

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

FABIO CARLOS DA ROCHA

**Análise de Domínios Reforçados Através da Combinação MEC/MEF Considerando
Modelos de Aderência**

São Carlos
Outubro de 2009

FABIO CARLOS DA ROCHA

Análise de Domínios Reforçados Através da Combinação MEC/MEF Considerando Modelos de Aderência

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Área de Concentração: Métodos Numéricos
Orientador: Prof. Dr. Tit. Wilson Sérgio Venturini

São Carlos
Outubro de 2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PEQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha Catalográfica

Escola de Engenharia de São Carlos

Rocha, Fabio Carlos da

Análise de Domínios Reforçados Através da Combinação MEC/MEF Considerando Modelos de Aderência/ Fabio Carlos da Rocha; orientador Wilson Sergio Venturini. – São Carlos, São Paulo, 2009.

200 f. : fig.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas. Área de Concentração: Métodos Numéricos) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

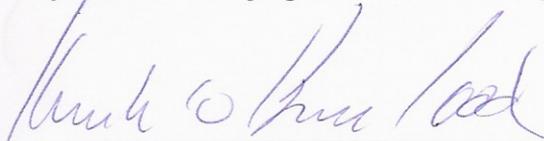
1. Método dos Elementos de Contorno – Controle de Erro. 2. Acoplamento MEC/MEF – Modelos de Aderência. 3. Métodos Numéricos. I. Título.

CDD: 000.000

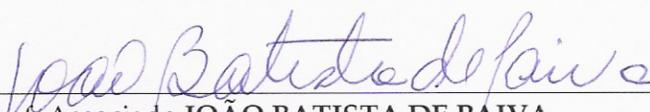
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro FABIO CARLOS DA ROCHA.

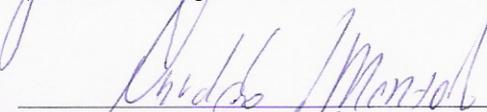
Dissertação defendida e julgada em 02/10/2009 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador Substituto)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO



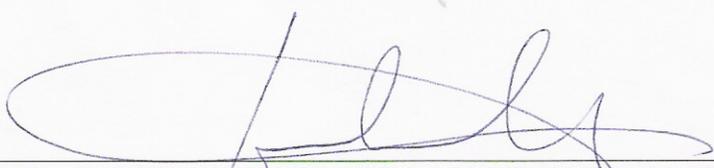
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado



Prof. Dr. **OSVALDO LUÍS MANZOLI**
(Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"/UNESP/campus de Bauru) APROVADO



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Titular **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

ESCALA
Serviço de Pós-Graduação
Protocolado em 02/10/09

À meus avos e minha noiva que confiaram e acreditaram em meus objetivos, contribuindo em todos os momentos para tornar possível a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me proporcionou saúde, sabedoria e todas as condições para que este trabalho pudesse ser realizado, pois se estou concluindo esta dissertação é porque ele permitiu

Ao professor Tit. Wilson Sergio Venturini pela orientação, amizade e dedicação prestada para o desenvolvimento desta pesquisa.

Ao professor Associado Humberto Breves Coda pelas sugestões e correções deste trabalho e pela sua disponibilidade em substituir o professor Venturini no processo de defesa desta dissertação

Aos professores e funcionários do departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC/USP) em especial ao Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola por suas contribuições nos momentos em que foram necessárias.

Aos funcionários do serviço de biblioteca (EESC/USP) pelos excelentes serviços prestados e em especial à Adriana Coscia Perez Gomez que prontamente providenciou os artigos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos concedida.

À construtora Queiroz Galvão S/A que sempre proporcionou condições para que este trabalho pudesse ser concluído.

Aos professores da Universidade Federal de Sergipe (UFS) que me ensinaram os conceitos de Engenharia, e em especial ao professor Valdemberg de Araújo (DMA) pelos anos de orientação na minha formação matemática e a minha iniciação no mundo das ciências.

Pela grandiosa colaboração do doutorando Edson Leonel, que mesmo estando no exterior em nenhum momento se omitiu em ajudar, principalmente nos momentos de ausência do meu orientado por motivos de doença.

À minha família que sempre me apoiou e em especial ao meu avô João Rocha Mendonça e minha avó Elvira da Silva Mendonça que são meus exemplos de dignidade.

À minha noiva Aline Fraga que sempre foi paciente, incentivadora e procurou entender os meus momentos de ausência, mesmo nas dificuldades, para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos Luiz Aquino, Roseane, Francys e em especial a Rodrigo Vieira que me ajudou na conclusão das figuras deste trabalho.

Aos amigos, não só do departamento, mas para a vida: Aref Kzan, Dorival Piedade, Jesús Daniel e a senhorita Maria do Socorro que sempre me apoiaram e proporcionaram momentos agradáveis no período de desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca, professor Dr. João Batista de Paiva (EESC/USP) e ao professor Osvaldo Luiz Manzoli (UNESP/Bauru) por suas disponibilidades em fazer parte da avaliação deste trabalho.

“Quanto maior o número de olhares, de olhares distintos que saibamos empregar para ver um determinado assunto, tanto maior será nosso conceito sobre ele, tanto mais completa será nossa objetividade”

Friedrich Nietzsche

RESUMO

ROCHA, F. C.. **Análise de Domínios Reforçados Através da combinação MEC/MEF Considerando Modelo de Aderência**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

Neste trabalho, uma combinação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o Método dos Elementos Finitos (MEF) é apresentada para análise bidimensional de sólidos elastostáticos reforçados, sendo considerados modelos de aderência no acoplamento. O elemento de contorno é adotado para modelar o comportamento do domínio, enquanto que o modelo por elementos finitos é utilizado para modelar o enrijecedor. Devido às singularidades nas equações integrais do MEC, estudou-se o erro ocasionado pelos integrandos de ordem $1/R$ e $1/R^2$ e como consequência sugerem-se, neste trabalho, equações mais simples para representar o erro das integrações. Para a formulação do acoplamento, um polinômio do terceiro grau é adotado para aproximar tanto o campo de deslocamento quanto a rotação do enrijecedor, enquanto aproximações lineares são usadas para representar a força de contato entre o domínio e o enrijecedor. Modelos de escorregamento, apresentados, são lineares e governados em função do carregamento escrito em termos das forças de contato e o deslocamento relativo. A partir da combinação entre o MEC e o MEF obtém-se uma matriz retangular contendo duas equações para o MEC e uma para o MEF. O resultado das equações algébricas redundantes é eliminado pela aplicação do procedimento dos mínimos quadrados. Exemplos ilustram o bom ajuste e os melhores resultados proporcionados pelo controle do erro das equações integrais, mostrando ainda através de exemplos, a potencialidade e as limitações no acoplamento entre os dois materiais, considerando modelos de aderência ou não.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno, controle de erro, acoplamento MEC/MEF, modelos de aderência.

ABSTRACT

ROCHA, F. C. **Reinforced Domains Analysis through BEM/FEM Combination Considering Adherence Models**. Master Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

In this work it is presented a coupling between the Boundary Element Method and the Finite Element Method for two-dimensional elastostatic analysis of reinforced bodies considering adherence. The Boundary Element is used to model the matrix while the reinforcement is modeled by the Finite Element. Due to the inherent singularities present in Boundary Element formulations the quadrature rules, used to develop the necessary integrals may present undesired errors. In this sense the behavior of this integration error is studied and a simple way to control it is proposed along the work. Regarding the coupling formulation a third degree polynomial is adopted to describe the displacements and rotations of the reinforcement, while a linear polynomial is used to describe the contact forces among the continuum and the reinforcement. Adherence (or sliding) models are presented and implemented in the computer code. A linear relation between relative displacement and transmitted force is adopted. From difference of approximation regarding contact forces and displacements a rectangular matrix arises from the BEM/FEM coupling. The additional equations are eliminated by the use of a least square method based on the multiplication of transpose matrices. Examples are shown to demonstrate the good behavior of error control applied on gaussian quadratures regarding Boundary Element simulations for coupled or not situations, considering or not adherence models.

Keyword: Boundary Element Method, Error control, BEM/FEM coupling, Adherence models.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Solução de Engenharia para problemas Físicos. Fonte: (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).	2
Figura 3.1 - Cubo infinitesimal representando as componentes de tensões e as forças internas (vetor de tensão) atuando nas faces	1
Figura 3.2 – O vetor forças internas atuando em um plano qualquer	24
Figura 3.3 - Transformação de tensão no plano	26
Figura 3.4 - Notação para solução de Kelvin bidimensional (carregamento unitário na direção x)	29
Figura 3. 5 - Notação para solução de Kelvin bidimensional (carregamento unitário na direção y)	30
Figura 3.6 - Aplicação do teorema de Betti, forças de superfície do carregamento caso 1 e deslocamentos do carregamento caso 2 para calcular W12.	33
Figura 3.7 - Aplicação do teorema de Betti, deslocamentos do carregamento caso 1 e forças de superfície do carregamento caso 2 para calcular W21.	33
Figura 3.8 - Valor limite das integrais para problemas elásticos bidimensional	36
Figura 3.9 - Cálculo das deformações tangenciais.	39
Figura 3.10 - Cálculo das tensões para problemas de deformação plana.	39
Figura 4.1 – Definição do ângulo θ	54
Figura 4.2 - Quantidade de número de pontos de Gauss versus ângulo ($1 / R$)	55
Figura 4.3 - Quantidade de número de pontos de Gauss versus ângulo ($1 / R^2$)	55
Figura 4.4 - Ajuste de curva aos valores obtidos da equação analítica ($1 / R$)	56
Figura 4.5 - Ajuste de curva aos valores obtidos da equação analítica ($1 / R^2$)	57
Figura 4.6 - Contorno da localização do ponto fonte onde a integração é realizada com 10^{-12} pontos de Gauss e com um erro de para a singularidade $1 / R$	60
Figura 4.7 - Contorno da localização do ponto fonte onde a integração é realizada com 10^{-12} pontos de Gauss e com um erro de para a singularidade $1 / R^2$	60
Figura 4.8 - técnica de sub-elementação para integração numérica (Fonte: LEONEL, 2006).	62
Figura 4.9 - Condições de localização do ponto fonte	63
Figura 4.10 - Estrutura representando a viga em balanço em análise	66
Figura 4.11 - Evolução do deslocamento, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno	67
Figura 4.12 - Evolução da tensão cisalhante, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno	67
Figura 4.13 - Gráfico da análise de erro para os deslocamentos máximo, no eixo da viga, na direção Y	68
Figura 4.14 - Gráfico da análise de erro para a tensão máxima no eixo da viga.	69
Figura 4.15 - Estrutura representando uma viga bi-apoiada em análise.	70
Figura 4.16 - Evolução do deslocamento, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno	70
Figura 4.17 - Evolução da tensão cisalhante, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno	71
Figura 4.18 - Gráfico da análise de erro para os deslocamentos máximo, no eixo da viga, na direção Y	72

Figura 4.19 - Gráfico da análise de erro para a tensão τ_{xy} máxima no eixo da viga.	72
Figura 5.2 - Cinemática de um ponto “P” qualquer. (WESLEY, 2008).....	76
Figura 5.3 - Discretização do contorno e da linha de carga. Aproximação de forças e dos deslocamentos na interface.	80
Figura 5.4 – Compatibilização entre os nós do MEC e do MEF	83
Figura 5.5 – Estrutura utilizada para explicação.....	84
Figura 5. 6 – Ilustração da construção das matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$	85
Figura 5.7 – Ilustração da construção da matriz $[G_{bE}]$	85
Figura 5.8 – Ilustração da construção das matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$	86
Figura 5.9 – Ilustração da construção da matriz $[G_{EE}]$	87
Figura 5.10 - Estrutura analisada	89
Figura 5.11 – Gráfico do deslocamento na direção axial do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF	90
Figura 5.12 - Gráfico do deslocamento na direção transversal do enrijecedor, na interface do acoplamento MEC/MEF	90
Figura 5.13 - Gráfico da rotação na interface do acoplamento MEC/MEF	91
Figura 5.14 – Gráfico da força de superfície na direção axial do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF	91
Figura 5.15 - Gráfico da força de superfície na direção transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF	92
Figura 5.16 - Estrutura analisada	93
Figura 5.17 - Gráfico do deslocamento na direção do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF.....	94
Figura 5.18 - Gráfico do deslocamento transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF.....	94
Figura 5.19 - Gráfico da rotação ao longo da na interface do acoplamento MEC/MEF	95
Figura 5.20 - Gráfico da força de superfície na direção axial ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF	96
Figura 5.21 - Gráfico da força de superfície na direção transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF	96
Figura 5.22 - Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 1	98
Figura 5.23 - Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 2	99
Figura 5.24 - Estrutura analisada	104
Figura 5.25 - Gráfico da evolução das forças de superfície ao longo da região acoplada.....	105
Figura 5.26 - Evolução dos deslocamentos do domínio ao longo da interface.....	105
Figura 5.27 - Gráfico da evolução do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.....	106
Figura 5.28 - Gráfico do deslocamento relativo entre o domínio e o enrijecedor.	107
Figura 5.29 - Estrutura em análise.	108
Figura 5.30 - Diagrama das forças de superfícies ao longo da barra	109
Figura 5.31 - Diagrama dos deslocamentos do enrijecedor na sua direção axial.	109
Figura 5.32 - Diagrama dos deslocamentos do enrijecedor na sua direção transversal.....	110
Figura 5.33 - Diagrama evolução da rotação do enrijecedor para os dois modelos analisados.	110
Figura 5. 34 - Imagem do deslocamento na direção Y na estrutura para o último incremento de carga considerando o efeito da perda de aderência.....	111
Figura 5. 35 - Imagem da tensão σ_y na estrutura para o último incremento de carga considerando o efeito da perda de aderência.	112

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Constantes para as soluções fundamentais S e R (Fonte: BEER, 2008).....	42
Tabela 4.1– Parâmetros da regressão não-linear para integrando de ordem 1 / R	58
Tabela 4.2 – Parâmetros da regressão não-linear para integrando de ordem 1 / R ²	59

Sumário

CAPÍTULO 1	1
1 Introdução	1
1.1 Solução Numérica para Problemas de Engenharia	1
1.2 Breve Histórico do Método dos Elementos de Contorno (MEC)	3
1.3 Breve Histórico do Método dos Elementos Finitos (MEF)	4
1.4 Objetivo	6
1.4.1 Objetivo Geral	6
1.4.2 Objetivos Específicos	6
1.4.3 Divisão da dissertação	7
CAPÍTULO 2	9
2 Revisão Bibliográfica	9
2.1 Publicações Internacionais	9
2.2 Publicações Nacionais	14
CAPÍTULO 3	21
3 O Método dos Elementos de Contorno	21
3.1 Problema Elástico Bidimensional	22
3.2 Equações Constitutivas	27
3.3 Solução Fundamental	28
3.4 Método Direto	32
3.4.1 Teorema de Betti e as Equações Integrais	32
3.4.2 Integrais Quando os Pontos P e Q Coincidem no Contorno	35
3.4.3 Pós-Processamento	38
CAPÍTULO 4	45
4 Controle de Erro da Integração Numérica	45
4.1 Introdução	45
4.2 Construção da Regra da Quadratura de Gauss	45
4.3 Estimativa do Erro da Quadratura de Gauss	52
4.4 Estudo de Erro da Quadratura de Gauss-Legendre para Integrandos de Ordens 1/R e 1/R ²	53
4.5 Técnica de Sub-Elementação	61
4.6 Validação da Análise do Erro	65
CAPÍTULO 5	75
5 Acoplamento MEC / MEF considerando domínios enrijecidos	75
5.1 Equações do Elemento Finito do Enrijecedor	75
5.1.1 Cinemática	76
5.2 Formulação do Acoplamento do Enrijecedor com o Domínio Bidimensional Via Combinação MEC/MEF	79
5.2.1 Equações do Acoplamento	79
5.2.2 Regularização por Mínimo Quadrado	87
5.3 Aplicação do Acoplamento MEC/MEF	89
5.3.1 Exemplo 1	89
5.3.2 Exemplo 2	93
5.4 Formulação do Acoplamento MEC/MEF Considerando a Perda de Aderência entre o Enrijecedor e o Domínio	97
5.4.1 Modelos de Aderência	97

5.4.2	Formulação do Acoplamento MEC/MEF com Modelo de Escorregamento .	99
5.4.3	Algoritmo implícito da formulação com o modelo de escorregamento	101
5.4.4	Exemplos Numéricos	103
CAPÍTULO 6	113
6	Considerações Finais	113
CAPÍTULO 7	117
7	Referências.....	117

CAPÍTULO 1

1 Introdução

1.1 Solução Numérica para Problemas de Engenharia

Em projetos de Engenharia Estrutural a simulação numérica possui um papel de crescente importância. Isto pode ser atribuído ao rápido avanço de poderosos computadores e de *softwares* de qualidade resultando na diminuição do custo da simulação computacional comparado aos elevados custos e/ou dificuldades práticas dos experimentos. Porém, para complementar ou até mesmo substituir experimentos, a simulação deve ter um elevado grau de eficiência, precisão e confiabilidade. Esse elevado grau de exigência pode não ser dependente somente do modelo físico e matemático que é escolhido para o sistema real que se deseja simular, mas também na escolha da própria ferramenta de simulação, por exemplo Método dos Elementos de Contorno, e em habilidades de utilizá-lo.

A Figura 1.1 mostra esquematicamente os passos que são necessários fazer para obter, na Engenharia, uma solução para o problema do mundo real. Primeiramente, uma teoria da Física tem que ser selecionada para modelar o problema. Esta teoria é então complementada por suposições adicionais no tipo de análise que faz referência, em qual espaço dimensional será abordado o problema, o tipo de material, o carregamento aplicado e entre outros. Todas as características são de interesse para poder descrever o problema com suficiente precisão. Isto é o que se chama de modelo Físico para o problema.

O próximo passo é traduzir o modelo físico em um modelo matemático. O modelo físico pode ser representado matematicamente de várias maneiras, então é feita uma escolha pela representação que satisfaça as necessidades do problema, por exemplo, pela seleção de um sistema de coordenadas apropriado, as unidades e as variáveis independentes. Isto conduz a uma descrição matemática particular para o problema de equações diferenciais ou integrais, aplicando as descrições matemática do contorno e das condições iniciais das restrições adicionais (por exemplo, restrições cinemáticas em problemas de contato).

O processo de modelagem é muito importante, e é neste momento que se determina o melhor resultado que se pode obter em qualquer ferramenta numérica. Qualquer erro no

processo de modelagem aparecerá na solução numérica, pois o programa somente resolve a equação matemática e não pode verificar se a simulação do fenômeno físico está adequada. Porém, quando se tem um bom modelo matemático, a escolha de uma metodologia apropriada para a obtenção da solução é muito importante para minimizar o pré-processamento (tradução do modelo matemático para o computador, que envolve a geração da geometria e da malha) computacional e o custo no processo da análise.

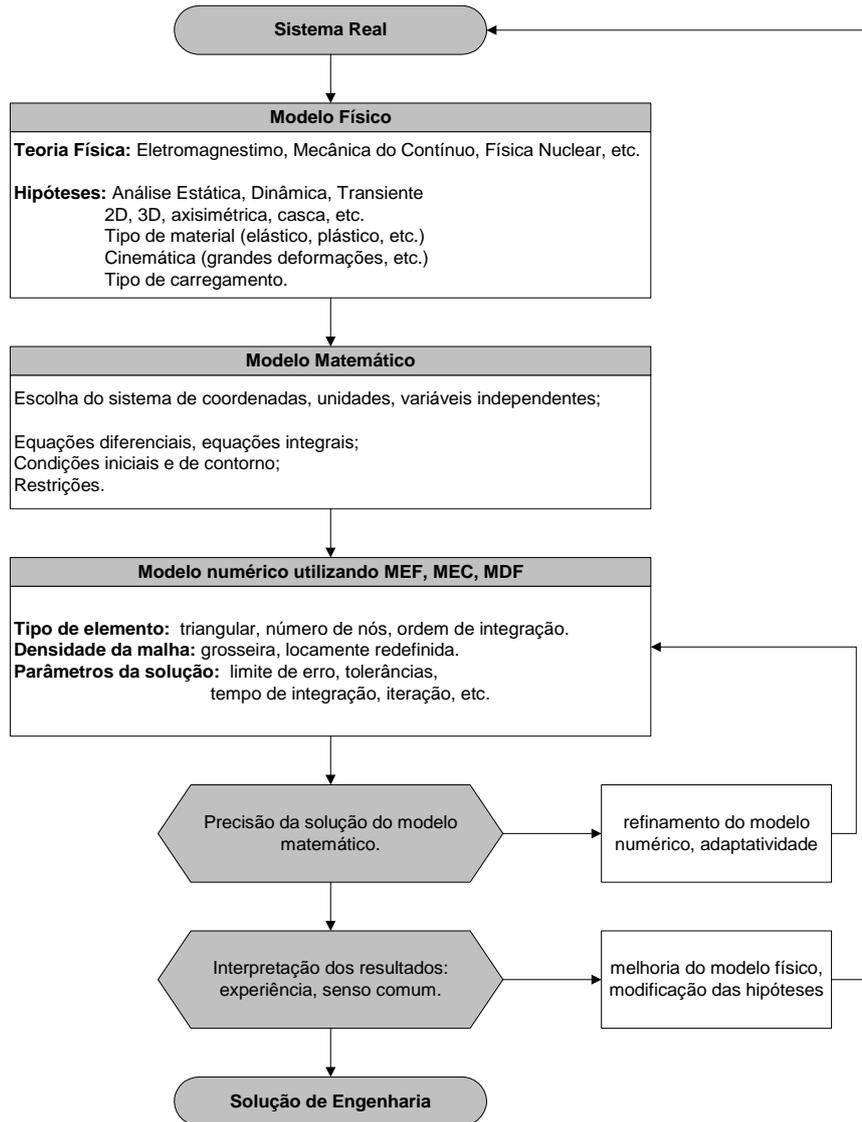


Figura 1.1 – Solução de Engenharia para problemas Físicos. Fonte: (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

Para que seja obtido sucesso na resolução numérica do problema é necessário o completo conhecimento da ferramenta numérica que está sendo usada, onde o processo de solução freqüentemente não é direto. Vários parâmetros têm que ser escolhidos, alguns dos

quais aumentam a velocidade no processo da solução, enquanto outros podem não conduzir a soluções possíveis ou podem resultar em soluções erradas quando aplicados incorretamente.

Quando a análise numérica é completada, os resultados têm que ser analisados e julgados com o senso comum e a experiência, podendo também ser comparados a experimentos e a outros resultados numéricos.

Quando se está convencido que realmente encontrou um resultado preciso para o modelo matemático, deve-se interpretar estes resultados pelo ponto de vista físico para verificar se esta solução é também uma boa aproximação para o fenômeno que se espera simular. Quando este não é o caso, faz-se necessário modificar ou substituir o modelo físico em que a análise está baseada.

Por fim, se obtém uma solução na Engenharia para o processo real que se deseja simular. Com isso, o processo de análise é finalizado e o resultado pode ser usado em projetos. Isto pode conduzir a uma confirmação do projeto estrutural ou indicar onde e como modificações poderiam ser feitas.

1.2 Breve Histórico do Método dos Elementos de Contorno (MEC)

O início do desenvolvimento das primeiras idéias que contribuíram para o que hoje conhecemos como Método dos Elementos de Contorno foi devido aos trabalhos de Somigliana (1885, 1886), Fredholm (1903), Kupradze (1965) e muitos outros. Já as publicações de Jaswon (1963) e Symm (1963) podem ser consideradas como de grande contribuição para obter o método que se conhece hoje. Nestes trabalhos, Jaswon (1963) e Symm (1963) desenvolveram o Método das Equações Integrais de Contorno (MEIC) para problemas de potencial usando a terceira identidade de Green. Baseado nesta abordagem, Rizzo (1967) e Cruse (1969) desenvolveram a aproximação do MEIC para problemas elastostático bi e tridimensionais usando a identidade de Somigliana e apresentando a formulação para elastodinâmica transiente empregando a transformada de Laplace (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

Em 1976 Lachat e Watson deram importante contribuição para a implementação do método, introduzindo a técnica de sub-regiões para controlar problemas de grande escala e descreveram algoritmos para o cálculo das integrais fracas e quase-singulares que aparecem nas equações integrais de contorno. Um algoritmo para o cálculo do valor principal de Cauchy

resultante de singularidades fortes da solução fundamental das forças de superfícies foi apresentado por Guiggiani e Giante (1990). O termo Método dos Elementos de Contorno foi empregado em 1977 em três publicações (BANERJEE; BUTTERFIEL, 1977; BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977; DOMINGUEZ, 1977), e no ano seguinte, o primeiro livro do método foi publicado (BREBBIA, 1978). (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

No início da década de 80 surgem atividades de pesquisas no Método dos Elementos de Contorno, e um crescente número de problemas na mecânica estrutural incluindo materiais e geometrias não-lineares têm sido tratadas. Ainda neste período, ampliou a aplicação para outros ramos da física-matemática tal como eletrodinâmica e mecânica dos fluidos.

Uma característica do MEC é a utilização de soluções fundamentais que satisfazem às equações diferenciais que governam o problema sob a ação de um ponto fonte. A primeira solução fundamental para elastostática isotrópica do século 19 foi devida a W. Thomson (1848), mais tarde conhecido como Lord Kelvin. (GAUL; KÖGL; WAGNER, 2003).

1.3 Breve Histórico do Método dos Elementos Finitos (MEF)

Um ponto lógico predecessor ao Método dos Elementos Finitos é atribuído pelas grandes realizações da escola francesa, tal como Navier e St. Venant, de 1850 a 1875 (Richard H. Gallagher, 1975). Os conceitos de análise estrutural surgiram durante este período, devido aos esforços de Maxwell, Castigliano e Mohr, entre outros. Conceitos estes que representaram a base da metodologia, que aproximadamente 80 anos mais tarde, dar-se-ia o nome de análise matricial de estruturas.

Progresso no desenvolvimento da teoria e das técnicas analíticas que auxiliaram ao surgimento da análise dos elementos finitos foi lenta no período de 1875 a 1920. Isto foi devido, em grande parte, a limitações práticas em resolver equações algébricas com algumas poucas incógnitas. Sendo que neste período o interesse estrutural era por treliças e pórticos, sendo analisados com abordagem baseado em distribuição de tensão, com parâmetros de forças incógnitas.

Em aproximadamente 1920, devido aos esforços de Maney nos Estados Unidos e Ostenfeld na Dinamarca, a idéia básica de análise de treliças e pórticos baseado na abordagem onde os parâmetros incógnitos são os deslocamentos. Estas idéias representam os precursores dos conceitos da análise matricial em voga hoje. Diversas limitações no tamanho do

problema, seja ele com incógnita força ou deslocamento, continuam até 1932, quando Hard Cross introduziu o método da distribuição de momento. Este método tornou possível a solução de problemas de análise estrutural de magnitude mais complexas que o mais sofisticado problemas tratados pelas abordagens anteriores. O método da distribuição de momento tornou a parte mais importante para a análise prática das estruturas pelos próximos 25 anos.

A aparição do primeiro computador digital por volta de 1950 teve uma contribuição desprezível, inicialmente, para a evolução da prática com a teoria. Esta pouca contribuição dos computadores foi devido ao problema de codificação de procedimentos bem estabelecidos para analisar estruturas em formatos adequados aos computadores, o formato de matriz. Dois notáveis desenvolvimentos foram publicados, um por Agryris e Kelsey e o outro por Turner, Clough, Martin e Topp. Essas publicações uniram os conceitos de análise estrutural e análise do contínuo tendo como resultado procedimentos no formato de matriz. Estes autores influenciaram no desenvolvimento do método dos elementos finitos nos anos seguintes. No entanto pode parecer impreciso atribuir o método a estes trabalhos, pois características importantes do método apareceram até mesmo antes de 1950 nos artigos de Courant, McHenry e Hrenikoff. O trabalho de Courant é particularmente significativo, pois este se preocupa com problemas governados por equações aplicáveis a outras situações diferentes da mecânica. Mas como este breve histórico é focado no método dos elementos finitos aplicados à mecânica estrutural, não seria nenhuma injustiça atribuir às importâncias devidas às duas publicações acima citada.

A tecnologia da análise dos elementos finitos teve avanços em inúmeras fases desde 1950, para maiores detalhes deste progresso veja Zienkiewicz (1970). Motivado por formulações de elementos para tensão plana, pesquisadores estabeleceram elementos correlacionados para sólidos, placas, vigas, chapas e outras formas estruturais. Uma vez estabelecido a abordagem para análise linear, estática e elástica, a atenção tornou o foco a fenômenos especiais tais como respostas dinâmicas, flambagem, materiais e geometrias não-lineares. Foi necessário estender não somente a formulação de elementos, mas também a estrutura geral da análise. Este avanço foi marcado por um período de intenso desenvolvimento de programas, gerais, de computadores, destinados a por a capacidade do método nas “mãos” dos profissionais.

Ao lado desse desenvolvimento, muitos pesquisadores continuam a se preocupar com a formulação de novos elementos e adicional desenvolvimento de formulações melhoradas e novos algoritmos para fenômenos especiais juntamente com a construção de novos programas. O estabelecimento da representação dos elementos finitos de fenômenos não-estruturais e interdisciplinares é o de maior interesse.

1.4 Objetivo

1.4.1 Objetivo Geral

Estudar e desenvolver um código computacional que possibilite a análise de domínios reforçados através do acoplamento entre o MEC e o MEF considerando modelos de aderência.

1.4.2 Objetivos Específicos

Estudar duas formulações de acoplamento entre o MEC e o MEF. Uma primeira que simule a aderência perfeita do acoplamento dos dois métodos e uma segunda que considere a perda de aderência, simulando, portanto a possibilidade do escorregamento.

Estudar o comportamento de enrijecedores isolados e grupos de enrijecedores com modelos de aderência. Os enrijecedores são modelados através do método dos elementos finitos, sendo utilizados elementos de pórtico. O domínio é considerado um meio infinito, homogêneo, contínuo, isotrópico e elástico linear, sendo este modelado pelo MEC utilizando as soluções fundamentais de Kelvin.

Uma vez que o MEC requer o cálculo de integrais onde o integrando é da ordem de $1/r$ e $1/r^2$ faz-se necessário utilizar esquema de quadratura para calcular estes integrandos numericamente. Para elementos não singulares é utilizada a Quadratura Gauss e é muito importante selecionar o número mínimo de pontos desta Quadratura para que a integração forneça resultados suficientemente precisos. Uma forma de obtenção deste número mínimo de pontos para a integração com um erro preestabelecido pode ser feita pela equação proposta por Strud e Secret (1966). No entanto, esta equação é complexa para a utilização e implementação computacional. Com base nisso, propõe-se neste trabalho uma forma simplificada para a obtenção deste número mínimo de pontos de Gauss necessário para um erro pré-fixado de 10^{-12} , baseado na equação proposta por Strud e Secret (1966). Utiliza-se

ainda a técnica de sub-elementação, onde a quantidade de sub-elementos é indicada pelo controle de erro.

1.4.3 Divisão da dissertação

A dissertação está dividida em seis capítulos que abordam conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo é efetuada a revisão bibliográfica sobre o tema referido na dissertação. Inicialmente são apresentados trabalhos que discutem o desenvolvimento e a aplicação de modelos com domínios enrijecidos utilizando o acoplamento MEC/MEF no âmbito internacional. Em seguida apresentam-se os trabalhos desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” que são de importância para contextualizar a presente dissertação na evolução das linhas de pesquisa do departamento.

No capítulo três é abordado os conceitos introdutórios à teoria da elasticidade e ao Método dos Elementos de Contorno (MEC) para o problema elástico bidimensional. As soluções fundamentais de Kelvin e as equações integrais do método são obtidas.

No quarto capítulo é analisada a equação do erro para as integrações numéricas. É realizado um mapeamento da região de validade para um erro pré-estabelecido. Devido à equação analítica do erro, utilizada neste trabalho, ser de uma complexidade elevada para a implementação computacional, neste capítulo é sugerido novas curvas mais simples para o erro das integrações numéricas dos núcleos de integração $1/R$ e $1/R^2$.

No quinto capítulo, o mais importante neste trabalho, é desenvolvido a formulação utilizada em domínios reforçados modelado através do acoplamento MEC/MEF. A parte inicial deste capítulo mostra a formulação da interação domínio-reforço considerando a aderência perfeita entre os dois materiais e esta metodologia é aplicada à exemplos. A parte final do capítulo expõe a formulação utilizada para considerar a perda de aderência, onde os modelos utilizados associam linearmente o parâmetro do escorregamento com a força de contato.

No capítulo seis, são apresentadas as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho e apresentam possíveis sugestões para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2

2 Revisão Bibliográfica

No presente capítulo são apresentadas as publicações internacionais e nacionais relacionadas ao tema de domínios com enrijecedores e ao método dos elementos de contorno.

Devido a grande quantidade de estudos de domínios reforçados serem aplicados a problemas de interação solo-estrutura, muitos dos trabalhos apresentados nesta revisão farão referência a esta área de aplicação.

De forma didática, esta revisão bibliográfica está dividida em duas partes. A primeira, denominada “publicações internacionais”, mostra as publicações em periódicos internacionais. A segunda parte, chamada de “publicações nacionais”, mostra uma revisão dos trabalhos - dissertações e teses - desenvolvidos no departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC).

A justificativa em dedicar grande parte desta revisão aos trabalhos da EESC–SET é motivado por este ser considerado um dos grandes centros mundiais de pesquisas no desenvolvimento do método dos elementos de contorno. Patamar este alcançado devido a grande colaboração do professor Doutor Tit. Wilson Sergio Venturini que é atualmente responsável por, aproximadamente, 76% de todas as dissertações e teses defendidas utilizando e desenvolvendo o MEC neste departamento. Mediante este resultado apresentam-se as principais contribuições do MEC no estudo de domínios reforçados neste centro.

2.1 Publicações Internacionais

Poulos (1968) realiza uma análise do recalque devido à interação de duas estacas idênticas em um solo elástico, onde o aumento do recalque de cada estaca devido à interação é expresso em termos do fator α . Isto mostra que, para um grupo de estacas simétricas (em que as estacas recalcam igualmente devido a iguais carregamentos), o aumento no recalque devido à interação pode ser obtido pela superposição dos valores de α para cada estaca do grupo, supondo a validade da superposição para qualquer estaca na posição vertical livre. O grupo de

estacas é estudado para o caso de estacas com capeamento rígido (igual recalque para todas as estacas) e para o caso de estacas com capeamento flexível (igual carga para todas as estacas). Para o caso de estacas rígidas carregadas, valores são obtidos pela razão do recalque do grupo pelo de cada estaca, produzindo assim a mesma carga total (grupo reduzido pelo fator R_g), e valores do máximo recalque e o máximo recalque diferencial são obtidos. A influência do espaçamento, o comprimento, tipo de grupos, profundidade das camadas e o coeficiente de Poisson destas no comportamento do recalque do grupo de estacas são examinados. O autor mostra que a maior porção do recalque total, para um grupo de estacas em um solo elástico ideal de duas camadas, ocorre imediatamente após aplicação do carregamento.

Poulos e Davis (1968) estudam o comportamento do recalque para estacas cilíndricas incompressíveis e carregadas somente por cargas axiais em uma massa de solo elástico ideal. Fazendo uso das equações de Mindlin, os autores consideram a estaca com elementos cilíndricos carregados uniformemente e com carga constante aplicada em sua ponta. As soluções são obtidas para a distribuição de tensões cisalhantes ao longo da estaca e para deslocamento. O fator de influência é apresentado para o recalque da estaca em um solo semi-infinito e em camadas finitas, o efeito da razão entre o comprimento e o diâmetro da estaca, o coeficiente de Poisson do solo e a profundidade do solo são examinados. Um resultado significativo da análise é que a maior parte do recalque total, de uma única estaca, ocorre imediatamente e somente uma pequena parcela do recalque é dependente do tempo. Os resultados mostram que o efeito da base alargada é de maior importância somente para estacas relativamente curta.

Butterfield e Banerjee (1971a) estudam a interação de grupos de estacas, capeadas de qualquer forma, com o solo. Os autores ainda estudam a distribuição de carga entre as estacas do grupo e capeamento, sendo o problema formulado em equações integrais desenvolvidas por Mindlin para um ponto fonte (carga) mergulhado em um semi-espaço infinito elástico ideal. A resposta ao efeito da razão do comprimento e o diâmetro da estaca, o tamanho do capeamento da estaca e a razão de compressibilidade da estaca e do suporte tem sido investigado e os resultados, os autores, mostram graficamente para uma única estaca e grupos de estacas com capeamento quadrado.

Butterfield e Banerjee (1971b) estudam a resposta de uma única estaca rígida e compressível mergulhada em um meio homogêneo isotrópico e elástico. Este estudo é realizado por uma rigorosa análise baseada nas soluções de Mindlin para um ponto fonte

(carga) no interior do meio elástico ideal. O método analítico descrito é estendido para análise de grupos de estacas rígidas, carregada axialmente e compressível, com espaçamento arbitrário. Os resultados são apresentados em uma série de gráficos, mostrando o efeito da variação da razão do comprimento pelo diâmetro da estaca, a razão do módulo de elasticidade da estaca pelo módulo cisalhante do meio E_p / G e o efeito F_0 alargamento da base de uma única estaca carregada axialmente. Gráficos são apresentados, mostrando o efeito da razão comprimento/diâmetro, espaçamento da estaca e a razão E_p / G do grupo de estacas. Os resultados são comparados com os dados publicados por Poulos (1968) e por testes experimentais em escala real.

Para resolver problemas de interação solo-estrutura, onde o emprego do método dos elementos finitos é muito dispendioso, Laethem et al. (1984) estudaram a combinação do método dos elementos de contorno (MEC) e o método dos elementos finitos (MEF) para o cálculo estático de fundações. As vantagens e desvantagens são mostradas neste artigo. As vantagens do MEC, segundo os autores, desaparecem quando a não linearidade é levada em questão, mas em problemas de interação solo-estrutura, as não linearidades acontecem na vizinhança das fundações, enquanto que em campos distantes permanecem lineares. Com esta afirmativa o trabalho justifica o uso do acoplamento MEC-MEF. Tendo o domínio próximo a fundação modelada pelo MEF, enquanto para campos distantes será modelado pelo MEC. São utilizados as equações de Mindlin e Kelvin para as soluções fundamentais do MEC. O acoplamento é feito pela compatibilização de força entre o MEC e o MEF, encontrando assim uma matriz de rigidez conjunta (MEC-MEF).

Chin, Chow e Poulos (1990) apresentam um método numérico, o método dos elementos de contorno simplificado, para análise de recalques de estacas e grupos de estacas verticais carregadas axialmente. O coeficiente de flexibilidade do solo é obtido usando uma solução analítica para um semi-espaço elástico em camadas. Os resultados são comparados com soluções publicados para os seguintes casos: (i) estacas em solo homogêneos, (ii) estacas em solo de camadas finitas, (iii) estacas com camadas mais rígidas na base, (iv) estacas em solo de Gibson, solo com módulo aumentando linearmente com a profundidade. Este trabalho conclui que o método se mostra boa aproximação em comparação com as soluções analíticas publicadas por Chan et al. (1974). Entretanto, para solos com profundidades de grandes variações, análises preliminares devem ser feitas para obter soluções aproximadas ao problema. Os autores, ainda mostram que o método possui uma redução no esforço de

preparação dos dados e do tempo de processamento computacional em comparação ao método dos elementos finitos.

A análise elástica de grupos de estacas conectadas por placas requer um considerável tempo de processamento computacional, devido a isto a aplicação do método dos elementos de contorno (MEC) se faz necessário. Com este pensamento, Paiva e Trondi (1999) desenvolveram uma formulação do MEC para resolver tais problemas de forma mais eficiente e com adequada precisão. As forças de superfície ao longo de cada estaca do grupo são representadas por funções polinomiais. Somente compatibilidade de deslocamento vertical entre o solo, a estaca e o bloco de capeamento é focada. A interface capeamento-solo é dividida em elementos triangulares em que a pressão de contato varia linearmente. A formulação pode também ser usada diretamente para grupos de estacas conectadas ou não por capeamento em que os comprimentos das estacas não são as mesmas.

Jin, Lutes e Sarkani (2000) realizaram estudos baseados em análise modal não-clássica para quantificar o efeito das incertezas das propriedades do sistema solo-fundação, na qual a interação solo-estrutura é excitada sismicamente. Esta formulação permite que o sistema de interação possa ser representado por superposição de respostas de equações modais não acopladas, incluindo um vetor para representar as incertezas do sistema. Exemplos numéricos do sistema de interação solo-estrutura ilustram que o principal efeito das propriedades incertas do solo, em tais sistemas de interação, varia a magnitude da resposta modal próxima do sistema de frequência ressoante, por esta razão, tais incertezas não devem ser negligenciadas.

Kocak e Mengi (2000) propõem um modelo simples de interação solo-estrutura. Primeiro, os autores desenvolvem um modelo para as camadas de solo. Neste modelo, a camada de solo é dividida em camadas delgadas e cada uma dessas camadas é representada por um modelo paramétrico. Os parâmetros desses modelos são determinados em termo da espessura, das propriedades elásticas da subcamada, das combinações e pelo número de espaço de frequência de onda. A matriz de rigidez dinâmica da subcamada, quando esta é fina e sujeita a deformações planas e deformações fora do plano (*out-to-plan*), é prevista pelo modelo paramétrico desenvolvido. A estrutura é adicionada ao modelo do solo, sendo um modelo de elementos finitos tridimensionais estabelecidos para o sistema solo-estrutura. Para o sistema solo-fundação, o modelo de diagrama rígido é empregado. Embora o modelo adapte tanto ao efeito da interação dinâmica quanto estática, os autores apenas desenvolveram para o caso estático. Para avaliar o modelo de interação solo-estrutura, os autores aplicam a

formulação a quatro exemplos com abordagem estática e concluem que esta proposta se mostra confiável em análise de interação solo-estrutura, abrangendo também a interação entre as fundações.

Mendonça e Paiva (2000) apresentam uma formulação dos métodos dos elementos de contorno para análise de estacas com capeamento, em que todas as interfaces entre placa, estaca e solo são simultaneamente consideradas. Nesta abordagem o solo é tratado como um semi-espaço homogêneo e elástico linear, o capeamento é assumido ser delgado e ambos são representados por equações integrais. Cada estaca é representada por um único elemento finito, as forças cisalhantes ao longo da estaca são aproximadas por polinômios do segundo grau, a tensão na ponta da estaca é considerada constante e a interface capeamento-solo é discretizada em elementos triangulares, cuja pressão de contato é assumida linearmente variável. A formulação foi testada em grupos de estacas com capeamento rígidos e flexíveis. Os resultados foram comparados com os apresentados por Fatemi e Arkadami (1987) e Brown e Weisner (1975). Os autores concluem que os resultados estão razoavelmente concordando e as diferenças entre os modelos pode ser devido às abordagens diferentes para a interface capeamento-estaca-solo em análise.

Leite, Coda e Venturini (2002) apresentam uma formulação em elementos de contorno lineares para analisar domínios enrijecidos. Uma particular técnica de sub-região, em que o equilíbrio é preservado ao longo da interface sem aproximação das forças de superfície. A sub-região é então assumida ser muito delgada para simular a fibra e somente as forças normais são consideradas. A sub-região delgada se degenera de tal forma que podem ser representada por uma linha. O campo de deslocamento na secção da fibra é considerado constante. No caso de problemas bidimensionais, os graus de liberdade são reduzidos a duas componentes em cada nó da fibra. Assim, representação integral em deslocamento para colocações definidas ao longo do esqueleto da fibra é necessária. As integrais quase-singulares são calculadas usando expressões fechadas ou empregando um esquema numérico com sub-elementação. Os autores mostram, através de alguns exemplos, que a formulação é muito precisa para casos em que o domínio é enrijecido por fibras.

Matos Filho, Mendonça e Paiva (2005) analisam a interação solo-estaca submetida a carregamentos verticais e horizontais, em que as estacas são modeladas pelo método dos elementos finitos (MEF). Cada estaca é representada por um único elemento com quatorze parâmetros nodal, enquanto que o solo é modelado pelo método dos elementos de contorno

(MEC) em um meio contínuo ideal (elástico-linear, semi-infinito, isotrópico e homogêneo) usando a solução fundamental de Mindlin. Considerando que o semi-espaço não sofre perturbações pela estaca, as forças de superfície ao longo do seu fuste são uniformemente distribuídas ao redor de sua periferia e que somente cargas estáticas são aplicadas. Diversos exemplos são analisados e os resultados, quando comparado com outras formulações e a dados experimentais, mostram-se bons.

Botta e Venturini (2005) apresentam uma combinação dos métodos dos elementos finitos/contorno regularizado para análise bidimensional de sólidos elastostático reforçado por fibras. O elemento de contorno é adotado para modelar o comportamento da matriz, enquanto que o modelo por elemento finito é adotado para as fibras do domínio. O efeito do escorregamento causado pela perda de aderência entre os dois materiais são também considerado. Um polinômio do terceiro grau é adotado para aproximar o campo de deslocamento na direção da fibra, enquanto aproximações lineares são usadas para representar a força de contato entre a matriz e a fibra. O modelo de escorregamento não-linear é descrito em função das forças de contato e o deslocamento relativo. As equações algébricas do MEC são combinadas com as do MEF relacionadas às fibras, eliminando as incógnitas de deslocamento ao longo da interface. Devido à aproximação por polinômios diferentes para as variáveis físicas, são geradas equações algébricas redundantes que são eliminadas pela aplicação do procedimento dos mínimos quadrados. Os autores mostram um esquema implícito não-linear para o modelo considerando o escorregamento. Por fim, exemplos de concreto reforçados são apresentados para ilustrar as boas capacidades do modelo proposto.

Millán e Domínguez (2009) estudam um modelo simplificado para análise da resposta dinâmica das estruturas de estacas e grupos de estacas, abaixo da excitação harmônica. Neste artigo os autores acoplam o modelo de elementos de contorno/elementos finitos capaz de considerar a interação dinâmica estaca-solo-estaca de uma maneira rigorosa, considerando o solo viscoelástico ou poroelástico.

2.2 Publicações Nacionais

O primeiro trabalho desenvolvido, no departamento do SET, abordando o MEC foi uma dissertação de mestrado, autoria de Rodriguez (1986) e sob orientação do professor Doutor Tit.W. S. Venturini, intitulado “Sobre o emprego do método dos elementos de

contorno em problemas elásticos bidimensionais”. Neste trabalho foi realizado um estudo de aplicação do MEC, fazendo uso de elementos lineares para aproximar a geometria, campo de deslocamento e as forças de superfícies. Foram introduzidos os elementos descontínuos, onde é feita a análise do desempenho deste tipo de elemento em comparação com a forma clássica de análise, empregando equações extras. O autor faz uma análise da quantidade mínima de pontos de Gauss necessária para resolver as integrações numéricas, sendo que esta análise é realizada apenas para pontos perpendiculares, com ângulo de 45 graus e alinhado com os elementos da discretização. Este trabalho ainda realiza um estudo para identificar a localização a ser posta do nó dentro dos elementos descontínuos.

Rodriguez (1986), ainda mostra a dependência da relação R/L , onde R é a distância do ponto fonte ao elemento e L é o comprimento do elemento, e do ângulo que esse ponto fonte faz com o elemento a ser integrado. A partir desta dependência o autor analisou para uma relação mínima de $R/L = 0,1$ e constatou a necessidade de 2 a 10 pontos de Gauss para obter razoáveis resultados.

Ramalho (1990) estuda a interação de estruturas com um meio elástico semi-infinito, através de um procedimento baseado no método dos elementos de contorno, onde o autor analisa estruturas de treliça, barra, membrana, plano, sólido, placa / casca e sapatas rígidas.

Barbirato (1991) faz aplicação do MEC para análise de sólidos isotrópicos elástico – linear tridimensionais baseado na solução fundamental de Mindlin. Ainda neste trabalho são feitas comparações entre as soluções fundamentais de Mindlin, Kelvin e Boussinesq-Cerruti, e apresenta uma formulação para os elementos lineares descontínuos. A partir desta abordagem, o autor mostra a eficiência do MEC para problemas de interação solo - estruturas. A equação fundamental de Mindlin se mostra mais eficiente por diminuir os dados do problema, uma vez que exige apenas a discretização do contorno onde é aplicado o carregamento. Este é um dos primeiros trabalhos, do departamento de Engenharia de Estruturas-EESC-USP, que é feita sugestão de acoplamento do MEC com algum outro método numérico, com o intuito de tirar de cada método suas melhores características.

Calderón (1991) desenvolve uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno. A reação da fundação é representada pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais para placa. A formulação alternativa, que consiste em aproximar a densidade da integral de

domínio por uma função apropriada e transforma-lá em integrais de contorno pela aplicação sucessiva de integrações por parte.

Manzoli (1992) desenvolveu uma formulação pelo MEC para placas sobre fundação elástica tipo Winkle. É utilizada uma solução fundamental que leva em consideração a fundação, permitindo que a aproximação envolvida seja restrita aos valores das variáveis do contorno. A formulação se mostrou eficiente, mas se limita a casos envolvendo fundações bilaterais, onde é admitido um perfeito contato entre a placa e o solo.

Coda (1993) estuda o problema da elastodinâmica transiente através de uma formulação mista entre o MEC e o MEF. Este é um dos primeiros trabalhos, no departamento de estruturas da EESC a realizar acoplamento entre os dois mais utilizados métodos numéricos – MEC e o MEF. Para abranger pórticos tridimensionais e cascas delgadas elásticas-lineares, a formulação espacial do MEF é utilizada. O MEC é utilizado para modelar sólidos tridimensionais elásticos finitos ou infinitos. A junção entre os dois meios é feita através de elementos rígidos de ligação e a compatibilização dos métodos pela técnica de sub-região. O autor desenvolve uma técnica de integração particular para elementos singulares muito precisa, dispensando assim, a imposição de deslocamento de corpo rígido para o problema estático.

Prosseguindo o desenvolvimento do MEC, Barreto (1995) faz uso da associação do método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. O autor utiliza o MEC para a modelagem de flexão de placas sobre base elástica, devido ao fato que o MEF não consegue representar bem as tensões e os esforços concentrados ao longo do contorno. Neste trabalho é empregada a formulação de acoplamento desenvolvida por Coda (1993) para a consideração da interação solo-estrutura.

No ano de 1996 dois trabalhos relacionados a placas considerando interação solo-estrutura, pela abordagem numérica do MEC, é desenvolvido na EESC. O primeiro é Silva (1996), onde aborda o MEC pela formulação direta. O autor considera na modelagem as hipóteses de Reissner para placas, considerando carregamento concentrados, distribuídos e momentos distribuídos em linha. O sistema de equações algébricas originais da análise de placas via MEC é modificada para incorporar o enrijecedor produzido pela vinculação interna. O segundo trabalho é devido a Calderón (1996), neste trabalho o autor desenvolve a formulação direta do MEC para estudo da interação de placas em meio contínuo. O solo,

considerado como um meio contínuo tem a sua reação apresentadas pelo acréscimo de uma integral de domínio nas equações integrais usuais de placas. Essa integral de domínio, Calderón (1996) as trata por células internas, pelo processo da reciprocidade dual e por uma formulação alternativa.

Mendonça (1997) apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno / método dos elementos finitos para a análise da interação placa-estaca-solo. Nesta formulação, a placa é modelada pelo método dos elementos finitos utilizando elementos DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) e HSM (*Hybrid Stress Model*); e o solo é modelado pelo MEC como um meio elástico semi-infinito. A estaca é representada por apenas um elemento, com 3 pontos nodais definidos ao longo de seu fuste e a tensão de cisalhamento ao longo da mesma é aproximado por um polinômio do segundo grau. A interface placa-solo é dividida em elementos de contorno triangulares coincidentes com a divisão dos elementos finitos da placa. As tensões de contato são eliminadas nos dois sistemas de equações, proveniente do MEC e do MEF, para obter o sistema final de equações governantes do problema.

Em Agostinho (1998), apresenta-se uma associação de chapas usando o conceito de sub-região do MEC. Nesta formulação, é considerado elementos enrijecedores do domínio, onde se combinam o método dos elementos finitos, representado por elementos de barras, e o método dos elementos de contorno. Neste acoplamento é utilizado procedimento em que as equações se tornam semelhantes as do MEC e o autor ainda simula a perda de aderência entre o enrijecedor e o meio usando modelos plásticos e visco-plásticos simples do tipo Coulomb.

Matos Filho (1999) estuda uma combinação de formulações numéricas para a análise da interação estaca-solo com ou sem blocos de capeamento rígido, sujeito a cargas horizontais e verticais. Sendo as estacas modeladas pelo método das diferenças finitas (MDF) ou pelo método dos elementos finitos (MEF) e o solo é representado pelo método dos elementos de contorno. Na análise do MEF, os deslocamentos e as forças de interação foram representados por várias funções polinomiais, chegando-se a um elemento finito final (considerado pelo autor) eficiente e constituído por quatro pontos nodais. O maciço de solo é modelado pelo MEC como um meio contínuo, elástico linear, semi-infinito, isotrópico e homogêneo. A partir da combinação destes métodos, é obtido um sistema de equações lineares representando o problema da interação estaca-solo. Pela resolução deste sistema são obtidos os deslocamentos e as rotações nos nós do elemento e as tensões de contato. O autor conclui que os deslocamentos (verticais e horizontais) nas estacas são diretamente influenciados pelo seu

comprimento, pela rigidez do sistema e pelo espaçamento entre elas. Para o caso em que é considerado o bloco de capeamento rígido, as estacas mais distantes do centro geométrico do sistema são as que mais absorvem cargas e as distribuições de carga tornam-se mais uniforme conforme aumentam os espaçamento.

Dentre os vários assuntos abordados no trabalho de Mesquita (2002), é conveniente verificar a contribuição que o autor forneceu para o acoplamento entre o MEC e o MEF, ponto de maior interesse nesta revisão bibliográfica. Partindo desta visão, o autor aborda o problema de progressão, onde partes de um sólido são extraídas e inseridas em tempos pré-determinados. Tal como em problemas de escavações reforçadas em túneis. O procedimento de acoplamento é realizado por sub-região com abordagem clássica. As partes do corpo que são fixas, aquelas que serão removidas e aquelas que serão introduzidas são representadas por sub-regiões. O autor divide o procedimento em etapas, onde em cada etapa é definida uma nova geometria do problema, ou seja, é de uma etapa para outra que o corpo, caracterizado por sub-região de MEF ou MEC, é inserido ou extraído. As etapas são divididas em passos de tempo oriundo da formulação viscosa. Se o problema considerado for viscoplástico, torna-se necessário um procedimento iterativo dentro de cada passo de tempo para corrigir o erro de aproximação.

Wutzow (2003) aplica a formulação linear do MEC para problemas da elasticidade bidimensional com domínio enrijecido. Os enrijecedores são abordados de duas formas, a primeira pela técnica de sub-região ou acoplamento MEC/MEC e a segunda também pelo mesmo tipo de acoplamento, mas condensando as variáveis do contorno para a linha central do enrijecedor. Esta técnica juntamente com a integração completamente analítica dos termos da equação Somigliana proporcionam, segundo o autor, bons resultados e elimina perturbações em enrijecedores delgados. Com a intenção de obter melhores resultados, o autor, utiliza a técnica de suavização do contorno por mínimos quadrados.

Botta (2003) desenvolve uma formulação não-linear com o método dos elementos de contorno para análise numérica de sólidos danificados, considerando-se o fenômeno da localização de deformações. Dentre os diversos tópicos abordados pelo autor, o acoplamento entre o MEC e o MEF, considerando elementos de barra, é utilizado para modelar o meio contínuo com fibras sendo este assunto o de maior interesse nesta revisão bibliográfica. No acoplamento, o autor utiliza uma técnica com mínimos quadrados para reduzir o número de equações do problema, geradas a mais do que o número de incógnitas em função da adoção de

diferentes aproximações polinomiais para aproximar deslocamentos e forças nas fibras. A variável do deslocamento relativo é introduzida nas equações do acoplamento e a formulação resultante permite analisar meios com dano, enrijecidos com fibras, considerando-se perda de aderência entre os dois materiais.

Oshima (2004) apresenta uma formulação mista do MEC e o MEF. Nessa formulação, as estacas são modeladas através do MEF com elementos de barra e o solo através do MEC, com um meio contínuo, elástico linear, isotrópico e homogêneo, utilizando as soluções fundamentais de Mindlin. O sistema de equações do solo e das estacas para elementos verticais são apresentados como uma combinação de ambos, originando um único sistema final de equações. Apresentam-se também as modificações necessárias para um sistema composto por estacas inclinadas. Após a resolução do sistema final, obtém-se os deslocamentos e as tensões de contato solo-estaca. O autor compara os resultados obtidos com os de outros autores e conclui que no referente às estacas inclinadas submetidas a um carregamento horizontal ou vertical, nota-se que seu comportamento é muito parecido com a das estacas verticais, pois os deslocamentos são pouco influenciados pelo ângulo de inclinação. Para estacas inclinadas submetidas à um carregamento qualquer, nota-se que os deslocamentos tendem a diminuir quando a inclinação da estaca se aproxima do ângulo na qual se aplica o carregamento.

Paccola (2004) apresenta uma formulação de cascas laminadas anisotrópicas enrijecidas ou não, considerando-se não-linearidade física com lei de fluxo não-associativa e acoplamento com meio contínuo tridimensional viscoelástico. Em parte do trabalho, são desenvolvidos elementos finitos triangulares planos com aproximações cúbicas de variáveis para modelagem das cascas e elementos de barra de mesma aproximação para os enrijecedores. A cinemática de laminados, ou Reissner geral, é utilizada para ambos, possibilitando a representação de estruturas enrijecidas excentricamente e consideração de elementos compostos de camadas com diferentes propriedades físicas e espessuras. As soluções fundamentais de Kelvin e de Mindlin foram utilizadas pelo MEC e o acoplamento foi realizado utilizando-se técnica de matriz de rigidez equivalente, proporcionando uma contribuição direta do MEC na matriz de rigidez do MEF.

Almeida (2003), Ribeiro (2005) modelam o solo tridimensionalmente pelo MEC, utilizando a solução fundamental de Kelvin. Os autores modelam diversas camadas de solo apoiada em uma superfície de deslocamento nulo e enrijecido por elementos de fundações,

modelado pelo MEC tridimensional. A superestrutura é modelada pelo MEF, sendo composta por elementos planos e reticulares com seis graus de liberdade por nó. O autor mostra a importância em considerar superfície de deslocamento nulo ou não, pois a sua consideração parcial pode ocasionar recalques diferenciais significativos que pode prejudicar a estrutura.

Ribeiro (2009) considera todos os materiais homogêneos, isotrópicos, elásticos e lineares. O autor emprega a solução de Kelvin e uma técnica alternativa na consideração do maciço não-homogêneo. Esta técnica é baseada no relacionamento das soluções fundamentais de deslocamento dos diferentes domínios, permitindo que sejam analisados como um único sólido sem a necessidade de equações de equilíbrio e compatibilidade. Para reduzir o custo computacional é utilizada uma malha de elementos de contorno infinitos (ECI) nas bordas da malha de elementos de contorno para modelar o comportamento das variáveis de campo em longas distâncias. O autor analisa a superestrutura utilizando dois tipos de elementos finitos, onde os pilares e as vigas são simulados com elementos de barra, os quais possuem dois nós e seis graus de liberdade por nó. As lajes e o radier são modelados empregando elementos planos, triangulares e com três nós e o acoplamento MEC/MEF é feito transformando as cargas de superfície do MEC em carregamentos nodais reativos no MEF.

CAPÍTULO 3

3 O Método dos Elementos de Contorno

Para se resolver um problema físico de um corpo com geometria qualquer, é necessário descrever a resposta física do material matematicamente. Isto é feito definindo-se a resposta característica de uma pequena porção infinitesimal do sólido. Uma Lei Constitutiva estabelece relação entre grandezas físicas conjugadas, como por exemplo, o fluxo de calor e o gradiente de temperatura ou a tensão e a deformação. As constantes físicas presentes em tais relações são valores característicos ou propriedades do material. É possível fazer distinção entre propriedades dos materiais que são independentes das direções (materiais isotrópicos) e entre aquelas que são dependentes das direções (material anisotrópico). Além disto, existem problemas onde as mesmas propriedades aplicam-se em todos os pontos do corpo (problemas homogêneos) e onde as propriedades mudam de ponto a ponto (problemas não-homogêneos).

A resposta do material pode apresentar comportamento linear ou não-linear. Para materiais lineares pode-se estabelecer uma única relação (linear) entre a tensão e a deformação, entre o fluxo de calor e a temperatura ou entre o fluxo do fluido e o potencial, dependendo da lei constitutiva considerada e do problema estudado. Para comportamento de material não-linear esta relação depende de um estado corrente e, portanto, só pode ser escrita em uma forma incremental. Estes problemas são, portanto dependentes de um histórico.

A solução da equação governante do problema elastostático para o método dos elementos de contorno é previamente apresentada. Em todos os casos, a solução é obtida para uma condição de carregamento muito simples (um ponto fonte) e para domínios infinitos. Na literatura, estas soluções são conhecidas como Soluções Fundamentais, Funções de Green ou *Kernel*.

As soluções fundamentais devem satisfazer a lei constitutiva, as equações de equilíbrio ou de conservação de energia e a condição compatibilidade ou continuidade.

A última condição será automaticamente satisfeita para soluções que são contínuas no domínio. Apresentam-se a seguir, a equação diferencial governante e a correspondente solução fundamental para o problema de elasticidade bidimensional.

Tendo como base para o desenvolvimento deste capítulo as notações utilizada pela escola austríaca de Beer, Smith e Duenser, 2008.

3.1 Problema Elástico Bidimensional

Em aplicações da mecânica dos sólidos a relação entre as tensões e as deformações deve ser estabelecida. Tensões são forças por unidade de área dentro do corpo. Elas podem ser visualizadas seccionando-se o corpo por planos paralelos aos eixos e mostrando-se os vetores tensão que atuam nestes planos (Figura 3.1).

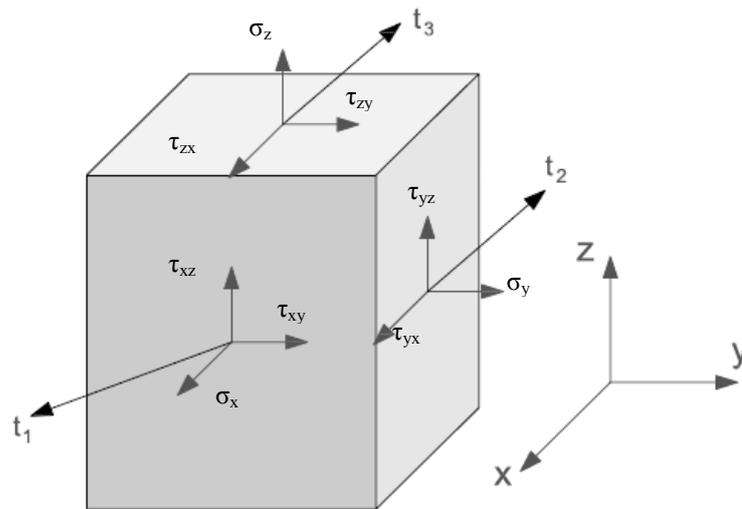


Figura 3.1 - Cubo infinitesimal representando as componentes de tensões e as forças internas (vetor de tensão) atuando nas faces

Os vetores de tensão que atuam nestes três planos são definidos como:

$$t_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}; t_2 = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}; t_3 = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

As componentes dos vetores forças superficiais internas são também conhecidas como componentes de tensão.

Utilizando a condição para o equilíbrio rotacional ($\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$) somente seis componentes de força permanecem e devem ser colocadas no pseudo-vetor tensão, dada por

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Em problemas de tensão plana, tal como nos de placa fina submetida a um carregamento no plano, todas as tensões associadas com a direção z são consideradas nulas, isto é, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

As componentes do vetor de forças superficial t atuando em um plano geral definido por um vetor normal $n \{n_x, n_y, n_z\}$ que não é paralelo aos planos dos eixos cartesianos podem ser expressas em termos das componentes de tensão por (Figura 3.2):

$$\begin{aligned} t_x &= n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}, \\ t_y &= n_y \sigma_y + n_x \tau_{xy} + n_z \tau_{yz}, \\ t_z &= n_z \sigma_z + n_x \tau_{zx} + n_y \sigma_{zy}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

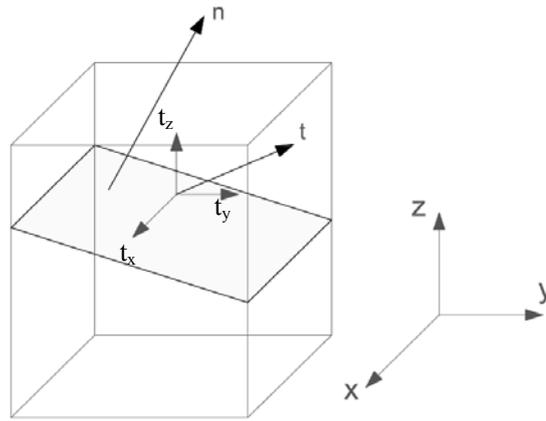


Figura 3.2 – O vetor forças internas atuando em um plano qualquer

As deformações infinitesimais são definidas em termos das componentes de deslocamento (u_x, u_y, u_z) segundo as direções x, y e z por

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estas componentes podem ser colocadas em um pseudo-vetor, dado por

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \tag{3.5}$$

Este pseudo-vetor pode ser escrito em uma forma matricial como

$$\epsilon = Bu, \tag{3.6}$$

onde u é o vetor de deslocamento dado por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

e \mathbf{B} é um operador diferencial matricial dado por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Em algumas circunstâncias é possível fazer simplificações e certas componentes de deformações podem ser nulas. Assumindo-se um estado plano de deformação, o sólido é estendido por uma longa distância na direção z , de forma que o vetor de tensão é uniforme nesta direção e $u_z = 0$ em todo lugar. Tem-se então que $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Outro caso especial é o estado plano de deformação completo no qual as derivadas na direção z de todos os deslocamentos são consideradas nulas, mas u_z pode ser não-nulo.

Então, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

O estado plano de deformação completo pode ser dividido em um caso plano de deformação já discutido e o caso do antiplano de deformação ou componente Torsão de Saint Venant para o qual $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ e.

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (3.10)$$

No caso plano de deformação completo é possível ter deformações de cisalhamento e tensões atuando na direção z.

Algumas vezes é necessário calcular a magnitude das tensões ou deformações nas direções que não coincidem com os eixos globais. Neste caso a transformação das tensões ou deformações é necessária. A transformação das tensões locais $\bar{\sigma}$ atuando nos planos materiais paralelos aos eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} nas tensões globais σ atuando nas seções paralelas aos eixos x, y e z pode ser escrita como

$$\bar{\sigma} = T_\sigma \sigma. \quad (3.11)$$

Para o caso bidimensional, no qual os eixos locais são definidos por uma rotação em torno do eixo z, T_σ é obtido por duas transformações mostradas na Figura 3.3

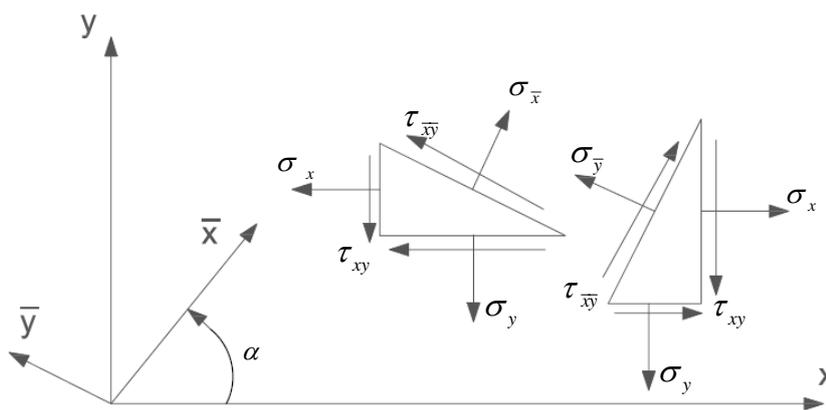


Figura 3.3 - Transformação de tensão no plano

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

3.2 Equações Constitutivas

A resposta elástica do material é governada pela Lei de Hooke. Para um material isotrópico, esta lei é dada em um sistema tridimensional, e com particularizações para o caso bidimensional, por

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (3.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx},$$

Onde E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de cisalhamento dado por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.17)$$

As equações (3.16) podem ser convenientemente escritas na forma matricial como

$$\varepsilon = C\sigma, \quad (3.18)$$

Onde a matriz C é definida como

$$C = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E}{G} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

A relação inversa pode ser definida por

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (3.20)$$

onde

$$D = C^{-1} = C_1 \begin{bmatrix} 1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{C_1} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde

$$C_1 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_2 = \frac{\nu}{(1-\nu)}. \quad (3.22)$$

Para um material anisotrópico geral são necessárias 21 constantes elásticas, mas usualmente não é possível determiná-las.

3.3 Solução Fundamental

As equações diferenciais governantes são obtidas da condição de equilíbrio. Para problemas bidimensionais estas equações são dadas por

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y = 0, \quad (3.23)$$

Onde b_x e b_y são as componentes da força de corpo nas direções x e y respectivamente.

Substituindo-se as expressões das deformações (3.16) e a Lei de Hooke para estado plano de deformação nas equações de equilíbrio, tem-se

$$\begin{aligned} G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + b_x &= 0, \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + b_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (3.25)$$

Para o problema de deformação plana, a solução fundamental é obtida para cargas conhecidas aplicadas sobre o ponto fonte nas direções x e y de magnitude 1, que são estendidas para o infinito nas direções $+z$ e $-z$. A solução foi primeiro trabalhada por Lord Kelvin.

A solução para os deslocamentos nas direções x e y devido ao carregamento unitário na direção x pode ser escrita como (Figura 3.4).

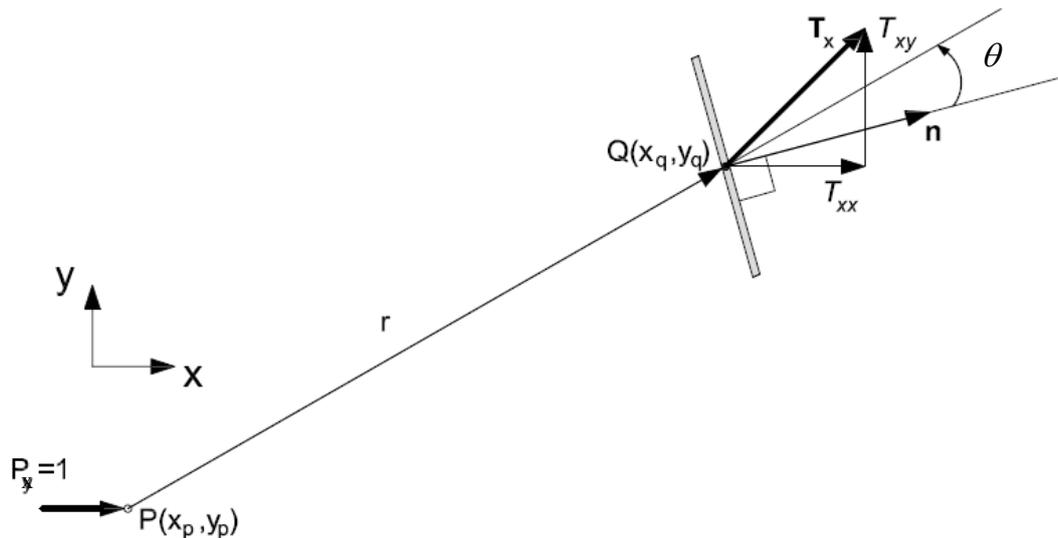


Figura 3.4 - Notação para solução de Kelvin bidimensional (carregamento unitário na direção x)

$$U_{xx}(P, Q) = C \left(C_1 \ln \left(\frac{1}{r} \right) + r_{,x}^2 \right),$$

$$U_{xy}(P, Q) = C r_{,x} r_{,y}, \tag{3.26}$$

onde

$$C = 1 / (8\pi G(1 - \nu)), \quad C_1 = 3 - 4\nu.$$

Observa-se que o primeiro subscrito de U refere-se à direção do carregamento unitário enquanto que o segundo relaciona-se a direção do deslocamento.

Para um carregamento unitário na direção y mostrado na Figura 3. 5, tem-se

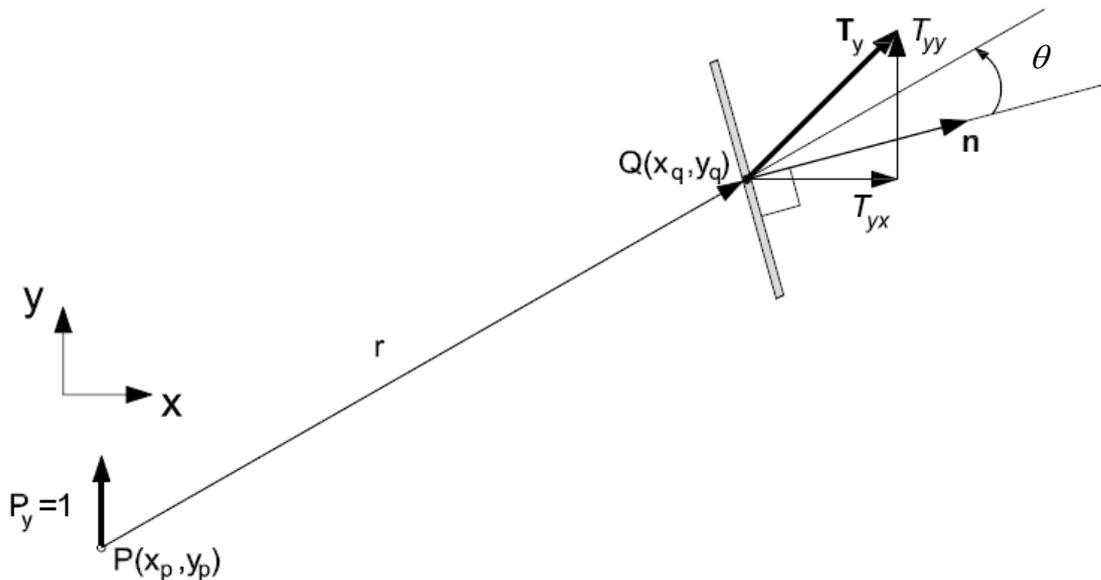


Figura 3. 5 - Notação para solução de Kelvin bidimensional (carregamento unitário na direção y)

$$U_{yy}(P, Q) = C \left(C_1 \ln \left(\frac{1}{r} \right) + r_{,y}^2 \right),$$

$$U_{yx}(P, Q) = U_{xy}(P, Q), \tag{3.27}$$

onde a segunda equação indica a simetria da solução.

As equações (3.26) e (3.27) podem ser escritas como uma única equação como segue

$$U_{ij}(P, Q) = C \left(C_1 \ln \left(\frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right), \quad (3.28)$$

onde x e y são substituídos por i e j e

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j, \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \quad (3.29)$$

é o delta de Kronecker.

Para o método dos elementos de contorno também é necessário a solução para as tensões no contorno (forças de superfície) atuando na superfície com a direção normal unitária de n Figura 3.4.

A solução fundamental para as forças de superfície é obtida primeiramente calculando-se a solução fundamental para as deformações e então aplicando-se a Lei de Hooke. A solução fundamental para deformações é obtida tomando-se a derivada da solução deslocamento. As forças no ponto Q devido ao carregamento unitário em P na direção x são dadas por:

$$T_{xx}(P, Q) = -\frac{C_2}{r} (C_3 + 2r_{,x}^2) \cos \theta,$$

$$T_{xy}(P, Q) = -\frac{C_2}{r} \left[2r_{,x} r_{,y} \cos \theta - C_3 [n_y r_{,x} - n_x r_{,y}] \right], \quad (3.30)$$

$$C_2 = 1 / (4\pi(1-\nu)), \quad C_3 = 1 - 2\nu, \quad \cos \theta = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n},$$

$$r_{,x} = r_x / r, \quad r_{,y} = r_y / r$$

onde θ é definido como o ângulo entre o vetor normal n e o vetor distância r mostrado na Figura 3.4, isto é, $n = \{n_x, n_y\}$ e $r = \{r_x, r_y\}$. Tem-se ainda $r_x = x_Q - x_P$ e $r_y = y_Q - y_P$

Para um carregamento unitário na direção y , tem-se

$$T_{yy}(P, Q) = -\frac{C_2}{r} (C_3 + 2r_{,y}^2) \cos \theta,$$

$$T_{yx}(P, Q) = -\frac{C_2}{r} \left[2r_{,x} r_{,y} \cos \theta - C_3 [n_{x,y} r_{,y} - n_{y,x} r_{,x}] \right]. \quad (3.31)$$

A expressão combinada é

$$T_{ij}(P, Q) = -\frac{C_2}{r^2} \left[(C_3 \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}) \cos \theta - C_3 (1 - \delta_{ij}) [n_{j,i} r_{,i} - n_{i,j} r_{,j}] \right]. \quad (3.32)$$

Observa-se que a primeira parte da solução é simétrica (isto é, a primeira parte de T_{xy} é igual a T_{yx}), mas a segunda parte não é.

3.4 Método Direto

Neste tópico será estudado o método direto do MEC, onde é aplicado o teorema de Betti para obter as equações integrais do método, entretanto, a mesma formulação poderia ter sido obtida a partir do teorema da divergência e da identidade simétrica de Green.

3.4.1 Teorema de Betti e as Equações Integrais

Para o desenvolvimento do método direto, neste trabalho será usado o teorema de Betti, uma forma elegante de eliminar a necessidade de calcular forças ou fontes fictícias. Também é abolida a necessidade de um conjunto adicional de pontos, fazendo com que os pontos fonte P coincidam com os pontos campo Q .

Considere um domínio infinito com dois tipos de carregamento: O carregamento do caso 1 assume-se ser o caso que se deseja resolver e o carregamento do caso 2, um caso onde somente um carregamento unitário na direção x é especificado para um ponto P (Figura 3.6). Ao longo da linha pontilhada mostra-se para o caso de carregamento 1 as tensões definidas como forças por unidade de comprimento da linha (dS). Estas são as forças para o ponto Q , com componentes $t_x(Q)$ e $t_y(Q)$. Para o caso de carregamento 2, mostra-se o deslocamento no ponto Q em S , que são as soluções fundamentais $U_{xx}(P, Q)$ e $U_{xy}(P, Q)$.

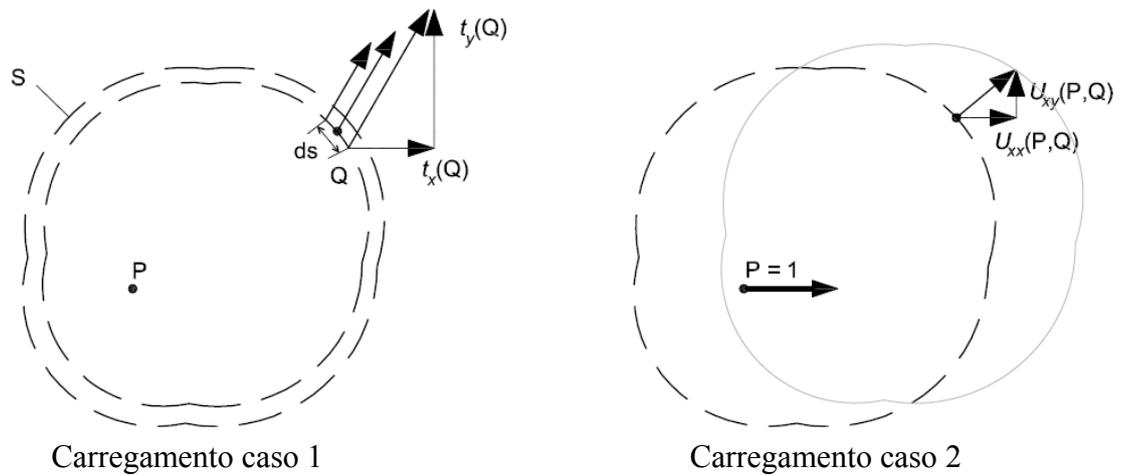


Figura 3.6 - Aplicação do teorema de Betti, forças de superfície do carregamento caso 1 e deslocamentos do carregamento caso 2 para calcular W_{12} .

Como já mencionado anteriormente, tem-se que seccionar o meio contínuo para mostrar tensões. Aqui o meio é seccionado ao longo de uma linha pontilhada, que forma um contorno fechado e que foi escolhido arbitrariamente. Por esta seção, o meio contínuo é dividido em duas partes: o domínio interior e exterior. Observa-se que para as deduções seguintes não importa qual domínio é considerado e, então, as equações integrais são válidas tanto para domínios infinitos como para domínios finitos.

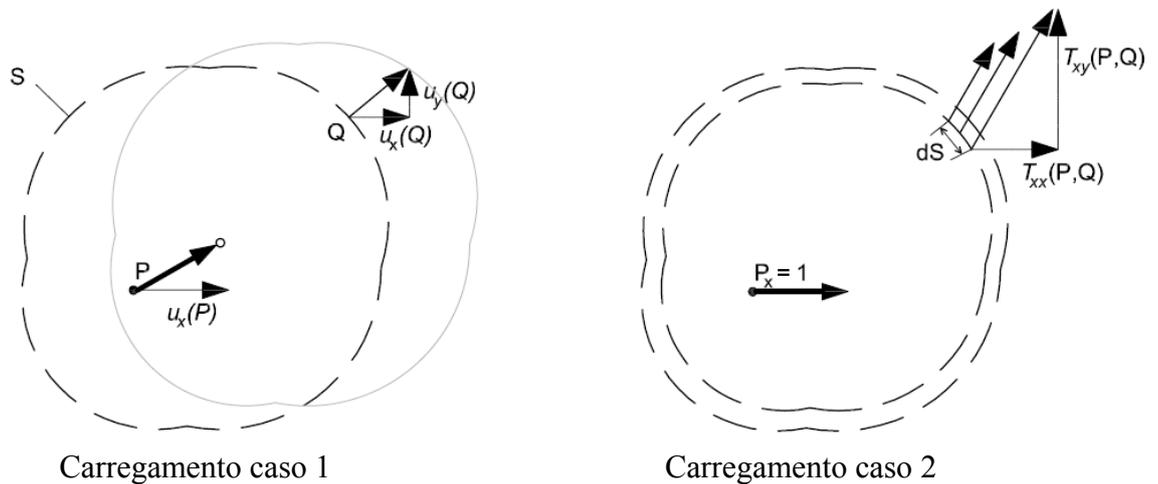


Figura 3.7 - Aplicação do teorema de Betti, deslocamentos do carregamento caso 1 e forças de superfície do carregamento caso 2 para calcular W_{21} .

O teorema de Betti declara que o trabalho feito pela carga do caso 1 ao longo do deslocamento do caso 2 deve ser igual ao trabalho realizado pela carga do caso 2 ao longo do deslocamento do caso 1.

Assumindo-se que não há forças de corpo atuando no domínio, o trabalho feito pelo primeiro conjunto de forças e deslocamentos é (Figura 3.6):

$$W_{12} = \int_S [t_x(Q)U_{xx}(P, Q) + t_y(Q)U_{xy}(P, Q)] dS \quad (3.343)$$

O trabalho feito pelo segundo conjunto de forças e deslocamentos é (Figura 3.7):

$$W_{21} = \int_S [u_x(Q)T_{xx}(P, Q) + u_y(Q)T_{xy}(P, Q)] dS + 1u_x(P). \quad (3.34)$$

O teorema de Betti declara que $W_{12} = W_{21}$ e isto dá a primeira equação integral

$$u_x(P) = \int_S [t_x(Q)U_{xx}(P, Q) + t_y(Q)U_{xy}(P, Q)] dS - \int_S [u_x(Q)T_{xx}(P, Q) + u_y(Q)T_{xy}(P, Q)] dS \quad (3.35)$$

A segunda equação integral pode ser obtida substituindo-se o carregamento unitário na direção y

$$u_y(P) = \int_S [t_x(Q)U_{yx}(P, Q) + t_y(Q)U_{yy}(P, Q)] dS - \int_S [u_x(Q)T_{yx}(P, Q) + u_y(Q)T_{yy}(P, Q)] dS \quad (3.36)$$

Usando álgebra matricial podem-se combinar as equações (3.35) e (3.36)

$$u(P) = \int_S t^T(Q)U(P, Q) dS - \int_S u^T(Q)T(P, Q) dS, \quad (3.37)$$

onde

$$u(Q) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad U(P, Q) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{yx} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{bmatrix},$$

$$t(Q) = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad T(P, Q) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} \\ T_{xy} & T_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

O procedimento para a inserção da consideração da força de corpo é semelhante ao descrito acima. Chegando a uma equação semelhante a 3.37 com a integral adicional:

$$\int_V b^T(Q)U(P,Q)dV \quad (3.39)$$

Onde

$$b(Q) = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Obtendo a expressão mais geral para a equação 3.37:

$$u(P) = \int_S t^T(Q)U(P,Q)dS - \int_S u^T(Q)T(P,Q)dS + \int_V b^T(Q)U(P,Q)dV, \quad (3.41)$$

As equações (3.38) representam, para o problema bidimensional, um sistema de duas equações integrais que relacionam forças t e deslocamentos u diretamente ao contorno.

Para problemas tridimensionais, as três equações integrais podem ser obtidas onde S é uma superfície e

$$u(Q) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}, \quad U(P,Q) = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{yx} & U_{zx} \\ U_{xy} & U_{yy} & U_{zy} \\ U_{xz} & U_{yz} & U_{zz} \end{bmatrix}, \quad b(Q) = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

$$t(Q) = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}, \quad T(P,Q) = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

3.4.2 Integrais Quando os Pontos P e Q Coincidem no Contorno

Até agora, obteve-se sucesso em evitar o cálculo de forças fictícias, mas ainda são necessários dois conjuntos de pontos: pontos P onde os pontos fontes ou cargas unitárias são aplicados e os pontos Q onde as condições de contorno devem ser satisfeitas. Neste tópico analisará a condição quando os pontos P coincidem com os pontos Q . O problema é que

algumas integrais em (3.37) ou (3.41) só existem no sentido de um valor limite à medida que P se aproxima de Q .

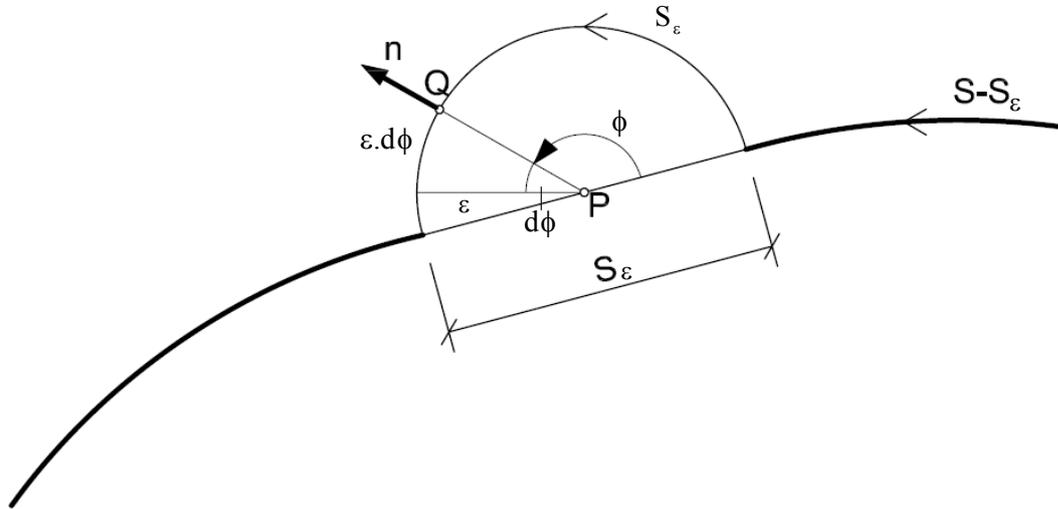


Figura 3.8 - Valor limite das integrais para problemas elásticos bidimensional

Isto é explicado na Figura 3.8 para problemas bidimensionais. Agora, examina-se o que acontece quando o ponto P coincide com o ponto Q e desconsiderando a presença da força de corpo. É definida uma região de exclusão ao redor do ponto P , com raio ϵ e é integrado em torno dele. As integrais na equação (3.37) podem agora ser divididas em integrais sobre $S-S_\epsilon$, quer dizer, a parte da curva sem a zona de exclusão e em integrais sobre s_ϵ , que é a parte da exclusão circular. Fazendo ϵ tender a zero não importa se a integração é sobre s_ϵ ou S_ϵ . O lado direito da equação 3.37 é escrito como

$$\int_S t^T \cdot U \cdot dS - \int_S u^T \cdot T \cdot dS = \int_{S-S_\epsilon} t^T \cdot U \cdot dS - \int_{S-S_\epsilon} u^T \cdot T \cdot dS + \int_{s_\epsilon} t^T \cdot U \cdot dS - \int_{s_\epsilon} u^T \cdot T \cdot dS \quad (3.43)$$

Para uma superfície suave em P , usando coordenadas polares, substitui-se os limites de integração da primeira integral para 0 e π e substitui-se para a solução fundamental U . Além disso, como no limite P coincidirá com Q , pode-se assumir que $t(Q) = t(P)$ e $u(Q) = u(P)$. Tem-se então

$$\int_{s_\epsilon} t^T(Q) U(P, Q) dS(Q) = t^T(P) \int_0^\pi \frac{1}{2\pi k} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \epsilon d\phi = t^T(P) \pi \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \epsilon. \quad (3.44)$$

A integral se aproxima de zero à medida que ε se aproxima de zero. Portanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} t^T(Q)U(P, Q)dS(Q) = 0. \quad (3.45)$$

A segunda integral se torna

$$\int_{S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) = u^T(P) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\phi = u^T(P) \int_0^\pi \frac{-1}{2\pi} d\phi = \frac{-1}{2} u(P). \quad (3.46)$$

A equação integral que foi usada para o caso onde os pontos fonte estão localizados na linha contínua S , é dada por

$$\frac{1}{2} u(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S-S_\varepsilon} t^T(Q)U(P, Q)dS(Q) - \int_{S-S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) \right]. \quad (3.47)$$

Para um problema tridimensional, considera-se a zona de exclusão como uma esfera e neste caso a primeira integral também se aproxima de zero à medida que ε aproxima-se de zero. A segunda integral pode ser calculada como

$$\int_{S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) = u^T(P) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{4\pi\varepsilon^2} \varepsilon d\phi \varepsilon d\psi = -\frac{1}{2} u(P), \quad (3.48)$$

que para superfícies suaves dá o mesmo resultado anterior. Obviamente, o mesmo procedimento limite pode ser feito para problema de elasticidade. Quando $P = Q$ a equação integral 3.37 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} u(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S-S_\varepsilon} t^T(Q)U(P, Q)dS(Q) - \int_{S-S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) \right]. \quad (3.49)$$

Se o contorno não é suave, tendo cantos então a equação de contorno é modificada, onde limites de integração dependem de um ângulo γ :

$$\int_{S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) = u^T(P) \int_0^\gamma \frac{\cos \theta}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\phi = u^T(P) \int_0^\gamma \frac{-1}{2\pi} d\phi = -\frac{\gamma}{2\pi} u(P). \quad (3.50)$$

E verificando que

$$cIu(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S-S_\varepsilon} t^T(Q)U(P, Q)dS(Q) - \int_{S-S_\varepsilon} u^T(Q)T(P, Q)dS(Q) \right], \quad (3.51)$$

$$c = 1 - \frac{\gamma}{2\pi} \text{ para } 2-D \text{ e } c = 1 - \frac{\gamma}{4\pi} \text{ para } 3-D. \quad (3.52)$$

onde γ é definido como o ângulo subtendido em P por S , I é uma matriz unitária 2×2 ou 3×3 .

3.4.3 Pós-Processamento

Neste item, chamou-se de pós-processamento, todos os parâmetros obtidos após ter calculado as incógnitas do contorno. Desta forma será apresentado o cálculo das tensões no contorno e os deslocamentos e tensões dos pontos internos.

Para elasticidade, os deslocamentos u no elemento de contorno são dados em termos dos deslocamentos nodais u_n^e por

$$u = \sum_{n=1}^N N_n u_n^e. \quad (3.53)$$

Para problemas bidimensionais, as deformações na direção tangencial são calculadas por

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{X}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \bullet v_\xi \right) \frac{\partial \xi}{\partial \bar{X}}, \quad (3.54)$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \end{array} \right\}, \quad (3.55)$$

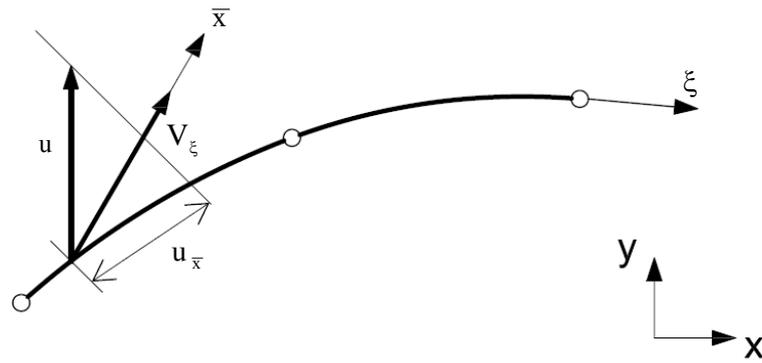


Figura 3.9 - Cálculo das deformações tangenciais.

As derivadas dos deslocamentos são dadas por

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial N_n}{\partial \xi} u_{xn}^e, \quad \frac{\partial u_y}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial N_n}{\partial \xi} u_{yn}^e. \quad (3.56)$$

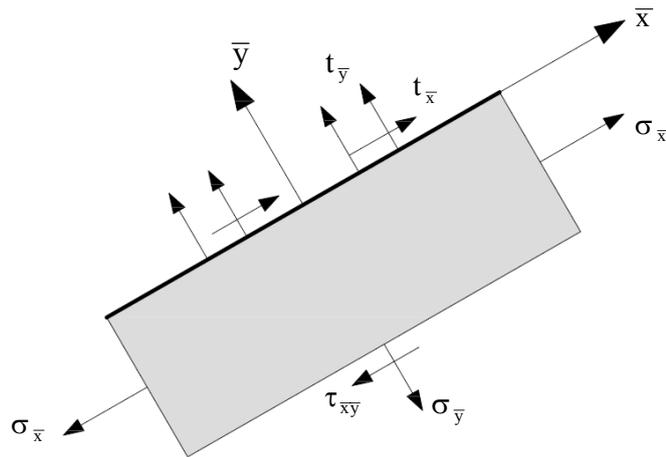


Figura 3.10 - Cálculo das tensões para problemas de deformação plana.

As tensões nas direções tangenciais são calculadas usando a Lei de Hooke. Para condição de tensão plana tem-se:

$$\sigma_{\bar{x}} = E \varepsilon_{\bar{x}} + \nu t_{\bar{y}}. \quad (3.57)$$

onde $t_{\bar{y}}$ é a força de superfície normal ao contorno.

Para deformação plana, tem-se

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\bar{x}} + \nu t_{\bar{y}} \right). \quad (3.58)$$

O pseudo-vetor de tensão local para tensão plana é

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \sigma_z \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ t_{\bar{y}} \\ 0 \\ t_{\bar{x}} \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

e para deformação plana

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ t_{\bar{y}} \\ \nu(\sigma_{\bar{x}} + t_{\bar{y}}) \\ t_{\bar{x}} \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

As tensões podem ser transformadas nas direções globais usando a equação 3.11. Para problemas tridimensionais calculam-se as componentes de deformação nas direções locais \bar{x} , \bar{y} . Estas deformações são obtidas da mesma forma que para problemas bidimensionais

3.4.3.1 Resultados Internos

Os deslocamentos no ponto P_a dentro do domínio podem ser calculados usando as equações integrais para o deslocamento

$$u(P_a) = \int_S U(P_a, Q) t(Q) dS - \int_S T(P_a, Q) u(Q) dS. \quad (3.61)$$

As deformações podem ser calculadas usando a equação (3.6)

$$\varepsilon = Bu(P_a) = \int_S BU(P_a, Q) t(Q) dS - \int_S BT(P_a, Q) u(Q) dS. \quad (3.62)$$

Finalmente, as tensões podem ser calculadas usando a equação (3.20)

$$\sigma = D\varepsilon = \int_S DBU(P_a, Q) t(Q) dS - \int_S DBT(P_a, Q) u(Q) dS, \quad (3.63)$$

ou

$$\sigma = \int_S S(P_a, Q)t(Q)dS - \int_S R(P_a, Q)u(Q)dS, \quad (3.64)$$

onde as soluções fundamentais derivadas S e R são definidas como

$$S = DBU(P_a, Q), \quad R = DBT(P_a, Q). \quad (3.65)$$

e o pseudo-vetor σ é definido como

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases} \text{ para 3-D} \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} \text{ para 2-D}. \quad (3.66)$$

As matrizes S e R são de dimensão 3×2 para problemas bidimensionais e de dimensão 6×3 pra problemas tridimensionais.

A matriz S é dada por

$$S = \begin{bmatrix} S_{xxx} & S_{xxy} & S_{xxz} \\ S_{yyx} & S_{yyy} & S_{yyz} \\ S_{zzx} & S_{zzy} & S_{zzz} \\ S_{xyx} & S_{xyy} & S_{xyz} \\ S_{yzx} & S_{yzy} & S_{yzz} \\ S_{xzx} & S_{xzy} & S_{xzz} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Os coeficientes de S são dados por

$$S_{kij} = \frac{C_2}{r^n} \left[C_3 (\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + (n+1)r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right]. \quad (3.68)$$

Onde e definido $r_{,x} = (x_p - x_q)/r$, $r_{,y} = (y_p - y_q)/r$ diferentemente da adotada na equação 3.30.

Os valores x, y, z são substituído por i, j, k . As constantes são definidas na Tabela 3.1 para tensão-deformação plana e problemas tridimensionais e a Matriz R é dada por

$$R = \begin{bmatrix} R_{xxx} & R_{xxy} & R_{xxz} \\ R_{yyx} & R_{yyy} & R_{yyz} \\ R_{zzx} & R_{zzy} & R_{zzz} \\ R_{xyx} & R_{xyy} & R_{xyz} \\ R_{yzx} & R_{yzy} & R_{yzz} \\ R_{zxx} & R_{xzy} & R_{xzz} \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

onde

$$R_{kij} = \frac{C_5}{r^{n+1}} \begin{bmatrix} (n+1) \cos \theta (C_3 \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - C_6 r_{,i} r_{,j} r_{,k}) + \\ (n+1) \nu (\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + \\ C_3 ((n+1) \eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - C_7 \eta_k \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

x, y, z pode ser substituídos por i, j, k e $\cos \theta$ tem que ser definido previamente. Os valores das constantes são dados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Constantes para as soluções fundamentais S e R (Fonte: BEER, 2008)

	<i>Deformação plana</i>	<i>Tensão plana</i>	<i>3-D</i>
n	1	1	2
C ₂	1 / 4π(1 - ν)	(1 + ν) / 4π	1 / 8π(1 - ν)
C ₃	1 - 2ν	(1 - ν) / (1 + ν)	1 - 2ν
C ₅	G / (2π(1 - ν))	(1 + ν)G / 2π	G / (4π(1 - ν))
C ₆	4	4	5
C ₇	1 - 4ν	(1 - 3ν) / (1 + ν)	1 - 4ν

Para a hipótese de tensão plana, as tensões perpendiculares ao plano são calculadas por $\sigma_z = 0$, enquanto que para deformação plana é calculada por $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$.

A forma discreta da solução (3.61) é escrita como

$$u(P_a) = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta U_n^e t_n^E - \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta T_n^e u_n^E, \quad (3.75)$$

onde

$$\Delta U_n^e = \int_{S_e} U(P_a, Q) N_n dS(Q); \quad \Delta T_n^e = \int_{S_e} T(P_a, Q) N_n dS(Q). \quad (3.76)$$

A forma discreta da equação (3.68) é escrita como

$$\sigma(P_a) = \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta S_n^e t_n^E - \sum_{e=1}^E \sum_{n=1}^N \Delta R_n^e u_n^E, \quad (3.70)$$

onde

$$\Delta S_n^e = \int_{S_e} S(P_a, Q) N_n dS(Q); \quad \Delta R_n^e = \int_{S_e} R(P_a, Q) N_n dS(Q). \quad (3.71)$$

Estas integrais podem ser calculadas usando Quadratura de Gauss, como será explicado no capítulo 4. Para problemas bidimensionais elas são dadas por

$$\Delta U_n^e = \sum_{k=1}^K U(P_a, Q(\xi_k)) N_n(\xi_k) J(\xi_k) W_k; \quad \Delta T_n^e = \int_{S_e} T(P_a, Q) N_n dS(Q). \quad (3.72)$$

O número de pontos de Gauss ξ necessários para uma integração precisa dependerá da proximidade de P_a do elemento sobre o qual a integração é realizada. Para calcular os deslocamentos Kernel T há singularidade de $1/r$ para problemas bidimensionais e $1/r^2$ para problemas tridimensionais. O próximo capítulo abordará com mais detalhes a quantidade de pontos de Gauss associados ao erro admissível.

CAPÍTULO 4

4 Controle de Erro da Integração Numérica

4.1 Introdução

Fórmulas de integração numérica ou fórmulas de quadratura são métodos para estimar resultados das integrais definidas. A avaliação numérica é necessária quando a integral não pode ser expressa em termos de funções elementares ou quando o integrando é avaliado somente em pontos discretos, por exemplo, dados experimentais.

A estimativa de áreas planas limitadas por curvas é um dos problemas mais antigos da ciência. Tentativas de medir áreas limitadas por círculos, elipses e parábolas foram realizadas pelos Babilônios, Egípcios e Gregos. Contudo, a análise sistemática somente se tornou possível após a invenção do Cálculo. Newton interpolou funções em pontos equidistantes e integrou o polinômio interpolador, assim criou o que se conhece como Quadratura de Newton-Cotes. No entanto, Gauss foi o primeiro a notar que pontos de interpolação não equidistantes conduziam, em geral, a melhores resultados das integrais. Em 1814 Gauss apresentou o artigo intitulado “*Methodus nova integralium calore per approximationem inveniendi*” introduzindo a fórmula da quadratura com grau de precisão melhorado em comparação com a fórmula de Newton-Cotes (KRESS, 1998).

4.2 Construção da Regra da Quadratura de Gauss

Antes de mostrar como são obtidos os valores (pontos e função peso) da quadratura de Gauss, será necessário obter os polinômios ortogonais. Sendo estes polinômios os geradores dos parâmetros que se deseja encontrar. Com este objetivo, se fará uso de algumas definições e teoremas. As demonstrações destes teoremas não são mostradas neste trabalho, mas as referências aonde as mesmas podem ser obtidas são indicadas.

Definição 4.1 – Uma função f é dita integrável no intervalo $[a, b]$ quando existe

$\int_a^b f(x)dx$, isto é, quando existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ para qualquer partição P do intervalo e

qualquer escolha dos pontos \hat{x}_i , cada i pertencente a um dos sub-intervalos obtidos por meio da partição.

Definição 4.2 – Uma função f é contínua em um número α se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

- I. Existe $f(a)$
- II. Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (4.1)
- III. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Diz-se que a função f é uma função contínua quando f é contínua em todos os pontos a .

Definição 4.3 – Dada uma função peso w , definida, positiva, contínua e integrável no intervalo (a, b) , é dito que a seqüência de polinômios φ_j , $j = 0, 1, \dots, n$ é um sistema de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) , se cada φ_j é de grau exato j , e se

$$\int_a^b w(x)\varphi_k(x)\varphi_j(x)dx \begin{cases} = 0 & \text{para } \textit{todo } k \neq j, \\ \neq 0 & \text{quando } k = j. \end{cases} \quad (4.2)$$

Um procedimento utilizado na construção de sistemas de polinômios ortogonais é usualmente referido como Ortogonalização de Gram-Schmidt. Para os exemplos abordados neste trabalho se fará uso deste procedimento.

Exemplo 4.1 - Neste exemplo é mostrada a construção de um sistema de polinômios $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ no intervalo $(0, 1)$ e função peso $w(x) \equiv 1$.

Faz-se $\varphi_0 \equiv 1$, e impõe φ_1 da forma

$$\varphi_1(x) \equiv x - c_0\varphi_0(x)$$

Definindo o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por: $\langle g, h \rangle = \int_a^b w(x)g(x)h(x)dx$ e utilizando a

condição de ortogonalidade $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = 0$ isto é,

$$\langle x, \varphi_0 \rangle - c_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0$$

Onde,

$$c_0 = \frac{\langle x, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{1}{2}$$

E portanto,

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2} \varphi_0(x) = x - \frac{1}{2}$$

Por construção, $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle$

Considerando φ_2 da forma

$$\varphi_2(x) = x^2 - (d_1 \varphi_1(x) + d_0 \varphi_0(x))$$

Tal que $\langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle = 0$ e $\langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle = 0$. Assim

$$\langle x^2, \varphi_1 \rangle - d_1 \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle - d_0 \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$$

$$\langle x^2, \varphi_0 \rangle - d_1 \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle - d_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0$$

Como $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 0$ e $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = 0$, tem-se

$$d_1 = \frac{\langle x^2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = 1,$$

$$d_0 = \frac{\langle x^2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{1}{3},$$

E portanto

$$\varphi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Neste exemplo foi gerado um sistema de polinômios ortogonais em um intervalo $(0,1)$ e função peso $w(x) \equiv 1$, fazendo a transformação $x \rightarrow (b-a)x + a$ pode-se obter um sistema de polinômios ortogonais em qualquer intervalo aberto (a,b) e função peso $w(x) \equiv 1$.

No próximo exemplo será considerado o intervalo aberto $(-1,1)$ e função peso $w(x) \equiv 1$, obtendo assim os polinômios de Legendre.

Exemplo 4.2 - (Polinômios de Legendre) Será construído agora o sistema de polinômios ortogonais para o intervalo aberto $(a,b) = (-1,1)$ com função de peso $w(x) \equiv 1$ Para tanto, se fará uso do exemplo 4.1, fazendo a troca da variável x por:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{2}(x+1), \quad x \in (a,b) = (-1,1)$$

Nas funções $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ do exemplo anterior e normalizando cada um desses polinômios para quando $x = 1$ estes tenham valor igual a 1, chega-se

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0(x) &= 1, \\ \bar{\varphi}_1(x) &= x, \\ \bar{\varphi}_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esses são os primeiros três elementos do sistema polinomial de Legendre.

A partir da definição dos polinômios ortogonais, será iniciada a construção dos parâmetros da quadratura de Gauss.

Suponha que a função f está definida no intervalo fechado $[a,b]$ e que seja contínua e diferenciável neste intervalo. Seja ainda w a função peso, definida, positiva, contínua e integrável em (a,b) . Deseja-se construir a fórmula da Quadratura para aproximar a integral

$$\int_a^b w(x)f(x)dx.$$

Para um inteiro não-negativo n , faz-se $x_i, i = 0, \dots, n$ ser $n+1$ pontos no intervalo $[a, b]$, a localização desses pontos ainda será determinada. A interpolação polinomial de Hermite de grau $2n+1$ para a função f é dada pela expressão (SÜLI; MAYERS, 2007):

$$p_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n H_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n K_k(x) f'(x_k), \quad (4.3)$$

Onde

$$\begin{aligned} H_k(x) &= [L_k(x)]^2 (1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)) \\ K_k(x) &= [L_k(x)]^2 (x - x_k), \end{aligned} \quad (4.4)$$

E para $n \geq 1$, $L_k \in P_n$ é definida por

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

Se $n = 0$, conduz a $L_0(x) \equiv 1$ e assim $H_0(x) \equiv 1$ e $K_0(x) = x - x_0$. Pode-se deduzir:

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \int_a^b w(x) p_{2n+1}(x) dx = \sum_{k=0}^n W_k f(x_k) + \sum_{k=0}^n V_k f'(x_k), \quad (4.5)$$

Onde

$$W_k = \int_a^b w(x) H_k(x) dx, \quad V_k = \int_a^b w(x) K_k(x) dx$$

Existe uma vantagem óbvia em escolher os pontos x_k de tal forma que todos os coeficientes de V_k sejam zero, para que não necessite calcular o valor da derivada $f'(x_k)$. Lembrando a forma do polinômio K_k e inserindo dentro da expressão de V_k , tem-se:

$$V_k = \int_a^b w(x) [L_k(x)]^2 (x - x_k) dx = C_n \int_a^b w(x) \pi_{n+1} L_k(x) dx, \quad (4.6)$$

Onde $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ e

$$c_n = \begin{cases} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)^{-1} \right) & \text{se } n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Donde π_{n+1} é de grau $n+1$ enquanto $L_k(x)$ é de grau n para cada k , $0 \leq k \leq n$, cada V_k será zero se o polinômio π_{n+1} é ortogonal a cada polinômio de grau menor com respeito a função peso w . Pode-se, portanto construir a requerida Quadratura equação 4.5 com $V_k = 0, k = 0, \dots, n$, escolhendo os pontos $x_k, k = 0, \dots, n$, que sejam os zeros do polinômio de grau $n+1$ no sistema de polinômios ortogonais cobrindo o intervalo (a, b)

Tendo escolhido a localização dos pontos x_k , considera-se w_k :

$$\begin{aligned} W_k &= \int_a^b w(x) H_k(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) [L_k(x)]^2 (1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)) dx \\ &= \int_a^b w(x) [L_k(x)]^2 dx - 2L'_k(x_k) V_k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Sendo $V_k = 0$, o segundo termo na última linha desaparece e assim obtêm a seguinte fórmula de integração numérica, conhecido como Quadratura de Gauss:

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \widehat{G}_n(f) = \sum_{k=0}^n W_k f(x_k), \tag{4.8}$$

Onde o peso da quadratura é dado por:

$$W_k = \int_a^b w(x) [L_k(x)]^2 dx \tag{4.9}$$

E os pontos da quadratura $x_k, k = 0, \dots, n$, são escolhidos como os zeros do polinômio de grau $n+1$ do sistema de polinômio ortogonal cobrindo o intervalo (a, b) com relação à

função peso w . Onde esta regra de quadratura foi obtido pela integração exata do polinômio de Hermite de grau $2n+1$ para f , esta integração é exata quando f é um polinômio de grau menor ou igual a $2n+1$. Para maiores detalhes e exemplos ver (SÜLI; MAYERS, 2007).

Exemplo 4.3 – Considerando o caso $n=1$, com a função peso $w(x)=1$ no intervalo $(-1,1)$.

Os pontos da quadratura x_0, x_1 são os zeros do polinômio $\bar{\varphi}_2$ construído no exemplo 4.2

$$\bar{\varphi}_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

E portanto,

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

É fácil notar que os pontos x_0, x_1 pertencem ao intervalo aberto $(-1,1)$ Os valores da função peso são obtidos pela equação 4.7:

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \right)^2 dx + \\ &= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

E refazendo para $k=1$, tem-se $W_1=1$. Pela utilização dos polinômios ortogonais de Legendre, obtêm a Quadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx 1f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{4.11}$$

Que é exata quando f é um polinômio de grau $2 \times 1 + 1 = 3$ ou menor.

4.3 Estimativa do Erro da Quadratura de Gauss

O próximo teorema fornece um limite para o erro que a equação 4.5 proporciona quando é aproximado o valor da integral pela Quadratura de Gauss.

Teorema 2.1 – Suponha que w seja a função peso, definida, integrável, contínua e positiva no intervalo aberto (a, b) , e que f é definida e contínua no intervalo fechado $[a, b]$; suponha ainda que f tem derivada contínua de ordem $2n+2$ em $[a, b]$, $n \geq 0$. Então, existe um número $\varepsilon \in [a, b]$ tal que (SÜLI; MAYERS, 2007)

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - \sum_{k=0}^n a_k f(x_k) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} \int_a^b w(x)[\pi_{n+1}(x)]^2 dx \quad (4.12)$$

O número de pontos Gauss n depende da precisão da integração e da natureza do integrando.

Stroud e Secrest (1966) fornecem uma estimativa do erro:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \right| \leq \varepsilon H \quad (4.13)$$

Onde $H \geq \left| \frac{\partial^{2n} f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^{2n}} \right|$ e $\varepsilon \approx 2 \frac{4}{(2)^{2n} (2n)!}$.

A equação 4.13 pode ser reescrita como:

$$\zeta \leq 2 \frac{4}{(2)^{2n} (2n)!} \left| \frac{\partial^{2n} f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^{2n}} \right| \quad (4.14)$$

Onde ζ é o erro Máximo, n é o número de pontos de Gauss.

Pode ser notado que a equação 4.14 é de grande complexidade para ser utilizada na implementação numérica, partindo desta idéia, este trabalho faz um estudo desta equação para o controle de erro das integrações numéricas do método dos elementos de contorno bidimensionais.

4.4 Estudo de Erro da Quadratura de Gauss-Legendre para Integrandos de Ordens $1/R$ e $1/R^2$

Como visto no capítulo anterior, a maior parte dos valores que compõem os sistemas de equações de problemas analisados com o MEC são calculados através de integrações numéricas. Neste trabalho é utilizado a Quadratura de Gauss, como já explicado nos tópicos predecessores.

Já mencionado, no item 4.2 deste capítulo, que a Quadratura gaussiana é exata para funções polinomiais sempre que seu grau for igual ou inferior a $2n - 1$ onde n é o número de pontos de integração, entretanto, as integrais encontradas no MEC bidimensional são da ordem $1/R$ e $1/R^2$, onde R é a distância do ponto fonte ao elemento a ser integrado. Para uma eficiente implementação do MEC é importante selecionar quantidade de pontos de Gauss necessária para fornecer uma precisão suficiente às integrações.

Considerando o elevado número de vezes que é feita a integração numérica na resolução de problemas, é recomendável então a utilização do menor número de pontos de Gauss possível para diminuir o número de operações e, conseqüentemente, o tempo de execução sem introduzir alterações importantes no resultado final. No entanto, deve-se notar que uma boa aproximação requer para certos casos um elevado número de pontos de integração, e a disposição destes pontos no elemento a ser integrado.

Para tentar conciliar a velocidade e a precisão na obtenção dos resultados, neste trabalho são obtidos os pontos de Gauss de forma variável, isto é, os pontos de Gauss são obtidos a partir dos parâmetros: erro tolerável, relação distância do ponto fonte ao elemento, comprimento do elemento e ângulo que R (distância do ponto fonte ao elemento) faz com o elemento. O ângulo α que se referencia está mostrado na Figura 4.1. As variáveis em estudo são governadas pela inequação 4.14 do erro da Quadratura de Gauss.

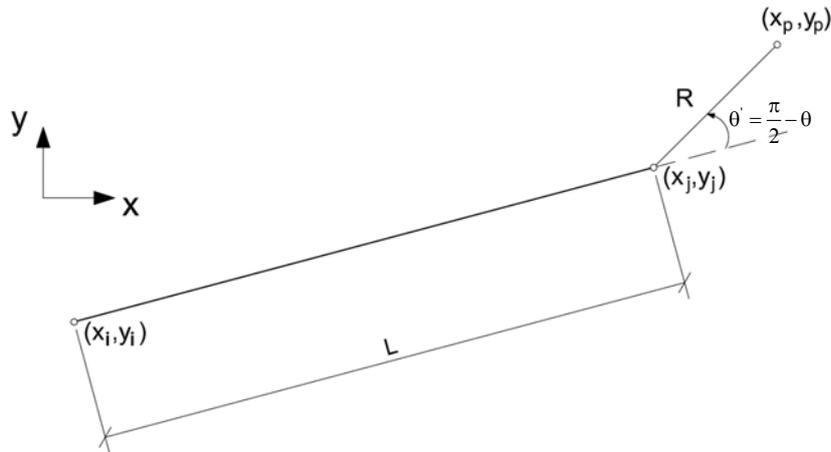


Figura 4.1 – Definição do ângulo θ

A definição dos intervalos de atuação de cada número de pontos de integração é feita a partir da inequação 4.14, onde é variado os parâmetros em estudo. Para a obtenção de todas as combinações de variáveis foi utilizado o *Software* livre wxMaxima 0.7.4. Este *Software* foi utilizado para fazer as derivadas analíticas e todas as vezes que as variáveis eram alteradas, novas consultas à equação do erro eram feitas. Desta forma, foi possível mapear a quantidade de pontos de Gauss para a região em volta do elemento. Verificou-se que em determinadas regiões próximas do elemento a inequação 4.14 começava a oscilar, ou até mesmo a não obter convergência na obtenção do erro à medida que variava os parâmetros. Para evitar que pontos fonte caíssem dentro dessa região foi utilizada a técnica da sub-elementação. Maiores detalhes dessa sub-elementação serão mostrados no item 4.5 deste capítulo.

A Figura 4.2 e Figura 4.3 mostram a quantidade de pontos de integração necessária variando o ângulo e mantendo constante a relação R/L para os integrando de ordem $1/R$ e $1/R^2$, respectivamente. A relação foi iniciada em 1,6 devido ao fato que essa é a menor relação onde não se obteve restrições na inequação 4.14, seja ela por oscilação dos erros seja pela não-convergência, para quaisquer variações do ângulo.

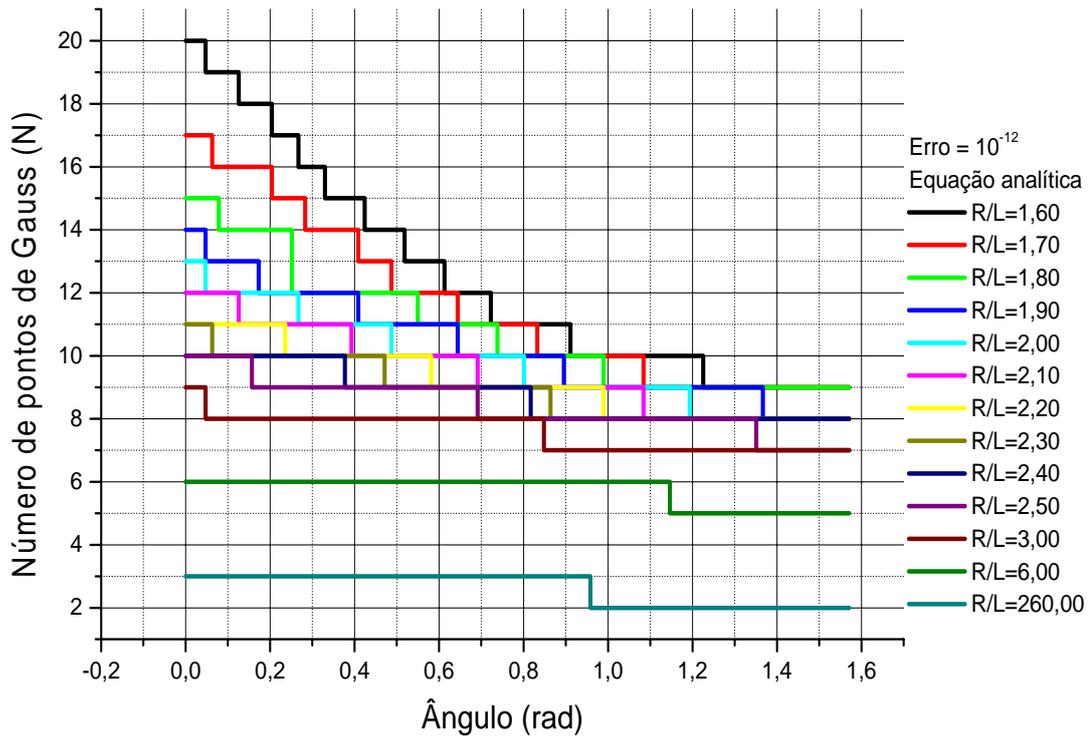


Figura 4.2 - Quantidade de número de pontos de Gauss versus ângulo ($1 / R$)

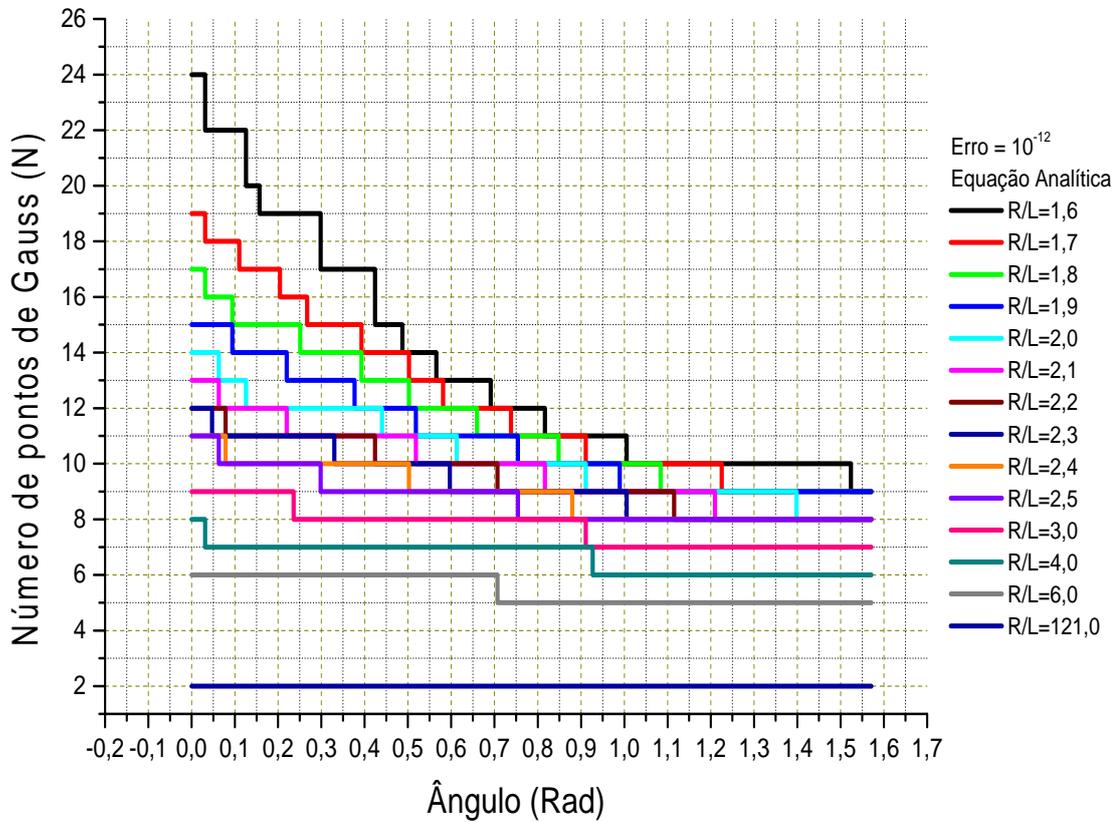


Figura 4.3 - Quantidade de número de pontos de Gauss versus ângulo ($1 / R^2$)

Tendo os resultados das Figura 4.2 e Figura 4.3 sendo de difícil implementação computacional, procurou-se neste trabalho equações mais simples e de mais fácil implementação para o cálculo da quantidade de pontos de Gauss. A partir dos dados da equação analítica foi feita uma regressão não-linear para ajustar aos valores das Figura 4.2 e Figura 4.3. Dentre as regressões estudadas, as funções de decaimento exponencial da forma $N = Y_0 + A_1 \exp(-(\hat{\text{ângulo}} - x_0) / t_1)$ foi a qual melhor resultados foram obtidos.

A Figura 4.4 e Figura 4.5 mostram o ajuste da regressão realizada para as relações $R/L = 1,6; R/L = 2,0; R/L = 6,0$ e $R/L = 260,0$ onde o núcleo de integração é $1/R$ e as demais relações omitidas possuem comportamento semelhantes. Já para singularidade $1/R^2$ é mostrado o ajuste para as relações $R/L = 1,6; R/L = 2,0; R/L = 4,0$ e $R/L = 121,0$, prevalecendo o mesmo comportamento para as demais variações da relação. Nestes gráficos é possível notar a boa aproximação entre a equação analítica e a função aproximadora, onde para as regressões foram analisado pelo teste de aderência qui-quadrado como critério de aceitação ou rejeição, e para este critério todos obtiveram ajuste correspondente a uma aceitação de 95%. Mostrando assim a boa aceitação desta regressão.

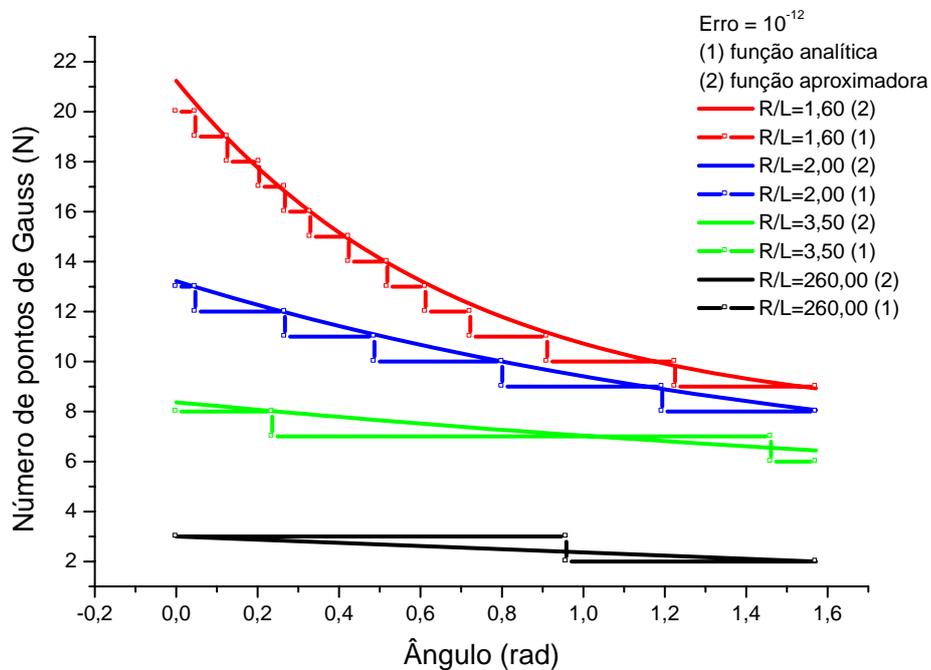
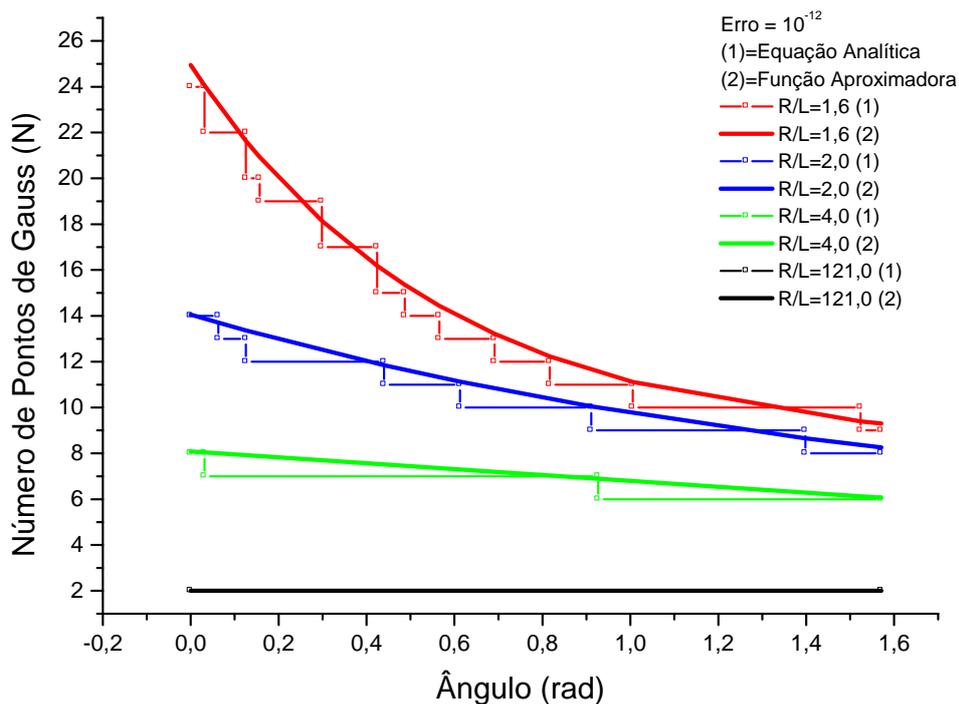


Figura 4.4 - Ajuste de curva aos valores obtidos da equação analítica ($1/R$)


 Figura 4.5 - Ajuste de curva aos valores obtidos da equação analítica ($1/R^2$)

Para a implementação computacional, a Tabela 4.1 e Tabela 4.2 mostra os valores das constantes da equação exponencial. A partir destes valores, são sugeridas estas equações como simplificações da inequação 4.14.

É bastante comum encontrar programas de MEC onde são utilizados elementos isoparamétricos. E diversos autores comparam os diversos isoparamétricos, sejam esses lineares, quadrático ou cúbico, mostrando as melhorias obtidas com a elevação do grau. No entanto, os elementos podem estar sendo subestimados, pois se a definição de que um elemento de determinado grau é “melhor” que outro de grau diferente for a precisão nas respostas, então surge a dúvida se a capacidade do elemento em estudo está sendo totalmente aproveitada ou se está gerando erros nas integrações o que pode estar mascarando os resultados.

A partir do controle do erro, é possível mostrar valores mais próximos da verdadeira potencialidade que o grau da aproximação pode fornecer. Sabe-se que duas etapas importantes na resolução de problemas pelo MEC são realizadas, a primeira são as integrações numéricas e a segunda é a resolução do sistema de equações. Sabe-se ainda que as equações do MEC possuem singularidade quando o ponto fonte é aproximado ao elemento a ser integrado, então pode não ser uma boa idéia fixar quantidade de pontos de integração

Tabela 4.1– Parâmetros da regressão não-linear para integrando de ordem 1 / R

$\frac{R}{L}$	$N = Y_0 + A_1 * \exp(-(\hat{angulo} - x_0) / t_1)$			
	Y_0	A_1	x_0	t_1
1,60	7,55885	13,6793	0	0,68263
1,65	7,14360	12,09487	0	0,79898
1,70	7,40146	10,71916	0	0,78619
1,75	7,32896	9,31153	0	0,86478
1,80	7,59870	7,55379	0,07854	0,84796
1,85	8,10605	5,94161	0,15708	0,72131
1,90	4,82655	9,32018	0	1,55504
1,95	3,96544	9,05115	0,10996	1,85922
2,00	4,66713	8,55215	0	1,69675
2,10	5,07998	6,9243	0,12566	1,6754
2,20	5,56275	5,44357	0,23562	1,65745
2,30	5,87922	5,34148	0	1,68404
2,40	7,00899	2,99101	0,37699	1,08072
2,50	-110,69904	120,74637	0,15708	61,10615
2,75	-185,78824	194,83037	0,34558	120,18365
3,00	-616,76862	625,84653	0	477,49504
3,50	3,51478	4,5044	0,23562	3,104
6,00	-60,3490	66,39508	0	103,53214
260,00	-117,50957	120,51017	0	188,64008

Tabela 4.2 – Parâmetros da regressão não-linear para integrando de ordem 1 / R²

$\frac{R}{L}$	$N = Y_0 + A_1 * \exp(-(\hat{angulo} - x_0) / t_1)$			
	Y_0	A_1	x_0	t_1
1,6 0	8,24629	16,70357	0,00000	0,56991
1,65	8,28814	14,14118	0,00000	0,59012
1,70	7,22589	12,38094	0,00000	0,79760
1,75	7,10449	11,46811	0,00000	0,84458
1,80	6,87940	10,39082	0,00000	0,94609
1,85	7,56439	8,98244	0,00000	0,83262
1,90	7,83160	7,22248	0,09425	0,78691
2,00	4,64859	9,41083	0,00000	1,63873
2,10	4,24432	8,92923	0,00000	1,85333
2,20	2,05345	9,97931	0,07854	2,87070
2,30	5,92804	6,31078	0,00000	1,40349
2,40	5,50185	5,52667	0,07854	1,85830
2,50	7,51246	3,74423	0,00000	0,78387
2,75	-24,42999	34,37092	0,07853	17,08725
3,00	-373,73076	382,73440	0,23562	255,15189
3,50	-79,14700	87,36752	0,00000	111,87460
4,00	-137,87777	145,96387	0,00000	112,67127
6,00	-123,38222	130,20100	0,00000	111,79846
121,00	2,00000	0,00000	-	-

Nas Figura 4.6 e Figura 4.7 é mostrado o contorno e a região, rachurada, aonde para 10 pontos de Gauss não é possível obter um erro máximo de 10⁻¹². Para que seja possível diminuir a região rachurada, neste trabalho é empregada a técnica de sub-elementação.

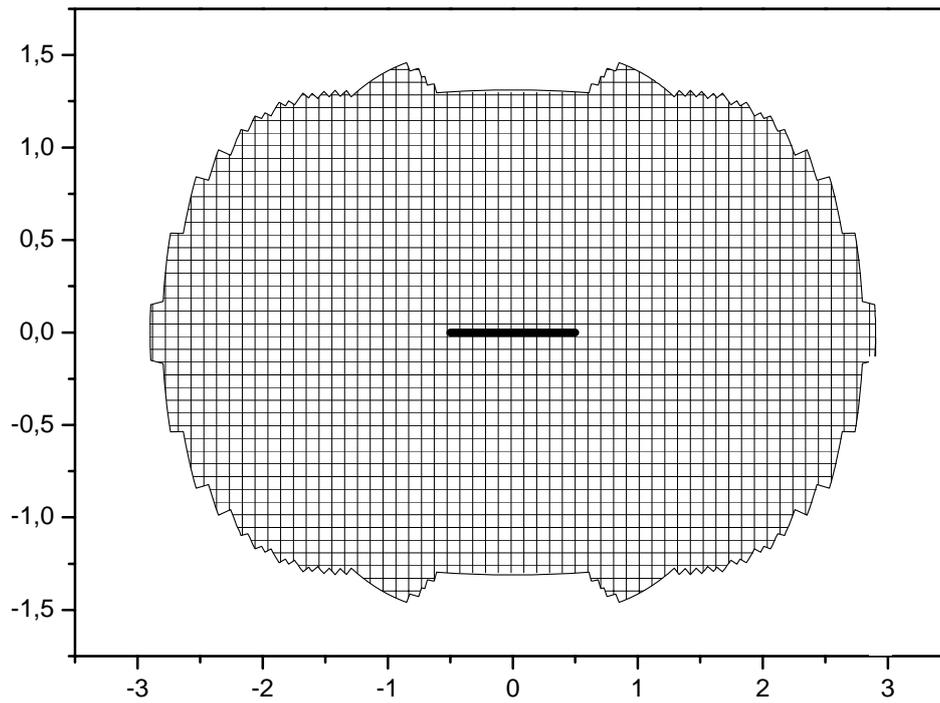


Figura 4.6 - Contorno da localização do ponto fonte onde a integração é realizada com 10^{12} pontos de Gauss e com um erro de para a singularidade $1 / R$

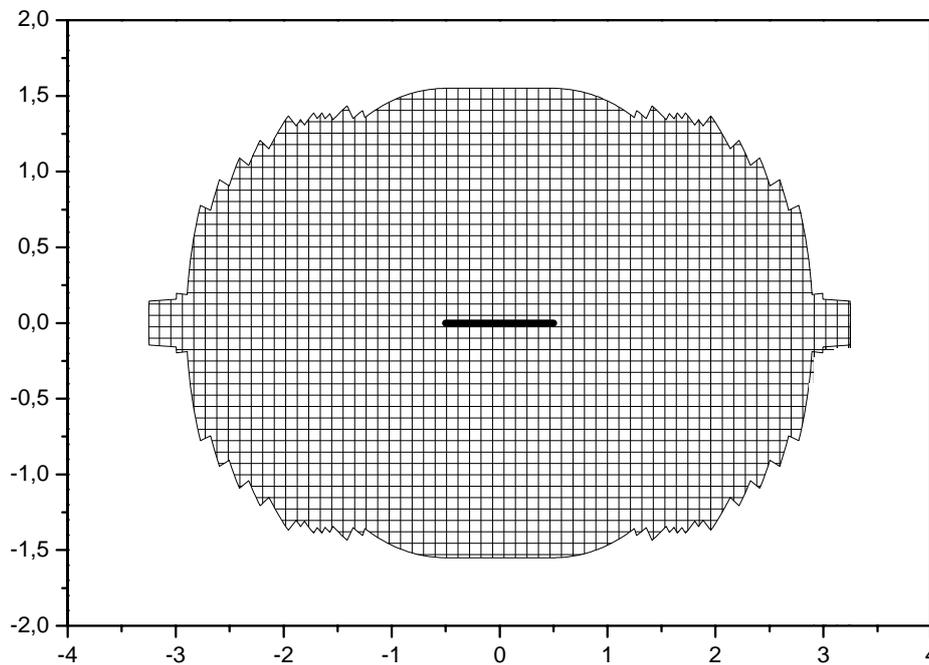


Figura 4.7 - Contorno da localização do ponto fonte onde a integração é realizada com 10^{12} pontos de Gauss e com um erro de para a singularidade $1 / R^2$

4.5 Técnica de Sub-Elementação

Quando os pontos de colocação encontram-se próximo do elemento de contorno a ser integrado o procedimento numérico de integração não conduz a bons resultados. Isso se deve ao fato do núcleo dos termos integrais apresentarem elevados gradientes tornando a integral quase-singular, computacionalmente falando, mesmo com um número elevado de pontos de integração.

De forma a contornar esse problema pode ser utilizada a técnica de sub-elementação que consiste basicamente em dividir o elemento de contorno a ser integrado em elementos menores (sub-elementos). Os sub-elementos podem ser de igual comprimento ou então tornar a forma progressiva, sendo essa última a mais indicada. Neste trabalho, apresenta-se a sub-elementação condicionada ao erro de 10^{-12} , e como já foi apresentado, para determinadas relações geométricas de R/L não é possível obter bons resultados, para quaisquer ângulos, na inequação 4.12. Devido a este obstáculo, a sub-elementação mostrada neste trabalho possui pequenas diferenças da técnica que comumente é utilizada, ver (LEONEL, 2006).

Na formulação dos sub-elementos admite-se válida a relação:

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{Nsub} \int_{\Gamma_{ji}} f(\Gamma_{ji}) \varphi_\eta d\Gamma_{ji} \quad (4.15)$$

Onde o posicionamento das variáveis pode ser visualizado na Figura 4.8.

Transformando o intervalo de integração em coordenadas adimensionais η pode-se reescrever a equação 4.15 como:

$$\begin{aligned} \Gamma = a_i &\rightarrow \eta = -1 \\ \Gamma = b_i &\rightarrow \eta = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{Nsub} \frac{L_i}{2} \int_{-1}^1 f(\eta) \varphi_\eta d\eta \quad (4.17)$$

Deve-se atentar para o fato de que as funções de forma φ_η estão referenciadas ao sistema adimensional ε . No procedimento de sub-elementação o sistema adimensional

adotado é a variável η e devendo ocorrer uma compatibilização entre os dois sistemas para o cálculo da integral.

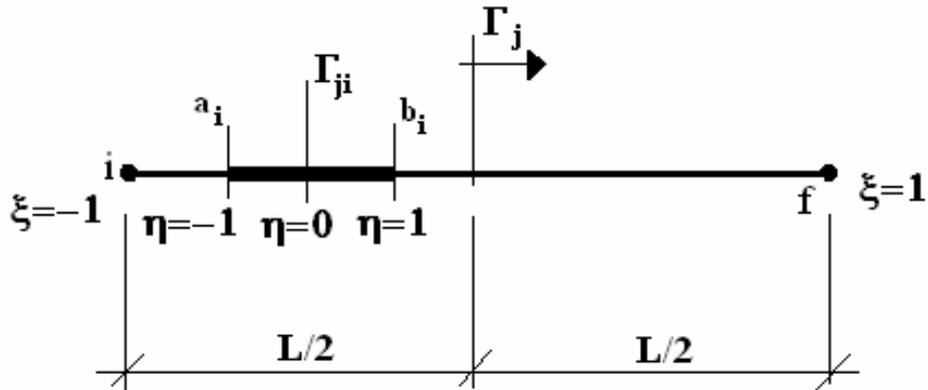


Figura 4.8 - técnica de sub-elementação para integração numérica (Fonte: LEONEL, 2006)

Para aplicação do procedimento de sub-elementação deve-se inicialmente pesquisar quais os elementos de contorno que realmente necessitam dessa ferramenta para a melhoria da precisão das integrais envolvidas.

O objetivo da utilização desta técnica, neste trabalho, foi garantir o perfeito controle do erro das integrações numéricas. Partindo desta idéia, foi realizado a sub-elementação para garantir que a relação geométrica da razão entre a distância do ponto de colocação e o comprimento do sub-elemento seja de no mínimo 1,60. Sendo assim, para garantir esta condição todos os elementos de contorno que possuem $R/L < 1,60$ é realizada a sub-elementação.

Para aplicação desta técnica, segundo o critério adotado neste trabalho, é importante detectar as três condições da posição do ponto de colocação em relação ao elemento, ou ao sub-elemento, de contorno a ser integrado. A Figura 4.9 mostra as três possibilidades e para identificar em qual condição cada integração se enquadra é necessário encontrar a posição do ponto de projeção do ponto de colocação no elemento a ser integrado, ponto (x_{int}, y_{int}) .

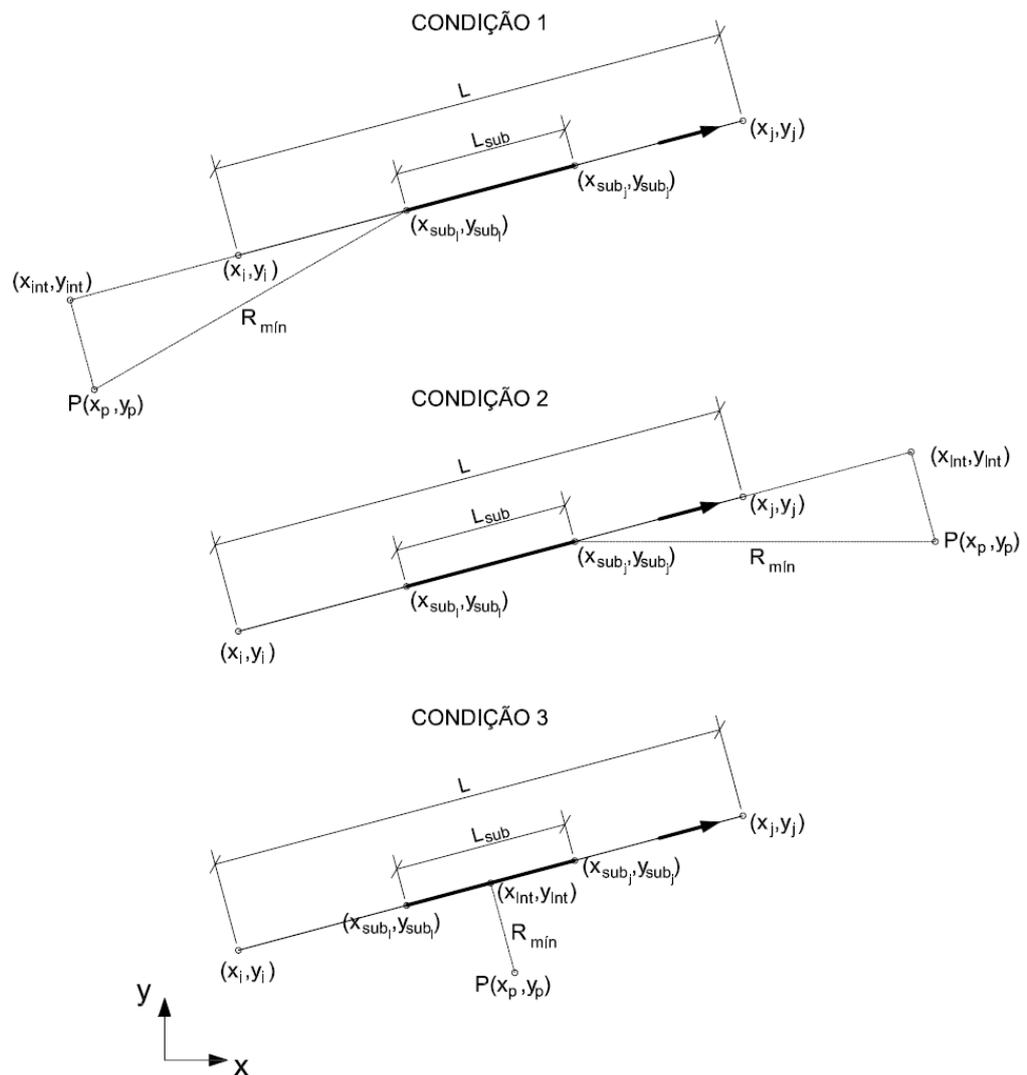


Figura 4.9 - Condições de localização do ponto fonte

O cálculo do ponto (x_{int}, y_{int}) é realizado em função do ponto fonte (X_p, Y_p) , das coordenadas do elemento (X_i, Y_i) e (X_j, Y_j) ou das coordenadas do sub-elemento (X_{SUB_i}, Y_{SUB_i}) e (X_{SUB_j}, Y_{SUB_j}) , onde os índices i e j representam o início e fim do elemento ou sub-elemento, respectivamente. Abaixo são apresentadas as equações (4.18) e (4.19) para o cálculo do ponto de projeção. Estas equações são facilmente obtidas pela geometria analítica elementar.

$$x_{int} = \frac{\bar{B} - B}{A + \frac{1}{A}} \quad (4.18)$$

$$y_{\text{int}} = \frac{A(\bar{B} - B)}{A + \frac{1}{A}} + B \quad (4.17)$$

Onde:

$$A = \frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}; \quad B = \frac{Y_i X_j - Y_j X_i}{X_j - X_i}; \quad \bar{A} = -\frac{1}{A} \quad \text{e} \quad \bar{B} = \frac{Y_p(Y_j - Y_i) + X_p(X_j - X_i)}{Y_j - Y_i}$$

Determinado o ponto de projeção no elemento a ser integrado e em qual das três condições o problema se enquadra, inicia-se agora o cálculo do comprimento dos sub-elementos.

O comprimento dos sub-elementos para as três condições é calculado abaixo:

- CONDIÇÃO 1

Situação em que o ponto fonte encontra-se a esquerda do elemento a ser integrado. Esta condição é bastante simples de calcular o comprimento dos sub-elementos. Pois sempre é a coordenada inicial, seja ela do elemento seja ela do sub-elemento, portanto é conhecido o R_{\min} e o L_{sub} mínimo é determinado pela seguinte equação:

$$L_{\text{sub}} = \frac{R_{\min}}{1,60} \quad (4.20)$$

- CONDIÇÃO 2

Nesta condição o ponto fonte encontra-se a direita do sub-elemento de contorno. Nesta situação não é conhecido R_{\min} e por esse motivo tem-se que resolver uma equação do segundo grau:

$$aX_{\text{sub}_j}^2 + bX_{\text{sub}_j} + c = 0 \quad (4.21)$$

Onde:

$$a = 1,56 + 1,56A^2; \quad b = 2X_p + 2AX_p + 3,12AB - 5,12X_{\text{sub}_i} - 5,12AY_{\text{sub}_i} \quad \text{e}$$

$$c = -X_p^2 - Y_p^2 + 2BY_p + 1,56B^2 + 1,56X_{\text{sub}_i}^2 - 5,12Y_{\text{sub}_i}B + 2,56Y_{\text{sub}_i}^2$$

A partir dos resultados de X_{sub_j} , calcula-se Y_{sub_j} pela equação 4.22

$$Y_{sub_j} = AX_{sub_j} + B \quad (4.22)$$

Obtido os dois resultados de X_{sub_j} e Y_{sub_j} , verifica-se quais desses valores pertencem ao elemento de contorno em análise.

- CONDIÇÃO 3

Esta terceira condição é a mais simples, refere-se quando o ponto de projeção pertence ao sub-elemento a ser integrado. Nesta situação o R_{min} é a perpendicular ao sub-elemento a partir do ponto de colocação, e obtido pela equação 4.20 o comprimento L_{sub}

O próximo tópico deste capítulo aplicará a análise de erro dos núcleos integrando de ordem $1/R$ e $1/R^2$ em exemplos.

4.6 Validação da Análise do Erro

Neste tópico será consolidada a formulação do método dos elementos de contorno utilizando o controle de erro dos núcleos integrais desenvolvido acima.

Para diferenciar o desenvolvimento das integrais do MEC com o controle do erro das calculadas com pontos de integração pré-fixados, utilizando 10 pontos de Gauss, foram utilizadas as nomenclaturas: FCEI e FC, respectivamente. A primeira nomenclatura significa Formulação com Controle do Erro das Integrais do MEC, e a segunda significa Formulação Clássica do MEC.

São analisados dois exemplos, o primeiro se refere a uma viga em balanço com um carregamento na extremidade livre. O segundo exemplo é referido a uma estrutura de viga bi-apoiada submetido a um carregamento distribuído.

Nesses exemplos, as discretização das estruturas foram realizadas com 24, 60 e 120 elementos lineares de contorno e para análise por meio do método dos elementos finitos,

utilizando o *software* Ansys, foram utilizados 1000 elementos triangulares regulares com dois graus de liberdade por nó.

EXEMPLO 1

Será apresentada, como exemplo de aplicação da formulação implementada, a análise da estrutura ilustrada na Figura 4.10. Trata-se de uma estrutura plana com cinco metros de comprimento (L) e um metro de altura (H). Esta estrutura é engastada na sua extremidade esquerda e sendo prescrito um carregamento distribuído no valor de $p = -10^7 N$, na direção vertical Y , em sua extremidade oposta. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E = 2,8 \cdot 10^{10} N / m^2$ e $\nu = 0,20$.

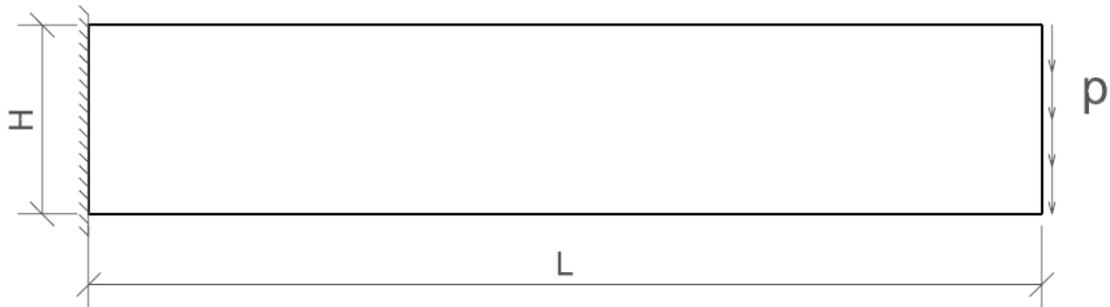


Figura 4.10 - Estrutura representando a viga em balanço em análise

Neste primeiro exemplo serão analisados os deslocamentos e as tensões no eixo da viga. A Figura 4.11 mostra o deslocamento na direção Y para as discretização do contorno de 24, 60 e 120 elementos lineares. E na Figura 4.12 é mostrada a evolução, com o aumento da discretização dos elementos do contorno, da tensão τ_{xy} no eixo da viga.

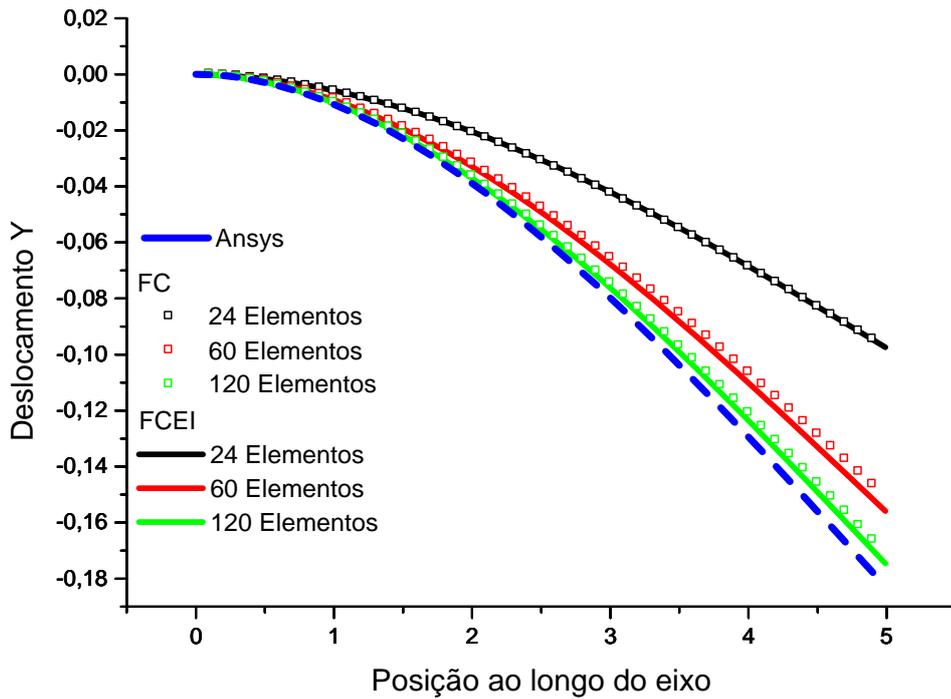


Figura 4.11 - Evolução do deslocamento, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno

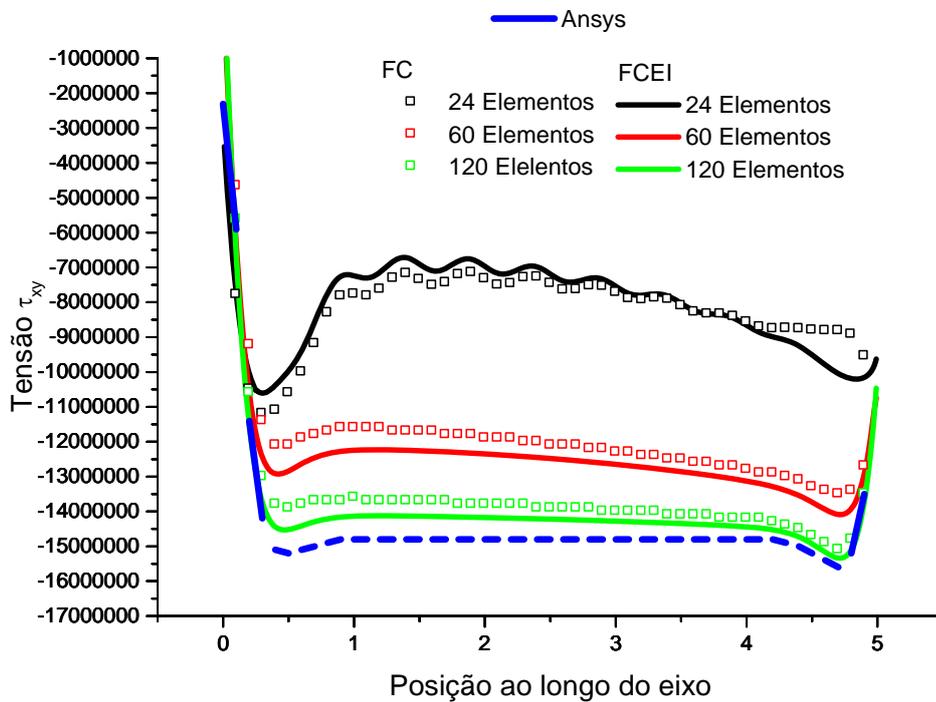


Figura 4.12 - Evolução da tensão cisalhante, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno

O gráfico da Figura 4.11 mostra que os deslocamentos, em metros, obtidos utilizando o processo da FCEI apresentam resultados ligeiramente melhores que os apresentados pela

formulação FC, no entanto, estes resultados são apresentados qualitativamente, isto é, os resultados visualmente não demonstram diferenças significativas. Tendo como referência o Ansys, a Figura 4.12 mostra melhores resultados da formulação com controle de erro (FCEI) para a tensão cisalhante, em N/m^2 , quando comparado com a FC, á medida que as duas formulações são discretizadas. Sendo estes resultados apresentados de forma qualitativos.

Os gráficos das Figura 4.13 e Figura 4.14 apresentam os resultados dos erros gerados no cálculo dos deslocamentos máximo na direção Y e da tensão cisalhante máxima τ_{xy} , todos referenciando ao eixo da viga. Estes dois gráficos, imediatamente abaixo mostrados, são de grande importância para a análise dos resultados, pois é através destes que se percebe de qual forma os erros estão evoluído quando é aumenta a discretização.

Tem-se que a inclinações dos gráficos das Figura 4.13 e Figura 4.14 informam a velocidade de convergência entre as duas formulações. Partindo deste fato, nota-se que a formulação FCEI apresenta maior velocidade e com menores erros quando comparados com o FC, todos referenciando aos valores obtidos pelo *software* Ansys. Sendo a unidade do erro adimensional.

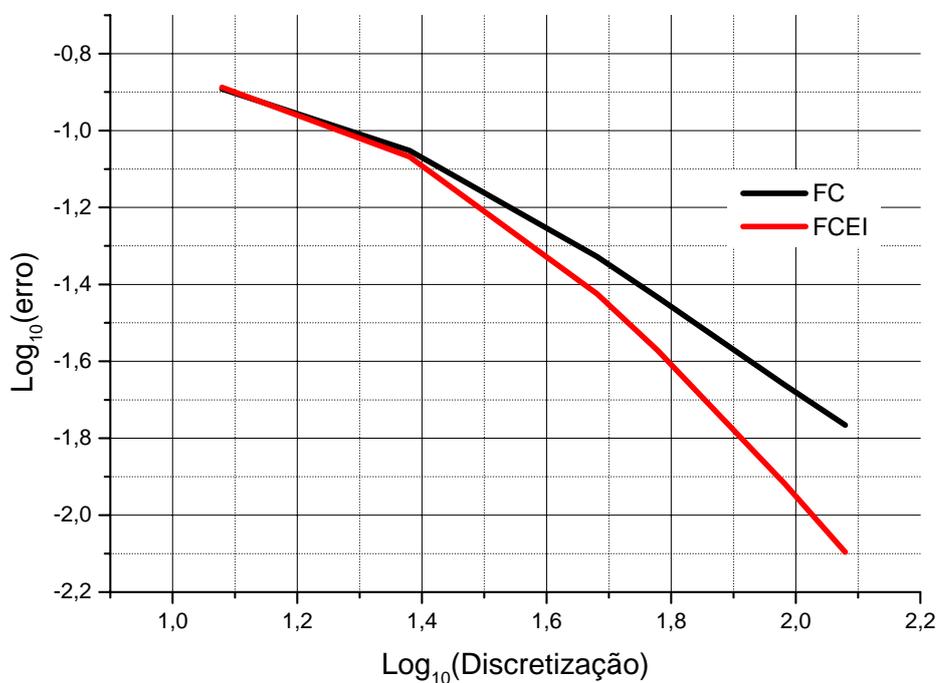


Figura 4.13 - Gráfico da análise de erro para os deslocamentos máximo, no eixo da viga, na direção Y

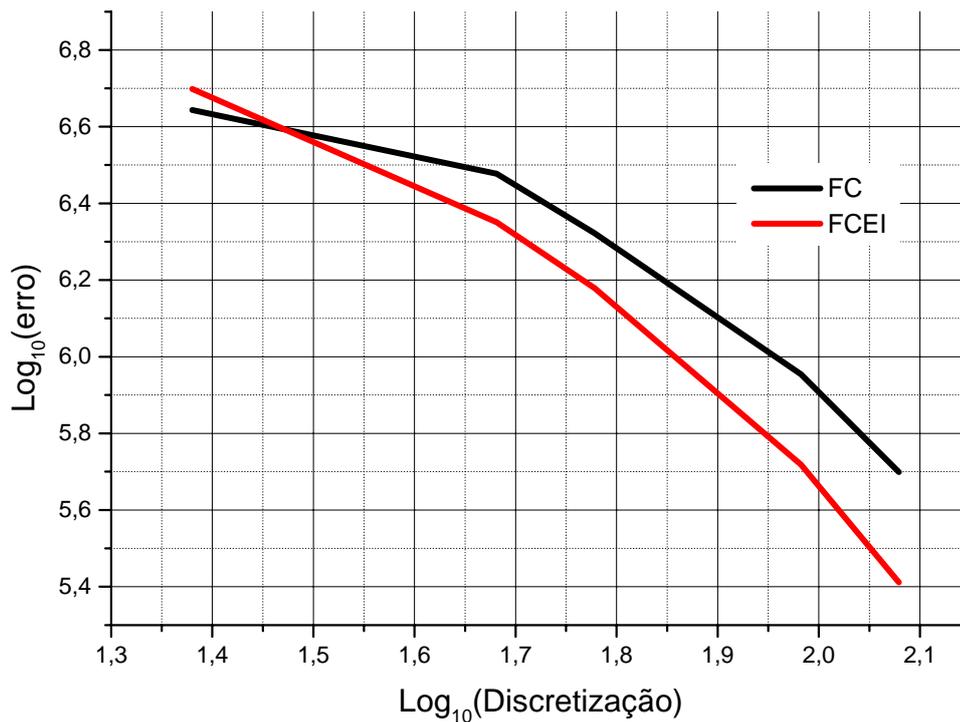


Figura 4.14 - Gráfico da análise de erro para a tensão máxima no eixo da viga.

Os resultados dos demais parâmetros físicos, deslocamentos e tensões, apresentam comportamentos semelhantes ao mostrado nos gráficos acima, sempre a formulação FCEI apresentando algum tipo de melhoria.

EXEMPLO 2

A estrutura a ser considerada nesse exemplo é apresentada na Figura 4.15. Trata-se de uma estrutura plana com cinco metros de comprimento (L) e um metro de altura (H). Esta estrutura é bi-apoiada e submetida a um carregamento distribuído de $q = -10^7 N$. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E = 2,8 \cdot 10^{10} N / m^2$ e $\nu = 0,20$.

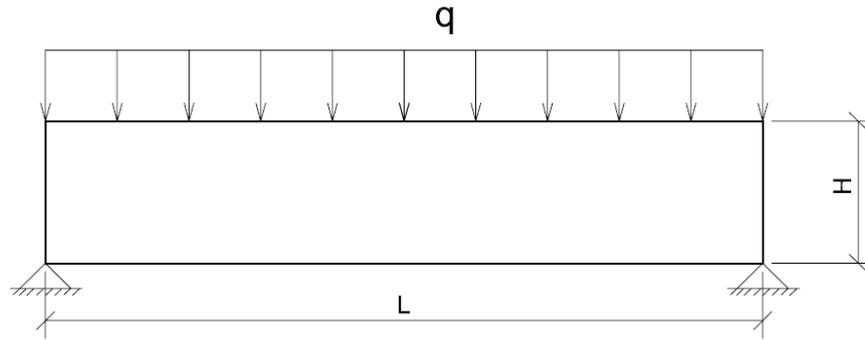


Figura 4.15 - Estrutura representando uma viga bi-apoiada em análise

Neste segundo exemplo serão analisados também os deslocamentos e as tensões no eixo da viga. A Figura 4.16 mostra o deslocamento, em metros, na direção Y para as discretizações adotadas neste trabalho. Na Figura 4.17 é mostrada a evolução, com o aumento da discretização dos elementos do contorno, da tensão τ_{xy} , em N/m^2 , no eixo da viga.

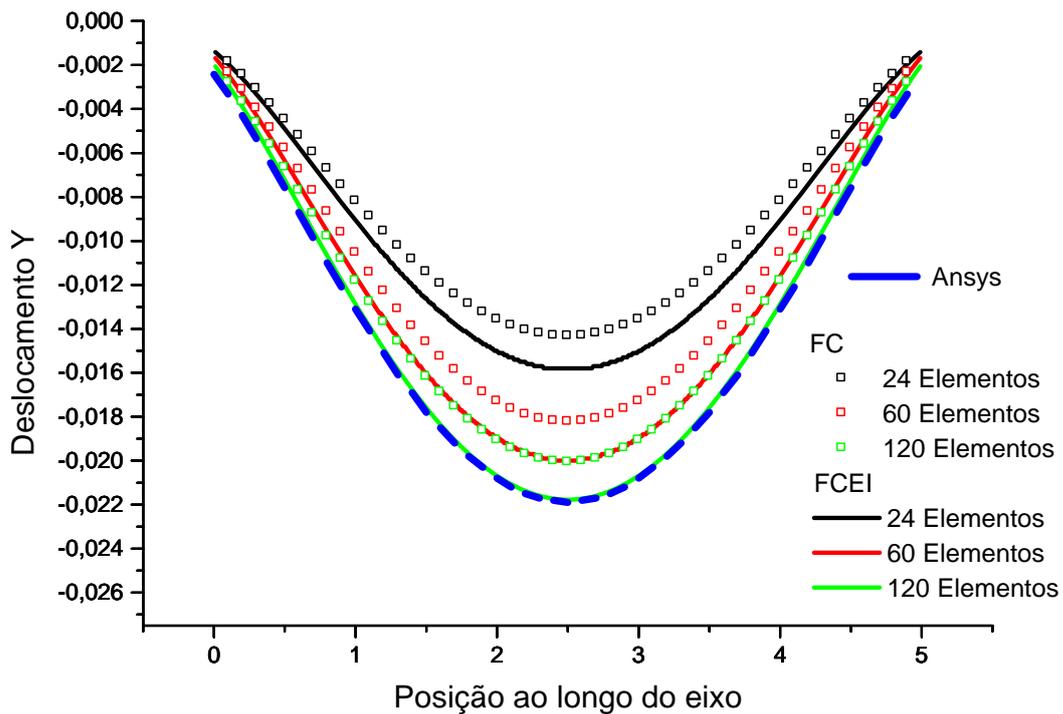


Figura 4.16 - Evolução do deslocamento, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno

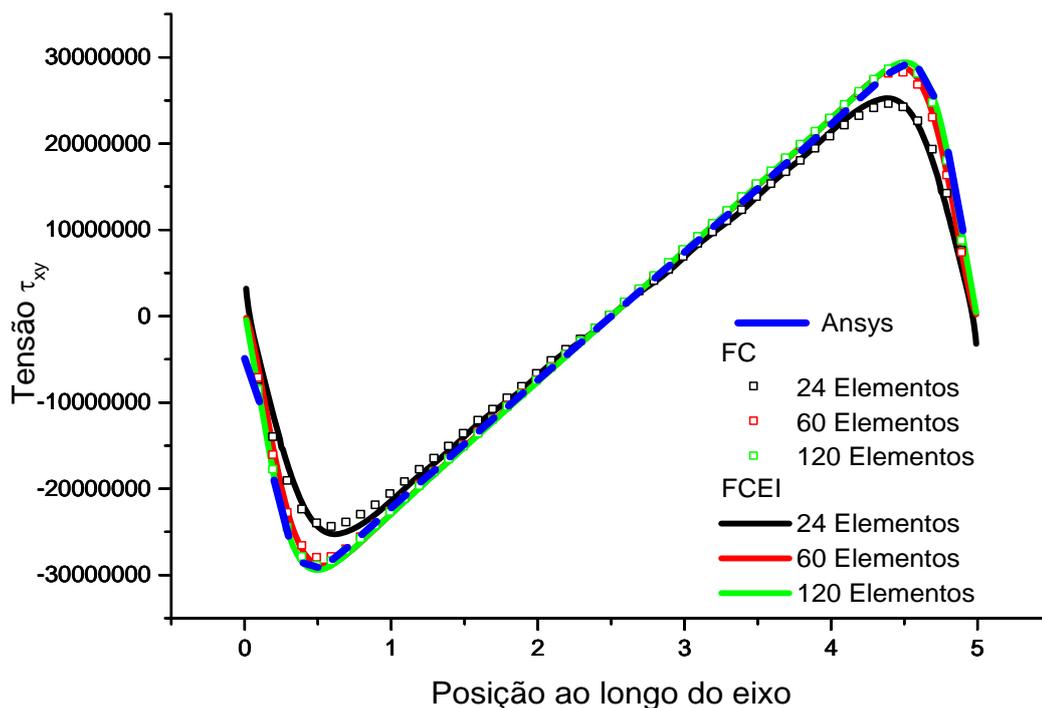


Figura 4.17 - Evolução da tensão cisalhante, no eixo da viga, para ponto fonte a uma distancia de 0,001 do contorno

No gráfico da Figura 4.16 é mostrado que os deslocamentos obtidos utilizando o processo da FCEI apresentam resultados bastante superiores aos apresentados pela formulação FC, no entanto este é um resultado qualitativo. Já na Figura 4.17 é mostrado tanto os resultados pela formulação com controle de erro quanto pela formulação clássica para a tensão cisalhante, onde é notada a concordância entre a evolução das discretizações das duas formulações com os valores obtidos com o Ansys.

Os gráficos das Figura 4.18 e Figura 4.19 apresentam os resultados dos erros gerados no cálculo dos deslocamentos máximo e da tensão cisalhante máxima τ_{xy} , todos referenciando ao eixo da viga. No gráfico da Figura 4.18 é percebido que a formulação FCEI apresenta menores erros e alta velocidade de convergência quando comparados com a formulação clássica. Quando analisado o gráfico da Figura 4.19, é notado que a formulação FCEI ainda possui menores erros, valor este adimensional, e velocidade de convergência melhor em comparação a FC, melhoras estas que não era possível identificar através do gráfico da Figura 4.17.

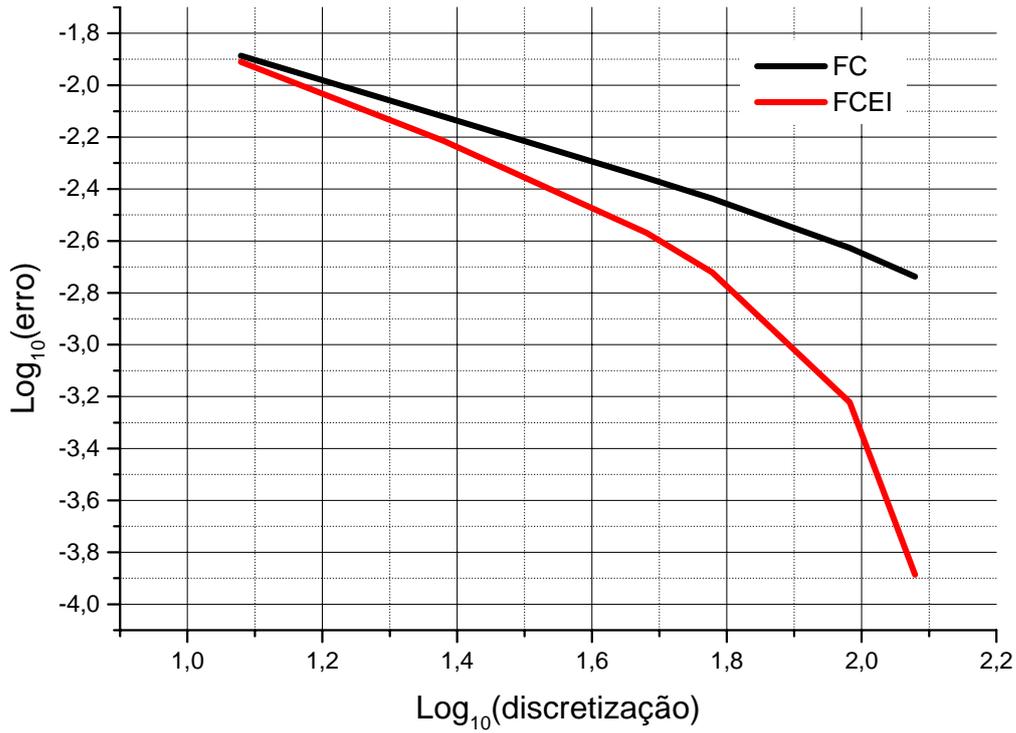


Figura 4.18 - Gráfico da análise de erro para os deslocamentos máximos, no eixo da viga, na direção Y

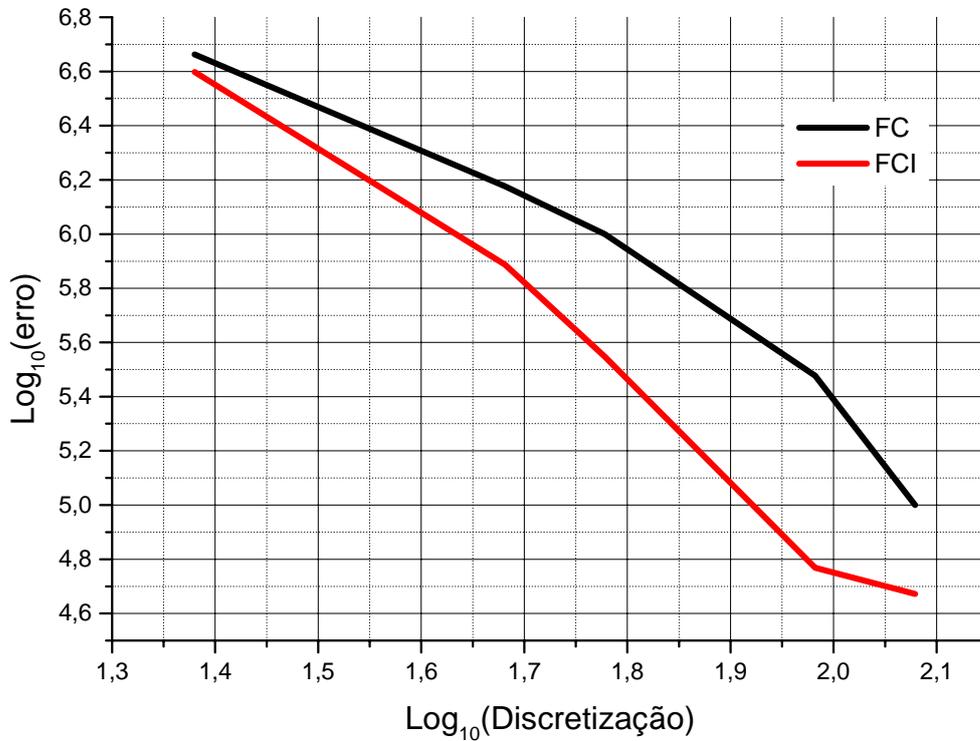


Figura 4.19 - Gráfico da análise de erro para a tensão τ_{xy} máxima no eixo da viga.

Os demais gráficos de deslocamento e tensões possuem comportamentos semelhantes ao apresentado acima, sempre a formulação FCEI proporcionando alguma melhoria resultados

em comparação a formulação FC. Apesar de o autor ter testado diversos exemplos e todos mostrando resultados idênticos ao acima mostrado, este trabalho garante que para os exemplos presentes nesta dissertação a formulação com controle de erro das integrações do MEC apresenta melhorias quando comparado a formulação clássica.

CAPÍTULO 5

5 Acoplamento MEC / MEF considerando domínios enrijecidos

Neste capítulo é abordado os dois métodos numéricos mais utilizados em problemas de Engenharia, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Apesar da grande utilização desses dois métodos, estes possuem limitações em análise de alguns tipos de problemas.

Com o objetivo de melhor aproveitar os dois métodos numéricos, neste trabalho é realizado o acoplamento dos mesmos. A técnica do acoplamento realizado nesta dissertação é semelhante ao apresentado nos trabalhos de Botta (2003) e Leonel (2009). A diferença é que nos trabalhos de Botta (2003) e Leonel (2009) foram utilizados elementos de barra com um único grau de liberdade de deslocamento paralelo ao eixo da barra. Já neste trabalho, utilizam-se elementos com três graus de liberdade por nós, dois para deslocamento e uma para rotação.

A técnica de regularização por mínimos quadrados é utilizada neste trabalho devido às diferentes aproximações das grandezas forças e deslocamentos utilizados no MEF, ocasionando desta forma, mais equações do que incógnitas. E o segundo motivo é devido à utilização de mais pontos internos nos extremos dos enrijecedores com o intuito de suavizar as respostas, gerando assim mais equações.

5.1 Equações do Elemento Finito do Enrijecedor

O elemento finito de pórtico modificado foi utilizado para modelar os enrijecedores. Este elemento possui três graus de liberdades por nó e a aproximação cúbica para as variáveis de deslocamento e rotação é utilizada. Sendo assim, o elemento possui 4 nós sendo que para cada um dos nós são estabelecidas duas translações (vertical e horizontal) e uma rotação. Foi empregada a cinemática geral de Reissner desenvolvida para elementos laminados (Paccola, 2004) utilizado anteriormente por Wutzow e Venturini (2004).

5.1.1 Cinemática

Para modelar os enrijecedores, empregou a cinemática para o elemento de pórtico bi-dimensional semelhante a desenvolvida por Pacolla (2004) para estudo de pórticos e laminados em geral.

Para um ponto qualquer de um pórtico as componentes horizontais e verticais dos deslocamentos são dadas por:

$$u_p(x, y) = u_0(x) + \theta_0(x) \cdot y \quad (5.1)$$

$$v_p(x, y) = v_0(x) \quad (5.2)$$

Sendo x e y o sistema de referência no centro da camada. Para facilitar o entendimento das expressões apresentadas nas equações 5.1 e 5.2, a Figura 5.1 ilustra o deslocamento do ponto P em relação ao eixo do elemento.

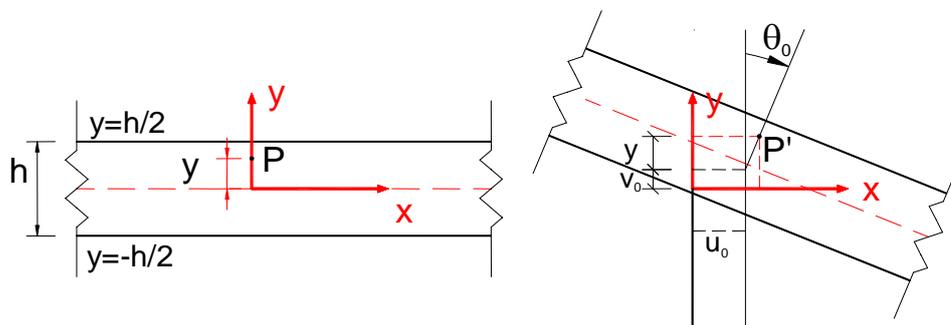


Figura 5.1 - Cinemática de um ponto “P” qualquer. (WESLEY, 2008)

Obtido os deslocamentos através das expressões cinemáticas adotadas para o problema, pode-se então determinar as deformações em função das derivadas das equações cinemáticas.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y) &= 0 \\ \varepsilon_{xy}(x, y) &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y)}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5.3)$$

Aplicando a lei constitutiva para os materiais, obtêm as tensões para o ponto P do elemento de viga:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (5.4)$$

O equilíbrio é introduzido a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial. Assim, tem-se:

$$U_e = \int \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dV \quad (5.5)$$

$$U_e = \int_{-1}^1 \left(\int_A \left(G \left(\theta_0(\xi) + \frac{2v_0'(\xi)}{L} \right)^2 + \frac{4E(u_0'(\xi) + y\theta_0'(\xi))^2}{L^2} \right) dA \right) d\xi \quad (5.6)$$

A parcela de energia referente ao carregamento distribuído pode ser descrito como sendo:

$$U_p = \int_{-1}^1 (t_x u_0^x + t_y u_0^y) d\xi \quad (5.7)$$

Portanto o funcional de energia completo, contendo a parcela de carregamento distribuído, é descrito por:

$$\Pi = U_e - U_p \quad (5.8)$$

ou

$$\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dV - \int_A (t_x u_0^x + t_y u_0^y) dA \quad (5.9)$$

Neste trabalho foram utilizadas aproximações cúbicas independentes para os deslocamentos u_0 , v_0 e θ_0 mostradas:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^u u_0^i \\ v_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^v v_0^i \\ \theta_0 &= \sum_{i=1}^4 \bar{\phi}_i^\theta \theta_0^i \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sendo $\bar{\phi}_i^u = \bar{\phi}_i^v = \bar{\phi}_i^\theta = \bar{\phi}_i$, onde $\bar{\phi}_i$ são as funções de forma apresentadas nas equações 5.11:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1(\xi) &= -\frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_2(\xi) &= +\frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_3(\xi) &= -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \bar{\phi}_4(\xi) &= +\frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi + 1) \end{aligned} \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (5.11)$$

No referente às forças na interface do acoplamento (t_x e t_y) são adotadas aproximações lineares:

$$t_x = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_x} t_x^i, \quad t_y = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_y} t_y^i \quad \text{sendo } \phi_i^{t_x} = \phi_i^{t_y} = \phi_i \quad (5.12)$$

Onde;

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (5.13)$$

Utilizando as aproximações acima e minimizando-se o funcional de energia, equação 5.8, chega-se ao sistema algébrico de equações dadas da seguinte forma:

$$[K^E]_{3NF \times 3NF} \{U^E\}_{3NF \times 1} = [G^E]_{3NF \times 2NF_{extr}} \{f^E\}_{2NF_{extr} \times 1} + \{F\}_{3NF \times 1} \quad (5.15)$$

Onde: $[K^E]$ é a matriz de rigidez do MEF

$[G^E]$ é a matriz referente às cargas distribuídas

$\{U^E\}$ é o vetor com as incógnitas de deslocamento (translações e rotação)

$\{f^E\}$ vetor de forças distribuídas.

$\{F\}$ vetor de forças concentradas nodais

NF é o número de nós de finitos (quatro por elemento)

NF_{extr} é o número de nós de finitos extremos (dois por elemento)

5.2 Formulação do Acoplamento do Enrijecedor com o Domínio Bidimensional Via Combinação MEC/MEF

5.2.1 Equações do Acoplamento

Para considerar o domínio bidimensional enrijecido por barras, estas modeladas com elementos finitos e o primeiro com elementos de contorno, utiliza-se uma formulação combinando as equações dos dois métodos, considerando a aderência perfeita entre os dois meios. O acoplamento entre os materiais é garantido via imposição das equações de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos. Assim:

$$f^D = -f^E \quad (5.16)$$

$$u^D = u^E \quad (5.17)$$

Onde:

f^D = força do domínio do corpo

f^E = força no enrijecedor

u^D =deslocamentos nos pontos nodais do domínio

u^E = deslocamentos nos pontos nodais do enrijecedor

O termo f^E corresponde à força distribuída que a fibra aplica ao corpo a qual possui valor absoluto de sinal oposto a força que atua na própria fibra. Os deslocamentos na interface devem ser iguais por compatibilidade. Para o problema discretizado, as equações 5.16 e 5.17 são equivalentes a:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \tag{5.18}$$

$$\{u^D\} = \{u^E\} = \{u\} \tag{5.19}$$

Ou seja, o equilíbrio e a compatibilidade são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja, domínios planos com enrijecedores retilíneos, a reação dos enrijecedores sobre o domínio equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito, tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos, conforme ilustra a Figura 5.2.

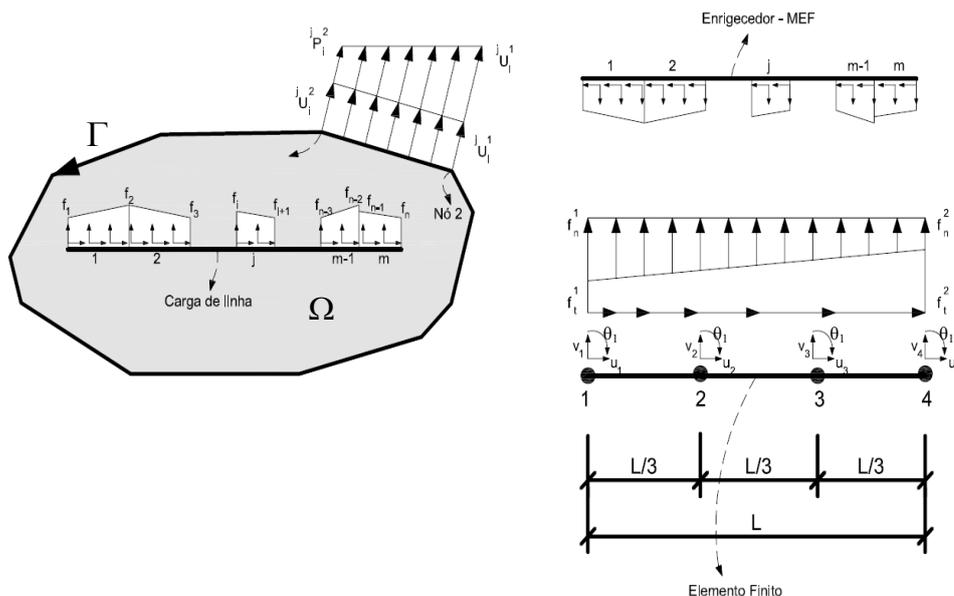


Figura 5.2 - Discretização do contorno e da linha de carga. Aproximação de forças e dos deslocamentos na interface.

Na Figura 5.2, os elementos são contínuos, ou seja, para n elementos finitos de pórtico, tem-se $(n + 1)$ nós de transferência de forças e $2(n + 1)$ variáveis de força. A força incógnita f^D aplicada ao domínio, como uma linha de carga, precisa ser levada em conta nas equações do método dos elementos de contorno. A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada numa área que tende a zero, ou a uma reta, nos casos planos. Utilizando a equação 3.45, a última integral referente ao termo de domínio pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} b^T(Q)U(P,Q)d\Omega = \int_{\Omega_E} f^D(Q)U(P,Q)d\Omega_E \quad (5.20)$$

com f^D a reação da fibra sobre o domínio segundo a direção i e j do sistema cartesiano.

A equação (5.20) pode ser transformada no somatório:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \int_{\Omega_E} f_{fb}^D(Q)U(P,Q)d\Omega_E = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f_{fb}^D(Q)U(P,Q)d\Omega_{E_k} \quad (5.21)$$

A notação ND representa o número total de enrijecedores do domínio e NEF o número total de elementos finitos contidos em cada fibra. Sendo f^D aproximada linearmente sobre as linhas de carga, a equação (5.21) pode ser reescrita:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f_{fb}^D(Q)U(P,Q)d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(Q)U(P,Q))f_{fb}^{\bar{D}}d\Omega_{E_k} \quad (5.22)$$

Sendo:

φ = função aproximadora do carregamento

$f_{fb}^{\bar{D}}$ = valores nodais do carregamento atuante sobre as fibras

A expressão para a determinação das grandezas no contorno é a apresentada na equação (5.23)

$$[H_{bb}]\{U_b\} = [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \quad (5.23)$$

Sendo as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$ representando a matriz das integrais do contorno, onde os sub-índices b indicam o contorno. A matriz $[G_{bE}]$ contém os coeficientes de integração da equação (5.22).

Para completar as equações necessárias ao acoplamento e portanto para a determinação dos parâmetros do contorno, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos. Nos pontos coincidentes com os nós de deslocamento dos elementos finitos é escrita uma equação para cada deslocamento no meio contínuo para que a equação (5.19) seja obedecida. Da equação dos pontos internos do MEC tem-se:

$$u^D = u(P) = \int_{\Gamma} t^T(Q)U(P,Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^T(Q)T(P,Q)d\Gamma + \int_{\Omega_D} f^D(Q)U(P,Q)d\Omega_D \quad (5.24)$$

A equação algébrica que resulta da equação (5.24), aplicada a todos os nós internos, fica:

$$[H_{EB}]\{U_b\} + \{U^D\} = [G_{EE}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \quad (5.25)$$

Sendo $[H_{EB}]$, $[G_{EB}]$ e $[G_{EE}]$ matrizes de influência das integrações dos pontos internos.

Na Figura 5.3, tem-se a representação de um enrijecedor, discretizada em n elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento para cada elemento finito estão representados por quadrados nesta figura. As cruces representam os pontos fonte da equação 5.24 dos deslocamentos internos. Observa-se que nas extremidades da fibra, para o primeiro e último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para posições deslocadas, internas à linha de carga. Para os demais nós, interno à linha de carga, os pontos fonte da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

A representação da Figura 5.3 estende-se, nesta formulação, para todos enrijecedores do domínio. Esta representação tem vantagem de permitir que as extremidades dos enrijecedores possam chegar ao contorno do corpo, sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos no contorno.

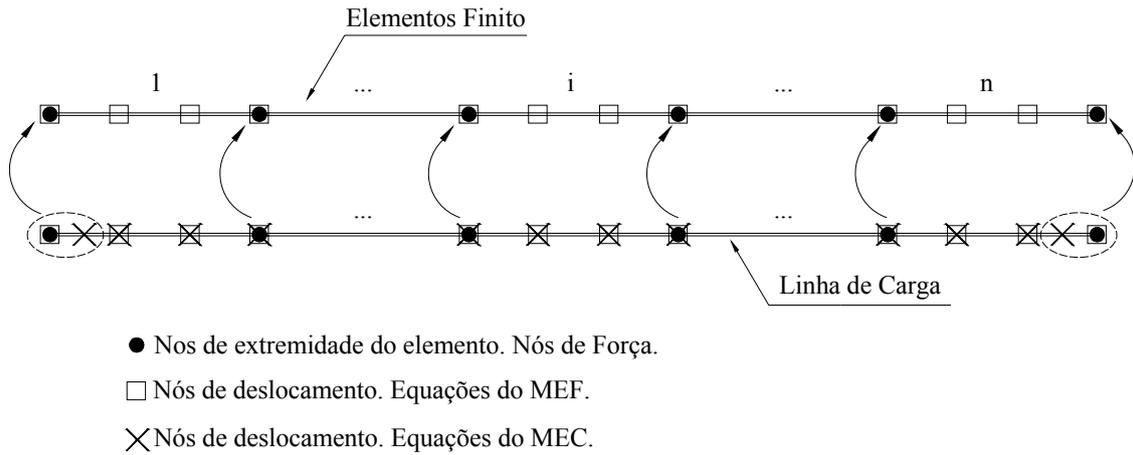


Figura 5.3 – Compatibilização entre os nós do MEC e do MEF

Com as posições dos nós definidas na Figura 5.3, a equação de compatibilidade de deslocamento é reescrita como:

$$\{U^D\} = [T]\{U^E\} \quad (5.26)$$

Sendo $[T]$ a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{U^E\}$ com os nós de $\{U^D\}$. A matriz $[T]$ possui $3NF$ linhas e $2NPT_{int}$ Colunas. Onde NPT_{int} é a número de pontos internos do MEC no enrijecedor e NF já foi definida na equação 5.15.

Lembrando que a equação do MEF desenvolvida, na formulação do acoplamento perfeito, é referenciada ao sistema de coordenada global.

Dessa forma o conjunto de equações para a determinação dos parâmetros do acoplamento MEC-MEF e os valores de contorno podem ser resumidos na equação (5.27)

$$\begin{cases} [H_{bb}]\{U_b\} = [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [H_{Eb}]\{U_b\} + [T]\{U^E\} = [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} = -[G^E]\{f^D\} + \{F\} \end{cases} \quad (5.27)$$

Para melhor entendimento da equação 5.27, é mostrada a obtenção das matrizes, $[H_{bb}]$, $[G_{bb}]$, $[G_{Eb}]$, $[H_{Eb}]$, $[G_{Eb}]$ e $[G_{EE}]$, presentes nas equações do MEC, a qual requer maior atenção. Para ilustrar como se constrói cada termo é considerado a estrutura da Figura 5.4, que se trata de uma estrutura plana com oito elementos de contorno e dois elementos de finitos no enrijecedor. Nessa estrutura são empregados nós descontínuos nos cantos da

estrutura. Nos enrijecedores os símbolos quadrados ilustram as posições onde são calculados os deslocamentos e a circunferência cheia indica as posições onde são calculadas as forças de superfície.

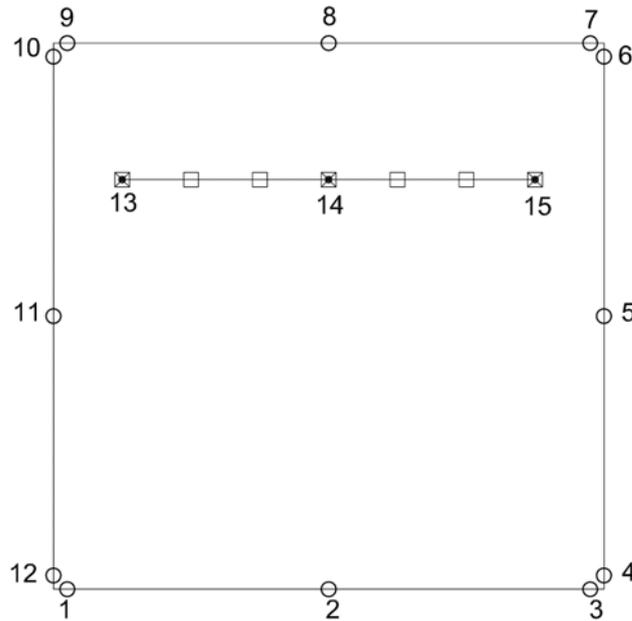


Figura 5.4 – Estrutura utilizada para explicação

A primeira equação a ser analisada é a equação do MEC para o contorno, $[H_{bb}]\{U_b\} = [B_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\}$. Como já explicado acima, o sub-índice b indica contorno (**boundary**) e o sub-índice E indica elemento (**element**). As duas matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$ são resultados da integração das soluções fundamentais T e U , respectivamente, dos pontos fonte sob o contorno em relação aos elementos do contorno. Essas matrizes são construídas como na Figura 5. 5, por simplicidade a figura ilustra a integração do primeiro ponto fonte sob o contorno em relação aos demais elementos. Neste processo, hipotético, de integração é utilizado somente dois pontos de Gauss e ainda é omitida a representação do caso onde o ponto fonte integra o elemento ao qual ele pertence.

Para o cálculo completo da equação do MEC do contorno, resta mostrar esquematicamente o cálculo das integrais da matriz $[G_{bE}]$. Esse termo resulta da integração da solução fundamental em deslocamento U dos pontos fonte sobre o contorno em relação aos elementos do enrijecedor. O processo de obtenção da matriz $[G_{bE}]$ é ilustrado na Figura 5.6,

assim como no caso anterior, essa figura ilustra somente o caso da integração do primeiro ponto fonte sob o contorno.

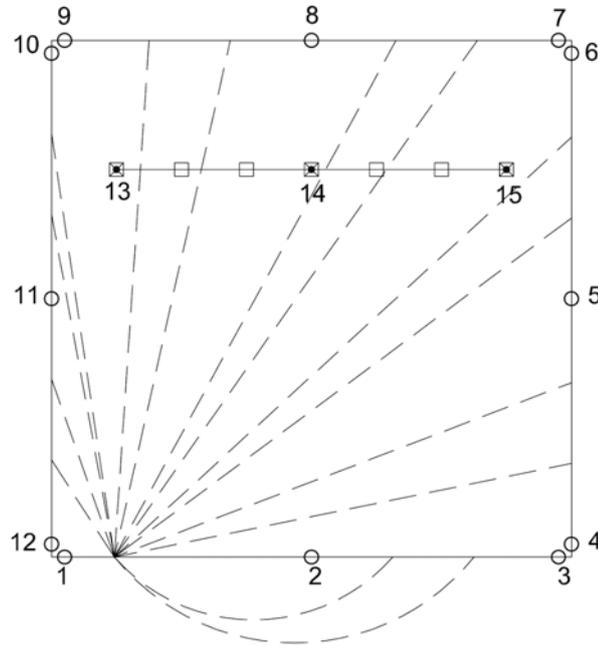


Figura 5.5 – Ilustração da construção das matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$.

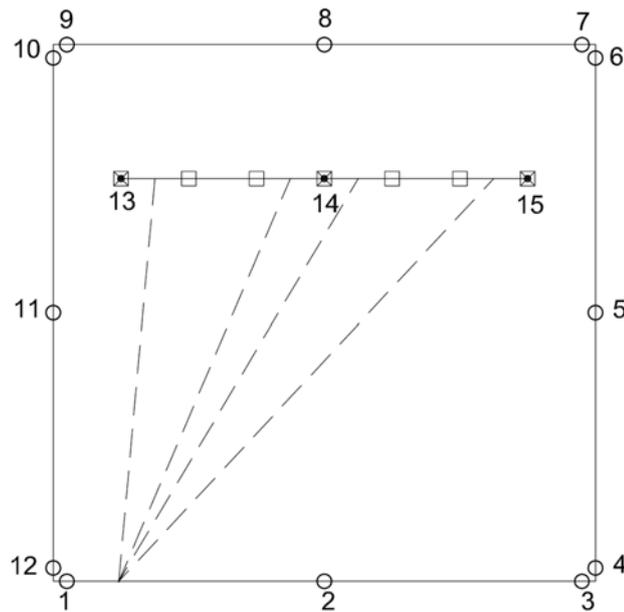


Figura 5.6 – Ilustração da construção da matriz $[G_{bE}]$.

Tendo construída a equação do MEC para pontos fonte no contorno, inicia-se a explicação da montagem dos termos da equação do MEC para pontos internos, $[H_{Eb}]\{U_b\} + [T]\{U^D\} = [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\}$. Primeiramente é construída as matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$. Essas duas matrizes representam o resultado da integração das soluções fundamentais de força de superfície e deslocamento, respectivamente, dos pontos fonte localizados sob a linha de carga em relação aos elementos de contorno. Na Figura 5.7 ilustra o processo de integração para os dois primeiros pontos fonte, utilizando dois pontos de Gauss.

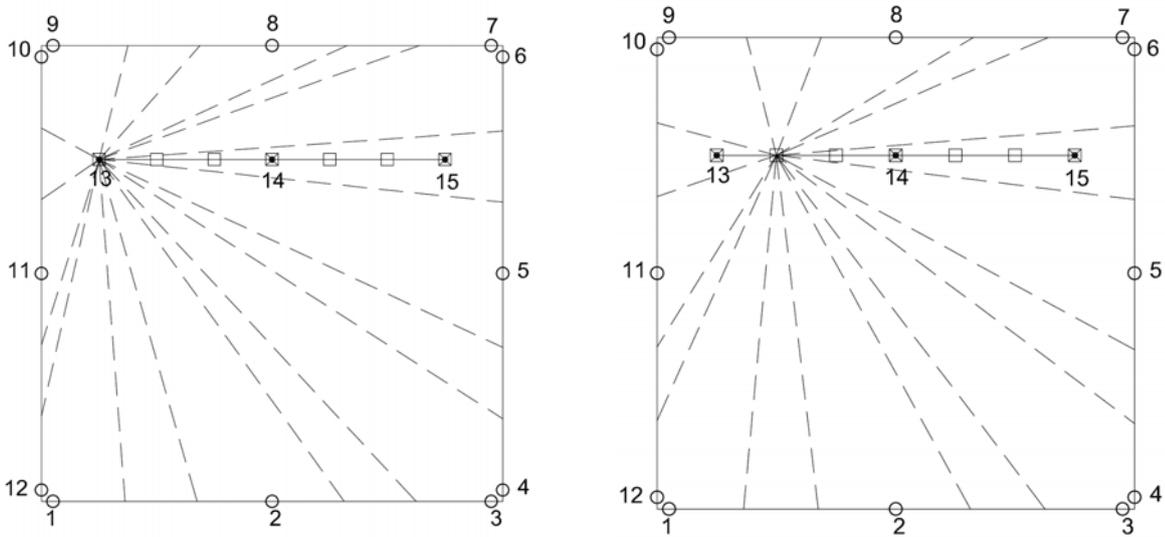
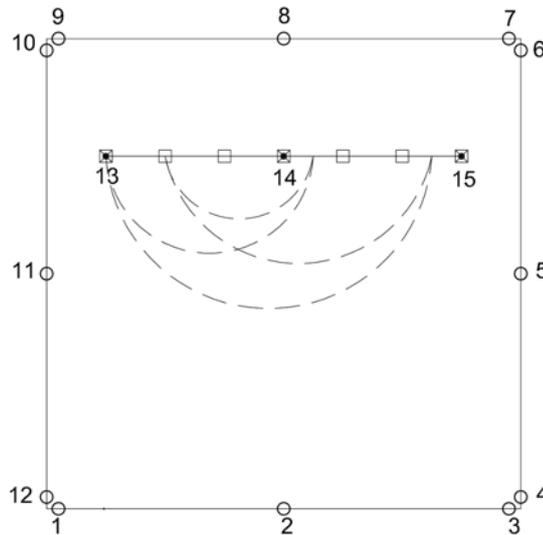


Figura 5.7 – Ilustração da construção das matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$

Para completar, restar determinar a matriz $[G_{EE}]$. Essa matriz resulta da integração da solução fundamental de deslocamento dos pontos fonte sob a linha de carga em relação aos elementos do enrijecedor. Na Figura 5.8 está mostrado o processo para os dois primeiros pontos fonte, considerando também apenas dois pontos de Gauss. Como para as representações anteriores, omite-se a representar o caso onde o ponto fonte considerado integra o elemento ao qual pertence.


 Figura 5.8 – Ilustração da construção da matriz $[G_{EE}]$

Agrupando as equações convenientemente e aplicando as condições de contorno, chega-se ao sistema de equação 5.28:

$$\begin{cases} [A_{bb}]\{X\} = [B_{bb}]\{F_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [A_{Eb}]\{X\} + [T]\{U^E\} = [B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} = -[G^E]\{f^D\} + \{F\} \end{cases} \quad (5.28)$$

Sendo $[A_{bb}]$ e $[B_{bb}]$ resultam da troca de colunas entre as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$. Já $[A_{Eb}]$ e $[B_{Eb}]$ decorrem da troca de colunas entre as matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$. E $\{F_b\}$ são os valores prescritos de força de superfície e deslocamentos no contorno, enquanto $\{X\}$ são as grandezas incógnitas no contorno.

5.2.2 Regularização por Mínimo Quadrado

Observando-se os vetores com as variáveis nodais do vetor deslocamento (neste vetor estão presente os dois deslocamentos e uma rotação nodal) e forças internas, e das definições para as aproximações desses campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem mais variáveis referenciado ao vetor deslocamento do que em força. O número de variáveis do vetor deslocamentos internos é igual a três vezes o número total de nós do elemento finito enquanto que para as forças o número de variáveis é igual a duas vezes o número de nós de extremidade do elemento finito.

Para que o problema possa ser resolvido, utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas, é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados consiste em obter a melhor solução que aproxima à resposta do sistema de equação, fazendo desta forma a minimização, em uma determinada norma, do vetor residual \mathbf{r} , onde $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$. Como consequência desta minimização é reduzido o número de equações, tornando o sistema linear resolvível e ainda podendo minimizar o erro da resposta quando levada ao sistema original (SÜLI; MAYER, 2007).

Leonel, 2009 utiliza a regularização por Mínimos Quadrados, aplicando para as equações de deslocamentos nos pontos internos do MEC, nas equações provenientes do MEF e a terceira aplicação é realizada sobre o conjunto total de equações do acoplamento. Com esta análise, (Leonel, 2009) conclui que melhores resultados são obtidos aplicando o Método dos Mínimos Quadrados às equações do MEC dos pontos internos.

Partindo dos resultados obtidos em Leonel, 2009 O processo de mínimos quadrados será aplicado para tentar regularizar as equações de deslocamentos nos pontos internos. Este processo consiste na pré-multiplicação de todos os termos dessa equação por uma matriz $[G_{EE}^*]$. Assim:

$$[G_{EE}^*][A_{Eb}]\{X\} + [G_{EE}^*][T]\{U^E\} = [G_{EE}^*][B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}^*][G_{EE}]\{f^D\} \quad (5.29)$$

Onde a matriz $[G_{EE}^*]$ é igual à transposta da matriz $[G_{EE}]$

Desta forma a matriz final do acoplamento com Mínimo Quadrado fica:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][T] & -[G_{EE}^*][G_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U^E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ 0 \\ [G_{EE}^*][B_{Eb}] \end{bmatrix} \{F_b\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

5.3 Aplicação do Acoplamento MEC/MEF

Neste tópico serão apresentadas algumas aplicações utilizando a formulação descrita nesse capítulo. Neste momento é considerada interação completa entre o enrijecedor e o domínio.

5.3.1 Exemplo 1

Como exemplo de aplicação da formulação descrita acima, será apresentada análise da estrutura mostrada na Figura 5.9. Trata-se de uma estrutura plana com cinco metros de comprimento (L), um de altura (H) e 25 centímetros (h_0). Essa estrutura é bi-apoiada e sendo prescrito um carregamento distribuído $q = -10^7 \text{ N}$ e um enrijecedor de comprimento $L_0 = 4 \text{ m}$. Foram consideradas para o domínio (D) e para o enrijecedor (F) as seguintes propriedades: $E_D = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu_D = 0,2$, $E_F = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $I_F = 1,78891 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$, $S_F = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e $\nu_F = 0,0$.

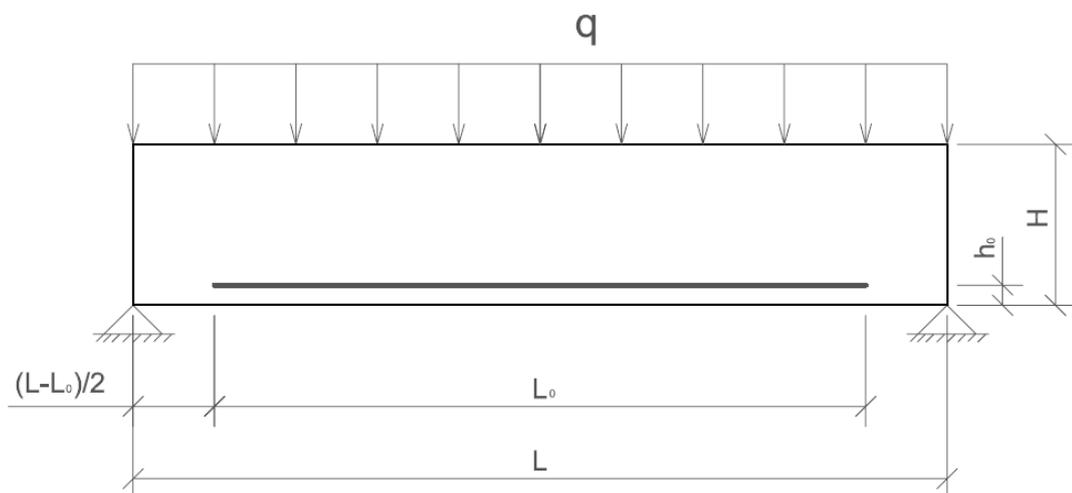


Figura 5.9 - Estrutura analisada

Foram utilizados 120 elementos lineares de contorno para discretizar o entorno do domínio. No enrijecedor foram utilizadas três diferentes discretizações as quais são compostas por 25, 50 e 100 elementos finitos. Os resultados dos deslocamentos e giro foram comparados com o software em elementos finitos Ansys, neste programa foram utilizados

1000 elementos planos quadrados com três graus de liberdade por nó, sendo estes dois deslocamentos e uma rotação.

Os resultados são analisados ao longo da interface MEC/MEF, com a intenção de verificar a qualidade do acoplamento. A Figura 5.10, Figura 5.11 e Figura 5.12 ilustram os deslocamentos axial (m), transversal (m) e a rotação (rad) para as três discretizações consideradas.

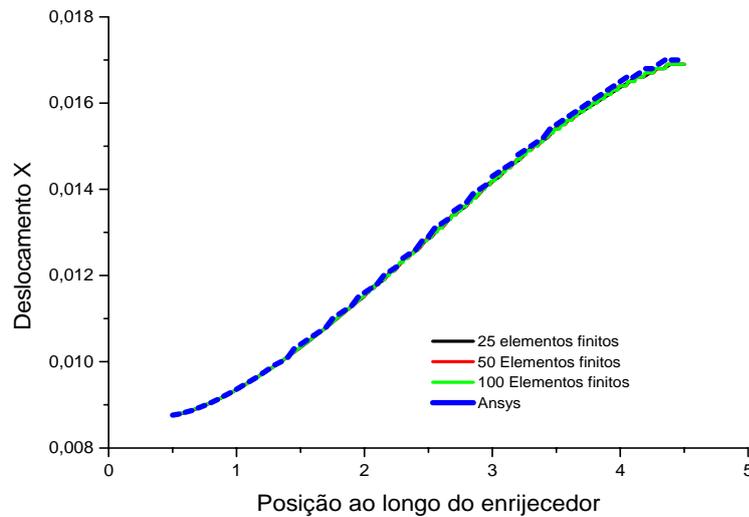


Figura 5.10 – Gráfico do deslocamento na direção axial do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF

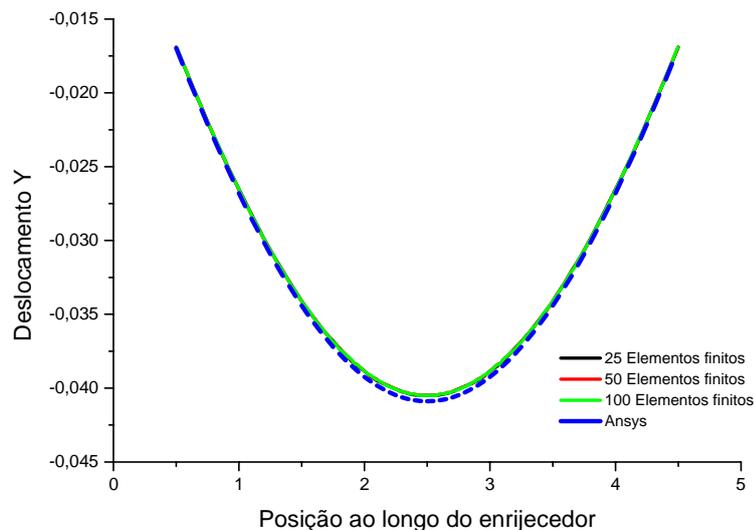


Figura 5.11 - Gráfico do deslocamento na direção transversal do enrijecedor, na interface do acoplamento MEC/MEF

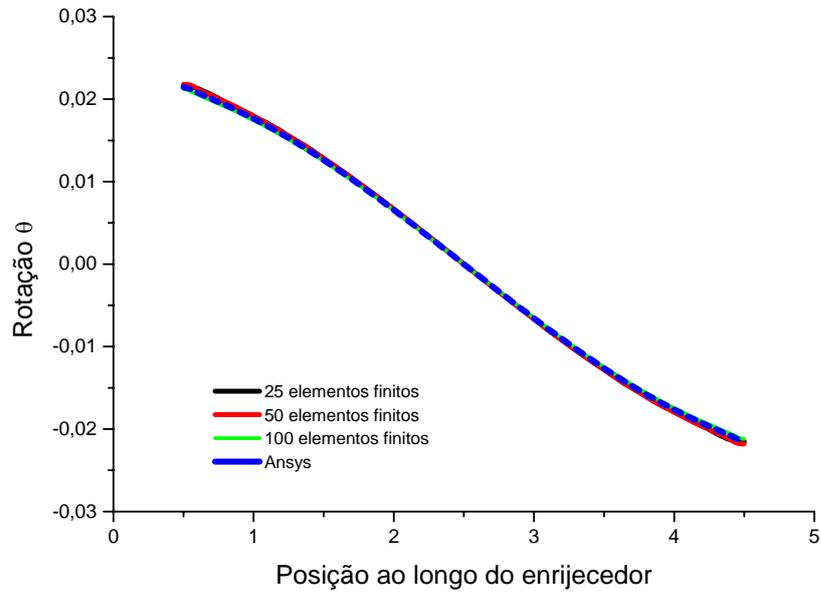


Figura 5.12 - Gráfico da rotação na interface do acoplamento MEC/MEF

Verifica-se que os deslocamentos e a rotação obtidos utilizando o processo de mínimos quadrados aplicada a equação do MEC apresentam resultados semelhantes, com o Ansys, mesmo com uma discretização mais pobre, em elementos finitos, para o enrijecedor.

Com relação às forças de superfícies, em N/m, na interface MEC/MEF os resultados podem ser visualizados nas Figura 5.13 e na Figura 5.14.

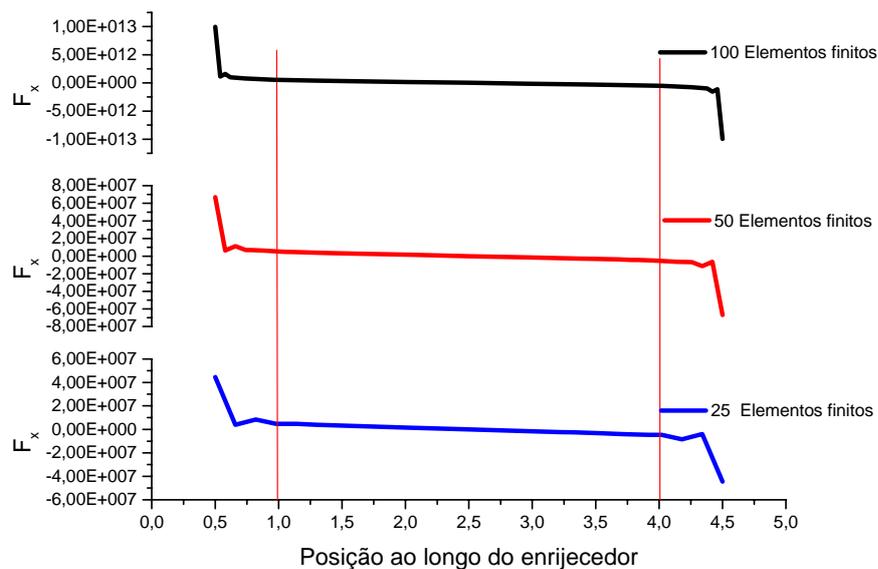


Figura 5.13 – Gráfico da força de superfície na direção axial do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF

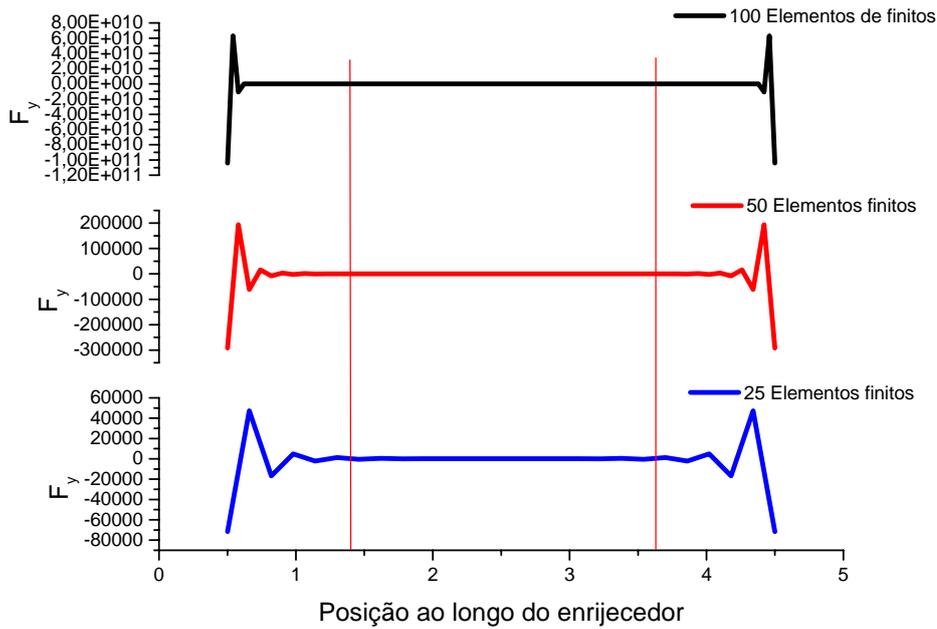


Figura 5.14 - Gráfico da força de superfície na direção transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF

Através das figuras apresentadas, verifica-se que para as três discretizações empregadas, há uma perturbação nos valores das forças de superfície nas extremidades do enrijecedor. Para os resultados mostrados na Figura 5.13 seu comportamento já tinha sido observado por Botta (2003). No entanto, na Figura 5.14 verifica-se uma oscilação nas extremidades do enrijecedor, esse efeito oscilatório é diminuído ao acrescentar mais pontos aos elementos finitos extremos do enrijecedor, com isso impondo a oscilação cada vez mais para a extremidade. Observa-se também, o efeito da discretização na melhoria dos resultados. Tanto na Figura 5.13 quanto na Figura 5.14, é mostrado uma região onde os resultados são suave, região entre as retas verticais vermelhas. Verifica-se ainda que essa região aumenta quando aumenta a discretização.

De acordo com os resultados mostrados nesse exemplo pode-se verificar que o acoplamento possui comportamento suave para os deslocamentos e para a rotação, no entanto para as forças de superfície perturbações estão presentes próximo as extremidades do enrijecedor. Mesmo aplicando a técnica de regularização dos mínimos quadrados não foi possível diminuir as perturbações oscilatórias para as forças de superfícies na direção transversal na proximidade das extremidades dos enrijecedores.

5.3.2 Exemplo 2

A estrutura a ser considerada neste item é apresentada na Figura 5.15. Refere-se a uma estrutura plana de cinco metros de comprimento (L) e um metro de altura (H) contendo dois enrijecedores distribuídos na região superior do domínio, $H_0 = 0,75m$, $H_1 = 0,85m$ e $L_0 = 4m$. Essa estrutura é engastada na sua extremidade esquerda sendo prescrito um carregamento distribuído de $p = 10^7 N$. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E_D = 2,8 \cdot 10^{10} N/m^2$ e $\nu = 0,2$. Já para os enrijecedores foram adotados $E_F = 2,8 \cdot 10^{11} N/m^2$, $I_F = 1,79 \cdot 10^{-7} m^4$ e $S_F = 1,29 \cdot 10^{-2} m^2$.

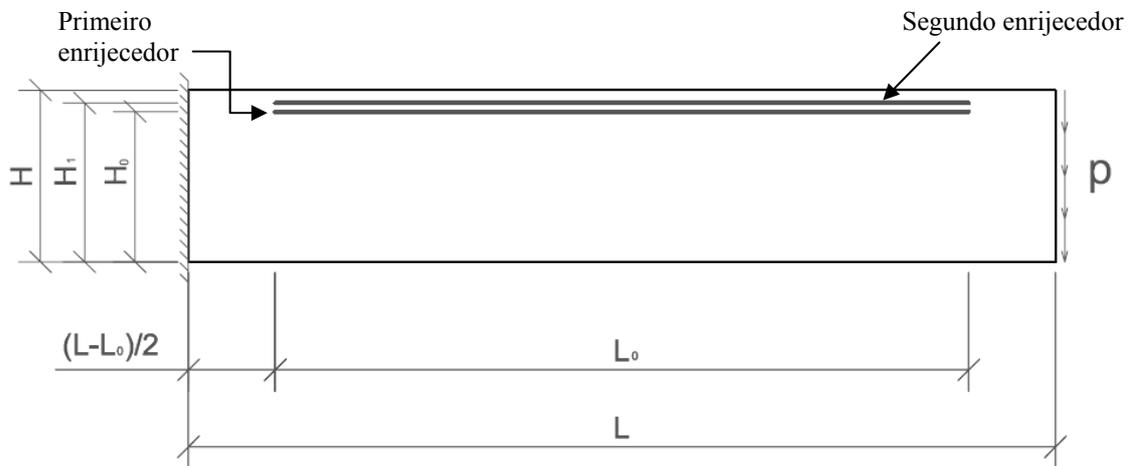


Figura 5.15 - Estrutura analisada

Foram utilizados 120 elementos para a discretização do contorno enquanto em cada enrijecedor são realizadas três discretizações, 25, 50 e 100 elementos finitos. A mesma estrutura foi modelada no software Ansys com 1000 elementos finitos planos quadrado com três graus de liberdade por nó, sendo dois deslocamentos e uma rotação os graus de liberdade por nó. A Figura 5.16, Figura 5.17 e Figura 5.18 mostram os deslocamentos axial, transversal e a rotação, respectivamente. Os deslocamentos e a rotação possuindo como unidade de resposta o metro (m) e o radiano (rad), respectivamente.

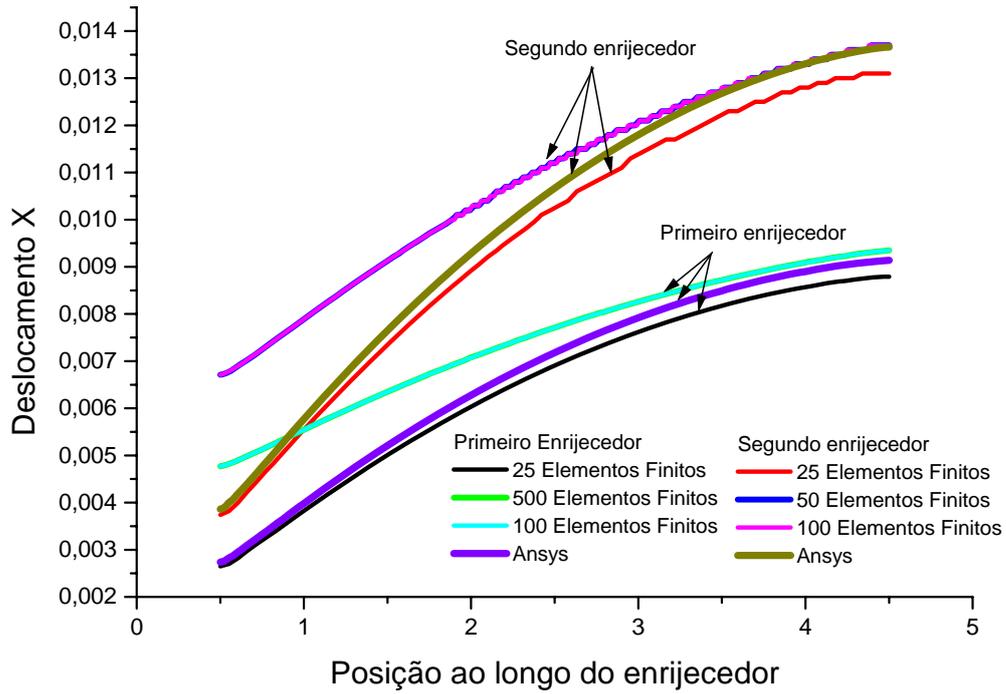


Figura 5.16 - Gráfico do deslocamento na direção do enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF.

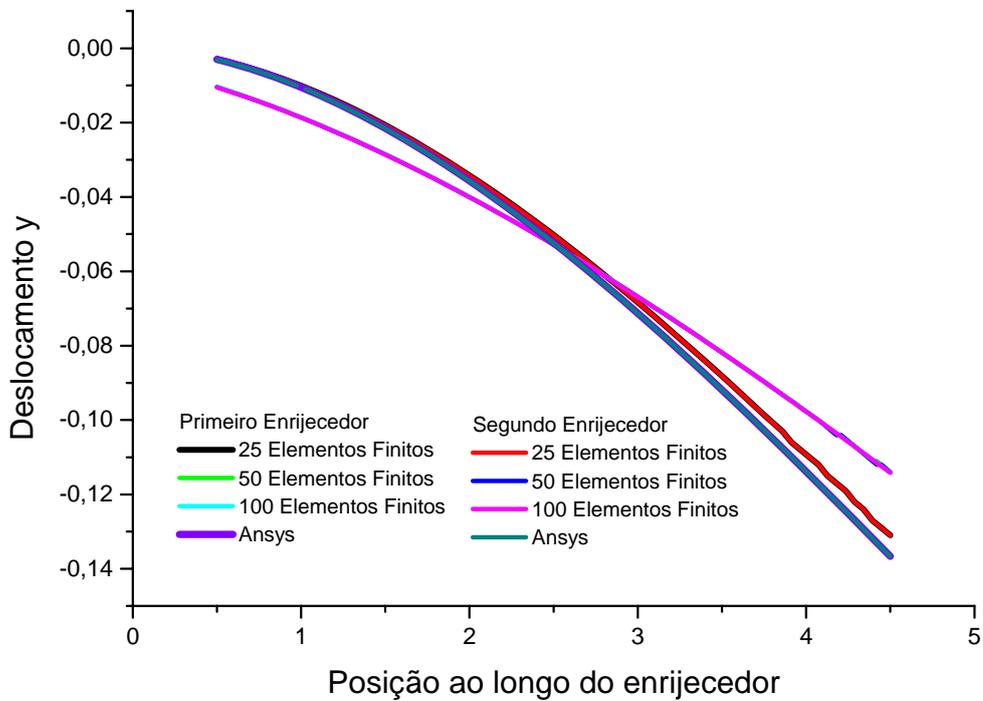


Figura 5.17 - Gráfico do deslocamento transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF.

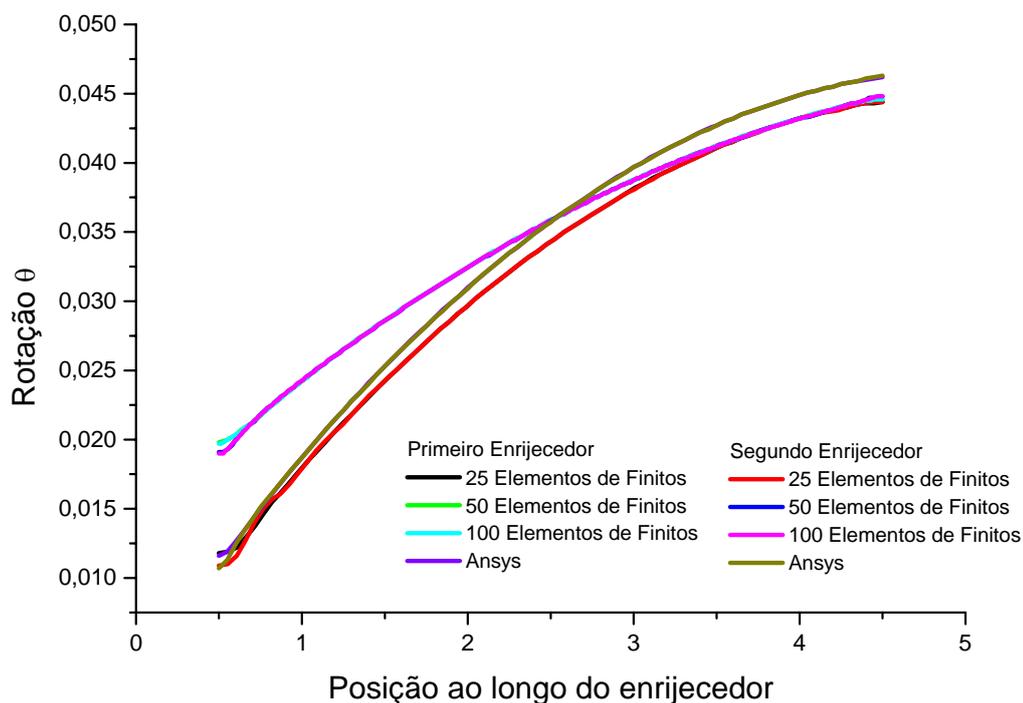


Figura 5.18 - Gráfico da rotação ao longo da na interface do acoplamento MEC/MEF.

Diante dos três gráficos mostrados logo acima, verifica-se a influência nos resultados quando aumenta a discretização dos enrijecedores. Nota-se na Figura 5.16 que o segundo enrijecedor possui maior deslocamento axial quando comparado com os deslocamentos do primeiro enrijecedor. Este fato era de se esperar, pois o segundo enrijecedor está mais próximo da borda do domínio onde os seus deslocamentos são maiores, sendo ainda influenciado pela presença do coeficiente de Poisson. Apesar de que as Figura 5.17 e Figura 5.18 apresentam respostas de parâmetros diferentes, estas figuras possuem comportamentos semelhantes. A semelhança consiste que tanto os deslocamentos transversais quanto as rotações, quando aumentada a discretização, os valores para o primeiro e segundo enrijecedores são idênticos. A diferença presente entre os resultados do modelo com o Ansys pode ser devido a aproximação dos enrijecedores, pois isto pode proporcionar singularidade nas respostas pelo MEC.

Os gráficos das forças de superfície (N/m), na direção axial e transversal, são mostrados nas Figura 5.19 e Figura 5.20.

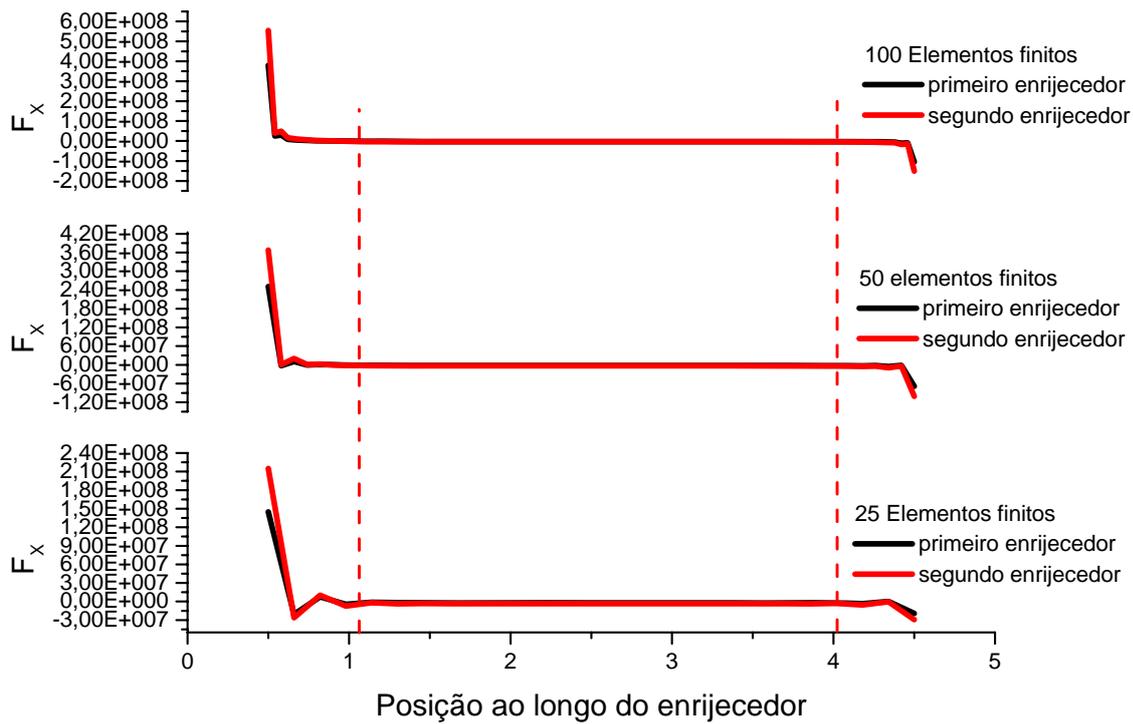


Figura 5.19 - Gráfico da força de superfície na direção axial ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF

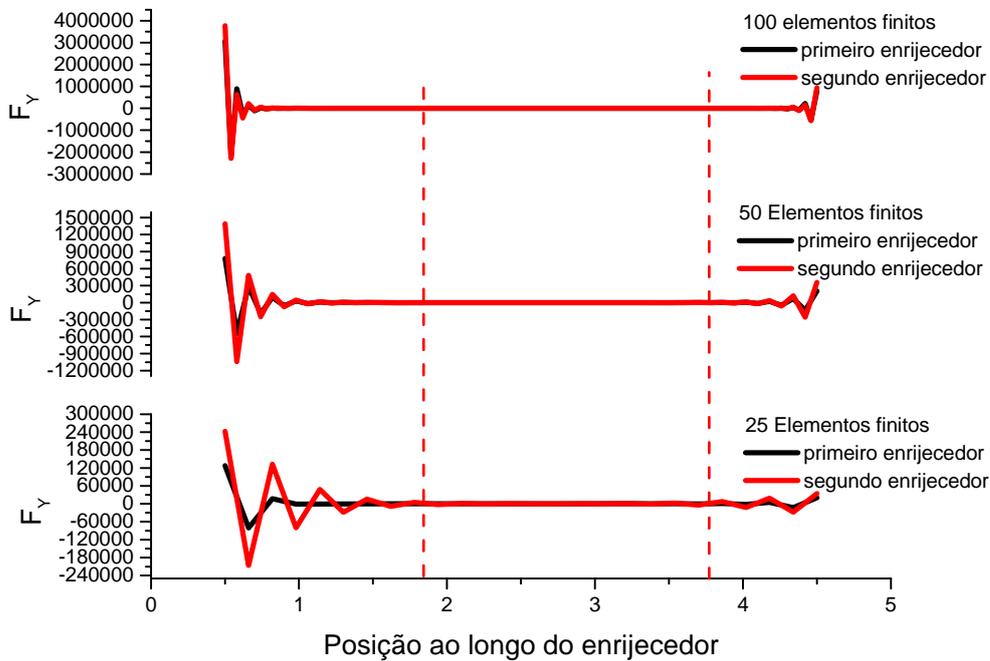


Figura 5.20 - Gráfico da força de superfície na direção transversal ao enrijecedor na interface do acoplamento MEC/MEF

O comportamento observado para as forças superfície nas Figura 5.19 e Figura 5.20 possui semelhança com os constatados no exemplo anterior. A semelhança consiste na

ocorrência de uma concentração de tensão nas extremidades dos enrijecedores. Nota-se que maior intensidade ocorre na extremidade esquerda devido à influência do apoio e a diferença entre a rigidez do meio e do enrijecedor. Observa-se que com o aumento na discretização aumenta a região, espaço entre as linhas verticais pontilhadas do gráfico, com resposta suave das forças de superfície.

5.4 Formulação do Acoplamento MEC/MEF Considerando a Perda de Aderência entre o Enrijecedor e o Domínio

Neste tópico será apresentada a formulação utilizada neste trabalho, assim como os modelos utilizados para representar a perda de aderência entre o domínio e o enrijecedor. Convém constatar que a intenção de utilização dos modelos de aderência, aqui apresentados, é meramente para apresentar a capacidade da formulação do acoplamento MEC/MEF considerando a perda de aderência.

5.4.1 Modelos de Aderência

Enrijecedor embutido no domínio pode ser uma importante situação para modificar a rigidez do sólido e a capacidade de suportar carregamento, caso as forças transmitidas entre os dois materiais forem adequadas. A situação ideal onde ocorre a aderência perfeita é impossível na prática, pois na vizinhança das extremidades do enrijecedor onde as forças da interface tendem ao infinito, ocorrendo o escorregamento.

Para considerar o efeito da perda de aderência entre o enrijecedor/domínio podem ser considerados modelos que descrevem este escorregamento entre os dois materiais. O objetivo deste trabalho é apenas mostrar a viabilidade de inserir qualquer modelo de aderência considerando a formulação descrita abaixo do acoplamento entre o MEC e o MEF. Como exemplos são mostrados dois modelos que foram utilizados neste trabalho, lembrando que todos os modelos possuem comportamento linear entre o deslocamento relativo e as forças de transferência.

O primeiro modelo apresentado é o modelo constante com um único patamar, possuindo apenas um par de parâmetros ao modelo que são o S e o f_{\max} . Onde S é o deslocamento relativo entre os dois materiais, para esse modelo ele é zero, e f_{\max} é a máxima força de aderência. Este modelo, mostrado na Figura 5.21, descreve situações em que uma vez

atingido a máxima força de aderência, a capacidade de transferência de esforços permanece constante entre os materiais.

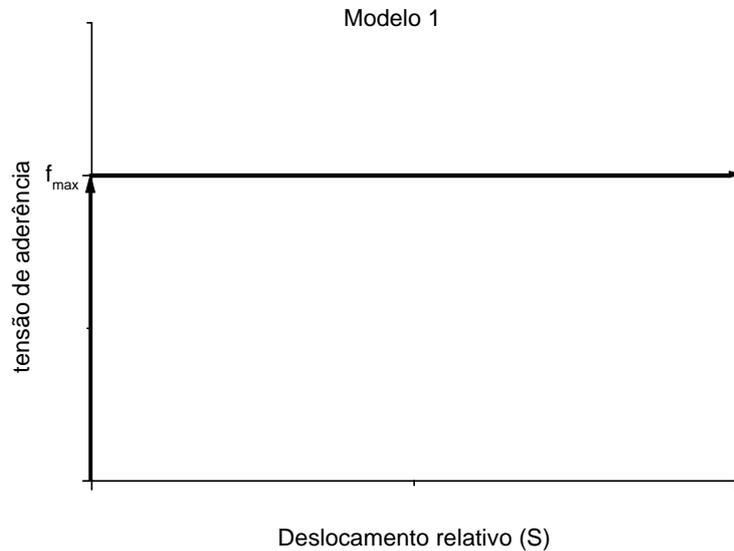


Figura 5.21 - Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 1

O segundo modelo, apresentado na Figura 5.22, consiste de dois patamares e uma região de declive. Esta representação tem como parâmetros os pares (S_1, f_{max}) e (S_2, f_{res}) , onde os S_i para $i = 1, 2$ são os deslocamentos relativos entre os materiais, e f_{max} e f_{res} são as forças máximas e residuais do acoplamento, respectivamente. Este modelo simula, em um primeiro momento, situações onde se tem uma aderência perfeita do enrijecedor e o domínio até atingir a f_{max} , atingido este valor ocorre um aumento no deslocamento relativo para uma mesma força aplicada, mas a partir de S_1 as forças de transferências começam a diminuir até atingir um deslocamento relativo S_2 , onde é obtida a força final ou residual do modelo, daí em diante a transferência da força de contato permanece constante e igual a força residual.

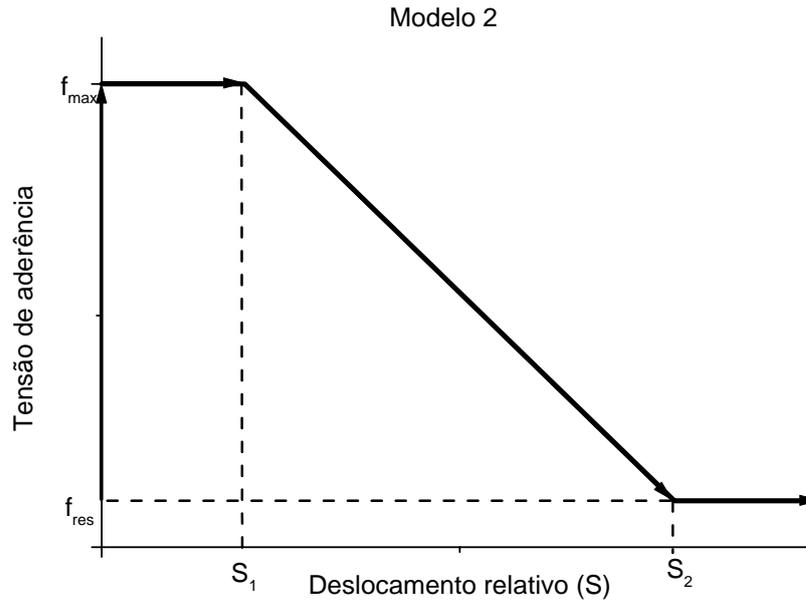


Figura 5.22 - Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 2

5.4.2 Formulação do Acoplamento MEC/MEF com Modelo de Escorregamento

O problema do escorregamento introduz uma nova variável nas equações, a variável S do escorregamento relativo entre o domínio e o enrijecedor. As equações de compatibilidade agora são expressas por:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} U^E &= U \\ U^D &= U^E + S \Rightarrow U^D = U + S \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ou seja, o deslocamento relativo S deve ser aproximado por elementos lineares e introduzido nas equações de equilíbrio do MEC para pontos internos. Os campos com os deslocamentos U e S da equação 5.32 são independentes entre si, e podem ser aproximados por polinômios diferentes sobre cada elementos de barra. O deslocamento U é aproximado pelo mesmo polinômio cúbico definido no item 5.1. O deslocamento relativo S será aproximado linearmente nesta formulação, como já informado. A razão desta escolha é por ser o mesmo polinômio que aproxima as forças de superfície no elemento. Para este caso, os nós das aproximações das forças de superfície e do escorregamento devem coincidir, com base no modelo de aderência utilizado.

Sabendo que as equações do MEF são desenvolvidas em coordenadas locais e as do MEC em coordenadas globais e tendo as equações do MEC possuindo dois graus de liberdade por nó e o MEF três graus de liberdade é necessário realizar a compatibilização das dimensões e o sistema de referência. Diante deste fato a equação 5.32 pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\{U^D\}_{2NF \times 1} = [T]_{2NF \times 3NF} [R]_{3NF \times 3NF} \{U\}_{3NF \times 1} + [\bar{T}]_{2NF \times 2NF_{extr}} \{S\}_{2NF_{extr} \times 1} \quad (5.33)$$

Onde: NF = número de nós de elementos finitos

NF_{extr} = número de nós extremos do elemento finito

$[T]$ é a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{U^D\}$ e $\{U\}$

$[\bar{T}]$ é a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{U^D\}$ e $\{S\}$

$[R]$ é a matriz de rotação do sistema local para o global de referência

Com a introdução do escorregamento relativo S , a equação de equilíbrio 5.25 do elemento de contorno para pontos internos ao domínio deve ser reescrita como:

$$[H_{EB}] \{U_b\} + [R][T] \{U^E\} + [R][\bar{T}] \{S\} = [G_{EE}] \{P_b\} + [G_{EE}] \{f^D\} \quad (5.34)$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} [A_{bb}] \{X\} = [B_{bb}] \{F_b\} - [G_{EE}] [\bar{R}] \{f^E(S)\} \\ [A_{Eb}] \{X\} + [R][T] \{U^E\} + [R][\bar{T}] \{S\} = [B_{Eb}] \{F_b\} - [G_{EE}] [\bar{R}] \{f^E(S)\} \\ [\bar{K}^E] \{U^E\} = [\bar{G}^E] \{f^E(S)\} + \{\bar{F}\} \end{cases} \quad (5.35)$$

Onde: $\{f^D\} = -\{f^E(S)\}$ e $\{f^E(S)\}$ depende do modelo de aderência que é função do deslocamento relativo S . E $\{\bar{F}\}$ representa o vetor de carregamento nodal do MEF. Tendo a matriz $[\bar{K}^E]$, $[\bar{G}^E]$ e o vetor $\{\bar{F}\}$ referenciado ao sistema de coordenada local.

A representação matricial aplicando o método dos mínimos quadrados ao sistema 5.35 fica:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ U^E \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{bb} \\ 0 \\ [G_{EE}^*][B_{Eb}] \end{bmatrix} \{F_b\} + \begin{bmatrix} -[G_{bE}][\bar{R}] \\ [G^E] \\ -[G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

Neste trabalho foi utilizada a formulação incremental com controle de passos de carga ou deslocamento para poder obter o histórico de evolução da estrutura e verificar se as forças de interação entre o MEC e o MEF estão seguindo os modelos adotados, quando estes atingem suas forças de superfícies máximas. Assim a equação 5.36 fica na forma incremental:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta U^E \\ \Delta S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{bb} \\ 0 \\ [G_{EE}^*][B_{Eb}] \end{bmatrix} \{\Delta F_b\} + \begin{bmatrix} -[G_{bE}][\bar{R}] \\ [G^E] \\ -[G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{\Delta f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \bar{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

5.4.3 Algoritmo implícito da formulação com o modelo de escorregamento

O esquema geral do algoritmo implícito, para resolver o sistema incrementalmente é apresentado é descrito abaixo e em seguida, de forma sucinta são relatado os passos a seguir para obter a solução.

A cada incremento, de deslocamento ou força, e para uma variação inicial do deslocamento relativo igual a zero, calcula-se os parâmetros ΔX_i , ΔF_b^i e $\Delta f_{ij}^E(S)$. Com o deslocamento relativo ΔS_i e o $\Delta f_{ij}^E(S)$ conhecido, verifica-se ao consultar o modelo de aderência se o parâmetro $\Delta f_{ij}^E(S)$ sofrerá correção ou não. Caso não seja necessária correção o processo pára e segue para o próximo incremento. No entanto, caso seja necessário correção, calcula-se a força superficial que excedeu por $f_i^c = -(\Delta f_{ij}^E - f_{modelo})$. Onde f_{modelo} é a força de superfície no modelo adotado e f_i^c é a carga corretiva a ser aplicada à equação 5.37 para calcular o quanto o enrijecedor se deslocou com relação ao domínio. Conhecido f_i^c , o substitui em $\Delta f^E(S)$ e se calculam os parâmetros $\delta \Delta X$, $\delta \Delta U^E$ e $\delta \Delta S$ na equação 5.36. Este processo é repetido até obter a convergência, ou melhor, até f_i^c ficar abaixo de um erro admissível. Ficando os parâmetros $\Delta S_{ij} = \Delta S_i + \delta \Delta S_j$, $U_{ij}^E = \Delta U_i^E + \delta \Delta U_j^E$, $X_{ij}^f = \Delta X_i + \delta \Delta X_j$

e $\Delta f_f^j(S_{i+1}) = f_{modelo}^j + \delta \Delta f_i^{E(j+1)}(S_{ij})$. Repete-se o procedimento para todos os demais incrementos, seja de deslocamento ou de força.

Com a intenção de esclarecer abaixo mostrará os passos necessários:

Passo 1) Inicializando $i = 1$, e $S_i = 0$

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [G_{bE}][\bar{R}] \\ [0] & [\bar{K}^E] & -[\bar{G}^E] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta U_i^E \\ \Delta f_{ij}^E(\Delta S_i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ [0] \\ [G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{\Delta F_b^i\} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [0] \\ [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{Bmatrix} \{\Delta S_i\} + \begin{Bmatrix} [0] \\ [\Delta \bar{F}_i] \\ [0] \end{Bmatrix}$$

Passo 2a) Verificar: se $\Delta f_{ij}^E(\Delta S_i) < f_{modelo} + \Delta_{tolerância}$ retorna ao passo 1 com o valor de i aumentado de uma unidade

Passo 2b) Verificar: se $\Delta f_{ij}^E(\Delta S_i) > f_{modelo} + \Delta_{tolerância}$ deverá corrigir a força

$$f_{ij}^c = -(\Delta f_{ij}^E - f_{modelo}) \quad (5.38)$$

Passo 3) Cálculo do deslocamento relativo devido a aplicação força corretiva

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta X_j \\ \delta \Delta U_j^E \\ \delta \Delta S_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[G_{bE}][\bar{R}] \\ [\bar{G}^E] \\ -[G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{f_{ij}^c\}$$

$$X_{ij}^f = \Delta X_i + \delta \Delta X_j, U_{ij}^E = \Delta U_i^E + \delta \Delta U_j^E, S_{ij} = \Delta S_i + \delta \Delta S_j$$

Passo 4) Cálculo da força devido à aplicação de S_{ij}

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [G_{bE}][\bar{R}] \\ [0] & [\bar{K}^E] & -[\bar{G}^E] \\ [G_{EE}^*][A_{Eb}] & [G_{EE}^*][R][T] & [G_{EE}^*][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta X_{j+1} \\ \delta \Delta U_{j+1}^E \\ \delta f_i^{E(j+1)}(S_{ij}^i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ -[G_{EE}^*][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \{S_{ij}\}$$

$$X_{i(j+1)}^f = X_{ij}^f + \delta \Delta X_{j+1}, U_{i(j+1)}^E = U_{ij}^E + \delta \Delta U_{j+1}^E, f_f^j = f_{modelo}^j + \delta f_i^{E(j+1)}(S_{ij})$$

Passo 5) Cálculo da força corretiva

$$f_i^{c(j+1)} = -(f_f^j - f_{\text{modelo}})$$

$$f_{ij}^C = f_f^j$$

$$\Delta S_i = S_{ij}$$

Passo 6a) verificar: se $f_i^{c(j+1)} < \Delta_{\text{tolerância}}$ retorna ao passo 1

Passo 6b) Verificar: se $f_i^{c(j+1)} > \Delta_{\text{tolerância}}$ retorna ao passo 3

Assim é realizado o processo até que para cada incremento o valor de f^c esteja menor que um valor tolerável.

5.4.4 Exemplos Numéricos

Neste item será apresentado dois exemplos considerando o modelo 1 e o modelo 2. Primeiramente, será considerado para o modelo 2 um exemplo de de uma estrutura submetida a um carregamento para arrancar o enrijecedor do meio. Este exemplo servirá para verificar se está sendo seguido o modelo de aderência em análise. O segundo simula a presença de um enrijecedor inclinado em um meio infinito, podendo representar a interação solo-estrutura considerando os dois modelos de aderência.

EXEMPLO 1

Neste exemplo considera-se a análise da perda de aderência de uma barra embutida num domínio plano. A estrutura considerada é apresentada na Figura 5.23 a qual é solicitada mediante a prescrição de um carregamento no nó de extremidade do enrijecedor. A carga aplicada na estrutura é equivalente a um deslocamento imposto de valor igual a $4,0 \cdot 10^{-7} \text{m}$. As dimensões geométricas adotadas foram $H = 1,0 \text{m}$, $L_o = 4,0 \text{m}$ e $L = 5,0 \text{m}$, analisando o efeito do escorregamento da barra em um meio elástico.

A discretização utilizada foi de 120 elementos lineares para o Método dos Elementos de Contorno e para o enrijecedor foi utilizado 100 elementos finitos.

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para o domínio $E_D = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,0$ e para o enrijecedor foi adotado $E_F = 2,8 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $I_F = 1,79 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ e $S_F = 1,29 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Foi considerado neste exemplo o MODELO 2 que possui os seguintes parâmetros: $S_1 = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, $S_2 = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, $f_{\max} = 1,40 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$ e $f_{\text{res}} = 1,30 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$.

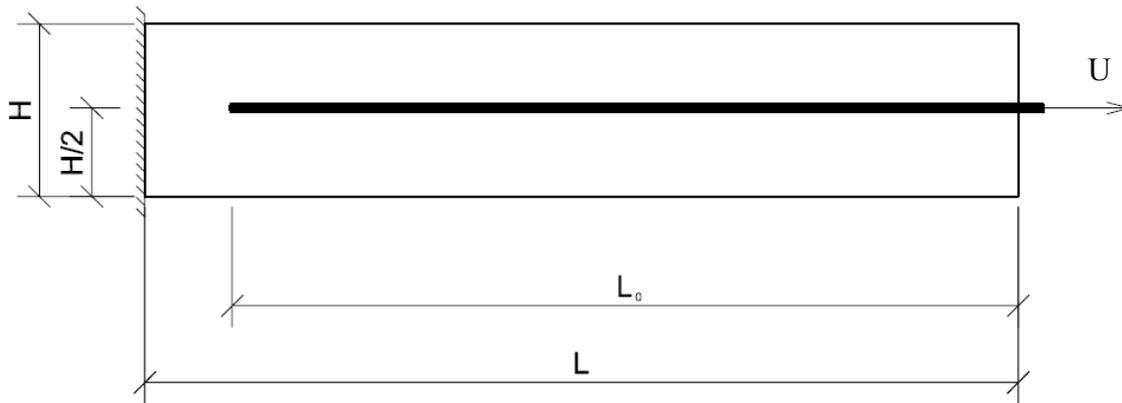


Figura 5.23 - Estrutura analisada

Na Figura 5.24 é apresentada as curvas com as forças de superfície (N/m) ao longo do comprimento do enrijecedor para nove valores diferentes de deslocamento prescrito, mostrando assim a evolução da ação de arrancamento da barra em instantes diferentes.

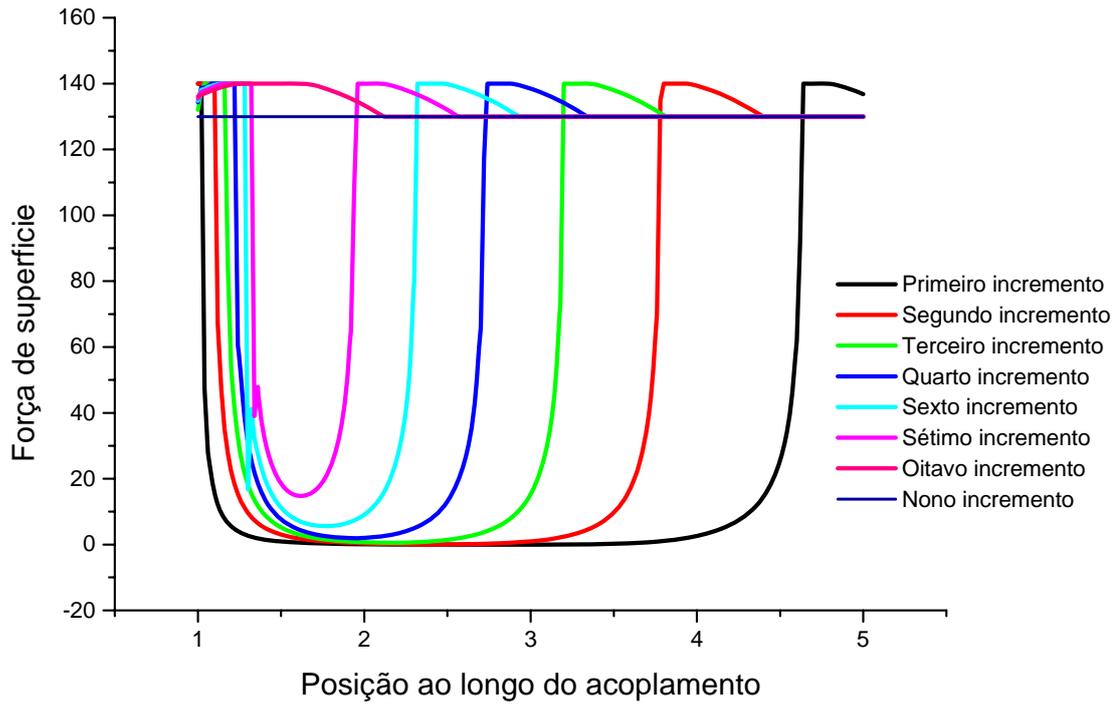


Figura 5.24 - Gráfico da evolução das forças de superfície ao longo da região acoplada

Na Figura 5.25 é apresentadas as curvas com os deslocamentos, em metros, dos pontos do meio contínuo localizado na interface com o enrijecedor. Verifica-se a diminuição no deslocamento, nos pontos localizados próximos à aplicação da carga, à medida que o carregamento evolui.

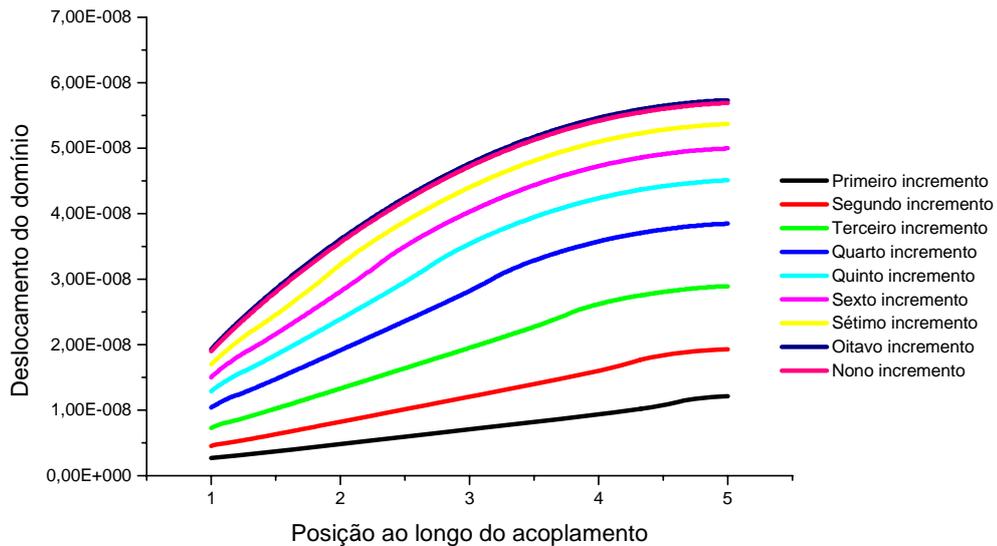


Figura 5.25 - Evolução dos deslocamentos do domínio ao longo da interface

Os gráficos apresentados na Figura 5.26 mostram a evolução da perda de aderência, através do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.

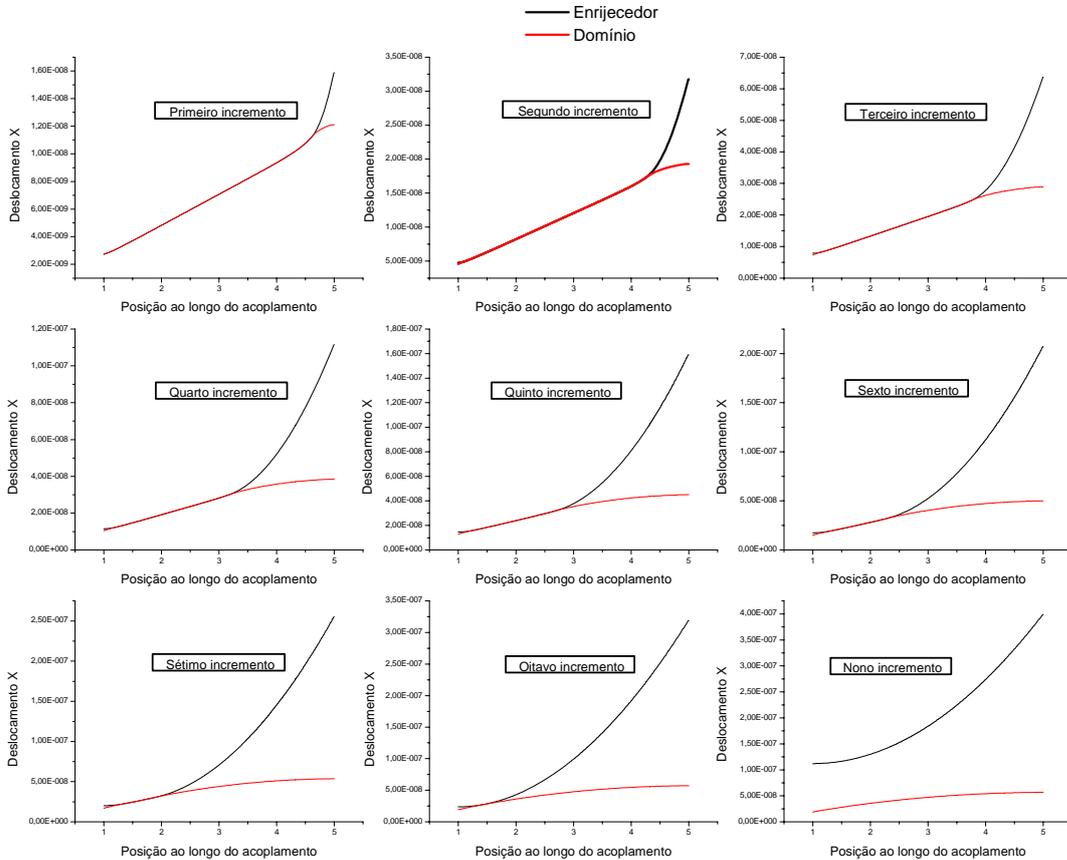


Figura 5.26 - Gráfico da evolução do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor

A Figura 5.26 ilustra perfeitamente a evolução da perda de aderência, em que os deslocamentos (m) do domínio não são mais iguais aos deslocamentos do enrijecedor. No primeiro incremento de deslocamento, verifica-se quase que todos os nós estão perfeitamente acoplados, exceto os da extremidade. À medida que vai aumentando o deslocamento outros nós começam a desacoplar até chegar à situação do nono incremento quando os deslocamentos do enrijecedor continuam aumentando e o do domínio decresce.

Finalmente na Figura 5.27 são apresentadas as curvas dos deslocamentos relativos (m) entre os dois materiais. Pela definição apresentada na equação 5.30 os deslocamentos do enrijecedor são obtidos subtraindo-se os resultados apresentados na Figura 5.25 ao da Figura 5.27.

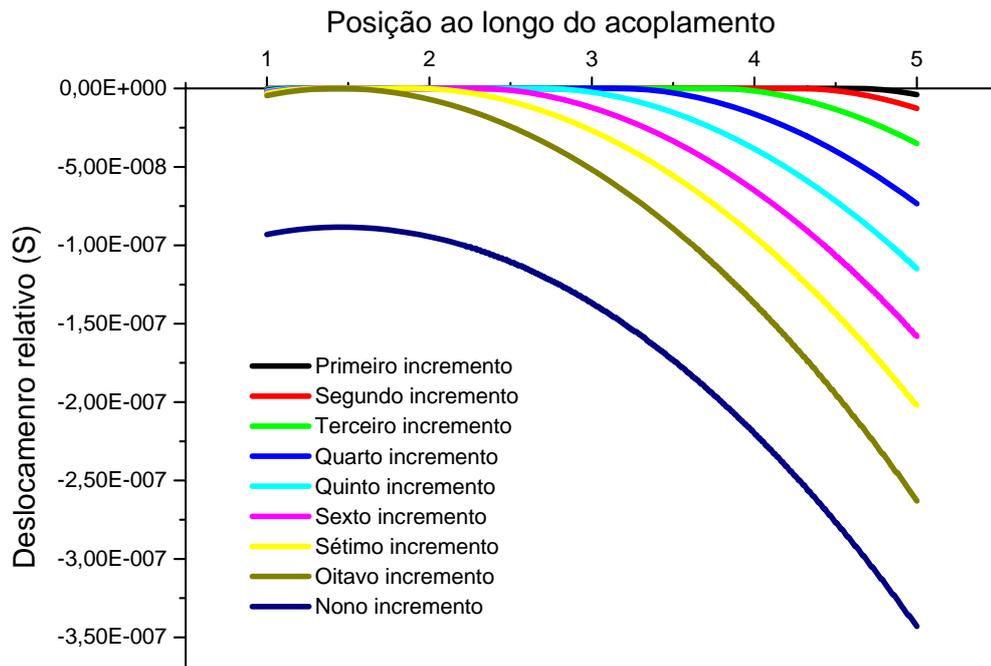


Figura 5.27 - Gráfico do deslocamento relativo entre o domínio e o enrijecedor.

EXEMPLO 2

A estrutura considerada nesse exemplo é a mostrada na Figura 5.28. Trata-se de uma estrutura plana, que simula a presença de uma fundação profunda, neste caso uma estaca, em um solo infinito. São impostas algumas restrições de deslocamento ao solo com o intuito de simular a presença de estruturas vizinhas e de solo indeslocável em sua base. A estaca é considerada inclinada com um ângulo de 10 graus (α). É considerada uma região do solo de 5 metros de comprimento (L) e 10 metros de profundidade (H). A estaca possui 4 metros de comprimento (L_0) e com carregamento prescrito de $P_x = 0,11KN$, $P_y = 1,2KN$ e $M = -0,003N.m$ na cabeça da estaca.

A discretização utilizada neste exemplo foi de 300 elementos lineares de contorno e 100 elementos finitos para o enrijecedor.

As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para o solo $E_s = 2,8.10^{10} N / m^2$ e $\nu_s = 0,2$, para estaca $E_{estaca} = 2,8.10^{11} N / m^2$, $\nu_{estaca} = 0,0$, $I_{estaca} = 1,79.10^{-7} m^4$ e $S_{estaca} = 1,29.10^{-2} m^2$. Neste exemplo são considerados os

dois modelos de aderência mostrados no item 5.4.1, tendo para o modelo 1 o parâmetro $f_{\max} = 2.10^2 N / m^2$ e para o modelo 2 os seguintes parâmetros: $S_1 = 10^{-7} m$, $S_2 = 8.10^{-6} m$, $f_{\max} = 3.10^2 N / m^2$ e $f_{resd} = 2,7.10^2 N / m^2$.

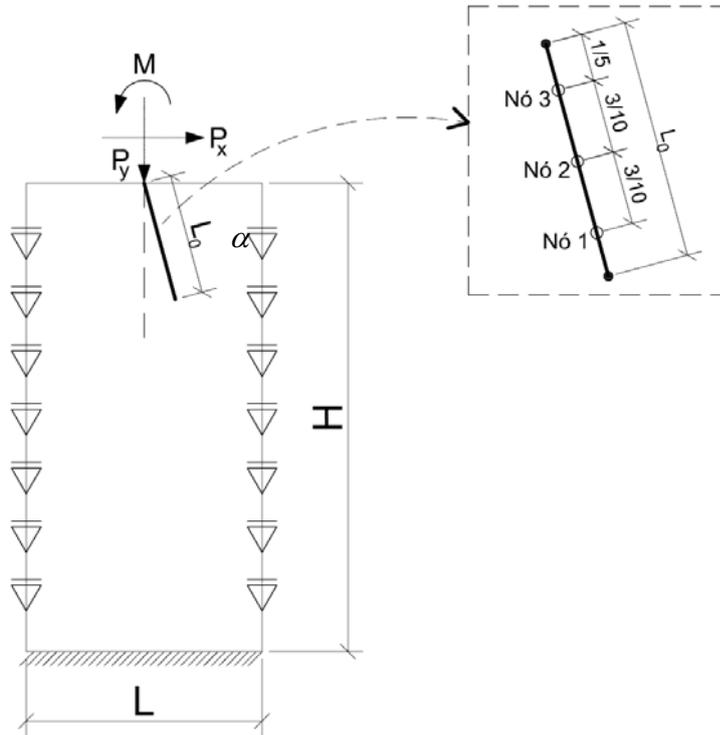


Figura 5.28 - Estrutura em análise.

Todas as análises das figuras abaixo farão referência a três pontos nodais localizados na estaca, como mostrado na Figura 5.28.

Na Figura 5.29 encontram-se as curvas das forças (N/m) atuantes no enrijecedor para três pontos diferentes, mostrando assim a evolução com o aumento dos passos de carregamento para os dois modelos de escorregamento.

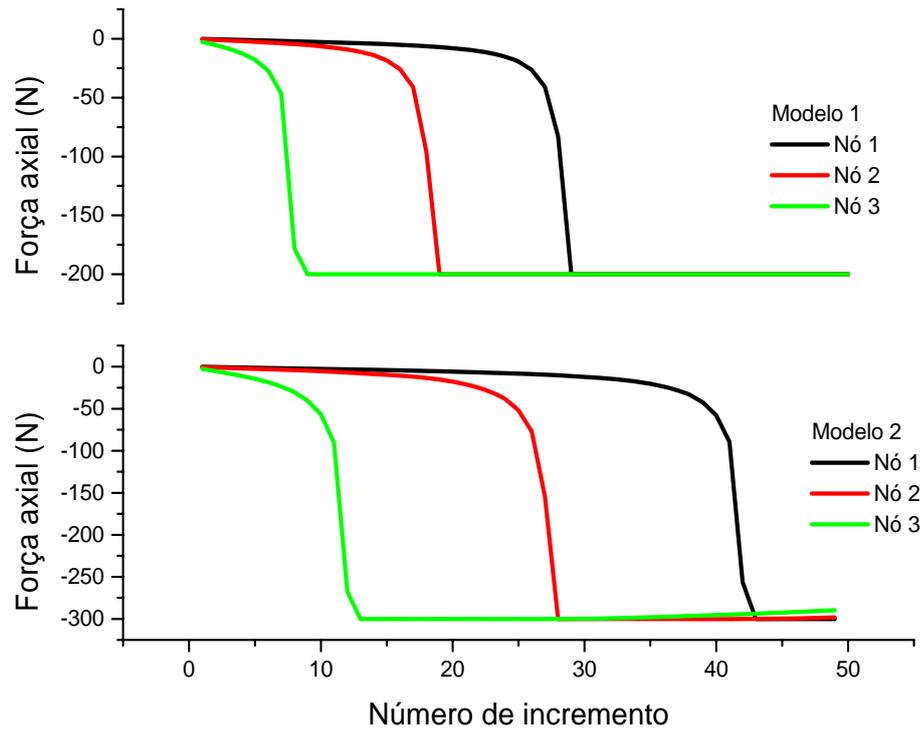


Figura 5.29 - Diagrama das forças de superfícies ao longo da barra .

A Figura 5.30, Figura 5.31 e Figura 5.32 mostram o comportamento, para cada modelo e em cada nó analisado, do deslocamento na direção axial (m), transversal (m) e a rotação (rad), respectivamente.

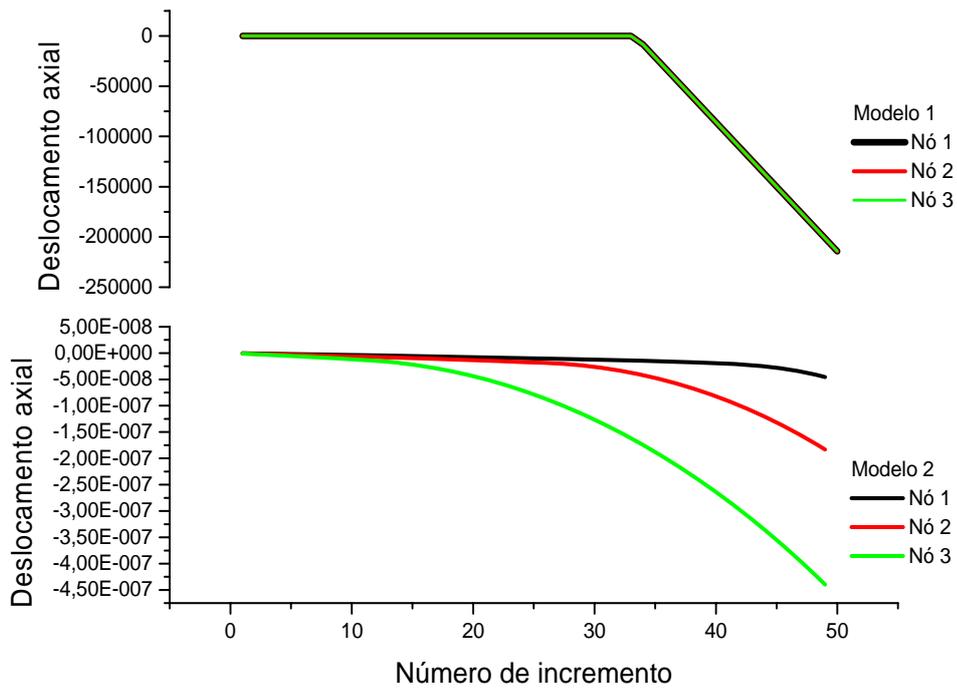


Figura 5.30 - Diagrama dos deslocamentos do enrijecedor na sua direção axial.

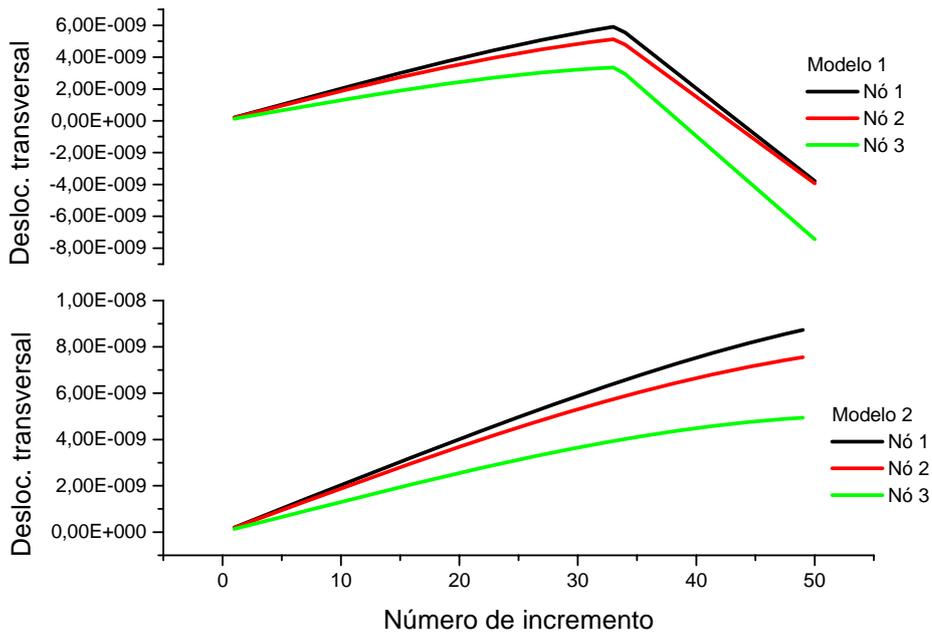


Figura 5.31 - Diagrama dos deslocamentos do enrijeecedor na sua direção transversal.

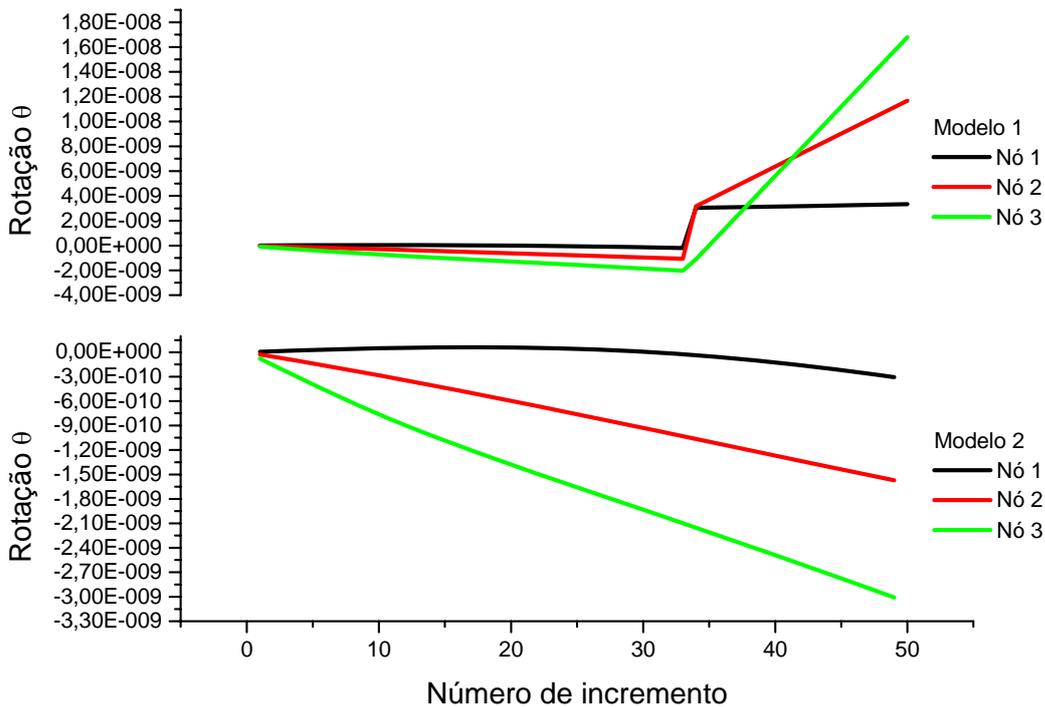


Figura 5.32 - Diagrama evolução da rotação do enrijeecedor para os dois modelos analisados.

Nos três gráficos acima é constatado pontos de inflexão para o modelo 1, para os pontos da estaca analisado. Esta inflexão ocorre aproximadamente quando o 35 incremento de carregamento é aplicado na estrutura. A partir deste incremento a estrutura atinge a força máxima do modelo, desta forma grandes deslocamentos e rotações são obtidos. Já para os nós

da barra do modelo 2 o comportamento não apresentam inflexões, justificado pelo fato de não ter atingido a força residual para a barra, sendo assim a estrutura ainda possui pequenos deslocamentos.

Na Figura 5. 33(a) e (b) é mostrado os deslocamentos na direção y (m) dos pontos internos para o modelo 1 e 2, respectivamente. Já a Figura 5. 34(a) e (b) mostram a tensão σ_y (N/m²) dos pontos internos para a estrutura submetida tanto ao modelo 1 quanto ao modelo 2 de aderência.

Nestas imagens é possível verificar a influência e a importância do modelo de aderência adotado para simular o escorregamento do domínio/enrijecedor, pois os resultados são alterados e a simulação perde toda a sua objetividade de representar situações presentes no chamado “mundo real” caso o modelo de perda de aderência não seja adequado.

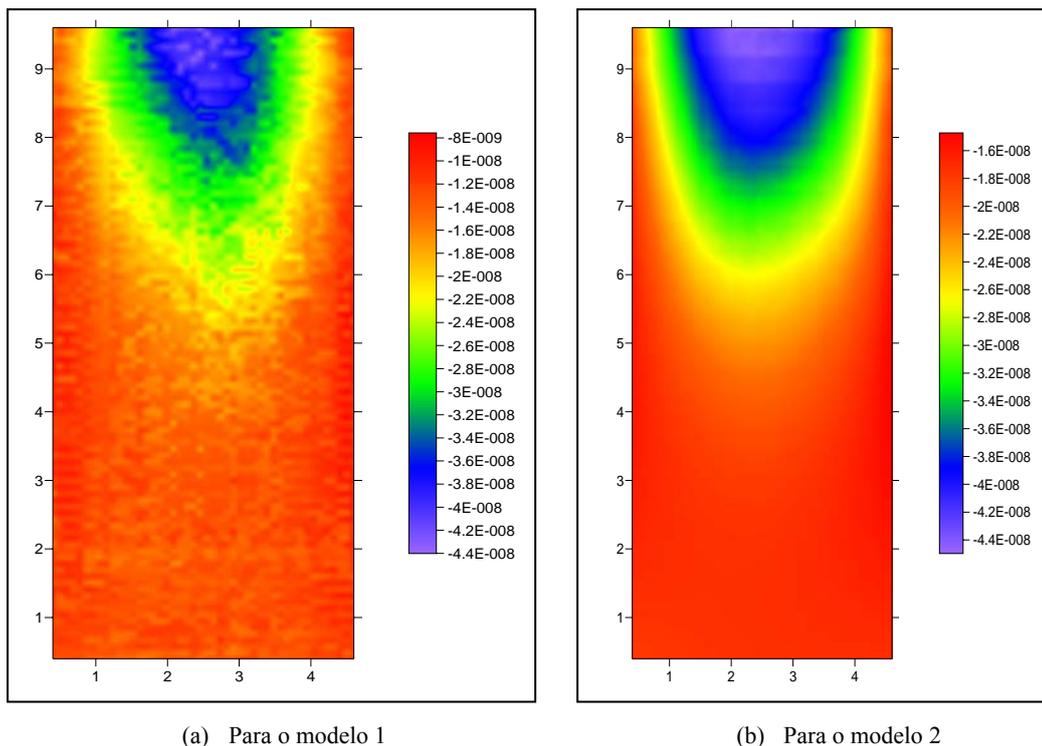


Figura 5. 33 - Imagem do deslocamento na direção Y na estrutura para o último incremento de carga considerando o efeito da perda de aderência.

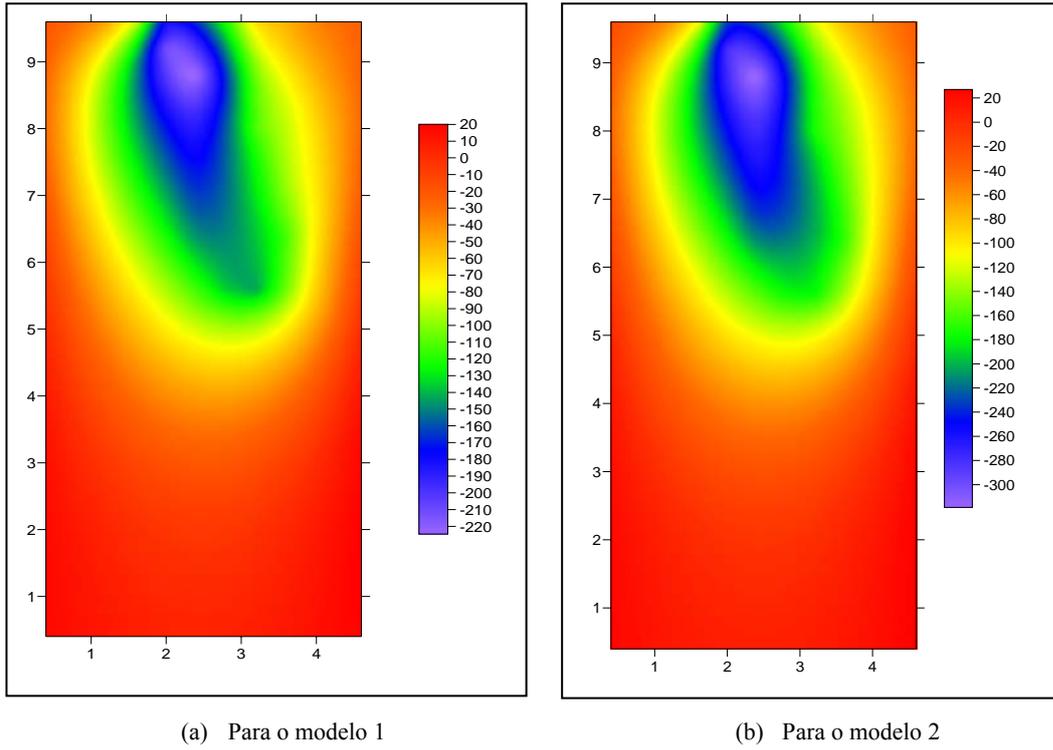


Figura 5. 34 - Imagem da tensão σ_y na estrutura para o último incremento de carga considerando o efeito da perda de aderência.

CAPÍTULO 6

6 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi à análise de domínios reforçados considerando o efeito da perda de aderência através do acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Inicialmente foi feita uma vasta revisão bibliográfica, tanto de publicações internacionais quanto nacionais, de trabalhos relacionados à esta pesquisa. A partir desta revisão foi constatada a grande aplicação da técnica de acoplamento MEC/MEF a interação solo estrutura, tendo desta forma poucos trabalhos abordando domínios quaisquer. Ainda ficou constatado na revisão bibliográfica que são raros os trabalhos que consideram o efeito do escorregamento no acoplamento dos dois métodos.

Em seguida foi apresentada a formulação do MEC desenvolvida a partir do teorema de Betti, mostrando as equações integrais do método e suas singularidades presentes.

Com a intenção de controlar o erro das integrações numéricas, neste trabalho procurou-se identificar a quantidade de pontos de Gauss necessários para realizar estas integrações com um erro aceitável. Para descrever o erro da integração pela quadratura de Gauss foi realizado um estudo utilizando a equação proposta por Stroud e Secrest (1966). Onde neste estudo foi analisado o comportamento desta equação através da correlação da razão R/L e do ângulo que o ponto fonte faz com o elemento a ser integrado, sempre consultando a expressão analítica do erro. Ainda referente ao controle do erro, este trabalho apresentou sugestão de equações mais simples e que proporcionam bons resultados. Para a obtenção destas equações, foi realizada uma regressão não-linear cujo parâmetro de aceitação ou rejeição do ajuste foi o teste estatístico de aderência do qui-quadrado que apresentou valores inferiores a 0,04 correspondendo uma probabilidade de ajuste superior a 95%. Foram ainda apresentados exemplos comparando resultados da Formulação com Controle de Erro das Integrais numéricas (FCEI) com a Formulação Clássica (FC) com 10 pontos de Gauss e a um software em elementos finitos, Ansys. A partir de exemplos foi possível constatar o melhor aproveitamento pela formulação FCEI do elemento linear em comparação com a formulação FC. Dentre as principais vantagens da FCEI está a maior velocidade de

convergência com menor discretização quando comparado a formulação sem controle de erro, FC.

No estudo do controle do erro das equações integrais foi constatado que para relações inferiores a $R/L < 1,6$ não é possível controlar o erro para quaisquer ângulos entre o ponto fonte e o elemento a ser integrado. Ainda é mostrada uma região onde com 10 pontos de Gauss não é possível atingir um erro máximo de 10^{-12} . A partir destas restrições foi realizada a técnica de sub-elementação para que a região com erro controlável aumente. Com essa idéia, a sub-elementação foi realizada para que a relação R/L fosse maior que 1,6.

Em seguida foi apresentada a formulação do acoplamento entre o MEC e o MEF, sendo inicialmente considerada a aderência perfeita e depois foi inserido o efeito do escorregamento à formulação.

O domínio foi modelado pelo MEC e o enrijecedor pelo MEF. Para o desenvolvimento dos elementos do MEF foi utilizado a cinemática para elementos de pórticos bidimensional semelhante a desenvolvida por Pacolla (2004). A aproximação utilizada para o elemento do MEF foram polinômios cúbicos para os deslocamentos e rotações, sendo estas aproximações independentes, e um polinômio linear para as forças. Devido essa diferença de aproximação entre deslocamentos e forças, foram geradas, na formulação, mais equações que incógnitas tornando o sistema retangular e não resolvível. Para contornar este problema foi utilizado o Método dos Mínimos Quadrados, MMQ, para tornar as matrizes quadradas, e como consequência, uma melhor regularização das respostas.

Através dos exemplos examinados considerando enrijecedores perfeitamente aderido ao domínio, foram verificadas respostas suaves para os parâmetros deslocamentos e rotação. Já para a grandeza força, foi verificada singularidades nas extremidades do enrijecedor. Estas singularidades possuindo comportamento suave para forças axiais, no entanto, para forças transversais ao enrijecedor foi percebido oscilações nas extremidades. E estas oscilações são mais presentes à depender do tipo de carregamento, do tipo de apoio e da diferença entre os parâmetros do enrijecedor e do domínio. Com a intenção de diminuir estas oscilações foram acrescentados mais pontos internos nos elementos finitos extremos do enrijecedor, pois apenas com a aplicação do MMQ não foi possível obter respostas mais suaves. A partir destes pontos adicionais, foi possível “empurrar” as oscilações mais para a extremidade, e com uma

maior discretização desta região foi possível diminuir a perturbação, como mostrado nas figuras 5.14 e 5.20 .

Dando prosseguimento ao desenvolvimento da formulação, foi considerado o efeito da perda de aderência entre o domínio e enrijecedor. A inserção do escorregamento foi feita através da consideração de um parâmetro adicional na compatibilidade dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor. Este parâmetro adicional foi o deslocamento relativo S , o qual foi aproximado por polinômios lineares. Esta aproximação foi motivada devido às forças serem aproximadas por polinômios lineares, e como os modelos adotados relaciona estas forças com os deslocamentos S , foi uma forma cômoda de obter os parâmetros nodais coincidirem.

No presente trabalho foram considerados dois modelos de aderência entre os materiais, o primeiro considerando estruturas que uma vez atingida as forças máximas de contato, esta é transmitida de forma constante no acoplamento dos dois materiais. E o segundo mostra a presença de uma tensão residual após ter atingido a força máxima. O objetivo da utilização destes dois modelos é mostrar a capacidade em inserir o efeito do escorregamento e a potencialidade de consideração para quaisquer outros modelos mais complexos.

Para a validação da formulação de acoplamento considerando o efeito do escorregamento, foram analisados dois exemplos. O primeiro constituía de uma barra submetida a uma carga axial simulando o arranque do enrijecedor ao domínio. Neste exemplo foram verificados valores coerentes de deslocamentos aos dois materiais, pois quando era atingida a força máxima do modelo de aderência ocorria a diferença de deslocamento entre o enrijecedor e o domínio, ocasionado pelo deslocamento relativo S . E ainda neste exemplo, foi verificado o perfeito acompanhamento das forças de contato da direção da barra quando os seus valores excedem ao preconizado pelo modelo adotado. Já o segundo exemplo mostra uma estrutura simulando a interação solo estrutura, sendo o enrijecedor representado por uma estaca com pequena inclinação em relação à vertical. Neste segundo exemplo, foram realizadas análises considerando o modelo 1 e depois considerando o modelo 2, sendo a estrutura analisada permanecendo inalterada. A estrutura foi submetida a três tipos de carregamentos: força vertical, horizontal e rotação na cabeça da estaca. Estes resultados mostram a importância de se considerar modelos de aderência que melhor represente as interações entre os materiais sob algum tipo de solicitação.

Para trabalhos futuros se tem diversos pontos a serem estudados, ou melhor sempre terá algo a ser estudado, pois o que motiva as pesquisas não são as respostas e sim as perguntas. Partindo deste pensamento, no decorrer deste trabalho diversas perguntas foram feitas e que se pretendem estudar, dentre elas tem-se:

- Estudar outro método de regularização para diminuir mais a presença de oscilações quando considerado acoplamento perfeito às forças de superfície transversal ao enrijecedor, pois a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados MMQ não foi eficiente.
- Apesar de o autor ter implementado o cálculo da carga crítica, resultados não mostrados neste trabalho, tem-se que verificar a sua aplicação em mais exemplos e buscar um algoritmo de otimização para reduzir o tempo computacional.
- Considerar a presença de sub-regiões, realizando além do acoplamento MEC/MEF também o MEC/MEC entre as varias regiões do domínio. Estudar também domínios anisotrópicos.
- Aplicar a chamada confiabilidade de Software para verificar qual a confiância dos resultados gerados pelo programa implementado pelo autor.
- Aplicar ainda a teoria de confiabilidade às equações simplificadas do estudo de erro proposta neste trabalho.

Os tópicos apresentados acima foram as principais perguntas surgidas no decorrer deste trabalho, e que devido ao tempo escasso não foi possível procurar respostas. Espera-se assim ter estas respostas num futuro próximo.

CAPÍTULO 7

7 Referências

Agostinho, P. C. P., **Associação de chapas através da combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e Finitos considerando enrijecedores e crack coesivo**. 1998. 187 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

Almeida, V. S., **Análise da interação solo não homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. 2003. 199 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

Argyris, J.; Kelsey, S., **Energy theorems and structural analysis**, London: Butterworth Scientific Publications, 1960.

Banerjee, P. K.; Butterfield, R. **Finite Elements in geomechanics**, New York: John Wiley & Sons. Capítulo 16: Boundary Element Methods in geomechanics, p. 529-570, 1977.

Barbirato, J. C. C., **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. 1991. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

Barretto, S. F., **Análise elastodinâmica de places através do Método dos Elementos de Contorno com interação solo-estrutura**. 1995. 142 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

Beer, G.; Smith, I.; Duenser, C., **The Boundary Element Method with Programming: for Engineers and Scientists**, Germany: Springer-Verlag/Wien New Uork, 2008. 494 p.

Botta, A. S., **Método dos Elementos de Contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. 185 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

Botta, A. S.; Venturini, W. S., Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination, **Computer Modeling in Engineering & Science**, v. 8, n. 1, p. 15-28, 2005

Brebbia, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**, London: Pentech Press, 1978.

Brebbia, C. A.; Dominguez, J. Boundary Element Methods for potential problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 1, p. 372-378, 1977.

Brown, P. T.; Weisner, T. J., The behavior of uniformly loaded piled strip footing, **Soil Fndns**, v. 15, p. 13-21, 1975.

Butterfield, R.; Banerjee, P. K., The elastic analysis of compressible piles and pile group, **Géotechnique**, v.21, No. 1, p. 43-60, 1971b

Butterfield, R.; Banerjee, P. K., The problem of pile group-pile cap interaction, **Géotechnique**, v. 21, No. 2, p. 135-142, 1971a

Calderón, E. T., **Sobre o uso do Método dos Elementos de Contorno – MEC para o Estudo de interação de placas com o meio contínuo**. 1996. 268 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

Calderón, E. T., **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundações elásticas pelo Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação. 1991. 200 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

Chan, K. S.; Karasudhi, P.; Lee, S. L., Force at a point in the interior of layered elastic half-space, **Int. J. Solids Struct.**, v. 10, No. 11, p. 1179-1199, 1974

Chin, J. T.; Chow, Y. K.; Poulos, H. G., Numerical analysis of axially loaded vertical piles and pile groups, **Computers and Geotechnics**, v. 9, p. 273-290, 1990.

Coda, H. B., **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos**. 1993. 211 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, **Bull. Am. Math. Soc.**, v. 49, p. 1-43, 1943.

Cross, H., Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moments, **Trans ASCE**, v. 96, p. 1-10, 1932.

Cruse, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 1259-1274, 1969.

Fatemi-Ardakani, B., **A contribution to the analysis of pile-supported raft foundations**. 1987. PhD Thesis, Southampton University, Southampton, 1987

Filho Matos, R.; Mendonça, A. V.; Paiva, J. B., Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, p. 195-203, 2005.

Fredholm, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Mathematica**. V. 27, p. 365-390, 1903.

Gallagher, R. **Finite Element Analysis: fundamentals**, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975, 420 p.

Gaul, L.; Kögl, M.; Wagner, M. **Boundary Element Methods for Engineers and scientist: an introductory course with advanced topics**, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003. 488 p.

Guiggiani, M.; Gigante, A. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 57, p. 906-915, 1990.

Hrenikoff, A., Solution of problems in elasticity by the framework method, **J. Appl. Mech.**, v.8, p. 169-175, 1941.

Jaswon, M. A. Integral equation methods in potential theory. **Proceedings of the royal society of London A**. v. 275, p. 23-32, 1963.

Jin, S.; Lutes, L. D.; Sarkani, S., Response variability for a structure with soil-structure interaction and uncertain soil properties, **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 15, p. 175-183, 2000

Kocak, S.; Mengi, Y., A simple soil-structure interaction model, **Applied Mathematical Modelling**, v.24, p. 607-635, 2000

Kress, R., **Graduate texts in mathematics: Numerical Analysis**, United States of America: Springer-Verlag New York, 1998. 330 p.

Kupradze, V. D. **Potential methods in the theory of elasticity**, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations Ltda, 1965.

Laethem, M. V. et al., The use of boundary elements to represent the far field in soil-structure interaction, **Nuclear Engineering and Design**, v. 78, p. 313-327, 1984

Lanchat, J. C.; Watson, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, p. 991-1005, 1976

Leite, L. G. S.; Coda, H. B.; Venturini, W. S., Two-dimensional solids reinforced NY thin bars using the boundary element method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, p. 193-201, 2003.

Leonel, E. D., **Método dos Elementos de Contorno aplicado à análise de sólidos multifraturados**. 2006. 178 p. Dissertação (Mestrado em engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

Leonel, E. D., **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas – em andamento) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Manzoli, O. L., **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para placas sobre fundações elásticas**. 1992. 157 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

Matos Filho, R. F., **Análise da interação estaca-solo via uma combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno**. 1999. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

McHenry, D., A lattice analogy for the solution of plane stress problems, **J. Inst. Civil Eng.**, v. 21, p. 59-82, 1943.

Mendonça, A. V., **Análise da interação placa-estaca-solo via combinação co Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

Mendonça, A. V.; Paiva, J. B., A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, p. 237-247, 2000

Mesquita, A. D., **Novas metodologia e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo**. 2002. 623 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

Millán, M. A.; Domínguez, J., Simplified BEM/FEM model for dynamic analysis of structures on piles and pile group in viscoelastic and poroelastic soils, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, p. 25-34, 2009

Oshima, S. T., **Uma combinação MEC/MEF para análise da interação de estacas inclinadas e o solo**. 2004. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004

Paccola, R. R., **Análise não Linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástica através da combinação entre o MEC e o MEF**. 2004. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

Paiva, J. B.; Trondi, R. R., Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups, **Advances in Engineering Software**, v. 30, p. 715-724, 1999

Poulos, H. G., analysis of the settlement of pile groups, **Géotechnique**, v. 18, p. 449-471, 1968.

Poulos, H. G.; Davis, E. H., The settlement behavior of single axially loaded incompressible piles and piers, **Géotechnique**, v. 18, p. 351-371, 1968

Ramalho, M. A., **Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico**. 1990. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.

Ribeiro, D. B., **Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF**. 2005. 130 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Ribeiro, D. B., **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. 2009. 232 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

Rizzo, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of applied Mathematics**, v. 25, p. 83-95, 1967.

Rodríguez, J. C. G., **Sobre o emprego do Método dos Elementos de Contorno em problemas elásticos bidimensionais**. 1986. 140 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1986

Silva, N. A., **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner**. 1996. 245 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

Somigliana, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastic isotropo. **Il nuovo cimento**, Serie 3, p. 17-20, 1885/86

Stroud, A. H.; Secrest, D., **Gaussian Quadrature Formulas**. Prentice- Hall, Englewood Cliffs, 1966.

Süli, E.; Mayer, D., **An introduction to Numerical Analysis**, London: Cambridge university Press, 2007. 440 p.

Symm, D. T. Integral equation in potential theory, II. **Proceedings of the royal society of London A**, v. 275, p. 33-46, 1963

Thomson, W. Note on the integration of the equation of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, p. 87-89, 1848.

Turner, M.; Clough, R.; Martin, H.; Topp, L., Stiffness and deflection analysis of complex structures, **J. Aero Sci.**, v. 23, No. 9, p. 805-823, 1956.

Wutzow, W. W. **Formulação do Método dos elementos de Contorno para análise de chapas com enrijecedores**. 2003. 166 f. Dissertação (Mestrado em engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

Wutzow, W. W. **Formulação do Método dos elementos de Contorno para materiais porosos reforçados**. 2008. 334 f. Tese (Doutorado em engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Wutzow, W. W.; Venturini, W. S., **Análise de sólidos enrijecidos 2D utilizando a combinação MEC/MEF regularizada**. 2004. XXV CILAMCE, Recife.

Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method: from intuition to generality, **Appl. Mech. Rev.**, v. 23, No. 23, p. 249-256, 1970

