



**Robenson Luiz Minski**

**APRIMORAMENTO DE FORMULAÇÃO DE IDENTIFICAÇÃO  
E SOLUÇÃO DO IMPACTO BIDIMENSIONAL ENTRE  
ESTRUTURA E ANTEPARO RÍGIDO**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

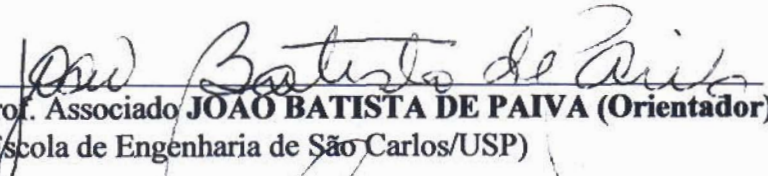
**Orientador: Professor Associado João Batista de Paiva**

São Carlos  
2008

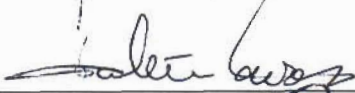
**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **ROBENSON LUIZ MINSKI**


Dissertação defendida e julgada em 14/04/2008 perante a Comissão Julgadora:

  
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)


Aprovado

  
Prof. Titular **WALTER SAYASSI**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

  
Prof. Dr. **WALTER LIBARDI**  
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



*Aos meus pais Edite e Voadislau  
E minha esposa Tatiana*



## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, uma força que garante o equilíbrio sobre tudo que existe no universo.

Aos meus pais, Edite Salete Gehlen Minski e Voadislau Minski, pelo incentivo, compreensão, amor e formação, que me deram e proporcionaram em todos os meus dias.

A minha querida esposa, Tatiana de Oliveira Borges Minski, por todo o amor e carinho dado e demonstrado ao longo dos anos de convivência, pela compreensão e ajuda em todos os momentos difíceis e por sempre me incentivar e acreditar em minha capacidade.

Aos meus sogros, Sérgio e Odete, e minha cunhada Fernanda, pelo apoio e consideração.

Ao meu orientador Prof. Associado João Batista de Paiva e co-orientador Prof. Associado Humberto Breves Coda, pela excelente orientação, dedicação, comprometimento com este trabalho e pela amizade demonstrada.

A todos os funcionários do SET.

Por fim, a todos os bons amigos feitos durante este período.





## RESUMO

MINSKI, R. L. (2008). *Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Esta dissertação tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma formulação, via Método dos Elementos Finitos (MEF), para a identificação e solução do impacto não linear bidimensional entre estruturas anelares reticuladas e anteparo rígido fixo. O comportamento dinâmico não linear geométrico é feito por meio de uma formulação posicional classificada como Lagrangiana total com cinemática exata. Utiliza-se o integrador temporal de Newmark modificado para descrever o comportamento dinâmico, de forma a garantir a estabilidade na análise do impacto. Desenvolveu-se um algoritmo de identificação da ocorrência do impacto, utilizando-se segmentos auxiliares que definem uma região formada por pontos passíveis de impacto. A solução do impacto é feita com um algoritmo de retorno geométrico segundo superfície curva com aproximação qualquer para o anteparo rígido, considerando situações com e sem atrito. Faz-se uma comparação entre a técnica adotada e a técnica dos multiplicadores de Lagrange e das penalidades, mostrando a equivalência entre as mesmas. Por fim, são apresentados exemplos numéricos gerais utilizando a técnica desenvolvida, onde se fez um estudo de convergência para discretização geométrica e temporal.

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, não linearidade geométrica, impacto, controle de posições.*



## ABSTRACT

MINSKI, R. L. (2008). Improvement of formulation of identification and solution of the bidimensional impact between structure and rigid wall. M. Sc. Dissertation (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

This work has as main goal the development of a formulation, based on the Finite Element Method (FEM), for the identification and solution of the bidimensional nonlinear impact between reticulated cyclic structures and fixed rigid wall. The dynamic geometrically nonlinear behavior is treated with a positional formulation classified as total Lagrangean with exact kinematics. The time integrator of modified Newmark is used, to describe the dynamic behavior, to assure the stability in the analysis of the impact. An algorithm of identification of the occurrence of the impact was developed, using auxiliary segments that define a region formed for feasible points of impact. The solution of the impact is made with an algorithm of geometric return as curve surface with any approach for the rigid wall, considering situations with and without friction. A comparison between the technique adopted and Lagrange multipliers and penalty is made. Finally, general numerical examples are presented, where a study of convergence was made.

*Key-Words: Finite Element Method, geometric non linearity, impact, position control.*



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Mudança de configuração de um corpo qualquer .....	20
Figura 2.2: Mudança de configuração para distorção .....	26
Figura 2.3: Configuração inicial e final do corpo e resultantes de tensão .....	32
Figura 3.1: Elemento de pórtico parametrizado na configuração inicial .....	43
Figura 3.2: Linha média do elemento na configuração inicial.....	44
Figura 3.3: Elemento de pórtico parametrizado na configuração final.....	47
Figura 3.4: Configurações parametrizadas do mesmo espaço adimensional .....	48
Figura 3.5: Energia potencial total para um corpo em duas configurações distintas.	52
Figura 4.1: Esquema massa suportada por mola com restrição de deslocamento ...	68
Figura 4.2: Configuração da estrutura no impacto contra anteparo rígido .....	73
Figura 4.3: Elemento triangular com 10 nós.....	74
Figura 4.4: Modelo de identificação do impacto com três trajetórias distintas.....	76
Figura 4.5: Possível problema na identificação do impacto .....	76
Figura 4.6: Modelo do procedimento alternativo para identificação do impacto .....	77
Figura 4.7: Dados pertinentes à análise do ponto de retorno.....	79
Figura 4.8: Casos especiais de determinação do ponto de retorno .....	83
Figura 4.9: Regiões de estabilidade para as constantes de integração de Newmark	85
Figura 4.10: Problema unidirecional com restrição .....	87
Figura 4.11: Problema unidirecional com restrição- Método posicional .....	93
Figura 5.1: Dados de entrada do problema .....	97
Figura 5.2: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito) .....	98
Figura 5.3: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito) .....	98
Figura 5.4: Respostas de WRIGGERS (1990). Sem atrito (a) e com atrito (b).....	99
Figura 5.5: Respostas de GRECO (2004). Casos: sem atrito (a) e com atrito (b)...	100
Figura 5.6: Convergência por discretização temporal para o caso sem atrito .....	101
Figura 5.7: Convergência por discretização temporal para o caso com atrito .....	101
Figura 5.8: Convergência por discretização geométrica: caso sem atrito .....	102
Figura 5.9: Convergência por discretização geométrica: caso com atrito .....	103
Figura 5.10: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito) ....	103
Figura 5.11: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito) ....	104

Figura 5.12: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito )...	105
Figura 5.13: Dados de entrada do problema .....	106
Figura 5.14: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito)....	107
Figura 5.15: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito)....	108
Figura 5.16: Dados de entrada do problema .....	108
Figura 5.17: Configurações anelares para o caso de anteparo seccionado .....	109
Figura 5.18: Dados de entrada do problema .....	110
Figura 5.19: Configurações anelares obtidas no caso de anteparo seccionado em duas partes iguais com elementos curvos em uma e elementos retos em outra....	110
Figura 5.20: Dados de entrada do problema .....	112
Figura 5.21: Configurações anelares obtidas para o caso sem atrito .....	112
Figura 5.22: Configurações anelares obtidas para o caso com atrito .....	113
Figura 5.23: Relação entre a posição X e o tempo para o nó 1 .....	113
Figura 5.24: Relação entre a posição Y e o tempo para o nó 1 .....	114

## LISTA DE SÍMBOLOS

$E$	Espaço Euclédiano
$B$	Região do espaço Euclédiano
$\Gamma, \Psi$	Configurações inicial e final
$B_0, P_0$	Configurações de um corpo qualquer na configuração inicial
$B, P$	Configurações de um corpo qualquer na configuração final
$t$	tempo
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$X, x_0, x$	Pontos de um corpo na configuração inicial
$Y, y_0, y$	Pontos de um corpo na configuração final
$f, f_t$	Função mudança de configuração
$f_0, f_1$	Funções mapeamento
$I^*$	Intervalo de tempo
$\mathfrak{R}$	Espaço dos reais
$\dot{Y}, \dot{y}$	Velocidade
$\ddot{Y}, \ddot{y}$	Aceleração
$Grad$	Gradiente
$A$	Gradiente da função mudança de configuração
$A_0, A_1$	Gradientes das funções mapeamento
$J$	Jacobiano
$C$	Tensor de Cauchy-Green à direita
$D$	Tensor de Cauchy-Green à esquerda
$I$	Matriz identidade
$E$	Tensor de deformação de Cauchy-Green
$A_t$	Tensor de deformação de Almansi
$u, v$	Versores

$\lambda_a$	Alongamento relativo (descrição Lagrangiana)
$\lambda'_a$	Alongamento relativo (descrição Euleriana)
$\varepsilon$	Deformação longitudinal de engenharia (descrição Lagrangiana)
$\varepsilon'$	Deformação longitudinal de engenharia (descrição Euleriana)
$\gamma_{u_1 u_2}$	Distorção
$\varepsilon_{u_1 u_2}$	Deformação distorcional
$m$	Massa
$\rho_0$	Densidade de um corpo na configuração de referência
$\rho$	Densidade de um corpo na configuração de atual
$dV_0, dA_0$	Diferenciais de volume e área na configuração referência
$dV, dA$	Diferenciais de volume e área na configuração atual
$div$	Divergente
$L$	Quantidade de movimento linear
$\Omega$	Contorno de um corpo qualquer
$P_t$	Energia potencial das forças externas
$t_s, t_s^*$	Forças de superfície
$b, b^*$	Forças de corpo
$F_{ext}$	Resultantes de forças externas (vetor de forças externas)
$M_{ext}$	Momento das forças externas
$M_a$	Momento angular
$n, n_0$	Versores normais
$dP, dP_0$	Vetores de forças resultantes
$T$	Tensor de tensão de Cauchy
$S$	Tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 1ª espécie
$S^*$	Tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie
$G$	Tensor de tensão de Kirchhoff-Treftz
$P_{ext}$	Potência mecânica



$K$	Energia cinética
$P_{ten}$	Potência tensional
$\sigma$	Tensor de tensão
$d^*$	Taxa de deformação
$U_e$	Energia de deformação total
$u_e$	Energia de deformação específica
$F^e$	Força externa aplicada
$M$	Matriz de massa
$P_{ter}$	Potência térmica
$r$	Taxa de aquecimento
$h^*$	Densidade de fluxo térmico
$\Pi$	Energia potencial total
$tr$	Traço
$h, h_0$	Altura do elemento
$\theta, \theta_0$	Inclinação do elemento em relação a normal
$\phi$	Funções de forma
$P_f$	Energia potencial das forças externas
$\xi, \eta$	Variáveis adimensionais
$\xi_m$	Valor da variável adimensional para o ponto de impacto (atrito total)
$\xi_n$	Valor da variável adimensional para o ponto com atrito nulo
$\xi_f$	Valor da variável adimensional para o ponto com atrito requerido
$\delta_{ij}$	Delta de Kroenecker
$C_{ijkl}$	Tensor de constantes elásticas
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$F_{iner}$	Vetor de forças inerciais
$F_{amor}$	Vetor de forças de amortecimento
$\lambda_m$	Coeficiente de amortecimento

$Q_a$	Energia dissipativa de amortecimento
$C_a$	Matriz de amortecimento
$F_{(int)}$	Vetor de forças internas
$Q_s, R_s$	Variáveis do tempo passado
$\gamma, \beta$	Parâmetros de integração de Newmark
$g$	Vetor de resíduos
$\nabla g$	Gradiente do vetor de resíduos (matriz Hessiana)
$\Delta Y$	Correções
$\kappa, \mu$	Parâmetros de penalidade
$H$	Matriz dos gradientes das restrições
$Q$	Função penalidade
$F$	Função objetivo
$c, q$	Funções restrição
$g^*$	Aceleração da gravidade
$u_d$	Deslocamento
$F_c$	Força de contato
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$L_a$	Função Lagrangiana
$R_c$	Matriz restrição de contato
$R$	Coefficiente de retorno
$a$	Coefficiente angular
$b^l$	Coefficiente linear
$g_m$	Equação de determinação do ponto de impacto
$A_m, B_m$	Parâmetros auxiliares para determinação do ponto de impacto
$C_m, D_m$	Parâmetros auxiliares para determinação do ponto de impacto
$m_i$	Ponto de impacto (ponto de retorno com atrito total)
$n_i$	Ponto de retorno para atrito nulo

$f_i$	Ponto de retorno entre atrito nulo e total
$Ar$	Área da seção transversal da estrutura anelar
$In$	Inércia da seção transversal da estrutura anelar
$v_e$	Velocidade da estrutura anelar



## SUMÁRIO

RESUMO.....	v
ABSTRACT .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
1. Introdução .....	1
1.1 Considerações iniciais .....	1
1.2 Organização do trabalho .....	2
1.3 Revisão Bibliográfica .....	4
2. Mecânica do contínuo .....	17
2.1 Cinemática.....	17
2.1.1 Movimento de corpos e mudança de configuração.....	17
2.1.2 Medidas de deformação .....	21
2.2 Leis de balanço .....	28
2.2.1 Conservação de massa .....	28
2.2.2 Balanço de quantidade de movimento.....	29
2.2.2.1 Balanço de quantidade de movimento linear .....	29
2.2.2.2 Balanço de quantidade de movimento angular .....	30
2.2.2.3 Tensores de tensão .....	31
2.2.3 Balanço de energia .....	35
2.3 Conjugados de tensão e deformação .....	38
3 Formulação não linear geométrica do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF - Posicional).....	41
3.1 Considerações iniciais .....	41
3.2 Não linearidade geométrica.....	42
3.3 Cinemática para um elemento de pórtico plano .....	43
3.4 Método de solução .....	51
4 Técnicas de impacto/contato entre estruturas planas contra anteparo rígido .....	63
4.1 Considerações iniciais .....	63
4.2 Método das Penalidades .....	64
4.3 Método dos Multiplicadores de Lagrange.....	69
4.4 Controle de posições .....	72

4.4.1 Determinação da ocorrência de impacto .....	73
4.4.2 Determinação da posição de retorno.....	78
4.5 Parâmetros de integração do algoritmo temporal de impacto.....	84
4.6 Justificativa .....	86
5 Exemplos numéricos.....	96
5.1 Considerações iniciais .....	96
5.2 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido em forma de V .....	96
5.3 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido em forma de ampulheta.	105
5.4 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido curvo.....	111
6 Conclusões .....	115
Referencia Bibliográfica.....	118

## 1.1 Considerações iniciais

O grande crescimento no desenvolvimento de novos materiais e técnicas de manufatura, juntamente com a evolução generalizada nas aplicações da engenharia, se fizeram necessárias para suprir necessidades como, evolução tecnológica, padronização de novos materiais e custo/tempo na confecção de estruturas, que levam a concepção de materiais e mecanismos cada vez mais leves e versáteis. Logo, o intuito de conhecer as propriedades e o comportamento mecânico dos materiais e das estruturas é essencial para criar critérios de segurança que garantam a integridade das mesmas, além de garantir a sua qualidade.

Portanto, o conhecimento de conceitos que envolvam não linearidade geométrica, física, dinâmica, impacto etc., é de grande importância no desenvolvimento científico e tecnológico de ferramentas de cálculo adequadas, tentando simular o mais próximo possível o comportamento real do material e da estrutura.

Seguindo esta linha de raciocínio, este trabalho tem por objetivo a implementação computacional, com o desenvolvimento de uma formulação para problemas dinâmicos de impacto bidirecional entre estrutura e anteparo rígido, tendo

este um grau de aproximação geométrica qualquer, feita via Método dos Elementos Finitos (MEF). Foram considerados dois tipos de comportamento não linear, a não linearidade geométrica, que descreve a influência das mudanças de configuração no comportamento da estrutura com a determinação do equilíbrio da mesma, e a não linearidade de contato, responsável pela caracterização da configuração deformada do contorno da estrutura após um contato/impacto.

O tratamento da não linearidade geométrica da estrutura se dará pelo código computacional do SET, baseado numa formulação posicional (Método dos Elementos Finitos Posicional – MEF Posicional), desenvolvido em CODA (2003) e CODA & GRECO (2004) para problemas estáticos, enquanto os problemas dinâmicos terão embasamento em um algoritmo baseado numa família de integradores temporais de Newmark, aplicado em GRECO & CODA (2006).

Finalmente, os problemas de impacto serão solucionados utilizando-se o algoritmo de impacto desenvolvido, que consiste na interferência direta nas posições de cada nó da estrutura que tenha sido identificado como impactante, onde sua posição final é definida por um modelo simplificado de atrito de Coulomb, sendo estes conceitos integrantes dos objetivos gerais na implementação do código computacional.

Por fim todas as implementações computacionais provenientes desta dissertação desenvolvidas durante o mestrado foram realizadas em linguagem de programação FORTRAN 6.0.

## **1.2 Organização do trabalho**

Aqui se descreve como está organizado o trabalho referente aos conteúdos apresentados nos seis capítulos do mesmo. Além da introdução, que relata a



importância das formulações numéricas para promover aproximações que descrevam o comportamento mecânico das estruturas utilizando a não linearidade geométrica, o primeiro capítulo ainda apresenta a revisão bibliográfica que aborda diferentes formulações para resolução de problemas não lineares dinâmicos, feitas com descrições referenciais distintas. Este também aborda os métodos de solução mais utilizados na abordagem de problemas de contato/impacto.

O segundo capítulo é composto por uma breve revisão dos conceitos da mecânica do contínuo descrevendo as medidas de deformação, função mudança de configuração, leis de balanço e tensores de tensão, sendo este capítulo essencial para formulação do método dos elementos finitos posicional.

A formulação posicional não linear geométrica para problemas estáticos e dinâmicos, e a estratégia numérica adotada são apresentados no capítulo três. Já o quarto capítulo trata de técnicas para solução de problemas de impacto, onde se descreve o método das penalidades e o método dos multiplicadores de Lagrange além do método adotado neste trabalho, ou seja, controle de posições, descrevendo detalhadamente o algoritmo de detecção de impacto e o tratamento dos pontos impactados segundo superfície curva com aproximação geométrica qualquer. Também neste capítulo comenta-se o uso do algoritmo temporal de Newmark em relação à estabilidade do mesmo quanto aos valores adotados para seus parâmetros de integração.

Os exemplos numéricos, advindos da formulação adotada, são apresentados no quinto capítulo, onde se fez um estudo de convergência para discretização geométrica e para a discretização temporal.

Finalmente o último capítulo apresenta as conclusões e projeções de trabalhos futuros.

### 1.3 Revisão Bibliográfica

A não linearidade é abordada por diversos trabalhos comprometidos em estudar o comportamento mecânico de um corpo qualquer submetido a diferentes tipos de solicitações. Esta abordagem se faz necessária em vários campos científicos, principalmente na área da Engenharia, por fornecer resultados onde as aproximações lineares não são válidas e resultados que descrevem melhor a realidade do comportamento do corpo, quando a teoria linear é válida. No entanto, a complexidade apresentada na formulação matemática muitas vezes inviabiliza uma formulação analítica que descreva o comportamento não linear geométrico de uma estrutura, mostrando-se a necessidade de produzir formulações numéricas baseadas em métodos iterativos. Porém, problemas envolvendo corpos com geometria simples podem ser determinados analiticamente, como visto em BISSHOPP & DRUCKER (1945) que desenvolveram soluções para problemas de vigas engastadas e MATTIASSON (1981) que, para o mesmo problema obteve respostas utilizando integrais elípticas para quadro articulado e rígido.

Para descrever mudanças sofridas por um corpo qualquer como, por exemplo, deslocamentos, deformações, tensões etc., deve-se conhecer as configurações exibidas por esse em determinado intervalo de tempo. Consequentemente deve-se adotar uma dada configuração como sendo a referencial e posteriormente mensurar as grandezas inerentes. Portanto, para resolução de problemas envolvendo a não linearidade geométrica em estruturas, apresentam-se formulações nas quais existem diferenças na descrição das coordenadas referenciais.

Uma destas descrições é a chamada descrição Lagrangiana, onde se adota um referencial fixo no espaço para determinar as mudanças de configurações

sofridas pelo corpo, tornando as operações matemáticas mais evidentes pelo fato de ser conhecido o espaço em que estas são aplicadas. Diferentemente, a descrição Euleriana determina as mudanças de configuração do corpo com base em um referencial móvel, ou seja, as operações matemáticas são referenciadas no espaço que o corpo encontra-se em determinado momento.

A descrição Lagrangiana pode ser classificada em três diferentes tipos, que são descritos em WONG & TINLOI (1990), e dependem do referencial adotado como sendo o fixo. Se a referência for uma configuração fixa durante todo o tempo, ou seja, a configuração inicial, então a descrição será total, já se esta for atualizada no início de cada incremento de carga ou tempo a descrição será denotada por parcialmente atualizada e caso for atualizada continuamente, ou seja, dentro dos incrementos de carga ou tempo a descrição é dita atualizada.

Vale a pena aqui comentar a contribuição do departamento de estruturas (SET) em relação ao desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF-Posicional), cuja formulação é feita com uma descrição Lagrangiana total para problemas estáticos e dinâmicos com ou sem contato/impacto. Esta formulação foi adotada neste trabalho, e detalhes referentes à mesma podem ser encontrados em CODA (2004), CODA & GRECO (2004), GRECO & CODA (2006).

Podemos citar outras formulações que utilizam a descrição Lagrangiana total, como as encontradas nos artigos de MONDKAR & POWELL (1977), SURANA (1983) e SCHULZ & FILIPPOU (1990). Já, trabalhos como os de PETERSON & PETERSSON (1985) e WONG & TINLOI (1990) utilizam a descrição Lagrangiana parcialmente atualizada, enquanto que formulações que usam a descrição Lagrangiana atualizada são vistas em MEEK & TAN (1984), GADALA et al. (1984), GHATTASS & ABEL (1987) e GUZELBEY et al. (2005), entre outros.

Em se tratando de formulações desenvolvidas por meio da descrição Euleriana podem ser citados os artigos de, ORAN & KASSIMALI (1976) e IZZUDDIN & ELNASHAI (1993), além de ser preferencialmente aplicada para aproximações computacionais de dinâmica de fluidos.

Trabalhando com os dois tipos de descrição (Lagrangiana e Euleriana), SLONE et al. (2007) desenvolveram um algoritmo alternativo para colisão com altas velocidades entre estrutura rígida e projétil.

Como descrito, existem inúmeras formulações envolvendo a não linearidade geométrica, desenvolvidas para diferentes tipos de problemas, dentre os quais se podem citar o trabalho de RIKS (1979) para problemas de flambagem, que por meio de um processo incremental buscou identificar os pontos limites (carga e deslocamento) e pontos de bifurcação. Para esta identificação, adotou estratégias numéricas desenvolvidas em RIKS (1972) junto com o clássico método de Newton-Raphson. Alguns outros trabalhos também apresentam inerentes estratégias numéricas, como os apresentados em BATOZ & DHATT (1979) e FUJII et al. (1992) que utilizaram o método do controle de deslocamentos, CRISFIELD (1981) e SOUZA NETO & FENG (1999) desenvolvido pelo método do controle do comprimento de arco e YANG & McGUIRE (1985) formulado por meio do método do controle de trabalho.

Utilizando estratégias de Newton-Raphson, método de deslocamento e método do comprimento de arco, YANG & SHIEF (1990) apresentaram uma estratégia unificada para resolução de problemas estruturais com pontos críticos, o que facilitou a incorporação de diversos métodos numéricos conhecidos.

Uma outra formulação não linear de destaque é a formulação de cinemática exata que pode ser encontrada em diversas produções, como os artigos de

REISSNER (1973), SIMO et al. (1984) e WRIGGERS & SIMO (1990), sendo estes baseados na teoria não linear de vigas de Reissner. Deve-se comentar que a formulação aqui utilizada se enquadra nesta categoria.

Em se tratando de formulações não lineares para problemas de contato/impacto, tem-se como objetivo determinar a configuração exibida pelo corpo ao impactar. Logo, mudanças de configurações no contorno de um corpo material qualquer ao sofrer contato ou impacto são objetos de estudo na análise não-linear de contato. Este problema de alto grau de complexidade tem uma vasta gama de métodos numéricos desenvolvidos, que na sua grande maioria são baseados no método dos elementos finitos, e dificilmente são gerais, ou seja, são aplicáveis para problemas específicos.

No âmbito do estudo do comportamento, quanto à existência de restrições de contato, de problemas dinâmicos com impacto, denota-se a grande quantidade de métodos que podem ser praticamente englobados em dois grandes grupos principais. O primeiro, é conhecido como o método dos multiplicadores de Lagrange, sendo este utilizado no desenvolvimento de um grande marco em termos de métodos numéricos para solução de problemas com contato/impacto, que foi o trabalho de HUGHES et al. (1976), tendo uma significativa contribuição na construção de aproximações por meio de elementos finitos nas aplicações de impacto entre barras chegando até cascas, considerando problemas elásticos sem atrito.

Sendo também um dos pioneiros em problemas de contato dinâmico, CHAUDHARAY & BATHE (1985) desenvolveram um método de análise de problemas estáticos bidimensionais com grandes campos de deslocamentos, onde o tamanho do sistema de equações é aumentado com a introdução dos

multiplicadores de Lagrange. Em seguida desenvolveram um método dos multiplicadores de Lagrange geral para o comportamento de problemas de contato dinâmico ou estático tridimensional levando em consideração o atrito (CHAUDHARAY & BATHE (1986)). Para tanto, utilizaram uma combinação entre os multiplicadores de Lagrange e o algoritmo de integração de Newmark com parâmetros de integração diferentes dos conhecidos, obtidos pela regra trapezoidal. No entanto, quando o tamanho do incremento de tempo se torna pequeno, nota-se a instabilidade do método para analisar problemas de contato dinâmico com forças inerciais relativamente elevadas, embora ainda melhor do que a regra trapezoidal extensamente usada.

Mais recentemente, esforços eficientes foram feitos para superar esta fraqueza em diferentes aspectos, como CARPENTER et al. (1991), que combinou o algoritmo de diferença central com o multiplicador de Lagrange para obter uma melhor precisão na estimativa das forças de contato, modificando a equação de equilíbrio dinâmico, tornando-a singular, de modo que a solução desta na forma iterativa se dá pela utilização do algoritmo de Gauss-Seidel. Já TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993) apresentaram uma formulação variacional, expressando os multiplicadores de Lagrange em termos de velocidade e aceleração, combinado com um eficiente algoritmo de contato. Apesar de o método ser muito eficiente para a solução de problemas simples, este apresenta um alto grau de dificuldade ao se tratar de problemas mais complexos, como problemas de contato dinâmico tridimensional entre corpos com superfícies curvas e com atrito.

Como nas últimas duas referências, onde procurou-se reverter à dificuldade de aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange no integrador temporal de Newmark padrão, HU (1997) propôs uma formulação baseada nos multiplicadores

de Lagrange, garantindo a condição de penetração nula, combinado com um tipo de algoritmo de Newmark modificado. Nesta levou-se em conta a influência direta exercida na aceleração, velocidade e deslocamento introduzida pelos multiplicadores de Lagrange, assumindo-se, para pequenos incrementos de tempo, que a aceleração no passo de tempo futuro pode ser controlada pela força de contato (multiplicador de Lagrange) no tempo atual. Tal influência foi considerada modificando-se a equação de equilíbrio, produzindo um algoritmo incondicionalmente estável que resultou em um método eficiente para a análise numérica de problemas dinâmicos de contato. Por meio deste, pode-se corrigir problemas de instabilidade no integrador temporal para problemas complexos de impacto demonstrados na formulação de CHAUDHARY & BATHE (1986), já que este não era provido de algoritmo de amortecimento.

MIYAZAKI & PARK (2006), apresentaram uma nova formulação do método dos elementos finitos para impacto com atrito de corpos elásticos, baseada na introdução de uma estrutura de contato que contém a superfície de contato, utilizando para isto multiplicadores de Lagrange localizados, definidos nos nós em contato, considerando-os variáveis independentes.

O segundo grande grupo de métodos é chamado de método das penalidades, onde as condições de contato são satisfeitas com a introdução de parâmetros de penalização. GABRIEL et al. (2004) elaborou um algoritmo de contato tridimensional baseado na pré-discretização do método das penalidades que aumenta a qualidade da discretização de contato por uma superfície de pontos de integração de Gauss.

Combinando o método das penalidades com uma formulação fraca para discretizar o contato, WRIGGERS et al. (2001) desenvolveu um plano de

discretização de contato para diferentes interpoladores, obtendo assim, campos de planos normal e tangente para contato com atrito de corpos deformáveis.

Destas duas vertentes de métodos numéricos de solução de problemas de contato/impacto com ou sem atrito, surgiram novas metodologias utilizando conceitos determinados no método das penalidades e multiplicadores de Lagrange. Um destes novos métodos seria o “augmented-Lagrangian”, aplicado por BUSCAGLIA et al. (2001), que assumiu como hipóteses o comportamento elástico linear e deformação infinitesimal, definindo por meio destas, uma estimativa de erro *a posteriori* para problemas de contato com atrito utilizando o método dos elementos finitos para solução aproximada.

Combinando o método das penalidades clássico e os multiplicadores de Lagrange, para interpretar a impenetrabilidade entre dois corpos por meio de um parâmetro de controle, WANG et al. (2007) criou um algoritmo para computar a força de contato utilizando uma análise explícita, adotando os elementos finitos para análise numérica. Para isto, a condição de penetração nula (CPN) e a interação entre pontos de contato da vizinhança são consideradas, sendo o algoritmo totalmente compatível com integração temporal explícita.

No entanto, não existem apenas métodos de solução que envolva parcialmente ou inteiramente cada algoritmo ou ambos (multiplicador de Lagrange e penalidade), mas sim outras técnicas que não os aborda. Um destes é o algoritmo de contato desenvolvido por FARAHANI et al. (2000), conhecido como “united element method – UEM”, onde existe uma união entre o nó impactante da estrutura móvel e os elementos da estrutura alvo. O chamado “método dos elementos unidos” pode ser utilizado para problemas não lineares estáticos e dinâmicos e é baseado na transformação da rigidez e eliminação dos graus de liberdade da normal a



superfície impactada do elemento alvo no ponto impactante, assumindo que a força de contato é desenvolvida entre os pontos da estrutura móvel e da superfície alvo que sofreram impacto. O método é considerado de fácil implementação computacional como mostrado em FARAHANI et al. (2001). Nesta referência são apresentados detalhes do método numérico (UEM), destacando que a técnica de solução não linear é o Método de Newton-Raphson.

Logo, pelo relatado acima se sabe que a primeira dificuldade no desenvolvimento de algoritmos para problemas de contato/impacto é determinar a ocorrência do mesmo.

Trabalhos precursores no desenvolvimento de algoritmos para a solução de problemas de contato foram os de HALLQUIST et al. (1985) e BENSON & HALLQUIST (1987). A partir destes trabalhos, surgiu a técnica chamada de algoritmo de superfície única “slidelines” ou simplesmente de algoritmo de contato de superfície única. Neste a penetração é detectada entre cada nó do elemento móvel “slave-node” próximo à superfície do elemento alvo, e por todos os “master-segments” pertencentes à mesma, associado com um nó vizinho adequadamente próximo.

Podemos categorizar os algoritmos de busca de contato dentro de três tipos, dos quais, além da técnica da superfície única (“slave-node”) temos a tipo “master-slave” e a tipo “hierarquia”.

A técnica tipo “master-slave” ou “mestre escravo”, foi utilizada por HALLQUIST (1979) para analisar respostas estáticas e dinâmicas de sólidos bidimensionais, enquanto CRISFIELD (2000) utilizou-a juntamente com o “contact patch test”. Este utilizou o MEF associado com o “contact patch test” para propor uma nova formulação de contato, usando a combinação de funções de contorno

quadráticas e lineares. Utilizando a mesma técnica, “master-slave” com a aproximação “node-to-segmento”, CZEKANSKI & MEGUID (2006) criaram uma formulação baseada em inequações variáveis para o tratamento dinâmico de problemas de contato elastoplástico, onde a representação das condições de contato cinemático é baseada em uma superfície intermediária, entre as superfícies de contato “slave” e “master”, com normal singular. Para a solução do algoritmo foram usados programação matemática e multiplicadores de Lagrange para identificar uma candidata à superfície de contato e a tensões de contato. Muitos trabalhos fazem à utilização da aproximação conhecida como “node-to-segmento” entre eles podemos citar ZHONG (1988), NILSSON et al. (1989), ZHONG (1993), STUPKIEWICZ (2001) e WANG et al. (2001).

Um dos trabalhos recentes envolvendo a técnica “master-slave” foi o apresentado por WANG et al. (2007), onde o par de contato é definido por um nó “slave” e um elemento “master”. O ponto de contato é definido em um segmento “master” mais próximo possível do nó “slave” e calculado por meio da minimização de uma função descrita por um vetor posição, referenciado a certo espaço, e um segmento que pode ser descrito por uma representação paramétrica bilinear.

Por último temos a técnica denotada por tipo “hierarquia”, que pode ser caracterizada por conceitos de território de hierarquia ou conceitos de território de contato, vistos em ZHONG & NILSSON (1996). Esta apresenta uma expansão do território de hierarquia para reduzir a frequência de busca global. Outro conhecido algoritmo desenvolvido pela mesma técnica é o tipo pinball apresentado em BELYTCHKO & NEAL (1991) e BELYTCHKO & YEH (1993), onde são levadas em conta as áreas de influência do elemento alvo, que são circulares ou esféricas, no entanto estes tipos de algoritmos fornecem resultados nem sempre confiáveis.

Porém combinando as vantagens da técnica “hierarquia” tipo pinball e a aproximação “node-to-segment”, PAPADOULOS & TAYLOR propuseram o algoritmo de classificação esférica, aumentando o rigor do mesmo.

Por ser solicitado por ações que variam com o tempo, o comportamento dinâmico das estruturas é de grande importância para descrever a configuração que um determinado corpo apresenta em um determinado passo de tempo. Portanto, a utilização de um algoritmo que faça o englobamento de variáveis referentes a um instante de tempo passado e um instante de tempo atual se faz necessário.

Como o equilíbrio dinâmico é formado por diferenciais de posições e tempo há necessidade de utilizar um algoritmo de integração temporal, que pode ser classificado como explícito ou implícito. Segundo BATHE (1996), para um algoritmo explícito as variáveis futuras dependem apenas das do passado, de modo contrário um algoritmo implícito leva em consideração tanto as variáveis do tempo passado quanto as próprias variáveis do tempo atual.

Trabalhos como os de COOK et al. (1989) e KRYSL & BELYTCHKO (1998), utilizaram algoritmos explícitos, denotado de Método das diferenças centrais. Já para algoritmos implícitos existe uma infinidade de produções que envolvem na sua grande maioria a família de integração Newmark, tanto para uma aceleração média quanto linear entre intervalos constantes de tempo. O uso de  $\Delta t$  constante gera dificuldades de identificação do tempo exato do impacto. Este problema pode ser resolvido por uma discretização temporal mais refinada ou utilizando algoritmos de integração temporal descontínuos, como os apresentados em HULBERT (1992) e KARAOGLAN & NOOR (1997), que utilizaram o método de Galerkin com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados, e CHO & KIM (1999) que apresentaram uma integração temporal utilizando a técnica de penalização.

Com a utilização necessária de um tipo de algoritmo de integração temporal dentro de algoritmos de impacto, problemas referentes à instabilidade numérica dos mesmos, principalmente em casos onde é considerado atrito, são gerados. Por isto leis referentes ao atrito devem ser impostas para produção de um algoritmo de retorno, definindo-se o ponto sobre a superfície de contato que o nó impactante deve ser levado. Neste trabalho iremos trabalhar com problemas de impacto contra anteparo rígido com e sem atrito, utilizando uma técnica abordada em SIMO et al. (1986) e GRECO (2004), que se baseia numa interpretação geométrica do modelo de atrito de Coulomb clássico.

Do mesmo modo, CZEKANSKI & MEGUID (2001) assumiram que os efeitos do atrito são governados por uma relação do modelo de atrito de Coulomb, que define as condições do mesmo. No entanto, sua formulação é feita com inequações variacionais para problemas de contato elasto-dinâmicos, onde todas as forças envolvidas na equação de equilíbrio, inclusive a força de atrito, produzem uma taxa de trabalho virtual. Este apresenta dois algoritmos de solução, onde um apresenta um método iterativo utilizando os multiplicadores de Lagrange, e o outro resolve o equilíbrio diretamente usando um algoritmo de otimização não diferenciável.

Na formulação desenvolvida por MIYASAKI & PARK (2006) a força de atrito é definida pela componente tangencial da força de contato, onde o momento linear é exatamente conservado enquanto o momento angular é aproximadamente conservado apresentando um insignificante erro. Outro trabalho, que envolve o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), foi o apresentado na formulação feita por CHEN et al. (1993), onde utilizaram também uma função de relaxação viscoelástica. Já WRIGGERS et al. (2001) apresentou uma formulação para corpos deformáveis em aplicações bidimensionais, onde o modelo de atrito é derivado do elemento de

contato com atrito de Bézier, que apresenta uma interpolação cúbica (curvas de Bézier). Anteriormente WRIGGERS et al. (1990) tinha produzido um modelo de atrito complexo, que considerava a não linearidade no comportamento da superfície de contato. Esta técnica era baseada em um modelo de atrito micro-mecânico. Outros trabalhos apresentam formulações não lineares para o modelo de atrito, como ODEN & PIRES (1983) que além de não lineares são não locais, ODEN & MARTINS (1985) com formulações numéricas e SIMO & LAURSEN (1992) que se baseiam no método dos multiplicadores de Lagrange.

No entanto, vários trabalhos desconsideram a existência de atrito na superfície de contato como os apresentados por SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998) e LANDENBERGER & ELZAFRANY (1999), que utilizaram o método dos multiplicadores de Lagrange e o método das penalidades, respectivamente. Também sem considerar o atrito ARMERO & PETOCZ (1998) utilizaram a técnica da penalização visando alcançar a conservação da energia total do sistema. Do mesmo modo HEISTEIN et al. (2000) consideraram a conservação de energia dos corpos separadamente, considerando uma formulação fraca na região de contato e forte para o restante do sistema.

Como citado anteriormente, este trabalho será destinado a analisar problemas de impacto contra anteparo rígido com e sem atrito, utilizando uma representação geométrica do modelo de atrito de Coulomb para tanto, e os parâmetros de integração modificados de HU (1997) no integrador temporal de Newmark. A superfície alvo será curva e modelada por elementos da ordem que se deseje.

Destaca-se que, conforme a revisão apresentada, o conhecimento científico nesta área é muito disperso e a escolha de um determinado método para se aplicar

é muito difícil, dando-se, portanto neste trabalho, prioridade ao procedimento iniciado no trabalho de GRECO (2004) no SET (Departamento de Estruturas).

Pretende-se mostrar, ainda que de forma simplificada, que o método dos multiplicadores de Lagrange e o das penalidades, podem ser substituídos por método equivalente e mais simples chamada aqui de controle de posições. Neste, a CPN é aplicado, tal como no método dos multiplicadores de Lagrange, porém as forças internas desenvolvidas no corpo são consideradas (no limite) como as forças de contato entre os corpos impactados.

## 2.1 Cinemática

Tratando do movimento em si, ou seja, sem cogitar as causas que o determinam nem a natureza dos objetos animados de movimento, a descrição cinemática terá um caráter universal, não dependendo de forças e nem das substâncias constituintes do material, utilizando apenas noções primitivas de tempo, lugar e corpo. Segundo ARIS (1989), os resultados providos do estudo da cinemática são aplicados a todos os materiais e servem de base para construção dos resultados da dinâmica.

O mapeamento, chamado de configuração nos permitirá representar uma partícula do corpo por um ponto no espaço pontual euclidiano  $E$ , dando assim um sentido geométrico concreto ao corpo e ao movimento, tendo o tempo como parâmetro. Conceitos da função mudança de configuração serão abordados, já que esta é fundamental no estudo da mecânica do contínuo em geral.

### 2.1.1 Movimento de corpos e mudança de configuração

Composto por um conjunto de partículas, o corpo  $B$  ocupa várias configurações ao longo do tempo, que podem ser descritas em um espaço

euclidiano  $E$ . As partículas do corpo devem ser colocadas em correspondência bijetiva com os pontos de uma região  $B \in E$ , para que se possa determinar a classicamente chamada deformação do corpo  $B$  de uma configuração até outra, chamada aqui de função mudança de configuração, por meio de uma descrição referencial. Esta função descreve o movimento do corpo, tendo como parâmetro o tempo,  $\Psi : B \rightarrow \mathbf{B}$ , e é chamada de configuração. O mesmo nome é dado ao seu valor  $\mathbf{B} = \Psi(B)$ , ou seja, região ocupada pelo corpo em  $E$ .

O corpo só está animado de movimento quando a mudança de configuração é relevante, definindo assim uma família de configurações que tem como parâmetro o tempo  $t$ , num certo intervalo. Ou seja, existem várias configurações, como duas configurações quaisquer  $\Psi$  e  $\Gamma$ , que o corpo assume ao longo do tempo, que são expressas pelas relações:

$$y = \Psi(X) \quad X = \Psi^{-1}(y) \quad (2.1)$$

$$x = \Gamma(X) \quad X = \Gamma^{-1}(x) \quad (2.2)$$

Estas exprimem as posições de  $x, y \in E$  ocupadas pelo ponto  $X \in B$ , nas configurações  $\Psi$  e  $\Gamma$ , respectivamente.

A composição de  $E$  sobre  $E$

$$f = \Psi \circ \Gamma^{-1} \quad \Gamma(B) \rightarrow \Psi(B) \quad (2.3)$$

é definida por:

$$y = f(x) \quad (2.4)$$

onde  $\Psi$  é a configuração atual e  $\Gamma$  é a configuração de referência.

Logo, o movimento é descrito num intervalo  $I^* \subset \mathfrak{R}$  por uma função  $f_t = B \wedge I^* \rightarrow \Psi_t(B)$ , sendo " $\wedge$ " o produto vetorial, onde sua inversa no mesmo intervalo de tempo  $I^*$ , fica definida a partir da equação (2.4), como:



$$y = f_t(x) = f(x, t) \quad (2.5)$$

$$x = f_t^{-1}(y) = f^{-1}(y, t) \quad (2.6)$$

Sendo  $f$  de classe  $C^2$ , para evitar assim descontinuidades nos campos associados, segundo COIMBRA (1978) e OGDEN (1984).

De posse das posições ocupadas pela partícula  $X \in \Gamma(B)$  no tempo, pode-se determinar a velocidade e aceleração da mesma, denotando a derivada no tempo por:

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{d}{dt} f(X, t) \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = \frac{d^2}{dt^2} f(X, t) \quad (2.8)$$

Conseqüente ao movimento há realização de trabalho, no entanto a mudança de configuração ou mudança de posição não realiza trabalho por si só, ou seja, em um sistema de forças em equilíbrio, onde as resultantes de forças e momentos são nulas, aplicado em um corpo rígido não gera trabalho. Diferentemente, um sistema de forças aplicadas a um corpo elástico, há devido a estas, realização de trabalho que deve ser armazenado no próprio corpo, que por sua vez está associada à deformação do mesmo.

Para se quantificar adequadamente a energia armazenada, denominada energia de deformação, é necessário se avaliar a mudança de configuração ponto a ponto do contínuo.

Portanto, a função mudança de configuração,  $y = f(x)$ , relaciona no espaço  $\mathfrak{R}^n$ , as configurações inicial  $(B_0)$  e atual  $(B)$  do corpo, conforme Figura 2.1.

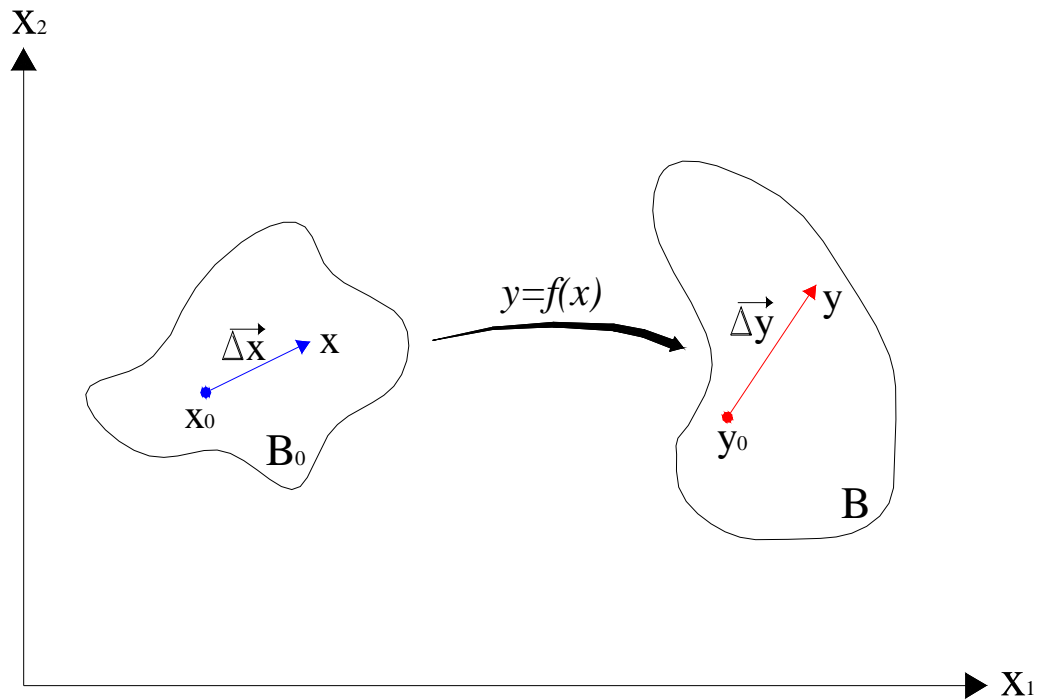


Figura 2.1: Mudança de configuração de um corpo qualquer

Para um ponto aleatório  $x_0$ , expande-se  $f$  em série de Taylor na vizinhança do mesmo, a qual pode ser escrito como:

$$y = f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \text{Grad}f \Big|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (2.9)$$

ou simplesmente:

$$y = y_0 + \text{Grad}f \Big|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (2.10)$$

O gradiente da função no ponto  $x_0$  indicará a mudança de comprimento e direção do vetor infinitesimal  $dx$  para uma nova posição  $dy$ , no ponto  $y_0$  da configuração genérica (atual), obtida aplicando-se o limite na equação (2.10) quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , tal como:

$$dy = \text{Grad}f \Big|_{x_0} dx \quad (2.11)$$

A equação (2.11) pode ser expressa na forma matricial, trabalhando no espaço  $\mathbb{R}^2$ , em função das componentes, como:

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}_{x_0} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Em notação indicial esta expressão fica:

$$dy_i = \partial f_i / \partial x_j \Big|_{x_0} dx_j \quad (2.13)$$

O gradiente da função mudança de configuração, agora será denotado por um tensor  $A$ , que descreve a mudança de forma do corpo no ponto  $x_0$ , quando ele passa da configuração de referência  $x$  para a configuração atual (genérica)  $y$ , ficando a equação (2.13) expressa coletivamente por:

$$dy = A_{x_0} dx \quad (2.14)$$

onde:

$$A_{x_0} = A = \partial f_i / \partial x_j \Big|_{x_0} \quad (2.15)$$

Pode ser observado que toda a formulação está sendo feita sobre uma referência fixa (configuração de referência), portanto a descrição referencial é dita Lagrangiana, conseqüentemente todas as operações integrais e diferenciais devem ser feitas sobre o volume inicial do corpo.

### 2.1.2 Medidas de deformação

Definir medidas de deformação como, alongamento, deformação e extensão de uma fibra, além da distorção entre duas fibras quaisquer, são imprescindíveis para a compreensão e fundamentação de uma formulação não linear geométrica, como a adotada. Para produzir as expressões de deformação, chamadas de medidas de deformação não linear de engenharia, a qual é encontrada em livros mais aplicados como CRISFIELD (1991) e BATHE (1982), onde esta é apresentada

de maneira simplificada, necessita-se conceituar o alongamento relativo, que também é determinado a partir do gradiente da função mudança de configuração.

Antes de apresentar as grandezas de importância, deve-se notar que uma fibra (linha material) indicada por um vetor infinitesimal  $dx \neq 0$  no ponto  $x_0$ , na configuração inicial, não pode ser aniquilado ao mudar de forma para  $dy$  em uma nova posição, agora no ponto  $y_0$  da configuração genérica (Figura 2.1).

Desta forma, da equação (2.14), tem-se:

$$dy = A dx \neq 0 \quad \forall \quad dx \neq 0 \quad (2.16)$$

Desta expressão é fácil concluir que o jacobiano é diferente de zero, ou seja:

$$J = \det(A) \neq 0 \quad (2.17)$$

Sendo o tensor  $A$  não singular e de posse das propriedades de tensores de segunda ordem é verificado que:

$$(A^T A)^T = A^T A = C \quad (2.18)$$

ou seja,  $C$  é simétrico.

Obedecendo a equação (2.16), podemos escrever:

$$dx \cdot (A^T A) dx = (A dx) \cdot (A dx) = dy \cdot dy = dy^2 > 0 \quad (2.19)$$

Deste modo,  $C = A^T A$  é um tensor simétrico definido positivo, nomeado alongamento de Cauchy-Green (COIMBRA (1978)) ou tensor de Cauchy-Green à direita, por estar relacionado com a configuração de referência, tendo extrema importância em deduções na análise não linear geométrica de meios contínuos.

Sabe-se que a deformação longitudinal só ocorre se após a mudança de configuração houver alteração no comprimento de uma fibra arbitrária  $dx$ . Utilizando a equação (2.14) encontra-se o comprimento da fibra na configuração deformada como:

$$|y(x + dx) - y(x)|^2 = |A dx|^2 \quad (2.20)$$

onde  $|\cdot|$  representa a norma.

Por definição, aplicando-se o produto interno tem-se:

$$dy \cdot dy = |dy|^2 = (A dx) \cdot (A dx) = (A dx) \cdot A dx \quad (2.21)$$

ou seja:

$$|dy|^2 = dx \cdot A^T A dx = dx \cdot C dx \quad (2.22)$$

Logo, uma expressão que mede a mudança de comprimento de uma fibra arbitrária imersa em um contínuo, ou seja, que fornece uma quantificação do seu alongamento é:

$$|dy|^2 - |dx|^2 = A^T A dx \cdot dx - I dx \cdot dx = dx \cdot (A^T A - I) dx = dx \cdot (C - I) dx \quad (2.23)$$

Portanto, a deformação longitudinal só ocorrerá se o alongamento de Cauchy-Green for diferente da identidade, ou seja, uma condição necessária e suficiente de indeformabilidade de um ponto é:

$$C = A^T A = I \quad (2.24)$$

Ou seja, o gradiente de deformação deve ser um tensor ortogonal, onde:

$$A^T A = A A^T = I \text{ e } \det(A) = 1 \quad (2.25)$$

Conclui-se que, um corpo é indeformado pela função mudança de configuração se e somente se esta constituir uma rotação ou translação de corpo rígido, ou mesmo combinação das duas.

Por este motivo a não validade da igualdade na equação (2.24) em um determinado ponto, acarreta em uma deformação, cuja intensidade é medida, de certa forma, pelo tensor  $(A^T A - I)$ , definindo o tensor de deformações de Green, que é uma medida de deformação Lagrangiana.

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(A^T A - I) \quad (2.26)$$

De maneira similar pode-se definir a medida de deformação a partir da configuração atual (final) do corpo. Para isto se escreve a posição de um ponto nesta configuração utilizando uma função inversa do gradiente, fazendo as operações integrais e diferenciais em relação ao volume final do corpo. Portanto, se  $dy = A dx$ , tem-se:

$$dx = A^{-1} dy \quad (2.27)$$

sendo:

$$\begin{aligned} |dx|^2 &= (A^{-1} dy) \cdot (A^{-1} dy) \\ |dx|^2 &= dy \cdot \left[ (A^{-1})^T A^{-1} dy \right] \\ |dx|^2 &= dy \cdot (A A^T)^{-1} dy \\ |dx|^2 &= dy \cdot D^{-1} dy \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde,  $D = A A^T$  é o tensor de Cauchy-Green à esquerda, definindo, por exemplo, uma grandeza de deformação Euleriana, chamada de tensor de deformação de Almansi.

$$A_i = \frac{1}{2} \left[ I - (A A^T)^{-1} \right] = \frac{1}{2} (I - D^{-1}) \quad (2.29)$$

Voltando a conceitualização do alongamento relativo tem-se, adotando dois versores  $u$  e  $v$  no sentido de  $dx$  e  $dy$  respectivamente, então utilizando a equação (2.14), se escreve:

$$dy = A dx$$

$$|dy| \cdot v = A |dx| \cdot u$$

$$|dy| \cdot v^T |dy| \cdot v = A |dx| \cdot u^T A |dx| \cdot u$$

$$\begin{aligned}
|dy|^2 v^T v &= A u^T A u |dx|^2 \\
|dy|^2 &= u^T A^T A u |dx|^2 \\
\frac{|dy|}{|dx|} &= \left\{ u^T \cdot (A^T A u) \right\}^{1/2} = \lambda_a(u)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

sendo  $\lambda_a(u)$  o alongamento relativo ou estiramento, dado pela razão entre o comprimento final de uma fibra na direção de  $v$ , na configuração atual, e o comprimento inicial da mesma na direção de  $u$ , na configuração de referência. Logo, se o material constituinte do corpo for indeformável o seu alongamento relativo de acordo com as equações (2.24) e (2.26) é  $\lambda_a(u) = 1$ .

Com o alongamento relativo pode-se determinar a chamada nos textos clássicos de razão de extensão na direção  $u$ , e entendida aqui como deformação longitudinal de engenharia em relação à configuração inicial, sendo dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(u) = \frac{|dy| - |dx|}{|dx|} = \lambda_a(u) - 1 \tag{2.31}$$

Por sua vez  $|dy| - |dx|$  é chamada de extensão. Podemos também escrever a medida de deformação em função da configuração atual, analogamente ao processo anterior, de modo que o alongamento relativo fica determinado por:

$$\lambda'_a(v) = \frac{|dx|}{|dy|} = \left\{ v^T \cdot (D D^T v) \right\}^{1/2} = \frac{1}{\lambda_a(u)} \tag{2.32}$$

Logo, a deformação longitudinal de engenharia em relação à descrição Euleriana fica determinada como:

$$\varepsilon'(v) = \frac{|dy| - |dx|}{|dy|} = 1 - \lambda'_a(v) = 1 - \frac{1}{\lambda_a(u)} \tag{2.33}$$

Para determinar a expressão da distorção, devemos determinar primeiramente o ângulo de distorção formado após a mudança de configuração. Para isto, tomam-se dois vetores com direções quaisquer (não coincidentes), na configuração de referência, e os mesmos ocupando novas direções na configuração final, vistos na Figura 2.2, logo:

$$du_1 = |du_1| u_1 \text{ e } du_2 = |du_2| u_2 \quad (2.34)$$

$$dv_1 = |dv_1| v_1 \text{ e } dv_2 = |dv_2| v_2 \quad (2.35)$$

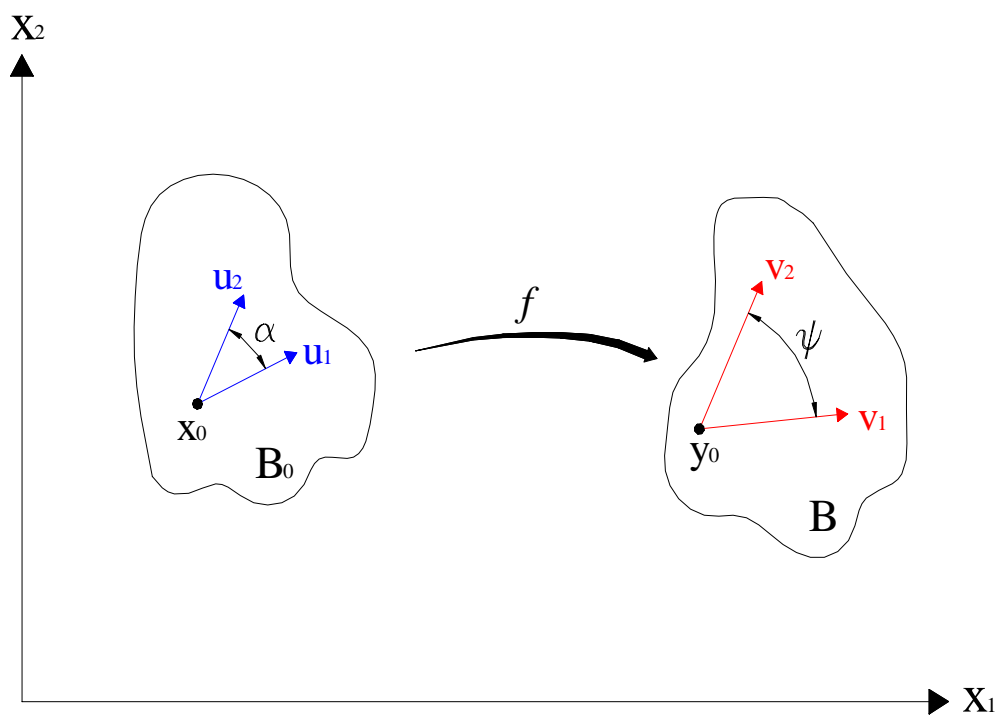


Figura 2.2: Mudança de configuração para distorção

Como o cosseno de um ângulo  $\varphi$  entre dois versores quaisquer  $u$  e  $v$  é dado por:

$$\cos(\varphi) = u \cdot v \quad (2.36)$$

Tem-se então para configuração inicial e final o seguinte:

$$\cos(\alpha) = u_1 \cdot u_2 \quad (\text{configuração inicial}) \quad (2.37)$$

$$\cos(\psi) = v_1 \cdot v_2 \quad (\text{configuração final}) \quad (2.38)$$



Pela equação (2.14), pode-se escrever um vetor na configuração final em relação ao da configuração inicial como:

$$v = A u \frac{|dx|}{|dy|} \quad (2.39)$$

Conseqüentemente a equação (2.38) fica definida em função de  $u_1$  e  $u_2$ .

$$\cos(\psi) = A u_1 \frac{|dx_1|}{|dy_1|} \cdot A u_2 \frac{|dx_2|}{|dy_2|} = \frac{A u_1}{\lambda_a(u_1)} \cdot \frac{A u_2}{\lambda_a(u_2)} \quad (2.40)$$

concluindo que:

$$\cos(\psi) = \frac{u_1^T \cdot (A^T A u_2)}{\lambda_a(u_1) \lambda_a(u_2)} \quad (2.41)$$

A diferença  $(\alpha - \psi)$  é o ângulo de distorção, que depende apenas da configuração inicial e do alongamento de Cauchy-Green, denotando a independência em relação ao movimento de corpo rígido. Por fim, a partir das equações (2.37) e (2.41) vem à definição de distorção de engenharia  $\gamma_{u_1 u_2}$ , sem limitações impostas a estas quando associada a pequenas deformações. Partindo da idéia de reproduzir deformações em direções ortogonais, define-se  $u_1$  e  $u_2$  como ortogonais ( $\alpha = \pi/2$ ), deste modo à distorção é dada por:

$$\gamma_{u_1 u_2} = \pi/2 - \psi = \pi/2 - \arccos \left( \frac{u_1^T \cdot (A^T A u_2)}{\lambda_a(u_1) \lambda_a(u_2)} \right) \quad (2.42)$$

sendo a deformação distorcional dada por:

$$\varepsilon_{u_1 u_2} = \frac{1}{2} \gamma_{u_1 u_2} \quad (2.43)$$

Observa-se na equação (2.42) que se  $A^T A = I$  também não há distorção, confirmando as observações feitas após a equação (2.23).

## 2.2 Leis de balanço

Tendo uma aplicação geral em sólidos e fluidos, os balanços de massa, de quantidade de movimento e de energia, que serão resumidamente apresentados a seguir, resultam em equações de equilíbrio e movimento além de forças e tensões, que serão escritas em suas representações Eulerianas e Lagrangianas. Portanto, estas são essenciais para formulação numérica de análises dinâmicas, já que a mesma se fundamenta nestas leis, onde a variável tempo é indispensável.

### 2.2.1 Conservação de massa

Sendo um corpo  $B$  (arbitrário), assume-se a existência, sobre este, de uma função escalar  $m \in \mathfrak{R}^+$ , chamada de massa. A massa de um corpo  $P \subset B$  é conservada durante um processo físico, conseqüentemente é independente do tempo, ou seja, independe da configuração que o corpo venha a exibir ao longo do tempo, isto é:

$$\frac{\partial m(P)}{\partial t} = \dot{m}(P) = 0 \quad (2.44)$$

Assume-se também a continuidade do corpo  $B$ . Define-se um campo escalar contínuo  $\rho$  (densidade), para uma configuração qualquer  $P$ , chamado densidade mássica, tal que:

$$m(P) = \int_P \rho(y, t) dV \quad (2.45)$$

Agora, utilizando o princípio de conservação de massa e fazendo a troca da variável de integração, a equação integral (equação (2.45)) fica expressa por uma integral sobre uma região fixa  $P_0 \subset B_0$ .

$$m(P_0) = m(P) \quad (2.46)$$

ou seja:

$$\int_{P_0} \rho_0(x) dV_0 = \int_{P_0} \rho(f(x,t), t) J dV_0 \quad (2.47)$$

onde a densidade  $\rho_0$  se refere a da configuração de referência estática. Utilizando o teorema da localização (OGDEN (1984)), determina-se que:

$$\rho_0 = J\rho \quad (2.48)$$

sendo  $\rho$  um campo espacial (escalar) suave. Usando o teorema de transporte de Reynolds (OGDEN (1984)), a equação de balanço na forma integral fica expressa por:

$$\dot{m}(P) = \int_P (\dot{\rho}(y,t) + \rho(y,t) \operatorname{div} \dot{y}) dV = 0 \quad (2.49)$$

Podendo ser expressa também na forma local como:

$$\dot{\rho}(y,t) + \rho(y,t) \operatorname{div} \dot{y} = 0 \quad (2.50)$$

Como os campos relacionados na última equação dependem das coordenadas espaciais e do tempo, está é uma relação Eurliana.

## 2.2.2 Balanço de quantidade de movimento

### 2.2.2.1 Balanço de quantidade de movimento linear

A quantidade de movimento linear  $L$  em uma região qualquer  $P$  de um corpo contínuo é dada pela soma da quantidade de movimento de cada partícula que o constitui. Esta grandeza pode ser escrita na forma Lagrangiana ou Euleriana, conforme a seguinte expressão:

$$L(P) = \int_{P_0} \rho_0(x) V_r(x,t) dV_0 = \int_P \rho(y,t) v_a(y,t) dV \quad (2.51)$$

onde,  $V_r(x,t) = v_a(y,t) = \dot{y}(x,t)$ .

Assumindo-se a existência de dois tipos de forças atuando sobre a descrição do corpo  $P$ , pode-se distingui-las como forças de corpo, exercidas sobre pontos interiores do corpo  $P$ , definida pela densidade de força de corpo  $b(y, t)$  e forças de superfície  $t_s(y, t)$ , exercidas sobre o contorno  $\Omega P$ , definidas por unidade de superfície. Assim, aplicando a segunda Lei de Newton estabelece-se o balanço da quantidade de movimento para toda região material  $P$  como:

$$F_{ext}(P) = \dot{L}(P) \quad (2.52)$$

Portanto, a expressão integral do balanço da quantidade de movimento fica definida pela resultante de forças  $F_{ext}(P)$ , como:

Forma Lagrangiana

$$\int_{P_0} \rho_0(x) \dot{V}_r(x, t) dV_0 = \int_{P_0} \rho_0(x) b^*(x, t) dV_0 + \int_{\Omega P_0} t_s^*(x, t) dA_0 \quad (2.53)$$

Forma Euleriana

$$\int_P \rho(y, t) \dot{v}_a(y, t) dV = \int_P \rho(y, t) b(y, t) dV + \int_{\Omega P} t_s(y, t) dA \quad (2.54)$$

onde,  $\dot{v}_a(y, t) = \ddot{y}(x, t)$ .

### 2.2.2.2 Balanço de quantidade de movimento angular

Aplicando os princípios da dinâmica em meios contínuos, escreve-se o momento angular como a soma (integral) das parcelas referentes a cada diferencial de volume que o forma. Desta maneira, para qualquer região material  $P = f(P_0)$ , tem-se:

$$M_a(P) = \int_P \rho(y,t) y \wedge v_a(y,t) dV = \int_{P_0} \rho_0(x) f(x,t) \wedge V_r(x,t) dV_0 \quad (2.55)$$

O momento das forças externas aplicadas  $M_{ext}$ , também pode ser expresso na forma Euleriana e Lagrangiana.

$$M_{ext}(P) = \int_P \rho(y,t) y \wedge b(y,t) dV + \int_{\Omega P} y \wedge t_s(y,t) dA \quad (2.56)$$

$$M_{ext}(P) = \int_{P_0} \rho_0(x) f(x,t) \wedge b^*(x,t) dV_0 + \int_{\Omega P_0} f(x,t) \wedge t_s^*(x,t) dA_0 \quad (2.57)$$

Por outro lado, a lei de balanço da quantidade de movimento estabelece que o momento das forças externas é a taxa de variação do momento angular  $\dot{M}_a(P) = M_{ext}$ , portanto as expressões integrais do balanço do momento angular Euleriana e Lagrangiana são respectivamente definidas por:

$$\int_P \rho(y,t) y \wedge \dot{v}_a(y,t) dV = \int_P \rho(y,t) y \wedge b(y,t) dV + \int_{\Omega P} y \wedge t_s(y,t) dA \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \int_{P_0} \rho_0(x) f(x,t) \wedge \dot{V}_r(x,t) dV_0 = \\ = \int_{P_0} \rho_0(x) f(x,t) \wedge b^*(x,t) dV_0 + \int_{\Omega P_0} f(x,t) \wedge t_s^*(x,t) dA_0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

### 2.2.2.3 Tensores de tensão

Sendo relacionada à configuração deformada (atual), portanto desconhecida, as equações de equilíbrio da análise não-linear geométrica podem ter, como neste trabalho, suas integrais relacionadas com medidas da configuração indeformada (inicial). Consequentemente surgem diferentes definições para os tensores de tensão.

Para definição destes tensores, considera-se uma região do corpo na suas configurações inicial e final (Figura 2.3).

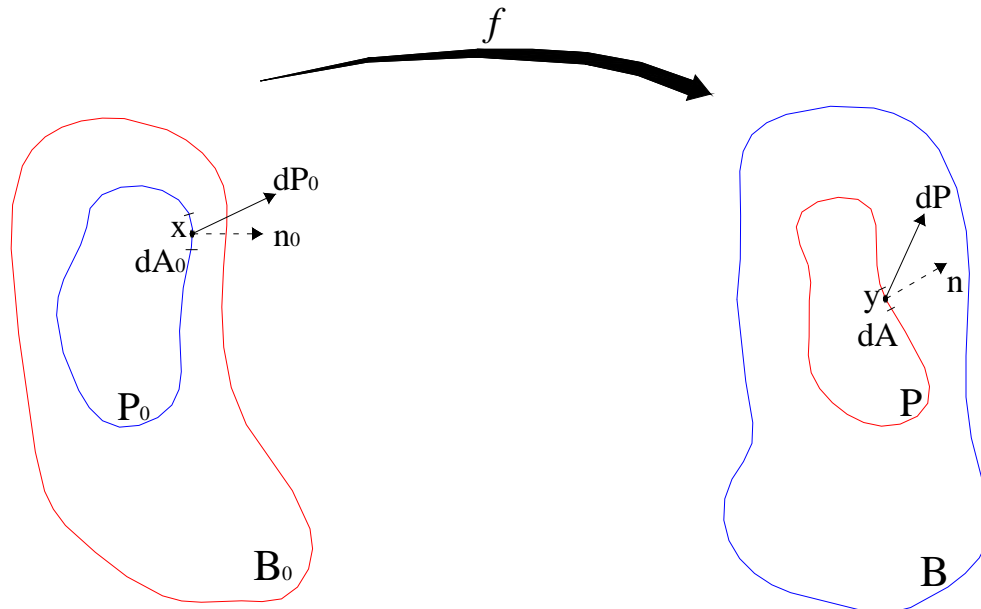


Figura 2.3: Configuração inicial e final do corpo e resultantes de tensão

Definido a partir da medida Euleriana o tensor de Cauchy  $T$ , um tensor de tensão simétrico, é utilizado para determinar o vetor de força resultante  $dP$  no ponto  $y$  do elemento de área  $dA$ , pela relação:

$$dP = T n dA \quad (2.60)$$

onde  $n$  é o versor normal à superfície imaginária no ponto considerado. A expressão (2.60) é usualmente conhecida como postulado fundamental de Cauchy.

Para exprimir a equação (2.60) em termos da área elementar indeformada  $dA_0$ , coloca-se esta em correspondência com a posição atual por meio do gradiente de deformação  $A$ , definindo-se um novo tensor de tensão (tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 1ª espécie  $S$ ):

$$dP = S n_0 dA_0 \quad (2.61)$$

Fazendo a relação de Nanson  $(n \, dA = (\det A) A^{-T} n_0 \, dA_0)$ , pode-se determinar a relação entre os tensores de Cauchy e Piola-Kirchhoff de 1ª espécie (não simétrico), dada por:

$$S = (\det A) T A^{-T} = J T A^{-T} = G A^{-T} \quad (2.62)$$

onde  $G$  é o tensor de tensão de Kirchhoff-Trefftz.

Outro tensor de tensão existente é o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie,  $S^*$ , também descrito na configuração inicial, porém diferentemente do anterior este é simétrico, entretanto ele não está associado a uma interpretação física.

Utilizando a propriedade do tensor em questão o vetor força resultante fica:

$$dP_0 = S^* n_0 \, dA_0 \quad (2.63)$$

Aplicando a relação de Nanson obtém-se:

$$S^* = A^{-1} S \quad (2.64)$$

Conseqüentemente o tensor tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie fornece com referência a configuração inicial o vetor tensão atual pela relação  $dP_0 = A^{-1} dP$ . Pode-se também definir diferentes expressões para os tensores de tensão em relação ao gradiente de deformação, como:

$$S = A S^* \quad (2.65)$$

$$S^T = J A^{-1} T = S^* A^T \quad (2.66)$$

$$S^* = J A^{-1} T A^{-T} = S^t A^{-T} \quad (2.67)$$

$$T = \frac{1}{J} A S^* A^T \quad (2.68)$$

Sendo  $S^*$  fundamental para facilitar a definição de funcionais de energia usualmente empregados no Método dos Elementos Finitos.

Determina-se a Lei de movimento de Cauchy pela substituição da equação (2.60) na equação (2.54), sabendo-se que  $dP = t_s(y, t)dA$ .

$$\int_P \rho(y, t) \dot{v}_a(y, t)dV = \int_P \rho(y, t) b(y, t)dV + \int_{\Omega P} T(y, t).n dA \quad (2.69)$$

Pelo teorema da divergência e localização tem-se:

$$\int_P [\rho(y, t) b(y, t) + \text{div}(T^T(y, t)) - \rho(y, t) \dot{v}_a(y, t)] dV = 0 \quad (2.70)$$

Assumindo a continuidade do núcleo integral chegamos a expressão final da Lei de movimento de Cauchy, definida pela expressão (2.70).

$$\rho(y, t) b(y, t) + \text{div}(T^T(y, t)) - \rho(y, t) \dot{v}_a(y, t) = 0 \quad (2.71)$$

Logo, reunindo as equações (2.50), (2.71) e sabendo que  $T = T^T$ , conhecida como a segunda Lei de movimento de Cauchy, fica definido as equações Eulerianas de campo. Já as equações Lagrangianas de campo são definidas a partir da equação (2.53), e seus termos são escritos em função da configuração de referência e pela definição do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 1ª espécie, como segue:

$$\int_{P_0} \rho_0(x) \dot{V}_r(x, t) dV_0 = \int_{P_0} \rho_0(x) b^*(x, t) dV_0 + \int_{\Omega P_0} S(x, t).n_0 dA_0 \quad (2.72)$$

Aplicando novamente o teorema da divergência e da localização, chega-se:

$$\int_{P_0} [\rho_0(x) b^*(x, t) + \text{div}(S^T(x, t)) - \rho_0(x) \dot{V}_r(x, t)] dV_0 = 0 \quad (2.73)$$

Analogamente, a equação Lagrangiana de movimento fica definida por:

$$\rho_0(x) b^*(x, t) + \text{div}(S^T(x, t)) - \rho_0(x) \dot{V}_r(x, t) = 0 \quad (2.74)$$



Usando agora a quantidade de movimento angular (equação (2.58)), pode-se definir as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A S^T &= A J A^{-1} T = J I T = J T = J T^T = S A^T \\ S^T A^{-T} &= J A^{-1} T A^{-T} = A^{-1} J T A^{-T} = A^{-1} S \end{aligned} \quad (2.75)$$

A equação de conservação de massa fica dada por:

$$\det(A) = J = \rho_0 / \rho \quad (2.76)$$

Portanto, as equações Lagrangianas de campo ficam determinadas pelas expressões (2.74), (2.75) e (2.76).

### 2.2.3 Balanço de energia

No contexto dos meios contínuos, definimos em uma região material  $P$  qualquer a potência mecânica  $P_{ext}(P)$ , produzida pelo trabalho realizado pelas forças externas.

$$P_{ext}(P) = \int_P \rho(y, t) b(y, t) \cdot v_a(y, t) dV + \int_{\Omega P} t_s(y, t) \cdot v_a(y, t) dA \quad (2.77)$$

Por conseqüência da aplicação de trabalho exterior a um corpo contínuo, este se transforma em outras formas de energia. Uma destas é a energia cinética  $K$  em uma região material  $P$ , obtida a partir da energia de cada uma de suas partes diferenciais, tal que:

$$K(P) = \int_P \frac{1}{2} \rho(y, t) v_a^2(y, t) dV \quad (2.78)$$

Pode-se referenciar a energia cinética pela descrição Lagrangiana, ficando:

$$K(P) = \int_{P_0} \frac{1}{2} \rho_0(x) V_r^2(x, t) dV_0 \quad (2.79)$$

Define-se também a potência tensional  $P_{ten}$ , pela seguinte expressão:

$$P_{ten}(P) = \int_P \sigma(y, t) \cdot d^*(y, t) dV \quad (2.80)$$

onde  $\sigma$  é o tensor tensão e  $d^*$  é a taxa de deformação.

A potência externa fica então expressa por:

$$P_{ext}(P) = \dot{K}(P) + P_{ten}(P) \quad (2.81)$$

Do primeiro princípio da Termodinâmica, define-se a existência de uma energia referente ao estado (configuração) do corpo, sendo esta a energia interna

$U_e(P)$  obtida a partir da integral sobre o volume, tal que:

$$U_e(P) = \int_P \rho(y, t) u_e(y, t) dV \quad (2.82)$$

onde,  $u_e(y, t)$  é a energia interna por unidade de massa.

Pelo mesmo princípio obtemos a potência térmica, dada por:

$$P_{ter}(P) = \int_P \rho(y, t) r(y, t) dV + \int_{\Omega P} h^*(y, t) dA \quad (2.83)$$

onde,  $r(y, t)$  é a taxa de aquecimento por unidade de massa devido à distribuição de fontes térmicas e  $h^*(y, t)$  é a densidade de fluxo térmico, que mede a taxa de transmissão de calor por unidade de área.

A soma da energia cinética com a energia interna resulta na energia total  $\Pi$  de uma região material qualquer  $P$ , expressa por:

$$\Pi(P) = K(P) + U_e(P) \quad (2.84)$$

Com sua variação no tempo definida como:

$$\dot{\Pi}(P) = P_{ext}(P) + P_{ter}(P) \quad (2.85)$$

Substituindo a equação (2.81) na (2.85), fica determinado que:

$$\dot{\Pi}(P) = \dot{K}(P) + P_{ten}(P) + P_{ter}(P) \quad (2.86)$$

Pela equação (2.84) define-se:

$$\dot{U}_e(P) = P_{ten}(P) + P_{ter}(P) \quad (2.87)$$

Portanto a equação de balanço de energia na substância que atualmente ocupa a região  $P$  fica expressa pela variação da energia total, como visto abaixo.

$$\dot{\Pi}(P) = \dot{K}(P) + \dot{U}_e(P) = P_{ext}(P) + P_{ter}(P) \quad (2.88)$$

Pode-se também determinar a equação do balanço de energia mecânica a partir da equação do movimento (2.74), apenas multiplicando-se escalarmente esta pela velocidade, escrevendo o balanço em relação à configuração de referência pela equivalência das equações de campo Euleriana e Lagrangiana, ficando expressa por:

$$\rho_0(x) b^*(x,t) \cdot \dot{y}(x,t) + \text{div}(S^T(x,t)) \cdot \dot{y}(x,t) - \rho_0(x) \dot{V}_r(x,t) \cdot \dot{y}(x,t) = 0 \quad (2.89)$$

Utilizando as propriedades vetoriais e tensoriais, e escrevendo o último termo da esquerda da equação (2.89) de uma outra forma, obtem-se:

$$\rho_0 b^* \cdot \dot{y} + \text{div}(S \dot{y}) - \text{tr}(S \text{Grad}(\dot{y})) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho_0 \dot{y} \cdot \dot{y}}{2} = 0 \quad (2.90)$$

Como o gradiente de velocidade  $\text{Grad}(\dot{y})$  é representado por um referencial Lagrangiano apesar de  $\dot{y}$  ser uma grandeza Euleriana, tem-se:

$$\text{Grad}(\dot{y}) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial A}{\partial x} = \dot{A} \quad (2.91)$$

Utilizando o teorema da divergência e integrando a equação (2.90) no volume tem-se:

$$\int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot \dot{y} \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} S n_0 \cdot \dot{y} \, dA_0 = \int_{P_0} \text{tr}(S \dot{A}) \, dV_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{P_0} \frac{\rho_0 \dot{y} \cdot \dot{y}}{2} \, dV_0 \quad (2.92)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade, na equação (2.92) é a potência tensional  $P_{ten}$ , e o segundo termo define a variação temporal da energia cinética  $\dot{K}$ , enquanto os termos da esquerda representam a potência mecânica  $P_{ext}$  das forças atuantes no corpo, logo a equação (2.81) fica verificada.

### 2.3 Conjugados de tensão e deformação

Para determinar a relação tensão-deformação, pode-se expressar o equilíbrio com a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), determinando posteriormente o princípio da estacionariedade que é crucial para o desenvolvimento de um código computacional consistente. Logo, para se obter a expressão do PTV basta seguir os mesmos passos seguidos na determinação do balanço de energia mecânica, ponderando a equação de equilíbrio por  $\delta y$ , ficando esta expressa por:

$$\int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot \delta y \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} S n_0 \cdot \delta y \, dA_0 = \int_{P_0} \text{tr}(S \delta A) \, dV_0 + \int_{P_0} \rho_0 \ddot{y} \cdot \delta y \, dV_0 \quad (2.93)$$

Os termos da esquerda na expressão (2.93) definem o trabalho virtual das forças externas, enquanto o primeiro termo da direita define a energia de deformação virtual, introduzida no material constituinte, e o último termo é o trabalho virtual das forças inerciais.

Para definir o funcional de energia potencial total, deve-se escrever  $\delta y$  infinitesimal, para expressar a variação de energia de deformação  $\delta U_e$ , onde o tensor de Piola-Kirchhoff de 1ª espécie ficará definido como a derivada da energia de deformação em relação ao gradiente de deformação.

$$\delta U_e = \text{tr} \left( \frac{\partial U_e}{\partial A} \delta A \right) \quad (2.94)$$

Portanto a equação (2.93) fica agora definida por:

$$\int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot \delta y \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} S n_0 \cdot \delta y \, dA_0 = \int_{P_0} \delta U_e \, dV_0 + \int_{P_0} \rho_0 \ddot{y} \cdot \delta y \, dV_0 \quad (2.95)$$

sendo  $S n_0 = t^*$ .

Como nos problemas a serem tratados, as forças de superfície e de volume não dependem da função mudança de forma, se escreve diretamente:

$$b^* \cdot \delta y = \delta (b^* \cdot y) \quad (2.96)$$

$$t_s^* \cdot \delta y = \delta (t_s^* \cdot y) \quad (2.97)$$

Rearranjando a parcela da aceleração como  $\ddot{y} \cdot \delta y = \delta \left( \frac{1}{2} \dot{y} \cdot \dot{y} \right)$ , determina-se, substituindo as equações (2.96) e (2.97) na (2.95), a condição de estacionariedade da energia potencial total (princípio da estacionariedade), pela seguinte expressão:

$$\delta \Pi = \delta \left[ \int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot y \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} t_s^* \cdot y \, dA_0 - \int_{P_0} U_e \, dV_0 - \int_{P_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{y} \cdot \dot{y} \, dV_0 \right] = 0 \quad (2.98)$$

Conseqüentemente pode-se quantificar a energia mecânica total do sistema considerado (sólido elástico) para uma configuração  $y$ , da seguinte forma:

$$\Pi = \int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot y \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} t_s^* \cdot y \, dA_0 - \int_{P_0} U_e \, dV_0 - \int_{P_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{y} \cdot \dot{y} \, dV_0 \quad (2.99)$$

Para obter a expressão da energia, em termos da deformação de Green, pode-se trabalhar a variação de energia (equação (2.94)), com o tensor de Piola-

Kirchhoff de 2ª espécie, bastando substituir a equação (2.65) na (2.93), ficando esta expressa por:

$$\int_{P_0} \rho_0 b^* \cdot \delta y \, dV_0 + \int_{\Omega P_0} S \cdot n_0 \cdot \delta y \, dA_0 = \int_{P_0} AS^* : \delta A \, dV_0 + \int_{P_0} \rho_0 \ddot{y} \cdot \delta y \, dV_0 \quad (2.100)$$

onde,  $AS^* : \delta A = tr(AS^* \delta A)$ .

No entanto, pela simetria do  $S^*$  demonstra-se que:

$$\begin{aligned} AS^* : \delta A &= A_{kj} S_{ji}^* \delta A_{ik} = A_{kj} \delta A_{ik} S_{ji}^* = \delta A_{kj} A_{ik} S_{ji}^* \\ AS^* : \delta A &= A^T \delta A : S^* = \delta A^T A : S \end{aligned} \quad (2.101)$$

Ou seja,  $S^*$  é conjugado da deformação de Green na elasticidade linear, pois:

$$\int_{P_0} AS^* : \delta A \, dV_0 = \int_{P_0} \frac{(\delta A^T + A^T \delta A)}{2} : S^* \, dV_0 = \int_{P_0} \delta E : S^* \, dV_0 = \int_{P_0} S^* : \delta E \, dV_0 \quad (2.102)$$

Consequentemente pode-se escrever o funcional de energia de deformação, para a deformação de Green, com o conjugado Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, calculando assim as tensões reais utilizando a equação (2.68).

# Formulação não linear geométrica do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF - Posicional)

# Capítulo 3

---

## 3.1 Considerações iniciais

Aqui será descrito o desenvolvimento da formulação não linear geométrica para problemas estáticos e dinâmicos baseado na descrição de posições considerando grandes deslocamentos e rotações em estruturas planas. Logo o equacionamento se dará através das posições nodais do corpo e não dos deslocamentos.

Desenvolvida para problemas estáticos em CODA (2003), nesta formulação utiliza-se a descrição Lagrangiana total para a determinação das medidas de deformação e tensão. Já a formulação dinâmica original considera distribuição discreta de massa nas estruturas com amortecimento proporcional à mesma GRECO (2004).

O equacionamento é feito via minimização posicional e temporal do funcional de energia potencial total, resultando na equação de equilíbrio dinâmico.

A resolução do equacionamento diferencial se faz utilizando o integrador temporal de Newmark, associado ao método iterativo de Newton-Raphson para incrementos de tempo.

A versão apresentada neste trabalho se baseia na cinemática de Reissner, tal como mostrado em MACIEL & CODA (2005).

### **3.2 Não linearidade geométrica**

Formulações desenvolvidas utilizando a análise não-linear geométrica (NLG) têm o seu equilíbrio feito na configuração atual (final) da estrutura, ou seja, a partir das posições finais do corpo, independentemente da magnitude dos deslocamentos desenvolvidos.

Logo, a descrição da configuração do corpo em vários passos de carga ou passos de tempo leva a definição de uma trajetória de equilíbrio, onde as forças externas ao corpo estão balanceadas com as forças internas do mesmo. No entanto, pontos críticos poderão ser identificados na mesma devido a trechos de equilíbrio estável e instável. Estes pontos recebem a denominação de ponto de bifurcação, onde configurações equilibradas deixam de ser únicas (instabilidade de 1ª espécie), ou ponto limite, onde se encerra uma sucessão de configurações com características de equilíbrio antes do surgimento de bifurcação (instabilidade de 2ª espécie). Mas deve-se comentar que tanto a instabilidade por aparecimento de ponto limite pode preceder a instabilidade de bifurcação ou de modo contrário, pode ocorrer à instabilidade de bifurcação previamente a instabilidade por ponto limite. Tal estudo não é objeto direto deste trabalho, no entanto, a formulação proposta pode ser estendida para tal.

### **3.3 Cinemática para um elemento de pórtico plano**

Seja um elemento de pórtico plano com geometria qualquer representado no espaço bidimensional, conforme a Figura 3.1.



Observando a Figura 3.1 se escreve:

$$\begin{aligned} X_1 - X_1^m &= u_1 & \text{ou} & & X_1 &= X_1^m + u_1 \\ X_2 - X_2^m &= u_2 & & & X_2 &= X_2^m + u_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

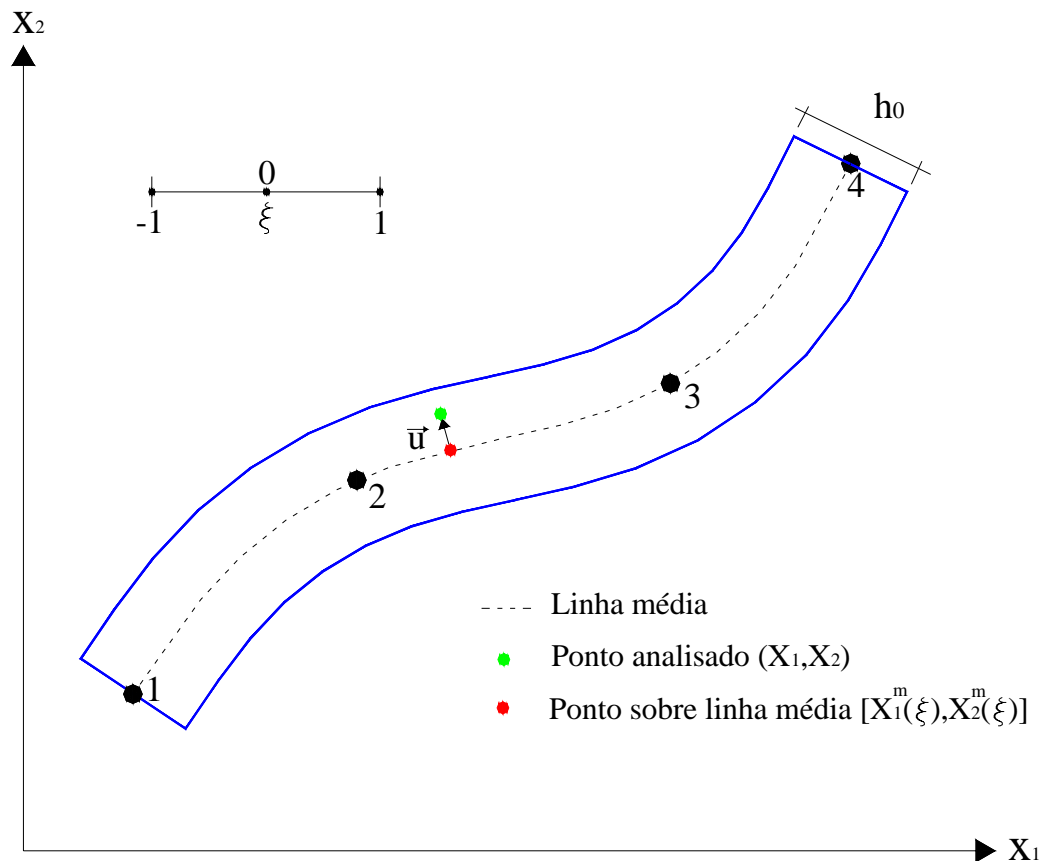


Figura 3.1: Elemento de pórtico parametrizado na configuração inicial

Onde  $\left\| \vec{u} \right\|$  é a distância entre o ponto sobre a linha média  $(X^m)$  e o ponto

analisado  $(X)$ , segundo direção normal. Define-se pela Figura 3.2, que:

$$\begin{aligned} u_1 &= -d \operatorname{sen} \alpha_0 \\ u_2 &= d \operatorname{cos} \alpha_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo:

$$\alpha_0 = \theta_0 - 90^\circ \quad (3.3)$$

e  $d$  a fração da semi-espessura, sendo seu sinal melhor explicado na equação (3.11).

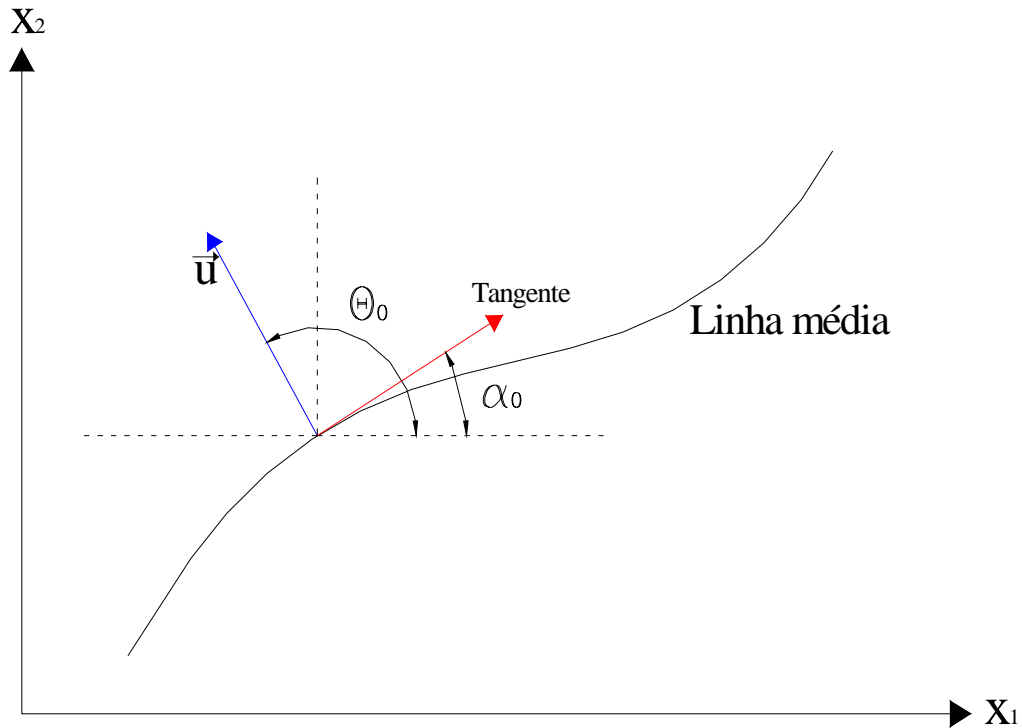


Figura 3.2: Linha média do elemento na configuração inicial

Por trigonometria, temos:  $\text{sen } \alpha_0 = -\cos \theta_0$  e  $\cos \alpha_0 = \text{sen } \theta_0$ , portanto:

$$\begin{aligned} u_1 &= d \cos \theta_0 \\ u_2 &= d \text{sen } \theta_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Logo:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^m - d \text{sen } \alpha_0 = X_1^m + d \cos \theta_0 \\ X_2 &= X_2^m + d \cos \alpha_0 = X_2^m + d \text{sen } \theta_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pelo fato da formulação não linear ser baseada no Método dos Elementos Finitos, as coordenadas dos pontos da linha média e conseqüentemente a função mudança de configuração necessitam ser parametrizadas por valores nodais e funções de forma, sendo esta com aproximação qualquer advinda do polinômio de Lagrange, como mostrado na equação (3.6),

$$\phi_k^n = \frac{\xi_{n+1} - \xi}{\xi_{n+1} - \xi_k} \cdots \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} \frac{\xi_{k-1} - \xi}{\xi_{k-1} - \xi_k} \cdots \frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1 - \xi_k} \quad (3.6)$$

para  $1 \leq k \leq n + 1$ , onde  $n$  indica o grau do polinômio e  $k$  a função de forma referente ao parâmetro nodal. A variável adimensional  $\xi$  varia entre -1 e 1.

Deste modo as coordenadas da linha média ficam determinadas indicialmente por:

$$X_i^m = \phi_l X_i^l \quad (3.7)$$

onde os índices  $i$  e  $l$  representam a coordenada e o nó do elemento respectivamente.

Substituindo-se a equação (3.7) em (3.5), tem-se:

$$\begin{aligned} X_1 &= \phi_l X_1^l + d \cos \theta_0 \\ X_2 &= \phi_l X_2^l + d \operatorname{sen} \theta_0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Do mesmo modo a aproximação para  $\theta_0$  é feita, ou seja:

$$\theta_0^m = \phi_l \theta_0^l \quad \text{ou} \quad \theta_0 = \phi_l \theta_0^l \quad (3.9)$$

onde  $\theta_0^l$ , é a inclinação inicial, em relação a normal, para cada nó do elemento.

Logo, substituindo-se a equação (3.9) na (3.8), tem-se:

$$\begin{aligned} X_1 &= \phi_l(\xi) X_1^l + d \cos [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \\ X_2 &= \phi_l(\xi) X_2^l + d \operatorname{sen} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Considerando-se uma determinada seção transversal do elemento com altura  $h_0(\xi)$  e sendo  $d$  a distância da coordenada da linha média ao ponto genérico, esta pode ser escrita por:

$$d(\xi, \eta) = h_0(\xi) \frac{\eta}{2} \quad (3.11)$$

sendo  $\eta$  (variando entre -1 e 1), outra variável adimensional para parametrizar a função altura da seção transversal em questão, definindo que:

se  $\eta > 0$ , então o ponto genérico encontra-se na fibra superior

se  $\eta < 0$ , então o ponto genérico encontra-se na fibra inferior

Considerando-se  $h_0(\xi)$  constante, a equação (3.11), fica então definida por:

$$d(\eta) = h_0 \frac{\eta}{2} \quad (3.12)$$

Por consequência um ponto genérico na configuração inicial fica determinado, como:

$$\begin{aligned} X_1 &= \phi_l(\xi) X_1^l + h_0 \frac{\eta}{2} \cos [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \\ X_2 &= \phi_l(\xi) X_2^l + h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Projetando-se a mesma idéia para aproximação da configuração final do elemento, obtem-se a partir da Figura 3.3, as coordenadas do ponto genérico na configuração atual, por:

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1^m + v_1 \\ Y_2 &= Y_2^m + v_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analogamente a formulação da configuração inicial, tem-se que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \phi_l(\xi) Y_1^l + h(\xi) \frac{\eta}{2} \cos [\phi_l(\xi) \theta^l] \\ Y_2 &= \phi_l(\xi) Y_2^l + h(\xi) \frac{\eta}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta^l] \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $(Y_1, Y_2)$  e  $\theta$  são as coordenadas e o giro do ponto genérico, enquanto  $h(\xi)$  é a função altura da seção transversal, todos na configuração atual. Esta variável poderia ser diferente de  $h_0$ , ou seja,  $h(\xi) = \phi_l h^l$  como mostrado na equação (3.7), no entanto se acrescentariam mais incógnitas ao sistema. Sendo assim, uma

restrição adicional à cinemática é imposta, ou seja, considera-se que não há variação na altura do elemento na mudança de configuração, portanto

$$h(\xi) = h = h_0 = cte .$$

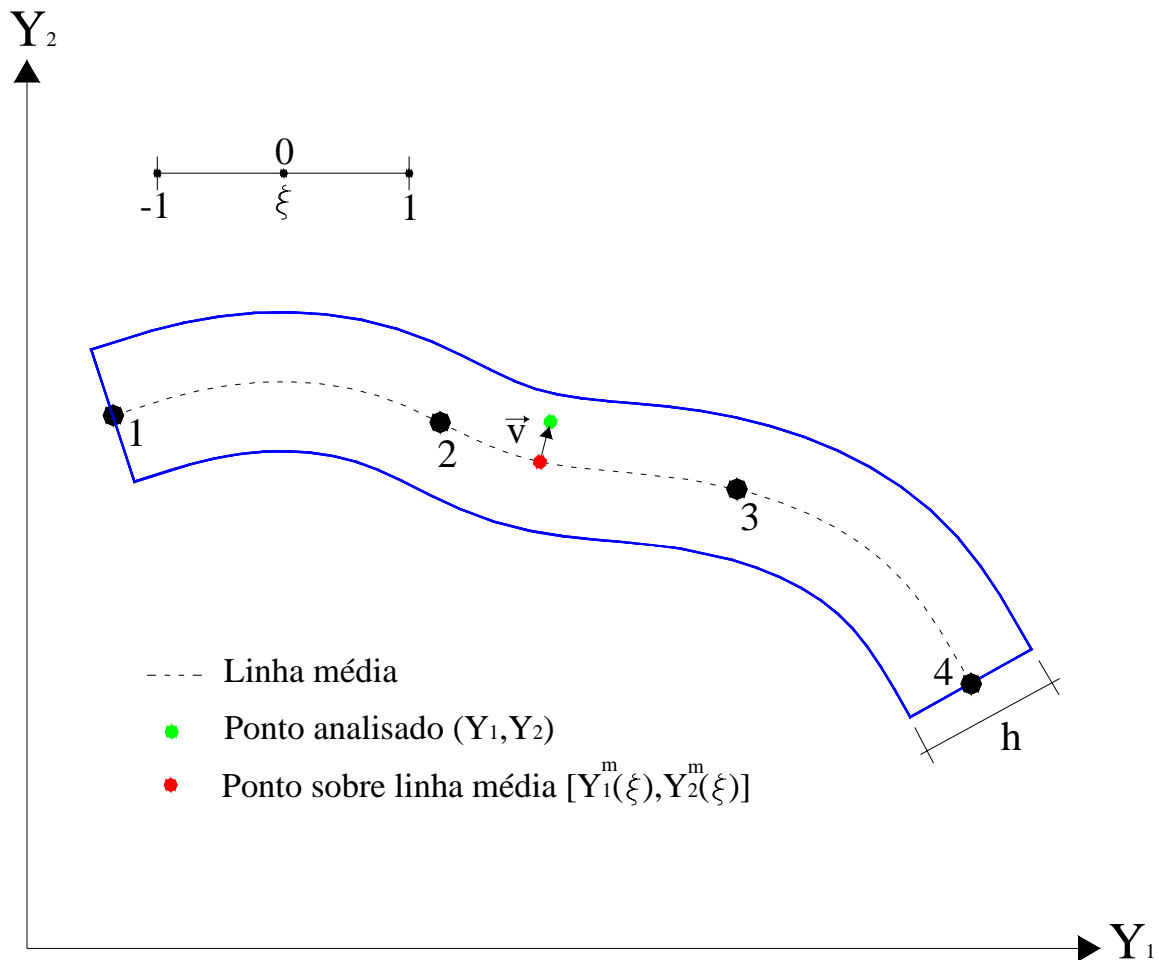


Figura 3.3: Elemento de pórtico parametrizado na configuração atual

Assume-se uma Lei constitutiva simplificada, adotando-se  $\nu = 0$  (coeficiente de Poisson), evitando qualquer problema de travamento. Logo, a equação (3.15) torna-se:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \phi_1(\xi) Y_1^l + h_0 \frac{\eta}{2} \cos [\phi_1(\xi) \theta^l] \\ Y_2 &= \phi_1(\xi) Y_2^l + h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen} [\phi_1(\xi) \theta^l] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Seja um elemento finito com aproximação qualquer, cujo mapeamento do contínuo é feito com as funções de forma a partir das posições (configuração inicial e final) dos pontos nodais, tendo um espaço adimensional como base para o mapeamento numérico, como mostra a Figura 3.4.

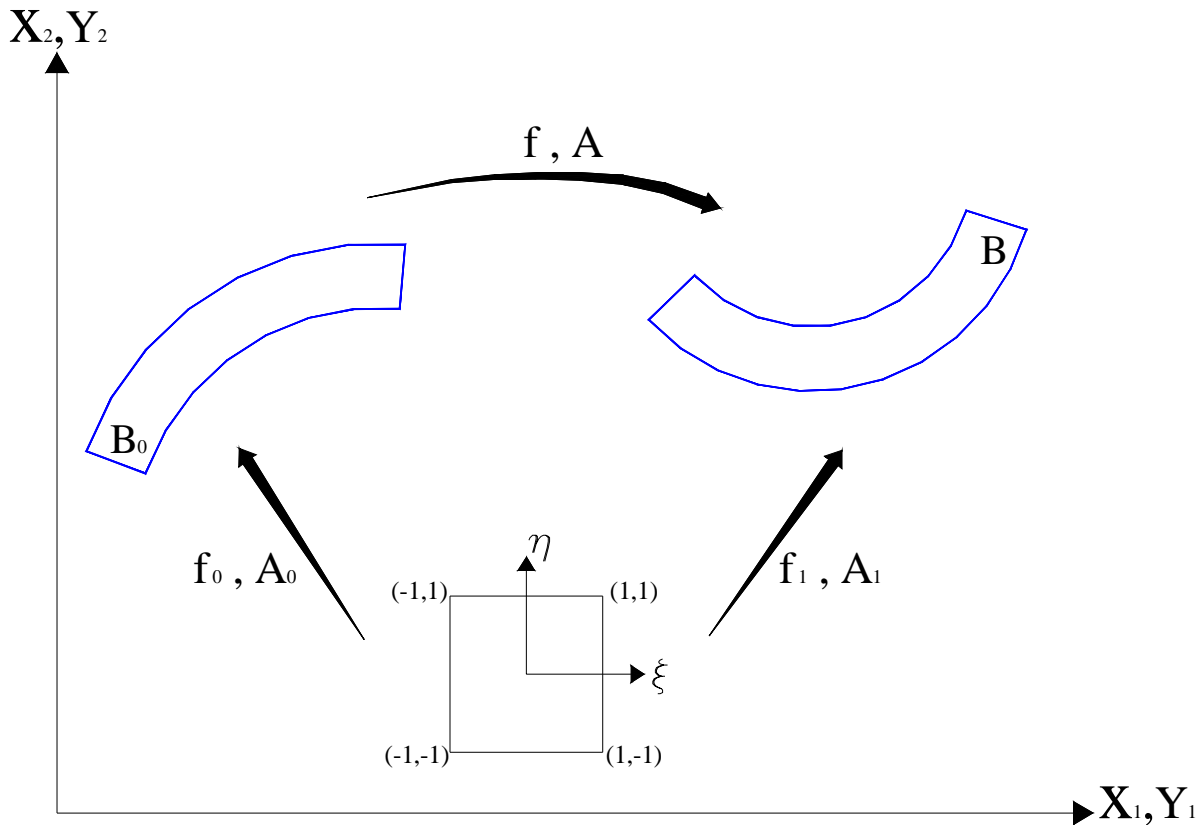


Figura 3.4: Configurações parametrizadas do mesmo espaço adimensional.

Utilizando-se a equação (2.15) pode-se determinar o gradiente de deformação criando dois mapeamentos  $f_0(\xi, \eta)$  e  $f_1(\xi, \eta)$  para a configuração inicial e final do corpo, respectivamente. Desta forma, temos:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \partial f_{01} / \partial \xi & \partial f_{01} / \partial \eta \\ \partial f_{02} / \partial \xi & \partial f_{02} / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial X_1 / \partial \xi & \partial X_1 / \partial \eta \\ \partial X_2 / \partial \xi & \partial X_2 / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \partial f_{11} / \partial \xi & \partial f_{11} / \partial \eta \\ \partial f_{12} / \partial \xi & \partial f_{12} / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial Y_1 / \partial \xi & \partial Y_1 / \partial \eta \\ \partial Y_2 / \partial \xi & \partial Y_2 / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Substituindo as equações (3.13) e (3.16) na (3.17) e (3.18) respectivamente, obtemos as componentes das matrizes.

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial \xi} &= X_{1,\xi} = \phi_{l,\xi} X_1^l - h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] (\phi_{l,\xi} \theta_0^l) \\ \frac{\partial X_2}{\partial \xi} &= X_{2,\xi} = \phi_{l,\xi} X_2^l + h_0 \frac{\eta}{2} \text{cos} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] (\phi_{l,\xi} \theta_0^l) \\ \frac{\partial X_1}{\partial \eta} &= X_{1,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{cos} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \\ \frac{\partial X_2}{\partial \eta} &= X_{2,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta_0^l] \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} &= Y_{1,\xi} = \phi_{l,\xi} Y_1^l - h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta^l] (\phi_{l,\xi} \theta^l) \\ \frac{\partial Y_2}{\partial \xi} &= Y_{2,\xi} = \phi_{l,\xi} Y_2^l + h_0 \frac{\eta}{2} \text{cos} [\phi_l(\xi) \theta^l] (\phi_{l,\xi} \theta^l) \\ \frac{\partial Y_1}{\partial \eta} &= Y_{1,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{cos} [\phi_l(\xi) \theta^l] \\ \frac{\partial Y_2}{\partial \eta} &= Y_{2,\eta} = \frac{h_0}{2} \text{sen} [\phi_l(\xi) \theta^l]\end{aligned}\tag{3.19}$$

Portanto, a função mudança de configuração  $f$  e seu gradiente  $A$  ficam definidos como:

$$f = f_1(\xi, \eta) \circ f_0^{-1}(\xi, \eta)\tag{3.20}$$

$$A = A_1(\xi, \eta) A_0^{-1}(\xi, \eta)\tag{3.21}$$

Para exemplificar a organização das variáveis nodais, utiliza-se um elemento finito de quatro nós (aproximação cúbica), como visto nas Figuras 3.1 e 3.3, sendo suas funções de forma parametrizadas obtidas pela equação (3.6).

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{(-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 1)}{16} \\
\phi_2 &= \frac{(27\xi^3 - 9\xi^2 - 27\xi + 9)}{16} \\
\phi_3 &= \frac{(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)}{16} \\
\phi_4 &= \frac{(9\xi^3 + 9\xi^2 - \xi - 1)}{16}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo, suas primeiras derivadas  $\phi_{l,\xi}$ , em relação a variável adimensional

$\xi$  são:

$$\begin{aligned}
\phi_{1,\xi} &= \frac{(-27\xi^2 + 18\xi + 1)}{16} \\
\phi_{2,\xi} &= \frac{(81\xi^2 - 18\xi - 27)}{16} \\
\phi_{3,\xi} &= \frac{(-81\xi^2 - 18\xi + 27)}{16} \\
\phi_{4,\xi} &= \frac{(27\xi^2 + 18\xi - 1)}{16}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Conseqüentemente de posse das funções de forma e suas derivadas e os valores dos parâmetros nodais da configuração inicial  $(X_1^1, X_2^1, \theta_0^1, X_1^2, X_2^2, \theta_0^2, X_1^3, X_2^3, \theta_0^3, X_1^4, X_2^4, \theta_0^4)$  e final  $(Y_1^1, Y_2^1, \theta^1, Y_1^2, Y_2^2, \theta^2, Y_1^3, Y_2^3, \theta^3, Y_1^4, Y_2^4, \theta^4)$  fica determinado, a partir das expressões (3.19), as componentes das matrizes dos gradientes de deformação, posteriormente a mesma, sendo que o mapeamento da posição de um ponto qualquer é feito pelas equações (3.13) e (3.16), do modo mostrado a seguir:



$$\begin{aligned}
X_1^m(\xi) &= \phi_1(\xi)X_1^1 + \phi_2(\xi)X_1^2 + \phi_3(\xi)X_1^3 + \phi_4(\xi)X_1^4(\xi) \\
X_2^m(\xi) &= \phi_1(\xi)X_2^1 + \phi_2(\xi)X_2^2 + \phi_3(\xi)X_2^3 + \phi_4(\xi)X_2^4 \\
\theta_0(\xi) &= \phi_1(\xi)\theta_0^1 + \phi_2(\xi)\theta_0^2 + \phi_3(\xi)\theta_0^3 + \phi_4(\xi)\theta_0^4 \\
Y_1^m(\xi) &= \phi_1(\xi)Y_1^1 + \phi_2(\xi)Y_1^2 + \phi_3(\xi)Y_1^3 + \phi_4(\xi)Y_1^4(\xi) \\
Y_2^m(\xi) &= \phi_1(\xi)Y_2^1 + \phi_2(\xi)Y_2^2 + \phi_3(\xi)Y_2^3 + \phi_4(\xi)Y_2^4 \\
\theta(\xi) &= \phi_1(\xi)\theta^1 + \phi_2(\xi)\theta^2 + \phi_3(\xi)\theta^3 + \phi_4(\xi)\theta^4
\end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.4 Método de solução

A formulação do (MEF-Posicional) para problemas de pórticos planos, utiliza o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, e tem como parâmetros nodais, para um elemento com aproximação geométrica qualquer, as posições  $Y_i^l$  e giro  $\theta^l$ , para cada nó  $l$  e direção  $i$ .

Para um problema estrutural associado com um sistema de referência fixo, mostrado na Figura 3.5, o funcional de energia potencial total, pode ser escrito como a composição da energia de deformação total  $U_e$ , a energia potencial das forças conservativas (externas) aplicadas  $P_f$  e a energia cinética  $K$ , como segue:

$$\Pi = U_e - P_f + K \tag{3.25}$$

A energia de deformação total do corpo é considerada armazenada no volume inicial e assumida como sendo nula na configuração de referência (inicial). A forma integral da energia de deformação é escrita como a integral da energia de deformação específica  $u_e$  em  $V_0$  (volume inicial), expressa por:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \tag{3.26}$$

A energia de deformação específica Lagrangiana pode ser determinada utilizando qualquer conjugado tensão-deformação. Neste trabalho, utiliza-se a deformação de Green e sua tensão conjugada de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie.

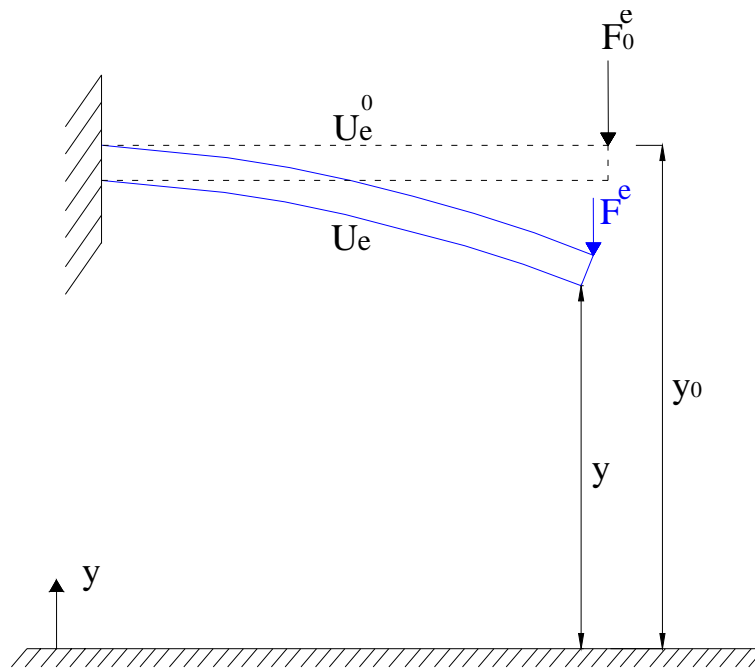


Figura 3.5: Energia potencial total para um corpo em duas configurações distintas

Como apresentado na equação (2.26) o tensor de deformação de Green é derivado do gradiente de deformação  $A$  e, conforme OGDEN (1984), pode ser escrito como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ik}A_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.27)$$

onde as variáveis  $C_{ij}$  e  $\delta_{ij}$  são o alongamento de Cauchy-Green à direita e o delta de Kroenecker, respectivamente. A energia de deformação quadrática, por unidade de volume inicial, foi adotada neste trabalho, sendo este expresso por:

$$u_e = \frac{1}{2} E_{ij} C_{ijkl} E_{kl} \quad (3.28)$$

A relação entre a deformação de Green e o tensor de tensão de Piola-

Kirchhoff de 2ª espécie, apresentado na equação (2.102), é usualmente conhecida como lei elástica de Saint-Venant-Kirchhoff, isto é:

$$S_{ij}^* = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl} E_{kl} \quad (3.29)$$

O tensor elástico  $C_{ijkl}$  é dado por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\delta_{ij}\delta_{kl}) + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.30)$$

onde,  $G = (E^*/2(1+\nu))$ , é o módulo de cisalhamento (módulo de elasticidade transversal), definido pelo módulo de Young  $E^*$  (módulo de elasticidade longitudinal) e o coeficiente de Poisson  $\nu$ .

Consequentemente de uma lei constitutiva elástica linear, equação (3.30), e com  $\nu = 0$ , a energia de deformação específica fica determinada por:

$$u_e = \frac{E^*}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + GE_{12}^2 + GE_{21}^2 \quad (3.31)$$

A energia potencial das forças externas é escrita como:

$$P_f = F_i^e Y_i \quad (3.32)$$

onde  $Y_i$  representa o conjunto de parâmetros nodais (posições e giros) que o corpo pode exibir, sendo independentes entre si, posicionados onde atuam as forças  $F_i^e$ , na direção  $i$ . Nota-se que esta energia pode ser diferente de zero na configuração inicial.

A energia cinética é dada por:

$$K = \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{Y}_i \dot{Y}_i dV_0 \quad (3.33)$$

onde  $\dot{Y}_i$  é a velocidade e  $\rho_0$  a densidade de massa no volume inicial.

Substituindo-se as expressões (3.26), (3.32) e (3.33) na (3.25) tem-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i^e Y_i + \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{Y}_i \dot{Y}_i dV_0 \quad (3.34)$$

Escrevendo a equação da energia (3.34) em termos de aproximação, descrito no item 3.3, tem-se:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e(\xi, Y_i) dV_0 - F_i^e Y_i + \int_{V_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{Y}_i(\xi, Y_i) \dot{Y}_i(\xi, Y_i) dV_0 \quad (3.35)$$

Minimizando-se o funcional de energia em relação a uma posição genérica  $Y_k^l$ , com  $k$  indicando a direção e  $l$  o nó, obtém-se a condição de estacionariedade, isto é:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_k^l} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, Y_i)}{\partial Y_k^l} dV_0 - F_k^{el} + \int_{V_0} \rho_0 \phi_k^l \phi_i^j dV_0 \ddot{Y}_i^j = 0 \quad (3.36)$$

onde  $\ddot{Y}_i^j$  é a aceleração. A equação (3.36) pode ser escrita em uma forma simplificada, como:

$$g = \frac{\partial U_e}{\partial Y_k} - F_{ext} + F_{iner} = 0 \quad (3.37)$$

de forma que as variáveis  $\partial U_e / \partial Y_k$ ,  $F_{ext}$  e  $F_{iner}$  representam o vetor de forças internas, o vetor de forças externas e o vetor inercial, respectivamente.

A conservação da energia em um sistema mecânico é garantida se o acréscimo e decréscimo de energia forem iguais na equação do balanço. No entanto, pode haver alguma dissipação de energia total ao longo do tempo. Um termo de energia dissipativa  $Q_a$ , que representa perda devido ao amortecimento, é dado na sua forma diferencial, em relação aos parâmetros nodais globais, por:

$$\frac{\partial Q_a}{\partial Y_k^l} = \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \phi_k^l \phi_i^j dV_0 \dot{Y}_i^j \quad (3.38)$$

A expressão (3.38) representa o vetor de forças referentes ao amortecimento

$F_{amor}$ , onde  $\lambda_m$  é o coeficiente de amortecimento.

Sendo a matriz de massa para cada elemento definida por:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 \phi_k^l \phi_i^j dV_0 \quad (3.39)$$

Têm-se o vetor de forças inerciais e o vetor de forças referentes ao amortecimento escritos como:

$$F_{iner} = M \ddot{Y}_i \quad (3.40)$$

$$F_{amort} = C_a \dot{Y}_i \quad (3.41)$$

onde  $C_a$  representa a matriz de amortecimento proporcional a massa.

Conseqüentemente, a equação de equilíbrio dinâmico (3.36), ou equação de balanceamento, torna-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_k} = g = \frac{\partial U_e}{\partial Y_k} - F_{ext} + M \ddot{Y}_i + C_a \dot{Y}_i = 0 \quad (3.42)$$

Para determinar o vetor de forças internas, primeiramente determinam-se as derivadas primeiras da energia de deformação específica, dadas por:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Y_k^l} (E_{jk} C_{jkim} E_{im}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial E_{\alpha\beta}} (E_{jk} C_{jkim} E_{im}) \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_k^l} = C_{\alpha\beta im} E_{im} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_k^l} = S_{\alpha\beta}^* \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_k^l} \quad (3.43)$$

Logo, o vetor de forças internas fica determinado como sendo:

$$F_{k(int)}^l = \int_{V_0} C_{\alpha\beta im} E_{im} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_k^l} dV_0 \quad (3.44)$$

Portanto, fica definida a equação de equilíbrio dinâmico. Como esta apresenta diferenciação em relação as variáveis, posição  $Y$  e tempo  $t$  se faz necessário adotar um algoritmo de integração. Adotando-se o algoritmo de Newmark, necessita-se, devido à formulação ser referente a um intervalo de tempo  $\Delta t$ , apresentar duas configurações em instantes de tempo diferentes. Logo, a equação (3.42) é escrita, de maneira simplificada, para um instante de tempo atual  $(S + 1)$ , como:

$$g = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial Y} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial Y} \right|_{S+1} - F_{S+1}^e + M \dot{Y}_{S+1} + C_a \dot{Y}_{S+1} = 0 \quad (3.45)$$

Aplicando-se a aproximação de Newmark para um instante atual de tempo, na descrição posicional, tem-se:

$$Y_{S+1} = Y_S + \Delta t \dot{Y}_S + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{Y}_S + \beta \ddot{Y}_{S+1} \right] \quad (3.46)$$

$$\dot{Y}_{S+1} = \dot{Y}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{Y}_S + \gamma \Delta t \ddot{Y}_{S+1} \quad (3.47)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros de integração de Newmark, e definem a variável aceleração no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Expressando-se a aceleração para o passo tempo atual a partir do rearranjo da equação (3.46), chega-se:

$$\ddot{Y}_{S+1} = \frac{Y_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - \frac{Y_S}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{Y}_S}{\beta \Delta t} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{Y}_S \quad (3.48)$$

Substituindo as equações (3.47) e (3.48) na (3.45) resulta em:

$$g(Y_{S+1}) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial Y} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial Y} \right|_{S+1} - F_{S+1}^e + \frac{M}{\beta \Delta t^2} Y_{S+1} - M Q_S + C_a R_S + \frac{\gamma C_a}{\beta \Delta t} Y_{S+1} - \gamma \Delta t C_a Q_S = 0 \quad (3.49)$$

com  $Q_S$  e  $R_S$  representando as variáveis do passo de tempo passado, mostrando a contribuição destas no equilíbrio dinâmico, dadas por:

$$Q_s = \frac{Y_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{Y}_s}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{Y}_s \quad (3.50)$$

$$R_s = \dot{Y}_s + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{Y}_s \quad (3.51)$$

Assegurando a igualdade da expressão (3.49), está fica dita em equilíbrio dinâmico, de modo contrário  $g(Y_{s+1})$  será um vetor de resíduos, sendo  $g$  uma função vetorial não-linear.

Para solucionar o sistema não-linear o método de Newton-Raphson é utilizado por meio de uma expansão da série de Taylor, truncando a mesma nos termos de 1ª ordem, ou seja:

$$g(Y) = 0 \cong g(Y^0) + \nabla g(Y^0) \Delta Y \quad (3.52)$$

A partir do gradiente do vetor de resíduos  $\nabla g(Y^0)$  chega-se a matriz Hessiana para problema dinâmico, que está relacionada com o instante de tempo atual, logo  $Y^0$  representa a última configuração de equilíbrio ( $Y_{s+1} = Y^0$ ), sendo determinada com a equação (3.53).

$$\nabla g(Y^0) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Y^2} \Big|_{s+1} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y^2} \Big|_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C_a}{\beta \Delta t} \quad (3.53)$$

Determinam-se com a equação (3.52) as correções das posições  $\Delta Y$ , de forma a corrigir as posições nodais em cada iteração, com:

$$Y_{s+1} = Y^0 + \Delta Y \quad (3.54)$$

onde  $Y^0$  assume os novos valores para as posições no processo iterativo.

Em seguida corrigem-se as acelerações.

$$\ddot{Y}_{s+1} = \frac{Y_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_s \quad (3.55)$$

Posteriormente as velocidades.

$$\dot{Y}_{S+1} = R_S + \gamma \Delta t \ddot{Y}_{S+1} \quad (3.56)$$

Para o encerramento dos laços de iterações, ou seja, que os resíduos de posições sejam suficientemente pequenos em relação a uma tolerância ( $TOL$ ), faz-se o uso de um critério de parada que utiliza o conceito da norma Euclidiana (norma vetorial)  $\| \cdot \|$ , ou seja:

$$\|g(Y^0)\| \leq TOL \quad \text{ou} \quad \|\Delta Y\| \leq TOL \quad (3.57)$$

Logo, obtendo a convergência pelo critério de parada para um determinado passo de tempo passa-se para o passo subsequente. Por fim, o processo de iteração de Newton-Raphson e a esquematização do algoritmo temporal de Newmark são resumidamente apresentados.

- I. Assume-se a configuração indeslocada (inicial)  $Y^0$  ;
- II. Adota-se um intervalo de tempo  $\Delta t$  e o vetor velocidade  $\dot{Y}^0$  ;
- III. Calcula-se a aceleração  $\ddot{Y}^0 = M^{-1} \left( F_0^e - C_a \dot{Y}^0 - \frac{\partial U_e}{\partial Y} \Big|_0 \right)$  ;
- IV. Calcula-se o vetor de resíduos  $g(Y_{S+1})$ , fazendo-se  $Y_{S+1} = Y_S = Y^0$  para o início do processamento;
- V. Determina-se a matriz Hessiana (gradiente do vetor  $g$ );
- VI. Resolve-se o sistema de equações  $\Delta Y = -(\nabla g(Y^0))^{-1} g(Y^0)$ , determinando as correções;



VII. Atualiza-se a posição  $Y_{S+1} = Y^0 + \Delta Y$ , aceleração  $\ddot{Y}_{S+1} = \frac{Y_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_S$ , e

posteriormente velocidade  $\dot{Y}_{S+1} = R_S + \gamma \Delta t \ddot{Y}_{S+1}$ ;

VIII. Verifica-se a convergência  $\|g(Y^0)\| \leq TOL$  ou  $\|\Delta Y\| \leq TOL$ , caso confirmado vai para IX de modo contrário volta para IV;

IX. Atualizam-se as variáveis do passado;

$$Y_S = Y_{S+1}$$

$$\dot{Y}_S = \dot{Y}_{S+1}$$

$$\ddot{Y}_S = \ddot{Y}_{S+1}$$

X. Retorna a IV com um novo passo de tempo.

Por fim, para concluir a apresentação do método adotado, descrevem-se a obtenção das segundas derivadas da energia de deformação referidas as posições nodais, utilizada no cálculo do gradiente do vetor de resíduos. A partir das equações (3.43) e (3.44) escreve-se:

$$\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial Y_k} \left( C_{\alpha\beta im} E_{im} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_j} \right) dV_0 = \int_{V_0} \left( \frac{\partial E_{im}}{\partial Y_k} C_{\alpha\beta im} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_j} + E_{im} \frac{\partial^2 E_{\alpha\beta}}{\partial Y_j \partial Y_k} \right) dV_0 \quad (3.58)$$

Conseqüentemente a primeira e segunda derivada da deformação de Cauchy-Green, referidas as posições nodais, devem ser determinadas. Para isto, primeiramente é necessário calcular a derivada do tensor de Cauchy-Green à direita (equação (2.18)). Recalculando o alongamento de Cauchy-Green com omissão, por simplicidade, de índices extras, substituindo a equação (3.21) na (3.19), tem-se:

$$C = \left[ (A_0)^T \right]^{-1} (A_1)^T (Y_i) A_1 (Y_i) (A_0)^{-1} \quad (3.59)$$

Como  $A_0$  é constante, a primeira derivada é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial Y_j} = [(A_0)^T]^{-1} \frac{\partial(A_1)^T(Y_i)}{\partial Y_j} A_1(Y_i) (A_0)^{-1} + [(A_0)^T]^{-1} (A_1)^T(Y_i) \frac{\partial(A_1)(Y_i)}{\partial Y_j} (A_0)^{-1} \quad (3.60)$$

Utilizando-se as equações (3.18) e (3.19), pode-se determinar as primeiras derivadas do gradiente de deformação, como:

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial Y_1^k} = Y_{1,\xi 1} = \phi_{k,\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial Y_1^k} = Y_{1,\eta 1} = 0$$

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial Y_1^k} = Y_{2,\xi 1} = 0$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial Y_1^k} = Y_{2,\eta 1} = 0$$

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial Y_2^k} = Y_{1,\xi 2} = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial Y_2^k} = Y_{1,\eta 2} = 0$$

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial Y_2^k} = Y_{2,\xi 2} = \phi_{k,\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial Y_2^k} = Y_{2,\eta 2} = 0$$

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta^k} = Y_{1,\xi \theta} = -h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta'] \phi_k(\xi) [\phi_{l,\xi}(\xi)\theta'] - h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta'] \phi_{k,\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial \theta^k} = Y_{1,\eta \theta} = -h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta'] \phi_k(\xi)$$

$$\frac{\partial A_{21}}{\partial \theta^k} = Y_{2,\xi\theta} = -h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_k(\xi) [\phi_{l,\xi}(\xi)\theta^l] + h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_{k,\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial \theta^k} = Y_{1,\eta\theta} = h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_k(\xi)$$

A segunda derivada do alongamento de Cauchy-Green é então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial Y_j \partial Y_z} &= [(A_0)^T]^{-1} \frac{\partial^2 (A_1)^T(Y_i)}{\partial Y_j \partial Y_z} A_1(Y_i) (A_0)^{-1} + [(A_0)^T]^{-1} \frac{\partial (A_1)^T(Y_i)}{\partial Y_j} \frac{\partial (A_1)(Y_i)}{\partial Y_z} (A_0)^{-1} + \\ & [(A_0)^T]^{-1} \frac{\partial (A_1)^T(Y_i)}{\partial Y_z} \frac{\partial (A_1)(Y_i)}{\partial Y_j} (A_0)^{-1} + [(A_0)^T]^{-1} (A_1)^T(Y_i) \frac{\partial^2 (A_1)(Y_i)}{\partial Y_j \partial Y_z} (A_0)^{-1} \quad (3.62) \end{aligned}$$

Portanto, é necessário determinar as segundas derivadas do gradiente de deformação. Utilizando as expressões de (3.61) determina-se que:

$$\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial Y_j^k \partial \aleph} = 0, \text{ com } i, j = 1, 2 \quad (3.63)$$

onde  $\aleph = (Y_1^k, Y_2^k, \theta^k)$ . Os termos não nulos são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial \theta^k \partial \theta^z} = Y_{1,\xi\theta\theta} &= h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_k(\xi) [\phi_{l,\xi}(\xi)\theta^l] + \\ & - h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_k(\xi) \phi_{z,\xi}(\xi) - h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_{k,\xi}(\xi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 A_{12}}{\partial \theta^k \partial \theta^z} = Y_{1,\eta\theta\theta} = -h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_k(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_k(\xi) \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial \theta^k \partial \theta^z} = Y_{2,\xi\theta\theta} &= -h_0 \frac{\eta}{2} \cos[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_k(\xi) [\phi_{l,\xi}(\xi)\theta^l] + \\ & - h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_k(\xi) \phi_{z,\xi}(\xi) - h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_{k,\xi}(\xi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 A_{22}}{\partial \theta^k \partial \theta^z} = Y_{1,\eta\theta\theta} = -h_0 \frac{\eta}{2} \text{sen}[\phi_l(\xi)\theta^l] \phi_z(\xi) \phi_k(\xi)$$

Pode-se então determinar a primeira e segunda derivada da energia interna e consequentemente o vetor de forças internas, sabendo-se que, pela equação (3.27), tem-se:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial Y_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial Y_j \partial Y_z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial Y_j \partial Y_z} \quad (3.65)$$

Finalizando assim a formulação numérica adotada neste trabalho. É de grande importância comentar que a presente técnica pode ser aplicada para qualquer medida de deformação baseada no alongamento de Cauchy-Green.

# Técnicas de impacto/contato entre estruturas planas contra anteparos rígido

---

# Capítulo 4

## 4.1 Considerações iniciais

Devido à grande diversidade de técnicas adotadas para resolver problemas dinâmicos de impacto entre estruturas e estrutura/anteparo rígido, este capítulo abordará os mais conhecidos e utilizados métodos de resolução.

Será apresentado o método das penalidades e o método dos multiplicadores de Lagrange com suas formulações e imposições feitas para restrições prescritas. Após será apresentado o método desenvolvido neste trabalho, ou seja, um algoritmo de retorno do ponto impactante da estrutura, utilizando o controle de posições, para o segmento alvo rígido de geometria qualquer. Além disso, desenvolveu-se um algoritmo geométrico de identificação da ocorrência do impacto.

O algoritmo de retorno levará em conta a existência de atrito na superfície de contato do anteparo por meio de uma interpretação geométrica do modelo de atrito de Coulomb, definindo um coeficiente de retorno no intervalo delimitado (atrito nulo e atrito total) na superfície da estrutura alvo.

Um exemplo unidirecional será resolvido analiticamente para demonstrar a equivalência entre a técnica proposta e a técnica que utiliza o método dos multiplicadores de Lagrange e das penalidades.

## 4.2 Método das Penalidades

Sendo considerado o precursor de outros métodos, como o método dos multiplicadores de Lagrange, o método das penalidades é constituído pela troca da função objetivo  $F(x)$  do problema original por uma nova função onde estão inclusos os vínculos (restrições)  $c_i$ , para quando esta for extremizada de um modo sem vínculos, fornecer a solução para o problema vinculado. Esta nova função é denominada de função penalidade  $Q$  (equação (4.1)), que tem um termo adicional, parâmetro de penalidade  $\kappa$  para cada restrição, sendo este positivo quando a restrição é excedida e igual à zero de modo contrário.

$$Q = F(x) + \sum \kappa (c_i)^z \quad \text{com } z \in \mathfrak{R} \quad (4.1)$$

Ou seja, quando as restrições forem excedidas a nova função objetivo tende a diminuir em virtude das penalidades, levando a busca da solução girar em torno da região admissível e, conseqüentemente, aproximando-se dela. As restrições podem ser dadas por equações de vínculo ou por inequações de vínculo representadas por dois conjuntos de índices finitos  $\iota$  e  $\tau$  respectivamente, de forma que a equação (4.1), para  $z = 1$ , torna-se:

$$Q(x, \mu) = F(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i \in \iota} |c_i(x)| + \frac{1}{\mu} \sum_{i \in \tau} [c_i(x)]^- \quad (4.2)$$

Sendo agora o parâmetro de penalidade denotado por um escalar positivo  $\mu$ , e com  $[x]^-$  referindo-se ao  $\max(0, -x)$ . Esta função é chamada de função penalidade exata porque para uma escala de valores de parâmetros de penalidade, a solução de problemas de programação não-linear é uma minimização local de  $Q$ , ou seja, para uma escolha certa do parâmetro  $\mu$ , a solução exata é obtida por meio

de um campo único de minimização. No entanto, esta não é diferenciável e sua minimização requer uma seqüência de soluções de subproblemas.

Vários métodos são propostos para a função penalidade, sendo um destes a função penalidade quadrática (método de penalidade externa). Esta tem os seus termos de penalidade representados pelo quadrado dos vínculos e suas restrições são consideradas inactíveis, de modo que o caso geral fica expresso a partir da equação (4.2) por:

$$Q(x, \mu) = F(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \iota} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \tau} ([c_i(x)]^-)^2 \quad (4.3)$$

Para dirigir  $\mu$  para zero penaliza-se a violação da restrição por meio de incrementos. Portanto considera-se uma seqüência de valores  $\{\mu_w\}$  com  $\mu_w \rightarrow 0$  quando  $w \rightarrow \infty$  e minimiza-se a aproximação de  $Q(x, \mu_w)$  para cada  $w$ .

Minimizando a função penalidade quadrática (equação (4.3)) para  $i \in \iota$  obtém-se:

$$\nabla_x Q(x, \mu_w) = \nabla F(x) + \sum_{i \in \iota} \frac{c_i(x)}{\mu_w} \nabla c_i(x) \quad (4.4)$$

Assumindo-se  $H(x)$  como sendo a matriz dos gradientes das restrições, tem-se:

$$H(x)^T = [\nabla c_i(x)]_{i \in \iota} \quad (4.5)$$

Consequentemente a matriz Hessiana é dada pela equação abaixo.

$$\nabla_{xx}^2 Q(x, \mu_w) = \nabla^2 F(x) + \sum_{i \in \iota} \frac{c_i(x)}{\mu_w} \nabla^2 c_i(x) + \frac{1}{\mu_w} H(x)^T H(x) \quad (4.6)$$

Por ser um problema irrestrito pode-se aplicar o método de Newton-Raphson para resolução numérica, obtendo-se o seguinte sistema:

$$\nabla_{xx}^2 Q(x, \mu) p = -\nabla_x Q(x, \mu) \quad (4.7)$$

No entanto, devido a problemas de mau condicionamento da matriz Hessiana quanto ao seu número de condições, já que este se aproxima do finito quando o parâmetro de penalidade tende ao infinito, pode-se usar uma formulação alternativa sugerida por NOCEDAL & WRIGHT (1999), introduzindo um vetor “dummy”  $\zeta$  e usando a equação (4.6) chega-se a uma expressão equivalente a (4.7), vista abaixo.

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 F(x) + \sum_{i \in \tau} \frac{c_i(x)}{\mu_w} \nabla^2 c_i(x) & H(x)^T \\ H(x) & -\mu_w I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\nabla_x Q(x, \mu) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Outro método de penalização é chamado de método da penalidade interna, onde para  $i \in \tau$ , a função penalidade tem a seguinte forma:

$$Q(x, \mu) = F(x) + \mu \sum_{i \in \tau} \frac{1}{c_i(x)} \quad (4.9)$$

Um dos métodos de penalidades interna é conhecido como o método da barreira (obstáculo), introduzido por FRISCH (1955) e CARROL (1961), onde se evita que os pontos factíveis tornem-se infactíveis por meio de algum tipo de função que penaliza os pontos que se aproximam do limite de factibilidade.

A mais importante função barreira é a função barreira logarítmica, que é definida para o grupo de restrições  $c_i(x) \geq 0$  com  $i \in \tau$ . Esta tem a função objetivo e barreira combinada e dada por:

$$Q(x, \mu) = F(x) + \mu \sum_{i \in \tau} \log c_i(x) \quad (4.10)$$

onde  $\log(\cdot)$  denota o logaritmo natural e  $\mu$  é referido ao parâmetro de barreira.



Analogamente ao procedimento feito para a função penalidade quadrática, pode-se minimizar  $Q(x, \mu)$  para se obter a solução aproximada quando  $\mu \rightarrow 0$ , utilizando-se o método de Newton-Raphson, sendo o seu gradiente e Hessiana dados por:

$$\nabla_x Q(x, \mu) = \nabla F(x) + \sum_{i \in \tau} \frac{\mu}{c_i(x)} \nabla c_i(x) \quad (4.11)$$

$$\nabla_{xx}^2 Q(x, \mu) = \nabla^2 F(x) - \sum_{i \in \tau} \frac{\mu}{c_i(x)} \nabla^2 c_i(x) + \sum_{i \in \tau} \frac{\mu}{c_i^2(x)} \nabla c_i(x) \nabla c_i(x)^T \quad (4.12)$$

Porém devido ao mau condicionamento da Hessiana quando seu parâmetro  $\mu$  tende a zero tornaram inviáveis as investigações dos métodos de barreira por muitos anos. Considerados os mais antigos métodos de pontos interiores só voltaram a ter destaque com o método de KARMARKAR (1984) para programação linear.

Devido ao problema relatado acima outras formulações melhoradas foram propostas. Uma delas é o método da Lagrangiana aumentada desenvolvida por HESTENES (1969) e POWELL (1969), combinando o método da Lagrangiana dual e o método das penalidades externa. Outra formulação conhecida como o método da barreira modificada foi introduzida por POLYAK (1992) onde se inseriu os multiplicadores de Lagrange e uma relaxação nas restrições em relação ao método da barreira clássico, permitindo-se que o método operasse com pontos factíveis.

Por fim, para exemplificar o método apresentado, suponha-se um conjunto formado por um corpo de massa  $m$  com uma mola de rigidez  $k$  sujeito a aceleração da gravidade  $g^*$ , visto na Figura 4.2, onde existe uma restrição. A energia potencial total fica então escrita, utilizando-se a função penalidade quadrática como:

$$\Pi(u_d) = \frac{1}{2}k u_d^2 - m g^* u_d + \frac{1}{2\mu}c^2(u_d) \quad (4.13)$$

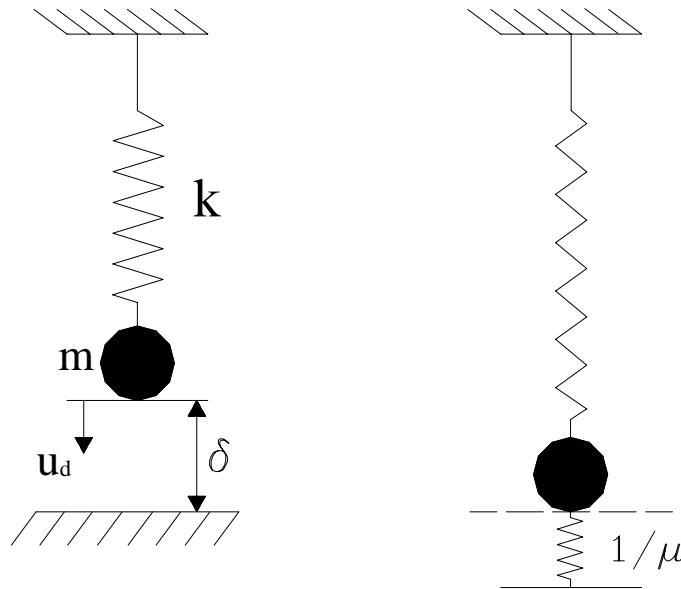


Figura 4.1: Esquema massa suportada por mola com restrição de deslocamento

Como pode ser visto na Figura 4.1 o inverso do parâmetro de penalidade pode ser interpretado como uma rigidez de mola na interface de contato entre o corpo de massa  $m$  e o anteparo rígido.

Minimizando a energia potencial total, se determina a condição de equilíbrio.

$$k u_d - m g^* - \frac{1}{\mu}c(u_d) = 0 \quad (4.14)$$

Aplicando-se a restrição  $c(u_d) = \delta - u_d$  na equação (4.14), para quando  $u_d \geq \delta$ , obtém-se:

$$u_d = \frac{m g^* \mu + \delta}{k \mu + 1} \quad (4.15)$$

Consequentemente o valor da equação restrição é:

$$c(u_d) = \frac{\mu(k \delta - m g^*)}{k \mu + 1} \quad (4.16)$$

Logo, se  $m g^* \geq k \delta$  o caso é de contato, ou seja, ocorreu a violação da CPN, que é equivalente a uma compressão da mola na Figura 4.1. Nota-se que a penetração depende do parâmetro de penalidade.

A força de contato (reação) é dada por:

$$F_c = -\frac{1}{\mu} c(u) = -\frac{(k \delta - m g^*)}{k \mu + 1} \quad (4.17)$$

onde o sinal negativo é adotado por convenção para que a força de contato seja positiva.

### 4.3 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Sendo uma função objetivo  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cujo seus argumentos são definidos por variáveis de controle (controláveis), na qual se tem vínculos (restrições) que no caso de impacto são devido-as leis físicas da natureza. Logo de uma forma mais matemática generalizada tem-se:

Função objetivo:  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Variáveis de controle:  $x_1, x_2, \dots, x_n$

Restrição:  $q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  com  $j = 1, 2, \dots, l$  para  $l < n$

Devido ao método de Lagrange é possível obter uma solução explícita em problemas indesejáveis, adicionando-se uma incógnita  $\lambda$  (multiplicador de Lagrange) que é introduzida para determinar os valores ótimos para as variáveis de controle, tratando o problema como se fosse desvinculado, tornando-o:

$$L_a = F(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j q_j \quad (4.18)$$

onde  $L_a$  é denominada a Lagrangiana, da qual podemos determinar os seus pontos estacionários para posterior exame dos mesmos no cumprimento da função  $F$ , garantindo que  $q = 0$  pela escolha adequada de  $\lambda$  e dos pontos estacionários. Por definição um ponto estacionário de uma função é determinado quando o seu diferencial total é nulo.

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (4.19)$$

Com os  $dx_i$  independentes entre si, a expressão (4.19) fica:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (4.20)$$

Diferenciando-se a Lagrangiana em relação aos termos  $x_i$ , tem-se:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_j \lambda_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.21)$$

E com relação à  $\lambda_j$ ,

$$\frac{\partial L_a}{\partial \lambda_j} = q_j = 0 \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, l \quad (4.22)$$

Consequentemente o número de equações algébricas será de  $(n + l)$ , o mesmo que o número de incógnitas  $x$  e  $\lambda$ , que em muitas vezes resulta em um sistema de difícil resolução. Este problema pode ser suprimido por um método qualquer de iteração, onde se faz um ajuste no valor do multiplicador de Lagrange pré-estabelecido extremizando-se a Lagrangiana, repetindo o processo até que a restrição seja cumprida otimizando assim as variáveis  $x_i$ .

Portanto para um problema dinâmico com impacto, temos a função objetivo representada pelo funcional de energia potencial total enquanto os vínculos são denominados pelas restrições na posição dos nós na região de contato (estrutura/obstáculo) sendo ambas definidas por variáveis de controle que no caso são as posições dos nós da estrutura. Convenientemente os multiplicadores de Lagrange representariam à força de contato atuante na superfície comum entre corpos.

Para uma situação genérica, segundo GRECO (2004) os nós submetidos a contato/impacto estão associados a uma matriz de restrição de contato  $R_C$  para representar a interferência no movimento que o impacto em uma direção pode ocasionar nas outras, conseqüentemente o equilíbrio dinâmico numa região de contato  $\Xi$ , com o vetor posição  $Y_s \in \Xi$ , num certo instante  $s$  é dado pela equação (4.18).

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} \right|_s - R_C \lambda_s = 0 \quad (4.23)$$

Pela substituição da equação (3.53) na (4.23) e utilizando a expansão de Taylor em primeira ordem (método de Newton-Raphson) para um determinado instante  $s+1$  chega-se a seguinte forma matricial do algoritmo iterativo:

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C_a}{\beta \Delta t} + \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right)_{s+1} \\ R_C \end{array} \right] - R_C \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \lambda_{s+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{s+1} - \left( \frac{\partial U_e}{\partial X} + M \ddot{Y}_{s+1} + C_a \dot{Y}_{s+1} \right) \\ X^E - R_C X_{s+1} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Onde  $X^E$  é a posição do elemento alvo. Por fim as forças de contato são calculadas com a equação (4.25).

$$F_{s+1}^{CONT} = F_{s+1} - \left( \frac{\partial U_e}{\partial X} \right)_{s+1} + M \ddot{Y}_{s+1} + C_a \dot{Y}_{s+1} \quad (4.25)$$

#### 4.4 Controle de posições

Como o próprio nome sugere o modelo de identificação e solução de impacto apresentado neste trabalho, se dá pela interferência direta nas posições dos nós da estrutura móvel (projétil) referentes ao impacto da mesma contra um anteparo rígido (estrutura alvo), sendo ambas analisadas num plano bidimensional. Esta técnica teve inspiração na formulação desenvolvida por GRECO (2004), onde se considera o equilíbrio dinâmico a uma condição de penetração nula (CPN) entre corpos impactados. Naquele trabalho, ampliou-se o sistema de equações introduzindo o cálculo do multiplicador de Lagrange que se igualaria, no limite, as forças internas desenvolvidas no corpo impactante na região do contato (equação (4.24)). Aqui, como será visto nos desenvolvimentos, não se aplica o multiplicador de Lagrange, mas se considera a força de contato como aquela calculada a partir da energia de deformação no corpo.

Considerando-se um problema unidirecional de impacto como o apresentado na Figura 4.2, que mostra uma estrutura unidimensional com sua configuração num certo tempo  $t$  a uma distância horizontal  $\delta$  do anteparo rígido e, após um intervalo de tempo  $\Delta t$  em uma outra configuração  $(t + \Delta t)$  representando a posição da estrutura violando a CPN. Logo se pode definir que o impacto só irá acontecer quando  $X - \delta \geq 0$ . Consequentemente, a interferência na posição do nó impactante se dará pela imposição nesta, eliminando-se  $\Delta X$ . Isto provocará uma alteração no equilíbrio dinâmico do corpo, já que a mudança de configuração modifica o vetor de forças internas, gerando o desequilíbrio do vetor de resíduos, forçando assim a busca de uma nova configuração equilibrada, com o uso do integrador temporal de Newmark.

Logo, a anulação de  $\Delta X$  se faz necessária para reconstituir a condição de penetração nula, ou seja, retornar o nó impactante num ponto sobre a superfície da estrutura alvo (anteparo rígido), chamado de ponto de retorno, podendo este ser o próprio ponto impactado.

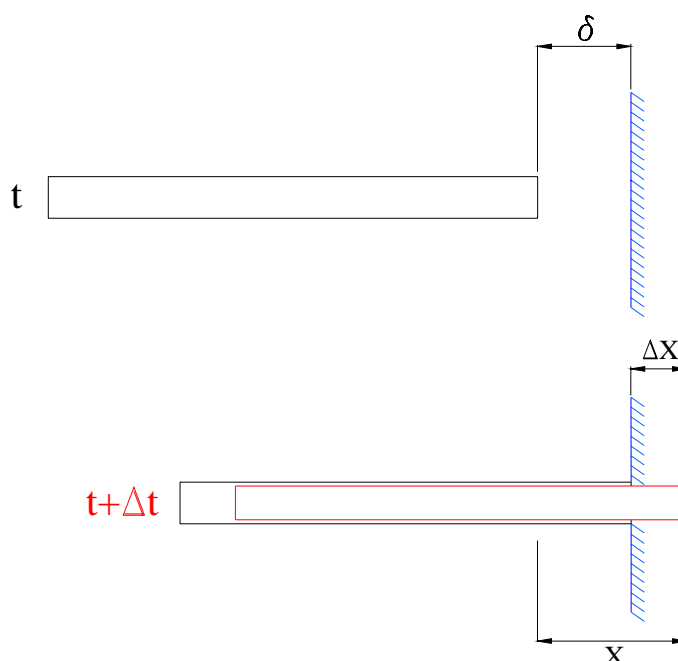


Figura 4.2: Configuração de estrutura no impacto contra anteparo rígido

#### 4.4.1 Determinação da ocorrência do impacto

Muitas técnicas são propostas para a identificação do impacto, uma delas foi desenvolvida em GRECO (2004), que se baseou nas equações integrais de um problema potencial relacionado ao contorno da estrutura alvo. Para isto, teve-se que identificar o tipo de domínio de integração e após fazer a discretização do corpo alvo em elementos finitos lineares. A identificação da ocorrência do impacto foi feita por meio do parâmetro livre, determinado pelo potencial e fluxo, variáveis principais envolvidas no problema potencial usual. Tal trabalho serviu como uma fonte de pesquisa sobre identificação do impacto.

Para desenvolver a técnica proposta neste trabalho, alguns estudos para a identificação do impacto foram feitos. Em um destes procedeu-se da determinação

do jacobiano de um elemento triangular, como visto na Figura 4.3, sendo este composto por dez nós, simulando-se uma aproximação cúbica para o anteparo rígido (nós 2, 3, 4 e 5), onde as posições dos nós 6, 7, 8, 9 e 10 são determinadas geometricamente.

O jacobiano é obtido pelas derivadas primeiras das funções de formas do elemento triangular em relação as variáveis adimensionais  $\xi_2$  e  $\xi_3$ , aplicando-as no nó da estrutura (ponto 1), ou seja,  $\xi_1 = 1$ . Logo, a identificação do impacto se daria quando, o produto dos valores do jacobiano, calculados em uma configuração passada e atual, fosse negativo. No entanto, percebeu-se que isto ocorre se somente se, um ponto passa de um semi-plano para outro, determinados pela reta que contém os pontos 2 e 5, da Figura 4.3.

Consequentemente, este procedimento fica impraticável para anteparo rígido curvo, pelo fato de não identificação do impacto em pontos que estejam na região determinada pela curva do anteparo e a reta supracitada.

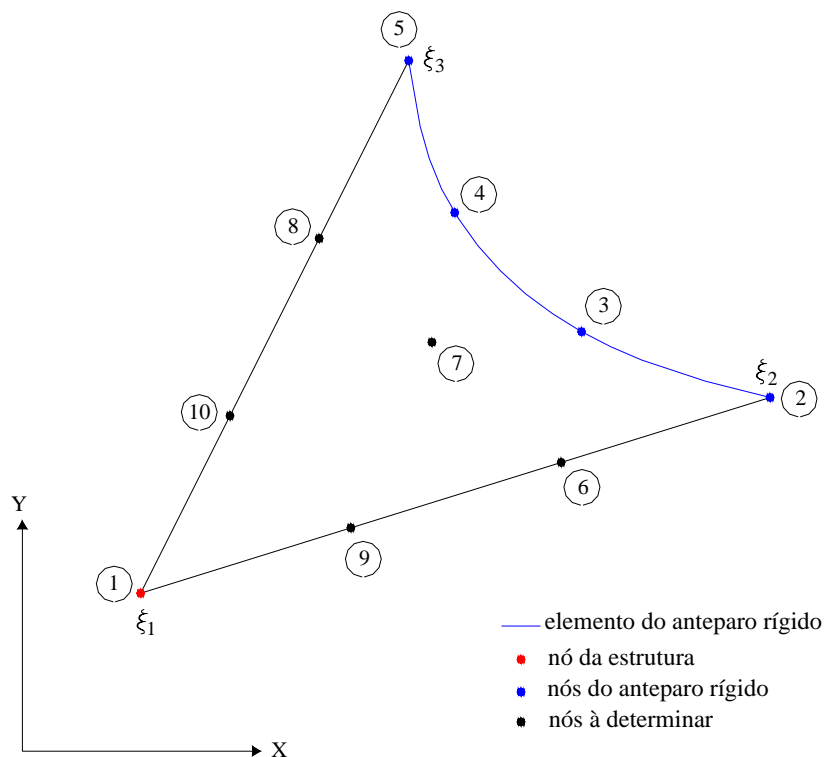


Figura 4.3: Elemento triangular com 10 nós



Finalmente, após muitas dificuldades, neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo simples de identificação de impacto, porém eficiente quando aplicado aos problemas aqui estudados. Neste utilizam-se segmentos auxiliares lineares, parametrizados pela variável adimensional  $\xi$  que varia entre -1 e 1, para determinar uma região que facilitará a identificação do ponto impactante. Conforme mostra a Figura 4.4 para três possíveis trajetórias de penetração, um ponto dentro desta região será denotado como impactante quando:

$$(da_i) (dr_i) < 0 \quad (4.26)$$

A identificação do segmento auxiliar a ser usado é um dos problemas da formulação. Este se faz na primeira iteração de tempo, após o primeiro movimento, adotando-se aquele que não seja solução para a inequação (4.26), e dentro os quais, se houver, o que esteja contido no intervalo prescrito para  $\xi$  do segmento auxiliar. Este procedimento só é adotado para nós cujas trajetórias cruzem com um ponto qualquer do anteparo rígido.

Um problema que pode surgir na formulação proposta, ocorre no encontro entre o elemento do anteparo rígido e o segmento auxiliar, como visto na Figura 4.5, onde um nó da estrutura móvel cruza tanto o anteparo rígido quanto o segmento auxiliar. No entanto, pelo fato de se utilizar o algoritmo de integração temporal de Newmark modificado, este dificilmente ocorrerá, devido à adoção de passos de tempo  $\Delta t$  pequenos. Mas no algoritmo desenvolvido, para solucionar o mesmo, guardou-se o valor calculado entre as diferenças de posições, do nó da estrutura e o nó do segmento auxiliar, da iteração anterior  $j$  para comparar com a atual  $j + 1$ , determinando-se que o impacto ocorre quando:

$$(da_i^j) (da_i^{j+1}) < 0 \quad (4.27)$$

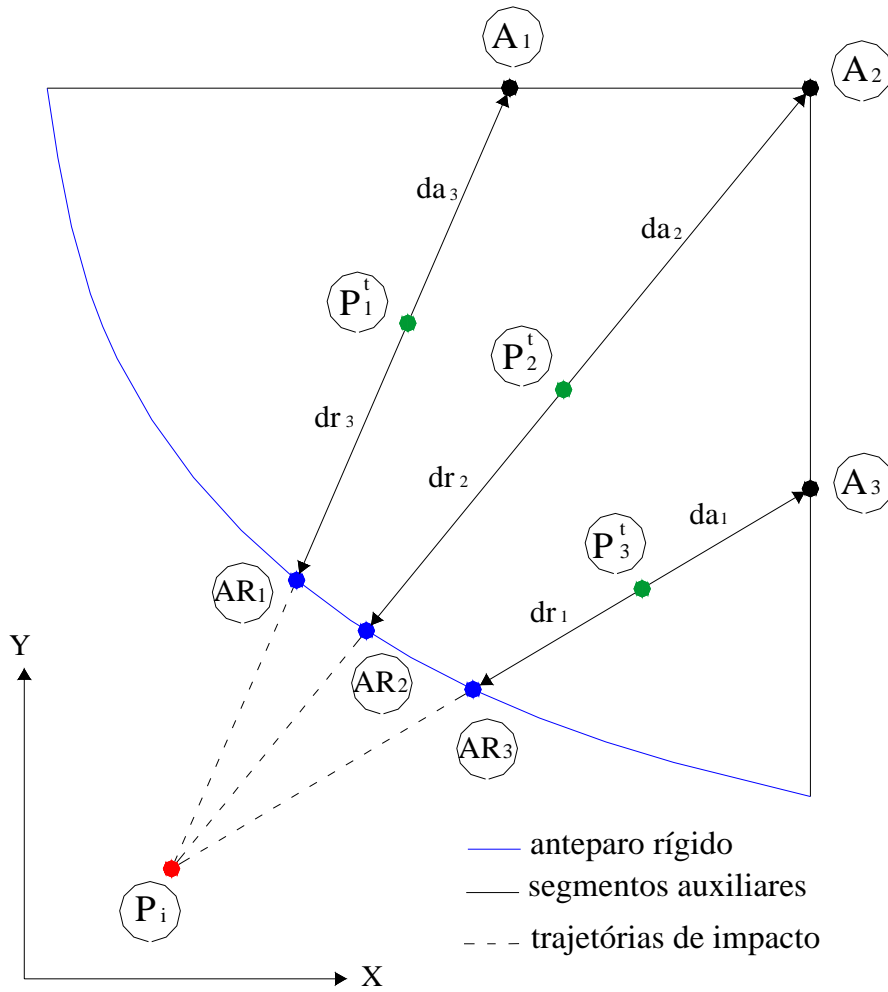


Figura 4.4: Modelo de identificação do impacto com três trajetórias distintas

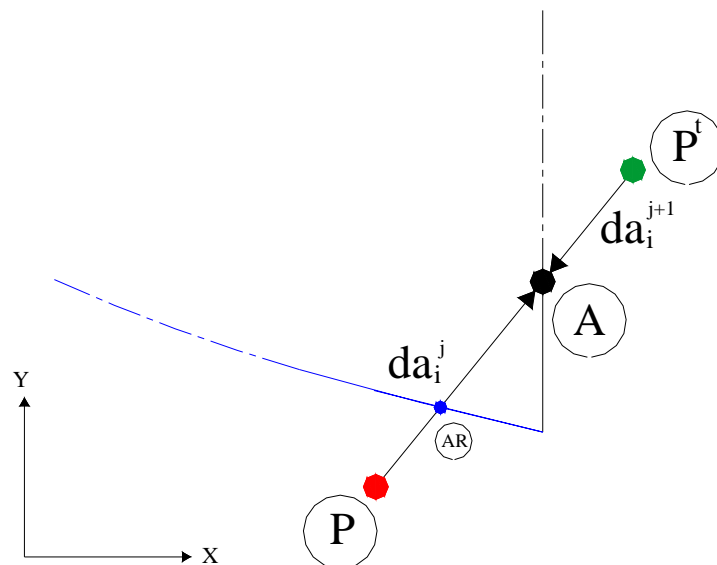


Figura 4.5: Possível problema na identificação do impacto

Devido as atuais dificuldades na identificação do segmento auxiliar a ser usado na determinação da ocorrência do impacto, uma proposta simplificada foi desenvolvida, onde se denota os segmentos auxiliares como elementos de comparação. Diferentemente do caso anterior não há necessidade de identificar o segmento (auxiliar-comparação), mas este é fornecido pelo usuário.

Logo, o procedimento se torna mais direto, adotando-se vetores distâncias  $(dx_1; dx_2)$  e  $(dy_1; dy_2)$  paralelos aos eixos coordenados, visto na Figura 4.6.

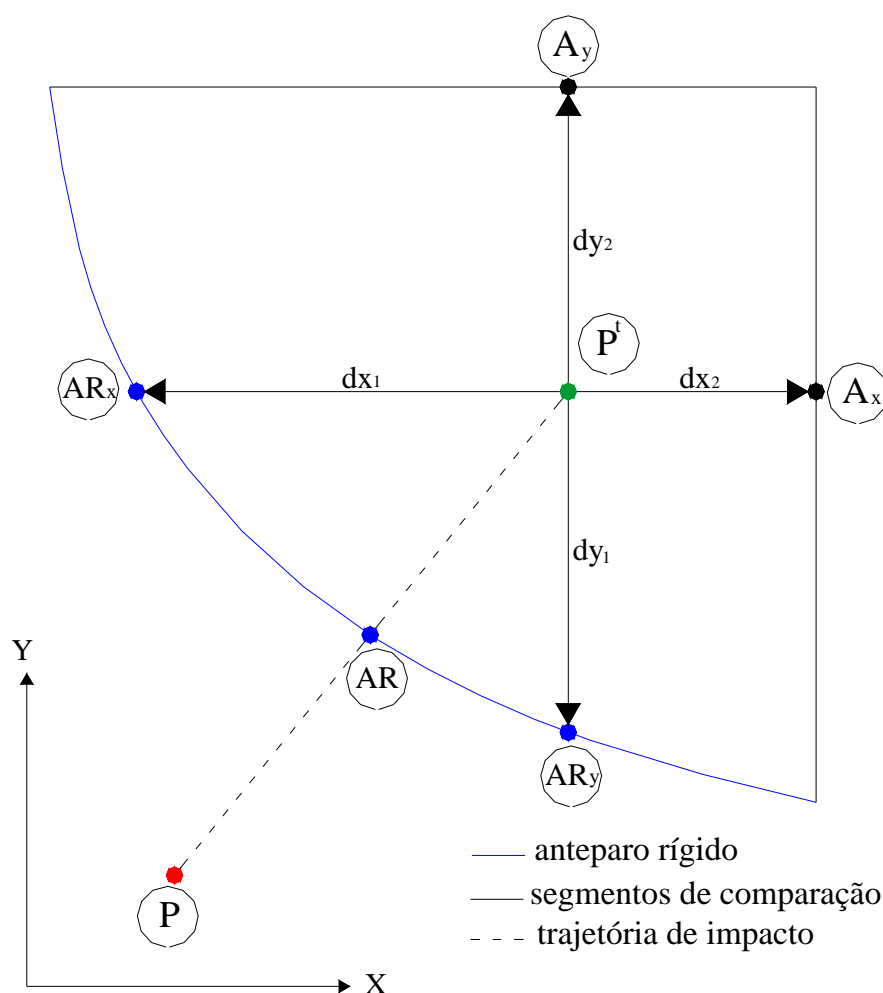


Figura 4.6: Modelo do procedimento alternativo para identificação do impacto

O par de vetor distância a ser utilizado depende do segmento de comparação que é utilizado para cada elemento da estrutura. Sendo assim, o impacto é dito ocorrido quando:

$$dx_1 dx_2 < 0 \quad (4.28)$$

ou:

$$dy_1 dy_2 < 0 \quad (4.29)$$

Apesar de ter a desvantagem de fornecer todos os segmentos de comparação para cada elemento da estrutura, esta abordagem tem a vantagem de tornar o tempo de processamento menor.

#### 4.4.2 Determinação da posição de retorno

Para se determinar num plano bidimensional o ponto de retorno do nó considerado impactante, desenvolveu-se um algoritmo de retorno com a possibilidade da existência de atrito entre estrutura e superfície de contato da estrutura alvo, baseando-se em uma interpretação geométrica do modelo simplificado de atrito de Coulomb. Para isto, se estabeleceu uma proporção geométrica entre forças normais e forças tangenciais que ocorrem na região de contato, sendo as forças tangenciais originadas pelo atrito de contato.

Logo o ponto supracitado depende para sua determinação de um coeficiente de retorno  $R$ , estabelecendo-se assim um intervalo de posições possíveis de retorno entre a posição sem atrito e a com atrito total, sendo este intervalo representado pela variação do coeficiente de retorno entre 0 e 1.

Portanto, como exemplo ilustrativo, um elemento de aproximação cúbica da estrutura alvo, lembrando que a formulação do método dos elementos finitos posicional trabalha com uma aproximação qualquer para o elemento, é mostrado na Figura 4.7, onde todos os dados requisitados para o desenvolvimento do algoritmo de retorno são fornecidos.

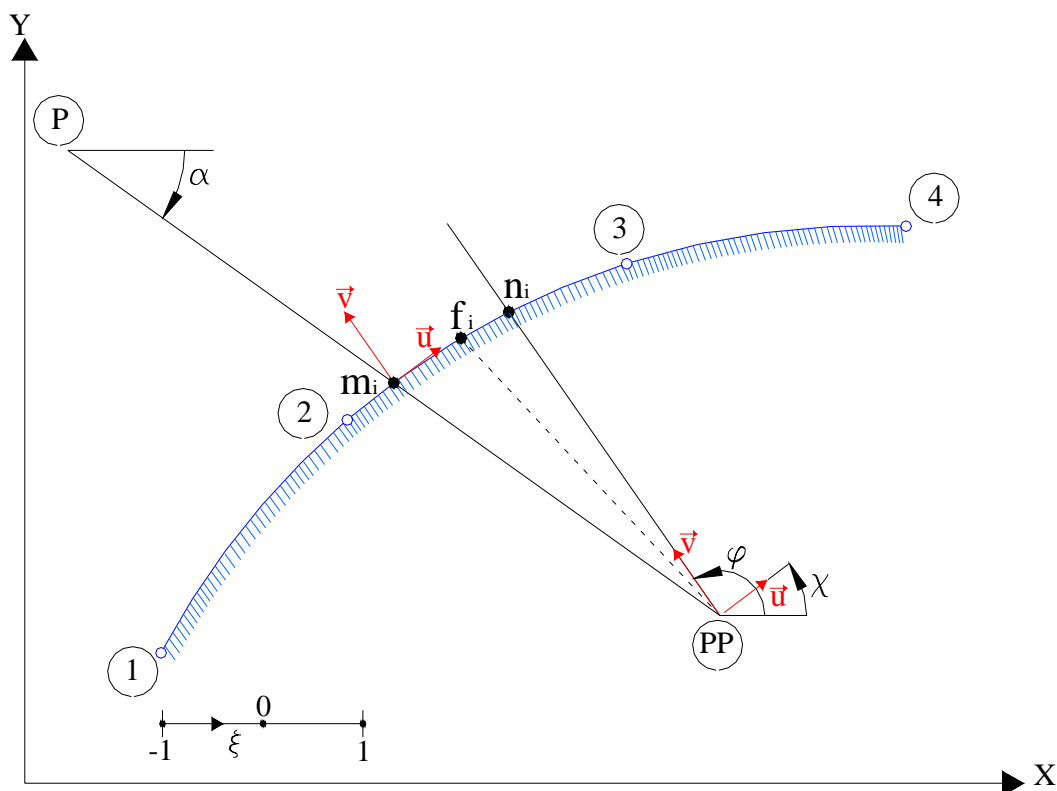


Figura 4.7: Dados pertinentes à análise do ponto de retorno

Nesta figura os pontos P e PP representam os nós da estrutura móvel numa configuração anterior e numa configuração posterior ao impacto, respectivamente. Os pontos 1, 2, 3 e 4 são os nós da linha do anteparo rígido, e por fim os pontos  $m_i$ ,  $n_i$  e  $f_i$  representam o ponto de impacto, o ponto de retorno para uma superfície considerada sem atrito e o ponto de retorno dado pelo valor do coeficiente de retorno, respectivamente.

A partir das funções de forma dadas pela equação (3.22), que são parametrizadas pela variável adimensional  $\xi$ , variando entre -1 e 1, pode-se determinar o mapeamento dos pontos do anteparo rígido segundo a equação (3.24) por:

$$X = \phi_1 X^1 + \phi_2 X^2 + \phi_3 X^3 + \phi_4 X^4 \quad (4.30)$$

$$Y = \phi_1 Y^1 + \phi_2 Y^2 + \phi_3 Y^3 + \phi_4 Y^4 \quad (4.31)$$

Além de se conhecer a discretização do elemento alvo, a trajetória (aproximada por uma reta) do ponto impactante é também conhecida, já que estas correspondem à posição do nó da estrutura na configuração passada e atual representadas na Figura 4.7 pelos pontos P e PP respectivamente.

Consequentemente, a determinação do ponto de impacto  $m_i$  é obtida facilmente a partir das equações que regem a trajetória do nó do elemento móvel e a superfície do elemento rígido.

A equação da reta é dada por:

$$y = ax + b^l \quad (4.32)$$

Onde, os coeficientes angular  $a$  e linear  $b^l$  da mesma são:

$$a = \frac{Y_{PP} - Y_P}{X_{PP} - X_P} = \tan(\alpha) \quad (4.33)$$

$$b^l = Y_P - aX_P \quad (4.34)$$

Deve ser observado que os sentidos adotados para os ângulos na Figura 4.7 denotam o sinal que estes levam, ou seja, para o sentido horário o sinal é negativo, de modo contrário é positivo.

Substituindo as equações (4.30) e (4.31) na (4.32), temos:

$$\phi_1 Y^1 + \phi_2 Y^2 + \phi_3 Y^3 + \phi_4 Y^4 = a(\phi_1 X^1 + \phi_2 X^2 + \phi_3 X^3 + \phi_4 X^4) + b^l \quad (4.35)$$

Trabalhando a equação (4.35) chega-se na seguinte equação não linear para se determinar o valor de  $\xi$  que satisfaz o cruzamento da trajetória reta com o anteparo curvo:

$$g_m = 0 = \phi_1 A_m + \phi_2 B_m + \phi_3 C_m + \phi_4 D_m - b^l \quad (4.36)$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_m &= Y^1 - aX^1 \\
B_m &= Y^2 - aX^2 \\
C_m &= Y^3 - aX^3 \\
D_m &= Y^4 - aX^4
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Expandindo-se em  $\xi$  a equação (4.36) por uma série de Taylor até primeira ordem e aplicando-se o Método de Newton-Raphson, o mesmo procedimento adotado para determinação da configuração de equilíbrio, determina-se a correção para a variável adimensional  $\xi$  (equação (4.38)) dando por encerrado o processo ao se atingir uma determinada precisão definida pela norma euclidiana desta correção ou resíduo. Desta forma tem-se:

$$\Delta\xi = -(\nabla g_m)^{-1} g_m^0 = -\frac{\phi_1 A_m + \phi_2 B_m + \phi_3 C_m + \phi_4 D_m - b^l}{\phi_1' A_m + \phi_2' B_m + \phi_3' C_m + \phi_4' D_m} \tag{4.38}$$

Conseqüentemente a determinação de  $\xi_m$  (referida ao ponto  $m_i$ ), e com a utilização das equações (4.30) e (4.31) determinam-se as coordenadas da posição do ponto.

$$X_m = \phi_1^m X^1 + \phi_2^m X^2 + \phi_3^m X^3 + \phi_4^m X^4 \tag{4.39}$$

$$Y_m = \phi_1^m Y^1 + \phi_2^m Y^2 + \phi_3^m Y^3 + \phi_4^m Y^4 \tag{4.40}$$

De posse do ponto de impacto, podemos determinar as direções dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , tangente e normal à superfície do elemento alvo, respectivamente. Logo o coeficiente angular da reta tangente (direção de  $\vec{u}$ ) ao elemento alvo no ponto  $m_i$  é obtido com a equação (4.41), onde os valores das primeiras derivadas das funções de forma dadas na equação (3.23) devem ser determinados para  $\xi = \xi_m$ .

$$a_{RT} = \tan(\chi) = \frac{\partial Y}{\partial X} \Big|_{\xi_m} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \xi} \Big|_{\xi_m}}{\frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{\xi_m}} = \frac{\phi_1' Y^1 + \phi_2' Y^2 + \phi_3' Y^3 + \phi_4' Y^4}{\phi_1' X^1 + \phi_2' X^2 + \phi_3' X^3 + \phi_4' X^4} \tag{4.41}$$

Como o coeficiente angular de uma reta ortogonal a outra é o inverso do oposto desta, temos o coeficiente angular da reta normal (direção de  $\vec{v}$ ) a superfície do elemento rígido, ou seja:

$$a_{RN} = \tan(\varphi) = -\frac{\phi'_1 X^1 + \phi'_2 X^2 + \phi'_3 X^3 + \phi'_4 X^4}{\phi'_1 Y^1 + \phi'_2 Y^2 + \phi'_3 Y^3 + \phi'_4 Y^4} \quad (4.42)$$

Determinado este, pode-se determinar o coeficiente linear da reta  $\overrightarrow{PPn}$ , como:

$$b_{RN}^l = a_{RN} X_{PP} - Y_{PP} \quad (4.43)$$

Após determinados estes dois coeficientes (linear e angular) procede-se a determinação das coordenadas do ponto de cruzamento  $n_i$  entre a reta de retorno sem atrito com a mesma direção do vetor  $\vec{v}$ , e a superfície curva do anteparo rígido. Isto é feito determinando-se o novo valor da variável adimensional  $\xi_n$  obtida pelo processo de iteração de Newton-Raphson.

De posse do intervalo de posições sobre a superfície do corpo rígido indicando a variação de atrito nulo (ponto  $n_i$ ) e atrito máximo (ponto  $m_i$ ) estima-se pela variável  $R$  (coeficiente de retorno) um novo valor para  $\xi$  chamado de  $\xi_f$ , que aplicado nas funções de forma e posteriormente nas equações (4.39) e (4.40) (referidas ao ponto  $f_i$ ) determina as coordenadas do ponto de retorno  $f$  para o valor requerido de atrito.

Deve-se tomar cuidado para situações onde as equações (4.33), (4.41) e (4.42) não são válidas, sendo estas nos casos em que  $X_P = X_{PP}$ ,  $\chi = \frac{\pi}{2}$  e



$\varphi = \frac{\pi}{2}$ , onde se devem fazer pequenos ajustes nas equações para suprimir estes

eventuais casos. A Figura 4.8 apresenta estes três casos.

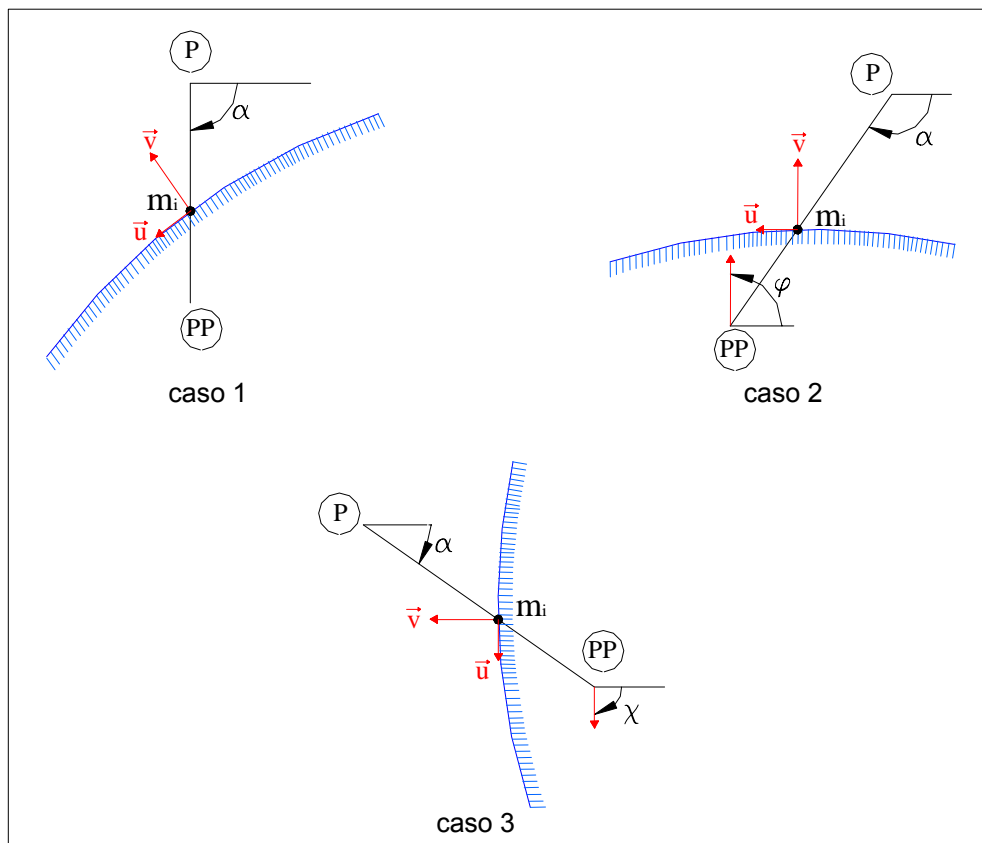


Figura 4.8: Casos especiais de determinação do ponto de retorno

O primeiro é definido quando a trajetória do elemento móvel tem abscissas constantes, neste teremos  $X_m = X_p = X_{pp}$  e as expressões (4.35) e (4.36) são substituídas por:

$$X_m = \phi_1 X^1 + \phi_2 X^2 + \phi_3 X^3 + \phi_4 X^4 \quad (4.44)$$

$$g_m = 0 = X_m = \phi_1 X^1 + \phi_2 X^2 + \phi_3 X^3 + \phi_4 X^4 \quad (4.45)$$

Definindo  $\xi_m$  e conseqüentemente pela equação (4.40) a coordenada  $Y_m$ .

No caso 2 para  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , teremos apenas a substituição da variável  $X_m$  por  $X_n$  nas

equações (4.44) e (4.45), ou seja,  $X_n = X_{pp}$  definindo posteriormente  $\xi_n$  que

fornecerá a coordenada  $Y_n$ . O terceiro caso dispensa comentários pelo motivo que o coeficiente angular da reta tangente ao ponto  $m_i$  é dispensável no cálculo da posição de retorno, sendo a equação (4.41) desconsiderada.

#### **4.5 Parâmetros de integração do algoritmo temporal de Newmark aplicado ao impacto**

O integrador temporal de Newmark apresenta uma família de soluções referentes à suas constantes  $\beta$  e  $\gamma$ , sendo estas definidas pelo comportamento adotado para a aceleração no intervalo de tempo  $\Delta t$  entre as configurações dadas nos tempos  $t$  e  $t + \Delta t$ , e está diretamente ligada a estabilidade dos métodos adotados.

A partir da Figura 4.9, que apresenta as regiões de estabilidade para as constantes de integração de Newmark, podem-se observar os diferentes métodos adotados para a solução de problemas de impacto. A formulação clássica (regra Trapezoidal) encontra-se no limite da região de estabilidade e é denotada pela intersecção da reta  $\gamma$  e a curva  $\beta$ , onde se considera uma aceleração média constante atuante no intervalo de tempo  $\Delta t$ , onde a eficiência da formulação se dá para a solução de problemas dinâmicos de estruturas convencionais. Porém em problemas onde haja impacto, principalmente com altas frequências, a técnica apresenta-se ineficiente de acordo com os trabalhos de CARPENTER et al. (1991), TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993) e SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998).

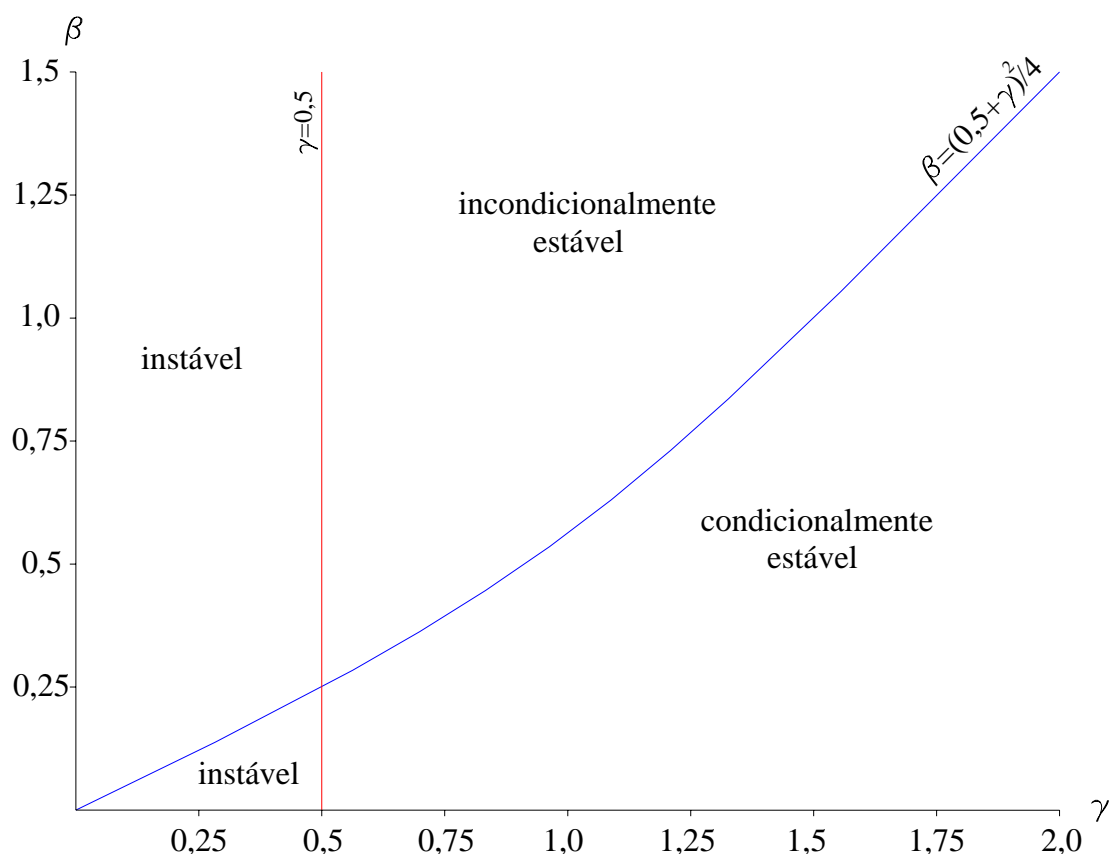


Figura 4.9: Regiões de estabilidade para as constantes de integração de Newmark

Portanto soluções alternativas para a resolução de problemas de impacto foram propostas. Uma destas foi apresentada por CHAUDHARY & BATHE (1986) modificando o parâmetro  $\beta = 0,5$ , mas permanecendo no limite da região de estabilidade sobre a reta ( $\gamma = 0,5$ ) e conseqüentemente geraram um algoritmo estável para problemas usuais. No entanto, segundo GRECO (2004) a estabilidade de um algoritmo se dá por este apresentar solução para qualquer discretização temporal, logo só a estabilidade não garante a qualidade da resposta numérica, já que tanto para aplicação da forma clássica ( $\beta = 0,25; \gamma = 0,5$ ) quanto CHAUDHARY & BATHE ( $\beta = 0,5; \gamma = 0,5$ ) para pequenos valores de intervalo de tempo  $\Delta t$  podem produzir respostas oscilatórias para o campo de forças de contato.

Outra alternativa foi proposta por HU (1997), sendo esta utilizada neste trabalho, onde os parâmetros de integração ( $\beta = 1,0; \gamma = 1,5$ ) encontram-se sobre a região limite de estabilidade sobre a curva  $\beta$ , que segundo ARGYRIS & MLEJNEK (1991) apresenta o máximo amortecimento numérico de frequências altas de vibração, causando erros numéricos nas respostas em problemas de impacto. Este algoritmo de integração modificado pode ser classificado como incondicionalmente estável, já que para qualquer discretização temporal existe sempre uma resposta. No entanto quanto menor for o valor de  $\Delta t$  aumenta-se a probabilidade de captar as frequências de vibração mais relevantes do problema obtendo assim uma resposta que converge para solução esperada, pois a formulação gera um pequeno amortecimento numérico que pode resultar em um pequeno erro na fase.

Também existem outros valores conhecidos adotados para os parâmetros de integração de Newmark como os da aceleração linear ( $\beta = 1/6; \gamma = 0,5$ ), Fox-Goodwin ( $\beta = 1/12; \gamma = 0,5$ ) e da diferença central ( $\beta = 0; \gamma = 0,5$ ) onde se pode notar que estes se encontram na região limite de estabilidade sobre a reta  $\gamma$ .

Uma explanação mais detalhada sobre a estabilidade de algoritmos de integração temporal pode ser encontrada ARGYRIS & MLEJNEK (1991).

#### 4.6 Justificativa

Para se fazer um comparativo entre o método de impacto adotado e o dos multiplicadores de Lagrange e o das penalidades resolve-se um pequeno exemplo ilustrativo unidimensional mostrado na Figura 4.10, composto por dois corpos. Aplica-se uma força externa lentamente (problema quase estático) em cada corpo. O

sistema também apresenta uma restrição linear de deslocamento, devido a um obstáculo, dada por  $\delta - X_2 \geq 0$ .

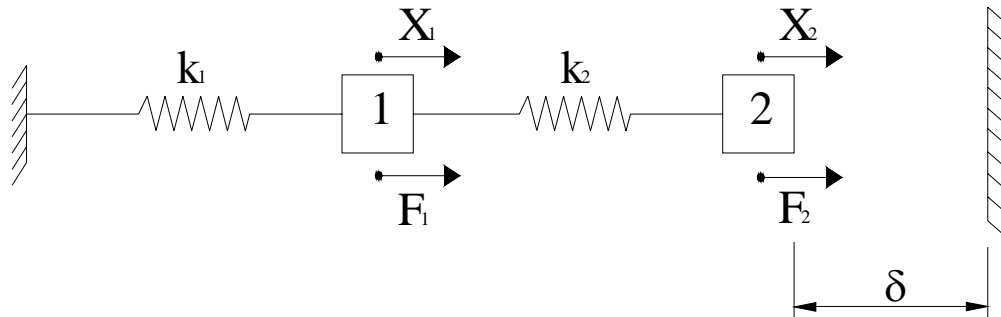


Figura 4.10: Problema unidirecional com restrição

Portanto, a equação de equilíbrio do sistema quando  $X_2 < \delta$  é simplesmente dado pelas forças produzidas pelas molas  $F_{m1}$  e  $F_{m2}$  diminuída das forças externas, mostrada abaixo na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Ao se aplicar a técnica dos multiplicadores de Lagrange quando  $X_2 > \delta$  surge mais uma equação algébrica devido à imposição da restrição  $X_2 = \delta$ . O novo sistema fica escrito como:

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k_1 + k_2)X_1 - k_2X_2 - F_1 \\ -k_2X_1 + k_2X_2 - F_2 + \lambda \\ X_2 - \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

Onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange que neste caso irá representar a força de contato necessária para satisfazer a CPN e o vetor  $g_i$  é chamado de força residual. Logo, o gradiente da força residual fica definido por:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g_3}{\partial X_1} & \frac{\partial g_3}{\partial X_2} & \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Para produzir um resultado numérico para o exemplo definem-se os valores das constantes de rigidez  $k_1 = 1$   $k_2 = 1$ , logo o gradiente e a inversa do mesmo ficam dadas por:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Para se definir a posição de equilíbrio do sistema primeiramente se procura uma solução para o caso em que  $X_2 < \delta$ . Adotando  $F_1 = 0,5$ ,  $F_2 = 0,5$ ,  $\delta = 1$  e considerando que  $X_1 = X_2 = 0$ , a equação de equilíbrio fica agora definida como:

a) Primeiro passo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Isto acarreta em:

$$X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1,5$$

Como o resultado mostra que a restrição foi excedida ( $X_2 > \delta$ ), ou seja, a condição de penetração nula foi descumprida, deve-se partir para a segunda condição de equilíbrio (equação (4.47)), onde se encontra a nova solução a partir

daquela do passo (a), ou seja, o passo (a) é a primeira tentativa para o passo (b), logo:

b) Utilizando-se a expansão de Taylor (método de Newton-Raphson) até a primeira ordem sabe-se que:

$$\begin{aligned} g &= g_0 + \Delta X^i \nabla g^{-1} = 0 \\ \Delta X^i &= -\nabla g^{-1} g_0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

sendo  $g_0$  sempre o vetor de força residual do passo anterior e  $i$  indicando o número de iterações. Para a primeira iteração  $i = 1$  determina-se a correção  $\Delta X^1$ , utilizando os mesmos valores para as variáveis adotadas no passo (a) e sendo  $\lambda = 0$ , tem-se:

$$\Delta X^1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} (2 * 1 - 1 * 1,5 - 0,5) \\ (-1 * 1 + 1 * 1,5 - 0,5 + 0) \\ (1,5 - 1) \end{array} \right\}$$

$$\Delta X^1 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -0,25 \\ -0,5 \\ 0,25 \end{array} \right\}$$

Portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1^1 = X_1^0 + \Delta X_1^1 = 1 - 0,25 = 0,75 \\ X_2^1 = X_2^0 + \Delta X_2^1 = 1,5 - 0,5 = 1 \\ \lambda^1 = \lambda^0 + \Delta \lambda^1 = 0 + 0,25 = 0,25 \end{array} \right.$$

Os valores obtidos da primeira iteração para  $X_1^1$ ,  $X_2^1$  e  $\lambda^1$  devem equilibrar o sistema, ou seja, resultar em  $g = 0$  ou num valor determinado dentro de certo erro, caso contrário calculamos as correções para a segunda iteração e assim

sucessivamente. Logo substituindo-se os valores obtidos para as variáveis na equação (4.47) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 * 0,75 - 1 * 1 - 0,5 \\ -1 * 0,75 + 1 * 1 + 0,25 - 0,5 \\ 1 - 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Portanto, como o equilíbrio foi garantido logo na primeira iteração, os valores das incógnitas do sistema são dados por:

$$X_1 = 0,75$$

$$X_2 = 1,0$$

$$\lambda = 0,25$$

Para se comprovar que o resultado satisfaz totalmente a estacionariedade do sistema retorna-se a equação (4.46) com estes valores, lembrando que  $\lambda$  está no sentido contrário a  $F_2$ , e se verifica a igualdade.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,75 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 - 0,25 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{Bmatrix}$$

Logo a igualdade foi confirmada e conseqüentemente o sistema está em equilíbrio.

Utilizando o método das penalidades externas, mais especificamente a função penalidade quadrática, tem-se, como no caso dos multiplicadores, o mesmo sistema de equilíbrio (equação (4.46)), quando  $X_2 < \delta$ . Logo a alteração se dará no equilíbrio para quando  $X_2 > \delta$ , utilizando-se para o primeiro passo de iteração os deslocamentos determinados no sistema sem violação da restrição, ou seja,  $X_1 = 1,0$  e  $X_2 = 1,5$ .



Aplicando-se a técnica da função penalidade quadrática impondo a restrição  $c(x) = \delta - X_2 = 0$ , para garantir a CPN, esta fica definida por:

$$Q(x, \mu) = \Pi + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in I} c^2(x) \quad (4.51)$$

onde  $\Pi$  é o potencial de energia total.

Com a minimização da função penalidade determina-se o vetor de força residual, dado abaixo:

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k_1 + k_2)X_1 - k_2X_2 - F_1 \\ -k_2X_1 + k_2X_2 - F_2 - \frac{1}{\mu}(\delta - X_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Percebe-se que, diferentemente do método dos multiplicadores de Lagrange o método das penalidades não gera nenhuma equação algébrica a mais. No entanto, é necessário adotar valores para o parâmetro de penalidade  $\mu$ , que dependendo da escolha podem levar a resultados improváveis, mostrando a dificuldade em escolher valores do  $\mu$  adequado para um problema qualquer.

O gradiente da força residual e sua inversa ficam determinados por:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \frac{\partial g_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial X_1} & \frac{\partial g_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & \left(k_2 + \frac{1}{\mu}\right) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\nabla g^{-1} = -\frac{1}{k_1k_2 + \left(\frac{k_1 + k_2}{\mu}\right)} \begin{bmatrix} \left(k_2 + \frac{1}{\mu}\right) & k_2 \\ k_2 & (k_1 + k_2) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Utilizando-se os mesmos valores, para as variáveis do problema, adotados no método dos multiplicadores de Lagrange, com  $\mu = 1$ , pela equação (4.50) tem-se:

$$\Delta X^1 = -\frac{1}{1*1 + \left(\frac{1+1}{1}\right)} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{1}\right) & 1 \\ 1 & (1+1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1+1)*1 - 1*1,5 - 0,5 \\ -1*1 + 1*1,5 - 0,5 - \frac{1}{1}(1-1,5) \end{Bmatrix}$$

$$\Delta X^1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1666 \\ -0,3333 \end{Bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{cases} X_1^1 = X_1^0 + \Delta X_1^1 = 1 - 0,1666 = 0,8333 \\ X_2^1 = X_2^0 + \Delta X_2^1 = 1,5 - 0,3333 = 1,1666 \end{cases}$$

Sabendo-se que a resposta converge para a solução quando  $\mu \rightarrow 0$ ,

acelera-se o processo iterativo utilizando-se  $\mu = 0,00001$ , obtendo-se:

$$\Delta X^2 = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1+1}{1*10^{-5}}\right)} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{1*10^{-5}}\right) & 1 \\ 1 & (1+1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1+1)*0,8333 - 1*1,1666 - 0,5 \\ -0,8333 + 1,1666 - 0,5 - \frac{1}{1*10^{-5}}(1-1,1666) \end{Bmatrix}$$

$$\Delta X^2 = -\frac{1}{200001} \begin{bmatrix} 100001 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 16665,833 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{200001} \begin{Bmatrix} 16665,833 \\ 33331,666 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0833 \\ -0,1666 \end{Bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{cases} X_1^2 = X_1^0 + \Delta X_1^1 = 0,8333 - 0,0833 \cong 0,75 \\ X_2^2 = X_2^0 + \Delta X_2^1 = 1,1666 - 0,1666 \cong 1,0 \end{cases}$$

Sendo o resultado aproximadamente igual ao obtido no método dos multiplicadores de Lagrange, pelo fato de se poder diminuir ainda mais o parâmetro de penalidade fazendo-se  $c \rightarrow 0$ . A força de contato é determinada por:

$$F_c = -\frac{1}{\mu} c(x) = -\frac{1}{\mu} (-k_2 X_1 + k_2 X_2 - F_2) \mu \quad (4.55)$$

Portanto:

$$F_c = -(-1 * 0,75 + 1 * 1 - 0,5) = 0,25$$

Mesmo resultado obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange.

Agora se resolve o mesmo exemplo pelo método do controle de posições, adotada neste trabalho. Primeiramente sabe-se que o método adotado utiliza as posições dos nós como parâmetros nodais, sendo assim estipulam-se um eixo para delimitar a origem do sistema, como visto na Figura 4.11.

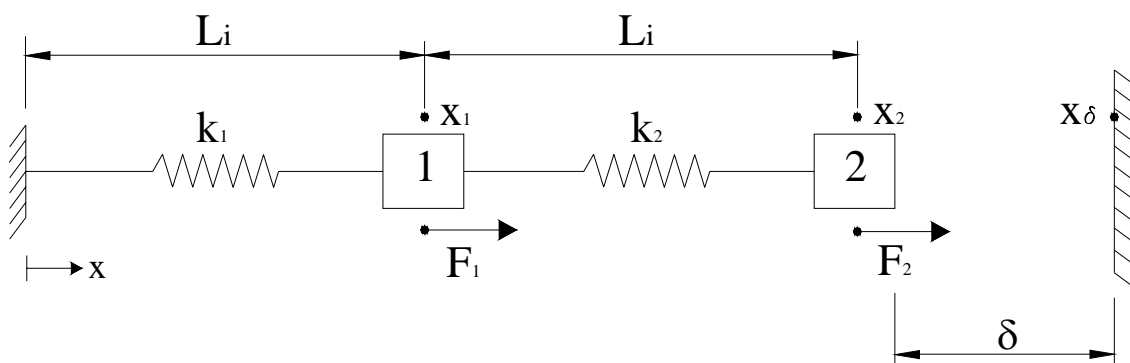


Figura 4.11: Problema unidirecional com restrição - Método posicional

O equilíbrio do sistema para  $x_2 < x_\delta = 2L_i + \delta$  fica agora determinado pela seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - L_i \\ x_2 - 2L_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Consequentemente as equações de balanceamento ficam determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (k_1 + k_2)(x_1 - L_i) - k_2(x_2 - 2L_i) - F_1 \\ -k_2(x_1 - L_i) + k_2(x_2 - 2L_i) - F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

O gradiente da equação (4.57) fica então igual a:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Aplicando-se o método e Newton-Raphson utilizando os mesmos valores para as variáveis usados anteriormente e com  $L_i = 1$ , obtém-se:

$$\Delta x^1 = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2*(1-1)-1*(2-2)-0,5) \\ (-1*(1-1)+1*(2-2)-0,5) \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{Bmatrix}$$

Logo o resultado obtido era esperado para a primeira correção. Atualizando as posições tem-se:

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 + \Delta x_1^1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2^1 = x_2^0 + \Delta x_2^1 = 2 + 1,5 = 3,5 \end{cases}$$

Como a restrição foi infringida aplica-se o método do controle de posições, retornando a posição do ponto  $x_2$  para a superfície do obstáculo, ou seja, toma-se

$x_2 = x_\delta$ , e faz-se o equilíbrio para o ponto  $x_1$  como segue:

$$\begin{aligned} g_1 &= (k_1 + k_2)(x_1 - L_i) - k_2(x_2 - 2L_i) - F_1 = 0 \\ g_1 &= 2 * (x_1 - 1) - (3 - 2 * 1) - 0,5 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,75 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Expressando o deslocamento para comparar os resultados, tem-se:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - 1 = 1,75 - 1 = 0,75 \\ X_2 &= x_2 - 2 = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Sendo este resultado igual ao obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange e pelo método das penalidades. Determinar-se a força de contato exercida sobre o corpo 2, fazendo-se o equilíbrio para  $g_2$ , ou seja:

$$\begin{aligned}g_2 &= -k_2(x_1 - L_i) + k_2(x_2 - 2L_i) - F_2 \\g_2 &= -1 * (1,75 - 1) + 1 * (3 - 2 * 1) - 0,5 \\g_2 &= -0,25\end{aligned}$$

Conseqüentemente comprova-se a equivalência em termos de resultado entre os três métodos, sendo a força residual (força de contato) obtida com sinal negativo indicando o sentido contrário da força externa  $F_2$ .

---

### 5.1 Considerações iniciais

Neste capítulo faz-se a validação do método abordado na programação não linear geométrica dinâmica implementada referente ao impacto entre estrutura e anteparo rígido curvo tendo este uma aproximação qualquer, por meio da comparação de exemplos numéricos da literatura científica. É feito também um estudo de convergência para a discretização geométrica da estrutura e para a discretização temporal (passo de tempo), buscando o ponto ótimo para as duas discretizações.

### 5.2 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido em forma de V

Este exemplo servirá como validação do algoritmo desenvolvido, sendo esta feita por meio de uma comparação com artigos onde o mesmo exemplo é encontrado, WRIGGERS et al. (1990) e GRECO et al. (2004), que adotam devido à simetria do anel e da estrutura rígida como é visto na Figura 5.1, uma discretização de apenas a metade da estrutura em 30 elementos finitos lineares. Já aqui a estrutura foi discretizada em 20 elementos com aproximação cúbica, enquanto o anteparo rígido tem 2 elementos rígidos e 3 segmentos auxiliares vistos na Figura

5.1. Como nas referencias, utilizaram-se variáveis adimensionais e velocidade constante. Utilizou-se também uma discretização temporal constante igual de GRECO (2004)  $\Delta t = 0,05$ . Foram adotadas as constantes de integração modificadas de HU ( $\gamma = 1,5; \beta = 1,0$ ), no integrador temporal de Newmark.

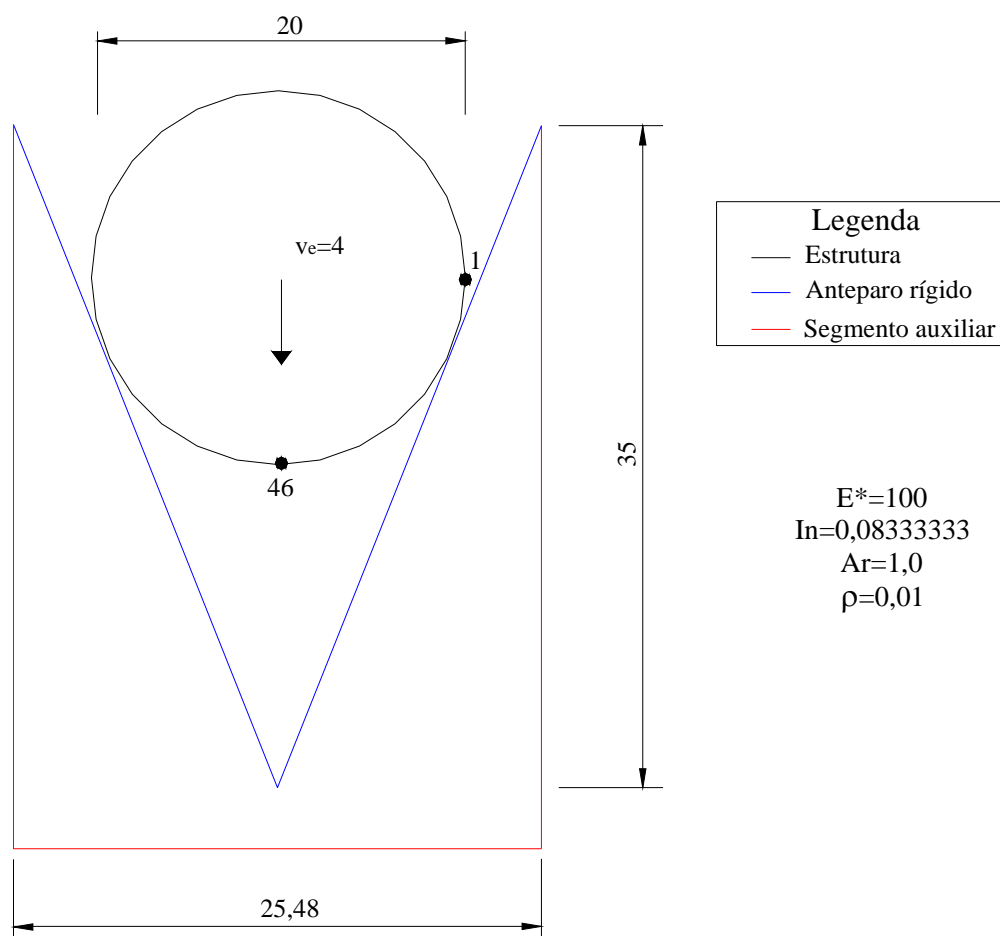


Figura 5.1: Dados de entrada do problema

As respostas obtidas pela formulação não linear posicional para a situação sem atrito e com atrito são mostradas nas Figuras 5.2 (a) e (b), e Figuras 5.3 (a) e (b), sendo que a última configuração dada para cada uma destas, esta em negrito.

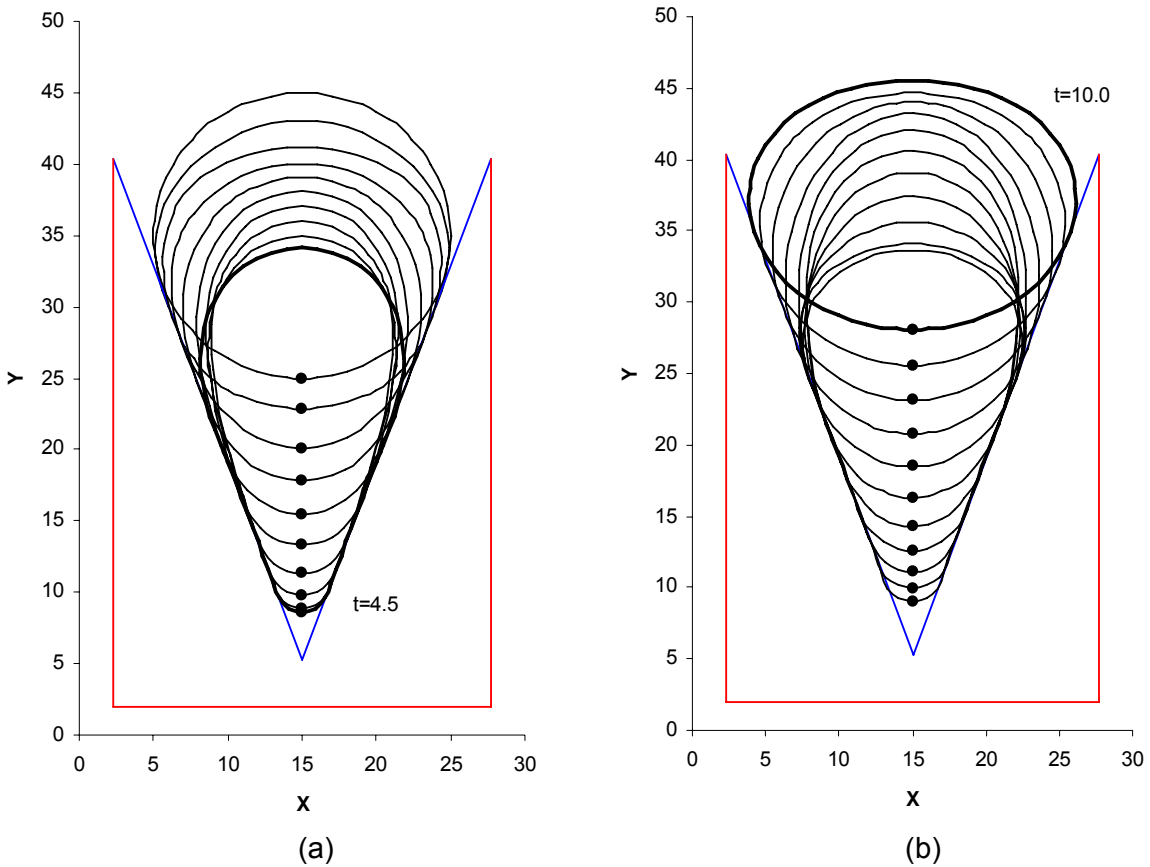


Figura 5.2: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito  $R=0$ )

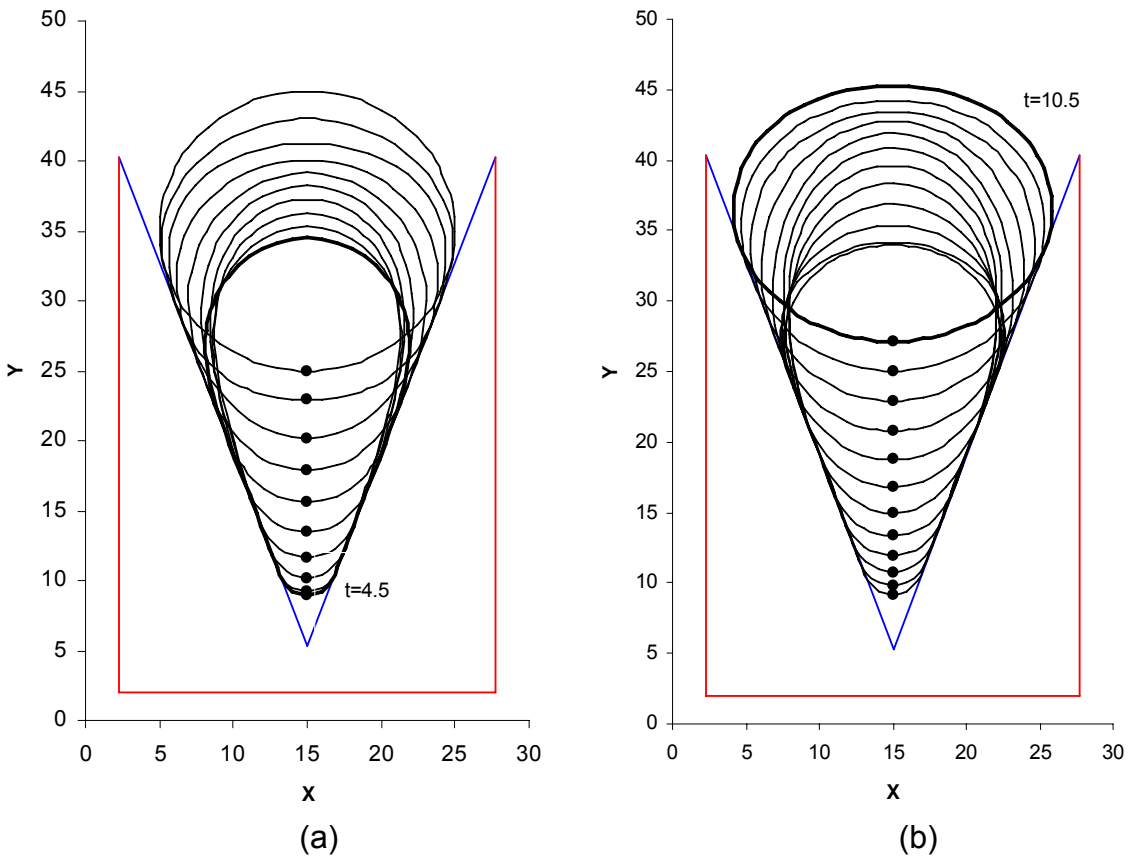


Figura 5.3: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito  $R=0,6$ )



A resposta apresentada em WRIGGES et al., vista na Figura 5.4, mostra apenas as configurações deformadas em alguns instantes sem maiores detalhes, diferentemente dos apresentados em GRECO (Figura 5.5).

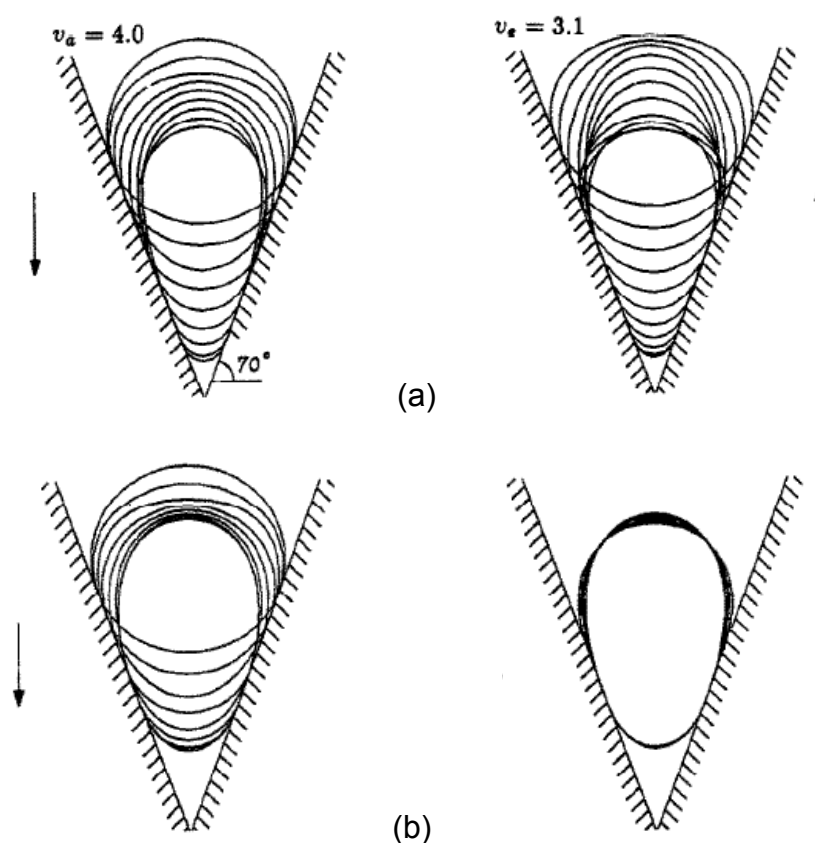


Figura 5.4: Respostas de WRIGGERS (1990). Casos: sem atrito (a) e com atrito (b)

Como podem ser observados, os gráficos das posições deformadas encontrados, para o caso sem atrito, foram bem semelhantes aos obtidos pelas referências, no entanto para o caso com atrito os resultados obtidos diferem das mesmas. Por este motivo, com intuito de refinar os resultados na busca de uma melhor precisão dos mesmos, optou-se por fazer um estudo de convergência tanto para diferentes valores da discretização temporal, diminuindo estes e conseqüentemente obtendo uma atualização das posições que descrevem uma

curva mais suave, e também para uma discretização da estrutura mais refinada, aumentando o número de elementos e conseqüentemente preservando a geometria real da mesma.

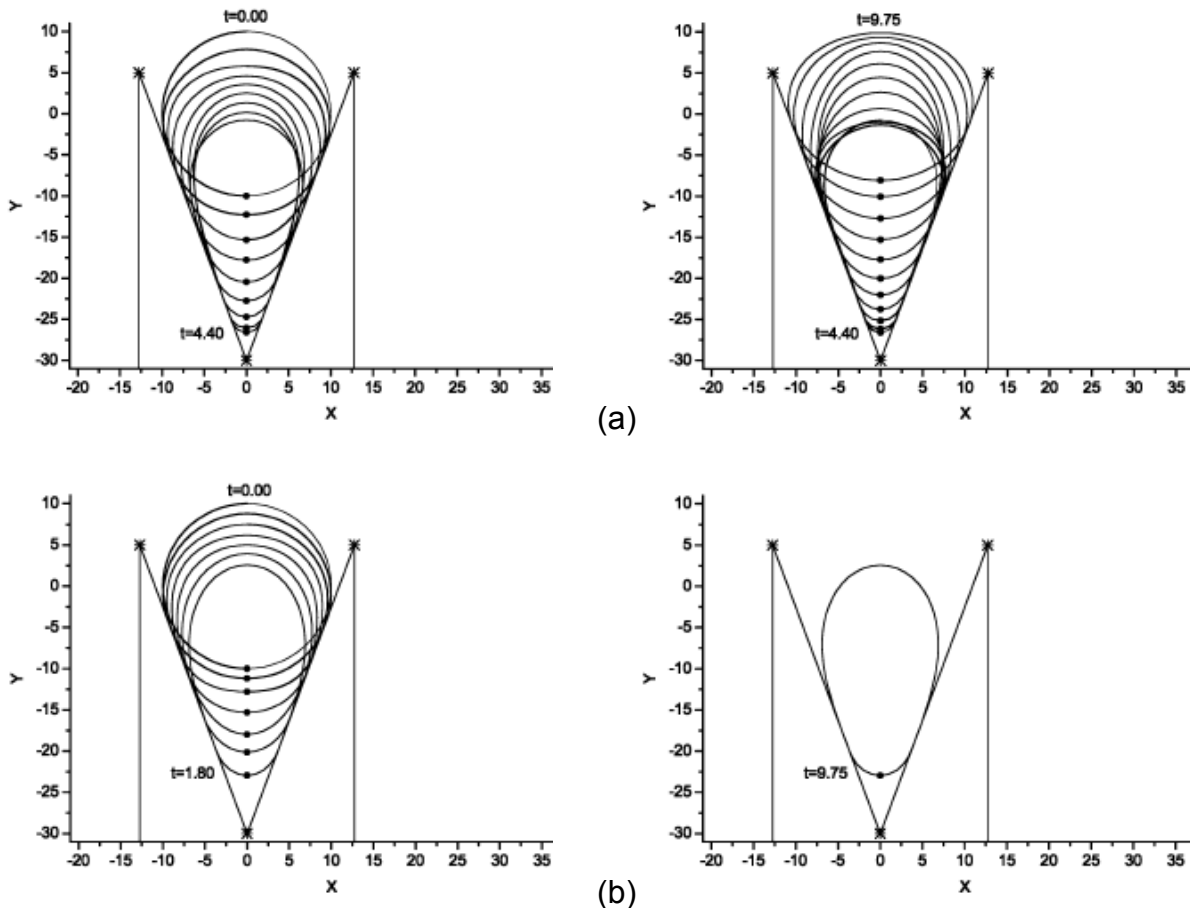


Figura 5.5: Respostas de GRECO (2004). Casos: sem atrito (a) e com atrito (b)

A Figura 5.6 apresenta três discretizações temporais ( $\Delta t = 0,05$ ,  $\Delta t = 0,01$  e  $\Delta t = 0,001$ ), para a mesma estrutura, discretização e constantes de integração da Figura 5.1, mostrando a posição vertical do nó 46 já que a estrutura é simétrica e, portanto a posição horizontal permanece constante. Observa-se que a convergência é muito boa, fazendo coincidir as curvas para  $\Delta t = 0,01$  e  $\Delta t = 0,001$ .

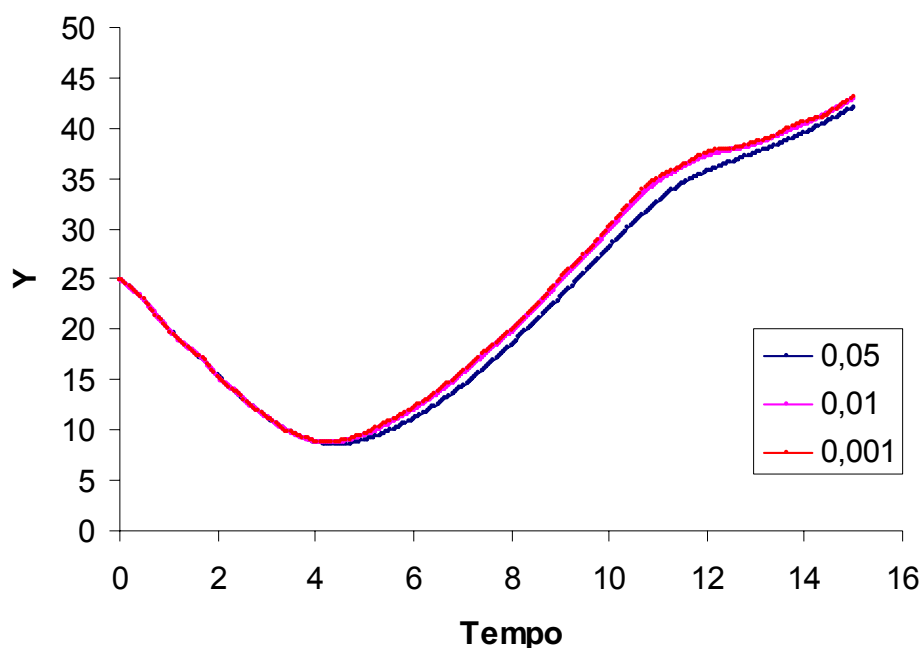


Figura 5.6: Convergência por discretização temporal para o caso sem atrito ( $R=0$ )

No entanto, a Figura 5.7 mostra que a convergência para o caso com atrito é mais lenta, além de produzir resultados posicionais discrepantes, que estão bem evidenciados entre a curva para uma discretização temporal com  $\Delta t = 0,05$  e as curvas das demais discretizações ( $\Delta t = 0,01$ ,  $\Delta t = 0,001$  e  $\Delta t = 0,0005$ ).

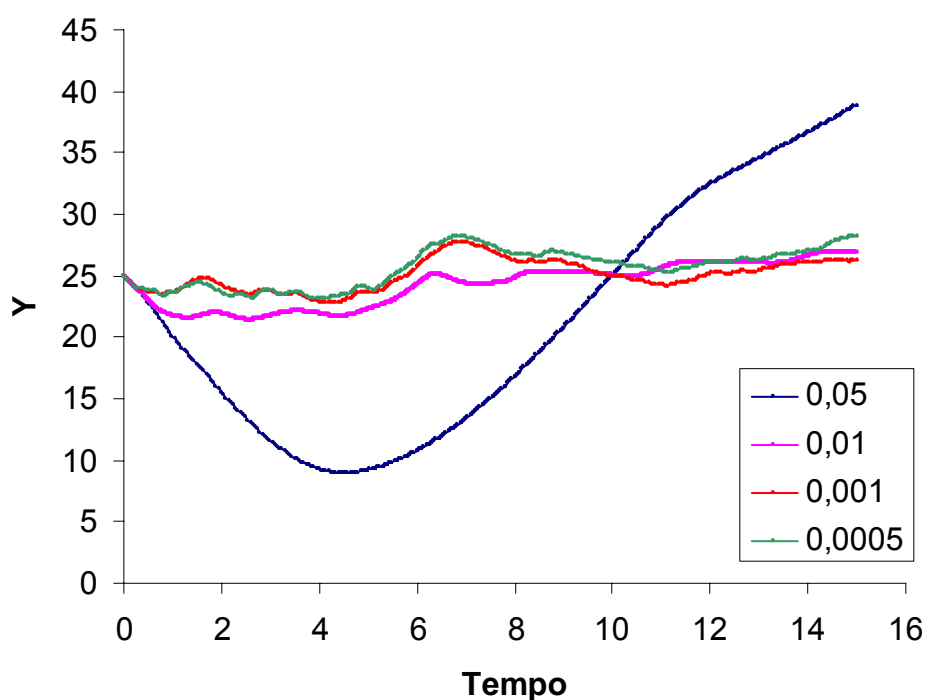


Figura 5.7: Convergência por discretização temporal para o caso com atrito ( $R=0,6$ )

Por conseqüência dos resultados vamos adotar para o estudo de convergência da discretização para geometria da estrutura um intervalo de tempo  $\Delta t = 0,001$  para ambos os casos, sem atrito e com atrito. Já os resultados apresentados nas Figuras 5.8 e 5.9, caso sem atrito e com atrito respectivamente, evidencia-se novamente a maior velocidade de convergência do caso sem atrito, sendo que suas curvas para uma discretização de 120 e 240 nós são coincidentes.

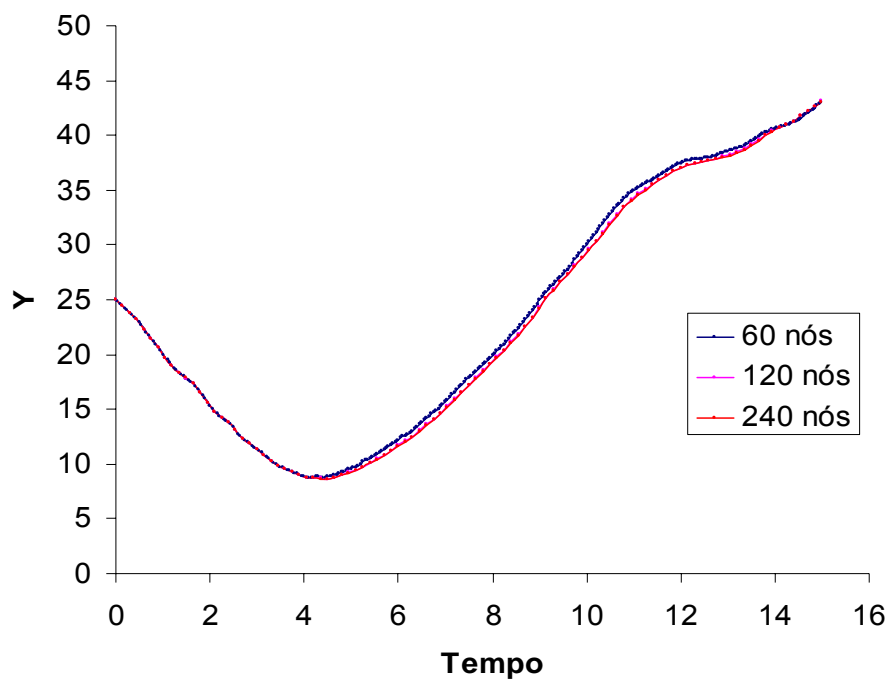


Figura 5.8: Convergência por discretização geométrica: caso sem atrito ( $R=0$ )

Após a verificação das curvas de posições do nó mais próximo a base do funil com relação aos dois estudos de convergência, são apresentados os resultados onde se adotou para o caso sem atrito (Figura 5.10 (a) e (b)) uma estrutura de 240 nós e um intervalo de tempo  $\Delta t = 0,001$  e o caso com atrito (Figura 5.11), 480 nós e  $\Delta t = 0,0005$ .

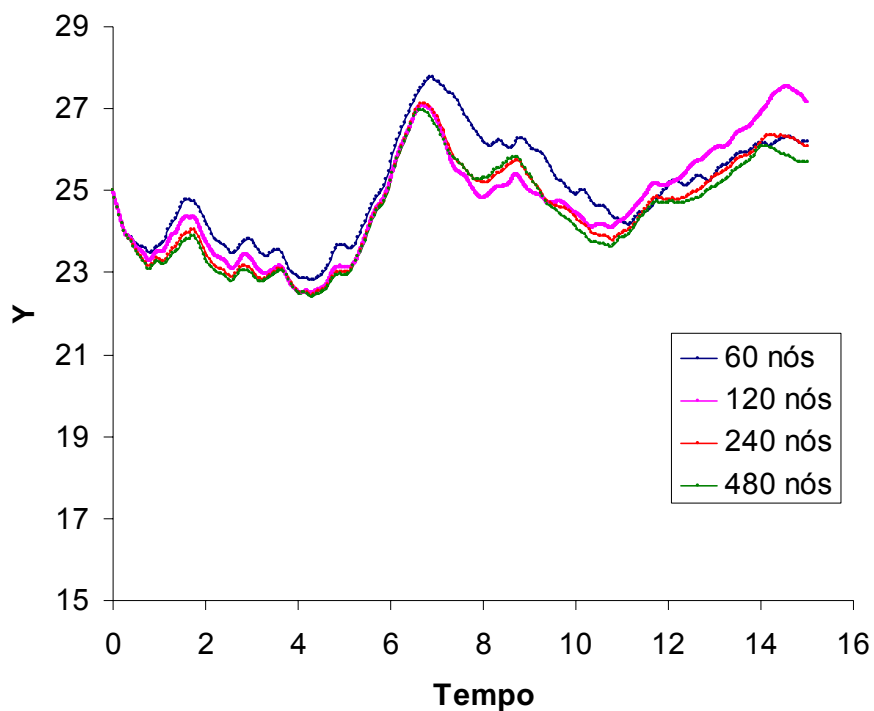


Figura 5.9: Convergência por discretização geométrica: caso com atrito ( $R=0,6$ )

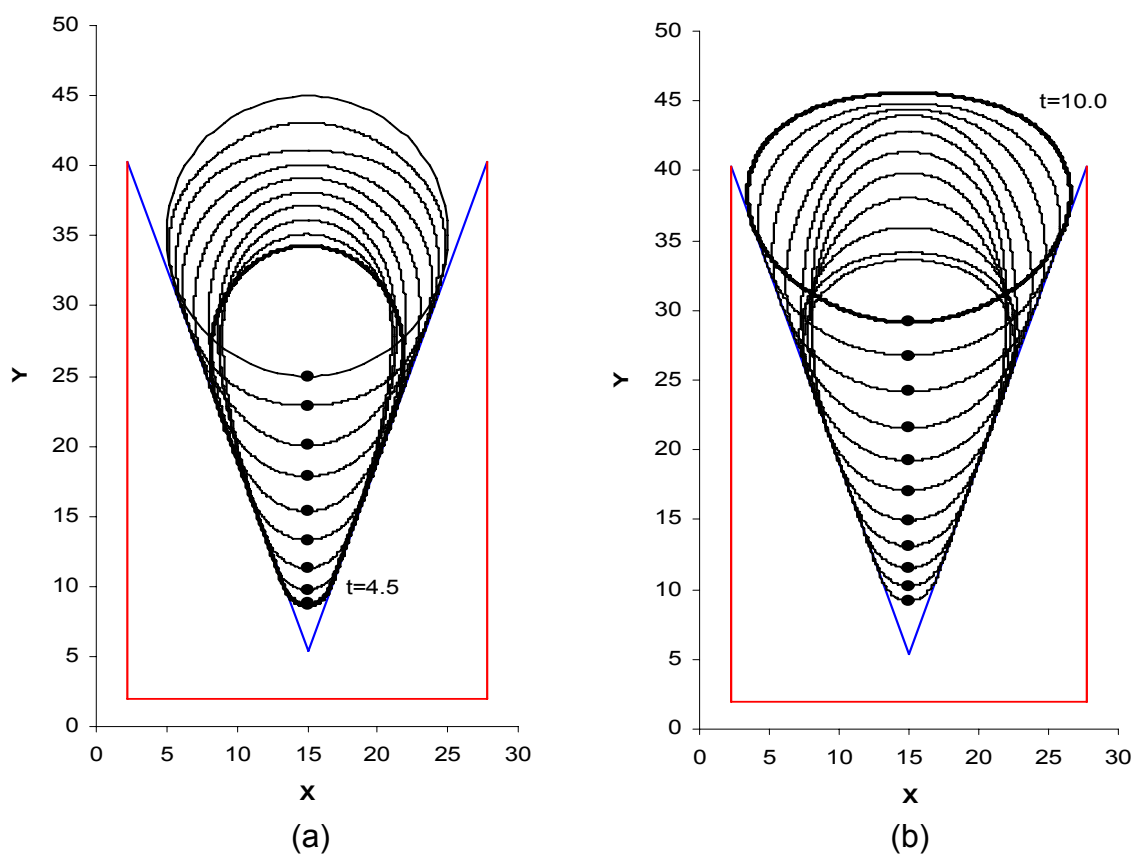


Figura 5.10: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito  $R=0$ )

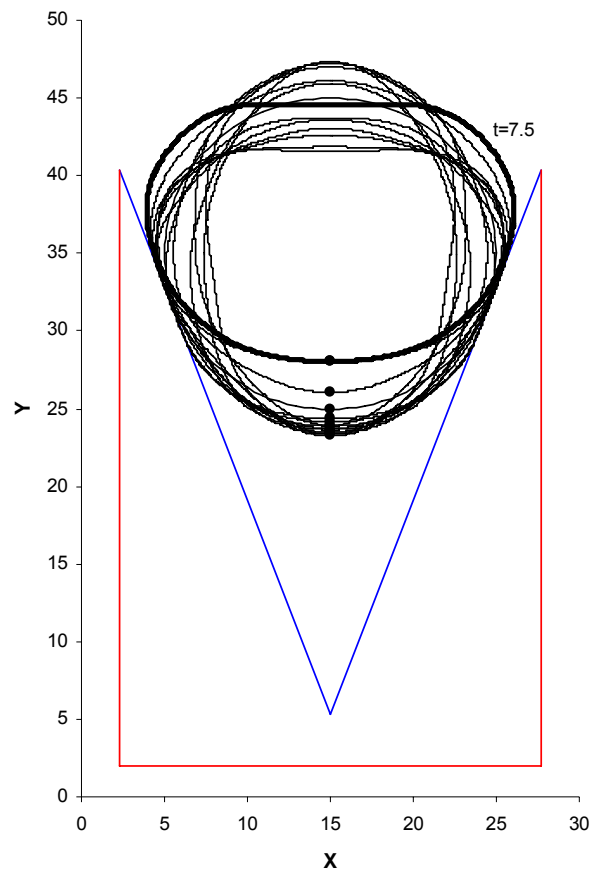


Figura 5.11: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito  $R=0,6$ )

As Figuras 5.10 (a) e (b) evidenciam que o caso sem atrito resulta em valores que são aproximadamente idênticos aos obtidos pelas referências supracitadas. De modo contrário o caso com atrito (Figura 5.11) demonstra uma grande discrepância nas posições resultantes de cada passo de tempo em relação às referências, já que a estrutura fica entrando e saindo do anteparo em forma de funil, logo o coeficiente equivalente de atrito deve ser avaliado por este ter interferência direta nas posições de retorno do nó impactante. Buscando obter resultados mais condizentes aos obtidos por GRECO (2004), por mera comparação entre os coeficientes de atrito adotados, fizeram-se vários testes até encontrar uma trajetória de equilíbrio aproximada ao da referência. A Figura 5.12 (a) mostra, para uma mesma discretização da estrutura e temporal do último exemplo mostrado, que as configurações de equilíbrio, se aproximam da Figura 5.5 (b), no entanto o coeficiente

equivalente de atrito adotado é  $R=0,1$  enquanto o adotado pela referência é de  $R=0,6$ . No entanto, a Figura 5.12 (b) não mostra a mesma igualdade de resultados obtidos pela referência.

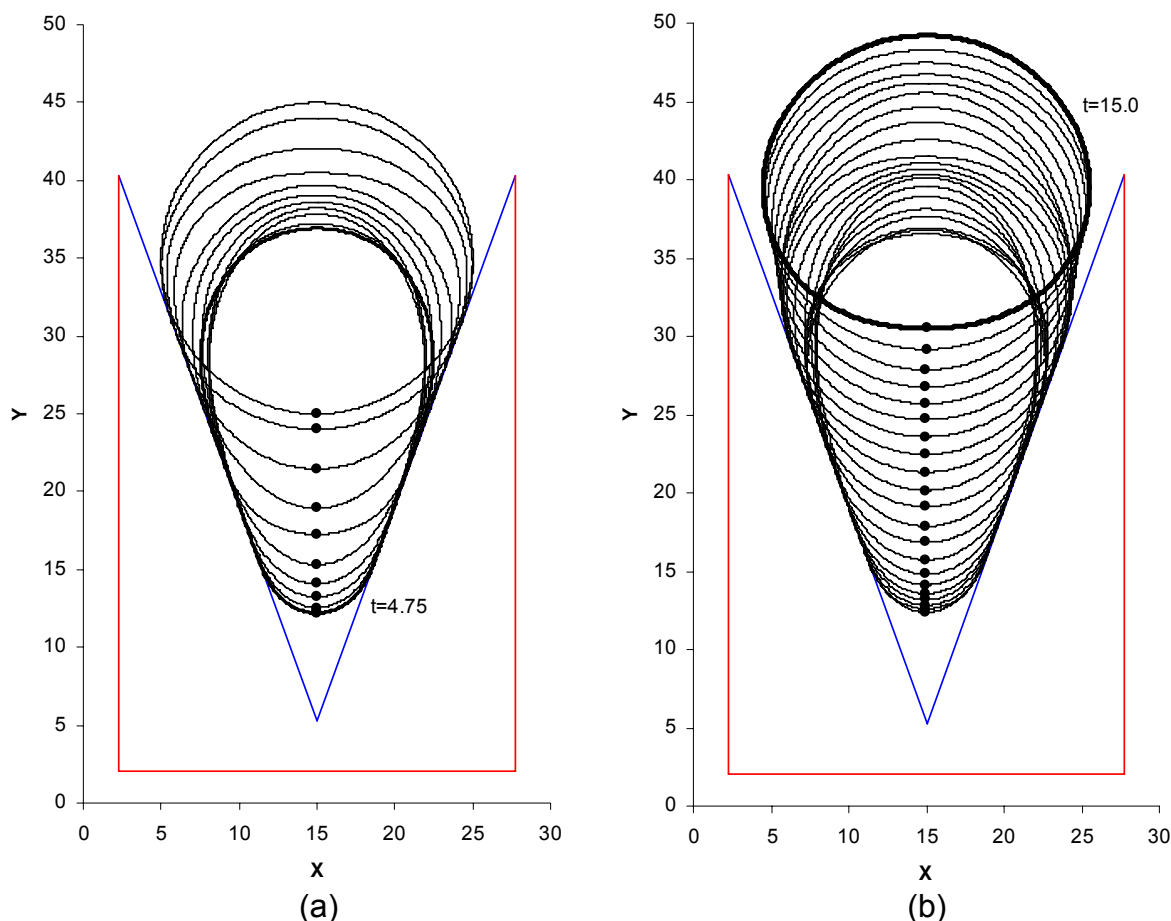


Figura 5.12: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito  $R=0,1$ )

### 5.3 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido em forma de ampulheta

Este exemplo trata do impacto de uma estrutura reticulada anelar em um anteparo rígido em forma de ampulheta. A estrutura foi discretizada em 40 e 160 elementos finitos, sendo estes aproximados por uma função cúbica o que totaliza 120 nós e 480 nós, para o caso sem e com atrito respectivamente, onde o movimento da estrutura tem velocidade constante na direção do anteparo. Já o anteparo rígido foi discretizado em 25 elementos, 24 com a mesma função

aproximação da estrutura além de um elemento linear que compõe a base da mesma e 5 segmentos auxiliares lineares, como pode ser visto na Figura 5.13, juntamente com as propriedades utilizadas. Utilizou-se uma discretização temporal constante igual  $\Delta t = 0,01$  para o caso de impacto sem atrito e  $\Delta t = 0,001$  para o caso com atrito, sendo os coeficientes de atrito equivalentes  $R=0$  e  $R=0,2$ , respectivamente. Foram adotadas as constantes de integração modificadas de HU ( $\gamma = 1,5; \beta = 1,0$ ), no integrador temporal de Newmark. As respostas obtidas são apresentadas na Figura 5.14 (a) e (b) (sem atrito) e Figura 5.15 (com atrito), sendo o movimento em sentido a base (a) da ampulheta e sentido contrário (b), respectivamente. No caso com atrito a estrutura para de se movimentar no passo 1600 de tempo, sendo configuração final indicada em negrito.

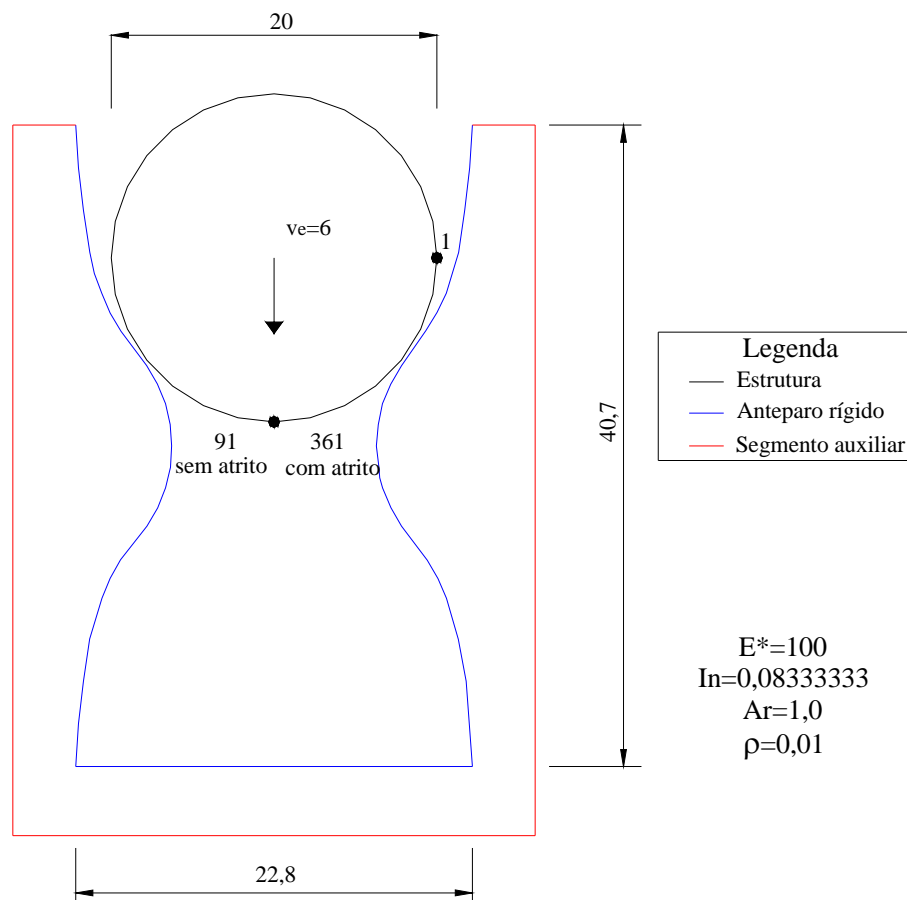


Figura 5.13: Dados de entrada do problema



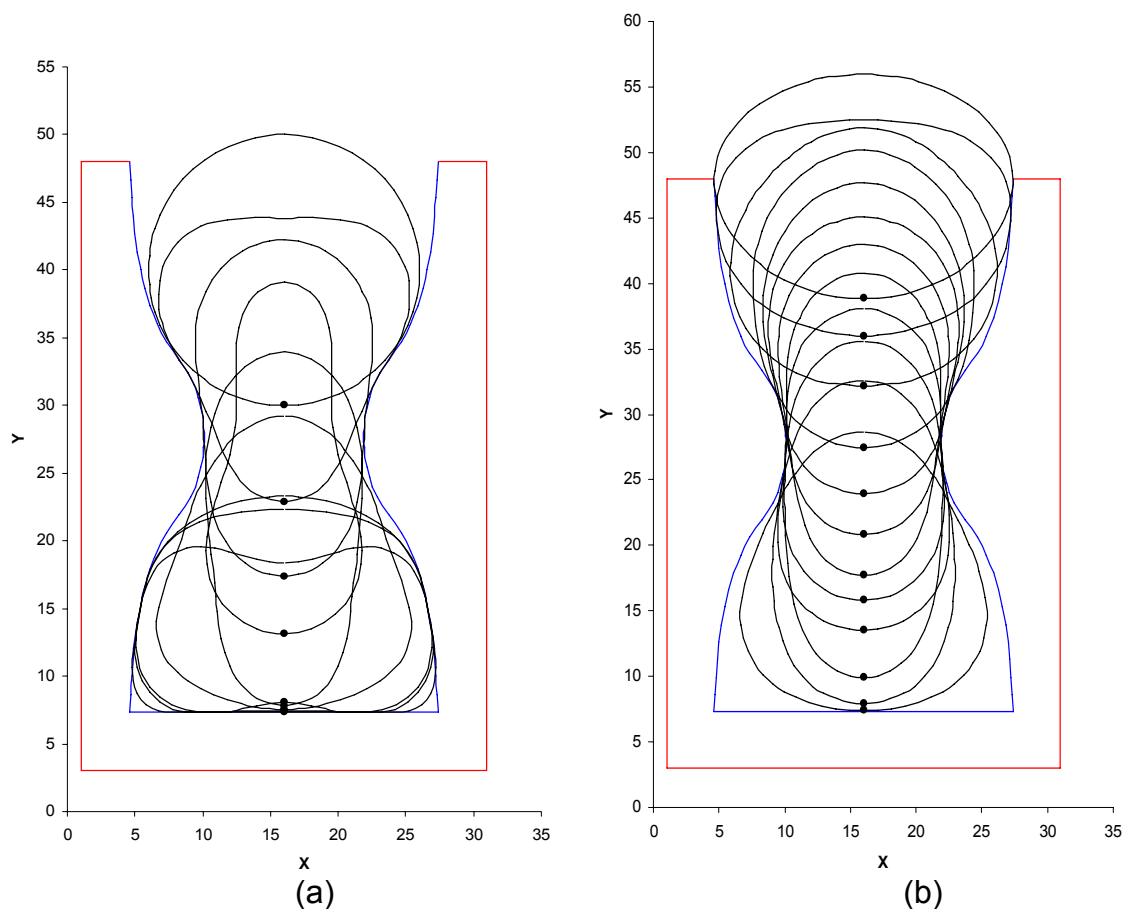


Figura 5.14: Configurações anelares para certos passos de tempo (sem atrito)

Na busca de resultados mais coerentes com a realidade e com intuito de verificação dos mesmos, podendo assim avaliar o desempenho do algoritmo desenvolvido pelo comportamento observado, optou-se por produzir mais dois exemplos com o exemplo anterior. O primeiro foi construído fazendo-se um corte um pouco abaixo da metade da altura da ampulheta, de maneira que a estrutura pudesse continuar seu movimento após passar por um afunilamento. Devido ao corte o número de elementos rígidos (do anteparo) foi reduzido para 8 com aproximação cúbica de cada lado, já que existe simetria, no entanto permaneceu com as mesmas discretizações da estrutura e temporal, visto juntamente com os dados de entrada na Figura 5.16. Foram produzidos resultados para o caso sem atrito (Figura 5.17a), quanto para o caso com atrito (Figura 5.17 b), cujos coeficientes de atrito são  $R=0$  e  $R=0,15$  respectivamente.

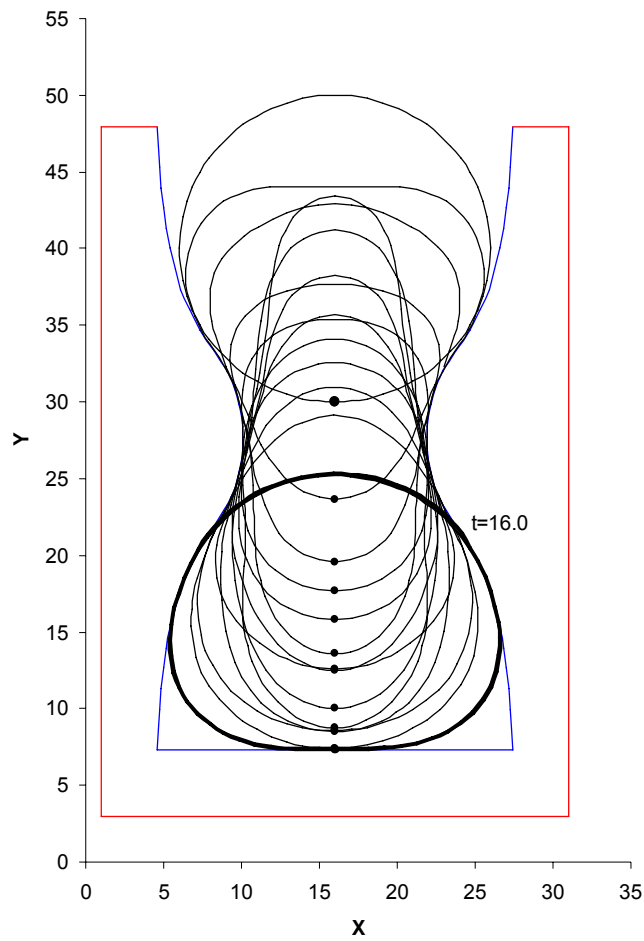


Figura 5.15: Configurações anelares para certos passos de tempo (com atrito)

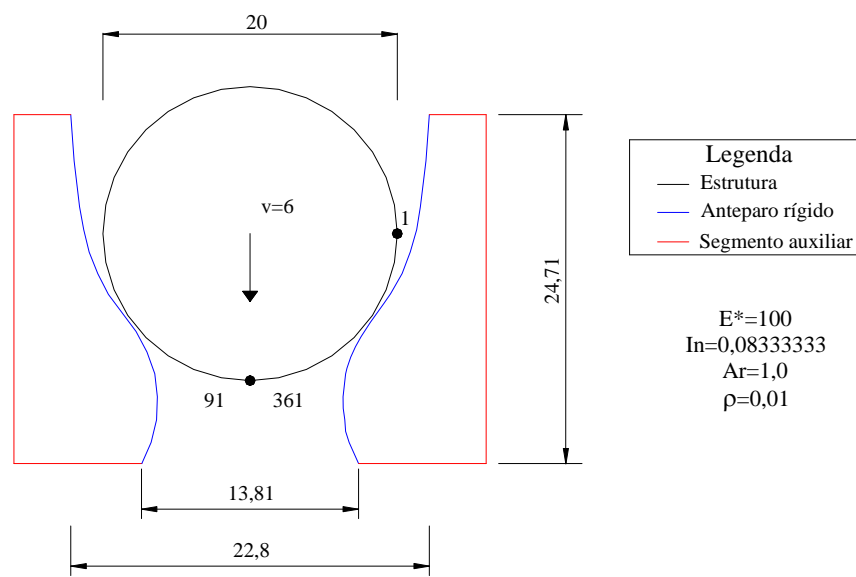


Figura 5.16: Dados de entrada do problema

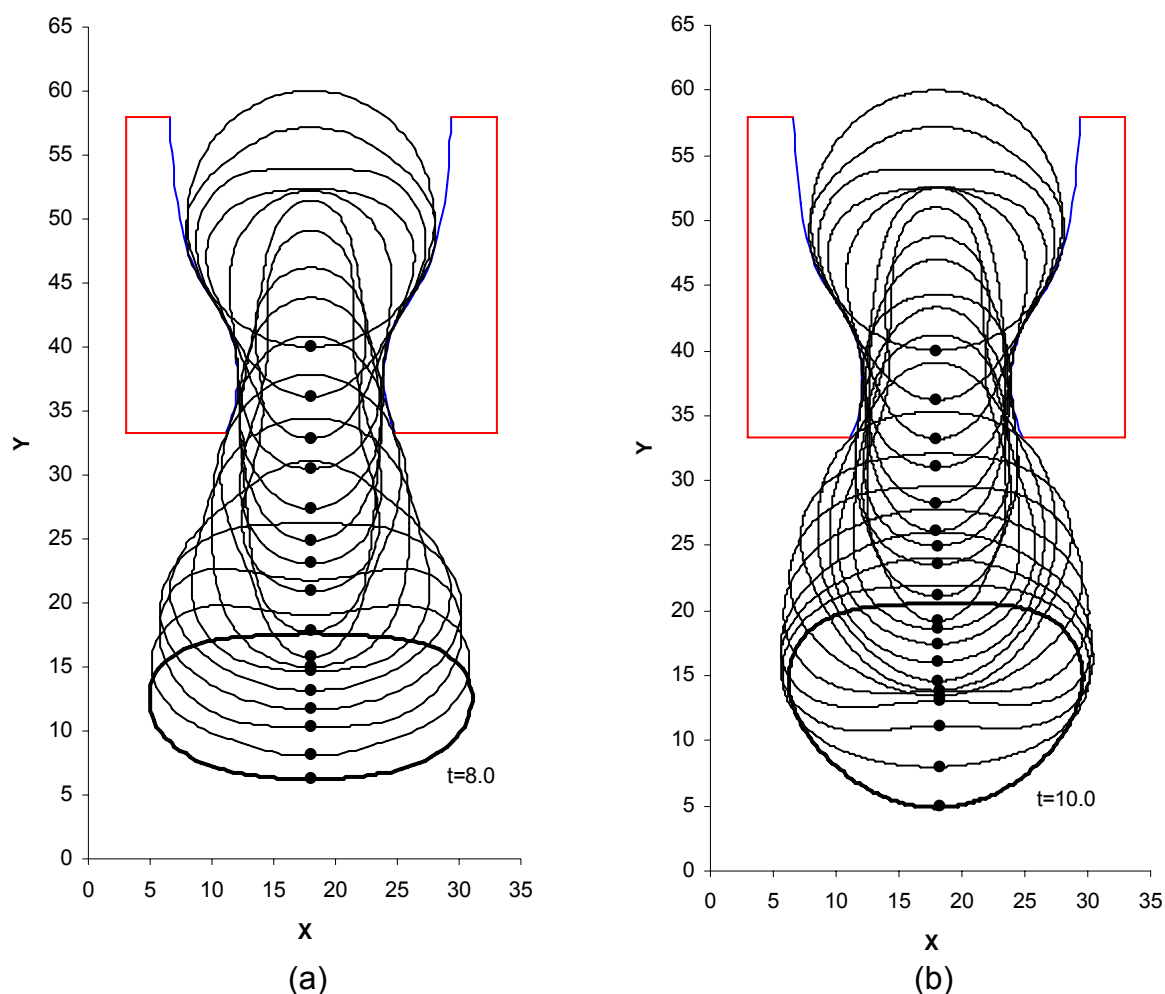


Figura 5.17: Configurações anelares obtidas para o caso de anteparo seccionado

Já, o segundo exemplo é composto por 7 elementos rígidos de cada lado devido à simetria, no entanto há 6 curvos (aproximação cúbica) e 1 linear, de forma que a metade superior do anteparo permaneça igual ao anteparo original, enquanto a metade inferior seja vertical, como pode ser observado juntamente com os dados de entrada na Figura 5.18. As posições deformadas com relação ao tempo são mostradas na Figura 5.19 (a) e (b), onde foram considerados coeficientes de atrito  $R=0$  e  $R=0,1$ , sendo que a última configuração em negrito corresponde a um tempo de  $t=12,0$  para o caso sem atrito e  $t=25,2$  para o caso com atrito. A discretização da estrutura e temporal é a mesma dos exemplos anteriores.

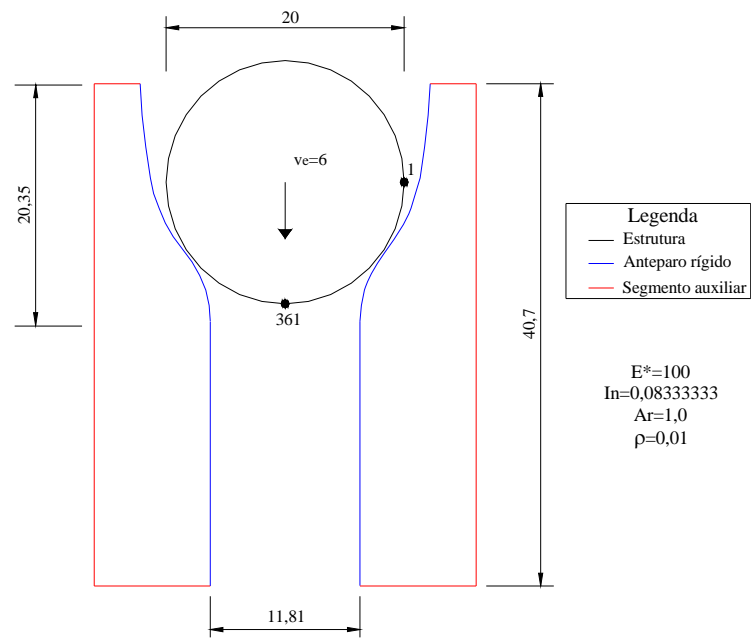


Figura 5.18: Dados de entrada do problema

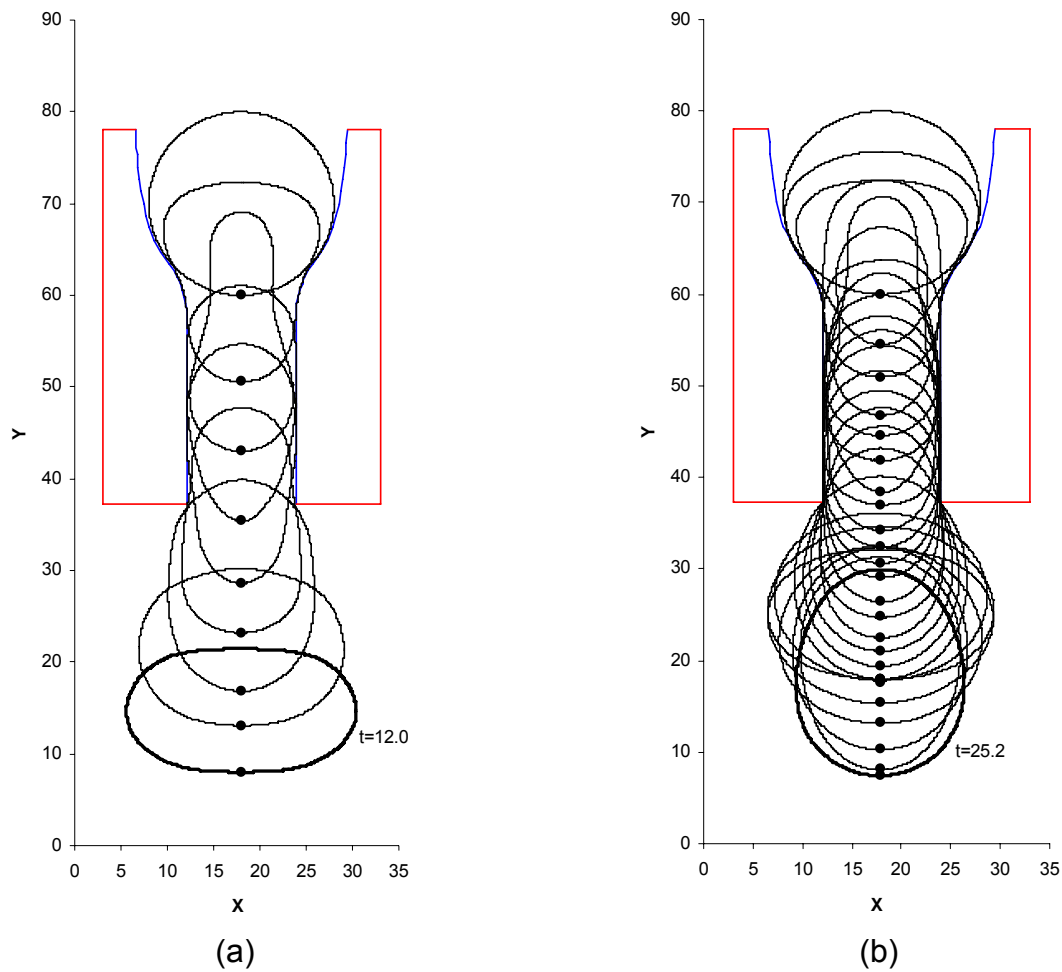


Figura 5.19: Configurações anelares obtidas para o caso de anteparo seccionado em duas partes iguais com elementos curvos em uma e elementos retos em outra

#### 5.4 Impacto bidirecional de anel em anteparo rígido curvo

Com intuito de demonstrar a resposta da estrutura quando esta sofre impacto com um coeficiente de atrito não nulo, este exemplo mostra a trajetória percorrida por um dado nó (1) no decorrer do tempo, tanto para um coeficiente equivalente de atrito  $R=0$  como para  $R=0,3$ , como visto nas Figuras 5.21 e 5.22, respectivamente. As configurações do corpo mostradas nestas figuras demonstram o grau de implicação que o atrito causa na trajetória, já que para o caso sem atrito o ângulo de rotação do nó analisado até a última configuração, em negrito, é aproximadamente nulo para um tempo de  $t=34,0$ , enquanto o caso com atrito o ângulo é  $\theta=-383,57^\circ$ , com um tempo na sua configuração final em negrito de  $t=50,0$ . A estrutura anelar tem a sua discretização igual ao do exemplo anterior, já o anteparo contém 11 elementos com aproximação cúbica e 4 segmentos auxiliares lineares. Utilizou-se a mesma discretização temporal dos exemplos anteriores. No entanto, diferentemente do exemplo anterior, neste usou-se as constantes de integração clássicas de Newmark (regra do trapézio)  $\gamma = 0,5$  e  $\beta = 0,25$ , o qual se dá para uma aceleração constante igual à média entre a aceleração do passo anterior e atual. Os dados do problema podem ser vistos na Figura 5.20. A comparação entre as posições do nó (1) em relação ao tempo para a situação sem e com atrito é apresentado nas Figuras 5.23 e 5.24.

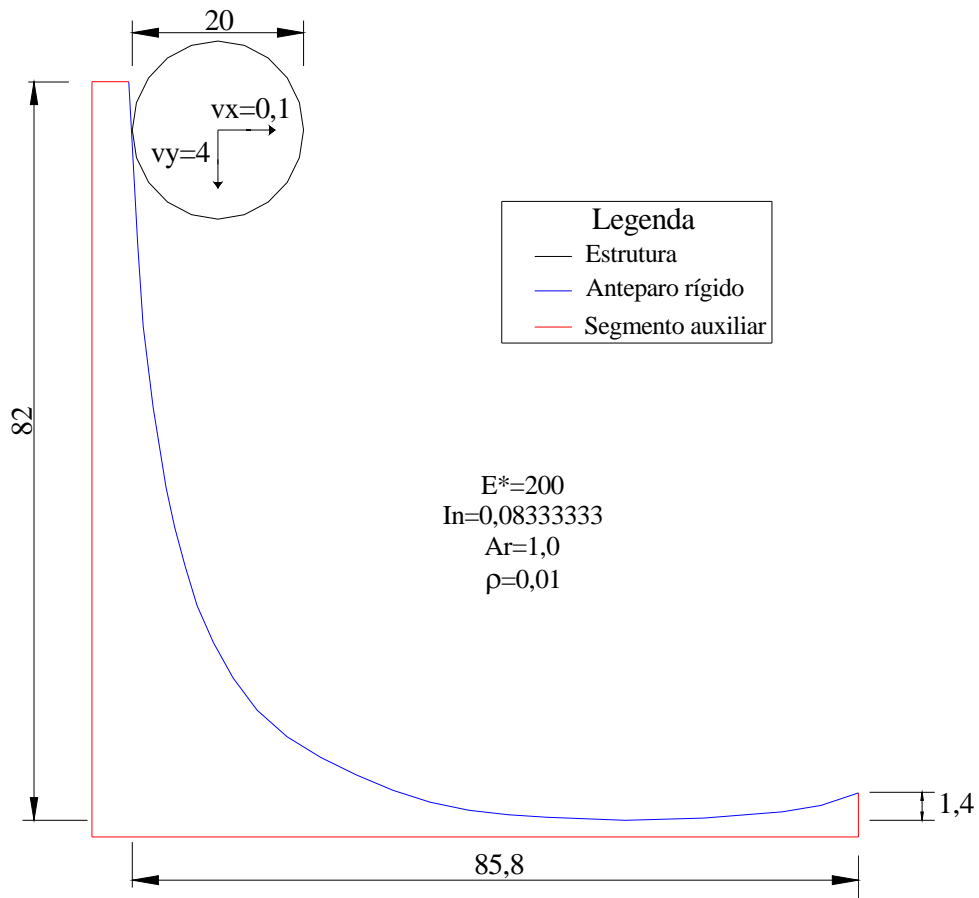


Figura 5.20: Dados de entrada do problema

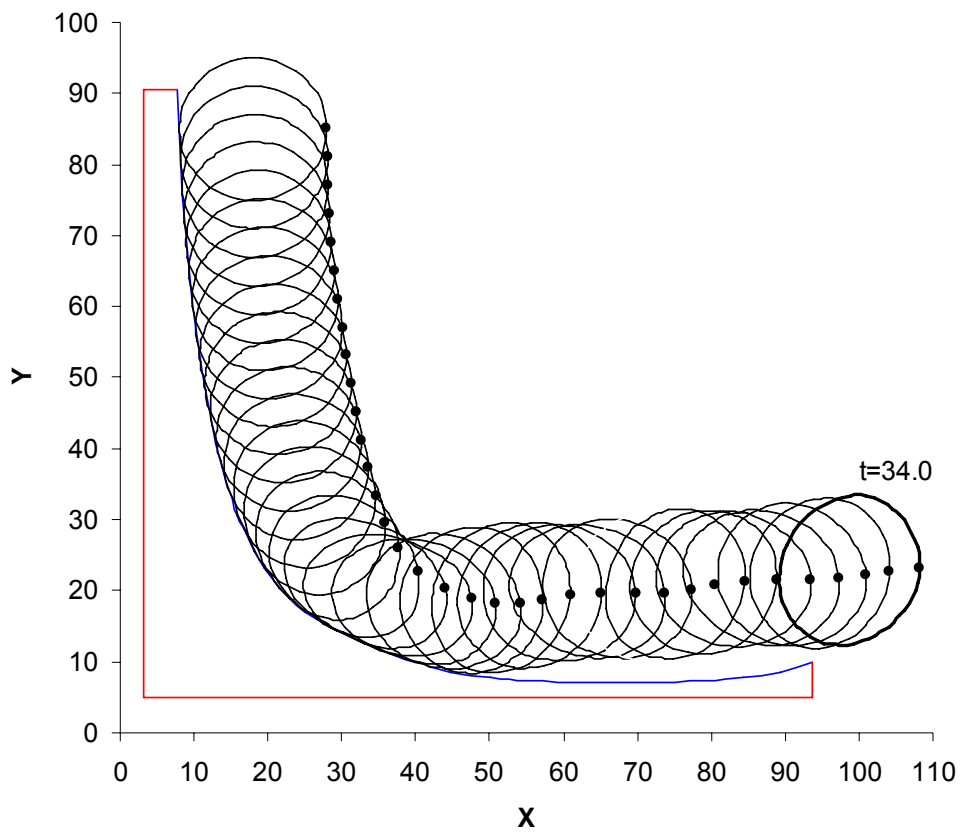


Figura 5.21: Configurações anelares obtidas para o caso sem atrito

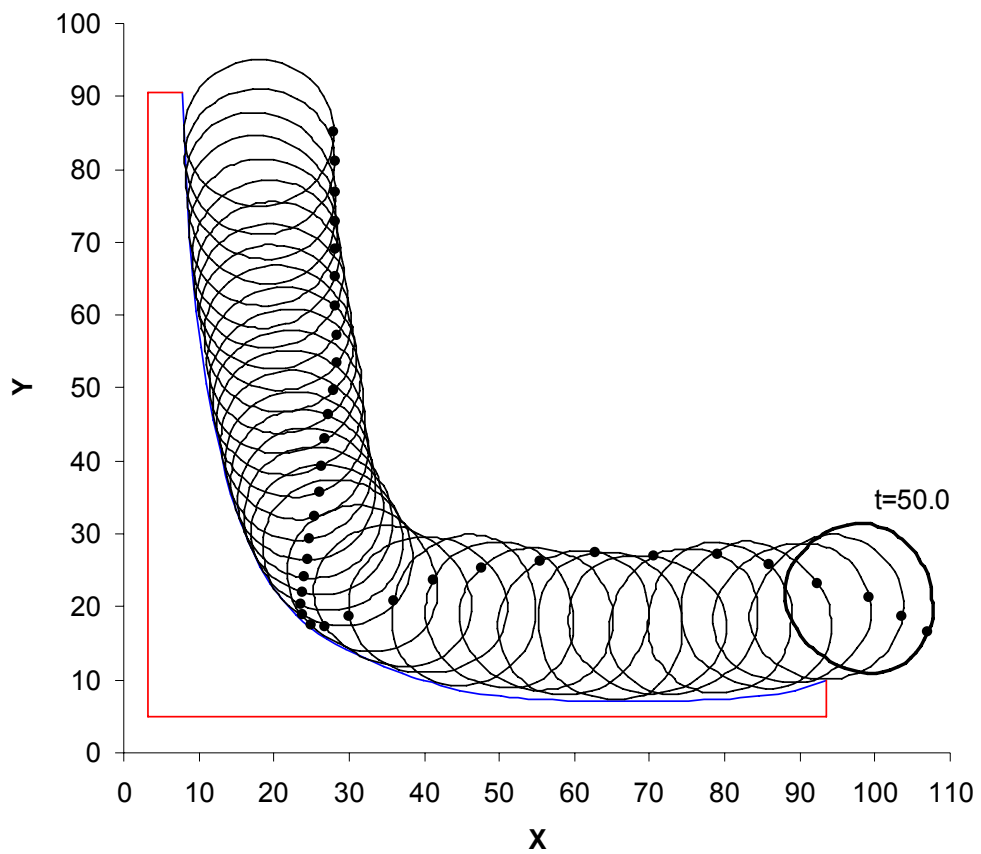


Figura 5.22: Configurações anelares obtidas para o caso com atrito

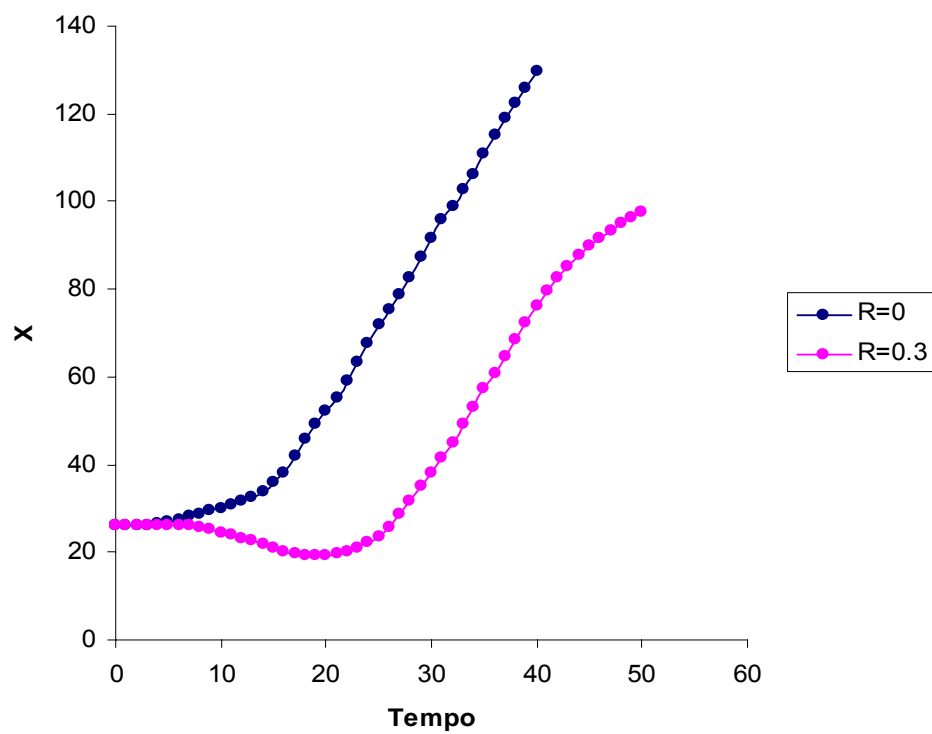


Figura 5.23: Relação entre a posição X e o tempo para o nó 1

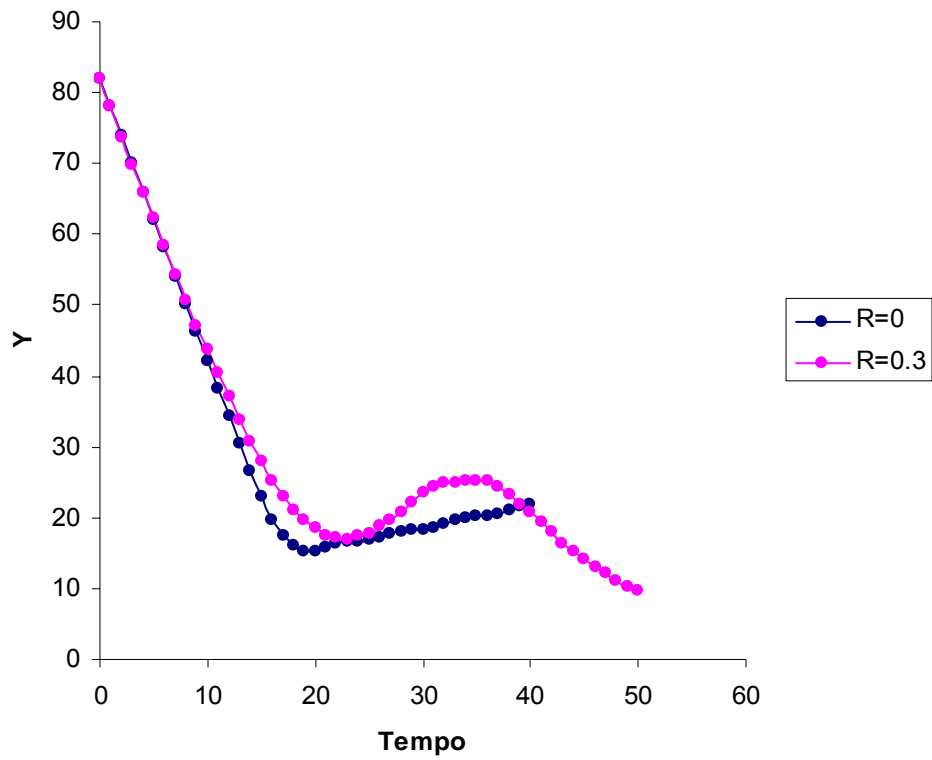


Figura 5.24: Relação entre a posição Y e o tempo para o nó 1



---

Tendo como foco o comportamento dinâmico não linear geométrico de estruturas reticuladas anelares planas, esta dissertação aborda principalmente problemas de impacto bidirecional entre essas e anteparos rígidos.

Baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), a formulação posicional não linear geométrica utilizada neste trabalho foi implementada por CODA (2003), para problemas estáticos, considerando grandes deslocamentos e rotações, tendo sua formulação validada por exemplos desenvolvidos por CODA & GRECO (2004) e GRECO (2004) sendo estes abordados pela literatura científica, além de apresentar resultados excelentes comparados com soluções analíticas.

Já a formulação não linear geométrica dinâmica é apresentada em GRECO (2004) e GRECO & CODA (2006), a qual utiliza o integrador temporal de Newmark para descrever o comportamento dinâmico da estrutura adotando a cinemática de Euler/Bernoulli. De modo contrário aqui se apresenta uma formulação alternativa baseada na cinemática de Reissner.

Logo, como supracitado o objetivo principal deste trabalho foi desenvolver um algoritmo que identifique o impacto, e um algoritmo geométrico de retorno, considerando o atrito na superfície de contato, para problemas dinâmicos com

impacto entre estruturas bidimensionais e anteparos rígidos com aproximação geométrica qualquer.

Os resultados obtidos dos exemplos numéricos mostraram a eficiência na convergência e estabilidade da formulação com a utilização do algoritmo temporal de Newmark modificado por HU (1997), mostrando sua propriedade de ser incondicionalmente estável para qualquer intervalo de tempo utilizado. No entanto resultados obtidos aqui comparados com a literatura mostraram a grande importância na discretização geométrica e temporal na busca da convergência para a resposta esperada, ou mais precisa. Outro fato importante de discussão é a dificuldade de correlacionar o atrito real da superfície de contato utilizando-se modelos numéricos de atrito, já que existem poucos dados experimentais quantificando esta propriedade.

Deve-se comentar o excelente comportamento geral do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF-Posicional) equiparando resultados com relação a outras técnicas implementadas.

Portanto, definem-se como trabalhos futuros o desenvolvimento de modelos de contato-impacto do tipo mestre-escravo (controle de posições) e sua implementação em software de análise dinâmica não linear geométrica de estruturas tridimensionais compostas por elementos de barra geral e casca. Além disto, estudos teóricos que verifiquem a equivalência do método apresentado aqui e o método dos multiplicadores de Lagrange para a análise de contato-impacto e ligações deslizantes no interior de estruturas, máquinas ou mecanismos.

Em se tratando da parte prática, validar a técnica em aplicações de estruturas de antenas de satélites, garras mecânicas e biomecânicas, balões para exploração

científica, absorvedores de energia para estruturas aeronáuticas além de considerar impacto entre duas ou mais estruturas.

## Referências Bibliográficas

---

ARGYRIS J., MLEJNEK H.P., *Dinamyc of structures*. Text on Computanional mechanics, v. 5, p. 606, Amsterdam, North-Holland, 1991.

ARIS, R., *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*. Dover Books on Engineering series, ed. Dover Publications, New York, 1989.

ARMERO, F., PETOCZ, E., *Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., v. 158, p. 269–300, 1998.

BATHE, K.J., *Finite Element Procedure in engineering analysis*. Englewood Cliffs, 1982.

BATHE, K.J., *Finite element procedures*. New Jersey, Prentice Hall, 1996.

BATHE, K. J., CHAUDARY, A. B., *A solution method for planar and axisymmetric contact problems*. Int. J. Numer. Meth Eng., v. 21, p. 65–88, 1985.

BATOZ J. L., DHATT G., *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International journal for numerical methods in engineering, v. 14, p. 1262-1267, 1979.

BELYTSCHKO, T., NEAL, M.O., *Contact–impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 131, p. 547–572, 1991.

BELYTSCHKO, T., YEH, I. S., *The splitting pinball method for contact-impact problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., v. 105, p. 375–393, 1993.

BENSON, D.J., HALLQUIST, J.O., *A single surface contact algorithm for the postbuckling analysis of shell structures*. Report to the University of California at San Diego, CA, 1987.

BISSHOPP, K. E., DRUCKER, D. C., *On the deflection of a cantilever beam*. Quarterly of applied mathematics, v. 3, p. 272-275, 1945.

BUSCAGLIA, G. C., DURKN, R., FANCELLO, E. A., FEIJÚO, R. A., PADRA C., *An adaptive finite element approach for frictionless contact problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 395–418, 2001.

CARPENTER, N. J., TAYLOR, R. L., KATONA, M. G., *Lagrange constraints for transient finite element surface contact*. Inter. J. Numer. Meth. Eng., v. 32, p. 103–128, 1991.

CARROL C. W., *Opns. Res.* 9, nº 2, p. 169-184, 1961.

CHAUDHARY, A. B., BATHE, K. J., *A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction*. Comput. Struct., v. 24, p. 855-873, 1986.

CHEN, W. H., CHANG, C. M., YEH, J. T., *An incremental relaxation finite element analysis of viscoelastic problems with contact and friction*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., v. 109, p. 315–329, 1993.

CHO, J. Y., KIM, S. J., *Discontinuous time-integration method for dynamic contact/impact problems*. AIAA Journal, v. 37, n. 7, p. 874-880, 1999.

CODA H. B., *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF*. Texto complementar para concurso de professor titular, SET-EESC-USP, 2004.

CODA H.B., GRECO M., *A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 193, p. 3541–3557, 2004.

COIMBRA, A.L., *Lições de Mecânica do Contínuo*. EDUSP/Edgard Blucher Ed., 1978.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., *Concepts and applications of finite element analysis*. Third edition. John Wiley & Sons, 1989.

CRISFIELD, M.A., *A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through*. Computer & structures, v. 13, p. 55-62, 1981.

CRISFIELD, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures VI*. John Wiley & Sons, 1991.

CRISFIELD, M. A., *Re-visiting the contact patch test*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 48, p. 435–449, 2000.

CZEKANSKI, A., MEGUID, S. A., *On the use of variational inequalities to model impact problems of elasto-plastic media*. International Journal of Impact Engineering, v. 32, p. 1485–1511, 2006.

CZEKANSKI, A., MEGUID, S. A., EL-ABBASI, N., REFAAT, M.H., *On the elastodynamic solution of frictional contact problems using variational inequalities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 611–627, 2001.

FARAHANI, K., MOFID, M., VAFAI, A., *A solution method for general contact-impact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 187, p. 69–77, 2000.

FARAHANI, K., MOFID, M., VAFAI, A., *United elements method for general contact-impact problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 191, p. 843-860, 2001.

FRISCH, K. R., *The logarithmic potential method of convex programming*. Technical Report, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.

FUJII, F., CHOONG, K. K., GONG, S. X., *Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames*. *Computer & Structures*, v. 44, p. 133-136, 1992.

GABRIEL, D., PLEŠEK, J., ULBIN, M., *Symmetry preserving algorithm for large displacement frictionless contact by the pre-discretization penalty method*. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 61, p. 2615–2638, 2004.

GADALA, M. S., DOKAINISH, M. A., ORAVAS, G. A., *Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems*. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 20, p. 887–914, 1984.

GHATTASS, M., ABEL, J. L., *Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns if natural concepts*. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 24, p. 2119–2141, 1987.

GRECO, M., *Análises de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese de doutorado, EESC-USP, 2004.

GRECO M., CODA H.B., *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis*. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, p. 1141–1174, 2006.

GUZELBEY, I. H., ERKLIG, A., KANBER, B., *The efficiency of direct integration methods in elastic contact-impact problems*. *Acta. Mech. Sinica*, v. 21, p. 395–401, 2005.

HALLQUIST, J. O., GOUDREAU, G. L., BENSON, D. J., *Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations*. *Comp. Meth. appl. Mech. Engng*, v. 51, p. 107-137, 1985.

HEINSTEIN, M. W., MELLO, F. J., ATTAWAY, S. W., LAURSEN, T. A., *Contact-impact modeling in explicit transient dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 187, p. 621–640, 2000.

HESTENES, M. R., *Multiplier and gradient methods*. Journal of Optimization Theory and Applications, v. 4, p. 303-320, 1969.

HU, N., *A solution method for dynamic contact problems*. Comput. Struct., v. 63 (6), p. 1053–1063, 1997.

HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L., CUMIER, A., KANOKNUKULCHAI, W., *A finite element method for a class of contact-impact problems*. Comp. Meth. appl. Mech. Engng., v. 8, p. 249-276, 1976.

HULBERT, G. M., *Time finite element methods for structural dynamics*. International journal for numerical methods in engineering, v. 33, p. 307-31, 1992.

IZZUDDIN, B. A., ELNASHAI, A. S., *Eulerian formulation, for large-displacement analysis of space frames*. Journal of engineering mechanics-ASCE, v. 119, p. 549-569, 1993.

KARAOGLAN, L., NOOR, A. K., *Space-time finite element for the sensitivity analysis of contact/impact response of axisymmetric composite structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 144, p. 371-389, 1997.

KARMARKAR, N., *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. Combinatorics, v. 4, p. 373-395, 1984.

KRYSL, P., BELYTSCHKO, T., *Object-oriented parallelization of explicit structural dynamics with PVM*. Computers & Structures, v. 66, p. 259-273, 1998.

LANDENBERGER, A., EL-ZAFRANY, A., *Boundary element analysis of elastic contact problems using gap finite elements*. Comput. Struct., v. 71, p. 651–661, 1999.



MACIEL, D. N., CODA, H. B., *Positional description for nonlinear 2-D static and dynamic frame analysis by eith Reissner Kinematics*. Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 1<sup>a</sup> ed., p. 352-356, 2005.

MATTIASSON, K., *Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals*. International journal for numerical methods in engineering, v. 17, p. 145-153, 1981.

MEEK, J.L., TAN, H.S., *Geometrically nonlinear-analysis of space frames by an incremental iterative technique*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., v. 47, p. 261–282, 1984.

MIYAZAKI, Y., PARK, K. C., *A formulation of conserving impact system based on localized Lagrange multipliers*. International journal for numerical methods in engineering, v. 68, p. 98-124, 2006.

MONDKAR, D.P.; POWELL, G.H. *Finite element 163 analysis of non-linear static and dynamic response*. International journal for numerical methods in engineering, v. 11, p. 499-520, 1977.

NILLSON, L., ZHONG, Z.H., OLDENBERG, M., *Analysis of shell structures subjected to contact-impact*. In: A.K. Noor, T. Belytschko and J. Simo, *Analytical and Computational Methods for Shells*, ASME, New York, 1989.

NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J., *Numerical optimization*. Springer series in operations research, library of Congress Cataloging-in-Publication Data, New York, NY, 1999.

ODEN, J. T., MARTINS, J. A. C., *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*. Comput. Meth. appl. Mech. Engng., v. 52, p. 527-634, 1985.

ODEN, J. T., PIRES, E. B., *Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity*. Journal of applied mechanics, ASME, v. 50, p. 67-76, 1983.

OGDEN, R.W., *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood, Series: Mathematics and its applications, 1984.

ORAN, C., KASSIMALI, A., *Large deformations of framed structures under static and dynamic loads*. Comput. & Struct., v. 6, p. 539–547, 1976.

PAPADOPOULOS, P., TAYLOR, R. L., *A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems*. Computers and Structures, v. 46, p. 1107–1118, 1993.

PETERSON, A., PETERSSON, H., *On finite-element analysis of geometrically nonlinear problems*. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 51, p. 277-286, 1985.

POLYAK, E., *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Applied Mathematical Sciences, Springer, n° 124, 1997.

POWELL, M. J. D., *A method for nonlinear constraints in minimization problems*, In: Optimization. R. Fletcher, ed., Academic Press, New York, NY, p. 283-298, 1969.

REISSNER, E., *On-dimensional large displacement finite-strain beam theory*. Studies in applied mathematics, v. 52, p. 87-95, 1973.

RIKS, E., *The application of Newton's methods to the problem of elastic stability*. Journal of applied mechanics, v. 139, p. 1060-1066, 1972.

RIKS, E., *Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International journal of solids and structures, v. 15, p. 529-551, 1979.

SCHULZ, M., FILIPPOU, F. P., *Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation*. International journal for numerical methods in engineering, v. 50, p. 761-785, 1990.

SIMO, J. C., HJELMSTAD, K. D., TAYLOR, R. L., *Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear*. Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engr., v. 42, p. 301-330, 1984.

SIMO, J. C., LAURSEN, T. A., *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*. Comput. Struct., v. 42, p. 97–116, 1992.

SIMO, J. C., WRIGGERS, P., SCHWEIZERHOF, K. H., *Finite deformation postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints*. International journal for numerical methods in engineering, v. 23 (5), p. 779-800, 1986.

SLONE, A.K., CROFT, T.N., WILLIAMS, A.J., CROSS, M., *An alternative mixed Eulerian Lagrangian approach to high speed collision between solid structures on parallel clusters*. Advances in Engineering Software, v. 38, p. 244–255, 2007.

SOLBERG, J. M., PAPADOPOULOS, P., *A finite element method for contact/impact*. Finite elements in analysis and design, v. 30, p. 297-311, 1998.

SOUZA NETO, E. A., FENG, Y. T., *On the determination on of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snaps-backs'*. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 179, p. 81-89, 1999.

STUPKIEWICZ, S., *Extension of the node-to-segment contact element for surface-expansion-dependent contact laws*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 739–759, 2001.

SURANA, K. S., *Geometrically non-linear formulation for 2 dimensional curved beam elements*. Computer & Structures, v. 17, p. 105-114, 1983.

TAYLOR, R. L., PAPADOPOULOS, P., *On a finite element method for dynamic contact/impact problems*. Int. J. Numer. Meth. Engng, v. 36, p. 2123-2140, 1993.

WANG, F.J., CHENG, J.G., YAO, Z.H., *FFS contact searching algorithm for dynamic finite-element analysis*. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 52 (7), p. 655–672, 2001.

WONG, M. B., TINLOI, F., *Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures*. Computers & structures, v. 34, p. 633-640, 1990.

WRIGGERS, P., KRSTULOVIC-OPARA, L., KORELC, J., *Smooth C1-interpolations for two-dimensional frictional contact problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 51, p. 1469–1495, 2001.

WRIGGERS, P., SIMO, J.C., *A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points*. International journal for numerical methods in engineering, v. 30, p. 155-176, 1990.

WRIGGERS, P., VU, V. T., STEIN, E., *Finite-element formulation of large deformation impact–contact problems with friction*. Comput. Struct., v. 37, p. 319–331, 1990.

YANG, Y. B., McGUIRE, W., *A work control method for geometrically nonlinear analysis*. In NUMETA 85 – 1985 International conference on numerical methods in engineering: Theory and applications. Edited by J. Middleton & G. N. Pande, University College Swansea, Wales, UK, p. 913-921, 1985.

YANG, Y. B., SHIEF, M. S., *Solution Method for nonlinear problems with multiple critical points*. AIAA Journal, v. 28, p. 2110-2116, 1990.

ZHONG, Z.H., *A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems*. Dissertation n°. 178, Linköping Institute of Technology, 1988.

ZHONG, Z.H., *Finite Element Procedures for Contact–impact Problems*. Oxford University Press, Oxford, 1993.

ZHONG, Z. H., NILLSON, L., *A unified algorithm based on the territory concept*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., v. 130, p. 1–16, 1996.