

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

AREF KALILO LIMA KZAM

**Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos  
de Ordem Qualquer**

São Carlos  
Dezembro de 2009



AREF KALILO LIMA KZAM

**Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos  
de Ordem Qualquer**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

Dezembro de 2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

K99f Kzam, Aref Kalilo Lima  
Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer/ Aref Kalilo Lima Kzam ; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2009.


Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2009.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Elementos de ordem qualquer. 3. Mecânica da fratura. 4. Fator de intensidade de tensão. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro AREF KALILO LIMA KZAM.

Dissertação defendida e julgada em 07/12/2009 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **PAULO SOLLERO**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho à minha Família, que confiou e acreditou em meus objetivos e à minha noiva Rafaela pelo carinho e apoio.





## **AGRADECIMENTO**

Agradeço,

Aos Professores Humberto Breves Coda e Wilson Sérgio Venturini, cujos ensinamentos, dedicação e amizade foram fundamentais para a concretização deste trabalho.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), que disponibilizaram toda a infra-estrutura e atenção.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que concedeu o auxílio financeiro durante o período do mestrado.

Aos amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas que estiveram sempre à disposição, contribuindo com valiosas idéias e compartilhando conhecimentos.

“Aforismo 246 – Matemática – Queremos, até onde for possível, introduzir a sutileza e o rigor da matemática em todas as ciências; não que imaginemos, com isso, que chegaremos a conhecer as coisas; queremos somente constatar a nossa relação com elas. A matemática não é mais do que o meio para o conhecimento geral e último dos homens.”<sup>1</sup>

Friedrich Wilhelm Nietzsche

---

<sup>1</sup> Nietzsche, F.W. **A Gaia Ciência**. São Paulo: Editora Martin Claret, 2004. 247 p. (Coleção A Obra-Prima de Cada Autor, 130).

## RESUMO

KZAM, A. K. L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. 2009. 186 f. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

Neste trabalho, apresenta-se a formulação do método dos elementos de contorno dual (MECD) aplicada a análise de problemas da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL). O objetivo da pesquisa consiste em avaliar o fator de intensidade de tensão (FIT) de sólidos bidimensionais fraturados, por meio de três técnicas distintas, quais são: A técnica da correlação dos deslocamentos, a técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura e a técnica da integral  $J$ . As análises são realizadas utilizando o código computacional desenvolvido durante a pesquisa, que incorpora as formulações diretas em deslocamento e em força de superfície, do método dos elementos de contorno (MEC), com destaque para a utilização dos elementos de contorno curvos de ordem qualquer. No MECD as equações integrais singulares do tipo  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$  são avaliadas satisfatoriamente com o Método da Subtração de Singularidade (MSS). Dessas integrais resultam termos analíticos, os quais são avaliados por meio do Valor Principal de Cauchy (VPC) e da Parte Finita de Hadamard (PFH). Compara-se o código desenvolvido com as soluções analíticas encontradas na literatura inclusive na análise de sólidos com fraturas predefinidas e para a avaliação do FIT, que produziram bons resultados.

Palavras chave: Método dos elementos de contorno. Elementos de ordem qualquer. Mecânica da fratura. Fator de intensidade de tensão.

## ABSTRACT

KZAM, A. K. L. **Dual Boundary Element Formulation in Fracture Mechanics Using Curved Element of Any Order.** 2009. 186 f. Master Dissertation – School of Engineering of Sao Carlos, University of Sao Paulo, 2009.

This work presents the dual boundary element formulation applied to linear crack problem. The goal of this research is the evaluation of stress intensity factor for two-dimensional crack problem using three different techniques, which are: the technique of correlation of displacements, the technique based on the state of tension at the crack tip and J integral. The analysis is performed using the computational code developed during the research, which incorporates the direct formulations related to displacement and traction boundary element equation. A greater emphasis is given to the use of curved boundary element of any order. In the dual boundary element method the singular integral equations with singular others  $O(r^{-1})$  and  $O(r^{-2})$  are assessed satisfactorily with the application of the singularity subtraction method. The results of these singular integrals are evaluated by the Cauchy Principal Value and the Hadamard Finite Part. The code developed is compared with the analytical solutions found in the literature including the analysis of solids with fractures default and evaluation of stress intensity factor, which produced good results.

Keywords: Boundary element method. Any order elements. Fracture mechanics. Stress intensity factor.

## SUMÁRIO

1.	Introdução .....	17
1.1.	Apresentação .....	17
1.2.	Objetivos.....	17
1.3.	Metodologia.....	18
1.4.	Organização da Dissertação.....	18
2.	Revisão Bibliográfica .....	21
2.1.	Apresentação .....	21
2.2.	O MEC no Contexto da Teoria da Elasticidade e da Mecânica da Fratura Elástica Linear 21	21
2.3.	O “Estado da Arte” no SET-EESC.....	25
3.	Fundamentos da Teoria da Elasticidade .....	31
3.1.	Apresentação .....	31
3.2.	Hipóteses Básicas da Teoria da Elasticidade Linear .....	31
3.3.	Equações Básicas da Teoria da Elasticidade Linear.....	31
3.3.1.	Equações de Equilíbrio .....	32
3.3.2.	Equações de Compatibilidade .....	34
3.3.3.	Equações Constitutivas.....	34
3.3.4.	Estado Plano de Tensão.....	35
3.3.5.	Estado Plano de Deformação.....	36
3.3.6.	Equações de Navier-Cauchy.....	37
4.	Formulação Integral da Elasticidade Linear .....	39
4.1.	Apresentação .....	39
4.2.	Método dos Resíduos Ponderados.....	39
4.2.1.	Conceitos Fundamentais.....	40
4.2.2.	Exemplo de Aplicação.....	42
4.2.3.	Método Geral.....	43
4.2.4.	Aplicações na Elasticidade Linear.....	45
4.3.	Soluções Fundamentais .....	48
4.4.	Equações Integrais de Contorno .....	55
4.5.	Equações Integrais de Contorno para Pontos no Contorno .....	57
4.5.1.	Formulação em Deslocamento .....	57
4.5.2.	Formulação em Tensões .....	60
4.5.3.	Formulação em Força de Superfície.....	61
4.6.	Equações Integrais de Contorno para Pontos no Domínio.....	62
4.6.1.	Deslocamentos Internos.....	62
4.6.2.	Deformações Internas .....	62
4.6.3.	Tensões Internas .....	62
5.	Método dos Elementos de Contorno .....	63
5.1.	Apresentação .....	63
5.2.	Discretização das Equações Integrais de Contorno.....	63
5.2.1.	Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer .....	64
5.2.2.	Elementos de Contorno Isoparamétricos.....	70
5.2.3.	Solução Algébrica do Sistema de Equações.....	72

5.3.	Método da Subtração de Singularidade .....	75
5.3.1.	Formulação em Deslocamento .....	79
5.3.2.	Formulação em Força de Superfície .....	87
5.4.	Exemplos.....	97
5.4.1.	Exemplo 1: Cilindro Pressurizado com Pressão Interna (CPPI).....	98
5.4.1.1	Dados do Problema .....	99
5.4.1.2	Modelos.....	100
5.4.1.3	Análise dos Resultados .....	100
5.4.2.	Exemplo 2: Cavidade Pressurizada no Meio Infinito (CPMI).....	108
5.4.2.1	Dados do Problema .....	108
5.4.2.2	Modelos.....	109
5.4.2.3	Análise dos Resultados .....	109
5.4.3.	Exemplo 3: Chapa Tracionada com Furo Elíptico (CTFE) .....	118
5.4.3.1	Dados do Problema .....	120
5.4.3.2	Modelos.....	120
5.4.3.3	Análise dos Resultados .....	120
6.	Mecânica da Fratura.....	129
6.1.	Apresentação .....	129
6.2.	Notas Históricas .....	129
6.3.	Mecânica da Fratura Elástica Linear.....	131
6.3.1.	O Critério Energético de Griffith.....	131
6.3.2.	A Abordagem de Irwin-Orowan .....	136
6.3.3.	Métodos Experimentais.....	139
6.3.4.	Métodos Analíticos .....	140
6.3.5.	Métodos Numéricos .....	148
6.3.5.1	Método dos Elementos de Contorno Dual .....	148
6.3.5.2	Fator de Intensidade de Tensão.....	151
6.4.	Exemplos.....	158
6.4.1.	Exemplo 1: Chapa Tracionada com Fratura na Borda (CTFB) .....	159
6.4.1.1	Dados do Problema .....	160
6.4.1.2	Modelos.....	160
6.4.1.3	Análise dos Resultados .....	161
6.4.2.	Exemplo 2: Chapa com Fratura Inclinada no Centro (CFIC).....	171
6.4.2.1	Dados do Problema .....	172
6.4.2.2	Modelos.....	172
6.4.2.3	Análise dos Resultados .....	172
6.4.3.	Exemplo 3: Chapa com Tração Biaxial e Fratura Curva (CTBFC).....	178
6.4.3.1	Dados do Problema .....	178
6.4.3.2	Modelos.....	178
6.4.3.3	Análise dos Resultados .....	179
7.	Conclusões e Sugestões .....	183
8.	Referências Bibliográficas .....	187
9.	Apêndice I.....	195
9.1.	Solução Fundamental de Kelvin .....	195

# **1. Introdução**

## **1.1. Apresentação**

Pequenos defeitos na estrutura dos meios materiais são uma das principais causas de acidentes na engenharia. A compreensão dos mecanismos desses defeitos é importante na concepção de projetos estruturais. O ramo da ciência que estuda as falhas presentes na integridade dos materiais denomina-se mecânica da fratura e se preocupa em analisar os esforços próximos às fraturas e suas conseqüências no comportamento global da estrutura.

Compreender esse fenômeno não é uma tarefa elementar, seja em razão da complexidade matemática do problema, ou das limitações físicas de se reproduzir protótipos em laboratórios. Para se estudar qualitativa e quantitativamente esse fenômeno utiliza-se os métodos numéricos, cujas soluções fornecem uma idéia do comportamento do sistema físico. Um método eficiente para se representar esse fenômeno é o método dos elementos de contorno, assunto que será abordado nesta dissertação.

## **1.2. Objetivos**

Dividem-se os objetivos desta pesquisa em duas categorias: Objetivos principais e objetivos complementares, quais são:

**Objetivos principais:** Consistem em desenvolver a formulação singular, em deslocamento e em força de superfície, do método dos elementos de contorno (MEC) empregando elementos curvos de ordem qualquer. A finalidade desse estudo consiste em aplicar essas duas formulações na análise de problemas de sólidos fraturados. Para tanto, desenvolve-se um código computacional capaz de incorporar essas formulações. Por fim, avalia-se um parâmetro bastante importante da mecânica da fratura, denominado fator de intensidade de tensão.

**Objetivos complementares:** Esses objetivos consistem em desenvolver o método da subtração de singularidade na regularização das integrais singulares dos deslocamentos e das forças de superfície. Aplicar os polinômios de Lagrange na generalização da ordem de aproximação da geometria e das variáveis físicas do problema. Desenvolver o método dos

elementos de contorno dual e, finalmente, aplicá-los na análise do fator de intensidade de tensão da mecânica da fratura elástica linear (MFEL).

### **1.3. Metodologia**

Tendo em vista atender aos objetivos desta pesquisa, adota-se a seguinte metodologia para a apresentação do conteúdo deste trabalho. Primeiramente, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica dos principais trabalhos consultados durante a pesquisa. Em seguida, apresentam-se os aspectos teóricos necessários para o desenvolvimento das formulações integrais, recorrendo-se aos conceitos matemáticos à medida que forem necessários. Posteriormente, apresentam-se os aspectos numéricos e computacionais do método dos elementos de contorno, utilizando exemplos para a validação do código computacional implementado. Por fim, apresenta-se o método dos elementos de contorno dual aplicado a problemas da mecânica da fratura, com a finalidade de determinar os fatores de intensidade de tensão.

### **1.4. Organização da Dissertação**

Nesta dissertação constam sete capítulos organizados com a finalidade de transmitir o conteúdo da pesquisa, desde os conceitos fundamentais da teoria da elasticidade e da mecânica da fratura, até a elaboração da ferramenta computacional com a utilização do método dos elementos de contorno.

Segue a apresentação dos capítulos e seus respectivos conteúdos:

Capítulo 2. Neste capítulo, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica acerca dos trabalhos consultados durante a pesquisa. Apresenta-se também, o estado da arte acerca dos trabalhos produzidos no Departamento de Engenharia de Estruturas, referentes ao tema desta dissertação.

Capítulo 3. Neste capítulo apresentam-se os fundamentos matemáticos da teoria da elasticidade e as hipóteses fundamentais assumidas na análise dos sólidos bidimensionais. O objetivo do capítulo é fornecer os subsídios para a compreensão das equações integrais de contorno.



Capítulo 4. Neste capítulo apresenta-se a formulação geral do método dos resíduos ponderados e suas implicações no desenvolvimento das equações integrais de contorno. Apresentam-se também as equações integrais que governam as formulações em deslocamento e força de superfície. Por fim, apresentam-se a formulação integral para as variáveis de domínio. Neste capítulo, destaca-se o cálculo das soluções fundamentais, cuja obtenção é apresentada por meio de um procedimento geral descrito no apêndice I.

Capítulo 5. Neste capítulo descreve-se o método dos elementos de contorno e suas particularidades em relação à implementação computacional. Apresenta-se também, o procedimento de generalização da ordem da aproximação da geometria e das variáveis físicas do problema. Ainda neste capítulo, apresentam-se o método da subtração de singularidade para os núcleos das integrais singulares. Por fim, apresentam-se alguns exemplos resolvidos, com o objetivo de validar as formulações propostas, assim como, o código computacional desenvolvido.

Capítulo 6. Neste capítulo, são apresentados os fundamentos da mecânica da fratura. Destaca-se, em particular, o método dos elementos de contorno dual usado para avaliar os campos de deslocamento, tensão e deformação próximos a extremidade da fratura. Por fim, descrevem-se as estratégias adotadas na obtenção dos fatores de intensidade de tensão. Neste capítulo analisam-se os exemplos que confirmam a utilização do método dos elementos de contorno, como uma potencial ferramenta para análise de problemas da mecânica da fratura.

Capítulo 7. Este capítulo destina-se às conclusões obtidas após a simulação dos modelos. Expõem-se também, as sugestões para trabalhos futuros, inclusive as que serão estudadas durante o doutoramento do autor.



## **2. Revisão Bibliográfica**

### **2.1. Apresentação**

Este capítulo está dividido em dois itens. No primeiro, apresentam-se os trabalhos de divulgação do método dos elementos de contorno (MEC) que foram consultados durante a pesquisa das aplicações do MEC na teoria da elasticidade e na mecânica da fratura. No segundo item, apresenta-se o “estado da arte” acerca das teses e dissertações produzidas no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET-EESC) direcionada ao emprego do MEC na mecânica da fratura.

### **2.2. O MEC no Contexto da Teoria da Elasticidade e da Mecânica da Fratura Elástica Linear**

Os fundamentos do MEC têm como base as formulações clássicas das equações integrais de contorno (EIC). Os trabalhos pioneiros em teoria da elasticidade empregando essas equações são atribuídos a Betti (1872), Somigliana (1886), Fredholm (1906), Muskhelishvili (1953) e Kupradze (1965). Embora esses trabalhos sejam relevantes, nesta dissertação, ressalta-se apenas a importância histórica de suas contribuições.

Na publicação de Massonnet et al. (1965), a formulação clássica das EIC apresentam as primeiras características de estratégia numérica nos mesmos padrões do método dos elementos finitos (MEF). Nesse trabalho o autor aplica o chamado método indireto, uma vez que as variáveis do contorno são grandezas fictícias.

O trabalho de Rizzo (1967) em elasticidade bidimensional e o de Cruse (1969) em elasticidade tridimensional são os primeiros que utilizam os deslocamentos e as forças de superfície sobre o contorno para representar as variáveis físicas do problema. Nesses trabalhos são introduzidas as aproximações para descrever as variáveis físicas por meio de entidades matemáticas discretas.

As contribuições de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976) apresentaram a generalização do procedimento numérico empregando representações paramétricas dos elementos sobre o contorno. Esses autores utilizaram funções de aproximação lineares, quadráticas e cúbicas para aproximar as variáveis físicas do problema. Nesses trabalhos

também foram propostos métodos de integração para análise das EIC singulares além de um método para a resolução numérica de sistemas por meio de blocos de matrizes.

Brebbia (1978.a) demonstrou as EIC por meio do método dos resíduos ponderados. Nesse trabalho, o estudo foi realizado sobre equação de Laplace para resolver problemas da teoria do potencial. Em Brebbia (1978.b) há a extensão do MRP à análise de problemas da teoria da elasticidade. A base dessa formulação permite associar o MEC as demais classes de métodos numéricos, como por exemplo, o MEF e o método das diferenças finitas (MDF).

Brebbia também introduziu a denominação utilizada atualmente, designando o método das integrais de contorno como “Método dos Elementos de Contorno”. A nova metodologia possibilitou inúmeros desenvolvimentos com o MEC e nos mais variados campos da engenharia. Uma dessas aplicações é na mecânica da fratura elástica linear (MFEL).

A seguir, destacam-se os trabalhos relacionados à MFEL. Apresentam-se primeiramente, os trabalhos clássicos sobre o assunto. Em seguida apresentam-se aqueles que empregam o MEC em análises de sólidos fraturados.

A primeira referencia a cerca da fratura remete ao trabalho do pesquisador renascentista Galileu Galilei (1564-1642). Em seus diálogos, Galileu apresenta as idéias e os modelos acerca da “resistência que os sólidos oferecem a fratura”, intitulando-a de “primeira nova ciência”. A partir desse trabalho o método científico foi formalizado e inúmeras pesquisas nos moldes do trabalho de Galileu proporcionaram avanços significativos no estudo da mecânica da fratura.

Segundo Rossmann (1997) o trabalho pioneiro que trata da abordagem analítica da mecânica da fratura é de Wieghardt (1907). Nesse artigo o autor parte de uma hipótese estabelecida por Sommerfeld para determinar o campo de tensão em torno de uma fratura no problema denominado problema de Bach. Rossmann (1995) afirma que essa publicação não se destacou em razão do jornal em que foi impressa ter encerrado suas tiragens e conseqüentemente não ter legado a merecida importância ao artigo.

Todavia, alguns pesquisadores como, por exemplo, Papadopoulos (1993) atribui a Inglis (1913) a publicação do primeiro trabalho com os fundamentos analíticos da mecânica da fratura. Em Inglis (1913) *apud* Papadopoulos (1993) é apresentada a solução do problema

da distribuição de tensão em torno de uma abertura elíptica inserida em um meio elástico infinito submetido a um estado biaxial de tração.

Em Cotterell (1997) e em Erdogan et al. (1997) são dados os méritos aos trabalhos de Griffith (1921, 1924) devido à iniciativa de aplicar a teoria da mecânica da fratura em problemas de engenharia. Cotterell (1997) relata que em 1915 A. A. Griffith sob a supervisão de G. I. Taylor realizou experimentos na “*Royal Aircraft Establishmen*” para medir os campos de tensão próximos aos entalhes das peças utilizadas nos aviões de combate da Primeira Guerra Mundial. Segundo Cotterell (1997), nos artigos de Griffith o autor recorre aos conceitos da termodinâmica para estabelecer um critério de equilíbrio energético e utiliza os resultados de Inglis (1913) para calcular a redução da energia potencial do sistema mecânico devido à formação de novas superfícies de fratura.

Segundo Papadopoulos (1993) um considerável progresso na mecânica da fratura, em especial da MFEL foi atingido devido aos trabalhos de Irwin (1948, 1957) e de Orowan (1950). Em Irwin (1948) são apresentados os campos de tensão na extremidade da fratura. O autor conclui que a fratura se propaga de acordo com três tipos de mecanismos independentes de deformação e são associadas a uma grandeza denominada fator de intensidade de tensão.

Para algumas estruturas com geometria e condições de contorno relativamente simples, os fatores de intensidade de tensão (FIT) são apresentados em alguns manuais tais como em Irwin (1958), Tada et al. (1973), Rooke et al. (1987), Murakami (1987) e mais recentemente, em arquivo digital como em López e Aliabadi (1996). Para os casos com geometria e condições de contorno mais complexas é necessário se adotar um procedimento numérico para solucionar o problema. O MEC é uma dentre as várias ferramentas numéricas disponíveis. O desenvolvimento desse método e suas aplicações na mecânica do fraturamento serão apresentados a seguir.

Antes da formalização do MEC, proposta por Brebbia. Cruse e Van Buren (1971) utilizaram o método das EIC para analisar os campos de tensões próximos a fratura. Os autores consideraram os efeitos provocados por uma fratura plana inserida em um sólido tridimensional e verificaram que os resultados obtidos não eram significativos, o que tornou a técnica obsoleta. Mas, as pesquisas com o método das EIC continuaram sendo desenvolvidas até que Snyder e Cruse (1975) propuseram uma nova estratégia de solução, com base nas funções de Green. Essa metodologia consiste em obter a solução fundamental para sólidos de

domínio infinito com uma fratura preexistente. Destaca-se também nessa área, o trabalho de Ang e Clements (1987), porém, os resultados obtidos por eles apresentam algumas restrições, sendo aplicados a casos especiais quando as condições de contorno e geometria do problema são elementares. Telles e Guimarães (2000) apresentam uma proposta mais genérica para vários tipos de configuração do meio fraturado.

Outra estratégia utilizando o MEC na avaliação de sólidos fraturados consiste na técnica das sub-regiões, na qual a fratura é considerada um contorno fictício dividindo o domínio em regiões distintas.

Blandford et al. (1981) e Weeën (1983) empregaram as formulações em deslocamento do MEC, para simular o crescimento da fratura por meio da técnica da sub-região. Nesses trabalhos cada face da fratura representa o contorno das sub-regiões, sendo necessário realizar a compatibilização dos deslocamentos e das forças de superfície na interface. Essa metodologia apresenta alguns inconvenientes, tais como, a reordenação dos pontos do domínio, uma vez que esses pontos podem coincidir com as faces das sub-regiões e produzir valores singulares no sistema algébrico.

Crouch (1976) apresenta um método que consiste em descrever o problema da fratura por meio de uma única região. Nesse método, a solução fundamental do meio infinito é obtida considerando-se uma descontinuidade nos deslocamentos dos pontos do domínio. Para implementar esse método introduz-se uma nova variável, obtida por meio da diferença dos deslocamentos das faces da fratura. A finalidade desse procedimento é se evitar a coincidência entre os pontos fontes de modo a garantir a existência da solução do sistema de equações. O principal inconveniente dessa estratégia consiste na introdução das novas variáveis, uma vez que nessa formulação deverão ser adicionadas equações extras na resolução do sistema. Sladek et al. (1986) apresentam os detalhes desse método.

Outra metodologia importante se baseia na formulação das EIC em deslocamentos e força de superfície do MEC, tal como será adotado nesta dissertação. O método consiste em aplicar as EIC em deslocamento em uma das faces da fratura e as equações em força de superfície na face oposta. Esse procedimento permite introduzir equações independentes para pontos fontes coincidentes, evitando singularidade algébrica e utilizando-se uma única região. A base dessa metodologia foi apresentada primeiramente no trabalho de Bueckner (1973).

Watson (1986, 1988) aplica essa técnica na análise de sólidos bidimensionais, porém, com a limitação de estudar apenas as fraturas que interceptam a contorno do problema. Gray et al. (1990) aplicam o método em problemas tridimensionais, utilizando as formulações em deslocamento e derivadas dos deslocamentos.

Atualmente, a técnica ganhou maior difusão em análises de problemas da mecânica da fratura. Portela (1992.a) faz referencia ao método utilizando a denominação de método dos elementos de contorno dual (MECD). Portela et al. (1992.b, 1993, 2004) apresentam as principais aplicações do método para a determinação de vários parâmetros da teoria numérica da MFLE. Outros autores, também apresentam os desenvolvimentos do MECD, tais como em, Mi e Aliabadi (1992, 1994, 1995), Blackburn e Hall (1994), Chang e Mear (1995). Lutz et al. (1992).

Devido a versatilidade do MECD, varias aplicações se estenderam em diferentes tipos de análise, como é o caso dos trabalhos de Pan e Amadei (1996), Pan e Yuan (2000) e Sollero e Aliabadi (1995) que são aplicados a problemas com materiais anisotrópicos.

Em problemas elastoplásticos destaca-se o MECD nos trabalhos de Leitão et al. (1995.a, 1995.b).

Fedelinski, et al. (1993, 1997) aplicam o MECD em problemas elastodinâmicos. Na teoria de placas e cascas há também um notável desenvolvimento das aplicações do MECD, como por exemplo, em Ahmadi-Brooghani e Wearing (1996) e Dirgantara e Aliabadi (2001). Em problemas termoelásticos as aplicações são encontradas em Prasad et al. (1994, 1996). Em Aliabadi (1997), há uma revisão detalhada sobre as nuances do método.

A seguir, apresenta-se o “estado da arte” acerca dos trabalhos em mecânica da fratura utilizando o MEC até então produzidos no Departamento de Engenharia de Estruturas.

### **2.3. O “Estado da Arte” no SET-EESC.**

O programa de pós-graduação em Engenharia de Estruturas originou-se com a regulamentação estabelecida na década de 1970 após a departamentalização das unidades da USP. A partir de 1994, o Departamento de Estruturas passou a ser oficialmente intitulado de Departamento de Engenharia de Estruturas ligado a Escola de engenharia de São Carlos (SET-EESC).

As atividades do programa de pós-graduação do SET incluem a formação *strictu sensu* nos níveis de mestrado e doutorado nas grandes áreas da Engenharia de Estruturas, sendo uma delas a análise de estruturas via métodos numéricos. Nessa área destacam-se os estudos do método dos elementos de contorno, cujos trabalhos do SET são importantes referências no cenário científico nacional e internacional.

No SET, os estudos com o MEC se iniciaram após a conclusão da tese de doutoramento de Venturini (1982). No ano de 1983 a disciplina foi oferecida pela primeira vez no programa de pós-graduação. A partir de então, sessenta e oito trabalhos do tipo dissertações, teses e textos de livres docências já foram concluídas no Departamento. Mais de dez por cento das pesquisas do SET referem-se ao assunto. Em razão desses números apresenta-se o “estado da arte” acerca das pesquisas com o MEC aplicadas a mecânica da fratura.

Dos sessenta e oito trabalhos com o MEC, doze deles destinam-se ao estudo da mecânica da fratura, um pouco mais de dezessete por cento das pesquisas com o MEC.

O primeiro trabalho que faz referencia aos problemas de descontinuidades é de autoria de Rocha (1988). Nesse trabalho o autor desenvolve a formulação indireta do MEC para avaliar as descontinuidades provocadas por problemas de barragens, escavações e túneis. As descontinuidades presentes nas análises são representadas por superfícies de contato curvas, cujos efeitos são avaliados com a introdução de forças fictícias denominadas bipolos e quadripolos. A análise dessas descontinuidades é estendida a materiais em regime elasto-plásticos e elasto-visco-plásticos. De modo geral, os resultados obtidos nesse trabalho, apresentaram bons resultados para os campos de tensão e deslocamento quando comparados as soluções obtidas com o MEF.

Lopes Júnior em (1996) adotou o modelo de fratura coesiva para estudar a propagação da fratura em domínios bidimensionais. A formulação adotada pelo autor se baseia nas equações integrais em tensões e deslocamentos, no qual a superfície da fratura é caracterizada por uma linha de tensão segundo o conceito de bipolo. Nesse trabalho foi considerado um modelo de fratura fictícia conforme proposto por Hillerborg et. al.(1976). Foram utilizados também, elementos de contorno isoparamétricos lineares. As interais singulares foram calculadas analiticamente enquanto que as integrais não singulares foram avaliadas por meio da técnica da sub-elementação.



Agostinho (1998) apresentou um estudo de associação de chapas com características físicas diferentes, para a análise de abertura de fratura de materiais enrijecidos. Nesse trabalho o autor utilizou os conceitos de fratura coesiva para examinar o comportamento de sólidos bidimensionais fraturados. Examinou também, o acoplamento MEC/MEF a fim de estudar o escorregamento dos enrijecedores em modelos plásticos e visco-plástico.

Rocha (1999) apresentou uma formulação do balanço termodinâmico da mecânica da fratura no qual utiliza o método dos elementos de contorno para prever o valor da taxa de liberação de energia,  $G$  de um sólido contendo uma fratura ou várias fraturas predefinidas. Nesse trabalho foi desenvolvido um código computacional capaz de estimar o valor da integral  $J$ , por meio do parâmetro  $G$ .

No que se segue, apresentam-se, os trabalhos que versam sobre a mecânica da fratura aplicada a problemas dinâmicos. O primeiro trabalho nessa área foi realizado por Barbirato (1999) em que investiga a utilização do MEC em problemas tridimensionais de fraturamento no regime transiente. Esse autor emprega o método da reciprocidade dual para transformar as equações integrais de domínio em equações integrais de contorno, assim como aplica a discretização do domínio por células. O autor emprega o conceito de dipolo de tensão na análise de modelos de fratura coesiva. A integração temporal é realizada por meio dos algoritmos de Newmark e Houbolt.

O outro trabalho nessa mesma linha é de Maciel (2003) que trata da avaliação dos fatores de intensidade de tensão estático e dinâmicos de problemas bidimensionais. Nesse trabalho o autor introduz uma formulação alternativa do MEC no qual utiliza as integrais analíticas dos deslocamentos associadas aos elementos de contorno lineares para caracterizar a geometria das faces da fratura dispostas paralelamente uma a outra. Para aproximar os campos de deslocamentos e forças de superfície, o autor considera a variação quadrática desses parâmetros, o que caracteriza uma formulação superparamétrica do MEC. Os termos de domínio são avaliados por meio de células triangulares e é empregado o algoritmo de Houbolt na predição temporal das integrais.

Dentro do que propõe a presente dissertação, as principais referências do trabalho são as dissertações de Leonel (2006), Lovón (2006) e Vincentini (2006), os quais utilizaram a fundamentação teórica do MECD.

Em Leonel (2006) foram estudados os sólidos multi-fraturados a partir da implementação numérica do MECD e da formulação em deslocamento. No tocante ao estudo da propagação da fratura foi estudada uma estratégia especial de avaliação dos fatores de intensidade de tensão na extremidade de cada nova fratura. Para esse fim, o autor utilizou a técnica da correlação dos deslocamentos e a técnica com base em Maciel (2003). Após essa análise, foram empregadas quatro diferentes teorias de interação de modos de fraturamento onde são determinados os ângulos de propagação da fratura. Nesse trabalho foram empregados elementos de contorno isoparamétricos lineares e as equações integrais foram avaliadas analiticamente e por meio da técnica de sub-elementação.

Em Lovón (2006) foi utilizada a formulação do MECD para determinar o FIT com base na técnica da correlação dos deslocamentos. Foi utilizada também a teoria da máxima tensão circunferencial para prever o ângulo de propagação da fratura. Nesse trabalho, o autor utilizou um processo de adaptabilidade hierárquica para avaliar as variáveis físicas do problema, assim como, para o cálculo da energia de deformação do sistema. Nesse estudo foram empregados elementos de contorno reto com aproximação linear. As integrais resultantes foram calculadas analiticamente e também pelo método da sub-elementação.

Vincentini (2006) também explorou as potencialidades do MECD na análise de meios bidimensionais fraturados. Nesse trabalho a autora verificou a aplicação isolada das equações em deslocamento e em força de superfície nos problemas da MFEL, em seguida estendeu a aplicação do trabalho ao estudo do modelo coesivo. Nesse trabalho foram utilizadas as soluções analíticas e com sub-elementação para avaliar as equações singulares e não singulares com elementos de contorno linear.

As pesquisas mais recentes realizadas no Departamento acerca do estudo da mecânica da fratura com o MEC são resultados de aplicações da análise inversa e do estudo de descontinuidades de deslocamentos. Esses trabalhos são apresentados logo a seguir.

Ferreira (2007) desenvolveu um trabalho que trata da determinação de parâmetros físicos por meio da análise inversa de problemas de valor de contorno. Dentro desse estudo, o autor destaca a técnica de multi-regiões empregando o MEC na avaliação de os parâmetros do modelo coesivo por meio de medidas do campo de deslocamento de sólidos bidimensionais. Nesse trabalho foi adotada a formulação clássica do MEC, no qual emprega elementos de contorno lineares.

Pedrini (2008) estudou a formação e propagação de descontinuidades representadas por uma frente de fraturamento no qual incorpora a ação de descontinuidades de células bidimensionais. Nesse método o autor verifica a formação e propagação da fratura de materiais quase-frágeis dando ênfase aos modelos físicos e matemáticos adotados do concreto.

Ao se apresentar as pesquisas com o MEC, realizadas no Departamento, é possível verificar a evolução do conhecimento a cerca das aplicações do método, no campo da mecânica da fratura.

Com o intuito de estender ainda mais as aplicações do método, propõe-se uma nova filosofia de estudo que se fundamenta no aprimoramento das equações integrais de contorno com a introdução de elementos curvos de qualquer ordem de aproximação, tanto no tratamento de contornos ordinários quanto no tratamento das faces da fratura, além do método da subtração de singularidade para avaliar as integrais singulares do MEC.



## **3. Fundamentos da Teoria da Elasticidade**

### **3.1. Apresentação**

Neste capítulo, apresentam-se as leis matemáticas que governam a teoria da elasticidade. Ressaltam-se os pontos essenciais da teoria, com a finalidade de facilitar a compreensão para os próximos desenvolvimentos. Esse capítulo é introdutório, maiores aprofundamentos são encontrados, por exemplo, em Timoshenko e Goodier (1970) e Sadd (2000).

### **3.2. Hipóteses Básicas da Teoria da Elasticidade Linear**

Os desenvolvimentos deste trabalho são fundamentados nas seguintes considerações:

— O estudo é realizado apenas para os estados bidimensionais de tensão e de deformação.

— O meio material é perfeitamente elástico e satisfaz as condições de homogeneidade e isotropia.

— O estudo é realizado para as teorias de pequenos deslocamentos e deformações.

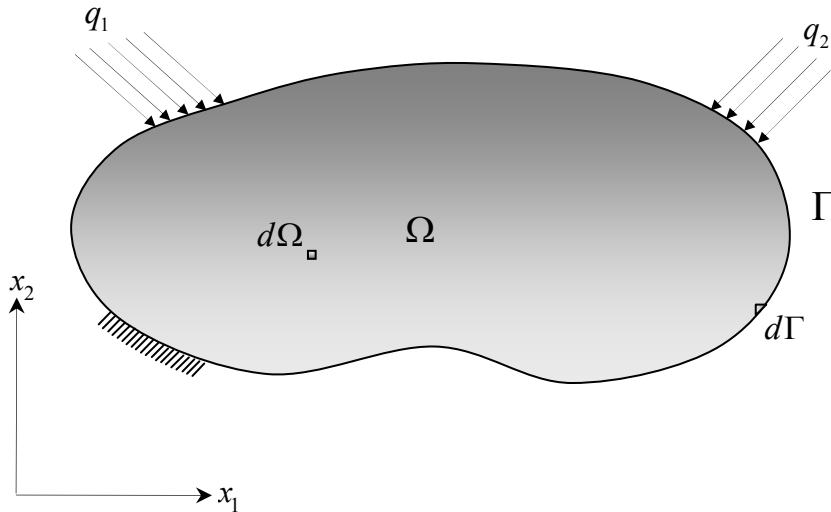
Posto isso, a seguir, apresentam-se às equações que governam a teoria da elasticidade linear.

### **3.3. Equações Básicas da Teoria da Elasticidade Linear**

As relações matemáticas da teoria da elasticidade são fundamentais para compreender o desenvolvimento das equações integrais de contorno. Assunto que será tratado no próximo capítulo. Por isso, apresentam-se neste item, as principais equações que descrevem a teoria da elasticidade linear bidimensional.

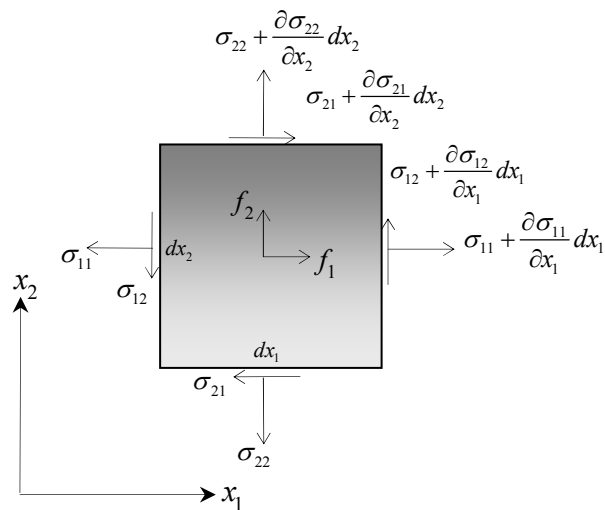
### 3.3.1. Equações de Equilíbrio

Seja um sólido bidimensional com o domínio  $\Omega$  limitado por um contorno regular  $\Gamma$ , sujeito a uma ação estática de carregamento, conforme ilustra a Figura 3.1.



**Figura 3.1: Sólido bidimensional.**

O estado de tensão no interior do sólido é representado por meio das componentes de tensão analisadas no elemento infinitesimal  $d\Omega$ , como na Figura 3.2.



**Figura 3.2: Estado de tensão no elemento infinitesimal de domínio.**

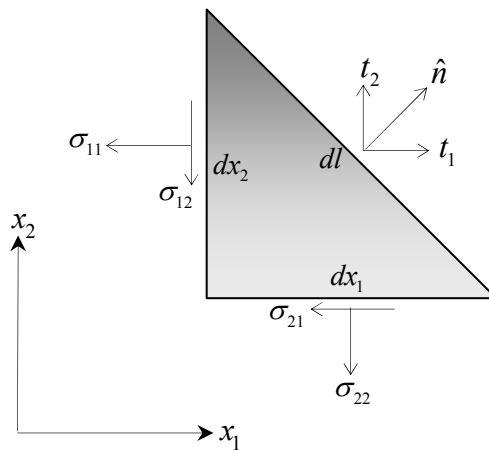
De posse das componentes de tensão, apenas três delas são necessárias para representar o estado de tensão no interior de  $\Omega$ , isso porque, após realizar o equilíbrio dos momentos, obtêm-se as relações complementares de cisalhamento:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i = 1, 2. \quad (3.1)$$

As equações de equilíbrio de forças, incluindo as forças de corpo são dadas por:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

No contorno  $\Gamma$ , o equilíbrio de forças é obtido em função dos cossenos diretores e das componentes das forças de superfície no elemento infinitesimal da Figura 3.3.



**Figura 3.3: Estado de tensão no elemento infinitesimal de contorno.**

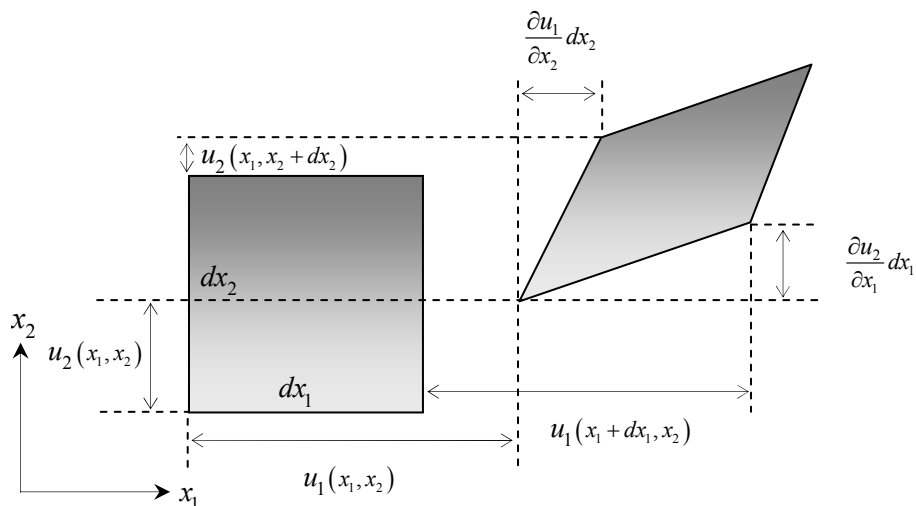
Os cossenos diretores são as projeções do versor normal em relação à face de comprimento  $dl$ . O equilíbrio no contorno  $\Gamma$  é representado pela equação:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é denominada condições de contorno de Cauchy.

### 3.3.2. Equações de Compatibilidade

Para definir as equações de compatibilidade é necessário descrever o estado de deformação do elemento infinitesimal como na Figura 3.4.



**Figura 3.4: Deformações específicas.**

Os deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  são paralelos as direções do plano cartesiano, portanto, as deformações específicas em notação indicial ficam representadas como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2. \quad (3.4)$$

Sendo:

$u_{i,j}$ , as derivadas dos deslocamentos.

### 3.3.3. Equações Constitutivas

No início do capítulo, foram apresentadas as hipóteses que definem as características do meio material. Para se apresentar as equações constitutivas do material, vale reescrever essas hipóteses, portanto admite-se que:

Todos os pontos do domínio  $\Omega$  apresentam as mesmas propriedades (hipótese de homogeneidade do material). Nesses pontos o material apresenta as mesmas propriedades em



qualquer direção (hipótese de isotropia). E por fim, as tensões são sempre proporcionais as deformações (hipótese básica da elasticidade linear).

A relação constitutiva da elasticidade linear é chamada lei de Hooke e apresenta a seguinte relação indicial:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (3.5)$$

Sendo:

$\delta_{ij}$ , o delta de Kronecker,

$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1-2\nu)}$ , a constante de Lamé, e

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , o módulo de elasticidade transversal.

A relação inversa entre as deformações e as tensões é calculada como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right). \quad (3.6)$$

### 3.3.4. Estado Plano de Tensão

É o estado de tensão especificado essencialmente pelas componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yy}$  do tensor de tensões, onde  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  na superfície do corpo e em seu domínio. Portanto, são válidas as seguintes relações para as deformações:

Ao longo da espessura:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \quad (3.7)$$

Nas demais direções:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}. \quad (3.8)$$

### 3.3.5. Estado Plano de Deformação

É o estado de deformação especificado essencialmente pelas componentes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\gamma_{yy}$  do tensor das deformações, onde  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  na superfície do corpo e em seu interior. Impostas essas considerações, as seguintes relações são válidas.

Para as tensões:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (3.9)$$

Para as deformações:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{yy}\right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{xx}\right) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu^2}{E}\sigma_{xy}. \quad (3.10)$$

A expressão da lei constitutiva no estado plano de deformações (EPD) pode representar os problemas no estado plano de tensões (EPT), para isso, basta se modificar os coeficientes de Poisson  $\nu$  e o módulo de elasticidade longitudinal  $E$  do material. Dessa forma, valem as seguintes transformações.

No estado plano de deformação, tem-se:  $\nu_{EPD} = \nu$  e  $E_{EPD} = E$ .

Transformando as constantes do EPD para o EPT, tem-se:

$$\nu_{EPT} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad \text{e} \quad E_{EPT} = E \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right]. \quad (3.11)$$

Assim, é possível unificar a formulação do MEC como será descrito próximo capítulo.

### 3.3.6. Equações de Navier-Cauchy

As equações de equilíbrio (3.2) podem ser expressas em função dos deslocamentos. Substituindo as relações (3.4) na equação constitutiva (3.5) e em seguida, introduzindo esse resultado nas equações de equilíbrio (3.2), chega-se na equação:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + f_i = 0. \quad (3.12)$$

Essa equação é conhecida como equações de Navier-Cauchy e expressa o equilíbrio dos pontos do domínio  $\Omega$  em função dos deslocamentos.

O equilíbrio no contorno em termos dos deslocamentos é obtido da mesma forma, basta que as substituições sejam efetuadas na equação de equilíbrio (3.3), o que resulta:

$$t_i = \lambda u_{j,j} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j. \quad (3.13)$$



## **4. Formulação Integral da Elasticidade Linear**

### **4.1. Apresentação**

Os problemas de engenharia são comumente representados por equações diferenciais parciais. Na teoria da elasticidade, essas equações são obtidas assumindo-se algumas hipóteses simplificadoras sobre o comportamento do problema físico. Uma maneira alternativa de representar esses problemas é por meio de equações integrais de contorno. Neste capítulo, apresenta-se a formulação integral aplicada a elasticidade linear.

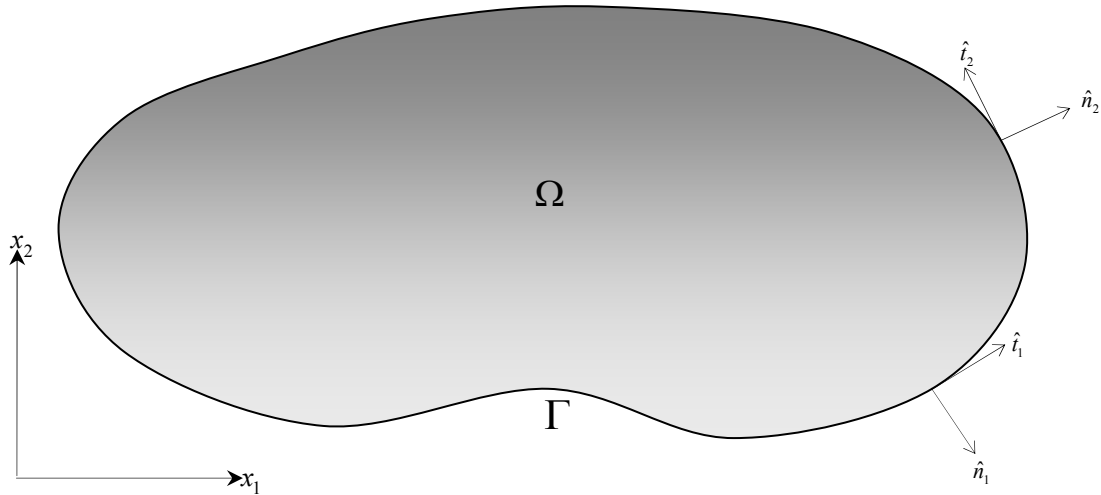
### **4.2. Método dos Resíduos Ponderados**

O método dos resíduos ponderados (MRP) é uma estratégia matemática utilizada na geração de soluções aproximadas de problemas de valor de contorno. O método consiste na minimização do erro produzido por uma aproximação quando se efetua uma ponderação sobre os resíduos da equação diferencial do problema. Essa metodologia é aplicada a uma variedade de situações práticas. Nesse capítulo, aplica-se o método sobre a equação diferencial da elasticidade linear.

Antes de iniciar a aplicação do MRP, apresenta-se a formulação matemática necessária para a compreensão do método.

### 4.2.1. Conceitos Fundamentais

Seja o sólido definido no domínio bidimensional  $\Omega$  limitado pelo contorno  $\Gamma$ . Define-se o vetor normal  $\hat{n}$ , perpendicular ao vetor tangente  $\hat{t}$  em  $\Gamma$ , de acordo com a Figura 4.1.



**Figura 4.1: Definição dos vetores normais e tangente ao contorno.**

Supõe-se que o comportamento quantitativo do sólido seja descrito pela equação diferencial parcial:

$$\mathcal{L}(u) + f = 0, \forall u \in \Omega. \quad (4.1)$$

Sendo:

$\mathcal{L}(\cdot) + f$ , um operador diferencial. O operador pode denotar uma equação diferencial, ou um conjunto de equações,

$u$ , uma função escalar ou vetorial, e

Para uma função  $w$  regular<sup>2</sup> em  $\Gamma$ . Define-se o produto interno:

$$\langle \mathcal{L}(u) + f, w \rangle = \int_{\Omega} [\mathcal{L}(u) + f] w d\Omega. \quad (4.2)$$

A proposição do MRP consiste em distribuir a ação do operador diferencial sobre a região  $\Omega \cup \Gamma$ . Essa distribuição é feita segundo uma média ponderada com a função  $w$ . Aplicando-se sucessivas integrações por partes na equação (4.2), o procedimento conduz a forma transposta do produto interno, ou seja, transfere-se a ação do operador diferencial de  $\mathcal{L}_{\Omega}(u)$  para  $\mathcal{L}_{\Omega}(w)$ , conforme a equação:

$$\int_{\Omega} [\mathcal{L}(u) + f] w d\Omega = \int_{\Omega} u [\mathcal{L}^{\dagger}(w) + f] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mathcal{N}^{\dagger}(w) \mathcal{M}(u) - \mathcal{M}^{\dagger}(w) \mathcal{N}(u)] d\Gamma. \quad (4.3)$$

Sendo:

$\mathcal{M}(\cdot)$ , e  $\mathcal{N}(\cdot)$  os operadores resultantes das integrações por partes atuando em  $\Gamma$ , e

$\mathcal{L}^{\dagger}(\cdot) + f$ ,  $\mathcal{M}^{\dagger}(\cdot)$  e  $\mathcal{N}^{\dagger}(\cdot)$  os operadores adjuntos de  $\mathcal{L}(\cdot) + f$ ,  $\mathcal{M}(\cdot)$  e  $\mathcal{N}(\cdot)$ .

A equação (4.3) associa os operadores diferenciais aos termos contendo as informações sobre as condições de contorno, como é o caso de  $\mathcal{M}(u)$  e  $\mathcal{N}(u)$ . Essa equação é conhecida como segunda identidade de Green.

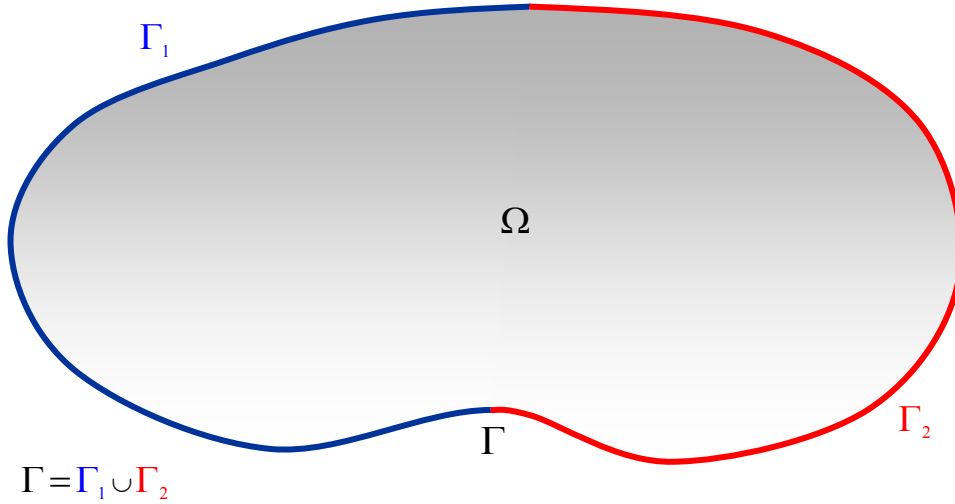
Uma propriedade importante dessa equação, afirma que se  $\mathcal{L}^{\dagger}(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot)$ , então  $\mathcal{L}(\cdot) + f$  é auto-adjunto e nesse caso, é possível provar que  $\mathcal{M}^{\dagger}(\cdot) = \mathcal{M}(\cdot)$  e  $\mathcal{N}^{\dagger}(\cdot) = \mathcal{N}(\cdot)$  também serão. Portanto, decorrem dois tipos diferentes de condições de contorno para o problema. As condições de contorno essenciais e as condições de contorno naturais, assim definidas:

Para um conjunto de valores  $\mathcal{N}(u)$ , prescritos em  $\Gamma_1$ , se estabelece um conjunto de condições essenciais ou condições de contorno de Dirichlet. Para valores prescritos de

---

<sup>2</sup> Entende-se por regular, toda função contínua de classe  $C^n$ .

$\mathcal{M}(u)$ , em  $\Gamma_2$ , se estabelece um conjunto de condições naturais ou condições de contorno de Neumann. Sendo  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  porções complementares de  $\Gamma$  como representado na Figura 4.2.



**Figura 4.2: Porções complementares de  $\Gamma$ .**

Vale lembrar que todo o operador adjunto é positivo definido se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\mathcal{L}(u) + f] u d\Omega &> 0, \quad \forall u, \\ \int_{\Omega} [\mathcal{L}(u) + f] u d\Omega &= 0 \Leftrightarrow u \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

A propriedade de positividade definida é importante para se estabelecer estratégias de solução aproximada para problemas variacionais.

#### 4.2.2. Exemplo de Aplicação

Considere a equação de equilíbrio de Navier-Cauchy:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + f_i = 0. \tag{4.5}$$

Supõe-se que  $u_i^*$  seja uma função ponderadora e que apresente a mesma natureza vetorial de  $u_j$ , porém, definida sobre o domínio  $\Omega^*$ . Adiante, justificam-se essas hipóteses. A parcela  $f_i$  representa o termo não homogêneo da equação diferencial que não será considerado neste exemplo.



O operador diferencial da equação (4.5) atua no campo vetorial dos deslocamentos  $u_j$  de  $\Omega$ . Define-se o operador da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{ij}(\cdot) = \mu(\cdot)_{,kk} \delta_{ij} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ji}. \quad (4.6)$$

O objetivo do exemplo é encontrar a forma transposta da equação (4.5) a partir do operador  $\mathcal{L}_{ij}(\cdot)$ .

Solução:

Distribui-se a ação do operador  $\mathcal{L}_{ij}(\cdot)$  em  $\Omega$ , aplicando-se o produto interno:

$$\langle \mathcal{L}_{ij}(u_j), u_i^* \rangle = \int_{\Omega} [\mu u_{j,kk} \delta_{ij} + (\mu + \lambda) u_{j,ji}] u_i^* d\Omega. \quad (4.7)$$

Integrando duas vezes por partes a equação (4.7) e a aplicando o teorema da divergência, encontra-se:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{ij}(u_j), u_i^* \rangle &= \int_{\Gamma} \mu u_{j,k} u_i^* n_k \delta_{ij} d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu u_j u_{i,k}^* n_k \delta_{ij} d\Gamma + \int_{\Omega} \mu u_j u_{i,kk}^* \delta_{ij} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} (\mu + \lambda) u_{j,i} u_i^* n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (\mu + \lambda) u_j u_{i,j}^* n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (\mu + \lambda) u_j u_{i,ji}^* d\Omega. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ao se agrupar todos os termos do domínio e do contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{ij}(u_j), u_i^* \rangle &= \int_{\Omega} [\mu u_j u_{i,kk}^* \delta_{ij} + (\mu + \lambda) u_j u_{i,ji}^*] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} (u_i^*) [\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{j,i} n_j] d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu (u_{j,i}^* + u_{i,j}^*) n_i + \lambda u_{i,j}^* n_i] (u_j) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A equação (4.9) é a forma transposta do produto interno, a menos das contribuições dos operadores diferenciais sobre o contorno  $\Gamma$ .

### 4.2.3. Método Geral

Definiu-se anteriormente, que o MRP é uma estratégia matemática aplicada na geração de soluções aproximadas de equações diferenciais. Neste tópico verifica-se o significado dessa definição, a partir das seguintes considerações.

Seja  $u_0$  uma solução analítica da equação diferencial (4.1). Essa solução satisfaz a equação diferencial:

$$\mathcal{L}(u_0) = f. \quad (4.10)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(u_0) &= n, \text{ em } \Gamma_1, \text{ e} \\ \mathcal{M}(u_0) &= m, \text{ em } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Diversas equações diferenciais parciais não apresentam soluções imediatas, em caso afirmativo, essas soluções restringem-se a problemas particulares. Por isso, é razoável, se admitir uma solução aproximada  $\tilde{u}$  para a equação (4.10).

Na prática, essas soluções são determinadas por meio da combinação linear entre os parâmetros  $\alpha_i$  e funções base  $\phi_i$ , linearmente independentes e admissíveis<sup>3</sup>:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i. \quad (4.12)$$

Essas soluções quando substituídas em (4.1) geram um resíduo do tipo,

$$\mathcal{L}(\tilde{u}) - f = \mathcal{R} \neq 0, \text{ em } \Omega. \quad (4.13)$$

A outra hipótese consiste em se adotar um tipo especial de função ponderadora. No caso geral, adota-se a função  $w$ , como sendo a combinação linear entre os parâmetros  $\beta_i$  arbitrários e funções base linearmente independentes  $\varphi_i$ :

$$w = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i. \quad (4.14)$$

---

<sup>3</sup> A condição de admissibilidade relaciona as condições de contorno ao grau de continuidade das funções base. Caso essas funções sejam admissíveis, é possível definir uma combinação linear com produto interno, norma e métrica.

Para minimizar o erro em  $\Omega$  emprega-se a definição do produto interno sobre o resíduo  $\mathcal{R}$ :

$$\int_{\Omega} \mathcal{R} w d\Omega = 0. \quad (4.15)$$

Ao se substituir a função ponderadora (4.14) na equação (4.15), distribui-se em média o resíduo sobre o domínio  $\Omega$ , da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \mathcal{R} \varphi_i d\Omega = 0, \quad \forall \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.16)$$

O mesmo acontece em  $\Gamma$ , visto que  $\tilde{u}$  é aproximado e não satisfaz exatamente as condições de contorno essenciais e naturais. Assim, surgem resíduos sobre o contorno:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\tilde{u}) - n &= \mathcal{R}_1 \neq 0, \quad \text{em } \Gamma_1, \quad \text{e} \\ \mathcal{M}(\tilde{u}) - m &= \mathcal{R}_2 \neq 0, \quad \text{em } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da mesma forma, esses resíduos são distribuídos em média sobre  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . A segunda identidade Green em termos dos resíduos passa a ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \mathcal{R} w d\Omega = \int_{\Gamma_2} \mathcal{R}_2 \mathcal{N}^\dagger(w) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \mathcal{R}_1 \mathcal{M}^\dagger(w) d\Gamma. \quad (4.18)$$

A equação (4.18) é a representação integral das equações diferenciais (4.1). As equações integrais são sentenças matemáticas úteis para a geração de soluções aproximadas de problemas variacionais. Diferentes métodos numéricos podem ser obtidos a partir da formulação variacional, o que os diferencia é o tipo de função ponderadora adotada e a ordem de relaxamento das derivadas do operador diferencial.

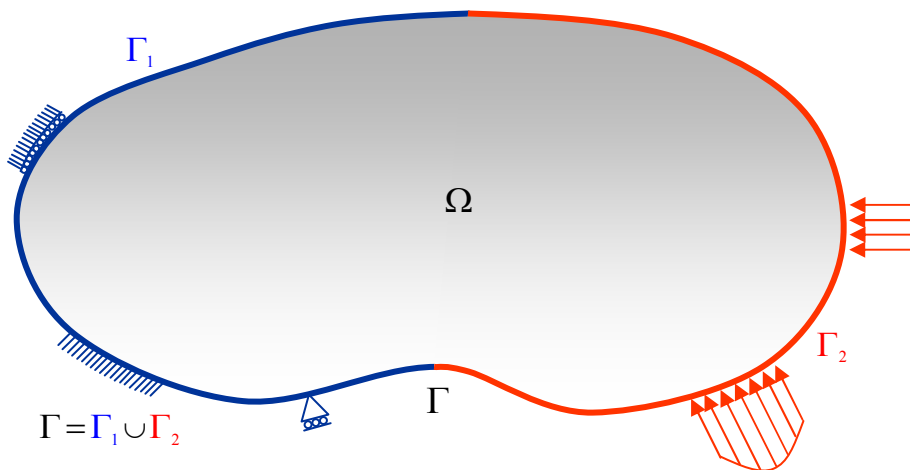
#### 4.2.4. Aplicações na Elasticidade Linear

Diferentes classes de métodos numéricos podem derivar do MRP, tais como, o método dos elementos de contorno (MEC), o método dos elementos finitos (MEF), entre outros. Apresenta-se agora, a aplicação do MRP ao problema elástico linear.

Seja a equação diferencial de equilíbrio do problema elástico linear para materiais homogêneos e isotrópicos, reproduzida a seguir:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \text{ em } \Omega. \quad (4.19)$$

Com as condições de contorno essenciais e naturais representadas na Figura 4.3.



**Figura 4.3: Condições de contorno em deslocamento e força de superfície.**

Nota-se que o operador diferencial é  $\mathcal{L}(\cdot) = (\cdot)_{,j} + f_i$  e atua sobre o campo  $\sigma_{ij}$ . A parcela  $f_i$  é o termo não homogêneo da equação diferencial e representa as forças de domínio que atuam sobre o sólido. Assume-se ainda, a mesma função ponderadora  $u_i^*$  definida em  $\Omega^*$  com a hipótese de que o domínio  $\Omega^*$  apresente as mesmas características do meio elástico linear, homogêneo e isotrópico.

O MRP garante que uma solução aproximada  $\tilde{u}$ , produz o seguinte resíduo na equação diferencial:

$$\sigma_{ij,j} + f_i \neq 0, \text{ em } \Omega. \quad (4.20)$$

Esse resíduo deverá ser distribuído em média por todo domínio  $\Omega$  por meio do produto interno:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^* d\Omega. \quad (4.21)$$

No contorno, a solução aproximada também gera um erro dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i - \bar{u}_i &\neq 0, \text{ em } \Gamma_1, \text{ e} \\ \tilde{t}_i - \bar{t}_i &\neq 0, \text{ em } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

As desigualdades (4.22) são os resíduos gerados nas porções complementares do contorno, que surgem ao se aproximar os deslocamentos e as forças de superfície.

Minimiza-se o resíduo de (4.21), procedendo-se a integral:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = 0. \quad (4.23)$$

Na equação (4.23), o resíduo atua exclusivamente sobre o domínio do sólido. A relação entre os resíduos do domínio e do contorno é feita ao se integrar por partes a primeira parcela de (4.23) e em seguida aplicar, o teorema da divergência, que resulta:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = 0. \quad (4.24)$$

Devido às hipóteses assumidas acerca das propriedades dos materiais de  $\Omega$  e  $\Omega^*$ , prova-se que os tensores constitutivos desses domínios são simétricos. Logo as seguintes relações são válidas:  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} E_{kl ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{kl}^* \varepsilon_{kl}$ . Substituindo o produto  $\sigma_{kl}^* \varepsilon_{kl}$  na equação (4.24) e conservando os índices originais, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = 0. \quad (4.25)$$

A relação de simetria,  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}$  é também denominada de primeiro teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade e  $\sigma_{ij}^*$  é o campo de tensões associadas à função ponderadora  $u_i^*$ . Porém, a equação integral (4.25), apresenta ainda o operador atuando sobre

um termo no domínio. Ao se aplicar o teorema da divergência sobre a segunda parcela da equação (4.25), resulta:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = 0. \quad (4.26)$$

Substituindo as equações de Cauchy, obtém-se a forma transposta da equação (4.26).

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i t_i^* d\Gamma. \quad (4.27)$$

Aplicando-se as condições de contorno em deslocamento e força de superfície nas porções complementares de  $\Gamma$ , obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{t}_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_i t_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_i t_i^* d\Gamma \quad (4.28)$$

A equação (4.28) é denominada sentença inversa do MRP.

Ao se substituir as condições de contorno na equação (4.27), as aproximações para os campos de deslocamento e força de superfície conduzem aos resíduos sobre o domínio e o contorno. Verifica-se essa propriedade, somente se for recuperada a proposta inicial do MRP. Efetuando-se duas integrações por partes na primeira parcela de (4.28), resulta:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (t_i - \bar{t}_i) u_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_i - \bar{u}) t_i^* d\Gamma, \quad (4.29)$$

A equação (4.29) é a sentença direta ou sentença original do MRP.

Antes de apresentar as equações integrais de contorno do problema elástico, cabe nesse momento justificar as hipóteses assumidas a respeito da natureza da função ponderadora  $u_i^* \in \Omega^*$ . O próximo item trata desse assunto.

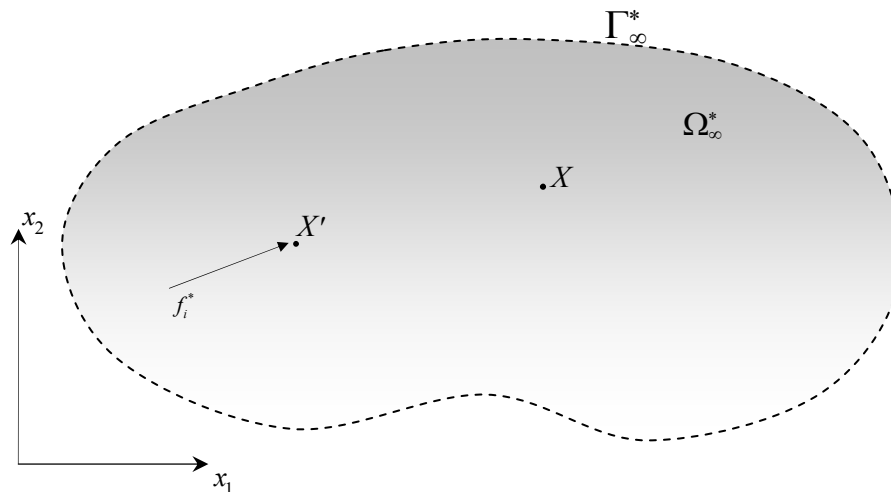
### 4.3. Soluções Fundamentais

O procedimento para a geração da função ponderadora depende do método numérico adotado para a resolução do problema. Aqui, admite-se que a função ponderadora é uma solução particular da equação diferencial do problema físico denominada solução

fundamental. Essa particularidade se aplica na geração das equações integrais de contorno, como será apresentado a seguir.

Um problema fundamental da elastoestática consiste na solução da equação diferencial de equilíbrio para um sólido tridimensional infinito sujeito à ação de uma carga estática. A solução desse problema para os meios isotrópicos foi determinada por Kelvin (1848). A seguir, obtém-se a solução fundamental do problema elástico bidimensional.

Seja o domínio bidimensional infinito  $\Omega_\infty^*$  sujeito à ação de uma força concentrada atuando no ponto  $X'$ , de acordo com a Figura 4.4. Esse ponto é comumente denominado, ponto fonte.



**Figura 4.4: Problema fundamental.**

A realidade física não permite que uma força pontual seja descrita em termos de funções matemáticas clássicas, uma vez que haverá sempre uma superfície cuja força exerce influência. Por essa razão, é conveniente expressá-la por meio da teoria das distribuições. Nesse caso, a força concentrada é a distribuição delta de Dirac, escrita como:

$$f_i^* = \delta(X', X) \hat{e}_i. \quad (4.30)$$

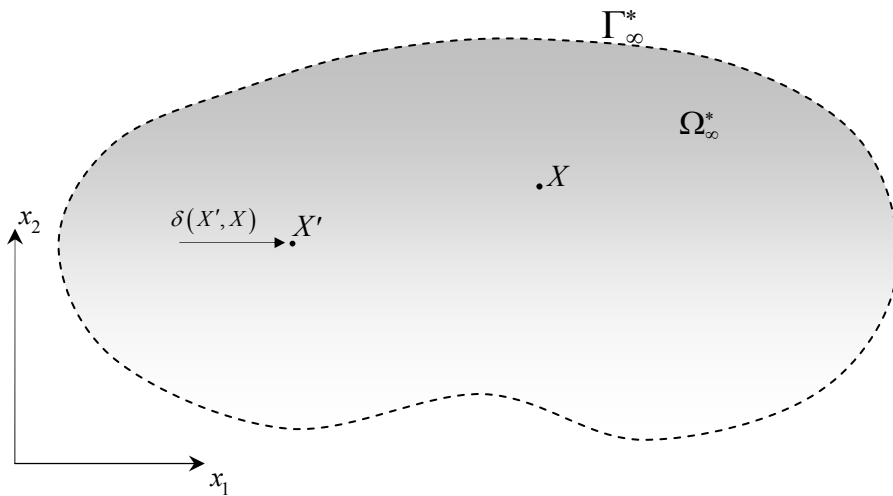
Sendo:

$\delta(X', X)$ , a distribuição de Dirac, e

$\hat{e}_i$ , o vetor unitário que orienta o sentido da força no plano.

Para o caso de problemas bidimensionais, decompõem-se a solução fundamental em dois estados de carregamento independentes.

O primeiro representa a ação da força pontual unitária em  $X'$  na direção  $x_1$ , ver Figura 4.5.



**Figura 4.5: Problema fundamental na direção 1.**

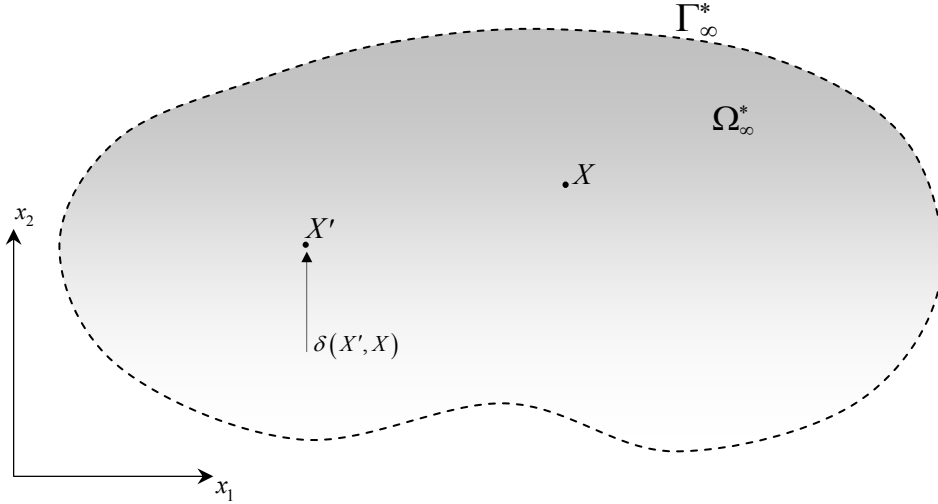
As equações de equilíbrio desse problema são:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,j,j}^*(X', X) + \delta(X', X) &= 0, \text{ e} \\ \sigma_{12,j,j}^*(X', X) + 0 &= 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

O primeiro índice das equações indica a direção de aplicação da força no ponto  $X'$ .



Situação semelhante ocorre para a força atuando na direção de  $x_2$ , como se verifica na Figura 4.6.



**Figura 4.6: Problema fundamental na direção 2.**

Nesse caso, as equações de equilíbrio ficam:

$$\begin{aligned}\sigma_{21j,j}^*(X', X) + 0 &= 0, \text{ e} \\ \sigma_{22j,j}^*(X', X) + \delta(X', X) &= 0.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Em notação indicial, é possível agrupar essas equações em uma única representação:

$$\sigma_{kij,j}^*(X', X) + \delta(X', X)\delta_{ki} = 0 \text{ com } k = 1, 2.\tag{4.33}$$

Sendo:

$\delta_{ki}$ , o delta de Kronecker. O índice  $k$  indica a direção da força aplicada e o índice  $i$  a direção do equilíbrio.

O contorno tracejado representa o limite fictício  $\Gamma_\infty^*$  de um sólido com domínio infinito  $\Omega_\infty^*$ .

Escrevendo a equação de equilíbrio (4.33) em função dos deslocamentos dos pontos campo  $X$ , devido à presença da força unitária em  $X'$ , resulta:

$$\mu u_{ki,jj}^*(X', X) + (\mu + \lambda) u_{kj,ij}^*(X', X) = -\delta(X', X) \delta_{ki}. \quad (4.34)$$

Cheng e Howitt (1996) classificam os métodos de soluções da equação diferencial (4.34) em dois grupos principais. Os métodos com base nas funções de tensão, como por exemplo, as funções de Airy e as funções complexas de Muskhelishvili e os métodos com base na teoria de potenciais vetoriais como os potenciais de Papkovitch-Neuber e Boussinesq-Galerkin. Neste item demonstra-se a solução fundamental dos deslocamentos a partir do potencial vetorial de Boussinesq-Galerkin.

Hömander (1963) apresenta um método de solução das equações diferenciais parciais elípticas por meio da teoria de operadores matriciais. O procedimento de Hömander é descrito em Rashed e Brebbia (2003) para transformar a equação integral das forças de domínio em equações integrais sobre o contorno. Wang, et al. (2008), prova o método de Hömander na forma de um teorema geral que garante a unicidade das soluções na elasticidade. O enunciado do teorema é o seguinte:

As soluções das equações diferenciais que governam a teoria da elasticidade têm a forma geral:

$$u_{ki}^* = A_{ij}^\dagger \varphi_{kj}.$$

Somente se o potencial vetorial for solução da equação,  $\mathcal{A} \varphi_{kj} = -\delta(X', X) \delta_{kj}$ .

Sendo:

$A_{ij}^\dagger(\cdot)$ , o operador adjunto de  $A_{ij}(\cdot)$ ,

$\varphi_{kj}$ , um potencial vetorial, e

$\mathcal{A} = |A_{ij}^\dagger(\cdot)|$ , o determinante do operador matricial  $A_{ij}^\dagger(\cdot)$ .

De posse da equação diferencial (4.34), define-se o operador:

$$A_{ij}(\cdot) = \mu(\cdot)_{,kk} \delta_{ij} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ij}. \quad (4.35)$$

Substituindo (4.35) na equação diferencial (4.34), resulta:

$$A_{ij} u_{kj}^*(X', X) = -\delta(X', X) \delta_{ki}. \quad (4.36)$$

Sendo:

$A_{ij}(\cdot)$ , um operador matricial.

De acordo com o teorema supracitado, a solução fundamental da equação diferencial é determinada por meio do operador adjunto de (4.35). Define-se o operador matricial adjunto como a matriz transposta da matriz dos cofatores, expressos como:

$$A_{ij}^\dagger(\cdot) = (2\mu + \lambda)(\cdot)_{,kk} \delta_{ij} - (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ij}. \quad (4.37)$$

Portanto, a solução fundamental da equação diferencial (4.34) fica:

$$u_{ki}^* = (2\mu + \lambda) \varphi_{ki,ll} - (\mu + \lambda) \varphi_{kj,ij}. \quad (4.38)$$

Para que o potencial vetorial seja solução dessa equação, o teorema afirma que  $\varphi_{kj}$ , deve satisfazer a equação diferencial,

$$\mu(2\mu + \lambda) \varphi_{ki,llmm} = -\delta(X', X) \delta_{ki}. \quad (4.39)$$

Sendo:

$\mathcal{A} = \mu(2\mu + \lambda)(\cdot)_{,llmm}$ , o determinante do operador  $A_{ij}^\dagger(\cdot)$ .

A equação (4.38) expressa os deslocamentos em função de um potencial vetorial desacoplado, denominado vetor de Boussinesq-Galerkin. O potencial vetorial é determinado após a solução da equação diferencial bi-harmônica (4.39), que é bem conhecida da teoria do potencial.

A solução dessa equação pode ser obtida considerando-se a invariância do operador Laplaciano sob rotações que permite expressar uma solução da equação (4.39) em termos de soluções radiais. Para problemas bidimensionais a solução fica:

$$\varphi_{ki} = \frac{-\delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} r^2 \ln|r| + h(r) \delta_{ki}. \quad (4.40)$$

Sendo:

$$h(r) = ar^2 + b \ln|r| + c, \text{ uma função do raio } r.$$

Renardy e Rogers (1993), Kythe (1996) e Axler et. all. (2001) apresentam os fundamentos para a resolução das equações diferenciais parciais desse tipo.

Realizando as derivações necessárias sobre (4.40), obtém-se a solução fundamental em deslocamentos, para o problema de Kelvin:

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln|r| \delta_{ki} - r_{,i} r_{,k} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{ki} \right]. \quad (4.41)$$

De posse da solução fundamental dos deslocamentos, determinam-se a solução fundamental em deformações realizando a substituição  $2\varepsilon_{kij}^* = u_{ki,j}^* + u_{kj,i}^*$ , o que resulta:

$$\varepsilon_{kij}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) [r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}] + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} - r_{,k} \delta_{ji} \right\}. \quad (4.42)$$

Substituindo (4.42) na lei de Hooke  $\sigma_{kij}^* = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kll}^* + 2\mu \varepsilon_{kij}^*$ , obtém-se a solução fundamental das tensões:

$$\sigma_{kij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) [r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj} - r_{,k} \delta_{ji}] + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right\}. \quad (4.43)$$

Do equilíbrio sobre o contorno do problema, obtém-se a força de superfície fundamental por meio da equação de Cauchy  $t_{ki}^* = \sigma_{kij}^* n_j$ , logo:

$$t_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ki} + 2r_{,k}r_{,i}] + (1-2\nu)[r_{,i}n_k - r_{,k}n_i] \right\}. \quad (4.44)$$

É importante notar que a natureza das soluções fundamentais é singular. Quando o ponto fonte se aproxima do ponto campo a solução fundamental torna-se assintótica e tende a um valor impróprio, como pode ser analisando ao se efetuar o limite em  $r \rightarrow 0$ . Essa característica será estudada quando for apresentado o método de regularização no próximo capítulo.

A seguir apresentam-se as equações integrais de contorno que compõem a formulação básica para a geração do método dos elementos de contorno.

#### 4.4. Equações Integrais de Contorno

Considere agora, uma sub-região finita  $\{\Omega \cup \Gamma\} \subset \Omega_\infty^*$ , com ponto fonte  $X' \in \Omega$  e ponto campo  $x \in \Gamma$ , conforme a Figura 4.7.

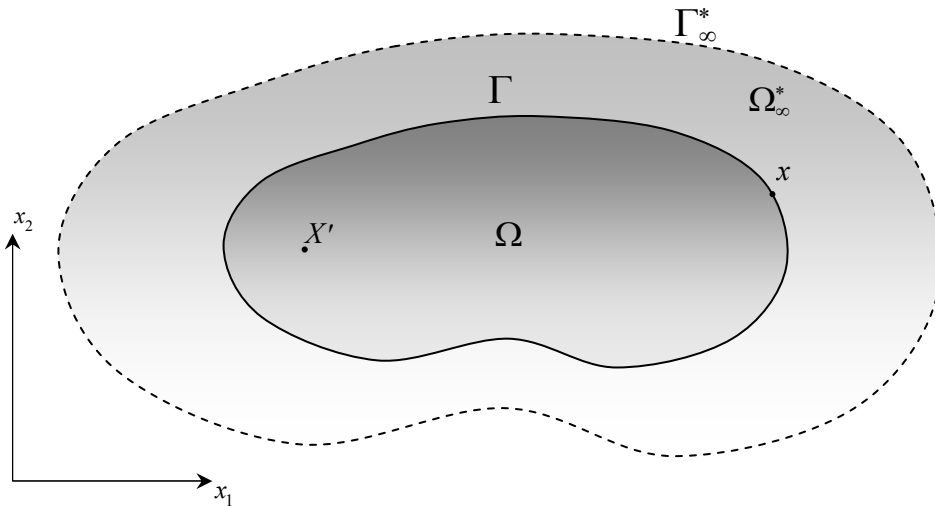


Figura 4.7: Domínio finito  $\{\Omega \cup \Gamma\}$  contido em  $\Omega_\infty^*$ .

A sentença inversa do MRP, equação (4.27), produz o seguinte resultado quando aplicada em cada uma das direções do problema fundamental:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^*(X',x) u_i(x) d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^*(X',x) f_i(x) d\Omega = - \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X',x) t_i(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} t_{ki}^*(X',x) u_i(x) d\Gamma. \quad (4.45)$$

A primeira parcela de (4.45) é relativa ao problema fundamental de Kelvin com o ponto campo localizado sobre o contorno  $\Gamma$ . Substituindo (4.33) em (4.45), resulta:

$$\int_{\Omega} \delta(X',x) u_i(x) \delta_{ki} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X',x) t_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki}^*(X',x) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^*(X',x) f_i(x) d\Omega. \quad (4.46)$$

Uma propriedade importante da distribuição delta de Dirac é a característica de seleção, definida como:

$$\int_{\Omega} F(x) \delta(X',x) d\Omega = \begin{cases} F(X'), & \text{se } X' \in \Omega, \text{ e} \\ 0, & \text{se } X' \notin \{\Omega \cup \Gamma\}. \end{cases} \quad (4.47)$$

A distribuição delta de Dirac faz parte de uma classe de funções denominadas funções generalizadas. Conceitualmente a distribuição delta de Dirac representa um efeito de uma força impulsiva ou a densidade do carregamento concentrado.

De posse da propriedade de seleção da distribuição de Dirac, a primeira parcela de (4.46), resulta:

$$\int_{\Omega} \delta(X',x) u_i(x) \delta_{ki} d\Omega = u_k(X'). \quad (4.48)$$

Substituindo esse resultado na equação (4.46), tem-se:

$$u_k(X') = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X',x) t_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki}^*(X',x) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^*(X',x) f_i(x) d\Omega. \quad (4.49)$$

A equação (4.49) é denominada identidade Somigliana. Essa equação integral é a base para a obtenção de diferentes tipos de formulações com base nas equações integrais de contorno, como será visto a seguir.

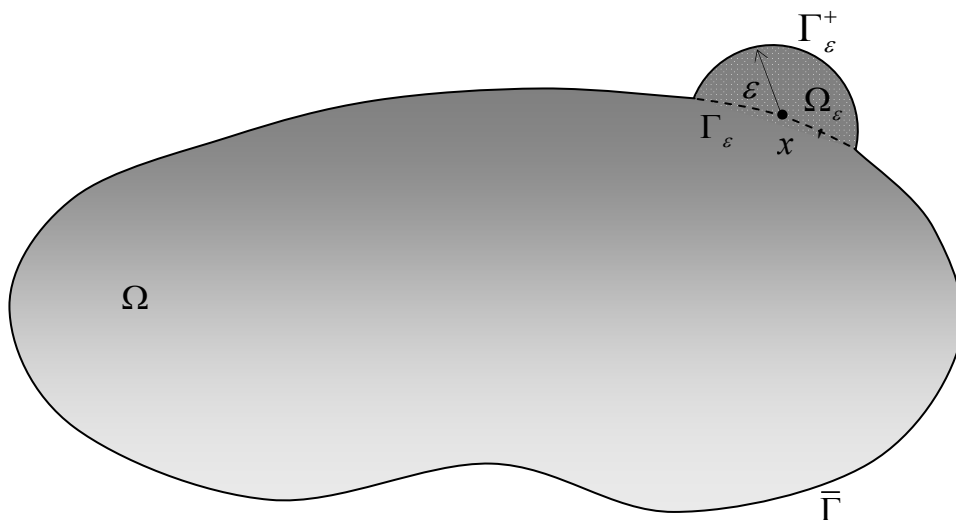
## 4.5. Equações Integrais de Contorno para Pontos no Contorno

A identidade Somigliana é válida para qualquer ponto fonte dentro do domínio  $\Omega$ . Essa equação relaciona os valores dos deslocamentos dos pontos do domínio, às variáveis, deslocamento e força de superfície do contorno  $\Gamma$ . Porém, para que possa ser utilizada, é necessário calcular primeiramente as variáveis sobre o contorno, e isso se faz avaliando-se o limite de (4.49) quando  $X' \in \Omega \rightarrow x' \in \Gamma$ . É comum denominar essa situação de problema singular, uma vez que as equações integrais apresentam valores impróprios no integrando em decorrência da natureza das soluções fundamentais.

### 4.5.1. Formulação em Deslocamento

A formulação em deslocamento emprega a identidade Somigliana na avaliação dos deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno do problema.

Para que o ponto fonte seja avaliado sobre o contorno, considera-se que o domínio do problema seja acrescido de uma região circular de raio  $\varepsilon$  em torno do ponto  $x'$ , como na Figura 4.8.



**Figura 4.8: Ponto fonte sobre o contorno.**

A região que delimita a fronteira do domínio é representada por,  $\bar{\Gamma} = (\Gamma - \Gamma_\varepsilon) + \Gamma_\varepsilon^+$ .

Sendo:

$\Gamma$ , o contorno original,

$\Gamma_\varepsilon$ , a porção do contorno original que foi removida, e

$\Gamma_\varepsilon^+$ , a porção acrescida devido à região  $\Omega_\varepsilon$ .

Realizando o limite na equação (4.49) quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , avalia-se o comportamento das equações integrais de contorno singulares quando,  $\bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ .

Efetuada o limite, a equação passa a ser escrita como:

$$u_k(x') = \int_{\bar{\Gamma}} u_{ki}^*(x', x) t_i(x) d\Gamma - \int_{\bar{\Gamma}} t_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^*(x', x) f_i(x) d\Omega. \quad (4.50)$$

Para facilitar a análise dos limites, consideram-se os termos isoladamente. A primeira parcela do segundo membro da equação (4.50) é:

$$\int_{\bar{\Gamma}} u_{ki}^*(x', x) t_i(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{ki}^*(X', x) t_i(x) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} u_{ki}^*(X', x) t_i(x) d\Gamma. \quad (4.51)$$

A primeira parcela da integral (4.51) é imprópria e integrável no sentido do valor principal de Cauchy. Essa característica justifica-se devido à singularidade de ordem  $O(\ln r)$  introduzida na solução fundamental. Ao integrar o segundo termo com o limite, verifica-se a regularidade do integrando, cujo limite fundamental é igual a zero. Portanto, a análise de (4.51) resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{ki}^*(X', x) t_i(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(x', x) t_i(x) d\Gamma. \quad (4.52)$$

Isolando agora a segunda parcela do lado direito da equação (4.50), tem-se:

$$\int_{\bar{\Gamma}} t_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{ki}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} t_{ki}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma. \quad (4.53)$$



A primeira parcela que contém o limite na equação (4.53), também é uma integral imprópria, mas com singularidade de ordem  $O(r^{-1})$ . Essa integral deve ser avaliada no sentido do valor principal de Cauchy, porém com um critério de continuidade mais restrito para a existência dos deslocamentos. Esse critério é dado por meio da continuidade de Hölder.

Uma função é contínua em Hölder se existem constantes  $k > 0$  e  $0 < \alpha \leq 1$ , tal que,

$$|u_i(x) - u_i(x')| \leq kr^\alpha. \quad (4.54)$$

O valor de  $x$  deverá estar suficientemente próximo de  $x'$ . Sendo  $r$  a distancia entre o ponto fonte e o ponto campo.

Obedecendo ao critério de continuidade de Hölder, a primeira parcela pode ser avaliada no contorno por meio do valor principal de Cauchy, dado por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} t_{ki}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma = \oint_{\Gamma} t_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma. \quad (4.55)$$

Para se efetuar o limite da segunda parcela de (4.53) procede-se a regularização dos deslocamentos introduzindo o primeiro termo da expansão de Taylor nas vizinhanças do ponto fonte, que resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} t_{ki}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} t_{ki}^*(X', x) [u_i(x) - u_i(x')] d\Gamma + u_i(x') \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} t_{ki}^*(X', x) d\Gamma. \quad (4.56)$$

Devido ao critério de continuidade dos deslocamentos sobre o ponto fonte, a primeira parcela de (4.56) é limitada e nula. A segunda parcela conduz a um coeficiente dado por:

$$\alpha_{ki}(x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} t_{ki}^*(X', x) d\Gamma. \quad (4.57)$$

Substituindo (4.55) e (4.57) na parcela (4.53), resulta:

$$\int_{\bar{\Gamma}} t_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma = \oint_{\Gamma} t_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma + \alpha_{ki}(x') u_i(x'). \quad (4.58)$$

Finalmente, as equações integrais de contorno para os pontos fontes no contorno  $\Gamma$  são escritas, sob a forma geral:

$$C_{ki}(x')u_i(x') + \oint_{\Gamma} t_{ki}^*(x', x)u_i(x)d\Gamma = \oint_{\Gamma} u_{ki}^*(x', x)t_i(x)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^*(x', x)f_i(x)d\Omega. \quad (4.59)$$

Sendo:

$$C_{ki}(x') = \delta_{ki} + \alpha_{ki}(x'), \text{ o termo livre da equação.}$$

Para problemas em que a geometria do contorno é suave demonstra-se que:

$$\alpha_{ki}(x') = -\frac{\delta_{ki}}{2}. \quad (4.60)$$

Analisando a equação integral de contorno (4.59), constata-se que existe ainda uma parcela relativa às forças de domínio. Essa parcela pode ser avaliada sobre o contorno, por meio da técnica do potencial vetorial de Boussinesq-Galerkin.

#### 4.5.2. Formulação em Tensões

As tensões no contorno são obtidas após a diferenciação da identidade Somigliana em relação à direção do ponto fonte  $X'_j$ , seguida da substituição da lei constitutiva do material. Ao se efetuar o limite da distância entre o ponto fonte e o ponto campo, surge um termo que carrega consigo uma integral imprópria no sentido da parte finita de Hadamard. Não há nenhuma restrição quanto a essa diferenciação desde que as soluções fundamentais em deslocamentos e forças de superfície sejam suaves e de classe  $C^1(\Omega)$ . O resultado dessas operações gera a equação:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') = \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x)t_k(x)d\Gamma - \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x)u_k(x)d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}^*(x', x)f_k(x)d\Omega. \quad (4.61)$$

Sendo:

$D_{kij}^*(x', x) = u_{ki,j}^*(x', x)$  e  $S_{kij}^*(x', x) = t_{ki,j}^*(x', x)$ , as derivadas das soluções fundamentais dos deslocamentos e das forças de superfície. Essas soluções fundamentais apresentam natureza singular devido o comportamento das funções  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$  quando  $r \rightarrow 0$ .

A equação integral (4.61) permite avaliar as tensões sobre contornos suaves. Neste trabalho admite-se sempre a existência desse tipo de região, hipótese essa que será justificada quando for explicado o método dos elementos de contorno.

Há também uma forma alternativa de se determinar as variáveis nos pontos do contorno. Essa se faz por meio da formulação em força de superfície, como será apresentado a seguir.

#### 4.5.3. Formulação em Força de Superfície

As equações integrais de contorno provenientes desse tipo de formulação apresentam as mesmas soluções fundamentais utilizadas na formulação em tensões, conseqüentemente o mesmo tipo de singularidade presentes nos núcleos das integrais.

A formulação em força de superfície é obtida substituindo-se a equação de Cauchy em (4.61), que resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t_i(x') = n_j(x') \int_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x)t_k(x)d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x)u_k(x)d\Gamma \\ + n_j(x') \int_{\Omega} D_{kij}^*(x', x)f_k(x)d\Omega. \end{aligned} \quad (4.62)$$

A equação (4.62) determina os mesmos valores para as variáveis sobre o contorno, semelhante à equação integral (4.59), porém, utilizando a integração sobre as derivadas das soluções fundamentais, o que irá gerar diferentes valores na primeira e segunda parcela da equação (4.62).

É interessante definir essa equação integral alternativa, pois ela é a base da formulação dual do método dos elementos de contorno, tema tratado também no próximo capítulo.

Uma vez definidos os deslocamentos, as forças de superfície e as tensões no contorno, é possível calcular as variáveis no domínio, como será apresentado a seguir.

## 4.6. Equações Integrais de Contorno para Pontos no Domínio.

Muitas vezes é interessante determinar os valores dos deslocamentos, tensões e deformações em pontos do domínio para que seja possível analisar o comportamento completo dos sólidos. É possível se efetuar essa análise por meio das equações integrais em deslocamentos, deformações e tensões para os pontos do domínio, como será apresentado a seguir.

### 4.6.1. Deslocamentos Internos

Os deslocamentos dos pontos do domínio são determinados por meio dos valores dos deslocamentos e forças de superfície do contorno, utilizando a identidade Somigliana, reproduzida aqui:

$$u_k(X') = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X', x) t_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^*(X', x) f_i(x) d\Omega. \quad (4.63)$$

### 4.6.2. Deformações Internas

Para o cálculo das deformações dos pontos internos por meio de equações integrais, procede-se a derivação da solução fundamental (4.63) e posterior substituição nas relações deslocamento deformações. A derivada da equação dos deslocamentos em relação ao ponto fonte fornece:

$$u_{k,j}(X') = \int_{\Gamma} u_{ki,j}^*(X', x) t_i(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ki,j}^*(X', x) u_i(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki,j}^*(X', x) f_i(x) d\Omega. \quad (4.64)$$

### 4.6.3. Tensões Internas

Finalmente, a identidade Somigliana para as tensões dos pontos internos é obtida ao se realizar a substituição da lei constitutiva sobre a equação (4.64), resultando:

$$\sigma_{ij}(X') = \int_{\Gamma} D_{kij}^*(X', x) t_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}^*(X', x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}^*(X', x) f_k(x) d\Omega. \quad (4.65)$$

## 5. Método dos Elementos de Contorno

### 5.1. Apresentação

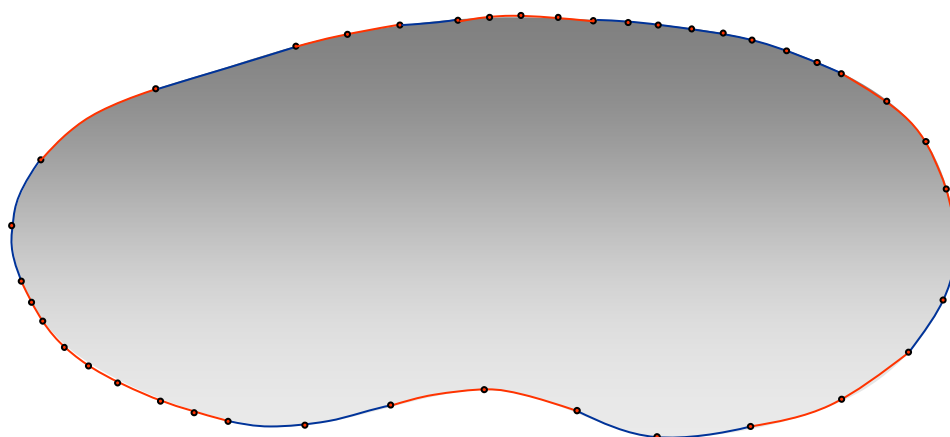
Segundo Aliabadi (2002), as equações integrais de contorno podem ser empregadas diretamente na solução de problemas com geometrias e carregamentos elementares. Em problemas mais complexos, as equações integrais não apresentam soluções imediatas devendo-se recorrer aos métodos numéricos.

Este capítulo destina-se a apresentação do método dos elementos de contorno como uma ferramenta numérica para a resolução de problemas da Engenharia. O método consiste em discretizar as equações integrais de contorno provenientes do MRP.

### 5.2. Discretização das Equações Integrais de Contorno

Neste item apresenta-se a forma discreta das EIC. Inicia-se a construção do problema numérico definindo-se um ente abstrato, de natureza puramente matemática, denominado elemento de contorno.

Para o caso bidimensional, o elemento de contorno é um segmento qualquer utilizado na descrição da fronteira do espaço físico, como na Figura 5.1.



**Figura 5.1: Discretização com elementos de contorno curvos.**

A discretização do problema consiste em dividir o contorno em um número finito de elementos. Na ausência de forças de domínio, as equações integrais dos deslocamentos e das forças de superfície ficam:

Para a formulação em deslocamento.

$$C_{ki}(x')u_i(x') + \sum_{n=1}^{ne} \int_{\Gamma_n} T_{ki}^*(x',x)u_i(x)d\Gamma_n = \sum_{n=1}^{ne} \int_{\Gamma_n} U_{ki}^*(x',x)t_i(x)d\Gamma_n. \quad (5.1)$$

Para a formulação em forças de superfície.

$$\frac{1}{2}t_i(x') = n_j(x') \sum_{n=1}^{ne} \int_{\Gamma_n} D_{kij}^*(x',x)t_k(x)d\Gamma_n - n_j(x') \sum_{n=1}^{ne} \int_{\Gamma_n} S_{kij}^*(x',x)u_k(x)d\Gamma_n. \quad (5.2)$$

Sendo:

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{ne} \Gamma_n, \text{ e}$$

$ne$ , o número de elementos de contorno.

Para representar esses segmentos com maior generalidade adotam-se os polinômios de Lagrange, como será discutido no próximo item. Após a explanação dos polinômios interpoladores, retoma-se o procedimento de discretização das EIC.

### 5.2.1. Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer

Tendo em vista contribuir com uma nova filosofia de aplicação do MEC no Departamento de Engenharia de Estruturas desenvolve-se a formulação dos elementos de contorno curvos com qualquer ordem de aproximação.

Como já mencionado, os elementos de contorno são gerados a partir dos polinômios de Lagrange:

$$\phi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}. \quad (5.3)$$

Os polinômios de Lagrange resultam do produto de  $n$  fatores lineares e satisfazem a partição da unidade, ou seja,  $\sum_{i=1}^n \phi_i(\xi) = 1$ . Verifica-se também que  $\sum_{i=1}^n \frac{d\phi_i}{d\xi}(\xi) = 0$ . Além do mais, em pontos específicos do domínio  $-1 \leq \xi \leq +1$ , a função de forma assume:

$$\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}. \quad (5.4)$$

Sendo:

$\delta_{ij}$ , o delta de Kronecker.

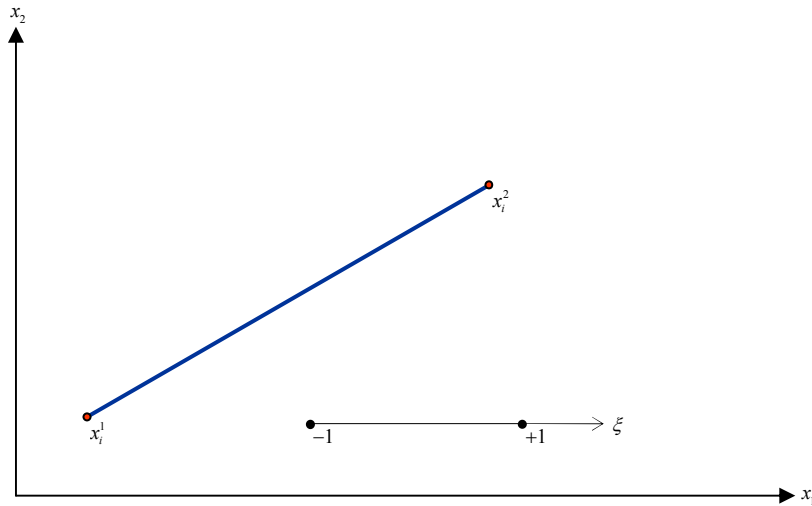
Neste texto, restringe-se o domínio da função de forma ao intervalo  $[-1, +1]$ , devido as futuras aplicações com a quadratura de Gauss-Legendre.

A seguir ilustram-se algumas funções interpoladoras geradas a partir dos polinômios de Lagrange.

### **Elementos de Contorno Lineares**

O polinômio do primeiro grau é a aproximação mais elementar dessa classe de polinômios. Nessa interpolação utilizam-se elementos retos com apenas dois pontos base. As funções de forma são geradas particionado o domínio adimensional em subintervalos igualmente espaçados, de acordo com o grau da aproximação.

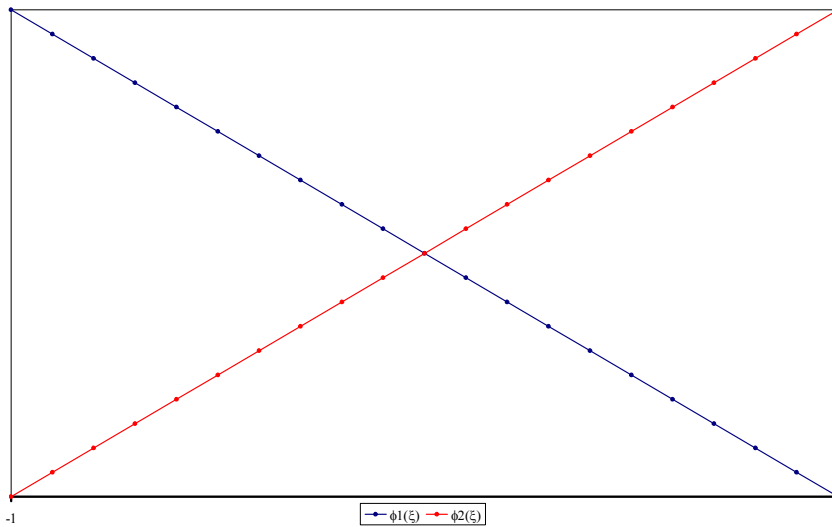
Para a aproximação linear divide-se o domínio em um único intervalo com os pontos base sendo os próprios valores extremos do intervalo como mostra a Figura 5.2.



**Figura 5.2: Elemento de contorno linear.**

As funções de forma dessa aproximação ficam:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \text{ e } \phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi). \quad (5.5)$$

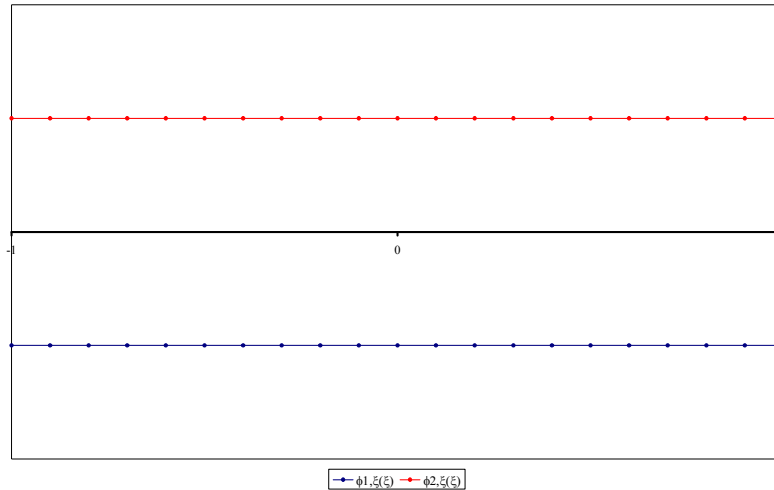


**Figura 5.3: Polinômio de Lagrange do 1º grau.**

Com as derivadas constantes dadas por:

$$\frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) = -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{d\phi_2}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{2} \quad (5.6)$$

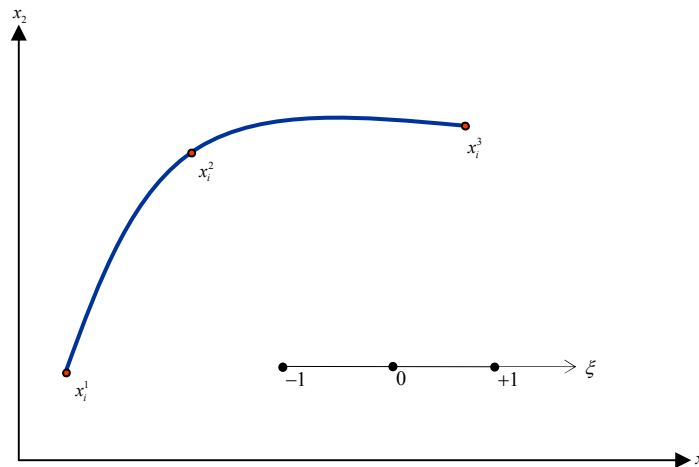




**Figura 5.4: Derivadas das funções interpoladoras do 1º grau.**

### Elementos de Contorno Quadráticos

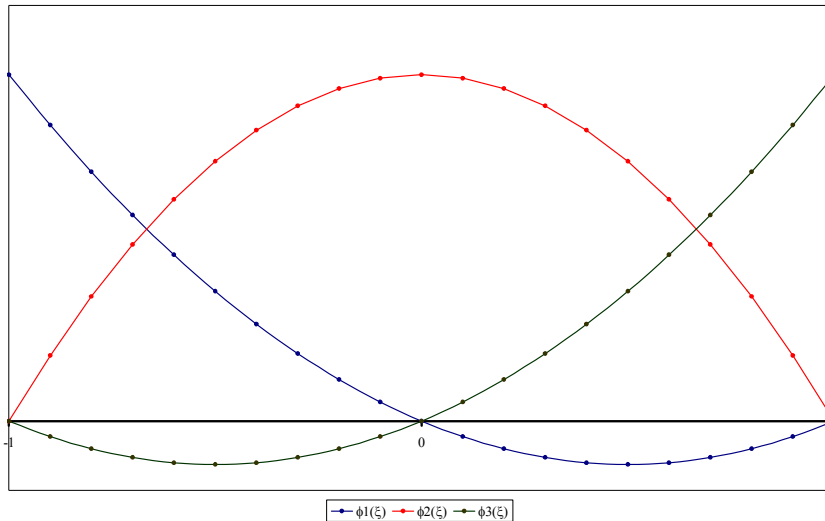
O primeiro caso em que é possível representar o elemento de contorno por um segmento curvo é por meio das aproximações quadráticas. Nessa aproximação, o domínio adimensional é subdividido em dois segmentos igualmente espaçados sendo os pontos base iguais a  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  e  $\xi_3 = +1$ , conforme a Figura 5.5.



**Figura 5.5: Elemento de contorno quadrático.**

As funções de forma para esses elementos são:

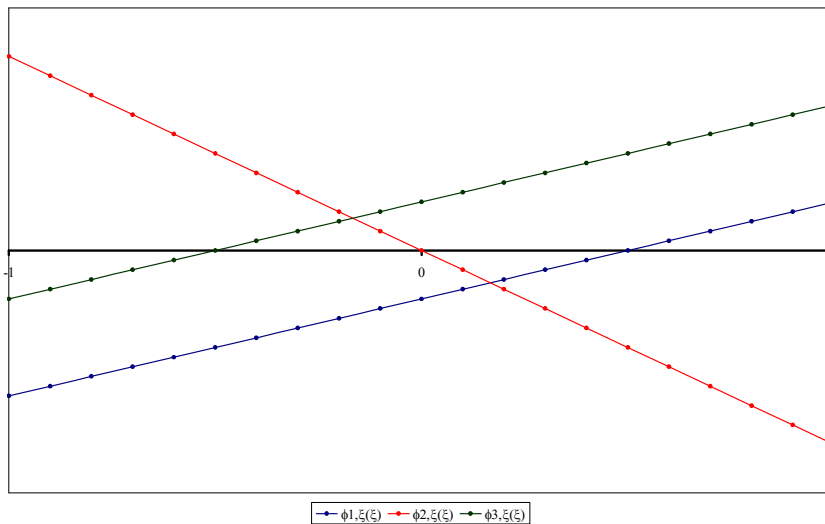
$$\phi_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad \phi_2(\xi) = 1-\xi^2 \quad \text{e} \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi). \quad (5.7)$$



**Figura 5.6: Polinômio de Lagrange do 2º grau.**

As primeiras derivadas dessas funções resultam:

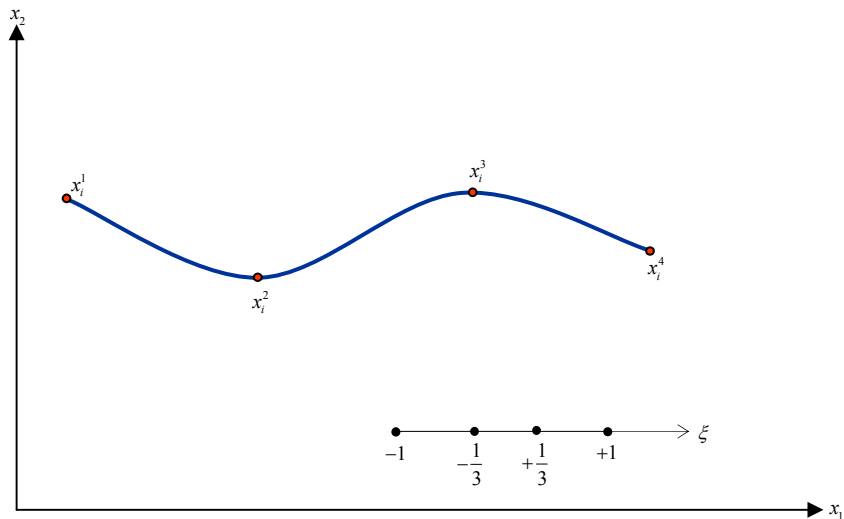
$$\frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) = \xi - \frac{1}{2}, \quad \frac{d\phi_2}{d\xi}(\xi) = -2\xi \quad \text{e} \quad \frac{d\phi_3}{d\xi}(\xi) = \xi + \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$



**Figura 5.7: Derivada das funções interpoladoras do 2º grau.**

### Elementos de Contorno Cúbicos

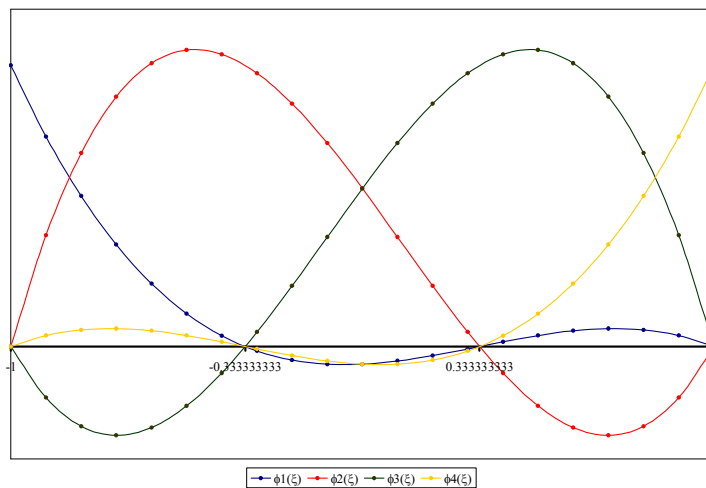
A aproximação cúbica é obtida dividindo-se o domínio adimensional em três segmentos igualmente espaçados de modo que os pontos base sejam,  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = -1/3$ ,  $\xi_3 = +1/3$  e  $\xi_4 = +1$ , como na Figura 5.8.



**Figura 5.8: Elemento de contorno cúbico.**

As funções interpoladoras com essa aproximação resultam:

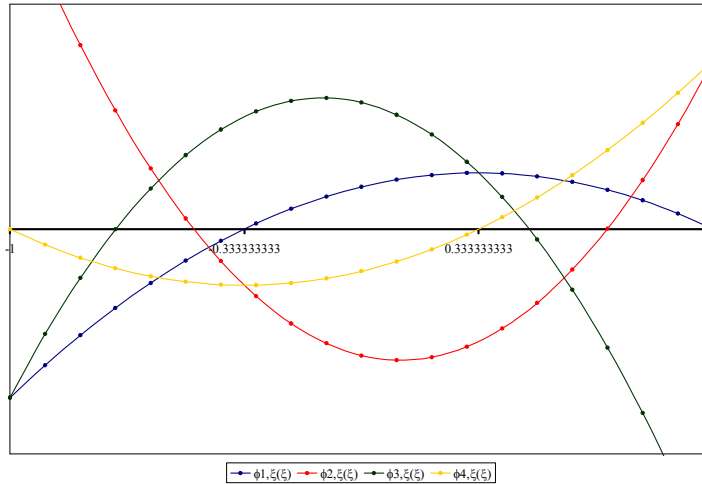
$$\begin{aligned}
 \phi_1(\xi) &= \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 - \xi), & \phi_2(\xi) &= \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi), \\
 \phi_3(\xi) &= \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi) & \text{e } \phi_4(\xi) &= \frac{1}{16}(9\xi^2 - 1)(1 + \xi).
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$



**Figura 5.9: Polinômio de Lagrange do 3º grau.**

As derivadas dessas funções são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\xi}(\xi) &= \frac{9}{16}(3\xi+1)(1-\xi), & \frac{d\phi_2}{d\xi}(\xi) &= \frac{9}{16}(9\xi^2-2\xi-3), \\ \frac{d\phi_3}{d\xi}(\xi) &= \frac{9}{16}(-9\xi^2-2\xi+3) & \text{e} & \frac{d\phi_4}{d\xi}(\xi) = \frac{9}{16}(3\xi-1)(1+\xi). \end{aligned} \quad (5.10)$$



**Figura 5.10: Derivada das funções interpoladoras do 3º grau.**

Ao se adotar os elementos de contorno curvos na análise de problemas com o MEC deve-se calcular os versores normais e tangentes sobre os pontos de colocação, assim como sobre os pontos da integração numérica. Essa característica é fundamental para a generalização do grau da aproximação usada na interpolação com esses polinômios.

Uma vantagem de se usar os polinômios de Lagrange é a facilidade em se gerar elementos de contorno isoparamétricos.

### 5.2.2. Elementos de Contorno Isoparamétricos

Utilizando-se as funções de forma descritas anteriormente, a geometria do problema fica dada por:  $x_i = \phi_m(\xi)x_i^m$ , com  $m$  variando de 1 até o número de nós sobre o elemento de contorno,  $nne$ . A quantidade desses pontos sobre o elemento depende exclusivamente do grau da aproximação adotada.

As variáveis físicas são escritas da mesma forma,  $u_i = \phi_m(\xi)u_i^m$  para os deslocamentos e  $t_i = \phi_m(\xi)t_i^m$  para a força de superfície, sendo  $\phi_m(\xi)$  as funções de forma definidas no sistema de coordenadas adimensional.

O fato da ordem de aproximação ser a mesma para todas as variáveis é que determina a nomenclatura isoparamétrica.

Substituindo-se as aproximações da geometria e das variáveis nas equações (5.1) e (5.2), obtém-se a formulação discreta das equações integrais de contorno.

Para a formulação em deslocamento

$$C_{ki}(x')u_i(x') + \int_{\Gamma} \phi_m(\xi)T_{ki}^*(x',x)d\Gamma_n u_i^{nm} = \int_{\Gamma} \phi_m(\xi)U_{ki}^*(x',x)d\Gamma_n t_i^{nm}, \quad (5.11)$$

Para a formulação em força de superfície.

$$\frac{1}{2}t_i(x') = n_j(x') \int_{\Gamma} \phi_m(\xi)D_{kij}^*(x',x)d\Gamma_n t_k^{nm} - \int_{\Gamma} \phi_m(\xi)S_{kij}^*(x',x)d\Gamma_n u_k^{nm}. \quad (5.12)$$

O índice  $n$  representa a quantidade de elementos de contorno da discretização.

Com o intuito de facilitar a geração das funções de forma e elaborar uma estratégia de integração numérica geral é conveniente definir o elemento de contorno na sua forma paramétrica, ou seja, introduzir um elemento de contorno curvo qualquer, no espaço adimensional da coordenada  $\xi$ . Para que essa transformação seja escrita corretamente é necessário representar o segmento do contorno  $d\Gamma_n$  a partir do Jacobiano da transformação.

$$d\Gamma_n = J_n(\xi)d\xi. \quad (5.13)$$

Sendo:

$J_n(\xi) = \sqrt{\phi_{m,\xi}(\xi)x_i^{nm} \cdot \phi_{m,\xi}(\xi)x_i^{nm}}$ , o Jacobiano da transformação do elemento unidimensional definido no espaço cartesiano bidimensional com  $i$  variando de 1 a 2, e

$n$ , o número do elemento e  $m$ , a variação da quantidade de nós por elemento.

Procedendo a substituição da relação (5.13) nas equações (5.11) e (5.12), chega-se finalmente a forma discreta das EIC:

$$C_{ki}(x')u_i(x') + \bar{H}_{ki}^{nm}(x', x)u_i^{nm} = G_{ki}^{nm}(x', x)t_i^{nm}. \quad (5.14)$$

Sendo:

$$\bar{H}_{ki}^{nm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) T_{ki}^*(\xi_0, \xi) J_n(\xi) d\xi, \text{ e}$$

$$G_{ki}^{nm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) U_{ki}^*(\xi_0, \xi) J_n(\xi) d\xi, \text{ os coeficientes das matrizes de influência que}$$

trazem nos núcleos das integrais as soluções fundamentais da formulação em deslocamento.

Da mesma forma, para a equação (5.12):

$$\frac{1}{2}t_i(x') = \bar{G}_{ki}^{nm}(x', x)t_k^{nm} - H_{ki}^{nm}(x', x)u_k^{nm}, \quad (5.15)$$

Sendo:

$$\bar{G}_{ki}^{nm} = n_j(x') \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) D_{kij}^*(x', x) J_n(\xi) d\xi, \text{ e}$$

$$H_{ki}^{nm} = n_j(x') \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) S_{kij}^*(x', x) J_n(\xi) d\xi, \text{ os coeficientes das matrizes de influência}$$

que trazem nos núcleos das integrais, as derivadas da solução fundamental utilizadas na formulação em força de superfície.

### 5.2.3. Solução Algébrica do Sistema de Equações

O método mais comum de resolução das EIC é por meio do método da colocação pontual, que em notação indicial fica:

Para a formulação em deslocamento,

$$\frac{1}{2}u_i^l + \bar{H}_{ki}^{lnm} u_i^{nm} = G_{ki}^{lnm} t_i^{nm}. \quad (5.16)$$

Para a formulação em força de superfície,

$$\frac{1}{2}t_i^l = \bar{G}_{ki}^{lnm} t_k^{nm} - H_{ki}^{lnm} u_k^{nm}. \quad (5.17)$$

Como mencionado no capítulo anterior, consideram-se os pontos de colocação pertencentes a contornos suaves. Portanto, é possível admitir que os valores de deslocamentos e forças de superfícies sobre o contorno sejam únicos, de forma que as equações (5.16) e (5.17) passam a ser escritas como:

$$\left( \bar{H}_{ki}^{lnm} + \frac{1}{2} \delta_{ki}^{lnm} \right) u_i^{nm} = G_{ki}^{lnm} t_i^{nm}. \quad (5.18)$$

$$H_{ki}^{lnm} u_k^{nm} = \left( \bar{G}_{ki}^{lnm} - \frac{1}{2} \delta_{ki}^{lnm} \right) t_k^{nm}. \quad (5.19)$$

Em notação matricial as equações (5.18) e (5.19) ficam:

$$HU = GT. \quad (5.20)$$

Sendo:

$H$  e  $G$  matrizes com  $2nn$  linhas por  $2nn$  colunas e  $nn$  igual ao número de pontos de colocação.

A solução desse sistema só é possível se forem conhecidas as condições de contorno do problema. Ao se introduzir as condições de contorno, as colunas das matrizes  $H$  e  $G$  devem ser reorganizadas de modo a se obter um sistema do tipo:

$$AX = B. \quad (5.21)$$

Sendo:

$A$ , uma matriz quadrada, cheia e não simétrica, que contém os coeficientes das variáveis desconhecidas do problema,

$X$ , o vetor com todas as variáveis a serem determinadas, e

$B$ , um vetor resultante do produto matricial entre a matriz dos coeficientes, com o vetor que contém os valores conhecidos no contorno do problema.

A dificuldade que ocorre na resolução desse sistema de equações consiste em se determinar os coeficientes da diagonal das matrizes  $H$  e  $G$ , pois eles carregam os valores singulares das equações integrais de contorno. Uma forma de transpor esse problema é conhecida como movimento de corpo rígido.

O movimento de corpo rígido se caracteriza pela ausência das forças de superfície, sendo que o sólido se desloca no espaço sem sofrer deformação, o que resulta:

$$HU = 0. \quad (5.22)$$

A equação (5.22) caracteriza-se como um problema típico de autovalor, contendo uma solução possível e determinada denominada solução trivial.

Dessa equação decorre que para uma dada linha da matriz  $H$ , a soma dos coeficientes localizados nas colunas pares deve ser nula, assim como a soma dos coeficientes localizados na coluna ímpar. Essa propriedade é válida para domínios finitos.

Caso se trate de um domínio infinito, as integrais das forças de superfície resultam nas forças reativas do problema fundamental de Kelvin na direção considerada.

Essas propriedades podem ser resumidas como:

Para domínios finitos,

$$\sum_{j=1}^m H_{i(2j-1)} = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^m H_{i(2j)} = 0. \quad (5.23)$$



Sendo:

$i$ , o índice que representa as linhas da matriz, e

$j$ , o índice relativo as colunas da matriz.

Para domínios infinitos,

$$\sum_{j=1}^{m} H_{(2i-1)(2j-1)} = 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{m} H_{(2i-1)(2j)} = 0, \quad (5.24)$$

$$\sum_{j=1}^{m} H_{(2i)(2j-1)} = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{m} H_{(2i)(2j)} = 1. \quad (5.25)$$

Nos problemas da MFLE o movimento de corpo rígido perde a validade, por isso é necessário se desenvolver uma estratégia mais geral para avaliar as integrais singulares. Essa estratégia é descrita a seguir e denomina-se método da subtração de singularidade.

### 5.3. Método da Subtração de Singularidade

Neste item apresentam-se as considerações acerca do método da subtração de singularidade utilizado para avaliar os valores principais que surgem nas matrizes de influência  $H$  e  $G$ . O MSS consiste em remover a singularidade da solução fundamental ao se subtrair a parte singular da integral imprópria utilizando um integrando da mesma natureza. As integrais remanescentes podem ser resolvidas numérica e analiticamente.

Na literatura, o parâmetro físico que dita à natureza do integrando é medida de acordo com a distância relativa entre o ponto fonte e o elemento de contorno que participa da integração. Segundo Aliabadi (2002) as equações integrais são classificadas em equações regulares, quase singulares, fracamente singulares, fortemente singulares e hipersingulares.

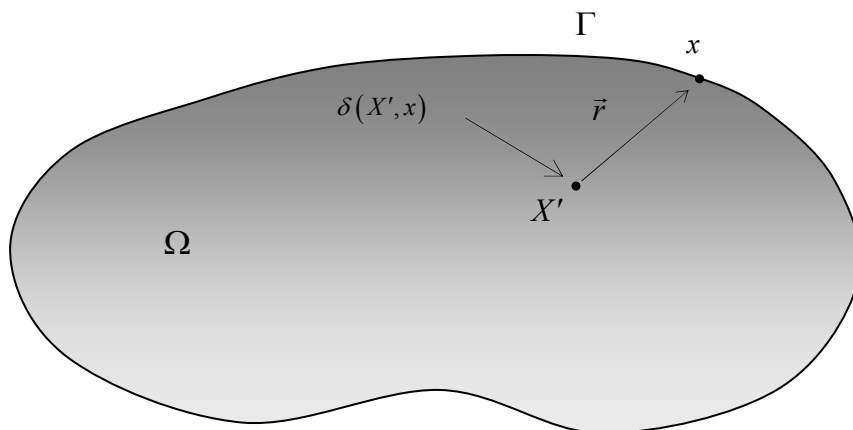
Neste texto, não se adotada essas nomenclaturas. Aqui, distinguem-se as EIC em apenas dois tipos principais, sejam eles: Equações regulares ou equações singulares. Ressalta-se o motivo de se adotar essa denominação devido o caráter absoluto das funções que surgem nas soluções fundamentais. Como por exemplo:

A integral descrita com a função  $f(r) = r^{-1}$  é singular no limite quando  $r \rightarrow 0$  e apresenta ordem de singularidade igual à  $O(r^{-1})$ . Nomenclatura essa utilizada ao longo do trabalho.

Entende-se que a natureza da equação integral é determinada por meio do tipo de singularidade da solução fundamental e não da distância relativa do ponto fonte ao elemento de contorno, sendo essa distância relevante na avaliação da qualidade da integração.

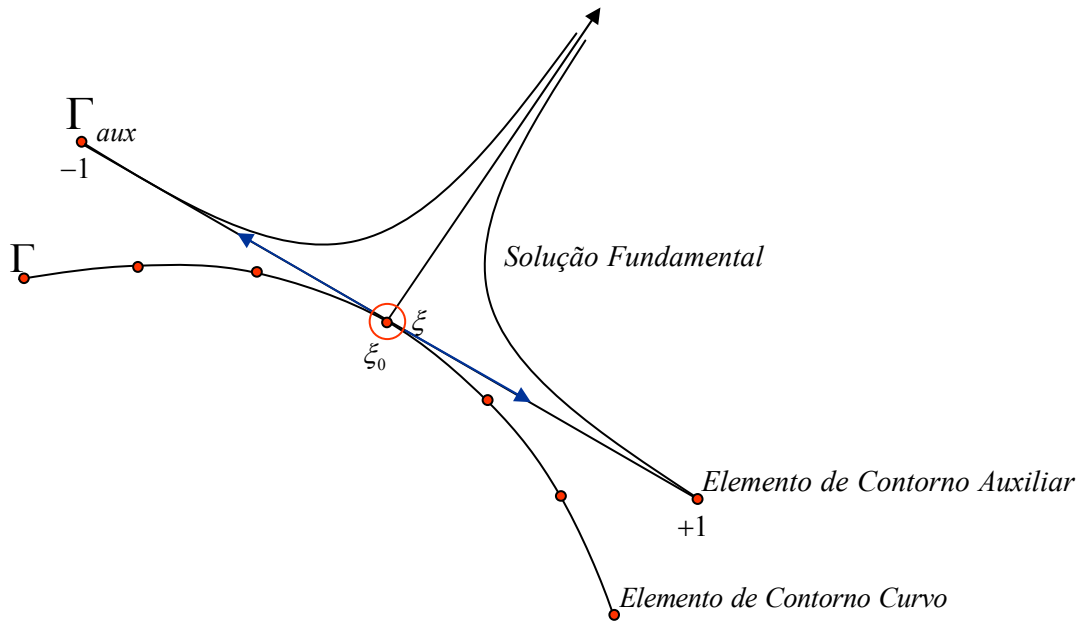
Em contra partida, a integral da função  $f(r) = r$  é regular e, portanto, não há nenhum problema no núcleo da equação integral quando avaliado em  $r \rightarrow 0$ . Do ponto de vista numérico, a qualidade da integração dos termos singulares afeta o condicionamento das matrizes do sistema de equações como apresenta Sladek e Sladek (1998). A seguir, descreve-se o MSS no cálculo das integrais do tipo,  $O(\ln(r))$ ,  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$  que foram utilizadas neste trabalho.

Para um contorno  $\Gamma$  no qual se deseja determinar os valores dos deslocamentos e das forças de superfície sobre o ponto campo  $x$  devido a um carregamento aplicado no ponto fonte  $X'$ , como na Figura 5.11, as EIC são regulares e avaliadas numericamente.



**Figura 5.11: Situação que resulta em EIC regulares.**

Porém quando  $X' \rightarrow x$  os valores dos deslocamentos e das forças de superfície em  $x$  são avaliados na vizinhança de  $x'$ , por meio da expansão em série de Taylor do núcleo singular. A interpretação geométrica desse procedimento conduz a uma avaliação dos termos singulares sobre um elemento auxiliar com geometria reta bem definida. A Figura 5.12 ilustra a consequência da expansão em série sobre um elemento de contorno curvo.



**Figura 5.12: Interpretação geométrica do método da subtração de singularidade.**

As setas azuis indicam o sentido de integração sobre o elemento de contorno auxiliar quando se considera a variável  $r^*(\xi)$  como referencia. A interseção do círculo com o elemento de contorno curvo indicam os valores vizinho ao ponto fonte singular  $\xi_0$  obtido após a expansão em série de Taylor.

A geometria do elemento de contorno curvo é representada por meio da combinação dos valores nodais,  $x_i(\xi) = \phi_m(\xi)x_i^m$ , cujas derivadas são dadas por  $x_{i,\xi}(\xi) = \phi_{m,\xi}(\xi)x_i^m$  que em série de Taylor em torno de  $\xi_0$ , resulta:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + O(\varepsilon^n). \quad (5.26)$$

Sendo:

$\varepsilon$ , o raio que limita os valores na vizinhança do nó singular, e

$O(\varepsilon^n)$ , os termos de ordem superior da série de Taylor que serão desprezados.

A distância relativa entre os pontos  $\xi$  e  $\xi_0$ , em função das coordenadas do sistema global, é representada pelo vetor  $\vec{r}$  e calculada como:

$$\vec{r} = r_i(\xi) \hat{r}_i. \quad (5.27)$$

Sendo:

$\hat{r}_i$ , as componentes do vetor unitário que denota a direção e o sentido do vetor  $\vec{r}$  e

$r_i(\xi) = x_i(\xi) - x_i(\xi_0)$ , as componentes do vetor  $\vec{r}$ .

Denota-se a norma do vetor  $\vec{r}$  por  $r$ , dada por:

$$r = \sqrt{r_i r_i}. \quad (5.28)$$

Substituindo as componentes do vetor raio na equação (5.28), encontra-se:

$$r = \sqrt{[x_i(\xi) - x_i(\xi_0)][x_i(\xi) - x_i(\xi_0)]}. \quad (5.29)$$

Observando as equações (5.26) e (5.29), é possível verificar que para os valores nas vizinhanças do ponto fonte a seguinte substituição é válida:

$$r = \sqrt{x_{i,\xi}(\xi_0) x_{i,\xi}(\xi_0) \varepsilon^2}. \quad (5.30)$$

De posse da equação (5.30) resulta:

$$r^*(\xi) = J(\xi_0) |\varepsilon|. \quad (5.31)$$

Denota-se  $r^*(\xi)$  como sendo a distância do ponto singular sobre o elemento auxiliar reto. Para  $\varepsilon$  não infinitesimal calcula-se  $r^*(\xi)$  sobre o elemento auxiliar.

Sendo:

$$|\varepsilon| = |\xi - \xi_0|, \text{ o raio da expansão em série.}$$

Tendo em mãos esses resultados é possível se desenvolver as expressões do MSS na avaliação das equações integrais para as formulações em deslocamento e força de superfície como será apresentado a seguir.

### 5.3.1. Formulação em Deslocamento

Antes de se aplicar o MSS na equação integral em deslocamento resumem-se todas as características conhecidas sobre essa formulação. Procede-se dessa maneira, para tornar a apresentação mais clara.

Sabe-se que a equação em deslocamento apresenta integrais impróprias com singularidades de ordem  $O(\ln(r))$  e  $O(r^{-1})$  chamadas valores principais de Cauchy e representadas pela integral  $\int_{\Gamma}(\cdot)d\Gamma$  como na equação a seguir:

$$C_{ki}(x')u_i(x') + \int_{\Gamma} T_{ki}^*(x', x)u_i(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(x', x)t_i(x)d\Gamma. \quad (5.32)$$

Sendo:

$T_{ki}^*$  e  $U_{ki}^*$  as soluções fundamentais de Kelvin reescritas como:

$$U_{ki}^*(x', x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ -(3-4\nu)\ln[r(x', x)]\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i} \right\}.$$

$$T_{ki}^*(x', x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(x', x)} \left\{ r_{,n} \left[ (1-2\nu)\delta_{ki} + 2r_{,k}r_{,i} \right] - (1-2\nu)(r_{,k}n_i - r_{,i}n_k) \right\}.$$

A equação (5.32) apresenta dois núcleos impróprios. Aplica-se o MSS primeiramente para o núcleo com singularidade do tipo  $O(\ln(r))$ .

Portanto, seja a parcela:

$$\oint_{\Gamma} U_{ki}^*(x', x) t_i(x) d\Gamma. \quad (5.33)$$

Transformando o sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas adimensionais “ $\xi$ ”, obtém-se:

$$\left[ \oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) U_{ki}^*(\xi_0, \xi) J_l(\xi) d\xi \right] t_i^{lm}. \quad (5.34)$$

Simplificando a solução fundamental e escrevendo-a convenientemente com a introdução de novas constantes  $U_1$  e  $U_2$ . Têm-se:

$$U_{ij}(x', x(\xi)) = U_1 \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} + U_2 r_{,i} r_{,j}.$$

Sendo:

$$U_1 = \frac{-(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \text{ e } U_2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \text{ as novas constantes definidas aqui para facilitar a}$$

implementação numérica do método.

Substituindo-se a solução fundamental simplificada na equação integral (5.34), tem-se:

$$\oint_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ki} J_l(\xi) d\xi + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,k} r_{,i} J_l(\xi) d\xi. \quad (5.35)$$

A equação (5.35) possui duas parcelas de naturezas distintas. A Parcela que contém a constante  $U_1$  apresenta núcleo de natureza singular no limite quando  $r \rightarrow 0$ . Por outro lado a parcela com a constante  $U_2$  apresenta núcleo regular e limitado.

Na regularização com o MSS se subtrai e se soma à parcela singular, uma integral de natureza semelhante que deverá ser avaliada sobre o elemento auxiliar.

Aplicando o MSS a primeira parcela da equação (5.35), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ki} d\xi - \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(r^*(\xi_0, \xi)) J_l(\xi_0) \delta_{ki} d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(r^*(\xi_0, \xi)) J_l(\xi_0) \delta_{ki} d\xi. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Sendo:

$r^*(\xi_0, \xi) = J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|$ , a expansão em primeira ordem do vetor raio calculada sobre o elemento auxiliar.

O primeiro termo da expansão é suficiente para regularizar a integral imprópria da parcela singular.

Substituindo esses valores na equação (5.36), encontra-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[ U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ki} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ki} \right] d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ki} d\xi. \end{aligned} \quad (5.37)$$

A análise limite da equação (5.37) permite verificar que a parcela entre colchetes é limitada e por isso é regular, podendo ser avaliada numericamente.

Agrupando-se todas as parcelas regulares do núcleo integral (5.33), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[ U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ki} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ki} \right] d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,k} r_{,i} J_l(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Aplicando-se a quadratura de Gauss-Legendre na equação (5.38), têm-se:

$$\sum_{n=1}^{npg} \left[ U_1 \phi_m(\xi_n) \ln(r(\xi_0, \xi_n)) J_l(\xi_n) \delta_{ki} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0)(\xi_n - \xi_0)) J_l(\xi_0) \delta_{ki} \right] \omega_n. \quad (5.39)$$

$$+ U_2 \phi_m(\xi_n) r_{,k} r_{,i} J_l(\xi_n)$$

A parcela com núcleo singular resultante em (5.37) deve ser avaliada no sentido do valor principal de Cauchy, como segue:

$$\int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ki} d\xi. \quad (5.40)$$

Para  $\varepsilon = \xi - \xi_0$  implica  $d\varepsilon = d\xi$ , assim, os limites de integração podem ser substituídos por  $[-1 - \xi_0, +1 - \xi_0]$ .

Reescrevendo a equação (5.40), tem-se:

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ki} \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \ln(J_l(\xi_0)\varepsilon) d\varepsilon.$$

Simplificando:

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \{VPC\}. \quad (5.41)$$

Sendo:

$\{VPC\}$ , a integral no sentido do valor principal de Cauchy.

A integral em  $\{VPC\}$  é avaliada da seguinte forma:

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(J_l(\xi_0)\varepsilon) d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \ln(J_l(\xi_0)\varepsilon) d\varepsilon \right\}.$$

Que resulta:

$$\{VPC\} = (1 + \xi_0) \ln|(1 + \xi_0) J_l(\xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln|(1 - \xi_0) J_l(\xi_0)| - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)]. \quad (5.42)$$



É necessário ainda analisar o que ocorre quando  $\xi_0 = \pm 1$ , que são os casos em que os elementos de contorno compartilham o mesmo nó com o elemento adjacente resultando em valores principais impróprios. Para os elementos descontínuos verifica-se que a equação (5.42) não apresenta problema.

Para transpor o problema quanto se usam os elementos contínuos e semi-contínuos aplicam-se as seguintes condições:

Quando  $|\xi_0| = 1$ .

$$\{VPC\} = 2 \ln |2J_l(\xi_0)| - 2.$$

Substituindo esse resultado em (5.41), obtém-se:

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ki} \{2 \ln |2J_l(\xi_0)| - 2\}. \quad (5.43)$$

Quando  $|\xi_0| \neq 1$ .

$$\{VPC\} = (1 + \xi_0) \ln |(1 + \xi_0) J_l(\xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln |(1 - \xi_0) J_l(\xi_0)| - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)].$$

Ao se substituir esse valor em (5.41), resulta:

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} (1 + \xi_0) \ln |(1 + \xi_0) J_l(\xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln |(1 - \xi_0) J_l(\xi_0)| \\ - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)] \end{array} \right\}. \quad (5.44)$$

Essas considerações equivalem a realizar uma integração sobre o elemento adjacente quando o mesmo nó do elemento integrado é compartilhado.

O procedimento descrito para a solução fundamental dos deslocamentos é estendido para as demais soluções fundamentais que surgem nas equações integrais de contorno. A seguir apresenta-se o MSS aplicado as demais integrais.

Procede-se da mesma forma para analisar a outra parcela singular da equação integral (5.32). Portanto, seja a integral:

$$\oint_{\Gamma} T_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma. \quad (5.45)$$

Nessa equação, a solução fundamental em força de superfície é descrita por uma integral imprópria com singularidade de ordem  $O(r^{-1})$ .

Por conveniência, representa-se a solução fundamental por:

$$T_{ki}^*(x', x) = \frac{\bar{T}_{ki}(x', x)}{r(x', x)}. \quad (5.46)$$

Sendo:

$\bar{T}_{ki}(x', x)$ , um termo auxiliar que contém núcleo não singular.

Substituindo a relação (5.46) na equação (5.45), resulta:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\bar{T}_{ki}(x', x)}{r(x', x)} u_i(x) d\Gamma. \quad (5.47)$$

Mudando o sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas adimensionais “ $\xi$ ”, se escreve a integral singular como:

$$\left[ \oint_{\Gamma} \phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] u_i^{lm}. \quad (5.48)$$

Simplificando  $\bar{T}_{ki}(\xi_0, \xi)$  e escrevendo-o convenientemente com a introdução das constantes  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , tem-se:

$$\bar{T}_{ki}(x', x(\xi)) = T_1(r_{,n} \delta_{ki}) + T_2(r_{,n} r_{,k} r_{,i}) + T_3(r_{,k} n_i - r_{,i} n_k). \quad (5.49)$$

Sendo:

$$T_1 = \frac{-(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}, T_2 = \frac{-2}{4\pi(1-\nu)} \text{ e } T_3 = -T_1, \text{ as novas constantes.}$$

Verifica-se que nesse caso todas as parcelas da solução fundamental são singulares em decorrência do produto de  $\bar{T}_{ki}$  por  $r^{-1}$ . Ao se aplicar o MSS, encontra-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0, \xi)}{r(\xi, \xi_0)} J_l(\xi) d\xi - \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0)}{r^*(\xi, \xi_0)} J_l(\xi_0) d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0)}{r^*(\xi, \xi_0)} J_l(\xi_0) d\xi. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Sendo:

$\bar{T}_{ij}(\xi_0)$ , a solução fundamental auxiliar avaliada no ponto fonte expresso por:

$$\bar{T}_{ki}(\xi_0) = T_3 (r_{,k}(\xi_0) n_i(\xi_0) - r_{,i}(\xi_0) n_k(\xi_0)). \quad (5.51)$$

Nesse termo, a deriva normal  $r_{,n}$  avaliada no ponto singular é nula.

Substituindo a relação (5.31) na equação (5.50) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[ \phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ao se realizar uma análise limite na equação (5.52), verifica-se que o termo entre colchetes é limitado e pode ser calculado por meio da quadratura de Gauss-Legendre. A parcela restante deve ser calculada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy.

A expressão da parcela numérica avaliada segundo a quadratura de Gauss-Legendre é:

$$\sum_{n=1}^{npg} \left[ \phi_m(\xi_n) \frac{\bar{T}_{ki}(\xi_0, \xi_n)}{r(\xi_0, \xi_n)} J_l(\xi_n) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ij}(\xi_0)}{\xi_n - \xi_0} \right] \omega_n. \quad (5.53)$$

Com  $npg$ , o número de pontos de Gauss utilizado na integração.

A parcela analítica a ser calculada como valor principal de Cauchy é expressa por:

$$\oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \quad (5.54)$$

Procedendo-se a uma mudança de variável,  $\varepsilon = \xi - \xi_0$ , os limites de integração ficam representados por  $[-1 - \xi_0, +1 - \xi_0]$ .

Reescrevendo a equação (5.54), tem-se:

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\xi, \text{ simplificando:}$$

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \{VPC\}. \quad (5.55)$$

A integral no sentido do valor principal de Cauchy é determinada por:

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}.$$

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln|-\varepsilon| - \ln|-1-\xi_0| + \ln|1-\xi_0| - \ln|\varepsilon| \right\}.$$

$$\{VPC\} = -\ln|1+\xi_0| + \ln|1-\xi_0|. \quad (5.56)$$

Para o caso dos elementos que compartilham um ou dois nós deve-se proceder de forma concomitante a integração nos elementos de contorno vizinhos.

As condições abaixo expressam os possíveis valores que o ponto singular deve assumir e suas respectivas expressões do valor principal.

Quando  $\xi_0 = -1$ , então:

$\{VPC\} = \ln(2)$ . Substituindo-o em (5.55), tem-se:

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \ln(2). \quad (5.57)$$

Quando  $\xi_0 = +1$ , então:

$\{VPC\} = -\ln(2)$ , portanto, a parcela analítica será:

$$-\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \ln(2). \quad (5.58)$$

Quando  $|\xi_0| \neq 1$ , tem-se:

$\{VPC\} = \ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0|$ , que ao ser substituído em (5.55), resulta:

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ij}(\xi_0) \{\ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0|\}. \quad (5.59)$$

Essa condição é dada somente quando se usam elementos de contorno descontínuos com nós deslocados da extremidade do elemento.

### 5.3.2. Formulação em Força de Superfície

Para a formulação em força de superfície procede-se da mesma maneira como foi realizado para a formulação em deslocamento. Porém agora se aplica o MSS nas integrais impróprias com singularidades de ordem  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$ .

A equação integral em força de superfície é reescrita aqui como:

$$\frac{1}{2} t_i(x') = n_j(x') \int_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x) t_k(x) d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma. \quad (5.60)$$

Que apresentam as soluções fundamentais:

$$S_{kij}^*(x', x) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2(x', x)} \left\{ 2r_{,n} \left[ (1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) \right\} \\ \left\{ + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\}$$

$$D_{kij}^*(x', x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r(x', x)} \left\{ (1-2\nu)(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\}.$$

Inicia-se a subtração de singularidade avaliando-se a integral:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} D_{kij}(x', x) t_k(x) d\Gamma. \quad (5.61)$$

Escrevendo a solução fundamental convenientemente, tem-se:

$$D_{kij}(x', x) = \frac{\bar{D}_{kij}(x', x)}{r(x', x)}. \quad (5.62)$$

Sendo  $\bar{D}_{kij}(x', x)$  a expressão auxiliar não singular utilizada para facilitar a implementação das equações. Substituindo (5.62) na integral (5.61), tem-se:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} \frac{\bar{D}_{kij}(x', x)}{r(x', x)} t_k(x) d\Gamma. \quad (5.63)$$

Mudando o sistema de referencia global para o sistema de coordenadas adimensional “ $\xi$ ”, a expressão (5.63) fica escrita como:

$$n_i(\xi_0) \left[ \oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] t_k^{lm}. \quad (5.64)$$

Simplificando a expressão (5.64) e escrevendo-a em função de novas constantes  $D_1$  e  $D_2$ , obtém-se:

$$\bar{D}_{kij}(x', x) = D_1(r_{,i}\delta_{jk} + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,k}\delta_{ij}) + D_2(r_{,i}r_{,j}r_{,k}). \quad (5.65)$$

Sendo:

$$D_1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \text{ e } D_2 = \frac{1}{2\pi(1-\nu)}.$$

Aplicando o MSS, encontra-se:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi - n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} J_l(\xi_0) d\xi \\ + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{r^*(\xi_0, \xi)} J_l(\xi_0) d\xi. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Substituindo (5.31) na expressão (5.66), encontra-se:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \left[ \phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\ + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \end{aligned} \quad (5.67)$$

A integral entre os colchetes é limitada, logo é regular e por isso é avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre.

Aplicando a quadratura, tem-se:

$$n_i(\xi_0) \sum_{n=1}^{npg} \left[ \phi_m(\xi_n) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi_n)}{r(\xi_0, \xi_n)} J_l(\xi_n) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{\xi_n - \xi_0} \right] \omega_n. \quad (5.68)$$

A integral remanescente é avaliada analiticamente por meio do valor principal de Cauchy,

$$n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \bar{D}_{kij}(\xi_0) \frac{1}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \quad (5.69)$$

Realizando a mudança de variável nos limites de integração tem-se:

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon, \text{ que é apresentada como:}$$

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0)\{VPC\}. \quad (5.70)$$

A integral no sentido do valor de Cauchy é semelhante à apresentada para a solução fundamental  $T_{ki}^*$ , uma vez que as singularidades são de ordem  $O(r^{-1})$ . A integral resulta:

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}.$$

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln|-\varepsilon| - \ln|1-\xi_0| + \ln|1-\xi_0| - \ln|\varepsilon| \right\}.$$

$$\{VPC\} = -\ln|1+\xi_0| + \ln|1-\xi_0|. \quad (5.71)$$

Para os nós extremos procede-se como mencionado anteriormente ao se analisar a variável  $\{VPC\}$  admitindo-se as seguintes condições:

Quando  $\xi_0 = -1$ .

$$\{VPC\} = \ln(2), \text{ resultando:}$$

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0)\ln(2). \quad (5.72)$$

Quando  $\xi_0 = +1$ .

$$\{VPC\} = -\ln(2).$$

$$-n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0)\ln(2). \quad (5.73)$$



Quando  $|\xi_0| \neq 1$ .

$$\{VPC\} = \ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0|.$$

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0)\{\ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0|\}. \quad (5.74)$$

Nesse caso é interessante realizar o produto  $n_i(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0)$ , pois haverá uma simplificação na implementação das equações. Conforme se apresenta no produto a seguir:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0) &= D_1 \{ [r_{,1}n_1(\xi_0) + r_{,2}n_2(\xi_0)]\delta_{jk} + r_{,j}n_k(\xi_0) - r_{,k}n_j(\xi_0) \} \\ &+ D_2 \{ [r_{,1}n_1(\xi_0) + r_{,2}n_2(\xi_0)]r_{,j}r_{,k} \}. \end{aligned}$$

$$n_i(\xi_0)\bar{D}_{kij}(\xi_0) = D_1 [r_{,j}(\xi_0)n_k(\xi_0) - r_{,k}(\xi_0)n_j(\xi_0)]. \quad (5.75)$$

Finalmente, apresenta-se o MSS aplicado na avaliação da integral que envolve as derivadas das soluções fundamentais em forças de superfície com ordem de singularidade igual a  $O(r^{-2})$ . A integral desse tipo é representada por  $\oint_{\Gamma}(\cdot)d\Gamma$  que significa a parte finita de Hadamard.

Seja a integral da equação (5.60).

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma. \quad (5.76)$$

Escrevendo a solução fundamental como:

$$S_{kij}^*(x', x) = \frac{\bar{S}_{kij}(x', x)}{r^2(x', x)}. \quad (5.77)$$

Sendo:

$\bar{S}_{kij}(x', x)$ , a solução fundamental auxiliar escrita em termos de seis novas constante,

$$\begin{aligned} \bar{S}_{kij}(x', x) = & S_1 \frac{\partial r}{\partial n}(r_{,k} \delta_{ij}) + S_2 \frac{\partial r}{\partial n}(r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) + S_3 \frac{\partial r}{\partial n}(r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \\ & + S_4 (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + S_5 (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) + S_6 (n_k \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$S_1 = \frac{\mu(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)}, \quad S_2 = \frac{\mu\nu}{\pi(1-\nu)}, \quad S_3 = \frac{-4\mu}{\pi(1-\nu)}; \quad S_4 = S_2; \quad S_5 = \frac{1}{2} S_1 \quad \text{e} \quad S_6 = \frac{-\mu(1-4\nu)}{2\pi(1-\nu)}.$$

Substituindo a equação (5.77) em (5.76), encontra-se a nova integral:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} \frac{\bar{S}_{kij}(x', x)}{r^2(x', x)} u_k(x) d\Gamma. \quad (5.79)$$

Mudando o sistema de referencia global para o sistema de coordenadas adimensionais “ $\xi$ ”, resulta:

$$n_i(\xi_0) \left[ \oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] u_k^{lm}. \quad (5.80)$$

Aplicando o MSS, encontra-se:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi - n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m^*(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{r^{*2}(\xi_0, \xi)} J_l(\xi_0) d\xi \\ + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m^*(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{r^{*2}(\xi_0, \xi)} J_l(\xi_0) d\xi. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Para o caso de integrais impróprias com singularidades de ordem  $O(r^{-2})$  é necessário considerar a expansão em série Taylor até o termo linear das funções de forma. Esse termo é suficiente para que a integral seja avaliada no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard.

Procedendo a expansão em série até primeira ordem para as funções de forma, resulta:

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) + \phi_{m,\xi}(\xi_0) \varepsilon.$$

Para os outros termos, basta considerar a parcela constante da expansão.

$\bar{S}_{kij}(\xi_0)$ , é o termo constante da expansão em série da solução fundamental auxiliar, e

$r^*(\xi_0, \xi) = J_l(\xi_0)|\varepsilon|$ , a distância do ponto fonte ao ponto campo, com  $|\varepsilon| = |\xi - \xi_0|$ .

Substituindo essas variáveis na expressão (5.81), encontra-se:

$$n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \left[ \phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0, x(\xi))}{r^2(\xi_0, x(\xi))} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} - \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \quad (5.82)$$

$$+ n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} d\xi + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} d\xi.$$

A integral entre os colchetes é regular e por isso é avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre.

Aplicando a quadratura de Gauss-Legendre, tem-se:

$$n_i(\xi_0) \sum_{n=1}^{npg} \left[ \begin{array}{l} \phi_m(\xi_n) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0, \xi_n)}{r^2(\xi_0, \xi_n)} J_l(\xi_n) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi_n - \xi_0)^2} - \\ \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi_n - \xi_0)} \end{array} \right] \omega_n. \quad (5.83)$$

As integrais fora dos colchetes, são integrais impróprias no sentido de Hadamard e Cauchy, respectivamente. Isso permite que elas possam ser avaliadas analiticamente sobre o elemento reto auxiliar como será apresentado a seguir para cada uma dessas integrais.

Primeiramente avalia-se a parcela analítica da integral no sentido da parte finita de Hadamard:

$$n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi_n - \xi_0)^2} d\xi. \quad (5.84)$$

Realizando a mudança de variável dos limites de integração para  $[-1-\xi_0, +1-\xi_0]$ , e reescrevendo (5.84), encontra-se:

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\left\{\int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0}\frac{1}{\varepsilon^2}d\varepsilon\right\}.$$

Simplificadamente,

$$n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\{PFH\}. \quad (5.85)$$

Sendo:

$\{PFH\}$ , a integral no sentido da parte finita de Hadamard.

Essa integral é calculada da seguinte forma:

$$\{PFH\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{1+\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \right\}.$$

$$\{PFH\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0} \right\}, \text{ considera-se apenas a parte finita da integral:}$$

$$\{PFH\} = -\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0} \quad (5.86)$$

A parte infinita é cancelada com o termo idêntico e de sinal contrário que surge no infinito, semelhante ao cálculo realizado para se determinar o termo livre da equação integral, como foi apresentado no capítulo anterior.

Porém, ainda haverá problemas quanto ao uso de elementos contínuos e descontínuos. Nesse caso procede-se da mesma maneira com já vem sendo aplicado, desde que os elementos contíguos não apresentem cantos agudos entre si. Dessa forma é possível realizar a integração sobre o elemento vizinho como é especificado nas condições a seguir.

Quando  $|\xi_0| = 1$ .

$\{PFH\} = -\frac{1}{2}$ , o que gera a expressão:

$$-n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\left\{\frac{1}{2}\right\}. \quad (5.87)$$

Quando  $|\xi_0| \neq 1$ .

$\{PFH\} = -\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0}$ , o que resulta:

$$-n_i(\xi_0)\phi_m(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\left\{\frac{1}{1-\xi_0} + \frac{1}{1+\xi_0}\right\}. \quad (5.88)$$

A outra parcela da equação (5.82) traz a integral no sentido do valor principal de Cauchy que é dada pela integral:

$$n_i(\xi_0)\oint_{-1}^{+1}\phi_{m,\xi}(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)\varepsilon}d\xi. \quad (5.89)$$

Novamente procede-se a mudança de variável para os limites de integração, resultando  $[-1-\xi_0, +1-\xi_0]$ . Substituindo esses limites na equação (5.89), resulta:

$$n_i(\xi_0)\phi_{m,\xi}(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\left\{\int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0}\frac{1}{\varepsilon}d\varepsilon\right\}, \text{ ou simplesmente,}$$

$$n_i(\xi_0)\phi_{m,\xi}(\xi_0)\frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)}\{VPC\}. \quad (5.90)$$

O valor principal de Cauchy será:

$$\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}.$$

Resultando:

$$\{VPC\} = -\ln|1 + \xi_0| + \ln|1 - \xi_0|. \quad (5.91)$$

Aplicando as condições para os nós comuns dos elementos adjacentes, obtém-se:

Quando  $\xi_0 = -1$ .

$\{VPC\} = \ln(2)$ , substituindo esse valor em (5.90), encontra-se:

$$n_i(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \ln(2). \quad (5.92)$$

Quando  $\xi_0 = +1$ , o valor de Cauchy fica:

$\{VPC\} = -\ln(2)$ . Ao se substituir esse valor na expressão (5.90), resulta:

$$-n_i(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \ln(2). \quad (5.93)$$

Quando  $|\xi_0| \neq 1$ , o valor principal se mantém.

$\{VPC\} = -\ln|1 + \xi_0| + \ln|1 - \xi_0|$ , resultando na expressão:

$$n_i(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \{ \ln|1 - \xi_0| - \ln|1 + \xi_0| \}. \quad (5.94)$$

O produto entre o vetor normal e a solução fundamental auxiliar sobre o nó singular é:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \bar{S}_{kij}(\xi_0) = & S_1 \frac{\partial r}{\partial n} [r_{,k} n_j(\xi_0)] + S_2 \frac{\partial r}{\partial n}(\xi_0) \left\{ \begin{array}{l} r_{,j} n_k(\xi_0) \\ + [r_{,1} n_1(\xi_0) + r_{,2} n_2(\xi_0)] \delta_{jk} \end{array} \right\} \\ & + S_3 \frac{\partial r}{\partial n}(\xi_0) ([r_{,1} n_1(\xi_0) + r_{,2} n_2(\xi_0)] r_{,j} r_{,k}) + S_4 \left\{ \begin{array}{l} [n_1 n_1(\xi_0) + n_2 n_2(\xi_0)] r_{,j} r_{,k} \\ + n_j [r_{,1} n_1(\xi_0) + r_{,2} n_2(\xi_0)] r_{,k} \end{array} \right\} \\ & + S_5 \left\{ \begin{array}{l} 2n_k [r_{,1} n_1(\xi_0) + r_{,2} n_2(\xi_0)] r_{,j} + n_j n_k(\xi_0) \\ + [n_1 n_1(\xi_0) + n_2 n_2(\xi_0)] \delta_{jk} \end{array} \right\} + S_6 [n_k n_j(\xi_0)]. \end{aligned}$$

Como os valores da derivada normal sobre o ponto fonte se anulam, realizam-se algumas simplificações algébricas, que resultam:

$$n_i(\xi_0)\bar{S}_{kij}(\xi_0) = S_4 \left\{ [n_1(\xi_0)n_1(\xi_0) + n_2(\xi_0)n_2(\xi_0)] r_{,j}(\xi_0)r_{,k}(\xi_0) \right\} \\ + S_5 \left\{ n_j(\xi_0)n_k(\xi_0) + [n_1(\xi_0)n_1(\xi_0) + n_2(\xi_0)n_2(\xi_0)] \delta_{jk} \right\} + S_6 [n_k(\xi_0)n_j(\xi_0)].$$

A descrição realizada até aqui consiste na base do método de regularização desenvolvido para avaliar as equações integrais singulares com ordem de singularidade iguais a  $O(\ln(r))$ ,  $O(r^{-1})$  e  $O(r^{-2})$  utilizadas nesta dissertação. No item a seguir apresentam os exemplos de aplicação desses procedimentos.

#### 5.4. Exemplos

Com o intuito de se validar a formulação apresentada, analisam-se três exemplos cujas soluções são amplamente divulgadas na literatura, Saad (2005).

Nestes exemplos os pontos fonte são considerados sobre o contorno, de modo que as integrais singulares sejam avaliadas com o MSS.

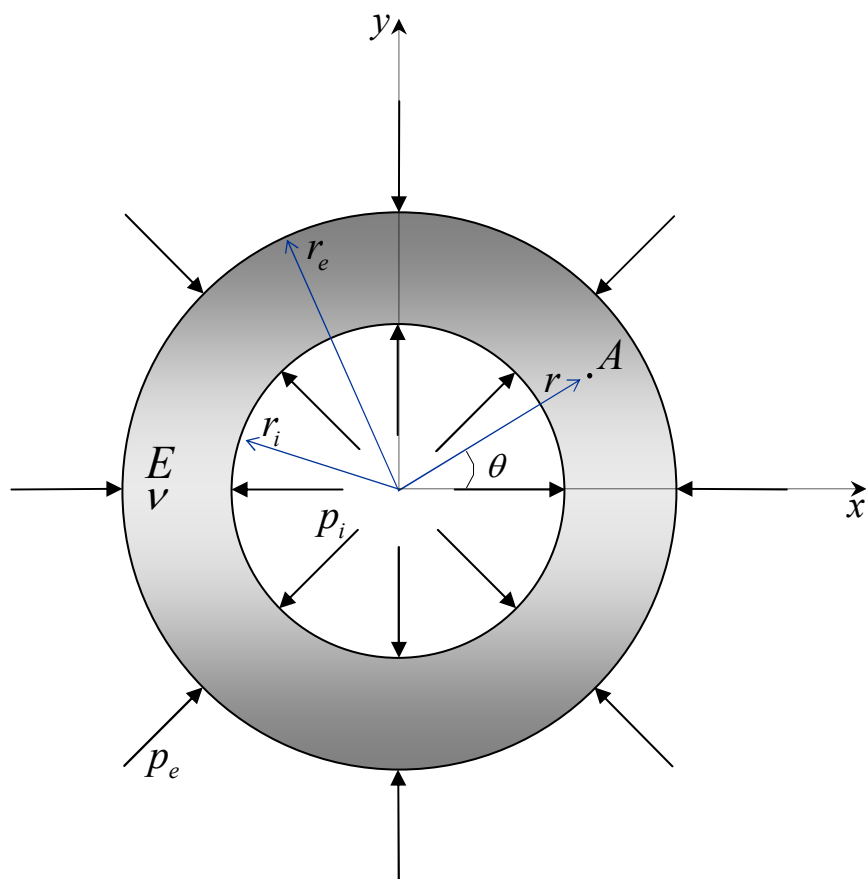
Para facilitar a identificação dos exemplos criou-se uma metodologia de construção dos nomes dos modelos.

Por exemplo: Seja o cilindro pressurizado com pressão interna.

Denota-se o problema por meio de suas iniciais, no caso do exemplo, *CPPI* representa o problema do cilindro pressurizado com pressão interna. A discretização é representada pela letra *M*, de malha, seguida do número de elementos de contorno adotados, por exemplo, para uma malha com 32 elementos de contorno utiliza-se M32. Como a análise poderá ser realizada para qualquer grau de aproximação indica-se a letra *G*, de grau, seguida do respectivo valor adotado para o grau da aproximação. A última letra representa o tipo de formulação empregada. Escreve-se *U* para a formulação dos deslocamentos e *T* para a formulação em força de superfície. Escreve-se *D* no caso de se empregar as duas formulações simultaneamente, ou seja, a formulação dual. Para distinguir essas características utiliza-se um hífen de separação. Posto isso, analisam-se os seguintes exemplos.

### 5.4.1. Exemplo 1: Cilindro Pressurizado com Pressão Interna (CPPI)

O primeiro exemplo a ser investigado consiste no cilindro pressurizado da Figura 5.13.



**Figura 5.13: Problema geral do cilindro pressurizado.**

Sendo:

$r_e$  e  $r_i$ , os raios externo e interno do cilindro, respectivamente,

$p_e$  e  $p_i$ , as pressões externas e internas, e

$r$ , a distância do ponto  $A$  ao centro do cilindro.

A solução desse problema é obtida por meio das condições de axissimetria e das funções de tensão de Airy em coordenadas polares.



A solução desse problema é dada para os campos:

De tensões,

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{r_i^2 r_e^2 (p_e - p_i)}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}, \text{ e} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{r_i^2 r_e^2 (p_e - p_i)}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}.\end{aligned}\tag{5.95}$$

Sendo:

$\sigma_{rr}$  e  $\sigma_{\theta\theta}$ , a tensão radial e circunferencial, respectivamente.

De deslocamento,

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} \left[ -\frac{r_i^2 r_e^2 (p_e - p_i)}{r_e^2 - r_i^2} \frac{1}{r} + (1-2\nu) \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} r \right].\tag{5.96}$$

Sendo:

$u_r$ , o deslocamento radial.

Nesse exemplo considera-se  $p_e = 0$ .

#### 5.4.1.1 Dados do Problema

Análise: Estado plano de deformação.

Módulo de elasticidade do material:  $E = 7,3 \times 10^5 \text{ MPa}$ .

Coefficiente de Poisson:  $\nu = 0,32$ .

Pressão interna:  $p_i = 100,0 \text{ MPa}$ .

Raio externo:  $r_e = 100,0 \text{ cm}$ .

Raio interno:  $r_i = 50,0 \text{ cm}$ .

### 5.4.1.2 Modelos

Utilizam-se os seguintes modelos para a análise:

$$CPPI - MxGy - U, CPPI - MxGy - T \text{ e } CPPI - MxGy - D.$$

Com  $x$  igual a 16, 32, 64, 128, 256 e 512 elementos e  $y$  igual à aproximação de grau 1, 2 e 3.

### 5.4.1.3 Análise dos Resultados

Avaliam-se os resultados numéricos em relação ao valor analítico por meio da equação do erro relativo dada por:

$$|e(\tilde{u}_i)| = \frac{|u_i - \tilde{u}_i|}{|u_i|} 100\%. \quad (5.97)$$

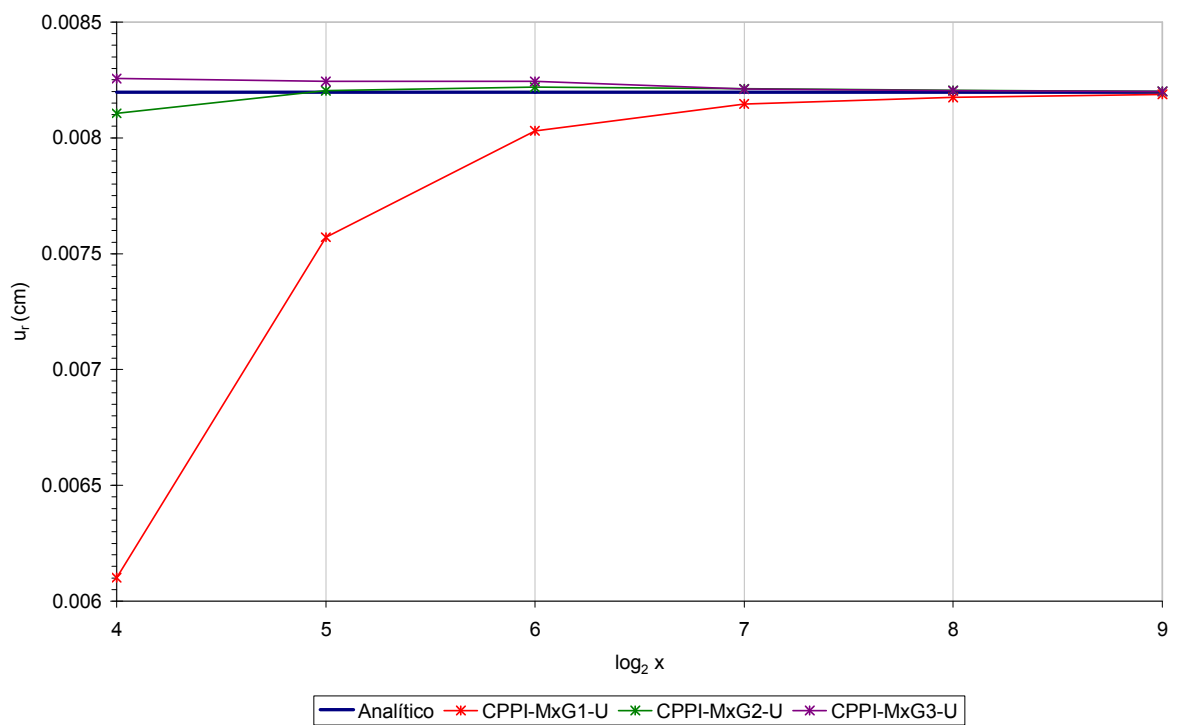
Sendo:

$|e(\tilde{u}_i)|$ , a norma euclidiana do erro,

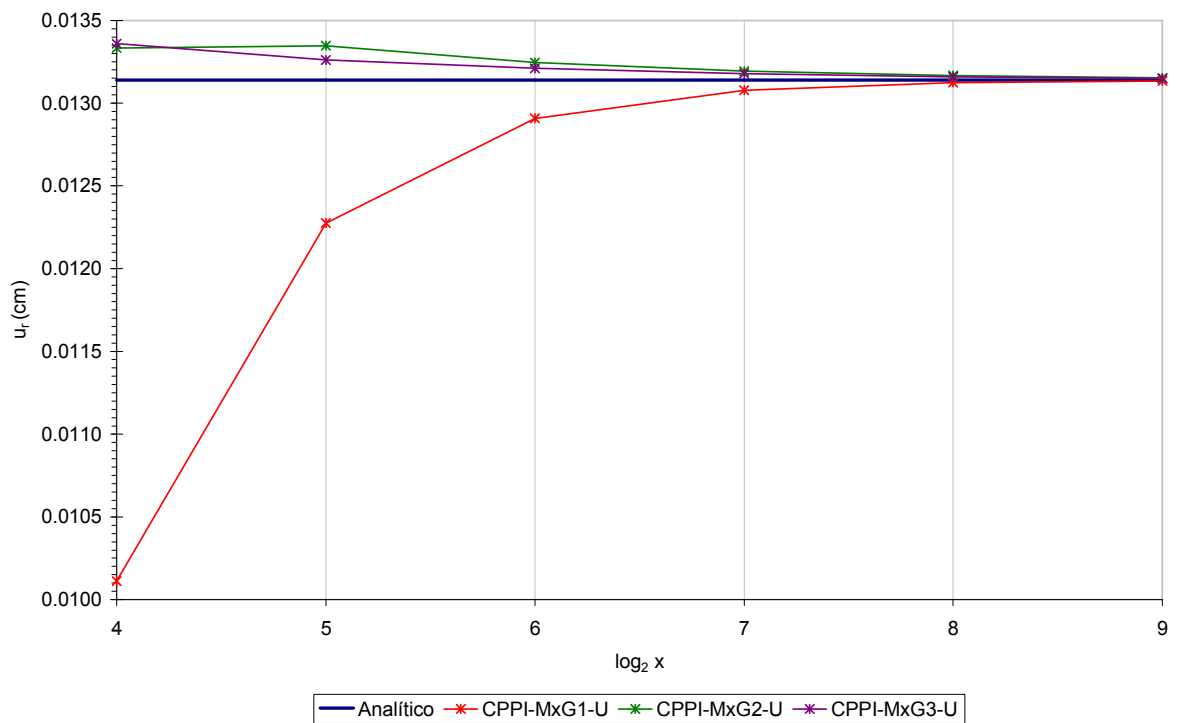
$u_i$  e  $\tilde{u}_i$ , os deslocamento analíticos e numéricos, respectivamente.

### Campo de Deslocamento Radial

Inicia-se a análise realizando-se o estudo da convergência do campo de deslocamento radial do contorno externo e interno do cilindro. Para isso utiliza-se a equação integral dos deslocamentos. Os resultados dessa análise podem ser verificados no gráfico da Figura 5.14 e Figura 5.15, que servem de base para as próximas análises.

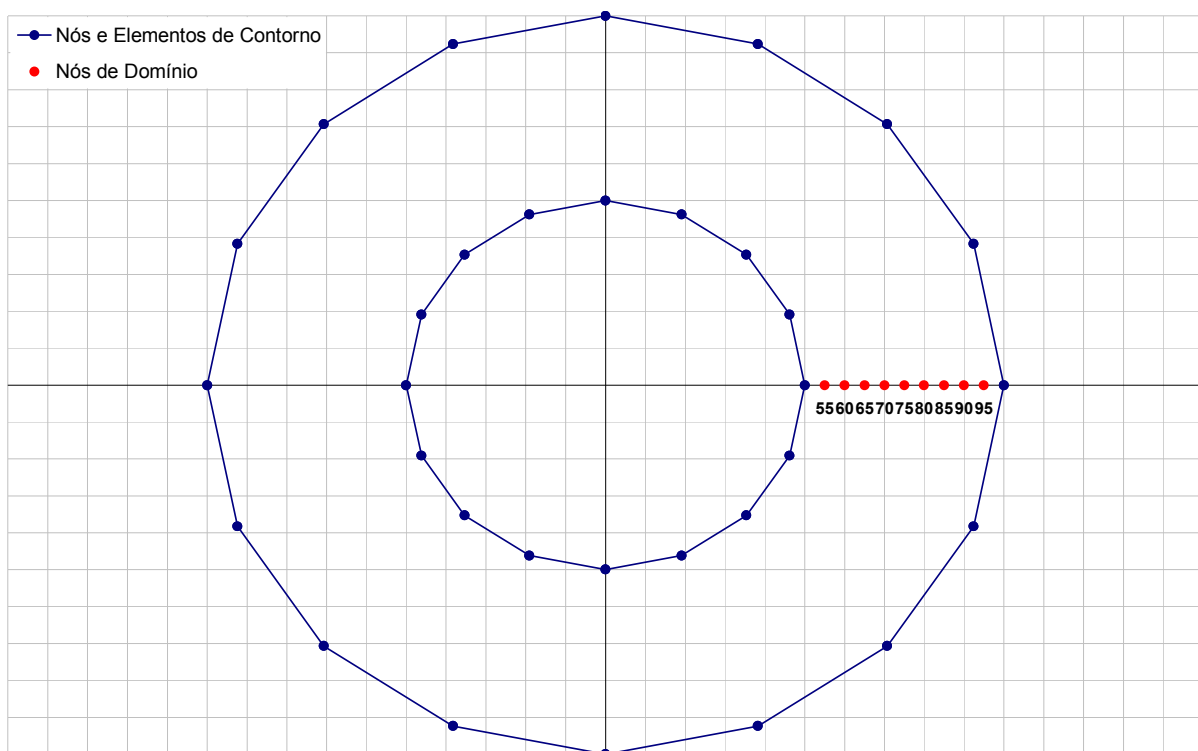


**Figura 5.14: Análise de convergência. Deslocamento radial do contorno externo.**



**Figura 5.15: Análise de convergência. Deslocamento radial do contorno interno.**

Com base nos gráficos de convergência verifica-se que a solução numérica com a formulação em deslocamento apresenta convergência monótona a partir da discretização da malha com 32 elementos. Para os elementos isoparamétricos quadráticos e cúbicos, nota-se que a convergência é mais rápida do que com os elementos lineares. Isso ocorre porque são utilizados elementos curvos para representar a geometria do problema, o que não se verifica para os elementos lineares. A seguir apresentam-se as malhas de um dos modelos estudados, com a finalidade de demonstrar essa afirmação.

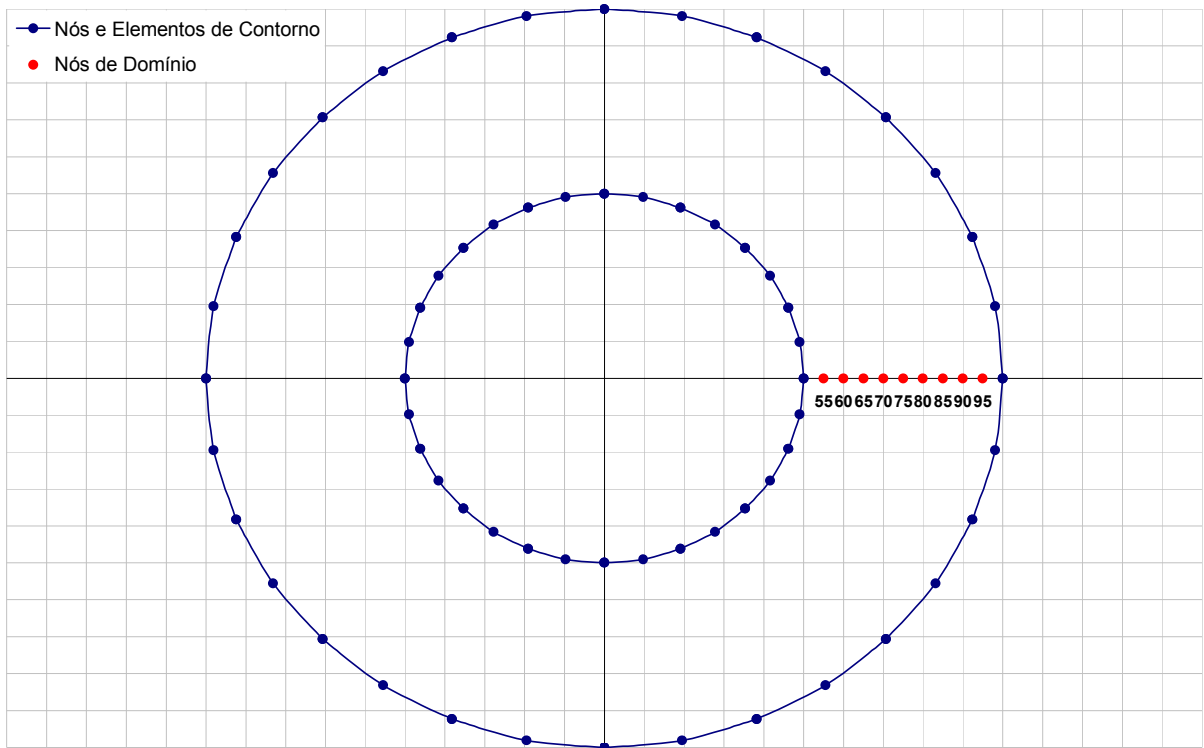


**Figura 5.16: Modelo *CPPI – M32G1*.**

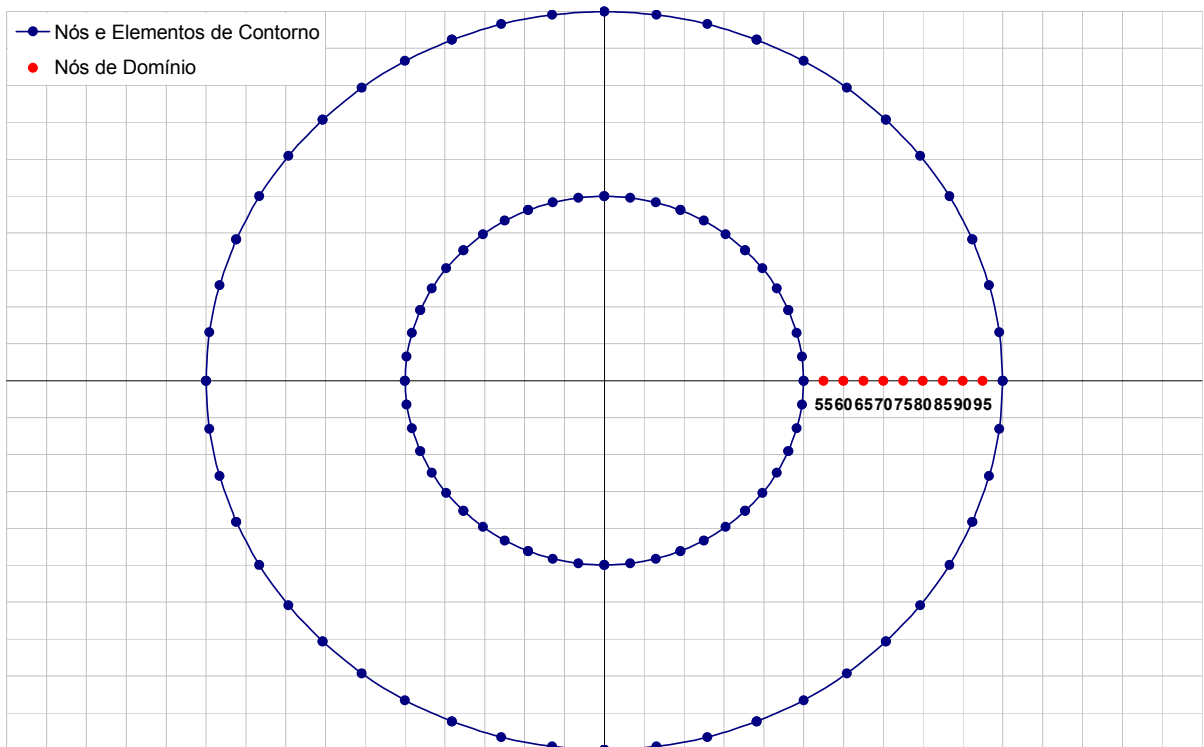
Observa-se na Figura 5.16 que a geometria do problema *CPPI – M32G1* é conectada apenas por elementos de contorno retos. O mesmo ocorre para a pressão interna do cilindro que apresentam descontinuidades nos cantos agudos formados pela união entre os elementos.

Com o aumento do grau da aproximação esse problema é atenuado, sendo preponderante o erro devido à qualidade da integração numérica.

As malhas a seguir demonstram a melhora na representação da geometria quando se eleva o grau da aproximação.



**Figura 5.17: Modelo CPPI – M32G2.**

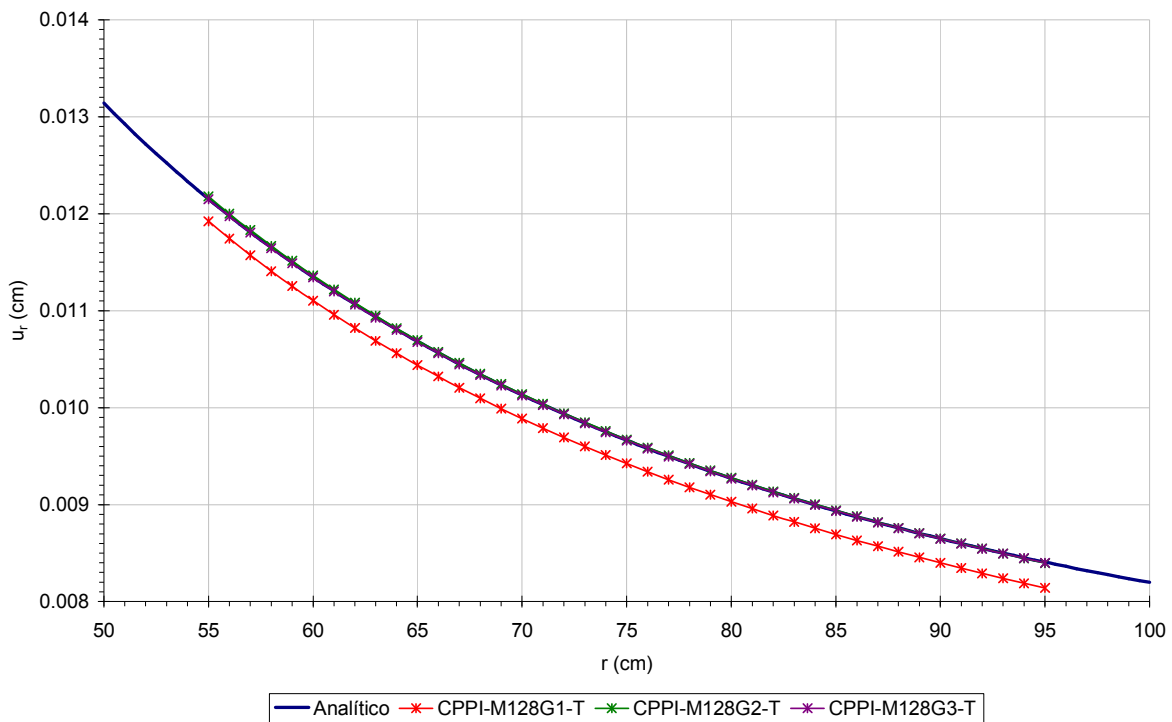


**Figura 5.18: Modelo CPPI – M32G3.**

Continuando as análises, utilizam-se as formulações em força de superfície e dual para se estudar os resultados dos campos de deslocamento dos nós de domínio.

Tendo em mente que a análise do domínio é uma etapa de pós-processamento utilizam-se os modelos  $CPPI-M128Gy-T$  e  $CPPI-M128Gy-D$  para verificar os resultados dos nós do domínio.

### Formulação em Força de Superfície



**Figura 5.19: Deslocamento radial dos nós de domínio, modelos  $CPPI-M128Gy-T$ .**

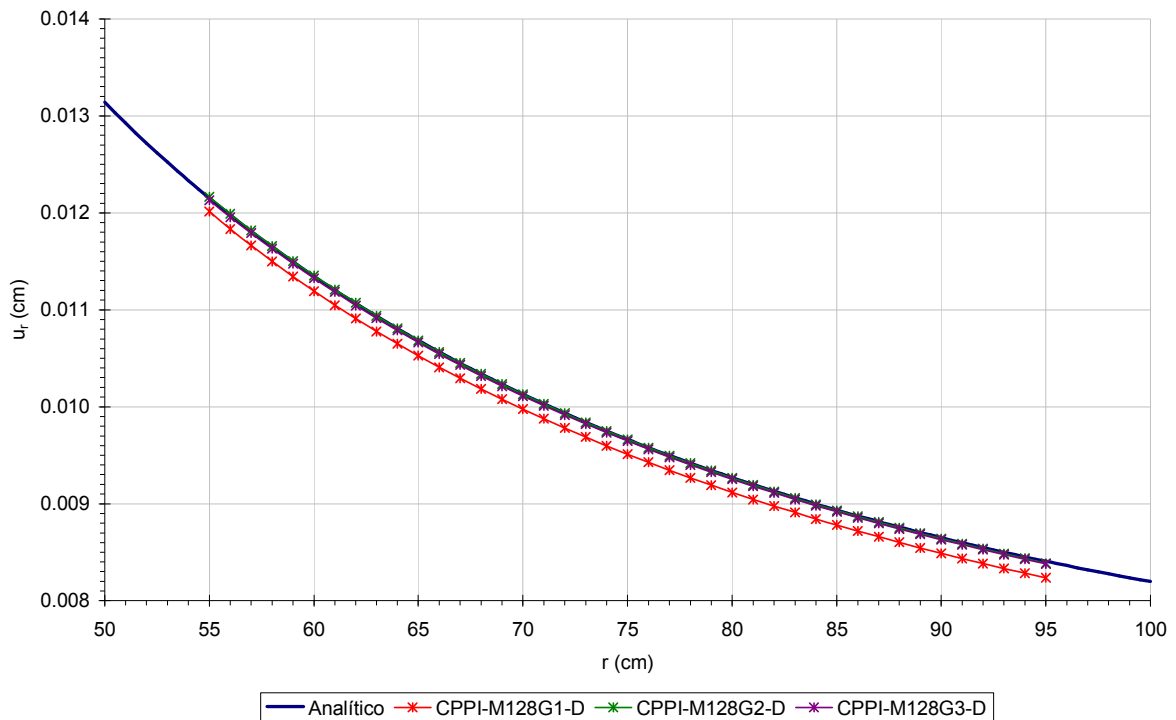
**Tabela 5.1: Erro relativo, modelo  $CPPI-M128Gy-T$ .**

r (cm)	Analítico (cm)	CPPI-M128G1-T (cm)	Erro (%)	CPPI-M128G2-T (cm)	Erro (%)	CPPI-M128G3-T (cm)	Erro (%)
55	0.01215	0.01192	1.910	0.01218	0.200	0.01215	0.036
60	0.01135	0.01110	2.153	0.01136	0.137	0.01134	0.050
65	0.01068	0.01044	2.289	0.01070	0.114	0.01068	0.043
70	0.01013	0.00989	2.395	0.01014	0.101	0.01013	0.034
75	0.00966	0.00942	2.493	0.00967	0.089	0.00966	0.025
80	0.00927	0.00903	2.597	0.00928	0.075	0.00927	0.017
85	0.00894	0.00869	2.722	0.00894	0.053	0.00893	0.013
90	0.00865	0.00840	2.893	0.00865	0.013	0.00865	0.019
95	0.00841	0.00814	3.162	0.00840	0.104	0.00840	0.077

Nota-se que a precisão dos resultados com os elementos curvos são melhores que a aproximação linear do elemento reto.

### Formulação Dual

Ao se adotar a formulação dual optou-se em aplicar as equações dos deslocamentos para os nós do contorno externo e as equações das forças de superfície para os nós do contorno interno. A formulação dual, nesse exemplo, tem a função de validar a utilização das duas equações quando aplicadas simultaneamente. O objetivo da formulação dual será apresentado no próximo capítulo.



**Figura 5.20: : Deslocamento radial dos nós de domínio, modelos  $CPPI - M128Gy - D$ .**

**Tabela 5.2: Erro relativo, modelo  $CPPI - M128Gy - D$ .**

r (cm)	Analítico (cm)	CPPI-M128G1-D (cm)	Erro (%)	CPPI-M128G2-D (cm)	Erro (%)	CPPI-M128G3-D (cm)	Erro (%)
55	0.01215	0.01201	1.148	0.01217	0.109	0.01213	0.169
60	0.01135	0.01119	1.359	0.01135	0.045	0.01133	0.190
65	0.01068	0.01053	1.461	0.01069	0.021	0.01066	0.190
70	0.01013	0.00997	1.530	0.01013	0.006	0.01011	0.189
75	0.00966	0.00951	1.589	0.00966	0.008	0.00965	0.189
80	0.00927	0.00912	1.651	0.00927	0.023	0.00925	0.192
85	0.00894	0.00878	1.730	0.00893	0.046	0.00892	0.199
90	0.00865	0.00849	1.848	0.00864	0.092	0.00863	0.221
95	0.00841	0.00823	2.037	0.00839	0.218	0.00838	0.301

Os resultados acima garantem que formulação dual fornece boa precisão dos resultados, como se verifica nas colunas dos erros. A fim de completar a análise do exemplo procede-se a análise do campo de tensões radiais e circunferenciais nos nós de domínio.

## Campo de Tensão

O cálculo da tensão nos nós de domínio também é encarado como um pós-processamento no MEC, uma vez que a equação em tensão depende dos resultados das variáveis do contorno.

No que segue, apresentam-se os resultados obtidos com os modelos  $CPPI - M128G3 - (U, T e D)$ .

### Tensão Radial

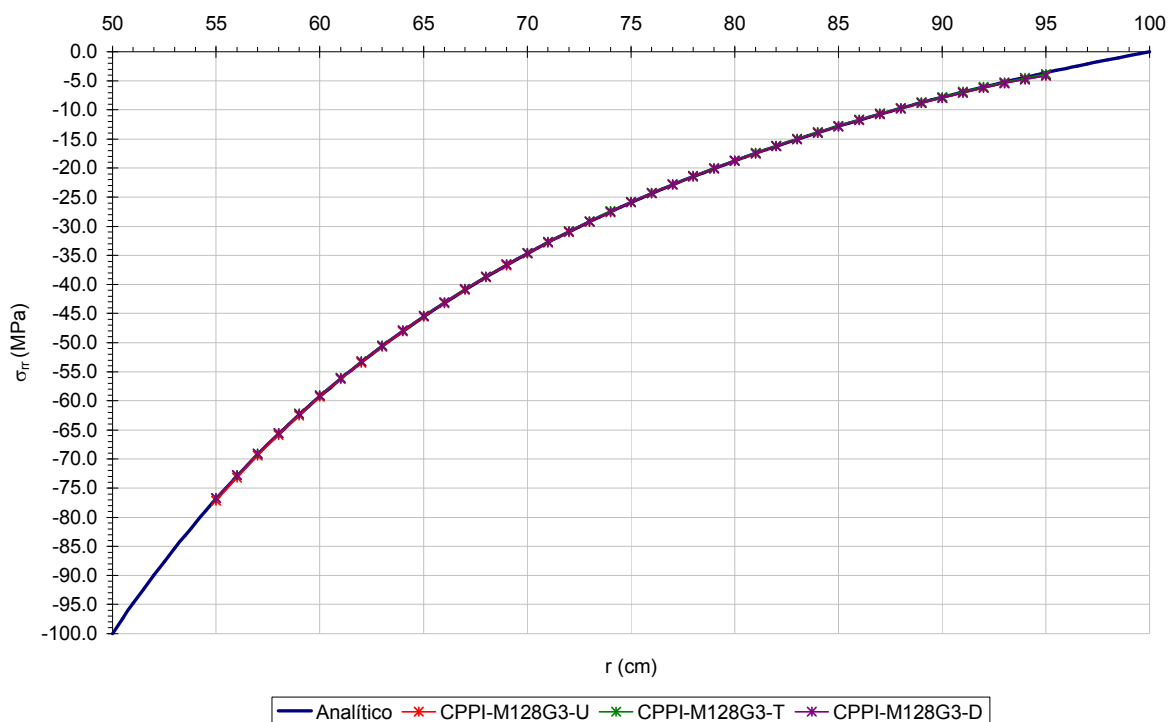


Figura 5.21: Tensão radial, modelos  $CPPI - M128G3 - (U, T e D)$ .

Tabela 5.3: Erro relativo, modelos  $CPPI - M128G3 - (U, T e D)$ .

r (cm)	Análítico (MPa)	CPPI-M128G3-U (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-T (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-D (MPa)	Erro (%)
55	-76.85950	-77.18242	0.420	-76.68985	0.221	-76.70145	0.206
60	-59.25926	-59.29900	0.067	-59.05375	0.347	-59.07842	0.305
65	-45.56213	-45.56412	0.004	-45.40285	0.350	-45.44043	0.267
70	-34.69388	-34.69344	0.001	-34.56550	0.370	-34.61628	0.224
75	-25.92593	-25.93295	0.027	-25.81625	0.423	-25.88175	0.170
80	-18.75000	-18.76948	0.104	-18.65067	0.530	-18.73465	0.082
85	-12.80277	-12.84414	0.323	-12.71017	0.723	-12.82084	0.141
90	-7.81893	-7.92267	1.327	-7.75211	0.855	-7.90825	1.142
95	-3.60111	-4.11747	14.339	-3.84343	6.729	-4.10983	14.127



## Tensão Circunferencial

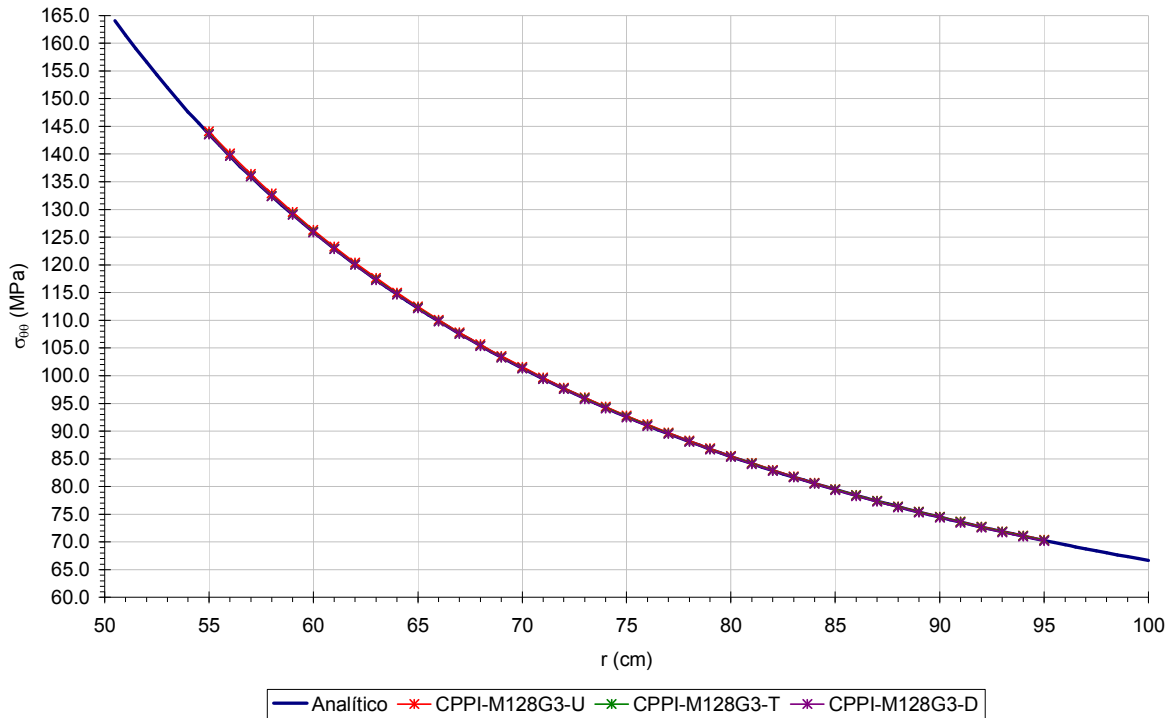


Figura 5.22: Tensão circunferencial, modelos *CPMI – M128G3 – (U, T e D)*.

Tabela 5.4: Erro relativo, modelos *CPMI – M128G3 – (U, T e D)*.

r (cm)	Analítico (MPa)	CPPI-M128G3-U (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-T (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-D (MPa)	Erro (%)
55	143.52617	144.11350	0.409	143.64927	0.086	143.55481	0.020
60	125.92593	126.31393	0.308	125.96448	0.031	125.87125	0.043
65	112.22880	112.51238	0.253	112.24659	0.016	112.15609	0.065
70	101.36054	101.57717	0.214	101.36737	0.007	101.27941	0.080
75	92.59259	92.76065	0.182	92.59125	0.001	92.50496	0.095
80	85.41667	85.54501	0.150	85.40795	0.010	85.32194	0.111
85	79.46943	79.56219	0.117	79.45467	0.019	79.36636	0.130
90	74.48560	74.54802	0.084	74.47409	0.015	74.37646	0.147
95	70.26777	70.34206	0.106	70.33007	0.089	70.19313	0.106

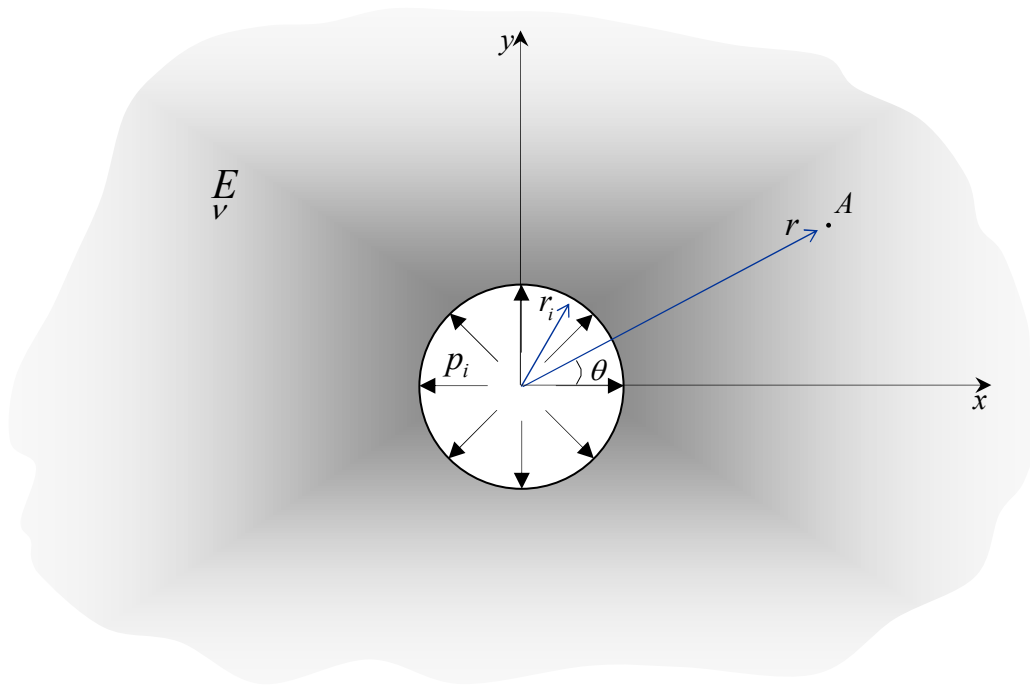
Verifica-se nos gráficos e tabelas acima que os campos de tensões apresentam erros da ordem de 1% em relação à solução analítica. Porém, na Tabela 5.3, para o valor de  $r = 95$  cm, nota-se um desvio em comparação aos demais valores. De modo geral, o erro é aceitável nos demais nós constatando-se que os deslocamentos do contorno produzem bons resultados para os nós do domínio, desde que esses nós não estejam tão próximos ao contorno. Caso contrário, se os pontos estiverem muito próximos do contorno, deve-se adotar uma estratégia especial de integração numérica.

O próximo exemplo é um caso particular do problema do cilindro pressurizado.

### 5.4.2. Exemplo 2: Cavidade Pressurizada no Meio Infinito (CPMI)

A solução desse problema é determinada a partir das equações (5.95) e (5.96) considerando  $p_e = 0$  e  $r_e \rightarrow \infty$ , tal como ilustra a Figura 5.23.

O problema consiste em determinar os deslocamentos radiais, as tensões radiais e as tensões circunferenciais no ponto  $A$  localizado a uma distancia  $r$  do centro da cavidade.



**Figura 5.23: Cavidade pressurizada no meio infinito**

#### 5.4.2.1 Dados do Problema

Análise: Estado plano de deformação,

Módulo de elasticidade do meio:  $E = 2,05 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$ ,

Coefficiente de Poisson do meio:  $\nu = 0,3$ ,

Pressão interna:  $p_i = 100,0 \text{ KN/cm}^2$ , e

Raio interno:  $r_i = 10,0 \text{ m}$ .

### 5.4.2.2 Modelos

Nesta análise consideram-se os modelos:

$$CPMI - MxGy - U, CPMI - MxGy - T \text{ e } CPMI - MxGy - D.$$

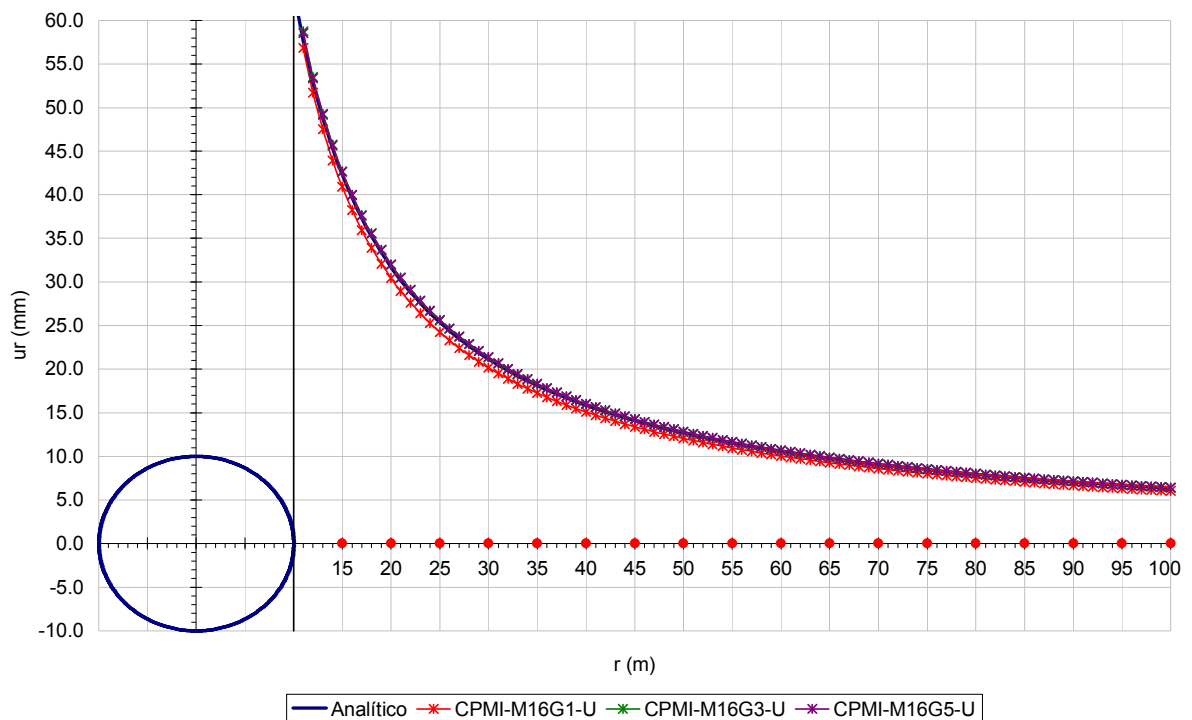
Com  $x$  igual a 16,32 e 64 elementos e  $y$  igual à aproximação de grau 1,3 e 5.

### 5.4.2.3 Análise dos Resultados

Primeiramente apresentam-se um estudo de convergência a fim de se definir qual modelo adotar e aplicar nas demais análises, de modo a tornar a apresentação mais sucinta.

### Campo de Deslocamento Radial

*Formulação em Deslocamento*



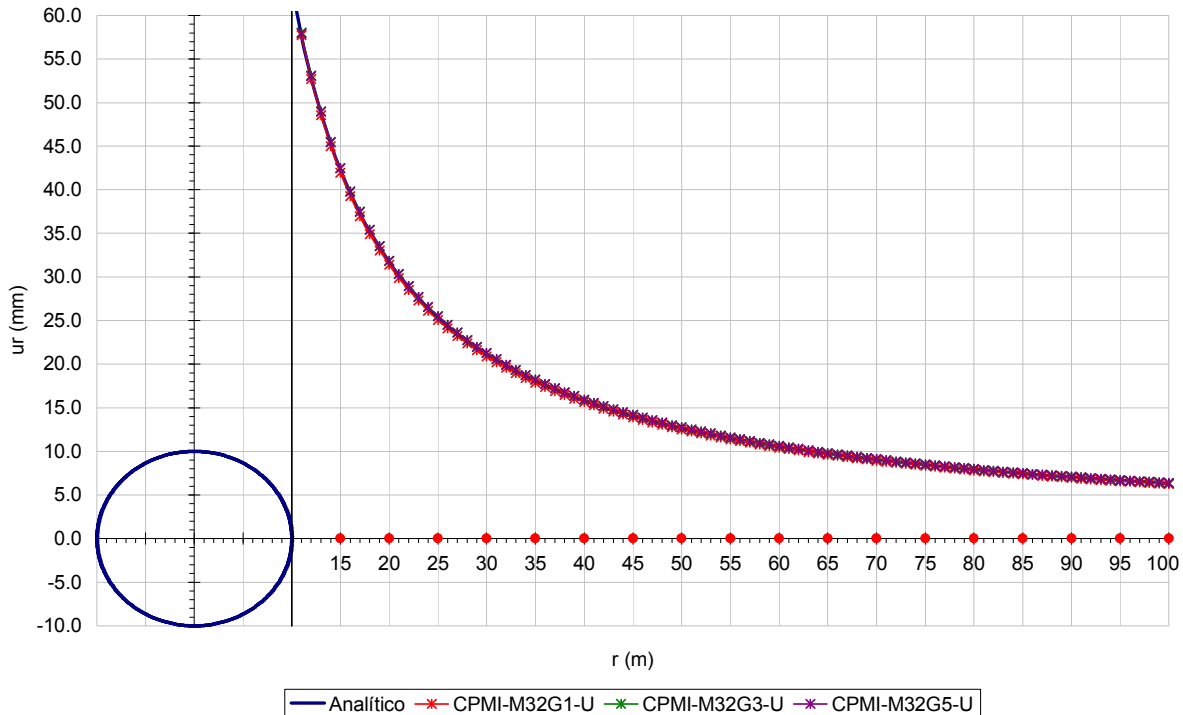
**Figura 5.24: Deslocamentos radiais, modelos  $CPMI - M16Gy - U$ .**

No gráfico da Figura 5.24 apresenta-se o comportamento qualitativo da solução. O círculo em azul representa a cavidade e os pontos em vermelho, os nós no meio infinito.

**Tabela 5.5: Erro relativo, modelos  $CPMI - M16Gy - U$**

r (m)	Análítico (mm)	CPMI-M16G1-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M16G3-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M16G5-U (mm)	Erro (%)
15	42.27642	40.90052	3.25	42.68731	0.97	42.61709	0.81
20	31.70732	30.42931	4.03	32.01957	0.98	32.00631	0.94
25	25.36585	24.24814	4.41	25.62716	1.03	25.63329	1.05
30	21.13821	20.16123	4.62	21.36267	1.06	21.37595	1.12
35	18.11847	17.25655	4.76	18.31468	1.08	18.33049	1.17
40	15.85366	15.08515	4.85	16.02762	1.10	16.04404	1.20
45	14.09214	13.40012	4.91	14.24819	1.11	14.26441	1.22
50	12.68293	12.05428	4.96	12.82430	1.11	12.83995	1.24
55	11.52993	10.95448	4.99	11.65909	1.12	11.67403	1.25
60	10.56911	10.03882	5.02	10.68794	1.12	10.70215	1.26
65	9.75610	9.26459	5.04	9.86612	1.13	9.87959	1.27
70	9.05923	8.60134	5.05	9.16163	1.13	9.17442	1.27
75	8.45528	8.02679	5.07	8.55103	1.13	8.56317	1.28
80	7.92683	7.52424	5.08	8.01673	1.13	8.02827	1.28
85	7.46055	7.08096	5.09	7.54527	1.14	7.55625	1.28
90	7.04607	6.68704	5.10	7.12617	1.14	7.13664	1.29
95	6.67522	6.33465	5.10	6.75118	1.14	6.76118	1.29
100	6.34146	6.01757	5.11	6.41368	1.14	6.42324	1.29

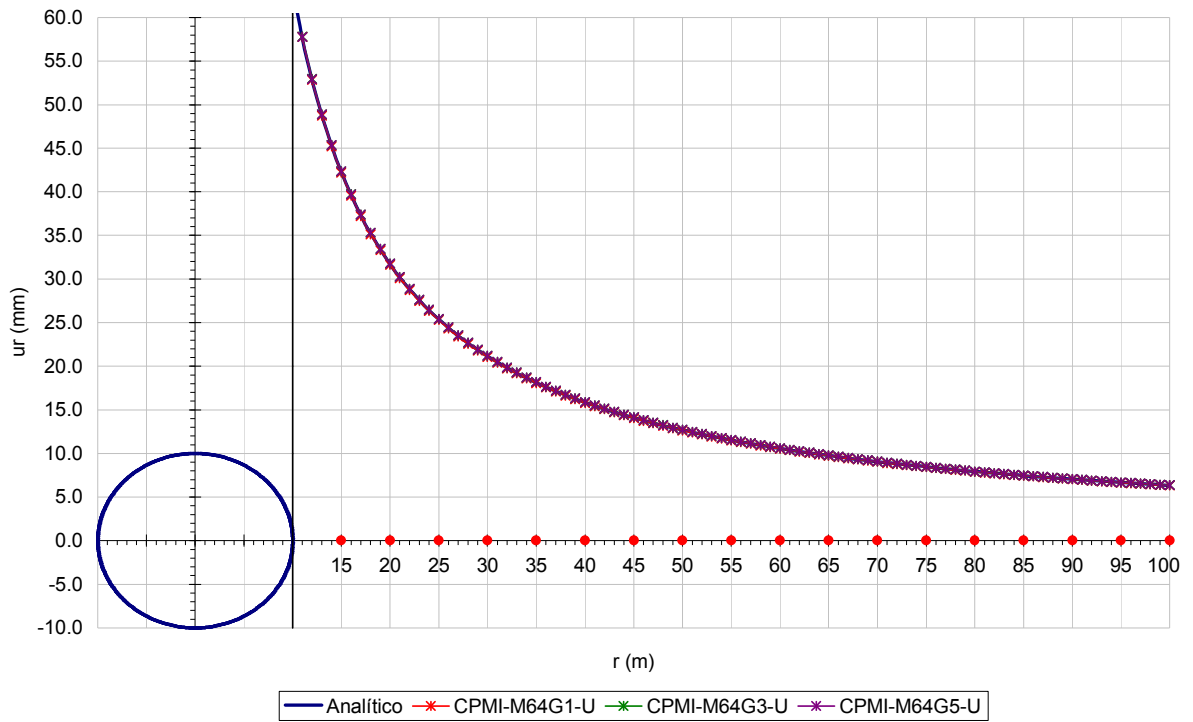
Verifica-se na Tabela 5.5 que os erros produzidos pelas aproximações do 3° e do 5° grau são menores com relação à solução analítica. Verifica-se que a aproximação cúbica apresenta os melhores resultados. É importante também destacar que nesse exemplo apenas o contorno da cavidade é discretizado. O meio infinito é uma característica incorporada na própria formulação do MEC. Continuando a análise obtém-se:



**Figura 5.25: Deslocamento radial, modelos  $CPMI - M32Gy - U$ .**

**Tabela 5.6: Erro relativo, modelos  $CPMI - M32Gy - U$ .**

r (m)	Análítico (mm)	CPMI-M32G1-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M32G3-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M32G5-U (mm)	Erro (%)
15	42.27642	41.95338	0.76	42.46386	0.44	42.43631	0.38
20	31.70732	31.38208	1.03	31.86319	0.49	31.85506	0.47
25	25.36585	25.07657	1.14	25.49976	0.53	25.49769	0.52
30	21.13821	20.88359	1.20	21.25460	0.55	21.25495	0.55
35	18.11847	17.89300	1.24	18.22089	0.57	18.22229	0.57
40	15.85366	15.65217	1.27	15.94484	0.58	15.94671	0.59
45	14.09214	13.91042	1.29	14.17417	0.58	14.17623	0.60
50	12.68293	12.51768	1.30	12.75739	0.59	12.75950	0.60
55	11.52993	11.37854	1.31	11.59806	0.59	11.60016	0.61
60	10.56911	10.42952	1.32	10.63186	0.59	10.63391	0.61
65	9.75610	9.62666	1.33	9.81424	0.60	9.81623	0.62
70	9.05923	8.93860	1.33	9.11339	0.60	9.11530	0.62
75	8.45528	8.34236	1.34	8.50595	0.60	8.50778	0.62
80	7.92683	7.82071	1.34	7.97442	0.60	7.97618	0.62
85	7.46055	7.36047	1.34	7.50541	0.60	7.50710	0.62
90	7.04607	6.95140	1.34	7.08851	0.60	7.09012	0.63
95	6.67522	6.58541	1.35	6.71547	0.60	6.71702	0.63
100	6.34146	6.25603	1.35	6.37974	0.60	6.38123	0.63



**Figura 5.26: Deslocamento radial, modelos  $CPMI - M64Gy - U$ .**

**Tabela 5.7: Erro relativo, modelos  $CPMI - M64Gy - U$ .**

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G1-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G3-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G5-U (mm)	Erro (%)
15	42.27642	42.19862	0.18	42.36751	0.22	42.35782	0.19
20	31.70732	31.62537	0.26	31.78574	0.25	31.78164	0.23
25	25.36585	25.29244	0.29	25.43386	0.27	25.43157	0.26
30	21.13821	21.07341	0.31	21.19757	0.28	21.19611	0.27
35	18.11847	18.06101	0.32	18.17082	0.29	18.16981	0.28
40	15.85366	15.80226	0.32	15.90034	0.29	15.89959	0.29
45	14.09214	14.04576	0.33	14.13418	0.30	14.13359	0.29
50	12.68293	12.64073	0.33	12.72111	0.30	12.72064	0.30
55	11.52993	11.49127	0.34	11.56489	0.30	11.56450	0.30
60	10.56911	10.53345	0.34	10.60132	0.30	10.60098	0.30
65	9.75610	9.72303	0.34	9.78595	0.31	9.78567	0.30
70	9.05923	9.02841	0.34	9.08705	0.31	9.08679	0.30
75	8.45528	8.42643	0.34	8.48131	0.31	8.48109	0.31
80	7.92683	7.89971	0.34	7.95128	0.31	7.95108	0.31
85	7.46055	7.43497	0.34	7.48360	0.31	7.48342	0.31
90	7.04607	7.02187	0.34	7.06788	0.31	7.06771	0.31
95	6.67522	6.65226	0.34	6.69591	0.31	6.69575	0.31
100	6.34146	6.31962	0.34	6.36114	0.31	6.36099	0.31

Verifica-se nas tabelas acima que os menores erros ocorrem com os modelos  $CPMI - MxG3 - U$ . Justifica-se a melhora desse resultado em decorrência da utilização dos elementos de contorno curvos na representação da geometria circular. Nota-se também que o erro relativo para os elementos com aproximação do 5° grau geram bons resultados, porém o maior número de graus de liberdade diminui a precisão dos resultados devido à quantidade de pontos fonte singulares sobre o elemento. Nada que prejudique o resultado global da aproximação, que continua a ser muito boa. Em virtude da convergência, utilizam-se os valores de  $x = 64$  e  $y = 3$  nas próximas análises.

Formulação em Força de Superfície

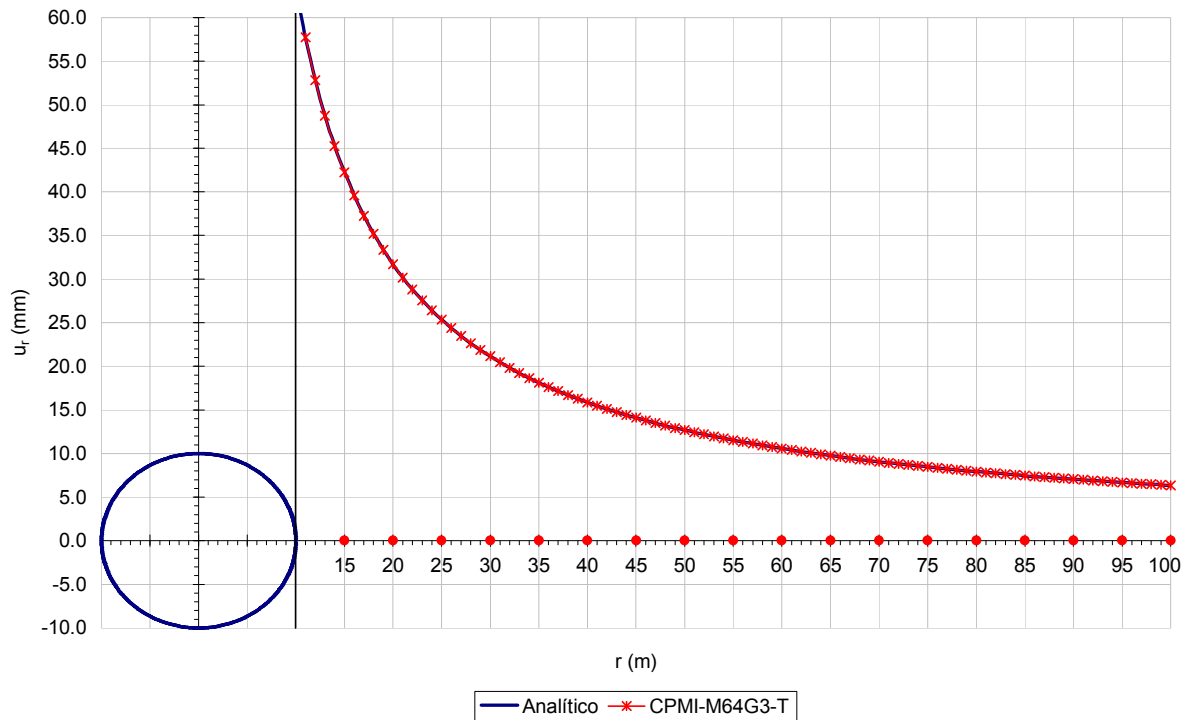


Figura 5.27: Deslocamento radial, modelo *CPMI – M64G3 – T*.

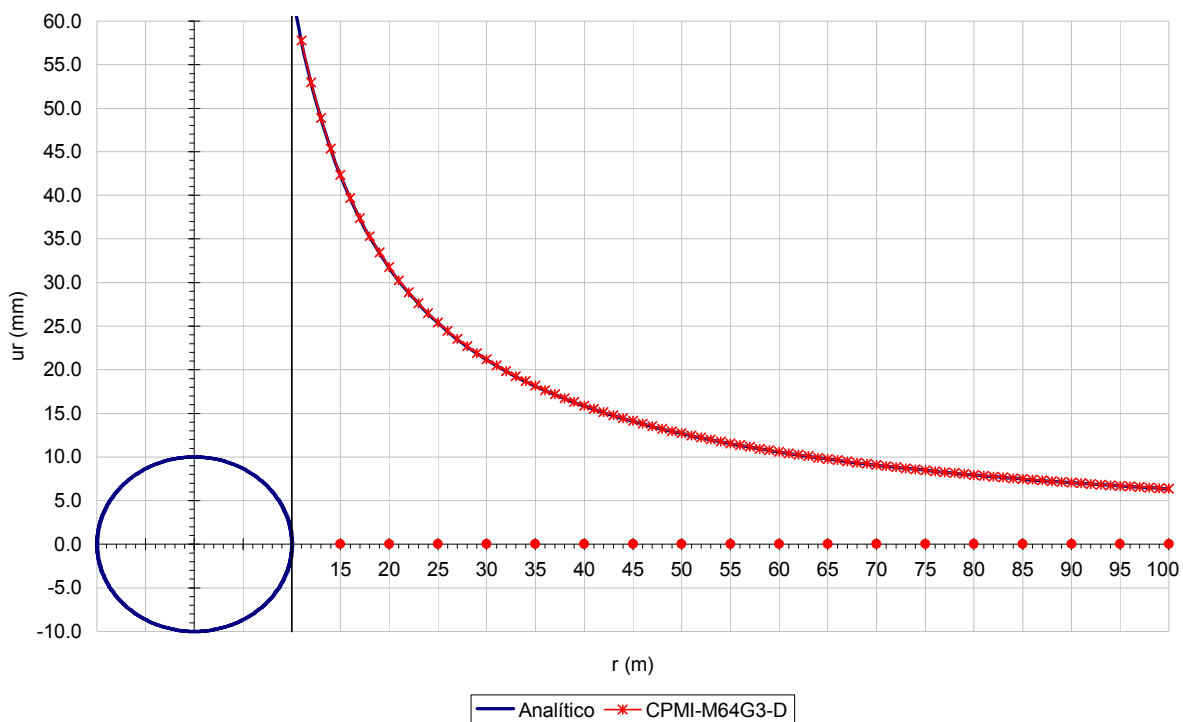
Tabela 5.8: Erro relativo, modelo *CPMI – M64G3 – T*.

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G3-T (mm)	Erro (%)
15	42.27642	42.24214	0.081
20	31.70732	31.69215	0.048
25	25.36585	25.35948	0.025
30	21.13821	21.13582	0.011
35	18.11847	18.11800	0.003
40	15.85366	15.85418	0.003
45	14.09214	14.09318	0.007
50	12.68293	12.68424	0.010
55	11.52993	11.53138	0.013
60	10.56911	10.57061	0.014
65	9.75610	9.75762	0.016
70	9.05923	9.06074	0.017
75	8.45528	8.45677	0.018
80	7.92683	7.92827	0.018
85	7.46055	7.46195	0.019
90	7.04607	7.04743	0.019
95	6.67522	6.67654	0.020
100	6.34146	6.34274	0.020

Analisando a Tabela 5.8 verifica-se que a formulação em força de superfície apresenta resultados com boa precisão, o que permite concluir que o método da subtração de singularidade atende aos requisitos de regularização da parte finita de Hadamard.

A seguir, apresentam-se os resultados do campo de deslocamento utilizando o modelo dual *CPMI – M64G3 – D*. Nesse modelo alterna-se a colocação da equação em deslocamento e da equação em força de superfície.

### Formulação Dual



**Figura 5.28: Deslocamento radial, modelo *CPMI – M64G3 – D*.**



**Tabela 5.9: Erro relativo, modelo *CPMI – M64G3 – D*.**

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G3-D (mm)	Erro (%)
15	42.27642	42.35968	0.197
20	31.70732	31.78015	0.230
25	25.36585	25.42935	0.250
30	21.13821	21.19378	0.263
35	18.11847	18.16755	0.271
40	15.85366	15.89746	0.276
45	14.09214	14.13161	0.280
50	12.68293	12.71880	0.283
55	11.52993	11.56278	0.285
60	10.56911	10.59938	0.286
65	9.75610	9.78416	0.288
70	9.05923	9.08538	0.289
75	8.45528	8.47976	0.289
80	7.92683	7.94982	0.290
85	7.46055	7.48223	0.291
90	7.04607	7.06658	0.291
95	6.67522	6.69468	0.291
100	6.34146	6.35997	0.292

Os resultados obtidos com o modelo dual apresentam valores intermediários em relação aos obtidos independentemente com as duas formulações. Esses resultados já eram esperados, pois a estratégia dual está sendo usada nesse exemplo apenas para validação e não para transpor as possíveis singularidades do sistema algébrico como ocorre na mecânica da fratura e que será apresentado no próximo capítulo. A seguir analisam-se os resultados para os campos de tensão desse exemplo.

## Campo de Tensão Radial

Formulação em Deslocamento, Força de Superfície e Dual.

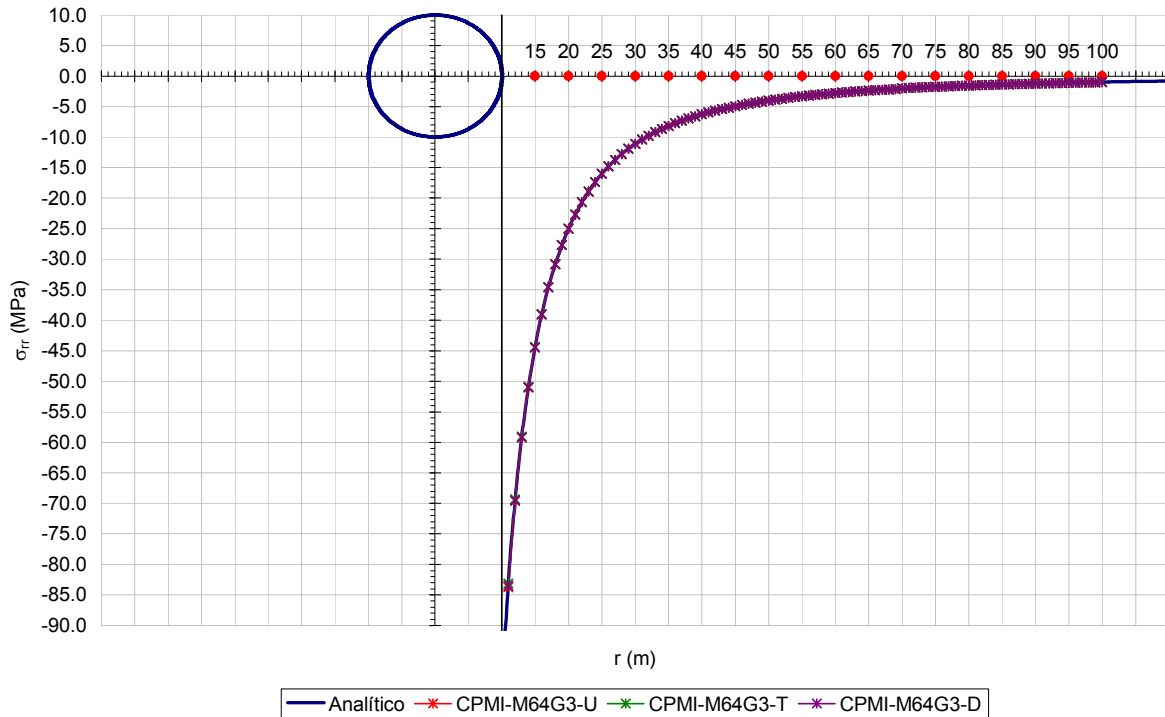


Figura 5.29: Tensões radiais, modelos *CPMI – M64G3 – (U, T e D)*.

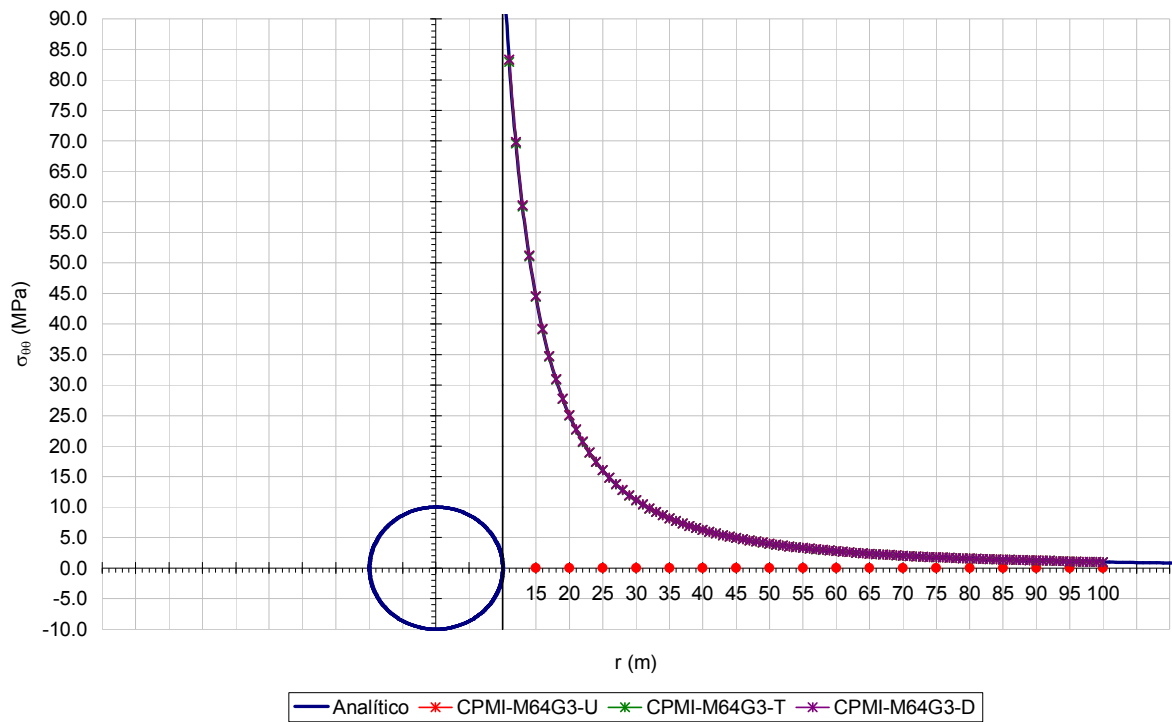
Tabela 5.10: Erro relativo, modelos *CPMI – M64G3 – (U, T e D)*.

r (m)	Analítico (MPa)	CPMI-M64G3-U (MPa)	Erro (%)	CPMI-M64G3-T (MPa)	Erro (%)	CPMI-M64G3-D (MPa)	Erro (%)
15	-44.44444	-44.45196	0.017	-44.33980	0.235	-44.43922	0.012
20	-25.00000	-25.02106	0.084	-24.96312	0.148	-25.01678	0.067
25	-16.00000	-16.02410	0.151	-15.98474	0.095	-16.02148	0.134
30	-11.11111	-11.13273	0.195	-11.10398	0.064	-11.13088	0.178
35	-8.16327	-8.18152	0.224	-8.15965	0.044	-8.18013	0.207
40	-6.25000	-6.26522	0.243	-6.24807	0.031	-6.26413	0.226
45	-4.93827	-4.95099	0.257	-4.93721	0.022	-4.95012	0.240
50	-4.00000	-4.01071	0.268	-3.99941	0.015	-4.01000	0.250
55	-3.30579	-3.31489	0.275	-3.30547	0.010	-3.31430	0.258
60	-2.77778	-2.78559	0.281	-2.77762	0.006	-2.78509	0.263
65	-2.36686	-2.37363	0.286	-2.36680	0.003	-2.37321	0.268
70	-2.04082	-2.04673	0.290	-2.04081	0.000	-2.04636	0.272
75	-1.77778	-1.78298	0.293	-1.77781	0.002	-1.78266	0.275
80	-1.56250	-1.56711	0.295	-1.56255	0.003	-1.56683	0.277
85	-1.38408	-1.38820	0.297	-1.38415	0.005	-1.38794	0.279
90	-1.23457	-1.23826	0.299	-1.23464	0.006	-1.23803	0.281
95	-1.10803	-1.11136	0.300	-1.10811	0.007	-1.11116	0.282
100	-1.00000	-1.00302	0.302	-1.00008	0.008	-1.00283	0.283

Na Tabela 5.10 verifica-se que a tensão radial apresenta melhores resultados com a equação em força de superfície. Justificam-se esses resultados pelo fato da equação integral e da solução analítica dependerem de  $r^{-2}$ .

### Campo de Tensões Circunferencial

*Formulação em Deslocamento, Força de Superfície e Dual.*



**Figura 5.30:** Tensão circunferencial, modelos *CPMI – M64G3 – (U, T e D)*.

**Tabela 5.11: Erro relativo, modelos CPMI – M64G3 – (U, T e D).**

r (m)	Analítico (MPa)	CPMI-M64G3-U (MPa)	Erro (%)	CPMI-M64G3-T (MPa)	Erro (%)	CPMI-M64G3-D (MPa)	Erro (%)
15	44.44444	44.59542	0.340	44.44423	0.000	44.58465	0.315
20	25.00000	25.06929	0.277	24.99563	0.017	25.06455	0.258
25	16.00000	16.04408	0.276	15.99796	0.013	16.04118	0.257
30	11.11111	11.14240	0.282	11.11034	0.007	11.14040	0.264
35	8.16327	8.18675	0.288	8.16308	0.002	8.18527	0.270
40	6.25000	6.26828	0.293	6.25008	0.001	6.26715	0.274
45	4.93827	4.95290	0.296	4.93846	0.004	4.95200	0.278
50	4.00000	4.01197	0.299	4.00023	0.006	4.01124	0.281
55	3.30579	3.31575	0.301	3.30603	0.007	3.31514	0.283
60	2.77778	2.78620	0.303	2.77801	0.009	2.78569	0.285
65	2.36686	2.37407	0.305	2.36709	0.009	2.37364	0.286
70	2.04082	2.04706	0.306	2.04102	0.010	2.04668	0.287
75	1.77778	1.78323	0.307	1.77797	0.011	1.78290	0.288
80	1.56250	1.56730	0.307	1.56268	0.011	1.56702	0.289
85	1.38408	1.38835	0.308	1.38425	0.012	1.38809	0.290
90	1.23457	1.23838	0.309	1.23472	0.012	1.23815	0.290
95	1.10803	1.11146	0.309	1.10817	0.012	1.11125	0.291
100	1.00000	1.00310	0.310	1.00013	0.013	1.00291	0.291

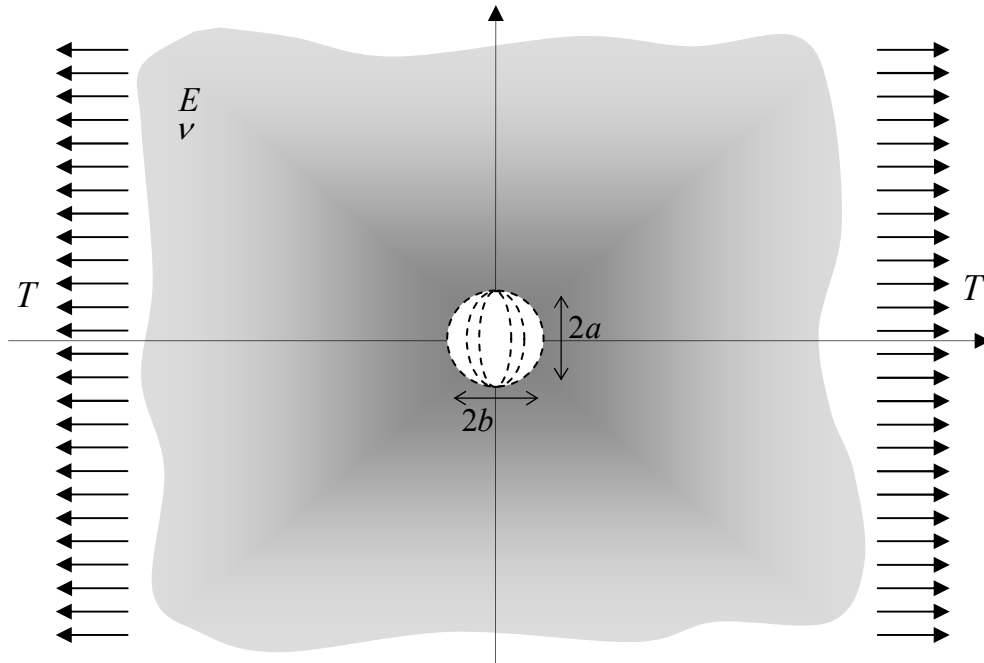
A partir dos resultados verificados para o campo de tensões, afirma-se que ambas as formulações produzem bons resultados comprovando-se que a subtração de singularidade é uma estratégia robusta para regularização das equações integrais singulares inclusive quando se utilizam elementos curvos de ordem qualquer.

Nota-se que ao se fixar a quantidade de elementos de contorno e aumentar o grau da aproximação, aumenta-se também a quantidade de graus de liberdade do problema. A seguir apresenta-se um exemplo em que é fixada a quantidade de graus de liberdade do problema aumentando-se apenas o grau da aproximação.

### 5.4.3. Exemplo 3: Chapa Tracionada com Furo Elíptico (CTFE)

Nesse exemplo considera-se o efeito da concentração de tensão provocada por um furo elíptico no meio infinito submetido a um estado uniaxial de tensão, como na Figura 5.31. Prioriza-se a verificação do fator de concentração de tensão na extremidade do furo uma vez que essa grandeza caracteriza as causas dos problemas de fratura nos materiais dúcteis, Pilkey e Pilkey (2008).

Gao (1996) apresenta a solução analítica do problema biaxial geral de uma cavidade elíptica inclinada no meio infinito expressa em termos das tensões e dos deslocamentos em coordenadas curvilíneas. A particularização da solução apresentada por Gao (1996) permite determinar os campos de deslocamento e tensão do problema sujeito a ação uniaxial para o caso da tração perpendicular ao semi-eixo maior da elipse.



**Figura 5.31: Chapa tracionada com um cavidade elíptica central**

As equações que descrevem esse problema em particular são apresentadas a seguir.

Para o campo de deslocamento:

$$\begin{aligned}
 u_{\xi} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{T}{\mu} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}} \left\{ (\kappa + 1) \left[ \cosh 2\xi_0 - (e^{2\xi_0} + 1) \cos 2\eta + 1 \right] \right\} \\
 u_{\eta} &= \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{T}{\mu} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta}} \left[ (\kappa + 1) e^{2\xi_0} \sin 2\eta \right]
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

Para o campo de tensão:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi\xi} &= 0 \\
 \sigma_{\eta\eta} &= T e^{2\xi_0} \left[ \frac{(1 + e^{-2\xi_0}) \sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - \cos 2\eta} - 1 \right] \\
 \sigma_{\xi\eta} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

Sendo:

$\xi$  e  $\eta$ , as coordenadas curvilíneas sobre a elipse,

$\mu$ , o módulo de elasticidade transversal, e

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu, & \text{para o estado plano de deformação, e} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, & \text{para o estado plano de tensão.} \end{cases}$$

Define-se o fator de concentração de tensão como a grandeza que dita o crescimento da tensão na extremidade do furo. No transcorrer do exemplo apresentam-se as equações e os valores do fator de concentração de tensão para cada caso estudado.

#### 5.4.3.1 Dados do Problema

Análise: Estado plano de tensão,

Módulo de elasticidade do meio:  $E = 3,0 \times 10^6 \text{ MPa}$ ,

Coefficiente de Poisson do meio:  $\nu = 0,3$ , e

Tração uniaxial:  $T = 100,0 \text{ MPa}$ .

#### 5.4.3.2 Modelos

Nesta análise consideram-se os modelos:

$$CTF - MxGy - U .$$

Adotam-se as seguintes dimensões para o furo:

Fixa-se o valor do semi-eixo maior  $a = 5 \text{ mm}$  e varia-se a dimensão do semi-eixo menor  $b$  em:

$$b = 5, 2,5, 1, 0,5 \text{ e } 0,1 \text{ mm.}$$

#### 5.4.3.3 Análise dos Resultados

A primeira análise a ser apresentada consiste em verificar a influência da quantidade de nós na solução do problema como citado anteriormente. Para isso, apresentam-se os

resultados gerados com o modelo  $CTF - MxGy - U$  adotando-se a excentricidade nula para a elipse, que consiste no caso da chapa infinita com um furo circular.

Adotam-se para essa análise os modelos com  $x$  igual a 150 e 100 elementos de contorno referentes as aproximações  $y$  do 1º e 2º grau, respectivamente, totalizando 300 nós sobre o contorno do furo.

A solução analítica desse problema é apresentada em Timoshenko e Goodier (1970). Em coordenadas polares o campo de tensão é dado por:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{T}{2} \left( 1 + \frac{3r_i^4}{r^4} - \frac{4r_i^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{T}{2} \left( 1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) - \frac{T}{2} \left( 1 + \frac{3r_i^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \text{ e} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{T}{2} \left( \frac{3r_i^4}{r^4} - \frac{2r_i^2}{r^2} - 1 \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{5.100}$$

Sendo:

$r_i$ , o raio do furo circular.

Os valores das tensões máximas que ocorrem na direção perpendicular de aplicação da tração é obtida quando  $\theta = \pm\pi/2$  e valem  $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0$  e  $\sigma_{\theta\theta} = 3T$ . Nos pontos paralelos a tração, ou seja, quando  $\theta = \pm\pi$  ocorre uma compressão na direção tangencial dada por  $\sigma_{\theta\theta} = -T$ .

A distribuição adimensional do campo de tensão na direção perpendicular a aplicação da tração é calculada por meio das equações:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{rr}}{T} = \frac{\sigma_{yy}}{T} &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{y} \right)^2 \right] \left( \frac{r_i}{y} \right)^2, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{T} = \frac{\sigma_{xx}}{T} &= \frac{1}{2} \left( 2 + \left( \frac{r_i}{y} \right)^2 + 3 \left( \frac{r_i}{y} \right)^4 \right), \text{ e} \\ \frac{\sigma_{r\theta}}{T} = \frac{\sigma_{xy}}{T} &= 0.\end{aligned}\tag{5.101}$$

Os resultados gerados pelo programa de elementos de contorno e pela solução analítica (5.101) são apresentados nos gráficos a seguir:

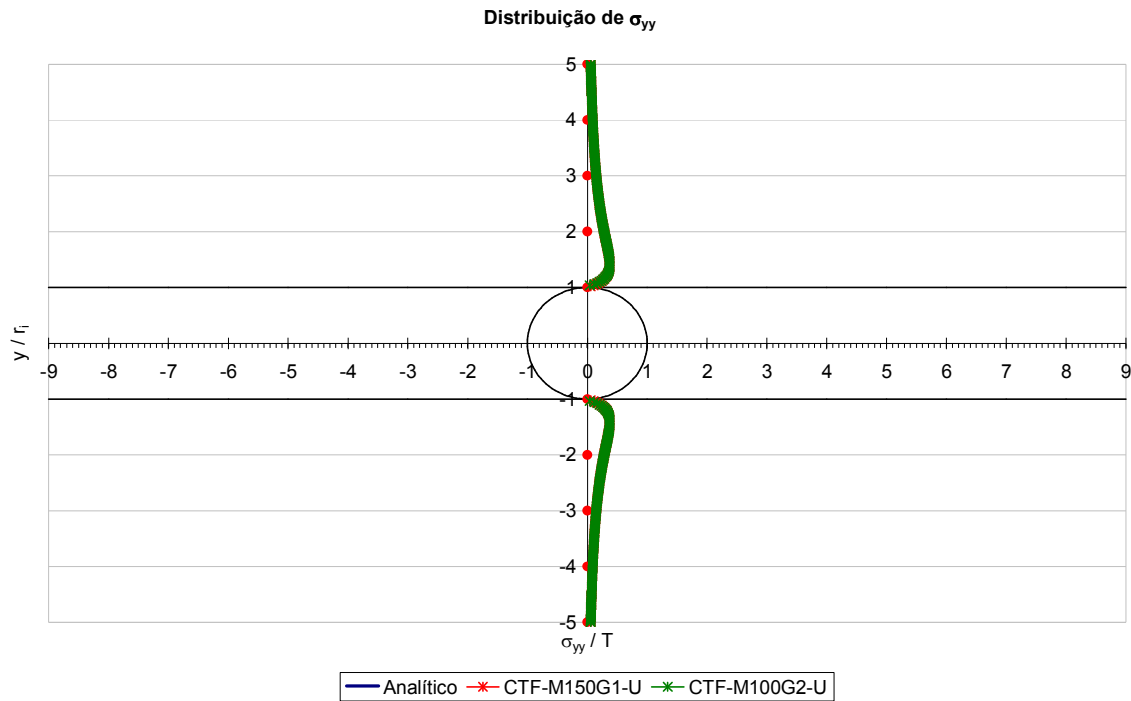


Figura 5.32: Campo adimensional de tensão  $\sigma_{yy}$  perpendicular a solitação.

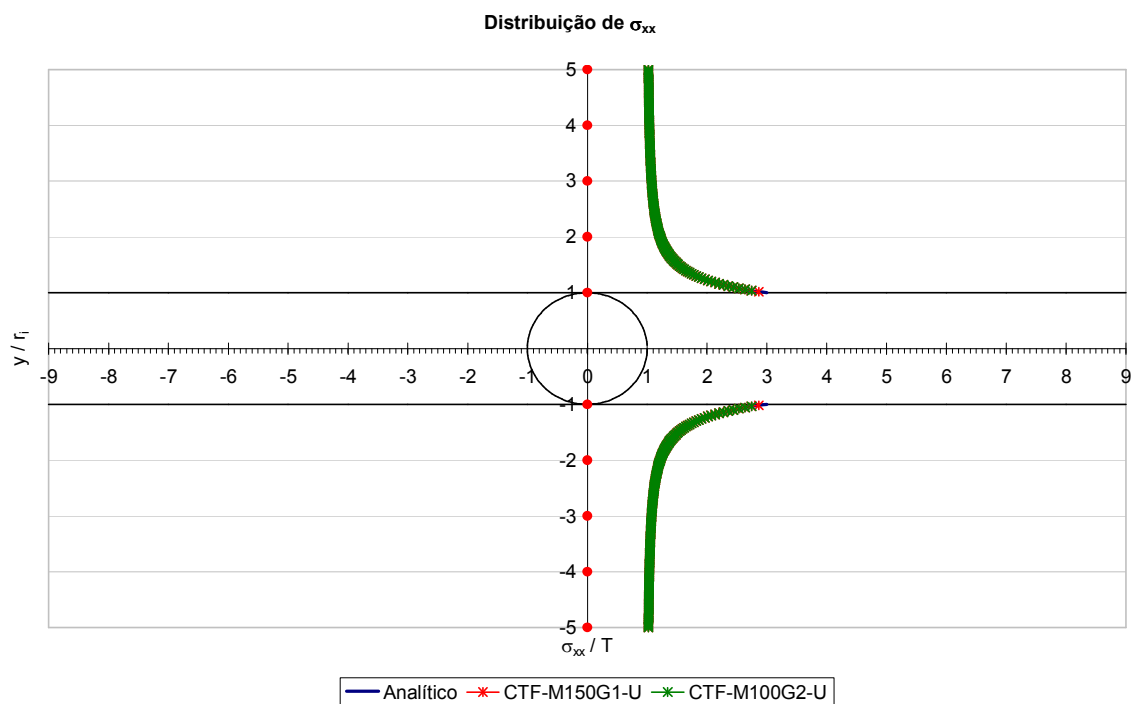


Figura 5.33: Campo adimensional de tensão  $\sigma_{xx}$  perpendicular a solitação.

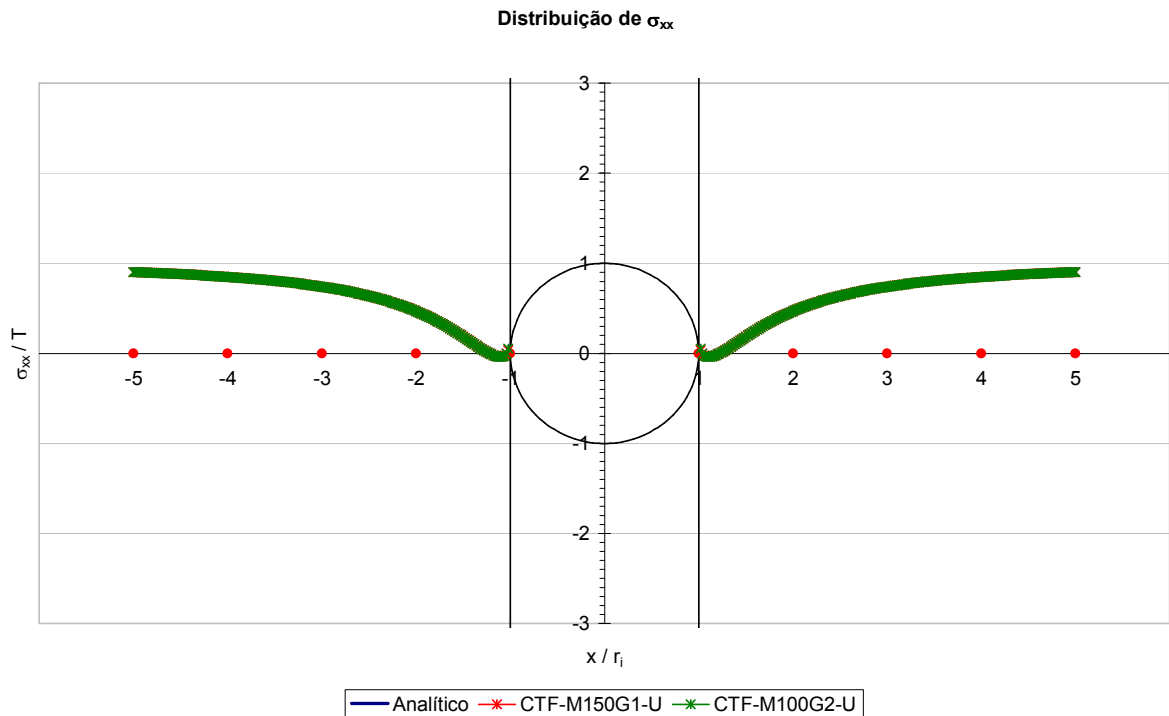


A distribuição adimensional do campo de tensão na direção paralela a aplicação da tração fica determinada por meio das equações:

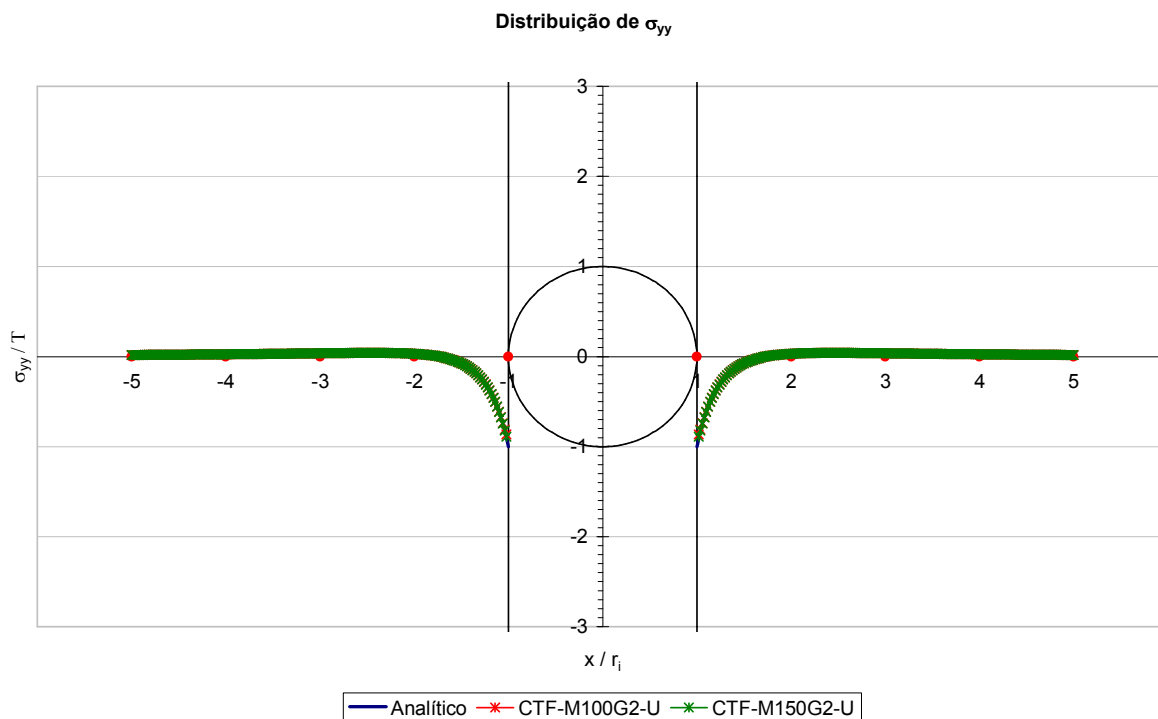
$$\frac{\sigma_{rr}}{T} = \frac{\sigma_{xx}}{T} = \frac{1}{2} \left( 2 - 5 \left( \frac{r_i}{x} \right)^2 + 3 \left( \frac{r_i}{x} \right)^4 \right),$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{T} = \frac{\sigma_{yy}}{T} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r_i}{x} \right)^2 - 3 \left( \frac{r_i}{y} \right)^4 \right], \text{ e} \quad (5.102)$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{T} = \frac{\sigma_{xy}}{T} = 0.$$



**Figura 5.34: Campo adimensional de tensão  $\sigma_{xx}$  paralelo a solitação.**



**Figura 5.35: Campo adimensional de tensão  $\sigma_{yy}$  paralelo a solicitação.**

O fator de concentração de tensão  $K_t$  desse problema é calculado procedendo-se a normalização entre a tensão máxima que ocorre na extremidade do furo e a tensão de solicitação da estrutura, que no caso é igual a  $T$ , portanto:

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}x.}}{T}. \quad (5.103)$$

Logo, o fator de concentração de tensão para o problema do furo circular sob tração uniaxial é  $K_t = 3$  e significa que a tensão cresce três vezes mais na extremidade do furo na direção perpendicular a de aplicação da solicitação.

A quantidade de graus de liberdade não influenciou a qualidade dos resultados em ambas as aproximações, pois foi utilizada uma malha bem refinada nos modelos.

No modelo a seguir, varia-se a excentricidade do furo para se analisar o fator de concentração de tensão. Nesse caso analisa-se apenas a distribuição do campo de tensão na direção perpendicular a solicitação, pois é nela que ocorre a máxima concentração de tensão.

Para efetuar a análise nas vizinhanças da extremidade do furo elíptico é conveniente transformar o campo de tensão (5.99) em componentes cartesianas. Assim para a tensão ao longo do eixo maior do furo elíptico, quando  $x = 0$  e  $y \geq a$ , Boresi et al. (1993) apresenta a transformação:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= F_1(s) - F_2(s), \text{ e} \\ \sigma_{yy} &= F_1(s) + F_2(s).\end{aligned}\tag{5.104}$$

Sendo:

$$s = \frac{y}{2B} + \sqrt{\frac{y}{2B} - m}, \text{ com } B = \frac{1}{2}(a+b) \text{ e } m = \frac{a-b}{a+b}.$$

Os valores de  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$  são calculados por:

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{T}{2} \left[ 1 + \frac{2(1+m)}{s^2 - m} \right], \text{ e} \\ F_2(s) &= \frac{T}{2} \left\{ 1 + \frac{m^2 - 1}{s^2 - m} \left[ 1 + \left( \frac{m-1}{s^2 - m} \right) \left( \frac{3s^2 - m}{s^2 - m} \right) \right] \right\}.\end{aligned}\tag{5.105}$$

No que segue apresentam os resultados do fator de intensidade de tensão para os modelos *CTF-M500G2-U*, variando-se a excentricidade da elipse como descrito anteriormente.

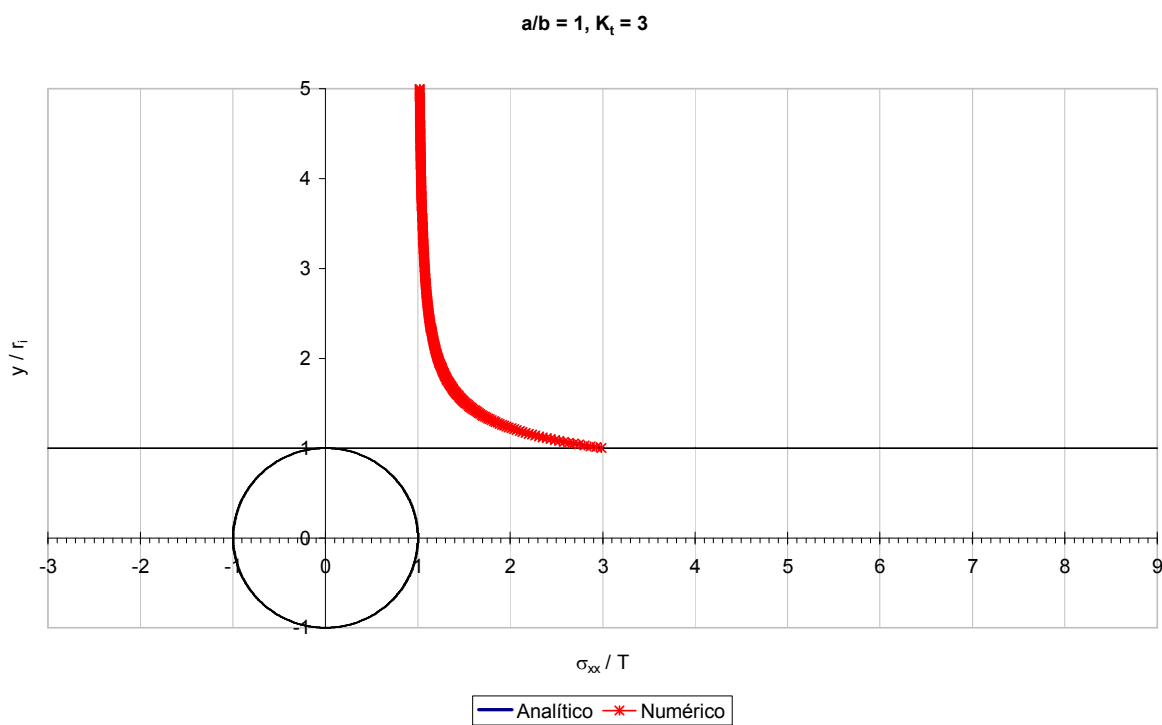
O valor da tensão máxima ocorre quando se substitui na equação (5.99) o valor  $\cos 2\eta = 1$ , que resulta:

$$\sigma_{\max} = \left( 1 + 2\frac{a}{b} \right) T.\tag{5.106}$$

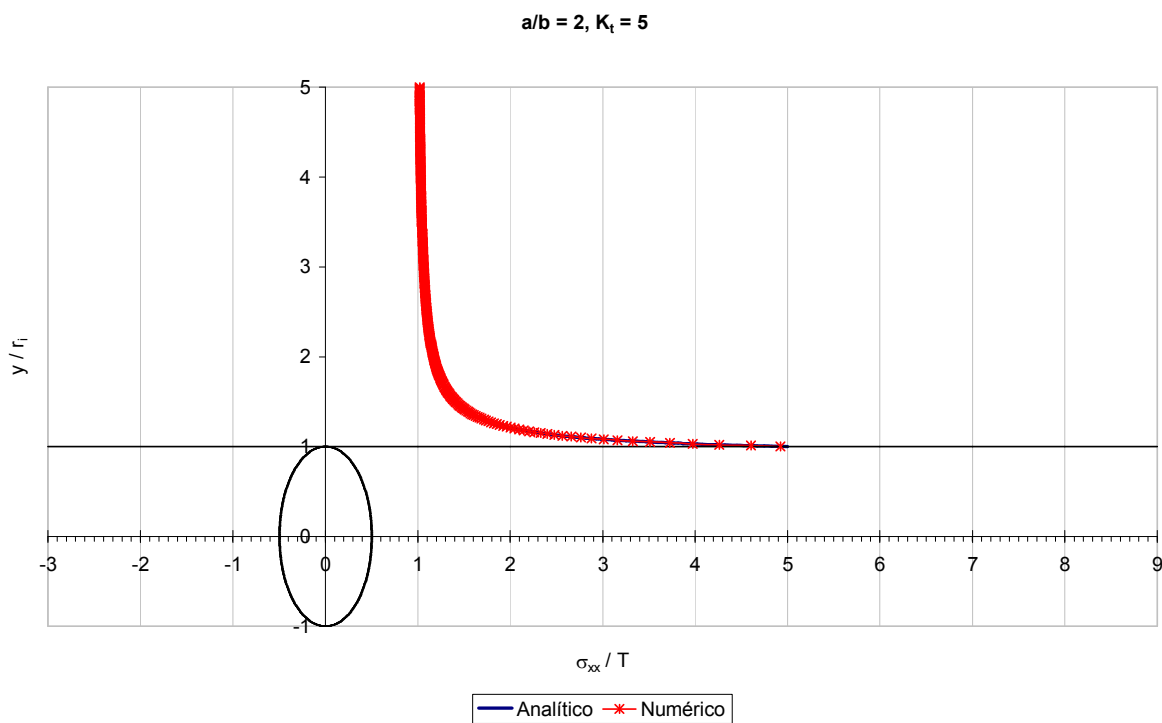
Que implica no fator de concentração de tensão, dado por:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{T} = 1 + 2\frac{a}{b}.\tag{5.107}$$

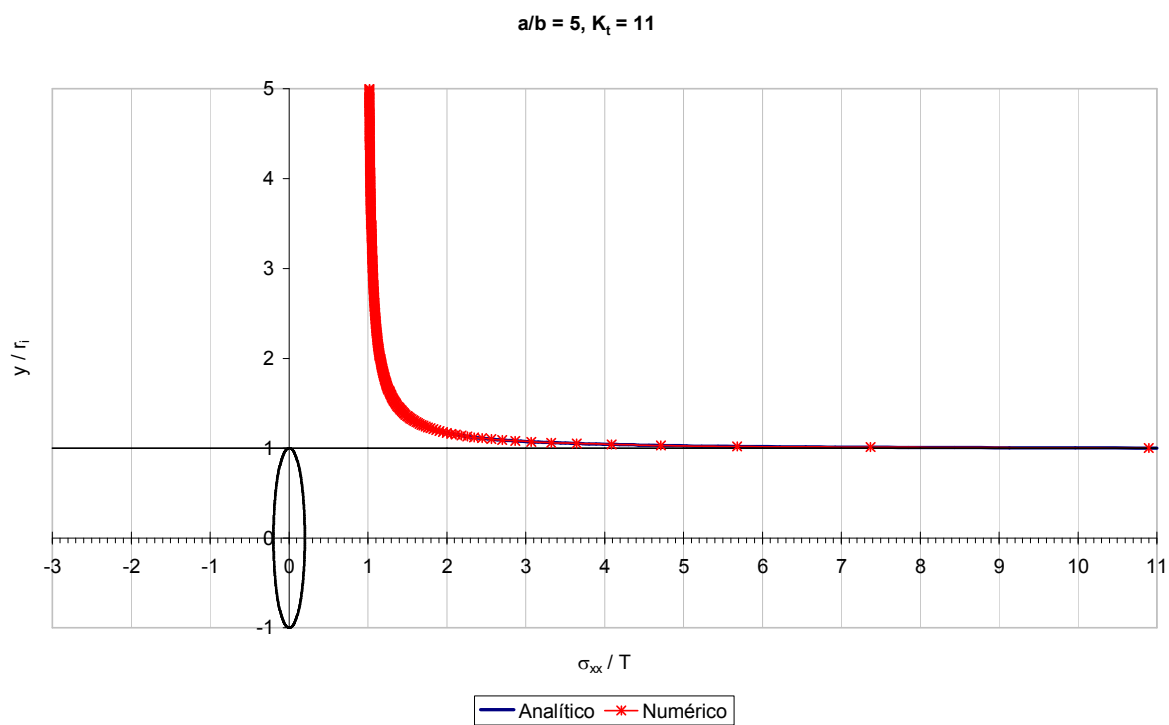
A seguir apresentam-se os resultados desses modelos.



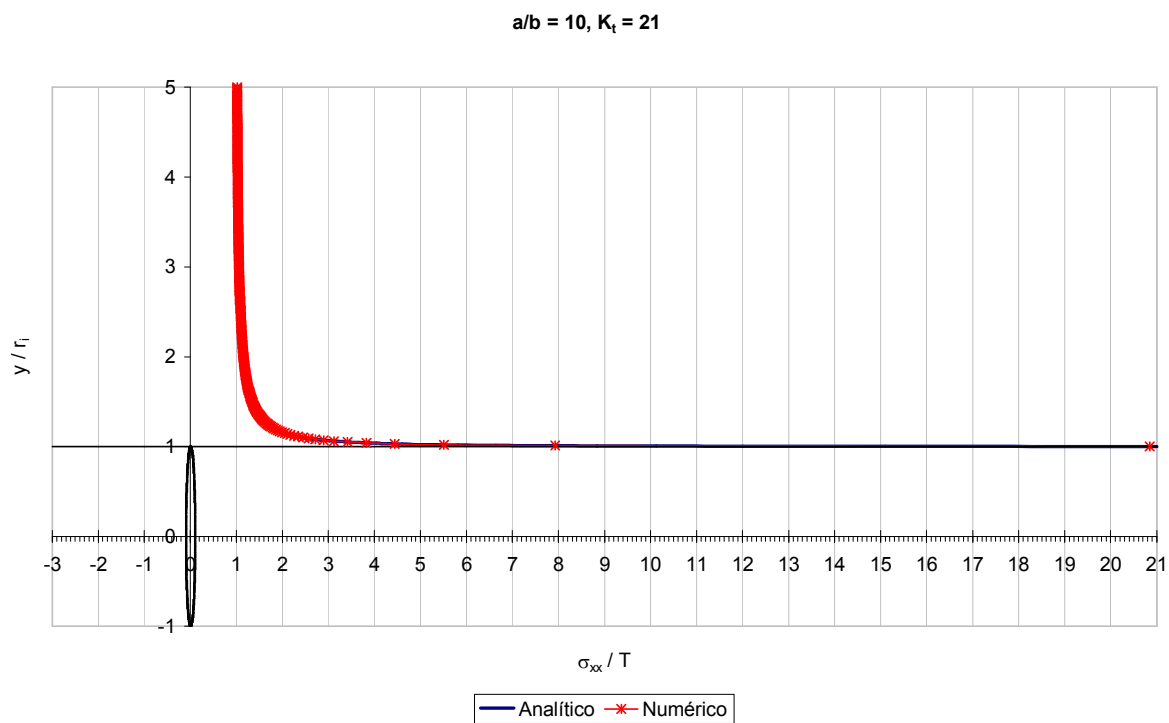
**Figura 5.36: Fator de concentração 3 para excentricidade 0**



**Figura 5.37: Fator de concentração 5 para excentricidade 0,86602.**

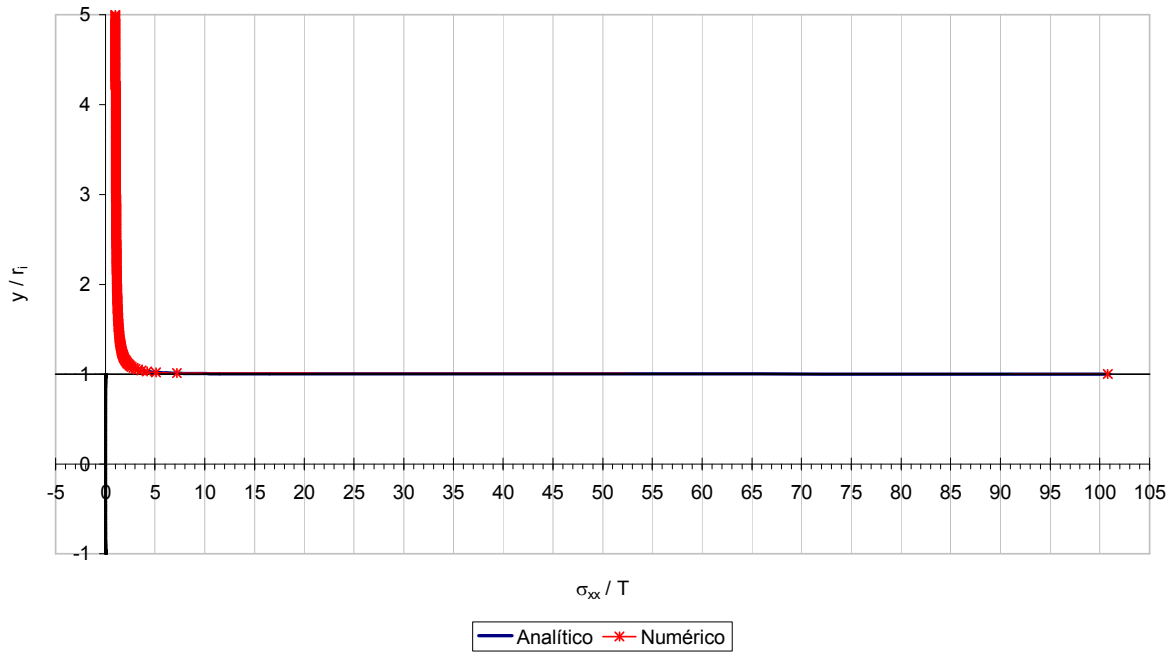


**Figura 5.38:** Fator de concentração 11 para excentricidade 0,97979.



**Figura 5.39:** Fator de concentração 21 para excentricidade 0,99498.

$a/b = 50, K_t = 101$



**Figura 5.40: Fator de concentração 105 para excentricidade 0,99979.**

É possível constatar por meio dos gráficos acima o crescimento abrupto do fator de concentração de tensão com o aumento da excentricidade da elipse. Quando o semi-eixo menor da elipse colapsa para zero o fator de concentração de tensão tende a um valor limite chamado de fator de intensidade de tensão, como no caso da mecânica da fratura que será tratada no próximo capítulo.

## 6. Mecânica da Fratura

### 6.1. Apresentação

Neste capítulo apresenta-se a formulação da mecânica da fratura linear elástica (MFEL). Descrevem-se os métodos de análise da MFEL com destaque para o método dos elementos de contorno dual (MECD) e para as técnicas numéricas de avaliação do fator de intensidade de tensão (FIT). Encerra-se o capítulo com dois exemplos de validação das técnicas de extração do FIT, mais um exemplo que justifica a utilização do MECD para simular fraturas curvas.

### 6.2. Notas Históricas

Segundo Rossmanith (1997), a revolução industrial do século XIX proporcionou um aumento significativo na procura de ferro e aço para o uso na engenharia, sobretudo a partir da segunda metade do século XIX. Erdogan et al. (1997) ressalta que o progresso alcançado na tecnologia metalúrgica foi fundamental para utilização desses metais como matéria prima em grandes estruturas. Os autores destacam, também, que concomitantes ao desenvolvimento desse período inúmeros acidentes catastróficos ocorreram em razão do uso indiscriminado desses materiais. Por exemplo, Rossmanith (1997) descreve que na década de 1870 a revista *Engineering* publicava as estatísticas semanais dos acidentes provocados nas ferrovias inglesas, devido os problemas de fraturamento nos eixos dos vagões e nas linhas férreas. Erdogan et al. (1997) informa que nesse período morriam, aproximadamente, duzentas pessoas por ano na Grã-Bretanha em razão desses acidentes.

Barsom e Rolfe (1999) afirmam que as principais causas dos acidentes nas estruturas estão relacionadas à ruptura frágil dos materiais. Em Barsom e Rolfe (1999) são apresentados diversos casos de falhas provocadas devido à ruptura frágil do ferro e do aço. Em Leibowitz (1969) encontram-se as análises e discussões acerca de vários acidentes catastróficos ocorridos em grande estruturas, como por exemplo: Tanques de armazenamento de petróleo, gás e água; vasos de pressão, turbinas, caldeiras, gasodutos, pontes, aviões, ferrovias e navios.

Em Meguid (1989) há uma cuidadosa avaliação dos relatórios que apontam as causas de um dos acidentes mais famosos da história contemporânea, os ocorridos com os navios

Liberty durante a Segunda Guerra Mundial. Rossmanith (1997) relata que nos primeiros dias de guerra, a marinha Alemã havia afundado vários navios de carga Britânicos. Nos termos do programa do apoio de guerra dos Estados Unidos, o *Land-Lase Act*, os americanos se encarregavam de enviar suprimentos e materiais bélicos aos países aliados. Nessa iniciativa, um famoso engenheiro americano, Henry Kaiser, fora convocado por ter desenvolvido uma técnica revolucionária de fabricação de navios. De acordo com Meguid (1989) essa técnica substituiu os cascos rebitados por cascos soldados resultando em uma produção recorde de fabricação, sendo construído um navio em quatro dias.

De acordo com Blake (2005), em 1943, um desses navios se partiu ao meio enquanto navegava no pacífico norte. Acerca desse acidente, Meguid (1989) apresenta alguns números: Do total de 2.700 navios fabricados, 400 navios apresentavam fraturas brandas, 90 navios apresentavam fraturas mais sérias, 20 estavam completamente comprometidos e outros 12 partiram-se ao meio ainda parados nas docas. No relatório final do Laboratório de Pesquisas Navais de Washington foi constatado que havia três causas principais responsáveis pelo aparecimento desses defeitos. A primeira responsabilizava a qualidade das soldas. A segunda dizia que as fraturas que eclodiam de cantos onde havia concentração funcionavam como mecanismos iniciais de ruptura. E a terceira dizia que os cascos de aço dos navios apresentavam baixa tenacidade ao fraturamento.

Segundo Blake (2005) foi após a investigação das causas desses acidentes que culminaram nos desenvolvimentos e definições da moderna mecânica da fratura elástica linear. Blake (2005) destaca que as maiores contribuições referentes ao assunto ocorreram no início da década de 1950 quando Irwin e Kies (1952, 1954) e Irwin (1957) forneceram a extensão da teoria de Griffith e estabeleceram um critério de propagação da fratura com base na taxa de liberação de energia e no trabalho crítico requerido para a formação da nova superfície de fratura. Nesses trabalhos Irwin relacionou a taxa de liberação de energia ao campo de tensão na extremidade da fratura por meio da técnica apresentada em Westergaard (1939) *apud* Liebowitz (1968). Irwin demonstrou que esse campo podia ser determinado por meio de uma grandeza fundamental denominada fator de intensidade de tensão.

Após esse breve histórico apresenta-se os fundamentos teóricos da MFEL.



### 6.3. Mecânica da Fratura Elástica Linear

De acordo com Meguid (1989) na fase de projeto de um componente estrutural não é suficiente considerar apenas os limites de tensão do material. Para se garantir a integridade mecânica da estrutura deve-se considerar também, as condições operacionais de solicitação devido à presença dos defeitos no meio material. O autor define a mecânica da fratura como o ramo da análise estrutural que se destina ao estudo dos meios fraturados.

O caso particular quando se desconsidera a plastificação na extremidade da fratura chama-se a mecânica da fratura elástica linear.

O conteúdo dos itens a seguir fundamenta-se nos trabalhos de Liebowitz (1968), Rice (1968), Meguid (1989), Parton (1992) e Papadopoulos (1993).

#### 6.3.1. O Critério Energético de Griffith

Com base nos teoremas de energia, Griffith (1921) *apud* Meguid (1989) analisou o campo de tensões em uma chapa infinita, tracionada e com uma fratura elíptica central, conforme a da Figura 6.1.

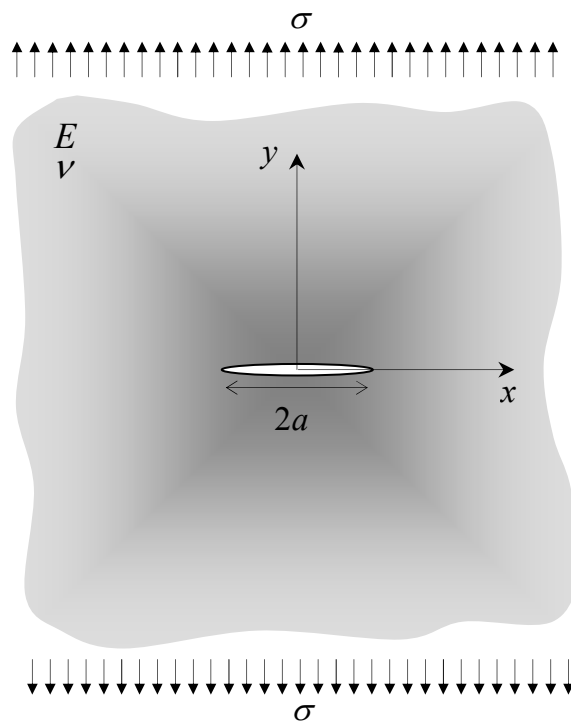


Figura 6.1: Chapa infinita com uma fratura elíptica central

De acordo com Meguid (1989), o critério energético de Griffith estabelece que o decréscimo na energia potencial interna  $U_p$  ocorre devido o aumento da superfície de fratura que é contrabalanceada pelo aumento na energia requerida para a formação da nova superfície de fratura  $U_\gamma$ .

O equilíbrio estático e termodinâmico fornece a energia total em função das parcelas:

$$U_t = U_i + U_a + U_w + U_\gamma. \quad (6.1)$$

A primeira parcela corresponde à energia de deformação elástica da chapa com espessura unitária. Na ausência de defeitos, essa parcela é dado por:

$$U_i = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA. \quad (6.2)$$

A segunda parcela refere-se à taxa de energia de deformação elástica devido a introdução de um fratura elíptica de comprimento  $2a$ . Griffith (1921) *apud* Liebowitz (1968) demonstrou que para uma chapa de espessura unitária essa parcela é calculada como:

$$U_a = \pm \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}. \quad (6.3)$$

A terceira parcela considera a contribuição do trabalho das forças externas por unidade de espessura, sendo expressa por:

$$U_w = \int_{\delta} F dy. \quad (6.4)$$

A quarta e última parcela corresponde ao acréscimo na energia superficial elástica devido à formação da nova superfície de fratura, que é dada por:

$$U_\gamma = 4a\gamma_e. \quad (6.5)$$

Com  $\gamma_e$  igual a energia superficial elástica do material por unidade de espessura da Chapa. Esse valor é constante e depende das propriedades físicas do material.

Fisicamente a parcela  $U_\gamma$  corresponde a energia requerida para romper as ligações atômicas na frente da extremidade da fratura e se caracterizando como uma forma de energia irreversível, ver Meguid (1989). Portanto,  $U_\gamma$  não contribui no potencial interno do sistema, sendo a energia potencial interna  $U_p$  determinada apenas pelas parcelas  $U_i + U_a + U_w$ .

Outra análise refere-se aos tipos de condições de contorno do problema. Nesse caso destacam-se duas: Deslocamento constante ou carregamento constante.

No caso das condições de contorno associadas ao deslocamento, verifica-se que o trabalho das forças externas é  $U_w = 0$ . Quando houver o relaxamento na intensidade do carregamento ocorrerá um decréscimo na rigidez e conseqüentemente na energia de deformação elástica da fratura, de modo que  $U_a = -\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}$ . Nessa situação a energia potencial interna do sistema resulta:

$$U_p = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E}. \quad (6.6)$$

No caso das condições de contorno associadas ao carregamento, verifica-se que o trabalho das forças externas é  $U_w \neq 0$  e com isso, o carregamento promove o aumento na taxa de deformação elástica da fratura. Resultando na seguinte energia potencial interna:

$$U_p = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA + \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} - \int_\delta F dy. \quad (6.7)$$

Posto isso, a energia total do sistema mecânico fica:

$$U_p = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA \pm \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} - \int_\delta F dy + 4a\gamma_e. \quad (6.8)$$

Na equação (6.8) as parcelas de energia  $U_a$  e  $U_\gamma$  variam parabólica e linearmente em relação ao comprimento da fratura.

Considerando as condições de contorno em deslocamento. O ponto de equilíbrio energético do sistema é obtido ao se efetuar  $\frac{\partial U_t}{\partial a} = 0$ , logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} + 4a\gamma_e \right) &= 0, \text{ desde que,} \\ \frac{\partial}{\partial a} U_i &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Essa condição estabelece que uma fratura de comprimento  $0 \leq a \leq a_c$ , com  $a_c$  o comprimento crítico da fatura, fornece uma quantidade de energia mínima para que haja o crescimento da fratura, ou seja, para que a propagação ocorra de maneira estável. Porém quando  $a > a_c$  a taxa de energia de deformação excede a quantidade de energia necessária para se criar uma nova superfície de fratura, e essa se propaga de maneira instável.

No equilíbrio encontra-se:

$$\begin{aligned} \sigma\sqrt{\pi a} &= \sqrt{2E\gamma_e}, \text{ para o estado plano de tensão, e} \\ \sigma\sqrt{\pi a} &= \sqrt{\frac{2E\gamma_e}{1-\nu^2}}, \text{ para o estado plano de deformação.} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Das equações (6.10) conclui-se que a propagação estável ou instável da fratura depende das condições de carregamento da Chapa, da geometria da fratura e das propriedades do material. Conseqüentemente, as equações (6.10) indicam a situação crítica que ocorre quando o produto  $\sigma\sqrt{\pi a}$  atinge um valor limite, como será apresentado posteriormente.

As equações (6.10) podem também ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sigma^2 a}{E} &= 2\gamma_e, \text{ para o estado plano de tensão, e} \\ \frac{\pi\sigma^2 a}{E} (1-\nu^2) &= 2\gamma_e, \text{ para o estado plano de deformação.} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Em termos dimensionais, a quantidade do lado esquerdo da igualdade é equivalente a uma força disponibilizada pelo sistema para que a frente de fraturamento avance uma unidade de comprimento. Essa quantidade é representada por  $G_c$ .

Dimensionalmente, a quantidade do lado direito é equivalente a uma força resistente ao avanço da fratura e é representada por  $R$ . Assim, a condição de propagação instável ocorre quando:

$$G_c \geq R. \quad (6.12)$$

Sendo:

$$G_c = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}, \text{ para o estado plano de tensão,}$$

$$G_c = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}(1-\nu^2), \text{ para o estado plano de deformação, e}$$

$$R = \frac{\partial U_\gamma}{\partial a}.$$

Para a condição de contorno em carregamento, a energia total do sistema mecânico (6.8) pode ser representada da seguinte forma:

$$U_t = U_i + U_a - U_w + U_\gamma. \quad (6.13)$$

Novamente, o equilíbrio do sistema é determinado realizando-se a operação  $\frac{\partial U_t}{\partial a} = 0$ .

Para que ocorra a propagação instável da fratura se faz  $\frac{\partial U_t}{\partial a} \leq 0$ , que resulta:

$$\frac{\partial}{\partial a}(U_a - U_w + U_\gamma) \leq 0. \quad (6.14)$$

Resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial a}(U_w - U_a) \geq \frac{\partial}{\partial a} U_\gamma. \quad (6.15)$$

Ou seja  $G_c \geq R$ , com  $G_c = \frac{\partial}{\partial a}(U_w - U_a)$ .

De acordo com a equação (6.15) é possível definir  $G_c$  como a taxa de liberação de energia potencial, conforme apresentado em Meguid (1989).

Analisando as possíveis condições de contorno apresentadas anteriormente para esse problema,  $G_c$  poderá ser ora a taxa de liberação de energia de deformação ora a taxa de liberação de energia potencial, caso se prescreva ou o deslocamento constante ou o carregamento constante. De forma geral  $G_c$  pode ser definida como a liberação de energia por unidade de comprimento da fratura, por unidade de espessura da Chapa. Em termos dimensionais Meguid (1989) define  $G_c$  como a força motriz de fraturamento.

Apesar do critério de Griffith medir a energia global do sistema, ele não fornece as informações do comportamento local da fratura e é aplicada exclusivamente para materiais frágeis. De acordo com Liebowitz (1968), Irwin (1957) demonstrou que o processo de propagação se desenvolve em uma pequena região próxima a extremidade da fratura. Irwin determinou os campos de tensão e deslocamento nessa região em termos de uma grandeza que denominou de fator de intensidade de tensão. No item a seguir, apresenta-se a formulação proposta por Irwin.

### 6.3.2. A Abordagem de Irwin-Orowan

Segundo Meguid (1989), Irwin (1952, 1955) e Orowan (1950) estenderam a teoria de Griffith considerando o efeito da plastificação em uma região limitada, próxima a extremidade da fratura. Irwin e Orowan postularam que a resistência ao aumento do comprimento da fratura é igual à soma da energia superficial elástica  $\gamma_e$  com a energia de dissipação plástica  $\gamma_p$ . Segundo essa definição os autores introduziram a parcela  $\gamma_p$  na equação do equilíbrio energético do sistema, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sigma^2 a}{E} &= 2(\gamma_e + \gamma_p), \text{ para o estado plano de tensão, e} \\ \frac{\pi\sigma^2 a}{E}(1-\nu^2) &= 2(\gamma_e + \gamma_p), \text{ para o estado plano de deformação.} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Nos materiais dúcteis o termo  $\gamma_p$  é muito maior que  $\gamma_e$  e a resistência ao avanço da fratura é governada principalmente, por meio da energia de dissipação plástica. Porém, Orowan (1950) *apud* Liebowitz (1968) verificou que esse critério não era suficiente para determinar o crescimento da fratura. Orowan estabeleceu que a plastificação deve ocorrer em uma região suficientemente próxima a extremidade da fratura, denominada zona plástica.

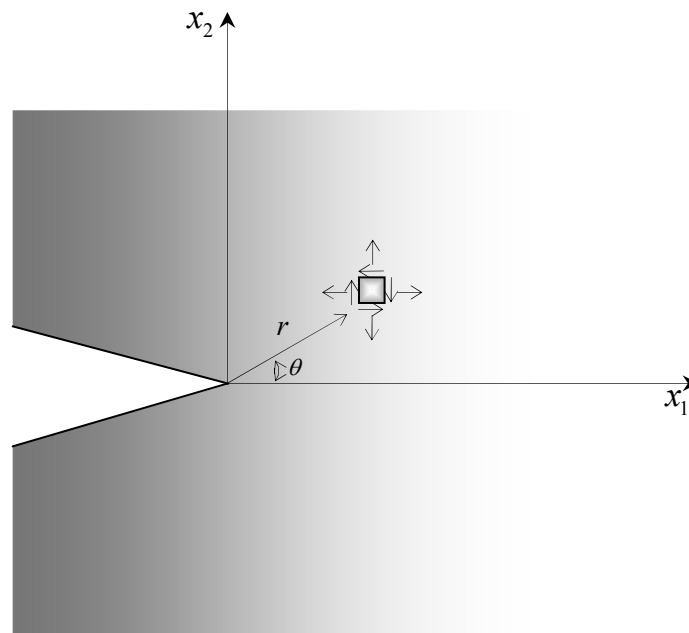
Na MFEL o termo  $\gamma_p$  é muito menor que  $\gamma_e$  e o campo de tensões na extremidade da fratura é governado apenas pelo comprimento da fratura. Partindo dessa premissa, Irwin (1957) *apud* Meguid (1989) demonstrou que as tensões elásticas próximas a fratura podiam ser determinadas por meio de uma representação em série do campo tensão. Para os problemas bidimensionais essa série é expressa como:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left[ K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) \right] \quad (6.17)$$

Sendo:

$r$  e  $\theta$ , a posição de um elemento de volume em relação a extremidade da fratura, expressa no sistema de coordenada polar, conforme a Figura 6.2.

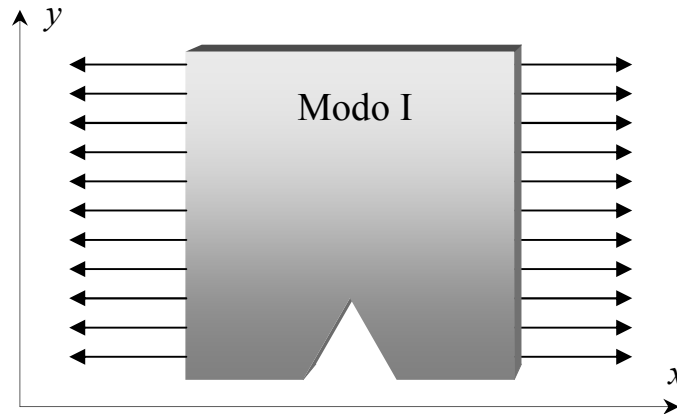
$K_I$  e  $K_{II}$ , os fatores de intensidade de tensão correspondentes aos dois modos básicos de deformação da superfície da fratura.



**Figura 6.2: Sistema de referencia polar.**

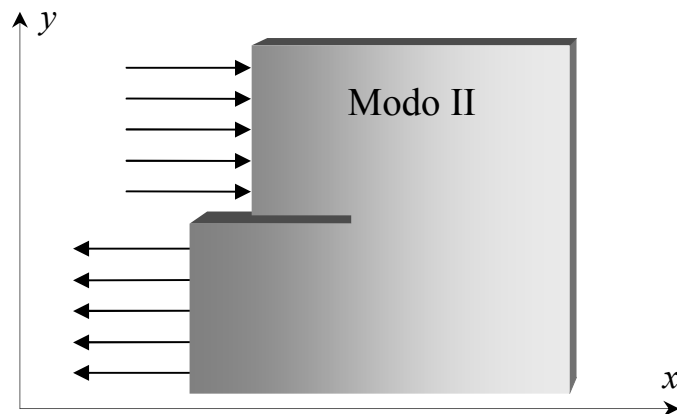
Segundo Papadopoulos (1993), Irwin observou que nos sólidos bidimensionais o fraturamento resulta da superposição dos modos básicos que são definidos como:

Modo I ou modo de abertura. As faces da fratura tendem a se separar simetricamente em relação ao plano da fratura em decorrência de solicitações de tração, como na Figura 6.3.



**Figura 6.3: Modo de abertura da fratura. Modo I.**

Modo II ou modo de escorregamento. As faces da fratura deslizam em relação ao plano da fratura, em decorrência de solicitações de cisalhamento, conforme a Figura 6.4.



**Figura 6.4: Modo de escorregamento. Modo II.**

Os FIT são grandezas que dependem da forma da fratura e do tipo de carregamento do problema. Os fatores  $K$  fornecem uma estimativa local da intensidade das tensões nas proximidades da fratura.

Portanto, na teoria da MFEL, o FIT é a principal grandeza que determina o comportamento dos campos de tensão dos sólidos fraturados. Existem diferentes formas de se determinar o FIT. Apresentam-se, a seguir, alguns desses métodos.



### 6.3.3. Métodos Experimentais

Existem diversos métodos de avaliação experimental do FIT. Estas técnicas incluem a extensometria, a fotoelasticidade, a interferometria e mais recentemente por meio de processamento digital de imagens e emissão acústica.

Por exemplo, na extensimetria as deformações próximas a extremidade da fratura são medidas a partir da variação da resistência elétrica provocada pela deformação específica do extensômetro.

Dally e Sanford (1987) demonstraram que para um material homogêneo, elástico linear, o fator de intensidade de tensão do modo de abertura relaciona-se com a deformação medida no extensômetro por meio da equação:

$$2\mu\varepsilon_{xx} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \kappa \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos(2\alpha) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\theta) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \operatorname{sen}(2\alpha) \right]. \quad (6.18)$$

Sendo:

$K_{Ic}$ , o fator de intensidade de tensão crítico ou tenacidade ao fraturamento no modo I,

$\kappa = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ ,  $\mu$ , o módulo de elasticidade transversal do material, e

$\theta$  e  $\alpha$ , as orientações do extensômetro em relação a extremidade da fratura calculadas em função do coeficiente de Poisson, por meio das equações:

$$\cos(2\alpha) = \frac{\nu-1}{1+\nu} \text{ e } \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\operatorname{cotg}(2\alpha). \quad (6.19)$$

De acordo com Barsom e Rolfe (1999) a importância dos métodos experimentais consiste na determinação das características limites dos materiais como, por exemplo, o FIT crítico  $K_{Ic}$  é definido como a tenacidade de um corpo de prova. Os autores destacam que os métodos experimentais utilizados na obtenção do  $K_{Ic}$  devem ser obtidos para condições de serviço, como por exemplo, temperatura ambiente, taxa de carregamento e restrição ao escoamento do material.

### 6.3.4. Métodos Analíticos

De acordo com Parton (1992), a maioria dos métodos analíticos restringe-se a problemas com condições de contorno simplificadas. Como mencionado anteriormente, Liebowitz (1968) apresenta as soluções analíticas obtidas por Irwin utilizando as chamadas funções de tensão de Westergaard.

O campo de tensão próximo as extremidades da fratura pode ser calculado por meio das funções de tensões complexas de Westergaard:

$$\Phi = Re\bar{\bar{Z}} + yIm\bar{Z}. \quad (6.20)$$

Sendo:

$Z$ , uma função analítica de variáveis complexas  $z = x + yi$ ,

$Re$  e  $Im$ , a parte real e imaginária da função  $Z$ ,

$\bar{Z} = \frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz}$  e  $Z = \frac{d\bar{Z}}{dz}$ , sendo  $\bar{Z}$  o conjugado da função  $Z$  e  $\bar{\bar{Z}}$  o conjugado de  $\bar{Z}$ .

É possível escrever o campo de tensão em termos de  $Z$ , por meio das funções de tensão de Airy:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \text{ e } \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (6.21)$$

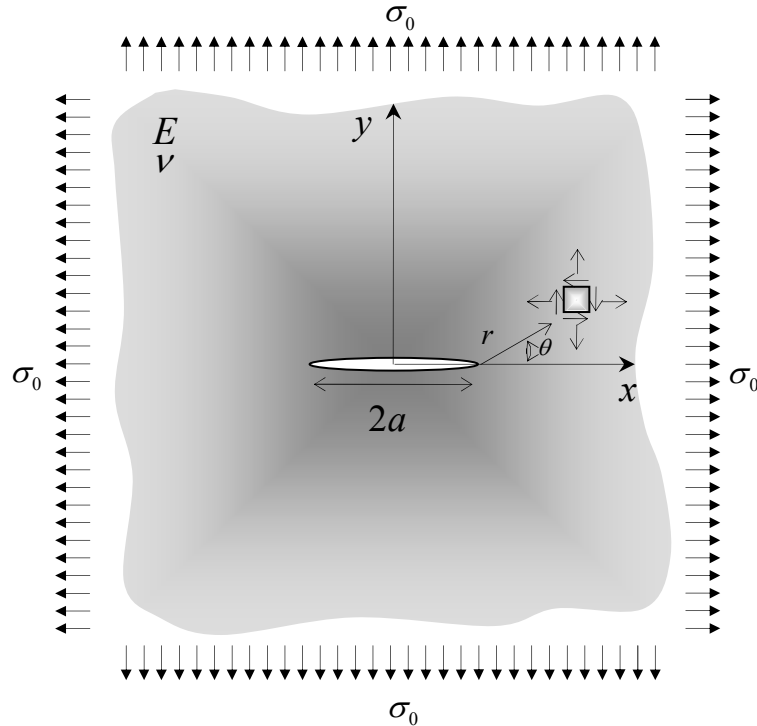
Das condições de Cauchy-Riemann determinam-se os valores das tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= ReZ - yImZ', \\ \sigma_{yy} &= ReZ + yImZ', \text{ e} \\ \sigma_{xy} &= -yReZ'. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Sendo:

$$Z' = \frac{dZ}{dz}.$$

Para o problema bidimensional infinito com uma fratura elíptica submetida a um estado biaxial de tração, conforme apresentado na Figura 6.5.



**Figura 6.5: Fratura central em uma Chapa infinita.**

Determinam-se os FIT para os dois modos de deformação a partir das seguintes definições:

Análise no Modo I

Liebowitz (1968) apresenta a função de tensão de Airy  $\Phi$  para o modo I, da seguinte forma:

$$\Phi_I = \frac{\sigma_0}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (6.23)$$

Com as condições de contorno:

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = 0 & -a < x < +a, \\ \sigma_{yy} = \sigma_0 & x \rightarrow \infty, \text{ e} \\ \sigma_{yy} \rightarrow \infty & x = \pm a. \end{cases} \quad (6.24)$$

Portanto, a função de tensão de Westergaard para o modo de abertura fica:

$$Z_I = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (6.25)$$

Para se transladar a origem do sistema de coordenada e posicioná-lo na extremidade da fratura, Meguid (1989) recomenda que se utilize a transformação  $\zeta = z - a$ . Substituído essa mudança de variável na equação (6.25), encontra-se:

$$Z_I = \frac{\sigma_0 (\zeta + a)}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta + 2a}}. \quad (6.26)$$

Realizando a expansão em série de Taylor na variável  $\zeta$ , tem-se:

$$Z_I = \frac{\sigma_0 (\zeta + a)}{\sqrt{\zeta}} \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta}{2a} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{\zeta}{2a} \right)^2 - \dots \right]. \quad (6.27)$$

Admitindo-se que  $\zeta \ll a$ , os termos de ordem superior da série podem ser omitidos. Aplicando essa consideração sobre a equação (6.27) e substituindo a transformação trigonométrica  $\zeta = re^{i\theta}$ , obtém-se:

$$Z_I = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{\theta i}{2}}. \quad (6.28)$$

Irwin (1957) *apud* Papadopoulos (1993) define o fator de intensidade de tensão do modo I como sendo a magnitude do campo de tensão próximo a extremidade da fratura, ou fator de intensidade de tensão de tração dado por  $K_I = \sigma_{yy}(r, \theta = 0) \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\pi r}$ .

Substituindo a equação (6.28) em (6.22) determinam-se as tensões em função do FIT:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \text{ e} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Substituindo a equação (6.29) na lei de Hooke e em seguida, na relação deformação deslocamento, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (\kappa - 1) + 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \text{ e} \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (\kappa + 1) - 2\text{cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Sendo:

$\mu$ , o módulo de elasticidade transversal e

$\kappa = 3 - 4\nu$ , para o estado plano de deformação e  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ , para o estado plano de tensão, com  $\nu$  igual ao coeficiente de Poisson.

Em Meguid (1989) é apresentado a demonstração para determinar a taxa de energia de deformação elástica por unidade de comprimento no modo I. Os resultados dessa demonstração geram as seguintes relações:

$$\begin{aligned} G_I &= \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2), \text{ para o estado plano de deormação, e} \\ G_I &= \frac{K_I^2}{E}, \text{ para o estado plano de tensão.} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Análise no Modo II

De maneira similar, Liebowitz (1968) apresenta a função de tensão de Airy  $\Phi$  para o modo II:

$$\Phi_{II} = -y \text{Re} \bar{Z}_{II}. \quad (6.32)$$

Cujas condições de contorno são:

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = 0 & -a < x < +a, \\ \sigma_{xy} = \tau_0 & y \rightarrow \infty, \text{ e} \\ \sigma_{xy} \rightarrow \infty & x = \pm a. \end{cases} \quad (6.33)$$

Nesse caso a função de tensão de Westergaard tem a forma:

$$Z_{II} = \frac{\tau_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (6.34)$$

Sendo:

$\tau_0$ , a tensão de cisalhamento.

Para um valor limite de  $r$ , as componentes de tensão e deslocamento em função das coordenadas polares resultam:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \text{ e} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Para os campos de deslocamento, tem-se:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (\kappa + 1) + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \text{ e} \\ u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ (\kappa - 1) + 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.36)$$

O fator de intensidade de tensão do modo II é dado por  $K_{II} = \sigma_{xy}(r, \theta = 0) \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}$ .

A taxa de energia de deformação  $G_{II}$ , é semelhante a apresentada na equação (6.31), e é expressa por:

$$\begin{aligned} G_{II} &= \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2), \text{ para o estado plano de deormação, e} \\ G_{II} &= \frac{K_{II}^2}{E}, \text{ para o estado plano de tensão.} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Outro método analítico bastante empregado na avaliação do fator de intensidade de tensão considera o balanço de energia por meio de uma integral de linha.

Segundo Meguid (1989) o conceito de integral  $J$  foi desenvolvido por Eshelby (1956) para caracterizar a distribuição de forças e deslocamentos provocados por imperfeições nos materiais elásticos. Esta integral descreve a modificação da energia total do sistema mecânico, provocadas pela presença de singularidades. De acordo com Meguid (1989), a definição da integral  $J$  dada por Rice (1968) se aplica ao caso particular de sólidos homogêneos, com material linear ou não linear, livre de forças de domínio, de deformações iniciais e de forças de superfície nas faces da fratura.

No trabalho de Rice (1968) são apresentadas as relações entre a integral  $J$  e o fator de intensidade de tensão. Nesse trabalho, Rice mostrou que o decréscimo da energia potencial interna  $U_p$  associada com o desenvolvimento da fratura é dado por:

$$-U_p = \int_{\Omega} W d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma. \quad (6.38)$$

Sedo:

$W = \int_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ , a densidade de energia de deformação, com  $\sigma_{ij}$ , o tensor de tensão e  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} u_{i,j}$  o tensor de deformação.

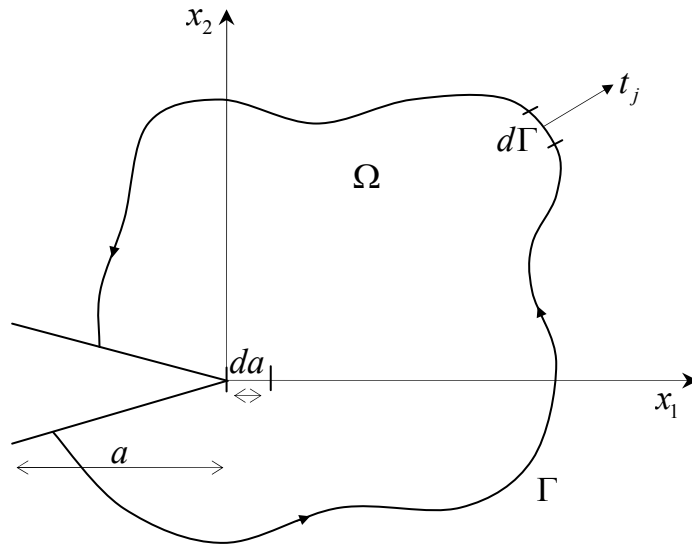
$t_i$ , é a força de superfície que atua no contorno  $\Gamma$  e é definida em termos do vetor normal  $n_j$  da seguinte forma:  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ .

O sinal negativo de  $U_p$  na equação (6.38) indica a redução da energia devido à diminuição da energia de deformação interna. Para problemas bidimensionais  $d\Omega$  representa a área do material removido para a formação da fratura. Para um crescimento infinitesimal do comprimento da fratura a variação da energia potencial é expressa como:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial a} d\Omega - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma. \quad (6.39)$$

Ao se transferir o sistema de coordenadas para a extremidade da fratura, como na Figura 6.6 e fazendo  $da = dx$ , a equação (6.39) fica:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} d\Gamma \quad (6.40)$$



**Figura 6.6: Notação e parâmetros usados na integral  $J$ .**

Aplicando o teorema da divergência sobre a equação (6.40), resulta:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial a} = \oint_{\Gamma} \left( U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma. \quad (6.41)$$

Sendo:

$-\frac{\partial U_p}{\partial a}$ , a integral  $J$ , portanto:

$$J = \oint_{\Gamma} \left( U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma. \quad (6.42)$$

Duas propriedades importantes da equação (6.42) são demonstradas em Rice (1968).



Uma delas é que a integral ao longo do contorno fechado é nula, resultando:

$$\oint_{\Gamma} \left( U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) d\Gamma = 0. \quad (6.43)$$

A outra propriedade diz que a integral é independente do caminho, o que condiz com um princípio de conservação.

A relação entre a integral  $J$  e o FIT é obtida por meio da taxa de liberação de energia  $G$ , e é expressa como:

$$G = - \frac{\partial U_p}{\partial a}. \quad (6.44)$$

Meguid (1989) destaca que na MFEL a variação da energia potencial dissipada durante o crescimento da fratura é equivalente a integral  $J$ , como foi apresentado anteriormente, logo:

$$J = - \frac{\partial U_p}{\partial a}. \quad (6.45)$$

Por essa razão, a integral  $J$  pode ser entendida como uma força conservativa visto que dimensionalmente  $G$  apresenta unidade de força. Se o meio material apresentar comportamento elástico, isotrópico, não necessariamente linear, a energia  $G$  se reduz a integral  $J$ , que em função do fator de intensidade de tensão fica expresso por:

$$G_m = J_m = \frac{K_m^2}{E'}, \text{ com } m = I, II. \quad (6.46)$$

Sendo:

$E'$ , o modulo de elasticidade dada por:  $E' = E$ , para o caso de problemas em estado plano de tensões e  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  para o caso de estado plano de deformação.

Essas são as formas analíticas clássicas de avaliação do FIT. Porém, e novamente se insiste em afirmar, essas formulações nem sempre atendem a problemas mais gerais, e por

isso existem vários “*handbbooks*” destinados a apresentar o cálculo do fator de intensidade de tensão, para casos especiais, como por exemplo, Murakami (1987) e o aplicativo “*Database for Stress Intensity Factors*” de López e Aliabadi (1996).

Uma maneira mais geral de se determinar o FIT é por meio dos métodos numéricos devido à flexibilidade e aplicabilidade a uma grande classe de geometrias, materiais e condições de contorno. A seguir apresentam-se os fundamentos dessa metodologia, com ênfase nas aplicações do método dos elementos de contorno dual.

### **6.3.5. Métodos Numéricos**

Existem diversas metodologias que podem ser utilizadas na resolução numérica de problemas da MFEL, como por exemplo, o método dos elementos finitos, o método dos elementos de contorno, entre outros.

Nesta pesquisa utiliza-se o método dos elementos de contorno dual, como será apresentado a seguir.

#### **6.3.5.1 Método dos Elementos de Contorno Dual**

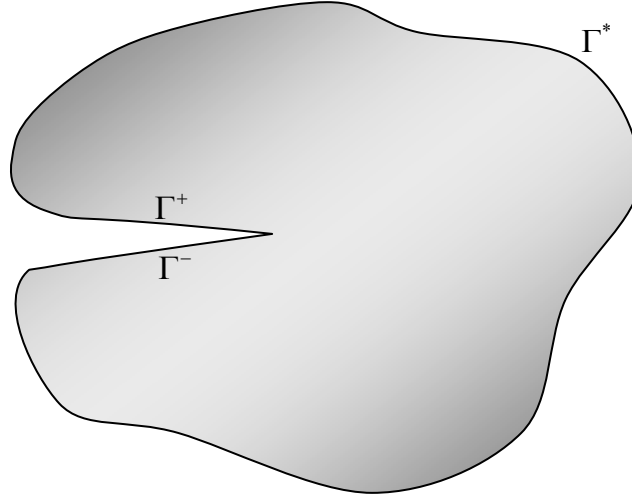
O método dos elementos de contorno dual, como apresentado em Portela (1992.b), surgiu como uma ferramenta numérica para análise de problemas da mecânica da fratura. O método consiste na aplicação simultânea das formulações diretas do MEC em deslocamento e em força de superfície. A principal vantagem dessa estratégia é a colocação de pontos fontes em posições coincidentes do espaço sem a geração de sistemas de equações singulares.

Em razão das potencialidades que essa estratégia oferece, desenvolve-se neste trabalho o MECD com liberdade, no que diz respeito a escolha da posição dos pontos colocação. Permite-se definir os pontos fontes em qualquer posição do contorno, diferentemente do que sugere as formulações clássicas do MECD.

A posição e o tipo de pontos escolhido contribuem somente na geração das linhas das matrizes de influência de modo a tornar o sistema algébrico possível e determinado.

Portela (1992.b) ao discretizar a faces da fratura coloca em uma das faces as equações dos deslocamento, enquanto que na face oposta aplica a equação das forças de superfície.

Para um sólido fraturado,  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$  representam as faces da fratura e o contorno remanescente é indicado por  $\Gamma^*$ , como ilustra a Figura 6.7.



**Figura 6.7: Representação do contorno da fratura na formulação dual.**

Caso se utilize o ponto fonte que gere as equações em deslocamento na face  $\Gamma^+$ , os pontos fonte singulares  $x^+$  produzirão, na ausência de forças de campo e para elementos suaves a seguinte equação integral:

$$\frac{1}{2}u_i(x^+) + \frac{1}{2}u_i(x^-) + \int_{\Gamma} T_{ki}^*(x^+, x)u_k(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(x^+, x)t_k(x) d\Gamma. \quad (6.47)$$

Quando a formulação em força de superfície é aplicada na face oposta  $\Gamma^-$ , é possível demonstrar que o ponto fonte singular  $x^-$  gera a seguinte equação integral:

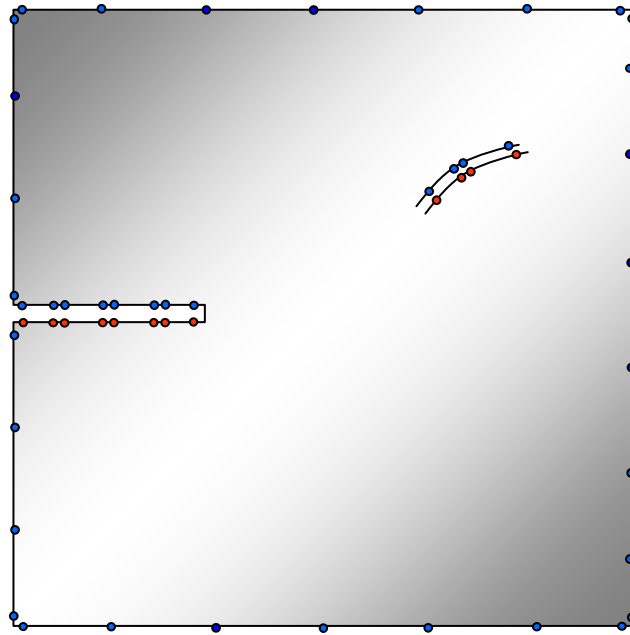
$$\frac{1}{2}t_i(x^-) + \frac{1}{2}t_i(x^+) = n_j(x^-) \int_{\Gamma} D_{kij}^*(x^-, x)t_k(x) d\Gamma - n_j(x^-) \int_{\Gamma} S_{kij}^*(x^-, x)u_k(x) d\Gamma. \quad (6.48)$$

A dificuldade em se realizar as integrais das equações (6.47) e (6.48) consiste em se desenvolver um procedimento geral de avaliação das integrais no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard. Esse procedimento foi apresentado no capítulo anterior quando se utilizou a subtração de singularidade para regularizar essas integrais.

Quando se aplica a solução fundamental das equações em força de superfície, os termos livres só existem para contornos suaves, sendo assim deve-se aplicar a técnica de

elementos descontínuos para discretizar a fratura, ou seja, não se adotam pontos fontes na extremidade da fratura.

Posto isso, cabe utilizar a estratégia de modelagem que atenda aos critérios estabelecidos pela formulação dual. Portela (1992.b) apresenta a metodologia clássica que pode ser visualizada na Figura 6.8.



**Figura 6.8: Estratégia de colocação dos nós do contorno na formulação dual clássica.**

Os nós azuis indicam equações em deslocamento. Os nós vermelhos indicam equações em força de superfície.

Nessa estratégia, as faces da fratura são modeladas com elementos de contorno descontínuos enquanto que o contorno remanescente fica-se livre para se adotar tanto elementos contínuos, semi-contínuos ou até mesmo descontínuos.

As equações em deslocamento são colocadas em uma das faces da fratura enquanto que na face oposta utiliza-se obrigatoriamente a formulação em força de superfície para evitar a singularidade na resolução algébrica do sistema.

No contorno remanescente colocam-se pontos fontes com a formulação em deslocamento. Na realidade essa condição pode ser modificada uma vez que a introdução das equações em força de superfície produz o mesmo resultado.

### 6.3.5.2 Fator de Intensidade de Tensão

Para se obter numericamente os valores do FIT a partir dos resultados gerados com o MECD apresentam-se três técnicas que são utilizadas neste trabalho.

#### Técnica de Correlação dos Deslocamentos

Essa técnica associa os deslocamentos dos nós calculados na extremidade da fratura com as soluções analíticas obtidas das equações (6.30) e (6.36) após substituir o ângulo  $\theta$  por  $-\pi$  e  $+\pi$ . Como ilustra a Figura 6.9.

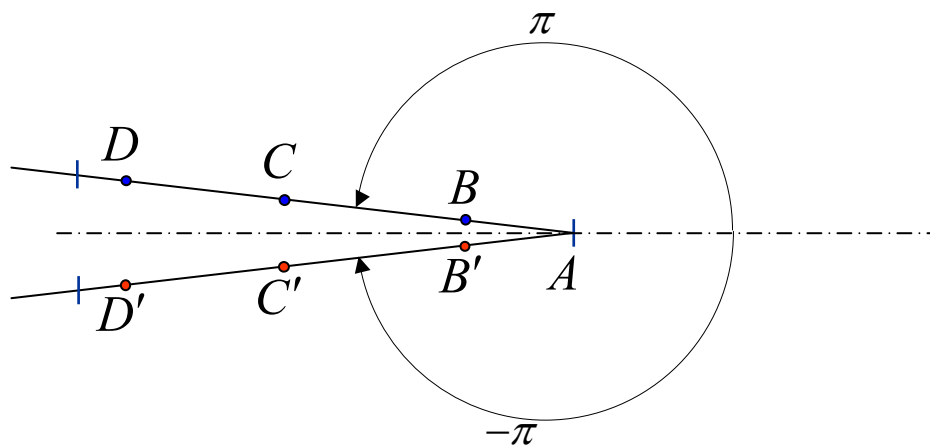
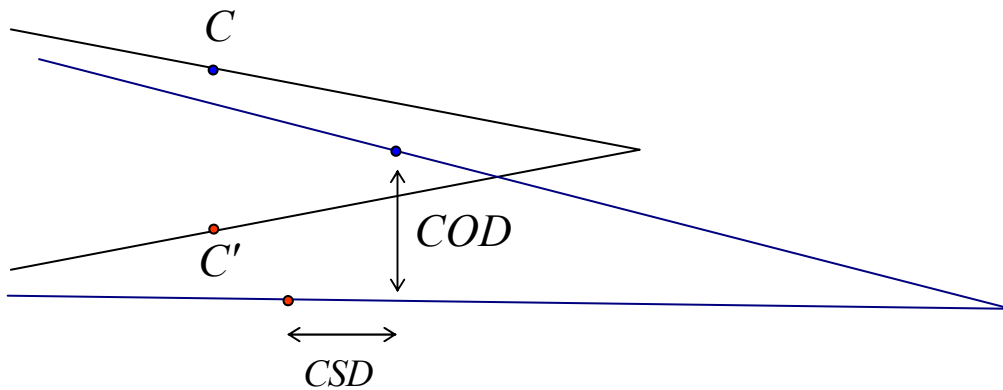


Figura 6.9: Técnica da correlação dos deslocamentos

O FIT é calculado procedendo-se a diferença entre os deslocamentos das faces da fratura que apresentam o mesmo modo de abertura. Por exemplo, aplica-se o procedimento para o nó C a partir da configuração deformada e indeformada das superfícies da fratura. A figura a seguir ilustra essas configurações.



**Figura 6.10: Configuração deformada e indeformada das faces da fratura**

Sendo:

$COD$ , o “*Crack Open Displacement*” que calcula a diferença dos deslocamentos do modo de abertura da fratura, e

$CSD$ , o “*Crack Sliding Displacement*” que calcula a diferença dos deslocamentos do modo de escorregamento da fratura.

O FIT do ponto  $C$  é calculado com as equações:

$$K_I^{cc'} = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{\mu}{\kappa+1} COD, \text{ e} \quad (6.49)$$

$$K_{II}^{cc'} = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{\mu}{\kappa+1} CSD.$$

Com  $COD = (u_2^c - u_2^{c'})$  e  $CSD = (u_1^c - u_1^{c'})$ . O FIT total é obtido fazendo-se a média aritmética das contribuições de cada par de nós localizado na extremidade da fratura.

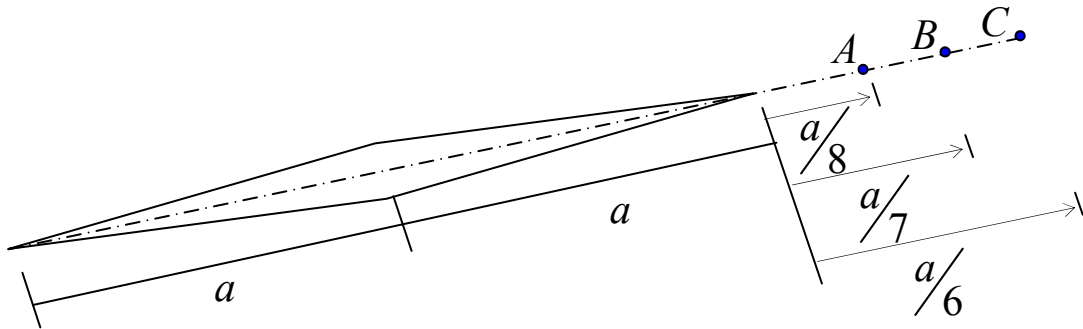
Portanto:

$$K_I = \frac{\sum_{i=1}^{nne} (K_I)_i}{nne} \text{ e } K_{II} = \frac{\sum_{i=1}^{nne} (K_{II})_i}{nne}. \quad (6.50)$$

## Técnica com Base no Estado de Tensão

A técnica com base no estado de tensão leva em consideração o cálculo das tensões obtidas nos nós próximos à extremidade da fratura. Maciel (2003) padroniza a técnica apresentada em Paris e Cañas (1997).

Maciel (2003) propõe a colocação de três pontos no domínio do problema distantes a  $\frac{1}{8}a$ ,  $\frac{1}{7}a$  e  $\frac{1}{6}a$  em relação a extremidade da fratura, com  $a$  igual a metade do comprimento da fratura. A Figura 6.11, ilustra a colocação desses pontos, que devem ser colineares ao eixo da fratura quando essa tiver geometria reta.



**Figura 6.11: Colocação dos nós de domínio próximos a extremidade da fratura.**

O FIT será calculado por meio das equações analíticas (6.29) e (6.35) substituindo o ângulo  $\theta = 0$  e o raio  $r$ , por cada um das distancias estabelecidas para colocação dos pontos fontes. Essa substituição permite calcular o valor do FIT para cada um dos nós com as equações para os respectivos modos de abertura:

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}, \text{ e} \\ K_{II} &= \sigma_{xy} \sqrt{2\pi r}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

O cálculo final do FIT é obtido como na técnica anterior, realizando-se a média aritmética entre os fatores tomados para cada uma das distâncias:

$$K_I = \frac{(K_I)_A + (K_I)_B + (K_I)_C}{3}, \text{ e} \tag{6.52}$$

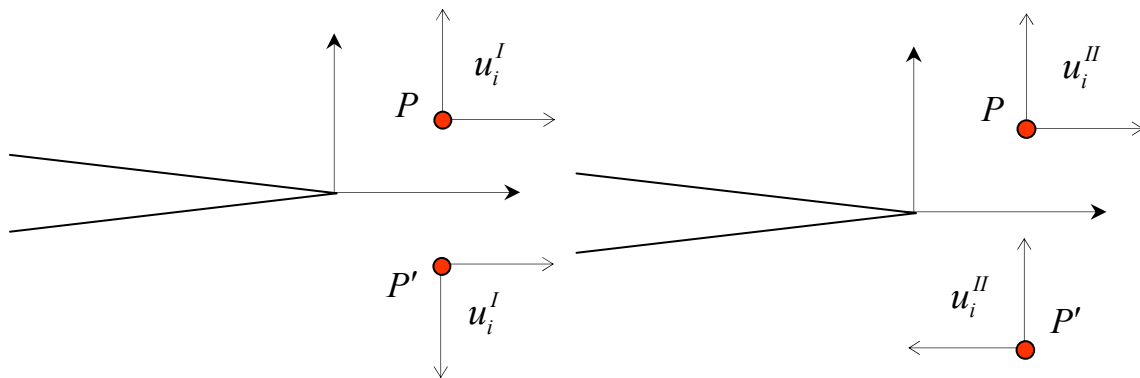
$$K_{II} = \frac{(K_{II})_A + (K_{II})_B + (K_{II})_C}{3}.$$

Essas técnicas apresentam-se bastante robustas para o cálculo do FIT. Outra alternativa robusta fundamenta-se na integral independente de caminho, a integral  $J$ .

### Técnica da Integral $J$

Aliabadi (2002), mostrou que a partir de um simples procedimento proposto inicialmente por Ishikawa et al. (1980), a integral (6.43) pode ser expressa, independentemente, em função dos modos bidimensionais de abertura da fratura.

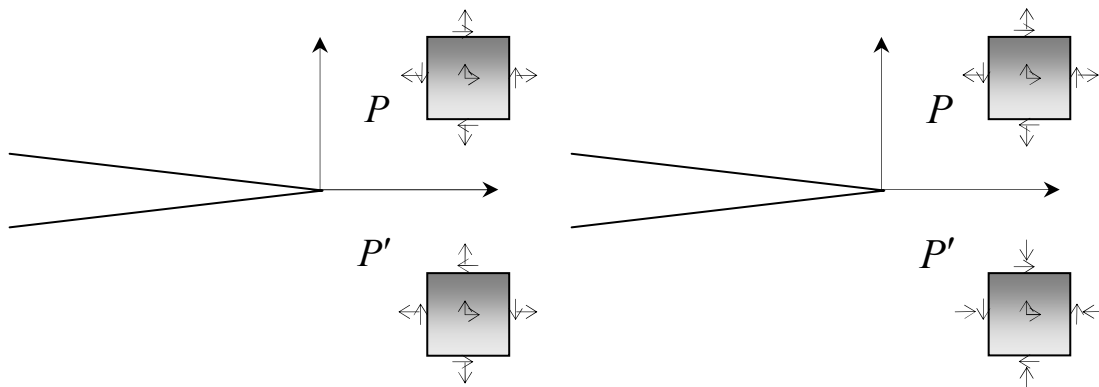
Essa decomposição é obtida considerando-se as componentes simétricas e anti-simétricas dos campos de deslocamento e tensão. A Figura 6.12, ilustra essas componentes para o campo de deslocamentos situados nos pontos  $P$  e  $P'$  em quadrantes simétricos em relação ao eixo da fratura.



**Figura 6.12: Componentes simétricas e anti-simétricas dos campos de deslocamentos.**



O mesmo se apresenta para os campos de tensões, como na Figura 6.13



**Figura 6.13: Componentes simétricas e anti-simétricas dos campos de tensões.**

Os deslocamentos e as tensões nesses pontos podem ser expressos em termos dessas componentes, como apresenta-se a seguir.

Para as componentes simétricas:

Dos deslocamentos,

$$\begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix}. \quad (6.53)$$

Das tensões,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}' \\ \sigma_{22}' \\ \sigma_{12}' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix}. \quad (6.54)$$

Para as componentes anti-simétricas:

Dos deslocamentos,

$$\begin{Bmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix}. \quad (6.55)$$

Das tensões,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}'' \\ \sigma_{22}'' \\ \sigma_{12}'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} + \sigma'_{12} \end{Bmatrix}. \quad (6.56)$$

Aplicando essas relações na integral (6.43) decompõem-se a integral  $J$  como:

$$J^m = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \varepsilon_{ij}^m n_i - \sigma_{ij}^m u_{j,1}^m n_i \right) d\Gamma. \quad (6.57)$$

Com  $m = I, II$  a depender do modo analisado.

Da relação entre o FIT e a integral  $J$  expresso na equação (6.46), obtém-se:

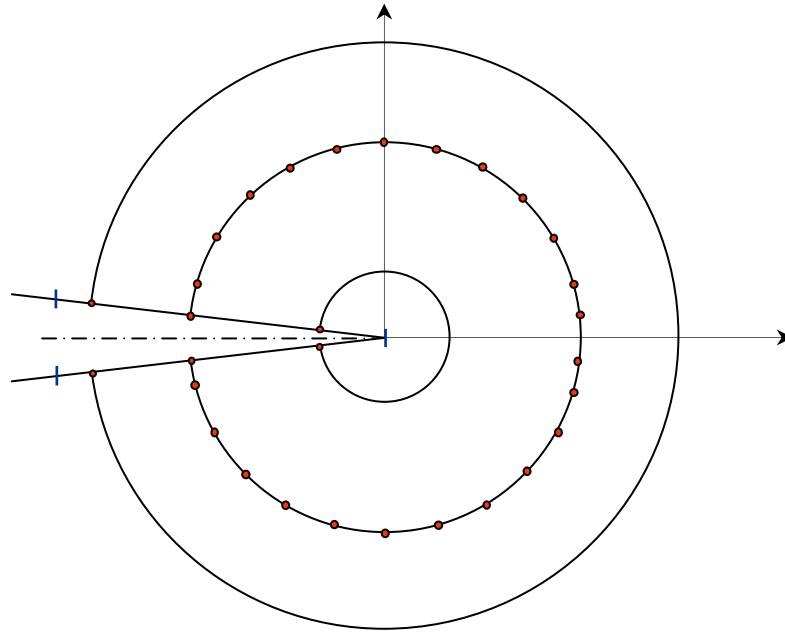
$$J^I = \frac{K_I^2}{E'} \text{ e } J^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'}. \quad (6.58)$$

O procedimento de implementação da integral  $J$  é simples e pode ser obtido escolhendo-se um contorno circular centrado na extremidade da fratura de modo que os pontos deverão ser posicionados no domínio formando um contorno circular. Essa curva deve se iniciar em uma das faces da fratura e terminar na face oposta.

Para os nós que formam o caminho de integração sobre a fratura utilizam-se nós duplos para que as integrais possam ser regulares e estejam fora do contorno.

No primeiro e último elemento do caminho utilizam-se elementos semi-contínuos.

A Figura 6.14 ilustra alguns dos possíveis trajetos ao se discretizar o problema.



**Figura 6.14: Trajetos da integração para o cálculo da integral  $J$ .**

A integração ao longo do contorno curvo é efetuada por meio da quadratura numérica de Gauss-Legendre. Portanto, integral  $J$  é avaliada da seguinte forma:

$$J^m = \sum_{k=1}^{npg} \left[ \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m(\xi_k) \varepsilon_{ij}^m(\xi_k) n_i(\xi_k) - \sigma_{ij}^m(\xi_k) u_{j,1}^m(\xi_k) n_i(\xi_k) \right] J(\xi_k) \omega_k \quad (6.59)$$

Uma sugestão para a extração dos valores dos fatores de intensidade de tensão é se realizar a média aritmética entre os fatores obtidos por três linhas de raios diferentes adotando-se, por exemplo, os valores sugeridos por Maciel (2003).

A seguir apresentam-se as aplicações dessas estratégias em três exemplos.

## 6.4. Exemplos

A primeira análise consiste em avaliar os campos de deslocamento próximos a fratura. Posteriormente coletam-se os dados necessários para se realizar os cálculos do FIT.

Comparam-se os campos de deslocamentos obtidos com os gerados pelo pacote de elementos finitos Ansys. Na modelagem aplica-se um procedimento convencional de simulação onde são especificados os tipos de elementos e a malha utilizada. A comparação dos resultados dos FIT é obtida base nas soluções analíticas, extraídas de López e Aliabadi (1996).

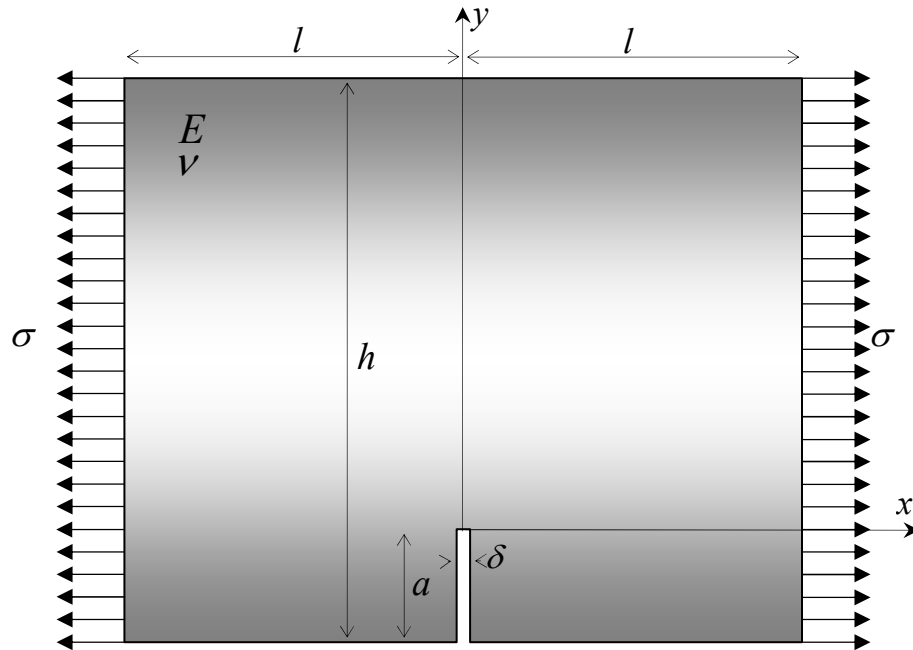
Adota-se a metodologia apresentada no capítulo anterior para identificar os modelos analisados, na qual o é referenciado por meio das iniciais do problema seguidos dos dados referentes à malha juntamente com o grau da aproximação dos elementos. No final da identificação do modelo, se indica o tipo de formulação empregada.

Nos dois primeiros exemplos determinam-se os valores do FIT para os modos de abertura I e II, respectivamente. Em seguida apresentam-se os resultados do exemplo que considera o modo misto. Por fim, avaliam-se os FIT para um problema com fratura curva.

A seguir apresentam-se os exemplos.

### 6.4.1. Exemplo 1: Chapa Tracionada com Fratura na Borda (CTFB)

Neste exemplo considera-se uma Chapa de espessura unitária com uma fratura na borda e submetida tração perpendicular a face da fratura, como ilustra a Figura 6.15.



**Figura 6.15: Fator de intensidade de tensão do modo I.**

Sendo:

$l$  e  $h$  os parâmetros da geometria da estrutura e  $a$  e  $\delta$  as características geométricas da fratura,

$E$  e  $\nu$ , as constantes físicas do material. Módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson, respectivamente, e

$\sigma$ , a tensão de tração aplicada no contorno do problema.

No exemplo em questão determina-se o fator de intensidade de tensão para o modo de abertura aplicando-se as técnicas apresentadas anteriormente. Comparam-se esses resultados aos valores analíticos retirados de López e Aliabadi (1996).

Para esse caso as equações analíticas são:

Para  $\frac{l}{h} = 0,5$ .

$$\frac{K_I}{K_0} = 1,09 + 2,18\alpha - 17,27\alpha^2 + 157,61\alpha^3 - 575,54\alpha^4 + 1120,08\alpha^5 - 1092,58\alpha^6 + 441,24\alpha^7. (6.60)$$

Sendo:

$\alpha = \frac{a}{h}$ , o comprimento característico da fratura, e  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ .

#### 6.4.1.1 Dados do Problema

Análise: Estado plano de tensão.

Propriedades do material:  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,30$ .

Características geométricas:  $h = 1,0 \text{ m}$  com  $l = \frac{h}{2} = 0,5 \text{ m}$  e  $a = \frac{h}{4} = 0,25 \text{ m}$ .

Carregamento:  $\sigma = 100 \text{ MPa}$ .

Distância entre as faces da fratura:  $\delta = 0,01 \text{ m}$ .

#### 6.4.1.2 Modelos

Para analisar os resultados gerados com o MEC, utilizam-se as malhas de 90, 180 e 270 elementos quadráticos aplicando-se a formulação clássica em deslocamento.

Estuda-se a convergência dos resultados utilizando as malhas com 1134, 4522 e 10248 elementos finitos triangulares. Esses elementos possuem seis nós e dois graus de liberdade por nó. As malhas do Ansys seguem as divisões do contorno em 90, 180 e 270 elementos quadráticos.

Para a avaliação do fator de intensidade de tensão com o MEC, adotam-se os modelos:

$$CTFB - MxGy - D.$$

Com  $x$  igual a 90, 180 e 270 elementos de contorno e  $y$  igual às aproximações de 1º, 2º e 3º grau.

Verifica-se também, a influência do comprimento característico da fratura, no cálculo do FIT, para isso, adota-se o modelo  $CTFB - M270G2 - D$  e varia-se o parâmetro  $\alpha = a/h$ , que assume os seguintes valores:

$$\alpha = 0,10, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40, 0,45, 0,50.$$

Comparam-se os resultados desses modelos aos valores calculados com a equação analítica (6.60).

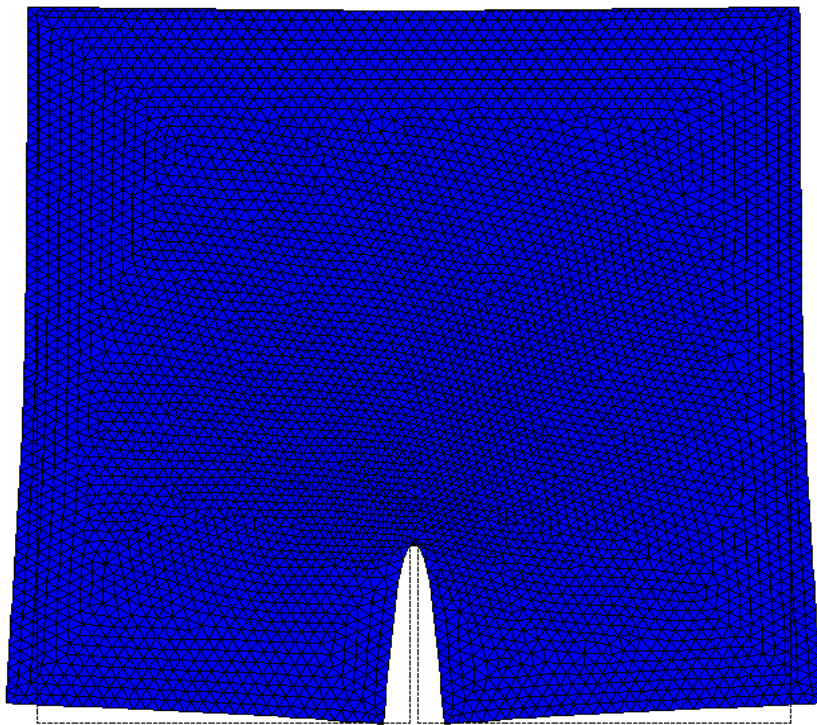
Na obtenção do FIT com a técnica da integral J, adota-se a discretização dos contornos circulares, com 8 elementos lineares e quadráticos.

A seguir apresentam-se os resultados obtidos após as simulações desses modelos.

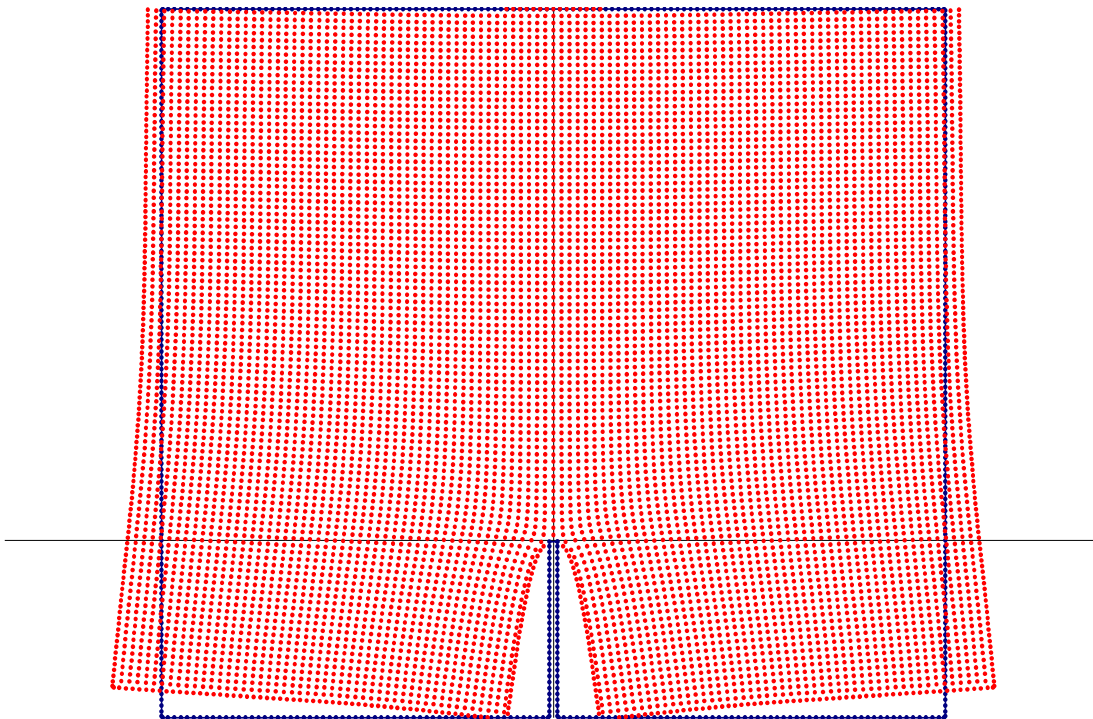
#### **6.4.1.3 Análise dos Resultados**

Os resultados dos modelos do Ansys e do MEC apresentaram campos convergentes para o deslocamento dos modelos com 10248 elementos finitos e 270 elementos de contorno com 9801 nós de domínio. Para os campos de tensão o Ansys não convergiu, enquanto que o MEC apresentou a convergência para os valores tanto das tensões no contorno quanto das tensões nos nós do domínio.

As malhas utilizadas nas discretizações e as configurações indeformada e deformada são apresentadas nas Figura 6.16 com o MEF e Figura 6.17 com o MEC.



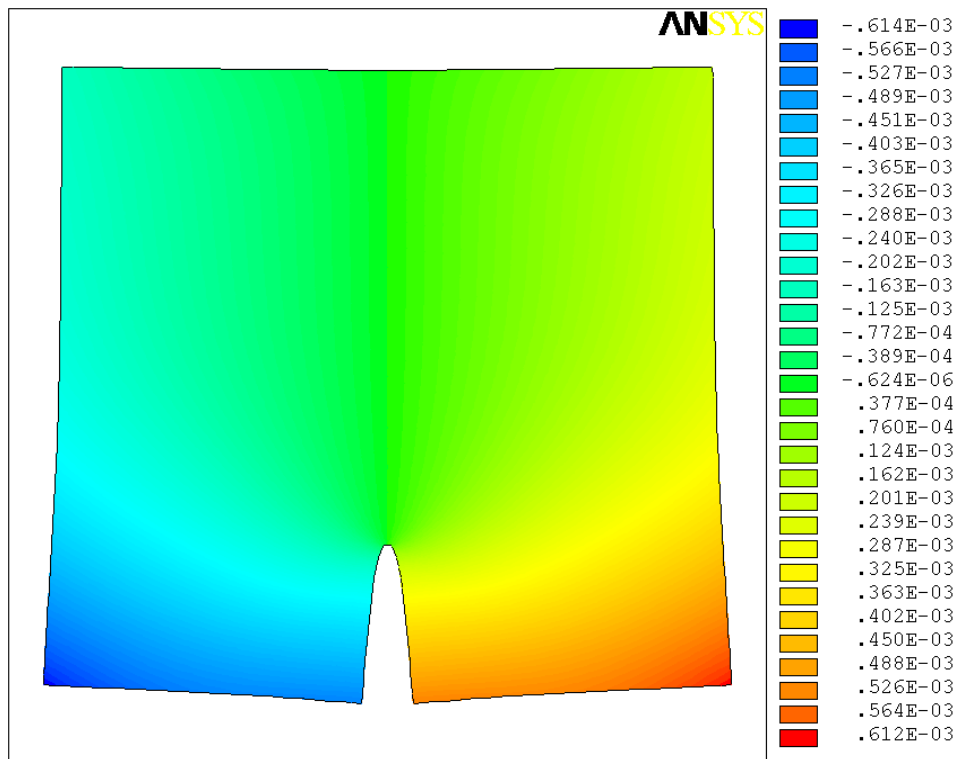
**Figura 6.16: Malha com elementos finitos.**



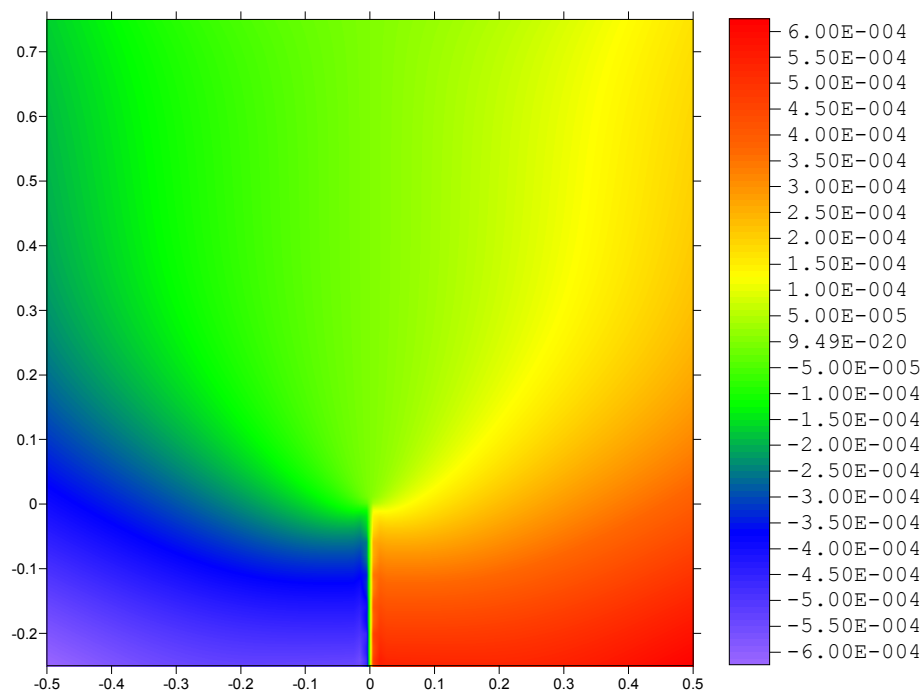
**Figura 6.17: Malha com elementos de contorno e nós internos.**



A visualização dos resultados do MEC é obtida efetuando-se o pós-processamento no programa Surfer. Nas figuras, a seguir, ilustram-se os campos de deslocamentos na direção x.

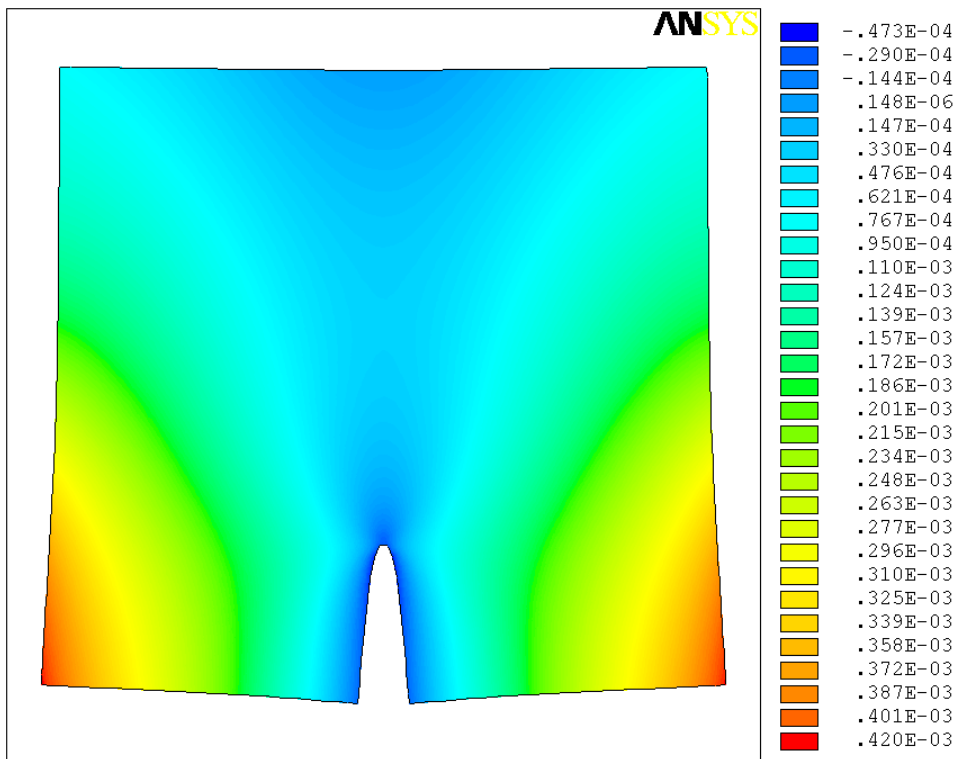


**Figura 6.18: Campos de deslocamentos na direção x com o MEF**

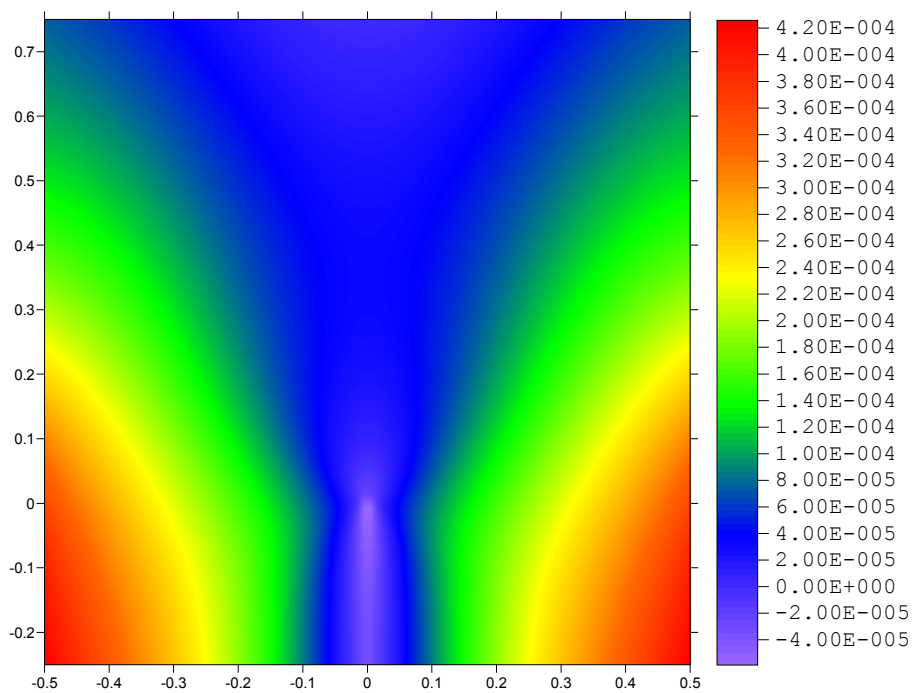


**Figura 6.19: Campos de deslocamentos na direção x com o MEC.**

Da mesma forma apresentam-se os resultados dos deslocamentos para a direção y. Nota-se a semelhança desses resultados, por meio dos valores reproduzidos nas escalas.



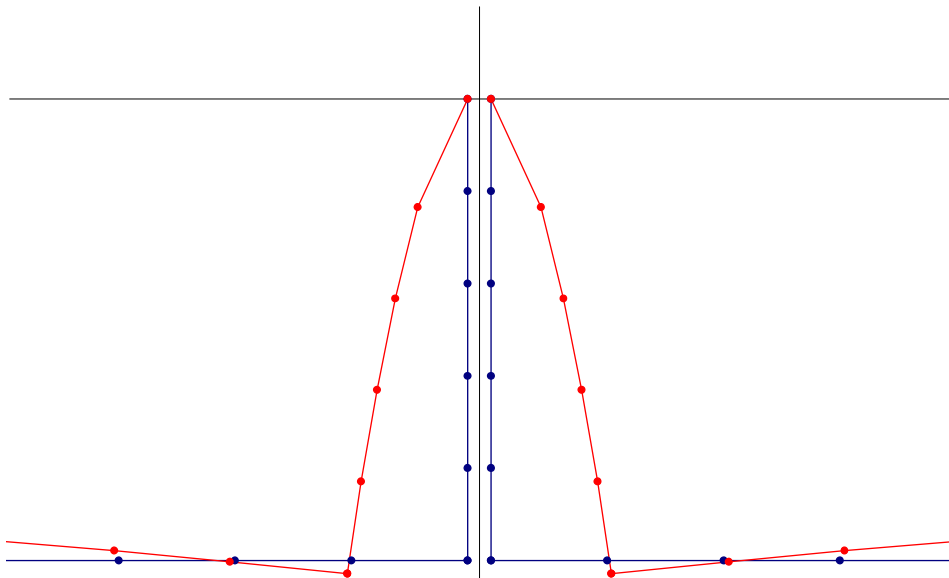
**Figura 6.20: Campos de deslocamentos na direção y com o MEF.**



**Figura 6.21: Campos de deslocamentos na direção y com o MEC.**

As próximas figuras ilustram as configurações das três técnicas de obtenção do FIT para o problema em questão. Todos os valores do FIT estão em  $\frac{KN}{m^2} \sqrt{m}$ .

### Técnica da correlação dos deslocamentos



**Figura 6.22: Disposição dos nós para o cálculo do FIT.**

Na tabela a seguir apresentam-se os valores numéricos do FIT obtidos com a técnica da correlação dos deslocamentos.

**Tabela 6.1: Fator de intensidade de tensão para o modo I.**

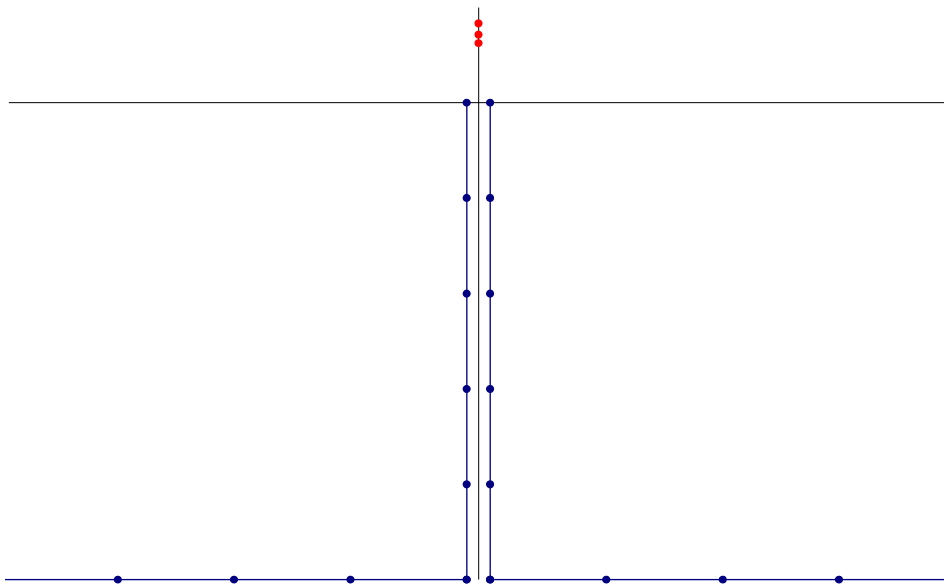
Modelo		Técnica da Correlação dos Deslocamentos		Analítico	
		Dual		K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>
Malha	Grau	K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>		
90	1°	152034,25552	0,00139	144010,33837	0,00000
	2°	151205,36742	0,00098		
	3°	149433,34587	0,00074		
180	1°	149978,87595	0,00112		
	2°	148547,69854	0,00089		
	3°	147985,78421	0,00074		
270	1°	150142,34758	0,00123		
	2°	148417,71423	0,00086		
	3°	145472,47961	0,00072		

Verifica-se a influência de erros numéricos para o modo II.

Esses resultados são de grande importância quando se assume que a abertura da fratura é nula. As considerações para esse tipo de situação será tema de investigações futuras.

Com base nos resultados da Tabela 6.1 pode-se afirmar que a técnica da correlação dos deslocamentos prevê o valor do FIT com boa precisão.

### **Técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura**



**Figura 6.23: Colocação dos nós a  $a/8$  ,  $a/7$  e  $a/6$  da extremidade da fratura.**

A técnica com base no estado de tensão próximo a extremidade da fratura é uma alternativa robusta para a predição dos valores do FIT. Além de ser uma alternativa que produz bons resultados é de fácil implementação uma vez que o FIT pode ser obtido com a avaliação dos campos de tensões próximos a extremidade da fratura definidos apenas em função do comprimento da fratura.

**Tabela 6.2: Fator de intensidade de tensão para o modo I.**

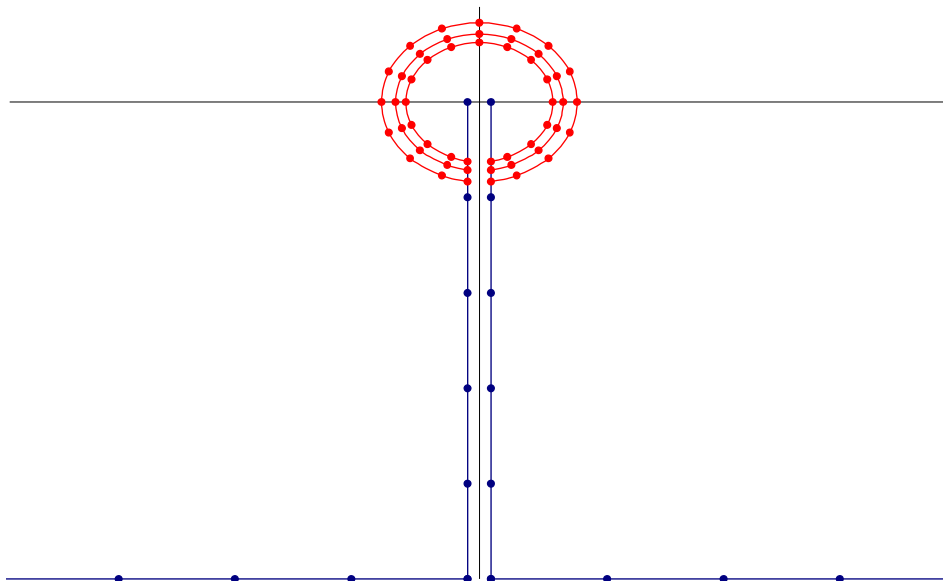
Modelo		Técnica com Base no Estado de Tensão		Analítico	
Malha	Grau	Dual		K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>
		K <sub>I</sub>	K <sub>II</sub>		
90	1°	142436,02143	0,00065	144010,33837	0,00000
	2°	141040,13999	0,00069		
	3°	144357,10311	0,00051		
180	1°	143047,39945	0,00043		
	2°	144441,56842	0,00034		
	3°	144568,60040	0,00026		
270	1°	146753,80580	0,00021		
	2°	145554,65914	0,00048		
	3°	143240,11943	0,00030		

A adaptação dessa técnica foi inicialmente proposta por Maciel (2003) com base no trabalho de París e Cañas (1997). Diversos trabalhos confirmam a relevância dessas observações, como por exemplo, Leonel (2006) e Lovón (2006).

Na Tabela 6.2 é possível observar que os resultados apresentam boa qualidade. Nota-se uma melhora nos resultados quando se aumenta a discretização.

### Técnica da integral $J$

Na Figura 6.24, representa-se a distribuição dos nós sobre o circuito em torno da extremidade da fratura.



**Figura 6.24: Contornos circulares com raios iguais a  $a/8$ ,  $a/7$  e  $a/6$ .**

Na tabela a seguir apresentam-se os resultados do exemplo em questão.

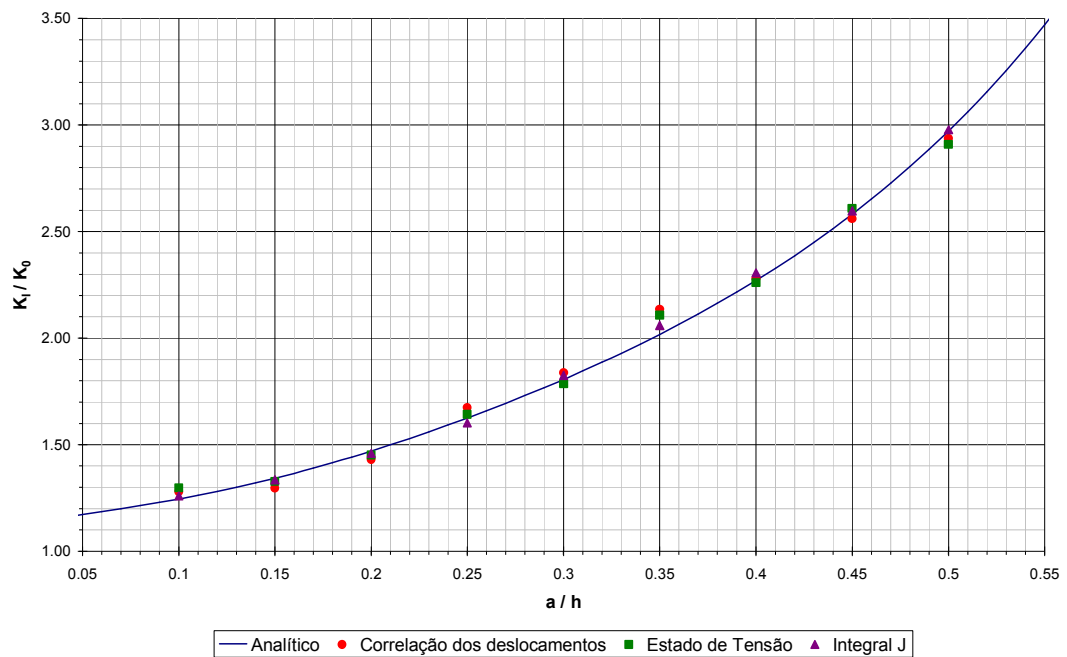
**Tabela 6.3: Resultados do FIT com a integral J.**

Modelo		Técnica da integral J				Analítico	
Malha	Grau	Dual					
		1º grau		2º grau			
		KI	KII	KI	KII	KI	KII
90	1º	140606,10207	0,00159	141937,36525	0,00091	144010,33837	0,00000
	2º	145501,44572	0,00065	144867,63569	0,00038		
	3º	144160,99056	0,00034	144113,78373	0,00020		
180	1º	142103,67297	0,00014	142745,63298	0,00008		
	2º	144133,76796	0,00008	144062,30432	0,00005		
	3º	143798,82138	0,00007	143900,65702	0,00004		
270	1º	142875,93518	0,00019	143212,99929	0,00011		
	2º	144420,45264	0,00008	144150,76238	0,00004		
	3º	143721,33432	0,00005	143841,69479	0,00003		

Apesar do inconveniente produzido com os pontos fontes próximo ao contorno, os resultados são satisfatórios.

A título de esclarecimento, adota-se a distribuição clássica da formulação dual, onde os nós de uma das faces da fratura são avaliados com as equações em deslocamento, enquanto que nos nós da face oposta, emprega-se a formulação em força de superfície. Nos demais nós do contorno, aplica-se a formulação em deslocamento.

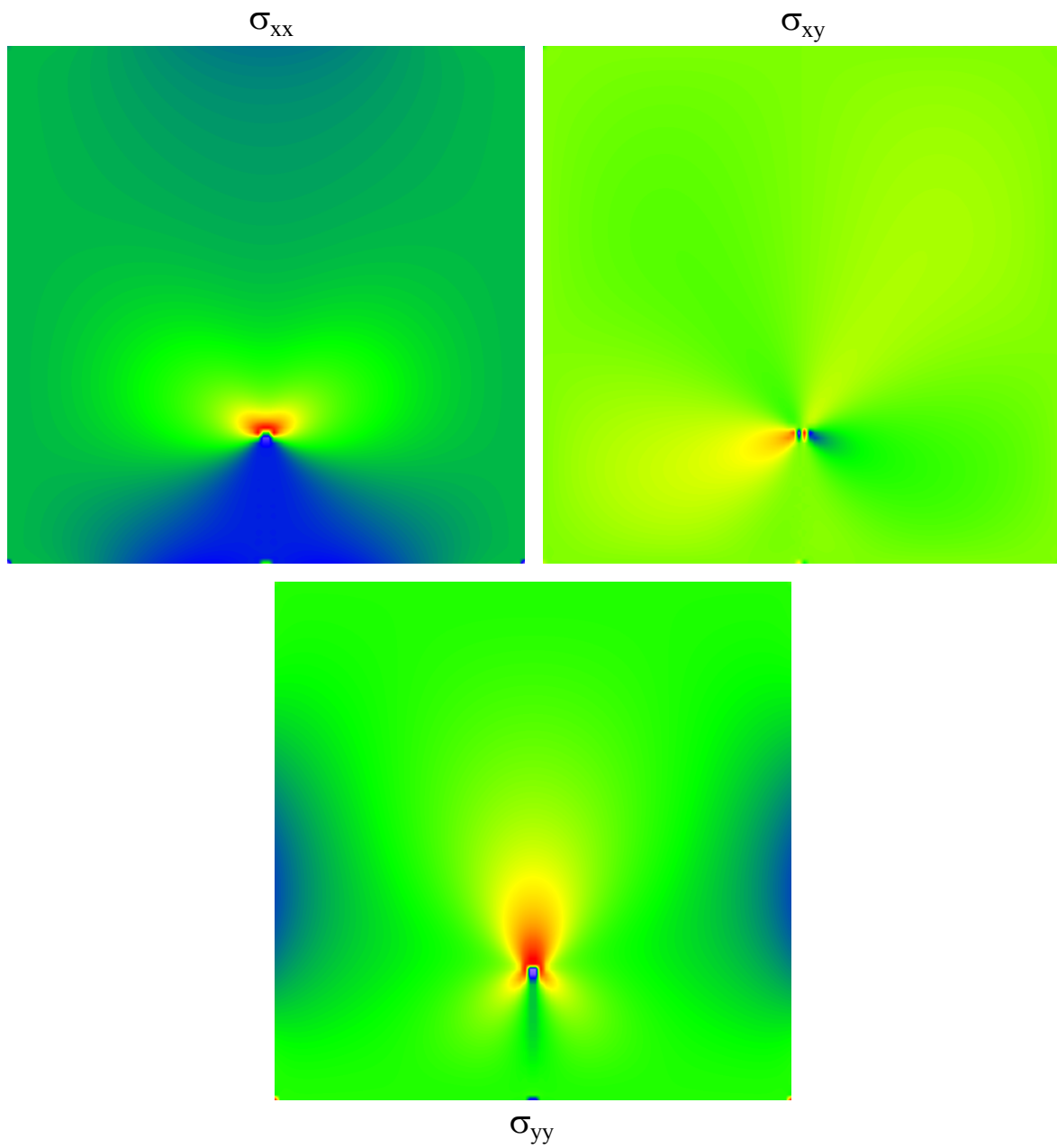
Estuda-se também o efeito do comprimento da fratura na avaliação do FIT. O modelo adotado é o *PTFB-M270G2-D*. Utilizam-se as três técnicas de extração do FIT para apresentar os resultados quando se varia o comprimento da fratura. Apresentam-se esses resultados no gráfico da Figura 6.25.



**Figura 6.25: Variação do FIT, com o aumento do comprimento da fratura.**

Em razão desses resultados, reitera-se a afirmação de que a abordagem com as três técnicas fornecem bons resultados.

Para finalizar as análises do exemplo apresentam-se os campos de tensão produzidos na extremidade da fratura do modelo *CTFB-M270G2-D*.



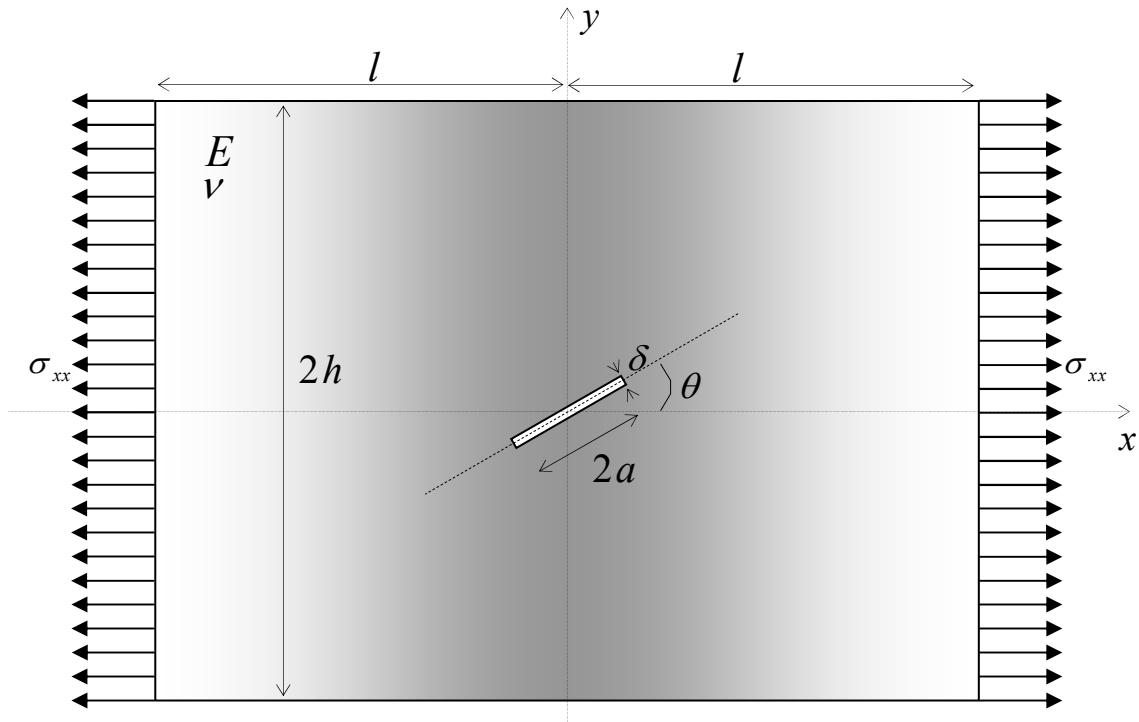
**Figura 6.26: Campos de tensão na extremidade da fratura.**

As técnicas de avaliação do FIT abordadas neste exemplo apresentam bons resultados mesmos com as dificuldades inerentes a formulação do MEC.



### 6.4.2. Exemplo 2: Chapa com Fratura Inclinada no Centro (CFIC)

Neste exemplo considera-se uma Chapa de espessura unitária com uma fratura inclinada no centro. O objetivo do exemplo é calcular o FIT para o modo misto de fratura. Na Figura 6.27 apresentam-se os parâmetros físicos e geométricos do problema.



**Figura 6.27: Fratura inclinada no centro da Chapa**

De acordo com López e Aliabadi (1996), a solução analítica do problema é expressa como:

Para  $\frac{l}{h} = 2$  e  $\theta = 45^\circ$ .

$$\frac{K_I}{K_0} = 0,5 + 0,004\alpha + 0,394\alpha^2 + 0,333\alpha^3 - 0,932\alpha^4 + 1,275\alpha^5 - 0,954\alpha^6 + 0,397\alpha^7. \quad (6.61)$$

$$\frac{K_{II}}{K_0} = 0,5 - 0,0008\alpha + 0,189\alpha^2 - 0,028\alpha^3 + 0,008\alpha^4 + 0,064\alpha^5. \quad (6.62)$$

Sendo:

$\alpha = \frac{a}{h}$ , o comprimento característico da fratura, e  $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$ .

#### **6.4.2.1 Dados do Problema**

Análise: Estado plano de tensão.

Propriedades do material:  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,30$ .

Características geométricas:  $h = 0,5 \text{ m}$  com  $l = 1,0 \text{ m}$ ,  $a = 0,25 \text{ m}$  e  $\theta = 45^\circ$ .

Carregamento:  $\sigma = 100 \text{ MPa}$ .

Distância entre as faces da fratura:  $\delta = 0,01 \text{ m}$ .

#### **6.4.2.2 Modelos**

Nesse exemplo considera-se o modelo:

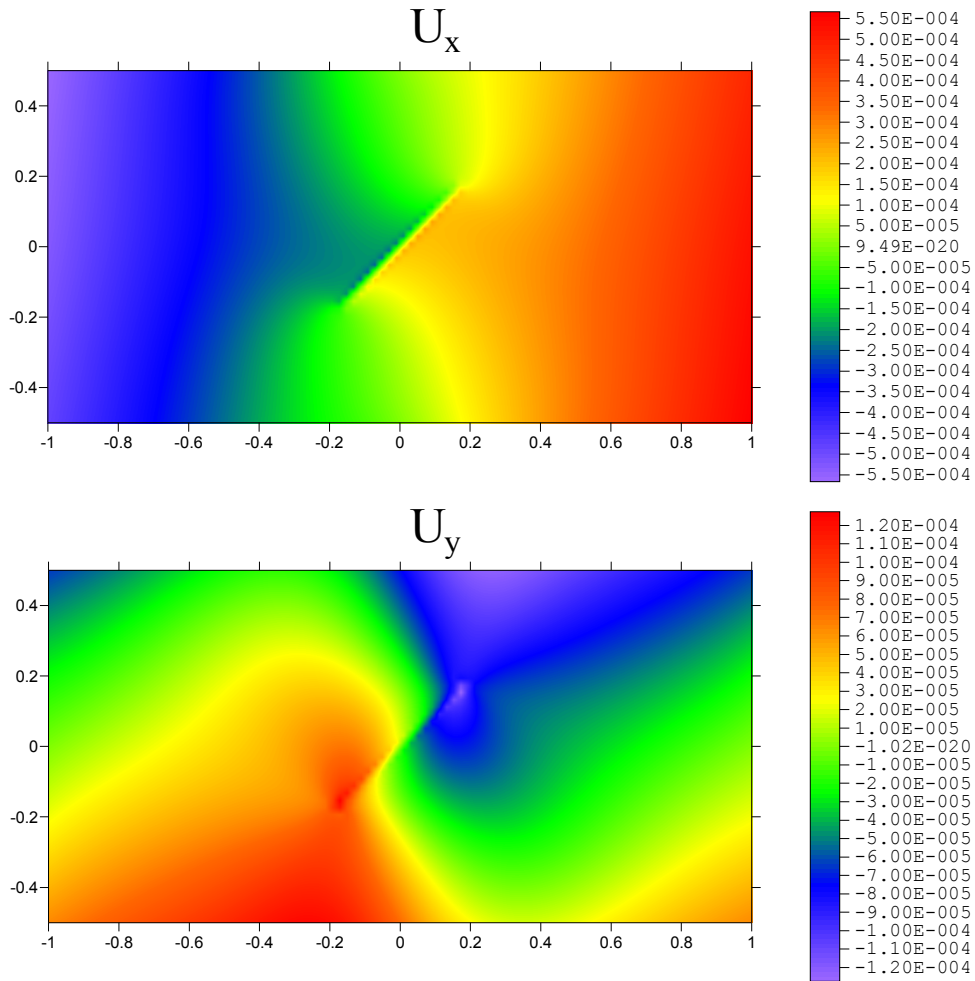
*CFIC – M500G2 – D.*

Na discretização das faces da fratura utilizam-se 100 elementos de contorno, com aproximação quadrática, segundo recomendação apresentadas em Maciel (2006), que avalia a convergência no valor do FIT, com o aumento da discretização.

Os valores do FIT são obtidos com as três técnicas apresentadas anteriormente. Para a aplicação da técnica com a integral  $J$  utiliza-se 8 elementos de contorno lineares para discretizar o caminho de integração.

#### **6.4.2.3 Análise dos Resultados**

Apresentam-se, primeiramente, os resultados dos campos de deslocamentos que concordaram exatamente com os obtidos com o Ansys



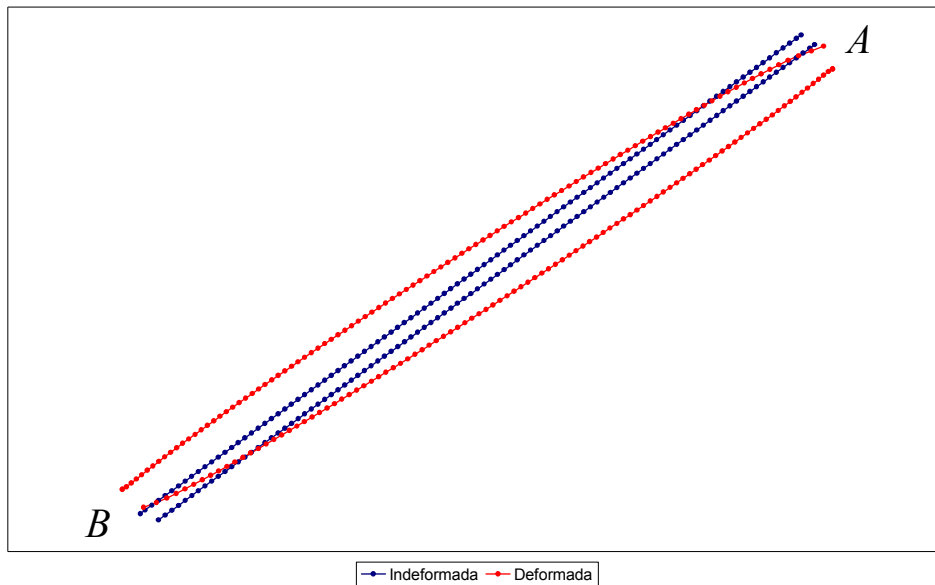
**Figura 6.28: Campo de deslocamento na presença da fratura inclinada**

Devido a simetria do problema, os valores do fator de intensidade de tensão nas duas extremidades devem apresentar o mesmo resultado. Para confirmar essa sentença analisam-se esses valores nas extremidades da fratura por meio das três técnicas estudadas.

Todos os valores do FIT são apresentados em  $\frac{KN}{m^2} \sqrt{m}$ .

## Técnica da correlação dos deslocamentos

A primeira técnica utilizada é a técnica da correlação dos deslocamentos. Nessa técnica é necessário se conhecer a configuração deformada da estrutura. Ilustram-se essas configurações na Figura 6.29.



**Figura 6.29: Configurações indeformada e deformada das faces da fratura.**

Na Tabela 6.4 constam os valores do FIT obtidos com a técnica da correlação dos deslocamentos.

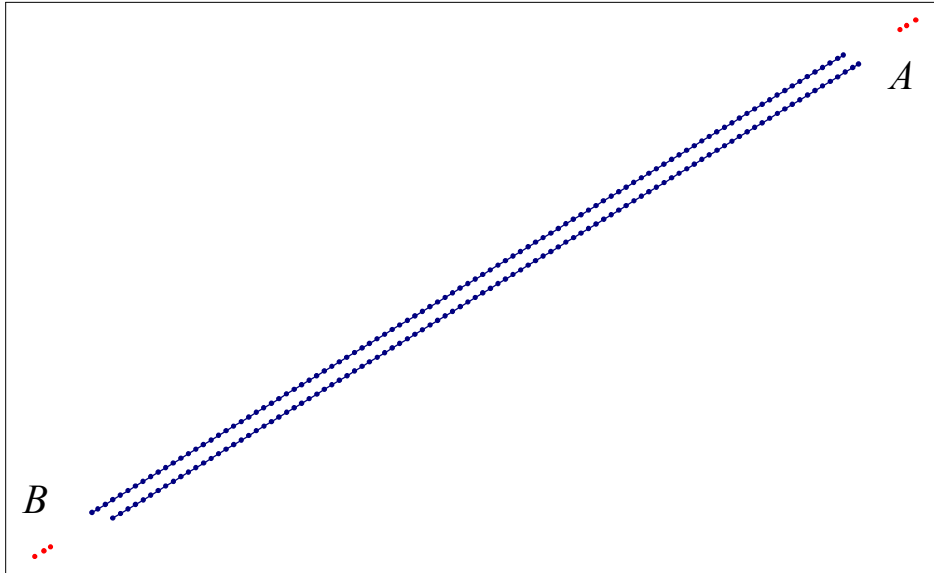
**Tabela 6.4: Valores do FIT para os modos I e II.**

Modelo		Ponta	Formulação Dual		Analítico	
Malha	Grau		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	A	56150,45786	50215,87430	54228,53406	48370,14164
		B	56987,65741	50208,20702		

Verifica-se nessa tabela, que os valores divergiram de 3 a 5% do valor analítico.

### Técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura

Nessa técnica tomam-se os pontos distantes da extremidade da fratura na razão  $a/8$ ,  $a/7$  e  $a/6$ . A Figura 6.30: ilustra a configuração dos pontos para esse problema.



**Figura 6.30: Nós de domínio para o cálculo do FIT com o estado de tensão.**

Na Tabela 6.5 apresentam-se os valores do FIT nas extremidades  $A$  e  $B$ .

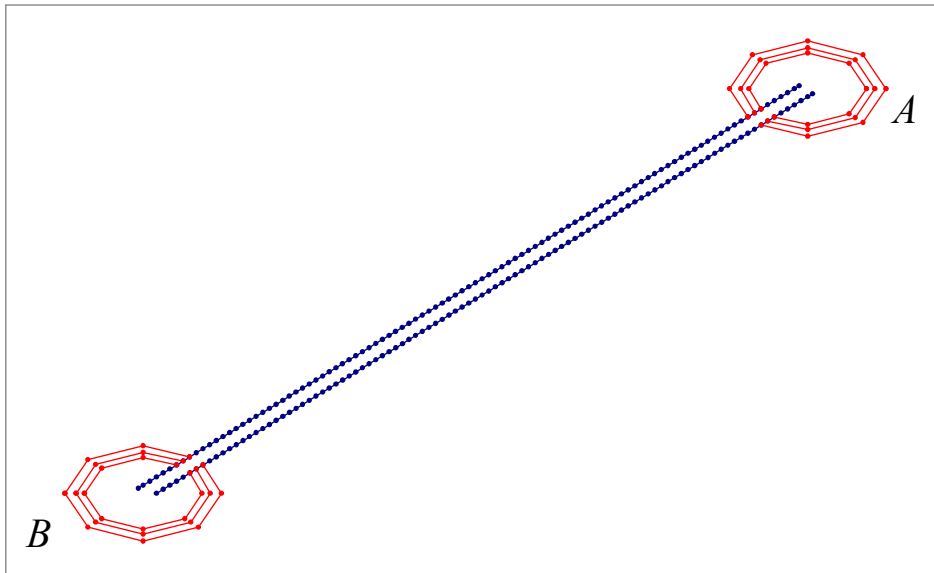
**Tabela 6.5: Valores do FIT para os modos I e II.**

Modelo		Ponta	Formulação Dual		Analítico	
Malha	Grau		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	A	50754,46727	44349,53322	54228,53406	48370,14164
		B	50754,46727	44349,53322		

Verifica-se que esses valores apresentam uma precisão um pouco menor do que os calculados com a técnica da correlação dos deslocamentos. Porém, verifica-se que os valores do FIT nas extremidades da fratura são iguais. Os valores calculados diferem da solução analítica de 6 a 7%.

### Técnica da integral $J$

Nessa técnica optou-se em discretizar o contorno do caminho com menos nós. Propõe-se que fossem utilizadas as mesmas distancias adotadas com a técnica do campo de tensão. A Figura 6.31 ilustra a malha utilizada para os cálculos dos FIT com essa estratégia.



**Figura 6.31: Configuração da malha para o cálculo da integral do caminho.**

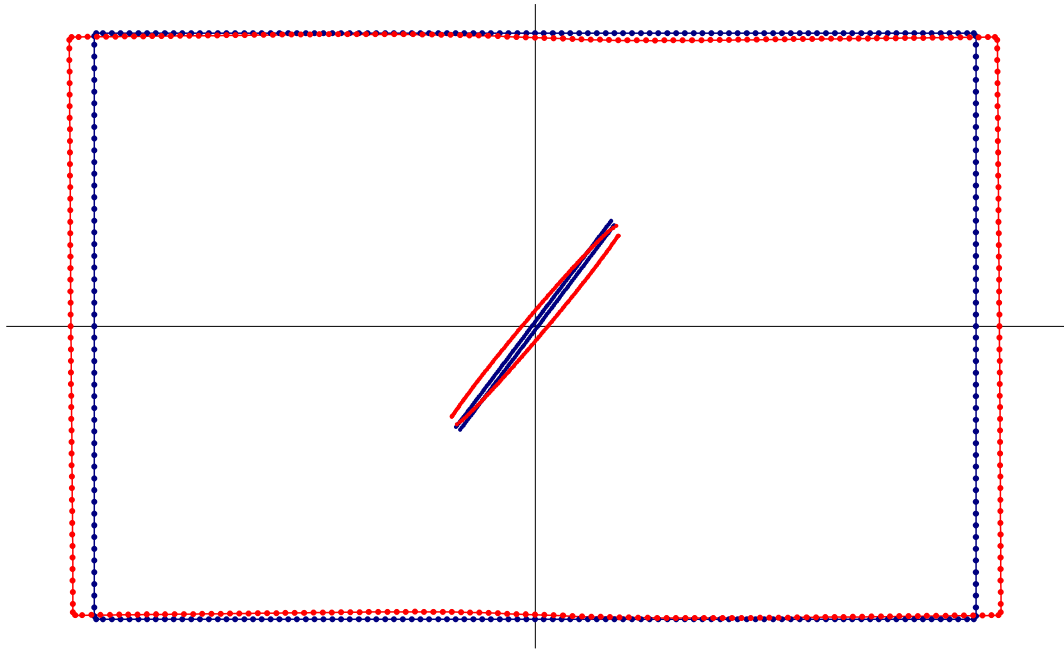
Na Tabela 6.6 apresentam-se os resultados do FIT com a técnica da integral  $J$ .

**Tabela 6.6: Valores do FIT para os modos I e II.**

Modelo		Ponta	Formulação Dual		Analítico	
Malha	Grau		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	A	57875,56843	46698,54693	54228,53406	48370,14164
		B	57875,56843	46698,54693		

Verifica-se que apesar do cálculo produzir erros da ordem de 3 a 6%, essa técnica apresentou resultados iguais para o FIT nas extremidades opostas da fratura.

A deformada total da estrutura é ilustrada na figura a seguir:

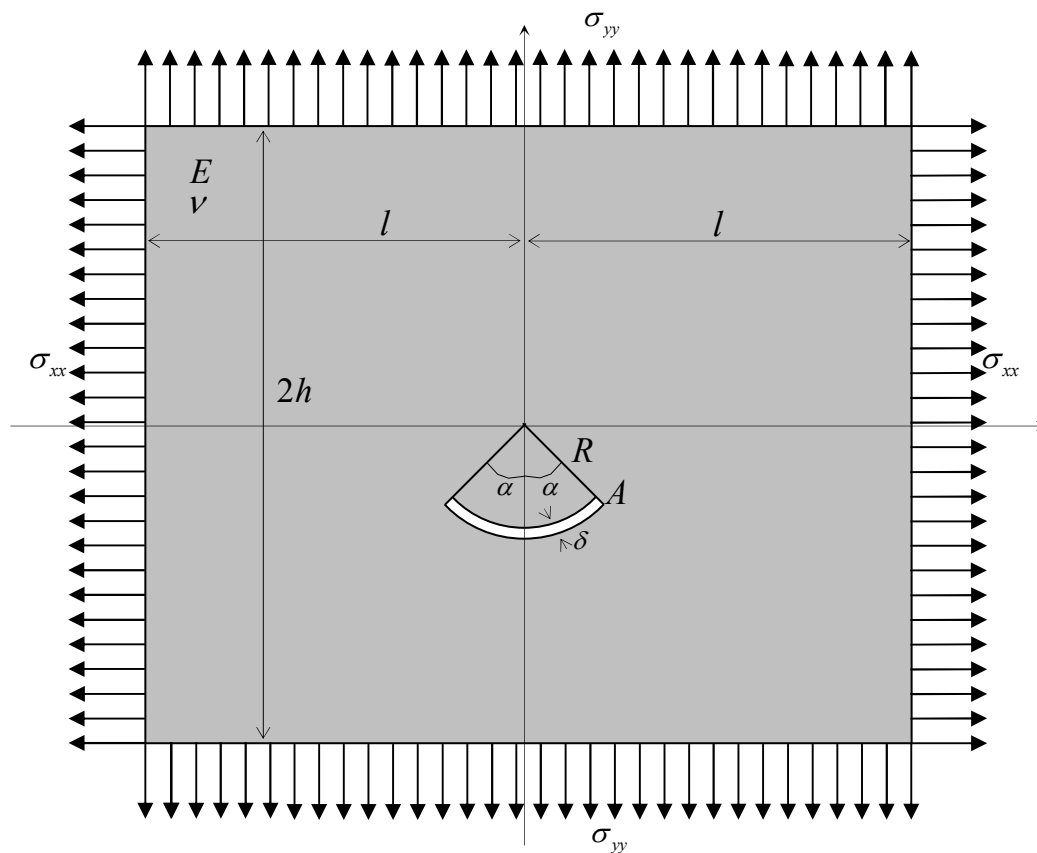


**Figura 6.32: Configurações deformada e indeformada da Chapa.**

De modo geral, comparando-se as três técnicas, reitera-se a afirmação de que esses procedimentos geram bons resultados para a análise dos fatores de intensidade de tensão com o MEC.

No próximo exemplo avalia-se o FIT no problema de uma chapa com carga biaxial e uma fratura curva no seu interior.

### 6.4.3. Exemplo 3: Chapa com Tração Biaxial e Fratura Curva (CTBFC)



#### 6.4.3.1 Dados do Problema

Análise: Estado plano de tensão.

Propriedades do material:  $E = 210,0 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,30$ .

Características geométricas:  $h = 0,5 \text{ m}$ ,  $l = 1,0 \text{ m}$ ,  $R = 0,2 \text{ m}$   $\alpha = 45^\circ$ .

Carregamento:  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 100 \text{ MPa}$ .

Distância entre as faces da fratura:  $\delta = 0,01 \text{ m}$

#### 6.4.3.2 Modelos

Nesse exemplo considera-se o modelo:

*CBTFC – M500G2 – D.*



Cada face da fratura é discretizada com 100 elementos de contorno quadráticos. Emprega-se 8 elementos lineares para discretizar o circuito da integral  $J$ .

### 6.4.3.3 Análise dos Resultados

A seguir apresentam-se os valores do FIT para o problema da fratura curva utilizando cada uma das técnicas implementadas aplicadas apenas na extremidade  $A$ . Nas tabelas a

unidade do FIT é dada em  $\frac{KN}{m^2} \sqrt{m}$ .

#### Técnica da correlação dos deslocamentos

**Tabela 6.7: FIT para dos modos I e II.**

Modelo		Formulação Dual	
Malha	Grau	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	36993.49966	41659.34646

#### Técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura

**Tabela 6.8: FIT ds modos I e II.**

Modelo		Formulação Dual	
Malha	Grau	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	34587.87524	40347.73985

#### Técnica da integral $J$

**Tabela 6.9: FIT dos modos I e II.**

Modelo		Formulação Dual	
Malha	Grau	$K_I$	$K_{II}$
500	2°	35591.69871	40973.43651

Nota-se que os valores do FIT para os modos I e II apresentam em média os valores

$$K_I = 35724,35787 \frac{KN}{m^2} \sqrt{m} \text{ e } K_{II} = 40993,5076 \frac{KN}{m^2} \sqrt{m}.$$

Como obtido nos demais exemplos o campo de deslocamento concorda com os resultados gerados pelo pacote de elementos finitos Ansys. A seguir ilustram-se os valores do deslocamento  $u_x$ ,  $u_y$  e do vetor resultante obtidos com o Ansys e com o MEC.

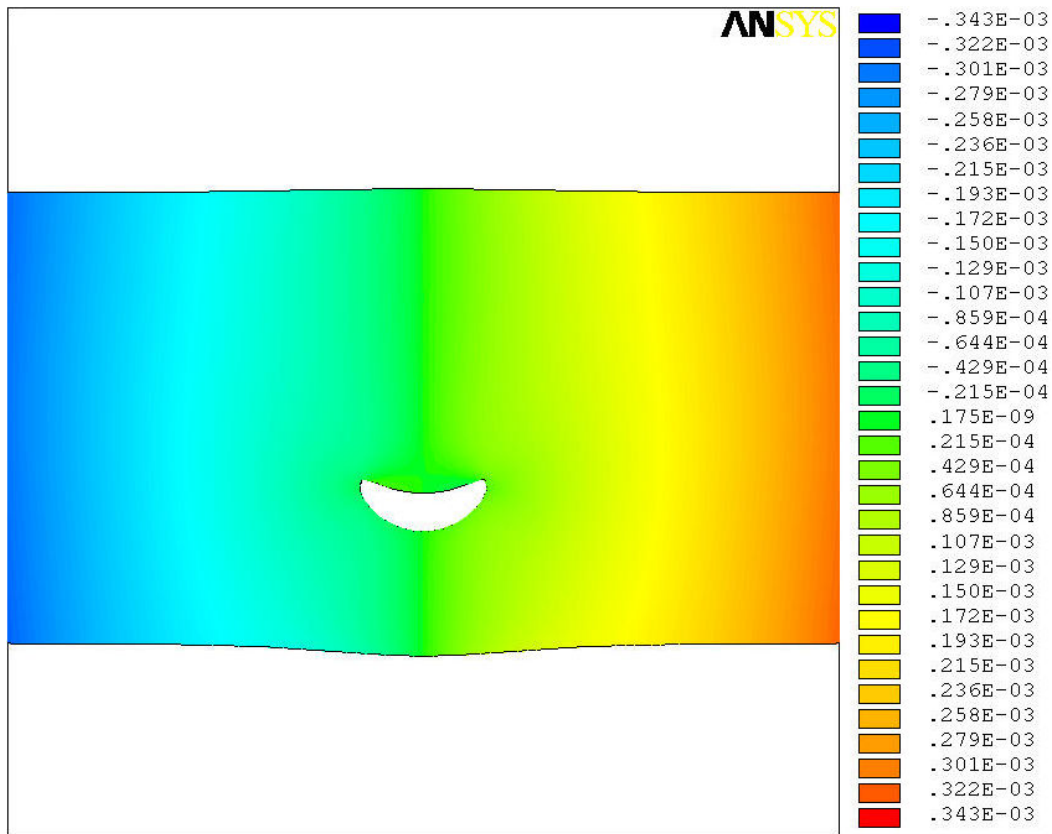


Figura 6.33: Deslocamento  $u_x$  com o MEF.

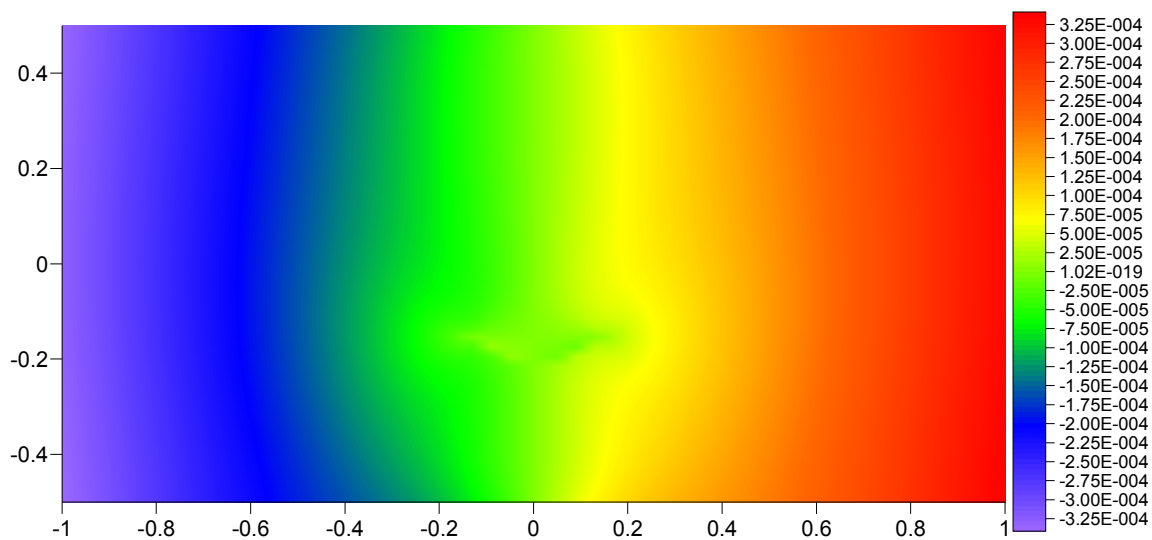


Figura 6.34: Deslocamento  $u_x$  com o MEC.

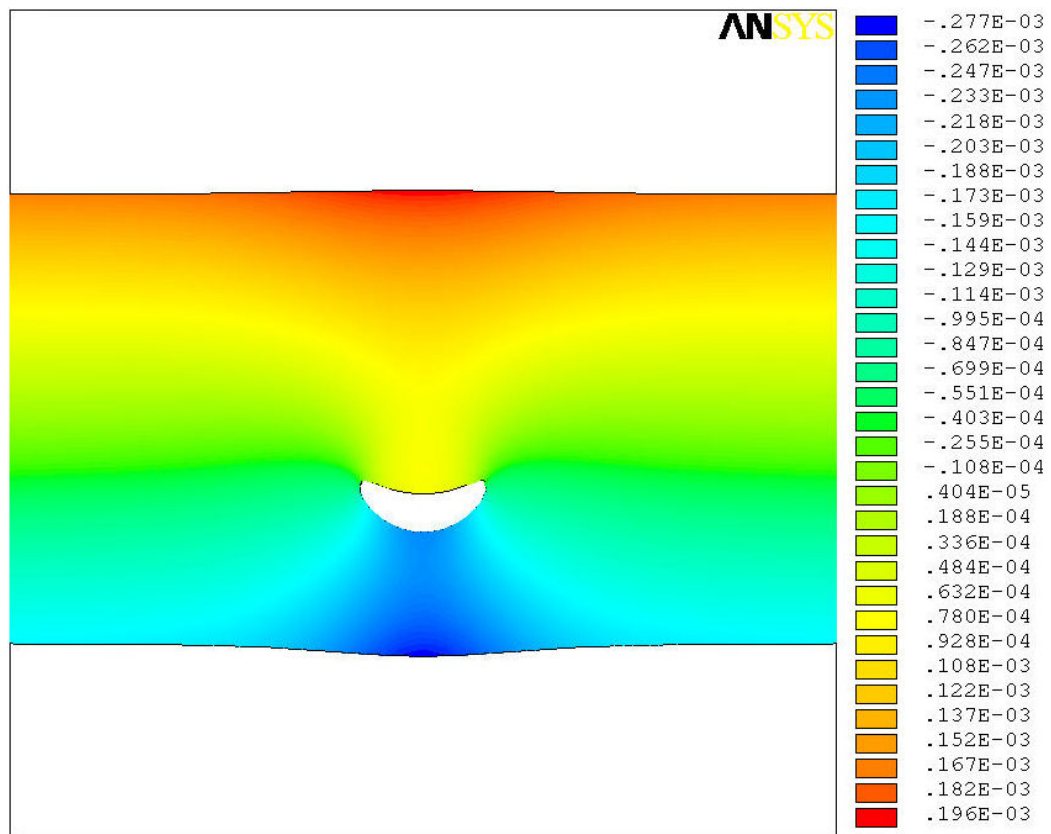


Figura 6.35: Deslocamento  $u_y$  com o MEF.

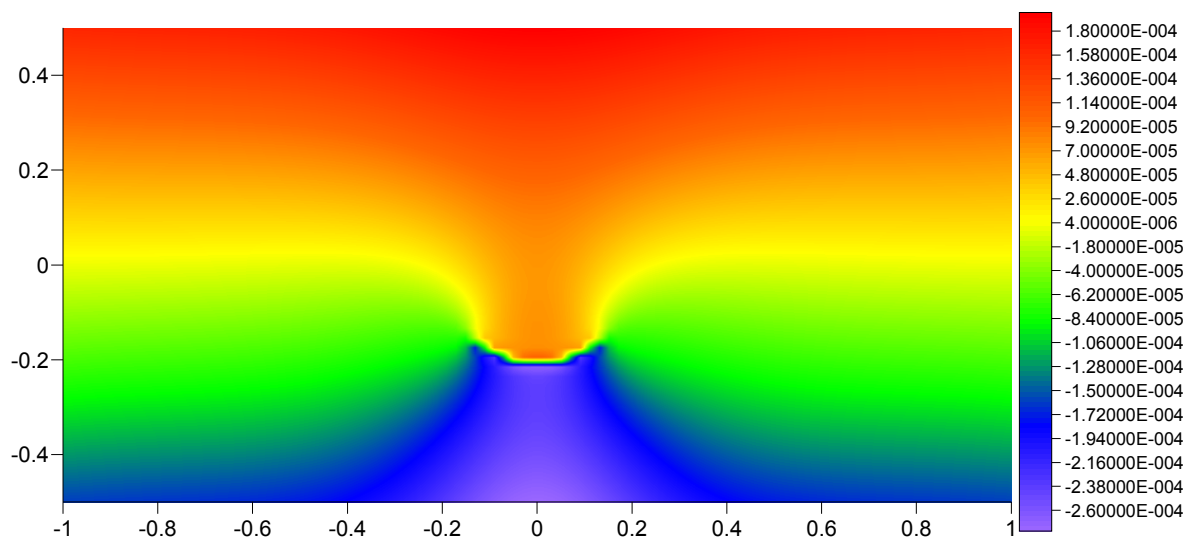
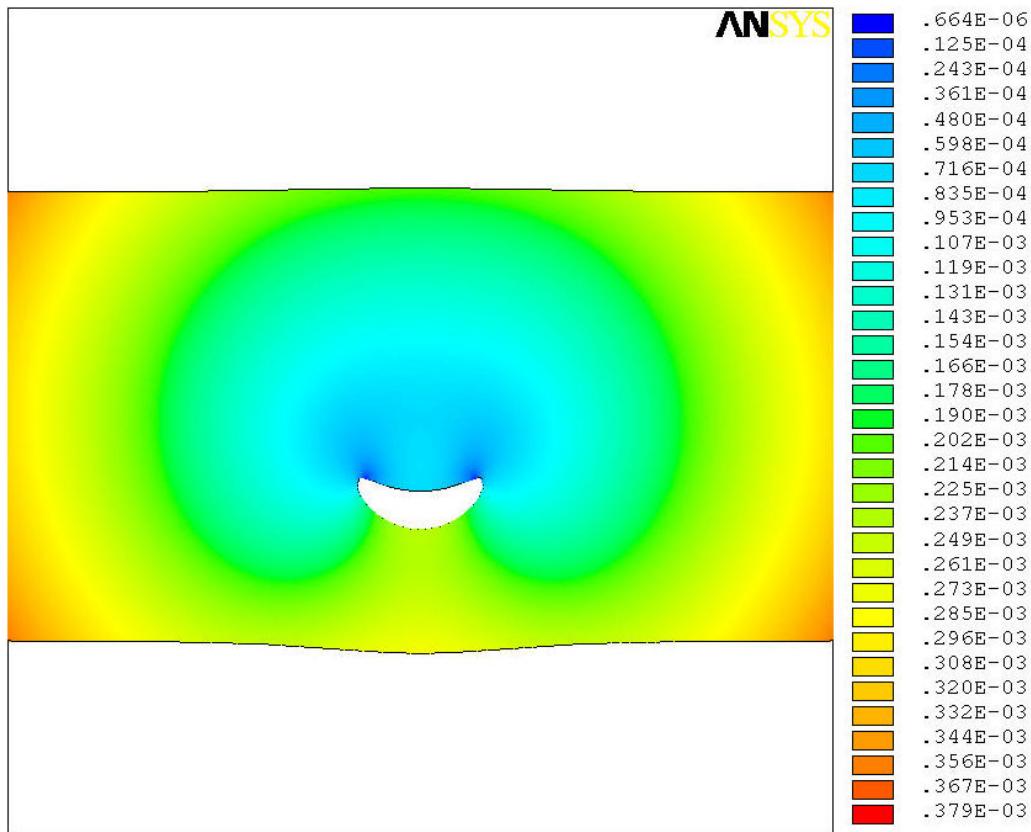
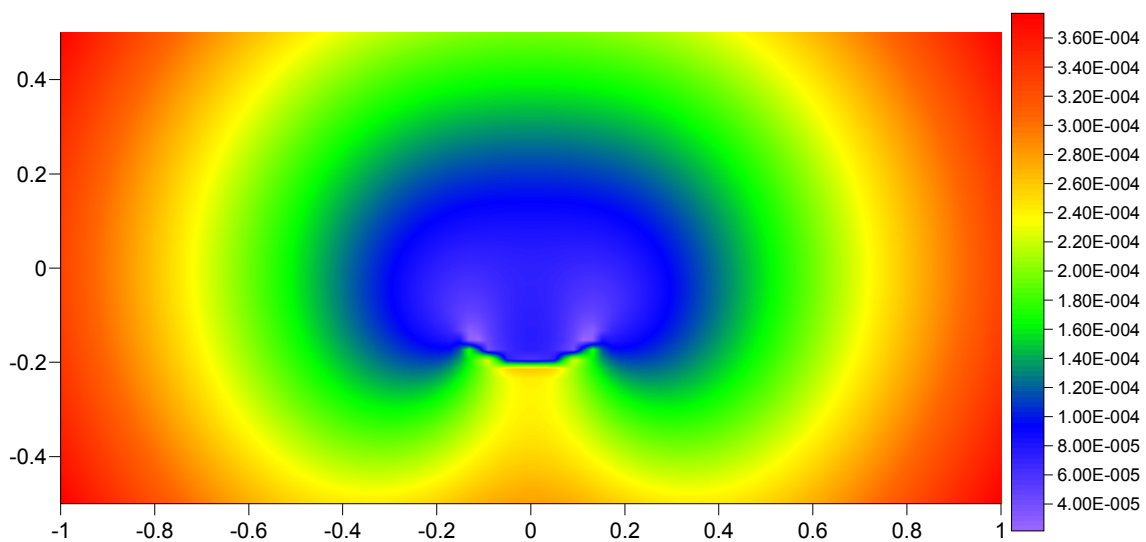


Figura 6.36: Deslocamento  $u_y$  com o MEC



**Figura 6.37: Deslocamento resultante com o MEF.**



**Figura 6.38: Deslocamento resultante com o MEC.**

No próximo capítulo apresentam-se as principais conclusões desse trabalho e as contribuições realizadas com o MEC para o Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, além das sugestões para futuros estudos sobre o assunto.

## 7. Conclusões e Sugestões

Nesta dissertação abordaram-se diversos assuntos relacionados às formulações do método dos elementos de contorno e da mecânica da fratura linear elástica.

Destaca-se, primeiramente, a utilização do procedimento geral de dedução das soluções fundamentais, visto que, variações nas características dos problemas físicos podem ser englobadas à metodologia geral e aplicadas a diversos problemas com o MEC. Destaca-se ainda, a utilização do potencial vetorial de Boussinesq-Galerkin, na geração das equações integrais descritas apenas com termos no contorno.

A contribuição, inovadora deste trabalho, consiste na utilização dos elementos de contorno curvos com aproximação polinomial de ordem qualquer. Dar-se a devida importância a essa abordagem, em razão de ser o primeiro trabalho no Departamento de Engenharia de Estruturas que associa a generalização dos polinômios de Lagrange com a parametrização dos elementos de contorno curvos.

A importância dessa abordagem pode ser verificada na utilização dos elementos de contorno isoparamétricos, onde a geometria e as variáveis do problema são recuperadas com a introdução desses elementos. Essa característica fica clara na resolução dos exemplos apresentados no capítulo 5. Nesses exemplos verifica-se que apesar de se utilizar uma discretização pequena para o contorno do problema, a convergência com os elementos curvos de ordem qualquer é mais significativa.

Posto a generalização das aproximações, fica evidente a contribuição no estabelecimento de um procedimento geral para a análise das equações integrais. Especialmente quando se emprega o método da colocação dos pontos fontes sobre o contorno. A outra generalização que se apresentou refere-se utilização de um procedimento para avaliar as integrais singulares, denominados método da subtração de singularidade.

Na avaliação das equações integrais singulares o MSS atende a todas as ordens de singularidades presentes nas soluções fundamentais, provando-se que é realmente uma estratégia geral para as aplicações do método dos elementos de contorno. Ao se construir essa metodologia, recaiu-se em integrais impróprias que foram avaliadas analiticamente segundo os conceitos de integrais no sentido de Cauchy e Hadamard.

Essas integrais foram calculadas originalmente aqui sobre um elemento auxiliar reto que representa a interpretação geométrica do MSS. Mostrou-se que as integrais no sentido do valor principal de Cauchy resultam da aplicação desse método sobre a formulação em deslocamento, enquanto e que o conceito de parte finita de Hadamard resulta da avaliação do núcleo com singularidade do tipo  $\mathcal{O}(r^{-2})$  presente na formulação em força de superfície.

Ainda a respeito do MSS propôs-se a mudança da denominação das formulações singular e hipersingular para a denominação das formulações em deslocamento e força de superfície. Entende-se que aquelas nomenclaturas causam conflitos no entendimento acerca do tipo de estratégia que está sendo adotado, uma vez que se pode desenvolver uma análise considerando os pontos de colocação fora do contorno, onde, nesse caso, as integrais são sempre regulares. Ou mesmo em alguns problemas cuja solução fundamental apresentar ordens de singularidades maiores que  $\mathcal{O}(r^{-2})$ .

Por meio dos exemplos constatou-se que tanto a formulação em deslocamento quanto a formulação em força de superfície apresentam a mesma qualidade de resultados. Verificou-se que para a formulação em força de superfície, a adoção de elementos com aproximação linear produziu erros maiores do que com a formulação em deslocamento. Verificou-se também que os erros diminuem com o aumento da quantidade de elementos na discretização.

Como já era esperado, observou-se a necessidade de se adotar técnicas de integração mais robustas para pontos fonte externos e próximos ao contorno, o que será efetuado futuramente.

Neste trabalho também se apresentou a formulação dual, no qual utilizam as formulações em deslocamento e força de superfície simultaneamente. A contribuição que se propõe com essa formulação refere-se a liberdade em se aplicar uma das duas formulações a qualquer nó do contorno. Com isso, avaliaram-se os resultados dos exemplos com a formulação dual escolhendo-se, da maneira mais conveniente, o tipo de formulação para cada nó. Os resultados produzidos com essa formulação apresentaram-se semelhantes aos obtidos com a aplicação das formulações independentemente. Era de se esperar que esses resultados se comportassem dessa forma, pois a diferença entre as formulações consiste na mudança dos valores produzidos nas linhas das matrizes de influência do método o que resulta em sistemas de equações equivalentes devido a natureza do MEC.

As aplicações dessas formulações nos problemas da mecânica da fratura foram verificadas no capítulo 6, onde se analisou os campos de deslocamentos e tensões próximos a extremidade da fratura. Foram estudados também os valores dos fatores de intensidade de tensão. Para isso, foram utilizadas três técnicas distintas na obtenção do FIT, quais são: A técnica da correlação dos deslocamentos, a técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura e a técnica da integral  $J$ .

Os valores do FIT apresentaram resultados coerentes com as três técnicas, uma apresentando resultados melhores que as outras, a depender do modelo. De modo geral, afirma-se que o MEC conduz a bons resultados para a predição dessa grandeza. Constatou-se que com a técnica da correlação dos deslocamentos obtêm-se melhores resultados quando a malha é bastante refinada, condição que não é tão necessária quando se aplica a técnica com base no campo de tensão na extremidade da fratura ou a integral  $J$ . Essas técnicas por serem de fácil implementação e produzirem bons resultados para o FIT serão utilizadas em estudos futuros sobre o crescimento da frente de fraturamento.

Como sugestão para trabalhos futuros recomenda-se o emprego da formulação realizando-se a sobreposição das faces da fratura. Com essa estratégia torna-se imediato a determinação das trajetórias de fraturamento, os ângulos de propagação e a utilização de elementos curvos trazendo maior representatividade na avaliação do fenômeno de fraturamento.

É necessário também que se realize um estudo sobre a qualidade de integração numérica, tendo em vista melhorar a solução do problema quando os nós de domínio se situem muito próximos ao contorno. Recomenda-se a criação de uma técnica semelhante ao método da subtração de singularidade para avaliar a colocação de pontos muito próximos ao contorno, ou estratégias de sub-elementação com controle de erro das integrais numéricas ou quadraturas especiais.

Outra proposta para continuidade do trabalho e que também já está em andamento é a utilização de splines na interpolação das variáveis físicas e geométricas dos problemas. A razão de se propor um estudo dessa natureza é porque a maioria dos problemas que consideram descontinuidades em forças de superfície emprega o método dos mínimos quadrados para regularização, como por exemplo, os problemas com o modelo coesivo, acoplamento MEC/MEF, erijecedores, entre outros.

Por fim, propõem-se a ampliação dos problemas bidimensionais tratados aqui, para a análise tridimensional. Assunto que será tema específico de estudo no doutoramento do autor.

Espera-se com esse trabalho que se possa auxiliar futuras pesquisas a cerca do estudo do método dos elementos de contorno aplicados a mecânica da fratura, tema de grande importância na engenharia.



## 8. Referências Bibliográficas

- AGOSTINHO, P. C. P., **Associação de chapas através da combinação dos métodos dos elementos de contorno e finitos considerando enrijecedores e crack coesivo**. 1998. 187 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- AHMADI-BROOGHANI, S. Y., WEARING, J. L., The application of the dual boundary element method in linear elastic crack problem in plate bending. **Boundary element Methods XVII, Computational Mechanics Publications**, Southampton, p. 429-438, 1996.
- ALIABADI, M. H., A new generation of boundary element methods in fracture mechanics. **International Journal of Fracture**. Vol. 86, p. 91-125, 1997.
- ALIABADI, M. H., **The boundary element method. Applications in solids and structures**. Chichester, New York: J. Wiley, 2002. 580 p.
- ALTAFIM, R. A. C., **50 anos da EESC: um olhar no passado visando o futuro**. 2ª ed. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos 134 p. 2004.
- ANG, W. T., CLEMENTS, D. L., A boundary integral equation for the solution of a class of crack problems. **Journal of Elasticity**, vol. 17, p. 9-21, 1987.
- AXLER, S. J., BOURDON, P., RAMEY, W., **Harmonic Function Theory**, Graduate Texts in Mathematics 137, New York: Springer-Verlag, 2nd ed. 2001. 259 p.
- BARBIRATO, J. C. C., **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento**. 1999. 270 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- BARSOM, JOHN M., ROLFE, S. T., **Fracture and fatigue control in structures : applications of fracture mechanics**. Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics, West Conshohocken : ASTM. 1999. 516 p.
- BETTI, E., Teoria dell elasticita. **11 Nuovo Cimento**, p. 7-10, 1872.
- BLACKBURN, W. S., HALL, W. S., The dual boundary element method for growing cracks allowing for crack curvature near the tip. **Boundary Element Method XVI, Computational Mechanics Publications**, Southampton, p. 413-422, 1994.
- BLAKE, A., **Practical Fracture Mechanics in Design**. New York: Marcell Dekker ed. 2005. 437 p.
- BLANDFORD, G. E., INGRAFFEA, A. R., LIGGET, J. A., Two-dimensional stress intensity factor computation using boundary elements method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 17, p. 387-404. 1981.

BORESI, A. P., SCHIMDT, R. J., SIDEBOTTON, OMAR M., Advanced mechanics of materials. New York: John Wiley & Sons, 5 ed. 1993. 811 p.

BREBBIA, C. A., **The boundary element method for engineers**, London, Pentech Press. 1978.b.

BREBBIA, C. A., Weight residual classification of approximate methods. **Applied Mathematical Modelling**, vol. 2, n. 3, p. 160-164. 1978.a.

BUECKNER, H. F., **Field singularities and related integral representation in mechanics of fracture**, Ed: G. C. Sih, vol. 1, 256 p. Nordhoff. 1973.

CHANG, C., MEAR, M. E., A boundary element method for two-dimensional linear elastic fracture analysis. **International Journal of Fracture**, vol. 74, p. 219-251, 1995.

CHENG, S. J., HOWITT, D. G., On the Galerkin Vector and the Eshelby Solution in Linear Elasticity. **Journal of Elasticity**. Vol 44. pp. 1-8. 1996.

COTERELL, B., **Fracture research in retrospect : an anniversary volume in honour of George R. Irwin's 90th birthday** / edited by H.P. Rossmanith. Rotterdam, Brookfield, VT: Balkema, 1997. p. 105-122.

CROUCH, S. L., Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 10, p. 301-343. 1976.

CRUSE, T. A., Numerical solution in three-dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 12, p. 1259-1274, 1969.

CRUSE, T. A., VANBUREN, W., Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Mechanics**. vol. 7, p. 1-15, 1971.

DALLY, J. W., SANFORD, R. J., Strain-gage methods for measuring the opening mode stress-intensity factor,  $K_I$ , **Experimental Mechanics**, 1987, pp. 381-388.

DIRGANTARA, T., ALIABADI, M. H., Dual boundary element formulation for fracture analysis of shear deformable shells. **International Journal of Solids and Structures**, vol. 38, p. 7769-7800, 2001.

ERDOGAN, F., FISHER, J. W., WEI, R. P., ROBERTS, R., YEN, B. T., **Fracture research in retrospect : an anniversary volume in honour of George R. Irwin's 90th birthday** / edited by H.P. Rossmanith. Rotterdam, Brookfield, VT: Balkema, 1997. p. 217-226.

ESHELBY, J. D., **The Continuum Theory of Lattice Defects**, volume III of Solid State Physics, p. 79-144. Academic Press, 1956.

FEDELINSKI, P., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., A time-domain DBEM for rapidly growing cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 40, p. 1555-1572, 1997.

FEDELINSKI, P., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., The dual boundary element method in dynamic fracture mechanics. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 12, p. 203-210, 1993.

FERREIRA, M. D. C., **Análise inversa em sólidos bidimensionais utilizando o método dos elementos de contorno**. 2007. 190 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

FREDHOLM, I., Solution d'un Problème Fondamental de La Theorie de l'élasticité. **Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik**, v. 2, n. 28, p. 3-8, 1906.

GALILEI, G., Dialogues concerning the two new sciences. In: ENCICLOPÆDIA BRITANNICA, INC. **Great books of the western world**. 1952.

GAO, X. L., A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, vol 67, p. 95-104, 1996.

GRAY, L. J., MARTHA, L. F., INGRAFFEA, A. R., Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 29, p. 135-158. 1990.

GRIFFITH, A. A., The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society**. 221, p. 163-198. 1921.

GRIFFITH, A. A., The theory of rupture. In Bienzo, C. B., Burgers, J. M. (Eds.) **Proceedings the First International Congress of Applied Mechanics**. Delft: Thechische Boekhandel en Drukkerij. p. 55-63. 1924.

HILLERBORG, A., MODEÉR, M., PETERSSON, P. E., Analysis of crack formation and crack grow in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Res**, p. 773-782. 1976.

HÖMANDER, L., Linear Partial Differential Operator. 3rd ed .Berlin; Heidelberg: Springer. **Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen**; Bd. 116. 1963. 285 p.

INGLIS, C. E., Stress in a plate due to the presence of cracks and Sharp corners. **Transactions of the Intitute of Naval Architects**. London, n. 55, p. 219-241, 1913.

IRWIN G. R., KIES, J. A., Fracturing and Fracture Dynamics. **Welding Journal Research Supplement**, vol. 31, pp. 95–100. 1952.

IRWIN, G.R., Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 24, 361-364. 1957.

IRWIN, G. R., Fracture dynamics. In: Fracturing of Metals, 1947 ASM SymposiumTrans, ASM 40A, pp. 147–166. 1948.

IRWIN, G. R., Fracture. **Haandbook der Physik**, vol. 79, Springer-Verlag, Berlin, p. 551-590, 1958.

IRWIN, G. R., KIES, J. A., Critical energy rate analysis of fracture. **Weld. Jour. Res. Sup.**, vol. 33, pp. 193–198. 1954.

ISHIKAWA, H., KITAGAWA, H., OKAMURA, H., J-integral of mixed mode crack and application. **Proc. 3rd Int. Conf. on Mechanical Behaviour of Material**, Pergamon Press, Oxford, v. 3, p. 447-455, 1980.

KELVIN, L., Note on the Integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid. **The Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, vol. III, pp.87-89, 1848.

KUPRADZE, V. D., Potential methods in the theory of elasticity. **Israel Programme for Scientific Translations**, Jerusalem, 1965.

KYTHER, P. K., Fundamental solutions for differential operators and applications, **Birkhäuser Press**, Berlin, Germany, 1996.

LACHAT, J. C., **A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics**. 1975. PhD Thesis. Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, Southampton, 1975.

LACHAT, J. C., WATSON, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equation: A formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. 5, p. 991-1005, 1976.

LEITÃO, V., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., Elastoplastic simulation of crack growth: dual boundary element formulation. **International Journal of Fatigue**, vol. 17, n. 5, p. 353-364, 1995.a.

LEITÃO, V., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 38, p. 315-333, 1995.b.

LEONEL, E. D., **Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multifaturados**. 2006. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LIEBOWITZ, H., Fracture, an advanced treatise. H. Liebowitz (ed). New York: Academic Press, Fracture Design of Structure vol V. 1968. 525 p.

LOPES JÚNIOR, M. C., **Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do método dos elementos de contorno**. 1996. 296 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

LÓPEZ, J. L. F., ALIABADI, M. H., Database of Stress Intensity Factors. **Computational Mechanics Publications**, Southampton, UK, Boston. 1996.

LOVÓN, O. B. R., **Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura**. 2006. 134 f. Tese

(Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LUTZ, E. D., INGRAFFEA, A. R., GRAY, L. J., Use a simple solution for boundary integral methods in elasticity and fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 35, p. 1737-1751, 1992.

MACIEL, D. N., **Determinação dos fatores de intensidade de tensão estático e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais**. 2003. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

MASSONNET, C. E., ZIENKIEWICZ, O. C., HOLLISTER, G. S., **Numerical use of integral procedures**. **Stress Analysis**, cap. 10, p. 198-235, 1965.

MEGUID, S. A., **Engineering fracture mechanics**. London; New York : Elsevier Applied Science: Sole distributor in the USA and Canada, Elsevier Science Pub., 1989, 397 p.

MI, Y., ALIABADI, M. H., An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. **Communications in Numerical Methods in engineering**, vol. 11, p. 167-177, 1995.

MI, Y., ALIABADI, M. H., Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 10, p. 161-171, 1992.

MI, Y., ALIABADI, M. H., Three-dimensional crack growth simulation using BEM, **Computers e Structures**, vol. 52, p. 871-878, 1994.

MURAKAMI, Y., **Stress intensity factors handbook**. Oxford: Pergamon, 1987. vol.1 and vol.2. 1987.

MUSKHELISHVILI, N. I., **Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity**. Noordhoff: Leyden, 1953.

OROWAN, E. O., Fundamental of brittle behavior of metals. In: Murray, W. M (ed.), **Fatigue and fracture of metals**. Wiley, New York, p. 139-167. 1950.

PAN, E., AMADEI, B., Fracture mechanics of cracked 2D anisotropic media with a new formulation of the boundary element method. **International Journal of Fracture**, vol. 77, p. 161-174, 1996.

PAN, E., YUAN, F. G., Boundary element analysis of three-dimensional cracks in anisotropic solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 48, p. 211-237, 2000.

PAPADOPOULOS, G. A., **Fracture mechanics: the experimental method of caustics and the det.-criterion of fracture**. London; New York: Springer-Verlag, 1993. 285 p.

PARÍS, F., CAÑAS, J., **Boundary element method: fundamentals and applications**. Oxford, New York: Oxford University Press, 1997. 392 p.

PARTON, V. Z., **Fracture mechanics: from theory to practice**. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. 208 p.

PEDRINI, R. A. A., **Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno**. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PILKEY, W. D., PILKEY, D. F., **Peterson's Stress Concentration Factors**. New Jersey: John Wiley & Sons, 3 ed. 2008. 560 p.

PORTELA, A., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. **Computers e Structures**, vol. 46, p. 237-247. 1993.

PORTELA, A., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 33, p. 1269-1287. 1992.b.

PORTELA, A., **Dual boundary element analysis of crack growth**. Southampton, UK; and Boston USA, Computational Mechanics Publications: Topics in engineering, 1993, 176 p.

PORTELA, A., **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**. PhD Thesis, Wessex Institute of Tecnology, University of Portsmouth, Southampton. 1992.a.

PORTELA, A., MATOS, P. F. P., MOREIRA, P. M. G. P., CASTRO, P. M. S. T., Dual boundary element analysis of cracked plates: post-processing implementation of the singularity subtraction technique. **Computers e Structures**, vol. 82. p. 1443-1449. 2004.

PRASAD, N. N. V., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., The dual boundary element method for thermoelastic crack problem. **International Journal of Fracture**, vol. 66, p. 255-272, 1994.

PRASAD, N. N. V., ALIABADI, M. H., ROOKE, D. P., The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems. **International Journal of Solids e Structures**, vol. 33, p. 2695-2718, 1996.

RASHED, Y. F., BREBBIA, C. A., **Transformation of domain effects to the boundary/** edited by Y. F. Rashed e C. A. Brebbia. Southampton [England]; Boston: WIT. Advances in boundary elements series: 14. p. 1-22. 2003

RENARDY, M., ROGERS, R. C., **An Introduction to Partial Differential Equations**, Text in Applied Mathematics 13, New York: Springer-Verlag, 1993. 428 p.

RICE, J. R., Fracture, an advanced treatise. H. Liebowitz (ed). New York: Academic Press, Mathematical Fundamentals vol II, p. 192-314. 1968.

RIZZO, F. J., An integral approach to boundary-value problems of classical elastostatics. **The Quarterly Journal of Mechanics e Applied Mathematics**, v. 25, p. 83-85, 1967.

ROCHA, F. S., **Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno**. 1988. 234 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

ROCHA, J. A. L., **Contribuição para a teoria termodinamicamente consistente da fratura**. 1999. 217 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ROOKE, D. P., CARTWRIGHT, D.J., Compendium of stress intensity factors. **H.M.S.O.**, London, 1987.

ROSSMANITH, H. P., An introduction to K. Wieghardt's historical paper "On splittin and crack of elastic bodies". **Fatigue Fract. Engng. Mater. Struc.**, vol. 18 p. 1367-1369, 1995.

ROSSMANITH, H. P., **Fracture research in retrospect : an anniversary volume in honour of George R. Irwin's 90th birthday** / edited by H.P. Rossmanith. Rotterdam, Brookfield, VT: Balkema, 1997. p. 37-94.

SADD, M. H., **Elasticity: Theory, Applications and Numerics**. Amsterdam; Boston: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 461 p.

SIH, G. C., LIEBOWITZ, H., **Fracture, an advanced treatise**. H. Liebowitz (ed). New York: Academic Press, **Mathematical Fundamentals vol II**, p. 68-191. 1968.

SLÁDEK, V., SLÁDEK, J., BALÁŠ, J., **Boundary Integral formulation of Crack Problems**. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, vol. 66, n. 2, p. 83-94. 1986.

SLÁDEK, V., SLÁDEK, J., **Singular integrals in boundary element methods**. Southampton, UK; Boston : Computational Mechanics Publications, 1998. 425p.

SNYDER, M. D., CRUSE, T. A., **Boundary integral equation analisys of cracked anisotropic plates**. **International Journal of Fracture Mechanics**, vol. 11, n. 2, p. 315-328, 1975.

SOLLERO, P. E ALIABADI, M. H., **Anisotropic analysis of crack in composit laminates, using the dual boundary element method**. **Composite e Structures**, vol. 31, n. 3, p. 229-234, 1995.

SOMIGLIANA, C., **Sopra l'equilibrio di um corpo elastico isotrope**, **Il Nuovo Ciemento**, p. 17-19, 1886.

TADA, H., PARIS, P. C., IRWIN, G. R., **The stress analysis of crack handbook**. **Del Research Corporation. Hellertown**. 1973.

TELLES, J. C. F., GUIMARÃES, S., **Green's function: a numerical generation for fracture mechanics problem via boundary elements**, **Computer Applied Mechanics and Engineering**, vol. 18, p. 847-858. 2000.

TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N., **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1970. 567 p.

VENTURINI, W. S. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanics problems.** 1982. 272 f. Ph.D. Thesis, Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton, Southampton, 1982.

VICENTINI, D. F. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de fratura.** 2006. 131 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

WANG, M. Z., XU, B. X., GAO, C. F., Recent General Solution in Linear Elasticity and Their Applications. **Applied Mechanics Reviews.** 2008.

WATSON, J. O., Hermitian cubic and singular elements for plane strain. In: Banerjee P.K. e Watson J. O. **Development in Boundary elements methods 4.** Elsevier Applied Science Publications, p. 1-28. 1986.

WATSON, J. O., **Hermitian cubic boundary elements for the analysis of cracks of arbitrary geometry.** in advance boundary element methods, In: T.A. Cruse (ed.), Springer Verlag. 1988.

WEEËN, F. V., Mixed mode fracture Analysis of rectilinear anisotropic plate using singular boundary elements. **Computer e Structures**, vol. 17, n. 4, p. 469-474. 1983.

WIEGHARDT, K., Über das Spalten und Zerreißen Elastischer Körper. *Z. Mathematik und Physik.*, vol 55, p. 60-103. 1907.



## 9. Apêndice I

### 9.1. Solução Fundamental de Kelvin

Nessa seção utiliza-se o teorema enunciado no capítulo 4 para se obter a solução fundamental de Kelvin, a partir do vetor de Boussinesq-Galerkin.

Seja o operador diferencial do problema,

$$A_{ij}(\cdot) = \mu(\cdot)_{,kk} \delta_{ij} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ij}. \quad (9.1)$$

Adota-se a notação matricial para tornar mais clara a obtenção do operador adjunto  $A_{ij}^\dagger(\cdot)$ , portanto,

$$A(\cdot) = \begin{bmatrix} \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,11} & (\mu + \lambda)(\cdot)_{,12} \\ (\mu + \lambda)(\cdot)_{,21} & \mu(\cdot)_{,kk} \delta_{22} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,22} \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

Primeiramente calcula-se a matriz dos cofatores, designada por  $\bar{A}(\cdot)$ .

$$\bar{A}(\cdot) = \begin{bmatrix} \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,22} & -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,21} \\ -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,12} & \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,11} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

Agora, calcula-se a matriz transposta da matriz cofatora, representada por  $\bar{A}^T(\cdot)$

$$\bar{A}^T(\cdot) = \begin{bmatrix} \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,22} & -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,12} \\ -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,21} & \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,11} \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Que em notação indicial, escreve-se:

$$A_{ij}^\dagger(\cdot) = \bar{A}_{ij}^T(\cdot) = (2\mu + \lambda)(\cdot)_{,kk} \delta_{ij} - (\mu + \lambda)(\cdot)_{,ij}. \quad (9.5)$$

De acordo com o teorema, o deslocamento fundamental é:

$$\mathbf{u}_{ki}^* = A_{ij}^\dagger \varphi_{kj}. \quad (9.6)$$

Logo,  $u_{ki}^* = (2\mu + \lambda)\varphi_{ki,ll} - (\mu + \lambda)\varphi_{kj,ij}$ , é a solução da equação diferencial de Navier-Cauchy em função do potencial vetorial desacoplado ou potencial vetorial de Boussinesq-Galerkin.

Seja a equação diferencial do problema fundamental:

$$\mu u_{ki,ll}^*(X', X) + (\mu + \lambda)u_{kj,ij}^*(X', X) = -\delta(X', X)\delta_{ki}. \quad (9.7)$$

A solução fundamental em função do vetor de Boussinesq-Galerkin escreve-se:

$$u_{ki}^*(X', X) = (2\mu + \lambda)\varphi_{ki,ll}(X', X) - (\mu + \lambda)\varphi_{kj,ij}(X', X). \quad (9.8)$$

Como essa é a solução fundamental, então ela deve satisfazer a equação diferencial, assim:

$$\text{Primeira parcela, } u_{ki,ll}^*(X', X) = (2\mu + \lambda)\varphi_{ki,jjll}(X', X) - (\mu + \lambda)\varphi_{kj,ijll}(X', X),$$

$$\text{Segunda parcela, } u_{kj,ij}^*(X', X) = (2\mu + \lambda)\varphi_{kj,llij}(X', X) - (\mu + \lambda)\varphi_{kl,jlij}(X', X),$$

Substituindo as parcelas na equação (9.8), obtém-se:

$$\mu[(2\mu + \lambda)\varphi_{ki,jjll} - (\mu + \lambda)\varphi_{kj,ijll}] + (\mu + \lambda)[(2\mu + \lambda)\varphi_{kj,llij} - (\mu + \lambda)\varphi_{kl,jlij}] = -\delta(X', X)\delta_{ki}.$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} & 2\mu^2\varphi_{ki,jjll} + \mu\lambda\varphi_{ki,jjll} - \mu^2\varphi_{kj,ijll} - \mu\lambda\varphi_{kj,ijll} \\ & + 2\mu^2\varphi_{kj,llij} + \mu\lambda\varphi_{kj,llij} + 2\mu\lambda\varphi_{kj,llij} + \lambda^2\varphi_{kj,llij} \\ & - \mu^2\varphi_{kl,jlij} - 2\mu\lambda\varphi_{kl,jlij} - \lambda^2\varphi_{kl,jlij} \\ & = -\delta(X', X)\delta_{ki}. \end{aligned}$$

$$2\mu^2\varphi_{ki,jjll} + \mu\lambda\varphi_{ki,jjll} = -\delta(X', X)\delta_{ki}.$$

$$\mu(2\mu + \lambda)\varphi_{ki,jjll} = -\delta(X', X)\delta_{ki}. \quad (9.9)$$

Verifica-se que essa solução satisfaz o teorema supracitado afirmando-se novamente que se o potencial vetorial for solução da equação diferencial então ele deve ser solução de:

$$\mathcal{A}\varphi_{kj} = -\delta(X', X)\delta_{kj}. \quad (9.10)$$

O determinante do operador adjunto é  $\mathcal{A} = |A_{ij}^\dagger|$ .

Para o operador matricial:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,22} & -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,12} \\ -(\mu + \lambda)(\cdot)_{,21} & \mu(\cdot)_{,kk} + (\mu + \lambda)(\cdot)_{,11} \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

O determinante será:

$$|A^\dagger| = \mu(2\mu + \lambda)(\cdot)_{,kkll}. \quad (9.12)$$

Substituindo no teorema supracitado:

$$\mu(2\mu + \lambda)\varphi_{kj, llmm} = -\delta(X', X)\delta_{kj}. \quad (9.13)$$

Conclui-se que o potencial vetorial é solução do problema fundamental.

Devido invariância do operador harmônico quando sujeito a rotações, pode-se expressar a solução da equação diferencial, por meio de funções radiais. A equação diferencial que se tem em mão é uma equação diferencial parcial não homogênea. Para se obter uma solução dessa equação, deve-se admitir que a solução geral é uma combinação linear da solução da equação homogênea e uma solução particular da equação não-homogênea, como a seguir.

Equação diferencial homogênea:

$$\varphi_{kj, llmm} = 0.$$

Equação diferencial não-homogênea:

$$\mu(2\mu + \lambda)\varphi_{kj, llmm} = -\delta(X', X)\delta_{kj}.$$

Procedendo-se primeiramente a resolução da equação diferencial parcial homogênea, tendo em mente as propriedades de invariância do operador, é possível escrevê-lo da seguinte maneira,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{kj}}{dr} \right) \right] \right\} = 0, \text{ que é uma equação diferencial ordinária de variáveis}$$

separáveis cuja solução é  $\varphi_{kj} = K_1 r^2 \ln r + K_2 r^2 + K_3 \ln r + K_4$ .

Realizando a resolução particular da equação não-homogênea.

$$\mu(2\mu + \lambda) \varphi_{kj, llmm} = -\delta(X', X) \delta_{kj}.$$

Considerando a propriedade da distribuição delta de Dirac, tem-se:

$$\mu(2\mu + \lambda) \lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi_{kj, llmm} d\Omega = -\lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{\Omega} \delta(X', X) \delta_{kj} d\Omega. \quad (9.14)$$

$$\text{Que resulta no } \lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi_{kj, llmm} d\Omega = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}.$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_{kj, ll} d\Gamma = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}. \quad (9.15)$$

Efetuando  $\varphi_{kj, ll} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} [K_1 r^2 \ln r + K_2 r^2 + K_3 \ln r + K_4] \right)$ , obtém-se:

$$\varphi_{kj, ll} = k_1 \ln r + k_2. \quad (9.16)$$

Substituindo (9.16) em (9.15), encontra-se:

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (k_1 \ln r + k_2) d\Gamma = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}.$$

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \oint_{\Gamma} k_1 \frac{\partial r}{r \partial n} d\Gamma = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}, \text{ como } d\Gamma = rd\theta \text{ então,}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} k_1 \frac{\partial r}{r \partial n} rd\theta = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}, \text{ simplificando, } \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} k_1 \frac{\partial r}{\partial n} d\theta = \frac{-\delta_{kj}}{\mu(2\mu + \lambda)}, \text{ resulta,}$$

$$k_1 = \frac{-\delta_{kj}}{2\pi\mu(2\mu + \lambda)}, \text{ pois } \frac{\partial r}{\partial n} = 1.$$

Retornando ao potencial vetorial dado por:

$$\varphi_{kj} = K_1 r^2 \ln r + K_2 r^2 + K_3 \ln r + K_4.$$

A forma geral do vetor de Galerkin fica:

$$\varphi_{kj} = Ar^2 \ln r + H(r) \text{ com } A = \frac{-\delta_{kj}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \text{ e } H(r) = K_2 r^2 + K_3 \ln r + K_4.$$

A solução fundamental é escrita como:

$$u_{ki}^* = B\varphi_{kj,il}\delta_{ki} - C\varphi_{kj,ij}. \quad (9.17)$$

Com  $B = (2\mu + \lambda)$  e  $C = (\mu + \lambda)$ .

Calculando a parcela,  $\varphi_{kj,il}$ , escreve-se:

$$\varphi_{kj,il} = A(r^2 \ln r)_{,il} + H_{,il}(r).$$

$$\begin{aligned} (r^2 \ln r)_{,il} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (r^2 \ln r) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [2r^2 \ln r + r^2] \\ &= 4 \ln r + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(r)_{,ll} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} (K_2 r^2 + K_3 \ln r + K_4) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [2K_2 r^2 + K_3] \\
&= 4K_2.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\varphi_{kj,ll} = 4A \ln r + 4A + 4K_2. \quad (9.18)$$

Calculando a parcela  $\varphi_{kj,ij}$ , tem-se:

$$\varphi_{kj,i} = A(r^2 \ln r)_{,i} + H_{,i}(r).$$

$$A(r^2 \ln r)_{,i} = 2A r_{,i} \ln r + A r_{,i}.$$

$$H_{,i}(r) = 2K_2 r r_{,i} + K_3 \frac{1}{r} r_{,i}.$$

$$\varphi_{kj,ij} = A(r^2 \ln r)_{,ij} + H_{,ij}(r).$$

$$\begin{aligned}
A(r^2 \ln r)_{,ij} &= (2A r_{,i} \ln r + A r_{,i})_{,j} = 2A r_{,i} r_{,j} \ln r + 2A \delta_{ij} \ln r - 2A r_{,i} r_{,j} \ln r \\
&\quad + 2A r_{,i} r_{,j} + A r_{,i} r_{,j} + A \delta_{ij} - A r_{,i} r_{,j}.
\end{aligned}$$

$$H_{,ij}(r) = \left( 2K_2 r r_{,i} + K_3 \frac{1}{r} r_{,i} \right)_{,j} = 2K_2 \delta_{ij} - 2K_3 \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} + K_3 \frac{1}{r^2} \delta_{ij}.$$

Portanto:

$$\varphi_{kj,ij} = 2A \delta_{ij} \ln r + 2A r_{,i} r_{,j} + A \delta_{ij} + 2K_2 \delta_{ij} - 2K_3 \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} + K_3 \frac{1}{r^2} \delta_{ij}. \quad (9.19)$$

Substituindo (9.18) e (9.19) no deslocamento fundamental (9.17), encontra-se:

$$u_{ki}^* = B \varphi_{kj,ll} \delta_{ki} - C \varphi_{kj,ij}.$$

$$u_{ki}^* = B(4A \ln r + 4A + 4K_2) \delta_{ki} - C \left( 2A \delta_{ij} \ln r + 2A r_{,i} r_{,j} + A \delta_{ij} + 2K_2 \delta_{ij} - 2K_3 \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} + K_3 \frac{1}{r^2} \delta_{ij} \right).$$

$$u_{ki}^* = 4AB \ln r \delta_{ki} + 4AB \delta_{ki} + 4BK_2 \delta_{ki} \\ - 2AC \delta_{ij} \ln r - 2AC r_{,i} r_{,j} - AC \delta_{ij} - 2CK_2 \delta_{ij} + 2CK_3 \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} - CK_3 \frac{1}{r^2} \delta_{ij}.$$

Sendo:

$$AB = \frac{-\delta_{kj}}{8\pi\mu}, \text{ e}$$

$$AC = \frac{-(\mu + \lambda) \delta_{kj}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)}, \text{ logo:}$$

$$u_{ki}^* = -\frac{\delta_{ki}}{2\pi\mu} \ln r - \frac{\delta_{ki}}{2\pi\mu} + 8\mu K_2 \delta_{ki} + 4\lambda K_2 \delta_{ki} \\ + \frac{(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} \ln r + \frac{(\mu + \lambda)}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} r_{,k} r_{,i} + \frac{(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \\ - 2(\mu + \lambda) K_2 \delta_{ij} + 2(\mu + \lambda) K_3 \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} - (\mu + \lambda) K_3 \frac{1}{r^2} \delta_{ij}.$$

Separando as constantes desconhecidas, tem-se:

$$u_{ki}^* = -\frac{\delta_{ki}}{2\pi\mu} \ln r - \frac{\delta_{ki}}{2\pi\mu} + \frac{(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} \ln r + \frac{(\mu + \lambda)}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} r_{,k} r_{,i} + \frac{(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \\ + K_2 (8\mu \delta_{ki} + 4\lambda \delta_{ki} - 2\mu \delta_{ij} - 2\lambda \delta_{ij}) + K_3 \left( 2\mu \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} + 2\lambda \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} - \mu \frac{1}{r^2} \delta_{ij} - \lambda \frac{1}{r^2} \delta_{ij} \right).$$

$$u_{ki}^* = -\frac{4(2\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \ln r - \frac{4(2\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} + \frac{2(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \ln r + \frac{2(\mu + \lambda)}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} r_{,k} r_{,i} + \frac{(\mu + \lambda) \delta_{ki}}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \\ + K_2 (8\mu \delta_{ki} + 4\lambda \delta_{ki} - 2\mu \delta_{ij} - 2\lambda \delta_{ij}) + K_3 \left( 2\mu \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} + 2\lambda \frac{1}{r^2} r_{,i} r_{,j} - \mu \frac{1}{r^2} \delta_{ij} - \lambda \frac{1}{r^2} \delta_{ij} \right).$$

Fazendo-se  $K_2 = K_3 = 0$ , tem-se:

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \left\{ 4(2\mu + \lambda)\delta_{ki} \ln r + 4(2\mu + \lambda)\delta_{ki} - 2(\mu + \lambda)\delta_{ki} \ln r \right\}.$$

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \left\{ 8\mu \ln r \delta_{ki} + 4\lambda \ln r \delta_{ki} + 8\mu \delta_{ki} + 4\lambda \delta_{ki} - 2\mu \delta_{ki} \ln r - 2\lambda \delta_{ki} \ln r \right\}.$$

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \left\{ 6\mu \ln r \delta_{ki} + 2\lambda \ln r \delta_{ki} + 7\mu \delta_{ki} + 3\lambda \delta_{ki} - 2\mu r_{,k} r_{,i} - 2\lambda r_{,k} r_{,i} \right\}.$$

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(2\mu + \lambda)} \left\{ [(6\mu + 2\lambda) \ln r + (7\mu + 3\lambda)] \delta_{ki} - (2\mu + 2\lambda) r_{,k} r_{,i} \right\}.$$

Como  $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ , então:

$$u_{ki}^* = -\frac{(1-2\nu)}{16\pi\mu^2(1-\nu)} \left\{ \left[ \frac{2\mu(3-4\nu)}{1-2\nu} \right] \ln r \delta_{ki} + \left[ \frac{\mu(7-8\nu)}{1-2\nu} \right] \delta_{ki} - \left( \frac{2\mu}{1-2\nu} \right) r_{,k} r_{,i} \right\}.$$

$$u_{ki}^* = -\frac{2\mu(1-2\nu)}{16\pi\mu^2(1-\nu)(1-2\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ki} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{ki} - r_{,k} r_{,i} \right\}.$$

Finalmente encontra-se a solução fundamental:

$$u_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln r \delta_{ki} + \frac{(7-8\nu)}{2} \delta_{ki} - r_{,k} r_{,i} \right\}. \quad (9.20)$$