

JOÃO PAULO PASCON

Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica

Tese apresentada no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

Área de Concentração: Mecânica Computacional

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

2012

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Pascon, João Paulo

P283s      Sobre modelos constitutivos não lineares para  
materiais com gradação funcional exibindo grandes  
deformações : implementação numérica em formulação não  
linear geométrica / João Paulo Pascon ; orientador  
Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2012.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de estruturas) -- Escola de Engenharia de São  
Carlos da Universidade de São Paulo, 2012.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JOÃO PAULO PASCON**.

Título da tese: "Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: Implementação numérica em formulação não linear geométrica".

Data da defesa: 18/04/2012

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Aprovado

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. **Marta Cristina Cardoso de Oliveira**  
(Universidade de Coimbra)

Aprovado

Prof. Dr. **Eduardo de Moraes Barreto Campello**  
(Escola Politécnica/USP)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof<sup>a</sup>. Associada **Ana Lucia Homce de Cresce El Debs**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**



Ao meu amado filho Breno Justo de Oliveira Pascon



## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela minha vida.

Aos meus pais José Roberto Pascon e Maria Cristina Salvestro Pascon, por terem me criado e me orientado durante toda minha vida.

Aos meus irmãos José Roberto Pascon Júnior e Juliana Cristina Pascon Fidêncio, pelo constante apoio.

À minha namorada Gizele Justo de Oliveira, pela paciência, pelo carinho, pela dedicação e pelo apoio.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo auxílio financeiro.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro durante o estágio de doutorado sanduíche.

Ao meu orientador Humberto Breves Coda, por ter me orientado adequadamente.

Aos professores Marta Cristina Cardoso de Oliveira e Luís Filipe Martins Menezes, do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra, pelo apoio e pela orientação em Portugal.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola, pelo auxílio e pelos esclarecimentos de certas dúvidas.

A todos os familiares, parentes, amigos e colegas pela amizade e sinceridade.

A todas as pessoas do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Universidade de São Paulo (USP) que contribuíram direta ou indiretamente para a realização do presente trabalho.



Nenhum problema pode ser resolvido pelo mesmo grau de consciência que o gerou.

**Albert Einstein**



## RESUMO

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

O objetivo precípua deste estudo é a implementação computacional de modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos para materiais com gradação funcional em regime de grandes deslocamentos e elevadas deformações. Para simular numericamente um problema estrutural, são empregados aqui elementos finitos sólidos (tetraédrico e hexaédrico) com ordem de aproximação polinomial qualquer. Grandezas da Mecânica Não Linear do Contínuo, como deformação e tensão, são utilizadas na formulação deste estudo. Para reproduzir os grandes deslocamentos, é empregada a análise não linear geométrica. A descrição adotada aqui é a Lagrangiana total, e o equilíbrio da estrutura é expresso pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Com relação à resposta elástica do material, são usadas leis constitutivas hiperelásticas, nas quais a relação tensão-deformação é obtida a partir de um potencial escalar. O comportamento elastoplástico do material é definido pela decomposição da deformação nas parcelas elástica e plástica, pelo critério de plastificação de von-Mises, pela lei de fluxo associativa, pelas condições de consistência e de complementaridade, pelo parâmetro de encruamento isotrópico e pelo tensor das tensões inversas, relacionado ao encruamento cinemático. Duas formulações elastoplásticas são utilizadas aqui: a de Green-Naghdi, na qual a deformação é decomposta de forma aditiva; e a hiperelastoplástica, em que o gradiente é decomposto de forma multiplicativa. É empregado também o conceito de material com gradação funcional (GF), a qual é definida como a variação gradual (contínua e suave) das propriedades constitutivas do material. A solução numérica do equilíbrio de forças é feita via método iterativo de Newton-Raphson. Para satisfazer o critério de plastificação, são utilizadas as estratégias de previsão elástica, e de correção plástica via algoritmos de retorno. Basicamente foram desenvolvidos cinco programas computacionais: o gerador automático das funções de forma; o gerador de malhas de elementos finitos sólidos; o código para análise de materiais em regime elástico; o código para análise de materiais em regime elastoplástico; e o programa de pós-processamento. Além desses, o aluno teve contato com os programas EPIM3D e DD3IMP ao longo de seu estágio de doutorado na Universidade de Coimbra (Portugal). Os programas EPIM3D e DD3IMP são empregados para analisar, respectivamente, materiais em regime elastoplástico, e processos de conformação de metais. Para o problema da barra sob tração uniaxial uniforme, são descritas equações e soluções analíticas para materiais homogêneos e com GF em regime elastoplástico. Para reduzir o tempo de simulação, foi empregada a programação em paralelo. De acordo com os resultados das simulações numéricas, as principais conclusões são: o refinamento da malha de elementos finitos melhora a precisão dos resultados para materiais em regimes elástico e elastoplástico; as formulações elastoplásticas de Green-Naghdi e hiperelastoplástica parecem ser equivalentes para pequenas deformações; a formulação hiperelastoplástica é equivalente ao modelo mecânico dos programas EPIM3D e DD3IMP para materiais em regime de pequenas deformações elásticas; foram constatados ganhos significativos, em termos de tempo de simulação, com a paralelização dos códigos computacionais de análise estrutural; e os programas desenvolvidos são capazes de simular - com precisão - problemas complexos, como a membrana de Cook e o cilindro fino transversalmente tracionado.

Palavras-chave: análise não linear; elementos finitos sólidos; grandes deslocamentos; grandes deformações; gradação funcional; elastoplasticidade.

## ABSTRACT

PASCON, J. P. **On nonlinear constitutive models for functionally graded materials exhibiting large strains: numerical implementation in geometrically nonlinear formulation.** 2012. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

The main objective of this study is the computational implementation of elastic and elastoplastic constitutive models for functionally graded materials in large deformation regime. In order to numerically simulate a structural problem, the finite elements used are solids (tetrahedric and hexahedric) of any order of approximation. Entities from Nonlinear Continuum Mechanics, as strain and stress, are used in the present formulation. To reproduce the finite displacements, the geometrically nonlinear analysis is employed. The description adopted here is the total Lagrangian, and the structural equilibrium is expressed by means of the Principle of Minimum Total Potential Energy. Regarding the elastic material response, hyperelastic constitutive laws are used, in which the stress-strain relation is obtained from a scalar potential. The elastoplastic material behavior is defined by the strain decomposition in the elastic and plastic parts, by the von-Mises yield criterion, by the associative flow law, by the consistency and complementarity conditions, by the isotropic hardening parameter, and by the backstress tensor, related to the kinematic hardening. Two elastoplastic formulations are used here: the Green-Naghdi one, in which the strain is additively decomposed; and the hyperelastoplasticity, in which the gradient is multiplicatively decomposed. The concept of functionally graded (FG) material, in which the constitutive properties vary gradually (continuous and smoothly), is also used. The numerical solution of the forces equilibrium is obtained via Newton-Raphson iterative procedure. In order to satisfy the yield criterion, the strategies of elastic prediction and plastic correction (via return algorithms) are used. Basically, five computer codes have been developed: the automatic shape functions generator; the solid mesh generator; the code for analysis of materials in the elastic regime; the code for analysis of materials in the elastoplastic regime; and the post-processor. Besides these, the student had contact with the programs EPIM3D and DD3IMP during his doctoral stage in the University of Coimbra (Portugal). The programs EPIM3D and DD3IMP are employed to analyze, respectively, materials in the elastoplastic regime, and sheet-metal forming processes. For the problem of the bar under uniform uniaxial tension, equations and analytical solutions are described for homogeneous and FG materials. To reduce the simulation time, the parallel programming has been employed. According to the numerical simulation results, the main conclusions are: the results accuracy is improved with mesh refinement for materials in the elastic and elastoplastic regimes; the Green-Naghdi elastoplastic formulation and the hyperelastoplasticity appear to be equivalent for small strains; the hyperelastoplastic formulation is equivalent to the mechanical model of the programs EPIM3D and DD3IMP for materials the small elastic strains regime; simulation time reduction has been obtained with the parallelization of the computer codes for structural analysis; the developed programs are capable of simulating, precisely, complex problems, such as the Cook's membrane and the pulled thin cylinder.

Keywords: Nonlinear analysis; solid finite elements; large displacements; large strains; functionally graded materials; elastoplasticity.



## LISTA DE SIGLAS

DD3IMP	Deep drawing three-dimensional implicit code
EPIM3D	Elastoplastic implicit three-dimensional code
FAPESP	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FGM	<i>Functionally graded material</i>
GF	Gradação funcional
HN	Hartmann-Neff (lei hiperelástica)
MC	Mecânica do Contínuo
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MGF	Material com gradação funcional
MNLC	Mecânica Não Linear do Contínuo
nH	neo-Hookeano (lei hiperelástica)
RS	Rivlin-Saunders (lei hiperelástica)
SVK	Saint Venant-Kirchhoff (lei hiperelástica)
USP	Universidade de São Paulo





## LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	tempo
$\mathbf{x}$	vetor posição inicial
$\mathbf{y}$	vetor posição atual
$\xi$	vetor de coordenadas adimensionais ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ )
$(\mathbf{x})^k$	vetor posição inicial do nó $k$
$(\mathbf{y})^k$	vetor posição atual do nó $k$
$\phi_k$	função de forma relativa ao nó $k$
$a_i$	componente $i$ do vetor $\mathbf{a}$
$\xi_m$	vetor com as coordenadas adimensionais do nó $m$
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$A_{ij}$	componente $ij$ da matriz $\mathbf{A}$
$(x_i)^k$	coordenada inicial do nó $k$ ao longo da direção $i$
$(y_i)^k$	coordenada atual do nó $k$ ao longo da direção $i$
$y_1, y_2, y_3$	coordenadas atuais
$\phi$	vetor que contém as funções de forma
$\mathbf{M}_{\text{coef}}$	matriz dos coeficientes das funções de forma
$\mathbf{v}_\xi$	vetor que contém os produtos entre as coordenadas adimensionais
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$	produto entre uma matriz qualquer ( $\mathbf{A}$ ) e um vetor qualquer ( $\mathbf{b}$ )
$\phi_k^{\text{TET}}$	função de forma relativa ao nó $k$ do elemento tetraédrico
$\phi_k^{\text{HEX}}$	função de forma relativa ao nó $k$ do elemento hexaédrico
$\mathbf{f}$	função vetorial mudança de configuração total
$\mathbf{u}$	campo vetorial deslocamento (Lagrangiano)
$\mathbf{f}_1$	vetor mudança de configuração final
$\mathbf{f}_0$	vetor mudança de configuração inicial
$\mathbf{A}$	tensor gradiente (material) de $\mathbf{f}$ (ou simplesmente gradiente)
$\nabla$	operador gradiente
Grad	gradiente material (ou Lagrangiano)

$dx$	fibra material na posição inicial
$dy$	fibra material na posição atual
$J$	Jacobiano
$\det(\bullet)$	operador determinante
$dV_0$	volume infinitesimal na posição inicial
$dv$	volume infinitesimal na posição atual
$\mathbf{A}_0$	gradiente inicial
$\mathbf{A}_1$	gradiente final
$\mathbf{A}^{-1}$	inversa de uma matriz qualquer ( $\mathbf{A}$ )
$\mathbf{A}^T$	transposta de uma matriz qualquer ( $\mathbf{A}$ )
$\mathbf{C}$	tensor alongamento de Cauchy-Green direito
$\mathbf{E}$	tensor deformação de Green-Lagrange
$\mathbf{O}$	tensor nulo de segunda ordem
$i_1, i_2, i_3$	invariantes (escalares) de um tensor de segunda ordem
$\text{tr}(\bullet)$	traço de um tensor de segunda ordem (ou de uma matriz)
$\mathbf{R}$	tensor (ortogonal) de rotação
$\mathbf{U}$	tensor (positivo-definido) alongamento direito
$\mathbf{A}_{\text{vol}}$	parcela volumétrica do gradiente $\mathbf{A}$ (decomposição de Flory)
$\mathbf{A}_{\text{iso}}$	parcela isocórica do gradiente $\mathbf{A}$ (decomposição de Flory)
$\mathbf{C}_{\text{vol}}$	parcela volumétrica do tensor $\mathbf{C}$ (decomposição de Flory)
$\mathbf{C}_{\text{iso}}$	parcela isocórica do tensor $\mathbf{C}$ (decomposição de Flory)
$(\ )_e, (\ )_p$	parcelas elástica e plástica de alguma grandeza
$\mathbf{L}$	tensor gradiente espacial da velocidade
$\text{grad}(\ )$	gradiente espacial (ou Euleriano)
$\mathbf{v}$	campo vetorial (espacial) velocidade
$\dot{(\ )}$	taxa de variação (temporal) de uma grandeza qualquer
$\mathbf{D}$	tensor taxa de deformação
$\mathbf{W}$	tensor taxa de rotação
$\text{sim}(\ )$	parcela simétrica de um tensor de segunda ordem

$\text{ant}(\ )$	parcela antissimétrica de um tensor de segunda ordem
$\mathbf{t}$	vetor tensão de Cauchy
$\mathbf{n}$	vetor unitário normal à superfície na posição atual
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor de tensão de Cauchy
$d\mathbf{p}$	força que atua num elemento infinitesimal de área na posição atual
$ds$	elemento infinitesimal de área na posição atual
$\mathbf{S}$	segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff
$\mathbf{G}(\mathbf{A})$	função tensorial resposta elástica (dependente do gradiente $\mathbf{A}$ )
$\mathbf{F}(\mathbf{E})$	função tensorial resposta elástica (dependente da deformação $\mathbf{E}$ )
$\mathbf{S}_E(\mathbf{E})$	relação tensorial entre a tensão $\mathbf{S}$ e a deformação $\mathbf{E}$
$\mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^h)$	função tensorial resposta do material (dependente do gradiente $\mathbf{A}$ e do histórico de $\mathbf{A}$ )
$\mathbf{F}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^h)$	função tensorial resposta do material (dependente da deformação $\mathbf{E}$ e do histórico de $\mathbf{E}$ )
$\mathbf{A}^h$	histórico do gradiente $\mathbf{A}$
$\mathbf{E}^h$	histórico da deformação $\mathbf{E}$
$\Gamma_e$	tensor elástico de quarta ordem
$\Gamma_{klmn}$	componente $klmn$ de um tensor de quarta ordem qualquer ( $\Gamma$ )
$\mathbf{f}_{\text{int}}$	vetor de forças internas
$\mathbf{f}_{\text{ext}}$	vetor de forças externas (aplicadas)
$\Omega_0$	domínio volumétrico na configuração inicial
$u_e$	energia específica de deformação
$dV_0$	elemento infinitesimal de volume na posição inicial
$\mathbf{r}$	vetor resíduo de forças
$\mathbf{0}$	vetor nulo
$\Delta\mathbf{y}$	incremento posicional
$J_0$	Jacobiano inicial (determinante do gradiente inicial $\mathbf{A}_0$ )
$d\xi$	elemento infinitesimal do espaço adimensional
$\mathbf{H}$	matriz Hessiana ou matriz tangente

:	contração entre dois tensores
$\psi$	função escalar energia livre de Helmholtz
$\lambda, \mu$	constantes de Lamé
$E$	módulo (elástico) de Young
$\nu$	coeficiente de Poisson
$U_{\text{vol}}$	parcela volumétrica da energia de Helmholtz
$\psi^{\text{iso}}$	parcela isocórica da energia de Helmholtz
$k$	módulo de compressão volumétrica
$c_{ij}$	coeficientes isocóricos
$i_1^{\text{iso}}$	primeiro invariante de $\mathbf{C}_{\text{iso}}$
$i_2^{\text{iso}}$	segundo invariante de $\mathbf{C}_{\text{iso}}$
$D$	taxa de dissipação interna
$G$	módulo elástico de cisalhamento
$\zeta$	conjunto de variáveis internas
$\alpha$	conjunto dos parâmetros de encruamento
$\varepsilon$	tensor infinitesimal de deformação
$u_{i,j}$	derivada da componente de deslocamento $u_i$ em relação à coordenada $x_j$
$\sigma_{\text{eng}}$	tensão (nominal) de engenharia
$\Phi$	função (escalar) que define o critério de plastificação
$\mathbf{R}$	tensor que define a direção do fluxo plástico (no contexto da elastoplasticidade)
$\kappa$	parâmetro de encruamento isotrópico
$\mathbf{X}$	tensor das tensões inversas (backstress)
$r_\kappa$	função escalar que define a taxa de $\kappa$
$\mathbf{R}_X$	tensor que define a evolução de $\mathbf{X}$
$\dot{\gamma}$	multiplicador plástico
$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	derivada (parcial) da grandeza $\mathbf{A}$ em relação à grandeza $\mathbf{B}$
$\Gamma_{\text{ep}}$	operador tangente consistente elastoplástico (de quarta ordem)
$\mathbf{II}$	tensor identidade de quarta ordem
$\otimes$	produto tensorial entre dois tensores de segunda ordem

$( )^{-T}$	inversa da transposta de uma matriz
$\mathbf{S}_e$	segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff na configuração intermediária
$\mathbf{M}_e$	tensor elástico de Mandel (na configuração intermediária)
$\boldsymbol{\chi}$	tensor das tensões inversas (backstress) na configuração intermediária
$f_{MX}, f_k$	funções escalares para definição do critério de plastificação hiperelastoplástico
$\mathbf{R}_L$	tensor que define a evolução de $\mathbf{L}_p$
$\mathbf{R}_p$	tensor que define a evolução de $\mathbf{D}_p$
$\mathbf{R}_W$	tensor que define a evolução de $\mathbf{W}_p$
$\dot{\boldsymbol{\chi}}$	taxa objetiva de $\boldsymbol{\chi}$
$\mathbf{R}_\chi$	tensor que define a evolução de $\boldsymbol{\chi}$ (na configuração intermediária)
$\mathbf{X}$	tensor das tensões inversas (backstress) na configuração inicial (no contexto da hiperelastoplasticidade)
$\mathbf{R}_X$	tensor que define a evolução de $\mathbf{X}$ na configuração inicial (no contexto da hiperelastoplasticidade)
$\mathbf{B}$	tensor auxiliar (de segunda ordem) para cálculo de $\dot{\gamma}$
$\Gamma_{\text{hep}}$	operador tangente consistente hiperelastoplástico (de quarta ordem)
$\text{dev}(\bullet)$	parcela desviadora de um tensor de segunda ordem
$\ \bullet\ $	norma de um tensor de segunda ordem
$\sigma_k$	limite de escoamento do material
$a_n$	coeficientes do material para a lei de encruamento isotrópico polinomial
NC	número de coeficientes para a lei de encruamento isotrópico polinomial
$K, E_0$ e $n$	coeficientes do material para a lei de encruamento isotrópico de Swift
$\sigma_0, \sigma_{\text{sat}}$ e $C_Y$	coeficientes do material para a lei de encruamento isotrópico de Voce
$c$	coeficiente do material para a lei de encruamento cinemático de Prager
$b$ e $c$	coeficiente do material para a lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick
$( )^{(t)}$	tentativa referente à previsão elástica
$\eta$	parâmetro escalar da correção plástica pelo método de Euler

$\Delta \mathbf{E}$	incremento finito de deformação total
$\Delta \gamma$	variação de $\dot{\gamma}$ ao longo do incremento finito $\Delta \mathbf{E}$
$\mathbf{z}$	vetor que contém as variáveis a serem atualizadas na correção plástica
$F_1$	força aplicada na barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$\lambda_i$	alongamento de um fibra material inicialmente na direção $i$
$L_0$ e $L_f$	comprimentos inicial e final da barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$b_0$ e $b_f$	dimensões inicial e final, ao longo da direção $x_2$ , da barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$h_0$ e $h_f$	dimensões inicial e final, ao longo da direção $x_3$ , da barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$\sigma_1$	tensão normal de Cauchy ao longo da direção $x_1$
$S_1$	tensão de Piola-Kirchhoff ao longo da direção $x_1$
$A_0$ e $A_f$	áreas inicial e final da seção transversal da barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$(\ )_1, (\ )_2, (\ )_3$	valores principais de um tensor de segunda ordem
$\bar{u}_1$	deslocamento longitudinal máximo para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$\lambda_{ei}, \lambda_{pi}$	alongamentos elástico e plástico de uma fibra material inicialmente na direção $i$ para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$\eta$	propriedade do material que varia gradualmente (no contexto da GF)
$f_1$ e $f_2$	frações volumétricas de dois materiais (no contexto da GF)
$\zeta$	direção na qual a propriedade varia gradualmente (no contexto da GF)
$p$	coeficiente da lei de potência de GF
$s$	coeficiente da lei sigmoidal de GF
$sn$	coeficiente da lei senoidal de GF
$M_{ei}$	componente longitudinal da tensão elástica de Mandel (na configuração intermediária) para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1
$\lambda_{LE}$	limite elástico da barra sob tração uniaxial
$\lambda_{LP}$	limite plástico da barra sob tração uniaxial

$E_1$ e $E_2$	limites do módulo de Young para os MGFs
X2	coordenada limite que separa a porção em regime elástico da porção de material em regime elastoplástico
$\lambda_{p1}^{\max}$	alongamento longitudinal plástico máximo para barras sob tração uniaxial
$\sigma_0$	limite inicial da tensão de escoamento do material
$(\mathbf{f}_{\text{int}})^J$	vetor local de forças internas (elemento $J$ )
$(\Omega_0)^J$	domínio local inicial do elemento $J$
$(\mathbf{H})^J$	matriz Hessiana local (elemento $J$ )
npin	número de pontos de integração numérica
$\xi(\mathbf{p})$	coordenadas adimensionais dos pontos de integração numérica
$w(\mathbf{p})$	pesos de integração numérica
np1	número de pontos de integração numérica para o elemento unidimensional
$gl(\ )$	coordenada adimensional dos pontos de integração para o elemento unidimensional
$wgl(\ )$	pesos de integração para o elemento unidimensional
$\{u,v,w\}$	coordenadas que definem a região hexaédrica (no contexto da integração numérica do tetraedro)
$\{x,y,z\}$	coordenadas que definem a região tetraédrica (no contexto da integração numérica do tetraedro)
$dxdydz$	elemento infinitesimal de volume na região tetraédrica (no contexto da integração numérica do tetraedro)
$dudvdw$	elemento infinitesimal de volume na região hexaédrica (no contexto da integração numérica do tetraedro)
$\Delta \mathbf{f}_{\text{ext}}$	incremento de forças externas (aplicadas) em cada passo de carga
$\mathbf{f}_{\text{ext}}(i)$	vetor global de forças externas no passo $i$
$\mathbf{r}_G$	resíduo global de forças
$(\mathbf{f}_{\text{int}})_G$	vetor global de forças internas
$\mathbf{H}_G$	matriz Hessiana global

$\Delta \mathbf{y}$	vetor incremento posicional global
ntgl	número total de graus de liberdade da malha de elementos finitos
ERRO	norma para comparação com a tolerância
$O^{(4)}$	tensor nulo de quarta ordem
$\mathbf{y}_s$	posição tentativa para a estratégia de previsão da Secante
$\mathbf{H}_s$	matriz Hessiana para a estratégia de previsão da Secante
$(v_{\text{NOD}})_k$	valor nodal de determinada variável mecânica
$v_i$	valores de determinada variável mecânica nos pontos de integração numérica
$d_i$	distância dos pontos de integração numérica aos nós
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$	taxa objetiva (de Jaumann) do tensor das tensões de Cauchy
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J$	taxa objetiva (de Jaumann) do tensor das deformações elásticas logarítmicas
$\bar{\sigma}$ e $\bar{Y}$	funções escalares para definição do critério de plastificação dos programas EPIM3D e DD3IMP
$\alpha$	parâmetros de isotropia ou de anisotropia dos programas EPIM3D e DD3IMP
$\kappa_{HEP}$	parâmetro de encruamento isotrópico da formulação hiperelastoplástica deste estudo
$\kappa_{EPIM3D}$	parâmetro de encruamento isotrópico da formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP
$L_{Fi}$	dimensão final do prisma da figura 9.1 ao longo da direção $i$
$t_1$	carga superficial aplicada na direção longitudinal do prisma da figura 9.1
$S_0$	área inicial da seção transversal do prisma da figura 9.1
$\theta$	ângulo de cisalhamento para material sob cisalhamento simples
$\gamma$	quantidade de cisalhamento para material sob cisalhamento simples
$I$	momento de inércia da seção transversal da viga em relação a um eixo
$J$	momento de inércia à torção da seção transversal de uma viga
SU	<i>speedup</i>
$TP_{\text{SEQ}}$	tempo de processamento para o programa sequencial
$TP_{\text{PAR}}$	tempo de processamento para o programa paralelo
nn	número de nós por elemento finito (Apêndice A)



<b>gpa</b>	grau do polinômio aproximador (Apêndice A)
$c_n^k$	$n$ -ésimo coeficiente da função de forma relativa ao nó $k$ (Apêndice A)
$\mathbf{M}_{\text{coef}}^d$	matriz com os coeficientes das derivadas das funções de forma (Apêndice A)
<b>ep</b>	vetor que contém os valores da deformação plástica $\mathbf{E}_p$ (Apêndice E)
<b>xx</b>	vetor que contém os valores do tensor das tensões inversas $\mathbf{X}$ (Apêndice E)
<b>rr</b>	vetor que contém os valores do tensor da lei de fluxo $\mathbf{R}$ (Apêndice E)
<b>rx</b>	vetor que contém os valores tensor de evolução $\mathbf{R}_x$ (Apêndice E)
$\mathbf{I}_{9 \times 9}$	matriz identidade 9x9 (Apêndice E)
<b>ap</b>	vetor que contém os valores do gradiente plástico $\mathbf{A}_p$ (Apêndice E)
<b>ra</b>	vetor que contém os valores do tensor da lei de fluxo $\mathbf{R}_{AP}$ (Apêndice E)
nn1	número de nós na direção 1 (Apêndice F)
nn2	número de nós na direção 2 (Apêndice F)
nn3	número de nós na direção 3 (Apêndice F)
nn	número de nós de cada elemento hexaédrico principal (Apêndice F)
ne	número de hexaedros para cada elemento principal (Apêndice F)
nnt	número total de elementos finitos hexaédricos (Apêndice F)
nnpe	número de nós por elemento finito (Apêndice F)
nepr	número de elementos principais (Apêndice F)
inc[a,b]	incidência dos elementos finitos hexaédricos (Apêndice F)
$\text{TF}_{\text{ext}}$	trabalho das forças externas (Apêndice F)
<b>p</b>	força distribuída (Apêndice F)
$J_\xi$	determinante da transformação $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ (Apêndice F)
$\left[ (\mathbf{F}_{\text{ext}})_i \right]^k$	força externa, ao longo da direção $i$ , atuante no nó $k$ (Apêndice F)
inc <sub>tetr</sub> [ ]	incidência dos elementos finitos tetraédricos (Apêndice F)
ndv1	número de divisões das arestas dos elementos principais na direção 1 (Apêndice F)
ndv2	número de divisões das arestas dos elementos principais na direção 2 (Apêndice F)
ndv3	número de divisões das arestas dos elementos principais na direção 3 (Apêndice F)



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>33</b>
1.1. Generalidades .....	33
1.2. Proposta e objetivos.....	37
1.3. Justificativas .....	38
1.4. Resumo dos capítulos .....	39
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>43</b>
2.1. MNLC.....	43
2.2. Materiais elásticos .....	44
2.3. Elastoplasticidade .....	46
2.4. MGFs.....	50
2.5. Análise não linear numérica via MEF .....	52
2.6. Processamento paralelo .....	59
<b>3. CINEMÁTICA .....</b>	<b>61</b>
3.1. Posição ou configuração.....	61
3.2. Mudança de configuração.....	65
3.3. Gradiente .....	67
3.4. Deformação .....	68
3.5. Objetividade da medida de deformação .....	69
3.6. Decomposição multiplicativa do gradiente .....	70
3.7. Taxas de deformação .....	72
<b>4. TENSÃO E EQUILÍBRIO .....</b>	<b>75</b>
4.1. Tensão.....	75
4.2. Comportamento mecânico .....	76
4.3. Elasticidade.....	76
4.4. Inelasticidade .....	77
4.5. Tensor elástico.....	78
4.6. Equilíbrio.....	79
<b>5. HIPERELASTICIDADE .....</b>	<b>83</b>
5.1. Definição .....	83
5.2. Modelos hiperelásticos adotados .....	84
5.3. Relação tensão-deformação .....	86

5.3.1. Tensão resultante para os modelos adotados .....	87
5.3.2. Tensor elástico resultante para os modelos adotados.....	89
5.4. Condições de crescimento e incompressibilidade.....	92
5.5. Existência de solução.....	93
<b>6. ELASTOPLASTICIDADE .....</b>	<b>95</b>
6.1. Definição.....	95
6.2. Elastoplasticidade para pequenas deformações .....	96
6.3. Aproximação de Green-Naghdi .....	100
6.4. Hiperelastoplasticidade .....	102
6.4.1. Relação tensão-deformação .....	103
6.4.2. Superfície de Plastificação .....	105
6.4.3. Leis de evolução.....	105
6.4.4. Determinação do multiplicador plástico .....	107
6.4.5. Evolução da tensão.....	108
6.5. Modelos adotados .....	109
6.5.1. Leis constitutivas elásticas .....	109
6.5.2. Critério de plastificação .....	110
6.5.3. Lei de fluxo .....	111
6.5.4. Leis de encruamento isotrópico .....	112
6.5.5. Leis de encruamento cinemático.....	112
6.6. Previsão elástica e correção plástica .....	113
6.6.1. Retorno para a aproximação de Green-Naghdi.....	115
6.6.2. Retorno para a hiperelastoplasticidade .....	118
6.7. Formulação para barra prismática sob tração uniaxial.....	120
6.7.1. Formulação de Green-Naghdi para barras sob tração uniaxial.....	124
6.7.2. Formulação hiperelastoplástica para barras prismáticas sob tração uniaxial.....	131
<b>7. MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL .....</b>	<b>139</b>
7.1. Definição.....	139
7.2. Leis de GF adotadas.....	139
7.2.1. Leis clássicas.....	140
7.2.2. Leis propostas .....	143
7.3. Modelos hiperelásticos com GF.....	145
7.4. Modelos elastoplásticos com GF .....	147
7.4.1. Aproximação de Green-Naghdi .....	147

7.4.2. Hiperelastoplasticidade.....	149
7.5. Barras hiperelastoplásticas com GF sob tração uniaxial .....	149
7.5.1. GF do módulo de Young .....	152
7.5.2. GF das constantes de encruamento isotrópico.....	155
<b>8. CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS.....</b>	<b>159</b>
8.1. Gerador de funções de forma.....	159
8.2. Gerador de malhas .....	160
8.3. Integração numérica .....	161
8.3.1. Elemento finito sólido hexaédrico.....	161
8.3.2. Elemento finito sólido tetraédrico .....	162
8.4. Algoritmo de análise não linear geométrica de materiais em regime elástico .....	164
8.5. Algoritmo de análise não linear geométrica de materiais em regime elastoplástico.....	167
8.5.1. Estratégias de previsão elástica .....	168
8.6. Processamento paralelo .....	174
8.7. Pós-processamento .....	175
8.8. Programas EPIM3D e DD3IMP .....	176
8.8.1. Cinemática.....	177
8.8.2. Comportamento elástico.....	177
8.8.3. Comportamento plástico.....	178
8.8.4. Elementos finitos .....	179
8.8.5. Previsão elástica e correção plástica.....	179
8.8.6. Materiais com pequenas deformações elásticas .....	179
8.8.7. Barras sob tração uniaxial em regime de pequenas deformações elásticas.....	181
8.8.7.1. Barras constituídas de material com encruamento isotrópico .....	182
8.8.7.2. Barras constituídas de material com encruamento cinemático de Prager .....	184
8.8.7.3. Aproximação de Green-Naghdi.....	186
8.8.7.4. Formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP .....	187
<b>9. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>189</b>
9.1. Estruturas constituídas de material em regime elástico.....	190
9.1.1. Problemas com deformação uniforme.....	190
9.1.1.1. Tração uniaxial .....	191
9.1.1.2. Compressão uniaxial.....	194
9.1.1.3. Cisalhamento simples .....	200
9.1.2. Obtenção do número necessário de pontos de integração .....	203

9.1.3. Comparação do tipo de refinamento da malha.....	215
9.1.4. Comparação do tempo de processamento para os elementos sólidos.....	218
9.1.5. Tração uniaxial de prisma com GF.....	218
9.1.6. Vigas e pórticos planos.....	222
9.1.6.1. Viga prismática em balanço.....	223
9.1.6.2. Pórtico diamante.....	236
9.1.6.3. Pórtico quadrado.....	240
9.1.6.4. Viga semicircular em balanço.....	242
9.1.6.5. Coluna engastada sob primeiro modo de flambagem.....	245
9.1.6.6. Coluna engastada sob segundo modo de flambagem.....	249
9.1.6.7. Coluna engastada sob terceiro modo de flambagem.....	250
9.1.7. Vigas tridimensionais.....	256
9.1.7.1. Viga circular em balanço.....	257
9.1.7.2. Flambagem lateral de viga engastada.....	259
9.1.8. Chapas e cascas.....	260
9.1.8.1. Membrana de Cook.....	262
9.1.8.2. Cilindro espesso sob linha de carga.....	269
9.1.8.3. Casca hemisférica.....	271
9.1.8.4. Placa engastada em forma de anel.....	273
9.1.8.5. Cilindro fino com abas livres tracionado.....	274
9.1.9. Sólidos tridimensionais.....	276
9.1.9.1. Bloco parcialmente carregado.....	277
9.1.9.2. Bloco cúbico em balanço.....	280
9.1.9.3. Sólido de Cook.....	282
9.2. Estruturas constituídas de material em regime elastoplástico.....	286
9.2.1. Comparação das estratégias de previsão elástica.....	286
9.2.2. Comparação dos algoritmos de correção plástica (retorno).....	290
9.2.3. Tração uniaxial.....	295
9.2.3.1. Material homogêneo com encruamento isotrópico sob pequenas deformações elásticas.....	295
9.2.3.2. Material homogêneo elastoplástico perfeito sob grandes deformações elastoplásticas.....	299
9.2.3.3. Material com GF das constantes de encruamento em regime de pequenas deformações elásticas.....	304

9.2.3.4. Material elastoplástico perfeito com GF do módulo de Young sob grandes deformações elastoplásticas .....	309
9.2.3.5. Material com GF da constante K da lei de Swift sob grandes deformações elastoplásticas .....	313
9.2.3.6. Material homogêneo com encruamento cinemático não linear sob grandes deformações elastoplásticas .....	316
9.2.4. Compressão uniaxial .....	317
9.2.4.1. Material homogêneo com lei hiperelástica linear e lei de Swift.....	319
9.2.4.2. MGF, lei hiperelástica linear e lei de Voce .....	320
9.2.5. Cisalhamento simples .....	322
9.2.5.1. Material homogêneo com lei hiperelástica linear e lei de Swift.....	322
9.2.5.2. Material homogêneo com leis hiperelástica e de encruamento cinemático não lineares .....	324
9.2.6. Viga em balanço com força prescrita .....	326
9.2.7. Viga em balanço com deslocamento prescrito .....	327
9.2.8. Bloco parcialmente carregado .....	330
9.2.9. Indentação de bloco .....	332
9.2.10. Chapa com orifício circular tracionada .....	333
9.2.11. Achatamento de cilindro.....	337
9.2.12. Achatamento de prisma .....	339
9.3. Tempo de processamento para as estratégias seqüencial e paralela.....	341
<b>10. CONCLUSÕES.....</b>	<b>345</b>
10.1. Tópicos do estudo.....	345
10.2. Elementos finitos sólidos.....	345
10.3. Equilíbrio.....	346
10.4. Hiperelasticidade .....	346
10.5. Elastoplasticidade .....	346
10.6. GF .....	347
10.7. Regime de pequenas deformações elásticas .....	347
10.8. Resultados numéricos .....	348
10.9. Idéias para trabalhos futuros.....	349
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>351</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>367</b>
<b>ANEXO B.....</b>	<b>369</b>

<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>375</b>
<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>397</b>
<b>APÊNDICE C.....</b>	<b>399</b>
<b>APÊNDICE D.....</b>	<b>403</b>
<b>APÊNDICE E.....</b>	<b>407</b>
<b>APÊNDICE F.....</b>	<b>425</b>



# 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas algumas generalidades, as propostas, os objetivos, as justificativas e o resumo dos capítulos da presente tese.

## *1.1. Generalidades*

Existem inúmeras áreas da engenharia nas quais é necessária a previsão do comportamento estrutural como, por exemplo, a civil, a mecânica, a automobilística e a aeroespacial. Tal previsão é essencial, entre outras coisas, para o apropriado dimensionamento estrutural. Toda estrutura deve ser adequadamente dimensionada para, ao longo de sua vida útil, suportar as solicitações impostas - como as forças externas atuantes - sem apresentar instabilidades e falhas materiais, que podem causar colapso estrutural ou prejudicar o desempenho de algum componente. Dessa forma, é fundamental que a possibilidade de ocorrência desses problemas seja previamente e precisamente identificada pela metodologia empregada para análise ou para dimensionamento estrutural. Assim, torna-se essencial, para a engenharia de estruturas, o desenvolvimento de ferramentas precisas de previsão do comportamento estrutural.

Componentes estruturais constituídos de materiais altamente deformáveis têm sido amplamente usados na engenharia. Materiais altamente deformáveis são aqueles que, quando submetidos a solicitações externas, podem apresentar grandes deslocamentos ou significativas mudanças de forma sem ocorrência de falhas materiais, como é o caso dos polímeros estruturais e de alguns metais. Além da questão da deformabilidade dos componentes, as estruturas da engenharia podem estar submetidas a carregamentos complexos como, por exemplo, a combinação entre diferentes tipos de forças atuantes. A geometria dos componentes estruturais também pode ser bastante complexa, o que pode afetar a precisão da

análise, como é o caso de chapas com furos, estruturas extremamente delgadas e componentes com grandes curvaturas. Por fim, a correta previsão do comportamento mecânico dos materiais, expresso pelas chamadas leis constitutivas, pode ser difícil em regime de grandes deformabilidades, o que pode prejudicar a confiabilidade da análise. Assim, dada a possível complexidade da análise estrutural a ser realizada pelo engenheiro, é indispensável a criação de sofisticadas metodologias para previsão do comportamento dos mais variados tipos de componentes estruturais.

Usualmente, conhecidas a geometria dos componentes, as solicitações impostas e as propriedades dos materiais, o objetivo da análise estrutural é determinar as seguintes grandezas mecânicas ao longo do material: deslocamentos, deformações e tensões. Com essas grandezas, o engenheiro pode determinar se as dimensões dos componentes e as propriedades dos materiais são adequadas para que a estrutura suporte o carregamento atuante. Para os problemas estruturais com simplificação da geometria, das condições de carregamento e das propriedades dos materiais, existem na literatura científica as chamadas soluções analíticas. Tais soluções relacionam, por meio de expressões matemáticas, as supracitadas grandezas mecânicas com as seguintes variáveis: dimensões iniciais do componente; carregamento externo atuante; e constantes da lei constitutiva do material. Ademais, as soluções analíticas encontradas na literatura são específicas para cada problema estrutural. Uma forma alternativa para se obter uma previsão mais realista do comportamento estrutural é a realização de ensaios mecânicos. Porém, tais ensaios são muito onerosos (em termos de custo e tempo de projeto) e, tal como as soluções analíticas, específicos para cada caso. Para resolver problemas estruturais mais complexos e mais gerais de uma forma mais prática, pesquisadores e engenheiros têm recorrido aos métodos numéricos ou aproximados, usualmente empregados com auxílio de computadores. Isso pode ser visto, por exemplo, na indústria automobilística, a qual vem substituindo seus ensaios de impacto de carro com anteparo rígido por simulações computacionais. Outro exemplo está na engenharia aeroespacial, na qual se torna imperativo o uso de simulações numéricas devido à impossibilidade de realização de ensaios experimentais e de obtenção de soluções analíticas, como é o caso complexo de aeronaves entrando na atmosfera terrestre a altíssimas velocidades. Nesse caso, é óbvia a necessidade da previsão computacional prévia do comportamento da aeronave.

Entre os métodos numéricos ou aproximados, destacam-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). As vantagens do MEF em relação aos outros dois métodos numéricos são:

maior difusão na comunidade científica e, conseqüentemente, maior quantidade de estudos com os quais se podem comparar resultados; maior facilidade de entendimento em relação ao MEC; e metodologia de fácil implementação em códigos computacionais. O MEF é amplamente empregado em códigos computacionais para simulação numérica dos mais variados tipos de estruturas. De modo geral, uma das desvantagens do MEF é o grande esforço computacional exigido, em termos de capacidade de memória e tempo de processamento, para analisar problemas estruturais mais complexos. Isso porque, em tais casos, é necessário armazenar grande quantidade de dados e calcular enorme quantidade de valores relativos a grandezas mecânicas. Esse problema, contudo, é amenizado pela constante evolução dos micro-computadores, cujas velocidade de processamento e capacidade de memória são cada vez maiores. Ademais, é possível reduzir o tempo de simulação com o processamento paralelo, o qual pode ser implementado em máquinas com vários processadores (clusters) ou em várias máquinas. Com esse tipo de processamento, podem ser obtidos expressivos ganhos de velocidade para simulação computacional de problemas estruturais. Na engenharia, esses ganhos são fundamentais para casos mais complexos, já que o engenheiro precisa de uma metodologia de análise estrutural que seja, simultaneamente, confiável e rápida.

Conforme mencionado anteriormente, o comportamento mecânico do material é expresso pelas chamadas leis - ou relações - constitutivas. Esse comportamento é a resposta macroscópica do material frente às solicitações impostas. Tais leis podem ser interpretadas como sendo a relação entre causa e efeito. Na Mecânica dos Sólidos, a lei constitutiva é usada para estabelecer - ou descrever - matematicamente a relação entre as grandezas tensão e deformação, ou entre as forças de contato interno e a mudança de forma do material. Além disso, o comportamento global da estrutura - ou o comportamento de toda a estrutura - depende, obviamente, da resposta mecânica de cada um de seus materiais constituintes. Assim, a adequada escolha das relações constitutivas é fundamental para que se possa prever tanto o comportamento mecânico dos componentes como o comportamento de toda a estrutura.

A deformação - ou a mudança de forma - que ocorre num componente estrutural devido ao carregamento atuante pode ser reversível ou irreversível. Na Mecânica dos Sólidos, a deformação reversível é chamada de elástica, e a irreversível de plástica. Caso a deformação tenha uma parcela elástica e uma parcela plástica, ela é chamada de elastoplástica. Os materiais da engenharia civil, por exemplo, geralmente estão em regime de pequenas

deformações, as quais são puramente elásticas. Já os polímeros estruturais podem apresentar grandes deformações elásticas, com ou sem parcela plástica considerável. Os metais, de um modo geral, apresentam deformações essencialmente plásticas, ou seja, as parcelas elásticas de deformação são menores do que as parcelas plásticas. Ademais, componentes estruturais metálicos com os mais variados formatos são amplamente empregados nas indústrias automobilística, aeroespacial e naval, por exemplo. O processo de dar a forma final ao componente recebe o nome de conformação. Para se conformar uma chapa metálica, por exemplo, a principal parcela de deformação resultante deve ser irreversível ou plástica, já que a desejada forma final da chapa não pode ser alterada significativamente após o término do processo. No caso do metal, a realização de tal processo normalmente envolve elevadas deformações plásticas no material. Assim sendo, a existência de ferramentas que permitam prever o comportamento de estruturas constituídas de materiais elastoplásticos é de extrema importância prática para a indústria.

Na engenharia estrutural, materiais heterogêneos ou compósitos são aqueles nos quais a composição e, conseqüentemente, as propriedades constitutivas variam ao longo de seu volume. A vantagem desse tipo de material em relação aos homogêneos é que as propriedades desejáveis de diferentes materiais podem ser aproveitadas no mesmo componente estrutural. Com isso, é possível otimizar o desempenho do componente de acordo com a sua aplicação. Um dos exemplos de material compósito amplamente utilizado na engenharia civil é o concreto armado, em que a resistência a esforços de tração é fornecida pelo aço, e a resistência à compressão é dada pelo concreto. Entre os diversos tipos de compósitos, podem ser destacados os laminados, que são materiais constituídos por lâminas ou camadas de diferentes materiais. Uma das desvantagens desse tipo de compósito é a possibilidade de ocorrência de problemas de interface, como o descolamento entre camadas, devido à eventual descontinuidade do campo de tensões na interface. Esses problemas de interface não ocorrem nos compósitos com gradação funcional (GF), nos quais a composição e, portanto, as propriedades constitutivas variam de forma suave e contínua ao longo do material. Dada a potencialidade desse tipo de material, torna-se importante, para a engenharia, a existência de ferramentas para previsão do comportamento de estruturas constituídas de compósitos com GF. Um exemplo de material com GF é o caso de placas utilizadas em foguetes e aeronaves espaciais. Nesse caso, a face externa é 100% cerâmica, o que confere resistência a grandes variações de temperatura, a face interna é 100% metálica, o que garante elevada resistência mecânica a esforços de compressão e de tração, e as propriedades do material no interior da

placa variam suave e continuamente ao longo da espessura, o que evita os problemas de interface que surgiriam se o compósito fosse laminado.

## *1.2. Proposta e objetivos*

A proposta deste doutorado se enquadra em um projeto temático maior, ***Desenvolvimento de modelos numéricos para a análise de problemas de engenharia estrutural***, financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Tal projeto inclui os seguintes temas: análise não linear geométrica, dinâmica, impacto, materiais compósitos, materiais com gradação funcional (MGFs), elasticidade, hiperelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, termoelasticidade etc. O grupo de pesquisa no qual se insere o aluno está em fase de paralelização dos códigos computacionais desenvolvidos e possui diversas publicações em congressos e periódicos científicos.

O trabalho aqui proposto envolve também a continuidade e a evolução do bolsista nas atividades científicas de seu projeto de mestrado, no qual foram realizados estudo e implementação computacional, via MEF, de leis constitutivas não lineares para materiais hiperelásticos, homogêneos e isotrópicos em regime de grandes deslocamentos e de grandes deformações. Além disso, são visados tanto a contribuição ao projeto temático maior quanto o aprofundamento do aluno em não linearidades geométrica e física de materiais com grandes deformações.

O objetivo precípuo deste estudo é a implementação computacional de modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos para MGFs em regime de elevados deslocamentos e de grandes deformações. Ademais, pretende-se implementar tais modelos em códigos computacionais de análise não linear geométrica e física, via elementos finitos sólidos (tridimensionais) isoparamétricos. Além do objetivo precípuo desta tese de doutorado, outros objetivos iniciais são:

- disciplinas de pós-graduação para obtenção de créditos, os quais são um dos requisitos do programa de doutorado do departamento;
- revisão de Mecânica Não Linear do Contínuo (MNLC), que inclui os seguintes tópicos: álgebras linear e tensorial; cinemática ou estudo do movimento; medidas de deformação e de tensão; balanços e problemas de valor de contorno; leis constitutivas; equilíbrio de forças; e princípios variacionais;
- levantamento bibliográfico sobre os seguintes temas: elementos finitos sólidos; integração numérica; elasticidade não linear; hiperelasticidade; plasticidade com pequenas e com grandes deformações; MGFs; e programação em paralelo;
- implementação do modelo hiperelástico linear de Saint Venant-Kirchhoff (SVK) para análise não linear geométrica de sólidos com grandes deslocamentos;
- estudo do conceito de GF, a qual é definida como a variação contínua e suave das propriedades mecânicas do material ao longo do volume;
- implementação de modelos hiperelásticos não lineares, cujas equações constitutivas foram utilizadas pelo bolsista, em seu mestrado, para um elemento finito de casca;
- estudo, proposta e implementação computacional do modelo elastoplástico para materiais em regime de grandes deformações;
- definição e implementação de leis de GF nos códigos computacionais desenvolvidos;
- simulações computacionais de problemas estruturais (estáticos e isotérmicos);
- paralelização dos códigos desenvolvidos;
- redação de artigos científicos;
- publicação de artigos em congressos científicos;
- redação dos relatórios anuais da FAPESP;
- exame de qualificação, outro requisito do departamento;
- redação e defesa da tese de doutorado.

### *1.3. Justificativas*

A justificativa do presente trabalho é, conforme dito anteriormente, a necessidade de se desenvolver ferramentas numéricas robustas para análise estrutural. Tais programas devem ser versáteis, isto é, eles devem ser capazes de simular, com precisão, o comportamento de estruturas com as mais variadas formas de solicitação atuante, geometria de componentes e propriedades mecânicas dos materiais constituintes. Além de versátil e precisa, a ferramenta de cálculo estrutural deve ser prática, isto é, ela deve fornecer resultados confiáveis, essenciais para o adequado dimensionamento, com um tempo de execução compatível com o projeto da estrutura. Dessa forma, pretende-se desenvolver códigos computacionais capazes de realizar simulações numéricas estruturais confiáveis e rápidas.

É de extrema importância prática, para o engenheiro de estruturas, a existência de programas de simulação estrutural nos quais são considerados grandes deslocamentos, elevadas deformações, variação gradual das propriedades mecânicas do material e efeitos inelásticos. Isso porque o uso de componentes estruturais com tais características é cada vez mais amplo nos diversos ramos da engenharia. A maior parte dos programas comerciais existentes é usada para análise estrutural de materiais elásticos homogêneos em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Essa análise, apesar de prática e rápida, é limitada a estruturas com pequenas deformabilidades e sem efeitos inelásticos significativos.

Outra justificativa deste estudo é que o grupo de pesquisa no qual se insere o aluno já possui códigos computacionais de análise não linear geométrica com elementos finitos de barra, de pórtico e de casca, limitados, contudo, a pequenas deformações. Portanto, implementar a metodologia numérica do grupo com uso de elementos finitos sólidos para materiais em regime de grandes deformações ampliaria as aplicações de tal metodologia. É possível, futuramente, desenvolver programas de análise não linear - geométrica e física - nos quais existam os mais diferentes tipos de elementos no mesmo código computacional, o que seria bastante útil para o engenheiro de estruturas, já que este poderia ter, no mesmo programa, várias opções de elementos finitos para modelar seus componentes estruturais.

É indiscutível a importância científica do aprofundamento no estudo de análises numéricas não lineares para problemas complexos da engenharia estrutural. Isso é válido tanto para o aluno quanto para o grupo de pesquisa e para a Universidade de São Paulo (USP). Ademais, são encontradas aplicações de tais análises em diversas áreas da engenharia. Por fim, pretende-se desenvolver programas cada vez melhores, ou seja, programas com estratégias numéricas que possibilitem simulações computacionais mais rápidas e, ao mesmo tempo, mais realistas.

#### *1.4. Resumo dos capítulos*

Além da introdução, esta tese possui mais nove capítulos. No segundo capítulo, que é a revisão bibliográfica, discorre-se brevemente sobre os seguintes tópicos da literatura científica consultada, relacionados ao presente estudo: MNLC; elasticidade; elastoplasticidade; MGFs; análise não linear numérica via MEF; e programação em paralelo.

No terceiro capítulo, é dada a aproximação cinemática dos dois elementos finitos tridimensionais utilizados (o tetraedro e o hexaedro). São descritas, de forma sucinta, as grandezas cinemáticas empregadas resultantes dessa aproximação. A decomposição da deformação, para o caso elastoplástico, também é dada nesse capítulo.

Os conceitos de tensão, modelo constitutivo, elasticidade e inelasticidade são dados no quarto capítulo, em que também é descrito o princípio de equilíbrio estrutural (estático) utilizado. Todos esses conceitos são úteis para se formular o equilíbrio de cada elemento finito e, conseqüentemente, de toda a estrutura.

No quinto capítulo, são descritos o conceito de hiperelasticidade, os modelos hiperelásticos homogêneos adotados neste estudo e a relação tensão-deformação para o caso hiperelástico. As leis constitutivas hiperelásticas são empregadas para se expressar o comportamento mecânico do material em regime de deformações elásticas (ou reversíveis).



No sexto capítulo é abordado o tema da elastoplasticidade. São descritas a formulação elastoplástica para pequenas deformações, a aproximação de Green-Naghdi e a formulação elastoplástica para grandes deformações, chamada de hiperelastoplasticidade. Discorre-se também, nesse capítulo, sobre a relação tensão-deformação para o caso elastoplástico, o conceito de superfície de plastificação, encruamento, leis de evolução plástica e algoritmos de retorno. Por fim, são descritos os modelos hiperelastoplásticos homogêneos adotados neste estudo.

A definição e as leis de GF adotadas são apresentadas no sétimo capítulo. Entre tais modelos, são descritos os usualmente encontrados na literatura científica e os propostos pelo aluno. Ademais, são fornecidas as expressões dos modelos constitutivos hiperelásticos e hiperelastoplásticos para materiais com GF.

A metodologia numérica e os códigos computacionais desenvolvidos pelo aluno ao longo de seu doutorado são descritos no oitavo capítulo. Entre os referidos códigos, estão os geradores de funções de forma e de malhas de elementos tridimensionais, os programas de análise não linear - geométrica e física - de materiais altamente deformáveis via elementos finitos sólidos, e os programas de pós-processamento. Para análise de materiais em regime elastoplástico, são descritas as estratégias iterativas de previsão elástica e de correção plástica. Alguns aspectos da paralelização dos códigos desenvolvidos são apresentados nesse capítulo. Por fim, são brevemente descritos os programas EPIM3D (Elastoplastic implicit three-dimensional code) e DD3IMP (Deep drawing three-dimensional implicit code), utilizados pelo aluno ao longo de seu estágio de doutorado na Universidade de Coimbra (Portugal), para simulação numérica de materiais elastoplásticos.

Os exemplos numéricos para validação dos códigos computacionais desenvolvidos são dados no nono capítulo. Esses exemplos compreendem a análise não linear de estruturas constituídas de material homogêneo e com GF nos seguintes regimes: elástico e elastoplástico, com pequenas e com grandes deformações. Para mostrar a aplicabilidade dos exemplos, deve ser comentado que as simulações numéricas realizadas são restritas a problemas estruturais estáticos e isotérmicos. A discussão dos resultados obtidos também é dada no nono capítulo.

No décimo e último capítulo, são apresentadas as conclusões baseadas nos resultados das simulações numéricas, as principais comparações com a literatura científica consultada, e algumas sugestões para pesquisas futuras.

As derivadas da deformação em relação aos graus de liberdade dos elementos sólidos utilizados neste estudo são dadas no apêndice A. As derivadas para cálculo da tensão e do tensor elástico de quarta ordem são fornecidas no apêndice B. As fórmulas empregadas para determinação do operador tangente consistente hiperelastoplástico são dadas no apêndice C. No apêndice D, são descritas as derivadas utilizadas no algoritmo de correção plástica. Por fim, detalhes da geração automática das funções de forma e das malhas de elementos finitos tridimensionais são fornecidos nos apêndices E e F, respectivamente.

As quadraturas unidimensionais de Gauss-Legendre, utilizadas para determinação da quadratura tridimensional do elemento hexaédrico, e as quadraturas tridimensionais do elemento tetraédrico são dadas, respectivamente, nos anexos A e B.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, são descritos brevemente alguns dos inúmeros estudos consultados ao longo da pesquisa, relacionados com a presente tese.

### 2.1. MNLC

Devido ao fato de a MNLC ser uma teoria já consagrada no meio acadêmico, não é realizada aqui uma revisão bibliográfica sobre o assunto. Nesta seção, são citados alguns dos trabalhos, relacionados à MNLC, que foram consultados ao longo da pesquisa.

A teoria da MNLC, base para o desenvolvimento da formulação numérica do presente estudo, é abordada em vários livros como, por exemplo, Coimbra (1981), Marsden e Hughes (1983), Ogden (1984), Ciarlet (1988), Belytschko, Liu e Moran (2000) e Holzapfel (2004). Na teoria do contínuo, o corpo - ou o objeto - analisado é considerado como sendo um meio contínuo, isto é, o corpo é um sistema macroscópico, que não possui vazios e cujas grandezas mecânicas são descritas por funções contínuas (HOLZAPFEL, 2004). Podem ser citadas, para exemplificar, as funções (contínuas) que descrevem a densidade e a temperatura de um corpo de acordo com sua posição no espaço. Na Mecânica do Contínuo (MC), embora se saiba que todos os objetos são formados por moléculas e átomos, os efeitos microscópicos e atomísticos das inúmeras partículas materiais podem ser substituídos por um número pequeno de variáveis macroscópicas (HOLZAPFEL, 2004). Já que a MC pode ser aplicada para análise de fluidos, deve ser lembrado que esta pesquisa é restrita à análise de sólidos.

Em todos os livros supramencionados, são abordados os seguintes tópicos, essenciais para a formulação desta tese: cinemática, que é o estudo do movimento de um corpo; conceito e medidas de deformação, variável mecânica usada para quantificar a intensidade da mudança de forma de um corpo; definição e medidas de tensão, grandeza que relaciona forças e áreas de contato interno no material; balanços, que são leis fundamentais da física com aplicação

em sólidos e fluidos; leis constitutivas, utilizadas para descrever a resposta mecânica do material; e elasticidade, que é o regime no qual o campo de tensões depende apenas do estado atual de deformação num material. Além desses tópicos, Holzapfel (2004) descreve várias propriedades das álgebras vetorial e tensorial, e os conceitos a seguir, que também são fundamentais para esta pesquisa: hiperelasticidade, que é a descrição da resposta do material elástico por meio de um potencial escalar; leis da termodinâmica, usadas para obtenção da relação entre tensão e deformação; tensor elástico, empregado no procedimento numérico deste estudo; materiais pouco compressíveis, como é o caso dos polímeros estruturais - ou elastômeros; princípio da energia potencial estacionária, utilizado aqui para se descrever o equilíbrio da estrutura na configuração final; e modelos constitutivos para materiais inelásticos em regime de grandes deformações.

## *2.2. Materiais elásticos*

De acordo com Coimbra (1981), Ogden (1984) e Holzapfel (2004), um material é chamado de elástico se a sua resposta mecânica depende apenas do nível de deformação em determinado instante e não do histórico de deformação. Assim, o processo de deformação elástica é classificado como reversível, isto é, quando o corpo elástico, após ser deformado devido à ação de uma força externa, é descarregado, ele retorna à sua posição inicial. Ao longo desse processo elástico de carregamento e descarregamento, não há dissipação de energia mecânica (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000).

O comportamento mecânico de um material qualquer é definido pela chamada lei - ou relação - constitutiva. Um dos modelos constitutivos elásticos usuais na literatura científica é a lei de Hooke, que estabelece a relação linear entre a tensão e a deformação de engenharia (CIARLET, 1988). A desvantagem de tal modelo, também chamado de elástico linear, é o fato de ser restrito a materiais pouco deformáveis, isto é, materiais que apresentam pequenos deslocamentos e pequenas deformações (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Outro modelo elástico existente é o de Saint Venant-Kirchhoff (SVK), o qual é expresso por uma

relação linear, análoga à lei de Hooke, entre o tensor deformação de Green-Lagrange e o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (COIMBRA, 1981). Conforme afirmado em Holzapfel (2004), esse modelo, também chamado de elástico não linear, é usualmente empregado para análise de metais que possam apresentar grandes deslocamentos, porém com pequenas deformações de compressão. Para modelar materiais que possam estar em regime de grandes deformações, são empregadas as condições de crescimento (HOLZAPFEL, 2004). De acordo com tais condições, a energia necessária para aniquilar a matéria ou expandi-la a um volume infinito torna-se infinita. Esse fato está de acordo com evidências científicas, e não é satisfeito pelas leis elásticas de Hooke e SVK. Portanto, pelo que foi discutido neste parágrafo e pelo fato do projeto de doutorado desta tese abordar materiais elásticos altamente deformáveis, foram adotados os seguintes modelos: lei elástica de SVK para problemas estruturais com grandes deslocamentos e pequenas deformações; e lei elástica com condições de crescimento (HOLZAPFEL, 2004) para estruturas com elevados deslocamentos e grandes deformações.

De acordo com Holzapfel (2004), todo material hiperelástico, além de ser elástico, é descrito por um potencial escalar chamado de energia livre de Helmholtz, definida por unidade de volume inicial. O modelo de SVK também é chamado de lei hiperelástica linear, pois estabelece uma relação linear entre tensão e deformação. Segundo Itskov e Aksel (2004), tal modelo é a relação hiperelástica mais simples e, por isso, é bastante empregado em análises de materiais elásticos em regime de grandes deslocamentos. Já os modelos hiperelásticos em que a relação entre tensão e deformação não é linear são chamados de modelos hiperelásticos não lineares (DÜSTER; HARTMANN; RANK, 2003; HARTMANN; NEFF, 2003; PASCON, 2008).

Entre os materiais elásticos altamente deformáveis, podem ser destacados os polímeros estruturais - ou elastômeros - e alguns metais. Os componentes elastoméricos, usualmente modelados por relações hiperelásticas não lineares, possuem diversas aplicações na engenharia como, por exemplo: apoios para edifícios e pontes, peças de motor, vedação de portas de veículos automotivos, juntas de dilatação flexíveis, selantes para reparo em coberturas de edifícios, anéis de vedação para foguetes (“o-rings”), pneus, juntas para vidros de segurança, e espumas de poliuretano para bancos de carros (BECHIR; BOUFALA; CHEVALIER, 2003; PEYRAUT et al., 2009). Sabe-se que muitos polímeros estruturais apresentam pequenas variações volumétricas mesmo em regime de grandes deformações (HOLZAPFEL, 2004). Materiais que apresentam pequenas alterações de volume são

chamados de pouco compressíveis. Assim, para modelar os polímeros estruturais neste estudo foram empregadas leis hiperelásticas não lineares para materiais pouco compressíveis (HOLZAPFEL, 2004). Em relação aos metais capazes de apresentar grandes deslocamentos, as seguintes aplicações podem ser citadas: molas para o sistema de suspensão de carros, cabos de transmissão, lâminas de rotor de helicópteros, lâminas de turbinas eólicas, e braços robóticos (PAI; NAYFEH, 1994; PAI; PALAZOTTO, 1996). Todavia, encontrar o modelo constitutivo mais adequado para determinado material, e simular numericamente as aplicações supracitadas não fazem parte dos objetivos iniciais deste estudo.

Existem vários estudos teóricos elasticidade e materiais elásticos. Carrol (2009) ressalta a importância de se descrever a resposta do material elástico por meio de um potencial escalar, como é o caso da hiperelasticidade. Segundo tal estudo, caso a resposta não seja obtida a partir desse escalar, existe a possibilidade de ocorrer trabalho negativo em ciclos fechados de deformação, o que é teoricamente incoerente, já que em tais ciclos não há dissipação de energia e, portanto, o trabalho realizado ao longo deles deve ser nulo. Por essa razão, os modelos constitutivos elásticos adotados neste estudo são hiperelásticos. Além disso, Hartmann e Neff (2003) afirmam que, para garantir a existência de solução única via minimização da energia, o potencial escalar hiperelástico, que é a energia livre de Helmholtz, deve satisfazer as condições de policonvexidade e coercividade (MARSDEN; HUGHES, 1983; CIARLET, 1988). De acordo com Ciarlet (1988), o modelo de SVK não é policonvexo, mas pode ser empregado para modelar materiais elásticos sob pequenas deformações. Os modelos hiperelásticos não lineares adotados nesta pesquisa são o de *Rivlin-Saunders* (RIVLIN, 1956), o de *Hartmann-Neff* (HARTMANN; NEFF, 2003) e o *neo-Hookeano* (SZE; ZHENG; LO, 2004). Tais modelos satisfazem as condições de policonvexidade e coercividade, conforme afirmado em Hartmann e Neff (2003). Apesar da importância das referidas condições, propor novos modelos hiperelásticos que as satisfaçam, e checá-las nos modelos adotados não são objetivos deste estudo.

### 2.3. Elastoplasticidade

Todo material se deforma quando é submetido a forças externas. Os principais tipos de deformação são descritos, por exemplo, em Khan e Huang (1995). A deformação no material é classificada de elástica se for reversível e independente do tempo, isto é, quando ela desaparece por completo assim que as forças deixam de ser aplicadas. Se a deformação é reversível mas dependente do tempo, é chamada de viscoelástica. A mudança de forma é classificada como plástica quando é irreversível ou permanente, ou seja, retiradas as forças externas, a deformação se mantém. Nesse caso, ocorre dissipação de energia mecânica, que é usada no rearranjo molecular do material (KHAN; HUANG, 1995). Quando o material apresenta duas parcelas de deformação, uma elástica independente do tempo e outra plástica, ele é classificado de elastoplástico. Análises numéricas de estruturas constituídas de material elastoplástico também são abordadas nesta tese. Entre as aplicações práticas de tais análises, pode ser citada a necessidade de previsão do comportamento mecânico durante a conformação plástica de metais (ALVES, 2003).

A teoria clássica da plasticidade é abordada em diversos livros como, por exemplo, Lubliner (1990), Maugin (1992) e Khan e Huang (1995). A referida teoria é válida para materiais em regime de pequenas deformações, mas pode ser estendida para o regime de grandes deformações. Em tais livros, são abordados vários conceitos fundamentais da teoria da plasticidade. O primeiro deles é a irreversibilidade do processo de deformação plástica, discutido no parágrafo anterior. Outro conceito é a decomposição da medida de deformação, que pode ser feita em pequenas ou grandes deformações. No primeiro caso, o tensor de deformação infinitesimal (de engenharia) é decomposto, de forma aditiva, nas parcelas elástica e plástica (KHAN; HUANG, 1995). Em regime de grandes deformações, duas das grandezas cinemáticas mais usadas são os tensores gradiente da mudança de configuração e deformação de Green-Lagrange (HOLZAPFEL, 2004). Segundo Maugin (1992), existem duas decomposições possíveis para materiais sob grandes deformações. A primeira é a decomposição de Green-Naghdi, proposta por Green e Naghdi (1965), na qual o tensor deformação de Green-Lagrange é decomposto, de forma aditiva, nas parcelas elástica e plástica. A segunda decomposição possível é a de Lee, também chamada de decomposição de Kröner-Lee devido aos estudos de Kröner (1960) e de Lee (1969). Nesse caso, o tensor

gradiente da mudança de configuração - ou simplesmente gradiente - é decomposto, na forma de produto matricial, nas parcelas elástica e plástica. Foi Lee (1969) quem introduziu a noção de configuração intermediária, composta apenas da parcela plástica do gradiente, na qual o material encontra-se descarregado. Na decomposição de Kröner-Lee, o tensor deformação total de Green-Lagrange não é, de modo geral, a simples soma das parcelas elástica e plástica de tal tensor, conforme considerado na teoria de Green e Naghdi (1965). Ademais, de acordo com Eterovic e Bathe (1991), se a decomposição aditiva de Green-Naghdi é utilizada em regime de grandes deformações elastoplásticas, a resposta elástica pode depender das deformações plásticas, o que é incoerente. Além das decomposições de Green-Naghdi e de Kröner-Lee, é possível propor outros tipos de decomposição da deformação em grandes deformações. Um exemplo disso é o estudo de Miehe, Göktepe e Diez (2009), no qual é descrita uma decomposição aditiva no espaço logarítmico de deformação que, segundo os autores, é razoavelmente próxima da decomposição de Kröner-Lee.

Outros conceitos da teoria clássica da plasticidade podem ser usados para analisar materiais elastoplásticos sob regime de grandes deformações como, por exemplo (LUBLINER, 1990; MAUGIN, 1992; KHAN; HUANG, 1995): condições de carregamento elástico, plástico e neutro, e condição de descarregamento; critério e superfície de plastificação; condição de consistência; encruamentos cinemático e isotrópico; leis de evolução da deformação plástica, também chamadas de leis de fluxo plástico; potencial e trabalho plástico; associatividade; e regra da normalidade. Assim sendo, tais conceitos são utilizados na formulação elastoplástica adotada na presente tese.

De acordo com Naghdi e Trapp (1975), baseado na hipótese de trabalho mecânico não negativo em ciclos fechados de deformação, é possível concluir a existência da regra da normalidade, em que é afirmado que a direção do fluxo plástico, no espaço das deformações ou das tensões, é normal à superfície de plastificação. Essa regra da normalidade, empregada no presente estudo, permite escrever a lei de fluxo plástico como sendo a derivada, em relação ao tensor das tensões, da função escalar que descreve a superfície de plastificação. Contudo, Houlsby e Puzrin (2000) afirmaram que não é possível provar teoricamente a regra da normalidade, embora seja uma aproximação razoável.

Em relação aos modelos constitutivos elastoplásticos, existem diversos trabalhos em que é utilizada a segunda lei da termodinâmica. Uma teoria bastante aceita e usada para análise de materiais elastoplásticos sob grandes deformações, na qual é adotada a segunda lei



da termodinâmica, é a descrita em Green e Naghdi (1965), na qual são considerados os efeitos térmicos. É possível, com essa teoria, expressar tensão como sendo a derivada do potencial de energia em relação à deformação, entropia como a derivada do potencial em relação à temperatura, e dissipação como a derivada do potencial em relação às variáveis plásticas. Outros trabalhos, nos quais a segunda lei da termodinâmica é fundamental para o desenvolvimento da formulação elastoplástica, podem ser destacados: Houlsby e Puzrin (2000), em que se afirma que o comportamento elastoplástico é descrito por dois potenciais, um referente à energia específica e outro à dissipação ou à superfície de plastificação; Diagele, Hartmann e Tsakmakis (2000), em que são apresentados modelos plásticos e viscoplásticos com encruamento cinemático não linear; Hartmann (2002), no qual se estuda a viscoelasticidade para grandes deformações; Peric e Dettmer (2003), no qual é realizada a combinação entre elasticidade, plasticidade e viscoelasticidade para grandes deformações; Menzel et al. (2005), em que é descrita uma metodologia para elastoplasticidade com dano anisotrópico; Hallberg, Hakansson e Ristinmaa (2007), em que se sugere um modelo hiperplástico para a fase de transição entre aços martensíticos e austeníticos; e Näser, Kaliske e Müller (2007), em que é aplicado um modelo de fratura para materiais inelásticos em grandes deformações. Assim sendo, a segunda lei da termodinâmica é usada neste estudo, já que, de acordo com Houlsby e Puzrin (2000), ela é bastante aceita na comunidade científica, possui fortes bases conceituais e não possui contraexemplos experimentais.

Com relação à análise de materiais elastoplásticos sob grandes deformações, aparecem os seguintes nomes na literatura científica: meio contínuo elastoplástico (GREEN; NAGHDI, 1965); elastoplasticidade finita (PAPADOPOULOS; LU, 1998; SVENDSEN, 1998; PAPADOPOULOS; LU, 2001); elastoplasticidade com grandes deformações (GREEN; NAGHDI, 1971; DOGUI; SIDOROFF, 1985; SVENDSEN; ARNDT; KLINGBEIL; SIEVERT, 1998); e hiperelastoplasticidade (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000; EKH; RUNESSON, 2001; FERRAN; FOGUET; HUERTA, 2002; JEREMIC; CHENG, 2009). O nome hiperplasticidade aparece, por exemplo, em Puzrin e Houlsby (2001). Segundo esse estudo, um material é considerado hiperplástico quando seu comportamento mecânico pode ser definido via dois potenciais: a energia livre de Helmholtz (HOLZAPFEL, 2004) e um potencial relacionado com a dissipação. Porém, o referido artigo é restrito à análise de materiais elastoplásticos em pequenas deformações. A extensão da formulação hiperplástica para grandes deformações pode ser tema para algum estudo no futuro.

Além dos modelos elastoplásticos nos quais a deformação é decomposta de forma aditiva, existe na literatura científica o chamado modelo hipoelastoplástico (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000), no qual o tensor taxa de deformação (HOLZAPFEL, 2004) é decomposto aditivamente nas parcelas elástica e plástica. Essa decomposição aditiva é abordada em vários estudos como, por exemplo, Simo e Ortiz (1985) e Nicholson e Lin (1999). Segundo Belytschko, Liu e Moran (2000), modelos hipoelastoplásticos só podem ser usados quando as deformações elásticas são pequenas em relação às plásticas. Isso porque, para tais modelos, o trabalho realizado em um ciclo fechado de deformação (KHAN; HUANG, 1995), que deveria ser nulo, é diferente de zero. Ademais, em regime de grandes deformações elastoplásticas, não se pode decompor aditivamente a deformação (GREEN; NAGHDI, 1965; ETEROVIC; BATHE, 1991). Para contornar esses problemas em tal regime, leis hiperelastoplásticas têm sido propostas (SIMO; ORTIZ, 1985; MORAN; ORTIZ; SHIH, 1990). Essas leis são abordadas na presente tese, já que um dos objetivos aqui é estudar materiais elastoplásticos que podem apresentar grandes deformações. Usualmente, na formulação hiperelastoplástica são utilizadas, entre outras coisas, a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee (KRÖNER, 1960; LEE, 1969) e a segunda lei da termodinâmica (MARSDEN; HUGHES, 1983).

No estudo de Botta et al. (2008), embora restrito à análise geometricamente linear, discorre-se sobre a variação volumétrica na fase plástica. É demonstrado que, no modelo clássico elastoplástico de Drucker-Prager com lei de fluxo não associativa (KHAN; HUANG, 1995), é possível ocorrer aumento do volume do material mesmo em casos de compressão simples. Para evitar tal problema, os autores sugerem a adoção de um potencial plástico, não conhecido explicitamente, cuja direção ortogonal é escolhida de forma que seja coerente a variação volumétrica do material. Essa sugestão pode ser usada na lei de fluxo plástico, caso seja identificada incoerência entre o carregamento e a variação volumétrica do material ao longo das simulações numéricas.

Segundo Khan e Huang (1995), no regime elastoplástico, devido ao caráter dissipativo da deformação plástica, a relação tensão-deformação passa a depender não apenas do estado atual mas da trajetória de deformação ocorrida - ou do histórico de deformação - no material, isto é, não existe uma correspondência única entre tensão e deformação durante a fase plástica. Por essa razão, as teorias elastoplásticas são incrementais, ou seja, relacionam alterações - infinitesimais ou no tempo - entre as medidas de deformação elástica e plástica, a medida de tensão e os parâmetros de encruamento. Assim sendo, neste estudo foram

empregadas relações elastoplásticas na forma incremental, ou seja, na forma de taxas de variação.

#### 2.4. MGFs

A GF é definida, na engenharia de materiais, como a variação gradual (contínua e suave) da composição do material ao longo de seu volume. O resultado desse tipo de variação é a contínua alteração das propriedades mecânicas do material ao longo do corpo. Dessa forma, as funções que descrevem tais propriedades são contínuas e suaves ao longo do volume, ou seja, essas funções não apresentam variações abruptas nem descontinuidades.

Entre os materiais compósitos - ou heterogêneos - podem ser destacados os laminados e os com GF. De acordo com Arciniega e Reddy (2007), materiais compósitos laminados são aqueles formados por camadas de diferentes materiais, unidas entre si. O projetista de um componente estrutural laminado pode escolher o tipo de material, e a orientação e espessura das camadas para adequar esse componente a uma determinada aplicação. Apesar dessa vantagem, a possível concentração de tensões entre diferentes camadas pode prejudicar o desempenho do componente estrutural (ARCINIEGA; REDDY, 2007). Já no material heterogêneo com GF, os campos de tensão (HOLZAPFEL, 2004) variam de forma contínua ao longo do volume, ou seja, não ocorrem alterações abruptas nem descontinuidades em tais campos, as quais são comuns nos laminados. É afirmado em Chi e Chung (2006) que, em ambientes com altas temperaturas, as referidas descontinuidades podem causar problemas, como fratura ou descolamento, devido à abrupta variação do coeficiente de dilatação térmica, o que induz altas tensões residuais. Podem ser citados os seguintes exemplos dos referidos ambientes, nos quais são usados materiais com GF: câmara de combustão de aeronaves, e reator de fusão nuclear. Ademais, comenta-se em Ghannadpour e Alinia (2006) que nos MGFs, além de se eliminar os problemas de descontinuidade na interface, aproveitam-se as propriedades de diferentes materiais no mesmo componente. Assim, essa continuidade da

tensão pode ser considerada como uma das vantagens dos materiais com GF em relação aos compósitos laminados.

Segundo Woo e Meguid (2001), GhannadPour e Alinia (2006) e Oyekoya, Mba e El-Zafrany (2009), o conceito de MGF surgiu em 1984 como proposta, durante o projeto espacial japonês, para um material de barreira térmica capaz de suportar temperaturas de 2000 K em uma das faces e um gradiente de 1000 K ao longo da seção transversal (menor que 10mm). A placa deveria ter alta resistência térmica (propriedade das cerâmicas) na face externa, para suportar o calor, e alta resistência mecânica (propriedade dos metais) na face interna, para suportar os esforços mecânicos. A solução foi adotar uma placa com GF cuja face externa fosse cerâmica e a interna fosse metálica. Tais estudos, porém, não fornecem o nome nem o autor do artigo original em que foi introduzido o conceito de GF. Já o nome “functionally graded material” (FGM) foi sugerido, segundo Arciniega e Reddy (2007), por Yamanouchi et al. (1990) e Koizumi (1997).

Com relação às aplicações de materiais com GF, as mais usuais são aquelas em ambientes com altas temperaturas como, por exemplo, reatores de fusão nuclear, usinas químicas e aeronaves a grandes velocidades (ARCINIEGA; REDDY, 2007). Apenas para exemplificar, é afirmado em Chen (2005) que, na combinação de metal e cerâmica em componentes com GF, são aproveitadas a boa tenacidade à fratura do metal e as boas resistências mecânica e térmica da cerâmica, o que aumenta a vida útil do material. De acordo com Ben-Oumrane et al. (2009), materiais com GF também são usados nas indústrias aeronáutica, automobilística, bélica e, mais recentemente, nas áreas eletrônica e biomédica. Apesar de as principais aplicações de materiais com GF estarem em ambientes com altas variações térmicas, um dos objetivos do presente estudo é realizar simulações numéricas de materiais com GF das propriedades constitutivas elastoplásticas, já que a análise aqui é isotérmica.

Com relação à expressão matemática usada para descrever a GF de determinada propriedade mecânica de um material, são descritas três funções em Chi e Chung (2006): lei de potência (P-FGM), lei sigmoideal (S-FGM) e lei exponencial (E-FGM). Essas são as leis de GF mais comuns na literatura científica e, por isso, estão implementadas nos códigos computacionais desenvolvidos neste estudo.

Detalhes relativos à caracterização do comportamento mecânico de MGFs podem ser encontrados, por exemplo, na tese de Chapman (2006). Nesse trabalho, comenta-se

brevemente sobre os inúmeros processos de manufatura desse tipo de compósito, os quais ainda estão em fase experimental.

## *2.5. Análise não linear numérica via MEF*

Para se resolver determinado problema estrutural, devem ser conhecidas a geometria dos componentes, as propriedades mecânicas dos materiais constituintes, e as condições de contorno. A geometria compreende as dimensões (iniciais) de todos os componentes estruturais. As propriedades mecânicas podem ser descritas pelas leis constitutivas. Já as condições de contorno (CIARLET, 1988) se referem aos deslocamentos prescritos e às forças prescritas no contorno (externo) da estrutura. A solução do problema estrutural consiste em obter - analiticamente ou numericamente - a relação entre a geometria, a lei constitutiva e as condições de contorno da estrutura. Basicamente, existem dois tipos de solução de um problema estrutural: a analítica, na qual a referida relação é obtida explicitamente e descrita por meio de expressões matemáticas exatas; e a numérica, em que determinada variável mecânica é aproximada.

De modo geral, para se encontrar analiticamente a solução de um problema estrutural, é necessário resolver as equações de equilíbrio, as quais são equações diferenciais parciais. Tal resolução se torna mais complicada quando a análise estrutural passa a ser não linear. Sabe-se que quando o material pode apresentar grandes deslocamentos ou grandes mudanças de forma, a não linearidade geométrica (CRISFIELD, 2000) torna-se imperativa. Já quando o material apresenta efeitos inelásticos consideráveis, como plásticos ou viscoelásticos, a não linearidade física (PACCOLA, 2004) ou material (CRISFIELD, 2000) deve ser utilizada. Independentemente da magnitude dos deslocamentos e das deformações, as soluções analíticas encontradas na literatura científica são restritas a casos com simplificações da geometria do componente, da lei constitutiva e das condições de contorno. Com relação aos materiais altamente deformáveis, existem inúmeras teorias e soluções analíticas para problemas estruturais específicos. Podem ser citadas, por exemplo, as teorias não lineares

geométricas para materiais elásticos presentes nos seguintes estudos: Pai e Nayfeh (1994), em que é apresentada uma teoria tridimensional para vigas; Li (1997), em que é descrita uma teoria bidimensional para vigas; e Li e Zhan (2000), que descreveram uma teoria para placas e cascas. Exemplos de soluções analíticas para materiais altamente deformáveis são dados a seguir: Rivlin e Saunders (1951), que descreveram a solução para barras incompressíveis (com variações volumétricas desprezíveis) sob tração uniaxial; Rivlin (1956), em que é apresentada uma solução para cisalhamento simples e tração biaxial de materiais incompressíveis; Sinclair (1979), que obteve soluções para vigas sob carregamentos cisalhante e longitudinal; Mattiasson (1981), em que são descritas soluções para problemas planos de pórticos e vigas; Libai e Simmonds (1983), que obtiveram soluções para problemas com cascas e vigas curvas; Taber (1986), em que são descritas soluções para placas sob carregamento transversal uniforme; e Pai e Palazotto (1996), em que são fornecidas as soluções analíticas para problemas planos e tridimensionais de vigas. As teorias e soluções analíticas da elasticidade não linear são específicas para cada problema estrutural. Em outras palavras, as equações de equilíbrio obtidas para determinado tipo de estrutura podem não ser válidas para outros tipos. Ademais, não existem soluções analíticas generalizadas para problemas estruturais, isto é, soluções analíticas que possam ser aplicadas a qualquer estrutura.

Para resolver problemas mais complexos e gerais, pesquisadores e projetistas estruturais têm recorrido aos métodos numéricos ou aproximados. Entre eles, destaca-se o MEF, que é empregado neste estudo. No MEF, de acordo com ASSAN (2003), o corpo - ou o componente estrutural - é dividido ou discretizado em uma quantidade finita de partes, chamadas de elementos finitos. Além disso, variáveis mecânicas (deslocamentos, deformações ou tensões) são descritas pelas chamadas funções aproximadoras no domínio de cada elemento. Em geral, tais funções são compostas pela combinação linear entre os valores nodais e as funções de forma (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Os desconhecidos valores nodais, que recebem o nome de graus de liberdade, são os respectivos valores da variável mecânica aproximada em pontos conhecidos, chamados de nós. Funções de forma - ou interpoladoras - são funções conhecidas, usualmente polinomiais, definidas no domínio de cada elemento finito. A ordem do elemento finito é definida pelo grau das funções de forma. O equilíbrio de forças interdependente entre os elementos finitos implica no equilíbrio global da estrutura, o qual pode ser expresso por um sistema de equações (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). A solução de tal sistema é um vetor que contém os graus de liberdade de

toda a estrutura. De posse de tais valores, é possível determinar os campos de deslocamento e de deformação por meio das funções de forma. Com a lei constitutiva, pode ser obtido o campo de tensões. Assim sendo, o MEF é um método que pode ser facilmente implementado em códigos computacionais, devido à sua generalidade, e que pode ser empregado para análises dos mais variados tipos de estrutura.

O MEF pode ser aplicado tanto para problemas estruturais lineares como não lineares. Conforme afirmado em Crisfield (2000), o artigo mais antigo sobre elementos finitos para análise estrutural não linear geométrica é o de Turner et al. (1960), em que são analisadas estruturas da indústria aeronáutica com grandes deslocamentos. É afirmado em Belytschko, Liu e Moran (2000) que simulações numéricas, via elementos finitos, para análise não linear vêm substituindo testes experimentais com protótipos nas indústrias automotiva, de manufatura e eletrônica, por exemplo. Isso porque, segundo tal livro, a simulação numérica é mais rápida e menos dispendiosa do que os testes com protótipos, com relação ao dimensionamento e ao projeto. O problema da análise não linear geométrica via MEF é que o sistema global de equações que descreve o equilíbrio da estrutura possui caráter não linear. Uma das maneiras de resolver tal inconveniente, usada nesta pesquisa, é empregar o método de Newton (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000), também chamado de método de Newton-Raphson (CRISFIELD, 2000).

É descrita, nos estudos de Coda e Greco (2004), Greco e Coda (2006), Coda e Paccola (2007) e Coda (2009), a versão posicional do MEF para análise não linear geométrica. Em tal formulação, os graus de liberdade são as posições finais dos nós, e não os deslocamentos dos mesmos, como é feito usualmente (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Apesar dessa diferença, a análise via MEF posicional deve, teoricamente, fornecer os mesmos resultados da respectiva análise via MEF tradicional. O MEF posicional é utilizado em vários outros estudos como, por exemplo: Minski (2008), que analisou impacto bidimensional entre estruturas aneladas e anteparo rígido; Maciel (2008), que realizou análise não linear geométrica de pórticos planos e sólidos tridimensionais; e Carrazedo (2009), que estudou impacto entre estruturas constituídas de material elastoplástico com consideração de efeitos térmicos. Além da formulação posicional do MEF, é descrito nos estudos supramencionados o princípio da mínima energia potencial total, que é empregado nesta pesquisa para descrição do equilíbrio estrutural (estático).

Vários tipos de elementos finitos são encontrados na literatura científica (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000; CRISFIELD, 2000). No presente estudo, são utilizados elementos finitos sólidos (tridimensionais). Algumas vantagens e desvantagens de elementos finitos sólidos, em relação aos demais elementos, são comentadas nos seguintes artigos, por exemplo: Düster, Bröker e Rank (2001), Wang e Wagoner (2005), Petchsathon e Gosling (2005) e Shepherd e Johnson (2008). Contudo, não se pretende comparar - nesta pesquisa - vários tipos de elementos finitos entre si, já que um dos objetivos iniciais é, apenas, a implementação computacional de elementos tridimensionais para simulações numéricas de estruturas altamente deformáveis. Uma das justificativas do presente estudo é a de que, de acordo com a pesquisa bibliográfica realizada, não existem estudos sobre simulação numérica de estruturas altamente deformáveis constituídas de material elástico e elastoplástico com GF via elementos finitos sólidos. Na maior parte dos estudos sobre tais estruturas, são usados elementos finitos de casca (GHANNADPOUR; ALINIA, 2006; ARCINIEGA; REDDY, 2007; ZHAO; LIEW, 2009; HUANG; HAN, 2010). Além disso, com relação à análise via MEF de materiais com GF sob regime de grandes deformações, existem pouquíssimos estudos como, por exemplo, o de Bilgili (2002) e o de Batra e Bahrami (2009).

No MEF, de modo geral, a determinação do sistema de equações tem de ser realizada por meio do cálculo de integrais. Devido à dificuldade de se calcular exatamente as integrais envolvidas, pode ser usada a chamada integração numérica (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Uma forma de se obter numericamente determinada integral é o uso das quadraturas Gaussianas (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000), compostas de um determinado número de pontos e pesos de integração. A maioria dos livros e artigos fornece quadraturas para elementos unidimensionais de várias ordens de aproximação polinomial, e para elementos planos e sólidos de baixa ordem de aproximação. Com relação a elementos sólidos de alta ordem, as quadraturas Gaussianas podem ser encontradas em Jinyun (1984) e em Keast (1986). Tais quadraturas são usadas nos códigos computacionais desenvolvidos neste estudo. Se a integração numérica fornece erros desprezíveis, quando comparada à integração exata, ela pode ser classificada como integração completa. Além disso, espera-se que, quanto maior o número de pontos de integração numérica utilizado, menor deverá ser o erro. Todavia, como não se conhece o valor exato das integrais, pode-se adotar o número de pontos a partir do qual o valor numérico não se altera de forma significativa. Isso para economizar tempo, já que



quanto maior o número de pontos, maior é o tempo necessário para cálculo numérico das integrais.

Dois problemas numéricos com relação ao MEF têm sido observados na literatura científica. O primeiro deles é que elementos finitos com baixa ordem de aproximação polinomial são mais suscetíveis a um fenômeno conhecido como travamento (FLANAGAN; BELYTSCHKO, 1981; BACHRACH; BELYTSCHKO, 1986; SURI, 1996). Embora seja um conceito confuso em boa parte dos artigos, o travamento pode ser entendido como sendo a incapacidade de um elemento finito de reproduzir determinado modo de deformação. Três tipos de travamento são abordados em Belytschko, Liu e Moran (2000): travamento volumétrico, relacionado à incapacidade do elemento de reproduzir deformação isocórica, ou seja, deformação sem alteração de volume; travamento por cortante, quando o elemento não é capaz de apresentar deformações cisalhantes nulas; e travamento de membrana, quando o elemento não consegue reproduzir flexão sem apresentar estiramento (ou encurtamento) das fibras inicialmente paralelas entre si. De acordo com Suri (1996), Düster, Hartmann e Rank (2003), Reddy (2004) e Arciniega e Reddy (2007), o emprego de elevadas ordens de aproximação polinomial elimina o travamento, o que aumenta a confiabilidade dos resultados fornecidos pela análise. Contudo, isso leva ao segundo problema numérico do MEF: o elevado tempo de processamento exigido para análise com elementos de alta ordem, bem como a grande capacidade de memória necessária. Para contornar os referidos problemas numéricos do MEF, alguns pesquisadores têm proposto técnicas alternativas para elementos de baixa ordem como, por exemplo: integração seletiva e reduzida (MALKUS; HUGHES, 1978a; MALKUS; HUGHES, 1978b); método do enriquecimento em deformação, o EAS (SIMO; RIFAI, 1990; SIMO; ARMERO, 1992); método da deformação natural assumida, a ANS (BATHE; DVORKIN, 1985; HUANG; HINTON, 1986); e métodos de estabilização dos modos espúrios de energia, chamados de “hourglass modes” (KOSLOFF; FRAZIER, 1978; BELYTSCHKO et al., 1984; REESE, 2007). Todavia, para o autor da presente tese, a precisão obtida com essas técnicas alternativas, com relação aos campos de tensão, não é garantida. Neste estudo, defende-se a ideia de que elevadas ordens de aproximação, juntamente com integração completa das equações envolvidas e com malhas de elementos suficientemente refinadas (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), tendem a eliminar, por completo, o travamento sem prejudicar a precisão dos resultados fornecidos. Ademais, para reduzir o elevado tempo de processamento necessário, pode ser empregado o processamento paralelo (ver item 2.6).

Sabe-se que na análise via MEF, é possível discretizar a mesma estrutura com malhas de elementos finitos diferentes. O que diferencia tais malhas são a quantidade, a posição e a ordem dos elementos finitos. Quanto maior a quantidade e a ordem dos elementos, maior é o refinamento da malha, e maior é a ordem do sistema de equações a ser resolvido, isto é, maior é o número de equações ou de incógnitas. Assim, para malhas de elementos muito refinadas, o tempo de processamento necessário para solução do sistema se torna muito elevado. Para tornar mais rápida a referida solução, vários métodos da literatura científica podem ser usados. Um deles é o método direto multifrontal baseado na eliminação de Gauss, descrito por Duff e Reid (1983). Tal procedimento é base para as sub-rotinas MA27 (DUFF; REID, 1982) e MA57 (DUFF, 2004), as quais são usadas para resolução de sistemas lineares simétricos. Na metodologia empregada no presente estudo para análise via MEF, tais características estão presentes no sistema de equações resultante. Embora existam outras estratégias para solução de sistemas lineares simétricos (TURNER, 1991; SCOTT; HU, 2007; POPA, 2008; RAO; SARITA, 2008), a sub-rotina usada nos códigos computacionais desenvolvidos nesta pesquisa é a MA57. Segundo Duff (2004), essa sub-rotina é mais eficiente, com relação ao tempo de processamento, do que a MA27, a qual foi bastante utilizada pelo grupo de pesquisa do aluno.

A solução numérica de um problema estrutural com materiais elastoplásticos pode ser realizada por meio das estratégias de previsão elástica e de correção plástica (SIMO; HUGHES, 1998; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Na etapa de previsão, a resposta do material é assumida como sendo puramente elástica, isto é, sem evolução dos parâmetros plásticos. Se o critério de plastificação (KHAN; HUANG, 1995) for satisfeito, então a consideração de deformação puramente elástica é verdadeira. Caso contrário, para satisfazer o referido critério devem ser atualizados os valores da tensão, da deformação plástica e dos parâmetros de encruamento. Essas atualizações consistem na integração das equações diferenciais que envolvem, de maneira geral, as leis de fluxo plástico e de evolução do encruamento (LUBLINER, 1990). Existem vários métodos de integração dessas equações nos estudos numéricos sobre elastoplasticidade em pequenas ou em grandes deformações. Um deles é o método do retorno de Euler (LUBLINER, 1990), proposto inicialmente por Wilkins (1964) e Maenchen e Sack (1964). Nesse método são relacionados os seguintes valores: intervalo de tempo, variação dos parâmetros plásticos nesse intervalo, e valores dos referidos parâmetros no início e no final do intervalo. Entre os algoritmos de retorno, existem os explícitos, os semi-implícitos e os implícitos (SIMO; HUGHES, 1998; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Para plasticidade associativa (KHAN; HUANG, 1995), o retorno de Euler

passa a ser chamado de esquema de projeção ao ponto mais próximo da superfície de plastificação (SIMO; HUGHUES; 1998). Nesse método, quando o critério de plastificação não é satisfeito pela previsão elástica, os valores da deformação plástica e dos parâmetros de encruamento são atualizados de forma que o ponto que caracteriza o estado atual de deformação no corpo, no espaço das deformações ou das tensões, retorna à superfície de plastificação pela direção normal a esta superfície. Segundo Simo e Taylor (1985), quando o critério de plastificação é o de von-Mises (KHAN; HUANG, 1995), o algoritmo de retorno é chamado de algoritmo de retorno radial. Além desse tipo de estratégia, existem ainda o algoritmo de retorno exponencial, proposto inicialmente por Weber *et al.* (1990), o algoritmo da tensão inicial, sugerido por Zienkiewicz, Valliappan e King (1969), e o retorno implícito de segunda ordem, descrito em Papadopoulos e Lu (1998). Neste estudo foram adotados o critério de plastificação de von-Mises e o retorno radial.

No contexto da análise de materiais elastoplásticos em regime de grandes deformações via MEF, podem ser citados os estudos a seguir: Papadopoulos e Lu (1998), Papadopoulos e Lu (2001), Hartmann (2002), Peric e Dettmer (2003), Dettmer e Reese (2004), Menzel *et al.* (2005), Golovanov e Sultanov (2005), Vladimirov, Pietryga e Reese (2008), Miehe, Göktepe e Diez (2009), Areias e Rabczuk (2010), e Mosler (2010). Em todos esses trabalhos, são usados a decomposição da deformação, ou a de Green-Naghdi ou a de Kröner-Lee, a teoria termodinâmica de Green e Naghdi (1965), algoritmos de retorno e leis de encruamento.

É descrito, em Simo e Taylor (1985), o conceito do operador tangente consistente elastoplástico, também chamado de módulo tangente elastoplástico. O operador tangente consistente (DÜSTER; HARTMANN; RANK, 2003) é um tensor de quarta ordem que representa a derivada do tensor tensão em relação ao tensor deformação. Quando é incluída, no cálculo dessa derivada, a variação da deformação plástica, o operador tangente consistente passa a ser chamado de módulo tangente elastoplástico (ou operador tangente consistente elastoplástico). O uso desse módulo pode, segundo Crisfield (2000), melhorar a convergência das iterações via método de Newton-Raphson, já que, ao longo das tentativas, a variação dos parâmetros plásticos é considerada. Por isso, a determinação do operador tangente consistente elastoplástico foi realizada neste estudo.

Para análise de materiais elastoplásticos, podem ser citadas as seguintes formulações alternativas, que não são usadas neste estudo: formulação corrotacional (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000; NAGHDABADI; YEGANEH; SAIDI, 2005); taxas de tensão de

Jaumann e de Truesdell (OGDEN, 1984; HOLZAPFEL, 2004); derivada de Lie (SIMO; HUGHES, 1998; PERIC; DETTMER, 2003); e teoria de Bell (BELL, 1973; BELL, 1975), que é baseada em observações experimentais.

## *2.6. Processamento paralelo*

Quando processadores executam os mesmos cálculos simultaneamente, o processamento é classificado como sequencial. Conforme Uktu et al. (1982), processadores atuam em paralelo quando processam de forma independente, ou seja, quando cada processador realiza sozinho as suas respectivas tarefas. Nesse estudo, é afirmado também que  $n$  processadores podem realizar, em um segundo, o mesmo que um processador sozinho poderia realizar em  $n$  segundos, como era de se esperar. Assim, para reduzir o tempo de processamento das análises numéricas, o processamento paralelo é empregado no presente estudo. É preciso lembrar, contudo, que embora esse tipo de processamento reduza o tempo, ele pode não reduzir o custo computacional em termos de memória (UKTU et al., 1982). Ademais, para garantir que nenhum processador fique parado por muito tempo, é necessário distribuir adequadamente as tarefas - ou os cálculos - entre os processadores. Isso porque se o tempo ocioso de um ou mais processadores for muito grande, a eficiência da análise, em termos de tempo de processamento, pode ser comprometida. Por fim, Rao, Rao e Dattaguru (2003) descreveram o chamado “speed-up”, que é a razão entre os tempos de processamento dos códigos computacionais sequencial e paralelo, para realização das mesmas tarefas. Tal valor é usado neste estudo para se determinar o ganho, em termos de velocidade de execução, do processamento paralelo em relação ao sequencial.

No contexto do processamento paralelo para análises estruturais via MEF, os primeiros estudos surgiram na década de 80. Podem ser citados os seguintes exemplos: Uktu et al. (1982); Hughes, Levit e Winget (1983); e Fulton (1986). Além disso, um conceito comum na literatura científica relacionado a processamento paralelo via MEF é a chamada decomposição de domínio (YAGAWA; SONEDA; YOSHIMURA, 1991; RAO; RAO;

DATTAGURU, 2003; KLAWONN; RHEINBACH, 2010; RIVERA et al., 2010). Esse conceito consiste na separação do domínio - ou da estrutura - e na solução independente de cada subdomínio resultante. Embora a decomposição de domínio seja bastante usada, ela não é empregada nesta pesquisa, já que esse conceito envolve o estudo de técnicas iterativas para solução de problemas independentes, o qual não é objetivo desta tese. Apenas a montagem do sistema de equações é paralelizada, isto é, o sistema é montado por partes. Em tal procedimento, cada processador determina os sistemas locais (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005) de seus respectivos elementos finitos. Assim, espera-se que a montagem do sistema de equações a ser resolvido no código paralelo seja realizada de forma mais rápida do que no código sequencial.

### 3. CINEMÁTICA

Neste capítulo, são descritas as grandezas cinemáticas utilizadas e as aproximações dos elementos finitos sólidos empregados neste estudo. Detalhes teóricos relativos à cinemática, no âmbito da Mecânica Não Linear do Contínuo, podem ser encontrados, por exemplo, em Coimbra (1981), Ogden (1984), Ciarlet (1988), Khan e Huang (1995), Belytschko, Liu e Moran (2000), Crisfield (2000), Holzapfel (2004) e Pascon (2008). São usadas, no desenvolvimento da presente metodologia numérica, a notação indicial de Einstein, a convenção de soma de índices repetidos e a base ortonormal (HOLZAPFEL, 2004). Neste e nos próximos capítulos, os escalares são representados por letras minúsculas ou maiúsculas (sem negrito), os vetores por matrizes coluna ou por letras Latinas minúsculas em negrito, os tensores de segunda ordem são descritos por matrizes quadradas, por letras maiúsculas em negrito ou por letras gregas em negrito, e os tensores de ordem superior a dois por letras gregas em itálico.

#### 3.1. Posição ou configuração

Segundo Holzapfel (2004), a grandeza posição - ou configuração - é um campo vetorial que associa pontos materiais às suas respectivas posições - ou coordenadas - no espaço. Tal associação deve ser feita em relação a um referencial, que é um conjunto de eixos cartesianos com origem fixa (HOLZAPFEL, 2004). Neste estudo, as posições inicial (no instante  $t = 0$ ) e atual (no instante  $t > 0$ ) são representadas, respectivamente, pelos campos vetoriais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , também chamados aqui de vetores posição inicial e final. Além disso, a descrição adotada aqui é a Lagrangiana, isto é, a posição de referência é a inicial ( $\mathbf{x}$ ). Por fim, com a consideração de meio contínuo, as funções que descrevem as posições inicial e atual devem ser funções contínuas.

Com relação à aproximação empregada para as configurações inicial e atual, é utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF). Assim, a estrutura analisada é discretizada - ou separada - em uma quantidade finita de partes, chamadas de elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Os elementos usados aqui são os sólidos (tridimensionais) tetraédricos e hexaédricos isoparamétricos (CHEN, 2005). Para mapear as configurações inicial e final de cada elemento finito, é empregado o mapeamento posicional duplo, similar ao usado em Coda e Paccola (2007), Pascon (2008), Coda e Paccola (2009) e Coda (2009). Nessa estratégia, as configurações inicial e final, tanto para o elemento tetraédrico como para o hexaédrico, são parametrizadas por meio dos valores nodais e de um espaço auxiliar adimensional, representado por  $\xi$  (ver figura 3.1). Neste estudo, os valores nodais são as três coordenadas em determinados pontos, chamados de nós (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Matematicamente, as posições são expressas da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x})^k \phi_k(\xi) \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y})^k \phi_k(\xi) \quad (3.1.2)$$

$$\xi = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.1.3)$$

onde  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são, respectivamente, os vetores posição inicial e atual;  $(\mathbf{x})^k$  e  $(\mathbf{y})^k$  representam, respectivamente, as três coordenadas iniciais e atuais do nó  $k$ ;  $\xi$  representa as três coordenadas adimensionais dos pontos pertencentes ao espaço auxiliar; e  $\phi_k(\xi)$  é a função de forma (ASSAN, 2003) relativa ao nó  $k$ . Neste caso, as funções  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\phi_k(\xi)$  são definidas no domínio do respectivo elemento finito. Ademais, as funções de forma adotadas no presente estudo são os usuais polinômios de Lagrange (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), isto é:

$$\phi_k(\xi_m) = \delta_{km} \quad (3.2)$$

onde  $\xi_m$  representa as três coordenadas adimensionais do nó  $m$ ; e  $\delta_{km}$  é o delta de Kronecker (HOLZAPFEL, 2004).

As expressões (3.1.1) e (3.1.2), que são usadas para aproximar as configurações inicial e final de cada elemento finito, podem ser reescritas em notação indicial (HOLZAPFEL, 2004):

$$x_i = (x_i)^k \phi_k(\xi) \quad (3.3.1)$$

$$y_i = (y_i)^k \phi_k(\xi) \quad (3.3.2)$$

onde  $a_i$  é a componente do vetor  $\mathbf{a}$  na direção  $i$ . Por exemplo, para descrever o vetor posição atual de cada elemento finito, os valores nodais empregados são as três coordenadas atuais ( $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ ) dos nós pertencentes a esse elemento. Nesta tese, tais valores são os graus de liberdade (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005) da estrutura analisada, ou seja, as três coordenadas atuais de todos os nós são os parâmetros nodais, usados para descrever a posição atual de toda a estrutura.

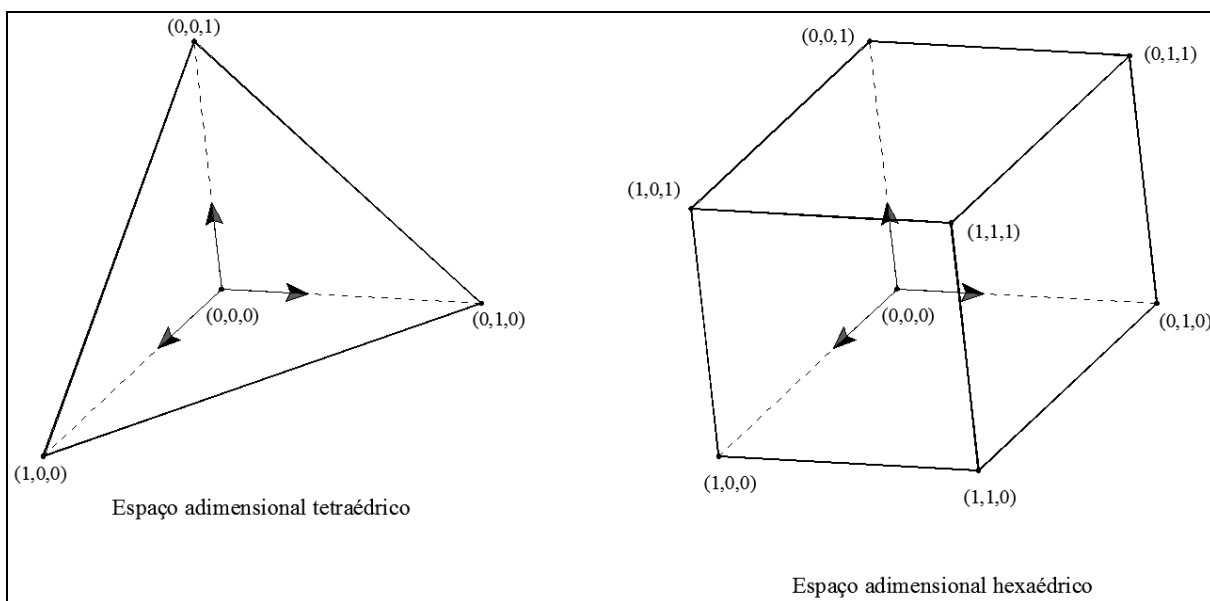


Figura 3.1. Espaços auxiliares adimensionais para os elementos sólidos tetraédrico e hexaédrico.

Uma das peculiaridades deste estudo é a adoção de uma aproximação polinomial genérica para as funções de forma (ver equações 3.1 e 3.2), isto é, o grau de aproximação



polinomial para tais funções pode ser qualquer. Assim, as funções que descrevem as posições dos elementos sólidos podem ter aproximação linear, quadrática, cúbica etc. É possível, dessa forma, realizar análise de convergência dos resultados para os problemas estruturais simulados com o mesmo número de elementos e com distintas ordens de aproximação. Para uso da aproximação polinomial genérica, as funções de forma são expressas na seguinte forma matricial genérica:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M}_{\text{coef}} \cdot \mathbf{v}_{\xi} \text{ ou } \phi_k = (\mathbf{M}_{\text{coef}})_{km} (\mathbf{v}_{\xi})_m \quad (3.4)$$

onde  $\boldsymbol{\phi}$  é o vetor que contém todas as funções de forma;  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  é a matriz (quadrada) que contém os coeficientes (constantes) das funções de forma;  $\mathbf{v}_{\xi}$  é o vetor que, no caso tridimensional, contém os produtos - na devida sequência - entre as coordenadas adimensionais  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ; e a operação  $(\ ) \cdot (\ )$  denota, neste caso, o produto entre uma matriz e um vetor. Neste caso, os índices  $k$  e  $m$  variam de um até o número de nós do elemento finito. Para os elementos tetraédrico e hexaédrico com aproximação linear, por exemplo, todas as funções de forma relativas ao nó  $k$  podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\phi_k^{\text{TET}} = c_k^1 (1) + c_k^2 \xi_1 + c_k^3 \xi_2 + c_k^4 \xi_3 \quad (3.5.1)$$

$$\phi_k^{\text{HEX}} = c_k^1 (1) + c_k^2 \xi_1 + c_k^3 \xi_2 + c_k^4 \xi_3 + c_k^5 \xi_1 \xi_2 + c_k^6 \xi_1 \xi_3 + c_k^7 \xi_2 \xi_3 + c_k^8 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (3.5.2)$$

onde  $\phi_k^{\text{TET}}$  e  $\phi_k^{\text{HEX}}$  são, respectivamente, as funções de forma para os elementos tetraédrico e hexaédrico; e  $c_k^i$  representam os coeficientes das funções de forma  $\phi_k$  (os índices  $i$  e  $k$  variam de um até o número de nós por elemento). Todas as quatro funções de forma do elemento tetraédrico linear podem ser escritas por meio da expressão (3.5.1), e todas as oito funções de forma do elemento hexaédrico linear podem ser escritas por meio da expressão (3.5.2). Para fins de esclarecimento, as referidas expressões podem ser expandidas:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}^{\text{TET}} = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 \\ c_4^1 & c_4^2 & c_4^3 & c_4^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6.1)$$

$$\left. \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{matrix} \right\}^{\text{HEX}} = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 & c_1^5 & c_1^6 & c_1^7 & c_1^8 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 & c_2^5 & c_2^6 & c_2^7 & c_2^8 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 & c_3^5 & c_3^6 & c_3^7 & c_3^8 \\ c_4^1 & c_4^2 & c_4^3 & c_4^4 & c_4^5 & c_4^6 & c_4^7 & c_4^8 \\ c_5^1 & c_5^2 & c_5^3 & c_5^4 & c_5^5 & c_5^6 & c_5^7 & c_5^8 \\ c_6^1 & c_6^2 & c_6^3 & c_6^4 & c_6^5 & c_6^6 & c_6^7 & c_6^8 \\ c_7^1 & c_7^2 & c_7^3 & c_7^4 & c_7^5 & c_7^6 & c_7^7 & c_7^8 \\ c_8^1 & c_8^2 & c_8^3 & c_8^4 & c_8^5 & c_8^6 & c_8^7 & c_8^8 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 \xi_3 \\ \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{matrix} \right\} \quad (3.6.2)$$

A primeira expressão é válida para o tetraedro linear, e a segunda para o hexaedro linear.

As fórmulas para determinação da matriz  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  e do vetor  $\mathbf{v}_\xi$  (ver equação 3.4), para uma ordem de aproximação genérica, são fornecidas no Apêndice A desta tese. De posse da matriz  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  e do vetor  $\mathbf{v}_\xi$ , é possível calcular, por meio da equação (3.4), os valores de todas as funções de forma em qualquer ponto pertencente ao elemento finito com coordenadas adimensionais ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ) conhecidas.

É importante ressaltar que, para os elementos tetraédricos e hexaédricos com ordem de aproximação polinomial superior à linear, as faces podem ser curvas. Ademais, as faces dos elementos hexaédricos com aproximação linear podem não ser perpendiculares entre si.

### 3.2. Mudança de configuração

Para relacionar as coordenadas inicial e atual dos pontos materiais de um corpo submetido a uma mudança de posição, é empregado aqui o campo vetorial mudança de configuração - ou mudança de forma - representado por  $\mathbf{f}$ . De acordo com Holzapfel (2004), esse campo vetorial faz a associação única entre as coordenada inicial e atual de um ponto material. Tal unicidade significa que dois pontos materiais distintos na configuração inicial não podem possuir as mesmas coordenadas atuais, e que dois pontos distintos na configuração atual não podem possuir as mesmas coordenadas iniciais. Assim, a mudança de forma  $\mathbf{f}$  é

empregada para mapear o vetor posição atual  $\mathbf{y}$  a partir do vetor posição inicial  $\mathbf{x}$  (PASCON, 2008):

$$\mathbf{f} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \text{ ou } f_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.7)$$

Na maior parte dos livros nos quais é abordada a cinemática do contínuo, como Coimbra (1981), Marsden e Hughes (1983), Ogden (1984), Ciarlet (1988) e Holzapfel (2004), a função mudança de configuração  $\mathbf{f}$  é chamada de movimento, é dependente do tempo e é representada pelo campo vetorial  $\boldsymbol{\chi}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t) \text{ ou } \chi_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (3.8)$$

Outra maneira de relacionar as configurações inicial e atual é por meio do campo vetorial deslocamento. Na descrição Lagrangiana, esse campo é dado por (HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} \text{ ou } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \text{ ou } u_i = y_i - x_i = f_i - x_i \quad (3.9)$$

Já que a análise do presente estudo é estática, o tempo  $t$  foi retirado dos argumentos das funções.

Com a aproximação adotada neste estudo (ver equações 3.1) e com o uso do mapeamento duplo a partir do espaço adimensional (ver figura 3.1), a função mudança de configuração pode ser calculada da seguinte forma (CODA; PACCOLA, 2007; PASCON, 2008):

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1) \circ (\mathbf{f}_0^{-1}) \quad (3.10.1)$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) \text{ ou } (f_1)_i = y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (3.10.2)$$

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \text{ ou } (f_0)_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (3.10.3)$$

onde  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_0$  são, respectivamente, os mapeamentos das posições atual e inicial a partir do espaço adimensional  $\boldsymbol{\xi}$ ; e o símbolo  $( )^{-1}$  denota, neste caso, a inversa de uma função vetorial. Pode-se notar que o vetor  $\mathbf{f}_0$  faz a associação única entre as coordenadas adimensionais  $(\xi_1, \xi_2 \text{ e } \xi_3)$  e as coordenadas iniciais  $(x_1, x_2 \text{ e } x_3)$ . De modo similar, as

coordenadas adimensionais ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ) e as atuais ( $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ ) são relacionadas, de maneira única, pelo vetor  $\mathbf{f}_1$ . A mudança de forma total (entre as posições inicial e atual), representada por  $\mathbf{f}$ , não é escrita explicitamente. Ela é obtida indiretamente com uso das expressões (3.10). Uma interpretação geral das funções  $\mathbf{f}_0$ ,  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}$ , no que diz respeito ao MEF posicional (CODA; GRECO, 2004), é dada na figura 3.2.

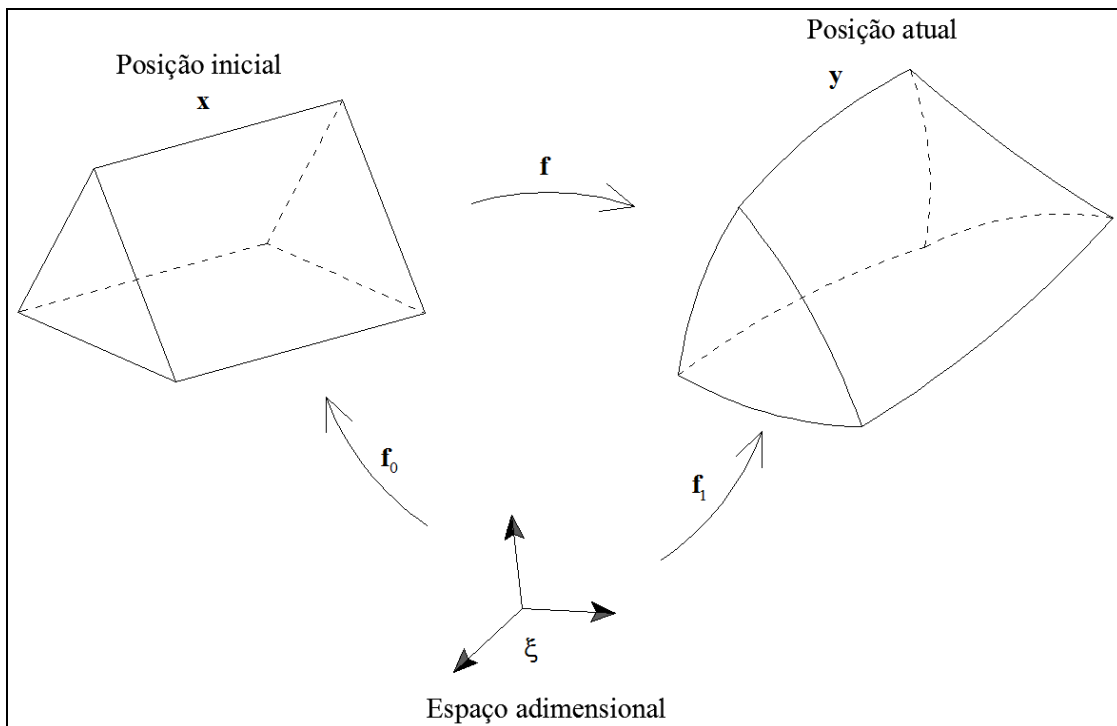


Figura 3.2. Funções mudança de forma (inicial, atual e total) no MEF posicional.

### 3.3. Gradiente

Neste estudo, para analisar a mudança de forma de um corpo, é empregado o tensor gradiente material da mudança de configuração, também chamado simplesmente de gradiente (PASCON, 2008). Essa grandeza cinemática é descrita por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{f} = \text{Grad}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \text{ ou } A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

onde  $\nabla(\bullet)$  - ou  $\text{Grad}(\bullet)$  - é o operador gradiente (HOLZAPFEL, 2004); e  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}}$  representa a derivada do vetor  $\mathbf{a}$  em relação ao vetor  $\mathbf{b}$ . No caso acima, o gradiente é classificado de material (ou Lagrangiano) já que a derivada é feita em relação à coordenada inicial. Na maior parte dos estudos sobre MNLC, o tensor gradiente é representado pela letra maiúscula  $\mathbf{F}$ . Aqui, todavia, é seguida a notação utilizada em Pascon (2008). O gradiente determina a maneira pela qual um segmento infinitesimal de linha na posição inicial se transforma no seu correspondente segmento infinitesimal na posição atual, isto é,  $\mathbf{A}$  é um operador linear entre tais segmentos (HOLZAPFEL, 2004):

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \text{ ou } dy_i = A_{ij} dx_j \quad (3.12)$$

onde  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{y}$  representam, respectivamente, os segmentos infinitesimais de linha nas configurações inicial e atual. Esses segmentos são chamados de fibras materiais.

De acordo com Coimbra (1981), o gradiente deve satisfazer a chamada condição de preservação da orientação (MARSDEN; HUGHES, 1983):

$$J = \det(\mathbf{A}) > 0 \quad (3.13)$$

onde  $J$  é o campo escalar chamado de Jacobiano; e  $\det(\bullet)$  é o operador determinante (HOLZAPFEL, 2004). O Jacobiano também representa a relação entre volumes infinitesimais (PASCON, 2008):

$$J = \frac{dv}{dV_0} \quad (3.14)$$

onde  $dV_0$  é o volume infinitesimal (na posição inicial) que se transforma, devido à mudança de configuração, no volume infinitesimal  $dv$  (na posição atual). Assim, a condição (3.13) pode ser interpretada como a impossibilidade de o material ser aniquilado ( $dv = 0$ ) ou sofrer inversão ( $dv < 0$ ).

Com uso das aproximações empregadas neste estudo para descrição das posições inicial e atual (ver equações 3.1), e com a expressão resultante dessas aproximações para a função mudança de configuração (ver equações 3.10), o gradiente pode ser obtido da seguinte forma (CODA; PACCOLA, 2007; PASCON, 2008):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0)^{-1} \text{ ou } A_{ij} = (A_1)_{ik} (A_0^{-1})_{kj} \quad (3.15.1)$$

$$(A_0)_{ij} = x_i^k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} \quad (3.15.2)$$

$$(A_1)_{ij} = y_i^k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} \quad (3.15.3)$$

onde  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_1$  são chamados, respectivamente, de gradientes inicial e final; e o símbolo  $(\square)^{-1}$  indica a inversa de uma matriz. Assim como a mudança de forma total ( $\mathbf{f}$ ), o gradiente total ( $\mathbf{A}$ ) não é expresso de forma explícita. Ele é obtido numericamente por meio do produto matricial (3.15.1).

Como a aproximação polinomial do elemento finito é genérica, foi necessário desenvolver uma estratégia numérica para determinação generalizada das derivadas das funções de forma, as quais são utilizadas para cálculo do gradiente (ver equações 3.15). Essa estratégia, que pode ser aplicada a elementos sólidos tetraédricos e hexaédricos de qualquer ordem de aproximação, também é fornecida no Apêndice A.

### 3.4. Deformação

Sabe-se que a mudança de forma ou de configuração é de corpo rígido quando o gradiente (3.11) satisfaz a seguinte relação (COIMBRA, 1981):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \text{ ou } C_{ij} = A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \quad (3.16)$$

onde o símbolo  $(\square)^T$  denota a transposta de uma matriz (HOLZAPFEL, 2004); e a medida de deformação  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , representada usualmente por  $\mathbf{C}$ , recebe os seguintes nomes na literatura científica: tensor de Cauchy-Green direito (COIMBRA, 1981; HOLZAPFEL, 2004); tensor alongamento à direita de Cauchy-Green (PASCON, 2008); e tensor de deformação de Cauchy-Green direito (MARSDEN; HUGHES, 1983). Entre os nomes citados, foi adotado nesta pesquisa o primeiro. Segundo Coda (2003), a expressão (3.16) é a condição de indeformabilidade de um ponto material, isto é, neste caso a função mudança de forma  $\mathbf{f}$ , da equação (3.7), constitui - apenas - translação e rotação de corpo rígido. Se essa condição não for satisfeita, diz-se que o ponto material se deforma. Assim, o tensor  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})$  é, de certa forma, uma medida da intensidade da mudança de configuração (CODA, 2003). Conforme afirmado em Coimbra (1981), esse tensor é uma medida de desvio entre uma determinada mudança de forma  $\mathbf{f}$  e uma mudança de forma de corpo rígido (ver equação 3.16). Uma das medidas empregadas para medir a intensidade da mudança de forma é o tensor deformação de Green-Lagrange (PASCON, 2008), também chamado de tensor deformação de Green-Saint Venant (COIMBRA, 1981):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \text{ ou } E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (3.17)$$

Pode-se notar facilmente que, quando a mudança de forma é de corpo rígido,  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  e, conseqüentemente,  $\mathbf{E} = \mathbf{O}$ , onde  $\mathbf{O}$  é o tensor nulo de segunda ordem (HOLZAPFEL, 2004). Os tensores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{E}$  são simétricos, isto é:

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C} \text{ e } \mathbf{E}^T = \mathbf{E} \text{ ou } C_{ji} = C_{ij} \text{ e } E_{ji} = E_{ij} \quad (3.18)$$

Outras grandezas que aparecem em modelos constitutivos hiperelásticos (PASCON, 2008), utilizados aqui, são os invariantes do tensor  $\mathbf{C}$  (ver equações 3.13 e 3.16):

$$i_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) = C_{ii} \quad (3.19.1)$$

$$i_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr}\mathbf{C})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = \frac{1}{2} \left[ (C_{ii})^2 + (C^2)_{ii} \right] \quad (3.19.2)$$

$$i_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = J^2 \quad (3.19.3)$$

onde  $\text{tr}(\bullet)$  indica o determinante de uma matriz (HOLZAPFEL, 2004).

### 3.5. Objetividade da medida de deformação

Sabe-se que as medidas de deformação devem ser objetivas ou referencialmente indiferentes (COIMBRA, 1981). Isso para que os valores de deformação obtidos não dependam da escolha do referencial, nem se alterem com mudanças desse referencial. É demonstrado em vários livros como, por exemplo, Coimbra (1981), Ogden (1984) e Holzapfel (2004), que as medidas  $\mathbf{C}$ ,  $i_1(\mathbf{C})$ ,  $i_2(\mathbf{C})$ ,  $i_3(\mathbf{C})$  e  $\mathbf{E}$  (ver equações 3.16, 3.17 e 3.19) são medidas objetivas, isto é, podem ser empregadas para se quantificar a mudança de configuração de forma independente do referencial adotado. Em outras palavras, mesmo que o referencial - ou o observador - seja transladado ou rotacionado, os valores das referidas medidas não são alterados. Já o gradiente (equação 3.11) não é uma medida objetiva (COIMBRA, 1981).



### 3.6. Decomposição multiplicativa do gradiente

Basicamente, existem três formas de decomposição multiplicativa do gradiente (3.11). Uma delas é a que aparece no teorema da decomposição polar (CODA, 2003; HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (3.20.1)$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (3.20.2)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \quad (3.20.3)$$

onde  $\mathbf{R}$  é um tensor relativo a movimento de corpo rígido (ver equação 3.16), também chamado de tensor de rotação (COIMBRA, 1981); e  $\mathbf{U}$  é o tensor de alongamento direito (HOLZAPFEL, 2004), também chamado de tensor alongamento direito (COIMBRA, 1981). Segundo o referido teorema, essa decomposição é única, o tensor  $\mathbf{R}$  é ortogonal, e o tensor  $\mathbf{U}$  é simétrico e positivo-definido (HOLZAPFEL, 2004).

Outra forma de decomposição multiplicativa do gradiente é a separação deste tensor nas parcelas volumétrica e isocórica (FLORY, 1961):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{vol}} \mathbf{A}_{\text{iso}} = (\mathbf{J}^{1/3} \mathbf{I})(\mathbf{J}^{-1/3} \mathbf{A}) \quad (3.21.1)$$

$$\det(\mathbf{A}_{\text{vol}}) = [\mathbf{J}^{1/3}]^3 \det(\mathbf{I}) = \mathbf{J} \quad (3.21.2)$$

$$\det(\mathbf{A}_{\text{iso}}) = [\mathbf{J}^{-1/3}]^3 \det(\mathbf{A}) = (\mathbf{J}^{-1})(\mathbf{J}) = 1 \quad (3.21.3)$$

onde  $\mathbf{A}_{\text{vol}}$  e  $\mathbf{A}_{\text{iso}}$  são, respectivamente, as parcelas volumétrica e isocórica do gradiente (3.11). Como o Jacobiano expressa a razão entre os volumes atual e inicial (ver equação 3.14), pode-se concluir, a partir das expressões (3.21), que a parcela  $\mathbf{A}_{\text{vol}}$  causa mudança de volume mas não de formato, e que a parcela  $\mathbf{A}_{\text{iso}}$  provoca mudança de formato mas não de volume. Por exemplo, um retângulo (no espaço bidimensional) submetido, apenas, à parcela volumétrica do gradiente (equação 3.21.2) terá sua área alterada, porém continuará sendo um retângulo, cujas arestas permanecerão perpendiculares entre si e com a mesma proporção de

tamanho. Caso o retângulo seja submetido, apenas, à parcela isocórica do gradiente (equação 3.21.3), ele poderá mudar de formato, porém sua área permanecerá a mesma. É possível definir, também, as parcelas volumétrica e isocórica do tensor de Cauchy-Green direito (ver equações 3.16 e 3.21):

$$\mathbf{C}_{\text{vol}} = \mathbf{A}_{\text{vol}}^T \mathbf{A}_{\text{vol}} = J^{2/3} \mathbf{I} \quad (3.22.1)$$

$$\mathbf{C}_{\text{iso}} = \mathbf{A}_{\text{iso}}^T \mathbf{A}_{\text{iso}} = J^{-2/3} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (3.22.2)$$

Por fim, uma das decomposições que aparecem nas análises estruturais de materiais elastoplásticos sob grandes deformações, abordados aqui, é a de Kröner-Lee (KRÖNER, 1960; LEE, 1969):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p \text{ ou } A_{ij} = (A_e)_{ik} (A_p)_{kj} \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{A}_e$  e  $\mathbf{A}_p$  são, nesta ordem, as parcelas elástica e plástica do gradiente (3.11). Nessa decomposição, aparece o conceito de configuração intermediária (LEE, 1969), ilustrada na figura 3.3. Com uso das equações (3.13), (3.16), (3.17) e (3.23), podem ser mostradas as seguintes expressões (LUBLINER, 1992; KHAN; HUANG, 1995):

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_e \mathbf{A}_p \quad (3.24.1)$$

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e \quad (3.24.2)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_p^T \mathbf{E}_e \mathbf{A}_p + \mathbf{E}_p \neq \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \quad (3.24.3)$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_e - \mathbf{I}) \quad (3.24.4)$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_p - \mathbf{I}) \quad (3.24.5)$$

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_p \quad (3.24.6)$$

$$J = J_e J_p \text{ ou } \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}_e) (\det \mathbf{A}_p) \quad (3.24.7)$$

onde os símbolos  $( )_e$  e  $( )_p$  denotam, nesta ordem, as parcelas elástica e plástica de alguma grandeza. Outra decomposição usada na elastoplasticidade é a aproximação de Green e

Naghdi (1965), que é dada por  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$ , e que contradiz a expressão (3.24.3) nos casos em que há deformação plástica ( $\mathbf{A}_p \neq \mathbf{I}$ ).

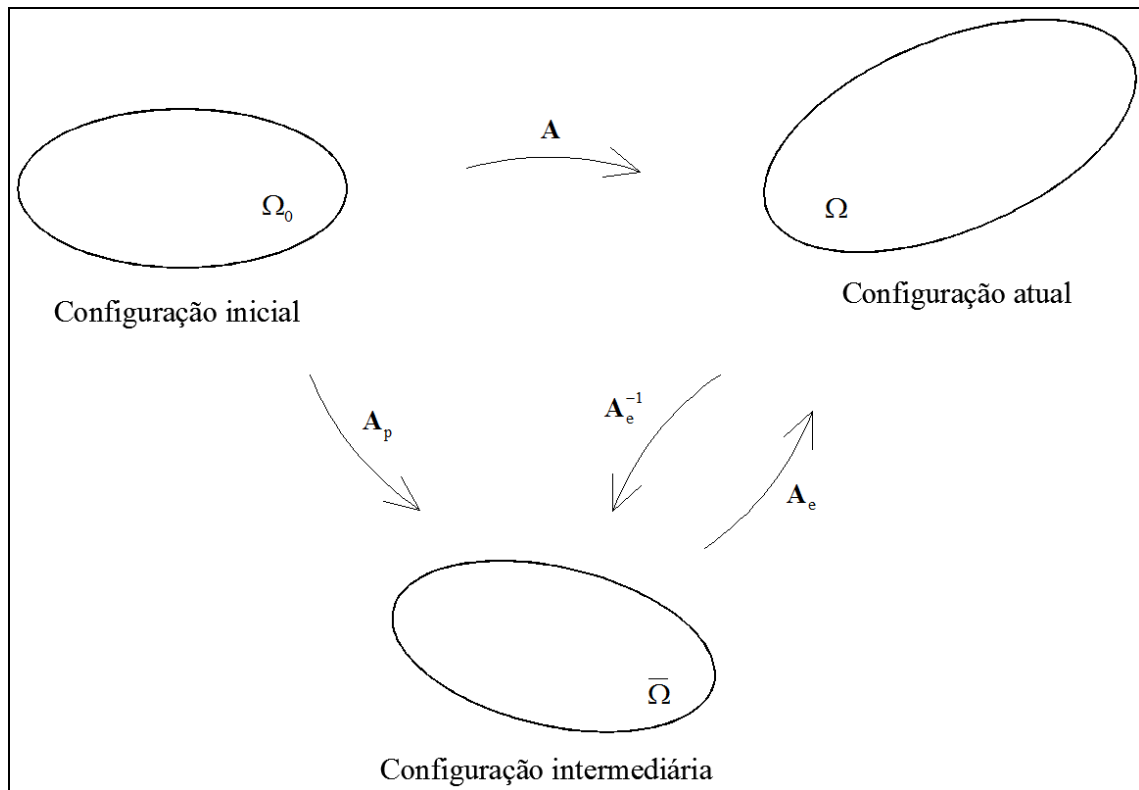


Figura 3.3. Decomposição multiplicativa do gradiente de Kröner-Lee (equação 3.23).

### 3.7. Taxas de deformação

Na descrição Euleriana ou espacial (HOLZAPFEL, 2004) da mudança de forma de um corpo, a referência é a configuração final (ou atual) desse corpo. Na literatura científica, existem várias grandezas cinemáticas espaciais (ou Eulerianas). Entre elas, podem ser destacados os seguintes tensores de segunda ordem (HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.25.1)$$

$$\mathbf{D} = \text{sim}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (3.25.2)$$

$$\mathbf{W} = \text{ant}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (3.25.3)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o gradiente espacial da velocidade  $\mathbf{v}$ ;  $\text{grad}(\ )$ , neste caso, é o gradiente espacial;  $\dot{\mathbf{A}}$  é a taxa de variação (ou derivada em relação ao tempo) do gradiente (3.13);  $\mathbf{D}$  é chamado de tensor taxa de deformação;  $\mathbf{W}$  é o tensor taxa de rotação; e os símbolos  $\text{sim}(\ )$  e  $\text{ant}(\ )$  denotam, respectivamente, as parcelas simétrica e antissimétrica de uma matriz. É possível relacionar (HOLZAPFEL, 2004) a deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (equação 3.17) com o tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ :

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.26)$$

Com a decomposição de Kröner-Lee (ver equação 3.23) e com as expressões (3.25), é possível mostrar as seguintes igualdades (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000):

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{A}_e \mathbf{L}_p (\mathbf{A}_e)^{-1} \quad (3.27.1)$$

$$\mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{A}}_e \mathbf{A}_e^{-1} \quad (3.27.2)$$

$$\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{A}}_p \mathbf{A}_p^{-1} = \mathbf{D}_p + \mathbf{W}_p \quad (3.27.3)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \text{sim} \left[ \mathbf{A}_e \mathbf{L}_p (\mathbf{A}_e)^{-1} \right] \quad (3.27.4)$$

$$\mathbf{D}_e = \text{sim}(\mathbf{L}_e) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_e + \mathbf{L}_e^T) \quad (3.27.5)$$

$$\mathbf{D}_p = \text{sim}(\mathbf{L}_p) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T) \quad (3.27.6)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \text{ant} \left[ \mathbf{A}_e \mathbf{L}_p (\mathbf{A}_e)^{-1} \right] \quad (3.27.7)$$

$$\mathbf{W}_e = \text{ant}(\mathbf{L}_e) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_e - \mathbf{L}_e^T) \quad (3.27.8)$$

$$\mathbf{W}_p = \text{ant}(\mathbf{L}_p) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_p - \mathbf{L}_p^T) \quad (3.27.9)$$

As relações (3.26) e (3.27) são empregadas na formulação elastoplástica desta tese.



## 4. TENSÃO E EQUILÍBRIO

No quarto capítulo, são descritos os conceitos de tensão, lei e modelo constitutivo, elasticidade e inelasticidade. É descrito também o princípio de equilíbrio estático de forças utilizado neste estudo.

### 4.1. Tensão

Segundo Holzapfel (2004), mudanças de configuração que não sejam de corpo rígido (equação 3.16) provocam interações entre os pontos materiais no interior do corpo. Uma das consequências dessas interações é o aparecimento de forças ao longo das superfícies internas de contato entre os pontos materiais. Para medir a relação entre essas forças e essas áreas superficiais, são usadas as medidas de tensão. Sabe-se (HOLZAPFEL, 2004) que a tensão é a causa da mudança de configuração em um corpo, e que o campo tensorial que descreve essa grandeza ao longo de um corpo é chamado de campo de tensão.

Duas medidas de tensão são usadas neste estudo. A primeira é o tensor de tensão de Cauchy, que representa a relação entre forças internas e áreas superficiais, ambas na posição atual  $\mathbf{y}$  (ver seção 3.1), por meio do teorema da tensão de Cauchy (COIMBRA, 1981; HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \text{ ou } t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{t}$  é chamado de vetor tensão de Cauchy;  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície na posição atual; e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensão de Cauchy. Uma interpretação para o vetor  $\mathbf{t}$  é dada a seguir:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{t} ds \text{ ou } dp_i = t_i ds \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{dp}$  é a força resultante que atua no elemento infinitesimal de área  $ds$ , definido na configuração atual  $\mathbf{y}$ . A direção normal ao elemento  $ds$  é dada pelo vetor unitário  $\mathbf{n}$  (ver equação 4.1).

A outra medida de tensão utilizada aqui é o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (PROENÇA, 2006; PASCON, 2008), também chamado de segundo tensor de Piola-Kirchhoff (COIMBRA, 1981). Essa grandeza, representada por  $\mathbf{S}$  neste estudo, não possui significado físico aparente, e pode ser relacionada à tensão de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ), ao Jacobiano (3.13) e ao gradiente (3.11) por meio da seguinte expressão (HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}^{-T} \text{ ou } S_{ij} = \mathbf{J} \left( \mathbf{A}^{-1} \right)_{ik} \sigma_{kl} \left( \mathbf{A}^{-1} \right)_{jl} \quad (4.3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mathbf{J}}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^T \text{ ou } \sigma_{ij} = \frac{1}{\mathbf{J}}A_{ik}S_{kl}A_{jl} \quad (4.3.2)$$

#### 4.2. Comportamento mecânico

É afirmado, em Coimbra (1981), que o comportamento mecânico - ou a resposta macroscópica - de um material frente às solicitações impostas pode ser caracterizado por equações de estado chamadas de equações constitutivas, que representam as propriedades físicas intrínsecas de um corpo (HOLZAPFEL, 2004). Além disso, a tensão em um ponto material (ver seção 4.1) é determinada, de forma unívoca, pelos seguintes valores nesse ponto: a posição atual  $\mathbf{y}$ , o histórico da mudança de forma  $\mathbf{f}$  e a temperatura. Nas análises isotérmicas, como é caso do presente estudo, os efeitos da temperatura são desprezados. Tanto na Mecânica do Contínuo (MC) como na Mecânica Não Linear do Contínuo (MNLC), as equações constitutivas estabelecem a relação entre tensão e deformação - ou entre causa e efeito.

De acordo com Holzapfel (2004), modelo constitutivo é o nome que se dá a um modelo matemático utilizado para representar, de forma aproximada, o comportamento real



do material. Basicamente, dois tipos de modelos constitutivos são abordados nesta tese: o elástico e o elastoplástico. Ademais, as propriedades referentes ao comportamento mecânico do material recebem o nome de propriedades constitutivas.

### 4.3. Elasticidade

Um material é chamado de elástico se, em todas as suas partículas, o campo de tensão (ver seção 4.1) depende, apenas, do estado atual de mudança de forma - ou de deformação - e não do histórico de deformação (HOLZAPFEL, 2004). Em outras palavras, para um material elástico a tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ , definida na posição atual  $\mathbf{y}$ , depende do gradiente (3.13) - ou da deformação (3.17) - e da posição inicial  $\mathbf{x}$  do ponto material:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{x}) \text{ ou } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{E}, \mathbf{x}) \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{F}$ , neste caso, são chamadas de funções elásticas de resposta material. Quando a função que descreve a resposta mecânica do material elástico não depende da posição inicial  $\mathbf{x}$ , ele é chamado de elástico homogêneo (HOLZAPFEL, 2004):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}) \text{ ou } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{E}) \quad (4.5)$$

Para um material elástico homogêneo, pode-se escrever a seguinte relação alternativa:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_E(\mathbf{E}) \quad (4.6)$$

onde  $\mathbf{S}_E$  é a função tensorial que estabelece a relação entre a tensão  $\mathbf{S}$  (ver equações 4.3) e a deformação de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ).

Outro aspecto da elasticidade é o caráter não dissipativo (ou conservativo) da deformação. Quando o material é submetido a certa sollicitação ele se deforma, isto é, ele muda de configuração (ver seções 3.2 e 3.4). Caso ele retorne à sua posição inicial logo que a sollicitação é retirada, o material é considerado elástico. Quando a reversibilidade da

deformação depende do tempo, ela é chamada de viscoelástica. Em outras palavras, a deformação elástica é reversível e independente do tempo. Nesse processo de carregamento e descarregamento de um material elástico, a dissipação de energia é nula (KHAN; HUANG, 1995). Esse aspecto da elasticidade é empregado para obter a relação entre tensão e deformação no quinto capítulo desta tese.

#### 4.4. Inelasticidade

Quando o campo de tensão (ver seção 4.1) em um ponto material depende, não apenas da deformação, mas do histórico - ou do caminho - da deformação, esse ponto apresenta uma parcela de deformação elástica e outra inelástica (HOLZAPFEL, 2004):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{A}^h, \mathbf{x}) \text{ ou } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{E}, \mathbf{E}^h, \mathbf{x}) \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{F}$  são chamadas de funções de resposta material, as quais definem, neste caso, a relação entre tensão, deformação e histórico de deformação;  $\mathbf{A}^h$  é o tensor que representa o histórico do gradiente  $\mathbf{A}$  (3.11); e  $\mathbf{E}^h$  é o tensor que representa o histórico da deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (3.17). Usualmente, a parcela inelástica de deformação é associada a fenômenos dissipativos.

No contexto dos materiais com parcela de deformação inelástica (ver equação 4.7), aparece o conceito de variáveis internas (HOLZAPFEL, 2004), usadas para descrever - ou quantificar - o processo de deformação inelástica. De modo geral, as variáveis que descrevem a deformação são chamadas de externas quando podem ser medidas diretamente (como a deformação total de Green-Lagrange ou a temperatura). Caso contrário, são chamadas de variáveis internas. No caso geral da equação (4.7), as variáveis externas e internas são empregadas para descrever as propriedades constitutivas do material.

Com relação à inelasticidade, são abordados - nesta tese - os materiais elastoplásticos, ou seja, os materiais que apresentam duas parcelas de deformação: uma elástica (ver seção

4.3) e outra plástica. O conceito de deformação plástica é discutido no sexto capítulo desta tese. No caso do material em regime elastoplástico, as variáveis internas utilizadas neste estudo são a parcela plástica de deformação e os parâmetros de encruamento (KHAN; HUANG, 1995). Essas variáveis são as que aparecem normalmente nos estudos sobre plasticidade.

#### 4.5. Tensor elástico

No contexto da elasticidade (ver seção 4.3), a derivada da tensão em relação à deformação resulta num tensor de quarta ordem que recebe os seguintes nomes: tensor elástico (HOLZAPFEL, 2004), operador tangente consistente (DÜSTER; HARTMANN; RANK, 2003) ou módulo elástico tangente (BELYTCHKO; LIU; MORAN, 2000). Para materiais elásticos cujo comportamento é dado pela expressão (4.6), o tensor elástico de quarta ordem pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Gamma_e = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{S}_E(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad (\Gamma_e)_{ijkl} = \frac{\partial [S_E(\mathbf{E})]_{ij}}{\partial E_{kl}} \quad (4.8)$$

Neste caso, a deformação  $\mathbf{E}$  é puramente elástica. Segundo Crisfield (2000) e Holzapfel (2004), o tensor elástico de quarta ordem é bastante empregado em análises não lineares, como é o caso deste estudo.

#### 4.6. Equilíbrio

Devido à possibilidade das estruturas analisadas aqui apresentarem grandes deslocamentos, é usada aqui a análise não linear geométrica (CRISFIELD, 2000; PROENÇA, 2006), na qual o equilíbrio do corpo (ou da estrutura) é descrito na posição final. Para isso, é empregado o Princípio da Mínima Energia Potencial Total (CODA, 2003; CODA; GRECO,

2004; CODA; PACCOLA, 2007; PASCON, 2008), também chamado de Princípio da Energia Potencial Estacionária (HOLZAPFEL, 2004). Segundo tal princípio, o corpo está em equilíbrio (estático) quando a posição atual  $\mathbf{y}$  (ver seção 3.1) satisfaz a seguinte condição:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4.9.1)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{y}} dV_0 \quad \text{ou} \quad (f_{\text{int}})_i = \int_{\Omega_0} \frac{\partial u_e}{\partial y_i} dV_0 \quad (4.9.2)$$

onde  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  e  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  são, respectivamente, os vetores de forças internas e de forças externas (ou aplicadas); o escalar  $u_e$  é a energia específica de deformação (CODA, 2003; PASCON, 2008);  $\Omega_0$  representa o domínio do corpo na configuração inicial; e  $dV_0$  é um volume infinitesimal do corpo na posição inicial. A grandeza  $u_e$ , cuja dimensão é energia por unidade de volume, representa a energia armazenada em um volume infinitesimal deformado (HOLZAPFEL, 2004). Conforme será explicado no item 5.1 desta tese, a grandeza  $u_e$  pode ser empregada para caracterizar o comportamento mecânico do material e, assim, definir o modelo constitutivo (ver item 4.2).

Com a aproximação numérica utilizada nesta tese (ver equações 3.1), o vetor posição final  $\mathbf{y}$  que aparece na expressão (4.9.2) passa a ser o vetor de parâmetros nodais, ou seja,  $\mathbf{y}$  é o vetor que contém todos os graus de liberdade, que são as (três) coordenadas finais dos nós. Neste estudo, as forças externas são conservativas, isto é, seus valores independem da posição final  $\mathbf{y}$ . Ademais,  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  é o vetor que contém as forças aplicadas nos nós (ao longo das três direções). Por fim, a equação de equilíbrio (4.9) é chamada de local quando é aplicada a um elemento finito, e global quando é aplicada a toda estrutura.

Na análise não linear geométrica, a equação de equilíbrio (4.9) apresenta um inconveniente: ela possui caráter não linear. Em outras palavras, se a posição final  $\mathbf{y}$  é conhecida (ou se as três coordenadas finais de todos os nós são conhecidas), é possível determinar o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  (ver equação 4.9.2). Porém, se o vetor de forças internas for conhecido, não se consegue - de modo geral - determinar a posição final  $\mathbf{y}$ , isto é, a função  $\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{y})$  é conhecida, mas a sua inversa  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{f}_{\text{int}})$  não é. Para contornar este problema, é empregado aqui o método iterativo de Newton-Raphson ou método de Newton (HOUSEHOLDER, 1953; BELLMAN; KALABA, 1965; CRISFIELD, 2000; PASCON,

2008). De acordo com Belytschko, Liu e Moran (2000), tal método é um dos mais usados e robustos para solução de sistemas de equações não lineares. O método de Newton-Raphson pode ser resumido da seguinte forma: cálculo da diferença entre os vetores de forças internas e de forças externas para uma posição tentativa  $\mathbf{y}_0$ :  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{y}_0) - \mathbf{f}_{\text{ext}}$ ; expansão, em série de Taylor, de  $\mathbf{r}_0$  em torno de  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$  e linearização do problema:  $\mathbf{r}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{y}} \cdot \Delta \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo (HOLZAPFEL, 20004); e cálculo do incremento  $\Delta \mathbf{y}$  e da nova posição tentativa  $\mathbf{y}_1$ :  $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0 = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{r}_0$ . O processo é iterativo, ou seja, a posição final  $\mathbf{y}$  é atualizada até que o vetor resíduo de forças  $\mathbf{r} = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}}$  seja suficientemente pequeno. No método de Newton-Raphson, o resíduo  $\mathbf{r}$  e a derivada  $\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{y}$  devem ser calculados em cada iteração. No presente estudo, o método iterativo descrito neste parágrafo, apesar de não ser necessariamente incremental, é aplicado com divisão do carregamento em passos (ou incrementos finitos) de carga. Isso é feito para facilitar a convergência de cada iteração e para mostrar o caminho - ou a trajetória - de equilíbrio.

Para aplicar o método de Newton-Raphson, descrito no parágrafo anterior, são empregadas aqui as seguintes expressões:

$$\mathbf{r} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{y}} dV_0 - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_{\xi} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{y}} J_0 d\xi - \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{ou} \quad r_i = \int_{\xi} \frac{\partial u_e}{\partial y_i} J_0 d\xi - (f_{\text{ext}})_i \quad (4.10.1)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} J_0 d\xi \quad \text{ou} \quad H_{ij} = \int_{\xi} \frac{\partial^2 u_e}{\partial y_i \partial y_j} J_0 d\xi \quad (4.10.2)$$

onde  $J_0$  é o determinante do gradiente inicial  $\mathbf{A}_0$  (ver equações 3.13 e 3.15.2);  $d\xi$  representa um elemento infinitesimal do espaço auxiliar adimensional (ver figura 3.1); e a matriz simétrica  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana ou matriz de rigidez tangente (CRISFIELD, 2000; PASCON, 2008).

As expressões a seguir podem ser utilizadas no lugar das equações (4.10):

$$\mathbf{r} = \int_{\xi} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} J_0 d\xi - \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{ou} \quad r_i = \int_{\xi} \frac{\partial u_e}{\partial E_{kl}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} J_0 d\xi - (f_{\text{ext}})_i \quad (4.11.1)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi} \left[ \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \right] \mathbf{J}_0 d\xi \quad \text{ou}$$

$$H_{ij} = \int_{\xi} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial E_{kl} \partial E_{mn}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} \frac{\partial E_{mn}}{\partial y_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial E_{kl}} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} \right) \mathbf{J}_0 d\xi \quad (4.11.2)$$

onde o símbolo  $:$  denota a contração entre dois tensores (HOLZAPFEL, 2004). As derivadas, em notação indicial, da deformação de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ) em relação ao vetor que contém os graus de liberdade ( $\mathbf{y}$ ), para os elementos finitos sólidos hexaédrico e tetraédrico, são dadas no Apêndice B desta tese. Ademais, conforme será descrito no item 5.1 desta tese, as derivadas de  $\mathbf{u}_e$  em relação à deformação  $\mathbf{E}$  correspondem ao modelo constitutivo adotado.







## 5. HIPERELASTICIDADE

Neste capítulo são descritos o conceito de hiperelasticidade, os modelos hiperelásticos adotados no presente estudo e a relação hiperelástica entre tensão e deformação.

### 5.1. Definição

Segundo Holzapfel (2004), a hiperelasticidade, também chamada de elasticidade finita (COIMBRA, 1981) e de elasticidade de Green (OGDEN, 1984), postula a existência da função escalar energia livre de Helmholtz, representada usualmente por  $\psi$  e definida por unidade de volume inicial. Tal função descreve as propriedades mecânicas de um corpo e, com isso, pode ser usada para se expressar a relação tensão-deformação (ver item 4.2). Dessa forma, todo modelo hiperelástico, além de ser elástico (equação 4.4), é descrito pela energia livre de Helmholtz  $\psi$ . Existe, apenas, uma diferença entre material elástico e hiperelástico. Tanto no modelo elástico como no hiperelástico, o campo de tensões depende apenas do estado atual de deformação e não do caminho da deformação (ver seção 4.3). No material hiperelástico, contudo, o trabalho realizado pela deformação (OGDEN, 1984) depende do caminho de deformação.

Nas análises isotérmicas, a energia específica de deformação  $u_e$  (ver equação 4.9) pode ser substituída por  $\psi$  (HOLZAPFEL, 2004; PASCON, 2008). Assim sendo, a energia armazenada em um volume infinitesimal passa a ser dada pela energia livre de Helmholtz ( $\psi$ ). Com a referida substituição, as expressões (4.11) empregadas para cálculo do vetor resíduo de forças e da matriz Hessiana (ver seção 4.6) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \int_{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} J_0 d\xi - \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{ou} \quad r_i = \int_{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial E_{kl}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} J_0 d\xi - (f_{\text{ext}})_i \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \right] J_0 d\xi \quad \text{ou}$$

$$H_{ij} = \int_{\xi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial E_{kl} \partial E_{mn}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} \frac{\partial E_{mn}}{\partial y_j} + \frac{\partial \psi}{\partial E_{kl}} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} \right) J_0 d\xi \quad (5.1.2)$$

## 5.2. Modelos hiperelásticos adotados

Modelo constitutivo hiperelástico é aquele no qual a resposta elástica do material é definida pela expressão da energia livre de Helmholtz  $\psi$  (ver item 5.1). Quatro modelos constitutivos hiperelásticos para materiais isotrópicos (OGDEN, 1984; HOLZAPFEL, 2004) foram implementados nos códigos computacionais desenvolvidos neste estudo: o modelo linear de Saint Venant-Kirchhoff (CIARLET, 1988), representado por SVK; o modelo não linear desacoplado de Rivlin-Saunders (RIVLIN, 1956; PASCON, 2008), representado por RS; o modelo não linear desacoplado de Hartmann-Neff (HARTMANN; NEFF, 2003; PASCON, 2008), representado por HN; e o modelo não linear acoplado neo-Hookeano (SZE; ZHENG; LO, 2004; PASCON, 2008), representado por nH.

Para o modelo de Saint Venant-Kirchhoff (SVK), usualmente empregado para modelar metais sob grandes deslocamentos (HOLZAPFEL, 2004), a energia livre de Helmholtz é dada por:

$$\psi_{\text{SVK}} = \psi_{\text{SVK}}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\mathbf{E})]^2 + \mu [\text{tr}(\mathbf{E}^2)] \quad (5.2.1)$$

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \quad (5.2.2)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)} \quad (5.2.3)$$

onde  $\lambda > 0$  e  $\mu > 0$  são as constantes de Lamé (CIARLET, 1988); e  $E$  e  $\nu$  são, nesta ordem, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson (CIARLET, 1988). Neste caso, a energia é escrita em função da deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (3.17).

No modelo desacoplado de Rivlin-Saunders (RS), usado para modelar materiais pouco compressíveis sob pequenas e grandes deformações (PASCON, 2008), a função de Helmholtz é expressa da seguinte forma genérica:

$$\Psi_{RS} = \Psi_{RS}(J, i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = U_{\text{vol}}(J) + \psi_{RS}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) \quad (5.3.1)$$

$$U_{\text{vol}}(J) = k(J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (5.3.2)$$

$$\psi_{RS}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = \sum_{ij} \left[ c_{ij} (i_1^{\text{iso}} - 3)^i (i_2^{\text{iso}} - 3)^j \right] \quad (5.3.3)$$

$$i_1^{\text{iso}} = \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}}) = (\mathbf{C}_{\text{iso}})_{ii} \quad (5.3.4)$$

$$i_2^{\text{iso}} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C}_{\text{iso}})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}}^2) \right] \quad (5.3.5)$$

onde  $J$  é o Jacobiano (3.13), utilizado como medida de alteração de volume;  $i_1^{\text{iso}}$  e  $i_2^{\text{iso}}$  são os dois primeiros invariantes de  $\mathbf{C}_{\text{iso}}$ , que é a parcela isocórica do tensor de Cauchy-Green direito  $\mathbf{C}$  (ver equação 3.22.2);  $U_{\text{vol}}$  e  $\psi_{RS}^{\text{iso}}$  são, nesta ordem, as parcelas volumétrica e isocórica da energia livre de Helmholtz  $\psi$ ; o coeficiente  $k$  é o módulo de compressão volumétrica - ou “bulk modulus”; e os coeficientes  $c_{ij}$  são chamados de coeficientes isocóricos. A expressão (5.3.3) é geral, ou seja, não há uma quantidade pré-definida para os coeficientes  $c_{ij}$ . Podem existir, por exemplo, modelos com apenas um coeficiente não nulo ( $c_{10}$ ,  $c_{01}$ ,  $c_{32}$  etc.).

No modelo desacoplado de Hartmann-Neff (HN), também empregado para modelar materiais pouco compressíveis sob pequenas e grandes deformações (PASCON, 2008), vale a seguinte relação:

$$\Psi_{HN} = \Psi_{HN}(J, i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = U_{\text{vol}}(J) + \psi_{HN}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) \quad (5.4.1)$$

$$\Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = \alpha \left[ (i_1^{\text{iso}})^3 - 27 \right] + \sum_i \left[ c_{i0} (i_1^{\text{iso}} - 3)^i \right] + \sum_j \left[ c_{0j} (i_2^{\text{iso}3/2} - 3^{2/3})^j \right] \quad (5.4.2)$$

onde a parcela volumétrica  $U_{\text{vol}}$  é expressa na equação (5.3.2);  $i_1^{\text{iso}}$  e  $i_2^{\text{iso}}$  são descritos nas equações (5.3.4) e (5.3.5), respectivamente; e os coeficientes  $\alpha$  e  $c_{ij}$  são os coeficientes isocóricos do modelo HN.

Nos modelos desacoplados de Rivlin-Saunders (RS) e de Hartmann-Neff (HN), é usada a decomposição de Flory (3.21), e a energia livre de Helmholtz ( $\psi$ ) é separada, de forma aditiva, nas parcelas volumétrica e isocórica, isto é, não há produtos entre os termos volumétrico ( $J$ ) e isocóricos ( $i_1^{\text{iso}}$  e  $i_2^{\text{iso}}$ ). Por isso, tais modelos são chamados de desacoplados (DÜSTER; HARTMANN; RANK, 2003). Já no modelo acoplado neo-Hookeano, utilizado para materiais compressíveis sob pequenas e grandes deformações (SZE; ZHENG; LO, 2004), a decomposição de Flory (3.21) não é utilizada, e a energia de Helmholtz é dada por:

$$\Psi_{\text{NH}} = \Psi_{\text{NH}}(J, i_1) = \frac{k}{2} [\ln(J)]^2 + \frac{\mu}{2} [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \quad (5.5.1)$$

$$i_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (5.5.2)$$

Neste caso, os coeficientes do material são  $k$  e  $\mu$ .

Todos os quatro modelos hiperelásticos descritos neste item (equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5) satisfazem a condição de normalização da energia de Helmholtz (HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{O}, J = 1, i_1 = i_1^{\text{iso}} = i_2 = i_2^{\text{iso}} = 3 \Rightarrow \psi = 0 \quad (5.6)$$

Em outras palavras, quando o movimento é de corpo rígido ( $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ ) em determinado ponto material, a energia de deformação armazenada nesse ponto é nula. Outro aspecto do material elástico é que quando a tensão em determinado ponto é nula, a energia de deformação, ou a energia de Helmholtz, deve ser nula nesse ponto.

### 5.3. Relação tensão-deformação

A relação entre energia livre de Helmholtz (ver seção 5.1), tensão (ver seção 4.1) e deformação (ver seção 3.4) pode ser encontrada por meio da segunda lei da termodinâmica (MARSDEN; HUGHES, 1983) e do procedimento de Coleman-Noll (HOLZAPFEL, 2004):

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\psi} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} = 0, \forall \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a taxa de dissipação interna (HOLZAPFEL, 2004), que é nula para os materiais elásticos (ver seção 4.3);  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (ver equação 4.3); o símbolo  $(\dot{\quad})$  denota taxa de variação (temporal); e  $\psi = \psi(\mathbf{E})$  e  $\psi = \psi(\mathbf{C})$  são, respectivamente, a energia de Helmholtz (ver seção 5.1) expressa em função da deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  e do tensor de Cauchy-Green direito  $\mathbf{C}$  (ver equações 3.16 e 3.17). Na hiperelasticidade, de acordo com a expressão (5.7), a tensão é determinada a partir do escalar  $\psi$ .

Substituindo a energia específica de deformação ( $u_e$ ) pela energia de Helmholtz ( $\psi$ ), e usando o resultado da expressão (5.7), as equações (5.1) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \int_{\xi} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} J_0 d\xi - \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \text{ou} \quad r_i = \int_{\xi} S_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} J_0 d\xi - (f_{\text{ext}})_i \quad (5.8.1)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi} \left[ \left( \Gamma_e : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \right] J_0 d\xi \quad \text{ou}$$

$$H_{ij} = \int_{\xi} \left[ (\Gamma_e)_{klmn} \frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} \frac{\partial E_{mn}}{\partial y_j} + S_{kl} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} \right] J_0 d\xi \quad (5.8.2)$$

onde  $\Gamma_e$  é o tensor elástico de quarta ordem (4.8).

### 5.3.1. Tensão resultante para os modelos adotados

Para os modelos hiperelásticos adotados neste estudo (ver equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5), o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ) pode ser determinado via equação (5.7). Para o modelo hiperelástico linear de Saint Venant-Kirchhoff (equações 5.2), representado aqui por SVK, a tensão  $\mathbf{S}$  resulta em:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix}_{\text{SVK}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (5.9.1)$$

$$\alpha = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.9.2)$$

$$\beta = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.9.3)$$

$$\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad (5.9.4)$$

As componentes restantes do tensor  $\mathbf{S}$  ( $S_{21}$ ,  $S_{31}$  e  $S_{32}$ ) não são dadas pois esse tensor é simétrico:  $S_{21} = S_{12}$ ,  $S_{31} = S_{13}$  e  $S_{32} = S_{23}$ . Uma forma alternativa para as expressões (5.9) é a seguinte (CODA; PACCOLA, 2009):

$$\mathbf{S}_{\text{SVK}} = 2G\mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} \quad \text{ou} \quad (S_{\text{SVK}})_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (5.10.1)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.10.2)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (5.10.3)$$

onde  $G$ ,  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo elástico de cisalhamento, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson (CIARLET, 1988).

Para o modelo hiperelástico não linear desacoplado de Rivlin-Saunders (equações 5.3), a tensão resultante (ver equação 5.7) é dada por:

$$\mathbf{S}_{RS} = 2 \left[ \frac{\partial U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}} \right] \text{ ou } (S_{RS})_{ij} = 2 \left[ \frac{\partial U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial C_{ij}} \right] \quad (5.11.1)$$

$$\frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou } \frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial C_{ij}} \quad (5.11.2)$$

$$\frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{J}} = \left[ k(2n\mathbf{J}^{2n-1} - 2n\mathbf{J}^{-2n-1}) \right] \quad (5.11.3)$$

$$\frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou } \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \quad (5.11.4)$$

$$\frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} = \sum_{ij} \left[ c_{ij}(\mathbf{i})(\mathbf{i}_1^{\text{iso}} - 3)^{i-1} (\mathbf{i}_2^{\text{iso}} - 3)^j \right] \quad (5.11.5)$$

$$\frac{\partial \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} = \sum_{ij} \left[ c_{ij}(\mathbf{j})(\mathbf{i}_1^{\text{iso}} - 3)^i (\mathbf{i}_2^{\text{iso}} - 3)^{j-1} \right] \quad (5.11.6)$$

Para o modelo hiperelástico não linear desacoplado de Hartmann-Neff (equações 5.4), o segundo tensor de Piola-Kirchhoff obtido via equação (5.7) resulta em:

$$\mathbf{S}_{HN} = 2 \left[ \frac{\partial U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C}} \right] \text{ ou } (S_{HN})_{ij} = 2 \left[ \frac{\partial U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial C_{ij}} \right] \quad (5.12.1)$$

$$\frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou } \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \quad (5.12.2)$$

$$\frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} = \alpha \left[ 3(\mathbf{i}_1^{\text{iso}})^2 \right] + \sum_i \left[ c_{i0}(\mathbf{i})(\mathbf{i}_1^{\text{iso}} - 3)^{i-1} \right] \quad (5.12.3)$$

$$\frac{\partial \Psi_{HN}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} = \sum_j \left[ c_{0j}(\mathbf{j})(\mathbf{i}_1^{\text{iso}3/2} - 3^{3/2})^{j-1} \left( \frac{3}{2} \mathbf{i}_1^{\text{iso}1/2} \right) \right] \quad (5.12.4)$$

Por fim, para o modelo hiperelástico não linear acoplado neo-Hookeano (equações 5.5), a tensão resultante (equação 5.7) é:

$$\mathbf{S}_{\text{nh}} = 2 \frac{\partial \left\{ k [\ln(J)]^2 + \mu [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \right\}}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou}$$

$$(\mathbf{S}_{\text{nh}})_{ij} = 2 \frac{\partial \left\{ k [\ln(J)]^2 + \mu [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \right\}}{\partial C_{ij}} \quad (5.13.1)$$

$$\frac{\partial [k \ln(J)^2]}{\partial \mathbf{C}} = 2k \ln(J) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou } \frac{\partial [k \ln(J)^2]}{\partial C_{ij}} = 2k \ln(J) \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \quad (5.13.2)$$

$$\frac{\partial \left\{ \mu [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \right\}}{\partial \mathbf{C}} = \mu \left( \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial \left\{ \mu [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \right\}}{\partial C_{ij}} = \mu \left( \frac{\partial i_1}{\partial C_{ij}} - \frac{2}{J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \right) \quad (5.13.3)$$

As derivadas das grandezas escalares  $J$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_1^{\text{iso}}$  e  $i_2^{\text{iso}}$  em relação ao tensor de Cauchy-Green direito ( $\mathbf{C}$ ) são dadas no Apêndice C desta tese, mas podem ser encontradas também em Pascon (2008).

### 5.3.2. Tensor elástico resultante para os modelos adotados

Para os modelos hiperelásticos adotados neste estudo (equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5), o cálculo do tensor elástico de quarta ordem (ver seção 4.5) é realizado com auxílio das expressões (4.8) e (5.7). Para o modelo hiperelástico linear de Saint Venant-Kirchhoff (equações 5.2 e 5.10), o tensor elástico resultante é:



$$\Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{1111} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{2222} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{3333} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.14.1)$$

$$\Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{1122} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{1133} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{2211} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{2233} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{3311} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{3322} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.14.2)$$

$$\Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{1212} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{1313} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{2121} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{2323} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{3131} = \Gamma_e^{\text{SVK}}{}_{3232} = \frac{E}{(1+\nu)} \quad (5.14.3)$$

O tensor elástico referente ao modelo hiperelástico não linear de Rivlin-Saunders (equações 5.3 e 5.11) é:

$$\Gamma_e^{\text{RS}} = 4 \left[ \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \text{ ou}$$

$$\left( \Gamma_e^{\text{RS}} \right)_{ijkl} = 4 \left[ \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}(\mathbf{J})}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}})}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right] \quad (5.15.1)$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}}{\partial J \partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{vol}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}}{\partial J \partial J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial U_{\text{vol}}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (5.15.2)$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{vol}}}{\partial J \partial J} = \left\{ k \left[ 2n(2n-1)J^{2n-2} + 2n(2n+1)J^{-2n-2} \right] \right\} \quad (5.15.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}}$$

$$+ \frac{\partial \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}}$$

$$+ \frac{\partial \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{RS}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}} \partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}} \frac{\partial \mathbf{i}_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial \mathbf{i}_1^{\text{iso}}}{\partial C_{kl}} \quad (5.15.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}} \partial i_1^{\text{iso}}} = \sum_{ij} \left[ c_{ij} (i)(i-1) (i_1^{\text{iso}} - 3)^{i-2} (i_2^{\text{iso}} - 3)^j \right] \quad (5.15.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}} \partial i_2^{\text{iso}}} = \sum_{ij} \left[ c_{ij} (j)(j-1) (i_1^{\text{iso}} - 3)^i (i_2^{\text{iso}} - 3)^{j-2} \right] \quad (5.15.6)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{RS}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}} \partial i_2^{\text{iso}}} = \sum_{ij} \left[ c_{ij} (i)(j)(i-1)(j-1) (i_1^{\text{iso}} - 3)^{i-1} (i_2^{\text{iso}} - 3)^{j-1} \right] \quad (5.15.7)$$

Para o modelo hiperelástico não linear de Hartmann-Neff (equações 5.4 e 5.12), o tensor elástico é determinado com as fórmulas a seguir:

$$\Gamma_e^{\text{HN}} = 4 \left[ \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}(J)}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \text{ ou}$$

$$\left( \Gamma_e^{\text{HN}} \right)_{ijkl} = 4 \left[ \frac{\partial^2 U_{\text{vol}}(J)}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}})}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right] \quad (5.16.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}} \partial i_1^{\text{iso}}} \frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}} \partial i_2^{\text{iso}}} \frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}} \partial i_1^{\text{iso}}} \frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial C_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 i_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}} \partial i_2^{\text{iso}}} \frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial C_{kl}} +$$

$$\frac{\partial \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}}} \frac{\partial^2 i_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (5.16.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_1^{\text{iso}} \partial i_1^{\text{iso}}} = \alpha \left[ 6(i_1^{\text{iso}}) \right] + \sum_i \left[ c_{i0} (i)(i-1) (i_1^{\text{iso}} - 3)^{i-2} \right] \quad (5.16.3)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{\text{HN}}^{\text{iso}}}{\partial i_2^{\text{iso}} \partial i_2^{\text{iso}}} = \sum_j \left[ c_{0j} (j)(j-1) (i_1^{\text{iso}3/2} - 3^{3/2})^{j-2} \left( \frac{9}{4} i_1^{\text{iso}-1/2} \right) \right] \quad (5.16.4)$$

Por fim, o tensor elástico para o modelo neo-Hookeano (equações 5.5 e 5.13) é:

$$\Gamma_e^{\text{NH}} = 4 \frac{\partial^2 \left\{ k [\ln(J)]^2 + \mu [i_1 - 3 - 2 \ln(J)] \right\}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \text{ ou}$$

$$\left(\Gamma_e^{nH}\right)_{ijkl} = 4 \frac{\partial^2 \left\{ k \left[ \ln(J) \right]^2 + \mu \left[ i_1 - 3 - 2 \ln(J) \right] \right\}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \quad (5.17.1)$$

$$\frac{\partial^2 \left[ k \ln(J)^2 \right]}{\partial C \partial C} = 2k \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial C} \frac{\partial J}{\partial C} + \ln(J) \frac{\partial^2 J}{\partial C \partial C} \right] \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 \left[ k \ln(J)^2 \right]}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = 2k \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} + \ln(J) \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right] \quad (5.17.2)$$

$$\frac{\partial^2 \left\{ \mu \left[ i_1 - 3 - 2 \ln(J) \right] \right\}}{\partial C \partial C} = \mu \left( \frac{\partial^2 i_1}{\partial C \partial C} - \frac{2}{J^2} \frac{\partial J}{\partial C} \frac{\partial J}{\partial C} \right) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 \left\{ \mu \left[ i_1 - 3 - 2 \ln(J) \right] \right\}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \mu \left( \frac{\partial^2 i_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} - \frac{2}{J^2} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} \right) \quad (5.17.3)$$

Assim como as primeiras (ver seção 5.3.1), as segundas derivadas das grandezas escalares  $J$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_1^{\text{iso}}$  e  $i_2^{\text{iso}}$  em relação ao tensor de Cauchy-Green direito ( $C$ ) são dadas no Apêndice C desta tese, mas podem ser encontradas também em Pascon (2008).

#### 5.4. Condições de crescimento e incompressibilidade

Para modelar materiais sob elevados níveis de deformação, a energia livre de Helmholtz deve satisfazer as condições de crescimento (HOLZAPFEL, 2004):

$$J \rightarrow +\infty \Rightarrow \psi \rightarrow +\infty \quad (5.18.1)$$

$$J \rightarrow 0^+ \Rightarrow \psi \rightarrow +\infty \quad (5.18.2)$$

Conforme dito anteriormente (ver equação 3.14), o Jacobiano  $J$  representa a razão entre os volumes atual e inicial. Dessa forma, as condições (5.18) significam que para aniquilar o

material ( $J = 0$ ) ou para expandi-lo a um volume infinito ( $J \rightarrow +\infty$ ), é necessária uma quantia infinita de energia de deformação. Conforme afirmado em Ciarlet (1988), o modelo constitutivo deve fornecer valores extremos de tensão para valores extremos de deformação. Os modelos hiperelásticos RS, HN e nH (ver equações 5.3, 5.4 e 5.5) satisfazem essas condições de crescimento. Já o modelo linear SVK (ver equações 5.2) não está de acordo com tais condições, pois é possível obter, com esse modelo, valores de tensão que tendem para zero à medida que o Jacobiano  $J$  tende a zero, já que este não aparece explicitamente na lei constitutiva (HOLZAPFEL, 2004). Por essa razão, é afirmado que o modelo SVK é adequado para modelar materiais sob grandes deslocamentos, mas não é recomendado para materiais sob grandes deformações de compressão.

Uma das características de materiais poliméricos estruturais - ou elastômeros - é que eles apresentam, mesmo em regime de grandes deformações, pequenas alterações de volume. Em outras palavras, a rigidez volumétrica desse tipo de material é alta. Dessa forma, o valor do volume atual é próximo ao do volume inicial e, conseqüentemente, o valor do Jacobiano  $J$  (ver equação 3.13) é próximo a um (ver equação 3.14). Segundo Düster, Hartmann e Rank (2003) e Pascon (2008), para modelar essa grande resistência volumétrica do material, pode-se adotar um elevado módulo de compressão volumétrica, chamado também de “bulk modulus” e representado aqui por  $k$  (ver equações 5.3, 5.4 e 5.5). Com essa adoção, é possível modelar materiais pouco compressíveis, ou seja, materiais que apresentam pequenas mudanças de volume. Neste estudo, para simular problemas estruturais com esse tipo de material, foram adotados os modelos hiperelásticos não lineares (equações 5.3, 5.4 e 5.5) com elevado “bulk modulus”.

### *5.5. Existência de solução*

Sabe-se (HARTMANN; NEFF, 2003) que a energia livre de Helmholtz  $\psi$ , utilizada para descrever a resposta de um material hiperelástico (seção 5.1), deve satisfazer as condições de policonvexidade e coercividade. Esses requisitos são discutidos detalhadamente

em vários livros como, por exemplo, Marsden e Hughes (1983), Ciarlet (1988) e Belytschko, Liu e Moran (2000). Ademais, é demonstrado, em Hartmann e Neff (2003), que os modelos hiperelásticos não lineares adotados no presente estudo (ver equações 5.3, 5.4 e 5.5) satisfazem as condições de policonvexidade e coercividade. Já o modelo SVK (5.2) não é policonvexo (CIARLET, 1988; HOLZAPFEL, 2004).



## 6. ELASTOPLASTICIDADE

Neste capítulo discorre-se sobre elastoplasticidade. São descritos os conceitos de elastoplasticidade em pequenas deformações, decomposição aditiva de Green-Naghdi, e hiperelastoplasticidade. Também são relacionados os modelos constitutivos elastoplásticos adotados. Por fim, para ilustrar a aplicação da formulação elastoplástica a um caso particular, é descrito o tratamento analítico para o caso de uma barra prismática sob tração uniaxial.

### 6.1. Definição

De acordo com Khan e Huang (1995), a deformação é classificada de plástica quando ela é irreversível ou permanente. Ao contrário das deformações elásticas (ver seção 4.3), quando o carregamento externo aplicado a um material é retirado, as deformações plásticas resultantes desse carregamento se mantêm, e ocorre dissipação de energia ao longo do processo de carregamento e descarregamento. Outra diferença em relação à elasticidade é que, no caso plástico, o campo de tensão depende do histórico de deformação (ver equação 4.7). Usualmente, para caracterizar esse histórico de deformação e, assim, o comportamento plástico do material, são usadas as seguintes variáveis internas (HOLZAPFEL, 2004): parcela plástica do tensor deformação ou tensor deformação plástica; e parâmetros de encruamento (KHAN; HUANG, 1995). Quando o material apresenta duas parcelas de deformação, uma elástica e outra plástica, diz-se (KHAN; HUANG, 1995) que esse material está em regime elastoplástico. Deve ser lembrado, porém, que um material pode ou não apresentar deformação plástica dependendo do carregamento atuante ou do nível de tensão. Por essa razão não se diz que um material é elastoplástico, mas sim que ele está ou não em regime elastoplástico. Para um material homogêneo em regime elastoplástico, o campo de tensão  $\sigma$

(ver seção 4.1), definido na posição atual  $\mathbf{y}$  (ver seção 3.1), pode ser expresso da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\zeta}) \quad (6.1.1)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}\} \quad (6.1.2)$$

Nestas expressões,  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma medida de tensão genérica,  $\mathbf{F}$  é a função que estabelece a resposta elastoplástica do material,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é uma medida de deformação genérica, e o símbolo  $\boldsymbol{\zeta}$  denota o conjunto de variáveis internas (HOLZAPFEL, 2004), as quais - neste caso - são a parcela plástica de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ) e os parâmetros de encruamento ( $\boldsymbol{\alpha}$ ).

Nos próximos itens serão descritos alguns modelos elastoplásticos, bastante comuns na literatura científica, e os modelos adotados nesta tese.

## 6.2. Elastoplasticidade para pequenas deformações

Segundo Proença (2006), o modelo elastoplástico pode ser resumido aos seguintes conceitos: decomposição da deformação total nas parcelas elástica e plástica; energia livre de Helmholtz e tensão resultante (ver equação 5.7); critério de plastificação; lei de evolução da deformação plástica; lei de evolução do encruamento; e condições de complementaridade e consistência. Tais conceitos podem ser aplicados para materiais sob pequenas e sob grandes deformações (KHAN; HUANG, 1995).

Na análise de materiais com pequenos deslocamentos e pequenas deformações, pode-se decompor de forma aditiva o tensor infinitesimal de deformação (KHAN; HUANG, 1995), também chamado de tensor deformação de engenharia (PASCON, 2008):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad \text{ou} \quad (\varepsilon)_{ij} = (\varepsilon_e)_{ij} + (\varepsilon_p)_{ij} \quad (6.2.1)$$



$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad \text{ou} \quad \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{ij} = \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \right)_{ij} + \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right)_{ij} \quad (6.2.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.2.3)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  são as parcelas elástica e plástica da deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ; e  $u_{i,j}$  é a derivada parcial da componente  $i$  do deslocamento (ver equação 3.9) em relação à coordenada inicial  $j$ . Para um material em regime elastoplástico, existem duas parcelas de energia de deformação: a elástica e a plástica. A parcela elástica é conservativa (ver seção 4.3), ou seja, seu valor retorna a zero quando a tensão é retirada. Já a parcela plástica de energia de deformação é utilizada no rearranjo molecular do material (KHAN; HUANG, 1995). Em outras palavras, a energia de deformação elástica é armazenada, e a plástica é dissipada. Assim sendo, para os materiais em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações elastoplásticas, a energia livre de Helmholtz  $\psi$  pode ser decomposta na seguinte forma aditiva (ver expressões 6.1 e 6.2):

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p \quad (6.3.1)$$

$$\Psi_e = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (6.3.2)$$

$$\Psi_p = \Psi_p(\boldsymbol{\zeta}) = \Psi_p(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}) \quad (6.3.1)$$

Nesse caso, a relação tensão-deformação (ver equação 5.7) passa a ser dada por meio da tensão de engenharia (PASCON, 2008) e da deformação infinitesimal (KHAN; HUANG, 1995):

$$D = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right) - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (6.4.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \left( \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} - \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = 0, \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \quad \text{ou} \quad (\boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}})_{ij} = \frac{\partial \Psi_e}{\partial (\varepsilon_e)_{ij}} \quad (6.4.2)$$

$$D = \left( \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (6.4.3)$$

onde o símbolo  $:$  denota contração entre dois tensores de segunda ordem (HOLZAPFEL, 2004). Na expressão (6.4.3), pode-se notar facilmente que essa taxa só é nula quando não ocorre evolução dos parâmetros plásticos ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}$ ). Além disso, a taxa de dissipação de energia ( $D$ ) causada pela evolução da deformação elástica ( $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ ) é nula por definição (ver seção 4.3).

Segundo Khan e Huang (1995), o conceito de superfície de plastificação, representada aqui por  $\Phi$ , é usado para se estabelecer, no espaço das tensões ou das deformações, os domínios elástico e plástico. Se um ponto, no referido espaço, está no interior da superfície de plastificação, então esse ponto pertence ao domínio elástico. Caso o ponto esteja no contorno da superfície, então ele pertence ao domínio plástico. Por definição, o ponto nunca está fora da superfície de plastificação. Essas condições definem o critério de plastificação, que pode ser matematicamente expresso por (KHAN; HUANG, 1995):

$$\Phi < 0, \text{ para domínio elástico} \quad (6.5.1)$$

$$\Phi = 0, \text{ para domínio plástico} \quad (6.5.2)$$

onde  $\Phi$  é a função que descreve a superfície de plastificação. Tal função pode ser descrita em termos da tensão ou da deformação, isto é (ver expressões 6.3 e 6.4):

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{eng}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \text{ ou } \Phi = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad (6.6)$$

A evolução da deformação plástica é descrita por meio da lei de plastificação, também chamada de lei de fluxo plástico (PROENÇA, 2006). Essa lei é usualmente dada na forma de taxas de variação temporal:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R} \text{ ou } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)_{ij} = \dot{\gamma} (\mathbf{R})_{ij} \quad (6.7)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  é a taxa de variação da deformação plástica; o parâmetro escalar  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico (KHAN; HUANG, 1995); e  $\mathbf{R}$  é o tensor (de segunda ordem) que estabelece a “direção” do fluxo plástico.

Segundo Proença (2006), a alteração, devida à evolução da deformação plástica, do intervalo - ou do limite - elástico das tensões caracteriza o encruamento. Existem três tipos de encruamento (MAUGIN, 1992; KHAN; HUANG, 1995): isotrópico, cinemático e misto. O encruamento isotrópico pode ser interpretado como sendo a expansão simétrica em relação ao

centro da superfície de plastificação  $\Phi$  (equações 6.6). Já o cinemático é a alteração da posição do centro de tal superfície. O último tipo de encruamento é uma combinação entre os dois primeiros. Dessa forma, o encruamento misto compreende a expansão da superfície de plastificação e o deslocamento de seu centro. A evolução do encruamento também é dada, usualmente, em forma de taxas de variação:

$$\dot{\kappa} = \gamma \dot{r}_\kappa \quad (6.8.1)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \gamma \dot{\mathbf{R}}_X \text{ ou } \dot{X}_{ij} = \gamma (\dot{\mathbf{R}}_X)_{ij} \quad (6.8.2)$$

onde  $\kappa$  é o parâmetro escalar usado para descrever o encruamento isotrópico;  $\mathbf{X}$  é o tensor de segunda ordem usado para descrever o encruamento cinemático; e  $r_\kappa$  e  $\mathbf{R}_X$  são, nesta ordem, as funções que descrevem a evolução dos parâmetros  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ . Na literatura científica, o tensor  $\mathbf{X}$  recebe o nome de tensor das tensões inversas (ALVES, 2003), ou “backstress” (KHAN; HUANG, 1995). Portanto, para materiais em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações elastoplásticas, o critério de plastificação (6.6) é dado por (ver expressões 6.2 e 6.4):

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}}, \kappa, \mathbf{X}) \leq 0 \text{ ou } \Phi = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa, \mathbf{X}) \leq 0 \quad (6.9)$$

Segundo Proença (2006), a irreversibilidade do processo de deformação plástica é caracterizada pelas condições de complementaridade e consistência. A primeira condição estabelece a seguinte relação entre o parâmetro escalar das leis de evolução (6.7) e (6.8) e a função escalar que define o critério de plastificação (6.6):

$$\dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (6.10)$$

De acordo com essa condição, só existe evolução da deformação plástica ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ) e dos parâmetros de encruamento ( $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) se o ponto que define o estado de tensão estiver na superfície de plastificação, isto é,  $\dot{\gamma} > 0$  se, e somente se,  $\Phi = 0$ . Além disso, quando o referido ponto está no domínio elástico, não pode ocorrer evolução das variáveis plásticas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa, \mathbf{X}$ ), ou seja, se  $\Phi < 0$  então  $\dot{\gamma} = 0$ . A condição (6.10) também é chamada de condição de Kuhn-Tucker (BELYTSCSKO; LIU; MORAN, 2000).

A segunda condição, chamada de consistência, pode ser expressa da seguinte forma (PROENÇA, 2006):

$$\dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0 \quad (6.11)$$

onde  $\dot{\Phi} \leq 0$  é a taxa de variação (temporal) de  $\Phi$ . Em outras palavras, só ocorre evolução das variáveis plásticas quando o ponto que define o estado de tensões permanece na superfície de plastificação  $\Phi = 0$ , ou seja,  $\dot{\gamma} > 0$  se, e somente se,  $\dot{\Phi} = 0$ . Ademais,  $\Phi < 0$  se, e somente se,  $\dot{\gamma} = 0$ , isto é, o ponto que define o estado de tensões e que estava na superfície de plastificação ( $\Phi = 0$ ) só se desloca para o interior do domínio elástico ( $\Phi < 0$ ) se não houver evolução das variáveis plásticas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa, \mathbf{X}$ ).

Para o caso em que ocorre evolução das variáveis plásticas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa, \mathbf{X}$ ), o parâmetro escalar  $\dot{\gamma} > 0$  pode ser encontrado via equações (6.7), (6.8), (6.9) e (6.11):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} : \mathbf{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} r_\kappa + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{R}_X \right] &= 0 \Rightarrow \\ \dot{\gamma} &= - \frac{(\Phi, \boldsymbol{\varepsilon})}{\left[ (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon}_p) : \mathbf{R} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde o símbolo  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  denota a derivada (parcial) da grandeza  $\mathbf{A}$  em relação à grandeza  $\mathbf{B}$ . Assim, a taxa de variação da tensão é dada por (ver equações 6.4.2, 6.7 e 6.8 e 6.12):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eng}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{R} \right) \Rightarrow \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eng}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{eng}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \left[ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \frac{(\Phi, \boldsymbol{\varepsilon})}{\left[ (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon}_p) : \mathbf{R} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \mathbf{R} \right] \Rightarrow \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{eng}} &= \Gamma_{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (6.13.1)$$

$$\Gamma_{ep} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \partial(\boldsymbol{\varepsilon}_e)} : \left[ \mathbf{II} - \left( \frac{\mathbf{R} \otimes (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon})}{\left[ (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon}_p) : \mathbf{R} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : (\mathbf{R}_X) \right]} \right) \right] \quad (6.13.2)$$

$$\left( \dot{\sigma}_{eng} \right)_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}_e)_{ij} \partial(\boldsymbol{\varepsilon}_e)_{kl}} \left[ \delta_{km} \delta_{ln} - \left( \frac{R_{kl} (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon})_{nm}}{\left[ (\Phi, \boldsymbol{\varepsilon}_p)_{op} R_{op} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X})_{op} (R_X)_{op} \right]} \right) \right] \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{nm} \quad (6.13.3)$$

onde  $\Gamma_{ep}$  é o operador tangente consistente elastoplástico (CRISFIELD, 2000); e os símbolos  $\mathbf{II}$ ,  $\otimes$  e  $\delta$  representam, nesta ordem, o tensor identidade de quarta ordem, o produto tensorial entre dois tensores de segunda ordem e o delta de Kronecker (HOLZAPFEL, 2004). As equações (6.13.1) e (6.13.3) estabelecem a evolução da tensão de engenharia com a deformação infinitesimal total, em regime elastoplástico de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

### 6.3. Aproximação de Green-Naghdi

Segundo Green e Naghdi (1965) e Khan e Huang (1995), uma aproximação razoável para materiais elastoplásticos em regime de grandes deformações é a decomposição aditiva da deformação de Green-Lagrange (3.17), similar à decomposição descrita pelas equações (6.2):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \Rightarrow \mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p \quad (6.14)$$

onde  $( )_p$  e  $( )_e$  representam as parcelas elástica e plástica. Com essa aproximação e com os conceitos descritos na seção 6.2, é possível descrever resumidamente o modelo elastoplástico de Green-Naghdi (KHAN; HUANG, 1995):

- Energia de Helmholtz (ver equações 6.3):

$$\psi = \psi_e(\mathbf{E}_e) + \psi_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{X}, \kappa) = \psi_e(\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) + \psi_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{X}, \kappa) \quad (6.15.1)$$

- Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (ver equações 6.4):

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_e} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial \psi}{\partial (E_e)_{ij}} = \frac{\partial \psi}{\partial (E - E_p)_{ij}} \quad (6.15.2)$$

- Critério de plastificação (ver equação 6.6):

$$\Phi = \Phi(\mathbf{S}, \kappa, \mathbf{X}) \leq 0 \quad \text{ou} \quad \Phi = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}) \leq 0 \quad (6.15.3)$$

- Lei de fluxo plástico (ver equação 6.7):

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R} \quad \text{ou} \quad (\dot{\mathbf{E}}_p)_{ij} = (\mathbf{D}_p)_{ij} = \dot{\gamma} R_{ij} \quad (6.15.4)$$

- Leis de evolução do encruamento (ver equações 6.8):

$$\dot{\kappa} = \dot{\gamma} r_\kappa \quad (6.15.5)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X \quad \text{ou} \quad \dot{X}_{ij} = \dot{\gamma} (R_X)_{ij} \quad (6.15.6)$$

- Condição de complementaridade (ver equação 6.10):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (6.15.7)$$

- Condição de consistência (ver equação 6.11):

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\Phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0 \quad (6.15.8)$$

- Parâmetro escalar  $\dot{\gamma} \geq 0$  (ver equação 6.12):

$$\dot{\gamma} = - \frac{(\Phi, \mathbf{E})}{\left[ (\Phi, \mathbf{E}_p) : \mathbf{R} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.15.9)$$

- Evolução da tensão (ver equações 6.13):

$$\dot{\mathbf{S}} = \Gamma_e : \left[ \mathbf{II} - \left( \frac{\mathbf{R} \otimes (\Phi, \mathbf{E})}{\left[ (\Phi, \mathbf{E}_p) : \mathbf{R} + (\Phi, \kappa) r_\kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} \right) \right] : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.15.10)$$

$$\Gamma_e = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}_e \partial \mathbf{E}_e} \quad (6.15.11)$$

- Taxa de dissipação interna de energia (ver expressões 6.4):

$$\mathbf{D} = \left( \mathbf{S} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \mathbf{E}_p} \right) : \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \geq 0 \quad (6.15.12)$$

onde  $\Gamma_e$  é o tensor elástico de quarta ordem (4.8).

#### 6.4. Hiperelastoplasticidade

Assim como na hiperelasticidade (seção 5.1), para modelar componentes estruturais em regime de grandes deformações elastoplásticas, define-se material hiperelastoplástico (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000) como sendo um material cujo comportamento elastoplástico é descrito pelo potencial escalar energia livre de Helmholtz ( $\psi$ ). No caso hiperelastoplástico, esse potencial pode ser expresso em função da deformação de Green-Lagrange (3.17) e do conjunto de variáveis internas  $\zeta$  (SVENDSEN, 1998):

$$\psi = \psi \left( \mathbf{E}, \zeta, \dot{\mathbf{E}} \right) \quad (6.16)$$

onde  $\dot{\mathbf{E}}$  é a taxa de variação (temporal) de  $\mathbf{E}$ . No caso em que  $\psi$  não depende de  $\dot{\mathbf{E}}$  (“*rate-independent plasticity*”), a expressão (6.16) se reduz a:

$$\psi = \psi (\mathbf{E}, \zeta) \quad (6.17)$$

Ademais, de acordo com Svendsen (1998), pode-se decompor  $\psi$  nas parcelas elástica e inelástica. Nesse caso, a energia de Helmholtz  $\psi$  descreve duas parcelas da energia de deformação: a armazenada e a dissipada. Uma decomposição bastante utilizada, baseada em

modelos reológicos (DOGUI; SIDOROFF, 1985; DETTMER; REESE, 2004), é a decomposição aditiva:

$$\psi = \psi_e(\mathbf{E}_e) + \psi_i(\boldsymbol{\zeta}) = \psi_e(\mathbf{E}_e) + \psi_i(\mathbf{E}_p, \boldsymbol{\alpha}) \quad (6.18)$$

onde  $\psi_e$  e  $\psi_i$  são, respectivamente, as parcelas elástica e inelástica do potencial  $\psi$ ;  $\mathbf{E}_e$  e  $\mathbf{E}_p$  são as parcelas elástica e plástica da deformação  $\mathbf{E}$  (ver equações 3.24); e  $\boldsymbol{\alpha}$  representa o conjunto de parâmetros de encruamento (isotrópico e cinemático). Em outras palavras, segundo a equação (6.18), o comportamento elástico do material não depende das variáveis internas. Devido ao caráter reversível da deformação elástica (seção 4.3), a condição de normalização (5.6) aplica-se, apenas, à parcela elástica da energia de Helmholtz:

$$\psi_e(\mathbf{E}_e = \mathbf{O}) = 0 \quad (6.19)$$

Já a parcela inelástica ( $\psi_i$ ) corresponde, no caso elastoplástico, à energia dissipada utilizada no rearranjo molecular do material (KHAN; HUANG, 1995). Assim, é possível escrever a seguinte condição:

$$\psi_i \geq 0 \quad (6.20)$$

Em outras palavras, a energia armazenada no material, que retorna a zero quando este é descarregado, corresponde - apenas - à parcela de deformação elástica, já que a parcela inelástica de energia se dissipa.

De acordo com Khan e Huang (1995), a decomposição aditiva da deformação (ver equações 6.2 e 6.14) não é válida para análise de materiais em regime de grandes deformações. Nesse caso, é mais conveniente (SIMO; ORTIZ, 1985; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000) usar a decomposição multiplicativa do gradiente (3.11), também chamada de decomposição de Kröner-Lee (ver equação 3.23). Segundo Peric e Dettmer (2003), esse tipo de decomposição admite a existência de uma configuração intermediária (ver figura 3.3). É afirmado, em Alves (2003), que essa configuração é relaxada porque é livre de tensões, e é local porque ela é definida - apenas - na vizinhança de cada ponto material. Pode-se notar que, no caso geral (ver equação 3.24.3), a deformação total de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ) não é decomposta de forma aditiva nas parcelas elástica ( $\mathbf{E}_e$ ) e plástica ( $\mathbf{E}_p$ ), como é feito na aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3).



### 6.4.1. Relação tensão-deformação

Neste estudo, para determinar a relação hiperelastoplástica entre tensão e deformação a partir da energia livre de Helmholtz (equação 6.18), é usado um procedimento similar ao descrito na expressão 6.4 para o caso de pequenas deformações elastoplásticas. A formulação elastoplástica baseada na segunda lei da termodinâmica (MARSDEN; HUGHES, 1983) e no procedimento de Coleman-Noll (HOLZAPFEL, 2004), como é o caso do referido procedimento, é classificada de formulação termodinâmica (SVENDSEN, 1998; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000; PERIC; DETTMER, 2003; DETTMER; REESE, 2004; VLADIMIROV; PIETRYGA; REESE, 2008).

De modo similar ao caso hiperelástico, a segunda lei da termodinâmica, para o caso elastoplástico, é descrita pela seguinte inequação (ver seção 5.3):

$$D = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (6.21)$$

No caso elastoplástico, a taxa de dissipação interna de energia  $D$  pode não ser nula devido ao caráter dissipativo da deformação plástica (KHAN; HUANG, 1995). Com a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee (ver equações 3.23, 3.24 e 3.27), o termo  $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$  da expressão (6.21) resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{S} : (\mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A}) = \mathbf{S} : \left\{ \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_e^T \left[ \mathbf{D}_e + \text{sim}(\mathbf{A}_e \mathbf{L}_p \mathbf{A}_e^{-1}) \right] \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p \right\} \\ &= \mathbf{S} : (\mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p) + \mathbf{S} : \left[ \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_e^T \text{sim}(\mathbf{A}_e \mathbf{L}_p \mathbf{A}_e^{-1}) \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p \right] \\ &= \mathbf{S} : \left( \mathbf{A}_p^T \dot{\mathbf{E}}_e \mathbf{A}_p \right) + \mathbf{S} : \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e \mathbf{L}_p \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^T \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e^{-T} \mathbf{L}_p \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p) \right] \\ &= \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \dot{\mathbf{E}}_e + \mathbf{S} : \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_e \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^T \mathbf{L}_p^T \mathbf{C}_e \mathbf{A}_p) \right] \\ &= \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{1}{2} \mathbf{C}_e \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{L}_p + \frac{1}{2} \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T \mathbf{C}_e : \mathbf{L}_p^T = \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \dot{\mathbf{E}}_e + \mathbf{C}_e \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{L}_p \quad (6.22) \end{aligned}$$

onde o símbolo  $( )^{-T}$  indica a inversa da transposta de uma matriz (HOLZAPFEL, 2004).

A taxa de variação temporal da energia de Helmholtz  $\psi$ , presente na expressão (6.21), resulta em (ver equação 6.18):

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} : \dot{\mathbf{E}}_p + \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} : (\mathbf{A}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p) + \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ &= \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e + \mathbf{A}_p \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{D}_p + \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

A combinação das equações (6.21), (6.22) e (6.23) resulta na seguinte expressão para a taxa de dissipação interna:

$$\mathbf{D} = \left( \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T - \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} \right) : \dot{\mathbf{E}}_e + \mathbf{C}_e \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{L}_p - \mathbf{A}_p \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (6.24)$$

Com o procedimento de Coleman-Noll (HOLZAPFEL, 2004), pode-se demonstrar que:

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T = \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} = \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{A}_p^{-T} = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T} \quad (6.25.1)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}_e : \mathbf{L}_p - \mathbf{A}_p \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} \mathbf{A}_p^T : \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (6.25.2)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e \quad (6.25.3)$$

onde  $\mathbf{S}_e$  é um tensor análogo ao segundo tensor de Piola-Kirchhoff (ver equações 4.3); e  $\mathbf{M}_e$  é um tensor análogo ao tensor das tensões de Mandel (HOLZAPFEL, 2004). Tanto  $\mathbf{S}_e$  como  $\mathbf{M}_e$  são definidos na configuração intermediária (ver figura 3.3). Ademais, é possível demonstrar (SVENDEN, 1998) que o tensor  $\mathbf{M}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e$  é simétrico. Dessa forma, pode-se concluir (HOLZAPFEL, 2004) que  $\mathbf{M}_e : \mathbf{L}_p = \mathbf{M}_e : \mathbf{D}_p$  e que, conseqüentemente (ver equação 6.25.2):

$$\mathbf{D} = (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) : \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (6.26.1)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}_p \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{E}_p} \mathbf{A}_p^T \quad (6.26.2)$$

onde  $\boldsymbol{\chi}$  é o tensor das tensões inversas (ALVES, 2003) ou “backstress” (DETTMER; REESE, 2004), definido na configuração intermediária (ver figura 3.3).

#### 6.4.2. Superfície de Plastificação

Assim como na elastoplasticidade em pequenas deformações (ver seção 6.2) e na elastoplasticidade de Green-Naghdi (ver seção 6.3), a superfície de plastificação (ver equações 6.9 e 6.15.3) é descrita aqui para o caso hiperelastoplástico em função do tensor elástico de Mandel (6.25.3), do tensor das tensões inversas (6.26.2) e do parâmetro de encruamento isotrópico (6.8.1):

$$\Phi = f_{MX}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) - f_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.27)$$

onde  $f_{MX}$  e  $f_\kappa$  são funções escalares.

#### 6.4.3. Leis de evolução

A lei de fluxo plástico (ver equação 6.7 ou 6.15.4) para um material hiperelastoplástico é expressa aqui em termos da taxa de variação (temporal) da parcela plástica do gradiente (ver equações 3.23 e 3.27):

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p \quad (6.28.1)$$

$$\mathbf{L}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_L = \dot{\gamma} (\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_w) \Rightarrow \dot{\mathbf{A}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p = \dot{\gamma} (\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_w) \mathbf{A}_p \quad (6.28.2)$$

$$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_p \quad (6.28.3)$$

$$\mathbf{W}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_w \quad (6.28.4)$$

onde os tensores (de segunda ordem)  $\mathbf{R}_L$ ,  $\mathbf{R}_p$  e  $\mathbf{R}_w$  são os tensores que definem a “direção” do gradiente plástico da velocidade  $\mathbf{L}_p$  (3.27.3), da taxa de deformação plástica  $\mathbf{D}_p$  (3.27.6) e da taxa de rotação plástica  $\mathbf{W}_p$  (3.27.9), respectivamente.

Com relação à evolução do encruamento cinemático, devido ao fato da variável  $\chi$  (6.26.2) ser definida na configuração intermediária, é necessário (DETTMER; REESE, 2004) empregar uma taxa objetiva de variação temporal (CRISFIELD, 2000):

$$\overset{\circ}{\chi} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_\chi \quad (6.29)$$

onde  $\mathbf{R}_\chi$  é a função tensorial que estabelece a evolução de  $\chi$  (na configuração intermediária). Pode-se definir, na configuração inicial (ver figura 3.3), uma variável tensorial análoga ao tensor das tensões inversas  $\chi$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_p^{-1} \chi \mathbf{A}_p^{-T} \text{ ou } \chi = \mathbf{A}_p \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T \quad (6.30)$$

Para garantir a objetividade da taxa de variação temporal (HOLZAPFEL, 2004), pode-se adotar, por exemplo, a taxa objetiva de Jaumann (CRISFIELD, 2000):

$$\overset{\circ}{\chi} = \dot{\chi} - \mathbf{W}_p \chi + \chi \mathbf{W}_p \quad (6.31.1)$$

$$\mathbf{W}_p = \text{ant}(\mathbf{L}_p) = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_p - \mathbf{L}_p^T) = \mathbf{L}_p - \mathbf{D}_p \quad (6.31.2)$$

É possível demonstrar (DETTMER; REESE, 2004) que a combinação das expressões (6.28), (6.29), (6.30) e (6.31) resulta em:

$$\overset{\circ}{\chi} = \mathbf{A}_p \left[ \dot{\mathbf{X}} + \text{sim} \left( 2 \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X} \right) \right] \mathbf{A}_p^T \quad (6.32.1)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_p^{-1} \overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{A}_p^{-T} - \text{sim}(2\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X}) = \dot{\gamma} \left[ \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{R}_\chi \mathbf{A}_p^{-T} - \text{sim}(2\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X}) \right] = \dot{\gamma} \mathbf{R}_\chi \quad (6.32.2)$$

onde  $\mathbf{R}_\chi$  é o tensor que define a evolução da variável  $\mathbf{X}$  (na configuração inicial).

A evolução do parâmetro de encruamento isotrópico adotado neste estudo é (ver equação 6.28):

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{D}_p : \mathbf{D}_p) = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{R}_p : \mathbf{R}_p) = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{R}_p)_{ij} (\mathbf{R}_p)_{ij} = \dot{\gamma} r_\kappa \quad (6.33)$$

onde  $r_\kappa$  é função escalar que define a evolução do parâmetro  $\kappa$ . Com a adoção desse parâmetro de encruamento isotrópico, para o caso da aproximação de Green-Naghdi para pequenas deformações (ver seção 6.3), a função escalar  $r_\kappa$  (ver equação 6.15.5) é dada por

$$r_\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{R} : \mathbf{R}) \quad (\text{ver equação 6.15.4}).$$

#### 6.4.4. Determinação do multiplicador plástico

Assim como em pequenas deformações (ver seções 6.2 e 6.3), no regime de grandes deformações, a função que descreve o critério de plastificação (6.27) também deve satisfazer as condições de complementaridade e consistência (ver equações 6.10 e 6.11):

$$\dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (6.34.1)$$

$$\dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0 \quad (6.34.2)$$

De modo similar ao regime de pequenas deformações (da seção 6.2) e à aproximação de Green-Naghdi (da seção 6.3), a variável escalar  $\dot{\gamma} \geq 0$ , chamada de multiplicador plástico, é determinada pela condição de consistência (6.34.2). Para o caso em que ocorre evolução das

variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\mathbf{X}$  e  $\kappa$ ), temos  $\dot{\gamma} > 0$  e, conseqüentemente (ver expressões 6.28, 6.32.2 e 6.33):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_p} : \dot{\mathbf{A}}_p + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_p} : (\mathbf{L}_p \mathbf{A}_p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : (\dot{\gamma} \mathbf{R}_X) + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} (\dot{\gamma} r_\kappa) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_p} : (\dot{\gamma} \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : (\dot{\gamma} \mathbf{R}_X) + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} (\dot{\gamma} r_\kappa) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} + \dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_p} : (\mathbf{R}_L \mathbf{A}_p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{R}_X + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} r_\kappa \right] = 0 \Rightarrow \\ \dot{\gamma} &= - \frac{\partial \Phi / \partial \mathbf{E}}{\left[ (\partial \Phi / \partial \mathbf{A}_p) : (\mathbf{R}_L \mathbf{A}_p) + (\partial \Phi / \partial \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X + (\partial \Phi / \partial \kappa) r_\kappa \right]} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.35.1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{ij} = - \frac{\partial \Phi / \partial E_{ij}}{\left[ (\partial \Phi / \partial \mathbf{A}_p)_{kl} (\mathbf{R}_L)_{km} (\mathbf{A}_p)_{ml} + (\partial \Phi / \partial \mathbf{X})_{kl} (\mathbf{R}_X)_{kl} + (\partial \Phi / \partial \kappa) r_\kappa \right]} \quad (6.35.2)$$

#### 6.4.5. Evolução da tensão

A taxa de variação (temporal) do segundo tensor de Piola-Kirchhoff (ver equações 6.3) pode ser determinada a partir da expressão (6.25.1):

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-1}) \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \dot{\mathbf{S}}_e \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-T}) = \Gamma_{\text{hep}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.36.1)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_e = \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e = \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e \partial \mathbf{E}_e} : \dot{\mathbf{E}}_e = \Gamma_e : \dot{\mathbf{E}}_e \quad (6.36.2)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1}] = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-T}) (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1} + \mathbf{A}_p^{-1} (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}_p) \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-1}) \quad (6.36.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-1}) = \dot{\mathbf{A}}_p^{-1} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial (\mathbf{A}_p)} : \frac{\partial (\mathbf{A}_p)}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial (\mathbf{A}_p)} : \dot{\mathbf{A}}_p \quad (6.36.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_p^{-T}) = \dot{\mathbf{A}}_p^{-T} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial (\mathbf{A}_p^T)} : \frac{\partial (\mathbf{A}_p^T)}{\partial t} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial (\mathbf{A}_p^T)} : \dot{\mathbf{A}}_p^T \quad (6.36.5)$$

onde o tensor de quarta ordem  $\Gamma_{\text{hep}} = \partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{E}$  é o operador tangente consistente elastoplástico (SIMO; TAYLOR, 1985; CRISFIELD, 2000). As taxas presentes nas equações (6.36) são dadas por (ver expressões 6.28 e 6.35):

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p = \left( \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p = \left[ (\mathbf{R}_L \mathbf{A}_p) \otimes \mathbf{B} \right] : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.37.1)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p^T = \mathbf{A}_p^T \mathbf{L}_p^T = \dot{\gamma} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_L^T = \left( \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_L^T = \left[ (\mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_L^T) \otimes \mathbf{B} \right] : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.37.2)$$

$$\mathbf{A}_p^{-T} \dot{\mathbf{E}}_p \mathbf{A}_p^{-1} = \mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_p = \left( \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{R}_p = (\mathbf{R}_p \otimes \mathbf{B}) : \dot{\mathbf{E}} \quad (6.37.3)$$

As derivadas da inversa ( $\partial \mathbf{A}_p^{-1} / \partial \mathbf{A}_p$  e  $\partial \mathbf{A}_p^{-T} / \partial \mathbf{A}_p^T$ ) podem ser encontradas, por exemplo, em Holzapfel (2004), e o cálculo do operador tangente consistente hiperelastoplástico  $\Gamma_{\text{hep}}$  (ver expressão 6.36.1) é dado no Apêndice D desta tese.

## 6.5. Modelos adotados

Neste item, são descritos os modelos elastoplásticos implementados nos códigos computacionais desenvolvidos neste estudo.

### 6.5.1. Leis constitutivas elásticas

Com relação aos modelos para materiais elastoplásticos usados neste estudo, quatro relações, análogas às leis hiperelásticas (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5), foram adotadas. Em todas essas relações, a parcela elástica da energia de Helmholtz é descrita em função da parcela elástica de deformação (ver equação 6.18). O primeiro modelo é a lei elastoplástica de Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2):

$$\Psi_{SVK}^{EP} = \Psi_{SVK}^{EP}(\mathbf{E}_e) = \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(\mathbf{E}_e)]^2 + \mu [\text{tr}(\mathbf{E}_e^2)] \quad (6.38)$$

O segundo modelo é a lei elastoplástica de Rivlin-Saunders (ver equações 5.3):

$$\Psi_{RS}^{EP} = \Psi_{RS}^{EP} \left[ \mathbf{J}_e, (\mathbf{i}_1^{\text{iso}})_e, (\mathbf{i}_2^{\text{iso}})_e \right] = U_{\text{vol}}(\mathbf{J}_e) + \Psi_{RS}^{\text{iso}} \left[ (\mathbf{i}_1^{\text{iso}})_e, (\mathbf{i}_2^{\text{iso}})_e \right] \quad (6.39)$$

O terceiro modelo é a lei elastoplástica de Hartmann-Neff (ver equações 5.4):

$$\Psi_{HN}^{EP} = \Psi_{HN}^{EP} \left[ \mathbf{J}_e, (\mathbf{i}_1^{\text{iso}})_e, (\mathbf{i}_2^{\text{iso}})_e \right] = U_{\text{vol}}(\mathbf{J}_e) + \Psi_{HN}^{\text{iso}} \left[ (\mathbf{i}_1^{\text{iso}})_e, (\mathbf{i}_2^{\text{iso}})_e \right] \quad (6.40)$$

Por fim, o quarto modelo é a lei elastoplástica neo-Hookeana (ver equações 5.5):

$$\Psi_{nH}^{EP} = \Psi_{nH}^{EP} \left[ \mathbf{J}_e, (\mathbf{i}_1)_e \right] = k [\ln(\mathbf{J}_e)]^2 + \mu \left[ (\mathbf{i}_1)_e - 3 - 2 \ln(\mathbf{J}_e) \right] \quad (6.41)$$



Para a decomposição aditiva da deformação (ver seção 6.3), os valores de  $\mathbf{C}_e$ ,  $J_e$ ,  $(i_1^{\text{iso}})_e$ ,  $(i_2^{\text{iso}})_e$  e  $i_1(\mathbf{C}_e)$  são dados pelas expressões a seguir (ver equações 3.16, 3.17 e 3.19):

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{C}_e - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) - \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{C}_p - \mathbf{I}) \right] \Rightarrow \mathbf{C}_e = \mathbf{C} - \mathbf{C}_p + \mathbf{I} \quad (6.42.1)$$

$$J_e^2 = \det(\mathbf{C}_e) = \det(\mathbf{C}) - \det(\mathbf{C}_p) + \det(\mathbf{I}) \Rightarrow J_e^2 = J^2 - J_p^2 + 1 \quad (6.42.2)$$

$$i_1^{\text{iso}}(\mathbf{C}_e) = J_e^{2/3} \text{tr}(\mathbf{C}_e) = (J^2 - J_p^2 + 1)^{-1/3} \text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_p + \mathbf{I}) \quad (6.42.3)$$

$$i_2^{\text{iso}}(\mathbf{C}_e) = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C}_e^{\text{iso}})^2 + \text{tr} \left[ (\mathbf{C}_e^{\text{iso}})^2 \right] \right\} = \frac{J_e^{-4/3}}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C}_e)^2 + \text{tr}(\mathbf{C}_e^2) \right] =$$

$$\frac{(J^2 - J_p^2 + 1)^{-2/3}}{2} \left\{ (\text{tr} \mathbf{C} - \text{tr} \mathbf{C}_p + 3)^2 + \text{tr} \left[ (\mathbf{C} - \mathbf{C}_p + \mathbf{I})^2 \right] \right\} \quad (6.42.4)$$

$$i_1(\mathbf{C}_e) = \text{tr}(\mathbf{C}_e) = \text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{C}_p + \mathbf{I}) = \text{tr} \mathbf{C} - \text{tr} \mathbf{C}_p + 3 \quad (6.42.5)$$

Já para os modelos hiperelastoplásticos (ver seção 6.4), devem ser usadas as expressões gerais (3.23) e (3.24).

### 6.5.2. Critério de plastificação

Neste estudo, foi escolhido o critério (tridimensional) de von-Mises (CRISFIELD, 2000). Para o caso da decomposição aditiva de Green-Naghdi, apresentada na seção 6.3, o critério de plastificação é dado por (ver equação 6.15.3):

$$\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \kappa) = \mathbf{S}_{\text{ef}}(\mathbf{S}, \mathbf{X}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\kappa}(\kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\kappa}(\kappa) \leq 0 \quad (6.43.1)$$

$$\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| = \sqrt{[\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) : \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})]} = \sqrt{[\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})]_{ij} [\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})]_{ij}} \quad (6.43.2)$$

$$\text{dev}(\bullet) = (\bullet) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bullet) \mathbf{I} \text{ ou } [\text{dev}(\bullet)]_{ij} = (\bullet)_{ij} - \frac{1}{3} (\bullet)_{kk} \delta_{ij} \quad (6.43.3)$$

onde  $\sigma_\kappa$  é a tensão limite de escoamento, descrita em função do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$ ;  $\text{dev}(\bullet)$  denota a parcela desviadora (PROENÇA, 2006) de um tensor de segunda ordem; e o símbolo  $\|\bullet\|$  representa a norma de um tensor de segunda ordem (HOLZAPFEL, 2004).

Para o caso hiperelastoplástico (ver expressão 6.27), o critério (tridimensional) de von-Mises é dado por (DETTMER; REESE, 2004):

$$\Phi(\mathbf{M}_e, \boldsymbol{\chi}, \kappa) = \mathbf{M}_e^{\text{ef}}(\mathbf{M}_e, \boldsymbol{\chi}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(\kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.44)$$

### 6.5.3. Lei de fluxo

A lei de plastificação empregada neste estudo é associativa, isto é, essa lei obedece à regra da normalidade (PROENÇA, 2006). Para a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), a lei de fluxo associativa é dada por (ver equação 6.15.4):

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}}_p = \gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \quad (6.45)$$

Esta condição é chamada de regra da normalidade, pois a variação da deformação plástica ( $\dot{\mathbf{E}}_p$ ) passa a ter a direção da normal à superfície de plastificação (PROENÇA, 2006). No caso da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), a regra da normalidade é aplicada ao tensor  $\mathbf{R}_p$  (ver equação 6.28.3). Assim, a lei de fluxo é dada por (VLADIMIROV; PIETRYGA; REESE, 2008):

$$\mathbf{R}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \Rightarrow \mathbf{D}_p = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \quad (6.46)$$

Para definir a evolução da parcela plástica do gradiente ( $\mathbf{A}_p$ ), resta definir o tensor  $\mathbf{R}_w$  (ver equações 6.28). Neste estudo, foi empregada a seguinte relação (ETEROVIC; BATHE, 1991):

$$\mathbf{W}_p = \mathbf{R}_w = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{R}_L = \mathbf{R}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \Rightarrow \dot{\mathbf{A}}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \mathbf{A}_p \quad (6.47)$$

A derivada da norma de um tensor, que aparece na lei de fluxo associativa com critério de von-Mises (ver equações 6.43 ou 6.44), é dada por:

$$\frac{\partial \|\bullet\|}{\partial (\bullet)} = \frac{\partial}{\partial (\bullet)} \left[ \sqrt{(\bullet) : (\bullet)} \right] = \frac{(\bullet)}{\|\bullet\|} \quad (6.48)$$

onde o símbolo  $\bullet$  denota um tensor de segunda ordem qualquer.

#### 6.5.4. Leis de encruamento isotrópico

Para estabelecer a função  $\sigma_\kappa(\kappa)$  (ver equações 6.43 ou 6.44), foram adotados três modelos de encruamento isotrópico: polinomial, Swift e Voce. Para a lei polinomial, a função escalar  $\sigma_\kappa(\kappa)$  é dada por:

$$\sigma_\kappa(\kappa) = \sum_{n=0}^{NC-1} \left[ a_n (\kappa)^n \right] \quad (6.49)$$

onde NC é o número de coeficientes do material ( $a_n$ ).

Para a lei de Swift, a função escalar  $\sigma_\kappa(\kappa)$  é dada por (ALVES, 2003):

$$\sigma_\kappa(\kappa) = K(E_0 + \kappa)^n \quad (6.50)$$

onde K,  $E_0$  e n são coeficientes do material.

Por fim, a lei de encruamento isotrópico de Voce é expressa por (ALVES, 2003):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = \sigma_0 + (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) \left[ 1 - e^{(-C_Y \kappa)} \right] \quad (6.51)$$

onde  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{\text{sat}}$  e  $C_Y$  são coeficientes do material.

Para o critério (tridimensional) de von-Mises (equações 6.43 ou 6.44), é possível mostrar a seguinte relação:

$$\frac{\partial \|\text{dev}(\bullet)\|}{\partial(\bullet)} \cdot \frac{\partial \|\text{dev}(\bullet)\|}{\partial(\bullet)} = \frac{\text{dev}(\bullet)}{\|\text{dev}(\bullet)\|} \cdot \frac{\text{dev}(\bullet)}{\|\text{dev}(\bullet)\|} = \frac{\text{dev}(\bullet) : \text{dev}(\bullet)}{\|\text{dev}(\bullet)\|^2} = 1 \quad (6.52)$$

Assim, a evolução do parâmetro de encruamento isotrópico, para a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e para a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), é dada por (ver equação 6.33):

$$\dot{\kappa} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} = \dot{\gamma} r_{\kappa} \Rightarrow r_{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.53)$$

#### 6.5.5. Leis de encruamento cinemático

Com relação ao encruamento cinemático, foram adotados três modelos para definir a evolução do tensor das tensões inversas, representado por  $\mathbf{X}$  (ver equações 6.15.6 e 6.29): os modelos lineares de Prager e de Ziegler, e o modelo não linear de Armstrong-Frederick. Para o modelo de Prager, é usada a seguinte expressão (ALVES, 2003):

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X = c \mathbf{D}_p = c \dot{\gamma} \mathbf{R}_p \Rightarrow \mathbf{R}_X = c \mathbf{R}_p \quad (6.54)$$

onde  $c$  é um coeficiente do material.

Para a lei de Ziegler, a evolução de  $\mathbf{X}$  é dada por (ALVES, 2003):

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X = \dot{\gamma} (\mathbf{S} - \mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{R}_X = \mathbf{S} - \mathbf{X} \quad (6.55)$$

Por fim, para o modelo não linear de Armstrong-Frederick, a evolução de  $\mathbf{X}$  é expressa por (DETTMER; REESE, 2004):

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X = c \mathbf{D}_p - \dot{\gamma} b \mathbf{X} = c \dot{\gamma} \mathbf{R}_p - \dot{\gamma} b \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{R}_X = c \mathbf{R}_p - b \mathbf{X} \quad (6.56)$$

onde  $c$  e  $b$  são coeficientes do material. Pode-se notar que, quando  $b=0$ , a lei de Armstrong-Frederick se reduz à lei de Prager (6.54).

As expressões (6.54), (6.55) e (6.56) também podem ser usadas no caso da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4). Basta substituir a taxa  $\dot{\mathbf{X}}$  pela taxa objetiva  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}$ , e o tensor  $\mathbf{R}_X$  pelo tensor  $\mathbf{R}_\chi$ . O tensor  $\mathbf{R}_X$ , no caso hiperelastoplástico, é calculado pela equação (6.32.2).

## 6.6. Previsão elástica e correção plástica

Segundo Proença (2006), na análise de materiais elastoplásticos, é necessário empregar um procedimento incremental para verificação da lei constitutiva. Isso porque a variação das variáveis internas (deformação plástica e parâmetros de encruamento) é dada na forma incremental (ver equações 6.15.4, 6.15.5 e 6.15.6, por exemplo). No regime elastoplástico, além das equações de equilíbrio (4.9), os estados de deformação e de tensão devem satisfazer o critério de plastificação, e as condições de complementaridade e de consistência (ver equações 6.15.3, 6.15.7 e 6.15.8, por exemplo).

No procedimento incremental adotado neste estudo, são conhecidas as seguintes variáveis mecânicas no início do incremento: deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (3.17); parcela plástica de deformação  $\mathbf{E}_p$  (ver equação 6.14 ou 3.24.3); parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (ver equação 6.15.5 ou 6.61); e parâmetro de encruamento cinemático  $\mathbf{X}$  (ver equação 6.15.6 ou 6.30). No presente estudo, tais variáveis mecânicas no início e no fim de cada incremento são representadas por  $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}\}_{(0)}$  e  $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}\}_{(1)}$ , respectivamente.

Sabe-se que o conjunto de variáveis  $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}\}_{(0)}$  satisfaz tanto o equilíbrio de forças (4.9) como o critério de plastificação (6.15.3) ou (6.27). O objetivo da presente análise é encontrar o novo conjunto de variáveis  $\{\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}\}_{(1)}$  que satisfaça tais condições ao final do incremento. Como as leis de evolução das variáveis plásticas  $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$  (ver equações 6.15.4, 6.15.5 e 6.15.6) são dadas na forma de taxas, elas permitem calcular as variações infinitesimais de tais variáveis ( $d\mathbf{E}_p$ ,  $d\kappa$  e  $d\mathbf{X}$ ). Assim, para encontrar os valores correspondentes ao final do incremento  $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(1)} - \mathbf{E}_{(0)}$ , essas variações devem ser integradas ao longo desse incremento:

$$\Delta\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{p(1)} - \mathbf{E}_{p(0)} = \int_{\mathbf{E}_p} d\mathbf{E}_p = \int_{\mathbf{E}_{(0)}}^{\mathbf{E}_{(1)}} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} \right) \quad (6.57.1)$$

$$\Delta\kappa = \kappa_{(1)} - \kappa_{(0)} = \int_{\kappa} d\kappa = \int_{\mathbf{E}_{(0)}}^{\mathbf{E}_{(1)}} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} \right) \quad (6.57.2)$$

$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{X}_{(0)} = \int_{\mathbf{X}} d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{E}_{(0)}}^{\mathbf{E}_{(1)}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} \right) \quad (6.57.3)$$

Para realizar estas integrações, surgem dois problemas: não se conhece previamente a evolução da deformação ao longo do incremento  $\Delta\mathbf{E}$ ; e as leis de evolução ( $d\mathbf{E}_p/d\mathbf{E}$ ,  $d\kappa/d\mathbf{E}$  e  $d\mathbf{X}/d\mathbf{E}$ ) dependem, no caso geral, das variáveis mecânicas  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ , as quais variam ao longo do incremento  $\Delta\mathbf{E}$ . Para resolver tais problemas, pode-se estimar a deformação ao final do incremento ( $\mathbf{E}_{(1)}$ ) e atualizar as variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) de modo a satisfazer tanto o equilíbrio de forças como o critério de plastificação. No presente estudo, é empregado o algoritmo de previsão elástica e correção plástica (CRISFIELD, 2000). Em outras palavras, a verificação do modelo constitutivo elastoplástico se dá aqui em duas etapas. Na etapa de previsão elástica, é assumido que, ao longo do passo ou do incremento finito, as variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) não variam. Caso o critério de plastificação seja satisfeito ao final do passo ( $\Phi \leq 0$ ), então a hipótese de incremento puramente elástico ( $\Delta\mathbf{E}_p = \Delta\kappa = \Delta\mathbf{X} = 0$ ) se confirma. Porém, se o critério de plastificação for desobedecido ao final do passo ( $\Phi > 0$ ), deve-se realizar a correção das variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ),

também chamada de correção plástica. Para isso, devem ser determinados os incrementos  $\Delta \mathbf{E}_p$ ,  $\Delta \kappa$  e  $\Delta \mathbf{X}$  de forma que  $\Phi = 0$ . Essa determinação é feita por meio da integração das equações constitutivas referentes à lei de fluxo plástico (6.15.4) ou (6.28), e à evolução do encruamento (ver equações 6.15.5 e 6.15.6, ou 6.32.2 e 6.33). De acordo com Belytschko, Liu e Moran (2000), o procedimento numérico para tal integração é chamado de algoritmo de integração constitutiva ou algoritmo de atualização da tensão.

O algoritmo de correção plástica é chamado de algoritmo de retorno. São usados, neste estudo, os algoritmos de retorno de Euler implícito e explícito (CRISFIELD, 2000; BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Em ambos os casos, a condição  $\Phi = 0$  é imposta ao final do passo (ou do incremento). No método explícito, as funções que descrevem a variação das variáveis plásticas são assumidas como sendo iguais aos seus respectivos valores no início do incremento. Já no método implícito, assume-se que tais funções são iguais aos seus respectivos valores ao final do incremento. As equações empregadas para os retornos implícito e explícito, para os casos da decomposição aditiva de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), são dadas a seguir.

### 6.6.1. Retorno para a aproximação de Green-Naghdi

Na etapa de previsão elástica, as variáveis plásticas não variam ao longo do passo, isto é (ver expressões 6.15):

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E}_n \quad (6.58.1)$$

$$\left( \mathbf{E}_p \right)_{n+1} = \left( \mathbf{E}_p \right)_n \quad (6.58.2)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n \quad (6.58.3)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n \quad (6.58.4)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(t)} = \mathbf{S} \left[ \mathbf{E}_{n+1}, (\mathbf{E}_p)_n \right] \quad (6.58.5)$$

$$\Phi_{n+1}^{(t)} = \Phi \left[ \mathbf{S}_{n+1}^{(t)}, \kappa_n, \mathbf{X}_n \right] \quad (6.58.6)$$

onde o símbolo  $( )^{(t)}$  indica que a grandeza faz parte da tentativa elástica; e os índices  $n$  e  $n+1$  denotam, respectivamente, o início e o final do incremento  $\Delta \mathbf{E}$ . Caso  $\Phi_{n+1}^{(t)} > 0$ , realiza-se a correção plástica, por meio do algoritmo de retorno. De acordo com Crisfield (2000), o algoritmo generalizado do retorno de Euler, no caso da aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), é dado pela expressão a seguir (ver expressões 6.15.4, 6.15.5 e 6.15.6):

$$(\mathbf{E}_p)_{n+1} = (\mathbf{E}_p)_n + \Delta\gamma \left[ (1-\eta)(\mathbf{R})_n + \eta(\mathbf{R})_{n+1} \right] \quad (6.59.1)$$

$$(\kappa)_{n+1} = (\kappa)_n + \Delta\gamma \left[ (1-\eta)(r_\kappa)_n + \eta(r_\kappa)_{n+1} \right] \quad (6.59.2)$$

$$(\mathbf{X})_{n+1} = (\mathbf{X})_n + \Delta\gamma \left[ (1-\eta)(\mathbf{R}_x)_n + \eta(\mathbf{R}_x)_{n+1} \right] \quad (6.59.3)$$

onde  $\Delta\gamma$  é a variação do multiplicador plástico ( $\dot{\gamma}$ ) ao longo do passo; os índices  $n$  e  $n+1$  denotam, respectivamente, o início e o final do passo; e  $\eta$  é um parâmetro. Segundo Alves (2003), a escolha do parâmetro  $\eta$  influencia a precisão do cálculo do incremento de deformação plástica  $\Delta \mathbf{E}_p = (\mathbf{E}_p)_{n+1} - (\mathbf{E}_p)_n$ . Quando  $\eta = 0$ , o retorno é chamado de totalmente explícito (ALVES, 2003) ou de “*forward-Euler*” (CRISFIELD, 2000). Quando  $\eta = 1$ , o retorno é chamado de totalmente implícito (ALVES, 2003) ou de “*backward-Euler*” (CRISFIELD, 2000). Independente do valor atribuído ao parâmetro  $\eta$ , a deformação total ( $\mathbf{E}$ ), estimada na etapa de previsão elástica, se mantém constante ao longo da correção plástica.

Para o retorno explícito ( $\eta = 0$ ), as expressões resultantes para atualização plástica são (ver equações 6.59):

$$(\mathbf{E}_p)_{n+1} = (\mathbf{E}_p)_n + \Delta\gamma(\mathbf{R})_n \quad (6.60.1)$$

$$(\kappa)_{n+1} = (\kappa)_n + \Delta\gamma(r_\kappa)_n \quad (6.60.2)$$



$$(\mathbf{X})_{n+1} = (\mathbf{X})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_n \quad (6.60.3)$$

$$\Phi_n + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_p} : \Delta\mathbf{E}_p + \frac{\partial\Phi}{\partial\kappa} \Delta\kappa + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} : \Delta\mathbf{X} = 0 \Rightarrow$$

$$\Phi[\mathbf{E}_{n+1}, (\mathbf{E}_p)_n, \kappa_n, \mathbf{X}_n] + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_p} : \Delta\gamma(\mathbf{R})_n + \frac{\partial\Phi}{\partial\kappa} \Delta\gamma(r_\kappa)_n + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} : \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\gamma = - \frac{\Phi[\mathbf{E}_{n+1}, (\mathbf{E}_p)_n, \kappa_n, \mathbf{X}_n]}{\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{E}_p} : (\mathbf{R})_n + \frac{\partial\Phi}{\partial\kappa} (r_\kappa)_n + \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} : (\mathbf{R}_X)_n} \quad (6.60.4)$$

A solução consiste em determinar  $\Delta\gamma$ , atualizar as variáveis plásticas  $(\mathbf{E}_p)_{n+1}$ ,  $(\kappa)_{n+1}$  e  $(\mathbf{X})_{n+1}$ , e atualizar as funções  $(\mathbf{R})_n$ ,  $(r_\kappa)_n$  e  $(\mathbf{R}_X)_n$  até que  $\Phi_{n+1} = \Phi[\mathbf{E}_{n+1}, (\mathbf{E}_p)_{n+1}, \kappa_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1}] = 0$ . As derivadas da função escalar  $\Phi$  em relação às variáveis plásticas  $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ , para os modelos elastoplásticos adotados (ver seção 6.5), são dadas no Apêndice E.

Para o retorno implícito de Euler ( $\eta=1$ ), as expressões para atualização plástica resultam em (ver equações 6.59):

$$(\mathbf{E}_p)_{n+1} = (\mathbf{E}_p)_n + \Delta\gamma(\mathbf{R})_{n+1} \quad (6.61.1)$$

$$(\kappa)_{n+1} = (\kappa)_n + \Delta\gamma(r_\kappa)_{n+1} \quad (6.61.2)$$

$$(\mathbf{X})_{n+1} = (\mathbf{X})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{n+1} \quad (6.61.3)$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi[\mathbf{E}_{n+1}, (\mathbf{E}_p)_{n+1}, \kappa_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1}] = 0 \quad (6.61.4)$$

Como as variáveis plásticas  $(\mathbf{E}_p)$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$  e as funções que estabelecem as leis de evolução  $(\mathbf{R})$ ,  $r_\kappa$  e  $(\mathbf{R}_X)$  não são conhecidas ao final do passo  $(n+1)$ , utiliza-se aqui o método de Newton-Raphson (ver seção 4.6). Para isso, deve ser calculado o seguinte vetor resíduo:

$$\mathbf{r}^T = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \quad (6.62.1)$$

$$\mathbf{r}_1 = \left\{ \begin{array}{l} -(\mathbf{E}_p)_{11} + [(\mathbf{E}_p)_{11}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{11}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{12} + [(\mathbf{E}_p)_{12}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{12}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{13} + [(\mathbf{E}_p)_{13}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{13}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{21} + [(\mathbf{E}_p)_{21}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{21}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{22} + [(\mathbf{E}_p)_{22}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{22}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{23} + [(\mathbf{E}_p)_{23}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{23}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{31} + [(\mathbf{E}_p)_{31}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{31}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{32} + [(\mathbf{E}_p)_{32}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{32}) \\ -(\mathbf{E}_p)_{33} + [(\mathbf{E}_p)_{33}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{33}) \end{array} \right\} \quad (6.62.2)$$

$$\mathbf{r}_2 = -\kappa + \kappa_n + (\Delta\gamma)\mathbf{r}_\kappa \quad (6.62.3)$$

$$\mathbf{r}_3 = \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{X}_{11} + (\mathbf{X}_{11})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{11} \\ -\mathbf{X}_{12} + (\mathbf{X}_{12})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{12} \\ -\mathbf{X}_{13} + (\mathbf{X}_{13})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{13} \\ -\mathbf{X}_{21} + (\mathbf{X}_{21})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{21} \\ -\mathbf{X}_{22} + (\mathbf{X}_{22})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{22} \\ -\mathbf{X}_{23} + (\mathbf{X}_{23})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{23} \\ -\mathbf{X}_{31} + (\mathbf{X}_{31})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{31} \\ -\mathbf{X}_{32} + (\mathbf{X}_{32})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{32} \\ -\mathbf{X}_{33} + (\mathbf{X}_{33})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{33} \end{array} \right\} \quad (6.62.4)$$

$$\mathbf{r}_4 = \Phi \quad (6.62.5)$$

Nestas expressões, o índice  $n+1$  foi eliminado, e as variáveis com índice  $n$  são fixas. Se o vetor resíduo ( $\mathbf{r}$ ) não for suficientemente pequeno, deve-se determinar um novo vetor  $\mathbf{z}^T = \{\mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X}, \Delta\gamma\}$  via expansão em série de Taylor e linearização:

$$\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{z} = - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (6.63)$$

Esse vetor  $\mathbf{z}$  é atualizado até que o resíduo (6.62) seja suficientemente pequeno. As derivadas do resíduo ( $\mathbf{r}$ ) em relação ao vetor  $\mathbf{z}$ , para os modelos elastoplásticos adotados (ver seção 6.5), são dadas no Apêndice E.

### 6.6.2. Retorno para a hiperelastoplasticidade

No caso da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), o retorno explícito de Euler ( $\eta = 0$ ) é realizado com as seguintes expressões (ver equações 6.28, 6.32.2, 6.33 e 6.60):

$$(\mathbf{A}_p)_{n+1} = (\mathbf{A}_p)_n + \Delta\gamma \left\{ [(\mathbf{R}_p)_n + (\mathbf{R}_w)_n] (\mathbf{A}_p)_n \right\} = (\mathbf{A}_p)_n + \Delta\gamma (\mathbf{R}_{AP})_n \quad (6.64.1)$$

$$(\kappa)_{n+1} = (\kappa)_n + \Delta\gamma (r_\kappa)_n \quad (6.64.2)$$

$$(\mathbf{X})_{n+1} = (\mathbf{X})_n + \Delta\gamma (\mathbf{R}_X)_n \quad (6.64.3)$$

Analogamente ao caso da aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.6.1), a solução consiste em determinar os valores de  $\Delta\gamma$ ,  $(\mathbf{A}_p)_{n+1}$ ,  $(\kappa)_{n+1}$  e  $(\mathbf{X})_{n+1}$  de forma a satisfazer

$$\Phi_{n+1} = \Phi \left[ \mathbf{A}_{n+1}, (\mathbf{A}_p)_{n+1}, \kappa_{n+1}, \mathbf{X}_{n+1} \right] = 0.$$

Para o retorno explícito ( $\eta = 0$ ), basta substituir, nas expressões (6.60),  $\mathbf{E}_p$  por  $\mathbf{A}_p$ , e  $\mathbf{R}$  por  $\mathbf{R}_{AP} = \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p$ . Já para o retorno implícito de Euler ( $\eta = 1$ ), a correção plástica na hiperelastoplasticidade é realizada com as seguintes equações:

$$\mathbf{r}^T = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \quad (6.65.1)$$

$$\mathbf{r}_1 = \left\{ \begin{array}{l} -(\mathbf{A}_p)_{11} + [(\mathbf{A}_p)_{11}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{11} \\ -(\mathbf{A}_p)_{12} + [(\mathbf{A}_p)_{12}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{12} \\ -(\mathbf{A}_p)_{13} + [(\mathbf{A}_p)_{13}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{13} \\ -(\mathbf{A}_p)_{21} + [(\mathbf{A}_p)_{21}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{21} \\ -(\mathbf{A}_p)_{22} + [(\mathbf{A}_p)_{22}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{22} \\ -(\mathbf{A}_p)_{23} + [(\mathbf{A}_p)_{23}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{23} \\ -(\mathbf{A}_p)_{31} + [(\mathbf{A}_p)_{31}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{31} \\ -(\mathbf{A}_p)_{32} + [(\mathbf{A}_p)_{32}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{32} \\ -(\mathbf{A}_p)_{33} + [(\mathbf{A}_p)_{33}]_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_{AP})_{33} \end{array} \right\} \quad (6.65.2)$$

$$\mathbf{r}_2 = -\kappa + \kappa_n + (\Delta\gamma)\mathbf{r}_\kappa \quad (6.65.3)$$

$$\mathbf{r}_3 = \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{X}_{11} + (\mathbf{X}_{11})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{11} \\ -\mathbf{X}_{12} + (\mathbf{X}_{12})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{12} \\ -\mathbf{X}_{13} + (\mathbf{X}_{13})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{13} \\ -\mathbf{X}_{21} + (\mathbf{X}_{21})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{21} \\ -\mathbf{X}_{22} + (\mathbf{X}_{22})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{22} \\ -\mathbf{X}_{23} + (\mathbf{X}_{23})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{23} \\ -\mathbf{X}_{31} + (\mathbf{X}_{31})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{31} \\ -\mathbf{X}_{32} + (\mathbf{X}_{32})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{32} \\ -\mathbf{X}_{33} + (\mathbf{X}_{33})_n + \Delta\gamma(\mathbf{R}_X)_{33} \end{array} \right\} \quad (6.65.4)$$

$$\mathbf{r}_4 = \Phi \quad (6.65.5)$$

$$\mathbf{z}^T = \{\mathbf{A}_p, \kappa, \mathbf{X}, \Delta\gamma\} \quad (6.65.6)$$

$$\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \cdot \Delta \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{z} = - \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (6.65.7)$$

onde as variáveis com índice  $n$  são fixas. As derivadas do resíduo ( $\mathbf{r}$ ) em relação ao vetor  $\mathbf{z}$  são fornecidas no Apêndice E.

### 6.7. Formulação para barras prismáticas sob tração uniaxial

Neste item, para mostrar a aplicação da presente formulação elastoplástica a um caso particular, são descritas as formulações para barras prismáticas sob tração uniaxial (ver figura 6.1) em regimes elástico e elastoplástico, para a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e para a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4).

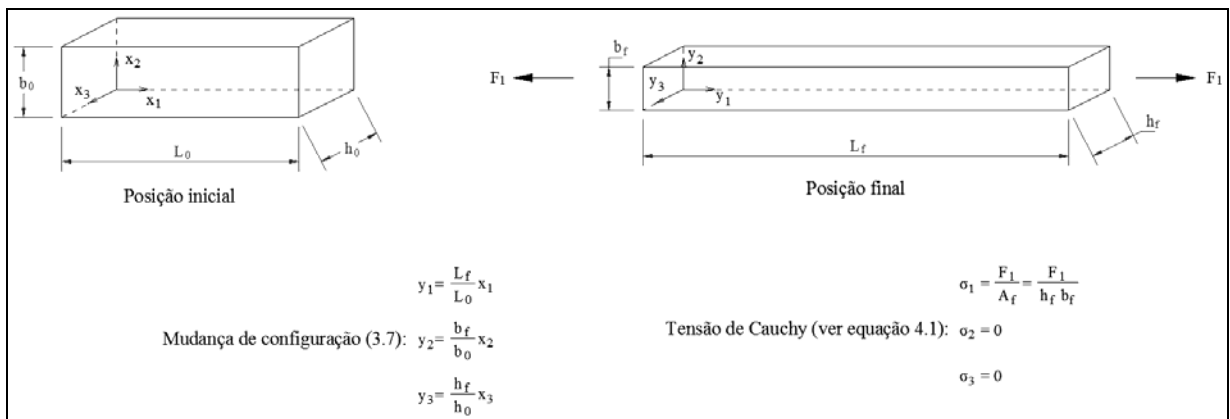


Figura 6.1. Barra prismática sob tração uniaxial. Os campos vetoriais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são, respectivamente, os vetores posição inicial e final (ver seção 3.1).  $F_1$  é a força aplicada na direção longitudinal ( $x_1$  ou  $y_1$ ), com distribuição uniforme ao longo da seção transversal cuja área final é  $A_f$ .

Considerando a mudança de configuração da barra da figura 6.1, o gradiente (3.11), o campo de deslocamento (3.9) e a deformação de Green-Lagrange (3.17) resultantes são:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f/L_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_f/b_0 & 0 \\ 0 & 0 & h_f/h_0 \end{bmatrix} \quad (6.66.1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{cases} = \begin{cases} y_1(\mathbf{x}) - x_1 \\ y_2(\mathbf{x}) - x_2 \\ y_3(\mathbf{x}) - x_3 \end{cases} = \begin{cases} \left( \frac{L_f}{L_0} - 1 \right) x_1 \\ \left( \frac{b_f}{b_0} - 1 \right) x_2 \\ \left( \frac{h_f}{h_0} - 1 \right) x_3 \end{cases} \quad (6.66.2)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{b_f}{b_0} \right)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{h_f}{h_0} \right)^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (6.66.3)$$

Pode-se notar, na expressão (6.66.2), que a componente de deslocamento  $u_1$  é nula para a face com coordenada  $x_1 = 0$ , a componente  $u_2$  é nula para a face com coordenada  $x_2 = 0$ , e a componente  $u_3$  é nula para a face com coordenada  $x_3 = 0$ .

Em relação ao campo de tensões, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, representado por  $\mathbf{S}$ , resulta em (ver expressões 3.13 e 4.3.1):

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^{-T} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \right) \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

De acordo com a figura 6.1, a componente do vetor tensão de Cauchy  $t_1$  possui o mesmo sentido da força aplicada  $F_1$ , isto é,  $t_1$  é positiva para as faces cujo vetor normal unitário é  $\mathbf{n}^T = \{1, 0, 0\}$ , e é negativa para as faces com  $\mathbf{n}^T = \{-1, 0, 0\}$ . Assim, segundo o teorema da tensão de Cauchy (4.1),  $t_1 = \sigma_1 n_1$  e, assim, a componente de tensão  $\sigma_1$  é sempre positiva.

Com a expressão (6.66.1), é possível mostrar as seguintes relações:

$$L_f = \lambda_1 L_0 \quad (6.68.1)$$

$$b_f = \lambda_2 b_0 \quad (6.68.2)$$

$$h_f = \lambda_3 h_0 \quad (6.68.3)$$

onde as dimensões iniciais ( $L_0$ ,  $b_0$  e  $h_0$ ) e finais ( $L_f$ ,  $b_f$  e  $h_f$ ) da barra prismática são ilustradas na figura 6.1. Com essas equações e com o resultado da expressão (6.67), pode-se relacionar o único valor não nulo do segundo tensor de Piola-Kirchhoff ( $S_1$ ) com a força uniformemente distribuída aplicada na direção longitudinal ( $F_1$ ), mostrada na figura 6.1:

$$S_1 = \left( \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \right) \sigma_1 = \left( \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \right) \left( \frac{F_1}{\lambda_2 \lambda_3 b_0 h_0} \right) = \frac{F_1}{\lambda_1 A_0} \quad \text{ou} \quad F_1 = S_1 \lambda_1 A_0 \quad (6.69)$$

onde  $A_0$  é a área inicial da seção transversal.

Para a barra da figura 6.1, a relação entre suas dimensões iniciais e finais com a deformação, e a relação entre a medida de tensão adotada com a força aplicada são definidas, respectivamente, nas equações (6.66) e (6.69). Resta estabelecer a relação entre tensão e deformação, ou entre a força aplicada e as dimensões iniciais e finais da barra. Para isso, deve ser definida a lei constitutiva do material. Para materiais em regime elástico (ver equação 4.4), a lei constitutiva pode ser expressa pela seguinte relação hiperelástica entre tensão, deformação e energia de Helmholtz (ver equação 5.7):

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \text{ ou } S_{ij} = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_{ij}} \quad (6.70)$$

Com isso, para a barra prismática sob tração uniaxial da figura 6.1 em regime elástico, a única componente não nula do segundo tensor de Piola-Kirchhoff é (ver equações 6.66.3 e 6.67):

$$S_1 = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_1} \quad (6.71)$$

Assim sendo, a força longitudinal uniformemente aplicada ao longo da seção transversal da barra é (ver equação 6.69):

$$F_1 = S_1 \lambda_1 A_0 = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_1} \lambda_1 A_0 = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_1} \left( \frac{L_f}{L_0} \right) b_0 h_0 \quad (6.72)$$

Esta expressão relaciona, para materiais homogêneos em regime elástico (ver equação 4.5), as dimensões iniciais da barra ( $L_0$ ,  $b_0$  e  $h_0$ ), o comprimento final ( $L_f$ ) da barra, a lei constitutiva hiperelástica, descrita por  $\psi(\mathbf{E})$ , e a força uniformemente distribuída ao longo da seção transversal ( $F_1$ ). No caso geral, a derivada  $\partial \psi(\mathbf{E}) / E_1$  depende do tensor deformação  $\mathbf{E}$ , dado na equação (6.66.3). Com a equação (6.72), conhecidas as dimensões iniciais da barra e a lei constitutiva, pode-se determinar a relação  $F_1$  versus  $L_f$ , para o caso de barras prismáticas homogêneas sob tração uniaxial em regime elástico. Ademais, chamando o deslocamento da face extrema com coordenada  $x_1 = L_0$  de  $\bar{u}_1$ , temos:

$$\bar{u}_1 = u_1(L_0) = y_1(L_0) - L_0 = \frac{L_f}{L_0} L_0 - L_0 = L_f - L_0 \quad (6.73)$$

Dessa forma, pode-se escrever a seguinte relação alternativa:

$$F_1 = F_1(u_1) = \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_1} \left( \frac{L_0 + \bar{u}_1}{L_0} \right) b_0 h_0 \quad (6.74)$$

Para simplificar o equacionamento, será adotada aqui a lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2, 5.9 e 6.38). Com essa lei, a componente  $S_1$  do segundo tensor de Piola-Kirchhoff (ver expressão 6.67), as deformações transversais (ver equação 6.66.3) e as dimensões finais da seção transversal da barra (ver figura 6.1) resultam em:



$$S_1 = E(E_1) = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.75.1)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{b_f}{b_0} \right)^2 - 1 \right] = -\nu E_1 \Rightarrow b_f = b_0 \sqrt{1 - 2\nu E_1} = b_0 \sqrt{1 - \nu \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 \right]} \quad (6.75.2)$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h_f}{h_0} \right)^2 - 1 \right] = -\nu E_1 \Rightarrow h_f = h_0 \sqrt{1 - 2\nu E_1} = h_0 \sqrt{1 - \nu \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 \right]} \quad (6.75.3)$$

Com as equações acima, conhecidas as dimensões iniciais da barra ( $L_0$ ,  $b_0$  e  $h_0$ ), as propriedades constitutivas ( $E$  e  $\nu$ , neste caso), é possível calcular, para determinado comprimento final ( $L_f$ ), o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ), as dimensões finais da barra ( $L_f$ ,  $b_f$  e  $h_f$ ) e o tensor de deformação de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ). As expressões (6.72) e (6.73), as quais relacionam a força aplicada com o comprimento final e com o deslocamento longitudinal (em regime elástico), podem ser substituídas por (ver equação 6.75.1):

$$F_1 = E(E_1) \left( \frac{L_f}{L_0} \right) b_0 h_0 = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^3 - \left( \frac{L_f}{L_0} \right) \right] b_0 h_0 \quad (6.76.1)$$

$$F_1 = E(E_1) \left( \frac{L_0 + u_1}{L_0} \right) b_0 h_0 = \frac{E}{2} \left[ \left( 1 + \frac{u_1}{L_0} \right)^3 - \left( 1 + \frac{u_1}{L_0} \right) \right] b_0 h_0 \quad (6.76.2)$$

Para o caso de barras homogêneas sob tração uniaxial em regime elastoplástico (ver seção 6.1), as equações (6.66), (6.67), (6.68) e (6.69) também podem ser utilizadas. Nesse caso, porém, a relação entre a tensão  $S_1$  e a deformação (total)  $E_1$  passa a ser diferente da relação elástica (6.75.1), já que a evolução da tensão  $S_1$  passa a depender, também, da evolução da parcela plástica da deformação. Assim, para estabelecer a relação entre força e comprimento final, ou entre força e deslocamento longitudinal, é preciso definir a resposta elastoplástica do material. Nos itens a seguir, são descritas as equações, no caso de barras em tração uniaxial, para a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e para a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4).

### 6.7.1. Formulação de Green-Naghdi para barras sob tração uniaxial

Para carregamento (ou deslocamento) longitudinal monotonamente crescente, pode-se definir limite elástico da barra sob tração uniaxial como sendo o ponto (ou o instante) a partir do qual o material entra em regime elastoplástico. Em outras palavras, após o limite elástico, a função que descreve o critério de plastificação (6.15.3) passa a obedecer às seguintes relações (KHAN; HUANG, 1995):

$$\Phi = \dot{\Phi} = 0 \quad (6.77.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ij}} dE_{ij} > 0 \quad (6.77.2)$$

Por definição, a função  $\Phi$  é negativa antes de o material atingir o limite elástico, e a condição (6.77.2) é chamada de carregamento plástico.

De acordo com a aproximação de Green-Naghdi (6.14), a deformação total de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  (3.17) é decomposta aditivamente nas parcelas elástica ( $\mathbf{E}_e$ ) e plástica ( $\mathbf{E}_p$ ). No caso de barras prismáticas sob tração uniaxial (ver figura 6.1 e equações 6.66) em regime elastoplástico (ver equações 6.77), a parcela elástica de deformação é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p &\Rightarrow \begin{bmatrix} E_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{p3} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{E}_e &= \begin{bmatrix} E_1 - E_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 - E_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & E_3 - E_{p3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.78)$$

Neste caso, assumindo que a resposta elástica é descrita pela lei hiperelástica linear (5.9), o segundo tensor de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ) e as deformações elásticas transversais resultam em (ver equações 6.15.2 e 6.75):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S_1 = E(E_{e1}) = E(E_1 - E_{p1}) = E \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 \right] - E_{p1} \right\} \quad (6.79.1)$$

$$E_{e2} = E_2 - E_{p2} = -\nu E_{e1} = -\nu(E_1 - E_{p1}) \quad (6.79.2)$$

$$E_{e3} = E_3 - E_{p3} = -\nu E_{e1} = -\nu(E_1 - E_{p1}) \quad (6.79.3)$$

Sabe-se que, no caso de materiais em regime elastoplástico, ocorre evolução das variáveis plásticas, ou seja, o multiplicador plástico  $\dot{\gamma} \geq 0$ , que aparece nas leis de evolução (6.15.4), (6.15.5) e (6.15.6), é positivo. Assim, para satisfazer a condição de consistência (6.15.8), a expressão  $\dot{\gamma} > 0$  implica  $\dot{\Phi} = 0$ . Nesse caso, o parâmetro escalar  $\dot{\gamma} > 0$  pode ser calculado via equação (6.15.9). Para utilizar tal equação, devem ser definidas as funções  $\mathbf{R}$ ,  $r_\kappa$  e  $\mathbf{R}_X$ , as quais estabelecem a evolução da deformação plástica  $\mathbf{E}_p$ , do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  e do tensor das tensões inversas  $\mathbf{X}$  (ver equações 6.15.4, 6.15.5 e 6.15.6). Para o critério de von-Mises (ver equações 6.43), deve ser determinada a parcela desviadora (PROENÇA, 2006) da diferença entre o segundo tensor de Piola-Kirchhoff ( $\mathbf{S}$ ) e o tensor das tensões inversas ( $\mathbf{X}$ ). No caso da barra sob tração uniaxial (ver figura 6.1, e equações 6.66, 6.67 e 6.79.1), temos:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{bmatrix}, \text{tr}\mathbf{X} = X_1 + X_2 + X_3 \quad (6.80.1)$$

$$\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) = \text{dev}\mathbf{S} - \text{dev}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}S_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}S_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 - \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} & 0 & 0 \\ 0 & X_2 - \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 0 & X_3 - \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| = \sqrt{\left[ \left( \frac{2}{3}S_1 - X_1 + \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} \right)^2 + \left( -\frac{1}{3}S_1 - X_2 + \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} \right)^2 + \left( -\frac{1}{3}S_1 - X_3 + \frac{1}{3}\text{tr}\mathbf{X} \right)^2 \right]} \quad (6.80.2)$$

$$\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \kappa) = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \mathbf{X}, \kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.80.3)$$

Segundo o critério de von-Mises (ver equações 6.43) e a lei de fluxo associativa (6.45), a evolução da deformação plástica, para a barra sob tração uniaxial, é dada por (ver equação 6.48):

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\gamma} \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} = \dot{\gamma} \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \begin{bmatrix} \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_3 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

onde o tensor de segunda ordem  $\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})$  é dado na expressão (6.80.2). As demais leis de evolução  $\dot{\kappa}$  e  $\dot{\mathbf{X}}$  são dadas nas expressões genéricas (6.53) e (6.15.6), respectivamente.

Para calcular o parâmetro escalar  $\dot{\gamma} > 0$  via equação (6.15.9), é necessário determinar as derivadas da função que define o critério de plastificação ( $\Phi$ ) em relação às variáveis  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ . No caso da barra sob tração uniaxial (ver equações 6.78, 6.79 e 6.80) temos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial E_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial \Phi / \partial E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial \Phi / \partial E_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Phi}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_1} = E \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial E_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_3} = 0 \quad (6.82.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial S_1} \left( -\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{E}} \right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_{p1}} = -E \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial E_{p2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{p3}} = 0 \quad (6.82.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \quad (6.82.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = -\frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_{ij}} = -\frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij}}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \quad (6.82.4)$$

No caso das barras sob tração uniaxial, o cálculo do parâmetro escalar  $\dot{\gamma} > 0$  é feito da seguinte forma (ver expressões 6.12, 6.15.9, 6.81 e 6.82):

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_1} \dot{E}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial E_{p1}} \dot{E}_{p1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial E_1} \dot{E}_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial E_1} \dot{\gamma} \mathbf{R}_1 - \frac{2}{3} \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \dot{\gamma} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\gamma} \mathbf{R}_X = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\Phi}, E_1}{\left[ (\Phi, E_1) \mathbf{R}_1 + \left( \frac{2}{3} \right) \sigma_\kappa, \kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} \dot{E}_1 = \mathbf{B}_1 \dot{E}_1 \quad (6.83.1)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\dot{\Phi}, E_1}{\left[ (\Phi, E_1) \mathbf{R}_1 + \left( \frac{2}{3} \right) \sigma_\kappa, \kappa + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X \right]} \quad (6.83.2)$$

onde  $\mathbf{R}_1$  é dado na equação (6.81).

Para determinar a variação das variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) da barra sob tração uniaxial ao longo do incremento de deformação (total)  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{(1)} - \mathbf{E}_{(0)}$ , são utilizadas as expressões a seguir (ver equações 6.15.4, 6.15.5, 6.15.6 e 6.83):

$$\Delta \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_{p(1)} - \mathbf{E}_{p(0)} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{E}}_p dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma} \mathbf{R} dt = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{R}) dE_1 \quad (6.84.1)$$

$$\Delta \kappa = \kappa_{(1)} - \kappa_{(0)} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\kappa} dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma} r_\kappa dt = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} \left( \mathbf{B}_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) dE_1 \quad (6.84.2)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_{(1)} - \mathbf{X}_{(0)} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{X}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma} \mathbf{R}_X dt = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{R}_X) dE_1 \quad (6.84.3)$$

onde os índices  $0$  e  $1$  representam os respectivos valores das variáveis no início e no final do incremento  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{(1)} - \mathbf{E}_{(0)}$ . O objetivo da análise dos materiais em regime elastoplástico é o seguinte: a partir do conjunto de variáveis mecânicas conhecido  $[\mathbf{E}_{(0)}, \mathbf{E}_{p(0)}, \kappa_{(0)}, \mathbf{X}_{(0)}]$ , sendo  $\Phi[\mathbf{E}_{(0)}, \mathbf{E}_{p(0)}, \kappa_{(0)}, \mathbf{X}_{(0)}] = 0$ , determinar o novo conjunto  $[\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{p(1)}, \kappa_{(1)}, \mathbf{X}_{(1)}]$  ou  $[\mathbf{E}_{(0)} + \Delta \mathbf{E}, \mathbf{E}_{p(1)} + \Delta \mathbf{E}_p, \kappa_{(0)} + \Delta \kappa, \mathbf{X}_{(0)} + \Delta \mathbf{X}]$  de modo a obter  $\Phi[\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{p(1)}, \kappa_{(1)}, \mathbf{X}_{(1)}] = 0$  ou  $\Phi[\mathbf{E}_{(0)} + \Delta \mathbf{E}, \mathbf{E}_{p(1)} + \Delta \mathbf{E}_p, \kappa_{(0)} + \Delta \kappa, \mathbf{X}_{(0)} + \Delta \mathbf{X}] = 0$ . Pode-se notar, mesmo para o caso da tração uniaxial, a complexidade na determinação dos incrementos (6.84.1), (6.84.2) e (6.84.3) no caso geral, já que as variáveis a serem integradas variam ao longo do incremento  $\Delta \mathbf{E}$ . Porém, uma vez determinados tais incrementos e, portanto, o novo conjunto  $[\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{p(1)}, \kappa_{(1)}, \mathbf{X}_{(1)}]$ , as relações elastoplásticas da força aplicada ( $F_1$ ) com o comprimento final da barra ( $L_f$ ) e com o deslocamento longitudinal da face extrema com coordenada  $x_1 = L_0$  ( $\bar{u}_1$ ) são, para a barra da figura 6.1 com resposta elástica descrita pela lei linear (5.9):

$$F_1 = E \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{L_f}{L_0} \right)^2 - 1 \right] - E_{p1} \right\} \left( \frac{L_f}{L_0} \right) b_0 h_0 \quad (6.85.1)$$

$$F_1 = E \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\bar{u}_1}{L_0} \right)^2 - 1 \right] - E_{p1} \right\} \left( 1 + \frac{\bar{u}_1}{L_0} \right) b_0 h_0 \quad (6.85.2)$$

Sabe-se que o traço de um tensor desviador é nulo (HOLZAPFEL, 2004). Além disso, de acordo com a regra da normalidade, expressa em (6.81) para a barra sob tração uniaxial, as seguintes expressões podem ser escritas (ver equações 6.15.4, 6.33 e 6.78):

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_p) = \text{tr}(\dot{\mathbf{D}}_p) = \dot{E}_{p1} + \dot{E}_{p2} + \dot{E}_{p3} = 0 \quad (6.86.1)$$

$$\dot{E}_{p2} = \dot{E}_{p3} = -\frac{1}{2} \dot{E}_{p1} \Rightarrow E_{p2} = E_{p3} = -\frac{1}{2} E_{p1} \quad (6.86.2)$$

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\mathbf{E}}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{E}_{p1} \Rightarrow \kappa = E_{p1} \quad (6.86.3)$$

Para barras sob tração uniaxial constituídas de materiais em regime elastoplástico com encruamento isotrópico apenas, considerando o critério de von-Mises (6.43), lei de fluxo associativa (6.45) e parâmetro de encruamento isotrópico dado em (6.53), temos as seguintes expressões (ver equações 6.80, 6.81, 6.82 e 6.83):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}_x = \Delta \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad (6.87.1)$$

$$\text{dev} \mathbf{S} = S_1 \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} = E(E_1 - E_{p1}) \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (6.87.2)$$

$$\Phi = \|\text{dev} \mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa = \sqrt{\frac{2}{3}} S_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa \leq 0 \quad (6.87.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_1} = E \frac{(\text{dev} \mathbf{S})_1}{\|\text{dev} \mathbf{S}\|} = E \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial E_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_3} = 0 \quad (6.87.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_{p1}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial E_1} = -E \frac{(\text{dev} \mathbf{S})_1}{\|\text{dev} \mathbf{S}\|} = -E \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial E_{p2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{p3}} = 0 \quad (6.87.5)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{\gamma} \frac{\text{dev} \mathbf{S}}{\|\text{dev} \mathbf{S}\|} = \dot{\gamma} \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1/6} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1/6} \end{bmatrix} \quad (6.87.6)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Phi, E_1}{\left[ (\Phi, E_1) R_1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sigma_\kappa, \kappa \right]} \dot{E}_1 = \mathbf{B}_1 \dot{E}_1 \quad (6.87.7)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\Phi, E_1}{\left[ (\Phi, E_1) R_1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sigma_\kappa, \kappa \right]} \quad (6.87.8)$$

Se o material da barra sob tração uniaxial for elastoplástico perfeito (PROENÇA, 2006), é possível ainda simplificar algumas das equações (6.87):

$$\sigma_\kappa = \sigma_0 \text{ (constante)} \Rightarrow \partial \Phi / \partial \kappa = \partial \sigma_\kappa / \partial \kappa = 0 \quad (6.88.1)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}S_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0 \quad (6.88.2)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Phi, E_1}{[(\Phi, E_1)R_1]} \dot{E}_1 = \frac{1}{R_1} \dot{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{E}_1 = B_1 \dot{E}_1 \quad (6.88.3)$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (6.88.4)$$

Assim sendo, o incremento de deformação plástica longitudinal é (ver equação 6.84.1):

$$\Delta E_{p1} = E_{p1(1)} - E_{p1(0)} = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) dE_1 = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} dE_1 = \Delta E_1 \quad (6.89)$$

Com este resultado, pode-se verificar o critério de plastificação (6.88.2). Se  $\Phi_{(0)} = 0$ , então

$S_{1(0)} = E(E_{1(0)} - E_{p1(0)}) = \sigma_0$ . Assim sendo:

$$\Phi_{(1)} = S_{1(1)} - \sigma_0 = E(E_{1(1)} - E_{p1(1)}) - \sigma_0 = E(E_{1(1)} + \Delta E_1 - E_{p1(1)} - \Delta E_{p1}) - \sigma_0 \Rightarrow$$

$$\Phi_{(1)} = E(E_{1(1)} + \Delta E_1 - E_{p1(1)} - \Delta E_1) - \sigma_0 = E(E_{1(0)} - E_{p1(0)}) - \sigma_0 = 0 \quad (6.90)$$

Neste caso, ao longo do carregamento em regime elastoplástico, a tensão  $S_1$  mantém-se constante e igual a  $\sigma_0$ . Assim, a força aplicada na barra passa a ser dada por (ver figura 6.1, e expressões 6.69 e 6.73):

$$F_1 = S_1 \lambda_1 A_0 = \sigma_0 \lambda_1 A_0 = \sigma_0 \left( \frac{L_f}{L_0} \right) b_0 h_0 = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\bar{u}_1}{L_0} \right) b_0 h_0 \quad (6.91)$$

Para a fase de descarregamento elástico, temos as seguintes condições (KHAN; HUANG, 1995):

$$\Phi < 0 \quad (6.92.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} < 0 \quad (6.92.2)$$



Ao longo dessa fase, a força aplicada na barra também pode ser determinada a partir da equação (6.85), sendo que a deformação plástica permanece constante.

O limite elástico da barra sob tração uniaxial, representado aqui pelo alongamento longitudinal  $\lambda_{LE}$ , é o ponto (ou instante) em que a tensão atinge o limite inicial de escoamento. Assim, para a aproximação de Green-Naghdi (6.14), o referido limite pode ser determinado a partir das equações (6.80), considerando  $\mathbf{E}_p = \mathbf{X} = \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e$  e  $\Phi = \kappa = 0$ :

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}S_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_\kappa = 0 \Rightarrow \frac{E}{2}(\lambda_{LE}^2 - 1) = \sigma_\kappa(0) \Rightarrow \lambda_{LE} = \sqrt{\left(1 + 2\frac{\sigma_\kappa(0)}{E}\right)} \quad (6.93)$$

onde  $\sigma_\kappa(0)$  é o limite inicial de escoamento, ou seja, é o valor de  $\sigma_\kappa$  correspondente a  $\kappa = 0$ . Em suma, a relação geral entre a força aplicada e o comprimento final (ou deslocamento longitudinal máximo) da barra sob tração uniaxial da figura 6.1 é calculada por (ver expressão 6.66.1):

- Equação (6.76.1) (ou 6.76.2), para carregamento elástico ( $\lambda_1 \leq \lambda_{LE}$ );
- Equação (6.85.1) (ou 6.85.2), para carregamento elastoplástico ( $\lambda_1 > \lambda_{LE}$ ) e para descarregamento elástico (6.92).

### 6.7.2. Formulação hiperelastoplástica para barras prismáticas sob tração uniaxial

A mesma sequencia adotada na seção 6.7.1 é utilizada aqui, ou seja, inicialmente são descritas as equações gerais para barras hiperelastoplásticas (ver seção 6.4) sob tração uniaxial e, posteriormente, as simplificações para os casos com encruamento isotrópico e elastoplástico perfeito.

No âmbito da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), para a fase de carregamento elastoplástico (6.77), o gradiente da barra sob tração uniaxial (ver figura 6.1 e equação 6.66.1)

é decomposto de forma multiplicativa nas suas respectivas parcelas elástica ( $\mathbf{A}_e$ ) e plástica ( $\mathbf{A}_p$ ):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e \mathbf{A}_p \quad (6.94.1)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{e1}\lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2}\lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3}\lambda_{p3} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{A}_e &= \begin{bmatrix} \lambda_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1/\lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2/\lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3/\lambda_{p3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.94.2)$$

onde  $\lambda_{ei}$  e  $\lambda_{pi}$  são, respectivamente, os alongamentos elástico e plástico ao longo da direção  $i$  (ver figura 6.1). Com esta decomposição, chamada de decomposição de Kröner-Lee (ver equação 3.23), as parcelas elásticas dos tensores de Cauchy-Green direito e de Green-Lagrange (ver expressões 3.17 e 3.24) são:

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \lambda_{e1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1/\lambda_{p1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2/\lambda_{p2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3/\lambda_{p3})^2 \end{bmatrix} \quad (6.95.1)$$

$$\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{e1}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3}^2 - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\lambda_1/\lambda_{p1})^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2/\lambda_{p2})^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3/\lambda_{p3})^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (6.95.2)$$

Com relação às tensões, para o gradiente plástico da expressão (6.94), pode-se relacionar a tensão ( $\mathbf{S}$ ) da expressão (6.67) com o segundo tensor de Piola-Kirchhoff definido na configuração intermediária (ver figura 3.3 e expressão 6.25.1):

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T = \mathbf{A}_p \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{e1} = \mathbf{S}_1 \lambda_{p1}^2 \Rightarrow \mathbf{S}_1 = \frac{\mathbf{S}_{e1}}{\lambda_{p1}^2} \quad (6.96)$$

Ademais, considerando a resposta elástica linear (ver equações 5.2, 5.9 e 6.38), a relação entre  $S_{e1}$  e  $E_{e1}$ , e as deformações elásticas transversais são, respectivamente (ver expressão 6.95.2):

$$S_{e1} = E(E_{e1}) = \frac{E}{2}[\lambda_{e1}^2 - 1] = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.97.1)$$

$$E_{e2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_{p2}} \right)^2 - 1 \right] = -\nu(E_{e1}) = -\frac{\nu}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.97.2)$$

$$E_{e3} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_{p3}} \right)^2 - 1 \right] = -\nu(E_{e1}) = -\frac{\nu}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 - 1 \right] \quad (6.97.3)$$

O tensor elástico de Mandel (6.25.3), utilizado no critério de plastificação geral (6.27), resulta em (ver equações 6.95.1, 6.96 e 6.97.1):

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e = \begin{bmatrix} \lambda_{e1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.98.1)$$

$$M_{e1} = C_{e1} S_{e1} = \frac{E}{2} (\lambda_{e1}^4 - \lambda_{e1}^2) = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 \right] \quad (6.98.2)$$

Assim, a relação (6.69) pode ser substituída por (ver equações 6.95.1 e 6.96):

$$F_1 = S_1 \lambda_1 A_0 = \left( \frac{S_{e1}}{\lambda_{p1}^2} \right) \lambda_1 A_0 = \left( \frac{M_{e1}}{\lambda_{e1}^2 \lambda_{p1}^2} \right) \lambda_1 A_0 = \left( \frac{M_{e1}}{\lambda_1^2} \right) \lambda_1 A_0 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{M_{e1}}{\lambda_1} b_0 h_0 = \frac{E}{2\lambda_1} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 \right] b_0 h_0 \quad (6.99)$$

De acordo com o critério de plastificação de von-Mises (6.44):

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{bmatrix}, \quad \text{tr} \boldsymbol{\chi} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \quad (6.100.1)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{A}_p \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1}^2 \mathbf{X}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2}^2 \mathbf{X}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3}^2 \mathbf{X}_3 \end{bmatrix} \quad (6.100.2)$$

$$\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) = \text{dev} \mathbf{M}_e - \text{dev} \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \mathbf{M}_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \mathbf{M}_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \mathbf{M}_{e1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \chi_1 - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| = \sqrt{\left[ \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_1^2 + \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_2^2 + \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_3^2 \right]} \quad (6.100.3)$$

$$\Phi(\mathbf{M}_e, \boldsymbol{\chi}, \kappa) = \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{A}_p, \mathbf{X}, \kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.100.4)$$

onde  $\boldsymbol{\chi}$  e  $\mathbf{X}$  denotam, respectivamente, os tensores das tensões inversas nas configurações intermediária e inicial (ver figura 3.3 e expressão 6.30), ambos relacionados ao encruamento cinemático.

Com relação à lei de fluxo plástico associativa (6.47), é possível escrever a seguinte expressão para a evolução do gradiente plástico (ver equações 6.94 e 6.48):

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{R}_L = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \mathbf{A}_p = \dot{\gamma} \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \mathbf{A}_p \Rightarrow$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \frac{\dot{\gamma}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \begin{bmatrix} \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_1 \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_2 \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_3 \lambda_{p3} \end{bmatrix} \quad (6.101.1)$$

$$\mathbf{R}_L = \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \begin{bmatrix} \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_1 \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_2 \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_3 \lambda_{p3} \end{bmatrix} \quad (6.101.2)$$

Alternativamente, a evolução do gradiente plástico e a taxa de deformação plástica, considerando a regra da normalidade, são dadas por:

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p \text{ ou } \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\lambda}_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_{p3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} \quad (6.102.1)$$

$$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \begin{bmatrix} \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_2 & 0 \\ 0 & 0 & \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_3 \end{bmatrix} \quad (6.102.2)$$

De acordo com Holzapfel (2004), o traço de um tensor desviador é nulo. Assim, é possível relacionar os alongamentos plásticos:

$$\mathbf{D}_{p1} + \mathbf{D}_{p2} + \mathbf{D}_{p3} = \frac{\dot{\lambda}_{p1}}{\lambda_{p1}} + \frac{\dot{\lambda}_{p2}}{\lambda_{p2}} + \frac{\dot{\lambda}_{p3}}{\lambda_{p3}} = 0 \quad (6.103)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por  $J_p = \lambda_{p1} \lambda_{p2} \lambda_{p3}$  (onde  $J_p$  é o Jacobiano plástico):

$$\lambda_{p2} \lambda_{p3} \dot{\lambda}_{p1} + \lambda_{p1} \lambda_{p3} \dot{\lambda}_{p2} + \lambda_{p1} \lambda_{p2} \dot{\lambda}_{p3} = 0 \quad (6.104)$$

Por outro lado, a taxa de variação (temporal) do Jacobiano  $J_p$  é:

$$\dot{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_{p1} \lambda_{p2} \lambda_{p3}) = \lambda_{p2} \lambda_{p3} \dot{\lambda}_{p1} + \lambda_{p1} \lambda_{p3} \dot{\lambda}_{p2} + \lambda_{p1} \lambda_{p2} \dot{\lambda}_{p3} \quad (6.105)$$

Combinando as expressões (6.104) e (6.105):

$$\dot{J}_p = 0 \Rightarrow J_p = \lambda_{p1} \lambda_{p2} \lambda_{p3} = 1 \quad (6.106)$$

Esta condição, resultado do critério de plastificação de von-Mises (6.44), é chamada de incompressibilidade plástica (KHAN; HUANG, 1995). Assim sendo, o Jacobiano  $J_p$  mantém-se constante e igual a um. Ademais, assumindo  $\lambda_{p2} = \lambda_{p3}$ , então:

$$\lambda_{p2} = \lambda_{p3} = \lambda_{p1}^{-1/2} \quad (6.107)$$

Dessa forma, o gradiente plástico para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1 (ver equações 6.94) resulta em:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_{p1})^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_{p1})^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (6.108)$$

As leis de evolução gerais dos tensores das tensões inversas  $\boldsymbol{\chi}$  e  $\mathbf{X}$  são dadas pelos tensores  $\mathbf{R}_\chi$  e  $\mathbf{R}_X$  nas equações (6.29) e (6.32). Já a lei de evolução do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  é, considerando o critério de von-Mises, determinada com a equação (6.53), via função escalar  $r_\kappa = \sqrt{2/3}$ . Definidas essas leis, o parâmetro escalar  $\dot{\gamma} > 0$  pode ser calculado, para a barra sob tração uniaxial (ver figura 6.1) em regime elastoplástico, com a condição de consistência (6.34.2). Ademais, o conjunto de variáveis mecânicas  $\{\lambda_1, \lambda_{p1}, \mathbf{X}, \kappa\}$  define a função  $\Phi$  (ver equações 6.98, 6.100 e 6.101), já que os alongamentos plásticos transversais  $\lambda_{p2}$  e  $\lambda_{p3}$  podem ser determinados em função de  $\lambda_{p1}$  via equação (6.108). Dessa forma, ao longo da fase elastoplástica (6.77):

$$\Phi = \Phi(\lambda_1, \lambda_{p1}, \mathbf{X}, \kappa) = 0 \quad (6.109.1)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{p1}} \dot{\lambda}_{p1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \dot{\gamma} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{p1}} (\mathbf{R}_L)_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{R}_X + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma} = - \frac{(\Phi, \lambda_1)}{\left[ (\Phi, \lambda_{p1}) (\mathbf{R}_L)_1 + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \right]} \dot{\lambda}_1 = B_1 \dot{\lambda}_1 \quad (6.109.2)$$

$$B_1 = - \frac{(\Phi, \lambda_1)}{\left[ (\Phi, \lambda_{p1}) (\mathbf{R}_L)_1 + (\Phi, \mathbf{X}) : \mathbf{R}_X + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \right]} \quad (6.109.3)$$

onde o tensor (de segunda ordem)  $\mathbf{R}_L$  é dado na expressão (6.101.2).

Para o caso da barra sob tração uniaxial com encruamento isotrópico apenas, temos (ver equações 6.100):

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{R}_X = \mathbf{R}_\chi = \Delta \mathbf{X} = \Delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{O} \quad (6.110.1)$$

$$\text{dev} \mathbf{M}_e = \mathbf{M}_{e1} \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 \right] \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (6.110.2)$$

$$\Phi = \|\text{dev} \mathbf{M}_e\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{M}_{e1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_k \leq 0 \quad (6.110.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \mathbf{M}_{e1}}{\partial \lambda_{e1}} \frac{\partial \lambda_{e1}}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} = 0 \quad (6.110.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{p1}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \mathbf{M}_{e1}}{\partial \lambda_{e1}} \frac{\partial \lambda_{e1}}{\partial \lambda_{p1}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{p2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{p3}} = 0 \quad (6.110.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{e1}}{\partial \lambda_{e1}} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{e1}} \left[ \frac{E}{2} (\lambda_{e1}^4 - \lambda_{e1}^2) \right] = E (2\lambda_{e1}^3 - \lambda_{e1}) \quad (6.110.6)$$

$$\frac{\partial \lambda_{e1}}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right) = \frac{1}{\lambda_{p1}} \quad (6.110.7)$$

$$\frac{\partial \lambda_{e1}}{\partial \lambda_{p1}} = \frac{\partial}{\partial \lambda_{p1}} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^2} \quad (6.110.8)$$

$$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \frac{\text{dev} \mathbf{M}_e}{\|\text{dev} \mathbf{M}_e\|} = \dot{\gamma} \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1/6} \end{bmatrix} \quad (6.110.9)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p = \dot{\gamma} \begin{bmatrix} \sqrt{2/3} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{1/6} \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{1/6} \lambda_{p3} \end{bmatrix} \quad (6.110.10)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\gamma} \sqrt{2/3} \quad (6.110.11)$$

$$\dot{\gamma} = - \frac{(\Phi, \lambda_1)}{\left[ (\Phi, \lambda_{p1}) (\mathbf{R}_L)_1 + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \right]} \dot{\lambda}_1 = \mathbf{B}_1 \dot{\lambda}_1 \quad (6.110.12)$$

$$\mathbf{B}_1 = - \frac{(\Phi, \lambda_1)}{\left[ (\Phi, \lambda_{p1}) D_{p1} \lambda_{p1} + \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \right]} \quad (6.110.13)$$

Nesse caso, para calcular a variação do parâmetro de encruamento isotrópico ao longo do incremento  $\Delta \lambda_{p1} = \lambda_{p1(1)} - \lambda_{p1(0)}$ , devem ser combinadas as expressões (6.110.10) e (6.110.11):

$$\Delta \kappa = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma} \sqrt{2/3} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sqrt{3/2} \frac{\dot{\lambda}_{p1}}{\lambda_{p1}} \right) \sqrt{2/3} d\lambda_{p1} = \int_{\lambda_{p1(0)}}^{\lambda_{p1(1)}} \frac{1}{\lambda_{p1}} d\lambda_{p1} = \ln [\lambda_{p1(1)}] - \ln [\lambda_{p1(0)}] \quad (6.111.1)$$

$$\Delta \kappa = \kappa_{(1)} - \kappa_{(0)} = \ln [\lambda_{p1(1)}] - \ln [\lambda_{p1(0)}] \Rightarrow \kappa = \ln (\lambda_{p1}) \quad (6.111.2)$$

Por fim, simplificando para o caso da barra sob tração uniaxial constituída de material elastoplástico perfeito (PROENÇA, 2006), é possível ainda simplificar algumas das equações (6.110):

$$\sigma_\kappa = \sigma_0 \text{ (constante)} \Rightarrow \partial \Phi / \partial \kappa = \partial \sigma_\kappa / \partial \kappa = 0 \quad (6.112.1)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}} M_{el} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \leq 0 \quad (6.112.2)$$

$$\dot{\gamma} = - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} (M_{el}, \lambda_{e1}) (\lambda_{e1}, \lambda_1)}{\left[ \sqrt{\frac{2}{3}} (M_{el}, \lambda_{e1}) (\lambda_{e1}, \lambda_{p1}) \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{p1} \right]} \dot{\lambda}_1 = - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\lambda_{p1}}}{\left[ - \left( \frac{2}{3} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right]} \dot{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} \quad (6.112.3)$$



onde a constante  $\sigma_0$  é a tensão limite de escoamento. Assim sendo, o incremento do alongamento plástico longitudinal é (ver equação 6.105.1):

$$\Delta\lambda_{p1} = \lambda_{p1(t_1)} - \lambda_{p1(t_0)} = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda}_{p1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{p1} dt = \int_{\lambda_{p1(t_0)}}^{\lambda_{p1(t_1)}} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_{p1} \right) d\lambda_1 \Rightarrow$$

$$\Delta\lambda_{p1} = \int_{\lambda_{e1(t_0)}}^{\lambda_{e1(t_1)}} \frac{1}{\lambda_{e1}} d\lambda_1 \quad (6.113)$$

Como, ao longo do carregamento elastoplástico,  $\Phi = 0$ , então (ver equações 6.110.6 e 6.112.2):

$$M_{e1} = \frac{E}{2} (\lambda_{e1}^4 - \lambda_{e1}^2) = \sigma_0 \text{ (constante)} \Rightarrow \lambda_{e1} \text{ constante} \quad (6.114)$$

Com isso, o incremento (6.113) é:

$$\Delta\lambda_{p1} = \frac{1}{\lambda_{e1}} \Delta\lambda_1 \quad (6.115)$$

Ademais, com a expressão (6.113), a força aplicada na barra sob tração uniaxial da figura 6.1 é (ver equação 6.99):

$$F_1 = \frac{1}{\lambda_1} \sigma_0 b_0 h_0 \quad (6.116)$$

Analogamente ao caso da aproximação de Green-Naghdi (ver item 6.7.1), o limite elástico da barra sob tração uniaxial, representado pelo alongamento longitudinal  $\lambda_{LE}$ , é o ponto (ou instante) em que a tensão atinge o limite inicial de escoamento. Assim, no âmbito da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), é possível relacionar tal limite com a tensão inicial de escoamento  $\sigma_\kappa(0)$ , utilizando as equações (6.100) e considerando  $\mathbf{A}_p = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_e$ ,  $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{X} = \mathbf{O}$  e  $\Phi = \kappa = 0$ :

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}} M_{e1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa = 0 \Rightarrow \frac{E}{2} (\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = \sigma_\kappa(0) \quad (6.117)$$

Resumindo, a relação geral entre a força aplicada e o comprimento final (ou deslocamento longitudinal máximo) da barra sob tração uniaxial da figura 6.1 é calculada por (ver expressão 6.66.1):

- Equação (6.76.1) (ou 6.76.2), para carregamento elástico ( $\lambda_1 \leq \lambda_{LE}$ );

- Equação (6.99), para carregamento elastoplástico ( $\lambda_1 > \lambda_{LE}$ ) e para descarregamento elástico (6.92).

## 7. MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Neste capítulo, é descrito o conceito de material com gradação funcional (MGF). Além disso, são relacionadas as leis de gradação funcional (GF) utilizadas no presente estudo. Por fim, são fornecidas algumas expressões analíticas para barras com GF sob tração uniaxial em regime elastoplástico.

### 7.1. Definição

Na engenharia de materiais, GF é a variação gradual (contínua e suave) da composição de um material. Na engenharia de estruturas, MGF é um material compósito (ou heterogêneo) cujas propriedades constitutivas (ver seção 4.2) variam gradualmente ao longo de seu volume, isto é, as funções que descrevem tais propriedades ao longo do volume do material são contínuas e suaves.

### 7.2. Leis de GF adotadas

Neste estudo, lei de GF é a expressão matemática que descreve a variação gradual (contínua e suave) das propriedades constitutivas ao longo do volume de um material. Essa lei pode ser descrita da seguinte forma:

$$\eta = \eta(\mathbf{x}) = \eta(x_1, x_2, x_3) \quad (7.1)$$

onde  $\eta$  é a propriedade constitutiva que varia gradualmente de acordo com a posição inicial ( $\mathbf{x}$ ) dos pontos materiais. Leis de GF desse tipo podem ser classificadas como Lagrangianas (ver seção 3.1), já que a propriedade  $\eta$ , neste caso, depende da configuração inicial  $\mathbf{x}$ . De acordo com a definição de GF dada na seção 7.1, a função  $\eta = \eta(\mathbf{x})$  deve ser contínua e suave, ou seja, essa função não deve apresentar alterações abruptas nem descontinuidades. As cinco leis de GF utilizadas aqui são descritas a seguir.

### 7.2.1. Leis clássicas

As três primeiras leis de GF adotadas no presente estudo são as mais comuns na literatura científica (CHI; CHUNG, 2006; KIM; LOMBOY; HAN, 2008): a lei de potência (P-FGM); a lei sigmoideal (S-FGM); e a lei exponencial (E-FGM). A sigla FGM vem do termo em inglês “functionally graded materials”. Nas duas primeiras leis de GF, P-FGM e S-FGM, para descrever a variação gradual da propriedade constitutiva  $\eta$  ao longo da posição inicial  $\mathbf{x}$ , é usada a regra da mistura para materiais compósitos (RÖSLER; HARDERS; BÄKER, 2007):

$$\eta = \eta(\mathbf{x}) = \eta_1 f_1(\mathbf{x}) + \eta_2 f_2(\mathbf{x}) = \eta_1 f_1(\mathbf{x}) + \eta_2 [1 - f_1(\mathbf{x})] = \eta_2 + (\eta_1 - \eta_2) f_1(\mathbf{x}) \quad (7.2)$$

onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são as propriedades constitutivas ( $\eta$ ) de dois materiais homogêneos; e  $f_1$  e  $f_2$  são as frações volumétricas dos dois materiais, as quais satisfazem a relação  $f_1 + f_2 = 1$ . A partir da equação (7.2), é possível escrever as seguintes expressões:

$$f_1 = 0 \Rightarrow \eta = \eta_2 \quad (7.3.1)$$

$$f_1 = 1 = 100\% \Rightarrow \eta = \eta_1 \quad (7.3.2)$$

De acordo com a expressão (7.2), nota-se que a lei de GF baseada na regra da mistura é definida pela escolha da função  $f_1$ , que varia com a posição inicial ( $\mathbf{x}$ ) dos pontos materiais. Além disso, conforme o conceito de GF da seção 7.1, a função  $f_1(\mathbf{x})$  deve ser

contínua e suave. Para a lei de potência (P-FGM), a referida função é dada por (CHI; CHUNG, 2006; KIM; LOMBOY; HAN, 2008):

$$f_1^{\text{P-FGM}} = f_1^{\text{P-FGM}}(\zeta) = \left( \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} \right)^p \quad (7.4)$$

onde  $\zeta$ , que varia entre 0 e  $\zeta_{\max}$ , é a coordenada na qual a propriedade constitutiva  $\eta$  varia gradualmente; e  $p$  é o coeficiente de GF para lei de potência (P-FGM). A propriedade  $\eta$  pode variar no espaço, ou seja,  $\eta$  pode variar ao longo das três direções. Neste estudo, porém, as propriedades constitutivas variam gradualmente ao longo de uma direção apenas. Por exemplo, se  $\eta$  varia ao longo da coordenada inicial  $x_3$ , então  $\zeta = x_3$ . Exemplos de variações graduais de acordo com a lei de potência para materiais com GF são mostrados na figura 7.1.

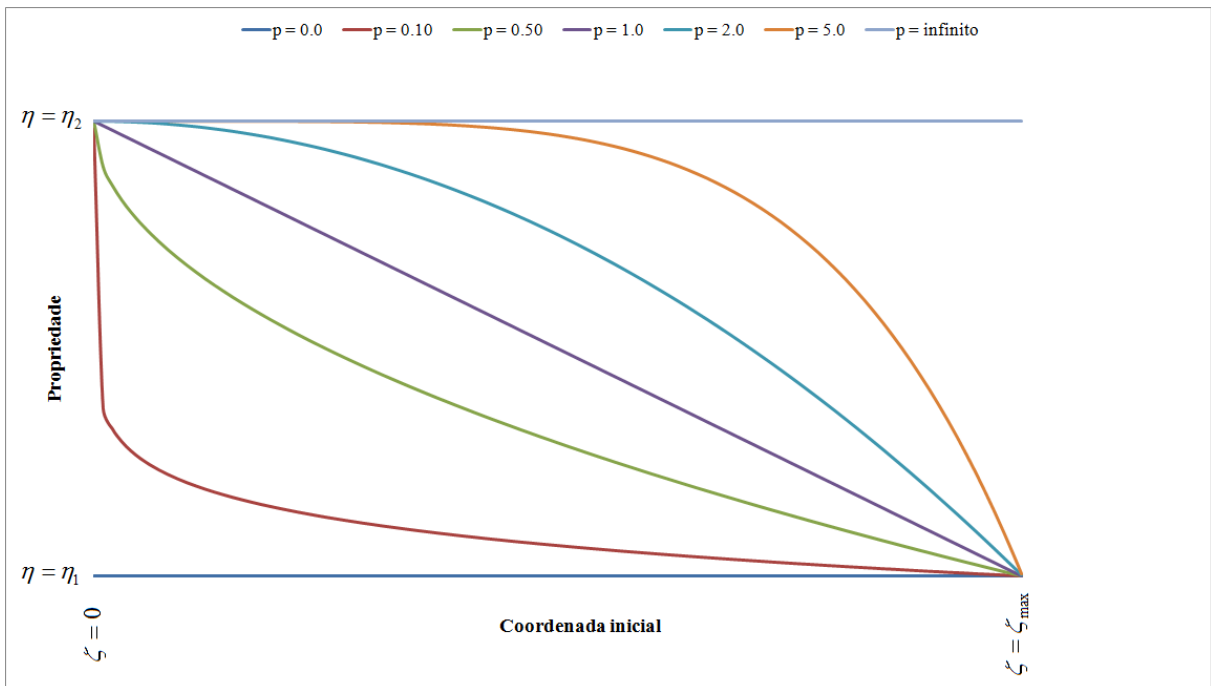


Figura 7.1. Variação de uma propriedade constitutiva ( $\eta$ ) de acordo com a lei de potência (equações 7.2 e 7.4) ao longo da coordenada inicial  $\zeta$ . A variável  $p$  é o coeficiente de GF da expressão (7.4).

Para a lei sigmoidal (S-FGM), a fração volumétrica  $f_1(\mathbf{x})$  é descrita pela expressão a seguir (CHI; CHUNG, 2006; KIM; LOMBOY; HAN, 2008):

$$f_1^{\text{S-FGM}} = f_1^{\text{S-FGM}}(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} \right]^s, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{\zeta_{\max}}{2} \quad (7.5.1)$$

$$f_1^{\text{S-FGM}} = f_1^{\text{S-FGM}}(\zeta) = 1 - \frac{1}{2} \left[ 2 - 2 \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} \right]^s, \quad \frac{\zeta_{\max}}{2} \leq \zeta \leq \zeta_{\max} \quad (7.5.2)$$

onde  $\zeta$ , que varia entre 0 e  $\zeta_{\max}$ , é a coordenada na qual a propriedade constitutiva  $\eta$  varia gradualmente; e  $s$  é o coeficiente de GF para lei sigmoidal (S-FGM). Exemplos de variação de acordo com as expressões (7.5) são ilustrados na figura 7.2.

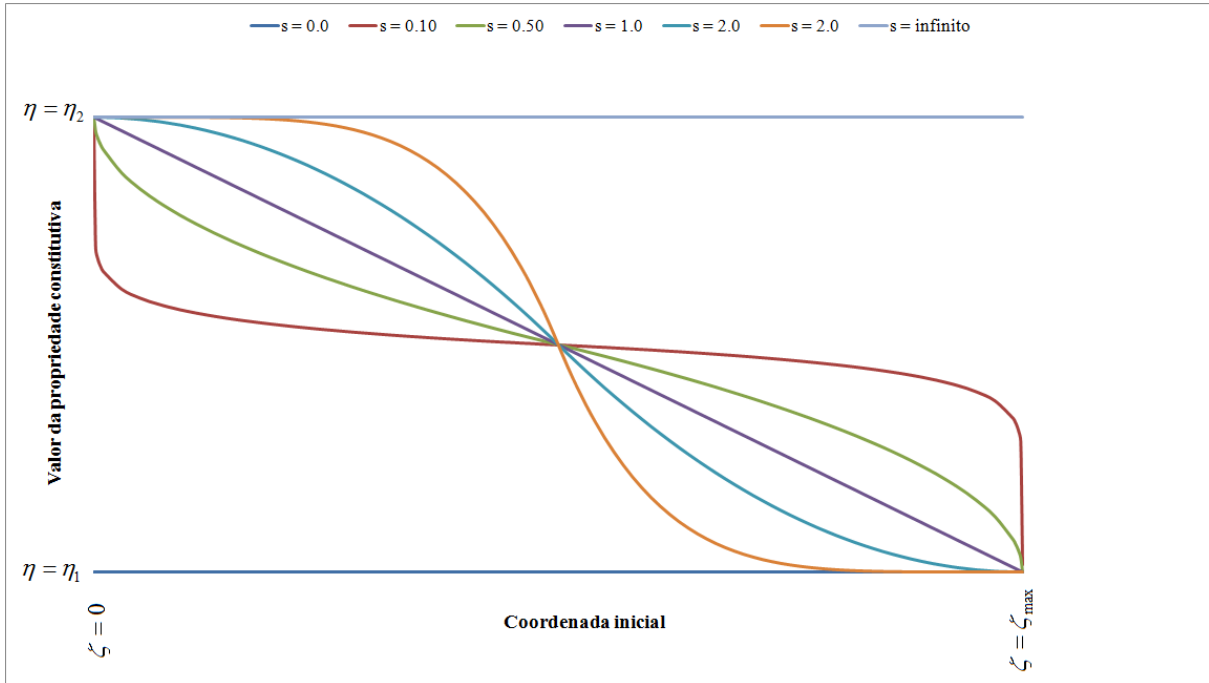


Figura 7.2. Variação de uma propriedade constitutiva ( $\eta$ ) de acordo com a lei sigmoideal (equações 7.2 e 7.5) ao longo da coordenada inicial  $\zeta$ . A variável  $s$  é o coeficiente de GF da expressão (7.5).

A partir das expressões (7.2) e (7.4), pode-se concluir que quando o coeficiente de GF para a lei de potência ( $p$ ) tende para zero,  $f_1$  também tende a zero e, conseqüentemente,  $\eta$  tende para  $\eta_2$  para qualquer valor de  $\zeta$ . Quando o coeficiente  $p$  tende a infinito,  $f_1$  tende para um e, conseqüentemente,  $\eta$  tende para  $\eta_1$ , também para qualquer valor de  $\zeta$ . Dessa forma, os casos extremos  $p \rightarrow 0$  e  $p \rightarrow \infty$  correspondem, respectivamente, aos casos homogêneos  $\eta = \eta_2$  e  $\eta = \eta_1$ . Isso também se aplica à lei sigmoideal (S-FGM), descrita nas equações (7.2) e (7.5).

Para a lei exponencial de GF (E-FGM), a regra da mistura (7.2) não é usada, e não há coeficiente de GF. Nesse caso, a função que descreve a variação gradual da propriedade constitutiva  $\eta$  é (CHI; CHUNG, 2006; KIM; LOMBOY; HAN, 2008):

$$\eta^{E-FGM} = \eta_2 \exp \left[ \frac{\zeta}{\zeta_{max}} \ln \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \right) \right] \quad (7.6)$$

onde  $\zeta$ , que varia entre 0 e  $\zeta_{\max}$ , é a coordenada na qual a propriedade constitutiva  $\eta$  varia gradualmente; e  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são as propriedades constitutivas ( $\eta$ ) de dois materiais homogêneos. A lei exponencial de GF (7.6) é mostrada na figura 7.3.

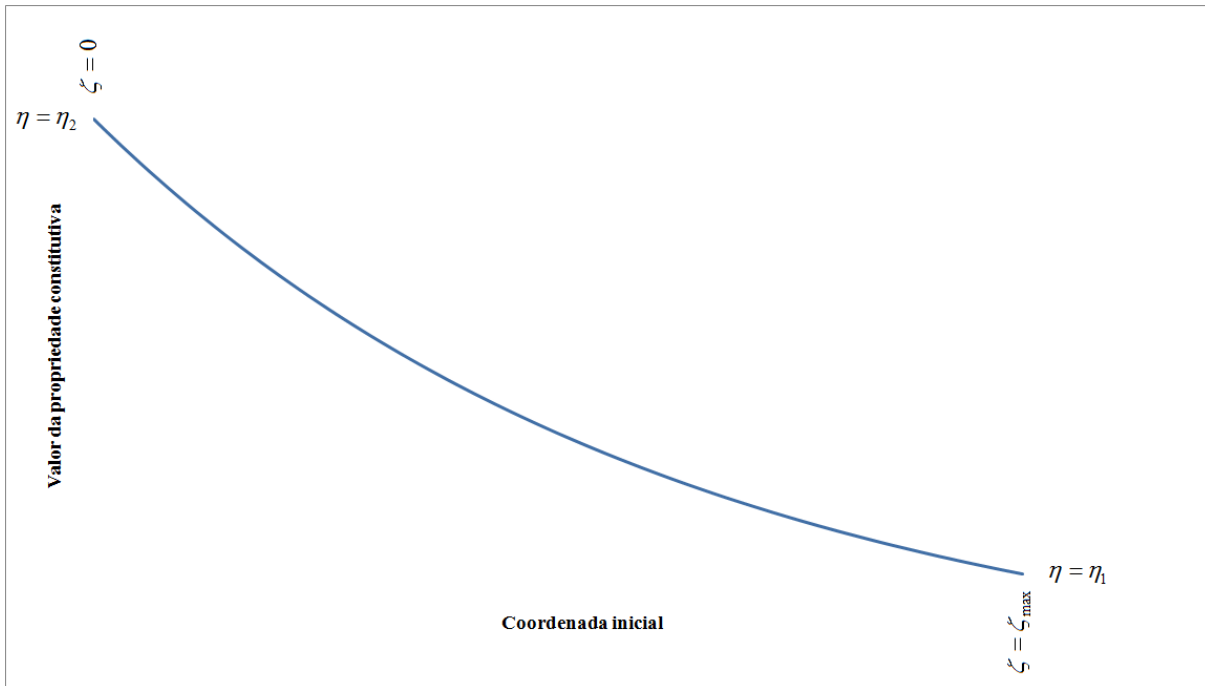


Figura 7.3. Variação de uma propriedade constitutiva ( $\eta$ ) de acordo com a lei exponencial (equação 7.6) ao longo da coordenada inicial  $\zeta$ .

### 7.2.2. Leis propostas

Além das leis descritas no item 7.2.1, é possível propor outras leis de GF. Neste estudo, são propostas duas leis de GF: a senoidal (Sn-FGM); e a logarítmica (L-FGM).

Para a lei de GF senoidal (Sn-FGM), é usada a regra da mistura para materiais compósitos (7.2). Para essa lei de GF, a função que descreve a variação gradual da propriedade constitutiva  $\eta$  é:



$$f_1^{\text{Sn-FGM}} = f_1^{\text{Sn-FGM}}(\zeta) = \left[ \text{sen} \left( \frac{\pi \zeta}{2 \zeta_{\max}} \right) \right]^{\text{sn}} \quad (7.7)$$

onde  $\text{sn}$  é o coeficiente de GF para lei senoidal (Sn-FGM). Exemplos de variação da propriedade  $\eta$  de acordo com a equação (7.7) são ilustrados na figura 7.4.

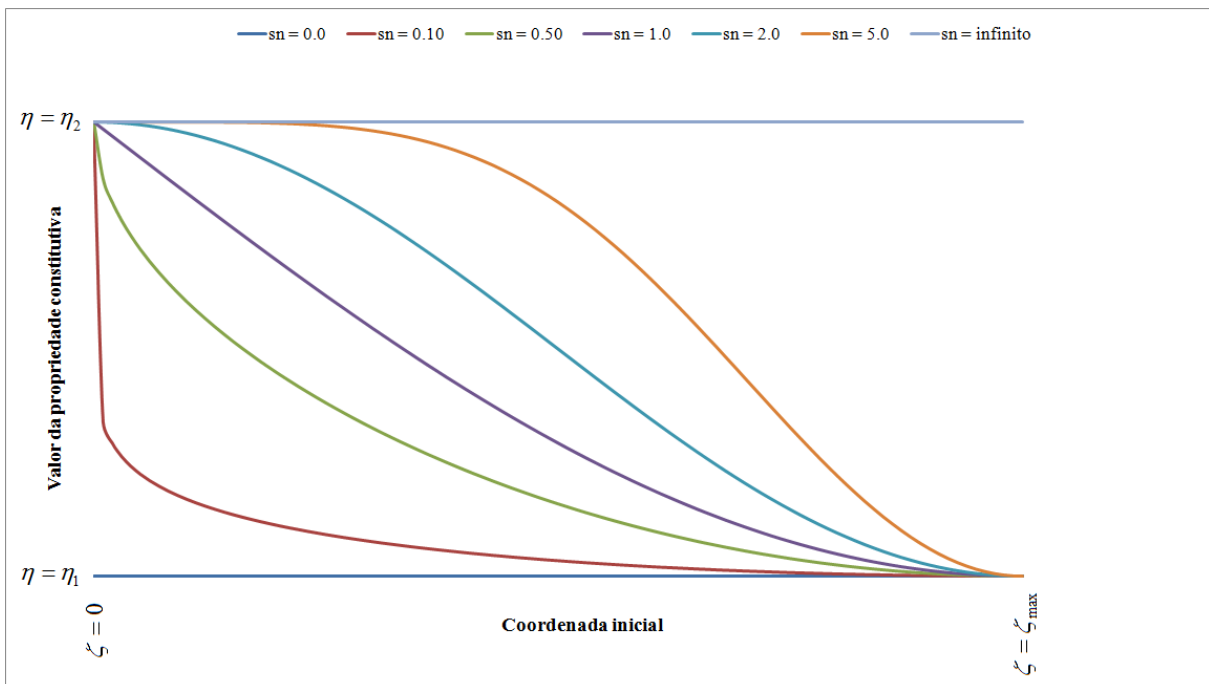


Figura 7.4. Variação de uma propriedade constitutiva ( $\eta$ ) de acordo com a lei senoidal (equação 7.7) ao longo da coordenada inicial  $\zeta$ .

Por fim, para a lei logarítmica de GF (L-FGM), na qual também se usa a regra da mistura (7.2), vale a seguinte expressão:

$$f_1^{\text{L-FGM}} = f_1^{\text{L-FGM}}(\zeta) = \log_{10} \left( 9 \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} + 1 \right) \quad (7.8)$$

É mostrado, na figura 7.5, um exemplo de variação da propriedade  $\eta$  de acordo com a equação (7.8).

Em todas as leis de GF usadas aqui, pode-se notar, com as expressões (7.2), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7) e (7.8) e com as figuras (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) e (7.5), que a propriedade

constitutiva variável  $\eta$  é igual a  $\eta_2$  quando  $\zeta=0$ , e igual a  $\eta_1$  quando  $\zeta=\zeta_{\max}$  (ou  $\zeta/\zeta_{\max}=1$ ).

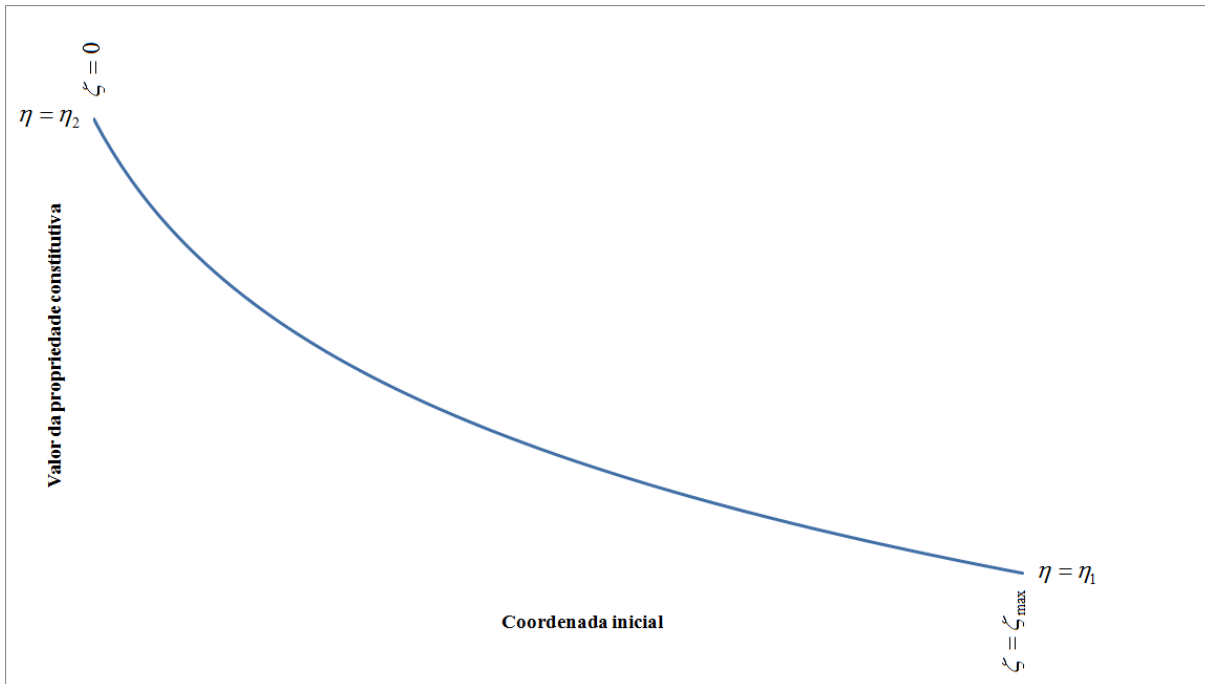


Figura 7.5. Variação de uma propriedade constitutiva ( $\eta$ ) de acordo com a lei logarítmica (equação 7.8) ao longo da coordenada inicial  $\zeta$ .

É possível propor outras leis para descrever a variação gradual (contínua e suave) das propriedades constitutivas de um MGF. Além disso, podem ser adotadas diferentes leis de GF para descrever duas ou mais propriedades variáveis no mesmo material. Com relação à análise via elementos finitos de MGFs, um exemplo bastante comum na literatura científica é a variação do módulo de Young (ver equações 5.2) ao longo da espessura de uma placa ou de uma casca, cuja face inferior é 100% metálica, a face superior é 100% cerâmica, e no interior as propriedades variam contínua e suavemente (WOO; MEGUID, 2001; GHANNADPOUR; ALINIA, 2006; ARCINIEGA; REDDY, 2007; KHABBAZ; MANSHADI; ABEDIAN, 2009).

### 7.3. Modelos hiperelásticos com GF

Neste estudo as propriedades constitutivas que variam contínua e suavemente ao longo do volume são os coeficientes da lei constitutiva do material. Assim, define-se modelo hiperelástico (ver seção 5.2) com GF como sendo o modelo hiperelástico cujos coeficientes do material variam de acordo com leis de GF. A lei de Saint Venant-Kirchhoff com GF pode ser expressa da seguinte forma (ver equações 5.2):

$$\Psi_{SVK,GF} = \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2} [\text{tr}(\mathbf{E})]^2 + \mu(\mathbf{x}) [\text{tr}(\mathbf{E}^2)] \quad (7.9.1)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\nu(\mathbf{x}) [E(\mathbf{x})]}{[1 + \nu(\mathbf{x})][1 - 2\nu(\mathbf{x})]} \quad (7.9.2)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \frac{E(\mathbf{x})}{2[1 + \nu(\mathbf{x})]} \quad (7.9.3)$$

onde  $\lambda(\mathbf{x})$ ,  $\mu(\mathbf{x})$ ,  $E(\mathbf{x})$  e  $\nu(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem, respectivamente, a variação contínua e suave, de acordo com a posição inicial ( $\mathbf{x}$ ), das constantes de Lamé ( $\lambda$  e  $\mu$ ), do módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). As referidas funções podem ser uma das cinco leis de GF adotadas aqui (ver seções 7.2.1 e 7.2.2). Por exemplo, se o módulo de Young e o coeficiente de Poisson variam de acordo com a lei de GF de potência (ver equações 7.2 e 7.4), define-se dessa forma a lei de Saint Venant-Kirchhoff com GF de potência.

O modelo hiperelástico não linear de Rivlin-Saunders com GF é descrito pelas seguintes expressões (ver equações 5.3):

$$\Psi_{RS,GF} = \Psi_{RS,GF}(\mathbf{J}, i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = U_{\text{vol},GF}(\mathbf{J}) + \Psi_{RS,GF}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) \quad (7.10.1)$$

$$U_{\text{vol},GF}(\mathbf{J}) = [k(\mathbf{x})](J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (7.10.2)$$

$$\Psi_{RS,GF}^{\text{iso}}(i_1^{\text{iso}}, i_2^{\text{iso}}) = \sum_{ij} \left\{ [c_{ij}(\mathbf{x})] (i_1^{\text{iso}} - 3)^i (i_2^{\text{iso}} - 3)^j \right\} \quad (7.10.3)$$

onde  $k(\mathbf{x})$  e  $c_{ij}(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem, nesta ordem, a GF do módulo de compressão volumétrica (“bulk modulus”) e dos coeficientes isocóricos. Assim como na lei de Saint Venant-Kirchhoff com GF (7.9), para descrever a GF dos coeficientes do material ( $k$  e  $c_{ij}$ ), pode ser empregada uma das cinco leis de GF usadas neste estudo (ver seções 7.2.1 e 7.2.2).

O modelo hiperelástico não linear de Hartmann-Neff com GF é expresso por (ver equações 5.4):

$$\Psi_{\text{HN,GF}} = \Psi_{\text{HN,GF}}(J, \mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}}) = U_{\text{vol,GF}}(J) + \Psi_{\text{HN,GF}}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}}) \quad (7.11.1)$$

$$U_{\text{vol,GF}}(J) = [k(\mathbf{x})](J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (7.11.2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{HN,GF}}^{\text{iso}}(\mathbf{i}_1^{\text{iso}}, \mathbf{i}_2^{\text{iso}}) = & [\alpha(\mathbf{x})] \left[ (\mathbf{i}_1^{\text{iso}})^3 - 27 \right] + \sum_i \left\{ [c_{i0}(\mathbf{x})] (\mathbf{i}_1^{\text{iso}} - 3)^i \right\} + \\ & \sum_j \left\{ [c_{0j}(\mathbf{x})] (\mathbf{i}_2^{\text{iso}3/2} - 3^{2/3})^j \right\} \end{aligned} \quad (7.11.3)$$

onde  $k(\mathbf{x})$ ,  $c_{i0}(\mathbf{x})$  e  $c_{0j}(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem, respectivamente, a GF do módulo de compressão volumétrica ( $k$ ) e dos coeficientes isocóricos ( $c_{i0}$  e  $c_{0j}$ ).

Por fim, a lei hiperelástica não linear neo-Hookeana com GF é descrita por (ver equação 5.5):

$$\Psi_{\text{nH,GF}} = \Psi_{\text{nH,GF}}(J, \mathbf{i}_1) = \frac{1}{2} [k(\mathbf{x})] [\ln(J)]^2 + \frac{1}{2} [\mu(\mathbf{x})] [\mathbf{i}_1 - 3 - 2 \ln(J)] \quad (7.12)$$

onde  $k(\mathbf{x})$  e  $\mu(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem a GF, de acordo com a posição inicial  $\mathbf{x}$ , do módulo de compressão volumétrica ( $k$ ) e do coeficiente  $\mu$ , respectivamente.

#### 7.4. Modelos elastoplásticos com GF

Analogamente às leis hiperelásticas com GF da seção 7.3, pode-se definir lei de evolução plástica com GF, em que os coeficientes do material variam contínua e suavemente de acordo com a posição inicial ( $\mathbf{x}$ ). Neste item são descritas as leis de evolução do encruamento (isotrópico e cinemático) com GF, para a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e para a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4). O critério de plastificação e a lei de fluxo plástico adotados aqui não dependem de coeficientes do material. Assim, neste estudo, não é necessário definir o critério de plastificação e a lei de fluxo com GF.

##### 7.4.1. Aproximação de Green-Naghdi

A lei polinomial de encruamento isotrópico com GF pode ser definida da seguinte forma (ver equação 6.49):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = \sum_{n=0}^{NC-1} \{ [a_n(\mathbf{x})] (\kappa)^n \} \quad (7.13)$$

onde  $a_n(\mathbf{x})$  é a função que descreve a GF, em relação à posição inicial ( $\mathbf{x}$ ) dos coeficientes de encruamento isotrópico do material ( $a_n$ ).

A lei de encruamento isotrópico de Swift com GF é dada por (ver equação 6.50):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = [K(\mathbf{x})] \cdot \{ [E_0(\mathbf{x})] + \kappa \}^{[n(\mathbf{x})]} \quad (7.14)$$

onde  $K(\mathbf{x})$ ,  $E_0(\mathbf{x})$  e  $n(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem a GF, com relação à posição inicial ( $\mathbf{x}$ ), dos coeficientes da lei de Swift ( $K$ ,  $E_0$  e  $n$ ).

A lei de encruamento isotrópico de Voce com GF pode ser expressa da seguinte forma (ver equação 6.51):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = [\sigma_0(\mathbf{x})] + \{[\sigma_{\text{sat}}(\mathbf{x})] - [\sigma_0(\mathbf{x})]\} \left\{ 1 - e^{-[C_Y(\mathbf{x})\kappa]} \right\} \quad (7.15)$$

onde  $\sigma_0(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_{\text{sat}}(\mathbf{x})$  e  $C_Y(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem a variação contínua e suave, de acordo com a posição inicial  $\mathbf{x}$ , dos coeficientes de encruamento isotrópico de Voce ( $\sigma_0$ ,  $\sigma_{\text{sat}}$  e  $C_Y$ ).

O modelo de encruamento cinemático de Prager com GF é descrito por (ver equação 6.54):

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X = [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \mathbf{D}_p = [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \dot{\gamma} \mathbf{R}_p \Rightarrow \mathbf{R}_X = [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \mathbf{R}_p \quad (7.16)$$

onde  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  é a função que descreve a GF, de acordo com a posição inicial  $\mathbf{x}$ , do coeficiente de Prager ( $\mathbf{c}$ ).

A lei de encruamento cinemático de Ziegler (6.55) não possui coeficiente do material. Portanto, não se pode definir o modelo de Ziegler com GF.

Por fim, a lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick com GF é expressa da seguinte forma (ver equação 6.56):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} = \dot{\gamma} \mathbf{R}_X &= [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \mathbf{D}_p - \dot{\gamma} [\mathbf{b}(\mathbf{x})] \mathbf{X} = [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \dot{\gamma} \mathbf{R}_p - \dot{\gamma} [\mathbf{b}(\mathbf{x})] \mathbf{X} \Rightarrow \\ \mathbf{R}_X &= [\mathbf{c}(\mathbf{x})] \mathbf{R}_p - [\mathbf{b}(\mathbf{x})] \mathbf{X} \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  são as funções que descrevem a GF, de acordo com  $\vec{\mathbf{x}}$ , dos coeficientes da lei de Armstrong-Frederick ( $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{b}$ ).

#### 7.4.2. Hiperelastoplasticidade

As leis de encruamento isotrópico com GF descritas nas expressões (7.13), (7.14) e (7.15) também são usadas no caso da hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4). Com relação ao encruamento cinemático de materiais hiperelastoplásticos, para empregar as equações (7.16) e (7.17), referentes aos modelos de Prager e Armstrong-Frederick com GF, basta substituir a taxa  $\dot{\mathbf{X}}$  pela taxa objetiva  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}$  (ver equação 6.31.1), e o tensor  $\mathbf{R}_x$  pelo tensor  $\mathbf{R}_\chi$  (ver equação 6.32.2).

#### 7.5. Barras hiperelastoplásticas com GF sob tração uniaxial

As equações da seção 6.7 desta tese foram determinadas para o caso da barra prismática sob tração uniaxial (ver figura 6.1) constituída de material homogêneo. Neste item, são descritas as equações para a referida barra constituída, porém, de material hiperelastoplástico heterogêneo com GF (ver item 7.1) e com encruamento isotrópico apenas. Basicamente, dois casos são analisados: variação gradual do módulo (elástico) de Young (ver equações 7.9), e variação gradual das constantes de encruamento isotrópico (ver equações 7.13, 7.14 e 7.15). Antes de descrever tais casos, é dada a fórmula geral para cálculo da força longitudinal aplicada, e são descritos os conceitos de limites elástico e plástico.

Por definição, a força longitudinal aplicada na barra da figura 6.1 é:

$$F_1 = \int_{A_f} \sigma_1 dA \quad (7.18)$$

onde  $\sigma_1$  é a tensão normal de Cauchy ao longo da direção  $x_1$  (ver equações 4.1, 4.2 e figura 6.1); e  $dA$  é um elemento infinitesimal de área da seção transversal da barra na configuração

final ( $A_f$ ). Ademais, sabe-se que a tensão  $\sigma_1$  na barra pode ser substituída por (ver equação 6.67):

$$\sigma_1 = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} \right) S_1 \quad (7.19)$$

onde  $\lambda_i$  é o alongamento (HOLZAPFEL, 2004) ao longo da direção  $i$ ;  $S_1$  é a componente longitudinal do segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  (ver equações 4.3), definido na configuração inicial. Por fim, de acordo com a definição de área inicial e final:

$$dA = dy_2 dy_3 = \lambda_2 \lambda_3 dx_2 dx_3 = \lambda_2 \lambda_3 dA_0 \quad (7.20)$$

onde  $dx$  e  $dy$  representam, respectivamente, os segmentos infinitesimais de linha (ou fibras materiais) nas configurações inicial e final da barra; e  $dA_0$  é um elemento infinitesimal de área da seção transversal da barra na configuração inicial ( $A_0$ ). Portanto, a combinação das expressões (7.18), (7.19) e (7.20) resulta em:

$$F_1 = \int_{A_0} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} \right) S_1 \right] \lambda_2 \lambda_3 dA_0 \Rightarrow F_1 = \int_{A_0} \lambda_1 S_1 dA_0 \quad (7.21)$$

Assumindo que o alongamento longitudinal da barra é constante ao longo de toda a seção transversal, e que a variação gradual das propriedades mecânicas da barra se dá ao longo do eixo  $x_2$  (ver figura 6.1), então a força resultante é (ver equação 7.21):

$$F_1 = \lambda_1 \int_{A_0} S_1(x_2) dx_2 dx_3 = \lambda_1 h_0 \int_{x_2} S_1(x_2) dx_2 \Rightarrow F_1 = \lambda_1 h_0 \int_0^{b_0} S_1(x_2) dx_2 \quad (7.22)$$

onde a coordenada  $x_2$  varia entre os limites 0 e  $b_0$ . Alternativamente, pode-se escrever (ver expressão 6.99):

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{e1}(x_2) dx_2 \quad (7.23)$$

onde  $\mathbf{M}_e$  é o tensor elástico de Mandel, dado na expressão (6.98) para o caso da barra sob tração uniaxial. Além disso, para o critério de plastificação de von-Mises (6.44), dado nas expressões (6.100) para a referida barra, se a GF se dá ao longo do eixo  $x_2$ , então:



$$\Phi(x_2) = \Phi[\mathbf{M}_e(x_2), \boldsymbol{\chi}(x_2), \kappa(x_2)] = \|\text{dev}[\mathbf{M}_e(x_2) - \boldsymbol{\chi}(x_2)]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa[\kappa(x_2)] \leq 0 \quad (7.24.1)$$

$$\begin{aligned} \|\text{dev}[\mathbf{M}_e(x_2) - \boldsymbol{\chi}(x_2)]\|^2 = & \left[ \frac{2}{3} M_{e1}(x_2) - \chi_1(x_2) + \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi}(x_2) \right]^2 + \left[ -\frac{1}{3} M_{e1}(x_2) - \chi_2(x_2) + \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi}(x_2) \right]^2 + \\ & \left[ -\frac{1}{3} M_{e1}(x_2) - \chi_3(x_2) + \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\chi}(x_2) \right]^2 \end{aligned} \quad (7.24.2)$$

De acordo com estas equações, no caso geral a tensão  $M_{e1}$  e a tensão limite de escoamento  $\sigma_\kappa$  variam (contínua e suavemente) com a coordenada inicial  $x_2$ . Sabe-se também que, conforme o critério (7.24.1), o ponto material plastifica ou entra em regime elastoplástico quando a norma  $\|\text{dev}[\mathbf{M}_e(x_2)]\|$  atinge o limite inicial de escoamento  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0(x_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(x_2)|_{\kappa=0}$ . Assim, se o carregamento (ou alongamento) longitudinal é monotonamente crescente ao longo do tempo, os pontos materiais com diferentes coordenadas iniciais  $x_2$  entram em regime elastoplástico em diferentes instantes. Para tal carregamento (ou alongamento), podemos definir limite elástico como sendo o instante em que os primeiros pontos entram em regime elastoplástico, isto é, o instante em que a maior norma  $\|\text{dev} \mathbf{M}_e\|$  atinge o limite inicial  $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0(x_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa(x_2)|_{\kappa=0}$ . Já o limite plástico pode ser definido como o instante a partir do qual todos os pontos estão em regime elastoplástico, ou seja, a partir do instante em que o limite plástico  $\Phi = \dot{\Phi} = 0$  é atingido para todos os pontos. Nos próximos itens, definindo  $\lambda_{LE}$  e  $\lambda_{LP}$  como os alongamentos longitudinais da barra correspondentes aos limites elástico e plástico, são analisadas quatro fases para a barra prismática sob tração uniaxial com GF ao longo de  $x_2$  (ver figura 6.1) e com alongamento longitudinal monotonamente variável ao longo do tempo:

1) Fase elástica:

$$\Delta \lambda_1 > 0, \lambda_1 < \lambda_{LE}, \Phi < 0 \quad (\forall x_2) \quad (7.25.1)$$

2) Fase intermediária:

$$\Delta\lambda_1 > 0, \lambda_{LE} < \lambda_1 < \lambda_{LP}, \Phi \leq 0 \quad (7.25.2)$$

3) Fase plástica:

$$\Delta\lambda_1 > 0, \lambda_1 > \lambda_{LP}, \Phi = \dot{\Phi} = 0 \quad (\forall x_2) \quad (7.25.3)$$

4) Fase de descarregamento elástico:

$$\Delta\lambda_1 < 0, \Phi < 0 \quad (\forall x_2), \dot{\Phi} < 0 \quad (\forall x_2) \quad (7.25.4)$$

### 7.5.1. GF do módulo de Young

Para a barra da figura 6.1, adotando a lei de potência de GF (7.4) para o módulo de Young (ver equações 7.9) ao longo do eixo  $x_2$ , a tensão elástica de Mandel  $M_{e1}$  é (ver equações 7.2 e 6.98):

$$M_{e1}(x_2) = E(x_2) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}} \right)^2 \right] \quad (7.26.1)$$

$$E(x_2) = E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \quad (7.26.2)$$

onde  $p$  é o coeficiente de GF de potência; e os valores  $E_1$  e  $E_2$  são os limites do módulo de Young ( $E$ ) para  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente. Com isso, para o caso em que  $E_1 > E_2$ , então  $M_{e1}(b_0) > M_{e1}(0)$ . Assim, de acordo com o critério de plastificação (7.24) e com a definição dada no último parágrafo antes das equações (7.25), o limite elástico, representado pelo alongamento longitudinal  $\lambda_{LE}$ , é atingido quando a maior norma, neste caso,

$\|\text{dev}[\mathbf{M}_e(b_0)]\|$  atinge o limite inicial de escoamento  $\sqrt{2/3}\sigma_0 = \sqrt{2/3}\sigma_\kappa$  ( $\kappa = 0$ ), o qual (neste caso) é constante para todo o material, isto é (ver equações 6.98, 7.24 e 7.26):

$$\|\text{dev}[\mathbf{M}_e(b_0)]\| = \sqrt{2/3}M_{e1}(b_0) = \sqrt{2/3}\frac{E_1}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = \sqrt{2/3}\sigma_0 \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = \sigma_0 \quad (7.27)$$

Analogamente, o limite plástico, representado pelo alongamento longitudinal  $\lambda_{LP}$ , é atingido quando a menor norma, neste caso,  $\|\text{dev}[\mathbf{M}_e(0)]\|$  atinge o limite inicial de escoamento  $\sqrt{2/3}\sigma_0$ :

$$\|\text{dev}[\mathbf{M}_e(0)]\| = \sqrt{2/3}M_{e1}(0) = \sqrt{2/3}\frac{E_1}{2}(\lambda_{LP}^4 - \lambda_{LP}^2) = \sqrt{2/3}\sigma_0 \Rightarrow$$

$$\frac{E_2}{2}(\lambda_{LP}^4 - \lambda_{LP}^2) = \sigma_0 \quad (7.28)$$

Para a fase elástica (7.25.1), temos as seguintes igualdades (ver equações 3.11, 3.16, 3.23, 3.24 e 6.25):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e, \mathbf{C} = \mathbf{C}_e, \mathbf{A}_p = \mathbf{C}_p = \mathbf{I} \quad (7.29.1)$$

$$\mathbf{S}_{e1} = \mathbf{S}_1 \quad (7.29.2)$$

$$\mathbf{M}_{e1} = \mathbf{C}_{e1}\mathbf{S}_{e1} = \mathbf{C}_1\mathbf{S}_1 \quad (7.29.3)$$

Com isso, a força longitudinal aplicada é (ver equação 7.23):

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \frac{E(x_2)}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) dx_2 = \frac{h_0(\lambda_1^3 - \lambda_1)}{2} \int_0^{b_0} E(x_2) dx_2 \quad (7.30)$$

Com a lei de GF de potência (7.26.2), a integral acima ao longo dos limites  $z_1$  e  $z_2$  resulta em:

$$\int_{z_1}^{z_2} E(x_2) dx_2 = \int_{z_1}^{z_2} \left[ E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] dx_2 \Rightarrow$$

$$\int_{z_1}^{z_2} E(x_2) dx_2 = E_2 (z_2 - z_1) + \frac{(E_1 - E_2)}{(1+p)b_0^p} (z_2^{1+p} - z_1^{1+p}) \quad (7.31)$$

Portanto, a força longitudinal aplicada na fase elástica ( $\lambda_1 < \lambda_{1E}$ ) é determinada com a combinação entre as expressões (7.30) e (7.31), e considerando  $z_1 = 0$  e  $z_2 = b_0$ :

$$F_1 = \frac{b_0 h_0}{2} (\lambda_1^3 - \lambda_1) \left( E_2 + \frac{E_1 - E_2}{1+p} \right) \quad (7.32)$$

Para a fase intermediária (7.25.2), existem pontos em regime elástico ( $\Phi < 0$ ) e pontos em regime elastoplástico ( $\Phi = 0$ ). De acordo com as equações (7.26), se  $E_1 > E_2$  então  $M_{e1}(b_0) > M_{e1}(0)$ , isto é, quanto maior a coordenada  $x_2$ , maiores são os valores de  $M_{e1}$  e, conseqüentemente, de  $\Phi$ . Assim, existe uma coordenada limite  $X2$ , sendo que  $\Phi < 0$  para  $x_2 < X2$ , e  $\Phi = 0$  para  $x_2 > X2$ . Portanto, a coordenada limite  $X2$  pode ser calculada a partir da igualdade  $\sqrt{\frac{2}{3}} M_{e1}(X2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$  ou  $M_{e1}(X2) = \sigma_0$  (ver expressões 7.26 e 7.28):

$$M_{e1}(X2) = \frac{1}{2} (\lambda_1^4 - \lambda_1^2) \left[ E_2 + (E_1 - E_2) \left( \frac{X2}{b_0} \right)^p \right] = \sigma_0 \Rightarrow$$

$$X2 = b_0 \left[ \frac{1}{E_1 - E_2} \left( \frac{2\sigma_0}{\lambda_1^4 - \lambda_1^2} - E_2 \right) \right]^{1/p} \quad (7.33)$$

Nesse caso, a força longitudinal aplicada pode ser decomposta aditivamente em duas parcelas: a força relativa à porção de material em regime elástico ( $F_1^{EL}$ ); e a força correspondente à parte em regime elastoplástico ( $F_1^{ELP}$ ). Assim, como a força relativa à porção de material em regime elástico pode ser determinada com a equação (7.31) para  $z_2 = X2$ , na fase intermediária (7.25.2) a força total é:

$$F_1 = F_1^{EL} + F_1^{ELP} \quad (7.34.1)$$

$$F_1^{EL} = \frac{h_0(\lambda_1^3 - \lambda_1)}{2} \int_0^{X2} E(x_2) dx_2 = \frac{h_0 X2}{2} (\lambda_1^3 - \lambda_1) \left[ E_2 + \left( \frac{E_1 - E_2}{1+p} \right) \left( \frac{X2}{b_0} \right)^p \right] \quad (7.34.2)$$

$$F_1^{ELP} = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_{X2}^{b_0} M_{el}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_{X2}^{b_0} \sigma_\kappa(x_2) dx_2 \quad (7.34.3)$$

$$M_{el}(x_2) = E(x_2) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}(x_2)} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}(x_2)} \right)^2 \right] \quad (7.34.4)$$

$$\sigma_\kappa(x_2) = \sigma_\kappa \left[ \kappa(x_2) \right] \quad (7.34.5)$$

onde  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico (6.33), utilizado para definir a tensão limite de escoamento  $\sigma_\kappa$ ; e  $\lambda_{p1}$  é o alongamento longitudinal plástico, variável com a coordenada  $x_2$ . De acordo com a expressão (6.111.2), para determinar analiticamente o valor das integrais em (7.34.3), deve ser conhecida a função  $\lambda_{p1}(x_2)$  ou a função  $\kappa(x_2)$ . Simplificando para o caso de o material da barra ser elastoplástico perfeito, a parcela  $F_1^{ELP}$  resulta em:

$$M_{el} = \sigma_0 \text{ (constante)} \Rightarrow F_1^{ELP} = \frac{h_0(b_0 - X2)\sigma_0}{\lambda_1} \quad (7.35)$$

onde a coordenada limite  $X2$  é dada em (7.33).

Já na fase plástica (7.25.3), todos os pontos estão em regime elastoplástico ( $\Phi = 0$ ) e, assim, a força longitudinal aplicada é (ver expressões 7.34):

$$F_1 = F_1^{ELP} = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{el}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \sigma_\kappa(x_2) dx_2 \quad (7.36)$$

Para materiais elastoplásticos perfeitos, a equação acima pode ser simplificada para:

$$F_1 = F_1^{ELP} = \frac{h_0 b_0 \sigma_0}{\lambda_1} \quad (7.37)$$

Por fim, na fase de descarregamento elástico (7.25.4), a força longitudinal aplicada na barra é (ver expressões 7.34):

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{el}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ \frac{E(x_2)}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{max}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{max}} \right)^2 \right] \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0}{2\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ E(x_2) \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{max}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{max}} \right)^2 \right] \right\} dx_2 \quad (7.38.1)$$

$$\lambda_{p1}^{max} = \lambda_{p1}^{max}(x_2) \quad (7.38.2)$$

onde  $\lambda_{p1}^{max}$  é o alongamento longitudinal plástico alcançado em  $\lambda_1 = \lambda_1^{max} > \lambda_{LP}$ , que depende da coordenada inicial  $x_2$ , mas que não se altera ao longo do descarregamento elástico.

### 7.5.2. GF das constantes de encruamento isotrópico

Para a barra da figura 6.1, se o módulo de Young ( $E$ ) é constante, então a força longitudinal aplicada durante a fase elástica (7.25.1) é (ver expressões 6.66.1 e 7.30):

$$F_1 = \frac{E(\lambda_1^3 - \lambda_1)}{2} h_0 b_0 \quad (7.39)$$

Adotando a lei de potência de GF (7.4), apenas, para as constantes de encruamento isotrópico ao longo do eixo  $x_2$ , a tensão limite de escoamento ( $\sigma_\kappa$ ) passa também a ser função da coordenada  $x_2$ , isto é (ver equação 6.100.4):  $\sigma_\kappa = \sigma_\kappa(\kappa, x_2)$ , onde  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico (6.33). De modo similar ao item 7.5.1, os limites elástico e plástico podem ser determinados com a igualdade  $M_{el} = \sigma_\kappa(0)$ . Assumindo que a tensão inicial de escoamento é igual a  $\sigma_1(0)$  em  $x_2 = b_0$ , e igual a  $\sigma_2(0) > \sigma_1(0)$  em  $x_2 = 0$ , para um alongamento longitudinal monotonamente crescente (de um até um valor maior do que o limite plástico  $\lambda_{LP}$ ), os pontos com  $x_2 = b_0$  são os primeiros a entrar em regime

elastoplástico, e os pontos com  $x_2 = 0$  são os últimos a plastificarem. Nestas circunstâncias, e com o módulo de Young ( $E$ ) variável em  $x_2$ :

$$\frac{E}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = \sigma_1(0) \quad (7.40.1)$$

$$\frac{E}{2}(\lambda_{LP}^4 - \lambda_{LP}^2) = \sigma_2(0) \quad (7.40.2)$$

Para a lei de encruamento isotrópico polinomial com GF (7.13), os valores limites para a tensão inicial de escoamento são:

$$\sigma_1(0) = a_0(b_0) \quad (7.41.1)$$

$$\sigma_2(0) = a_0(0) \quad (7.41.2)$$

onde  $a_0(0)$  e  $a_0(b_0)$  são, nesta ordem, os valores do coeficiente  $a_0$  para  $x_2 = 0$  e  $x_2 = b_0$ .

Para a lei de Swift com GF (7.14), temos:

$$\sigma_1(0) = K(b_0)[E_0(b_0)]^{n(b_0)} \quad (7.42.1)$$

$$\sigma_2(0) = K(0)[E_0(0)]^{n(0)} \quad (7.42.2)$$

onde os conjuntos de coeficientes  $[K(0), E_0(0), n(0)]$  e  $[K(b_0), E_0(b_0), n(b_0)]$  correspondem, nesta ordem, às constantes da lei de Swift (6.50) para  $x_2 = 0$  e  $x_2 = b_0$ .

Por fim, para a lei de Voce com GF (7.15), temos:

$$\sigma_1(0) = \sigma_0(b_0) \quad (7.43.1)$$

$$\sigma_2(0) = \sigma_0(0) \quad (7.43.2)$$

onde  $\sigma_0(0)$  e  $\sigma_0(b_0)$  são, respectivamente, os valores do coeficiente  $\sigma_0$  para  $x_2 = 0$  e  $x_2 = b_0$ .

Assim como é feito no item 7.5.1, para a fase intermediária (7.25.2), pode-se determinar a coordenada limite  $X_2$ , sendo que os pontos com coordenada  $x_2 < X_2$  estão em regime elástico, e os pontos com  $x_2 > X_2$  estão em regime elastoplástico. Para isso, basta igualar a tensão elástica de Mandel  $M_{e1}$  ao limite inicial de escoamento  $\sigma_0$ . Neste caso,  $M_{e1}$  é constante ao longo da porção de material em regime elástico, e  $\sigma_0$  é variável ao longo de  $x_2$ , ou seja (ver expressões 6.98.2 e 7.33):

$$M_{e1} = \frac{E}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) = \sigma_0(X_2) \quad (7.44)$$

Para a lei de encruamento isotrópico polinomial (7.13), adotando a lei de GF de potência (7.4) para o coeficiente  $a_0$  ao longo de  $x_2$ , o valor de  $X_2$  é determinado da seguinte forma (ver expressão 7.41):

$$\begin{aligned} \frac{E}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) &= a_0(0) + [a_0(b_0) - a_0(0)] \left( \frac{X_2}{b_0} \right)^p \Rightarrow \\ X_2 &= b_0 \left\{ \left[ \frac{E}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) - a_0(0) \right] \frac{1}{a_0(b_0) - a_0(0)} \right\}^{1/p} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Já para a lei de Swift (7.14), adotando a lei de GF de potência (7.4) ao longo de  $x_2$  para o coeficiente  $K$  apenas, a coordenada limite  $X_2$  é calculada com auxílio da expressão (7.42):

$$\begin{aligned} \frac{E}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) &= \left\{ K(0) + [K(b_0) - K(0)] \left( \frac{X_2}{b_0} \right)^p \right\} E_0^n \Rightarrow \\ X_2 &= b_0 \left\{ \left[ \frac{E}{2E_0^n}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) - K(0) \right] \frac{1}{[K(b_0) - K(0)]} \right\}^{1/p} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Por fim, para a lei de Voce (7.15), considerando a lei de GF de potência (7.4) ao longo de  $x_2$  para o coeficiente  $\sigma_0$ , é possível determinar  $X_2$  da seguinte maneira (ver expressão 7.43):

$$\frac{E}{2}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) = \sigma_0(0) + [\sigma_0(b_0) - \sigma_0(0)] \left( \frac{X_2}{b_0} \right)^p \Rightarrow$$



$$X2 = b_0 \left\{ \left[ \frac{E}{2} (\lambda_1^4 - \lambda_1^2) - \sigma_0(0) \right] \frac{1}{\sigma_0(b_0) - \sigma_0(0)} \right\}^{1/p} \quad (7.47)$$

Na fase intermediária (7.25.2), a força longitudinal aplicada é (ver expressões 7.30 e 7.34):

$$F_1 = F_1^{EL} + F_1^{ELP} \quad (7.48.1)$$

$$F_1^{EL} = \frac{h_0 X2 (\lambda_1^3 - \lambda_1) E}{2} \quad (7.48.2)$$

$$F_1^{ELP} = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_{X2}^{b_0} M_{e1}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_{X2}^{b_0} \sigma_\kappa(x_2) dx_2 \quad (7.48.3)$$

$$M_{e1}(x_2) = \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}(x_2)} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}(x_2)} \right)^2 \right] \quad (7.48.4)$$

$$\sigma_\kappa(x_2) = \sigma_\kappa[\kappa(x_2)] \quad (7.48.5)$$

onde a coordenada limite  $X2$  é determinada com a equação (7.45), (7.46) ou (7.47). Simplificando para o caso de material elastoplástico perfeito, o único coeficiente não nulo é  $a_0$  (ver equação 7.13). Adotando variação, ao longo de  $x_2$ , do coeficiente  $a_0$  conforme a lei de GF de potência (7.4), é possível calcular analiticamente o termo  $F_1^{ELP}$  utilizado para determinar a força longitudinal aplicada (7.48.1):

$$M_{e1} = \sigma_0 = a_0(0) + [a_0(b_0) - a_0(0)] \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \quad (7.49.1)$$

$$F_1^{ELP} = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_{X2}^{b_0} \left\{ a_0(0) + [a_0(b_0) - a_0(0)] \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1^{ELP} = \frac{h_0}{\lambda_1} \left\{ a_0(0)(b_0 - X2) + \frac{b_0 [a_0(b_0) - a_0(0)]}{1+p} \left[ 1 - \left( \frac{X2}{b_0} \right)^{1+p} \right] \right\} \quad (7.49.2)$$

Na fase plástica (7.25.3), o cálculo da força longitudinal aplicada é realizado com as equações (7.36) e (7.48.4) (ou 7.48.5). Tal força pode ser determinada analiticamente para o caso de material elastoplástico perfeito (ver expressões 7.49):

$$F_1 = F_1^{\text{ELP}} = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ a_0(0) + [a_0(b_0) - a_0(0)] \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0}{\lambda_1} \left[ a_0(0) + \frac{a_0(b_0) - a_0(0)}{1+p} \right] \quad (7.50)$$

Por fim, para a fase de descarregamento elástico (7.25.4), o cálculo da força aplicada é realizado de modo análogo ao procedimento das expressões (7.38):

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{e1}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ \frac{E}{2} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{\text{max}}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{\text{max}}} \right)^2 \right] \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0}{2\lambda_1} E \int_0^{b_0} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{\text{max}}} \right)^4 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{p1}^{\text{max}}} \right)^2 \right] dx_2 \quad (7.51.1)$$

$$\lambda_{p1}^{\text{max}} = \lambda_{p1}^{\text{max}}(x_2) \quad (7.51.2)$$

Neste caso, o módulo de Young ( $E$ ) é constante, e o alongamento plástico máximo ( $\lambda_{p1}^{\text{max}}$ ) é variável ao longo da coordenada inicial  $x_2$ , mas que não se altera ao longo do descarregamento elástico.

## 8. CÓDIGOS COMPUTACIONAIS DESENVOLVIDOS

No presente capítulo são descritos os códigos computacionais (ou programas) desenvolvidos pelo aluno ao longo da pesquisa. Além dos geradores de funções de forma e de malhas de elementos finitos, são descritos os códigos de análise não linear geométrica via elementos sólidos (tetraédricos e hexaédricos) para materiais em regime elástico e elastoplástico. Todos os códigos computacionais desenvolvidos são escritos em linguagem FORTRAN. Ademais, é descrita de forma sucinta a formulação numérica dos programas EPIM3D e DD3IMP, utilizados pelo aluno ao longo de seu estágio de Doutorado no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra (Portugal). Por fim, para mostrar uma aplicação da teoria elastoplástica deste estudo, são fornecidas soluções analíticas para barras sob tração uniaxial em regime de pequenas deformações elásticas.

### *8.1. Gerador de funções de forma*

O uso de aproximações polinomiais de qualquer grau para as funções de forma (ver equações 3.1) não é um dos objetivos iniciais deste estudo (ver seção 1.2). Contudo, para que fosse possível empregar malhas de elementos com diferentes ordens de aproximação para analisar o mesmo problema estrutural, foi desenvolvido um algoritmo generalizado para geração automática dos coeficientes das funções de forma e dos coeficientes das derivadas dessas funções. Esse algoritmo foi implementado nos códigos computacionais de análise não linear, desenvolvidos ao longo da pesquisa. Dessa forma, é possível comparar, para o mesmo problema estrutural, os resultados obtidos para malhas (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) com diferentes números de elementos finitos e distintas ordens de aproximação polinomial.

O algoritmo de geração das funções de forma determina, para qualquer grau de aproximação escolhido, a matriz dos coeficientes  $\mathbf{M}_{\text{coef}}$  e o vetor de coordenadas adimensionais  $\mathbf{v}_{\xi}$  (ver equações 3.4). Esse algoritmo é descrito no Apêndice A, para os seguintes elementos finitos: barra unidimensional; triangular plano; quadrilateral plano; sólido tetraédrico; e sólido hexaédrico (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Os elementos finitos de barra, triangular e quadrilateral não são usados neste estudo. Porém, os algoritmos de geração das funções de forma de tais elementos são descritos para facilitar o entendimento da referida geração para os elementos tridimensionais (tetraédrico e hexaédrico), os quais são utilizados no presente estudo.

Para cálculo dos gradientes (equações 3.15.2 e 3.15.3), é preciso determinar as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas adimensionais ( $\xi$ ). O algoritmo para cálculo generalizado dessas derivadas também é dado no Apêndice A.

## 8.2. Gerador de malhas

Neste estudo, define-se malha de elementos como sendo a discretização adotada para simulação numérica, via Método dos Elementos Finitos (MEF), de determinada estrutura. Em tal malha, devem existir as seguintes informações: número e coordenadas dos nós (CHEN, 2005); e incidência dos elementos finitos, que é a relação entre as numerações local (para cada elemento) e global dos nós. Para realizar a simulação numérica de qualquer problema estrutural, é preciso gerar a malha de elementos a ser usada durante essa simulação. Assim como o gerador automático das funções de forma (ver seção 8.1), desenvolver um gerador de malhas de elementos sólidos também não é um dos objetivos iniciais deste estudo (ver seção 1.2). Porém, para possibilitar a geração de malhas de elementos finitos sólidos com diferentes quantidades de elementos e distintos graus de aproximação, foi desenvolvido um algoritmo generalizado para geração dessas malhas, isto é, a ordem de aproximação polinomial (ver equações 3.1) e a quantidade de elementos sólidos podem ser quaisquer. Neste estudo, a referida geração começa a partir das informações de uma malha, chamada aqui de malha base.

Essa malha é constituída de elementos hexaédricos de aproximação linear (CHEN, 2005), cujas coordenadas dos vértices são conhecidas. Outra informação necessária para a geração das malhas é o número de divisões das arestas da malha base. Com esse número, é determinada a quantidade total de elementos finitos da malha. Por fim, com essa quantidade e com a ordem de aproximação polinomial desejada, o gerador de malhas calcula o número e as coordenadas de todos os nós, assim como a incidência de todos os elementos. O gerador de malhas desenvolvido também determina quais nós possuem alguma restrição de deslocamento e quais nós estão carregados. Detalhes da geração das malhas são fornecidos no Apêndice F.

### 8.3. Integração numérica

As integrais que aparecem no cálculo do vetor de forças internas (equação 4.9.2) e da matriz Hessiana (equação 4.11.2) são determinadas via integração numérica, já que o cálculo analítico de tais integrais é extremamente difícil. Essa integração numérica é realizada no espaço adimensional  $\xi$  (ver equações 4.11 e figura 3.1) com auxílio de quadraturas de Gauss, as quais contêm as coordenadas dos pontos e os respectivos pesos de integração numérica. Assim sendo, as coordenadas dos pontos de integração numérica são coordenadas adimensionais em  $\xi$ . Dessa forma, as equações (4.9.2) e (4.11.2) são substituídas pelas expressões a seguir:

$$(\mathbf{f}_{\text{int}})^J = \int_{(\Omega_0)^J} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}} dV_0 = \left[ \int_{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}} J_0 d\xi \right]^J = \left\{ \sum_{p=1}^{\text{npin}} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{y}} J_0 \right]_{\xi=\xi(p)} w(p) \right\}^J \quad (8.1.1)$$

$$(\mathbf{H})^J = \left[ \int_{(\Omega_0)^J} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} dV_0 \right]^J = \left[ \int_{\xi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} J_0 d\xi \right]^J = \left\{ \sum_{p=1}^{\text{npin}} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} J_0 \right]_{\xi=\xi(p)} w(p) \right\}^J \quad (8.1.2)$$

onde  $(\mathbf{f}_{\text{int}})^J$  é o vetor local de forças internas para o elemento  $J$ ;  $(\Omega_0)^J$  representa o domínio inicial do elemento  $J$ ;  $\text{npin}$  é o número de pontos de integração numérica para cada elemento finito;  $\xi(p) = \{\xi_1(p), \xi_2(p), \xi_3(p)\}$  representa as coordenadas adimensionais ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ) do

ponto de integração  $p$ ;  $w(p)$  é o respectivo peso de integração numérica; e  $(\mathbf{H})^J$  é a matriz Hessiana local do elemento  $J$ .

### 8.3.1. Elemento finito sólido hexaédrico

Para o elemento finito sólido hexaédrico (CHEN, 2005), é usada a quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Os pontos  $(\xi)$  e pesos  $(w)$  de integração do hexaedro são determinados a partir da quadratura unidimensional de Gauss-Legendre (ASSAN, 2003):

Ciclo  $k = 1, np1$

Ciclo  $j = 1, np1$

Ciclo  $i = 1, np1$

$$p = i + (j-1)np1 + (k-1)(np1)^2 \quad (8.2.1)$$

$$\xi_1(p) = gl(i) \quad (8.2.2)$$

$$\xi_2(p) = gl(j) \quad (8.2.3)$$

$$\xi_3(p) = gl(k) \quad (8.2.4)$$

$$w(p) = wgl(i) wgl(j) wgl(k) \quad (8.2.5)$$

fim do Ciclo  $i = 1, np1$

fim do Ciclo  $j = 1, np1$

fim do Ciclo  $k = 1, np1$

onde  $np1$ ,  $gl(\ )$  e  $wgl(\ )$  são, nesta ordem, o número de pontos de integração por elemento unidimensional, a coordenada adimensional desses pontos e os respectivos pesos de integração referentes à quadratura unidimensional de Gauss-Legendre. Essa quadratura é fornecida no Anexo A, até  $np1 = 8$ . Neste estudo, a coordenada adimensional  $gl$  varia entre zero e um.

### 8.3.2. Elemento finito sólido tetraédrico

Para integração numérica do elemento sólido tetraédrico (CHEN, 2005), são empregadas duas estratégias: a estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007); e as quadraturas Gaussianas de Jinyun (1984) e de Keast (1986). Na primeira estratégia, é utilizada a quadratura tridimensional de Gauss-Legendre para hexaedros. Para obter a quadratura para tetraedros, a integral do hexaedro é alterada via transformação de coordenadas entre as regiões hexaédrica e tetraédrica (RATHOD; VENKATESUDU; NAGARAJA, 2007):

$$u = x \tag{8.3.1}$$

$$y = (1 - u)v \tag{8.3.2}$$

$$z = (1 - u)(1 - v)w \tag{8.3.3}$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as coordenadas que definem a região hexaédrica  $\{u,v,w / 0 \leq u,v,w \leq 1\}$ ; e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas que definem a região tetraédrica  $\{x,y,z / 0 \leq x,y,z \leq 1, 0 \leq x + y + z \leq 1\}$ . O determinante do gradiente da transformação (8.3) resulta em:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = (1-u)^2 (1-v) \quad (8.4.1)$$

$$dx dy dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} du dv dw = (1-u)^2 (1-v) du dv dw \quad (8.4.2)$$

onde  $dx dy dz$  e  $du dv dw$  denotam, respectivamente, elementos infinitesimais de volume nas regiões tetraédrica e hexaédrica. Com as expressões (8.3) e (8.4), é possível realizar a seguinte transformação de integrais (ver expressões 8.1):

$$\int_x \int_y \int_z f(x,y,z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f[u, (1-u)v, (1-u)(1-v)w] (1-u)^2 (1-v) \right\} dw dv du \quad (8.5.1)$$

$$\int_x \int_y \int_z f(x,y,z) dx dy dz = \sum_{n=1}^{n_{pin}} \left[ f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w \right] \quad (8.5.2)$$

onde  $f(\ )$  é a função a ser integrada no espaço tetraédrico. Combinando as equações (8.5), é possível determinar as coordenadas adimensionais e os pesos de integração numérica para o tetraedro:

$$\xi_1 = u \quad (8.6.1)$$

$$\xi_2 = (1-u)v \quad (8.6.2)$$

$$\xi_3 = (1-u)(1-v)w \quad (8.6.3)$$

$$w = (1-u)^2 (1-v) wgl \quad (8.6.4)$$

onde  $\{u,v,w\}$  e  $wgl$  são, respectivamente, as coordenadas adimensionais e os pesos da quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver seção 8.3.1).

Com relação à estratégia da quadratura Gaussiana, o número de pontos de integração numérica (por elemento) é fornecido na tabela 8.1. As quadraturas Gaussianas para o tetraedro são fornecidas no Anexo B desta tese.



Tabela 8.1. Número de pontos de integração da quadratura Gaussiana para cada precisão de integração numérica do elemento sólido tetraédrico.

Precisão da integração	Número de pontos de integração por elemento tetraédrico	Referência
1	1	Zienkiewicz e Taylor (2005)
2	4	Keast (1986)
3	5	Jinyun (1984)
4	11	Keast (1986)
5	15	Keast (1986)
6	24	Keast (1986)
7	31	Keast (1986)
8	45	Keast (1986)

#### 8.4. Algoritmo de análise não linear geométrica de materiais em regime elástico

É apresentada, neste item, a estrutura geral dos códigos computacionais para análise não linear geométrica de materiais hiperelásticos (ver capítulo 5) via elementos finitos sólidos. Todas as simulações podem ser divididas em três etapas, independente do elemento usado (tetraedro ou hexaedro): pré-processamento, simulação do carregamento e pós-processamento.

A etapa de pré-processamento compreende a geração das malhas de elementos sólidos (ver seção 8.2 e Apêndice F). No código de simulação numérica estrutural, antes da aplicação do carregamento, são realizadas as seguintes tarefas:

- a) leitura dos dados de entrada;

- b) obtenção das coordenadas e dos pesos de integração numérica (ver seção 8.3);
- c) determinação dos coeficientes das funções de forma e dos coeficientes das derivadas dessas funções (ver seção 8.1 e Apêndice A);
- d) cálculo e armazenamento, na memória do computador, da inversa do gradiente inicial  $A_0$  (3.15.2) em todos os pontos de integração numérica de todos os elementos finitos, já que essa inversa não se altera ao longo da simulação;
- e) cálculo, para o caso de materiais com gradação funcional (MGFs), das constantes elásticas (ver seção 7.2) nos pontos de integração de todos os elementos, as quais variam de acordo a lei de GF adotada (seção 7.2);
- f) cálculo e armazenamento, para o caso da lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (5.2), do tensor elástico de quarta ordem (4.8) em todos os pontos de integração de todos os elementos, já que esses valores permanecem constantes no decorrer da simulação computacional;
- g) cálculo e armazenamento da segunda derivada da deformação de Green-Lagrange em relação ao gradiente (ver equação B1.5).

Com relação aos dados de entrada do código desenvolvido neste estudo, eles devem conter as seguintes informações: número de nós e de elementos; ordens de aproximação polinomial e de integração numérica (ver tabela 8.1); número de passos (ou incrementos finitos) de carga; tolerância para o erro, ou para a dimensão máxima do resíduo de forças; frequência de impressão das posições finais no arquivo de saída; coordenadas iniciais dos nós; incidência dos elementos, que é a relação entre as numerações local e global dos nós; lei constitutiva adotada e constantes do material; carregamento externo nos nós; e restrições de deslocamento dos nós.

Após a realização das tarefas supramencionadas, tem início o procedimento incremental e iterativo de aplicação do carregamento. Esse procedimento está descrito, de forma sucinta, no fluxograma da figura 8.1. O método iterativo utilizado aqui, descrito na seção 4.6, recebe o nome de método de Newton-Raphson (PASCON, 2008) ou método de Newton (HOUSEHOLDER, 1953; BELLMAN; KALABA, 1965; CRISFIELD, 2000). O cálculo do vetor de forças externas, no respectivo passo, é feito da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(i) = (\Delta \mathbf{f}_{\text{ext}})_i \quad (8.7)$$

onde  $\mathbf{f}_{\text{ext}}(i)$  é o vetor de forças externas no passo  $i$ ; e o dado de entrada  $\Delta \mathbf{f}_{\text{ext}}$  é o incremento de força externa em cada passo de carga. Para determinação do sistema (ver figura 8.1), são calculados os vetores de forças internas locais de todos os elementos (ver equação 8.1.1), e as matrizes Hessianas locais de todos os elementos (ver equação 8.1.2). A montagem do vetor global de forças internas e da matriz Hessiana global é feita do modo tradicional de acordo com o conhecimento da incidência dos elementos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). O vetor resíduo de forças global (ver equação 4.10.1 ou 5.8.1) é calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_G = (\mathbf{f}_{\text{int}})_G - \mathbf{f}_{\text{ext}}(i) \quad (8.8)$$

onde  $(\mathbf{f}_{\text{int}})_G$  é o vetor global de forças internas. O sistema global a ser resolvido é o seguinte:

$$\mathbf{H}_G \cdot \Delta \mathbf{y} = -\mathbf{r}_G \quad (8.9)$$

onde  $\mathbf{H}_G$  é a matriz Hessiana global; e  $\Delta \mathbf{y}$  é o vetor incremento posicional global. Em seguida, de acordo com os graus de liberdade (ver seção 3.1) restritos, o sistema global (equação 8.9) é modificado da seguinte forma (PASCON, 2008): se o grau de liberdade global  $m$  é restrito, então são realizadas as seguintes alterações:

$$(\mathbf{H}_G)_{mi} = (\mathbf{H}_G)_{jm} = 0 \quad (i, j = 1, \text{ntgl}) \quad (8.10.1)$$

$$(\mathbf{H}_G)_{mm} = 1 \quad (8.10.2)$$

$$(\mathbf{r}_G)_m = 0 \quad (8.10.3)$$

onde  $\text{ntgl}$  é o número total de graus de liberdade. Para tornar mais rápida a montagem do sistema, são calculados - apenas - os termos que correspondem aos graus de liberdade livres, isto é, são determinados somente os termos do sistema global (8.9) que não sofrem as modificações (8.10).

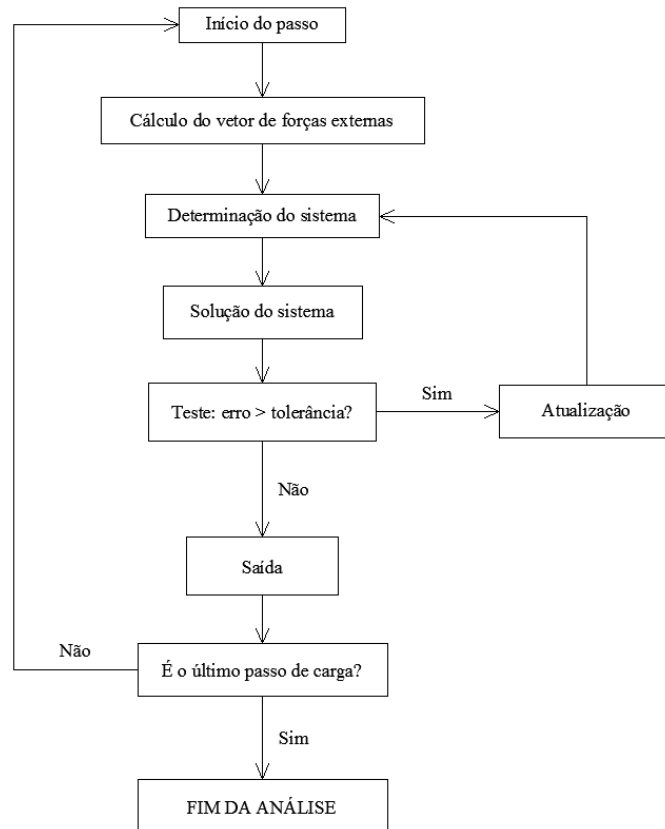


Figura 8.1. Procedimento incremental e iterativo de aplicação do carregamento para análise não linear geométrica de materiais elásticos.

A solução do sistema global (8.9) é feita com a sub-rotina MA57, que se trata de um método multifrontal direto, baseado na eliminação de Gauss (DUFF, 2004). Após resolver o sistema, é determinado o erro com a expressão a seguir:

$$\text{ERRO} = \sqrt{\text{abs}\left(\frac{\text{norma1}}{\text{norma2}}\right)} \quad (8.11.1)$$

$$\text{norma1} = \sum [(r_G)_i]^2 \quad (8.11.2)$$

$$\text{norma2} = \sum (x_i)^2 \quad (8.11.3)$$

onde os valores norma1 e norma2 são calculados, apenas, para os graus de liberdade livres;  $\mathbf{r}_G$  é o vetor resíduo de forças global (8.8); e  $\mathbf{x}$  é o vetor que contém todas as coordenadas iniciais dos nós (ver equação 3.1.1). Quando o erro (8.11) é maior do que a tolerância adotada,

a posição atual  $\mathbf{y}$  deve ser atualizada, ou seja, deve ser calculada a nova posição atual tentativa. Esse cálculo é feito com a equação a seguir (ver expressão 8.9):

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1 + \Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_1 - (\mathbf{H}_G)^{-1} \cdot \mathbf{r}_G \quad (8.12)$$

Na etapa de saída (ver figura 8.1), as posições atuais de equilíbrio de todos os nós, no final de determinados passos de carga, são impressas no arquivo de saída. Com esse arquivo, o programa de pós-processamento determina os campos de deslocamento, de deformação e de tensão ao longo de toda a estrutura. Com os valores dos deslocamentos de todos os nós, é possível, com auxílio de um programa desenvolvido no departamento (AcadView), visualizar as configurações de equilíbrio ao final de determinados passos de carga.

#### *8.5. Algoritmo de análise não linear geométrica de materiais em regime elastoplástico*

O código de análise não linear geométrica de estruturas constituídas de materiais em regime elastoplástico é similar ao código para materiais em regime elástico (ver seção 8.4). Basicamente, existem duas diferenças entre tais códigos. A primeira é na leitura das propriedades do material. Além de informar ao programa as constantes da lei constitutiva elástica adotada, é necessário informar as constantes referentes às leis de evolução do encruamento (ver capítulo 6). A segunda diferença entre os programas supracitados consiste na etapa que procede à realização do teste (ver figura 8.1). No caso de materiais em regime elastoplástico, parte-se da hipótese que a resposta do material ao incremento de carga aplicado é puramente elástica, ou seja, não há evolução das variáveis plásticas. Dessa forma, atingido o equilíbrio de forças (4.9.1), é necessário verificar o critério de plastificação (6.15.3) ou (6.27) em todos os pontos de integração numérica (ver seção 8.3) dos elementos. Se esse critério for satisfeito em todos os pontos, a hipótese de comportamento elástico é verdadeira e, com isso, pode-se avançar para a etapa de saída (ver figura 8.1). Caso contrário, deve ser realizada a correção plástica (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Para aqueles pontos de integração nos quais o critério de plastificação (6.15.3) ou (6.27) não é satisfeito, devem ser atualizados,

por meio do algoritmo de retorno da seção 6.6, os seguintes parâmetros plásticos: parcela plástica da deformação ( $\mathbf{E}_p$ ) ou parcela plástica do gradiente ( $\mathbf{A}_p$ ); parâmetro de encruamento isotrópico ( $\kappa$ ); e parâmetro de encruamento cinemático ( $\mathbf{X}$ ). As estratégias de previsão elástica implementadas nos códigos computacionais desenvolvidos neste estudo para materiais em regime elastoplástico são descritas a seguir.

### 8.5.1. Estratégias de previsão elástica

Neste estudo foram adotadas três estratégias com relação à primeira etapa do algoritmo de previsão elástica e correção plástica (CRISFIELD, 2000) descrito na seção 6.6 desta tese: previsão puramente elástica; método da Secante; e previsão elastoplástica. Em todas as três estratégias, é assumido inicialmente que as variáveis plásticas não variam ao longo do incremento, é verificado o critério de plastificação, e são atualizadas as referidas variáveis com o método de retorno descrito nas seções 6.6.1 e 6.6.2.

Na estratégia da previsão puramente elástica, para cálculo da matriz Hessiana (equação 4.11.2) considera-se que as derivadas das variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) em relação à deformação (total) de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , ou em relação aos graus de liberdade  $\mathbf{y}$ , são todas iguais a zero. Com isso, a primeira tentativa para a posição atual é:

$$\mathbf{y}_{t1} = \mathbf{y}_{(0)} - (\mathbf{H}^{-1})_{(0)} \cdot [\mathbf{f}_{\text{int}(0)} - \mathbf{f}_{\text{ext}(1)}] \quad (8.13.1)$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}(0)} = \int_{\xi} \left( \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \right)_{(0)} J_0 d\xi \quad (8.13.2)$$

$$\mathbf{H}_{(0)} = \int_{\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \right)_{(0)} J_0 d\xi \quad (8.13.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{E}} = O^{(4)} \quad (8.13.4)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{O} \quad (8.13.5)$$

onde os índices (0) e (1) denotam, respectivamente, as variáveis conhecidas no início e no final do incremento;  $\mathbf{y}$  é o vetor de graus de liberdade;  $\mathbf{y}_{i1}$  corresponde à posição atual relativa à primeira tentativa elástica; e  $O^{(4)}$  denota o tensor nulo de quarta ordem. A posição atual  $\mathbf{y}$ , o vetor de forças internas  $\mathbf{f}_{int}$ , a matriz Hessiana  $\mathbf{H}$  e as variáveis plásticas ( $\mathbf{E}_p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ ) são atualizados, respectivamente, via equações (8.13.1), (8.13.2), (8.13.3) e algoritmo de retorno (ver seções 6.7.1 ou 6.7.2) até que o conjunto  $(\mathbf{y}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X})$  satisfaça, simultaneamente, o equilíbrio de forças (4.9.1) e o critério de plastificação (6.15.3) ou (6.27). O correspondente fluxograma do algoritmo e um exemplo unidimensional da estratégia de previsão puramente elástica são apresentados nas figuras 8.2 e 8.3, respectivamente.

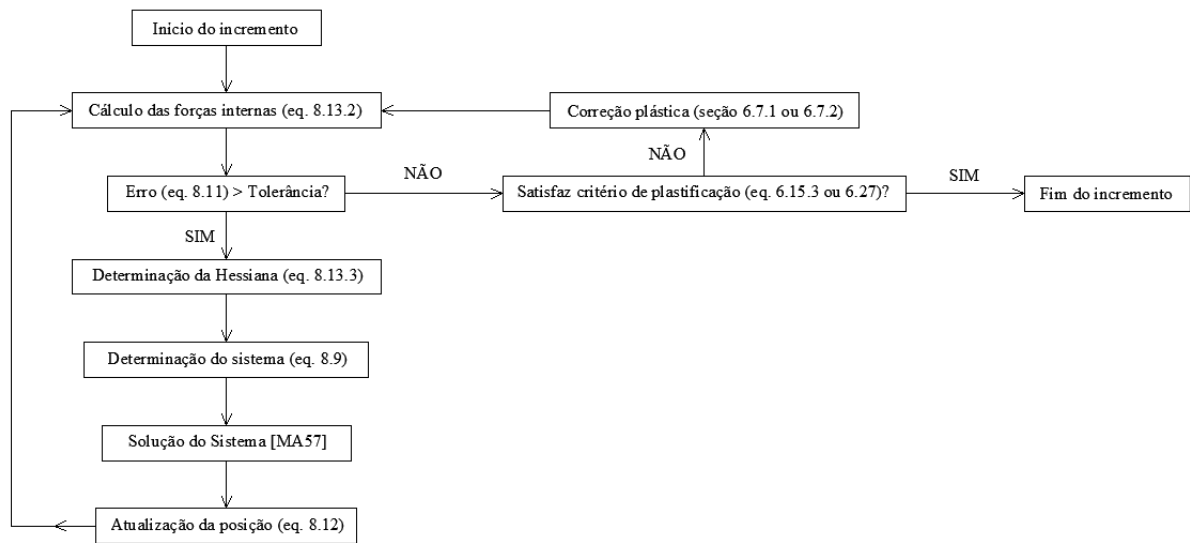


Figura 8.2. Fluxograma do procedimento incremental e iterativo, para a estratégia de previsão puramente elástica.

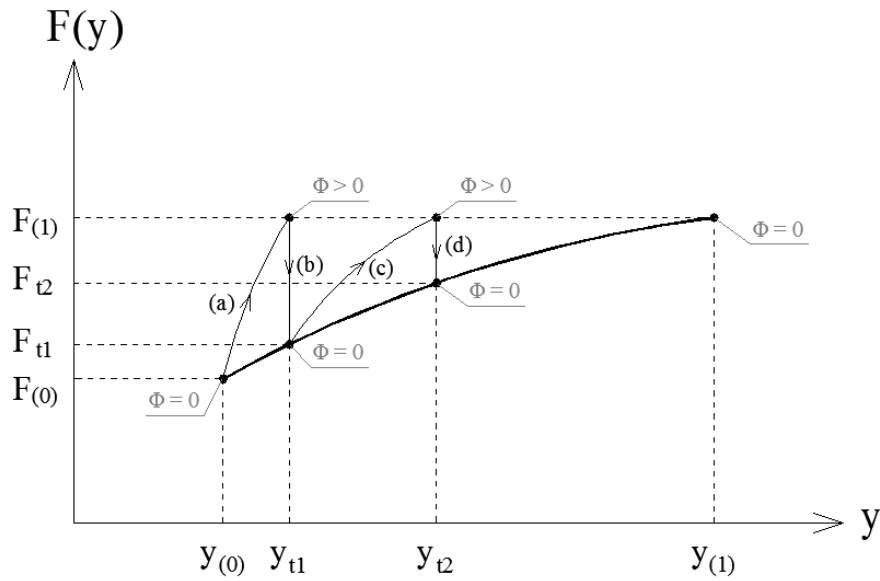


Figura 8.3. Exemplo unidimensional do método de previsão puramente elástica. Nesta figura o objetivo é, conhecidos a posição, a força e as variáveis plásticas no início do incremento  $(\mathbf{y}_{(0)}, F_{(0)}, \mathbf{E}_{p(0)}, \kappa_{(0)}, \mathbf{X}_{(0)})$ , determinar a posição e as variáveis plásticas ao final do incremento  $(\mathbf{y}_{(1)}, \mathbf{E}_{p(1)}, \kappa_{(1)}, \mathbf{X}_{(1)})$  de forma a obter  $F = F_{(1)}$  e  $\Phi = 0$ . Os índices  $t1, t2, \dots$  referem-se às tentativas. Etapa (a): previsão elástica via Newton-Raphson para obtenção de  $y_{t1}$ . Etapa (b): correção plástica com alteração na força ( $F_{t1}$ ). Etapa (c): previsão elástica via Newton-Raphson para obtenção de  $y_{t2}$ . Etapa (d): correção plástica com alteração na força ( $F_{t2}$ ).

O método da Secante tem o mesmo início da estratégia de previsão puramente elástica. O método iterativo de Newton-Raphson (CRISFIELD, 2000), com cálculo da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(0)}$  (ver equação 8.13.3), é aplicado para obter a posição tentativa  $\mathbf{y}_{s1}$  de forma que  $(\mathbf{f}_{int})_{s1} = (\mathbf{f}_{ext})_{(1)}$ , e as variáveis plásticas são atualizadas de forma que  $\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X})_{s1} = 0$ . A próxima posição tentativa, representada por  $\mathbf{y}_{s2}$ , é obtida com a fórmula multidimensional de Broyden (BROYDEN, 1965):

$$\mathbf{y}_{s2} = \mathbf{y}_{s1} + \Delta \mathbf{y}_{s12} = \mathbf{y}_{s1} - (\mathbf{H}^{-1})_{s1} \cdot \mathbf{r}_{s1} \quad (8.14.1)$$

$$\mathbf{r}_{s1} = (\mathbf{f}_{int})_{s1} - (\mathbf{f}_{ext})_{(1)} \quad (8.14.2)$$



$$\mathbf{H}_{s1} = \mathbf{r}_{s1} \cdot \frac{\Delta \mathbf{y}_s}{\|\Delta \mathbf{y}_s\|} \quad (8.14.3)$$

$$\Delta \mathbf{y}_s = \mathbf{y}_{s1} - \mathbf{y}_{(0)} \quad (8.14.4)$$

$$\|\Delta \mathbf{y}_s\| = \sqrt{(\mathbf{y}_{s1} - \mathbf{y}_{(0)}) \cdot (\mathbf{y}_{s1} - \mathbf{y}_{(0)})} = \sqrt{(y_{s1} - y_{(0)})_i (y_{s1} - y_{(0)})_i} \quad (8.14.5)$$

Com a nova posição  $\mathbf{y}_{s2}$ , verifica-se o critério de plastificação ( $\Phi \leq 0$ ). Caso  $\Phi[\mathbf{E}_{(s2)}, \mathbf{E}_{p(s1)}, \kappa_{(s1)}, \mathbf{X}_{(s1)}] > 0$ , são corrigidas as variáveis plásticas para obter  $\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X})_{s2} = 0$ . Caso o resíduo de forças  $\mathbf{r}_{s2}$  não seja suficientemente pequeno, determina-se a nova posição tentativa  $\mathbf{y}_{s3}$  via Newton-Raphson. Pode-se notar que, na estratégia da Secante, os métodos de Newton-Raphson e de Broyden são alternadamente utilizados até que o conjunto de variáveis mecânicas  $(\mathbf{y}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X})$  ou  $(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \kappa, \mathbf{X})$  satisfaça simultaneamente o equilíbrio de forças (4.9.1) e o critério de plastificação (6.15.3) ou (6.27). O algoritmo e um exemplo unidimensional da estratégia da Secante são ilustrados nas figuras 8.4 e 8.5, respectivamente.

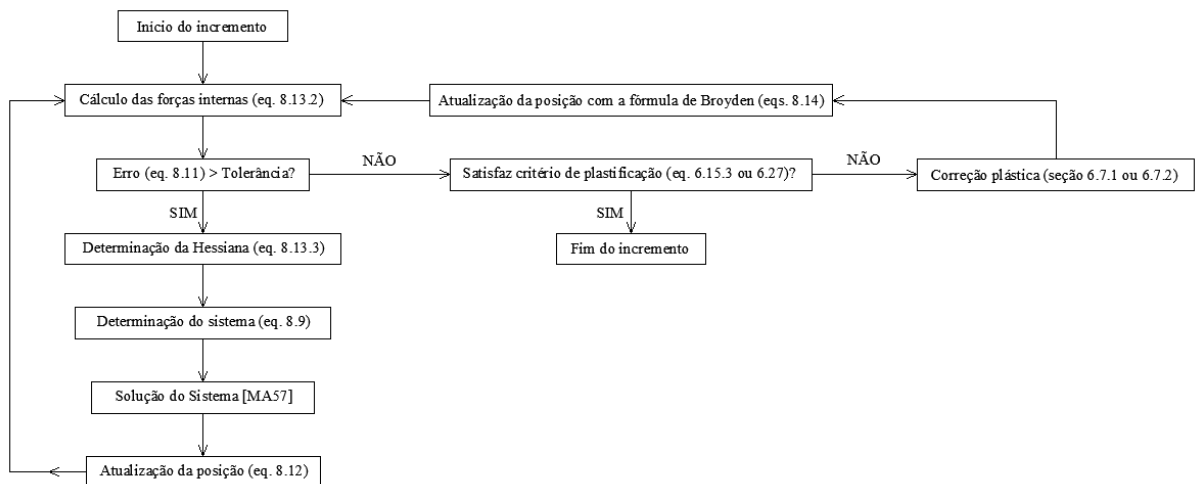


Figura 8.4. Fluxograma do procedimento incremental e iterativo, para a estratégia da Secante.

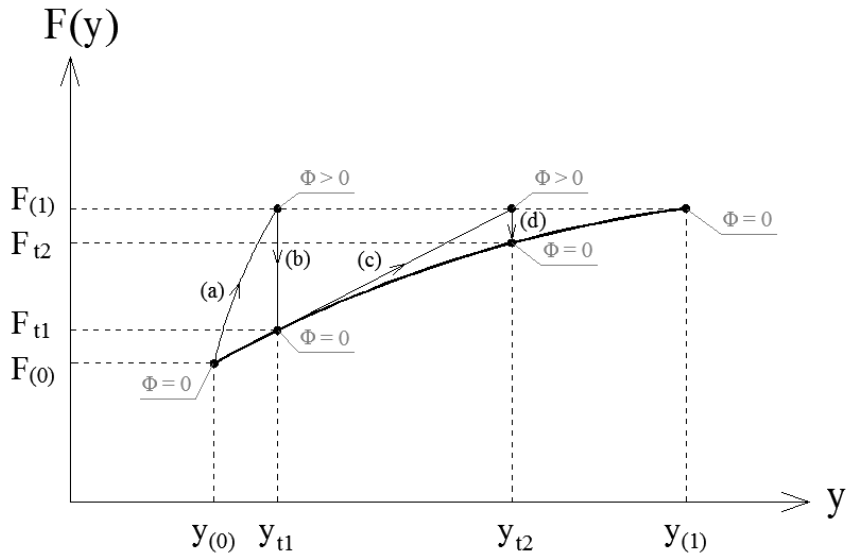


Figura 8.5. Exemplo unidimensional do método da Secante. Nesta figura o objetivo é o mesmo da figura 8.3. Os índices t1, t2, ... referem-se às tentativas. Etapa (a): previsão elástica via Newton-Raphson para obtenção de  $y_{t1}$ . Etapa (b): correção plástica com alteração na força ( $F_{t1}$ ). Etapa (c): previsão elástica via equação de Broyden (8.14) para obtenção de  $y_{t2}$ . Etapa (d): correção plástica com alteração na força ( $F_{t2}$ ). O segmento de reta correspondente à etapa (c) não é necessariamente tangente à curva  $F = F(y)$  no ponto  $(y_{t1}, F_{t1})$ .

Por fim, o método da previsão elastoplástica é similar ao método da previsão elástica. A diferença é que apenas a primeira posição tentativa ( $y_{t1}$ ) de cada incremento é obtida com as considerações (8.13.4) e (8.13.5). Para determinação das demais posições tentativa, é empregado o operador tangente consistente elastoplástico (CRISFIELD, 2000):

$$\Gamma_{ep} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} [\mathbf{S}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p)] = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} : \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} \quad (8.15.1)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\xi} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} : \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \right] \mathbf{J}_0 d\xi \quad (8.15.2)$$

Assim como nas duas primeiras estratégias, a correção plástica é aplicada no final da obtenção de cada posição tentativa. O algoritmo e um exemplo unidimensional da estratégia de previsão elastoplástica são ilustrados nas figuras 8.6 e 8.7, respectivamente.

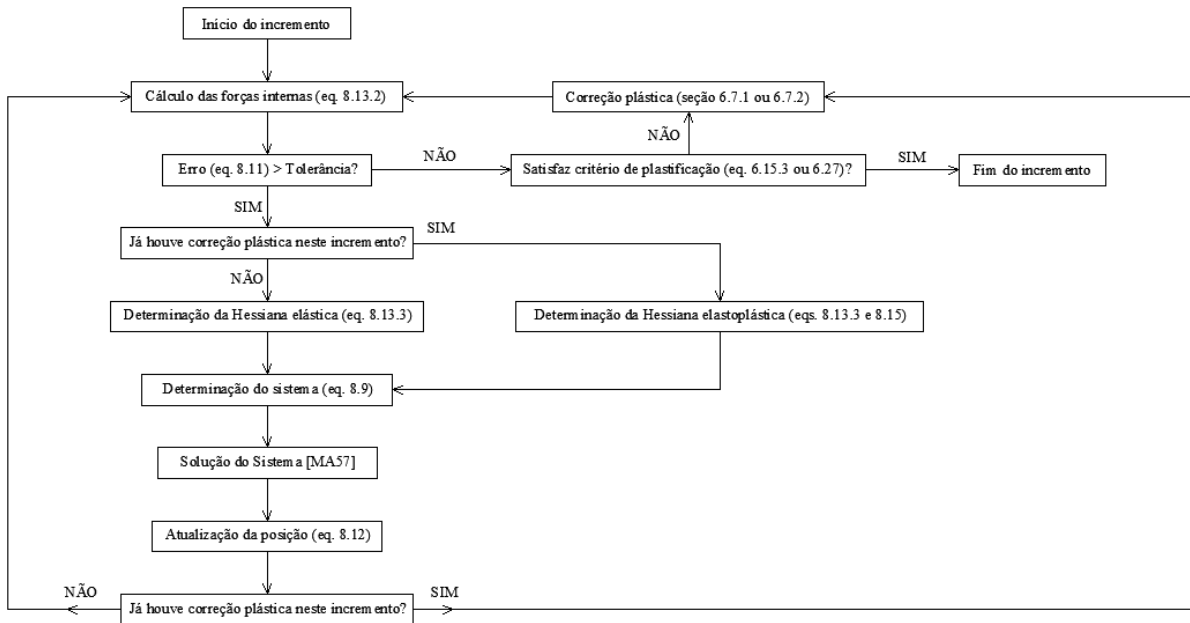


Figura 8.6. Fluxograma do procedimento incremental e iterativo, para a estratégia da previsão elastoplástica.

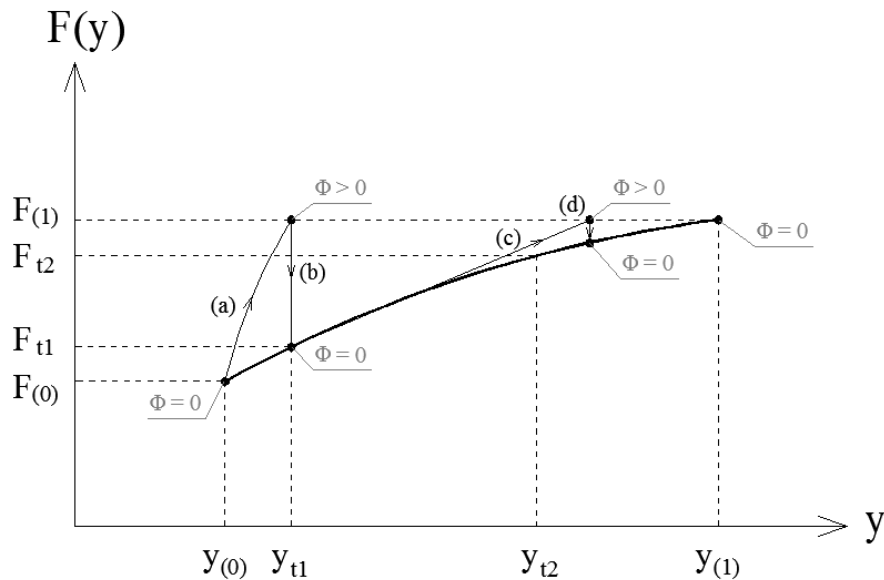


Figura 8.7. Exemplo unidimensional do método da previsão elastoplástica. Nesta figura o objetivo é o mesmo da figura 8.3. Os índices  $t_1, t_2, \dots$  referem-se às tentativas. Etapa (a): previsão elástica via Newton-Raphson (equação 8.13.3) para obtenção de  $y_{t1}$ . Etapa (b): correção plástica com alteração na

força ( $F_{11}$ ). Etapa (c): previsão elastoplástica via Newton-Raphson (equações 8.13.3 e 8.15) para obtenção de  $y_{12}$ . Etapa (d): correção plástica com alteração na força ( $F_{12}$ ). Neste caso o segmento de reta correspondente à etapa (c) é tangente à curva  $F = F(y)$  no ponto  $(y_{11}, F_{11})$ .

### 8.6. *Processamento paralelo*

Sabe-se que, para realizar simulação numérica de qualquer problema estrutural, quanto maior o refinamento da malhas de elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) e/ou a ordem de aproximação polinomial, maior é o tempo de processamento. Neste estudo, para tornar mais rápida as simulações numéricas, foi empregado o processamento paralelo (UKTU et al., 1982). O computador utilizado possui oito processadores. Entre eles, existem o processador central, chamado de mestre, e os processadores restantes chamados de escravos. Nos códigos computacionais desenvolvidos nesta pesquisa, é paralelizada apenas a determinação do sistema (ver figura 8.1). Cada processador, incluindo o mestre, calcula o vetor local de forças internas (ver equação 8.1.1) e a matriz Hessiana local (ver equação 8.1.2) de seus respectivos elementos finitos. O mestre, sozinho, monta e resolve o sistema global de equações (8.9), realiza o teste (ver figura 8.1), e atualiza as posições atuais referentes aos graus de liberdade livres (ver seção 3.1). No caso do código de análise de materiais em regime elastoplástico, a correção plástica também é paralelizada, ou seja, cada processador realiza, se necessário, a atualização das variáveis plásticas nos pontos de integração de seus respectivos elementos finitos.

No código paralelo, apenas o mestre faz a leitura dos dados de entrada. Com esses dados, ele realiza a separação de tarefas por processador, ou seja, o mestre determina qual processador realiza os cálculos necessários para cada elemento. Definida essa separação de tarefas, o mestre transfere aos escravos, apenas, os dados de entrada correspondentes, isto é, cada escravo possui, somente, os dados necessários para os cálculos de seus respectivos elementos finitos. Só o mestre armazena todas as informações de toda a estrutura. Caso o erro (8.11) seja maior do que a tolerância, após atualizar as posições atuais de toda a estrutura, o

processador central transfere aos escravos as posições atuais dos nós de seus respectivos elementos.

Conforme mencionado anteriormente (ver seção 2.6), o conceito da decomposição de domínio com solução independente em cada subdomínio (YAGAWA; SONEDA; YOSHIMURA, 1991; RAO; RAO; DATTAGURU, 2003; KLAWONN; RHEINBACH, 2010; RIVERA *et al.*, 2010), bastante usado em processamento paralelo via MEF, não é empregado neste estudo.

O código paralelo, com todos os oito processadores, é utilizado independentemente do número de graus de liberdade da malha de elementos finitos a ser simulada. Assim, é possível que a simulação numérica de uma malha com poucos elementos finitos seja realizada sem utilizar todos os oito processadores. Ademais, o tempo de transferência de informação entre o mestre e os escravos não é medido neste estudo. Por fim, já que a ideia aqui é apenas reduzir o tempo de processamento da simulação numérica, não são comparadas diferentes estratégias de distribuição dos cálculos por processador.

### 8.7. Pós-processamento

Na etapa de saída (ver figura 8.1), são impressas, em arquivos de texto, as posições finais de todos os nós da estrutura ao final de determinados passos de carga. Com essas posições é possível - com o programa de pós-processamento desenvolvido neste estudo - determinar os campos de deslocamento, deformações e tensões em toda a estrutura. Tais campos podem ser visualizados com auxílio de outro programa, desenvolvido no departamento (AcadView). Para visualização neste último programa, é necessário calcular os valores nodais da variável em questão, ou seja, os valores da variável nos nós. Para determinação do campo de deslocamento ao longo da estrutura, são usadas as aproximações descritas nas equações (3.1), e a relação entre as numerações local e global dos nós, chamada de incidência dos elementos. O cálculo do campo de deformações (de Green-Lagrange) é realizado via expressões (3.15) e (3.17). A determinação do campo de tensões de Cauchy,

para o caso de materiais em regime elástico (ver item 8.4 desta tese), é realizada nas equações (5.7) e (4.3.2). No caso de materiais em regime elastoplástico (ver item 8.5 desta tese), para determinar o campo de tensões, torna-se necessário conhecer as seguintes variáveis: tensor gradiente plástico  $\mathbf{A}_p$  (3.23), tensor das tensões inversas  $\boldsymbol{\chi}$  (ver equações 6.27 e 6.29), e parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (ver equações 6.27 e 6.33). Tais variáveis são armazenadas em arquivos de texto, ao final de determinados passos, para cada ponto de integração de todos os elementos. O cálculo das tensões de Cauchy, em cada ponto de integração, é realizado nas seguintes etapas: cálculo da deformação total de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  via equação (3.17); cálculo da parcela elástica da deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_e$  (ver equação 3.24.3); cálculo do segundo tensor elástico de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}_e$  com a expressão  $\partial\psi_e / \partial\mathbf{E}_e$ , onde  $\psi_e$  é a parcela elástica da energia livre de Helmholtz (ver equação 6.18); cálculo do segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  via expressão (6.25.1); cálculo do gradiente (total)  $\mathbf{A}$  e de seu determinante  $J$  (ver equações 3.11 e 3.13); e cálculo da tensão de Cauchy via expressão (4.3.2). Para determinação dos valores nodais, é adotado o seguinte procedimento para cada um dos nós: determinação dos elementos finitos aos quais o nó pertence; cálculo do valor nodal com os valores armazenados nos pontos de integração de todos os elementos que contêm o respectivo nó:

$$\left(v_{\text{NOD}}\right)_k = \frac{\sum_{i=1}^{\text{nel}\cdot\text{npin}} v_i d_i}{\sum_{i=1}^{\text{nel}\cdot\text{npin}} d_i} \quad (8.16)$$

onde  $\left(v_{\text{NOD}}\right)_k$  é o valor de determinada variável no nó  $k$ ;  $v_i$  são os valores da respectiva variável nos pontos de integração dos elementos que contêm o nó  $k$ ;  $\text{nel}$  é o número de elementos aos quais o nó  $k$  pertence;  $\text{npin}$  é o número de pontos de integração de cada elemento;  $d_i$  é a distância de cada ponto de integração ao nó  $k$ .

## 8.8. Programas EPIM3D e DD3IMP

Ao longo do programa de Doutorado, o aluno realizou estágio no Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra (Portugal). Os principais objetivos desse estágio foram a implementação, no código computacional do aluno, de uma lei constitutiva para materiais elastoplásticos em regime de grandes deformações, e o contato com os programas do grupo hospedeiro, no caso o EPIM3D e o DD3IMP. Estes programas são empregados para simulação numérica de processos de conformação de metais homogêneos em regime de pequenas deformações elásticas e grandes deformações plásticas. Entre tais processos, podem ser citados o forjamento e a estampagem de chapas metálicas, amplamente utilizados na indústria automobilística, por exemplo. A diferença entre os programas do grupo hospedeiro é que, no EPIM3D, existe apenas a análise elastoplástica, enquanto no DD3IMP, além da parte elastoplástica, é analisado também o contato entre o corpo deformável e corpos rígidos, cuja geometria é definida com o auxílio de superfícies paramétricas. Assim sendo, além de definir a malha de elementos finitos, as propriedades do material e as condições de contorno, é necessário - no programa DD3IMP - definir a geometria da ferramenta que será empregada para simular numericamente o processo de conformação. A lei constitutiva para grandes deformações implementada no código do aluno é descrita no item 6.4 desta tese, e os programas EPIM3D e DD3IMP são brevemente descritos neste item.

### 8.8.1. Cinemática

Em relação à cinemática, é adotada a descrição Lagrangiana atualizada (HOLZAPFEL, 2004), na qual a configuração de referência é atualizada ao final de todos os passos, diferente da descrição Lagrangiana total empregada neste estudo. A decomposição multiplicativa do gradiente (ver equação 3.23), geralmente empregada para formular grandes

deformações, também é utilizada nos programas EPIM3D e DD3IMP. Além da aproximação (6.47) para a taxa de rotação plástica ( $\mathbf{W}_p$ ), assume-se, no modelo mecânico, que as deformações elásticas são pequenas em relação à deformação plástica, o que simplifica o equacionamento já que, dessa forma, é possível escrever as seguintes aproximações:

$$\mathbf{D} \approx \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \quad (8.17.1)$$

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{W}^e \quad (8.17.2)$$

onde  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$  são os tensores taxa de deformação e de rotação (ver equações 3.25 e 3.27).

### 8.8.2. Comportamento elástico

No que diz respeito à resposta elástica do material, é utilizada a relação isotrópica linear entre tensão e deformação, similar à lei de Hooke ou à lei de Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2 e 5.9):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \Gamma^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J \quad (8.18.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} \quad (8.18.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^e\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (8.18.3)$$

onde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$  e  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J$  são, respectivamente, as taxas objetivas de Jaumann (HOLZAPFEL, 2004) do tensor das tensões de Cauchy (ver equação 4.1) e do tensor das deformações elásticas ( $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ); e  $\Gamma^e$  é o tensor elástico de quarta ordem (5.14). A medida de deformação empregada nos programas EPIM3D e DD3IMP é a deformação logarítmica (ALVES, 2003). Pode-se notar, nas expressões (8.18), que é utilizada a formulação co-rotacional (CRISFIELD, 2000).



### 8.8.3. Comportamento plástico

Estão implementados, nos programas EPIM3D e DD3IMP, vários critérios de plastificação (ver equações 6.5): von-Mises, Drucker-Prager, Hershey-Hosford, Hill48, Yld91, KB93, CB2001 e D+L. Os cinco últimos critérios são utilizados para descrever o comportamento plástico de materiais anisotrópicos. Os três primeiros critérios são utilizados para descrever o comportamento plástico de materiais isotrópicos, e correspondem a casos particulares dos critérios de plasticidade anisotrópicos de Hill48, CB2001 e Yld91, respectivamente. Nos referidos programas, o critério de plastificação (ver expressões 6.5 e 6.6) é descrito, de maneira geral, pela seguinte expressão:

$$\Phi = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}) - Y(\kappa) \leq 0 \quad (8.19)$$

onde  $\bar{\sigma}$  e  $Y$  são funções escalares;  $\mathbf{X}$  é o tensor das tensões inversas, o qual descreve o encruamento cinemático;  $\boldsymbol{\alpha}$  representa os parâmetros de isotropia ou de anisotropia; e  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico. A expressão (8.19) é descrita na configuração intermediária (ver figura 3.3). A lei de fluxo plástico associativa, definida pela regra da normalidade (PROENÇA, 2006), também é empregada nos programas EPIM3D e DD3IMP:

$$\mathbf{D}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \quad (8.20)$$

onde o escalar  $\dot{\gamma} \geq 0$  é o multiplicador plástico (ver equações 6.45 ou 6.46).

As leis de encruamento isotrópico utilizadas nos programas EPIM3D e DD3IMP são: lei de Swift (ver equação 6.50); lei de Voce (ver equação 6.51); e modelos microestruturais completo e simplificado (ALVES, 2003). Com relação à lei de encruamento cinemático, apenas as lei de Prager (ver equação 6.54) e de Lemaitre-Chaboche (ALVES, 2003) estão implementadas.

#### 8.8.4. Elementos finitos

Para descrição espacial do meio contínuo ocupado pelo corpo deformável, é empregado, nos programas EPIM3D e DD3IMP, o método dos elementos finitos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Os elementos adotados são os sólidos hexaédrico, pentaédrico e tetraédrico isoparamétricos, sendo que para os elementos finitos hexaédricos e tetraédrico é possível adotar para além da aproximação linear também a quadrática. Para cálculo das integrais ao longo do volume, estão implementadas as técnicas numéricas de integração completa, integração reduzida uniforme e integração reduzida seletiva (MALKUS; HUGHES, 1978a; MALKUS; HUGHES, 1978b).

#### 8.8.5. Previsão elástica e correção plástica

Nos programas EPIM3D e DD3IMP, para integração da lei constitutiva elastoplástica ao longo de cada incremento, também é utilizado o algoritmo de previsão elástica e correção plástica (ver itens 6.6 e 8.5.1). Assim como no código computacional desenvolvido neste estudo, a etapa de previsão elástica se baseia num método tangente explícito, e a correção plástica (ou retorno) se baseia num método implícito (CRISFIELD, 2000).

### 8.8.6. Materiais com pequenas deformações elásticas

Para materiais em regime de pequenas deformações elásticas, mas com deformações plásticas finitas, é possível mostrar a equivalência da formulação hiperelastoplástica do presente estudo (ver seção 6.4) com a formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP. Para isso, é empregado o procedimento descrito a seguir. Inicialmente, reescreve-se o tensor (elástico) de Mandel (6.25.3) com auxílio das equações (3.24.2), (6.25.1) e (6.25.3):

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{S}_e = (\mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{A}_p^{-1}) (\mathbf{A}_p \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T) = \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{A}_p^T \quad (8.21)$$

Para o caso hiperelastoplástico (ver seção 6.4), sabe-se (CRISFIELD, 2000) que o uso do critério de von-Mises (6.44) faz com que a deformação plástica seja isocórica, isto é:  $\det(\mathbf{A}_p) = 1$ . Com esse resultado e com a hipótese de pequenas deformações elásticas, podem ser escritas as seguintes aproximações (ver expressões 3.23 e 3.24.7):

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_p \text{ ou } \mathbf{A}_e \approx \mathbf{I} \quad (8.22.1)$$

$$\det(\mathbf{A}_e) \approx 1 \quad (8.22.2)$$

$$J = \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}_e) \det(\mathbf{A}_p) \approx 1 \quad (8.22.3)$$

Com estas aproximações, os tensores de Mandel (8.21) e de Cauchy (4.3.2) resultantes são, respectivamente:

$$\mathbf{M}_e \approx \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \approx \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \quad (8.23.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \approx \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{M}_e \quad (8.23.2)$$

O tensor  $\mathbf{M}_e$  é empregado na formulação do presente estudo (ver equação 6.27), e o tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  é utilizado no modelo mecânico dos programas EPIM3D e DD3IMP (ver equação 8.19).

Além da equivalência das medidas de tensão ( $\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{M}_e$ ), é possível mostrar a equivalência das medidas de deformação, para o caso de pequenas rotações plásticas. Neste

estudo, a variação do parâmetro de encruamento isotrópico é dada na equação (6.33):

$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}_p\|$ , onde  $\mathbf{D}_p$  é a parcela plástica do tensor taxa de deformação (ver equações 3.25.2 e 3.27.6). Nos programas EPIM3D e DD3IMP, a lei de evolução do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  é:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \quad (8.24)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  é a parcela plástica da deformação logarítmica (ALVES, 2003). Pode-se relacionar a taxa de variação de  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  com o tensor  $\mathbf{D}_p$  com a seguinte expressão (ALVES, 2003):

$$\mathbf{D}_p = \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (8.25)$$

onde  $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  é uma taxa objetiva (HOLZAPFEL, 2004) de  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ . Ademais, se as rotações plásticas são pequenas, então a parcela plástica do tensor taxa de rotação ( $\mathbf{W}_p$ ) é aproximadamente nula. Nesse caso, pode-se mostrar que:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (8.26)$$

Assim sendo, é possível escrever a seguinte equivalência, válida para o caso de grandes deformações elastoplásticas, mas com pequenas rotações plásticas (ver equações 6.33, 6.47 e 8.24):

$$\mathbf{D}_p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \Rightarrow \kappa_{\text{HEP}} = \kappa_{\text{EPIM3D}} \Rightarrow \kappa_{\text{HEP}} = \kappa_{\text{EPIM3D}} \quad (8.27)$$

onde  $\kappa_{\text{HEP}}$  e  $\kappa_{\text{EPIM3D}}$  são, nesta ordem, os parâmetros de encruamento isotrópico da formulação hiperelastoplástica deste estudo (ver seção 6.4) e da formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP.

Combinando os resultados das expressões (8.23.2) e (8.27), a análise com a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4 desta tese deve fornecer os mesmos resultados da análise com a formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP para materiais no seguinte regime: pequenas deformações elásticas, deformações plásticas finitas, e pequenas rotações plásticas.

### 8.8.7. Barras sob tração uniaxial em regime de pequenas deformações elásticas

Considerando a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), em regime de pequenas deformações elásticas, é possível escrever as seguintes aproximações para o gradiente da barra sob tração uniaxial (ver figura 6.1, e equações 6.94 e 8.22):

$$\mathbf{A}_e \approx \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \approx \mathbf{A}_p \quad (8.28.1)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{e3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p3} \end{bmatrix} \quad (8.28.2)$$

onde  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{ei}$  e  $\lambda_{pi}$  são, nesta ordem, os alongamentos total, elástico e plástico ao longo da direção  $i$ . Com a condição de incompressibilidade (6.106), válida para o critério de von-Mises (6.44), o tensor gradiente acima resulta em:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \lambda_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{p1}^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{p1}^{-1/2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} \approx \mathbf{J}_p = 1 \quad (8.29)$$

onde o escalar  $\mathbf{J}$  é o Jacobiano (3.13).

O cálculo da força longitudinal aplicada na barra da figura 6.1, para o caso de material heterogêneo com GF ao longo do eixo  $x_2$ , é realizado com a equação (7.23). A seguir, são analisados dois casos com a referida GF para barras sob tração uniaxial em regime de pequenas deformações elásticas (ver equações 8.28 e 8.29): material hiperelastoplástico com encruamento isotrópico; e material hiperelastoplástico com encruamento cinemático de Prager (6.54).

### 8.8.7.1. Barras constituídas de material com encruamento isotrópico

Para barras sob tração uniaxial constituídas de material com encruamento isotrópico apenas, são utilizadas as equações (6.110). Se as deformações elásticas são pequenas, assume-se que o material da barra encontra-se sempre em regime elastoplástico, ou seja (ver expressão 6.110.3):

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}M_{e1} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\kappa} = 0 \Rightarrow M_{e1} = \sigma_{\kappa} \quad (8.30)$$

Além disso, com o resultado da expressão (6.111.2) e com a aproximação (8.28), pode-se escrever a seguinte equação (ver expressões 8.28):

$$\kappa = \ln(\lambda_{p1}) \approx \ln(\lambda_1) \quad (8.31)$$

Portanto, para o caso de GF das constantes de encruamento isotrópico ao longo do eixo  $x_2$ , se o alongamento longitudinal  $\lambda_1$  é uniforme para toda a barra, então a força longitudinal aplicada na barra é (ver equação 7.23):

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{e1}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \sigma_{\kappa}(\kappa, x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \sigma_{\kappa}[\ln(\lambda_1), x_2] dx_2 \quad (8.32)$$

onde  $b_0$  e  $h_0$  são as dimensões iniciais da seção transversal da barra (ver figura 6.1).

Adotando a lei polinomial de encruamento isotrópico (6.49) com a lei de GF de potência (7.4), então:

$$\sigma_{\kappa}(\kappa, x_2) = \sum_{n=0}^{NC-1} \left\{ \left[ a_{n2} + (a_{n1} - a_{n2}) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] (\kappa)^n \right\} \quad (8.33)$$

onde  $a_{n1}$  e  $a_{n2}$  são os valores dos coeficientes  $a_n$  para  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente; e  $\kappa$ , neste caso, é uniforme para toda a barra. Portanto, com a equação (8.31), a força (8.32) resulta em:

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \sum_{n=0}^{NC-1} \left\{ \left[ a_{n2} + (a_{n1} - a_{n2}) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] (\kappa)^n \right\} dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \sum_{n=0}^{NC-1} \int_0^{b_0} \left[ a_{n2} + (a_{n1} - a_{n2}) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] (\kappa)^n dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0}{\lambda_1} \sum_{n=0}^{NC-1} \left\{ \left( a_{n2} + \frac{a_{n1} - a_{n2}}{1+p} \right) [\ln(\lambda_1)]^n \right\} \quad (8.34)$$

Para a lei de GF de potência (7.4) ao longo do eixo  $x_2$  (ver figura 6.1) aplicada ao coeficiente  $K$  da lei de Swift (6.50), é possível escrever a seguinte expressão (ver equação 8.31):

$$\sigma_\kappa(\kappa, x_2) = \left[ K_2 + (K_1 - K_2) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] [E_0 + \ln(\lambda_1)]^n \quad (8.35)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são os valores do coeficiente  $K$  para  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente; e os coeficientes  $E_0$  e  $n$ , neste caso, são constantes. Com isso, a força longitudinal aplicada (8.32) é:

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ \left[ K_2 + (K_1 - K_2) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] [E_0 + \ln(\lambda_1)]^n \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0}{\lambda_1} \left( K_2 + \frac{K_1 - K_2}{1+p} \right) [E_0 + \ln(\lambda_1)]^n \quad (8.36)$$

Por fim, adotando a lei de potência de GF (7.4) ao longo de  $x_2$  (ver figura 6.1) para a constante  $\sigma_0$  da lei de Voce (6.51), a tensão limite de escoamento  $\sigma_\kappa$  resulta em (ver equação 8.31):

$$\sigma_\kappa(\kappa, x_2) = \left[ \sigma_{02} + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] e^{[-C_Y \ln(\lambda_1)]} + \sigma_{\text{sat}} \left\{ 1 - e^{[-C_Y \ln(\lambda_1)]} \right\} \quad (8.37)$$

onde  $\sigma_{01}$  e  $\sigma_{02}$  são os valores do coeficiente  $\sigma_0$  em  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente; e os coeficientes  $\sigma_{\text{sat}}$  e  $C_Y$ , neste caso, são constantes. Assim sendo, a força longitudinal aplicada (8.32) é determinada com a seguinte expressão:

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left\{ \left[ \sigma_{02} + (\sigma_{01} - \sigma_{02}) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] e^{(-C_Y \ln \lambda_1)} + \sigma_{\text{sat}} \left[ 1 - e^{(-C_Y \ln \lambda_1)} \right] \right\} dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0}{\lambda_1} \left\{ \left[ \sigma_{02} + \frac{\sigma_{01} - \sigma_{02}}{1+p} \right] e^{(-C_Y \ln \lambda_1)} + \sigma_{\text{sat}} \left[ 1 - e^{(-C_Y \ln \lambda_1)} \right] \right\} \quad (8.38)$$

### 8.8.7.2. Barras constituídas de material com encruamento cinemático de Prager

Para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1, se o encruamento cinemático é definido pela lei linear de Prager (6.54), então:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{c} \mathbf{D}_p \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\chi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\chi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\chi}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{c} \begin{bmatrix} D_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & D_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & D_{p3} \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

Deve ser lembrado que a aproximação  $\dot{\boldsymbol{\chi}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\chi}}$  pode ser realizada se a parcela plástica da taxa de rotação ( $\mathbf{W}_p$ ) for considerada nula (ver expressões 6.31 e 6.47), o que é válido para a barra da figura 6.1. Além disso, com o critério de plastificação de von-Mises (6.44) e lei de fluxo associativa (6.46), conforme a expressão (6.103):

$$D_{p1} + D_{p2} + D_{p3} = 0 \quad (8.40)$$

Assumindo  $D_{p2} = D_{p3}$ , então (ver expressão 8.39):

$$D_{p2} = D_{p3} = -\frac{1}{2} D_{p1} \Rightarrow \mathbf{D}_p = D_{p1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (8.41.1)$$



$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{cD}_p = \mathbf{cD}_{p1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (8.41.2)$$

Com o tensor  $\mathbf{D}_p$  definido acima, o parâmetro de encruamento isotrópico adotado neste estudo (ver equação 6.33) resulta em:

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{D}_{p1} \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{D}_{p1} \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dot{\kappa} = \mathbf{D}_{p1} \quad (8.42)$$

Ademais, de acordo com a equação (8.31):

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial}{\partial t} [\ln(\lambda_1)] = \mathbf{D}_{p1} \quad (8.43)$$

Substituindo esta expressão em (8.41.2):

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial t} [\ln(\lambda_1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\chi} = \mathbf{c} [\ln(\lambda_1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

Assim, o tensor desviador que aparece no critério de plastificação de von-Mises para a barra sob tração uniaxial (ver equação 6.100.3) é:

$$\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) = \text{dev} \mathbf{M}_e - \text{dev} \boldsymbol{\chi} = \left[ \frac{2}{3} \mathbf{M}_{e1} - \mathbf{c} \ln(\lambda_1) \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| = \left[ \frac{2}{3} \mathbf{M}_{e1} - \mathbf{c} \ln(\lambda_1) \right] \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \left[ \frac{2}{3} \mathbf{M}_{e1} - \mathbf{c} \ln(\lambda_1) \right] \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{M}_{e1} - \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{c} \ln(\lambda_1) \quad (8.45)$$

Por fim, a função escalar que define o critério de plastificação de von-Mises (6.44) com encruamento cinemático apenas é:

$$\Phi = \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_k = \sqrt{\frac{2}{3}}M_{e1} - \sqrt{\frac{3}{2}}\text{c} \ln(\lambda_1) - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0 \quad (8.46)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão limite de escoamento, constante neste caso. Para a barra sob tração uniaxial em regime elastoplástico:

$$\Phi = 0 \Rightarrow M_{e1} = \sigma_0 + \frac{3}{2}\text{c} \ln(\lambda_1) \quad (8.47)$$

Com o resultado da equação (8.47), para o caso de GF do coeficiente de Prager  $c$  ao longo do eixo  $x_2$  da barra da figura 6.1, a força longitudinal aplicada (8.32) resulta em:

$$F_1 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} M_{e1}(x_2) dx_2 = \frac{h_0}{\lambda_1} \int_0^{b_0} \left[ \sigma_0 + \frac{3}{2}\text{c} \ln(\lambda_1) \right] dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0 \sigma_0}{\lambda_1} + \frac{h_0}{\lambda_1} \frac{3}{2} \ln(\lambda_1) \int_0^{b_0} [c(x_2)] dx_2 \quad (8.48)$$

Adotando a lei de potência de GF (7.4) ao longo de  $x_2$  para o coeficiente  $c$ , a força aplicada (8.48) é:

$$F_1 = \frac{h_0 b_0 \sigma_0}{\lambda_1} + \frac{h_0}{\lambda_1} \frac{3}{2} \ln(\lambda_1) \int_0^{b_0} \left[ c_2 + (c_1 - c_2) \left( \frac{x_2}{b_0} \right)^p \right] dx_2 \Rightarrow$$

$$F_1 = \frac{h_0 b_0}{\lambda_1} \left[ \sigma_0 + \frac{3}{2} \ln(\lambda_1) \left( c_2 + \frac{c_1 - c_2}{1+p} \right) \right] \quad (8.49)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são os valores do coeficiente de Prager  $c$  para  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente.

É importante mencionar que as expressões (8.32), (8.34), (8.36), (8.38), (8.48) e (8.49), todas empregadas para se calcular a força longitudinal aplicada na barra da figura 6.1, só podem ser utilizadas se as deformações elásticas forem pequenas, e se o alongamento longitudinal  $\lambda_1$  for uniforme em toda a barra. Além disso, tal alongamento deve ser

monotonamente crescente, pois se ele decrescer o material entra em regime elástico ( $\Phi < 0$ ) e as referidas expressões não podem ser usadas. Nesse regime, para se obter a força aplicada na barra, devem ser utilizadas as equações (7.22) e (7.23).

### 8.8.7.3. Aproximação de Green-Naghdi

Com a decomposição aditiva da deformação (6.14), para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1 constituída de material homogêneo em regime elastoplástico com encruamento isotrópico apenas, podem ser escritas as seguintes expressões (ver equações 6.15, 6.45, 6.69 e 6.87):

$$\Phi = \sqrt{\frac{2}{3}}S_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_\kappa = 0 \Rightarrow S_1 = E(E_1 - E_{p1}) = \sigma_\kappa(\kappa) \quad (8.50.1)$$

$$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\mathbf{D}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\dot{\mathbf{E}}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}}E_{p1}\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \kappa = E_{p1} \quad (8.50.2)$$

$$F_1 = S_1\lambda_1A_0 = \sigma_\kappa(\kappa)\lambda_1A_0 \quad (8.50.3)$$

Com a hipótese de pequenas deformações elásticas, o parâmetro  $\kappa$  utilizado para calcular a força (8.50.3) pode ser substituído por:

$$\kappa = E_{p1} \approx E_1 \quad (8.51)$$

Por exemplo, para a lei de Swift (6.50), a força longitudinal aplicada na barra em regime elastoplástico, mas com pequenas deformações elásticas, é (ver expressão 6.69.3):

$$F_1 = K(E_0 + E_1)^n \lambda_1 A_0 = K \left[ E_0 + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) \right]^n \lambda_1 A_0 \quad (8.52)$$

#### 8.8.7.4. Formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP

Para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1 constituída de material homogêneo em regime elastoplástico, mas com pequenas deformações elásticas, a força longitudinal aplicada considerando a formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP é (ver itens 8.8.1, 8.8.2 e 8.8.3, e expressões 8.23.2, 8.30, 8.31 e 8.32):

$$F_1 = \frac{A_0}{\lambda_1} \sigma_\kappa(\kappa) \quad (8.53.1)$$

$$\kappa = \ln(\lambda_1) \quad (8.53.2)$$

Para a lei de Swift (6.50), a força (8.53.1) resulta em:

$$F_1 = K [E_0 + \ln(\lambda_1)]^n \frac{A_0}{\lambda_1} \quad (8.54)$$

De acordo com o resultado da expressão (8.23.2), as equações (8.53) e (8.54) também podem ser utilizadas para o caso da barra sob tração uniaxial da figura 6.1 constituída de material hiperelastoplástico homogêneo em regime de pequenas deformações elásticas (ver equação 8.32).

## 9. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para validação da metodologia numérica descrita no presente estudo (ver capítulos 3 a 8), foram simulados vários problemas estruturais. Os principais resultados obtidos com essas simulações são descritos neste capítulo. Para analisar a convergência dos resultados, o mesmo problema estrutural é simulado com diferentes malhas de elementos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005) sólidos tridimensionais. As diferenças entre tais malhas são o número de elementos finitos e a ordem de aproximação polinomial (ver seção 3.1). Ademais, os resultados obtidos aqui são comparados com outros estudos e artigos científicos. Conforme dito anteriormente (ver seção 4.6), o carregamento, que é estático e isotérmico, é dividido em passos de carga. A simulação numérica pode ser feita via controle de carga ou controle de deslocamento. Para todos os exemplos, a tolerância adotada para o erro (8.11) é de  $10^{-7}$ . Em quase todos os casos, o mesmo exemplo estrutural é simulado com lei constitutiva para materiais homogêneos (ver capítulos 5 e 6) e para materiais com gradação funcional (ver capítulo 7). Para evitar confusão, deve ser mencionado que análise de contato ou de impacto não é realizada neste estudo. Por fim, o número de nós e o número de graus de liberdade por elemento finito sólido são dados na tabela 9.1.

Tabela 9.1. Número de nós e de graus de liberdade por elemento finito sólido para as várias ordens de aproximação polinomial (ver seção 3.1) adotadas neste estudo.

Ordem de aproximação	Elemento tetraédrico		Elemento hexaédrico	
	Número de nós	Número de graus de liberdade	Número de nós	Número de graus de liberdade
1	4	12	8	24
2	10	30	27	81
3	20	60	64	192
4	35	105	125	375
5	56	168	216	648

## *9.1. Estruturas constituídas de material em regime elástico*

Problemas estruturais com materiais em regime elástico (ver capítulo 5) foram simulados numericamente com os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (ver seção 3.1). Para análise numérica de tais problemas, foi utilizado o código computacional descrito no item 8.4 desta tese. As estruturas que podem apresentar grandes deslocamentos (ver equação 3.9), mas com pequenas deformações (ver seção 3.4), são modeladas com a lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2 e 5.9). Já as estruturas que podem exibir elevados deslocamentos e grandes deformações são modeladas com as leis hiperelásticas não lineares (ver equações 5.3, 5.4 ou 5.5). A justificativa para tais escolhas está na seção 5.4 desta tese.

### *9.1.1. Problemas com deformação homogênea*

Para os problemas estruturais em que o campo de deslocamento (3.9) varia linearmente ao longo do corpo, não é necessário utilizar elementos finitos sólidos com aproximação polinomial (ver seção 3.1) superior à linear já que, nos referidos problemas, esta ordem é suficiente para reproduzir corretamente o comportamento estrutural. São descritos, na presente seção, problemas estruturais cujo campo de deslocamentos (3.9) é linear e o gradiente (3.11), ou a deformação (3.17), é constante ao longo de todo o corpo. Em tais casos, para poupar tempo de processamento, o número de elementos sólidos adotado é o menor possível: seis tetraedros ou um hexaedro (ver seção 3.1 e figura F8). Porém, para simulação dos problemas com deformação homogênea, apenas os tetraedros foram empregados. Os resultados das simulações numéricas são comparados com as respectivas soluções analíticas.

### 9.1.1.1. Tração uniaxial

O primeiro exemplo numérico analisado é um prisma homogêneo sob tração uniaxial (ver figura 9.1). Devido à simetria em relação aos planos  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,0$ , apenas um oitavo do prisma foi discretizado. Considerando que o corpo deformado também é um prisma (ver figura 9.1), com as faces planas e perpendiculares entre si, podem ser escritas as seguintes expressões:

$$\mathbf{f} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} y_1(\mathbf{x}) \\ y_2(\mathbf{x}) \\ y_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{F1}x_1 \\ 2L_{F2}x_2 \\ 2L_{F3}x_3 \end{Bmatrix} \quad (9.1.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (L_{F1} - 1)x_1 \\ (2L_{F2} - 1)x_2 \\ (2L_{F3} - 1)x_3 \end{Bmatrix} \quad (9.1.2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{F1} & 0 & 0 \\ 0 & 2L_{F2} & 0 \\ 0 & 0 & 2L_{F3} \end{bmatrix} \quad (9.1.3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} L_{F1}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4L_{F2}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_{F3}^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (9.1.4)$$

onde  $\mathbf{f}$  é a função mudança de configuração (3.7);  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são, respectivamente, os vetores posição inicial e final (ver seção 3.1);  $L_{Fi}$  é a dimensão final do prisma ao longo da direção  $i$ ;  $\mathbf{u}$  é o vetor campo de deslocamento (3.9);  $\mathbf{A}$  é o tensor gradiente (material) de  $\mathbf{f}$  (3.11);  $\lambda_i$  é o alongamento das fibras materiais (HOLZAPFEL, 2004) na direção  $i$ ;  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange (3.17); e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade (HOLZAPFEL, 2004). Os coeficientes hiperelásticos do material, fornecidos na Tabela 9.2, foram interpolados via método dos mínimos quadrados por Pascon (2008) a partir dos dados experimentais presentes em Yeoh (1997) para um polímero estrutural. A justificativa para escolha de um elevado módulo de compressão volumétrica ( $k$ ) é para reproduzir as pequenas variações volumétricas

que ocorrem, normalmente, num material polimérico deformado. Tais variações são pequenas em relação à parcela isocórica da deformação (ver equações 3.21 e 3.22).

Para os materiais hiperelásticos isotrópicos e incompressíveis (ver seção 5.4), a solução analítica deste problema, em termos da relação força versus deslocamento, é dada pela seguinte expressão (RIVLIN; SAUNDERS, 1951):

$$F_1 = t_1 S_0 = 2S_0 (\lambda_1 - \lambda_1^{-2}) \left( \frac{\partial \psi}{\partial i_1} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \psi}{\partial i_2} \right) \quad (9.2.1)$$

$$\lambda_1 = \frac{L_{F1}}{L_{11}} = \frac{L_{11} + u_1}{L_{11}} \quad (9.2.2)$$

$$i_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \quad (9.2.3)$$

$$i_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + 2\lambda_1 \quad (9.2.4)$$

onde  $F_1$  é a força total aplicada na direção longitudinal;  $t_1$  é a carga superficial aplicada na direção longitudinal;  $S_0$  é a área inicial da seção transversal;  $\lambda_1$  é o alongamento longitudinal (ver equação 9.1.3); o escalar  $\psi$  é a energia livre de Helmholtz (ver seção 5.1);  $i_1$  e  $i_2$  são os dois primeiros invariantes (HOLZAPFEL, 2004) do tensor alongamento de Cauchy-Green direito  $\mathbf{C}$  (ver equações 3.16 e 3.17);  $L_{F1}$  e  $L_{11}$  são, respectivamente, os comprimentos final e inicial (ver figura 9.1); e  $u_1$  é o deslocamento longitudinal. Para os modelos hiperelásticos adotados (ver equações 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5), é possível escrever as respectivas soluções analíticas para barras sob tração uniaxial em termos de força versus deslocamento (PASCON, 2008):

$$(F_1)_{SVK} = \frac{E(S_0)}{2} \left[ \left( \frac{u_1}{L_{11}} \right)^3 + 3 \left( \frac{u_1}{L_{11}} \right)^2 + 2 \left( \frac{u_1}{L_{11}} \right) \right] \quad (9.3.1)$$

$$(F_1)_{RS} = 2(S_0) \left[ \left( \frac{L_{11} + u_1}{L_{11}} \right) - \left( \frac{L_{11} + u_1}{L_{11}} \right)^{-2} \right] \left\{ \sum_{i,j} [ (i) c_{ij} (i_1^{iso} - 3)^{i-1} (i_2^{iso} - 3)^j ] \right\} +$$

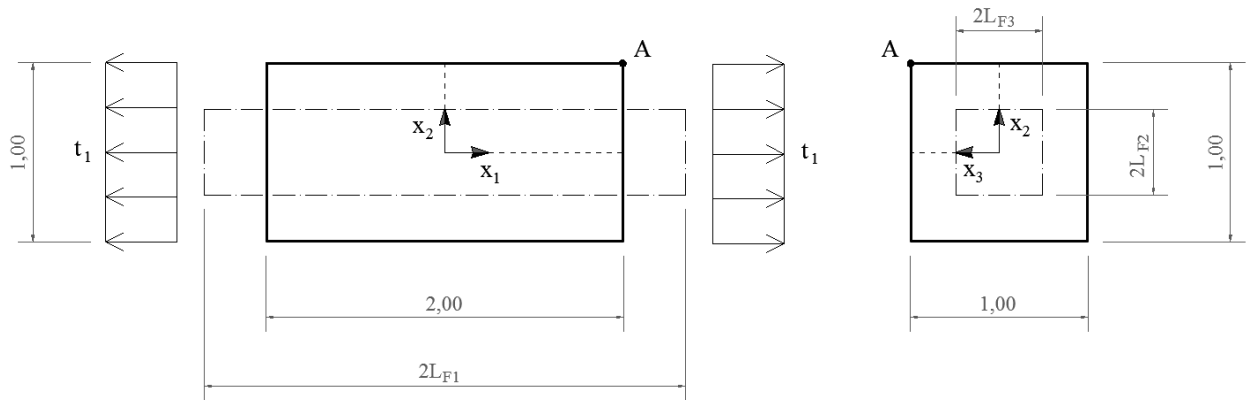


$$\left( \frac{L_{II}}{L_{II} + u_1} \right) \sum_{i,j} \left[ (j) c_{ij} (i_1^{iso} - 3)^i (i_2^{iso} - 3)^{j-1} \right] \left. \right\} \quad (9.3.2)$$

$$(F_1)_{HN} = 2(S_0) \left[ \left( \frac{L_{II} + u_1}{L_{II}} \right) - \left( \frac{L_{II} + u_1}{L_{II}} \right)^{-2} \right] \left\{ 3\alpha (i_1^{iso})^2 + \sum_i \left[ (i) c_{i0} (i_1^{iso} - 3)^{i-1} \right] + \right. \\ \left. \left( \frac{L_{II}}{L_{II} + u_1} \right) \sum_j \left[ \frac{3}{2} (j) c_{0j} (i_2^{iso} - 3)^{j-1} (i_2^{iso})^{1/2} \right] \right\} \quad (9.3.3)$$

$$(F_1)_{nH} = \mu(S_0) \left[ \left( \frac{L_{II} + u_1}{L_{II}} \right) - \left( \frac{L_{II} + u_1}{L_{II}} \right)^{-2} \right] \quad (9.3.4)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do modelo de Saint Venant-Kirchhoff (5.2);  $c_{ij}$  são os coeficientes isocóricos dos modelos de Rivlin-Saunders (5.3) e de Hartmann-Neff (5.4); e  $\mu$  é uma das constantes do modelo neo-Hookeano (5.5). As expressões (9.3.2), (9.3.3) e (9.3.4) são válidas para materiais pouco compressíveis (ou quase incompressíveis), nos quais a parcela de deformação volumétrica pode ser desprezada e, dessa forma, podem ser utilizadas as aproximações a seguir:  $J = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \approx 1$ ,  $i_1^{iso} \approx i_1$  e  $i_2^{iso} \approx i_2$ .



Deslocamentos prescritos:

$$x_1 = 0,0; u_1 = 0,0$$

$$x_2 = 0,0; u_2 = 0,0$$

$$x_3 = 0,0; u_3 = 0,0$$

Carga superficial uniforme (tração):

$$x_1 = -1,0 \text{ e } x_1 = 1,0: t_1 = 10,0 \text{ (100 incrementos de } 0,10)$$

Figura 9.1. Prisma sob tração uniaxial (geometria e condições de contorno). As linhas tracejadas se referem à parte discretizada, e as linhas tracejadas e pontilhadas representam a posição final do prisma.

Os resultados das simulações numéricas realizadas com o código desenvolvido neste estudo (ver seção 8.4) estão de acordo com as respectivas soluções analíticas (ver figura 9.2). De acordo com a figura 9.3, na comparação das simulações com os dados experimentais, são grandes as discrepâncias para os modelos de Saint Venant-Kirchhoff (5.2) e neo-Hookeano (5.5). Ademais, os resultados referentes ao gráfico força versus deslocamento corroboram os resultados numéricos de Pascon (2008), o qual utilizou elementos finitos triangulares de casca com aproximação cúbica (ver figura 9.4). São ilustradas, na figura 9.5, as posições inicial e final do prisma sob tração uniaxial para o modelo de Rivlin-Saunders (5.3).

Tabela 9.2. Constantes hiperelásticas do material para o prisma sob tração uniaxial.

Lei hiperelástica	Coefficientes hiperelásticos
SVK (equação 5.2)	$E = 0,10701025$
	$\nu = 0,001$
	$k = 1000,0$
	$n = 1,0$
RS (equação 5.3)	$c_{10} = 0,31237237$
	$c_{20} = 0,00054257$
	$c_{30} = 0,00006962$
	$k = 1000,0$
	$n = 1,0$
HN (equação 5.4)	$c_{10} = 0,29233813$
	$c_{01} = 0,01142455$
	$\alpha = 0,00007671$
nH (equação 5.5)	$k = 1000,0$
	$\mu = 0,68350404$

### 9.1.1.2. Compressão uniaxial

O prisma do primeiro exemplo numérico (ver figura 9.1) foi empregado para analisar o caso da compressão uniaxial. Neste problema, as expressões (9.1), (9.2) e (9.3), válidas para barras sob tração uniaxial, também podem ser utilizadas. Para simulação numérica do prisma sob compressão uniaxial, foram utilizados os coeficientes hiperelásticos presentes na tabela 9.3, e a carga superficial de compressão avança até  $(t_1)_{\max} = -6,0$ . Assim como no exemplo da tração uniaxial (ver item 9.1.1.1), tais coeficientes foram interpolados via método dos mínimos quadrados por PASCON (2008) para os resultados experimentais de um polímero sob compressão presentes em YEOH (1997).

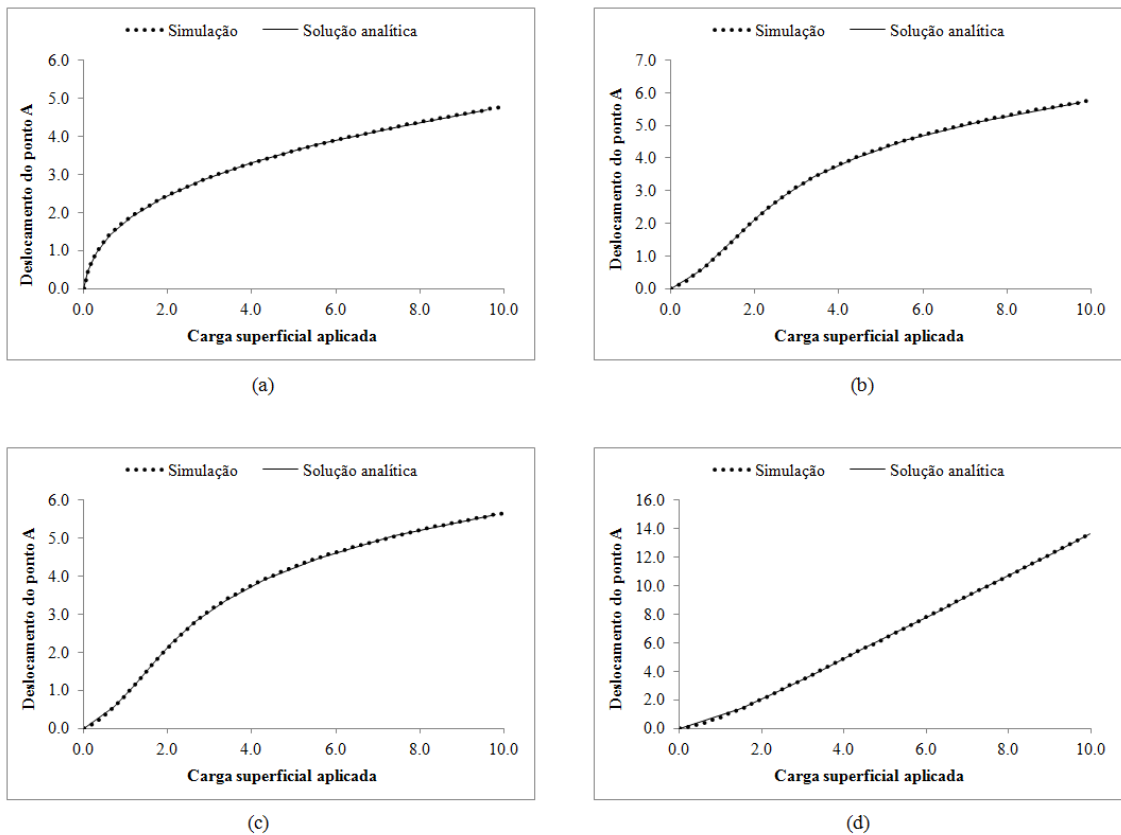


Figura 9.2. Carga superficial versus deslocamento longitudinal do ponto A para o prisma sob tração uniaxial com os modelos: (a) Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2 e 9.3.1); (b) Rivlin-Saunders (ver equações 5.3 e 9.3.2); (c) Hartmann-Neff (ver equações 5.4 e 9.3.3); (d) neo-Hookeano (ver equações 5.5 e 9.3.4).

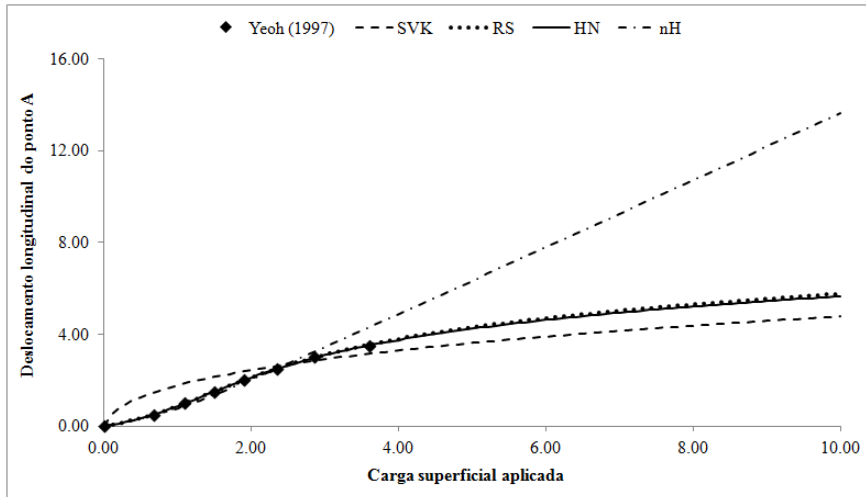
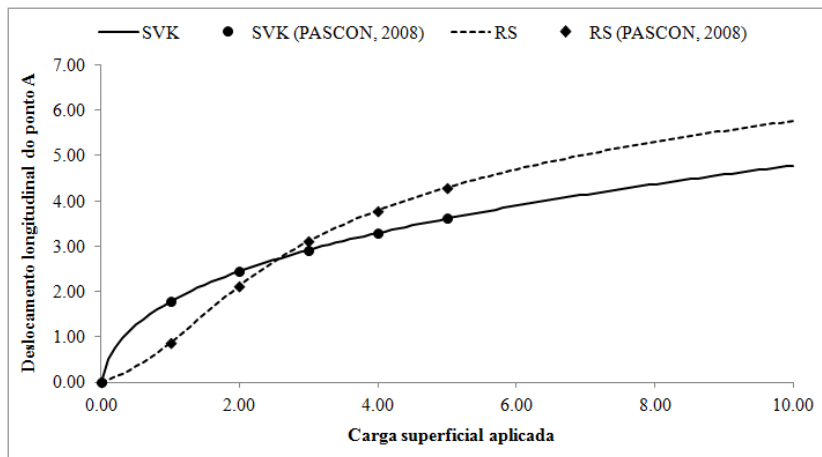
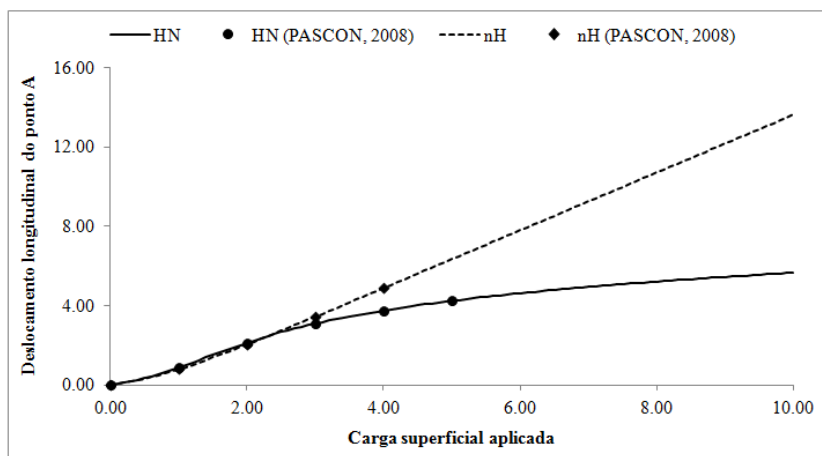


Figura 9.3. Comparação com os dados experimentais de Yeoh (1997) para o prisma sob tração uniaxial.



(a)



(b)

Figura 9.4. Comparação com os resultados numéricos de Pascon (2008) para o prisma sob tração uniaxial com os modelos: (a) Saint Venant-Kirchhoff (SVK) e Rivlin-Saunders (RS); (b) Hartmann-Neff (HN) e neo-Hookeano (nH).

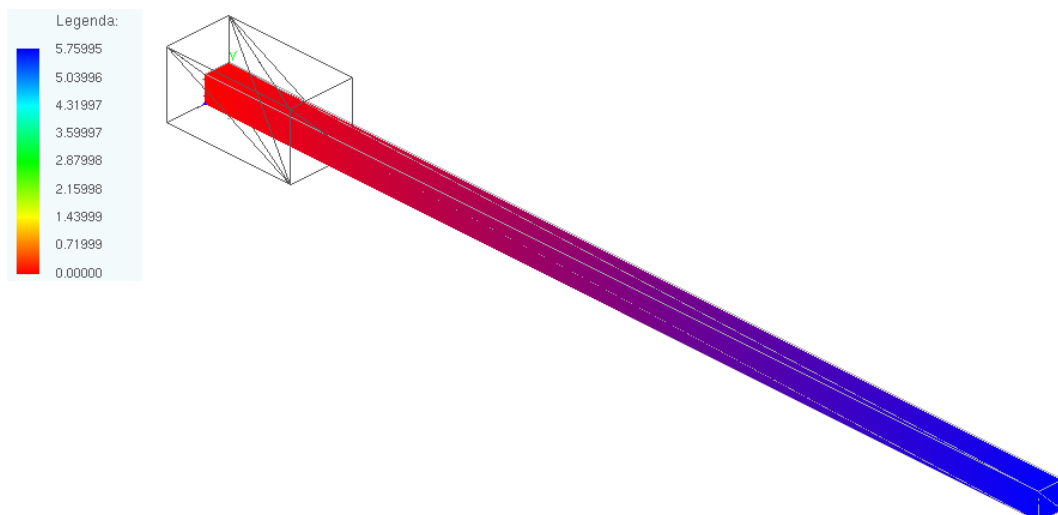


Figura 9.5. Posições inicial e final do prisma sob tração uniaxial com o modelo de Rivlin-Saunders (5.3). A legenda se refere aos deslocamentos longitudinais.

Tabela 9.3. Constantes hiperelásticas do material para o prisma sob compressão uniaxial.

Lei hiperelástica	Coefficientes hiperelásticos
SVK (equação 5.2)	$E = 21,8947$
	$\nu = 0,001$
	$k = 1000,0$
	$n = 1,0$
RS (equação 5.3)	$c_{10} = 0,37052117$
	$c_{20} = -0,00440558$
	$c_{30} = -0,00152442$
	$k = 1000,0$
HN (equação 5.4)	$n = 1,0$
	$c_{10} = 0,39506964$
	$c_{01} = -0,00621006$
nH (equação 5.5)	$\alpha = -0,00009288$
	$k = 1000,0$
	$\mu = 0,69255694$

Assim como no primeiro exemplo, os resultados das simulações, em termos do gráfico força versus deslocamento, estão de acordo com as soluções analíticas (9.3) (ver figura 9.6), com os dados experimentais de Yeoh (1997) (ver figura 9.7), e com os resultados numéricos de Pascon (2008) (ver figura 9.8). Pode-se notar, nos gráficos das figuras 9.6, 9.7 e 9.8, que o modelo hiperelástico linear de Saint Venant-Kirchhoff (5.2) é o único incapaz de impedir o aniquilamento e a inversão do material, os quais ocorrem, respectivamente, quando  $u_1(A) = -1,0$  (comprimento final  $L_{F1} = 0,0$ ) e  $u_1(A) < -1,0$  (comprimento final  $L_{F1} < 0,0$ ). Por essa razão, não é conveniente empregar tal modelo em casos de elevados níveis de compressão. São ilustradas, na figura 9.9, as posições inicial e final do prisma sob compressão uniaxial para o modelo de Rivlin-Saunders (5.3).

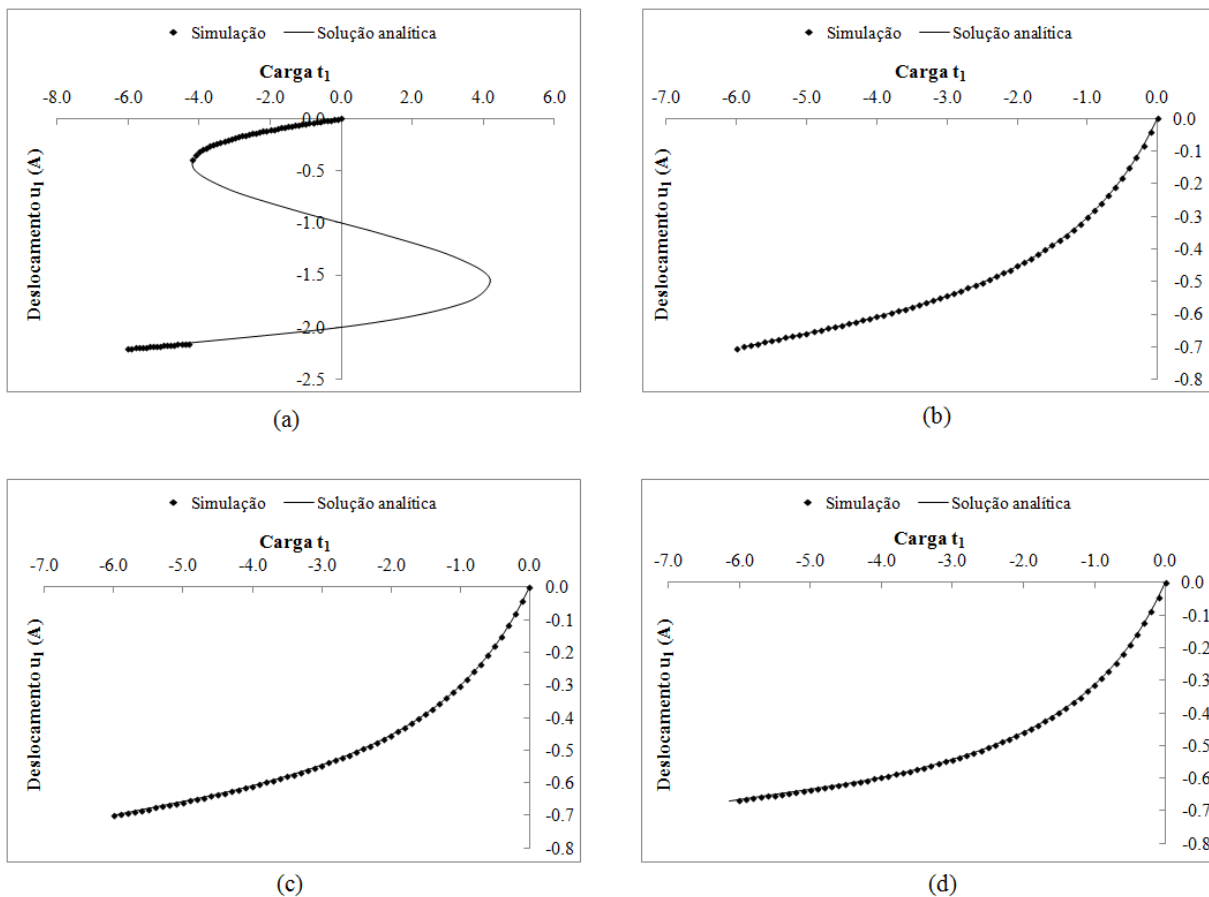


Figura 9.6. Carga superficial aplicada ( $t_1$ ) versus deslocamento longitudinal do ponto A ( $u_1(A)$ ) para o prisma sob compressão uniaxial com os modelos: (a) Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2 e 9.3.1); (b) Rivlin-Saunders (ver equações 5.3 e 9.3.2); (c) Hartmann-Neff (ver equações 5.4 e 9.3.3); (d) neo-Hookeano (ver equações 5.5 e 9.3.4).

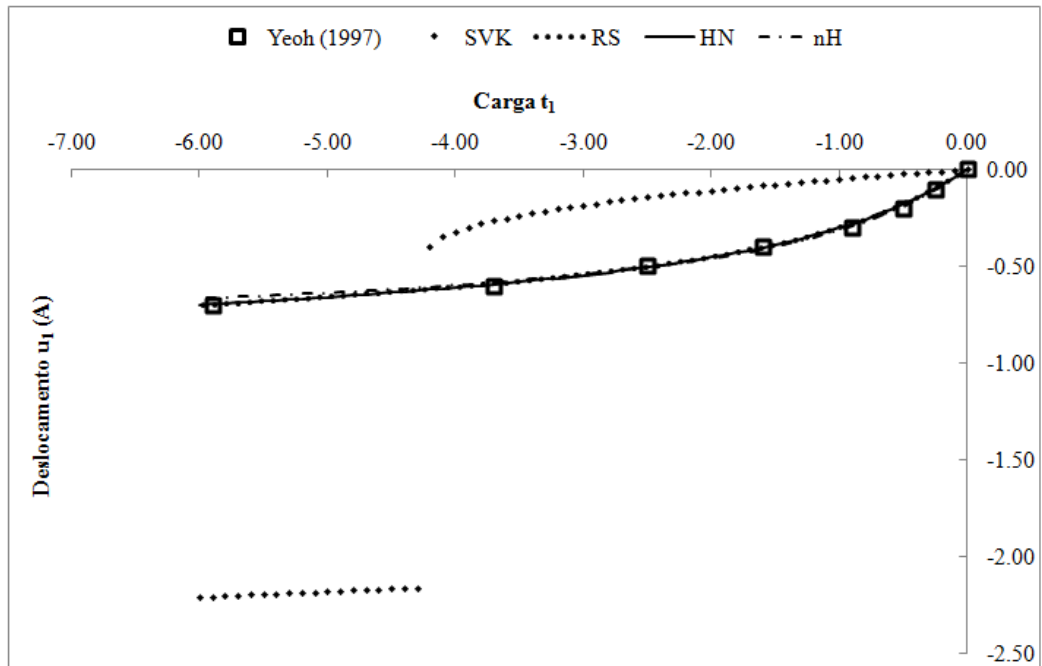


Figura 9.7. Carga superficial aplicada ( $t_1$ ) versus deslocamento longitudinal do ponto A ( $u_1(A)$ ) para o prisma sob compressão uniaxial: comparação com os dados experimentais de Yeoh (1997) para os diversos modelos utilizados.

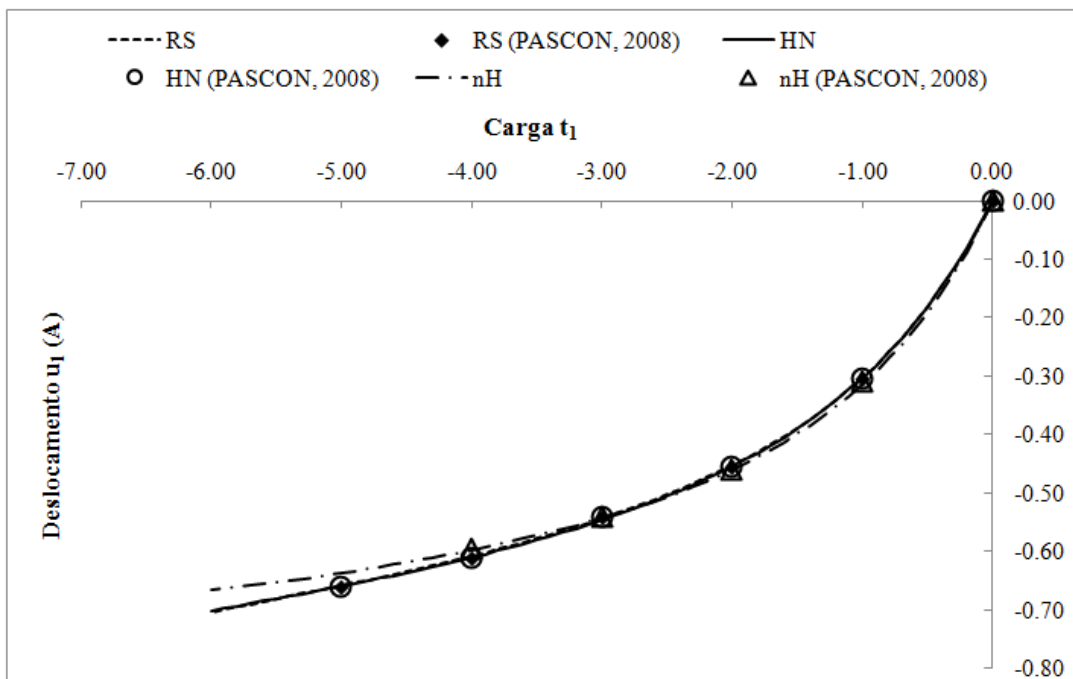


Figura 9.8. Carga superficial aplicada ( $t_1$ ) versus deslocamento longitudinal do ponto A ( $u_1(A)$ ) para o prisma sob compressão uniaxial: comparação com os resultados numéricos de Pascon (2008) com os modelos de Rivlin-Saunders (RS), Hartmann-Neff (HN) e neo-Hookeano (nH).

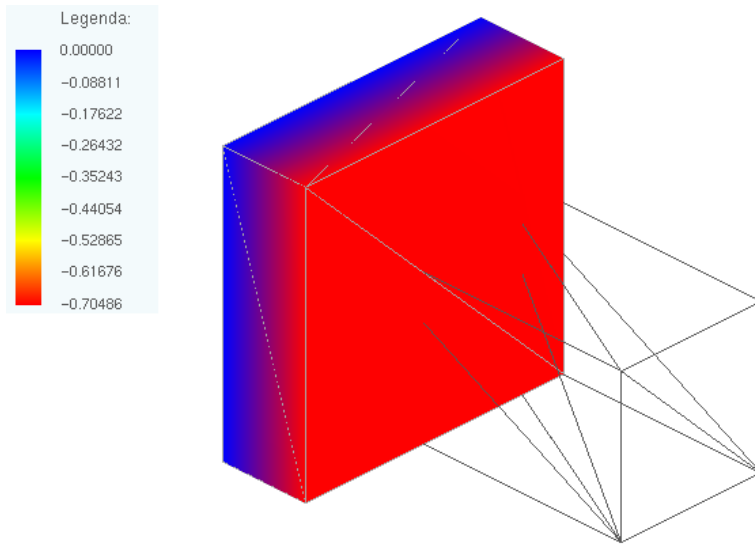


Figura 9.9. Posições inicial e final do prisma sob compressão uniaxial com o modelo de Rivlin-Saunders (5.3). A legenda se refere aos deslocamentos longitudinais.

### 9.1.1.3. Cisalhamento simples

O terceiro exemplo numérico é o prisma homogêneo sob cisalhamento simples ilustrado na figura 9.10. Para este problema, assumindo que o cisalhamento ocorre no plano definido pelos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , as seguintes expressões podem ser escritas (ver figura 9.10):

$$\mathbf{f} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} y_1(\mathbf{x}) \\ y_2(\mathbf{x}) \\ y_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 \tan \theta \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (9.4.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \\ u_3(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \tan \theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.4.2)$$



$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4.3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ \gamma & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de cisalhamento ilustrado na figura 9.10; e  $\gamma$  é a quantidade de cisalhamento (PASCON, 2008), ou “*amount of shear*” (HOLZAPFEL, 2004). A solução analítica deste problema para materiais hiperelásticos isotrópicos e incompressíveis (ver seção 5.4), obtida por Rivlin (1956), é dada pela seguinte expressão:

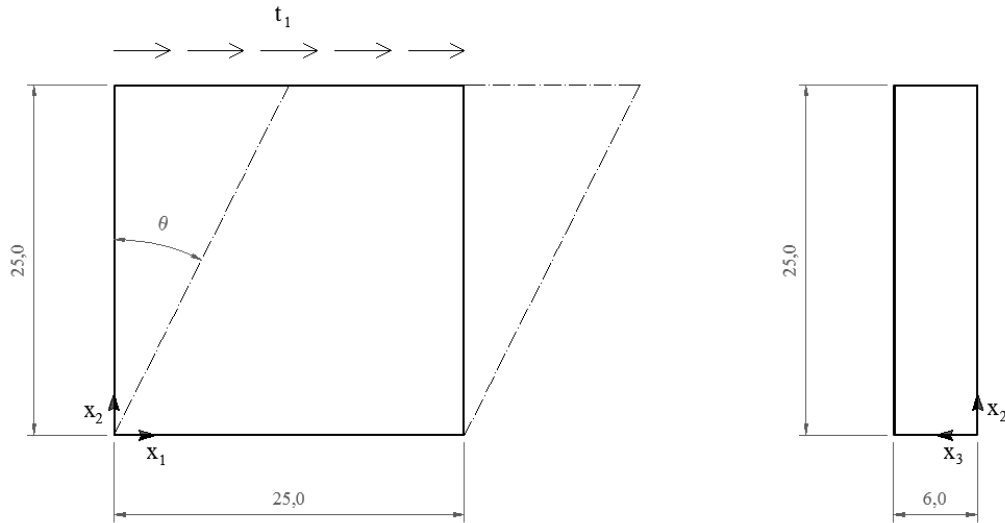
$$F_1 = t_1 S_0 = 2\gamma \left( \frac{\partial \Psi}{\partial i_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial i_2} \right) \quad (9.5.1)$$

$$\gamma = \tan \theta = \frac{u_1(25)}{25} \quad (9.5.2)$$

onde  $F_1$  é a força cisalhante aplicada na direção do eixo  $x_1$ ;  $t_1$  é a carga superficial cisalhante uniformemente aplicada na face cuja área inicial é  $S_0$  (ver figura 9.10); e  $u_1(25)$  é o deslocamento ao longo de  $x_1$  da face com coordenada  $x_2 = 25,0$ . Para o modelo de Rivlin-Saunders (ver equação 5.3 e figura 9.10), a referida solução analítica resulta em:

$$F_1 = t_1 S_0 = 2\gamma(S_0) \left[ c_{10} + 2c_{20}(i_1 - 3) + 3c_{30}(i_1 - 3)^2 \right] \quad (9.6.1)$$

$$i_1 = 3 + \gamma^2 \quad (9.6.2)$$



Nós com deslocamentos livres:

$x_2 = 25,0$ ;  $u_1$  livre

Carga superficial cisalhante (uniforme):

$x_2 = 25,0$ ;  $t_1 = 3,0$  (100 incrementos de 0,03)

Modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders (5.3):

$k = 1000,0$

$n = 1,0$

$c_{10} = 0,41491334$

$c_{20} = -0,04627321$

$c_{30} = 0,00645605$

Figura 9.10. Prisma sob cisalhamento simples (geometria, condições de contorno e lei constitutiva).  
As linhas tracejadas e pontilhadas representam a posição final do prisma.

Em relação ao gráfico carga superficial versus o escalar  $\gamma$  (ver equação 9.4.3), os resultados das simulações numéricas corroboram a solução analítica (9.6), os dados experimentais de Yeoh (1990) e os resultados numéricos de Pascon (2008) (ver figura 9.11). Os referidos dados experimentais foram obtidos a partir de um polímero estrutural preenchido com negro de carbono, e os valores numéricos de Pascon (2008) foram obtidos com elementos finitos de casca de ordem cúbica. Os deslocamentos ao longo de  $x_1$  no último passo de carga são ilustrados na figura 9.12.

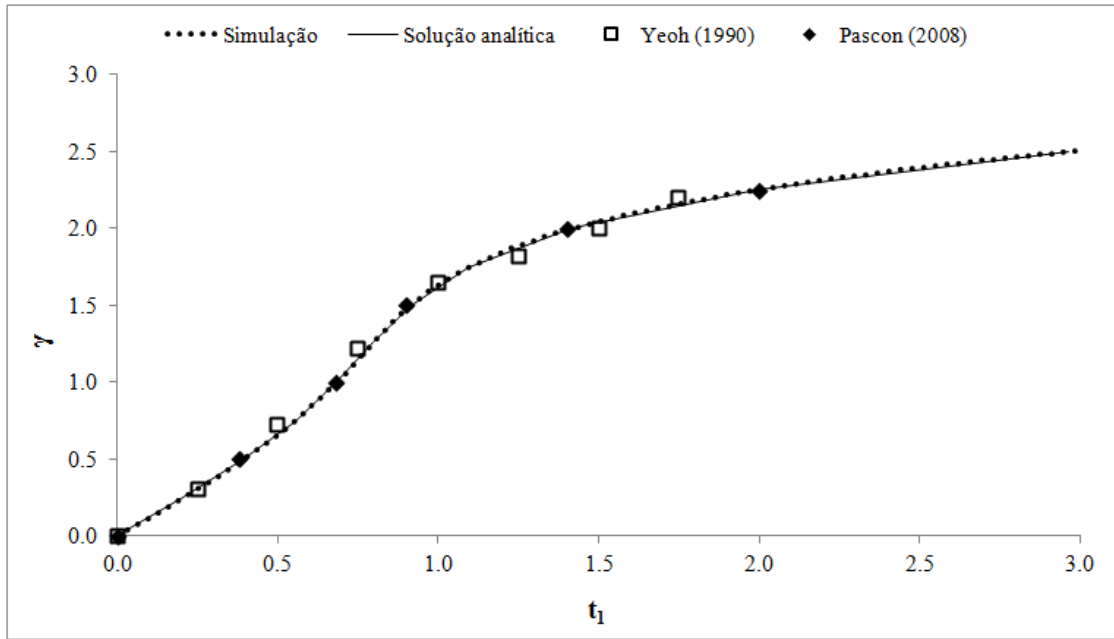


Figura 9.11. Carga superficial cisalhante  $t_1$  versus quantidade de cisalhamento  $\gamma$  (ver figura 9.10 e equação 9.5.2): comparação com a solução analítica (9.6), os dados experimentais de Yeoh (1990) e os resultados numéricos de Pascon (2008).

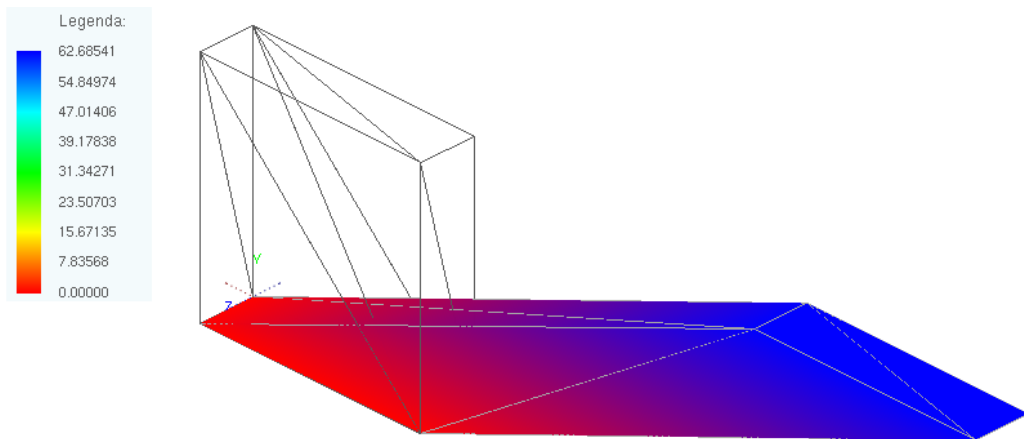


Figura 9.12. Posições inicial e final do prisma sob cisalhamento simples. A legenda se refere aos deslocamentos ao longo do eixo  $x_1$ .

### 9.1.2. Obtenção do número necessário de pontos de integração

Para determinação numérica das integrais (8.1), referentes ao cálculo do vetor de forças internas (4.9.2) e da matriz Hessiana (4.11.2), é necessário definir o esquema de integração numérica, isto é, é preciso definir o número ( $n_{pin}$ ), a localização ( $\xi$ ) e os pesos ( $w$ ) dos pontos de integração numérica. Conforme explicado na seção 8.3 desta tese, para o elemento finito sólido hexaédrico (ver seção 3.1), optou-se pela quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), e para o tetraedro (ver seção 3.1), foram escolhidas duas estratégias: a técnica de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007), e as quadraturas Gaussianas de Jinyun (1984) e de Keast (1986). Sabe-se que, quanto maior o número de pontos de integração, maior é o tempo necessário para determinar numericamente as integrais. Porém, espera-se que, com o aumento do número de pontos, a precisão do resultado, em relação ao valor exato da integral, seja maior. Como são empregadas, neste estudo, várias ordens de aproximação polinomial (ver seção 3.1), foi necessário determinar, para o tetraedro e para o hexaedro, o número de pontos de integração numérica (por elemento finito) para cada grau de aproximação. Para isso, várias ordens de aproximação (de um a cinco) foram utilizadas para simular numericamente a viga em balanço mostrada na figura 9.13. Para discretizar a viga, foram utilizadas duas malhas de elementos: uma com seis tetraedros, e outra com um hexaedro. Devido à simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade da viga é discretizada (ver figura 9.13). Para cada tipo de elemento finito, para cada ordem de aproximação e para cada uma das duas leis constitutivas utilizadas (ver figura 9.13), foram empregadas várias quadraturas de integração numérica para simulação estrutural. Em todos os casos, o número de pontos de integração aumentou até que houvesse convergência de resultados (ver tabelas 9.4 a 9.15 para material homogêneo, e tabelas 9.16 a 9.27 para material heterogêneo). Nas tabelas 9.4 a 9.27, o símbolo X indica que não houve convergência da norma (8.11). Com os resultados das simulações, definiu-se a quadratura de integração numérica para cada ordem de aproximação dos elementos tetraédrico e hexaédrico, e para cada uma das leis constitutivas (ver tabelas 9.28 a 9.31). Para essa definição, foi utilizada a tolerância de 1% para o seguinte erro:

$$e_{IN} = \frac{(res_1 - res_2)}{res_2} \quad (9.7)$$

onde  $res_1$  e  $res_2$  são os resultados fornecidos por duas quadraturas de integração consecutivas, sendo o número de pontos da segunda maior que o da primeira. Tais resultados são comparados para a mesma estratégia de integração.

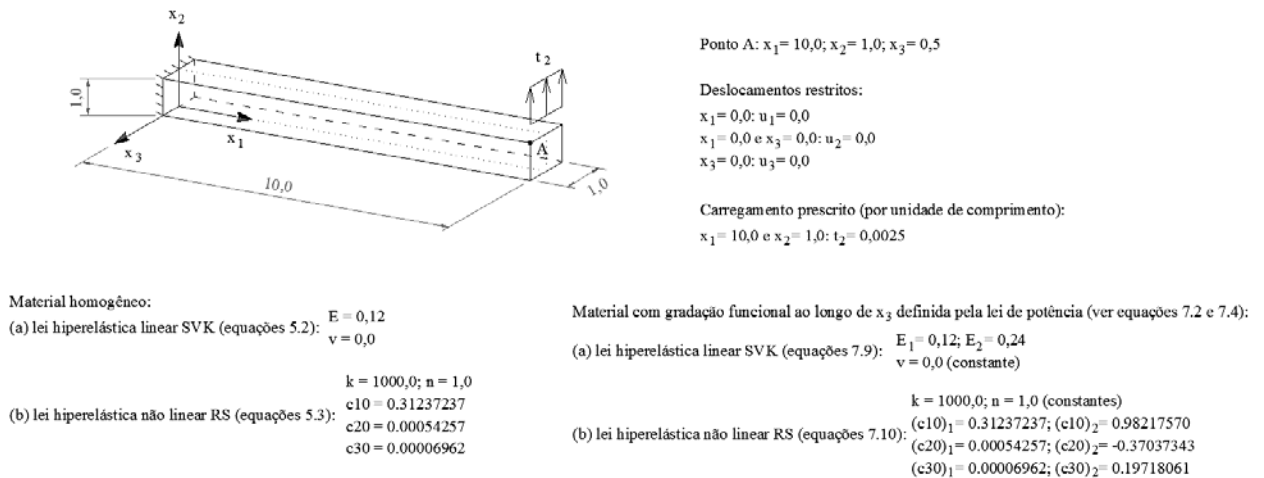


Figura 9.13. Viga em balanço utilizada para determinação do número de pontos de integração por elemento finito. As linhas pontilhadas representam a parte discretizada da viga. Para o caso com gradação funcional (GF), os limites  $( )_1$  e  $( )_2$  correspondem aos valores das constantes hiperelásticas em  $x_3 = 0,50$  e  $x_3 = 0,0$ , respectivamente.

Tabela 9.4. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	0.821	0.821						
2	X	5.71	5.83	5.28	5.28			
3	X	X	X	7.61	7.45	7.39	7.36	
4	X	X	X	X	8.45	8.32	8.29	8.26
5	X	X	X	X	X	8.99	X	8.60

Tabela 9.5. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	-0.074	-0.074						
2	X	-3.21	-3.40	-2.54	-2.54			
3	X	X	X	-5.82	-5.69	-5.75	-5.73	
4	X	X	X	X	-7.01	-6.95	-6.92	-6.96
5	X	X	X	X	X	-7.52	X	-7.28

Tabela 9.6. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1		0.821						
2	X	5.48	5.31	5.28	5.28			
3	X	8.88	7.39	7.38	7.35			
4	X	X	8.42	8.26	8.26			
5	X	X	X	8.61	8.58	8.58		

Tabela 9.7. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1		-0.074						
2	X	-2.76	-2.57	-2.54	-2.54			
3	X	-6.72	-5.67	-5.72	-5.71			

4	X	X	-7.18	-6.92	-6.94		
5	X	X	X	-7.29	-7.26	-7.27	

Tabela 9.8. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	1.619	1.614	1.614				
2	X	X	6.25	6.14	6.14			
3	X	X	X	7.84	7.72	7.70		
4	X	X	X	X	8.40	8.37	8.36	
5	X	X	X	X	X	8.63	8.62	

Tabela 9.9. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material homogêneo, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	-0.253	-0.252	-0.252				
2	X	X	-3.55	-3.41	-3.41			
3	X	X	X	-5.90	-5.88	-5.86		
4	X	X	X	X	-7.03	-7.00	-6.98	
5	X	X	X	X	X	-7.30	-7.29	

Tabela 9.10. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	0.0792	0.0792						
2	X	X	X	0.295	0.294	0.295		
3	X	X	X	X	2.968	2.929	2.911	
4	X	X	X	X	4.019	3.988	X	3.941
5	X	X	X	X	X	4.077	X	X

Tabela 9.11. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	-0.0057	-0.0057						
2	X	X	X	-0.025	-0.025	-0.025		
3	X	X	X	X	-0.916	-0.893	-0.883	
4	X	X	X	X	-1.387	-1.372	X	-1.373
5	X	X	X	X	X	-1.382	X	X

Tabela 9.12. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), material homogêneo, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	0.1056	0.0792	0.0792					
2	X	0.474	0.298	0.295	0.295			





Tabela 9.15. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), material homogêneo, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	-0.013	-0.013					
2	X	X	-0.573	-0.535	-0.528	-0.528		
3	X	X	X	-1.170	-1.162	-1.172		
4	X	X	X	X	-1.387	-1.385		
5	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabela 9.16. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), material com gradação funcional (MGF), elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	0.574	0.620	0.620					
2	X	5.31	5.43	4.86	4.86			
3	X	X	X	7.32	7.17	7.12		
4	X	X	X	X	8.20	8.09	8.06	
5	X	X	X	X	X	8.54	X	8.36

Tabela 9.17. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	-0.045	-0.050	-0.050					
2	X	-2.77	-2.92	-2.18	-2.18			
3	X	X	X	-5.42	-5.34	-5.42		

4	X	X	X	X	-6.64	-6.56	-6.54	
5	X	X	X	X	X	-6.91	X	-6.85

Tabela 9.18. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	0.877	0.623	0.619					
2	X	5.11	4.89	4.86	4.86			
3	X	8.54	7.13	7.11	7.09			
4	X	X	8.20	8.04	8.04			
5	X	X	X	8.37	8.34	8.35		

Tabela 9.19. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	-0.083	-0.050	-0.050					
2	X	-2.42	-2.21	-2.18	-2.18			
3	X	-6.13	-5.33	-5.38	-5.37			
4	X	X	-6.84	-6.54	-6.57			
5	X	X	X	-6.88	-6.84	-6.85		

Tabela 9.20. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), MGF, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	1.225	1.218					
2	X	X	5.81	5.70	5.70			
3	X	X	X	7.50	7.41	7.40		
4	X	X	X	X	8.16	8.13	8.12	
5	X	X	X	X	X	8.39	8.37	

Tabela 9.21. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica linear (5.2), MGF, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	-0.167	-0.165					
2	X	X	-3.07	-2.96	-2.95			
3	X	X	X	-5.57	-5.52	-5.51		
4	X	X	X	X	-6.64	-6.61	-6.59	
5	X	X	X	X	X	-6.87	-6.86	

Tabela 9.22. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	0.0409	0.0465	0.0465					
2	X	0.9640	X	0.2375	0.2373			

3	X	X	X	X	2.0775	2.0715		
4	X	X	X	X	2.7271	2.6765	X	2.6290
5	X	X	X	X	X	2.7469	X	2.7275

Tabela 9.23. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e quadratura Gaussiana (anexo B).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	4	5	11	15	24	31	45
1	-0.0029	-0.0033	-0.0033					
2	X	-0.1499	X	-0.0212	-0.0212			
3	X	X	X	X	-0.4989	-0.4967		
4	X	X	X	X	-0.6783	-0.6604	X	-0.6531
5	X	X	X	X	X	-0.6716	X	-0.6690

Tabela 9.24. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	0.0691	0.0469	0.0464	0.0463				
2	X	0.4196	0.2418	0.2374	0.2373			
3	X	X	2.0966	2.0572	2.0332	2.0307		
4	X	X	2.8139	2.6448	2.6151			
5	X	X	X	2.7598	2.7251			

Tabela 9.25. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido tetraédrico e estratégia de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	-0.0050	-0.0033	-0.0033	-0.0033				
2	X	-0.0460	-0.0216	-0.0212	-0.0212			
3	X	X	-0.5057	-0.4908	-0.4815	-0.4805		
4	X	X	-0.7235	-0.6559	-0.6495			
5	X	X	X	-0.6792	-0.6669			

Tabela 9.26. Deslocamentos transversais ( $u_2$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	0.0752	0.0723	0.0718				
2	X	X	1.6536	1.5898	1.5852			
3	X	X	X	2.2341	2.2226	2.2220		
4	X	X	X	X	2.6270	2.6271		
5	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabela 9.27. Deslocamentos longitudinais ( $u_1$ ) do ponto A da viga em balanço (figura 9.13): lei hiperelástica não linear (5.3), MGF, elemento finito sólido hexaédrico e quadratura tridimensional de Gauss-Legendre (ver equações 8.2 e anexo A).

Ordem de aproximação	Número de pontos de integração (por elemento)							
	1	8	27	64	125	256	343	512
1	X	-0.0066	-0.0063	-0.0063				
2	X	X	-0.3395	-0.3297	-0.3283			

3	X	X	X	-0.5137	-0.5150	-0.5171		
4	X	X	X	X	-0.6320	-0.6321		
5	X	X	X	X	X	X	X	X

As quadraturas de integração numérica fornecidas nas tabelas 9.30 e 9.31, para lei hiperelástica de Rivlin-Saunders (5.3), também foram adotadas para as outras leis hiperelásticas não lineares (5.4) e (5.5). As quadraturas das tabelas 9.29 e 9.31, válidas para material heterogêneo com GF definida pela lei de potência (ver equações 7.2 e 7.4), também foram adotadas para materiais heterogêneos cuja variação dos coeficientes hiperelásticos é definida pelas outras leis de GF (7.5), (7.6), (7.7) e (7.8).

Tabela 9.28. Quadratura de integração numérica adotada para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (lei hiperelástica linear 5.2 e material homogêneo).

Elemento finito	Ordem de aproximação	Estratégia de integração	Número de pontos
Tetraedro	1	Gauss	1
	2	Gauss	11
	3	Gauss	15
	4	Gauss	24
	5	Gauss	45
Hexaedro	1	Gauss-Legendre 3D	8
	2	Gauss-Legendre 3D	64
	3	Gauss-Legendre 3D	125
	4	Gauss-Legendre 3D	125
	5	Gauss-Legendre 3D	256

Tabela 9.29. Quadratura de integração numérica adotada para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (lei hiperelástica linear 5.2 e MGF).

Elemento finito	Ordem de aproximação	Estratégia de integração	Número de pontos
Tetraedro	1	Gauss	4
	2	Gauss	11
	3	Gauss	15
	4	Gauss	24
	5	Gauss	45
Hexaedro	1	Gauss-Legendre 3D	8
	2	Gauss-Legendre 3D	64
	3	Gauss-Legendre 3D	125
	4	Gauss-Legendre 3D	125
	5	Gauss-Legendre 3D	256

Tabela 9.30. Quadratura de integração numérica adotada para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (lei hiperelástica não linear 5.3 e material homogêneo).

Elemento finito	Ordem de aproximação	Estratégia de integração	Número de pontos
Tetraedro	1	Gauss	1
	2	Gauss	11
	3	Gauss	24
	4	Gauss	24
	5	Gauss	45
Hexaedro	1	Gauss-Legendre 3D	8
	2	Gauss-Legendre 3D	64
	3	Gauss-Legendre 3D	125
	4	Gauss-Legendre 3D	125



Tabela 9.31. Quadratura de integração numérica adotada para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (lei hiperelástica não linear 5.3 e MGF).

Elemento finito	Ordem de aproximação	Estratégia de integração	Número de pontos
Tetraedro	1	Gauss	4
	2	Gauss	11
	3	Gauss	15
	4	Gauss	24
	5	Gauss	45
Hexaedro	1	Gauss-Legendre 3D	8
	2	Gauss-Legendre 3D	64
	3	Gauss-Legendre 3D	125
	4	Gauss-Legendre 3D	125
	5	Gauss-Legendre 3D	256

De acordo com esta seção, pode-se notar que a integração numérica adotada no presente estudo é a integração completa (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). Conforme mencionado anteriormente (ver seção 2.5), não foram adotadas aqui as seguintes técnicas: integração seletiva e reduzida (MALKUS; HUGHES, 1978a; MALKUS; HUGHES, 1978b), enriquecimento em deformação (SIMO; RIFAI, 1990; SIMO; ARMERO, 1992), método da deformação natural assumida (BATHE; DVORKIN, 1985; HUANG; HINTON, 1986), e técnicas de estabilização dos modos espúrios de energia, chamados de “*hourglass modes*” (KOSLOFF; FRAZIER, 1978; BELYTSCHKO et al., 1984; REESE, 2007).

### 9.1.3. Comparação do tipo de refinamento da malha

Em relação à discretização, ou à malha de elementos finitos adotada (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), existem basicamente três tipos de refinamento (KUO; CLEGHORN; BEHDINAN; FENTON, 2006): o hierárquico (“*h-refinement*”), o polinomial (“*p-refinement*”), e o de redistribuição (“*r-refinement*”). Com o refinamento hierárquico, o número de elementos finitos aumenta e, conseqüentemente, o tamanho desses elementos diminui, o que enriquece a aproximação do meio contínuo discretizado. Já com o refinamento polinomial, a precisão da aproximação numérica aumenta com uso de elementos finitos com ordens mais elevadas, isto é, elementos cujas funções de forma possuem graus de aproximação polinomial mais elevados (ver seção 3.1). Por fim, o refinamento *r* diz respeito à redistribuição da malha de elementos, ou seja, a ordem de aproximação e o número de elementos são mantidos constantes, mas o tamanho e a posição desses elementos são alterados de forma a enriquecer a aproximação numérica nas regiões onde os campos de deformação e de tensão são mais complexos.

De acordo com Kuo, Cleghorn, Behdinan e Fenton (2006), de maneira geral, o refinamento *p* fornece taxas de convergência maiores do que o refinamento *h*, isto é, a precisão dos resultados aumenta com uma taxa maior quando o número de elementos é mantido constante e a ordem de aproximação aumenta, ao invés de se manter o grau de aproximação e aumentar o número de elementos. É afirmado também no referido artigo que o refinamento *r*, normalmente, é empregado para minimizar algum erro, ou norma, de forma a obter a divisão ótima da malha de elementos, ou a discretização mais eficiente em relação à precisão dos resultados.

Para verificar a influência do refinamento de redistribuição, a viga da figura 9.13 foi simulada numericamente com vários graus de aproximação polinomial (de um a três), com o mesmo número de elementos finitos sólidos, e com diferentes divisões da malha (ver figura 9.14). As quantidades resultantes de elementos finitos são dezoito para o tetraedro, e três para o hexaedro. A única relação constitutiva adotada é a lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (5.2), e o material é homogêneo (sem GF).

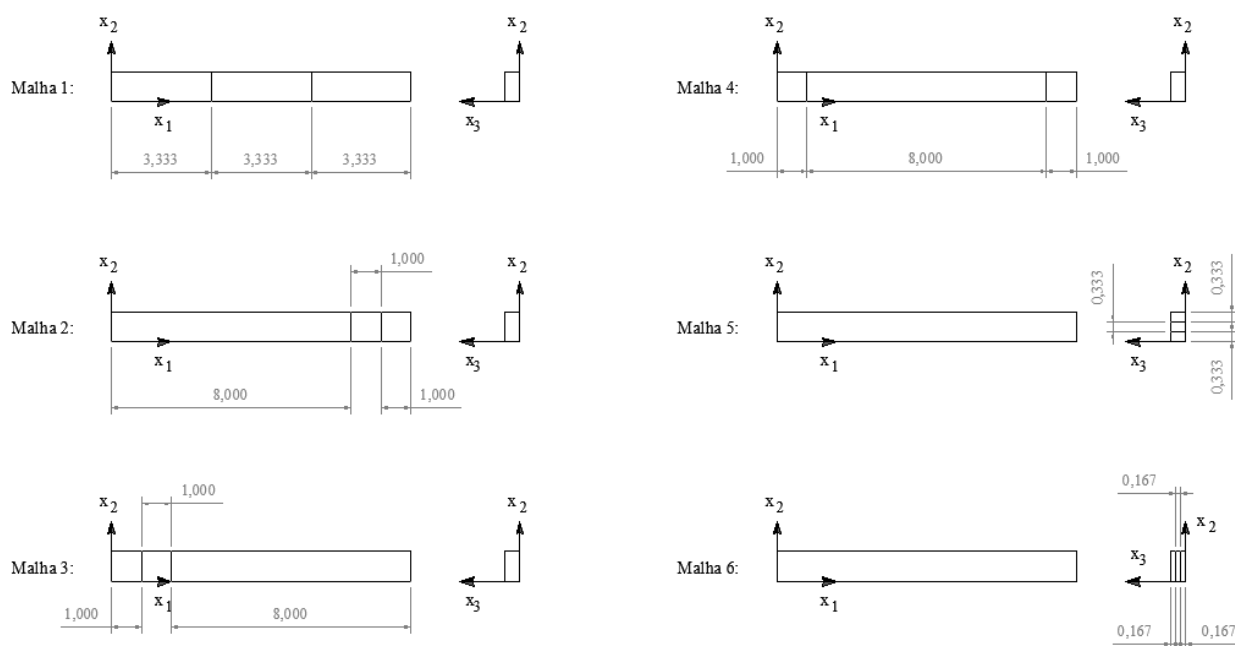


Figura 9.14. Malhas para verificação do refinamento  $r$  da viga em balanço (ver figura 9.13). Estas malhas são as malhas base utilizadas para gerar as discretizações com o gerador de malhas do Apêndice F desta tese.

Em relação a simulações numéricas com elementos finitos, embora existam vários tipos de travamento (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000), neste estudo define-se travamento de uma forma geral: ocorre travamento, ou a malha de elementos trava, quando a discretização não é suficientemente adequada, em termos de refinamento, para reproduzir o comportamento de uma estrutura, por exemplo. Nesse caso, há uma rigidez excessiva da estrutura, o que leva a menores deslocamentos nos problemas com forças prescritas, e a maiores forças nos problemas com deslocamentos prescritos (ou recalques). Tal rigidez excessiva pode ser devida à baixa quantidade de graus de liberdade (refinamentos  $h$  e  $p$  ruins), ou à falta de um enriquecimento maior da aproximação numérica nas regiões onde os campos de deformação e tensão são mais complexos (refinamento  $r$  ruim). Assim, de modo geral, para um determinado carregamento, quanto maiores os deslocamentos ocorridos, menor é o travamento e, com isso, mais precisa e mais confiável é a análise. Para ambos os elementos finitos (tetraédrico e hexaédrico), a viga discretizada com a malha 4 (ver figura 9.14) é a que fornece os maiores deslocamentos e, portanto, é a que trava menos (ver tabelas 9.32 e 9.33). Para os dois tipos de elementos sólidos utilizados, como as quantidades de elementos finitos e de nós são as mesmas para todas as seis malhas, considerando as discretizações utilizadas nas simulações, a malha 4 é a mais eficiente em relação à precisão dos deslocamentos verticais

finais do ponto A (ver figura 9.13, e tabelas 9.32 e 9.33). Pode-se dizer que isso era esperado, já que a malha 4 é a que possui um enriquecimento maior da aproximação numérica, ao longo da direção longitudinal, nas duas regiões extremas (uma próxima ao engaste, e outra próxima à carga). Isso porque vigas em flexão apresentam, de modo geral, um campo de deslocamentos que é mais complexo nas referidas regiões, e mais complexo na direção longitudinal do que ao longo da seção transversal, mesmo em regime de grandes deslocamentos (PAI; PALAZOTTO, 1996). Essa idéia de se refinar a malha de elementos nas regiões em que são esperados campos de deformação e tensão mais complexos é utilizada ao longo das simulações numéricas dos próximos problemas estruturais deste capítulo. Dessa forma, define-se uma malha base a ser utilizada no gerador de malhas (ver Apêndice F) com uma concentração maior de elementos nas regiões mais críticas, e aumentam-se o número de elementos (refinamento  $h$ ) e a ordem de aproximação polinomial (refinamento  $p$ ) até que haja convergência dos resultados. Outro aspecto que pode ser observado nas tabelas 9.32 e 9.33 é que, para ambos os elementos sólidos e para cada malha, o aumento da ordem de aproximação melhora a precisão do deslocamento vertical final do ponto A.

Tabela 9.32. Deslocamentos verticais finais do ponto A da viga em balanço (ver figura 9.13) com as diversas malhas utilizadas (ver figura 9.14), para o elemento sólido tetraédrico.

Ordem de aproximação	Malha					
	1	2	3	4	5	6
1	3.82	1.25	6.96	8.23	0.83	0.82
2	8.06	6.17	8.66	8.68	5.33	5.25
3	8.64	7.92	8.81	9.45	7.47	7.43

Tabela 9.33. Deslocamentos verticais finais do ponto A da viga em balanço (ver figura 9.13) com as diversas malhas utilizadas (ver figura 9.14), para o elemento sólido hexaédrico.

Ordem de aproximação	Malha					
	1	2	3	4	5	6
1	6.36	2.57	8.37	8.43	1.62	1.62
2	8.29	6.89	8.70	8.77	6.14	6.14
3	8.67	8.09	9.44	9.47	7.72	7.72

#### 9.1.4. Comparação do tempo de processamento para os elementos sólidos

Além do tipo de refinamento da malha (seção 9.1.3), foi comparado também o tempo de processamento das simulações numéricas do problema estrutural da figura 9.13 com os elementos sólidos tetraédrico e hexaédrico. A malha base utilizada no gerador de malhas (ver Apêndice F) é a malha 4 da figura 9.14. O grau de aproximação polinomial usado varia de um a cinco. O modelo constitutivo adotado é a lei linear de Saint Venant-Kirchhoff (5.2) para material homogêneo. O número de pontos de integração é dado na tabela 9.28. Neste caso, as simulações foram realizadas com o código sequencial (ver item 8.4).

Com exceção da aproximação linear, o tempo de processamento é maior para simular a viga com a malha de hexaedros (ver tabela 9.34). Ademais, quanto maior a ordem de aproximação, maior é a diferença entre os tempos de processamento. Por essas razões, apesar de os deslocamentos finais das malhas de hexaedros terem sido um pouco maiores do que os das malhas de tetraedros, foi dada maior ênfase, ao longo deste estudo, ao elemento finito sólido tetraédrico.

### 9.1.5. Tração uniaxial de prisma com GF

Para ilustrar a influência da GF (ver capítulo 7), o prisma do primeiro exemplo numérico (ver item 9.1.1.1 e figura 9.1) é analisado novamente, mas neste caso modelado com a lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff com GF na direção do eixo  $x_2$ . Três leis de GF são adotadas: potência (7.4), sigmoïdal (7.5) e senoidal (7.7). Os coeficientes do material são dados na tabela 9.35. A malha de elementos possui seis sólidos tetraédricos de ordem quadrática (ver item 3.1), e a integração numérica (ver equações 8.1) é realizada com 11 pontos (por elemento) em todos os casos.

Tabela 9.34. Comparação entre as simulações numéricas da viga em balanço (figura 9.13) com os elementos finitos sólidos.

Ordem de aproximação	Elemento	$u_2$	$u_1$	Número total de iterações	Tempo de processamento (s)
1	Tetraedro	8.23	-9.84	435	2
	Hexaedro	8.43	-5.69	300	1
2	Tetraedro	8.68	-6.95	264	17
	Hexaedro	8.77	-7.12	263	145
3	Tetraedro	9.45	-9.21	281	104
	Hexaedro	9.47	-8.97	268	1775
4	Tetraedro	9.38	-8.62	275	522
	Hexaedro	9.55	-9.63	320	15254
5	Tetraedro	9.53	-9.59	280	2626
	Hexaedro	9.58	-9.60	393	58540

Tabela 9.35. Coeficientes do material para o prisma (da figura 9.1) com GF. Os limites  $E_1$  e  $E_2$  correspondem aos valores do módulo de Young (ver equações 5.2 e 7.9) em  $x_2 = 0,50$  e  $x_2 = 0,0$ , respectivamente.

Lei hiperelástica com GF	Coeficientes hiperelásticos	
SVK (equações 7.9)	$E_1 = 0,10701025$	$E_2 = 0,53505125$
	$\nu = 0,001$	

Com relação ao gráfico força aplicada versus deslocamento longitudinal, o aumento do coeficiente de GF  $p$  (ver equação 7.4) leva a um enrijecimento do prisma, ou seja, quanto maior  $p$ , menores são os deslocamentos longitudinais (ver figura 9.15a). Tal fenômeno era esperado, já que o aumento do referido coeficiente faz com que a fração volumétrica do material mais rígido ( $E_2 = 0,53505125$ ) seja maior do que a fração volumétrica do material menos rígido ( $E_1 = 0,10701025$ ), o que pode ser notado nas expressões (7.2) e (7.4). O mesmo padrão da resposta do prisma com GF de potência (7.4) é obtido para os prismas com GF sigmoidal (7.5) e senoidal (7.7), isto é, quanto maiores os coeficientes de GF  $s$  e  $s_n$ , maior é a rigidez do material e, portanto, menores são os deslocamentos longitudinais (ver figuras 9.16a e 9.17a). Com relação aos deslocamentos transversais do ponto A para os prismas homogêneos, o mais rígido ( $E = E_2$  ou  $p \rightarrow \infty$ ) apresenta maiores deslocamentos transversais (ver figuras 9.15b, 9.16b e 9.17b). Ao contrário dos deslocamentos longitudinais, os deslocamentos transversais do ponto A, para os prismas com GF, não se situam entre os referidos deslocamentos para os prismas homogêneos. Ademais, apenas para a GF sigmoidal (7.5), existe um padrão: quanto maior o coeficiente de GF ( $s$ ), maiores os deslocamentos transversais do ponto A (ver figuras 9.15b, 9.16b e 9.17b). Em relação à distribuição final de tensão longitudinal, ela parece seguir a variação do módulo de Young ( $m_y$ ), definida pela lei de GF adotada (ver figura 9.18). Por fim, a deformação longitudinal final é uniforme para os prismas homogêneos, e linearmente variável ao longo do eixo  $x_2$  para os prismas com GF (ver figura 9.19).

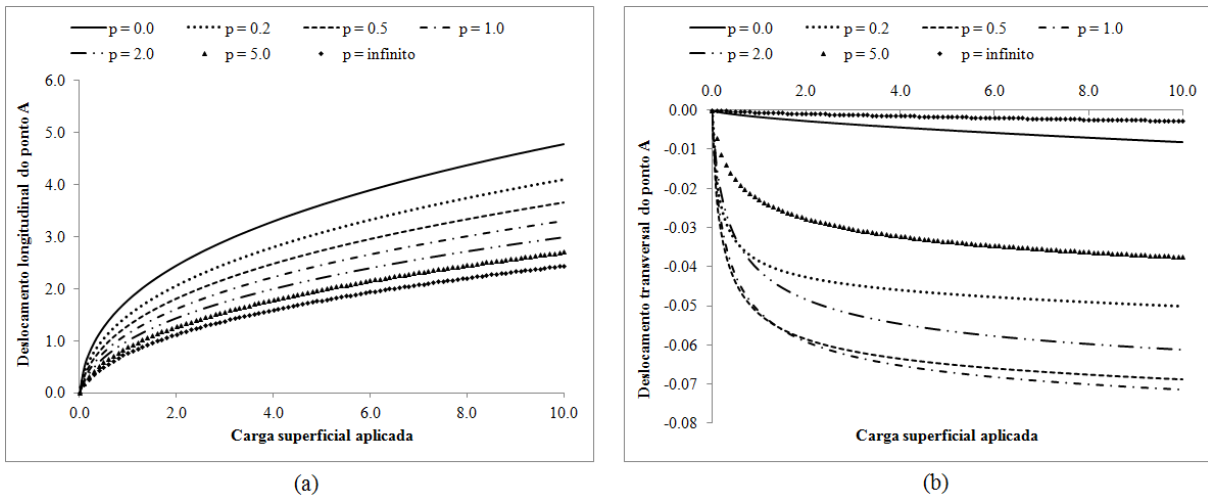


Figura 9.15. Força aplicada versus deslocamento do ponto A do prisma da figura 9.1 com GF definida pela lei de potência (7.4): (a) deslocamento longitudinal  $u_1$ ; (b) deslocamento transversal  $u_2$ . O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF da lei de potência (7.4).

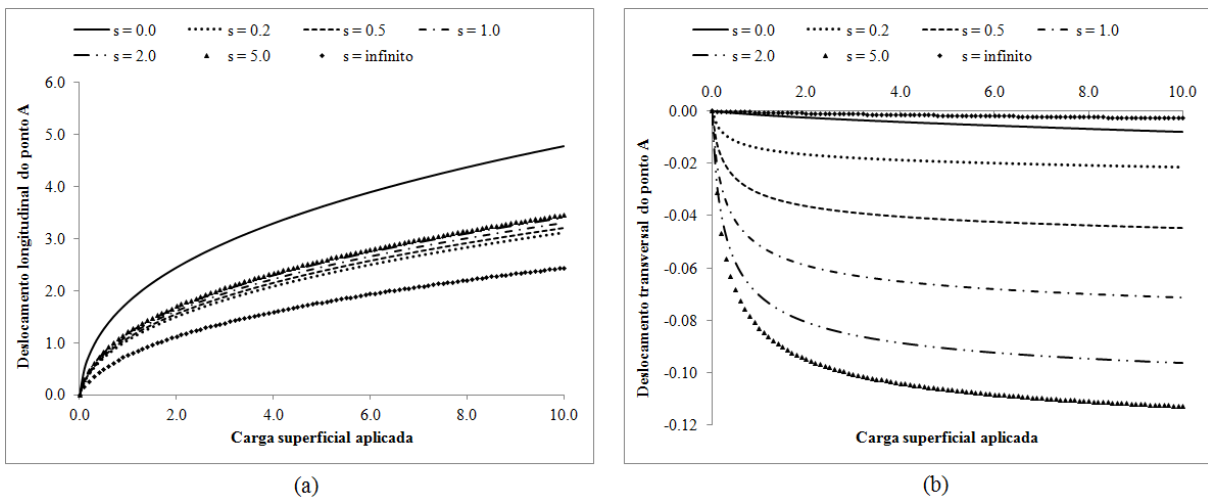
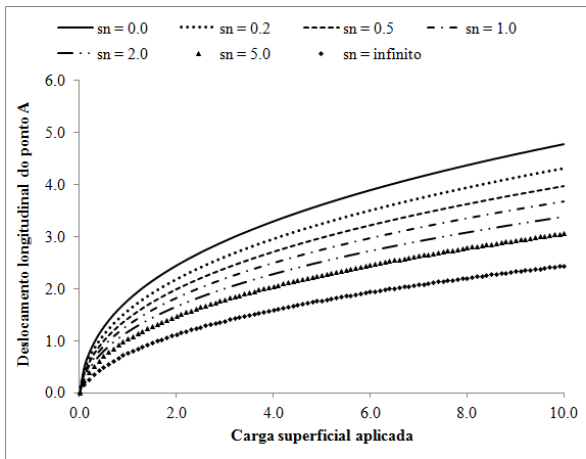
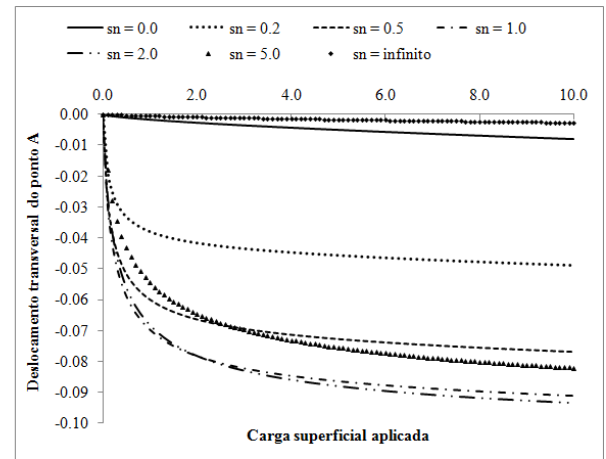


Figura 9.16. Força aplicada versus deslocamento do ponto A do prisma da figura 9.1 com GF definida pela lei sigmoidal (7.5): (a) deslocamento longitudinal  $u_1$ ; (b) deslocamento transversal  $u_2$ . O coeficiente  $s$  é o coeficiente de GF da lei sigmoidal (7.5).





(a)



(b)

Figura 9.17. Força aplicada versus deslocamento do ponto A do prisma da figura 9.1 com GF definida pela lei senoidal (7.7): (a) deslocamento longitudinal  $u_1$ ; (b) deslocamento transversal  $u_2$ . O coeficiente  $sn$  é o coeficiente de GF da lei senoidal (7.7).

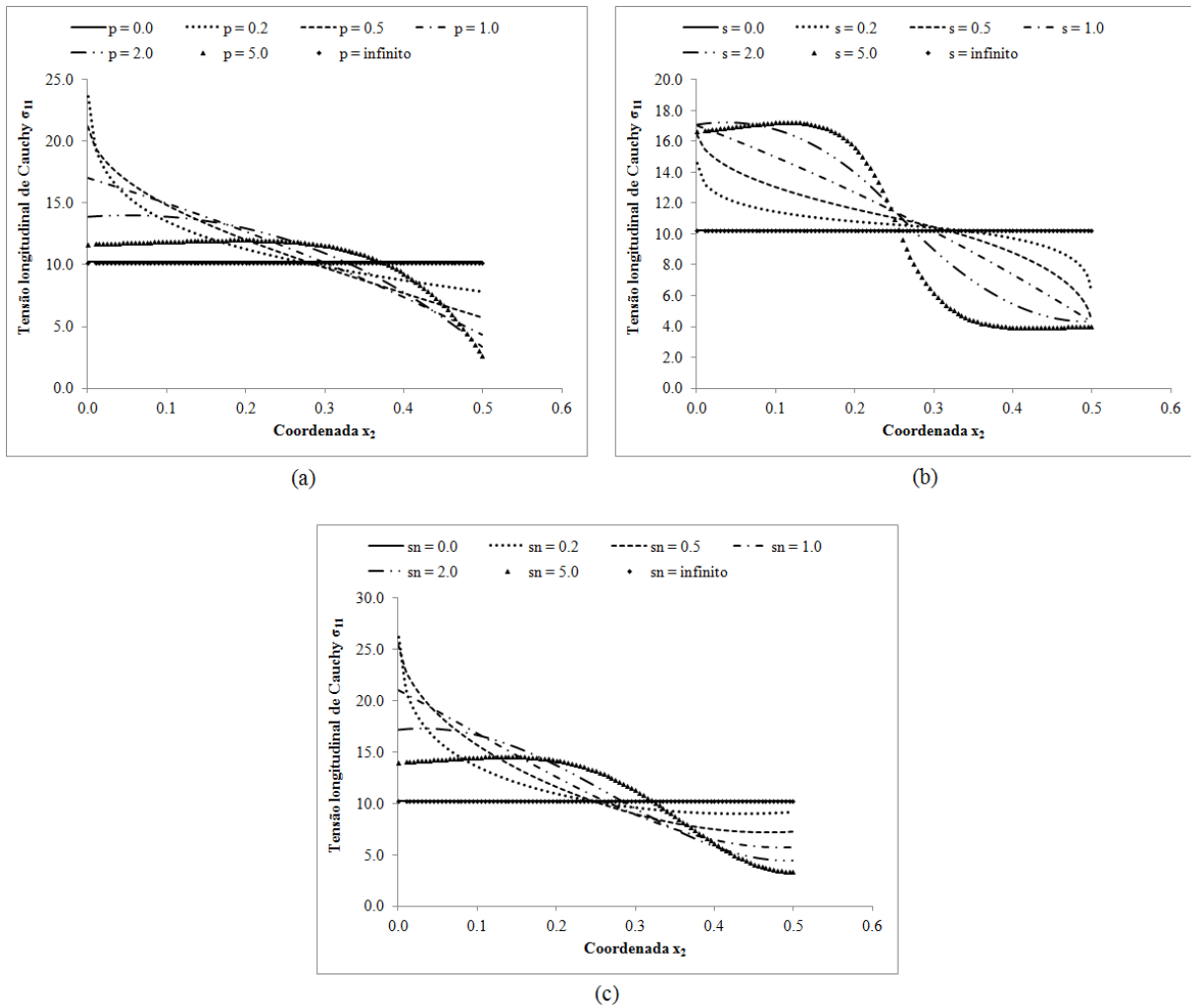
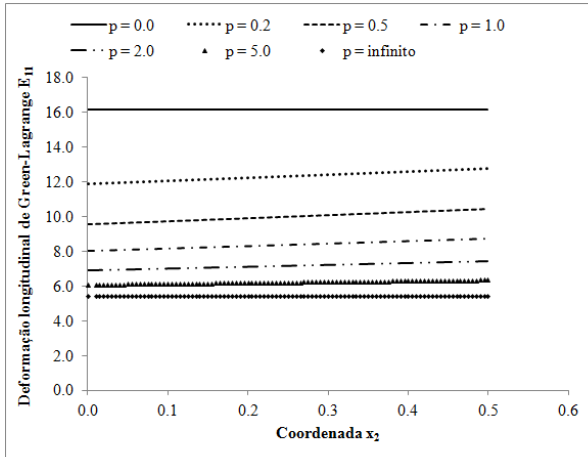


Figura 9.18. Distribuições finais da tensão longitudinal de Cauchy  $\sigma_{11}$  (ver equações 4.1 e 4.2) ao longo do segmento de reta  $x_1 = x_3 = 0,0$  e  $0,0 \leq x_2 \leq 0,5$  do prisma da figura 9.1: (a) lei de potência (7.4); (b) lei sigmoideal (7.5); (c) lei senoidal (7.7).

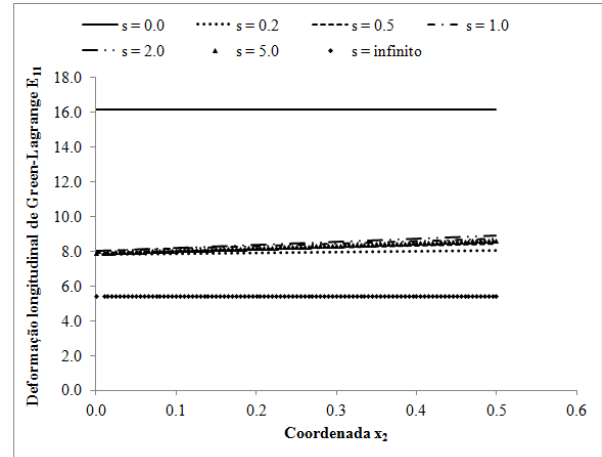
### 9.1.6. Vigas e pórticos planos

Nesta seção são apresentados os principais resultados obtidos com as simulações numéricas de vigas e pórticos planos em regime de grandes deslocamentos. Devido ao fato de haver, em tais casos, predomínio da flexão com pequenas deformações, a lei constitutiva empregada é a lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff, expressa em (5.2) para

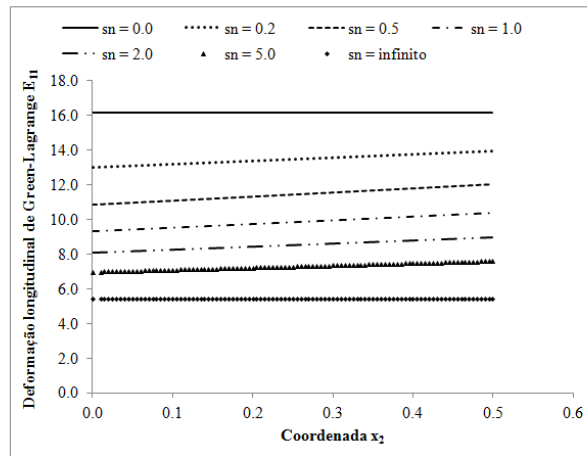
materiais homogêneos, e em (7.9) para MGFs (ver item 7.1). Para simulação computacional destes e dos próximos exemplos, o número adotado de pontos de integração numérica (ver equações 8.1) é o obtido na seção 9.1.2 (ver tabelas 9.28 e 9.29).



(a)



(b)

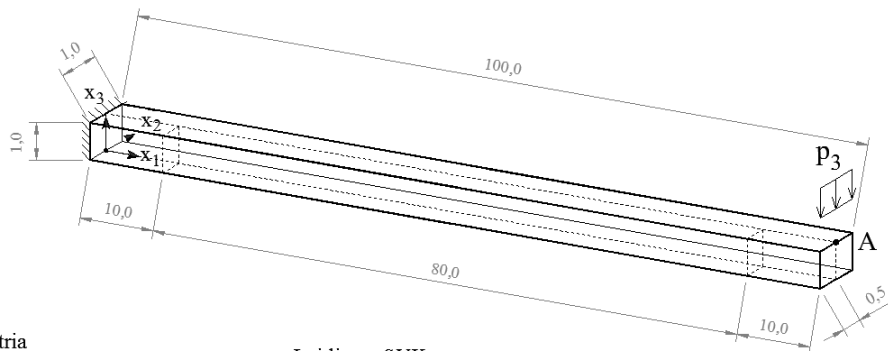


(c)

Figura 9.19. Distribuições finais da deformação longitudinal de Green-Lagrange  $E_{11}$  (ver equação 3.17) ao longo do segmento de reta  $x_1 = x_3 = 0, 0 \leq x_2 \leq 0,5$  do prisma da figura 9.1: (a) lei de potência (7.4); (b) lei sigmoidal (7.5); (c) lei senoidal (7.7).

### 9.1.6.1. Viga prismática em balanço

A primeira viga analisada neste estudo é a barra prismática em balanço mostrada na figura 9.20. Como a viga é simétrica em relação ao plano  $x_2 = 0,0$ , apenas uma metade da viga é discretizada. Com a ideia de se refinar a malha de elementos nas regiões mais críticas (ver item 9.1.3), foi definida a malha base com três elementos hexaédricos (ver Apêndice F) na proporção 1:8:1, conforme ilustrado na figura 9.20. Como são adotados cinco valores para o coeficiente de GF  $p$  (ver figura 9.20), pode-se dizer que são adotadas cinco leis constitutivas para esta viga, sendo que  $p \rightarrow 0,0$  e  $p \rightarrow \infty$  correspondem, respectivamente, aos dois materiais homogêneos, o mais flexível ( $E = 1200,0$ ) e o mais rígido ( $E = 2000,0$ ).



Geometria  
A (100,0 ; 0,0 ; 1,0)

Restrições  
 $x_1 = 0,0; u_1 = u_2 = u_3 = 0,0$   
 $x_2 = 0,5; u_2 = 0,0$

Lei linear SVK  
 $v = 0,30$  (equações 5.2)  
 $x_3 = 0,0: E = E_1 = 1200,0$   
 $x_3 = 1,0: E = E_2 = 2000,0$  (equações 7.9)

Gradação funcional (lei de potência 7.4)  
Valores para o coeficiente  $p$ : 0,0 ; 0,25 ; 1,0 ; 4,0 e infinito

Carga (por unidade de comprimento)  
 $x_1 = 100,0, x_3 = 0,0: p_3 = -0,250$

Figura 9.20. Viga prismática em balanço (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). As linhas tracejadas representam a parte discretizada e a geometria da malha base.

A primeira tarefa realizada, para este exemplo numérico, foi encontrar a melhor proporção dos números de divisões das arestas da malha base (ver figura 9.20). O número mínimo de tetraedros, neste caso, é 18 (ver figura F8). Para cada quantidade de elementos finitos tetraédricos, a viga da figura 9.20 foi simulada numericamente com todas as possíveis

proporções de números de divisões das arestas da malha base. O número de tetraedros, que começou em 18, foi dobrando até 288, e o grau de aproximação polinomial (ver seção 3.1) é o linear. Para simular esta viga, foram utilizados 100 passos de carga. Os resultados indicam que a melhor proporção do esquema de divisão da malha base, para os materiais homogêneo e com GF, é aquela em que a divisão na direção longitudinal da viga (ver figura 9.20) é a maior possível (ver tabelas 9.36 e 9.37). Tal esquema de divisão também foi adotado para as malhas de elementos de ordem superior.

Tabela 9.36. Comparação do esquema de divisão das arestas da malha base da viga prismática em balanço (figura 9.20), para material homogêneo ( $E = 1200, 0$ ).

NEL	NN	ND1	ND2	ND3	$u_3$	$u_1$
18	16	1	1	1	-2.029	-0.019
	28	2	1	1	-7.431	-0.282
36	24	1	2	1	-2.066	-0.010
	24	1	1	2	-2.022	-0.008
	52	4	1	1	-22.301	-2.607
72	40	1	4	1	-2.078	-0.010
	40	1	1	4	-2.019	-0.008
	42	2	2	1	-7.927	-0.279
	42	2	1	2	-7.309	-0.232
	36	1	2	2	-2.055	-0.009
	100	8	1	1	-44.680	-11.009
144	72	1	8	1	-2.081	-0.010
	72	1	1	8	-2.019	-0.008
	78	4	2	1	-26.416	-3.525
	60	1	4	2	-2.064	-0.010
	70	2	1	4	-7.272	-0.229
	78	4	1	2	-21.412	-2.275
	70	2	4	1	-8.084	-0.292

	60	1	2	4	-2.051	-0.009
	63	2	2	2	-7.785	-0.268
	196	16	1	1	-63.135	-24.013
	136	1	16	1	-2.082	-0.011
	136	1	1	16	-2.019	-0.008
	150	8	2	1	-56.657	-18.015
	108	1	8	2	-2.067	-0.010
	126	2	1	8	-7.262	-0.228
	150	8	1	2	-41.339	-9.077
288	126	2	8	1	-8.130	-0.296
	108	1	2	8	-2.050	-0.009
	117	4	2	2	-25.691	-3.326
	105	2	4	2	-7.926	-0.279
	105	2	2	4	-7.739	-0.264
	130	4	4	1	-27.704	-3.894
	130	4	1	4	-21.118	-2.210
	100	1	4	4	-2.060	-0.010

NEL = número de elementos finitos tetraédricos. NN = número de nós. ND1, ND2, ND3 = números de divisões das arestas da malha base nas direções x1, x2 e x3 (figura 9.15).  $u_3, u_1$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções x3 e x1 (figura 9.15).

Tabela 9.37. Comparação do esquema de divisão das arestas da malha base da viga prismática em balanço (figura 9.20), para material com GF de potência (7.4) com os valores  $E_1 = 1200,0$ ,

$$E_2 = 2000,0 \text{ e } p = 0,25.$$

NEL	NN	ND1	ND2	ND3	$u_3$	$u_1$
18	16	1	1	1	-1.789	-0.014
36	28	2	1	1	-6.575	-0.219
	24	1	2	1	-1.819	-0.006

	24	1	1	2	-1.782	-0.004
	52	4	1	1	-19.876	-2.060
	40	1	4	1	-1.830	-0.006
72	40	1	1	4	-1.780	-0.004
	42	2	2	1	-6.997	-0.210
	42	2	1	2	-6.468	-0.175
	36	1	2	2	-1.810	-0.005
	100	8	1	1	-40.613	-8.986
	72	1	8	1	-1.834	-0.006
	72	1	1	8	-1.780	-0.004
	78	4	2	1	-23.534	-2.766
144	60	1	4	2	-1.819	-0.006
	70	2	1	4	-6.436	-0.173
	78	4	1	2	-19.081	-1.786
	70	2	4	1	-7.132	-0.220
	60	1	2	4	-1.806	-0.005
	63	2	2	2	-6.873	-0.202
	196	16	1	1	-59.175	-20.668
	136	1	16	1	-1.836	-0.006
	136	1	1	16	-1.780	-0.004
	150	8	2	1	-52.284	-15.047
	108	1	8	2	-1.822	-0.006
288	126	2	1	8	-6.427	-0.173
	150	8	1	2	-37.521	-7.379
	126	2	8	1	-7.173	-0.223
	108	1	2	8	-1.806	-0.005
	117	4	2	2	-22.882	-2.608
	105	2	4	2	-6.994	-0.211

105	2	2	4	-6.833	-0.199
130	4	4	1	-24.686	-3.056
130	4	1	4	-18.818	-1.735
100	1	4	4	-1.814	-0.006

---

NEL = número de elementos finitos tetraédricos. NN = número de nós. ND1, ND2,

ND3 = números de divisões das arestas da malha base nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  (figura

9.15).  $u_3$ ,  $u_1$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$  (figura 9.15).

Com o esquema de divisão das arestas da malha base escolhido (ver parágrafo anterior), a viga da figura 9.20 foi simulada numericamente com diferentes graus de aproximação polinomial e quantidades de elementos finitos sólidos tetraédricos. São ilustradas, na figura 9.21, as malhas com 18 tetraedros empregadas, em que o grau de aproximação varia de um a cinco. Para as cinco leis constitutivas empregadas, o número de elementos tetraédricos aumentou até que houvesse convergência dos deslocamentos finais do ponto A (ver figura 9.20). Para este exemplo, adotou-se a hipótese de que ocorre convergência quando o erro (9.7) é menor do que 1%, sendo que neste caso  $res_1$  e  $res_2$  são, respectivamente, os valores dos deslocamentos para duas malhas de elementos consecutivas do mesmo grau de aproximação. A análise de convergência, em relação aos deslocamentos finais do ponto A, para cada um dos cinco valores do coeficiente de potência  $p$  (ver figura 9.20) é dada nas tabelas 9.38-42. Pode-se notar, em tais tabelas, que o aumento da ordem de aproximação e/ou do número de elementos finitos conduz a maiores deslocamentos finais do ponto A e, assim, a um menor travamento da malha, para as vigas homogêneas e com GF. Para as vigas homogêneas ( $E = 1200,0$  e  $E = 2000,0$ ), os resultados obtidos aqui foram comparados com a solução analítica de Pai e Palazotto (1996), os quais utilizaram uma formulação tridimensional para vigas homogêneas elásticas nas seguintes condições: regime de grandes deslocamentos, mudança de comprimento e possível curvatura inicial do eixo central, e possibilidade de ocorrência de empenamentos da seção transversal. Além dessa, existem outras referências analíticas para esta viga como, por exemplo, Sinclair (1979), Mattiasson (1981), Chen (2010) e Mutyalarao, Bharathi e Rao (2010). Para as malhas com 18 e com 36 tetraedros, os deslocamentos do ponto A convergem, com aumento da ordem de aproximação, para a solução analítica da referência (ver figuras 9.22 e 9.23).



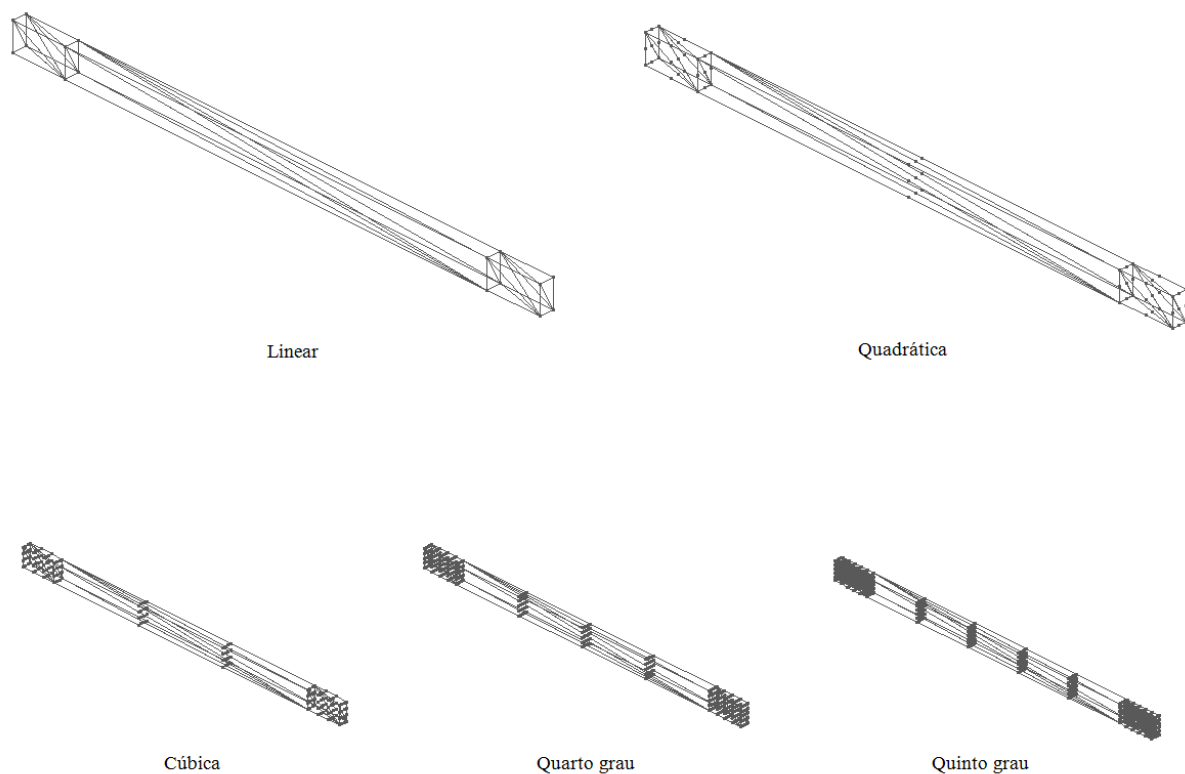


Figura 9.21. Malhas com 18 elementos finitos sólidos tetraédricos (sem escala) para simulação da viga prismática em balanço (ver figura 9.20).

As posições inicial e final da malha de elementos mais refinada, para a viga homogênea mais flexível ( $E = 1200,0$ ), são ilustradas na figura 9.24. Para as malhas com 36 elementos tetraédricos, material homogêneo mais flexível ( $E = 1200,0$ ) e grau de aproximação variável, são mostradas, na figura 9.25, distribuições de deformações e tensões no final do último passo de carga ao longo do segmento de reta  $x_1 = 10,0$ ,  $x_2 = 0,50$  e  $0,0 \leq x_3 \leq 1,0$ . Para as malhas com 36 tetraedros do quinto grau e coeficiente de GF  $p$  variável, são mostradas, na figura 9.26, distribuições de deformações e tensões ao longo do referido segmento de reta.

Tabela 9.38. Análise de convergência dos deslocamentos finais do ponto A da viga em balanço com coeficiente de GF  $p \rightarrow 0,0$  ( $E = 1200,0$ ).

GAP	NN	NE	NPIN	$u_3$ (A)	$u_1$ (A)
	16	18		-2.0	0.0
	28	36		-7.4	-0.3
	52	72		-22.3	-2.6
	100	144		-44.7	-11.0
1	196	288	1	-63.1	-24.0
	388	576		-73.6	-36.7
	2310	4608		-85.4	-63.4
	4614	9216		-85.6	-65.3
	10395	36864		-87.9	-68.6
	20763	73728		-87.9	-69.2
	63	18		-73.8	-36.1
	117	36		-86.2	-59.6
2	225	72	5	-87.4	-67.4
	441	144		-88.0	-70.9
	873	288		-88.2	-71.0
	160	18		-85.3	-66.4
3	304	36	11	-87.1	-70.0
	592	72		-88.1	-71.8
	1168	144		-88.3	-72.2
	325	18		-86.8	-70.8
4	625	36	15	-88.1	-71.7
	1225	72		-88.3	-72.2
	2425	144		-88.3	-71.7
5	576	18	24	-87.9	-72.1

1116	36	-88.3	-72.2
Pai e Palazotto (1996)		-87.0	-70.3

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_3 (A)$ ,  $u_1 (A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$ .

Tabela 9.39. Análise de convergência dos deslocamentos finais do ponto A da viga em balanço com coeficiente de GF  $p = 0,25$ .

GAP	NN	NE	NPIN	$u_3 (A)$	$u_1 (A)$
	16	18		-1.8	0.0
	28	36		-6.6	-0.2
	52	72		-19.9	-2.1
	100	144		-40.6	-9.0
1	196	288	4	-59.2	-20.7
	388	576		-70.6	-33.0
	2310	4608		-84.3	-60.9
	4614	9216		-84.6	-62.9
	10395	36864		-86.7	-67.5
	20763	73728		-87.0	-68.1
	63	18		-55.8	-18.3
	117	36		-80.9	-46.4
2	225	72	11	-85.9	-60.4
	441	144		-86.8	-68.6
	873	288		-87.3	-69.5
3	160	18	15	-84.2	-64.1
	304	36		-86.0	-67.6

	592	72		-87.1	-69.7
	1168	144		-87.5	-70.2
	325	18		-85.9	-68.8
4	625	36	24	-87.2	-69.5
	1225	72		-87.4	-70.1
	2425	144		-87.4	-69.7
5	576	18	45	-87.2	-70.1
	1116	36		-87.5	-70.2

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_3(A)$ ,  $u_1(A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$ .

Tabela 9.40. Análise de convergência dos deslocamentos finais do ponto A da viga em balanço com coeficiente de GF  $p = 1,0$ .

GAP	NN	NE	NPIN	$u_3(A)$	$u_1(A)$
	16	18		-1.5	0.0
	28	36		-5.6	-0.2
	52	72		-17.0	-1.5
	100	144		-35.7	-6.9
1	196	288	4	-53.9	-16.8
	388	576		-66.5	-28.4
	2310	4608		-83.0	-57.9
	4614	9216		-83.4	-60.2
	10395	36864		-85.2	-65.1
	20763	73728		-86.1	-65.9
2	63	18	11	-53.3	-16.4

	117	36		-78.8	-42.9
	225	72		-84.5	-57.4
	441	144		-85.8	-64.6
	873	288		-86.5	-67.3
	160	18		-83.0	-61.8
3	304	36	15	-85.1	-65.7
	592	72		-86.3	-67.7
	1168	144		-86.6	-68.1
	325	18		-85.1	-66.9
4	625	36	24	-86.3	-67.5
	1225	72		-86.6	-68.1
	2425	144		-86.6	-67.6
	576	18		-86.4	-68.1
5	1116	36	45	-86.6	-68.1

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_3(A)$ ,  $u_1(A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$ .

Tabela 9.41. Análise de convergência dos deslocamentos finais do ponto A da viga em balanço com coeficiente de GF  $p = 4,0$ .

GAP	NN	NE	NPIN	$u_3(A)$	$u_1(A)$
	16	18		-1.3	0.0
	28	36		-4.8	-0.1
1	52	72	4	-14.8	-1.1
	100	144		-31.8	-5.4
	196	288		-49.4	-13.9

	388	576		-62.6	-24.6
	2310	4608		-81.8	-55.4
	4614	9216		-82.4	-58.0
	10395	36864		-84.5	-63.4
	20763	73728		-85.3	-64.1
	63	18		-51.3	-15.1
	117	36		-76.9	-40.3
2	225	72	11	-83.4	-55.0
	441	144		-85.0	-65.0
	873	288		-85.7	-65.6
	160	18		-82.1	-59.9
3	304	36	15	-84.4	-64.0
	592	72		-85.6	-66.1
	1168	144		-85.9	-66.5
	325	18		-84.4	-65.3
4	625	36	24	-85.7	-65.9
	1225	72		-85.9	-66.5
	2425	144		-85.9	-66.0
5	576	18	45	-85.8	-66.4
	1116	36		-85.9	-66.5

---

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_3(A)$ ,  $u_1(A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$ .

Tabela 9.42. Análise de convergência dos deslocamentos finais do ponto A da viga em balanço com coeficiente de GF  $p \rightarrow \infty$  ( $E = 2000,0$ ).

GAP	NN	NE	NPIN	$u_3$ (A)	$u_1$ (A)
	16	18		-1.2	0.0
	28	36		-4.5	-0.1
	52	72		-13.7	-1.0
	100	144		-29.5	-4.6
1	196	288	1	-46.4	-12.1
	388	576		-59.9	-22.2
	2310	4608		-80.4	-52.7
	4614	9216		-81.1	-55.4
	10395	36864		-83.5	-60.9
	20763	73728		-84.1	-61.5
	63	18		-64.8	-26.2
	117	36		-79.8	-47.2
2	225	72	5	-83.0	-57.8
	441	144		-84.4	-62.9
	873	288		-84.7	-63.4
	160	18		-80.7	-57.3
3	304	36	11	-83.4	-61.9
	592	72		-84.6	-63.7
	1168	144		-84.8	-64.0
	325	18		-83.4	-62.9
4	625	36	15	-84.6	-63.6
	1225	72		-84.8	-64.0
	2425	144		-84.8	-63.5
5	576	18	24	-84.7	-63.9

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_3(A)$ ,  $u_1(A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_3$  e  $x_1$ .

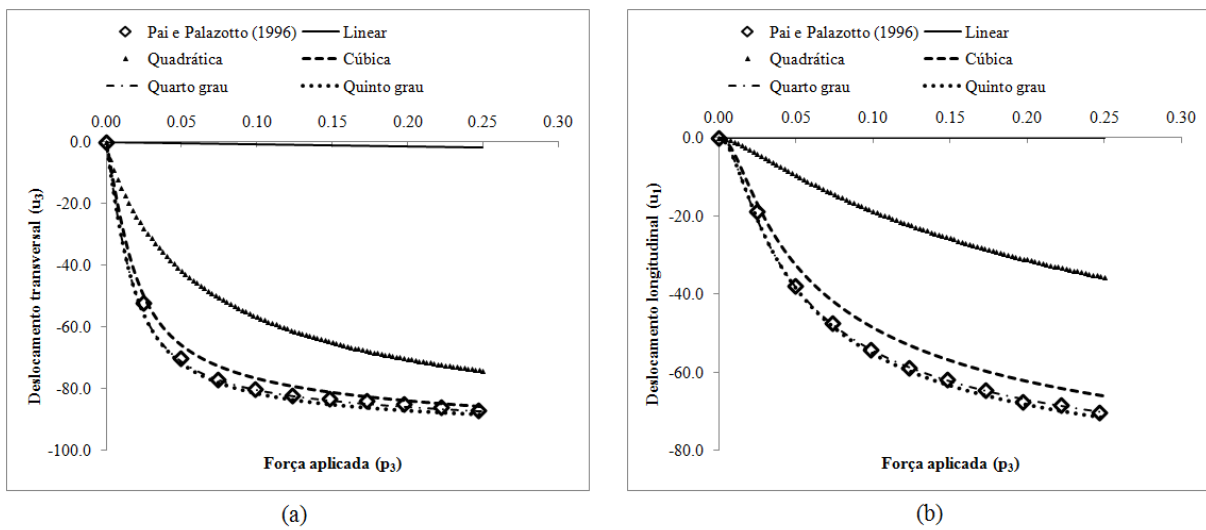


Figura 9.22. Gráfico força aplicada versus deslocamentos do ponto A para a viga homogênea mais flexível ( $E = 1200, 0$ ): (a) deslocamentos transversais; (b) deslocamentos longitudinais. A legenda se refere à ordem de aproximação dos elementos. Estes resultados foram obtidos a partir de malhas com 18 elementos finitos sólidos tetraédricos.



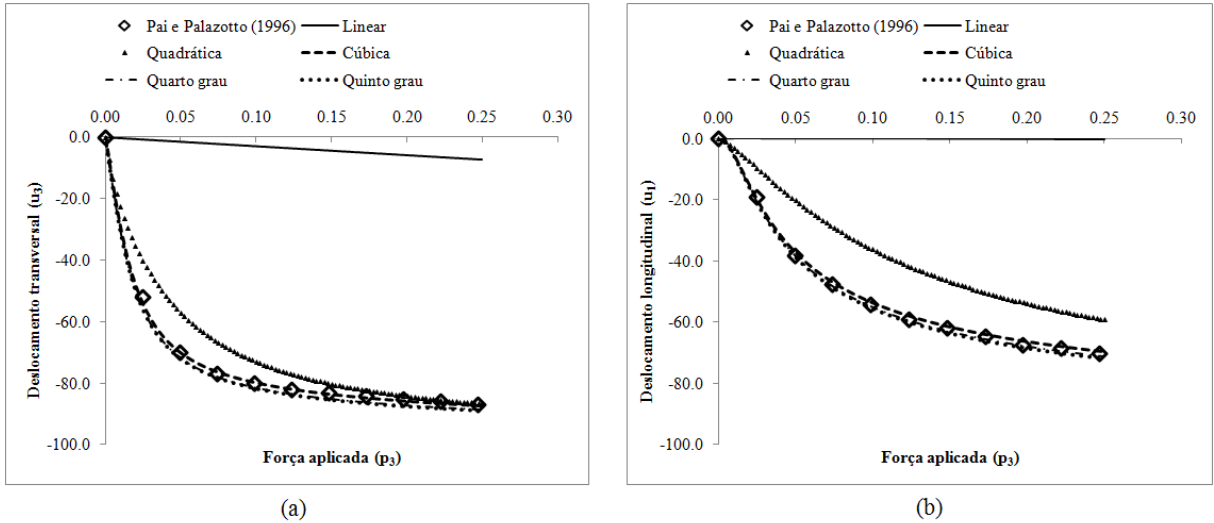


Figura 9.23. Gráfico força aplicada versus deslocamentos do ponto A para a viga homogênea mais flexível ( $E = 1200,0$ ): (a) deslocamentos transversais; (b) deslocamentos longitudinais. A legenda se refere à ordem de aproximação dos elementos. Estes resultados foram obtidos a partir de malhas com 36 elementos finitos sólidos tetraédricos.

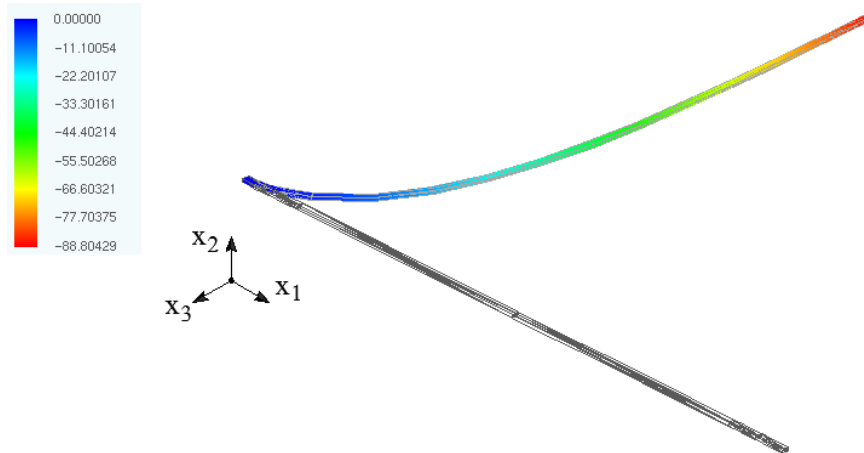


Figura 9.24. Configurações inicial e final da viga prismática em balanço mais refinada (1116 nós e 36 tetraedros do quinto grau). A legenda de valores se refere aos deslocamentos verticais finais.

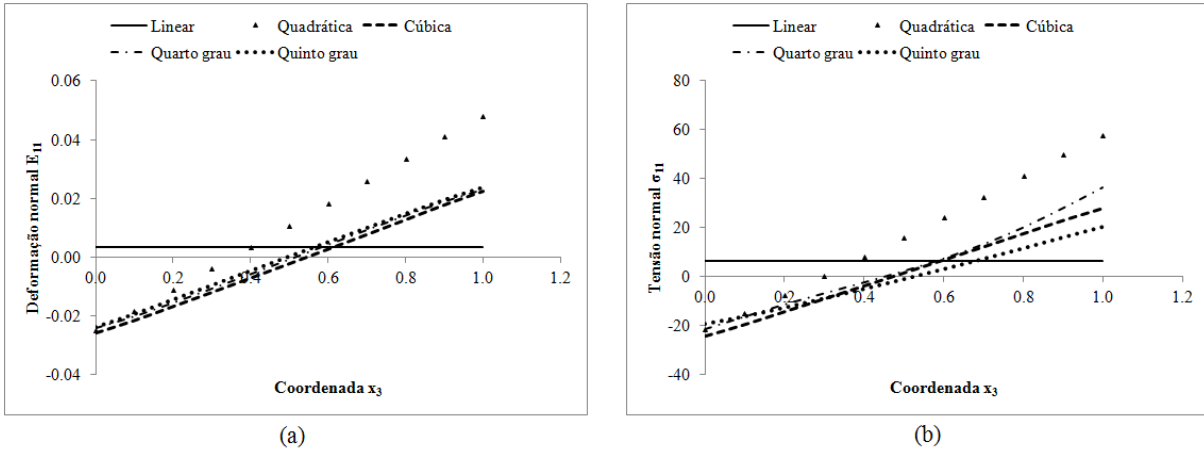


Figura 9.25. Distribuições finais de deformações de Green-Lagrange (ver equação 3.17) e tensões reais de Cauchy (ver equações 4.1 e 4.2) ao longo do segmento de reta  $x_1 = 10,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $0,0 \leq x_3 \leq 1,0$  para a viga prismática em balanço: (a) deformação normal  $E_{11}$ ; (b) tensão normal  $\sigma_{11}$ . O número de elementos tetraédricos é 36, o grau de aproximação é variável e o material é o homogêneo mais flexível ( $E = 1200,0$ ).

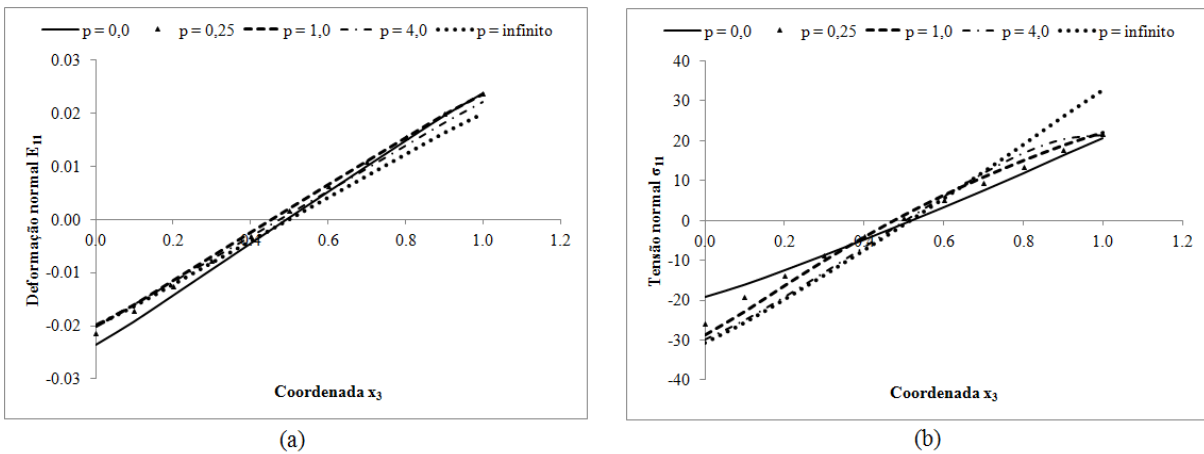


Figura 9.26. Distribuições finais de deformações de Green-Lagrange (ver equação 3.17) e tensões reais de Cauchy (ver equações 4.1 e 4.2) ao longo do segmento de reta  $x_1 = 10,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $0,0 \leq x_3 \leq 1,0$  para a viga prismática em balanço: (a) deformação normal  $E_{11}$ ; (b) tensão normal  $\sigma_{11}$ . O número de elementos tetraédricos é 36, o grau de aproximação é constante e igual a cinco, e o coeficiente de GF  $p$  (ver equações 7.4 e 7.9) é variável.

### 9.1.6.2. Pórtico diamante

O problema estrutural analisado aqui é o pórtico em forma de diamante ilustrado na figura 9.27. Este exemplo numérico foi estudado por Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966) e por Mattiasson (1981). Em ambas as referências, são assumidas as seguintes hipóteses: material homogêneo elástico; equilíbrio de forças na posição final (deformada); deformações cisalhantes desprezíveis; eixo central inextensível; e solução analítica encontrada a partir da determinação de integrais elípticas (BABUSCI; DATTOLI, 2011). A única diferença entre os referidos estudos é que a solução dada por Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966) para este pórtico é dada na forma de gráfico força versus deslocamento, e a solução de Mattiasson (1981) é fornecida em forma tabular, o que facilita a obtenção dos valores para posterior comparação de resultados. Com relação às malhas de elementos finitos, são empregados 60 sólidos tetraédricos com grau de aproximação variável. Como este problema estrutural é similar ao anterior (ver item 9.1.6.1), o refinamento da malha é realizado ao longo da direção longitudinal e nas regiões críticas (próximas às extremidades). Devido à simetria em relação aos eixos  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,0$  (ver figura 9.27), apenas um oitavo do pórtico é analisado. Assim como nas referências, são analisados dois casos: com forças de tração, e com forças de compressão.

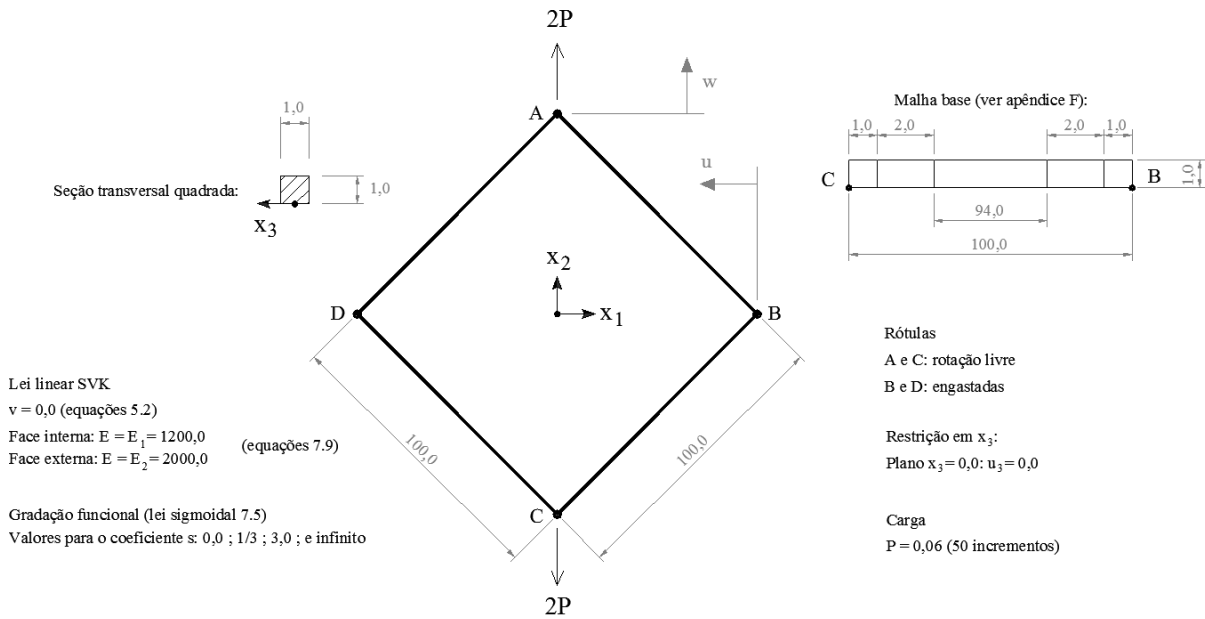


Figura 9.27. Pórtico em forma de diamante (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). As letras  $w$  e  $u$  representam, nesta ordem, o deslocamento de A (ou de C) na direção  $x_2$ , e o deslocamento de B (ou D) na direção  $x_1$ .

Assim como no exemplo anterior, o aumento da ordem de aproximação melhora a precisão dos resultados em termos dos deslocamentos finais (ver figuras 9.28 a 9.31). Para a malha de elementos tetraédricos do quinto grau, a influência do coeficiente de GF  $s$  (ver equações 7.5 e 7.9) no gráfico força versus deslocamento é ilustrada na figura 9.32. Por fim, a figura 9.33 mostra as posições inicial e final da malha do quinto grau, com material homogêneo ( $E = 1200,0$ ).

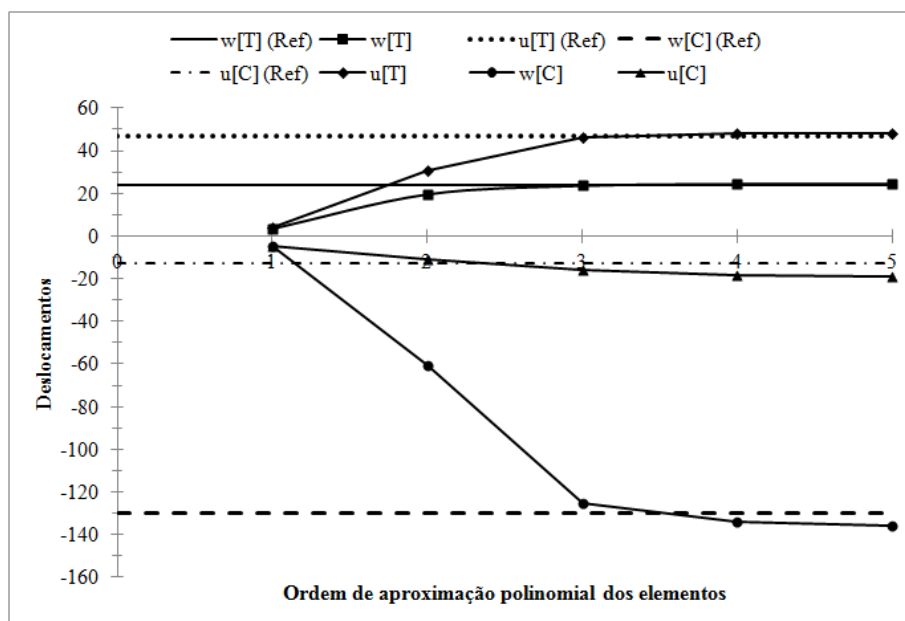


Figura 9.28. Deslocamentos do pórtico diamante homogêneo mais flexível ( $s \rightarrow 0,0$  ou  $E = 1200,0$ ) para as malhas com 60 sólidos tetraédricos. Na legenda, os símbolos  $w$  e  $u$  são os deslocamentos finais mostrados na figura 9.27, e os símbolos [T], [C] e (Ref) denotam, respectivamente, os casos de tração e de compressão, e a solução da referência Mattiasson (1981).

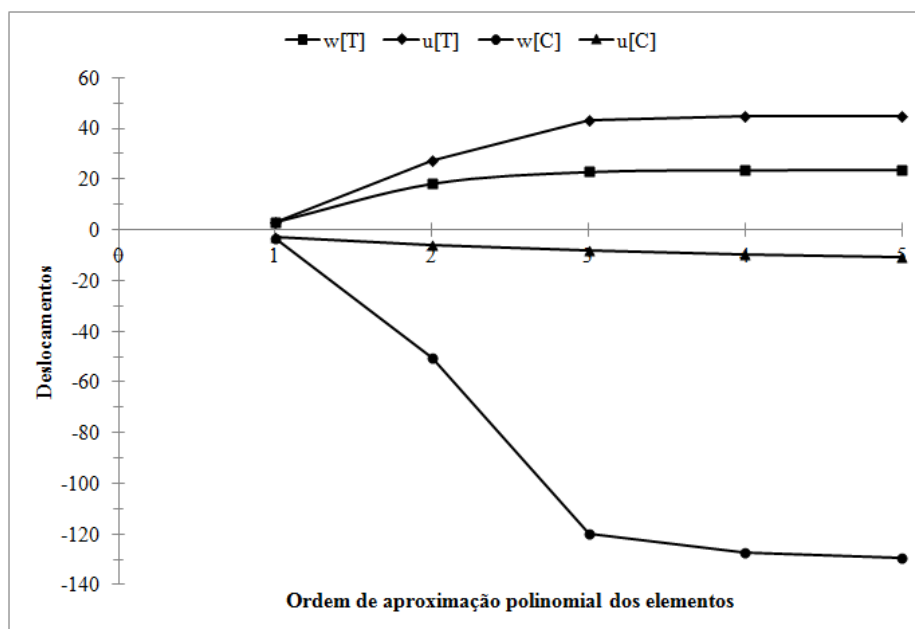


Figura 9.29. Deslocamentos do pórtico diamante com GF ( $s = 1/3$ ) para as malhas com 60 sólidos tetraédricos. Na legenda, os símbolos  $w$  e  $u$  são os deslocamentos finais mostrados na figura 9.27, e os símbolos [T] e [C] denotam, respectivamente, os casos de tração e de compressão.

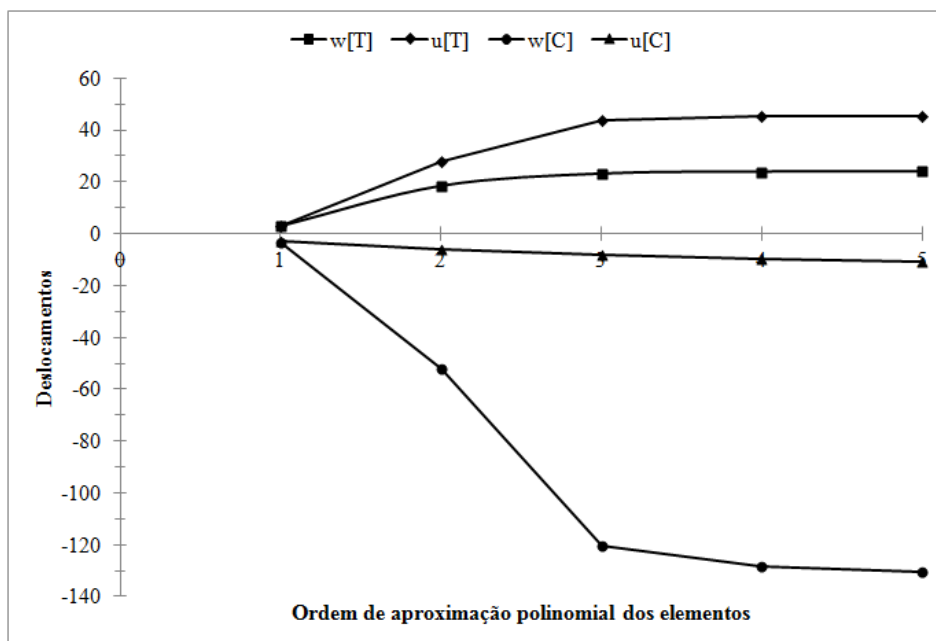


Figura 9.30. Deslocamentos do pórtico diamante com GF ( $s = 3, 0$ ) para as malhas com 60 sólidos tetraédricos. Na legenda, os símbolos w e u são os deslocamentos finais mostrados na figura 9.27, e os símbolos [T] e [C] denotam, respectivamente, os casos de tração e de compressão.

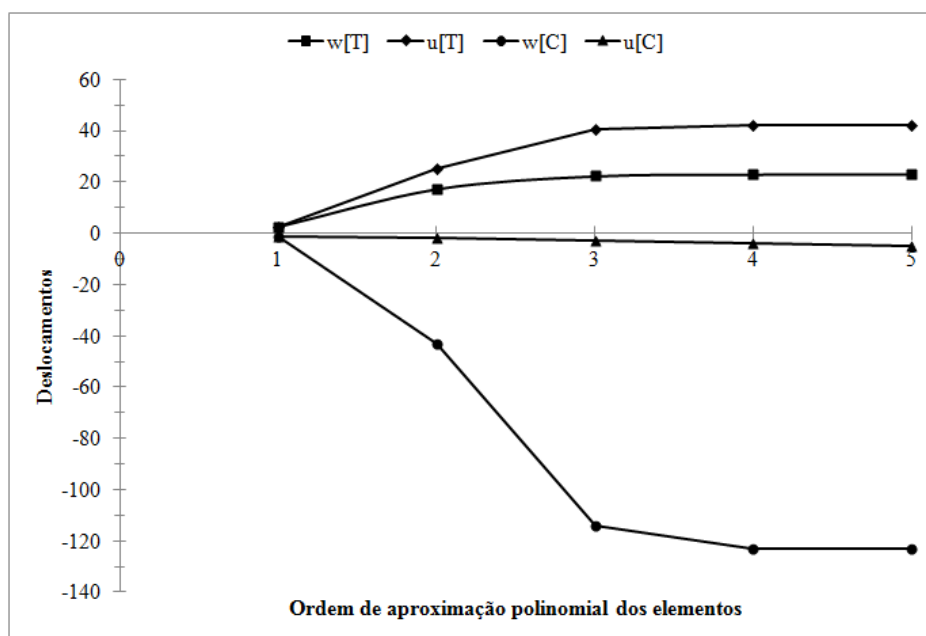


Figura 9.31. Deslocamentos do pórtico diamante homogêneo mais rígido ( $s \rightarrow \infty$  ou  $E = 2000, 0$ ) para as malhas com 60 sólidos tetraédricos. Na legenda, os símbolos w e u são os deslocamentos finais mostrados na figura 9.27, e os símbolos [T] e [C] denotam, respectivamente, os casos de tração e de compressão.

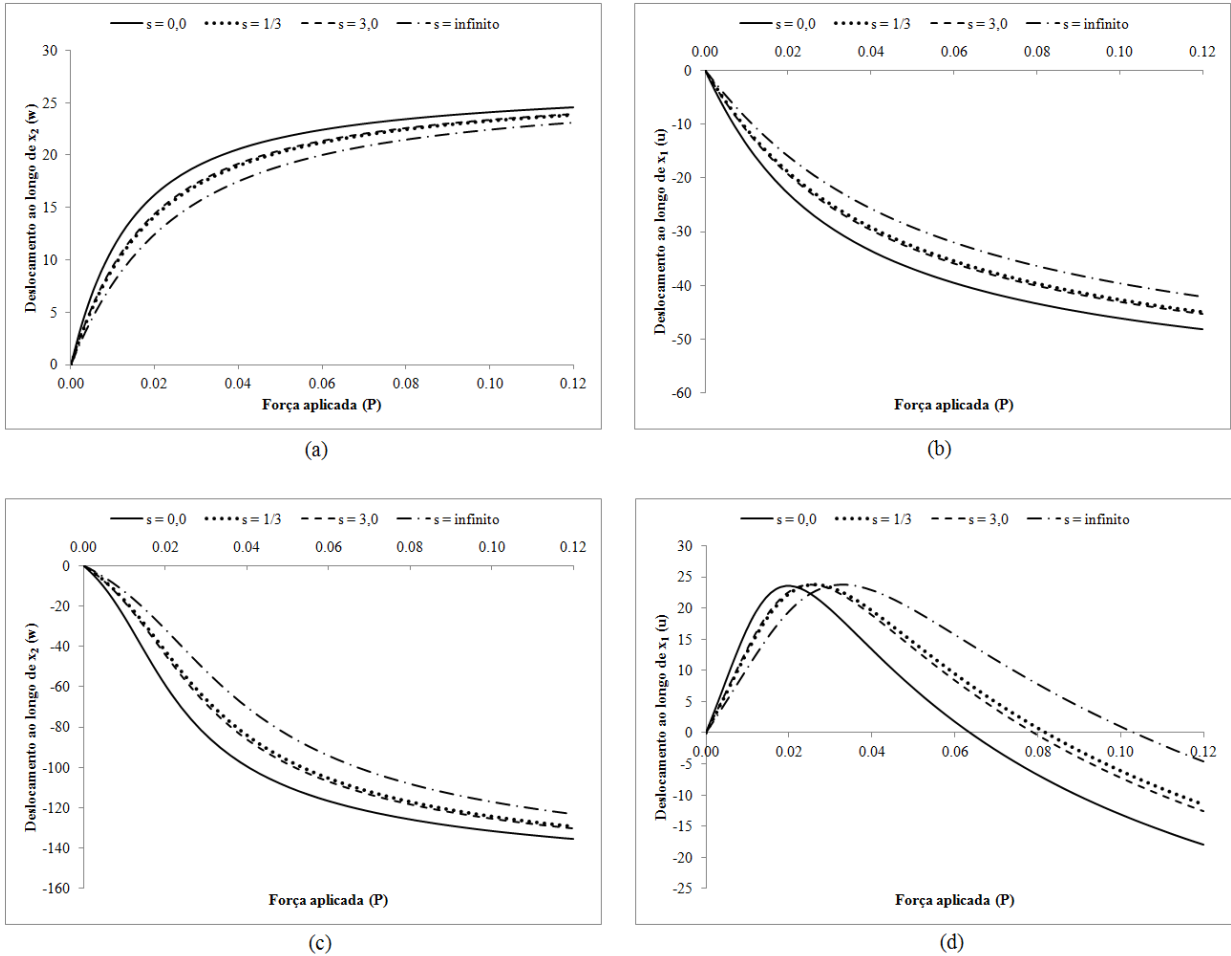


Figura 9.32. Força versus deslocamento do pórtico diamante, com a malha de 60 tetraedros do quinto grau e 1836 nós, e com diferentes coeficientes de GF  $s$  (ver equações 7.5 e 7.9): (a) deslocamentos ao longo de  $x_2$  na tração; (b) deslocamentos ao longo de  $x_1$  na tração; (c) deslocamentos ao longo de  $x_2$  na compressão; (d) deslocamentos ao longo de  $x_1$  na compressão.

### 9.1.6.3. Pórtico quadrado

Outro problema estrutural analisado em Mattiasson (1981) é o pórtico quadrado mostrado na figura 9.34. Assim como nos dois exemplos anteriores, o refinamento da malha de elementos é feito ao longo da direção longitudinal e nas regiões críticas (próximas às extremidades). São utilizados, neste caso, 66 elementos finitos sólidos tetraédricos com grau

de aproximação variável (ver item 3.1). Devido à simetria em relação aos eixos  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,0$ , apenas um oitavo do pórtico é discretizado. Assim como no exemplo anterior, dois casos são analisados aqui e na referência: forças de tração e de compressão.

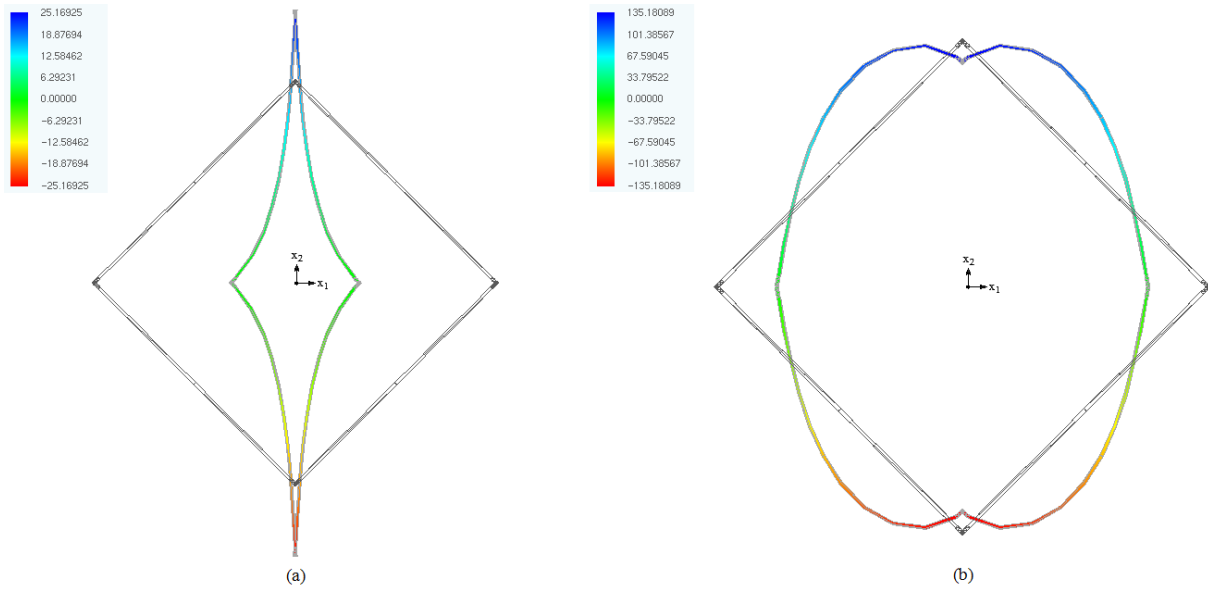


Figura 9.33. Configurações inicial e final do pórtico diamante homogêneo mais flexível ( $E = 1200,0$ ) discretizado com 1836 nós e 60 elementos finitos sólidos tetraédricos do quinto grau: (a) tração; (b) compressão. A legenda se refere aos deslocamentos na direção  $x_2$ .

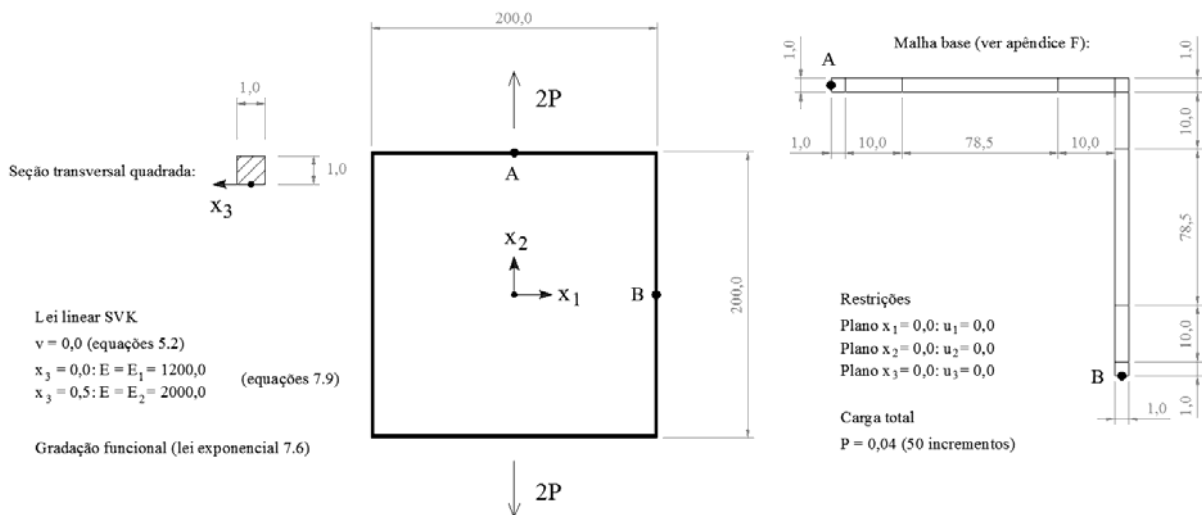


Figura 9.34. Pórtico quadrado (geometria, condições de contorno e lei constitutiva).



Para as malhas com 66 tetraedros, o aumento da ordem de aproximação polinomial dos elementos melhora a precisão dos deslocamentos dos pontos A e B (ver figura 9.35), e os resultados das malhas de alta ordem corroboram os resultados de Mattiasson (1981) para o caso homogêneo mais flexível ( $E = 1200,0$ ). A influência da lei de GF exponencial (7.6) no comportamento do pórtico pode ser observada na figura 9.36.

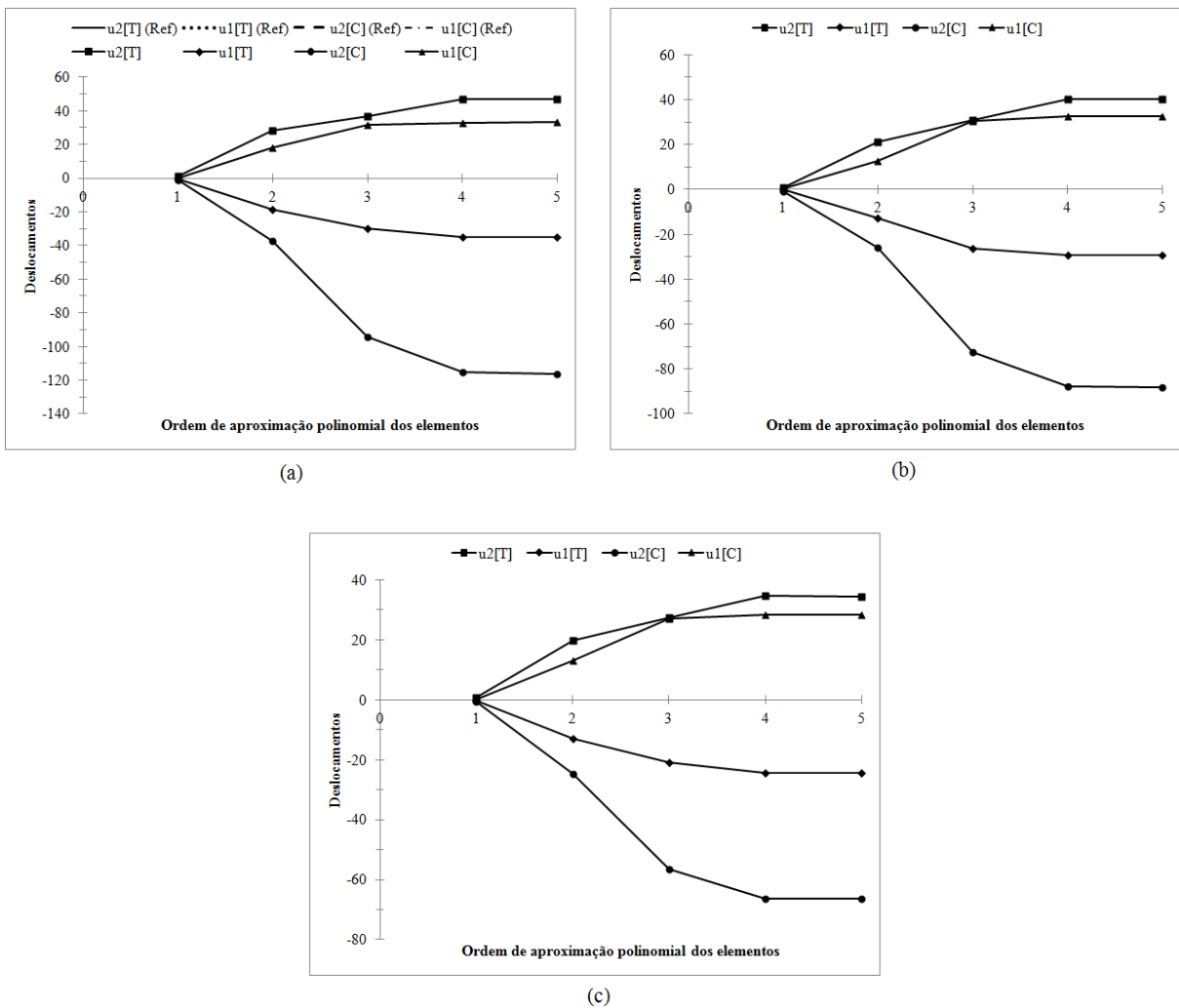


Figura 9.35. Gráficos força versus deslocamento para o pórtico quadrado da figura 9.34 discretizado com 66 elementos sólidos tetraédricos: (a) caso homogêneo mais flexível  $E = 1200,0$ ; (b) caso com GF exponencial (7.6); (c) caso homogêneo mais rígido ( $E = 2000,0$ ).

#### 9.1.6.4. Viga semicircular em balanço

O quarto problema plano é a viga semicircular em balanço ilustrada na figura 9.37. A justificativa para escolha deste exemplo é a verificação de possível travamento (ver item 9.1.3) em elementos que apresentam curvatura em um plano (neste caso, no plano  $x_1, x_2$ ). De acordo com a referência Pai e Palazotto (1996), este exemplo é similar à flexão cilíndrica de uma placa (ou de uma casca). Com a simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade da viga foi discretizada (ver figura 9.37). Para a malha base, foi adotado o esquema da malha 4 da figura 9.14. Com a ideia de se refinar na direção longitudinal (ver item 9.1.6.1), as arestas da malha base na referida direção foram divididas em oito trechos, o que resultou em 144 elementos finitos sólidos tetraédricos (3 trechos x 6 tetraedros por hexaedro x 8 hexaedros por trecho = 144 tetraedros). O grau de aproximação polinomial dos elementos varia de um a cinco.

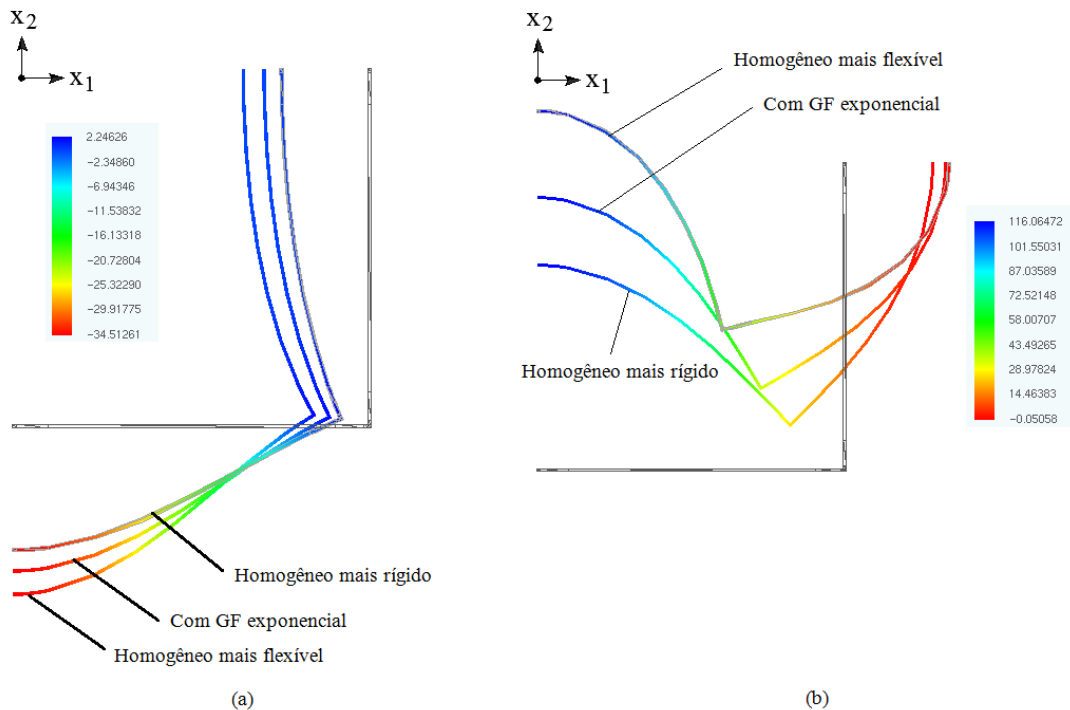


Figura 9.36. Posições finais para o pórtico quadrado (ver figura 9.34) discretizado com a malha de 66 tetraedros do quinto grau: (a) tração; (b) compressão. A legenda de valores se refere aos deslocamentos na direção  $x_2$ .

Como a malha base é prismática (ver figura 9.37), foram aplicadas as seguintes mudanças de coordenadas:

$$x_1 = (99,5 + X_2) \text{sen}(\pi X_1 / 100) \quad (9.8.1)$$

$$x_2 = (99,5 + X_2) \text{cos}(\pi X_1 / 100) \quad (9.8.2)$$

$$x_3 = X_3 \quad (9.8.3)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas da viga semicircular; e  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são as coordenadas da malha base.

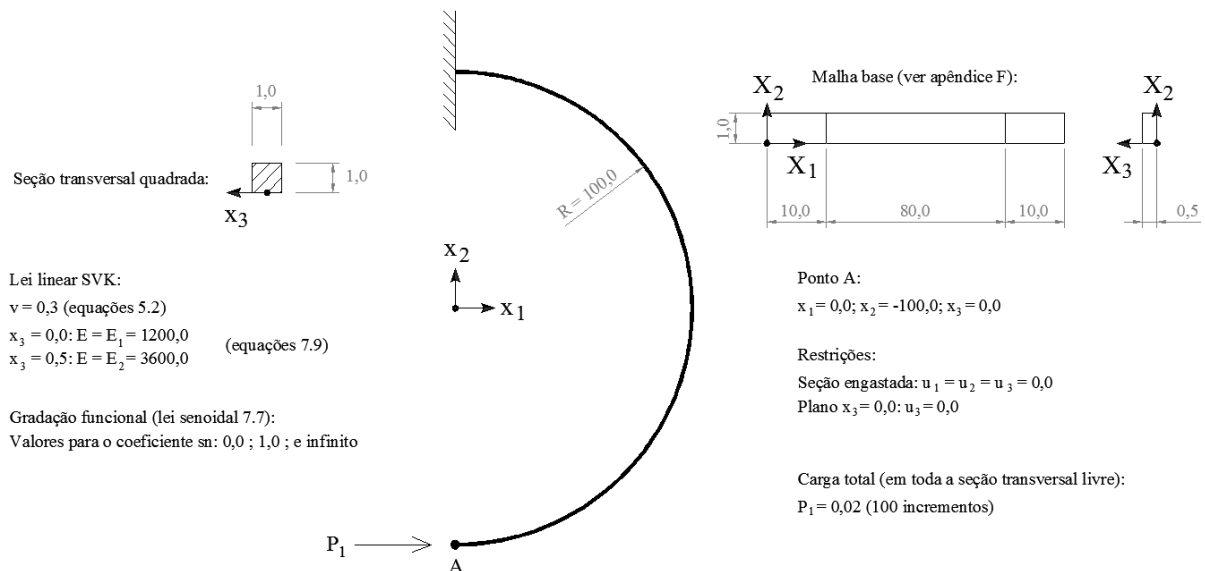


Figura 9.37. Viga semicircular em balanço (geometria, condições de contorno e lei constitutiva).

Os resultados das simulações numéricas mostram, mais uma vez, que o aumento da ordem de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos melhora a precisão da análise em termos dos deslocamentos do ponto A da viga semicircular, sendo que é possível notar o excessivo travamento das malhas de aproximação linear (ver figuras 9.37, 9.38 e 9.39). A influência do coeficiente de GF senoidal ( $sn$ ) nos deslocamentos finais do ponto A pode ser observada na figura 9.38. De acordo com tal figura, o aumento do coeficiente  $sn$  enrijece a estrutura, ou seja, os deslocamentos diminuem à medida que  $sn$  aumenta.

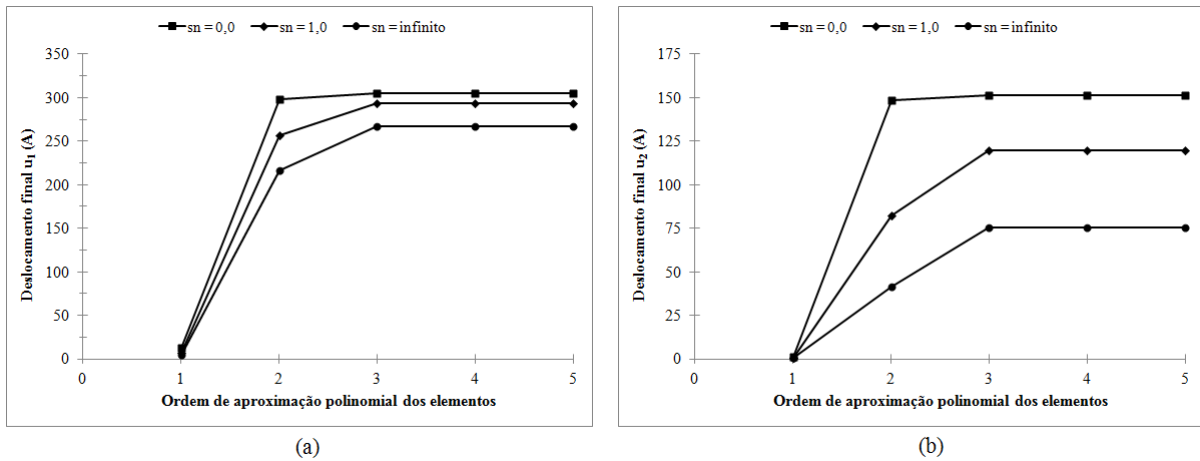


Figura 9.38. Deslocamentos finais do ponto A da viga semicircular em balanço: (a) deslocamentos na direção  $x_1$ ; (b) deslocamentos na direção  $x_2$ . O termo  $sn$  é o coeficiente de GF senoidal (ver equação 7.7).

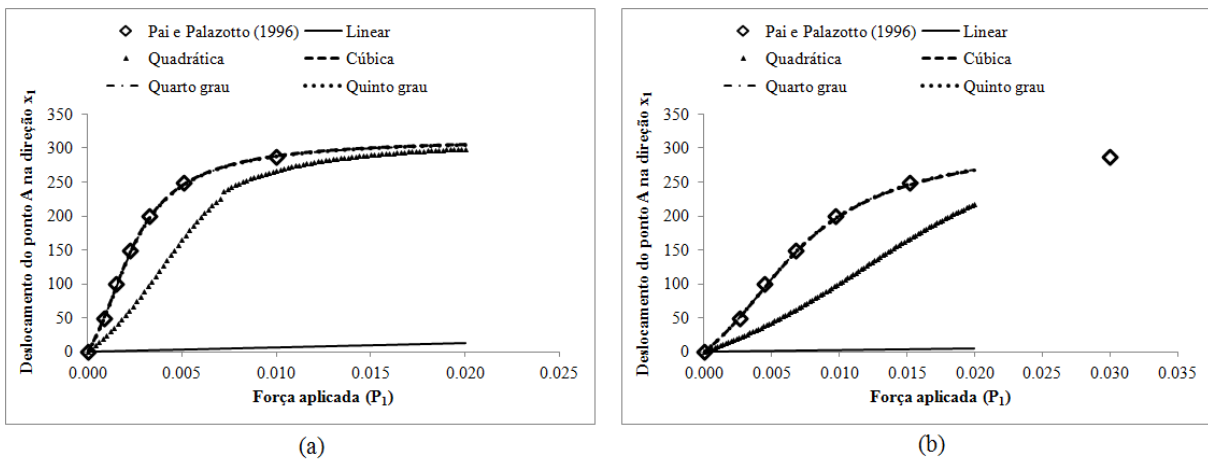


Figura 9.39. Gráficos força aplicada versus deslocamento do ponto A na direção  $x_1$ , para a viga semicircular em balanço, e para os casos homogêneos: (a)  $sn \rightarrow 0,0$  ( $E = 1200,0$ ); (b)  $sn \rightarrow \infty$  ( $E = 3600,0$ ).

### 9.1.6.5. Coluna engastada sob primeiro modo de flambagem

Neste exemplo são analisados os comportamentos pré- e pós-crítico de uma coluna engastada sob primeiro modo de flambagem (ver figura 9.40). Este problema estrutural foi extraído de Pai e Palazotto (1996), os quais estudaram apenas o caso homogêneo. Para induzir o primeiro modo de flambagem na simulação numérica, foi adotada uma excentricidade que varia linearmente ao longo do comprimento, cujos valores extremos são 0,0 na seção do engaste, e  $L/1000$  na seção da extremidade livre em que é aplicada a carga compressiva (ver figura 9.40). Devido à simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade da coluna é analisada numericamente. Neste caso, o número de elementos e a ordem de aproximação variam. Assim como nos exemplos anteriores, o refinamento da malha é realizado ao longo do eixo longitudinal. A carga crítica de flambagem para o primeiro modo e para o caso homogêneo é dada por Timoshenko e Gere (1961):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (9.9)$$

onde  $E$  é o módulo de Young;  $I$  é momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x_2$ ; e  $L$  é o comprimento inicial da coluna. Para  $E = 1200,0$  e  $E = 2000,0$ , as respectivas cargas críticas de flambagem são:  $P_{cr} = 0,0247$  e  $P_{cr} = 0,0411$ .

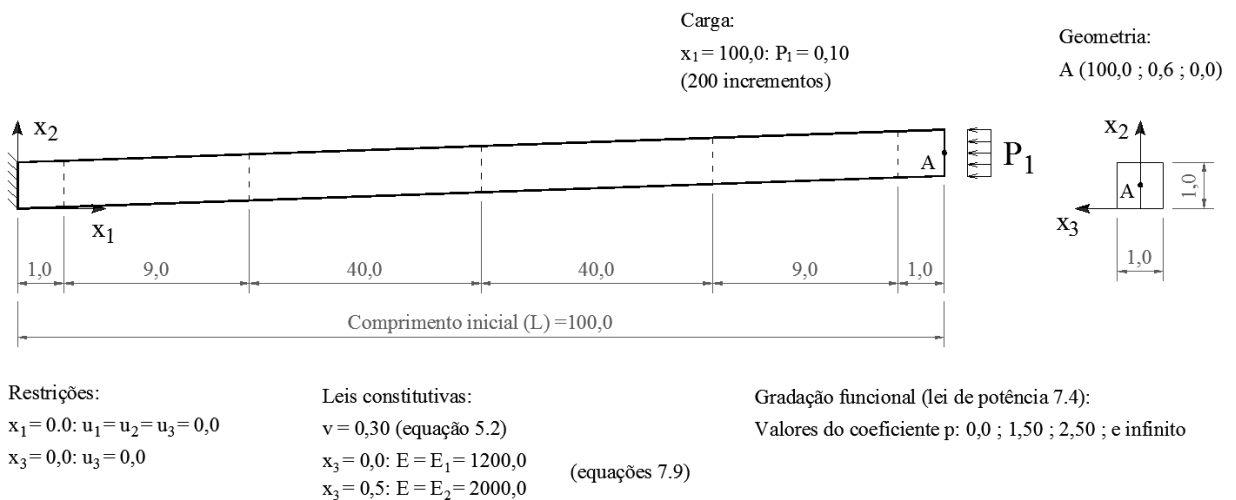


Figura 9.40. Coluna sob primeiro modo de flambagem (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). As linhas tracejadas denotam a malha base (ver apêndice F).

Com relação aos deslocamentos finais do ponto A (ver figura 9.40), o refinamento da malha, em termos de ordem de aproximação e de número de elementos, melhora a precisão dos resultados para os casos homogêneos e com GF (ver figura 9.41). Para este problema, as malhas de aproximação linear não foram capazes de reproduzir a flambagem. Assim como no caso do prisma com GF sob tração uniaxial (ver item 9.1.5), o aumento do coeficiente de GF de potência  $p$  enrijece a coluna (ver figura 9.42), já que com aumento desse coeficiente, a parcela volumétrica do material mais rígido ( $E = 2000,0$ ) aumenta em relação ao menos rígido ( $E = 1200,0$ ). Em outras palavras, quanto maior o coeficiente de GF  $p$ , maior é a carga crítica de flambagem. Para ilustrar o comportamento da coluna antes e depois da instabilidade, algumas das configurações da malha mais refinada são mostradas na figura 9.43.

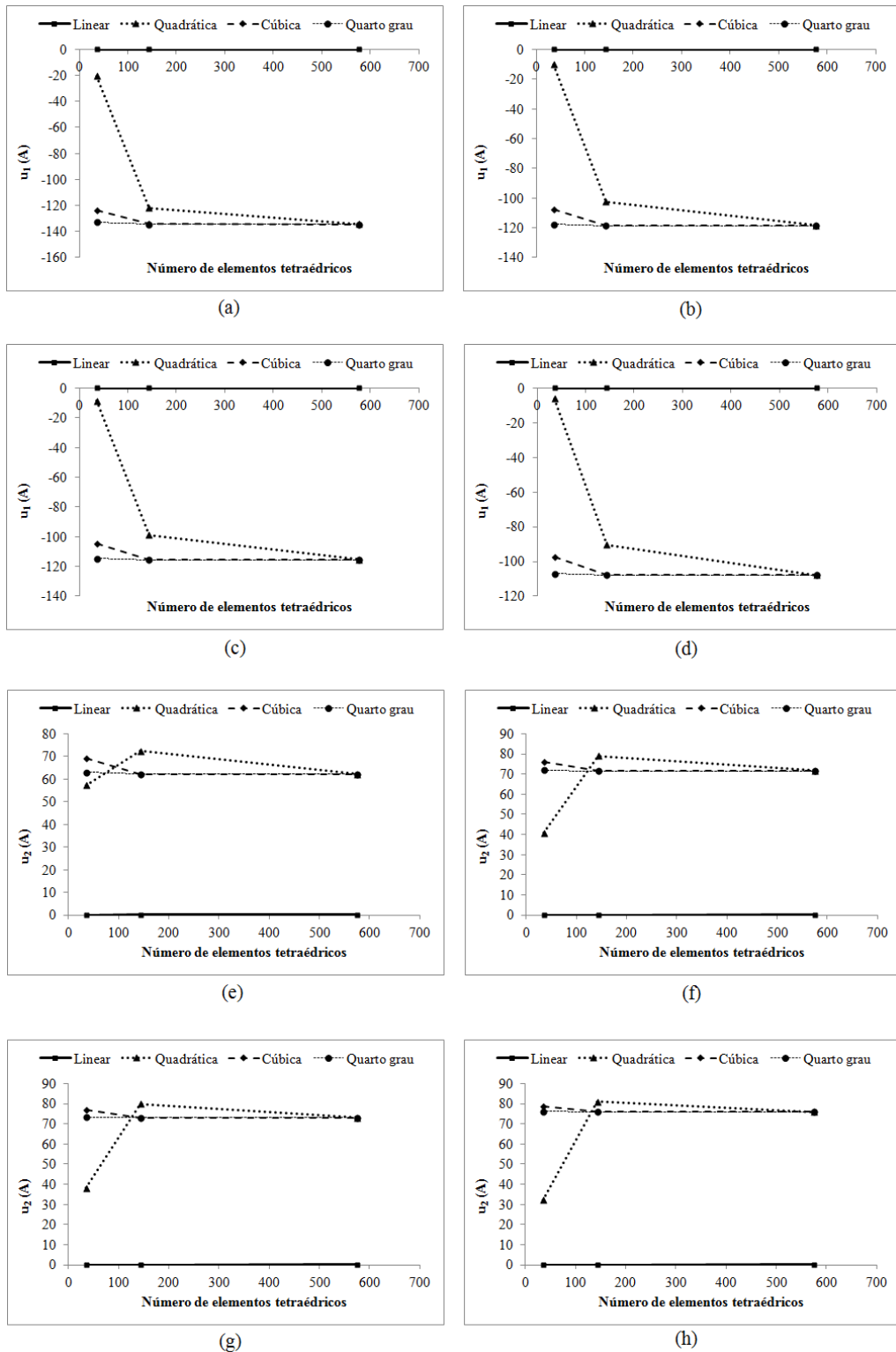


Figura 9.41. Deslocamentos finais do ponto A da coluna sob primeiro modo de flambagem: (a), (b), (c) e (d) deslocamentos finais na direção  $x_1$  para, respectivamente, os coeficiente  $p \rightarrow 0, 0$  ( $E = 1200, 0$ ),  $p = 1,50$ ,  $p = 2,50$  e  $p \rightarrow \infty$  ( $E = 2000, 0$ ); (e), (f), (g) e (h) deslocamentos finais na direção  $x_2$  para, respectivamente, os coeficiente  $p \rightarrow 0, 0$  ( $E = 1200, 0$ ),  $p = 1,50$ ,  $p = 2,50$  e  $p \rightarrow \infty$  ( $E = 2000, 0$ ). As legendas se referem à ordem de aproximação polinomial dos elementos.

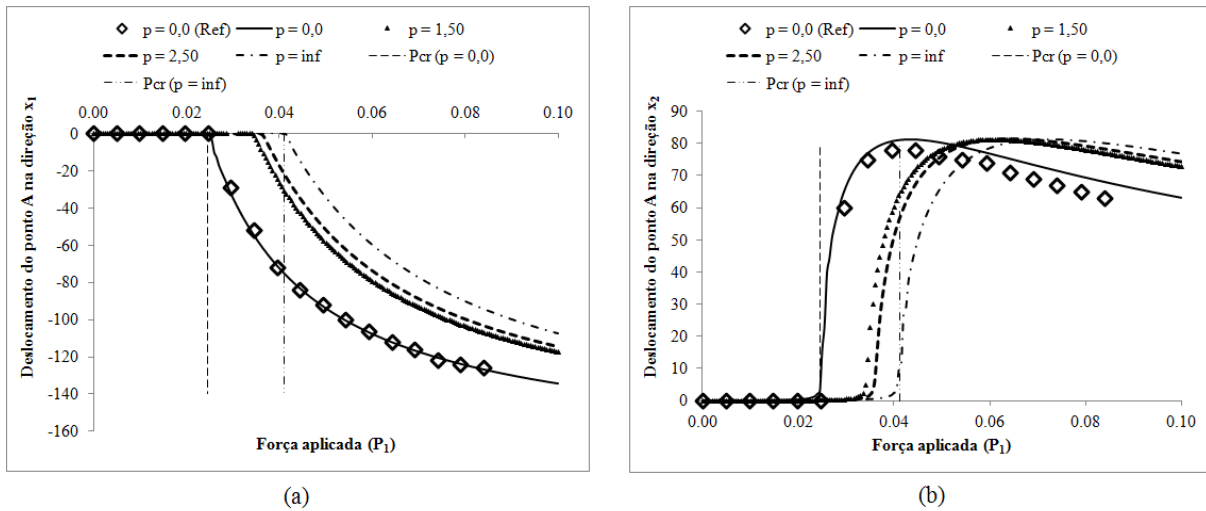


Figura 9.42. Gráficos força aplicada versus deslocamentos do ponto A da coluna sob primeiro modo de flambagem. O termo  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (ver equação 7.4). Os símbolos “Ref”, “inf” e “Pcr” significam, nesta ordem, a referência bibliográfica Pai e Palazotto (1996), o valor infinito para o coeficiente  $p$  e carga crítica de flambagem. Estes resultados foram obtidos com a malha de 9625 nós e 576 elementos tetraédricos de quarto grau.

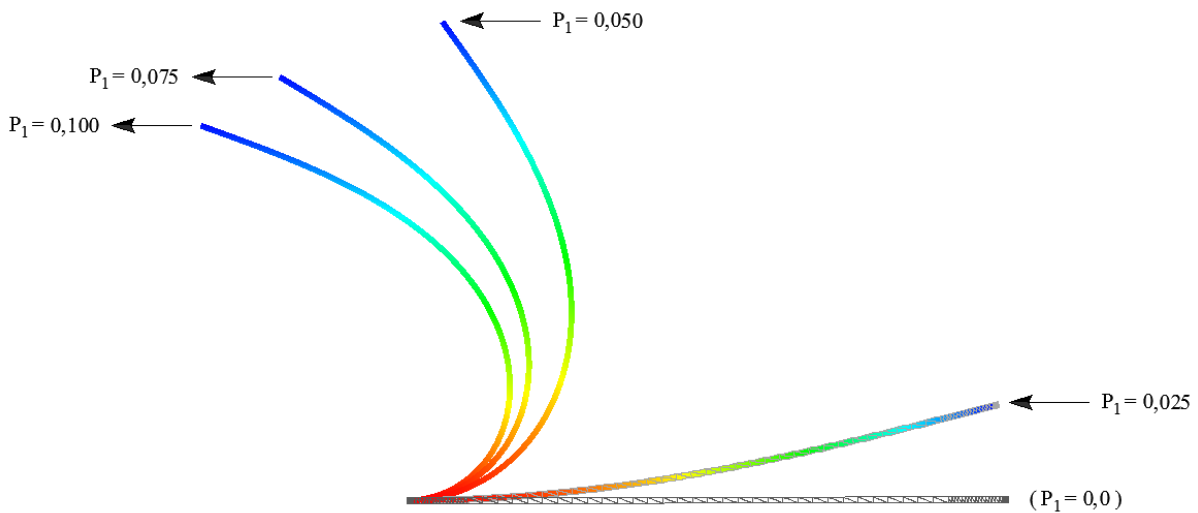


Figura 9.43. Configurações de equilíbrio para a coluna sob primeiro modo de flambagem para alguns níveis de carregamento. A malha possui 9625 nós e 576 elementos tetraédricos de quarto grau.  $P_1$  é a carga aplicada.



9.1.6.6. Coluna engastada sob segundo modo de flambagem

Além do primeiro (ver item 9.1.6.5), o segundo modo de flambagem de uma coluna engastada também foi analisado. Neste caso, para induzir o segundo modo, foi utilizada a excentricidade mostrada na figura 9.44. O caso homogêneo é extraído de Pai e Palazotto (1996). Assim como no caso anterior, devido à simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade da coluna foi discretizada, e o refinamento da malha é feito ao longo da direção longitudinal. Para o caso homogêneo, a carga crítica de flambagem para o segundo modo é (TIMOSHENKO; GERE, 1961):

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} \quad (9.10)$$

onde  $E$  é o módulo de Young;  $I$  é momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x_2$ ; e  $L$  é o comprimento inicial da coluna. Para  $E = 1200,0$  e  $E = 3600,0$ , as respectivas cargas críticas do segundo modo flambagem da coluna da figura 9.44 são:  $P_{cr} = 0,2221$  e  $P_{cr} = 0,6662$ .

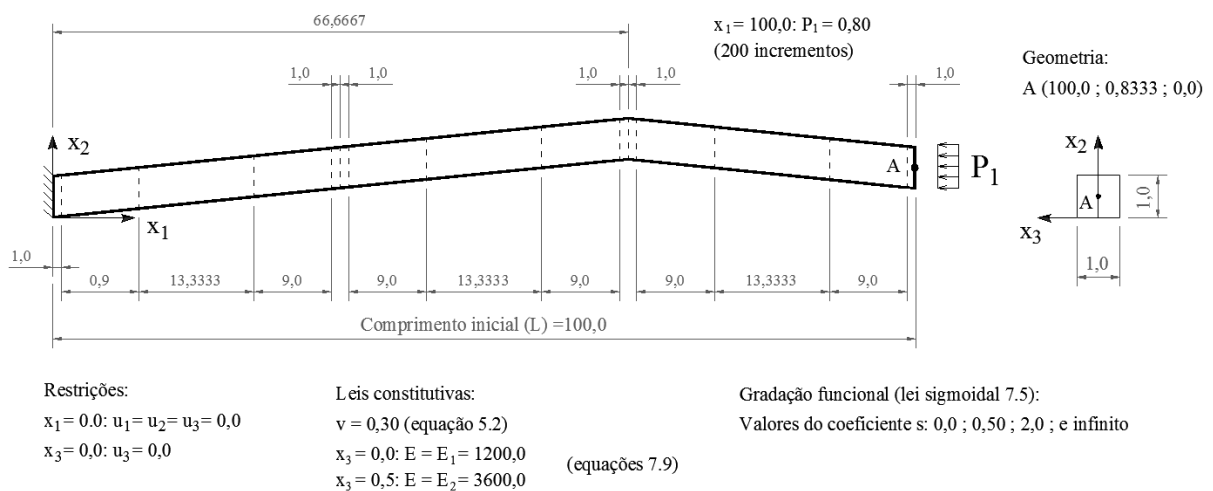


Figura 9.44. Coluna sob segundo modo de flambagem (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). A inclinação no plano  $x_1, x_2$  ao longo da direção longitudinal é de 1% até  $x_1 = 66,6667$  e de -1% a partir de  $x_1 = 66,6667$ . As linhas tracejadas denotam as divisões da malha base (ver Apêndice F).

É possível notar, na figura 9.45, que para os casos homogêneos e com GF, as malhas de elementos lineares utilizadas não foram capazes de reproduzir o segundo modo de flambagem, e que as malhas de tetraedros cúbicos e de quarto necessitam de poucos elementos para reproduzir os valores para os quais os deslocamentos finais do ponto A convergem. Para a malha mais refinada, o aumento do coeficiente de GF s enrijece a coluna, e os resultados dos deslocamentos para o caso homogêneo  $s \rightarrow 0,0$  ( $E = 1200,0$ ) corroboram a referência (ver figura 9.46). Algumas configurações da referida malha são ilustradas na figura 9.47. Deve ser lembrado que, neste estudo e na referência, não é realizada análise de contato.

#### 9.1.6.7. Coluna engastada sob terceiro modo de flambagem

O último problema estrutural de viga plana com instabilidade analisada aqui é a coluna sob terceiro modo de flambagem mostrada na figura 9.48. Pode-se observar, em tal figura, a excentricidade adotada para induzir o terceiro modo. Assim como nos dois exemplos anteriores, o caso homogêneo é analisado por Pai e Palazotto (1996), é discretizada apenas uma metade da coluna, e o refinamento da malha de elementos é feito na direção longitudinal. Para o caso homogêneo, a carga crítica de flambagem para o terceiro modo é (TIMOSHENKO; GERE, 1961):

$$P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2} \quad (9.11)$$

onde  $E$  é o módulo de Young;  $I$  é momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo  $x_2$ ; e  $L$  é o comprimento inicial da coluna. Para  $E = 1200,0$  e  $E = 1800,0$ , as respectivas cargas críticas do terceiro modo flambagem da coluna da figura 9.48 são:  $P_{cr} = 0,6169$  e  $P_{cr} = 0,9253$ .

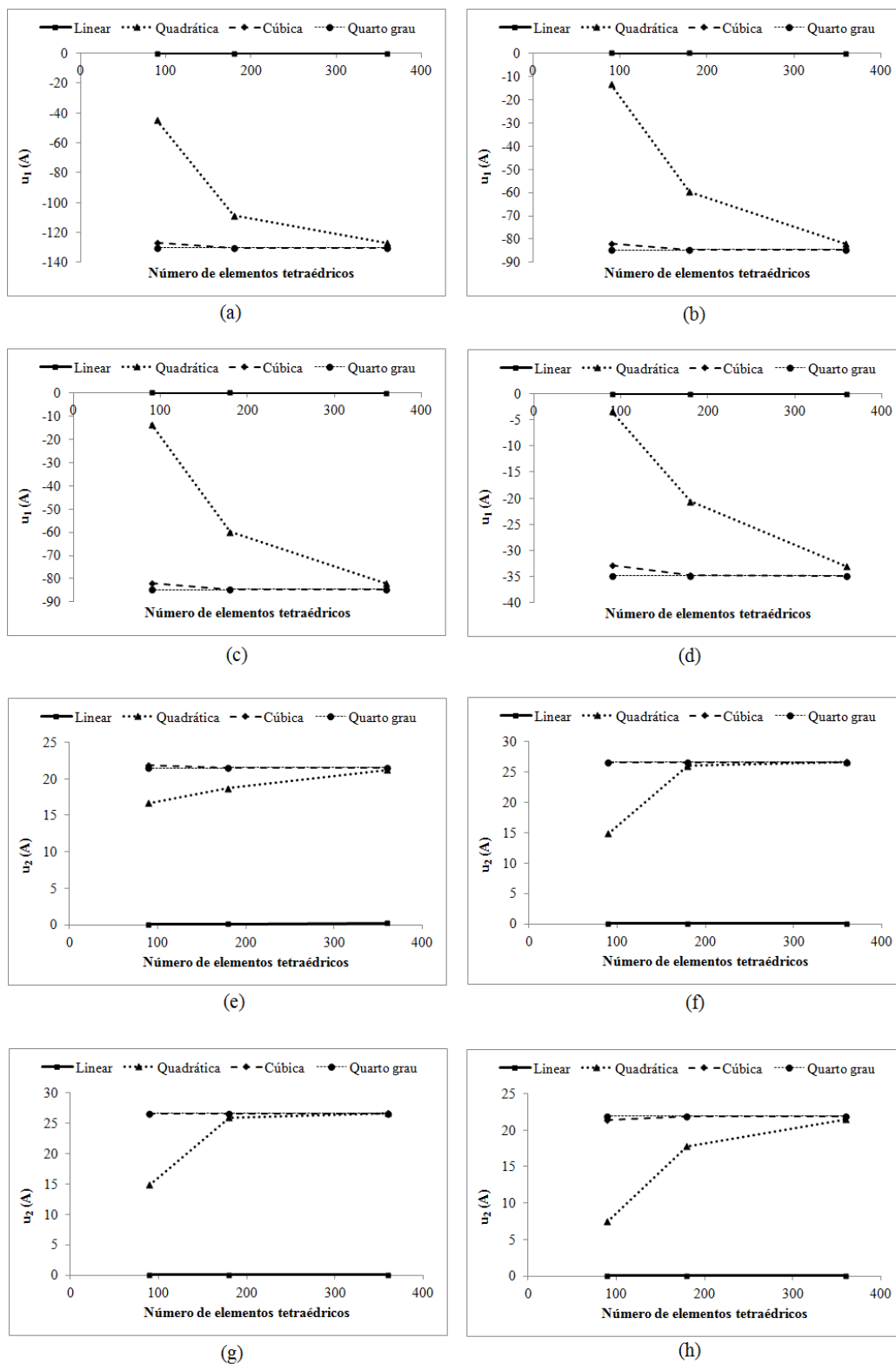


Figura 9.45. Deslocamentos finais do ponto A da coluna sob segundo modo de flambagem: (a), (b), (c) e (d) deslocamentos finais na direção  $x_1$  para, respectivamente, os coeficiente  $s \rightarrow 0,0$  ( $E = 1200,0$ ),  $s = 0,50$ ,  $s = 2,0$  e  $s \rightarrow \infty$  ( $E = 3600,0$ ); (e), (f), (g) e (h) deslocamentos finais na direção  $x_2$  para, respectivamente, os coeficiente  $s \rightarrow 0,0$  ( $E = 1200,0$ ),  $s = 0,50$ ,  $s = 2,0$  e  $s \rightarrow \infty$  ( $E = 3600,0$ ). As legendas se referem à ordem de aproximação polinomial dos elementos.

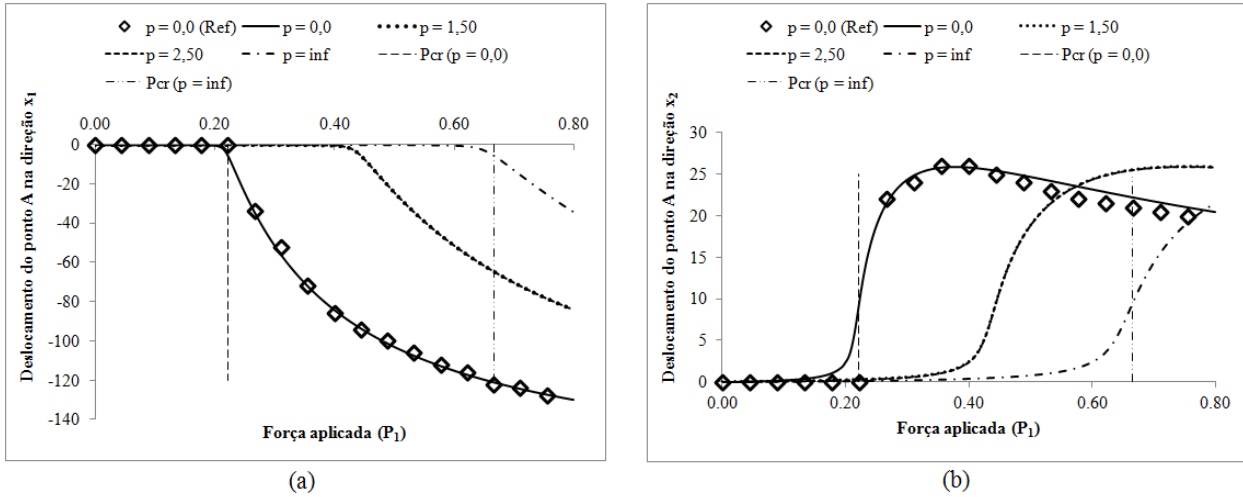


Figura 9.46. Gráficos força aplicada versus deslocamentos do ponto A da coluna sob segundo modo de flambagem. O termo  $s$  se refere ao coeficiente de GF sigmoïdal (ver equações 7.5). Os símbolos “Ref”, “inf” e “Pcr” significam, nesta ordem, a referência bibliográfica Pai e Palazotto (1996), o valor infinito para o coeficiente  $s$  e carga crítica de flambagem. Estes resultados foram obtidos com a malha de 6025 nós e 360 elementos tetraédricos de quarto grau.

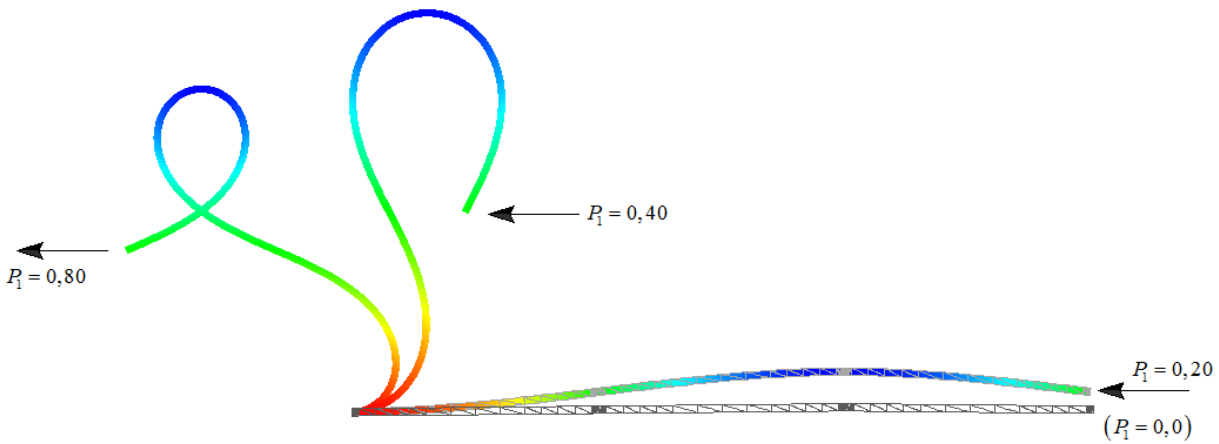


Figura 9.47. Configurações para a coluna sob segundo modo de flambagem para alguns níveis de carregamento. A malha possui 6025 nós e 360 elementos tetraédricos de quarto grau.  $P_1$  é a carga aplicada.

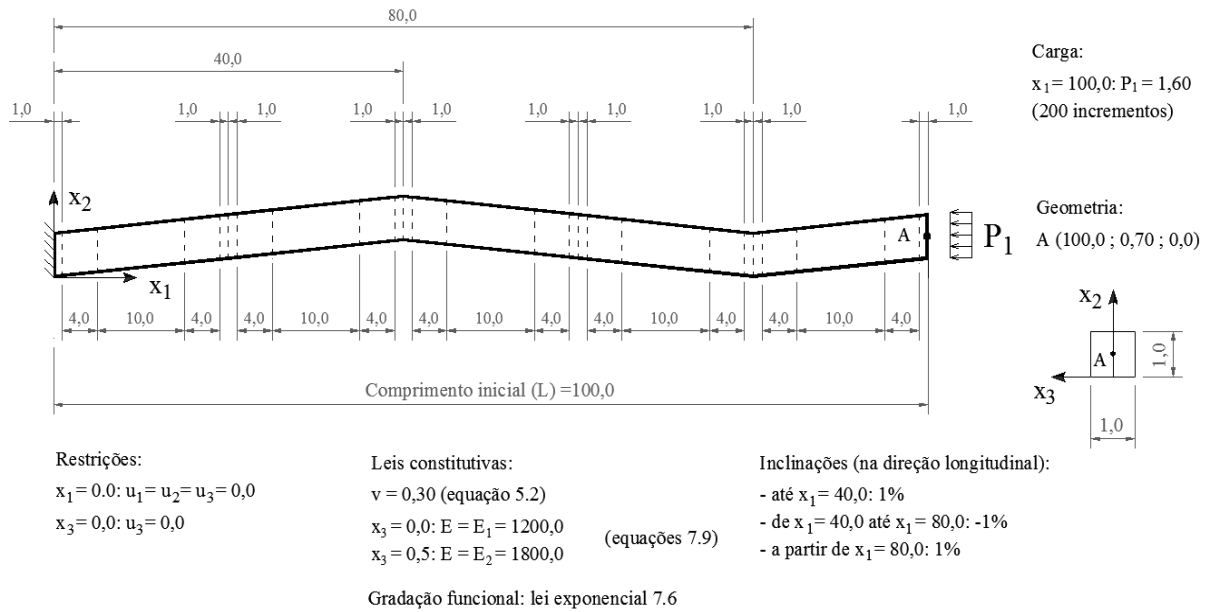


Figura 9.48. Coluna sob terceiro modo de flambagem (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). As linhas tracejadas denotam a malha base (ver Apêndice F).

De acordo com as tabelas 9.43, 9.44 e 9.45, algumas das malhas não foram capazes de reproduzir o terceiro modo de flambagem. Isso pode ser verificado pela dimensão excessiva dos deslocamentos. Para exemplificar o que ocorreu com tais malhas, é ilustrada na figura 9.49 a posição final da malha com 104 nós e 150 tetraedros lineares para o caso homogêneo mais flexível ( $E = 1200,0$ ). Conforme a figura, a referida malha reproduziu o primeiro modo de flambagem. Para o caso homogêneo mais flexível e para a malha mais refinada, os resultados em termos de deslocamentos estão de acordo com a referência (ver figura 9.50). Para o referido caso, algumas das configurações de equilíbrio são mostradas na figura 9.51. Tanto na referência quanto neste estudo, não foi realizada análise de contato.

Tabela 9.43. Deslocamentos finais da coluna sob terceiro modo de flambagem, para o caso homogêneo mais flexível ( $E = 1200, 0$ ).

GAP	NN	NE	NPIN	$u_1 (A)$	$u_2 (A)$
	104	150		-123.5	69.8
1	204	300	1	-0.1	0.1
	404	600		-0.1	0.2
	459	150		-59.5	16.4
2	909	300	5	-95.3	17.0
	1809	600		-184.4	15.8
	1216	150		-110.5	14.9
3	2416	300	11	-113.9	14.7
	4816	600		-114.1	14.6

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_1 (A)$ ,  $u_2 (A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

Tabela 9.44. Deslocamentos finais da coluna sob terceiro modo de flambagem, para o caso com GF exponencial (ver equações 7.6).

GAP	NN	NE	NPIN	$u_1 (A)$	$u_2 (A)$
	104	150		-110.9	75.4
1	204	300	1	-0.1	0.1
	404	600		-165.5	40.2
	459	150		-41.5	14.6
2	909	300	5	-85.2	16.6
	1809	600		-97.3	15.7
	1216	150		-95.2	15.7
3	2416	300	11	-99.0	15.6

4816          600                                  -99.2          15.6

---

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_1 (A), u_2 (A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções x1 e x2.

Tabela 9.45. Deslocamentos finais da coluna sob terceiro modo de flambagem, para o caso homogêneo mais rígido ( $E = 1800, 0$ ).

GAP	NN	NE	NPIN	$u_1 (A)$	$u_2 (A)$
	104	150		-96.7	-79.4
1	204	300	1	-139.3	59.7
	404	600		-0.1	0.1
	459	150		-107.4	-25.8
2	909	300	5	-65.8	16.0
	1809	600		-139.0	19.3
	1216	150		-180.4	19.3
3	2416	300	11	-81.3	16.0
	4816	600		-81.6	16.0

---

GAP = grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos.

NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.

NPIN = número de pontos de integração numérica (ver equações 8.1).

$u_1 (A), u_2 (A)$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções x1 e x2.

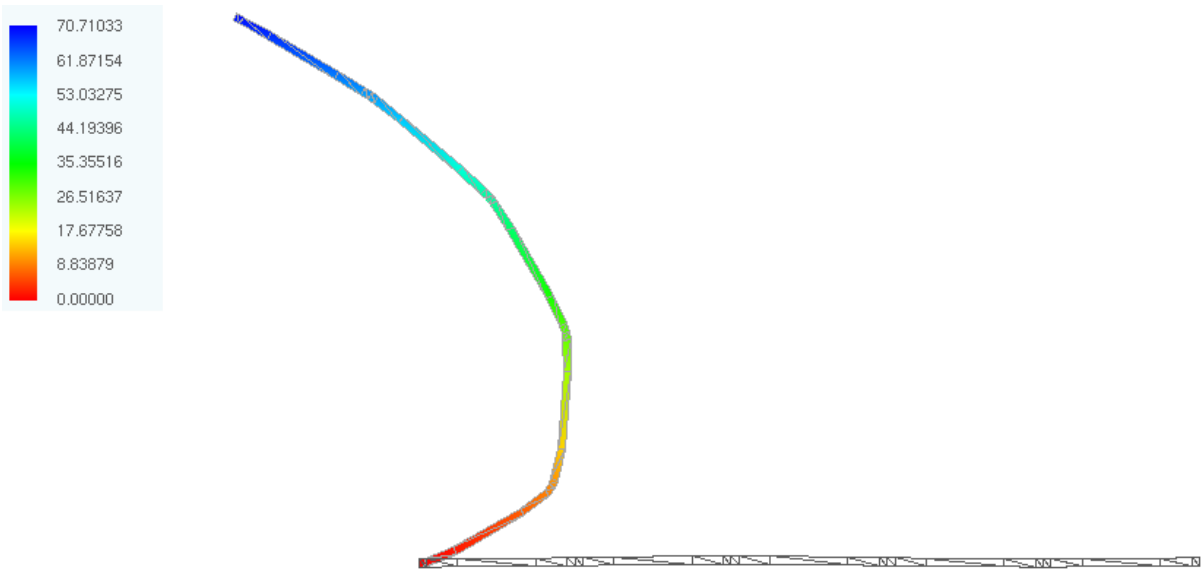


Figura 9.49. Posições inicial e final da coluna sob terceiro modo de flambagem, para a malha de 104 nós e 150 elementos tetraédricos de aproximação linear.

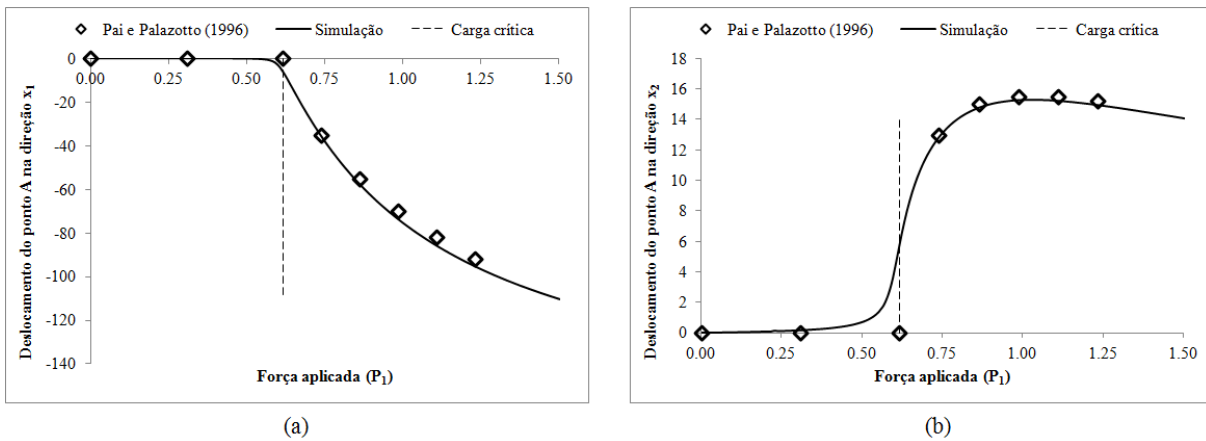


Figura 9.50. Gráfico carga aplicada versus deslocamento do ponto A da coluna sob terceiro modo de flambagem, para o caso homogêneo mais flexível ( $E = 1200, 0$ ). Estes resultados foram obtidos com a malha de 4816 nós e 600 elementos sólidos tetraédricos de ordem cúbica.



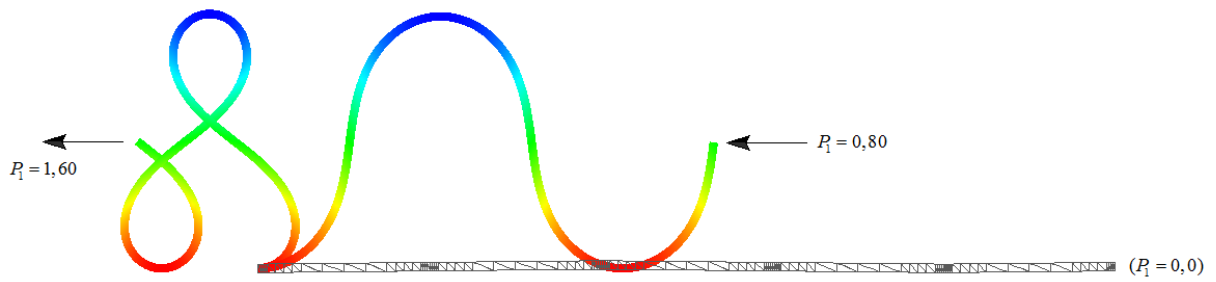


Figura 9.51. Configurações para a coluna sob terceiro modo de flambagem para alguns níveis de carregamento. A malha possui 4816 nós e 600 elementos tetraédricos de ordem cúbica.  $P_1$  é a carga aplicada.

### 9.1.7. Vigas tridimensionais

Nos exemplos do item 9.1.6, foram analisadas estruturas sob grandes deslocamentos com predomínio da flexão em apenas um plano. Nesta seção, são apresentados os principais resultados de vigas tridimensionais em regime de grandes deslocamentos.

#### 9.1.7.1. Viga circular em balanço

A primeira viga tridimensional analisada neste estudo é a viga em balanço ilustrada na figura 9.52. O objetivo aqui é prever o comportamento da viga sob grandes deslocamentos e sob a combinação de momentos fletor e torsor. O exemplo homogêneo é extraído de Bathe e Bolourchi (1979), os quais utilizaram os seguintes elementos finitos: viga tridimensional com dois nós e seis graus de liberdade nodais (três translações e três rotações); e sólido hexaédrico com 16 nós e graus de liberdade translacionais. Para simular o presente exemplo com metodologia numérica deste estudo, foram empregados elementos finitos sólidos tetraédricos

de ordem quadrática, e o refinamento em termos do número de elementos é realizado ao longo da direção longitudinal. Já que a malha base é prismática (ver figura 9.52), foram utilizadas as seguintes transformações de coordenadas:

$$x_1 = (99,5 + Z) \cos(\pi X / 400) \quad (9.12.1)$$

$$x_2 = Y \quad (9.12.2)$$

$$x_3 = (99,5 + Z) \sin(\pi X / 400) \quad (9.12.3)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas da viga; e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são as coordenadas da malha base. Para o ponto B da viga (ver figura 9.52), foi determinada a tensão equivalente final:

$$\sigma_{eq}(B) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{dev}\boldsymbol{\sigma} : \text{dev}\boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2} (\text{dev}\boldsymbol{\sigma})_{ij} (\text{dev}\boldsymbol{\sigma})_{ij}} \quad (9.13)$$

onde  $\text{dev}\boldsymbol{\sigma}$  é a parcela desviadora (HOLZAPFEL, 2004) do tensor da tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (ver equações 4.1 e 4.2).

Os resultados obtidos aqui indicam que o refinamento da malha, em termos do número de elementos tetraédricos, melhora a precisão dos resultados finais (ver figura 9.53), para os casos homogêneos e com GF. Para a malha de elementos mais refinada, os deslocamentos estão de acordo com a referência (ver figura 9.54).

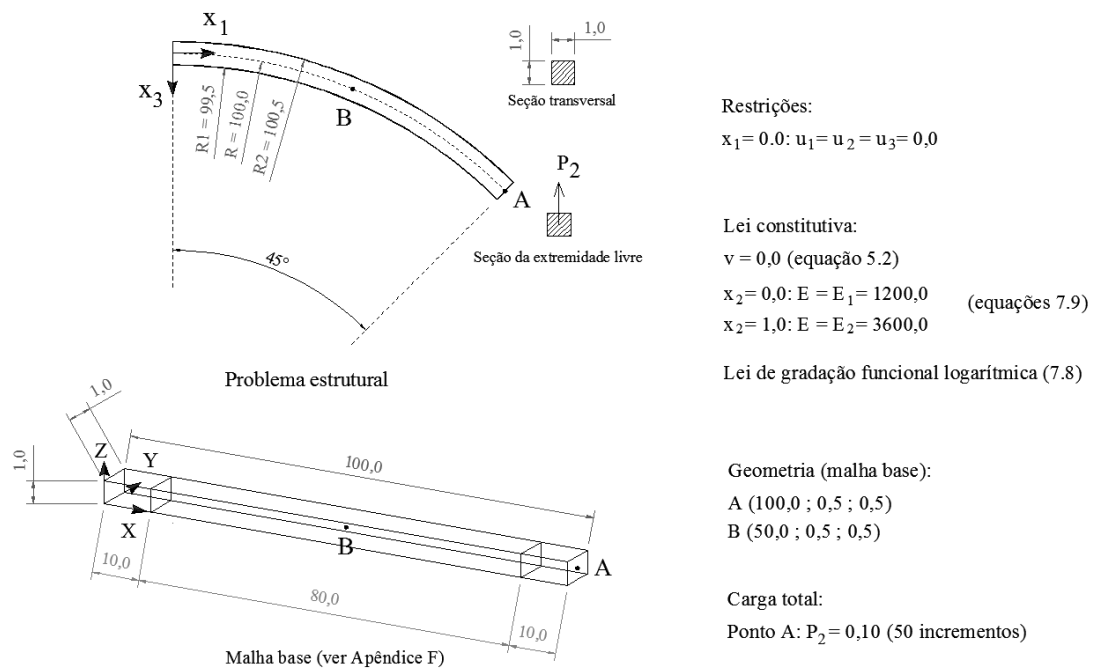


Figura 9.52. Viga curva em balanço (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base).

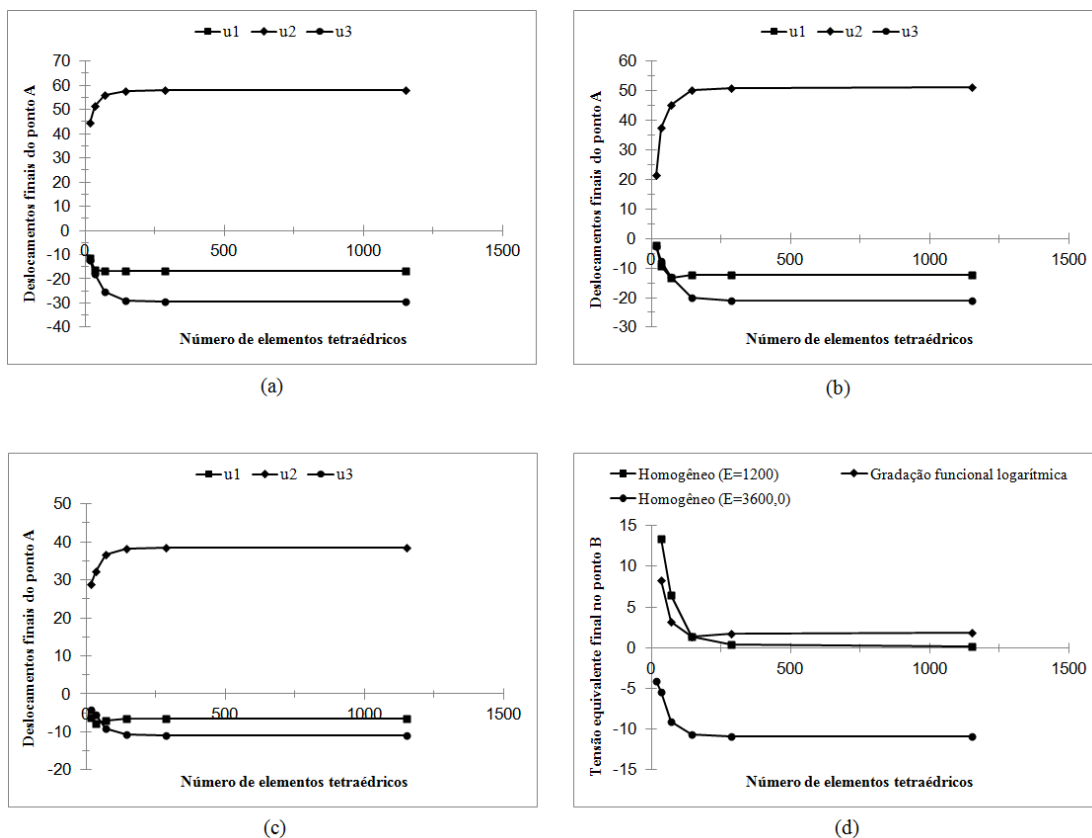


Figura 9.53. Análise de convergência dos resultados finais para a viga curva em balanço (ver figura 9.52): (a) deslocamentos para a viga homogênea mais flexível ( $E = 1200, 0$ ); (b) deslocamentos para a viga com GF logarítmica (7.8); (c) deslocamentos para a viga homogênea mais rígida ( $E = 3600, 0$ ); (d) tensão equivalente (9.13) no ponto B.

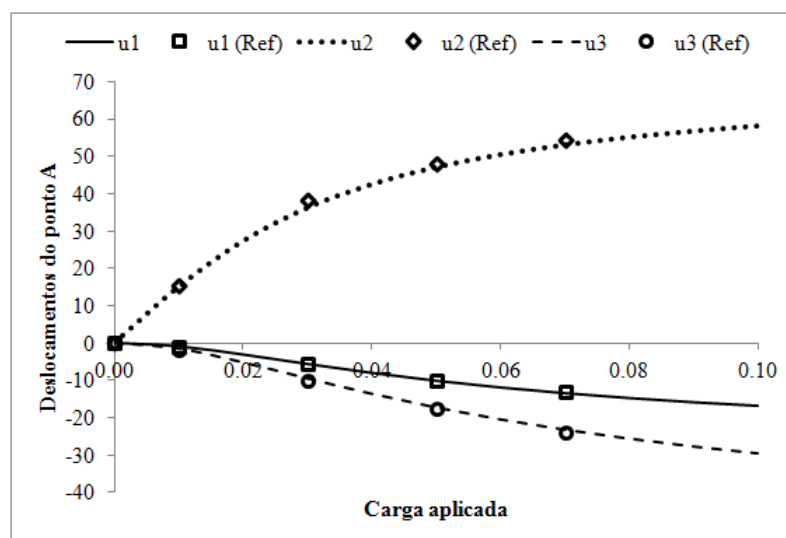


Figura 9.54. Gráfico carga aplicada versus deslocamentos do ponto A da viga curva em balanço (ver figura 9.52), para o caso homogêneo mais flexível ( $E = 1200, 0$ ) e para a malha com 3465 nós e 1152 elementos tetraédricos de ordem quadrática. A sigla “Ref” se refere à referência Bathe e Bolourchi (1979).

### 9.1.7.2. Flambagem lateral de viga engastada

A segunda viga tridimensional sob grandes deslocamentos analisada aqui é a viga sob flambagem lateral mostrada na figura 9.55. Para que fosse possível reproduzir a instabilidade lateral e analisar o comportamento pós-crítico da viga, foi utilizada uma rotação da seção transversal que varia linearmente ao longo da direção longitudinal. Segundo a referência da qual se extraiu este problema estrutural (MACIEL, 2008), a carga crítica de flambagem neste caso é dada por (TIMOSHENKO; GERE, 1961):

$$P_{cr} = 4,013 \frac{\sqrt{EIGJ}}{L^2} \quad (9.14.1)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (9.14.2)$$

$$J = \frac{hb^3}{3} \quad (9.14.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (9.14.4)$$

onde  $E$  é o módulo de Young;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson; e as dimensões  $L$ ,  $h$  e  $b$  são mostradas na figura 9.55. De acordo com Maciel (2008), com os valores adotados para esta viga, a carga crítica resultante é:  $P_{cr} = 47,3$ .

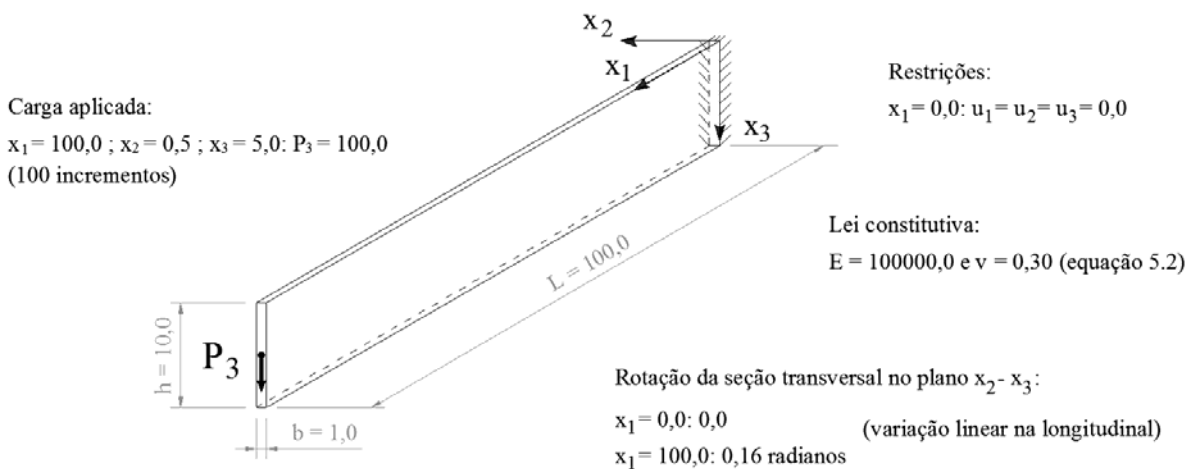
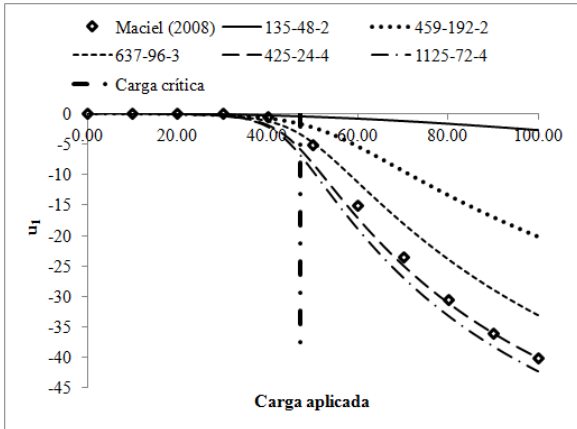


Figura 9.55. Flambagem lateral de viga engastada (geometria, lei constitutiva e condições de contorno).

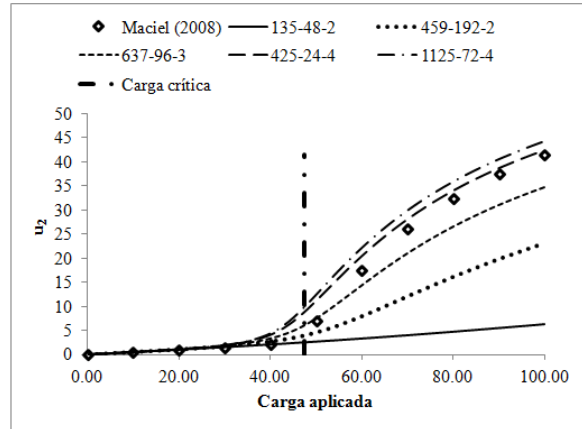
A comparação dos resultados da referência com os deslocamentos do ponto de aplicação da carga obtidos com as malhas empregadas neste estudo é mostrada na figura 9.56, onde é possível notar que o refinamento da malha melhora a precisão dos resultados. Na referência Maciel (2008), são utilizados elementos finitos sólidos tetraédricos isoparamétricos de ordem cúbica, e a lei constitutiva elástica é escrita em termos da deformação de engenharia e da tensão nominal (PASCON, 2008). As configurações inicial e final da malha mais refinada são ilustradas na figura 9.57.

#### *9.1.8. Chapas e cascas*

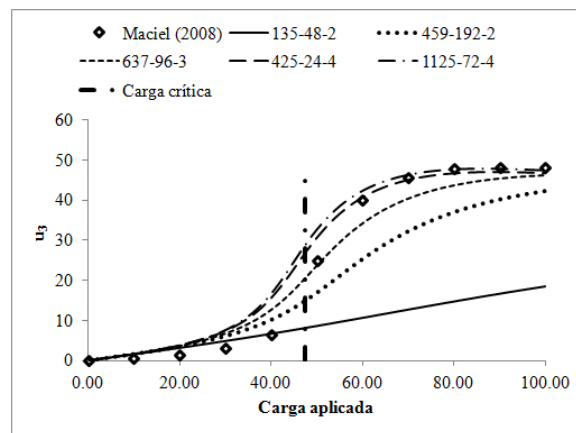
Neste item são apresentados os principais resultados das estruturas em forma de chapa e de casca simuladas numericamente com o código computacional desenvolvido no presente estudo para análise de materiais em regime elástico (ver item 8.4).



(a)



(b)



(c)

Figura 9.56. Gráficos carga aplicada versus deslocamentos do ponto de aplicação da carga para a viga sob flambagem lateral: (a) deslocamentos ao longo de  $x_1$ ; (b) deslocamentos ao longo de  $x_2$ ; (c) deslocamentos ao longo de  $x_3$ . Os números na legenda se referem ao número de nós, à quantidade de elementos tetraédricos e à ordem de aproximação polinomial, respectivamente.

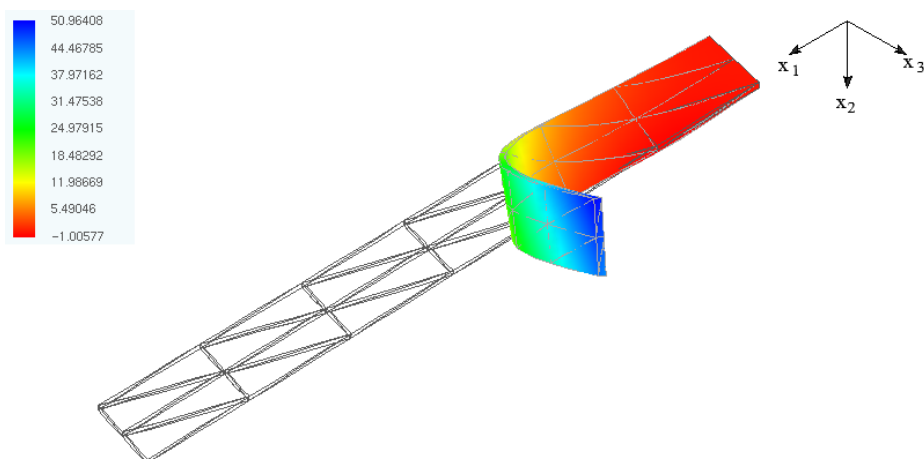


Figura 9.57. Configurações inicial e final da viga sob flambagem lateral discretizada com a malha mais refinada (1125 nós e 72 elementos tetraédricos do quarto grau). A legenda se refere aos deslocamentos finais na direção  $x_3$ .

#### 9.1.8.1. Membrana de Cook

O primeiro problema estrutural da seção de chapas e cascas é a membrana de Cook mostrada na figura 9.58. Este exemplo, extraído de Düster, Hartmann e Rank (2003), é empregado para avaliar travamento em elementos finitos de casca devido à singularidade que ocorre no ponto B (ver figura 9.58). Na referência são utilizados elementos finitos sólidos do tipo casca com várias ordens de aproximação. De acordo com o item 9.1.3 desta tese, a malha base foi escolhida de forma a se obter um melhor refinamento nas regiões mais críticas (aquela próxima à carga e aquela próxima ao engaste). Devido à simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade da membrana é analisada. Assim como no caso da viga prismática em balanço do item 9.1.6.1 desta tese, foi realizada comparação de resultados entre diferentes malhas de elementos sólidos tetraédricos com mesmo número de elementos finitos e distintos esquemas de divisão das arestas da malha base. Tal comparação foi feita com malhas de elementos tetraédricos de ordem quadrática para o caso homogêneo mais flexível e para um dos casos com GF (ver tabelas 9.46 e 9.47). Para a malha base da figura 9.58, o número mínimo de elementos tetraédricos é 72 (12 hexaedros x 6 tetraedros/hexaedro = 72 tetraedros). Para obter o melhor esquema de divisão das arestas, a quantidade de tetraedros foi dobrando de 72 até 1152, e para cada número de elementos foram obtidos os deslocamentos

finais do ponto A (ver figura 9.58) para todos os esquemas de divisão possíveis. Com tais deslocamentos, foi selecionado o melhor esquema de divisão das arestas da malha base para cada quantidade de elementos tetraédricos (ver tabela 9.48). Como era de se esperar, o refinamento da malha na direção da espessura não melhora a precisão dos resultados em termos dos deslocamentos finais do ponto A, para os casos homogêneo e com GF (ver tabelas 9.46 e 9.47).

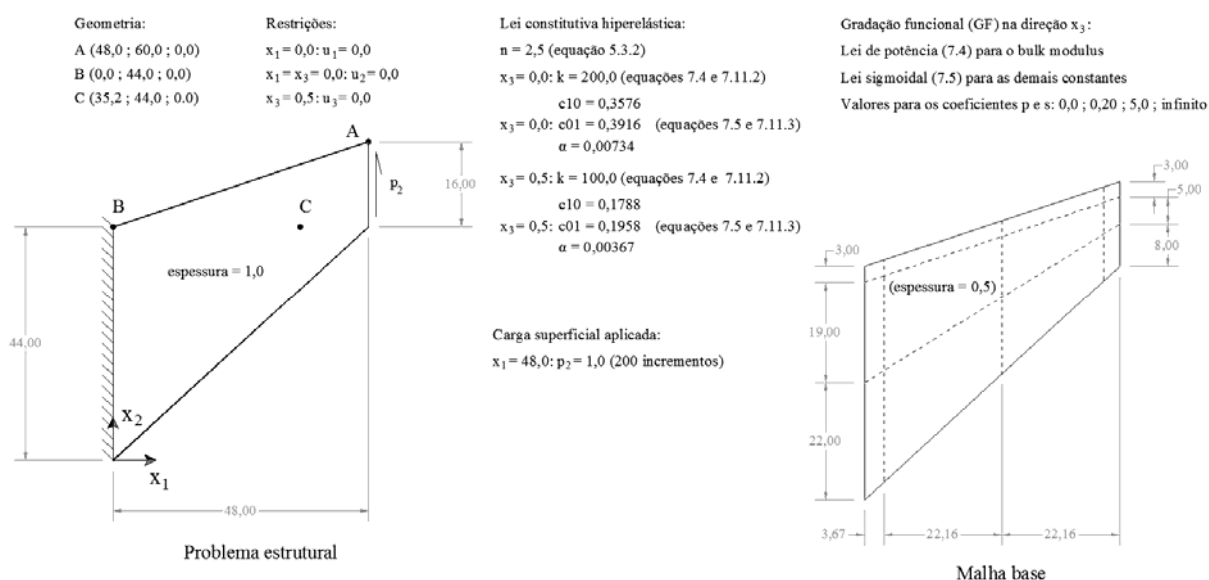


Figura 9.58. Membrana de Cook (geometria, condições de contorno e lei constitutiva).

Os resultados em termos dos deslocamentos verticais finais do ponto A (ver figura 9.58) mostram que o refinamento da malha em relação à quantidade de elementos e à ordem de aproximação dos tetraedros elimina o travamento (ver a definição de travamento utilizada no item 9.1.3 desta tese, e a figura 9.59). Para a membrana com GF analisada com uma das malhas, o valor do coeficiente de GF não influencia consideravelmente os deslocamentos do ponto A (ver figura 9.60). A singularidade que ocorre no ponto B (ver figura 9.58) pode ser observada na figura 9.61, onde é possível notar a complexidade do campo de deslocamentos. Para o caso homogêneo mais flexível ( $p, s \rightarrow 0,0$ ), com exceção das malhas de elementos de aproximação linear utilizadas, o refinamento da malha de elementos melhora a precisão da tensão equivalente final (9.13) no ponto C (ver figura 9.62). Para uma das malhas de elementos finitos empregadas para simular numericamente a membrana de Cook, é ilustrada na figura 9.63 a influência da lei constitutiva na distribuição final da tensão equivalente final (9.13) ao longo da espessura.



Tabela 9.46. Comparação do esquema de divisão das arestas da malha base da membrana de Cook (figura 9.58), para o material homogêneo mais flexível ( $p, s \rightarrow 0, 0$ ). O valor “x” para os deslocamentos indica que, para a respectiva malha, não houve convergência do erro (8.11) durante a simulação.

NEL	NN	ND1	ND2	ND3	$u_1$	$u_2$
72	189	1	1	1	-24.25	29.70
	357	2	1	1	-27.87	30.77
144	351	1	2	1	-23.36	29.58
	315	1	1	2	-24.15	29.69
	693	4	1	1	-26.09	29.92
288	675	1	4	1	-22.94	29.61
	567	1	1	4	-24.12	29.70
	663	2	2	1	-29.67	31.15
	595	2	1	2	-27.77	30.77
	585	1	2	2	-23.22	29.53
	1365	8	1	1	x	x
576	1323	1	8	1	-22.75	29.35
	1071	1	1	8	-24.10	29.70
	1287	4	2	1	-30.41	31.17
	1125	1	4	2	-22.83	29.56
	1071	2	1	4	-27.72	30.76
	1155	4	1	2	-25.64	29.83
	1275	2	4	1	-29.66	31.24
	1053	1	2	4	-23.16	29.50
	1105	2	2	2	-29.63	31.15
	2709	16	1	1	x	x
1152	2619	1	16	1	-22.79	29.32
	2079	1	1	16	-24.10	29.71
	2535	8	2	1	-30.54	31.25
	2505	1	8	2	-22.64	29.30
	2023	2	1	8	-27.70	30.76
	2275	8	1	2	-25.80	29.87

2499	2	8	1	-29.50	31.16
1989	1	2	8	-23.14	29.50
2145	4	2	2	-30.34	31.17
2125	2	4	2	-29.63	31.23
1989	2	2	4	-29.62	31.15
2475	4	4	1	x	x
2079	4	1	4	-25.34	29.71
2025	1	4	4	-22.77	29.53

NEL = número de elementos finitos tetraédricos. NN = número de nós. ND1, ND2,

ND3 = números de divisões das arestas da malha base nas direções x1, x2 e x3 (figura

9.15).  $u_3, u_1$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções x3 e x1 (figura 9.15).

Tabela 9.47. Comparação do esquema de divisão das arestas da malha base da membrana de Cook (figura 9.58), para MGF ( $p = s = 0,20$ ).

NEL	NN	ND1	ND2	ND3	$u_1$	$u_2$
72	189	1	1	1	-19.68	22.97
	357	2	1	1	-23.02	24.01
144	351	1	2	1	-18.37	22.47
	315	1	1	2	-19.58	22.95
	693	4	1	1	-22.20	23.43
288	675	1	4	1	-17.57	22.33
	567	1	1	4	-19.54	22.95
	663	2	2	1	-24.77	24.56
	595	2	1	2	-22.89	23.99
	585	1	2	2	-18.27	22.43
576	1365	8	1	1	-22.45	23.50
	1323	1	8	1	-17.33	22.04
	1071	1	1	8	-19.52	22.95
	1287	4	2	1	-25.75	24.66
	1125	1	4	2	-17.48	22.28
	1071	2	1	4	-22.83	23.98

	1155	4	1	2	-21.81	23.32
	1275	2	4	1	-24.67	24.64
	1053	1	2	4	-18.22	22.41
	1105	2	2	2	-24.74	24.56
	2709	16	1	1	-23.50	23.85
	2619	1	16	1	-17.38	22.02
	2079	1	1	16	-19.51	22.95
	2535	8	2	1	-25.73	24.64
	2505	1	8	2	-17.27	22.00
	2023	2	1	8	-22.81	23.97
	2275	8	1	2	-21.85	23.35
1152	2499	2	8	1	-24.58	24.62
	1989	1	2	8	-18.21	22.40
	2145	4	2	2	-25.66	24.65
	2125	2	4	2	-24.64	24.64
	1989	2	2	4	-24.72	24.56
	2475	4	4	1	-26.17	24.88
	2079	4	1	4	-21.55	23.21
	2025	1	4	4	-17.44	22.26

NEL = número de elementos finitos tetraédricos. NN = número de nós. ND1, ND2, ND3 = números de divisões das arestas da malha base na direção longitudinal, na altura e na espessura (figura 9.58).  $u_1, u_2$  = deslocamentos finais do ponto A nas direções  $x_1$  e  $x_2$  (figura 9.58).

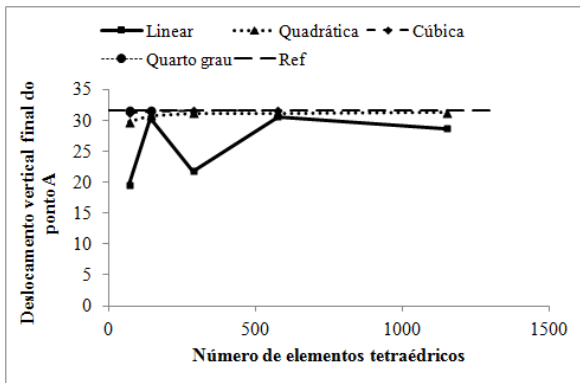
Tabela 9.48. Esquemas de divisão das arestas da malha base para a membrana de Cook (figura 9.58).

NEL	ND1	ND2	ND3
72	1	1	1
144	2	1	1
288	2	2	1
576	4	2	1
1152	4	4	1

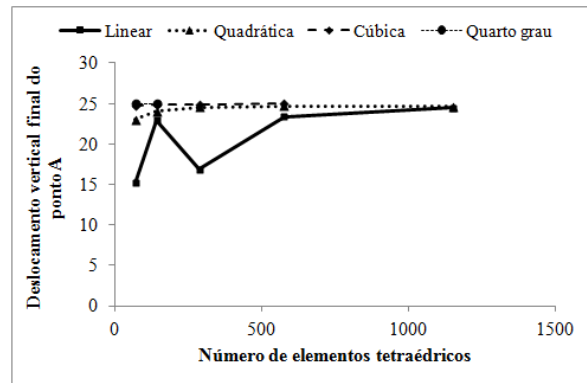
NEL = número de elementos finitos sólidos tetraédricos.

ND1, ND2, ND3 = número de divisão das arestas da malha

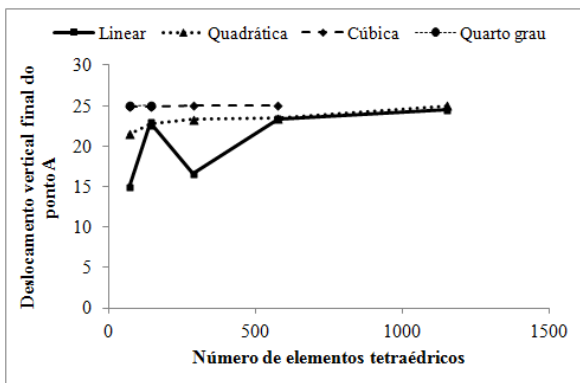
base (figura 9.58) na direção longitudinal, na altura e na espessura.



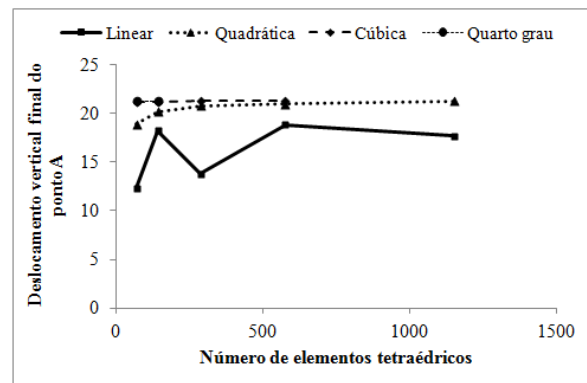
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9.59. Análise de convergência do deslocamento vertical final do ponto A da membrana de Cook (ver figura 9.58): (a) caso homogêneo mais flexível ( $p, s \rightarrow 0, 0$ ); (b) caso com GF ( $p = s = 0, 20$ ); (c) caso com GF ( $p = s = 5, 0$ ); (d) caso homogêneo mais rígido ( $p, s \rightarrow \infty$ ). O símbolo “Ref” denota a referência Düster, Hartmann e Neff (2003).

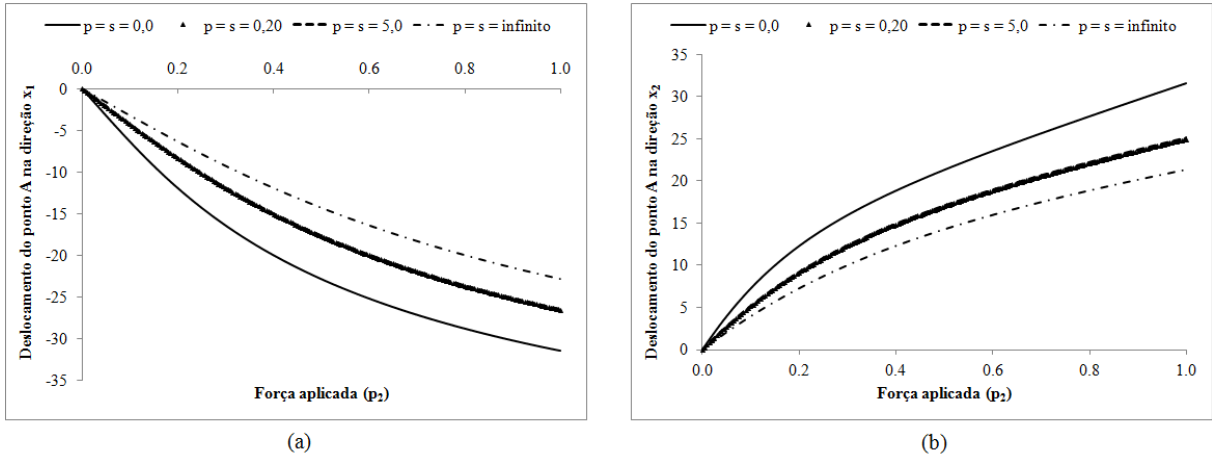


Figura 9.60. Gráficos carga aplicada versus deslocamentos do ponto A da membrana de Cook (figura 9.58): (a) deslocamento na direção  $x_1$ ; (b) deslocamento na direção  $x_2$ . Na legenda, as letras p e s se referem aos coeficientes de GF das leis de potência (7.4) e sigmoidal (7.5). Estes resultados foram obtidos com a malha de 2145 nós e 144 elementos finitos tetraédricos de quarto grau.

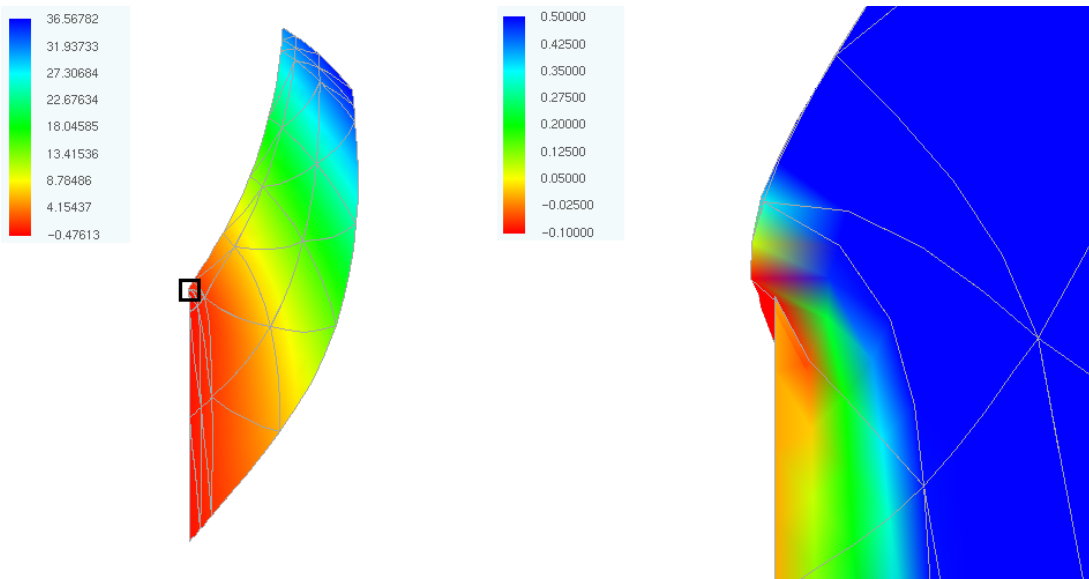


Figura 9.61. Amplificação da região em torno do ponto B da membrana de Cook (figura 9.58), para o caso homogêneo mais flexível ( $p, s \rightarrow 0, 0$ ), e para a malha com 2145 nós e 144 elementos finitos tetraédricos de quarto grau. As legendas se referem aos valores dos deslocamentos verticais finais.

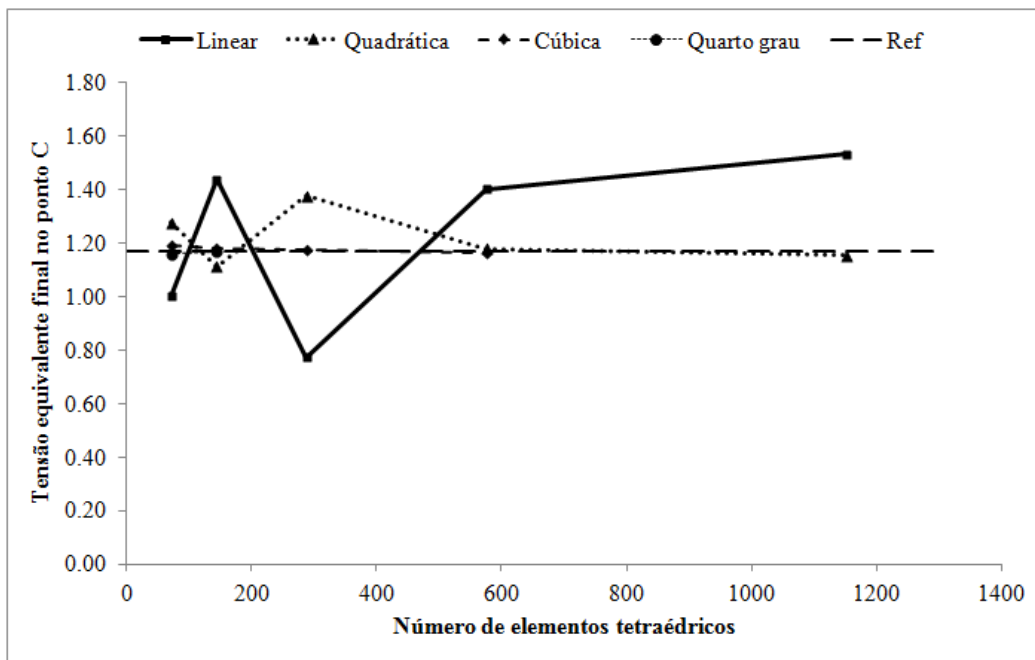


Figura 9.62. Análise de convergência da tensão equivalente final (9.13) no ponto C da membrana de Cook homogênea mais flexível (ver figura 9.58). O símbolo “Ref” denota a referência Düster, Hartmann e Neff (2003).

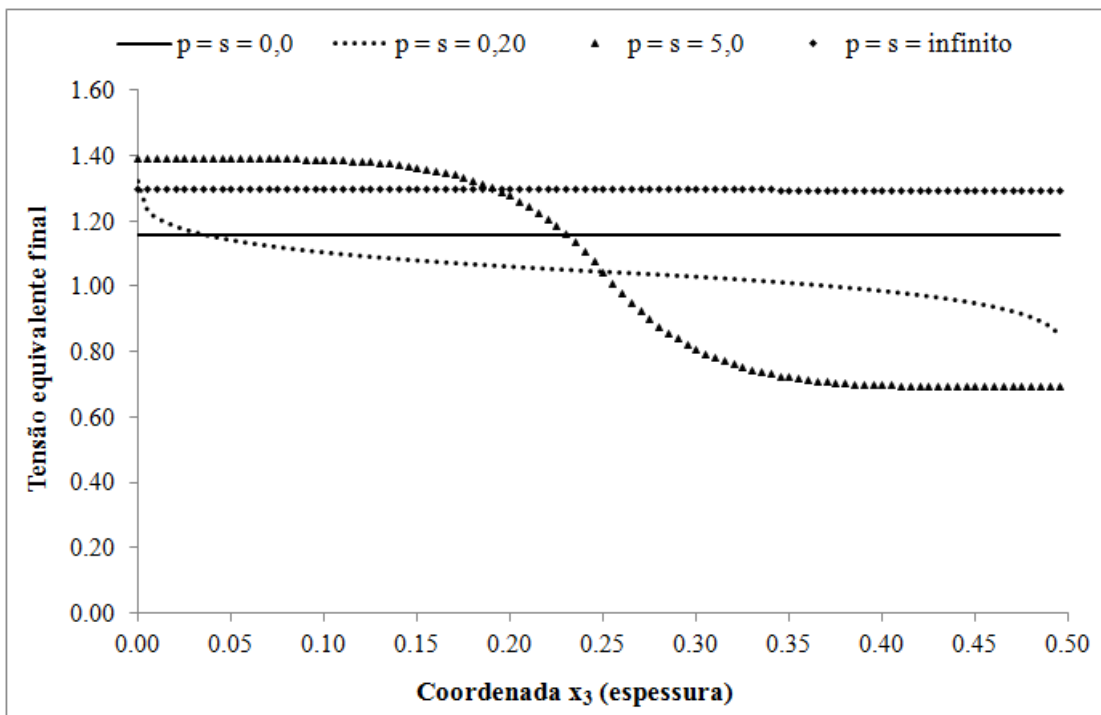


Figura 9.63. Distribuição final da tensão equivalente (9.13) ao longo do segmento de reta  $x_1 = 35,2$ ,  $x_2 = 44,0$  e  $0,0 \leq x_3 \leq 0,5$ . Estes resultados foram obtidos com a malha de 2145 nós e 144 elementos finitos tetraédricos de quarto grau.

#### 9.1.8.2. Cilindro espesso sob linha de carga

O cilindro espesso da figura 9.64 é analisado aqui. Este exemplo, extraído de Sze, Zheng e Lo (2004), pode ser utilizado para verificar a ocorrência de travamento em estruturas tridimensionais curvas. Na referência são empregados elementos finitos sólidos do tipo casca de aproximação quadrática (18 nós). Devido à dupla simetria em relação aos planos  $x_3 = 0,0$  e  $x_1 = 15,0$ , apenas um quarto do cilindro foi discretizado. Para gerar as malhas de elementos finitos tetraédricos a partir da malha base prismática (ver figura 9.64 e Apêndice F), foram empregadas as seguintes mudanças de coordenadas:

$$x_1 = 1,5 \cdot X_2 \quad (9.15.1)$$

$$x_2 = (8,0 + 2 \cdot X_3) \cos(\pi X_1 / 10) \quad (9.15.2)$$

$$x_3 = (8,0 + 2 \cdot X_3) \sin(\pi X_1 / 10) \quad (9.15.3)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas do cilindro; e  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são as coordenadas da malha base (ver figura 9.64). Pode-se observar que o refinamento da malha base é maior nas regiões próximas às bordas, em que os campos de deformação e tensão são mais complexos.

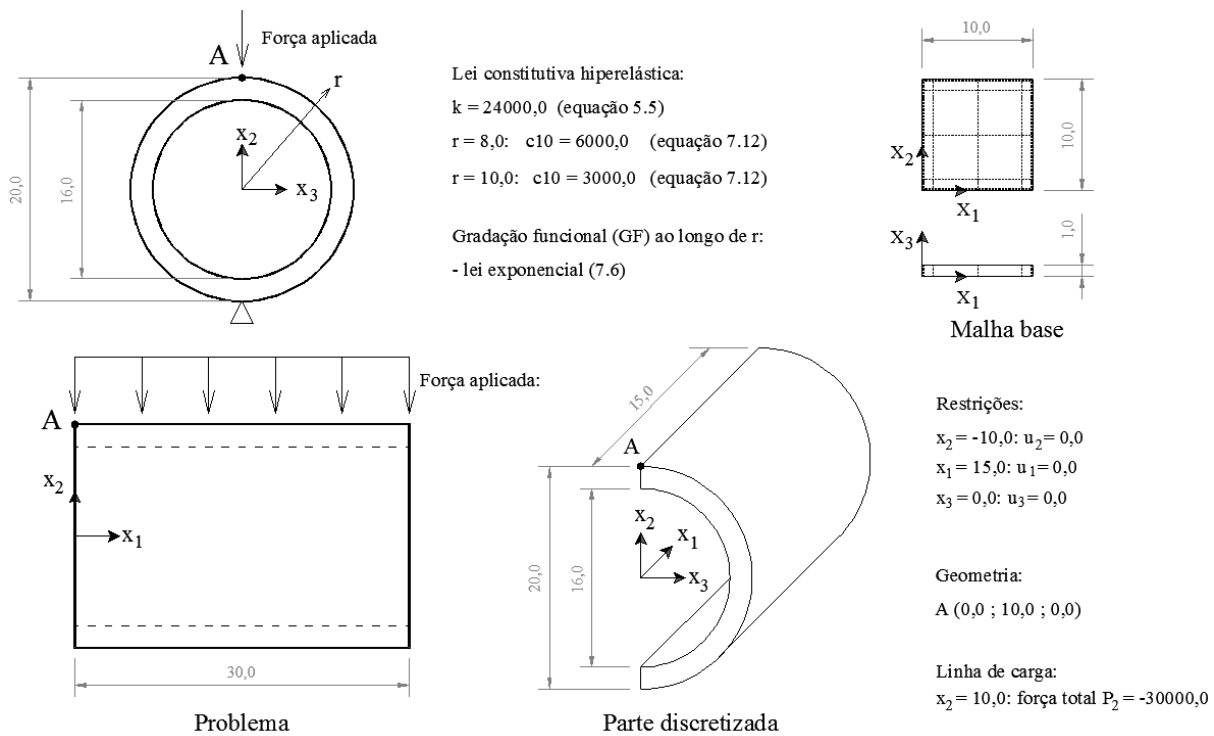
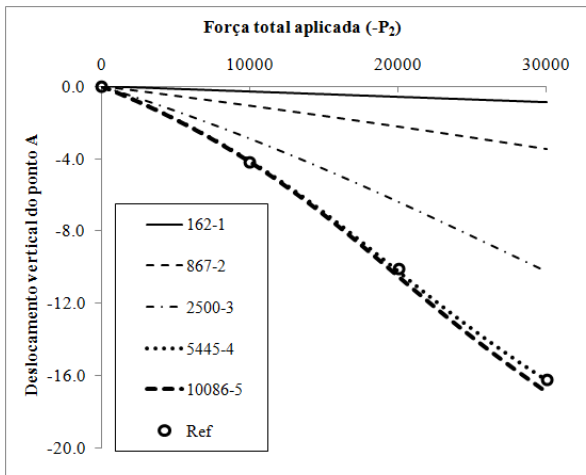


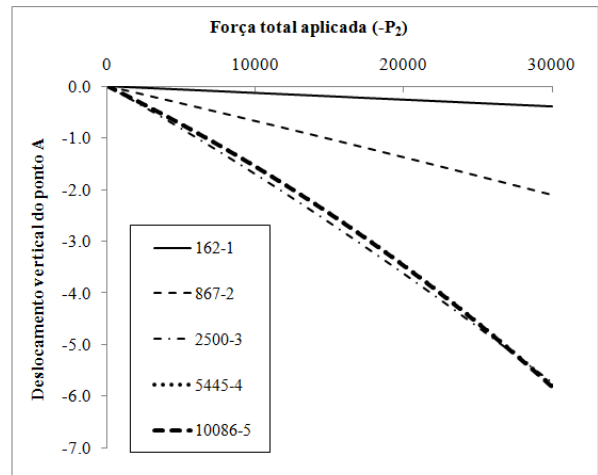
Figura 9.64. Cilindro espesso sob linha de carga (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base).

Para simular este exemplo foram empregados 384 elementos finitos sólidos tetraédricos com várias ordens de aproximação (ver item 3.1). Para as malhas utilizadas, o deslocamento vertical do ponto A do cilindro (ver figura 9.64) converge, com aumento do grau de aproximação, para a solução da referência (ver figura 9.65). A posição final do cilindro, para a malha de tetraedros do quinto grau, é ilustrada na figura 9.66. Deve ser mencionado que o contato que ocorre entre duas partes do cilindro não é analisado neste estudo, nem na referência.

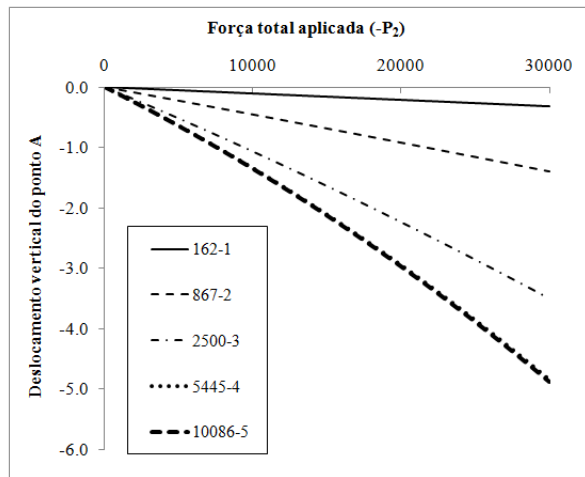




(a)



(b)



(c)

Figura 9.65. Deslocamentos verticais do ponto A do cilindro (figura 9.64) para os seguintes casos: (a) homogêneo mais flexível ( $c_{10} = 3000, 0$ ); (b) heterogêneo (GF exponencial de  $c_{10}$ ); (c) homogêneo mais rígido ( $c_{10} = 6000, 0$ ). Os números na legenda denotam, respectivamente, o número de nós e a ordem de aproximação dos elementos. A sigla “Ref” corresponde à referência Sze, Zheng e Lo (2004). Estes resultados foram obtidos a partir de malhas com 384 elementos tetraédricos.

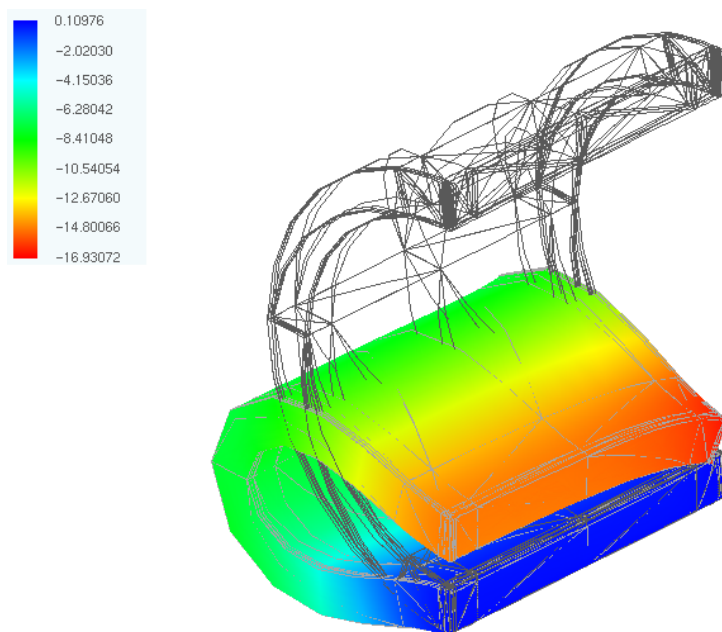


Figura 9.66. Deslocamentos verticais finais do cilindro espesso mais flexível ( $c_{10} = 3000, 0$ ). Estes resultados foram obtidos a partir da malha com 10086 nós e 384 elementos tetraédricos do quinto grau.

### 9.1.8.3. Casca hemisférica

Outro exemplo de casca extraído de Sze, Zheng e Lo (2004) é a casca hemisférica com abertura de 18 graus. Devido à dupla simetria em relação aos eixos  $x_1 = 0, 0$  e  $x_2 = 0, 0$ , apenas um quarto dela é ilustrado na figura 9.67. De acordo com Korelc, Solinc e Wriggers (2010), é possível verificar, com este exemplo numérico, a ocorrência de travamento em elementos com dupla curvatura submetidos a grandes rotações. Como a malha base é prismática (ver figura 9.67), foram empregadas as seguintes mudanças de coordenadas:

$$x_1 = (9,98 + 0,04X_3) \cos\left(\frac{\pi}{20} \frac{72}{90} X_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{20} X_1\right) \quad (9.16.1)$$

$$x_2 = (9,98 + 0,04X_3) \cos\left(\frac{\pi}{20} \frac{72}{90} X_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{20} X_1\right) \quad (9.16.2)$$

$$x_3 = (9,98 + 0,04X_3) \sin\left(\frac{\pi}{20} \frac{72}{90} X_2\right) \quad (9.16.3)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas da casca; e  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são as coordenadas da malha base (ver figura 9.67). Assim como no exemplo numérico anterior, o refinamento da malha base é maior nas regiões próximas às bordas.

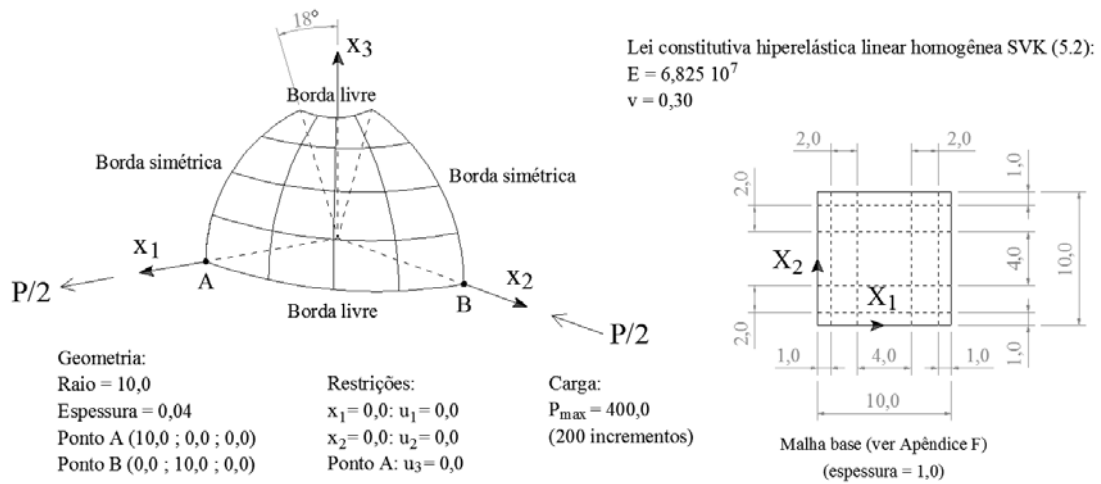


Figura 9.67. Casca hemisférica com abertura de 18 graus (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base). Nesta figura é ilustrado apenas um quarto da casca.

O número de elementos finitos sólidos tetraédricos é constante e igual a 150. O grau de aproximação dos elementos (ver item 3.1) varia de um a cinco. Para as malhas utilizadas na simulação numérica deste problema estrutural, os resultados indicam que o refinamento  $p$  (ver item 9.1.3 desta tese) melhora a precisão dos deslocamentos dos pontos A e B (ver figura 9.68). Algumas configurações de equilíbrio da casca discretizada com a malha do quinto grau são ilustradas na figura 9.69.

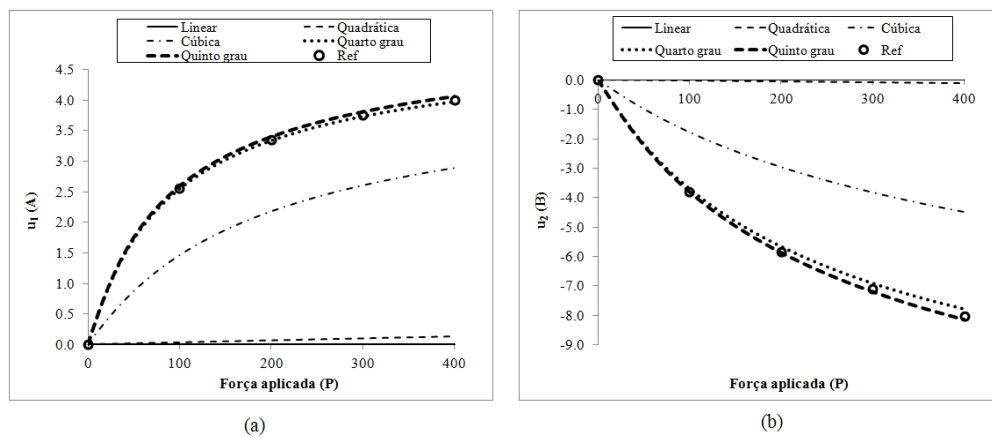


Figura 9.68. Gráficos carga aplicada versus deslocamentos para a casca hemisférica da figura 9.67: (a) deslocamentos do ponto A na direção  $x_1$ ; (b) deslocamentos do ponto B na direção  $x_2$ . A legenda se

refere ao grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos, e a sigla “Ref” corresponde à referência Sze, Zheng e Lo (2004).

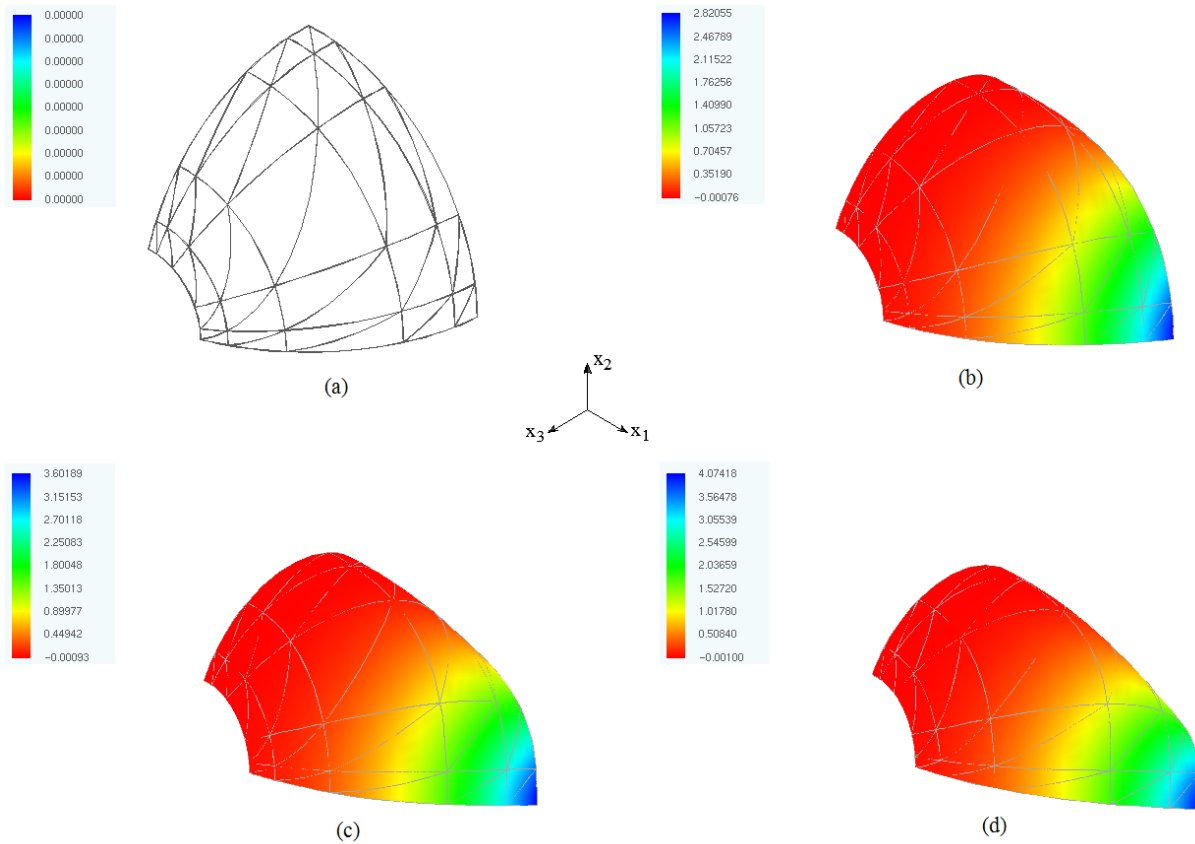


Figura 9.69. Configurações de equilíbrio para a casca hemisférica da figura 9.67: (a)  $P = 0, 0$ ; (b)  $P = 120, 0$ ; (c)  $P = 240, 0$ ; (d)  $P = P_{\max} = 400, 0$ . Os valores das legendas se referem aos deslocamentos na direção  $x_1$ . Estes resultados foram obtidos com a malha de 4056 nós e 150 tetraedros do quinto grau.

#### 9.1.8.4. Placa engastada em forma de anel

A placa em forma de anel mostrada na figura 9.70 é analisada aqui. Uma das extremidades é engastada e a outra é carregada, sendo que tais extremidades são separadas por um corte (segmento AB da figura 9.70), isto é, embora as faces extremas tenham as mesmas coordenadas, elas não possuem ligação entre si. De acordo com Sansour e Kollmann (2000) e Petchsasithon e Gosling (2005), este problema estrutural, proposto inicialmente por Basar e Ding (1992), é utilizado para testar elementos finitos de casca submetidos a grandes rotações.

Assim como nas referências supramencionadas, apenas o caso homogêneo é analisado neste estudo. Para simular numericamente este exemplo, foram empregadas as seguintes quantidades de elementos sólidos tetraédricos com grau de aproximação variável (ver item 3.1): 72, 144 e 1152.

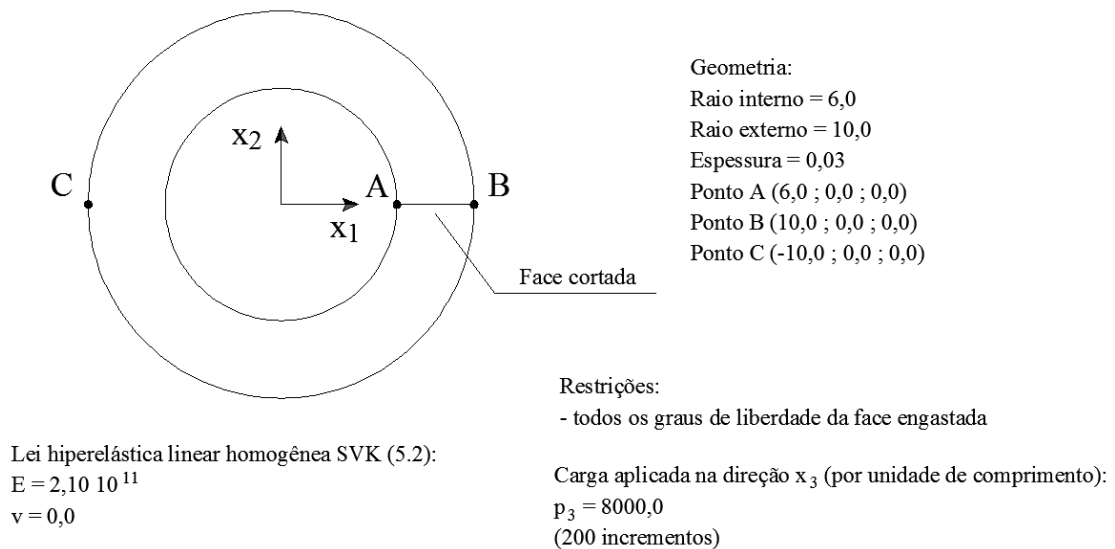


Figura 9.70. Placa engastada em forma de anel (geometria, condições de contorno e lei constitutiva).

Assim como no exemplo numérico anterior, os resultados convergem com aumento da ordem de aproximação (refinamento  $p$ ) e com aumento do número de elementos (refinamento  $h$ ), em relação aos deslocamentos finais dos pontos A, B e C (ver figura 9.71). A convergência mais lenta dos deslocamentos verticais finais no ponto C parece estar relacionada ao baixo refinamento da malha na região desse ponto. Na referência Petchsathon e Gosling (2005), são empregados elementos finitos sólidos hexaédricos com 18 nós. Para uma das malhas, a configuração de equilíbrio final é mostrada na figura 9.72.

#### 9.1.8.5. Cilindro fino com abas livres tracionado

O problema estrutural da figura 9.73 é analisado aqui. Este exemplo foi extraído de Arciniega e Reddy (2007), em que são empregados elementos finitos quadriláteros de casca com ordem de aproximação variável (de um a oito), e GF ao longo da espessura do cilindro. Devido à simetria em relação aos eixos  $x_1 = 5,175$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,0$ , apenas um oitavo do

cilindro é discretizado (ver figura 9.73). Para simular numericamente este problema, foram empregados 600 elementos finitos sólidos tetraédricos com ordem de aproximação variável.

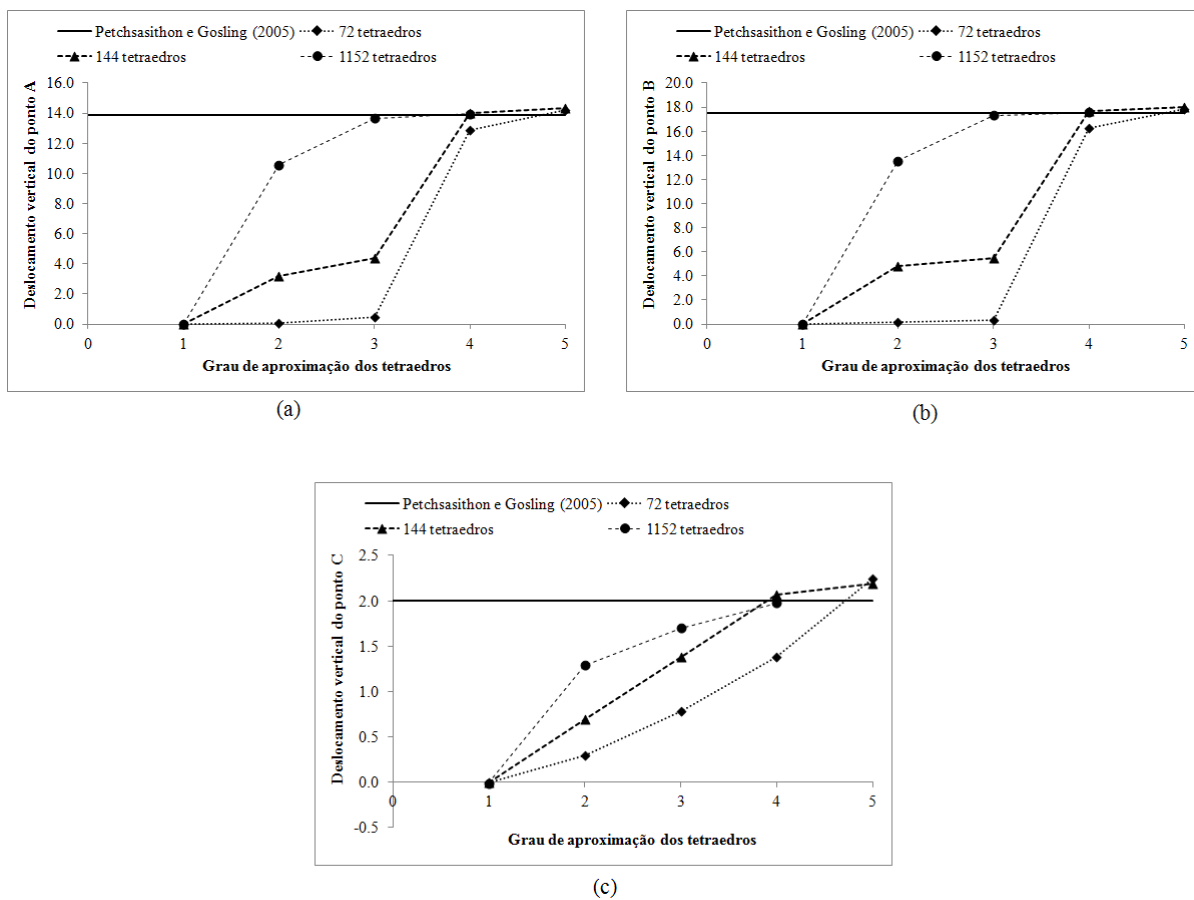


Figura 9.71. Deslocamentos verticais finais, para a placa engastada em forma de anel (figura 9.70), dos pontos: (a) A; (b) B; e (c) C.

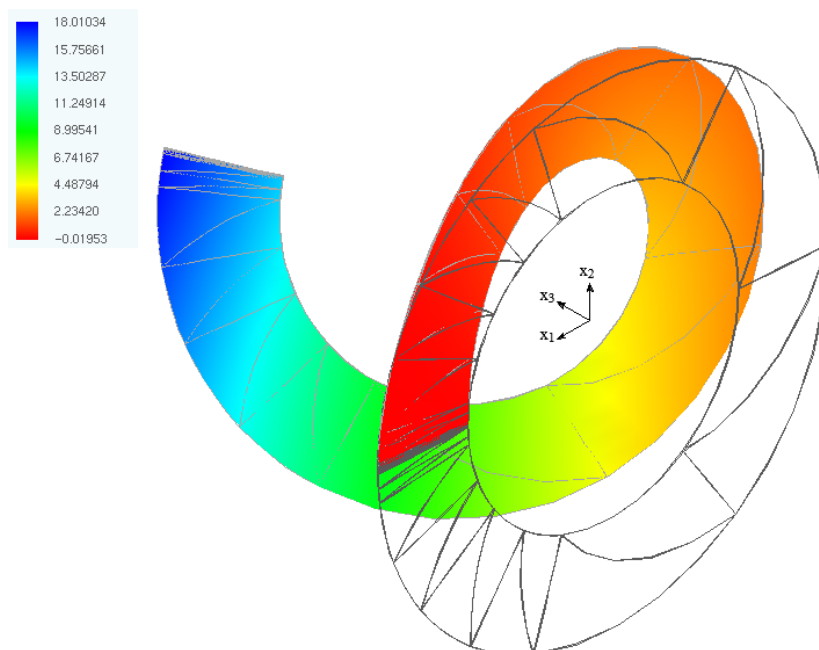


Figura 9.72. Configuração de equilíbrio final da placa engastada em forma de anel (figura 9.70). A legenda se refere aos deslocamentos verticais (na direção  $x_3$ ). Estes resultados foram obtidos com a malha 4356 nós e 144 elementos finitos sólidos tetraédricos do quinto grau.

A malha base, que é prismática, é transformada no cilindro com as seguintes expressões:

$$x_1 = 0,5175X_1 \quad (9.17.1)$$

$$x_2 = (4,906 + 0,94X_2) \sin(\pi X_3 / 20) \quad (9.17.2)$$

$$x_3 = (4,906 + 0,94X_2) \cos(\pi X_3 / 20) \quad (9.17.3)$$

onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas do cilindro; e  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são as coordenadas da malha base (ver figura 9.73).

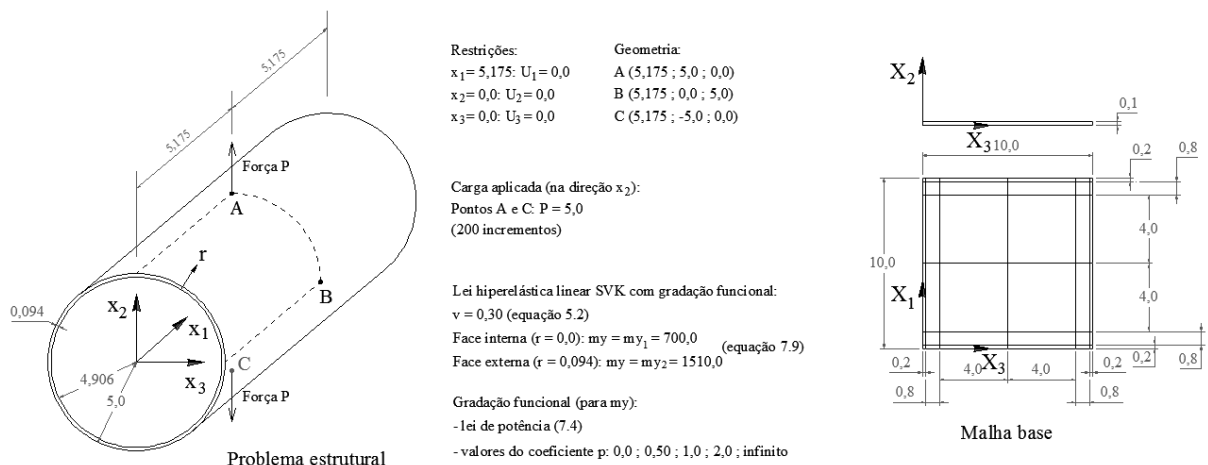


Figura 9.73. Cilindro fino com abas livres tracionado (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base). As linhas tracejadas ( - - - ) correspondem à parte discretizada.

Conforme a tabela 9.49, os deslocamentos finais  $u_2$  (A) e  $u_3$  (B) (ver figura 9.73) convergem para a solução da referência Arciniega e Reddy (2007) com aumento da ordem de aproximação. Para a malha do quarto grau, são ilustrados, nas figuras 9.74 e 9.75 respectivamente, os gráficos força versus deslocamento, e a configuração de equilíbrio final do cilindro homogêneo mais rígido ( $p \rightarrow \infty$ ).

### 9.1.9. Sólidos tridimensionais

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações numéricas de problemas estruturais com sólidos tridimensionais. Os elementos finitos sólidos utilizados aqui são os tetraedros (ver item 3.1 desta tese).

Tabela 9.49. Análise de convergência dos deslocamentos finais dos pontos A e B do cilindro da figura 9.73. As malhas possuem 600 elementos sólidos tetraédricos.

OPA	p = 0,0		p = 0,5		p = 1,0		p = 2,0		p = infinito	
	u <sub>2</sub> (A)	u <sub>3</sub> (B)	u <sub>2</sub> (A)	u <sub>3</sub> (B)	u <sub>2</sub> (A)	u <sub>3</sub> (B)	u <sub>2</sub> (A)	u <sub>3</sub> (B)	u <sub>2</sub> (A)	u <sub>3</sub> (B)
1	1.60	1.84	1.39	1.50	1.28	1.35	1.17	1.22	1.00	1.02
2	2.89	4.74	2.81	4.56	2.78	4.51	2.75	4.44	2.70	4.40
3	2.92	4.80	2.85	4.69	2.83	4.65	2.80	4.60	2.74	4.50
4	2.94	4.82	2.87	4.72	2.83	4.66	2.81	4.61	2.75	4.51
Ref	2.92	4.73	2.86	4.67	2.80	4.60	2.74	4.47	2.70	4.43

OPA = ordem do polinômio aproximador dos tetraedros. p = coeficiente de potência (equação 7.4).

A sigla "Ref" corresponde aos resultados obtidos com a análise de convergência da referência Arciniega e Reddy (2007)

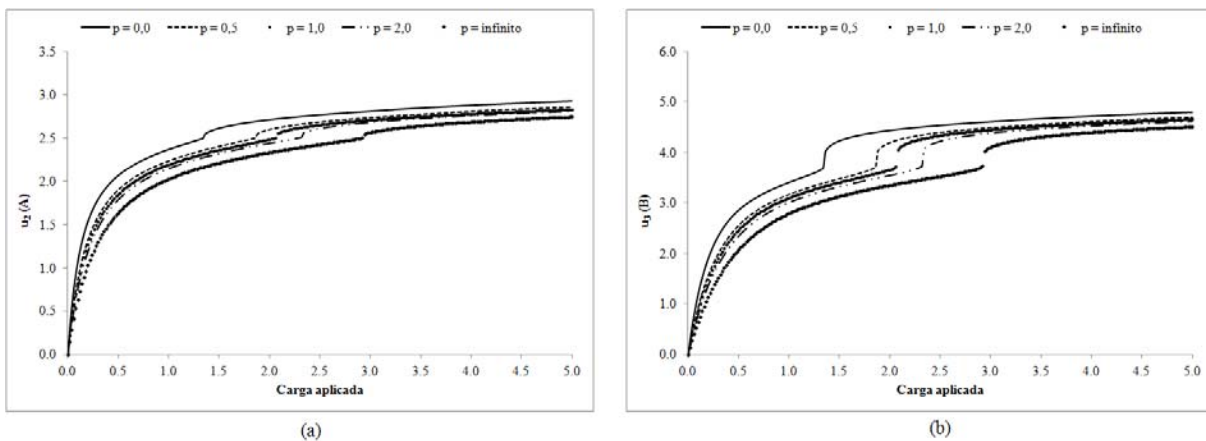


Figura 9.74. Gráficos carga aplicada versus deslocamentos do cilindro da figura 9.73: (a) deslocamento do ponto A na direção  $x_2$ ; (b) deslocamento do ponto B na direção  $x_3$ . Estes resultados foram obtidos a partir da malha de 8405 nós e 600 elementos finitos tetraédricos do quarto grau.

### 9.1.9.1. Bloco parcialmente carregado



O primeiro exemplo tridimensional é o bloco parcialmente comprimido, mostrado na figura 9.76. Devido à simetria em relação aos eixos  $x_2 = 10,0$  e  $x_3 = 10,0$ , apenas um quarto do bloco é discretizado. Os limites dos coeficientes isocóricos (ver lei constitutiva da figura 9.76) foram interpolados via método dos mínimos quadrados por Pascon (2008) a partir de dados experimentais de ensaio de tração com dois materiais elastoméricos preenchidos com negro de carbono.

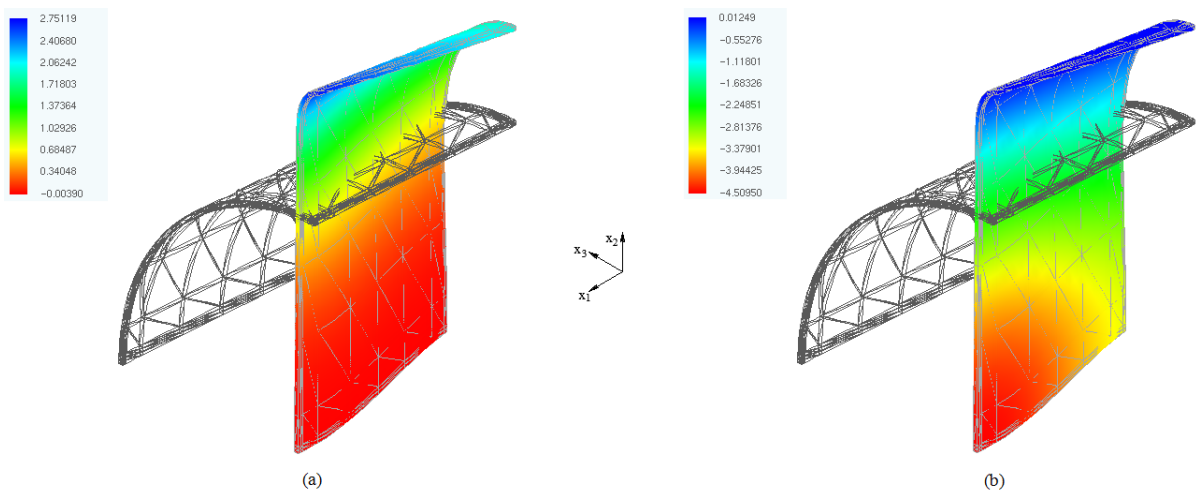


Figura 9.75. Configuração de equilíbrio final do cilindro homogêneo mais rígido (ver figura 9.73): (a) deslocamentos na direção  $x_2$ ; (b) deslocamentos na direção  $x_3$ . Estes resultados foram obtidos a partir da malha de 8405 nós e 600 elementos finitos tetraédricos do quarto grau.

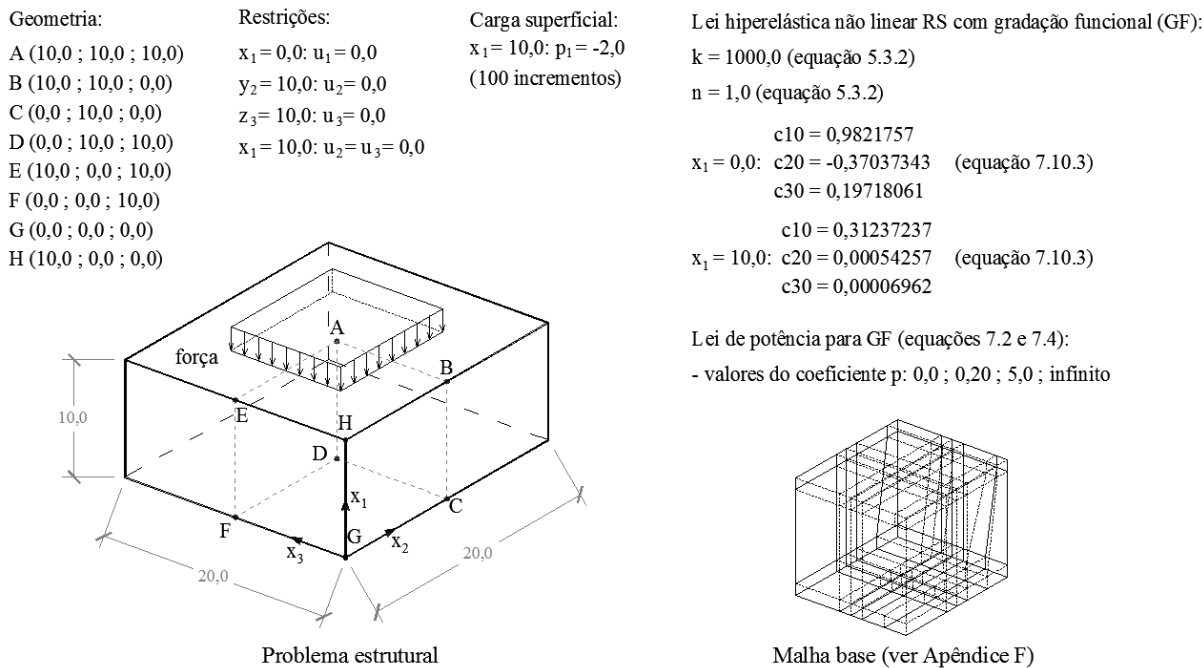


Figura 9.76. Bloco parcialmente comprimido (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base).

Em relação ao deslocamento vertical final do ponto A (ver figura 9.76), para os quatro valores do coeficiente de GF  $p$ , as malhas de elementos tetraédricos de ordem linear não são capazes de reproduzir o comportamento do bloco mesmo com grande número de elementos, e as malhas de elementos quadráticos precisam de um número muito elevado de tetraedros para fornecer resultados próximos aos das malhas de aproximação cúbica e do quarto grau (ver tabelas 9.50-53). Na figura 9.77 é ilustrada a configuração de equilíbrio final do bloco homogêneo mais flexível ( $p \rightarrow 0,0$ ), discretizado com uma das malhas.

Tabela 9.50. Deslocamentos verticais finais do ponto A para o bloco homogêneo parcialmente carregado mais flexível ( $p \rightarrow 0,0$ ).

OAP	NN	NE	$u_1$ (A)
	1573	7200	1.6
1	5733	28800	2.4
	10816	56250	2.4
2	847	450	4.1

	1573	900	4.7
	5733	3600	5.5
3	2560	450	5.9
	4864	900	6.1
4	5733	450	6.0

OAP = ordem de aproximação polinomial dos tetraedros. NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.  $u_1(A)$  = deslocamento final do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.76).

Tabela 9.51. Deslocamentos verticais finais do ponto A para o bloco parcialmente carregado com GF ( $p = 0, 20$ ).

OAP	NN	NE	$u_1(A)$
	847	3600	1.2
1	1573	7200	1.4
	5733	28800	2.2
2	847	450	3.8
	1573	900	4.3
3	5733	3600	4.7
	2560	450	4.9
4	4864	900	4.9
	5733	450	4.9

OAP = ordem de aproximação polinomial dos tetraedros. NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.  $u_1(A)$  = deslocamento final do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.76).

Tabela 9.52. Deslocamentos verticais finais do ponto A para o bloco parcialmente carregado com GF ( $p = 5, 0$ ).

OAP	NN	NE	$u_1$ (A)
	847	3600	0.8
1	1573	7200	0.8
	5733	28800	1.1
	847	450	2.5
2	1573	900	2.7
	5733	3600	2.7
	2560	450	2.7
3	4864	900	2.7
4	5733	450	2.8

OAP = ordem de aproximação polinomial dos tetraedros. NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.  $u_1$  (A) = deslocamento final do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.76).

Tabela 9.53. Deslocamentos verticais finais do ponto A para o bloco homogêneo parcialmente carregado mais rígido ( $p \rightarrow \infty$ ).

OAP	NN	NE	$u_1$ (A)
1	5733	28800	0.9
2	5733	3600	2.4
3	4864	900	2.5
4	5733	450	2.5

OAP = ordem de aproximação polinomial dos tetraedros. NN = número de nós. NE = número de elementos tetraédricos.  $u_1$  (A) = deslocamento final do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.76).

### 9.1.9.2. Bloco cúbico em balanço

O segundo exemplo tridimensional é o bloco cúbico em balanço mostrado na figura 9.78. Este problema estrutural foi extraído de Liu, Thoi e Lam (2008), os quais utilizaram elementos finitos sólidos tetraédricos de ordem linear. Porém, como a análise realizada em tal referência é geometricamente linear, não é possível realizar comparação de resultados, já que neste estudo a análise é não linear geométrica (ver item 4.6 desta tese). Devido à simetria em relação ao eixo  $x_3 = 0,0$ , apenas uma metade do bloco é discretizada. Os valores dos coeficientes isocóricos para  $x_2 = 1,0$  são os mesmos utilizados em Düster, Hartmann e Neff (2003).

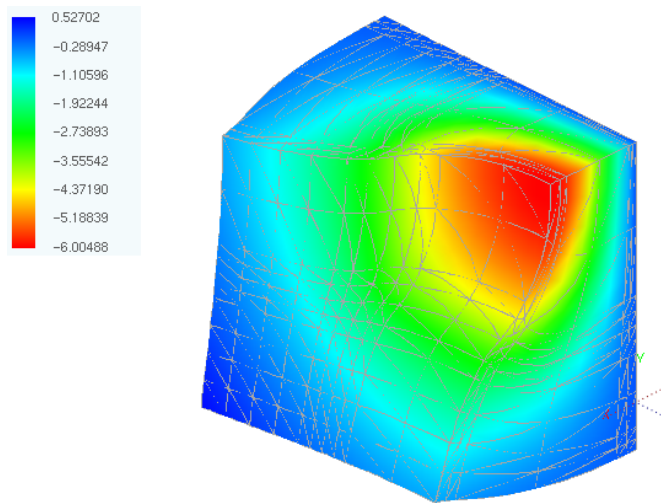


Figura 9.77. Deslocamentos verticais finais para o bloco homogêneo parcialmente carregado mais flexível (ver figura 9.76). Estes resultados foram obtidos a partir de uma malha com 4864 nós e 900 elementos tetraédricos de ordem cúbica.

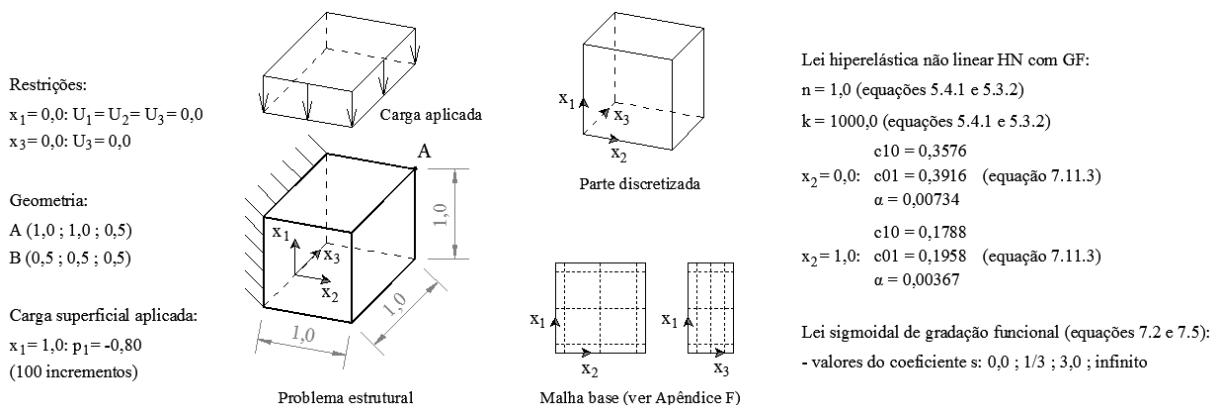


Figura 9.78. Bloco cúbico em balanço (geometria, condições de contorno, lei constitutiva e malha base).

Assim como no exemplo numérico anterior, em relação aos deslocamentos verticais do ponto A para os casos homogêneos e com GF (ver figura 9.78), as malhas de elementos tetraédricos de ordem linear travam independentemente da quantidade de elementos, e as malhas de elementos quadráticos necessitam de grande número de tetraedros para fornecerem resultados próximos aos das malhas de elementos cúbicos (ver figura 9.79). Para a malha de elementos mais refinada, é mostrada, na figura 9.80, a influência da lei constitutiva no gráfico força versus deslocamento vertical do ponto A. Nessa figura é possível notar que, nos casos com GF, a variação do coeficiente  $s$  não afeta consideravelmente o comportamento do bloco.

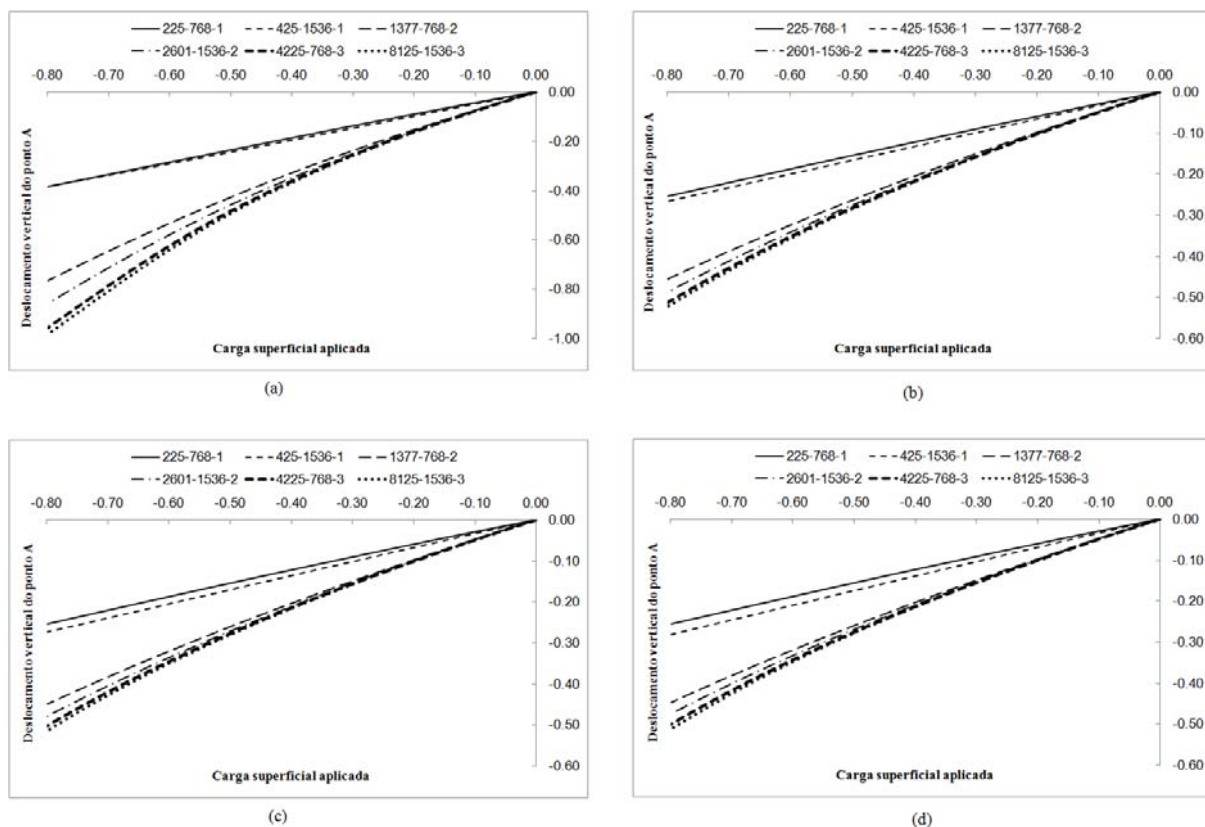


Figura 9.79. Deslocamentos verticais do ponto A do bloco da figura 9.78 para: (a) material homogêneo mais flexível ( $s \rightarrow 0,0$ ); (b) material com GF ( $s = 1/3$ ); (c) material com GF ( $s = 3,0$ ); (d) material homogêneo mais rígido ( $s \rightarrow \infty$ ). Os valores nas legendas correspondem, respectivamente, ao número de nós, de elementos finitos sólidos tetraédricos e à ordem de aproximação polinomial.

### 9.1.9.3. Sólido de Cook

Este exemplo pode ser considerado uma extensão tridimensional da membrana de Cook (ver item 9.1.8.1) e, portanto, foi chamado aqui de sólido de Cook (ver figura 9.81). De modo análogo à membrana, espera-se que haja singularidade na região do ponto D. Para simular numericamente este exemplo foram empregadas duas quantidades de elementos tetraédricos com grau de aproximação variável (de um a quatro): 48 e 96.

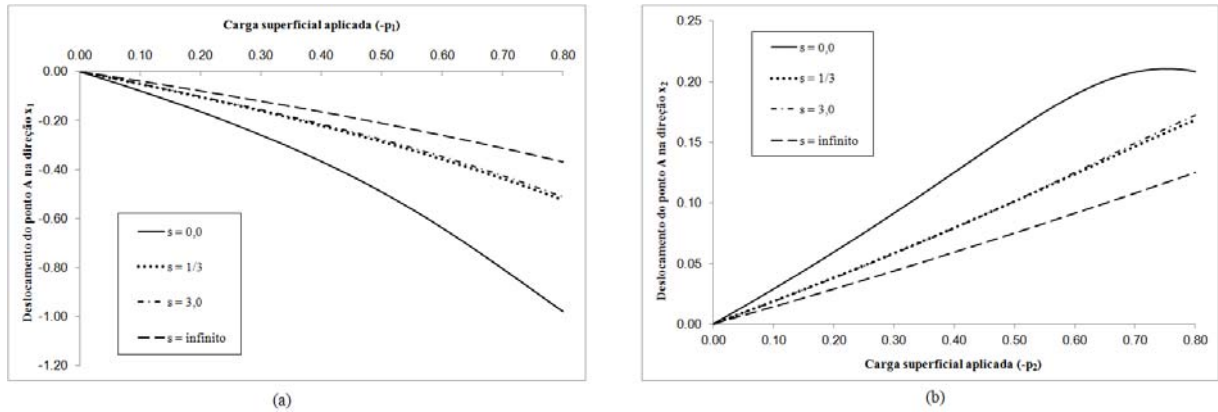
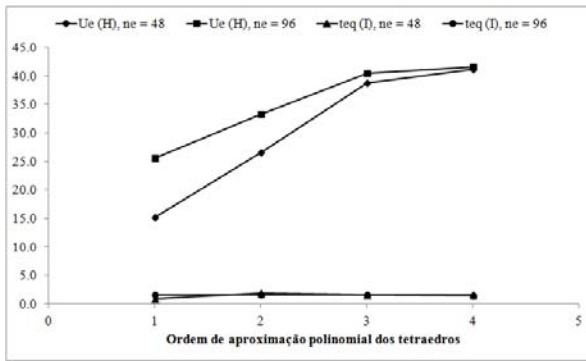


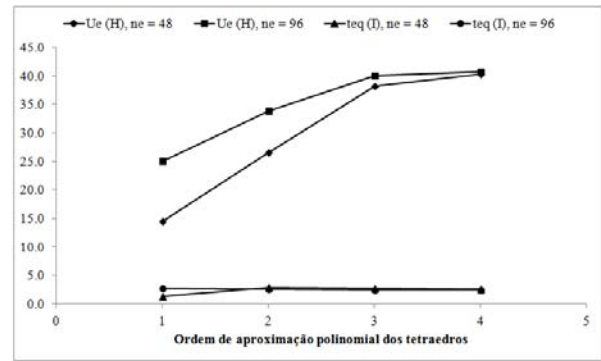
Figura 9.80. Carga superficial aplicada versus deslocamentos do ponto A do bloco da figura 9.80: (a) deslocamento ao longo de  $x_1$ ; (b) deslocamento ao longo de  $x_2$ . A variável  $s$  se refere ao coeficiente de GF (GF) sigmoidal (7.5). Estes resultados foram obtidos a partir de uma malha com 8125 nós e 1536 elementos finitos sólidos tetraédricos de ordem cúbica.



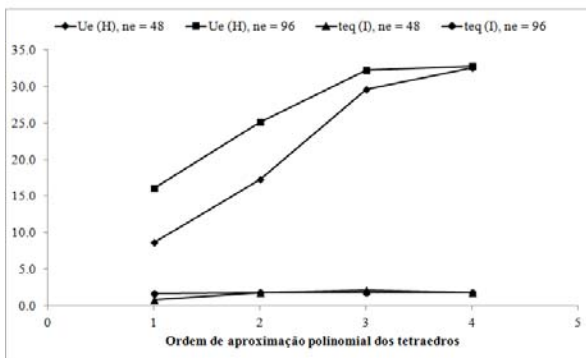




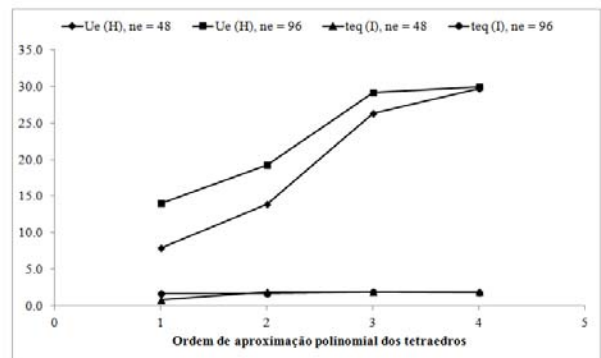
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9.82. Análise de convergência dos resultados numéricos do sólido de Cook da figura 9.81 no último passo de carga: (a) material homogêneo mais flexível ( $sn \rightarrow 0, 0$ ); (b) material com GF senoidal ( $sn = 0, 10$ ); (c) material com GF senoidal ( $sn = 10, 0$ ); (d) material homogêneo mais rígido ( $sn \rightarrow \infty$ ). Nas legendas dos gráficos,  $Ue(H)$ ,  $teq(I)$  e  $ne$  são, nesta ordem, a norma Euclideana dos deslocamentos (9.18) do ponto H, a tensão equivalente (9.13) no ponto I, e o número de elementos finitos sólidos tetraédricos.

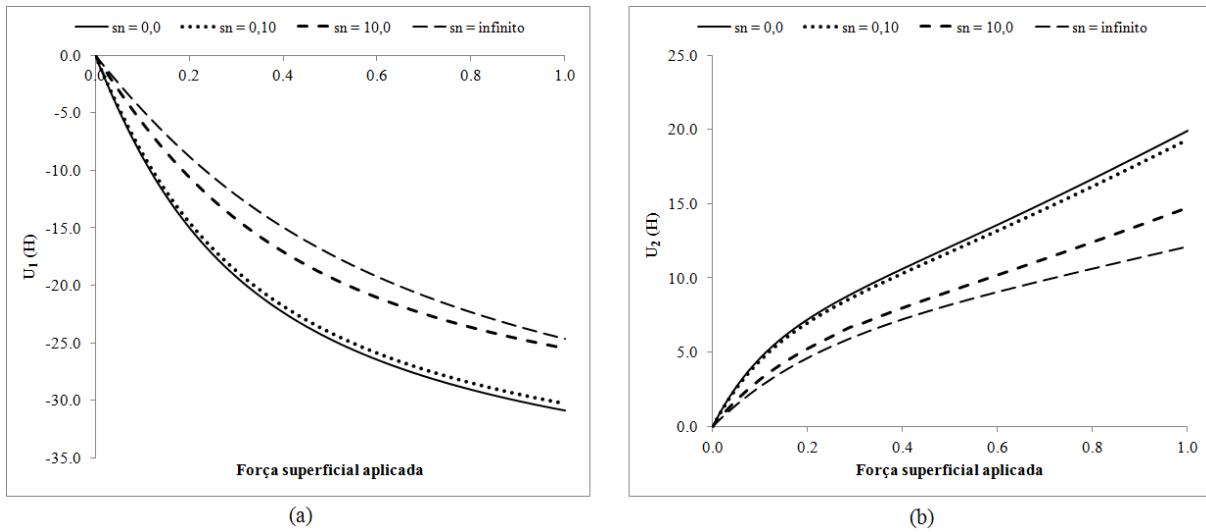


Figura 9.83. Gráficos carga aplicada versus deslocamentos do ponto H do sólido de Cook da figura 9.81: (a) deslocamentos ao longo de  $x_1$ ; (b) deslocamentos ao longo de  $x_2$ . A variável  $sn$  é o coeficiente de GF senoidal (7.7). Estes resultados foram obtidos a partir da malha com 1377 nós e 96 elementos finitos sólidos tetraédricos do quarto grau.

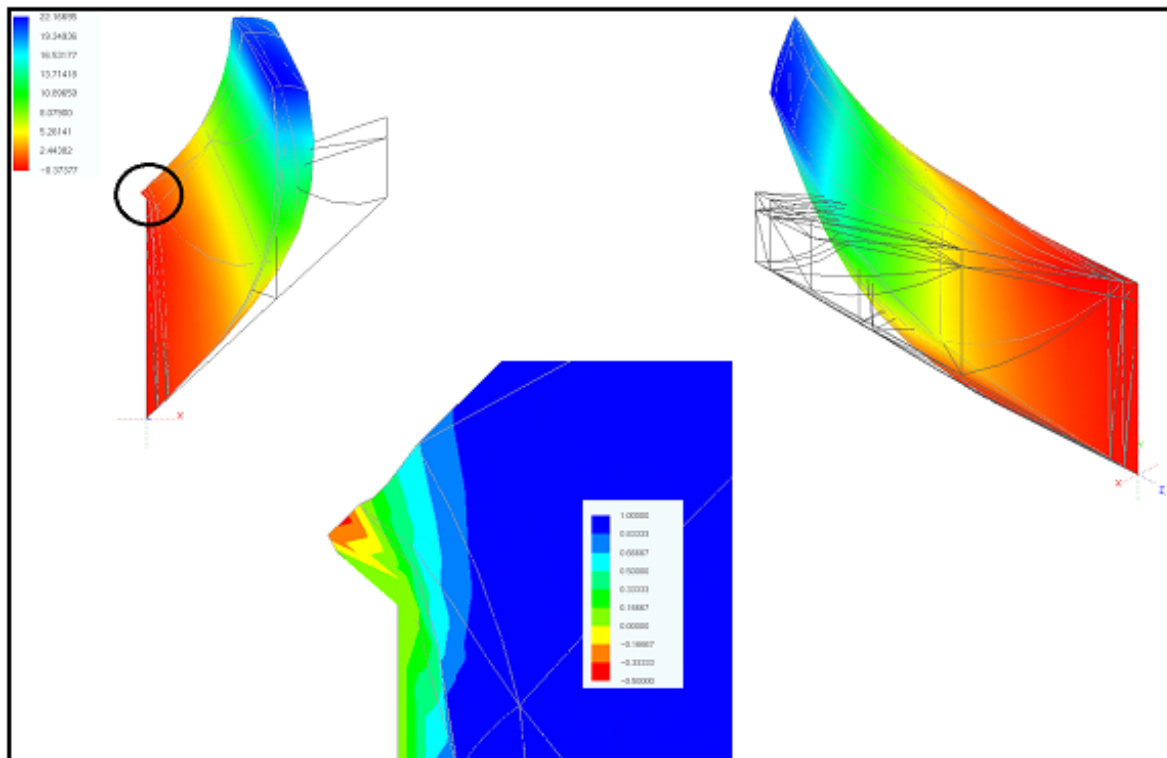


Figura 9.84. Configuração de equilíbrio final e deslocamentos na direção  $x_2$  da região do ponto D para o sólido de Cook homogêneo mais flexível ( $sn \rightarrow 0,0$ ). Estes resultados foram obtidos com a malha de 1377 nós e 96 elementos tetraédricos do quarto grau.

## *9.2. Estruturas constituídas de material em regime elastoplástico*

Nesta seção, são descritos os principais resultados das simulações numéricas de problemas estruturais com materiais em regime de deformações elastoplásticas. Para análise numérica dos referidos problemas, foi utilizado o código computacional cujo algoritmo é descrito no item 8.5 desta tese. Os elementos finitos adotados aqui são os sólidos tetraédricos (ver seção 3.1), e as quadraturas de integração numérica são as mesmas das tabelas 9.30 e 9.31 para, respectivamente, material homogêneo e material com gradação funcional (MGF). Ademais, o critério de plastificação adotado em todos os exemplos é o de von-Mises (ver equações 6.43 ou 6.44), e a evolução do parâmetro de encruamento isotrópico é dado em (6.53).

### *9.2.1. Comparação das estratégias de previsão elástica*

Após o desenvolvimento dos códigos computacionais de análise de materiais em regime elastoplástico (ver item 8.5), a primeira tarefa realizada foi a comparação das estratégias de previsão elástica, descritas na seção 8.5.1. Para as três estratégias (elástica, secante e elastoplástica), além dos resultados obtidos em termos de força aplicada versus deslocamento, são comparados o número total de iterações e o tempo de simulação. A ideia aqui é selecionar a melhor estratégia de previsão elástica (ou a que forneça os mesmos resultados com o menor tempo possível), e adotá-la para os exemplos numéricos restantes. Com relação ao modelo elastoplástico, foram adotadas as seguintes leis: relação hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (5.9), lei de encruamento isotrópico de Swift (6.50), e lei de encruamento cinemático não linear de Armstrong-Frederick (6.56). Os coeficientes do material adotados são fornecidos na tabela 9.54. Para a comparação das estratégias de previsão elástica, foram utilizadas as duas formulações elastoplásticas deste estudo: a de Green-Naghdi (ver seção 6.3) e a hiperelastoplástica (ver seção 6.4).

Tabela 9.54. Coeficientes do material homogêneo utilizados na comparação das estratégias de previsão elástica.

Lei	Coeficientes
Saint Venant-Kirchhoff (5.9)	$E = 10000$
	$\nu = 0,05$
	$K = 500$
Swift (6.50)	$E_0 = 0,1$
	$n = 0,25$
Armstrong-Frederick (6.56)	$c = 200$
	$b = 50$

Para comparar as estratégias de previsão elástica, foram analisados os casos de tração uniaxial (ver figura 9.1 e expressões 9.1) e cisalhamento simples (ver figura 9.10 e expressões 9.4). No caso da tração, a simulação numérica foi realizada via controle de deslocamento. Já no caso do cisalhamento, a análise numérica foi feita via controle de carga. Em ambos os casos, foram empregados seis elementos finitos sólidos tetraédricos de aproximação linear (ver item 3.1), e a simulação se deu em duas fases: o deslocamento (ou o carregamento) aumenta até um valor máximo, e depois diminui até zero. As quantidades de incrementos de deslocamento (ou de carga) empregadas em cada fase são: 10 e 1000. Além disso, o algoritmo de correção plástica é o retorno de Euler implícito (ver item 6.6). Na tração uniaxial (ver figura 9.1), os dados obtidos ao final de cada passo são a tensão longitudinal de engenharia ( $\sigma_1^{\text{eng}}$ ) e a deformação longitudinal de engenharia ( $\varepsilon_1^{\text{eng}}$ ):

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{S_0} \quad (9.19.1)$$

$$\varepsilon_1^{\text{eng}} = \frac{u_1(A)}{L_0} \quad (9.19.2)$$

onde  $F_1$  é a força longitudinal aplicada;  $S_0$  é a área inicial da seção transversal (normal ao eixo  $x_1$ );  $u_1(A)$  é o deslocamento longitudinal (ao longo de  $x_1$ ) do ponto A; e  $L_0$  é o comprimento inicial. Já no cisalhamento simples (ver figura 9.10), os valores obtidos são a tensão cisalhante de engenharia ( $\tau_{12}^{\text{eng}}$ ) e a distorção de engenharia ( $\gamma_{12}^{\text{eng}}$ ):

$$\tau_{12}^{\text{eng}} = \frac{F_1}{S_0} \quad (9.20.1)$$

$$\gamma_{12}^{\text{eng}} = \frac{u_1(25)}{L_0} \quad (9.20.2)$$

onde  $F_1$  é a força aplicada, ao longo da direção  $x_1$ , na face com coordenada  $x_2 = 25,0$ ;  $S_0 = 150,0$  é a área inicial da seção transversal (normal ao eixo  $x_1$ );  $u_1(25)$  é o deslocamento ao longo de  $x_1$  da face com coordenada  $x_2 = 25,0$ ; e  $L_0 = 25,0$  é a dimensão inicial ao longo de  $x_1$ .

Na tração uniaxial (ver figura 9.1) e no cisalhamento simples (ver figura 9.10), podem ser observados os seguintes aspectos: os gráficos tensão versus deformação de engenharia (ver expressões 9.19 e 9.20) são praticamente os mesmos, exceto para a simulação com 10 incrementos por fase, previsão elastoplástica e material hiperelastoplástico (ver figura 9.85); e o tempo de simulação e o número total de iterações são sempre menores para a estratégia de previsão elastoplástica (ver tabelas 9.55 e 9.56). Esse ganho, em termos de tempo de simulação, com a previsão elastoplástica já era esperado, visto que ao considerar, ao longo da tentativa, a possível variação dos parâmetros plásticos a convergência das iterações via método de Newton-Raphson (ver item 4.6) é melhorada (CRISFIELD, 2000). Pode-se notar, contudo, que o tempo médio de cada iteração é, de modo geral, maior para a estratégia de previsão elastoplástica, em relação às demais previsões, e é maior para a análise de materiais hiperelastoplásticos, em relação aos materiais com aproximação de Green-Naghdi (ver tabela 9.57). Isso porque, para realizar a previsão elastoplástica, é necessário calcular o operador tangente consistente elastoplástico, o que envolve grande número de cálculos (ver Apêndice D). Ademais, o número de cálculos também é maior para análise de materiais hiperelastoplásticos, em relação à aproximação de Green-Naghdi (ver seções 6.3 e 6.4). Assim sendo, para simulação dos próximos exemplos numéricos, os quais envolvem materiais em regime elastoplástico (ver item 6.1), foi decidido utilizar grande número de pequenos incrementos, e previsão elastoplástica (ver figuras 8.6 e 8.7).

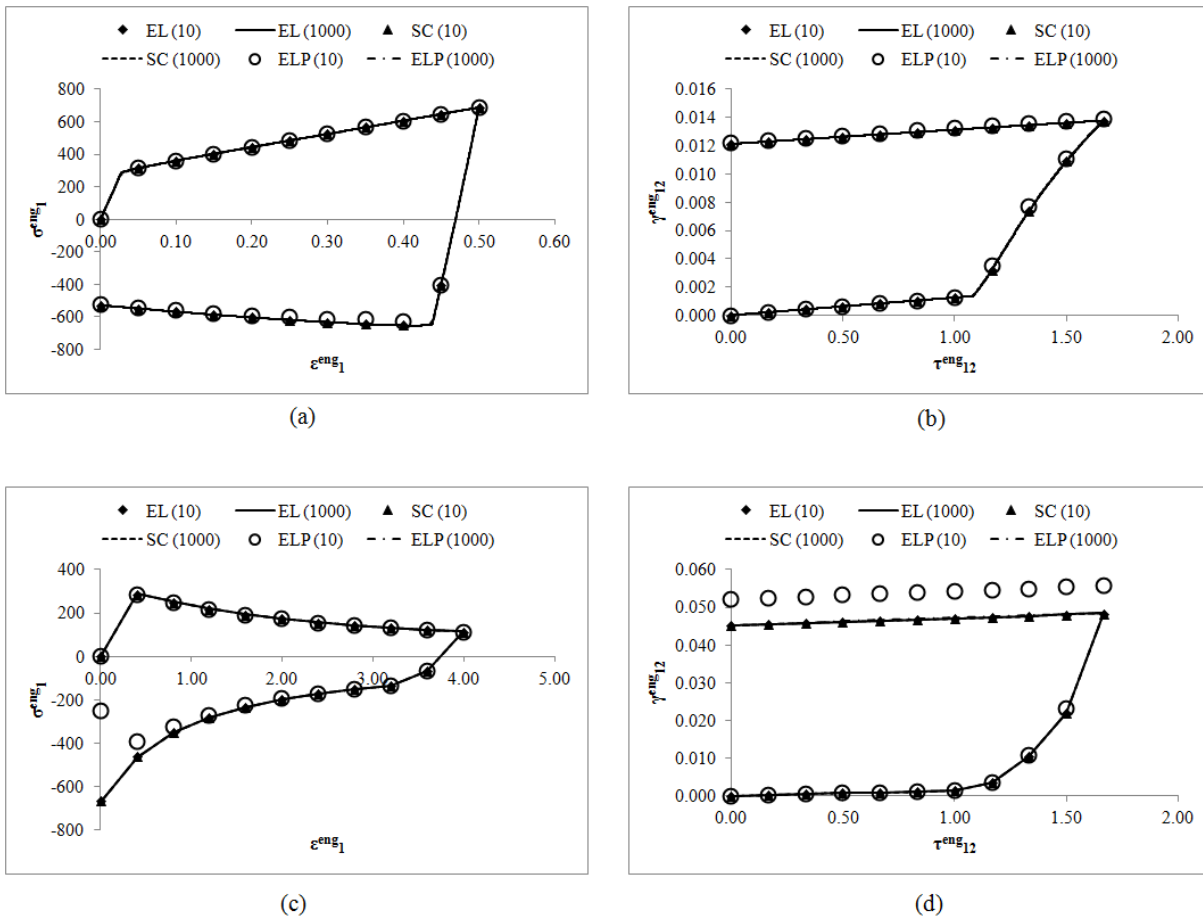


Figura 9.85. Comparação das estratégias de previsão elástica do item 8.5 - tensão versus deformação de engenharia: (a) tração uniaxial com aproximação de Green-Naghdi; (b) cisalhamento simples com aproximação de Green-Naghdi; (c) tração uniaxial com material hiperelastoplástico; (d) cisalhamento simples com material hiperelastoplástico. Na legenda dos gráficos, os números entre parêntesis denotam a quantidade de incrementos empregada na simulação numérica, e as siglas EL, SC e ELP correspondem, nesta ordem, às seguintes previsões: puramente elástica (ver figuras 8.2 e 8.3), método da secante (ver figuras 8.4 e 8.5), e elastoplástica (ver figuras 8.6 e 8.7). Para a tração uniaxial, a geometria é dada na figura 9.1, e os valores obtidos são calculados via equações (9.19). Para o cisalhamento, a geometria é dada na figura 9.10, e os valores obtidos são calculados via equações (9.20).

Tabela 9.55. Comparação das estratégias de previsão elástica do item 8.5 - tempo de simulação (em centésimos de segundo).

Estratégia de previsão (item 8.5)		Elástica		Secante		Elastoplástica	
Número de incrementos		10	1000	10	1000	10	1000
Tração uniaxial (figura 9.1)	GN	112	7645	62	4770	25	1295
	HEP	552	34317	540	34198	136	7344
Cisalhamento simples	GN	410	24283	217	13209	13	795

(figura 9.10)                      HEP      7394      270513      7274      292382      87      2611

GN e HEP correspondem, nesta ordem, à aproximação de Green-Naghdi (seção 6.3) e à hiperelastoplasticidade (seção 6.4)

Tabela 9.56. Comparação das estratégias de previsão elástica do item 8.5 - número total de iterações.

Estratégia de previsão (item 8.5)		Elástica		Secante		Elastoplástica	
Número de incrementos		10	1000	10	1000	10	1000
Tração uniaxial (figura 9.1)	GN	1034	70720	571	46210	179	12499
	HEP	1241	85759	838	62168	172	12396
Cisalhamento simples (figura 9.10)	GN	3678	229674	2106	135756	114	7788
	HEP	16949	715977	12436	546982	126	7731

GN e HEP correspondem, nesta ordem, à aproximação de Green-Naghdi (seção 6.3) e à hiperelastoplasticidade (seção 6.4)

Tabela 9.57. Comparação das estratégias de previsão elástica do item 8.5 - tempo médio (em centésimos de segundo) de cada iteração.

Estratégia de previsão (item 8.5)		Elástica		Secante		Elastoplástica	
Número de incrementos		10	1000	10	1000	10	1000
Tração uniaxial (figura 9.1)	GN	0.108	0.108	0.109	0.103	0.140	0.104
	HEP	0.445	0.400	0.644	0.550	0.791	0.592
Cisalhamento simples (figura 9.10)	GN	0.111	0.106	0.103	0.097	0.114	0.102
	HEP	0.436	0.378	0.585	0.535	0.690	0.338

GN e HEP correspondem, nesta ordem, à aproximação de Green-Naghdi (seção 6.3) e à hiperelastoplasticidade (seção 6.4)

### 9.2.2. Comparação dos algoritmos de correção plástica (retorno)

As discrepâncias observadas nos gráficos das figuras 9.85c e 9.85d ocorrem quando o número de incrementos é baixo (ou quando esses incrementos são muito grandes). Assim, tais discrepâncias parecem estar relacionadas ao acúmulo de erros decorrentes da fase de correção plástica (ver item 6.6). Isso porque, ao longo dessa fase, as variáveis plásticas não são exatamente calculadas, e sim aproximadas via algoritmo de retorno (implícito ou explícito). Dessa forma, os erros numéricos cometidos dependem, obviamente, do tamanho do incremento. Para analisar a influência do tamanho do incremento no cálculo das variáveis plásticas, via retornos implícito e explícito, foi utilizado o exemplo da tração uniaxial do item 9.2.1 (ver figura 9.1 e expressões 9.1). Neste caso, a barra tem seu comprimento multiplicado por 1,60, e as quantidades de incrementos de deslocamento longitudinal, aplicados na face  $x_1 = 1,0$ , são: 1, 10, 100 e 1000. Assim, os tamanhos dos incrementos de deslocamento são: 0,6; 0,06; 0,006; e 0,0006. Os coeficientes do modelo constitutivo são fornecidos na tabela 9.54, e é empregado aqui apenas o caso da aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3). De acordo com o item 9.2.1, a estratégia de previsão elástica (ver item 8.5) adotada aqui é a elastoplástica (ver figuras 8.6 e 8.7). Assim como no item anterior, foram utilizados seis tetraedros de aproximação linear (ver item 6.1).

A partir das figuras 9.86, 9.87 e 9.88, podem ser tiradas as seguintes conclusões: a força longitudinal e as variáveis plásticas  $E_{p11}$ ,  $\kappa$  e  $X_{11}$  ao final da simulação numérica convergem com aumento do número de incrementos para os retornos implícito e explícito; e as diferenças, com relação a essas variáveis, entre os algoritmos de retorno desaparecem com aumento do número de incrementos. Ademais, conforme o item 9.2.1, para amenizar erros de aproximação numérica na fase de correção plástica (ver item 6.6), foi decidido utilizar grande número de pequenos incrementos de carga (ou de deslocamento) para simular numericamente problemas estruturais com materiais em regime elastoplástico. Dessa forma, já que com tais incrementos as diferenças entre os métodos de retorno implícito e explícito são desprezíveis, e já que o retorno implícito é o mais estável numericamente (ALVES, 2003), a correção plástica empregada nos próximos exemplos numéricos é o retorno implícito de Euler (ver item 6.6). Além dessa questão de estabilidade, o retorno implícito de Euler é um dos mais empregados na análise numérica de materiais em regime elastoplástico.



Para ilustrar os cálculos realizados durante a fase de correção plástica (ver item 6.6), são dadas a seguir algumas das expressões envolvidas para o caso da barra sob tração uniaxial (ver item 6.7.1), com lei de encruamento isotrópico de Swift (6.50) e lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (6.56). Assim, para o retorno explícito de Euler, as equações (6.60) podem ser substituídas, no caso da referida barra, por:

$$(E_{p1})_{n+1} = (E_{p1})_n + \Delta\gamma(R_1)_n = (E_{p1})_n + \Delta\gamma \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right]_n \quad (9.21.1)$$

$$(\kappa)_{n+1} = (\kappa)_n + \Delta\gamma(r_\kappa)_n = (\kappa)_n + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (9.21.2)$$

$$(X_1)_{n+1} = (X_1)_n + \Delta\gamma(R_{X1})_n = (X_1)_n + \Delta\gamma \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_1 \right]_n \quad (9.21.3)$$

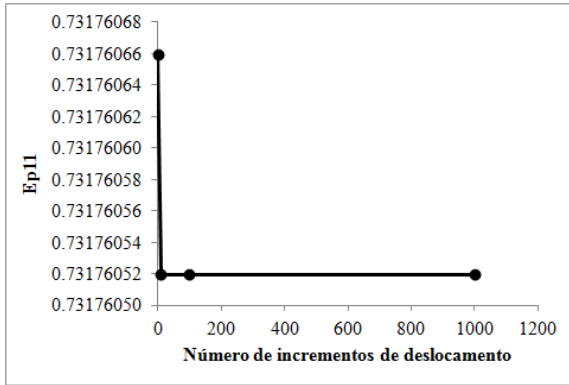
$$(X_2)_{n+1} = (X_2)_n + \Delta\gamma(R_{X2})_n = (X_2)_n + \Delta\gamma \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_2}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_2 \right]_n \quad (9.21.4)$$

$$(X_3)_{n+1} = (X_3)_n + \Delta\gamma(R_{X3})_n = (X_3)_n + \Delta\gamma \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_3}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_3 \right]_n \quad (9.21.5)$$

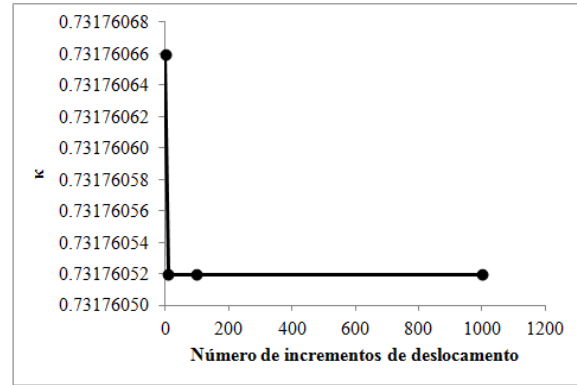
$$\Phi_n + \frac{\partial\Phi}{\partial E_{p1}} \Delta E_{p1} + \frac{\partial\Phi}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{X}} : \Delta \mathbf{X} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\gamma = - \frac{\Phi[E_{n+1}, (E_p)_n, \kappa_n, X_n]}{\frac{\partial\Phi}{\partial E_{p1}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right]_n + \frac{\partial\Phi}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{X}} : \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - b\mathbf{X} \right]_n} \quad (9.21.6)$$

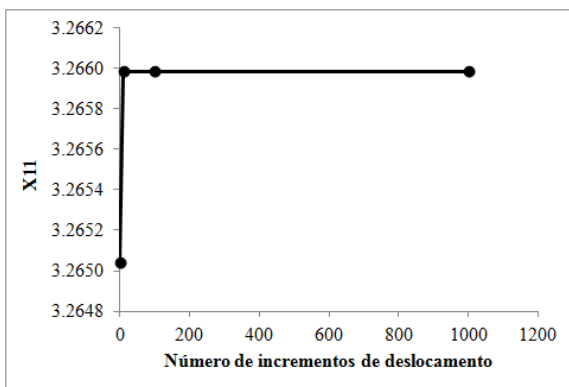
onde os índices  $n$  e  $n+1$  representam, nesta ordem, os respectivos valores no início e no final do incremento de deformação total  $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n$ .



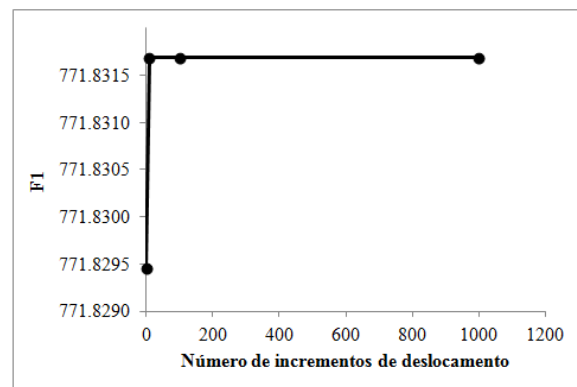
(a)



(b)



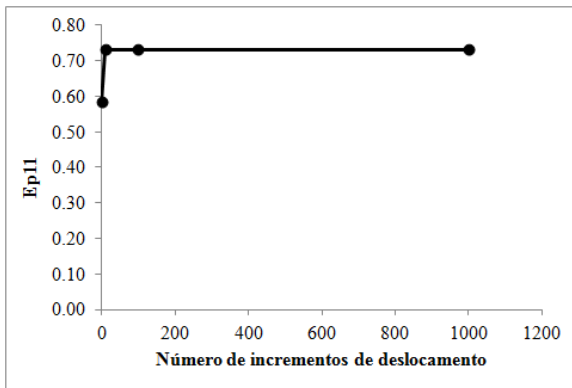
(c)



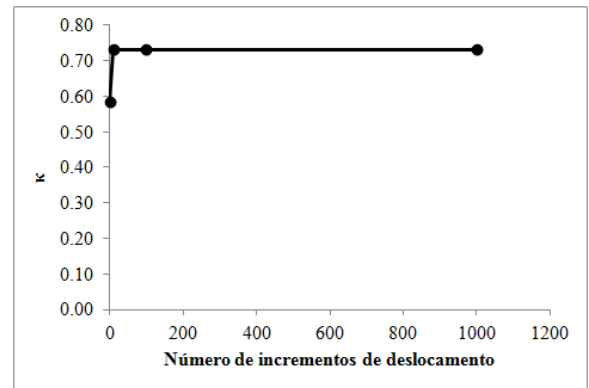
(d)

Figura 9.86. Variáveis plásticas ao final da simulação numérica com retorno implícito, para a barra sob tração uniaxial.  $E_{p11}$  é a deformação plástica longitudinal,  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico (6.33),  $X_{11}$  é a componente longitudinal do tensor das tensões inversas, e  $F_1$  é a força longitudinal aplicada.

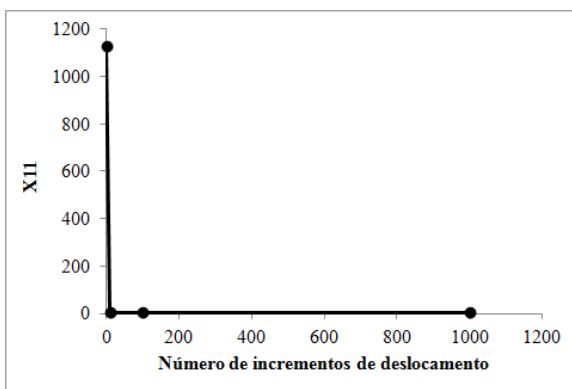
A partir do cálculo do escalar  $\Delta\gamma$ , as variáveis plásticas  $E_{p1}$ ,  $\kappa$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são atualizadas com as expressões (9.21). Se o valor de  $\Phi$  for menor do que certa tolerância, então a fase de correção plástica termina. Caso contrário, devem ser calculados os novos valores das funções  $\mathbf{R}$ ,  $r_\kappa$  e  $\mathbf{R}_X$ , as quais definem a evolução das variáveis plásticas, e deve ser determinado mais uma vez o valor de  $\Delta\gamma$ , via (9.21.6). Esses cálculos são realizados até que se obtenha um valor suficientemente pequeno para a função escalar  $\Phi$ .



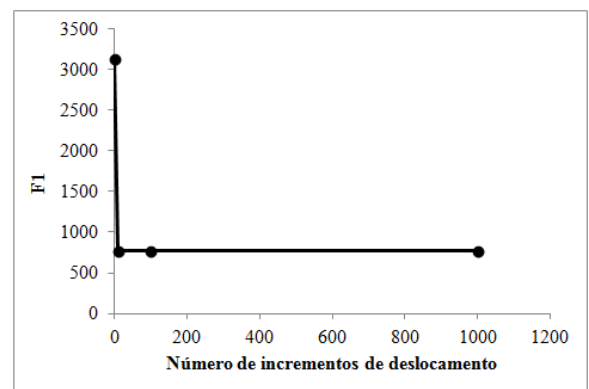
(a)



(b)

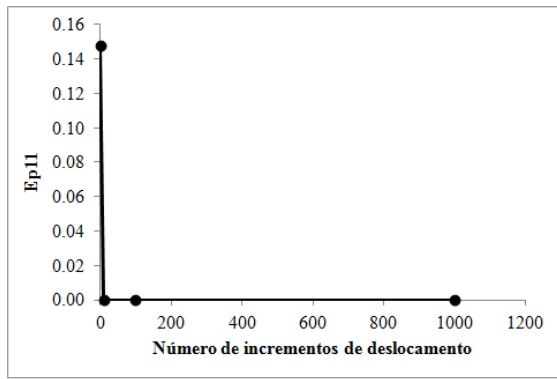


(c)

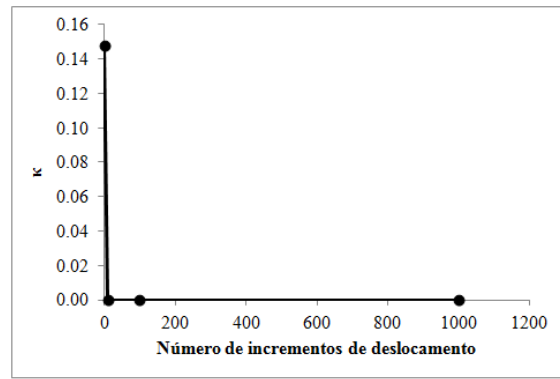


(d)

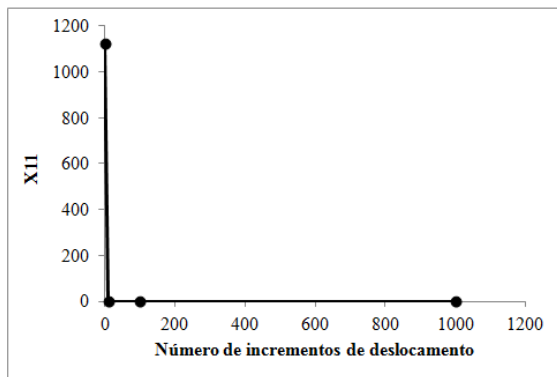
Figura 9.87. Variáveis plásticas ao final da simulação numérica com retorno explícito, para a barra sob tração uniaxial.  $E_{pII}$  é a deformação plástica longitudinal,  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico (6.33),  $X_{II}$  é a componente longitudinal do tensor das tensões inversas, e  $F_I$  é a força longitudinal aplicada.



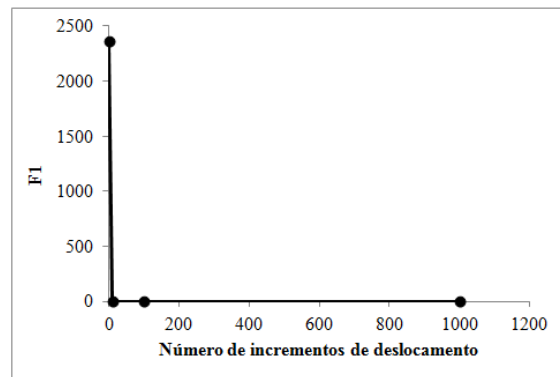
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9.88. Diferenças absolutas, com relação aos retornos implícito e explícito, entre as variáveis plásticas ao final da simulação numérica, para a barra sob tração uniaxial.  $E_{p11}$  é a deformação plástica longitudinal,  $\kappa$  é o parâmetro de encruamento isotrópico (6.33),  $X_{11}$  é a componente longitudinal do tensor das tensões inversas, e  $F_1$  é a força longitudinal aplicada.

Já para o retorno implícito de Euler, no caso da barra sob tração uniaxial (ver item 6.7.1), para realizar a correção plástica, o seguinte resíduo deve ser suficientemente pequeno (ver equações 6.61):

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} (E_{p1}) - (E_{p1})_n - \Delta\lambda (R_1) \\ \kappa - (\kappa)_n - \Delta\lambda (r_\kappa) \\ (X_1) - (X_1)_n - \Delta\lambda (R_{X1}) \\ (X_2) - (X_2)_n - \Delta\lambda (R_{X2}) \\ (X_3) - (X_3)_n - \Delta\lambda (R_{X3}) \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (E_{p1}) - (E_{p1})_n - \Delta\lambda \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] \\ \kappa - (\kappa)_n - \Delta\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \\ (X_1) - (X_1)_n - \Delta\lambda \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_1 \right] \\ (X_2) - (X_2)_n - \Delta\lambda \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_2}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_2 \right] \\ (X_3) - (X_3)_n - \Delta\lambda \left[ c \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_3}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} - bX_3 \right] \\ \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [K(E_0 + \kappa)^n] \end{Bmatrix} \quad (9.22)$$

onde o índice  $n$  corresponde aos valores fixos das variáveis no início do incremento de deformação total  $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n$ ; e as variáveis sem índice representam os respectivos valores (incógnitos) ao final do incremento. Como as funções  $\mathbf{R}$ ,  $r_\kappa$  e  $\mathbf{R}_X$  dependem, neste caso, das desconhecidas variáveis plásticas ao final do incremento, as expressões do resíduo (9.22) possuem caráter não linear. A aplicação do método de Newton-Raphson a esse resíduo (ver equações 6.62 e 6.63) resulta num sistema linear  $6 \times 6$ , cujas incógnitas são os seguintes valores ao final do incremento:  $E_{p1}$ ,  $\kappa$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $\Delta\gamma$ . No caso da barra sob tração uniaxial com aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.7.1), para ambos os algoritmos de retorno implícito e explícito, as deformações plásticas transversais ( $E_{p2}$  e  $E_{p3}$ ) podem ser atualizadas via equação (6.86.2).

### 9.2.3. Tração uniaxial

A barra prismática sob tração uniaxial da figura 6.1 foi simulada numericamente com os códigos computacionais desenvolvidos neste estudo (ver item 8.5) e com o programa EPIM3D (ver item 8.8). As várias situações analisadas são descritas a seguir. Para todos os casos, são adotados o critério de plastificação de von-Mises (6.43 ou 6.44), a lei de fluxo plástico associativa (6.45 ou 6.46) e a lei de evolução do parâmetro de encruamento isotrópico (6.53).

### 9.2.3.1. Material homogêneo com encruamento isotrópico sob pequenas deformações elásticas

No primeiro caso, a análise numérica foi realizada via controle de deslocamento, sendo que o comprimento da barra aumenta 50% em 100 incrementos. Com relação à malha de elementos finitos, foram utilizados seis tetraedros de aproximação linear (ver item 3.1). A simulação foi feita com três programas: o código computacional desenvolvido aqui baseado na aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3); o código computacional desenvolvido aqui baseado na hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4); e o programa EPIM3D. Em relação ao modelo elastoplástico, são utilizadas as seguintes relações constitutivas: lei hiperelástica linear de Saint Venant-Kirchhoff (ver equações 5.2, 5.9 e 6.38); e lei de encruamento isotrópico de Swift (6.50). Os valores dos coeficientes do material são:

$$E = 206000,0 \quad (9.23.1)$$

$$\nu = 0,30 \quad (9.23.2)$$

$$K = 565,32 \quad (9.23.3)$$

$$E_0 = 0,010343987 \quad (9.23.4)$$

$$n = 0,2589 \quad (9.23.5)$$

Para a aproximação de Green-Naghdi, da seção 6.3, e para os coeficientes (9.23) a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1, para pequenas deformações elásticas, é (ver equação 8.52):

$$\sigma_1^{\text{eng}}(\lambda_1) = \frac{F_1}{A_0} = 565,32 \left[ 0,010343987 + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) \right]^{0,2589} \lambda_1 \quad (9.24.1)$$

$$\lambda_1 = \frac{L_f}{L_0} \quad (9.24.2)$$

onde  $A_0 = b_0 h_0$  é a área inicial da seção transversal da barra;  $\lambda_1$  é o alongamento longitudinal; e  $L_f$  e  $L_0$  são os comprimentos final e inicial da barra, respectivamente. Já para a formulação hiperelastoplástica, da seção 6.4, e para o modelo mecânico do programa EPIM3D, a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1, para pequenas deformações elásticas, é (ver equação 8.54):

$$\sigma_1^{\text{eng}}(\lambda_1) = \frac{F_1}{A_0} = 565,32 \left[ 0,010343987 + \ln(\lambda_1) \right]^{0,2589} \frac{1}{\lambda_1} \quad (9.25)$$

Pode-se notar, facilmente, a diferença nas expressões para cálculo da força (9.24) e (9.25).

Com os coeficientes (9.23), é possível mostrar que as deformações elásticas na barra da figura 6.1 são pequenas. Em primeiro lugar, o limite elástico da barra, para a aproximação de Green-Naghdi da seção 6.3, é (ver expressão 6.93):

$$\lambda_{LE} = \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\sigma_{\kappa}(0)}{E}\right)} = \sqrt{\left(1 + 2 \frac{565,32(0,010343987)^{0,2589}}{206000}\right)} = 1,00083994 \quad (9.26)$$

onde  $\lambda_{LE}$  é o alongamento longitudinal (9.24.2) a partir do qual o material entra em regime elastoplástico. Pode-se observar que o limite elástico acima é atingido para um alongamento muito pequeno ( $\lambda_1 \approx 1$ ). Ademais, sabe-se que, em regime elastoplástico, a variação da deformação plástica longitudinal, ao longo do incremento de deformação total

$\Delta E_1 = E_{1(1)} - E_{1(0)}$ , é (ver expressões 6.84.1 e 6.87):

$$\begin{aligned} \Delta E_{pl} = E_{pl(1)} - E_{pl(0)} &= \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} \left( \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial E_1}}{\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial E_1} \sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right) \frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} \right] \sqrt{\frac{2}{3}}} \right) dE_1 \Rightarrow \\ \Delta E_{pl} &= \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} \left\{ \frac{E \sqrt{\frac{2}{3}}}{\left[ E \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right) Kn (E_0 + \kappa)^{n-1} \right]} \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} dE_1 \quad (9.27) \end{aligned}$$

Se o módulo elástico de Young  $E$  é muito maior do que os coeficientes da lei de Swift (6.50)  $K$ ,  $E_0$  e  $n$ , como é o caso dos coeficientes (9.23), então a expressão acima se reduz, aproximadamente, ao caso de material elastoplástico perfeito (ver equações 6.88 e 6.89):

$$\Delta E_{pl} \approx \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} \left\{ \frac{E \sqrt{\frac{2}{3}}}{\left[ E \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \right]} \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} dE_1 = \int_{E_{1(0)}}^{E_{1(1)}} dE_1 = \Delta E_1 \quad (9.28)$$

Assim, a variação da parcela de deformação elástica longitudinal ( $\Delta E_{el} = \Delta E_1 - \Delta E_{pl}$ ) é muito pequena em relação à variação da parcela plástica ( $\Delta E_{pl}$ ). Analogamente, para o caso de material hiperelastoplástico (ver seção 6.4), pode-se mostrar que as deformações elásticas na barra, com adoção dos coeficientes (9.23), também serão pequenas (ver equações 6.110 e 6.112).

A partir das figuras 9.89 e 9.90, podem ser tiradas as seguintes conclusões: para a decomposição aditiva de Green-Naghdi, da seção 6.3, e para a hiperelastoplasticidade, da seção 6.4, a simulação numérica está de acordo com a respectiva solução analítica; os resultados numéricos do código computacional desenvolvido neste estudo (ver item 8.5) baseado na hiperelastoplasticidade são praticamente os mesmos do programa EPIM3D, o que está de acordo com o item 8.8.6; e os resultados analíticos e numéricos, para todas as formulações, são próximos para pequenas deformações ( $\lambda_1 \approx 1$ ).

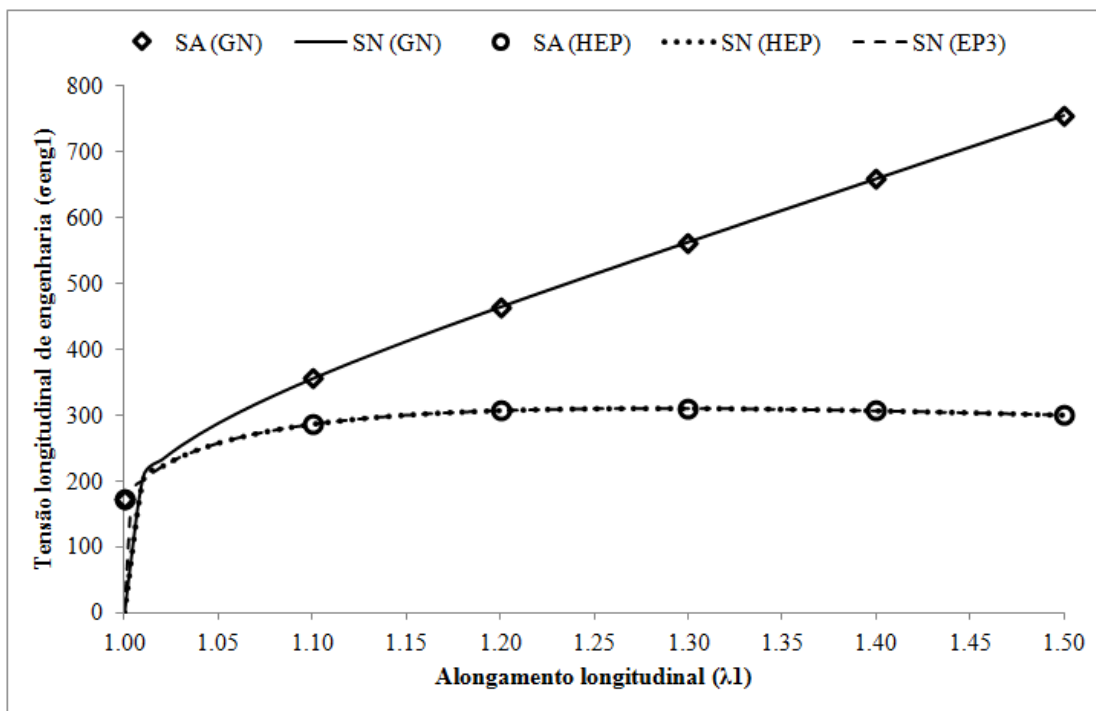


Figura 9.89. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra da figura 6.1 com lei hiperelástica linear (6.38) e lei de Swift (6.50) sob pequenas deformação elásticas. As siglas SA, SN, GN, HEP e EP3 denotam, nesta ordem, a solução analítica (9.24) ou (9.25), a simulação numérica, a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4) e o programa EPIM3D (ver seção 8.8).



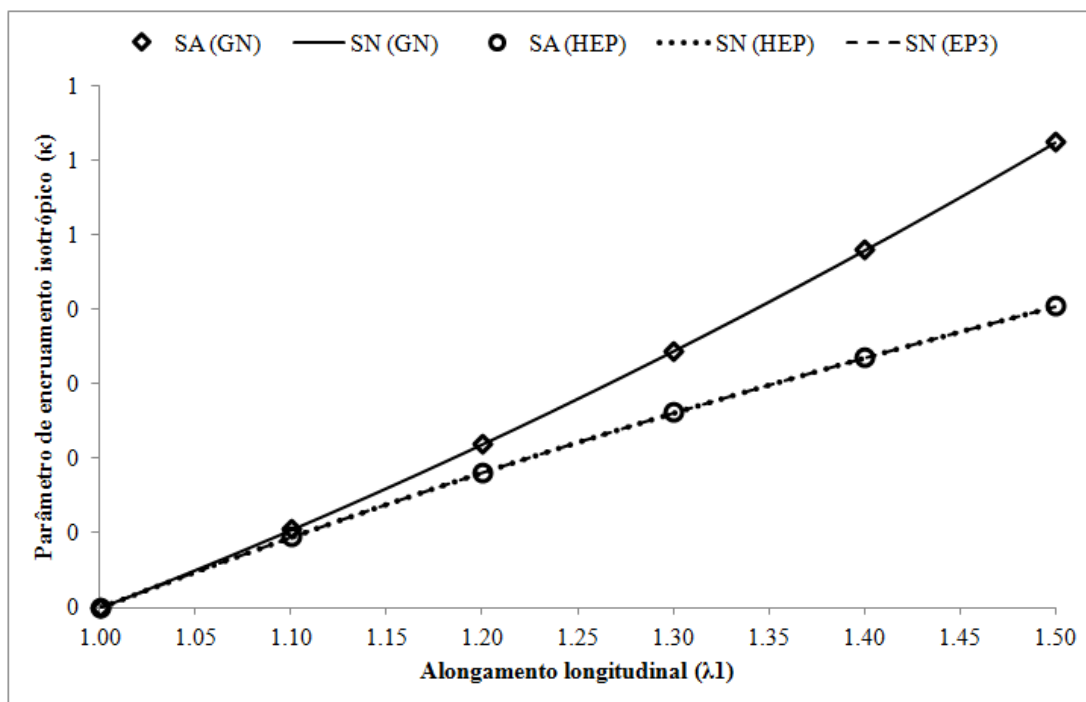


Figura 9.90. Parâmetro de encruamento isotrópico (6.86.3) ou (6.111.2) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra da figura 6.1 com lei hiperelástica linear (6.38) e lei de Swift (6.50) sob pequenas deformação elásticas. As siglas SA, SN, GN, HEP e EP3 denotam, nesta ordem, a solução analítica (6.86.3) ou (6.111.2), a simulação numérica, a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4) e o programa EPIM3D (ver seção 8.8).

### 9.2.3.2. Material homogêneo elastoplástico perfeito sob grandes deformações elastoplásticas

O segundo caso analisado, para a barra da figura 6.1, é aquele com os seguintes coeficientes do material:

$$E = 200,0 \quad (9.29.1)$$

$$\nu = 0,010 \quad (9.29.2)$$

$$a_0 = 100,0 \quad (9.29.3)$$

onde os coeficientes elásticos  $E$  e  $\nu$  são, nesta ordem, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson (ver equações 5.9 e 6.38); e  $a_0$  é o único coeficiente não nulo da lei de encruamento isotrópico polinomial (6.49), o que equivale a modelar o material como sendo elastoplástico perfeito. Com os coeficientes (9.29), os limites elásticos para a aproximação de Green-Naghdi da seção 6.3 e para a hiperelastoplasticidade da seção 6.4 são, respectivamente (ver expressões 6.93 e 6.116):

$$\lambda_{LE} (GN) = \sqrt{\left(1 + 2 \frac{\sigma_{\kappa}(0)}{E}\right)} = \sqrt{\left(1 + 2 \frac{100}{200}\right)} = \sqrt{2} = 1,414214 \quad (9.30.1)$$

$$\frac{E}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = \sigma_{\kappa}(0) \Rightarrow \frac{200}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = 100 \Rightarrow \lambda_{LE} (HEP) = 1,272020 \quad (9.30.2)$$

onde as siglas GN e HEP correspondem à decomposição de Green-Naghdi e à hiperelasticidade, respectivamente. A partir desses limites, o material entra em regime elastoplástico. Além disso, sabe-se que, em regime elastoplástico, a variação da deformação plástica longitudinal ao longo do incremento de deformação total  $\Delta E_1 = E_{1(1)} - E_{1(0)}$  ou

$\Delta \lambda_1 = \lambda_{1(1)} - \lambda_{1(0)}$  é (ver equações 6.89 e 6.115):

$$\Delta E_{pl} = \Delta E_1 \quad (9.31.1)$$

$$\Delta \lambda_{pl} = \frac{1}{\lambda_{el}} \Delta \lambda_1 \quad (9.31.2)$$

onde a primeira expressão é válida para a aproximação de Green-Naghdi, e a segunda é válida para a hiperelastoplasticidade. Portanto, em ambos os casos, as deformações elásticas longitudinais não são pequenas e, assim, não podem ser desprezadas. Em regime elastoplástico, tais deformações se mantêm constantes e iguais a:

$$E_{el} (GN) = \frac{1}{2} [\lambda_{LE} (GN)^2 - 1] = 1,0 \quad (9.32.1)$$

$$\lambda_{el} = \lambda_{LE} (HEP) = 1,272020 \quad (9.32.2)$$

onde a primeira expressão é válida para a aproximação de Green-Naghdi (GN), e a segunda é válida para a hiperelastoplasticidade (HEP). De acordo com as expressões (9.32.1), (6.83.3) e (9.30.1), o parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  resultante da formulação de Green-Naghdi em regime elastoplástico é:

$$\kappa(GN) = E_{pl} = E_1 - E_{el} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) - \frac{1}{2}(\lambda_{LE}^2 - 1) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1) - \frac{1}{2} \quad (9.33)$$

Já para a hiperelastoplasticidade, conforme as equações (9.32.2), (6.111.2) e (9.30.2), o parâmetro  $\kappa$  em regime elastoplástico é:

$$\kappa(HEP) = \ln(\lambda_{pl}) = \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{el}}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_1}{1,27202}\right) = \ln(\lambda_1) - 0,240606 \quad (9.34)$$

Em regime elástico, isto é, para alongamentos longitudinais  $\lambda_1$  menores do que o limite elástico  $\lambda_{LE}$ , de acordo com a expressão (6.76.1), a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1, cujos coeficientes do material são dados em (9.29), é:

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = \frac{E}{2}(\lambda_1^3 - \lambda_1) = 100(\lambda_1^3 - \lambda_1) \quad (9.35)$$

Esta equação é válida para a aproximação de Green-Naghdi, dada na seção 6.3, e para a hiperelastoplasticidade, dada na seção 6.4.

Para a formulação do programa EPIM3D, é possível escrever as seguintes expressões para a barra da figura 6.1 em regime elástico (ver item 8.8.2):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \ln(\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \ln(\lambda_1) \end{bmatrix} \quad (9.36.1)$$

$$\ln(\lambda_2) = \ln(\lambda_3) = -\nu \ln(\lambda_1) \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-\nu} \quad (9.36.2)$$

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_f} = \frac{F_1}{A_0 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{F_1}{A_0 \lambda_1^{-2\nu}} = E(\varepsilon_{L1}) = E[\ln(\lambda_1)] \Rightarrow \sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = \frac{E \ln(\lambda_1)}{\lambda_1^{2\nu}} \quad (9.36.3)$$

$$\sigma_1 = E[\ln(\lambda_{LE})] = a_0 \Rightarrow \lambda_{LE} = \exp\left(\frac{a_0}{E}\right) \quad (9.36.4)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$  é a deformação logarítmica (ALVES, 2003);  $\nu$  é o coeficiente de Poisson;  $\sigma_1$  é a tensão longitudinal de Cauchy (ver equações 4.1 e 4.2);  $A_f$  é a área final da seção transversal; e  $\lambda_{LE}$  é o limite elástico, a partir do qual o material entra em regime elastoplástico. Assim, para os coeficientes (9.29), a tensão longitudinal de engenharia em regime elástico e o limite elástico são, respectivamente:

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = \frac{200 \ln(\lambda_1)}{\lambda_1^{0,02}} \quad (9.37.1)$$

$$\lambda_{LE} = \exp\left(\frac{100}{200}\right) = 1,648721 \quad (9.37.2)$$

Em regime elastoplástico, isto é, para alongamentos longitudinais  $\lambda_1$  maiores do que o limite elástico  $\lambda_{LE}$ , conforme a expressão (6.91) e os coeficientes (9.29), a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1 para a formulação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), é:

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = S_1 \lambda_1 = \sigma_0 \lambda_1 = a_0 \lambda_1 = 100 \lambda_1 \quad (9.38)$$

onde  $S_1$  é a componente longitudinal do segundo tensor de Piola-Kirchhoff (ver equação 6.79.1). Já para a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4), de acordo com a expressão (6.115) e

com os coeficientes (9.29), a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1 em regime elastoplástico é:

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = \frac{M_{e1}}{\lambda_1} = \frac{\sigma_0}{\lambda_1} = \frac{a_0}{\lambda_1} = \frac{100}{\lambda_1} \quad (9.39)$$

onde  $M_{e1}$  é a componente longitudinal do tensor das tensões de Mandel (ver expressão 6.98.2).

Por fim, resta determinar a tensão longitudinal de engenharia atuante na barra da figura 6.1 em regime elastoplástico para o programa EPIM3D. De acordo com a resposta elástica desse programa (8.18) e com os coeficientes (9.29), a parcela elástica da deformação logarítmica, em regime elastoplástico, mantém-se constante e igual a (ver expressões 9.36 e 9.37):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_e &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_{e1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_{e2}) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_{e3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_{LE}) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \ln(\lambda_{LE}) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \ln(\lambda_{LE}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,005 & 0 \\ 0 & 0 & -0,005 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.40)$$

Assim como no caso da formulação de Green-Naghdi e da hiperelastoplasticidade, não se pode desprezar a parcela de deformação elástica. Além disso, conforme a condição de incompressibilidade plástica (6.107), a parcela plástica de deformação logarítmica em regime elastoplástico é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_{p1}) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\lambda_{p2}) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\lambda_{p3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(\lambda_{p1}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \ln(\lambda_{p1}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \ln(\lambda_{p1}) \end{bmatrix} \\ &= \ln(\lambda_{p1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Considerando a decomposição do gradiente (6.94), os alongamentos longitudinais total e plástico, em regime elastoplástico, relacionam-se da seguinte forma:

$$\lambda_{p1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{e1}} = \frac{\lambda_1}{1,648721} \quad (9.42)$$

Assim sendo, a tensão longitudinal de engenharia (ver expressão 9.19.1) resulta em:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{F_1}{A_f} = \frac{F_1}{A_0 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{F_1}{A_0 \lambda_{e2} \lambda_{p2} \lambda_{e3} \lambda_{p3}} = \frac{F_1}{A_0 (\lambda_{LE})^{-v} (\lambda_{p1})^{-1/2} (\lambda_{LE})^{-v} (\lambda_{p1})^{-1/2}} \\ \sigma_1 &= \frac{F_1}{A_0 (\lambda_{LE})^{-2v} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_{LE}} \right)^{-1}} = \frac{F_1 \lambda_1 (\lambda_{LE})^{-1-2v}}{A_0} = a_0 \Rightarrow \sigma_1^{\text{eng}} = \frac{F_1}{A_0} = \frac{a_0}{\lambda_1} (\lambda_{LE})^{1+2v} \Rightarrow \\ \sigma_1^{\text{eng}} &= \frac{100}{\lambda_1} (1,648721)^{1,02} \end{aligned} \quad (9.43)$$

Com o resultado (9.42), o parâmetro de encruamento isotrópico (6.111.2) no programa EPIM3D é:

$$\kappa(\text{EPIM3D}) = \ln(\lambda_{p1}) = \ln\left(\frac{\lambda_1}{1,648721}\right) = \ln(\lambda_1) - 0,5 \quad (9.44)$$

A simulação numérica da barra da figura 6.1, constituída de material elastoplástico perfeito com resposta elástica linear, foi realizada via controle de deslocamento. Para isso, o comprimento da barra foi duplicado, isto é, o alongamento longitudinal máximo é  $\lambda_1^{\text{max}} = 2,0$ . Com relação à divisão em incrementos de deslocamento, foram adotados 1000 passos, ou seja, o deslocamento longitudinal da face  $x_1 = L_0$  (ver figura 6.1) aumenta 0,001 em cada incremento.

De acordo com as figuras 9.91 e 9.92, a evolução da tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) e a evolução do parâmetro de encruamento isotrópico (6.33), para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1, corroboram os resultados analíticos dados nesta seção, para as três formulações utilizadas: a de Green-Naghdi, da seção 6.3; a hiperelastoplástica, da seção 6.4; e a do programa EPIM3D, da seção 8.8. Para simulação com os códigos computacionais do presente estudo, foram utilizados seis elementos finitos sólidos tetraédricos de aproximação linear, e no programa EPIM3D foi utilizado um elemento hexaédrico de aproximação linear (ver item 3.1).

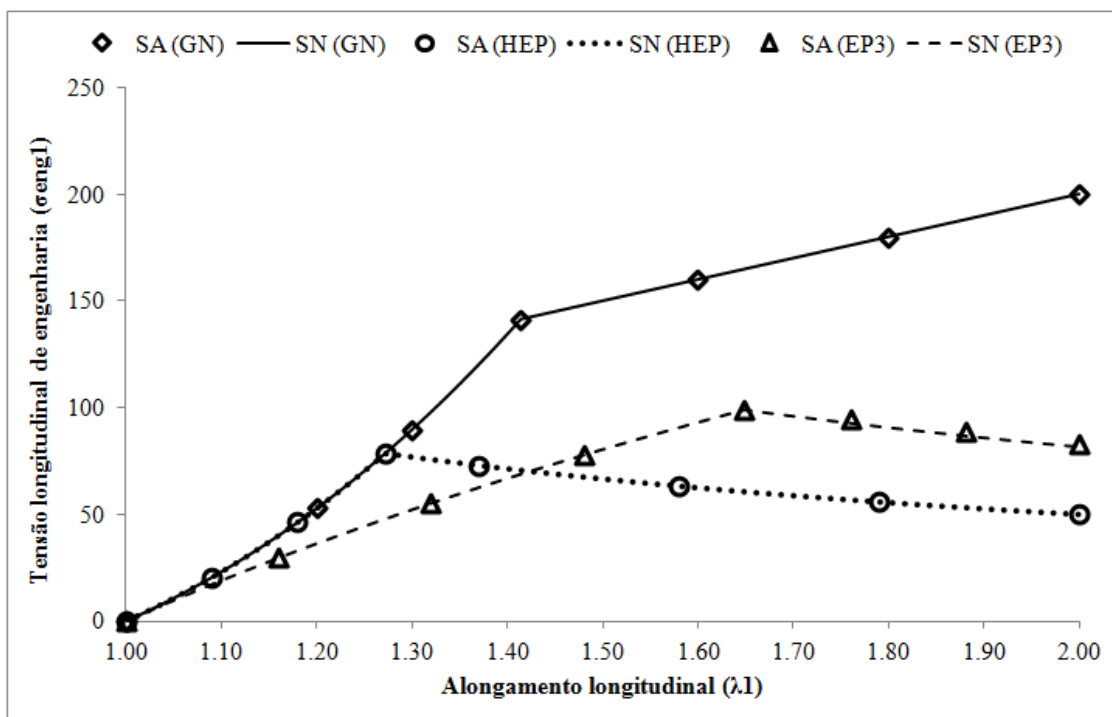


Figura 9.91. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal para a barra sob tração uniaxial da figura 6.1 com lei elástica linear (6.38 ou 8.18) e material elastoplástico perfeito. As siglas SA, SN, GN, HEP e EP3 denotam, nesta ordem, a solução analítica, a simulação numérica, a aproximação de Green-Naghdi (ver seção 6.3), a hiperelastoplasticidade (ver seção 6.4) e o programa EPIM3D (ver seção 8.8). Neste caso, as expressões que definem as soluções analíticas “SA (GN)”, “SA (HEP)” e “SA (EP3)” são dadas nas tabelas 9.58 e 9.59.

Tabela 9.58. Soluções analíticas, em termos da tensão longitudinal de engenharia (9.19.1), para a barra da figura 6.1 sob alongamento longitudinal (9.24.2) crescente, com lei elástica linear e material elastoplástico perfeito em regime de deformações elastoplásticas finitas.

Modelo	Regime elástico	Regime elastoplástico
GN	9.35	9.38
HEP	9.35	9.39
EP3	9.37.1	9.43

GN, HEP e EP3 correspondem às formulações de Green-Naghdi (seção 6.3), hiperelastoplástica (seção 6.4) e do programa EPIM3D (seção 8.8)

Tabela 9.59. Soluções analíticas, em termos do parâmetro de encruamento isotrópico (6.33 ou 8.24), para a barra da figura 6.1 sob alongamento longitudinal crescente, com lei elástica linear e material elastoplástico perfeito em regime de deformações elastoplásticas finitas.

Modelo	Regime elástico	Regime elastoplástico
GN	( $\kappa = 0$ )	9.33
HEP	( $\kappa = 0$ )	9.34
EP3	( $\kappa = 0$ )	9.44

GN, HEP e EP3 correspondem às formulações de Green-Naghdi (seção 6.3), hiperelastoplástica (seção 6.4) e do programa EPIM3D (seção 8.8)

### 9.2.3.3. Material com GF das constantes de encruamento em regime de pequenas deformações elásticas

A terceira situação analisada para a barra da figura 6.1 é aquela na qual o material possui GF (ver item 7.1) das constantes de encruamento ao longo da direção  $x_2$ , e as deformações elásticas são pequenas. O motivo da presente análise é a verificação numérica das equações descritas nos itens 8.8.7.1 e 8.8.7.2 desta tese. Foi adotada, aqui, apenas a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4. Para modelar o comportamento plástico do material, foram empregadas quatro leis de encruamento: elastoplástico perfeito (7.13) com GF do único coeficiente não nulo  $a_0$ ; lei de Swift (7.14), com GF do coeficiente  $K$  apenas; lei de Voce (7.15), com GF do coeficiente  $\sigma_0$  apenas; e lei de Prager (7.16), com GF do coeficiente  $c$ . A lei de GF usada aqui é lei de potência (7.4), e os valores do coeficiente  $p$  são os seguintes: 0,0; 0,20; 1,0; 5,0; e infinito. Conforme o item 7.2, os casos  $p \rightarrow 0,0$  e  $p \rightarrow \infty$  correspondem aos dois casos limites com material homogêneo. Os valores limites dos coeficientes de encruamento são dados na tabela 9.60. A simulação numérica foi realizada via controle de deslocamento. O comprimento da barra é duplicado em 100 incrementos, com imposição de deslocamento em toda a face com coordenada  $x_1 = L0$ . Com relação à malha de

elementos finitos, foram utilizados seis tetraedros lineares para os casos homogêneos, e 48 tetraedros lineares para os casos com GF (ver figura 9.93).

Tabela 9.60. Valores limites dos coeficientes de encruamento da barra sob tração uniaxial do item 9.2.3.3.

Lei de encruamento	Equação	Coefficientes
Elastoplástico perfeito	7.13	$a0_1 = 20,0$
		$a0_2 = 100,0$
		$K_1 = 500,0$
Swift	7.14	$K_2 = 1000,0$
		$E0 = 0,001$
		$n = 0,25$
Voce	7.15	$\sigma0_1 = 20,0$
		$\sigma0_2 = 200,0$
		$\sigma_{sat} = 500,0$
Prager	6.49 e 7.16	$Cy = 1,50$
		$a0 = 20,0$
		$c_1 = 100,0$
		$c_2 = 500,0$

Os valores com índices 1 e 2 correspondem, respectivamente, aos valores dos coeficientes de encruamento em  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$  (figura 6.1).

As soluções analíticas, em termos da força longitudinal aplicada na barra, são obtidas a partir das equações (8.34), (8.36), (8.38) e (8.49). Combinando tais equações com os coeficientes da tabela 9.60, as respectivas tensões longitudinais de engenharia (9.19.1) resultam em:

$$\sigma_1^{\text{eng}}(\text{ELPP}) = \frac{F_1}{A0} = \frac{1}{\lambda_1} \left( 100 - \frac{80}{1+p} \right) \quad (9.45.1)$$

$$\sigma_1^{\text{eng}}(\text{SW}) = \frac{F_1}{A0} = \frac{1}{\lambda_1} \left( 1000 - \frac{500}{1+p} \right) \left[ 0,001 + \ln(\lambda_1) \right]^{0,25} \quad (9.45.2)$$

$$\sigma_1^{\text{eng}}(\text{VC}) = \frac{F_1}{A0} = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \left[ 200 - \frac{180}{1+p} \right] e^{(-1,5 \ln \lambda_1)} + 500 \left[ 1 - e^{(-1,5 \ln \lambda_1)} \right] \right\} \quad (9.45.3)$$



$$\sigma_1^{\text{eng}}(\text{PR}) = \frac{F_1}{A_0} = \frac{1}{\lambda_1} \left[ 20 + \frac{3}{2} \ln(\lambda_1) \left( 500 - \frac{400}{1+p} \right) \right] \quad (9.45.4)$$

onde as siglas ELPP, SW, VC e PR denotam, nesta ordem, as leis de encruamento elastoplástica perfeita (7.13), de Swift (7.14), de Voce (7.15) e de Prager (7.16);  $\lambda_1$  é o alongamento longitudinal (9.24.2), uniforme em toda a barra da figura 6.1; e  $p$  é o coeficiente que define a GF de potência (7.4). Deve ser lembrado que as expressões acima só se aplicam para o caso de pequenas deformações elásticas, e com alongamento longitudinal monotonamente crescente.

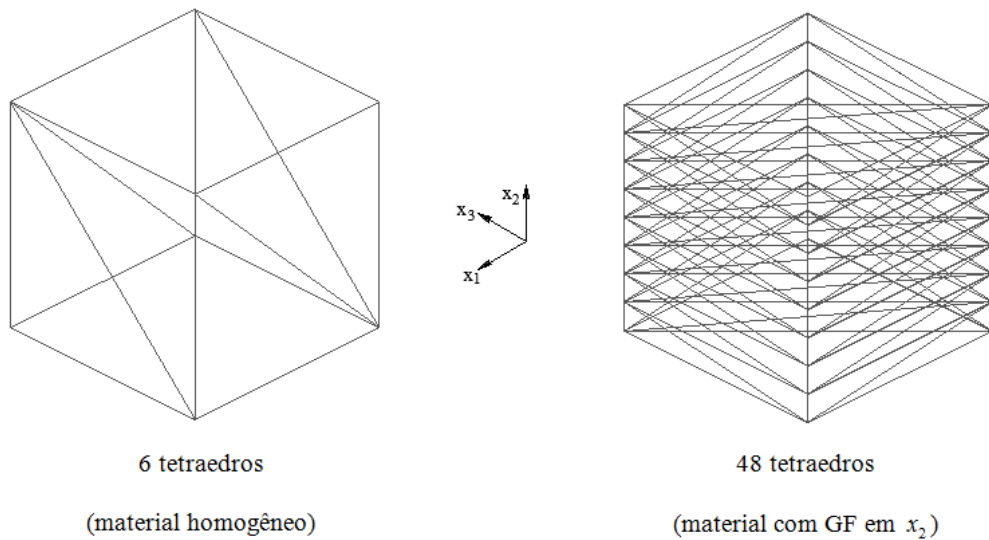


Figura 9.93. Malhas de tetraedros utilizadas para simulação numérica da barra sob tração uniaxial do item 9.2.3.3.

Conforme as figuras 9.94, 9.95, 9.96 e 9.97, os resultados obtidos a partir das simulações numéricas estão de acordo com as respectivas soluções analíticas descritas em (9.45). Ademais, pode-se notar, em tais figuras, que o aumento do coeficiente de GF  $p$  faz com que o material se torne mais rígido, para as quatro leis de encruamento adotadas.

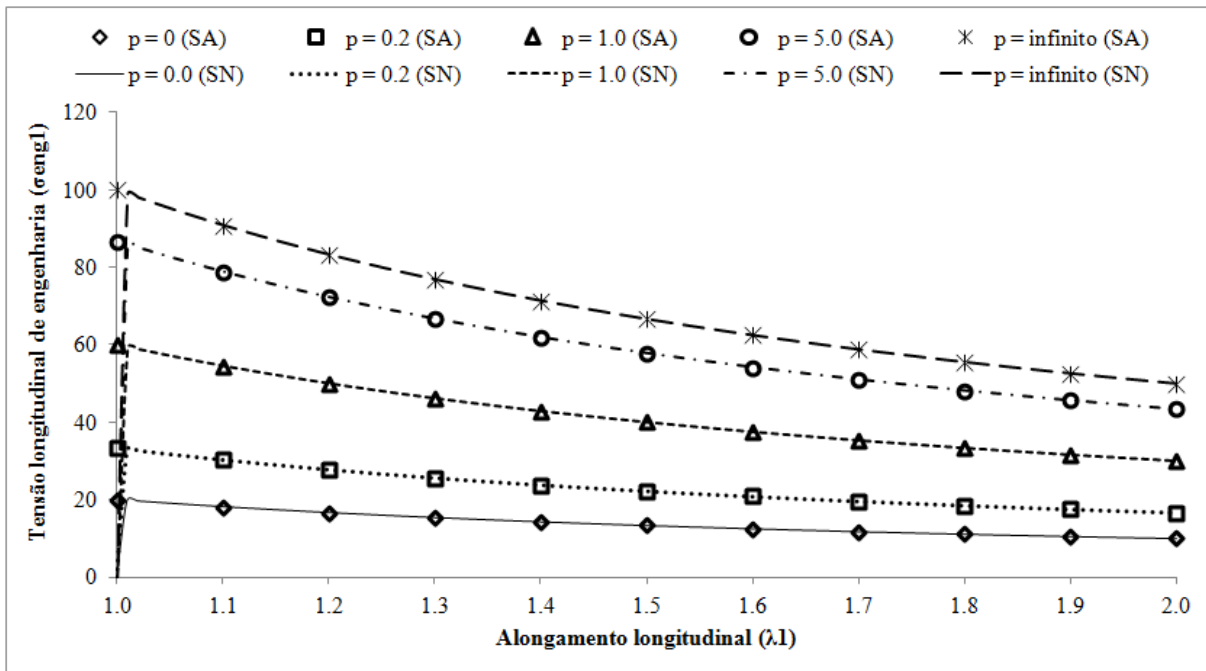


Figura 9.94. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.3 com material elastoplástico perfeito com GF (ver expressão 7.13). O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF de potência (7.4). As siglas SA e SN denotam, nesta ordem, a solução analítica (9.45.1) e a simulação numérica.

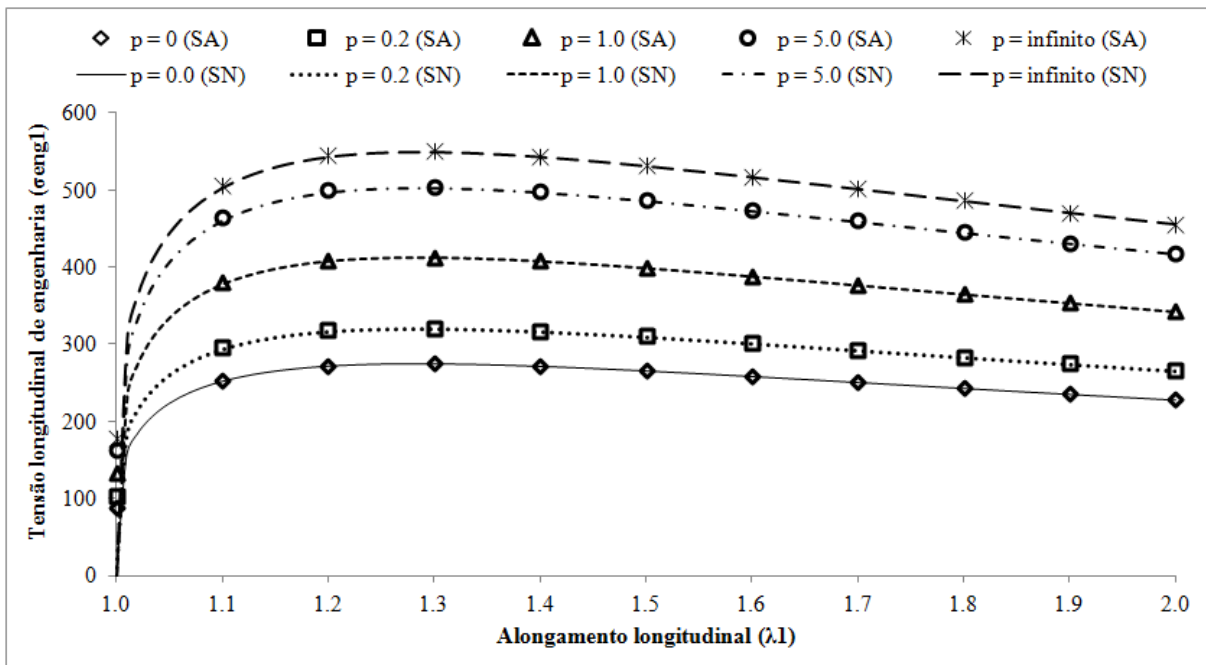


Figura 9.95. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.3 com lei de Swift com GF (ver expressão 7.14). O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF de potência (7.4). As siglas SA e SN denotam, nesta ordem, a solução analítica (9.45.2) e a simulação numérica.

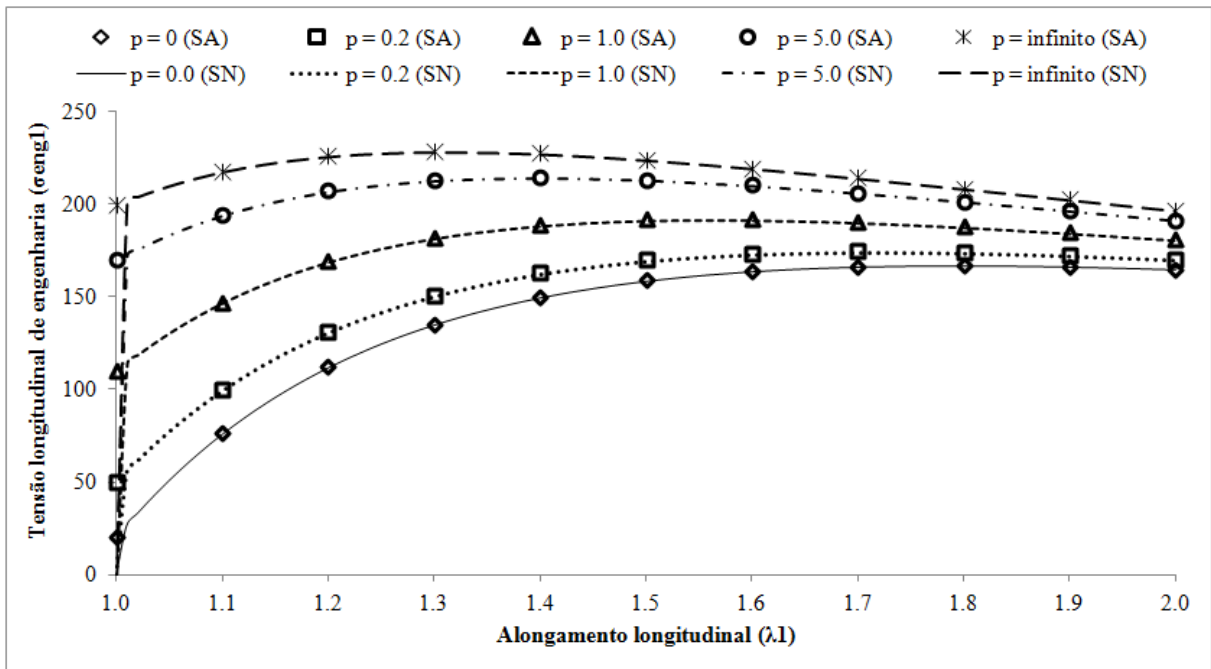


Figura 9.96. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.3 com lei de Voce com GF (ver expressão 7.15). O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF de potência (7.4). As siglas SA e SN denotam, nesta ordem, a solução analítica (9.45.3) e a simulação numérica.

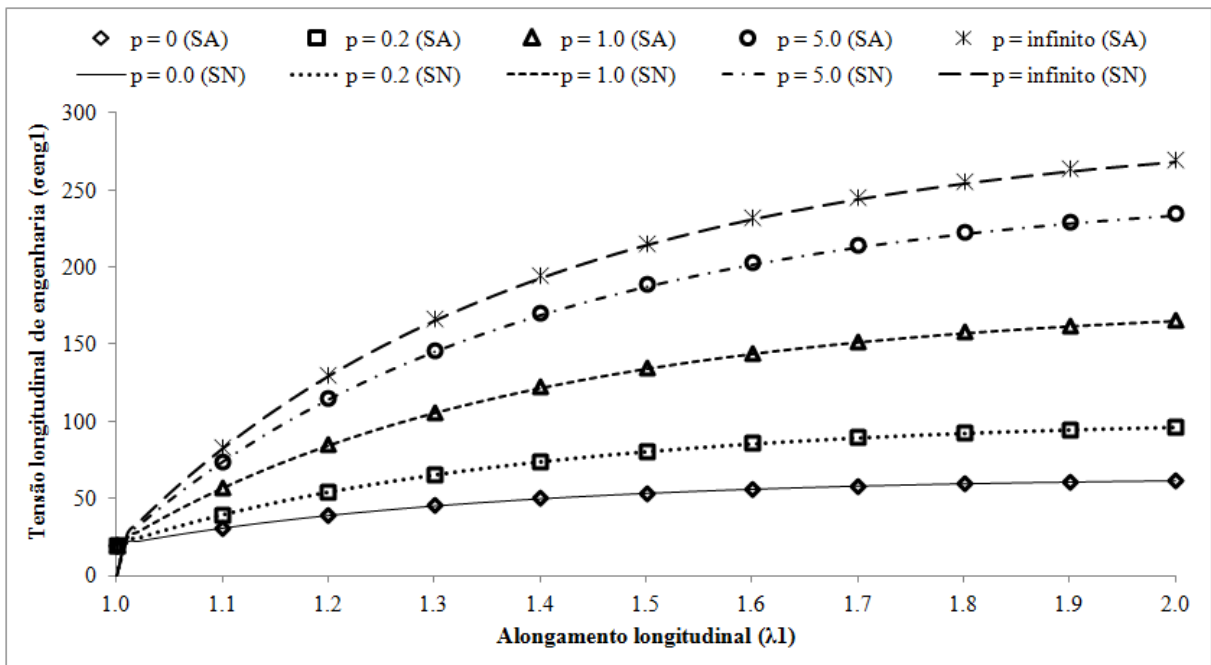


Figura 9.97. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.3 com lei de Prager com GF (ver expressão 7.16). O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF de potência (7.4). As siglas SA e SN denotam, nesta ordem, a solução analítica (9.45.4) e a simulação numérica.

#### 9.2.3.4. Material elastoplástico perfeito com GF do módulo de Young sob grandes deformações elastoplásticas

No quarto caso, o material da barra da figura 6.1 é elastoplástico perfeito com GF do módulo de Young ao longo da direção  $x_2$  (ver equações 7.9). Neste caso, os coeficientes do material são:

$$E_1 = 16,666667 \quad (9.46.1)$$

$$E_2 = 2,777778 \quad (9.46.2)$$

$$\nu = 0,1 \quad (9.46.3)$$

$$a_0 = 100,0 \quad (9.46.4)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os valores limites do módulo de Young em  $x_2 = b_0$  e  $x_2 = 0$ , respectivamente (ver figura 6.1);  $\nu$  é o coeficiente de Poisson; e  $a_0$  é o único coeficiente não nulo da lei de encruamento isotrópico polinomial (6.49). Com os coeficientes (9.46), os limites elástico e plástico são, respectivamente (ver equações 7.27 e 7.28):

$$\frac{16,666667}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = 100,0 \Rightarrow \lambda_{LE} = 2,0 \quad (9.47.1)$$

$$\frac{2,777778}{2}(\lambda_{LP}^4 - \lambda_{LP}^2) = 100,0 \Rightarrow \lambda_{LP} = 3,0 \quad (9.47.2)$$

Assim, para alongamentos longitudinais  $\lambda_1 < 2,0$ , todo o material encontra-se em regime elástico. Já para alongamentos  $2,0 < \lambda_1 < 3,0$ , parte do material está em regime elástico e parte está em regime elastoplástico. Por fim, para alongamentos  $\lambda_1 > 3,0$ , todo o material está em regime elastoplástico.

Com relação à simulação numérica, foram utilizados 1000 incrementos de deslocamento na face  $x_1 = L_0$  (ver figura 6.1) até atingir um alongamento longitudinal  $\lambda_1 = 5,0$ , uniforme em toda a barra. As malhas de elementos finitos são mostradas na figura 9.93. A lei de GF empregada aqui é a lei de potência (7.4), e os valores adotados para o coeficiente  $p$  são: 0,0; 0,20; 1,0; 5,0; e infinito.

Na fase elástica ( $\lambda_1 < \lambda_{LE}$ ), de acordo com a equação (7.32) e os coeficientes (9.46), a tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) é:

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{1}{2}(\lambda_1^3 - \lambda_1) \left( 2,777778 + \frac{13,888889}{1+p} \right) \quad (9.48)$$

onde  $p$  é o coeficiente de GF. Já na fase elastoplástica ( $\lambda_{LE} < \lambda_1 < \lambda_{LP}$ ), conforme as expressões (7.33), (7.34) e (7.35), e os coeficientes (9.46), a coordenada limite  $X2$  e a tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) são, respectivamente:

$$X2 = b_0 \left[ \frac{1}{13,888889} \left( \frac{200,0}{\lambda_1^4 - \lambda_1^2} - 2,777778 \right) \right]^{1/p} \quad (9.49.1)$$

$$\sigma_1^{\text{eng}} = (\sigma_1^{\text{eng}})^{\text{EL}} + (\sigma_1^{\text{eng}})^{\text{EP}} \quad (9.49.2)$$

$$(\sigma_1^{\text{eng}})^{\text{EL}} = \frac{1}{2} \frac{X2}{b_0} (\lambda_1^3 - \lambda_1) \left[ 2,777778 + \left( \frac{13,888889}{1+p} \right) \left( \frac{X2}{b_0} \right)^p \right] \quad (9.49.3)$$

$$(\sigma_1^{\text{eng}})^{\text{EP}} = 100,0 \frac{\left( 1 - X2/b_0 \right)}{\lambda_1} \quad (9.49.4)$$

Nessa fase, o material está em regime elástico para os pontos com coordenada  $0 \leq x_2 < X2$ , e em regime elastoplástico para  $X2 < x_2 \leq b_0$ . Por último, na fase plástica ( $\lambda_1 > \lambda_{LP}$ ), a tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) é (ver expressões 7.37 e 9.46):

$$\sigma_1^{\text{eng}} = \frac{100,0}{\lambda_1} \quad (9.50)$$

As simulações numéricas realizadas estão de acordo com as respectivas soluções analíticas para os casos homogêneos e com GF (ver figura 9.98). Para os casos homogêneos, são ilustradas, nas figuras 9.99 e 9.100, a evolução dos alongamentos longitudinais total, elástico e plástico (ver expressões 6.94), e da tensão longitudinal elástica de Mandel (ver expressões 6.98). As distribuições finais do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2), ao longo da coordenada  $x_2$  (ver figura 6.1), são mostradas na figura 9.101.

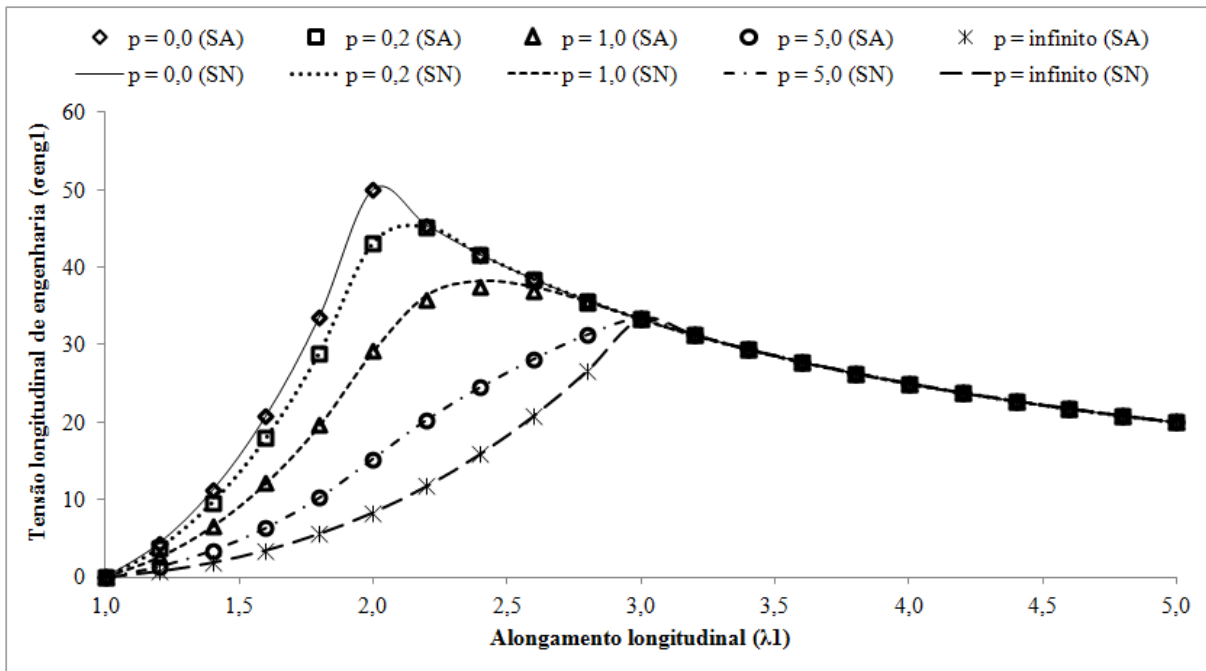


Figura 9.98. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.4: material elastoplástico perfeito com GF do módulo de Young (ver coeficientes 9.46). O coeficiente  $p$  é o coeficiente de GF de potência (7.4). As siglas SA e SN denotam, nesta ordem, a solução analítica (ver equações 9.48, 9.49 e 9.50) e a simulação numérica.

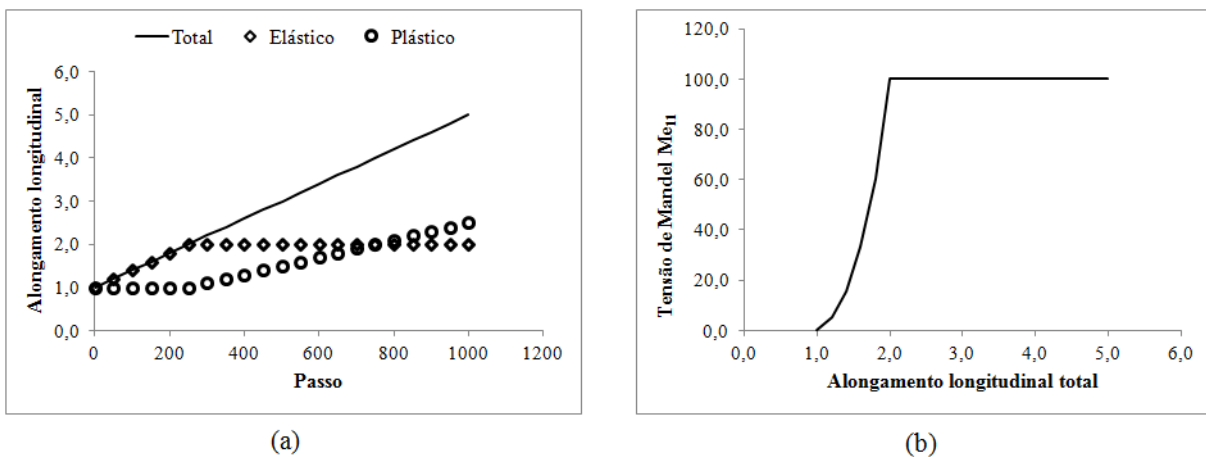
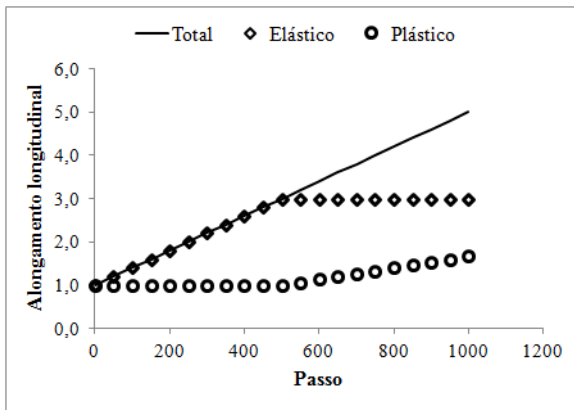
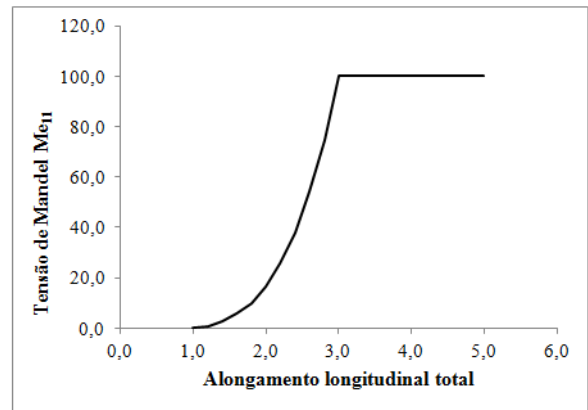


Figura 9.99. Evolução de algumas variáveis para a barra homogênea do item 9.2.3.4 ( $p \rightarrow 0,0$  ou  $E = 16,666667$ ): (a) alongamentos longitudinais total, elástico e plástico (ver expressões 6.94); (b) tensão longitudinal elástica de Mandel (ver expressões 6.98).



(a)



(b)

Figura 9.100. Evolução de algumas variáveis para a barra homogênea do item 9.2.3.4 ( $p \rightarrow \text{inf}$  ou  $E = 2,777778$ ): (a) alongamentos longitudinais total, elástico e plástico (ver expressões 6.94); (b) tensão longitudinal elástica de Mandel (ver expressões 6.98).

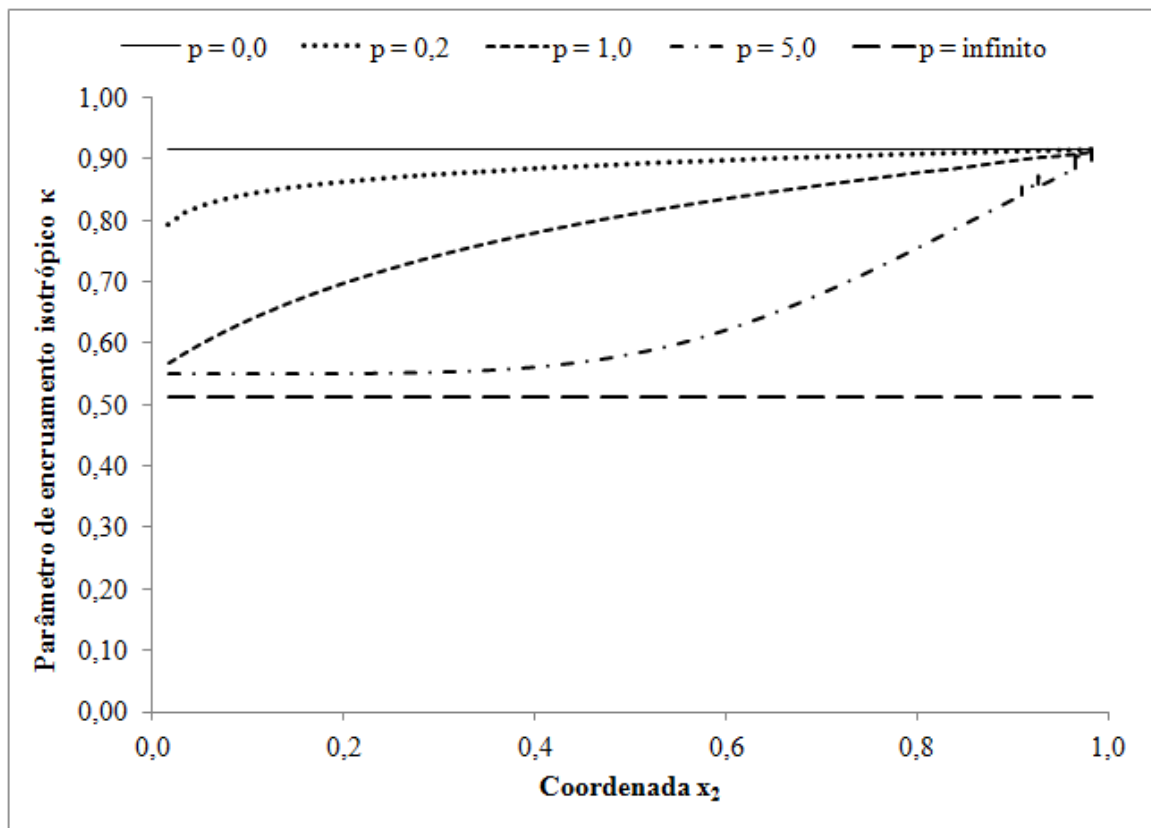


Figura 9.101. Distribuição final do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2), ao longo da coordenada  $x_2$  (ver figura 6.1), para a barra do item 9.2.3.4 com GF. Na legenda, a letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4).

9.2.3.5. Material com GF da constante K da lei de Swift sob grandes deformações elastoplásticas

No quinto caso da barra sob tração uniaxial da figura 6.1, foi adotada GF de potência (7.4), apenas, da constante K da lei de Swift (ver equação 7.14). Os coeficientes utilizados na simulação numérica do presente caso são:

$$E = 100,0 \quad (9.51.1)$$

$$\nu = 0,05 \quad (9.51.2)$$

$$K_1 = 297,38566784 \quad (9.51.3)$$

$$K_2 = 1268,84551613 \quad (9.51.4)$$

$$E_0 = 0,05 \quad (9.51.5)$$

$$n = 0,25 \quad (9.51.6)$$

Com os coeficientes (9.51), os limites elástico e plástico são, respectivamente (ver equações 7.27 e 7.28):

$$\frac{100,0}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = 297,38566784(0,05)^{0,25} \Rightarrow \lambda_{LE} = 1,50 \quad (9.52.1)$$

$$\frac{100,0}{2}(\lambda_{LE}^4 - \lambda_{LE}^2) = 1268,84551613(0,05)^{0,25} \Rightarrow \lambda_{LP} = 2,0 \quad (9.52.2)$$

Ademais, na fase elastoplástica ( $\lambda_{LE} < \lambda_1 < \lambda_{LP}$ ), de acordo com os coeficientes (9.51) e com a expressão (7.46), a coordenada limite X2 é:

$$X2 = b_0 \left\{ \left[ \frac{50,0}{0,05^{0,25}}(\lambda_1^4 - \lambda_1^2) - 1268,84551613 \right] \frac{1}{[-971,45984829]} \right\}^{1/p} \quad (9.53)$$

onde p é o coeficiente de GF de potência (7.4). Nessa fase, analogamente ao caso anterior, os pontos materiais com coordenada  $x_2 < X2$  estão em regime elástico, e os pontos com  $x_2 > X2$  encontram-se em regime elastoplástico. Os valores de p adotados aqui são: 0,0; 0,50; 1,0; 2,0; e infinito.

Assim como no caso anterior, para simulação numérica foram utilizadas as malhas da figura 9.93, e foram usados 1000 incrementos de deslocamento na face  $x_1 = L_0$  (ver figura 6.1). Neste caso, porém, o alongamento longitudinal, uniforme em toda a barra, avança até  $\lambda_1 = 3,0$ . Além disso, as equações para cálculo da força longitudinal aplicada não são dadas



aqui, pois não se conhece a expressão analítica da distribuição do parâmetro  $\kappa$  ao longo do eixo  $x_2$  (ver expressões 7.48).

Os gráficos tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal total (9.24.2), para os casos homogêneos e com GF, são ilustrados na figura 9.102. São mostrados, nas figuras 9.103 e 9.104, resultados numéricos obtidos com os materiais homogêneos. Por fim, as distribuições, ao final de dois passos, do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2) e da função escalar que define o critério de plastificação  $\Phi$  (6.110.3), ao longo do eixo  $x_2$ , são dadas nas figuras 9.105 e 9.106, respectivamente, nas quais se pode notar que os resultados numéricos estão de acordo com a coordenada limite  $X_2$  da equação (9.53).

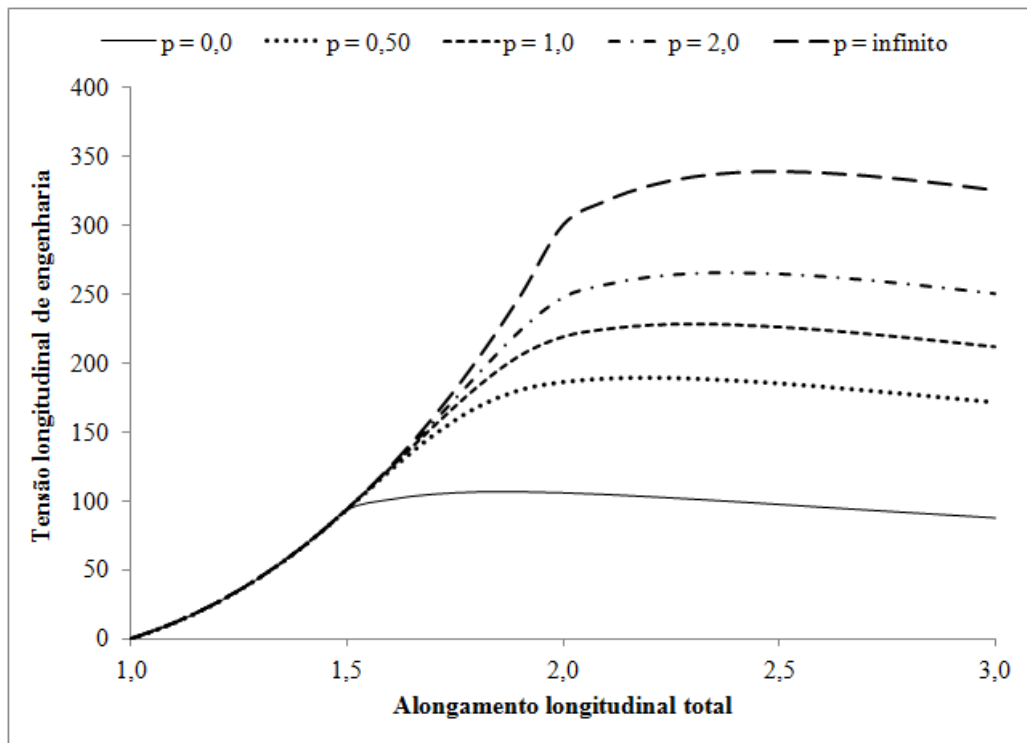


Figura 9.102. Tensão longitudinal de engenharia (9.19.1) versus alongamento longitudinal total (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.5: material com encruamento isotrópico e com GF da constante  $K$  da lei de Swift (6.50). A letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4). Estes resultados foram obtidos a partir das simulações numéricas.

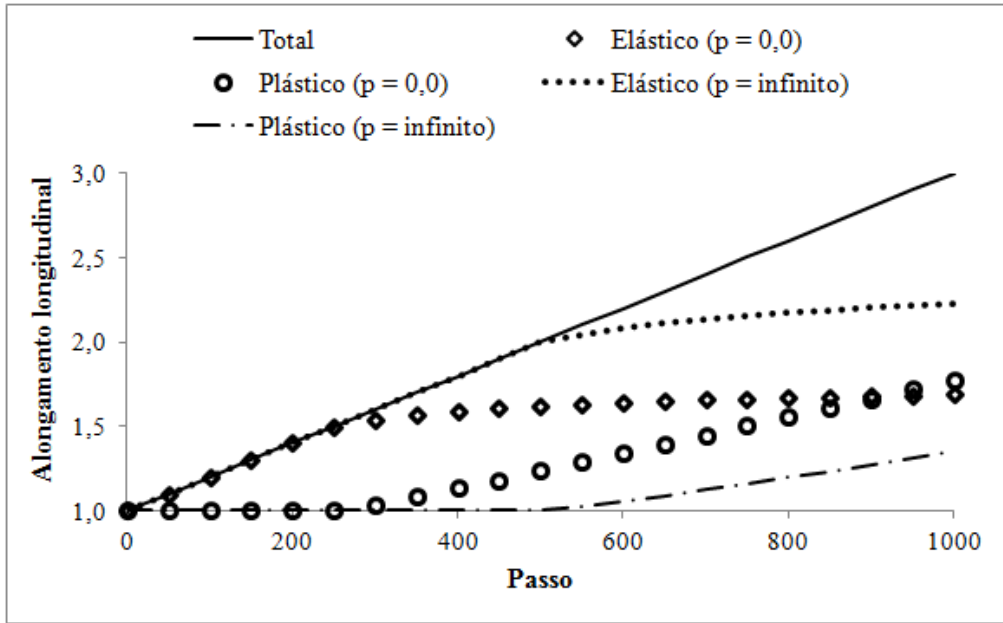


Figura 9.103. Evolução dos alongamentos longitudinais total, elástico e plástico (ver expressões 6.94) para a barra homogênea do item 9.2.3.5. A letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4).

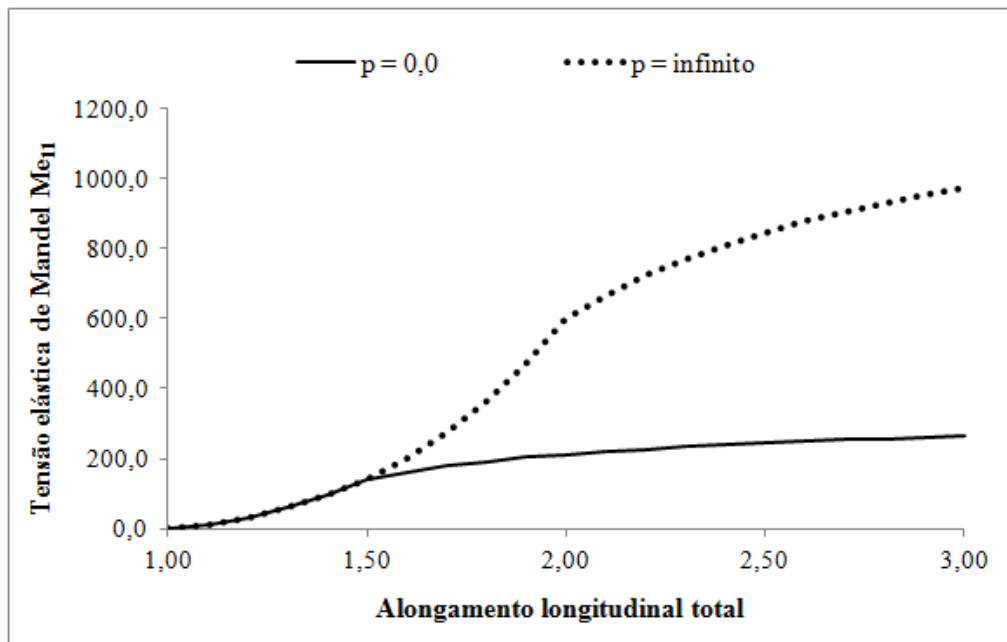


Figura 9.104. Tensão longitudinal elástica de Mandel (ver expressões 6.98) versus alongamento longitudinal total (9.24.2) para a barra homogênea do item 9.2.3.5. A letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4).

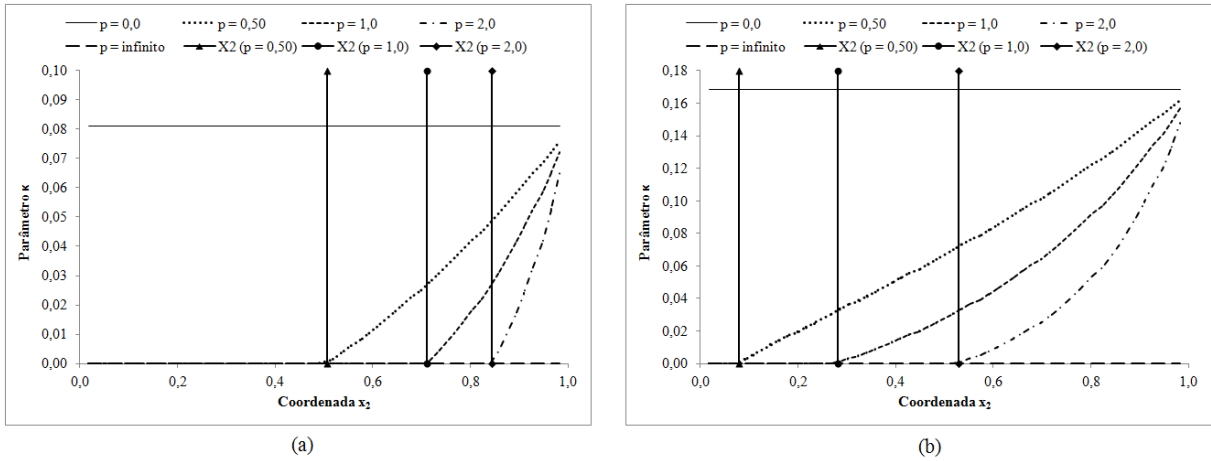


Figura 9.105. Distribuição do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2), ao longo do eixo  $x_2$  (ver figura 6.1), para a barra do item 9.2.3.5: (a) passo 350 ( $\lambda_1 = 1,70$ ); (b) passo 450 ( $\lambda_1 = 1,90$ ). A letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4). A coordenada limite  $X_2$  é calculada via equação (9.53) para os casos com GF.

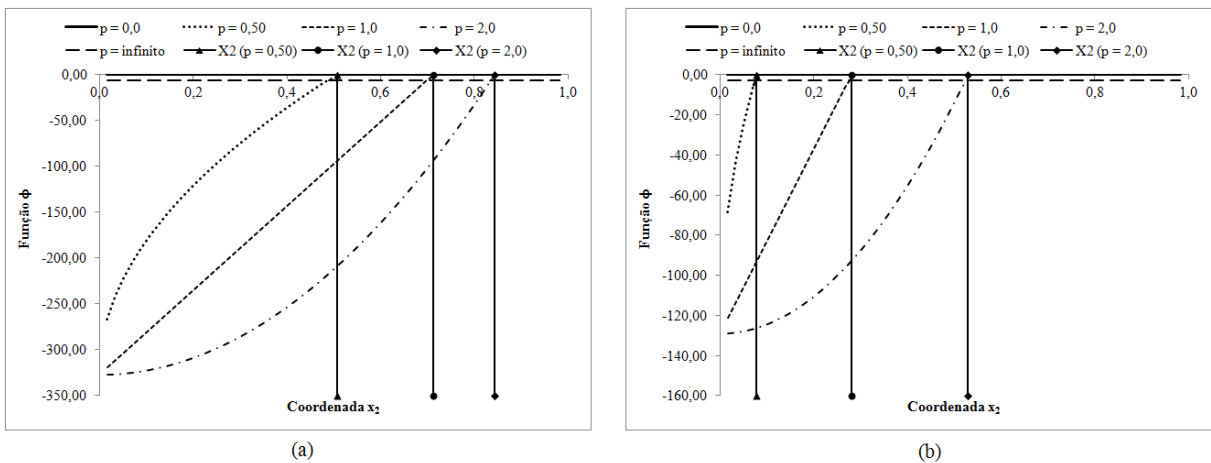


Figura 9.106. Distribuição da função escalar que define o critério de plastificação  $\Phi$  (6.110.3), ao longo do eixo  $x_2$  (ver figura 6.1), para a barra do item 9.2.3.5: (a) passo 350 ( $\lambda_1 = 1,70$ ); (b) passo 450 ( $\lambda_1 = 1,90$ ). A letra  $p$  se refere ao coeficiente de GF de potência (7.4). A coordenada limite  $X_2$  é calculada via equação (9.53) para os casos com GF.

### 9.2.3.6. Material homogêneo com encruamento cinemático não linear sob grandes deformações elastoplásticas

O último caso analisado numericamente da barra da figura 6.1 é com material homogêneo cujo comportamento elástico é definido pela lei hiperelástica não linear neo-Hookeana (5.5), e o comportamento plástico é definido pela lei de encruamento cinemático não linear de Armstrong-Frederick (6.56). O material em questão é o aço doce CK15, e seus coeficientes, extraídos de Dettmer e Reese (2004), são os seguintes:

$$\mu = 80000,0 \quad (9.54.1)$$

$$k = 173333,0 \quad (9.54.2)$$

$$a_0 = 300,0 \quad (9.54.3)$$

$$c = 1900,0 \quad (9.54.4)$$

$$b = 8,5 \quad (9.54.5)$$

onde  $\mu$  e  $k$  são as constantes da lei hiperelástica neo-Hookeana (5.5); a constante  $a_0$  é o limite de escoamento; e os parâmetros  $b$  e  $c$  são os coeficientes da lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (6.56).

A malha utilizada na simulação numérica possui seis elementos finitos sólidos tetraédricos de ordem linear (ver figura 9.93). A análise foi realizada via controle de deslocamento na face  $x_1 = L_0$  (ver figura 6.1) em três etapas:

- etapa 1: alongamento longitudinal  $\lambda_1$  crescente, de 1,0 até 1,50;
- etapa 2: alongamento longitudinal  $\lambda_1$  decrescente, de 1,50 até 0,75;
- etapa 3: alongamento longitudinal  $\lambda_1$  crescente, de 0,75 até 1,0.

Cada uma das etapas foi feita com 100 incrementos de deslocamento.

De acordo com a figura 9.107, os resultados numéricos com a formulação hiperelastoplástica (ver seção 6.4) estão de acordo com os resultados numéricos da referência, e os resultados com a formulação de Green-Naghdi (ver seção 6.3) apresentam grandes discrepâncias para grandes deformações. A componente  $X_{11}$  do tensor das tensões inversas na configuração inicial (ver figura 3.3 e equação 6.30) ao final de alguns passos é ilustrada na figura 9.108.

### 9.2.4. Compressão uniaxial

A mesma barra da figura 6.1 foi analisada numericamente impondo compressão uniaxial. Para isso, dois casos foram estudados aqui: um homogêneo com grandes deformações plásticas e com pequenas deformações elásticas, e outro com GF com grandes deformações elastoplásticas.

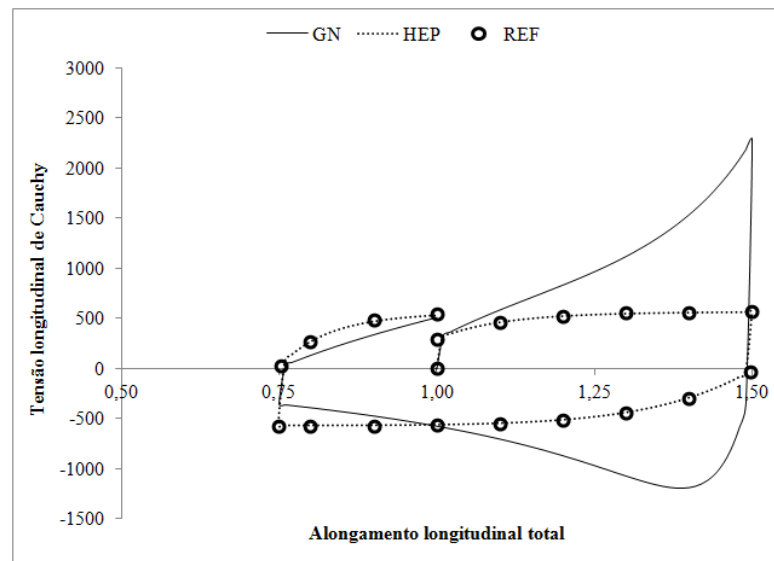


Figura 9.107. Tensão longitudinal de Cauchy (ver figura 6.1) versus alongamento longitudinal total (9.24.2) para a barra do item 9.2.3.6: material homogêneo com lei hiperelástica neo-Hookeana (5.5) e lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (6.56). Na legenda, as siglas GN, HEP e REF denotam, nesta ordem, a formulação de Green-Naghdi da seção 6.3, a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4, e a referência Dettmer e Reese (2004).

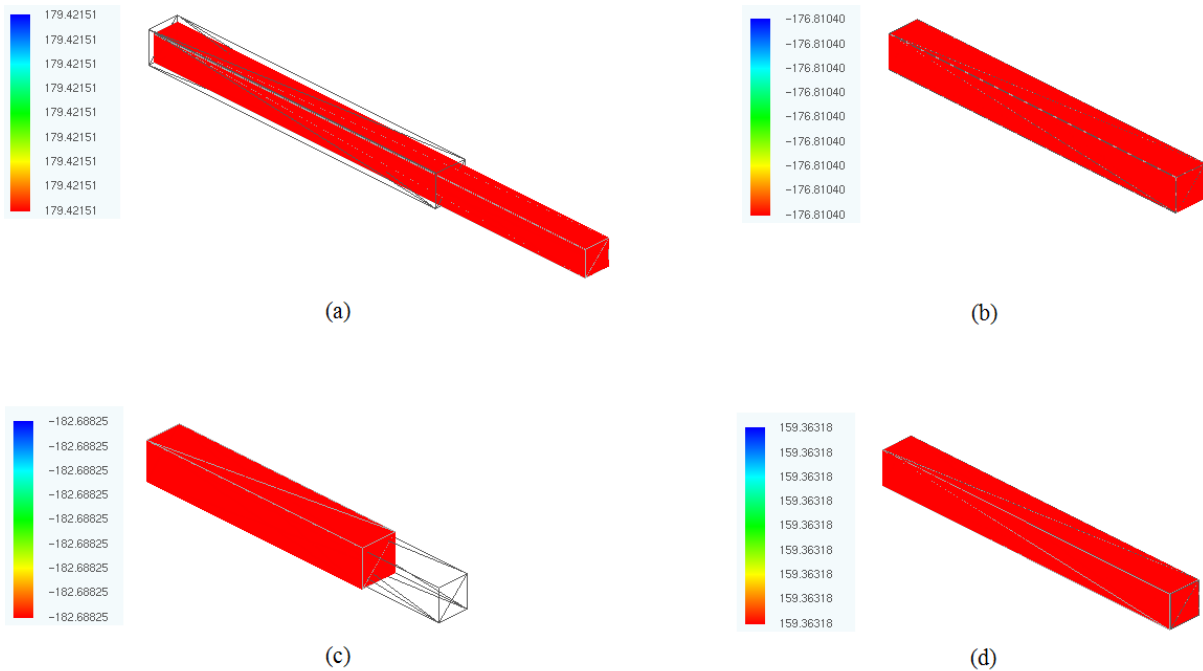


Figura 9.108. Tensão inversa  $X_{11}$ , definida na configuração inicial (ver figura 3.3 e equação 6.30), para a barra sob alongamento longitudinal do item 9.2.3.6: (a)  $\lambda_1 = 1,50$ ; (b)  $\lambda_1 = 1,0$ ; (c)  $\lambda_1 = 0,75$ ; (d)  $\lambda_1 = 1,0$ .

#### 9.2.4.1. Material homogêneo com lei hiperelástica linear e lei de Swift

Para a primeira barra sob compressão uniaxial, as constantes do material são dadas em (9.23). A malha possui seis tetraedros (ver figura 9.93), e a simulação numérica é realizada com controle de deslocamento. O comprimento da barra é reduzido pela metade em 100 passos, o que equivale a dizer que o alongamento longitudinal decresce de 1,0 até 0,50 com incrementos de 0,005. Para analisar numericamente este exemplo, foram empregadas três formulações: a de Green-Naghdi, da seção 6.3; a hiperelastoplástica, da seção 6.4; e o programa EPIM3D, do item 8.8.

De acordo com a figura 9.109, os resultados numéricos obtidos com a formulação hiperelastoplástica e com o programa EPIM3D são praticamente os mesmos, e a formulação de Green-Naghdi apresenta grandes discrepâncias exceto para deformações muito pequenas ( $\lambda_1 \approx 1$ ).

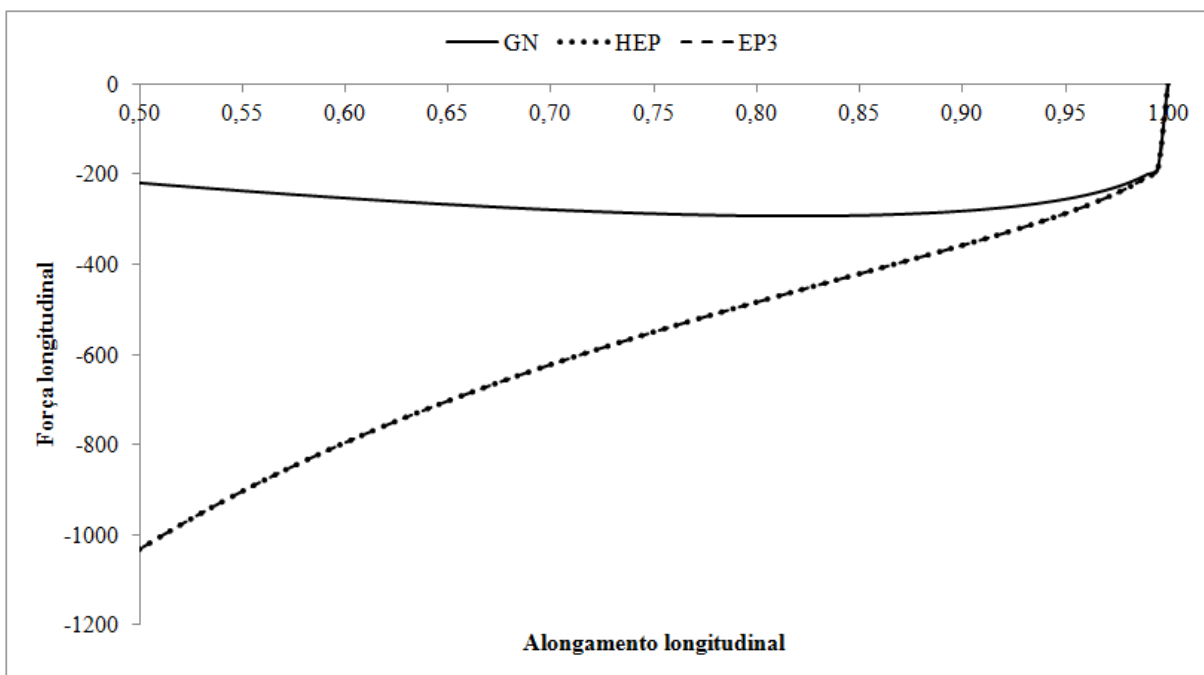


Figura 9.109. Força longitudinal versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra homogênea da figura 6.1 sob compressão uniaxial. Na legenda, as siglas GN, HEP e EP3 denotam, respectivamente, a formulação de Green-Naghdi da seção 6.3, a hiperelastoplasticidade da seção 6.4, e o programa EPIM3D do item 8.8.

#### 9.2.4.2. MGF, lei hiperelástica linear e lei de Voce

Para o segundo caso da barra da figura 6.1 sob compressão uniaxial, foi adotada a lei hiperelástica linear (5.2) e a lei de encruamento isotrópico de Voce (6.51). O material possui GF, ao longo do eixo  $x_2$ , dos coeficientes de encruamento isotrópico. Os valores limites de tais coeficientes são dados a seguir (ver equação 7.15):

$$(\sigma_0)_1 = 123,6 \quad (9.55.1)$$

$$(\sigma_{\text{sat}})_1 = 370,9 \quad (9.55.2)$$

$$(C_Y)_1 = 10,8 \quad (9.55.3)$$

$$(\sigma_0)_2 = 330,3 \quad (9.55.4)$$

$$(\sigma_{\text{sat}})_2 = 846,7 \quad (9.55.5)$$

$$(C_Y)_2 = 16,3 \quad (9.55.6)$$

onde os limites com índice 1, referentes aos pontos materiais com coordenada  $x_2 = b_0$ , correspondem ao aço doce DC06; e os limites com índice 2, referentes aos pontos materiais com coordenada  $x_2 = 0$ , correspondem ao aço de dupla fase DP600 (OLIVEIRA; ALVES; CHAPARRO; MENEZES, 2007). Neste caso, a GF é definida pela lei sigmoïdal (7.5), e os valores adotados para o coeficiente  $s$  são: 0,0; 1/3; 1,0; 3,0; e infinito. As malhas de elementos tetraédricos são mostradas na figura 9.93. A simulação numérica foi feita via controle de deslocamento, com 100 incrementos, até reduzir o comprimento da barra pela metade. Para analisar este exemplo, apenas o código computacional com a formulação hiperelastoplástica (ver seção 6.4) foi utilizado.

Conforme a figura 9.110, o caso homogêneo  $s \rightarrow 0,0$  é mais flexível do que o caso homogêneo  $s \rightarrow \infty$ , e o valor do coeficiente  $s$ , para os casos com GF, não altera significativamente os valores de força aplicada. Ademais, a distribuição final do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2) segue a distribuição dos valores dos coeficientes de encruamento isotrópico (ver figura 9.111).

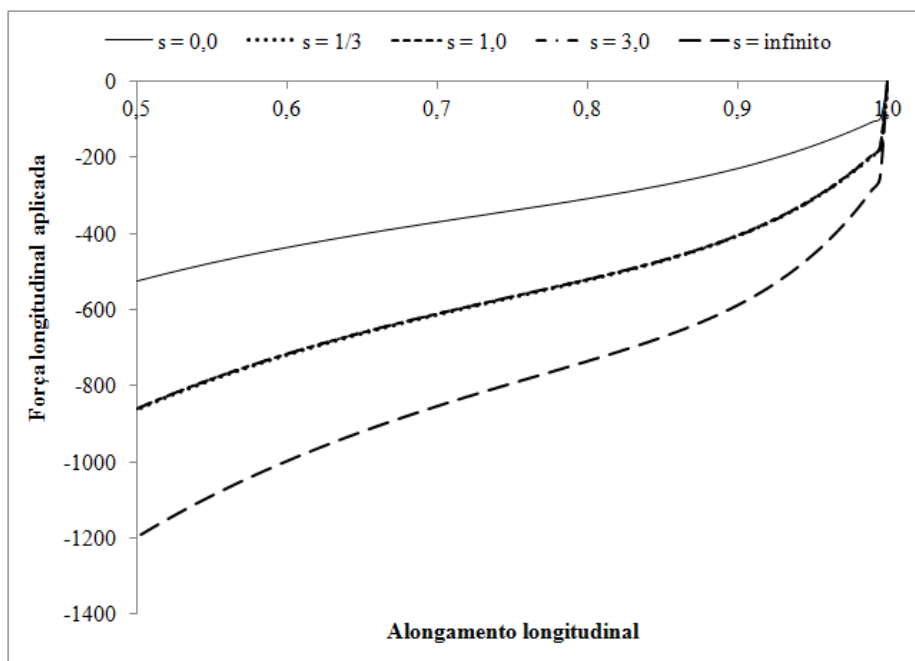


Figura 9.110. Força longitudinal versus alongamento longitudinal (9.24.2) para a barra sob compressão uniaxial do item 9.2.4.2. A letra  $s$  se refere ao coeficiente de GF sigmoïdal (7.5).



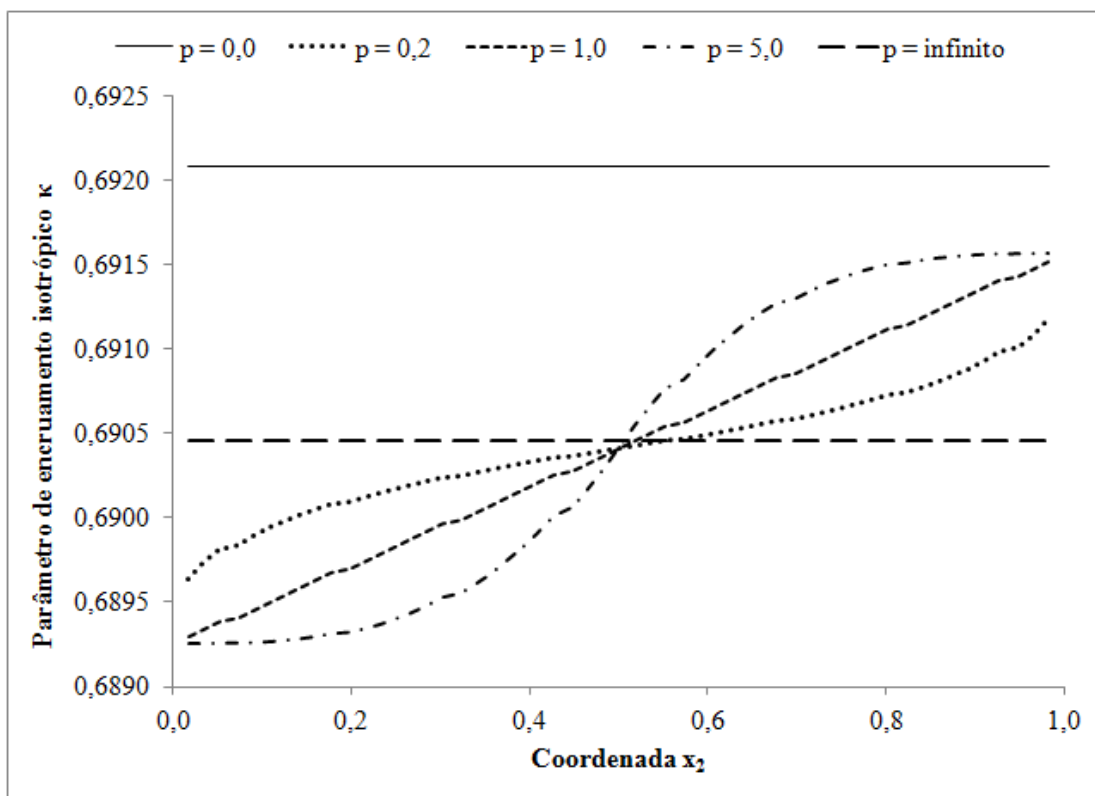


Figura 9.111. Distribuição final do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.111.2) para a barra da figura 6.1 sob compressão uniaxial do item 9.2.4.2. A letra  $s$  se refere ao coeficiente de GF sigmoidal (7.5).

### 9.2.5. Cisalhamento simples

O prisma sob cisalhamento simples (ver figura 9.10 e equações 9.4) é simulado aqui em regime elastoplástico. Para isso, dois casos com material homogêneo são analisados: material com a lei hiperelástica linear (5.2) e a lei de encruamento isotrópico de Swift (6.50); e material com a lei hiperelástica neo-Hookeana (5.5) e com a lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (6.56).

### 9.2.5.1. Material homogêneo com lei hiperelástica linear e lei de Swift

Neste exemplo numérico, são comparadas as formulações de Green-Naghdi, da seção 6.3, a hiperelastoplástica, da seção 6.4, e a do programa EPIM3D, da seção 8.8. Para isso, foram adotados os coeficientes (9.23). A simulação numérica foi realizada via controle de deslocamento em 1000 incrementos. A face com coordenada  $x_2 = 25,0$  é submetida a um deslocamento de 250,0 na direção  $x_1$  (ver figura 9.10), ou seja, a quantidade de cisalhamento avança até  $\gamma = \tan(\theta) = 10,0$ . Assim como nas simulações numéricas do item 9.1.1, a malha de elementos finitos empregada aqui também possui seis tetraedros de aproximação linear.

Conforme as figuras 9.112 e 9.113, mais uma vez a formulação hiperelastoplástica está de acordo com o programa EPIM3D, e a formulação de Green-Naghdi fornece grandes discrepâncias exceto para deformações muito pequenas. Na figura 9.112, a razão pela qual os dados são interrompidos na formulação de Green-Naghdi é que os valores resultantes de força aplicada se tornam muito elevados, o que dificulta a comparação entre as outras duas formulações.

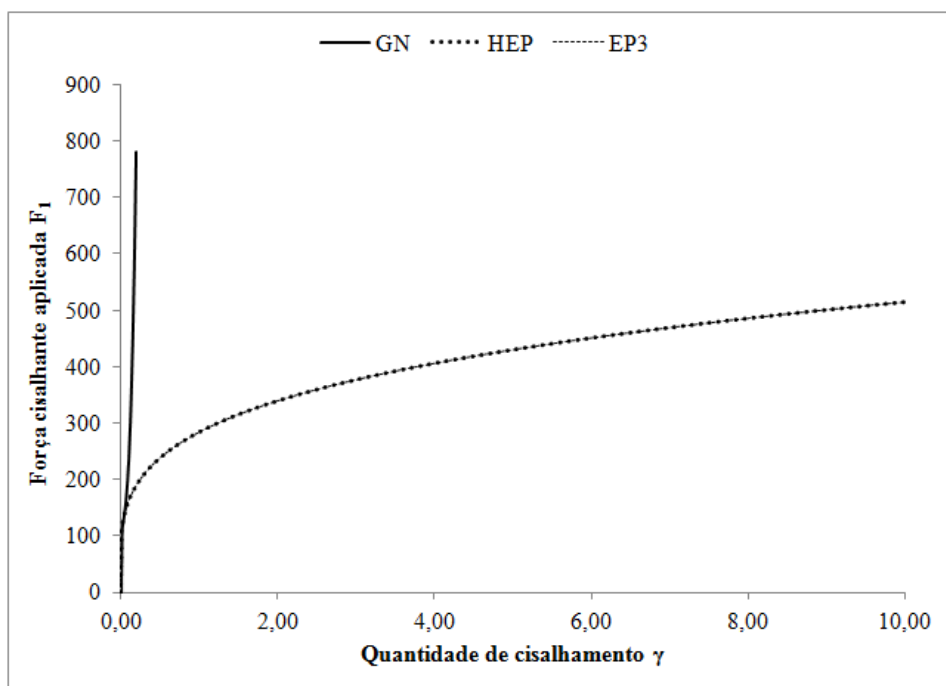


Figura 9.112. Força cisalhante aplicada (9.5.1) versus quantidade de cisalhamento (9.5.2) para o prisma sob cisalhamento simples do item 9.2.5.1. Na legenda, as siglas GN, HEP e EP3 denotam, respectivamente, a formulação de Green-Naghdi da seção 6.3, a hiperelastoplasticidade da seção 6.4, e o programa EPIM3D do item 8.8.

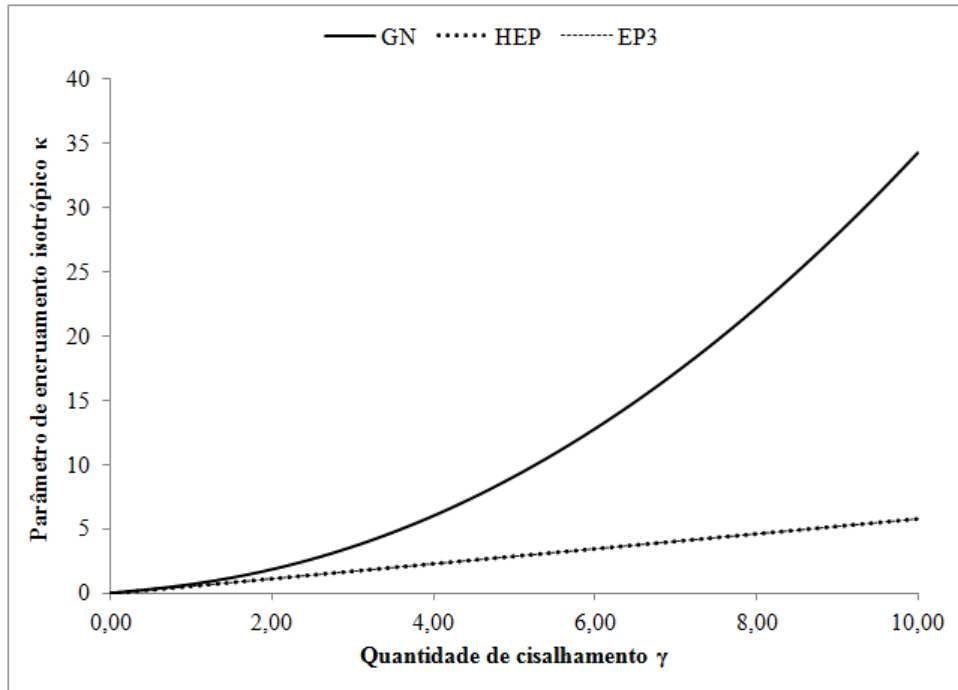


Figura 9.113. Parâmetro de encruamento isotrópico (6.33) ou (8.24) versus quantidade de cisalhamento (9.5.2) para o prisma sob cisalhamento simples do item 9.2.5.1. Na legenda, as siglas GN, HEP e EP3 denotam, respectivamente, a formulação de Green-Naghdi da seção 6.3, a hiperelastoplasticidade da seção 6.4, e o programa EPIM3D do item 8.8.

### 9.2.5.2. Material homogêneo com leis hiperelástica e de encruamento cinemático não lineares

Para o segundo exemplo do prisma sob cisalhamento simples da figura 9.10 em regime elastoplástico, apenas a formulação hiperelastoplástica (ver seção 6.4) é empregada. O material utilizado é um polímero vítreo (PET ou polietileno tereftalato orientado), cujos coeficientes são (DETTMER; REESE, 2004):

$$\mu = 80,0 \quad (9.56.1)$$

$$k = 320,0 \quad (9.56.2)$$

$$a_0 = 35,0 \quad (9.56.3)$$

$$c = 100,0 \quad (9.56.4)$$

$$b = 2,7 \quad (9.56.5)$$

onde  $\mu$  e  $k$  são as constantes da lei hiperelástica neo-Hookeana (5.5); a constante  $a_0$  é o limite de escoamento; e os parâmetros  $b$  e  $c$  são os coeficientes da lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (6.56).

Assim como no exemplo anterior, a simulação numérica foi feita via controle de deslocamento, porém a quantidade de cisalhamento  $\gamma$  (9.5.2), neste caso, evolui da seguinte forma:

- etapa 1:  $\gamma$  crescente, de 0,0 até 4,0;
- etapa 2:  $\gamma$  decrescente, de 4,0 até -2,0;
- etapa 3:  $\gamma$  crescente, de -2,0 até 0,0.

O incremento de  $\gamma$ , em cada passo, é de 0,02. Assim, são 200 passos na etapa 1, 300 passos na etapa 2, e 100 passos na etapa 3, totalizando 600 passos. A malha de elementos finitos é a mesma do exemplo anterior, isto é, são utilizados seis tetraedros de ordem linear.

Os resultados numéricos obtidos neste estudo corroboram os dados numéricos da referência, em pequenas e em grandes deformações elastoplásticas (ver figura 9.114). Na figura 9.115, são ilustradas algumas configurações de equilíbrio com os respectivos valores da tensão inversa  $X_{12}$ , definida na configuração inicial (ver figura 3.3 e equação 6.30).

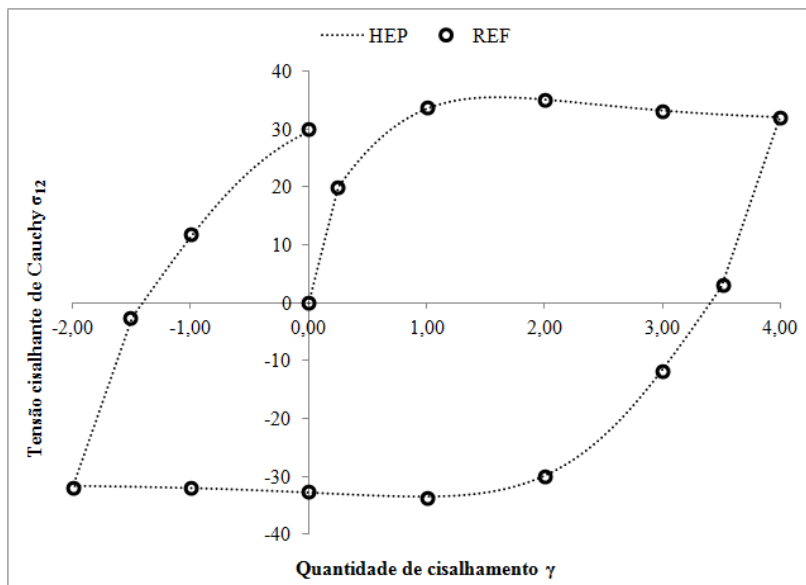


Figura 9.114. Tensão cisalhante de Cauchy  $\sigma_{12} = t_1$  (ver figura 9.10) versus quantidade de cisalhamento  $\gamma$  (9.5.2) para o prisma sob cisalhamento simples do item 9.2.5.2. As siglas HEP e REF denotam, respectivamente, os resultados numéricos deste estudo com a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4, e os dados numéricos da referência Dettmer e Reese (2004).

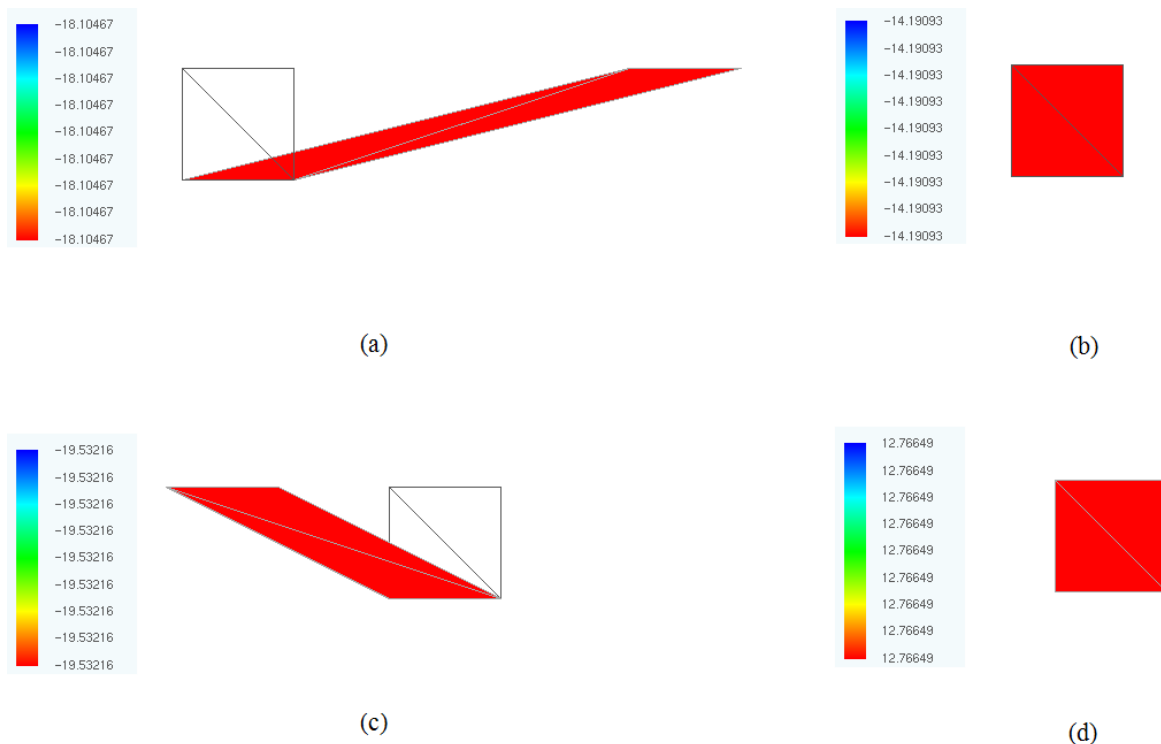


Figura 9.115. Tensão inversa  $X_{12}$ , definida na configuração inicial (ver figura 3.3 e equação 6.30), para o prisma sob cisalhamento simples do item 9.2.5.2: (a)  $\gamma = 4,0$  (passo 200); (b)  $\gamma = 0,0$  (passo 400); (c)  $\gamma = -2,0$  (passo 500); (d)  $\gamma = 0,0$  (passo 600). A variável  $\gamma$  é a quantidade de cisalhamento (9.5.2).

### 9.2.6. Viga em balanço com força prescrita

Neste exemplo, similar ao do item 9.1.6.1, é analisada numericamente uma viga em balanço prismática (10,0 x 1,0 x 1,0) em regime elastoplástico. A simulação é realizada via controle de carga. A força, aplicada ao longo de  $x_2$  na face  $x_1 = 10,0$  (ver figura 9.14), avança até o valor de 0,005, e retorna até 0,0. Em ambas as fases, de carregamento e de descarregamento, são utilizados 100 incrementos de força, iguais a 0,00005. Os graus de liberdade restritos são os seguintes: todos os deslocamentos da face  $x_1 = 0,0$ ; os deslocamentos em  $x_3$  dos pontos com coordenada  $x_3 = 0,0$ . Devido à simetria em relação ao eixo  $x_3$ , apenas uma metade da viga é discretizada. A malha base (ver Apêndice F) é a malha número 4 da figura 9.14, e o refinamento em termos do número de elementos finitos é realizado ao longo da direção longitudinal, conforme o item 9.1.6.1. Com relação à lei

constitutiva, são adotados os coeficientes (9.23), e é utilizada apenas a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4.

De acordo com a análise de convergência da figura 9.116, o refinamento da malha em termos do número de elementos finitos tetraédricos e em termos da ordem de aproximação melhora a precisão dos resultados, já que a rigidez excessiva da malha é eliminada com o refinamento e, assim, os deslocamentos das malhas mais refinadas são maiores (ver último parágrafo do item 9.1.3).

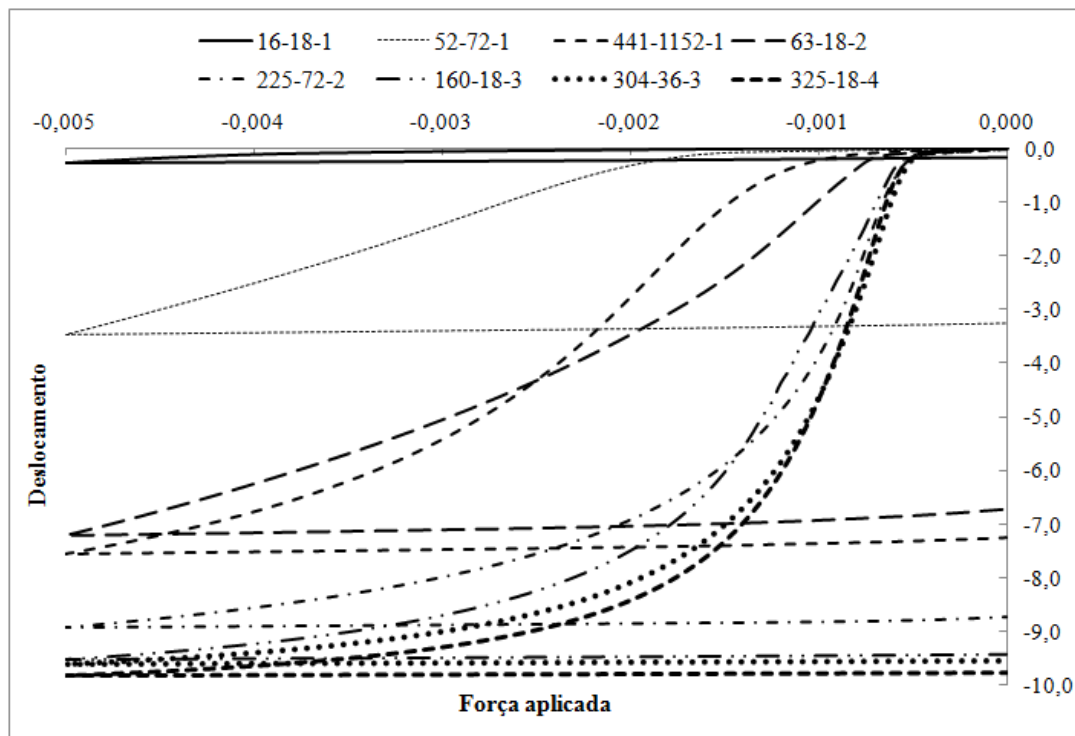


Figura 9.116. Força aplicada versus deslocamento do ponto central da face da extremidade livre da viga em balanço do item 9.2.6. Na legenda os valores correspondem, respectivamente, ao número de nós, à quantidade de elementos finitos sólidos tetraédricos, e à ordem de aproximação polinomial dos tetraedros (ver item 3.1).

### 9.2.7. Viga em balanço com deslocamento prescrito

A viga prismática em balanço do exemplo anterior é numericamente analisada aqui em regime elastoplástico via controle de deslocamento. O deslocamento transversal na direção  $x_2$  da aresta com coordenadas  $x_1 = 10,0$  e  $x_2 = 1,0$  (ver figura 9.14) avança até 4,0 em 800

incrementos. Os graus de liberdade restritos são os mesmos do exemplo anterior, e apenas uma metade da viga é discretizada devido à simetria em relação ao eixo  $x_3$ . O material é o aço doce DC06 cujos coeficientes são (OLIVEIRA; ALVES; CHAPARRO; MENEZES, 2007):

$$E = 206000,0 \quad (9.57.1)$$

$$\nu = 0,30 \quad (9.57.2)$$

$$K = 529,5 \quad (9.57.3)$$

$$E_0 = 0,0043889446 \quad (9.57.4)$$

$$n = 0,2680 \quad (9.57.5)$$

Para simular numericamente este problema estrutural, foram empregados três códigos computacionais: aquele com a formulação de Green-Naghdi, da seção 6.3; aquele com a formulação hiperelastoplástica, da seção 6.4; e o programa EPIM3D, da seção 8.8. Nos dois primeiros casos, é utilizada a malha base 4 da figura 9.14 com divisão dos três hexaedros em seis tetraedros, o que resulta em 18 elementos finitos sólidos tetraédricos. Além disso, ordem de aproximação é variável (de um a quatro). Já no programa EPIM3D, são utilizados três elementos finitos hexaédricos de ordem linear com integração reduzida seletiva (MALKUS; HUGHES, 1978a; MALKUS; HUGHES, 1978b). O objetivo aqui é comparar as três formulações elastoplásticas para problemas estruturais com grandes deslocamentos e pequenas deformações.

As seguintes conclusões podem ser tiradas a partir da figura 9.117: as malhas de elementos lineares apresentam grande travamento, devido à excessiva rigidez resultante; os valores da força aplicada, quando se compara as formulações de Green-Naghdi e a hiperelastoplástica, são bastante diferentes para as malhas lineares, são próximos para as malhas quadráticas, e são praticamente os mesmos para as malhas cúbica e do quarto grau. Ademais, de acordo com a figura 9.118, as distribuições finais do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$ , obtidas com as formulações de Green-Naghdi e hiperelastoplástica, são praticamente as mesmas para as malhas do quarto grau. Assim sendo, para pequenas deformações, as duas formulações supracitadas parecem ser equivalentes. Por fim, os resultados numéricos obtidos com o programa EPIM3D estão de acordo com as simulações numéricas com os elementos tetraédricos (ver figura 9.119).

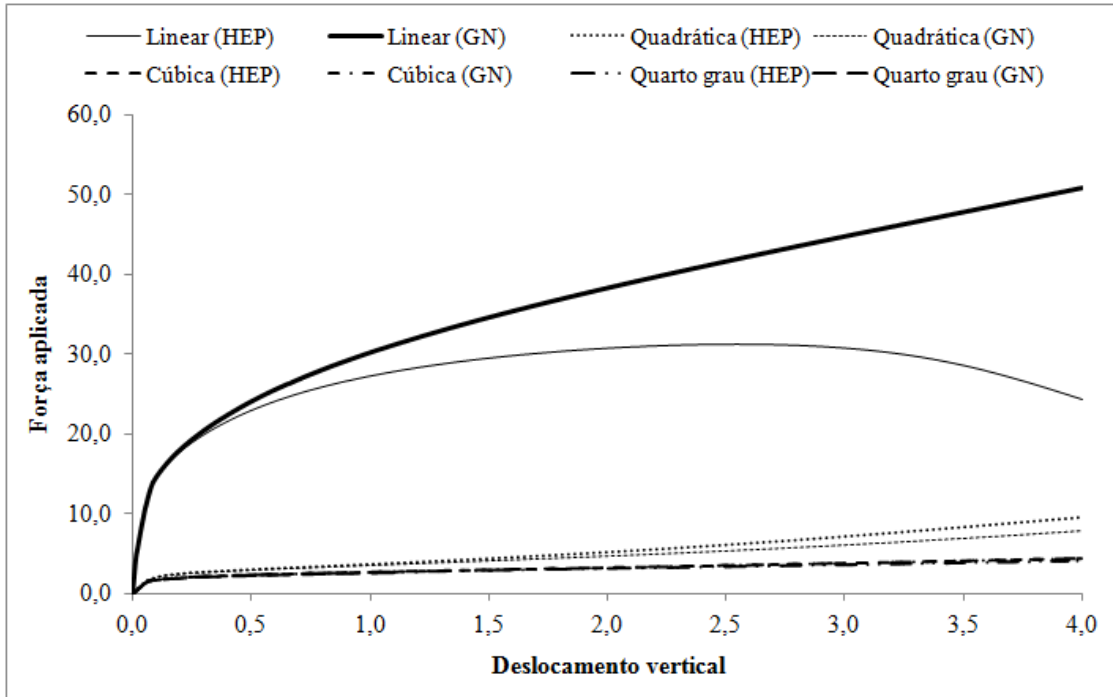


Figura 9.117. Força aplicada versus deslocamento transversal da viga em balanço do item 9.2.7. Na legenda, as palavras se referem à ordem de aproximação polinomial dos elementos finitos tetraédricos, e as siglas GN e HEP correspondem às formulações de Green-Naghdi (seção 6.3) e hiperelastoplástica (seção 6.4).

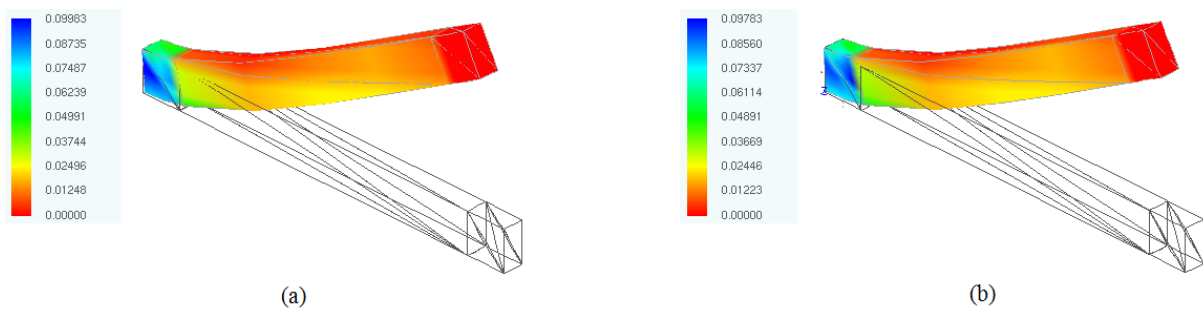


Figura 9.118. Distribuição final do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.33) para a viga em balanço do item 9.2.7: (a) formulação hiperelastoplástica; (b) formulação de Green-Naghdi. Estes resultados numéricos foram obtidos a partir da malha com 18 elementos finitos tetraédricos do quarto grau.



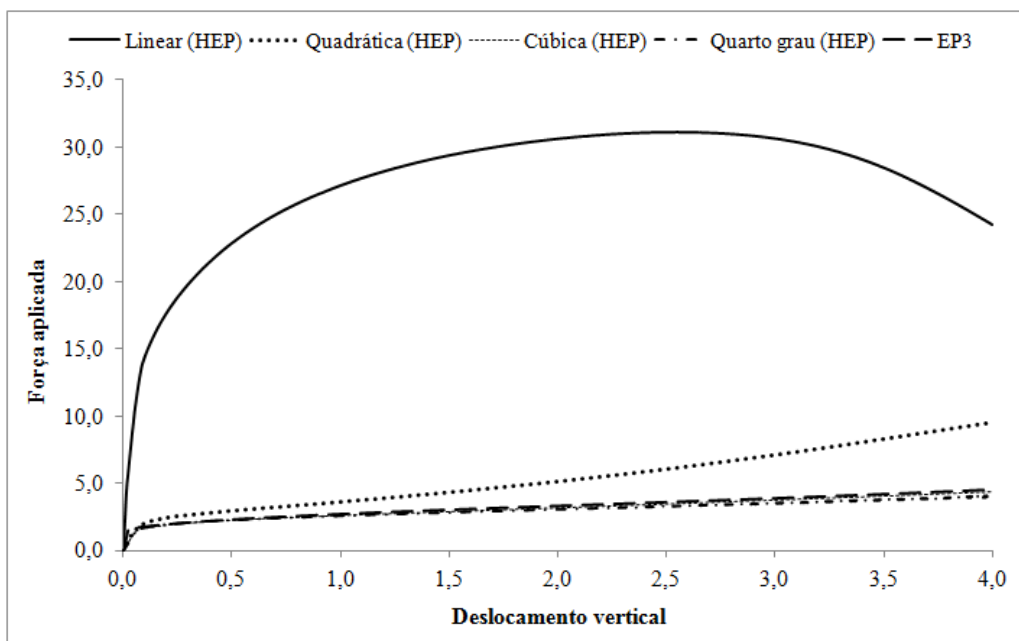


Figura 9.119. Força aplicada versus deslocamento transversal da viga em balanço do item 9.2.7. Na legenda, as palavras se referem à ordem de aproximação polinomial dos elementos finitos tetraédricos, e as siglas HEP e EP3 correspondem, nesta ordem, aos resultados numéricos obtidos com a formulação hiperelastoplástica (seção 6.4) e com o programa EPIM3D (seção 8.8).

### 9.2.8. Bloco parcialmente carregado

O mesmo bloco do item 9.1.9.1 (ver figura 9.76) é analisado aqui em regime elastoplástico via controle de carga. Neste caso, contudo, o material é o polímero vítreo do item 9.2.5.2 (ver coeficientes 9.56), a malha base (ver Apêndice F) é mostrada na figura 9.120, e a carga superficial evolui da seguinte forma:

- etapa 1 (100 passos): carga decresce até -88,0;
- etapa 2 (200 passos): carga cresce até 88,0;
- etapa 3 (100 passos): carga decresce até 0,0.

Devido à simetria em relação aos planos  $x_2 = 10,0$  e  $x_3 = 10,0$ , apenas um quarto do bloco é discretizado. Cada um dos quatro hexaedros da malha base da figura 9.120 é dividido em seis tetraedros, o que resulta em 24 elementos finitos sólidos tetraédricos. A ordem de aproximação é variável (de um a quatro). Para simular numericamente este exemplo, é empregada apenas a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4.

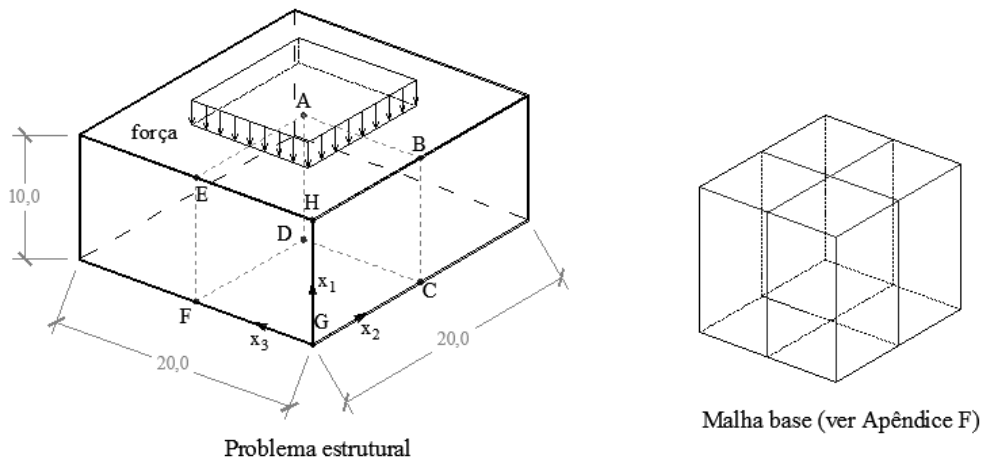


Figura 9.120. Malha base do bloco parcialmente carregado do item 9.2.8.

De acordo com a figura 9.121, os resultados numéricos deste estudo corroboram os resultados numéricos da referência Dettmer e Reese (2004), e a malha com elementos tetraédricos de ordem linear apresenta travamento.

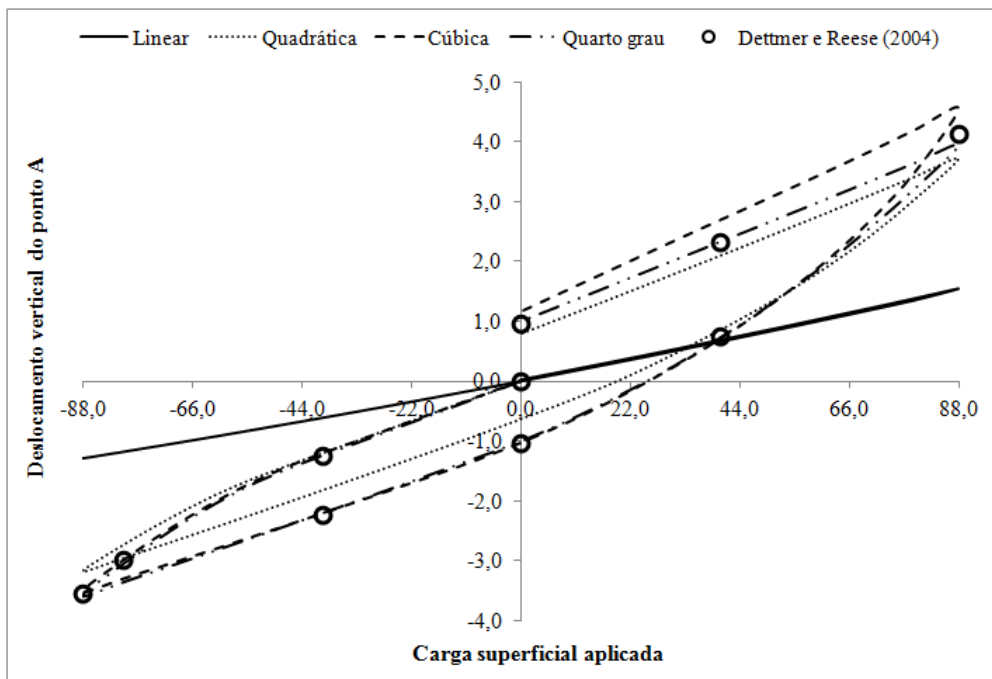


Figura 9.121. Carga superficial aplicada versus deslocamento do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.120) para o bloco parcialmente carregado em regime elastoplástico. As palavras na legenda correspondem à ordem de aproximação polinomial dos elementos finitos sólidos tetraédricos.

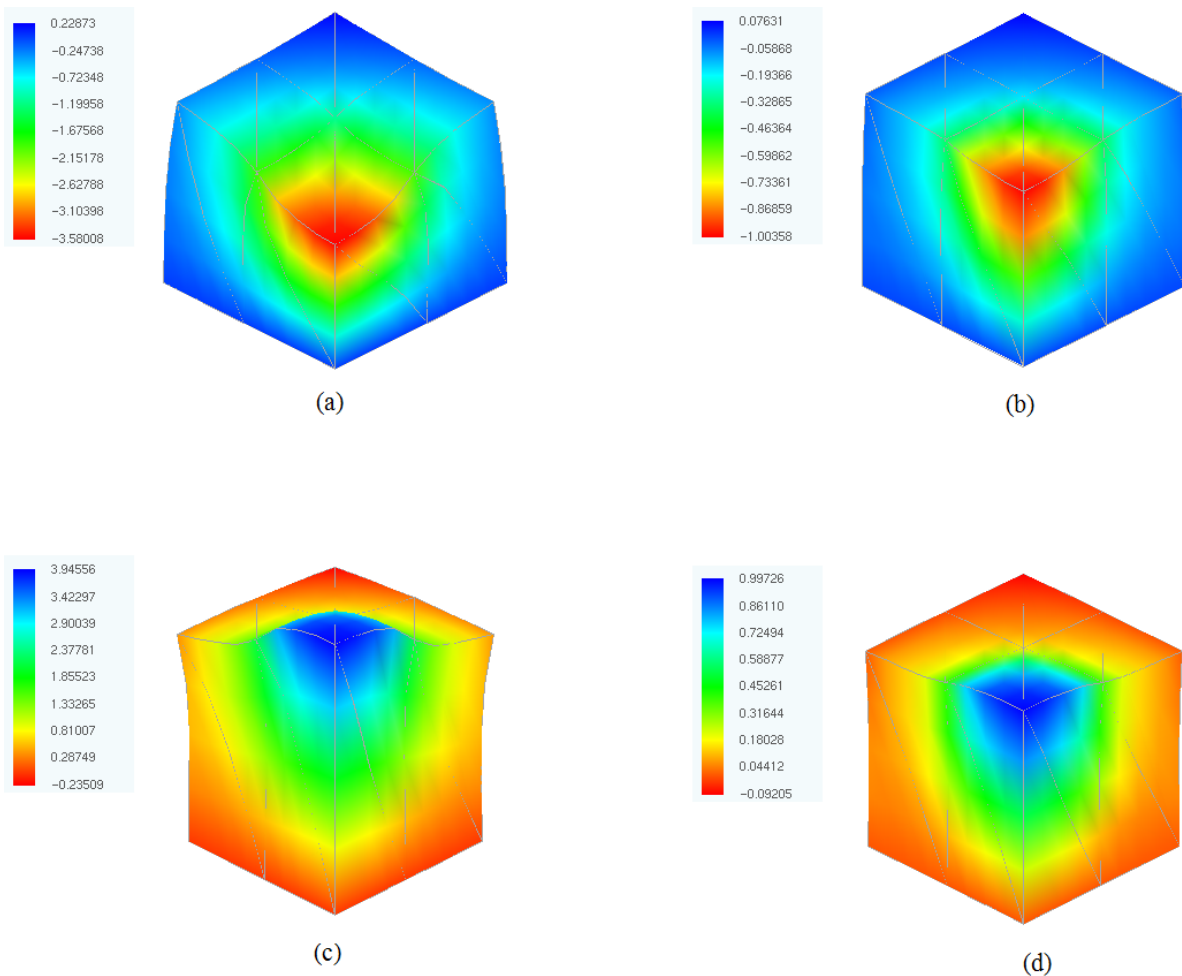


Figura 9.122. Deslocamentos ao longo de  $x_1$  para o bloco parcialmente carregado em regime elastoplástico (ver figura 9.120) ao final do passo: (a) 100 ( $p_1 = -88, 0$ ); (b) 200 ( $p_1 = 0, 0$ ); (c) 300 ( $p_1 = 88, 0$ ); (d) 400 ( $p_1 = 0, 0$ ). Estes resultados numéricos foram obtidos a partir da malha com 24 elementos tetraédricos do quarto grau.

### 9.2.9. Indentação de bloco

O mesmo bloco do exemplo anterior é simulado numericamente aqui com controle de deslocamento. A parte do bloco que é carregada no item 9.2.8 (ver figura 9.120) é agora submetida a um deslocamento prescrito na direção  $x_1$ , o qual avança, em 100 passos, até  $-5,0$ , e retorna até  $0,0$  também em 100 passos. O material neste caso é o aço de dupla fase DP600, com lei hiperelástica linear (5.9) e lei de encruamento isotrópico de Swift (6.50), cujos coeficientes são (OLIVEIRA; ALVES; CHAPARRO; MENEZES, 2007):

$$E = 210000,0 \quad (9.58.1)$$

$$\nu = 0,30 \quad (9.58.2)$$

$$K = 1093,0 \quad (9.58.3)$$

$$E_0 = 0,0016626225 \quad (9.58.4)$$

$$n = 0,1870 \quad (9.58.5)$$

Para analisar este exemplo com a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4, foram empregadas as mesmas malhas de elementos finitos do item 9.2.8. Este problema estrutural também foi simulado numericamente com o programa DD3IMP (ver seção 8.8). Para isso, foi necessário, além de especificar a malha de elementos hexaédricos lineares, definir a geometria da ferramenta que realiza a compressão (ver figura 9.123). No programa DD3IMP, assume-se que tal ferramenta possui uma rigidez infinita, isto é, a ferramenta não se deforma. As imagens das malhas foram geradas com o programa GID, utilizado pelo aluno durante seu estágio de Doutorado na Universidade de Coimbra. Os resultados numéricos do programa com a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4 estão de acordo com os resultados do programa DD3IMP da seção 8.8 (ver figura 9.124). Na figura 9.125, são mostradas as distribuições do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$ , para as malhas mais refinadas, ao final do passo 100, isto é, para um deslocamento na direção  $x_1$  igual a -5,0. Nessa figura, pode-se notar a simetria, em relação ao plano  $x_2 = x_3$  (ver figura 9.123), da distribuição do parâmetro  $\kappa$  para a malha de hexaedros utilizada no programa DD3IMP. Já a distribuição do parâmetro  $\kappa$  na figura 9.125a não é simétrica em relação ao plano  $x_2 = x_3$  pois a malha de tetraedros também não é simétrica em relação a esse plano.

#### 9.2.10. Chapa com orifício circular tracionada

A chapa homogênea ilustrada na figura 9.126 é analisada numericamente via controle de deslocamento. Segundo a referência Mosler (2010), este exemplo é usualmente empregado para investigar a consistência de modelos elastoplásticos. Em tal referência, são usados elementos finitos sólidos tetraédricos de ordem quadrática (com 10 nós). Para simular numericamente este problema estrutural, é utilizado aqui apenas o código computacional com a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4. A malha de elementos finitos empregada possui

78 sólidos tetraédricos de ordem variável (de um a três). Devido à simetria em relação aos planos  $x_1 = 18,0$ ,  $x_2 = 0,50$  e  $x_3 = 0,0$ , apenas um oitavo da chapa é discretizada.

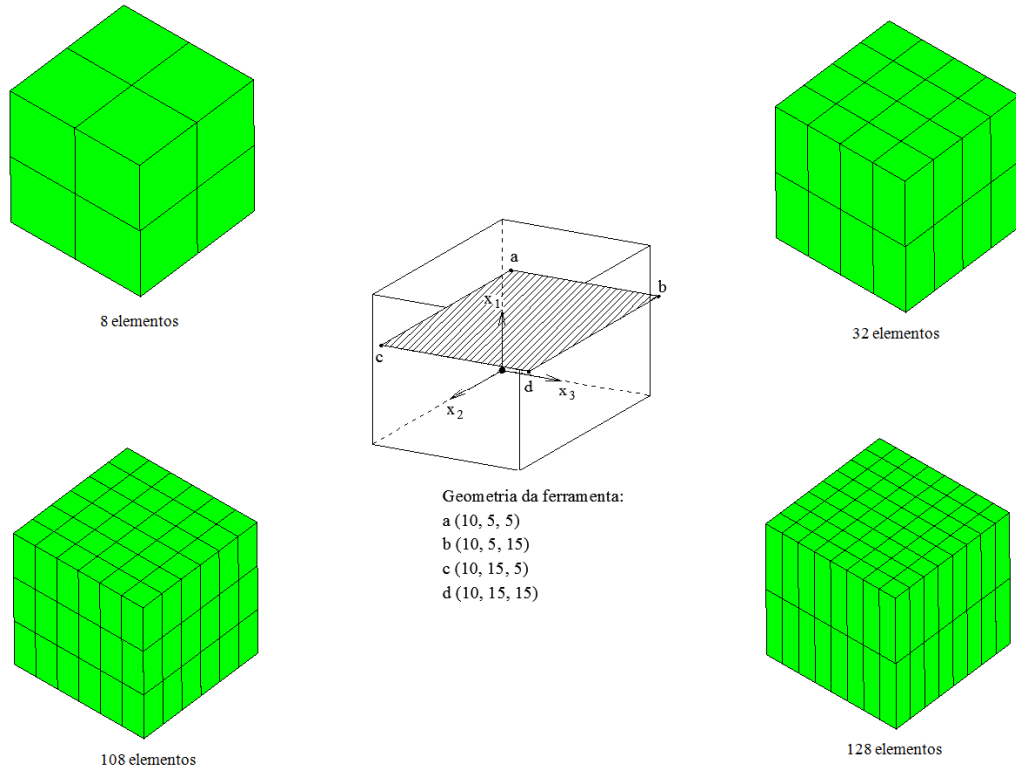


Figura 9.123. Geometria da ferramenta e malhas de elementos finitos hexaédricos lineares para simulação da indentação do bloco com o programa DD3IMP.

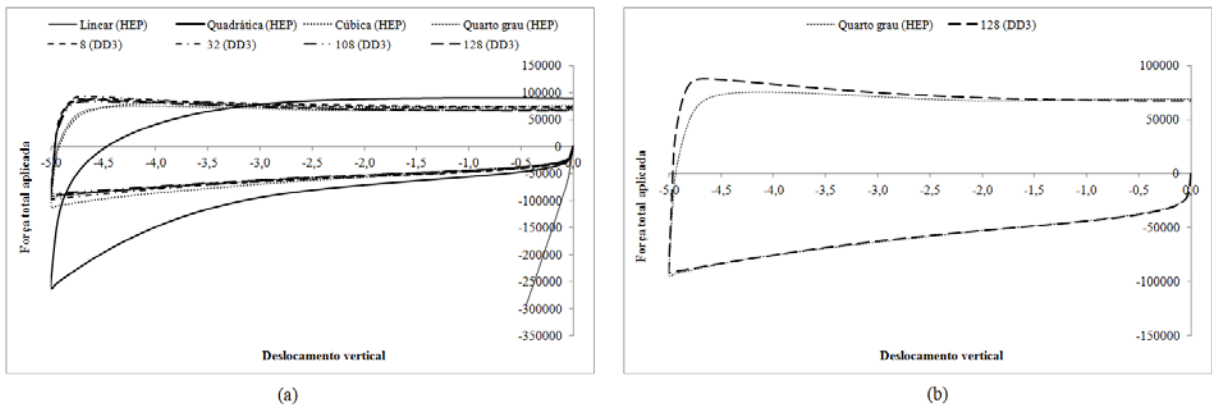


Figura 9.124. Força total aplicada versus deslocamento do ponto A na direção  $x_1$  (ver figura 9.120) para o bloco sob indentação em regime elastoplástico: (a) todas as malhas; (b) malhas mais refinadas. Na legenda, as palavras denotam a ordem de aproximação dos elementos tetraédricos para simulação com a hiperelastoplasticidade (HEP) da seção 6.4, e os números representam a quantidade de hexaedros lineares para simulação com o programa DD3IMP (DD3) da seção 8.8.

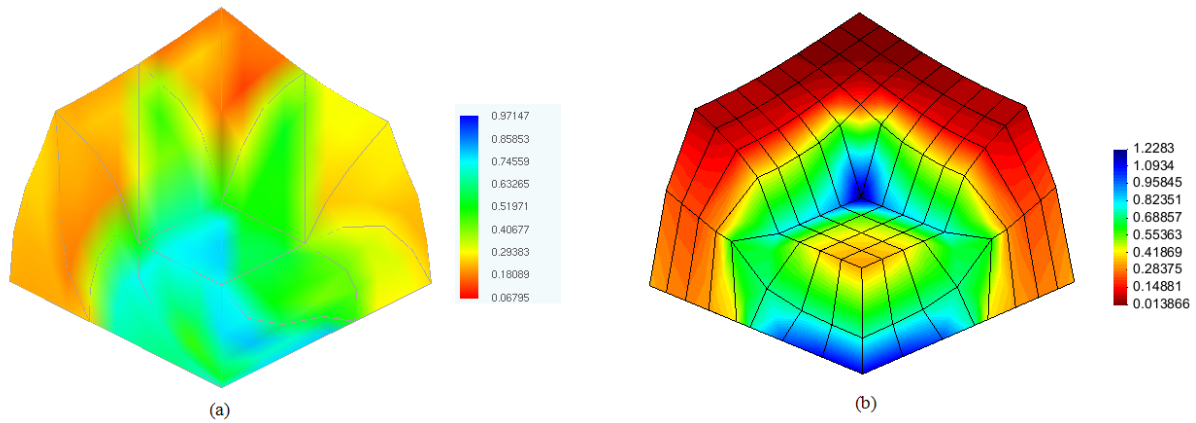


Figura 9.125. Distribuição do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (6.33) ou (8.24) para as malhas mais refinadas do bloco sob indentação da figura 9.123, ao final do passo 100 (deslocamento na direção  $x_1$  igual a  $-5,0$ ): (a) 24 elementos tetraédricos do quarto grau (programa com a formulação hiperelastoplástica deste estudo); (b) 128 elementos hexaédricos lineares (programa DD3IMP).

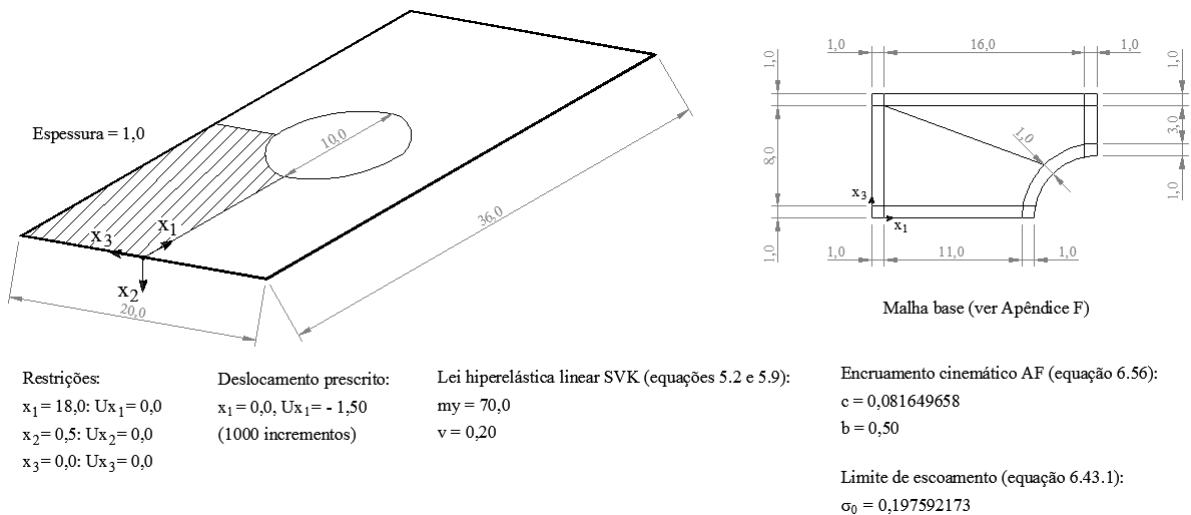


Figura 9.126. Chapa com orifício circular tracionada (geometria, lei constitutiva, condições de contorno e malha base). A parte hachurada representa a parte discretizada da chapa.

A comparação dos resultados numéricos deste estudo com os da referência, em termos do gráfico força versus deslocamento, é mostrada na figura 9.127, na qual se pode notar que é necessária uma melhor análise de convergência, ou seja, para poder comparar os resultados é preciso simular este exemplo com malhas mais refinadas. A posição final da chapa (no último passo) é mostrada na figura 9.128.

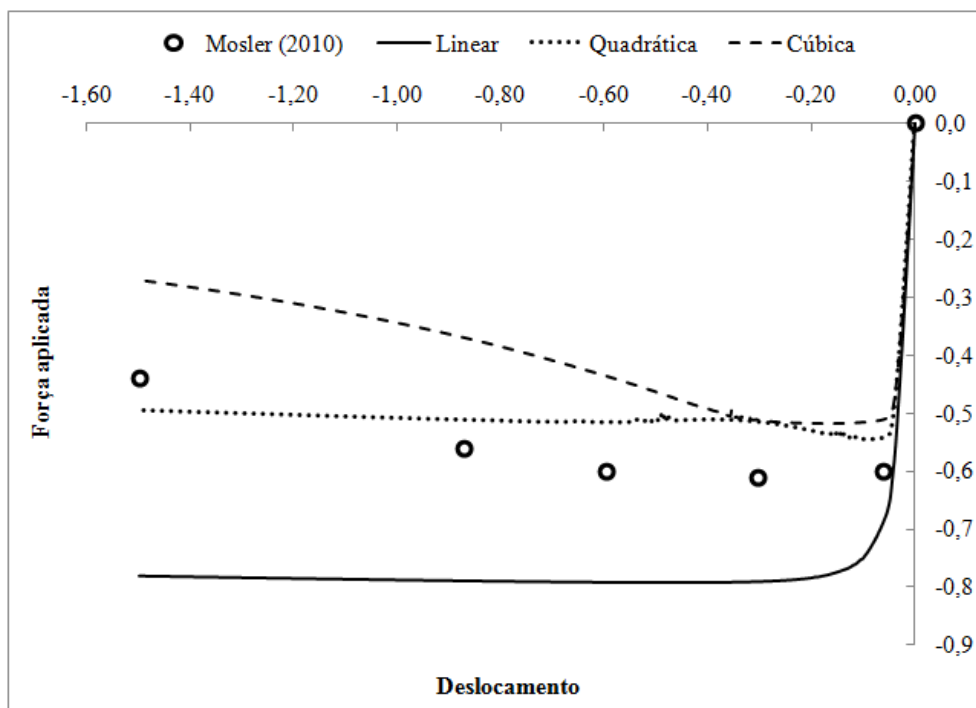


Figura 9.127. Força aplicada versus deslocamento  $u_1$  da face  $x_1 = 0,0$  para a chapa da figura 9.126. Na legenda, as palavras se referem à ordem de aproximação dos elementos finitos tetraédricos deste estudo. Os valores de força computados aqui correspondem apenas à parte discretizada da chapa, isto é, correspondem a um quarto da força total em toda a chapa.

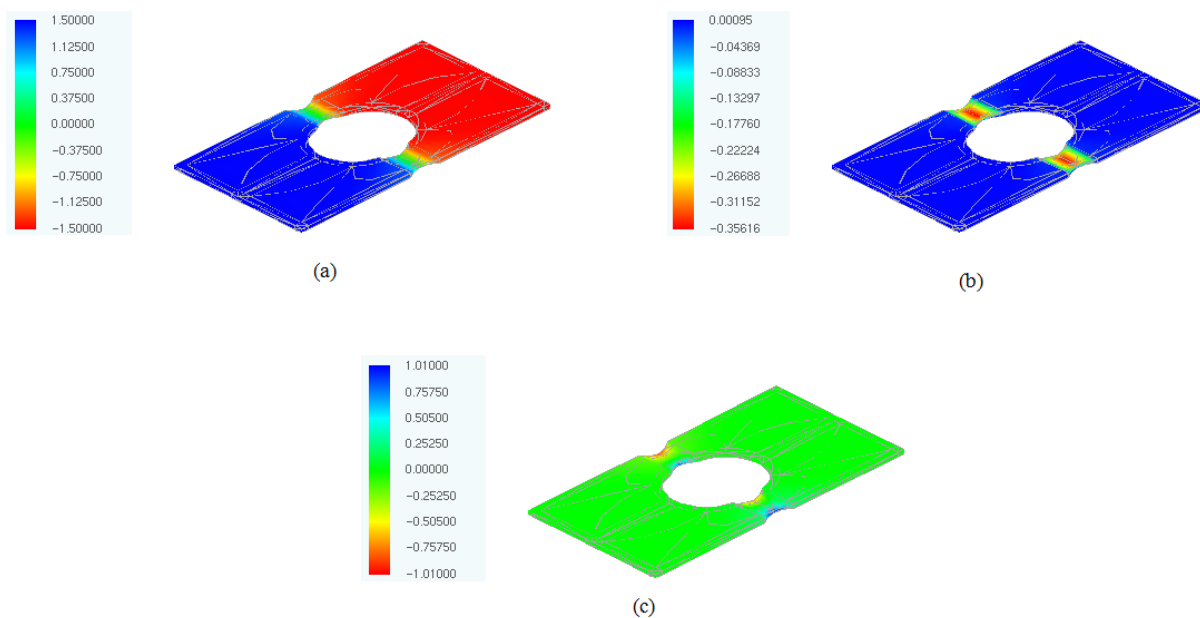
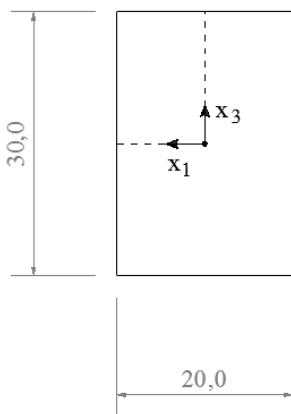


Figura 9.128. Posição de equilíbrio final da chapa da figura 9.125. Os valores correspondem aos deslocamentos finais na direção do eixo: (a)  $x_1$ ; (a)  $x_2$ ; (a)  $x_3$ . Estes resultados numéricos foram obtidos a partir da malha com 78 elementos finitos tetraédricos de ordem cúbica.

### 9.2.11. Achatamento de cilindro

Este exemplo numérico, extraído de Castelló e Flores (2008) e proposto inicialmente por Taylor e Becker (1983), é o achatamento de um corpo de prova homogêneo cilíndrico (ver figura 9.129). De acordo com a primeira referência, neste problema ocorrem elevadas deformações de compressão e grande distorção da malha de elementos. Devido à simetria em relação aos planos  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,0$ , apenas um oitavo do cilindro é discretizado. Para simular numericamente este exemplo, foi utilizada apenas a formulação hiperelastoplástica da seção 6.4, e foram empregadas malhas com 72 elementos finitos sólidos tetraédricos com grau de aproximação variável (de um a quatro).



Lei hiperelástica linear SVK (5.2 ou 5.9):

$$- m\gamma = 200000,0$$

$$- \nu = 0,30$$

Lei polinomial de encruamento isotrópico (6.49):

$$a_0 = 700,0$$

$$a_1 = 300,0$$

Restrições:

$$x_1 = 0,0: u_1 = 0,0$$

$$x_2 = 0,0: u_2 = 0,0$$

$$x_3 = 0,0: u_3 = 0,0$$

Deslocamento prescrito ( $x_3 = 15,0$ ):

$$u_3 = -9,0 \text{ (200 incrementos)}$$

Figura 9.129. Achatamento de cilindro (geometria, lei constitutiva e condições de contorno). As linhas tracejadas denotam a parte discretizada do cilindro.

Conforme a figura 9.130, os resultados numéricos deste estudo, em termos do gráfico força versus deslocamento, convergem para a solução numérica da referência com aumento do grau de aproximação polinomial dos elementos tetraédricos. Na figura 9.131, é ilustrada a posição final do cilindro, para a malha mais refinada.



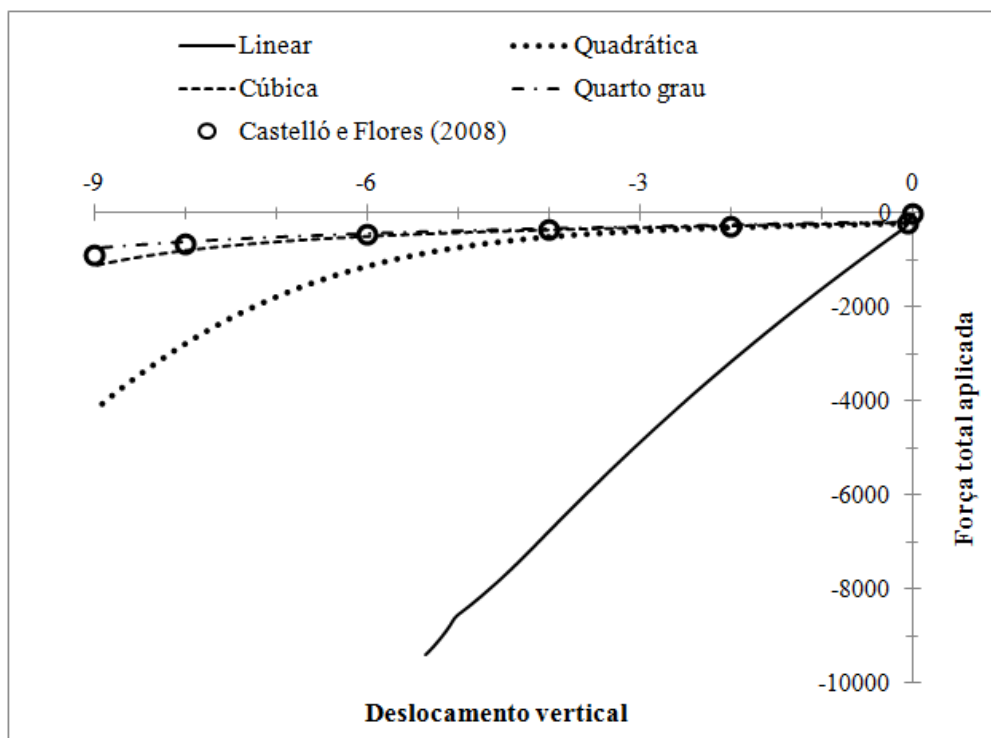


Figura 9.130. Força aplicada versus deslocamento da face com coordenada  $x_3 = 15,0$  para o cilindro da figura 9.129. As palavras na legenda se referem à ordem de aproximação polinomial dos elementos finitos tetraédricos. Os valores de força computados aqui correspondem apenas à parte discretizada, ou seja, correspondem a um quarto da força total aplicada em todo o cilindro.

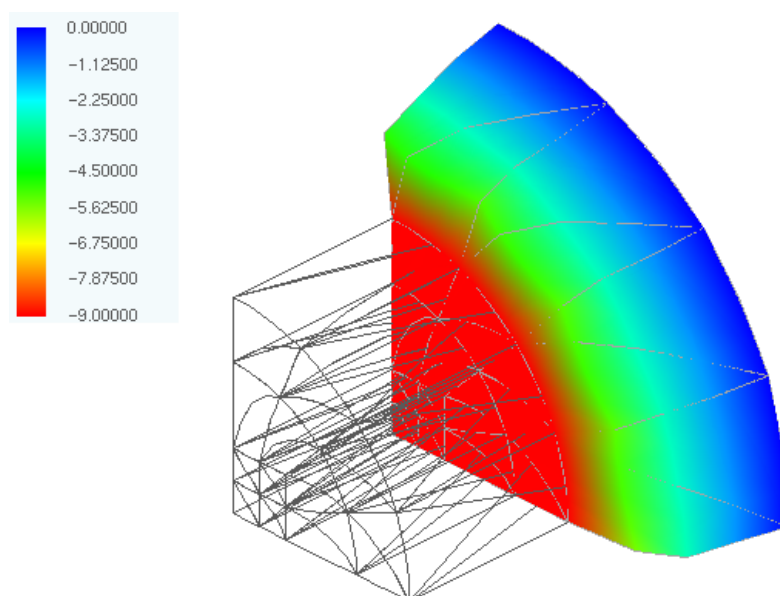


Figura 9.131. Configuração inicial e deslocamentos verticais finais para o cilindro da figura 9.129. Estes resultados numéricos foram obtidos com a malha de 78 tetraedros do quarto grau.

### 9.2.12. Achatamento de prisma

O último problema estrutural, ilustrado na figura 9.132, é analisado numericamente com o programa DD3IMP apenas (ver seção 8.8). Para simulação são empregados elementos finitos sólidos hexaédricos de ordem linear. As malhas de hexaedros, juntamente com as respectivas distribuições finais do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (8.24), são mostradas na figura 9.133. A análise de convergência, em termos do gráfico força versus deslocamento, é dada na figura 9.134.

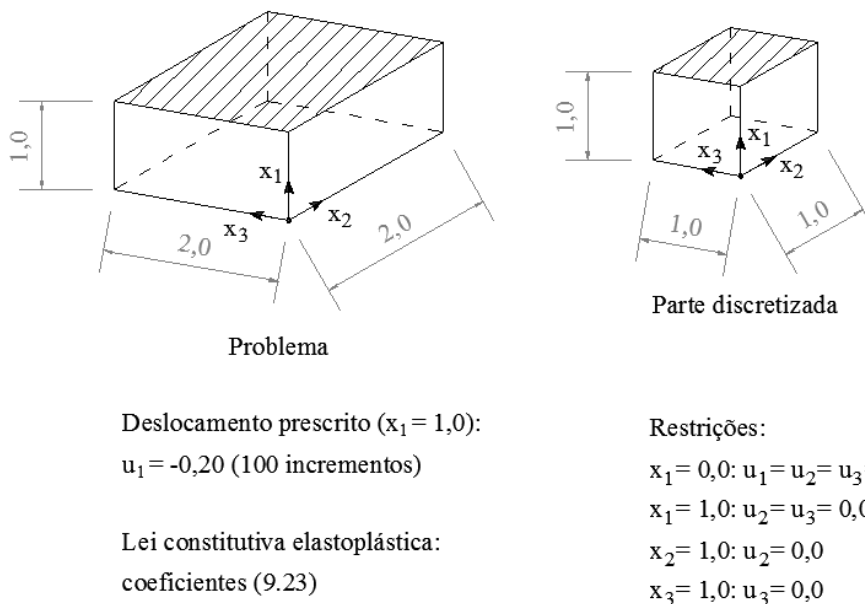


Figura 9.132. Achatamento de prisma (geometria, condições de contorno e lei constitutiva). A parte hachurada denota a parte do prisma com deslocamento prescrito, ou seja, é a parte que entra em contato com a ferramenta de compressão.

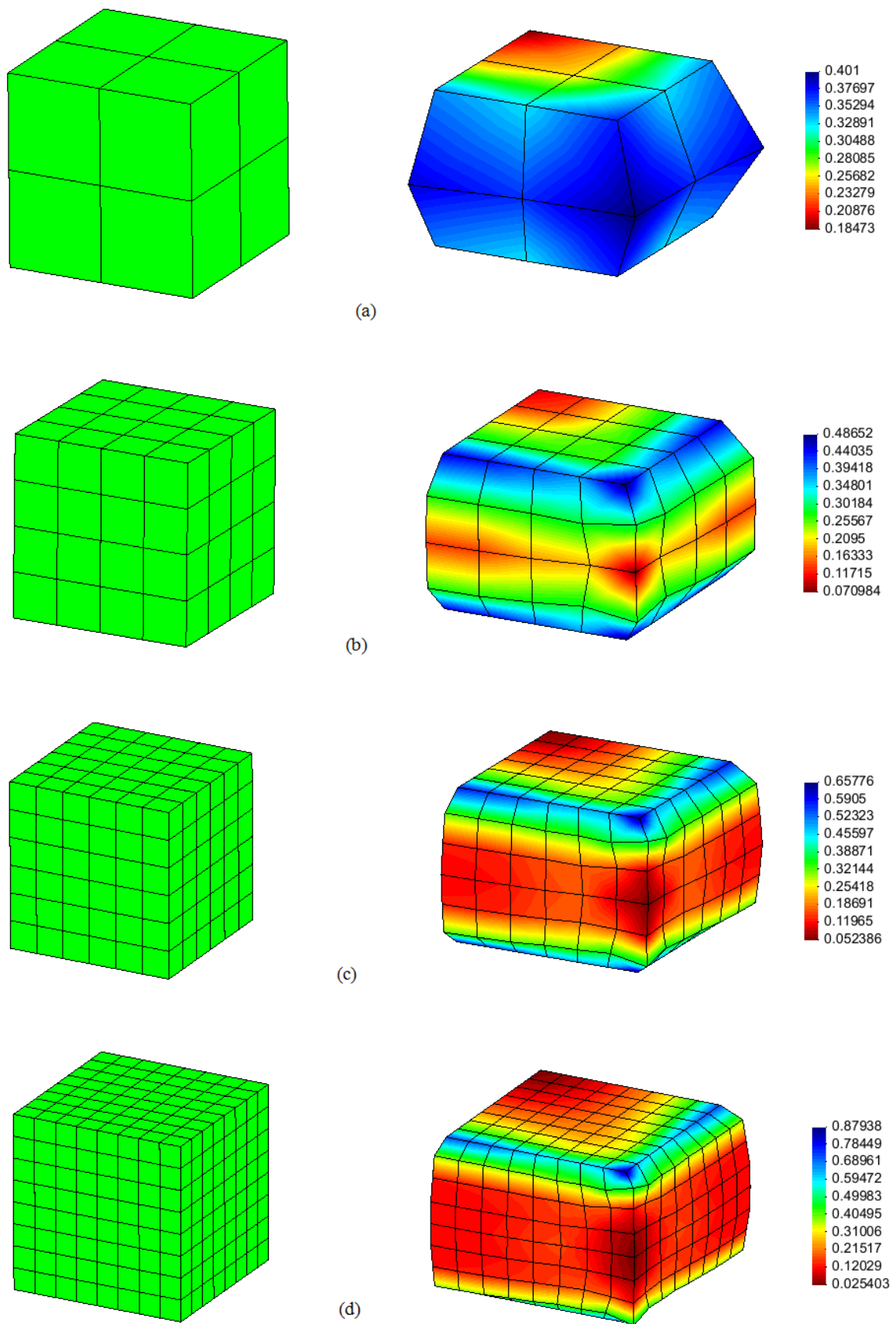


Figura 9.133. Malhas de elementos hexaédricos utilizadas no programa DD3IMP (ver seção 8.8), e distribuições finais do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$  (8.24).

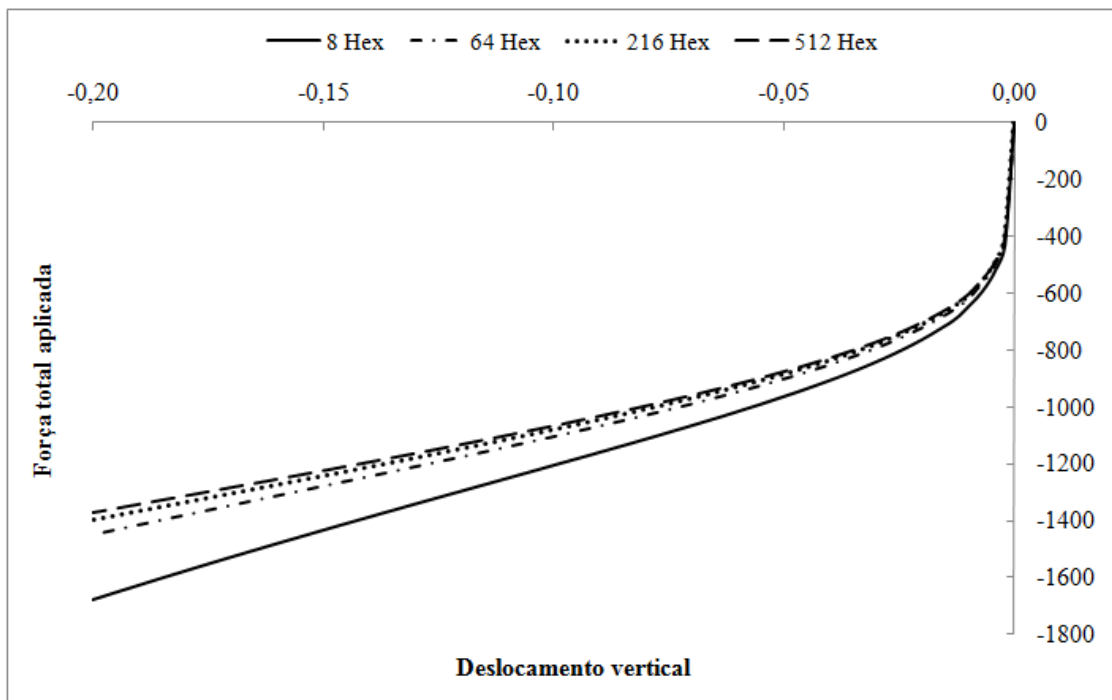


Figura 9.134. Força aplicada versus deslocamento na direção  $x_1$  da face com coordenada  $x_1 = 1,0$  do prisma sob achatamento da figura 9.132. Na legenda, os números e a sigla Hex correspondem à quantidade de elementos finitos sólidos hexaédricos lineares.

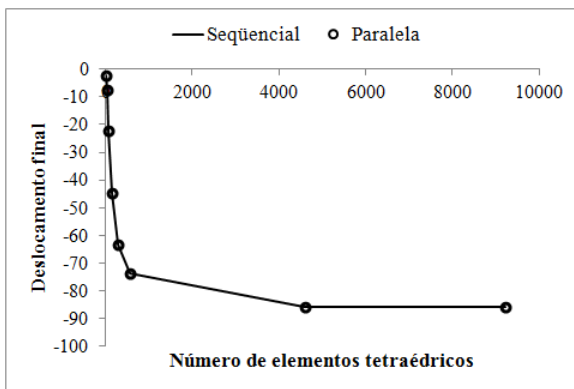
### 9.3. Tempo de processamento para as estratégias sequencial e paralela

Conforme o item 8.6 desta tese, os códigos computacionais deste estudo foram paralelizados (UKTU et al., 1982). Para mostrar a influência dessa paralelização no tempo de simulação numérica, foram comparados os tempos de processamento para dois problemas estruturais. O primeiro é a viga em balanço da figura 9.20 em regime elástico. O segundo problema é a barra sob tração uniaxial da figura 6.1 em regime elastoplástico. O material dessa barra é o aço doce DC06 (ver coeficientes 9.57), e o comprimento dela é duplicado em 1000 incrementos. Para a comparação dos tempos de processamento, foi utilizado o chamado “speedup” (RAO; RAO; DATAGURU, 2003):

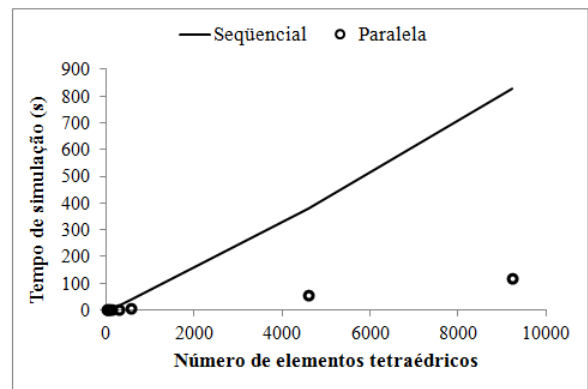
$$SU = \frac{TP_{SEQ}}{TP_{PAR}} \quad (9.59)$$

onde  $TP_{SEQ}$  e  $TP_{PAR}$  são, respectivamente, os tempos da simulação numérica com os códigos computacionais sequencial e paralelo. O computador utilizado neste caso possui oito processadores. Para simulação com a estratégia sequencial, os oito processadores realizam simultaneamente os mesmos cálculos. Já na estratégia paralela, cada processador monta os sistemas locais (8.1) de seus respectivos elementos finitos, e só o processador central, chamado de mestre, monta e resolve o sistema global (8.9). Para realizar as simulações numéricas deste item, foram empregados apenas elementos finitos sólidos tetraédricos de ordem linear.

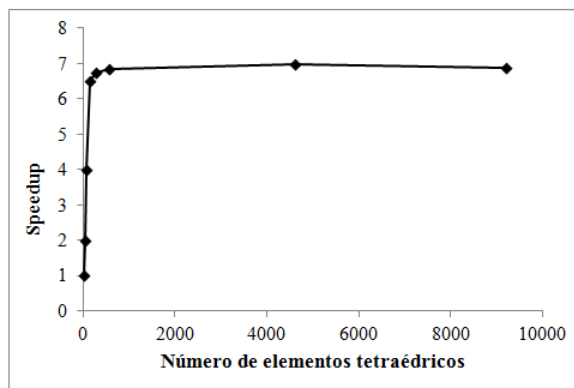
De acordo com as figuras 9.135 e 9.136, o tempo de simulação numérica com o código paralelo é menor do o tempo com o código sequencial, como era de se esperar. Porém, os valores obtidos de “speedup” (9.59) para a barra em regime elastoplástico são menores do que os obtidos para a viga em regime elástico.



(a)

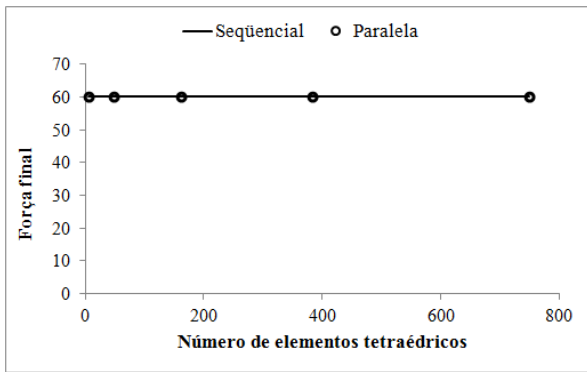


(b)

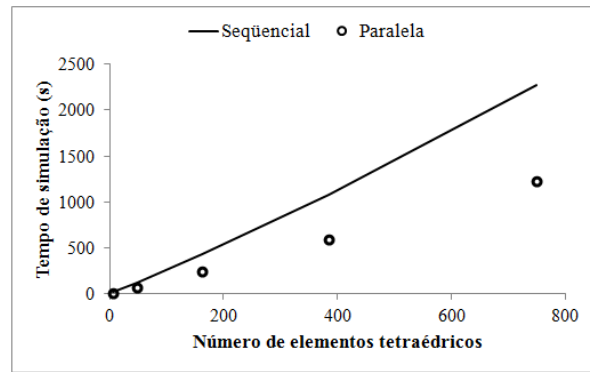


(c)

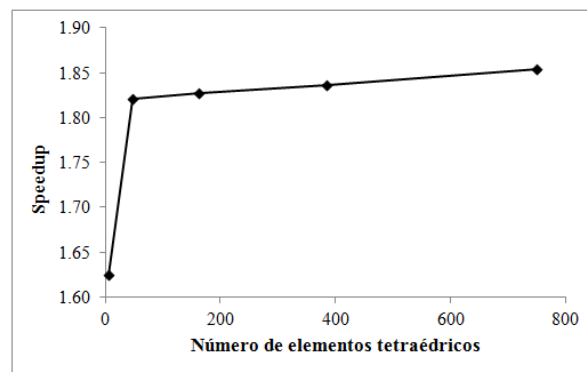
Figura 9.135. Comparação entre as estratégias sequencial e paralela para a viga em balanço em regime elástico: (a) deslocamento final  $u_3$  do ponto A (ver figura 9.20); (b) tempo de simulação numérica (em segundos); (c) “speedup” (9.59).



(a)



(b)



(c)

Figura 9.136. Comparação entre as estratégias sequencial e paralela para a barra sob tração uniaxial em regime elastoplástico: (a) força longitudinal final aplicada (ver figura 6.1); (b) tempo de simulação numérica (em segundos); (c) “speedup” (9.59).

## 10. CONCLUSÕES

Neste último capítulo, são feitos alguns comentários gerais sobre o trabalho, e são descritas as conclusões do presente estudo tiradas, principalmente, dos resultados numéricos do capítulo 9.

### *10.1. Tópicos do estudo*

Neste estudo, é descrita uma formulação numérica para simulação computacional, via Método dos Elementos Finitos (MEF), de estruturas constituídas de materiais homogêneos ou heterogêneos com gradação funcional (GF) em regime elástico ou elastoplástico, com deslocamentos finitos e com deformações pequenas ou grandes. Além disso, os objetivos deste estudo, descritos no item 1.2, foram alcançados.

### *10.2. Elementos finitos sólidos*

No presente estudo a estrutura, considerada um meio contínuo, é discretizada via elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico com ordem de aproximação polinomial qualquer, isto é, as funções de forma, empregadas para interpolar a posição do elemento, possuem um grau genérico. Além disso, para reproduzir os deslocamentos finitos e as grandes deformações, são utilizadas grandezas cinemáticas da Mecânica Não Linear do Contínuo (MNLC). Embora o MEF e a MNLC sejam bastante difundidos no meio acadêmico, uma das contribuições deste estudo é o uso de um grau de aproximação genérico para os elementos finitos. Essa ordem de aproximação qualquer pode ser de grande auxílio em trabalhos futuros com elementos finitos, já que a existência de uma base grande de dados com os coeficientes das funções de forma, nos casos de graus muito elevados, não é imperativa. Para simulação numérica, foram utilizadas as seguintes ordens de aproximação polinomial: linear, quadrática, cúbica, quarto grau e quinto grau.

### *10.3. Equilíbrio*

Para descrição do equilíbrio de cada elemento finito e, assim, de toda a estrutura, nenhuma modificação significativa em relação à metodologia do grupo de pesquisa do aluno foi realizada. A descrição da cinemática é Lagrangiana Total, o equilíbrio é expresso pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total, o par conjugado tensão-deformação é composto pelo segundo tensor de Piola-Kirchhoff e pelo tensor de deformação de Green-Lagrange, os vetores de forças internas e as matrizes Hessianas são determinados via integração numérica, e a solução do sistema não linear de equações, resultante da aproximação numérica, é feita com o método iterativo de Newton-Raphson.

### *10.4. Hiperelasticidade*

Para modelar a resposta elástica dos materiais, foram empregadas aqui leis constitutivas hiperelásticas, cujas equações foram descritas pelo aluno em sua dissertação de mestrado. Assim, não foi necessário desenvolver novamente os cálculos da tensão e do tensor elástico de quarta ordem. Tais cálculos, implementados em sub-rotinas do código computacional desenvolvido pelo aluno no mestrado, foram aproveitados neste estudo.

### *10.5. Elastoplasticidade*

Neste estudo, foram desenvolvidos códigos computacionais com duas formulações para materiais em regime elastoplástico: a de Green-Naghdi e a hiperelastoplástica. Para a primeira formulação, a deformação é decomposta de forma aditiva nas parcelas elástica e plástica, de modo similar à formulação elastoplástica de materiais em regime de deformações infinitesimais. Já no modelo hiperelastoplástico, são empregadas a segunda lei da termodinâmica e a decomposição multiplicativa do gradiente. Em ambos os casos, são utilizados o critério de plastificação de von-Mises, a etapa de previsão elástica, e os algoritmos de retorno para correção plástica. Ademais, pode-se notar a maior complexidade



da formulação hiperelastoplástica em relação à de Green-Naghdi, já que o número necessário de cálculos para determinação da tensão e para realização do retorno é bem maior para a hiperelastoplasticidade. Tal complexidade pode ser vista na formulação analítica da barra sob tração uniaxial, da seção 6.7. Basicamente, as diferenças entre as formulações deste estudo e do grupo de pesquisa, no contexto da elastoplasticidade, são a decomposição da deformação (ou do gradiente) e a utilização de outras medidas na lei constitutiva. No presente estudo o tensor das tensões de Mandel, empregado para descrever o comportamento elástico do material, e o tensor das tensões inversas são descritos na configuração intermediária.

#### *10.6. GF*

Neste estudo é utilizado o conceito da GF, a qual pode ser definida como a variação gradual (contínua e suave) da composição do material e, portanto, de suas propriedades constitutivas. Além disso, leis de GF são empregadas aqui para definir a variação gradual dos coeficientes da lei constitutiva do material ao longo de uma das três direções. Para simular numericamente estruturas constituídas de materiais com GF, como o cálculo das forças internas e das matrizes Hessianas é realizado via integração numérica, é necessário calcular os coeficientes com GF do material em cada ponto de integração. Esse cálculo, feito de forma analítica, está armazenado em sub-rotinas dos códigos computacionais desenvolvidos. Para o caso da barra sob tração uniaxial, são dadas no item 7.5 algumas equações e soluções analíticas para o caso de materiais com GF.

#### *10.7. Regime de pequenas deformações elásticas*

Neste estudo foram desenvolvidos os seguintes códigos computacionais, descritos no capítulo 8: gerador automático das funções de forma; gerador de malhas de elementos sólidos a partir de uma malha base hexaédrica; código para análise de materiais em regime elástico; e código para análise de materiais em regime elastoplástico. Além de desenvolver tais códigos, o aluno teve contato, ao longo de seu estágio de Doutorado na Universidade de Coimbra, com os programas EPIM3D e DD3IMP. O primeiro programa é utilizado para análise numérica de

materiais em regime elastoplástico, e o segundo para simulação numérica de processos de conformação plástica. Nas formulações desses dois programas, é usada a hipótese de pequenas deformações elásticas. Ademais, na seção 8.8.7 desta tese, é mostrado que a formulação hiperelastoplástica, da seção 6.4, é equivalente, em termos da resposta plástica do material, à formulação dos programas EPIM3D e DD3IMP para análise de materiais em regime de pequenas deformações elásticas, mas com deformações plásticas finitas.

### *10.8. Resultados numéricos*

A partir dos resultados das simulações numéricas, dados no capítulo 9, podem ser tiradas as seguintes conclusões:

- para os casos de deformação uniforme (como a tração uniaxial, a compressão uniaxial e o cisalhamento simples), os resultados numéricos deste estudo estão de acordo com as respectivas soluções analíticas e com os respectivos dados experimentais;
- para o elemento finito tetraédrico, a quadratura Gaussiana é mais eficiente do que a estratégia de integração numérica de Rathod, Venkatesudu e Nagaraja (2007), já que a primeira fornece praticamente os mesmos resultados com menor número de pontos de integração;
- para o caso da tração uniaxial, é mostrada no item 9.1.5 a influência dos coeficientes de GF no comportamento da barra, em termos do gráfico força versus deslocamento e da distribuição da tensão e da deformação longitudinais;
- embora o elemento finito da presente formulação numérica seja sólido (tridimensional), o refinamento da malha de elementos melhora a precisão dos resultados para problemas estruturais de pórticos planos e de vigas tridimensionais com grandes deslocamentos;
- para os problemas estruturais dos dois itens anteriores com materiais em regime elástico, é mais eficiente refinar a malha na direção longitudinal do que refiná-la na transversal;
- os códigos computacionais desenvolvidos aqui também podem ser empregados para simular numericamente problemas estruturais com chapas e cascas finais, como é caso da membrana de Cook e do cilindro transversalmente tracionado; a única ressalva a isso é o elevado número de graus de liberdade necessário para a correta simulação numérica;

- para análise de materiais em regime elastoplástico, a estratégia de previsão elastoplástica, com cálculo do operador tangente elastoplástico de quarta ordem, melhora a convergência do método de Newton-Raphson para obtenção do equilíbrio de forças;
- para o caso da barra sob tração uniaxial, não foram constatadas diferenças significativas entre os métodos de retorno explícito e implícito, desde que os incrementos de força (ou de deslocamento) sejam pequenos;
- os resultados numéricos deste estudo corroboram as equações e soluções analíticas para vários casos da barra sob tração uniaxial em regime elastoplástico e constituída de material homogêneo e com GF;
- as simulações numéricas da viga em balanço em regime elastoplástico indicam que as formulações de Green-Naghdi e a hiperelastoplástica são equivalentes para problemas estruturais com grandes deslocamentos e pequenas deformações;
- para o regime de pequenas deformações elásticas, os resultados numéricos deste estudo estão de acordo com os resultados numéricos dos programas EPIM3D e DD3IMP;
- foram constatados ganhos significativos, em relação aos tempos de simulação, com a paralelização dos códigos computacionais; esse ganho, contudo, é maior para análise de materiais em regime elástico;
- a convergência dos resultados com o refinamento da malha de elementos finitos é clara para as simulações numéricas de estruturas em regime elástico; já para simulação de materiais em regime elastoplástico, é necessário refinar as malhas utilizadas para se obter uma melhor convergência dos resultados, o que demanda um tempo de processamento muito grande.

### *10.9. Ideias para trabalhos futuros*

São dadas neste item algumas sugestões para trabalhos futuros:

- implementação, nos códigos computacionais desenvolvidos aqui, de outras leis constitutivas para modelar a resposta mecânica do material analisado;
- comparação dos algoritmos de retorno implícito e explícito para vários problemas estruturais, em relação aos resultados, ao tempo de processamento e à estabilidade numérica;
- utilização do algoritmo de geração das funções de forma para outros elementos finitos;
- refinamento da malha de elementos finitos para análise da convergência dos resultados das simulações numéricas de materiais em regime elastoplástico.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACADVIEW. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/software/27-pesquisa/software/157-acadview>. Acesso em 25 abr. 2012.

ALVES, J. L. C. M. **Simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas**: modelação mecânica e métodos numéricos. Dissertação de Doutorado. Guimarães, Portugal: Universidade do Minho, 2003.

ARCINIEGA, R. A.; REDDY, J. N. Large deformation analysis of functionally graded shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, p. 2036-2052, 2007.

AREIAS, PMA.; RABCZUK, T. Smooth finite strain plasticity with non-local pressure support. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 81, p. 106-134, 2010.

ASSAN, AE. **Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos**. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

BACHRACH, W. E.; BELYTSCHKO, T. Axisymmetric elements with high coarse-mesh accuracy. **Computer & Structures**, v. 23, n. 3, p. 323-331, 1986.

BADUSCI, D.; DATTOLI, G. Special polynomials and elliptic integrals. **Applied Mathematics Letters**, v. 24, p. 1111-1114, 2011.

BASAR, Y.; DING, Y. Finite rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, v. 34, p. 165-169, 1992.

BATHE, K. J.; BOLOURCHI, S. Large displacement analysis of three-dimensional structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 961-986, 1979.

BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 367-383, 1985.

BATRA, R. C.; BAHRAMI, A. Inflation and eversion of functionally graded non-linear elastic incompressible circular cylinders. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 44, p. 311-323, 2009.

BECHIR, H.; BOUFALA, K.; CHEVALIER, Y. Strain energy density function for carbon black filled rubber vulcanized for industrial applications. **Mécanique & Industries 3**, p. 245-252, 2002.

BELL, J.F. **The experimental foundations of solid mechanics**. Handbnch der Physik, v. 1, seção 4.35, New York: Springer-Verlag, 1973.

BELL, J.F. **A new, general theory of plasticity for structural metal alloys**. BRL Contract Report, n. 250. Baltimore: The Johns Hopkins University, 1975.

BELLMAN, R.; KALABA, R. **Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems**. American Elsevier, New York, 1965.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2000.

BELYTSCHKO, T. et al. Hourglass control in linear and nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 43, n. 3, p. 251-276, 1984.

BEN-OURANI, S. et al. A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> S-FGM thick beams. **Computational Materials Science**, v. 44, no. 4, p. 1344-1350, 2009.

BILGILI, E. Computer simulation as a tool to investigate the shearing deformation of nonhomogeneous elastomers. **Journal of Elastomers and Plastics**, v. 34, p. 239-264, 2002.

BOTTA, A. S. et al. A discussion on volume change in the plastic phase. **Commun. Numer. Meth. Engng.**, v. 24, p. 1149-1162, 2008.

BROYDEN, C. G. A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. **Mathematics of Computation (American Mathematical Society)**, v. 19, n. 92, p. 577–593, 1965.

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2009.

CARROLL, M. M. Must Elastic Materials be Hyperelastic? **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 14, p. 369–376, 2009.

CASTELLÓ, W. B.; FLORES, F. G. A triangular finite element with local remeshing for the large strain analysis of axisymmetric solids. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 198, p. 332-343, 2008.

CHEN, C., S. Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. **Composite Structures**, v. 68, p. 295-302, 2005.

CHEN, Z. **Finite Element Methods and Their Applications**. New York, USA: Springer Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-24078-0.

CHI, S. H.; CHUNG, Y. L. Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, p. 3657-3674, 2006.

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity**. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1988. 451p.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas**: uma formulação posicional baseada no MEF, Volume II. São Carlos: Departamento de Estruturas (SET), EESC-USP, 2003.

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 198, p. 3712-3722, 2009.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 193, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Comput Mech**, v. 40, p. 185-200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, Article ID 575131, 32p.

COIMBRA, A. L. **Novas Lições de Mecânica do Contínuo**. Edgard Blucher, São Paulo, 1981. 248p.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, Vol. 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2000. ISBN 0 471 92956 5 (v. 1).

DETTMER, W.; REESE, S. On the theoretical and numerical modelling of Armstrong-Frederick kinematic hardening in the finite strain regime. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 193, p. 87-116, 2004.

DIAGELE, E.; HARTMANN, S.; TSAKMAKIS, C. Finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules. **Computational Mechanics**, v. 25, p. 13-27, 2000.



DOGUI, A.; SIDOROFF, F. Kinematic hardening in large elastoplastic strain. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 21, n. 4, p. 685-695, 1985.

DUFF, I. S. **MA57 - A Code for the Solution of Sparse Symmetric Definite and Indefinite Systems**, 2004.

DUFF, I. S.; REID, J. K. Experience of sparse matrix codes on the CRAY-1. **Computer Physics Communications**, v. 26, p. 293-302, 1982.

DUFF, I. S.; REID, J. K. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v. 9, no. 3, p. 302-325, 1983.

DÜSTER, A.; BROKER, H.; RANK, E. The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 52, p. 673-703, 2001.

DÜSTER, A.; HARTMANN, S.; RANK, E. p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. **Comput. Methods Appl. Mech. Engng.**, v. 192, p. 5147-5166, 2003.

EKH, M.; RUNESSON, K. Modeling and numerical issues in hyperelasto-plasticity with anisotropy. **Int. J. Solids Structures**, v. 38, p. 9461-9478, 2001.

ETEROVIC, A. L.; BATHE, K. J. A note on the use of the additive decomposition of the strain tensor in finite deformation inelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, p. 31-38, 1991.

FERRAN, A. R.; FOGUET, A. P.; HUERTA, A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelasticity. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 53, p. 1831-1851, 2002.

FLANAGAN, D. P.; BELYTSCHKO, T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. **Int. J. Num. Meth. Engng.**, v. 17, p. 679-706, 1981.

FLORY, P. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Trans. Faraday Soc.**, v. 57, p. 829–838, 1961.

FULTON, R. E. The finite element machine: an assessment of the impact of parallel computing on future finite element computations. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 2, p. 83-98, 1986.

GHANNADPOUR, S. A. M.; ALINIA, M. M. Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads. **Composite Structures**, v. 75, p. 67-71, 2006.

GOLOVANOV, A. I.; SULTANOV, L. U. Numerical investigation of large elastoplastic strains of three-dimensional bodies. **International Applied Mechanics**, v. 41, n. 6, p. 614-620, 2005.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, p. 1141-1174, 2006.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A general theory of an elastic-plastic continuum. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 18., p. 251-281, 1965.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. **Int. J. Engng Sci.**, v. 9, p. 1219-1229, 1971.

HALLBERG, H.; HAKANSSON, P.; RISTINMAA, M. A constitutive model for the formation of martensite in austenitic steels under large strain plasticity. **International Journal of Plasticity**, v. 23, p. 1213-1239, 2007.

HARTMANN, S. Computation in finite-strain viscoelasticity: finite elements based on the interpretation as differential-algebraic equations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 191, p. 1439-1470, 2002.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, p. 2767-2791, 2003.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd., 2000. 455p.

HOULSBY, G. T.; PUZRIN, A. M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials. **International Journal of Plasticity**, v. 16, p. 1017-1047, 2000.

HOUSEHOLDER, A. S. **Principles of Numerical Analysis**. McGraw-Hill, 1953.

HUANG, H.; HAN, Q. Nonlinear dynamic buckling of functionally graded cylindrical shells subjected to time-dependent axial load. **Composite Structures**, v. 92, p. 593-598, 2010.

HUANG, H. C.; HINTON, E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, n. 1, p. 73-92, 1986.

HUGHES, T. J. R.; LEVIT, I.; WINGET, J. An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 36, p. 241-254, 1983.

ITSKOV, M.; AKSEL, N. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, p. 3833-3848, 2004.

JENKINS, J. A.; SEITZ, T. B.; PRZEMIENIECKI, J. S. Large deflections of diamond-shaped frames. **Int. J. Solids Structures**, v. 2, p. 591-603, 1966.

JEREMIC, B.; CHENG, Z. On large deformation hyperelasto-plasticity of anisotropic materials. **Commun. Numer. Meth. Engng.**, v. 25, p. 391-400, 2009.

JINYUN, Y. Symmetric Gaussian quadrature formulae for tetrahedral regions. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.**, v. 43, p. 349-353, 1984.

KEAST, P. Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas. **Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.**, v. 55, p. 339-348, 1986.

KHABBAZ, R. S.; MANSHADI, B. D.; ABEDIAN, A. Non-linear analysis of FGM plates under pressure loads using the higher-order shear deformation theories. **Composite Structures**, v. 89, n. 3, p. 333-344, 2009.

KHAN, A. S.; HUANG, S. **Continuum Theory of Plasticity**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. 421p.

KIM, K. D.; LOMBOY, G. R.; HAN, S. C. Geometrically Non-linear Analysis of Functionally Graded Material (FGM) Plates and Shells using a Four-node Quasi-Conforming Shell Element. **Journal of Composite Materials**, v. 42, p. 485, 2008.

KLAWONN, A.; RHEINBACH, O. Highly scalable parallel domain decomposition methods with an application to biomechanics. **Z. Angew. Math. Mech.**, v. 90, n. 1, p. 5-32, 2010.

KOIZUMI, M. **FGM activities in Japan**. Compos. Part B: Eng. 28B, p. 1-4, 1997.

KORELC, J.; SOLINC, U.; WRIGGER, P. An improved EAS brick element for finite deformation. **Comput Mech**, v. 46, p. 641-659, 2010.

KOSLOFF, D.; FRAZIER, G. A. Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 2, n. 1, p. 57-72, 1978.

KRÖNER, E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 273–334, 1960.

KUO, Y. L. et al. The h–p–r-refinement finite element analysis of a planar high-speed four-bar mechanism. **Mechanism and Machine Theory**, v. 41, p. 505–524, 2006.

LEE, E. H. Elastic–plastic deformation at finite strain. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 36, p. 1-6, 1969.

LI, M. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part I. The two-dimensional beam theory. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 146, p. 53-63, 1997.

LI, M.; ZHAN, F. The finite deformation theory for beam, plate and shell. Part IV. The Fe formulation of Mindlin plate and shell based on Green-Lagrange strain. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 186, p. 187-203, 2000.

LIBAI, A.; SIMMONDS, J. G. Highly nonlinear cylindrical deformations of rings and shells. **Int. J. Non-linear Mech.**, v. 18, p. 181-197, 1983.

LIU, G. R.; THOI, T. N.; LAM, K. Y. A novel alpha finite element method (aFEM) for exact solution to mechanics problems using triangular and tetrahedral elements. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 197, p. 3883-3897, 2008.

LUBLINER, J. **Plasticity Theory**. New York: Macmillan, 1990. 495p.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. Tese de Doutorado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2008.

MAENCHEN, G.; SACK, S. **The Tensor Code**. Livermore, California: Lawrence Radiation Laboratory, University of California, 1964.

MALKUS, D. S.; HUGHES, T. J. R. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 15, p. 63-81, 1978.

MALKUS, D. S.; HUGHES, T. J. R. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. **Nuclear Engineering and Design**, v. 46, p. 203-222, 1978.

MARSDEN, J. E.; HUGUES, T. J. R. **Mathematical foundations of elasticity**. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1983.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **Short Communications**, p. 145-153, 1981.

MAUGIN, G. A. **The thermomechanics of plasticity and fracture**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 350p.

MENZEL, A. et al. A framework for multiplicative elastoplasticity with kinematic hardening coupled to anisotropic damage. **International Journal of Plasticity**, v. 21, p. 397-434, 2005.

MIEHE, C.; GÖKTEPE, S.; DIEZ, J. M. Finite viscoplasticity of amorphous glassy polymers in the logarithmic strain space. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, p. 181-202, 2009.

MINSKI, R. L. **Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido**. Dissertação de Mestrado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2008.

MORAN, B.; ORTIZ, M.; SHIH, F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 3, p. 483-514, 1990.

MOSLER, J. Variationally consistent modeling of finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 2753-2764, 2010.

NAGHDABADI, R.; YEGANEH, M.; SAIDI, A. R. Application of corrotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations. **International Journal of Plasticity**, v. 21, p. 1546-1567, 2005.

NAGHDI, P. M.; TRAPP, J. A. Restrictions on constitutive equations of finitely deformed elastic-plastic materials. **Quart. J. Mech. Appl. Math.**, v. 28, p. 25, 1975.

NÄSER, B.; KALISKE, M.; MÜLLER, R. Material forces for inelastic models at large strains: application to fracture mechanics. **Comput Mech**, v. 40, p. 1005-1013, 2007.

NICHOLSON, D. W.; LIN, B. Tangent modulus tensor in plasticity under finite strain. **Acta Mechanica**, v. 134, p. 199-215, 1999.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. Chichester, England: Ellis Horwood Ltd., 1984.

OLIVEIRA, M. C. et al. Study on the influence of work-hardening modeling in springback prediction. **International Journal of Plasticity**, v. 23, p. 516-543, 2007.

OYEKOYA, O. O.; MBA, D. U.; EL-ZAFRANY, A. M. Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method. **Composite Structures**, v. 89, p. 134-142, 2009.

PACCOLA, R. R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, 2004.

PAI, P. F.; NAYFEH, A. H. A fully nonlinear theory of curved and twisted composite rotors blades accounting for warpings and three-dimensional stress effects. **Int. J. Solids and Structures**, v. 31, n. 9, p. 1309-1340, 1994.

PAI, P. F.; PALAZOTTO, A. N. Large-deflection analysis of flexible beams. **Int. J. Solids Structures**, v. 33, n. 9, p. 1335-1353, 1996.

PAPADOPOULOS, P.; LU, J. A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 159, p. 1-18, 1998.

PAPADOPOULOS, P.; LU, J. On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 190, p. 4889-4910, 2001.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional.** Dissertação de Mestrado. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2008.

PERIC, D.; DETTMER, W. A computational model for generalized inelastic materials at finite strains combining elastic, viscoelastic and plastic material behaviour. **Engineering Computations**, v. 20, n. 5-6, p. 768-787, 2003.

PETCHSASITHON, A.; GOSLING, P. D. A locking-free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells. **Comput. Mech.**, v. 35, p. 94-114, 2005.

PEYRAUT, F. et al. Robust numerical analysis of homogeneous and non-homogeneous deformations. **Applied Numerical Mathematics**, v. 59, p. 1499-1514, 2009.

POPA, C. On numerical solution of arbitrary symmetric linear systems by approximate orthogonalization. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 79, p. 1033-1038, 2008.



PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear de Estruturas** - Notas de Aula (Não linearidade geométrica). São Carlos: Departamento de Estruturas (SET), EESC-USP, 2006.

PUZRIN, A. M.; HOULSBY, G. T. Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 3771-3794, 2001.

RAO, S. C. S.; SARITA. A symmetric linear system solver. **Applied Mathematics and Computation**, v. 203, p. 368-379, 2008.

RAO, A. R. M.; RAO, T. V. S. R. A.; DATTA GURU, B. A new parallel overlapped domain decomposition method for nonlinear dynamic finite element analysis. **Computers & Structures**, vl. 81, p. 2441-2454, 2003.

RATHOD, H. T.; VENKATESUDU, B.; NAGARAJA, K. V. On the application of two Gauss–Legendre quadrature rules for composite numerical integration over a tetrahedral region. **Applied Mathematics and Computation**, v. 189, p. 131-162, 2007.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminates composite plates and shells: theory and analysis**. Boca Raton: CRC Press, 2004.

REESE, S. A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. **Int. J. Numer. Meth. Engrg.**, v. 69, p. 1671-1716, 2007.

RIVERA, C. A. et al. Parallel finite element simulations of incompressible viscous fluid flow by domain decomposition with Lagrange multipliers. **Journal of Computational Physics**, v. 229, p. 5123-5143, 2010.

RIVLIN, R. S. **Rheology Theory and Applications Vol 1**. New York : F. R. Eirich Ed., Academic Press, 1956. cap. 10, p. 351.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, series A, n. 243, p. 251-288, 1951.

RÖSLER, J.; HARDERS, H.; BÄKER, M. **Mechanical behaviour of engineering materials: metals, ceramics, polymers, and composites.** New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

SANSOUR, C.; KOLLMANN, F. G. Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assesment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements. **Computational Mechanics**, v. 24, p. 435-447, 2000.

SCOTT, J. A.; HU, Y. Experiences of Sparse Direct Symmetric Solvers. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v. 33, no. 3, article 18, 2007.

SHEPHERD, J. F.; JOHNSON, C. R. Hexahedral mesh generation constraints. **Engineering with Computers**, v. 24, p. 195-213, 2008.

SIMO, J. C.; ARMERO, F. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. **Int. J. Num. Meth. Engrg.**, v. 33, no. 7, p. 1413-1449, 1992.

SIMO, J. C.; HUGUES, T. J. R. **Computational Inelasticity.** New York: Springer, 1998. 392p.

SIMO, J. C.; ORTIZ, M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 49, p. 221-245, 1985.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. **Int. J. Num. Meth. Engrg.**, v. 29, no. 8, p. 1595-1638, 1990.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 48, p. 101-118, 1985.

SINCLAIR, G. B. The non-linear bending of a cantilever beam with shear and longitudinal deformations. **Int. J. Non-Linear Mechanics**, v. 14, p. 111-122, 1979.

SURI, M. Analytical and computational assessment of locking in the hp finite element method. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 133, p. 347-371, 1996.

SVENDSEN, B. A thermodynamic formulation of finite-deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism. **International Journal of Plasticity**, v. 16, n. 6, p. 473-488, 1998.

SVENDSEN, B. et al. Hyperelastic models for elastoplasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening at large deformation. **Int. J. Solids and Structures**, v. 35, n. 25, p. 3363-3389, 1998.

SZE, K.Y.; ZHENG, S. J.; LO, S. H. A stabilized eighteen-node solid element for hyperelastic analysis of shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, p. 319-340, 2004.

TABER, L. A. A variational principle for large axisymmetric strain of incompressible circular plates. **Int. J. Non-linear Mech.**, v. 21, p. 327-337, 1986.

TAYLOR, L. M.; BECKER, E. B. Some computational aspects of large deformation rate dependent plasticity problems, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 41, p. 251-278, 1983.

TIMOSHENKO, S.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**, 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 1961.

TURNER, M. J. et al. Large deflection of structures subject to heating and external load. **J. Aero. Sci.**, v. 27, p 97-106, 1960.

TURNER, K. Computing Projections for the Karmarkar Algorithm. **Linear Algebra and its Applications**, v. 152, p. 141-154, 1991.

UKTU, S. et al. On nonlinear finite element analysis on single-, multi- and parallel processors. **Computers & Structures**, v. 15, n. 1, p. 39-47, 1982.

VLADIMIROV, I. N.; PIETRYGA, M. P.; REESE, S. On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback - Comparison of time integration algorithms. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 75, p. 1-28, 2008.

WANG, J.; WAGONER, R. H. A practical large-strain solid finite element for sheet forming. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v. 63, p. 473-501, 2005.

WEBER, G. G. et al. An objective time-integration procedure for isotropic rate-independent and rate-dependent elastic-plastic constitutive equations. **International Journal of Plasticity**, v. 6, p. 701-744, 1990.

WILKINS, M. L. **Calculation of elastic-plastic flow**. Livermore, California: Lawrence Radiation Laboratory, University of California, 1964.

WOO, J.; MEGUID, S. A. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 7409-7421, 2001.

YAGAWA, G.; SONEDA, N.; Yoshimura, S. A large scale finite element analysis using domain decomposition method on a parallel computer. **Computers & Structures**, v. 38, n. 5/6, p. 615-625, 1981.

YAMANOUCHI, M. et al. First International Symposium of Functionally Graded Materials, Japan. **Proceedings...**, 1990.

YEOH, O. H. **Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates**. American Chemical Society, Rubber Division, Las Vegas, Nevada, 1990.

YEOH, O. H. Hyperelastic Material Models for Finite Element Analysis of Rubber. **J. Nat. Rubb. Res.**, v. 12, n. 3, p. 142-153, 1997.

ZHAO, X.; LIEW, K. M. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 198, p. 2796-2811, 2009.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. Sixth Edition. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 0 7506 6321 9.

ZIENKIEWICZ, O. C.; VALLIAPPAN, S.; KING, I. P. Elasto-plastic solution of engineering problems; initial stress, finite element approach. **Int. J. Num. Methods Engrg.**, v. 1, p. 75-100, 1969.



## ANEXO A

### Quadratura Unidimensional de Gauss-Legendre empregada para determinação da Quadratura Tridimensional do Elemento Finito Sólido Hexaédrico (ver equações 8.2)

Número de Pontos	i	gl (i)	wgl (i)
1	1	0.5000000000000000	1.0000000000000000
2	1	0.211324865405187	0.5000000000000000
	2	0.788675134594813	0.5000000000000000
3	1	0.112701665379258	0.2777777777777776
	2	0.5000000000000000	0.4444444444444444
	3	0.887298334620742	0.2777777777777776
4	1	0.069431844202974	0.173927422568724
	2	0.330009478207572	0.326072577431273
	3	0.669990521792428	0.326072577431273
	4	0.930568155797026	0.173927422568724
5	1	0.046910077030668	0.118463442528091
	2	0.230765344947158	0.239314335249683
	3	0.5000000000000000	0.2844444444444444
	4	0.769234655052841	0.239314335249683
	5	0.953089922969332	0.118463442528091
6	1	0.033765242898424	0.085662246189581
	2	0.169395306766868	0.180380786524069
	3	0.380690406958402	0.233956967286345
	4	0.619309593041598	0.233956967286345
	5	0.830604693233132	0.180380786524069
	6	0.966234757101576	0.085662246189581
7	1	0.025446043828621	0.064742483084431
	2	0.129234407200303	0.139852695744638
	3	0.297077424311301	0.190915025252560
	4	0.5000000000000000	0.208979591836735
	5	0.702922575688699	0.190915025252560
	6	0.870765592799697	0.139852695744638
	7	0.974553956171379	0.064742483084431
8	1	0.019855071751232	0.050614268145185
	2	0.101666761293187	0.111190517226687
	3	0.237233795041836	0.156853322938944
	4	0.408282678752175	0.181341891689181
	5	0.591717321247825	0.181341891689181
	6	0.762766204958164	0.156853322938944
	7	0.898333238706813	0.111190517226687
	8	0.980144928248768	0.050614268145185





**ANEXO B**  
**Quadratura Gaussiana para o Elemento Finito Sólido Tetraédrico (ver tabela 8.1)**

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)
1	1/6	1/6	1/6	1/6
4	0,585410196624968	0,138196601125015	0,138196601125015	0,041666666666667
	0,138196601125015	0,585410196624968	0,138196601125015	0,041666666666667
	0,138196601125015	0,138196601125015	0,585410196624968	0,041666666666667
	0,138196601125015	0,138196601125015	0,138196601125015	0,041666666666667
5	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	-0,133333333333333
	0,500000000000000	0,166666666666666	0,166666666666666	0,075000000000000
	0,166666666666666	0,500000000000000	0,166666666666666	0,075000000000000
	0,166666666666666	0,166666666666666	0,500000000000000	0,075000000000000
	0,166666666666666	0,166666666666666	0,166666666666666	0,075000000000000
	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	-0,133333333333333
11	0,785714300000000	0,071428570000000	0,071428570000000	0,007622222000000
	0,071428570000000	0,785714300000000	0,071428570000000	0,007622222000000
	0,071428570000000	0,071428570000000	0,785714300000000	0,007622222000000
	0,071428570000000	0,071428570000000	0,071428570000000	0,007622222000000
	0,071428570000000	0,071428570000000	0,071428570000000	0,007622222000000
	0,071428570000000	0,071428570000000	0,071428570000000	0,007622222000000
15	0,100596400000000	0,100596400000000	0,399403400000000	0,024888890000000
	0,100596400000000	0,399403400000000	0,100596400000000	0,024888890000000
	0,100596400000000	0,399403400000000	0,399403400000000	0,024888890000000
	0,399403400000000	0,100596400000000	0,100596400000000	0,024888890000000
	0,399403400000000	0,100596400000000	0,399403400000000	0,024888890000000
	0,399403400000000	0,399403400000000	0,100596400000000	0,024888890000000

(continua)

(continuação)

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)
15	0,727272700000000	0,090909090000000	0,090909090000000	0,011645250000000
	0,090909090000000	0,727272700000000	0,090909090000000	0,011645250000000
	0,090909090000000	0,090909090000000	0,727272700000000	0,011645250000000
	0,090909090000000	0,090909090000000	0,090909090000000	0,011645250000000
	0,433449800000000	0,433449800000000	0,066550150000000	0,010949140000000
	0,433449800000000	0,066550150000000	0,433449800000000	0,010949140000000
	0,433449800000000	0,066550150000000	0,066550150000000	0,010949140000000
	0,066550150000000	0,433449800000000	0,433449800000000	0,010949140000000
	0,066550150000000	0,433449800000000	0,066550150000000	0,010949140000000
	0,066550150000000	0,066550150000000	0,433449800000000	0,010949140000000
	0,356191400000000	0,214602900000000	0,214602900000000	0,006653792000000
	0,214602900000000	0,356191400000000	0,214602900000000	0,006653792000000
	0,214602900000000	0,214602900000000	0,356191400000000	0,006653792000000
	0,214602900000000	0,214602900000000	0,214602900000000	0,006653792000000
	0,877978100000000	0,040673960000000	0,040673960000000	0,001679535000000
0,040673960000000	0,877978100000000	0,040673960000000	0,001679535000000	
0,040673960000000	0,040673960000000	0,877978100000000	0,001679535000000	
0,040673960000000	0,040673960000000	0,040673960000000	0,001679535000000	
24	0,032986330000000	0,322337900000000	0,322337900000000	0,009226197000000
	0,322337900000000	0,032986330000000	0,322337900000000	0,009226197000000
	0,322337900000000	0,322337900000000	0,032986330000000	0,009226197000000
	0,322337900000000	0,322337900000000	0,322337900000000	0,009226197000000
	0,603005700000000	0,269672300000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,603005700000000	0,063661000000000	0,269672300000000	0,008035714000000
	0,603005700000000	0,063661000000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,269672300000000	0,603005700000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,269672300000000	0,063661000000000	0,603005700000000	0,008035714000000

(continua)

(continuação)

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)
24	0,269672300000000	0,063661000000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,603005700000000	0,269672300000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,603005700000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,269672300000000	0,603005700000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,269672300000000	0,063661000000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,063661000000000	0,603005700000000	0,008035714000000
	0,063661000000000	0,063661000000000	0,269672300000000	0,008035714000000
31	0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	0,018264220000000
	0,765360400000000	0,078213190000000	0,078213190000000	0,010599940000000
	0,078213190000000	0,765360400000000	0,078213190000000	0,010599940000000
	0,078213190000000	0,078213190000000	0,765360400000000	0,010599940000000
	0,078213190000000	0,078213190000000	0,078213190000000	0,010599940000000
	0,634470400000000	0,121843200000000	0,121843200000000	-0,062517740000000
	0,121843200000000	0,634470400000000	0,121843200000000	-0,062517740000000
	0,121843200000000	0,121843200000000	0,634470400000000	-0,062517740000000
	0,121843200000000	0,121843200000000	0,121843200000000	-0,062517740000000
	0,002382507000000	0,332539200000000	0,332539200000000	0,004891425000000
	0,332539200000000	0,002382507000000	0,332539200000000	0,004891425000000
	0,332539200000000	0,332539200000000	0,002382507000000	0,004891425000000
	0,332539200000000	0,332539200000000	0,332539200000000	0,004891425000000
	0,000000000000000	0,000000000000000	0,500000000000000	0,000970017600000
0,000000000000000	0,500000000000000	0,000000000000000	0,000970017600000	
0,000000000000000	0,500000000000000	0,500000000000000	0,000970017600000	
0,500000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000970017600000	
0,500000000000000	0,000000000000000	0,500000000000000	0,000970017600000	
0,500000000000000	0,500000000000000	0,000000000000000	0,000970017600000	

(continua)

(continuação)

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)	
31	0,6000000000000000	0,2000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,6000000000000000	0,1000000000000000	0,2000000000000000	0,0275573200000000	
	0,6000000000000000	0,1000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,2000000000000000	0,6000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,2000000000000000	0,1000000000000000	0,6000000000000000	0,0275573200000000	
	0,2000000000000000	0,1000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,6000000000000000	0,2000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,6000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,2000000000000000	0,6000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,2000000000000000	0,1000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,1000000000000000	0,6000000000000000	0,0275573200000000	
	0,1000000000000000	0,1000000000000000	0,2000000000000000	0,0275573200000000	
	45	0,2500000000000000	0,2500000000000000	0,2500000000000000	-0,0393270100000000
		0,6175872000000000	0,1274709000000000	0,1274709000000000	0,0040813160000000
0,1274709000000000		0,6175872000000000	0,1274709000000000	0,0040813160000000	
0,1274709000000000		0,1274709000000000	0,6175872000000000	0,0040813160000000	
0,1274709000000000		0,1274709000000000	0,1274709000000000	0,0040813160000000	
0,9037635000000000		0,0320788300000000	0,0320788300000000	0,0006580868000000	
0,0320788300000000		0,9037635000000000	0,0320788300000000	0,0006580868000000	
0,0320788300000000		0,0320788300000000	0,9037635000000000	0,0006580868000000	
0,0320788300000000		0,0320788300000000	0,0320788300000000	0,0006580868000000	
0,4502229000000000		0,4502229000000000	0,0497771000000000	0,0043842590000000	
0,4502229000000000		0,0497771000000000	0,4502229000000000	0,0043842590000000	
0,4502229000000000		0,0497771000000000	0,0497771000000000	0,0043842590000000	
0,0497771000000000		0,4502229000000000	0,4502229000000000	0,0043842590000000	
0,0497771000000000		0,4502229000000000	0,0497771000000000	0,0043842590000000	

(continua)

(continuação)

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)
45	0,049777100000000	0,049777100000000	0,450222900000000	0,004384259000000
	0,316269600000000	0,316269600000000	0,183730400000000	0,013830060000000
	0,316269600000000	0,183730400000000	0,316269600000000	0,013830060000000
	0,316269600000000	0,183730400000000	0,183730400000000	0,013830060000000
	0,183730400000000	0,316269600000000	0,316269600000000	0,013830060000000
	0,183730400000000	0,316269600000000	0,183730400000000	0,013830060000000
	0,183730400000000	0,183730400000000	0,316269600000000	0,013830060000000
	0,513280000000000	0,022917790000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,513280000000000	0,231901100000000	0,022917790000000	0,004240437000000
	0,513280000000000	0,231901100000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,022917790000000	0,513280000000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,022917790000000	0,231901100000000	0,513280000000000	0,004240437000000
	0,022917790000000	0,231901100000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,513280000000000	0,022917790000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,513280000000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,022917790000000	0,513280000000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,022917790000000	0,231901100000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,231901100000000	0,513280000000000	0,004240437000000
	0,231901100000000	0,231901100000000	0,022917790000000	0,004240437000000
	0,193746500000000	0,730313400000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,193746500000000	0,037970050000000	0,730313400000000	0,002238740000000
	0,193746500000000	0,037970050000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,730313400000000	0,193746500000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,730313400000000	0,037970050000000	0,193746500000000	0,002238740000000
	0,730313400000000	0,037970050000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,037970050000000	0,193746500000000	0,730313400000000	0,002238740000000

(continua)

(conclusão)

---

Número de Pontos	$\xi_1$ (p)	$\xi_2$ (p)	$\xi_3$ (p)	w (p)
	0,037970050000000	0,193746500000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,037970050000000	0,730313400000000	0,193746500000000	0,002238740000000
45	0,037970050000000	0,730313400000000	0,037970050000000	0,002238740000000
	0,037970050000000	0,037970050000000	0,193746500000000	0,002238740000000
	0,037970050000000	0,037970050000000	0,730313400000000	0,002238740000000

---

## APÊNDICE A

### Geração Automática das Funções de Forma

Neste Apêndice é apresentado o algoritmo para geração automática dos coeficientes das funções de forma e de suas derivadas, no espaço adimensional, para os elementos finitos unidimensional, quadrilateral, triangular, hexaédrico e tetraédrico para qualquer ordem de aproximação polinomial (ver seção 8.1).

#### A.1. Elemento finito unidimensional (barra)

O primeiro valor a ser determinado é o número de nós por elemento finito. No caso da barra unidimensional (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005), esse valor, representado por  $nn$ , é calculado da seguinte forma:

$$nn = 1 + gpa \quad (A1)$$

onde  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento unidimensional, ou seja, é o grau - ou a ordem - das funções de forma (equações 3.1).

O segundo passo é adotar um padrão generalizado para numeração interna dos nós, isto é, um padrão para numeração dos nós no elemento finito para qualquer ordem de aproximação. O esquema de numeração interna dos nós, no caso da barra unidimensional, é mostrado na figura A1.

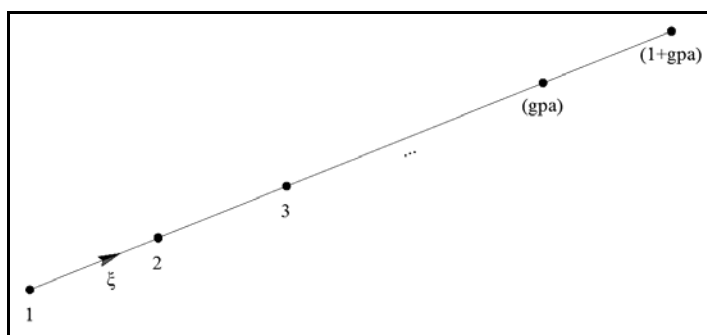


Figura A1. Padrão de numeração interna dos nós (●) para o elemento finito unidimensional. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento, e o eixo  $\xi$  representa a coordenada adimensional em relação ao primeiro nó.

Após definir o padrão de numeração interna dos nós, devem ser calculadas as coordenadas adimensionais dos nós, ou seja, as coordenadas em relação ao eixo  $\xi$  (ver figura A1). Neste estudo foram adotadas as seguintes hipóteses: o primeiro nó (1) possui coordenada adimensional  $\xi = 0$ ; o último nó (nn) possui coordenada adimensional  $\xi = 1$ ; os nós são definidos no conjunto de pontos  $\{\xi \in \square / 0 \leq \xi \leq 1\}$ ; e os nós são igualmente espaçados ao longo da coordenada adimensional  $\xi$ . Assim sendo, as coordenadas adimensionais dos nós são calculadas com a expressão a seguir:

$$\xi(i) = \frac{i-1}{gpa} \quad (A2)$$

onde  $i$ , que varia de 1 a nn, é o número do nó em relação ao elemento finito, isto é, o valor  $i$  é referente à numeração local do elemento.

As funções de forma (equações 3.1) do elemento finito de barra podem ser calculadas, em qualquer ponto do elemento, da seguinte maneira generalizada, ou seja, para qualquer ordem de aproximação (gpa):

$$\phi_k(\xi) = \sum_{n=0}^{gpa} \left[ c_n^k (\xi)^n \right] = c_0^k + c_1^k \xi + c_2^k \xi^2 + \dots + c_{gpa}^k \xi^{gpa} \quad (A3)$$

onde  $\phi_k$  é a função de forma relativa ao nó  $k$ ; e os coeficientes  $c_n^k$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da função de forma  $k$ . Ademais, as funções de forma adotadas neste estudo são os polinômios de Lagrange (equação 3.2). Com isso, é possível escrever o seguinte sistema de equações:

$$\phi_k[\xi = \xi(i)] = c_0^k + c_1^k [\xi(i)] + c_2^k [\xi(i)]^2 + \dots + c_{gpa}^k [\xi(i)]^{gpa} = \delta_{ki} \quad (A4)$$

onde  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker (HOLZAPFEL, 2004). O sistema (A4) pode ser escrito na seguinte forma matricial, para qualquer ordem de aproximação (gpa):

$$\begin{bmatrix} \phi_1[\xi(1)] & \phi_1[\xi(2)] & \dots & \phi_1[\xi(nn)] \\ \phi_2[\xi(1)] & \phi_2[\xi(2)] & \dots & \phi_2[\xi(nn)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{nn}[\xi(1)] & \phi_{nn}[\xi(2)] & \dots & \phi_{nn}[\xi(nn)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^1 & c_1^1 & \dots & c_{gpa}^1 \\ c_0^2 & c_1^2 & \dots & c_{gpa}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0^{nn} & c_1^{nn} & \dots & c_{gpa}^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{gpa} & \xi_2^{gpa} & \dots & \xi_{nn}^{gpa} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (A5.1)$$

$$\mathbf{M}_{coef} \mathbf{M}_\xi = \mathbf{I} \quad (A5.2)$$



onde  $\phi_k[\xi(i)]$  é o valor da função de forma  $k$  no nó  $i$ ; e  $\xi_k$  é a coordenada adimensional do nó  $k$ . A matriz dos coeficientes das funções de forma pode ser determinada via equação (A5.2), isto é:

$$\mathbf{M}_{\text{coef}} = (\mathbf{M}_\xi)^{-1} \quad (\text{A6})$$

A matriz de potências adimensionais, representada por  $\mathbf{M}_\xi$  (equação A5.2), é determinada com a seguinte expressão generalizada:

$$\mathbf{M}_\xi(i,j) = [\xi(j)]^{i-1} \quad (\text{A7})$$

onde  $\xi(j)$  é a coordenada adimensional do nó  $j$  (ver equação A2); e os índices  $i$  e  $j$  variam de 1 até  $nn$  (equação A1).

Para determinação, via equação (3.4), das funções de forma num ponto qualquer de coordenada adimensional  $\xi = \xi_p$ , resta determinar o vetor que contém as potências da coordenada adimensional:

$$\left( \mathbf{v}_\xi \right)_i = \left( \xi_p \right)^{i-1} \quad (\text{A8})$$

Por fim, para cálculo das derivadas das funções de forma do elemento de barra em relação à coordenada adimensional  $\xi$  (ver equações 3.15.2 e 3.15.3), deriva-se a equação (A3) em relação a  $\xi$ :

$$\frac{\partial \phi_k(\xi)}{\partial \xi} = c_1^k + (2c_2^k)\xi + (3c_3^k)\xi^2 + \dots + (\text{gpa} \cdot c_{\text{gpa}}^k)\xi^{\text{gpa}-1} = \sum_{n=0}^{\text{gpa}-1} \left[ d_n^k(\xi)^n \right] \quad (\text{A9})$$

onde  $d_n^k$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da derivada de função de forma  $k$  em relação à coordenada adimensional  $\xi$ . Com a expressão (A9), é possível determinar os coeficientes das derivadas das funções de forma com a equação a seguir:

$$d_n^k = (n+1)c_{n+1}^k \quad (\text{A10})$$

As derivadas das funções de forma em relação à coordenada  $\xi$  podem ser determinadas, num ponto qualquer do elemento ( $\xi = \xi_p$ ), de modo similar à equação (3.4):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\xi_p) = \mathbf{M}_{\text{coef}}^d \cdot \mathbf{v}_\xi^d \quad (\text{A11.1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \partial \phi_1 / \partial \xi \\ \partial \phi_2 / \partial \xi \\ \partial \phi_3 / \partial \xi \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi \end{Bmatrix} \quad (\text{A11.2})$$

$$\mathbf{M}_{\text{coef}}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^1 & \mathbf{d}_1^1 & \cdots & \mathbf{d}_{\text{gpa}-1}^1 \\ \mathbf{d}_0^2 & \mathbf{d}_1^2 & \cdots & \mathbf{d}_{\text{gpa}-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_0^{\text{nn}} & \mathbf{d}_1^{\text{nn}} & \cdots & \mathbf{d}_{\text{gpa}-1}^{\text{nn}} \end{bmatrix} \quad (\text{A11.3})$$

$$\mathbf{v}_\xi^d = \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi_p \\ \xi_p^2 \\ \vdots \\ \xi_p^{\text{gpa}-1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A11.4})$$

## A.2. Elemento quadrilateral plano

Analogamente ao caso do elemento finito unidimensional (ver item A.1), o primeiro valor a ser calculado é o número de nós por elemento finito. Esse valor, no caso do elemento quadrilateral, é obtido pela seguinte equação:

$$nn = (1 + \text{gpa})^2 \quad (\text{A12})$$

onde gpa é o grau do polinômio aproximador do elemento quadrilateral.

O padrão generalizado para numeração interna dos nós do elemento quadrilateral, juntamente com os eixos de coordenadas adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , é mostrado na figura A2.

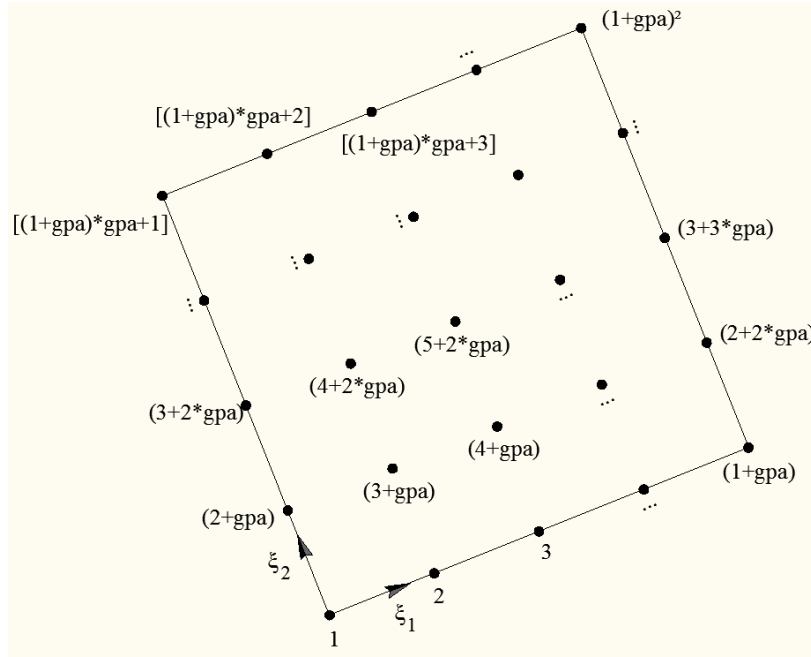


Figura A2. Padrão de numeração interna dos nós (●) para o elemento finito quadrilateral. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento, os eixos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  representam a coordenadas adimensionais em relação ao primeiro nó, e o asterisco (\*) denota multiplicação.

Com relação às coordenadas adimensionais dos nós no elemento quadrilateral, são adotadas aqui as seguintes hipóteses: as coordenadas do primeiro nó (1) são  $(0,0)$ ; as coordenadas do último nó ( $mn$ ) são  $(1,1)$ ; os nós são definidos no conjunto de pontos  $\{(\xi_1, \xi_2) \in \square^2 / 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$ ; e os nós pertencentes à mesma reta são igualmente espaçados. Com isso, as coordenadas dos nós são determinadas com o algoritmo computacional a seguir:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

$$k = 1 + (gpa + 1)i + j$$

$$\xi_1(k) = \frac{j}{gpa} \tag{A13}$$

$$\xi_2(k) = \frac{i}{gpa}$$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

A interpretação geométrica dos índices  $i$  e  $j$  do algoritmo acima é dada na figura A3.

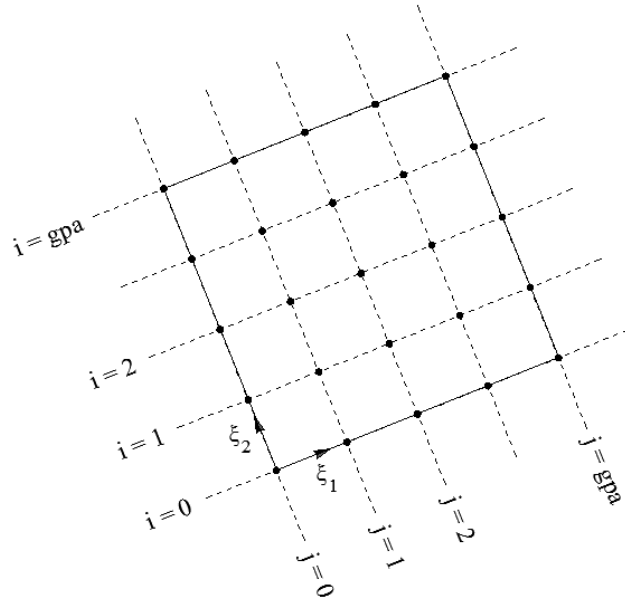


Figura A3. Interpretação geométrica dos índices  $i$  e  $j$  do algoritmo A13. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito, e as linhas tracejadas passam pelos nós com mesmo índice ( $i$  ou  $j$ ).

Neste estudo todas as funções de forma do elemento finito quadrilátero são expressas, para qualquer grau do polinômio aproximador ( $gpa$ ), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\phi_k(\xi) = & c_0^k + c_1^k \xi_1 + c_2^k \xi_1^2 + \dots + c_{gpa}^k \xi_1^{gpa} + \\
& c_{(gpa+1)}^k \xi_2 + c_{(gpa+2)}^k \xi_1 \xi_2 + c_{(gpa+3)}^k \xi_1^2 \xi_2 + \dots + c_{(2gpa+1)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2 + \\
& c_{(2gpa+2)}^k \xi_2^2 + c_{(2gpa+3)}^k \xi_1 \xi_2^2 + c_{(2gpa+4)}^k \xi_1^2 \xi_2^2 + \dots + c_{(3gpa+2)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2^2 + \\
& \dots + c_{(nn-1)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2^{gpa}
\end{aligned} \tag{A14}$$

onde  $c_n^k$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da função de forma relativa ao nó  $k$ ; e  $nn$  é o número de nós por elemento (equação A12). Com base nesta definição das funções de forma e na propriedade dos polinômios de Lagrange (equação 3.2), podem ser determinadas, de modo generalizado, as matrizes das potências dimensionais ( $\mathbf{M}_\xi$ ) e dos coeficientes das funções de forma ( $\mathbf{M}_{coef}$ ) com o algoritmo computacional a seguir:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

$$k = 1 + (gpa + 1)i + j$$

Ciclo  $l = 1, nn$

$$\mathbf{M}_\xi(l, k) = \begin{bmatrix} \xi_1(1)^i \\ \xi_2(1)^j \end{bmatrix} \tag{A15.1}$$

Fim do ciclo  $l = 1, nn$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

$$\mathbf{M}_{\text{coef}} = (\mathbf{M}_{\xi})^{-1} \quad (\text{A15.2})$$

onde  $\xi_1(l)$  e  $\xi_2(l)$  são as duas coordenadas adimensionais do nó  $l$  (ver algoritmo A13).

O vetor de potências adimensionais, necessário para cálculo das funções de forma via equação (3.4) num ponto qualquer do elemento quadrilateral, é dado pelo seguinte algoritmo:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

$$k = 1 + (gpa + 1)i + j$$

$$(v_{\xi})_k = [\xi_1(P)]^i [\xi_2(P)]^j \quad (\text{A16})$$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(P)$  e  $\xi_2(P)$  são as coordenadas adimensionais do ponto  $P$ , pertencente ao elemento quadrilateral.

Ao derivar a equação (A14) em relação às coordenadas adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , é possível determinar os coeficientes das derivadas das funções de forma com o algoritmo computacional a seguir:

Ciclo  $l = 1, nn$

$$m = 0$$

Ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

Ciclo  $j = 0, gpa$

$$k = 1 + (gpa + 1)i + j$$

$$m = m + 1$$

$$M_{\text{coef}}^{\text{dl}}(m, l) = M_{\text{coef}}(k + gpa + 1, l)(i + 1)$$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

$$m = 0$$

Ciclo  $i = 0, gpa$

(A17)

Ciclo  $j = 0, (gpa - 1)$

$$k = 1 + (gpa + 1)i + j$$

$$m = m + 1$$

$$M_{\text{coef}}^{\text{d2}}(m, 1) = M_{\text{coef}}(k + 1, 1) \cdot (j + 1)$$

Fim do ciclo  $j = 0, (gpa - 1)$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

Fim do ciclo  $l = 1, nn$

onde  $nn$  é o número de nós por elemento quadrilateral (equação A12); e  $M_{\text{coef}}^{\text{d1}}$  e  $M_{\text{coef}}^{\text{d2}}$  são as matrizes que contêm os coeficientes das funções de forma em relação às coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente. Tais matrizes são empregadas no cálculo das derivadas das funções de forma de modo similar à equação (3.4):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(\xi_P) = \mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d1}} \cdot \mathbf{v}_\xi \quad (\text{A18.1})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}(\xi_P) = \mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d2}} \cdot \mathbf{v}_\xi \quad (\text{A18.2})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} = \left\{ \begin{array}{c} \partial \phi_1 / \partial \xi_1 \\ \partial \phi_2 / \partial \xi_1 \\ \partial \phi_3 / \partial \xi_1 \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi_1 \end{array} \right\} \quad (\text{A18.3})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = \left\{ \begin{array}{c} \partial \phi_1 / \partial \xi_2 \\ \partial \phi_2 / \partial \xi_2 \\ \partial \phi_3 / \partial \xi_2 \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi_2 \end{array} \right\} \quad (\text{A18.4})$$

### A.3. Elemento triangular plano

Para o elemento finito bidimensional triangular, o número de nós por elemento é dado por:

$$nn = \frac{1}{2}(gpa + 1)(gpa + 2) \quad (A19)$$

onde  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento triangular.

O padrão generalizado para numeração interna dos nós do elemento triangular, juntamente com os eixos de coordenadas adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , é mostrado na figura A4.

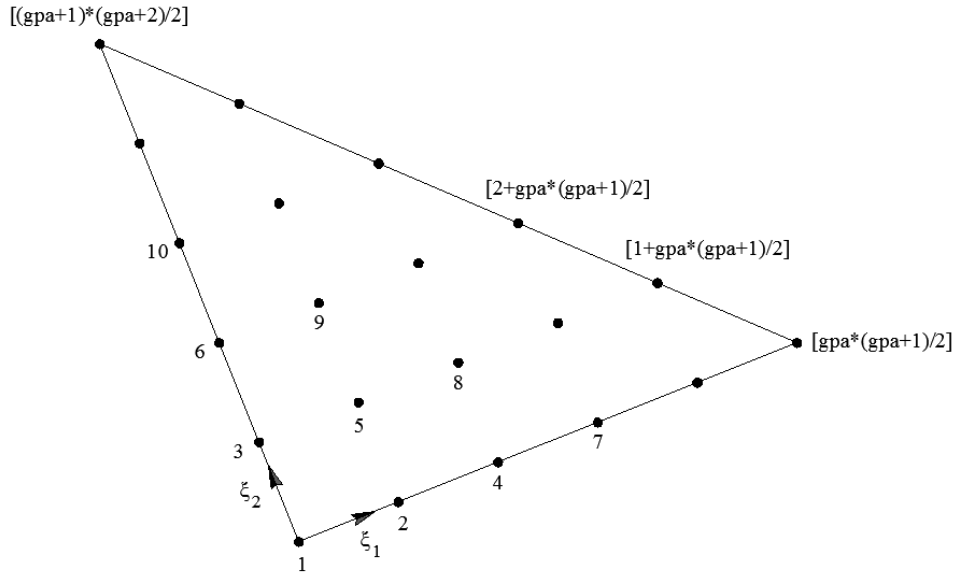


Figura A4. Padrão de numeração interna dos nós (●) para o elemento finito triangular. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento, os eixos  $\xi_1$  e  $\xi_2$  representam a coordenadas adimensionais em relação ao primeiro nó, e o asterisco (\*) denota multiplicação.

Com relação às coordenadas adimensionais dos nós no elemento triangular, são adotadas aqui as seguintes hipóteses: as coordenadas do primeiro nó (1) são  $(0,0)$ ; as coordenadas do último nó ( $nn$ ) são  $(0,1)$ ; os nós são definidos no conjunto de pontos  $\{(\xi_1, \xi_2) \in \square^2 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$ ; e os nós pertencentes à mesma reta são igualmente espaçados. Assim, o cálculo das coordenadas adimensionais é realizado com o seguinte algoritmo computacional:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 1, i + 1$

$$k = i + j + \frac{i(i-1)}{2}$$

$$\xi_1 = \frac{i - j + 1}{gpa}$$

(A20)

$$\xi_2 = \frac{j-1}{gpa}$$

Fim do ciclo  $j=1, i+1$

Fim do ciclo  $i=0, gpa$

A interpretação geométrica dos índices  $i$  e  $j$  no algoritmo acima é dada na figura A5.

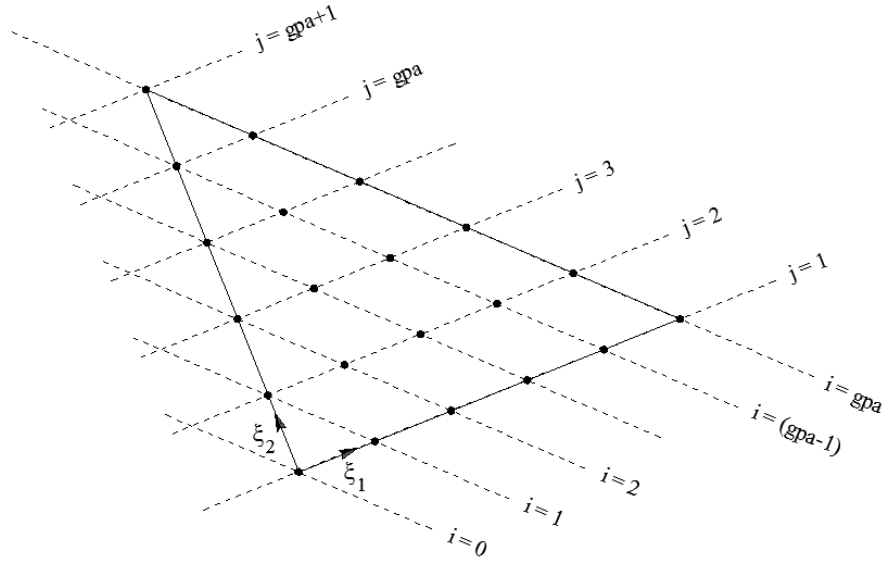


Figura A5. Interpretação geométrica dos índices  $i$  e  $j$  do algoritmo A20. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito, e as linhas tracejadas passam pelos nós com mesmo índice ( $i$  ou  $j$ ).

Neste estudo a forma generalizada para expressar todas as funções de forma do elemento finito triangular é a seguinte:

$$\begin{aligned} \phi_k(\xi) = & c_0^k + c_1^k \xi_1 + c_2^k \xi_2 + c_3^k \xi_1^2 + c_4^k \xi_1 \xi_2 + c_5^k \xi_2^2 + c_6^k \xi_1^3 + c_7^k \xi_1^2 \xi_2 + c_8^k \xi_1 \xi_2^2 + c_9^k \xi_2^3 + \dots + \\ & c_{(nn-3)}^k \xi_1^2 \xi_2^{gpa-2} + c_{(nn-2)}^k \xi_1 \xi_2^{gpa-1} + c_{(nn-1)}^k \xi_2^{gpa} \end{aligned} \quad (A21)$$

onde  $c_n^k$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da função de forma relativa ao nó  $k$ ; e  $nn$  é o número de nós por elemento (equação A19). A determinação generalizada da matriz das potências adimensionais ( $\mathbf{M}_\xi$ ) é feita com o seguinte algoritmo computacional:

Ciclo  $i=0, gpa$

Ciclo  $j=1, i+1$

$$k = i + j + \frac{i(i-1)}{2}$$

Ciclo  $l=1, nn$



$$M_{\xi}(l, k) = \left[ \xi_1(l)^{i-j+1} \right] \left[ \xi_2(l)^{j-1} \right] \quad (A22)$$

Fim do ciclo  $l = 1, nn$

Fim do ciclo  $j = 1, i + 1$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(l)$  e  $\xi_2(l)$  são as duas coordenadas adimensionais do nó  $l$  (ver algoritmo A20). A determinação generalizada da matriz dos coeficientes das funções de forma ( $M_{\text{coef}}$ ) é realizada com a expressão (A15.2).

O vetor de potências adimensionais, necessário para cálculo das funções de forma via equação (3.4) num ponto qualquer do elemento triangular, é dado pelo seguinte algoritmo:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 1, i + 1$

$$k = i + j + \frac{i(i-1)}{2}$$

$$\left( v_{\xi} \right)_k = \left[ \xi_1(P)^{i-j+1} \right] \left[ \xi_2(P)^{j-1} \right] \quad (A23)$$

Fim do ciclo  $j = 1, i + 1$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(P)$  e  $\xi_2(P)$  são as coordenadas adimensionais do ponto  $P$ , pertencente ao elemento triangular.

O cálculo generalizado dos coeficientes das derivadas das funções de forma do elemento triangular, em relação às coordenadas adimensionais, é realizado com o seguinte algoritmo computacional:

Ciclo  $l = 1, nn$

Ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

Ciclo  $j = 1, i + 1$

$$k = i + j + \frac{i(i-1)}{2}$$

$$M_{\text{coef}}^{d1}(k, l) = M_{\text{coef}}(k + i + 1, l) \cdot (i - j + 2) \quad (A24)$$

$$M_{\text{coef}}^{d2}(k, l) = M_{\text{coef}}(k + i + 2, l) \cdot (j)$$

Fim do ciclo  $j = 1, i + 1$

Fim do ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

Fim do ciclo  $l = 1, nn$

onde  $nn$  é o número de nós por elemento triangular (equação A19); e  $\mathbf{M}_{coef}^{d1}$  e  $\mathbf{M}_{coef}^{d2}$  são as matrizes que contêm os coeficientes das funções de forma em relação às coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente. Tais matrizes são empregadas no cálculo das derivadas das funções de forma do elemento triangular (ver equações 3.4 e A18).

#### A.4. Elemento sólido hexaédrico

O número de nós por elemento hexaédrico é:

$$nn = (1 + gpa)^3 \quad (A25)$$

onde  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito sólido hexaédrico.

O padrão generalizado para numeração interna dos nós do elemento hexaédrico, juntamente com os eixos de coordenadas adimensionais  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , é mostrado na figura A6.

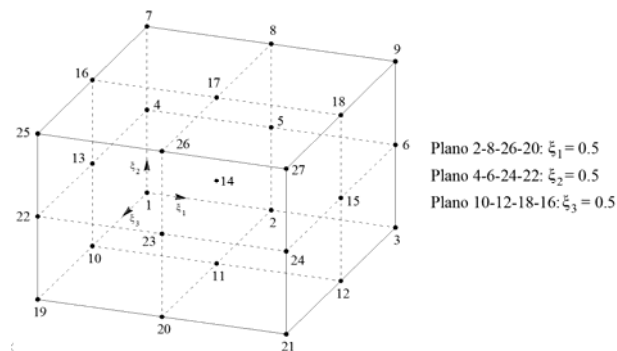


Figura A6. Padrão de numeração interna dos nós (●) para o elemento finito hexaédrico de aproximação quadrática. Os eixos  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  representam a coordenadas adimensionais em relação ao primeiro nó, e as linhas tracejadas indicam os planos, definidos à direita da figura, cuja intersecção é o nó 14.

As hipóteses com relação às coordenadas adimensionais do elemento sólido hexaédrico são as seguintes: as coordenadas do primeiro nó (1) são  $(0,0,0)$ ; as coordenadas do último nó ( $nn$ ) são  $(1,1,1)$ ; os nós são definidos no conjunto de pontos  $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \square^3 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$ ; e os nós pertencentes à mesma reta são igualmente

espaçados. Assim sendo, as coordenadas dos nós são determinadas, de forma generalizada, com o algoritmo computacional a seguir:

Ciclo  $i = 0, \text{gpa}$

Ciclo  $j = 0, \text{gpa}$

Ciclo  $k = 0, \text{gpa}$

$$l = 1 + i \cdot \left[ (\text{gpa} + 1)^2 \right] + j \cdot (\text{gpa} + 1) + k$$

$$\xi_1(1) = \frac{k}{\text{gpa}}$$

$$\xi_2(1) = \frac{j}{\text{gpa}} \tag{A26}$$

$$\xi_3(1) = \frac{i}{\text{gpa}}$$

Fim do ciclo  $k = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $j = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $i = 0, \text{gpa}$

Na figura A7 é fornecida a interpretação geométrica dos índices  $k, j$  e  $i$  do algoritmo acima.

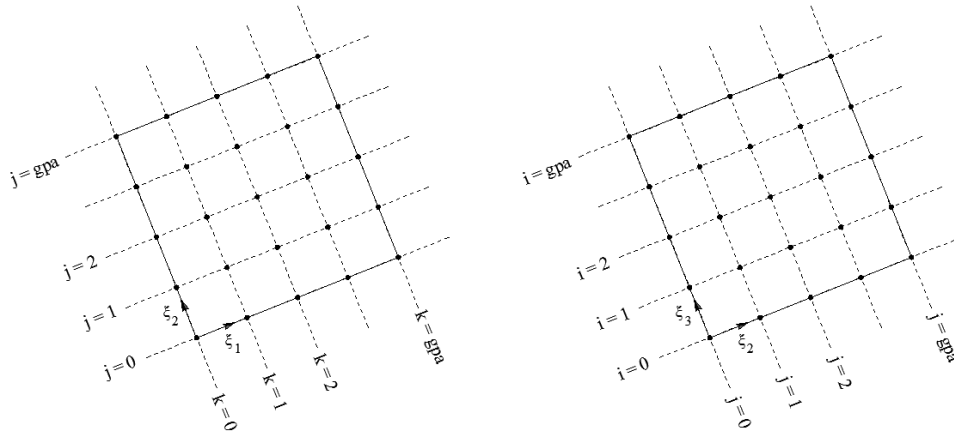


Figura A7. Interpretação geométrica dos índices  $k, j$  e  $i$  do algoritmo A26. O valor  $\text{gpa}$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito, e as linhas tracejadas passam pelos nós com mesmo índice ( $k, j$  ou  $i$ ).

Todas as funções de forma do elemento hexaédrico são aqui expressas pela seguinte forma, para qualquer grau do polinômio aproximador ( $\text{gpa}$ ):

$$\phi_k(\xi) = c_0^k + c_1^k \xi_1 + c_2^k \xi_1^2 + \dots + c_{\text{gpa}}^k \xi_1^{\text{gpa}} +$$

$$\begin{aligned}
& c_{(gpa+1)}^k \xi_2 + c_{(gpa+2)}^k \xi_1 \xi_2 + c_{(gpa+3)}^k \xi_1^2 \xi_2 + \dots + c_{(2gpa+1)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2 + \\
& c_{(2gpa+2)}^k \xi_2^2 + c_{(2gpa+3)}^k \xi_1 \xi_2^2 + c_{(2gpa+4)}^k \xi_1^2 \xi_2^2 + \dots + c_{(3gpa+2)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2^2 + \dots + c_{(gpa+1)^2-1}^k \xi_1^{gpa} \xi_2^{gpa} + \\
& c_{(gpa+1)^2}^k \xi_3 + c_{(gpa+1)^2+1}^k \xi_1 \xi_3 + c_{(gpa+1)^2+2}^k \xi_1^2 \xi_3 + \dots + c_{2(gpa+1)^2-1}^k \xi_1^{gpa} \xi_3 + \\
& c_{2(gpa+1)^2}^k \xi_2 \xi_3 + c_{2(gpa+1)^2+1}^k \xi_1 \xi_2 \xi_3 + c_{2(gpa+1)^2+2}^k \xi_1^2 \xi_2 \xi_3 + \dots + c_{3(gpa+1)^2-1}^k \xi_1^{gpa} \xi_2 \xi_3 + \\
& \dots + c_{(nn-1)}^k \xi_1^{gpa} \xi_2^{gpa} \xi_3^{gpa} \tag{A27}
\end{aligned}$$

onde  $c_n^k$  é o n-ésimo coeficiente da função de forma relativa ao nó  $k$ ; e  $nn$  é o número de nós por elemento hexaédrico (equação A25).

A aplicação da propriedade dos polinômios de Lagrange (equação 3.2) à expressão (A27) resulta no seguinte algoritmo computacional para cálculo generalizado da matriz das potências adimensionais ( $\mathbf{M}_\xi$ ) para o elemento hexaédrico:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, gpa$

$$l = 1 + (gpa + 1)^2 \cdot i + (gpa + 1) \cdot j + k$$

Ciclo  $m = 1, nn$

$$\mathbf{M}_\xi(m, l) = \begin{bmatrix} \xi_1(m)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2(m)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3(m)^i \end{bmatrix} \tag{A28}$$

Fim do ciclo  $m = 1, nn$

Fim do ciclo  $k = 0, gpa$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(m)$ ,  $\xi_2(m)$  e  $\xi_3(m)$  são as três coordenadas adimensionais do nó  $m$  (ver algoritmo A26). A determinação da matriz dos coeficientes das funções de forma ( $\mathbf{M}_{coef}$ ) para o elemento hexaédrico é realizada com as equações (A28) e (A15.2).

O vetor de potências adimensionais, necessário para cálculo das funções de forma via equação (3.4) num ponto qualquer do elemento hexaédrico, é dado pelo seguinte algoritmo:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, gpa$

$$l = 1 + (gpa + 1)^2 \cdot i + (gpa + 1) \cdot j + k$$

$$\left( v_{\xi} \right)_1 = \left[ \xi_1(P) \right]^i \left[ \xi_2(P) \right]^j \left[ \xi_3(P) \right]^k \quad (A29)$$

Fim do ciclo  $k = 0, gpa$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(P)$ ,  $\xi_2(P)$  e  $\xi_3(P)$  são as coordenadas adimensionais do ponto  $P$ , pertencente ao elemento sólido hexaédrico.

Os coeficientes das derivadas das funções de forma do elemento hexaédrico são determinados com as seguintes expressões generalizadas:

Ciclo  $m = 1, nn$

$$s = 0$$

Ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

Ciclo  $j = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, gpa$

$$l = 1 + (gpa + 1)^2 \cdot i + (gpa + 1) \cdot j + k$$

$$s = s + 1$$

$$M_{\text{coef}}^{\text{d1}}(s, m) = M_{\text{coef}} \left[ 1 + (gpa + 1)^2, m \right] \cdot (i + 1)$$

Fim do ciclo  $k = 0, gpa$

Fim do ciclo  $j = 0, gpa$

Fim do ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

$$s = 0$$

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, (gpa - 1)$

Ciclo  $k = 0, gpa$

$$l = 1 + (gpa + 1)^2 \cdot i + (gpa + 1) \cdot j + k$$

$$s = s + 1$$

$$M_{\text{coef}}^{\text{d2}}(s, m) = M_{\text{coef}} \left[ 1 + (gpa + 1), m \right] \cdot (j + 1) \quad (A30)$$

Fim do ciclo  $k = 0, gpa$

Fim do ciclo  $j = 0, (gpa - 1)$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

$s = 0$

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $j = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, (gpa - 1)$

$l = 1 + (gpa + 1)^2 \cdot i + (gpa + 1) \cdot j + k$

$s = s + 1$

$M_{coef}^{d3}(s, m) = M_{coef}[1 + 1, m] \cdot (k + 1)$

Fim do ciclo  $k = 0, gpa$

Fim do ciclo  $j = 0, (gpa - 1)$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

Fim do ciclo  $m = 1, nn$

onde  $nn$  é o número de nós por elemento quadrilateral (equação A25); e  $M_{coef}^{d1}$ ,  $M_{coef}^{d2}$  e  $M_{coef}^{d3}$  são as matrizes que contêm os coeficientes das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , respectivamente. Tais matrizes são empregadas no cálculo das derivadas das funções de forma de modo similar à equação (3.4):

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}(\xi_p) = \mathbf{M}_{coef}^{d1} \cdot \mathbf{v}_\xi \quad (A31.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}(\xi_p) = \mathbf{M}_{coef}^{d2} \cdot \mathbf{v}_\xi \quad (A31.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}(\xi_p) = \mathbf{M}_{coef}^{d3} \cdot \mathbf{v}_\xi \quad (A31.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} = \left\{ \begin{array}{l} \partial \phi_1 / \partial \xi_1 \\ \partial \phi_2 / \partial \xi_1 \\ \partial \phi_3 / \partial \xi_1 \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi_1 \end{array} \right\} \quad (A31.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = \left\{ \begin{array}{c} \partial \phi_1 / \partial \xi_2 \\ \partial \phi_2 / \partial \xi_2 \\ \partial \phi_3 / \partial \xi_2 \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi_2 \end{array} \right\} \quad (\text{A31.5})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_3} = \left\{ \begin{array}{c} \partial \phi_1 / \partial \xi_3 \\ \partial \phi_2 / \partial \xi_3 \\ \partial \phi_3 / \partial \xi_3 \\ \vdots \\ \partial \phi_{nn} / \partial \xi_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A31.6})$$

onde o vetor  $\mathbf{v}_\xi$  é dado no algoritmo (A29).

#### A.5. Elemento sólido tetraédrico

Com relação ao sólido tetraédrico, o número de nós por elemento finito é:

$$nn = \sum_{i=0}^{gpa} \left[ \frac{(i+1)(i+2)}{2} \right] \quad (\text{A32})$$

onde  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito tetraédrico.

A sequência de numeração interna dos nós no elemento tetraédrico, juntamente com os eixos de coordenadas adimensionais  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , é mostrada na figura A8.

Com relação às coordenadas adimensionais do elemento sólido tetraédrico, são adotadas as seguintes hipóteses: as coordenadas do primeiro nó (1) são  $(0,0,0)$ ; as coordenadas do último nó ( $nn$ ) são  $(0,0,1)$ ; os nós são definidos no conjunto de pontos  $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \square^3 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1\}$ ; e os nós pertencentes à mesma reta são igualmente espaçados.

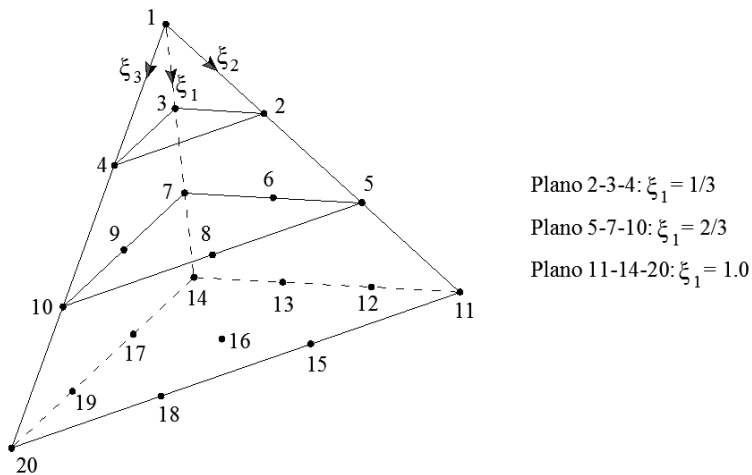


Figura A8. Padrão de numeração interna dos nós (●) para o elemento finito sólido tetraédrico de aproximação cúbica. Os eixos  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  representam as coordenadas adimensionais em relação ao primeiro nó.

Com as hipóteses do parágrafo anterior, as coordenadas dos nós são determinadas, de forma generalizada, com o algoritmo computacional a seguir:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, i$

Ciclo  $j = 0, (i - k)$

$$l = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \right] + j + (i+1) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

$$\xi_1(l) = \frac{i - j - k}{gpa}$$

$$\xi_2(l) = \frac{j}{gpa}$$

$$\xi_3(l) = \frac{k}{gpa}$$

(A33)

Fim do ciclo  $j = 0, (i - k)$

Fim do ciclo  $k = 0, i$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

Na figura A9 é dada a interpretação geométrica dos índices  $k, j$  e  $i$  do algoritmo acima.



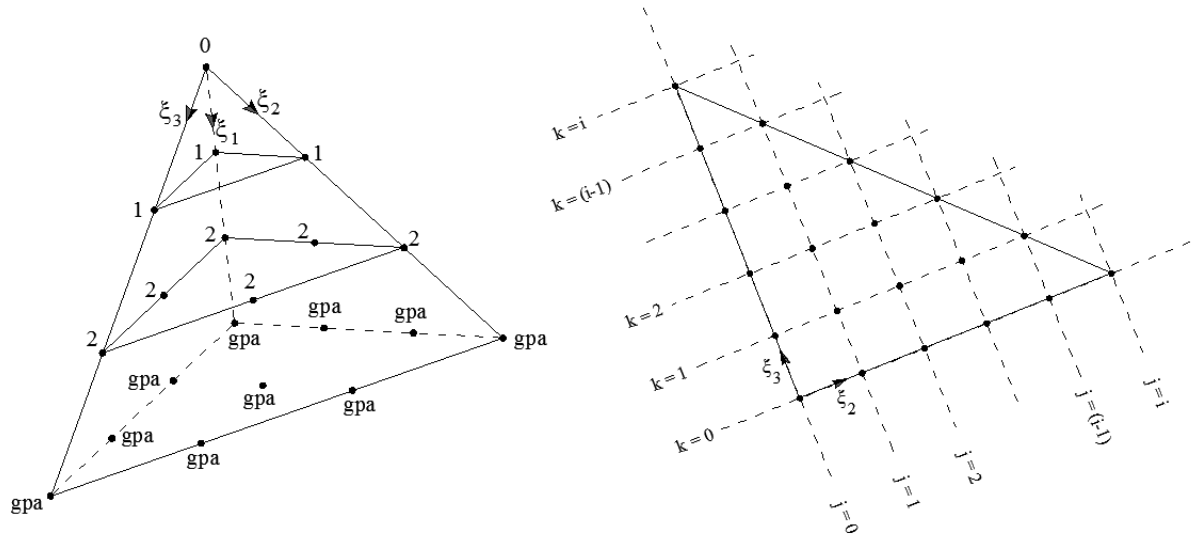


Figura A9. Interpretação geométrica dos índices  $k, j$  e  $i$  do algoritmo A33. O valor  $gpa$  é o grau do polinômio aproximador do elemento finito, os números à esquerda correspondem ao índice  $i$ , e as linhas tracejadas à direita passam pelos nós com mesmo índice ( $k$  ou  $j$ ).

Para o elemento tetraédrico, todas as funções de forma são aqui expressas pela seguinte forma, para qualquer grau do polinômio aproximador ( $gpa$ ):

$$\begin{aligned} \phi_k(\xi) = & c_0^k + c_1^k \xi_1 + c_2^k \xi_2 + c_3^k \xi_3 + c_4^k \xi_1^2 + c_5^k \xi_1 \xi_2 + c_6^k \xi_1 \xi_3 + c_7^k \xi_2^2 + c_8^k \xi_2 \xi_3 + c_9^k \xi_3^2 + \\ & c_{10}^k \xi_1^3 + c_{11}^k \xi_1^2 \xi_2 + c_{12}^k \xi_1^2 \xi_3 + c_{13}^k \xi_1 \xi_2^2 + c_{14}^k \xi_1 \xi_2 \xi_3 + c_{15}^k \xi_1 \xi_3^2 + c_{16}^k \xi_2^3 + c_{17}^k \xi_2^2 \xi_3 + c_{18}^k \xi_2 \xi_3^2 + \\ & c_{19}^k \xi_3^3 + \dots + c_{(nn-1)}^k \xi_3^{gpa} \end{aligned} \quad (A34)$$

onde  $c_n^k$  é o  $n$ -ésimo coeficiente da função de forma relativa ao nó  $k$ ; e  $nn$  é o número de nós por elemento tetraédrico (equação A32).

Com a expressão geral (A34) e com a propriedade dos polinômios de Lagrange (equação 3.2), a matriz das potências adimensionais ( $\mathbf{M}_\xi$ ), para o elemento tetraédrico, é calculada com o seguinte algoritmo computacional:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, i$

Ciclo  $j = 0, (i - k)$

$$l = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \right] + j + (i+1) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

Ciclo  $m = 1, nn$

$$M_{\xi}(m,1) = \left[ \xi_1(m)^{i-j-k} \right] \left[ \xi_2(m)^j \right] \left[ \xi_3(m)^k \right] \quad (A35)$$

Fim do ciclo  $m = 1, nn$

Fim do ciclo  $j = 0, (i - k)$

Fim do ciclo  $k = 0, i$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(m)$ ,  $\xi_2(m)$  e  $\xi_3(m)$  são as três coordenadas adimensionais do nó  $m$  (ver algoritmo A33). A determinação da matriz dos coeficientes das funções de forma ( $\mathbf{M}_{coef}$ ) para o elemento tetraédrico é realizada com as expressões (A35) e (A15.2).

O vetor de potências adimensionais, necessário para o cálculo das funções de forma via equação (3.4) num ponto qualquer do elemento tetraédrico, é dado pelo seguinte algoritmo:

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, i$

Ciclo  $j = 0, (i - k)$

$$l = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \right] + j + (i+1) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

$$\left( v_{\xi} \right)_l = \left[ \xi_1(P)^{i-j-k} \right] \left[ \xi_2(P)^j \right] \left[ \xi_3(P)^k \right] \quad (A36)$$

Fim do ciclo  $j = 0, (i - k)$

Fim do ciclo  $k = 0, i$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $\xi_1(P)$ ,  $\xi_2(P)$  e  $\xi_3(P)$  são as coordenadas adimensionais do ponto  $P$ , pertencente ao elemento sólido tetraédrico.

A determinação generalizada dos coeficientes das derivadas das funções de forma do elemento tetraédrico é realizada com o seguinte algoritmo:

Ciclo  $i = 0, (gpa - 1)$

Ciclo  $k = 0, i$

Ciclo  $j = 0, (i - k)$

$$l = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \right] + j + (i+1) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

$$s = 1 + \sum_{n=0}^i \left[ \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right] + j + (i+2) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

$$t = 1 + \sum_{n=0}^i \left[ \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \right] + j + (i+2) \cdot (k+1) - \frac{(k+1) \cdot k}{2}$$

Ciclo  $m = 1, nn$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d1}}(l, m) &= \mathbf{M}_{\text{coef}}(s, m) \cdot (1 + i - j - k) \\ \mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d2}}(l, m) &= \mathbf{M}_{\text{coef}}(s + 1, m) \cdot (1 + j) \\ \mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d3}}(l, m) &= \mathbf{M}_{\text{coef}}(t, m) \cdot (1 + k) \end{aligned} \tag{A37}$$

Fim do ciclo  $m = 1, nn$

Fim do ciclo  $j = 0, (i - k)$

Fim do ciclo  $k = 0, i$

Fim do ciclo  $i = 0, gpa$

onde  $nn$  é o número de nós por elemento quadrilateral (equação A32); e  $\mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d1}}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d2}}$  e  $\mathbf{M}_{\text{coef}}^{\text{d3}}$  são as matrizes que contêm os coeficientes das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , respectivamente. Tais matrizes são empregadas no cálculo das derivadas das funções de forma com as expressões (A31) e (A36).



## APÊNDICE B

### Derivadas da deformação em relação aos graus de liberdade, para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico

São apresentadas, neste Apêndice, as derivadas parciais do tensor deformação de Green-Lagrange (equação 3.17) em relação aos graus de liberdade, para os elementos finitos sólidos tetraédrico e hexaédrico (ver seção 3.1).

$$\frac{\partial E_{kl}}{\partial y_i} = \frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} \frac{\partial A_{mn}}{\partial y_i} = \frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} \frac{\partial A_{mn}}{\partial (A^1)_{op}} \frac{\partial (A_1)_{op}}{\partial y_i} \quad (B1.1)$$

$$\frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} = \frac{1}{2} \left( \Pi_{pkmn} A_{pl} + A_{pk} \Pi_{plmn} \right) \quad (B1.2)$$

$$\frac{\partial A_{mn}}{\partial (A_1)_{op}} = \Pi_{mkop} \left[ (A_0)^{-1} \right]_{kn} \quad (B1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ \frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} \frac{\partial A_{mn}}{\partial (A_1)_{op}} \frac{\partial (A_1)_{op}}{\partial y_i} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial A_{mn} \partial A_{qr}} \frac{\partial A_{mn}}{\partial (A_1)_{op}} \frac{\partial (A_1)_{op}}{\partial y_i} \frac{\partial (A_1)_{qr}}{\partial y_j} + \frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} \frac{\partial^2 A_{mn}}{\partial (A_1)_{op} \partial (A_1)_{qr}} \frac{\partial (A_1)_{op}}{\partial y_i} \frac{\partial (A_1)_{qr}}{\partial y_j} + \\ &= \frac{\partial E_{kl}}{\partial A_{mn}} \frac{\partial A_{mn}}{\partial (A_1)_{op}} \frac{\partial^2 (A_1)_{op}}{\partial y_i \partial y_j} \end{aligned} \quad (B1.4)$$

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial A_{mn} \partial A_{op}} = \frac{1}{2} \left( \Pi_{kimn} \Pi_{kjop} + \Pi_{kiop} \Pi_{kjmn} \right) \quad (B1.5)$$

$$\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial (A_1)_{mn} \partial (A_1)_{op}} = 0 \quad (B1.6)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange (3.17);  $\mathbf{y}$  é o vetor que contém os graus de liberdade do elemento finito;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_1$  são, nesta ordem, os gradientes total, inicial e final (equações 3.15); e  $\mathbf{\Pi}$  é o tensor identidade de quarta ordem (HOLZAPFEL, 2004). Os índices dos tensores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_1$  variam de um a três, e os índices do vetor  $\mathbf{y}$  variam de um

até o número de nós do elemento. Para obter as derivadas do gradiente final  $\mathbf{A}_1$  em relação ao vetor de graus de liberdade  $\mathbf{y}$ , escreve-se tal vetor por meio de uma forma alternativa. Sabe-se que as posições finais, para cada elemento finito, são dadas por:

$$y_1 = y_1^1 \phi_1 + y_1^2 \phi_2 + y_1^3 \phi_3 + \dots + y_1^N \phi_N \quad (\text{B2.1})$$

$$y_2 = y_2^1 \phi_1 + y_2^2 \phi_2 + y_2^3 \phi_3 + \dots + y_2^N \phi_N \quad (\text{B2.2})$$

$$y_3 = y_3^1 \phi_1 + y_3^2 \phi_2 + y_3^3 \phi_3 + \dots + y_3^N \phi_N \quad (\text{B2.3})$$

onde  $y_i^k$  é a coordenada do nó  $k$  na direção  $i$ ;  $\phi_k$  é a função de forma (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) relativa ao nó  $k$ ; e  $N$  é o número de nós do elemento finito. O vetor de graus de liberdade, para o elemento finito, pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{y}^T = [y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_1^3, y_2^3, y_3^3, \dots] \quad (\text{B3})$$

onde o símbolo  $( )^T$  representa, neste caso, a transposta de um vetor (HOLZAPFEL, 2004).

Uma forma alternativa para a expressão (3.3.2) é a seguinte:

$$y_i = \sum_{L=1}^N (y_{3L-2+i} \phi_L) \text{ ou } y_i = y_{3L-2+i} \phi_L \quad (i=1,3) \quad (\text{B4})$$

onde  $y_i$  representa a posição final ao longo da direção  $i$ ; e  $N$  é o número de nós do elemento finito. Com isso, o gradiente final  $\mathbf{A}_1$  (3.15.3) e suas derivadas em relação a  $\mathbf{y}$  resultam em:

$$(\mathbf{A}_1)_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} = y_{3L-2+i} \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi_j} \quad (\text{B5.1})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A}_1)_{ij}}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left( y_{3L-2+i} \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi_j} \right) = \delta_{(3L-2+i)k} \frac{\partial \phi_L}{\partial \xi_j} \quad (\text{B5.2})$$

$$\delta_{(3L-2+i)k} = 1, \text{ se } 3L-2+i = k \quad (\text{B5.3})$$

$$\delta_{(3L-2+i)k} = 0, \text{ se } 3L-2+i \neq k \quad (\text{B5.4})$$

$$\frac{\partial^2 (\mathbf{A}_1)_{ij}}{\partial y_k \partial y_l} = 0 \quad (\text{B5.5})$$

Neste caso, os índices  $i$  e  $j$  variam de um a três, e os índices  $k$  e  $L$  variam de um até o número de nós por elemento finito.

## APÊNDICE C

### Derivadas em relação ao tensor de Cauchy-Green direito

Neste Apêndice, são descritas as derivadas parciais, em relação ao tensor de Cauchy-Green direito (equação 3.16), das grandezas escalares que aparecem nos modelos hiperelásticos não lineares adotados (expressões 5.3, 5.4 e 5.5). As primeiras e as segundas derivadas são empregadas, respectivamente, no cálculo da tensão (equação 5.7) e do tensor elástico de quarta ordem (equações 5.15, 5.16 e 5.17). Todas as derivadas são descritas em notação tensorial (ou matricial) e indicial (HOLZAPFEL, 2004).

#### C.1. Primeiras derivadas

Jacobiano (J):

$$J = \sqrt{J^2} = \sqrt{\det(\mathbf{C})} \quad (\text{C1.1})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial J}{\partial J^2} \frac{\partial J^2}{\partial \mathbf{C}} = \left( \frac{1}{2J} \right) (J^2 \mathbf{C}^{-T}) = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} = \frac{J}{2} (C^{-1})_{ij} \quad (\text{C1.2})$$

Primeiro invariante (ou traço) de  $\mathbf{C}$ :

$$i_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = C_{ii} \quad (\text{C2.1})$$

$$\frac{\partial i_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\text{tr} \mathbf{C}) = \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial i_1}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad (\text{C2.2})$$

Segundo invariante de  $\mathbf{C}$ :

$$i_2 = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = \frac{1}{2} \left[ (C_{ii})^2 + (C^2)_{ii} \right] \quad (\text{C3.1})$$

$$\frac{\partial i_2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[ (\text{tr} \mathbf{C})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = \frac{1}{2} \left[ 2 \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{I} + \mathbf{I} : \frac{\partial \mathbf{C}^2}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial i_2(\mathbf{C})}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} \left[ 2 C_{mm} \delta_{ij} + \delta_{kl} \frac{\partial (C^2)_{ij}}{\partial C_{kl}} \right] \quad (\text{C3.2})$$

$$\frac{\partial(\mathbf{C}^2)_{ij}}{\partial \mathbf{C}_{kl}} = \delta_{ik} \mathbf{C}_{lj} + \mathbf{C}_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{C3.3})$$

Primeiro invariante (ou traço) de  $\mathbf{C}_{\text{iso}}$  :

$$i_1^{\text{iso}} = \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}}) = J^{-2/3} \text{tr}(\mathbf{C}) = J^{-2/3} i_1 \quad (\text{C4.1})$$

$$\frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} i_1 + J^{-2/3} \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{ij}} = -\frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}_{ij}} i_1 + J^{-2/3} \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}_{ij}} \quad (\text{C4.2})$$

Segundo invariante de  $\mathbf{C}_{\text{iso}}$  :

$$i_2^{\text{iso}} = \frac{1}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C}_{\text{iso}})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}_{\text{iso}}^2) \right] = \frac{J^{-4/3}}{2} \left[ (\text{tr} \mathbf{C})^2 + \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right] = J^{-4/3} i_2 \quad (\text{C5.1})$$

$$\frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} i_2 + J^{-4/3} \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}_{ij}} = -\frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}_{ij}} i_2 + J^{-4/3} \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{C}_{ij}} \quad (\text{C5.2})$$

## C.2. Segundas derivadas

Jacobiano (J):

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{J^2}{4} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{-1} + \frac{J}{2} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C}_{ij} \partial \mathbf{C}_{kl}} = \frac{J^2}{4} \mathbf{C}_{ij}^{-1} \mathbf{C}_{kl}^{-1} + \frac{J}{2} \frac{\partial \mathbf{C}_{ij}^{-1}}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \quad (\text{C6.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{ij}^{-1}}{\partial \mathbf{C}_{kl}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_{il}^{-1} \mathbf{C}_{kj}^{-1} + \mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{jl}^{-1}) \quad (\text{C6.2})$$

A derivada presente na expressão (C6.2) é válida somente quando o tensor  $\mathbf{C}$  é simétrico (HOLZAPFEL, 2004).

Primeiro invariante (ou traço) de  $\mathbf{C}$  :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (\mathbf{I}) = \mathcal{O}^{(4)} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}_{ij}} \left( \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \right) = 0 \quad (\text{C7})$$

Segundo invariante de  $\mathbf{C}$  :



$$\frac{\partial^2 i_2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left[ 2\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} : \frac{\partial^2 \mathbf{C}^2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \right] \text{ ou } \frac{\partial^2 i_2(\mathbf{C})}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{1}{2} \left[ 2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{mn} \frac{\partial^2 (C^2)_{mn}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right] \quad (\text{C8.1})$$

$$\frac{\partial^2 (C^2)_{ij}}{\partial C_{kl} \partial C_{mn}} = \delta_{ik}\delta_{lm}\delta_{jn} + \delta_{im}\delta_{kn}\delta_{jl} \quad (\text{C8.2})$$

Primeiro invariante (ou traço) de  $\mathbf{C}_{\text{iso}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i_1^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{10}{9} J^{-8/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} i_1 - \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} i_1 - \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}} - \\ &\quad \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial i_1}{\partial \mathbf{C}} + J^{-2/3} \frac{\partial^2 i_1}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \text{ ou} \\ \frac{\partial^2 i_1^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} &= \frac{10}{9} J^{-8/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} i_1 - \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} i_1 - \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_1}{\partial C_{kl}} - \\ &\quad \frac{2}{3} J^{-5/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_1}{\partial C_{kl}} + J^{-2/3} \frac{\partial^2 i_1}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \end{aligned} \quad (\text{C9})$$

Segundo invariante de  $\mathbf{C}_{\text{iso}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i_2^{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} &= \frac{28}{9} J^{-10/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} i_2 - \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} i_2 - \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \otimes \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{C}} - \\ &\quad \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial i_2}{\partial \mathbf{C}} + J^{-4/3} \frac{\partial^2 i_2}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \text{ ou} \\ \frac{\partial^2 i_2^{\text{iso}}}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} &= \frac{28}{9} J^{-10/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial J}{\partial C_{kl}} i_2 - \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} i_2 - \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_2}{\partial C_{kl}} - \\ &\quad \frac{4}{3} J^{-7/3} \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \frac{\partial i_2}{\partial C_{kl}} + J^{-4/3} \frac{\partial^2 i_2}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \end{aligned} \quad (\text{C10})$$



## APÊNDICE D

### Operador Tangente Consistente Hiperelastoplástico

São descritas, neste Apêndice, as fórmulas utilizadas na determinação do operador tangente consistente hiperelastoplástico (equação 6.36.1, seção 6.4.5).

Segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (equação 6.25.1):

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T} \text{ ou } S_{ij} = (\mathbf{A}_p^{-1})_{im} (\mathbf{S}_e)_{mn} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jn} \quad (\text{D1})$$

onde  $\mathbf{A}_p$  é a parcela plástica do gradiente (equação 3.23); e  $\mathbf{S}_e$  é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff definido na configuração intermediária (figura 3.3).

Operador Tangente Consistente Hiperelastoplástico (equação 6.36.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{hep}} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{S}_e \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial \mathbf{E}} \text{ ou} \\ (\Gamma_{\text{hep}})_{ijkl} &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{im}}{\partial E_{kl}} (\mathbf{S}_e)_{mn} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jn} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{im} \frac{\partial (\mathbf{S}_e)_{mn}}{\partial E_{kl}} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jn} + \\ & (\mathbf{A}_p^{-1})_{im} (\mathbf{S}_e)_{mn} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})_{nj}}{\partial E_{kl}} \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

onde  $\mathbf{E}$  é o tensor deformação de Green-Lagrange (equação 3.17).

Derivadas do gradiente plástico ( $\mathbf{A}_p$ ) em relação à deformação ( $\mathbf{E}$ ):

$$\frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{A}_p} \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{D3.1})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_p &= \mathbf{L}_p \mathbf{A}_p = \left( \dot{\gamma} \mathbf{R}_L \right) \mathbf{A}_p = \left( \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p = \left[ \left( \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p \right) \otimes \mathbf{B} \right] : \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial \mathbf{E}} = \left( \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p \right) \otimes \mathbf{B} \text{ ou } \left( \frac{\partial \mathbf{A}_p}{\partial \mathbf{E}} \right)_{ijkl} = (\mathbf{R}_L)_{im} (\mathbf{A}_p)_{mj} \mathbf{B}_{kl} \end{aligned} \quad (\text{D3.2})$$

$$\frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial \mathbf{A}_p^T} \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{D3.3})$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p^T = \mathbf{A}_p^T \mathbf{L}_p^T = \left[ (\mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_L^T) \otimes \mathbf{B} \right] : \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{E}} = (\mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_L^T) \otimes \mathbf{B} \text{ ou}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{E}} \right)_{ijkl} = (\mathbf{A}_p)_{mi} (\mathbf{R}_L)_{jm} \mathbf{B}_{kl} \quad (\text{D3.4})$$

onde  $\mathbf{R}_L$  é o tensor que define a parcela plástica do gradiente da velocidade  $\mathbf{L}_p$  (equações 6.28); e  $\mathbf{B}$  é o tensor que aparece no cálculo do multiplicador plástico  $\dot{\gamma}$  (equações 6.35). As derivadas da inversa de uma matriz em relação a ela própria são dadas no Apêndice C.

Derivada da tensão  $\mathbf{S}_e$  em relação à deformação ( $\mathbf{E}$ ):

$$\mathbf{S}_e = \Gamma_e : \mathbf{E}_e \text{ ou } (\mathbf{S}_e)_{ij} = (\Gamma_e)_{ijkl} (\mathbf{E}_e)_{kl} \quad (\text{D4.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{E}_e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} = \Gamma_e : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{S}_e)_{ij}}{\partial E_{mn}} = (\Gamma_e)_{ijkl} \frac{\partial (\mathbf{E}_e)_{kl}}{\partial E_{mn}} \quad (\text{D4.2})$$

onde  $\Gamma_e$  é o tensor elástico de quarta ordem definido na configuração intermediária (ver figura 3.3); e  $\mathbf{E}_e$  é a parcela elástica da deformação de Green-Lagrange (ver equações 3.24).

Derivada da parcela elástica de deformação ( $\mathbf{E}_e$ ) em relação à deformação total de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ):

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1} \text{ ou } (\mathbf{E}_e)_{ij} = (\mathbf{A}_p^{-1})_{ki} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lj} \quad (\text{D5.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-T}}{\partial \mathbf{E}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1} + \mathbf{A}_p^{-T} \left( \mathbf{\Pi} - \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} \right) \mathbf{A}_p^{-1} + \mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-1}}{\partial \mathbf{E}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{E}_e)_{ij}}{\partial E_{mn}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})_{ik}}{\partial E_{mn}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lj} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{ki} \left( \mathbf{\Pi} - \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} \right)_{klmn} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lj} +$$

$$(\mathbf{A}_p^{-1})_{ki} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)_{kl} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{lj}}{\partial E_{mn}} \quad (\text{D5.2})$$

onde  $\mathbf{E}_p$  é a parcela plástica da deformação de Green-Lagrange (ver equações 3.24).

Derivada da parcela plástica de deformação ( $\mathbf{E}_p$ ) em relação à deformação total de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}$ ):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_p &= \mathbf{A}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{A}_p = \mathbf{A}_p^T \left( \mathbf{B} : \dot{\mathbf{E}} \right) \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p = \left[ \left( \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \right) \otimes \mathbf{B} \right] : \dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{E}} &= \left( \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \right) \otimes \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (E_p)_{ij}}{\partial E_{kl}} = (A_p)_{mi} (R_p)_{mn} (A_p)_{nj} B_{kl} \quad (\text{D6})\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{R}_p$  é o tensor que define o tensor taxa de deformação plástica  $\mathbf{D}_p$  (ver equações 3.26 e 6.28).



## APÊNDICE E

### Derivadas do Algoritmo de Retorno Implícito de Euler

Neste Apêndice são descritas as derivadas parciais empregadas no algoritmo de retorno implícito de Euler (seção 6.6), para a elastoplasticidade de Green-Naghdi (seção 6.3) e para a hiperelastoplasticidade (seção 6.4).

#### *E.1. Elastoplasticidade de Green-Naghdi (seções 6.3 e 6.6.1)*

$$\mathbf{z}^T = \{\mathbf{ep}^T, \kappa, \mathbf{xx}^T, \Delta\gamma\} \quad (\text{E1.1})$$

$$\mathbf{ep}^T = \{(E_p)_{11}, (E_p)_{12}, (E_p)_{13}, (E_p)_{21}, (E_p)_{22}, (E_p)_{23}, (E_p)_{31}, (E_p)_{32}, (E_p)_{33}\} \quad (\text{E1.2})$$

$$\mathbf{xx}^T = \{X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33}\} \quad (\text{E1.3})$$

$$\mathbf{rr}^T = \{R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{31}, R_{32}, R_{33}\} \quad (\text{E1.4})$$

$$\mathbf{rx}^T = \{(R_x)_{11}, (R_x)_{12}, (R_x)_{13}, (R_x)_{21}, (R_x)_{22}, (R_x)_{23}, (R_x)_{31}, (R_x)_{32}, (R_x)_{33}\} \quad (\text{E1.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{ep}} = -\mathbf{I}_{9 \times 9} + \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rr}}{\partial \mathbf{ep}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (\mathbf{ep})_j} = -(\mathbf{I}_{9 \times 9})_{ij} + \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rr})_i}{\partial (\mathbf{ep})_j} \quad (\text{E1.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rr}}{\partial \kappa} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rr})_i}{\partial \kappa} \quad (\text{E1.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{xx}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rr}}{\partial \mathbf{xx}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rr})_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} \quad (\text{E1.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{rr} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (\Delta\gamma)} = (\mathbf{rr})_i \quad (\text{E1.9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{ep}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_\kappa}{\partial \mathbf{ep}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial r_2}{\partial (\mathbf{ep})_i} = \Delta\gamma \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\mathbf{ep})_i} \quad (\text{E1.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_\kappa}{\partial \kappa} \quad (\text{E1.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{xx}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_\kappa}{\partial \mathbf{xx}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial r_2}{\partial (\mathbf{xx})_i} = \Delta\gamma \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\mathbf{xx})_i} \quad (\text{E1.12})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{r}_\kappa \quad (\text{E1.13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{ep}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \mathbf{ep}} \text{ ou } \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\mathbf{ep})_j} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial (\mathbf{ep})_j} \quad (\text{E1.14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \kappa} \text{ ou } \frac{\partial (r_3)_i}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial \kappa} \quad (\text{E1.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{xx}} = -\mathbf{I}_{9 \times 9} + \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \mathbf{xx}} \text{ ou } \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} = -(\mathbf{I}_{9 \times 9})_{ij} + \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} \quad (\text{E1.16})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{rx} \text{ ou } \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\Delta\gamma)} = (\mathbf{rx})_i \quad (\text{E1.17})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \mathbf{ep}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{ep}} \text{ ou } \frac{\partial r_4}{\partial (\mathbf{ep})_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{ep})_i} \quad (\text{E1.18})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \kappa} = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \quad (\text{E1.19})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \mathbf{xx}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{xx}} \quad (\text{E1.20})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial (\Delta\gamma)} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta\gamma)} \quad (\text{E1.21})$$

onde as componentes do vetor resíduo ( $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ ) são dadas nas expressões (6.62);  $\mathbf{z}$  é o vetor de variáveis internas;  $\mathbf{ep}$ ,  $\mathbf{xx}$ ,  $\mathbf{rr}$  e  $\mathbf{rx}$  são os vetores que contêm, respectivamente, as componentes da deformação plástica de Green-Lagrange ( $\mathbf{E}_p$ ), do tensor das tensões inversas ( $\mathbf{X}$ ), do tensor da lei de fluxo ( $\mathbf{R}$ ) e do tensor que define a evolução de  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{R}_x$ );  $\Phi$  é a função que define a superfície de plastificação (equação 6.15.3); e o símbolo  $\mathbf{I}_{9 \times 9}$  denota a matriz identidade com dimensões 9 x 9 (HOLZAPFEL, 2004).

*E.1.1. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}$  (ou do vetor  $\mathbf{rr}$ ) para o critério de plastificação de von-Mises (equações 6.43) com lei de fluxo associativa (equação 6.45):*

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| = \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \text{ ou } R_{ij} = \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij}}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \quad (\text{E2.1})$$

$$\mathbf{rr} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| \quad (\text{E2.2})$$

$$\mathbf{s}^T = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{31}, S_{32}, S_{33}\} \quad (\text{E2.3})$$



$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] : (-\Gamma_e) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial (E_p)_{kl}} = \frac{\partial}{\partial S_{mn}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij}}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] (-\Gamma_e)_{mnkl} \quad (\text{E2.4})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \right] \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} -$$

$$\frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|^2} \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \otimes \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}{\partial \mathbf{S}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial S_{ij} \partial S_{mn}} = \frac{\partial}{\partial S_{mn}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij}}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] = \frac{\partial}{\partial S_{mn}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \right] \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} -$$

$$\frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|^2} \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}{\partial S_{mn}} \quad (\text{E2.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left[ (\mathbf{S} - \mathbf{X}) - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{S} - \text{tr} \mathbf{X}) \mathbf{I} \right] = \mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial S_{mn}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \right] = \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (\text{E2.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial R_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E2.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] = \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \right] -$$

$$\frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|^2} \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \otimes \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}{\partial \mathbf{X}} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial X_{kl}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S_{ij} \partial X_{kl}} = \frac{\partial}{\partial X_{kl}} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij}}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \right] = \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|} \frac{\partial}{\partial X_{kl}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \right] -$$

$$\frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|^2} \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\|}{\partial X_{kl}} \quad (\text{E2.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left[ (\mathbf{S} - \mathbf{X}) - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{S} - \text{tr} \mathbf{X}) \mathbf{I} \right] = -\mathbf{\Pi} + \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_{kl}} \left[ \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})_{ij} \right] = -\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{E2.9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E2.10})$$

onde  $\Gamma_e$  é o tensor elástico de quarta ordem (equação 6.15.11).

*E.1.2. Derivadas da função escalar  $r_\kappa$  para o parâmetro de encruamento isotrópico expresso em (6.53):*

$$\frac{\partial r_\kappa}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial r_\kappa}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\mathbf{E}_p)_{ij}} = \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\mathbf{X})_{ij}} = 0 \quad (\text{E3.1})$$

$$\frac{\partial r_\kappa}{\partial \kappa} = \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E3.2})$$

*E.1.3. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Prager (equações 6.15.6 e 6.54) com lei de fluxo associativa (equação 6.45):*

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{cR} = \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{ou} \quad (R_X)_{ij} = \mathbf{c} R_{ij} = \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial S_{ij}} \quad (\text{E4.1})$$

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \left\| \text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X}) \right\| \quad (\text{E4.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{E}_p} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \right) = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} : (-\Gamma_e) \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial (R_X)_{ij}}{\partial (\mathbf{E}_p)_{kl}} = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S_{ij} \partial S_{mn}} (-\Gamma_e)_{mnkl} \quad (\text{E4.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (R_X)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E4.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \right) = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{X}} = -\mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (R_X)_{ij}}{\partial X_{kl}} = -\mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \quad (\text{E4.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (R_X)_{ij}}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E4.6})$$

E.1.4. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Ziegler (equações 6.15.6 e 6.55) com lei de fluxo associativa (equação 6.45):

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{S} - \mathbf{X} \text{ ou } (\mathbf{R}_X)_{ij} = \mathbf{S}_{ij} - \mathbf{X}_{ij} \quad (\text{E5.1})$$

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{s} - \mathbf{x} \quad (\text{E5.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = -\Gamma_e \text{ ou } \frac{\partial \mathbf{R}_{ij}}{\partial (\mathbf{E}_p)_{kl}} = -(\Gamma_e)_{ijkl} \quad (\text{E5.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E5.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{\Pi} \quad (\text{E5.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E5.6})$$

E.1.5. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (equações 6.15.6 e 6.56) com lei de fluxo associativa (equação 6.45):

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{c}\mathbf{R}_p - \mathbf{b}\mathbf{X} \text{ ou } (\mathbf{R}_X)_{ij} = \mathbf{c}(\mathbf{R}_p)_{ij} - \mathbf{b}\mathbf{X}_{ij} \quad (\text{E6.1})$$

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} - \mathbf{b}\mathbf{X} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \mathbf{b}\mathbf{X} \quad (\text{E6.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{E}_p} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \right) - \mathbf{b} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{E}_p} = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} : (-\Gamma_e) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{ij}}{\partial (\mathbf{E}_p)_{kl}} = -(\Gamma_e)_{ijkl} \quad (\text{E6.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E6.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \right) - \mathbf{b}\mathbf{\Pi} = -\mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} - \mathbf{b}\mathbf{\Pi} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial \mathbf{X}_{kl}} = -\mathbf{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{S}_{ij} \partial \mathbf{S}_{kl}} - \mathbf{b}\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (\text{E6.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E6.6})$$

*E.1.6. Derivadas da função  $\Phi$  para o critério de von-Mises (equação 6.43) com lei de encruamento isotrópico polinomial (equação 6.49):*

$$\Phi = S_{ef}(\mathbf{S}, \mathbf{X}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\kappa}(\kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sum_{n=1}^{NC} [\alpha_n(\kappa)^{n-1}] \right\} \leq 0 \quad (\text{E7.1})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : (-\Gamma_e) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (E_p)_{ij}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial S_{kl}} (\Gamma_e)_{kl ij} \quad (\text{E7.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sum_{n=2}^{NC} [\alpha_n (n-1) (\kappa)^{n-2}] \right\} \quad (\text{E7.3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_{ij}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial S_{ij}} \quad (\text{E7.4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \gamma)} = 0 \quad (\text{E7.5})$$

onde a derivada  $\partial \Phi / \partial \mathbf{S}$  é dada na expressão (E2.1).

*E.1.7. Derivadas da função  $\Phi$  para o critério de von-Mises (equação 6.43) com lei de encruamento isotrópico de Swift (equação 6.50):*

$$\Phi = S_{ef}(\mathbf{S}, \mathbf{X}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\kappa}(\kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ K (E_0 + \kappa)^n \right] \leq 0 \quad (\text{E8.1})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : (-\Gamma_e) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (E_p)_{ij}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial S_{kl}} (\Gamma_e)_{kl ij} \quad (\text{E8.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ nK (E_0 + \kappa)^{n-1} \right] \quad (\text{E8.3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_{ij}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial S_{ij}} \quad (\text{E8.4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \gamma)} = 0 \quad (\text{E8.5})$$

onde a derivada  $\partial \Phi / \partial \mathbf{S}$  é dada na expressão (E2.1).

*E.1.8. Derivadas da função  $\Phi$  para o critério de von-Mises (equação 6.43) com lei de encruamento isotrópico de Voce (equação 6.51):*

$$\Phi = S_{cf}(\mathbf{S}, \mathbf{X}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{\kappa}(\kappa) = \|\text{dev}(\mathbf{S} - \mathbf{X})\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \sigma_0 + (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) \left[ 1 - e^{(-C_Y \kappa)} \right] \right\} \leq 0 \quad (\text{E9.1})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : (-\Gamma_e) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{E}_p)_{ij}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial S_{kl}} (\Gamma_e)_{kl ij} \quad (\text{E9.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ C_Y (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) e^{(-C_Y \kappa)} \right] \quad (\text{E9.3})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_{ij}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial S_{ij}} \quad (\text{E9.4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \gamma)} = 0 \quad (\text{E9.5})$$

onde a derivada  $\partial \Phi / \partial \mathbf{S}$  é dada na expressão (E2.1).

## E.2. Hiperelastoplasticidade (seções 6.4 e 6.6.2)

$$\mathbf{z}^T = \{ \mathbf{a}^T, \kappa, \mathbf{x}^T, \Delta \gamma \} \quad (\text{E10.1})$$

$$\mathbf{a}^T = \{ (A_p)_{11}, (A_p)_{12}, (A_p)_{13}, (A_p)_{21}, (A_p)_{22}, (A_p)_{23}, (A_p)_{31}, (A_p)_{32}, (A_p)_{33} \} \quad (\text{E10.2})$$

$$\mathbf{x}^T = \{ X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \} \quad (\text{E10.3})$$

$$\mathbf{r}^T = \{ (R_{AP})_{11}, (R_{AP})_{12}, (R_{AP})_{13}, (R_{AP})_{21}, (R_{AP})_{22}, (R_{AP})_{23}, (R_{AP})_{31}, (R_{AP})_{32}, (R_{AP})_{33} \} \quad (\text{E10.4})$$

$$\mathbf{r}^T = \{ (R_X)_{11}, (R_X)_{12}, (R_X)_{13}, (R_X)_{21}, (R_X)_{22}, (R_X)_{23}, (R_X)_{31}, (R_X)_{32}, (R_X)_{33} \} \quad (\text{E10.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{a}^T} = -\mathbf{I}_{9 \times 9} + \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{a}^T} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (a^T)_j} = -(\mathbf{I}_{9 \times 9})_{ij} + \Delta \gamma \frac{\partial (r^T)_i}{\partial (a^T)_j} \quad (\text{E10.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \kappa} = \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \kappa} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial \kappa} = \Delta \gamma \frac{\partial (r^T)_i}{\partial \kappa} \quad (\text{E10.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{x}^T} = \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{x}^T} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (x^T)_j} = \Delta \gamma \frac{\partial (r^T)_i}{\partial (x^T)_j} \quad (\text{E10.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial (\Delta \gamma)} = \mathbf{r}^T \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_1)_i}{\partial (\Delta \gamma)} = (r^T)_i \quad (\text{E10.9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{a}^T} = \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{a}^T} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial (a^T)_i} = \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial (a^T)_i} \quad (\text{E10.10})$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial r_\kappa}{\partial \kappa} \quad (\text{E10.11})$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \mathbf{xx}} = \Delta\gamma \frac{\partial r_\kappa}{\partial \mathbf{xx}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial r_2}{\partial (\mathbf{xx})_i} = \Delta\gamma \frac{\partial r_\kappa}{\partial (\mathbf{xx})_i} \quad (\text{E10.12})$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial (\Delta\gamma)} = r_\kappa \quad (\text{E10.13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{ap}} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \mathbf{ap}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\mathbf{ap})_j} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial (\mathbf{ap})_j} \quad (\text{E10.14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \kappa} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_3)_i}{\partial \kappa} = \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial \kappa} \quad (\text{E10.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \mathbf{xx}} = -\mathbf{I}_{9 \times 9} + \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{rx}}{\partial \mathbf{xx}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} = -(\mathbf{I}_{9 \times 9})_{ij} + \Delta\gamma \frac{\partial (\mathbf{rx})_i}{\partial (\mathbf{xx})_j} \quad (\text{E10.16})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{rx} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (r_3)_i}{\partial (\Delta\gamma)} = (\mathbf{rx})_i \quad (\text{E10.17})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \mathbf{ap}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{ap}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial r_4}{\partial (\mathbf{ap})_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{ap})_i} \quad (\text{E10.18})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \kappa} = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \quad (\text{E10.19})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial \mathbf{xx}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{xx}} \quad (\text{E10.20})$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial (\Delta\gamma)} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta\gamma)} \quad (\text{E10.21})$$

onde  $\mathbf{z}$  é o vetor de variáveis internas;  $\mathbf{ap}$ ,  $\mathbf{xx}$ ,  $\mathbf{ra}$  e  $\mathbf{rx}$  são os vetores que contêm, respectivamente, as componentes da parcela plástica do gradiente ( $\mathbf{A}_p$ ), do tensor das tensões inversas na configuração inicial ( $\mathbf{X}$ ), do tensor da lei de fluxo ( $\mathbf{R}_{AP}$ ) e do tensor que define a evolução de  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{R}_X$ ); as componentes do vetor resíduo ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ ) são dadas nas expressões (6.72); e  $\Phi$  é a função que define a superfície de plastificação (equação 6.27).

*E.2.1. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_{AP}$  (ou do vetor  $\mathbf{ra}$ ) para o critério de plastificação de von-Mises (equação 6.44) com lei de fluxo associativa (ver equações 6.46, 6.47 e 6.48):*

$$\mathbf{R}_{AP} = \mathbf{R}_L \mathbf{A}_p = (\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_w) \mathbf{A}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \mathbf{A}_p = \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \mathbf{A}_p \text{ ou}$$

$$(\mathbf{R}_{AP})_{ij} = \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{ik}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} (\mathbf{A}_p)_{kj} \quad (\text{E11.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{A}_p} = \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\partial \mathbf{A}_p} \frac{\mathbf{A}_p}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} -$$

$$\frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p + \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \mathbf{\Pi} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} = \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{ik}}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{op}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{op}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} \frac{(\mathbf{A}_p)_{kj}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} -$$

$$\frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{ik}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{op}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{op}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} (\mathbf{A}_p)_{kj} + \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{ik}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \delta_{km} \delta_{jn} \quad (\text{E11.2})$$

$$\frac{\partial \text{dev}(\bullet)}{\partial (\bullet)} = \mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \text{ ou } \frac{\partial \text{dev}(\bullet)_{ij}}{\partial (\bullet)_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{E11.3})$$

$$\frac{\partial \|\bullet\|}{\partial (\bullet)} = \frac{(\bullet)}{\|\bullet\|} \text{ ou } \frac{\partial \|\bullet\|}{\partial (\bullet)_{ij}} = \frac{(\bullet)_{ij}}{\|\bullet\|} \quad (\text{E11.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \mathbf{A}_p} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} [\mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e] = \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-T}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{C} \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{S}_e + \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{S}_e + \mathbf{A}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{A}_p} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{M}_e)_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} = \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{ki}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} \mathbf{C}_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lo} (\mathbf{S}_e)_{oj} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{ki} \mathbf{C}_{kl} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{lo}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} (\mathbf{S}_e)_{oj} +$$

$$(\mathbf{A}_p^{-1})_{ki} \mathbf{C}_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lo} \frac{\partial (\mathbf{S}_e)_{oj}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} \quad (\text{E11.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_e}{\partial \mathbf{A}_p} = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{A}_p} = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} [\mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1}] = \boldsymbol{\Gamma}_e \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-T}}{\partial \mathbf{A}_p} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \mathbf{A}_p^{-1} -$$

$$\mathbf{A}_p^{-T} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p^{-1} + \mathbf{A}_p^{-T} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p) \frac{\partial \mathbf{A}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \right] \text{ ou}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{S}_e)_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} = (\boldsymbol{\Gamma}_e)_{ijop} \left[ \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{ko}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lp} - (\mathbf{A}_p^{-1})_{ko} \frac{\partial (\mathbf{E}_p)_{kl}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{mn}} (\mathbf{A}_p^{-1})_{lp} +$$

$$\left. \left( \mathbf{A}_p^{-1} \right)_{ko} \left( \mathbf{E} - \mathbf{E}_p \right)_{kl} \frac{\partial \left( \mathbf{A}_p^{-1} \right)_{lp}}{\partial \left( \mathbf{A}_p \right)_{mn}} \right] \quad (\text{E11.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{A}_p} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} \left[ \mathbf{A}_p \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T \right] = \left( \mathbf{\Pi} \right) \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T + \mathbf{A}_p \mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{A}_p} \text{ ou} \\ \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \left( \mathbf{A}_p \right)_{mn}} &= \delta_{im} \delta_{kn} X_{kl} \left( \mathbf{A}_p \right)_{jl} + \left( \mathbf{A}_p \right)_{ik} X_{kl} \delta_{jm} \delta_{ln} \end{aligned} \quad (\text{E11.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial \left( \mathbf{R}_{AP} \right)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E11.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)} : \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\mathbf{A}_p}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} - \\ &\frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)} : \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A}_p \text{ ou} \\ \frac{\partial \left( \mathbf{R}_{AP} \right)_{ij}}{\partial X_{mn}} &= \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{ik}}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{op}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{op}}{\partial X_{mn}} \frac{\left( \mathbf{A}_p \right)_{kj}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} - \\ &\frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{ik}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{op}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{op}}{\partial X_{mn}} \left( \mathbf{A}_p \right)_{kj} \end{aligned} \quad (\text{E11.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} &= - \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \mathbf{A}_p \mathbf{X} \mathbf{A}_p^T \right) = - \mathbf{A}_p \left( \mathbf{\Pi} \right) \mathbf{A}_p^T \text{ ou} \\ \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{ij}}{\partial X_{mn}} &= - \left( \mathbf{A}_p \right)_{ik} \delta_{km} \delta_{ln} \left( \mathbf{A}_p \right)_{jl} \end{aligned} \quad (\text{E11.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial (\Delta \gamma)} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial \left( \mathbf{R}_{AP} \right)_{ij}}{\partial (\Delta \gamma)} = 0 \quad (\text{E11.11})$$

onde a derivada  $\partial \mathbf{E}_p / \partial \mathbf{A}_p$  é dada no Apêndice B (equação B1.2); e a derivada da inversa de um tensor de segunda ordem  $\partial(\bullet)^{-1} / \partial(\bullet)$  é dada no Apêndice C (equação C6.2).

*E.2.2. Derivadas da função escalar  $r_\kappa$  para o parâmetro de encruamento isotrópico expresso em (6.53):*

$$\frac{\partial r_\kappa}{\partial \mathbf{A}_p} = \frac{\partial r_\kappa}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial r_\kappa}{\partial \left( \mathbf{A}_p \right)_{ij}} = \frac{\partial r_\kappa}{\partial \left( \mathbf{X} \right)_{ij}} = 0 \quad (\text{E12.1})$$



$$\frac{\partial \mathbf{r}_\kappa}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \frac{\partial \mathbf{r}_\kappa}{\partial (\Delta \boldsymbol{\gamma})} = \mathbf{0} \quad (\text{E12.2})$$

E.2.3. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Prager (equações 6.32.2 e 6.54) com lei de fluxo associativa (ver equações 6.46, 6.47 e 6.48):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X &= \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{R}_\chi \mathbf{A}_p^T - \text{sim} \left( 2 \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X} \right) = \mathbf{A}_p^{-1} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right) \mathbf{A}_p^T - \text{sim} \left( 2 \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} \right) \text{ ou} \\ (\mathbf{R}_X)_{ij} &= (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} - (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{X})_{nj} - \\ & \mathbf{X}_{ki} (\mathbf{R}_{AP})_{mk} (\mathbf{A}_p)_{mn} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} \end{aligned} \quad (\text{E13.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{A}_p} &= \mathbf{c} \left[ \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{A}_p} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \mathbf{A}_p^T + \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right) \mathbf{A}_p^T + \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^T)}{\partial \mathbf{A}_p} \right] - \\ & \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\ & \left. \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T (\boldsymbol{\Pi}) \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T \mathbf{A}_p \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \right] \text{ ou} \\ \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} &= \mathbf{c} \left[ \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \frac{\partial \Phi}{\partial (\mathbf{M}_e)_{kl}} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + \right. \\ & \left. (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{kl} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \right] - \left[ \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{X})_{ki} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + \right. \\ & \left. (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \right] \quad (\text{E13.2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} \left[ \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} \right] = \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})}{\partial \mathbf{A}_p} \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|}{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{A}_p} \text{ ou} \\
& \frac{\partial}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{\text{kl}} = \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{kl}}}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} - \\
& \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{kl}}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|}{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}} \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{qr}}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{qr}}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} \quad (\text{E13.3})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} = \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{C}_p} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{A}_p} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{ik}}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} = \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{ik}}}{\partial (\mathbf{C}_p)_{\text{mn}}} \frac{\partial (\mathbf{C}_p)_{\text{mn}}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} \quad (\text{E13.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_p}{\partial \mathbf{A}_p} = \frac{\partial \mathbf{A}_p^{\text{T}}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p + \mathbf{A}_p^{\text{T}} (\mathbf{\Pi}) \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{C}_p)_{\text{mn}}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{\text{op}}} = \delta_{\text{ko}} \delta_{\text{mp}} (\mathbf{A}_p)_{\text{kn}} + (\mathbf{A}_p)_{\text{km}} \delta_{\text{ko}} \delta_{\text{np}} \quad (\text{E13.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \text{ ou } \frac{\partial (\mathbf{R}_x)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E13.6})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{c} \left[ \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right) \mathbf{A}_p^{\text{T}} \right] - \left[ \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^{\text{T}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{AP}}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^{\text{T}} \mathbf{R}_{\text{AP}} (\mathbf{\Pi}) + \frac{\partial \mathbf{X}^{\text{T}}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{R}_{\text{AP}}^{\text{T}} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\
& \left. \mathbf{X}^{\text{T}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{AP}}^{\text{T}}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} \right] \text{ ou} \\
\frac{\partial (\mathbf{R}_x)_{ij}}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} &= \mathbf{c} \left[ (\mathbf{A}_p^{-1})_{\text{ik}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{\text{kl}} (\mathbf{A}_p^{\text{T}})_{\text{jl}} \right] - \left[ (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{ik}} (\mathbf{A}_p)_{\text{lk}} \frac{\partial (\mathbf{R}_{\text{AP}})_{\text{ln}}}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} \mathbf{X}_{\text{nj}} + \right. \\
& (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{ik}} (\mathbf{A}_p)_{\text{lk}} (\mathbf{R}_{\text{AP}})_{\text{ln}} \delta_{\text{no}} \delta_{\text{jp}} + \delta_{\text{ko}} \delta_{\text{ip}} (\mathbf{A}_p)_{\text{lk}} (\mathbf{R}_{\text{AP}})_{\text{ln}} (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{nj}} + \\
& \left. \mathbf{X}_{\text{ki}} (\mathbf{A}_p)_{\text{lk}} \frac{\partial (\mathbf{R}_{\text{AP}})_{\text{ln}}}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} (\mathbf{C}_p^{-1})_{\text{nj}} \right] \quad (\text{E13.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right) &= \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} - \\
& \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|}{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \text{ ou} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} \right)_{\text{kl}} &= \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{kl}}}{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \chi)_{\text{mn}}}{\partial \mathbf{X}_{\text{op}}} \frac{1}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} -
\end{aligned}$$

$$\frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|^2} \frac{\partial \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})\|}{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{mn}} \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{mn}}{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{qr}} \frac{\partial (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{qr}}{\partial \mathbf{X}_{op}} \quad (\text{E13.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial (\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E13.9})$$

onde a derivada da inversa de um tensor de segunda ordem  $\partial(\bullet)^{-1} / \partial(\bullet)$  é dada no Apêndice C (equação C6.2); a derivada  $\partial(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) / \partial \mathbf{X}$  é dada na equação (E11.10); e as derivadas  $\partial \text{dev}(\bullet) / \partial(\bullet)$  e  $\partial \|\bullet\| / \partial(\bullet)$  são dadas nas expressões (E11.3) e (E11.4), respectivamente.

*E.2.4. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Ziegler (equações 6.32.2 e 6.55) com lei de fluxo associativa (ver equações 6.46, 6.47 e 6.48):*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X &= \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{R}_\chi \mathbf{A}_p^{-T} - \text{sim} \left( 2\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X} \right) = \mathbf{A}_p^{-1} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{A}_p^{-T} - \text{sim} \left( 2\mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} \right) \quad \text{ou} \\ (\mathbf{R}_X)_{ij} &= (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} - (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{X})_{nj} - \\ & \quad \mathbf{X}_{ki} (\mathbf{R}_{AP})_{mk} (\mathbf{A}_p)_{mn} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} \end{aligned} \quad (\text{E14.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{A}_p} &= \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{A}_p} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial \mathbf{A}_p} - \\ & \quad \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\ & \quad \left. \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T (\mathbf{II}) \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T \mathbf{A}_p \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \right] \quad \text{ou} \\ \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} &= \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + \\ & \quad (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \left[ \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + \right. \\ & \quad \left. (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{X})_{ki} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} + (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \right] \quad (\text{E14.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = 0 \quad (\text{E14.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) \mathbf{A}_p^T - \left[ \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} (\boldsymbol{\Pi}) + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{R}_{AP}^T \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\ \left. \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} \right] \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial X_{op}} = (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial X_{op}} (\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi})_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} - \left[ (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial X_{op}} \mathbf{X} + \right. \\ \left. (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \delta_{no} \delta_{jp} + \delta_{ko} \delta_{ip} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + \right. \\ \left. X_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj}}{\partial X_{op}} \right] \quad (\text{E14.4})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial (\Delta \boldsymbol{\gamma})} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\Delta \boldsymbol{\gamma})} = 0 \quad (\text{E14.5})$$

onde a derivada da inversa de um tensor de segunda ordem  $\partial(\bullet)^{-1} / \partial(\bullet)$  é dada no Apêndice C (equação C6.2); a derivada  $\partial(\mathbf{M}_e - \boldsymbol{\chi}) / \partial \mathbf{X}$  é dada na equação (E11.10), a derivada  $\partial \mathbf{C}_p^{-1} / \partial \mathbf{A}_p$  é dada na equação (E13.4); e as derivadas  $\partial \text{dev}(\bullet) / \partial(\bullet)$  e  $\partial \|\bullet\| / \partial(\bullet)$  são dadas nas expressões (E11.3) e (E11.4), respectivamente.

*E.2.5. Derivadas do tensor  $\mathbf{R}_X$  para a lei de encruamento cinemático de Armstrong-Frederick (equações 6.32.2 e 6.56) com lei de fluxo associativa (ver equações 6.46, 6.47 e 6.48):*

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{R}_\chi \mathbf{A}_p^T - \text{sim} \left( 2 \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_p \mathbf{A}_p \mathbf{X} \right) = \mathbf{A}_p^{-1} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b} \boldsymbol{\chi} \right) \mathbf{A}_p^T - \text{sim} \left( 2 \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} \right) \quad \text{ou} \\ (\mathbf{R}_X)_{ij} = (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b} \boldsymbol{\chi} \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} - (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{X})_{nj} - \\ X_{ki} (\mathbf{R}_{AP})_{mk} (\mathbf{A}_p)_{mn} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} \quad (\text{E15.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{A}_p} &= \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})}{\partial \mathbf{A}_p} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right) \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_p} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right) \mathbf{A}_p^{-T} + \mathbf{A}_p^{-1} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right) \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-T})}{\partial \mathbf{A}_p} - \\ &\quad \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_p^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{R}_{AP} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}^T}{\partial \mathbf{A}_p} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T (\mathbf{II}) \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{X}^T \mathbf{R}_{AP}^T \mathbf{A}_p \frac{\partial \mathbf{C}_p^{-1}}{\partial \mathbf{A}_p} \right] \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} &= \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} + \\ &\quad (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right)_{kl} \frac{\partial (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \left[ \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \mathbf{X}_{nj} + (\mathbf{X})_{ki} \delta_{lo} \delta_{kp} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + (\mathbf{X})_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \frac{\partial (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj}}{\partial (\mathbf{A}_p)_{op}} \right] \quad (\text{E15.2}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \kappa} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial \kappa} = 0 \quad (\text{E15.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}_X}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{A}_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right) \mathbf{A}_p^{-T} - \left[ \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{X} + \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{R}_{AP} (\mathbf{II}) + \frac{\partial \mathbf{X}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{R}_{AP}^T \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}^T \frac{\partial \mathbf{R}_{AP}^T}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{A}_p \mathbf{C}_p^{-1} \right] \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{R}_X)_{ij}}{\partial X_{op}} &= (\mathbf{A}_p^{-1})_{ik} \frac{\partial}{\partial X_{op}} \left( \mathbf{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}_e} - \mathbf{b}\chi \right)_{kl} (\mathbf{A}_p^{-1})_{jl} - \left[ (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial X_{op}} \mathbf{X}_{nj} + \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{C}_p^{-1})_{ik} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} \delta_{no} \delta_{jp} + \delta_{ko} \delta_{ip} (\mathbf{A}_p)_{lk} (\mathbf{R}_{AP})_{ln} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{ki} (\mathbf{A}_p)_{lk} \frac{\partial (\mathbf{R}_{AP})_{ln}}{\partial X_{op}} (\mathbf{C}_p^{-1})_{nj} \right] \quad (\text{E15.4}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial X_{kl}} = -\frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)_{ij}}{\partial X_{kl}} \quad (\text{E15.5})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial(\Delta\gamma)} = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(\mathbf{R}_x)_{ij}}{\partial(\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E15.6})$$

onde a derivada da inversa de um tensor de segunda ordem  $\partial(\bullet)^{-1} / \partial(\bullet)$  é dada no Apêndice C (equação C6.2), a derivada  $\partial(\mathbf{M}_e - \chi) / \partial \mathbf{X}$  é dada na equação (E11.10), a derivada  $\partial^2 \Phi / \partial \mathbf{M}_e \partial \mathbf{A}_p$  é dada na expressão (E13.3), a derivada  $\partial^2 \Phi / \partial \mathbf{M}_e \partial \mathbf{X}$  é dada na equação (E13.8), a derivada  $\partial \mathbf{C}_p^{-1} / \partial \mathbf{A}_p$  é dada na equação (E13.4), e as derivadas  $\partial \text{dev}(\bullet) / \partial(\bullet)$  e  $\partial \|\bullet\| / \partial(\bullet)$  são dadas nas expressões (E11.3) e (E11.4), respectivamente.

*E.2.6. Derivadas da função  $\Phi$  para o critério de von-Mises (equação 6.44):*

$$\Phi = \|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_\kappa \leq 0 \quad (\text{E16.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}_p} &= \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} \cdot \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{A}_p} \quad \text{ou} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial(\mathbf{A}_p)_{ij}} &= \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{kl}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{kl}}{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)_{mn}} \frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)_{mn}}{\partial(\mathbf{A}_p)_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{E16.2})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \kappa} \quad (\text{E16.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} \cdot \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_{ij}} &= \frac{\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{kl}}{\|\text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)\|} \frac{\partial \text{dev}(\mathbf{M}_e - \chi)_{kl}}{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)_{mn}} \frac{\partial(\mathbf{M}_e - \chi)_{mn}}{\partial X_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{E16.4})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(\Delta\gamma)} = 0 \quad (\text{E16.5})$$

onde as derivadas  $\partial \mathbf{M}_e / \partial \mathbf{A}_p$ ,  $\partial \chi / \partial \mathbf{A}_p$  e  $\partial(\mathbf{M}_e - \chi) / \partial \mathbf{X}$  são dadas, respectivamente, nas expressões (E11.5), (E11.7) e (E11.10).

E.2.7. Derivadas da função  $\sigma_{\kappa}$  (ver equação 6.43.1) em relação ao parâmetro de encruamento isotrópico (6.33) para a lei de encruamento isotrópico polinomial (equação 6.49):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = \sum_{n=1}^{NC} \left[ \alpha_n (\kappa)^{n-1} \right] \quad (E17.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left\{ \sum_{n=1}^{NC} \left[ \alpha_n (\kappa)^{n-1} \right] \right\} = \sum_{n=2}^{NC} \left[ (n-1) \alpha_n (\kappa)^{n-2} \right] \quad (E17.2)$$

E.2.8. Derivadas da função  $\sigma_{\kappa}$  (ver equação 6.43.1) em relação ao parâmetro de encruamento isotrópico (6.33) para a lei de encruamento isotrópico de Swift (equação 6.50):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = K(E_0 + \kappa)^n \quad (E18.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left[ K(E_0 + \kappa)^n \right] = Kn(E_0 + \kappa)^{n-1} \quad (E18.2)$$

E.2.9. Derivadas da função  $\sigma_{\kappa}$  (equação 6.43.1) em relação ao parâmetro de encruamento isotrópico (6.33) para a lei de encruamento isotrópico de Voce (equação 6.51):

$$\sigma_{\kappa}(\kappa) = \sigma_0 + (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) \left[ 1 - e^{(-C_Y \kappa)} \right] \quad (E19.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\kappa}}{\partial \kappa} = \frac{\partial}{\partial \kappa} \left\{ (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) \left[ 1 - e^{(-C_Y \kappa)} \right] \right\} = C_Y (\sigma_{\text{sat}} - \sigma_0) e^{(-C_Y \kappa)} \quad (E19.2)$$





## APÊNDICE F

### Geração das Malhas de Elementos Finitos Sólidos

Neste Apêndice é descrito o algoritmo computacional para geração das malhas de elementos finitos sólidos (tetraédrico e hexaédrico) com grau de aproximação polinomial qualquer (ver seção 8.2). No presente estudo, entende-se por geração das malhas de elementos finitos o cálculo do número e das coordenadas de todos os nós, a determinação da incidência dos elementos (relação entre as numerações local e global), e a identificação dos nós carregados e dos nós restritos. O código de geração de malhas desenvolvido pode ser utilizado para gerar malhas com elementos sólidos hexaédricos e tetraédricos de qualquer grau de aproximação polinomial.

#### *F.1. Malha base*

O código computacional para geração das malhas de elementos finitos sólidos tem início com a leitura da malha base, a qual é constituída de elementos sólidos hexaédricos com aproximação polinomial linear (CHEN, 2005). É ilustrado um exemplo tridimensional de malha base na figura F1, o qual será utilizado, ao longo deste Apêndice, para explicar o algoritmo de geração. As faces dos hexaedros da malha base podem não ser perpendiculares entre si.

Cada elemento hexaédrico da malha base, chamado aqui de elemento principal, é mapeado a partir do espaço adimensional hexaédrico definido pelo conjunto  $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \square^3 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$  (ver figura 3.1), onde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$  são as três coordenadas adimensionais, e a partir das coordenadas de seus oito vértices, chamados aqui de nós principais (ver figura F2). Assim, as coordenadas dos pontos pertencentes a cada elemento principal, em relação ao sistema de coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  (ver figura F1), é dado por:

$$x_i = (x_i)^k \phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (i=1,3) \quad (k=1,8) \quad (F1)$$

onde  $(x_i)^k$  é a coordenada, na direção  $i$ , do nó  $k$ ; e  $\phi_k$  é a função de forma (ASSAN, 2003) relativa ao nó  $k$ . Essas funções de forma são lineares em relação às coordenadas adimensionais ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ ), e podem ser determinadas com o algoritmo descrito na seção A.4 do Apêndice A. No caso do hexaedro de aproximação linear, a relação entre as coordenadas adimensionais ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) e a numeração local dos nós é dada na Tabela F1. Tais coordenadas podem ser calculadas com o algoritmo (A26) do Apêndice A.

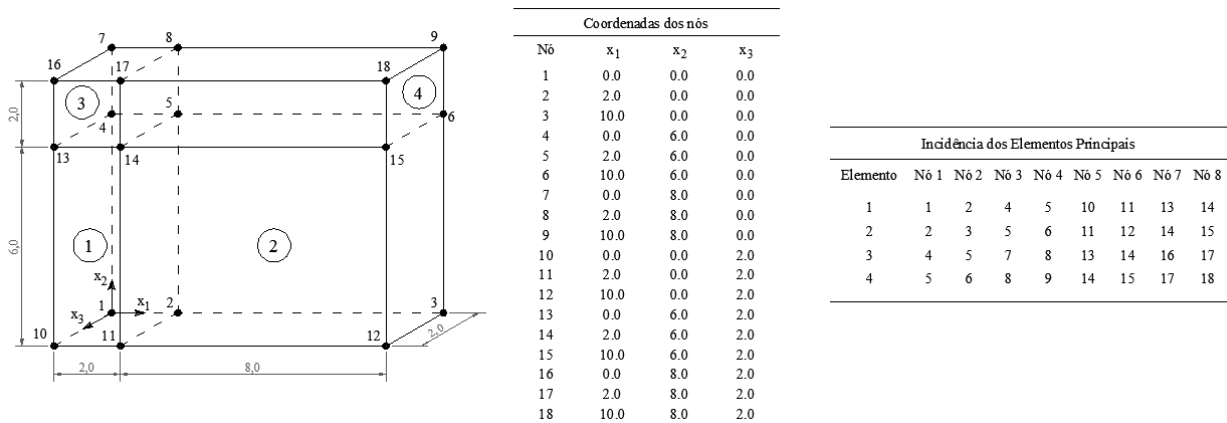


Figura F1. Exemplo tridimensional de malha base (neste caso são quatro elementos sólidos hexaédricos de aproximação linear, e dezoito nós). Os eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  denotam o sistema (global) de coordenadas, e os números no centro do círculo se referem ao número do elemento.

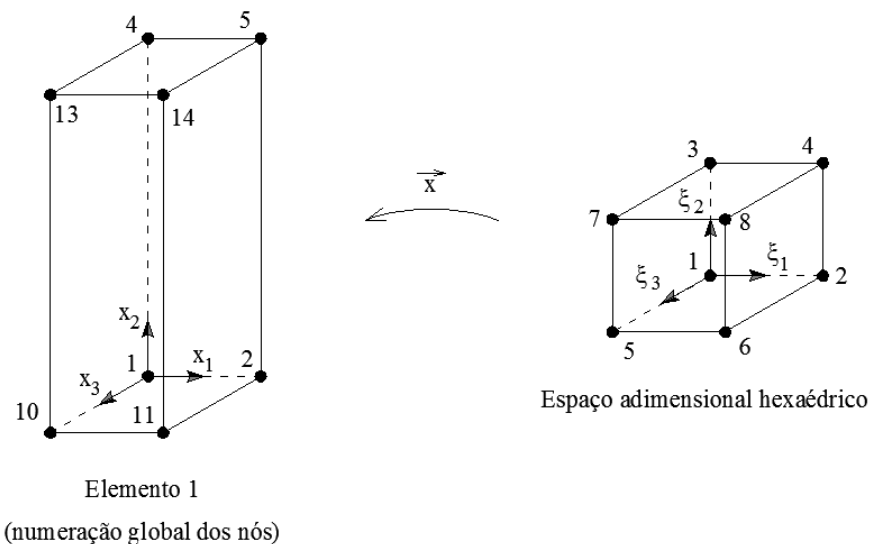


Figura F2. Mapeamento de um elemento principal a partir do espaço adimensional hexaédrico e de seus nós principais (ver figura F1).

Tabela F1. Relação entre as coordenadas adimensionais ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) e a numeração local dos nós no hexaedro de aproximação linear.

Nó	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$
1	0.0	0.0	0.0
2	1.0	0.0	0.0
3	0.0	1.0	0.0
4	1.0	1.0	0.0
5	0.0	0.0	1.0
6	1.0	0.0	1.0
7	0.0	1.0	1.0
8	1.0	1.0	1.0

### F.2. Divisão da malha base

Além de fornecer a geometria da malha base, devem ser fornecidos, ao algoritmo de geração das malhas, o grau do polinômio aproximador dos elementos finitos sólidos, e o esquema de divisões das arestas dos elementos principais. São ilustrados, na figura F3, alguns exemplos de malhas que podem ser geradas a partir da malha base da figura F1, de acordo com a ordem de aproximação polinomial e com o número de divisões das arestas. O esquema de divisão das arestas e a incidência dos elementos principais devem ser escolhidos de tal maneira que os números de divisões das arestas de cada elemento principal sejam iguais para as faces que pertencem a dois elementos principais. Além disso, a divisão das arestas é realizada em trechos de mesmo tamanho.

Por fim, devem ser fornecidas as coordenadas dos pontos com condições de contorno (CIARLET, 1988) prescritas, isto é, é preciso fornecer, ao código de geração das malhas, as coordenadas dos pontos que possuem alguma restrição de deslocamento e dos pontos submetidos a alguma força externa. Ademais, devem ser fornecidos os valores das forças externas atuantes, as quais podem ser concentradas, lineares ou superficiais. Com relação à malha base da figura F1, é possível, por exemplo, fazer as seguintes restrições: impedir o deslocamento na direção  $x_1$  de todos os nós pertencentes ao plano  $x_1 = 0$ ; impedir o deslocamento na direção  $x_2$  de todos os nós pertencentes ao segmento de reta  $x_1 = 10$  e  $x_2 = 8$ ; e impedir o deslocamento na direção  $x_3$  do ponto com coordenadas  $(10, 8, 2)$ . De modo similar, com a malha base da figura F1, é possível aplicar, por exemplo, as seguintes

forças externas: força concentrada na direção  $x_1$  atuante no ponto com coordenadas  $(10,8,0)$ ; força superficial na direção  $x_2$  uniformemente aplicada no plano definido pelo conjunto de pontos  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \square^3 / x_1 = 10, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ ; e força linear na direção  $x_3$  uniformemente aplicada no segmento de reta definido pelo conjunto de pontos  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \square^3 / x_1 = 2, x_2 = 0, 0 \leq x_3 \leq 2\}$ . No código computacional desenvolvido neste estudo para geração das malhas, os segmentos de reta com pontos restritos ou carregados devem ser paralelos a um dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , e os planos com pontos restritos ou carregados devem ser normais a um desses eixos. Detalhes da identificação dos nós restritos e dos nós carregados são dados, respectivamente, nos itens F.5 e F.6 deste Apêndice.

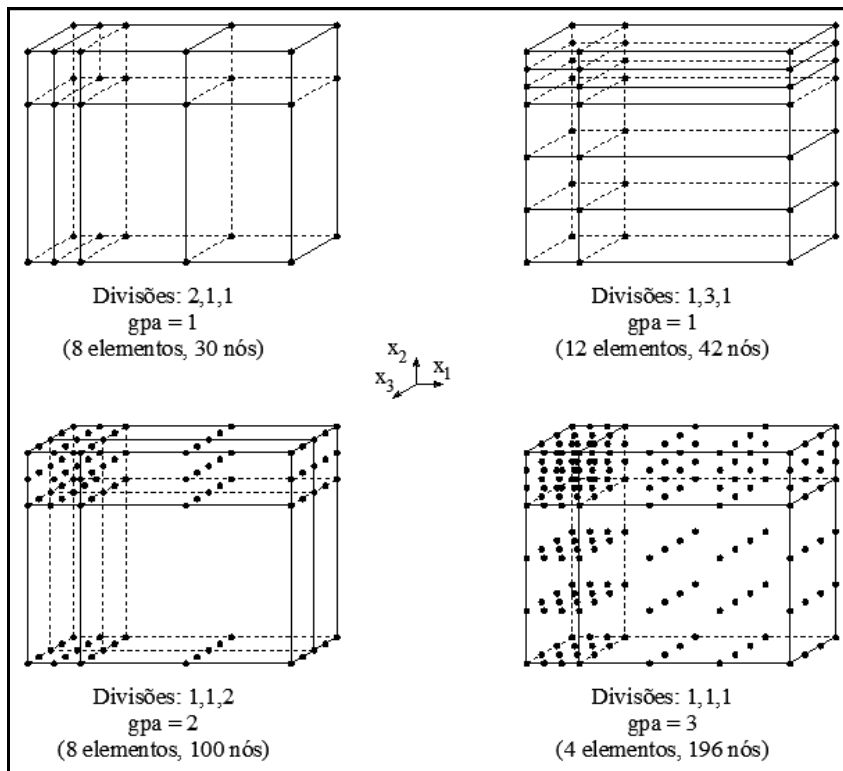


Figura F3. Exemplos de malhas de elementos finitos hexaédricos gerados a partir da malha base da figura F1. Os números de divisões correspondem, respectivamente, aos números de divisões das arestas nas direções 1, 2 e 3, o valor gpa é o grau do polinômio aproximador, e os valores entre parênteses correspondem ao número total de elementos hexaédricos e de nós gerados.

### F.3. Incidência dos elementos

A partir da leitura da geometria da malha base (seção F.1), do grau de aproximação polinomial dos elementos finitos ( $gpa$ ) e do esquema de divisão das arestas da malha base (ver figura F3), são determinados os seguintes valores: número de nós nas direções 1, 2 e 3 para cada elemento principal ( $nn1$ ,  $nn2$  e  $nn3$ ) em relação ao espaço adimensional hexaédrico (ver figura 3.1); número de nós para cada elemento principal ( $nn$ ); número de hexaedros para cada elemento principal ( $ne$ ); número total de elementos hexaédricos para toda a malha ( $npe$ ); e número de nós por elemento finito hexaédrico ( $nnpe$ ). Para isso são empregadas as equações a seguir:

$$nn1 = 1 + (gpa \cdot ndv1) \quad (F2.1)$$

$$nn2 = 1 + (gpa \cdot ndv2) \quad (F2.2)$$

$$nn3 = 1 + (gpa \cdot ndv3) \quad (F2.3)$$

$$nn = nn1 \cdot nn2 \cdot nn3 \quad (F2.4)$$

$$ne = ndv1 \cdot ndv2 \cdot ndv3 \quad (F2.5)$$

$$npe = nepr \cdot ne \quad (F2.6)$$

$$nnpe = (1 + gpa)^3 \quad (F2.7)$$

onde  $ndv1$ ,  $ndv2$  e  $ndv3$  denotam o número de divisões das arestas nas direções 1, 2 e 3, respectivamente; e  $nepr$  é o número de elementos principais.

Cada elemento principal será dividido em  $ne$  hexaedros (equação F2.5). Com a incidência dos elementos principais (ver seção F.1) e com os valores calculados nas equações (F2), é determinada a incidência do primeiro hexaedro de cada elemento principal. Essa determinação é realizada com o seguinte algoritmo:

Ciclo  $n = 1, ne$

    Ciclo  $k = 0, gpa$

        Ciclo  $j = 0, gpa$

            Ciclo  $i = 0, gpa$

$$l = 1 + i + j \cdot nn1 + k \cdot nn1 \cdot nn2$$

$$m = 1 + j \cdot (1 + gpa) + k \cdot (1 + gpa)^2 \quad (F3)$$

$$\text{inc}[1+(n-1)\cdot \text{ne}, m] = (n-1)\cdot \text{nn} + 1$$

Fim do ciclo  $i = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $j = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $k = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $n = 1, \text{ne}$

onde  $\text{inc}[a,b]$  é a variável, no código computacional, que denota o nó de número (local)  $b$  do elemento sólido hexaédrico de número  $a$ . Assim, a variável  $\text{inc}$  é a incidência dos elementos hexaédricos gerados a partir da malha base. Com a incidência do primeiro hexaedro de cada elemento principal, determina-se a incidência dos demais hexaedros de todos os elementos principais com o algoritmo a seguir (ver equações F2):

Ciclo  $n = 1, \text{ne}$

Ciclo  $k = 1, \text{ndv3}$

Ciclo  $j = 1, \text{ndv2}$

Ciclo  $i = 1, \text{ndv1}$

$$l = i + (j-1)\cdot \text{ndv1} + (k-1)\cdot \text{ndv1}\cdot \text{ndv2}$$

$$m = (i-1)\cdot \text{gpa} + (j-1)\cdot \text{gpa}\cdot \text{nn1} + (k-1)\cdot \text{gpa}\cdot \text{nn1}\cdot \text{nn2}$$

Ciclo  $r = 1, \text{nnpe}$

$$\text{inc}[1+(n-1)\cdot \text{ne}, r] = \text{inc}[1+(n-1)\cdot \text{ne}, r] + m \quad (\text{F4})$$

Fim do ciclo  $r = 1, \text{nnpe}$

Fim do ciclo  $i = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $j = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $k = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $n = 1, \text{ne}$

Uma interpretação geométrica dos índices  $i, j$  e  $k$  está na figura F4.

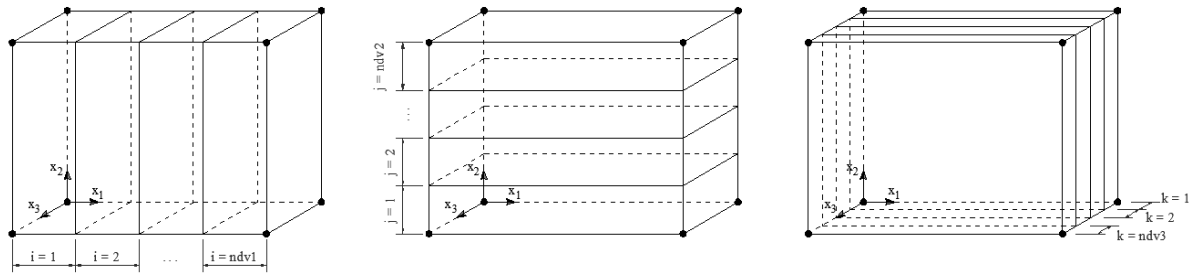


Figura F4. Interpretação geométrica dos índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  (equações F4).

#### F.4. Coordenadas dos nós

O cálculo das coordenadas de todos os nós dos hexaedros gerados a partir da malha base (ver seção F.1) é realizado com a expressão (F1). Para isso, divide-se o espaço adimensional hexaédrico  $\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \square^3 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1\}$  (figura 3.1) de acordo com o esquema de divisões das arestas (seção F.2), e calculam-se as coordenadas adimensionais de todos os nós. O cálculo destas coordenadas é realizado com o seguinte algoritmo:

Ciclo  $k = 1, nn3$

Ciclo  $j = 1, nn2$

Ciclo  $i = 1, nn1$

$$l = i + (j-1) \cdot nn1 + (k-1) \cdot nn1 \cdot nn2$$

$$\xi_1(l) = \frac{i-1}{nn1-1} \tag{F5}$$

$$\xi_2(l) = \frac{j-1}{nn2-1}$$

$$\xi_3(l) = \frac{k-1}{nn3-1}$$

Fim do ciclo  $i = 1, nn1$

Fim do ciclo  $j = 1, nn2$

Fim do ciclo  $k = 1, nn3$

onde  $nn1$ ,  $nn2$  e  $nn3$  são, respectivamente, o número de nós nas direções 1, 2 e 3 em relação ao espaço adimensional hexaédrico (ver figura 3.1). Com as coordenadas adimensionais dos nós (algoritmo F5), são determinadas os valores das funções de forma em todos os nós. Para isso, são empregadas as equações (E28), (E15.2), (E29) e (3.4). Por fim, com a expressão

(F1), são calculadas as coordenadas de todos os nós com relação ao sistema (global) de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ .

### F.5. Eliminação dos nós repetidos

A determinação da incidência dos hexaedros gerados (seção F.3) e o cálculo das coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  dos nós (seção F.4) são realizados para cada elemento principal (seção F.1) de forma independente. Assim, os nós pertencentes a dois ou mais elementos principais possuem numeração diferente em cada um desses elementos. Para evitar que dois ou mais nós tenham as mesmas coordenadas, eliminam-se os nós repetidos (ver figura F5). Para isso, as coordenadas dos nós pertencentes apenas às faces dos elementos principais são comparadas entre si.

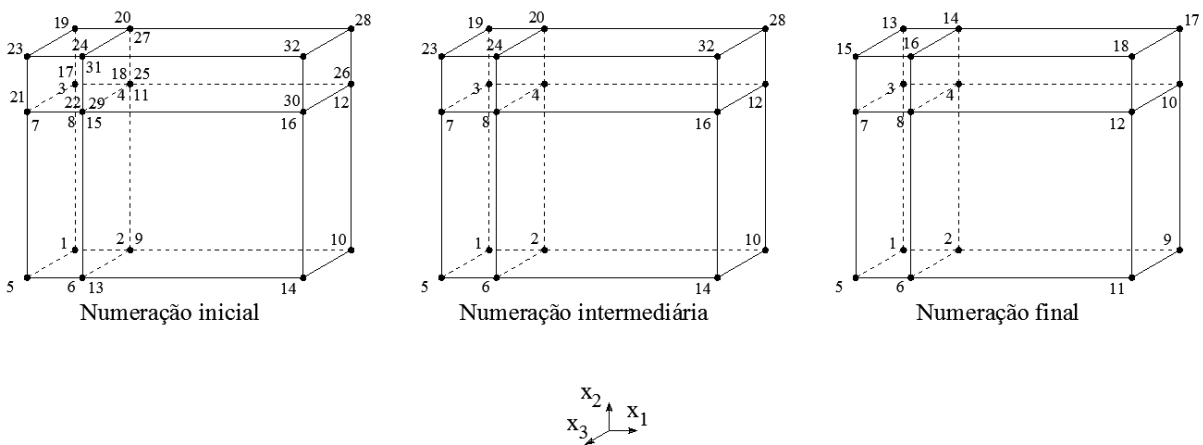


Figura F5. Eliminação dos nós repetidos para a malha base da figura F1.

### F.6. Identificação dos nós restritos

Após a determinação da incidência de todos os elementos (F.3) e o cálculo das coordenadas de todos os nós (seção F.4), o código computacional de geração das malhas também identifica quais nós possuem alguma restrição, isto é, quais nós são impedidos de se



deslocarem em alguma direção. Para isso, deve ser informado ao referido código computacional o número total de restrições para cada direção (1, 2 e 3), e o tipo de cada restrição, que pode ser num ponto, num segmento de reta ou numa área. Se a restrição é no ponto com coordenadas conhecidas  $(X_1, X_2, X_3)$ , o nó com tais coordenadas está impedido de deslocar na respectiva direção. Se a restrição é no segmento de reta definido, por exemplo, pelas expressões  $x_1 = X_1$ ,  $x_2 = X_2$  e  $X_3^1 \leq x_3 \leq X_3^2$ , devem ser informados os valores  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3^1$  e  $X_3^2$ , e todos os nós pertencentes a esse segmento de reta são impedidos de se deslocarem na direção correspondente. Por fim, se a restrição é na área definida, por exemplo, pelas expressões  $x_1 = X_1$ ,  $X_2^1 \leq x_2 \leq X_2^2$  e  $X_3^1 \leq x_3 \leq X_3^2$ , devem ser informados os valores  $X_1$ ,  $X_2^1$ ,  $X_2^2$ ,  $X_3^1$  e  $X_3^2$ , e os nós pertencentes a essa área não podem se deslocar na respectiva direção.

#### F.7. Identificação dos nós carregados

No código computacional de geração das malhas, a identificação dos nós carregados é similar à identificação dos nós restritos (seção F.6). A diferença é que, no primeiro caso, devem ser informados não apenas as coordenadas dos pontos carregados, mas os valores das respectivas cargas. Como as forças, neste estudo, são aplicadas nos nós, as cargas lineares e superficiais devem ser distribuídas para os nós. Quando a carga é linear, ou seja, uniformemente distribuída num segmento de reta, são identificados os nós carregados, são determinados o número e o comprimento das arestas (dos elementos finitos sólidos) com nós carregados, e as cargas são distribuídas para cada nó. Essa distribuição de carga linear é feita da seguinte forma, para cada aresta:

$$TF_{\text{ext}} = \int_x (\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}) dx = \int_x [\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y})^k \phi_k] dx = \int_x [p_i \cdot (y_i)^k \phi_k] dx = p_i (y_i)^k \int_{\xi} [\phi_k J_{\xi}] d\xi \quad (\text{F6.1})$$

$$J_{\xi} = \frac{dx}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} [x_3^{(1)} (1 - \xi) + x_3^{(2)} (\xi)] = \frac{d}{d\xi} [(x_3^{(1)} - x_3^{(2)}) (\xi)] = L \quad (\text{F6.2})$$

$$[(F_{\text{ext}})_i]^k = \frac{\partial (TF_{\text{ext}})}{\partial (y_i)^k} = p_i \int_{\xi} [\phi_k J_{\xi}] d\xi = p_i L \int_{\xi} \phi_k d\xi \quad (\text{F6.3})$$

onde  $TF_{\text{ext}}$  é o trabalho da força externa (CODA, 2003; PASCON, 2008);  $\mathbf{p}$  é o vetor de força distribuída ao longo da aresta cujo eixo longitudinal é  $\mathbf{x}$  e o comprimento é  $L$  (ver figura

F6);  $\mathbf{y}$  é o vetor posição final (seção 3.1); o vetor  $(\mathbf{y})^k$  representa as três coordenadas do nó  $k$ ;  $\phi_k$  é a função de forma do elemento finito de barra (unidimensional) relativa ao nó  $k$ ;  $dx = J_\xi d\xi$  é um segmento infinitesimal de linha ao longo de  $\mathbf{x}$  (ver figura F6);  $J_\xi$  é o determinante da transformação  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi)$ ;  $d\xi$  é um segmento infinitesimal de linha no espaço adimensional unidimensional (ver figura F6); e  $[(F_{\text{ext}})_i]^k$  é a força externa, ao longo da direção  $i$ , atuante no nó  $k$ . O cálculo das integrais das funções de forma (equação F6.3) é realizado numericamente com a quadratura unidimensional de Gauss-Legendre (ver Anexo A). São descritos, na tabela F2, os valores das referidas integrais, isto é, as proporções de forças nodais para cada trecho com carga linear uniformemente distribuída.

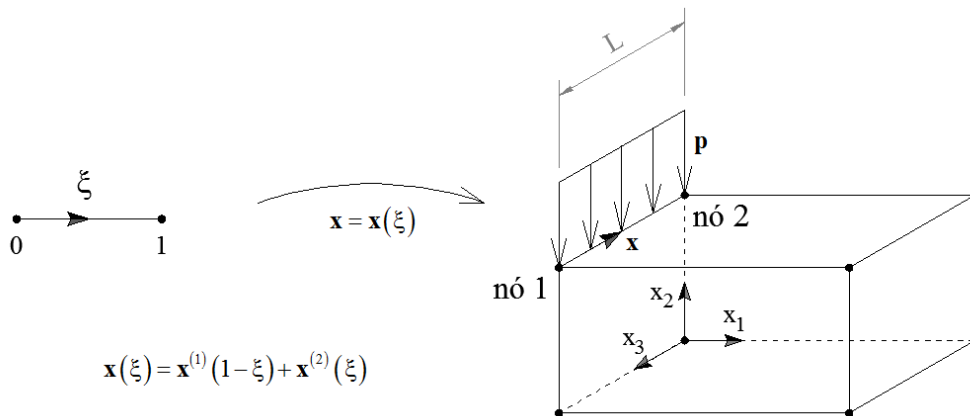


Figura F6. Aresta com carga linear uniformemente distribuída ( $\mathbf{p}$ ), e pertencente a elementos finitos sólidos. Os vetores  $\mathbf{x}^{(1)}$  e  $\mathbf{x}^{(2)}$  representam as três coordenadas dos nós 1 e 2, respectivamente (neste caso, a aresta carregada é normal ao plano  $x_1, x_2$  e, portanto, o comprimento  $L$  é a diferença entre as coordenadas, na direção  $x_3$ , dos nós 1 e 2).

Tabela F2. Proporções de forças para carga lineares uniformemente distribuídas.

Ordem	Número de nós	Proporções
1	2	0.50000000
		0.50000000
		0.16666667
2	3	0.66666667
		0.16666667
		0.12500000
		0.37500000
3	4	0.37500000
		0.12500000
		0.07777778
		0.35555556
		0.13333334
		0.35555556
4	5	0.07777778
		0.06597222
		0.26041667
		0.17361111
		0.17361111
		0.26041667
		0.06597222
		0.06597222

Quando a carga é superficial, adota-se um procedimento análogo ao da carga linear: são identificados os nós carregados, são determinados o número e o comprimento das faces (dos elementos finitos sólidos) com nós carregados, e são distribuídas as cargas para cada nó. Para realizar tal distribuição, são empregadas as equações a seguir:

$$TF_{\text{ext}} = \int_A (\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}) dA = \int_A [\mathbf{p} \cdot (\mathbf{y})^k \phi_k] dA = \int_A [p_i (y_i)^k \phi_k] dA = p_i (y_i)^k \int_{\xi} [\phi_k J_{\xi}] d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{F7.1})$$

$$J_{\xi} = \frac{dA}{d\xi_1 d\xi_2} = \frac{dx_1 dx_2}{d\xi_1 d\xi_2} = \mathbf{det} \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} = L_1 L_2 = A \quad (\text{F7.2})$$

$$[(F_{\text{ext}})_i]^k = \frac{\partial (TF_{\text{ext}})}{\partial (y_i)^k} = p_i \int_{\xi} [\phi_k J_{\xi}] d\xi_1 d\xi_2 = p_i A \int_{\xi} (\phi_k) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{F7.3})$$

onde  $TF_{\text{ext}}$  é o trabalho da força externa (CODA, 2003; PASCON, 2008);  $\mathbf{p}$  é o vetor de força uniformemente distribuída sobre a face (retangular) cuja área é igual a  $A$  e que está no plano definido pelos eixos  $x_1$  e  $x_2$  (ver figura F7);  $\mathbf{y}$  é o vetor posição final (seção 3.1); o vetor  $(\mathbf{y})^k$  representa as três coordenadas do nó  $k$ ;  $\phi_k$  é a função de forma do elemento finito

quadrilateral (plano) relativa ao nó  $k$ ;  $dA = dx_1 dx_2 = J_\xi d\xi_1 d\xi_2$  é um elemento infinitesimal de área (ver figura F7);  $J_\xi$  é o determinante da transformação  $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1(\xi_1, \xi_2) \\ x_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix}$  (ver figura F7);  $d\xi$  é um elemento infinitesimal de área no espaço adimensional bidimensional quadrado (ver figura F6);  $L_1$  e  $L_2$  são as dimensões da face retangular na qual é aplicada a carga (ver figura F6); e  $\left[ (F_{\text{ext}})_i \right]^k$  é a força externa, ao longo da direção  $i$ , atuante no nó  $k$ . O cálculo das integrais das funções de forma (equação F7.3) é realizado numericamente com a quadratura bidimensional de Gauss-Legendre (ASSAN, 2003).

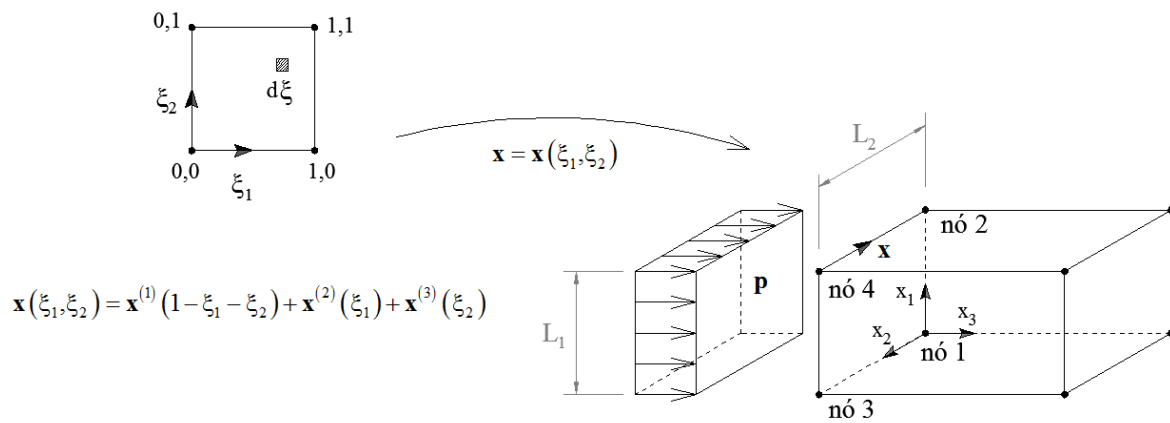


Figura F7. Face com carga superficial uniformemente distribuída ( $\mathbf{p}$ ), e pertencente a elementos finitos sólidos. Os vetores  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$  e  $\mathbf{x}^{(3)}$  representam as três coordenadas dos nós 1, 2 e 3, respectivamente (neste caso, a face carregada é normal ao eixo  $x_3$  e, portanto, os comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  são, respectivamente, a diferença entre as coordenadas dos nós 1 e 2 na direção  $x_1$ , e a diferença entre as coordenadas dos nós 1 e 3 na direção  $x_2$ ).

### F.8. Geração dos elementos tetraédricos

A malha de elementos finitos sólidos tetraédricos é gerada a partir da malha de elementos hexaédricos. Cada um desses hexaedros é dividido em seis tetraedros, conforme a figura F8. Para geração dos tetraedros a partir dos hexaedros, nenhum nó adicional é criado.

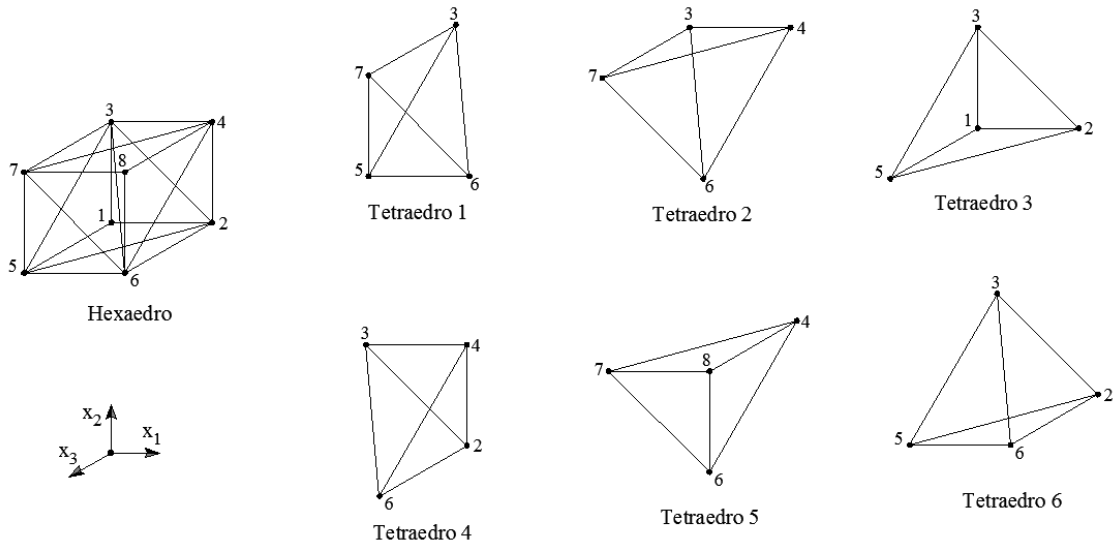


Figura F8. Esquema de divisão do hexaedro em seis tetraedros.

A incidência dos elementos tetraédricos é determinada com a incidência dos hexaedros. Para isso, é empregado o seguinte algoritmo:

Ciclo  $jj = 1, nte$

Ciclo  $i = 0, gpa$

Ciclo  $k = 0, i$

Ciclo  $j = 0, (i - k)$

$$l = 1 + \sum_{m=0}^{i-1} \left[ \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} \right] + j + (i+1) \cdot k - \frac{(k-1) \cdot k}{2}$$

$$\text{inc}_{\text{tetr}} [6jj - 5, l] = \text{inc} \left[ j, 1 + i \cdot (gpa + 1) + i \cdot (gpa + 1)^2 - j \cdot (gpa + 1) - k \cdot gpa \right]$$

$$\text{inc}_{\text{tetr}} [6jj - 4, l] = \text{inc} \left[ jj, 1 + (gpa + 1) \cdot gpa - i \cdot (gpa + 1) + j + j \cdot (gpa + 1)^2 + k \cdot (gpa + 1) + k \cdot (gpa + 1)^2 \right]$$

$$\text{inc}_{\text{tetr}} [6jj - 3, l] = \text{inc} \left[ jj, 1 + gpa + i \cdot (gpa + 1)^2 - j - j \cdot (gpa + 1)^2 - k - k \cdot (gpa + 1)^2 \right] \quad \text{(F8)}$$

$$\text{inc}_{\text{tetr}} [6jj - 2, l] = \text{inc} \left[ jj, 1 + gpa \cdot (gpa + 1) + i + i \cdot (gpa + 1)^2 - i \cdot (gpa + 1) + j \cdot (gpa + 1) + k \cdot gpa \right]$$

$$\text{inc}_{\text{tet}} [6jj-1,1] = \text{inc} \left[ jj, 1 + \text{gpa} + i \cdot (\text{gpa} + 1)^2 + j \cdot (\text{gpa} + 1) - \right. \\ \left. k - k \cdot (1 + \text{gpa})^2 + (1 + \text{gpa}) \right]$$

$$\text{inc}_{\text{tet}} [6jj,1] = \text{inc} \left[ jj, 1 + \text{gpa} + i \cdot (\text{gpa} + 1) + i \cdot (\text{gpa} + 1)^2 - \right. \\ \left. j \cdot (\text{gpa} + 1)^2 - k - k \cdot (1 + \text{gpa})^2 \right]$$

Fim do ciclo  $j = 0, (i - k)$

Fim do ciclo  $k = 0, i$

Fim do ciclo  $i = 0, \text{gpa}$

Fim do ciclo  $jj = 1, \text{nte}$

onde  $\text{nte}$  é o número total de elementos finitos hexaédricos (equação F2.6); a variável  $\text{inc} [ ]$  é a incidência dos elementos hexaédricos (ver algoritmo F3); e  $\text{inc}_{\text{tet}} [ ]$  é a incidência dos elementos finitos tetraédricos. Como cada hexaedro é dividido em seis tetraedros, o número total de elementos finitos tetraédricos é:

$$\text{nte}_{\text{tet}} = 6(\text{nte}) = 6(\text{nepr})(\text{ne}) = 6[(\text{nepr})(\text{ndv1})(\text{ndv2})(\text{ndv3})] \quad (\text{F9})$$

onde  $\text{nepr}$  é o número de elementos principais (ver seção F.1);  $\text{ne}$  é o número de hexaedros em cada elemento principal; e  $\text{ndv1}$ ,  $\text{ndv2}$  e  $\text{ndv3}$  denotam o número de divisões das arestas dos elementos principais nas direções 1, 2 e 3, respectivamente (ver seção F.2).

No caso do elemento finito sólido tetraédrico, as forças superficiais são distribuídas sobre as faces triangulares dos tetraedros (ver figura F8). Assim, as integrais (F7.3) são calculadas no espaço adimensional triangular definido pelo conjunto de pontos  $\{(\xi_1, \xi_2) \in \square^2 / 0 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$ . São descritas, na tabela F3, as proporções de forças nodais para cada área triangular com carga superficial uniformemente distribuída.

Tabela F3. Proporções de forças para carga superficiais uniformemente distribuídas nas faces triangulares dos elementos sólidos tetraédricos.

Ordem	Número de nós	Proporções
1	3	0.16666667
		0.16666667
		0.16666667
2	6	0.00000000
		0.16666667
		0.16666667
		0.00000000
		0.16666667
		0.00000000
		0.01666667
		0.03750000
		0.03750000
		0.03750000
3	10	0.22500000
		0.03750000
		0.01666667
		0.03750000
		0.03750000
		0.01666667
		0.00000000
		0.04444444
		0.04444444
		-0.01111111
		0.08888889
		-0.01111111
		0.04444444
4	15	0.08888889
		0.08888889
		0.04444444
		0.00000000
		0.04444444
		-0.01111111
		0.04444444
		0.00000000
		0.00000000

(continua)

(conclusão)

Ordem	Número de nós	Proporções
		0.00545635
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
		0.09920635
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
5	21	0.01240079
		0.09920635
		0.01240079
		0.09920635
		0.01240079
		0.00545635
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
		0.01240079
		0.00545635