

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

WAGNER QUEIROZ SILVA

*Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura  
através da combinação MEC-MEF*

São Carlos  
Fevereiro de 2010



WAGNER QUEIROZ SILVA

*Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura  
através da combinação MEC-MEF*

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

Fevereiro de 2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S586a                      Silva, Wagner Queiroz  
                                 Análise não linear geométrica do acoplamento solo-  
                                 estrutura através da combinação MEC-MEF / Wagner Queiroz  
                                 Silva ; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos,  
                                 2010.

                                 Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área  
                                 de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de  
                                 Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
                                 2010.

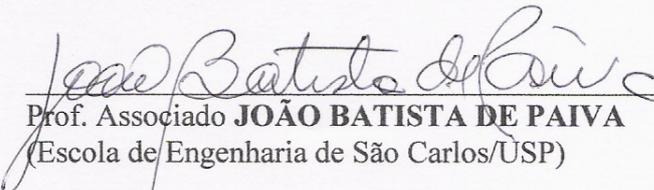
                                 1. Método dos elementos de contorno. 2. Métodos dos  
                                 elementos finitos. 3. Acoplamento MEC/MEF. 4. Não  
                                 linearidade geométrica. 5. Interação solo-estrutura.  
                                 I. Título.

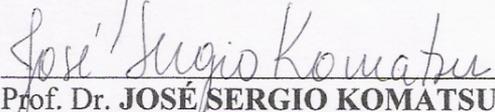
**FOLHA DE JULGAMENTO**

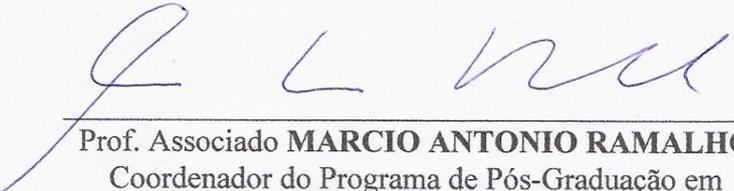
Candidato: Engenheiro **WAGNER QUEIROZ SILVA**

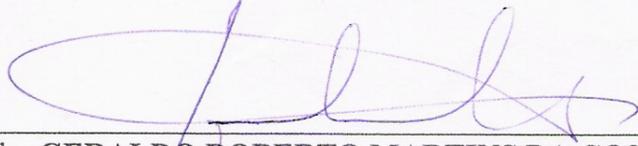
Dissertação defendida e julgada em 26.2.2010 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **JOSÉ SERGIO KOMATSU**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar) APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

ESCARA  
Serviço de Pós-Graduação  
Procurador Geral  
Carvalho



## DEDICATÓRIA

*Ao meu pai Eucides Batista da Silva, meu maior mestre.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a minha família pelo apoio e incentivo durante toda a minha formação profissional. Em especial à minha mãe Vera Márcia F. de Queiroz Silva e ao meu pai Eucides Batista da Silva que souberam me orientar para toda vida.

Ao prof. Humberto Breves Coda pela brilhante orientação, pela amizade e por todos os conhecimentos que me foram passados durante a elaboração deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da USP São Carlos, incluindo professores e funcionários, que disponibilizaram toda a infra-estrutura necessária a elaboração deste trabalho. E ainda a todos os funcionários da Escola de Engenharia de São Carlos que com presteza me auxiliaram na conclusão do mesmo.

Ao CNPq pela bolsa de estudos concedida durante os dois anos de mestrado.

A todos os amigos e colegas do programa de pós-graduação do SET, não só pelas valorosas idéias, contribuições e sugestões dadas ao trabalho, mas principalmente pela amizade e companheirismo durante minha estadia na cidade de São Carlos.

Por último e não menos importante, a minha amada namorada Ana Carla Cruz Pedrosa pelo apoio, compreensão, amizade, paciência e pelo carinho.

## RESUMO

SILVA, W. Q. (2010). *Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

Neste trabalho foi desenvolvida uma formulação alternativa para o acoplamento entre o método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF) para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas ligadas a meios contínuos bidimensionais heterogêneos, aplicado a problemas de interação solo-estrutura. O solo foi considerado com comportamento elástico linear e modelado via MEC por meio de uma formulação alternativa à clássica técnica de sub-região permitindo a consideração de múltiplas inclusões mais ou menos rígidas do que o material padrão e de linhas de carga internas aos domínios. Este código foi então acoplado ao programa AcadFrame, baseado no MEF posicional para análise não linear geométrica de pórticos com consideração de cinemática exata. O acoplamento numérico foi realizado por meio de uma formulação algébrica onde a matriz de rigidez do solo e a força de contato são condensadas e somadas à matriz e ao vetor de forças internas da estrutura a cada iteração no processo de Newton-Raphson. Em ambos os programas foi utilizada uma generalização do grau de aproximação dos elementos através dos polinômios de Lagrange, o que permite a utilização de elementos curvos de alta ordem. Foi utilizada ainda a técnica dos mínimos quadrados para reduzir as oscilações de forças de superfície no contato. Os resultados obtidos de forma geral são bastante satisfatórios e comprovam a eficiência da formulação. O trabalho permite a análise de problemas de edificações apoiadas sobre solos estratificados com múltiplas inclusões e linhas de carga. Permite tanto a análise de elementos apoiados diretamente sobre o solo (sapatas, radies) quanto de elementos internos e em qualquer direção, como no caso de estacas verticais ou inclinadas. Pode-se inclusive considerar as estacas passando por diferentes camadas de solo. A aplicação pode ser estendida ainda a outros problemas elásticos, acoplamento entre peças mecânicas e análise de materiais compostos.

**Palavras chave:** MEC, MEF, Acoplamento MEC/MEF, não linearidade geométrica, interação solo-estrutura.

## ABSTRACT

SILVA, W. Q. (2010). *Non linear geometric analysis of soil-structure interaction via BEM/FEM coupling*. M.Sc. Dissertation - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

This work presents an alternative coupling of the boundary element method (BEM) and the finite element method (FEM) to create a computer program for non linear geometric analysis of frames coupled to continuous domains, applied to soil-structure interaction. A linear elastic behavior is considered for the soil, modeled by BEM. An alternative formulation is adopted for the classic sub-region technique, allowing the consideration of multiple inclusions and load lines inside the soil domain. The BEM computational code is coupled to the AcadFrame software, based on positional FEM for non linear geometric analysis of frames, considering exact kinematics. The numerical coupling is made by an algebraic formulation where the soil stiffness matrix and contact forces are condensed and added to the structure matrix and internal forces for each iteration on Newton-Raphson process. On both programs it is adopted a generalization of the element degree assuming the Lagrange polynomials, which allows the use of curved high order elements. It was also implemented the least square method in order to obtain better and smoother results of surface forces in the contact interface. The obtained results are satisfactory and prove the formulation efficiency. The program allows the analysis of buildings supported by layered soils with multiple inclusions and load lines. It considers directly supported elements over the soil (footing foundations, raies) and internal elements in any direction, like vertical and diagonal piles. It can also consider piles going through different layers of the soil. This formulation can be applied to other elastic problems like coupling between mechanic pieces and composite material analysis.

**Key-words:** BEM, FEM, BEM/FEM coupling, non linear geometric, soil-structure interaction.

# Sumário

<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>7</b>
Introdução .....	7
Objetivos do trabalho .....	9
Objetivos Específicos .....	9
Justificativa .....	9
Comentário sobre os capítulos .....	11
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>13</b>
2. Revisão Bibliográfica .....	13
2.1. Sobre interação solo-estrutura .....	13
2.2. Sobre os métodos numéricos .....	17
2.3. Sobre análise não linear geométrica .....	21
2.4. Trabalhos desenvolvidos no SET .....	23
<b>Capítulo 3 .....</b>	<b>27</b>
3.1. Interação Solo-estrutura .....	27
3.2. Análise não linear geométrica em edificações .....	31
<b>Capítulo 4 .....</b>	<b>33</b>
4. O Método dos Elementos de Contorno .....	33
4.1. Apresentação .....	33
4.2. Problemas Elásticos .....	34
4.2.1. Teoria da Elasticidade e outros Conceitos fundamentais .....	34
4.2.2. Solução fundamental .....	37
4.2.3. Obtenção da equação integral .....	40
4.2.4. Montagem do sistema algébrico .....	43
4.2.5. Singularidades do Método dos elementos de contorno .....	44

4.2.6. Cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos .....	45
4.3. Elemento curvo .....	46
4.3.1. Apresentação .....	46
4.3.2. Polinômios de Lagrange.....	48
4.4. Exemplos.....	50
4.4.1. Viga em balanço.....	50
4.4.2. Cavidade em meio infinito .....	53
<b>Capítulo 5.....</b>	<b>55</b>
5. Problemas heterogêneos.....	55
5.1. Apresentação .....	55
5.2. Análise de Domínios não-homogêneos via MEC .....	56
5.2.1. Técnica clássica de sub-região .....	57
5.2.2. Técnica alternativa de sub-região.....	58
5.2.3. Procedimento algébrico.....	62
5.2.5. Tratamento para pontos internos .....	65
5.3. Linhas de carga .....	66
5.5. Exemplos de aplicação e validação .....	67
5.5.1. Viga com momento .....	68
5.5.2. Chapa tracionada com núcleo enrijecido .....	70
<b>Capítulo 6.....</b>	<b>75</b>
6. O Método dos Elementos Finitos para análise não linear geométrica .....	75
6.1. Apresentação .....	75
6.2. Análise não linear geométrica .....	76
6.2.1. O conceito da não linearidade geométrica .....	76
6.2.2. Princípio da mínima energia potencial.....	77
6.3. Formulação do MEF posicional para análise NLG de pórticos .....	79
6.3.1. Conceito de mudança de forma e medidas de tensão-deformação.....	79

6.3.2. Elementos curvos e Polinômios de Lagrange .....	83
6.3.3. Mapeamento das configurações inicial e corrente .....	84
6.3.4. Mudança de configuração .....	87
6.3.5. Solução do sistema através do processo de Newton-Raphson .....	89
6.5. Exemplos de aplicação .....	91
6.5.1. Viga em balanço com momento aplicado .....	92
<b>Capítulo 7 .....</b>	<b>95</b>
7. Acoplamento MEC/MEF .....	95
7.1. Apresentação .....	95
7.2. A técnica algébrica de acoplamento .....	96
7.3. Técnica de suavização por mínimos quadrados .....	101
7.4. Exemplos de Validação e Aplicação .....	103
7.4.1. Barra tracionada .....	103
7.4.2. Estaca cravada no solo .....	106
7.4.3. Estaca inclinada .....	112
7.4.4. Edifício acoplado ao solo com heterogeneidade .....	116
7.4.5. Mastro esbelto engastado em solo heterogêneo .....	123
<b>Capítulo 8 .....</b>	<b>127</b>
8.1. Conclusões .....	127
8.2. Sugestões para trabalhos futuros .....	130
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>131</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho será apresentado um estudo de sistemas estruturais formados por elementos reticulados acoplados a meios contínuos bidimensionais com ênfase na aplicação em análise de problemas de interação solo-estrutura. Será feita uma análise estática deste tipo de problema considerando-se a não linearidade geométrica com cinemática exata da estrutura reticulada e considerando ainda o meio contínuo (solo) como sendo formado por mais de um material com diferentes módulos de elasticidade.

A análise será realizada numericamente através do desenvolvimento de programas computacionais em ambiente FORTRAN, utilizando-se de métodos numéricos aproximados para modelagem tanto do meio solo quanto da estrutura edificada. O solo será modelado via método dos elementos de contorno (MEC), enquanto que a estrutura através de elementos de pórtico via método dos elementos finitos (MEF), acoplando-os por meio de uma formulação algébrica que considera os deslocamentos e esforços produzidos na interação.

A modelagem do meio contínuo via MEC é baseada na solução fundamental de Kelvin considerando o comportamento do solo elástico linear. Consideram-se também múltiplas inclusões, podendo estas ser mais ou menos rígidas que o material predominante, além de linhas de carga internas ao domínio. As inclusões serão tratadas por processo alternativo de sub-regiões proposto por VENTURINI (1992) e RIBEIRO & PAIVA (2009) e generalizadas por estratégia matricial que permita facilitar também o acoplamento às matrizes do MEF. Através dos polinômios de Lagrange será implementado o elemento de contorno curvo de ordem de aproximação qualquer. As singularidades matemáticas presentes nas soluções fundamentais adotadas serão tratadas por técnica de subtração de singularidade.

A estrutura reticulada, por sua vez, será modelada com o uso do programa AcadFrame, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas pelo prof. Dr. Humberto Breves Coda e pelo Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola. O programa é baseado no MEF com formulação posicional considerando comportamento não linear geométrico (NLG) com cinemática exata, como apresentado em CODA (2003). A não linearidade é baseada em formulação lagrangeana e a cinemática de Reissner é adotada para considerar a influência dos esforços cortantes na deformação do pórtico. Também se adotam os polinômios de Lagrange como função

aproximadora o que permite a adoção de elementos finitos curvos com qualquer ordem, semelhante ao MEC.

Para o acoplamento, uma matriz semelhante a de rigidez será montada via MEC para o solo e então condensada de maneira a incluir na rigidez do sistema do MEF todas as condições de contorno ocorridas no meio contínuo. A matriz de rigidez da estrutura (Hessiana) será então alterada a cada iteração no processo de Newton-Raphson da análise não linear, somando nesta matriz os termos correspondentes ao solo e ao vetor de forças as forças de contato apropriadas.

Diversos trabalhos encontrados na literatura têm mostrado que em interfaces de sub-regiões com grandes diferenças de módulo de elasticidade e em acoplamento MEC/MEF podem ocorrer oscilações nos resultados de força de superfície devido à diferente natureza de comportamento entre os meios acoplados. No intuito de evitar esse problema será implementada também a técnica de suavização por mínimos quadrados aos elementos de contorno, de acordo com WUTZOW (2003).

Todo esse processo de análise pode ser aplicado, como já mencionado, ao estudo da interação entre o solo de fundação e uma edificação convencional constituída por pórticos, ou ainda em análise de túneis e dutos no campo da engenharia civil. A formulação, no entanto é bastante abrangente podendo também servir à análise de outros problemas elásticos, como no caso de acoplamento entre peças mecânicas e em análise de materiais compósitos. Tem, portanto aplicações na engenharia civil, mecânica e aeronáutica.

A característica comum a estes problemas está no fato de estarem presentes dois ou mais meios de naturezas distintas, neste caso um meio contínuo e um sistema reticulado. A complexidade em simular o comportamento de sistemas estruturais acoplados leva ao estudo do acoplamento de métodos numéricos aproximados, pois somente dessa maneira se torna possível a generalização de uma formulação adequada para o processo de análise. O acoplamento entre os diferentes métodos numéricos se apresenta assim como uma solução adequada para a análise de sistemas complexos, fazendo uso dos recursos de cada método onde o mesmo apresenta maior eficiência. Maiores detalhes sobre cada método e sobre o acoplamento entre os mesmos serão vistos nos capítulos que seguem.

A consideração da não linearidade geométrica com cinemática exata e a adoção da formulação posicional do MEF, por sua vez, enriquecem o trabalho frente ao que já vem sendo desenvolvido nesta linha de pesquisa no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP e mesmo frente a trabalhos consultados na literatura especializada.

## **Objetivos do trabalho**

O presente trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de um programa computacional para análise do acoplamento não linear geométrico solo-estrutura através da combinação entre o MEC e o MEF com uso de formulações atuais e eficientes.

### ***Objetivos Específicos***

Estudar técnica alternativa para o tratamento de inclusões, sub-regiões e enrijecedores imersos em meio contínuo por meio de acoplamento MEC/MEC e MEC/MEF;

Desenvolver um programa de análise linear de sólidos bidimensionais baseado no método dos elementos de contorno utilizando elementos de ordem de aproximação qualquer (elementos curvos) e considerando múltiplas inclusões e linhas de carga;

Estudar estratégia algébrica de acoplamento do MEC com sistema não linear geométrico do MEF de maneira que a matriz do solo condensada atue como condição de contorno para a estrutura reticulada e contendo, por sua vez, as condições de contorno do próprio solo;

Avaliar os efeitos do fenômeno da interação solo-estrutura em conjunto com o comportamento não linear geométrico de uma edificação, fazendo-se as devidas considerações com relação a outras metodologias de análise desse tipo de problema;

Disponibilizar ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP um programa computacional com formulações atuais para análise não linear geométrica da interação solo-estrutura, buscando contribuir para o desenvolvimento de pesquisas neste campo de estudos.

## **Justificativa**

O estudo do fenômeno de interação ocorrido entre o solo e a estrutura de um edifício não é recente. Observa-se, no entanto, cada vez mais a necessidade de se aplicar conceitos mais modernos da análise estrutural a esse tipo de problema para acompanhar não só o desenvolvimento tecnológico da engenharia, mas também os avanços alcançados nas pesquisas acadêmicas, proporcionando assim aos engenheiros e calculistas ferramentas cada vez mais poderosas e com melhores resultados que possam ser aplicadas à análise estrutural.

Por ser um sistema complexo e que envolve uma série muito grande de fatores, diferentes técnicas de análise tem sido propostas para o estudo da interação solo-estrutura, buscando sempre aplicar o conhecimento para os diversos casos, gerais ou mais específicos em problemas de engenharia. Diferentes tipos de solo em camadas sobrepostas, por exemplo, constituem um problema específico. Muitos trabalhos tratam o solo como sendo constituído por camadas de diferentes propriedades. Mas o solo pode apresentar uma heterogeneidade também na forma de inclusões. É o caso da presença de material rochoso, detritos ou matacões imersos em uma camada de solo, ou mesmo concentração de determinado material, sem necessariamente formar camadas.

Neste trabalho se aplica então uma formulação geral que permite a adoção de diversas camadas de solo com qualquer configuração. Além disso, a formulação permite a generalização quanto ao número de inclusões mais ou menos rígidas no meio contínuo, baseado em uma formulação alternativa para a consideração de meios heterogêneos no método dos elementos de contorno.

Inclui ainda o estudo de elementos de ordem qualquer, aplicados no MEC e no MEF para a utilização de elementos curvos, melhorando assim a qualidade da aproximação em problemas que envolvam superfícies ou elementos curvilíneos e funções de alta ordem.

A análise não linear geométrica aplica-se a diversos casos de engenharia, especialmente no caso da engenharia civil, em análise de edifícios altos onde esse comportamento deve ser verificado. Por serem baseadas em formulações complexas e por exigir um longo tempo de processamento dos computadores, o uso de técnicas mais elaboradas para análise não linear foi evitado pelos engenheiros durante décadas, sendo preferível a adoção de métodos de análise simplificados. Porém, isso não mais se justifica frente às atuais configurações dos computadores. A velocidade de processamento das máquinas atuais permite que problemas envolvendo grandes números de graus de liberdade e onde a convergência de processos iterativos é onerosa possam ser mais rapidamente avaliados do que em décadas anteriores. Dessa forma, a adoção de uma formulação com cinemática exata se torna possível, fazendo com que a análise seja mais rica e verossímil. Podem ser obtidos resultados mais seguros e precisos, contribuindo assim para o desenvolvimento tecnológico.

Cita-se também como justificativa para a elaboração deste trabalho, a tradição do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos em estudos de acoplamento solo-estrutura via MEC/MEF e em análise não linear de estruturas. Fica claro

também que este trabalho contribui significativamente com o desenvolvimento relativo ao acoplamento não linear entre o MEC e o MEF.

## **Comentário sobre os capítulos**

Neste primeiro capítulo foi feita uma breve introdução do tema abordado e apresentação dos objetivos e das justificativas do trabalho. Na seqüência, encontra-se descrita toda a fundamentação teórica e o desenvolvimento do trabalho em si, bem como os resultados obtidos com exemplos de aplicação para validação da formulação. Pretende-se aqui apenas comentar de forma resumida o que o leitor deve esperar encontrar em cada um dos próximos capítulos.

No segundo capítulo é apresentada a revisão bibliográfica realizada durante a elaboração deste trabalho. Temas como interação solo-estrutura, não linearidade geométrica e métodos numéricos serão abordados apresentando o que se encontra na bibliografia atual e que servirá de base para o desenvolvimento da pesquisa.

O terceiro capítulo trata das generalidades do fenômeno de interação solo-estrutura e da análise não linear geométrica em edificações. Em cada tema são feitos comentários sobre as diferentes maneiras de se analisar o problema, comentando ainda sobre as vantagens e desvantagens de cada uma.

O quarto capítulo apresenta o método dos elementos de contorno, que neste trabalho é utilizado como método aproximado para modelagem do meio contínuo. Apresenta-se de forma resumida a aplicação do MEC para problemas elásticos bidimensionais, bem como a solução fundamental utilizada. Destaca-se nesse capítulo o desenvolvimento dos elementos curvos com aproximação qualquer e a técnica de subtração de singularidade adotada nas integrais singulares.

Dando continuidade ao assunto, o quinto capítulo trata de problemas heterogêneos via acoplamento MEC/MEC. Apresenta-se o método alternativo de tratamento para sub-regiões que servirá de base para a implementação da estratégia algébrica no código desenvolvido. A estratégia também é apresentada para ilustrar como é o funcionamento básico do programa. Destaca-se também a descrição das linhas de carga internas aos domínios. Alguns exemplos de problemas elásticos heterogêneos bidimensionais são apresentados para validação do programa.

O sexto capítulo trata do método dos elementos finitos, utilizado na modelagem da estrutura reticulada. São apresentados os fundamentos da formulação lagrangeana posicional

aplicada à análise não linear geométrica de estruturas, bem como o funcionamento do código AcadFrame desenvolvido no SET. Comenta-se sobre a importância da análise não linear geométrica e as diferenças com relação aos métodos simplificados. Destaca-se o uso de elementos curvos, tal qual é feito no MEC.

No sétimo capítulo é enfim apresentado o acoplamento entre o MEC e o MEF. Demonstra-se como funciona a estratégia algébrica de acoplamento e as implicações numéricas ocorridas. A técnica de suavização dos mínimos quadrados aplicada ao MEC é descrita neste capítulo. Em seguida são apresentados resultados de exemplos onde a resposta é conhecida para validação do programa e, por último, apresenta-se duas aplicações práticas do trabalho, sendo um exemplo hipotético de um edifício apoiado sobre solo heterogêneo e um mastro esbelto engastado em solo heterogêneo para avaliação do comportamento não linear geométrico associado ao fenômeno interação solo-estrutura.

Para finalizar a dissertação, são feitas conclusões finais no oitavo capítulo, comentando sobre os resultados obtidos e comparando estes com outras metodologias de outros autores, além das sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### 2. Revisão Bibliográfica

Neste trabalho foram reunidos alguns temas importantes no campo da análise estrutural para que fosse então realizado o desenvolvimento de códigos computacionais para análise do comportamento não linear geométrico de estruturas reticuladas acopladas a meios contínuos, no caso de problemas bidimensionais de interação solo-estrutura. Por ser um tema complexo e que envolve uma grande série de variáveis, observa-se o interesse de pesquisadores das instituições e universidades mais renomadas por esse assunto. Na verdade, o estudo da interação solo-estrutura não é algo recente e, como na engenharia estrutural de forma geral, observa-se que a sua evolução acompanha o avanço tecnológico dos computadores à medida que se tornam possíveis a utilização de modelos matemáticos mais refinados e métodos de análise mais complexos e dispendiosos. Cada vez mais a tecnologia permite a adoção de modelos mais representativos dos problemas reais.

Pode-se dividir a revisão bibliográfica em três principais temas distintos que serão aqui abordados: o estudo da interação solo-estrutura em si, os métodos numéricos que foram utilizados no desenvolvimento dos códigos, sendo estes o método dos elementos finitos e o método dos elementos contorno, e ainda o estudo da não linearidade geométrica de estruturas, que também tem sido objeto de estudo para diversos pesquisadores em outras linhas. O presente capítulo apresenta alguns trabalhos encontrados na literatura dentro destas linhas de pesquisa, buscando-se identificar o que já foi desenvolvido e o que ainda há por ser estudado na área. Seguindo a divisão proposta, fazem-se primeiramente citações gerais tanto nacionais quanto internacionais sobre os diversos temas, e por último são apresentados os trabalhos que foram desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP.

#### 2.1. Sobre interação solo-estrutura

Diversos autores têm demonstrado que as estruturas civis não podem ser analisadas somente de forma isolada na determinação de esforços e deslocamentos para o seu correto dimensionamento. É importante que sejam também corretamente avaliados os apoios, principalmente com relação ao processo de interação existente entre o solo e o seu sistema de fundação inserido no mesmo. COLARES (2006) mostra claramente que devido à flexibilidade

do solo podem ocorrer recalques dos apoios, o que por sua vez tem grande influência na redistribuição de esforços ao longo de toda uma edificação. No entanto, os processos de análise usuais são realizados de maneira que essa interação não é levada em consideração da forma mais adequada.

Uma das maneiras mais simples de se considerar os sistemas de suporte de uma edificação é através de apoios rígidos como engastes ou mesmo apoios simples. Modelos de edifícios considerados apoiados sobre fundações rígidas podem ser verificados nos trabalhos de MANCINI (1973), CARVALHO (1980), CARVALHO (1982), OLIVEIRA (1982) e mesmo para trabalhos mais recentes, como em MARTINS (2001), SOUZA (2001), SILVA (2005) e FABRIZZI (2007). Em todos estes, o objetivo do trabalho não contempla o processo de interação do edifício com o solo, mas somente análise do edifício isolado. Dessa forma, os engenheiros estruturais determinam uma série de cargas (reação vertical, horizontal e momentos fletores) que são os esforços ocasionados nos apoios de fundação. Estes valores são repassados então aos engenheiros geotécnicos que os utilizam para dimensionar as fundações e verificar recalques admissíveis segundo os códigos normativos.

Este modelo simplificado já foi bastante usual em escritórios de cálculo estrutural. No entanto, é um modelo que foge totalmente a realidade frente ao comportamento dos solos quando submetidos aos esforços provenientes das estruturas, principalmente em edificações de grande porte onde os esforços solicitantes são maiores. Nesta metodologia não é possível considerar que a flexibilidade dos solos terá efeito junto aos elementos estruturais. O que usualmente pode ser feito para corrigir esse problema é adotar recalques diferenciais nos apoios fixos a partir de cálculos realizados separadamente no solo, no entanto essa técnica ainda não reproduz de forma adequada o fenômeno da interação, se afastando da realidade física do problema, como afirma SOUZA & REIS (2008). Trabalhos como HOLANDA et al. (2000), FONTE & FONTE (2003) e REIS & AOKI (2005) destacam a importância de se considerar o solo como deformável ao invés de apoios fixos para a correta determinação dos esforços solicitantes nos elementos estruturais.

Com relação aos efeitos que podem surgir do fenômeno de interação entre solo e estrutura, citam-se os trabalhos de MEYERHOF (1947), GOSHY (1978), AOKI (1997), RAMALHO & CORRÊA (1991), GUSMÃO & GUSMÃO FILHO (1994), GUSMÃO (1995) e MOURA (1995). Nestes trabalhos, destaca-se o processo de redistribuição de esforços ocorrido em estruturas de pórticos quando sujeitos a recalques diferenciais e totais. Uma das observações mais importantes é que os pilares mais carregados transferem carga para os

pilares menos carregados, ocasionando problemas caso essa sobrecarga não tenha sido considerada no processo de dimensionamento das peças.

Na verdade, a consideração do solo como deformável já é estudada por engenheiros e geotécnicos há várias décadas. WINKLER em 1867 havia proposto que cargas aplicadas na superfície do solo geram deslocamentos somente no ponto de aplicação da mesma, ou seja, desconsidera-se o efeito da continuidade do meio. Assim, o meio contínuo (solo) pode ser substituído por um sistema de molas com rigidez equivalente. Esse modelo ficou conhecido como modelo de WINKLER, e é um método bastante simples de ser aplicado em análise de interação solo-estrutura. Determinam-se valores de módulo de reação para cada tipo de solo e de sistema de fundação, considerando que para cada direção de deslocamento há uma flexibilidade diferente que podem ser entendidos como molas.

Em uma grande quantidade de trabalhos encontrados na literatura, as edificações são estudadas como sendo apoiadas em sistemas de suportes flexíveis baseados no modelo de WINKLER, adotando valores tabelados geralmente encontrados de forma empírica. Essa consideração torna a análise muito mais simplificada e fácil de ser implementada para um programa computacional. Os trabalhos de CHEUNG & ZIENKIEWICZ (1965), RANDOLPH & WROTH (1979), LEE (1993), MYLONAKIS & GAZETAS (1998) e WANG et al. (2001) podem ser citados como exemplos que adotaram essa técnica.

Porém, a representatividade do modelo é bastante fraca e tem sido alvo de críticas por parte de estudiosos tanto da engenharia como da geotecnia. Além disso, a determinação dos valores para os módulos de reação das molas não é algo tão simples de ser realizado. Torna-se complexa sua definição à medida que podem existir inúmeras possibilidades de combinações entre diferentes tipos de solo e sistemas de fundações. Também é importante notar que o fato de não contemplar a continuidade do solo faz com que o modelo seja fracamente representativo para determinados problemas onde este efeito pode ser determinante, como no estudo de grupos de estacas ou interação entre prédios vizinhos.

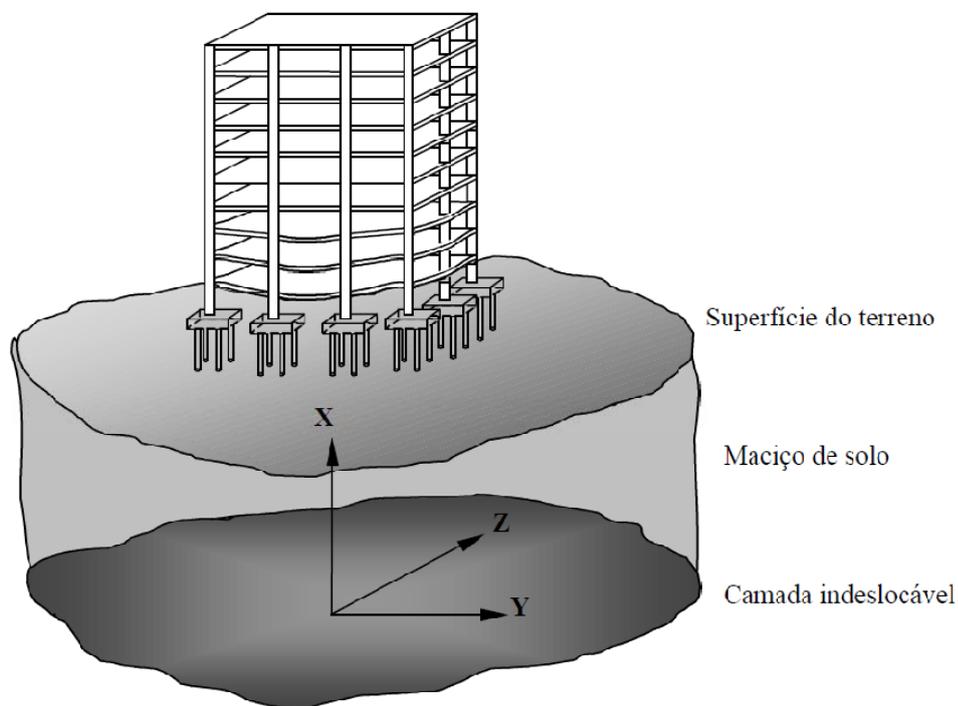
Uma forma mais elaborada de se estudar a interação solo-estrutura é através da própria teoria da elasticidade buscando soluções analíticas para os problemas. BURMISTER em 1945 desenvolveu uma solução para solos formados por duas e três camadas. Alguns trabalhos como CHAN et al. (1974), GIBSON (1974) e DAVIS & BANERJEE (1978) fazem uso das soluções apresentadas por BURMISTER.

A aplicação de soluções analíticas, no entanto, estará limitada a um número de problemas específicos, pois as diversas considerações a serem feitas para o manuseio das equações matemáticas são muitas vezes únicas, particulares daquele problema. A busca pela

solução analítica é também uma técnica que, a depender do problema a ser estudado, pode ser dispendiosa do ponto de vista do cálculo. Para problemas mais complexos, a obtenção de uma solução dita exata pode ser até mesmo inviável. Torna-se difícil a busca de um processo generalizado.

Em outros trabalhos, a análise da interação solo-estrutura é realizada considerando-se o meio contínuo como um maciço semi-infinito, onde são consideradas superfícies ditas indeslocáveis. Na verdade, considera-se que a certa distância dos pontos de aplicação da carga, seus efeitos não mais serão significativos para o maciço e não mais ocorrem deslocamentos, o que de fato ocorre. Esses trabalhos são geralmente fundamentados na teoria de MINDLIN (1936), onde é apresentada uma solução fundamental em deslocamento e em força para uma carga unitária aplicada no interior de um meio semi-infinito homogêneo, elástico, linear e isotrópico.

Trabalhos como POULOS (1967), POULOS (1968) e POULOS & DAVIS (1968) utilizam a teoria de MINDLIN assumindo o solo como um meio elástico apoiado sobre uma base de deslocamento nulo, conforme a figura 2.1.



*Figura 2.1 – Meio semi-infinito apoiado sobre camada indeslocável*

MATTES & POULOS (1969) partem dos trabalhos de POULOS e se destacam ao aprimorar a formulação considerando a compressibilidade da estaca no cálculo dos

deslocamentos verticais. Em seguida, BUTTERFIELD & BANERJEE (1971) realizam estudo semelhante considerando dessa vez grupos de estacas.

HOLANDA (1998) fez uso do trabalho de POULOS (1967) para analisar um edifício com sistema de fundações diretas apoiado sobre uma camada de solo homogêneo, apoiada por sua vez sobre uma camada indeslocável.

Os trabalhos de AOKI & LOPES (1975) e REIS (2000), baseados nessa teoria, apresentam uma metodologia segundo a qual as cargas transmitidas por um grupo de estacas a determinado terreno são discretizadas em um sistema estaticamente equivalente de cargas concentradas, cujos efeitos são superpostos no ponto em estudo.

GUSMÃO (1990) realizou a análise bidimensional de um edifício apoiado sobre solo estratificado já utilizando a metodologia proposta por AOKY & LOPES (1975). Seguem-se a partir de então diversos outros trabalhos de interação solo-estrutura que utilizam essa metodologia na análise de edificações em conjunto com o solo. Citam-se os trabalhos de MOURA (1995) e ANTUNES & IWAMOTO (2000).

Tal como se observa, a adoção de métodos aproximados se faz necessária para que se busquem soluções para casos mais complexos, resolvendo assim problemas mais gerais com maiores considerações. A simulação computacional é hoje alvo de avançadas pesquisas em engenharia, e isso se deve ao desenvolvimento alcançado no estudo dos métodos numéricos, conforme será mencionado no item seguinte. Trabalhos de interação solo-estrutura que utilizam desses processos serão comentados também no próximo item.

## **2.2. Sobre os métodos numéricos**

Muito embora a utilização da teoria da elasticidade tenha resolvido um grande número de problemas elásticos de engenharia, sua aplicação somente é válida para casos mais simples e muito particulares. Outros problemas maiores e casos mais gerais apresentam dificuldades excessivas para serem estudados de forma analítica devido à complexidade do comportamento mecânico dos mesmos e o grande número de incógnitas envolvidas nos processos. Surgem então os métodos numéricos aproximados para serem aplicados na solução de problemas de engenharia. Na verdade, as bases para os métodos numéricos já haviam sido estudadas por matemáticos, porém, foram os engenheiros que passaram a aplicar os conceitos à análise de corpos, dentro do campo da mecânica dos sólidos e em problemas de engenharia de forma geral (ASSAN, 2003). A idéia básica é estudar os meios contínuos como sendo formados por

diversas partes ligadas entre si através de nós discretos onde há transmissão de esforços e compatibilização de deslocamentos.

O primeiro método numérico de grande difusão foi o Método das Diferenças Finitas (MDF). Este método consiste em substituir as equações diferenciais do problema por equações de diferenças finitas. Estas são por sua vez obtidas por meio de expressões aproximadas utilizando-se convenientes polinômios de interpolação. O método é bastante simples e apresenta adequada convergência de resultados para alguns problemas de engenharia.

O MDF também pode ser utilizado em análise de interação solo-estrutura, porém poucos registros foram encontrados sobre essa aplicação. Cita-se apenas o recente trabalho de ROSA & PAIVA (2009) em que é apresentada uma formulação semelhante à de POULOS & DAVIS (1968) sendo o carregamento de uma estaca representado por uma linha de carga, discretizada via MDF.

Numa seqüência histórica, surge em seguida o método dos elementos finitos (MEF). Utilizando o conceito de que os meios contínuos podem ser estudados como sendo constituídos por diversos elementos de dimensões finitas, o MEF é até os dias de hoje muito utilizado em diversos ramos da engenharia. Enormes contribuições foram sendo desenvolvidas por pesquisadores ao longo dos anos e inúmeros programas computacionais oferecem recursos de análise baseados no MEF.

Atualmente o MEF é uma poderosa ferramenta numérica que tem sido utilizada com sucesso em análise de problemas diversos da mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos e eletromagnetismo. Pela sua generalidade o método está presente nos principais pacotes comerciais (softwares) de análise estrutural que estão atualmente disponíveis no mercado. Maiores detalhes sobre a origem e a história do método podem ser encontrados em SORIANO (2003).

O uso do MEF em análise de estruturas é, portanto, bastante comum e há uma infinidade de trabalhos na literatura internacional que poderiam ser citados, como por exemplo, BATHE (1982), RIOS (1991), OÑATE (1995) e BEZERRA (1995) onde o MEF é desenvolvido para análise de edifícios altos.

A aplicação do MEF em problemas de interação solo-estrutura também é comum. Em análise de túneis e escavações citam-se os trabalhos de YIN & YANG (2000), ZHU et al. (2003), BAE et al. (2005) e KARAKUS et al. (2007). Na análise de estruturas de fundação em conjunto com o solo cita-se OTTAVIANI (1975) e CHOW & TEH (1991).

Neste trabalho especificamente, foi adotado o MEF com formulação Lagrangeana posicional, apresentado por CODA (2003) empregando-se assim a análise não linear geométrica com cinemática exata. Dessa maneira, o comportamento da edificação será mais bem representado e os efeitos da não linearidade poderão ser avaliados no processo de interação solo-estrutura. Citam-se nessa linha os trabalhos de BONET (2000), GRECO & CODA (2006), CODA & PACCOLA (2007) e CODA & PACCOLA (2008) com relação ao uso da formulação posicional.

Mais recente e com menor difusão do que o MEF, o método dos elementos de contorno (MEC) apresenta uma formulação baseada em equações integrais do problema. O método propõe que os meios contínuos sejam estudados apenas através da discretização de sua fronteira, diminuindo assim o tamanho do sistema algébrico a ser resolvido em problemas lineares, se comparado aos métodos de domínio, onde todo o corpo é discretizado. O MEC oferece outros recursos que apresentam um melhor desempenho para determinadas situações de análise, como no caso da análise de problemas de concentrações de tensões. Apesar de ser mais recente e ser menos conhecido do que o MEF observa-se que é um assunto que tem ganhado cada vez mais espaço principalmente no meio acadêmico.

Sobre o uso de elementos de contorno aplicados a problemas elásticos de engenharia, podem-se citar os trabalhos pioneiros de CRUSE (1969) e LACHAT (1975) que já realizam técnicas de montagem de sistemas lineares de equações para aproximação de forças e de deslocamentos utilizando elementos discretos no contorno do problema. Porém, até então o processo ainda era conhecido como o “método das equações integrais de contorno”.

Foi BREBBIA (1978) quem atribuiu a nomenclatura de Método dos Elementos de Contorno ao partir da técnica dos resíduos ponderados para chegar às equações integrais, dando melhor consistência e generalidade à montagem das equações. Esta referência é de fato o primeiro livro publicado sobre o método e é comum ser apontado como principal referência bibliográfica em trabalhos relacionados.

Desde então, o MEC tem sido utilizado com sucesso em diversas aplicações de engenharia e no desenvolvimento das mais diferentes linhas de pesquisas. Podemos citar como exemplos os estudos acerca de não linearidade física e geométrica, plasticidade, viscoelasticidade, mecânica da fratura e do dano, vibrações, interação solo-estrutura, etc.

No trabalho de BREBBIA & DOMINGUEZ (1992) encontra-se descrita uma formulação para o estudo de meios heterogêneos que ficou conhecida como técnica de sub-regiões clássica. Através das equações de equilíbrio e compatibilidade a técnica permite o

estudo de meios contínuos constituídos por mais de um material com diferentes características físicas.

No mesmo ano, VENTURINI (1992) propôs uma formulação alternativa à técnica de sub-região para problemas bidimensionais potenciais e elásticos, motivado por problemas em análise não linear. Neste trabalho, Venturini propõe que as aproximações de força de superfície sejam eliminadas do sistema de equações por meio da própria condição de equilíbrio. Assim, o número de incógnitas é reduzido no sistema algébrico e uma única equação integral pode ser escrita para representar todo o domínio em questão, o que implica em uma melhoria na precisão dos resultados. PAIVA & ALIABADI (2000) e PAIVA E ALIABADI (2004) utilizam essa formulação alternativa para análise de placas elásticas e RIBEIRO & PAIVA (2009) para interação solo-estrutura tridimensional elástica.

Observa-se que, sobre a análise de estruturas em separado, o MEC costuma ser bastante aplicado na análise de elementos laminares como placas e cascas. Citam-se o trabalho de STERN (1979), BEZINE (1981), OLIVEIRA NETO (1991), CHAVES (1997) e MENDONÇA (2002).

O MEC também é bastante aplicado em análise de interação solo-estrutura, por reduzir o tamanho do sistema na modelagem do meio contínuo solo. Sua combinação com o MEF é bastante interessante, tendo sido alvo de pesquisa de diversos autores.

Os primeiros trabalhos onde sólidos eram estudados por meio do uso da combinação entre o MEC e o MEF foram ZIENKIEWICZ et al. (1977), SHAW & FALBY (1977) e OSIAS et al. (1977).

BREBBIA & DOMINGUEZ (1992) fazem destaque para duas diferentes formas de se realizar o acoplamento MEC/MEF. Em uma primeira alternativa, o sistema formado pelo MEF é resolvido isoladamente e os resultados são aplicados na forma de condição de contorno para o sistema do MEC.

A outra maneira é montar os sistemas de equações alterando uma das formulações, seja do MEC ou do MEF, através de condições de compatibilidade e equilíbrio para deixá-las semelhantes e assim resolver um único sistema acoplado. Nos trabalhos de BREBBIA & GEORGIU (1979) altera-se a parcela do MEF para que fique semelhante a do MEC. Já nos trabalhos de SWOBODA et al. (1987) e SINGH et al. (1988) a situação é inversa, ou seja, altera-se a parcela MEC para que fique semelhante ao MEF. Esta última apresenta um melhor desempenho computacional em relação à anterior.

É possível encontrar na literatura, vários outros trabalhos em que é utilizado o chamado Método dos Elementos Infinitos (MEI). Em muitos deles, o MEI é usado juntamente

com o MEC para o desenvolvimento de outra formulação chamada de Método dos Elementos de Contorno Infinitos (MECI). Esse método pode apresentar algumas vantagens quando aplicado em problemas de interação solo-estrutura, porém suas formulações exigem tratamentos matemáticos mais refinados devido às altas singularidades presente nas equações. Citam-se apenas a título de conhecimento os trabalhos de LIANG & LIEW (2001), MOSER et al. (2004) e RIBEIRO (2009).

Alguns trabalhos mais recentes que utilizam o acoplamento MEC/MEF para estudo de meios heterogêneos e que foram desenvolvidos no próprio Departamento de Engenharia de Estruturas serão ainda ou novamente citados no item 2.4.

## **2.3. Sobre análise não linear geométrica**

A análise não linear geométrica se aplica ao estudo do comportamento de estruturas em que ocorrem grandes mudanças de geometria e, devido a isso, não são válidas as aproximações da teoria linear. Sua aplicação pode ser estendida a problemas da engenharia civil, mecânica, aeronáutica e da bioengenharia.

Diversos trabalhos encontrados na literatura utilizam o conceito de análise de “segunda ordem” que é uma forma bastante simplificada de se considerar o comportamento não linear geométrico de uma estrutura. De fato, a complexidade das formulações com cinemática exata levou diversos autores a adotar tal conceito, principalmente em análise de edificações civis, em que ocorrem pequenos deslocamentos.

Considera-se que, para o estudo do comportamento não linear de estruturas da construção civil estes trabalhos tenham trazido valorosas contribuições durante as últimas décadas, no entanto, este tipo de metodologia não pode ser aplicado a problemas maiores em que ocorrem grandes deslocamentos. Mesmo na construção civil, em determinadas situações a adoção de técnicas aproximadas pode não ser a mais adequada, como em edifícios altos e torres muito esbeltas. Além disso, não mais se justifica o uso de métodos aproximados face aos enormes avanços alcançados tanto na área de análise não linear como nos recursos computacionais disponíveis, que facilitam em muito o trabalho de cálculo inerente a estes processos mais elaborados. Problemas que, em décadas anteriores oneravam em muito o tempo de processamento computacional, hoje podem ser resolvidos rapidamente e com menor consumo de memória do computador.

A forma mais elaborada para análise não linear é através de soluções analíticas ou exatas. Porém, poucas são as soluções analíticas que podem ser desenvolvidas em análise não

linear geométrica. Estas soluções servem apenas para problemas específicos e que, na maioria das vezes, são muito simples se comparados às situações reais da engenharia. No campo da análise não linear geométrica exata de estruturas é importante citar os trabalhos de BISSHOP & DRUCKER (1945), JENKINS et al. (1966), e MATTIASSON (1981) onde soluções analíticas para elementos reticulados foram apresentadas, demonstrando assim a complexidade em se fazer esse tipo de análise. Parte daí então maior interesse no uso de métodos numéricos aproximados para análise não linear geométrica de estruturas principalmente em problemas que envolvam grandes deslocamentos.

Formulações cinematicamente exatas indicam que nenhuma simplificação associada à magnitude dos deslocamentos foi realizada. Este tipo de afirmação pode ser visto nos trabalhos de REISSNER (1973), SIMO et al. (1984) e WRIGGERS et al. (1990). Estes se baseiam na teoria não linear de vigas de Reissner em que é considerada a influência do cisalhamento na deformação dos elementos. Também cita-se um algoritmo baseado na técnica do comprimento de arco modificada que é apresentado no trabalho de CRISFIELD (1991).

O estudo da não linearidade geométrica pode ser realizado por meio de duas formulações distintas, advindas de duas escolas teóricas: a Lagrangeana e a Euleriana. Na primeira, o referencial adotado é sempre a configuração inicial do corpo em estudo e todas as operações matemáticas de integração e derivação são realizadas sobre esta configuração. A escola Euleriana por sua vez adota como referencial para análise a configuração corrente ou atual do corpo. As diferenças do uso de cada umas dessas formulações podem ser encontradas no trabalho de PAULA (1997).

Nos trabalhos de MONDKAR & POWELL (1977) e SURANA (1983) é desenvolvida uma formulação lagrangeana onde uma referência fixa conhecida é utilizada, e por esse motivo é chamada de lagrangeana total. A mesma formulação é usada em CODA & GRECO (2004), MACIEL et al. (2004) e MACIEL & CODA (2005).

No trabalho de GRECO & CODA (2006) foi desenvolvida uma formulação do MEF posicional para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas unidimensionais submetidas a pequenas ou grandes deformações. Utilizam-se as equações de Newmark para integração no tempo da formulação dinâmica.

Dois anos depois, CODA & PACCOLA (2008) estudaram a formulação posicional para análise não linear geométrica de cascas, considerando a variação linear da espessura e o possível uso de elementos finitos curvos. A mesma formulação do MEF posicional foi então aplicada em CODA et al. (2008), desta vez para análise não linear geométrica de sólidos hiperelásticos.

Outros trabalhos como GADALA et al. (1984) e GATTASS & ABEL (1987) desenvolvem a formulação chamada de lagrangeana atualizada. Essa segunda formulação difere da primeira em razão do referencial conhecido ser atualizado a cada incremento de carga, ou seja, a posição do corpo referente ao passo anterior se torna a referência do passo seguinte, e assim sucessivamente. WONG & TINLOI (1990) apresentam ainda uma terceira formulação denominada lagrangeana parcialmente atualizada, onde a referência muda apenas no início dos incrementos de carga.

Outra forma de se desenvolver esse tipo de análise parte da descrição euleriana onde o referencial é sempre a configuração corrente do corpo. Poucos registros de trabalhos da mecânica dos sólidos foram encontrados com uso dessa formulação. Cita-se apenas o trabalho de IZZUDIN & ELNASHAI (1993) que utilizaram a descrição euleriana para estudar o comportamento de pórticos tridimensionais. A maior aplicação dessa formulação concentra-se na área da mecânica dos fluidos.

No que diz respeito a não linearidade geométrica de estruturas verifica-se que a técnica co-rotacional é atualmente a mais difundida. Nesta técnica, coordenadas locais são tomadas via elementos finitos para consideração dos efeitos de curvatura. Citam-se vários trabalhos nessa área, como BEHDINAN et al. (1998), THE & CLARKE (1998) e ainda de pesquisadores brasileiros como PIMENTA et al. (2004) e CAMPELLO et al. (2003), dentre outros.

## **2.4. Trabalhos desenvolvidos no SET**

No Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da USP já foram publicados diversos trabalhos que englobam os temas aqui abordados. Serão comentados a seguir os trabalhos utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa.

Muitos trabalhos aqui relatados tratam do fenômeno da interação solo-estrutura. Dentre estes, destaca-se inicialmente o trabalho de BARBIRATO (1991) em que é feita uma comparação entre diferentes soluções fundamentais para o problema da interação solo-estrutura. É o primeiro trabalho a sugerir, dentro do departamento, o uso do acoplamento do MEC com outros métodos numéricos para proveito das vantagens de cada método onde o mesmo melhor se aplica.

Alguns anos mais tarde, CODA (1993) apresenta uma formulação tridimensional para análise dinâmica transiente da interação solo-estrutura realizando o acoplamento entre o MEC e o MEF. O solo é tratado como elástico-linear e a compatibilização dos métodos é realizada

por meio da técnica de sub-região. A análise dinâmica é feita com uso dos processos de integração de Newmark.

KOMATSU (1995) apresenta um estudo do acoplamento MEC/MEF para domínios bidimensionais acoplados a estruturas reticuladas com ênfase na análise de escavações e túneis. O meio contínuo é modelado via MEC e considerado heterogêneo por meio da técnica de sub-região clássica. A estrutura reticulada é modelada via MEF com uso do elemento de pórtico com dois nós. Considera-se ainda a plasticidade do meio contínuo que é analisada através de um procedimento incremental e iterativo baseado no processo das tensões iniciais

Com relação ao uso do acoplamento entre diferentes métodos numéricos, destaca-se também o trabalho de MATOS FILHO (1999), onde foi realizado um estudo de combinações entre o MDF, MEF e o MEC para análise da interação estaca-solo. O solo foi modelado pelo MEC, utilizando as equações fundamentais de Mindlin. As estacas foram modeladas como elementos de barra, ora pelo MDF ora pelo MEF.

FERRO (1999) apresentou uma formulação mista do MEC/MEF para a análise da interação solo-estrutura. O solo foi considerado um meio semi-infinito, homogêneo, contínuo, isotrópico e elástico linear, utilizando as equações de Mindlin. Este trabalho se destaca por demonstrar que, ao realizar o acoplamento MEC/MEF, podem ocorrer oscilações de forças de superfície na interface entre os diferentes meios. A estaca foi modelada elemento finito de barra. Foi desenvolvida ainda uma formulação para análise do comportamento não linear do solo na interface com a estaca.

No trabalho de WUTZOW (2003) são estudados meios elásticos enrijecidos com comportamento linear via MEC. São apresentadas duas maneiras de se realizar o acoplamento entre o meio contínuo e o enrijecedor, uma baseada na técnica de sub-região e outra por meio de condensação das variáveis. Esta metodologia foi chamada de acoplamento MEC/MEC. O autor ainda apresenta a técnica de suavização por meio do método dos mínimos quadrados como alternativa para melhorar oscilações de forças ocorridas na superfície de contato. Apresenta para isso duas metodologias distintas. Na primeira realiza os mínimos quadrados na matriz local de cada elemento onde se deseja aplicar a técnica. Numa segunda maneira a técnica é aplicada diretamente na matriz global. A técnica dos mínimos quadrados também foi adotada no trabalho de BOTTA (2003) na análise não linear de sólidos danificados enrijecidos por fibras.

Sobre o estudo da interação solo-estrutura empregando-se diferentes métodos de análise citam-se também os trabalhos de IWAMOTO (2000), SOUZA (2003), ALMEIDA (2003), ALMEIDA (2003), OSHIMA (2004), COLARES (2006) e MOTA (2009).

Mais recentemente e especificamente na área de métodos numéricos, outros três trabalhos defendidos no departamento merecem comentários pois englobam técnicas que serão aqui adotadas:

Primeiramente cita-se RIBEIRO (2009) que apresentou um estudo do acoplamento solo-estrutura onde o solo é considerado como sendo formado por mais de um material sob a forma de camadas estratificadas generalizando a técnica alternativa proposta por VENTURINI (1992). O autor compara esta técnica ao procedimento clássico de sub-regiões concluindo que a mesma é mais vantajosa do ponto de vista computacional e de precisão numérica. Utilizam-se ainda elementos de contorno infinitos nas extremidades da malha do meio contínuo para reduzir o custo computacional. A estrutura é modelada via MEF por elementos de placa e barra. O acoplamento é realizado aplicando-se as cargas de superfície do MEC como carregamentos reativos no MEF.

Em ROCHA (2009) é realizado o acoplamento MEC/MEF para o estudo de meios elásticos bidimensionais enrijecidos considerando modelo de aderência no contato. O autor utiliza a técnica dos mínimos quadrados para tentar melhorar a qualidade das respostas, no entanto afirma que esta técnica não é suficiente para suavizar as oscilações de força de superfície nos extremos dos elementos acoplados. Realiza ainda um interessante estudo sobre erros de integração numérica.

KZAM (2009) utiliza o MEC para análise de problemas da mecânica da fratura. O destaque para este trabalho está no fato de ser o primeiro a utilizar elementos de contorno curvos com aproximação qualquer, através dos polinômios de Lagrange. Destaca-se ainda o tratamento realizado nas equações singulares para utilização de pontos fonte sobre o contorno do problema, através de uma técnica de subtração de singularidade.

Com relação aos trabalhos de não linearidade geométrica aplicados a pórticos planos alguns trabalhos importantes já foram realizados no departamento. LAVALL (1996) realizou análise não linear física e geométrica de estruturas de pórtico plano constituídas por perfis de aço. É adotada uma formulação lagrangeana co-rotacional e considera-se barras com imperfeições iniciais e tensões residuais nas suas seções transversais.

PAULA (2001) realiza análise estática e dinâmica, não linear física e geométrica de pórticos planos por meio de uma formulação lagrangeana total atualizada. Propõe ainda um modelo de dano para estruturas de concreto.

GRECO (2004) realizou análise do problema de contato e impacto de estruturas reticuladas e anteparos rígidos. Este trabalho apresenta pela primeira vez a formulação do MEF posicional aplicado para análise não linear geométrica. Foram realizadas tanto análises

estáticas quanto dinâmicas, e foram considerados também os efeitos elastoplásticos nos membros estruturais e ligações com deslocamentos livres nas conexões.

MACIEL (2008) aplicou a formulação posicional para análise não linear geométrica dinâmica de estruturas reticuladas e sólidos tridimensionais. É utilizado o processo de Newton-Raphson na solução iterativa e o integrador temporal de Newmark para consideração das forças inerciais. Adota-se também a cinemática de Reissner na análise de pórticos, sendo que a seção pode inclinar em relação ao eixo do elemento.

Citam-se ainda sobre o uso da formulação posicional os trabalhos de PASCON (2008) e CARRAZEDO (2009). Neste último é feita uma análise de impacto em que se considera a transferência de calor e seus efeitos.

O único trabalho encontrado no SET que pode ser enquadrado ao tema de análise não linear geométrica de edificações considerando o comportamento do solo é o de MATIAS JUNIOR (1997). Neste trabalho é realizada uma análise tridimensional não linear geométrica de estruturas reticuladas considerando a flexibilidade das fundações. Porém, a análise não linear é realizada por um método aproximado e a deformabilidade do solo é considerada por meio de vínculos elásticos nas extremidades das fundações.

Dessa forma, acredita-se que este trabalho contribui significativamente para as pesquisas realizadas dentro do departamento na consideração da não linearidade geométrica com cinemática exata em conjunto com a interação solo-estrutura. Além disso, o uso da formulação posicional pode ser considerado outra novidade, pois sua aplicação especificamente a este tipo de análise também não foi desenvolvida por nenhum outro autor. Com isso, pretende-se contribuir ao estudo da interação solo-estrutura dentro do departamento com formulações atuais do MEF e do MEC.

## Capítulo 3

### 3.1. Interação Solo-estrutura

A análise do comportamento de elementos estruturais isolados para o seu correto dimensionamento é fundamental para que haja estabilidade e segurança nos sistemas estruturais, porém, não é condição suficiente para que tal objetivo seja alcançado. É importante lembrar que os elementos estruturais realizam a transmissão de cargas entre si até a fundação e desta, a carga é transmitida ao solo. O solo por sua vez servirá de base de sustentação para toda a estrutura e terá maior participação no comportamento da mesma quanto maiores forem as solicitações nele depositadas. Logo, a estabilidade global e o correto funcionamento do sistema de interação da fundação com o solo de apoio são também essenciais para garantir adequado comportamento estrutural global.

O solo e os elementos estruturais interagem, portanto, de tal forma que se faz necessário a correta avaliação dos esforços e deslocamentos ocorridos nesse fenômeno, proporcionando assim um melhor dimensionamento estrutural. Caso contrário, poderão ocorrer problemas como recalques excessivos, recalques diferenciais ou até mesmo rupturas no solo ou da fundação. Estas situações terão influência direta na estabilidade global da estrutura e podem comprometer elementos estruturais por meio de solicitações inesperadas (COLARES, 2006).

Casos de fissuramento de alvenarias, mau funcionamento de portas e janelas e desconforto visual devido a recalques não esperados são bastante comuns em edifícios no Brasil e no mundo. Em outras situações, obras de escavação e perfuração mal planejadas ocasionam problemas em edificações vizinhas, o que por sua vez gera enormes prejuízos. Na literatura é possível encontrar registros de diversos casos em que problemas no processo de interação entre estrutura e solo ocasionaram tombamentos parciais, perda de estabilidade e até mesmo a ruína de edifícios inteiros.

Diferentes fatores podem influenciar neste comportamento. O adensamento do solo, por exemplo, tende a ser maior com o passar do tempo pela lenta acomodação de suas partículas. A rigidez da própria estrutura influencia diretamente na distribuição dos esforços nos elementos. Alguns autores atentam ainda para a influência dos processos construtivos e impactos de vizinhança.

Na figura 3.1 são ilustradas duas situações em que o comportamento da edificação é fortemente influenciado pelo processo de interação com o solo. Casos como esses são comuns em regiões de solo facilmente adensáveis, gerando recalques diferenciais nas edificações.

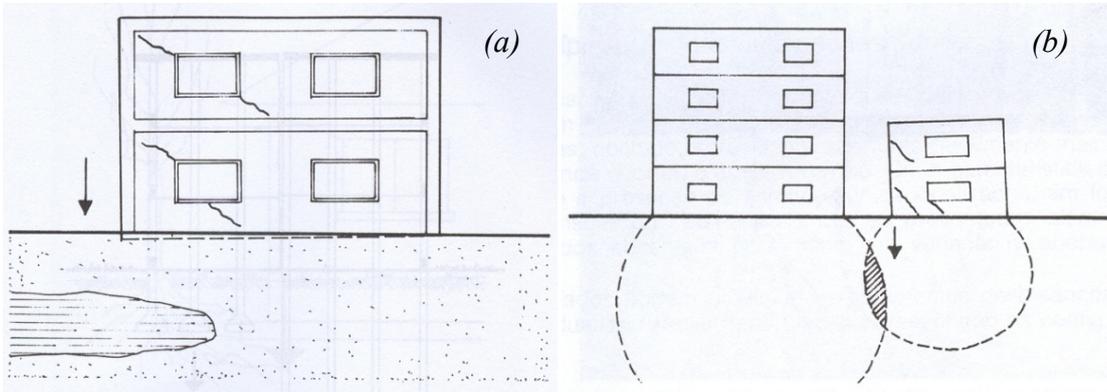


Figura 3.1 – Recalques ocasionados por (a) heterogeneidade do solo e (b) interferência no bulbo de tensões em edificações vizinhas. FONTE (THOMAZ, 1989).

Um dos problemas mais comuns na construção civil e que pode ter suas causas diretamente relacionadas com os recalques diferenciais são as trincas em alvenarias (figura 3.2). Geralmente esse é um primeiro sinal de um mau desempenho dos elementos de fundações.

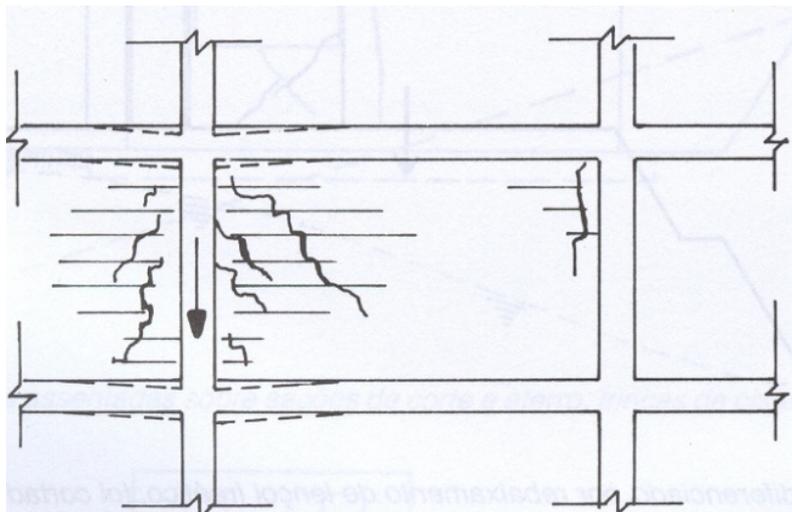
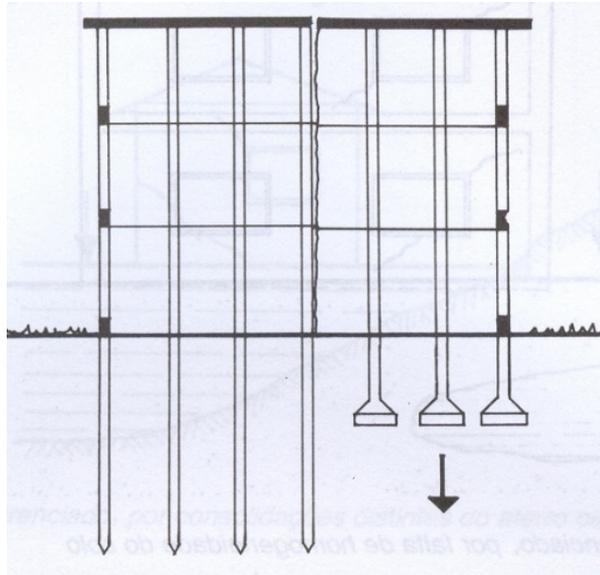


Figura 3.2 – Trincas ocasionadas por recalque diferencial. FONTE (THOMAZ, 1989).

Os recalques diferenciais podem acarretar também em uma redistribuição de esforços que pode ser perigosa para a edificação. Sabe-se que os pilares mais carregados tendem a distribuir os esforços para pilares menos carregados e caso isso não tenha sido levado em conta no dimensionamento das peças, poderão ocorrer problemas estruturais. Tais conclusões podem ser encontradas nos trabalhos de RAMALHO & CORRÊA (1991) e SOUZA & REIS (2008).

O uso de diferentes sistemas de fundação, apesar de não ser uma prática usual, também pode ocasionar problemas na estrutura, caso seja avaliado e/ou dimensionado de forma inadequada. É uma situação que precisa de maior atenção de especialistas quanto ao comportamento do solo.



*Figura 3.3 – Trincas ocasionadas por diferente comportamento dos sistemas de fundações. FONTE (THOMAZ, 1989).*

A busca por um processo de análise generalizado para problemas de interação solo-estrutura se torna complexa à medida que se verificam diversas possibilidades de combinações entre diferentes tipos de solos, sistemas de fundações, tipos de solicitações, entre outros fatores inerentes ao fenômeno. Além disso, com o crescimento das grandes cidades surgem novos tipos de problemas que necessitam ser avaliados pelos engenheiros e geotécnicos. Muitas vezes é importante considerar, por exemplo, a influência que vários edifícios vizinhos podem ter uns sobre os outros devido ao comportamento do solo e de suas fundações. Outro exemplo ocorre em casos de escavações de túneis sob edificações, comuns

na construção de metrô e dutos. Para esses casos os métodos de análise simplificados disponíveis atualmente não se aplicam ou não conduzem a resultados satisfatórios.

Em pequenas construções não é comum a preocupação de engenheiros com esse tipo de problema. O que geralmente se observa nesses casos é a adoção do solo como uma base rígida. Essa consideração pode ser suficiente para casos em que as cargas atuantes nos elementos de fundação são muito pequenas em relação à capacidade de carga do solo, porém é necessário que essa avaliação seja feita de forma coerente por profissional tecnicamente capacitado.

Já para médias e grandes estruturas essa consideração pode não ser a mais adequada, pois o comportamento do sistema de fundação e do solo está diretamente relacionado com a magnitude dos esforços podendo alterar de forma comprometida o comportamento da edificação, mesmo para solos com boa capacidade de carga. Nestes casos, é comum considerar o solo como um sistema de molas tipo WINKLER, levantando os coeficientes de reação por meio de tabelas empíricas onde são dados valores de módulos para cada tipo de solo (IWAMOTO, 2000). Essa metodologia é talvez a mais utilizada em escritórios de projeto estruturais atualmente, por ser um método de fácil aplicação. Porém sua representatividade é fraca e dependendo do tipo de solo e da configuração de suas camadas, torna-se difícil a determinação dos valores dos coeficientes de mola.

Outra maneira de se simular o comportamento do solo é através de métodos numéricos aproximados. Nesse sentido, o MEF e o MEC são alternativas eficientes e que tem conduzido a resultados satisfatórios em trabalhos encontrados na literatura tanto internacional quanto nacional. O uso da combinação entre os métodos não é recente, como foi visto na revisão bibliográfica. Diversos autores já utilizaram desse procedimento para analisar casos diversos de problemas envolvendo elementos de fundação em conjunto com o solo.

Existem várias maneiras diferentes de se analisar este comportamento. O mais importante é que a representatividade do modelo adotado seja a maior possível, e que o comportamento dos elementos estruturais seja corretamente avaliado. Na revisão bibliográfica foram feitos maiores comentários sobre estas várias maneiras de se realizar o estudo do fenômeno de interação entre estrutura e solo.

## 3.2. Análise não linear geométrica em edificações

Em projetos de edificações são admitidos carregamentos diversos atuando sobre os pórticos de acordo com os códigos normativos. É feito então o equilíbrio de forças da estrutura, para que sejam determinados os esforços internos a fim de dimensionar os elementos estruturais. Esse equilíbrio é usualmente realizado considerando a posição indesejada da estrutura, o que configura a análise linear geométrica ou, em uma linguagem antiquada, de primeira ordem.

No entanto, após a aplicação da carga, a estrutura se desloca e esses deslocamentos podem ter grande influência no equilíbrio final da estrutura. Essa influência será tanto maior quanto maiores forem os deslocamentos ocorridos. Logo, para estruturas esbeltas, a consideração da análise linear anteriormente citada não é a mais adequada.

A análise não linear geométrica de estruturas se caracteriza, portanto, pelo equilíbrio de forças ser realizado considerando a posição deslocada da estrutura, como na figura 3.4.

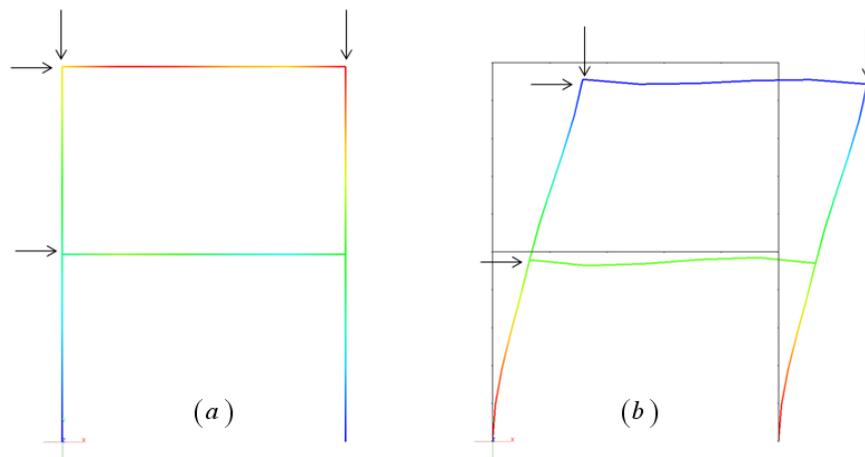


Figura 3.4 – Diferença entre análise (a) linear geométrica e (b) não linear geométrica

Em análise de edifícios altos a consideração da não linearidade geométrica é algo extremamente importante. Quanto mais esbelta for uma estrutura, maior será a necessidade de se avaliar o comportamento não linear geométrico e sua estabilidade global (MATIAS JUNIOR, 1997). Edifícios altos e torres de transmissão são exemplos comuns da engenharia civil onde a avaliação dos efeitos causados pelo comportamento não linear geométrico tem grande influência no dimensionamento e devem, portanto, ser avaliados da maneira mais adequada.

Os códigos normativos prevêm esse tipo de análise e determinam em que situações devem ser consideradas. Porém, na maioria das vezes esta é realizada de forma aproximada através de processos simplificados e que podem induzir a erros para determinados casos.

É certo que para diversos projetos de edificações convencionais da construção civil realizados até os dias de hoje os processos aproximados tem se mostrado suficientes. Isso se deve somente ao fato de que, nessas estruturas os deslocamentos são muito pequenos em relação às dimensões das peças estruturais. No entanto, com a tendência de verticalização das grandes cidades e com os avanços tanto no campo da engenharia de materiais quanto das técnicas construtivas, edificações mais esbeltas vêm sendo construídas de maneira cada vez mais intensa. Observa-se também a busca pela diminuição no consumo de materiais, o que acarreta em peças estruturais mais delgadas. Para acompanhar o desenvolvimento tecnológico deve-se pensar em processos de análise que sejam mais bem elaborados a fim de se proporcionar aos engenheiros e calculistas métodos de análise com melhores resultados para avaliações mais seguras quanto à capacidade portante e aos níveis de deslocabilidade de uma estrutura.

De fato, assim como no processo de análise da interação solo-estrutura, a consideração da não linearidade geométrica com cinemática exata não é algo simples de ser realizado, envolvendo muitas vezes longos processos computacionais. Apesar disso, o avanço alcançado nos últimos anos com computadores modernos mais velozes e mais precisos torna possível a aplicação dessas formulações mais elaboradas diminuindo o tempo de processamento e a quantidade de memória necessária.

Pretende-se neste ponto apenas conscientizar o leitor de que a simulação computacional de problemas de interação solo-estrutura considerando a não linearidade geométrica não é algo simples de ser realizado, mas que, no entanto tem sido cada vez mais necessário frente ao crescimento desenfreado das grandes cidades e aos avanços alcançados no campo da engenharia civil.

# Capítulo 4

## 4. O Método dos Elementos de Contorno

### 4.1. Apresentação

Dentre os métodos numéricos de soluções aproximadas que podem ser aplicados a problemas de engenharia, o método dos elementos de contorno (MEC) é um dos métodos mais recentes e conseqüentemente menos difundido entre pesquisadores e engenheiros no campo da análise estrutural. Porém, nas últimas décadas, o MEC tem ganhado cada vez mais espaço e atraído a atenção de diversos pesquisadores sendo considerado por muitos como uma alternativa ao MEF na simulação numérica de problemas de engenharia, e oferecendo vantagens do ponto de vista computacional em alguns casos particulares.

Por este motivo o método tem sido cada vez mais alvo de pesquisas avançadas em análise de estruturas e simulações computacionais em várias universidades e instituições de pesquisa ao redor do mundo. No próprio Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da USP dezenas de trabalhos já foram publicados a cerca do uso do MEC em análise de estruturas. As principais aplicações do método se encontram em problemas elásticos, problemas de viscoelasticidade, plasticidade, análise dinâmica de estruturas, problemas envolvendo não linearidade e ainda problemas da mecânica do dano e da fratura, dentre outros temas. Em vários destes trabalhos são avaliadas as vantagens que podem ser alcançadas com o uso do MEC em relação ao MEF e outros procedimentos de análise, geralmente associadas ao número de incógnitas que são gerados na montagem dos sistemas de equações.

De fato, uma grande vantagem dos métodos de fronteira, como é o caso do MEC, é a redução do tamanho do sistema algébrico a ser resolvido, pois nestes casos, apenas a região de fronteira (o contorno) do problema é discretizada quando se trata de problemas lineares. Já no caso do MEF, em se tratando de um método de domínio, o mesmo consiste na discretização de todo o corpo em estudo, o que faz com que o número de incógnitas seja maior por incluir elementos no domínio em questão.

Outra vantagem que o MEC apresenta em relação ao MEF está no fato de que o primeiro oferece um melhor desempenho numérico quando aplicado em análise de problemas onde ocorre concentração de tensões, como em regiões de contato e em problemas da mecânica da fratura (KZAM, 2009).

Porém, diversos autores têm demonstrado que, para algumas aplicações específicas, o MEF ainda apresenta melhores resultados e melhor convergência como, por exemplo, em análise de problemas não lineares. Além disso, apesar de reduzir o tamanho do sistema, no MEC as matrizes geradas são cheias e não-simétricas o que é uma desvantagem do ponto de vista computacional, pois exige a utilização de um solver mais elaborado. O MEF por outro lado trabalha com matrizes simétricas e que geralmente não são cheias, cabendo assim a utilização de métodos de otimização na solução do sistema algébrico.

Para este trabalho a simulação do meio contínuo será feita considerando este com comportamento elástico linear. Camadas indeslocáveis serão admitidas para regiões mais afastadas do ponto de aplicação das cargas. Logo o MEC é a melhor alternativa para modelagem do solo.

Será apresentada a seguir de forma resumida a formulação do MEC aplicada a problemas elásticos bidimensionais estáticos lineares e constituídos por meios homogêneos isotrópicos. Essa formulação foi adotada na elaboração do código computacional para análise de meios contínuos.

O objetivo deste trabalho se limita a aplicações bidimensionais, e, por esse motivo será apresentada somente a teoria da elasticidade plana. Vale destacar também que a formulação original do MEC serve para problemas do Estado Plano de Deformação (EPD). Para análises no Estado Plano de Tensão (EPT), deve-se “corrigir” o valor do coeficiente de Poisson do material pela relação  $\nu_{EPT} = \nu_{EPD} / (1 + \nu_{EPD})$ , conforme consta em ASSAN (2003).

## ***4.2. Problemas Elásticos***

A descrição do MEC será aqui feita de forma bastante resumida, tendo em vista o grande número de ótimos trabalhos desenvolvidos no SET em que a mesma formulação é apresentada. Com relação a aspectos específicos da formulação aqui adotada, o leitor encontra maiores detalhes em KZAM (2009).

### ***4.2.1. Teoria da Elasticidade e outros Conceitos fundamentais***

Da teoria da elasticidade sabe-se que em um corpo sujeito a ações externas surgirão esforços internos proporcionais a estas ações de maneira que satisfaçam o equilíbrio do sistema. Sabe-se ainda que, para que o mesmo mantenha-se em equilíbrio, é necessário garantir o equilíbrio mecânico de cada parte infinitesimal do corpo em estudo. Imaginemos

então um corpo com dimensões infinitesimais  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$ , onde os índices 1, 2 e 3 indicam a direção em relação ao sistema cartesiano de referência.

Sejam os valores de  $\sigma_{ij}$  as componentes de tensões  $i$  referente ao plano na direção  $j$ , e sabendo que a força é dada pelo produto entre a componente de tensão e sua respectiva área de atuação, podem ser então escritas equações de equilíbrio de força e de momento para o elemento infinitesimal tensionado.

A obtenção das equações de equilíbrio é facilitada com a observação das figuras 4.1 e 4.2 a seguir. Vale lembrar que a direção  $x_3$  é admitida como perpendicular ao plano da folha. Será utilizada a notação indicial de Einstein.

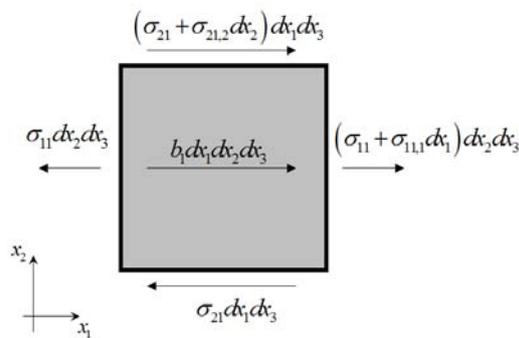


Figura 4.1 – Equilíbrio de Forças na direção  $x_1$

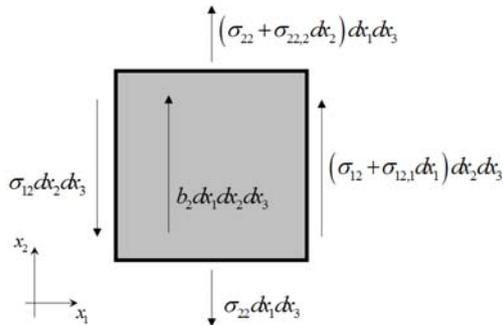


Figura 4.2 – Equilíbrio de Forças na direção  $x_2$

A partir do equilíbrio de forças do elemento infinitesimal para cada direção se chega à equação diferencial de equilíbrio estático que pode ser assim escrita de forma generalizada para elasticidade plana:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \tag{4.01}$$

onde  $b_i$  representa as forças de volume na direção  $i$ .

Do equilíbrio de momentos chega-se a seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{4.02}$$

A equação (4.02) comprova a simetria das tensões cisalhantes. A partir desta relação observa-se que se pode permutar os índices  $i$  e  $j$  da equação (4.01).

A relação constitutiva do material será considerada como uma função linear, ou seja, será assumido neste trabalho que o comportamento elástico do solo é linear. Neste caso, o tensor constitutivo  $C_{ijkl}$  representa a lei constitutiva do material e tem valor constante. Essa relação entre tensão e deformação é chamada *Lei de Hooke* e pode ser escrita na seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.03)$$

Antes de prosseguir para a formulação do MEC aplicada à elasticidade, faz-se necessário apresentar ao leitor alguns conceitos fundamentais para o entendimento da obtenção da equação integral do problema elástico.

Primeiramente, cita-se o chamado *Teorema de Cauchy* que diz que o produto da tensão  $\sigma$  pelo versor normal  $n$  em um determinado ponto é igual à força de superfície  $p$  naquele mesmo ponto, ou seja

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad (4.04)$$

O segundo conceito é conhecido como o *Teorema da Reciprocidade de Betti*, em que se afirma que o trabalho realizado por uma força num ponto  $P$  produzindo deslocamento em outro ponto  $Q$  será igual ao trabalho da mesma força agora aplicada no ponto  $Q$  e produzindo deslocamento no ponto  $P$ . É possível demonstrar a partir desta idéia que a seguinte expressão é verdadeira.

$$\sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* = C_{ijkl} \cdot u_{k,l} \cdot u_{i,j}^* = C_{klij} \cdot u_{i,j}^* \cdot u_{k,l} = \sigma_{kl}^* \cdot u_{k,l} \quad (4.05)$$

Expressão útil na simplificação da equação integral.

Um terceiro conceito importante de ser comentado é o *Teorema de Gauss*, que mostra que a integral no domínio do divergente de um tensor qualquer é igual à integral de superfície de sua primitiva multiplicada pelo seu versor normal à superfície. Com isso podemos escrever que

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j d\Gamma \quad (4.06)$$

Esta última expressão demonstra de forma clara e objetiva a idéia básica da aplicação do MEC, visto que o Teorema de Gauss transforma uma integral de domínio em uma integral de superfície.

### 4.2.2. Solução fundamental

Vamos agora introduzir o conceito de solução fundamental para o problema elástico bidimensional. Esta nada mais é do que uma solução particular da equação diferencial do problema físico e representa o campo de deslocamentos gerado por uma força unitária concentrada em um ponto. A solução dita fundamental será na verdade a função ponderadora da equação integral, segundo o método dos resíduos ponderados no qual está baseada a formulação do MEC aqui apresentada.

Existem vários autores que propuseram soluções fundamentais para diferentes casos, devendo ser escolhida aquela que melhor se adapta ao tipo de problema que se pretende analisar. Neste trabalho será adotada uma solução fundamental bidimensional apresentada por KELVIN (1848) que pode ser encontrada em BREBBIA (1978).

Primeiramente é dado tratamento à equação diferencial (4.01) para se aplicar a técnica do Vetor de Galerkin. Utilizando a Lei de Hooke dada pela expressão (4.03) para um material isótropo, obtêm a relação de tensão-deformação

$$\sigma_{ij} = 2G \left\{ \frac{\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + \varepsilon_{ij} \right\} \quad (4.07)$$

tal que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal dado por

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (4.08)$$

Derivando a tensão  $\sigma_{ij}$  em relação ao índice  $j$  e sabendo que a deformação é dada por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.09)$$

chega-se a seguinte expressão para o divergente da tensão

$$\sigma_{ij,j} = G \left\{ \frac{u_{l,li}}{(1-2\nu)} + u_{i,jj} \right\} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.01), a equação de equilíbrio fica na seguinte forma

$$\frac{u_{j,ji}}{(1-2\nu)} + u_{i,jj} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (4.11)$$

Adota-se agora uma função de Galerkin  $\Phi$  parecida com a função de Airy (função de tensão), tal que

$$u_j = \Phi_{j,mm} - \frac{\Phi_{m,jm}}{2(1-\nu)} \quad (4.12)$$

Derivando esta função de acordo com os termos da expressão (4.11), substituindo o resultado obtido e simplificando, obtêm-se a equação de equilíbrio em função de Galerkin (ou vetor de Galerkin), na seguinte forma

$$\Phi_{i,mmjj} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (4.13)$$

É possível escrever a equação (4.13) em função do Laplaciano de  $\Phi$  ( $F$ ), tal que

$$\Phi_{i,mmjj} = (\Phi_{i,mm})_{,jj} = F_{i,jj} \quad (4.14)$$

Assim, a (4.13) fica

$$F_{i,jj} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad (4.15)$$

O problema fundamental consiste, na verdade em dois casos de carregamento, sendo cada caso relativo a uma direção, conforme mostra a figura 4.3.

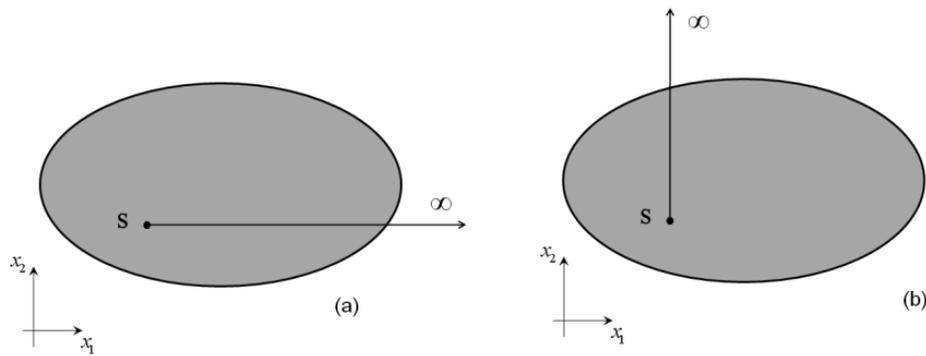


Figura 4.3 – Problemas fundamentais: força (a) na direção  $x_1$  e (b) na direção  $x_2$

Escreve-se uma equação em notação indicial para representar os dois casos, na seguinte forma:

$$\sigma_{kji,i}^* + \delta_{jk} \delta_{(s,f)} = 0 \quad (4.16)$$

sendo  $\delta_{jk}$  o delta de Kronecker,  $\delta_{(s,f)}$  a distribuição delta de Dirac. Aqui se apresentam na verdade quatro equações, sendo duas direções de equilíbrio para cada um dos dois casos fundamentais. Observa-se ainda que  $\delta_{ki} \delta_{(s,f)} = b_{ki}^*$ .

No primeiro caso fundamental, a equação (4.07) será escrita na seguinte forma

$$\begin{cases} \sigma_{11,i}^* + \delta_{(s,f)} = 0 \\ \sigma_{12,i}^* + 0 = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

onde o primeiro índice indica o problema fundamental (caso 1) e o segundo índice a direção de equilíbrio.

Para o caso da carga aplicada na direção  $x_2$ , a equação (4.07) fica

$$\begin{cases} \sigma_{21,i}^* + 0 = 0 \\ \sigma_{22,i}^* + \delta_{(s,f)} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Realizando então sobre a equação (4.16) as mesmas operações efetuadas na (4.01) chega-se a seguinte expressão, semelhante à (4.15)

$$F_{ki,jj}^* + \frac{\delta_{ki} \delta_{(s,f)}}{G} = 0 \quad (4.19)$$

A solução de (4.19), semelhante ao problema potencial, é dada por

$$F_{ki}^* = \left( \frac{-1}{2\pi G} \ln(r) - \frac{1}{2\pi G} \right) \delta_{ki} \quad (4.20)$$

e assim, pela relação (4.14) conclui que

$$\Phi_{ki,mm}^* = \left( \frac{-1}{2\pi G} \ln(r) - \frac{1}{2\pi G} \right) \delta_{ki} \quad (4.21)$$

É possível demonstrar que a expressão (4.22) a seguir (vetor de Galerkin fundamental) é válida e atende perfeitamente a condição de (4.21)

$$\Phi_{ki}^* = \frac{-1}{8\pi G} r^2 \ln(r) \delta_{ki} \quad (4.22)$$

Assim, observando a (4.12), concluímos que

$$u_{ki}^* = \Phi_{ki,mm}^* - \frac{\Phi_{km,im}^*}{2(1-\nu)} \quad (4.23)$$

Substituindo a equação (4.22) em (4.23) e realizando as derivadas chega-se finalmente a expressão da solução fundamental em deslocamento na seguinte forma

$$u_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ik} - r_{,i} r_{,k} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{ik} \right\} \quad (4.24)$$

Para a solução fundamental em força de superfície, utilizam-se as relações dadas em (4.04), (4.09) e a Lei de Hooke, aplicando-as à equação (4.24). Com isso resulta que  $p_{ik}^*$  é dado por

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) + ((1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}) \frac{dr}{dn} \right\} \quad (4.25)$$

Algumas observações importantes devem ser feitas nas equações das soluções fundamentais obtidas. Primeiramente nota-se que a solução em deslocamento apresenta uma singularidade matemática do tipo  $\ln(r)$ , sendo  $r$  o raio ou distância entre o ponto fonte e o

ponto fonte sobre a superfície de integração. A solução em força de superfície, por sua vez, apresenta uma singularidade do tipo  $r^{-1}$ . Logo fica claro que ao aproximar o ponto fonte do contorno as equações tenderão ao infinito. Esse problema será resolvido por meio da utilização de uma técnica de subtração de singularidade que será comentada mais adiante.

Outra observação importante a ser feita é a de que a solução fundamental em força de superfície não depende do módulo de elasticidade transversal  $G$ , como acontece na equação (4.24). Isso será importante no desenvolvimento da técnica alternativa para sub-regiões, que será tratado no próximo capítulo.

### 4.2.3. Obtenção da equação integral

A equação de equilíbrio estático (4.01) apresentada no item 4.2.1 trata-se de uma equação diferencial de tensão para um infinitésimo do corpo em estudo. Os métodos de domínio partem da equação diferencial e do princípio de que, se a mesma tem validade para o infinitésimo, então será também válida para todo o domínio. Já para os métodos de fronteira, como o MEC, essa equação é transformada de maneira a se obter uma equação integral no contorno e a partir desta seja obtida a solução. Portanto, deve-se encontrar primeiramente a equação integral do problema.

Nos próximos parágrafos será descrita a obtenção da equação integral para o problema elástico bidimensional. Deve-se ter em mente os conceitos apresentados anteriormente para o entendimento das operações apresentadas.

Tomemos, portanto a equação (4.01) multiplicada por uma função ponderadora  $w_i^*$ , por ora qualquer. A expressão fica então na seguinte forma:

$$(\sigma_{ij,j} + b_i) \cdot w_i^* = 0 \quad (4.26)$$

A função  $w_i^*$  deverá ser um campo de deslocamentos de um problema elástico linear em um meio com as mesmas propriedades do meio constituinte do problema original a ser resolvido.

Integrando-se a equação (4.26) no domínio chega-se à seguinte expressão

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} w_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

Ao aplicarmos o teorema de Gauss para o produto no primeiro termo, a expressão anterior se transforma em

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} w_i^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

Partindo desta última, realiza-se a integração por partes do segundo termo e simplifica-se o resultado por meio dos teoremas de *Cauchy*, do teorema de *Betti* e da equação (4.09), comentados nos itens anteriores. Chega-se então à equação integral ponderada do problema elástico na seguinte forma

$$\int_{\Gamma} p_i w_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot w_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* w_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \cdot w_i d\Omega \quad (4.29)$$

A equação (4.29) também é conhecida como Segundo Teorema de Betti.

Sabe-se que para um problema elástico qualquer, seu contorno  $\Gamma$  pode ser dividido em duas partes, conforme mostra a figura 4.4, de tal maneira que na superfície  $\Gamma_1$  são conhecidos os valores de deslocamentos  $u_1^1$  e  $u_2^1$  (condições de contorno essenciais) e não se conhecem os valores de força de superfície  $p_1^1$  e  $p_2^1$ . Estes últimos serão as reações de apoio do problema. Na outra superfície  $\Gamma_2$  a situação se inverte, sendo agora conhecidos os valores de força de superfície  $p_1^2$  e  $p_2^2$  (condições de contorno naturais) e incógnitos os deslocamentos  $u_1^2$  e  $u_2^2$ .

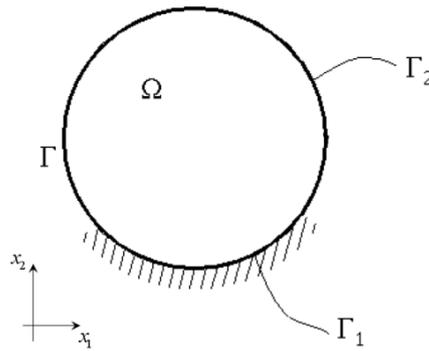


Figura 4.4 – Condições de contorno

Observa-se que (4.29) pode ser escrita para duas direções (caso bidimensional). Dessa forma, temos agora duas equações a quatro incógnitas, o que nos leva a necessidade de mais duas equações para que seja possível a solução do sistema. Essas duas equações serão as soluções fundamentais em deslocamento para cada direção, conforme apresentado no item 4.2.2.

Substituindo então a função ponderadora pela solução fundamental (4.24), obtêm-se a seguinte equação

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot u_{ki}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_{ki}^* \cdot u_i d\Omega \quad (4.30)$$

A equação (4.30) é escrita para cada problema fundamental  $k$ . Logo, temos duas equações para cada uma das duas direções  $x_1$  e  $x_2$ .

O ultimo termo da equação (4.30) é uma integral conhecida, sendo que seu resultado depende da posição do ponto fonte em relação ao contorno do problema.

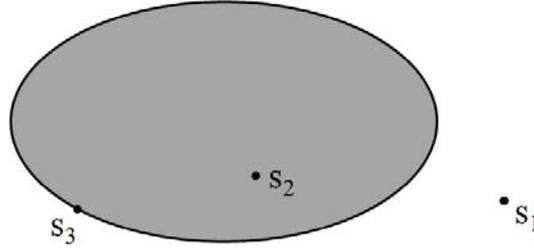


Figura 4.5 – Posições possíveis para o ponto fonte

Na figura 4.5 observam-se três situações distintas:

- O ponto fonte  $s_1$  se encontra totalmente fora do domínio, ou seja,  $s_1 \in (\Omega_\infty - \Omega)$ . Então se sabe que

$$\int_{\Omega} b_{ki}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta_{(s,f)} u_i \, d\Omega = 0 \quad (4.31)$$

- O ponto fonte  $s_2$  se encontra totalmente inserido no domínio, ou seja,  $s_2 \in (\Omega - \Gamma)$ . Então se sabe que

$$\int_{\Omega} b_{ki}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta_{(s,f)} u_i \, d\Omega = u_{k(s)} \quad (4.32)$$

Essa relação será útil no cálculo de deslocamentos em pontos internos.

- Finalmente o ponto fonte  $s_3$  se encontra sobre o contorno do problema, ou seja,  $s_3 \in \Gamma$ .

Então se sabe que

$$\int_{\Omega} b_{ki}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta_{(s,f)} u_i \, d\Omega = \mathbb{C}_{ki} u_{i(s)} \quad (4.33)$$

onde  $\mathbb{C}$  será calculado neste trabalho por meio do movimento de corpo rígido.

Assim, para pontos fonte sobre o contorno a equação (4.30) se transforma em

$$\mathbb{C}_{ki} u_{i(s)} + \int_{\Gamma} p_{ki(s,f)}^* u_{i(f)} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{i(f)} u_{ki(s,f)}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} b_{i(f)} \cdot u_{ki(s,f)}^* \, d\Omega \quad (4.34)$$

que é a equação integral do problema elástico no contorno.

Neste trabalho, ignora-se a última parcela desconsiderando as forças volumétricas. Na verdade, assume-se que o peso próprio pode ser inserido a partir de uma integral adicional sobre o contorno, omitida aqui por simplicidade.

$$\mathbb{C}_{ki} u_{i(s)} + \int_{\Gamma} p_{ki(s,f)}^* u_{i(f)} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{i(f)} u_{ki(s,f)}^* \, d\Gamma \quad (4.35)$$

#### 4.2.4. Montagem do sistema algébrico

A discretização da superfície de fronteira de um corpo elástico será feita por meio de pontos chamados nós de contorno que estarão ligados por elementos de contorno. Dessa forma é possível montar um sistema algébrico em função de valores nodais, separando aqueles conhecidos das incógnitas do problema. Ao se aplicar as condições de contorno essenciais, esse sistema se torna possível de solução, resultando na resposta aproximada do problema.

Sabe-se que é possível aproximar qualquer valor de uma função sendo conhecidos apenas alguns destes valores em um espaço de dimensão finita, com o uso de funções base. No caso, utilizam-se as funções de forma que serão apresentadas mais adiante, na descrição do elemento utilizado.

É possível escrever então qualquer valor de deslocamento  $u_i$  e força de superfície  $p_i$ , sendo o índice  $i$  a direção, somente conhecendo os valores nodais de  $U_i^l$  e  $P_i^l$  e ainda os valores das funções de forma naqueles nós  $l$ .

$$u_i = \phi_l \cdot U_i^l \quad (4.36)$$

$$p_i = \phi_l \cdot P_i^l \quad (4.37)$$

Substituímos (4.36) e (4.37) em (4.35) e aplicamos a transformação de coordenadas para o espaço adimensional de  $[-1, +1]$ . Com o uso de o processo de integração numérica de Gauss através dos pontos e pesos de Gauss e de integrais especiais quando o ponto fonte pertencer ao elemento integrado pode-se realizar a implementação das integrais de (4.35). Aditem-se assim as seguintes igualdades

$$\int_{\Gamma} p_{ki(s,f)}^* u_{i(f)} d\Gamma = U_i \int_{-1}^{+1} p_{ki(s,f)}^* \phi_{l(\xi)} J_{(\xi)} d\xi = [H] \{U\} \quad (4.38)$$

$$\int_{\Gamma} u_{ki(s,f)}^* p_{i(f)} d\Gamma = P_i \int_{-1}^{+1} u_{ki(s,f)}^* \phi_{l(\xi)} J_{(\xi)} d\xi = [G] \{P\} \quad (4.39)$$

Isso significa dizer que a equação integral pode ser transformada para um sistema de equações algébricas na seguinte forma

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (4.40)$$

As condições de contorno são aplicadas trocando-se as colunas das matrizes  $H$  e  $G$  correspondentes aos nós onde o deslocamento é impedido, deixando do lado direito da equação (4.40) somente valores conhecidos. Assim, a equação pode ser transformada em um sistema  $Ax = B$  e resolvida por um solver de sistemas lineares qualquer.

### 4.2.5. Singularidades do Método dos elementos de contorno

Conforme foi visto em itens anteriores, a solução via MEC do problema elástico baseia-se em uma equação integral onde a solução desta depende de um valor  $r$ , que é a distância entre o ponto fonte e a superfície de integração.

Na formulação não-singular o ponto fonte nunca estará sobre o contorno, logo não há necessidade de nenhum tratamento visto que as equações podem ser resolvidas por um processo de integração numérica.

Já para a formulação singular, haverá em determinado ponto um raio de valor nulo que leva a função para o infinito. Dessa forma para a solução via MEC, a equação integral a ser resolvida não mais pode ser solucionada com o uso da quadratura de Gauss diretamente. Para esse tipo de problema deve ser aplicada uma técnica de subtração da singularidade tornando possível a integração numérica dos elementos ditos singulares, sem prejuízo do método numérico.

A aplicação da técnica de subtração de singularidade à integral singular da matriz  $\mathbf{H}$  pode ser evitada com o uso do princípio de movimento de corpo rígido. Este princípio diz respeito ao deslocamento (translação ou rotação) ocorrido em todo um corpo sólido desprovido de forças de superfície, não ocorrendo assim nenhum deslocamento relativo entre as partículas componentes do corpo. Ou seja, no movimento de corpo rígido não ocorrem deformações ou distorções e a seguinte igualdade se verifica

$$[\mathbf{H}]\{U\} = 0 \quad (4.41)$$

Com isso os somatórios de todos os termos pares e de todos os termos ímpares das linhas da matriz  $\mathbf{H}$  devem ser nulos, no caso de domínios finitos. Para domínios infinitos, essas somas devem ser iguais à unidade. Logo ao somar os termos fora da sua matriz diagonal principal, é possível obter o valor destas sub-matrizes. Para determinação da matriz  $\mathbf{G}$  este artifício não pode ser empregado. Necessariamente é preciso aplicar a técnica de subtração de singularidade para os termos da sub-matriz  $2 \times 2$  anexadas à diagonal principal.

A técnica de subtração de singularidade adotada neste trabalho é baseada no processo limite. Neste processo considera-se que o domínio é expandido em torno do ponto fonte de um valor de raio  $\varepsilon$  e faz-se então o limite de  $\varepsilon$  quando este tende a zero.

A idéia é basicamente remover a singularidade da solução fundamental subtraindo a parte singular da integral imprópria utilizando um integrando da mesma natureza. Como se conhece o termo subtraído, sua integral é então resolvida analiticamente.

Para tanto, escreve-se uma expansão em série de Taylor sobre o ponto fonte singular em coordenadas adimensionais  $\zeta$  imaginando um elemento reto fictício de contorno  $\Gamma_{aux}$  com origem no ponto fonte de coordenada adimensional  $\zeta_0$ . Apenas o primeiro termo da série deve ser subtraído do núcleo singular, sobrando assim uma integral regular que deve ser resolvida numericamente e outra integral que deve ser resolvida analiticamente. A interpretação geométrica dessa técnica é ilustrada na figura 4.6 a seguir.

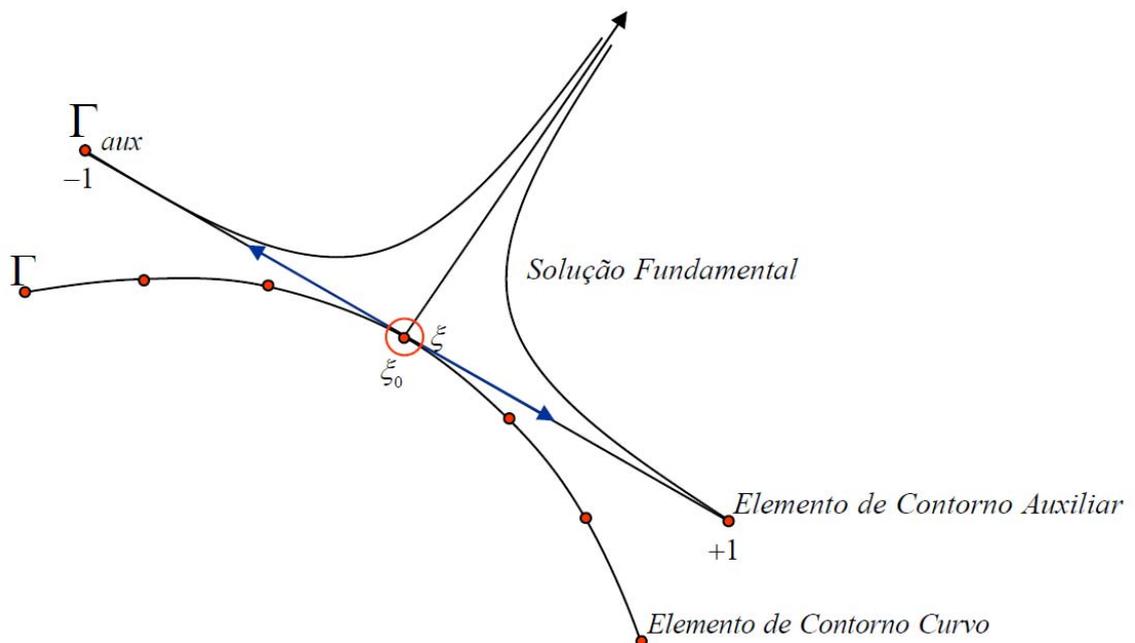


Figura 4.6 – Interpretação geométrica da subtração de singularidade. FONTE (KZAM, 2009)

Maiores detalhes da técnica de subtração de singularidade para o elemento curvo podem ser encontrados nos trabalhos de CODA (2000) e KZAM (2009).

#### 4.2.6. Cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos

Conforme foi visto no item 4.2.3 os pontos fonte podem estar posicionados internamente aos domínios em estudo (ver figura 4.5). Isso se faz necessário para o cálculo de valores internos de deslocamento e tensões. O cálculo de valores internos é na verdade uma etapa de pós-processamento do programa computacional, pois sua realização depende dos valores de deslocamento e força obtidos na solução do sistema algébrico em (4.40).

Para pontos fontes localizados internamente aos domínios, sabe-se que o termo livre da equação (4.34) será

$$\mathbb{C}_{ki} = \delta_{ki} \quad (4.42)$$

sendo  $\delta_{ki}$  o delta de Kronecker. Portanto, após serem conhecidos todos os valores no contorno, os deslocamentos internos podem ser calculados diretamente pela equação (4.32), aqui reproduzida.

$$\int_{\Omega} b_{ki}^* \cdot u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ki} \delta_{(s,f)} u_i \, d\Omega = u_{k(s)} \quad (4.32)$$

Para o cálculo de tensões internas o procedimento é semelhante ao anteriormente citado. Utilizando a lei de Hooke e a relação entre deslocamento e deformação é possível chegar à equação integral de tensão, que tem forma semelhante à equação do contorno.

$$\sigma_{kj} = \int_{\Gamma} D_{kij}^* p_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_i \, d\Gamma \quad (4.43)$$

onde os termos  $D_{kij}^*$  e  $S_{kij}^*$  são dados a seguir.

$$D_{kij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (4.44)$$

$$S_{kij}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \delta_{ij} r_{,k}] + \\ & + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{kj}) + \\ & - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Com isso é possível obter os resultados de deslocamento e tensões em qualquer ponto interno ao domínio em estudo.

## 4.3. Elemento curvo

### 4.3.1. Apresentação

A discretização da superfície através do método dos elementos de contorno é na verdade uma aproximação de sua geometria por meio de funções matemáticas onde apenas alguns pontos possuem coordenadas cartesianas conhecidas. A partir destes pontos denominados nós do contorno, podem ser considerados os elementos que terão suas funções incógnitas (deslocamentos e forças) aproximadas também por uma função matemática com

valores nodais. Esse é o princípio básico da discretização via método dos elementos de contorno.

A escolha do tipo de função aproximadora que será utilizada na técnica de aproximação numérica pode ter grande influência na qualidade dos resultados obtidos, a depender do tipo de problema que se está analisando.

Na grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura, tanto nacional quanto internacional, utilizam-se elementos com aproximação linear ou até mesmo constante. Isso se deve, em parte, pela facilidade no manuseio das equações integrais para implementação computacional destes elementos. É possível resolver suas integrais de maneira analítica, o que evita a necessidade de maiores tratamentos matemáticos. Diversos autores já publicaram trabalhos de qualidade em que são utilizados elementos com geometria linear ou quadrática para a discretização do contorno utilizando funções constantes, lineares e de ordem superior.

Porém, elementos com aproximação quadrática, cúbica ou de maior ordem são preferíveis para descrever, por exemplo, geometrias curvas e problemas que envolvem funções de alta ordem. O uso de elementos de maior ordem costuma ser evitado pelas dificuldades em se desenvolver as equações integrais analíticas para que se obtenha a solução do problema. No entanto, a implementação computacional para elementos de alta ordem se torna mais fácil de ser elaborada com o uso dos polinômios de Lagrange e de métodos de integração numérica, como o método de Gauss por meio do uso de elemento isoparamétrico. Este procedimento foi apresentado em CODA (2000) e aplicado em problemas da mecânica da fratura em KZAM (2009).

Assim, pode ser elaborada uma rotina para a generalização da função aproximadora permitindo o uso de elementos curvos e com aproximações de ordem qualquer para variáveis.

O uso de elementos lineares ou constantes exige uma maior discretização das superfícies curvilíneas para que se possa aproximá-las corretamente, como se fossem formadas por diversos trechos lineares. Além disso, se for necessário melhorar a qualidade da resposta, isso somente poderá ser feito também com o refinamento da malha. Em ambas as situações esse procedimento aumenta a malha discretizada, diminuindo o tamanho dos elementos e conseqüentemente tornando o sistema algébrico maior por incluir mais incógnitas. Esta técnica é conhecida como refinamento  $h$ .

O aumento do grau do polinômio de aproximação constitui a chamada técnica de refinamento  $p$ , e pode ou não apresentar melhores resultados do que o refinamento  $h$ . Isso dependerá da natureza do problema analisado.

A escolha de qual ordem de aproximação deverá ser utilizada caberá então ao usuário do código aqui desenvolvido. Apresenta-se apenas as diferenças em se utilizar elementos retos convencionais e elementos curvos.

A figura 4.7 a seguir ilustra claramente a situação de melhor descrição de uma geometria curva. No trecho em destaque com a consideração de apenas três nós o elemento quadrático terá um melhor desempenho do que o uso de dois elementos retos.

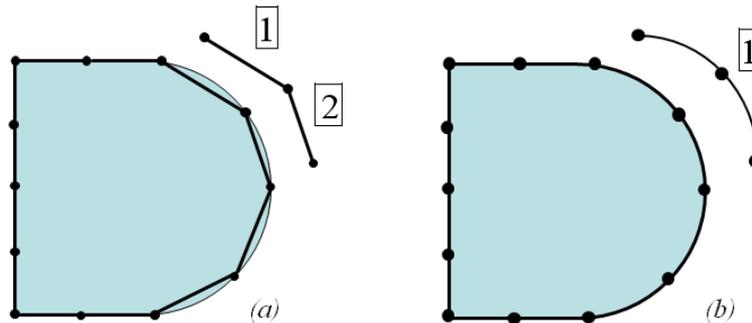


Figura 4.7 – Discretização do contorno utilizando (a) 2 elementos retos e (b) 1 elemento curvo

Para a situação (a) da figura a solução seria adotar mais pontos no contorno, e conseqüentemente mais elementos retos.

O uso de elementos curvos, no entanto é dificultado pelas integrais singulares a serem avaliadas. O tratamento da singularidade nos elementos curvos neste trabalho é feito como apresentado no item 4.2.5 e detalhado em KZAM (2009).

No caso da determinação das funções de forma de um elemento curvo generalizado, ou seja, com qualquer número de nós, a adoção das funções polinomiais de Lagrange é aqui escolhida.

### 4.3.2. Polinômios de Lagrange

Em análise numérica, os polinômios de Lagrange são polinômios de interpolação que podem ser aplicados na determinação das funções de forma do elemento curvo.

Para um elemento  $j$  de ordem  $n - 1$  existem  $n$  funções de forma, cada uma relativa a determinado nó do elemento, cuja aproximação é dada pelos valores assumidos pelas funções em cada nó. Assim, cada função de forma  $\phi_k$  terá valor unitário em  $k$  e nulo nos demais nós do elemento. Cada equação das funções de forma do elemento de  $n$  nós será, portanto um

polinômio de grau  $n - 1$ . As funções de forma podem ser de qualquer tipo, desde que respeitem estas condições.

Podemos escrever todas as  $k$  funções de forma de um elemento com ordem qualquer através dos polinômios de Lagrange, dado pelo produto que segue (BREBBIA & FERRANTE, 1978):

$$\phi_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \right) \quad (4.46)$$

As coordenadas  $\xi$  assumem valores entre  $-1$  e  $+1$  no espaço adimensional. Basta então definir a ordem desejada para a aproximação de geometria e de variáveis e calcular as coordenadas adimensionais de cada nó, através da mudança do sistema de coordenadas geométrico para o sistema adimensional. Com os valores de  $\xi_k$ , é possível determinar em seguida todas as funções de forma do elemento.

A título de exemplificação da aplicação dos polinômios de Lagrange, serão a seguir apresentados de forma gráfica as funções de forma para os elementos com aproximação linear, quadrática, cúbica e de quarta ordem, respectivamente.

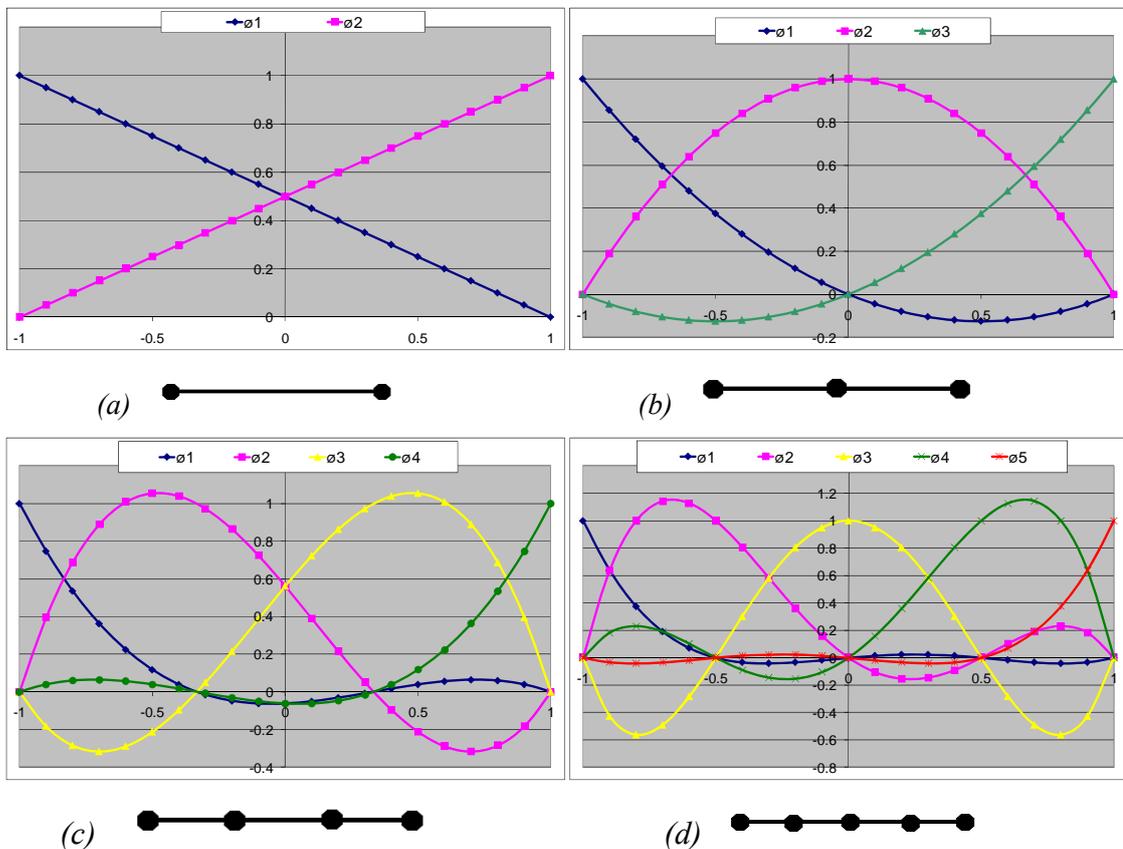


Figura 4.8 – Funções de forma para elementos com aproximação (a) linear, (b) quadrática, (c) cúbica e (d) de quarta ordem

Com as funções de forma definidas, pode-se calcular qualquer ponto sobre o elemento desde que conhecida sua coordenada  $\xi$ .

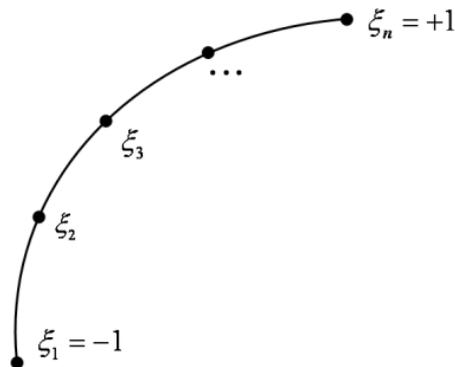


Figura 4.9 – Elemento curvo com coordenadas adimensionais

Assim, para cada elemento  $j$  podem ser aproximados, por exemplo, quaisquer valores de coordenada  $x_i$  ( $i$  sendo o índice da direção) sendo conhecidos somente os valores de coordenada  $X_{ik}$  de todos os  $k$  nós do elemento e os valores das funções de forma do mesmo naquele ponto  $\xi$ . Escreve-se, portanto

$$x_{i(\xi)} = \phi_{k(\xi)} X_{ik} \quad (4.47)$$

Após esse procedimento, é possível realizar a integração numérica dos elementos através da quadratura de Gauss, por exemplo. Logo, torna-se simples a implementação de elementos de contorno curvos, com qualquer número de nós.

## 4.4. Exemplos

A seguir serão apresentados alguns exemplos de problemas elásticos resolvidos com o uso da ferramenta desenvolvida a partir da formulação descrita. Os resultados são comparados com valores de referência da teoria técnica para a validação do programa. A escolha do sistema de unidades é independente, cabendo ao usuário do programa a adoção de valores coerentes, tal como nos exemplos.

### 4.4.1. Viga em balanço

O primeiro exemplo consta de uma viga de comprimento  $L = 100$  unidades de comprimento e seção transversal  $(1 \times 10)$  engastada em uma extremidade e com uma carga

concentrada  $P = 5$  unidades de força na outra. Admite-se módulo de elasticidade longitudinal  $E = 20.500$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ .

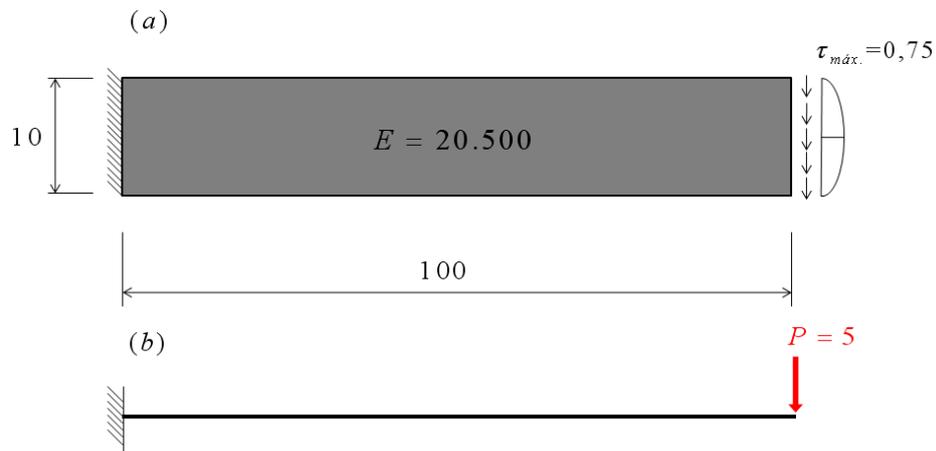


Figura 4.10 – Modelos de viga engastada (a) via MEC e (b) da teoria técnica de vigas

No caso do modelo via MEC, não é possível inserir carga concentrada nos nós. O carregamento é então modelado como uma força de superfície cisalhante com valor máximo de 0,750 à meia altura e valor nulo nos extremos da seção mais a direita. As condições de contorno são aplicadas à seção mais a esquerda da viga, impedindo o deslocamento na direção  $y$  do nó a meia altura e na direção  $x$  dos demais nós. Dessa forma, a distribuição de forças de superfície tende a se aproximar do que é considerado na teoria técnica de vigas e o resultado pode então ser comparado a essa solução dita analítica. Foram necessários somente 28 nós no contorno da viga e 12 elementos quadráticos para obter um resultado satisfatório.

O resultado de flecha máxima ocorre na ponta da viga, onde a carga é aplicada. Segundo a teoria clássica de viga, o valor desse deslocamento é dado por

$$f_{máx} = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{5 \cdot 100^3}{3 \cdot 20500 \cdot \left(\frac{1 \cdot 10^3}{12}\right)} = 0,9756 \quad (4.48)$$

Com a utilização do programa desenvolvido, o deslocamento máximo obtido foi de  $f_{máx.} = 0,9769$  ou seja, bastante próximo do valor da teoria técnica (diferença de 0,1%) mas ligeiramente maior, como era de se esperar pois na solução de referência não se considera a influência da distorção no deslocamento total.

Os resultados de tensão na direção horizontal ( $\sigma_x$ ) também foram comparados para a seção próxima ao engaste e para a seção no meio do vão.



Gráfico 4.1 – Resultado de Tensões ao longo das seções transversais analisadas

#### 4.4.2. Cavity em meio infinito

O segundo exemplo serve para demonstrar outro tipo de aplicação da formulação. É o caso de um meio infinito com uma cavidade (duto) submetida a uma pressão interna.

Adota-se o sistema cartesiano  $(x,y)$  com origem no centro da cavidade. O valor do seu diâmetro é  $D = 10$  unidades de comprimento. Para que a cavidade seja considerada imersa em um meio infinito adota-se o sentido horário para a integração dos elementos de contorno na superfície da cavidade. O módulo de elasticidade longitudinal do material é  $E = 20.500$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . O valor da pressão é  $p = 100$  unidades de força de superfície.

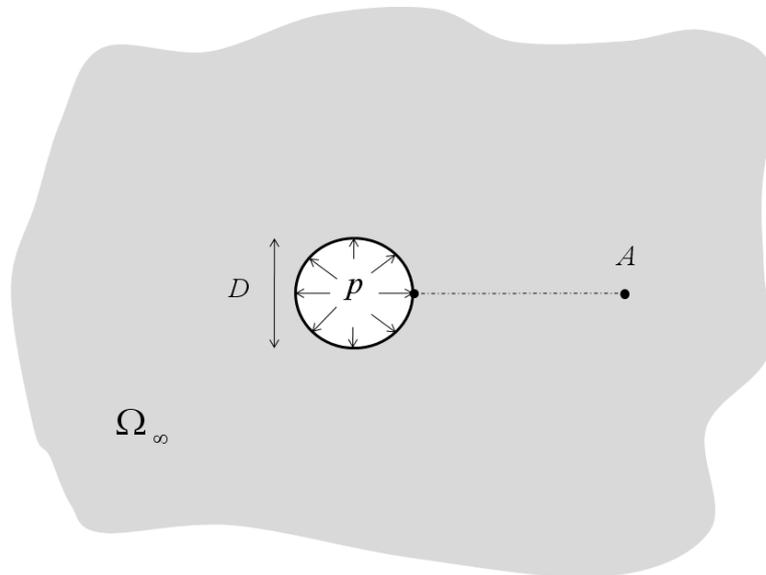


Figura 4.11 – Meio infinito com cavidade sob pressão interna

Neste problema, foram utilizados 16 nós no contorno da cavidade e 8 elementos quadráticos para a malha. Os resultados de deslocamentos e tensão na direção radial em uma linha imaginária até o ponto  $A$ , localizado a uma distância de 100 unidades de comprimento da superfície da cavidade, são comparados à solução analítica deste problema.

Os resultados obtidos são bastante satisfatórios, o que comprova o adequado funcionamento do programa. Os gráficos com resultados são apresentados a seguir.

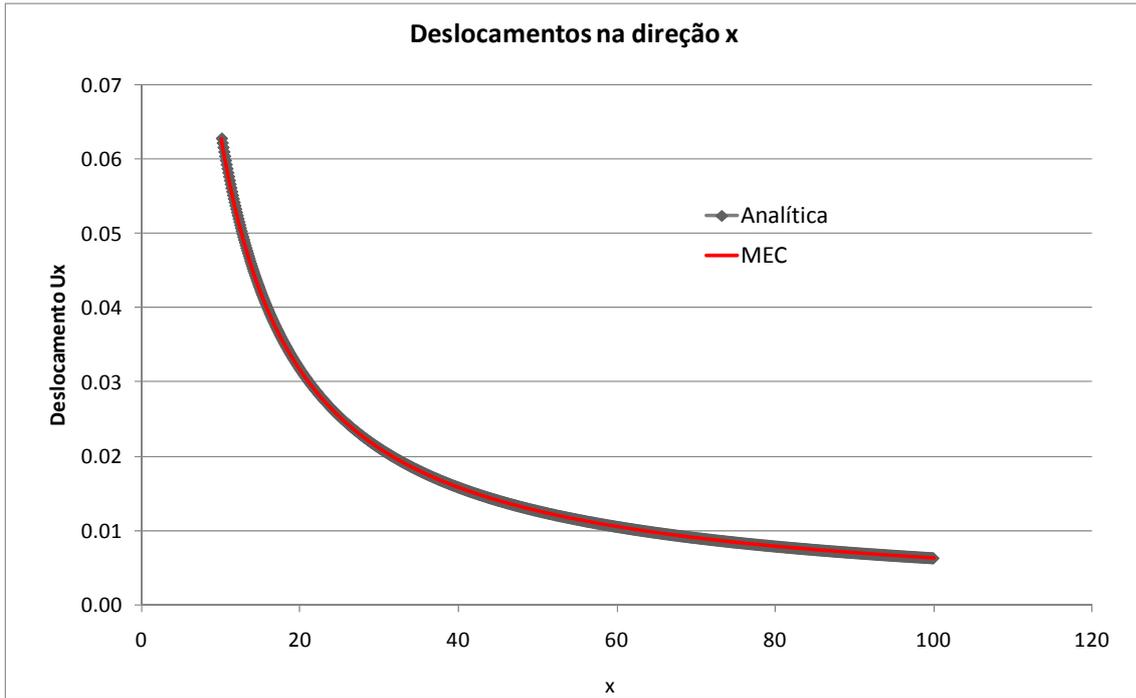


Gráfico 4.2 – Resultado de deslocamentos na direção radial

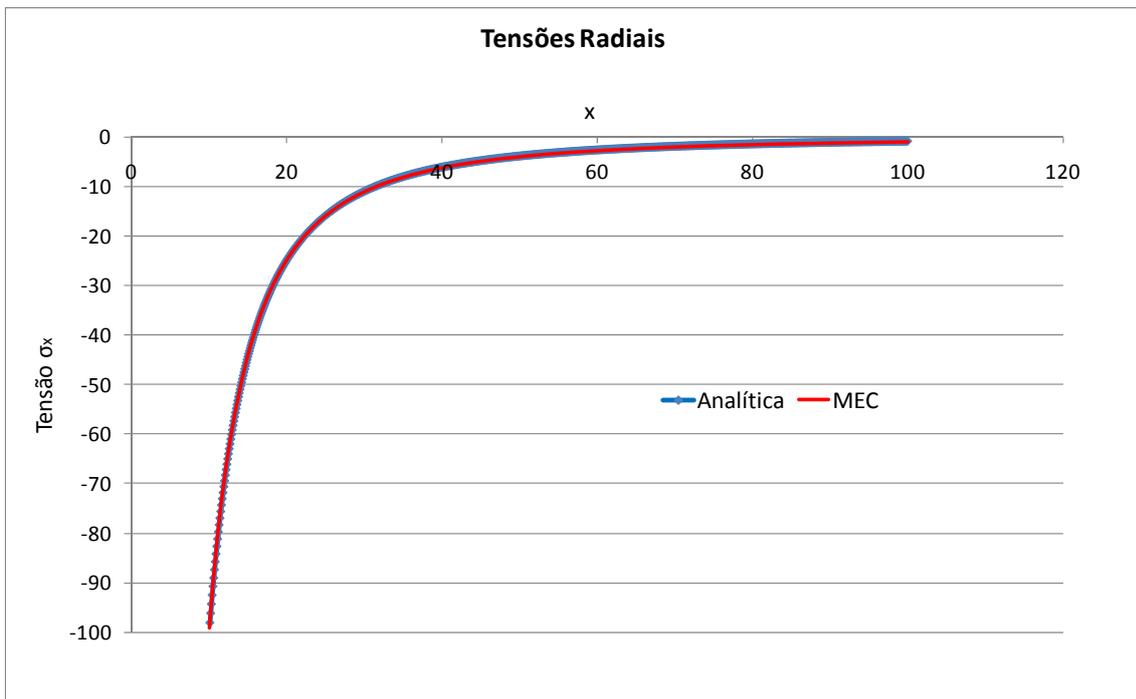


Gráfico 4.3 – Resultado de Tensões na direção radial

# Capítulo 5

## 5. Problemas heterogêneos

### 5.1. Apresentação

Inúmeros são os problemas de engenharia que envolvem mais de um material com diferentes características físicas. A particularidade dos meios heterogêneos é tão importante que muitos trabalhos têm sido desenvolvidos na análise desse tipo de problema. Citam-se como exemplos de meios heterogêneos os materiais fibrosos e reforçados, materiais laminados e corpos estratificados.

Em uma classificação inicial, os meios heterogêneos podem se apresentar de duas maneiras distintas: na forma de camadas e zonas ou estratificações, ou ainda como inclusões. No primeiro caso, os diferentes domínios possuem apenas uma parte de suas fronteiras em comum, sendo as demais superfícies independentes. Logo, o contorno externo do corpo é formado por faces de materiais distintos. Já no caso das inclusões, um domínio encontra-se totalmente contido dentro do outro, tendo sua superfície de fronteira inteiramente comum aos dois domínios. Nesse último caso, é comum se referir ao material mais externo como material padrão. A figura 5.1 demonstra os dois casos para problemas bidimensionais. O domínio  $\Omega_1$  e  $\Omega_3$  são do primeiro tipo, enquanto que o domínio  $\Omega_2$  é uma inclusão do primeiro.

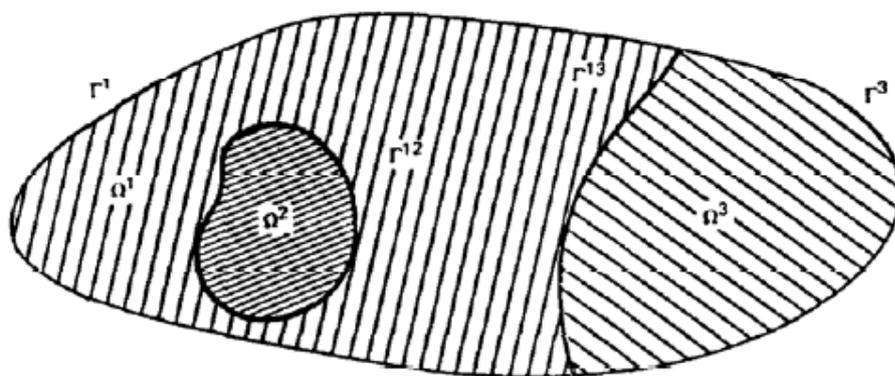


Figura 5.1 – Meios heterogêneos. FONTE (BREBBIA, 1992)

Os dois tipos de situação são bastante comuns em problemas de engenharia. O próprio concreto armado, muito utilizado na construção civil, apresenta seu meio como sendo constituído pelo concreto e aço. As armaduras funcionam como fibras de reforço à tração,

para o qual o concreto não oferece resistência adequada. Mesmo o material concreto se caracteriza por inclusões de pedras em um meio contínuo mais fino. Outros tipos de fibra aplicados ao concreto tem sido alvo de pesquisa na linha de materiais, como fibras de carbono, resíduos plásticos, etc. Todos estes se enquadram como inclusões, pois se encontram totalmente inseridos no meio predominante. Muitos deles podem ser estudados como linhas, ao invés de domínios fechados (LEITE, 2007).

Pode-se citar também exemplos de problemas da geomecânica, onde há uma enorme variedade de tipos de solos estratificados. Diferentes tipos de solos em camadas sobrepostas, por exemplo, constituem um problema específico da interação solo-estrutura. Muitos trabalhos já desenvolvidos na área geotécnica tratam o solo como sendo constituído por camadas de diferentes propriedades. Alguns trabalhos procuram avaliar a influência que camadas mais inferiores ocasionam na estrutura, apoiada sobre a camada de topo.

Observa-se que estes solos podem apresentar ainda heterogeneidade na forma de inclusões. Um mapeamento geotécnico pode revelar a existência de algum tipo de material imerso em seus meios. É o caso da presença de material rochoso em uma camada de solo, ou mesmo concentração de determinado tipo de solo, sem necessariamente formar camadas.

Percebe-se, portanto, a importância de um método generalizado para análise de meios heterogêneos, face à enorme diversidade de problemas desse tipo.

## ***5.2. Análise de Domínios não-homogêneos via MEC***

A formulação clássica do Método dos Elementos de contorno, brevemente apresentada no capítulo anterior, foi desenvolvida a partir do estudo de domínios considerados homogêneos, ou seja, constituídos por apenas um material cujas características físicas são únicas ao longo de todo o corpo. No entanto, em diversos problemas de engenharia observa-se a necessidade de análise de domínios constituídos por diferentes materiais. Em interação solo-estrutura, especificamente, este é o caso da análise de solos com presença de diferentes camadas, ou solos em que há presença de rochas (VENTURINI, 1988).

Os livros que tratam do MEC aplicado a problemas de engenharia apresentam uma formulação já consagrada para resolver esse tipo de problema. É a chamada técnica da sub-região clássica, onde se monta um sistema único cujas equações algébricas são escritas fazendo-se o equilíbrio dos domínios, após a montagem das equações integrais de cada domínio.

### 5.2.1. Técnica clássica de sub-região

Em problemas elásticos que envolvem meios heterogêneos, uma técnica bastante utilizada é a da sub-região clássica, descrita em (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1992). A técnica prevê o estudo em separado de cada sub-região para em seguida ser utilizada as condições de equilíbrio e compatibilidade geométrica (ou cinemática) na interface.

Tome-se como exemplo um problema envolvendo dois domínios de características físicas diferentes, em contato por uma interface comum às duas sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Na técnica clássica, considera-se que cada domínio pode ser estudado separadamente.

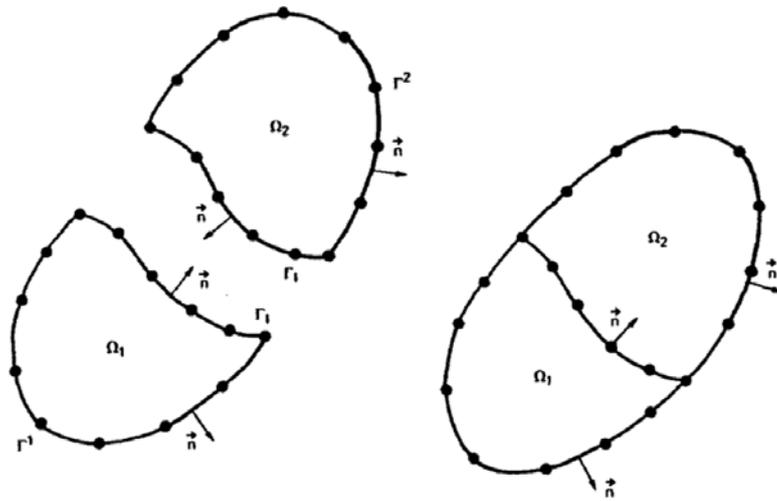


Figura 5.2 – Domínio plano constituído por duas sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

O domínio  $\Omega_1$  tem módulo de elasticidade  $E_1$  e coeficiente de Poisson  $\nu_1$ , e a sub-região  $\Omega_2$  tem, por sua vez, módulo de elasticidade  $E_2$  e coeficiente de Poisson  $\nu_2$ .

As superfícies  $\Gamma_{12}$  e  $\Gamma_{21}$  se confundem, pois é justamente a linha de interface.

Montam-se os sistemas de equações de cada domínio  $\Omega_k$  considerando-os como problemas isolados.

$$\begin{bmatrix} H_{cc}^1 & H_{cl}^1 \\ H_{lc}^1 & H_{ll}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^1 \\ U_l^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc}^1 & G_{cl}^1 \\ G_{lc}^1 & G_{ll}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_c^1 \\ P_l^1 \end{Bmatrix} \quad (5.01)$$

$$\begin{bmatrix} H_{cc}^2 & H_{cl}^2 \\ H_{lc}^2 & H_{ll}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^2 \\ U_l^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc}^2 & G_{cl}^2 \\ G_{lc}^2 & G_{ll}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_c^2 \\ P_l^2 \end{Bmatrix} \quad (5.02)$$

sendo  $l$  o índice que indica termos da matriz relativos à superfície livre e  $c$  os termos da superfície em contato. O índice superior indica o domínio em questão.

Em seguida, aplicam-se as condições de compatibilidade de deslocamentos  $U$  e equilíbrio de forças  $P$  na superfície de contato entre os domínios, dadas pelas expressões:

$$\{U_c^1\} = \{U_c^2\} = \{U_c\} \quad (5.03)$$

$$\{P_c^1\} = -\{P_c^2\} = \{P_c\} \quad (5.04)$$

Com isso, é possível escrever um único sistema que representa todo o domínio em questão, incluindo as incógnitas de deslocamento e força na superfície de contato.

$$\begin{bmatrix} H_{ll}^1 & H_{lc}^1 & 0 \\ H_{cl}^1 & H_{cc}^1 & 0 \\ 0 & H_{cc}^2 & H_{cl}^2 \\ 0 & H_{lc}^2 & H_{ll}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l^1 \\ u_c \\ u_l^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ll}^1 & G_{lc}^1 & 0 \\ -G_{cl}^1 & -G_{cc}^1 & 0 \\ 0 & G_{cc}^2 & G_{cl}^2 \\ 0 & G_{lc}^2 & G_{ll}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_l^1 \\ p_c \\ p_l^2 \end{Bmatrix} \quad (5.05)$$

Apesar de ser utilizada desde o trabalho de BREBBIA (1975) com sucesso, a técnica clássica da sub-região aumenta o número de incógnitas, pois considera todos os valores de deslocamento e de força de superfície na interface de contato. Além disso, quanto maior for o número de sub-regiões envolvidas no problema, e quanto mais diferenciada for a distribuição de cada material no corpo, mais dispendiosa será a aplicação da técnica, o que torna difícil sua implementação computacional generalizada.

Nesse sentido, torna-se útil a adoção de técnicas que permitam uma maior facilidade para a generalização e para a implementação de códigos computacionais, possibilitando a simulação do comportamento de meios heterogêneos via MEC de forma mais simplificada.

### 5.2.2. Técnica alternativa de sub-região

Será agora apresentada uma formulação alternativa para estudos de meios heterogêneos em problemas elásticos. Esta técnica foi apresentada por VENTURINI (1992) para problemas potenciais e elásticos via MEC e estendida para problemas tridimensionais em RIBEIRO (2009) e PAIVA & RIBEIRO (2009).

A idéia básica é efetuar a relação entre os diferentes domínios de maneira que seja possível escrever uma única equação válida para todo o corpo em estudo. Este processo alternativo à técnica clássica de sub-região foi inicialmente motivado por problemas em análise não linear de estruturas, em que o aumento do número de linhas de interface a ser discretizado e o conseqüente aumento do tamanho do sistema algébrico a ser resolvido causava a deterioração dos resultados.

Venturini propôs então, para o estudo de problemas heterogêneos via método dos elementos de contorno, que o equilíbrio de forças e a compatibilização de deslocamentos nas interfaces comuns fossem realizados antes da montagem das equações. Dessa forma, eliminam-se as aproximações de força de superfície no contato, e torna-se possível escrever uma única equação para todo o domínio heterogêneo, evitando assim a separação física do problema, como na técnica clássica.

Para o entendimento desse processo alternativo, considera-se um problema de um sólido bidimensional envolvendo três domínios de características físicas diferentes, sendo dois destes domínios imersos no domínio padrão  $\Omega_1$ .

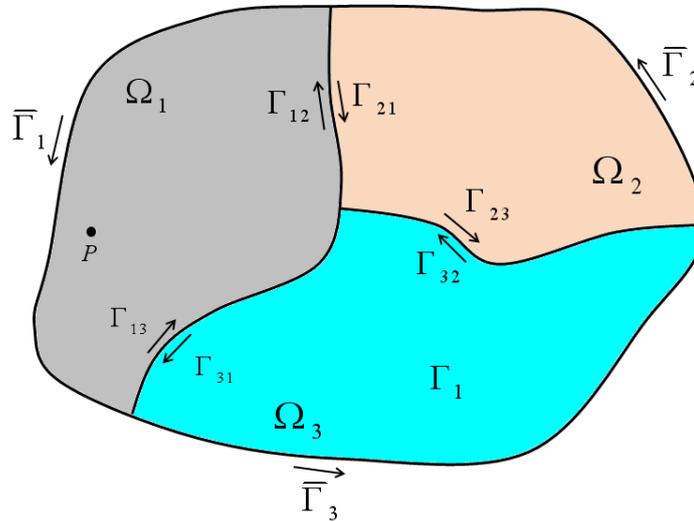


Figura 5.3 – Domínio padrão  $\Omega_1$  com duas inclusões  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ .

Para cada sub-região podem-se escrever as soluções fundamentais em deslocamento e em força conforme as expressões (4.24) e (4.25) do capítulo 4, aqui reproduzidas.

$$u_{ik}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ik} - r_{,i} r_{,k} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{ik} \right\} \quad (4.24)$$

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) + ((1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}) \frac{dr}{dn} \right\} \quad (4.25)$$

Admitindo que o valor do coeficiente de Poisson seja o mesmo para todos os materiais envolvidos na análise, nota-se que o termo constante da solução fundamental de Kelvin em força  $p^*$  será o mesmo para todos os domínios, pois este não depende do módulo de elasticidade transversal  $G$ . No caso da solução fundamental em deslocamento  $u^*$ , já o termo

constante apresenta diferença quando escrito para cada sub-região, pois este sim depende do módulo  $G$  de cada material.

Pode ser obtida assim uma relação entre as diferentes soluções fundamentais em razão dos módulos de elasticidade transversal. Se multiplicarmos a equação integral da sub-região  $i$  pela razão entre o módulo  $G_i$  e o módulo  $G_1$ , sendo o índice  $l$  referente à sub-região dita padrão, torna-se possível relacionar as equações escritas para cada domínio de maneira a escrever uma em função da outra. Essa relação entre a solução fundamental de cada domínio pode ser expressa por

$$u_{lk}^{1*} = \frac{G_i}{G_1} u_{lk}^{i*} \quad (5.06)$$

Esta expressão pode ser escrita também, segundo RIBEIRO (2009) na forma

$$u_{lk}^{i*} = u_{lk}^{1*} + \frac{\Delta G_{1i}}{G_1} u_{lk}^{1*} \quad (5.07)$$

$$\text{sendo } \Delta G_{1i} = (G_1 - G_i) \quad (5.08)$$

Sabe-se também que

$$p_{lk}^{1*} = p_{lk}^{2*} = p_{lk}^{3*} = p_{lk}^* \quad (5.09)$$

Imaginando um ponto  $P$  contido no domínio  $\Omega_l$  pode-se escrever a equação integral no contorno para esse ponto integrando somente o seu respectivo domínio. Escreve-se na equação o termo livre, pois assim se estuda o caso mais geral.

$$\mathbb{C}_{lk}^1 u_k + \int_{\Gamma_1} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u_{lk}^{1*} d\Gamma \quad (5.10)$$

Vamos abrir as integrais dessa equação dividindo o contorno  $\Gamma_l$  entre as superfícies livres e em contato da região  $\Omega_l$ , de acordo com a figura 5.3. Teremos assim a (5.10) reescrita

$$\mathbb{C}_{lk}^1 u_k + \int_{\bar{\Gamma}_1} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\Gamma_{12}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{12} + \int_{\Gamma_{13}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{13} = \int_{\bar{\Gamma}_1} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\Gamma_{12}} u_{lk}^{1*} p_k d\Gamma_{12} + \int_{\Gamma_{13}} u_{lk}^{1*} p_k d\Gamma_{13} \quad (5.11)$$

De forma semelhante escrevem-se as equações para o mesmo ponto  $P$  integrando somente os domínios  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ . Respectivamente, estas equações ficam escritas

$$\mathbb{C}_{lk}^2 u_k + \int_{\Gamma_2} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\Gamma_{21}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{23}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{23} = \int_{\Gamma_2} u_{lk}^{2*} p_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\Gamma_{21}} u_{lk}^{2*} p_k d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{23}} u_{lk}^{2*} p_k d\Gamma_{23} \quad (5.12)$$

$$\mathbb{C}_{lk}^3 u_k + \int_{\Gamma_3} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_3 + \int_{\Gamma_{31}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{31} + \int_{\Gamma_{32}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{32} = \int_{\Gamma_3} u_{lk}^{3*} p_k d\bar{\Gamma}_3 + \int_{\Gamma_{31}} u_{lk}^{3*} p_k d\Gamma_{31} + \int_{\Gamma_{32}} u_{lk}^{3*} p_k d\Gamma_{32} \quad (5.13)$$

Ao somarmos as equações (5.11), (5.12) e (5.13) estaremos escrevendo uma única equação para o ponto  $P$  que inclui todo o domínio heterogêneo. Sabendo da relação entre as soluções fundamentais dadas por (5.07) e sabendo ainda que a seguinte relação também pode ser escrita

$$\int_{\Gamma_{ij}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{ij} = - \int_{\Gamma_{ji}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{ji} \quad (5.14)$$

podemos simplificar a equação resultante de maneira a obter

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}_{lk}^1 + \mathbb{C}_{lk}^2 + \mathbb{C}_{lk}^3) u_l + \int_{\bar{\Gamma}_1} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\bar{\Gamma}_2} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\bar{\Gamma}_3} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_3 = \int_{\bar{\Gamma}_1} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\bar{\Gamma}_2} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_2 + \\ + \int_{\bar{\Gamma}_3} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_3 + \frac{\Delta G_{12}}{G_1} \left( \int_{\bar{\Gamma}_2} u_{lk}^{2*} p_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\Gamma_{21}} u_{lk}^{2*} p_k d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{23}} u_{lk}^{2*} p_k d\Gamma_{23} \right) + \\ + \frac{\Delta G_{13}}{G_1} \left( \int_{\bar{\Gamma}_3} u_{lk}^{3*} p_k d\bar{\Gamma}_3 + \int_{\Gamma_{31}} u_{lk}^{3*} p_k d\Gamma_{31} + \int_{\Gamma_{32}} u_{lk}^{3*} p_k d\Gamma_{32} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Com uso das expressões (5.12) e (5.13) pode-se escrever os termos entre parênteses da (5.15) somente em função dos deslocamentos na interface, retirando assim da equação as integrais que estão em função das forças de superfície no contato. Rearranjando os termos, a equação fica

$$\begin{aligned} \left[ \mathbb{C}_{lk}^1 + \left( 1 - \frac{\Delta G_{12}}{G_1} \right) \mathbb{C}_{lk}^2 + \left( 1 - \frac{\Delta G_{13}}{G_1} \right) \mathbb{C}_{lk}^3 \right] u_l + \int_{\bar{\Gamma}_1} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\bar{\Gamma}_2} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\bar{\Gamma}_3} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_3 + \\ - \frac{\Delta G_{12}}{G_1} \left( \int_{\bar{\Gamma}_2} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\Gamma_{21}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{21} + \int_{\Gamma_{23}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{23} \right) - \frac{\Delta G_{13}}{G_1} \left( \int_{\bar{\Gamma}_3} p_{lk}^* u_k d\bar{\Gamma}_3 + \int_{\Gamma_{31}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{31} \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_{32}} p_{lk}^* u_k d\Gamma_{32} \right) = \int_{\bar{\Gamma}_1} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_1 + \int_{\bar{\Gamma}_2} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_2 + \int_{\bar{\Gamma}_3} u_{lk}^{1*} p_k d\bar{\Gamma}_3 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Utilizando-se novamente a relação dada em (5.07), podemos concluir que a expressão (5.16) poderá ser escrita na seguinte forma, agora válida para qualquer número de sub-regiões.

$$\left\{ \sum_{m=1}^{ns} \frac{G_m}{G_1} \mathbb{C}_{lk}^m \right\} u_k + \sum_{m=1}^{ns} \left[ \frac{G_m}{G_1} \int_{\Gamma_m} u_k p_{lk}^* d\Gamma_m \right] = \sum_{n=1}^{ne} \left[ \int_{\bar{\Gamma}_e} p_k u_{lk}^{1*} d\bar{\Gamma}_e \right] \quad (5.17)$$

onde  $ns$  é o número total de sub-regiões,  $\Gamma_m$  é o contorno fechado de cada sub-região  $m$  no segundo somatório,  $G_l$  é o módulo de elasticidade transversal do material padrão e  $\bar{\Gamma}_e$  é o

contorno externo de cada sub-região  $n$ , no somatório das  $ne$  sub-regiões que possuem alguma superfície independente das outras sub-regiões. Assim, pode-se dizer que na equação (5.17) considera-se a superposição de efeitos de tal forma a obter um único sistema de equações válido para todo o corpo em estudo.

Analisando o último termo da equação (5.17), observa-se que esta é uma integral sobre todo o contorno externo do sólido. É possível demonstrar que este somatório incluiria na verdade as integrais das superfícies em contato, com suas respectivas soluções fundamentais multiplicadas pela razão entre os módulos  $G$ . Porém, estes termos se anulam pelo fato da força de superfície ter sentido oposto nestas interfaces. Isso fica mais claro para o leitor no processo algébrico alternativo apresentado no próximo item.

### **5.2.3. Procedimento algébrico**

Para o procedimento algébrico de montagem do sistema de equações, define-se primeiramente o domínio dito padrão cujo módulo de elasticidade transversal será  $G_I$ . A escolha do domínio padrão independe para a análise. Sugere-se, no entanto que a escolha seja sempre feita pelo domínio predominante.

Para cada sub-região é então montado um sistema de equações utilizando-se todos os pontos fonte do problema, isto é, pontos fonte de uma sub-região geram linhas nas matrizes das outras sub-regiões. Estas matrizes são multiplicadas pela relação entre o módulo de elasticidade transversal da sub-região correspondente e o módulo padrão e então superpostas para formar o sistema de equações de todo o domínio em estudo.

Novamente o termo livre pode ser calculado utilizando o princípio do movimento de corpo rígido somando na linha os termos das colunas pares e ímpares. Isso será feito após a montagem de cada matriz em particular.

Sendo o coeficiente de Poisson igual para todas as sub-regiões, os termos da matriz  $\mathbf{G}$  relativos aos nós das superfícies de contato se anulam pelo equilíbrio de forças sendo, portanto retirado do sistema as incógnitas de força de superfície. Os termos da matriz  $\mathbf{H}$  referentes aos nós da interface são corrigidos de maneira que se introduz no sistema de equações de compatibilidade.

Para ilustrar algebricamente o método citado, considere o problema de um domínio constituído por três sub-regiões com diferentes módulos de elasticidade e mesmo coeficiente de Poisson. Cada sub-região  $i$  é fechada por um contorno  $\Gamma_i$ . Para o melhor entendimento, o problema será dividido conforme a figura 5.4.

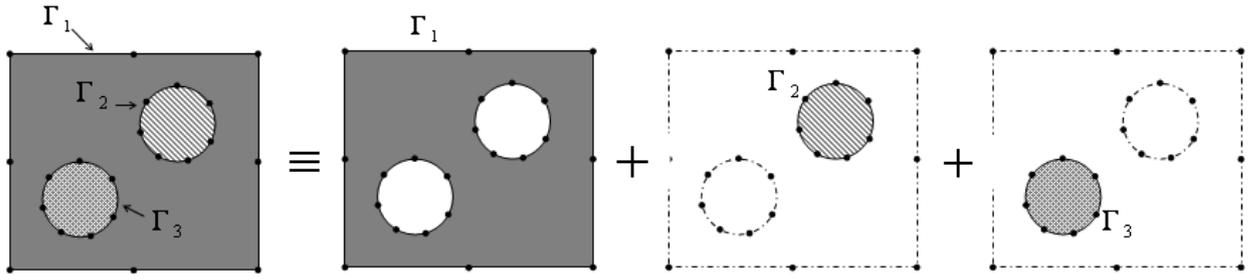


Figura 5.4 – Exemplo ilustrativo constituído por três sub-regiões.

Ao montar as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de cada sub-região em separado devem ser utilizados todos os pontos fontes do problema original, fazendo com que as matrizes das sub-regiões 2 e 3 possuam maior número de linhas do que de colunas. Os sistemas ficam então escritos da seguinte forma, respectivamente para os domínios 1, 2 e 3:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [U_1]^1 \\ [U_2]^1 \\ [U_3]^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [P_1]^1 \\ [P_2]^1 \\ [P_3]^1 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{H}'_{12} \\ \mathbf{H}'_{22} \\ \mathbf{H}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [U_2]^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}'_{12} \\ \mathbf{G}'_{22} \\ \mathbf{G}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [P_2]^2 \quad (5.19)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{H}''_{13} \\ \mathbf{H}''_{23} \\ \mathbf{H}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [U_3]^3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}''_{13} \\ \mathbf{G}''_{23} \\ \mathbf{G}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [P_3]^3 \quad (5.20)$$

onde os índices superiores 1, 2 e 3 indicam cada superfície  $\Gamma$  correspondente.

Multiplicando (5.19) e (5.20) pela razão entre seus respectivos módulos e o módulo padrão alteram-se os termos das matrizes. Vamos aplicar também as condições de compatibilidade e equilíbrio de forças nas superfícies de contato a fim de escrever ambos os sistemas função dos deslocamentos e forças do domínio 1

$$[U_2]^2 = [U_2]^1 \quad (5.21)$$

$$[U_3]^3 = [U_3]^1 \quad (5.22)$$

$$[P_2]^2 = -[P_2]^1 \quad (5.23)$$

$$[P_3]^3 = -[P_3]^1 \quad (5.24)$$

Assim, as expressões para cada domínio ficam

$$\frac{G_2}{G_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}'_{12} \\ \mathbf{H}'_{22} \\ \mathbf{H}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [U_2]^2 = \frac{G_2}{G_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}'_{12} \\ \mathbf{G}'_{22} \\ \mathbf{G}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [P_2]^2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{H}}'_{12} \\ \bar{\mathbf{H}}'_{22} \\ \bar{\mathbf{H}}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [U_2]^1 = \begin{Bmatrix} -\bar{\mathbf{G}}'_{12} \\ -\bar{\mathbf{G}}'_{22} \\ -\bar{\mathbf{G}}'_{32} \end{Bmatrix} \cdot [P_2]^1 \quad (5.25)$$

$$\frac{G_3}{G_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}''_{13} \\ \mathbf{H}''_{23} \\ \mathbf{H}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [U_3]^3 = \frac{G_3}{G_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}''_{13} \\ \mathbf{G}''_{23} \\ \mathbf{G}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [P_3]^3 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{H}}''_{13} \\ \bar{\mathbf{H}}''_{23} \\ \bar{\mathbf{H}}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [U_3]^1 = \begin{Bmatrix} -\bar{\mathbf{G}}''_{13} \\ -\bar{\mathbf{G}}''_{23} \\ -\bar{\mathbf{G}}''_{33} \end{Bmatrix} \cdot [P_3]^1 \quad (5.26)$$

sendo que, pela relação dada em (5.06), as seguintes relações também são verdadeiras.

$$\bar{\mathbf{G}}'_{ij} = \mathbf{G}_{ij} \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{G}}''_{ij} = \mathbf{G}_{ij} \quad (5.28)$$

A superposição é válida permitindo, portanto que as matrizes sejam somadas de modo a se escrever um único sistema de equação para o problema original que inclui todas as sub-regiões juntas. Observa-se que aplicando (5.27) e (5.28) os termos da matriz  $\mathbf{G}$  relativos às forças nos contornos  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  se anulam, restando apenas incógnitas de força no contorno externo (termo  $P_1$ ). Nas superfícies de contato restam apenas incógnitas de deslocamento.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & (\mathbf{H}_{12} + \bar{\mathbf{H}}'_{12}) & (\mathbf{H}_{13} + \bar{\mathbf{H}}''_{13}) \\ \mathbf{H}_{21} & (\mathbf{H}_{22} + \bar{\mathbf{H}}'_{22}) & (\mathbf{H}_{23} + \bar{\mathbf{H}}''_{23}) \\ \mathbf{H}_{31} & (\mathbf{H}_{32} + \bar{\mathbf{H}}'_{32}) & (\mathbf{H}_{33} + \bar{\mathbf{H}}''_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \cancel{(\mathbf{G}_{12} - \bar{\mathbf{G}}'_{12})} & \cancel{(\mathbf{G}_{13} - \bar{\mathbf{G}}''_{13})} \\ \mathbf{G}_{21} & \cancel{(\mathbf{G}_{22} - \bar{\mathbf{G}}'_{22})} & \cancel{(\mathbf{G}_{23} - \bar{\mathbf{G}}''_{23})} \\ \mathbf{G}_{31} & \cancel{(\mathbf{G}_{32} - \bar{\mathbf{G}}'_{32})} & \cancel{(\mathbf{G}_{33} - \bar{\mathbf{G}}''_{33})} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & (\mathbf{H}_{12} + \bar{\mathbf{H}}'_{12}) & (\mathbf{H}_{13} + \bar{\mathbf{H}}''_{13}) \\ \mathbf{H}_{21} & (\mathbf{H}_{22} + \bar{\mathbf{H}}'_{22}) & (\mathbf{H}_{23} + \bar{\mathbf{H}}''_{23}) \\ \mathbf{H}_{31} & (\mathbf{H}_{32} + \bar{\mathbf{H}}'_{32}) & (\mathbf{H}_{33} + \bar{\mathbf{H}}''_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{G}_{21} \\ \mathbf{G}_{31} \end{Bmatrix} \cdot [P_1] \quad (5.30)$$

A partir deste exemplo simples, fica fácil a compreensão da estratégia para a automatização do processo via programação computacional, por maior que seja o número de sub-regiões. Para problemas em que os diferentes domínios encontram-se em forma de camadas ou zonas, o procedimento é o mesmo, sendo que desta vez, apenas os termos da matriz  $\mathbf{G}$  no contato se anulam, ou seja, ainda restam incógnitas de deslocamento na superfície de contato. Caso se deseje aplicar forças de superfície nas interfaces dos corpos, basta reativar o trecho da matriz  $\mathbf{G}$  correspondente.

A estratégia é, portanto, genérica e pela equação (5.30) fica claro o funcionamento da técnica alternativa descrita pela equação (5.17). A formulação pode ser utilizada para análise elástica de sólidos bidimensionais constituídos por mais de um material. Serão apresentados

exemplos de problemas sólidos planos com solução conhecida, para a validação e demonstração de aplicações da técnica.

### 5.2.5. Tratamento para pontos internos

Da mesma forma que foi apresentada no capítulo 4 para domínios homogêneos, os deslocamentos internos serão calculados diretamente após serem conhecidos todos os valores no contorno. O termo livre da equação (5.17) será  $\mathbb{C}_{ki} = \delta_{ki}$ , sendo  $\delta_{ki}$  o delta de Kronecker. Porém, é necessária uma pequena correção dos deslocamentos interno obtidos por este processo.

Baseado no que foi exposto, vamos imaginar um ponto fonte interno ao domínio heterogêneo. Caso o problema seja dividido em dois constata-se que podem agora existir duas situações: o ponto pode ser considerado como situado fora do domínio  $\Omega_1$  ou dentro do domínio  $\Omega_2$ .

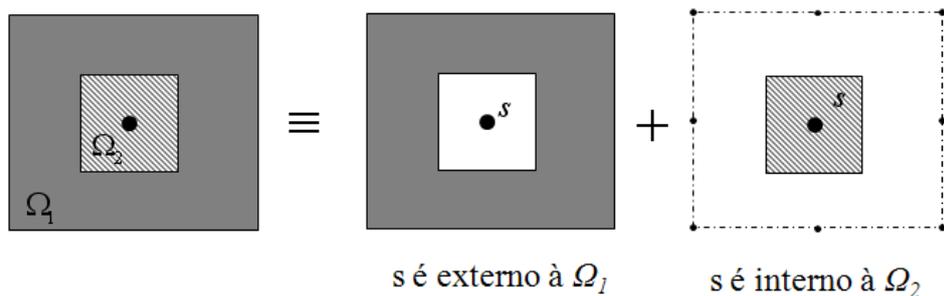


Figura 5.5 – Tratamento do ponto fonte interno no domínio heterogêneo.

Nesse caso, para cada ponto fonte deverá ser utilizada a solução fundamental do material cuja superfície está sendo integrada. O resultado dessa integral deve ser multiplicado pela razão entre os módulos de elasticidade transversal, tal qual é feito no cálculo do contorno.

Porém, ao multiplicar o sistema matricial pela razão entre os módulos de elasticidade transversal, o valor obtido para o deslocamento interno estará também multiplicado pelo mesmo fator. É necessário corrigir os valores calculados para deslocamentos internos multiplicando-os pela relação inversa entre os módulos.

Para o cálculo de tensões internas pode-se partir da equação (5.17) aplicando a Lei de Hooke e a relação entre deslocamento e deformações, chegando assim à seguinte expressão para as tensões internas

$$\sigma_{ij}^l = -\sum_{m=1}^{ns} \frac{G_m}{G_l} \int_{\Gamma_l} u_k^m S_{ijk}^{*m} d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k D_{ijk}^* d\Gamma \quad (5.31)$$

O índice  $l$  é relativo ao domínio em que o ponto está inserido. Os termos  $D_{kij}^*$  e  $S_{kij}^*$  foram apresentados no capítulo 4.

### 5.3. Linhas de carga

Em alguns problemas de engenharia pode haver a necessidade de se modelar um carregamento atuando no domínio interno na forma de uma linha de carga. É o caso, por exemplo, de simulação de estacas cravadas no solo em acoplamento MEC/MEF onde os elementos finitos de barra que simulam as estacas atuam como linhas carregadas internas ao domínio do material solo.

Para que seja possível esse tipo de análise é necessária a implementação das linhas de carga no sistema algébrico, inserindo elementos de linha de carga (semelhantes a elementos de contorno) internos ao domínio. Estas linhas não formam contornos fechados e devem estar inteiramente contidas no corpo.

Os nós dos elementos de linha de carga não constituem necessariamente incógnitas do problema, e por isso geram somente termos na matriz  $\mathbf{G}$  do sistema de equações, representando assim o carregamento aplicado sobre os elementos internos. Os valores de forças distribuídas sobre as linhas de carga devem ser todos conhecidos, não cabendo nenhuma restrição a deslocamentos para nós internos. A singularidade presente na equação integral recebe o mesmo tratamento realizado nas integrais do contorno, conforme citado no capítulo 4.

A matriz  $\mathbf{H}$ , por sua vez, deverá ter as mesmas dimensões da matriz  $\mathbf{G}$ . Os nós internos podem gerar linhas na matriz ao integrar o contorno externo, como parte do problema. Logo, o sistema pode calcular deslocamentos de pontos internos juntamente com pontos do contorno. Os nós do contorno não integram os deslocamentos dos elementos da linha de carga, já que estes não são aproximados. Os termos correspondentes são então nulos na matriz  $\mathbf{H}$ . O sistema algébrico deverá ser, portanto montado como mostra a equação (5.32).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ee} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{ie} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_e \\ U_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ee} & \mathbf{G}_{ei} \\ \mathbf{G}_{ie} & \mathbf{G}_{ii} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_e \\ P_i \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

onde a letra  $e$  indica os termos do contorno externo e a letra  $i$  os termos relativos ao “contorno” interno (linhas de carga).  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A generalização para aproximações de ordem qualquer também pode ser aplicada a estes elementos internos, permitindo inserir linhas de carga curvas. Além disso, podem ser representadas funções de carregamentos parabólicas, etc. Outra vantagem do processo utilizado é a possibilidade de inserir linhas de carga em qualquer direção dentro do domínio, o que viabiliza a análise de estacas inclinadas, por exemplo.

Em meios heterogêneos, é possível ainda que as linhas de carga passem através de diferentes domínios, simulando casos de estacas cravadas ultrapassando várias camadas de solo. Para isso, é necessário primeiramente que sejam estabelecidas as sub-regiões nas quais está inserida cada parte da linha de carga. Em seguida, durante a montagem das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  de cada sub-região, de acordo com o processo descrito em 5.2.3, realiza-se a integral dos elementos de linha de carga contidos naquele domínio para montagem da matriz  $\mathbf{G}$ . A superposição ainda será válida e o sistema final ao ser somado inclui, portanto todas as linhas de carga internas, bem como as relações de equilíbrio e compatibilidade entre os diferentes domínios.

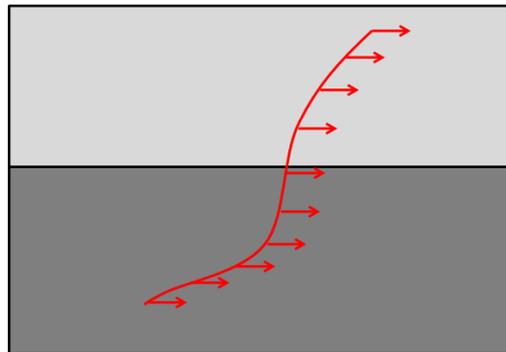


Figura 5.6 – Linha de carga passando por diferentes domínios

## 5.5. Exemplos de aplicação e validação

Para comprovar a eficiência do método descrito e para demonstrar a generalidade de problemas que podem ser resolvidos, apresentam-se agora os resultados obtidos com o programa computacional desenvolvido para problemas elásticos. Novamente, a escolha do

sistema de unidades é independente, cabendo ao usuário do programa a adoção de valores coerentes, tal como nos exemplos.

### 5.5.1. Viga com momento

Seja uma viga constituída por dois materiais de diferentes módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson iguais. A viga é bi apoiada e possui uma carga de momento fletor concentrado no meio de seu vão, conforme a figura a seguir. Trata-se de um problema em estado plano de tensão.

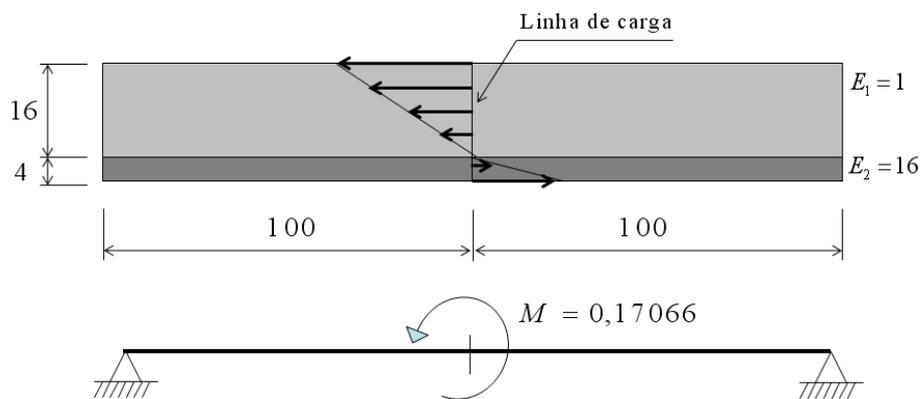


Figura 5.7 – Viga bi apoiada constituída de dois materiais

Este problema possui solução analítica baseada na teoria técnica de flexão.

O modelo utilizado na simulação via MEC inclui duas sub-regiões acopladas em forma de camadas sobrepostas. A escolha do domínio padrão é indiferente para o resultado final. A consideração do momento aplicado é feita com o uso de uma linha de carga vertical no meio do vão, com força interna linearmente variável na direção horizontal, originando um binário de forças. O carregamento aplicado segue a proporção estabelecida pela distribuição de tensões na teoria técnica para deformação linear. A linha de carga, além de servir para simular o carregamento, introduz no sistema as incógnitas de deslocamento no domínio. Assim, ao se resolver o sistema de equações os valores dos deslocamentos no meio do vão serão conhecidos diretamente.

Foi utilizado o elemento quadrático e a discretização foi feita com duas malhas distintas. A primeira sendo montada com 10 elementos nas superfícies horizontais da viga e 5 elementos nas faces laterais. Na segunda malha, o número de elementos horizontais foi

aumentado para 50. Os resultados obtidos para os deslocamentos ao longo da linha de carga são apresentados no gráfico a seguir.

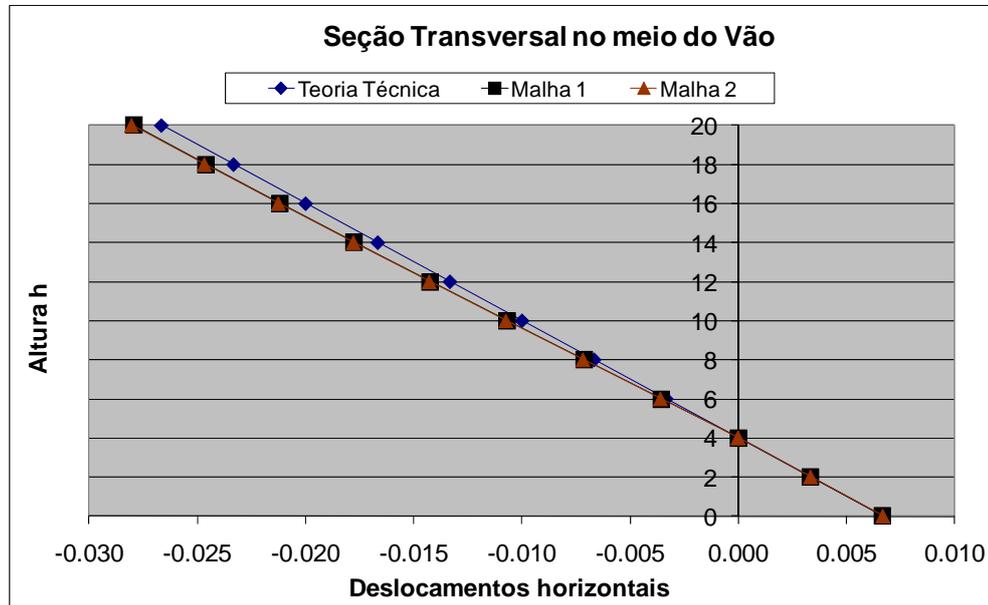


Gráfico 5.1 – Resultados de deslocamentos na seção central

Os valores obtidos com o uso do programa são ligeiramente maiores do que da solução da teoria técnica. A maior diferença relativa observada é da ordem de 7%. É importante observar, no entanto, que a solução da teoria técnica leva em consideração algumas hipóteses simplificadoras, como a manutenção de seção transversal plana, o que não ocorre de fato. Logo, é de se esperar que os resultados numéricos sejam maiores. Ao se analisar o aspecto da deformada (ampliando os valores de deslocamentos para melhor percepção) fica claro que não há como as seções ao longo do vão se manterem retilíneas. A análise numérica é, portanto mais verossímil do que a solução da teoria técnica.

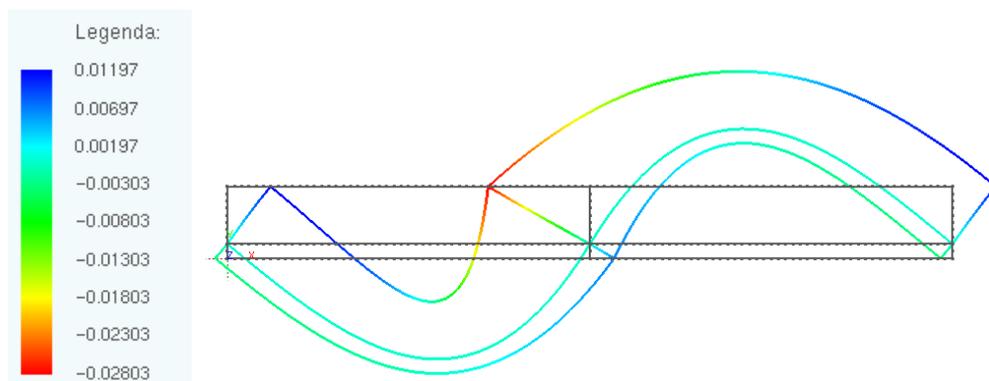


Figura 5.8 – Deformada da viga (ampliada 1000 vezes)

### 5.5.2. Chapa tracionada com núcleo enrijecido

Seja uma chapa quadrada contendo um material enrijecedor ao centro, com carga de tração na superfície superior, conforme a figura 5.9. O material interno possui módulo de elasticidade  $E_{int.} = 2.000$ , sendo este valor 10 vezes maior do que o do material padrão  $E_{ext.} = 200$ . Admite-se o mesmo coeficiente de Poisson para os dois materiais ( $\nu = 0,25$ ). Os nós da face inferior foram todos impedidos de deslocar na direção  $y$ , e apenas o nó central desta face foi restringido na direção  $x$  para impedir a instabilidade do sistema. Utilizou-se para o carregamento o valor de  $P = 100$ .

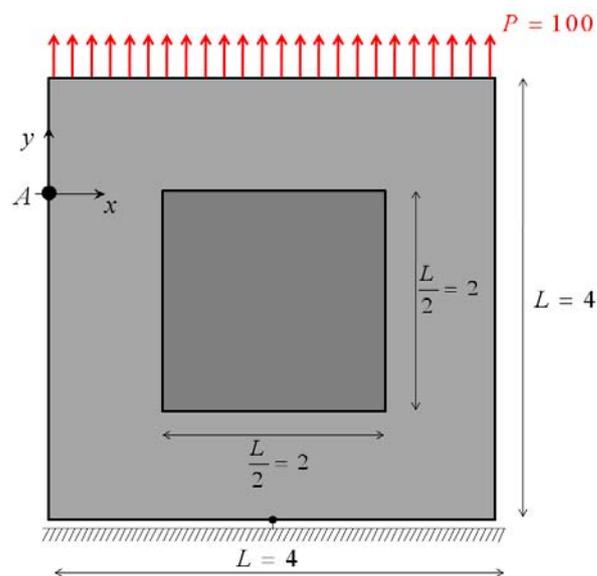


Figura 5.9 – Chapa com enrijecedor

Foram utilizadas três diferentes malhas para este problema, sendo a primeira formada por 124 nós e 80 elementos quadráticos de 0,20 de comprimento cada, distribuídos igualmente ao longo de todo o contorno. A segunda malha foi montada com 484 nós e 640 elementos lineares, enquanto que a terceira malha utiliza o mesmo número de nós anterior, porém com 320 elementos quadráticos.

Como valores de referência, foram utilizados os dados extraídos de (LEITE, 2007) onde é utilizada uma malha de 320 nós com elementos lineares. Foi realizada ainda uma comparação com a utilização do método dos elementos finitos, por meio do programa ANSYS onde são utilizados 6.593 elementos de chapa com 4 nós e 8 graus de liberdade cada.

Os resultados de deslocamentos verticais no alinhamento horizontal a partir do ponto *A* (ver figura 5.9) obtidos com cada uma das malhas, bem como os valores de referência são apresentados no gráfico a seguir.

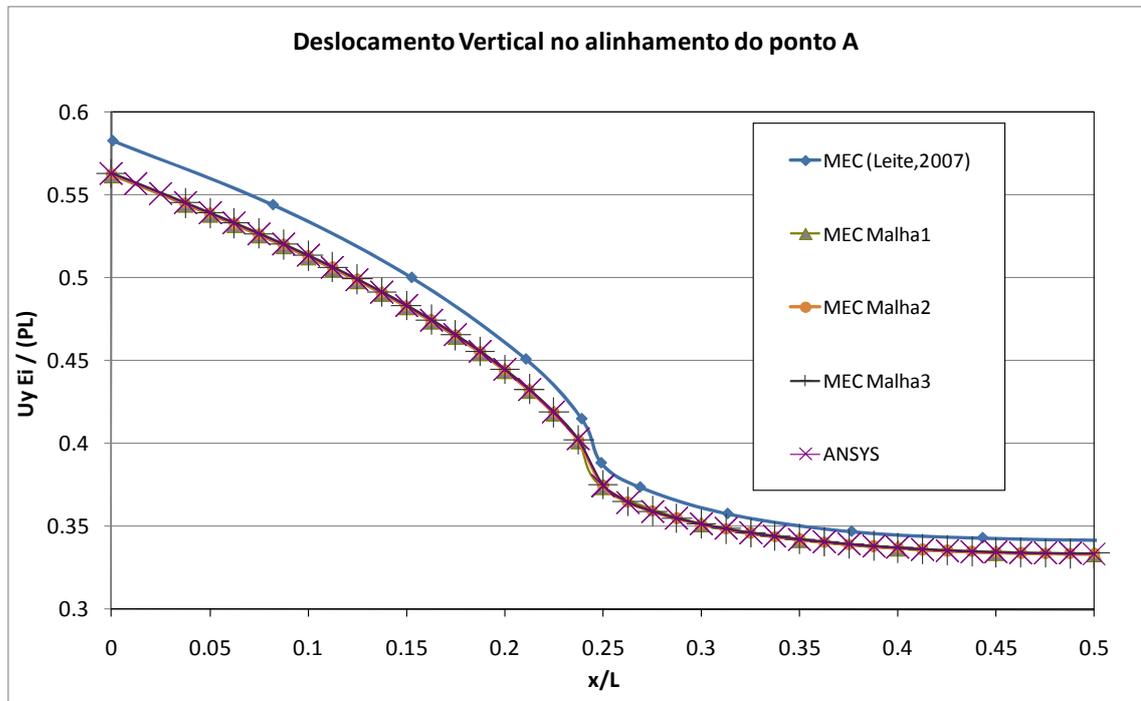


Gráfico 5.2 – Resultado de deslocamento vertical no eixo de referência.

Observa-se que os resultados obtidos com o programa desenvolvido são idênticos aos resultados via método dos elementos finitos utilizando o programa ANSYS. As diferenças observadas com relação aos valores extraídos de (LEITE, 2007) podem ter sido causadas por alguma diferença no modelo adotado. No entanto, não se encontram no trabalho citado informações suficientes para afirmar que o modelo aqui adotado é o mesmo utilizado pelo referido autor, cabendo apenas a observação de que o comportamento é bastante semelhante. No ponto onde há o contato entre os diferentes materiais, percebe-se a mudança de comportamento com deslocamentos bem inferiores aos extremos.

A seguir exibem-se os gráficos de deslocamentos obtidos com o programa desenvolvido, comparando-os com os resultados obtidos pelo uso da ferramenta ANSYS. Todos os resultados são bastante satisfatórios.

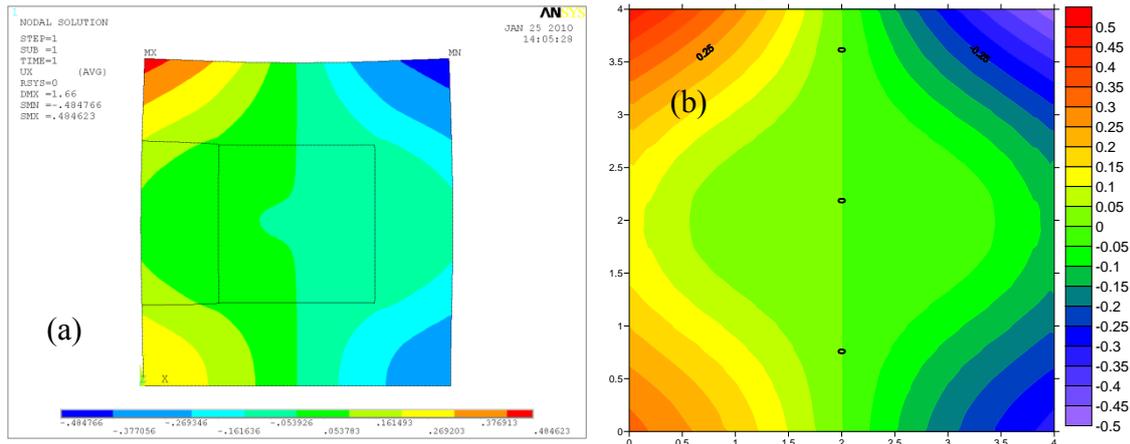


Figura 5.10 – Resultados de deslocamentos horizontais obtidos no (a) ANSYS e (b) neste trabalho

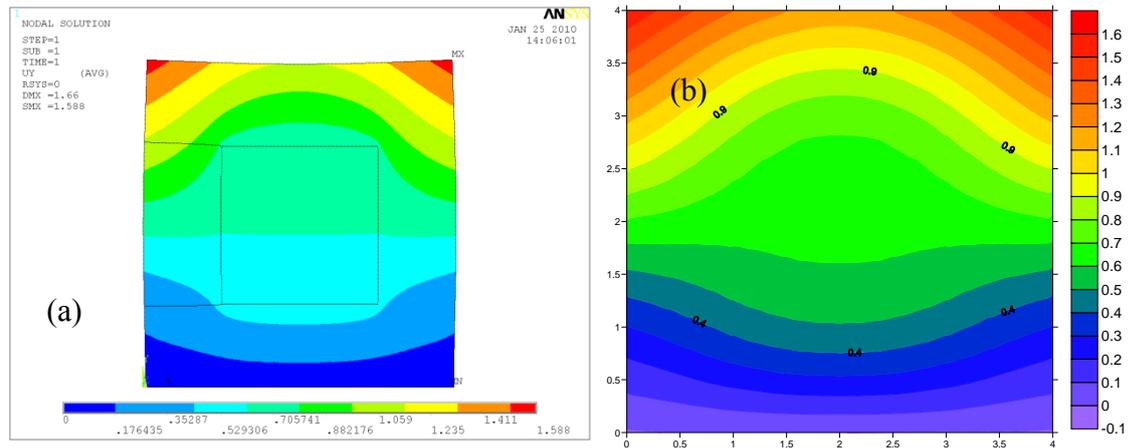


Figura 5.11 – Resultados de deslocamentos verticais obtidos no (a) ANSYS e (b) neste trabalho

Apresentam-se ainda os resultados de tensão calculados com a ferramenta desenvolvida. Uma vantagem dessa formulação é que não há descontinuidade ou saltos de tensão, como ocorre na análise via elementos finitos.

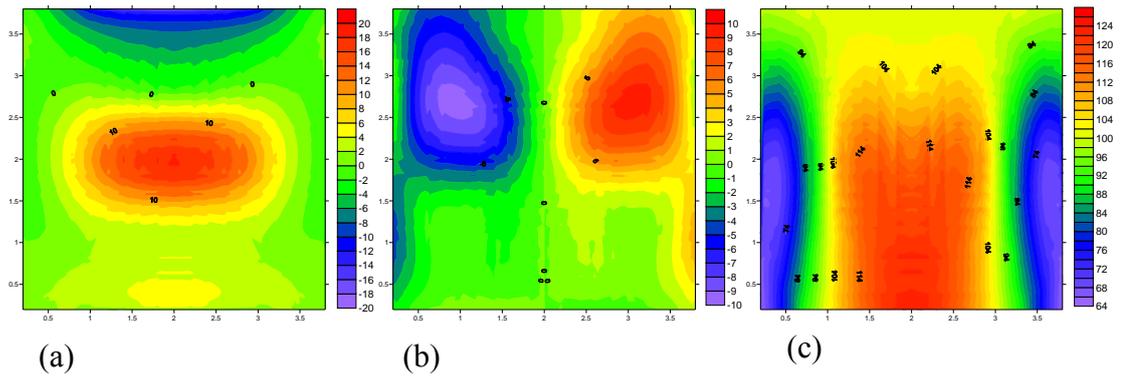


Figura 5.12 – Resultados de tensão (a) na direção  $x$  (b) tensão cisalhante e (c) na direção  $y$

Outros exemplos foram processados e os resultados em geral apresentam diferenças insignificantes em relação aos valores de referência, o que comprova a eficiência da formulação e o correto funcionamento do programa desenvolvido.



## Capítulo 6

### 6. O Método dos Elementos Finitos para análise não linear geométrica

#### 6.1. Apresentação

Sem dúvida o método dos elementos finitos é hoje o mais difundido tanto no meio acadêmico como entre profissionais engenheiros e técnicos para modelagem computacional em engenharia de forma geral. Isso se deve à grande aplicabilidade do método, podendo servir a análise das mais diversas incluindo corpos sólidos, fluidos, meios porosos, meios elásticos ou hiper elásticos, plásticos, em análise linear e não linear de estruturas, análise estática e dinâmica, etc.

A idéia básica é a de que os corpos podem ser estudados como sendo constituídos por elementos de dimensões finitas que se relacionam uns com os outros por meio de seus nós. A malha discretizada é, portanto uma rede de nós ligados por elementos finitos que, quanto mais refinados mais tendem a se aproximar do meio contínuo. Porém, esse refinamento aumenta o número de incógnitas e, conseqüentemente, também o custo computacional.

Existe atualmente uma variada série de elementos finitos disponíveis na literatura e nos pacotes comerciais para modelagem de sólidos, sejam duas ou três dimensões. No caso deste trabalho pretende-se modelar estruturas de pórtico cujas dimensões permitem que o estudo seja realizado por meio de elementos reticulados, como se fossem linhas. Adota-se, portanto o elemento finito de pórtico, também chamado de barra geral por incluir em cada nó translações e rotação como graus de liberdade.

Diversos autores fazem uso desse tipo de elemento em análise estrutural de edificações, inclusive em outros trabalhos de interação solo-estrutura. Vale porém destacar que, quase todos os trabalhos encontrados utilizam os elementos de barra convencionais, muitos destes com aproximação linear da geometria.

Apresenta-se neste capítulo o elemento curvo com aproximação de ordem qualquer para o pórtico, cuja formulação é baseada nos polinômios de Lagrange, de forma semelhante ao elemento curvo do MEC apresentado no capítulo 4. Em seguida, apresenta-se a formulação lagrangeana posicional para análise não linear geométrica, conforme descrito em CODA (2003), GRECO (2004), MACIEL (2008), PASCON (2008), etc.

Antes da formulação do MEF, será apresentada uma breve introdução sobre análise não linear geométrica de estruturas reticuladas e outros conceitos fundamentais adotados na formulação utilizada.

## 6.2. Análise não linear geométrica

### 6.2.1. O conceito da não linearidade geométrica

Podem existir na verdade três tipos diferentes de não linearidade quando se trata do comportamento de uma estrutura. São estes: não linearidade geométrica, física e de contato.

A primeira se resume na determinação da configuração de equilíbrio de uma estrutura na sua situação deslocada. Difere assim do que é usualmente feito na análise linear em que o equilíbrio de forças é realizado na configuração geométrica da estrutura indeslocada. O segundo tipo de não linearidade trata do comportamento físico do material, em que a relação constitutiva é dada por uma lei não linear. A não linearidade de contato, por sua vez, diz respeito à mudança das condições de contorno da estrutura durante a busca do equilíbrio. Esses dois últimos casos não são objeto deste trabalho e será, por essa razão, abordado somente o primeiro tipo.

O exemplo clássico que ilustra de forma clara e objetiva o comportamento não linear geométrico de uma estrutura é o caso de uma barra de comprimento  $\ell$  com apoio simples e resistência elástica ao giro em uma extremidade e com uma carga  $F$  de compressão aplicada na outra, onde existe uma excentricidade  $e$  inicial na aplicação dessa carga, conforme mostra a figura 6.1.

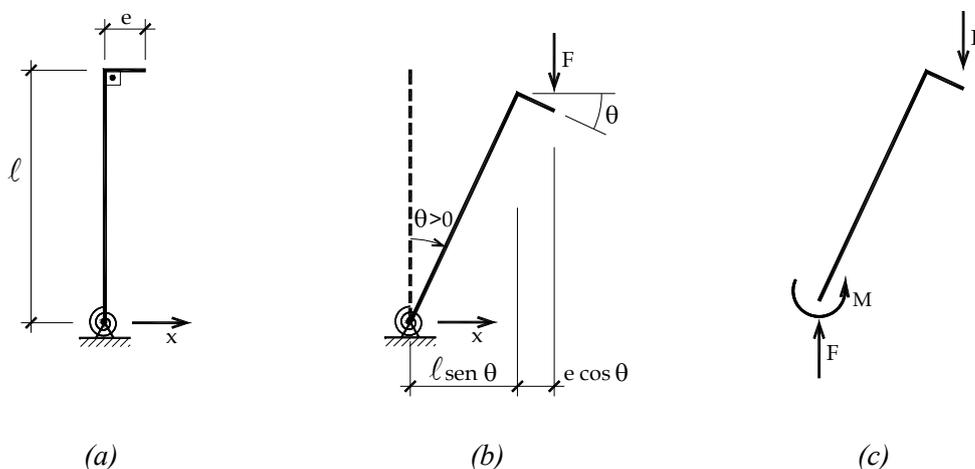


Figura 6.1 – Exemplo clássico: (a) Estrutura descarregada, (b) Configuração de equilíbrio e (c) Diagrama de corpo livre

A estrutura da figura 6.1 (a) encontra-se em uma situação descarregada, até que no momento da aplicação da carga  $F$ , o equilíbrio do sistema se altera para a configuração mostrada na figura 6.1 (b). Chega-se a conclusão de que a seguinte expressão deve ser verdadeira para garantir o equilíbrio mecânico

$$F = \frac{k\theta}{(\ell \text{sen}(\theta) + e \cos(\theta))} \quad (6.01)$$

ou

$$\frac{F}{k} = \frac{\theta}{(\ell \text{sen}(\theta) + e \cos(\theta))} \quad (6.02)$$

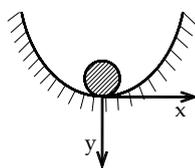
onde  $k$  é o coeficiente de mola do apoio elástico.

Observa-se claramente o comportamento não linear da estrutura em questão, pois o equilíbrio do sistema depende agora da sua configuração geométrica representada pelo ângulo  $\theta$  na equação. Por esse motivo é dado o nome ao fenômeno de não linearidade geométrica.

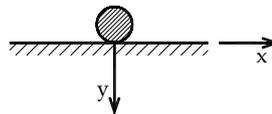
Uma avaliação gráfica da equação (6.02) permite observar a existência de uma região de bifurcação quando  $\theta < 0$  para determinados níveis de carregamento, onde qualquer perturbação leva a estrutura a uma mudança brusca de geometria. Esse comportamento diz respeito à instabilidade das estruturas e o nível de carga para que isso aconteça é chamado carregamento crítico.

### 6.2.2. Princípio da mínima energia potencial

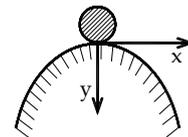
Vamos tratar agora de um conceito fundamental em análise de estruturas, que é o princípio da mínima energia potencial total. Inicialmente vamos apresentar o conceito de equilíbrio de um sistema mecânico. Existem três tipos fundamentais de equilíbrio, a seguir ilustrados.



(a) Equilíbrio estável



(b) Equilíbrio Indiferente



(c) Equilíbrio instável

Figura 6.2 – Naturezas do equilíbrio mecânico

No equilíbrio dito estável, qualquer perturbação introduzida no sistema ocasionará um movimento oscilatório em torno da posição de repouso até retornar à mesma. Essa oscilação

será mais intensa quanto maior for a perturbação inicial. Na figura 6.2 (a), um impacto na esfera sólida produzirá esse tipo de efeito.

A situação da figura 6.2 (b) é a do equilíbrio indiferente, pois em qualquer posição o sistema poderá ser equilibrado.

O último caso, na figura 6.2 (c) ilustra o equilíbrio chamado instável, em que qualquer perturbação introduzida produz um movimento sem volta, por menor que seja essa perturbação. Um impacto na esfera agora ocasiona um movimento que não retorna a posição original.

Vamos escrever as expressões de energia de cada dos sistemas da figura 6.2. Nesse caso a energia total será a energia potencial do peso da esfera, e pode-se expressa-la em termos da coordenada  $x$  como:

$$\Pi_a = Fy = Fx^2 \quad (6.03)$$

$$\Pi_b = 0 \quad (6.04)$$

$$\Pi_c = -Fy = -Fx^2 \quad (6.05)$$

Ao realizarmos a primeira variação da energia em relação à coordenada  $x$  nas expressões anteriores obteremos as seguintes relações

$$\frac{d\Pi_a}{dx} = 2Fx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (6.06)$$

$$\frac{d\Pi_b}{dx} = 0 \quad \forall x \quad (6.07)$$

$$\frac{d\Pi_c}{dx} = -2Fx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (6.08)$$

Por último, vamos analisar também a segunda derivada de cada equação

$$\frac{d^2\Pi_a}{dx^2} > 0 \quad (6.09)$$

$$\frac{d^2\Pi_b}{dx^2} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{d^2\Pi_c}{dx^2} < 0 \quad (6.11)$$

Dos resultados acima obtidos se constata que em  $x=0$  a energia potencial possui valor mínimo para  $\Pi_a$ , valor máximo para  $\Pi_c$  e indiferente para  $\Pi_b$ . Logo, concluímos que o equilíbrio de um sistema mecânico será estável quando a posição de equilíbrio representa um ponto mínimo do funcional de energia potencial total  $\Pi$ . Na situação instável ocorre o inverso, sendo este caso representado por um ponto de máximo da função.

A natureza tende a buscar sempre o equilíbrio estável, ou seja, os sistemas mecânicos tendem a se equilibrar na posição em que a energia potencial é mínima e isso pode ser traduzido matematicamente pela primeira variação do funcional de energia nula e a segunda variação estritamente positiva.

### ***6.3. Formulação do MEF posicional para análise NLG de pórticos***

Este item dedica-se exclusivamente à descrição do MEF posicional para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas, que foi utilizada no desenvolvimento do programa computacional AcadFrame. Este programa, desenvolvido pelo prof. Dr. Humberto Breves Coda e pelo Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola em 2006 é utilizado neste trabalho para modelagem da estrutura do edifício. O código foi acoplado ao programa de análise de meios contínuos heterogêneos via MEC apresentado nos capítulos anteriores. Apresenta-se aqui de forma resumida a formulação do método e em seguida alguns exemplos de aplicação, ficando claro que o bom entendimento da mesma é necessário para se desenvolver o acoplamento entre as técnicas, a ser apresentado no capítulo seguinte.

#### ***6.3.1. Conceito de mudança de forma e medidas de tensão-deformação***

Toda mudança de configuração geométrica de um sólido está associada a uma ação mecânica, ou térmica. Com essa mudança, o corpo sólido passa da situação indeslocada para a situação deslocada, surgindo então tensões e deformações ao longo do mesmo. Matematicamente isso pode ser representado por uma função mudança de configuração em relação ao volume inicial do corpo.

Na formulação posicional, considera-se um eixo referencial fixo (lagrangeano) e fora do corpo em estudo. Assim, faz-se necessário o mapeamento das posições iniciais e finais (ou correntes) do sólido estrutural em relação a este referencial. Vamos adotar a seguinte notação: ao sofrer ação de uma função mudança de configuração  $f(x)$  a estrutura, antes em situação de forma geométrica  $B_0$ , passará para a configuração  $B_1$ , como mostra a figura 6.3.

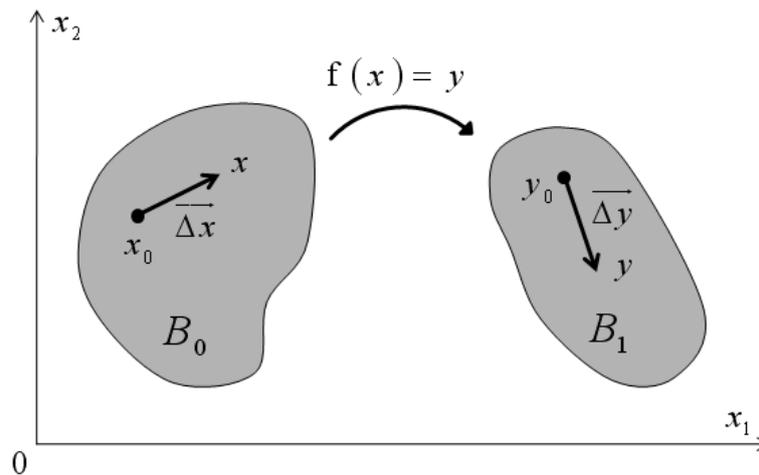


Figura 6.3 – Mudança de configuração de um sólido

Entende-se como sendo a deformação de um ponto no contínuo a alteração de forma da vizinhança deste ponto através da função vetorial  $f$ , ou seja, ocorre uma mudança de comprimento das fibras e de ângulos entre as mesmas ao redor do ponto. Vamos assim escrever uma aproximação para  $f$  em torno de um ponto  $x_0$  qualquer na configuração geométrica de referência  $B_0$ . Chama-se a atenção para o fato de que, a adoção dessa referência caracteriza a formulação lagrangeana em análise não linear. A aproximação é então escrita na seguinte forma

$$y = f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \text{Grad } f|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (6.12)$$

Nessa expressão, o termo  $\text{Grad } ( )$  indica o gradiente em relação à configuração de referência.  $B_0$ .

Simplificadamente, pode-se escrever

$$y = y_0 + \text{Grad } f|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (6.13)$$

No limite em que  $\Delta x$  tende a zero, a equação (6.12) deixa de ser aproximada e fica escrita como

$$dy = \text{Grad } f|_{x_0} dx \quad (6.14)$$

que também pode ser escrita na seguinte forma aberta

$$\begin{cases} dy_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_{x_0} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_{x_0} dx_2 \\ dy_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_{x_0} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_{x_0} dx_2 \end{cases} \quad (6.15)$$

Em (6.15) as derivadas parciais de  $f$  foram calculadas no ponto  $x_0$ . Convém agora escrever estas expressões em notação matricial para um ponto  $x_0$  também genérico.

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

ou ainda resumidamente

$$\overline{dy} = \mathbf{A} \overline{dx} \quad (6.17)$$

onde a matriz (ou tensor de segunda ordem)  $\mathbf{A}$  é chamada gradiente da função mudança de configuração em qualquer ponto do domínio  $B_0$  para o qual se queira avaliar a deformação. Este tensor informa portanto a mudança ocorrida no corpo (no ponto  $x_0$ ) quando o mesmo sai da configuração inicial para a configuração corrente.

É importante observar que  $\overline{dx}$  e  $\overline{dy}$  são vetores infinitesimais, respectivamente na configuração inicial e corrente do corpo. O tensor  $\mathbf{A}$  apenas relaciona estes vetores, por meio da própria função que rege a mudança de forma. Com isso conclui-se que, sendo  $\overline{dx} \neq 0$ , é fisicamente impossível que  $\overline{dy}$  tenha valor nulo. Sendo assim, demonstra-se que o determinante de  $\mathbf{A}$  (ou jacobiano  $J$ ) deve ser positivo, caso contrário estará se admitindo que o material pode virar do avesso ou desaparecer.

$$J = \det(\mathbf{A}) > 0 \quad (6.18)$$

Utilizando a idéia de medida de alongamento, demonstra-se que na relação entre o comprimento inicial e final de uma fibra do material aparece um tensor dado pelo produto  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Esse tensor é chamado de Alongamento de Cauchy-Green.

Para um corpo indeformável o comprimento de uma fibra  $\overline{dx}$  qualquer e o ângulo entre duas fibras não se alteram após a mudança de configuração. Isso se escreve na seguinte forma

$$|\overline{dy}| = |\overline{dx}| \quad \therefore \quad \overline{dx}_1 \cdot \overline{dx}_2 = \overline{dy}_1 \cdot \overline{dy}_2 \quad (6.19)$$

É interessante notar nesta situação que o jacobiano resulta em

$$J = \det(\mathbf{A}) = 1 \quad (6.20)$$

e isso representa um movimento de corpo rígido.

Observando a equação (6.19) e sabendo das propriedades matemáticas do tensor de segunda ordem, é possível escrever a seguinte relação para o caso de um corpo deformável

$$|dy|^2 - |dx|^2 = dx^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) dx \quad (6.21)$$

donde se conclui que a condição necessária e suficiente para a indeformabilidade de um ponto é

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (6.21)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

Caso esta condição não seja atendida em determinado ponto, significa apenas dizer que houve alguma deformação neste ponto e o tensor  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})$  mede a intensidade dessa deformação. Isso define a medida de deformação que será utilizada

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (6.23)$$

$\mathbf{E}$  é chamado de medida de deformação de Green e pode ser aplicada à análise não linear de estruturas. Para pequenas deformações, esta medida se confunde com a deformação de engenharia mesmo em problemas que envolvam grandes deslocamentos.

Sabe-se que para toda medida de deformação, há uma medida de tensão conjugada. Neste caso, a tensão conjugada da deformação de Green é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$ .

A tensão de Cauchy  $\sigma$  é definida como a tensão atuante na configuração corrente. Difere da tensão nominal de engenharia que é medida na configuração inicial ou indeformada do corpo e por esse motivo a tensão de Cauchy é também chamada de tensão real. É possível demonstrar que existe uma relação entre a tensão de Cauchy e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, dada por

$$\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \quad (6.24)$$

sendo  $J$  o determinante do tensor  $\mathbf{A}$ .

Podemos então com isso escrever o funcional de energia de deformação para a deformação de Green com par conjugado tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie em função das posições do sólido. Para encontrar a situação de equilíbrio, aplica-se o princípio da mínima energia a este funcional, utilizando como parâmetros as posições nodais dos elementos finitos.

### 6.3.2. Elementos curvos e Polinômios de Lagrange

Assim como no MEC, será utilizado o elemento curvo com aproximação de qualquer ordem para os elementos de pórtico no MEF. Para tanto, será necessário a adoção dos polinômios de Lagrange como função aproximadora, de forma idêntica à apresentada no item 4.3.2 do capítulo 4.

Nesse caso, pretende-se aproximar a linha média do elemento  $j$  de barra geral, o que se traduz na seguinte expressão

$$x_i^j(\xi) = \phi_{\ell(\xi)} X_{i\ell}^j \quad (6.25)$$

onde  $x_i$  são as posições iniciais que se pretende aproximar nas direções  $i$ ,  $X_{i\ell}$  as posições nodais iniciais conhecidas de cada nó  $\ell$ , e  $\phi$  os valores das funções de forma associadas a cada nó. Da mesma maneira, aproximam-se a posições correntes ou atuais do elemento na seguinte forma

$$y_i^j(\xi) = \phi_{\ell(\xi)} Y_{i\ell}^j \quad (6.26)$$

Como exemplo de aplicação, imaginemos um elemento  $m$  de pórtico com aproximação cúbica, ou seja, com quatro nós. A figura a seguir ilustra os nós cujas posições são conhecidas e também a linha que se pretende aproximar. Segundo o que foi descrito acima, qualquer posição na linha média do elemento pode ser calculada de forma aproximada pelas equações

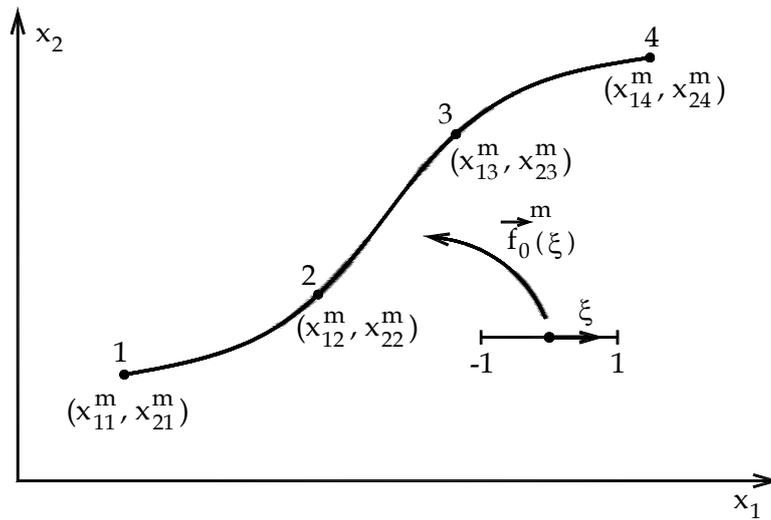


Figura 6.4 – Elemento curvo de aproximação cúbica

$$x_1^m(\xi) = \phi_{1(\xi)} X_{11}^m + \phi_{2(\xi)} X_{12}^m + \phi_{3(\xi)} X_{13}^m + \phi_{4(\xi)} X_{14}^m \quad (6.27)$$

$$x_2^m(\xi) = \phi_{1(\xi)} X_{21}^m + \phi_{2(\xi)} X_{22}^m + \phi_{3(\xi)} X_{23}^m + \phi_{4(\xi)} X_{24}^m \quad (6.28)$$

Assim, o elemento é descrito por uma função polinomial escrita em coordenadas adimensionais  $\xi$  de  $[-1, +1]$ . Os valores das funções de forma deverão ser calculados no ponto adimensional  $\xi$  que se pretende aproximar. Resta agora somente definir quais serão as funções adotadas. Como já mencionado as funções de forma serão calculadas através dos polinômios de Lagrange que são dados pelo produtório aqui reproduzido

$$\phi_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left( \frac{\xi - \xi_i}{\xi_k - \xi_i} \right) \quad (4.46)$$

Exemplos gráficos destas funções foram citados anteriormente (vide figura 4.9).

Tal qual no MEC, basta que o usuário defina a quantidade de nós que deseja para o elemento finito. No caso particular do método dos elementos finitos posicional, essas aproximações serão muito úteis na parametrização dos elementos com objetivo de mapear as configurações iniciais e correntes.

### ***6.3.3. Mapeamento das configurações inicial e corrente***

Para que o MEF posicional seja implementado, se faz necessário realizar o mapeamento das configurações iniciais e correntes dos elementos de pórtico. O termo “configuração corrente” é usado, pois conforme o processo de interação vai sendo resolvido, a estrutura continua se deformando, até atingir o equilíbrio.

O mapeamento da configuração inicial consiste em se estabelecer todas as posições dos nós da estrutura indeslocada, bem como o ângulo formado pela seção transversal em cada nó com o eixo de referência horizontal. Os valores de posição de cada nó da estrutura são dados de entrada fornecidos pelo usuário do programa.

As seções são consideradas inicialmente perpendiculares à linha média de cada elemento. A necessidade da determinação do ângulo citado se deve ao fato de ser incluída na formulação a cinemática de Reissner em que se considera que a seção plana do elemento permanece plana, porém não necessariamente perpendicular à linha média, podendo girar de um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo horizontal. Assim, o mapeamento da posição corrente consiste então em se determinar as novas posições de cada nó e os valores de giro relativo  $\Delta\theta$ .

Começando pela configuração inicial, seja um elemento de pórtico conforme mostra a figura a seguir, inicialmente indeslocado.

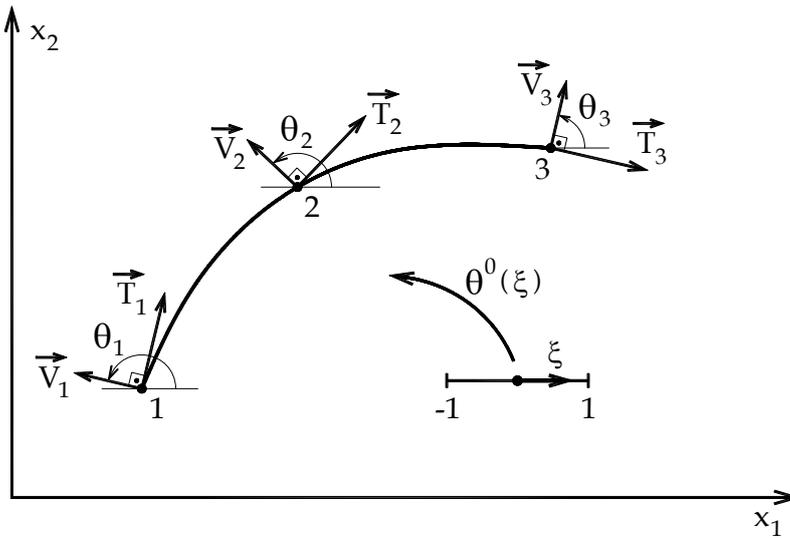


Figura 6.5 – Elemento de pórtico de seção constante

Os vetores tangentes  $\vec{T}_k$  em cada nó  $k$  encontram-se perpendiculares aos versores normais  $\vec{V}_k$ . Isso corresponde dizer que a seção inicialmente é perpendicular à linha média do elemento. Cada componente do vetor tangente pode ser calculada como

$$T_{ik} = \left. \frac{d\phi_\ell(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_k} X_{i\ell}^m \quad (6.29)$$

onde  $\xi_k$  são as coordenadas adimensionais para os nós e  $T_{ik}$  a componente  $i$  do vetor tangente no nó  $k$ . Em seguida calcula-se o versor  $V_{ik}$  que é dado por

$$V_{1k} = -T_{2k} / \sqrt{T_{i(k)}T_{i(k)}} \quad (6.30)$$

$$V_{2k} = T_{1k} / \sqrt{T_{i(k)}T_{i(k)}} \quad (6.31)$$

sendo que os ângulos  $\theta_k^0$  são determinados pela relação  $\text{sen}(\theta)$  e  $\text{cos}(\theta)$ .

Podemos aplicar o conceito de aproximação de funções através dos polinômios de Lagrange para aproximar os valores do ângulo inicial  $\theta^0(\xi)$  ao longo da barra

$$\theta^0(\xi) = \phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0 \quad (6.32)$$

Considera-se agora um elemento de pórtico com altura constante  $h_0$ , conforme mostra a figura 6.6 a seguir.

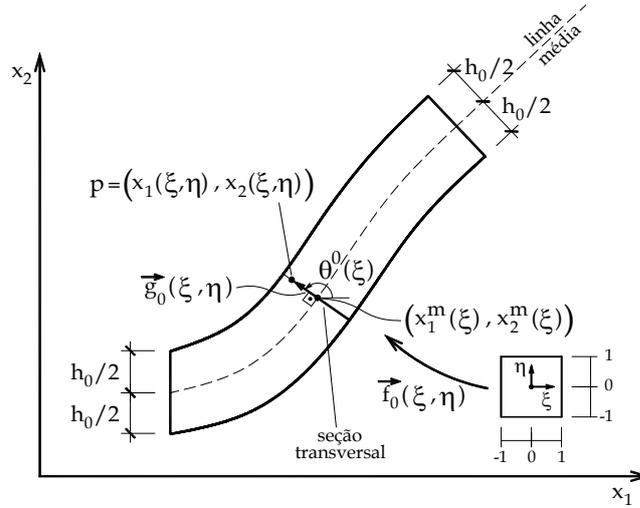


Figura 6.6 – Mapeamento do elemento de pórtico de seção constante na configuração inicial

Para descrever qualquer ponto  $p$  pertencente ao elemento ao longo da altura adota-se uma nova variável adimensional  $\eta$  que também varia de -1 a 1 e é ortogonal à  $\xi$ . A posição do ponto  $p$  é dada pela soma do ponto correspondente na linha média com o vetor  $g_i^0(\xi, \eta)$

$$x_i(\xi, \eta) = x_i^m(\xi) + g_i^0(\xi, \eta) \quad (6.33)$$

Esse ponto pode estar no máximo a uma distância  $h_0/2$  da linha média do elemento.

Pela geometria observada na figura, escreve-se então que

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.34)$$

$$g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.35)$$

Finalmente, substituindo (6.34) e (6.35) em (6.33) obtemos o mapeamento posicional da configuração inicial dado por

$$x_1(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.36)$$

$$x_2(\xi, \eta) = \phi_\ell X_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \text{sen}(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0) \quad (6.37)$$

Para a configuração corrente (ou atual) as posições dos nós e os valores de ângulos das seções transversais planas são as incógnitas do problema e serão denominados parâmetros ou graus de liberdade. Difere, portanto da posição inicial que já é conhecida.

Escreve-se a posição de um ponto qualquer do elemento de pórtico, em sua configuração corrente  $y_i$  em função dos parâmetros incógnitos de forma semelhante ao mapeamento descrito anteriormente.

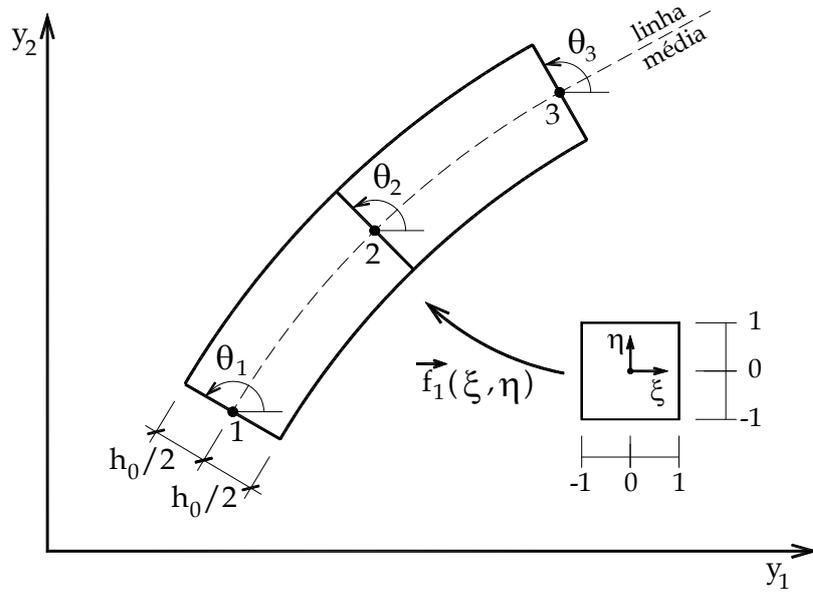


Figura 6.7 – Mapeamento do elemento na configuração atual

$$y_1(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{1\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.38)$$

$$y_2(\xi, \eta) = \phi_\ell Y_{2\ell}^m + \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_\ell(\xi)\theta_\ell) \quad (6.39)$$

onde  $Y_{i\ell}^m$  são as coordenadas atuais e  $\theta_\ell$  os ângulos nodais atuais. Estes valores serão calculados durante todo o processo.

Para evitar o travamento, adota-se coeficiente de Poisson nulo.

### 6.3.4. Mudança de configuração

Tendo em vista o problema de um elemento de pórtico inicialmente na configuração geométrica  $B_0$  levado à outra configuração  $B_1$  por uma função mudança de configuração  $f$ , sabemos que ambas as configurações podem ser mapeadas em função das posições nodais do elemento.

A função  $f$  pode também ser escrita como uma composição dos mapeamentos inicial e corrente na seguinte forma

$$\vec{f} = \vec{f}_1 \circ (\vec{f}_0)^{-1} \quad (6.40)$$

A figura 6.8 ilustra essa composição.

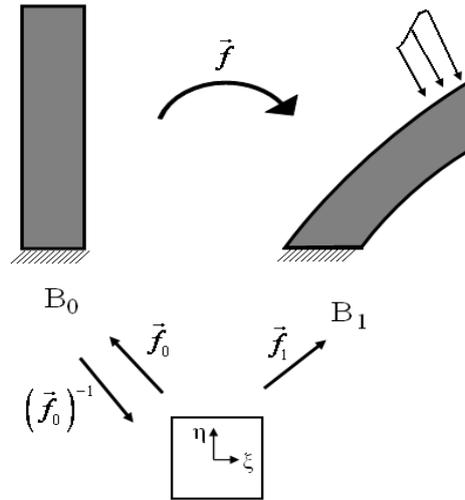


Figura 6.8 – Composição de mapeamentos na mudança de configuração

O vetor  $\vec{f}_0$  deve ser entendido como a função que realiza a mudança de coordenadas entre o elemento adimensional e a configuração inicial. Analogamente, o vetor  $\vec{f}_1$  faz o mesmo entre o elemento adimensional e a configuração corrente. Para cada um destes existe um gradiente  $\mathbf{A}$  correspondente, de acordo com o que foi apresentado em 6.3.1.

Assim posto, pela relação de (6.40) podemos também escrever o gradiente da função mudança de configuração

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (6.41)$$

Os tensores  $\mathbf{A}^0$  e  $\mathbf{A}^1$  são calculados a partir das expressões (6.36), (6.37), (6.38) e (6.39) do mapeamento, respectivamente, da configuração inicial e corrente.

$$\mathbf{A}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi} & \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi} & \frac{\partial y_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Ao ser adotada uma posição tentativa para a configuração corrente, é possível calcular  $\mathbf{A}^1$ . As matrizes  $\mathbf{A}^0$  e  $\mathbf{A}^1$  são então numéricas para um par de coordenadas adimensionais  $(\xi, \eta)$ . Logo é possível calcular o alongamento de Cauchy dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{A}^0)^{-T} (\mathbf{A}^1)^T \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (6.44)$$

onde o símbolo  $(-T)$  representa transposta da inversa.

Dessa maneira, a deformação de Green e a energia de deformação estão também numericamente definidas em função das posições nodais.

### 6.3.5. Solução do sistema através do processo de Newton-Raphson

Sabe-se que a energia potencial total de uma barra sujeita a um carregamento externo pode ser escrita como

$$\Pi = U_e + P \quad (6.45)$$

onde  $U_e$  é a energia de deformação do corpo e  $P$  o potencial das forças externas aplicadas. A primeira é dada pela integral da energia específica de deformação  $u_e$  no volume inicial  $V_0$ .  $P$  pode ser escrito como

$$P = -F_j Y_j - Q_j Y_j \quad (6.46)$$

sendo  $F_j$  os valores de forças externas aplicados nos pontos  $j$  e  $Y_j$  as respectivas posições. O vetor  $Q_j$  é resultado de uma integral sobre os elementos finitos a fim de transformar carregamentos distribuídos em cargas concentradas nos nós, pois toda a formulação do MEF é baseada em valores nodais.

O procedimento numérico consiste em adotar uma posição tentativa  $Y^{tent.}$  para a configuração corrente, tornando possível o cálculo do tensor  $\mathbf{A}_1$ . Assim, define-se a energia de deformação em função das coordenadas nodais dos elementos. Sabendo disso e atentando para (6.46) é possível escrever todo o funcional da energia do sistema em função das posições nodais. Aplicando a este o princípio da mínima energia potencial temos que

$$\delta \Pi = 0 \quad (6.47)$$

logo

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = \frac{\partial U_e(Y_{tent.})}{\partial Y} - F = 0 \quad (6.48)$$

tal que

$$\frac{\partial U_e}{\partial Y} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y} dV_0 \quad (6.49)$$

Nessa última equação,  $u_e$  é escrita também em função dos parâmetros nodais utilizando o par conjugado deformação de Green e tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, apresentados no item 6.3.1. A energia de deformação específica adotada neste trabalho define uma relação linear entre a deformação de Green e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Essa derivada em relação à posição genérica  $Y$  da estrutura pode ser também entendida como a força interna atuante no elemento, e assim (6.48) pode ser reescrita como

$$F_{\text{int.}}(Y_{\text{tent.}}) - F_{\text{ext.}} = 0 \quad (6.50)$$

Sendo  $F_{\text{ext.}}$  as forças aplicadas.

A equação (6.50) é uma equação não linear e deve ser resolvida por um processo iterativo. Neste trabalho será utilizado o processo de solução de sistemas não lineares de Newton-Raphson, a seguir descrito.

Escreve-se a expressão (6.50) como sendo um vetor  $g_{(Y)}$  que tem valor nulo a partir do momento que  $Y$  é a solução de (6.50). Fisicamente isso significa que o equilíbrio de forças foi atingido, e a estrutura terá sido, portanto resolvida. Porém, enquanto  $g_{(Y)}$  não tiver valor nulo dever-se-á calcular uma nova tentativa  $Y_{\text{tent.}}$  de posição.

Do descrito acima, tem-se que

$$g_{(Y)} = F_{\text{int.}(Y)} - F_{\text{ext.}} = 0 \quad (6.51)$$

onde na verdade pretende-se escrever

$$g_{(Y_{\text{tent.}})} = F_{\text{int.}(Y_{\text{tent.}})} - F_{\text{ext.}} = g_{\text{tent.}} \quad (6.52)$$

O vetor  $g_{\text{tent.}}$  é definido como vetor de desbalanceamento de forças no sistema mecânico.

Em seguida, realiza-se uma expansão em série de Taylor para  $g_{(Y)}$  em torno da tentativa  $Y_{\text{tent.}}$

$$g_{(Y)} = g_{\text{tent.}} + \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{Y_{\text{tent.}}} \Delta Y \quad (6.53)$$

Pela equação (6.51), sabe-se que  $g_{(Y)} = 0$ . Chamando o termo  $\partial g / \partial Y$  de  $H$ , (6.53) é assim reescrita

$$H \cdot \Delta Y = -g_{\text{tent.}} \quad (6.54)$$

ou ainda

$$\Delta Y = -H^{-1} g_{\text{tent.}} \quad (6.55)$$

A equação (6.55), para um  $g_{\text{tent.}}$  conhecido, é um sistema linear e pode ser resolvido como tal.

O termo  $H = \partial^2 g / \partial Y^2$  é chamado de matriz Hessiana do problema. Essa matriz é a segunda derivada da energia de deformação.

$\Delta Y$  é a variação da posição e deverá ser acrescentado à posição tentativa atual para a iteração seguinte.

$$Y_{tent.+1} = Y_{tent.} + \Delta Y \quad (6.55)$$

Com a nova posição  $Y_{tent.+1}$  recalcula-se o vetor de desbalanceamento  $g_{tent.}$  e a matriz hessiana. Resolve-se novamente o sistema para calcular um novo valor de  $\Delta Y$ . Assim sucessivamente, realiza-se esse processo até que uma das seguintes condições se verifique.

$$\frac{|\Delta Y|}{|Y_0|} < Tol. \quad (6.56)$$

ou

$$\frac{|g|}{|F_{ext.}|} < Tol. \quad (6.57)$$

onde a tolerância ( $Tol.$ ) é um valor arbitrário e pequeno que define quando o equilíbrio foi atingido de forma satisfatória.

Ao final do processo iterativo tem-se então a posição referente à configuração de equilíbrio estável da estrutura. Maiores detalhes sobre a formulação podem ser encontrados em CODA (2003), GRECO (2004), MACIEL (2008) e MINSKI (2008).

Apresentam-se agora um exemplo de aplicação da formulação aqui descrita.

## 6.5. Exemplos de aplicação

A formulação do MEF posicional aplicada à análise NLG de estruturas reticuladas foi apresentada e validada nos trabalhos de referência anteriormente citados. O exemplo a seguir serve apenas para demonstrar ao leitor a eficiência da formulação, visto que neste trabalho utilizou-se de código computacional do programa AcadFrame para a modelagem da estrutura edificante. Outros exemplos poderão ser encontrados nos trabalhos de CODA (2003) e GRECO (2004).

### 6.5.1. Viga em balanço com momento aplicado

Trata-se de uma viga em balanço com momento aplicado na extremidade livre. Adota-se o momento  $M = 502.654,8 \text{ kgf.cm}$ . Valores de comprimento, área e momento de inércia da seção transversal e módulo de elasticidade são adotados de acordo com o que é mostrado na figura 6.9.

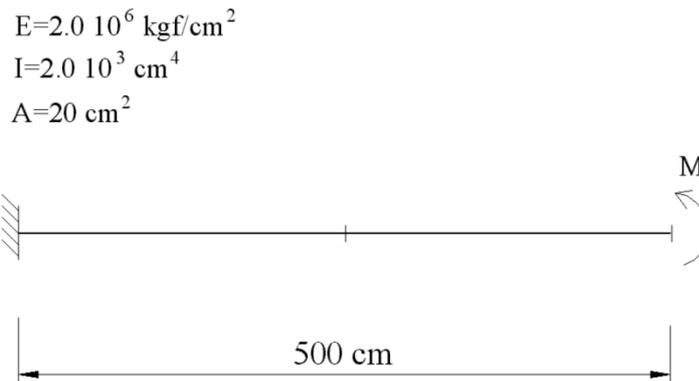


Figura 6.9 – Exemplo de viga em balanço com momento aplicado

Foi adotada uma malha de 100 elementos finitos com aproximação cúbica, ou seja, com quatro nós por elemento. Dividiu-se o problema em passos de carga para avaliação do comportamento da viga a cada nível de momento.

Esse problema possui solução analítica para a relação tensão/deformação de engenharia, e esta é usada como referência. A seguir apresenta-se o resultado de rotação na extremidade livre em função dos níveis de momento aplicado.

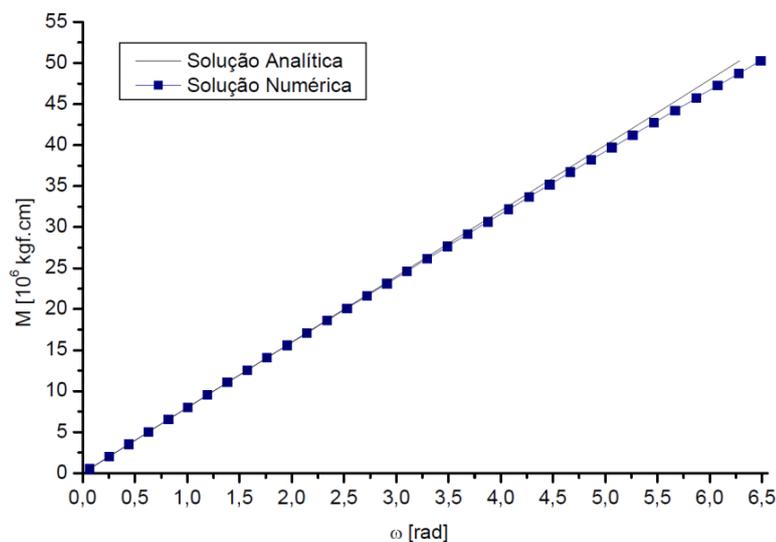


Gráfico 6.1 – Resultado de rotação para cada passo de carga

Apresenta-se a seguir as configurações deslocadas da estrutura para diversos níveis de momento até o giro completo da viga. O giro da viga não é uma circunferência exata, pois não é possível aproximar tal geometria com uma função cúbica. Além da aproximação adotada (cúbica) a diferença entre as soluções numérica e analítica se deve à diferença entre as leis constitutivas adotadas.

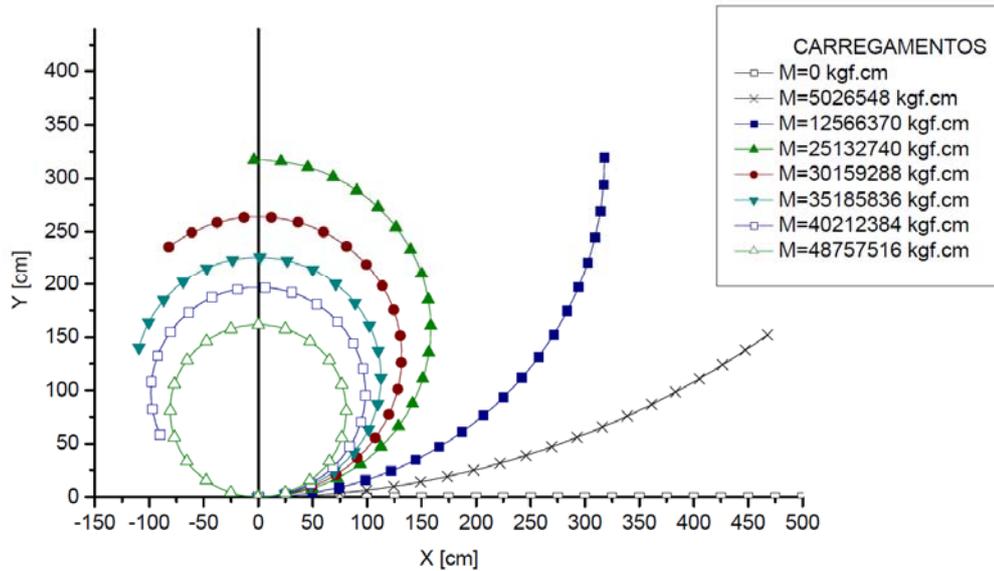


Gráfico 6.2 – Configuração geométrica da viga para vários níveis de carga



# Capítulo 7

## 7. Acoplamento MEC/MEF

### 7.1. Apresentação

Nos capítulos anteriores as formulações do MEC e do MEF foram apresentadas isoladamente. Exemplos de aplicação de cada formulação através de códigos computacionais foram analisados e comprovam suas eficiências na análise de meios contínuos e estruturas. Para cumprir com o objetivo do trabalho, resta agora acoplar os dois códigos para análise de problemas em que as estruturas do MEF interagem com o meio contínuo do MEC.

Como foi visto no capítulo de referências bibliográficas, o acoplamento entre métodos numéricos distintos tem grande utilidade na análise da interação entre diferentes meios. Estudos sobre interação solo-estrutura e meios enrijecidos ou fibrosos são geralmente os temas abordados para aplicação dessa metodologia. A escolha do MEC e do MEF se justifica pelo que foi apresentado nos capítulos anteriores. No caso do solo heterogêneo ou não, considerado elástico linear, a modelagem via MEC se apresenta como a mais adequada, enquanto que para a estrutura reticulada considerando a análise NLG o MEF posicional se mostra bastante eficiente.

Após o desenvolvimento do programa de análise elástica de meios heterogêneos via MEC conforme os capítulos 4 e 5, o acoplamento deste código foi então implementado ao programa de pórtico não linear geométrico AcadFrame, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC, pelo prof. Dr. Humberto Breves Coda e pelo Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola. Esse código por sua vez é baseado na formulação descrita no capítulo 6 e apresentada em MACIEL (2008). Veremos agora como foi realizado o acoplamento entre os diferentes códigos computacionais para gerar um só programa de análise não linear geométrica do fenômeno de interação solo-estrutura.

Existem basicamente duas maneiras de se realizar tal acoplamento: através da introdução de termos do MEF no sistema montado via MEC ou a situação inversa (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1992). Escolhe-se aplicar as condições geométricas, cinemáticas iniciais, físicas e naturais (de carregamento) do solo ao MEF por meio da matriz de rigidez condensada advinda do MEC. Assim, admite-se que o solo funciona como condição de contorno para a estrutura no MEF, ou seja, não é preciso inserir nenhum outro apoio nos elementos reticulados para que o sistema se torne determinado.

Descreve-se a seguir os procedimentos algébricos do acoplamento que é baseado em estratégia semelhante ao que foi desenvolvido no capítulo 5 para o acoplamento MEC/MEC. Apresenta-se em seguida a técnica de suavização por mínimos quadrados aplicada às matrizes do MEC, seguindo sugestão de BOTTA (2003) e WUTZOW (2003) para melhorar as respostas de forças de superfície no contato. Por último apresentam-se exemplos de validação e aplicação do trabalho, fazendo-se as devidas considerações com relação a outras metodologias de análise.

## 7.2. A técnica algébrica de acoplamento

No acoplamento entre o MEC e o MEF, as condições do solo são levadas ao sistema de equações do MEF por meio de uma condensação das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ . O tratamento dado a estas matrizes resulta por fim em outra matriz relativa aos nós acoplados que pode ser considerada como uma matriz de rigidez equivalente para o meio contínuo. Deve-se comentar que esta manipulação é feita após serem aplicadas as condições de contorno no sistema do MEC, ou seja, colunas de nós com deslocamento restrito já deverão ter sido trocadas antes das aplicações que serão demonstradas a seguir.

Considere um domínio  $\Omega$  qualquer modelado via MEC e constituído por material elástico que se encontra acoplado a um sistema de barras modelado via MEF, conforme a figura a 7.1 seguir.

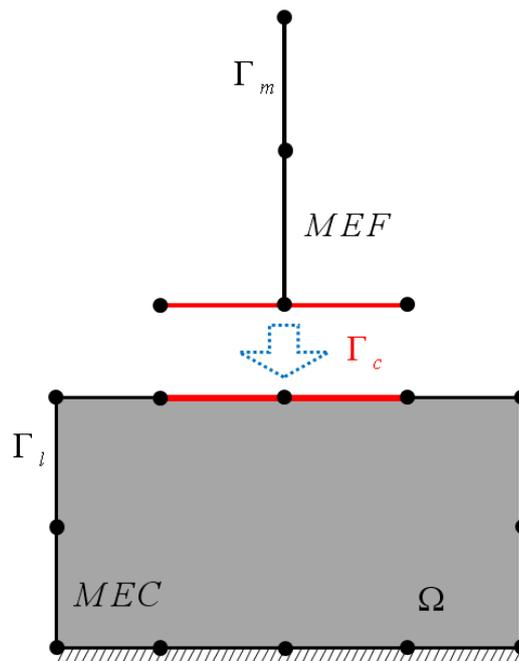


Figura 7.1 – Meio contínuo acoplado a elementos de barra

Vamos dividir a superfície de contorno do meio contínuo em duas partes: uma superfície  $\Gamma_c$  (em vermelho) de contato e outra  $\Gamma_l$ , dita “livre” por não estar acoplada a nenhum elemento finito. No MEF, a superfície  $\Gamma_c$  é comum ao elemento acoplado pois neste trabalho considera-se o perfeito acoplamento entre os meios, ou seja, não é considerada a não linearidade de contato ou perda de aderência.  $\Gamma_m$  diz respeito aos elementos finitos não acoplados.

Montando o sistema algébrico via MEC conforme o exposto no capítulo 4 chega-se ao seguinte sistema algébrico para o meio contínuo

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{cl} \\ H_{lc} & H_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^B \\ U_l^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{cc} & G_{cl} \\ G_{lc} & G_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_c^B \\ P_l^B \end{Bmatrix} \quad (7.01)$$

donde se escreve

$$H_{cc}U_c^B + H_{cl}U_l^B = G_{cc}P_c^B + G_{cl}P_l^B \quad (7.02)$$

$$H_{lc}U_c^B + H_{ll}U_l^B = G_{lc}P_c^B + G_{ll}P_l^B \quad (7.03)$$

Considera-se que a condição de contorno do problema já foi aplicada e com isso, todos os valores do vetor de carregamentos  $P_l^B$  são conhecidos. O índice  $B$  (Boundary) nas expressões indica que são termos relativos ao MEC.

Condensa-se esse sistema para que o mesmo fique escrito somente em função dos nós acoplados. A partir da (7.03) pode-se escrever o deslocamento na superfície livre  $U_l$  em função dos demais termos, na seguinte forma

$$U_l^B = H_{ll}^{-1}G_{lc}P_c^B + H_{ll}^{-1}G_{ll}P_l^B - H_{ll}^{-1}H_{lc}U_c^B \quad (7.04)$$

Substituindo (7.04) em (7.02) e agrupando os termos, obtêm-se a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} H_{cc} - H_{cl}H_{ll}^{-1}H_{lc} \end{bmatrix} U_c^B = \begin{bmatrix} G_{cc} - H_{cl}H_{ll}^{-1}G_{lc} \end{bmatrix} P_c^B + \begin{bmatrix} G_{cl} - H_{cl}H_{ll}^{-1}G_{ll} \end{bmatrix} P_l^B \quad (7.05)$$

ou ainda

$$\bar{H}_{cc}U_c^B = \bar{G}_{cc}P_c^B + T \quad (7.06)$$

tal que

$$\bar{H}_{cc} = \begin{bmatrix} H_{cc} - H_{cl}H_{ll}^{-1}H_{lc} \end{bmatrix} \quad (7.07)$$

$$\bar{G}_{cc} = \begin{bmatrix} G_{cc} - H_{cl}H_{ll}^{-1}G_{lc} \end{bmatrix} \quad (7.08)$$

$$T = \begin{bmatrix} G_{cl} - H_{cl}H_{ll}^{-1}G_{ll} \end{bmatrix} P_l^B \quad (7.09)$$

Todas as matrizes indicadas são valores numéricos conhecidos. A equação (7.06) pode ser reorganizada na seguinte maneira

$$\bar{G}_{cc}^{-1}\bar{H}_{cc}U_c^B = P_c^B + \bar{G}_{cc}^{-1}T \quad (7.10)$$

Note que esta expressão é escrita agora somente em função dos valores de deslocamento e força de superfície no contato, conforme desejado.

Multiplica-se toda a equação (7.10) por uma matriz  $Q_c$ , sem alterar assim o seu resultado. Essa matriz é originada da integração das funções de forma dos elementos finitos acoplados, tal qual foi descrito no item 6.3.5 do capítulo anterior. Sua função é transformar as forças de superfície  $P$  em carregamentos nodais concentrados  $F$ , na seguinte forma

$$Q_c P = F \quad (7.11)$$

É somente devido a essa matriz que o acoplamento, nos moldes em que está sendo descrito é possível, pois as forças de superfície no MEC precisam ser transferidas para os nós. Isso se deve ao fato da formulação do MEF ser baseada em valores nodais.

Dessa forma, os valores de força de superfície  $P_c^B$  no contorno também podem ser transformados em carregamentos nodais equivalentes  $F_c^B$  para serem aplicados diretamente ao MEF.

Logo, aplicando  $Q_c$  sobre a equação (7.10) do MEC, resulta

$$\bar{K}_{cc} U_c^B = F_c^B + \bar{P}_c \quad (7.12)$$

onde agora

$$\bar{K}_{cc} = Q_c \bar{G}_{cc}^{-1} \bar{H}_{cc} \quad (7.13)$$

$$\bar{P}_c = Q_c \bar{G}_{cc}^{-1} T \quad (7.14)$$

$$F_c^B = Q_c P_c^B \quad (7.15)$$

Da equação (7.12) escreve-se a força nos nós do elemento de contorno em função de todos os outros termos.

$$F_c^B = \bar{K}_{cc} U_c^B - \bar{P}_c \quad (7.16)$$

Considere agora a sub-região de elementos finitos da figura 7.1 ligada ao meio contínuo também na superfície  $\Gamma_c$ . É possível montar um sistema algébrico via MEF na seguinte forma

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cm} \\ K_{mc} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^F \\ U_m^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c^F \\ F_m^F \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

sendo aqui a matriz hessiana da análise NLG chamada de matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . O índice superior  $F$  (Finite) indica que os termos são referentes ao MEF e o índice  $m$  é dos elementos que não estão em contato com o meio contínuo.

De (7.17) se escreve a equação

$$K_{cc} U_c^F + K_{cm} U_m^F = F_c^F \quad (7.18)$$

Sabe-se pelas condições de compatibilidade e de equilíbrio de forças que os deslocamentos serão os mesmos na interface e que as forças nodais terão mesmo valor, porém sentidos opostos, ou seja

$$U_c^B = U_c^F \quad (7.19)$$

$$F_c^B = -F_c^F \quad (7.20)$$

Substituindo-se então as condições acima citadas e usando-se ainda a relação (7.16) em (7.18) tem-se

$$K_{cc}U_c^F + K_{cm}U_m^F = -\bar{K}_{cc}U_c^F + \bar{P}_c \quad (7.21)$$

que pode ser organizada para ser reescrita na seguinte forma

$$(K_{cc} + \bar{K}_{cc})U_c^F + K_{cm}U_m^F = \bar{P}_c \quad (7.22)$$

Voltando ao sistema original do MEF em (7.17), verifica-se que o mesmo está agora reescrito com seus termos alterados pelos valores no contorno.

$$\begin{bmatrix} (K_{cc} + \bar{K}_{cc}) & K_{cm} \\ K_{mc} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_c^F \\ U_m^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_c \\ F_m^F \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

A matriz  $\bar{K}_{cc}$  pode ser então entendida como uma matriz de rigidez do solo condensada nos nós acoplados. Podemos inclusive comparar tal procedimento à inclusão de molas elásticas aos apoios da estrutura reticulada, onde para esse caso é feita a soma dos coeficientes de mola nos graus de liberdade da matriz correspondentes. O vetor  $\bar{P}_c$  inclui as condições de carregamento na interface advindas do MEC e será na verdade somado ao vetor  $F_c^F$  a cada iteração do método de Newton-Raphson.

A comparação com molas serve somente para uma melhor interpretação do procedimento descrito. Afinal esta “mola” adicionada é mais do que um simples coeficiente numérico. A alteração inserida no sistema algébrico do MEF considera quaisquer configurações definidas preliminarmente no MEC e por esse motivo a formulação permite uma análise mais verossímil do problema. É possível, por exemplo, avaliar qual a influência que uma carga atuante no meio contínuo afastada da edificação terá sobre o comportamento desta última. Para isso basta que sejam definidas tais forças de superfície atuando no modelo do MEC, antes que sejam condensadas as matrizes.

O sistema (7.23) é determinado, mesmo que não seja restrito nenhum nó da malha de elementos finitos ou mesmo elementos de contorno. Assim como na inserção de molas, a soma da matriz do solo à rigidez da estrutura é condição de contorno para a mesma.

Como o solo é considerado um meio elástico linear, sua matriz  $\bar{K}_{cc}$  não se altera durante o processo iterativo. Logo essa matriz é calculada apenas uma vez, na primeira iteração do programa NLG. Ao longo do processo de Newton-Raphson, soma-se a matriz do solo à matriz hessiana (matriz de rigidez) e assim o processo de análise não linear pode ser resolvido normalmente, mas agora considerando o solo acoplado ao pórtico.

É importante observar ainda que, após cada iteração no processo de solução é preciso “corrigir” o vetor de forças internas do elemento finito somando a este os valores dos carregamentos nodais oriundos da reação do solo sobre a estrutura. Os valores de reação do solo agindo sobre os nós acoplados podem ser calculados fazendo-se o produto da matriz de rigidez do solo pelo vetor deslocamento dos nós na interface.

Com relação à consideração de mais de um material no solo, os procedimentos apresentados no capítulo 5 ainda são válidos, pois estes são aplicados antes da montagem do sistema algébrico final no MEC. Ao condensar as matrizes **H** e **G** de todo o domínio heterogêneo as mesmas operações são realizadas para o acoplamento destas à estrutura do MEF. Basta que o usuário defina quais elementos estarão acoplados em cada sub-região.

O uso de linhas de carga é agora justificado, pois as linhas de carga comportam a ligação com os elementos finitos do domínio do solo. Pode-se pensar em simulação de estacas em qualquer direção, ou ainda ancoragem de armaduras (dobradas ou não) no concreto armado e fibras rígidas diversas. Como a formulação permite que as linhas de carga atravessem diferentes matérias os elementos finitos poderão, da mesma forma, fazê-lo. Deve-se apenas atentar para o fato de que os elementos de contorno do MEC necessariamente devem possuir o mesmo número de nós que os seus respectivos elementos finitos. Não deve também haver nó duplo associado aos elementos acoplados no MEC, pois no MEF não se utiliza tal recurso.

Outra observação importante é que na formulação do MEF são incluídas como graus de liberdade as rotações das seções, enquanto que no MEC apenas translações. Assim, antes de realizar as operações de (7.12) deve-se expandir as matrizes do solo adicionando uma linha e uma coluna inteiramente zeradas para cada nó de interface que seria o terceiro grau de liberdade do mesmo.

Após a solução do sistema do pórtico via Newton-Raphson, as forças de superfície resultantes e os deslocamentos nos nós da interface podem ser obtidos diretamente. Os valores de deslocamentos e esforços internos do MEF já estão calculados em função do fenômeno de interação solo-estrutura combinado ao comportamento NLG.

Pode-se agora aplicar ao solo via MEC os deslocamentos ou as forças de superfície calculadas na interface como novas condições de contorno para o problema original do meio contínuo. Com isso poderá ser considerada a influência que a edificação terá no estado final do solo, lembrando que o mesmo é considerado com comportamento linear. Foi implementada uma sub-rotina para salvar as matrizes **H** e **G** durante a condensação para que no pós processamento do solo essas matrizes não precisem ser novamente calculadas.

Antes de serem apresentados os exemplos de aplicação, comenta-se sobre a técnica dos mínimos quadrados que foi desenvolvida e implementada no código do MEC, antevendo possíveis problemas de oscilações nas respostas em força de superfície, baseado nos trabalhos de WUTZOW (2003) e BOTTA (2003).

### 7.3. Técnica de suavização por mínimos quadrados

Diversos autores já demonstraram que o acoplamento entre o MEC e o MEF é bastante eficiente no cálculo de deslocamentos ocorridos na interação entre diferentes meios. Porém, a análise das forças de superfície resultantes desse acoplamento revela que podem ocorrer intensas oscilações destes valores ao longo dos elementos mais rígidos, mesmo satisfazendo o equilíbrio. Diz-se que quanto maior for a diferença de rigidez entre os corpos em contato maior será essa oscilação (ROCHA, 2009).

Não é objetivo deste trabalho analisar as causas desse fenômeno. Apenas se prepara o código desenvolvido para que este problema não ocorra, melhorando assim a qualidade das respostas em força de superfície na interface. Segundo WUTZOW (2003) isso é possível com a aplicação da técnica de suavização por mínimos quadrados às matrizes do MEC.

A técnica consiste basicamente em se introduzir novas incógnitas no problema, gerando assim mais equações do que o necessário. As novas incógnitas são geradas introduzindo-se pontos fonte adicionais no contorno dos elementos aos quais se pretende aplicar a técnica. Essas novas equações são condensadas no sistema original fazendo o produto da transposta da matriz por ela mesma. O procedimento é baseado no trabalho de VOLTERRA (1956) onde se afirma que a resolução de um sistema  $[A]_{mn} \{x\}_n = \{B\}_n$  pelo método dos mínimos quadrados é equivalente a se resolver  $[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{B\}$ , sendo  $m > n$ .

Para o entendimento da técnica aplicada ao MEC vamos imaginar um domínio  $\Omega$  qualquer com apenas três nós no contorno. Adiciona-se a um de seus elementos um nó  $S_4^*$ . O símbolo \* serve para diferenciar o nó adicional dos demais.

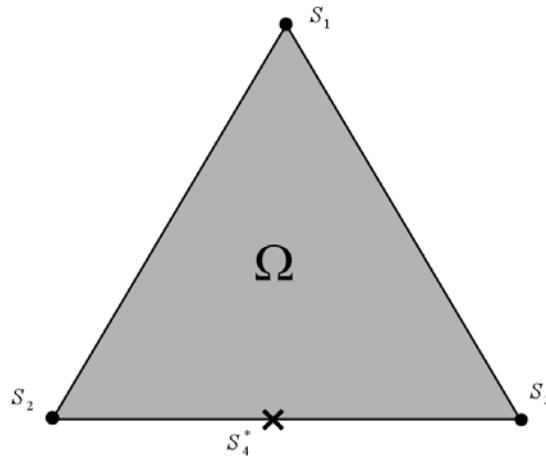


Figura 7.2 – Ponto adicional sobre o contorno

Pelo que foi apresentado no capítulo 4, para cada nó haverá duas linhas (duas equações) correspondentes na matriz  $\mathbf{H}$  e na matriz  $\mathbf{G}$ . Assim, ao integrar o domínio  $\Omega$  também para o ponto adicional, ambas as matrizes terão mais linhas do que colunas. Pela técnica dos mínimos quadrados, essas matrizes serão multiplicadas pela transposta da matriz  $\mathbf{H}$ , gerando “novas” matrizes  $\mathbf{H}_{MQ}$  e  $\mathbf{G}_{MQ}$ . Estas substituirão as matrizes originais no sistema algébrico. O procedimento descrito é ilustrado na figura 7.3 a seguir.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{H}_{MQ} = \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{S_1} \quad \overbrace{\quad}^{S_2} \quad \overbrace{\quad}^{S_3} \quad \overbrace{\quad}^{S_4^*} \\ \mathbf{H}^T \end{array} \times \begin{array}{c} \mathbf{H} \\ \left. \begin{array}{l} ] S_1 \\ ] S_2 \\ ] S_3 \\ ] S_4^* \end{array} \right\} \\
 \\
 \mathbf{G}_{MQ} = \begin{array}{c} \overbrace{\quad}^{S_1} \quad \overbrace{\quad}^{S_2} \quad \overbrace{\quad}^{S_3} \quad \overbrace{\quad}^{S_4^*} \\ \mathbf{H}^T \end{array} \times \begin{array}{c} \mathbf{G} \\ \left. \begin{array}{l} ] S_1 \\ ] S_2 \\ ] S_3 \\ ] S_4^* \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 7.3 – Esquema da aplicação do método dos mínimos quadrados

Esta técnica equivale a uma média ponderada aplicada aos termos da matriz, de maneira que o resultado obtido com a resolução do sistema deverá ser um valor médio entre os valores oscilantes e por isso a resposta é suavizada.

No programa, deverão ser escolhidos quais elementos se deseja aplicar tal técnica. Os elementos onde interessa a aplicação da mesma são aqueles localizados nos extremos da região acoplada, pois é nessas regiões que deverão ocorrer as maiores oscilações de força de superfície. Cabe ao usuário do programa definir os elementos em que haverá nós adicionais.

Quanto a quantidade de nós adicionais, foi montada no programa uma sub-rotina que insere automaticamente três nós adicionais entre cada nó do elemento de contorno que se deseja interferir. Julga-se que essa quantidade possa ser suficiente para aplicação da técnica. Em um elemento quadrático, por exemplo, são adicionados seis novos nós no contorno e doze novas equações estão sendo assim então escritas.

## 7.4. Exemplos de Validação e Aplicação

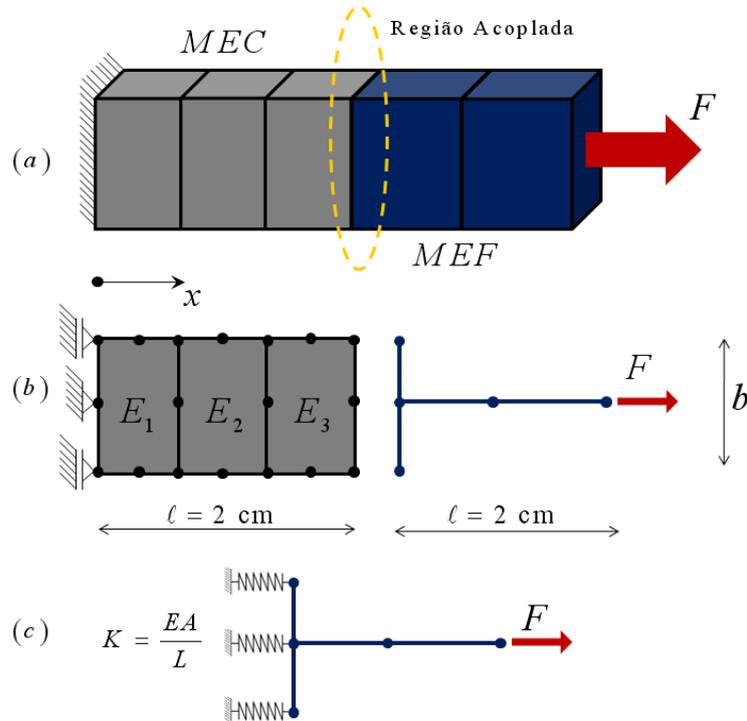
### 7.4.1. Barra tracionada

O primeiro exemplo consiste de uma barra homogênea presa em uma extremidade e submetida a uma carga de tração uniforme na outra. A análise é feita modelando metade do comprimento da barra através do MEC e a outra metade através do MEF. Para comprovar o funcionamento da técnica alternativa implementada, são consideradas três sub-regiões com mesmo módulo de elasticidade no meio contínuo  $E_1 = E_2 = E_3 = 10.000 \text{ kN/cm}^2$  acopladas a duas barras do MEF, de acordo com a figura 7.4 a seguir. Adota-se a dimensão  $b = 1 \text{ cm}$  e conseqüentemente a área de seção transversal unitária ( $A = 1 \text{ cm}^2$ ) e comprimento total  $L = 2\ell = 4 \text{ cm}$ . A força adotada foi de  $F = 10 \text{ kN}$ . Para esse problema, é adotado coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ . Deve-se observar que a barra transversal do MEF é extremamente rígida possibilitando o resultado atingido.

O meio contínuo, neste caso, equivale a um sistema de molas cuja rigidez pode ser somada na diagonal principal do MEF para efeito de comparação. Isso é possível, pois neste exemplo a rigidez advinda do MEC é simples de ser calculada previamente pela expressão  $K = \frac{EA}{L} \text{ kN/cm}$ .

Na malha do MEC foram utilizados somente 22 nós no contorno e 12 elementos quadráticos, enquanto que no MEF utilizou-se 5 nós e 2 elementos quadráticos. Aplicaram-se

nós duplos nos vértices do meio contínuo, modelado via MEC para considerar a descontinuidade de forças de superfície nesta região.



A solução analítica para o deslocamento máximo na direção horizontal deste problema é baseada na resistência dos materiais e é dada pela expressão

$$u_{m\acute{a}x.} = \frac{NL}{EA} = \frac{10 \times 4}{10.000 \times 1} = 0,004 \text{ cm} \quad (7.24)$$

Na seção mais ao meio do vão, ao longo da linha de acoplamento o deslocamento horizontal é igual à metade desse valor, ou seja,  $u_{(m\acute{e}diao)} = 0,002 \text{ cm}$ .

Apresentam-se os resultados de deslocamento horizontal obtidos com o uso do programa desenvolvido. Os valores de deslocamento obtidos são pequenos e por esse motivo a solução é idêntica à resposta analítica.

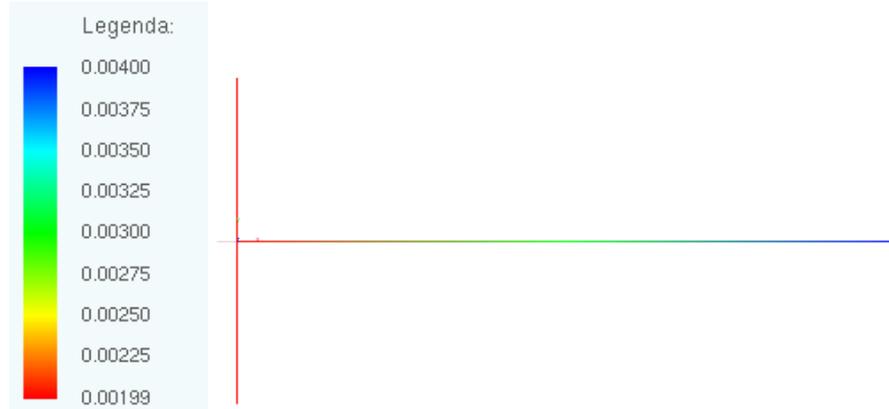


Figura 7.5 – Deslocamento horizontal na malha do MEF

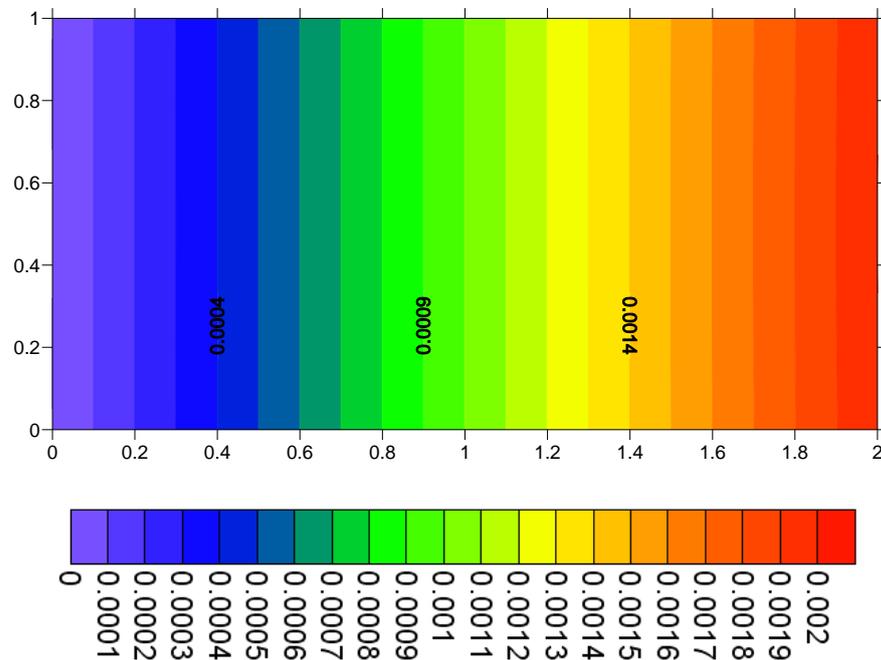


Figura 7.6 – Deslocamento horizontal na malha do MEC

Apresenta-se também a variação da tensão horizontal medida ao longo de todo o meio contínuo. Esses valores foram obtidos adotando-se pontos internos à malha do MEC. Sabe-se que a tensão neste caso será constante e de valor  $\sigma = \frac{F}{A} = 10 \text{ kN/cm}^2$ . Observa-se apenas uma pequena diferença de 1% com relação à solução analítica na extremidade mais próxima do acoplamento.

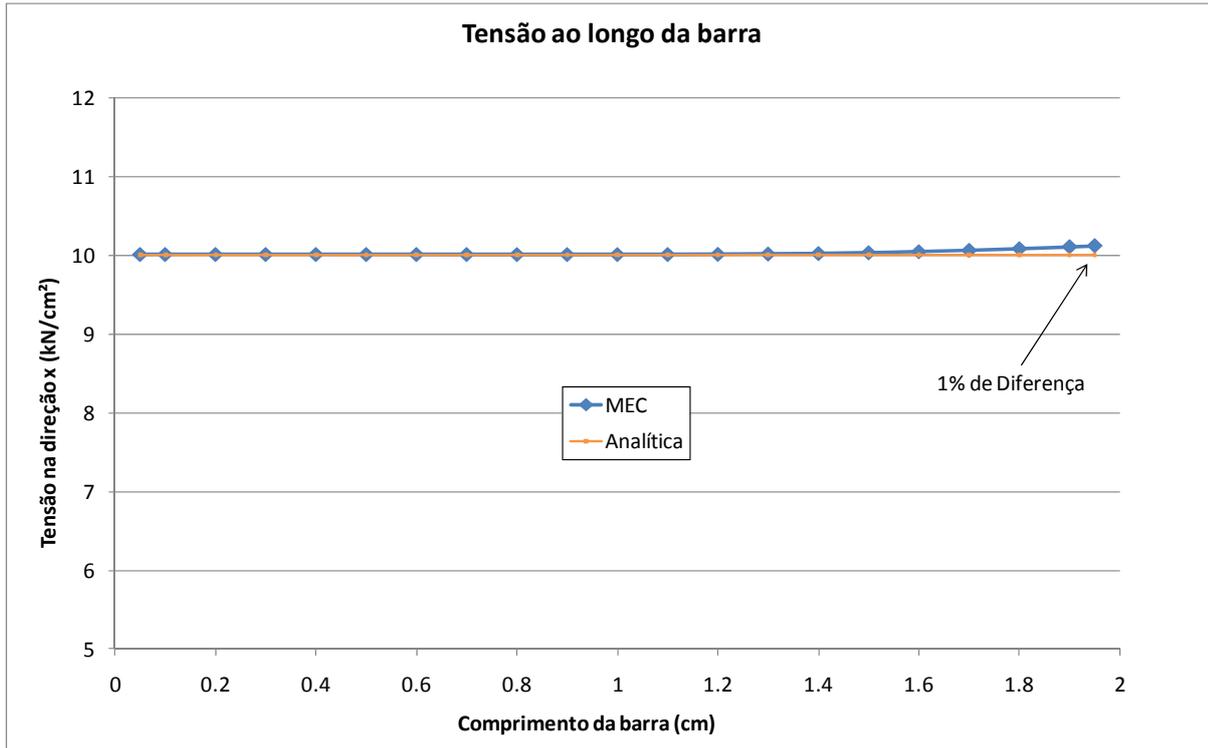


Gráfico 7.1 – Tensão ao longo do meio contínuo

Este exemplo simples demonstra o correto funcionamento do programa pois através do acoplamento foi possível calcular valores precisos para o deslocamento em cada um dos diferentes meios. Pode-se ainda alterar os valores de módulo de elasticidade dos materiais envolvidos para análise de barras constituídas por mais de um material.

#### 7.4.2. Estaca cravada no solo

Seja uma estaca cravada em um solo homogêneo com carregamentos na sua extremidade superior conforme a figura 7.7. Admite-se para o meio contínuo que representa o solo a dimensão  $L = 40\text{ m}$  e impõem-se como condição de contorno restrição ao deslocamento horizontal das faces verticais e restrição a deslocamento vertical da face inferior. A estaca, por sua vez é modelada via MEF e possui comprimento cravado de  $L/2 = 20\text{ m}$  e mais um pequeno comprimento de 20 cm fora do meio contínuo. Possui ainda largura de 2 m, área de seção transversal igual a  $2,0\text{ m}^2$  (espessura unitária) e momento de inércia  $I = 0,666\text{ m}^4$

O módulo de elasticidade da estaca é  $E_e = 210\text{ GPa}$ , enquanto que, para o solo admite-se que seu módulo é dez vezes menor, ou seja,  $E_s = 21\text{ GPa}$ . Foi adotado o Estado

Plano de Deformação, com coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ . Para os carregamentos são considerados os seguintes valores:  $F_H = 40 \text{ kN}$ ,  $F_V = 160 \text{ kN}$  e  $M = 9.975 \text{ kN}$ .

Foram analisadas duas malhas quadráticas onde se variou o número de elementos ao longo da estaca, para análise do acoplamento MEC/MEF. A primeira malha (malha 1) é constituída de 24 elementos sobre o contorno e 8 elementos ao longo do comprimento cravado da estaca. Na segunda malha (malha 2), consideram-se 50 elementos sobre o comprimento da estaca.

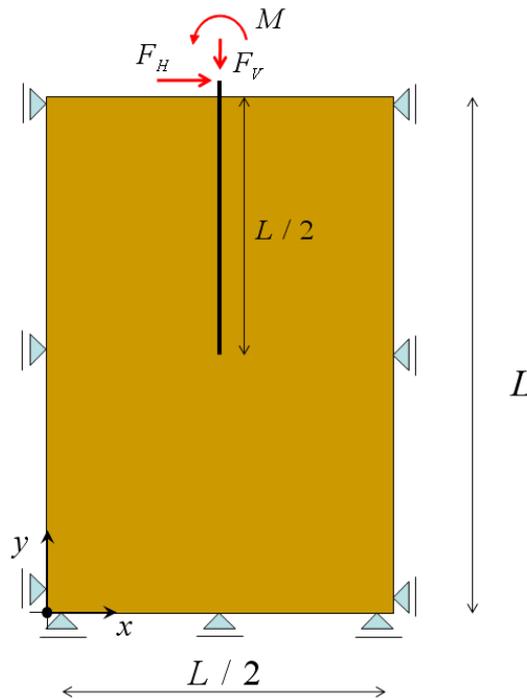


Figura 7.7 – Estaca com cargas na extremidade superior

Como valores de referência foram utilizados as repostas obtidas com o uso do programa ANSYS para o mesmo problema. Foram realizadas duas malhas utilizando elemento de chapa retangular (4 nós) para modelagem do solo e o elemento de pórtico convencional com aproximação cúbica (2 nós) para modelagem da estaca. A primeira malha utilizada no ANSYS é formada por 3.200 elementos de chapa e 43 elementos de barra, enquanto que na segunda malha são utilizados 12.800 elementos de chapa e 83 elementos de barra.

A força de superfície no contato calculada no programa ANSYS foi obtida dividindo-se as reações nodais em cada direção pelo tamanho do elemento finito. Nos nós extremos, a força nodal foi dividida pela metade do comprimento do elemento. Para a carga horizontal  $F_H$  os resultados de deslocamento na direção  $x$ , rotação em torno do eixo  $z$  e força de superfície

$P_x$  são apresentados respectivamente nos gráficos 7.2, 7.3 e 7.4 a seguir, utilizando o sistema internacional de unidades ( $kN-m$ ).

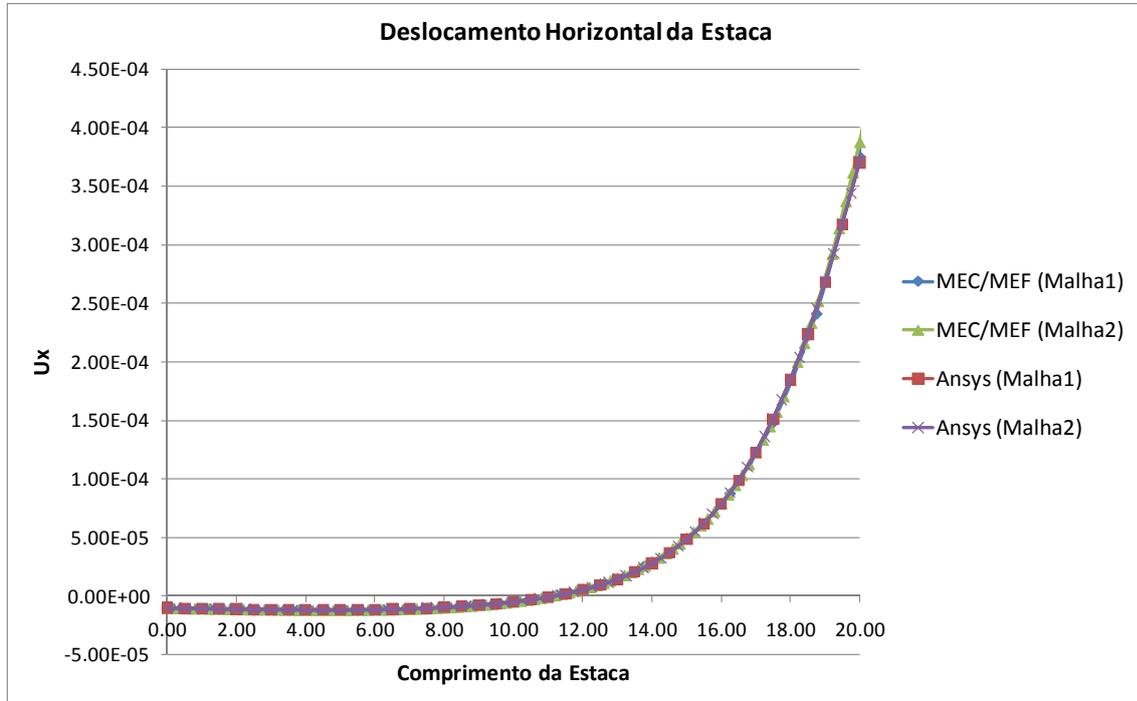


Gráfico 7.2 – Deslocamento  $U_x$  devido a carga horizontal  $F_H$

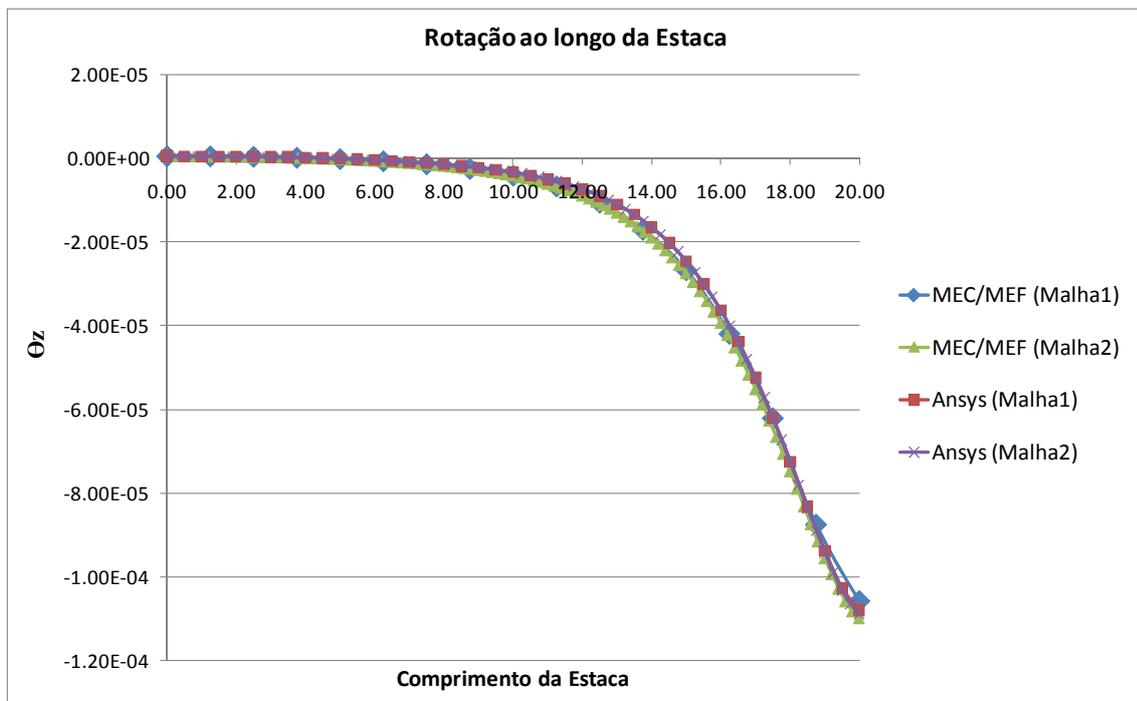


Gráfico 7.3 – Rotação  $\Theta_z$  devido a carga horizontal  $F_H$

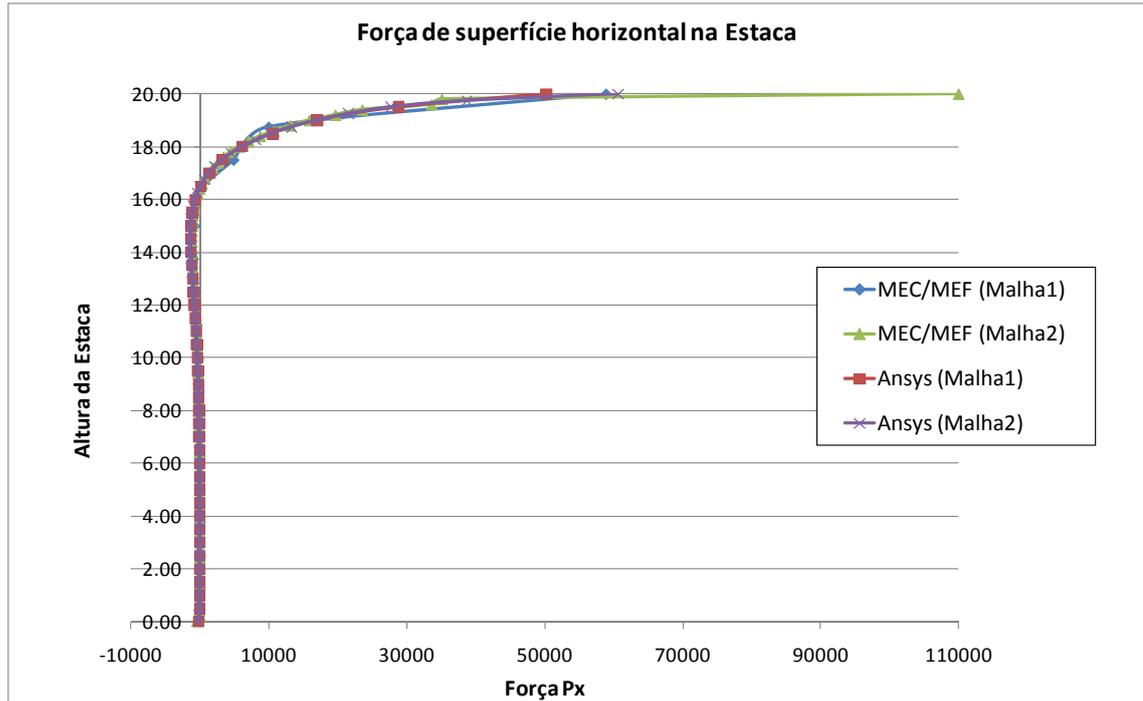


Gráfico 7.4 – Força de superfície  $P_x$  devido a carga horizontal  $F_H$

Para o carregamento vertical  $F_V$ , os valores de deslocamento e de força de superfície na direção  $y$  são apresentados nos gráficos 7.5 e 7.6.

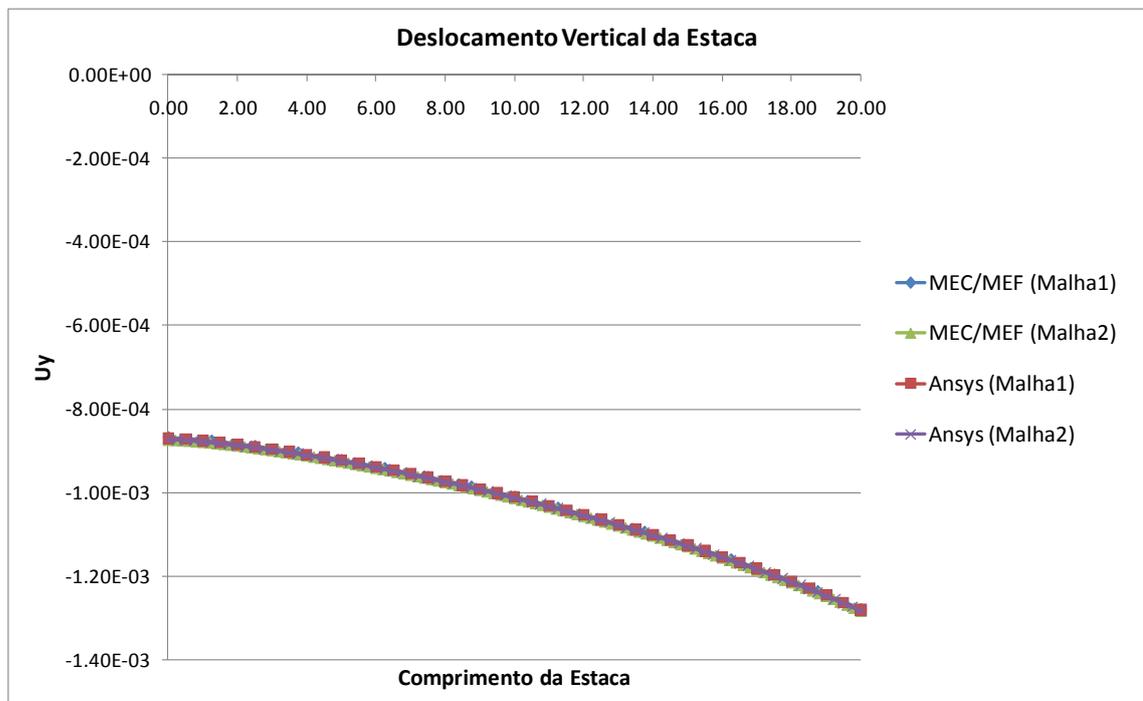


Gráfico 7.5 – Deslocamento  $U_y$  devido a carga horizontal  $F_V$

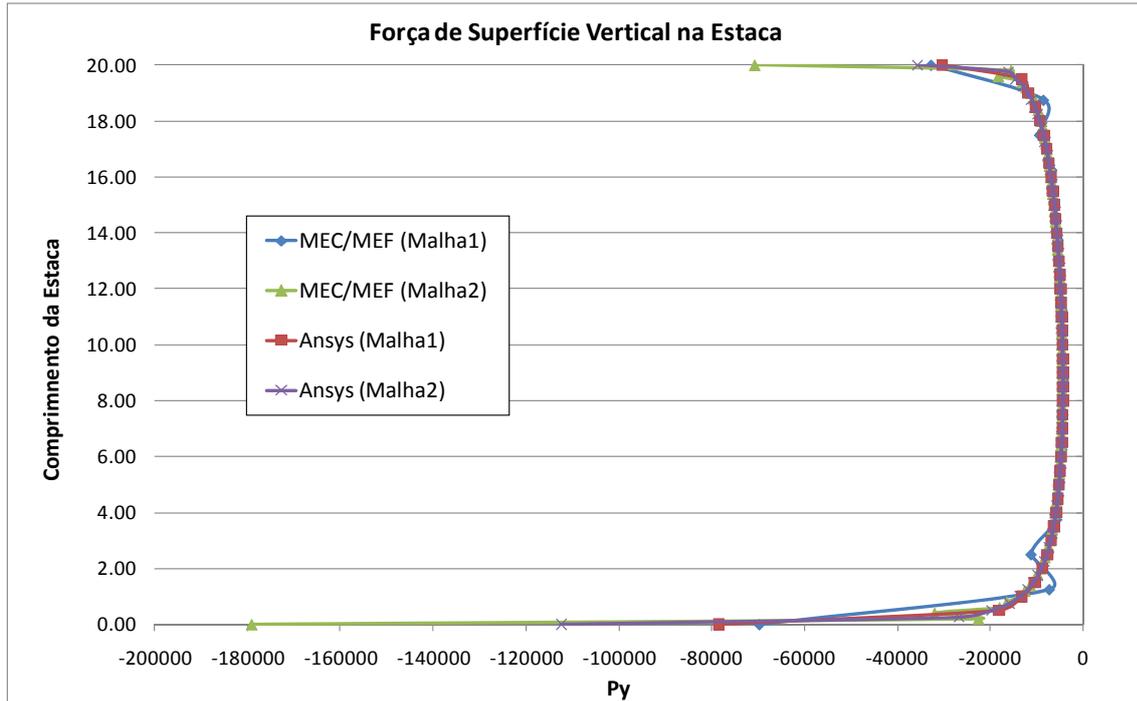


Gráfico 7.6 – Força de superfície  $P_y$  devido a carga horizontal  $F_V$

Também para o momento aplicado, foram comparados os valores de deslocamento na direção  $x$ , rotação e força de superfície em  $x$ .

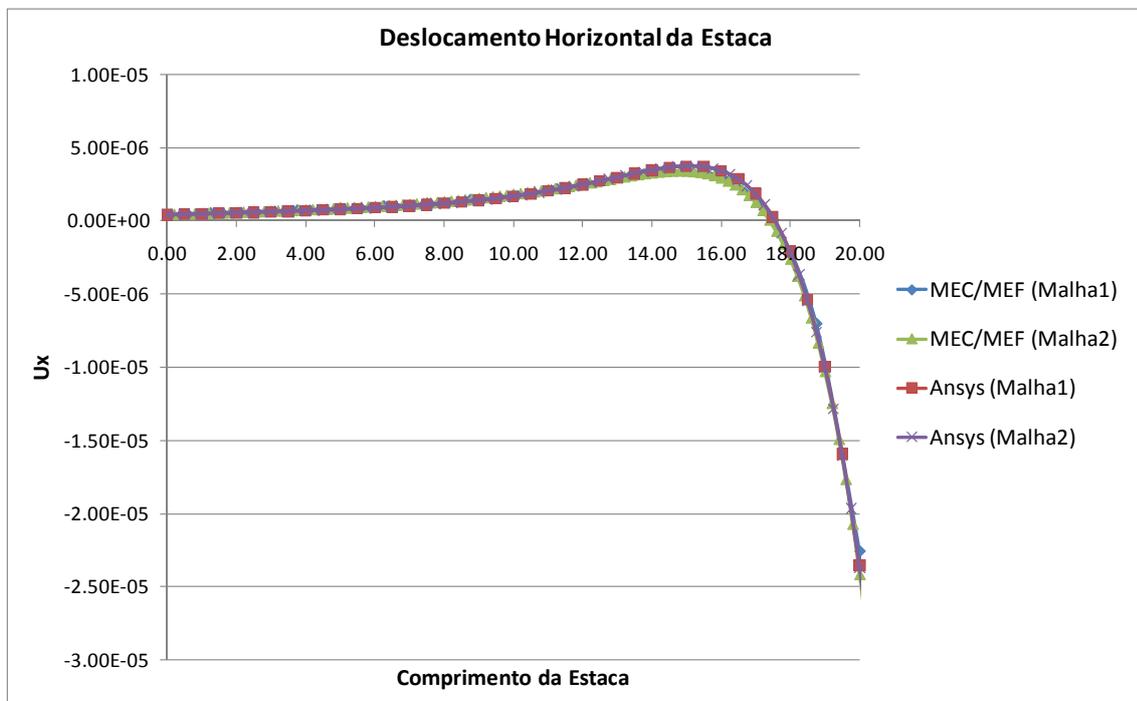


Gráfico 7.7 – Deslocamento  $U_x$  devido aplicação do momento  $M$

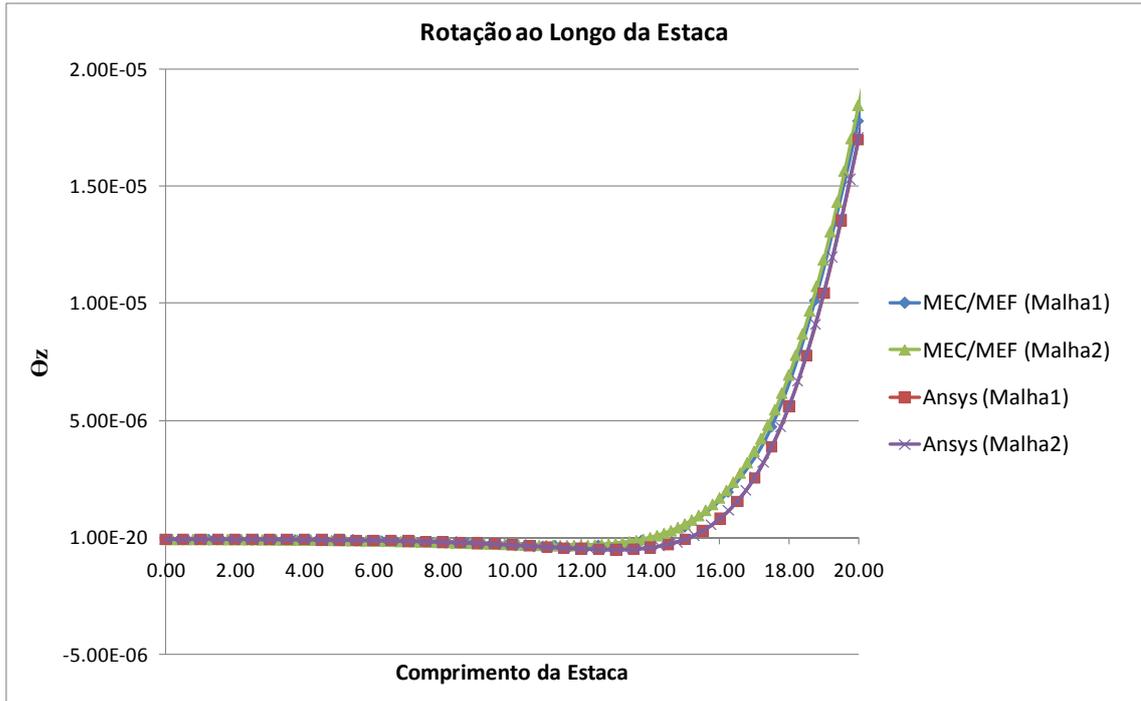


Gráfico 7.8 – Rotação  $\Theta_z$  devido aplicação do momento  $M$

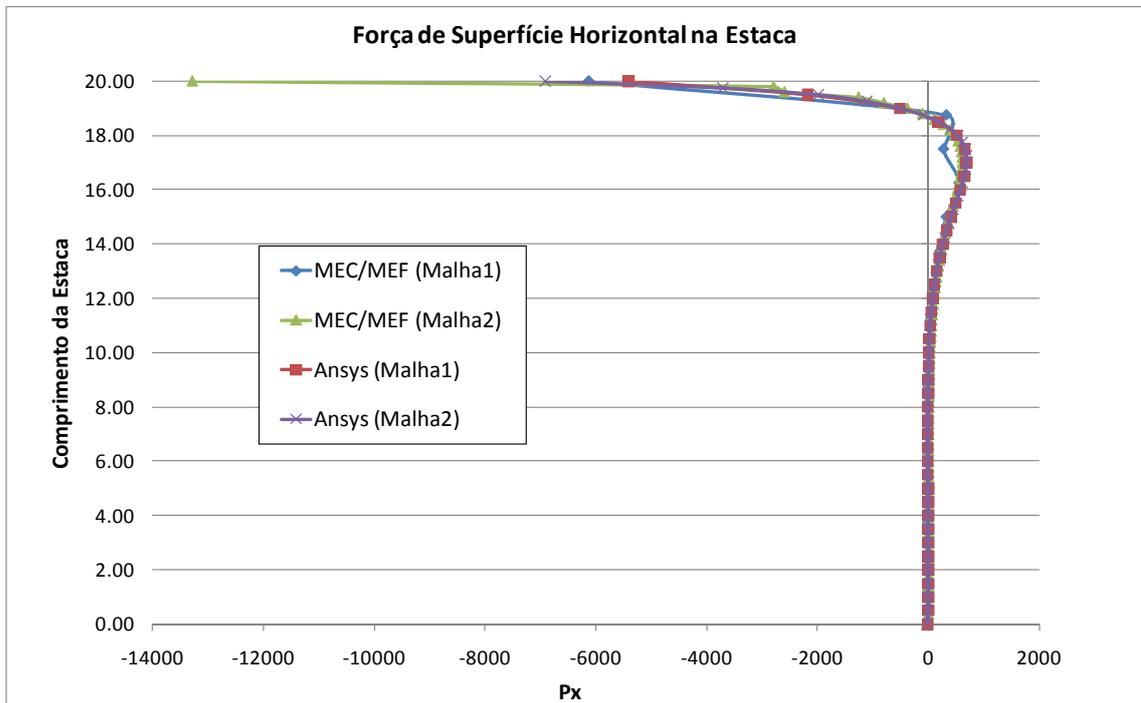


Gráfico 7.9 – Força de Superfície  $P_x$  devido aplicação do momento  $M$

Com relação aos deslocamentos observa-se que estes se aproximam bastante dos resultados da referência com diferenças insignificantes, o que comprova o adequado funcionamento do programa para todos os casos analisados.

Observando os gráficos 7.4, 7.6 e 7.9, todos com respeito à força de superfície ao longo da estaca, percebe-se que há sempre uma pequena oscilação nos resultados obtidos para a malha 1 do acoplamento MEC/MEF. Para esse caso a técnica dos mínimos quadrados foi aplicada adicionando-se nós aos elementos mais extremos, conforme o procedimento descrito no item 7.3. No entanto, mesmo após a aplicação da técnica, não houve alteração nos resultados obtidos, permanecendo os mesmos valores da matriz sem aplicação da técnica. As oscilações somente foram reduzidas com o aumento do número de elementos adotados na discretização da estaca, como mostram os resultados da malha 2, em que o número de elementos é muito superior ao da primeira malha, porém não aplicando os mínimos quadrados.

Constata-se, portanto que a técnica dos mínimos quadrados não foi eficiente para resolver as oscilações de força de superfície na interface, tal como concluído por ROCHA (2009). Para reduzir essas oscilações foi necessário um maior número de elementos na região de contato, o que fez com que estas oscilações fossem cada vez mais para os extremos do elemento rígido.

### 7.4.3. Estaca inclinada

Neste exemplo se simula uma estaca inclinada inserida em um solo heterogêneo com carregamento aplicado na sua extremidade superior, segundo a figura 7.8, onde se deseja calcular os deslocamentos na estaca pela combinação desses carregamentos.

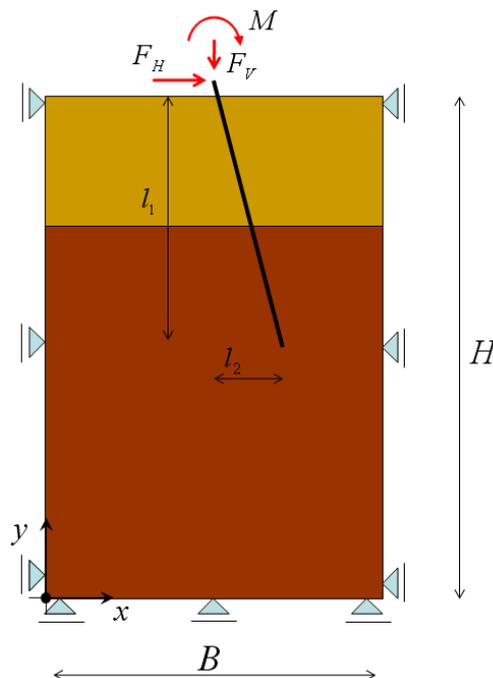


Figura 7.8 – Estaca inclinada com cargas na extremidade superior

Adotam-se para a geometria do solo valores de  $H = 7,5 m$  e  $B = 5,0 m$ . É considerada uma camada de material com módulo de elasticidade  $E_1 = 2.000 MPa$  até uma profundidade de  $2 m$ , e em seguida outro material com módulo  $E_2 = 2.800 MPa$ . Para a geometria da estaca admitem-se os valores de  $l_1 = 4 m$  e  $l_2 = 1 m$ . O valor do seu módulo de elasticidade é  $E_e = 28.000 MPa$  e a seção transversal é admitida com largura de  $9 cm$ , tendo assim área igual à  $A = 900 cm^2$ . Adota-se o Estado Plano de Deformação e o coeficiente de Poisson da estaca e de ambas as camadas de solo são iguais a  $\nu = 0,2$ .

Os valores de carregamento são:  $F_H = 100 kN$ ,  $F_V = 300 kN$  e  $M = 50 kNm$ .

Foi utilizada uma malha com 168 elementos quadráticos no contorno do solo e 42 elementos quadráticos ao longo da estaca. Novamente os valores obtidos são comparados com os resultados utilizando-se a ferramenta ANSYS.

A seguir, os resultados para deslocamento na direção  $x$ ,  $y$  e rotação em torno do eixo  $z$  considerando a ação das três cargas simultaneamente.

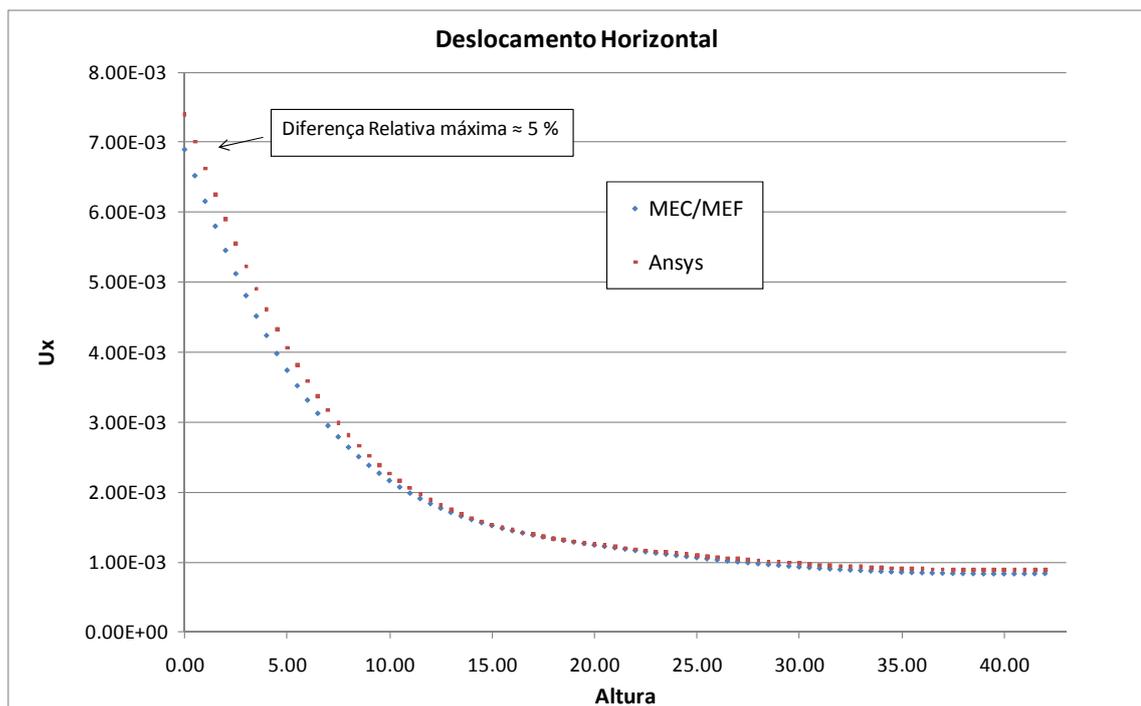


Gráfico 7.10 – Deslocamento horizontal resultante ao longo da estaca

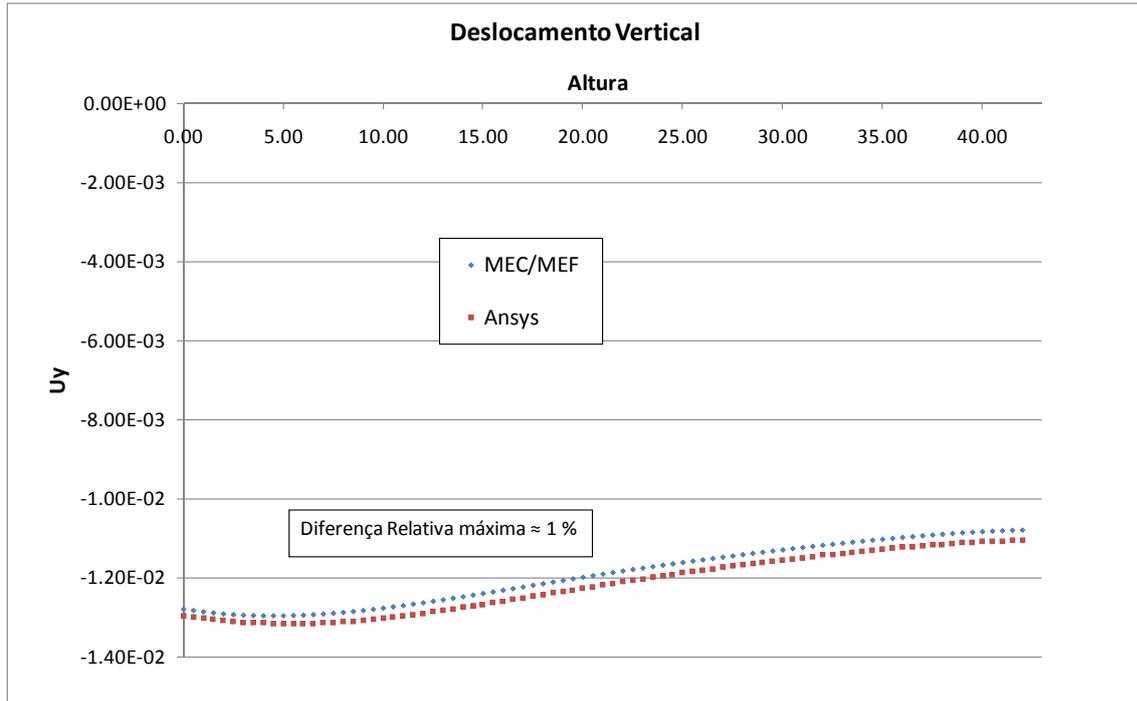


Gráfico 7.11 – Deslocamento vertical resultante ao longo da estaca

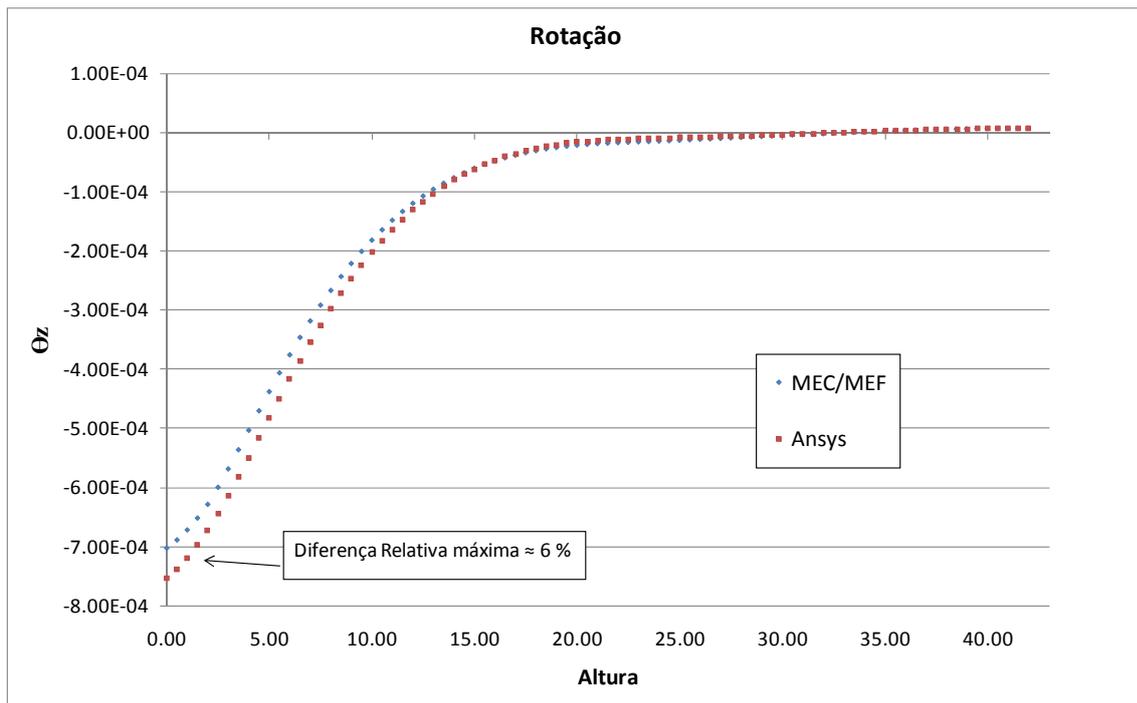


Gráfico 7.12 – Rotação resultante ao longo da estaca

Os resultados de forma geral se mostram bastante satisfatórios, com diferenças relativas mínimas em relação aos valores de referência.

Após o processamento da estrutura, podem-se aplicar as condições cinemáticas resultantes no modelo via MEC para o cálculo das tensões ocorridas no solo. A seguir apresentam-se os gráficos de tensão ao longo do meio contínuo.

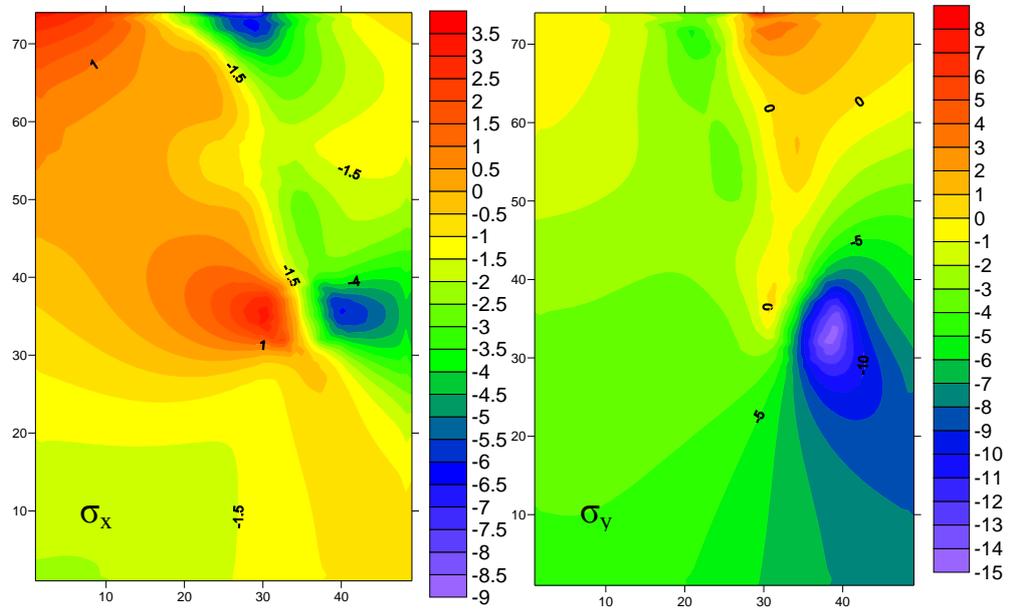


Figura 7.9 – Distribuição das tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  ao longo do solo

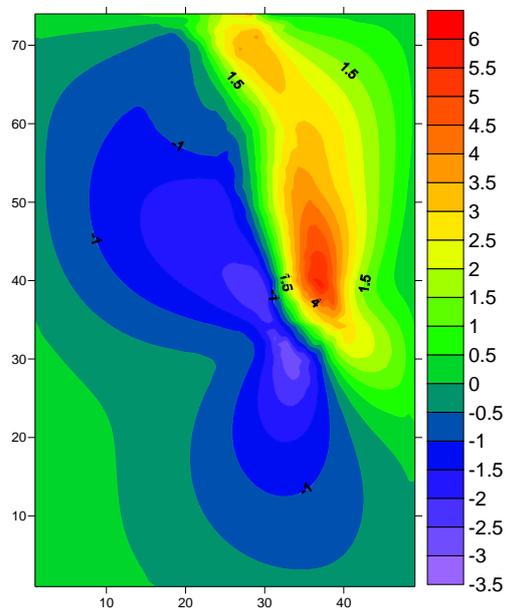


Figura 7.10 – Distribuição das tensões cisalhantes ao longo do solo

#### 7.4.4. Edifício acoplado ao solo com heterogeneidade

Vamos considerar agora um edifício cuja estrutura é formada pelo pórtico da figura 7.11 acoplado ao solo utilizando sistema de fundação direta (sapata). O edifício tem uma altura total  $H_1 = 9,0 \text{ m}$  sendo 3 pavimentos de 3 m de altura cada. A distância horizontal entre cada pilar é de 2 m. Considera-se todo o pórtico constituído por material cujo módulo de elasticidade é  $E_e = 2,1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  e a seção transversal dos elementos de pórtico tem área  $S = 0,1 \text{ m}^2$ .

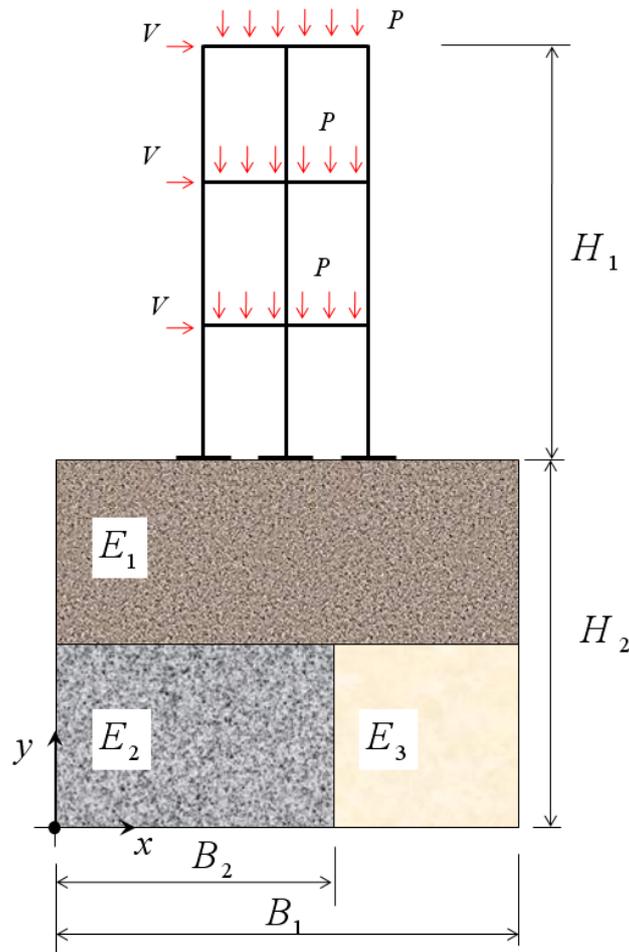


Figura 7.11 – Edifício acoplado a solo heterogêneo

Para o solo, admitem-se os valores de  $H_2 = 8,0 \text{ m}$ ,  $B_1 = 10,0 \text{ m}$  e  $B_2 = 6,0 \text{ m}$ . A primeira camada tem profundidade de 4,0 m. Os valores de módulo de elasticidade adotados no solo são  $E_1 = 2,0 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ ,  $E_2 = 2,5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$  e  $E_3 = 8,5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ , ou seja, a terceira sub-região é considerada como sendo uma camada de material mais mole. O coeficiente de Poisson dos solos 1, 2 e 3 é  $\nu = 0,2$ , enquanto que para a estrutura adota-se  $\nu = 0$ .

O edifício está submetido a sobrecargas verticais de valor  $P_1 = 20 \text{ kN/m}$  e ainda um carregamento lateral proveniente da ação do vento de valor  $V = 15 \text{ kN}$ .

Esse exemplo hipotético pode ser avaliado de diversas maneiras, conforme foi discutido no capítulo 3. A maneira mais simples de se avaliar este exemplo é admitindo as fundações como apoios rígidos e considerando ainda o comportamento linear da estrutura.

Serão a seguir apresentados os resultados obtidos com o programa desenvolvido, e ainda resultados de uma análise linear considerando os apoios fixos, para efeito de comparação entre a consideração ou não da não linearidade geométrica e da interação solo-estrutura no comportamento da edificação. O modelo linear foi analisado utilizando-se o módulo linear do programa AcadFrame, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC.

Na figura 7.12 exibem-se as configurações de equilíbrio para cada uma das análises.

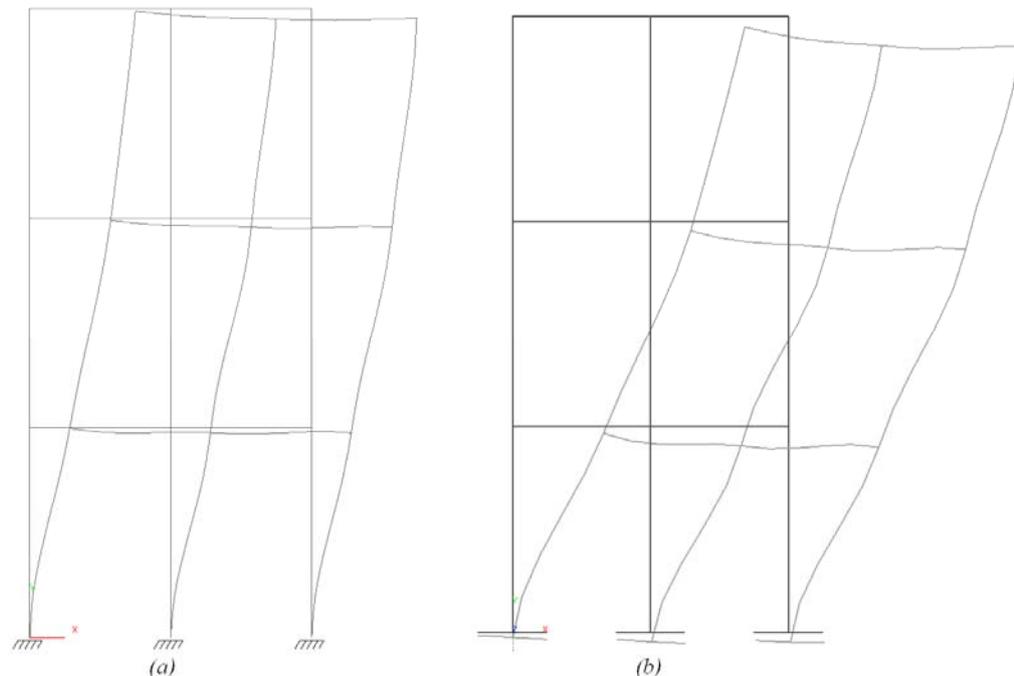


Figura 7.12 – Aspecto da deformada para (a) análise linear com apoios rígidos e (b) análise NLG acoplado ao solo, com ampliação de 1000X.

Observa-se que, no caso da análise com apoios fixos, não se consideram os recalques das fundações, claramente observados na ampliação (1000x) da deformada na figura 7.12. Por outro lado, com o uso do programa aqui desenvolvido, esse recalque já está sendo considerado em função das características do solo e de suas configurações, como na presença de materiais diferentes. Seria possível também avaliar a influência que cargas distribuídas nas

laterais do edifício têm sobre o comportamento do mesmo. Mesmo que fosse imposto um valor de recalque aos nós fixos da estrutura para avaliar esse fenômeno, ainda assim a resposta encontrada seria menos abrangente do que a aqui proposta.

A consideração da não linearidade geométrica também tem influência na configuração final do pórtico, apesar de que, neste exemplo os valores se aproximam da análise linear pelo fato da edificação sofrer pequenos deslocamentos. Porém observa-se que há certa diferença entre os valores, analisando os deslocamentos tanto na direção  $x$  quanto na direção  $y$  de cada tipo de análise. No caso da rotação, as diferenças foram muito pequenas.

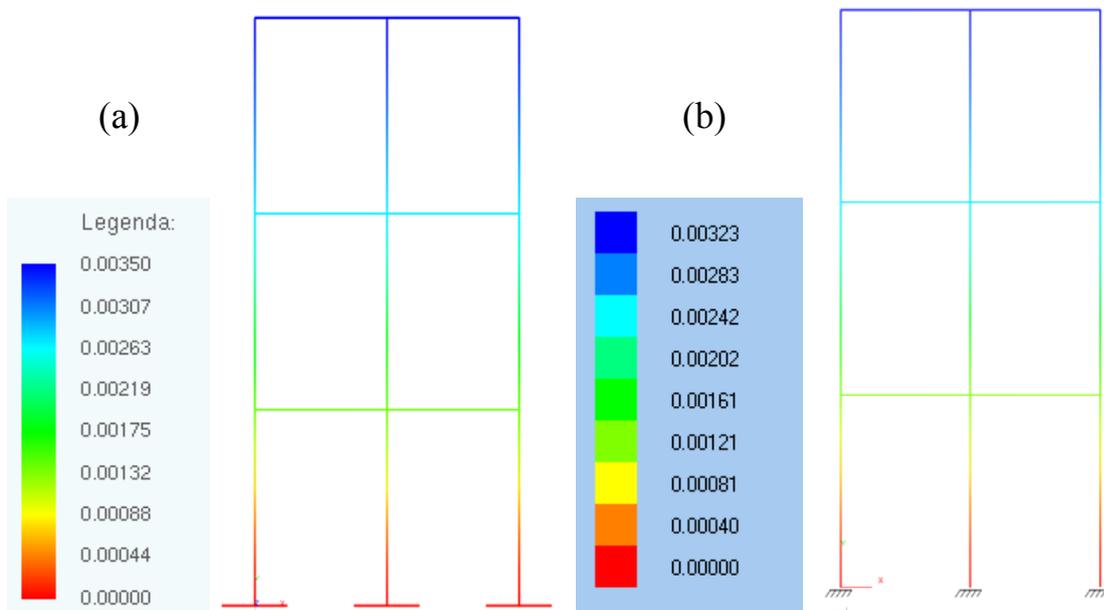


Figura 7.13 – Deslocamento horizontal para (a) este código e (b) análise linear (em metros)

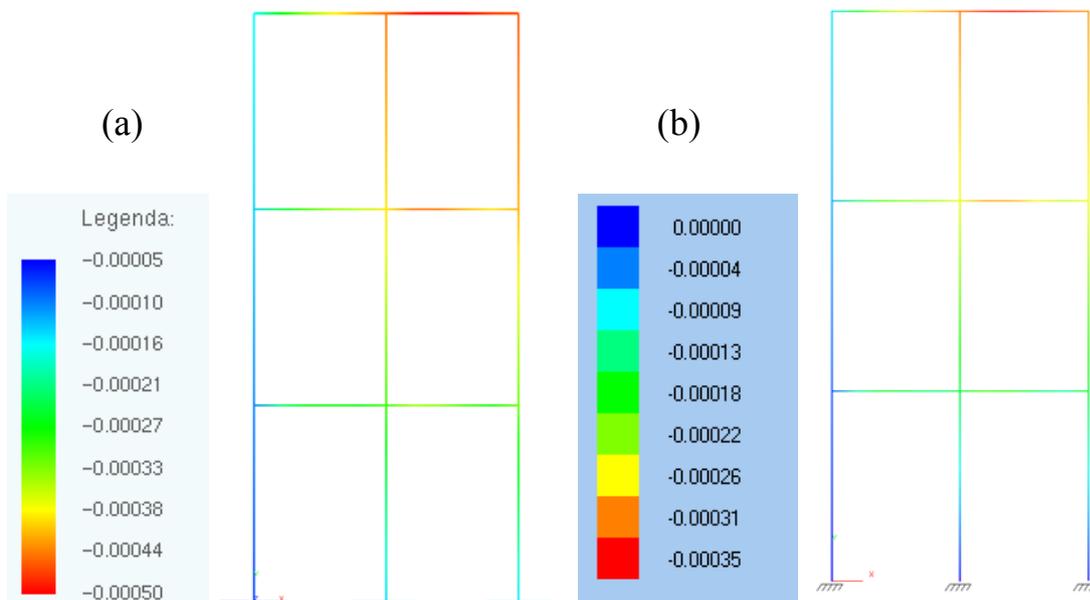


Figura 7.14 – Deslocamento vertical para (a) este código e (b) análise linear (em metros)

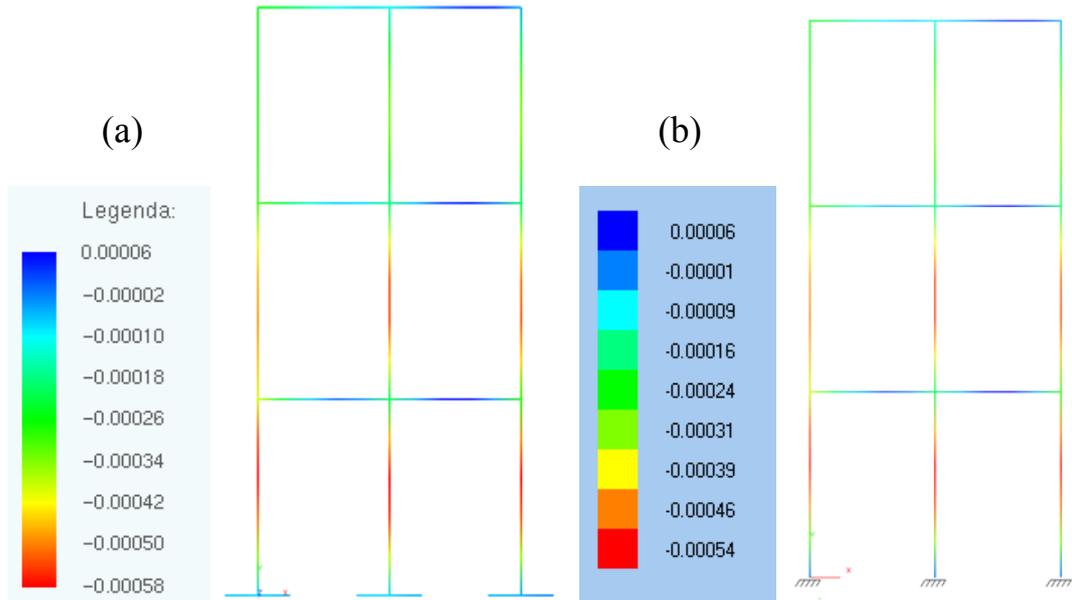


Figura 7.15 – Rotação em torno de  $z$  para (a) este código e (b) análise linear (em radianos)

Quanto mais esbelta e quanto maior forem as ações horizontais, maior será a diferença entre os deslocamentos obtidos com e sem a consideração da não linearidade geométrica. Essa importância está diretamente ligada ao dimensionamento da estrutura e na definição da sua estabilidade global. Este exemplo serve apenas para demonstrar que é possível, através de uma formulação mais rica e mais bem elaborada, realizar análises mais verossímeis aproximando cada vez mais a simulação numérica do comportamento real da estrutura.

Avaliando agora os esforços internos normais e de momentos fletores atuantes na estrutura de pórtico, podemos observar que podem ocorrer diferenças de valores em relação a cada tipo de análise. É preciso sempre avaliar até que ponto essas diferenças podem interferir no processo de dimensionamento da estrutura para prover segurança e conforto.

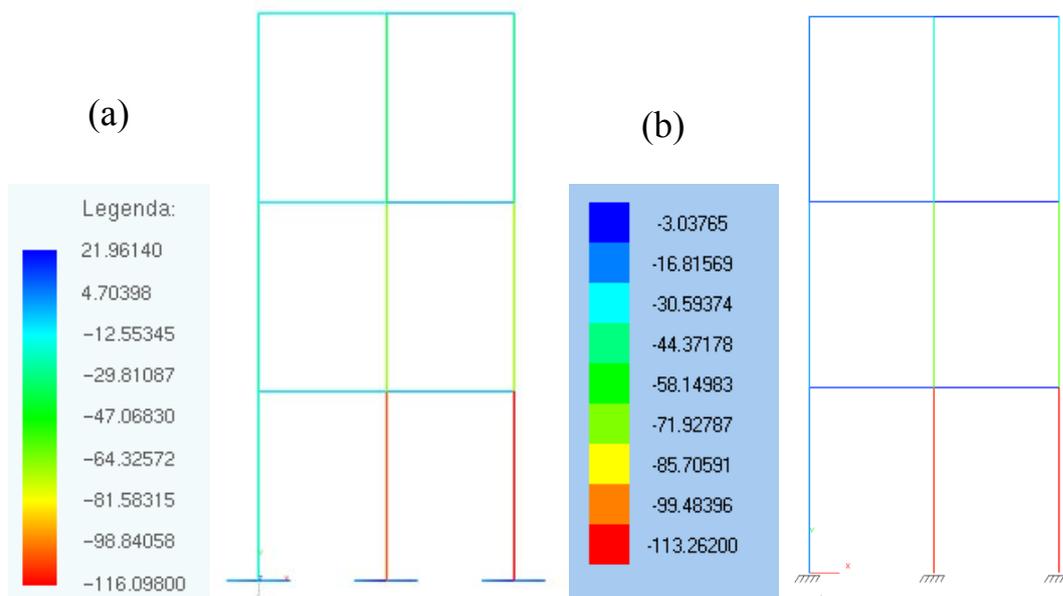


Figura 7.16 – Esforço Normal nas barras para (a) este código e (b) análise linear (kN)

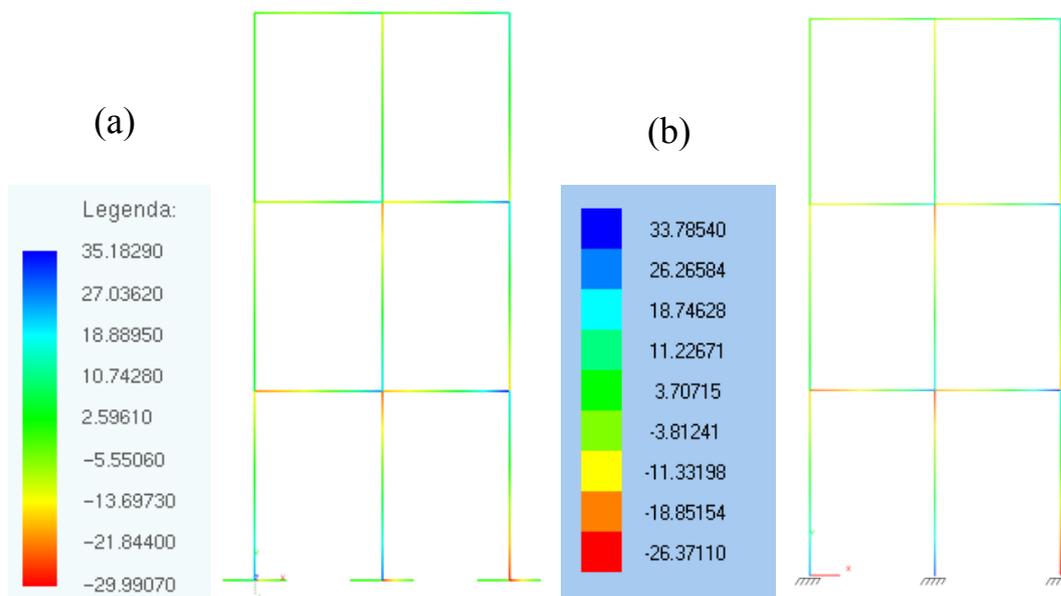
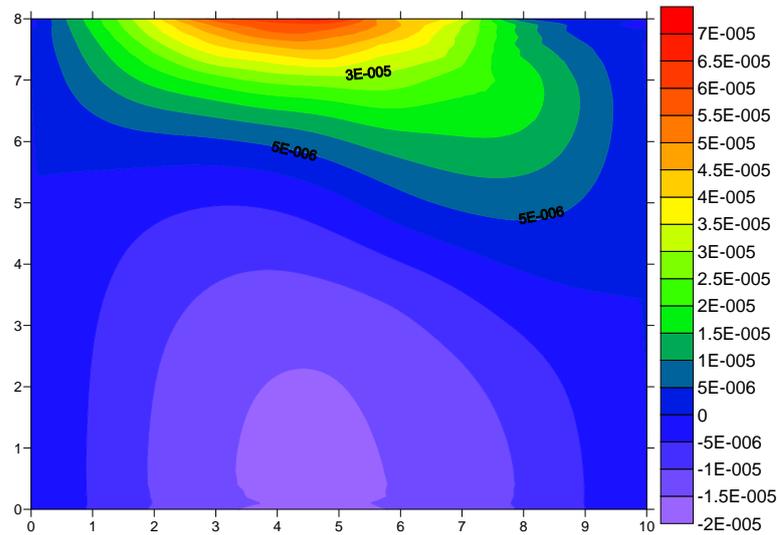


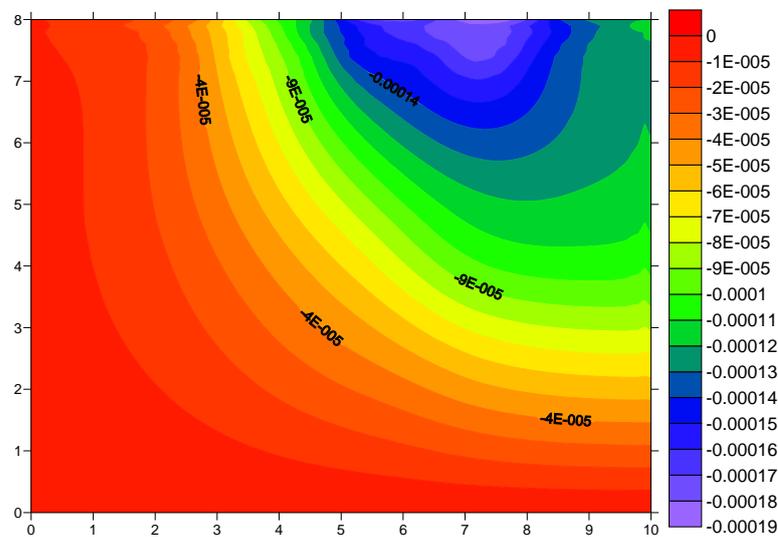
Figura 7.17 - Distribuição de Momento fletor para (a) este código e (b) análise linear (kN.m)

Outra forma de se analisar esse problema é através da consideração dos apoios como molas de Winkler. Seria necessário apenas definir o coeficiente de mola para o solo no qual a estrutura está apoiada. Porém, pela configuração geotécnica apresentada na figura 7.11 percebe-se que a definição desse coeficiente não é simples de ser realizada. Além disso, a influência que uma sapata tem sobre a outra não é contabilizada na análise.

Para finalizar, podemos aplicar os deslocamentos calculados no MEF na malha do MEC e então, recalculamos o solo para avaliar deslocamentos e tensões ao longo do meio contínuo devido à estrutura nele apoiada. Seguem os gráficos de deslocamento e tensão no solo calculados após o processamento da estrutura.

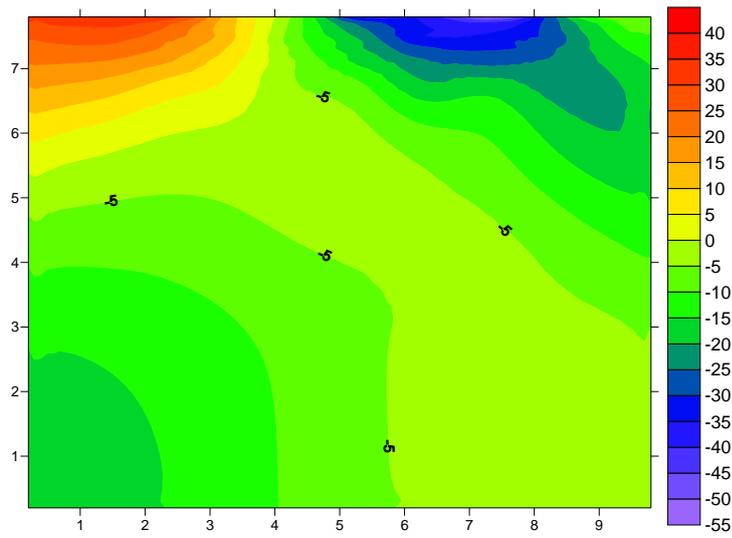


*Deslocamento  $U_x$*

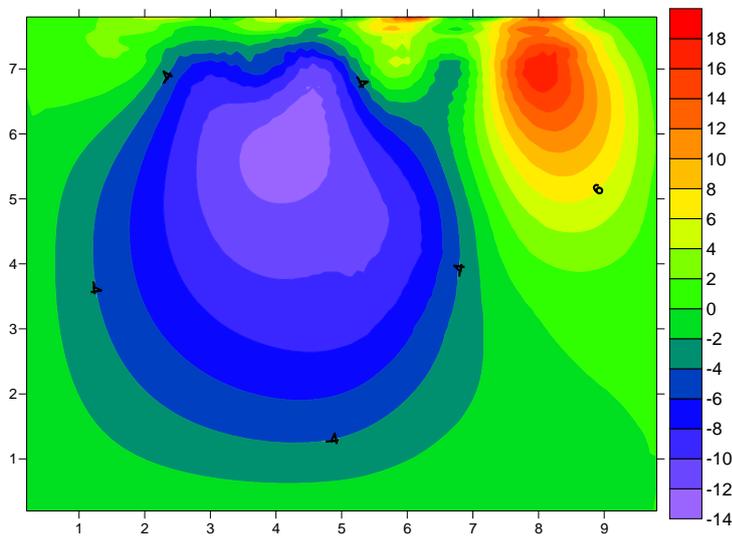


*Deslocamento  $U_y$*

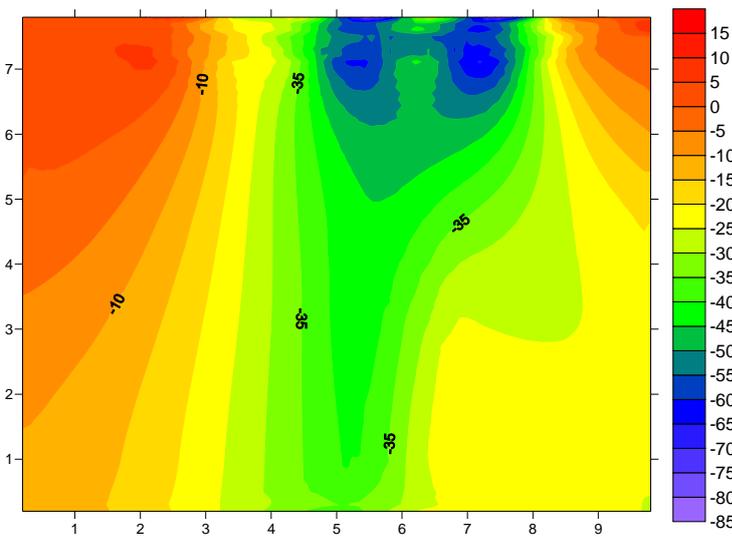
*Figura 7.18 – Deslocamentos na direção x e y no meio contínuo*



*Tensão  $\sigma_x$*



*Tensão  $\tau_{xy}$*



*Tensão  $\sigma_y$*

*Figura 7.19– Distribuição das tensões ao longo do solo*

### 7.4.5. Mastro esbelto engastado em solo heterogêneo

Neste exemplo, considera-se um mastro de bandeira estruturado como uma torre alta engastada em um solo heterogêneo, conforme mostra a figura 7.20 a seguir.

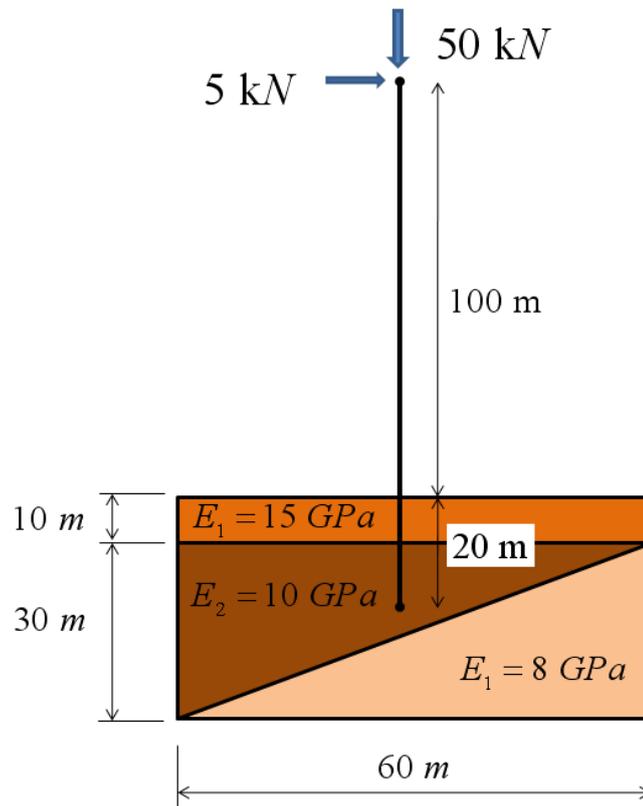


Figura 7.20 – Mastro esbelto engastado em solo heterogêneo

O solo é formado por três diferentes materiais, sendo a camada mais inferior a de material menos rígido. Os valores de módulo de elasticidade são apresentados na figura 7.20. As condições de contorno são restrição ao deslocamento horizontal nas faces laterais do solo e restrição ao deslocamento vertical na face mais inferior do solo.

Para a estrutura, é considerada uma seção transversal em perfil metálico do tipo caixote (figura 7.21 a seguir) com 2 cm de espessura. A seção transversal possui área de  $A = 0,1166 \text{ cm}^2$  e momento de inércia  $I = 0,0183 \text{ m}^4$  e o módulo de elasticidade do material é  $E = 210 \text{ GPa}$ . Considera-se um carregamento vertical e outro horizontal no extremo superior, conforme a figura 7.20.

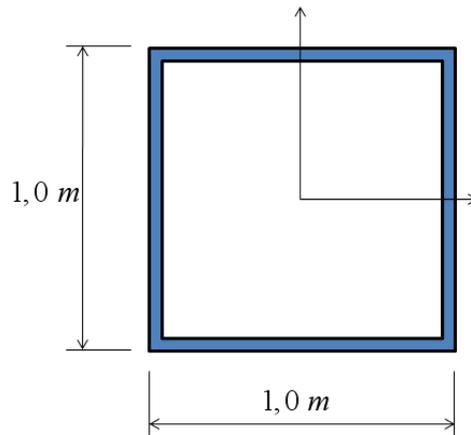


Figura 7.21 – Seção transversal do mastro

Os resultados obtidos com a utilização do código desenvolvido serão comparados com valores obtidos para uma análise linear com apoios fixos para os nós da estrutura que se encontram internos ao solo. Pretende-se assim demonstrar as diferenças ocasionadas com as diferentes considerações de análise.

Os resultados obtidos para deslocamentos horizontais, verticais e rotações ao longo da estrutura são apresentados respectivamente nas figuras 7.22, 7.23 e 7.24 a seguir.

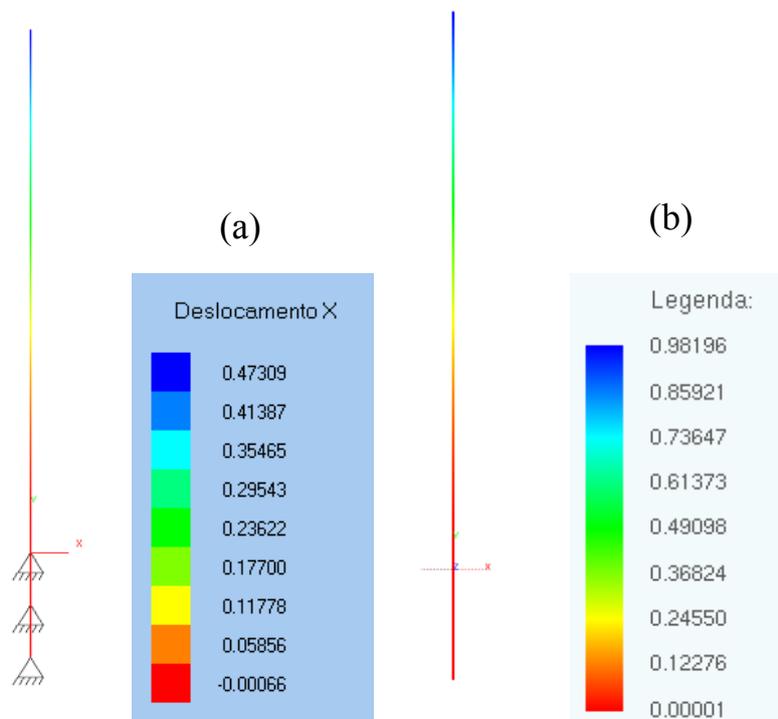


Figura 7.22 – Resultados de deslocamento horizontal para (a) análise linear e (b) este trabalho

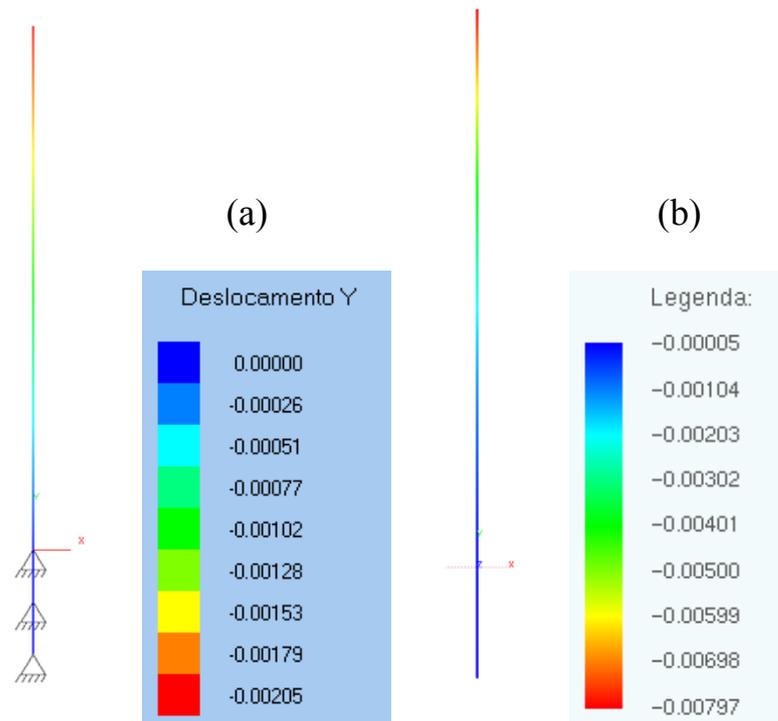


Figura 7.23 – Resultados de deslocamento vertical para (a) análise linear e (b) este trabalho

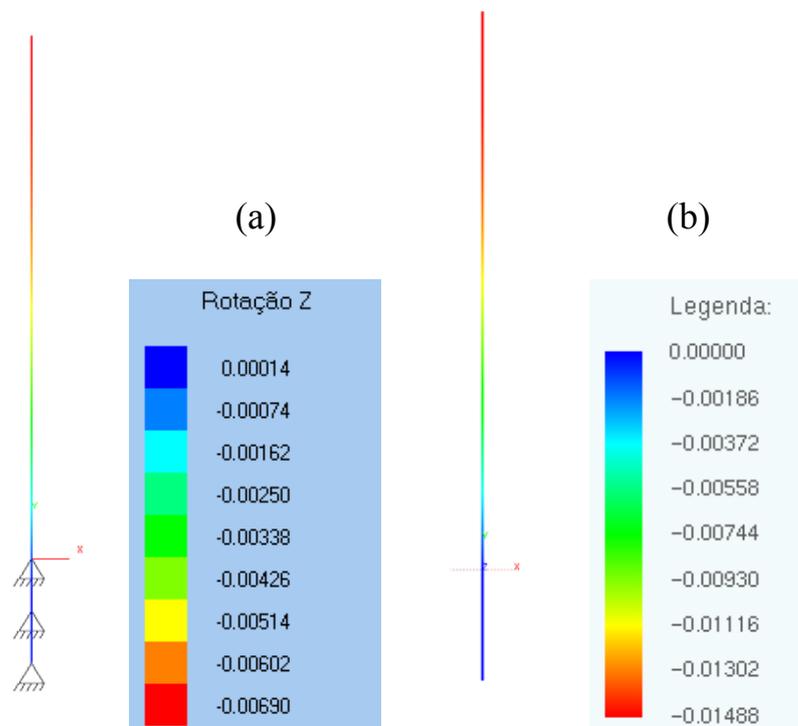


Figura 7.24 – Resultados de rotação para (a) análise linear e (b) este trabalho

Observa-se que os valores obtidos com a análise não linear geométrica e interação solo-estrutura são muito superiores ao da análise linear com apoios fixos. O valor máximo

obtido para o deslocamento horizontal com a análise NLG chega a ser maior que o dobro do resultado advindo da análise linear.

A consideração da não linearidade geométrica e da interação solo-estrutura faz com que ocorram também maiores deslocamentos verticais ao longo da estrutura. Neste caso, a consideração da compressibilidade do solo permite a verificação de um recalque de toda a estrutura.

A seguir, apresenta-se o resultado para os momentos fletores ao longo da estrutura.

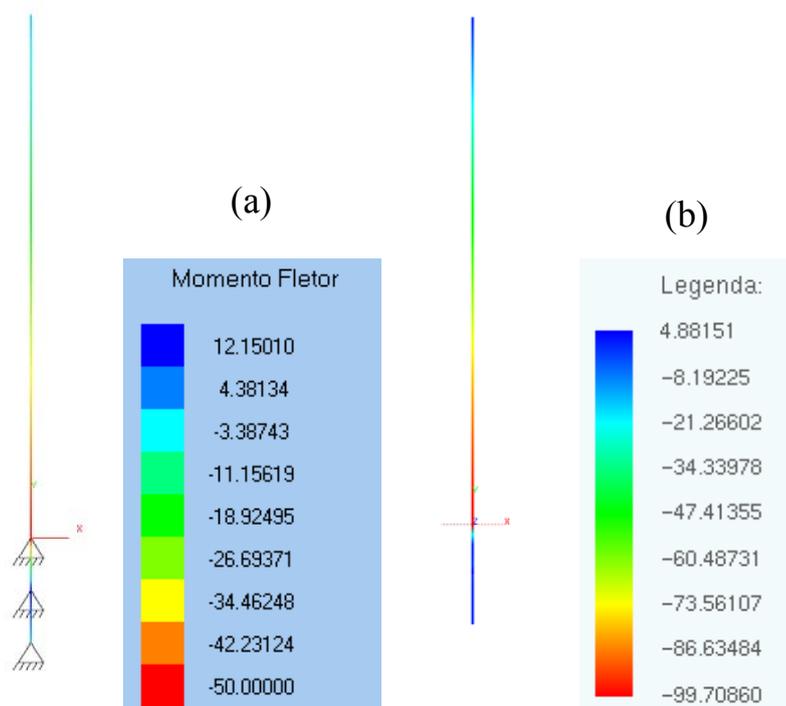


Figura 7.25 – Resultados de momentos fletores para (a) análise linear e (b) este trabalho

A observação da distribuição do momento fletor ao longo da estrutura demonstra claramente a importância da consideração da NLG e da interação solo-estrutura. O valor para o momento fletor máximo na base da estrutura chega a ser quase 100% maior no caso da análise realizada com o programa desenvolvido. Este fato precisa ser levado em conta no dimensionamento estrutural, caso contrário deverá ocorrer problemas estruturais graves e que podem comprometer a segurança de pessoas.

# Capítulo 8

## 8.1. Conclusões

Neste trabalho foi desenvolvido um código computacional que permite análise da interação solo-estrutura considerando o comportamento não linear geométrico da estrutura e o solo como sendo formado por mais de um material. O programa desenvolvido reúne dois códigos computacionais distintos em um único, sendo o primeiro baseado no método dos elementos de contorno e o segundo no método dos elementos finitos, acoplados por meio da formulação algébrica baseado em VENTURINI (1992), conforme descrito no capítulo 7.

No caso do programa de sólidos bidimensionais baseado no MEC, toda formulação segue o que foi apresentado nos capítulos 4 e 5. Os resultados obtidos com os exemplos comprovam o adequado funcionamento do programa e demonstram suas aplicações em problemas elásticos diversos, incluindo domínios finitos e infinitos. Particularmente, os exemplos apresentados no capítulo 5 demonstram a funcionalidade do MEC aplicada a problemas elásticos envolvendo domínios heterogêneos. Neste caso, a técnica algébrica baseada nos trabalhos de VENTURINI (1992) e PAIVA & RIBEIRO (2009) se mostrou bastante eficiente permitindo a adoção de múltiplas inclusões e facilitando também a implementação de linhas de carga ultrapassando diferentes domínios. Ao se escrever uma única equação para todo o domínio heterogêneo, a imposição das condições de compatibilidade e equilíbrio no sistema algébrico ficam simplificadas, o que aumenta a precisão dos resultados. A estratégia algébrica também reduz o número de incógnitas do problema pelo fato das forças de superfície no contato não serem incluídas no sistema. As matrizes obtidas são cheias, sem grandes blocos de zeros, como ocorre na técnica clássica de sub-região. A limitação com relação ao uso de materiais com mesmo coeficiente de Poisson é aceitável, frente as vantagens oferecidas pela técnica, o que configuram as conclusões de RIBEIRO (2009). A técnica de subtração de singularidade adotada também contribui para a melhoria na qualidade dos resultados.

Com relação ao MEF posicional, os exemplos apresentados no capítulo 6 comprovam a sua eficiência e sua aplicação à análise não linear geométrica de estruturas. A formulação lagrangeana adotada possui linguagem matemática simples, o que torna possível a sua implementação em um código computacional de acoplamento. No caso do software AcadFrame, utilizado na modelagem da estrutura, o mesmo se mostrou bastante versátil,

possibilitando a simulação de estruturas reticuladas de forma abrangente. É possível assim analisar o comportamento não linear geométrico de uma edificação utilizando uma ferramenta baseada em uma formulação com cinemática exata mais atual e eficiente.

Tanto na formulação do MEC quanto na do MEF, o uso dos polinômios de Lagrange de ordem qualquer permitiu a generalização de ambos os códigos para o uso de elementos curvos isoparamétricos. É possível que superfícies curvilíneas e funções de alta ordem sejam assim melhor representadas. O uso desses elementos pode também melhorar a qualidade das repostas em ambos os programas.

O acoplamento entre os métodos se mostrou também eficiente, como mostram os exemplos apresentados no capítulo 7. A escolha do acoplamento MEC/MEF para o estudo da interação solo estrutura se mostrou adequado, pelas características observadas em cada meio e pelas vantagens oferecidas por cada método numérico em particular.

A estratégia algébrica para o acoplamento permite que a matriz de rigidez condensada do solo seja aplicada ao sistema algébrico do MEF a cada iteração no processo de Newton-Raphson. Assim, o solo atua como condição de contorno para a estrutura, já considerando as diversas características de seu entorno. É possível avaliar, por exemplo, os efeitos que carregamentos aplicados ao solo distantes da edificação têm sobre o comportamento da mesma, pois nessa formulação os efeitos da continuidade do meio são considerados. A técnica alternativa implementada no código via MEC possibilita a análise de solos estratificados e com concentração de materiais (inclusões). As linhas de carga, por sua vez, permitem que sejam simuladas estacas cravadas em qualquer direção. Da forma como foi elaborada, a estratégia permite inclusive que estas estacas ultrapassem diversas camadas de solo.

Os exemplos 7.4.1, 7.4.2 e 7.4.3 comprovam o funcionamento do programa. Nestes exemplos demonstra-se que é possível calcular de forma segura e precisa os deslocamentos e esforços produzidos no fenômeno de interação entre o meio contínuo e a estrutura reticulada através do uso da ferramenta desenvolvida.

Com relação à técnica de suavização por mínimos quadrados, esta não se mostrou suficiente para reduzir as oscilações de força de superfície no contato, o que reforça as conclusões apresentadas por ROCHA (2009). A aplicação de nós adicionais aos elementos de contorno não alterou nenhum resultado dos exemplos processados. No exemplo 7.4.2, foi feita a análise das forças de superfície resultantes em uma estaca imersa em um solo. O gráfico das forças ao longo da estaca revela uma pequena oscilação dos valores nos extremos para uma malha menos refinada. Mesmo com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados os

resultados obtidos não se alteram. Somente com a adoção de uma malha mais refinada no MEC foi possível reduzir tais oscilações.

A aplicação desta técnica foi adotada por recomendação de outros trabalhos encontrados na literatura que afirmam a eficiência da mesma na redução das oscilações de força de superfície. É preciso então avaliar de forma mais objetiva até que ponto essa técnica pode ter influência ou não no sistema algébrico, porém este não é objetivo dessa pesquisa, ficando como sugestão para trabalhos futuros.

Os últimos exemplos apresentados no capítulo 7 demonstram a aplicação para o programa na análise de edificações e de torres esbeltas acopladas ao solo. A consideração da não linearidade geométrica e do comportamento do solo na estrutura simultaneamente enriquece o processo de análise, permitindo ao engenheiro calculista uma avaliação mais verossímil e mais condizente com a realidade física do problema real.

A abrangência da formulação permite ainda a análise de problemas elásticos diversos, como meios enrijecidos, peças mecânicas acopladas, materiais compósitos, etc. Pode ser aplicado, por exemplo, na análise de túneis reforçados, ligações de elementos estruturais e até mesmo em estruturas leves da aeronáutica. O uso de elementos curvos torna possível também a simulação de ganchos e armaduras em problemas de concreto armado, por exemplo.

Assim, todos os objetivos foram alcançados com sucesso. A ferramenta desenvolvida fica, portanto à disposição do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC para que possa ser aproveitado em pesquisas relacionadas a acoplamento MEC/MEF, análise não linear e interação solo-estrutura.

## 8.2. Sugestões para trabalhos futuros

Baseado nas conclusões anteriormente apresentadas, serão feitas aqui sugestões para futuros trabalhos de pesquisa. Sugere-se, portanto:

- Aplicar as formulações aqui apresentadas para desenvolvimento de um programa de análise não linear geométrica da interação solo-estrutura tridimensional, incluindo no MEF os elementos de pórtico tridimensional, elementos de placa e de chapa para modelagem da estrutura;
- Desenvolver estratégia algébrica semelhante a desenvolvida neste trabalho para a consideração de meios heterogêneos com diferentes valores de coeficiente de Poisson via método dos elementos de contorno;
- Considerar a plastificação do meio contínuo, tornando o programa de sólidos bidimensionais mais abrangente;
- Incluir a dinâmica de pórtico à análise da estrutura via MEF posicional para avaliação do comportamento dinâmico associado ao fenômeno interação solo-estrutura e a não linearidade geométrica.
- Estudar novas técnicas que permitam suavizar os resultados em força de superfície no contato, identificando de forma objetiva a real influência da técnica dos mínimos quadrados no sistema algébrico.

## Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, F.P.A. (2003). Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.
- ALMEIDA, V.S. (2003). Análise da interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.
- ANTUNES, H.M.C.C.; IWAMOTO, R.K. (2000). Comparação entre resultados observados in situ e modelos numéricos para a interação solo-estrutura. In: Simpósio de Interação Estrutura-Solo em Edifícios, São Carlos. SGS/EESC-USP.
- AOKI, N. (1997). Aspectos geotécnicos da interação estrutura/maciço de solos, XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural, vol. 1, São Carlos, pp. VII – XX.
- AOKI, N.; LOPES, F.R. (1975). Estimating stress and settlements due to deep foundation. In: Conf. Panam, volume 5, p. 377-386, Buenos Aires. Soil Mechanics and Foundation Engineering, HUELLA - Estúdio Gráfico.
- ASSAN, A.E. (2003). Método dos elementos finitos primeiros passos. UNICAMP, Campinas, Brasil, 2 edição.
- BAE, G.; et al. (2005). Homogenization framework for three-dimensional elastoplastic finite element analysis of a grouted pipe roofing reinforcement method for tunnelling. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29:1-24.
- BARBIRATO, J.C.C. (1991). Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos – SP.
- BATHE, J.K. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- BEHDINAN, K.; et al (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.154, p.151-161.
- BEZERRA, D.P. (1995). Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.
- BEZINE, G. (1981). A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Eng.*. Vol.17, pp.1647-1657.
- BISSHOPP, K.E.; DRUCKER, D.C. (1945). On the deflection of a cantilever beam. *Quarterly of applied mathematics*, v.3, p.272-275.

- BONET, J.; et al. (2000). Finite element analysis of air supported membrane structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 190, 2000. 579-595.
- BOTTA, A.S. (2003). Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos - SP.
- BREBBIA, C.A. (1978). Weight residual classification of approximate methods. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 2, n. 3, p. 160-164.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary elements: and introductory course*. Computational Mechanics Publications, London.
- BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. (1978). *Computational methods for the solution of engineering problems*, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C.A.; GEORGIU, P. (1979). Combination of boundary and finite elements in elastostatics. *Applied Mathematical Modelling*, 3(3):212-220.
- BURMISTER, D.M. (1945). The general theory of stresses and displacements in layered systems 1. *Journal of applied physics*, 16(2):89-96.
- BUTTERFIELD, R.; BANERJEE P.K. (1971). The elastic analysis of compressible piles and pile groups. *Geotechnique*, vol. 21, n.1.
- CAMPELLO, E.M.B.; et al. (2003). A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. *Computational mechanics*, (31), 505-518.
- CARRAZEDO, R. (2009). Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARVALHO, F.A.C. (1980). Instabilidade de edifícios com paredes de seção aberta contra ventadas por lintéis. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARVALHO, F.A.C. (1982). Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CHAN, K. S.; et al. (1974). Force at a point in the interior of a layered elastic half-space. *Int. J. Solids Struct.*, 10:1179-1199.
- CHAVES, E.W.V.(1997). Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno. São Carlos, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHEUNG, Y. K.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1965). Plates and tanks on elastic foundations on application of finite element method. *Int. J. Solids. Struct.*, v.1, p. 451-461.
- CHOW, Y. K.; TEH, C. I. (1991). Pile-cap-pile-group interaction in non-homogeneous soil. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(11):1655-1668.

CODA, H. B. (1993). Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos – SP.

CODA, H.B. (2000). Contribuição à Análise Dinâmica Transiente de Meios Contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno. São Carlos. Tese (Livre Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CODA, H.B. (2003). An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: XVIII Congresso Brasileiro De Engenharia Mecânica, São Paulo.

CODA, H.B.; et al. (2008). Positional Finite Elements applied to geometrical non-linear analysis of elastic solids. *Computers & Structures*.

CODA, H.B.; GRECO, M. (2004). A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.193, p.3541-3557.

CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. (2007). An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells - curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, p. 185–200.

CODA, H.B.; PACCOLA, R.R. (2008). A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223.

COLARES, G. M. (2006). Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-Linear finite element analysis of solids and structures*. v.1. England, John Wiley & Sons.

CRUSE, T.A. (1969). Numerical solution in three-dimensional electrostatic. *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 12, p. 1259-1274.

DAVIES, T.G.; BANERJEE, P. K. (1978). Displacement field due to a point load at the interface of a 2 layer elastic half-space. *Geotechnique*, 28(1):43-56.

FABRIZZI, M.A. (2007). Contribuição para o projeto e dimensionamento de edifícios de múltiplos andares com elementos estruturais mistos aço concreto. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERRO, N.C.P. (1999). Uma combinação MEC/MEF para análise de fundações enrijecidas por estacas. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo.

FONTE, F.L.F.; FONTE, A.O.C. (2003). Análise de interação solo-estrutura para diferentes soluções de fundação superficial em edifícios. In: Simpósio Epusp Sobre Estruturas De Concreto, 5, 2003, São Paulo. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

- GADALA, M.S.; et al. (1984). Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.20, p.887-914.
- GATTASS, M.; ABEL, J.F. (1987). Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts. *International journal for numerical methods in engineering*, v.24, p.2119-2141.
- GIBSON, R.E. (1974). The analytical method in soil mechanics. *Geotechnique*, 24:115-140.
- GOSHY, B. (1978). Soil foundation structure interaction. *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 104, n° ST5, pp. 749-761.
- GRECO, M. (2004). Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GRECO, M., CODA, H. B. (2006). Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration* 290, p.1141-1174.
- GUSMÃO, A.D. (1990). Estudo da interação solo-estrutura e sua influência em recalques de edificações. Tese (Mestrado) - COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- GUSMÃO, A.D.; GUSMÃO FILHO, J.A. (1994). Avaliação da influência da interação solo-estrutura em edificações. In: X Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia de Fundações, v. 2, pp. 447-454, Salvador, Bahia, Brasil.
- GUSMÃO, J.A., (1995). Contribuição à prática de fundações: a experiência do Recife. Tese para concurso de Professor Titular, UFPE, Recife, Brasil, 251p.
- HOLANDA, O. G. J. (1998). Interação solo-estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- HOLANDA, O.G. et al. (2000). Comportamento de um edifício de concreto armado considerando a interação solo-estrutura e o efeito incremental construtivo. In: Congresso Brasileiro Do Concreto, 42, Fortaleza, 2000. Fortaleza: Ibracon, 2000.
- IWAMOTO, R. K. (2000). Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- IZZUDDIN, B.A.; ELNASHAI, A.S. (1993). Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames, *Journal of engineering mechanics-ASCE*, v.119, p.549-569.
- JENKINS, J.A.; et al. (1966). Large deflections of diamondshaped frames, *Int. J. Solids and Structures*, 2, 591-603.
- KARAKUS, M., et al. (2007). Finite element analysis for the twin metro tunnel constructed in Ankara clay, Turkey. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 66:71-79.

- KOMATSU, J. S. (1995). Estudo de problemas de escavação através de combinação de elementos de contorno e elementos finitos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- KZAM, A.K.L. (2009) Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- LACHAT, J.C. (1975). A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics. 1975. PhD Thesis. Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, Southampton, 1975.
- LEE, C.Y. (1993). Pile group settlement analysis by hybrid layer approach. v .119, n.6.
- LEITE, L. G. S. (2007). Desenvolvimento de modelos numéricos para análise de problemas de interação de domínios bidimensionais. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.
- LIANG, J.; LIEW, K.M. (2001). Boundary elements for half-space problems via fundamental solutions: A three-dimensional analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(11):1189-1202.
- MACIEL, D.N. (2008). Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- MACIEL, D.N.; CODA, H.B. (2005). Positional description for nonlinear 2-D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner kinematics. Third MIT conference on com. Fluid and sol. Mech., Cambridge, Massachussets, USA.
- MACIEL, D.N.; et al. (2004). Positional description for nonlinear 2D frames analysis by FEM with reissner kinematics. XXV CILAMCE, Recife-PE.
- MANCINI, E. (1973). Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos - SP.
- MARTINS, C.H. (2001). Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MATIAS JUNIOR., I.G. (1997). Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- MATOS FILHO, R.F. (1999). Análise da interação estaca-solo via uma combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos Contorno. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.
- MATTES, N.S.; POULOS, H.G. (1969). Settlement of single compressible pile. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 95(1):189-207.

- MATTIASSON, K. (1981). Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, v.17, p.145-153.
- MENDONÇA, A.V. (2002). Estudo de estruturas compostas por lâminas planas: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- MEYERHOF, G.G. (1947). The settlement analysis of building frames. *The Structural Engineering*, v. 25, p. 369.
- MINDLIN, R.D. (1936). Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *J. Physics*, 7:195-202.
- MONDKAR, D.P.; POWELL, G.H. (1977). Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International journal for numerical methods in engineering*, v.11, p.499-520.
- MOSER, W.; et al. (2004). Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(3):317-328.
- MOTA, M. M. C. (2009). Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados no campo. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- MOURA, A.R.L.U. (1995). Interação solo-estrutura em edifícios. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 135p.
- MYLONAKIS, G.; GAZETAS, G. (1998). Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. *Geotechnique*, 48(1) 55-72.
- OASIS, JR.; et al. (1977). Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. In: *Symposium Of Innovative Numerical Analysis In Applied Engineering Science*. Versailles.
- OLIVEIRA, D.S. (1982). Aplicação do método de Rayleigh-Ritz na integração numérica das equações da técnica do meio contínuo. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- OLIVEIRA NETO, L. (1991). Análise de placas de borda curva pelo do método dos elementos de contorno. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- ÕNATE, E. I. N (1995). *Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos*. Barcelona, Espanha: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- OSHIMA, S.T. (2004). Uma combinação MEC/MEC para análise da interação de estacas inclinadas e o solo. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

- OTTAVIANI, M. (1975). Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups. *Geotechnique*, 25(2):159-174.
- PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. (2000). Boundary element analysis of zoned plates in bending. *Computational Mechanics*, 25(6):560-566.
- PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. (2004). Bending moments at interfaces of thin zoned plates with discrete thickness by the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, 28:747-751.
- PASCON, J. P. (2008). Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PAULA, C.F. (1997). Estudo das descrições lagrangiana e euleriana na análise não linear geométrica com emprego do método dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PAULA, C.F. (2001). Contribuição ao estudo das respostas numéricas não lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PIMENTA, P. M.; et al. (2004). A fully nonlinear multiparameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. *Computational Mechanics* 34, p. 181-193.
- POULOS, H.G. (1967). Stresses and displacements in an elastic layer underlain by rough rigid base. *Geotechnique*, 17(4):378-410.
- POULOS, H.G. (1968). Analysis of the settlement of pile groups. *Geotechnique*, 18(3):449-471.
- POULOS, H.G.; DAVIES, H. G. (1968). The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. *Geotechnique*, 18:351-371.
- RAMALHO, M.A.; CORRÊA, M.R.S. (1991). Interação solo-estrutura para edifícios sobre fundação direta. In: *Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, 25, Porto Alegre, 1991. Anais, v. 2, pp. 433-444.
- RANDOLPH, M. F.; WROTH, C. P. (1979). An analysis of vertical deformation of pile groups. *Geotechnique*, London, England, 29 (4), 423-439.
- REIS, J. H. C. (2000). Interação solo-estrutura de grupos de edifícios com fundações superficiais em argila mole. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- REIS, J.H.C.; AOKI, N. (2005). Aplicação do método de aproximações sucessivas para solução de problemas em interação solo-estrutura de edifícios. *Anais. Belo Horizonte: ABMS*, v. 7, Belo Horizonte, p. 405-410, 2005.
- REISSNER, E. (1973). One-dimensional large displacement finite-strain beam theory. *Studies in applied mathematics*, v.52, p. 87-95.

RIBEIRO, D. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. Tese (Doutorado) -Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. (2009). Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.11, n. 50, p. 57-74, 2009.

RIOS, B. M. C (1991). Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos a ações verticais e laterais. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ROCHA, F. B. (2009). Análise de domínios reforçados através da combinação MEC/MEF considerando modelos de aderência. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos.

ROSA, A.K.; PAIVA, J.B. (2009). Análise da interação estaca-solo via combinação diferenças finitas/método dos elementos de contorno. In: Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais Em Eng., 2009, Búzios. Anais. Búzios – RJ.

SHAW, R. P.; FALBY, W. (1977). A combined finite element-boundary integral equation method. In: Symposium of Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science. Versailles.

SILVA, T.F.T. (2005). Estudo da interação entre edifícios de alvenaria estrutural e pavimentos em concreto armado. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMO, J.; et al. (1984). Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. Computer methods in applied mechanics and engineering, v.42, p.301-330.

SINGH, R. B.; et al. (1988). Elasto-plastic analysis of tunnel excavation in layered rock medium by coupled FEM/BEM. Numerical Methods in Geomechanics, p. 941-950.

SORIANO, H. M. (2003). Método dos Elementos Finitos em análise de estruturas. Universidade de São Paulo, São Paulo.

SOUZA, J.E. (2001). Análise de interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SOUZA, R.A.; REIS, J. H. C. (2008). Interação solo-estrutura para edifícios sobre fundações rasas. Acta Sci. Technol., Maringá, v. 30 n. 2, p 161-171.

STERN, M. (1979). A general boundary integral formulations for the numerical solution of plate bending problems. Int. J. Sol. Struct., Vol. 15, pp. 769-782.

SURANA, K.S. (1983). Geometrically non-linear formulation for 2 dimensional curved beam elements. Computer & structures, v.17, p.105-114.

- SWOBODA, G.; et al. (1987). Rheological analysis of tunnel excavation by means of coupled finite element (FEM) boundary element (BEM) analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 11(2):115-129.
- THE, L.H., CLARKE, M.J. (1998). Co-rotational and Lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements. *Journal of constructional steel research*, v.48, p.123-144.
- THOMAZ, E. (1989). *Trincas em Edifícios: causas, prevenção e recuperação*. Universidade de São Paulo: Instituto de Pesquisa Tecnológica. São Paulo, SP.
- VENTURINI, W.S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. Tese (Livre Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- VENTURINI, W. S. (1992). Alternative formulations of the boundary element method for potential and elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:203-207.
- WANG, C. M., et al. (2001). Axisymmetric buckling of reddy circular plates on pasternak foundation. *Journal Engineering Mechanic*, 127(3):254-259.
- WINKLER, E. (1867). *Die lehre von der Elastizitat und Festigkeit*. Domicius. Prage.
- WONG M.B.; TINLOI F. (1990). Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. *Computers & structures*, v.34, p.633-640.
- WRIGGERS, P.; et al. (1990). Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computer & structures*, v.37, p.319-331.
- WUTZOW, W. W. (2003). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com enrijecedores*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos.
- YIN, L. Z.; YANG, W. (2000). Topology optimization for tunnel support in layered geological structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1983-1996.
- ZHU, et al. (2003). Systematic numerical simulation of rock tunnel stability considering diferent rock conditions and construction effects. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 18:531-536.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; et al. (1977). The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v11, p 355-375.

