento	93
6.2.2	Ferramenta visual desenvolvida.....	94
6.3	Exemplos de aplicação	97
6.3.1	Análise direta de um problema de fratura coesiva	98
6.3.2	Minimização e maximização de funções com algoritmo genético	99
6.3.3	Estimativa das propriedades mecânicas em uma peça tracionada	103
6.3.4	Análise inversa de estimativa de parâmetros do modelo coesivo	106
7	Programa experimental	115
7.1	Ensaio de caracterização do concreto.....	115
7.1.1	Ensaio de Resistência à Compressão	116
7.1.2	Ensaio de Módulo de Elasticidade	117
7.1.3	Ensaio de Resistência à Tração por Compressão Diametral.....	118

7.1.4	Ensaio de flexão sob três pontos de carga	119
7.2	Resultados da correlação de imagens	125
8	Análise inversa com dados experimentais	135
8.1	Propriedades elásticas	135
8.2	Modelo coesivo (método determinístico)	137
8.3	Análise direta com os parâmetros estimados	146
9	Conclusão	151
9.1	Objetivos alcançados e conclusões	151
9.2	Propostas de trabalhos	152
A	Tópicos da teoria da elasticidade	163
	Estado de tensão em um ponto	164
	Campo de deslocamento	165
	Equações diferenciais do equilíbrio	165
	Relações deformação-deslocamento	166
	Equações Constitutivas	167
	Condições de contorno	168
B	Delta de Dirac	169
C	Delta de Kronecker	171

CAPÍTULO 1

Introdução

Os problemas inversos constituem uma classe importante e frequente de problemas na ciência e engenharia. De forma simples, eles podem ser descritos como aqueles problemas onde as respostas são conhecidas, mas não as perguntas. Ou ainda onde os resultados ou consequências são conhecidos, mas não as causas. Atualmente, as técnicas para a resolução de tais problemas vêm ganhando destaque no cenário científico, apresentando-se como importantes ferramentas de análise em muitos campos da engenharia. A necessidade da identificação de parâmetros físicos e geométricos usando dados obtidos experimentalmente é a motivação principal para aplicação destas técnicas em problemas da engenharia. A identificação precisa destes parâmetros é extremamente importante na realização de uma análise direta para avaliar com exatidão as cargas limites e, conseqüentemente, a margem de segurança de um projeto. Além disso, o desenvolvimento de ferramentas mais eficientes e precisas para aquisição de dados experimentais, tais como: métodos não destrutivos de inspeção, técnicas de correlação com imagens digitais, tomografia computadorizada, ultrassom, etc., tem alavancado o interesse para o estudo e desenvolvimento neste campo do conhecimento.

A formulação de um problema inverso normalmente não satisfaz aos critérios de estabilidade, ou seja, pequenas perturbações nos dados de entrada podem ser amplificadas gerando soluções com grandes distorções em relação às respostas corretas. Além disto, na análise inversa, um dos principais problemas está na quantidade e qualidade dos dados obtidos experimentalmente, que muitas vezes não são suficientes para garantir que o sistema de equações gerado apresente uma solução única, caracterizando este tipo de análise como um problema essencialmente mal posto. Portanto, para obter uma solução estável de um problema inverso é essencial utilizar de um lado ferramentas eficientes para a aquisição de dados experimentais e, de outro lado, técnicas adequadas de minimização e regularização para amenizar as consequências negativas inerentes a este tipo de problema.

Na mecânica dos sólidos, a análise inversa é principalmente aplicada para identificar os seguintes parâmetros de interesse: geometria, propriedades dos materiais, condições de contorno, estado de degradação dos materiais, formação e parâmetros de fraturamento, etc.. Os procedimentos de identificação paramétrica consistem, principalmente, na combinação de métodos numéricos juntamente com técnicas de medições de campos de deslocamentos e deformações. As medições destes campos são geralmente realizadas pela auscultação do movimento e deformação das superfícies externas do corpo, recorrendo-se, por exemplo, à técnica de correlação de imagens digitais (CID).

A relevância dos problemas inversos para engenharia somada, a elaboração de uma investigação que alia simulação numérica com ensaios no laboratório e a colaboração com Laboratório de Mecânica e Tecnologia (LMT-Cachan-França) motivaram o trabalho apresentado neste documento. O objetivo principal consiste em combinar os campos de deslocamentos medidos pela CID e simulações com o método dos elementos de contorno (MEC) para extrair os parâmetros de uma lei coesiva para descrever o comportamento de fraturas em materiais quase frágeis.

1.1 Breve Revisão

Nesta seção serão citados alguns trabalhos que apresentam contribuições relevantes para o desenvolvimento da análise inversa seja num âmbito geral e em particular na mecânica dos sólidos, com destaque para a aplicação do método dos elementos de contorno. Neste item, apenas trabalhos sobre análise inversa serão citados, mas ao longo dos capítulos deste texto, para cada tópico abordado, serão apresentados os trabalhos que foram tomados como base para a composição de conceitos relacionados ao tema correspondente.

Provavelmente um dos mais antigos registros da história sobre um problema inverso foi proposto pelo rei Hieron para Arquimedes, matemático grego nascido em 287 AC. O rei encarregou Arquimedes verificar se sua coroa era feita inteiramente de ouro. Arquimedes resolveu o problema, observando que um corpo parcial ou totalmente submerso em um fluido é submetido a uma força de empuxo de magnitude igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo Resnick et al. (1992). Arquimedes foi, portanto, quem desenvolveu um procedimento experimental,

chamado hoje em dia de ensaio não destrutivo, para cumprir o pedido do rei de Siracusa (Silva Neto 2005). Outro problema inverso histórico foi proposto por Sir. A. Shuster, em 1882, o objetivo era determinar a forma de um sino pelos sons que ele é capaz de emitir. Este problema foi reformulado em 1966 por Marc Kac, enunciando o que hoje é considerado o problema inverso mais famoso para a comunidade matemática: “Você é capaz de determinar a forma de um tambor, pelo som por ele emitido?”. Esse problema persistiu por muito tempo, e recentemente Gordon et al. (1992) demonstraram que dois tambores diferentes podem emitir o mesmo som (Silva Neto & Moura Neto 2005). Este fato é uma característica marcante dos problemas inversos, ou seja, eles muitas vezes apresentam mais de uma solução, suscitando a necessidade do desenvolvimento de ferramentas matemáticas, que permitam a escolha da solução mais adequada para um problema específico (Carita Monteiro et al. 2004).

Nas últimas décadas, a análise inversa vem sendo aplicada em problemas cada vez mais complexos nos mais diversos campos, tais como: geofísica (Oldenburg 1990, Habashy & Abubakar 2004, Abubakar et al 2009), sismologia (Keys & Foster 1998, Symes 2009), processamento de imagem (Tikhonov 1987, Louis 2008, Kohr & Louis 2011), problemas térmicos (Beck et al 1985, Hensel 1991, Hohage 2007), engenharia biomédica (Pilkington 1982, Rudy e Oster 1992). No campo da mecânica dos sólidos vários problemas inversos de interesse para a engenharia estrutural podem ser formulados, entre eles destacam-se:

- **Problema inverso de condições de contorno:** o objetivo neste tipo de problema é a reconstrução dos valores de contorno ou iniciais desconhecidos. Nesta classe de problemas podem ser destacados alguns trabalhos: Schnur & Zabaras (1990) que analisam o problema inverso do cálculo das forças de superfície a partir das medidas dos deslocamentos internos com pequenos erros randômicos aplicando o método dos elementos finitos. Bezerra & Saigal (1994) que apresentaram uma formulação para reconstrução de forças de superfície no contorno de domínios bidimensionais utilizando o método dos elementos de contorno. Marin & Lesnic (2003), Marin (2004) e Ferreira & Venturini (2010) que aplicam o método dos elementos de contorno (MEC) combinado com a técnica de mínimos quadrados com restrições e outras técnicas de regularização, apresentadas por Tikhonov & Arsenin (1977), na identificação de valores de contorno e dos parâmetros elásticos do material em problemas planos.

- **Estimativa de parâmetros do material:** o objetivo nesta classe de problema é determinar as propriedades dos materiais que compõem o meio. Neste contexto estão as obras: Bolzon et al. (2004) onde os autores estimaram os parâmetros dos materiais contidos em modelos elástico-plásticos usando o MEF combinado a um método determinístico de primeira ordem; Abe et al. (2004) empregaram algoritmos genéticos combinados com redes neurais para identificar os coeficientes de amortecimento e o módulo de elasticidade transversal de certos componentes estruturais de um trilho de trem; Venturini & Almeida (2004) trabalharam na identificação de parâmetros dos materiais e na localização das regiões com perda significativa de rigidez por danos usando MEC combinado a uma técnica iterativa dos mínimos quadrados; Sousa & Gettu (2006) utilizaram uma formulação analítica para obter os parâmetros do modelo coesivo, otimizando estes parâmetros, para que a curva força versus abertura da fissura obtida com esta formulação apresentasse a melhor correlação com a curva obtidas experimentalmente em ensaios de vigas com entalhe; e Ferreira et al. (2011) utilizaram uma formulação MEC acoplado a técnicas de minimização e regularização para obtenção de parâmetros do modelo coesivo utilizando dados de campos de deslocamento experimentais de vigas em flexão em três pontos com entalhe via técnicas de correlação de imagens.

- **Problema inverso de identificação de defeitos:** neste tipo de problema busca-se identificar regiões de fratura, cavidades e inclusões em peças estruturais. Nesta linha de trabalho Bezerra & Saigal (1991) apresentaram uma formulação para determinação de falhas em problema elastostáticos; Kassab et al. (1993 e 1994), Mellings & Aliabadi (1994) e Kobayashi (1994) utilizaram procedimentos de minimização de primeira e segunda ordem na determinação de regiões de fratura em problemas elastodinâmicos; Bonnet (1995) emprega os métodos clássicos de minimização baseados em gradientes combinado com o MEC para a busca de cavidade e obstáculos em um meio elástico. Antes & Stavroulakis (1997) identificam a posição geométrica, e a forma de uma fissura unilateral considerando o problema de contato na fissura para o caso 2D, empregando redes neurais artificiais para a resolução do problema. Koguchi & Watabe (1997) estimam defeitos existentes em placas utilizando algoritmos genéticos em conjunto com o MEC. Tanaka (1999) e Antes & Stavroulakis (2000) identificam a posição geométrica, e a forma de uma fissura unilateral empregando filtros de Kalman juntamente com o método dos elementos de contorno. Rus & Gallego (2002) comparam as diferentes técnicas de

minimização irrestritas baseadas em algoritmos de otimização para a identificação de regiões com defeitos no domínio. Shifrin & Shushpannikov (2010) apresentaram uma formulação para identificação de uma inclusão ou cavidade esferoidal em um sólido elástico.

- **Estimativa de tensões residuais:** consiste na determinação das tensões residuais surgidas nos processos de fabricação e utilização das peças estruturais. Para este tipo de problema Xiuqing et al. (2004) apresentam um estudo onde o campo de tensões residuais é aproximado por uma série de funções bases de suavização e as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno. Eles utilizaram dados experimentais de tensões residuais e, via mínimos quadrados, obtiveram das equações de tensões de contorno os valores dos coeficientes que determinam as deformações residuais.

1.2 Objetivos

Este texto descreve o emprego do método dos elementos de contorno via solução fundamental de Kelvin para análise inversa em problemas elásticos bidimensionais. Combinam-se técnicas de busca, otimização, minimização e regularização aliadas a campos de deslocamentos obtidos experimentalmente por correlação de imagens digitais. Assim sendo, os principais objetivos a serem alcançados com o presente trabalho são:

- A) Apresentar a base teórica e uma formulação para o tratamento de problemas inversos encontrados na elasticidade plana, utilizando o método dos elementos de contorno combinado a técnicas de busca, otimização, minimização e regularização, além de dados de campos de deslocamentos obtidos experimentalmente por correlação de imagens digitais.
- B) Desenvolver uma ferramenta computacional com a formulação proposta em (A) capaz de resolver alguns problemas inversos de interesse para a engenharia de estruturas (estimativa de propriedades dos materiais, problema inverso de valor de contorno e de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo de fraturamento).
- C) Realizar ensaios para obtenção dos campos de deslocamentos via correlação de imagens digitais, utilizados como dados de entrada para resolução dos problemas inversos implementados na ferramenta computacional, apontando

as potencialidades e eventuais limitações que esta técnica de ensaio possa apresentar.

- D) Apresentar exemplos de aplicação da ferramenta computacional desenvolvida com a utilização dos dados experimentais obtidos, mostrando suas funcionalidades, potencialidades e eventuais limitações no tratamento dos problemas inversos propostos.
- E) Analisar os resultados obtidos e com o conhecimento acumulado sobre o tema no decorrer deste trabalho, apresentar propostas para trabalhos futuros visando o desenvolvimento desta área de estudo nesta instituição.

1.3 Justificativa

Ferramentas computacionais baseadas em métodos numéricos como: diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno, vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos e hoje se apresentam com maturidade suficiente para resolver uma série de problemas da engenharia, chamados diretos, com um grau de confiabilidade muito grande nos resultados obtidos. Contudo, para que os resultados obtidos por estas ferramentas descrevam de maneira satisfatória a estrutura em análise é necessário conhecer os parâmetros geométricos e físicos que descrevem o comportamento do sistema em análise (estrutura). Justamente em relação aos parâmetros em muitos casos realizam-se análises para a sua identificação.

Assim, tem crescido o interesse dos pesquisadores e engenheiros no estudo e utilização de métodos numéricos para identificação paramétrica mediante análise inversa. Os problemas inversos, portanto, motivam a elaboração deste trabalho. A avaliação do comportamento do método dos elementos de contorno no tratamento de tais problemas e o incremento dos estudos desta área no departamento de estrutura da EESC-USP justificam a proposta do trabalho. Além disto, o intercâmbio de conhecimento com o Laboratório de Mecânica e Tecnologia (LMT-Cachan-França) centro de excelência no desenvolvimento das técnicas de correlação de imagens digitais, é um ponto a ser destacado nesta justificativa.

1.4 Organização do trabalho

Neste item, mostra-se a forma em que estão distribuídos, ao longo dos capítulos deste texto, os temas relacionados à base teórica do desenvolvimento e implementação da formulação proposta e a análise dos resultados obtidos.

Este texto está dividido em oito capítulos sendo que desse total, quatro abordam conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho, um relata as características da ferramenta computacional desenvolvida, outro demonstra alguns exemplos de aplicação e os outros dois apresentam as considerações iniciais e finais a cerca deste trabalho.

- **Capítulo 1- Introdução:** Neste capítulo são apresentadas as considerações iniciais a respeito dos problemas inversos, uma revisão bibliográfica dos trabalhos relevantes sobre a análise inversa, os objetivos que devem ser alcançados com este trabalho, a justificativa com a motivação para a abordagem do tema, a metodologia empregada e a organização deste texto.

- **Capítulo 2- Modelo coesivo:** Um resumo da evolução histórica do modelo coesivo de fraturamento e os conceitos, que se mostrem importantes para o entendimento do comportamento de problemas desta natureza, são apresentados neste capítulo.

- **Capítulo 3- Formulação MEC para análise direta:** O equacionamento da formulação do método dos elementos de contorno para o problema elástico bidimensional direto através da solução fundamental de Kelvin está descrito neste capítulo. Destaca-se a abordagem do problema de fratura coesiva mediante uma abordagem singular, utilizando a interface entre sub-regiões como região de propagação da fissura.

- **Capítulo 4- Tópicos da correlação de imagens digitais:** Neste capítulo são apresentados os conceitos utilizados na correlação de imagens digitais para obtenção dos campos cinemáticos de deslocamento e deformação. Além disto, descreve-se o programa CORRELLI Q4 utilizado neste trabalho para a obtenção dos campos de deslocamentos usados como dados de entradas para os problemas inversos aqui tratados.

- **Capítulo 5- Análise inversa:** Todos os conceitos relevantes para o tratamento e entendimento do que venha a ser um problema inverso estão

presentes neste capítulo. As formulações e metodologias propostas para a resolução dos problemas inversos de interesse para esta tese estão aqui descritas.

- **Capítulo 6- Ferramenta computacional desenvolvida:** As características da ferramenta computacional desenvolvida, com a descrição das classes e suas funcionalidades, são aqui apresentadas. Também se encontra neste capítulo a descrição das ferramentas utilizadas na implementação e na análise dos resultados.

- **Capítulo 7- Programa experimental:** Descreve-se aqui o programa experimental realizado com vigas de concreto em flexão por três pontos com entalhe. Destaca-se a captação de imagens digitais para a obtenção de campos de deslocamento via correlação de imagens e posterior obtenção, via análise inversa, dos parâmetros do modelo coesivo de fraturamento.

- **Capítulo 8- Análise inversa com dados experimentais:** Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com as formulações e ensaios realizados, bem com uma análise crítica destes resultados.

- **Capítulo 9- Conclusão:** Este capítulo traz as conclusões obtidas e sugestões de possíveis desenvolvimentos para trabalhos futuros.

Nos anexos desta tese são apresentados alguns temas que foram tratados nesta pesquisa, mas que não constituem o foco principal do trabalho ou que fazem parte de uma bibliografia já bem estabelecida.

CAPÍTULO 2 Modelo coesivo

A mecânica da fratura é um dos ramos da mecânica que nasceu em função das limitações na aplicação dos conceitos da mecânica dos sólidos na previsão do comportamento mecânico dos materiais em presença de descontinuidades internas e superficiais. Este é o campo responsável pelo estudo dos processos mecânicos que induzem à propagação de fendas, fissuras e outras falhas, os quais diminuem a resistência do material, provocando o surgimento de fraturas. A mecânica da fratura elástico-linear, introduzida no século XX, se desenvolveu para solucionar uma série de problemas que vinham sendo observados desde o advento da revolução industrial, principalmente a partir do aumento da utilização de materiais metálicos em aplicações com função estrutural e, posteriormente, nas grandes guerras mundiais do século XX. Neste período uma série de estruturas projetadas apresentaram falhas mesmo quando submetidas a níveis de solicitação muito inferior ao previsto.

Por um lado, a mecânica da fratura linear elástica (MFLE) tornou-se uma importante ferramenta para a previsão das condições de propagação instável de fissuras. Essas condições prevalecem em materiais cuja zona de comportamento não-linear à frente da ponta da fissura é desprezível. Por outro lado, nos casos onde a zona de processos inelásticos à frente da extremidade da fissura não pode ser desprezada, que é o caso de materiais dúcteis e quase-frágeis, há a necessidade de realizar modificações na teoria original, dando origem à mecânica da fratura não-linear. Um exemplo de modelagem que se insere no âmbito da fratura não-linear é o da fissura coesiva, muito utilizada para análise de problemas em materiais quase-frágeis como o concreto.

Neste capítulo será apresentado um pequeno resumo com os tópicos principais desta teoria dando ênfase ao modelo coesivo, que será utilizado na formulação de alguns problemas inversos de interesse para este trabalho. Para a elaboração do presente capítulo foram utilizadas as referências a seguir, as quais deverão ser consultadas para maiores detalhes dos temas aqui abordados: Ewalds & Wanhill (1984), Broek (1982), Gdoutos (1990, 1993), Venturini (1994), Bittencourt (1999),

Shah et al. (1995), Saleh & Aliabadi (1995), Mi (1996), Maciel (2003), Vicentini (2006), Leonel (2006 e 2009), Kzam (2009), e outras convenientemente mencionadas no transcorrer do texto.

2.1 Modos de fraturamento e o fator de intensidade de tensão

Na mecânica da fratura existem três modos básicos relacionados à forma de ruptura e permite estudar os fatores de intensidade de tensões na ponta da fissura e seus mecanismos de propagação. Esses modos são definidos com respeito à separação geométrica das superfícies da fissura e são conhecidos como: Modo I ou modo de abertura, caracterizado pela fissura que se propaga no plano que a contém, por abertura normal à face da fissura, sem qualquer variação angular; Modo II ou modo cisalhante, ou seja, a fissura se propaga no plano, ocasionada pelo escorregamento entre as faces na direção do comprimento da fissura; e, Modo III ou modo de rasgamento, em que a fissura pode se propagar no espaço por cisalhamento fora do plano na direção normal ao comprimento da fissura (Figura 2-1).

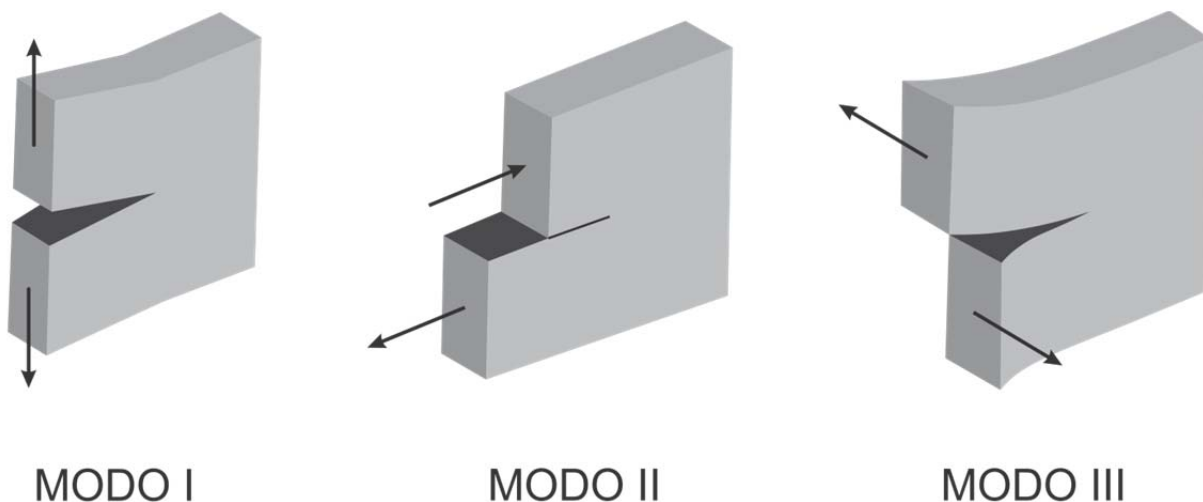


Figura 2-1 - Modos de fraturamento

Um dos princípios básicos da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) é que o campo de tensões à frente da ponta da fissura em um elemento estrutural pode ser caracterizado em termos do fator de intensidade de tensão (K), o que dá origem a uma área denominada de região de domínio de K . O fator de intensidade

de tensão é função do carregamento externo, das dimensões do corpo fissurado, da extensão da fissura e da vinculação.

No interior da região de domínio de K, encontra-se a zona de processos inelásticos (ZPI). Um dos fatores que sinaliza o tipo de modelagem que deve ser empregada em um problema de faturamento é a extensão da ZPI comparativamente às dimensões significativas do sólido fissurado em análise, bem como à extensão da própria fissura. Assim, quando a área plastificada em frente à ponta da fissura (zona de processos inelásticos) é muito pequena, quando comparada com as outras dimensões do sólido, pode-se desprezá-la. Neste caso o emprego da MFEL resulta em satisfatória previsão do campo de tensão da estrutura em análise. Porém, esta teoria não apresenta bom comportamento quando da sua aplicação em problemas com materiais que apresentam uma zona de processos inelásticos de grandes dimensões à frente da fissura, o que torna essa área representativa no cálculo das tensões. Isso é, provavelmente, uma das razões para não ser recomendável o MFEL no tratamento de problemas de faturamento do concreto, pois o concreto apresenta um comportamento quase-frágil não linear.

2.2 Processo de fraturamento em materiais quase-frágeis

Quando uma estrutura de concreto, por exemplo, uma viga (com ou sem fissura inicial), é submetida a um carregamento externo, pode-se considerar que, até certo nível do carregamento, o material apresenta um comportamento linear. À medida que este carregamento aumenta, a tensão máxima é alcançada em pontos das seções transversais mais solicitadas. No entanto, devido à microestrutura heterogênea do concreto, desenvolvem-se zonas de plastificação e fraturamento, em função do aparecimento de microfissuras, que se concentram em pequenos volumes adjacentes aos pontos mais solicitados, e que se caracterizam por alguma capacidade de transmissão de esforços. Na zona de fraturamento ocorre a coalescência das microfissuras numa macrofissura e a capacidade de transmissão tende a desaparecer com a gradual abertura da fissura, caracterizando um processo de amolecimento. Esta zona de faturamento tende a ter um tamanho máximo característico para cada material (BITTENCOURT, 1999). Em resumo, de acordo com o estado de tensão e deformação, é possível definir três diferentes zonas no

concreto solicitado, chamadas de zona elástica linear, zona plástica e zona de fratura (Figura 2-2).

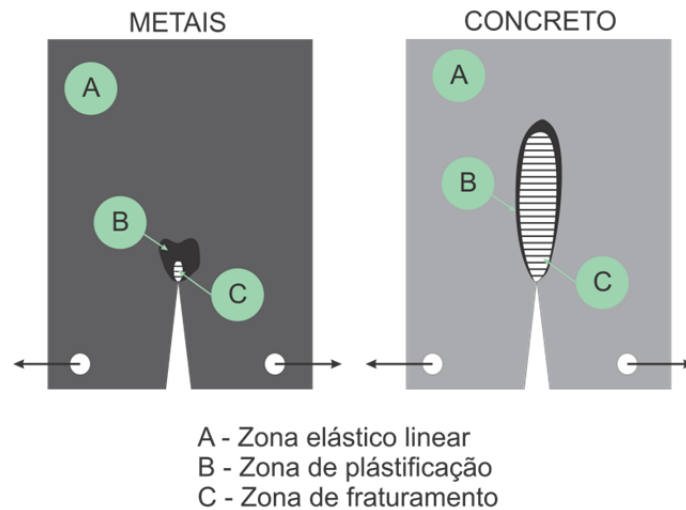


Figura 2-2 - Zonas do processo de fraturamento

2.3 Modelo coesivo

Apesar de eficaz no tratamento de fraturas em materiais frágeis, a MFLE necessita de modificações quando se deseja simular o processo de fraturamento em materiais cuja dimensão da zona de processos inelásticos a frente da fissura apresenta dimensões significativas e a resistência coesiva das partículas nessa zona é bem maior se comparada a dos materiais frágeis, como é o caso dos materiais quase-frágeis. As primeiras referências para a modelagem de tais problemas, denominado modelo coesivo, foram feitas por Dugdale (1960) para materiais de comportamento elastoplástico e Barenblatt (1962). O modelo coesivo será o utilizado neste trabalho para a simulação de alguns problemas inversos nesta área da mecânica da fratura.

2.3.1 Hipóteses clássicas do modelo

O modelo da fissura fictícia ou modelo coesivo está pautado nas seguintes hipóteses gerais:

- A zona de fratura começa a se desenvolver em um ponto quando a máxima tensão principal alcança a resistência característica à tração do material (f_{tc});
- A zona de fratura se desenvolve perpendicularmente à máxima tensão principal;
- Na zona de fratura, o material é parcialmente danificado, mas ainda é capaz de transmitir tensão. A intensidade de tensão transmitida depende da abertura;
- Considera-se que o material externo à zona da fratura apresenta comportamento elástico-linear.

2.3.2 Evolução dos modelos coesivos

O primeiro a propor um modelo pautado em hipóteses próximas às citadas anteriormente foi Dugdale (1960). Neste modelo a fissura real é substituída por uma fissura chamada de ativa ou efetiva com comprimento maior que o da fissura real, este aumento se deve a consideração de uma zona de processo inelástico. Esta zona está sujeita as tensões coesivas constantes que tendem fechar as extremidades da fissura (Figura 2-3). O aumento do comprimento da fissura real para a efetiva é tal que o fator de intensidade de tensão resulte nulo na extremidade da fissura ativa.

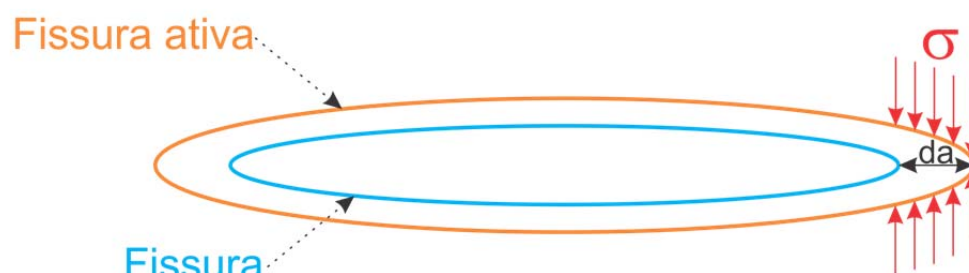


Figura 2-3 - Modelo coesivo de Dugdale (1960)

Outra proposta foi feita por Barenblatt (1962). Nesse modelo também as tensões coesivas atuam em uma pequena região de dimensão, c , no sentido a tender fechar suavemente as faces da fissura (Figura 2-4). Quando a abertura da fissura atinge um valor considerado crítico δ_c as tensões coesivas cessam e há a propagação da fissura.

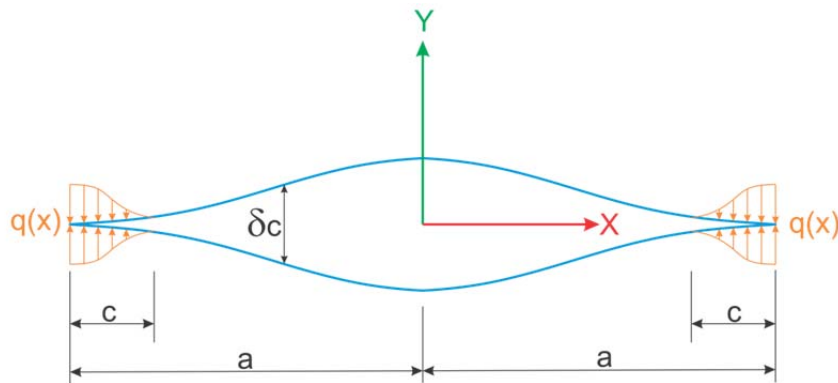


Figura 2-4 - Modelo de Barenblatt (1962)

Do modelo de Barenblatt surgiram vários outros como, por exemplo, Modeer (1979), Petersson (1981) e Gustafsson (1985). Estes modelos tinham como diferença básica a determinação da dimensão da zona coesiva e a forma da distribuição das tensões coesivas.

No modelo proposto por Hillerborg et al. (1976) na zona de processos inelásticos inclui-se uma fissura fictícia onde atuam tensões de fechamento que impedem a separação total das faces. A zona de fissura fictícia tem início no ponto em que a fissura atinge uma abertura crítica Δu_c , onde a tensão coesiva é zero. Esta tensão aumenta ao longo da fissura fictícia até o seu valor máximo igual à resistência à tração do material, a partir do qual passa a valer uma lei de amolecimento (Figura 2-5).

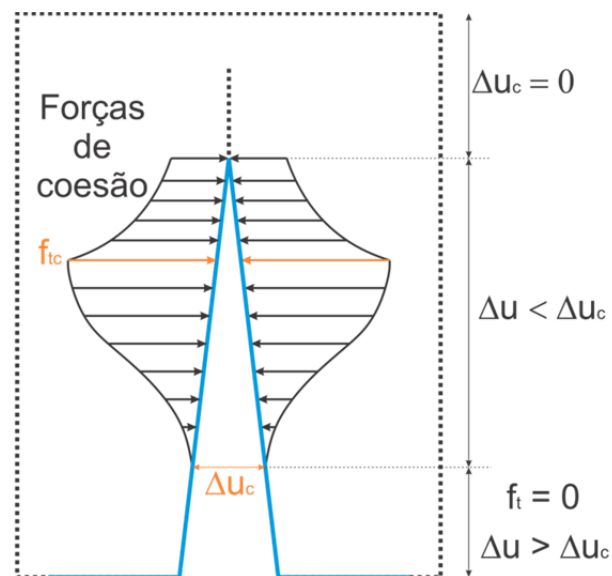


Figura 2-5 - Modelo coesivo de Hillerborg et al. (1976)

A representação do processo de amolecimento à tração depende do material que se pretende simular e é implementada nos modelos numéricos por meio de leis constitutivas que relacionam a intensidade das forças coesivas ao valor da abertura das faces da fissura. Existem diversas leis para esta finalidade, sendo que as principais curvas de amolecimento simplificadas utilizadas na modelagem numérica de fraturas em materiais quase frágeis são:

- Curva linear: É uma das curvas mais utilizadas na simulação de materiais quase frágeis. Relação linear entre a força coesiva e a abertura da fissura (Equação 2-1), como ilustrado na (Figura 2-6).

$$f_t(\Delta u) = f_{tc} \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_c} \right), \text{ para } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u_c$$

Equação 2-1

$$f_t(\Delta u) = 0, \text{ para } \Delta u > \Delta u_c$$

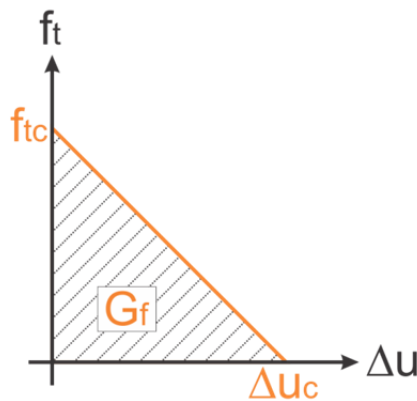


Figura 2-6 - Curva linear de amolecimento à tração

- Curva bi-linear: A relação entre a força coesiva e a abertura da fissura (Equação 2-2) se dá por meio de duas retas com inclinações diferentes (Figura 2-7).

$$f_t(\Delta u) = f_{tc} - \left(\frac{f_{tc} - f'_t}{\Delta u'} \right) \Delta u, \text{ para } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u'$$

$$f_t(\Delta u) = \frac{f'_t \Delta u}{\Delta u' - \Delta u_c} + f'_t \left(1 - \frac{\Delta u'}{\Delta u' - \Delta u_c} \right), \text{ para } \Delta u' \leq \Delta u \leq \Delta u_c$$

Equação 2-2

$$f_t(\Delta u) = 0, \text{ para } \Delta u > \Delta u_c$$

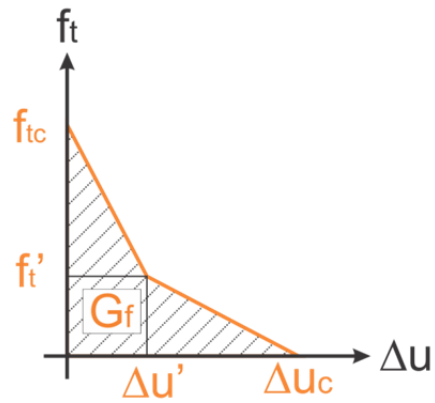


Figura 2-7 - Curva bi linear de amolecimento à tração

- Curva exponencial: Relação exponencial (Equação 2-3), como ilustrado na (Figura 2-8).

$$f_t(\Delta u) = f_{tc} e^{-\frac{f_{tc}\Delta u}{G_f}}, \text{ para } \Delta u > 0$$

Equação 2-3

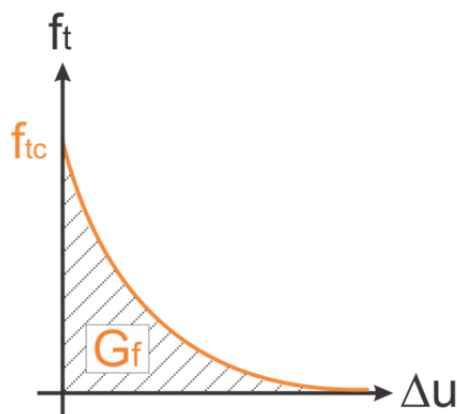


Figura 2-8 - Curva exponencial de amolecimento à tração

A área sob estas curvas de amolecimento a tração exprimem o valor da energia liberada durante o processo de fissuração (G_f).

CAPÍTULO **3** **Formulação MEC para análise direta**

Os problemas encontrados na engenharia são formulados, em sua grande maioria, por equações diferenciais parciais. Nas últimas décadas, impulsionado pelo desenvolvimento computacional, diversas técnicas numéricas de resolução de equações ou sistemas de equações diferenciais deram origem a eficientes ferramentas de cálculo, que permitem a análise dos mais variados problemas da engenharia. Neste contexto destaca-se o método dos elementos de contorno (MEC), que tem demonstrado ser uma poderosa alternativa para resolução dos mais diversos problemas físicos usuais das engenharias. Além disso, o método vem ganhando espaço e credibilidade entre os pesquisadores dos mais conceituados centros de pesquisas, principalmente em áreas como: mecânica dos solos, mecânica da fratura e mecânica das estruturas. Deve-se esse incremento à precisão e confiabilidade oferecidas pelo método na modelagem de problemas de domínio infinito, bem como de problemas onde surgem grandes concentrações de tensão, em decorrência da redução na dimensão das malhas e no fato de tratar de forma mais natural problemas onde as variáveis de interesse estão no contorno. Outra grande vantagem do método está na capacidade de associação com outros métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, ampliando assim as possibilidades de simulação de problemas.

Assim sendo, no presente trabalho foram levadas em consideração tais vantagens para escolha do MEC como ferramenta numérica para resolução de problemas inversos da elasticidade bidimensional. Neste capítulo apresentam-se os conceitos básicos e a formulação do método, dando-se ênfase aos pontos chaves no desenvolvimento do presente trabalho. Para o desenvolvimento deste capítulo foi consultada a seguinte bibliografia: Brebbia et al (1984), Venturini (1988), Brebbia & Dominguez (1992), Aliabadi & Brebbia (1993), Kane (1994), Hall (1994), Wutzow (2003), Leonel (2006) entre outros.

3.1 Considerações iniciais

Neste item, apresenta-se o MEC mostrando um pouco do histórico da teoria na qual o método está baseado e tentando mostrar onde ele se enquadra no âmbito dos métodos numéricos.

Em termos gerais, pode-se dizer que o MEC é um método numérico para a resolução de problemas da engenharia e da física que consiste na devida transformação da equação diferencial que rege o comportamento do problema em questão em uma equação integral escrita sobre o contorno do domínio da solução. Esta transformação só é possível com o conhecimento da solução fundamental (solução do problema no estado fundamental, definido no item 3.2 para problemas elásticos) do problema em análise. A resolução numérica das integrais de contorno é obtida por uma aproximação construída por uma interpolação de um conjunto de valores em pontos discretos localizados sobre o contorno da geometria do modelo analisado. O método dos elementos de contorno caracteriza-se prioritariamente como um método numérico cujas bases matemáticas são estudadas pelo ramo da matemática conhecido como teoria da aproximação. Além disto, por sua formulação envolver equações integrais de contorno, é possível enquadrá-lo em dois outros grupos: o primeiro, decorrente da base analítica utilizada, é a dos métodos integrais e o segundo é o grupo das técnicas de contorno ou fronteira, uma vez que o método envolver, em seu sistema resolvente, somente variáveis do contorno do problema.

3.1.1 Resumo histórico

Ao longo das últimas três décadas, o MEC vem adquirindo uma expressão crescente tanto no meio acadêmico quanto entre os engenheiros.

Neste sentido, o MEC pode ser considerado um método recente quando comparado a outras técnicas numéricas como o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF). A partir de uma perspectiva histórica, vê-se na (Tabela 3-1) que o desenvolvimento do MEC é resultado do trabalho de vários pesquisadores e matemáticos. Os fundamentos matemáticos foram estabelecidos por matemáticos renomados desde o século XVIII até o início do século XX. Porém,

o maior impulso no desenvolvimento e aplicação do método se deu a partir de 1960, acompanhando o rápido avanço da tecnologia de computadores digitais.

Tabela 3-1 - Resumo histórico com os principais pesquisadores e matemáticos.

	Desenvolvimento	Pesquisadores
Fundamentos Matemáticos	Teoria do Potencial	Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Fourier (1768-1830), Poisson (1781), Hamilton (1805-1865)
	Existência e Unicidade	Dirichlet (1805-1859), Neumann (1832-1925), Kellogg (1878-1932)
	Integrais de Superfície	Gauss (1777-1855), Green (1793-1841), Ostrogradski (1801-1862), Stokes (1819-1903)
	Representações Integrais	Cauchy (1789-1857), Hardamard (1865-1963), Fredholm (1866-1927)
	Extensões e Generalizações	Helmholtz (1821-1894), Betti (1823-1892), Kelvin (1824-1907), Rayleigh (1842-1919), Volterra (1860-1940), Somigliana (1860-1955), Kolosov (1867-1936)
A.C.*	Solução Numérica	Ritz (1878-1909), Kármán (1881-1963), Trefftz (1888-1937), Muskhelishvili (1891-1976)
D.C.**	Utilização do computador	Kupradze (1903-1985), Jaswon (1922-)
	MEIC	Rizzo (1938-), Cruse (1941-)
	MEC	Brebbia (1948-)
* A.C.=Antes dos computadores. **D.C.=Depois dos computadores		

3.2 Solução Fundamental

Para se descrever a formulação das equações integrais de contorno é necessário o prévio conhecimento da solução fundamental para problemas elásticos. Neste item será apresentada a solução do problema elástico no estado fundamental, que resulta da formulação desenvolvida por Lord Kelvin (1944).

3.2.1 Definição

Fisicamente, a solução fundamental de Kelvin representa o efeito de uma carga unitária e concentrada atuando em um ponto \mathbf{s} (ponto fonte) de um domínio infinito Ω_{∞}^* , ao longo da direção \mathbf{k} , sobre um ponto \mathbf{q} (ponto campo) (Figura 3-1).

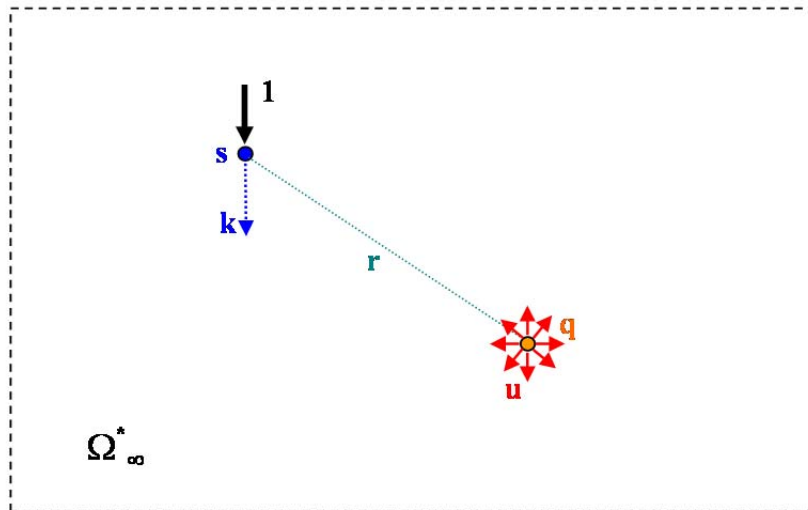


Figura 3-1 - Problema fundamental.

3.2.2 Caso Bidimensional

Com o intuito de representar o carregamento unitário, reescreve-se a parcela b_i da equação de equilíbrio do problema elástico (Equação A-4 - Anexo A), como uma distribuição de Dirac (Equação B-1 - Anexo B), ponderada por um delta de Kronecker (Equação C-1 - Anexo C), que relaciona as direções \mathbf{k} , de atuação da força, com a direção \mathbf{i} , de efeito. Assim, a equação de equilíbrio passa a ser escrita como se segue:

$$\sigma_{kij,j}^* + \delta(s, q)\delta_{ki} = 0$$

Equação 3-1

Substituindo-se na lei de Hooke (na configuração fundamental) a relação deformação deslocamento (Equação A-5 - Anexo A), em seguida derivando-se em relação à x_j e aplicando-se o resultado na (Equação 3-1), tem-se:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{kj,ij}^* + u_{ki,jj}^* + \frac{1}{G} \delta(s, q) \delta_{ki} = 0 \quad \text{Equação 3-2}$$

A solução da (Equação 3-2) para os problemas tridimensionais fornece a seguinte expressão fundamental para os deslocamentos:

$$u_{ki}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [-(3-4\nu)\delta_{ki} \ln(r) + r_{,k} r_{,i}] \quad \text{Equação 3-3}$$

Além da solução fundamental em deslocamento, as componentes de deformação, tensão e força de superfície no estado fundamental são também necessárias no equacionamento de problemas elásticos pelo método dos elementos de contorno. Substituindo-se (Equação 3-3) na (Equação A-5 - Anexo A) obtêm-se as componentes de deformação no ponto q devido a uma carga unitária, na direção k, aplicada no ponto s,

$$\varepsilon_{kji}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki}) - r_{,k}\delta_{ji} + 2r_{,k}r_{,j}r_{,i}] \quad \text{Equação 3-4}$$

Aplicando-se a (Equação 3-4) na lei de Hooke pode-se obter, para o caso tridimensional:

$$\sigma_{kji}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki}) - r_{,k}\delta_{ji} + 2r_{,k}r_{,j}r_{,i}] \quad \text{Equação 3-5}$$

Da (Equação 3-5) e da relação tensão/força de superfície (Equação A-2 - Anexo A), obtêm-se a expressão da força de superfície para o problema fundamental, dada por:

$$p_{ki}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ki} + 2r_{,k}r_{,i}]r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,i}\eta_{,k} - r_{,k}\eta_{,i})\} \quad \text{Equação 3-6}$$

A solução fundamental para os estados planos em deslocamento, deformação, tensão e força de superfície (Equação 3-3 a Equação 3-6) apresenta

convenientemente uma representação igual para ambos os estados (EPT e EPD), bastando apenas à substituição no caso do estado plano de tensão do valor de ν por ν' (Equação 3-7).

$$\nu' = \frac{\nu}{(1 + \nu)} \quad \text{Equação 3-7}$$

3.3 Equações Integrais

Nesta seção serão apresentadas as equações integrais que regem o comportamento de um corpo no regime elástico, que são de fundamental importância para resolução de problemas pelo MEC.

3.3.1 Equacionamento

A representação integral das equações diferenciais que regem o problema elástico, importante para a formulação do MEC, pode ser obtida pelo princípio da reciprocidade de Betti ou através do método dos resíduos ponderados. Neste trabalho será utilizado o princípio da reciprocidade de Betti (Equação 3-8), que estabelece que o trabalho realizado pelas tensões de um estado **A** sobre as deformações de um estado **B** é igual ao trabalho das tensões do estado **B** sobre as deformações do estado **A** admitindo-se o mesmo material em ambos os estados.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij}^A d\Omega \quad \text{Equação 3-8}$$

Assim, considera-se o domínio de um sólido elástico isotrópico bidimensional, Ω , de um meio infinito, Ω^* , definido por um contorno Γ , (Figura 3-2), onde as ações aplicadas correspondem estados de deslocamentos, deformações e tensões.

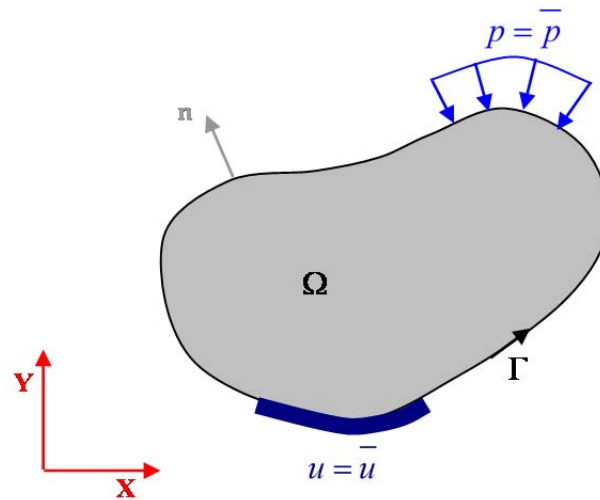


Figura 3-2 - Domínio elástico bidimensional.

No princípio da reciprocidade e considerando-se um dos estados envolvido o estado fundamental representado pela solução fundamental de Kelvin (1944) e o outro pelo problema real, a (Equação 3-8) pode ser reescrita como se segue:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kji}^* \varepsilon_{ji} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ji} \varepsilon_{kji}^* d\Omega \quad \text{Equação 3-9}$$

Aplicando-se a relação deformação-deslocamento (Equação A-5 - Anexo A), é possível expressar a (Equação 3-9) em termos dos deslocamentos (Equação 3-10):

$$\int_{\Omega} \sigma_{kji}^* u_{j,i} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ji} u_{kji}^* d\Omega \quad \text{Equação 3-10}$$

Integrando-se por parte os termos da (Equação 3-10) e aplicando a equação de Cauchy (Equação A-2 - Anexo A), pode-se obter uma expressão envolvendo tensões, deslocamentos e forças de superfície, dada por:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ji,i} u_{kj}^* d\Omega + \int_{\Gamma} P_j u_{kj}^* d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{kji,i}^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} P_{kj}^* u_j d\Gamma \quad \text{Equação 3-11}$$

Substituindo-se, agora, nas integrais de domínio de ambos os membros da (Equação 3-11), os valores das derivadas das tensões pelos seus valores dados pela (Equação A-4 - Anexo A) e (Equação 3-1), respectivamente, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ki} u_k d\Omega = - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad \text{Equação 3-12}$$

Integrando o termo que contém a distribuição delta de Dirac, obtém-se a seguinte expressão:

$$u_k = - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad \text{Equação 3-13}$$

A (Equação 3-13) é a representação integral para os deslocamentos de um ponto do sólido, permitindo-se assim, a determinação dos valores de deslocamentos em pontos a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície dos pontos do contorno em um problema elástico, a qual é conhecida por Identidade Somigliana. O ponto de colocação pode estar em qualquer posição do domínio infinito Ω_{∞}^* que contem o domínio em análise. Deve-se escrever esta identidade para os possíveis casos de posicionamento do ponto de colocação, esteja ele no interior do domínio em análise, onde vale a (Equação 3-13), posicionado no contorno ou até mesmo em uma posição fora deste domínio. Para isto, faz-se:

- **Pontos sobre o contorno** - Para avaliação em pontos sobre o contorno, a (Equação 3-13) somente será aplicável se for adicionado ao domínio original, Ω , uma parte infinitesimal complementar, Ω_{ε} , de raio ε , de maneira que se possa caracterizar o ponto do contorno em avaliação, P, como um ponto interno (Figura 3-3). Com este acréscimo no domínio, a representação integral dos deslocamentos (Equação 3-13) passa a se configurar da forma a seguir:

$$u_i = - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \\ - \int_{\Gamma_{\varepsilon}} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega_{\varepsilon}} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad \text{Equação 3-14}$$

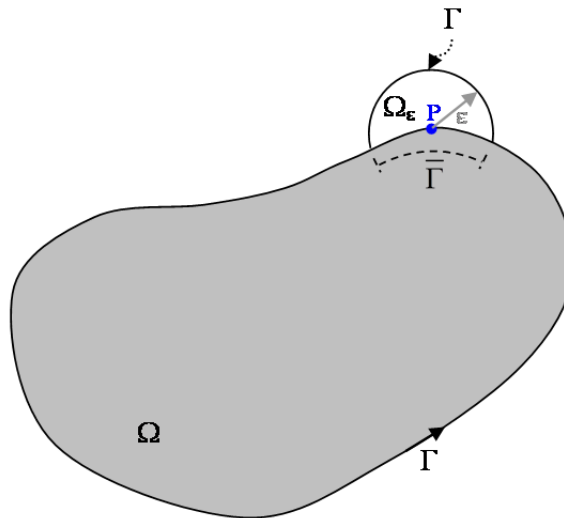


Figura 3-3 - Acréscimo infinitesimal do domínio.

Para se obter a representação integral dos deslocamentos para pontos sobre o contorno faz-se necessário aplicar o limite quando ε tende a zero, fazendo-se com que a equação passe a ser representada por:

$$C_{ki}u_i = - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad \text{Equação 3-15}$$

onde o termo C_{ki} esta relacionado com a angulosidade do ponto sobre o contorno. Assim, para pontos sobre o contorno que contem apenas uma tangente este termo vale:

$$C_{ki} = \frac{1}{2} \delta_{ki} \quad \text{Equação 3-16}$$

E para ponto sobre o contorno com mais de uma tangente o termo C_{ki} é definido pela matriz a seguir:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{Equação 3-17}$$

Onde α representa o ângulo interno definido pelas tangentes ao contorno e γ representa a bissetriz de α como ilustrado na (Figura 3-4).

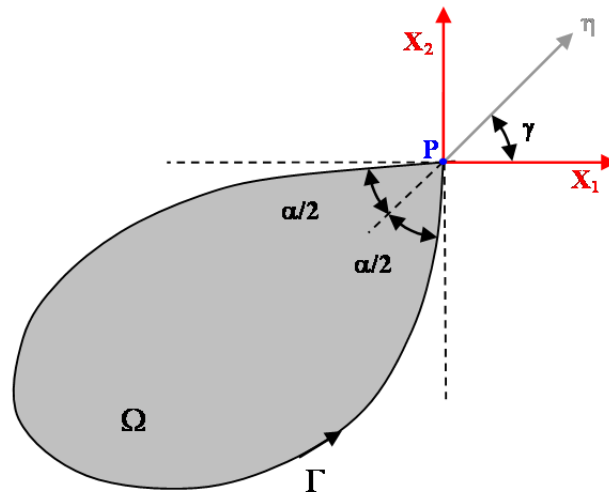


Figura 3-4 - Definição dos ângulos α e γ para pontos do contorno.

- **Pontos fora do domínio** - Para os pontos externos ao domínio a representação integral para os deslocamentos é obtida diretamente da (Equação 3-12), já que a distribuição $\delta(s,q)$ sobre o domínio é nula, resultando em:

$$-\int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ki}^* P_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad \text{Equação 3-18}$$

3.4 Formulação dos elementos de contorno

Depois da transformação da equação diferencial que rege o problema elástico em uma representação integral equivalente, mostrar-se-á agora, a descrição do método numérico responsável pela resolução e aproximação de tais equações: o método dos elementos de contorno.

3.4.1 Discretização

Para se resolver numericamente a equação integral para o problema elástico através do MEC, o contorno deve ser dividido em uma série de trechos (elementos) com deslocamentos e forças de superfície escritas em função de seus valores em uma série de pontos discretos (nós) sobre o contorno (Figura 3-5).

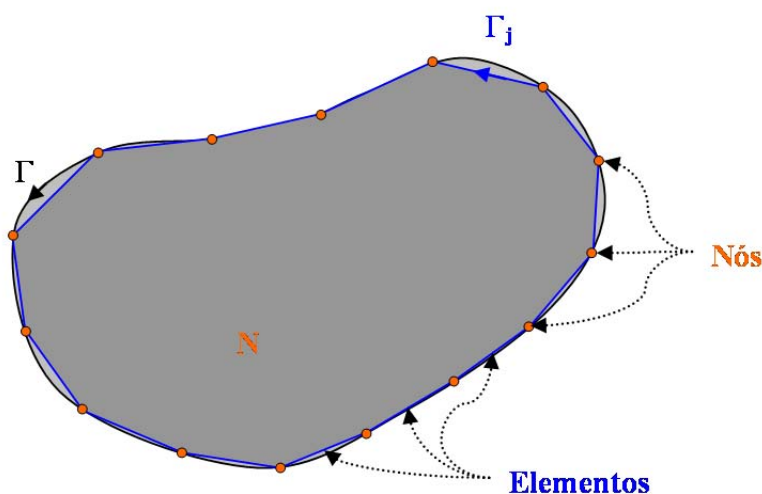


Figura 3-5 - Discretização do contorno do domínio em elementos.

Os elementos de contorno, como são chamados neste método numérico, são entidades que efetuam a aproximação da geometria e também atuam como delimitadores das funções de aproximação das grandezas de interesse do problema. Com isto, há a possibilidade de se adotar graus diferentes de aproximação tanto para geometria quanto para as grandezas envolvidas. Logo, de acordo com o grau da função de aproximação (função de forma) os elementos podem ser classificados como constante, lineares, quadráticos, cúbicos e de ordem superior. Outra forma de classificar os elementos de contorno é de acordo com a diferença ou não do grau de aproximação adotado na geometria e nas variáveis do problema, nesta classificação os elementos podem ser sub-paramétricos, isoparamétricos e super-paramétricos. Depois de feita esta discretização e desconsiderando as forças de massa a (Equação 3-15) pode ser escrita como se segue:

$$[c]\{u\}^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*]\{u\}d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*]\{P\}d\Gamma_j \right) \quad \text{Equação 3-19}$$

NE → Número de elementos da discretização do contorno;

p → Ponto fonte considerado.

3.4.2 Sistema de equações

Incorporando-se as funções de forma nas expressões de deslocamento e forças de superfície (Equação 3-19), pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$[c][\Phi]^p \{u\}_n^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi]d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi]d\Gamma_j \right) \{P\}_n^j \quad \text{Equação 3-20}$$

A (Equação 3-20) relaciona os deslocamentos do ponto de colocação às forças de superfície e deslocamentos nodais em qualquer elemento j . Dessa forma as matrizes resultantes do processo de integração contêm a influência de todos os elementos presentes na malha, por isso são chamadas de matrizes de influencia.

$$[H_{inf}]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi]d\Gamma_j \quad \text{Equação 3-21}$$

$$[G_{inf}]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi]d\Gamma_j \quad \text{Equação 3-22}$$

Fazendo a substituição da (Equação 3-21) e (Equação 3-22) na (Equação 3-20) e considerando que:

$$[H_{inf}] = \begin{cases} [H_{inf}]^{pj} & \text{se } j \notin \Gamma \\ [H_{inf}]^{pj} + [c][\Phi]^p & \text{se } j \in \Gamma \end{cases} \quad \text{Equação 3-23}$$

Chega-se então a:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H_{inf}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G_{inf}]^{pj} \{P\}_n^j \Rightarrow [H]\{u\} = [G]\{P\} \quad \text{Equação 3-24}$$

Para se resolver o sistema matricial apresentado na (Equação 3-24) é necessário a aplicação das condições de contorno. Para isto, o sistema matricial deve ser manipulado de tal forma que as incógnitas se concentrem de um lado e os valores prescritos do outro membro da equação. Isto se faz, mediante a troca de coluna entre as matrizes [H] e [G], obtendo-se o seguinte sistema:

$$[A]\{V_i\} = [B]\{V_p\} \quad \text{Equação 3-25}$$

[A] e [B] → Formas modificada de [H] e [G] respectivamente;

{Vi} → Vetor que contém apenas valores incógnitos;

{Vp} → Vetor com os valores prescritos.

Fazendo-se os últimos arranjos, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} [B]\{V_p\} = \{b\} \\ \{V_i\} = \{x\} \end{array} \right\} [A]\{x\} = \{b\} \quad \text{Equação 3-26}$$

A partir deste ponto, utiliza-se um algoritmo de resolução de sistemas adequado, sabendo-se que a matriz [A] é uma matriz cheia. Para o presente trabalho utilizou-se o algoritmo de decomposição LU presente na biblioteca matemática da linguagem de programação Fortran para resolução de sistemas.

Já o campo de deslocamento no interior do domínio é obtido de forma discreta pela avaliação dos deslocamentos em pontos escolhidos no interior do domínio pela (Equação 3-27).

$$\{u\}^{pi} = -[H']\{u\}^{pc} + [G']\{P\}^{pc} \quad \text{Equação 3-27}$$

onde $\{u\}^{pi}$ é o vetor com os deslocamentos em pontos no interior do domínio, $\{u\}^{pc}$ e $\{P\}^{pc}$ são os vetores de valor de contorno que correspondem aos deslocamentos e as forças de superfície respectivamente nos nós do contorno discretizado e $[H']$ e $[G']$ são as correspondentes matrizes $[H]$ e $[G]$ do MEC quando se toma os pontos fontes no interior do domínio.

As tensões nos pontos internos podem ser obtidas empregando-se a (Equação A-6 - Anexo A) modificada pela introdução da relação entre deformações e deslocamentos, (Equação A-5 - Anexo A), e aplicando na identidade Somigliana (Equação 3-13), com as forças de massa desprezadas. Obtém-se a seguinte equação:

$$\sigma_{ij}^{pi} = \int_{\Gamma} u_{kij}^* P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{kij}^* u_k d\Gamma \quad \text{Equação 3-28}$$

De forma discreta, tem-se:

$$\{\sigma\}^{pi} = \sum_{j=1}^{NE} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_j} u_{kij}^* d\Gamma_j \right)}_{[D_{inf}]} \{P\}_n^j - \sum_{j=1}^{NE} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_j} P_{kij}^* d\Gamma_j \right)}_{[S_{inf}]} \{u\}_n^j \quad \text{Equação 3-29}$$

Ou matricialmente tem-se:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^{pi} &= \sum_{j=1}^{NE} [D_{inf}]^{pj} \{P\}_n^j - \sum_{j=1}^{NE} [S_{inf}]^{pj} \{u\}_n^j \\ &\quad \downarrow \\ \{\sigma\}^{pi} &= [D]\{P\}^{pc} - [S]\{u\}^{pc} \end{aligned} \quad \text{Equação 3-30}$$

3.5 Integração

Por ser um método que apresenta equações integrais na base de sua formulação matemática, no MEC os núcleos integrais devem ser precisamente avaliados para obtenção de boas soluções, gerando a necessidade da utilização de

bons métodos para avaliar as integrais que surgem na formulação do método. Neste item são mostrados os processos utilizados para avaliação das integrais nos mais distintos casos.

3.5.1 Processos de integração

Na formulação do MEC de acordo com o posicionamento relativo entre os pontos fonte e de colocação, podem-se destacar três situações, que apresentam formas diferentes de se avaliar as integrais envolvidas.

- **Caso 01 – Ponto fonte longe do ponto de colocação:** o ponto fonte distante do ponto de colocação implica na integração de uma função regular. No presente trabalho adotou-se realizar este tipo de integral numericamente através da quadratura de Gauss-Legendre.

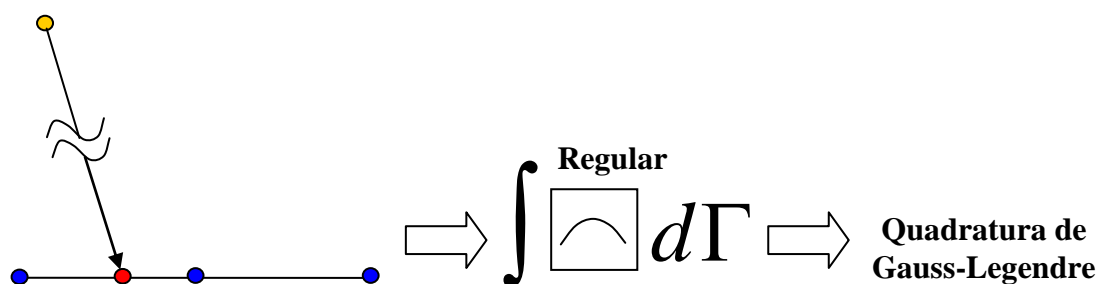


Figura 3-6 - Integração comum (Quadratura de Gauss-Legendre).

- **Caso 02 – Ponto fonte sobre o ponto de colocação:** o ponto fonte sobre o ponto de colocação implica na integração de uma função singular. No presente trabalho adotou-se realizar a avaliação deste tipo de integral analiticamente.

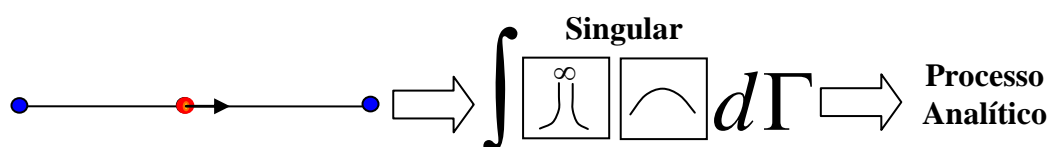


Figura 3-7 - Integração singular (Processo analítico).

- **Caso 03 – Ponto fonte muito próximo do ponto de colocação:** o ponto fonte muito próximo do ponto de colocação implica na integração de uma função que é quase singular, necessitando-se neste caso de técnicas especiais de integração para obtenção de uma solução com qualidade. No presente trabalho fez-se a utilização do processo de sub-elementação para o tratamento de tais integrais.

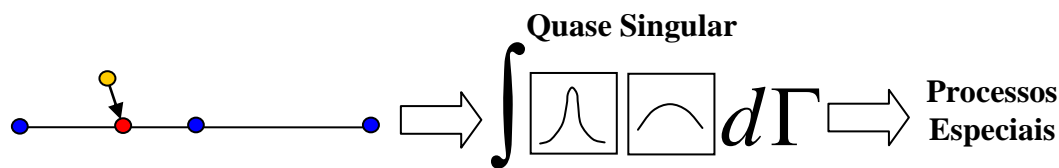


Figura 3-8 - Integração em quase-singularidade.

3.6 Sub-regiões

Neste item mostra-se a forma de tratar, utilizando o MEC, domínios formados por várias regiões, isto é, domínios formados por porções materiais com características físicas diferentes.

3.6.1 Equacionamento

Em certos problemas mecânicos o domínio em estudo não se apresenta de forma homogênea e sim sob a forma de porções constituídas de materiais diferentes. No método dos elementos de contorno este problema pode ser simulado mediante o uso de sub-regiões, onde cada porção tem seu contorno discretizado como se fosse independente uma da outra. Naturalmente, aplicam-se condições de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças nos elementos da interface entre uma sub-região e outra para completar o sistema de equações do problema. Considere-se assim, o problema ilustrado na (Figura 3-9), com três regiões constituídas por diferentes materiais.

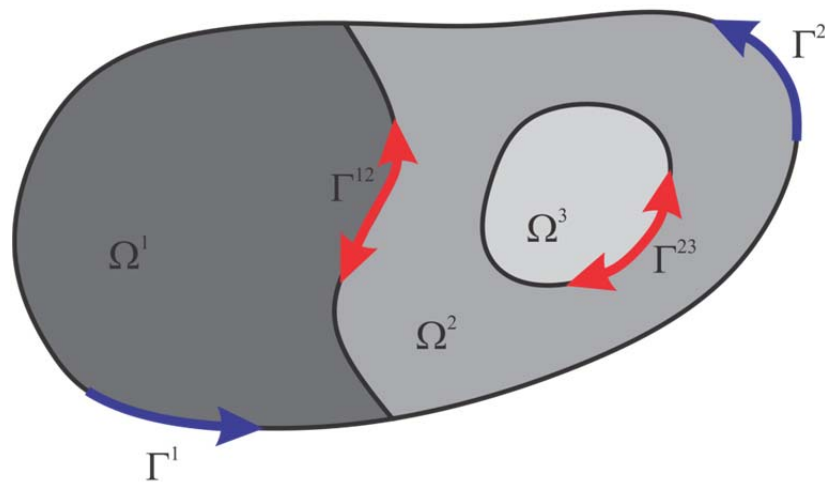


Figura 3-9 - Problema com domínio formado por várias regiões.

Adota-se a seguinte notação:

Γ^i → contorno da sub-região Ω^i ;

Γ^{ij} → contorno pertencente a sub-região Ω^i e Ω^j simultaneamente;

u^i, p^i → deslocamentos e forças de superfície nos nós do contorno Γ^i da sub-região Ω^i ;

u^{ij}, p^{ij} → deslocamentos e forças de superfície nos nós do contorno Γ^{ij} ;

H^i, G^i → Partes das matrizes H e G obtida para a sub-região Ω^i que multiplicam u^i e p^i respectivamente;

H^{ij}, G^{ij} → Partes das matrizes H e G obtida para a sub-região Ω^i que multiplicam u^{ij} e p^{ij} respectivamente;

Assim, para o problema em questão obtêm-se as seguintes equações:

- Para a sub-região Ω^1

$$[H^1 \quad H^{12}] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^{12} \end{Bmatrix} = [G^1 \quad G^{12}] \begin{Bmatrix} p^1 \\ p^{12} \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 3-31}$$

- Para a sub-região Ω^2

$$[H^2 \quad H^{21} \quad H^{23}] \begin{Bmatrix} u^2 \\ u^{21} \\ u^{23} \end{Bmatrix} = [G^2 \quad G^{21} \quad G^{23}] \begin{Bmatrix} p^2 \\ p^{21} \\ p^{23} \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 3-32}$$

- Para a sub-região Ω^3

$$[H^{32}]\{u^{32}\} = [G^{32}]\{P^{32}\} \quad \text{Equação 3-33}$$

Aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamento apresentada na (Equação 3-34) e de equilíbrio de forças (Equação 3-35) tem-se como resultado o sistema apresentado na (Equação 3-36), que ao se aplicar as condições de contorno ganha a configuração de um sistema do tipo $[A]\{x\}=\{b\}$.

$$u^{ij} = u^{ji} \quad \text{Equação 3-34}$$

$$P^{ij} = -P^{ji} \quad \text{Equação 3-35}$$

$$\begin{bmatrix} H^1 & 0 & H^{12} & 0 & G^{12} & 0 \\ 0 & H^2 & H^{21} & H^{23} & -G^{21} & -G^{23} \\ 0 & 0 & 0 & H^{32} & 0 & G^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^{12} \\ u^{23} \\ P^{12} \\ P^{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 3-36}$$

Historicamente, sabe-se que a imagem precede a escrita na ordem evolutiva da linguagem, pois os primitivos já se comunicavam por meio de desenhos. Mesmo com o surgimento da escrita, o desenho, a pintura e outros meios de comunicação visuais continuaram a ter enorme importância no processo cultural e civilizatório, visto que o desenho e a pintura nas suas formas mais básicas refletem o grande desejo que o homem possui de retratar o mundo. Porém, tanto a pintura quanto o desenho não conseguiam suprir os anseios de retratar o mundo com um maior realismo. A busca de um processo mais perfeito e mais realista de registrar o mundo continuou sendo intento do homem através dos tempos.

O surgimento da fotografia viria suprir as deficiências encontradas no desenho e na pintura em matéria de realismo dando ao homem uma visão real do mundo. O fato é que a humanidade estava determinada a descobrir a fotografia ou algo semelhante, pois não desistiria dessa busca até chegar ao que procurava dada à grande necessidade do homem em obter um mecanismo que lhe possibilitasse reproduzir o mundo de uma forma mais realista. O desenvolvimento ao longo dos anos desta tecnologia de confecção de imagens atraiu o interesse dos cientistas desde o seu começo.

Na engenharia, os cientistas usaram a capacidade da fotografia de fazer representações fotomecânicas precisas para gravar digitalmente imagens contendo dados de medições. O acréscimo de algoritmos especiais para extrair os dados das medições deu origem à técnica de correlação de imagens digitais (CID). Devido aos avanços nas tecnologias dos computadores e das câmeras digitais e da sua relativa facilidade de implementação e utilização, esta técnica tem incrementado sua popularidade, sendo especialmente empregada no acompanhamento de testes mecânicos. Na mecânica dos sólidos, por exemplo, a obtenção dos campos de deslocamento em ensaios mecânicos sobre corpos de prova ou peças estruturais tem um papel chave para fazer a ponte entre experimentos e simulações. Mas a correlação de imagens digitais aplica-se para além desses limites devido à sua

versatilidade em termos de escala de observação, que vão desde observações nanoscópicas até as macroscópicas, explorando-se fundamentalmente o mesmo tipo de procedimento.

A etapa de medição é apenas a primeira parte da análise. A parte subsequente é ainda mais importante, e consiste na identificação das propriedades mecânicas e nas avaliações quantitativas de parâmetros e leis constitutivas. Sendo assim, o presente capítulo faz uma breve descrição dos princípios da técnica de correlação de imagens digitais e da ferramenta computacional adotada neste trabalho para realizar esta tarefa: o CORRELI Q4 (BESNARD, 2006). Trata-se de um programa para obtenção de campos cinemáticos (deslocamento e deformação) via correlação de imagens digitais, desenvolvido pelo grupo de pesquisa da ENS Cachan - LMT.

4.1 Princípios da correlação de imagens digitais

Correlação de Imagens Digitais (CID) é um método ótico que emprega técnicas de rastreamento e registro de mudanças em imagens para medições precisas em domínios 2D e 3D. Esta é uma técnica muito utilizada em uma série de aplicações da ciência e engenharia para medir campos cinemáticos (deslocamentos e deformações) a partir da comparação de imagens em instantes diferentes de um processo (SUTTON, 2009). Nesta seção, questões sobre a preparação de amostras, captura das imagens e os conceitos básicos dos algoritmos de correlação de imagens no espaço 2D serão descritos.

4.1.1 Visão geral

Em geral, a utilização da técnica de CID compreende três etapas consecutivas:

- (1) Preparação do corpo de prova;
- (2) Registro de imagens da superfície do corpo de prova antes e em diferentes instantes ao longo do carregamento;
- (3) Processamento das imagens obtidas, utilizando um programa de computador com os algoritmos de correlação de imagens implementados, obtendo-se os campos cinemáticos (deslocamento e deformação) desejados.

A (Figura 4-1) ilustra o esquema típico de uma configuração experimental utilizando um dispositivo de aquisição de imagens para o uso da técnica de correlação de imagens digitais. Esta técnica tem provado ser muito eficaz na obtenção de campos cinemáticos (deslocamento e deformação) em testes mecânicos macroscópicos (como são os ensaios de interesse para este trabalho). Nestas aplicações, a superfície da amostra deve ser preparada de modo a proporcionar um padrão aleatório de intensidade de cinza nas imagens captadas. Este padrão aleatório pode ser obtido pela textura natural da superfície da amostra, ou produzido artificialmente pela pulverização de tintas pretas e brancas sobre a superfície da amostra, ou ainda, pelo acabamento da superfície (usinagem e polimento) da amostra em análise fornecendo o contraste necessário para o melhor desempenho dos algoritmos de correlação.

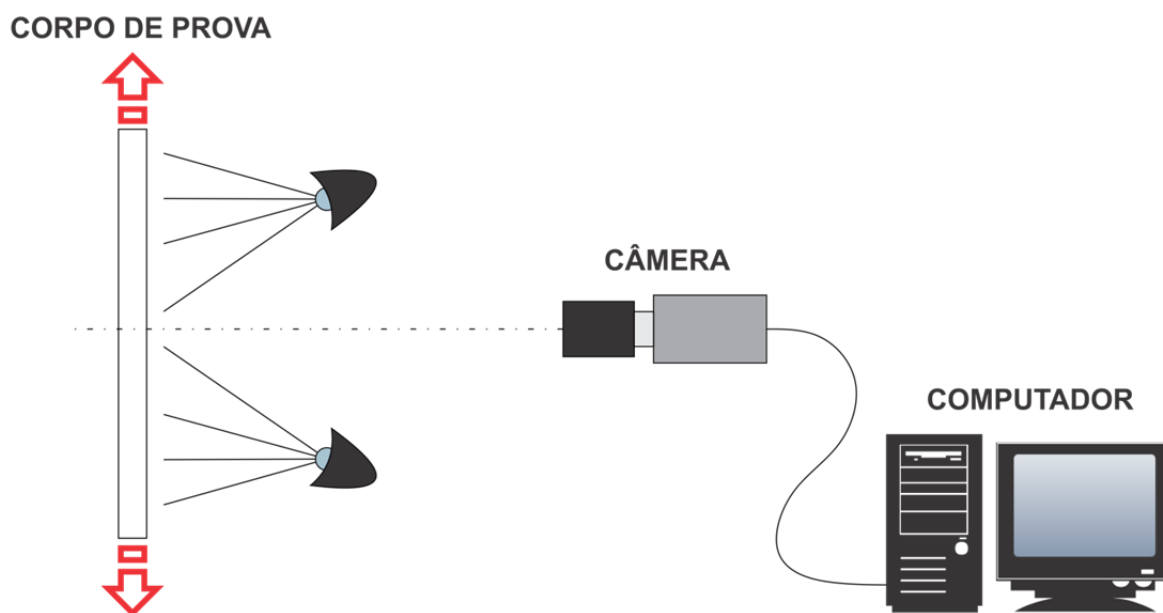


Figura 4-1 - Configuração típica de um sistema de aquisição para CID 2D.

4.1.2 Formulação

Na implementação da técnica de CID no espaço 2D, inicialmente a região de interesse na imagem de referência deve ser especificada e dividida por uma grade virtual (Figura 4-2). Os deslocamentos são calculados em cada ponto desta grade virtual obtendo-se o campo de deslocamento total. O princípio desta técnica é o rastreamento dos pontos (pixels) entre duas imagens, uma gravada antes e outra

depois da deformação. Para calcular o deslocamento de um ponto P da grade virtual, um subconjunto de referência quadrada $(2m+1) \times (2m+1)$ pixels centrada no ponto $P(x_0, y_0)$ a partir da imagem de referência é escolhido (região quadrada em azul na Figura 4-2) e usado para rastrear sua localização correspondente na imagem deformada. A escolha de um subconjunto quadrado de pixels, ao invés de um pixel individual, para obter a correlação entre as imagens, se deve ao fato de que o subconjunto apresenta uma maior variação nos níveis de cinza, podendo ser identificado de outros subgrupos com maior facilidade.

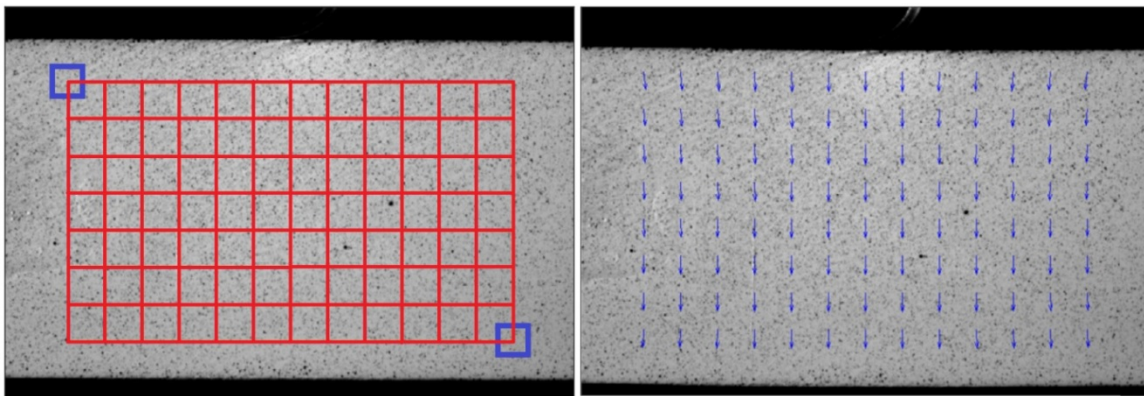


Figura 4-2 – Grade virtual sobre a imagem de referencia e o campo de deslocamento nos pontos da grade.

Na técnica de correlação de imagens digitais, a avaliação do grau de similaridade entre os subconjuntos de referência e o deformado é realizada pela maximização dos coeficientes de correlação, determinados examinando-se as matrizes de intensidades dos pixels (em escala de cinza), dos subconjuntos de pixels, capturadas pelo sensor da câmera em duas ou mais imagens correspondentes obtidas ao longo do processo em análise. Uma abordagem iterativa é usada para maximizar os coeficientes de correlação, utilizando técnicas de otimização. Na correlação de imagens tradicional os coeficientes de correlação (r_{ij}) são definidos em (SUTTON, 2009) por:

$$r_{ij} \left(u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\sum_i \sum_j [F(x_i, y_j) - \bar{F}][G^*(x_i^*, y_j^*) - \bar{G}]}{\sqrt{\sum_i \sum_j [F(x_i, y_j) - \bar{F}]^2 \sum_i \sum_j [G^*(x_i^*, y_j^*) - \bar{G}]^2}} \quad \text{Equação 4-1}$$

Onde $F(x_i, y_j)$ é a intensidade ou o valor do pixel em escala de cinza em um ponto (x_i, y_j) na imagem não deformada; $G(x_i^*, y_j^*)$ é o valor de escala de cinza em um ponto (x_i^*, y_j^*) na imagem deformada; \bar{F} e \bar{G} são valores médios das intensidades nas matrizes F e G , respectivamente.

Com a maximização destes coeficientes é possível extrair a função de mapeamento de deformação que relaciona as imagens. É razoável assumir que a forma do subconjunto de pixels de referência seja alterada na imagem deformada (Figura 4-3). Contudo, com base no pressuposto de continuidade de deformação em um sólido deformado, o conjunto de pontos vizinhos em um subconjunto de referência permanece como pontos vizinhos no subconjunto deformado. Assim, as coordenadas de pontos vizinhos em torno do centro subconjunto $P(x_0, y_0)$ na imagem de referência podem ser mapeadas para os pontos no subconjunto deformado de acordo com certas funções de mapeamento de deslocamentos.

$$\begin{aligned}x_i^* &= x_i + \xi(x_i, y_j) \\y_j^* &= y_j + \eta(x_i, y_j)\end{aligned}$$

Equação 4-2

Se existirem apenas movimento de corpo rígido entre o subconjunto de referência e o deformado, ou seja, os deslocamentos de cada ponto no subconjunto serão os mesmos, então uma função de forma de ordem zero pode ser usada:

$$\begin{aligned}\xi_0(x_i, y_j) &= u \\ \eta_0(x_i, y_j) &= v\end{aligned}$$

Equação 4-3

Obviamente, a função de forma de ordem zero não é suficiente para descrever a mudança de forma do subconjunto deformado. Assim, a função de mapeamento de primeira ordem que permite translação e rotação é mais comumente usada para relacionar os pontos de coordenadas (x_i, y_j) na imagem de referência com os pontos de coordenadas (x_i^*, y_j^*) na imagem deformada. Assim, se o movimento entre as imagens é perpendicular ao eixo óptico da câmera, então a relação entre (x_i, y_j) e (x_i^*, y_j^*) pode ser aproximada por uma transformação no espaço 2D dada pela (Equação 4-4).

$$\xi_1(x_i, y_j) = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$\eta_1(x_i, y_j) = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$$

Equação 4-4

Onde u e v são as translações do centro do subconjunto nas direções X e Y , respectivamente. As distâncias do centro do subconjunto até o ponto (x_i, y_j) são indicados por ΔX e Δy . Assim, a correlação é realizada em função das componentes de deslocamento (u, v) e seus gradientes.

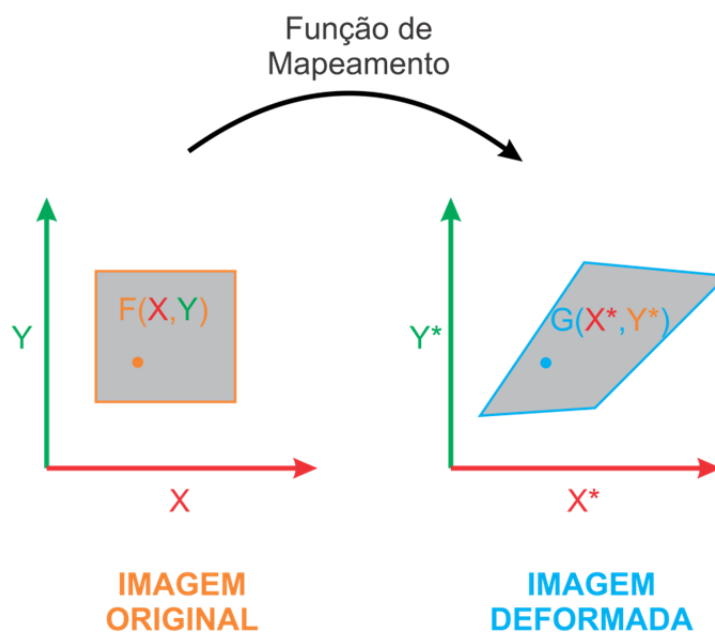


Figura 4-3 - Esquema de um subconjunto de pixels.

Uma grande variedade de funções de formas pode ser adotada para fazer este mapeamento. Entre elas, as funções de forma utilizadas nos métodos dos elementos finitos são particularmente atraentes devido à relação que elas proporcionam entre a medição do campo de deslocamento e uma modelagem numérica. Além disso, uma vez que a imagem é naturalmente dividida em pixels, é conveniente escolher uma forma quadrada ou retangular para cada elemento. Isto levou os desenvolvedores do CORRELIQ4 escolherem a função linear de quatro nós (Q4) utilizada nos elementos finitos para definir este mapeamento.

CAPÍTULO 5

Análise inversa

Na engenharia, a análise inversa é vista como uma área de grande potencial de desenvolvimento e com enorme campo de aplicação. A motivação para o tratamento de tais problemas se deve ao fato de que em muitas aplicações da engenharia há a necessidade da identificação de parâmetros físicos e geométricos a partir de dados medidos experimentalmente. Aliado a isto, o desenvolvimento de ferramentas de aquisição de dados experimentais mais eficientes e precisas nos últimos anos, como por exemplo, os métodos de inspeção não destrutivos de estruturas, técnicas de correlação de imagens digitais, tomografia computadorizada, ultrassom, ressonância magnética, etc., têm impulsionado ainda mais a importância do desenvolvimento de pesquisas nesta área do conhecimento.

Este capítulo é dedicado ao tratamento de alguns problemas inversos no contexto da elasticidade linear e mecânica do fraturamento, relevantes a este trabalho, tais como: estimativa de parâmetros elásticos, reconstrução das condições de contorno e a estimativa de parâmetros de modelo coesivo (Mecânica da fratura). Para a elaboração deste capítulo, podem-se destacar como referências os seguintes trabalhos: Romanov (1974), Tanaka & Masuda (1986), Romanov (1987), Mackerle & Tanaka (1990), Bezerra & Saigal (1991, 1993 e 1994), Enokizono et al. (1996), Engl et al. (1996), Isakov (1998), Gallego & Suárez (2000), Campos Velho (2002), Liu & Han (2003), Wang et al. (2004), Venturini & Almeida (2004, 2006), Silva Neto (2005), Ferreira & Venturini (2010) e Ferreira et al. (2011). Há ainda outros que serão devidamente citados no decorrer do texto.

5.1 Considerações iniciais

Este item reúne um conjunto de considerações pertinentes ao bom entendimento dos conceitos encontrados na análise inversa, bem como um

esquema geral de resolução de problemas inversos e os processos de classificação destes problemas.

5.1.1 Definição

O cunho da expressão problema inverso (PI) é creditado ao astrofísico Viktor Amazaspovich Ambartsumian, mas foi o pesquisador russo Oleg Mikailivitch Alifanov que apresentou uma definição para PIs bem aceita e abrangente, encontrada no livro de Engl et al. (1996): “*Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados*”. Assim vê-se, que a definição de o que vem a ser um problema inverso pode apresentar em certos casos controvérsias, pois a distinção entre o que seja um problema direto ou inverso para um dado fenômeno, está ligada a nossa cultura, isto é, trata-se da interpretação do que seja causa e efeito no fenômeno em questão.

De maneira prática, convencionou-se chamar problema direto de um determinado fenômeno aquele em que o seu estudo deu-se primeiro. As figuras a seguir, (Figura 5-1 e Figura 5-2), mostram de maneira esquemática a diferença entre problema direto e inverso. As causas, num modelo matemático direto na elasticidade, são os valores conhecidos como condições iniciais e de contorno, geometria e propriedades do sistema (material). Os efeitos são os resultados obtidos a partir de um modelo matemático direto, como os campos de tensão, deformação e deslocamento, no caso de um problema elástico.

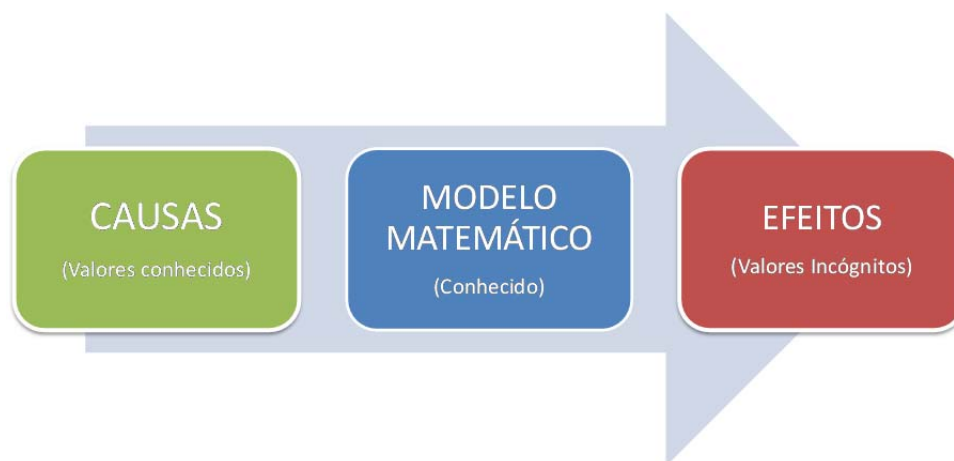


Figura 5-1 - Processo de resolução de um problema direto.

Já em uma análise inversa o que se conhece são os efeitos obtidos geralmente de observações experimentais, enquanto que as causas são incógnitas a serem determinadas por meio de um modelo matemático inverso, na maioria das vezes desconhecido. Nesses casos, se utiliza um modelo inverso baseado em técnicas de minimização, regularização e otimização para a busca da melhor solução para o problema.

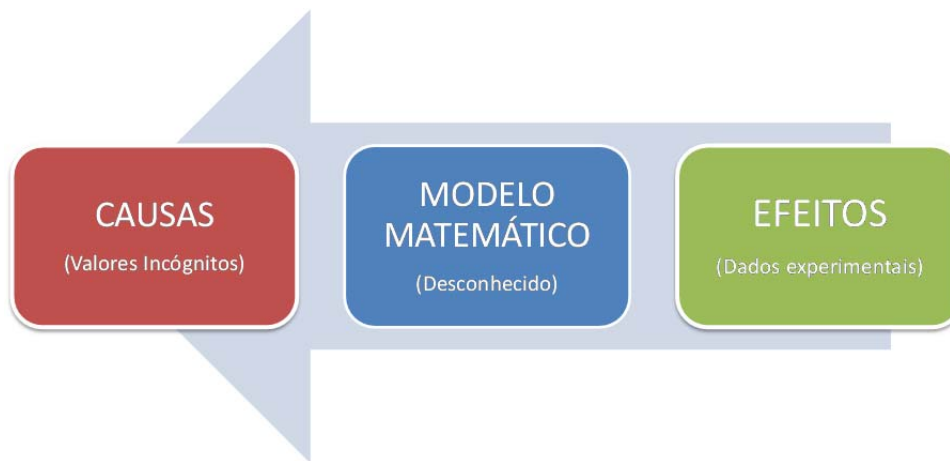


Figura 5-2 - Processo de resolução de um problema inverso.

5.1.2 Classificação dos problemas inversos

Os problemas inversos podem ser classificados de acordo com diversos aspectos, sendo cinco deles ilustrados na (Figura 5-3). Os aspectos (1) e (2) estão ligados ao método de resolução utilizado, enquanto que o aspecto (3) se refere ao tipo de causa a ser determinada. O aspecto de classificação do item (4) foi proposto pelo Prof. J. V. Beck (1985), sendo que o autor teve como objetivo aplicar a noção de *função contínua* nos problemas de estimativa de função. Já o item (5) é uma proposta recente de classificação (Silva Neto & Moura Neto 2005) e baseia-se nas dimensões do modelo do fenômeno físico (Problema direto - PD) e da quantidade a ser estimada (problema inverso - PI), se finitas (f) ou infinitas (∞).

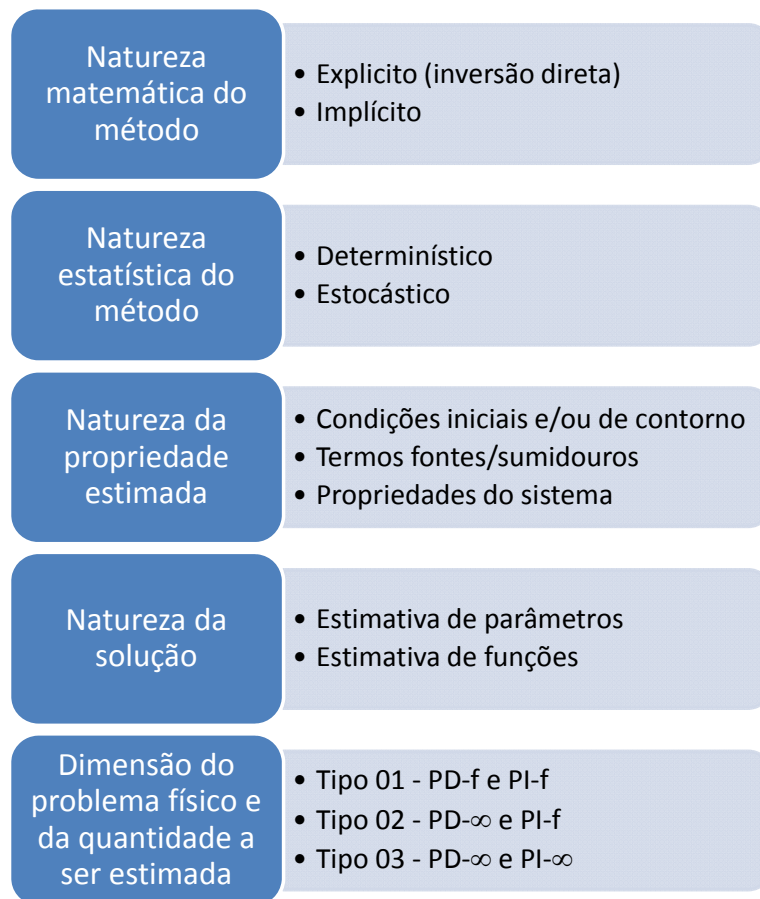


Figura 5-3 - Classificação dos problemas inversos.

5.1.3 Esquema geral da resolução de um problema inverso

O fluxograma na (Figura 5-4) mostra todo o processo de resolução de um problema inverso e cada um dos passos é explicado ao longo deste item.

- **Definição do problema** → Nesta etapa, se define os propósitos e objetivos a serem alcançados. Grande esforço deve ser empregado nesta fase para que: (1) se reduza ao máximo o número de incógnitas a serem inversamente identificadas e (2) se limite tais incógnitas a menor região possível do domínio do problema. Esta primeira etapa, se bem executada, reduz efetivamente a possibilidade de se deparar no final com um problema inverso mal posto.

- **Definição do modelo direto** → Aqui, um modelo físico/matemático que rege o comportamento do fenômeno em estudo deve ser estabelecido. Nesta etapa, métodos numéricos (método dos elementos finitos MEF, método dos elementos de contorno MEC, método das diferenças finitas MDF, etc.) devem ser aplicados para

uma análise discreta e direta do problema. Modelos analíticos também podem ser usados, apesar de estes apresentarem aplicabilidade restrita.

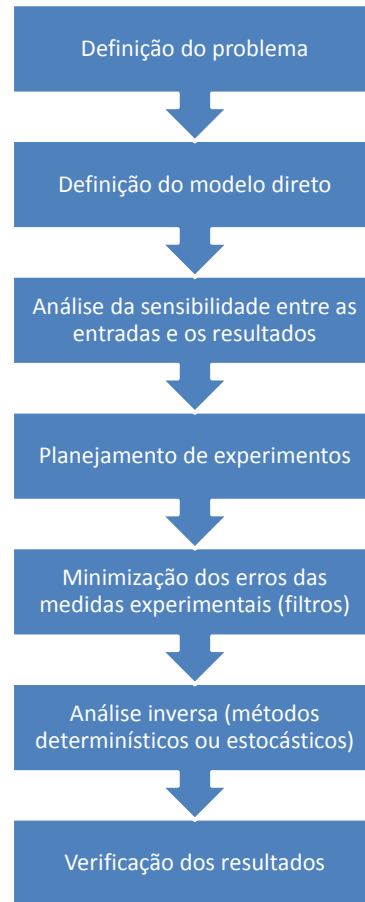


Figura 5-4 - Processo geral de resolução dos problemas inversos.

- **Análise de sensibilidade** → Para obterem-se bons resultados na análise inversa e evitar ao máximo os problemas causados pela má postura do problema, deve-se buscar a máxima sensibilidade possível entre as saídas ou efeitos e os parâmetros de entrada ou causas do modelo que rege o comportamento do problema. Esta análise da sensibilidade é realizada com o modelo direto utilizado, e o resultado desta análise apontará ou não a necessidade de promover modificações neste modelo.

- **Planejamento de experimentos** → A escolha dos métodos de medida adequados, dos tipos de equipamento para o ensaio e a gravação dos dados, e a análise das leituras são realizados nesta fase. Um dos pontos mais delicados na análise de problemas inversos é a quantidade de leituras experimentais tomadas,

que na maioria das vezes não são suficientes para se descrever de forma única o modelo procurado, além de conterem certo grau de imprecisão.

- **Minimização dos erros nas medidas** → Os dados obtidos experimentalmente apresentam erros e ruídos que comprometem os resultados obtidos na inversão do problema em análise. Portanto, deve-se tentar eliminar o tanto quanto possível tais ruídos mediante a utilização de filtros. Os filtros devem ser aplicados sobre os dados experimentais antes de eles serem utilizados para a análise inversa, melhorando os resultados e diminuindo o problema de mau posicionamento do problema inverso.

- **Análise inversa** → Aqui, os dados experimentais filtrados são os parâmetros de entrada, que alimentam o “solver” inverso desenvolvido nesta fase. Para esta etapa, há várias formas de se realizar a inversão do problema; para casos mais simples uma inversão direta do sistema de equações que rege o problema pode ser a melhor maneira para gerar o modelo inverso. No caso de problemas mais complexos onde não é possível a utilização da solução anteriormente citada, lança-se mão de métodos mais sofisticados como os métodos de otimização, minimização, regularização e até ferramentas ainda mais modernas como os métodos evolutivos (algoritmo genético, redes neurais e colônias de formiga) para a geração do modelo inverso.

- **Verificação dos resultados** → Procura-se, aqui, assegurar-se que os resultados obtidos na análise inversa são fisicamente significativos e confiáveis. Esta verificação pode ser feita através de comparações com os resultados obtidos com o modelo direto. O resultado desta verificação apontará ou não a necessidade de modificações no modelo inverso e experimental utilizado.

5.1.4 Problema mal-posto

Por volta de 1902, o matemático francês Jacques Hadamard definiu as condições requeridas para um problema ser considerado bem posto, que são:

- (1) Existência da solução;
- (2) Unicidade da solução;
- (3) A solução tem uma dependência contínua e suave com os dados de entrada.

Matematicamente os problemas inversos pertencem à classe de problemas ditos mal postos, que em essência, são aqueles problemas em que uma das condições acima citadas não é obedecida.

As duas últimas condições são frequentemente desobedecidas no tratamento de problemas inversos. A não satisfação da condição de unicidade da solução implica que para um conjunto de dados aferidos na calibração do modelo têm-se diferentes campos de resposta. Com relação à condição (3), as leituras não são na maioria das vezes suficientemente precisas para que o problema seja estável, com isto pequenos erros nos dados lidos podem levar a grandes erros na determinação dos parâmetros do problema inverso.

5.2 Métodos de resolução de problemas inversos

Existe uma série de métodos e técnicas para a resolução de problemas inversos. Estes métodos estão agrupados em duas grandes famílias:

- 1) Métodos determinísticos - Nestes métodos, do modelo direto, correspondente ao problema inverso de interesse, isolam-se as variáveis relevantes ao problema inverso (método explícito) ou as variáveis que de forma indireta gerem subsídios para o cálculo das variáveis inversas de interesse (método implícito). Gera-se com isto, um modelo inverso derivado do modelo direto. Busca-se nestes métodos adicionar o máximo de informação obtida experimentalmente ao sistema inverso, gerando um sistema com um número de equações superior ao número de variáveis, fazendo-se necessário o uso de métodos de minimização e regularização para resolução do sistema resultante.
- 2) Métodos estocásticos - Nesta classe de métodos, as variáveis relevantes ao problema inverso são obtidas pela busca via minimização ou maximização (a depender do caso), no universo de prováveis soluções, de uma função objetivo que relaciona os efeitos calculados na análise direta com os observados experimentalmente. Nesta família de métodos se enquadram diversos algoritmos de otimização, programação evolutiva e de inteligência artificial. Ou seja, métodos que têm origem em eventos/processos aleatórios (não determinísticos).

Neste item serão apresentados os princípios básicos de uma serie de técnicas utilizadas neste trabalho para o tratamento dos problemas inversos investigados e posteriormente tratados no (Item 5.3).

5.2.1 Inversão direta

A inversão direta é um método restrito e sua apresentação nesse texto tem uma finalidade mais didática do que propriamente de torná-la um esquema metodológico geral a ser seguido na resolução de problemas inversos. A inversão direta só é aplicada no campo das soluções analíticas e em problemas discretos quando estes apresentam um sistema inverso bem posto, o que acontece com pouquíssimos problemas da ciência e da engenharia, particularizando muito o campo de aplicabilidade deste método. Para introduzir o tema, considere-se aqui um modelo matemático conceitualmente simples: sistemas de equações algébricas lineares. Nesta ocasião apresentado em uma notação matricial pela (Equação 5-1) e representando o modelo matemático que rege o comportamento direto de um problema genérico da engenharia.

$$[A]\{x\} = \{b\} \leftrightarrow Ax = b \quad \text{Equação 5-1}$$

Onde $[A]$ é a matriz do sistema direto, $\{b\}$ é o vetor de entrada do modelo direto e $\{x\}$ é o vetor de parâmetros desconhecido do sistema. Se a matriz $[A]$ é quadrada e não singular, então a inversão apresentada na (Equação 5-2) existe e a solução deste novo sistema fornece um vetor $\{b\}$ unicamente definido.

$$[A]^{-1}\{b\} = \{x\} \leftrightarrow A^{-1}b = x \quad \text{Equação 5-2}$$

Assim, efetuando-se as modificações devidas, o problema inverso fica representado pelo sistema linear dado por:

$$\left. \begin{array}{l} [K] = [A]^{-1} \\ \{f\} = \{b\} \\ \{u\} = \{x\} \end{array} \right\} [K]\{f\} = \{u\} \leftrightarrow Kf = u, \text{ com } [K] \in \mathbb{R}^{m \times m}, \{f\} \text{ e } \{u\} \in \mathbb{R}^m \quad \text{Equação 5-3}$$

Onde $\{u\}$ é um vetor de dados ou observações, $\{f\}$ é o vetor de parâmetros a serem determinados e $[K]$ é a matriz $m \times m$ do problema inverso.

O problema desta técnica é que na maioria das aplicações da engenharia o sistema resultante não contém as informações necessárias para torná-lo unicamente determinado, sendo necessária a adição de equações que fornecerão mais informações ao sistema tornando possível a obtenção de uma solução única ou pelo menos mais confiável. O resultado disto é um sistema retangular, que também pode ser interpretado como um problema sobre-determinado, onde existem mais equações que incógnitas. Problemas desta natureza são as estruturas matemáticas típicas de muitos problemas inversos, para os quais existem os métodos de minimização e regularização para o seu tratamento.

5.2.2 Mínimos quadrados

Tomando a linha de raciocínio apresentada no (item 5.2.1), vê-se que muitos problemas na ciência e na engenharia podem ser formulados como problemas inversos lineares, isto é, problemas em que o modelo matemático que rege seu comportamento inverso é expresso por um sistema linear, como mostrado na (Equação 5-4).

$$[K]\{f\} = \{u\} \leftrightarrow Kf = u, \text{ com } [K] \in \mathbb{R}^{m \times n}, \{f\} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \{u\} \in \mathbb{R}^m \quad \text{Equação 5-4}$$

Onde $\{u\}$ é um vetor de dados ou observações, $\{f\}$ é o vetor de parâmetros incógnitos e $[K]$ a matriz $m \times n$ do modelo inverso. Se $m = n$ e $[K]$ não singular o modelo inverso fica expresso pela (Equação 5-3) e sua solução é unicamente determinada. Porém, a matriz $[K]$ do modelo inverso é frequentemente quase singular ou mesmo singular e, além disto, por se buscar fazer mais leituras que o número de incógnitas, o sistema se torna sobre determinado com $m > n$. Nestes casos, uma abordagem natural, porém não única e nem sempre a mais correta, é determinar a solução do sistema da (Equação 5-4) pelo método dos mínimos quadrados.

O método dos mínimos quadrados é um procedimento matemático que busca encontrar a curva que melhor se ajusta a um conjunto de pontos de uma dada amostra de maneira a minimizar o quadrado das distâncias entre esta curva e estes pontos. Assim, para o sistema apresentado na (Equação 5-4), com $m \geq n$ a solução em mínimos quadrados \hat{u} é a solução do seguinte problema:

$$\hat{f} = \min_{f \in \mathbb{R}^n} \|Kf - u\|^2 \quad \text{Equação 5-5}$$

Matricialmente pode-se escrever o processo de resolução por mínimos quadrados do sistema expresso na (Equação 5-4), representado pelo problema da (Equação 5-5) como se segue:

$$\underbrace{[K]_{n \times m}^T [K]_{m \times n}}_{\tilde{K}} \underbrace{\{f\}_{n \times 1}}_{\tilde{f}} = \underbrace{[K]_{n \times m}^T \{u\}_{m \times 1}}_{\tilde{u}} \leftrightarrow \tilde{K} \tilde{f} = \tilde{u} \quad \text{Equação 5-6}$$

5.2.3 Decomposição em valor singular

A decomposição em valor singular (SVD – Singular Value Decomposition) é outro método utilizado, que se mostra uma opção muito interessante na busca de soluções estáveis, em casos que o sistema inverso apresenta um número de equações superior ao de incógnitas. Basicamente, realiza-se a obtenção de uma matriz inversa generalizada da matriz retangular.

Considerando-se novamente o sistema da (Equação 5-4), que representa o comportamento de um problema inverso genérico, inicialmente o método SVD da matriz $[K]$ promover uma fatoração na forma mostrada a seguir:

$$[K] = [U][S][V]^T = USV^T \quad \text{Equação 5-7}$$

Onde $[U]$ é a matriz que tem suas colunas formadas por autovetores de $[K][K]^T$ e $[V]$ a matriz que tem suas colunas formadas por autovetores de $[K]^T[K]$ (além disto, elas são quadradas e ortogonais) $[S]$ é a matriz $m \times n$ formada pela matriz diagonal $[\Sigma]$ que tem sua diagonal formada por autovalores ordenados ($\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_m$) da matriz $[K]^T[K]$ e o restante de suas linhas ou colunas,

dependendo da relação entre m e n , nulas (Equação 5-9). Essencialmente, valem as condições:

$$[U]^T[U] = [I] \text{ e } [V]^T[V] = [I] \quad \text{Equação 5-8}$$

$$[S] = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ se } m > n \\ \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} \text{ se } m < n \end{cases} \quad \text{Equação 5-9}$$

Assim, com a aplicação do processo de decomposição em valor singular sobre a matriz $[K]$ do sistema ilustrado na (Equação 5-4), obtém-se a nova configuração para o sistema.

$$[K]\{f\} = \{u\} \rightarrow \underbrace{USV^T}_{\hat{K}} \underbrace{f}_{\hat{f}} = \underbrace{u}_{\hat{u}} \leftrightarrow \hat{K}\hat{f} = \hat{u} \quad \text{Equação 5-10}$$

A solução $\{\hat{f}\}$ pode ser obtida invertendo-se a matriz $[\hat{K}]$ da (Equação 5-10), assim:

$$\hat{f} = \hat{K}^{-1}\hat{u}, \text{ com } \hat{K}^{-1} = VS^{-1}U^T \quad \text{Equação 5-11}$$

5.2.4 Regularização de Tikhonov

A regularização de Tikhonov é um dos mais populares métodos de regularização para problemas mal postos. Tomando-se novamente como base o sistema apresentado na (Equação 5-4) que representa matematicamente o comportamento de um problema inverso genérico, na maioria das vezes sua matriz $[K]$ é mal posta. Assim, a computação de uma solução aproximada significativa e estável deste sistema, geralmente requer a sua substituição por outro muito próximo e que seja muito menos sensível às perturbações. A esta substituição dá-se o nome de regularização. Uma das formulações da regularização de Tikhonov consiste na substituição deste sistema por um problema de minimização como apresentado a seguir:

$$\hat{f} = \min_{f \in \mathbb{R}^n} \{ \|Kf - u\|^2 + \alpha \|f\|^2 \} \quad \text{Equação 5-12}$$

Onde $\alpha \geq 0$ é o parâmetro de regularização. Em todo este trabalho a notação $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana.

Matricialmente pode-se escrever o processo de regularização de Tikhonov expresso pelo problema de minimização da (Equação 5-12) na forma apresentada na (Equação 5-13), onde $[I]$ é a matriz identidade. O parâmetro de regularização (α) é responsável pela imposição de uma perturbação na diagonal principal do sistema. Para os problemas inversos tratados neste texto, a ordem de grandeza para o valor de (α) tem relação direta com o grau de precisão dos dados de entrada.

$$\left. \begin{aligned} ([K]_{n \times m}^T [K]_{m \times n} + \alpha [I]_{n \times n}) \{f\} &= [K]_{n \times m}^T \{u\} \\ \underbrace{(K^T K + \alpha I)}_{K_\alpha} \underbrace{f}_{f_\alpha} &= \underbrace{K^T u}_{u_\alpha} \\ [K_\alpha]_{n \times n} \{f_\alpha\}_{n \times 1} &= \{u_\alpha\}_{n \times 1} \end{aligned} \right\} K_\alpha f_\alpha = u_\alpha \quad \text{Equação 5-13}$$

A solução regularizada $\{u_\alpha\}$ pode ser obtida então utilizando qualquer algoritmo de resolução de sistema ou invertendo-se a matriz $[K_\alpha]$ da (Equação 5-13). Assim tem-se:

$$\{f_\alpha\} = [K_\alpha]^{-1} \{u_\alpha\} \leftrightarrow f_\alpha = K_\alpha^{-1} u_\alpha \quad \text{Equação 5-14}$$

5.2.5 Algoritmo genético

Uma forma interessante de se interpretar um problema inverso é considerá-lo um problema de otimização. Nesse caso, para obter sua solução, busca-se minimizar o valor para a função objetivo dada, por exemplo, pelo somatório dos resíduos quadrados:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_d} [V_{Calc_i}(\vec{x}) - V_{Exp_i}]^2, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N_d \quad \text{Equação 5-15}$$

Onde $V_{calc_i}(\vec{x})$ representa os valores das grandezas adotadas na função objetivo, calculados a partir do modelo direto, quando se utilizam os parâmetros de interesse do problema inverso \vec{x} ; V_{Exp_i} são os valores observados experimentalmente das grandezas da função objetivo e N_d representa o número total de dados experimentais disponíveis.

Assim, quando se obtém uma boa estimativa para \vec{x} , os valores calculados $V_{calc_i}(\vec{x})$ se aproximam dos valores experimentais V_{Exp_i} , levando a minimização da função custo apresentada na (Equação 5-15). Graficamente representa-se este problema como ilustra a (Figura 5-5).

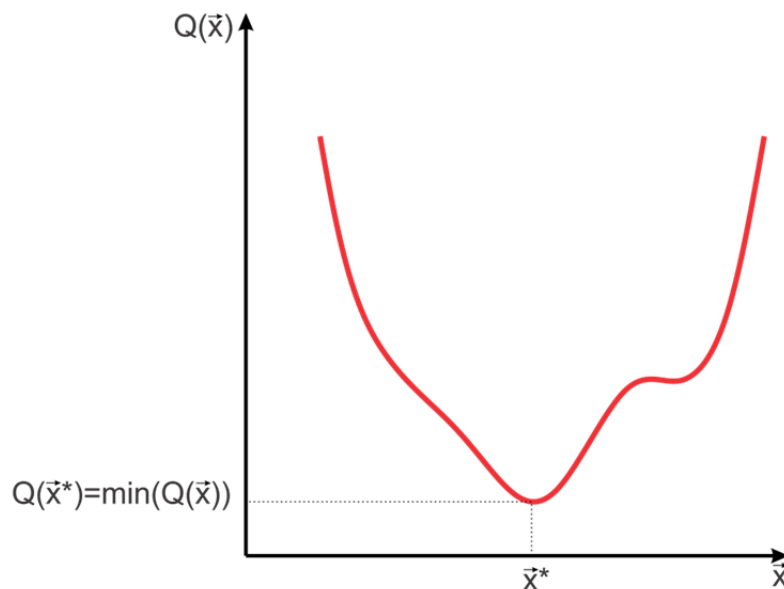


Figura 5-5 - Problema inverso sob a ótica de um problema de otimização.

Então, o problema inverso sob esta ótica, consiste em buscar o valor \vec{x}^* para o qual $Q(\vec{x})$ seja o mínimo, isto é:

$$\vec{x}^* = ? \rightarrow Q(\vec{x}^*) = \min(Q(\vec{x}))$$

Equação 5-16

Para resolução deste tipo de problema há uma série de técnicas apresentadas na literatura, porém uma abordagem hoje em dia muito utilizada é a que se baseia em métodos de computação evolucionária. No que segue, serão apresentadas as ideias gerais da técnica de algoritmo genético escolhida para o tratamento de alguns dos problemas inversos abordados neste trabalho.

Segundo Holland (1975), os Algoritmos Genéticos são algoritmos de busca e otimização global baseados nos paradigmas genéticos e evolucionários. Essencialmente, eles foram criados com o intuito de imitar alguns dos processos observados na evolução natural das espécies como, por exemplo, os mecanismos da seleção natural e da recombinação genética. Estes algoritmos modelam uma solução para um problema específico em uma estrutura de dados como a de um cromossomo e aplicam operadores que recombina estas estruturas preservando informações críticas.

Uma implementação do algoritmo genético começa sempre com a geração (geralmente randômica) de uma população de indivíduos, \vec{x}^n , com $n = 1, 2, \dots, N_1$, onde N_1 é o número de indivíduos, representados pelos cromossomos, que são os elementos orgânicos responsáveis pela codificação genética dos indivíduos. Estas estruturas são então avaliadas através do cálculo da aptidão de cada indivíduo usando, por exemplo, uma função de custo como a apresentada na (Equação 5-15). Os indivíduos que forem considerados mais aptos depois da avaliação da população, ou seja, os indivíduos que minimizem a função de custo, $Q(\vec{x})$, são selecionados para o processo de cruzamento dando origem a uma nova geração. A nova geração é produzida proporcionando oportunidades reprodutivas de forma que cromossomos que representam uma solução "melhor" tenham maiores chances de se reproduzirem, passando assim seu material genético para a próxima geração. Aqueles que representam uma solução "pior" são descartados. Além do processo de cruzamento entre os indivíduos da população, um operador de mutação também é aplicado à população gerando com isto alterações nos indivíduos de forma aleatória, como acontece no processo de evolução natural das espécies. Este procedimento é repetido por certo número de gerações, N_g , previamente estabelecida, obtendo-se assim uma solução aproximada, \vec{x}^* , para o problema. O fluxograma da (Figura 5-6) descreve de forma geral e breve os procedimentos de um AG.

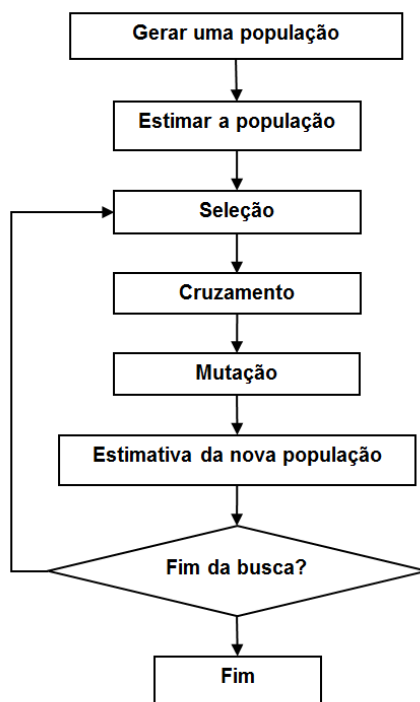


Figura 5-6 - Fluxograma dos processos envolvidos em um AG.

5.3 Problemas inversos na elasticidade

Muitos são os problemas inversos que podem ser estabelecidos a partir das formulações dos problemas diretos encontrados na teoria da elasticidade. Assim, antes de dar início a abordagem dos problemas inversos de interesse nesta tese, considere-se o problema direto que dá origem aos mesmos, (Figura 5-7). Nele, destaca-se o domínio de um sólido elástico isótropo bidimensional, Ω , definido por um contorno Γ , de um meio infinito, Ω^* , formado por dois subdomínios, Ω_I e Ω_{II} . No contorno deste sólido são aplicadas condições de contorno dividindo o mesmo em duas partes. Uma, onde estão aplicadas condições de contorno de deslocamento (Dirichlet), outra onde as condições de contorno aplicadas são do tipo forças de superfície (Neuwmán). Na interface entre os subdomínios são aplicadas condições de compatibilidade de deslocamento e de forças de superfície.

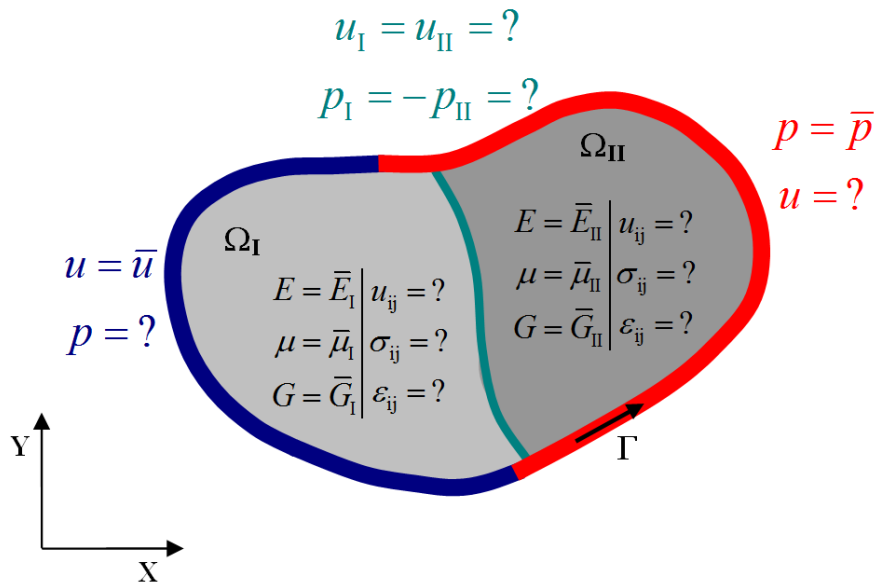


Figura 5-7 - Problema direto na elasticidade.

Assim, o problema consiste na determinação das forças de superfície, dos deslocamentos não prescritos no contorno e dos campos de deslocamentos, tensões e deformações desenvolvidos sobre os subdomínios decorrentes das ações aplicadas. A formulação para o tratamento deste problema via MEC está descrita no capítulo 4 deste texto.

Este item tem por objetivo descrever os problemas inversos de interesse para este trabalho (derivados do problema direto descrito), as formulações e o modo de aplicação das técnicas descritas no (Item 5.2) para resolução dos mesmos. Os problemas contemplados na fase de implementação computacional deste trabalho, foram: estimativa das propriedades elásticas médias dos materiais que compõem o sistema em análise, problemas inversos de valor de contorno e o problema de estimativa de parâmetros do modelo coesivo. Neste último, além de conhecimentos da teoria da elasticidade é necessário à aplicação de conceitos da mecânica da fratura, principalmente no que tange ao modelo coesivo para simulação de fraturas.

5.3.1 Estimativa das propriedades elásticas

Neste tipo de problema o objetivo é a identificação de parâmetros do material que compõe a estrutura. Estes parâmetros podem ser propriedades das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura. Consideram-se conhecidas a

geometria, as condições iniciais e de contorno, e os campos de deslocamento ou tensão desenvolvidos na estrutura, porém, as propriedades dos materiais que compõe a estrutura são desconhecidas (Figura 5-8).

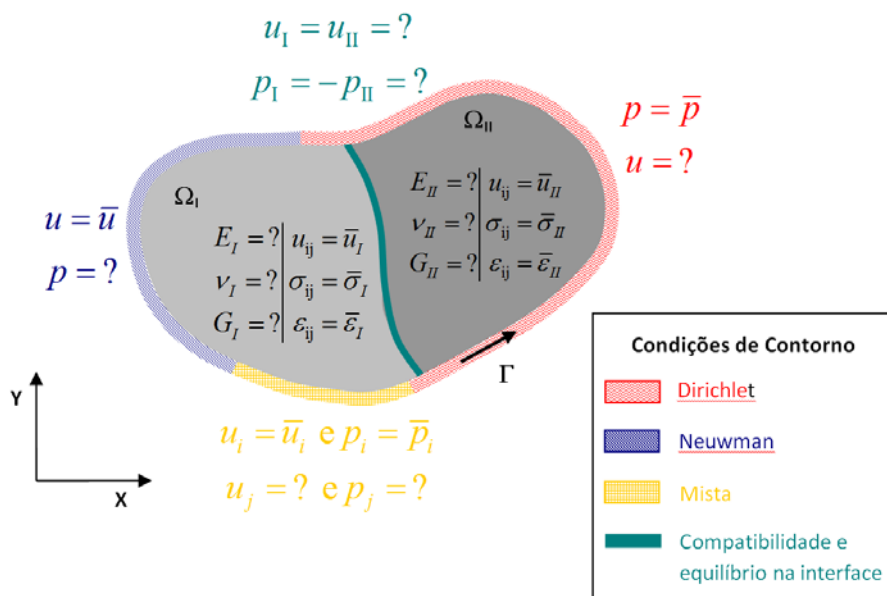


Figura 5-8 - Problema inverso de estimativa das propriedades mecânicas do material.

Neste trabalho, este problema é tratado de forma estocástica via algoritmo genético, onde cada indivíduo representado pelo conjunto de pares de incógnitas do problema (E e ν), um par para cada região da estrutura em análise, é avaliado pela comparação dos deslocamentos obtidos pela análise direta via formulação do método dos elementos de contorno com os valores obtidos experimentalmente. Assim, quanto mais próximos os deslocamentos obtidos pelo MEC estão dos valores experimentais correspondentes, mais apto é este indivíduo formado pelo conjunto de propriedades elásticas (E e ν). Os indivíduos com maior aptidão, isto é, que apresentavam menores valores para função objetivo (Equação 5-17), são selecionados, cruzados e algumas vezes mutados para dar origem a uma nova geração de indivíduos. Este procedimento é repetido por um número pré-determinado de gerações chegando a um conjunto de possíveis soluções para o problema.

$$F(E, \nu) = \sum_{i=1}^N \left[Ux_{Calc_i}(E, \nu) - Ux_{Exp_i} \right]^2 + \left[Uy_{Calc_i}(E, \nu) - Uy_{Exp_i} \right]^2 \quad \text{Equação 5-17}$$

Onde $Ux_{calc_i}(E, \nu)$ e $Uy_{calc_i}(E, \nu)$ representam os valores do deslocamento na direção (x e y) respectivamente, (obtido pela análise direta via MEC adotando-se o conjunto de pares de valores (E e ν) como parâmetros dos materiais que compõem as regiões da estrutura em análise), no i-ésimo ponto onde se conhecem os valores experimentais dos deslocamentos Ux_{Exp_i} e Uy_{Exp_i} ; (N) representa o número de pontos onde se obteve experimentalmente os valores dos deslocamentos.

5.3.2 Problema inverso de valor de contorno

Um problema inverso também importante no âmbito da teoria da elasticidade é a determinação dos valores dos deslocamentos e forças de superfície na interface e no contorno de um sólido bidimensional (composto por mais de um material), a partir de dados suplementares (principalmente de deslocamentos) obtidos experimentalmente em alguns pontos internos. Neste tipo de problema há o desconhecimento dos valores de deslocamento e forças de superfície ao longo de uma determinada parte do contorno e da interface entre as regiões do sólido (Figura 5-9). Para suprir a necessidade de informações ao sistema tornando possível a determinação destes valores, utilizam-se dados de deslocamentos em pontos internos, que podem ser obtidos facilmente para um problema 2D utilizando a correlação de imagem. A formulação MEC para o tratamento deste problema inverso está baseada nas equações algébricas para o problema direto apresentadas no capítulo 3. O que há de diferente na formulação apresentada neste item é que as informações de condições de contorno conhecidas são insuficientes para tornar o sistema determinado, sendo necessária a adição de equações escritas sobre pontos internos, onde é possível obter experimentalmente os valores dos deslocamentos, fornecendo-se as informações necessárias para a resolução do problema.

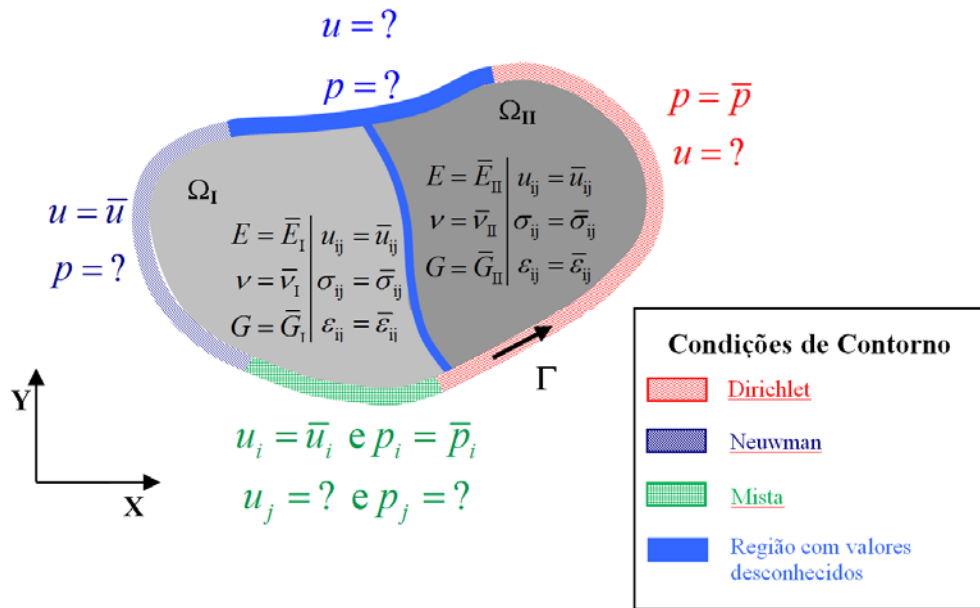


Figura 5-9 - Problema inverso de valor de contorno.

Para apresentar a formulação MEC deste problema inverso será considerado o caso particular de um domínio com uma única região, e que pode ser facilmente estendido para o caso de sólidos formado por várias regiões. Para este caso, o sistema correspondente de equações é convenientemente dividido em dois blocos de equações (subsistemas) da seguinte forma:

A) Um bloco contendo as equações algébricas escritas para todos os nós do contorno. Neste bloco, dois sub-blocos são definidos: o primeiro, relacionado com os valores dos deslocamentos e forças de superfície prescritas, indicado pela letra subscrita (p), e um segundo sub-bloco relacionados com as condições de contorno desconhecidas, indicado pela letra o subscrita (d). Assim, o sistema de equações de contorno apresentado no capítulo anterior pode ser rearranjado para separar no vetor nodal os valores de contorno de deslocamentos e forças de superfície em blocos de conhecidos e desconhecidos (Equação 5-18).

$$[H_d \quad H_p] \begin{Bmatrix} u_d \\ u_p \end{Bmatrix} = [G_d \quad G_p] \begin{Bmatrix} p_d \\ p_p \end{Bmatrix} \tag{Equação 5-18}$$

As matrizes H_d , H_p , G_d e G_p são construídas com os coeficientes das matrizes H e G da formulação direta do MEC referente a cada sub-região que constitui o problema.

B) E outro bloco de equações algébricas que representam os deslocamentos dos pontos internos selecionados. A (Equação 5-19) é obtida aplicando-se as equações de ponto interno para cálculo de deslocamento da formulação direta do MEC sobre pontos internos onde se conhecem os deslocamentos (obtidos experimentalmente via correlação de imagem, por exemplo) e efetuando-se o rearranjo dos valores de contorno prescritos e desconhecidos. Os valores conhecidos (experimentalmente) de deslocamentos nos pontos internos são expressos por $\{u_e\}$:

$$u_e = -[H'_d \quad H'_p] \begin{Bmatrix} u_d \\ u_p \end{Bmatrix} + [G'_d \quad G'_p] \begin{Bmatrix} p_d \\ p_p \end{Bmatrix} \quad \text{Equação 5-19}$$

As matrizes H'_d , H'_p , G'_d e G'_p são construídas com os coeficientes das matrizes H' e G' para obtenção dos deslocamentos nos pontos internos da formulação direta do MEC referente a cada sub-região que constitui o problema.

Agora, movem-se todos os valores desconhecidos para o lado esquerdo e os valores conhecidos para o lado direito em ambos os blocos de equações como ilustrado a seguir:

$$\underbrace{[H_d \quad -G_d]}_A \begin{Bmatrix} u_d \\ p_d \end{Bmatrix}_{x_d} = \underbrace{[-H_p \quad G_p]}_B \begin{Bmatrix} u_p \\ p_p \end{Bmatrix}_{y_p} \rightarrow [A]\{x_d\} = [B]\{y_p\} = \{b\} \quad \text{Equação 5-20}$$

$$\underbrace{[H'_d \quad -G'_d]}_{A'} \begin{Bmatrix} u_d \\ p_d \end{Bmatrix}_{x_d} = \underbrace{[-H'_p \quad G'_p]}_{B'} \begin{Bmatrix} u_p \\ p_p \end{Bmatrix}_{y_p} - \{u_e\}$$

$$\downarrow$$

$$[A']\{x_d\} = [B']\{y_p\} - \{u_e\} = \{b'\} \quad \text{Equação 5-21}$$

Nas relações anteriores $\{x_d\}$ e $\{y_p\}$ são os vetores de valores de contorno desconhecido e conhecido respectivamente, enquanto que $\{b\}$ e $\{b'\}$ são os vetores independentes obtidos pelo cálculo das contribuições dos valores conhecidos.

Unindo-se os dois blocos de equações e utilizando as letras em subscrito (sub) para indicar que este sistema se refere a uma determinada sub-região em análise, pode-se escrever:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [A] \\ [A'] \end{bmatrix}}_{[K]_{sub}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \{x_d\} \\ \{x\}_{sub} \end{Bmatrix}}_{\{x\}_{sub}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \{b\} \\ \{b'\} \end{Bmatrix}}_{\{f\}_{sub}} \rightarrow [A]\{x_d\} = [B]\{y_p\} = \{b\} \rightarrow [K]_{sub}\{x\}_{sub} = \{f\}_{sub} \quad \text{Equação 5-22}$$

A (Equação 5-22) é um sistema redundante de equações algébricas, escritas para uma região de um sólido, que permite calcular os valores de contorno desconhecido usando valores de deslocamentos conhecidos em pontos do domínio obtidos experimentalmente. Para um sólido formado por varias regiões de materiais diferentes devem-se combinar os subsistemas de equações escritas para todas as sub-regiões, levando-se em conta o equilíbrio de forças e compatibilidade dos deslocamentos ao longo das interfaces. Para o caso de um sólido formado por duas sub-regiões, o sistema final obtido após o acoplamento dos dois subsistemas de equações é dado por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K]_I^I & [K]_I^{II} & 0 \\ 0 & [K]_{II}^I & [K]_{II}^{II} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \{x\}_I^I \\ \{x\}_I^{II} \\ \{x\}_{II}^{II} \end{Bmatrix}}_{\{x\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \{f\}_I \\ \{f\}_{II} \end{Bmatrix}}_{\{f\}} \rightarrow [K]\{x\} = \{f\} \quad \text{Equação 5-23}$$

5.3.3 Estimativa de parâmetros do modelo coesivo

Outro problema que pode ser resolvido com a formulação apresentada no item anterior é a obtenção dos valores de parâmetros do modelo coesivo apresentado no capítulo 3, onde as interfaces entre uma sub-região e outra são modeladas no problema direto de forma a apresentarem uma lei de abertura, e o objetivo do problema inverso é identificar esta lei de abertura.

Assim, considere-se uma modificação no problema direto apresentado na (Figura 5-7) onde nos pontos pertencentes à interface entre uma sub-região e outra não se aplique mais as condições de compatibilidade de deslocamento e sim uma lei que rege o comportamento das forças normais de tração superficiais e a abertura da interface entre um subdomínio e outro (Figura 5-10). Na resolução direta deste problema o carregamento é aplicado de forma incremental (incrementos de deslocamentos impostos à estrutura, por questão de estabilidade do sistema) até se completar todo o carregamento que se pretende aplicar a estrutura, impondo-se em

cada passo de carga o equilíbrio da estrutura e a lei coesiva adota aos pontos da interface que apresentarem força de superfície normal de tração superior à crítica descrita na lei coesiva.

No problema inverso a lei que rege o deslocamento de um lado da interface em relação à outra é desconhecida (Figura 5-11). Para resolução deste problema podem-se utilizar como valores de entrada o campo de deslocamento em um dos passos de carga, calculando-se com isto os valores dos deslocamentos e das forças de superfície em ambos os lados da interface através da formulação apresentada no item anterior. Como o sistema de coordenadas utilizado nesta formulação é global (xy) faz-se a transformação dos valores lá encontrados para um sistema local (*normal e tangencial*) ao contorno, calculando-se assim, a abertura Δu e a força superficial de tração em cada ponto discretizado no contorno da interface. A união destes pontos em um gráfico (*Força superficial de tração X Abertura*) na interface dará origem à curva que representará a lei de abertura da interface em estudo.

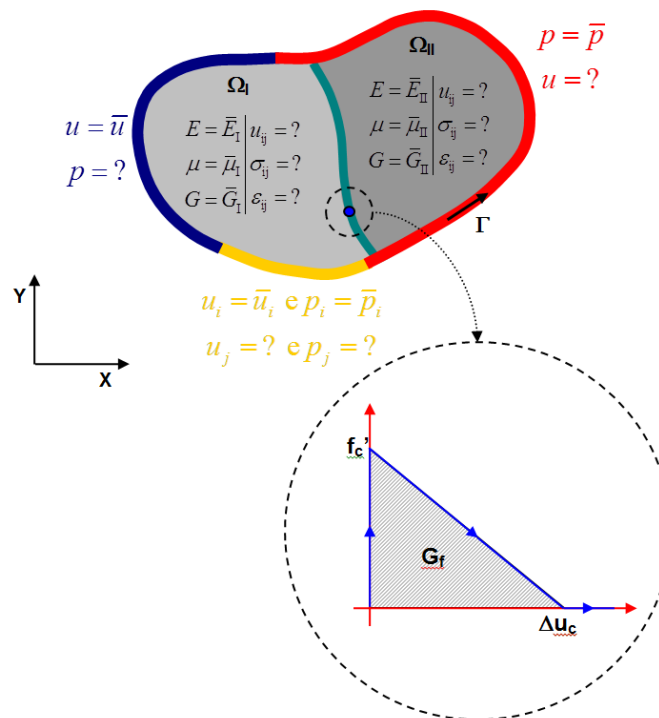


Figura 5-10 - Problema direto considerando interface coesiva entre os subdomínios.

Outra forma de se obter tal lei consiste em calcular em um dos pontos de interface a abertura e a força superficial de tração em todos os passos de carga, fornecendo para isto como dados de entrada no modelo inverso os campos de

deslocamentos em cada passo de carga. Neste caso, a abertura e a força superficial de tração no ponto do contorno da interface, que se pretende obter a lei de abertura, são calculadas pela formulação do item anterior com a posterior modificação do sistema de coordenadas global para local em cada passo de carga. Estes valores obtidos em cada passo de carga são plotados em um gráfico (*Força superficial de tração X Abertura*). Finalmente, uma interpolação é feita sobre os pontos deste gráfico para se construir uma curva que apresentará uma equação da qual serão extraídos os parâmetros do modelo coesivo de fraturamento.

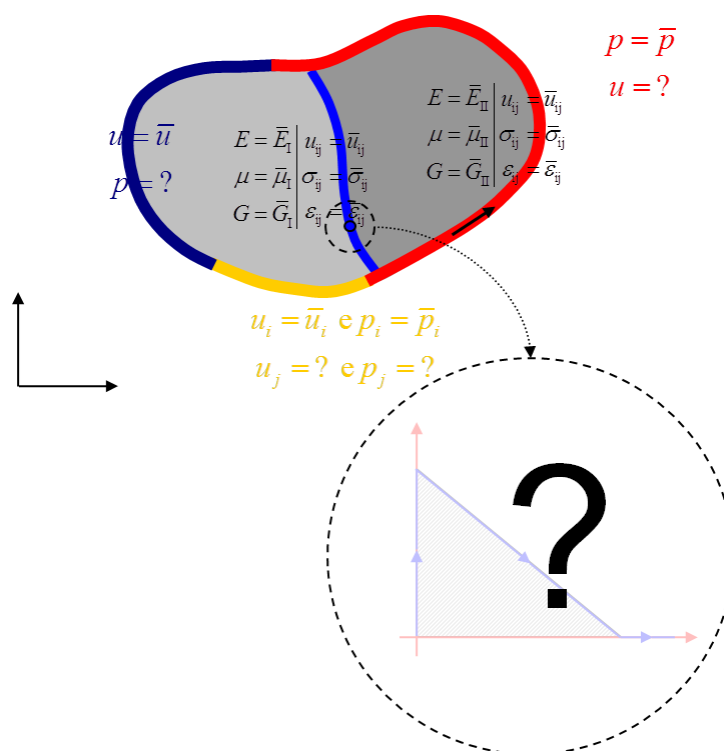


Figura 5-11 - Problema inverso de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo.

Uma abordagem estocástica via algoritmo genético também pode ser utilizada, onde cada indivíduo representado pelo conjunto de incógnitas do problema (f_{tc} , f'_t , $\Delta u'$, Δu_c e G_f , a depender do tipo de curva coesiva se pretende utilizar), é avaliado pela comparação dos deslocamentos obtidos pela análise direta via MEC, com os valores obtidos experimentalmente. Assim, quanto mais próximos os deslocamentos obtidos pelo MEC estão dos valores experimentais correspondentes, mais apto é este indivíduo (conjunto de parâmetros do modelo coesivo). Os indivíduos com maior aptidão, isto é, que apresentam menores valores para função objetivo (Equação 5-24), são selecionados, cruzados e algumas vezes multados

para dar origem a uma nova geração de indivíduos. Este procedimento é repetido por um número pré-determinado de gerações chegando a um conjunto de possíveis soluções para o problema.

$$F(E, v) = \sum_{i=1}^N \left[Ux_{Calc_i}(p_{cs}) - Ux_{Exp_i} \right]^2 + \left[Uy_{Calc_i}(p_{cs}) - Uy_{Exp_i} \right]^2 \quad \text{Equação 5-24}$$

Na relação anterior $Ux_{Calc_i}(p_{cs})$ e $Uy_{Calc_i}(p_{cs})$ representam os valores do deslocamento na direção (x e y) respectivamente, obtido pela análise direta via MEC, adotando-se o conjunto de parâmetros do modelo coesivo (p_{cs} = parâmetros do modelo coesivo: f_{tc} , f_t , $\Delta u'$, Δu_c e G_f , a depender do tipo de curva coesiva se pretende avaliar), no i-ésimo ponto onde se conhecem os valores experimentais dos deslocamentos Ux_{Exp_i} e Uy_{Exp_i} ; (N) representa o número de pontos onde se obteve experimentalmente os valores dos deslocamentos.

A humanidade começou cedo a calcular, e o surgimento desta necessidade obrigou o homem a desenvolver instrumentos que o auxiliasse a contar e calcular. Da evolução de centenas de anos na busca por instrumentos de cálculo cada vez melhores, surge o computador, hoje em dia considerado um dos principais inventos da história da humanidade para processamento de dados. O computador é capaz de aceitar informações, efetuar com elas operações programadas e fornecer resultados para a solução de problemas. Para realizar o processamento de informações, o computador precisa ser instruído a executar um conjunto de operações sobre estas informações nos retornando um conjunto de informações derivadas de interesse. Esta sequência de instruções a serem interpretadas e executadas por um processador ou por uma máquina virtual, na manipulação, redirecionamento ou modificação de um dado, informação ou acontecimento é conhecida por software ou programa de computador. Sendo assim, no presente capítulo será feita uma breve apresentação das características do programa implementado como parte integrante do desenvolvimento deste trabalho, bem como das ferramentas utilizadas para sua implementação.

6.1 Estrutura do programa

Neste item serão mostradas as características da ferramenta computacional implementada, apresentando sua estrutura de funcionamento por meio de fluxogramas.

Conforme ilustra a (Figura 6-1), o programa desenvolvido é composto por dois núcleos principais: um para análise direta e outro para análise inversa. Ambos os núcleos servem para análise de estruturas planas suportando também a modelagem de domínios compostos por regiões com materiais distintos, através da divisão do domínio em sub-regiões.

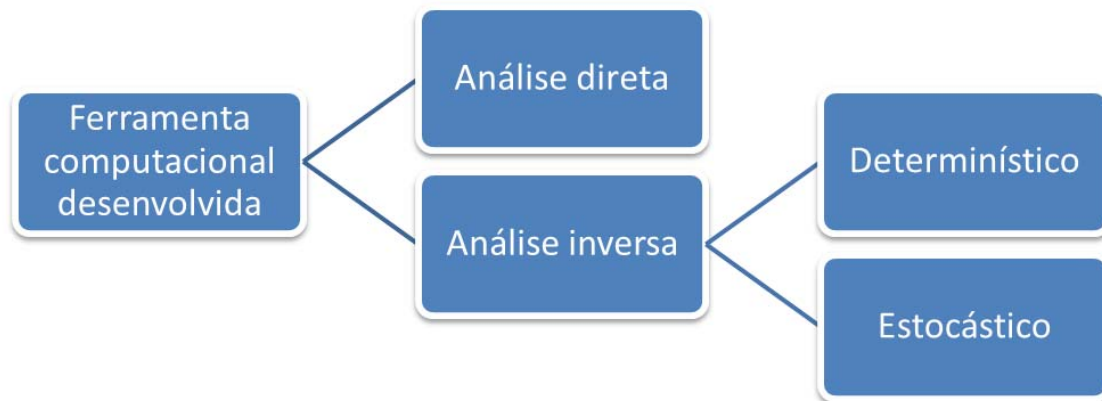


Figura 6-1 - Esquema geral do programa desenvolvido.

6.1.1 Análise direta

O módulo de análise direta é apresentado no fluxograma de funcionamento do mesmo (Figura 6-2).

Este módulo é alimentado por um arquivo de texto com os dados básicos do problema, tais como:

- Tipo do problema (EPT – Estado plano de tensão ou EPD – Estado plano de deformação);
- Geometria do problema (número de sub-regiões, número de cavidades, número de pontos internos, coordenadas dos vértices das sub-regiões e das cavidades);
- Propriedades mecânicas do material de cada sub-região (E e ν);
- Forma de discretização (número de elementos por lado do contorno);
- Condições de contorno (deslocamentos e forças de superfície prescrita);
- Parâmetros do modelo coesivo de cada interface entre uma sub-região e outra;
- Número de passos de carga para o caso de haver interface modelada com modelo coesivo.

Este arquivo é processado por um gerador onde são geradas as coordenadas dos elementos de contorno e suas conectividades, as coordenadas dos pontos internos, o vetor de valores prescritos e códigos do tipo de prescrição (força ou

deslocamento), a correspondência dos nós de um lado da interface com o outro lado, etc. Com todos estes dados, inicia-se a parte de resolução do problema. As matrizes H e G para cada sub-região são geradas e armazenadas em matrizes globais. A partir deste ponto o problema pode seguir uma das duas vias possíveis:

- Não há interface ou elas não possuem elementos coesivos: neste caso, o carregamento prescrito é aplicado todo em um único passo. São aplicadas as condições de compatibilidade e equilíbrio entre os nós das interfaces. Após a aplicação das condições de contorno e as de compatibilidade e equilíbrio na interface o sistema gerado é então resolvido, obtendo-se os valores de deslocamentos e forças de superfície não prescritos do contorno. Por fim, são geradas as matrizes H_I e G_I que são as obtidas quando se toma como pontos fontes os pontos internos ao domínio. Com os valores dos deslocamentos e forças do contorno se calculam os deslocamentos nos pontos internos.

- Interface modelada com elementos coesivos: neste caso, por se tratar de um modelo não-linear o carregamento deve ser aplicado em incrementos de carga. Aplicam-se as condições de contorno, bem como as de compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças nas interfaces. O sistema gerado é resolvido e são obtidos os valores de deslocamento e forças no contorno. Estes valores, que têm como orientações eixos globais (x e y), são passados para orientações locais (normal e tangencial) ao contorno. Um teste com os valores de forças de superfície (tractions) nos contornos das interfaces é realizado para saber se algum de seus pontos apresenta uma força superficial de tração superior ao do modelo coesivo f_{tc} ; em caso positivo, aplica-se nestes pontos a relação abertura-força de superfície de tração do modelo coesivo. Depois de aplicado todo o carregamento, os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno são obtidos. A partir daí são geradas as matrizes H_I e G_I e os valores dos deslocamentos nos pontos internos são calculados.

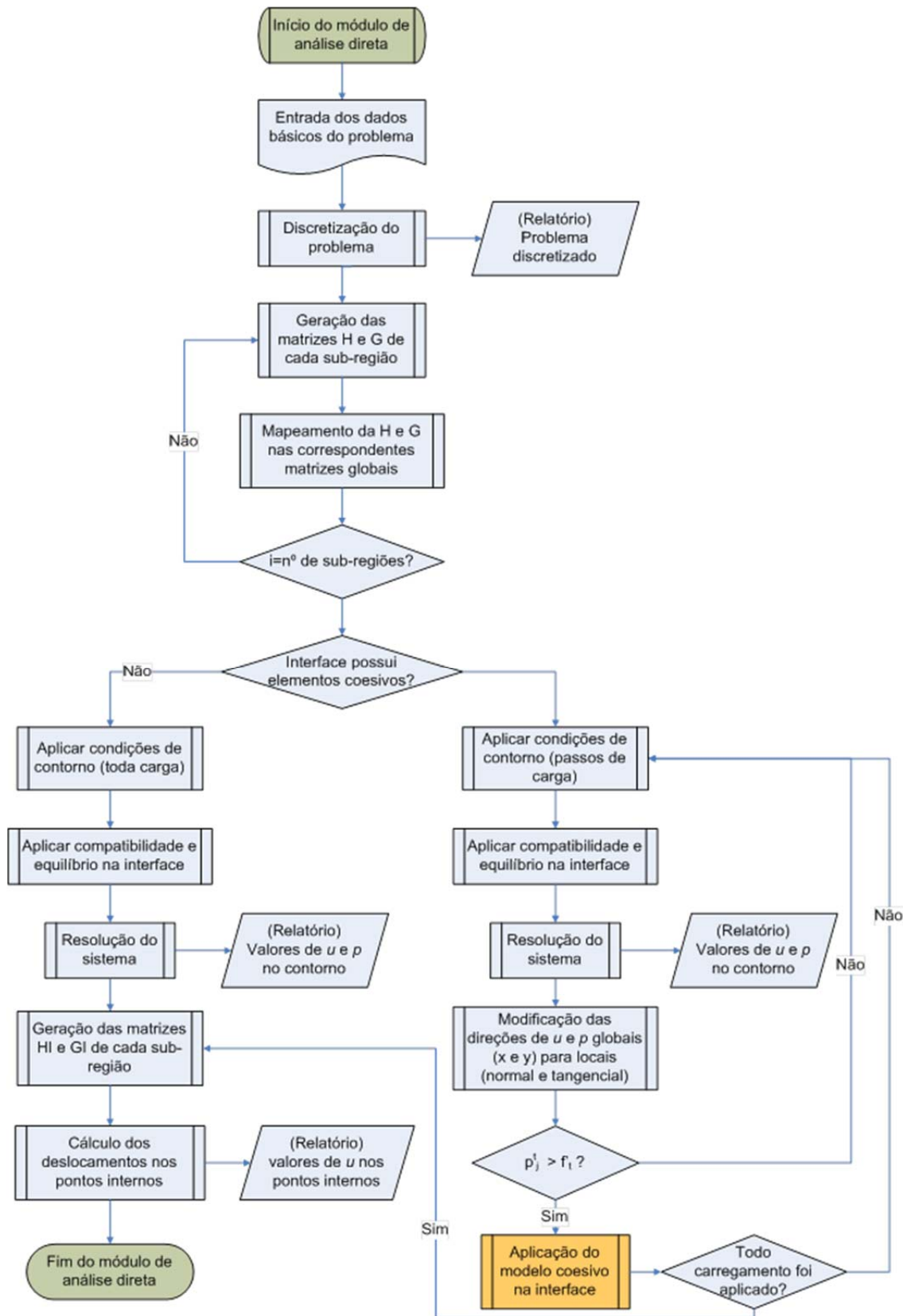


Figura 6-2 - Fluxograma de funcionamento do módulo de análise direta.

6.1.2 Análise inversa

O módulo de análise inversa é apresentado no fluxograma de funcionamento do mesmo (Figura 6-3).

O módulo inverso é alimentado com um arquivo similar ao apresentado para o módulo direto com as seguintes diferenças:

- Condições de contorno: não se conhece parte ou todas as condições de contorno (deslocamentos e forças superficiais aplicadas) do problema, pois elas são as incógnitas em nosso problema inverso de valores de contorno;

- Parâmetros do modelo coesivo: os parâmetros do modelo coesivo na interface de ligação entre uma sub-região e outra também não são fornecidos, já que estes parâmetros são os valores incógnitos no problema inverso de estimativa de parâmetros do modelo coesivo;

- Deslocamentos nos pontos internos – Os deslocamentos nos pontos no interior do domínio são aqui tratados como dados de entrada e não como valores incógnitos. São eles que nos fornecem informações para geração das equações que faltam para formar o sistema para o problema inverso. Eles devem ser avaliados experimentalmente (via correlação de imagens digitais) para completar o arquivo de entrada para o módulo inverso do programa.

Com o arquivo de entrada descrevendo o problema inverso gerado, inicia-se sua resolução com a geração das matrizes H , G , HI e GI para cada sub-região, unindo-as em uma matriz global do problema. Esta matriz é manipulada para aplicação das condições de contorno que se conhecem (se houver) e a aplicação do equilíbrio de forças nas interfaces entre sub-regiões. O resultado deste processo é um sistema de equações quase sempre sobre determinado, isto é, com um número de equações maior que o número de incógnitas. Para a resolução deste sistema aplica-se uma das técnicas de regularização apresentadas no capítulo anterior, obtendo-se um sistema determinado e com solução possível. Os valores avaliados com a resolução deste sistema são os valores de contorno procurados. As orientações destes valores são transformadas de globais (x e y) para locais (normal e tangencial) ao contorno, para poder avaliar a abertura nas interfaces entre sub-regiões. Com os valores das aberturas nas interfaces e a força de superfície a tração

no contorno delas pode-se reconstruir a curva do modelo coesivo e obter os parâmetros que a descreva.

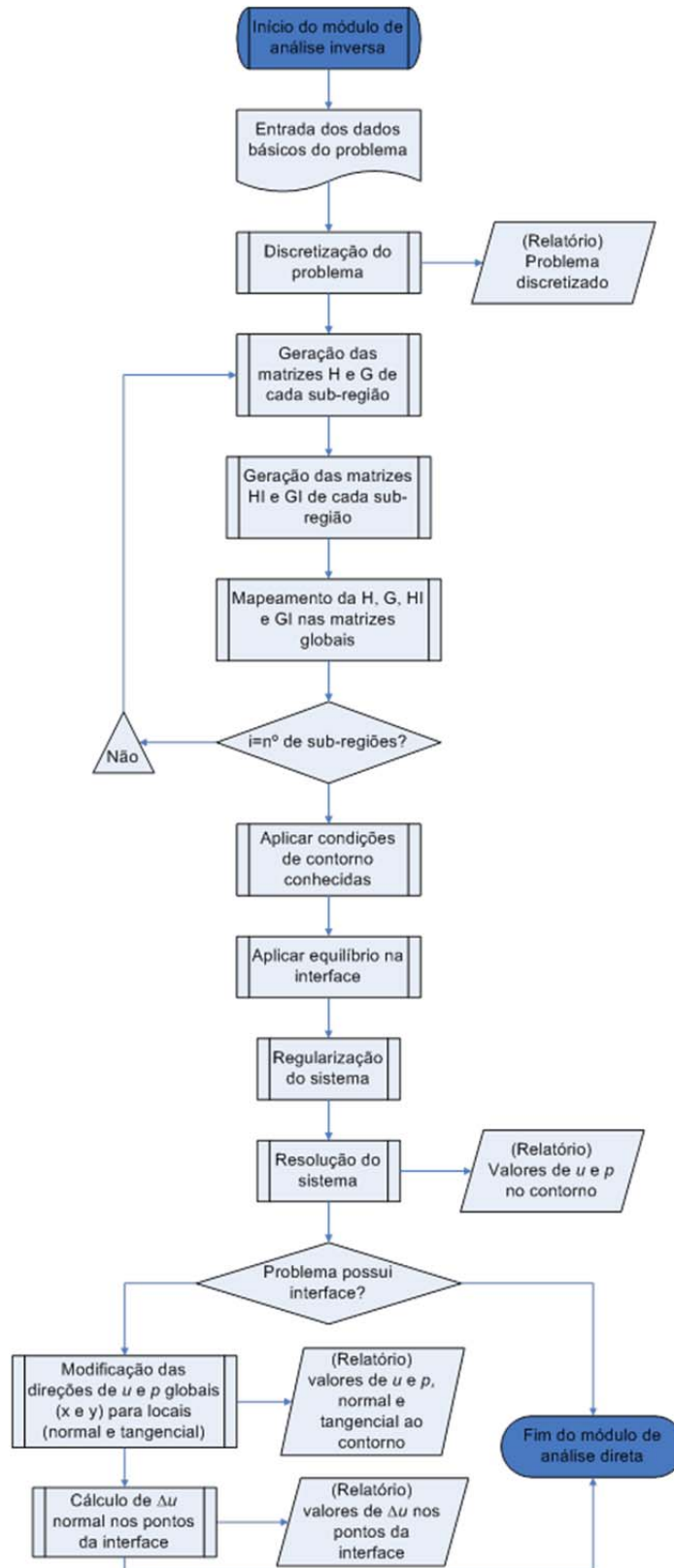


Figura 6-3 - Fluxograma de funcionamento do módulo de análise inversa.

6.2 Interface gráfica

Neste item será demonstrada uma interface gráfica desenvolvida em Python para facilitar e agilizar a geração e análise de problemas com a ferramenta computacional implementada. Facilidades como geração de sub-regiões, geração da malha de elementos de contorno, aplicação de condições de contorno, foram desenvolvidas neste programa. No pós-processamento, gráficos de mapa de cor, isolinhas e de dispersão podem ser gerados para análise dos resultados.

6.2.1 Plataforma de desenvolvimento

Para o desenvolvimento desta interface gráfica utilizou-se a linguagem de programação Python juntamente com a biblioteca gráfica Matplotlib e a biblioteca visual PyQt.

Python é uma linguagem de altíssimo nível, orientada a objeto, de tipagem dinâmica e forte, interpretada e interativa. Ela possui uma sintaxe clara e concisa, favorecendo a legibilidade e a produtividade. A linguagem inclui diversas estruturas de alto nível (listas, dicionários, data/hora, complexos e outras) e uma vasta coleção de módulos prontos para uso, além de frameworks de terceiros (caso da Matplotlib e PyQt) que podem ser adicionados. Possui recursos encontrados nas linguagens mais modernas, tais como: geradores, introspecção, persistência, metaclasses e unidades de teste. Python é uma linguagem com suporte a multiparadigmas, isto é, possibilita o desenvolvimento de programas modulares, funcionais e orientados a objetos. A linguagem é interpretada através de bytecode pela máquina virtual Python, tornando o código portátil. Python é um software de código aberto (com licença compatível com a General Public License (GPL)). Python pode ser utilizada como linguagem principal no desenvolvimento de softwares, como linguagem de script em vários softwares, permitindo automatizar tarefas e adicionar novas funcionalidades. É uma linguagem que pode facilmente se integrar a outras linguagens, como Fortran e C.

Matplotlib é um dos mais populares pacotes disponível para o Python para geração de gráficos. Este pacote tem funções para gerar gráficos de barra, linha, dispersão, pizza, polar, mapa de cores, entre outros. Ele apresenta dois módulos

principais: matplotlib – módulo que oferece uma abstração orientada a objetos para os recursos do pacote e pylab – este módulo oferece uma coleção de comandos que se assemelha ao Matlab.

Qt é uma toolkit desenvolvida em C++ utilizada para geração de interfaces gráficas. PyQt é um binding que permite o uso do Qt no Python, disponível sob a licença GPL. Um dos maiores atrativos do PyQt é o Qt Designer (Figura 6-4), que consiste em uma ferramenta para a construção de interfaces. Os arquivos XML gerados pelo Qt Designer (com a extensão .ui) podem ser convertidos em módulos Python através do utilitário pyuic.

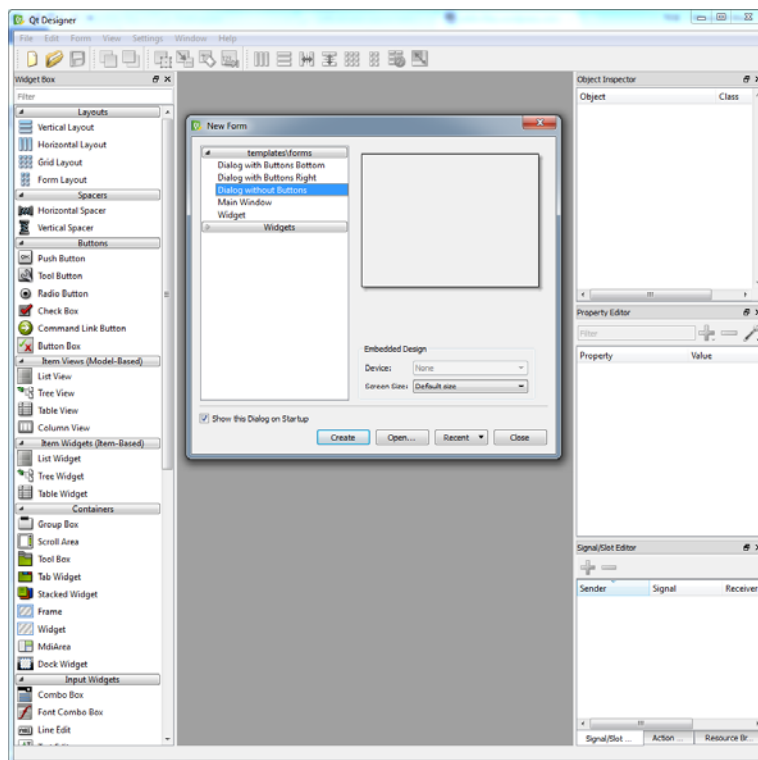


Figura 6-4 - Tela Principal do Qt Designer.

6.2.2 Ferramenta visual desenvolvida

Com o objetivo de demonstrar as funcionalidades da interface gráfica, neste item serão apresentadas algumas telas da ferramenta visual desenvolvida.

A interface é dividida em quatro áreas principais (Figura 6-5): (A) região de abas - responsável por dividir a funcionalidade do programa (HOME, GEOMETRY, MATERIAL, BOUNDARY CONDITIONS E GRAPH), (B) região de plotagem - onde

os gráficos de pré e pós-processamento são apresentados, (C) região de scripts – nesta área, scripts de comandos podem ser carregados e processados e (D) região de tabelas - nesta região são apresentadas as tabelas de dados, geradas ou carregados.

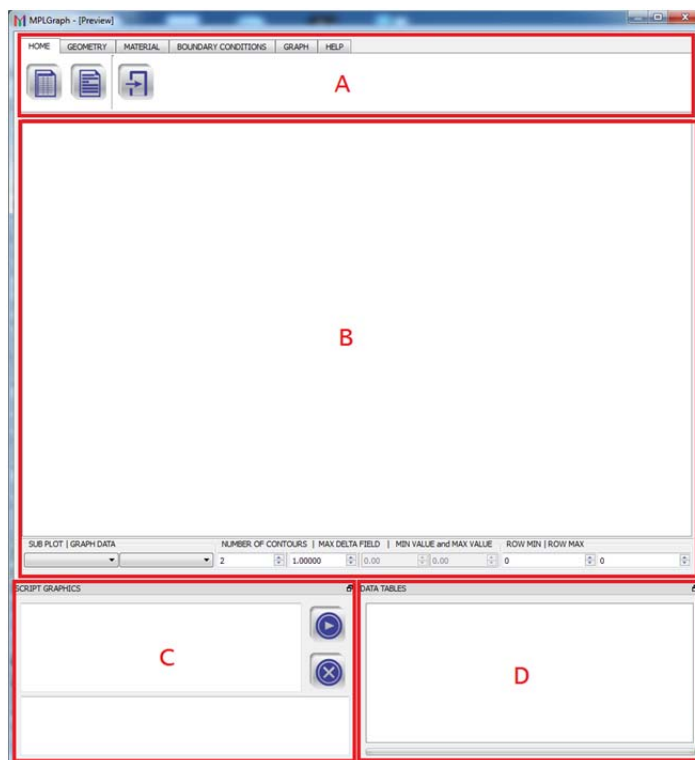


Figura 6-5 - Tela principal da interface desenvolvida.

A (Figura 6-6) ilustra as abas de divisão das funcionalidades: HOME – responsável por gerenciar os formulários para carregamento de scripts e tabelas de dados, GEOMETRY – carrega os formulários de geração de primitivas geométricas, MATERIAL – carrega os formulários para criação e aplicação dos materiais, BOUNDARY CONDITIONS – gerencia os formulários para criação e aplicação das condições de contorno e GRAPH – responsável pelos formulários para criação de gráficos de pós-processamento (dispersão e mapas de cores) e importação de imagens, importante nas análises dos resultados da CID.

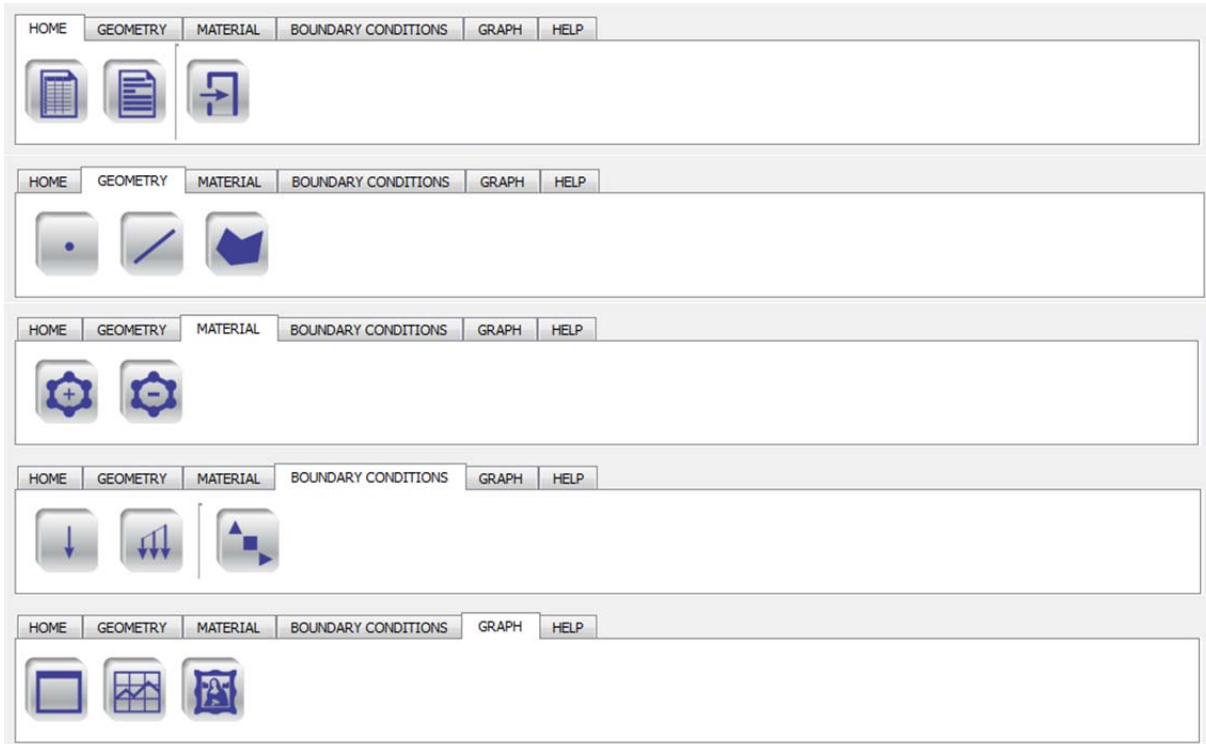


Figura 6-6 - Abas da interface desenvolvida.

As figuras a seguir, apresentam algumas telas da interface gráfica em trabalho.

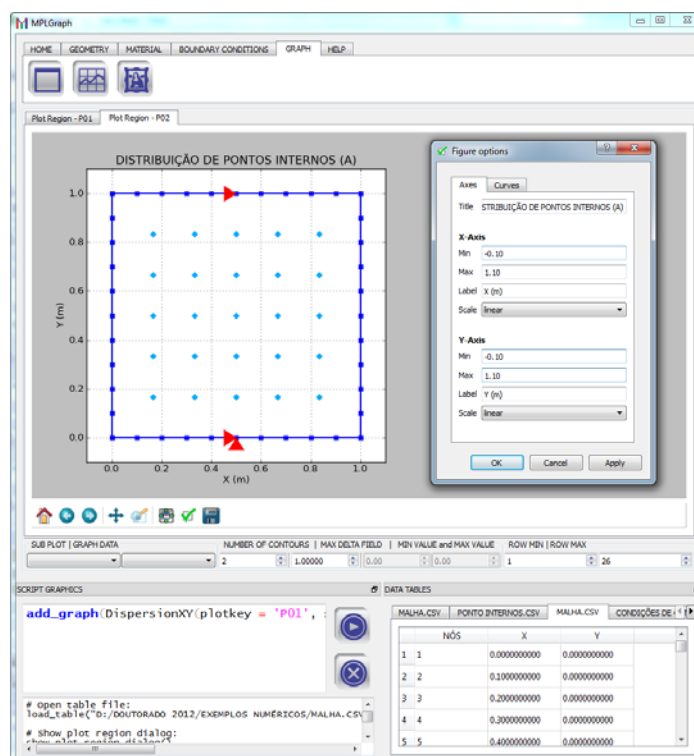


Figura 6-7 - Problema discretizado na interface desenvolvida.

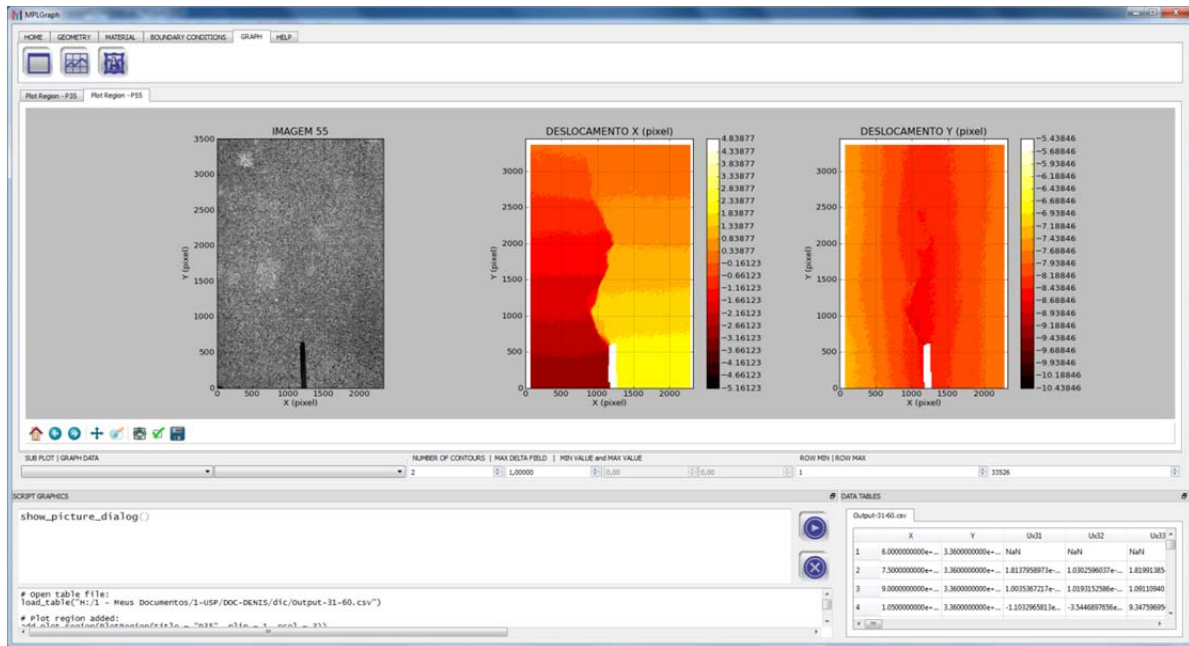


Figura 6-8 - Resultados da correlação de imagens.

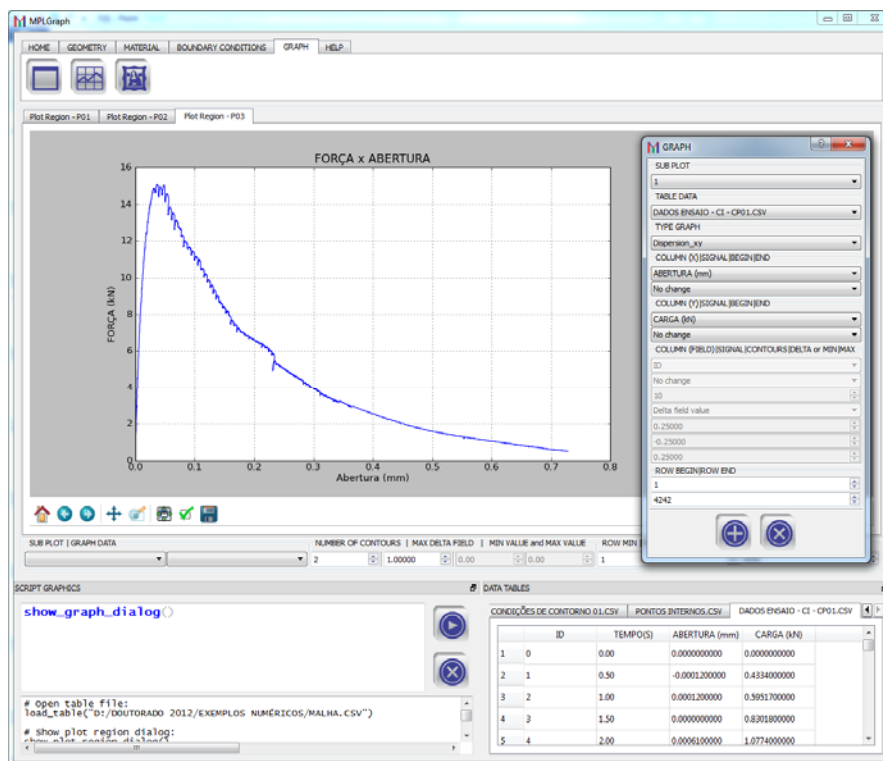


Figura 6-9 - Gráfico de dispersão.

6.3 Exemplos de aplicação

Alguns exemplos numéricos de utilização da ferramenta computacional implementada serão apresentadas neste item. O objetivo destes exemplos é validar

as formulações desenvolvidas em um ambiente controlado, isto é, com dados numéricos, os quais não apresentam os ruídos presentes em dados oriundos de ensaios, principalmente para os exemplos de análise inversa.

6.3.1 Análise direta de um problema de fratura coesiva

O primeiro exemplo de aplicação refere-se a uma viga de concreto com entalhe solicitada por flexão em três pontos (Figura 6-10). Trata-se de um problema típico de fraturamento em Modo I. A peça apresenta 2000 mm de comprimento e 200 mm de altura com um entalhe central de profundidade igual a 100 mm. Os resultados experimentais e de uma modelagem com elementos finitos dessa estrutura são apresentados em SALEH (1997). Apresentam-se as seguintes propriedades para o material: resistência à tração do concreto, $f_{tc} = 3.33$ MPa; módulo de elasticidade longitudinal, $E = 30000$ MPa; coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$; e energia de fratura G_f variando entre: 115 N/m para o corpo-de-prova com menor valor e 137 N/m para o de maior valor. Na simulação utilizou-se $G_f = 124$ N/m que corresponde à média dos valores máximo e mínimo.

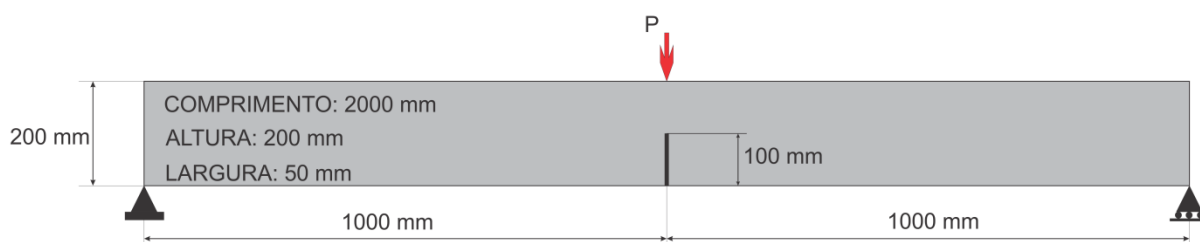
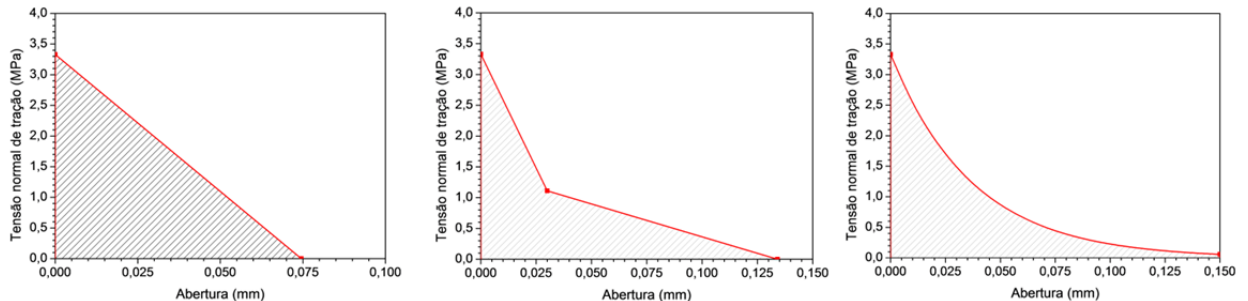


Figura 6-10 - Dados do problema para análise direta fratura coesiva.

O problema foi modelado por duas sub-regiões com elementos de interface com curvas linear, bi-linear e exponencial de amolecimento para o modelo coesivo de fratura (Figura 6-11). O carregamento foi aplicado em 50 incrementos através da imposição de deslocamentos no ponto de aplicação da carga. Como resultado apresenta-se a comparação das curvas (Carga x Flecha), mostrada na (Figura 6-12), obtidas com a ferramenta computacional implementada para as três leis coesivas e a encontrada experimentalmente e com a simulação em elementos finitos em Saleh (1997), validando a formulação desenvolvida. Além disto, os valores obtidos

para os campos de deslocamentos desta análise servirão como dados de entrada para o exemplo de análise inversa que será apresentado posteriormente neste capítulo.



Para $0 \leq \Delta u \leq 0,0298$

$$f_t(\Delta u) = 3,33 \left(1 - \frac{\Delta u}{0,0745} \right)$$

$$f_t(\Delta u) = 3,33 - \left(\frac{3,33 - 1,11}{0,0298} \right) \Delta u$$

$$f_t(\Delta u) = 3,33 e^{-\frac{3,33}{0,124} \Delta u}$$

Para $0,0298 < \Delta u < 0,1341$

$$f_t(\Delta u) = \frac{1,11 \Delta u}{0,03 - 0,1341} + 1,11 \left(1 - \frac{0,03}{0,03 - 0,1341} \right)$$

Figura 6-11 - Curvas de amolecimento dos modelos coesivos utilizados na simulação.

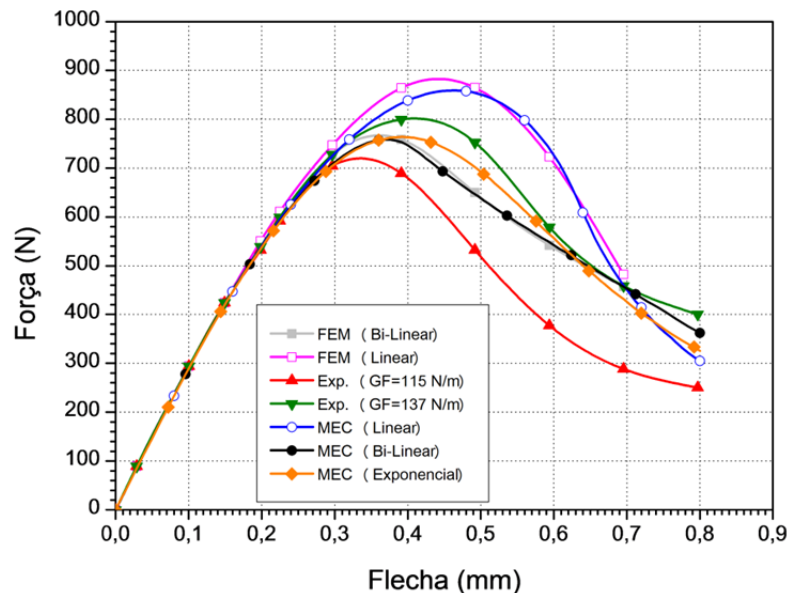


Figura 6-12 - Comparação dos resultados da simulação.

6.3.2 Minimização e maximização de funções com algoritmo genético

Este item do texto tem por finalidade mostrar alguns problemas analisados com o emprego do módulo de algoritmo genético da ferramenta computacional

implementada. Apresentam-se exemplos da utilização do módulo de algoritmo genético na minimização e maximização de funções para validar a sua eficiência. Em itens posteriores será apresentada a utilização conjunta do módulo de algoritmo genético com o de método dos elementos de contorno para estimativa dos parâmetros mecânicos em problemas elásticos.

- Maximização e minimização de uma função de uma variável

- Descrição do problema: Maximização e minimização da função expressa na (Equação 6-1) no intervalo de (-5,0 a 5,0), via algoritmo genético.

$$f(x) = x \cdot \sin(x^2)$$

Equação 6-1

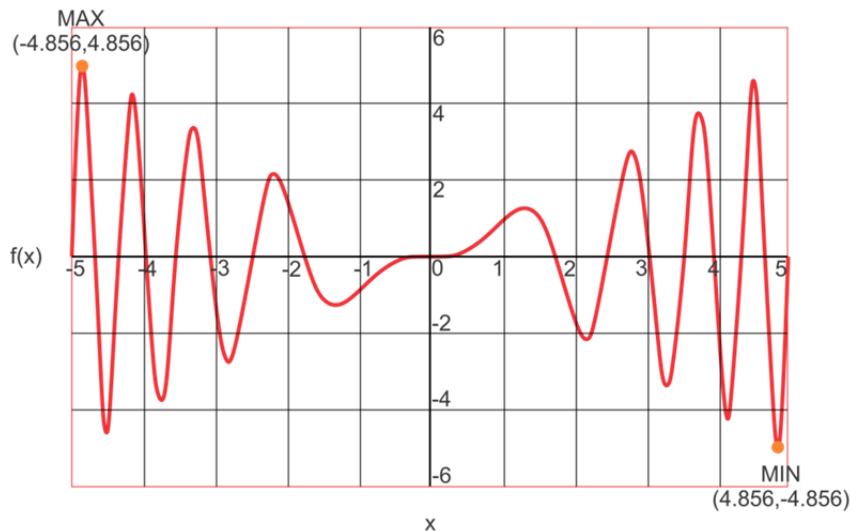


Figura 6-13 - Função a ser minimizada e maximizada.

- Objetivo: Neste exemplo, o objetivo é obter o valor de x no intervalo de -5.0 a 5.0 para o qual a função $f(x)$ apresente o maior valor (Maximização da função) e o valor de x dentro deste mesmo intervalo para o qual a função $f(x)$ apresente o menor valor (Minimização da função).

- Parâmetros: Para resolução deste problema foram utilizados os parâmetros ilustrados na (Figura 6-14) da tela do programa de algoritmo genético implementado, para ambos os problemas: maximização e minimização. Observando-se a ilustração, vê-se que o único parâmetro modificado de uma situação para outra é o tipo de otimização.

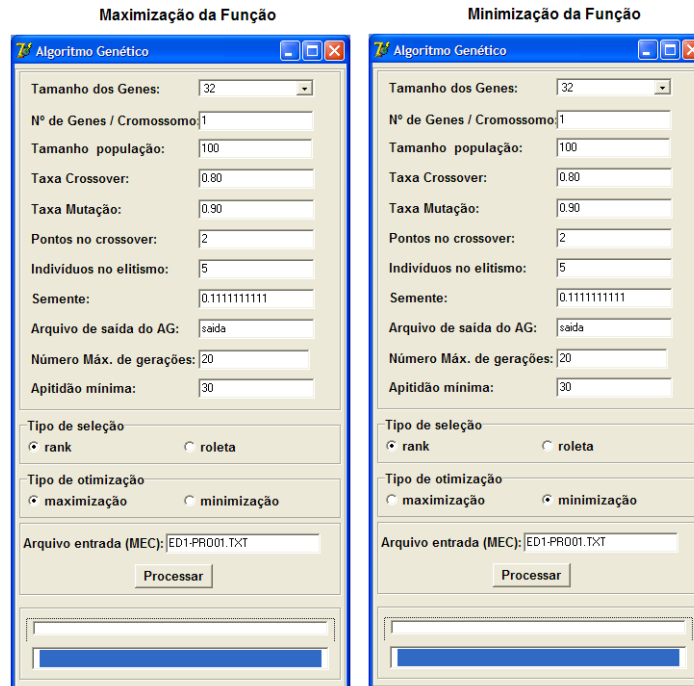


Figura 6-14 - Parâmetros utilizados no módulo de AG.

- Resultados: Os resultados obtidos pelo programa de algoritmo genético implementado são comparados com os obtidos pelo programa matemático Mathcad, em sua versão 11.

Tabela 6-1 - Tabela com os resultados do exemplo

Otimização	Valor de (X) via AG	Valor de (X) via Mathcad
Maximização	-4.856	-4.856
Minimização	4.856	4.856

- Maximização de uma função de duas variáveis

- Descrição do problema: Maximização da função expressa na (Equação 6-2), no intervalo de (-5,0 a 5,0), via algoritmo genético.

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 50$$

Equação 6-2

- Objetivo: Neste exemplo, o objetivo é obter o valor de x e y no intervalo entre (-5,0 e 5,0), para o qual a função f(x,y) apresente o maior valor (Maximização da função).

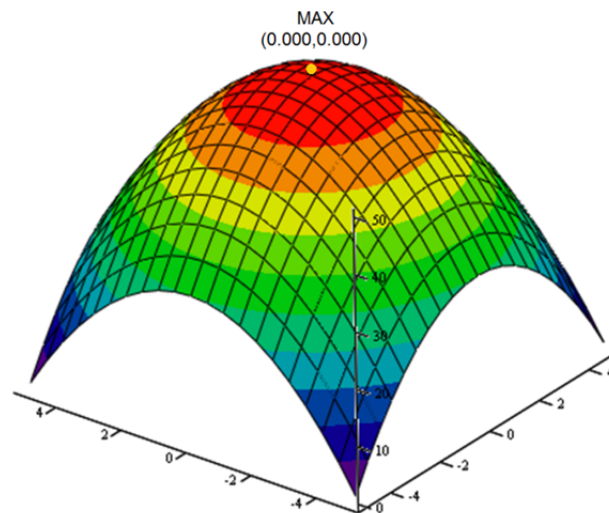


Figura 6-15 - Função a ser minimizada e maximizada.

- Parâmetros: Para resolução deste problema foram utilizados os parâmetros ilustrados na (Figura 6-16) da tela do programa de algoritmo genético implementado, para o problema de maximização da função de duas variáveis.

- Resultados: Os resultados obtidos pelo programa de algoritmo genético são comparados com os resultados obtidos pelo programa matemático Mathcad (Tabela 6-2), em sua versão 11.

Maximização da Função

A imagem mostra a interface de configuração de um algoritmo genético. O título da janela é 'Maximização da Função'. O nome da janela é 'Algoritmo Genético'. Os parâmetros configurados são: Tamanho dos Genes: 32; Nº de Genes / Cromossomo: 2; Tamanho população: 100; Taxa Crossover: 0.80; Taxa Mutação: 0.90; Pontos no crossover: 2; Indivíduos no elitismo: 5; Semente: 0.1111111111; Arquivo de saída do AG: saída; Número Máx. de gerações: 20; Aptidão mínima: 30. O tipo de seleção é 'rank' e o tipo de otimização é 'maximização'. O arquivo de entrada (MEC) é 'ED1-PR001.TXT'. Há um botão 'Processar' e uma barra de progresso no rodapé.

Figura 6-16 - Parâmetros do AG maximização da função de duas variáveis.

Tabela 6-2 - Tabela com os resultados do exemplo.

Maximização	AG	Mathcad
Valor de (X)	0.000	0.000
Valor de (Y)	0.000	0.000

6.3.3 Estimativa das propriedades mecânicas em uma peça tracionada

Um exemplo de aplicação da ferramenta computacional desenvolvida para o tratamento de problemas inversos de estimativas das propriedades elásticas é apresentado neste item. Neste exemplo, os campos de deslocamentos experimentais foram substituídos por campos obtidos por uma análise direta prévia.

- Descrição do problema: Chapa quadrada, de lados com dimensões unitárias, e submetida a um carregamento de tração, como ilustrado na (Figura 6-17). Considera-se que a chapa esteja em EPT e composta de um material com módulo de elasticidade $E = 100$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$.

- Objetivo: Neste exemplo, o objetivo é estimar os valores de E e ν , tidos como incógnitos neste problema, a partir de valores de deslocamentos medidos em pontos no interior da chapa.

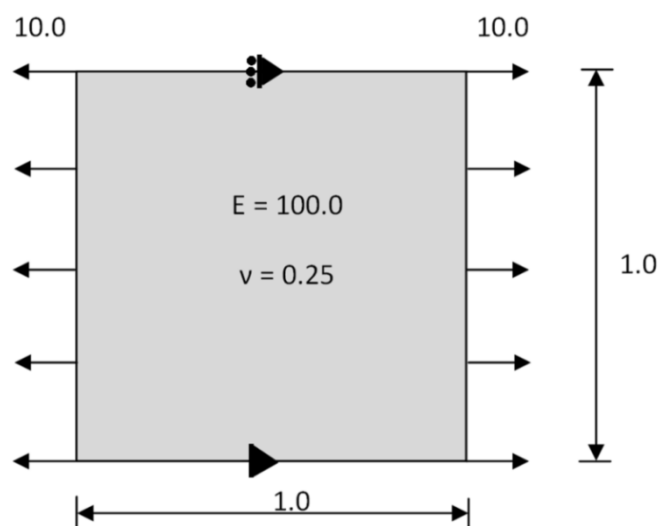


Figura 6-17 - Dados do problema.

Em substituição aos dados experimentais de campos de deslocamentos para este problema, que são os dados utilizados na avaliação dos valores de E e ν no

programa implementado, efetuou-se uma análise direta do problema para obtenção destes dados.

- Discretização: na análise direta deste problema, utilizou-se uma discretização do contorno do problema com 10 elementos lineares por lado, como apresentado na (Figura 6-18).

No problema inverso de estimativa das propriedades mecânicas do material que compõem a chapa ilustrada na (Figura 6-17), os valores do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson são tidos como incógnitos. São conhecidos valores de deslocamentos em pontos selecionados no interior do domínio do problema.

- Discretização: Na análise inversa, utilizou-se de uma discretização do contorno similar ao escolhido para a análise direta. A análise inversa foi realizada com os dados de deslocamentos em três configurações de escolha dos pontos internos ao domínio do problema (Tabela 6-3).

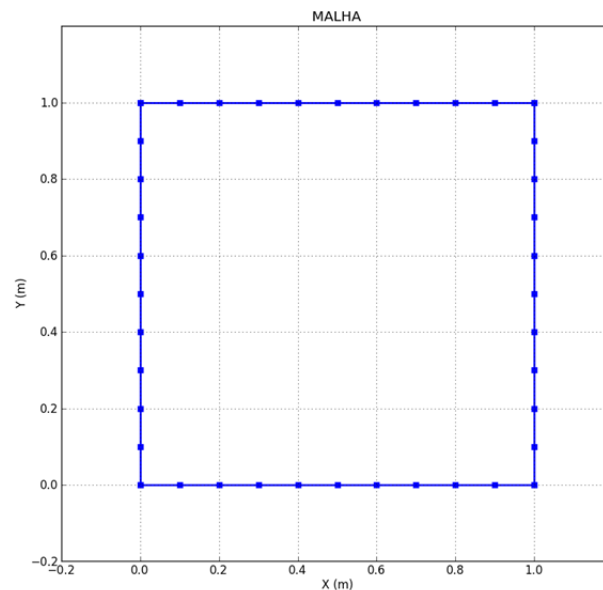


Figura 6-18 - Discretização do problema.

Tabela 6-3 - Configuração da distribuição dos pontos internos.

A	25 pontos internos
B	15 pontos internos
C	10 pontos internos

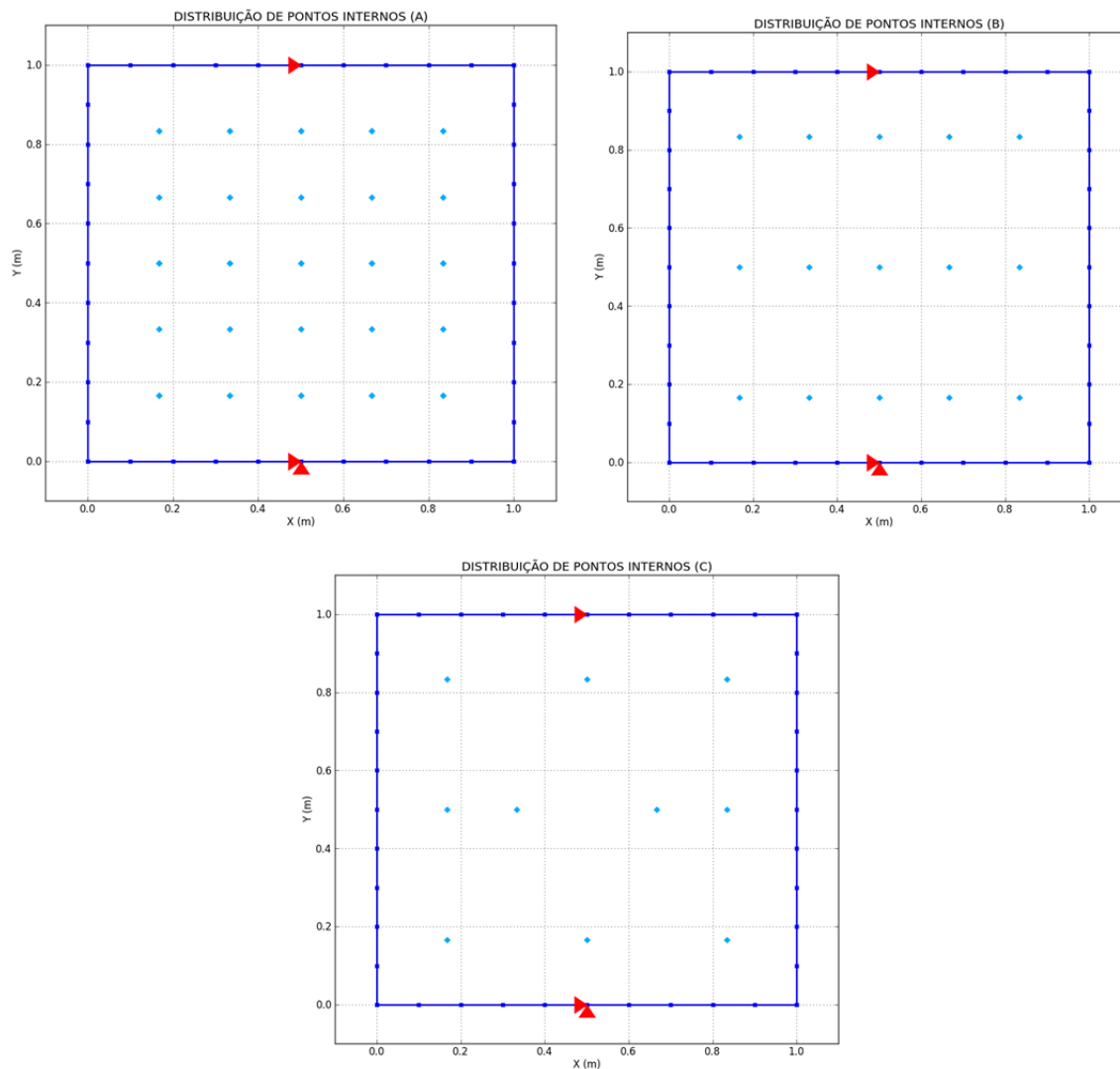


Figura 6-19 - Configurações de distribuição dos pontos internos.

- Parâmetros: para resolução deste problema foram utilizados os parâmetros ilustrados na (Figura 6-20), que reproduz a tela principal do programa de algoritmo genético implementado, para as três configurações de escolha dos pontos internos. Foi utilizada uma população de 50 indivíduos que seguiram seu processo evolutivo por 20 gerações.

- Resultados: Os resultados obtidos pelo programa implementado para os valores de E e ν , nas três configurações de escolha dos pontos internos, são comparados nas tabelas a seguir, (Tabela 6-4, Tabela 6-5 e Tabela 6-6), com os valores utilizados na análise direta para obtenção dos deslocamentos nos pontos internos. Tais valores foram utilizados na análise inversa para avaliar a qualidade dos resultados obtidos via acoplamento AG e MEC.

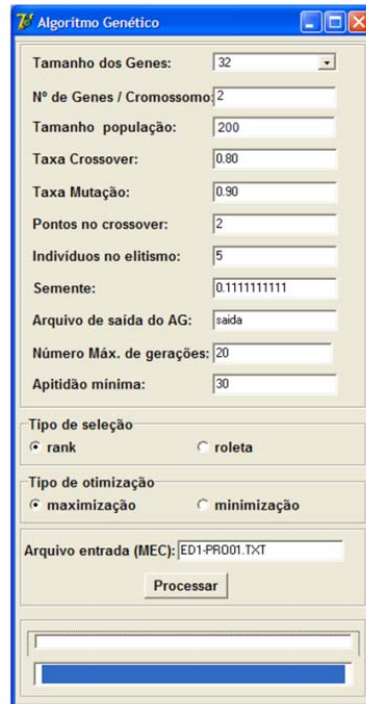


Figura 6-20 - Parâmetros do AG utilizados no problema.

Tabela 6-4 - Resultados da análise inversa para configuração A.

Incógnitas	AG + MEC	REAL
Coefficiente de Poisson (ν)	0.248	0.250
Módulo de Elasticidade (E)	99.028	100.000

Tabela 6-5 - Resultados da análise inversa para configuração B.

Incógnitas	AG + MEC	REAL
Coefficiente de Poisson (ν)	0.223	0.250
Módulo de Elasticidade (E)	101.154	100.000

Tabela 6-6 - Resultados da análise inversa para configuração C.

Incógnitas	AG + MEC	REAL
Coefficiente de Poisson (ν)	0.218	0.250
Módulo de Elasticidade (E)	96.269	100.000

6.3.4 Análise inversa de estimativa de parâmetros do modelo coesivo

Neste item, apresenta-se a aplicação da formulação proposta no tratamento do problema inverso de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo. Para isto, serão utilizados os campos de deslocamentos da área em destaque (Figura 6-21), obtidos

na análise direta do exemplo no (Item 6.3.1), ilustrados na (Figura 6-23), para dez níveis de carregamento (Figura 6-22). Estes campos serão utilizados para simular os obtidos experimentalmente, pela correlação de imagens.

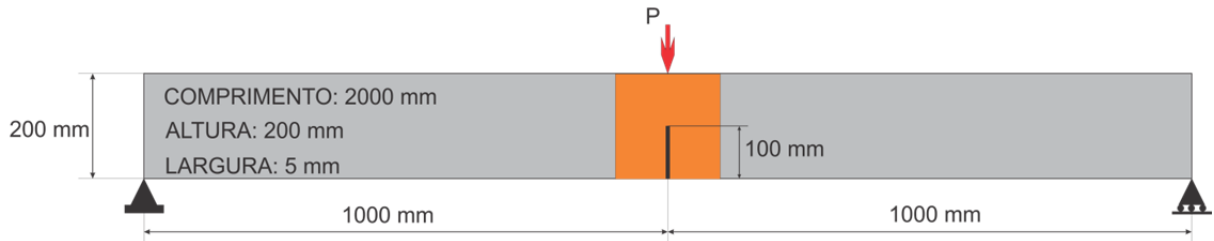


Figura 6-21 - Região de interesse.

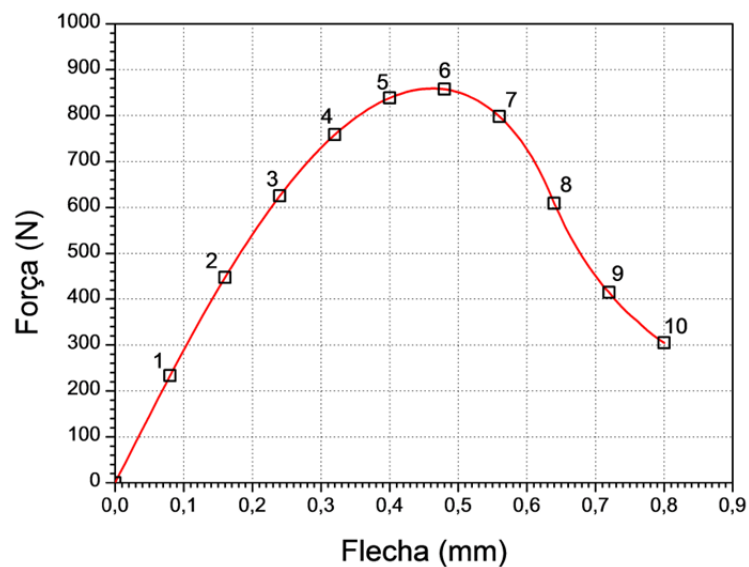
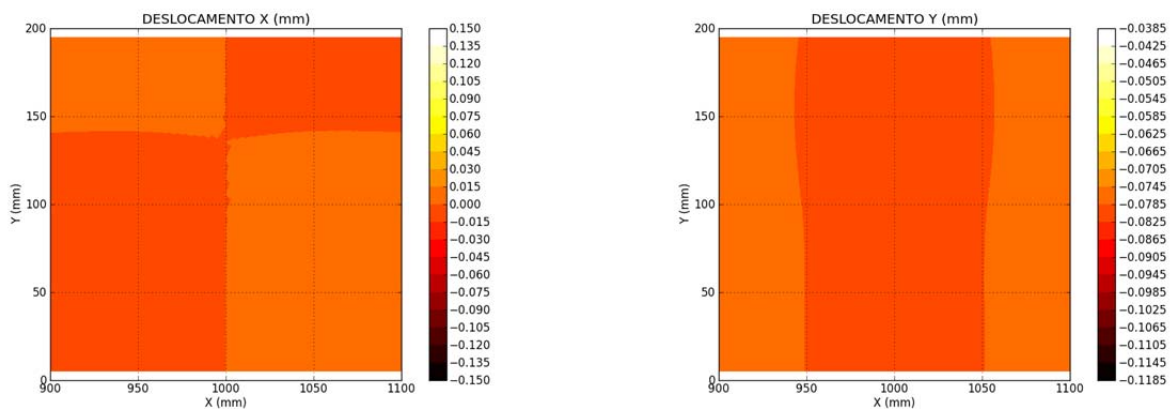
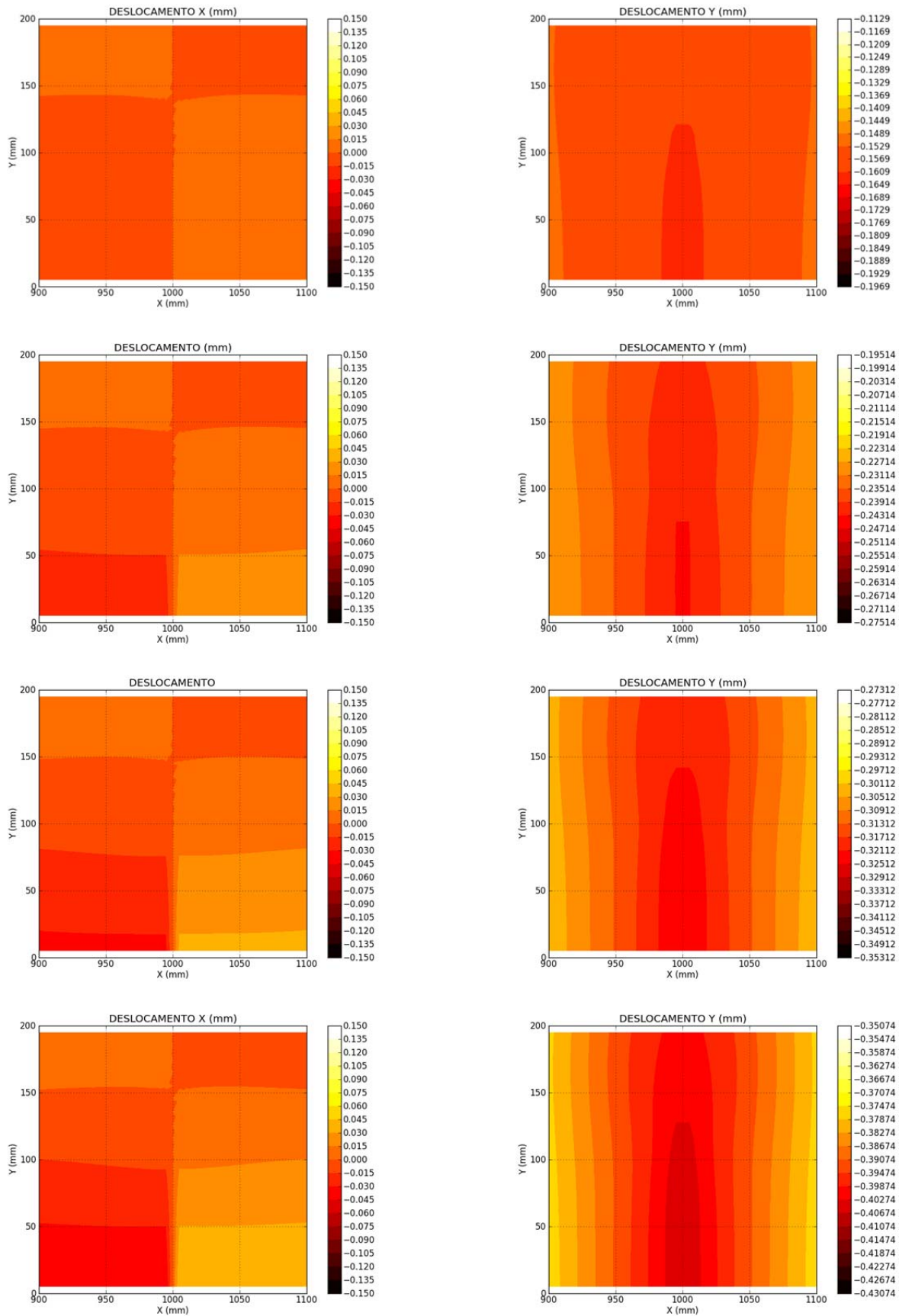
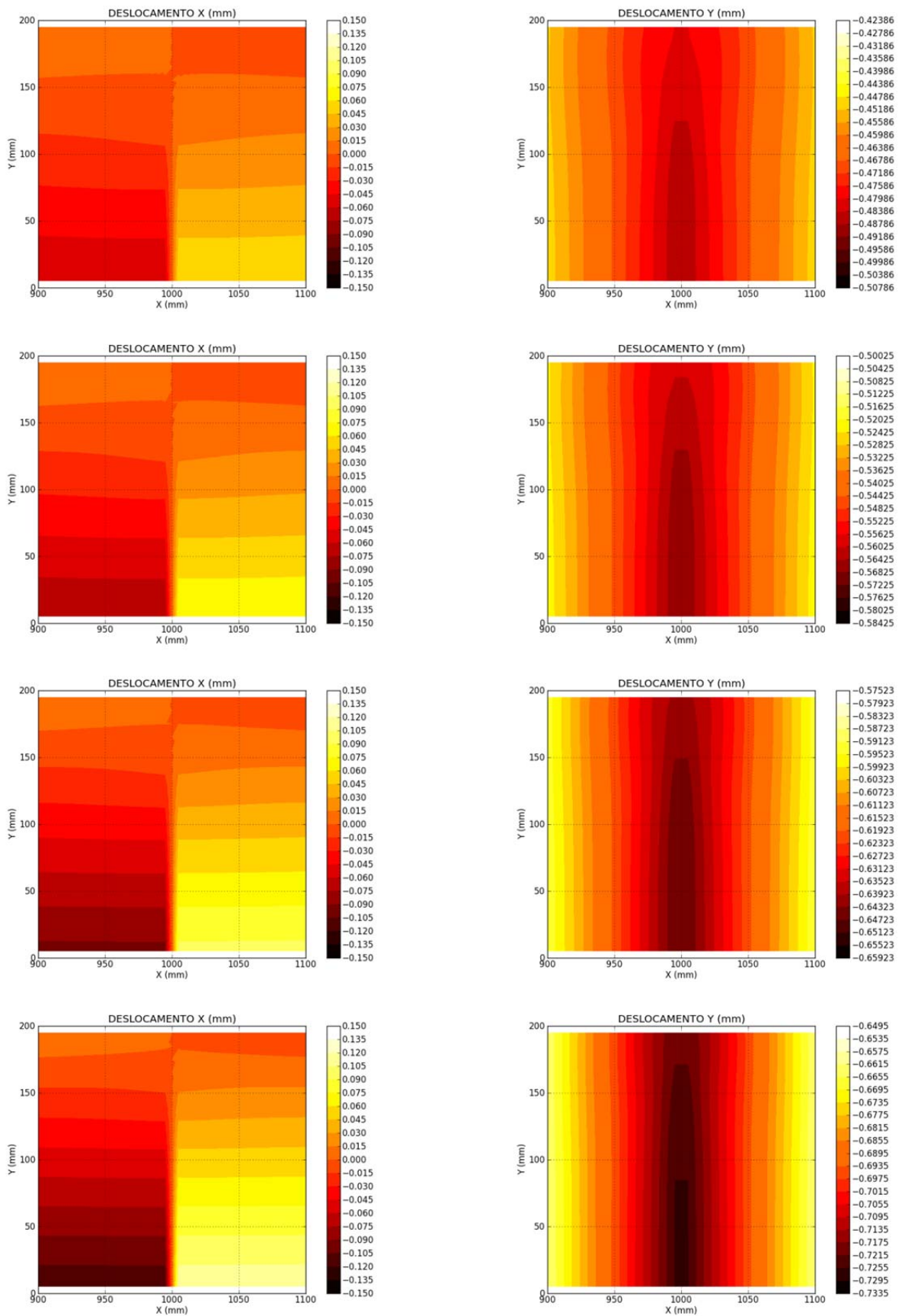


Figura 6-22 - Instantes dos campos de deslocamentos apresentados na Figura 6-23.







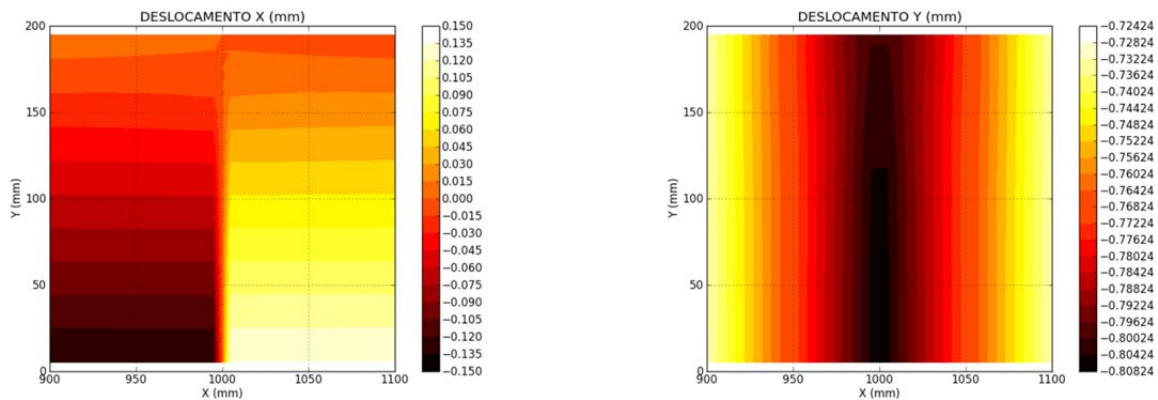


Figura 6-23 - Campos de deslocamento X e Y nos níveis (1 a 10).

Na análise inversa, a região de interesse foi modelada por duas sub-regiões (Figura 6-24). Nos nós do contorno e pontos internos foram aplicados os deslocamentos obtidos pela análise direta (simulando os obtidos por CID) para as três curvas coesivas implementadas (linear, bi-linear e exponencial). Nos nós da interface deixaram-se incógnitos os valores de deslocamentos e força de superfície.

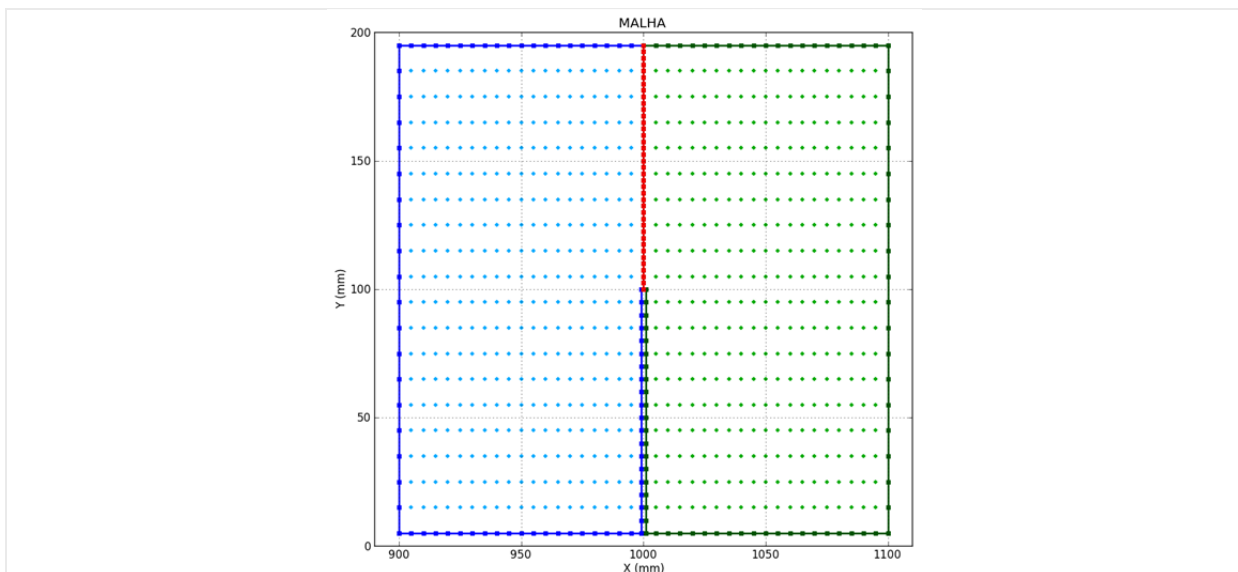


Figura 6-24 - Malha da análise inversa.

Os gráficos a seguir, (Figura 6-25 a Figura 6-33), apresentam os resultados obtidos na análise inversa. São apresentados os gráficos de abertura e tensão normal ao longo da interface, bem como a combinação destes, no gráfico de Abertura *versus* Tensão Normal (curva de amolecimento coesivo), ao se utilizar os campos de deslocamentos oriundos da análise direta para os três modelos coesivos no nível de carregamento identificado pelo número 6 na (Figura 6-22).

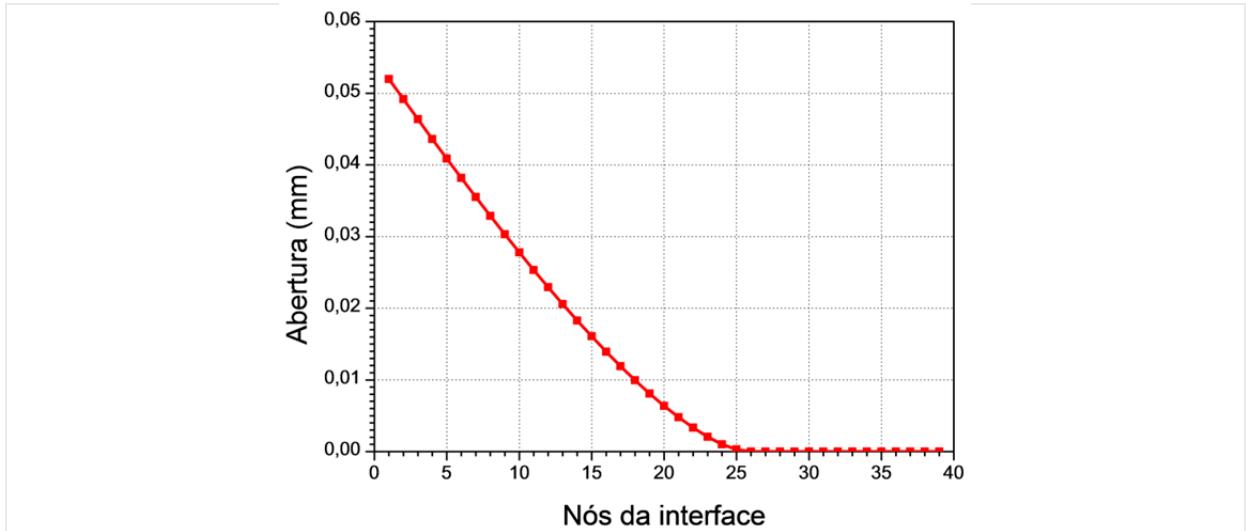


Figura 6-25 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Linear).

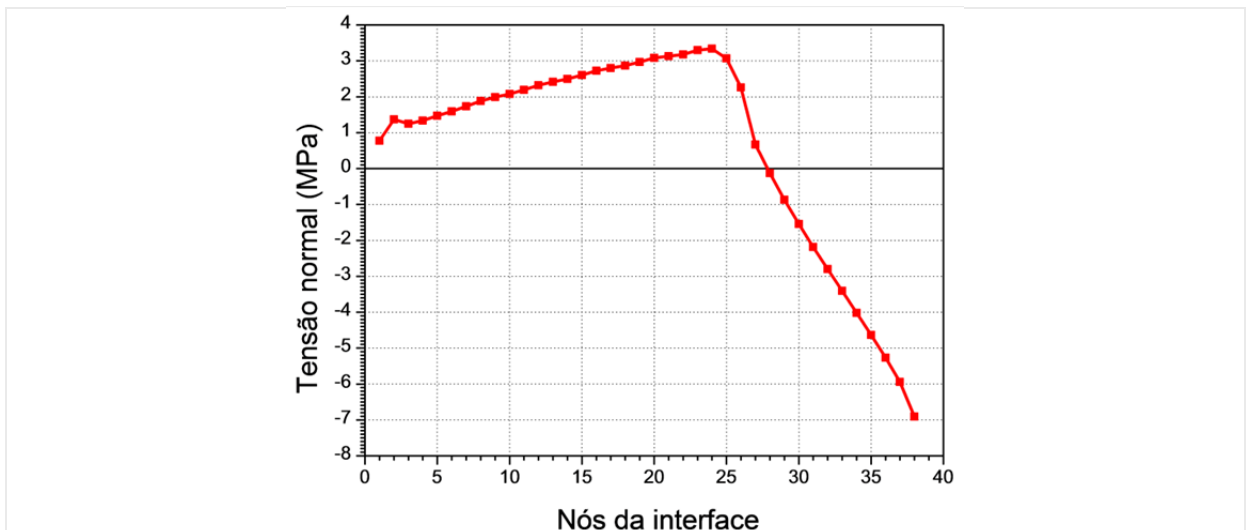


Figura 6-26 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Linear).

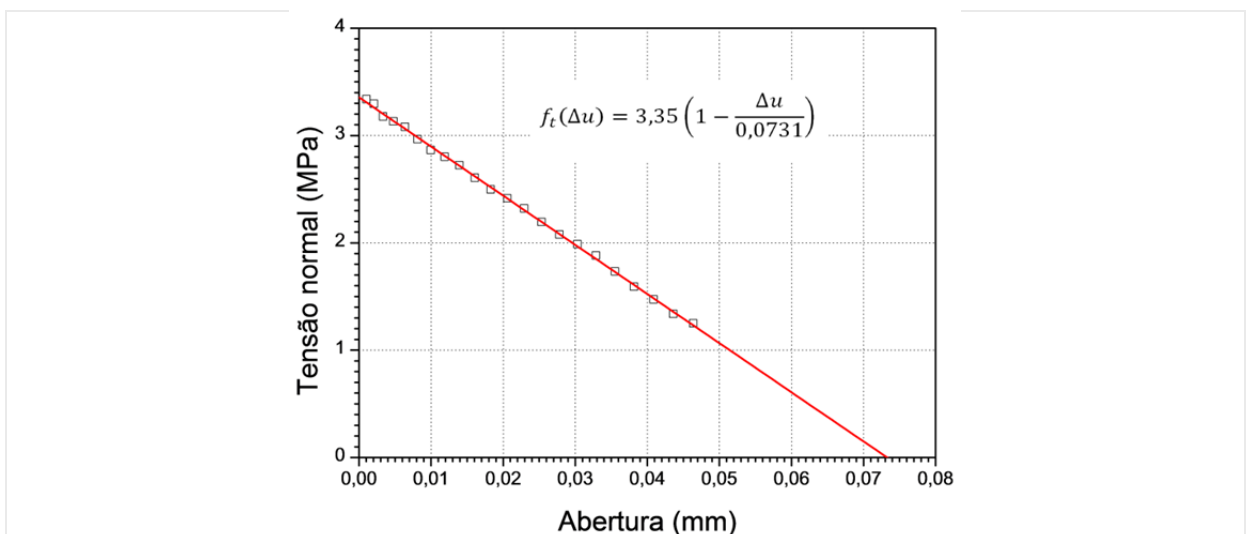


Figura 6-27 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Linear).

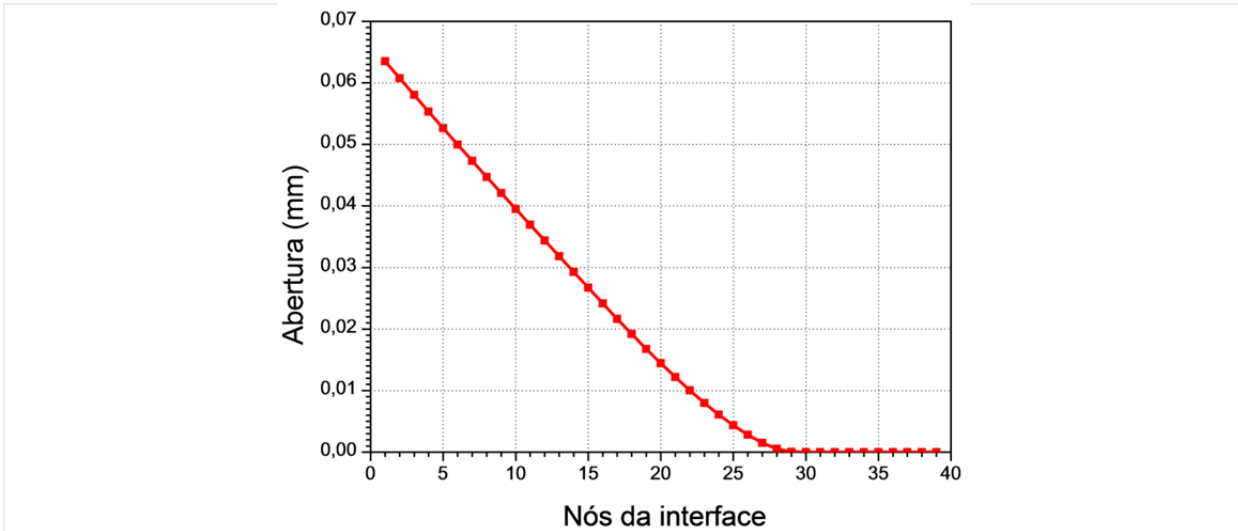


Figura 6-28 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Bi-linear).

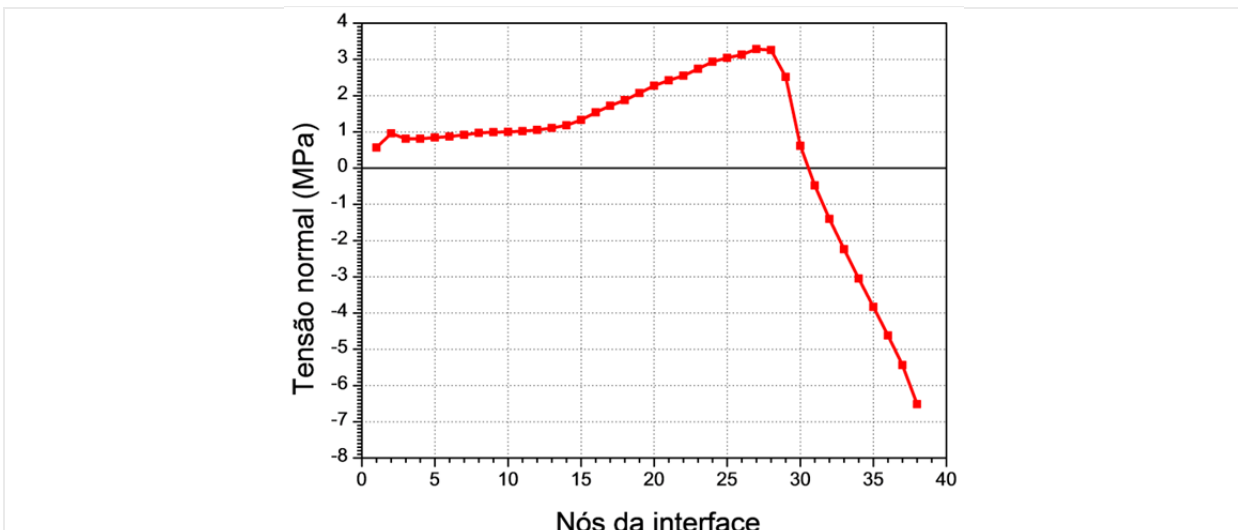


Figura 6-29 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Bi-linear).

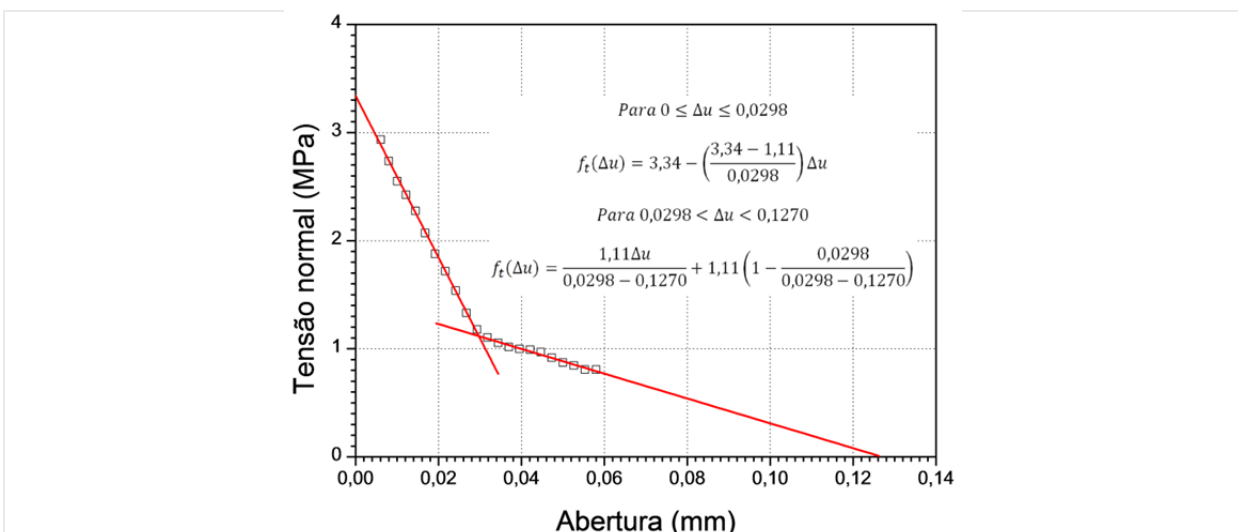


Figura 6-30 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Bi-linear).

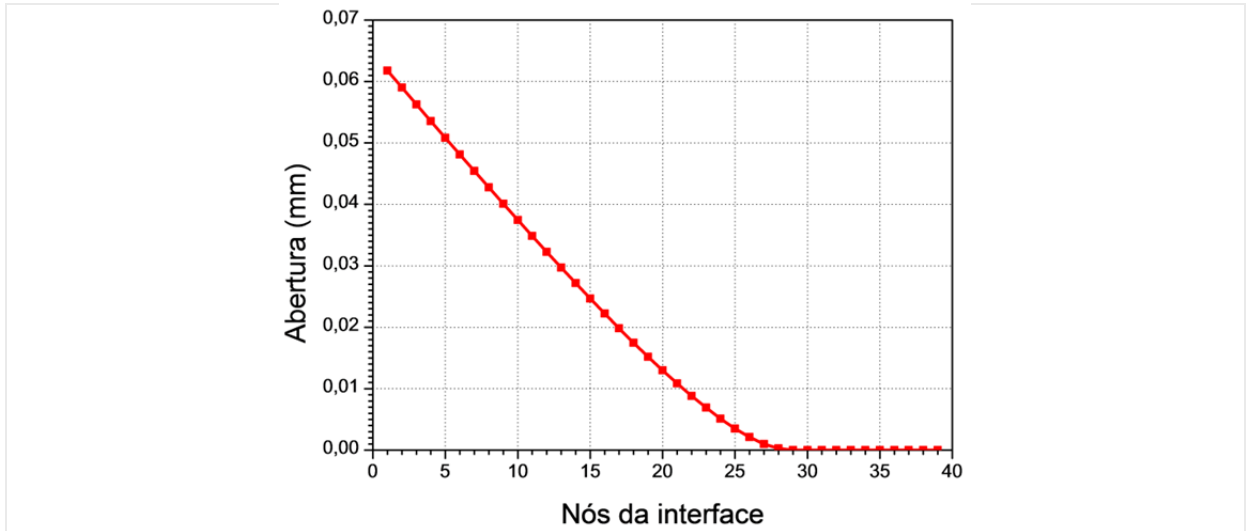


Figura 6-31 - Abertura nos nós da interface (Estimativa Exponencial).

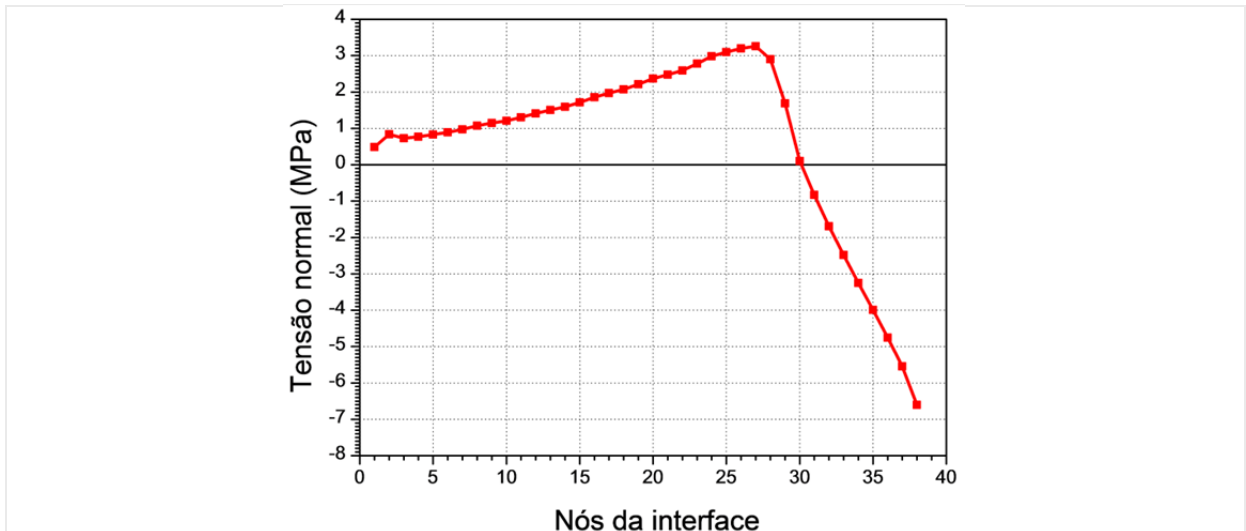


Figura 6-32 - Tensão normal nos nós da interface (Estimativa Exponencial).

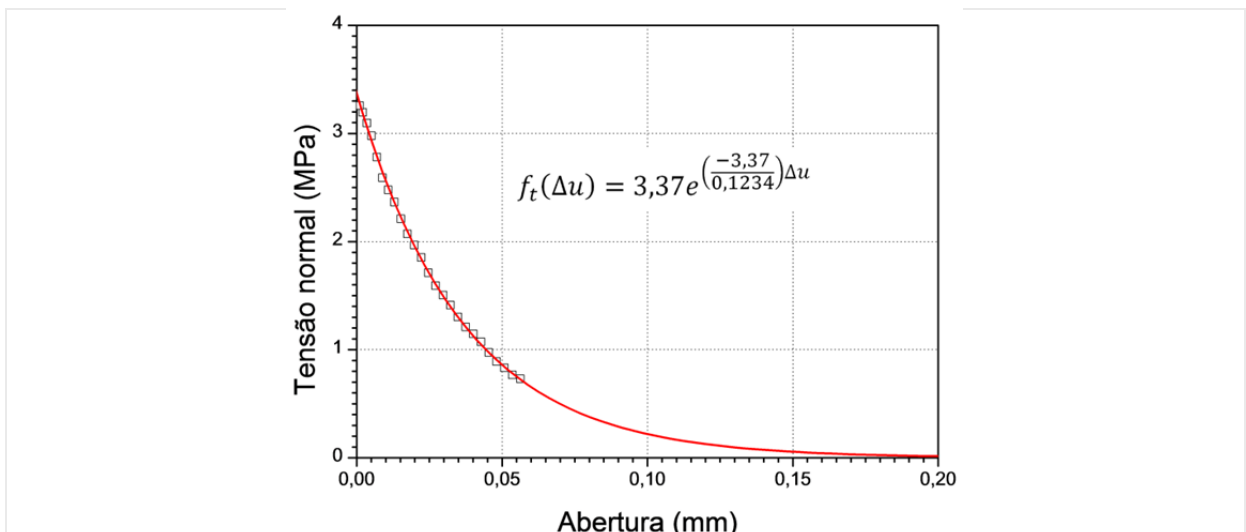


Figura 6-33 - Tensão normal versus Abertura (Estimativa Exponencial).

As tabelas a seguir, (Tabela 6-7, Tabela 6-8 e Tabela 6-9), mostram as comparações dos parâmetros utilizados na análise direta com os obtidos com a análise inversa.

Tabela 6-7 - Resultados da análise inversa (LINEAR).

MODELO LINEAR		
	Análise Direta	Análise Inversa
f_c^t (MPa)	3,3300	3,3500
Δu_c (mm)	0,0745	0,0731

Tabela 6-8 - Resultados da análise inversa (BI-LINEAR).

MODELO BI-LINEAR		
	Análise Direta	Análise Inversa
f_{tc} (MPa)	3,3300	3,3500
$\Delta u'$ (mm)	0,0298	0,0298
f_t (MPa)	1,1100	1,1100
Δu_c (mm)	0,1341	0,1270

Tabela 6-9 - Resultados da análise inversa (EXPONENCIAL).

MODELO EXPONENCIAL		
	Análise Direta	Análise Inversa
f_c^t (MPa)	3,3300	3,3700
G_f (mm)	0,1240	0,1234

CAPÍTULO 7 Programa experimental

O programa experimental desenvolvido neste trabalho foi realizado no Laboratório de Estruturas da EESC/USP. Este programa consta de ensaios de caracterização mecânica do concreto, com resistência alvo à compressão de 40 Mpa (este valor foi estabelecido em função da finalidade para a qual o concreto foi projetado, já que estes ensaios foram realizados com amostras de concretos que seriam utilizados na confecção de modelos experimentais de outras pesquisas do departamento). Neste estudo, o concreto utilizado foi usinado (confeccionados em central de dosagem). Os ensaios foram realizados aos 28 dias, a fim de caracterizar o concreto quanto às seguintes propriedades mecânicas: resistência à compressão, determinação da curva tensão *versus* deformação na compressão, módulo de elasticidade, resistência à tração por compressão diametral e energia de fraturamento. Com relação a esta propriedade, realizou-se ensaio de flexão sob três pontos de viga com entalhe, sendo este ensaio acompanhado por equipamento fotográfico para aquisição de imagens da região de propagação da fissura. A técnica de correlação de imagens digitais foi utilizada para a aquisição dos campos de deslocamentos que alimentariam o modelo computacional implementado para obtenção de parâmetros do modelo coesivo.

7.1 Ensaios de caracterização do concreto

Neste item é apresentada uma breve descrição dos ensaios de caracterização realizados. Destacam-se os ensaios de flexão por três pontos, onde, ao longo de sua execução, realizou-se a aquisição de imagens para obtenção dos campos de deslocamentos necessários para as análises de interesse deste trabalho.

7.1.1 Ensaio de Resistência à Compressão

Os ensaios de compressão axial foram executados observando as recomendações da norma ABNT NBR 5739:2007 para determinação da resistência à compressão. Foram moldados nove corpos-de-prova de 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura. Os corpos-de-prova foram ensaiados aos 28 dias na máquina de ensaios universal da marca Instron, modelo 5595, servo-hidráulica, de capacidade de 1500 kN. Antes do ensaio todos os corpos-de-prova foram retificados para melhorar as condições de ajuste do corpo-de-prova ao equipamento de ensaio e também em razão da alta resistência do material. A (Figura 7-1) apresenta o esquema de ensaio de resistência à compressão do concreto.



Figura 7-1 - Ensaio de compressão axial para determinação da resistência à compressão.

A (Tabela 7-1) apresenta os resultados do ensaio de compressão simples dos nove corpos-de-prova.

Tabela 7-1 - Resistência à compressão.

Corpo-de-prova	f_{cm} (MPa)
1	40,83
2	43,10
3	39,97
4	42,00
5	41,97
6	39,10
7	39,58
8	40,66
9	36,83
Média	40,45
Desvio Padrão	1,87
Coefficiente de Variação	4,61%

7.1.2 Ensaio de Módulo de Elasticidade

Ensaio de compressão axial foram executados observando as recomendações da norma ABNT NBR 8522:2008, para determinação do módulo de elasticidade. Para realização do ensaio, foram moldados três corpos-de-prova de 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura e receberam acabamento retificado. O ensaio foi executado na máquina de ensaios universal da marca Instron, modelo 5595, servo-hidráulica, de capacidade de 1500 kN.

Para medição de deslocamentos lineares longitudinais, utilizaram-se transdutores de deslocamento à base de extensômetros elétricos, apoiados nas duas laterais dos corpos-de-prova. Foram utilizados dois transdutores localizados na região central dos corpos-de-prova (Figura 7-2), a fim de evitar o efeito de confinamento das extremidades. Os transdutores utilizados possuíam bases de medida de 200 mm, sensibilidade de 0,001 mm e capacidade de 10 mm. Os deslocamentos foram aplicados segundo a taxa de 0,005 mm/s e registrados pelo sistema 5000 de aquisição de dados, juntamente com os valores das forças, a cada segundo.



Figura 7-2 - Ensaio de compressão axial para determinação do módulo de elasticidade.

Neste trabalho a determinação do módulo de elasticidade, a partir de ensaios estáticos de compressão axial, foi realizada considerando como trecho elástico o intervalo da curva tensão-deformação limitado entre 0,5 MPa e 30% da tensão de ruptura. Para este intervalo foi feita uma regressão linear, sendo que o coeficiente angular da reta define o módulo de elasticidade. A (Figura 7-3) apresenta as curvas

força *versus* deformação obtidas dos corpos-de-prova submetidos ao ensaio de módulo de elasticidade.

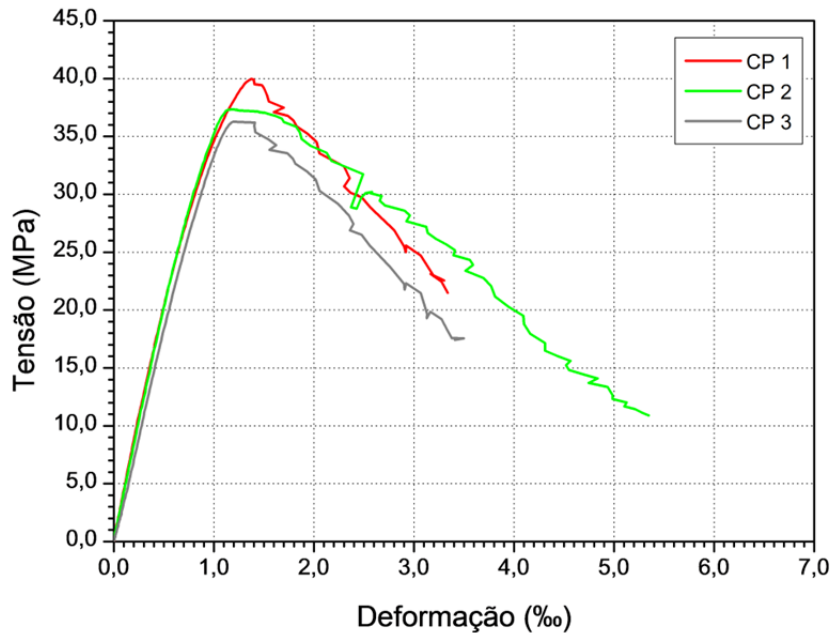


Figura 7-3 - Curvas tensão *versus* deformação.

Os valores de módulo de elasticidade dos três corpos-de-prova estão apresentados na (Tabela 7-2).

Tabela 7-2 - Módulo de elasticidade.

Corpo-de-prova	f_{cm} (MPa)	E_{cm} (GPa)
1	39,95	42,53
2	37,33	41,06
3	36,27	36,56
Média	37,85	40,05
Desvio Padrão	1,90	3,11
Coefficiente de Variação	5,01%	7,76%

7.1.3 Ensaio de Resistência à Tração por Compressão Diametral

A resistência à tração foi determinada de forma indireta por ensaios de compressão diametral. Foram ensaiados seis corpos-de-prova de 150 mm de diâmetro e 300 mm de altura, observando as recomendações prescritas na ABNT NBR 7222:2011. Os ensaios foram executados na máquina hidráulica para ensaios de compressão (marca ELE), controlada por computador, de capacidade de

2000 kN e com taxa de aplicação do carregamento de 2,4 kN/s, adequada às dimensões dos corpos-de-prova. A (Figura 7-4) apresenta o esquema do ensaio de tração por compressão diametral. Na (Tabela 7-3) são apresentados os resultados desses ensaios.



Figura 7-4 - Ensaio de compressão diametral.

Tabela 7-3 - Resistência à tração por compressão diametral.

Corpo-de-prova	f_{ctm} (MPa)
1	3,88
2	3,46
3	2,71
4	3,55
5	3,06
6	3,06
Média	3,29
Desvio Padrão	0,42
Coefficiente de Variação	12,83%

7.1.4 Ensaio de flexão sob três pontos de carga

A capacidade de absorção de energia de um material é, geralmente, avaliada por meio do conceito de energia de fratura G_f , definida como a energia necessária à formação de uma fissura de área unitária (Araújo, 2002).

Um dos ensaios frequentemente utilizados para quantificar a energia de fraturamento é o ensaio de flexão em três pontos sobre viga com entalhe no meio do vão, cujo esquema está representado na (Figura 7-5). Os entalhes são realizados para que não haja dissipação de energia fora da zona de fratura e garantir a formação de uma fissura única.

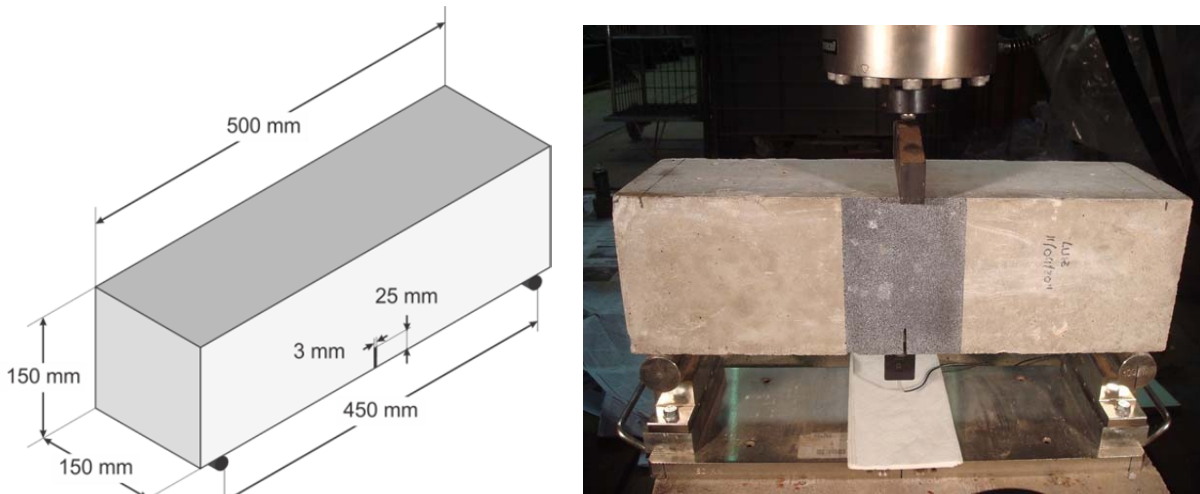


Figura 7-5 - Ensaio de flexão em três pontos.

Durante a execução do ensaio realizou-se a aquisição de imagens para obtenção dos campos de deslocamentos da região de propagação da fissura, via correlação de imagens digitais. Estes campos são utilizados na resolução do problema inverso de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo.

Para tanto, os ensaios de flexão em três pontos foram realizados em seis exemplares de concreto de 500 mm de comprimento, 150 mm de largura e 15 mm de altura, com entalhe central passante de 25 mm de extensão. As vigas foram apoiadas na base de modo a apresentarem 450 mm de vão livre entre os apoios. Essas dimensões contrariam as recomendações do RILEM 50 FMC (RILEM, 1985), mas foram escolhidas devido à limitação no vão disponível pelo equipamento utilizado para o ensaio.

O ensaio foi realizado em pórtico de reação com o carregamento aplicado por um atuador com capacidade máxima de 500 kN e sensibilidade de 0,01 kN. Para maior estabilidade, realizou-se o ensaio com controle da abertura da fissura, medida por um clip-gauge instalado nos entalhes das amostras (Figura 7-6) a uma taxa de 0,0001 mm/s.



Figura 7-6 - Detalhe da instalação do clip gauge.

Para a aquisição das imagens, utilizou-se uma câmera semi-profissional Canon EOS 30D, com sensor CMOS de 3504x2336-pixel e 12-bit RGB, acoplada a um computador com software para controle de disparos programado para fazer uma foto a cada 5 segundos (Figura 7-7).



Figura 7-7 - Esquema geral para o ensaio de flexão em três pontos com aquisição de imagens.

Para aumentar a eficiência da técnica de correlação de imagens digitais na obtenção dos campos de deslocamentos, a superfície de interesse de cada amostra foi preparada usando tinta spray preta e branca. A textura resultante deste tratamento, ilustrada na (Figura 7-8), foi obtida com o uso de uma máscara (tela com malha de 5 mm).



Figura 7-8 - Detalhe da área de obtenção das imagens.

A (Figura 7-9) apresenta as curvas força *versus* abertura do clip gauge, as quais foram obtidas dos ensaios de flexão em corpos-de-prova entalhados a meio vão.

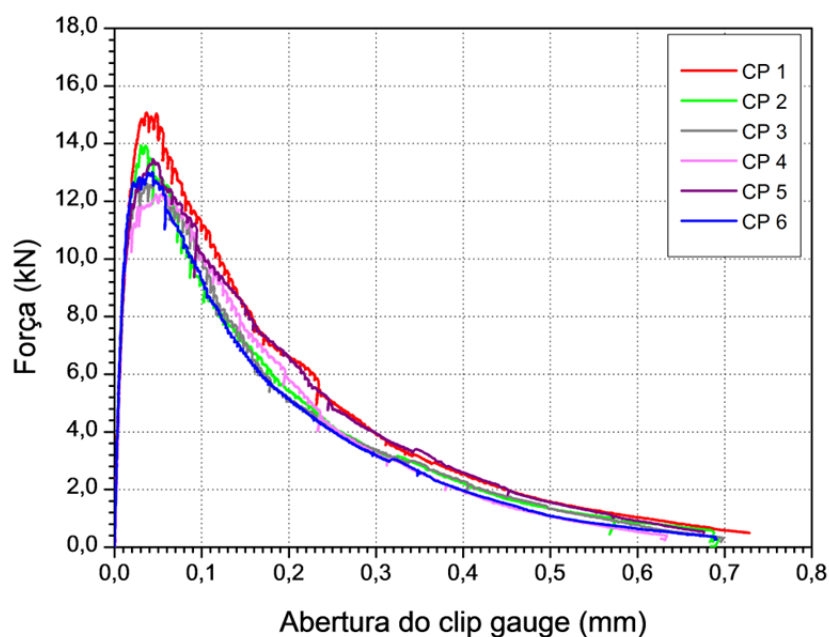


Figura 7-9 - Curvas força *versus* abertura do clip-gauge.

No presente trabalho, apesar dos corpos-de-prova ensaiados não atenderem às prescrições da RILEM 50 FMC (1985), sua formulação foi utilizada para obtenção de uma estimativa da energia de faturamento.

No método proposto pela RILEM 50 FMC (1985), a curva força *versus* deslocamento vertical (flecha) no meio do vão do corpo-de-prova deve ser obtida até

o instante em que a força resistida pelo corpo-de-prova se torna nula, isto é, no instante em que o corpo-de-prova se parte em duas metades.

Uma vez obtida a curva força *versus* deslocamento e admitindo que haja absorção de energia apenas na zona coesiva, a energia de fratura do material pode ser calculada usando a expressão dada pela (Equação 7-1).

$$G_f = \frac{W_0 + (m_1 + 2 \cdot m_2) \cdot g \cdot \delta_u}{A_{lig}} \quad \text{Equação 7-1}$$

sendo:

W_0 = trabalho produzido pela força exercida pelo atuador durante a deformação do corpo-de-prova, representado pela área sob a curva força *versus* deslocamento vertical (flecha) mostrada na (Figura 7-10);

m_1 = massa do corpo-de-prova entre os apoios, calculada como a massa de um corpo-de-prova multiplicada pela relação entre o vão entre apoios e o comprimento total do corpo-de-prova;

m_2 = massa do equipamento que acompanha a deformação do corpo-de-prova durante o ensaio e que não está acoplado ao atuador;

g = aceleração da gravidade, admitida como sendo igual a 9,81 m/s²;

δ_u = flecha última, ou seja, o deslocamento vertical registrado no final do ensaio; e

$A_{lig} = b \cdot (h - a)$, área da superfície de fratura acima do entalhe projetada no plano ortogonal ao eixo longitudinal do corpo-de-prova.

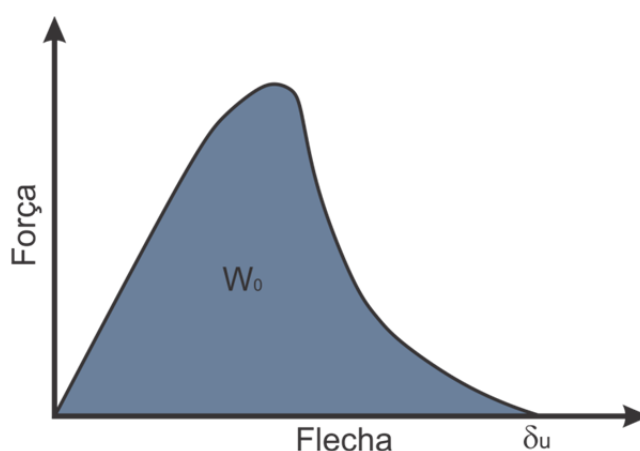


Figura 7-10 – Gráfico para obtenção de trabalho realizado pela força externa, baseado nas proposições da RILEM 50-FMC.

A (Figura 7-11) apresenta as curvas força *versus* deslocamento vertical (flecha) e a (Tabela 7-4) reúne os valores de energia de fraturamento, obtidos a partir dos ensaios de flexão em três pontos.

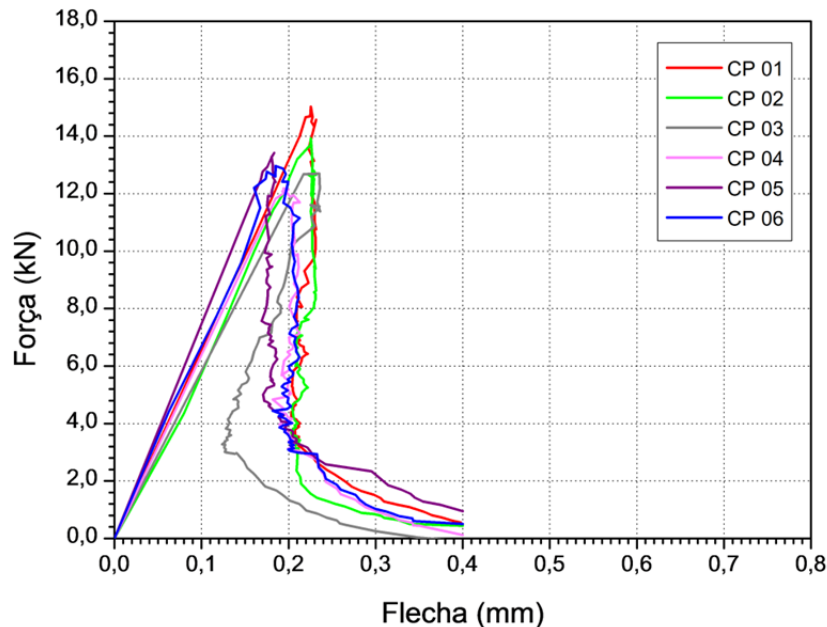


Figura 7-11 - Quantificação da energia de fratura segundo o RILEM 50-FMC.

Tabela 7-4 - Energia de faturamento por flexão em três pontos.

Corpo-de-prova	G_f (N.mm/mm ²)
1	0,108
2	0,099
3	0,058
4	0,088
5	0,108
6	0,104
Média	0,094
Desvio Padrão	0,019
Coefficiente de Variação	20,30%

Segundo o CEB-FIP (1990), a energia de fratura do concreto (G_f) pode ser estimada pela (Equação 7-2), para concretos com resistência à compressão menor ou igual a 80 MPa.

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7}$$

Equação 7-2

sendo G_{f0} o valor base da energia de fraturamento estimado em função da dimensão máxima do agregado graúdo (Tabela 7-5), f_{cm0} igual 10 MPa e f_{cm} a resistência à compressão.

Tabela 7-5 - Valores base de energia de faturamento (CEB-FIP (1990)).

d_{max} (mm)	G_{F0} (N.mm/mm ²)
8	0,025
16	0,030
32	0,058

Considerando a dimensão máxima do agregado graúdo de 19 mm, o valor estimado da energia de faturamento, segundo a recomendação do CEB-FIP (1990) foi de 0,096 N.mm/mm², que é um valor próximo ao obtido experimentalmente pela proposta da RILEM 50 FMC (1985).

7.2 Resultados da correlação de imagens

A qualidade da medição do campo de deslocamento pela técnica da correlação de imagem baseia-se principalmente na qualidade da textura das imagens em análise. Assim, antes de se discutir os resultados obtidos com a correlação de imagens, uma análise das características das texturas obtidas nos ensaios deste trabalho é apresentada. O histograma é o primeiro item a ser avaliado nesta análise da qualidade das imagens que serão utilizadas na CID (Figura 7-12).

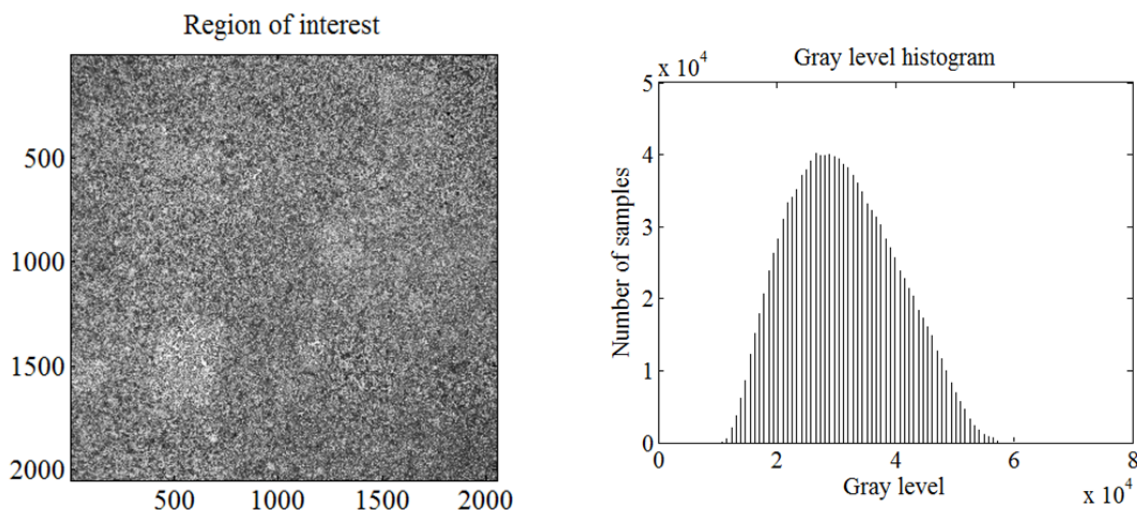


Figura 7-12 – Histograma da textura do corpo-de-prova CP01.

Ele oferece uma indicação da qualidade global da imagem apontando se há problemas de saturação. No entanto, tal caracterização global da imagem apresenta interesse limitado. É principalmente útil na fase de aquisição de imagens para definir o tempo de exposição e/ou abertura do sensor da câmera.

No algoritmo de correlação do CORRELIQ4, as imagens analisadas são divididas em elementos e estes são caracterizados pelo desvio padrão do nível de cinza. A média desses valores de todos os elementos de um dado tamanho, normalizados pelo nível de cinza máximo presente na imagem, define a variação do nível de cinza da textura. Esta é uma propriedade que apresenta maior importância na caracterização dos padrões de uma textura do que na caracterização da qualidade de aquisição das imagens. A importância da análise dessa propriedade é avaliar se as sub-imagens apresentam a informação suficiente para permitir a utilização adequada do algoritmo de correlação.

Para escolha do tamanho do elemento, um limite prático para o valor da variação (flutuação) é de no mínimo 1% da gama dinâmica da câmera, isto é, para valores inferiores a este limite, não existem gradientes suficientes para obter os deslocamentos. Na (Figura 7-13) é apresentada a porcentagem de elementos (para cada tamanho) que atendem esse limite. Observa-se que apenas para a escolha de elementos com tamanho de 8 pixels a imagem apresentaria alguns elementos que não atendem a este critério.

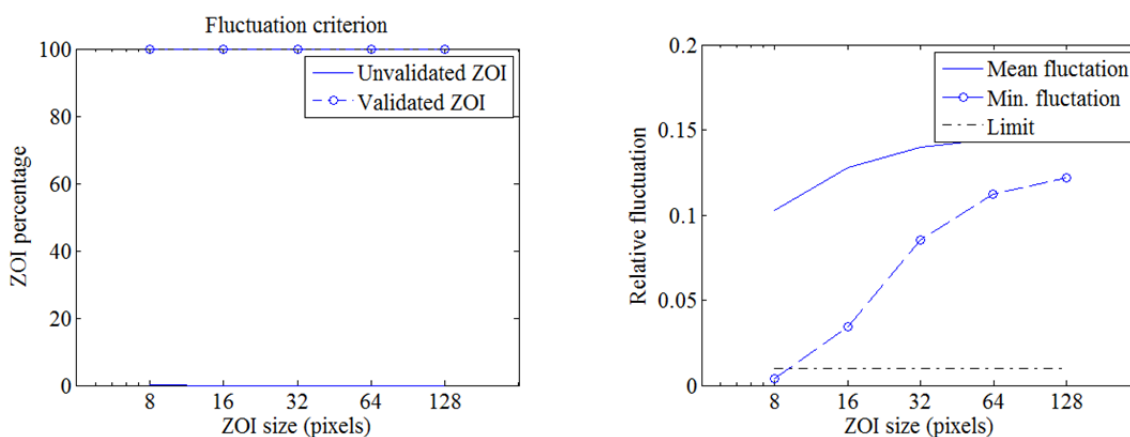


Figura 7-13 - Critério de flutuação do corpo-de-prova CP01.

Outro critério importante é o raio de correlação da textura da imagem, que é calculado a partir de uma interpolação parabólica da função de auto-correlação na

origem. O inverso dos dois autovalores da curvatura fornece uma estimativa dos dois raios de correlação (Figura 7-14), quando tomada a média de todos os elementos de um dado tamanho.

Em relação a este critério, um limite prático para o valor do raio de correlação na escolha do tamanho do elemento é de no máximo 25% do tamanho do elemento. Acima deste valor, acredita-se que as medições não são seguras. Observa-se que apenas para a escolha de elementos com tamanho de 8 pixels, a imagem apresentaria cerca de 45% dos elementos que não atendem a este critério.

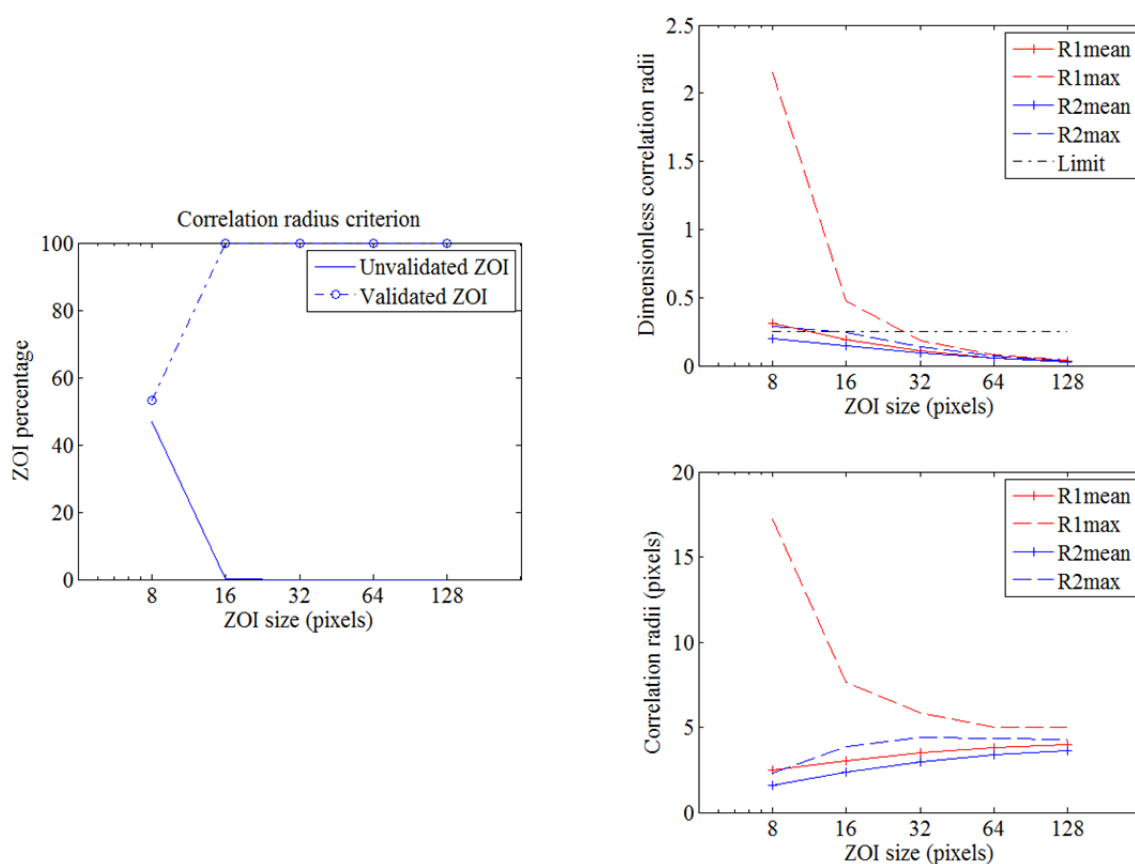


Figura 7-14 - Critério do raio de correlação do corpo-de-prova CP01.

Como no presente trabalho pretende-se utilizar os campos de deslocamento obtidos pela CID para avaliações quantitativas e não só qualitativa, é importante avaliar a precisão dos resultados experimentais obtidos usando o algoritmo de correlação do CORRELIQ4. Isto é feito utilizando a imagem de referência, ou seja, a imagem tomada antes da aplicação do carregamento, e gerando imagens derivadas através de prescrições de campos de deslocamentos conhecidos. Aplica-se o algoritmo de correlação sobre essas imagens, obtendo-se os campos de

deslocamentos estimados. Conhecidos os campos de deslocamentos, estimados e prescritos, quatro diferentes gráficos são apresentados (Figura 7-15 e Figura 7-16): média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos estimados e a média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos em função do tamanho do elemento.

O tamanho do elemento adotado foi de 16 pixels, já que este é o valor mínimo necessário para atender a todos os critérios de qualidade anteriormente mencionados.

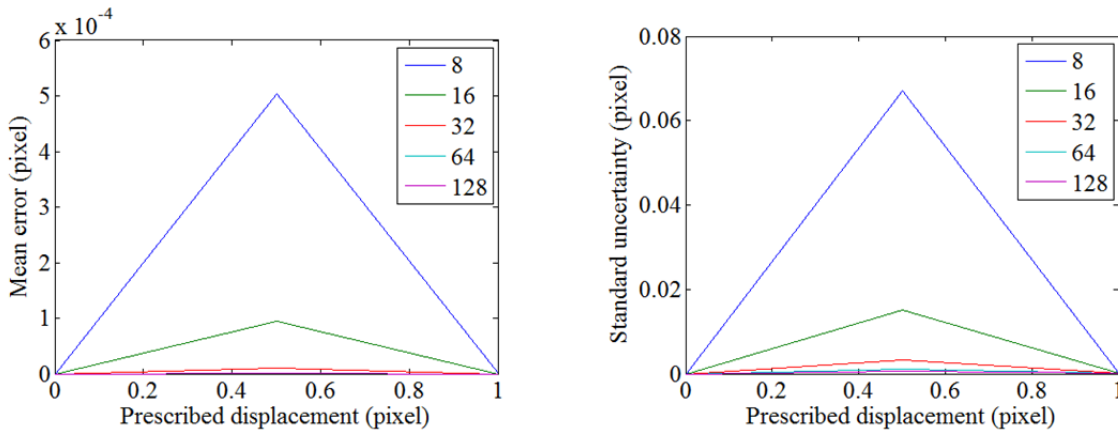


Figura 7-15 - Média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos estimados do corpo-de-prova CP01.

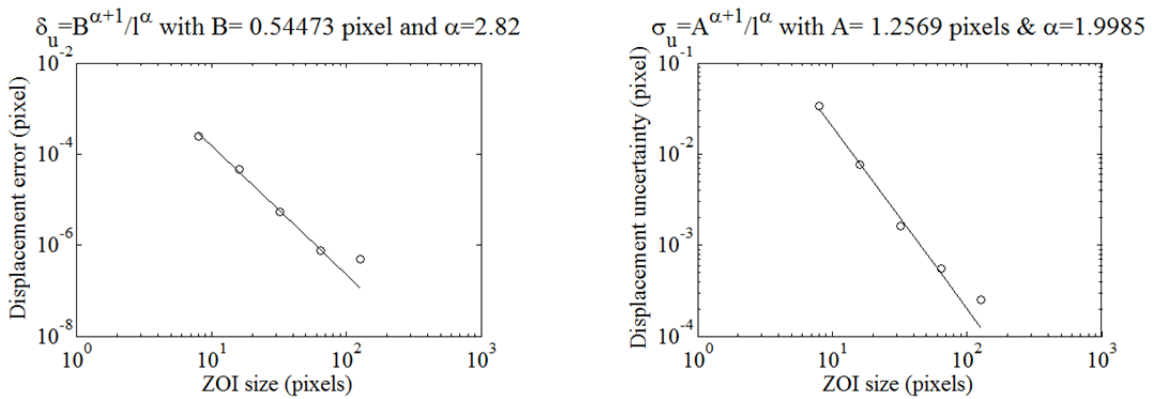


Figura 7-16 - Média e desvio padrão dos erros dos deslocamentos em função do tamanho do elemento do corpo-de-prova CP01.

Uma primeira análise utilizando medições de deslocamento consiste em comparar a saída do clip gauge com a abertura média do entalhe, calculada como a diferença de deslocamento horizontal entre duas zonas escolhidas em torno deste.

A análise foi realizada em uma sequência de 100 fotos e a (Figura 7-17) mostra a curva força *versus* abertura do entalhe medida pelo clip-gauge, com os pontos indicando os instantes em que foram obtidas as imagens. A (Figura 7-18) apresenta

uma comparação dos dados obtidos pelo clip-gauge e aqueles obtidos a partir do processo de correlação. Embora a posição de medição seja diferente, uma tendência linear é observada. Isso mostra que a CID produz resultados consistentes com aqueles obtidos pelo clip-gauge e constitui uma primeira validação desta técnica no presente ensaio.

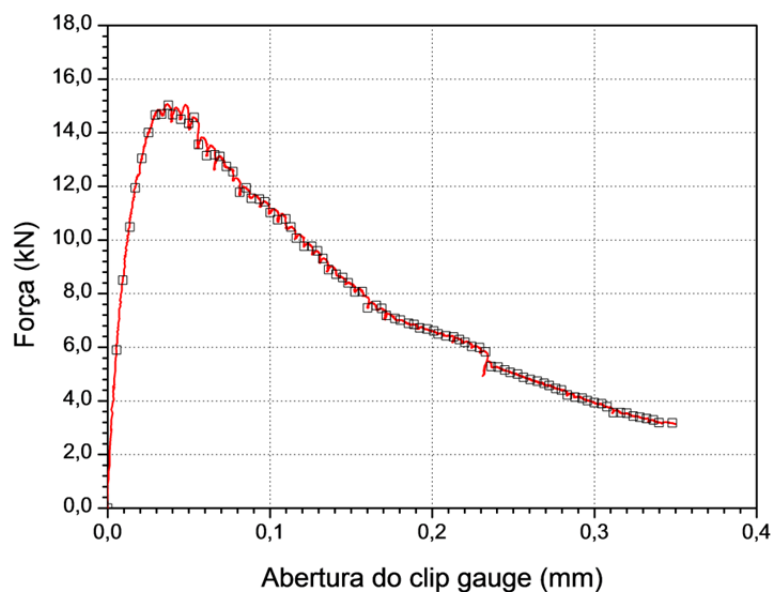


Figura 7-17 - Curvas força *versus* abertura do clip-gauge.

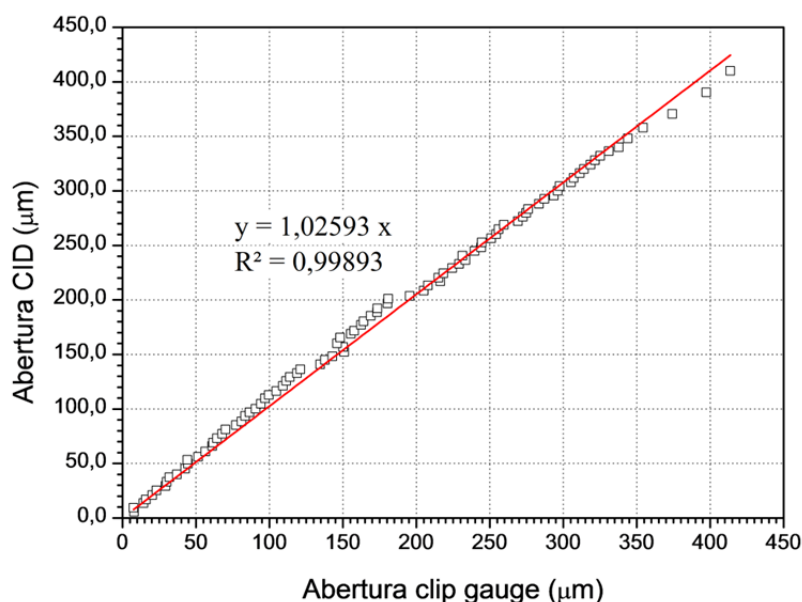


Figura 7-18 - Comparação entre as aberturas obtidas pelo clip-gauge e o pela CID.

O gráfico de incertezas dos deslocamentos (Figura 7-16) mostra que, para o tamanho de elemento adotado, a resolução da medida de deslocamento é da ordem

de 0,01 pixels (ou 0,4 μm). O valor da abertura permanece no intervalo de subpixel (isto é, menos de 39 μm) durante uma parte significativa da história do carregamento (Figura 7-18), mas significativamente maior do que a resolução da medida de deslocamento. Para esta ordem de grandeza de deslocamentos, é impossível detectar visualmente a presença da fissura, sendo necessária a análise dos campos de deslocamentos obtidos pela correlação para sua visualização.

O próximo passo consiste em analisar o campo de deslocamento ao longo de toda região de interesse (cerca de 33530 pontos são avaliados quando um elemento de 16 pixels é escolhido). A (Figura 7-20) mostra dez mapas com os campos de deslocamento em diferentes níveis da curva carregamento *versus* abertura do entalhe (Figura 7-19). Com o aumento da abertura do entalhe a fissura se propaga. A partir dos contornos de deslocamento obtidos na correlação, é possível localizar a superfície da fissura. Finalmente, ao se comparar esta superfície com uma imagem da região de interesse após a ruptura, uma boa concordância é obtida (Figura 7-21) Pode-se concluir com estas análises que a CID fornece resultados com qualidade e quantidade suficientes para as finalidades deste trabalho.

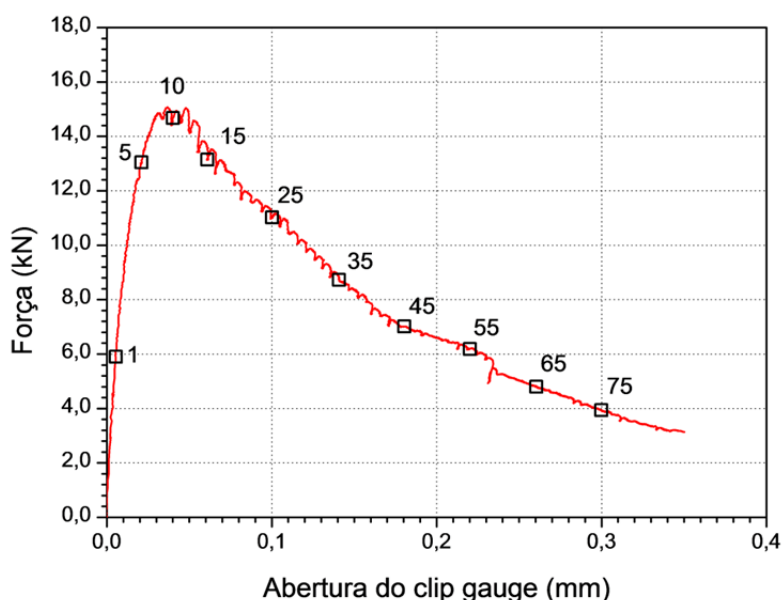
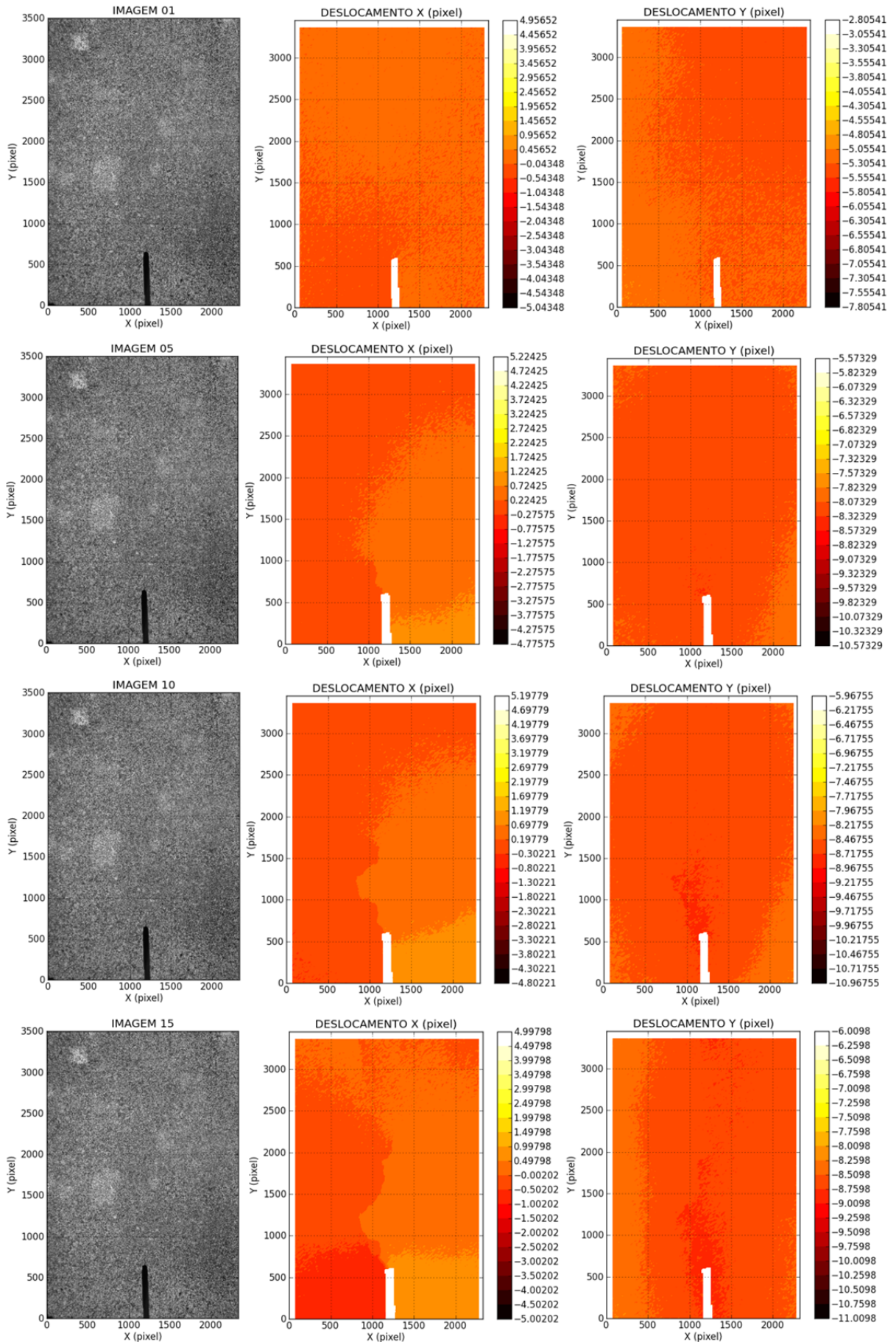
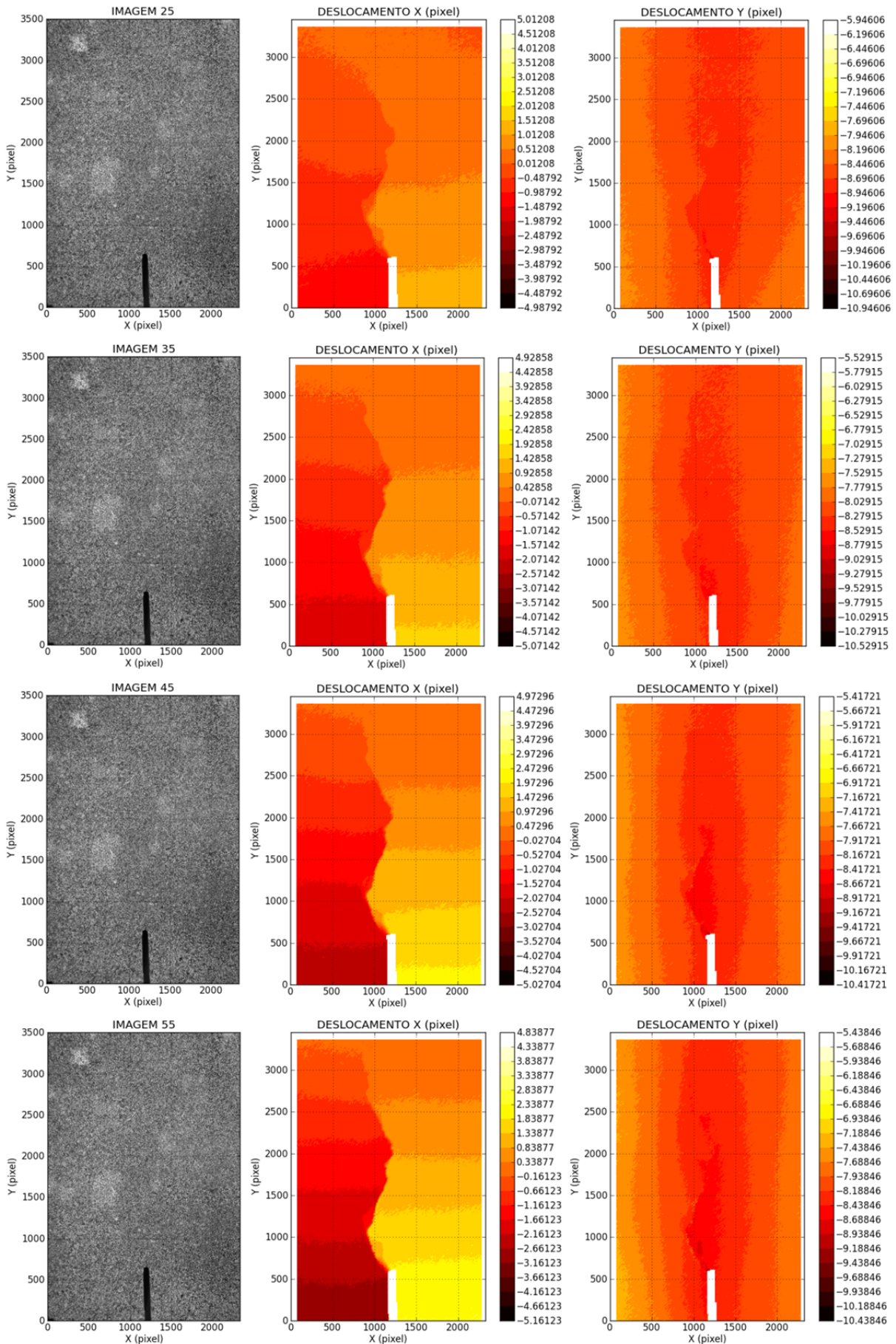


Figura 7-19 - Curva força *versus* abertura do clip-gauge do corpo de prova CP01, indicando os instantes dos campos de deslocamentos da Figura 7-20.





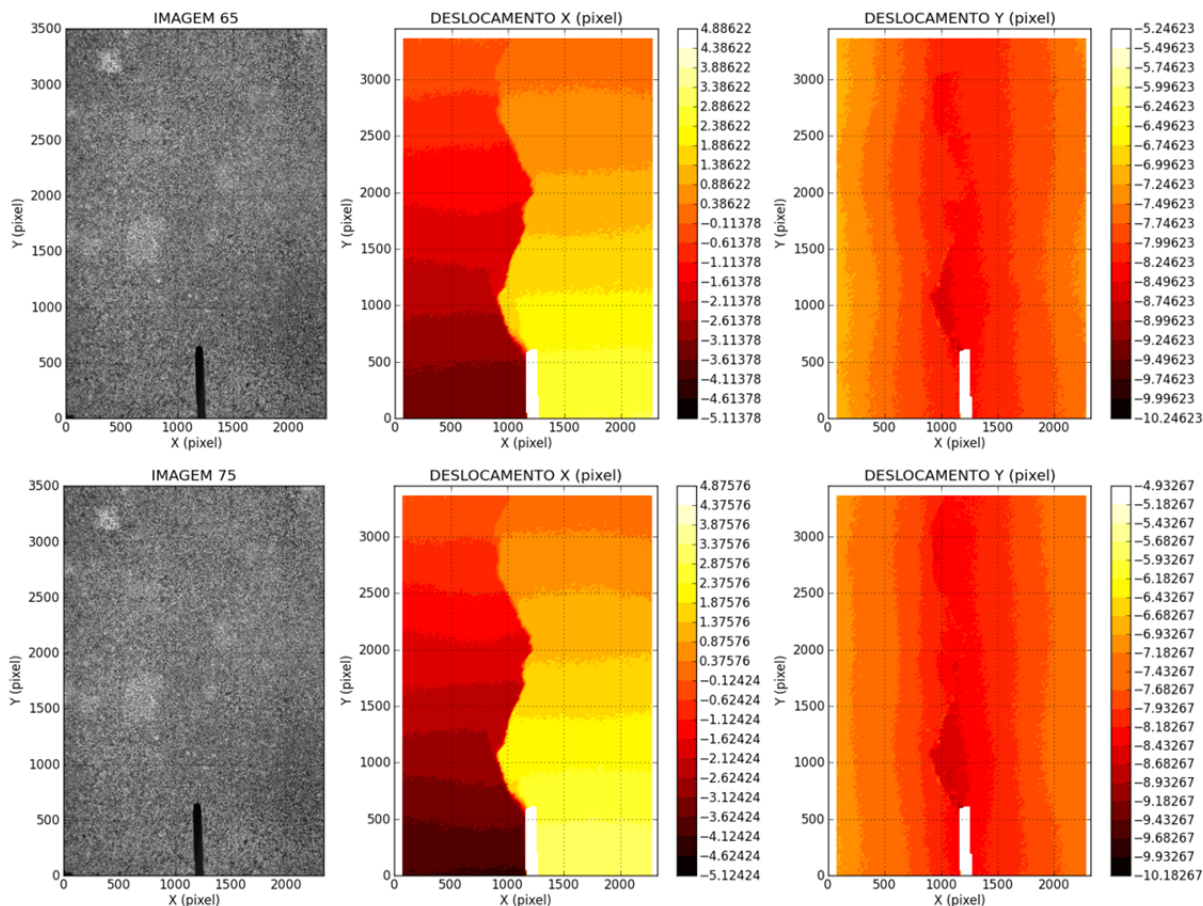


Figura 7-20 - Campos de deslocamentos obtidos pela correlação de imagens.

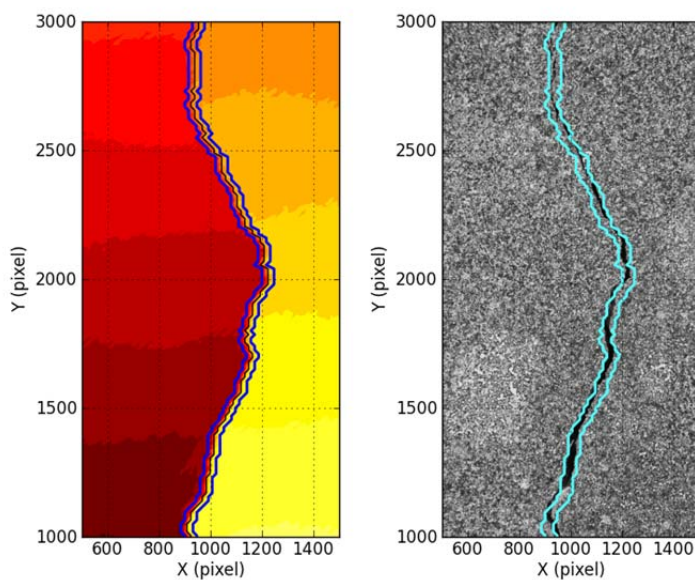


Figura 7-21 - Propagação da fissura.

CAPÍTULO 8

Análise inversa com dados experimentais

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na análise inversa, realizada com os dados experimentais obtidos mediante a técnica de correlação de imagens, para identificar as propriedades elásticas e os parâmetros da lei coesiva. Além disto, para avaliar a representatividade dos resultados obtidos, realizou-se uma simulação numérica (com o módulo de análise direta da ferramenta computacional implementada) utilizando os parâmetros identificados.

8.1 Propriedades elásticas

Apesar de terem sido realizados ensaios de caracterização do concreto das vigas para a obtenção do módulo de elasticidade, a formulação apresentada no capítulo 5, que combina MEC e AG, foi utilizada para estimar essa mesma propriedade. A discretização em elementos de contorno adotada para este fim é ilustrada (Figura 8-1). Na técnica de algoritmo genético, a função objetivo é avaliada nos pontos internos, aferindo a correlação entre o deslocamento calculado pelo MEC e o obtido experimentalmente pela CID.

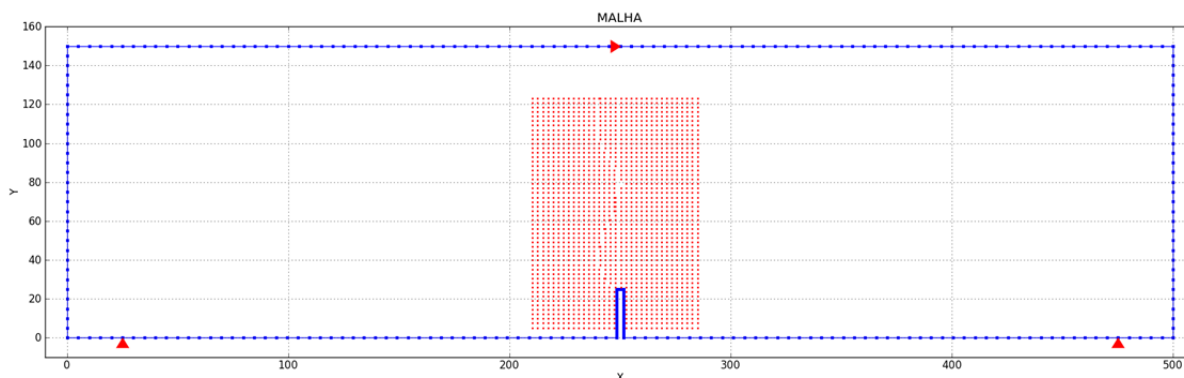


Figura 8-1 - Malha para estimativa do módulo de elasticidade.

O coeficiente de Poisson não pode ser avaliado com este procedimento, pois o nível de deslocamento é muito pequeno em comparação com a precisão das medidas de deslocamentos obtidos pela CID. Sendo assim, um valor de $\nu = 0,2$ foi adotado para as análises que serão realizadas neste capítulo. É importante salientar que a influência deste valor sobre a análise de identificação dos parâmetros da lei coesiva de fissuramento é muito pequena.

A (Figura 8-2) apresenta a evolução da função objetivo ao longo de 35 gerações e os respectivos valores de módulo de elasticidade, considerando-se uma das vigas estudadas. Com este procedimento obteve-se o valor de 31250 MPa para o módulo de elasticidade. A (Tabela 8-1) apresenta os valores estimados desse módulo para o conjunto de 6 vigas ou corpos de prova (CP).

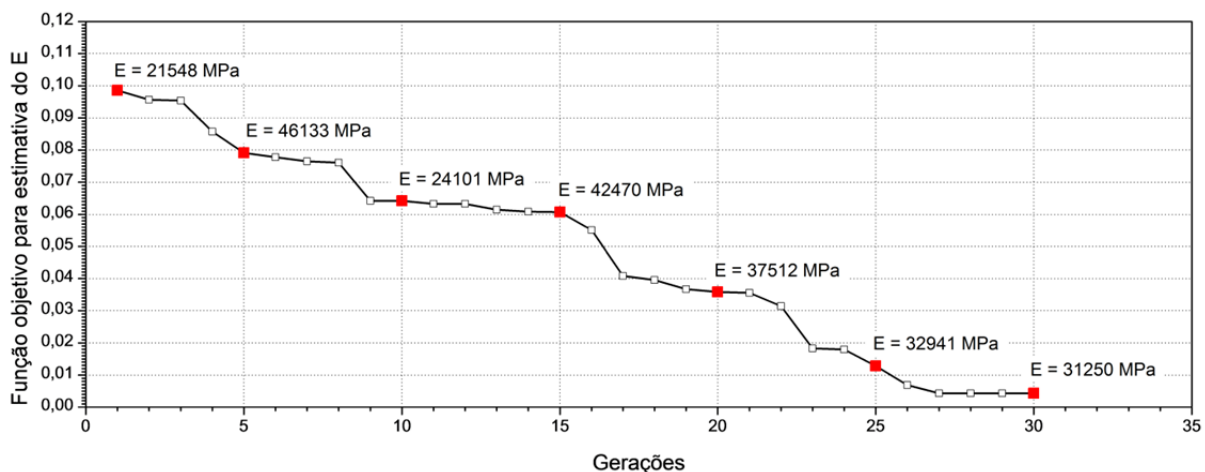


Figura 8-2 - Evolução da função objetivo para estimativa do módulo de elasticidade ao longo de 35 gerações (CP01).

Tabela 8-1 - Valores de E estimados pela análise inversa.

AMOSTRA	E (MPa)
CP01	31250
CP02	32817
CP03	30798
CP04	29983
CP05	31607
CP06	35197
MÉDIA	31942

O valor médio identificado é menor que o valor medido diretamente através da realização de ensaios de compressão padrão em corpos de prova cilíndricos

moldados com este concreto, ($E = 40000$ MPa). Nas análises a seguir, adotou-se o valor de $E = 32000$ MPa.

8.2 Modelo coesivo (método determinístico)

Tendo identificado os parâmetros elásticos, a análise inversa é agora realizada para o subdomínio de interesse, indicado na (Figura 8-3). Para esta análise, considera-se apenas uma região em torno da linha da fissura, onde as imagens captadas durante os ensaios deram origem aos campos de deslocamentos. A (Figura 8-4) ilustra a distribuição de pontos nessa região e destaca o zoom de uma porção desta, para demonstrar a densidade de pontos de leitura dos deslocamentos.

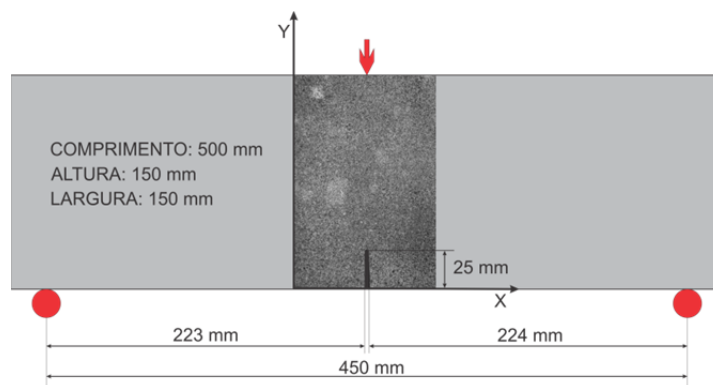


Figura 8-3 - Detalhe da região de interesse.

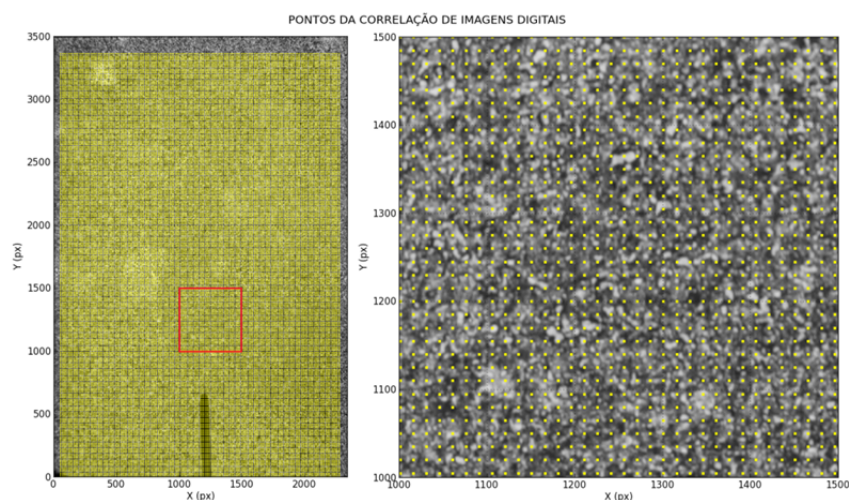


Figura 8-4 - Ilustração dos pontos de leitura dos deslocamentos pela CID.

Na (Figura 8-6) são apresentados os campos de deslocamento em correspondência aos pontos da curva carregamento *versus* abertura do entalhe escolhidos para aplicação da técnica de análise inversa proposta (Figura 8-5).

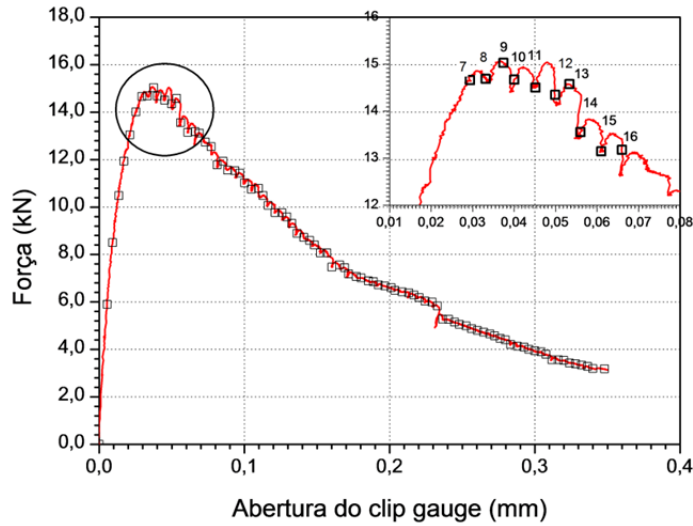
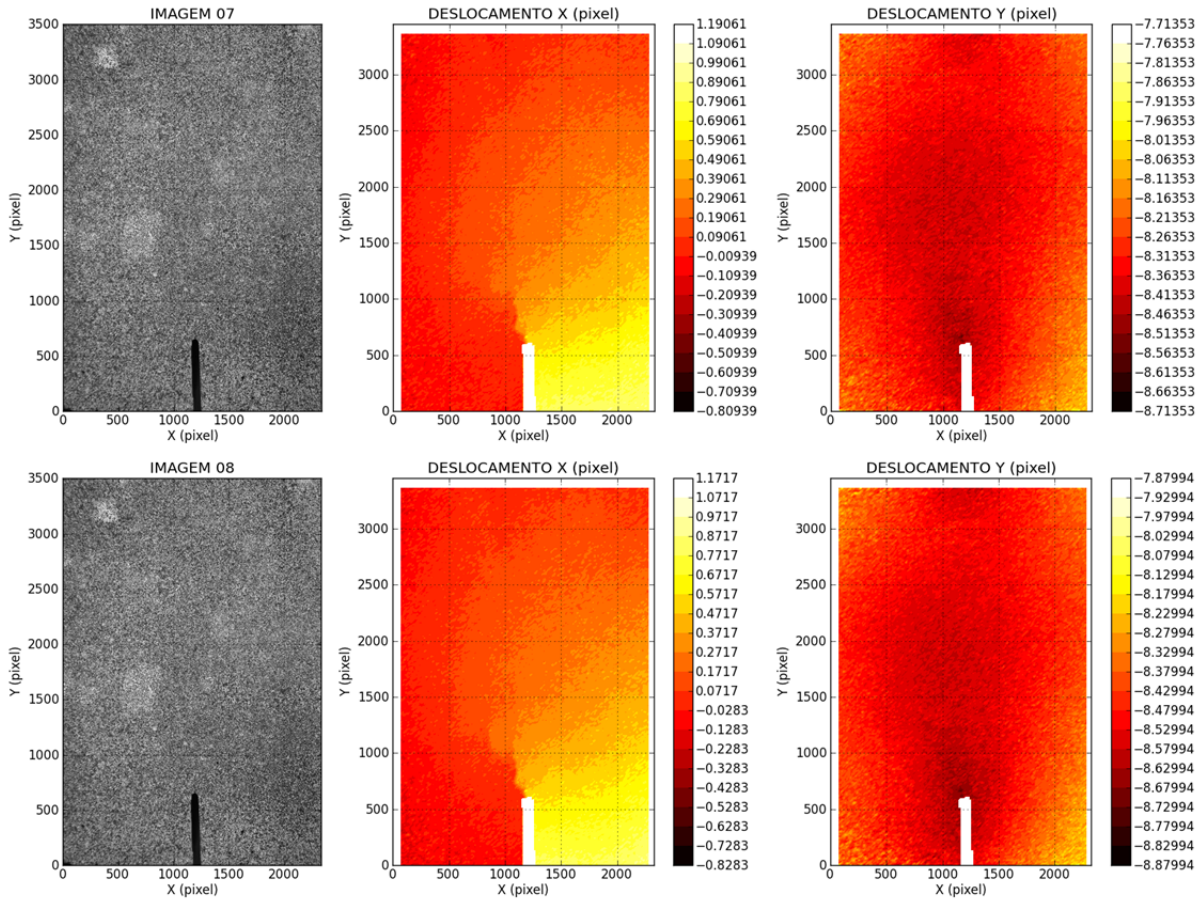
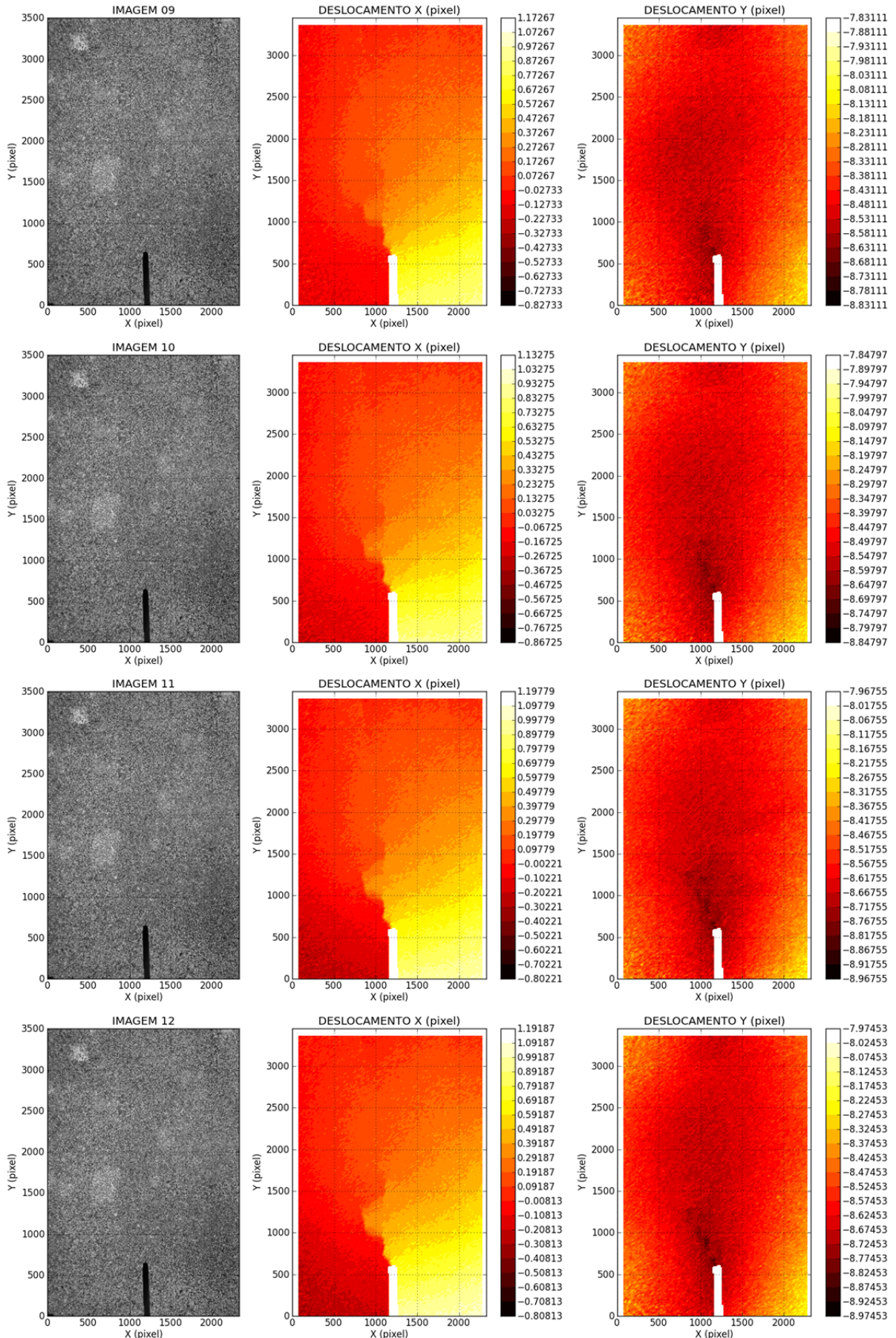


Figura 8-5 - Posição das imagens selecionadas para realização da análise inversa no gráfico força x abertura do clip.





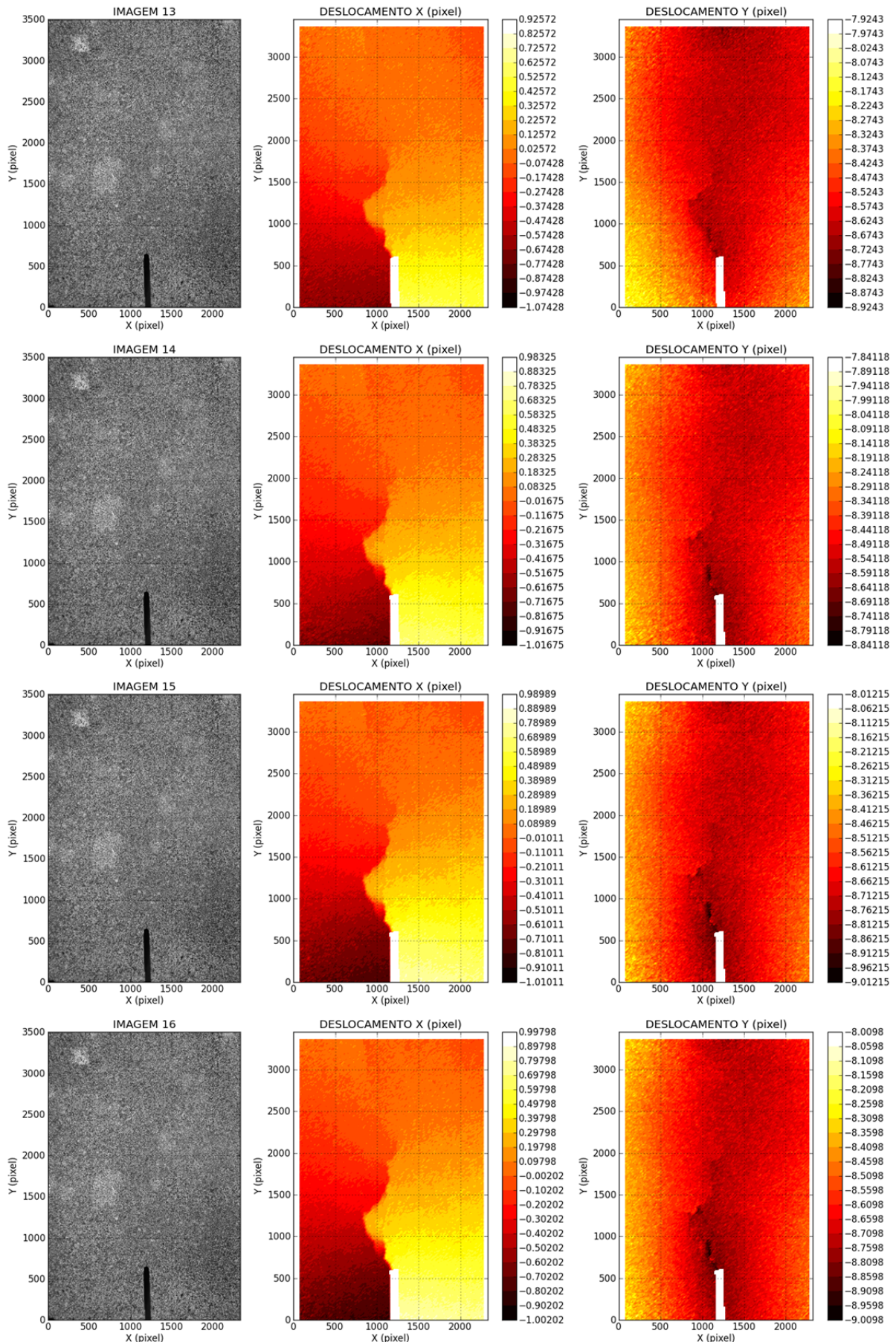


Figura 8-6 - Campos de deslocamentos obtidos pela correlação de imagens.

A superfície da fissura foi aproximada por seguimentos retos, como ilustrado na (Figura 8-7) com os vértices para geração da malha. Portanto, as pequenas variações na direção da superfície da fissura foram eliminadas e apenas as principais foram conservadas para realização desta análise. A região de interesse foi discretizada em duas sub-regiões, usando-se em média, 400 elementos de contorno por região, sendo 200 deles na linha da fissura. Além disto, selecionou-se um conjunto de aproximadamente 900 pontos internos por sub-região.

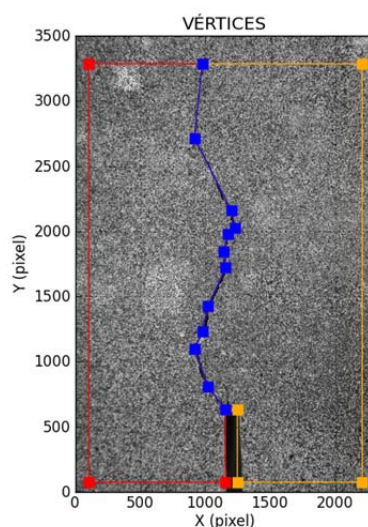


Figura 8-7 - Vértices para geração da malha de elementos de contorno (CP01).

Na análise inversa pelo método determinístico proposto, nos nós do contorno e pontos internos da malha prescrevem-se os valores de deslocamento obtidos pela CID e nos nós da interface deixam-se incógnitos os valores de deslocamentos e forças de superfície. Com a resolução do sistema de equações gerado obtêm-se as aberturas e a distribuição da tensão de normal correspondente ao longo da linha da fissura, como mostrado nas (Figura 8-8 e Figura 8-9) para imagens 07 a 16.

Com o traçado dos gráficos de abertura da fissura e tensão normal ao longo da superfície da fissura, verifica-se que nos pontos correspondentes aos vértices (mudança de direção da superfície da fissura) há um comportamento fora da distribuição esperada, mostrando efeitos locais que são provavelmente devido ao intertravamento dos agregados.

A (Figura 8-10) apresenta as distribuições de valores de tensão normal *versus* abertura da fissura para os nós que já estão em regime de amolecimento

característico do modelo coesivo (50 primeiros nós) para as imagens 07 a 16, com o intuito de se determinar as grandezas de interesse para a lei coesiva.

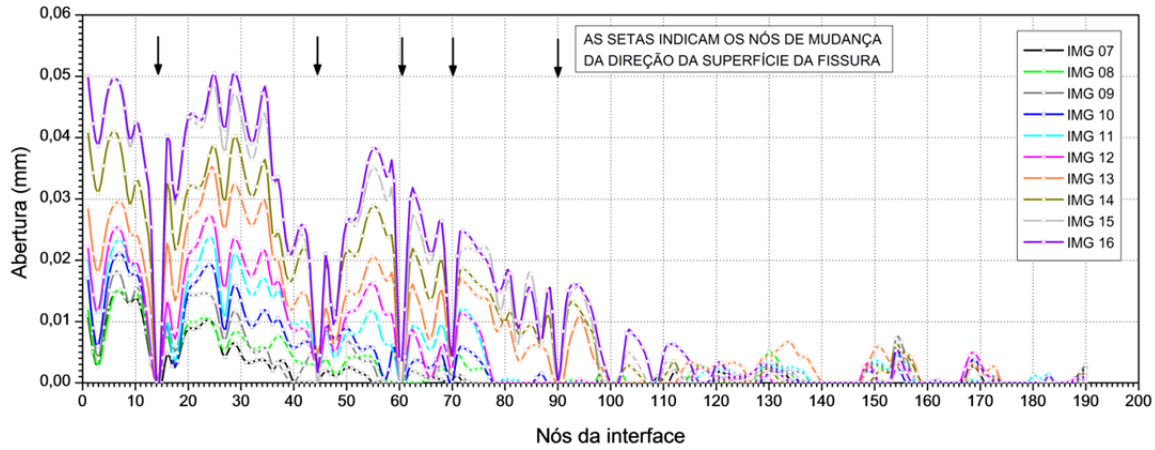


Figura 8-8 - Abertura nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01).

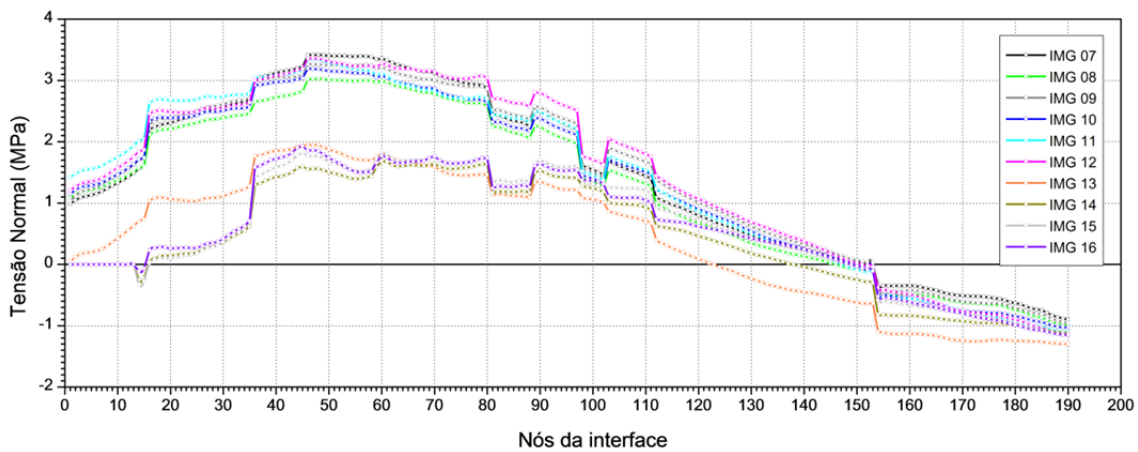
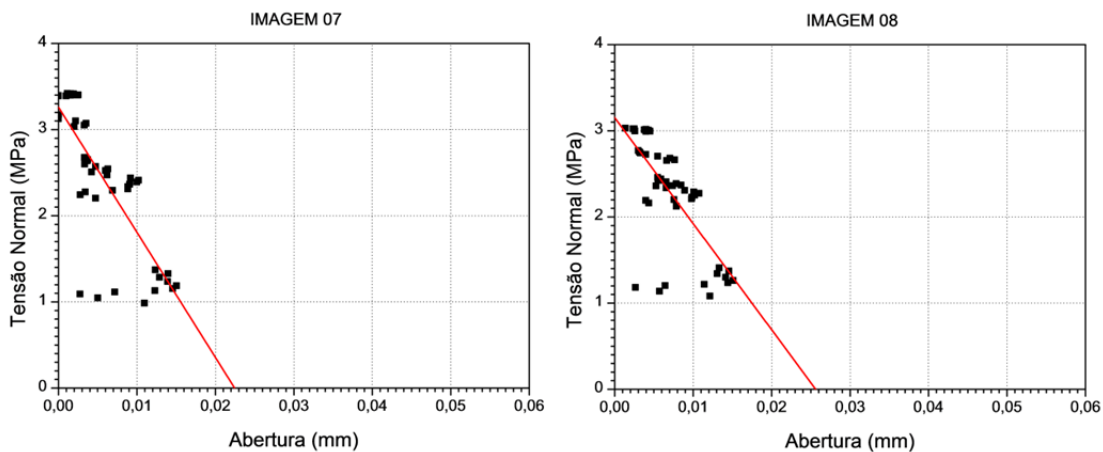


Figura 8-9 - Tensão normal nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01).



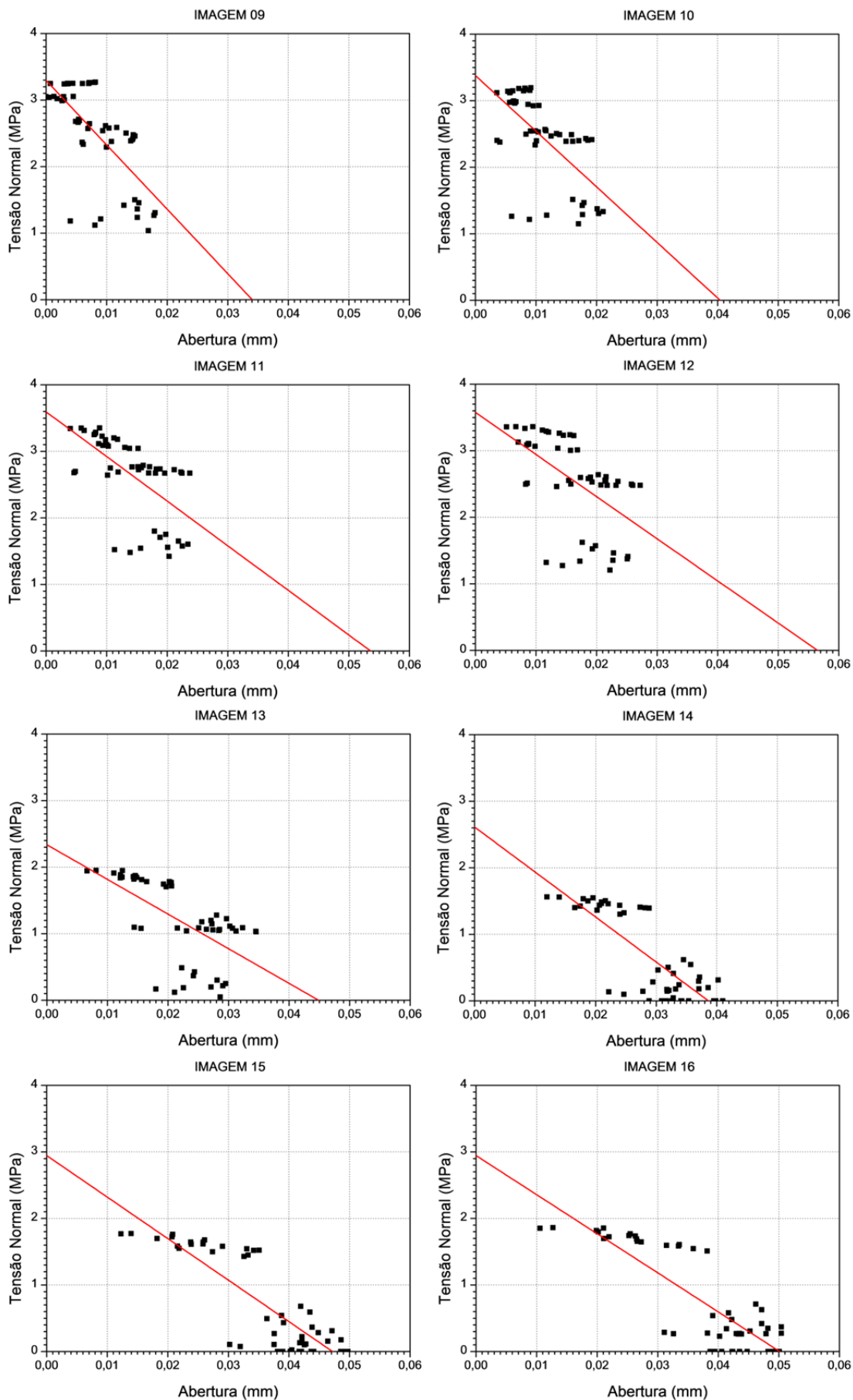


Figura 8-10 - Tensão normal versus Abertura nos nós da interface nas imagens 07 a 16 (CP01).

Com a análise das distribuições, observa-se que apesar de não se poder determinar a forma da lei coesiva, é possível avaliar os valores de tensão normal de tração crítica e abertura crítica obtendo-se, com isto, uma estimativa para o valor da energia de fraturamento.

A (Tabela 8-2) apresenta os valores destes parâmetros, obtidos por uma regressão linear sobre os resultados oriundos das imagens 07 a 16. Analisando os resultados, vê-se que o menor valor para G_f foi de 36,26 N/m na imagem 07. Este valor pode ser explicado pelo baixo valor de abertura crítica obtida pela regressão, mas que provavelmente não reflete a realidade, já que nesta imagem não há nós que atingiram a abertura crítica final (tensão normal de tração nula). Já o valor de maior G_f foi de 101,00 N/m na imagem 12, valor mais próximo ao obtido experimentalmente pelo método da RILEM 50-FMC $G_f = 94,00$ N/m. Este valor apresenta maior confiabilidade, já que nos resultados desta imagem há nós em todos os estágios da curva de amolecimento (tensão normal de tração variando do valor máximo até a tensão normal nula). Outro fator a ser analisado é a variação da inclinação das retas de regressão, o que pode indicar o caráter não linear da forma da curva do modelo coesivo.

Tabela 8-2 - Valores dos parâmetros do modelo coesivo estimados pela análise inversa.

IMAGEM	f_{tc} (MPa)	Δu_c (mm)	G_f (N/m)
7	3,23060	0,02245	36,26
8	3,15450	0,02563	40,42
9	3,29528	0,03405	56,11
10	3,37728	0,04041	68,23
11	3,59371	0,05358	96,27
12	3,57659	0,05648	101,00
13	2,33647	0,04487	52,42
14	2,61246	0,03862	50,45
15	2,94477	0,04720	69,50
16	2,94481	0,05014	73,83
MÉDIA	3,10665	0,04134	64,22

Avaliando-se as curvas da (Figura 8-10), observa-se que os pontos nos gráficos das imagens (7 a 11) apresentam seus valores concentrados próximos a tensão normal máxima, indicado que estes pontos apresentam maior confiabilidade na estimativa do valor da tensão normal crítica. Já nos gráficos das imagens (12 a

16), os pontos estão concentrados próximos da tensão nula, indicando que estes pontos estão mais aptos para estimar o valor da abertura crítica. Sendo assim, estimou-se a tensão normal crítica pela média das primeiras cinco imagens e a abertura crítica pela média das cinco últimas (Tabela 8-3 e Tabela 8-4).

Tabela 8-3 - Média da tensão normal nas imagens 7 a 11.

IMAGEM	f_{tc} (MPa)
7	3,23060
8	3,15450
9	3,29528
10	3,37728
11	3,59371
MÉDIA	3,33027

Tabela 8-4 - Média da abertura crítica nas imagens 12 a 16.

IMAGEM	Δu_c (mm)
12	0,05648
13	0,04487
14	0,03862
15	0,04720
16	0,05014
MÉDIA	0,04746

Com estes valores, ($f_{tc} = 3,33$ MPa e $\Delta u_c = 0,048$ mm), obtém-se o valor de 79,92 N/mm para energia de fraturamento, (na análise direta realizada no item seguinte estes valores serão chamados de SELECIONADOS A).

Além disso, para tentar diminuir os efeitos localizados da mudança de direção da superfície da fissura, procedeu-se uma nova estimativa através do gráfico da tensão normal *versus* abertura em nós selecionados no meio de cada seguimento da malha da interface (7, 26, 39 e 52) nas imagens 07 a 16 (Figura 8-11). Procedendo-se a regressão linear obtêm-se: $f_{tc} = 3,25$ MPa, $\Delta u_c = 0,044$ e $G_f = 71,32$ N/m, (na análise direta realizada no item seguinte estes valores serão chamados de SELECIONADOS B).

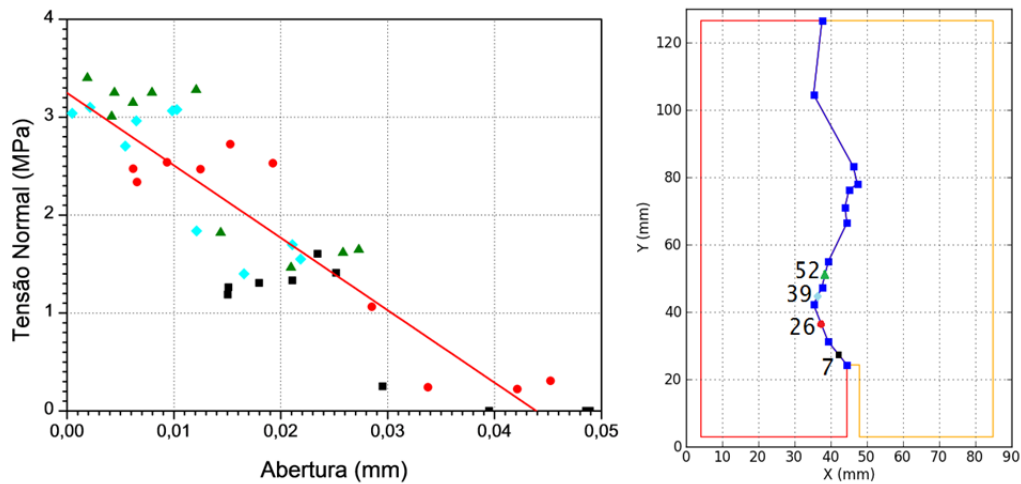


Figura 8-11 - Tensão normal versus Abertura em nós selecionados da interface (07 a 16).

A (Tabela 8-5) apresenta os valores estimados usando o procedimento anterior (SELECIONADOS B) para o conjunto de vigas analisados.

Tabela 8-5 - Valores dos parâmetros do modelo coesivo estimados para o conjunto de vigas.

Corpo de Prova	f_{tc} (MPa)	Δu_c (mm)	G_f (N/m)
CP01	3,25000	0,04400	71,50
CP02	2,97985	0,05100	75,98
CP03	1,95537	0,04302	42,06
CP04	2,83520	0,05701	80,82
CP05	3,59371	0,05342	95,99
CP06	3,32680	0,04161	69,21
MÉDIA	2,99015	0,04834	72,25

8.3 Análise direta com os parâmetros estimados

O módulo de análise direta implementado é utilizado neste item no intuito de avaliar a resposta obtida com os parâmetros estimados do modelo coesivo estimados. Para os valores médio, máximo e selecionado estimados, realizou-se a análise direta para os três modelos coesivos implementados (linear, bi-linear e exponencial), (Figura 8-13).

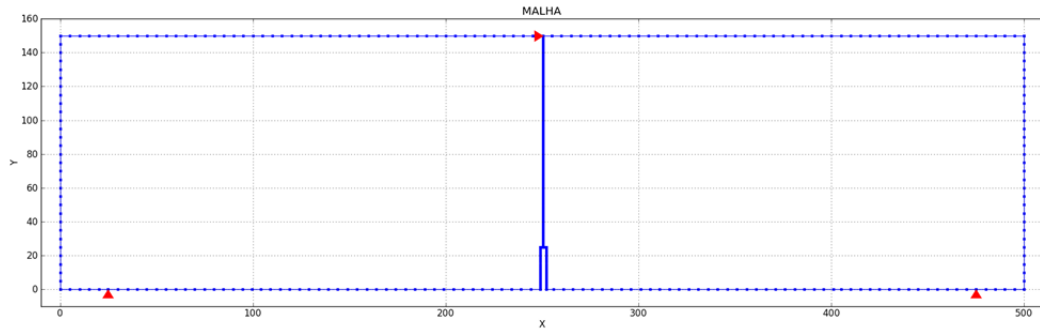


Figura 8-12 - Malha utilizada na análise direta.

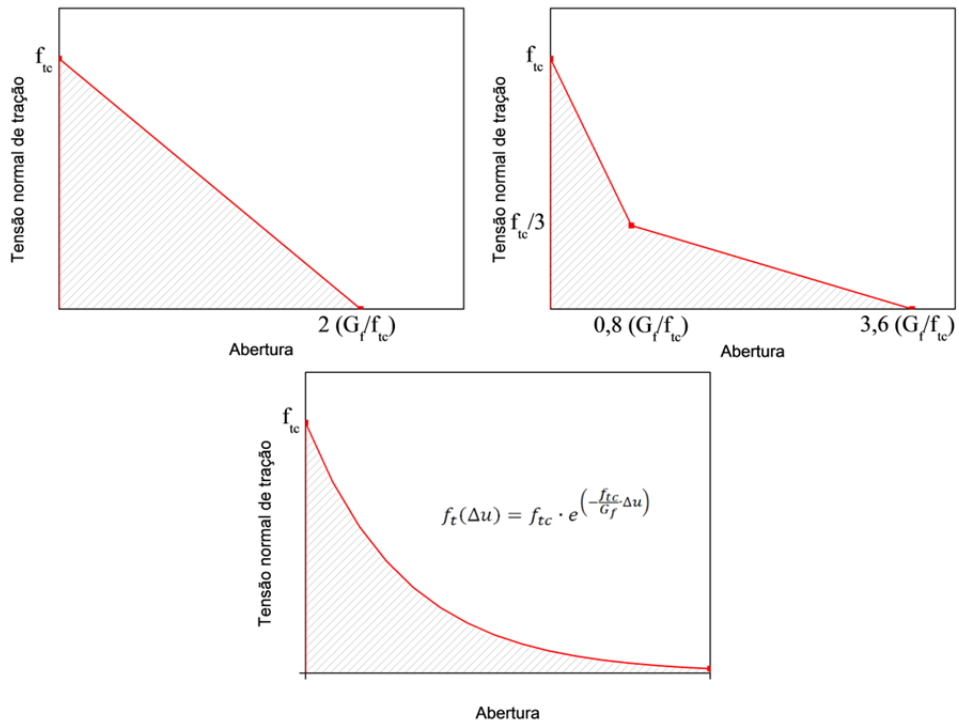


Figura 8-13 - Modelos coesivos utilizados na análise direta.

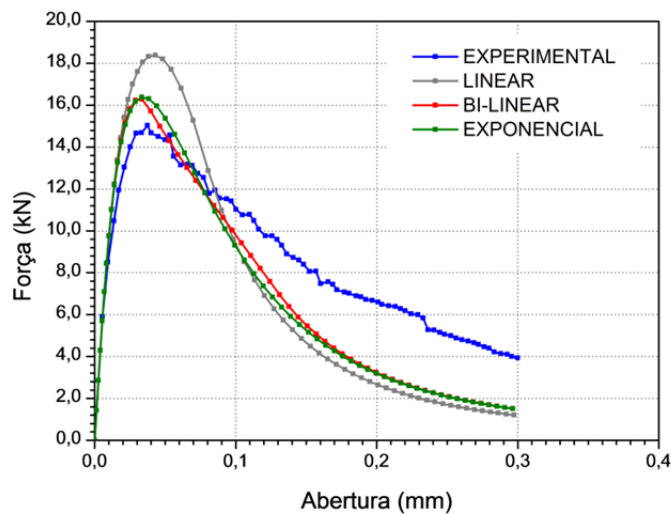


Figura 8-14 - Análise direta com os valores estimados (Máximos).

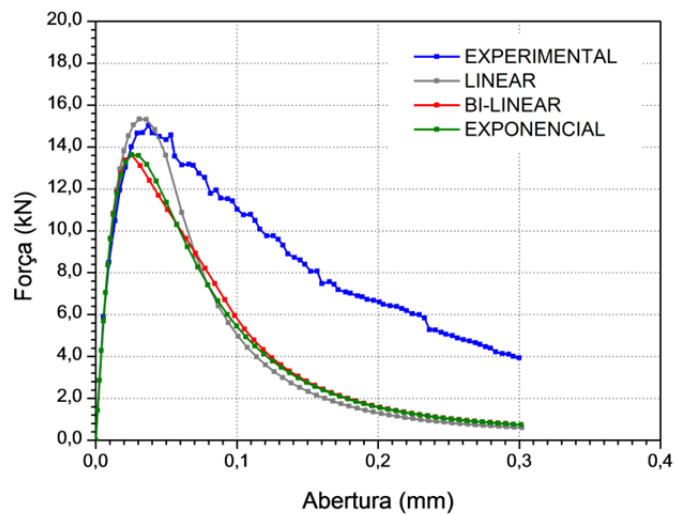


Figura 8-15 - Análise direta com os valores estimados (Médios).

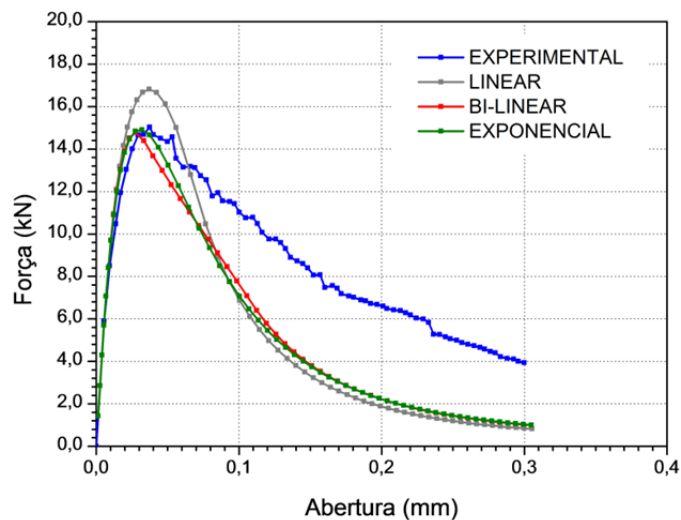


Figura 8-16 - Análise direta com os valores estimados (Selecionados A).

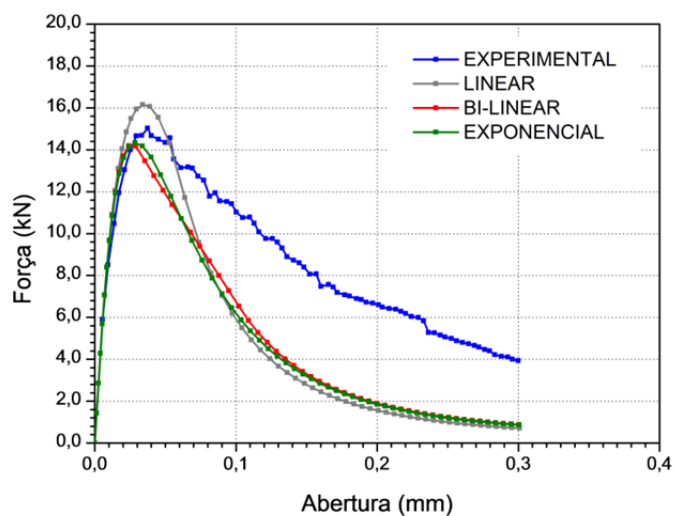


Figura 8-17 - Análise direta com os valores estimados (Selecionados B).

Analisando os resultados da análise direta, observa-se certa divergência no trecho descendente da curva força versus abertura, porém, o modelo prevê com qualidade a força crítica. Esta divergência no tramo descendente pode ser explicada por efeitos não contemplados no modelo numérico utilizado, tais como: fraturamento em Modo II, já que no modelo experimental houve mudança de direção da superfície da fissura, e o intertravamento dos agregados.

CAPÍTULO 9 Conclusão

Este capítulo apresentará uma série de conclusões que puderam ser verificadas no transcorrer do desenvolvimento deste trabalho e com a análise dos resultados obtidos pela ferramenta computacional implementada. Elas serão apresentadas a seguir tentando-se traçar um paralelo com os objetivos almejados para este trabalho no CAPÍTULO 1.

9.1 Objetivos alcançados e conclusões

A) Com o estudo dos livros, trabalhos e artigos publicados sobre o tema foi possível apresentar neste texto um apanhado geral para o tratamento de problemas inversos, mostrando a importância, aplicabilidade, classificação, técnicas de resolução e os problemas, que este tipo de análise apresenta, particularmente por se tratar de um problema mal-posto. Além disto, este trabalho propôs formulações para o tratamento de problemas inversos encontrados na elasticidade plana, utilizando o método dos elementos de contorno combinado a técnicas de busca (AG), otimização, minimização e regularização, além de dados de deslocamentos obtidos experimentalmente por correlação de imagens digitais.

B) Desenvolveu-se uma ferramenta computacional com as formulações propostas capaz de resolver alguns problemas inversos de interesse para a engenharia de estruturas (estimativa de propriedades dos materiais, problema inverso de valor de contorno e de estimativa dos parâmetros do modelo coesivo de fraturamento). A ferramenta computacional mostrou-se eficiente no tratamento destes problemas inversos. A utilização do MEC para a solução de problemas inversos na elasticidade mostrou-se simples e de grande eficiência. Foram analisados problemas com campos de deslocamentos obtidos do correspondente problema direto ou de ensaios utilizando a técnica de correlação de imagens digitais.

A obtenção de parâmetros de fratura foi feita para o caso particular de fratura coesiva, porém o modelo se aplica a qualquer outro critério que for adotado.

C) Ensaio em laboratório para obtenção dos campos de deslocamentos via correlação de imagens digitais foram realizados e os resultados utilizados como dados de entrada para resolução dos problemas inversos implementados na ferramenta computacional. A técnica de correlação de imagens digitais se mostrou efetiva na obtenção dos campos de deslocamentos, originando dados em quantidade e precisão suficientes para os fins almejados neste trabalho. Vale destacar que a análise deste tipo de ensaio é difícil, uma vez que os níveis de deslocamentos são muito pequenos. No entanto, demonstrou-se que mesmo com ruído nos dados de entrada (obtido pela CID), o fato de eles serem numerosos, tornou possível a identificação de parâmetros como o módulo de elasticidade longitudinal e parâmetros de uma lei coesiva.

D) Exemplos de aplicação da ferramenta computacional desenvolvida com a utilização dos dados numéricos e experimentais foram apresentados. Com a análise dos resultados obtidos para os exemplos propostos foi possível verificar o comportamento dos métodos de minimização e regularização implementados. Verificou-se uma maior estabilidade nos métodos de regularização de Tikhonov e de inversão generalizada via decomposição em valor singular, uma vez que apresentaram apresentando bons resultados para números mínimos de leituras experimentais. O fato de parâmetros identificados no presente caso levar a uma tensão normal de tração crítica e energia de fraturamento da mesma ordem do encontrado pela técnica experimental proposta pela RILEM é uma prova da qualidade dos resultados obtidos. Os resultados da simulação numérica direta com os parâmetros identificados comprovam a qualidade dos resultados obtidos.

9.2 Propostas de trabalhos

E) Fazendo um paralelo com o item (E) dos objetivos almejados (apresentado no CAPÍTULO 1), apresentam-se em seguida algumas propostas para trabalhos futuros.

- Realizar uma análise experimental mais ampla, envolvendo um número maior de corpos de prova e variação de alguns parâmetros, tais como: dimensões das amostras e resistência do concreto;
- Aplicar este procedimento a outros materiais quase-frágeis;
- Expandir as formulações propostas para o caso 3D. Dada à forma da superfície de fissuração, é provável que análises tridimensionais sejam mais do que desejáveis para estimativas mais precisas dos parâmetros da lei coesiva. No entanto, existe a necessidade de identificação da superfície de fissuração. Para isto, dois caminhos podem ser seguidos. O primeiro seria usar duas câmeras. A forma da superfície da fissura seria conhecida em ambos os lados da amostra. A forma com que elas se conectam seria assumida ou deixada como uma informação desconhecida adicional a ser determinada. O segundo caminho seria a utilização da correlação de volumes digitais aplicada sobre imagens digitais tridimensionais da amostra, obtidas, por exemplo, por um tomógrafo.

Referências bibliográficas

ABE, K., KONNO, M., FURUTA, M., *Identification of unknown parameters in the dynamics analysis of a subway track by genetic algorithms*, Boundary Elements XXVI. Eds. C.A. Brebbia, Advances in Boundary Elements Series: Wessex Institute of Tech., pp. 229-238, 2004.

ABUBAKAR, A., HABASHY, T. M., LI, M., LIU, J., *Inversion algorithms for large-scale geophysical electromagnetic measurements*, Institute of Physics Publishing, Inverse Problems, v. 25, 30 pp, 2009.

ALIABADI, M. H., BREBBIA, C. A., *Advanced formulations in boundary element methods*, Southampton, [U.K.]; Boston: Computational Mechanics Publications: Elsevier Applied Science, 1993.

ATANACKOVIC, T. M., GURAN, A., *Theory of elasticity for scientists and engineers*. Springer, 2000.

ANTES, H., STAVROULAKIS, G. E., *Nondestructive elastostatic identification of unilateral cracks through BEM and neural networks*. Computational Mechanics. 20, pp. 439-451, 1997.

ANTES, H., STAVROULAKIS, G. E., *Unilateral Crack Identification: A filter-driven, iterative, boundary element approach*. Journal of global optimization. 17, pp. 339-352, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5739: *Concreto – Ensaios de compressão de corpos de prova cilíndricos – método de ensaio*, Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7222: *Concreto e argamassa – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos*, Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8522: *Concreto – Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão*, Rio de Janeiro, 2008.

BARENBLATT, G. I., *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 7, pp. 55-129, 1962.

BEER, G., *Programming the boundary element method: an introduction for engineers*, Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

BECK, J. V., BLACKWELL, B. & STCLAIR, JR, C. R., *Inverse heat conduction – ill-posed problems*, New York: Wiley-Interscience, 1985.

BESNARD, G., HILD, F & ROUX, S, *“Finite-element” displacement fields analysis from digital images: Application to Portevin-Le Châtelier bands*, Exp. Mech. 46, 789-803, 2006.

- BEZERRA, L. M. & SAIGAL, S., *Flaw detection in elastostatics with boundary element*, Rolla: 22nd Midwestern Mechanics Conference, University of Missouri, 1991.
- BEZERRA, L. M. & SAIGAL, S., *A boundary elements formulation for the inverse elastostatics problem (IESP) of flaw detection*, Int. J. Numer. Meth. Engng, 33, pp. 2189-2202, 1993.
- BEZERRA, L. M. & SAIGAL, S., *Inverse boundary traction reconstruction with the BEM*, Great Britain: Int. J. Structures, Vol. 32, Nº 10, pp. 1417-1431, Elsevier Science Ltd, 1994.
- BITTENCOURT, T. N., *Fraturamento do concreto estrutural: aspectos teóricos, computacionais e experimentais, e suas aplicações*, Tese (Livre docência) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.
- BONNET, M., *BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems*. Engineering analysis with boundary elements, v. 15, pp. 121-136, 1995.
- BOLZON, G., MAIER, G., PANICO, M., *Material model calibration by indentation, imprint mapping and inverse analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 41, pp. 2957-2975, 2004.
- BREBBIA, C. A. & DOMINGUEZ, J., *Boundary elements : an introductory course 2ª edição*, Southhampton; Boston: Computational Mechanics Publications: Copublished with McGraw-Hill, 1992.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C., *Boundary element techniques : theory and applications in engineering*, Berlin; New York: Springer-Verlag, 1984.
- BROEK, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics 3ª edição*, The Hague; Boston: Martinus Nijhoff: Distributed by Kluwer Boston, 1982.
- CAMPOS VELHO, H. F., *Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações*, Nova Friburgo: Notas do mini-curso apresentado no V EMC, IPRJ-UERJ, 2002.
- CARITA MONTEIRO, R. F., ROBERTY, N. C. & SILVA NETO, A. J., *Inverse radiative transfer problems in two-dimensional participating media*, Inverse Problems in Engineering, Vol. 12, Nº 1, pp. 103-121, 2004.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, CEB-FIP Model Code 1990 – *Design Code*, Thomas Telford Services Ltd., London, 1993, 437 p.
- DUGDALE, D., *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys.Solids, 8, pp. 100 – 104, 1960.
- ENGL, H. W., HANKE, M. & NEUBAUER A., *Regularization of Inverse Problems*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- ENOKIZONO, M., KATO, E. & TSUCHIDA, Y., *Inverse analisis by boundary element method with singular value decomposition*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, Nº 3, pp. 1322-1325, 1996.

EWALDS, H. L. & WANHILL, R. J. H., *Fracture mechanics*, Victoria, Australia; Delft, The Netherlands : Edward Arnold: Delftse Uitgevers, 1984.

FERREIRA, M. D. C., VENTURINI, W. S., *Inverse analysis FOR two-dimensional structures using the boundary element method*, Advances in Engineering Software, Vol. 41, pp. 1061-1072, 2010.

FERREIRA, M. D. C., VENTURINI, W. S., HILD, F., *On the analysis of notched concrete beams: From measurement with digital image correlation to identification with boundary element method of a cohesive model*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 78, pp. 71-84, 2011.

FILONENKO-BORODICH, M., *Theory of elasticity*, Moscow: Peace Publishers, 1963.

GALLEGO, R., SUÁREZ, J., *Solution of inverse problems by boundary integral equation without residual minimization*, International Journal of Solids and Structures, 37, 5629-5652, 2000.

GDOUTOS, E. E., *Fracture mechanics criteria and applications*, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.

GDOUTOS, E. E., *Fracture mechanics : an introduction*, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993.

GORDON, C., WEBB, D. L. & WOLPERT, S., *One cannot Hear the shape of a drum*, Amer. Math. Soc., Vol. 27, Nº 1, pp. 134-138, 1992.

GRIFFITH, A. A., *The phenomena of rupture and flow in solids*, Phil. Trans. Roy. Soc. Series A., Vol. 221, pp. 163-198, 1920.

GUSTAFSSON, P. J., *Fracture Mechanics Studies of non-Yielding Materials Like concrete: Modeling of Tensile Fracture end Applied Strength Analysis*, Lund; Sweden: Report Nº TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1985.

HABASHY, T. M., ABUBAKAR, A., *A general framework for constraint minimization for the inversion of electromagnetic measurements*, Progress In Electromagnetics Research, V. 46, 265-312, 2004.

HALL, W. S., *The boundary element method*, Dordrecht; Boston: Kluwer Academic, 1994.

HENSEL, E., *Inverse theory and applications for engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

HILLERBORG, A., MODEER, M., PETERSSON, P. E., *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*, Cements Concrete Research, V.6, 773-782, 1976.

HOLLAND, J. H., *Adaptation in Natural and artificial Systems*, MIT Press, 1975.

HOHAGE, T., RAPÚN, M. L., SAYAS, F. J., *Detecting corrosion using thermal measurements*, Institute of Physics Publishing, Inverse Problems, v. 23, pp. 53-72, 2007.

INGLIS, C. E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Architects. Vol. 55, pp. 219-231, 1913.

IRWIN, G. R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Trans. ASME J. Appl. Mech., Vol. 24, p.361-364, 1957.

ISAKOV, V., *Inverse problems for partial differential equations*, New York: Springer, 1998.

KAC, M., *Can one hear the shape of a drum?*, Am. Math. Monthly, Vol. 73, Nº 4, Part II, pp. 1-23, 1966.

KANE, J. H., *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1994.

KASSAB, A. J., MOSLEHY, F. A. & DARYAPURKAR, A., *Inverse elastostatics boundary element approach applied to non-destructive evaluation*. Boundary Elements XV. Eds. C.A. Brebbia & J.J. Rencis, Comp. Mec. Publications: Southampton and Boston, pp. 387-397, 1993.

KASSAB, A. J. & MOSLEHY, F. A., DARYAPURKAR, A., *Nondestructive detection of cavities by an inverse elastostatics boundary element method*. Eng. Anal. with Bound. El., 13, 45-55, 1994.

KEYS, R., FOSTER, D., *Comparison of seismic inversion methods on a single real data set*, Society of Exploration Geophysicists, 1998

KOBAYASHI, S., *Inverse analysis by boundary element method. Boundary Elements XVI*. Eds. C.A. Brebbia, Comp. Mec. Publications: Southampton and Boston, pp. 141-148, 1994.

KOGUCHI, H., WATABE, H., *Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method*, Eng. Anal. with Bound. El., v. 19, pp. 105-116, 1997.

KOHR, H., LOUIS, A. K., *Fast and high-quality reconstruction in electron tomography based on an enhanced linear forward model*, Institute of Physics Publishing, Inverse Problems, v. 27, 20 pp, 2011.

KZAM, A. K. L., *Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer*, São Carlos: Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

LAGARDE, A., (Edt.), *Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics*, vol 82, Dordrecht (the Netherlands), Kluwer, 2000).

LEONEL, E. D., *Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multifaturados*, São Carlos: Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

- LEONEL, E. D., *Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga*, São Carlos: Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.
- LOUIS, A. K., *Combining image reconstruction and image analysis with an application to two-dimensional tomography*, SIAM Journal on Imaging Sciences (SIIMS), 2008
- LIU, G. R. & HAN, X., *Computational inverse techniques in nondestructive evaluation*, New York: CRC Press, 2003.
- MACIEL, D. N., *Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais*, São Carlos: Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.
- MACKERLE, J. & TANAKA, M., *Inverse problems and finite element/boundary element techniques. A bibliography with short abstracts*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 7, Nº 7, pp. 3-12, Computational Mechanics Publications, 1990.
- MARIN, L., LESNIC, D., *BEM first-order regularisation method in linear elasticity for boundary identification*, Computer Meth. in Appl. Mec. and Eng., v. 192, pp. 2059-2071, 2003.
- MARIN, L., LESNIC, D., *Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method*, Eng. Anal. with Bound. El., 28, 221-233, 2004.
- MELLINGS, S. C., ALIABADI, M. H., *Three dimensional flaw identification using sensitivity analysis*. Boundary Elements XVI. Eds. C.A. Brebbia: Wessex Inst. of Tech., pp. 149-156, 1994.
- MI, Y., *Three-dimensional analysis of crack growth*, Southampton, UK; Boston: Computational Mechanics Publications, 1996.
- MODEER, M., *A fracture mechanics approach to failure analysis of concrete materials*, Lund; Sweden: Report Nº TVBM-1001, Division of Building Materials, Lund institute of Technology, 1979.
- OLDENBURG, D., *Inversion of electromagnetic data: an overview of new techniques*, Surveys in Geophysics, v. 11, Netherlands, pp. 231-270, 1990.
- PETERSSON, P. E., *Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials*, Lund; Sweden: Report Nº TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, 1981.
- PILKINGTON, T. C., *Engineering contributions to biophysical electrocardiography*, New York: IEEE Press, 1982.
- RESNICK, R., HALLIDAY, D. & KRANE, K. S., *Physics 4ª edição*, Nova York: John Wiley & Sons, 1992.

- RILEM DRAFT RECOMMENDATION, TC 50-FMC *Committee Fracture Mechanics of Concrete, Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams*, *Matériaux et Constructions*, v. 18, n. 106, 1985, p. 285-290.
- ROMANOV, V. G., *Integral geometry and inverse problems for hiperbolic equations*, Berlin: Springer, 1974.
- ROMANOV, V. G., *Inverse problems of mathematical physics*, Netherlands: VNU Science Press, 1987.
- RUDY, Y, OSTER, H. S., *The electrocardiographic inverse problem*, *Critical Ver. Biomed. Engng* 20, 25-45, 1992.
- RUS, G., GALLEGRO, R., *Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method*, *Eng. Anal. with Boundary El.*, v.26, pp. 315-327, 2002.
- SALEH, A. L., *Crack growth in concrete using boundary elements*, Southampton, UK; Boston: Computational Mechanics Publications, 1997.
- SALEH, A. L. & ALIABADI, M. H., *Crack growth analysis in concrete using boundary element method*, *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 51 N° 4, pp. 533-545, 1995.
- SCHNUR, D. S., ZABARAS, N., *Finite element solution of two-dimensional inverse elastic problems using spatial smoothing*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, pp. 57-75, 1990.
- SHAH, S. P., SWARTZ, S. & OUYANG, C., *Fracture mechanics of concrete : applications of fracture mechanics to concrete, rock, and other quasibrittle materials*, New York: Jonh Wiley & Sons, 1995.
- SHIFRIN, E. I., SHUSHPANNIKOV, P. S., *Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional*, *Institute of Physics Publishing, Inverse Problems*, v. 26, 17 pp, 2010.
- SILVA NETO, A. J. & MOURA NETO, F. D., *Problemas inversos : conceitos fundamentais e aplicações*, Rio de Janeiro: EdUERJ, 2005.
- SILVA NETO, A. J., *Problemas Inversos: Aplicações em engenharia e medicina*, Nova Friburgo: Material apresentado no projeto Quartas Científicas, Instituto Politécnico – UERJ, 2005.
- SYMES, W. W., *The seismic reflection inverse problem*. *Institute of Physics Publishing, Inverse Problems* v. 23, 39 pp, 2009.
- SOKOLNIKOFF, I. S., *Mathematical theory of elasticity 2ª edição*, New York: McGraw-Hill, 1956.
- SOUSA, J. L. A. O., GETTU, R., *Determining the Tensile Stress-Crack Opening Curve of Concrete by Inverse Analysis*, *Journal of Engineering Mechanics*, v. 132, pp. 141-148, 2006.

SUTTON, M. A., ORTEU, J. J. & SCHREIER, H. W., *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements*, Springer, pp. 81-117, New York, 2009.

TANAKA, M. & MASUDA, Y., *Boundary element method applied to some inverse problems*, Engineering Analysis, Vol. 3, Nº 3, pp. 138-143, 1986.

TANAKA, M., *Applications of the boundary element method to some inverse problems in engineering mechanics*, In: Int. Conf. on Inverse Problems in Engng., 3th, Port Ludlow, June 13-18, pp. 1-10, 1999.

TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*, New York: Winston-Wiley, 1977.

TIKHONOV, A. N., *Ill-posed problems in the natural sciences*, Moscow: MIR Publishers, 1987.

TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N., *Teoria da elasticidade 3ª edição*, Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Dois, 1980.

VALLIAPPAN, S., *Continuum mechanics fundamentals*, Rotterdam: Distributed in USA & Canada by MBS, 1981.

VENTURINI, W. S., *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*, São Carlos: Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.

VENTURINI, W. S., *A new boundary element formulation for crack analysis*, In: Brebbia, C.A., (ed.), Southampton; Boston: Boundary element method XVI., Computational Methods Publ., 405-412, 1994.

VENTURINI, W. S. & ALMEIDA, V. S., *Identificação de parâmetros em sólidos 2D mediante a análise inversa via MEC*, Pernambuco: In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, UFPE, 2004.

VENTURINI, W. S. & ALMEIDA, V. S., *Identificação de campos iniciais em sólidos 2D via MEC na análise não destrutiva mediante uma formulação híbrida*, Belém: In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2006.

VICENTINI, D. F., *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de fratura*, São Carlos: Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

VILLAÇA, S. F. & GARCIA, L. F. T., *Introdução à teoria da elasticidade 4ª edição*, Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2000.

XIUQING, Q., ZHENHAN, Y., YANPING, C., JIAN, L., *An inverse approach for constructing residual stress using BEM*, Eng. Analysis with Boundary Elements, 28, pp. 205-211, 2004.

WANG, P., BECKER, A. A., JONES, I. A. & HYDE, T. H., *Boundary element analysis of contact problems using inverse techniques – linear and quadratic elements*, J. Strain Analysis, Vol. 39, Nº 4, pp. 371-382, 2004.

WUTZOW, W.W., *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com Enrijecedores*, São Carlos: Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.

ANEXO
A**Tópicos da teoria da elasticidade**

Há anos a teoria da elasticidade tem encontrado considerável aplicação na resolução de problemas da engenharia. Pois, em muitos casos os métodos elementares da resistência dos materiais se mostram inadequados para fornecerem informações satisfatórias com relação à distribuição de tensões em estruturas da engenharia, devendo-se então recorrer aos métodos mais eficientes da teoria da elasticidade. Ela é um dos ramos da mecânica do contínuo que trata do estudo das tensões e deformações de sólidos deformáveis e apresenta-se como uma das disciplinas centrais na formação dos engenheiros de estruturas, fornecendo subsídios para o desenvolvimento de metodologias mais robustas para análise estrutural.

De fato, quase todas as realizações concretas (não apenas intelectual ou virtual) da humanidade demanda o projeto adequado de estruturas mecânicas para que estas possam desempenhar com segurança suas funções. Estas estruturas mecânicas são essenciais em automóveis e aeronaves, em foguetes e estações espaciais, em arranha-céus e pontes, em placas de computadores e discos rígidos e até no empacotamento de circuitos integrados e dispositivos, nos microssistemas e, mais recentemente, nos nano sistemas. A diferente gama de aplicações vem estimulando há décadas o estudo cada vez mais aprofundado dessa teoria na busca de métodos que permitam aperfeiçoar o modo de criação das estruturas, economizando matéria prima, conservando o meio ambiente e aumentando a segurança.

Neste anexo apresenta-se um resumo geral da teoria da elasticidade, onde são mostrados os seus principais pontos abordados no desenvolvimento do presente trabalho. Para isto, consultou-se um conjunto de obras importantes sobre o assunto, tais como as de Timoshenko & Goodier (1951/1980), Sokolnikoff (1956), Filonenko-Borodich (1963), Valliappan (1981), Teodor & Ardéshir (2000), Villaça & Garcia (2000) e outros.

Estado de tensão em um ponto

O estado de tensão em um ponto é completamente determinado pelas componentes de vetores de tensão segundo planos cartesianos coordenados de normais x , y , z . Conforme ilustra a (Figura A-1) são nove componentes de tensão, as quais se reduzem a seis devido à simetria das tensões cisalhantes, como mostrado a seguir:

$$[\sigma_{ij}], \text{ para } i, j = 1, 2, 3, \text{ com } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ quando } i \neq j$$

Equação A-1

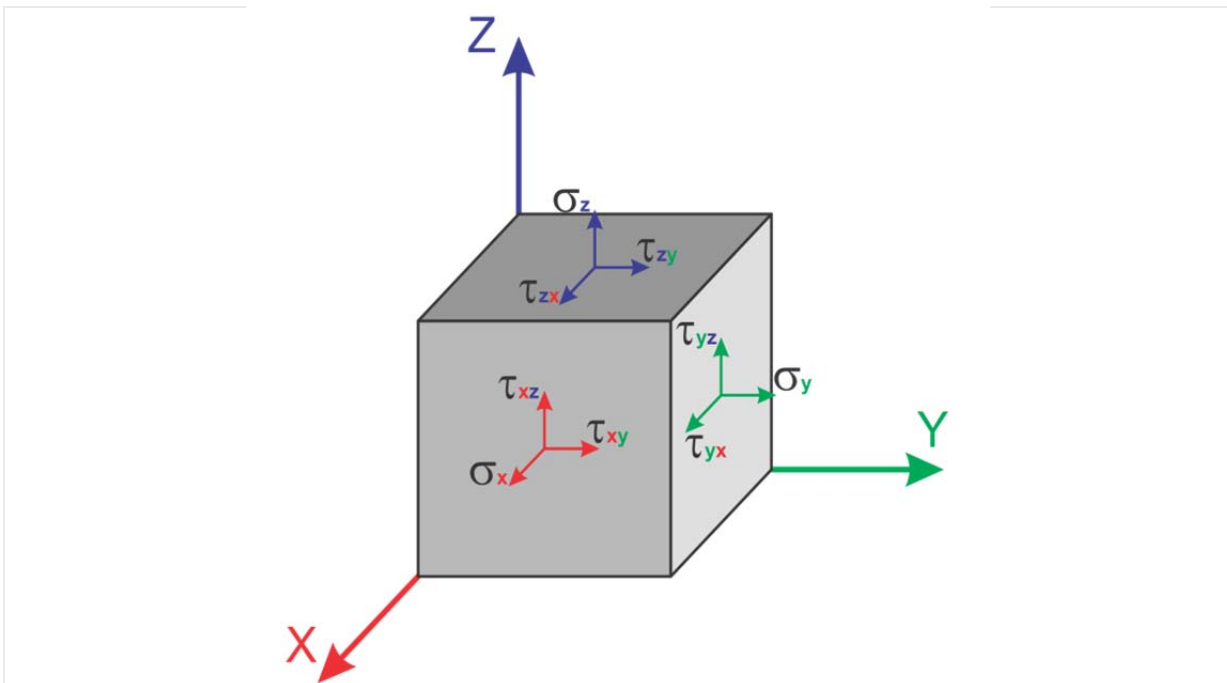


Figura A-1 - Estado de tensão em um ponto

As forças de superfície sobre um plano inclinado genérico qualquer, relacionam-se com as componentes do estado de tensão no ponto (O), através da equação de Cauchy (Equação A-2), escrita em função dos cossenos diretores deste plano genérico:

$$\rho_i = \sigma_{ij} \cdot \eta_j, \text{ para } i, j = 1, 2, 3$$

Equação A-2

Campo de deslocamento

Ao sofrer a ação de solicitações externas, o corpo sofre mudança de forma e dimensões. Passando de uma configuração inicial a uma configuração final deformada. O campo vetorial de deslocamento pode ser representado como a seguir:

$$\{u_i\}, \text{ para } i, j = 1, 2, 3$$

Equação A-3

Genericamente o campo de deslocamento é formado por duas parcelas, uma que envolve mudança de forma e dimensões e outra associada a movimento de corpo rígido. Neste estudo, será presumido que nos corpos estudados há suficientes restrições para impedir o deslocamento de corpo rígido, de tal forma que todos os deslocamentos nas partículas dos corpos gerem uma deformação.

Equações diferenciais do equilíbrio

Para obterem-se as equações diferenciais do equilíbrio de um sólido, em regime elástico linear, com domínio Ω delimitado pelo contorno Γ , analisa-se o equilíbrio em um elemento infinitesimal representativo de um ponto qualquer do sólido pressupondo continuidade das tensões. As componentes de tensão correspondentes em faces paralelas do elemento diferem entre si de um valor infinitesimal (Figura A-2). Além disto, considera-se a atuação de uma força de massa (b) com componentes cartesianas (b_x, b_y, b_z).

Do equilíbrio das forças do elemento infinitesimal, são escritas as equações de equilíbrio (Equação A-4) nas direções x, y, z dos eixos. Outras três equações de equilíbrio de momento conduzem à simetria das tensões cisalhantes consideradas no tensor de tensões.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \text{ para } i, j = 1, 2, 3$$

Equação A-4

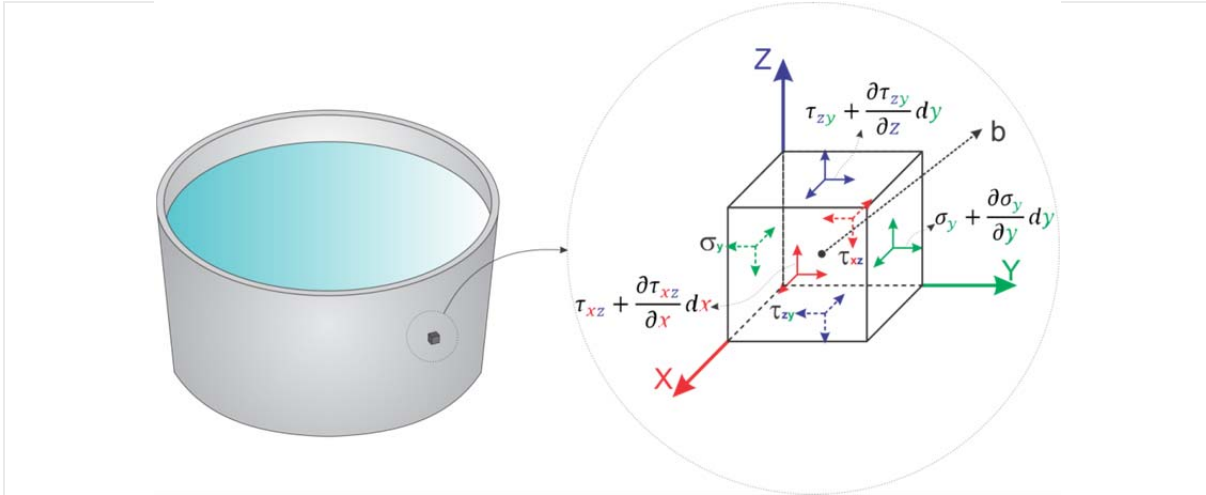


Figura A-2 - Elemento infinitesimal equilibrado

Relações deformação-deslocamento

As componentes de deformações lineares e angulares (Equação A-5) são obtidas a partir das relações geométricas com as componentes de deslocamento em cada plano coordenado xy , xz , yz , onde se representam elementos infinitesimais antes e depois de deformados (Figura A-3). No caso de pequenas deformações, tais relações são dadas na forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \text{ para } i, j = 1, 2, 3$$

Equação A-5

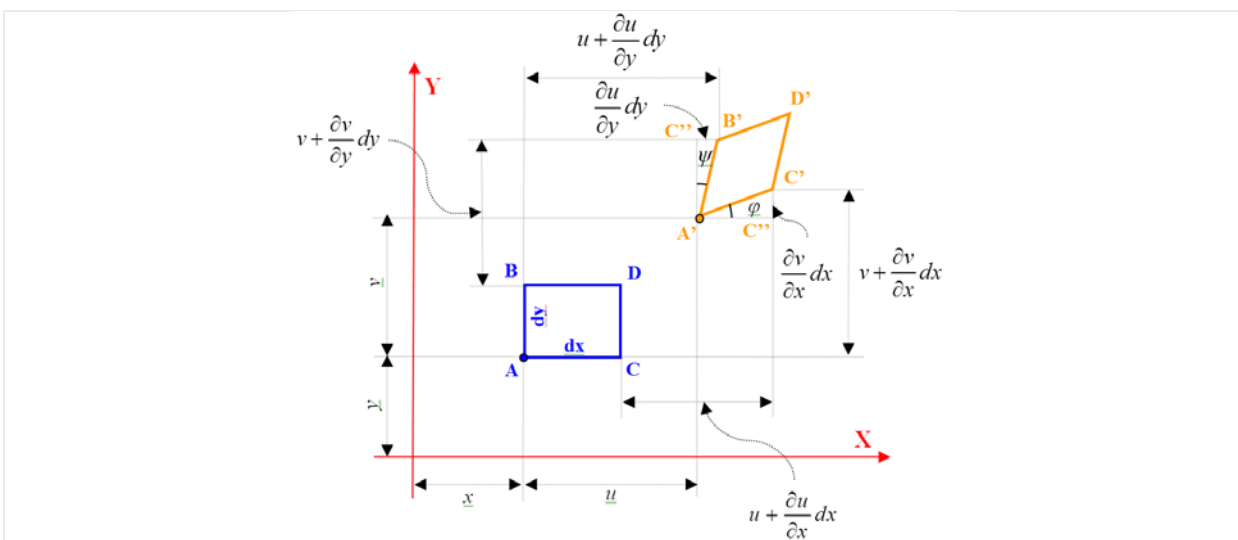


Figura A-3 - Projeções das faces do elemento infinitesimal no plano xy

Equações Constitutivas

As equações constitutivas definem a relação entre o tensor de tensão e o tensor de deformação, caracterizando a resposta estrutural do material.

Para o caso geral, esta relação é representada pela lei de Hooke generalizada (Equação A-6):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \text{ para } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad \text{Equação A-6}$$

onde, C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que contém as constantes que caracterizam o material na esfera da elasticidade.

Neste trabalho serão admitidas as seguintes hipóteses, quanto à natureza do material:

- Homogeneidade do material → Possui as mesmas propriedades em todos os seus pontos;
- Isotropia do material → Cada ponto as propriedades são as mesmas em todas as direções;
- Material elástico linear → As expressões que relacionam as componentes de tensão com as de deformação são lineares.

Estas hipóteses somadas à consideração da simetria dos tensores de tensão e de deformação e o princípio de conservação da energia reduzem o número de constantes elásticas a duas (E – Módulo de elasticidade longitudinal ou Módulo de Young e ν Coeficiente de Poisson). Com isto, a relação tensão deformação pode ser escrita como se segue:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{Equação A-7}$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{Equação A-8}$$

Condições de contorno

Além das equações que devem ser satisfeitas no domínio Ω de um corpo analisado pela teoria da elasticidade, outras condições devem ser satisfeitas em seu contorno Γ .

De maneira geral, estas condições de contorno podem ser:

- Prescrição em deslocamento:

$$u_i(q) = \bar{u}_i(q), \text{ com } q \in \Gamma_u \quad \text{Equação A-9}$$

- Prescrição em força:

$$P_i(q) = \bar{p}_i(q) = \sigma_{ij}(q) \cdot \eta_j(q), \text{ com } q \in \Gamma_p \quad \text{Equação A-10}$$

- Prescrição mista:

$$u_i(q) = \bar{u}_i(q), \text{ com } q \in \Gamma_{up}$$

$$P_i(q) = \bar{p}_i(q) = \sigma_{ij}(q) \cdot \eta_j(q), \text{ com } i \neq j \text{ e } q \in \Gamma_{up} \quad \text{Equação A-11}$$

Anexo B Delta de Dirac

A distribuição Delta de Dirac (Figura B-1) constitui uma ferramenta capaz de representar forças concentradas na Teoria da Elasticidade ou fontes concentradas na Teoria de Potencial. Esta distribuição é facilmente deduzida a partir da diferenciação da função “Have Size” ou função degrau.

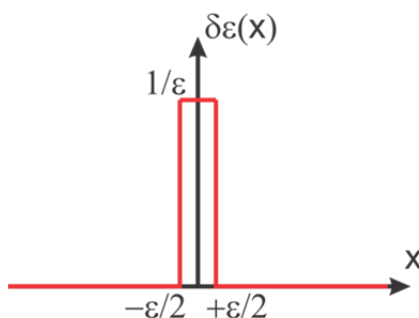


Figura B-1 - Distribuição Delta de Dirac.

Seja a função $\delta_\varepsilon(x)$, definida como a seguir:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{para } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{para } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{Equação B-1}$$

onde ε é um número positivo.

Tomando-se integral a seguir:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx \quad \text{Equação B-2}$$

onde $f(x)$ é uma função qualquer bem definida em $x=0$. Se ε for suficientemente pequeno, a variação de $f(x)$ no intervalo efetivo de integração $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ é negligenciável e $f(x)$ permanece igual a $f(0)$, de forma que:

$$I \cong f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = f(0) \quad \text{Equação B-3}$$

Esta aproximação é tanto melhor quanto menor for ε . No limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se a definição da distribuição Delta de Dirac, dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) f(x) dx = f(0) \quad \text{Equação B-4}$$

Válida para qualquer função $f(x)$ definida na origem, uma definição mais geral pode ser escrita na forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x - x_0) dx = f(x_0) \quad \text{Equação B-5}$$

Este conceito pode ser estendido aos domínios n-dimensionais. Considerando uma função f que depende da localização de cada ponto no corpo, defini-se $\delta(p, Q)$, como a distribuição Delta de Dirac, quando são válidas as seguintes propriedades:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & \text{para } p = Q \\ 0, & \text{para } p \neq Q \end{cases} \quad \text{Equação B-6}$$

$$\int_{\Omega} g(Q) \delta_\varepsilon(p, Q) d\Omega = g(p)$$

A distribuição Delta de Dirac também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta(p, Q) = \Delta^p \quad \text{Equação B-7}$$

Anexo C Delta de Kronecker

Na formulação de diversos problemas da engenharia é muitas vezes necessária uma função que represente o conceito de matriz identidade. O Delta de Kronecker desempenha muito bem este papel, e é definido por:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{Equação C-1}$$

Matricialmente:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{Equação C-2}$$

Verificar-se facilmente que para qualquer matriz quadrada A_{ij} e vetor x_i , valem as expressões:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} A_{jk} &= A_{ik} = A_{ij} \delta_{jk} \\ \delta_{ij} x_j &= x_i \\ \delta_{ik} \delta_{kj} &= \delta_{ij} \\ \delta_{ij} &= \delta_{ji} \end{aligned} \quad \text{Equação C-3}$$

A última expressão indica que o símbolo de Kronecker é uma multiplicidade simétrica.