

Rogério Carrazedo

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO
COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE IMPACTO ENTRE
ESTRUTURAS LEVANDO EM CONSIDERAÇÃO EFEITOS
TÉRMICOS**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Humberto Breves Coda

SÃO CARLOS

Janeiro 2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C313e Carrazedo, Rogério
Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos / Rogério Carrazedo ; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2009.

Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2009.

1. Elasticidade. 2. Plasticidade. 3. Termo-elasticidade. 4. Termo-plasticidade. 5. Método dos elementos finitos. 6. Método dos elementos finitos posicional. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

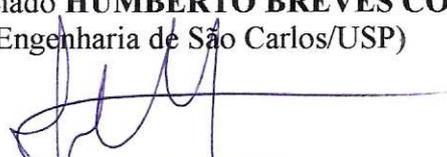
Candidato: Engenheiro **ROGÉRIO CARRAZEDO**

Tese defendida e julgada em 19/01/2009 perante a Comissão Julgadora:



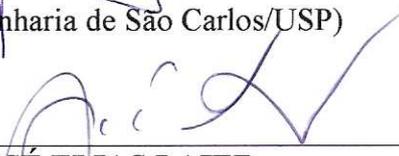
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



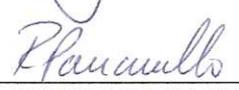
Prof. Dr. **JORGE MUNAIAR NETO**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



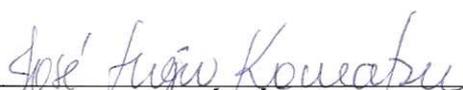
Prof. Titular **JOSÉ ELIAS LAIER**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



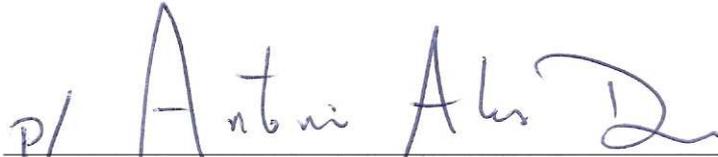
Prof. Associado **RENATO PAVANELLO**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

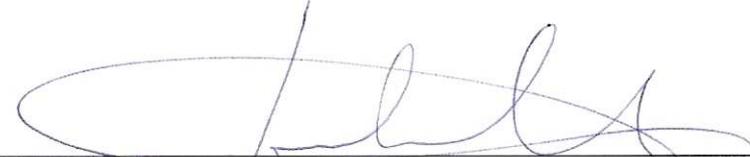


Prof. Associado **JOSÉ SÉRGIO KOMATSU**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedicatória

À minha esposa Adriana Vanzelli Carrazedo, a quem tanto amo e que me trouxe a maior das alegrias, meu filho Tales.

Agradecimentos

Agradeço primordialmente àquele que nunca me deixou fraquejar: Deus.

Ao meu orientador, Humberto Breves Coda, agradeço pelas palavras de amizade, orientação e, principalmente, por ter me ensinado a trilhar pelo árduo caminho do conhecimento unido à responsabilidade.

Agradeço também ao suporte financeiro da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Resumo

CARRAZEDO, R. (2009). *Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos*. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

Ao se estudar problemas de impacto de estruturas deformáveis, a consideração dos efeitos térmicos se faz muito importante, pois além de se observar a transformação de energia mecânica em calor pode-se considerar, ao longo do processo de análise, as mudanças das propriedades mecânicas do material envolvido devido ao aquecimento do meio.

Neste sentido, o objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação termodinamicamente consistente e sua implementação computacional, baseada no potencial de energia livre de Helmholtz e na primeira e segunda leis da termodinâmica, para se analisar, via elementos finitos, o impacto entre estruturas com comportamento termo-elástico e termo-plástico. O problema mecânico será tratado com formulação posicional desenvolvida em projetos de pesquisa anteriores e que podem ser classificados como Lagrangeano total com cinemática exata.

Para a modelagem do impacto utilizar-se-á a técnica do multiplicador de Lagrange associada à teoria potencial para previsão do impacto, técnica de retorno geometricamente definida e algoritmo de integração temporal de Newmark adequadamente adaptado para problemas gerais de impacto.

Palavras-chave: Termo-Elasticidade; Termo-Plasticidade; Método dos Elementos Finitos Posicional.

Abstract

CARRAZEDO, R. (2009). *Study and development of computational code to analyze impact in structures considering thermal effects*. Ph.D. Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2009.

It becomes quite important study the thermal effects when considering impact in structures because, besides the mechanical energy changing into heat, one may consider the changes in the material properties due overheating.

In this sense, the main goal of this work is develop a thermodynamic formulation and its implementation, based in the Helmholtz free-energy and in the first and second law of thermodynamics, to analyze structures under impact. The mechanical problem will be solved by a positional finite element application developed in past researches and it can be classified as a total Lagrangean with exact kinematics.

In order to consider the impact, the Lagrangean multiplier will be associated to the potential theory of impact prevision, technique geometrically defined and an adapted technique based on the time integration of Newmark, modified to impact problems.

Key-words: Thermo-Elasticity; Thermo-Plasticity; Positional Finite Element Method.

Lista de Figuras

Figura 1	Condutividade Térmica em Metais com variação da Temperatura	13
Figura 2	Exemplo de discretização de um sólido.	35
Figura 3	Elemento Linear Unidimensional.	39
Figura 4	Mudança de Configuração de Um Corpo.	42
Figura 5	Fluxograma do Método dos Elementos Finitos Posicional.	53
Figura 6	Elemento de Treliça e Posições Nodais.	55
Figura 7	Fluxograma da Implementação Numérica da Termo-Elasto-Plasticidade.	63
Figura 8	Barra Unidimensional Quase-Estática.	70
Figura 9	Evolução do Deslocamento e da Temperatura de Barra Termo-Elástica.	71
Figura 10	Treliça de 48 Elementos e 26 Nós.	72
Figura 11	Evolução da Variação da Temperatura na Treliça.	72
Figura 12	Evolução da Variação da Temperatura em dois nós da Treliça.	73
Figura 13	Treliça de 13 Elementos e 8 Nós.	74
Figura 14	Variação do Deslocamento e da Temperatura no Nó 8	74
Figura 15	Fonte de Calor Termo-mecânica ao Longo de Tempo.	79
Figura 16	Variação da Temperatura em Função da Posição e do Tempo.	79
Figura 17	Evolução da Temperatura no Centro da Barra.	80
Figura 18	Barra Unidimensional sob Carregamento Cíclico.	80
Figura 19	Comparação entre a variação de temperatura calculada e a experimental.	81
Figura 20	Dados Iniciais do Problema de Impacto.	82
Figura 21	Solução Numérica considerando Modelo Elástico.	83
Figura 22	Estudo de Convergência - Posição do Nó Impactante.	84
Figura 23	Estudo de Convergência - Temperatura do Nó em $x = 9.5$.	84
Figura 24	Posição vs Tempo no Modelo Termo-Elasto-Plástico.	85

Figura 25	Temperatura vs Tempo no Modelo Termo-Elasto-Plástico.	85
Figura 26	Temperatura vs Tempo considerando apenas a Geração de Calor.	86
Figura 27	Dados Geométricos e Cinemáticos da Treliça.	87
Figura 28	Temperatura no tempo de análise $t=0,05$ s.	87
Figura 29	Temperatura no tempo de análise $t=0,10$ s.	88
Figura 30	Temperatura no tempo de análise $t=0,15$ s.	88
Figura 31	Temperatura no tempo de análise $t=0,20$ s.	88
Figura 32	Temperatura no tempo de análise $t=0,25$ s.	89
Figura 33	Elemento Triangular de 10 nós.	97
Figura 34	Viga Engastada sob Carregamento de Tração.	100
Figura 35	Comparação dos Modelos Elásticos na Estática.	101
Figura 36	Comparação dos Modelos Elásticos na Dinâmica no caso de Pequenas Deformações.	102
Figura 37	Comparação dos Modelos Elásticos na Dinâmica no caso de Grandes Deformações.	102
Figura 38	Variação de Temperatura ao Longo do Tempo e da Barra.	103
Figura 39	Impacto entre Barra e Anteparo Rígido.	103
Figura 40	Impacto de Barra - Comparação entre diferentes elementos.	104
Figura 41	Impacto de Barra - Posição.	105
Figura 42	Impacto de Barra - Mudança de Temperatura.	105
Figura 43	Impacto entre Anel e Anteparo Rígido.	106
Figura 44	Impacto de Anel - 0,5 s após impacto.	106
Figura 45	Impacto de Anel - 2,1 s após impacto.	107
Figura 46	Impacto de Anel - 5 s após impacto.	107
Figura 47	Impacto de Anel - 10 s após impacto.	107
Figura 48	Impacto de Anel - 20 s após impacto.	107

Lista de Tabelas

Tabela 1	Métodos da Família Alfa de Integração Temporal	38
Tabela 2	Métodos da Família de Integração Temporal de Newmark	50
Tabela 3	Geração de Calor Elástica	61
Tabela 4	Pontos e Pesos de Hammer de Quinta Ordem	99

Lista de Símbolos

ΔU	Varição de Energia
ΔQ	Varição de Calor
ΔW	Varição de Trabalho
\mathbf{A}	Gradiente da Mudança de Configuração
\mathbf{C}	Tensor de Alongamento de Cauchy-Green
\mathbf{E}	Tensor de Deformações de Green-Lagrange
\mathbf{I}	Matriz Identidade
\mathbf{P}	Tensor de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie
\mathbf{S}	Tensor de Piola-Kirchhoff de Primeira Espécie
F	Forças de Corpo (Forças Externas)
G	Módulo de Elasticidade Transversal
H	Matriz Hessiana
K	Módulo de Elasticidade Longitudinal
M	Matriz de Massa
Q	Calor Gerado pelo Sistema
R	Fonte Interna de Calor
S	Entropia
T	Temperatura Absoluta
W	Trabalho
\dot{W}	Potência das Forças Externas
c_e	Calor Específico
f	Função Mudança de Configuração
g	Aceleração da Gravidade
k	Coefficiente de Condutividade Térmica

l_0	Comprimento inicial do elemento de barra
l_f	Comprimento atual do elemento de barra
m	Massa
n	Normal à Superfície Considerada
q	Fluxo de Calor
u	Energia Interna
\dot{u}	Taxa de Mudança da Energia Interna
u_e	Energia Específica
\dot{y}	Velocidade
\ddot{y}	Aceleração
Φ	Energia Livre de Helmholtz
Γ	Contorno de um sólido
Λ	Dissipação Interna
Ω	Domínio de um sólido
Ψ	Potencial Elástico
α e α_1	Coefficiente de Expansão Térmica
α_2	Coefficiente de Geração de Calor
β	Trabalho Plástico convertido em Calor
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ	Tensor de Deformações
ϵ^e	Deformações Elásticas
ϵ^p	Deformações Plásticas
$\epsilon(u)$	Deformação Longitudinal de uma Fibra
γ	Distorção de duas Fibras Originalmente Ortogonais
$\lambda(u)$	Alongamento Relativo de uma Fibra
λ e μ	Constantes de Lamé
ν	Coefficiente de Poisson

θ	Variação de Temperatura
θ_0	Temperatura de Referência
ρ	Massa Específica - Densidade do material
σ	Tensor de Tensões de Cauchy
τ_0, τ_1 e τ_2	Tempo de Relaxação da Temperatura
ν	Módulo de Elasticidade Térmico
ξ	Variável Interna relativa ao Endurecimento
ψ	Funções de Forma
∇^2	Operador Laplaciano

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Generalidades	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Organização do Trabalho	3
2	Modelos Termo-Mecânicos	9
2.1	Termodinâmica	11
2.1.1	Lei Zero	11
2.1.2	Primeira Lei da Termodinâmica	11
2.1.3	Segunda Lei da Termodinâmica	12
2.1.4	Lei de Fourier	13
2.1.5	Equação de Condução de Calor Transiente	14
2.2	Teoria da Termo-Elasticidade Desacoplada	15
2.3	Teoria Clássica da Termo-Elasticidade Acoplada	18
2.3.1	Primeira Lei da Termodinâmica	19
2.3.2	Princípio da Taxa de Trabalho	20
2.3.3	Segunda Lei da Termodinâmica	20
2.3.4	Energia Livre de Helmholtz	21
2.3.5	Potencial Elástico	22
2.3.6	Equação de Condução de Calor Termo-Elástica	23
2.3.7	Equação de Equilíbrio Termo-Elástica	24
2.4	Teoria da Termo-Elasticidade Generalizada	26

2.5	Teoria da Termo-Elasticidade Dependente da Taxa de Temperatura	27
2.6	Teoria da Termo-Elasticidade considerando Balanço de Entropia	27
2.7	Termo-Plasticidade	28
2.7.1	Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica	30
2.7.2	Teoria das Variáveis Internas	30
2.7.3	Crítérios de Escoamento ou Plastificação	33
3	Método dos Elementos Finitos Aplicado à Termodinâmica.....	35
3.1	Discretização do Problema de Condução de Calor	36
3.2	Métodos dos Resíduos Ponderados	37
3.3	Integração Temporal de Equações Parabólicas	38
3.4	Elemento Unidimensional Linear	39
4	Método dos Elementos Finitos Posicional.....	41
4.1	Mudança de Configuração	41
4.2	Tensor de Deformação de Green-Lagrange	43
4.3	Tensor de Deformação de Engenharia	43
4.3.1	Deformação Longitudinal	43
4.3.2	Distorção	44
4.4	Pares Conjugados de Tensão e Deformação	45
4.5	Princípio da Taxa de Trabalho ou Estacionariedade	45
4.6	Método de Newton-Raphson	46
4.7	Método dos Elementos Finitos Posicional Estático	47
4.8	Dinâmica no MEFP	49
4.9	Integração Temporal de Equações Hiperbólicas	50
4.9.1	Alteração no Método de Newmark para adicionar impacto.....	51
4.10	Impacto contra Anteparos Rígidos	52

5	MEFP aplicado ao Elemento de Treliça.....	55
5.1	Elemento de Treliça.....	55
5.2	Energia Interna	56
5.3	Balanco de Energia	56
5.4	Método de Newton-Raphson	57
5.5	Matriz Hessiana	58
5.6	Dinâmica da Treliça	59
6	O Termo de Acoplamento Termo-Mecânico.....	61
6.1	Implementação Numérica	63
6.1.1	A equação de condução de calor	64
6.1.2	A equação de equilíbrio dinâmico	65
7	Exemplos de Problemas Termo-Elasticos	69
7.1	Barra Unidimensional Quase-Estática	70
7.2	Treliça Bidimensional Dinâmica	71
7.3	Métodos de Solução - Implícito e Explícito	73
8	Exemplos de Problemas Termo-Plásticos	77
8.1	Barra sob Carregamento Elasto-Plástico	78
8.2	Barra sob Carregamento Cíclico	80
8.3	Impacto entre Barra e Anteparo Rígido.....	81
8.4	Impacto entre Treliça e Anteparo Rígido.....	86
9	Termo-Elasto-Plasticidade no Plano.....	91
9.1	Condução de Calor no Plano	91
9.2	MEFP para Problemas Bidimensionais	94
9.3	Elemento Triangular de 10 nós	97

9.4	Análise de Viga Engastada.....	100
9.5	Impacto entre Barra e Anteparo Rígido.....	103
9.6	Impacto de Anel e Anteparo Rígido.....	105
10	Conclusão.....	109
10.1	Futuros Desenvolvimentos.....	110
	Referências.....	111
	Apêndice A – Matriz Hessiana da Treliça.....	121
	Apêndice B – Matriz Hessiana do Elemento de Chapa.....	127

1 Introdução

1.1 Generalidades

Desde os estudos de Duhamel (1837) sobre a resposta mecânica decorrente de variações de temperatura, foi percebido que era necessário aprimorar os modelos constitutivos para descrever devidamente o comportamento de materiais em situações não-isotérmicas.

Nestes estudos iniciais, os esforços térmicos foram limitados a deformações devidos a gradientes de temperatura, que são determinados e servem como esforços iniciais para uma análise de tensões. Porém, por meio de experimentos científicos, ficou comprovado que a temperatura é influenciada pela deformação do corpo. Neste caso, as análises térmica e mecânica estão interligadas e em Biot (1956) foi apresentada a teoria clássica da termo-elasticidade, que acopla as partes térmica e mecânica em termos da deformação e de fluxo de calor.

Na teoria de Biot, a dissipação de energia decorrente de deformação inelástica não era considerada. Assim sendo, a teoria da termo-plasticidade foi apresentada em Dillon (1963) e em Perzyna e Sawczuk (1973), neste caso considerando a completa descrição dos processos termo-mecânicos para sólidos elasto-plásticos, em que se consideram os termos geradores de calor relativos à deformação elástica e à dissipação plástica (HAKANSSON; WALLIN; RISTINMAA, 2005).

Foi estabelecido na ocasião que cerca de 90% do trabalho plástico é convertido em calor. O restante é absorvido como energia interna pelo realinhamento de imperfeições de cristais, energia que recebeu o nome de trabalho frio (LEE; CHEN, 2001; ROSAKIS et al., 2000). Porém novos estudos comprovam que esta conversão em calor pode variar de 30% a 100%, dependendo do nível de deformação plástica, sua taxa e da temperatura. A descrição matemática, de forma termodinamicamente consistente, é objeto de estudo atual em todo o mundo (por exemplo, Rosakis et al. (2000) e Kamlah e Haupt (1997)).

Hoje em dia, pode-se dizer que a termo-elasticidade está bem estabelecida e seus princípios básicos estão desenvolvidos de forma consistente, como por exemplo em Parkus (1976), Solkonikov (1956), Boley e Weiner (1960) e Malvern (1969). A termo-plasticidade, no entanto, ainda está em desenvolvimento, mas muito pode ser encontrado em livros que tratam de fenômenos inelásticos, como por exemplo em Holzapfel (2004) e Lanczos (1986).

Para o desenvolvimento adequado das expressões básicas da termo-elasticidade e da termo-plasticidade, é necessária a substituição do conceito de potencial elástico pela energia livre de Helmholtz, relacionando as variáveis internas dos sólidos como a entropia, a distribuição da temperatura, o fluxo de calor, além de com a energia de deformação.

Além da consideração do comportamento termo-mecânico do material constituinte das estruturas, é de extrema importância modelar devidamente o comportamento geométrico das mesmas. Para tanto, será utilizada a formulação apresentada em Coda (2003), baseada no princípio da mínima energia potencial e na posição dos nós dos elementos finitos, ao invés dos deslocamentos. Nesta formulação o gradiente da função mudança de configuração é escrito a partir da posição inicial e final como função de espaço adimensional auxiliar (CODA, 2003; GRECO; CODA, 2004; GRECO; CODA; VENTURINI, 2004).

A partir da função mudança de configuração é gerada uma medida de deformação objetiva (ou seja, invariante a movimentos de corpo rígido), que possibilita a criação de um funcional de energia. Sobre este funcional é aplicado o teorema de mínima energia potencial total e o método de Newton-Raphson é utilizado para solucionar o sistema não-linear de equações resultante.

Deve-se salientar que este trabalho foi influenciado e recebeu contribuições de estudos anteriores, pertencentes à linha de pesquisa do orientador. A saber, o estudo do impacto entre estruturas de pórtico modeladas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC), considerando a deformação não-linear de engenharia, realizado em Greco (2004). Tal estudo teve suas aplicações ampliadas para problemas não-lineares de sólidos, abordando o impacto entre meios contínuos bi-dimensionais, em Marques (2006). O caso de impacto de meios sólidos tridimensionais, considerando plasticidade e não-linearidade geométrica foi abordado em Maciel (2008). Neste mesmo contexto, em Coda e Paccola (2007) foi agregado o impacto entre casca e anteparos rígidos.

O elemento de casca segundo hipótese de Reissner, porém considerando a deformação de Green, pode ser visto em Coda e Paccola (2008). A deformação de Green também é aplicada às barras gerais bi- e tridimensionais laminadas em Minski (2008) e

em Coda (2008), respectivamente.

Neste trabalho é realizada a incorporação da geração de calor decorrente da mudança de configuração de uma estrutura na formulação posicional aplicada ao elemento de treliça bidimensional e ao elemento de chapa, resultando em um modelo mais fiel para análises de estruturas que possam estar envolvidas em processos que provoquem rápidas mudanças de configuração, como por exemplo, na análise de impacto estrutural.

1.2 Objetivos

- Desenvolver uma formulação termodinamicamente consistente, baseada nas leis da termodinâmica, na energia livre de Helmholtz e nos princípios da termo-elasticidade e termo-plasticidade;
- Implementar tal formulação para análise, via método dos elementos finitos, do impacto entre estruturas de pórtico com comportamento termo-elástico e termo-plástico;
- Implementar tal formulação para análise de problemas de impacto entre chapa e anteparo rígido.

1.3 Organização do Trabalho

Nesta seção apresenta-se uma visão geral dos conteúdos abordados nos capítulos subsequentes. O trabalho está dividido em nove capítulos, desconsiderando o capítulo de referências bibliográficas, sendo que o primeiro capítulo é a introdução, dividida em três seções: generalidades, objetivos e organização do trabalho.

No segundo capítulo, modelos termo-mecânicos, se faz uma revisão dos modelos existentes na literatura especializada, centrando nos modelos que foram aplicados na resolução dos problemas propostos. Inicia-se este capítulo com uma breve revisão dos conceitos da termodinâmica, de forma a facilitar a compreensão e implementação das teorias da termo-mecânica. Na seqüência é abordada a teoria mais simples da termo-elasticidade, a desacoplada. Originalmente apresentada em Duhamel (1837), a teoria considera que apenas a temperatura participa da resposta mecânica da estrutura.

Na terceira seção do capítulo se apresentam as alterações descritas em Biot (1956) que por fim acopla a parte térmica à mecânica, ou seja, enquanto a temperatura altera

a resposta mecânica da estrutura, as deformações provocam a geração de calor no corpo. Ainda no segundo capítulo, outras três teorias acopladas são apresentadas, que tem por objetivo transformar a equação parabólica de calor em uma equação hiperbólica.

Na última seção do capítulo são apresentados os conceitos necessários para se desenvolver a completa descrição dos processos termomecânicos para sólidos elasto-plásticos. Em suma, o segundo capítulo apresenta a seguinte divisão:

1. Termodinâmica;
2. Teoria da Termo-Elasticidade Desacoplada;
3. Teoria Clássica da Termo-Elasticidade Acoplada;
4. Teoria da Termo-Elasticidade Generalizada;
5. Teoria da Termo-Elasticidade Dependente da Taxa de Temperatura;
6. Teoria da Termo-Elasticidade considerando Balanço de Entropia;
7. Termo-Plasticidade.

No terceiro capítulo se apresenta um breve resumo do método dos elementos finitos aplicado a problemas termodinâmicos, tratando inicialmente o problema de forma geral para então se limitar a elementos unidimensionais, a serem acoplados no elemento de pórtico. Como o problema é dinâmico, também é apresentada a família alfa de integração temporal de equações parabólicas. O capítulo foi dividido da seguinte forma:

1. Discretização do Problema de Condução de Calor;
2. Métodos dos Resíduos Ponderados;
3. Integração Temporal de Equações Parabólicas;
4. Elemento Unidimensional Linear.

No quarto capítulo se aborda o método proposto inicialmente em Coda (2003) para solução de problemas mecânicos não-lineares. O método, conhecido como método dos elementos finitos posicional, busca determinar a posição da estrutura em que as forças internas e externas estejam em equilíbrio. Para tanto, emprega o método de Newton-Raphson para solucionar o sistema não-linear das equações, gerado pela aplicação do

teorema da mínima energia potencial total sobre um funcional de energia de deformação, criado a partir de uma medida de deformação objetiva, derivada do gradiente da função mudança de configuração, a partir das configurações iniciais e finais. É observada a seguinte divisão do capítulo:

1. Mudança de Configuração;
2. Tensor de Deformação de Green-Lagrange;
3. Tensor de Deformação de Engenharia;
4. Pares Conjugados de Tensão e Deformação;
5. Princípio da Taxa de Trabalho;
6. Método de Newton-Raphson;
7. Método dos Elementos Finitos Posicional Estático;
8. Dinâmica no MEFP;
9. Integração Temporal de Equações Hiperbólicas;
10. Impacto contra Anteparos Rígidos.

Após a apresentação do método dos elementos finitos posicional de uma forma geral, o quinto capítulo demonstra as etapas para se desenvolver a formulação de um elemento de barra, bastante simples, apenas para efeito didático. Acompanhando o quarto capítulo, a seguinte divisão foi elaborada:

1. Elemento de Treliça;
 2. Energia Interna;
 3. Balanço de Energia;
 4. Método de Newton-Raphson;
 5. Matriz Hessiana;
 6. Dinâmica da Treliça.
-

Tendo discutido os principais modelos de termo-elasto-plasticidade, assim como as metodologias empregadas na resolução do modelo adotado, no sexto capítulo se faz uma breve discussão sobre o termo de geração de calor elástico e as conseqüências de sua consideração. Além disso, na segunda e terceira seção são apresentadas as modificações no método dos elementos finitos aplicado à termodinâmica para inclusão do termo de geração de calor decorrente das deformações elasto-plásticas, e no método dos elementos finitos posicional para incluir as deformações oriundas da mudança de temperatura. A seguinte divisão foi elaborada:

1. O Termo de Acoplamento;
2. Implementação Numérica.

No sétimo capítulo são apresentadas os primeiros testes utilizados para validar os resultados do programa termo-elástico desenvolvido, fazendo um estudo comparativo entre os resultados apresentados na literatura aos obtidos na implementação da teoria da termo-elasticidade. Em geral, diversas simplificações foram empregadas visto que os programas desenvolvidos são mais amplos que os apresentados nos artigos estudados. Isto resultou na seguinte divisão do capítulo:

1. Barra Unidimensional Quase-estática;
2. Treliça Bidimensional Dinâmica;
3. Análise de Métodos de Solução.

No oitavo capítulo o plano de testes é continuado, porém considerando o comportamento inelástico das estruturas. Os exemplos apresentados são mais ilustrativos, visto que abrangem uma maior gama de recursos do programa desenvolvido.

1. Barra sob Carregamento Elasto-Plástico;
 2. Barra sob Carregamento Cíclico;
 3. Impacto entre Barra e Anteparo Rígido;
 4. Impacto entre Treliça e Anteparo Rígido.
-

No nono capítulo se apresenta o desenvolvimento de todas as etapas da implementação numérica do problema da termo-elasto-plasticidade aplicada a problemas bidimensionais. Para tanto foi utilizado o elemento de chapa, sendo empregada as metodologias de solução expostas anteriormente. Por conseguinte, resultou na seguinte divisão:

1. Condução de Calor no Plano;
2. MEFP no Plano;
3. Elemento Triangular de 10 nós;
4. Análise de Viga Engastada;
5. Impacto entre Barra e Anteparo Rígido;
6. Impacto de Anel e Anteparo Rígido;

Por último são apresentadas as conclusões resultantes desta pesquisa de doutorado, assim como são feitas propostas para a continuidade deste trabalho. Cabe observar que a revisão bibliográfica é apresentada ao longo do trabalho, em especial no segundo capítulo.

2 Modelos Termo-Mecânicos

A termo-mecânica é a ciência que estuda o comportamento de corpos submetidos a carregamentos térmicos e mecânicos, além de suas interações. Na teoria, a análise térmica e mecânica são acopladas devido à dissipação de energia induzida pelo efeito da taxa de deformação (MIRANDA; UBERTINI, 2001). Segundo o artigo Sherief, Hamza e Saleh (2004), o estudo da termo-mecânica foi iniciado pelo trabalho Duhamel (1837), que apresentou a teoria conhecida hoje como a teoria da termo-elasticidade desacoplada, em que a temperatura participa da determinação da resposta mecânica do corpo. Neste estudo, Duhamel considera que há um estado inicial em uma determinada temperatura em que não são observadas tensões, tampouco deformações.

Porém, por meio de experimentos científicos, foi determinado que havia um desacordo entre a teoria e observações físicas. Tais observações registram que a temperatura é influenciada pela mudança de forma do corpo, ou seja, pelo seu estado mecânico. Assim sendo, em Biot (1956), foi apresentada a teoria clássica da termo-elasticidade acoplada, que acopla a parte térmica à mecânica, em termos da deformação e do fluxo de entropia.

Na teoria clássica da termo-elasticidade, as equações constitutivas, ou seja, as equações que descrevem o comportamento do material, são dependentes da temperatura e incluem relação adicional entre o fluxo de calor e o gradiente de temperatura desenvolvido no interior dos corpos. Esta relação, conhecida em sua forma mais simples como Lei de Fourier, determina a distribuição da temperatura no interior do corpo.

No entanto, a Lei de Condução de Calor de Fourier apresenta a previsão de propagação de temperatura a uma velocidade infinita, visto que a equação de calor é parabólica, novamente em desacordo com experimentos científicos. Desta forma, um número significativo de teorias foi apresentado na tentativa de tornar a equação de calor hiperbólica e descrever a transferência de calor na forma de ondas de velocidade finita (HETNARSKI; IGNACZAK, 2000). Estas teorias são conhecidas como teorias da termo-elasticidade hiperbólica.

Apesar de não serem empregadas neste trabalho, as teorias hiperbólicas (itens 2.4, 2.5 e 2.6) serão vistas pois trazem discussões atuais de cunho básico sobre a termo-elasticidade, que no futuro deverão ser revistas. A primeira teoria hiperbólica apresentada foi a teoria da termo-elasticidade generalizada, em Lord e Shulman (1967). Nesta teoria, a lei de condução de calor é modificada para incluir tanto o fluxo de calor, quanto sua derivada no tempo. Esta equação de calor é hiperbólica e, por conseguinte, a velocidade de propagação da temperatura deixa de ser infinita, resultando em propagação de onda, assim como na elasticidade (EL-MAGHRABY; YOSSEF, 2004). A teoria foi generalizada para o caso anisotrópico por Sherief (1980) e em Dhaliwal e Sherief (1980).

Outra teoria foi apresentada em Green e Lindsay (1972), que considera dois tempos de relaxamento, considerada uma segunda generalização (BAKSI; BERA; DEBNATH, 2004; MUKHOPADHYAY, 2004). Esta teoria é chamada de teoria da termo-elasticidade dependente da taxa de temperatura (HETNARSKI; IGNACZAK, 2000).

Recentemente, três novas teorias foram propostas em Green e Naghdi (1991, 1992, 1993, 1995a, 1995b), que consistem em formulações alternativas de propagação de calor. Ao invés de utilizar a inequação de Clausius-Duhem, os autores usam uma forma de balanço geral de entropia (MUKHOPADHYAY, 2004; QUINTANILLA, 2002). A equação de condução de calor da primeira teoria de Green e Naghdi, se linearizada, reduz para a equação de condução de calor de Fourier (parabólica). A segunda teoria, conhecida como teoria da termo-elasticidade sem dissipação de energia, utiliza um balanço geral de entropia ao invés de uma inequação de entropia (de Clausius). Nesta teoria não se admite dissipação de energia. A terceira teoria é o caso mais geral, em que a dissipação de energia é permitida.

Porém, mesmo nas teorias em que a dissipação de energia é considerada, as teorias da termo-elasticidade não realizam a completa descrição dos processos termo-mecânicos para sólidos elasto-plásticos. Assim sendo, Dillon (1963) e Perzyna e Sawczuk (1973) foram os primeiros a apresentar a teoria da termo-plasticidade dentro da estrutura da termodinâmica (HAKANSSON; WALLIN; RISTINMAA, 2005). Na teoria da termo-plasticidade é estudada a resposta termo-mecânica de corpos elasto-plásticos e condutores de calor, considerando-se os termos geradores de calor relativos ao aquecimento provocado pelo acoplamento termo-mecânico e dissipação inelástica (ROSAKIS et al., 2000).

Feita uma breve introdução de algumas das teorias da termo-mecânica, na sequência será feita uma revisão dos conceitos da termodinâmica, para então apresentar algumas das teorias da termo-elasticidade e da termo-plasticidade com maiores detalhes.

2.1 Termodinâmica

É possível definir a termodinâmica como sendo a parte da física que estuda as grandezas de calor, trabalho, energia e entropia, assim como as relações entre estas, sem se ater ao conhecimento da estrutura interna dos corpos considerados.

Durante a evolução do estudo da termodinâmica, algumas leis foram determinadas pela simples observação de experimentos e, a partir destas, sua formulação matemática foi desenvolvida. Aspectos adicionais sobre a termodinâmica e soluções para problemas específicos podem ser encontrados nos trabalhos Annamalai e Puri (2002), Winterbone (1997), para citar alguns.

Com isso, são divisadas diversas situações onde o estudo da termodinâmica, no contexto da engenharia, é importante. Por exemplo, a explosão do combustível em um veículo causa a transformação de energia térmica (ou seja, calor) em energia mecânica (trabalho). Um exemplo mais simples está no chuveiro, em que uma resistência aquecida transfere calor para a água.

2.1.1 Lei Zero

A lei zero dita sobre o equilíbrio energético dos corpos em um sistema. Esta lei diz que, se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, eles estarão em equilíbrio térmico entre si. Isto basicamente quer dizer que, se dois corpos estão em equilíbrio, eles permanecerão em equilíbrio, mantendo suas grandezas termodinâmicas inalteradas, mais precisamente a temperatura. Mas o que acontece se estes corpos não estiverem em equilíbrio? É aqui que a primeira lei da termodinâmica entra.

2.1.2 Primeira Lei da Termodinâmica

A lei da conservação da energia, conhecida como primeira lei da termodinâmica, afirma que um sistema, inicialmente em repouso, se adicionado calor e/ou trabalho mecânico, provoca o aumento da energia correspondente a este calor e trabalho. A partir dessa afirmação, é possível escrever uma equação simples, que relaciona calor, trabalho mecânico e energia (equação 2.1).

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W , \quad (2.1)$$

onde ΔU é a variação de energia, ΔQ é a variação de calor e ΔW é a variação de trabalho mecânico do sistema.

Isto quer dizer que, se ocorrer um acréscimo de energia, seja na forma de calor ou trabalho, uma alteração no sistema há de ocorrer, até que este volte a entrar em equilíbrio, ou outra forma de energia ser acrescida ou subtraída.

No entanto, partindo apenas do conceito da lei de conservação de energia, pode-se retirar energia na forma de trabalho ou calor de um corpo mais frio para colocá-lo em um corpo mais quente, por exemplo, sem que seja alterado o sistema. Obviamente que isto não é possível e, para determinar a direção do fluxo de energia em um sistema, foi elaborada a segunda lei da termodinâmica.

2.1.3 Segunda Lei da Termodinâmica

De acordo com Coleman (2003), a segunda lei da termodinâmica foi definida em Truesdell e Toupin (1960) como uma desigualdade, que em suma diz que, para gerar trabalho, é preciso que haja uma diferença de temperatura entre dois corpos ou então que uma fonte externa forneça energia e que a energia, em forma de calor, vai fluir do corpo que tem mais calor para o que tem menos calor. Esta expressão ficou conhecida como inequação de Clausius, e pode ser vista na inequação 2.2.

$$\dot{S} \geq - \int_A \frac{q_i n_i}{T} dA + \int_m \frac{R}{T} dm, \quad (2.2)$$

onde \dot{S} é a taxa de mudança da entropia, q é a taxa de transferência de calor, n é a normal à superfície considerada, R é a geração de calor interna e T é a temperatura absoluta. Hoje em dia a inequação é mais comumente vista na forma da expressão 2.3.

$$\dot{S} \geq \frac{q_i n_i}{T} \quad (2.3)$$

Assim, o estado de equilíbrio é definido como o estado de maior entropia para o qual o sistema tende ao ser deixado em repouso. Apenas para salientar, entropia é uma variável de estado, associada ao grau de desordem de um sistema macroscópico, definida como a quantidade de calor trocado a uma temperatura T . Pode ser entendida como a medida de quantidade de energia em um sistema que não pode ser utilizada para produzir trabalho.

2.1.4 Lei de Fourier

Para o ponto de vista da mecânica dos sólidos, a principal forma de transmissão de calor é a condução, em que a troca de calor entre dois corpos ocorre através de um meio, que propaga o calor através de suas partículas. É o caso de uma barra de aço que fica com uma de suas extremidades no fogo. A outra extremidade também irá aquecer, com o tempo.

Fourier publicou em 1822 sua lei empírica que define a transmissão de calor por condução (LIENHARD IV; LIENHARD V, 2005). Esta lei diz que o fluxo de calor, resultante da condução térmica, é proporcional à magnitude do gradiente da temperatura e de sinal oposto ao seu. Na forma mais conhecida, a equação de Fourier é dada por

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial n_i}, \quad (2.4)$$

onde q é o fluxo de calor, uma grandeza vetorial, k é o coeficiente de condutividade térmica, T é a temperatura e n é a normal à superfície considerada.

Na maior parte das vezes, o coeficiente de condutividade térmica k é considerado constante e independente da temperatura, porém tal consideração só pode ser feita se o cálculo for realizado para pequenas mudanças de temperatura e, ainda assim, de acordo com o material, como pode ser visto na figura 1.

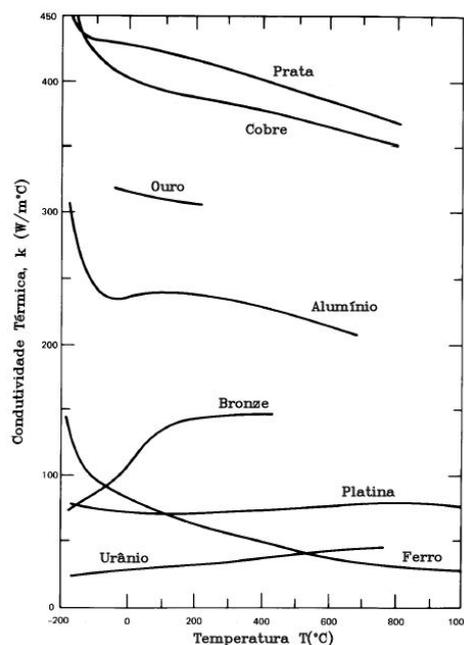


Figura 1: Condutividade Térmica em Metais com variação da Temperatura

Fonte: LIENHARD IV e LIENHARD V (2005).

2.1.5 Equação de Condução de Calor Transiente

Voltando ao princípio da conservação de energia (equação 2.1), este pode ser reescrito considerando apenas a variação calórica do sistema. Assim sendo, a variação de energia vai ser igual a variação de calor do sistema, ou seja

$$\Delta U = \Delta Q \quad (2.5)$$

Considerando o volume arbitrário de um sistema fechado (ou seja, um sistema em que não há troca de massa), a variação de energia pode ser escrita como

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV, \quad (2.6)$$

onde u é a energia interna, ρ é a densidade do meio e t é o tempo.

Definindo o calor específico c_e como sendo a variação da energia interna em relação à temperatura, ou seja, $c_e = \frac{du}{dT}$ e substituindo na equação 2.6, a variação de energia fica na forma

$$\Delta U = \int_V \rho \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} dV = \int_V \rho c_e \frac{dT}{dt} dV \quad (2.7)$$

Com relação a variação de calor ΔQ , esta pode ser dividida em duas parcelas, uma correspondente à taxa de calor através da superfície do corpo e outra correspondente à taxa de calor gerada no volume (no corpo), como

$$\Delta Q = - \int_A q_i n_i dA + \int_V \rho R dV, \quad (2.8)$$

onde ρR é a taxa de calor no domínio, q é o fluxo de calor pela superfície do corpo e n é um vetor unitário normal à superfície.

A lei empírica de condução de calor de Fourier (equação 2.4) pode ser utilizada para definir a parcela correspondente a taxa de calor através da superfície do corpo, da seguinte maneira

$$\int_A -q_i n_i dA = \int_V k \nabla^2 T dV \quad (2.9)$$

Unindo as expressões 2.5, 2.7, 2.8 e 2.9, a equação de condução de calor transiente pode ser escrita como

$$\int_V \left(\rho c_e \frac{dT}{dt} - k \nabla^2 T - \rho R \right) dV = 0 \quad (2.10)$$

Como o volume considerado é arbitrário, a equação diferencial de condução de calor não estacionária fica na conhecida forma

$$\rho c_e \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \rho R \quad (2.11)$$

A equação 2.11 define a forma mais simples de transmissão de calor ao longo do tempo. O primeiro termo da equação reflete o comportamento dinâmico da temperatura. Este comportamento depende da massa específica e do calor específico. Já o segundo termo define a distribuição da temperatura no corpo, de acordo com as cargas térmicas e depende do coeficiente de condução térmica.

2.2 Teoria da Termo-Elasticidade Desacoplada

A termo-elasticidade pode ser definida como a parte da termo-mecânica que se ocupa em determinar a resposta de um corpo de comportamento elástico a esforços térmicos e mecânicos. Na teoria introduzida em Duhamel (1837), diferenciais de temperatura, seja a partir de um referencial, seja entre um ponto do corpo e outro, geram esforços internos (BOLEY; WEINER, 1960).

Isso significa dizer que, se um sólido inicialmente a uma temperatura θ_0 , ao ser aplicada uma variação de temperatura θ , vai variar seu volume na proporção do seu coeficiente de expansão térmica α , sem gerar cisalhamento. Este mesmo sólido, ao receber uma tensão aplicada em uma direção, passa por uma deformação no sentido de aplicação desta tensão e contração nas direções perpendiculares. Assim, seguindo o enunciado da Lei de Hooke e a deformação volumétrica isotrópica decorrente da variação da temperatura, a relação tensão-deformação é dada por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \theta \delta_{ij} , \quad (2.12)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, ν é o coeficiente de Poisson, e δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido como 1 quando $i = j$ e 0 quando $i \neq j$. A inversa desta relação, visando isolar as tensões, é vista na equação 2.13.

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) , \quad (2.13)$$

onde ϵ_{kk} é o traço do tensor de deformações, que dá a variação relativa de volume do corpo deformado. Definindo σ_{ij} como sendo o tensor de tensões, F_i as forças de corpo e \ddot{y}_i a aceleração, a equação de equilíbrio dinâmico local é dada por

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 , \quad (2.14)$$

Considerando a relação constitutiva dada pela equação 2.13, a equação de equilíbrio 2.14 pode ser escrita na forma

$$\left[2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (2.15)$$

A equação 2.15, associada à relação de deslocamento e deformação, define o campo de deslocamentos, dependente da temperatura. Com relação ao campo térmico, a equação de calor não estacionária (equação 2.11) é utilizada para completar as equações da teoria da termo-elasticidade desacoplada.

Estas equações são utilizadas para resolver diversos problemas de engenharia, visto sua relativa facilidade de aplicação, já que cada variável (temperatura e deformação) são determinadas separadamente. Um exemplo está no artigo Rossit e Laura (1997), em que, sendo conhecido o carregamento térmico, busca-se a deflexão e as tensões em uma placa retangular. Um caso parecido é apresentado no artigo Xia e Ding (2001), que apresenta a formulação de casca cilíndrica, quando submetida a cargas térmicas.

Outro exemplo pode ser visto em Ribeiro e Manoach (2005) onde são tratadas as mudanças no comportamento dinâmico na vibração de grande amplitude de vigas curvas causadas por variações de temperatura.

A resolução de um problema inverso, em que são conhecidos os deslocamentos e busca-se a temperatura em uma placa circular fina, pode ser visto em Gaikwad e Deshmukh (2005). Outro problema interessante é apresentado em Vel e Batra (2001), em que estudam-se placas laminadas sendo que cada lâmina pode ter sua própria condição de contorno, tanto térmica quanto mecânica.

Porém grande parte dos estudos atuais na teoria da termo-elasticidade desacoplada está na aplicação do método dos elementos de contorno na resolução de diversos problemas, em geral considerando o problema quase-estático. Problemas transientes são tratados em Park e Banerjee (2002), por exemplo, na resolução de problemas bi e tridimensionais.

No artigo Rand e Givoli (1995) busca-se a otimização de estruturas de barra para estruturas espaciais, no caso considerando também radiação. A otimização de estruturas também é objeto de estudo no artigo Bialecki et al. (2005), contudo considerando as três formas de troca de calor (condução, convecção e radiação).

Já no artigo Raveendra (2000) se trata a otimização do grau de funções polinomiais para aproximação dos resultados por meio de uma análise de erro. Problema

parecido é solucionado em Koshelev e Ghassemi (2004) e em Miranda-Valenzuela, Muci-Kuchler e Soriano-Soriano (2000), que ao invés de utilizarem funções polinomiais, utilizam funções de variáveis complexas e elementos Hermitanos, respectivamente.

Afora o método dos elementos de contorno, em Miranda e Ubertini (2001) estuda-se o movimento espúrio causado pela consideração da temperatura como deformação inicial, por meio do método dos elementos finitos. Como solução, é proposto fazer a aproximação do funcional de energia agregando uma variável, a tensão, gerando um modelo misto entre deslocamentos e tensões.

Contato é considerado no trabalho Alonso, Garrido e Foces (1998), sendo que a condução de calor depende da pressão de contato, o que poderia ser considerado um acoplamento termo-mecânico secundário. O problema é resolvido por meio de uma aproximação pelo método dos elementos de contorno.

Além do contato, os artigos Stromberg (1999) e Ireman, Klarbring e Stromberg (2002) também consideram a fricção e o desgaste do material. Ambos artigos buscam a solução utilizando o método dos elementos finitos. O primeiro dos artigos citados acima, o Stromberg (1999), trata a temperatura de forma “não explícita”, ou seja, através de manipulações algébricas elimina a temperatura do equacionamento, podendo então resolver ambos os campos (térmico e mecânico) simultaneamente.

Já o artigo Ireman, Klarbring e Stromberg (2002) faz uma consideração não realizada no anterior: os esforços de fricção geram calor, causando um acoplamento secundário na formulação. A mesma consideração é feita em Choi e Lee (2004), onde é feito o estudo de freios, considerando apenas o contato e a fricção (mas não o desgaste), sendo que o calor gerado levam a instabilidade material, objeto de estudo do artigo.

A teoria da termo-elasticidade desacoplada também é fonte de estudo no artigo Iesan e Quintanilla (2004), em que os autores, por meio de considerações semelhantes à teoria desacoplada, desenvolvem uma nova teoria da termo-elasticidade, porém considerando a micro-deformação de meios elásticos. Nesta teoria, a equação de calor permanece inalterada, porém a relação constitutiva recebe um novo termo para tratar a micro-deformação.

Cabe ressaltar que esta revisão é uma pequena mostra dos artigos publicados recentemente. Uma grande quantidade de artigos foi omitida por brevidade.

2.3 Teoria Clássica da Termo-Elasticidade Acoplada

As equações da teoria clássica da termo-elasticidade descrevem o comportamento elástico e térmico de meios elásticos e condutores de calor, além das influências recíprocas entre as tensões elásticas e diferenciais de temperatura (KHALIFA; EL-RAHMAN; GHONAMY, 2004). A teoria foi apresentada primordialmente em Biot (1956) para corrigir um princípio fundamental da teoria desacoplada da termo-elasticidade: a influência da mudança de forma de um corpo na temperatura.

Este e outros princípios foram generalizados pelas contribuições em Herrmann (1963), Ben-Amoz (1965) e Nickell e Sackman (1968). Desde então, outros artigos vem sendo apresentados buscando outros princípios variacionais como em Altay e Dokmeci (1996) e em Cannarozzi e Ubertini (2001). A existência de solução do sistema de equações é estudada em Rivera e Barreto (1998) e em Guo e Chen (1999). Nesta mesma linha de estudo, Qin e Rivera (2004) demonstram a inexistência de solução para o caso não-linear com memória térmica. Soluções analíticas são tema de pesquisa em Leiva e Sivoli (2003) para placas e em Khalifa, El-Rahman e Ghonamy (2004) para sistemas unidimensionais.

Porém, como soluções analíticas são difíceis de serem alcançadas para problemas acoplados visto as dificuldades inerentes do problema, procedimentos numéricos são propostos para solução de diversos problemas, como por exemplo em Mukherjee e Sinha (1996) para placas laminadas, e em Manoach e Ribeiro (2004) para vibração de grande amplitude de vigas, além de métodos já conhecidos, como o método dos elementos de contorno para solução de problemas bidimensionais (HOSSEINI-TEHRANI; ESLAMI, 2000).

Com relação ao estudo das restrições dos graus de liberdade, os artigos Scott (1996, 2001) tratam da instabilidade provocada pela restrição na temperatura. O autor desenvolve as equações de campo em termos da entropia, que pode ser restringida sem provocar a instabilidade. Porém cabe a ressalva de que a instabilidade só ocorre quando o coeficiente de expansão térmica é irrealisticamente alto (ARMERO; SIMO, 1993; SARACIBAR; CERVERA; CHIUMENTI, 2001) e (SARACIBAR; CERVERA; CHIUMENTI, 1999) in (HAKANSSON; WALLIN; RISTINMAA, 2005).

A formulação apresentada nesta seção segue em grande parte a apresentada em Parkus (1976), Boley e Weiner (1960), Panagiotopoulos (1985) e Holzapfel (2004), porém existem diversos outros livros que a apresenta de forma semelhante. A formulação é desenvolvida em termos da configuração inicial. Para desenvolvimento em termos da configuração atual, o leitor é referido ao artigo Miehe (1995).

2.3.1 Primeira Lei da Termodinâmica

A lei da conservação da energia diz que, durante qualquer ciclo percorrido por um sistema, a integral cíclica do calor Q é proporcional à integral cíclica do trabalho W . É o mesmo que

$$\oint Q = \oint W , \quad (2.16)$$

Para escrever a lei de conservação de energia devidamente, é necessário considerar o fluxo de energia. Assim, em termos de fluxo,

$$\dot{Q} = \underbrace{\frac{du}{dt}}_{\text{Energia Interna}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d(m v^2)}{dt}}_{\text{Energia Cinética}} + \underbrace{\frac{d(m g Z)}{dt}}_{\text{Energia Potencial}} + \dot{W} , \quad (2.17)$$

onde \dot{Q} é o fluxo total de calor, m é a massa do sistema, v é a velocidade, g é a aceleração da gravidade e Z é a altura em relação ao referencial do sistema.

O fluxo total de calor em um sistema é dado pelo fluxo de calor que entra ou sai pela superfície do corpo e pelo calor gerado internamente. Significa o mesmo que

$$\oint_A \dot{Q} dA = - \oint_A q_i n_i dA + \int_m R dm , \quad (2.18)$$

onde R é o calor gerado, por unidade de massa (uma fonte de calor interna), q é o fluxo de calor pela superfície do corpo e n é um vetor unitário normal à superfície.

Considerando a energia potencial como parte das forças externas, a equação de energia, obtida por meio das equações 2.17 e 2.18, pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \int_m u dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{y}_i \dot{y}_i dm = \int_m R dm - \oint_A q_i n_i dA - \oint_A \dot{W} dA \quad (2.19)$$

Em razão de o peso próprio ser considerado na expressão de forças de corpo, a taxa de trabalho \dot{W} é determinada pela soma das taxas de trabalho realizada pelas forças externas, ou seja

$$\oint_A \dot{W} dA = - \int_m F_i \dot{y}_i dm - \oint_A f_i \dot{y}_i dA \quad (2.20)$$

Substituindo-se a equação de trabalho 2.20 na equação de energia 2.19, a equação que determina a lei de conservação de energia em sistemas termo-elásticos é obtida, sendo que esta contempla a energia interna do sistema, a energia cinética, fontes de calor interna, fluxo de calor pela superfície do corpo e forças de corpo e de superfície, como pode ser visto na equação 2.21.

$$\frac{d}{dt} \int_m u \, dm + \frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{y}_i \dot{y}_i \, dm = \int_m R \, dm - \oint_A q_i n_i \, dA + \int_m F_i \dot{y}_i \, dm + \oint_A f_i \dot{y}_i \, dA \quad (2.21)$$

2.3.2 Princípio da Taxa de Trabalho

O princípio da taxa de trabalho diz que a taxa de mudança da energia cinética é igual à taxa de trabalho de todas as forças, internas e externas e é dado por

$$\frac{d}{dt} \int_m \frac{1}{2} \dot{y}_i \dot{y}_i \, dm = \int_m F_i \dot{y}_i \, dm + \oint_A f_i \dot{y}_i \, dA - \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \, dV, \quad (2.22)$$

sabendo-se que a última parcela é o trabalho realizado pelas forças internas. Unindo a equação 2.22, que define o princípio da taxa de trabalho, à equação 2.21, que representa a lei de conservação de energia em sistemas termo-elásticos, leva à equação

$$\int_m (\dot{u} - R) \, dm = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \, dV - \oint_A q_i n_i \, dA \quad (2.23)$$

A equação 2.23 contempla as mudanças na energia interna (pelo trabalho das forças internas), a variação de calor (pelo fluxo de calor e pelo calor gerado internamente) e a variação de energia do sistema.

Pelo teorema de conservação de massa, $dm = \rho \, dV$, e aplicando o teorema de Gauss (teorema da divergência) na última parcela, a equação 2.23 fica na forma

$$\int_V (\dot{u} - R) \rho \, dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \, dV - \int_V q_{i,i} \, dV \quad (2.24)$$

2.3.3 Segunda Lei da Termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica traz dois conceitos. O primeiro é o da entropia, que é a quantidade de energia que não pode ser utilizada para gerar trabalho. O segundo é que um sistema deixado em repouso tende para o estado de máxima entropia. Na forma da inequação de Clausius,

$$\int_m \dot{S} \, dm \geq \int_m \frac{R}{T} \, dm - \oint_A \frac{q_i n_i}{T} \, dA, \quad (2.25)$$

onde S é a entropia e T a temperatura absoluta. Percebe-se na inequação 2.25 que, para um sistema fechado, a entropia irá se manter constante e que, para qualquer forma de dissipação calórica, a entropia deve aumentar.

Invocando o teorema da conservação da massa sobre as duas primeiras parcelas

da inequação 2.25, e o teorema de Gauss sobre a última parcela, a inequação fica na forma

$$\int_V \dot{S} \rho dV \geq \int_V \frac{R}{T} \rho dV - \int_V \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} dV \quad (2.26)$$

Derivando-se a última parcela em relação a posição e lembrando-se que o volume é qualquer, a inequação 2.26 fica reduzida a uma equação diferencial

$$\rho T \dot{S} \geq \rho R - q_{i,i} + \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (2.27)$$

Combinando-se a inequação 2.27 com a equação 2.24, a inequação 2.28 é obtida, conhecida como inequação de Clausius-Duhem (SANTAOJA, 2004):

$$\rho (\dot{u} - T \dot{S}) \leq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{q_i}{T} T_{,i} \quad (2.28)$$

Comparada à inequação de Clausius (inequação 2.25), observa-se que a inequação de Clausius-Duhem (inequação 2.28) também contempla as mudanças de forma do corpo (pela energia interna de deformação).

2.3.4 Energia Livre de Helmholtz

Em toda transformação energética (irreversível), há um aumento na entropia. Uma vez que a energia total envolvida não pode variar, e o aumento de entropia é um modo de medir energia que não pode ser convertida em trabalho, então a quantidade de energia que pode ser convertida em trabalho tem que diminuir.

A energia livre de Helmholtz é um potencial que define uma forma de medir o trabalho útil que pode ser obtido de um sistema, ou seja, a quantidade de energia que pode virar trabalho. Na forma de uma equação, a energia livre Φ e sua taxa $\dot{\Phi}$ são dadas por

$$\Phi(\epsilon_{ij}, T) = U - T S \quad (2.29)$$

$$\dot{\Phi}(\epsilon_{ij}, T) = \dot{U} - T \dot{S} - \dot{T} S = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \dot{T} \quad (2.30)$$

Substituindo a equação 2.30 nas equações 2.24 e 2.28:

$$\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \rho (T \dot{S} - R) + q_{i,i} = 0 \quad (2.31)$$

$$\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{ij} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} + S \right) \dot{T} + \frac{q_i}{T} T_{,i} \leq 0 \quad (2.32)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ e \dot{T} podem assumir qualquer valor e ainda assim as equações 2.31 e 2.32 tem que se manter. Assim sendo, $\dot{\epsilon}_{ij}$ e \dot{T} podem ser considerados arbitrários, e as relações com as quais estão relacionadas na equação 2.31 tem que manter a igualdade. Desta forma,

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.33)$$

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (2.34)$$

$$q_{i,i} = \rho (R - T \dot{S}) \quad (2.35)$$

Percebe-se que a equação 2.33 nada mais é do que a relação tensão-deformação, a equação 2.34 define a entropia do sistema e a equação 2.35 é a equação de condução de calor, em função do calor gerado, da temperatura e da entropia.

Outra forma da equação de condução de calor, em função da energia livre de Helmholtz, pode ser obtida ao se combinar as equações 2.34, 2.35 e 2.30, resultando na equação 2.36.

$$q_{i,i} = \rho T \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \rho R \quad (2.36)$$

2.3.5 Potencial Elástico

Antes de buscar uma forma mais adequada da equação de condução de calor em função das variáveis primárias (temperatura), é necessário apresentar o conceito do potencial elástico Ψ , que é uma forma de se definir as propriedades elásticas de um corpo qualquer pela sua relação entre as tensões e as deformações, conforme a equação 2.37.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.37)$$

Outra razão de se apresentar o potencial elástico está na sua relação bastante próxima com a energia livre de Helmholtz:

$$\Psi = \rho \Phi \quad (2.38)$$

Uma forma simples (elástica linear) do potencial elástico é obtida pelo enunciado da lei de Hooke junto à idéia de que diferenciais de temperatura geram esforços internos. Em suma, a relação tensão-deformação é dada por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \theta \delta_{ij} , \quad (2.39)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, ν é o coeficiente de Poisson, α é o coeficiente de expansão térmica e θ é a variação de temperatura a partir de um referencial.

A inversa desta relação, visando isolar as tensões, é vista na equação 2.40.

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (2.40)$$

Tendo isto em vista, é possível obter uma forma para o potencial elástico pela integração da equação 2.40 com relação à ϵ_{ij} , o que levaria à equação 2.41.

$$\Psi = G \left(\epsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk}^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta e \right) + f(\theta) \quad (2.41)$$

Para se chegar à equação 2.41, o conhecimento de que a derivada do traço do tensor de deformações em relação às deformações é igual ao delta Kronecker se faz necessário ($\frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \epsilon_{ij}} = \delta_{ij}$). Percebe-se que, a partir do potencial elástico definido pela equação 2.41, é possível obter as variáveis de estado que caracterizam um determinado estado termodinâmico de um sistema.

Além das variáveis de estado aparece um termo ($f(\theta)$) independente das tensões, resultado da integração. Este termo pode assumir a forma de uma função dependente apenas da temperatura e de ordem qualquer, podendo representar uma característica não-linear térmica do material.

2.3.6 Equação de Condução de Calor Termo-Elástica

Fazendo-se uso das equações 2.36 e 2.34 e sabendo-se que o calor específico é definido por $c_e = T \frac{\partial S}{\partial T}$, a equação de condução de calor pode ser escrita de uma forma mais adequada para aplicação (ou de uma forma mais conhecida e com possibilidade de se comparar com a equação 2.11), o que resulta em

$$k T_{,ii} = \rho \left(c_e \dot{T} - R - T \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial T} \dot{\epsilon}_{ij} \right), \quad (2.42)$$

onde k é coeficiente de condutividade térmica, T é a temperatura absoluta, ρ é a densidade do material, R é uma fonte de calor interna, Φ é a energia livre de Helmholtz e ϵ_{ij} é o tensor de deformações.

A equação 2.42 pode ser escrita em função da variação de temperatura θ ao se lembrar que a temperatura absoluta é igual a temperatura de referência θ_0 somada a θ , e que θ_0 , sendo constante, não varia com a posição nem com o tempo.

Outra consideração importante é que, se o acréscimo de temperatura for pequeno, o fator T da última parcela da equação 2.42, pode ser substituído por θ_0 . Tais considerações levam à equação 2.43:

$$k \theta_{,ii} = \rho \left(c_e \dot{\theta} - R - \theta_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij} \right), \quad (2.43)$$

Para se chegar à equação pretendida, é necessário substituir a equação 2.41 na equação 2.43. Antes disso, deve-se determinar a função $f(\theta)$, proveniente das propriedades do material considerado. Para simplificar, será considerado que a derivada em relação à temperatura deste termo é nula. Assim sendo, a substituição supramencionada resulta em:

$$k \theta_{,ii} = 2 G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} + \rho c_e \dot{\theta} - \rho R \quad (2.44)$$

Comparando a equação 2.44 com a equação 2.11, percebe-se o aparecimento de um termo a mais, o primeiro termo após a igualdade, que é o termo de acoplamento entre deformação e temperatura (PARKUS, 1976). Nota-se que apenas energia mecânica gasta em deformações volumétricas são convertidas em calor, visto que o termo é dependente do traço do tensor de taxa de deformação (LYKOTRAFITIS; GEORGIADIS, 2003).

Além disso, quando $\dot{\epsilon}_{ii}$ for negativo, ou seja, a taxa de deformação levar à compressão, haverá aquecimento do corpo, enquanto que, durante extensão, o corpo resfriará (Efeito de Gough-Joule). Em Boulanger et al. (2004) pode ser visto um gráfico que comprova tal efeito, visto que a energia termo-elástica zera ao final de cada ciclo de vibração, aquecendo durante a compressão e reduzindo ao ser invertida a carga.

2.3.7 Equação de Equilíbrio Termo-Elástica

Obtida a equação de calor que descreve o comportamento térmico transiente, busca-se a equação que define o comportamento elástico dinâmico.

Para se escrever a equação de equilíbrio termo-elástica, é preciso voltar à equação 2.22, o princípio da taxa de trabalho. O termo que define o trabalho realizado pelas forças internas (a parcela $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$) precisa ser integrado por partes e então aplicado o teorema da divergência, para que se tenha \dot{y}_i presente.

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{y}_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \dot{y}_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{i,j,j} \dot{y}_i dV \quad (2.45)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{y}_{i,j} dV = \oint_A \sigma_{ij} \dot{y}_i n_j dA - \int_V \sigma_{i,j,j} \dot{y}_i dV \quad (2.46)$$

Substituindo a equação 2.46 na equação 2.22 resulta em

$$\int_V \ddot{y}_i \dot{y}_i \rho dV = \int_V F_i \dot{y}_i dV + \oint_A f_i \dot{y}_i dA - \oint_A \sigma_{ij} \dot{y}_i n_j dA + \int_V \sigma_{ij,j} \dot{y}_i dV \quad (2.47)$$

Neste caso foi considerado que a força de corpo F_i não está aplicada em função da massa, mas sim do volume. Organizando os elementos:

$$\int_V [\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i] \dot{y}_i dV + \oint_A [f_i - \sigma_{ij} n_j] \dot{y}_i dA = 0 \quad \forall \dot{y}_i \quad (2.48)$$

Como esta identidade deve ser respeitada para qualquer \dot{y}_i , e isso acontece se e somente se

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad \forall y_i \in V \quad (2.49)$$

$$f_i = \sigma_{ij} n_j \quad \forall y_i \in A, \quad (2.50)$$

então a equação 2.49 define a equação de movimento, enquanto a equação 2.50 define o tensor de tensões.

Considerando a relação constitutiva termo-elástica dada pela equação 2.40, a equação de movimento 2.49 pode ser escrita na forma

$$\left[2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (2.51)$$

Em função das constantes de Lamé (λ e μ), 2.51 pode ser reescrita como

$$\left[2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta \delta_{ij} \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (2.52)$$

A equação de condução de calor transiente 2.44 junto à equação de equilíbrio dinâmico local 2.51 (ou equação 2.52) descrevem o comportamento termo-mecânico de um corpo elástico e condutor de calor, sendo estas as principais equações da teoria da termo-elasticidade acoplada.

A partir deste ponto serão apresentadas as teorias da termo-elasticidade chamadas de teorias hiperbólicas (itens 2.4, 2.5 e 2.6), pois empregam leis de propagação de calor com velocidades finitas, ao invés da lei de Fourier. Estas teorias não serão empregadas neste trabalho, porém sua discussão é de cunho básico e que no futuro poderão ser revistas.

2.4 Teoria da Termo-Elasticidade Generalizada

A lei empírica de transferência de calor por condução criada por Fourier diz que o fluxo de calor é proporcional à magnitude do gradiente da temperatura e de sinal oposto ao seu. Esta lei traz um problema referente à velocidade de propagação da temperatura, considerada infinita. Por conseguinte, a equação da temperatura é parabólica.

Refutando esta consideração, no artigo Lord e Shulman (1967) os autores substituem a lei de Fourier pela lei de Maxwell-Cattaneo, que a generaliza e introduz um tempo de relaxamento para assegurar velocidades finitas de propagação de calor e tornar a equação dinâmica de transmissão de calor em uma equação tipo onda, ou seja, hiperbólica (HETNARSKI; IGNACZAK, 2000; EL-MAGHRABY; YOSSEF, 2004). Esta equação pode ser vista a seguir (SHERIEF; HAMZA; SALEH, 2004).

$$-k \theta_{,i} = q_i + \tau_0 \dot{q}_i, \quad (2.53)$$

onde k é o coeficiente de condutividade térmica, θ é a variação de temperatura, q_i é o fluxo de calor, \dot{q}_i a derivada no tempo do fluxo e τ_0 é um tempo de relaxamento de temperatura.

Seguindo o desenvolvimento das equações apresentado na seção 2.3, a equação de condução de calor transiente da teoria da termo-elasticidade generalizada sem considerar fontes de calor interna, resulta em

$$\theta_{,ii} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] (\rho c_e \theta + v \theta_0 \epsilon_{kk}), \quad (2.54)$$

onde ρ é a densidade, v é o módulo de elasticidade térmico, dado por $v = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α é o coeficiente de expansão térmica, λ e μ são as constantes de Lamé, c_e é o calor específico e ϵ_{kk} é o traço do tensor de deformações.

Em termos do módulo de elasticidade transversal G e do coeficiente de Poisson ν , a equação 2.54 pode ser reescrita como

$$\theta_{,ii} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \left(\rho c_e \theta + 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta_0 \epsilon_{kk} \right) \quad (2.55)$$

As equações para sólidos anisotrópicos podem ser encontradas no artigo Baksi, Bera e Debnath (2004). Para cascas cilíndricas, vide artigos Muneeb, Birlik e Mengi (1995) e Birlik, Mengi e Muneeb (1995). Ambos trazem uma colocação interessante: o uso de variáveis de tensão, deslocamento e temperatura na face lateral da casca gera novos graus de liberdade que também podem ser restringidos.

2.5 Teoria da Termo-Elasticidade Dependente da Taxa de Temperatura

Uma segunda generalização da teoria clássica da termo-elasticidade foi proposta em Green e Lindsay (1972). Da mesma forma que a teoria da termo-elasticidade generalizada, a idéia é tornar a equação de condução de calor transiente em uma equação hiperbólica, porém neste caso também é alterada a equação de equilíbrio dinâmico local. A diferença está na proposta de utilizar dois tempos de relaxamento, como pode ser visto na equação 2.56 e na equação 2.57 (KOUREAS; CHARALAMBOPOULOS; KALPAKIDES, 2002).

$$\left[2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \right]_{,j} - \left[v \delta_{ij} (\theta + \tau_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (2.56)$$

$$\theta_{,ii} = \frac{1}{k} \left[\rho c_e \dot{\theta} + \rho c_e \tau_2 \ddot{\theta} + v \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} \right] \quad , \quad (2.57)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, ν é o coeficiente de Poisson, v é módulo de elasticidade térmico, τ_1 e τ_2 são tempos de relaxamento da temperatura, ρ é a densidade, k é o coeficiente de condutividade térmica, c_e é o calor específico e $\dot{\epsilon}$ é o traço do tensor de taxa de deformações.

A equação 2.56, em função das constantes de Lamé, pode ser reescrita como

$$\left[2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right]_{,j} - \left[v \delta_{ij} (\theta + \tau_1 \dot{\theta}) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (2.58)$$

2.6 Teoria da Termo-Elasticidade considerando Balanço de Entropia

Ao longo de cinco estudos (GREEN; NAGHDI, 1991, 1992, 1993, 1995a, 1995b), os autores da teoria desenvolvem uma forma alternativa para representar a equação de propagação de calor (QUINTANILLA, 2002). Ao invés de utilizar uma inequação de entropia (a inequação de Clausius), a teoria faz uso de um balanço de entropia geral.

$$\int_B \rho \dot{S} dB = \int_B \rho (\zeta + \varsigma) dB + \int_{\partial B} \varphi d\partial B \quad , \quad (2.59)$$

onde B representa o volume material de um corpo, ∂B sua superfície, ρ é a densidade, S é a entropia, ζ é a taxa de entrada de entropia externa, ς é a taxa de produção interna de entropia e φ é o fluxo de entropia pela superfície.

Além do uso de uma equação de balanço de entropia, foram apresentadas três tipos de equações constitutivas para caracterizar a resposta do material à propagação de calor. A primeira equação, quando linearizada, volta a equação parabólica de condução de calor. A segunda não admite dissipação de energia, e a terceira é o caso mais geral, onde a dissipação é permitida. Cada uma destas três equações acabou sendo reconhecida como teorias diferentes, sendo que a segunda, chamada de teoria da termo-elasticidade sem dissipação de energia, é a mais difundida (MUKHOPADHYAY, 2004).

Assim sendo, as equações básicas da teoria da termo-elasticidade considerando balanço de entropia, na ausência de forças de corpo e fonte de calor, em um corpo elástico, isotrópico e condutor de calor, são dadas por (MUKHOPADHYAY, 2004):

$$\mu \epsilon_{ij,j} + (\lambda + \mu) \epsilon_{ii,j} - \nu \theta_{,j} = -\rho \ddot{y}_i \quad (2.60)$$

$$\rho c_e \ddot{\theta} + \nu \theta_0 \ddot{\epsilon}_{kk} = k^* \theta_{,ii} , \quad (2.61)$$

onde k^* é uma constante do material, característica da teoria, que apesar da semelhança, não deve ser confundido com o coeficiente de condutividade térmica.

Uma mudança importante nesta teoria está na equação de calor, que não depende do tensor de taxa de deformação, mas sim de um tensor de mudança na taxa de deformação (segunda derivada no tempo do tensor de deformação). Para maiores informações sobre o estudo da entropia, vide o artigo Hall (2000), que faz uma extensa revisão bibliográfica sobre a entropia, tanto local, quanto global.

2.7 Termo-Plasticidade

A incorporação de variáveis termodinâmicas adicionais à teoria da termo-elasticidade clássica, conhecidas como variáveis internas, levou a descrições mais gerais do comportamento de materiais com propriedades inelásticas. Estas variáveis foram incorporadas com o objetivo de representar os efeitos dissipativos, como dano, relaxamento, deformação lenta e deformação plástica (HOLZAPFEL, 2004). Esta seção apresenta a generalização da termo-elasticidade, conhecida como termo-plasticidade, para incorporar a fração de trabalho plástico convertida em calor.

Desde os primeiros experimentos relativos ao estudo do aquecimento provocado pelas deformações plásticas, realizados em Farren e Taylor (1925) e em Taylor e Quinney (1934), foi percebido que era necessário desenvolver os modelos constitutivos para garantir uma previsão mais precisa da resposta mecânica de estruturas elasto-plásticas.

Assim sendo, em Dillon (1963) e em Perzyna e Sawczuk (1973) foram apresentadas as primeiras tentativas de desenvolver os modelos constitutivos, dentro de um fundamento termodinâmico, descrevendo não apenas a resposta elasto-plástica da estrutura, mas também a geração de calor e a evolução da temperatura (HAKANSSON; WALLIN; RISTINMAA, 2005). Independentemente, em Coleman e Noll (1963) foi apresentada uma descrição matemática da segunda lei da termodinâmica que foi estendida em Coleman e Gurtin (1967) para incorporar variáveis internas (LEE; CHEN, 2001; KAMLAH; HAUPT, 1997).

Estes estudos estabeleceram que, sendo um processo altamente dissipativo, cerca de 90% do trabalho plástico em metais é convertido em calor (BAMMANN, 1990) in (LEE; CHEN, 2001). O restante do trabalho é absorvido pela energia interna do sistema através da criação e realinhamento de imperfeições cristalinas, energia conhecida como trabalho frio (ROSAKIS et al., 2000).

Porém novos experimentos comprovam que esta parcela de trabalho plástico convertida em calor depende de diversos fatores, principalmente do nível de deformação plástica, da taxa de deformação e da temperatura, conversão esta que pode variar de 30% a até 100% (MASON; ROSAKIS; RAVICHANDRAN, 1994). Tais experimentos fomentaram uma nova linha de pesquisa que trata especificamente do trabalho frio e de como considerar a dependência deste trabalho na deformação plástica, na sua taxa e na temperatura, como, por exemplo, em Kamlah e Haupt (1997), em Rosakis et al. (2000) e em Ibrahimbegovic e Chorfi (2002).

Além da teoria das variáveis internas, outras teorias foram apresentadas como formas alternativas para o controle da deformação plástica e a respectiva geração de calor. É o caso, por exemplo, apresentado em Bertram (2003), onde é apresentada a teoria da termo-plasticidade baseada no isomorfismo, em que um tensor controla os efeitos da plasticidade, ao invés das variáveis internas. Esta formulação foi generalizada para o caso de mudança de fase em Dachkovsky e Bohm (2004). No caso da termo-plasticidade de variáveis internas, a mudança de fase é considerada no artigo Nedoma (1997).

Este trabalho segue a teoria da termo-plasticidade de variáveis internas, conforme os conceitos apresentados em Rosakis et al. (2000), Kamlah e Haupt (1997) e Holzapfel (2004) e a decomposição aditiva do tensor de deformações (SIMO; MIEHE, 1992).

2.7.1 Primeira e Segunda Lei da Termodinâmica

A equação de calor da termo-plasticidade se baseia na lei de conservação de energia e na segunda lei da termodinâmica, na forma da inequação de Clausius-Duhem,

$$\rho \dot{u} - \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + q_{i,i} - \rho R = 0 \quad (2.62)$$

$$\rho \theta \dot{S} - \rho R + q_{i,i} - \frac{q_i}{\theta} \theta_{,i} \geq 0, \quad (2.63)$$

onde \dot{u} é a variação da energia interna, σ é o tensor de tensões, $\dot{\epsilon}$ é a taxa de deformação, q é o fluxo de calor, R é uma fonte de calor interna, θ é a variação de temperatura e S é a entropia. Combinando-se as duas equações e relembrando a energia livre de Helmholtz, dada por $\Phi = U - \theta S$, resulta em

$$\underbrace{-\rho \dot{\Phi} - \rho S \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}_{\Lambda} - \frac{q_i}{\theta} \theta_{,i} \geq 0 \quad (2.64)$$

onde Λ é a dissipação interna. Re-escrevendo-se a equação de conservação de energia em termos da dissipação, a seguinte equação é obtida:

$$\rho \theta \dot{S} = \Lambda - q_{i,i} + \rho R \quad (2.65)$$

Definida a dissipação pelo uso da primeira e segunda lei da termodinâmica, busca-se a dissipação pela teoria das variáveis internas.

2.7.2 Teoria das Variáveis Internas

A forma mais comum de desenvolver a plasticidade é adicionar às relações constitutivas variáveis internas que venham a representar a deformação plástica e/ou a superfície de escoamento. No caso desenvolvido aqui, serão introduzidas duas variáveis, ϵ_{ij}^p e ξ_i , que são a deformação plástica e a variável de endurecimento (ou interna).

Dito isto, as leis constitutivas para σ_{ij} , u , S , q_i e Φ , assim como as leis de evolução para as taxas $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ e $\dot{\xi}_i$, são expressas em função das variáveis de estado, como sugerido pela noção de equipresença (TRUESDELL; TOUPIN, 1960) in (ROSAKIS et al., 2000) e (LEE; CHEN, 2001). Isto significa que, para todo processo termo-mecânico, as funções constitutivas e de evolução são dadas pelas seguintes variáveis: a deformação elástica ϵ_{ij}^e , a variação de temperatura θ , o gradiente de temperatura $\theta_{,i}$ e o vetor de parâmetros que define o endurecimento plástico ξ_i . A partir desse ponto o gradiente de temperatura $\theta_{,i}$ será chamado Θ para simplificar a notação.

Para o cálculo de tensões para problemas de deformação inelástica de sólidos, baseados em deformações, a decomposição do tensor de deformações é feita de forma multiplicativa (LEHMANN; BLIX, 1985; KOJIC, 2002; CANADIJA; BRNIC, 2004). Porém, para o caso especial da plasticidade clássica, que será restrito aqui, a decomposição do tensor de deformações é feita de forma aditiva, conforme a equação 2.66 (ROSAKIS et al., 2000).

$$\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (2.66)$$

Assim sendo, a taxa da energia livre de Helmholtz é dada por

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (2.67)$$

Substituindo a expressão 2.67 na inequação 2.64, resulta em

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left(S + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - \frac{q_i}{\theta} \Theta \geq 0 \quad (2.68)$$

Como a inequação 2.68 deve se manter para qualquer processo termo-mecânico, ou seja, para qualquer valor de $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\Theta}$, estes podem ser considerados arbitrários, e as relações com as quais estão relacionadas tem que manter a igualdade. Isto implica em

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = 0 \rightarrow \Phi = \Phi(\epsilon_{ij}^e, \xi_i, \theta) \quad (2.69)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad (2.70)$$

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (2.71)$$

Para simples comparação, vide equações 2.33, 2.34 e 2.35. A inequação 2.68 fica desta forma reduzida a

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - \frac{q_i}{\theta} \Theta}_{\geq 0} \geq 0 \quad (2.72)$$

Considerando-se as definições dadas nas equações 2.69, 2.70 e 2.71, e substituindo-se o termo que define a dissipação interna da inequação 2.72 na equação 2.65, chega-se à equação

$$-\rho \theta \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \theta} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (2.73)$$

O termo à esquerda da igualdade pode ser derivado utilizando a regra da cadeia, como pode ser visto na equação 2.74.

$$-\rho \theta \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \epsilon_{ij}^e} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \dot{\theta} \right) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i - q_{i,i} + \rho R \quad (2.74)$$

Antes de prosseguir, é necessário definir a energia de trabalho frio \bar{E} , que é a quantidade de energia absorvida pela criação e reordenação de imperfeições dos cristais do material (ROSAKIS et al., 2000), como sendo

$$\bar{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} - \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \xi_i} \quad (2.75)$$

Lembrando-se a definição de calor específico $c_e = -\theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}$, a lei empírica de condução de calor de Fourier dada pela equação 2.4, e a definição de energia de trabalho frio dada pela equação 2.75, a equação 2.74 pode ser reescrita como

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \underbrace{\theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e}_{H_{\text{elast}}} + \underbrace{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p}_{H_{\text{plast}}} - \rho \underbrace{\frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi_i}(\xi) \dot{\xi}_i}_{H_{\text{TF}}} \quad (2.76)$$

Na equação 2.76 podem ser vistos três termos relacionados à geração de calor devido ao acoplamento termo-mecânico. O primeiro é referente a produção de calor devido à deformações elásticas (H_{elast}), o segundo relacionado à dissipação de trabalho mecânico plástico em forma de calor (H_{plast}), e por último, a energia retida como trabalho frio (H_{TF}) (CANADIJA; BRNIC, 2004).

O calor dissipado pelo corpo durante trabalho plástico está diretamente relacionado a este termo, visto que o trabalho frio é uma forma de energia que é absorvida pelo corpo e não é dissipada, dependente da temperatura, da deformação plástica e da taxa de deformação. Por assim ser, não pode ser considerado constante, visto a existência de grandes variações encontradas em experimentos científicos (HAKANSSON; WALLIN; RISTINMAA, 2005). Porém, para o caso de metais e pela falta de informações e estudos mais precisos sobre a relação entre o trabalho frio, a temperatura, a deformação plástica e a taxa de deformação, este termo pode ser considerado constante (CANADIJA; BRNIC, 2004).

A partir destes argumentos, é feita a seguinte simplificação:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi_i}(\xi) \dot{\xi}_i = \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (2.77)$$

onde β é uma constante e define a quantidade de trabalho mecânico plástico convertido em calor. Em geral, adota-se seu valor variando entre $0.8 \leq \beta \leq 1.0$, o que significa que

gera-se de 80% a 100% de calor por deformação plástica (SIMO; MIEHE, 1992; ROSAKIS et al., 2000).

A substituição da expressão 2.77 na equação de energia 2.76 define a versão final da equação de transferência de calor da termo-plasticidade, equação 2.78, que será aplicada neste trabalho.

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R + \theta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.78)$$

Com relação à equação de equilíbrio dinâmico ou de movimento, será utilizada a equação 2.49, porém considerando-se uma relação constitutiva termo-elasto-plástica. Por melhor adequação, tal relação é apresentada apenas no capítulo 6.

2.7.3 Critérios de Escoamento ou Plastificação

Em Simo e Miehe (1992) e em Armero e Simo (1993) foram realizadas as primeiras tentativas de tornar as curvas de escoamento do material dependente da temperatura (CANADIJA; BRNIC, 2004). As curvas de escoamento são as funções que definem uma superfície no espaço de tensões, em que o seu contorno define o comportamento plástico do material e seu interior define o comportamento elástico. Qualquer estado de tensão que resulte em um ponto fora desta superfície é considerado inadmissível.

A consideração adequada dos termos da função de escoamento dependentes da temperatura ainda está em desenvolvimento. Apenas alguns artigos apresentam tal relação. É o caso do artigo Laloui e Cekerevac (2003), que apresenta um critério de plastificação que é função da temperatura, porém para argilas. Além deste, no artigo de Saracibar, Cervera e Chiumenti (1999) são apresentadas funções em que todos os parâmetros do material são dependentes da temperatura, para o caso específico de solidificação.

Além disso, no que condizem as propriedades elásticas dos materiais nos casos em que a plasticidade for considerada, estas serão consideradas independentes da temperatura. Esta simplificação é razoável do ponto de vista prático, já que em problemas envolvendo plasticidade os efeitos da dependência da temperatura nas propriedades elásticas vão ser de importância secundária (BOLEY; WEINER, 1960).

3 Método dos Elementos Finitos Aplicado à Termodinâmica

Concebido para resolução de problemas mecânicos, o método dos elementos finitos rapidamente ganhou notoriedade graças sua relativa simplicidade na resolução de problemas complexos. Como problemas complexos entendem-se modelos matemáticos que representam o comportamento físico de meios contínuos, expressos por equações diferenciais em termos de várias incógnitas, como por exemplo, deformação de meio elástico, condução de calor, distorção de campo eletromagnético, fluxo por meio poroso, entre outros.

Tais equações tem solução analítica apenas quando são realizadas grandes simplificações, tornando os problemas estudados bem mais simples, porém menos realistas. Os métodos numéricos, dentre eles o método dos elementos finitos, possibilitam aproximar a resposta por um número finito de pontos ao invés de todo o contínuo. Esta aproximação converge para a resposta do problema estudado a medida que o número de pontos (ou nós) cresce.

No método dos elementos finitos o domínio (ou seja, o contínuo limitado por condições de contorno) é discretizado em um número finito de subdomínios chamados de elementos, conectados por meio de nós. Um exemplo de discretização de um sólido é apresentado na figura 2. Cabe ressaltar que Ω representa o domínio do sólido de contorno Γ , Γ_1 e Γ_2 são partes distintas do contorno, em que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

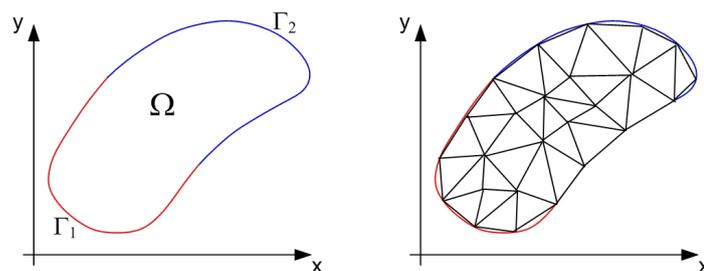


Figura 2: Exemplo de discretização de um sólido.

Como conseqüência da discretização em elementos, o equilíbrio do contínuo estabelecido pelo modelo matemático é substituído pelo equilíbrio dos nós constituintes da discretização. Assim, cada elemento terá uma equação algébrica que representa o seu contínuo (internamente) e o sistema de equações de equilíbrio dos elementos a partir dos seus nós permite a determinação da solução aproximada das incógnitas procuradas.

Neste capítulo são apresentados os passos para elaborar o sistema de equações algébricas definido pelo método dos elementos finitos para aproximar o problema de condução de calor. Para maiores detalhes no método dos elementos finitos, o leitor é referenciado para os trabalhos de Becker, Carey e Oden (1981), Bathe (1982), Cook, Malkus e Plesha (1989), Lewis et al. (1996). Sendo um método bastante difundido, diversas outras fontes podem ser encontradas na literatura especializada.

3.1 Discretização do Problema de Condução de Calor

O comportamento termodinâmico de um corpo condutor de calor é expresso pela equação diferencial de condução de calor transiente (equação 2.11), transcrita abaixo.

$$\rho c_e \dot{\theta} = k \theta_{,ii} + \rho R \quad , \quad (3.1)$$

onde ρ é a massa específica, c_e é o calor específico, θ é a variação de temperatura, k é o coeficiente de condutividade térmica e R é uma fonte de calor interna. A equação 3.1 está submetida as seguintes condições de contorno e iniciais:

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad \forall x_i \in \Gamma_1, t > 0 \quad (3.2)$$

$$q(x_i, t) = -k \theta_{,n} \quad \forall x_i \in \Gamma_2, t > 0 \quad (3.3)$$

$$\theta = \theta_0(x_i) \quad \forall x_i \in \Omega, t = 0 \quad (3.4)$$

onde $\theta(x_i, t)$ prescreve a temperatura no contorno Γ_1 , $q(x_i, t)$ é o fluxo de calor em Γ_2 , n é a normal à superfície Γ_2 e $\theta_0(x_i)$ prescreve a temperatura no domínio Ω .

O corpo a ser analisado tem seu domínio subdividido em elementos de dimensões conhecidas e finitas, como pode ser visto na figura 2. Isto implica que a variável principal (no caso a temperatura) pode ser aproximada por uma série de funções, dada por

$$\theta = \theta_i \psi_i \quad , \quad (3.5)$$

onde θ_i é a temperatura no nó i e ψ_i são as funções de aproximação do elemento, também chamadas de funções de forma, com i variando de 1 até o número de nós.

3.2 Métodos dos Resíduos Ponderados

Uma das formas de se chegar às equações algébricas que aproximam a solução da equação 3.1 é utilizar um dos métodos de resíduos ponderados, em especial o de Galerkin (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). Para tanto, a equação diferencial de condução de calor, equação 3.1, é ponderada em seu domínio, levando à

$$\int_V k \theta_{,ii} W dV - \int_V \rho c_e \dot{\theta} W dV = 0 \quad , \quad (3.6)$$

onde W denota funções arbitradas para ponderar a equação, dadas por

$$W = w_j \psi_j \quad , \quad (3.7)$$

onde ψ_j são as funções de ponderação que, de acordo com o método de Galerkin, tem a mesma forma das funções de forma, w_j são constantes arbitrárias associadas aos nós j do elemento finito. Substituindo as equações 3.5 e 3.7 na equação 3.6, chega-se a seguinte equação

$$\int_V k (\theta_i \psi_i)_{,kk} w_j \psi_j dV - \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \psi_i w_j \psi_j dV = 0 \quad (3.8)$$

Como a solução deve ser obtida para qualquer valor de w_j , e sendo θ_i constante ao longo dos elementos, então a equação 3.8 pode ser reduzida para:

$$\int_V k \theta_i \psi_{i,kk} \psi_j dV - \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j dV = 0 \quad (3.9)$$

Substituindo convenientemente o núcleo da primeira integral da equação 3.9 por expressão equivalente tem-se:

$$\int_V k \theta_i \psi_{i,k} \psi_{j,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j dV - \int_V k \theta_i (\psi_{i,k} \psi_j)_{,k} dV = 0 \quad (3.10)$$

Aplicando o teorema da divergência sobre a última parcela da equação 3.10 resulta em

$$\int_V k \theta_i \psi_{i,k} \psi_{j,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j dV - \int_A k \theta_i \psi_{i,n} \psi_j dA = 0 \quad , \quad (3.11)$$

onde n representa a direção normal à superfície A . Deve-se comentar que a aplicação do teorema da divergência reduz as exigências de continuidade no campo da temperatura, o que resulta no que se chama de representação fraca do problema de valor de contorno.

A última parcela da equação 3.11 representa as forças termodinâmicas aplicadas no contorno e pode ser reescrita se for aplicada a equação 3.3, levando a

$$\int_V k \theta_i \psi_{i,k} \psi_{j,k} dV + \int_V \rho c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j dV + \int_A q \psi_j dA = 0 \quad (3.12)$$

Para facilitar a notação, a equação 3.12 pode ser escrita de forma matricial, da seguinte maneira

$$C_{ij} \dot{\theta}_i + K_{ij} \theta_i = F_j \quad , \quad (3.13)$$

onde

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \psi_i \psi_j dV \quad (3.14)$$

$$K_{ij} = \int_V k \psi_{i,k} \psi_{j,k} dV \quad (3.15)$$

$$F_j = - \int_A q \psi_j dA \quad (3.16)$$

3.3 Integração Temporal de Equações Parabólicas

Antes de introduzir o elemento utilizado na aproximação da equação 3.13, são montadas as equações empregadas na integração temporal. O método alfa de aproximação temporal é utilizado na resolução de sistemas parabólicos, como o da equação de condução de calor transiente (BATHE, 1982). São utilizadas duas equações para aproximar a temperatura:

$$\dot{\theta}_i^{t+\Delta t} = \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$\theta_i^{t+\Delta t} = (1 - \bar{\alpha})\theta_i^t + \bar{\alpha} \theta_i^{t+\Delta t} \quad , \quad (3.18)$$

onde $\bar{\alpha}$ é um parâmetro da aproximação temporal, ajustado conforme necessário. A tabela 1 apresenta alguns valores para $\bar{\alpha}$ e o respectivo nome dado ao método.

Tabela 1: Métodos da Família Alfa de Integração Temporal

Nome do Método	$\bar{\alpha}$
Euler	0
Crank-Nicolson	$\frac{1}{2}$
Galerkin	$\frac{2}{3}$

Fonte: Zienkiewicz e Taylor (2000).

Normalmente emprega-se o método de Crank-Nicolson para aproximar a taxa de temperatura de forma constante e igual a média entre t e $t + \Delta t$. Aplicando as

equações 3.17 e 3.18 na equação 3.13 resulta em

$$\{C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}\} \theta_i^{t+\Delta t} = \{C_{ij} - \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}\} \theta_i^t + \Delta t \{\bar{\alpha} F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t\} \quad (3.19)$$

3.4 Elemento Unidimensional Linear

A partir deste ponto é possível elaborar o sistema de equações que irá definir os valores nodais da temperatura. Para tanto é introduzido o elemento unidimensional utilizado na aproximação. Este consiste de dois nós, localizados em $\xi = -1$ e $\xi = 1$, conforme a figura 3.



Figura 3: Elemento Linear Unidimensional.

As funções de forma em função de ξ são dadas por

$$\psi_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (3.20)$$

$$\psi_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (3.21)$$

As coordenadas do elemento apresentado, chamada de locais, são definidas apenas para o domínio $-1 \leq \xi \leq 1$. Para problemas que envolvem domínios mais gerais, por exemplo, $x_1 \leq x \leq x_2$, há a necessidade de se mapear as coordenadas locais (em ξ) para as coordenadas globais (em x). Neste trabalho foi feito um mapeamento isoparamétrico, definido por

$$x = x_i \psi_i(\xi) \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad , \quad (3.22)$$

para i variando de 1 até 2. Neste caso, as integrais da equação 3.13 ficam escritas em termos da variável adimensional ξ

$$C_{ij} = \int_{-1}^1 \rho c_e \psi_i \psi_j J d\xi \quad (3.23)$$

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 k \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} J d\xi \quad (3.24)$$

$$F_j = -q_j \quad (3.25)$$

onde J é o jacobiano da transformação de x para ξ . Considerando l_0 o comprimento da

barra, para o caso unidimensional o jacobiano é dado por

$$J = \frac{l_0}{2} \tag{3.26}$$

4 Método dos Elementos Finitos Posicional

A formulação é dita posicional visto o equacionamento ser baseado nas posições nodais do corpo, ao invés dos deslocamentos, como comumente feito. Apresentada inicialmente em Coda (2003), a formulação é revista a seguir, porém antes de abordar o método algumas definições necessárias são elucidadas. Grande parte dos conceitos apresentados podem ser encontrados em Ciarlet (1993) e em Ogden (1984).

Não é objetivo desta tese fazer uma descrição extensa do método dos elementos finitos posicional, mas sim apresentar de forma direta os principais pontos para o entendimento do mesmo. Os detalhes de passagens algébricas para a análise dinâmica de pórticos planos, onde se aplica a hipótese cinemática de Euler-Bernoulli associada à deformação não-linear de engenharia, pode ser visto em Greco (2004). Para o caso onde se aplica a deformação de engenharia para sólidos planos e sólidos tridimensionais, vide Marques (2006) e Maciel (2008), respectivamente.

Esta mesma medida de deformação foi aplicada para casca fina em Coda e Paccola (2007), enquanto que a deformação de Green e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para cascas segundo hipótese de Reissner com enriquecimento transversal foi aplicada em Coda e Paccola (2008). A deformação de Green também foi aplicada à vários modelos hiperelásticos em Pascon (2008). Finalmente, a deformação de Green e o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff foi aplicado às barras gerais bi- e tridimensionais laminadas em Minski (2008) e em Coda (2008), respectivamente.

4.1 Mudança de Configuração

Seja um conjunto de partículas X em um determinado estado inicial (configuração inicial B_0), que passa por alterações na sua posição e forma chegando a outra configuração qualquer (configuração atual B_1). Define-se função mudança de configuração $f(x)$ como sendo a função que determina o movimento destas partículas de uma configuração a outra, conforme apresentado na figura 4.

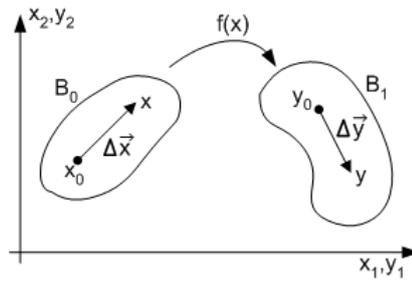


Figura 4: Mudança de Configuração de Um Corpo.

A função mudança de configuração pode ser interpretada como a função matemática que determina o deslocamento, rotação e deformação dos pontos de um corpo de uma configuração para outra, em termos da posição.

Sendo x_0 e x pontos pertencentes à B_0 , x pertencente a vizinhança de x_0 e $\Delta\vec{x}$ o vetor determinado por estes pontos, a imagem de x ($Im(x)$) em B_1 pode ser determinada pela aplicação da função mudança de configuração f em x_0 , da seguinte forma

$$Im(x) = f(x) = y = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \Delta\vec{x} + O^2 \quad (4.1)$$

A mudança de configuração de um corpo pode levar a alterações na forma deste. Estas alterações são chamadas de deformação. O estado de deformação do corpo pode ser definido por meio do gradiente da função mudança de configuração. Fazendo-se $\Delta\vec{x} \rightarrow 0$ na equação 4.1, esta pode ser reescrita como

$$y - y_0 = dy = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} dx \quad (4.2)$$

Em notação indicial,

$$dy_i = f_{i,j}|_{x_0} dx_j \quad (4.3)$$

O termo $f_{i,j}|_{x_0}$ determina a mudança de forma de um ponto arbitrário x_0 quando este sai da configuração B_0 para a configuração genérica B_1 . Para efeitos de simplificação da notação, este termo será chamado de \mathbf{A} daqui por diante. Cabe salientar que a vírgula junto aos índices indica derivada em relação à posição. Percebe-se que \mathbf{A} independe do movimento de corpo rígido, uma propriedade muito importante quando há necessidade de tratamentos não-lineares que envolvem grandes deslocamentos.

Devido ao fato da configuração de referência ser a inicial, a descrição do movimento é chamada Lagrangeana. Assim sendo, quando necessário, as operações diferenciais e integrais serão realizadas em relação ao estado inicial do corpo.

4.2 Tensor de Deformação de Green-Lagrange

O tensor de deformação de Green-Lagrange é definido da seguinte forma:

$$\mathbf{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad \text{ou} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (4.5)$$

No segundo caso o tensor está escrito em termos do gradiente da função mudança de configuração \mathbf{A} , sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

4.3 Tensor de Deformação de Engenharia

O tensor de deformação de engenharia é definido pela deformação longitudinal de uma fibra e pela distorção de duas fibras pertencentes à configuração inicial B_0 em relação à configuração atual B_1 .

4.3.1 Deformação Longitudinal

Considerando uma fibra na configuração B_0 , chamada de $d\vec{x}$, e esta mesma fibra na configuração B_1 , renomeada para $d\vec{y}$, definidas por

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \vec{u} dx \\ d\vec{y} &= \vec{v} dy, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde \vec{u} e \vec{v} são versores na direção de $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$ e dx e dy o comprimento das fibras, respectivamente, e pela definição dada por 4.3, então

$$\vec{v} dy = \mathbf{A} \vec{u} dx \quad (4.7)$$

$$\vec{v}^T \vec{v} dy^2 = dx^2 \vec{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{u} \quad (4.8)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\vec{u}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{u} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

O termo dy/dx na equação 4.9 é conhecido como alongamento relativo da fibra inicialmente na direção \vec{u} em relação à fibra na direção atual \vec{v} , e tem como símbolo $\lambda(u)$. Além disso, o sobrescrito T denota transposta e $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ define o tensor de alongamento de Cauchy-Green, \mathbf{C} . Como fazem referência apenas à configuração inicial, tanto λ quanto \mathbf{C} são grandezas lagrangeanas e, assim como \mathbf{A} , independem do movimento de corpo rígido.

A partir do alongamento λ se define a deformação longitudinal de engenharia ε , em cada direção, como sendo

$$\varepsilon(u) = \lambda(u) - 1 = \frac{dy - dx}{dx} \quad (4.10)$$

4.3.2 Distorção

Sejam $d\vec{x}$ e $d\vec{x}'$ vetores de duas direções quaisquer não coincidentes na configuração inicial e $d\vec{y}$ e $d\vec{y}'$ estes mesmos vetores definidos após a mudança de configuração. De acordo com a equação 4.7

$$\vec{v} = \mathbf{A} \vec{u} \frac{dx}{dy} = \frac{\mathbf{A} \vec{u}}{\lambda(u)} \quad \text{e} \quad (4.11)$$

$$\vec{v}' = \mathbf{A} \vec{u}' \frac{dx'}{dy'} = \frac{\mathbf{A} \vec{u}'}{\lambda(u')} \quad (4.12)$$

Utilizando-se as expressões 4.11 e 4.12, o ângulo θ formado pelos versores \vec{v} e \vec{v}' na configuração atual pode ser escrito em função da configuração inicial da seguinte forma

$$\cos \theta = \frac{\vec{u}^T \mathbf{C} \vec{u}'}{\lambda(u) \lambda(u')} \quad (4.13)$$

A diferença entre os ângulos formado pelos versores \vec{u} e \vec{u}' e por \vec{v} e \vec{v}' é chamada distorção, ou seja, a variação do ângulo de duas fibras quaisquer entre a configuração inicial e atual.

Considerando \vec{u} e \vec{u}' ortogonais, ou seja, o ângulo formado por eles reto, então a distorção γ é dada por

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\vec{u}^T \mathbf{C} \vec{u}'}{\lambda(u) \lambda(u')} \right) \quad (4.14)$$

Definidas a deformação longitudinal ε e a distorção γ , o pseudo-tensor de deformação de engenharia, no caso para três dimensões, é montado da seguinte forma:

$$\epsilon_{ij} = \mathbf{C}_{ij}^{1/2} - 1 \quad \forall \quad i = j \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\mathbf{C}_{ij}}{(\mathbf{C}_{(i)} \mathbf{C}_{(j)})^{1/2}} \right) \right] \quad \forall \quad i \neq j, \quad (4.16)$$

onde os termos de \mathbf{C} com apenas um índice representam a diagonal do tensor, destacando que os índices entre parênteses não representam soma. Como o pseudo-tensor de deformação de engenharia independe de translações e rotações, é objetivo. Assim sendo, ele pode ser utilizado para o cálculo de grandes deslocamentos.

4.4 Pares Conjugados de Tensão e Deformação

O potencial elástico Ψ é tido como uma forma de se definir as propriedades elásticas de um corpo, podendo ser entendido como o funcional de energia de deformação. Sua derivada em relação a uma medida de deformação qualquer, resulta na medida de tensão energeticamente consistente a esta medida de deformação, definindo, desta forma, um par conjugado de tensão (σ_{ij}) e deformação (ϵ_{ij}). Matematicamente se escreve

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (4.17)$$

O foco principal deste trabalho é o pseudo-tensor de deformação de Engenharia, visto na seção 4.3, que é par conjugado de um tensor de tensão chamado simplesmente de σ , que será usado na formulação da treliça, e no par composto pelo tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}) e o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{P}), que será utilizado na formulação da chapa.

Outro par importante, citado apenas como exemplo e que não será utilizado neste trabalho, é o tensor gradiente da função mudança de configuração (\mathbf{A}) e o tensor de Piola-Kirchhoff de Primeira Espécie (\mathbf{S}). As definições dos tensores de Piola-Kirchhoff podem ser encontrados, por exemplo, em Malvern (1969) ou em Lanczos (1986).

O estudo dos pares energeticamente consistentes é importante pois a relação abaixo permanece equivalente ao se calibrar a lei constitutiva, representando a energia de deformação do corpo:

$$\sigma_{ij} \epsilon_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij} \Leftrightarrow \mathbf{S}_{ij} \mathbf{A}_{ij} \quad (4.18)$$

As representações em 4.18 levarão às leis constitutivas lineares, a primeira similar à lei de Hooke, e a segunda ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff. Modelos hiperelásticos e referências a estudos aprofundados sobre estes podem ser vistos em Pascon (2008).

4.5 Princípio da Taxa de Trabalho ou Estacionariedade

O princípio da taxa de trabalho, já explicado no capítulo 2, seção 2.3, pode ser visto como um balanço de energia, lembrando que este pode ser escrito na forma

$$\dot{\Pi} = \int_V \dot{y}_i \dot{y}_i \rho dV - \int_V F_i \dot{y}_i dV - \oint_A f_i \dot{y}_i dA + \int_V \mathbf{P}_{ij} \dot{\mathbf{E}}_{ij} dV = 0 \quad (4.19)$$

O último termo da expressão 4.19 representa a quantidade de energia armazenada no corpo, ou simplesmente energia de deformação, que, apesar de escrita em termos da deformação de Green-Lagrange e do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, poderia ter sido escrita para qualquer par conjugado. Como a medida de tensão e deformação pode ser qualquer, desde que o par seja energeticamente consistente, no modelo de treliça será utilizado o par tensor de deformação de engenharia (ϵ_{ij}) e o tensor de tensão correspondente (σ_{ij}), e no modelo de casca será utilizado o par tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}) e o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{P}).

O princípio da estacionariedade diz que a variação da energia total de um sistema conservativo é zero, seja qual for a variação adotada. Isto significa que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0 \quad , \quad (4.20)$$

onde α pode ser uma grandeza qualquer, inclusive, como na equação 4.19, o tempo. Para o método proposto em Coda (2003), α são as posições nodais na configuração atual do corpo.

4.6 Método de Newton-Raphson

Sejam F_{ext} e F_{int} vetores que contém as cargas nodais aplicadas, respectivamente, externa e internamente em um corpo discretizado. O sistema de equações a ser resolvido resume-se a

$$F_{ext} - F_{int} = 0 \quad (4.21)$$

Como o vetor de forças internas F_{int} depende de forma não linear das posições, um vetor de desbalanceamento será gerado na expressão 4.21, pois o sistema não estará em equilíbrio e F_{int} terá de ser corrigido:

$$F_{ext} - F_{int}(y^i) = \Delta F(y^i) \quad , \quad (4.22)$$

onde (y^i) indica que tanto o vetor de forças internas F_{int} quanto o vetor de desbalanceamento ΔF dependem das posições do passo atual, considerando um processo iterativo. Para equilibrar o sistema, um novo vetor de forças internas deverá ser gerado, até que ΔF ou Δy (resíduo de posição) seja suficientemente pequeno. Considerando que as cargas externas independem dos resíduos, ΔF pode ser expandido em uma série de Taylor.

$$\Delta F(y^i) = \Delta F(y^{i-1}) + \left. \frac{\partial \Delta F}{\partial y} \right|_{y^{i-1}} (y^i - y^{i-1}) + \text{termos de ordem maior} \quad (4.23)$$

Considerando que os termos de ordem maior podem ser desprezados, o acréscimo ou resíduo das posições pode ser calculado da seguinte forma

$$\left. \frac{\partial \Delta F}{\partial y} \right|_{y^{i-1}} \Delta y^i = F_{ext} - F_{int}(y^{i-1}) \quad (4.24)$$

De posse do valor de Δy^i , verifica-se se o mesmo é suficientemente pequeno dentro de uma determinada tolerância. Para isso, utiliza-se uma expressão denominada critério de convergência:

$$\text{Erro} = \frac{\|\Delta y^i\|}{\|y_0\|} \leq \text{Tolerância} \quad , \quad (4.25)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

4.7 Método dos Elementos Finitos Posicional Estático

Tendo sido apresentado todos os conceitos necessários para a completa explicação do método dos elementos finitos posicional (MEFP), sua apresentação pode ser continuada. O MEFP busca determinar a posição de equilíbrio entre as forças externas e internas de um corpo. Relembrando a equação 4.19, suprimindo os efeitos da inércia para facilitar a explanação,

$$\Pi = \underbrace{\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV}_{\text{Energia de Deformação}} - \underbrace{\int_V F_i y_i dV - \oint_A f_i y_i dA}_{\text{Potencial das Forças Externas}} \quad (4.26)$$

Aplicando a definição dada pelas equações 4.18 e 4.20, considerando α como sendo as posições do corpo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\int_V \Psi dV - \int_V F_j y_j dV - \oint_A f_j y_j dA \right] \\ &= \underbrace{\int_V \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dV}_{\text{Forças Internas}} - \underbrace{\int_V F_i dV - \oint_A f_i dA}_{\text{Forças Externas}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Na equação 4.27, o termo de força interna, ou seja, a derivada do potencial elástico (ou da energia de deformação) em relação à posição pode ser encontrado da seguinte maneira

$$\int_V \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dV = \int_V \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{jk}} \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial y_i} dV \quad (4.28)$$

A derivada do potencial elástico em relação às deformações é igual às tensões, como pode ser observado na expressão 4.17. Este valor é conhecido, visto que a posição atual, arbitrada ou não, é conhecida.

Com relação a segunda parte do termo de força interna, primeiramente será feita a derivada do tensor de deformações de engenharia em relação à posição, visto que seu desenvolvimento é mais complexo. Assim sendo, de acordo com as expressões 4.15 e 4.16, para os elementos da diagonal ($j = k$), este pode ser determinado como

$$\frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} [\mathbf{C}_{jk}^{1/2} - 1] \quad (4.29)$$

Para os elementos fora da diagonal ($j \neq k$), o tensor de deformações de engenharia pode ser determinado como

$$\frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\mathbf{C}_{jk}}{(\mathbf{C}_{(j)} \mathbf{C}_{(k)})^{1/2}} \right) \right] \right\}, \quad (4.30)$$

onde os termos de \mathbf{C} com apenas um índice representam os termos da diagonal e, lembrando, os índices repetidos entre parênteses não representam soma.

Para simplificar a notação das equações subsequentes, será definido o termo \mathbf{Z} como sendo

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{C}_{jk}}{\lambda_{(j)} \lambda_{(k)}} \quad (4.31)$$

Desenvolvendo as equações 4.29 e 4.30, resulta em

$$\frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial y_i} = \frac{1}{\lambda_{(j)}} \left[\mathbf{A}_{lj} \frac{\partial \mathbf{A}_{lk}}{\partial y_i} \right] \quad \forall j = k \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial y_i} = [1 - \mathbf{Z}^2]^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y_i} \quad \forall j \neq k \quad (4.33)$$

O termo que ainda deve ser derivado na equação acima pode ser desenvolvido na forma

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\mathbf{C}_{jk}}{\lambda_{(j)} \lambda_{(k)}} \right) = \frac{1}{\lambda_{(j)} \lambda_{(k)}} \frac{\partial \mathbf{C}_{jk}}{\partial y_i} + \frac{\mathbf{C}_{jk}}{\lambda_{(j)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\lambda_{(k)}} \right) + \frac{\mathbf{C}_{jk}}{\lambda_{(k)}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{\lambda_{(j)}} \right) \quad (4.34)$$

Obviamente que a derivada do tensor de Green em relação às posições é muito mais simples, e, de acordo com a equação 4.5, resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{jk}}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{C}_{jk} - \mathbf{I}_{jk})}{\partial y_i} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{jk}}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{A}_{lj} \mathbf{A}_{lk})}{\partial y_i} \quad (4.36)$$

$$= \mathbf{A}_{lj} \frac{\partial (\mathbf{A}_{lk})}{\partial y_i} \quad (4.37)$$

Com essas informações é possível determinar a força interna, obtida pela posição tentativa y_i . Em seguida aplica-se o método de Newton-Raphson para determinar uma nova posição tentativa, resultante da expressão

$$y_i^{t+1} = y_i^t + \Delta y_i^t \quad , \quad (4.38)$$

onde y_i^{t+1} é a nova posição, y_i^t é a posição atual (conhecida – seja arbitrada, seja corrigida pela iteração anterior) e Δy_i^t o acréscimo ou resíduo na posição, obtido por

$$\Delta y_i^t = H_{ij}^{-1} (F_{int} - F_{ext}) \quad , \quad (4.39)$$

onde a definição das forças internas F_{int} e das forças externas F_{ext} pode ser encontrada na equação 4.26. Além disso, H_{ij}^{-1} é a inversa da matriz Hessiana, determinada pela segunda derivada da energia específica (ou do potencial elástico) em relação às posições nodais

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_j} \quad (4.40)$$

4.8 Dinâmica no MEFP

Na seção 4.7 foi apresentada a formulação do MEFP aplicada a problemas estáticos. Nesta seção são demonstradas as alterações na formulação para incluir os efeitos da dinâmica. Relembrando a equação 4.19, desta vez sem suprimir os efeitos da inércia

$$\Pi = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_V F_i y_i dV - \oint_A f_i y_i dA + \int_V \rho \ddot{y}_i y_i dV \quad (4.41)$$

Voltando ao princípio da estacionariedade, além das equações 4.18 e 4.20, aplicado à equação 4.41 tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = \int_V \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} dV - \int_V F_i dV - \oint_A f_i dA + \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (4.42)$$

Graças ao princípio da conservação de massa e a formulação ser Lagrangeana total, pode-se construir a matriz de massa consistente idêntica à utilizada em análises geometricamente lineares (GRECO, 2004). Portanto, o termo relacionado à aceleração da equação 4.42 pode ser simplificado para

$$\int_V \rho \ddot{y}_i dV = M \ddot{y}_i \quad , \quad (4.43)$$

onde M é a matriz de massa consistente ou concentrada. Como a equação 4.42 é diferenciável no tempo, para integrá-la será utilizado o método de integração temporal de Newmark. Para tanto, a equação 4.42 deve ser escrita para um instante de tempo, o instante atual $t + \Delta t$.

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \right|_{t+\Delta t} = F_{int}|_{t+\Delta t} - F_{ext}|_{t+\Delta t} + M \ddot{y}_i^{t+\Delta t} \quad (4.44)$$

4.9 Integração Temporal de Equações Hiperbólicas

O método empregado para realizar a aproximação temporal para equações hiperbólicas (assim referidas conforme Trangenstein (2008)) será o de Newmark. O método de aproximação temporal de Newmark (Newmark (1959) em Bathe (1982)) consiste em aproximar a aceleração, velocidade e deslocamento (ou posição) dos pontos nodais por meio da consideração de duas equações:

$$\dot{y}^{t+\Delta t} = \dot{y}^t + \left[(1 - \bar{\beta}) \ddot{y}^t + \bar{\beta} \ddot{y}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (4.45)$$

$$y^{t+\Delta t} = y^t + \dot{y}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \bar{\gamma} \right) \ddot{y}^t + \bar{\gamma} \ddot{y}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad , \quad (4.46)$$

onde $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ são parâmetros da aproximação temporal, ajustados conforme a necessidade. Os parâmetros $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ estão diretamente relacionados à estabilidade, precisão e amortecimento numérico do método (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989). A tabela 2 apresenta alguns valores para $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ e o nome dado aos respectivos métodos.

Tabela 2: Métodos da Família de Integração Temporal de Newmark

Nome do Método	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$
Aceleração Média	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Aceleração Linear	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
Fox-Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
Diferença Central	$\frac{1}{2}$	0

Para o caso de análises dinâmicas em que não ocorre impacto, será adotada o método de aceleração média, também conhecida como regra do trapézio, em que a aproximação da aceleração é constante e igual a média entre t e $t + \Delta t$.

Reescrevendo a equação 4.45 para isolar o termo de aceleração do passo $t + \Delta t$ resulta em

$$\ddot{y}^{t+\Delta t} = \frac{y^{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \frac{y^t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{y}^t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{y}^t \quad (4.47)$$

Como no passo de tempo t os termos são conhecidos, a equação 4.47 pode ser rescrita como

$$\ddot{y}^{t+\Delta t} = \frac{y^{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - Q_s \quad , \quad (4.48)$$

onde Q_s representa a contribuição dinâmica do passo de tempo anterior (t), dado por

$$Q_s = \frac{y^t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{y}^t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{y}^t \quad (4.49)$$

A equação 4.44 pode então ser escrita para o passo de tempo atual, em função da posição.

$$F_{int}|_{t+\Delta t} - F_{ext}|_{t+\Delta t} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} y_i^{t+\Delta t} - M Q_s = 0 \quad (4.50)$$

Para determinar a posição atual, $y_i^{t+\Delta t}$, utiliza-se o método de Newton-Raphson, da mesma forma que no processo estático, com a diferença que há alterações na matriz Hessiana, pois esta é a segunda derivada do potencial elástico em relação às posições nodais, neste caso dinâmico. Ou seja

$$H_{dinâmica} = H_{estática} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M \quad (4.51)$$

Determinada a nova posição tentativa, $y^{t+\Delta t}$, volta-se às equações 4.45 e 4.46 para determinar $\dot{y}^{t+\Delta t}$ e $\ddot{y}^{t+\Delta t}$.

4.9.1 Alteração no Método de Newmark para adicionar impacto

A regra do trapézio, normalmente adotada para resolver problemas dinâmicos em estruturas, não apresenta qualidade nas respostas obtidas para o caso de ocorrer impacto (CARPENTER; TAYLOR; KATONA, 1991; TAYLOR; PAPADOPOULOS, 1993; SOLBERG; PAPADOPOULOS, 1998). Isto ocorre por que oscilações nas variáveis relacionadas com o problema dinâmico podem ser geradas na região de contato no caso de se adotar pequenos

valores para Δt .

Uma solução foi apresentada em Hu (1997), que consiste em aproximar as acelerações baseadas em hipóteses relacionadas às acelerações desenvolvidas na região de contato durante o processo de impacto.

Em Greco (2004) foi determinado que tais hipóteses correspondem ao método de Newmark, porém adotando-se valores de $\bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ iguais a 1,5 e 1,0, respectivamente. A formulação apresentada em Hu (1997) demanda a adoção de passos de tempo pequenos, que provocam um pequeno amortecimento numérico, resultando em erros de fase.

4.10 Impacto contra Anteparos Rígidos

O primeiro passo para implementar um algoritmo capaz de calcular os esforços resultantes de um processo de impacto é elaborar um esquema de detecção da ocorrência do impacto. O processo mais simples consiste em limitar a posição dos nós impactantes da estrutura em relação ao anteparo rígido. Desta forma, o impacto irá ocorrer no instante em que as coordenadas dos nós da estrutura (projétil) forem iguais ou, na pior situação, tiverem ultrapassado as coordenadas do anteparo rígido.

A partir do momento do impacto, as coordenadas dos nós impactantes são iguais às coordenadas dos nós do anteparo, gerando forças internas responsáveis pela reflexão do corpo. Como a reflexão ocorre de forma ortogonal à superfície de colisão, o impacto ocorre sem atrito. Este processo se baseia na técnica do multiplicador de Lagrange descrita em Greco (2004) e em Greco, Coda e Venturini (2004).

Com as devidas definições apresentadas, o método dos elementos finitos posicional é apresentado esquematicamente na figura 5. O fluxograma apresenta uma visão geral dos passos necessários para criar um programa utilizando a metodologia.

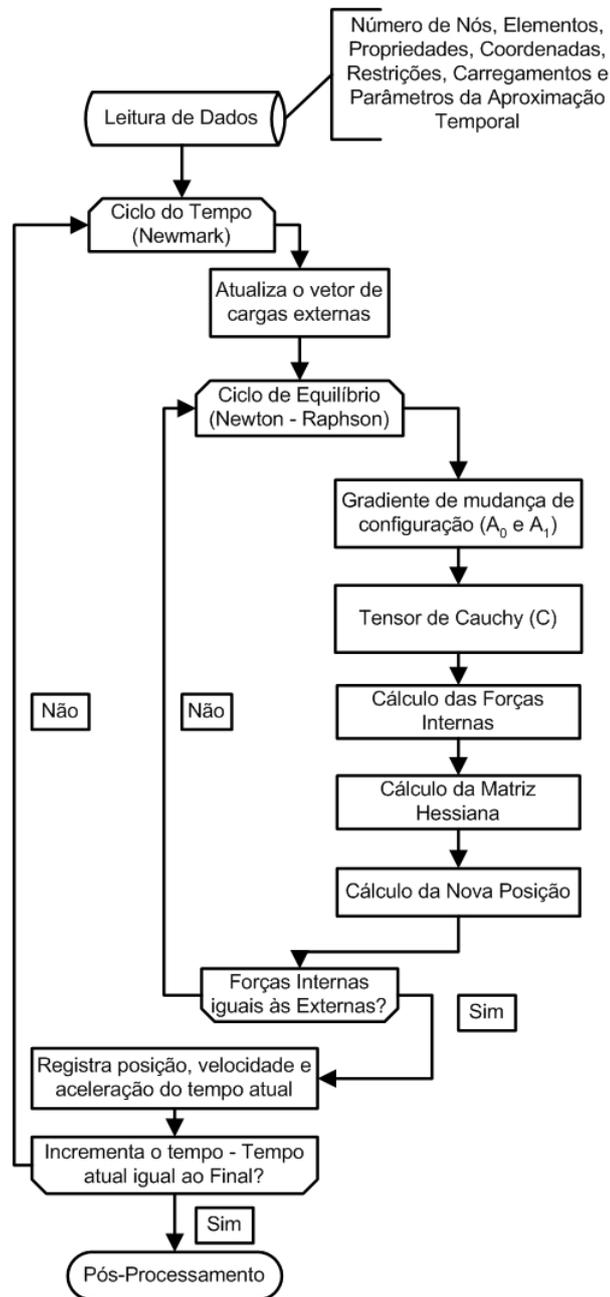


Figura 5: Fluxograma do Método dos Elementos Finitos Posicional.

5 MEFP aplicado ao Elemento de Treliça

As definições tratadas no capítulo 4 são aplicadas no elemento de treliça neste capítulo, apenas para demonstrar o desenvolvimento da formulação, já salientando que, sendo um elemento bastante simples, tem função apenas didática. A aplicação do elemento apresentado é limitada em decorrência da sua incapacidade de fletir.

Um modelo mais realista adotaria um elemento de barra geral, também chamado de elemento de pórtico, mesmo para modelar treliças. Tal elemento poderia analisar tanto a instabilidade do elemento, quanto a da estrutura. Com relação a outros elementos, o elemento de pórtico plano pode ser visto Greco (2004), sólidos planos e tridimensionais em Marques (2006) e Maciel (2008), respectivamente, casca fina em Coda e Paccola (2007), casca segundo hipótese de Reissner em Coda e Paccola (2008) e, finalmente, barras gerais bi- e tridimensionais laminadas em Minski (2008) e em Coda (2008), respectivamente.

5.1 Elemento de Treliça

Considerando x_i^j as coordenadas do nó j na direção i na configuração inicial e y_i^j as coordenadas na configuração atual, m a massa total da barra e m_1 e m_2 as massas concentradas nos nós 1 e 2 do elemento, o elemento de treliça é definido como uma barra, de seção transversal A , conforme pode ser visto na figura 6.

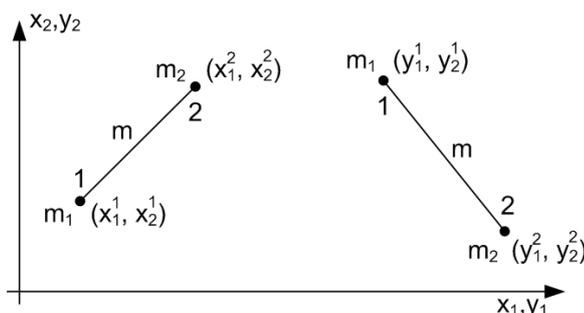


Figura 6: Elemento de Treliça e Posições Nodais.

A figura 6 mostra as configurações inicial e atual de um elemento de barra simples, de apenas dois nós, de comprimento inicial l_0 e atual l_f , definidos por

$$l_0 = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2} \quad (5.1)$$

$$l_f = \sqrt{(y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2} \quad (5.2)$$

5.2 Energia Interna

Através do comprimento inicial e final, pode-se obter a deformação longitudinal ε do elemento, dada por

$$\varepsilon = \frac{l_f - l_0}{l_0} \quad (5.3)$$

Percebe-se que ε é uma medida objetiva, pois independe da direção, dependendo apenas do comprimento da fibra deformada. Ainda é necessário definir a expressão da energia de deformação específica u_e , também chamada de potencial elástico Ψ , que depende apenas das propriedades do material. A lei de Hooke leva a forma mais simples para este potencial elástico, que fica sendo

$$u_e = \frac{K \varepsilon^2}{2} \quad , \quad (5.4)$$

onde K é o módulo de elasticidade longitudinal. Integrando no volume

$$U_e = \int_v u_e dV \quad (5.5)$$

5.3 Balanço de Energia

Limitando-se ao problema estático, para facilitar a explanação, o balanço de energia é dado por

$$\Pi = U_e - \Upsilon \quad , \quad (5.6)$$

onde Υ é o trabalho das forças externas, dado por

$$\Upsilon = F_{ext\,i}^j y_i^j \quad , \quad (5.7)$$

onde F_{ext} são as forças externas atuando no nó j na direção i . O equilíbrio do corpo pode ser então resolvido pelo princípio da estacionariedade, conforme a definição dada pela equação 4.20, levando a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i^j} = \frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial y_i^j} = 0 \quad (5.8)$$

A derivada do Υ resulta nas forças externas, enquanto que o termo relacionado a energia específica é resolvido aplicando a regra da cadeia, da seguinte maneira

$$\frac{\partial u_e}{\partial y_i^j} = \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \frac{\partial l_f}{\partial y_i^j} \quad (5.9)$$

Expandindo a equação 5.9

$$\frac{\partial u_e}{\partial y_i^j} = \frac{\partial}{\partial l_f} \left[\frac{K}{2} \frac{(l_f - l_0)^2}{l_0^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_i^j} \left[(y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

Ou ainda

$$\frac{\partial u_e}{\partial y_i^j} = \frac{K (l_f - l_0)}{l_0^2} \frac{\partial}{\partial y_i^j} \left[(y_1^2 - y_1^1)^2 + (y_2^2 - y_2^1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

Resolvendo a última derivada da equação 5.11 para cada nó e para cada direção, as seguintes equações são obtidas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial y_1^1} &= \frac{K (l_f - l_0)}{l_0^2} \frac{y_1^1 - y_1^2}{l_f} \\ \frac{\partial u_e}{\partial y_1^2} &= \frac{K (l_f - l_0)}{l_0^2} \frac{y_1^2 - y_1^1}{l_f} \\ \frac{\partial u_e}{\partial y_2^1} &= \frac{K (l_f - l_0)}{l_0^2} \frac{y_2^1 - y_2^2}{l_f} \\ \frac{\partial u_e}{\partial y_2^2} &= \frac{K (l_f - l_0)}{l_0^2} \frac{y_2^2 - y_2^1}{l_f} \end{aligned} \quad (5.12)$$

As parcelas da derivada da energia específica na equação 5.12, integradas no domínio, definem as forças internas relativas aos nós i e direções j ($F_{ext_i}^j$). Dito isto, busca-se a posição y_i^j em que as forças internas sejam iguais às forças externas (equação 5.8), por meio do método de Newton-Raphson.

5.4 Método de Newton-Raphson

Para que o corpo esteja em equilíbrio, as forças internas e externas devem ser iguais, isto é, a equação 5.8 deve ser satisfeita. Caso contrário um vetor g de desbalançamento será gerado, conforme a equação 5.13.

$$F_{int_i}^j - F_{ext_i}^j = g_i^j(y_k^l) \quad (5.13)$$

Expandindo o termo g_i^j em uma série de Taylor

$$g_i^j = {}^0g_i^j + \frac{\partial g_i^j}{\partial y_1^1} \Delta y_1^1 + \frac{\partial g_i^j}{\partial y_2^1} \Delta y_2^1 + \frac{\partial g_i^j}{\partial y_1^2} \Delta y_1^2 + \frac{\partial g_i^j}{\partial y_2^2} \Delta y_2^2 + (O_i^j)^2 = 0 \quad , \quad (5.14)$$

onde ${}^0g_i^j$ é o vetor de desbalanceamento causado por uma posição tentativa ${}^0y_i^j$. Observando que

$$\frac{\partial g_i^j}{\partial y_k^l} = \frac{\partial F_{int i}^j}{\partial y_k^l} - \frac{\partial F_{ext i}^j}{\partial y_k^l} = \frac{\partial F_{int i}^j}{\partial y_k^l} = \frac{\partial}{\partial y_k^l} \left[\frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} \right] \quad (5.15)$$

e desprezando-se termos de ordem superior, reescreve-se a equação 5.14 como

$${}^0g_i^j + \frac{\partial^2 U_e}{\partial y_i^j \partial y_k^l} \Delta y_k^l = 0 \quad (5.16)$$

sendo ${}^0g_i^j$ calculado pela equação 5.13 a partir de uma posição tentativa ${}^0y_i^j$.

5.5 Matriz Hessiana

A segunda derivada da energia de deformação específica em relação às posições atuais do corpo resulta em uma matriz, conhecida como Hessiana (H). A inversa da matriz Hessiana permite obter o incremento de posição Δy_k^l , conforme a equação 5.17.

$$\Delta y_k^l = H_{ijkl}^{-1} (F_{int i}^j - F_{ext i}^j) \quad (5.17)$$

Para determinar a matriz Hessiana, deve-se expandir o termo referente a segunda derivada da energia específica, além da necessária manipulação algébrica. Por brevidade, tal desenvolvimento foi omitido neste capítulo, e sua dedução foi inserida no Apêndice A. Na seqüência são apresentados os termos da matriz Hessiana em sua forma final.

$$\begin{aligned} H_{1111} &= \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} + \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \\ H_{2121} &= \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \\ H_{1212} &= \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} + \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \\ H_{2222} &= \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \\ H_{1121} = H_{2111} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_1^1 - y_1^2) (y_2^1 - y_2^2) \\ H_{1112} = H_{1211} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{A K}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_1^1 - y_1^2) (y_2^2 - y_2^1) - \frac{1}{l_f} \frac{A K (l_f - l_0)}{l_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{1122} = H_{2211} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{AK}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{AK(l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_1^1 - y_1^2) (y_2^2 - y_2^1) \\
H_{1221} = H_{2112} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{AK}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{AK(l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_1^2 - y_1^1) (y_2^1 - y_2^2) \\
H_{2221} = H_{2122} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{AK}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{AK(l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_2^1 - y_2^2) (y_2^2 - y_2^1) - \frac{1}{l_f} \frac{AK(l_f - l_0)}{l_0} \\
H_{2212} = H_{1222} &= \left[\frac{1}{l_f^2} \frac{AK}{l_0} - \frac{1}{l_f^3} \frac{AK(l_f - l_0)}{l_0} \right] (y_1^2 - y_1^1) (y_2^2 - y_2^1)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

5.6 Dinâmica da Trelença

O balanço de energia tratado anteriormente neste capítulo refere-se a problemas estáticos. Para considerar problemas dinâmicos, as forças inerciais devem estar presentes no balanço. Assim sendo

$$\Pi = U_e - \Upsilon + \varsigma \quad , \tag{5.19}$$

onde ς representa o trabalho das forças de inércia, dado por

$$\varsigma = F_{iner_i}^j y_i^j \quad , \tag{5.20}$$

onde F_{iner} são as forças de inércia atuando no nó j na direção i , dadas pela massa do sistema multiplicada pela aceleração. Ou seja,

$$F_{iner_i}^j = m_{(j)} \ddot{y}_i^j \quad , \tag{5.21}$$

onde m_j é a massa concentrada no nó do elemento, conforme figura 6. O subscrito (j) indica que não há somatória em j .

Novamente o equilíbrio é resolvido pelo princípio da estacionariedade, conforme a equação 5.22.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i^j} = \frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial y_i^j} + \frac{\partial \varsigma}{\partial y_i^j} = 0 \tag{5.22}$$

Será considerado que a distribuição da massa nos nós da trelença é feita de forma concentrada. Isto implica em

$$\frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} - F_{ext_i}^j + m_{(j)} \ddot{y}_i^j = 0 \tag{5.23}$$

Como a equação 5.23 é diferenciável no tempo, será aplicado o método de Newmark para aproximar a aceleração e a velocidade. Para tanto, a equação 5.23 deve ser

escrita para um determinado instante de tempo, $t + \Delta t$.

$$\left. \frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} \right|_{t+\Delta t} - F_{ext i}^j \Big|_{t+\Delta t} + m_{(j)} \ddot{y}_i^j \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad , \quad (5.24)$$

Relembrando as equações de Newmark para integração temporal, com o termo de aceleração em $t + \Delta t$ já isolado:

$$\ddot{y}_i^j \Big|_{t+\Delta t} = \frac{y_i^j \Big|_{t+\Delta t} - Q_i^j}{\alpha \Delta t^2} \quad , \quad (5.25)$$

onde Q_i^j é dado por

$$Q_i^j = \frac{y_i^j \Big|_t}{\alpha \Delta t^2} + \frac{\dot{y}_i^j \Big|_t}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{y}_i^j \Big|_t \quad (5.26)$$

O termo de aceleração da equação 5.24 pode então ser aproximado em função da posição para o passo de tempo atual:

$$\left. \frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} \right|_{t+\Delta t} - F_{ext i}^j \Big|_{t+\Delta t} + \frac{m_{(j)}}{\alpha \Delta t^2} y_i^j \Big|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j = 0 \quad (5.27)$$

Como as forças externas e o vetor Q_i^j são conhecidos, apenas a posição atual precisa ser aproximada. Da mesma forma que no problema estático, isto é feito pelo método de Newton-Raphson, sendo que apenas a matriz Hessiana muda, visto que esta é a segunda derivada da energia de deformação (u_e) em relação às posições nodais (y_k^l).

Ou seja

$$H_{ijkl}^{\text{dinâmica}} = H_{ijkl}^{\text{estática}} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} m_{(j)} \delta_{ijkl} \quad (5.28)$$

Determinada a nova posição tentativa, $y_i^j \Big|_{t+\Delta t}$, volta-se às equações 4.45 e 4.46 para determinar $\dot{y}_i^j \Big|_{t+\Delta t}$ e $\ddot{y}_i^j \Big|_{t+\Delta t}$.

6 O Termo de Acoplamento Termo-Mecânico

No capítulo 2 foram apresentadas as principais teorias da termo-elasticidade acoplada. Seja qual for a teoria, o termo de geração de calor é semelhante, como pode ser visto na tabela abaixo:

Tabela 3: Geração de Calor Elástica

Nome da Teoria	Termo de Geração
Acoplada	$v \theta_0 \dot{e}$
Generalizada	$v \theta_0 \dot{e} + \tau_0 v \theta_0 \ddot{e}$
Dependente da Taxa de Temperatura	$v \theta_0 \dot{e}$
Considerando Balanço de Entropia	$v \theta_0 \ddot{e}$

Na tabela 3, v é o módulo de elasticidade térmico, dado por $v = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α é o coeficiente de expansão térmica, λ e μ são as constantes de Lamé, τ_0 é um tempo de relaxamento de temperatura, e é o traço do tensor de deformações e θ_0 é a temperatura de referência, que deve ser constante, positiva, temperatura na qual não existam nem tensões nem deformações no corpo (ALTAY; DOKMECI, 1996).

Porém a consideração da temperatura de referência (θ_0) na equação de calor gera uma dúvida essencial: qual o sistema de unidades deve ser utilizado? É bem verdade que, para qualquer fenômeno físico, o sistema de unidade não pode, sob hipótese alguma, alterar os resultados da análise. Contudo é fácil comprovar que o termo depende sim da unidade adotada, por meio de um exemplo simples.

Considerando-se uma barra sujeita a uma taxa de deformação de $\dot{e} = 0.1\%/s$, em que a temperatura de referência é de 293°K (equivalente a 19.85°C ou 67.7°F), constituída de um material com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} K &= 2.0 \cdot 10^{10} \text{ kgf/m}^2 \cong 2.85 \cdot 10^7 \text{ Psi} \\ \alpha &= 1.6 \cdot 10^{-5} /^\circ\text{K} = 1.6 \cdot 10^{-5} /^\circ\text{C} \cong 8.89 \cdot 10^{-6} /^\circ\text{F} \end{aligned}$$

Desta forma é possível determinar a quantidade de calor elástico gerado:

$$\begin{aligned} \text{Em SI (}^\circ\text{K)} &= 0.9376 \text{ MPa/s} \\ \text{Em SI, com }^\circ\text{C} &= 0.0635 \text{ MPa/s} \\ \text{No Sistema Inglês (}^\circ\text{F)} &= 17.23 \text{ Psi/s} = 0.1206 \text{ MPa/s} \end{aligned}$$

Com isso comprova-se que, para uma mesma taxa de deformação, diferentes valores são obtidos para a geração de calor apenas pelo fato de se utilizar diferentes sistemas de unidades. Tal fato sugere uma discrepância nas teorias em suas formas atuais. Outro fato que sugere questionamentos é a existência de entropia elástica.

A entropia é definida como uma forma de energia que um sistema não pode utilizar para produzir trabalho. Ou seja, é uma variável de estado associada a energia que não pode ser recuperada. Portanto, a entropia jamais decresce seu valor e, ao aumentar, indica que calor está sendo trocado, sendo parte perdido. Para calcular a entropia, utiliza-se a equação 2.34 e a equação 2.41, resultando na equação 6.1:

$$S = 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha \rho \epsilon_{kk} \quad (6.1)$$

Percebe-se que a equação 6.1 depende da deformação atual do corpo, sendo assim possível reduzir o nível de entropia de um sistema, contrapondo a sua definição. Convém ressaltar que esta consideração leva ao aparecimento do termo de geração de calor decorrente da taxa de deformação elástica na equação de condução de calor.

No entanto, existem provas experimentais que evidenciam a existência da geração de calor, inclusive o efeito de Gough-Joule, como pode ser visto em Boulanger et al. (2004). Assim sendo, para estabelecer uma alternativa para corrigir o fato de que diferentes sistemas de unidades levam a valores diferentes de geração de calor, o coeficiente de expansão térmica α foi modificado na equação de condução de calor, resultando nas seguintes equações:

$$\left[2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha_1 \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (6.2)$$

$$k \theta_{,ii} - 2G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha_2 \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R = 0, \quad (6.3)$$

onde α_1 é o coeficiente de expansão térmica e α_2 é o coeficiente de expansão modificado, que será chamado de coeficiente de geração de calor, e pode ser ajustado conforme o sistema de unidades para se adequar aos valores de θ_0 .

6.1 Implementação Numérica

Esta seção apresenta as técnicas utilizadas na resolução do problema termo-elasto-plástico. Primeiramente é feita a divisão do problema acoplado em duas partições naturais: uma fase térmica, em que a configuração é mantida constante, utilizando a equação 6.3, e outra fase mecânica, em que a temperatura é então mantida constante e o problema solucionado com a equação 6.2. Esta estratégia de solução é chamada escalonada com separação isotérmica, pois as equações são resolvidas seqüencialmente. A figura 7 mostra os principais passos na solução do problema termo-elasto-plástico.

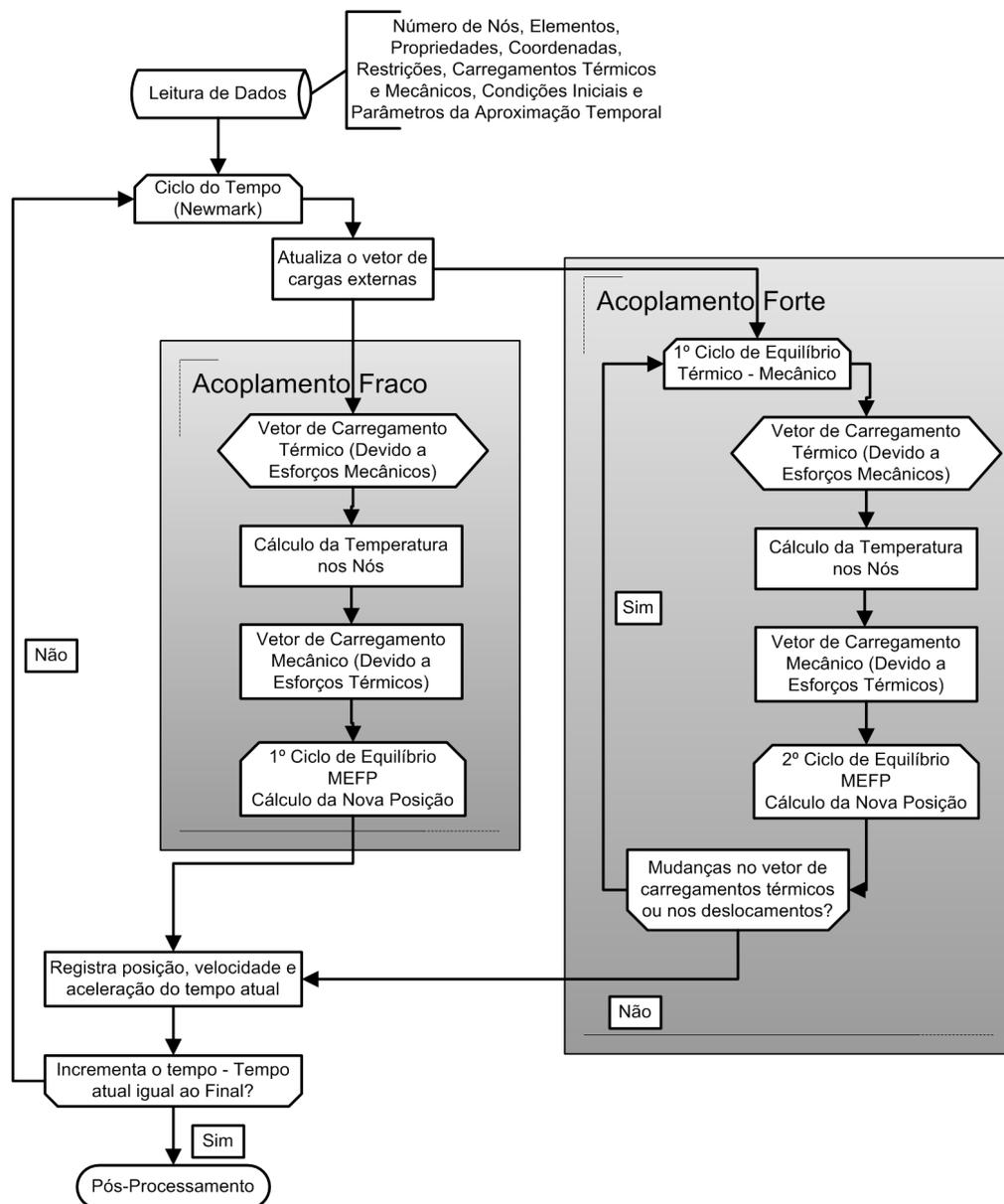


Figura 7: Fluxograma da Implementação Numérica da Termo-Elasto-Plasticidade.

Na figura 7 podem ser vistas duas alternativas para a resolução do problema acoplado: o acoplamento forte e o acoplamento fraco, também chamados de implícito e explícito, respectivamente. No acoplamento forte, o equilíbrio termo-mecânico é requisitado em todo o passo de tempo. Isso significa que, dentro do passo de tempo atual, a variação de temperatura é determinada e então a configuração da estrutura é calculada com os carregamentos térmicos obtidos. Após isto, a fonte de calor mecânica é recalculada para que seja determinada uma nova variação na temperatura. Estes resultados são utilizados para atualizar os carregamentos térmicos e, com isso, estabelecer uma nova configuração para a estrutura. Se a variação de temperatura ou na deformação estiverem conforme requisitados pelo critério de parada, um novo passo de tempo é iniciado, senão uma nova tentativa de equilíbrio termo-mecânica é realizada.

No acoplamento fraco, a variação da temperatura é calculada utilizando a fonte de calor mecânica do passo de tempo anterior, e a configuração atual da estrutura é então calculada por meio dos carregamentos térmicos obtidos. Após isso, um novo passo de tempo já é iniciado.

6.1.1 A equação de condução de calor

Para simplificar a implementação da equação de energia (eq. 6.3), esta será reescrita na seguinte forma

$$\rho c_e \dot{\theta} - k \theta_{,ii} - \rho R = R_M \quad , \quad (6.4)$$

onde R_M é a fonte de calor decorrente das deformações mecânicas, definida como

$$R_M = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_2 \theta_0 \dot{\epsilon}_{ii}^e - \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (6.5)$$

Percebe-se pela figura 7 que o problema térmico é solucionado antes do problema mecânico. Assim sendo, no cálculo da fonte de calor mecânica serão utilizados os resultados da tentativa anterior (no caso de se utilizar o algoritmo implícito) ou do passo de tempo anterior (no caso de se utilizar o algoritmo explícito) e, desta forma, a equação 6.4 pode ser escrita na forma

$$\rho c_e \dot{\theta} - k \theta_{,ii} - \rho R = R_M^{t-1} \quad , \quad (6.6)$$

onde o sobrescrito $t-1$ indica que a fonte de calor foi obtida na tentativa ou no passo de tempo anterior.

O desenvolvimento do sistema de equações do método dos elementos finitos segue o mesmo apresentado no capítulo 3, inclusive no que condiz a integração temporal,

resultando no sistema de equações dado por

$$\{C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}\} \theta_i^{t+1} = \{C_{ij} - \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}\} \theta_i^t + \Delta t \left\{ \bar{\alpha} F_j^{t+1} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t \right\} \quad , \quad (6.7)$$

onde $\bar{\alpha}$ é um parâmetro de integração temporal e

$$C_{ij} = \int_V \rho c_e \psi_i \psi_j dV \quad (6.8)$$

$$K_{ij} = \int_V k \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} dV \quad (6.9)$$

$$F_j = \int_V \rho R \psi_j dV + \int_V R_M^{t-1} \psi_j dV - \int_A q \psi_j dA \quad (6.10)$$

Percebe-se pela equação 6.10 que o termo de geração de calor nada mais é do que uma fonte de calor interna, ou seja, um vetor de carregamento térmico.

6.1.2 A equação de equilíbrio dinâmico

Após a resolução do problema térmico, busca-se a posição atual para os carregamentos tanto mecânicos quanto térmicos. Para tanto, a equação que dita o equilíbrio dinâmico local é modificada para incluir os efeitos térmicos, por meio da alteração da deformação longitudinal (ε), conforme a equação 6.11.

$$\varepsilon = \frac{l_f - l_0}{l_0} + \alpha_1 \theta \quad , \quad (6.11)$$

onde l_f e l_0 são os comprimentos atual e inicial do elemento de treliça, α_1 é o coeficiente de expansão térmica e θ é a mudança de temperatura a partir de um referencial.

O balanço de energia pode ser então calculado da mesma forma que no capítulo 5, que fica sendo

$$\Pi = U_e - \Upsilon + \varsigma \quad , \quad (6.12)$$

onde U_e é a energia de deformação, ou trabalho das forças internas e Υ e ς representam o trabalho das forças externas e das forças inerciais, respectivamente. Cada parcela é dada por

$$u_e = \frac{K \varepsilon^2}{2} \quad (6.13)$$

$$\Upsilon = F_{ext_i}^j y_i^j \quad (6.14)$$

$$\varsigma = F_{iner_i}^j y_i^j \quad (6.15)$$

$$(6.16)$$

onde K é o módulo de elasticidade longitudinal, F_{ext} e F_{iner} são as forças externas e de inércia atuantes nos nós j na direção i , respectivamente, sendo que as forças de inércia são dadas por

$$F_{iner\ i}^j = m_{(j)} \ddot{y}_i^j \quad , \quad (6.17)$$

onde $m_{(j)}$ é a massa concentrada no nó j do elemento, conforme figura 6. O subscrito (j) indica que não há somatória em j .

O equilíbrio da equação 6.12 é obtido aplicando o teorema da mínima energia potencial, ou princípio da estacionariedade, ao derivá-la em relação às posições atuais nodais y_i^j , levando a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial K \varepsilon^2}{\partial y_i^j} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial y_i^j} + \frac{\partial \zeta}{\partial y_i^j} = 0 \quad (6.18)$$

Ou ainda, desenvolvendo os termos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (K \varepsilon^2)}{\partial y_i^j} - F_{ext\ i}^j + m_{(j)} \ddot{y}_i^j = 0 \quad (6.19)$$

O termo relacionado às forças internas pode ser determinado utilizando a regra da cadeia, conforme a equação 6.20.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (K \varepsilon^2)}{\partial l_f} \frac{\partial l_f}{\partial y_i^j} - F_{ext\ i}^j + m_{(j)} \ddot{y}_i^j = 0 \quad (6.20)$$

Substituindo a equação 6.11 na equação 6.20, chega-se a

$$\frac{K (l_f - l_0 + \alpha_1 \theta l_0)}{l_0^2} \frac{\partial l_f}{\partial y_i^j} - F_{ext\ i}^j + m_{(j)} \ddot{y}_i^j = 0 \quad (6.21)$$

Para simplificar o desenvolvimento subsequente, a primeira parcela da equação 6.21 será chamada de $F_{int\ i}^j$. Como a equação 6.21 deve ser aproximada no tempo, será aplicado o método de Newmark e, para tanto, esta deve ser escrita para um determinado instante de tempo, $t + \Delta t$.

$$F_{int\ i}^j \Big|_{t+\Delta t} - F_{ext\ i}^j \Big|_{t+\Delta t} + m_{(j)} \ddot{y}_i^j \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad (6.22)$$

Para aproximar a aceleração em $t + \Delta t$, a equação 6.22, em função da posição do passo de tempo atual, fica sendo

$$F_{int\ i}^j \Big|_{t+\Delta t} - F_{ext\ i}^j \Big|_{t+\Delta t} + \frac{m_{(j)}}{\beta \Delta t^2} y_i^j \Big|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j = 0 \quad , \quad (6.23)$$

onde $\bar{\beta}$ é um parâmetro de integração temporal e Q_i^j é dado por

$$Q_i^j = \frac{y_i^j|_t}{\bar{\beta} \Delta t^2} + \frac{\dot{y}_i^j|_t}{\bar{\beta} \Delta t} + \left(\frac{1}{2\bar{\beta}} - 1 \right) \ddot{y}_i^j|_t \quad (6.24)$$

Da mesma forma que o problema mecânico, abordado no capítulo 5, apenas a posição atual precisa ser aproximada. Para tanto será empregado o método de Newton-Raphson, em que, no caso da posição gerar forças internas que não condizem com as forças externas somadas às inerciais, um vetor de desbalanceamento será gerado, conforme a equação 6.25.

$$F_{int_i}^j|_{t+\Delta t} - F_{ext_i}^j|_{t+\Delta t} + \frac{m_{(j)}}{\bar{\beta} \Delta t^2} y_i^j|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j = g_i^j(y_i^j) \quad (6.25)$$

Expandindo g_i^j em uma série de Taylor, descartando os termos de ordem maior, este fica sendo

$$g_i^j = {}^0g_i^j + \frac{\partial g_i^j}{\partial y_k^l} \Delta y_k^l \quad (6.26)$$

A variação do vetor de desbalanceamento pode ser encontrada por meio da equação 6.25, da seguinte maneira

$$\frac{\partial g_i^j}{\partial y_k^l} = \frac{\partial}{\partial y_k^l} \left[F_{int_i}^j|_{t+\Delta t} - F_{ext_i}^j|_{t+\Delta t} + \frac{m_{(j)}}{\bar{\beta} \Delta t^2} y_i^j|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j \right] \quad (6.27)$$

Lembrando que as forças externas e Q_i^j são constantes (para o passo de tempo atual), a equação 6.27 pode ser reescrita como

$$\frac{\partial g_i^j}{\partial y_k^l} = \frac{\partial}{\partial y_k^l} \left[F_{int_i}^j|_{t+\Delta t} \right] + \frac{m_{(j)}}{\bar{\beta} \Delta t^2} \delta_{ijkl} \Big|_{t+\Delta t} \quad (6.28)$$

A variação do vetor de desbalanceamento, apresentada na equação 6.28, determina a matriz conhecida como Hessiana (H_{ijkl}). Voltando à equação 6.25 e 6.26

$$F_{int_i}^j|_{t+\Delta t} - F_{ext_i}^j|_{t+\Delta t} + \frac{m_{(j)}}{\bar{\beta} \Delta t^2} y_i^j|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j + {}^0g_i^j + H_{ijkl} \Delta y_k^l = 0 \quad (6.29)$$

Definindo ${}^0F_{int_i}^j$ como sendo o vetor de forças internas corrigido por ${}^0g_i^j$ em decorrência da posição tentativa ${}^0y_i^j$, o incremento na posição tentativa fica sendo

$$\Delta y_k^l = H_{ijkl}^{-1} \left({}^0F_{int_i}^j - F_{ext_i}^j + \frac{m_{(j)}}{\bar{\beta} \Delta t^2} y_i^j|_{t+\Delta t} - m_{(j)} Q_i^j \right) \quad (6.30)$$

Determinada a nova posição tentativa, $y_i^j|_{t+\Delta t}$, volta-se às equações 4.45 e 4.46 para determinar $\dot{y}_i^j|_{t+\Delta t}$ e $\ddot{y}_i^j|_{t+\Delta t}$.

7 Exemplos de Problemas Termo-Elásticos

No interesse de aprimorar o modelo constitutivo utilizado nos projetos atuais de pesquisa do SET (Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos), visando desenvolver um modelo mais fidedigno para a análise de impacto estrutural, principalmente incorporando efeitos associados às rápidas mudanças de configuração ocorridas neste processo, foi adotada a teoria clássica da termo-elasticidade acoplada. Tal fato se justifica pelo tratamento termodinamicamente consistente da teoria na previsão da geração de calor induzida pela deformação resultante dos esforços mecânicos, além desta estar mais difundida atualmente.

Apesar das outras teorias também preverem tal geração, fica claro que o objetivo deste trabalho não é discutir algumas nuances das abordagens para resolução de problemas da termo-elasticidade, como os tempos de relaxamento das teorias hiperbólicas. Tampouco é objetivo deste trabalho fazer um estudo comparativo entre as diversas teorias, mas sim aplicar uma das teorias da termo-elasticidade em análises não-lineares pelo método dos elementos finitos posicional.

Assim sendo, considerando um corpo elástico, isotrópico e condutor de calor, as equações diferenciais governantes do problema de acordo com a teoria clássica da termo-elasticidade acoplada e as modificações apresentadas no capítulo 6, são:

$$\left[2 G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_1 \theta \delta_{ij} \right) \right]_{,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (7.1)$$

$$k \theta_{,ii} - 2 G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_2 \theta_0 \dot{\epsilon}_{kk} - \rho c_e \dot{\theta} + \rho R = 0, \quad (7.2)$$

onde G e ν são o módulo de elasticidade transversal e o módulo de Poisson, ρ é a densidade específica, ϵ é o tensor de deformações, θ é a variação de temperatura, θ_0 é a temperatura inicial, k é o coeficiente de condutividade térmica, c_e é o calor específico, α_1 é o coeficiente de expansão térmica e α_2 é o coeficiente de geração de calor.

Deve ser observado que uma importante simplificação na teoria foi considerar que há apenas pequenas variações de temperatura de um passo de tempo para outro. Outra importante simplificação fica na questão das formas de transmissão de calor, em que não serão abordadas a convecção, nem a irradiação, apenas a condução, fato justificado pelo meio ser sólido, não atingir temperaturas extremas e o tempo de contato (no processo de impacto) ser muito curto. Por último, foi considerado que todo o processo é restrito, ou seja, não envolve deformações dissipativas.

Na seqüência, são apresentadas algumas aplicações do programa desenvolvido, visando inicialmente validar os métodos empregados na resolução dos problemas, para então utilizar o programa em exemplos mais elaborados e complexos.

7.1 Barra Unidimensional Quase-Estática

O artigo Copetti (2002) apresenta uma barra, de comportamento termo-elástico, onde o processo dinâmico é considerado quase-estático, ou seja, os efeitos de inércia e de amortecimento são negligenciados. Além disso, o termo de acoplamento (de geração de calor), por ser referendado à taxa de deformação, é descartado. O problema é apresentado na figura 8, assim como as condições de contorno e iniciais.

Exemplo parecido é apresentado no artigo Copetti (2003), só que ao invés de ocorrer contato entre uma barra e um anteparo, há o contato entre duas barras. Como o contato não é objeto de estudo, este não será considerado.

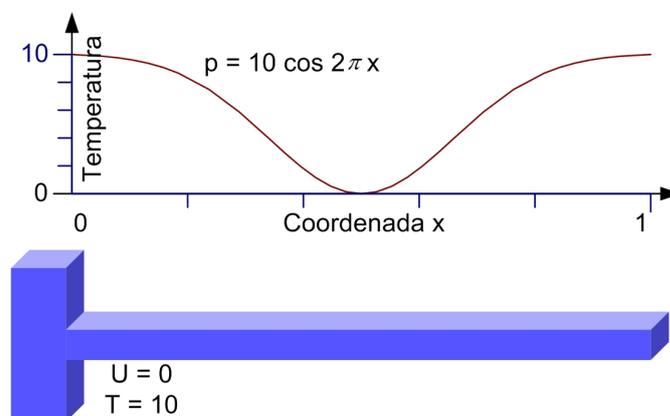


Figura 8: Barra Unidimensional Quase-Estática.

Nota: p é a carga térmica aplicada à barra. Não foi aplicado carregamento mecânico.

Por buscar uma solução analítica do problema, Copetti (2002) faz uma série de simplificações, inclusive no que condizem as propriedades térmicas e elásticas do material. Considera a condutividade térmica, a massa específica, o calor específico e o módulo de elasticidade igual a 1. Já o coeficiente de expansão térmica foi considerado igual a 0,017, sendo que a barra foi dividida em 100 elementos de igual dimensão e passo de tempo igual a 0,0001. Ao longo da análise, o nó em $x = 0$ é mantido a uma temperatura igual a 10 (adimensional) e impedido de se deslocar.

A deformação ao longo do tempo na barra pode ser observada na figura 9a. Os resultados de Copetti (2002) e do aplicativo desenvolvido são coincidentes. Com relação à resolução do problema térmico, vista na figura 9b, esta não difere da solução da equação de calor não-estacionária, visto que não há cargas térmicas de origem mecânica, ou seja, geração de calor devido ao termo de acoplamento. Se o termo fosse considerado, não haveria diferenças perceptíveis, considerando a baixa variação da deformação ao longo do tempo.

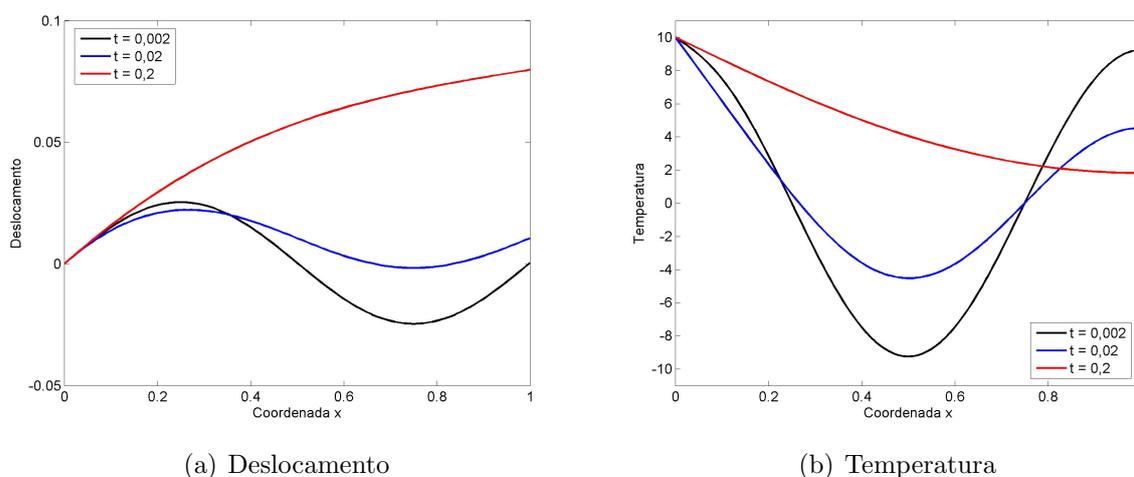


Figura 9: Evolução do Deslocamento e da Temperatura de Barra Termo-Elástica.

7.2 Treliça Bidimensional Dinâmica

O segundo exemplo consiste em uma treliça, formada por 48 elementos, com apenas uma carga vertical, conforme a figura 10, onde também são apresentadas as condições de contorno do problema mecânico. No caso, não foram desprezados os efeitos da inércia, como no primeiro exemplo. O termo de acoplamento foi mantido, para comprovar a geração de calor a partir da taxa de deformação da estrutura.

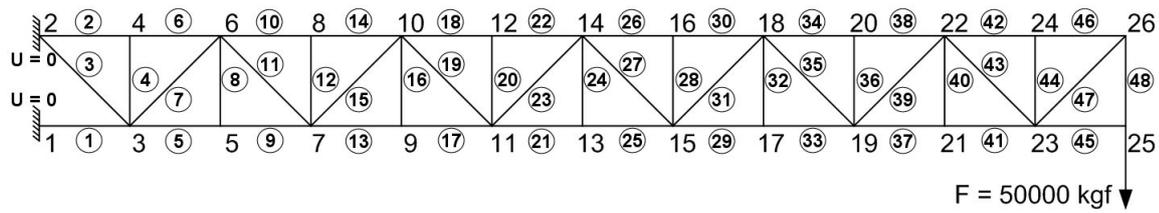


Figura 10: Treliça de 48 Elementos e 26 Nós.

Com relação as condições de contorno do problema térmico, foi considerado que o sistema não troca calor ao longo da barra, apenas nas pontas. Ao longo da análise, os nós 1 e 2 são mantidos na temperatura inicial, de 293°K . Foram adotadas as seguintes propriedades termo-elásticas:

$$\begin{aligned}
 k &= 0,011 \text{ kcal}/(^{\circ}\text{K m s}) & c_e &= 450 \text{ J}/(^{\circ}\text{K kg}) \\
 \rho &= 7850 \text{ kg}/\text{m}^3 & \alpha_1 = \alpha_2 &= 0,000011 \text{ m}/(^{\circ}\text{K m}) \\
 K &= 21 \cdot 10^9 \text{ kgf}/\text{m}^2
 \end{aligned}$$

Com relação a discretização temporal, foram utilizados 500 passos de tempo de 0,001 segundo. O esquema de solução adotado foi o explícito (para maiores detalhes, veja exemplo 3). O efeito de Gough-Joule pode ser visto na figura 11, em que as barras que tem taxa de deformação negativa estão resfriando e as que tem taxa de deformação positiva estão aquecendo.

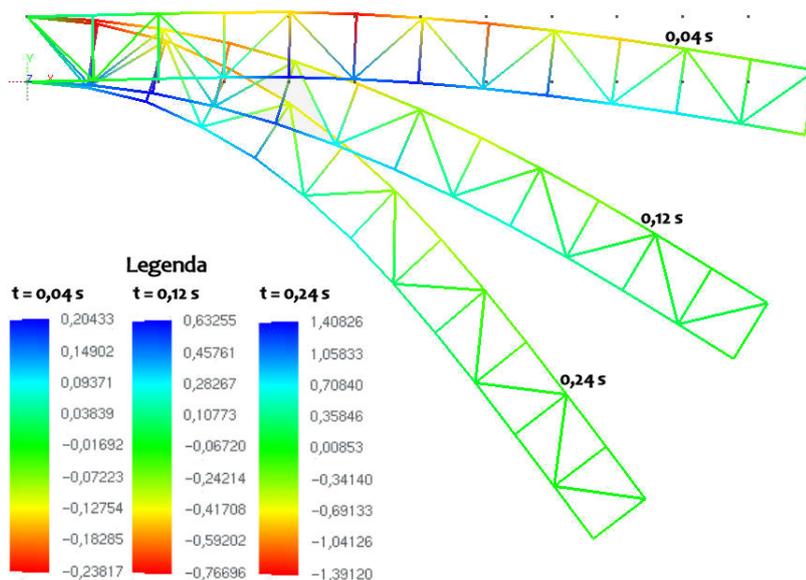


Figura 11: Evolução da Variação da Temperatura na Treliça.

A figura 11 mostra a temperatura na treliça em três momentos com escalas diferentes, para facilitar a visualização. No primeiro tempo, 0,04 segundos após o início, há um pequeno aumento/redução na temperatura, na ordem de $0,20^\circ\text{K}$. Na segunda medição, em $t = 0,12$ s, a mudança de temperatura chega a $0,65^\circ\text{K}$. No terceiro tempo considerado, $t = 0,24$ s, houve um acréscimo e redução na ordem de $1,40^\circ\text{K}$. Isto mostra que, para materiais com baixo coeficiente de expansão térmica, os efeitos da geração da temperatura devido à deformação podem ser desconsiderados, mesmo para grandes deslocamentos.

A figura 12 mostra a evolução da temperatura nos nós 5 e 20. Pela temperatura registrada no nó 5, as barras a ele conectadas recebem esforços de tração, enquanto que as barras conectadas ao nó 20 são primeiramente comprimidas e então tracionadas. Este comportamento comprova a devida implementação do Efeito de Gough-Joule.

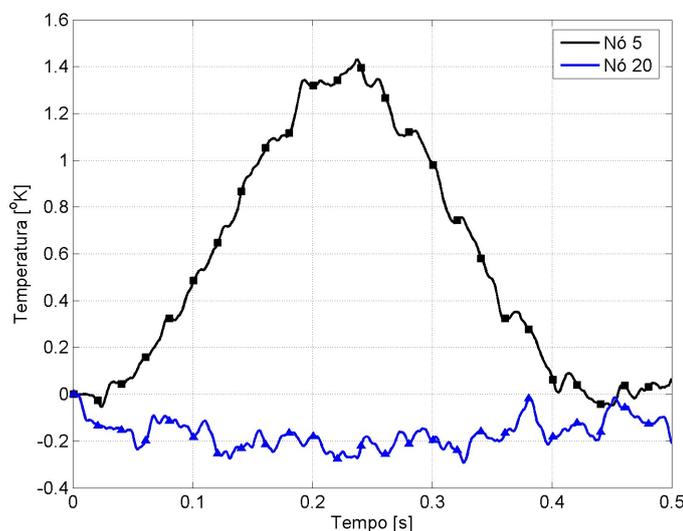


Figura 12: Evolução da Variação da Temperatura em dois nós da Treliça.

7.3 Métodos de Solução - Implícito e Explícito

O exemplo consiste em um treliça composta de 13 elementos de pórtico, em um total de 8 nós, como pode ser visto na figura 13. Na figura 13 também são apresentadas as condições de contorno térmica e mecânica. Com relação à discretização temporal, foram considerados 50 passos de tempo de 0,005 segundo.

As seguintes propriedades termo-mecânicas foram consideradas:

$$\begin{aligned}
 k &= 0,011 \text{ kcal}/(^{\circ}\text{K m s}) & c_e &= 450 \text{ J}/(^{\circ}\text{K kg}) \\
 \rho &= 7850 \text{ kg}/\text{m}^3 & \alpha_1 = \alpha_2 &= 0,000011 \text{ m}/(^{\circ}\text{K m}) \\
 K &= 21 \cdot 10^9 \text{ kgf}/\text{m}^2
 \end{aligned}$$

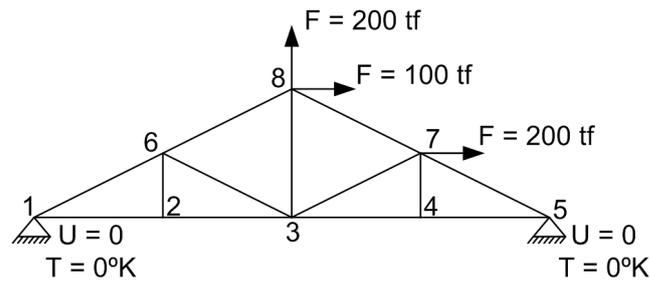


Figura 13: Treliça de 13 Elementos e 8 Nós.

Neste exemplo estudam-se as diferenças resultantes do uso dos métodos de solução implícito e explícito. Relembrando, no método implícito busca-se o equilíbrio termo-mecânico em toda iteração, enquanto que no método explícito os resultados do passo atual são utilizados apenas no passo posterior.

Na busca pela solução pelo método implícito realizou 775 iterações para uma precisão de 10^{-10} , tanto para o modelo mecânico quanto para o equilíbrio termo-mecânico. Já pelo método explícito foram realizadas 309 iterações, utilizando-se a precisão de 10^{-10} para o modelo mecânico. Também foi observada uma redução de aproximadamente 57% no tempo de solução.

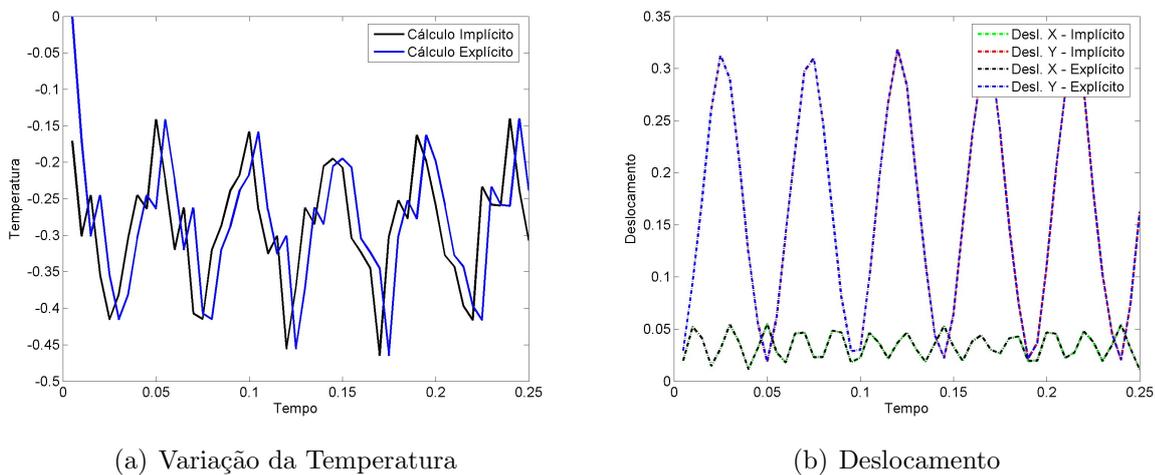


Figura 14: Variação do Deslocamento e da Temperatura no Nó 8

A figura 14 apresenta a comparação da temperatura e do deslocamento no nó 8 para ambos métodos de cálculo. O deslocamento é idêntico para as duas metodologias, enquanto que a temperatura é atingida no passo anterior de cálculo para o método implícito, apesar dos resultados serem iguais.

Aqui cabe explicar que foi considerado que o deslocamento provocado pela mu-

dança de temperatura não gera calor e, por conseguinte, os resultados para os dois métodos de cálculo serão sempre quase iguais. Se fosse considerado que tal deslocamento gerasse calor, apenas grandes mudanças de temperatura gerariam calor de forma significativa. Como isto contradiz outra simplificação considerada, tal fato não procede.

Assim sendo, o método implícito não traz vantagens reais que justifiquem a sua utilização, quando considerada pequenas mudanças de temperatura ou para valores pequenos do coeficiente de expansão térmica e de geração de calor.

8 Exemplos de Problemas Termo-Plásticos

No capítulo anterior foram apresentados alguns exemplos que demonstravam a geração de calor decorrente de deformações elásticas. Neste capítulo, seguindo o objetivo de aprimorar o modelo constitutivo utilizado nos projetos de pesquisa do SET (departamento de estruturas da escola de engenharia de São Carlos), são apresentados alguns exemplos relacionados à geração de calor decorrente de deformações plásticas. Para tanto, foi adotada a teoria da termo-plasticidade de variáveis internas, considerando a decomposição aditiva do tensor de deformação, conforme apresentado no capítulo 2, seção 2.7, além das modificações sugeridas no capítulo 6.

Assim sendo, considerando um corpo elasto-plástico e condutor de calor, as equações diferenciais que governam o problema da termo-elasto-plasticidade são:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad (8.1)$$

$$\rho c_e \dot{\theta} - k \theta_{,ii} + 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_2 \theta_0 \epsilon_{kk}^e - \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p - \rho R = 0, \quad (8.2)$$

onde σ é o tensor de tensões, ϵ é o tensor de deformações, θ é a variação de temperatura, θ_0 é a temperatura de referência, k é o coeficiente de condutividade térmica, c_e é o calor específico, ρ é a densidade específica, α_2 é o coeficiente de geração de calor e β é uma constante que define a quantidade de trabalho mecânico plástico convertido em calor, lembrando que a expressão 8.1 é a equação de equilíbrio e a expressão 8.2 é a equação de condução de calor. O tensor de tensões depende do tensor de deformações elásticas pela relação linear e isotrópica:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_1 \theta \delta_{ij} \right), \quad (8.3)$$

onde G e ν são o módulo de elasticidade transversal e o módulo de Poisson, respectivamente, e α_1 é o coeficiente de expansão térmica.

Na seqüência, são apresentados alguns exemplos do aplicativo termo-elasto-plástico, visando validá-lo para então utilizá-lo em exemplos mais complexos.

8.1 Barra sob Carregamento Elasto-Plástico

O aplicativo desenvolvido é confrontado neste exemplo com os resultados obtidos no artigo Kamlah e Haupt (1997), que apresenta a evolução da temperatura em uma barra submetida a um carregamento elasto-plástico, sob as seguintes condições de contorno e iniciais:

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (8.4)$$

$$\theta(0, t) = \theta(10, t) = 0 \quad (8.5)$$

Além disso, a barra de 10 cm de comprimento, inicialmente a uma temperatura de 293°K e isolada adiabaticamente, é constituída de material com as seguintes propriedades termo-elasto-plásticas:

$$\begin{aligned} k &= 20 \text{ W}/(^{\circ}\text{K m}) &= 0,0048 \text{ kcal}/(^{\circ}\text{K m s}) \\ c_e &= 480 \text{ J}/(^{\circ}\text{K kg}) \\ \rho &= 7800 \text{ kg}/\text{m}^3 \\ \alpha_1 = \alpha_2 &= 0,000016 \text{ m}/(^{\circ}\text{K m}) \\ K &= 200000 \text{ MPa} &\cong 2 \cdot 10^{10} \text{ kgf}/\text{m}^2 \\ \sigma_{escoamento} &= 200 \text{ MPa} &\cong 2 \cdot 10^7 \text{ kgf}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

Neste exemplo foi considerado que a porcentagem de trabalho plástico convertido em calor é igual a 100% (ou seja, não há trabalho frio). Outra consideração importante é a de endurecimento cinemático no valor de 3 000 MPa.

Uma importante simplificação realizada em Kamlah e Haupt (1997) foi negligenciar a influência da temperatura no problema mecânico, ou seja, foi considerado que a temperatura não gera deformações. Afora isto, a história de carregamento é dada pelo histórico da taxa de deformação, conforme a expressão 8.6:

$$\dot{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} & \text{para } 0 \% \leq \epsilon \leq 1,5 \% & \Rightarrow 0 \text{ s} \leq t \leq 150 \text{ s} \\ -5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} & \text{para } 1,5 \% \geq \epsilon \geq -1,5 \% & \Rightarrow 150 \text{ s} \leq t \leq 210 \text{ s} \\ 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} & \text{para } -1,5 \% \leq \epsilon \leq 1,0 \% & \Rightarrow 210 \text{ s} \leq t \leq 335 \text{ s} \end{cases} \quad (8.6)$$

A figura 15 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo aplicativo desenvolvido e os valores apresentados em Kamlah e Haupt (1997), para os termos de geração de calor (tanto elástico, quanto plástico) decorrente do histórico de deformações. Além disso, percebe-se claramente que, ao atingir o limite de escoamento, o trabalho plástico se torna a principal fonte de calor.

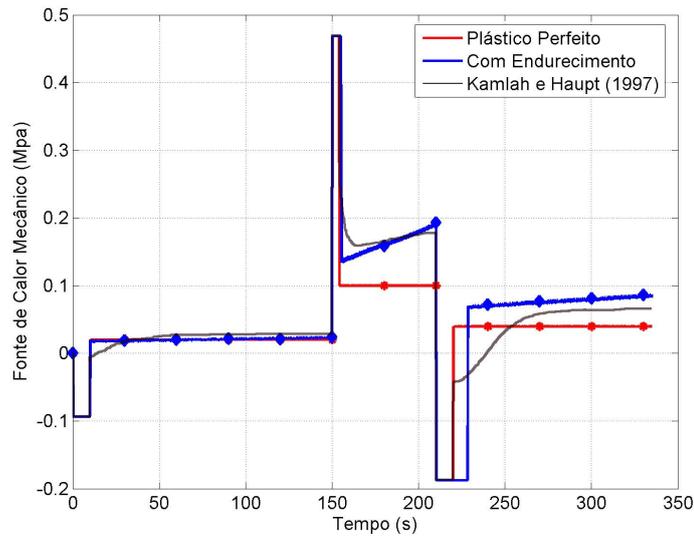


Figura 15: Fonte de Calor Termo-mecânica ao Longo de Tempo.

Seguindo a estrutura do artigo Kamlah e Haupt (1997), a figura 16 apresenta a variação da temperatura resultante das taxas de deformação ao longo do tempo e da barra.

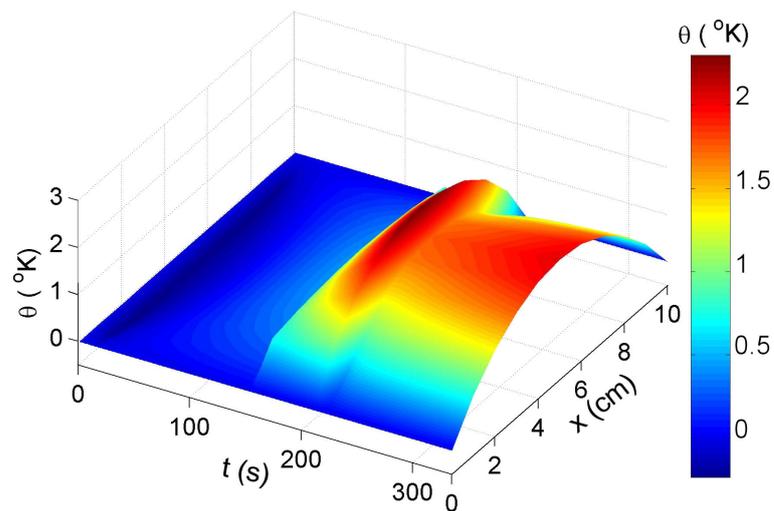


Figura 16: Variação da Temperatura em Função da Posição e do Tempo.

Já a figura 17 apresenta a evolução da temperatura no centro da barra. Na figura 17 as mudanças nas fases de aquecimento e resfriamento são determinadas pelas mudanças de estado (elástico para plástico) e pelas mudanças na taxa de expansão.

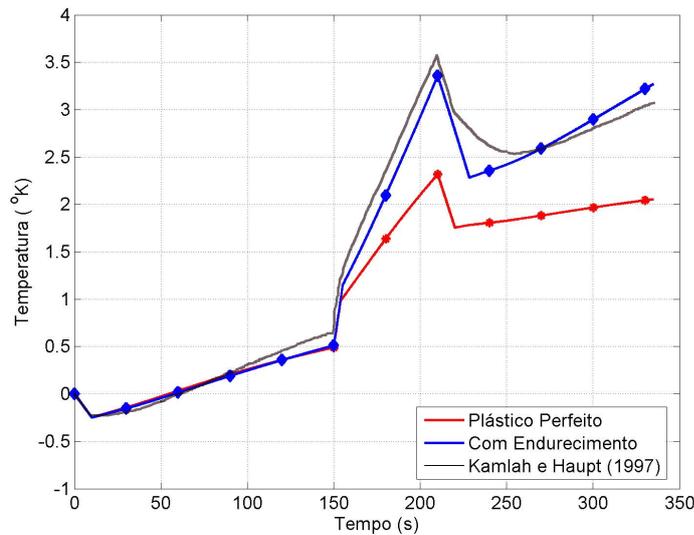


Figura 17: Evolução da Temperatura no Centro da Barra.

8.2 Barra sob Carregamento Cíclico

O segundo exemplo de geração de calor decorrente de deformações plásticas foi retirado do artigo Adams e Krempl (1984) in Kamlah e Haupt (1997). O artigo faz a análise experimental de um barra submetida a uma deformação cíclica $\Delta\epsilon = 1,0\%$ a uma frequência de 1 Hz, de comprimento total de 177.8 mm, sendo que a deformação plástica ocorre apenas no centro, em um comprimento de 38.1 mm, e temperatura de referência de $\theta_0 = 293^\circ\text{K}$.

Para efeito comparativo, foram adotadas as mesmas propriedades termomecânicas do exemplo anterior, ressaltando que não foi considerado endurecimento durante a plastificação. A barra foi modelada por 90 elementos, de 2 nós, divididos conforme a figura 18. Pode-se verificar que o centro, onde ocorre a plastificação, foi modelado por 50 elementos (nós 21 a 71), e o restante com 40 elementos. Os nós 21 a 71 tiveram seu movimento restrito, conforme o histórico de deformação apresentado.

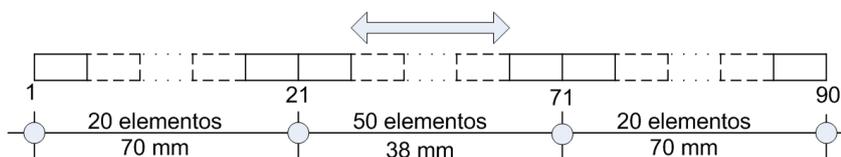


Figura 18: Barra Unidimensional sob Carregamento Cíclico.

A figura 19 apresenta a comparação entre a variação de temperatura calculada e a observada experimentalmente no centro da barra, onde o aquecimento foi maior. Como a taxa de deformação é alta, a temperatura eleva cerca de 52°K , no caso experimental, sendo que podem ser observadas oscilações decorrentes do aquecimento e resfriamento termo-elástico que ocorre a cada ciclo de deformação. A temperatura calculada foi um pouco mais alta, cerca de 56°K . Neste ponto cabe observar que foi considerado β (a porcentagem de trabalho plástico convertido em calor) igual a 90%.

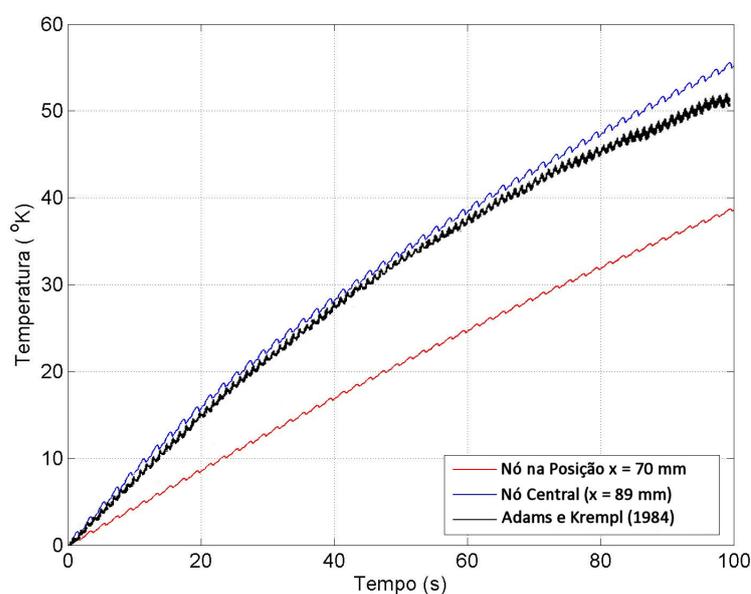


Figura 19: Comparação entre a variação de temperatura calculada e a experimental.

A outra curva de temperatura calculada apresentada na figura 19 representa o primeiro nó que recebe a deformação cíclica, ou seja, no início da parte central (nó 21). Este nó, por trocar calor com o restante do corpo, apresenta temperaturas mais baixas.

8.3 Impacto entre Barra e Anteparo Rígido

Este exemplo foi apresentado inicialmente em Carpenter, Taylor e Katona (1991), consistindo na análise do impacto entre duas barras elasto-plásticas, sem considerar a geração de calor decorrente da deformação da estrutura. Em conformidade com as análises realizadas em Greco (2004) e em Marques (2006), aproveitando a simetria do problema, este foi modificado para uma análise de impacto entre uma barra e um anteparo rígido, conforme a figura 20.

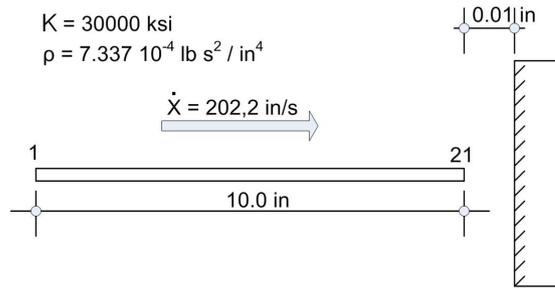


Figura 20: Dados Iniciais do Problema de Impacto.

A solução analítica para o problema elástico linear, encontrada em Carpenter, Taylor e Katona (1991), é dada por

$$\left. \begin{aligned} u_{imp} &= \dot{x} t \\ \dot{y}_{imp} &= \dot{x} \end{aligned} \right\} \forall t \leq t_{impacto} \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{imp} &= 0 \\ \dot{y}_{imp} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall t_{impacto} < t \leq t_{separação} \quad (8.8)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{imp} &= 2\dot{x} \left(\frac{\delta}{\dot{x}} + \sqrt{\frac{l_0^2 \rho}{K}} - \frac{t}{2} \right) \\ \dot{y}_{imp} &= -\dot{x} \end{aligned} \right\} \forall t > t_{separação} \quad (8.9)$$

onde u_{imp} e \dot{y}_{imp} são o deslocamento e a velocidade do nó impactante, respectivamente, \dot{x} é a velocidade inicial da barra, δ é a distância entre a barra e o anteparo, l_0 é o comprimento inicial da barra e

$$\begin{aligned} t_{impacto} &= \frac{\delta}{\dot{x}} \\ t_{separação} &= \frac{\delta}{\dot{x}} + 2L\sqrt{\frac{\rho}{K}}. \end{aligned}$$

A barra no modelo elástico foi discretizada por 20 elementos finitos, de igual dimensão, submetida a uma temperatura de referência de 68°F, sendo que a solução foi obtida para o intervalo de tempo de $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6}$ s. Como o problema original não considerava o campo térmico, não eram apresentadas as propriedades termodinâmicas do material. Assim, foram adotadas as propriedades do aço inoxidável 304, e estas são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} k &= 8,09 \text{ BTU}/(^{\circ}\text{F ft hr}) = 1,741 \text{ lb}/(^{\circ}\text{F s}) \\ c_e &= 0,120 \text{ BTU}/(^{\circ}\text{F lb}) = 1119,81 \text{ in}/(^{\circ}\text{F}) \\ \alpha_1 &= 9,6 \cdot 10^{-6} \text{ in}/(^{\circ}\text{F in}) \end{aligned}$$

As primeiras análises foram realizadas considerando apenas a resposta elástica do material. Três soluções são apresentadas: a primeira considerando $\alpha_1 = \alpha_2$, a segunda considerando $\alpha_1 \neq \alpha_2 = 9,6 \cdot 10^{-7} \text{ in}/(^{\circ}\text{F in})$, e a terceira desconsiderando a geração de calor, além da solução analítica que desconsidera a geração. A figura 21 apresenta os resultados da posição do nó na extremidade impactante da barra ao longo do tempo e de temperatura para o nó na coordenada $x = 9.5 \text{ in}$.

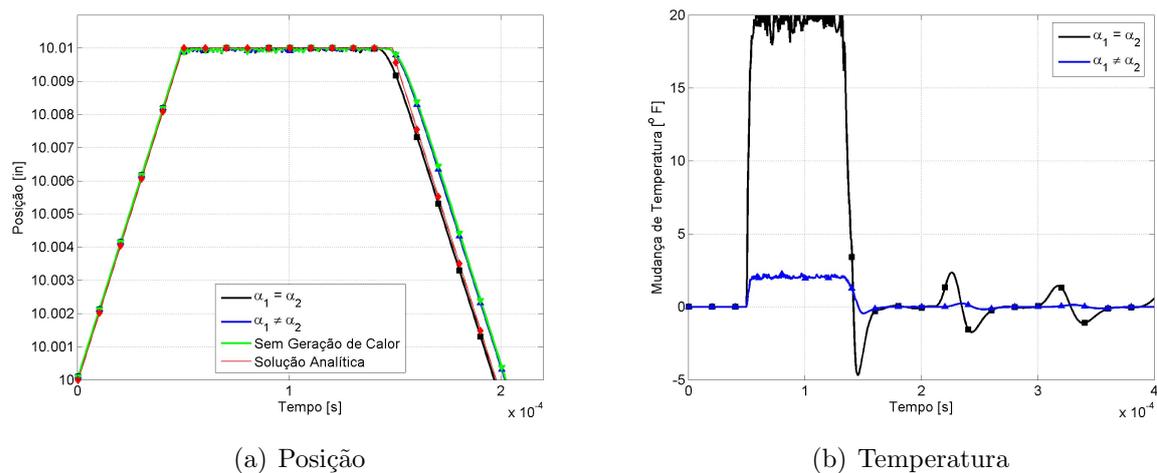


Figura 21: Solução Numérica considerando Modelo Elástico.

Na figura 21a percebe-se que, ao se considerar α_1 igual a α_2 , o tempo de contato é reduzido, causado por uma irreal perda de energia (para gerar calor), gerando um maior movimento oscilatório apresentado pela barra elástica. No caso em que α_1 é maior que α_2 , pouca mudança no tempo de contato é observada, condizendo com o resultado esperado, visto que a velocidade de retorno é compatível com a solução analítica. O tempo de contato, apesar de diferente da analítica, é congruente com a solução que desconsidera a geração de calor.

A figura 21b apresenta a mudança de temperatura provocada pela resposta da estrutura aos esforços de impacto, onde pode ser vista a oscilação de temperatura decorrente da resposta da estrutura aos esforços de impacto.

A seguir foi introduzida plasticidade à análise. Foi adotado um limite de escoamento de 10 ksi, e modelo de encruamento isotrópico, de 1000 ksi (praticamente plasticidade perfeita) e de 15000 ksi. Inicialmente foi feito um estudo de convergência. Para tanto foram empregadas 5 discretizações espaciais, com 20, 40, 60, 80 e 100 elementos. As figuras 22 e 23 apresentam o resultado do estudo de convergência para a posição do nó impactante e para a temperatura do nó localizado em $x = 9,5 \text{ in}$.

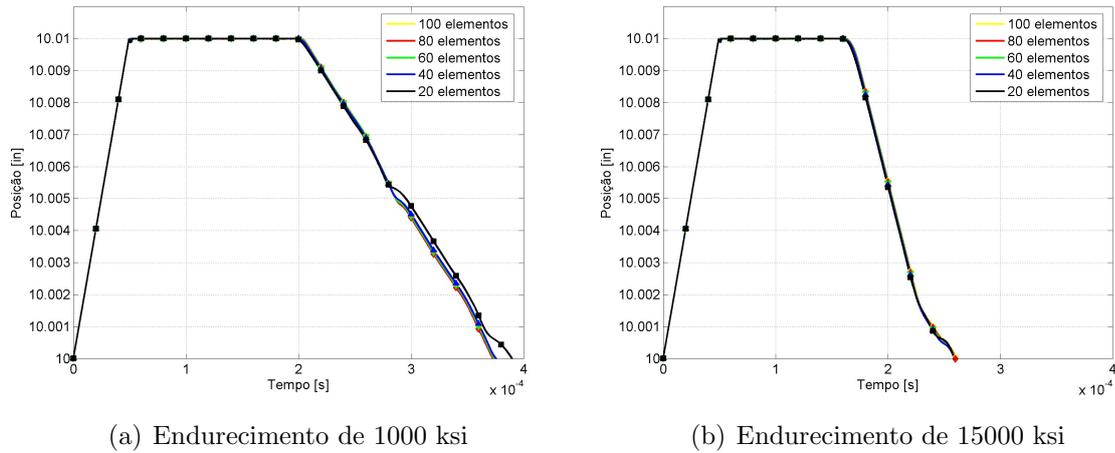


Figura 22: Estudo de Convergência - Posição do Nó Impactante.

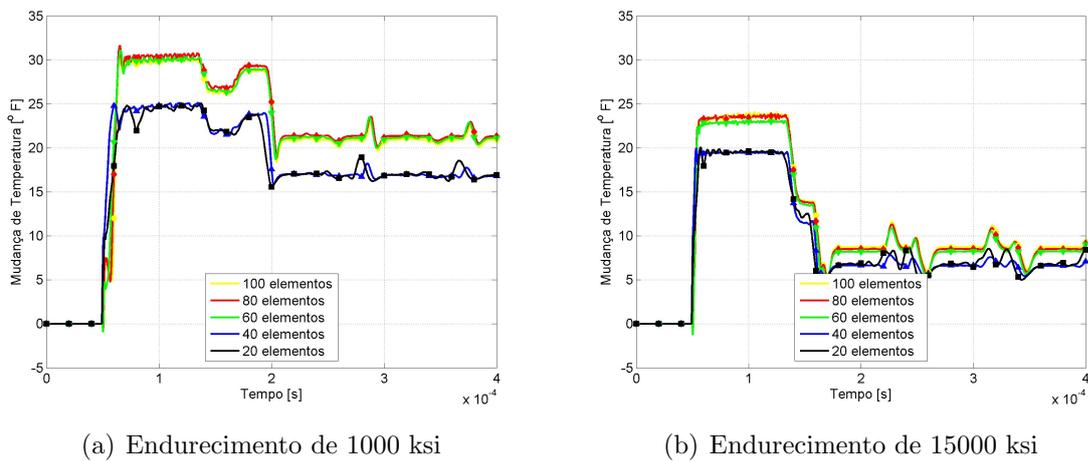


Figura 23: Estudo de Convergência - Temperatura do Nó em $x = 9.5$.

Na figura 22, que mostra a posição do nó impactante ao longo do tempo, percebe-se que pouca diferença é encontrada quando aumentado o número de elementos. Já na figura 23, que mostra a temperatura do nó em $x = 9,5$ in, nota-se que são necessários 60 elementos para representar devidamente a geração de calor quando considerada plasticidade na análise, visto a correlação existente entre as análises que utilizam mais elementos.

Na sequência são apresentadas três situações para ambos casos de elasto-plasticidade, obtidas com α_1 igual a α_2 . A primeira situação considera a geração de calor decorrente apenas das deformações elásticas, a segunda considera apenas a geração decorrente das deformações plásticas e a última situação apresenta ambos os termos de geração de calor. A posição do nó impactante é mostrada na figura 24 para as três situações, nos dois modelos de encruamento.

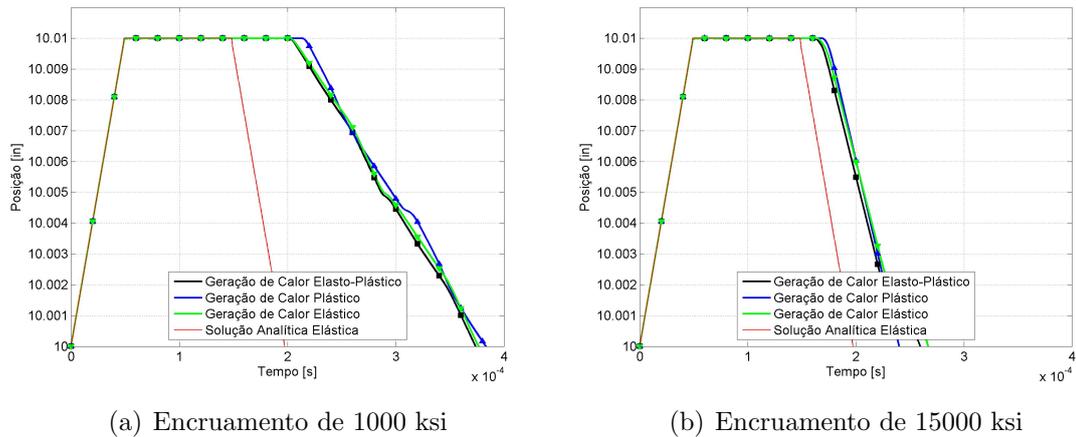


Figura 24: Posição vs Tempo no Modelo Termo-Elasto-Plástico.

Na figura 24 percebe-se que, quanto menor o encruamento considerado maior o tempo de contato entre o nó impactante e o anteparo rígido, assim como menor a velocidade de retorno da estrutura. Tal fato decorre da menor energia empregada (ou necessária) para deformar a estrutura e, com isso, mais energia é despendida. Tal perda de energia durante a plastificação já era esperada, e os resultados são praticamente idênticos aos apresentados por Greco (2004) e por Marques (2006).

Ainda na figura 24, nos casos em que é considerada a geração de calor decorrente da taxa de deformação elástica, percebe-se que também ocorre uma alteração no tempo de contato, em bem menor escala. Porém, neste caso, há uma perda de energia (para gerar calor) que só seria recuperada ao estabilizar a estrutura. Na seqüência, a figura 25 apresenta a variação da temperatura para os casos supra-citados.

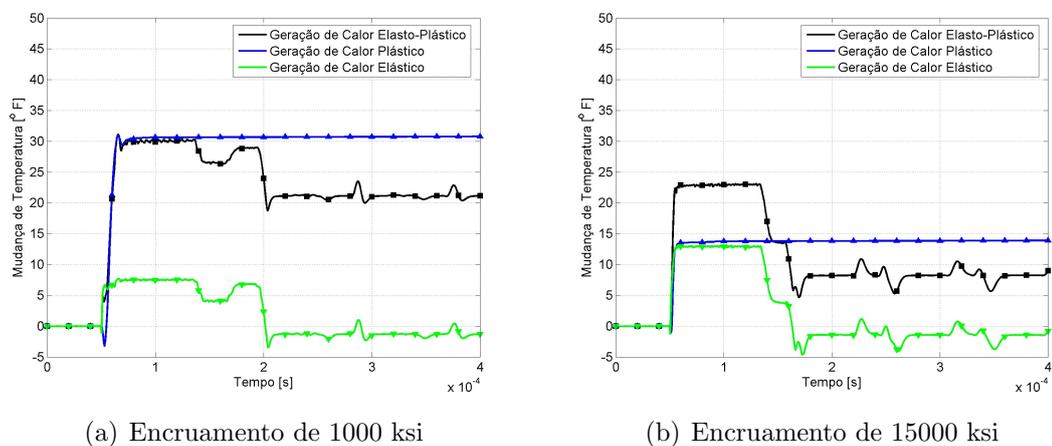


Figura 25: Temperatura vs Tempo no Modelo Termo-Elasto-Plástico.

A figura 25 comprova os fatos mencionados anteriormente. No caso em que há um maior endurecimento, mais energia é necessária para uma mesma deformação e, com isso, para uma mesma entrada de energia (impacto), menos calor é gerado.

Por último foi feita uma análise em que a taxa de deformação elasto-plástica gera calor, enquanto que a mudança de temperatura não provoca deformações (ou seja, $\alpha_1 = 0$). Esta análise foi realizada para comprovar o aumento na rigidez do material quando considerado o acoplamento termo-mecânico. A figura 26 apresenta os resultados da análise.

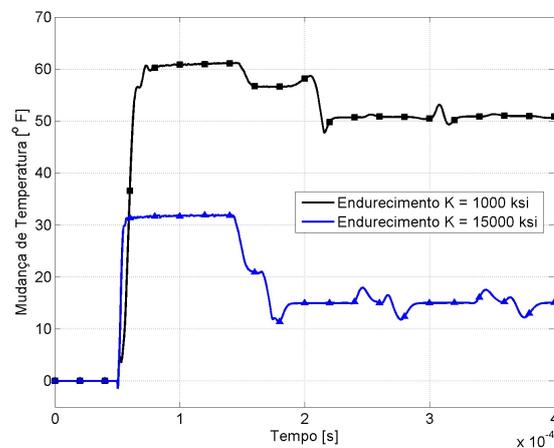


Figura 26: Temperatura vs Tempo considerando apenas a Geração de Calor.

Percebe-se pela figura 26 que o calor gerado foi maior neste caso, em que não há deformação pela mudança de temperatura, indicando que, mesmo que não sejam consideradas mudanças nas propriedades do material devido ao gradiente de temperatura, existe um efeito secundário de enrijecimento quando considerado o acoplamento termo-mecânico.

8.4 Impacto entre Treliça e Anteparo Rígido

Este exemplo consiste em uma treliça, no formato de um anel, conforme a figura 27. As barras da treliça tem seção transversal circular de 0.4 metros de diâmetro. Três casos foram considerados. No primeiro a treliça foi discretizada por elementos de quatro, três e dois nós, totalizando 240 elementos, sendo que o intervalo de tempo considerado foi de $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$. No segundo e terceiro caso, a treliça foi discretizada por elementos de dois nós em um total de 420 elementos, sendo que a solução foi obtida para dois intervalos de tempo ($\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ e $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$).

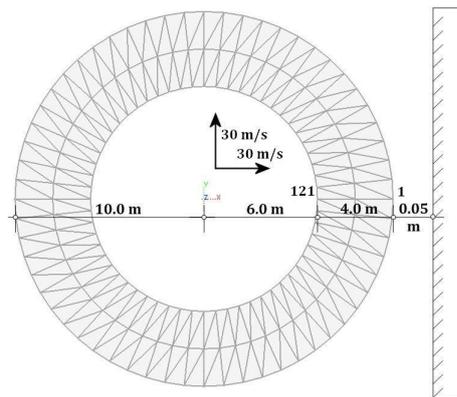


Figura 27: Dados Geométricos e Cinemáticos da Treliça.

O tempo total de análise é de 0,25 segundo e temperatura de referência de 293°K. Além disso não foi considerado o trabalho frio ($\beta = 1$). Foram adotadas as seguintes propriedades térmicas e mecânicas:

$$\begin{aligned}
 K &= 2,1 \cdot 10^{10} \text{ kgf/m}^2 & \rho &= 7840 \text{ kg/(m}^3) \\
 k &= 14 \text{ W/(}^\circ\text{K m)} & c_e &= 500 \text{ J/(}^\circ\text{K kg)} \\
 \alpha_1 &= 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m/(}^\circ\text{K m)} & \alpha_2 &= 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m/(}^\circ\text{K m)} \\
 \sigma_{escoamento} &= 2,1 \cdot 10^8 \text{ kgf/m}^2
 \end{aligned}$$

Cabe salientar que não foi considerado endurecimento (seja isotrópico, seja cinemático). As figuras 28 até 32 mostram a temperatura na treliça em cinco instantes para os três casos analisados, lembrando que o impacto ocorreu 0.025 segundo após o início da análise e que a escala de temperatura adotada é a mesma para todas as figuras.

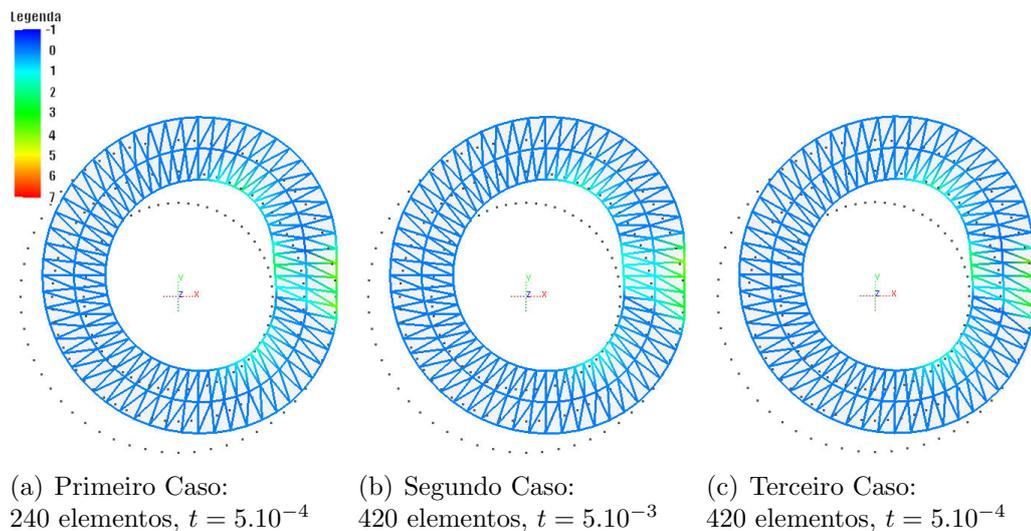
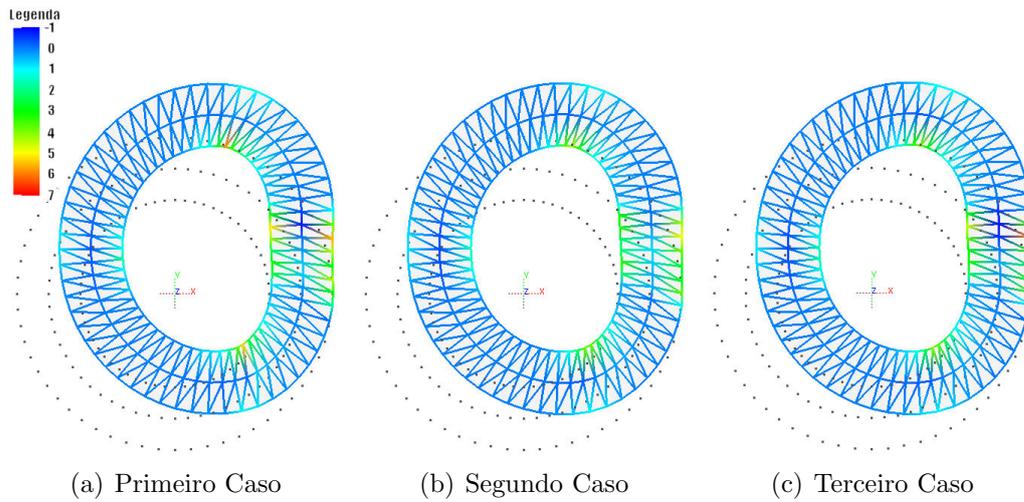
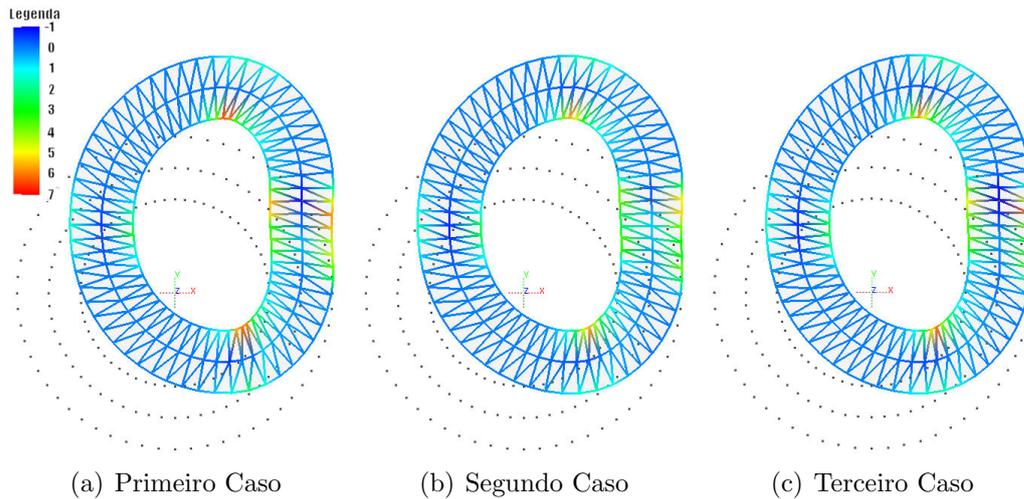
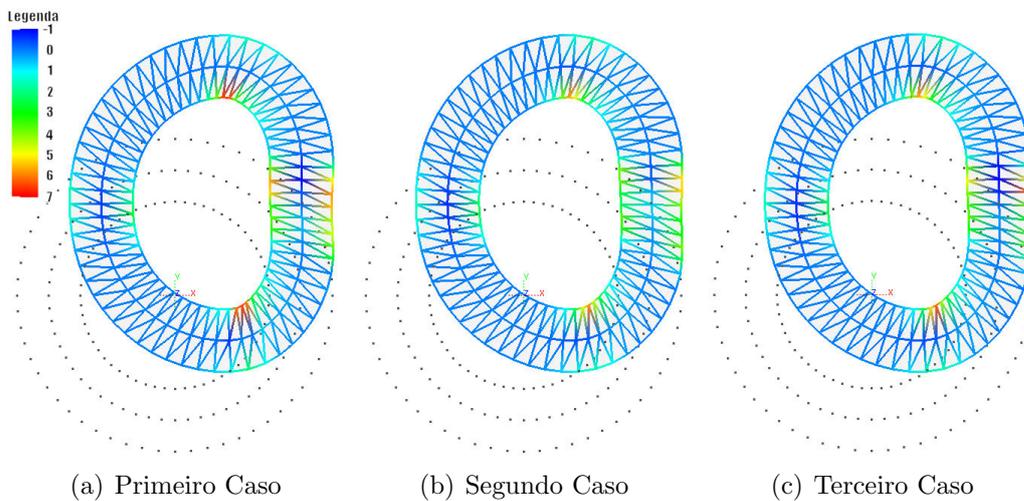


Figura 28: Temperatura no tempo de análise $t=0,05$ s.

Figura 29: Temperatura no tempo de análise $t=0,10$ s.Figura 30: Temperatura no tempo de análise $t=0,15$ s.Figura 31: Temperatura no tempo de análise $t=0,20$ s.

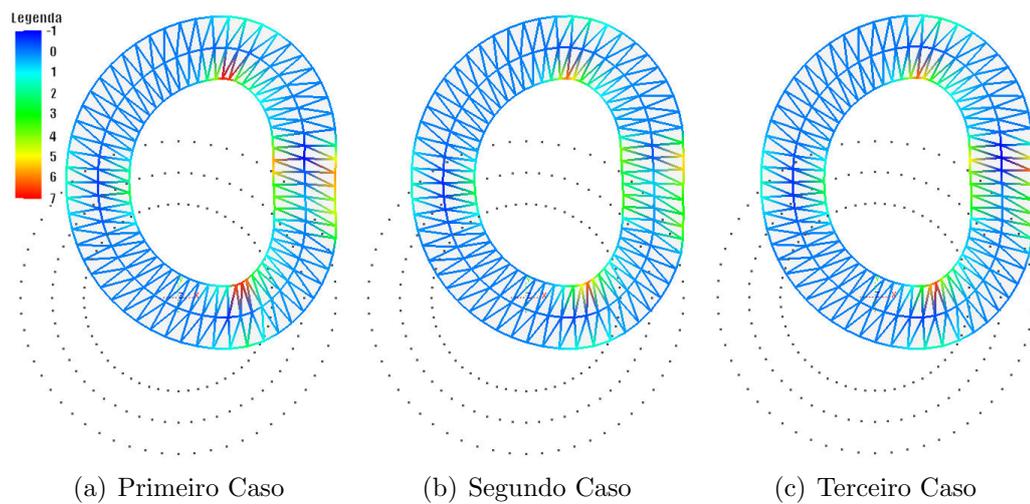


Figura 32: Temperatura no tempo de análise $t=0,25$ s.

Nas figuras 28 até 32 percebe-se que a variação de temperatura resultante da taxa de deformação decorrente do impacto da treliça é bastante semelhante nos três casos considerados, assim como a deformação para os vários instantes analisados.

9 Termo-Elasto-Plasticidade no Plano

Este capítulo apresenta um resumo da implementação numérica do problema termo-elasto-plástico, desta vez aplicado ao problema bidimensional utilizando o elemento de chapa (estado plano de tensões). Assim como no problema unidimensional, será adotado o esquema de solução escalonado isotérmico, em que é feita a partição natural do problema acoplado termo-elasto-plástico decorrente do esquema de integração temporal.

Tal partição resulta em um sub-problema térmico, em que a configuração é mantida constante, e outra fase mecânica, em que a temperatura é então mantida constante, conforme apresentado na figura 7, página 63. Como no capítulo 7, exemplo 7.3, foi determinado que o algoritmo implícito não traz benefícios que justifiquem sua utilização quando consideradas pequenas mudanças de temperatura, apenas o esquema de solução explícito foi implementado.

9.1 Condução de Calor no Plano

A transferência de calor por condução em uma estrutura de comportamento termo-elasto-plástico é definida pela equação de energia 2.78, reescrita aqui para o caso bidimensional, sendo que neste caso foi suprimida a geração interna de calor.

$$\rho_0 c_e \dot{\theta} - k \theta_{,kk} - \theta \sigma_{ij,\theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e - \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (9.1)$$

onde ρ_0 é a massa específica na configuração inicial, c_e é o calor específico, θ é a variação de temperatura, k é o coeficiente de condutividade térmica, σ_{ij} é o tensor de tensões, ϵ_{ij}^e e ϵ_{ij}^p são a parcela elástica e plástica do tensor de deformações, respectivamente, e β é uma constante que define a quantidade de trabalho plástico convertido em calor. As variáveis i, j e k variam de 1 a 2 neste caso.

A equação 9.1 está submetida às seguintes condições de contorno:

$$\theta = \theta(x_i, t) \quad \forall x_i \in \Gamma_1, t > 0$$

$$\begin{aligned} q &= q(x_i, t) = -k \theta_{,n} \quad \forall x_i \in \Gamma_2, t > 0 \\ \theta &= \theta_0(x_i) \quad \forall x_i \in \Omega, t = 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde $\theta(x_i, t)$ é a temperatura prescrita na superfície Γ_1 do corpo, $q(x_i, t)$ é o fluxo de calor prescrito na superfície Γ_2 do corpo, sendo n a normal à superfície, e θ_0 é a temperatura prescrita no volume Ω no início da análise, sabendo que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ e $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ e Γ é a superfície do corpo.

Em decorrência da implementação do algoritmo explícito e de o problema de condução de calor ser resolvido antes do problema mecânico, os termos de geração de calor decorrentes da deformação elástica e plástica não são conhecidos para o passo de tempo atual. Assim sendo, para determinar a geração de calor mecânica, será adotada as deformações do passo de tempo anterior, o que implica que a equação 9.1 pode ser reescrita na forma

$$\rho_0 c_e \dot{\theta} - k \theta_{,kk} = R_M^{t-1} \quad (9.3)$$

onde

$$R_M^{t-1} = \theta \sigma_{ij,\theta} \dot{\epsilon}_{ij}^e - \beta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \quad (9.4)$$

Nas equações 9.3 e 9.4, o sobrescrito $t-1$ indica que os valores são conhecidos apenas para o passo de tempo anterior. Para aproximar numericamente a equação 9.3, será utilizado o método dos elementos finitos e, para tanto, a temperatura deve ser aproximada por meio de uma série de funções, dada por

$$\theta = \theta_i \psi_i \quad , \quad (9.5)$$

onde θ_i é a variação de temperatura no nó i , com i variando de 1 até o número de nós, e ψ_i são as funções de forma. Além disso, a equação 9.3 deve ser ponderada em seu domínio por meio de funções ponderadoras W , dadas por

$$W = w_j \psi_j \quad , \quad (9.6)$$

onde ψ_j são as funções de ponderação, que, de acordo com o método de Galerkin, tem a mesma forma das funções de forma, e w_j são constantes arbitrárias. Dito isto, a equação 9.3 fica na forma

$$\int_{\Omega} \rho_0 c_e \dot{\theta}_i \psi_i w_j \psi_j d\Omega - \int_{\Omega} k \theta_i \psi_{i,kk} w_j \psi_j d\Omega - \int_{\Omega} R_M^{t-1} w_j \psi_j d\Omega = 0 \quad , \quad (9.7)$$

onde i e j variam de 1 ao número total de nós, decorrente da discretização da estrutura e k varia de 1 a 2, o número de direções consideradas. Como w_j são constantes arbitrárias,

e a equação 9.7 deve valer para quaisquer que sejam seus valores, esta pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \rho_0 c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j d\Omega - \int_{\Omega} k \theta_i \psi_{i,kk} \psi_j d\Omega - \int_{\Omega} R_M^{t-1} \psi_j d\Omega = 0 \quad (9.8)$$

Para reduzir a condição de continuidade no segundo termo da equação 9.8, utiliza-se o teorema da divergência após tê-lo integrado por partes, levando à

$$\int_{\Omega} \rho_0 c_e \dot{\theta}_i \psi_i \psi_j d\Omega + \int_{\Omega} k \theta_i \psi_{i,k} \psi_{j,k} d\Omega + \int_{\Gamma} q_n \psi_j d\Gamma - \int_{\Omega} R_M^{t-1} \psi_j d\Omega = 0 \quad (9.9)$$

A equação 9.9 pode ser escrita de forma matricial da seguinte maneira

$$C_{ij} \dot{\theta}_i + K_{ij} \theta_i = F_j \quad , \quad (9.10)$$

onde

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \rho c_e \psi_i \psi_j d\Omega \quad (9.11)$$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} k \psi_{i,k} \psi_{j,k} d\Omega \quad (9.12)$$

$$F_j = - \int_{\Gamma} q_n \psi_j d\Gamma + \int_{\Omega} R_M^{t-1} \psi_j d\Omega \quad (9.13)$$

Como a equação 9.10 é dependente da primeira derivada no tempo, será adotado a família alfa de integração temporal. São utilizadas duas equações para aproximar a temperatura no tempo:

$$\dot{\theta}_i^{t+\Delta t} = \frac{(\theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t)}{\Delta t} \quad (9.14)$$

$$\theta_i^{t+\Delta t} = (1 - \bar{\alpha})\theta_i^t + \bar{\alpha} \theta_i^{t+\Delta t} \quad , \quad (9.15)$$

onde $\bar{\alpha}$ é um parâmetro da aproximação temporal, ajustado conforme necessário. Aplicando as equações 9.14 e 9.15 na equação 9.10 resulta em

$$\{C_{ij} + \Delta t \bar{\alpha} K_{ij}\} \theta_i^{t+\Delta t} = \{C_{ij} - \Delta t (1 - \bar{\alpha}) K_{ij}\} \theta_i^t + \Delta t \{ \bar{\alpha} F_j^{t+\Delta t} + (1 - \bar{\alpha}) F_j^t \} \quad (9.16)$$

Estabelecido o sistema de equações algébricas utilizado para resolver a temperatura atual, o próximo passo para solução do problema termo-elasto-plástico é obter a posição atual por meio da solução do problema mecânico.

9.2 MEFP para Problemas Bidimensionais

A resposta de uma estrutura a esforços termo-mecânicos é definida pelo equilíbrio dinâmico local, equação 2.49, transcrita aqui para o caso bidimensional

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \quad , \quad (9.17)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy, F_i são as forças de corpo na direção i e \ddot{y}_i é a aceleração na direção i , com i e j variando de 1 a 2.

Assim como no problema térmico, é necessário determinar a forma discreta da equação 9.17 e, para tanto, esta deve ser multiplicada pela posição atual e integrada em seu domínio, levando à

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} F_i y_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{y}_i y_i d\Omega = 0 \quad (9.18)$$

O primeiro termo, referente à energia interna de deformação, está escrito em termos da configuração atual, ou seja, a descrição é Euleriana. Para escrever a forma Lagrangeana da equação 9.18, a energia interna é substituída por

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij} d\Omega_0 \quad , \quad (9.19)$$

onde \mathbf{E}_{ij} é o tensor de deformação de Green e \mathbf{P}_{ij} é seu par conjugado energético, o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie. Considerando que

$$\int_{\Omega} F_i y_i d\Omega = \int_{\Omega_0} f_i y_i d\Omega_0 \quad , \quad (9.20)$$

e aplicando a equação 9.19 e o teorema de conservação de massa na equação 9.18, resulta em

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} f_i y_i d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{y}_i y_i d\Omega_0 = 0 \quad (9.21)$$

Aplicando o princípio da estacionariedade, equação 4.20, em relação às posições nodais genéricas y_s , leva à

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} f_s d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{y}_s d\Omega_0 = 0 \quad (9.22)$$

O primeiro termo da equação 9.22 é chamado de forças internas, o segundo termo representa as forças externas e o último é chamado de forças inerciais. A equação 9.22 representa o equilíbrio dinâmico em qualquer instante de tempo. Porém ela precisa ser escrita para um instante específico do tempo (t), da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} \Big|{}^t d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} f_s^t d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{y}_s^t d\Omega_0 = 0 \quad (9.23)$$

A regra da cadeia foi aplicada nas forças internas para facilitar sua resolução. Desenvolvendo o primeiro termo, resulta em

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_{ij} \frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial y_s} \Big|{}^t d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} f_s^t d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{y}_s^t d\Omega_0 = 0 \quad (9.24)$$

A relação linear entre tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e deformação de Green, considerando a deformação relativa à mudança de temperatura, é dada por

$$\mathbf{P}_{ij} = C_{ijkl}^e (\mathbf{E}_{kl}^e + \alpha_1 \theta \delta_{kl}) \quad , \quad (9.25)$$

onde C_{ijkl}^e é o tensor que define as propriedades elásticas, \mathbf{E}_{kl}^e é a parte elástica do tensor de deformação de Green, α_1 é o coeficiente de expansão térmica, θ é a temperatura e δ_{kl} é o delta de Kronecker. Sem o termo de temperatura, esta relação é chamada Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff.

Considerando o material isotrópico e lembrando que o tensor de tensões e de deformações são simétricos, para o estado plano de tensões a equação 9.25 pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{x_2} \\ \tau_{x_{12}} \end{Bmatrix} = \frac{K}{1 + \bar{\nu}} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\bar{\nu}} & \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} & 0 \\ \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} & \frac{1}{1-\bar{\nu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_1} + \alpha_1 \theta \\ \epsilon_{x_2} + \alpha_1 \theta \\ \gamma_{x_{12}} \end{Bmatrix} \quad , \quad (9.26)$$

onde K é o módulo de elasticidade, ν é o módulo de Poisson, σ_{x_1} , σ_{x_2} e $\tau_{x_{12}}$ são os componentes do tensor de tensões e ϵ_{x_1} , ϵ_{x_2} e $\gamma_{x_{12}}$ são os componentes do tensor de deformações. Para o caso de estado plano de deformações, deve-se fazer:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (9.27)$$

Voltando à equação 9.23, considerando a decomposição aditiva do tensor de deformação de Green em uma parcela elástica e outra plástica, e a relação tensão e deformação dada pela equação 9.25, resulta em

$$\underbrace{\int_{\Omega_0} C_{ijkl}^e (\mathbf{E}_{kl}^e - \mathbf{E}_{kl}^p + \alpha_1 \theta \delta_{kl}) \frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial y_s} \Big|{}^t d\Omega_0}_{F_{int}} + \underbrace{\int_{\Omega_0} f_s^t d\Omega_0}_{F_{ext}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{y}_s^t J d\Omega_0}_{F_{iner}} = 0 \quad , \quad (9.28)$$

onde F_{int} são as forças internas, F_{ext} são as forças externas e F_{iner} são as forças de inércia. A partir da equação 9.28 é possível definir a resposta do material ante a esforços termo-mecânicos, através da temperatura, conhecida para o passo de tempo atual, e da posição y_s , que ainda precisa ser determinada. Para tanto, o termo que representa a energia interna deve ser desenvolvido para que fique em função apenas da posição y_s .

A primeira parcela da energia interna, relativa às propriedades do material e às deformações, é conhecida, visto que a posição y_s , arbitrada ou não, é conhecida. Assim sendo, só é necessário desenvolver a segunda parcela, referente à derivada do tensor de Green em relação à posição y_s . Esta pode ser determinada como

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial y_s} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{C}_{ij} - \mathbf{I}_{ij})}{\partial y_s} \quad (9.29)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{A}_{ki} \mathbf{A}_{kj})}{\partial y_s} \quad (9.30)$$

$$= \mathbf{A}_{ki} \frac{\partial (\mathbf{A}_{kj})}{\partial y_s} \quad (9.31)$$

$$= \mathbf{A}_{ki} \frac{\partial (\mathbf{A}_{kl}^1 \mathbf{A}_{lj}^{0-1})}{\partial y_s} \quad (9.32)$$

$$= \mathbf{A}_{ki} \frac{\partial (\mathbf{A}_{kl}^1)}{\partial y_s} \mathbf{A}_{lj}^{0-1} \quad (9.33)$$

onde \mathbf{C}_{ij} é o tensor de alongamento de Cauchy, \mathbf{A}_{ij} é o gradiente da função mudança de configuração da posição inicial para a posição atual, \mathbf{A}_{ij}^0 é o gradiente da função mudança de configuração do espaço adimensional auxiliar para a configuração inicial e \mathbf{A}_{ij}^1 é o gradiente da função mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração atual. Com isso a energia interna pode ser determinada pela posição y_s , visto que \mathbf{A}_{ij}^1 é escrito em função da posição atual.

Determinada as forças internas em relação à posição atual, seja calculada, seja arbitrada, esta não estará em equilíbrio com as forças externas e, assim sendo, aplica-se o método de Newton-Raphson para determinar uma nova posição tentativa da seguinte maneira:

$$y_s^{t+1} = y_s^t + \Delta y_s^t, \quad (9.34)$$

onde y_s^{t+1} é a nova posição tentativa, y_s^t é a posição atual, conhecida e Δy_s^t é a correção na posição atual, obtida por

$$\Delta y_s^t = H_{rs}^{-1} (F_{int} - F_{ext}), \quad (9.35)$$

onde H_{rs}^{-1} é a inversa da matriz hessiana, dada por

$$H_{rs} = \frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s \partial y_r} \quad (9.36)$$

Por brevidade, a dedução da matriz hessiana foi inserida no Apêndice B.

9.3 Elemento Triangular de 10 nós

Com relação ao elemento, tanto para o problema térmico quanto para o mecânico será utilizado o elemento triangular de 10 nós, conforme apresentado na figura 33.

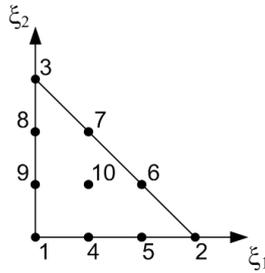


Figura 33: Elemento Triangular de 10 nós.

Sabendo-se que $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, as funções de forma para o elemento podem ser encontradas em Savassi (1996), Zienkiewicz e Taylor (2000) e são dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}\xi_1(3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) & \psi_2 &= \frac{1}{2}\xi_2(3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}\xi_3(3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) & \psi_4 &= \frac{9}{2}\xi_1 \xi_2(3\xi_1 - 1) \\ \psi_5 &= \frac{9}{2}\xi_1 \xi_2(3\xi_2 - 1) & \psi_6 &= \frac{9}{2}\xi_2 \xi_3(3\xi_2 - 1) \\ \psi_7 &= \frac{9}{2}\xi_2 \xi_3(3\xi_3 - 1) & \psi_8 &= \frac{9}{2}\xi_3 \xi_1(3\xi_3 - 1) \\ \psi_9 &= \frac{9}{2}\xi_3 \xi_1(3\xi_1 - 1) & \psi_{10} &= 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{aligned} \quad (9.37)$$

A derivada das funções de forma em relação às coordenadas ξ_1 e ξ_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2}\xi_1^2 - 9\xi_1 + 1 & \text{e} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi_2} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_1} &= 0 & \text{e} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_2} = \frac{27}{2}\xi_2^2 - 9\xi_2 + 1 \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi_1} &= \frac{-11}{2} + 18\xi_1 + 18\xi_2 - \frac{27}{2}\xi_1^2 - 27\xi_1\xi_2 - \frac{27}{2}\xi_2^2 & \text{e} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \xi_1} &= 27\xi_1\xi_2 - \frac{9}{2}\xi_2 & \text{e} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \xi_2} = \frac{9}{2}\xi_1(3\xi_1 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi_5}{\partial \xi_1} = \frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_5}{\partial \xi_2} = 27\xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \\
& \frac{\partial \psi_6}{\partial \xi_2} = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} \xi_1 + 36\xi_2 - 27\xi_1 \xi_2 - \frac{81}{2} \xi_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_6}{\partial \xi_1} = -\frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \\
& \frac{\partial \psi_7}{\partial \xi_2} = 9 - \frac{45}{2} \xi_1 - 45\xi_2 + \frac{27}{2} \xi_1^2 + 54\xi_1 \xi_2 + \frac{81}{2} \xi_2^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_7}{\partial \xi_1} = -\frac{45}{2} \xi_2 + 27\xi_1 \xi_2 + 27\xi_2^2 \\
& \frac{\partial \psi_8}{\partial \xi_1} = 9 - \frac{45}{2} \xi_2 - 45\xi_1 + \frac{27}{2} \xi_2^2 + 54\xi_1 \xi_2 + \frac{81}{2} \xi_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_8}{\partial \xi_2} = -\frac{45}{2} \xi_1 + 27\xi_1 \xi_2 + 27\xi_1^2 \\
& \frac{\partial \psi_9}{\partial \xi_1} = -\frac{9}{2} + 36\xi_1 + \frac{9}{2} \xi_2 - 27\xi_1 \xi_2 - \frac{81}{2} \xi_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_9}{\partial \xi_2} = -\frac{9}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1) \\
& \frac{\partial \psi_{10}}{\partial \xi_1} = 27\xi_2 - 54\xi_1 \xi_2 - 27\xi_2^2 \quad \text{e} \\
& \frac{\partial \psi_{10}}{\partial \xi_2} = 27\xi_1 - 54\xi_1 \xi_2 - 27\xi_1^2
\end{aligned} \tag{9.38}$$

Percebe-se que as funções de forma e suas derivadas estão escritas em função do espaço de coordenadas adimensional (ξ_1 e ξ_2), enquanto que as equações dos problemas térmico e mecânico estão definidas no espaço de coordenadas globais (x_1 e x_2 ou y_1 e y_2). Assim, uma relação deve ser estabelecida e, desta forma, para cada elemento define-se que

$$x_i = x_{ij} \psi_j(\xi) \quad , \tag{9.39}$$

onde x_i representa todos os pontos do elemento na direção i , x_{ij} é a coordenada do nó j na direção i , ψ_j é a função de forma relativa ao nó j , que é função das coordenadas adimensionais.

Dito isto, considerando o espaço adimensional definido por (ξ_1 e ξ_2) e o espaço global correspondente (x_1 e x_2), o gradiente da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial é dado pela relação diferencial

$$\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_0 \begin{Bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{Bmatrix} \tag{9.40}$$

Da mesma forma se escreve

$$\begin{Bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_0^{-1} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \tag{9.41}$$

Lembra-se ainda que o gradiente da mudança de configuração do espaço adimen-

sional para a configuração atual (ou corrente) fica

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{Bmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{Bmatrix} \quad (9.42)$$

Assim, o diferencial para a integração fica

$$d\Omega = J d\xi_1 d\xi_2 \quad (9.43)$$

onde $J = \det(\mathbf{A}_0)$ é o determinante da matriz mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial. Assim, o mapeamento do espaço adimensional no espaço local é dado por

$$\int_{\Omega} f(x_i) d\Omega = \int_{x_i} f(x_i) dx_i = \int_{\xi_i} f(\xi_i) J d\xi_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) J d\xi_1 d\xi_2, \quad (9.44)$$

onde o integrando f representa a função a ser integrada, dependente inicialmente do espaço de coordenadas globais e então do espaço de coordenadas locais.

A equação 9.44 pode ser resolvida numericamente utilizando a técnica de integração de Hammer (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), que consiste na substituição da soma integral por uma soma discreta em pontos determinados, conforme a equação 9.45.

$$\int_{\xi_i} f(\xi_i) J d\xi_i = f(x_j) J w_j, \quad (9.45)$$

onde w_j é o peso correspondente ao ponto de integração de Hammer, com j variando de 1 até o número de pontos de Hammer. No aplicativo desenvolvido foram utilizados 7 pontos de Hammer, e seus valores e pesos podem ser encontrados na tabela 4.

Tabela 4: Pontos e Pesos de Hammer de Quinta Ordem

ξ_1	ξ_2	ξ_3	Peso
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,11250
0,797426985353087	0,101286507323456	0,101286507323456	0,125939180544828
0,101286507323456	0,797426985353087	0,101286507323456	0,125939180544828
0,101286507323456	0,101286507323456	0,797426985353087	0,125939180544828
0,470142064105115	0,470142064105115	0,059715871789770	0,132394152788506
0,059715871789770	0,470142064105115	0,470142064105115	0,132394152788506
0,470142064105115	0,059715871789770	0,470142064105115	0,132394152788506

9.4 Análise de Viga Engastada

Neste exemplo inicial de chapa, o comportamento termo-elástico de uma viga engastada submetida a uma carga de tração aplicada na extremidade é analisado, conforme a figura 34. Na figura 34 também podem ser vistas as condições de contorno térmicas e mecânicas.

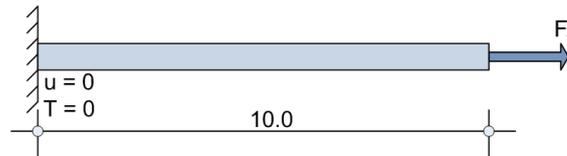


Figura 34: Viga Engastada sob Carregamento de Tração.

Este exemplo visa validar a análise mecânica do aplicativo de chapa desenvolvido e, para tanto, foram empregados 20 elementos finitos, sendo considerados os seguintes dados de entrada:

$$\begin{aligned}
 K &= 1. & \rho &= 1. \\
 k &= 1. & c_e &= 1. \\
 \alpha_1 &= 0. & \alpha_2 &= 1. \\
 \theta_0 &= 1. & \Delta t &= 0.1 \\
 A &= 1.
 \end{aligned}$$

Como essencialmente o problema é unidimensional, a variação do comprimento pode ser determinada de forma analítica. Se o modelo fosse elástico linear, a deformação seria facilmente obtida, da seguinte maneira:

$$\sigma_1 = K \epsilon_1 \quad (9.46)$$

$$\epsilon_1 = \frac{F_1}{A K} \quad (9.47)$$

Ou seja, a deformação é diretamente proporcional ao esforço aplicado na seção transversal, de área A . Porém, como foi considerado o modelo não-linear de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), a resposta é não trivial, e é obtida da seguinte maneira:

$$\mathbf{P}_1 = K \mathbf{E}_1 \quad (9.48)$$

Porém

$$\sigma_1 = \frac{\mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1}{J} \quad (9.49)$$

$$\mathbf{P}_1 = J \mathbf{A}_1^{-1} \sigma_1 \mathbf{A}_1^{-1} , \quad (9.50)$$

onde J é o jacobiano e, lembrando que para o caso unidimensional linear o gradiente da função mudança de configuração da inicial para a atual é dada por

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{l_f}{l_0} \quad (9.51)$$

Então, desenvolvendo a equação 9.50 para o caso unidimensional resulta em

$$\mathbf{P}_1 = \frac{l_f}{l_0} \frac{l_0}{l_f} \frac{l_0}{l_f} \sigma_1 \quad (9.52)$$

$$= \frac{l_0}{l_f} \frac{F_1}{A} \quad (9.53)$$

Substituindo a equação 9.53 na equação 9.48, e desenvolvendo o tensor de deformação de Green-Lagrange, resulta em

$$\frac{l_0}{l_f} \frac{F_1}{A} = K \frac{1}{2} \frac{l_f^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (9.54)$$

$$l_f^3 - l_f l_0^2 - 2l_0^3 \frac{F_1}{AK} = 0 \quad (9.55)$$

$$l_f^3 - 100l_f - 2000F_1 = 0 \quad (9.56)$$

Todo polinômio cúbico tem ao menos uma raiz real. Esta raiz pode ser facilmente encontrada utilizando-se a fórmula de Cardano-Tartaglia (Prof. CARDY, 2008), o que resulta em

$$l_f = \frac{10}{3} \sqrt[3]{27F_1 + 3\sqrt{81F_1^2 - 3}} + \frac{10}{3} \sqrt[3]{27F_1 - 3\sqrt{81F_1^2 - 3}} \quad (9.57)$$

Neste caso, uma comparação entre os modelos elástico linear e o de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) pode ser elaborada, conforme apresentada na figura 35.

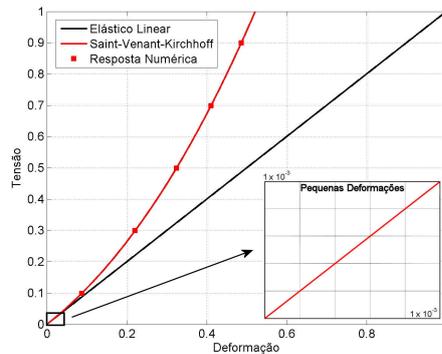


Figura 35: Comparação dos Modelos Elásticos na Estática.

Percebe-se que, no trecho correspondente às pequenas deformações, a relação entre tensão e deformação se confunde nos dois modelos. A partir de então, o comportamento não-linear do modelo de SVK transparece. Além disso, a figura 35 confirma que a resposta numérica do aplicativo desenvolvido está em perfeita concordância com a solução analítica do problema.

Considerando o problema dinâmico e que $F_1 = 0.005$, o deslocamento horizontal e a evolução da temperatura ao longo de 800 passos de tempo pode ser visto na figura 36, para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff e para a solução analítica elástica linear.

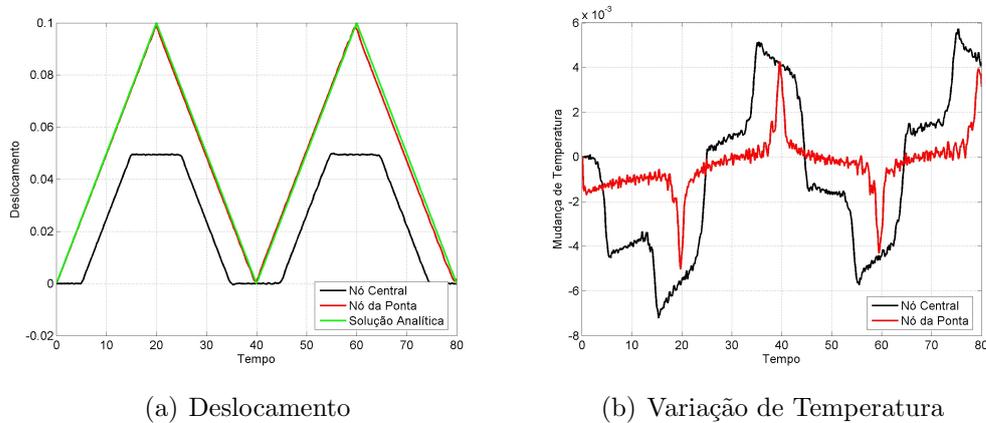


Figura 36: Comparação dos Modelos Elásticos na Dinâmica no caso de Pequenas Deformações.

Já para o caso de grandes deformações, a figura 37a apresenta o deslocamento para o caso em que $F_1 = 0.5$ para o modelo de SVK e para a solução analítica elástica linear. Na figura 37b pode ser vista evolução da temperatura para o modelo de SVK.

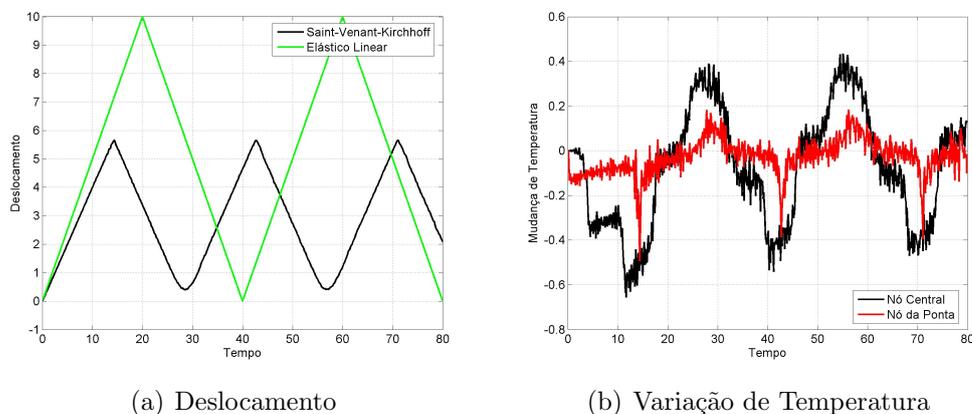


Figura 37: Comparação dos Modelos Elásticos na Dinâmica no caso de Grandes Deformações.

A grande diferença entre a solução analítica para o mesmo valor de K decorre unicamente do modelo utilizado, em que o comportamento não-linear do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff altera tanto a deformação máxima quanto a velocidade da onda de deformação, em decorrência deste ser mais rígido.

A figura 38 apresenta a variação de temperatura ao longo da barra deformada no modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em diversos instantes de tempo, em concordância com os instantes em que ocorrem os picos de deformação.

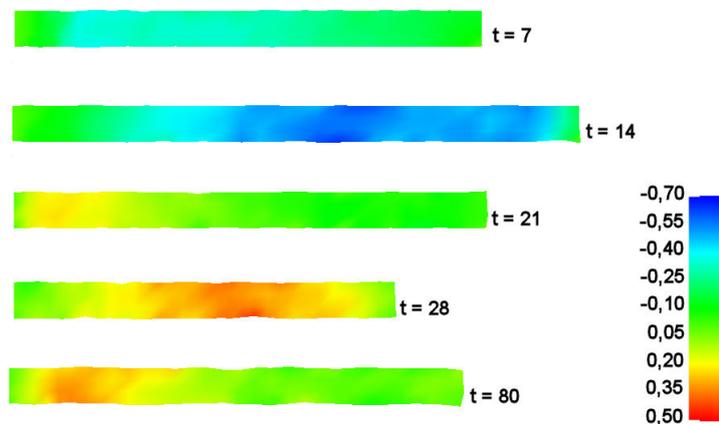


Figura 38: Variação de Temperatura ao Longo do Tempo e da Barra.

9.5 Impacto entre Barra e Anteparo Rígido

Apresentado na seção 8.3 utilizando elemento de barra, este exemplo é revisto com o intuito de validar a análise de impacto termomecânico do elemento de chapa. Este exemplo consiste no impacto entre uma barra elasto-plástica e um anteparo rígido, conforme a figura 39.

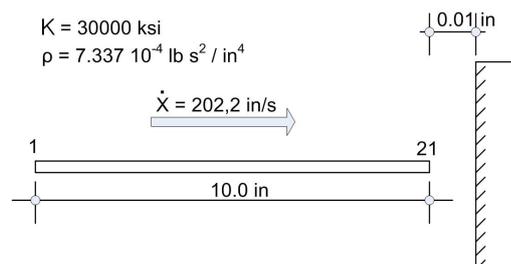
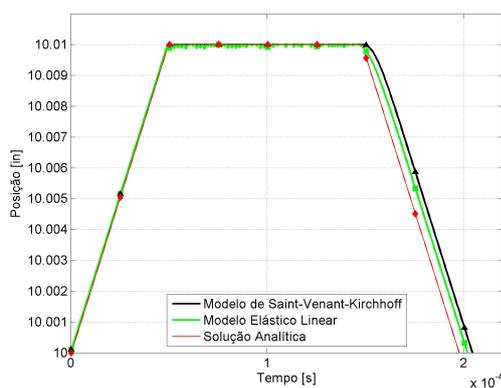


Figura 39: Impacto entre Barra e Anteparo Rígido.

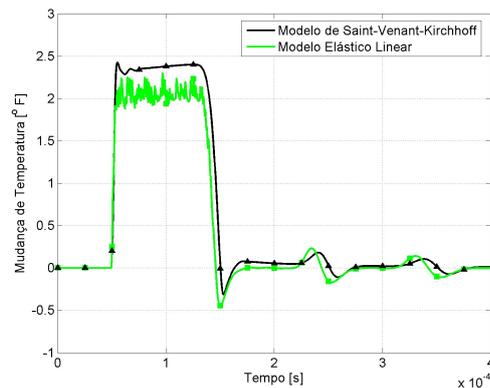
A barra foi discretizada por 40 elementos finitos de chapa, submetida a uma temperatura de referência de 68°F , sendo que a solução foi obtida para o intervalo de tempo de $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-6}$ s. Foram consideradas as seguintes propriedades termo-mecânicas:

$$\begin{aligned} K &= 30000 \text{ ksi} & \rho &= 7,337 \cdot 10^{-4} \text{ lb s}^2/\text{in}^4 \\ k &= 1,741 \text{ lb}/(^{\circ}\text{F s}) & c_e &= 1119,81 \text{ in}/(^{\circ}\text{F}) \\ \alpha_1 &= 9,7 \cdot 10^{-6} \text{ in}/(^{\circ}\text{F in}) & \alpha_2 &= 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ in}/(^{\circ}\text{F in}) \end{aligned}$$

A figura 40a apresenta a comparação dos resultados de posição de um nó impactante, utilizando o elemento de barra (elástico linear), o elemento de chapa (Saint-Venant-Kirchhoff) e a solução analítica (elástica linear), apresentada na seção 8.3. Na figura 40b podem ser vistos os resultados de temperatura para um nó em $x = 9,5$ in para as mesmas análises.



(a) Posição



(b) Variação de Temperatura

Figura 40: Impacto de Barra - Comparação entre diferentes elementos.

Na figura 40 percebe-se que, apesar dos níveis de deformação terem atingido valores que resultam em diferença entre os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e o elástico linear, os resultados foram coerentes, levando à conclusão de que o aplicativo de chapa desenvolvido está em concordância com a teoria apresentada.

Na sequência foram realizadas duas análises considerando o comportamento plástico do material. Para tanto, foi considerado que a tensão de escoamento foi de $\sigma_{esc} = 10$ ksi, que a quantidade de trabalho plástico convertido em calor foi de $\beta = 1$, e encruamento de 1000 ksi e de 15000 ksi. As figuras 41 e 42 apresentam os resultados de posição do nó impactante e de temperatura do nó localizado em $x = 9.5$ in, ao longo do tempo, para os diferentes casos de encruamento.

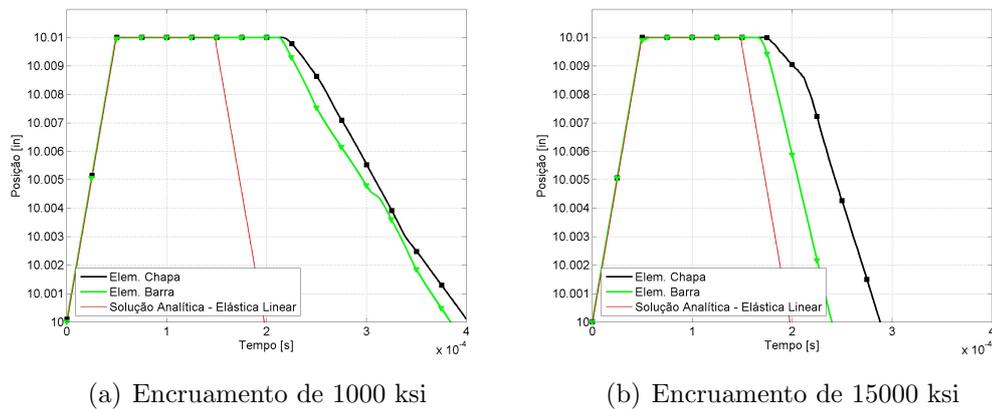


Figura 41: Impacto de Barra - Posição.

Percebe-se na figura 41 que houveram diferenças significativas no comportamento plástico do material, em especial quando considerado encruamento de 15000 ksi. Porém tais diferenças são decorrentes dos diferentes modelos adotados. Isto implica que diferenças na geração de calor também são esperadas, conforme mostrado na figura 42. Ainda assim, os resultados são próximos o suficiente, levando à conclusão que a aplicativo termo-plástico de chapa está gerando resultados coerentes.

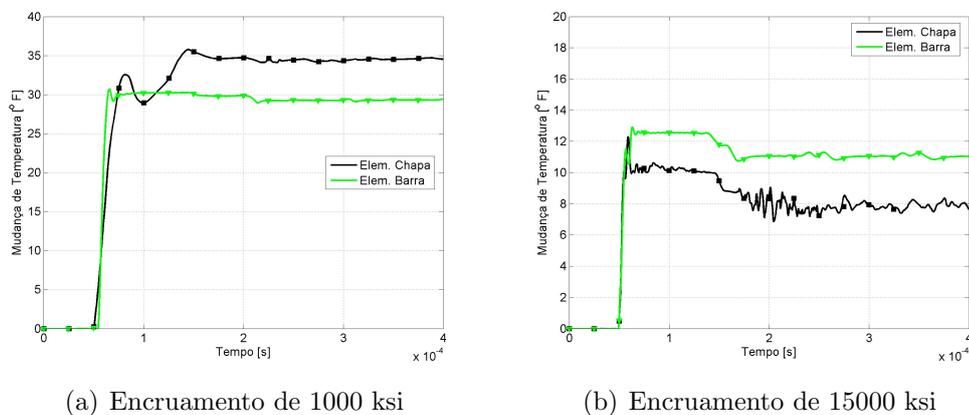


Figura 42: Impacto de Barra - Mudança de Temperatura.

9.6 Impacto de Anel e Anteparo Rígido

Este exemplo foi baseado em Greco (2004) e em Marques (2006), e consiste em uma estrutura anelar, de comportamento elástico, seguindo uma trajetória de impacto inclinada em relação a um anteparo rígido, sob velocidade constante, conforme apresentado na figura 43.

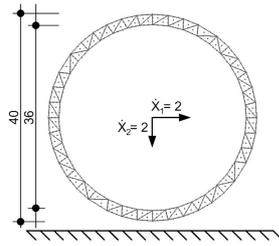


Figura 43: Impacto entre Anel e Anteparo Rígido.

Na figura 43 também pode ser vista a discretização do anel em 80 elementos finitos. Foram adotados 4000 passos de tempo de $\Delta t = 0.005$, temperatura de referência de $\theta_0 = 1$. e as seguintes propriedades termo-mecânicas:

$$\begin{aligned} K &= 100. & \rho &= 0.01 \\ k &= 1. & c_e &= 1. \\ \alpha_1 &= 0. & \alpha_2 &= 0.1 \end{aligned}$$

Nas figuras 44 até 48 são apresentados os deslocamentos horizontal e vertical, assim como a temperatura, para diversos instantes de tempo no caso de impacto sem atrito. Os resultados de deslocamento são praticamente idênticos aos apresentados em Marques (2006), sendo estes omitidos para facilitar a visualização.

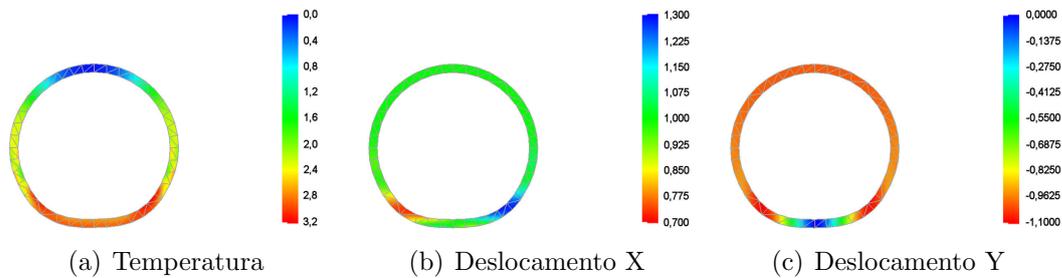


Figura 44: Impacto de Anel - 0,5 s após impacto.

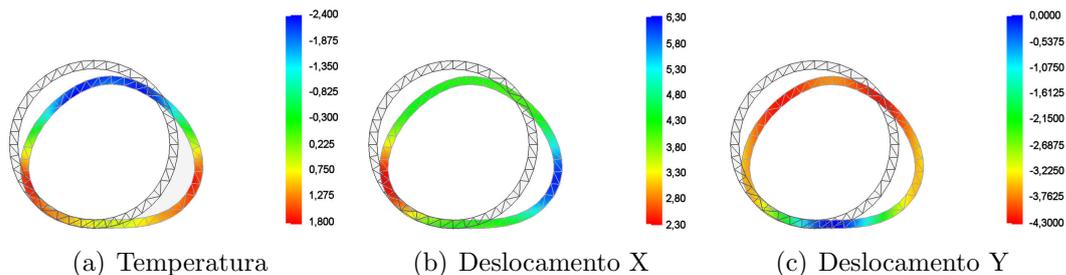


Figura 45: Impacto de Anel - 2,1 s após impacto.

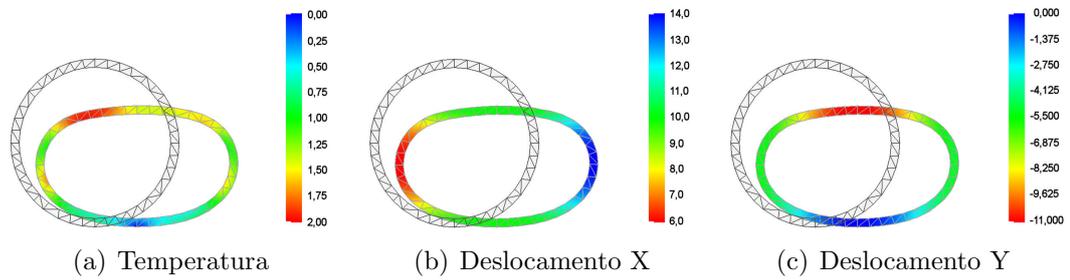


Figura 46: Impacto de Anel - 5 s após impacto.

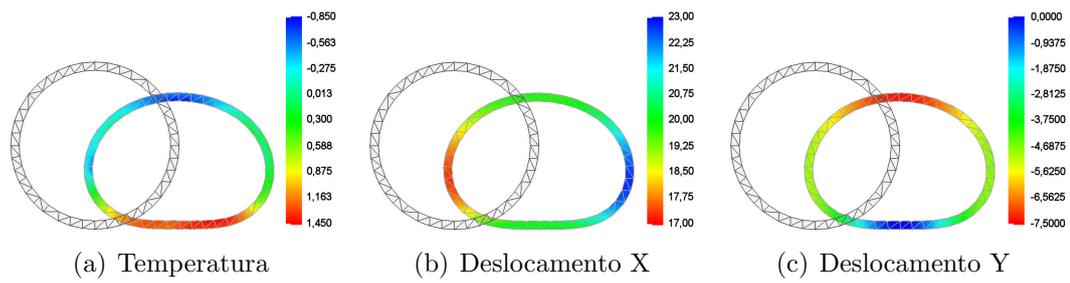


Figura 47: Impacto de Anel - 10 s após impacto.

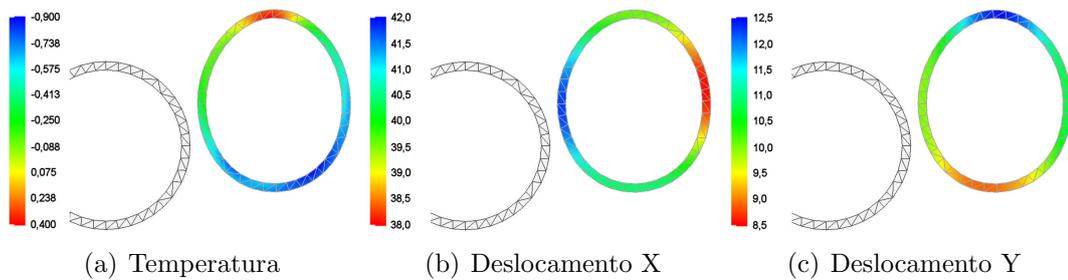


Figura 48: Impacto de Anel - 20 s após impacto.

10 Conclusão

Ao longo do trabalho foram apresentados os conceitos necessários para a completa descrição do comportamento de sólidos termo-elasto-plásticos, baseados nas leis da termodinâmica e nos princípios da elasticidade e da plasticidade. Estes conceitos foram então utilizados para o desenvolvimento de código computacional para analisar estruturas com comportamento termo-elástico e termo-plástico. Diversos exemplos foram sugeridos e comparados a outros trabalhos acadêmicos, comprovando a precisão e validando a formulação, e, com isto, atendendo plenamente os objetivos do trabalho.

A primeira contribuição desta tese está na extensão da formulação não-linear geométrica desenvolvida em Coda (2003) e em Greco e Coda (2004), para o estudo de estruturas em situações não-isotérmicas, incluindo a geração de calor decorrente da taxa de deformação da estrutura.

A segunda contribuição está diretamente ligada à teoria da termo-elasticidade, em que esta foi contestada em sua forma atual, questionando até mesmo sua validade, visto que o termo de geração de calor elástico surge em decorrência da consideração de que a entropia pode decrescer. Foi feita uma proposta para alteração, porém esta também fere o pressuposto da entropia estável ou crescente. No entanto, desenvolver e propor uma nova teoria estava fora do escopo do trabalho.

Outra extensão provinda deste estudo está na consideração do comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos elásticos e elasto-plásticos, em situações não-isotérmicas, em estruturas que sofrem impacto em anteparos rígidos, devidamente comprovados por meio da comparação entre resultados obtidos e os existentes na literatura consultada.

Um último ponto a destacar é a consideração de diversas fontes de não-linearidade inerentes ao problema termo-elasto-plástico: a física, decorrente de o material apresentar uma relação não-linear entre tensão e deformação; a geométrica, em consequência de se considerar grandes deslocamentos; a de contato, decorrente das mudanças nas condições

de contorno e iniciais no processo de impacto; e a de equilíbrio termo-mecânico, visto que cada campo (mecânico e térmico) depende da resposta do outro, resultando em um equilíbrio não-linear.

10.1 Futuros Desenvolvimentos

O próximo desenvolvimento, facilmente vislumbrado, está na utilização de elementos mais complexos, capazes de considerar não apenas os esforços normais, mas também os esforços de flexão, torção e afins. Elementos térmicos capazes de considerar a geração de calor não apenas na linha média, mas também em sua espessura, teriam que ser desenvolvidos para que a resposta térmica pudesse ser devidamente representada. Uma alternativa seria representar a temperatura na seção transversal.

Além disso, a transmissão de calor por radiação pode ser facilmente inserida no aplicativo desenvolvido, assim como outras formas de geração de calor, como a fricção, desenvolvida no contato entre estruturas. Em conjunto, o desgaste do material em decorrência da fricção também poderia ser incluída, conforme apresentado nos artigos Stromberg (1999) e Ireman, Klarbring e Stromberg (2002).

A partir disso, tópicos mais avançados poderiam ser abordados, como em Baldoni e Rajagopal (1997), que trata da mudança de fase do material (líquido para sólido e vice-versa). Obviamente isto implicaria incluir a transmissão de calor por convecção.

Referências

- ADAMS, S. L.; KREMPL, E. Thermomechanical response of 3.5 ni-mo-v alloy steel and type 304 stainless steel under cyclic uniaxial inelastic deformation. *Res. Mechanica*, v. 10, p. 295, 1984.
- ALONSO, M. P.; GARRIDO, J. A.; FOCES, A. Application of BEM to solve two-dimensional thermoelastic contact problems with convection and radiation conditions. *Computers & Structures*, v. 66, n. 1, p. 115–125, Janeiro 1998.
- ALTAY, G. A.; DOKMECI, M. C. Some variational principles for linear coupled thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, n. 26, p. 3937–3948, Novembro 1996.
- ANNAMALAI, K.; PURI, I. K. *Advanced Thermodynamics Engineering*. 1. ed. Londres: CRC Press, 2002. (CRC Series in Computational Mechanics and Applied Analysis).
- ARMERO, F.; SIMO, J. C. A priori stability estimates and unconditionally stable product formula algorithms for nonlinear coupled thermoplasticity. *International Journal of Plasticity*, v. 9, n. 6, p. 749–782, 1993.
- BAKSI, A.; BERA, R. K.; DEBNATH, L. Eigen value approach to study the effect of rotation and relaxation time in two dimensional problems of generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, v. 42, n. 15-16, p. 1573–1585, Setembro 2004.
- BALDONI, F.; RAJAGOPAL, K. R. A continuum theory for the thermomechanics of solidification. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 32, n. 1, p. 3–20, Janeiro 1997.
- BAMMANN, D. J. Modeling temperature and strain rate dependent large deformations of metals. *Applied Mechanics Reviews*, v. 43, p. 312–319, 1990.
- BATHE, K.-J. *Finite Element Procedures*. Nova Jersey: Prentice Hall, 1982.
- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite Elements: An Introduction*. 1. ed. Texas, Estados Unidos: Prentice Hall, 1981.
- BEN-AMUZ, M. On a variational theorem in coupled thermoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, v. 32, p. 943–945, 1965.
- BERTRAM, A. Finite thermoplasticity based on isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, v. 19, n. 11, p. 2027–2050, Novembro 2003.
- BIALECKI, R. A. et al. Evolutionary shape optimization of thermoelastic bodies exchanging heat by convection and radiation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 17, p. 1839–1859, Abril 2005.
-

- BIOT, M. Thermoelasticity and irreversible thermo-dynamics. *Journal of Applied Physics*, v. 27, n. 3, p. 240–253, 1956.
- BIRLIK, G. A.; MENGI, Y.; MUNEEB, A. H. A higher order dynamic theory for isotropic thermoelastic cylindrical shells: Part 2: Assessment. *Journal of Sound and Vibration*, v. 179, n. 5, p. 827–837, Fevereiro 1995.
- BOLEY, B. A.; WEINER. *Theory of Thermal Stresses*. 1. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1960.
- BOULANGER, T. et al. Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels. *International Journal of Fatigue*, v. 26, n. 3, p. 221–229, Março 2004.
- CANADIJA, M.; BRNIC, J. Associative coupled thermoplasticity at finite strain with temperature-dependent material parameters. *International Journal of Plasticity*, v. 20, n. 10, p. 1851–1874, Outubro 2004.
- CANNAROZZI, A. A.; UBERTINI, F. A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, n. 4, p. 717–739, Janeiro 2001.
- CARPENTER, N. J.; TAYLOR, R. L.; KATONA, M. G. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, n. 1, p. 103–128, 1991.
- CHOI, J.-H.; LEE, I. Finite element analysis of transient thermoelastic behaviors in disk brakes. *Wear*, v. 257, n. 1-2, p. 47–58, Julho 2004.
- CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity*. Amsterdam: North Holland, 1993. (Studies in Mathematics and its Applications, v. 1).
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- CODA, H. B. An enhanced positional finite element formulation for geometrical non-linear analysis of three-dimensional laminate frames. In: TOPPING, B.; PAPADRAKAKIS, M. (Ed.). *Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Structures Technology*. Atenas, Grécia: [s.n.], 2008. v. 1.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells - curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, p. 185–200, Junho 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.
- COLEMAN, B. D. Memories of clifford truesdell. *Journal of Elasticity*, v. 70, n. 1-3, p. 1–13, 2003.
-

- COLEMAN, B. D.; GURTIN, M. E. Thermodynamics with internal state variables. *Journal of Chemical Physics*, v. 47, p. 597–613, 1967.
- COLEMAN, B. D.; NOLL, W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 13, p. 167–178, 1963.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3. ed. Toronto, Canadá: John Wiley & Sons, 1989.
- COPETTI, M. I. M. A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 59, n. 4, p. 361–376, Junho 2002.
- COPETTI, M. I. M. Finite element approximation to a quasi-static thermoelastic problem to the contact of two rods. *Applied Numerical Mathematics*, v. 44, n. 1-2, p. 31–47, Janeiro 2003.
- DACHKOVSKY, S.; BOHM, M. Finite thermoplasticity with phase changes based on isomorphisms. *International Journal of Plasticity*, v. 20, n. 2, p. 323–334, Fevereiro 2004.
- DHALIWAL, R.; SHERIEF, H. Generalized thermoelasticity for anisotropic media. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 33, p. 1–8, 1980.
- DILLON, O. Coupled thermoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 11, p. 21–33, 1963.
- DUHAMEL, J. M. C. Second mémoire sur les phénomènes thermo-mechanique. *Journal de L'Escole Polytechnique*, v. 15, n. 25, p. 1–57, 1837.
- EL-MAGHRABY, N. M.; YOSSEF, H. M. State space approach to generalized thermoelastic problem with thermomechanical shock. *Applied Mathematics and Computation*, v. 156, n. 2, p. 577–586, Setembro 2004.
- FARREN, W. S.; TAYLOR, G. I. The heat developed during plastic extension of metals. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 107, p. 422–451, 1925.
- GAIKWAD, M. N.; DESHMUKH, K. C. Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate. *Applied Mathematical Modelling*, v. 29, n. 9, p. 797–804, Setembro 2005.
- GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese (Tese de Doutorado em Engenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, Agosto 2004.
- GRECO, M.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2D structural problems. *Computational Mechanics*, v. 34, n. 5, p. 410–422, Maio 2004.
-

- GREEN, A. E.; LINDSAY, K. A. Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*, v. 2, n. 1, p. 1–7, 1972.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. In: ROYAL SOCIETY OF LONDON. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. Londres, Inglaterra, 1991. v. 432, p. 171–194.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. On undamped heat waves in an elastic solid. *Journal of Thermal Stresses*, v. 15, p. 253–264, 1992.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*, v. 31, p. 189–208, 1993.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A new thermoviscous theory for fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 56, p. 289–306, 1995.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A unified procedure for construction of theories of deformable media. I - classical continuum physics, II - generalized continua, III - mixtures of interacting continua. In: ROYAL SOCIETY OF LONDON. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*. Londres, Inglaterra, 1995. v. 448, p. 335–388.
- GUO, B. Z.; CHEN, J. C. The first real eigenvalue of a one-dimensional linear thermoelastic system. *Computers & Mathematics with Applications*, v. 38, n. 11-12, p. 249–256, Dezembro 1999.
- HAKANSSON, P.; WALLIN, M.; RISTINMAA, M. Comparison of isotropic hardening and kinematic hardening in thermoplasticity. *International Journal of Plasticity*, v. 21, n. 7, p. 1435–1460, Julho 2005.
- HALL, R. B. Methods in entropic thermomechanics. *Composites Science and Technology*, v. 60, n. 12-13, p. 2581–2599, Setembro 2000.
- HERRMANN, G. On variational principles in thermoelasticity and heat conduction. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 22, p. 151–155, 1963.
- HETNARSKI, R. B.; IGNACZAK, J. Nonclassical dynamical thermoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, v. 37, n. 1-2, p. 215–224, Janeiro 2000.
- HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. 2. ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, 2004.
- HOSSEINI-TEHRANI, P.; ESLAMI, M. R. Bem analysis of thermal and mechanical shock in a two-dimensional finite domain considering coupled thermoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, n. 3, p. 249–257, Março 2000.
- HU, N. A solution method for dynamic contact problems. *Computers & Structures*, v. 63, n. 6, p. 1053–1063, Junho 1997.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; CHORFI, L. Covariant principal axis formulation of associated coupled thermoplasticity at finite strains and its numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, n. 2, p. 499–528, Janeiro 2002.
-

- IESAN, D.; QUINTANILLA, R. On the plane strain of thermo-microstretch elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, v. 42, n. 19-20, p. 1957–1972, Novembro-Dezembro 2004.
- IREMAN, P.; KLARBRING, A.; STROMBERG, N. Finite element algorithms for thermoelastic wear problems. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, v. 21, n. 3, p. 423–440, 2002.
- KAMLAH, M.; HAUPT, P. On the macroscopic description of stored energy and self heating during plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, v. 13, n. 10, p. 893–911, Dezembro 1997.
- KHALIFA, M. E.; EL-RAHMAN, R. G. A.; GHONAMY, M. I. Some new exact solutions for linear thermoelastic system. *Applied Mathematics and Computation*, v. 147, n. 3, p. 773–787, Janeiro 2004.
- KOJIC, M. An extension of 3-d procedure to large strain analysis of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 23-24, p. 2447–2462, Março 2002.
- KOSHELEV, V.; GHASSEMI, A. Complex variable bem for thermo- and poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, n. 7, p. 825–832, Julho 2004.
- KOUREAS, T.; CHARALAMBOPOULOS, A.; KALPAKIDES, V. K. On conservation laws in generalized dynamic thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, v. 40, n. 15, p. 1687–1696, Setembro 2002.
- LALOUI, L.; CEKEREVAC, C. Thermo-plasticity of clays: An isotropic yield mechanism. *Computers and Geotechnics*, v. 30, n. 8, p. 649–660, Dezembro 2003.
- LANCZOS, C. *The variational Principles of Mechanics*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1986.
- LEE, J. D.; CHEN, Y. A theory of thermo-visco-elastic-plastic materials: thermomechanical coupling in simple shear. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 35, n. 3, p. 187–209, Maio-Junho 2001.
- LEHMANN, T.; BLIX, U. On the coupled thermo-mechanical process in the necking problem. *International Journal of Plasticity*, v. 1, p. 175–188, 1985.
- LEIVA, H.; SIVOLI, Z. Existence, stability and smoothness of a bounded solution for nonlinear time-varying thermoelastic plate equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 285, n. 1, p. 191–211, Setembro 2003.
- LEWIS, R. W. et al. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*. 1. ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, 1996.
- LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H. *A Heat Transfer Textbook*. 3. ed. Estados Unidos: Phlogiston Press, 2005.
- LORD, H.; SHULMAN, Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 15, p. 299–309, 1967.
-

- LYKOTRAFITIS, G.; GEORGIADIS, H. G. The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving sources over a half space. *International Journal of Solids and Structures*, v. 40, n. 4, p. 899–940, Fevereiro 2003.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Tese de Doutorado em Engenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- MALVERN, L. E. *Introduction to the mechanics of a Continuous Medium*. Nova Jersey: Prentice Hall, 1969.
- MANOACH, E.; RIBEIRO, P. Coupled, thermoelastic, large amplitude vibrations of timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 46, n. 11, p. 1589–1606, Novembro 2004.
- MARQUES, G. C. dos S. C. *Estudo e Desenvolvimento de Código Computacional Baseado no Método dos Elementos Finitos para Análise Dinâmica Não Linear Geométrica de Sólidos Bidimensionais*. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Engenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- MASON, J. J.; ROSAKIS, A. J.; RAVICHANDRAN, G. On the strain and strain-rate dependence of the fraction of plastic work converted into heat: an experimental study using high-speed infrared detectors and the kolsky bar. *Mechanics of Materials*, v. 17, n. 2, p. 135–145, 1994.
- MIEHE, C. Entropic thermoelasticity at finite strains. aspects of the formulation and numerical implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 120, n. 3-4, p. 243–269, Fevereiro 1995.
- MINSKI, R. L. *Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido*. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Engenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- MIRANDA, S. de; UBERTINI, F. On the consistency of finite element models in thermoelastic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 18-19, p. 2411–2427, Janeiro 2001.
- MIRANDA-VALENZUELA, J. C.; MUCI-KUCHLER, K. H.; SORIANO-SORIANO, S. Adaptive meshing for two-dimensional thermoelastic problems using hermite boundary elements. *Advances in Engineering Software*, v. 32, n. 3, p. 171–188, Dezembro 2000.
- MUKHERJEE, N.; SINHA, P. K. Thermal shocks in composite plates: a coupled thermoelastic finite element analysis. *Composite Structures*, v. 34, n. 1, p. 1–12, Janeiro 1996.
- MUKHOPADHYAY, S. Thermoelastic interactions without energy dissipation in an unbounded body with a spherical cavity subjected to harmonically varying temperature. *Mechanics Research Communications*, v. 31, n. 1, p. 81–89, Janeiro-Fevereiro 2004.
- MUNEEB, A. H.; BIRLIK, G. A.; MENGI, Y. A higher order dynamic theory for isotropic thermoelastic cylindrical shells: Part 1: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 179, n. 5, p. 817–826, Fevereiro 1995.
-

- NEDOMA, J. On a coupled stefan-like problem in thermo-visco-plastic rheology. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 84, n. 1, p. 45–80, Outubro 1997.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, v. 85, p. 67–94, 1959.
- NICKELL, R.; SACKMAN, J. Variational principles for linear coupled thermoelasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 26, p. 11–26, 1968.
- OGDEN, R. W. *Non-linear Elastic Deformations*. Nova York: Ellis Horwood, 1984. (Mathematics and its Applications).
- PANAGIOTOPOULOS, P. D. *Inequality Problems in Mechanics and Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions*. 1. ed. Boston: Birkhäuser, 1985.
- PARK, K. H.; BANERJEE, P. K. Two- and three-dimensional transient thermoelastic analysis by bem via particular integrals. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, n. 10, p. 2871–2892, Maio 2002.
- PARKUS, H. *Thermoelasticity*. 2. ed. Austria: Springer-Verlag, 1976.
- PASCON, J. P. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Engenharia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- PERZYNA, P.; SAWZCUK, A. Problems in thermoplasticity. *Nuclear Engineering and Design*, v. 24, p. 1–55, 1973.
- Prof. CARDY. *A Matemática, um ABC do xyz*. 2008. Disponível em: <<http://www.profcardy.com/cardicas/cardano.php>>. Acesso em: 6 de outubro de 2008.
- QIN, Y.; RIVERA, J. M. Blow-up of solutions to the cauchy problem in nonlinear one-dimensional thermoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 292, n. 1, p. 160–193, Abril 2004.
- QUINTANILLA, R. Thermoelasticity without energy dissipation of materials with microstructure. *Applied Mathematical Modelling*, v. 26, n. 12, p. 1125–1137, Dezembro 2002.
- RAND, O.; GIVOLI, D. Reduction of the periodic thermoelastic deformation in truss-structures by design refinements and active loads. *Computers & Structures*, v. 54, n. 4, p. 757–765, Fevereiro 1995.
- RAVEENDRA, S. T. The use of a piecewise continuous polynomial basis function for the surface reduction of integral equations in thermoelastic analysis. *Computers & Structures*, v. 77, n. 6, p. 601–614, Agosto 2000.
- RIBEIRO, P.; MANOACH, E. The effect of temperature on the large amplitude vibrations of curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 285, n. 4-5, p. 1093–1107, Agosto 2005.
-

- RIVERA, J. E. M.; BARRETO, R. K. Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity. *Nonlinear Analysis*, v. 31, n. 1-2, p. 149–162, Janeiro 1998.
- ROSAKIS, P. et al. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 48, n. 3, p. 581–607, Março 2000.
- ROSSIT, C. A.; LAURA, P. A. A unified, polynomial approach for the approximate solution of thermoelastic problems in rectangular plates. *Ocean Engineering*, v. 24, n. 6, p. 543–549, Junho 1997.
- SANTAOJA, K. Gradient theory from the thermomechanics point of view. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 71, n. 4-6, p. 557–566, Março-Abril 2004.
- SARACIBAR, C. A. de; CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. On the formulation of coupled thermoplastic problems with phase-change. *International Journal of Plasticity*, v. 15, p. 1–34, 1999.
- SARACIBAR, C. A. de; CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. On the constitutive modeling of coupled thermomechanical phase-change problems. *International Journal of Plasticity*, v. 17, n. 12, p. 1565–1622, Dezembro 2001.
- SAVASSI, W. *Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas*. São Carlos, São Paulo: EESC/USP, 1996.
- SCOTT, N. H. Connections between deformation-temperature and deformation-entropy constraints and near-constraints in thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, v. 34, n. 15, p. 1689–1704, Dezembro 1996.
- SCOTT, N. H. Thermoelasticity with thermomechanical constraints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 36, n. 3, p. 549–564, Maio 2001.
- SHERIEF, H. *On Generalized Thermoelasticity*. Tese (Philosophy Thesis) — University of Calgary, Canadá, 1980.
- SHERIEF, H. H.; HAMZA, F. A.; SALEH, H. A. The theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Engineering Science*, v. 42, n. 5-6, p. 591–608, Março 2004.
- SIMO, J.; MIEHE, C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 98, p. 41–104, 1992.
- SOLBERG, J. M.; PAPADOPOULOS, P. A finite element method for contact/impact. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 30, n. 4, p. 297–311, 1998.
- SOLKONIKOV, I. S. *Mathematical Theory of Elasticity*. Nova York: Mac Graw-Hill Book Co., 1956.
- STROMBERG, N. Finite element treatment of two-dimensional thermoelastic wear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 177, n. 3-4, p. 441–455, Julho 1999.
-

- TAYLOR, G.; QUINNEY, H. The latent energy remaining in a metal after cold working. *Progress in Materials Science A*, v. 143, p. 307–326, 1934.
- TAYLOR, R. L.; PAPADOPOULOS, P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, n. 12, p. 2123–2140, 1993.
- TRANGENSTEIN, J. A. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. 1. ed. Inglaterra: Cambridge University Press, 2008.
- TRUESDELL, C.; TOUPIN, R. *The Classical Field Theories of Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1960. (Handbuch der Physik, v. 3).
- VEL, S. S.; BATRA, R. C. Generalized plane strain thermoelastic deformation of laminated anisotropic thick plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, n. 8, p. 1395–1414, Fevereiro 2001.
- WINTERBONE, D. E. *Advanced Thermodynamics for Engineers*. 1. ed. Londres: Arnold, 1997.
- XIA, L.; DING, K. Three-dimensional thermoelastic solution for laminated cantilever cylindrical shell. *Aerospace Science and Technology*, v. 5, n. 5, p. 339–346, Julho 2001.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. 5. ed. Oxford, Inglaterra: Butterworth-Heinemann, 2000.
-

APÊNDICE A – Matriz Hessiana da Treliça

A matriz Hessiana é definida como a segunda derivada da energia específica em relação às posições nodais. Em outras palavras:

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial y_i^j \partial y_k^l} \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde j e l variam de 1 a 2, relativos ao nó do elemento, e i e k variam de 1 a 2, relativos à direção. Ou seja, neste desenvolvimento serão considerados dois nós e duas direções por elemento.

Para realizar as operações necessárias cada termo será expandido em relação aos seus índices. Assim sendo, para o primeiro nó, na direção 1:

$$H_{1111} = \frac{\partial}{\partial y_1^1} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^1} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^1} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^1} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^1} \left(\frac{(y_1^1 - y_1^2)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \frac{\partial}{\partial y_1^1} (y_1^1 - y_1^2) + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1^1} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^1} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \left(1 - \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \quad (\text{A.9})$$

lembrando que

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} = \frac{K}{l_0} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial l_f} = \frac{K (l_f - l_0)}{l_0} \quad (\text{A.11})$$

Os demais termos seguem as mesmas operações para se chegar às expressões finais.

Assim sendo, para o próximo termo na diagonal

$$H_{2121} = \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_2^1} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{(y_2^1 - y_2^2)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \frac{\partial}{\partial y_2^1} (y_2^1 - y_2^2) + (y_2^1 - y_2^2) \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_2^1 - y_2^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \left(1 - \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^2} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \quad (\text{A.19})$$

O terceiro termo fica sendo

$$H_{1212} = \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^2} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{(y_1^2 - y_1^1)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \frac{\partial}{\partial y_1^2} (y_1^2 - y_1^1) + (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{l_f} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \left(1 - \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{l_f^2} \right) \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{(y_1^2 - y_1^1)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{(y_2^1 - y_2^2)^2}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \quad (\text{A.27})$$

A resolução do quarto termo acompanha as anteriores

$$H_{2222} = \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_2^2} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{(y_2^2 - y_2^1)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \frac{\partial}{\partial y_2^2} (y_2^2 - y_2^1) + (y_2^2 - y_2^1) \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_2^2 - y_2^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{l_f} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \left(1 - \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{l_f^2} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{(y_2^2 - y_2^1)^2}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} + \frac{(y_1^1 - y_1^2)^2}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \quad (\text{A.35})$$

Os termos fora da diagonal exigem um tratamento parecido, lembrando que a matriz Hessiana é simétrica.

$$H_{1121} = \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^1} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^1} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.37})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{(y_1^1 - y_1^2)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_2^1} (y_1^1 - y_1^2) + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.40})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.41})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) (y_2^1 - y_2^2) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.42})$$

O próximo termo da primeira linha é

$$H_{1112} = \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^1} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^1} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.44})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{(y_1^1 - y_1^2)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.45})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_1^2} (y_1^1 - y_1^2) + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.46})$$

$$= \frac{-1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$= \frac{-1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.48})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) (y_1^2 - y_1^1) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.49})$$

O quarto termo da primeira linha fica sendo

$$H_{1122} = \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^1} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^1} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.51})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{(y_1^1 - y_1^2)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_2^2} (y_1^1 - y_1^2) + (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial}{\partial y_2^2} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.54})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.55})$$

$$= (y_1^1 - y_1^2) (y_2^2 - y_2^1) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.56})$$

Passando para a segunda linha, o primeiro termo após a diagonal é

$$H_{1221} = \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_1^2} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.58})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{(y_1^2 - y_1^1)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.59})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_2^1} (y_1^2 - y_1^1) + (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.60})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.61})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.62})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) (y_2^1 - y_2^2) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.63})$$

O último elemento da segunda linha é

$$H_{2122} = \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_2^2} \right) \quad (\text{A.64})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.65})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{(y_2^2 - y_2^1)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_2^1} (y_2^2 - y_2^1) + (y_2^2 - y_2^1) \frac{\partial}{\partial y_2^1} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.67})$$

$$= \frac{-1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_2^2 - y_2^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.68})$$

$$= \frac{-1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + (y_2^2 - y_2^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_2^1} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.69})$$

$$= (y_2^2 - y_2^1) (y_2^1 - y_2^2) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.70})$$

Para completar a matriz Hessiana só falta o quarto elemento da terceira linha.

$$H_{1222} = \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_2^2} \right) \quad (\text{A.71})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{\partial l_f}{\partial y_2^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.72})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{(y_1^2 - y_1^1)}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.73})$$

$$= \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \frac{\partial}{\partial y_1^2} (y_1^2 - y_1^1) + (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial}{\partial y_1^2} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.74})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \frac{\partial}{\partial l_f} \left(\frac{1}{l_f} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} \right) \quad (\text{A.75})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) \frac{\partial l_f}{\partial y_1^2} \left(\frac{-1}{l_f^2} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.76})$$

$$= (y_1^2 - y_1^1) (y_2^2 - y_2^1) \left(\frac{-1}{l_f^3} \frac{\partial u_e}{\partial l_f} + \frac{1}{l_f^2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial l_f^2} \right) \quad (\text{A.77})$$

APÊNDICE B – Matriz Hessiana do Elemento de Chapa

A matriz Hessiana é definida como a segunda derivada da energia interna de deformação em relação às posições nodais, ou seja:

$$H_{rs} = \frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s \partial y_r} \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{E}_{ij} é o tensor de deformação de Green, \mathbf{P}_{ij} é o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie, y_r e y_s são as posições nodais do elemento de chapa, sendo que r e s variam de 1 até o número de nós e direções. No elemento triangular plano de 10 nós, r e s variam de 1 a 20 (dez nós, duas direções cada).

O desenvolvimento da matriz hessiana do elemento de chapa é semelhante ao desenvolvimento da Hessiana da treliça, porém neste caso o desenvolvimento não precisa ser expandido termo a termo. Desta forma, a matriz Hessiana fica sendo

$$\frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s \partial y_r} = \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{mn}} \left(\frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} \right) \frac{\partial \mathbf{E}_{mn}}{\partial y_r} \quad (\text{B.4})$$

$$= \left(\frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl} \partial \mathbf{E}_{mn}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} + \frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s \partial y_r} \right) \frac{\partial \mathbf{E}_{mn}}{\partial y_r} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl} \partial \mathbf{E}_{mn}} \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} \frac{\partial \mathbf{E}_{mn}}{\partial y_r} + \frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{kl}}{\partial \mathbf{E}_{mn} \partial y_s} \frac{\partial \mathbf{E}_{mn}}{\partial y_r} \quad (\text{B.6})$$

Porém

$$\frac{\partial^2(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl} \partial \mathbf{E}_{mn}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}_{mn}} \left(\frac{\partial(\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial \mathbf{E}_{kl}} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{\partial \left[C_{klij}^e \left(\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ij}^p + \alpha_1 \theta \delta_{ij} \right) \right]}{\partial \mathbf{E}_{mn}} \quad (\text{B.8})$$

$$= C_{klmn}^e \quad (\text{B.9})$$

onde C_{klij}^e é o tensor que define as propriedades elásticas, \mathbf{E}_{ij}^p é a parte plástica do tensor de deformação de Green, α_1 é o coeficiente de expansão térmica, θ é a variação de temperatura a partir de um referencial e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Além disso

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{kl}}{\partial \mathbf{E}_{mn} \partial y_s} = \frac{\partial \delta_{mn}}{\partial y_s} \quad (\text{B.10})$$

$$= 0 \quad (\text{B.11})$$

Assim sendo

$$\frac{\partial^2 (\mathbf{P}_{ij} \mathbf{E}_{ij})}{\partial y_s \partial y_r} = \frac{\partial \mathbf{E}_{kl}}{\partial y_s} C_{klmn}^e \frac{\partial \mathbf{E}_{mn}}{\partial y_r}, \quad (\text{B.12})$$

lembrando que a derivada do tensor de deformação de Green em relação às posições nodais já foi desenvolvido no capítulo 9, e é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{ij}}{\partial y_s} = \mathbf{A}_{ki} \frac{\partial (\mathbf{A}_{kl}^1)}{\partial y_s} \mathbf{A}_{lj}^{0-1} \quad (\text{B.13})$$

onde \mathbf{A}_{ki} é o gradiente da função mudança de configuração da inicial para a atual, \mathbf{A}_{lj}^0 é o gradiente da função mudança de configuração da inicial para a local (ou adimensional) e \mathbf{A}_{kl}^1 é o gradiente da função mudança de configuração da atual para a local. Com isso a energia interna pode ser determinada pela posição y_s , visto que \mathbf{A}_{ij}^1 é escrito em função da posição atual.